

Estados Pré-Correlacionados  
e Análise de  
Colapsos e Ressurgimentos  
no Modelo de Jaynes-Cummings

*Daniel Jonathan*

*Este exemplar corresponde à redação final da tese de mestrado defendida pelo aluno Daniel Jonathan e aprovada pela comissão julgadora.*

09/01/1998

*Kyoko Furuya*



INSTITUTO DE FISICA  
GLEB WATAGHIN

## PARECER DE APROVAÇÃO

### DEFESA DE TESE DE MESTRADO DE

**DANIEL JONATHAN**

DATA : 29 / 08 / 97

BANCA EXAMINADORA:

- Profa. Dra. Kyoko Furuya (Orientadora do Candidato)

- Prof. Dr. Sérgio Mendes Dutra

- Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco

Secretaria de Pós-Graduação  
C.P. 6165  
13083-970 - Campinas-SP

Fones: (019) 788-2305 e 239-2424  
Fax: (019) 239-3127

# Estados Pré-Correlacionados e Análise de Colapsos e Ressurgimentos no Modelo de Jaynes-Cummings

por

Daniel Jonathan

Tese submetida ao Instituto de Física Gleb Wataghin

para a obtenção do título de

Mestre em Física

pela

Universidade Estadual de Campinas

Agosto de 1997

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dra. Kyoko Furuya

## Banca Examinadora

Prof. Dr. Sérgio M. Dutra

*IFGW-UNICAMP*

Prof. Dr. Antônio Vidiella-Barranco

*Co-orientador; IFGW-UNICAMP*

Prof<sup>a</sup>. Dra. Kyoko Furuya

*Orientadora, IFGW-UNICAMP*

Prof<sup>a</sup>. Dra. Maria Carolina Nemes (*Suplente*)

*Departamento de Física, Instituto de Ciências Exatas-UFMG*

Prof. Dr. Amir O. Caldeira (*Suplente*)

*IFGW-UNICAMP*

A meus pais, Eva e Miguel, pelo apoio e carinho  
e a meu avô, Manfredo, pela sabedoria.

*“- Não compreendo - ele diz freqüentemente - Provavelmente, eu sempre interrompo minha reflexão cedo demais, e então esses pensamentos permanecem em mim formados apenas pela metade e se mostrando só até a cintura....”*

*M. Pávitch, O Dicionário Kazar*

# Índice

<b>Agradecimentos</b>	<b>x</b>
<b>Sumário</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xii</b>
<b>Introdução</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Sistemas Quânticos Correlacionados</b>	<b>1</b>
1.1 Sistemas e Subsistemas . . . . .	1
1.1.1 Emaranhamento de Subsistemas . . . . .	2
1.1.2 O Formalismo de Operadores Densidade . . . . .	4
1.1.3 Traços Parciais e Operadores Densidade Reduzidos . . . . .	7
1.1.4 Estados Relativos e a Decomposição de Schmidt . . . . .	10
1.2 Correlação e Entropia . . . . .	12
1.2.1 Informação e Entropia . . . . .	13
1.2.2 Correlações entre Dois Subsistemas . . . . .	15
<b>2 Átomos e Cavidades: o Modelo de Jaynes-Cummings</b>	<b>20</b>
2.1 O Hamiltoniano de Jaynes-Cummings . . . . .	21
2.1.1 O Campo Eletromagnético Quantizado no Vácuo . . . . .	21
2.1.2 A Interação entre o Campo Eletromagnético e um Átomo Neutro na Aproximação de Dipolo . . . . .	23
2.1.3 Interpretação e a Aproximação de ‘Onda Girante’ . . . . .	26

2.2	Solução do MJC na Aproximação de Onda Girante . . . . .	28
2.2.1	Limite Ressonante . . . . .	30
2.2.2	Limite Dispersivo . . . . .	34
2.3	Condições Iniciais e Evolução Temporal . . . . .	38
2.3.1	Observáveis atômicos . . . . .	38
2.3.2	Colapsos e Ressurgimentos na Evolução Ressonante da Inversão Atômica . . . . .	39
2.3.3	Defasamento Dispersivo de Estados Coerentes . . . . .	48
2.4	O Aparato Experimental . . . . .	49
2.4.1	Átomos de Rydberg . . . . .	50
2.4.2	Cavidades Ressonantes Supercondutoras . . . . .	51
2.4.3	Zonas de Ramsey e Defasadores Atômicos . . . . .	53
2.4.4	Detectores por Ionização Seletiva . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Preparação de Estados Pré-Correlacionados do Sistema Átomo-Campo</b>	<b>56</b>
3.1	Interação e Correlação . . . . .	57
3.1.1	Interação Sequencial e Correlações Não-Locais . . . . .	58
3.1.2	Colapsos Indiretos e Cruzamentos de Trajetórias . . . . .	63
3.2	Métodos de Preparação de Estados Pré-Correlacionados do sistema Átomo-Campo	67
3.2.1	Método I . . . . .	68
3.2.2	Método II (Revezamento Unitário) . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Uma Classe de Estados Correlacionados no MJC</b>	<b>80</b>
4.1	Densidade de Estados Fatoráveis no Espaço de Hilbert . . . . .	80
4.2	Limites para a entropia no MJC . . . . .	83
4.2.1	Coordenadas 'Vestidas' para o modelo de Jaynes-Cummings . . . . .	88
4.2.2	Operador Densidade Reduzido Atômico . . . . .	92
4.2.3	Limites para a entropia de estados despolarizados . . . . .	94
4.2.4	Evolução da inversão atômica em uma classe de estados correlacionados do MJC . . . . .	96
	<b>Conclusões</b>	<b>111</b>

<b>A</b>	<b>Expressões aproximadas para os ressurgimentos na inversão de população</b>	<b>113</b>
A.1	Varição para estados apenas com componentes $w_n$ de $n$ <i>par</i> . . . . .	118
	<b>Bibliografia</b>	<b>126</b>

# Agradecimentos

Antes de mais nada, minha mais profunda gratidão a minha orientadora, prof<sup>a</sup>. Kyoko Furuya. Sem seu apoio, confiança e sobretudo **paciência** com este aluno indeciso, esta tese jamais teria chegado até o papel! Também sou grato aos demais membros da banca por seus comentários e sugestões. Em especial, agradeço ao Antônio por suportar com generosidade o fardo de co-orientador (todas aquelas infundáveis discussões...) e ao Sérgio pela permanente disposição para esclarecer até a mais obscura das minhas elocubrações. Agradeço ainda a atenção dos professores Luiz Davidovich (UFRJ) e Henrique Borges (UFMG).

À minha família, devo graças pelo permanente apoio, incentivo e carinho, que me sustentaram mesmo quando os intervalos entre reencontros foram se alongando cada vez mais...

Este trabalho também não seria possível sem a infra-estrutura proporcionada pelos funcionários do IFGW, em especial aqueles que me auxiliaram na CPG, biblioteca e centro de computação. A todos meus sinceros agradecimentos.

Dizem que as amizades dos anos de faculdade são para toda a vida... Em celebração então por todos os papos, viagens, altos, baixos, alegrias, planos e sonhos passados e futuros, um grande e grato abraço a: Adriana Triques, Alessandro Moura (Mané), Anthony (aka Geraldo) Stanton, Antonio Domingues, Armando Ferrer, Artur Vecchi, Braz (Aquele Que Não Tem Mais) Camargo, Claudio Cardoso, Claudio "Jota" e Hélio "Hell-man" Bustamante, Daniela Manoel, Dimitri "Homo Ludicus" Passos, Eduardo Peres, Guilherme Rios, Humbertinho de Paiva, Jaqueline Xavier, Marcela Redigolo, Marcelo Terra-Cunha, Marcelo França, Marcos Jardim (o Cavaleiro de Ipanema), Mônica Pickholz e Sieghard Weinketz.

Agradeço por fim ao CNPq pelo apoio financeiro durante a realização deste trabalho (sem o qual...).

# Sumário

Investigamos a possibilidade e algumas consequências dinâmicas de se preparar um sistema radiação-matéria (um átomo de Rydberg de dois níveis e um modo do campo eletromagnético quantizado) em um estado quântico correlacionado (emaranhado) *antes* de permitir que estes dois sistemas interajam diretamente através da interação de Jaynes-Cummings.

Esta 'pré-correlação' é realizada manipulando os subsistemas de interesse com o auxílio de outros átomos e campos, em montagens utilizando as técnicas experimentais atuais de eletrodinâmica quântica de cavidades.

Usando estes esquemas, somos capazes de gerar uma classe de estados emaranhados do sistema átomo-campo que jamais se descorrelacionam sob a ação da interação Jaynes-Cummings ressonante -e que portanto não podem ser gerados diretamente a partir das condições iniciais fatoráveis usuais. Introduzindo um conjunto apropriado de coordenadas com base nos autoestados 'vestidos', investigamos a evolução dinâmica da inversão de população atômica a partir destas condições iniciais correlacionadas. Verificamos a ocorrência de ressurgimentos e colapsos suprimidos ('trapping' de população), os quais são explicados pelo uso de uma aproximação de fase estacionária. A expressão aproximada permite compreender o 'trapping' como uma manifestação do 'caráter vestido' médio de cada componente do estado inicial. Esta interpretação explica um fenômeno semelhante que ocorre em uma classe bem-conhecida de estados iniciais *fatoráveis*.

# Abstract

We investigate the feasibility and dynamical consequences of preparing a radiation-matter system (a two-level Rydberg atom and a quantized electromagnetic mode) in a correlated (entangled) quantum state, *before* allowing these two subsystems to interact directly via the Jaynes-Cummings interaction.

This ‘pre-correlation’ is achieved by manipulating the subsystems of interest using other atoms and fields in experimental setups using present-day cavity QED techniques. Using these schemes, we are able to generate a class of entangled atom-field states which are never decorrelated by the resonant Jaynes-Cummings interaction, and thus cannot be directly generated from the usual factorized initial conditions.

Introducing a suitable set of coordinates based on the ‘dressed’ eigenstates, we investigate the dynamical evolution of the atomic population inversion starting from these entangled initial conditions. We find the occurrence of suppressed collapses and revivals, or ‘population trapping’, which are explained by the use of a stationary-phase approximation. The approximate expression allows us to understand the population trapping as a manifestation of the average ‘dressedness’ of each component of the initial state. This interpretation explains a similar trapping phenomenon previously known to happen in a well-known class of *uncorrelated* initial conditions.

# Introdução

De todas as características pouco intuitivas da mecânica quântica, talvez a mais estranha e esquisita seja o *emaranhamento* de sistemas quânticos. Este conceito, primeiro definido por Schrödinger em 1935 em um célebre artigo<sup>1</sup> [1], diz respeito ao seguinte problema: suponhamos que  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  sejam sistemas físicos, e que  $\Gamma$  seja o ‘sistema conjunto’ formado pela reunião de todos eles (por exemplo, podemos pensar em uma cadeia de spins, ou os átomos de um sólido). Então dado um estado  $|\Psi\rangle$  bem-determinado de  $\Gamma$ , o que se pode dizer sobre cada subsistema  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ ?

Em um mundo descrito pelas leis da física clássica, determinar o estado de  $\Gamma$  ou os de suas partes constituintes seriam tarefas equivalentes. Mas em um mundo quântico o todo, muitas vezes, pode ser de fato maior do que as partes. Como observou Schrödinger, para a maioria dos estados de  $\Gamma$ , *não faz sentido* atribuir estados específicos a seus subsistemas (a não ser na forma de um ensemble estatístico, ou “mistura” de diversos estados possíveis). Reciprocamente, fornecer os estados (mesmo que “mistos”) de  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  em geral *não é suficiente* para determinar o estado de  $\Gamma$ .

As consequências destes fatos desconcertantes têm sido debatidas desde então, e ainda não foram totalmente compreendidas. Um exemplo é a existência de correlações entre medidas realizadas em sistemas emaranhados mas separados espacialmente. Proposto num (igualmente célebre) artigo de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [2], este problema e suas implicações filosóficas têm sido objeto de discussão por gerações de físicos [3]. Para EPR, a previsão de tais correlações *não-locais* era inaceitável, portanto uma evidência da incompletude da mecânica quântica; para explicá-las, seus seguidores, como Bohm [4], propuseram a existência de graus

---

<sup>1</sup>‘Emaranhamento’ (em inglês *entanglement*) é uma tradução aproximada da expressão alemã (*Verschränkung*) usada por Schrödinger.

de liberdade não diretamente acessíveis à experiência comum, as chamadas 'variáveis ocultas'. Enquanto isso, outros pesquisadores, a começar por Bohr [5], preferiram aceitar o emaranhamento e a não-localidade como um fato, procurando adaptar a sua visão de mundo a essa nova realidade.

Devido à falta de evidência experimental capaz de decidir a questão, durante muitos anos o debate a respeito ficou restrito à esfera da filosofia e das "experiências pensadas" (*gedanken-experiments*). Então, em meados dos anos 60, J.S. Bell demonstrou que pelo menos algumas das posições envolvidas poderiam ser testadas experimentalmente observando-se a violação ou não de determinadas desigualdades [6]. Desde então, uma grande quantidade de trabalhos têm sido dedicados a desenvolver e refinar tais testes fundamentais da teoria (v. [7] e referências), e a realizá-los experimentalmente em diversos sistemas quânticos concretos (p. ex., [8, 9]). De um modo geral, os resultados desses testes têm sido compatíveis com as previsões da mecânica quântica, indicando que o fenômeno de emaranhamento quântico realmente existe, não sendo o produto de uma falha ou incompletude na teoria.

Em parte por este motivo, nos últimos anos o interesse no emaranhamento tem gradualmente mudado de foco. Ao invés de procurar testar a validade da teoria, atualmente se busca explorar mais profundamente as propriedades do emaranhamento em si (por exemplo, ainda não existe uma compreensão satisfatória do emaranhamento de estados envolvendo mais de dois subsistemas [10]). Simultaneamente, um grande interesse tem surgido nas suas possíveis aplicações, como criptografia quântica [11], "teleportação" [12] e computação quântica [13].

A razão principal para esta mudança de foco, porém, é o avanço das técnicas experimentais. A partir de meados dos anos 80 tornou-se possível pela primeira vez manipular o estado de sistemas quânticos *individuais* (e não mais apenas o de *ensembles* de muitos sistemas). Também passou-se a se poder controlar diretamente a interação entre dois ou mais de tais sistemas. Isto abriu assim a possibilidade de se criar um emaranhamento controlado entre eles, e explorar experimentalmente as suas consequências não-triviais.

Uma das áreas aonde estes avanços têm sido particularmente notáveis é a eletrodinâmica quântica de cavidades [14]. Neste caso, os "sistemas individuais" passíveis de manipulação são de dois tipos: de um lado, o campo eletromagnético quantizado confinado em uma cavidade ressonante; de outro, a excitação eletrônica de um ou mais átomos ou íons. Uma experiência

típica [15] consiste no seguinte cenário: um feixe de átomos preparados em um determinado estado de Rydberg  $|\Psi\rangle_A$  (estado com um elétron muito excitado [16]) é enviado através de uma cavidade de microondas também preparada em um estado inicial específico  $|\Psi\rangle_C$ . O estado  $|\Psi\rangle_{AC}$  do sistema átomo-campo é assim inicialmente não-emaranhado, sendo representado formalmente pelo produto tensorial:

$$|\Psi\rangle_{AC} = |\Psi\rangle_A \otimes |\Psi\rangle_C \quad (0.1)$$

Ao entrarem em contato, átomo e campo interagem. Isto implica que os estados fatoráveis como  $|\Psi\rangle_{AC}$  deixam em geral de ser estacionários, e o sistema composto evolui até um estado emaranhado. Em limites apropriados, a interação pode ser escrita na forma de um Hamiltoniano de Jaynes-Cummings [17, 18], onde o átomo se reduz a um sistema de dois níveis e o campo a um único modo ressonante (i.e., a um oscilador harmônico). Este modelo é solúvel analiticamente, de forma que é possível controlar com precisão a criação de emaranhamento entre os dois subsistemas [19, 20]. Finalmente, após o fim da interação o estado atômico é medido, inferindo-se daí a dinâmica do sistema.

Nesse exemplo, bem como na maior parte da literatura, o emaranhamento entre os dois subsistemas é gerado exclusivamente pela sua *interação direta*. Mas podemos levar esta idéia um passo adiante, e perguntar: e se o átomo já estiver emaranhado com o campo *antes* de atravessar a cavidade (portanto *sem* que os dois sistemas tenham interagido)? Será isto possível? E caso for, quais as consequências para a evolução do sistema durante a interação? Estas são as questões que abordaremos neste trabalho.

À primeira vista a idéia soa talvez estranha. Afinal, é evidente que não é possível se criar correlações entre subsistemas  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  de um sistema composto  $\Gamma$  sem a existência de alguma interação entre eles. Se o Hamiltoniano total de  $\Gamma$  for a soma de termos que agem apenas em  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  individualmente, e se todas as medidas feitas sobre  $\Gamma$  forem de observáveis também pertencentes a apenas um dos subsistemas, então um estado inicialmente escrito como um produto (0.1) manterá esta forma indefinidamente.

No entanto, não é impossível emaranhar dois subsistemas  $\Gamma_1, \Gamma_2$  isolados entre si: basta por exemplo que cada um deles interaja independentemente com um mesmo, terceiro subsistema

“auxiliar” ( $\Gamma_X$ ). Um exemplo disto ocorre no fenômeno de superradiância [21], em que dois ou mais átomos neutros interagem simultaneamente com um mesmo modo quantizado de radiação (mas não entre si). É o estabelecimento de correlações entre os átomos, mesmo na ausência de interação direta entre eles, o fator responsável pela amplificação da emissão de radiação que caracteriza este fenômeno.

Nos casos que nos interessarão,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  representarão um átomo e um modo do campo em uma cavidade, enquanto que  $\Gamma_X$  será uma combinação de outros átomos e cavidades. Em geral, o estado que resulta das interações entre estes subsistemas não será fatorável como em (0.1), de modo que nenhum deles terá um estado próprio bem-definido. Nosso problema inicial será então mostrar como manipular o estado global  $|\psi_{12X}\rangle$  (sem nunca interagir  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ) de tal forma que, ao final do processo,  $\Gamma_X$  esteja desemaranhado dos outros subsistemas:

$$|\psi_{12X}\rangle_{final} = |\psi_{12}\rangle \otimes |\psi_X\rangle \quad (0.2)$$

mas também de forma que  $|\psi_{12}\rangle$  não seja fatorável. Chamaremos os estados preparados desta forma de ‘*pré-correlacionados*’.

Veremos que tais estados são muitas vezes *distintos* daqueles que podem ser gerados por interação direta. Desta forma, representam condições iniciais genuinamente novas para a interação Jaynes-Cummings. A sua evolução oferece assim uma perspectiva nova sobre as propriedades desse modelo.

A tese está organizada da seguinte forma:

No primeiro capítulo, introduzimos ferramentas formais e conceituais necessárias para uma melhor compreensão do emaranhamento de dois sistemas quânticos, como operadores densidade reduzidos, decomposição de Schmidt, entropia de von Neumann e outros.

Em seguida, fazemos uma revisão do modelo de Jaynes-Cummings para a interação de um átomo de dois níveis com um modo do campo eletromagnético. Começamos por uma dedução do modelo a partir de ‘primeiros princípios’, passando em seguida a um estudo de suas soluções nos limites tanto de ressonância exata como de relativa dessintonia entre átomo e campo. Seguimos analisando em maior detalhe comportamentos dinâmicos típicos nestes limites, como ‘colapsos e ressurgimentos’ da inversão atômica (no caso ressonante), e ‘defasamento’ do campo

(no limite dispersivo). Concluimos com uma visão geral das ferramentas e aparelhos utilizados na investigação experimental do MJC em eletrodinâmica quântica de cavidades.

No terceiro capítulo, mostramos como utilizar este aparato para preparar estados pré-correlacionados de um sistema átomo-campo, permitindo em seguida a interação direta entre os dois subsistemas. Elaboramos dois esquemas distintos para isto, um dos quais depende da realização de medidas e outro completamente unitário.

Finalmente, investigamos a dinâmica da evolução de propriedades atômicas no MJC a partir de estados iniciais pré-correlacionados. Para isto, introduzimos um sistema de coordenadas baseado nos autoestados emaranhados do modelo ('coordenadas vestidas'). Com o seu auxílio, identificamos uma classe de estados pré-correlacionados (preparáveis pelos métodos do capítulo anterior) que nunca são desemaranhados pela interação Jaynes-Cummings ressonante. Assim, garantimos que sua evolução temporal é distinta daquelas a partir de condições iniciais fatoráveis; igualmente, não podem ser preparados simplesmente por interação direta a partir de tais condições. Analisamos o padrão de 'colapsos e ressurgimentos' na inversão atômica a partir destes estados iniciais, mostrando sua dependência com respeito às 'coordenadas vestidas'.

Concluimos com um resumo e breve discussão dos resultados, seguidos de um apêndice com detalhes dos métodos usados para a análise dos 'colapsos e ressurgimentos'.

# Capítulo 1

## Sistemas Quânticos Correlacionados

Neste primeiro capítulo, introduzimos conceitos físicos e formais úteis para a descrição de um sistema quântico  $\Gamma$  formado por dois ou mais *subsistemas*  $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$ . O objetivo primordial é fornecer meios de quantificar as correlações não-triviais entre estes subsistemas permitidas pela mecânica quântica. Em capítulos posteriores, esses meios serão aplicados ao sistema composto átomo-campo descrito pelo modelo de Jaynes-Cummings.

Iniciamos com uma discussão qualitativa da noção de emaranhamento, que tem um papel central em todo este trabalho. Para precisar melhor o conceito, recapitulamos os pontos principais do formalismo geral dos operadores densidade, e em seguida introduzimos outras ferramentas formais importantes, como os operadores densidade reduzidos e a decomposição de Schmidt. Essas ferramentas são então utilizadas para uma análise quantitativa das correlações entre sistemas quânticos, baseada em conceitos oriundos da teoria da informação, como entropia e entropia relativa<sup>1</sup>.

### 1.1 Sistemas e Subsistemas

A maioria dos sistemas físicos encontrados na Natureza é extremamente complexo, com uma quantidade enorme de graus de liberdade discretos e contínuos. De acordo com a mecânica quântica, os estados destes sistemas são descritos de maneira completa pelos elementos de um

---

<sup>1</sup>Apresentações mais extensas desses diversos tópicos podem ser encontradas nas referências [22, 23, 24, 25, 26, 27]

espaço de Hilbert  $\mathbf{H}$  formado por funções complexas de todos esses graus de liberdade.

Esta descrição formal trata todos os graus de liberdade de maneira equivalente. Na prática, porém, é quase sempre mais conveniente agrupá-los em subconjuntos, cada um associado a um *subsistema* (formalmente, escrevemos  $\mathbf{H}$  como o produto tensorial  $\mathbf{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{H}_n$  de espaços de Hilbert, e associamos a estes os subsistemas  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  [28]). Um exemplo simples, porém típico, é fornecido pelo átomo de hidrogênio: o seu espaço de Hilbert completo é constituído pelo produto de um espaço para a variável de posição relativa das cargas, um para a de spin eletrônico e outro para a de spin nuclear<sup>2</sup>.

A justificativa para essa divisão é apenas a sua *conveniência*, empírica ou teórica: em muitos casos, é experimentalmente possível manipular alguns desses graus de liberdade sem afetar os outros, ou então isolar alguns deles e tratá-los como sistemas físicos em si mesmos (por exemplo, ionizando o elétron, podemos considerar somente as variáveis eletrônicas). De fato, é esta a razão por que dizemos que o átomo de hidrogênio 'é constituído' de um próton mais um elétron. Em outros casos ainda, a divisão é uma maneira de visualizar melhor a física do problema (por exemplo, os modos de fonons de uma rede cristalina são mais úteis do que as coordenadas dos sítios).

É claro que a mesma ambigüidade quanto à escolha dos subsistemas também ocorre na mecânica *clássica*. É bem sabido que qualquer transformação canônica das variáveis deixa invariante as equações de Hamilton; assim, um mesmo sistema clássico pode ser descrito por várias combinações distintas de parâmetros, e o que é visto como um 'subsistema' em um conjunto de coordenadas pode não ter este caráter usando outro. Um exemplo familiar são as coordenadas normais de um sistema de osciladores, que são definidas como combinações das coordenadas de vários osciladores diferentes.

### 1.1.1 Emaranhamento de Subsistemas

Existe entretanto uma diferença crucial entre as descrições clássica e quântica. No primeiro caso, seja qual for o conjunto de coordenadas usado, o sistema é completamente descrito atribuindo-se um valor para cada uma delas. Os valores de qualquer outro conjunto ficam então simultaneamente determinados, bastando se aplicar a transformação canônica apropriada.

---

<sup>2</sup>Pelo menos para os fins de física atômica.

No caso quântico, as coisas não são tão simples. Para ver por que, suponhamos que  $\Gamma$  seja um sistema composto de dois subsistemas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  (por exemplo um átomo e um modo do campo eletromagnético). Então, se  $|u\rangle_1$  e  $|v\rangle_2$  são estados de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , o produto

$$|\psi\rangle_{12} = |u\rangle_1 \otimes |v\rangle_2 \quad (1.1)$$

descreve um estado de  $\Gamma$  no qual ambos os subsistemas têm também um estado bem-definido (é o análogo quântico da situação clássica descrita acima). Assim, dados observáveis  $\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{A}_1 \otimes \mathbb{I}_2$  e  $\mathbf{B}_2 \equiv \mathbb{I}_1 \otimes \mathbf{B}_2$  pertencentes respectivamente a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , os seus valores esperados satisfazem sempre

$$\langle \mathbf{A}_1 \otimes \mathbb{I}_2 \rangle \langle \mathbb{I}_1 \otimes \mathbf{B}_2 \rangle = \langle \mathbf{A}_1 \rangle \langle \mathbf{B}_2 \rangle \quad (1.2)$$

O significado físico desta igualdade surge se lembrarmos que a probabilidade de obtenção de um resultado específico  $\lambda_i$  para a medida de um observável  $\mathbf{O}$  é dada por

$$p(\lambda_i) = \langle \Pi_i(\mathbf{O}) \rangle \quad (1.3)$$

onde  $\Pi_i(\mathbf{O})$  é o projetor sobre o autoespaço de  $\mathbf{O}$  associado ao autovalor  $\lambda_i$  [28]. A eq. (1.2) implica então:

$$p(a_i) p(b_j) = p(a_i, b_j). \quad (1.4)$$

Assim, se  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  forem medidos simultaneamente, o valor encontrado para  $\mathbf{A}_1$  é *estatisticamente independente* do que é medido para  $\mathbf{B}_2$ . Outro modo de descrever isto é dizer que ‘não há correlações’ entre os dois subsistemas. Fisicamente, este tipo de estado fatorável representa bem então uma situação em que os subsistemas tenham sido *preparados de forma independente*.

De um modo geral, porém, os estados de  $\Gamma$  não têm a forma simples (1.1): devido ao princípio de superposição, se  $\{|u_i\rangle_1\}$  e  $\{|v_j\rangle_2\}$  são bases ortonormais para  $\mathbb{H}_1$  e  $\mathbb{H}_2$ , então um estado arbitrário em  $\mathbb{H}$  pode ser expandido em termos da base produto  $\{|u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2\}$ :

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_{ij} c_{ij} |u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2 \quad (1.5)$$

Nestes casos, não é difícil ver que em geral

$$\langle A_1 \otimes I_2 \rangle \langle I_1 \otimes B_2 \rangle \neq \langle A_1 \otimes B_2 \rangle \quad (1.6)$$

e portanto

$$p(a_i) p(b_j) \neq p(a_i, b_j). \quad (1.7)$$

Vemos então que as propriedades de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  deixam de ser independentes: não é mais possível atribuir um valor exato para o estado individual de cada subsistema -mesmo conhecendo-se o estado global com precisão arbitrariamente grande. Torna-se incorreto assim imaginar que esse estado global pode ser determinado atribuindo a cada subsistema propriedades individuais e independentes; estas não dão conta das *correlações* estatísticas implicadas pela eq.(1.7). Em outras palavras, os subsistemas *deixam de ter uma identidade própria bem-definida*.

Este fenômeno, o *emaranhamento*, é assim de caráter puramente quântico: nada semelhante pode existir na física clássica, na qual se um sistema tem um estado bem-determinado, todas as grandezas - inclusive aquelas pertencentes a subsistemas de sistemas compostos - têm valores bem-definidos em todos os instantes. Para compreendê-lo melhor, necessitaremos de ferramentas formais e conceituais que permitam precisar melhor o seu sentido; este é o objetivo do restante deste capítulo.

### 1.1.2 O Formalismo de Operadores Densidade

Antes de mais nada, vamos recapitular os principais pontos do chamado "formalismo de operadores densidade". Segundo a interpretação mais comumente aceita da mecânica quântica [28], mesmo a descrição mais completa possível de um sistema, dada por um 'vetor de estado' em um espaço de Hilbert complexo  $\mathbb{H}$ , não permite em geral prever com exatidão o resultado das medidas que podem ser realizadas sobre ele. Apenas os resultados possíveis destas medidas, e as probabilidades de obtenção de cada um deles, são bem-determinados. É comum referir-se a esta propriedade fundamental como o caráter "essencialmente probabilístico" da mecânica quântica.

Entretanto, mesmo esta descrição probabilística pode ser insuficiente em casos onde o próprio conhecimento disponível sobre o estado do sistema é incompleto. Podem ocorrer situ-

ações em que não sabemos determinar o estado específico em que o sistema se encontra, mas apenas as probabilidades  $p_1 \dots p_n$  de ele se encontrar em qualquer um de um conjunto de estados ortonormais possíveis  $|\psi_1\rangle \dots |\psi_n\rangle$ . Um exemplo típico se dá quando tudo o que sabemos sobre um sistema é que ele está em equilíbrio térmico a uma determinada temperatura  $T$ ; neste caso, podemos dizer apenas que o sistema deve estar em um dos seus autoestados de energia  $|E_j\rangle$ , com probabilidade dada pela distribuição de Boltzmann

$$P(E_j) \propto \exp\left(-\frac{E_j}{kT}\right) \quad (1.8)$$

Em casos como este podemos então dizer que além da ‘incerteza quântica’ intrínseca temos ainda uma ‘ignorância clássica’ sobre o estado, análoga àquela existente na mecânica estatística clássica..

Precisamos levar ambas em conta na hora de fazer previsões sobre o resultado de medidas sobre o sistema. Para isso, é necessário uma contrapartida quântica para a densidade de probabilidade usada nos ensembles estatísticos clássicos: o *operador densidade* [23, 24, 29, 25]. A forma deste operador surge naturalmente se exigimos que, dado qualquer observável  $\mathbf{O}$ , o seu valor esperado deve ser a média dos valores esperados em cada um dos estados ortonormais possíveis  $|\psi_j\rangle$ , ponderada pelas probabilidades  $p_j$  de cada um (por hipótese,  $\sum_j p_j = 1$ ):

$$\langle \mathbf{O} \rangle = \sum_j p_j \langle \psi_j | \mathbf{O} | \psi_j \rangle \quad (1.9)$$

Levando em conta a ortonormalidade dos estados possíveis, esta relação pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{O} \rangle &= \sum_j p_j \langle \psi_j | \left( \sum_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \right) \mathbf{O} | \psi_j \rangle = \sum_{jk} p_j \langle \psi_k | \mathbf{O} | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \psi_k \rangle = \text{Tr} \left( \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \mathbf{O} \right) \\ &= \text{Tr}(\rho \mathbf{O}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \quad (1.11)$$

é então chamado de ‘o operador densidade’ para o sistema.

Como  $\mathbf{O}$  é arbitrário, qualquer informação disponível sobre o sistema pode ser obtida a partir de  $\rho$  usando a eq. (1.10). (Em particular, se  $\{\lambda_i\}$  forem os autovalores de  $\mathbf{O}$ , a probabilidade de se medir o valor  $\lambda_i$  é

$$P(\lambda_i) = \langle \Pi_i \rangle = \text{Tr}(\rho \Pi_i) \quad (1.12)$$

onde  $\Pi_i$  é o projetor sobre o autoespaço correspondente a  $\lambda_i$ . Por este motivo, é usual referir-se a  $\rho$  como o ‘estado do sistema’.

Não é difícil demonstrar as seguintes propriedades de  $\rho$  :

$$\rho \text{ é Hermitiano } (\rho = \rho^\dagger) \quad (1.13a)$$

$$\text{Tr}(\rho) = 1 \quad (1.13b)$$

$$\rho \text{ é positivo-definido, i.e., dado qualquer estado } |\psi\rangle, \langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \quad (1.13c)$$

Reciprocamente, qualquer operador em  $\mathbb{H}$  com essas três propriedades pode ser expandido na forma (1.11), com autovetores ortonormais  $\{|\psi_j\rangle\}$  e com autovalores  $p_j$  satisfazendo

$$p_j \geq 0 \quad (1.14a)$$

$$\sum_j p_j = 1 \quad (1.14b)$$

Portanto, um operador assim pode ser visto como um operador densidade. O seu sentido físico é dado de maneira precisa pelos valores esperados (1.10).

É evidente que este formalismo inclui como um caso particular a situação em que o estado do sistema é de fato completamente bem-determinado. Neste caso, a expansão (1.11) se reduz a um único termo, e  $\rho$  é representado simplesmente pelo operador de projeção

$$\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|, \quad (1.15)$$

equivalente ao *ket*  $|\Psi\rangle$ . Dizemos então que o estado do sistema é ‘puro’. Caso contrário (se existir mais de um estado possível), dizemos que ele é ‘misto’, ou que o operador densidade

representa uma 'mistura estatística'. Pode-se mostrar que

$$\rho \text{ é puro} \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \Leftrightarrow \text{Tr}(\rho^2) = 1. \quad (1.16)$$

Finalmente, escrevemos a equação que descreve a dinâmica (evolução temporal) do operador densidade de um sistema quântico Hamiltoniano [23]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = \mathbf{H}(t) \rho(t) - \rho(t) \mathbf{H}(t) = [\mathbf{H}, \rho](t) \quad (1.17)$$

Esta equação, conhecida como a *equação de von Neumann*, pode ser obtida diretamente a partir da equação de Schrödinger (válida para o caso especial de estados puros), apenas assumindo a linearidade (i.e., que a evolução de uma mistura de dois estados seja igual à (mesma) mistura das suas evoluções). Essencialmente, é a versão quântica da equação de Liouville válida para a densidade de probabilidade dos ensembles estatísticos clássicos [30].

A sua solução pode ser escrita formalmente em termos do operador de evolução unitário  $\mathbf{U}(t)$ :

$$\rho(t) = \mathbf{U}(t) \rho(0) \mathbf{U}^\dagger(t) \quad (1.18)$$

onde  $\mathbf{U}(t)$  satisfaz

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(t) = \mathbf{H}(t) \mathbf{U}(t). \quad (1.19)$$

### 1.1.3 Traços Parciais e Operadores Densidade Reduzidos

Frisamos acima que dois sistemas quânticos emaranhados deixam na verdade de poder ser considerados individualmente, no sentido de que suas propriedades conjuntas não podem ser atribuídas apenas às propriedades individuais de um e de outro. No entanto, é geralmente o caso de que, experimentalmente, somente observáveis referentes a estas propriedades individuais são acessíveis à medida direta. Isto ocorre particularmente quando os subsistemas emaranhados formam um par do 'tipo EPR', espacialmente separado. Nesse sentido, continua sendo útil ter um meio de se referir ao estado de cada subsistema individualmente. Isto pode ser realizado através dos chamados 'operadores densidade reduzidos', que vemos a seguir.

Antes de definirmos estes operadores, porém, precisamos introduzir o conceito de 'traço

parcial', uma operação que generaliza o traço usual de um operador linear para o caso de operadores que atuam em um espaço produto da forma  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ :

**Definição (Traço Parcial):** Seja  $\mathbf{A}$  um operador linear qualquer em  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ , e  $\{|u_i\rangle_1\}$ ,  $\{|v_k\rangle_2\}$  bases ortonormais para  $\mathbb{H}_1$  e  $\mathbb{H}_2$ . Então, o *traço parcial sobre  $\mathbb{H}_2$  de  $\mathbf{A}$*  é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_2 \mathbf{A} &= \sum_{ij} (\text{Tr}_2 \mathbf{A})_{ij} |u_i\rangle_1 \langle u_j|_1 \\ \text{onde } (\text{Tr}_2 \mathbf{A})_{ij} &\equiv \sum_k (\langle u_i|_1 \otimes \langle v_k|_2) \mathbf{A} (|u_j\rangle_1 \otimes |v_k\rangle_2) \end{aligned} \quad (1.20)$$

(o traço parcial sobre  $\mathbb{H}_1$  é definido analogamente<sup>3</sup>).

Portanto, o traço parcial de um operador em  $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$  é um *novo operador*, agindo em  $\mathbb{H}_1$  ou  $\mathbb{H}_2$  conforme o caso. Este operador possui diversas propriedades interessantes, em particular [28]:

- Se  $\mathbf{A}$  é um operador linear qualquer em  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ , e  $\mathbf{O}_1$  um operador linear que *só age em  $\mathbb{H}_1$* , então<sup>4</sup>

$$\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{O}_1) = \text{Tr}_1((\text{Tr}_2 \mathbf{A})\mathbf{O}_1) \quad (1.21)$$

Este resultado assume um sentido físico importante quando  $\mathbf{A}$  é o próprio operador densidade do sistema composto  $\Gamma$ . Como o valor esperado de um observável é dado por (1.10), então neste caso ele nos diz que *todos os valores esperados de observáveis referentes apenas a um dos subsistemas podem ser calculados a partir do traço parcial do operador densidade sobre o outro subsistema*. Em outras palavras, se só estamos interessados nas propriedades do subsistema  $\Gamma_1$ , então não precisamos conhecer o operador densidade inteiro, mas apenas o operador

<sup>3</sup>Pode-se mostrar facilmente que esta definição, assim como a do traço usual, é independente das bases escolhidas.

<sup>4</sup>Temos aqui alguns ligeiros abusos de linguagem: em primeiro lugar, operadores em  $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$  da forma  $\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{I}_2$  são identificados com os seus traços parciais  $\mathbf{O}_1$  (que agem em  $\mathbb{H}_1$ ). Em adição, quando aplicado a um operador de  $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ , o símbolo  $\text{Tr}_1$  significa "tomar o traço parcial com respeito a  $\mathbb{H}_1$ "; porém, o mesmo símbolo aplicado a um operador só de  $\mathbb{H}_1$  é interpretado como o traço usual (numérico) deste operador.

densidade reduzido de  $\Gamma_1$ , definido por

$$\rho_1 \equiv \text{Tr}_2 \rho \quad (1.22)$$

Como  $\rho_1$  e sua contrapartida  $\rho_2$  sintetizam todas as informações referentes apenas a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  (respectivamente), podemos interpretá-los efetivamente como os 'estados' destes subsistemas (os seus 'estados reduzidos', como se diz). De fato, não é difícil demonstrar que eles satisfazem a todas as propriedades (1.13a - c) necessárias a um operador densidade. É importante porém chamar a atenção para os seguintes pontos desta interpretação:

1. O conhecimento apenas dos estados reduzidos não permite reconstruir o estado original  $\rho$ : existem muitos operadores densidade que compartilham os mesmos dois operadores densidade reduzidos. (é claro que, dados  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , o mais simples deles é o estado fatorável  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ , mas existem outros que não têm esta forma simples).
2. Em geral, os operadores densidade reduzidos serão mistos, *mesmo quando o estado do sistema global  $\Gamma$  é puro*. Em outras palavras, embora possamos ter nominalmente um conhecimento completo de  $\Gamma$ , somos *obrigados* a admitir uma certa ignorância quanto à condição dos seus subsistemas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Este é o preço que pagamos por continuar tratando  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  como 'sistemas físicos' com identidade própria, quando na verdade esta identidade é borrada pelo emaranhamento.

Mesmo assim, pode-se perguntar: como pode surgir 'ignorância' em uma situação em que temos conhecimento completo? Na verdade, apesar de serem descritos matematicamente de forma idêntica, existem diferenças conceituais sutis entre os operadores densidade 'reduzidos' e aqueles que introduzimos na seção 1.1.2 para descrever uma incerteza estatística. Esta distinção traz problemas na hora de quantificar a correlação entre os subsistemas. Retornaremos a este problema na seção 1.2.2, após termos introduzido mais algumas ferramentas conceituais necessárias.

### 1.1.4 Estados Relativos e a Decomposição de Schmidt

Vimos acima que se  $\{|u_k\rangle_1\}$  e  $\{|v_j\rangle_2\}$  são bases ortonormais para os espaços de estados dos subsistemas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , então um estado puro arbitrário para o sistema composto pode ser expandido em termos da base produto  $\{|u_k\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2\}$ , na forma geral:

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_{kj} c_{kj} |u_k\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2. \quad (1.23)$$

Esta expansão pode sempre ser reescrita de forma a ressaltar os estados de base de um dos subsistemas (por exemplo  $\Gamma_1$ ):

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_k |u_k\rangle_1 \otimes \left( \sum_j c_{kj} |v_j\rangle_2 \right) = \sum_k \left( \sum_j |c_{kj}|^2 \right) |u_k\rangle_1 \otimes |r_k\rangle_2 \quad (1.24)$$

Nesta última expressão,

$$|r_k\rangle_2 \equiv \frac{\sum_j c_{kj} |v_j\rangle_2}{\sum_j |c_{kj}|^2} \quad (1.25)$$

é o chamado ‘estado relativo’ (normalizado) de  $|u_k\rangle_1$  [31]. O seu significado é imediato: se medirmos um observável  $O_1$  de  $\Gamma_1$  cujos autovetores (não degenerados) sejam os elementos da base  $\{|u_k\rangle_1\}$ , então para cada resultado encontrado o sistema  $\Gamma_2$  será projetado no estado relativo  $|r_k\rangle_2$  correspondente.

Evidentemente, para cada escolha de base em  $\Gamma_1$  a expansão (1.24) de  $|\Psi\rangle_{12}$  será distinta, e mudarão também os estados relativos correspondentes. De um modo geral, estes *não* serão ortogonais entre si, de forma que o conjunto  $\{|r_k\rangle_2\}$  não será o conjunto de autovetores de um operador Hermitiano de  $\mathbb{H}_2$ . Assim, não é possível em geral interpretar a projeção de  $\Gamma_2$  sobre  $|r_k\rangle_2$  devido à medida de  $O_1$  como significando a medida simultânea de algum observável  $O'_2$ .

Entretanto, existe um resultado matemático simples e elegante, provado originalmente por E. Schmidt em 1907 [32, 23, 27], segundo o qual, dado o estado puro composto  $|\Psi\rangle_{12}$ , é sempre possível encontrar uma base especial de  $\Gamma_1$  de forma que os seus estados relativos formem também uma base ortonormal de  $\Gamma_2$ :

**Teorema 1.1 (Decomposição de Schmidt)**<sup>5</sup>: Dado qualquer vetor  $|\Psi\rangle_{12}$  em um espaço

---

<sup>5</sup>Demonstrações em [27, 33].

produto tensorial  $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ , existem bases ortonormais  $\{|u_k\rangle_1\}$  em  $\mathbb{H}_1$  e  $\{|v_j\rangle_2\}$  em  $\mathbb{H}_2$  ('bases de Schmidt'), tais que  $|\Psi\rangle_{12}$  pode ser decomposto na forma

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_k \lambda_k |\tilde{u}_k\rangle_1 \otimes |\tilde{v}_k\rangle_2 \quad (1.26)$$

onde  $\sum_k |\lambda_k|^2 = 1$ ; o somatório se estende até a dimensão do menor dos subespaços  $\mathbb{H}_1$  e  $\mathbb{H}_2$  (caso haja um menor).

A decomposição de Schmidt permite visualizar com maior clareza a natureza do emaranhamento expresso em um estado (puro) de um sistema composto. Na expansão (1.26), cada estado  $|\tilde{v}_k\rangle_2$  de  $\Gamma_2$  é o estado relativo ao elemento  $|\tilde{u}_k\rangle_1$  da base de Schmidt de  $\Gamma_1$ , e vice-versa. Assim, se  $U_1$  e  $V_2$  forem observáveis de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  diagonais nas respectivas bases de Schmidt (e não degenerados), a medida do valor de um implica imediatamente no conhecimento do valor do outro. Estes pares de 'observáveis de Schmidt' caracterizam então da maneira mais eficiente possível o emaranhamento de  $|\Psi\rangle_{12}$  (podemos dizer que eles são *maximamente correlacionados* [22]).

A obtenção das bases de Schmidt para um dado estado pode ser vista algebricamente como a *diagonalização simultânea dos seus operadores densidade reduzidos*. De fato, notamos que cada uma das bases de Schmidt diagonaliza o operador densidade reduzido do subsistema correspondente:

$$\rho_1 = \sum_k |\lambda_k|^2 |\tilde{u}_k\rangle_1 \langle \tilde{u}_k|_1 \quad (1.27a)$$

$$\rho_2 = \sum_k |\lambda_k|^2 |\tilde{v}_k\rangle_2 \langle \tilde{v}_k|_2 \quad (1.27b)$$

Estas expressões permitem distinguir alguns fatos importantes, válidos para estados puros em geral: em primeiro lugar, *os espectros de ambos os operadores densidade reduzidos são idênticos*. Assim, qualquer função do estado que só dependa deste espectro, (como a *entropia*, que veremos na próxima seção) tem o mesmo valor em ambos os subsistemas. A partir deste fato, e lembrando ainda que a soma na decomposição se estende até a dimensão do menor dos subespaços, vemos também que *se dois sistemas de dimensões desiguais estão emaranhados, o número de estados*

do sistema maior efetivamente envolvidos não pode passar da dimensão do sistema menor. Assim, um sistema de muitos, ou mesmo infinitos, níveis interagindo com outro de dois níveis também ocupa, no máximo, dois estados ortonormais em qualquer instante.

Outro resultado, de certa forma recíproco a estes, é o seguinte: dado qualquer estado  $\rho_1$  do menor dos subsistemas (digamos,  $\Gamma_1$ ), sempre podemos encontrar um estado *puro*  $|\psi\rangle$  de  $\Gamma_2$  tal que  $\rho_1 = \text{Tr}_2(|\psi\rangle\langle\psi|)$ . Para isto, basta escrever  $\rho_1$  na forma diagonal (1.27a) (o que sempre pode ser feito), e então, escolhendo uma base ortonormal qualquer em  $\Gamma_2$ , escrever um estado na forma de Schmidt (1.26) <sup>6</sup>. Uma consequência útil deste fato é: dado um estado  $\rho$  arbitrário de *qualquer* espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$ , sempre podemos encontrar um outro espaço de Hilbert  $\mathbb{H}'$  e um estado puro  $|\psi\rangle$  em  $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}'$  tais que  $\rho = \text{Tr}_{\mathbb{H}'}(|\psi\rangle\langle\psi|)$ .

Finalmente, frisamos que uma decomposição como a de Schmidt não existe em geral para estados mistos. Isto pode ser compreendido facilmente considerando que os diversos autoestados de um operador densidade misto terão em geral cada um bases de Schmidt *diferentes*. Por este motivo, também não é possível estender a decomposição para o caso em que há três ou mais subsistemas  $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$ , mesmo se o estado global for puro. Podemos é claro encontrar uma decomposição reagrupando os subsistemas em dois conjuntos  $\tilde{\Gamma}_1$  e  $\tilde{\Gamma}_2$ , (por exemplo  $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1$  e  $\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \otimes \dots \otimes \Gamma_n$ ), e obtendo uma base de Schmidt em cada um desses dois. Porém, como vimos acima, os estados reduzidos de  $\tilde{\Gamma}_1$  e  $\tilde{\Gamma}_2$  serão em geral mistos, de modo que não podemos redividi-los em novos subconjuntos e continuar o processo.

## 1.2 Correlação e Entropia

Caracterizamos acima o emaranhamento de dois subsistemas como uma perda das suas identidades individuais em favor de suas propriedades conjuntas. Outra forma de dizer isto é que um estado global da forma (1.5) contém *mais informação* do que a que pode ser obtida apenas olhando (medindo) cada subsistema separadamente. A informação 'adicional' está contida nas propriedades conjuntas, ou *correlações*, dos subsistemas, as quais são assim tão fisicamente reais

---

<sup>6</sup>Reparamos que o mesmo procedimento não pode em geral ser feito com o subsistema maior, visto que o número de vetores de base necessários para escrever o estado composto na forma de Schmidt seria maior do que a dimensão do outro subsistema.

quanto as variáveis individuais familiares da física clássica<sup>7</sup>.

Nesta seção, procuramos quantificar de forma precisa essas idéias de informação e correlação contidas em um estado, fornecendo medidas diretas do emaranhamento de dois subsistemas.

### 1.2.1 Informação e Entropia

O conceito-chave da termodinâmica e física estatística [30] é a *entropia*: é ela que mede a 'quantidade de desordem' de um sistema, e é em termos do seu crescimento que se exprime a fundamental Segunda Lei. Aqui também faremos uso central de um conceito que chamaremos de 'entropia', definido de maneira essencialmente idêntica à desses casos familiares. Entretanto, o ponto de vista que utilizaremos estará mais próximo daquele proveniente da *Teoria da Informação* [34], na qual entropia significa não 'quantidade de desordem', mas 'quantidade de falta de informação'.

**Definição (Entropia de von Neumann):** Dado um operador densidade  $\rho$ , a sua *entropia de von Neumann* [23] (ou simplesmente *entropia*) é dada por

$$S(\rho) \equiv -\text{Tr } \rho \ln \rho \quad (1.28)$$

Esta quantidade mede a incerteza quanto ao *próprio estado do sistema*. Isto pode ser visto lembrando que todo operador densidade pode ser diagonalizado na forma (1.11), e portanto:

$$S(\rho) = -\sum_j p_j \ln p_j \quad (1.29)$$

É fácil ver que esta quantidade vale zero se e só se o estado for puro<sup>8</sup>; ainda, caso a dimensão do sistema seja finita ( $= N$ ),  $S(\rho)$  assume o seu valor máximo ( $= \ln N$ ) apenas na condição de máxima ignorância ( $\rho = \frac{1}{N}\mathbb{I}$ ). A entropia fornece portanto uma medida direta da *pureza* do estado

---

<sup>7</sup>Evidentemente, em física clássica também pode haver correlações estatísticas entre as propriedades de dois sistemas, mas apenas quando a descrição destes últimos é incompleta (dada por distribuições de probabilidade). Neste caso, as correlações refletem apenas a ignorância do observador, podendo variar de acordo com o conhecimento deste último. Neste sentido, elas não possuem existência objetiva.

<sup>8</sup>Consideramos aqui  $0 \cdot \ln 0 = 0$  (pode-se mostrar facilmente que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ ), de modo que  $S(\frac{1}{2})$  é sempre bem-definida.

$\rho^9$ . Vale ressaltar que ela *não* é um observável, mas uma *função do estado* (especificamente, uma função dos *autovalores* do estado).

Além dessas propriedades aparentes, a definição acima implica em diversas outras, sendo algumas peculiares e outras decididamente não-triviais<sup>10</sup>. Citamos abaixo duas que serão úteis neste trabalho:

- *Conservação Temporal*: Se a evolução do sistema for unitária (i.e., descrita pela eq. (1.18)), os autovalores do operador densidade não se alteram; assim, a entropia de von Neumann se mantém *constante*:

$$\begin{aligned} S(\rho(t)) &= -\text{Tr } U(t) \rho(0) U^\dagger(t) \ln U(t) \rho(0) U^\dagger(t) \\ &= -\text{Tr } U(t) \rho(0) U^\dagger(t) U(t) (\ln \rho(0)) U^\dagger(t) \\ &= -\text{Tr } \rho(0) \ln \rho(0) = S(\rho(0)) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Este resultado é talvez um pouco surpreendente (dado que em geral se espera que a entropia *auge*), mas é fácil de ser compreendido quando se vê que processos Hamiltonianos são sempre microscopicamente reversíveis. O mesmo não ocorre porém com a entropia de subsistemas: a sua evolução temporal é em geral não-Hamiltoniana, e sua entropia irá então poder variar com o tempo.

- *Conexidade* (vide [22, 26]<sup>11</sup>): Se o estado  $\rho$  for escrito como uma *soma convexa* de outros operadores densidade ( $\rho = \sum_i \lambda_i \rho_i$ , onde  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_i \lambda_i = 1$ ), então:

$$S(\rho) \geq \sum_i \lambda_i S(\rho_i) \quad (1.32)$$

---

<sup>9</sup>Existem outras medidas de pureza, como a quantidade

$$\xi = 1 - \text{Tr } \rho^2 \quad (1.30)$$

que também se anulam em estados puros e assumem o valor máximo na condição de máxima ignorância. A entropia é a única destas que possui ainda outras propriedades importantes, como *subaditividade* [26] (v. seção 1.2.2).

<sup>10</sup>Uma coleção exaustiva de propriedades desta e de outras 'entropias' é apresentada no artigo de revisão de Wehrl [26]

<sup>11</sup>Wehrl (e a maioria dos autores!) chama esta propriedade de *concauidade*. Aparentemente, há uma inversão nas definições usadas para funções côncavas e convexas.

O significado físico desta propriedade é claro [35]: construir um ensemble estatístico a partir da soma convexa de outros significa perder informação, pois dado um elemento do ensemble conjunto já não somos capazes de dizer de qual dos ensembles originais ele veio.

Também é conveniente introduzir o conceito de *entropia relativa* [36]:

**Definição (Entropia Relativa):** Se  $\rho$  e  $\sigma$  são dois operadores densidade quaisquer, então definimos que a entropia de  $\sigma$  relativa a  $\rho$  é:

$$S(\sigma|\rho) \equiv \text{Tr } \rho (\ln \rho - \ln \sigma) = -\text{Tr } \rho \ln \sigma - S(\rho) \quad (1.33)$$

Pode-se mostrar (v. apêndice A) que  $S(\sigma|\rho) \geq 0$ , com igualdade se e só se  $\rho = \sigma$ . Esta quantidade pode ser vista assim como uma espécie de 'distância' entre estes operadores<sup>12</sup>.

### 1.2.2 Correlações entre Dois Subsistemas

Armados com o conceito de entropia como medida de falta de informação, abordaremos agora a questão de como quantificar a correlação entre dois sistemas emaranhados. Para realizar isso, partimos da idéia intuitiva de correlação: se dois sistemas estão correlacionados, então é possível obter informação sobre um deles medindo observáveis do *outro*; ainda, esperamos que quanto maior for a correlação, maior deve ser a quantidade desta informação 'mútua' disponível. Por outro lado, precisamos também levar em consideração que nem toda a informação disponível em um estado global diz respeito às correlações entre os subsistemas: parte dela se refere apenas às propriedades individuais de cada um. O nosso problema consiste portanto no seguinte: dado um estado do sistema composto, como distinguir a 'informação mútua' nele contida daquela que só diz respeito a cada subsistema?

Como vimos na seção 1.1.1, esta informação mútua se manifesta experimentalmente nas correlações estatísticas entre os valores medidos de pares de observáveis (um de cada subsistema). Entretanto, assim como a incerteza a respeito do valor de um observável particular não reflete a impureza total de um estado (pois depende apenas de parte do operador densidade), as correlações entre um par específico de observáveis jamais são capazes de refletir *toda* a cor-

<sup>12</sup>Esta 'distância' não deve ser entendida no sentido geométrico, visto que ela não obedece a propriedades básicas, como por exemplo comutatividade: Em geral,  $S(\sigma|\rho) \neq S(\rho|\sigma)$ .

relação entre os dois subsistemas. Para isto, é necessário introduzir um índice de correlação independente de observáveis, de modo análogo à entropia de von Neumann.

Para ver como isto pode ser feito, vamos primeiro examinar as relações entre a entropia de um sistema composto e as entropias de seus subsistemas (ou 'entropias reduzidas'). No caso de haver apenas dois subsistemas, estas relações são sintetizadas pela chamada desigualdade de Araki-Lieb [37] (demonstração em [22, 26])

**Teorema 1.3 (desigualdade de Araki-Lieb [37]):** Se  $\rho$  é o operador densidade de um sistema composto de dois subsistemas, e  $\rho_1, \rho_2$  são os operadores reduzidos desses subsistemas, então:

$$|S(\rho_1) - S(\rho_2)| \leq S(\rho) \leq S(\rho_1) + S(\rho_2) \quad (1.34)$$

Este resultado merece ser examinado em algum detalhe: em primeiro lugar, é possível mostrar que, a igualdade no lado direito desta expressão ocorre se e só se  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ . A interpretação desta propriedade da entropia, conhecida como *aditividade* [26] é simples: em um estado fatorável não existem quaisquer correlações entre os subsistemas; assim, as incertezas sobre cada um dos seus estados (reduzidos) são independentes, e portanto a incerteza total deve ser a sua soma. Notamos que, em termodinâmica e física estatística de equilíbrio, esta propriedade 'extensiva' da entropia é em geral *assumida* como válida, baseado na idéia de que os sistemas em questão estão em equilíbrio térmico com uma energia de interação muito pequena.

Aqui, porém ela em geral *não* será válida, visto que os estados normalmente não serão fatoráveis. Ao invés disso, vale a desigualdade no lado direito de (1.34), conhecida como a propriedade de *subaditividade* da entropia. Podemos interpretá-la do seguinte modo: a incerteza (ou 'falta de informação') no estado total deve ser menor do que a soma das incertezas individuais de cada subsistema, visto que, além das informações referentes a estes subsistemas, o estado total contém também a informação 'mútua' referente às correlações entre eles.

Comparando as propriedades de aditividade e subaditividade, vemos que a quantidade de correlação entre os dois sistemas pode ser definida tomando-se a *diferença* entre a informação contida no estado composto  $\rho$  e aquela contida na sua 'parte fatorável'  $\rho_1 \otimes \rho_2$ :

**Definição (Índice de Correlação 'de von Neumann'):** Dado um sistema composto de

dois subsistemas, definimos o *Índice de Correlação* entre os subsistemas como

$$I_N \equiv S(\rho_1) + S(\rho_2) - S(\rho) \quad (1.35)$$

Naturalmente, esta definição se justifica devido às suas conseqüências serem intuitivamente satisfatórias. Para começar, a subaditividade implica que este índice é *sempre positivo*, e a aditividade que ele *se anula se e só se o estado for fatorável* (como seria desejável). Outro modo de ver isto é notando que [26]:

$$S(\rho_1) + S(\rho_2) - S(\rho) = S(\rho_1 \otimes \rho_2 | \rho) \geq 0 \quad (1.36)$$

O índice de correlação é assim também a *entropia relativa* entre o estado completo e sua parte fatorável - portanto neste sentido mede o 'quão longe' o estado está de ser fatorável.

Podemos obter outras propriedades deste índice examinando o lado esquerdo da desigualdade de Araki-Lieb: notamos que, se o estado for *puro* ( $S(\rho) = 0$ ), então  $S(\rho_1) = S(\rho_2)$  (o que confere com o resultado obtido anteriormente (eq. 1.27a), usando a decomposição de Schmidt). Neste caso, portanto,\*

$$I_N(\text{puro}) = 2S(\rho_1) = 2S(\rho_2) \quad (1.37)$$

e o índice se torna essencialmente a *entropia reduzida* dos subsistemas. Em qualquer outro caso, o lado esquerdo da desigualdade de Araki-Lieb implica:

$$I_N \leq 2 \min(S(\rho_1), S(\rho_2)). \quad (1.38)$$

Agora, vimos anteriormente (seção 1.1.4) que, se  $\Gamma_1$  é o menor dos dois subsistemas, então dado qualquer operador densidade  $\rho_1$  sempre é possível encontrar um estado puro global  $\rho'$  tal que  $\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho'$ . Como  $2S(\rho_1) \geq 2 \min(S(\rho_1), S(\rho_2))$ , vemos então das expressões acima que, dado qualquer estado misto  $\rho$  para o sistema composto, sempre podemos encontrar um estado puro  $\rho'$  com índice de correlação maior, ou pelo menos igual. Neste sentido, os estados puros são em geral *mais correlacionados* que os mistos. Em particular, *o estado mais correlacionado possível é um estado puro em que  $S(\rho_1)$  assume seu valor máximo* [38].

Podemos ligar este último fato ao seguinte outro: *um estado reduzido só pode ser puro se o*

*estado global for fatorável.* Isto pode ser visto fazendo  $S(\rho_1) = 0$  na desigualdade de Araki-Lieb, e vendo que nesse caso  $I_N = 0$ . Chegamos assim a outra constatação importante: *a criação de correlações entre subsistemas necessariamente implica no surgimento de ignorância quanto aos seus estados individuais.*

### Correlação versus Emaranhamento

Apesar de possuir estas propriedades intuitivamente agradáveis, o índice de correlação (1.35) deve ser interpretado com alguma cautela. Recordamos que no caso de um estado global puro ( $S(\rho) = 0$ ) o sistema está em princípio completamente determinado, de modo que qualquer indefinição quanto aos subsistemas se deve apenas ao emaranhamento entre eles. Neste caso,  $I_N$  representa claramente uma medida deste emaranhamento, já que é proporcional à entropia reduzida.

Quando passamos a admitir alguma ignorância quanto ao estado completo ( $S(\rho) > 0$ ), as coisas deixam de ser tão simples: agora, parte da indefinição quanto aos estados reduzidos se deve à própria ignorância sobre o estado global, nada tendo a ver com correlações quânticas. Para ilustrar o problema, consideremos por exemplo o seguinte caso extremo:

$$\rho = \frac{1}{2} (|\psi\rangle_1 \langle\psi|_1 \otimes |\phi\rangle_2 \langle\phi|_2 + |\psi'\rangle_1 \langle\psi'|_1 \otimes |\phi'\rangle_2 \langle\phi'|_2) \quad (1.39a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_1 = \frac{1}{2} (|\psi\rangle_1 \langle\psi|_1 + |\psi'\rangle_1 \langle\psi'|_1) \\ \rho_2 = \frac{1}{2} (|\phi\rangle_2 \langle\phi|_2 + |\phi'\rangle_2 \langle\phi'|_2) \end{cases} \quad (1.39b)$$

onde  $\langle\psi|\psi'\rangle = \langle\phi|\phi'\rangle = 0$

Neste caso  $\rho$  é não fatorável,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são mistos, mas não podemos dizer que os subsistemas estão emaranhados. A situação é exatamente a mesma de um cara-ou-coroa: se um dos subsistemas (lados da moeda) está no estado 'linha' (cai virado para cima), o outro necessariamente está 'no estado 'sem linha' (cai virado para baixo). É evidente assim que esta correlação (dita 'clássica') nada tem a ver com emaranhamento, refletindo apenas a ignorância sobre o sistema como um todo.

Apesar disto, o índice de correlação é positivo:

$$I_N(\rho) = 2 \ln 2 - \ln 2 = \ln 2 > 0 \quad (1.40)$$

Desta forma, concluímos que não podemos sempre interpretar  $I_N(\rho)$  como uma medida de emaranhamento. De fato, o problema de como distinguir as partes 'clássica' e 'quântica' da correlação no caso de estados mistos em geral ainda está em aberto [10].

Para garantir então que o índice  $I_N$  meça apenas correlações genuinamente quânticas, vamos nos ater de agora em diante aos estados *puros* dos sistemas globais que estudaremos. Desta forma, usaremos de forma equivalente as expressões 'não-fatorável', 'correlacionado' e 'emaranhado' para nos referir a tais estados.

## Capítulo 2

# Átomos e Cavidades: o Modelo de Jaynes-Cummings

Introduzimos agora o chamado ‘modelo de Jaynes-Cummings’ (MJC) [17, 18], o qual será o cenário para o restante deste trabalho. Este modelo é o mais simples usado para descrever a interação entre o campo eletromagnético e a matéria (átomos) de uma forma completamente quântica (i.e., quantizando não apenas os átomos, mas também o campo). Nele, o ‘campo’ é descrito por um *único* modo normal; ainda, apenas uma transição atômica (ressonante ou quase-ressonante com este modo) é levada em consideração, efetivamente reduzindo o átomo a um *sistema de dois níveis*. Assim, no fundo o MJC descreve praticamente o exemplo mais simples de dois sistemas quânticos distintos interagindo: um oscilador harmônico (campo) acoplado a um sistema de dois níveis (átomo).

Apesar desta aparente simplicidade conceitual, este modelo se revela extremamente rico e interessante: em primeiro lugar, dentro de aproximações convenientes ele é um caso raro de um modelo quântico *solúvel* analiticamente. Mesmo assim, suas soluções são de modo geral não-triviais, apresentando uma série de comportamentos a princípio pouco intuitivos, mas muito elucidativos da intimidade da relação entre a radiação e matéria. Em segundo lugar (e talvez mais importante), apesar da idealização do modelo, suas previsões podem ser *diretamente testadas pela experiência* (v. seção 2.4). Por estes motivos, o MJC é o cenário ideal para o estudo do emaranhamento de dois sistemas quânticos.

## 2.1 O Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

Vamos começar dando uma indicação de como se deriva o Hamiltoniano de interação do M.J.C. Dado que este desenvolvimento encontra-se bem descrito em diversos livros-texto (e.g., [39, 40] (ver também [41])), tentaremos evitar uma dedução excessivamente detalhada, concentrando-nos nas idéias principais.

### 2.1.1 O Campo Eletromagnético Quantizado no Vácuo

Antes de mais nada, recordamos como o campo eletromagnético no vácuo é quantizado. É possível mostrar (e.g., [28, 42]) que, escolhendo coordenadas apropriadas, as equações de Maxwell (clássicas) podem ser reescritas (no gauge de Coulomb) como uma coleção de osciladores harmônicos livres e desacoplados (os chamados 'modos normais' do campo). Quantizando esses osciladores da maneira canônica, o campo eletromagnético quântico pode ser descrito (de forma segundo-quantizada) através de um *operador* para o potencial vetor:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_m \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega_m V}} \left[ a_m \vec{A}_m(\vec{r}) + a_m^\dagger \vec{A}_m^*(\vec{r}) \right] \quad (2.1)$$

Nessa expressão,  $\vec{A}_m(\vec{r})$  dá a distribuição espacial (normalizada) do  $m$ -ésimo modo normal,  $\omega_m$  a sua frequência e  $a_m^\dagger, a_m$  são os correspondentes operadores de criação e aniquilação (bosônicos)<sup>1,2</sup>. A partir do potencial vetor, podemos obter os operadores dos campos elétrico e magnético

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_m \left[ a_m \vec{E}_m(\vec{r}) + a_m^\dagger \vec{E}_m^*(\vec{r}) \right] \quad (2.2a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_m \left[ a_m \vec{H}_m(\vec{r}) + a_m^\dagger \vec{H}_m^*(\vec{r}) \right] \quad (2.2b)$$

---

<sup>1</sup> $\vec{A}_m(\vec{r})$  é um vetor, não um operador. O conjunto  $\{\vec{A}_m(\vec{r})\}$  forma uma base ortonormal para as funções vetoriais definidas na região de quantização (de volume  $V$ ). O *operador vetorial*  $\vec{A}(\vec{r})$  age no espaço de Hilbert formado pelo produto direto dos espaços de cada modo no ponto  $\vec{r}$ . É bom frisar que para *cada ponto*  $\vec{r}$  do espaço real existem espaços de Hilbert e operadores de campo *independentes*.

<sup>2</sup>Por simplicidade, evitamos denotar explicitamente a polarização e a direção de propagação de cada modo, agrupando todas as propriedades que distinguem os modos no único índice  $m$ .

onde

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = -i\sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar \omega_m}{V}} \vec{A}_m(\vec{r}) \quad (2.3a)$$

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega_m V}} \nabla \times \vec{A}_m(\vec{r}) \quad (2.3b)$$

A energia contida no campo é escrita da forma

$$H_{\text{campo}} = \sum_m \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E}^2(\vec{r}) + \mathcal{H}^2(\vec{r})) d^3r = \sum_m \left( \mathbf{a}_m^\dagger \mathbf{a}_m + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_m. \quad (2.4)$$

Portanto, ela é dada pela soma dos operadores números de excitação  $N_m = \mathbf{a}_m^\dagger \mathbf{a}_m$  de cada um dos modos, vezes o correspondente quantum de energia  $\hbar \omega_m$  (e acrescido da energia de ponto-zero  $\frac{1}{2} \hbar \omega_m$ ).

Os autoestados de energia do campo são então aqueles da forma produto direto

$$|\Psi\rangle = \bigotimes_{m=1}^{\infty} |n_m\rangle \quad (2.5)$$

em que o modo 1 tem  $n_1$  excitações, o modo 2 tem  $n_2$  e assim por diante (estados de Fock). (A sua energia, dada pela (2.4) é  $\sum_m (n_m + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m$ ). Associamos estas excitações com o *número de fótons* em cada modo<sup>3</sup>. Um estado geral do campo pode então ser descrito por uma superposição da forma:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} c_{n_1, n_2, \dots} \bigotimes_{m=1}^{\infty} |n_m\rangle. \quad (2.6)$$

Vimos que a cada modo corresponde uma unidade de energia ( $\hbar \omega_m$ ). Os valores permitidos para  $\omega_m$  são determinados pela geometria da situação: no caso do espaço livre, por exemplo, todos os modos são permitidos, e as suas energias formam um *contínuo*. Esta situação pode ser radicalmente modificada se introduzirmos condições de contorno sobre os modos, utilizando por exemplo superfícies condutoras (onde idealmente o campo deve se anular). Na presença de tais 'cavidades'<sup>4</sup>, a quantidade de modos acessíveis pode ser reduzida a um conjunto discreto.

<sup>3</sup>Portanto, o operador de criação  $\mathbf{a}_m^\dagger$  cria um fóton no modo  $m$ , e o operador de aniquilação  $\mathbf{a}_m$  realiza o oposto.

<sup>4</sup>É usual denotar-se superfícies condutoras por 'cavidades', independente do fato de elas englobarem ou não

com energias  $\hbar\omega_m$  bem separadas. Como vemos a seguir, esta discretização afeta de forma fundamental a interação do campo eletromagnético com átomos neutros.

## 2.1.2 A Interação entre o Campo Eletromagnético e um Átomo Neutro na Aproximação de Dipolo

Suponhamos agora que o campo esteja em contato com um átomo neutro. Na ausência do campo, este átomo é descrito por seu próprio Hamiltoniano eletrônico  $H_{\text{átomo}}$ , com níveis de energia discretos  $|\psi_i\rangle$ <sup>5</sup>. Ao considerar a interação entre átomo e campo, vamos nos restringir então a modos com frequências nas faixas ótica e de microondas, que são da mesma ordem de frequências de transição entre esses níveis atômicos, e também correspondem a comprimentos de onda grandes o suficiente para possibilitar a construção de cavidades ressonantes de tamanho apropriado (v. seção 2.4.2). Mesmo para os campos óticos, esses comprimentos de onda, na faixa de  $0.5\mu m$ , são muito maiores do que as dimensões atômicas típicas (da ordem de  $1\text{\AA}$ ). Assim, para a interação átomo-campo só interessará o valor de  $\vec{A}(\vec{r})$  na posição  $\vec{r}_0$  do centro de massa atômico. Pelo mesmo motivo o átomo assume, do ponto de vista do campo, um caráter puntual, significando que os detalhes da sua distribuição interna de carga (dada por uma expansão em momentos multipolares) podem ser desprezados. Podemos considerar apenas o primeiro termo não-nulo desta expansão: como não há carga excedente (o átomo é neutro), em primeira aproximação o seu caráter é de um *dipolo puntual*.

A energia de interação do átomo com o campo pode ser então modelada a partir da fórmula clássica para um dipolo  $\vec{\mu}$  em um campo externo

$$H_{\text{int}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0) \quad (2.7)$$

(onde agora

$$\vec{\mu} \equiv \sum q_i \vec{R}_i \quad (2.8)$$

é o *operador* momento dipolo atômico<sup>6</sup>). Isto leva então a um Hamiltoniano total para o sistema

---

algum volume de espaço.[14]

<sup>5</sup> Estamos interessados apenas nos estados *ligados*.

<sup>6</sup> A soma é feita sobre todas as cargas do sistema atômico

átomo-campo da forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{átomo}} + \mathbf{H}_{\text{campo}} + \mathbf{H}_{\text{int}} \equiv \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{int}} \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{H}_{\text{campo}}$  e  $\mathbf{H}_{\text{int}}$  são dados pelas (2.4) e (2.7) e  $\mathbf{H}_{\text{átomo}}$  é suposto conhecido.<sup>7</sup>

Qualquer que seja a forma exata de  $\mathbf{H}_{\text{átomo}}$ , em geral ele comuta com o operador de paridade ( $\mathbf{H}_{\text{átomo}}(\vec{r}) = \mathbf{H}_{\text{átomo}}(-\vec{r})$ ); assim, como o momento de dipolo  $\vec{\mu}$  tem paridade negativa (pois é proporcional a operadores de posição), os seus elementos de matriz diagonais na base de energia se anulam:

$$\vec{\mu}_{ii} \equiv \langle \psi_i | \vec{\mu} | \psi_i \rangle = 0 \quad (2.10)$$

Portanto, usando (2.2a), a energia de interação pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = - \sum_m \sum_{i \neq j} \left[ \left( \vec{\mu}_{ij} \cdot \vec{E}_m(\vec{r}_0) \right) (|\psi_i\rangle \langle \psi_j|) \otimes \mathbf{a}_m + h.c \right] \quad (2.11)$$

O problema completo descrito por esta interação é virtualmente impossível de ser resolvido analiticamente de forma exata. Todavia, uma simplificação considerável pode ser feita se notarmos, usando teoria de perturbação, que as transições com probabilidade significativa de ocorrer serão aquelas que ligam estados degenerados do Hamiltoniano sem interação  $\mathbf{H}_0$ . Sendo assim, cada estado atômico  $|\psi_i\rangle$  só é acoplado significativamente aos modos do campo que sejam ressonantes ou quase-ressonantes com transições  $|\psi_i\rangle \leftrightarrow |\psi_j\rangle$  (de frequência  $\omega_{ij}$ ):

$$\mathbf{H}_{\text{int}} \approx - \sum_m \sum_{i \neq j} \left[ f(\omega_m - \omega_{ij}) \left( \vec{\mu}_{ij} \cdot \vec{E}_m(\vec{r}_0) \right) |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \otimes \mathbf{a}_m + h.c \right] \quad (2.12)$$

onde  $f(\omega_m - \omega_{ij})$  é próximo de uma função  $\delta$ .

Mesmo com esta aproximação, o problema continua não sendo solúvel analiticamente se houver um *contínuo* de modos do campo com frequências em torno de cada  $\omega_{ij}$ . Como foi mostrado há muito tempo por Weisskopf e Wigner usando métodos perturbativos [43], neste

<sup>7</sup>Esta indicação um tanto *ad hoc* da forma do Hamiltoniano geral de interação pode ser substanciada através de uma dedução de 'primeiros princípios', i.e., partindo do Lagrangeano completo do sistema átomo-campo, obtendo os momentos canônicos à la Dirac, etc. [42]. A dedução envolve uma série de pontos bastante delicados, mas é possível reobter uma interação da forma (2.7) em primeira ordem.

caso para tempos suficientemente longos o átomo sofre o chamado *decaimento espontâneo*: mesmo na presença do vácuo do campo a população do nível atômico superior de cada transição decai exponencialmente. Ao mesmo tempo, os modos do campo com frequências  $\omega_m \approx \omega_{ij}$  são populados (com um pico de intensidade no modo exatamente ressonante e uma largura de frequências inversamente proporcional ao tempo de decaimento).

A situação muda radicalmente quando os modos acessíveis são discretizados, por exemplo pela introdução de superfícies condutoras *ideais* [44]: se a separação entre as energias desses modos for suficientemente grande, cada transição atômica  $|\psi_i\rangle \leftrightarrow |\psi_j\rangle$  estará próxima da ressonância com no máximo *um* deles<sup>8</sup>. Suponhamos assim que um determinado par de níveis atômicos  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  tenha uma frequência de transição quase-ressonante com a de algum modo permitido, e também que as outras transições desses níveis permitidas pelas regras de seleção estejam todas longe da ressonância. Se o átomo for preparado com população não-desprezível apenas nesse par de níveis, então somente o modo correspondente será excitado. Podemos então desprezar todos os demais níveis e modos, e descrever o sistema átomo-campo simplesmente como um sistema de dois níveis acoplado a um oscilador harmônico!

A forma do acoplamento pode ser obtida de (2.12) eliminando-se os somatórios<sup>9</sup>:

$$H_{int} = \hbar\lambda (\sigma^+ + \sigma^-) (a + a^\dagger) \quad (2.13)$$

onde

$$\sigma^+ \equiv |e\rangle \langle g|; \sigma^- \equiv |g\rangle \langle e|. \quad (2.14)$$

são os operadores de 'levantamento' e 'abaixamento' atômicos e

$$\hbar\lambda \equiv -\vec{\mu}_{eg} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0) = -\vec{\mu}_{eg}^* \cdot \vec{E}^*(\vec{r}_0) = -\langle e | \vec{\mu} | g \rangle \cdot \vec{E}(\vec{r}_0) \quad (2.15)$$

<sup>8</sup>Na realidade, toda superfície condutora apresenta alguma dissipação, o que leva a uma 'largura finita de linha' (pelos mesmos motivos daquela que ocorre no decaimento espontâneo) [45, 46]. Em outras palavras, ao invés de uma frequência ressonante idealmente discreta para cada modo, existe sempre na prática um intervalo pequeno e *contínuo* de frequências acessíveis ao redor do valor ideal). Para que este intervalo possa ser desprezado, e os modos considerados como essencialmente monocromáticos, é necessário que a sua largura seja extremamente pequena com relação à frequência do modo. Isto impõe grandes dificuldades experimentais para a construção de cavidades aonde os efeitos ressonantes possam ser observados (v. seção 2.4).

<sup>9</sup>Também eliminamos o índice  $m$  das quantidades referentes ao campo, pois a partir de agora só estaremos preocupados com um único modo.

é a constante de acoplamento<sup>10</sup>. Desta expressão e de (2.3a), podemos ver assim que a intensidade do acoplamento depende do momento de dipolo entre os dois níveis, do volume da cavidade e da distribuição espacial do modo no ponto onde o átomo se localiza.

O Hamiltoniano completo do sistema é dado pela eq. (2.9):

$$\mathbf{H}'_{MJC} = \frac{1}{2}\hbar\omega_a\sigma_z + a^\dagger a\hbar\omega_c + \hbar\lambda(\sigma^+ + \sigma^-)(a + a^\dagger) \quad (2.16)$$

Aqui,  $\omega_a$  é a frequência de transição atômica e  $\omega_c$  a frequência do modo quase-resonante ( $\omega_a \approx \omega_c$ ). O zero de energia foi escolhido de forma a eliminar a energia de ponto-zero do modo, e também de forma a que os níveis atômicos relevantes tenham energias simétricas ( $= \pm \frac{1}{2}\hbar\omega_a$ ).

O Hamiltoniano atômico  $\mathbf{H}_{átomo}$  na base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  fica assim

$$\mathbf{H}_{átomo} = \frac{1}{2}\hbar\omega_a(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) = \frac{1}{2}\hbar\omega_a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

portanto proporcional à matriz de Pauli  $\sigma_z$  nesta base. A partir de agora, nos referiremos a  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  como os níveis 'excitado' e 'fundamental' do átomo, respectivamente.

Este é o chamado 'Hamiltoniano de Jaynes-Cummings', na sua forma completa [17].

### 2.1.3 Interpretação e a Aproximação de 'Onda Girante'

Apesar da forma simples atingida para o Hamiltoniano (2.16), ele ainda é insatisfatório tanto do ponto de vista prático (no sentido de que é ainda insolúvel de forma exata) como também do da consistência com as hipóteses que já fizemos.

Para compreender por que, vamos examinar o sentido físico dos termos presentes na interação (2.13). Notamos inicialmente que os operadores atômicos  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$  podem ser interpretados de maneira semelhante aos operadores de criação e aniquilação para o campo: da sua definição (2.14), vemos que a aplicação de  $\sigma^+$  ao estado atômico fundamental leva ao excitado ( $\sigma^- = (\sigma^+)^\dagger$  realiza a ação inversa)<sup>11</sup>.

Podemos ver então que existem dois tipos distintos de termos em (2.13). Aqueles de forma

<sup>10</sup>Note que, como temos apenas um modo em um ponto do espaço, podemos sempre escolher  $\vec{E}(\vec{r}_0)$  de forma que  $\lambda$  possa ser tomado real.

<sup>11</sup>Estes operadores atômicos são mais apropriadamente interpretados como operadores de criação e aniquilação

$\sigma^+a$  e  $\sigma^-a^\dagger$  têm o efeito de excitar um dos sistemas ao mesmo tempo em que destróem uma excitação do outro; representam assim processos em que o átomo absorve um fóton e se excita, ou então emite um fóton e se desexcita. Por outro lado, aqueles de forma  $\sigma^+a^\dagger$  e  $\sigma^-a$  respectivamente criam e destróem uma excitação em *ambos* os sistemas, representando assim processos em que o átomo se excita emitindo um fóton, ou se desexcita absorvendo um fóton!

Como estamos assumindo que o modo do campo e a transição atômica em questão são quase-ressonantes, os termos do primeiro tipo ('*ressonantes*', ou '*girantes*') ligam níveis que são aproximadamente degenerados de acordo com a parte 'não-interagente' do Hamiltoniano ( $H_0$ ). O mesmo não ocorre com os termos do segundo tipo, ('*não ressonantes*', ou '*contra-girantes*') os quais ligam estados que, em  $H_0$ , têm uma diferença de energia  $\hbar(\omega_a + \omega_c) \gg \hbar(\omega_a - \omega_c)$ .

Agora, como já vimos acima, se o acoplamento for suficientemente fraco esperamos que estes termos ligando estados não ressonantes forneçam uma contribuição pequena com respeito à dos ressonantes. De fato, para mantermos a consistência com as aproximações que já fizemos (quando eliminamos termos possivelmente *menos* não-ressonantes do que os que temos agora) vemos que é necessário eliminar a parte não-ressonante de (2.13).

Outra maneira de argumentar pela validade desta aproximação é passando o Hamiltoniano (2.16) para a representação de interação. Neste caso, é possível mostrar [47] que, na nova forma do Hamiltoniano, os termos 'girantes' dão origem a contribuições lentamente oscilantes com o tempo (com frequência  $\omega_a - \omega_c \sim 0$ ), enquanto os termos 'contra-girantes' oscilam com a frequência  $\omega_a + \omega_c$  (portanto muito mais rapidamente). Assim, os seus efeitos devem em média interferir destrutivamente, não contribuindo significativamente para a evolução.

A partir de agora, e em todo o restante deste trabalho, vamos nos restringir apenas aos termos *girantes* (realizando a chamada *aproximação de onda girante*). Assim, o Hamiltoniano que nos interessará para o sistema átomo-campo é:

$$H_{MJC} = \frac{1}{2}\hbar\omega_a\sigma_z + a^\dagger a \hbar\omega_c + \hbar\lambda (\sigma^+a + \sigma^-a^\dagger) \quad (2.18)$$

---

*fermiônicos*, visto que satisfazem relações de anticomutação da forma

$$\{\sigma^+, \sigma^-\} = 1$$

Uma discussão mais detalhada dos efeitos dos termos contra-girantes, incluindo condições mais específicas em que eles podem (ou não) ser desprezados pode ser encontrada em [41] e referências lá citadas.

## 2.2 Solução do MJC na Aproximação de Onda Girante

Após a realização de todas essas aproximações, o MJC se torna solúvel de maneira exata. Como o Hamiltoniano (2.18) não é fatorável em um produto de operadores do campo e do átomo, já podemos esperar que os seus estados estacionários também não sejam escritos nesta forma simples: teremos assim autoestados *emaranhados*.

Podemos ainda notar que, na ausência dos termos contra-girantes, vale a lei de conservação:

$$[N_{ex}, H_{MJC}] = 0; \quad (2.19)$$

onde

$$N_{ex} \equiv \frac{1}{2}\sigma_z + a^\dagger a + \frac{1}{2} = \sigma^+ \sigma^- + a^\dagger a. \quad (2.20)$$

Notando que  $\sigma^+ \sigma^-$  é diagonal na base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ , com autovalores 1 e 0 respectivamente, podemos ver que o operador  $N_{ex}$  mede o 'número de excitações' do sistema, definido como o número de fótons no campo, mais 1 (0) se o átomo está no estado excitado (fundamental). A lei (??) exprime assim rigorosamente a idéia de que, para cada fóton destruído no campo, o átomo deve ser excitado, e vice-versa<sup>12</sup>.

Assim, é fácil ver que cada estado fatorável da forma

$$|e\rangle \otimes |n\rangle \equiv |e, n\rangle \quad (2.21)$$

só é acoplado ao correspondente  $|g, n+1\rangle$ ; desta forma,  $H_{MJC}$  pode ser diagonalizado separadamente em cada um dos subespaços  $\mathbb{H}_n$  (2-dimensionais) gerados por estes dois estados. A única exceção é o estado fundamental  $|g, 0\rangle$ , em que não há *nenhuma* excitação no sistema.

<sup>12</sup> É importante notar que, no contrário de  $N_{ex}$ , não há em geral a conservação da 'energia' dada pelos termos não interagentes de  $H_{MJC}$  ( $H_0 = H_{átomo} + H_{campo} = \frac{1}{2}\hbar\omega_a\sigma_z + a^\dagger a\hbar\omega_c$ ). Esta quantidade só comuta com o hamiltoniano no caso de haver *ressonância* exata ( $\omega_a = \omega_c$ ), quando ela se reduz essencialmente a um múltiplo de  $N_{ex}$ .

Este estado não se acopla assim a nenhum outro, e é ele próprio um autoestado de  $\mathbf{H}_{MJ}$ , de energia  $-\frac{1}{2}\hbar\omega_a$  (o único autoestado fatorável)<sup>13</sup>!

O processo de diagonalização fornece em cada  $\mathbb{H}_n$  os seguintes autoestados (v. por exemplo, [39, 47]):

$$|n+\rangle = \sin(\epsilon_n)|e\ n\rangle + \cos(\epsilon_n)|g\ n+1\rangle \quad (2.22a)$$

$$|n-\rangle = \cos(\epsilon_n)|e\ n\rangle - \sin(\epsilon_n)|g\ n+1\rangle \quad (2.22b)$$

onde  $(\epsilon_n \in [0, \frac{\pi}{2}])$ :

$$\cos(\epsilon_n) = \frac{\Delta_n - \delta}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 + \Omega_n^2}} \quad (2.23a)$$

$$\sin(\epsilon_n) = \frac{\Omega_n}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 + \Omega_n^2}} \quad (2.23b)$$

$$\Rightarrow \tan(2\epsilon_n) = \frac{-\Omega_n}{\delta} \quad (2.23c)$$

e

$$\Omega_n = 2\lambda\sqrt{n+1} \quad (2.24a)$$

$$\delta = \omega_a - \omega_c \quad (2.24b)$$

$$\Delta_n = +\sqrt{\delta^2 + \Omega_n^2} \quad (2.24c)$$

As energias correspondentes são:

$$E_{n\pm} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \pm \frac{\hbar}{2}\Delta_n \quad (2.25)$$

Vamos agora analisar o significado físico desta solução: vemos primeiro que, de fato, os autoestados  $|n\pm\rangle$  são em geral emaranhados. Neste caso, como vimos no capítulo 1, não podemos mais atribuir um estado (puro) bem-definido para o átomo ou para o campo. Por

<sup>13</sup>Caso mantivéssemos os termos contra-girantes, esta diagonalização simples já não ocorreria, visto que o Hamiltoniano também descreve processos em que o átomo se excita emitindo um fóton - o que evidentemente não conserva o número de excitações!

este motivo, é costume se referir a eles como representando um átomo ‘vestido’ pelo campo (são conhecidos então como ‘*estados vestidos*’). É bom lembrar que, juntamente com o estado fundamental  $|g\ 0\rangle$ , os estados vestidos formam uma base completa para o espaço de Hilbert do sistema átomo-campo.

Para cada valor de  $n \geq 0$ , a decomposição dos estados vestidos em termos da base fatorável  $\{|e\ n\rangle, |g\ n+1\rangle\}$  depende, (via o ângulo  $\epsilon_n$ ) do parâmetro  $\delta$ , que mede a diferença, ou *dessintonia*, entre as frequências do átomo e do campo. Para compreender o significado das diversas quantidades acima, convém examinar alguns casos-limite de  $\delta$  fisicamente relevantes (e que serão particularmente importantes nos próximos capítulos).

### 2.2.1 Limite Ressonante

Em primeiro lugar, vamos ver o que ocorre quando átomo e campo estão em ressonância *exata* ( $\delta = 0$ ). Temos imediatamente de (2.22a, b) que:

$$|n\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\ n\rangle \pm |g\ n+1\rangle) \quad (2.26)$$

Portanto, neste caso os estados vestidos têm pesos iguais em cada um dos elementos da base fatorável  $\{|e\ n\rangle, |g\ n+1\rangle\}$  de  $\mathbb{H}_n$ . O operador densidade reduzido atômico representa assim o estado de total ignorância:

$$\rho_{AT} \equiv \text{Tr}_{\text{Campo}} (|n\pm\rangle \langle n\pm|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Isto significa que estes estados são *maximamente correlacionados*, no sentido de que o índice de correlação de von Neumann<sup>14</sup> (eq. 1.35) assume o seu maior valor possível:

$$I_N (|n\pm\rangle) = 2S_{\text{Atomo}} = 2 \ln 2 = I_N \text{ max.} \quad (2.28)$$

(Lembramos que quando um sistema composto é formado por dois subsistemas de tamanhos desiguais, é a dimensão do menor que determina o valor máximo da correlação). Observamos

---

<sup>14</sup>Medido aqui pela entropia reduzida, já que temos um estado puro.

ainda que, como os estados vestidos são autoestados, então se o sistema átomo-campo for descrito por um deles esta condição de máxima correlação se mantém durante toda a evolução temporal.

Vamos examinar agora a energia (2.25). Se  $\delta = 0$  ( $\therefore \omega_a = \omega_c \equiv \omega$ ), temos:

$$E_{n\pm} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \pm \frac{\hbar}{2}\Omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \pm \hbar\lambda\sqrt{n+1} \quad (2.29)$$

Caso não houvesse interação entre o átomo e o campo, os estados fatoráveis  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$  seriam autoestados degenerados do Hamiltoniano

$$H_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + a^\dagger a \hbar\omega \quad (2.30)$$

com energia  $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ . Portanto, o efeito da interação de Jaynes-Cummings pode ser visto como um levantamento dessas degenerescências, introduzindo uma separação de  $2\hbar\lambda\sqrt{n+1} = \hbar\Omega_n$  entre os níveis contidos em cada subespaço  $\mathbb{H}_n$ <sup>15</sup>. Obtemos assim uma interpretação para a frequência  $\Omega_n$  (a qual, por razões históricas, é conhecida como a 'frequência de Rabi' (v. seção 2.4.3)). Vale notar que este efeito é análogo à separação que ocorre entre as frequências dos modos normais de um sistema formado por dois osciladores idênticos acoplados (clássicos ou quânticos) [28].

Outro modo de ver isto é observando o efeito *dinâmico* desta separação entre os níveis: suponhamos que o sistema átomo-campo seja preparado com o átomo no estado excitado, e o campo com um número  $n$  de fótons (estado  $|e, n\rangle$ ). Caso não houvesse interação, nada aconteceria: este estado já seria um autoestado. Na presença do Hamiltoniano do MJC, porém, ele é acoplado com  $|g, n+1\rangle$ . Expandindo  $|e, n\rangle$  na base (2.26) de autoestados e considerando as energias (2.29), vemos que a evolução temporal a partir deste estado é dada por<sup>16</sup>:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \left( \exp\left(-i\frac{\Omega_n t}{2}\right) |n+\rangle + \exp\left(i\frac{\Omega_n t}{2}\right) |n-\rangle \right)$$

<sup>15</sup> Notamos que a separação entre os níveis cresce com  $\sqrt{n}$ .

<sup>16</sup> A partir deste ponto, e no restante deste trabalho, vamos assumir que a constante de acoplamento  $\lambda$  é positiva, o que implica  $\Omega_n > 0$ . Evidentemente, todos os resultados podem ser adaptados imediatamente para o outro caso.

$$= e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \left( \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |e\ n\rangle - i \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |g\ n+1\rangle \right) \quad (2.31)$$

Portanto, neste caso o estado *oscila periodicamente* entre  $|e\ n\rangle$  e  $|g\ n+1\rangle$ , com frequência  $\Omega_n$  (note que quando  $\frac{\Omega_n}{2} = \pi$  o estado retorna à condição inicial  $|e\ n\rangle$  a menos de uma fase). Podemos enxergar isso como uma troca de energia periódica entre o átomo e o campo, novamente semelhante à que ocorre entre dois osciladores harmônicos ressonantes<sup>17</sup>.

O caráter *quântico* desta troca fica bem caracterizado notando que, por um lado, as frequências de Rabi disponíveis são *discretas* - uma consequência direta da granularidade do campo quantizado, o qual só pode conter números inteiros de excitação. Por outro lado, podemos ver também que a oscilação persiste mesmo no caso de um campo *inicialmente no estado de vácuo*. Neste caso, o sistema como um todo tem uma única excitação ( $\langle N_{ex} \rangle = 1$ ), e oscila entre  $|e\ 0\rangle$  e  $|g\ 1\rangle$  com frequência  $\Omega_0 = 2\lambda$  (vemos assim que a constante de acoplamento  $\lambda$  fornece a frequência de Rabi 'do vácuo'; todas as outras frequências de Rabi são múltiplos, em geral irracionais, desta fundamental). Em comparação, nenhuma oscilação ocorre no caso do átomo estar também inicialmente no seu estado fundamental: como vimos, o estado  $|g\ 0\rangle$  é um estado estacionário<sup>18</sup>.

## Evolução Temporal na Representação de Interação

A evolução temporal de um estado puro  $|\psi\rangle$  arbitrário pode ser escrita de forma mais conveniente passando da representação de Schrödinger para a *representação de interação* [28], realizando a seguinte transformação unitária sobre os estados e operadores:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_{RI}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_0 t\right) \mathbf{A} \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\mathbf{H}_0 t\right) \quad (2.32a)$$

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle_{RI} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_0 t\right) |\psi\rangle \quad (2.32b)$$

<sup>17</sup>É fácil ver da eq. (2.25) que, quando deixamos a condição de ressonância, os papéis de  $\Omega_n$  passam a ser desempenhados por  $\Delta_n$ , que é conhecida então como a 'frequência de Rabi generalizada'.

<sup>18</sup>Esta última característica não persistiria se incluíssemos os termos contra-girantes, visto que naquele caso seria possível um átomo simultaneamente emitir um fóton e se excitar - portanto, o estado  $|g\ 0\rangle$  deixaria de ser estacionário.

Em particular, nesta representação, o Hamiltoniano do MJC tem a forma

$$\mathbf{H}_{RI}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_0 t\right) (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{int}) \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\mathbf{H}_0 t\right) = \hbar\lambda \left(\sigma^+ \mathbf{a} \exp(i\delta t) + \sigma^- \mathbf{a}^\dagger \exp(-i\delta t)\right) \quad (2.33)$$

Notamos que, para dessintonia nula ( $\delta = 0$ ),  $\mathbf{H}_{int}$  é *invariante* pela mudança de representação (i.e.,  $\mathbf{H}_0$  é uma constante do movimento). Neste caso, os autovetores de  $\mathbf{H}_{RI}$  são (a menos de uma fase dependente do tempo) os mesmos estados vestidos da rep. de Schrödinger:

$$|n\pm\rangle_{RI}(t) = e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} |n\pm\rangle \quad (2.34)$$

mas agora com energias:

$$E_{n\pm}^{RI} = \pm \frac{\hbar}{2}\Omega_n = \pm \hbar\lambda\sqrt{n+1} \quad (2.35)$$

(o estado  $|g, 0\rangle_{RI}$  passa a ter energia zero).

Desta forma, dado um estado puro geral para o sistema átomo-campo, escrito na forma

$$|\psi(0)\rangle = c_{-1}|g, 0\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n\pm}|n\pm\rangle \quad (2.36)$$

a sua evolução temporal na representação de interação será:

$$|\psi(t)\rangle_{RI} = c_{-1}|g, 0\rangle_{RI} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n\pm} \exp(\mp i\lambda t\sqrt{n+1}) |n\pm\rangle_{RI} \quad (2.37)$$

Alternativamente, se expandirmos  $|\psi(0)\rangle$  em termos dos estados fatoráveis

$$|\psi(0)\rangle = c_{-1}|g, 0\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} a_n |e, n\rangle + b_n |g, n+1\rangle \quad (2.38)$$

a evolução pode ser escrita:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_{RI} &= c_{-1}|g, 0\rangle_{RI} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(\lambda t\sqrt{n+1}) - ib_n \sin(\lambda t\sqrt{n+1})] |e, n\rangle_{RI} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} [b_n \cos(\lambda t\sqrt{n+1}) - ia_n \sin(\lambda t\sqrt{n+1})] |g, n+1\rangle_{RI} \end{aligned} \quad (2.39)$$

As frequências dos diversos termos são proporcionais a  $\sqrt{n}$ , portanto em geral *não são comensuráveis* (a razão entre duas frequências de Rabi,  $\sqrt{\frac{n+1}{n'+1}}$  é em geral um número irracional<sup>19</sup>). Por esta razão, a evolução temporal será não-periódica para a maioria das condições iniciais.

### 2.2.2 Limite Dispersivo

Além da condição de ressonância, é interessante examinar também o limite oposto, em que o átomo e o campo estão relativamente longe da ressonância [48]. Essencialmente, vamos considerar o limite em que  $\delta \gg \Omega_n$  para todos os valores de  $n$  relevantes em um determinado estado. Este limite deve ser tomado com cuidado (não podemos simplesmente fazer  $\delta \rightarrow \infty$ ) pois, para nos mantermos consistentes com as hipóteses feitas durante a derivação do modelo,  $\delta$  não pode se afastar muito de zero em comparação com as frequências da ordem de  $\omega_a$  e  $\omega_c$ . A discussão a seguir assumirá, portanto, que os estados e os acoplamentos em questão sejam tais que

$$\min(\omega_a, \omega_c) \gg \delta \gg \Omega_n = 2\lambda\sqrt{n+1} \quad (2.40)$$

Como veremos na seção 2.4 adiante, essas condições podem ser bem satisfeitas na prática.

À medida em que a dessintonia aumenta, esperamos que haja uma dificuldade crescente para átomo e campo interagirem de forma construtiva. Intuitivamente, se um desses sistemas tem frequência natural de evolução muito maior que a do outro, é de se esperar que quaisquer efeitos de interação sejam na média destruídos ('*averaged out*') ao longo das muitas oscilações do sistema 'mais rápido'. Para ver o que ocorre no nosso caso, vamos considerar  $\delta \gg \Omega_n$  na expressão (2.24c) para  $\Delta_n$ :

$$\Delta_n \approx |\delta| \left( 1 + \frac{\Omega_n^2}{2\delta^2} + O\left(\frac{\Omega_n^4}{\delta^4}\right) \right) = |\delta| + \frac{|\delta| \Omega_n^2}{2\delta} + \frac{|\delta| \Omega_n}{\delta} O\left(\frac{\Omega_n^3}{\delta^3}\right) \quad (2.41)$$

Considerando então apenas os dois primeiros termos desta expressão temos, de (2.25):

$$E_{n\pm} \approx \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c \pm \frac{\hbar}{2} \left( |\delta| + \frac{|\delta| \Omega_n^2}{2\delta} \right) =$$

<sup>19</sup>Existem é claro casos particulares em que duas frequências são comensuráveis. Isto ocorre quando  $n'+1$  e  $n+1$  forem ambos quadrados perfeitos.

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c \pm \frac{\hbar}{2} |\omega_a - \omega_c| \pm \frac{|\delta| \hbar\lambda^2 (n+1)}{\delta} \quad (2.42)$$

Portanto: se  $\delta > 0$  ( $\omega_a > \omega_c$ )

$$E_{n\pm} \approx \left(n + \frac{0}{1}\right) \hbar\omega_c \pm \frac{\hbar}{2} \omega_a \pm \frac{\hbar\lambda^2 (n+1)}{\delta} \quad (2.43a)$$

e se  $\delta < 0$  ( $\omega_c > \omega_a$ ):

$$E_{n\pm} \approx \left(n + \frac{1}{0}\right) \hbar\omega_c \mp \frac{\hbar}{2} \omega_a \mp \frac{\hbar\lambda^2 (n+1)}{\delta} \quad (2.43b)$$

Observamos ainda como os autoestados são afetados: substituindo (2.41) em (2.23a, b) temos, para  $\delta > 0$ :

$$\cos(\epsilon_n) \approx \frac{\Omega_n}{2\delta} \frac{1}{\sqrt{\Omega_n^2 + 4\delta^2}} \approx \frac{\Omega_n}{4\delta^2} \left(1 + O\left(\frac{\Omega_n^2}{\delta^2}\right)\right) \quad (2.44a)$$

$$\sin(\epsilon_n) \approx \frac{2\delta}{\sqrt{\Omega_n^2 + 4\delta^2}} \approx 1 - O\left(\frac{\Omega_n^2}{\delta^2}\right) \quad (2.44b)$$

Podemos ver que as primeiras correções sobre os autoestados são de ordem bem menor do que aquelas sobre as energias (como se esperaria considerando-se que, quando  $\delta$  é grande, a interação deve se comportar como uma perturbação). Tomando então os autoestados em ordem zero, temos, para  $\delta \gg \Omega_n^2$ ,  $\cos(\epsilon_n) \approx 0$ ,  $\sin(\epsilon_n) \approx 1$ , e portanto

$$|n+\rangle \approx |e\ n\rangle \quad (2.45a)$$

$$|n-\rangle \approx -|g\ n+1\rangle \quad (2.45b)$$

De forma semelhante, pode-se mostrar que, para  $\delta < 0$ , temos em ordem zero:

$$|n+\rangle \approx |g\ n+1\rangle \quad (2.46a)$$

$$|n-\rangle \approx |e\ n\rangle \quad (2.46b)$$

Assim, no limite dispersivo os autoestados do sistema voltam a ser estados fatoráveis. Para

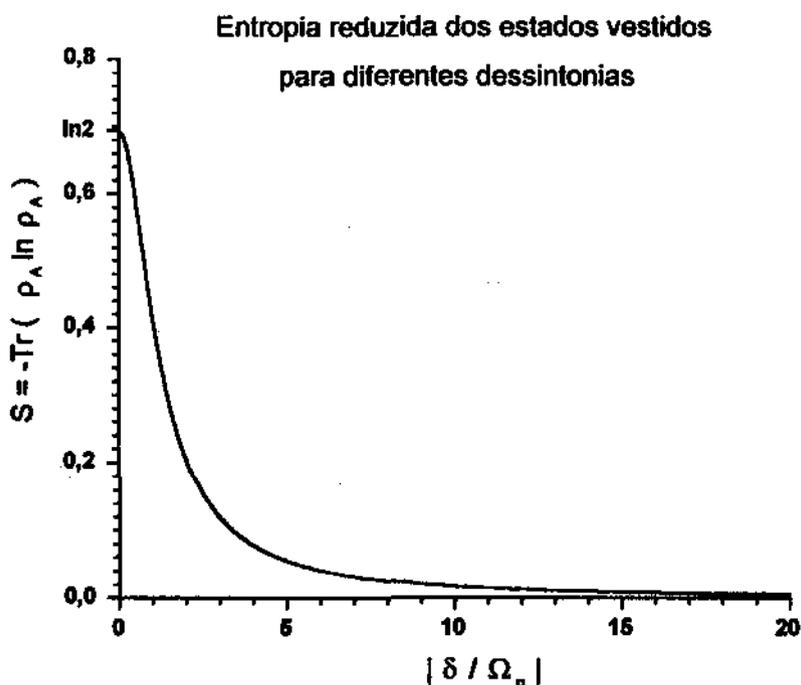


Figura 2-1: Entropia reduzida dos estados vestidos  $|n\pm\rangle$

se ter uma idéia da precisão das aproximações envolvidas, podemos traçar a entropia reduzida dos estados vestidos com respeito à razão  $\left|\frac{\delta}{\Omega_n}\right|$  (v. fig. 2-1). Podemos ver que, para  $\left|\frac{\delta}{\Omega_n}\right| = 10$ , temos  $S(|n\pm\rangle) \approx 0,02$ , o que corresponde aos valores 0,99853 e 0,0542 para os coeficientes de  $|n\pm\rangle$  na base  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ . Portanto, mesmo para estes valores os estados reduzidos são praticamente puros (e assim, como vimos no cap. 1, o estado global é praticamente fatorável).

Neste limite, a interação de Jaynes-Cummings age portanto como uma perturbação, se resumindo a deslocar os níveis de energia dos estados estacionários do Hamiltoniano sem interação. Notando as correspondências (2.45a, b) e (2.46a, b), e comparando com as expressões (2.43a, b) para a energia, podemos ver que, para qualquer sinal de  $\delta$ , estes deslocamentos são dados

por<sup>20</sup>:

$$E(|e\ n\rangle) \rightarrow E(|e\ n\rangle)_0 + \frac{\hbar\lambda^2(n+1)}{\delta} \quad (2.47a)$$

$$E(|g\ n\rangle) \rightarrow E(|g\ n\rangle)_0 - \frac{\hbar\lambda^2 n}{\delta} \quad (2.47b)$$

onde as energias 'não perturbadas' são

$$E(|e\ n\rangle)_0 = n\hbar\omega_c + \frac{\hbar}{2}\omega_a \quad (2.48a)$$

$$E(|g\ n\rangle)_0 = n\hbar\omega_c - \frac{\hbar}{2}\omega_a \quad (2.48b)$$

É interessante notar que, para cada dupla  $\{|e\ n\rangle, |g\ n\rangle\}$ , os deslocamentos se dão sempre em sentidos *opostos*: se  $\delta > 0$ , os estados se afastam, e se  $\delta < 0$  se aproximam. Em outras palavras, podemos dizer que a presença de  $n$  fótons na cavidade desloca a frequência de transição atômica de uma quantidade:

$$\Delta\omega_{eg}(n) = \frac{\lambda^2(2n+1)}{\delta} \quad (2.49)$$

Essas propriedades podem ser resumidas escrevendo um Hamiltoniano de interação *efetivo*, válido neste limite :

$$\mathbf{H}_{MJC}^{eff} = \frac{\hbar\lambda^2}{\delta} \left[ |e\rangle\langle e| \otimes \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger - |g\rangle\langle g| \otimes \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} \right] \quad (2.50)$$

Fica claro então que, ao contrário do limite ressonante visto acima, neste caso não ocorrem trocas de excitação entre o átomo e o campo (podemos ver que não apenas o número total de excitações  $\mathbf{N}_{ex}$  é conservado, como também o número  $\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$  de fótons do campo e o 'número de excitação' atômico  $\sigma^+\sigma^-$  comutam separadamente com  $\mathbf{H}_{MJC}^{eff}$ ). Assim,  $\mathbf{H}_{MJC}^{eff}$  comuta com a parte não-interagente ( $\mathbf{H}_0$ ) do Hamiltoniano total (2.9); isto significa então que, a exemplo do Hamiltoniano (2.33) na ressonância, o Hamiltoniano efetivo (2.50) *mantém a sua forma na representação de interação*.

Os deslocamentos (2.49) também pode ser visto do ponto de vista oposto: se considerarmos

---

<sup>20</sup>Notamos que esta regra inclui corretamente o estado fundamental  $|g\ 0\rangle$ , o qual não sofre qualquer deslocamento devido à interação.

dois níveis, como  $|g, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  que diferem pela adição de um fóton no campo, a sua diferença de energia, dada por (2.47a) é

$$\Delta E(|g, n+1\rangle, |g, n\rangle) = \hbar\omega_c - \frac{\hbar\lambda^2}{\delta} \quad (2.51)$$

Podemos interpretar que o fóton 'extra' de  $|g, n+1\rangle$  carrega a energia  $\hbar\left(\omega_c - \frac{\lambda^2}{\delta}\right)$ ; assim, deste ponto de vista é a presença do *átomo* que desloca a frequência ressonante da *cavidade* de uma quantidade igual a  $\frac{\lambda^2}{\delta}$  <sup>21</sup>. É possível fornecer uma interpretação física interessante para estes resultados fazendo uma analogia com a teoria clássica de dielétricos em cavidades [14]: deste ponto de vista, o átomo pode ser considerado como um *meio material dispersivo*, cuja presença na cavidade desloca as frequências da radiação.

## 2.3 Condições Iniciais e Evolução Temporal

Uma das atrações do MJC é a sua rica variedade de comportamentos dinâmicos. De acordo com as condições iniciais do sistema átomo-campo e com o grau de dessintonia entre os dois subsistemas, diferenças marcantes podem surgir na evolução dos diversos observáveis. Nesta seção, procuramos dar uma idéia desta riqueza através de alguns exemplos relevantes

### 2.3.1 Observáveis atômicos

Nas montagens experimentais envolvendo átomos e cavidades (v. seção 2.4), em geral os observáveis *atômicos* são os mais diretamente mensuráveis. Assim, neste trabalho vamos nos restringir ao estudo da dinâmica destas propriedades, não abordando outros aspectos importantes do MJC, como a evolução da estatística de fótons do campo, das correlações entre observáveis do átomo e do campo, e assim por diante (referências de estudos destes temas podem ser encontradas em [18]).

Na verdade, como o espaço de estados atômico só tem duas dimensões, não existem muitos observáveis atômicos independentes. De fato, o operador densidade reduzido pode ser repre-

---

<sup>21</sup>Em inglês, este fenômeno é denominado '*cavity frequency pulling*'.

sentado na base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  por uma matriz  $2 \times 2$ :

$$\rho_A(t) = \begin{bmatrix} \rho_{ee}(t) & \rho_{eg}(t) \\ \rho_{eg}(t) & \rho_{gg}(t) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

com apenas *três* variáveis reais independentes:  $\text{Re}(\rho_{eg})$ ,  $\text{Im}(\rho_{eg})$  e  $\rho_{ee}$  (como  $\text{Tr}\rho = 1$ ,  $\rho_{gg} = 1 - \rho_{ee}$ ). Assim, os valores médios de apenas três observáveis são suficientes para determinar  $\rho_A(t)$ .

Uma escolha conveniente para esses três são os operadores de Pauli  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Os primeiros dois determinam os termos não diagonais de  $\rho_A(t)$ , e o último os diagonais:

$$\langle \sigma_x \rangle = 2 \text{Re}(\rho_{eg}), \quad \langle \sigma_y \rangle = 2 \text{Im}(\rho_{eg}) \quad (2.53a)$$

$$\langle \sigma_z \rangle = \rho_{ee} - \rho_{gg} = 2\rho_{ee} - 1 \quad (2.53b)$$

A interpretação física destes operadores pode ser obtida sem dificuldade: os primeiros dois são proporcionais às partes real e imaginária do *momento de dipolo* atômico neste subespaço, como pode ser visto se lembrarmos que este operador não possui termos diagonais (eq. 2.10). O terceiro mede a *inversão de população*, ou seja, a diferença entre as probabilidades do átomo estar no estado excitado e no fundamental. Na sequência deste trabalho, vamos estar preocupados basicamente com este último observável, cuja evolução temporal descreve a maneira como o campo excita e desexcita o átomo ao longo da sua interação.

**Atenção:** de agora em diante, salvo menção explícita do contrário, todos os observáveis e estados estarão na representação de interação.

### 2.3.2 Colapsos e Ressurgimentos na Evolução Ressonante da Inversão Atômica

A evolução temporal da inversão no caso de *ressonância* entre átomo e campo ( $\delta = 0$ ) pode ser obtida a partir da solução geral (2.39) para a evolução do estado inicial (2.38):

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) - ib_n \sin(\lambda t \sqrt{n+1})|^2 - 1 \quad (2.54a)$$

$$\begin{aligned}
&= -|c_{-1}|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 - |b_n|^2) \cos(2\lambda t\sqrt{n+1}) + \\
&\quad + 2 \operatorname{Im}(a_n^* b_n) \sin(2\lambda t\sqrt{n+1})
\end{aligned} \tag{2.54b}$$

onde usamos a normalização

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = 1 - |c_{-1}|^2 \tag{2.55}$$

Em particular, se no instante inicial o átomo está completamente excitado ( $b_n \equiv 0$ ):

$$|\psi(t=0)\rangle = |e\rangle_A \otimes |\psi\rangle_C \tag{2.56}$$

ou completamente desexcitado ( $a_n \equiv 0$ ):

$$|\psi(t=0)\rangle = |g\rangle_A \otimes |\psi\rangle_C \tag{2.57}$$

(i.e., inversão inicial máxima, em módulo), e admitindo ainda por simplicidade  $c_{-1} = 0$ , então a série acima se reduz a

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = \pm \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cos(2\lambda\sqrt{n+1}t) \tag{2.58}$$

onde  $P(n) = |\langle n|\psi\rangle|^2$  é a *distribuição inicial de fótons* para o campo.

Assim, nestes casos é esta distribuição que determina as características dinâmicas da inversão. Por exemplo, no caso do campo estar inicialmente em um estado de número ( $P(n) = \delta_{mn}$ ), a evolução se torna periódica, com a frequência de Rabi  $\Omega_m$  correspondente.

Como foi primeiro notado por Cummings [49], no caso de uma distribuição  $P(n)$  abrangendo muitos valores diferentes de  $n$  a situação muda radicalmente. Os termos que evoluem de acordo com as várias frequências de Rabi interferem entre si, com o resultado de que a inversão cai rapidamente a zero (ou ‘colapsa’).

Contudo, desde que a distribuição  $P(n)$  não seja muito larga, este colapso não é permanente. De fato, foi apontado por Eberly *et al.* [50, 51] que existirão instantes em que os termos mais importantes da distribuição entram em fase; nestas horas, ocorre um ‘ressurgimento’ na

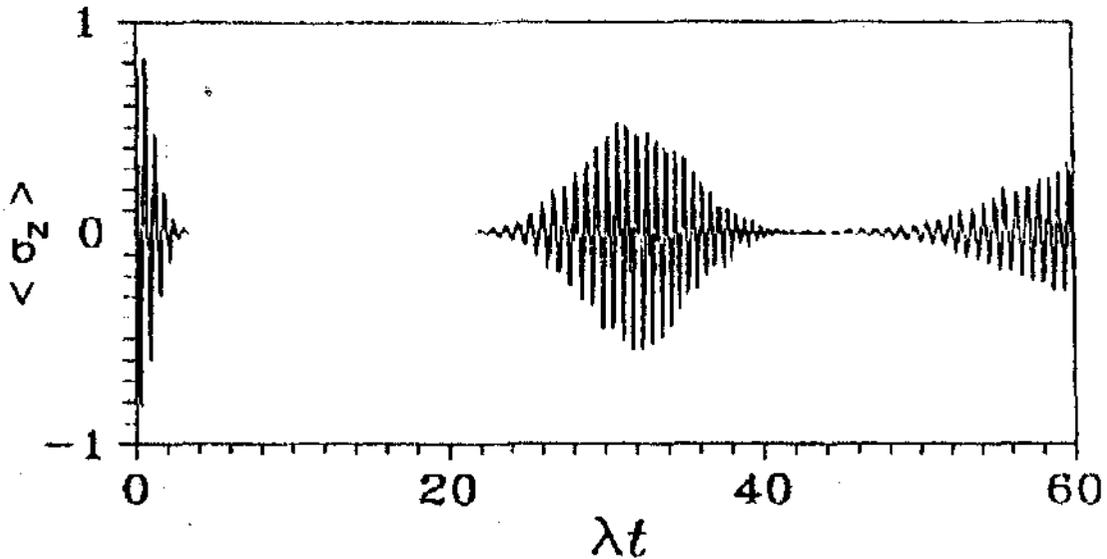


Figura 2-2: 'Colapso' e 'ressurgimentos' na inversão atômica para um átomo inicialmente excitado e um campo inicialmente em um estado coerente com  $|\alpha| = 5$ . (Figura retirada de [52])

inversão. Assumindo que  $P(n)$  tenha um pico simples em  $n = \bar{n} \gg 1$ , os instantes  $t_k$  em que ocorrem estes eventos podem ser estimados considerando-se que a diferença de fase entre as contribuições com  $n$  ao redor de  $\bar{n}$  seja um múltiplo de  $2\pi$ :

$$2k\pi \simeq 2\lambda t\sqrt{\bar{n}+1} - 2\lambda t\sqrt{\bar{n}} \simeq \frac{\lambda t}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (2.59a)$$

$$\rightarrow t_k \simeq \frac{2k\pi\sqrt{\bar{n}}}{\lambda} \quad (2.59b)$$

Um exemplo típico e importante (fig. 2-2) ocorre quando o estado inicial do campo é um estado coerente<sup>22</sup>  $|\alpha\rangle$ , com distribuição de fótons Poissoniana

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.60a)$$

<sup>22</sup>Estes estados bem-conhecidos do campo quantizado possuem uma grande quantidade de propriedades importantes (vide e.g. [40]). Por exemplo, são os estados que melhor descrevem um campo de radiação clássica.

$$\rightarrow P(n) = \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}; \bar{n} = |\alpha|^2 \quad (2.60b)$$

Podemos ver claramente na figura que, após uma oscilação inicial rapidamente amortecida, a inversão aparenta estar dormente, apenas para ressurgir em torno do instante  $t_1 \simeq 31\lambda^{-1} \simeq 10\pi\lambda^{-1}$  (em concordância com (2.59a))<sup>23</sup>. De fato, estendendo o gráfico para tempos mais longos [51], pode-se mostrar que ocorre uma seqüência de colapsos e ressurgimentos nos instantes múltiplos de  $t_1$ , sendo cada ressurgimento subsequente mais amortecido e mais largo do que o anterior. Esta seqüência subsiste até que, para  $t$  suficientemente grande, deixa de haver uma separação bem-definida entre ressurgimentos consecutivos, e a interferência entre eles destrói o padrão.

Substituindo (2.60b) em (2.58), obtém-se a expressão em série que descreve esta evolução:

$$\langle \sigma_{\pm} \rangle (t) = \pm \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos(2\lambda\sqrt{n+1}t) \quad (2.61)$$

Devido às frequências de Rabi serem proporcionais a  $\sqrt{n}$ , não se conhece uma fórmula explícita para este somatório; entretanto, expressões aproximadas podem ser obtidas usando métodos assintóticos. Narozhny *et al.* [51] forneceram uma aproximação válida para este caso particular; posteriormente, Fleischhauer e Schleich ([53], v. também [39]) obtiveram pelo método de fases estacionárias uma fórmula mais geral para a evolução da inversão, válida quando o estado inicial é da forma  $|g\rangle_A \otimes |\psi\rangle_C$ :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_Z \rangle (t) \simeq & - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} P\left(n = \frac{\lambda^2 t^2}{4k^2 \pi^2}\right) \frac{\lambda t}{\pi \sqrt{2k^3}} \cos\left(\frac{\lambda^2 t^2}{2k\pi} - \frac{\pi}{4}\right) - \\ & - \frac{1}{2} P(0) - \int_0^{\infty} dn P(n) \cos(2\lambda t \sqrt{n}) \end{aligned} \quad (2.62)$$

O primeiro termo desta expressão (o somatório em  $k$ ) descreve a estrutura dos ressurgimentos na inversão. Para ver isto, notamos que a dependência temporal de cada elemento do somatório é governada por três fatores independentes: (i) uma função cossenoidal rapidamente

<sup>23</sup>Esta previsão teórica foi recentemente demonstrada experimentalmente [15], fornecendo assim evidência direta para a discretização do campo eletromagnético quantizado.

oscilante, (ii) uma amplitude linear em  $t$  (portanto lentamente variável), que decresce à medida em que  $k$  aumenta, e (iii) um envelope *dependente do formato da distribuição de fótons*<sup>24</sup>  $P(n)$ , centrado no instante  $t_k$  correspondente ao ponto médio  $\bar{n}$  de  $P(n)$  :

$$t_k = \frac{2k\pi\sqrt{\bar{n}}}{\lambda} \quad (2.63)$$

e com largura no tempo dependente da variância  $\sigma = \sqrt{\langle n - \bar{n} \rangle^2}$  de  $P(n)$  :

$$\Delta t_k = \frac{4\pi^2 k^2}{\lambda^2 t_k} = \frac{2k\pi}{\lambda} \frac{\sigma}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (2.64)$$

Assim, se a distribuição  $P(n)$  for suficientemente estreita, os primeiros termos do somatório estarão separados no tempo ( $t_k + \Delta t_k \ll t_{k+1}$ ), e cada um dá origem a um ressurgimento isolado, com centro aproximadamente no instante  $t_k$  (o que confere com a estimativa (2.59a). Isto indica que a estrutura de colapsos/ressurgimentos na inversão está presente em uma larga classe de estados iniciais do campo, não apenas os coerentes.

À medida em que  $k$  cresce, os ressurgimentos correspondentes têm amplitude amortecida pela dependência com  $k^{-3/2}$  em (2.62); simultaneamente, de acordo com (2.64), sua largura cresce com  $k$ . Assim, para  $k$  suficientemente grande ( $k \gtrsim \frac{\bar{n}}{\sigma}$ ), ressurgimentos consecutivos ficam superpostos, e a estrutura de colapsos/ressurgimentos deixa de ser visível. Se  $P(n)$  for muito largo, pode ocorrer de nem o primeiro ressurgimento ser bem caracterizado.

Quanto aos outros termos em (2.62): o segundo, constante no tempo, representa *metade* da contribuição da componente em  $|g, 0\rangle$  do estado; a outra metade está embutida no último termo, o qual é a 'versão contínua' do somatório (2.58). Assim como naquele caso discreto, a interferência destrutiva das várias funções  $\cos(2\lambda t\sqrt{n})$  implica que este termo assume valores relevantes apenas próximo de  $t = 0$ , caindo a zero rapidamente. Entretanto, como aqui temos um *contínuo* de frequências, não há a ocorrência de um 'refasamento' em um tempo posterior; assim, este termo é o que descreve o *colapso* inicial do estado [53].

---

<sup>24</sup>Mais especificamente  $P(n)$  representa aqui uma 'versão contínua' da distribuição (discreta) de fótons do campo. Assim, no caso por exemplo de um estado coerente  $|\alpha\rangle$  com  $\alpha$  suficientemente grande, podemos substituir a distribuição Poissoniana por uma Gaussiana.

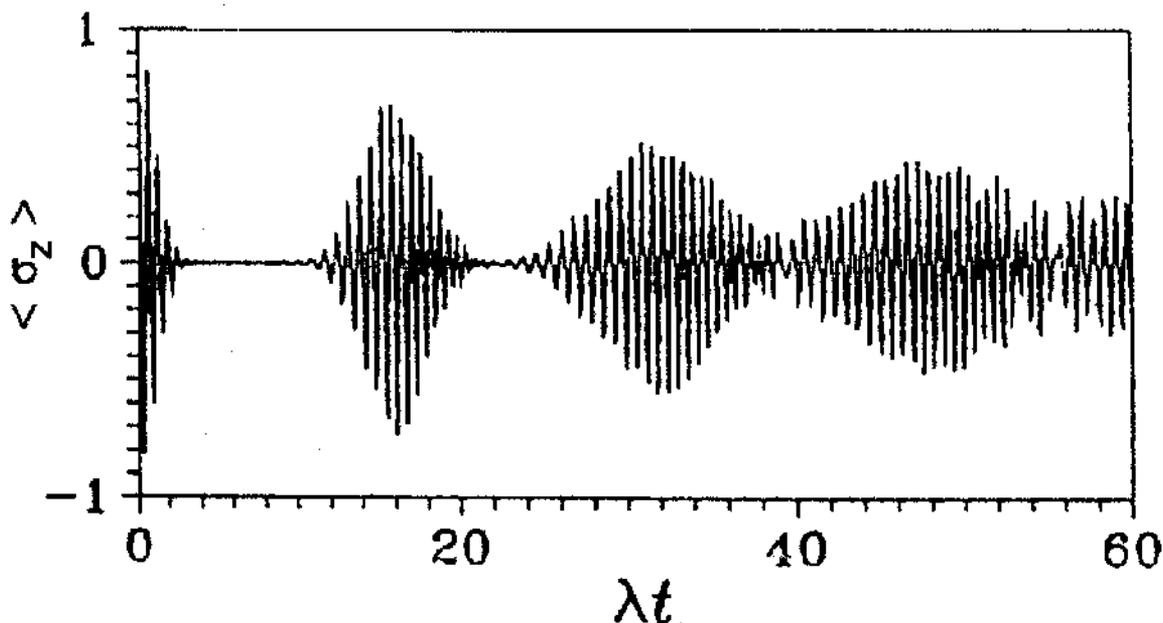


Figura 2-3: 'Colapso' e 'ressurgimentos' na inversão para um átomo inicialmente excitado e o campo em uma superposição  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$  de dois estados coerentes com  $|\alpha| = 5$ . (Figura retirada de [52])

### Generalizações

A expressão (2.62) não é válida para um estado inicial arbitrário. Ao longo da sua dedução (v. [53] e apêndice A) é necessário assumir que o envelope  $P(n)$  seja suficientemente suave em comparação com a fase

$$\exp(iS_k(n, t)) = \exp(i\pi kn - i\lambda t\sqrt{n}) \quad (2.65)$$

Esse resultado não pode assim ser usado diretamente para descrever situações em que a distribuição inicial  $P(n)$  tem fortes oscilações de um valor de  $n$  para o seguinte. Um exemplo onde isto acontece é quando o estado inicial do campo é uma *superposição* de dois estados coerentes com amplitudes  $180^\circ$  fora de fase [52, 54]:

$$|\alpha_{par}\rangle_C = N_+ [|\alpha\rangle_C + |-\alpha\rangle_C] \quad (2.66a)$$

$$|\alpha_{impar}\rangle_C = N_- [|\alpha\rangle_C - |-\alpha\rangle_C] \quad (2.66b)$$

onde os fatores de normalização são:

$$N_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm e^{-|\alpha|^2})}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ para } |\alpha| \gtrsim 3 \quad (2.67)$$

Estes estados são geralmente conhecidos como estados tipo 'gato de Schrödinger'<sup>25</sup> (gatos 'par' e 'ímpar', respectivamente). Da expansão (2.60a), vemos que as suas distribuições de fótons contêm respectivamente apenas as componentes pares e ímpares da distribuição Poissoniana de um estado coerente:

$$|\alpha_{par}\rangle = \sqrt{2} \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{2n!}} |2n\rangle \quad (2.68a)$$

$$|\alpha_{impar}\rangle = \sqrt{2} \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle \quad (2.68b)$$

Podemos ver na figura ( fig. 2 - 3) que se o sistema átomo-campo é preparado no estado

$$|\psi(t=0)\rangle = |e\rangle_A \otimes |\alpha_{par}\rangle_C \quad (2.69a)$$

então também há colapsos e ressurgimentos na evolução temporal da inversão, porém com o *dobro* da frequência do caso de um campo inicialmente coerente. Isto pode ser compreendido intuitivamente, nos moldes da estimativa (2.59a) acima, se notarmos que a diferença entre cada par de frequências de Rabi consecutivas presentes nesses estados é agora:

$$2\lambda t \sqrt{2(n+1)} - 2\lambda t \sqrt{2n} \simeq \frac{2\lambda t}{\sqrt{2n}} \quad (2.70)$$

o que leva a ressurgimentos nos instantes

$$t_k \simeq \frac{k\pi\sqrt{2n}}{\lambda} \quad (2.71)$$

(metade dos tempos correspondentes em (2.59a) para os mesmos valores de  $k$ ).

Também é possível descrever este comportamento através de uma expressão aproximada

<sup>25</sup>O motivo desta alusão ao famoso *Gedankenexperiment* de Schrödinger [1] é que, vistos como estados de um oscilador harmônico, (2.68a e b) representam superposições de pacotes de onda 'espacialmente separados' [28].

como (2.62), desde que se leve em conta desde o início que apenas os termos de 'n' par estão presentes na série (2.58). Neste caso, como mostramos no apêndice A, se a distribuição de fótons  $P(2n)$  como função de n for suave, é possível realizar um desenvolvimento semelhante ao de Fleischhauer e Schleich, obtendo para o k-ésimo ressurgimento:

$$\langle \sigma_Z(t) \rangle \simeq \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} P\left(2n = \frac{\lambda^2 t^2}{k^2 \pi^2} - 1\right) \frac{\lambda t}{\pi \sqrt{k^3}} \cos\left(\pm \frac{\lambda^2 t^2}{2k\pi} + \pi k - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} P(0) \cos(2\lambda t) + \int_0^{\infty} dn P(2n) \cos(2\lambda t \sqrt{2n+1}) \quad (2.72)$$

(Novamente, nessas expressões a distribuição discreta  $P(2n)$  deve ser substituída por uma 'versão contínua' apropriada). Podemos ver que, neste caso, cada termo do somatório está centrado em torno de

$$t_k \simeq \frac{k\pi \sqrt{2\bar{n} + 1}}{\lambda} \quad (2.73)$$

essencialmente concordando com a estimativa (2.71). Os valores ímpares de k dão origem portanto aos ressurgimentos 'extras' presentes na figura 2-3, enquanto que os valores pares geram aqueles nas mesmas posições dos da figura 2-2.

Nos exemplos acima assumimos sempre que o átomo inicia a interação completamente excitado ou desexcitado. No entanto, foi mostrado por Zaheer e Zubairy (ZZ) [55] que, se a sua condição inicial for uma *superposição* destes dois estados, os ressurgimentos podem ser dramaticamente alterados, chegando a ser quase totalmente suprimidos ('trapping' atômico). Isto pode visto na fig. (2-4) para o caso do estado inicial

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_A + |g\rangle_A) \otimes |\alpha\rangle_C \quad (2.74)$$

Mais geralmente, ZZ mostraram (numericamente) que, para um estado inicial

$$|ZZ(\alpha, \gamma, \xi)\rangle \equiv \left( \cos(\gamma) |e\rangle_A + e^{(-i\xi)} \sin(\gamma) |g\rangle_A \right) \otimes |\alpha\rangle_C, \quad (2.75)$$

a supressão dos ressurgimentos depende criticamente da *diferença de fase*  $\nu_\alpha - \xi$  (onde  $\nu_\alpha$  é a fase de  $\alpha$ ), sendo máxima para  $\nu_\alpha - \xi = 0$  (como na figura) e nula para  $\nu_\alpha - \xi = \frac{\pi}{2}$ . Este

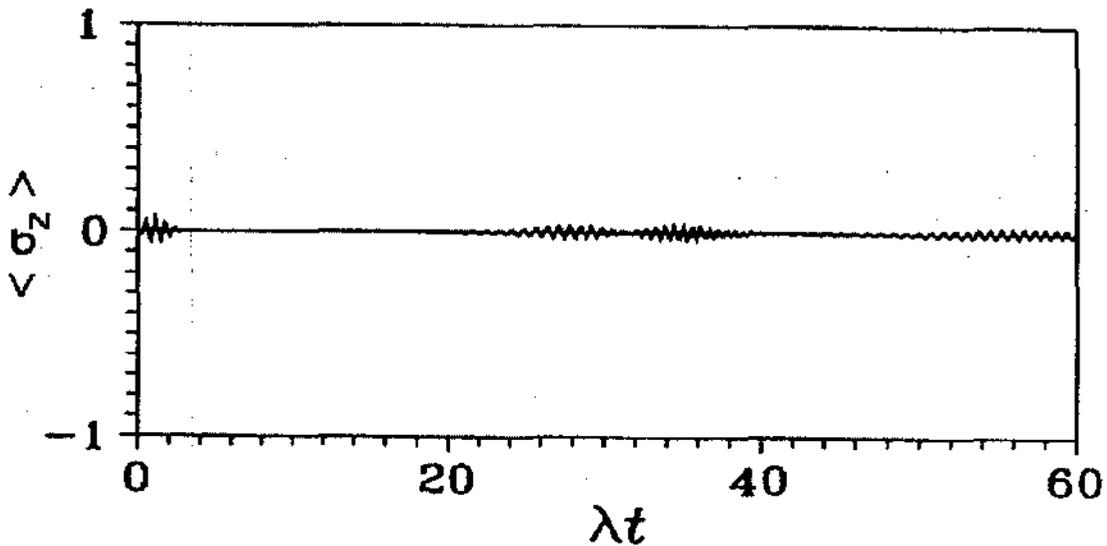


Figura 2-4: ‘Colapso’ e ‘ressurgimentos’ na inversão para o átomo inicialmente em uma superposição  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$  dos estados excitado e fundamental, e o campo inicialmente em um estado coerente  $|\alpha\rangle$  com  $|\alpha| = 5$  (Figura retirada de [52]).

comportamento não foi explicado de maneira satisfatória, sendo atribuído a uma assim chamada “interferência entre o dipolo atômico e o modo da cavidade”.

No capítulo 4 forneceremos uma explicação, com base em uma generalização apropriada do método de Fleischhauer e Schleich [53]. Veremos que o essencial para a supressão ou não dos ressurgimentos nestes estados é a importância relativa entre os estados vestidos  $|n\pm\rangle$  para valores de  $n$  próximos a  $\bar{n}$ . Este ponto de vista será útil para compreender fenômenos semelhantes que ocorrem devido a outras formas de coerência inicial (não necessariamente apenas atômica)<sup>26</sup>.

<sup>26</sup>Nota adicionada na versão final: Após a finalização deste trabalho, descobrimos a existência de dois trabalhos de Cirac e Sánchez-Soto [56, 57] em que esta questão também foi abordada. A sua conclusão (de que o ‘trapping’ exato se deve à existência de uma diferença de fase bem-determinada entre o campo e o dipolo atômico) fornece uma imagem física interessante para este fenômeno, a qual é de fato válida no caso dos estados . Entretanto, ela não é capaz de explicar a forma detalhada do ‘trapping’ quando este não é perfeito, e simplesmente não se aplica aos casos que abordaremos adiante, nos quais átomo e campo estarão emaranhados.

### 2.3.3 Defasamento Dispersivo de Estados Coerentes

No limite dispersivo, a interação efetiva (2.50) leva a evoluções temporais completamente diferentes daquelas geradas pela interação ressonante (2.18). Em particular, como não há troca de excitação entre o campo e o átomo, não ocorrem os colapsos e ressurgimentos na inversão vistos acima (de fato, é fácil ver que neste caso a inversão é uma constante do movimento!).

Ao invés disso, há um defasamento de cada componente  $|e, n\rangle$  ou  $|g, n\rangle$  de acordo com a intensidade (número de fótons do campo). Isto pode ser visto calculando diretamente o operador de evolução para o sistema a partir do Hamiltoniano (2.50) :

$$\begin{aligned}
 U_{MJC}^{eff} &= \exp\left(-\frac{it\mathbf{H}_{MJC}^{eff}}{\hbar}\right) = \\
 &= |e\rangle\langle e| \otimes \exp\left(\frac{-i\lambda^2 t}{\delta} \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\right) + |g\rangle\langle g| \otimes \exp\left(\frac{i\lambda^2 t}{\delta} \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\right) \\
 &= |e\rangle\langle e| \otimes \exp\left(\frac{-i\lambda^2 t}{\delta} \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\right) + |g\rangle\langle g| \otimes \exp\left(\frac{i\lambda^2 t}{\delta} \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\right)
 \end{aligned} \tag{2.76a}$$

Assim, um estado inicial da forma

$$(a|e\rangle + b|g\rangle) \otimes |n\rangle \tag{2.77}$$

evolui para

$$\exp\left(\frac{-i\lambda^2 t}{\delta}\right) \left( a \exp\left(\frac{-i(n+1)t\lambda^2}{\delta}\right) |e\rangle + b \exp\left(\frac{in\lambda^2 t}{\delta}\right) |g\rangle \right) \otimes |n\rangle \tag{2.78}$$

Notamos que, se o átomo estiver inicialmente no estado excitado ou fundamental, a interação não emaranha os dois sistemas. Por exemplo, se o campo iniciar a interação em um estado coerente  $|\alpha\rangle$ , com expansão (2.60a), o estado evolui da forma :

$$\begin{aligned}
 |g\rangle \otimes |\alpha\rangle &\rightarrow |g\rangle \otimes \exp\left(\frac{i\lambda^2 t}{\delta} \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\right) |\alpha\rangle = \\
 &= \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( \alpha \exp\left(\frac{i\lambda^2 t}{\delta}\right) \right)^n |n\rangle =
 \end{aligned}$$

$$= |g\rangle \otimes \left| \alpha \exp\left(\frac{i\lambda^2 t}{\delta}\right) \right\rangle \quad (2.79)$$

Neste caso o campo permanece em um estado coerente; o efeito da interação dispersiva é apenas *defasar* a sua amplitude  $\alpha$  (notamos que esta defasagem independe de  $\alpha$ ).

Por outro lado, se o estado inicial atômico for uma superposição de  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , cada uma dessas componentes dá origem a um defasamento diferente no campo, levando à criação de um estado emaranhado. Por exemplo, se o campo estiver inicialmente em um estado coerente, então:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) \otimes |\alpha\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \exp\left(\frac{-i\lambda^2 t}{\delta}\right) |e\rangle \otimes \left| \alpha \exp\left(\frac{-i\lambda^2 t}{\delta}\right) \right\rangle + |g\rangle \otimes \left| \alpha \exp\left(\frac{i\lambda^2 t}{\delta}\right) \right\rangle \right) \quad (2.80)$$

## 2.4 O Aparato Experimental

Quando o MJC foi primeiro sugerido (por Jaynes, em 1963 [17]) como um modelo quântico elementar para a interação radiação matéria, ele foi considerado pouco realista para os padrões experimentais da época, devido à dificuldade de se preparar um sistema átomo-campo suficientemente bem isolado. Desde meados dos anos 80, porém, avanços espetaculares tanto nas técnicas de preparação e manipulação de átomos individuais [58, 59] como nas de contenção de modos quantizados do campo em cavidades ressonantes [60] tornaram possível uma realização experimental bastante fiel do MJC [14]. Uma montagem típica envolve um feixe de átomos de dois níveis (átomos de Rydberg circulares) sendo enviados através de uma cavidade ressonante (aonde interagem com o campo de acordo com o MJC), e em seguida sendo detectados em um de seus estados de energia. No presente estado-da-arte, essas experiências permitem acesso direto às consequências peculiares do emaranhamento quântico<sup>27</sup> [62, 63].

Nesta seção, descrevemos os componentes fundamentais dessas experiências, baseando-nos no trabalho do grupo de S. Haroche em Paris. Para maiores detalhes, ver [14, 48] e referências

---

<sup>27</sup>Mais recentemente ainda, tem surgido a possibilidade de *simular* uma interação tipo Jaynes-Cummings usando um fon confinado em uma armadilha eletromagnética [61]. Neste caso, o 'oscilador harmônico' do MJC representa não um modo do campo quantizado, mas a própria oscilação *mecânica* do fon no potencial da armadilha. É possível acoplar esta oscilação com os níveis internos do fon usando pulsos de laser, levando a uma interação que pode ser feita aproximadamente igual à do MJC.

lá contidas.

### 2.4.1 Átomos de Rydberg

Átomos de Rydberg [16, 64, 65] são átomos, em geral de elementos alcalinos, nos quais um dos elétrons se encontra excitado para um nível com número quântico principal  $n$  extremamente elevado (um valor típico é  $n \gtrsim 50$ ). Devido à blindagem do núcleo pelos demais elétrons, (que formam uma camada fechada no caso dos alcalinos), podemos tratá-lo na prática como um estado hidrogenóide muito excitado.

A presença do elétron “desgarrado” torna os átomos de Rydberg ferramentas ideais para a interação com campos eletromagnéticos, por diversos motivos:

- Devido ao seu raio orbital médio ser extremamente grande (da ordem de  $n^2$  vezes o raio do estado fundamental), os átomos de Rydberg possuem um momento de dipolo médio ( $\vec{\mu}$ ) igualmente elevado, possibilitando uma forte interação com o campo elétrico via o Hamiltoniano (2.7).
- A separação entre os níveis de energia atômicos cai aproximadamente como  $n^{-3}$ ; para os estados de Rydberg, as transições para estados vizinhos têm frequências da ordem de dezenas de GHz., correspondendo a comprimentos de onda na faixa de alguns milímetros a centímetros. Estas dimensões possibilitam a construção de cavidades metálicas ressonantes com estas transições.
- Os tempos de decaimento espontâneo (tempos de vida) desses átomos são extremamente longos, chegando a  $10^{-1} - 10^{-2} s$  no caso de átomos de Rydberg *circulares* (com momento angular máximo  $l = n - 1$ ). Estes intervalos são muito maiores do que a escala de tempo típica em que ocorrem as experiências (da ordem de  $10^{-3} s$ ). Assim, para todos os efeitos os átomos de Rydberg podem ser considerados *estáveis*. Isto implica finalmente que se dois estados de Rydberg vizinhos  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  forem acoplados pela interação com um campo externo próximo da ressonância, então podemos considerá-los efetivamente como formando um *sistema de dois níveis*.
- Como são muito excitados, os átomos de Rydberg são facilmente ionizados, permitindo a sua detecção por ionização (v. abaixo).

A maior dificuldade para a utilização de átomos de Rydberg é a sua *preparação*. Para as experiências envolvendo a interação com o campo em cavidades, é preciso gerar um feixe de átomos de Rydberg preparados em estados específicos, com velocidades e tempo de emissão controlados.

A excitação atômica é realizada por uma complexa seqüência de pulsos [59], capazes de produzir um estado atômico  $>95\%$  *puro* nos níveis circulares  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ . Nas experiências do grupo de Paris, utiliza-se em geral uma transição entre dois estados hiperfinos do rubídio com  $n = 51$  e  $50$ , e com frequência de transição  $\omega_a/2\pi = 51.1$  GHz. Este processo é pulsado, com uma janela de tempo de  $2\mu s$  durante a qual um átomo é produzido com certa probabilidade (a probabilidade de que mais de um átomo seja produzido de uma vez pode ser tornada desprezível). Finalmente, estes átomos (que possuem inicialmente uma distribuição térmica de velocidades), podem ser colimados em um feixe e selecionados de acordo com a velocidade desejada (por exemplo, por efeito Doppler) A precisão é de  $\pm 0.4$  m/s para velocidades típicas da ordem de algumas dezenas a algumas centenas de m/s [63]. O resultado é que, em qualquer instante, a posição de cada átomo emitido é conhecida com uma precisão de  $\pm 1$  mm.

## 2.4.2 Cavidades Ressonantes Supercondutoras

As 'cavidades' utilizadas pelo grupo de Paris são "abertas", formadas por dois espelhos côncavos de nióbio, em uma configuração tipo Fabry-Perot [14, 15]. O campo eletromagnético entre eles é assim quantizado em uma direção específica. Os espelhos podem ser resfriados a menos de  $1K$ , de modo a torná-los supercondutores (melhorando a refletividade) e também a evitar a presença de fótons térmicos indesejados. A separação entre eles é de poucos centímetros, permitindo a presença de modos na faixa de microondas (escolhidos naturalmente com frequências próximas da ressonância com a transição de  $51GHz$  dos átomos de Rydberg). Para os modos tipicamente utilizados, e a transições atômicas mencionadas acima, a constante de acoplamento é  $\lambda/2\pi \simeq 25kHz$ .

Na realidade, este é um acoplamento *efetivo*, visto que as amplitudes  $|\vec{E}_m(\vec{r})|$  das componentes do campo quantizado entre os espelhos não são uniformes, possuindo um máximo em um ponto central e decaindo a zero no exterior. Isto implica que a constante de acoplamento  $\lambda$  (2.15) *varia* à medida em que o átomo atravessa a cavidade, levando assim a uma interação

átomo-campo *dependente do tempo*.

$$H_{int} = \lambda(t) (\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger) \quad (2.81)$$

Em princípio, esta dependência modificaria os autoestados do modelo de Jaynes-Cummings, introduzindo transições entre os estados vestidos. Na prática, porém [14], a velocidade atômica é suficientemente baixa e a variação espacial na amplitude do modo suficientemente lenta para que se possa aplicar o *teorema adiabático* da mecânica quântica [66] em ordem zero. Isto significa que os autoestados do Hamiltoniano dependente do tempo continuam sendo os mesmos estados vestidos, mas com energias  $E_{n\pm}(t)$  (e correspondentes frequências de Rabi  $\Omega_n(t)$ ) variando continuamente de acordo com a posição do átomo na cavidade. Deste modo, não há uma transição abrupta quando o átomo penetra na cavidade. O resultado é que, embora rigorosamente o estado do sistema átomo-campo não evolua de acordo com o Hamiltoniano (2.18), em qualquer instante dado é possível encontrar uma constante de acoplamento 'efetiva' que levaria ao mesmo estado (a qual depende da forma detalhada da distribuição espacial do modo). Por simplicidade, portanto, podemos ignorar esta variação temporal, descrevendo o sistema com o MJC usual, sem alterar a física do problema.

Aplicando uma pequena voltagem entre os espelhos da cavidade, é possível alterar (por efeito Stark) a separação dos níveis de energia de um átomo no seu interior. Deste modo, pode-se modificar a dessintonia  $\delta = \omega_a - \omega_c$  entre os dois sistemas, desde a ressonância ( $\delta = 0$ ) até um valor tão grande que o Hamiltoniano dispersivo (2.50) possa ser desprezado, efetivamente 'desligando' a interação. Esta alteração pode ser feita em um intervalo muito curto, inclusive enquanto o átomo está 'em vôo'. Como a posição deste último é conhecida em cada instante (v. acima), é possível então controlar de maneira precisa o tempo de interação entre os dois sistemas<sup>28</sup>.

A preparação direta do campo na cavidade é uma tarefa simples, se comparada à dos estados atômicos, porém limitada a alguns estados específicos. O mais simples de ser preparado é naturalmente um campo térmico, com um espectro de corpo negro. As temperaturas acessíveis neste tipo de cavidade porém não são muito grandes, devido à necessidade de manter os espelhos

---

<sup>28</sup>Naturalmente, o tempo *máximo* de interação entre ambos ainda é determinado pela velocidade do átomo e o comprimento da cavidade.

supercondutores. Outro estado que pode ser gerado com facilidade é um estado *coerente*: isto pode ser feito acoplando a cavidade (via uma guia de onda) ao campo produzido por uma fonte clássica de radiação (uma corrente oscilante) ressonante com a frequência da cavidade [40]. Variando o tempo de interação e amplitude do campo clássico, é possível escolher a amplitude  $\alpha$  do estado coerente  $|\alpha\rangle$  gerado.

O maior problema enfrentado para a utilização dessas cavidades é a *dissipação* do campo devido às imperfeições dos espelhos. Esta dissipação é medida pelo chamado ‘fator de qualidade’ (ou fator  $Q$ ), essencialmente o produto entre a frequência  $\omega_c$  de ressonância da cavidade pelo tempo de decaimento típico para um fóton do campo. As cavidades atualmente em utilização pelo grupo de Paris têm fatores  $Q$  da ordem de  $10^{-7} - 10^{-8}$  [67, 63], o que para  $\omega_c/2\pi \simeq 50\text{GHz}$  significa tempos de decaimento médio para um fóton da ordem de  $10^{-4}\text{s} - 10^{-3}\text{s}$ , longos o bastante para se observar o ‘colapso’ e ‘ressurgimento’ da inversão atômica [67]. Cavidades ainda melhores ( $Q = 10^9 - 10^{10}$ ) poderão ser utilizadas em um futuro próximo[62]<sup>29</sup>

### 2.4.3 Zonas de Ramsey e Defasadores Atômicos

Além de preparar os átomos de Rydberg em estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , também é possível manipular seus estados diretamente fazendo-os interagir com campos eletromagnéticos em situações onde estes podem ser descritos de forma *clássica*.

Por exemplo: se o átomo atravessa uma cavidade *clássica* (de baixo fator  $Q$ ), contendo um campo monocromático ressonante com a transição atômica, a interação dipolar resultante pode ser descrita por um Hamiltoniano análogo ao (2.7), apenas substituindo o campo quantizado por um campo clássico. Este é um problema clássico da mecânica quântica (primeiro estudado por I.I. Rabi no contexto de ressonância magnética nuclear [68]), cuja solução pode ser encontrada em vários livros-texto (e.g., [47]). Mostra-se que ele é matematicamente idêntico a diagonalizar cada componente  $2 \times 2$  do Hamiltoniano do MJC. O operador de evolução resultante (que age

---

<sup>29</sup>Outros grupos [60] já produziram cavidades com fatores  $Q$  desta ordem, as quais porém não são do tipo aberto.

apenas no espaço de estados atômico) pode ser escrito em termo da base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  na forma:

$$U(t) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & e^{-i\varphi} \sin(\Omega t) \\ -e^{i\varphi} \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

onde  $\Omega$  (a 'frequência de Rabi' original) depende da intensidade do campo e do momento do dipolo atômico, e  $\varphi$  da fase do campo.

O papel dessas regiões, conhecidas como 'zonas de Ramsey' [69] é portanto 'rodar' o estado atômico no espaço de Hilbert, superpondo as componentes  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ . Um 'quarto de volta' (em que um átomo inicialmente no estado  $|e\rangle$  é deixado em uma superposição da forma  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + e^{-i\varphi}|g\rangle)$ ) é conhecido como um 'pulso  $\frac{\pi}{2}$ ' (por razões óbvias), e uma 'meia-volta' ( $|e\rangle \rightarrow e^{-i\varphi}|g\rangle; |g\rangle \rightarrow -e^{i\varphi}|e\rangle$ ) como um 'pulso  $\pi$ '.

As zonas de Ramsey 'rodam' o estado atômico, mas não mudam a *fase relativa* entre as suas componentes. Para realizar isto, basta utilizar uma região com campos estáticos fracos; neste caso, através dos efeitos Stark ou Zeeman, os níveis atômicos  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  são deslocados de quantidades diferentes, quebrando a sua degenerescência. Assim, as fases  $\exp(-i\omega_e\tau)$  e  $\exp(-i\omega_g\tau)$  adquiridas pelas componentes do estado atômico após este passar um tempo  $\tau$  sob a ação do campo serão diferentes. Chamamos então estas regiões de *defasadores atômicos*.

Combinando as zonas de Ramsey e os defasadores, é possível efetuar qualquer manipulação desejada (i.e., qualquer operação do grupo  $SU(2)$ ) sobre o vetor de estado atômico.

#### 2.4.4 Detectores por Ionização Seletiva

Devido à fragilidade do campo no interior da cavidade, os observáveis atômicos são os mais diretamente acessíveis à medida. Especificamente, aproveitando o fato de que o elétron exterior dos átomos de Rydberg é muito fracamente ligado, a energia (ou inversão) atômica pode ser medida por *ionização seletiva*. Isto é feito passando o átomo através de duas placas, entre as quais há uma voltagem suficientemente intensa para ionizá-lo se estiver no estado excitado  $|e\rangle$ , mas não o bastante se estiver no estado  $|g\rangle$ . Idealmente portanto, a detecção de um sinal corresponde à medida do primeiro estado, e a *ausência* de detecção à do segundo! (Lembramos que, em princípio, conhece-se com precisão a posição do átomo em cada instante, de modo que é possível saber se ele passou ou não pelo detector).

Na prática, porém, os detectores não são muito eficientes, fornecendo um sinal em apenas 40% dos átomos ionizados [62, 63]. Deste modo, é conveniente haver um segundo detector, este sim capaz de ionizar um átomo no estado  $|g\rangle$ ; neste caso, se nenhum dos detectores registrar o átomo, a experiência deve ser refeita. Mesmo quando um sinal é detectado, existe ainda uma chance de cerca de 10% de ocorrer uma leitura incorreta, o que traz problemas para experiências em que os procedimentos a serem seguidos dependem do valor desta medida.

Notamos finalmente que, apesar de estes detectores medirem diretamente a inversão, também é possível usá-los para obter o valor das outras grandezas atômicas. Para isto, basta 'rodar' o estado atômico de forma conhecida (usando as zonas de Ramsey), antes de detectá-lo. Não é difícil mostrar que, após uma rotação adequada, a medição de  $\langle\sigma_z\rangle$  (inversão) pode ser usada para determinar, por exemplo, o valor de  $\langle\sigma_x\rangle$  ou  $\langle\sigma_y\rangle$  no estado original.

## Capítulo 3

# Preparação de Estados Pré-Correlacionados do Sistema Átomo-Campo

Neste capítulo, vamos investigar algumas possibilidades práticas de se preparar um estado correlacionado de um átomo de dois níveis com um modo de uma cavidade, *sem* que estes dois sistemas tenham interagido diretamente (estados ‘*pré-correlacionados*’). A interação átomo-campo deve poder ocorrer apenas *após* a geração do estado, de forma a permitir a observação da evolução do sistema conjunto a partir de condições iniciais não-fatoráveis. Como veremos no próximo capítulo, estes estados serão muitas vezes diferentes daqueles que poderiam ser obtidos simplesmente por interação direta a partir de um estado não-correlacionado.

De um modo geral, as estratégias experimentais sugeridas aqui para a preparação destes estados envolvem a introdução de um sistema auxiliar que serve de ‘intermediário’ entre átomo e campo, interagindo com ambos em seqüência. A idéia central que exploramos é primeiro usar estas interações para emaranhar o sistema auxiliar com tanto o átomo como o campo, e em seguida *desemaranhá-lo*, deixando porém átomo e campo correlacionados. Os esquemas que sugerimos para isto são baseados nas experiências descritas na seção (2.4) envolvendo átomos de Rydberg em cavidades ressonantes supercondutoras.

Deve-se mencionar que existe ainda a possibilidade de que correlações iniciais entre átomo

e campo também possam ser criadas através de efeitos não-adiabáticos no momento de entrada do átomo na cavidade [70]. Entretanto, a existência destes efeitos depende diretamente da geometria da cavidade e do modo do campo utilizados. Como discutimos anteriormente, as cavidades do grupo de Paris são projetadas para evitar a ocorrência de efeitos não-adiabáticos; por este motivo, não consideraremos tais casos aqui.

### 3.1 Interação e Correlação

Como mencionamos na Introdução, um dos aspectos intrigantes da mecânica quântica é o fato de que *interação* gera *correlação*. Em outras palavras, dados dois sistemas quânticos inicialmente preparados de forma independente (portanto descritos por um estado fatorável), uma interação entre eles irá em geral emaranhá-los, destruindo a sua identidade individual. Esta propriedade está no coração da evolução dinâmica de sistemas compostos, e exprime apenas o simples fato de que os autoestados dos Hamiltonianos de interação destes sistemas não são em geral estados fatoráveis.

Aqui estaremos interessados em gerar correlação entre dois sistemas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  *sem* a existência de interação direta entre eles, através da intermediação de um sistema auxiliar  $\Gamma_X$  (vide eq. (0.2)). Especificamente, nas aplicações que consideraremos adiante  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  representarão um átomo e um modo do campo em uma cavidade (ou vice-versa), enquanto  $\Gamma_X$  será em geral uma combinação de outros átomos e cavidades. Vamos desprezar a ação da dissipação (i.e., tanto o decaimento atômico quanto as perdas nas cavidades), de modo que o sistema global  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_X$  será considerado fechado. Assumiremos ainda que podemos descrevê-lo sempre por um estado puro. Então, se conseguirmos manipular estes sistemas como descrito acima, obteremos como desejado um estado pré-correlacionado para o sistema átomo-campo, sem que haja correlações residuais com o sistema auxiliar  $\Gamma_X$ .

É importante frisar esta separação do sistema auxiliar. Como foi comentado na seção 1.2.2, só é possível qualificar como inteiramente quânticas as correlações entre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  se o estado  $|\psi_{12}\rangle$  do subsistema composto  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$  for *puro*. Por sua vez, isto só pode ocorrer se o estado global  $|\psi_{12X}\rangle_{final}$  de  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_X$  for fatorável como em (0.2). Ainda, assumindo que neste instante  $\Gamma_X$  deixa de interagir com os outros subsistemas, então o seu estado deixa de ser

relevante para a evolução subsequente dos demais.

### 3.1.1 Interação Sequencial e Correlações Não-Locais

O processo esboçado acima está intimamente relacionado com o conceito de não-localidade na mecânica quântica [6], já que a maneira mais simples de evitar que  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  interajam é separando espacialmente estes subsistemas. O estabelecimento de um estado como (0.2) significa então a criação de correlações “não-locais” entre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

Para que isto ocorra, o subsistema auxiliar  $\Gamma_X$  tem de poder interagir com os outros dois, distantes um do outro. O meio mais simples de realizar isto é através de uma *interação sequencial*: começando com um estado fatorável do tipo (1.1),  $\Gamma_X$  (ou uma de suas partes) interage primeiro com, por exemplo,  $\Gamma_1$ , obtendo

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_X\rangle \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_X} |\psi_{1X}\rangle \otimes |\psi_2\rangle \quad (3.1)$$

(onde  $|\psi_{1X}\rangle$  é um estado correlacionado de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_X$ ). Em seguida,  $\Gamma_2$  interage com a mesma, ou outra, parte de  $\Gamma_X$ , de forma a ‘desemaranhar’ este subsistema dos outros dois (os quais devem por sua vez se tornar correlacionados):

$$|\psi_{1X}\rangle \otimes |\psi_2\rangle \xrightarrow{\Gamma_X \leftrightarrow \Gamma_2} |\psi_{12}\rangle \otimes |\tilde{\psi}_X\rangle \quad (3.2)$$

Este processo pode ser visto como a criação de um par de sistemas emaranhados não-localmente do ‘tipo EPR’ [2] (no caso,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ). Entretanto, ao contrário das situações usuais envolvendo tais pares, em que os dois sistemas primeiro interagem, estabelecendo uma correlação, e só então são separados espacialmente, aqui a separação é feita desde o início, e a correlação ‘transmitida’ de um ao outro pelo subsistema auxiliar  $\Gamma_X$ .

**Um exemplo: Campos Não-Locais de Microondas** Para ilustrar estas idéias de uma forma mais concreta, podemos utilizar uma proposta de Davidovich et al [71, 72] para a construção de estados não-locais do campo de microondas em duas cavidades<sup>1</sup>. Como este exemplo

---

<sup>1</sup>Para uma discussão de cada um dos componentes da montagem, vide seção 2.4 e referências lá contidas.

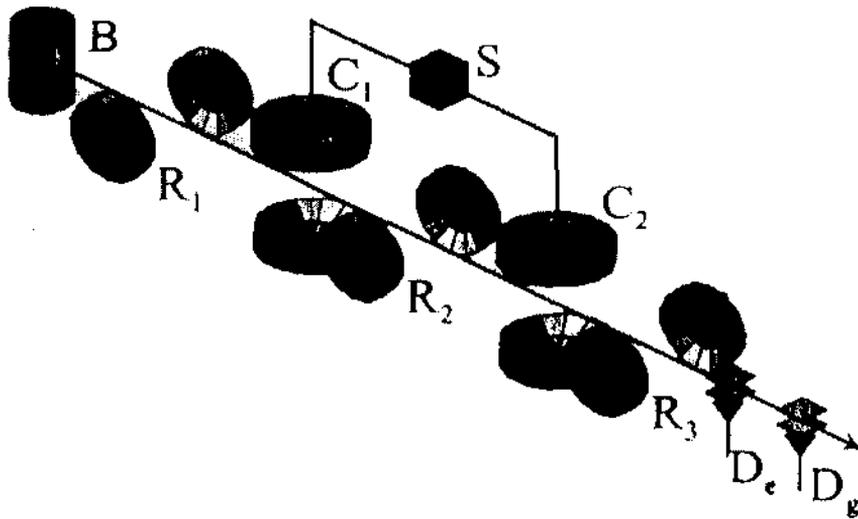


Figura 3-1: Esquema de montagem para a geração de campos não-locais de microondas (retirado de [72]).  $C_1$  e  $C_2$  são cavidades de alto  $Q$ ,  $R_{1-3}$  são zonas de Ramsey e  $S$  é uma fonte clássica de microondas acoplada às cavidades, mas de frequência  $\omega_S = \omega_c + \Delta$  não ressonante com elas.

é de certa forma um protótipo para as aplicações que nos interessarão adiante, vale a pena descrevê-lo em algum detalhe.

Consideremos a montagem indicada na fig.(3 - 1) :  $C_1$  e  $C_2$  são cavidades de alto  $Q$ , ressonantes na frequência  $\omega_c$ ;  $R_{1-3}$  são zonas de Ramsey e  $S$  é uma fonte clássica de microondas acoplada às cavidades, mas de frequência  $\omega_S = \omega_c + \Delta$  não ressonante com elas. Devido a esta não-ressonância, o campo gerado por  $S$ , apesar de acoplado às cavidades, não é capaz de injetar fótons nelas.

Através deste aparato envia-se um átomo de Rydberg ( $A$ ), que interage com as zonas de Ramsey e as duas cavidades, e é posteriormente detectado nos ionizadores  $D_g$  e  $D_e$ . O átomo é preparado em uma superposição de dois níveis  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ : o estado  $|e\rangle$  é escolhido de modo a possuir uma transição para um estado mais excitado  $|i\rangle$  (fig.(3 - 2)), com frequência  $\omega_0 = \omega_c + \delta$  (não ressonante com a cavidade). Como vimos na seção 2.2.2, se a dessintonia  $\delta$  for suficientemente grande, o átomo interagirá dispersivamente com as cavidades, sem trocar fótons (portanto sem alterar o seu estado). Lembramos ainda (v. eq. (2.51)) que nesta situação a

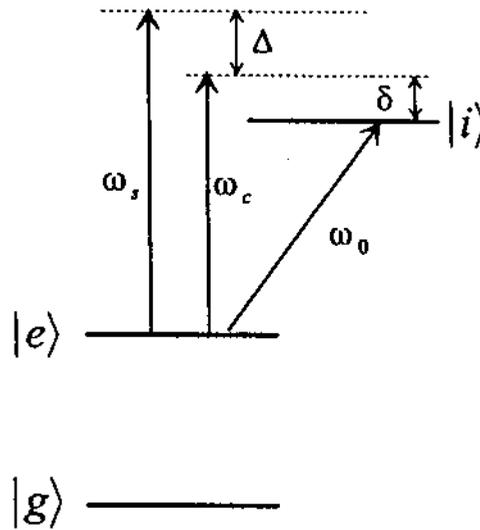


Figura 3-2: Esquema de níveis para a geração de estados não locais de microondas na montagem da fig. 3-1 (retirado de [72]). Os estados  $|e\rangle$  e  $|i\rangle$  são acoplados dispersivamente pelo campo; já o estado  $|g\rangle$  não é afetado (dessintonia muito elevada). Um campo externo é injetado na cavidade se  $\Delta = -\frac{\lambda^2}{8}$  (na figura, o valor de  $\delta = \omega_0 - \omega_c$  é  $< 0$ )

freqüência ressonante da cavidade é efetivamente alterada, visto que a diferença de energia entre os autoestados  $|e\rangle \otimes |n\rangle$  e  $|e\rangle \otimes |n+1\rangle$  passa a ser  $\hbar(\omega_c - \frac{\lambda^2}{8})$  ('frequency pulling')<sup>2</sup>.

Se escolhermos  $\delta$  tal que  $\frac{\lambda^2}{8} = -\Delta$ , então a presença do átomo excitado em uma das cavidades faz com que esta se torne ressonante com a fonte externa S; quando isto ocorre, S passa a poder injetar campo na cavidade. Assim, se a cavidade for preparada inicialmente no estado de vácuo  $|0\rangle$ , a passagem do átomo no estado  $|e\rangle$  leva o campo no seu interior a um estado coerente  $|\alpha\rangle$ , de amplitude  $\alpha$  proporcional ao tempo de interação  $t_{int}$  [40].

Por sua vez, o estado  $|g\rangle$  é escolhido de modo que todas as transições possíveis a partir dele tenham freqüências muito diferentes de  $\omega_c$ ; assim, um átomo neste estado praticamente não interage com o campo quando passa pelas cavidades.

Vemos assim que a evolução do sistema átomo-campo é *condicional* ao estado atômico inicial

<sup>2</sup>Notar que, no presente exemplo,  $|e\rangle$  é o nível inferior da transição atômica em questão.

[73]; o átomo se comporta como uma 'chave', cujo estado 'liga' ou não um campo coerente na cavidade. É preciso lembrar, porém, que esta chave é *quântica*: preparando-a em uma superposição de  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , como acima, campo e átomo são deixados em um estado emaranhado entre 'ligado' e 'desligado':

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_A + |g\rangle_A) \otimes |0\rangle_{C_i} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_A \otimes |\alpha\rangle_{C_i} + |g\rangle_A \otimes |0\rangle_{C_i}) \quad (3.3)$$

O nosso objetivo será explorar esta evolução condicional de modo a criar um estado emaranhado do sistema global  $A \otimes C_1 \otimes C_2$  de forma

$$|\psi_{A12}\rangle_{final} = |\phi\rangle_A \otimes (|\alpha\rangle_1 |0\rangle_2 \pm |0\rangle_1 |\alpha\rangle_2), \quad (3.4)$$

onde as duas cavidades estão emaranhadas entre si, mas não com o átomo. Deste modo, o campo será deixado em um estado não-localmente correlacionado, realizando efetivamente a situação discutida no começo desta seção (os subsistemas  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_X$  de lá correspondem aqui respectivamente às duas cavidades e ao átomo A).

Para chegar a este resultado, temos de implementar o processo descrito pelas eqs. (3.1) e (3.2). Isto é feito através dos seguintes passos:

1. As cavidades são inicialmente resfriadas até temperaturas próximas de zero K, deixando-as no estado de vácuo:  $|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle = |0\rangle$ . O átomo A é preparado inicialmente em um determinado nível de Rydberg  $|e\rangle$ , e então enviado através da montagem (com velocidade selecionada); cruzando a primeira zona de Ramsey ( $R_1$ ) (ressonante com a transição  $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ ), ele sofre um pulso  $\frac{\pi}{2}$  que o deixa em uma superposição de  $|e\rangle$  com  $|g\rangle$  ( $|\psi_X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle)$ ).
2. Ao atravessar  $C_1$ , ocorre a evolução condicional de átomo e cavidade descrita acima. O estado global sofre então a evolução:

$$|\psi_{A12}\rangle_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) \otimes |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \xrightarrow{A \leftrightarrow C_1} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle \otimes |\alpha\rangle_1 + |g\rangle \otimes |0\rangle_1) \otimes |0\rangle_2 \quad (3.5)$$

(realizando assim a eq. (3.1) )

3. Assim que deixa a primeira cavidade, o átomo sofre uma nova rotação, dessa vez um pulso  $\pi$  na zona de Ramsey  $R_2$ , que inverte os estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  ( $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ ,  $|g\rangle \rightarrow -|e\rangle$ ). O estado se torna então

$$|\psi_{A12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle \otimes |\alpha\rangle_1 - |e\rangle \otimes |0\rangle_1) \otimes |0\rangle_2 \quad (3.6)$$

Passando a seguir pela cavidade  $C_2$ , ocorre uma nova evolução condicional. A menos de fases que podem ser corrigidas trivialmente com um defasador atômico em  $R_3$  o estado resultante é

$$|\psi_{A12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle \otimes |\alpha\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 - |e\rangle \otimes |0\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2) \quad (3.7)$$

4. Neste ponto, ainda não realizamos a eq. (3.2), visto que o átomo continua emaranhado com as duas cavidades. Para contornar isto, primeiro rodamos o estado atômico uma última vez, aplicando um novo pulso  $\frac{\pi}{2}$  na zona de Ramsey  $R_3$  :

$$|\psi_{A12}\rangle \rightarrow \frac{1}{2} (|g\rangle \otimes (|\alpha\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 - |0\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2) - |e\rangle \otimes (|0\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2 + |\alpha\rangle_1 \otimes |0\rangle_2)) \quad (3.8)$$

Finalmente, o estado atômico é *medido* nos detetores de ionização  $D_e$  e  $D_g$ . Assim, o estado das duas cavidades colapsa para

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} \otimes (|\alpha\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \pm |0\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2) \quad (3.9)$$

(onde o sinal depende do valor medido para o estado atômico, e a normalização assume  $|\alpha| \gg 1$ ).

Realiza-se assim a segunda parte da interação seqüencial (eq. (3.2)), cumprindo o objetivo: construir um estado emaranhado não-local para o subsistema formado pelas duas cavidades (sem que estas tenham interagido diretamente); por sua vez, o agente responsável pela criação desta correlação (o átomo) termina em um estado bem-determinado, desemaranhado dos outros dois sistemas.

### 3.1.2 Colapsos Indiretos e Cruzamentos de Trajetórias

O ponto crucial para a criação de estados pré-correlacionados pelo processo de interação sequencial descrito acima é o “desemaranhamento” do sistema auxiliar  $\Gamma_X$  descrito pela eq. (3.2). No exemplo que acabamos de ver, este feito é realizado pela medida direta de  $\Gamma_X$  (o átomo), que colapsa a sua função de onda para um estado específico ( $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ ). Devido à correlação existente entre o sistema auxiliar e os demais ( $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ), esta medida também colapsa o estado reduzido de  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$  para o ‘estado relativo’ correspondente ao valor medido para o observável de  $\Gamma_X$  :

$$\sum_{j=1}^n c_j |o_j\rangle_X |\Psi_j\rangle_{12} \xrightarrow{\text{medindo } o_j} |o_j\rangle_X |\Psi_j\rangle_{12}. \quad (3.10)$$

(No exemplo, o valor  $\pm$  do sinal no estado final (3.9) depende do valor medido para a energia do átomo).

De um modo geral, portanto, podemos criar estados pré-correlacionados de  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$  medindo um observável de  $\Gamma_X$  para o qual os estados relativos  $|\Psi_j\rangle_{12}$  sejam correlacionados. Como vimos no cap. 1, embora esta ação ‘colapse’ o estado reduzido de  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$  não podemos em geral interpretá-la como uma medida de algum observável deste subsistema (visto que os estados relativos  $|\Psi_j\rangle_{12}$  não serão em geral ortogonais). Nos referiremos assim a este processo como um ‘colapso indireto’ de  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ <sup>3</sup>.

Apesar de perfeitamente adequado em princípio, este método possui também algumas limitações. Em primeiro lugar, como o resultado da medida sobre  $\Gamma_X$  é intrinsecamente imprevisível, é impossível saber *qual* estado de  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$  será gerado em uma dada realização experimental (um problema que pode ser contornado preparando e realizando a medida diversas vezes até obter o valor desejado). Ainda, nos sistemas em que estamos interessados, envolvendo átomos e cavidades, somente os *átomos* são mensuráveis diretamente; assim, o método de ‘colapsos indiretos’ só será útil nos casos em que  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$  estiver correlacionado com um sistema  $\Gamma_X$  constituído apenas de um ou mais átomos. Finalmente, dependemos da eficiência do detector usado para medir  $\Gamma_X$  (no caso, os ionizadores atômicos).

É interessante se perguntar então se um desemaranhamento semelhante de  $\Gamma_X$  não poderia

<sup>3</sup>Neste ponto o exemplo acima é um caso especial, pois na eq. (3.8) os estados  $|\alpha\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \pm |0\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2$  associados a  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  são ortogonais.

ser realizado com uma evolução completamente *unitária* do sistema conjunto  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_X$  (portanto sem envolver medidas). A resposta é *sim*, mas antes de fornecer exemplos concretos vamos olhar com mais detalhe o que significaria um processo desse tipo.

Para simplificar, suponhamos inicialmente que temos apenas dois sistemas interagentes  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_X$ , inicialmente descorrelacionados:

$$|\psi(0)\rangle_{2X} = |\phi\rangle_2 \otimes |\xi\rangle_X \quad (3.11)$$

mas com um detalhe: não sabemos quem é  $|\xi\rangle_X$  (apenas que pode ser qualquer combinação linear de um subconjunto ortonormal  $\{|x_j\rangle_X\}_{j=1}^n$  de estados de  $\Gamma_X$ ).

A interação entre os dois sistemas irá correlacioná-los, destruindo a forma fatorável acima. Imaginemos porém que queremos garantir que o estado conjunto  $|\psi(t_c)\rangle_{2X}$  seja novamente fatorável em algum instante  $t_c$ :

$$|\psi(0)\rangle_{2X} \xrightarrow{t_c} |\psi(t)\rangle_{2X} = |\phi'\rangle_2 \otimes |\xi'\rangle_X \quad (3.12)$$

mas onde agora o estado de  $|\xi'\rangle_X$  é especificado *exatamente* (já  $|\phi'\rangle_2$  pode ser qualquer coisa).

Como fazer isto? É necessário que, dado qualquer elemento  $|x_j\rangle_X \in \{|x_j\rangle_X\}_{j=1}^n$ , a evolução leve a:

$$|\phi\rangle_2 \otimes |x_j\rangle_X \xrightarrow{t_c} |\phi'_j\rangle_2 \otimes |\xi'\rangle_X \quad (3.13)$$

Em geral, isto parece ser uma tarefa difícil de realizar. Não apenas a evolução unitária a partir de todos os estados  $|\phi\rangle_2 \otimes |x_j\rangle_X$  tem de levar *ao mesmo tempo* a um estado fatorável, como a parte de  $\Gamma_X$  deste estado precisa ser a *mesma* para todos! No entanto, como veremos adiante, existem situações específicas onde, escolhendo 'a dedo' tanto  $|\phi\rangle_2$  como o conjunto  $\{|x_j\rangle_X\}_{j=1}^n$ , podemos realizar isto.

Daqui em diante, nos referiremos a um evento deste tipo como um *cruzamento de trajetórias* [74] no espaço de Hilbert do sistema  $\Gamma_X$ <sup>4</sup>. De fato, se acompanharmos a evolução do estado reduzido de  $\Gamma_X$ , então no instante  $t_c$  em que se realiza a eq. (3.12) todas as trajetórias iniciadas em estados gerados por  $\{|x_j\rangle_X\}_{j=1}^n$  devem se cruzar em um mesmo ponto  $|\xi'\rangle_X$ , independentemente dos seus pontos de origem.

<sup>4</sup>Na verdade espaço de Liouville, visto que o estado reduzido de  $S_X$  será em geral uma mistura.

Os cruzamentos de trajetórias são ferramentas básicas para a manipulação de subsistemas emaranhados. Por exemplo, podemos ver a sua utilidade para a preparação de estados pré-correlacionados. Suponhamos que, ao iniciar a interação com  $\Gamma_2$ , o sistema  $\Gamma_X$  já tenha interagido e se correlacionado com um terceiro sistema ( $\Gamma_1$ ), de forma que no lugar da condição inicial (3.11) tenhamos :

$$|\psi(0)\rangle_{12X} = |\phi\rangle_2 \otimes |\xi\rangle_{1X} = |\phi\rangle_2 \otimes \sum_{j=1}^n a_j |\gamma_j\rangle_1 \otimes |x_j\rangle_X \quad (3.14)$$

Neste caso, a evolução (3.13) leva no instante  $t_c$  ao estado

$$|\psi(t_c)\rangle_{12X} = \left( \sum_{j=1}^n a_j |\phi'_j\rangle_2 \otimes |\gamma_j\rangle_1 \right) \otimes |\xi'\rangle_X \quad (3.15)$$

Reparamos assim que, devido ao cruzamento de trajetórias,  $\Gamma_X$  assume um estado puro, bem-definido, *mesmo estando anteriormente emaranhado com outro sistema*  $\Gamma_1$  [74, 75]. De fato, esta correlação com  $\Gamma_1$  é completamente ‘transferida’ para  $\Gamma_2$ , realizando assim o emaranhamento “não-local” entre esses sistemas (comparar com a eq. (3.2)).

**Comentário:** Foi sugerido [74] que tal comportamento poderia ser explorado como um método seguro de geração de um estado puro para o sistema  $\Gamma_X$ , ‘filtrando’ e transferindo para  $\Gamma_2$  qualquer correlação que  $\Gamma_X$  pudesse estar carregando com outros sistemas (assim como qualquer incerteza clássica sobre o seu estado). Para os nossos propósitos, porém, o importante não será o estado final do sistema auxiliar, mas justamente o processo de transferência.  $\Gamma_X$  age apenas como um ‘mensageiro’ levando a correlação com  $\Gamma_1$  até  $\Gamma_2$ ; uma vez cumprida esta função ele deixa de ser importante.

### Cruzamento de trajetórias atômicas e da cavidade

Podemos implementar diretamente estas idéias nos casos em que  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_X$  são um átomo e uma cavidade (ou vice-versa), utilizando a interação Jaynes-Cummings ressonante:

**Cruzamento atômico** Suponhamos que uma cavidade esteja preparada no estado de vácuo  $|0\rangle$ . Se enviamos através dela um átomo *ressonante* preparado no estado  $|e\rangle$ , então a evolução

do sistema conjunto, dado pela eq. (2.39) é:

$$|e\rangle \otimes |0\rangle \xrightarrow{t} \cos(\lambda t) |e\rangle \otimes |0\rangle - i \sin(\lambda t) |g\rangle \otimes |1\rangle \quad (3.16)$$

Por outro lado, se o átomo for preparado no estado  $|g\rangle$ , nada acontece (pois na representação de interação o estado  $|g\rangle \otimes |0\rangle$  é um autoestado de energia zero).

$$|g\rangle \otimes |0\rangle \xrightarrow{t} |g\rangle \otimes |0\rangle \quad (3.17)$$

Assim, se o tempo de voo atômico na cavidade for escolhido tal que

$$\cos(\lambda t) = 0 \quad (\leftrightarrow t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\lambda}, n \text{ inteiro}), \quad (3.18)$$

o estado atômico final será  $|g\rangle$ , independente do seu estado inicial:

$$(c_1 |e\rangle + c_2 |g\rangle) \otimes |0\rangle \xrightarrow{t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\lambda}} |g\rangle \otimes (c_2 |0\rangle - i c_1 |1\rangle) \quad (3.19)$$

Realiza-se assim nesse instante um cruzamento das trajetórias atômicas.

**Cruzamento da cavidade** O esquema complementar, que realiza um cruzamento de trajetórias na *cavidade*, é igualmente simples: neste caso é o átomo que deve ser preparado em um estado específico ( $|g\rangle$ ), enquanto a cavidade pode estar em qualquer superposição dos estados de 0 e 1 fótons. No primeiro destes dois, nada ocorre durante a interação (eq.3.17). No segundo, o sistema evolui segundo a eq. (2.39):

$$|g\rangle \otimes |1\rangle \xrightarrow{t} \cos(\lambda t) |g\rangle \otimes |1\rangle - i \sin(\lambda t) |e\rangle \otimes |0\rangle \quad (3.20)$$

Desta forma, novamente quando  $t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\lambda}$  ocorre o cruzamento: neste instante a cavidade está necessariamente no estado de vácuo, independente do seu estado inicial.

$$|g\rangle \otimes (c_1 |1\rangle + c_0 |0\rangle) \xrightarrow{t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\lambda}} (c_0 |g\rangle - i c_1 |e\rangle) \otimes |0\rangle \quad (3.21)$$

(essencialmente, isto corresponde à inversão do processo anterior).

Estes esquemas, sugeridos por Phoenix e Barnett [76] e, independentemente, por Cirac e Zoller [77], são os meios mais simples de se realizar cruzamentos de trajetórias atômicas ou na cavidade. São também bastante práticos, já que não é tão difícil produzir experimentalmente um estado muito próximo do vácuo, bastando resfriar a cavidade até uma temperatura suficientemente baixa. De fato, recentemente anunciou-se a primeira realização experimental destes processos [62], na qual o estado superposto de um átomo foi ‘transferido’ para uma cavidade (eq. 3.19) e em seguida ‘repassado’ para um segundo átomo (eq. 3.21). Neste caso a cavidade funciona como uma ‘memória’ quântica, guardando temporariamente informação que é transferida de um átomo para o outro. A mesma técnica foi também sugerida para uso em aplicações como o ‘teleporte’ de estados quânticos [78], a implementação de ‘portas lógicas’ fundamentais em computação quântica [73] ou a realização, usando pares ou triplas de átomos correlacionados, de experiências para testar a não-localidade quântica [76, 77, 63].

Vale mencionar que esquemas semelhantes de ‘cruzamento’ podem em princípio ser realizados usando outros estados do campo, como por exemplo estados coerentes de grande amplitude [74].

### **3.2 Métodos de Preparação de Estados Pré-Correlacionados do sistema Átomo-Campo**

Utilizando as idéias introduzidas acima, vamos agora propor alguns esquemas concretos que permitiriam em princípio a criação de um estado pré-correlacionado de um átomo e uma cavidade. Lembramos que o objetivo último dessa preparação é observar a evolução ressonante do sistema átomo-campo a partir de estados iniciais não-usuais. Sendo assim, tais esquemas devem não apenas possibilitar a preparação destes estados, como também permitir que, uma vez criados, o átomo possa em seguida interagir com a cavidade. Adiantamos desde já que cada um desses métodos tem suas próprias vantagens e desvantagens; certamente, nenhum é ‘universal’, no sentido de permitir a criação de um estado inicial arbitrário.

Dado então que os subsistemas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  que queremos pré-correlacionar são um átomo (A)

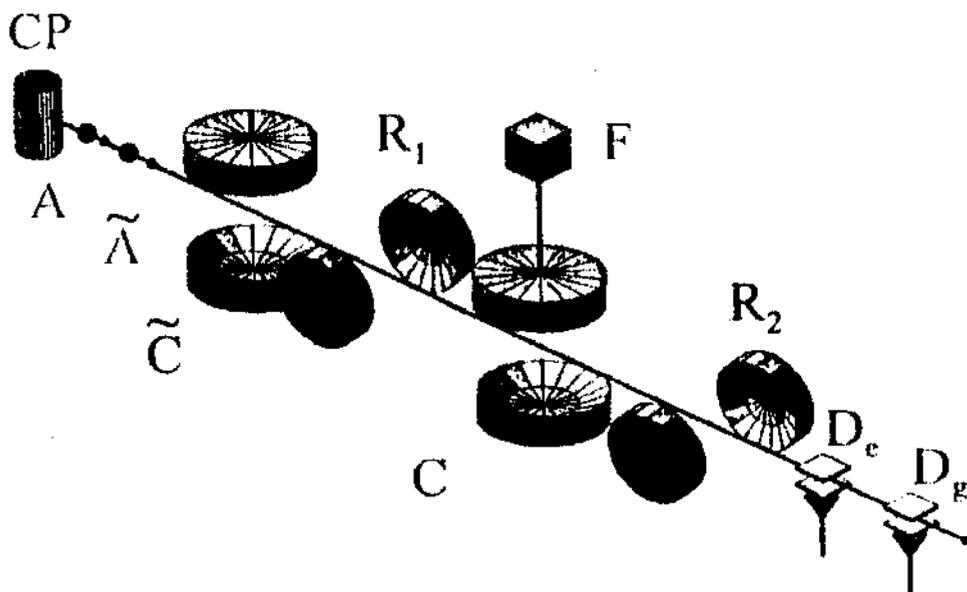


Figura 3-3: Esquema de montagem experimental para a criação de estados pré-correlacionados do sistema átomo-campo usando o método I.

e um modo do campo (C) (ou vice-versa), a primeira questão é: o que podemos usar como o sistema auxiliar  $\Gamma_X$ ? No exemplo da 'chave quântica' (seção 3.1.1),  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  eram sistemas do mesmo tipo (ambos cavidades), de modo que um só átomo era suficiente para o papel (pois é capaz de interagir tanto com  $\Gamma_1$  como com  $\Gamma_2$ ). Agora, porém,  $\Gamma_X$  terá de ser mais complexo; para poder interagir tanto com A como com C, precisamos de pelo menos um átomo e uma cavidade auxiliares. Sendo assim, os métodos de realizar as equações (3.1) e (3.2) também ficarão mais complicados.

### 3.2.1 Método I

O primeiro método que propomos utiliza a montagem indicada na figura (3 -- 3). Os diversos componentes ilustrados são aqueles introduzidos na seção 2.4: C e  $\tilde{C}$  são duas cavidades de alto Q, F uma fonte capaz de injetar um campo coerente em C, CP uma "caixa-preta" capaz de preparar átomos de Rydberg circulares e  $D_e, D_g$  os detectores por ionização.  $R_{1-2}$  são regiões onde o estado de um átomo pode ser manipulado, e que podem consistir, dependendo do caso, de zonas de Ramsey e/ou defasadores atômicos.

Necessitamos ainda de dois átomos  $\tilde{A}$  e  $A$ , emitidos em seqüência. (Assumimos que tanto os seus instantes de emissão como as suas velocidades são bem-controlados). O primeiro átomo ( $\tilde{A}$ ) e a primeira cavidade ( $\tilde{C}$ ) constituirão o 'sistema auxiliar'  $\Gamma_X$ , enquanto os outros dois serão preparados em um estado pré-correlacionado.

Antes de fornecermos exemplos específicos do tipo de estado que pode ser gerado com esta montagem, vamos enumerar os passos que utilizamos neste esquema, independentemente de cada caso particular:

1. (Preparação inicial): A cavidade 'auxiliar'  $\tilde{C}$  deve ser inicialmente preparada no estado de vácuo  $|0\rangle$ , e os átomos  $\tilde{A}$  e  $A$  emitidos respectivamente nos estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ . A condição inicial da cavidade 'alvo'  $C$  variará de acordo com o estado que desejamos construir.
2.  $\tilde{A}$  atravessa  $\tilde{C}$ , estabelecendo um estado correlacionado para o sistema auxiliar  $\Gamma_X = \tilde{A} \otimes \tilde{C}$ .
3. Opcionalmente,  $\tilde{A}$  sofre ainda manipulações adicionais em  $R_1$ .

Como a cavidade auxiliar está inicialmente no vácuo, o estado do subsistema  $\Gamma_X$  produzido após estes passos terá a forma geral

$$c_0 |\psi_0\rangle_{\tilde{A}} \otimes |0\rangle_{\tilde{C}} + c_1 |\psi_1\rangle_{\tilde{A}} \otimes |1\rangle_{\tilde{C}} \quad (3.22)$$

4. Antes de  $\tilde{A}$  atingir a cavidade  $C$ , o segundo átomo ( $A$ , preparado no estado  $|g\rangle$ ) atravessa a cavidade auxiliar  $\tilde{C}$ , sintonizado de forma que a interação entre estes subsistemas seja *ressonante*. O tempo de interação deve ser escolhido de modo a realizar um cruzamento de trajetórias na cavidade (eq. (3.21)); assim, a correlação de  $\tilde{C}$  com o átomo auxiliar é *transferida* para  $A$ , levando ao seguinte estado para o sistema  $A \otimes \tilde{A} \otimes \tilde{C}$ :

$$(c_0 |g\rangle_A \otimes |\psi_0\rangle_{\tilde{A}} - ic_1 |e\rangle_A \otimes |\psi_1\rangle_{\tilde{A}}) \otimes |0\rangle_{\tilde{C}} \quad (3.23)$$

Produzimos assim um estado não-localmente emaranhado dos átomos  $A$  e  $\tilde{A}$  enquanto ambos *ainda estão em vôo* (realizando com isso a eq. (3.1)). Por sua vez, a cavidade auxiliar  $\tilde{C}$  é deixada no estado de vácuo, desemaranhada dos outros subsistemas, deixando portanto de ter importância para a evolução subsequente.

5. Seguindo seu voo,  $\tilde{A}$  interage com C, criando um estado emaranhado para o sistema  $A \otimes C \otimes \tilde{A}$ . (Como antes, a dessintonia entre  $\tilde{A}$  e C deve ser escolhida conforme o estado final que se deseja atingir). Este estado pode ainda ser modificado manipulando-se novamente o estado de  $\tilde{A}$  na saída da cavidade (região  $R_2$ ).
6. Finalmente,  $\tilde{A}^*$  é medido nos detetores  $D_e$  e  $D_g$ . Como vimos na seção 3.1.2 acima, esta medida colapsa 'indiretamente' o estado do subsistema  $A \otimes C$  sobre um dos 'estados relativos' aos autoestados de energia de  $\tilde{A}$ . Tendo escolhido adequadamente as manipulações anteriores, estes estados relativos serão estados emaranhados de A e C.

Deste modo, realiza-se a segunda parte da interação seqüencial (eq. (3.2)), cumprindo o objetivo de construir um estado correlacionado de um átomo (A) e uma cavidade (C) sem que em nenhum momento estes sistemas tenham interagido diretamente. Como, no momento da medida de  $\tilde{A}$ , o átomo A ainda está em voo em direção a C, podemos em seguida observar diretamente a evolução do sistema  $A \otimes C$  interagindo ressonantemente a partir destes estados iniciais inusitados.<sup>5</sup>

Podemos ilustrar estas idéias gerais com dois exemplos concretos:

### Exemplo 3.1: estados vestidos

Mostramos inicialmente que, desde que seja possível preparar um estado de número  $|m\rangle$  na cavidade (o que experimentalmente está longe de ser fácil, mas que em princípio é possível [80]), então podemos usar a seqüência acima para gerar um estado vestido para o sistema  $A \otimes C$ .

Neste caso, a cavidade auxiliar  $\tilde{C}$  deve ser sintonizada de modo que a sua interação com o átomo  $\tilde{A}$  seja *ressonante*. O tempo de interação entre  $\tilde{A}$  e  $\tilde{C}$  deve ser escolhido de forma a produzir o estado:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_{\tilde{A}} \otimes |0\rangle_{\tilde{C}} - i |g\rangle_{\tilde{A}} \otimes |1\rangle_{\tilde{C}}) \quad (3.24)$$

Adicionando uma fase de  $i$  na componente  $|g\rangle_{\tilde{A}}$  do átomo auxiliar (usando um defasador em

---

<sup>5</sup>Dependendo do intervalo entre a emissão dos dois átomos, e das suas respectivas velocidades, é possível que a interação de A e C se dê antes de  $\tilde{A}$  cruzar  $R_2$  e ser medido nos detetores. Neste caso, temos uma realização concreta de um chamado *experimento de escolha retardada* ('delayed-choice experiment') [79].

$R_1$ ), o estado do sistema auxiliar  $\Gamma_X$  assume então a forma:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_{\tilde{A}} \otimes |0\rangle_{\tilde{C}} + |g\rangle_{\tilde{A}} \otimes |1\rangle_{\tilde{C}}) \quad (3.25)$$

Enviando em seguida o átomo A através de  $\tilde{C}$ , realizando o cruzamento de trajetórias (3.23), produzimos o seguinte estado emaranhado para os dois átomos<sup>6</sup>:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_A |e\rangle_{\tilde{A}} + i |e\rangle_A |g\rangle_{\tilde{A}}) \otimes |0\rangle_{\tilde{C}} \quad (3.26)$$

Enquanto isso, seguindo seu voo, o átomo  $\tilde{A}$  interage (também de forma ressonante) com a cavidade C, a qual precisa ter sido preparada no estado de número  $|m\rangle$ . Então, de acordo com a equação (2.39) o estado global evolui para:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( |g\rangle_A \otimes (\cos(\frac{\Omega_m t}{2}) |e\rangle_{\tilde{A}} |m\rangle_C - i \sin(\frac{\Omega_m t}{2}) |g\rangle_{\tilde{A}} |m+1\rangle_C) + \right. \\ \left. + i |e\rangle_A \otimes (\cos(\frac{\Omega_m t}{2}) |g\rangle_{\tilde{A}} |m\rangle_C - i \sin(\frac{\Omega_m t}{2}) |e\rangle_{\tilde{A}} |m-1\rangle_C) \right) \quad (3.27)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\cos(\frac{\Omega_m t}{2}) |g\rangle_A |m\rangle_C + \sin(\frac{\Omega_m t}{2}) |e\rangle_A |m-1\rangle_C) \otimes |e\rangle_{\tilde{A}} + \right. \\ \left. + i (\cos(\frac{\Omega_m t}{2}) |e\rangle_A |m\rangle_C - \sin(\frac{\Omega_m t}{2}) |g\rangle_A |m+1\rangle_C) \otimes |g\rangle_{\tilde{A}} \right) \quad (3.28)$$

Medindo o átomo auxiliar na saída da cavidade C, o estado conjunto do sistema átomo-campo A-C sofre então um 'colapso indireto', sendo projetado sobre um dos estados

$$\cos\left(\frac{\Omega_m t}{2}\right) |g\rangle_A |m\rangle_C + \sin\left(\frac{\Omega_m t}{2}\right) |e\rangle_A |m-1\rangle_C \quad (3.29)$$

ou

$$\cos\left(\frac{\Omega_m t}{2}\right) |e\rangle_A |m\rangle_C - \sin\left(\frac{\Omega_m t}{2}\right) |g\rangle_A |m+1\rangle_C \quad (3.30)$$

dependendo do resultado da medida. Podemos ver que, escolhendo o tempo de interação entre  $\tilde{A}$  e C tal que

$$t = \frac{\pi}{2\Omega_m} = \frac{\pi}{4\lambda\sqrt{m+1}} \quad (3.31)$$

produzimos respectivamente os estados vestidos  $|m-1, +\rangle_{AC}$  ou  $|m-, -\rangle_{AC}$  (eq. 2.26), autoesta-

<sup>6</sup>O defasador deve ser desligado após a passagem de  $\tilde{A}$ , de forma a não afetar o átomo A.

dos da interação ressonante entre A e C. Desta forma, quando em seguida o átomo A penetrar na cavidade C e ambos interagirem ressonantemente, o seu estado conjunto *não sofrerá qualquer evolução dinâmica*.

É importante perceber que esta situação *jamais pode ocorrer* em uma evolução ressonante do sistema  $A \otimes C$  a partir de condições iniciais fatoráveis - simplesmente pelo fato de que, a não ser no caso do estado fundamental  $|g\rangle$ , nenhuma dessas condições corresponde a um autoestado! Já podemos ver então que a criação de estados pré-correlacionados permite a realização de comportamentos dinâmicos difíceis de serem realizados de outra forma.

### Exemplo 3.2: o ‘gato par-ímpar’

Outros estados pré-correlacionados que podem ser gerados com este esquema são aqueles da seguinte forma:

$$|GPI(\alpha, \gamma, \xi)\rangle \equiv \left( \cos(\gamma) |e\rangle \otimes \left( \frac{|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \sin(\gamma) e^{-i\xi} |g\rangle \otimes \left( \frac{|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right) \quad (3.32)$$

os quais vamos batizar de ‘gatos par-ímpar’. Aqui,  $|\alpha\rangle$  representa um estado coerente para o modo da cavidade, enquanto as combinações

$$|\alpha_{par}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \quad (3.33a)$$

$$|\alpha_{impar}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \quad (3.33b)$$

são os estados tipo ‘gato de Schrödinger’ par e ímpar que vimos na seção 2.3 (daí o nome de  $|GPI(\alpha, \gamma, \xi)\rangle$ ).<sup>7</sup>

As propriedades destes estados serão discutidas em mais detalhe na seção 4.2.4; entre elas, podemos adiantar o fato de que eles também em geral *não podem* ser gerados apenas pela evolução Jaynes-Cummings ressonante a partir de condições iniciais fatoráveis.

Para gerá-los usando o método discutido acima, podemos usar a mesma montagem do exemplo anterior, com o acréscimo de uma segunda zona de Ramsey na região  $R_2$ . Outra diferença é que, desta vez, a cavidade C deve ser preparada inicialmente em um estado *coerente*

<sup>7</sup> Admitimos que esta denominação é talvez mal-escolhida, dado que este estado não representa algo que possa ser considerado uma “superposição macroscópica”

$|\alpha\rangle_C$ . O estado inicial para o sistema  $\tilde{A} \otimes \tilde{C} \otimes A \otimes C$ , antes de qualquer interação entre estes subsistemas, é dado portanto por

$$|e\rangle_{\tilde{A}} \otimes |0\rangle_{\tilde{C}} \otimes |g\rangle_A \otimes |\alpha\rangle_C \quad (3.34)$$

Seguimos então novamente a seqüência de passos (3 – 6):

1. O átomo auxiliar  $\tilde{A}$  interage *ressonantemente* com  $\tilde{C}$  durante um tempo  $t_1$ , produzindo um estado emaranhado para o subsistema  $\Gamma_X = \tilde{A} \otimes \tilde{C}$ :

$$\cos(\lambda t_1) |e\rangle_{\tilde{A}} \otimes |0\rangle_{\tilde{C}} - i \sin(\lambda t_1) |g\rangle_{\tilde{A}} \otimes |1\rangle_{\tilde{C}} \quad (3.35)$$

2. Na saída da cavidade auxiliar (região  $R_1$ ), podemos introduzir uma fase relativa de  $\exp(-i\xi)$  na componente  $|e\rangle_{\tilde{A}}$  de  $\tilde{A}$  (usando um defasador). Podemos fazer ainda com que  $\tilde{A}$  atravesse em seguida uma zona de Ramsey, calibrada para fornecer um ‘pulso  $\frac{\pi}{2}$ ’:

$$\begin{aligned} |e\rangle_{\tilde{A}} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_{\tilde{A}} + |e\rangle_{\tilde{A}}) \\ |g\rangle_{\tilde{A}} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_{\tilde{A}} - |e\rangle_{\tilde{A}}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Combinando estas manipulações, produzimos assim o seguinte estado emaranhado para  $\Gamma_X$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( |e\rangle_{\tilde{A}} \otimes (\exp(i\xi) \cos(\lambda t_1) |0\rangle_{\tilde{C}} + i \sin(\lambda t_1) |1\rangle_{\tilde{C}}) + |g\rangle_{\tilde{A}} \otimes (\exp(i\xi) \cos(\lambda t_1) |0\rangle_{\tilde{C}} - i \sin(\lambda t_1) |1\rangle_{\tilde{C}}) \right) \quad (3.37)$$

3. Em seqüência, o átomo A atravessa  $\tilde{C}$  realizando o cruzamento de trajetórias (3.21). A cavidade auxiliar é assim desemaranhada dos dois átomos, deixando estes no estado emaranhado:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\cos(\lambda t_1) \exp(i\xi) |g\rangle_A + \sin(\lambda t_1) |e\rangle_A) \otimes |e\rangle_{\tilde{A}} + (\cos(\lambda t_1) \exp(i\xi) |g\rangle_A - \sin(\lambda t_1) |e\rangle_A) \otimes |g\rangle_{\tilde{A}} \right) \quad (3.38)$$

4. No passo seguinte, o átomo auxiliar  $\tilde{A}$  interage com a cavidade C. Ao contrário do último exemplo, desta vez precisamos que essa interação seja *dispersiva*, com uma dessintonia  $\delta$

entre as frequências da transição  $|e\rangle_{\tilde{A}} \leftrightarrow |g\rangle_{\tilde{A}}$  e do campo<sup>8</sup>. Neste caso, a interação átomo-campo é descrita pelo Hamiltoniano efetivo (2.50), o que implica no seguinte operador de evolução para o sistema  $\tilde{A} \otimes \tilde{C} \otimes A$ :

$$U_{MJC}^{eff}(t) = \mathbb{I}_A \otimes \left[ |e\rangle \langle e|_{\tilde{A}} \otimes \exp\left(-i\frac{\lambda^2}{\delta}t aa^\dagger\right)_C + |g\rangle \langle g|_{\tilde{A}} \otimes \exp\left(i\frac{\lambda^2}{\delta}t a^\dagger a\right)_C \right] \quad (3.39)$$

$$= \mathbb{I}_A \otimes \left[ \exp\left(-i\frac{\lambda^2}{\delta}t\right) |e\rangle \langle e|_{\tilde{A}} \otimes \exp\left(-i\frac{\lambda^2}{\delta}t a^\dagger a\right)_C + |g\rangle \langle g|_{\tilde{A}} \otimes \exp\left(i\frac{\lambda^2}{\delta}t a^\dagger a\right)_C \right] \quad (3.40)$$

Temos assim uma *evolução condicional* para a cavidade C: dependendo do estado atômico ser  $|g\rangle_{\tilde{A}}$  ou  $|e\rangle_{\tilde{A}}$ , C sofre a evolução descrita por  $\exp\left(i\frac{\lambda^2}{\delta}t a^\dagger a\right)$  ou  $\exp\left(-i\frac{\lambda^2}{\delta}t a^\dagger a\right)$ . Lembramos que, se a cavidade for preparada inicialmente em um estado coerente  $|\alpha\rangle_C$ , isto corresponde a defasagens opostas da amplitude coerente (v. eq. 2.79):

$$\exp\left(\pm i\frac{\lambda^2}{\delta}t a^\dagger a\right) |\alpha\rangle_C = \left| \alpha \exp\left(\pm i\frac{\lambda^2}{\delta}t\right) \right\rangle_C \quad (3.41)$$

Escolhendo assim um estado coerente inicial  $|\alpha\rangle_C$  e um tempo de interação  $t_2 = \frac{\pi\delta}{2\lambda^2}$ , o estado (3.38) evolui para:

$$|\Psi_{A\tilde{A}C}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{l} (\cos(\lambda t_1) \exp(i\xi) |g\rangle_A - \sin(\lambda t_1) |e\rangle_A) \otimes |g\rangle_{\tilde{A}} \otimes |\alpha\rangle_C - \\ -i(\cos(\lambda t_1) \exp(i\xi) |g\rangle_A + \sin(\lambda t_1) |e\rangle_A) \otimes |e\rangle_{\tilde{A}} \otimes |-\alpha\rangle_C \end{array} \right) \quad (3.42)$$

Notamos que, devido à condição (2.40), o intervalo necessário para gerar a defasagem de  $\pi$  entre as duas componentes do campo é muito maior do que o tempo de um pulso de Rabi:

$$\frac{t_2}{t_1} \approx \frac{\frac{\pi\delta}{2\lambda^2}}{\frac{\delta}{\pi\lambda}} = \frac{\delta}{2\lambda} \gg 1 \quad (3.43)$$

Assim, o tempo necessário para a interação dispersiva determina a velocidade máxima com que o átomo  $\tilde{A}$  pode atravessar a montagem. Reparamos ainda que, como as componentes  $|g\rangle_{\tilde{A}} \otimes |\alpha\rangle_C$  e  $|e\rangle_{\tilde{A}} \otimes |\alpha\rangle_C$  evoluem com fases opostas  $(\pm i\frac{\lambda^2}{\delta}t)$ , este tempo é a *metade* do que seria se usássemos um esquema de níveis envolvendo um nível auxiliar (como no exemplo

<sup>8</sup>Não será conveniente aqui utilizar o 'nível adicional' que introduzimos no exemplo 3.1 acima (v. adiante).

da seção 3.1.1). Portanto, a velocidade máxima permitida é *dobrada*. Isto é importante quando se leva em conta que, num experimento real, a velocidade dos átomos determina o tempo de ação da dissipação para o ambiente, o qual desejamos que seja o menor possível.

5. Após deixar C, o átomo auxiliar  $\tilde{A}$  é manipulado na região  $R_2$  : eliminando-se a fase relativa de  $-i$  existente na expressão (3.42), e submetendo-o ainda a um novo pulso  $\frac{\pi}{2}$  em uma zona de Ramsey, o estado conjunto  $|\Psi_{A\tilde{A}C}\rangle$  evolui para:

$$\frac{1}{2} \left( \begin{array}{l} (\cos(\lambda t_1) \exp(-i\xi) |g\rangle_A - \sin(\lambda t_1) |e\rangle_A) \otimes |\alpha\rangle_C \otimes (|g\rangle_{\tilde{A}} - |e\rangle_{\tilde{A}}) \\ + (\cos(\lambda t_1) \exp(-i\xi) |g\rangle_A + \sin(\lambda t_1) |e\rangle_A) \otimes |-\alpha\rangle_C \otimes (|g\rangle_{\tilde{A}} + |e\rangle_{\tilde{A}}) \end{array} \right) \quad (3.44)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} \cos(\lambda t_1) \exp(-i\xi) |g\rangle_A \otimes (|\alpha\rangle_C + |-\alpha\rangle_C) - \\ - \sin(\lambda t_1) |e\rangle_A \otimes (|\alpha\rangle_C - |-\alpha\rangle_C) \end{array} \right) \otimes |g\rangle_{\tilde{A}} - \\ - \left( \begin{array}{l} \cos(\lambda t_1) \exp(-i\xi) |g\rangle_A \otimes (|\alpha\rangle_C - |-\alpha\rangle_C) - \\ - \sin(\lambda t_1) |e\rangle_A \otimes (|\alpha\rangle_C + |-\alpha\rangle_C) \end{array} \right) \otimes |e\rangle_{\tilde{A}} \end{array} \right) \quad (3.45)$$

6. Finalmente, medindo  $\tilde{A}$  nos estados  $\begin{Bmatrix} |g\rangle_{\tilde{A}} \\ |e\rangle_{\tilde{A}} \end{Bmatrix}$  (cada resultado tem igual probabilidade), colapsamos (de forma 'indireta') o estado de AC para

$$|\Psi\rangle_{AC} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{l} \cos(\lambda t_1) \exp(-i\xi) |g\rangle_A \otimes (|\alpha\rangle_C \mp |-\alpha\rangle_C) - \\ - \sin(\lambda t_1) |e\rangle_A \otimes (|\alpha\rangle_C \pm |-\alpha\rangle_C) \end{array} \right) \quad (3.46)$$

respectivamente. Redefinindo os ângulos tais que

$$\cos(\lambda t_1) \rightarrow \sin(\gamma), \quad -\sin(\lambda t_1) \rightarrow \cos(\gamma) \quad (3.47)$$

vemos que, se  $\tilde{A}$  for medido no estado  $|g\rangle_{\tilde{A}}$ , então  $|\Psi\rangle_{AC}$  é o 'gato par-ímpar' (3.32); no caso contrário, é o correspondente 'gato ímpar-par'.<sup>9</sup>

Ressaltamos que este esquema permite em princípio preparar estados do tipo GPI com *qualquer* combinação dos parâmetros  $(\alpha, \gamma, \xi)$ . Deste modo, deixando em seguida o átomo A interagir com a cavidade C e medindo-o nos ionizadores, é possível verificar como a evolução

<sup>9</sup>É fácil ver ainda que, ajustando a fase  $\exp(i\varphi)$  de forma apropriada, sempre podemos escolher  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

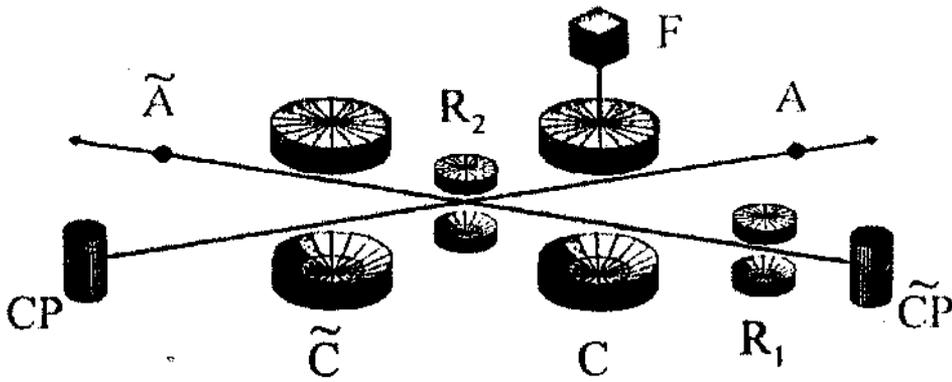


Figura 3-4: Esquema experimental para a preparação de estados pré-correlacionados do sistema  $A \otimes C$  usando o método II

destes sistemas depende dos valores específicos destes parâmetros.

### 3.2.2 Método II (Revezamento Unitário)

No esquema discutido acima, o que fizemos essencialmente foi primeiro construir um estado emaranhado de dois átomos, e em seguida transferir a correlação de um deles com o outro para uma cavidade. Agora, procuramos realizar o processo complementar: primeiro construímos um estado emaranhado de duas cavidades, uma das quais em seguida transfere sua correlação com a outra para um átomo. Como não é possível (ao menos com as técnicas atualmente disponíveis) desemaranhar uma cavidade através de uma medida direta do campo, procuramos realizar este processo de forma *completamente unitária*.

A idéia é primeiro criar um emaranhamento entre a cavidade “alvo”  $C$  e um átomo auxiliar (eq. 3.1), e em seguida transferir ou ‘revezar’ este emaranhamento para outros sistemas auxiliares, usando os cruzamentos de trajetória unitários descritos na seção 3.1.2. Cada subsistema auxiliar envolvido recebe a correlação com  $C$  e em seguida a transfere para o sistema seguinte, desemaranhando-se no processo (como se entregasse um bastão em uma corrida de revezamento!). Este ‘revezamento’ segue até que a correlação com  $C$  chega até um átomo em condições de cruzar a cavidade (eq. (3.2)).

Vamos descrever com mais detalhes um processo deste tipo, usando agora a montagem

da figura (3 - 4) (Como se pode ver, desta vez necessitamos não de uma mas de *duas* fontes atômicas independentes, localizadas em extremidades opostas da montagem).

Para construir o estado-pré-correlacionado de A e C, seguimos então a seguinte seqüência de passos:

1. Um átomo auxiliar  $\tilde{A}$ , emitido da fonte  $\tilde{F}$  no estado  $|g\rangle_{\tilde{A}}$ , é manipulado na região  $R_1$  de forma a prepará-lo em uma combinação apropriada de  $|g\rangle_{\tilde{A}}$  e  $|e\rangle_{\tilde{A}}$ .
2.  $\tilde{A}$  interage com a cavidade C, estabelecendo um estado correlacionado para o sistema auxiliar  $\tilde{A} \otimes C$ . Assim como nos exemplos anteriores, a dessintonia  $\delta = \omega_{\tilde{A}} - \omega_C$  deve ser escolhida da forma mais conveniente em cada caso.
3. Opcionalmente,  $\tilde{A}$  sofre ainda manipulações adicionais em  $R_2$ , produzindo um estado da forma geral

$$|\Psi_{C\tilde{A}}\rangle = c_1 |e\rangle_{\tilde{A}} \otimes |\psi_1\rangle_C + c_0 |g\rangle_{\tilde{A}} \otimes |\psi_0\rangle_C \quad (3.48)$$

onde os  $|\psi_i\rangle$  são normalizados, mas não necessariamente ortogonais (i.e.  $|e\rangle_{\tilde{A}}$  e  $|g\rangle_{\tilde{A}}$  não precisam ser em geral uma base de Schmidt para  $\tilde{A}$ ).

4. O átomo auxiliar interage *ressonantemente* com uma cavidade auxiliar  $\tilde{C}$ , inicialmente preparada no estado de vácuo. O tempo de interação é escolhido de modo a realizar um cruzamento de trajetórias *atômico* como na eq. (3.19); deste modo,  $\tilde{A}$  transfere toda a sua correlação com C para a cavidade  $\tilde{C}$ , saindo no estado puro  $|g\rangle_{\tilde{A}}$  (e não afetando a evolução subsequente do resto do sistema)

$$|\Psi_{C\tilde{A}}\rangle \otimes |0\rangle_{\tilde{C}} \rightarrow |g\rangle_{\tilde{A}} \otimes (-ic_1 |\psi_1\rangle_C \otimes |1\rangle_{\tilde{C}} + c_0 |\psi_0\rangle_C \otimes |0\rangle_{\tilde{C}}) \quad (3.49)$$

Notamos neste ponto que, assim como no exemplo da seção 3.1.1, este método também leva à criação de um estado não-localmente correlacionado de duas cavidades (C e  $\tilde{C}$ ). Ao contrário daquele caso, porém, aqui uma das cavidades ( $\tilde{C}$ ) tem no máximo um fóton.

5. Um segundo átomo A é preparado no estado  $|g\rangle_A$  e enviado em sentido *contrário* ao de  $\tilde{A}$ , passando primeiro pela cavidade  $\tilde{C}$  e em seguida continuando em direção a C (v. fig.3-4). O átomo interage ressonantemente com  $\tilde{C}$ , com tempo de interação escolhido de modo

que ele ‘apanhe’ a correlação desta cavidade com C através do cruzamento das trajetórias da cavidade (eq. 3.21):

$$\rightarrow |g\rangle_{\tilde{A}} \otimes |0\rangle_{\tilde{C}} \otimes (-c_1 |\psi_1\rangle_C \otimes |e\rangle_A + c_0 |\psi_0\rangle_C \otimes |g\rangle_A) \quad (3.50)$$

Estabelece-se assim um estado emaranhado de A e C, que podem interagir em seguida. Antes que isto ocorra, pode ser conveniente realizar ainda manipulações individuais sobre A (em  $R_2$ ) e C, o que aumenta o número de estados que podem ser gerados usando este método.

### Exemplo 3.3: novamente o ‘gato par-ímpar’

Não é difícil gerar um ‘gato par-ímpar’ (3.32) também por este método. Inicialmente o átomo auxiliar deve ser manipulado em  $R_1$  de modo a assumir o estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_{\tilde{A}} - |g\rangle_{\tilde{A}}) \quad (3.51)$$

Por sua vez, a cavidade C deve ser preparada em um estado coerente  $|-i\alpha\rangle$ .

Assim como no esquema anterior, a interação entre  $\tilde{A}$  e C deve ser dispersiva (descrita por 3.39), e realizada durante o tempo  $t_2 = \frac{\pi\hbar}{2\lambda^2}$  necessário para gerar a diferença de fase de  $\pi$  nas amplitudes coerentes dos estados do campo relativos a  $|e\rangle_{\tilde{A}}$  e  $|g\rangle_{\tilde{A}}$ . O resultado é o estado emaranhado do sistema  $\tilde{A} \otimes C$  dado por

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (-i |e\rangle_{\tilde{A}} \otimes |-\alpha\rangle_C - |g\rangle_{\tilde{A}} \otimes |\alpha\rangle_C) \quad (3.52)$$

Na saída da cavidade C (região  $R_2$ ), podemos submeter  $\tilde{A}$  a um pulso  $\frac{\pi}{2}$  em uma zona de Ramsey (eq. 3.36) e ainda eliminar a fase  $-i$ , modificando os estados relativos de  $|e\rangle_{\tilde{A}}$  e  $|g\rangle_{\tilde{A}}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [|e\rangle_{\tilde{A}} \otimes (|-\alpha\rangle_C + |\alpha\rangle_C) + |g\rangle_{\tilde{A}} \otimes (|-\alpha\rangle_C - |\alpha\rangle_C)] \quad (3.53)$$

Após o cruzamento de trajetórias atômico na cavidade  $\tilde{C}$ , o átomo  $\tilde{A}$  é desemaranhado, sendo deixado no estado fundamental, e produzimos então (v. eq. 3.49) o seguinte estado emaranhado

para as duas cavidades:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [i(|-\alpha\rangle_C + |\alpha\rangle_C) \otimes |1\rangle_{\tilde{C}} + (|\alpha\rangle_C - |-\alpha\rangle_C) \otimes |0\rangle_{\tilde{C}}] \quad (3.54)$$

Finalmente, o átomo A realiza um cruzamento de trajetórias na cavidade  $\tilde{C}$ , apanhando a correlação com C:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(|-\alpha\rangle_C + |\alpha\rangle_C) \otimes |e\rangle_A + (|\alpha\rangle_C - |-\alpha\rangle_C) \otimes |g\rangle_A] \quad (3.55)$$

e produzindo assim o estado tipo GPI. ■

É necessário apontar que, embora este esquema seja interessante teoricamente (por demonstrar que é em princípio possível pré-correlacionar um átomo e uma cavidade usando apenas manipulações *unitárias*), experimentalmente ele não é muito viável. O problema principal é que o tempo durante o qual o campo na cavidade C tem de ser sustentado sem que ocorram perdas para o ambiente é muito mais longo do que no caso anterior, pois agora há um intervalo considerável entre a passagem dos dois átomos. Outra dificuldade seria ainda que ambos os lados da montagem teriam de conter ao mesmo tempo tanto os fornos de onde são emitidos os feixes atômicos como as placas de ionização para medi-los. Desta forma, consideramos que este segundo método deve ser tomado por ora apenas como uma curiosidade teórica.

## Capítulo 4

# Uma Classe de Estados

# Correlacionados no MJC

Vimos no capítulo anterior que é possível em princípio manipular o sistema átomo-campo de forma a preparar um estado em que o átomo já esteja correlacionado com o campo *antes* de penetrar na cavidade. Isto viola a suposição habitualmente feita de que os dois sistemas iniciam sua interação a partir de um estado *fatorável*. As questões que queremos investigar neste capítulo são então:

1. Será que tais estados 'pré-correlacionados' podem também ser gerados a partir de condições iniciais fatoráveis, simplesmente evoluindo-as temporalmente?
2. Caso a resposta seja *não*, será que a evolução dinâmica da inversão atômica a partir de tais condições iniciais correlacionadas pode apresentar características distintas daquelas que são obtidas a partir de condições iniciais fatoráveis?

### 4.1 Densidade de Estados Fatoráveis no Espaço de Hilbert

À primeira vista, estas questões podem parecer triviais. Afinal, o próprio fato de haver uma interação entre os dois sistemas implica que um estado inicialmente fatorável deve imediatamente evoluir de modo a se tornar correlacionado. Poder-se-ia imaginar assim que, dado um estado não-fatorável, seria sempre possível 'recuar no tempo' o suficiente até encontrar um estado orig-

inalmente sem correlações. Nesse caso, qualquer estado inicial não-fatorável que pudéssemos preparar seria apenas a evolução natural de uma condição inicial sem correlações, e portanto poderíamos nos restringir a estas sem prejuízo para a riqueza da dinâmica do problema.

Entretanto, é fácil ver que esta conjectura não pode ser verdadeira em geral: basta notar que os autoestados do MJC, os estados vestidos

$$|n\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n\rangle \pm |g, n+1\rangle), \quad (4.1)$$

não são fatoráveis (e é claro que é impossível obter um autoestado a partir da evolução de um outro estado, devido à equação de Schrödinger ser de primeira ordem no tempo). Temos assim um contra-exemplo explícito.

Não é difícil encontrar outros estados correlacionados com a mesma propriedade de não serem o resultado da evolução de estados fatoráveis. De fato, podemos argumentar que isto deve ser verdade para a *grande maioria* dos estados possíveis para o sistema átomo-campo.

É possível mostrar isto (sem pretensões de rigor) comparando a dimensão do conjunto formado pelos estados fatoráveis mais suas evoluções temporais com a do espaço de Hilbert completo (contendo todos os estados possíveis). Consideremos primeiro o subespaço  $\mathbb{H}_N$  gerado por  $\{|g, 0\rangle, |e, 0\rangle, \dots, |g, N\rangle, |e, N\rangle\}$ .  $\mathbb{H}_N$  é gerado por  $2(N+1)$  estados ortonormais, portanto sua dimensão real é:

$$\dim(\mathbb{H}_N) = 2(2N+2) - 2 = 4N+2 = 2(2N+1) \quad (4.2)$$

(pois para cada estado temos uma amplitude complexa (duas dimensões reais), mas precisamos descontar duas dimensões devido às condições de normalização e fase global arbitrária).

Por outro lado, os estados *fatoráveis* contidos em  $\mathbb{H}_N$  são da forma

$$(\alpha_e |e\rangle + \alpha_g |g\rangle) \otimes \left( \sum_{n=0}^N \beta_n |n\rangle \right) \quad (4.3)$$

Podemos imaginar este conjunto como uma superfície  $F_N$  dentro de  $\mathbb{H}_N$ . Para vermos a sua

dimensão, podemos reescrever a condição acima na forma:

$$\mathbb{F}_N = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^N a_n |e\rangle \otimes |n\rangle + b_n |g\rangle \otimes |n\rangle \\ \text{onde } a_n = k \cdot b_n, k = \text{cte} \in \mathbb{C}; \sum_{n=0}^N |a_n|^2 + |b_n|^2 = 1; a_0 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

Temos assim  $2(N+1)$  estados com  $2(N)+2$  condições de vínculo; a dimensão de  $\mathbb{F}_N$  é portanto

$$\dim(\mathbb{F}_N) = 2(2(N+1)) - 2(N) - 2 = 2(N+1) \quad (4.5)$$

Podemos ver então que, no limite de  $N$  arbitrariamente grande:

$$\frac{\dim(\mathbb{F}_N)}{\dim(\mathbb{H}_N)} = \frac{(N+1)}{(2N+1)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (4.6)$$

Assim, os estados fatoráveis representam uma 'fatia' *muito fina* do conjunto de todos os estados (cada vez mais fina quando  $N \rightarrow \infty$ )!

Este fato não se modifica mesmo se considerarmos também aqueles estados que podem ser obtidos a partir de  $\mathbb{F}_N$  por evolução temporal (para o futuro ou o passado): para cada condição inicial fatorável  $|\Psi_0\rangle$  podemos imaginar a sua evolução temporal como uma curva  $|\Psi(t)\rangle$  no espaço de Hilbert dos estados possíveis do sistema, que passa por  $|\Psi_0\rangle$  em  $t=0$ . Assim, a adição desses estados a  $\mathbb{F}_N$  apenas acrescenta (grosso modo) uma dimensão a mais ao conjunto, o que não altera o comportamento assintótico da razão (4.6) acima no limite de  $N$  grande.<sup>1</sup>

Podemos concluir então que a maior parte do espaço de Hilbert é *inacessível* a partir de condições iniciais fatoráveis. Em outras palavras, embora a dinâmica leve à criação de estados correlacionados, estes representam apenas uma fração ínfima do total de estados do sistema conjunto. Ressaltamos que isto é verdade independentemente da dinâmica específica obedecida pelo sistema (embora naturalmente cada caso particular dá acesso a regiões distintas do espaço de Hilbert).

---

<sup>1</sup>Ao leitor eventualmente desconfortável com a falta de rigor destas afirmações (as quais negligenciam a possibilidade de evoluções temporais 'tipo Peano', densas em um conjunto de estados com dimensão  $>1$  no limite  $t \rightarrow \infty$ ), lembramos que, na prática, estaremos interessados sempre apenas em evoluções durante um tempo *finito*.

## 4.2 Limites para a entropia no MJC

O argumento acima permite concluir que existem estados que nunca se descorrelacionam, porém não fornece um critério para diferenciá-los daqueles que podem de fato ser produzidos pela evolução dos fatoráveis. Uma maneira de fazer isso é observando a evolução da entropia reduzida atômica:

$$S_A = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) \quad (4.7)$$

Vimos no Capítulo 1 que, quando o estado global átomo-campo é puro, esta quantidade fornece uma medida quantitativa de o quanto o estado é correlacionado. Assim, o valor *mínimo* assumido por  $S_A$  durante *toda* a curva de evolução que passa por um determinado estado fornece uma medida quantitativa de o quanto este estado está próximo de fatorar - eventualmente.

Em outras palavras, dado um estado inicial (correlacionado) arbitrário  $|\Psi_0\rangle$ , se for possível determinar um limite inferior (*lower bound*)  $S_{\min} > 0$  para toda a evolução de  $S_A$ , isto assegura que  $|\Psi_0\rangle$  nunca evoluirá para um estado fatorável; ao mesmo tempo, garante que nunca poderia ter evoluído a partir de um.

Para realizar isto, precisamos encontrar estados para os quais seja simples determinar propriedades *globais* da evolução da entropia reduzida, como  $S_{\min}$ . Uma pista são os próprios estados vestidos: lembramos que sua entropia reduzida é *máxima* ( $= \ln 2$ ); ainda, como eles são autoestados, esse valor é constante no tempo. Assim, neste sentido estes estados estão o mais distante possível daqueles que eventualmente fatoram.

### Exemplo 4.1: evolução temporal em um subespaço 2-dimensional

É interessante ver como o limite  $S_{\min}$  se comporta em uma situação simples, na qual os estados iniciais são formados apenas pelas combinações lineares dos dois estados vestidos  $|n+\rangle$  e  $|n-\rangle$  (ou, equivalentemente, dos estados fatoráveis  $|c, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$ ). Temos neste caso um subespaço 2-dimensional fechado pela evolução temporal -i.e., o sistema átomo-campo é reduzido a um 'sistema de dois níveis' efetivo.

Assim como em todo sistema quântico de dois níveis, qualquer estado pertencente a este

subespaço pode ser escrito na forma genérica

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)|n+\rangle + \exp(-i\phi_n)\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)|n-\rangle \quad (4.8)$$

onde os ângulos  $\theta_n \in [0, \pi]$  e  $\phi_n \in [0, 2\pi]$  podem ser vistos como coordenadas esféricas (ou 'de Bloch')<sup>2</sup>. Em termos desta representação, os estados vestidos  $|n+\rangle$  e  $|n-\rangle$  se encontram nos pólos da esfera ( $\theta_n = 0$  e  $\pi$ ) e os estados fatoráveis

$$|e, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n+\rangle + |n-\rangle) \leftrightarrow \theta_n = \frac{\pi}{2}, \phi_n = 0 \quad (4.9a)$$

$$|g, n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n+\rangle - |n-\rangle) \leftrightarrow \theta_n = \frac{\pi}{2}, \phi_n = \pi \quad (4.9b)$$

no equador (fig. 4-1).

De acordo com a evolução temporal do MJC ressonante, dada pela eq. (2.37), um estado inicial da forma (4.8) evolui para

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \left( \exp\left(-i\frac{\Omega_n t}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n+\rangle + \exp\left(-i\phi_n + i\frac{\Omega_n t}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n-\rangle \right) \\ &= \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n+\rangle + \exp(-i(\phi_n - \Omega_n t)) \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n-\rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde desprezamos um fator de fase global. Esta evolução pode ser descrita de forma mais simples em termos das coordenadas de Bloch:

$$\theta_n = \text{cte.} \quad (4.11a)$$

$$\phi_n(t) = \phi_n(0) - \Omega_n t \quad (4.11b)$$

Na representação geométrica da fig. 4-1, isto corresponde a rotações periódicas ao redor do eixo 'z', com frequência angular constante e igual à frequência de Rabi  $\Omega_n$ .

Vemos assim que o uso destas coordenadas sintetiza e simplifica a descrição das evoluções

---

<sup>2</sup>Esta bem-conhecida identificação do espaço de estados de um sistema de dois níveis com uma esfera é de uso comum em ótica quântica, onde é em geral denominada uma 'representação em esfera de Bloch' [40]. É bom ressaltar que o uso que dela fazemos aqui é diferente daquele mais comum, no qual o 'sistema de dois níveis' se refere aos dois níveis atômicos  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ . Lembramos ainda que a descrição pode ser estendida também para misturas estatísticas (que preenchem o interior da casca esférica).

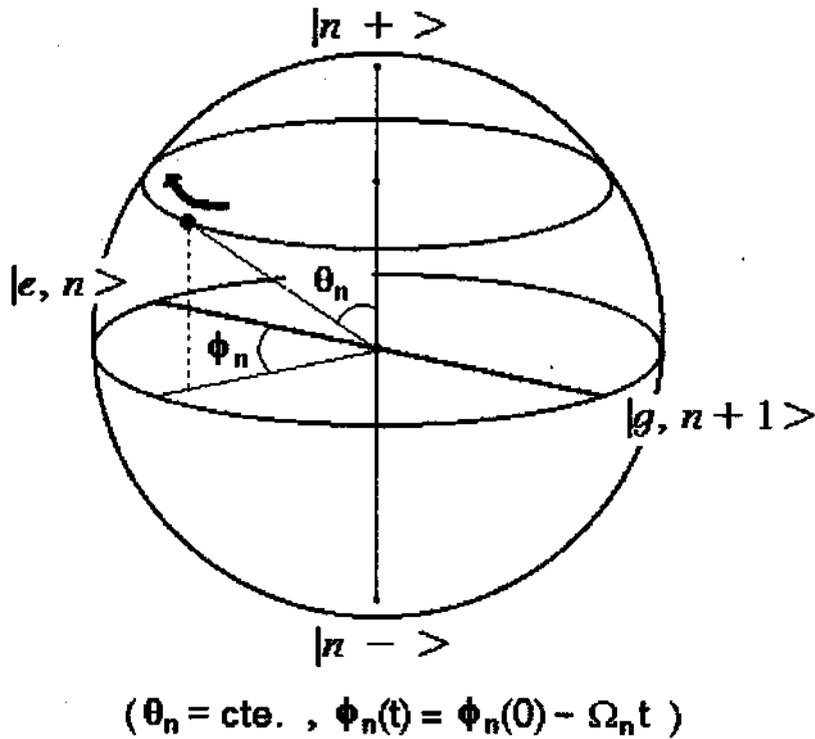


Figura 4-1: Representação em coordenadas esféricas 'tipo Bloch' da evolução temporal no subespaço gerado por  $|n+\rangle$  e  $|n-\rangle$ .

temporais possíveis neste subespaço: essencialmente, a cada paralelo da esfera (ou valor de  $\theta_n$ ) corresponde uma curva de evolução distinta. Em particular, a evolução ao longo do equador ( $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ ) oscila entre os estados fatoráveis  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$ , e pode ser interpretada fisicamente como uma 'troca de fóton' periódica entre o átomo e o campo<sup>3</sup>.

À medida em que aumentamos a latitude, porém, esta interpretação não pode mais ser sustentada, visto que em nenhum momento átomo ou campo têm estados puros próprios. De fato, podemos notar que  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  são os *únicos* estados fatoráveis em toda a esfera, de modo que para outros valores de  $\theta_n$  o estado nunca chega a fatorar durante a evolução. Quanto maior a latitude, maior o 'caráter vestido' do estado, e 'mais distante' estará ele de

<sup>3</sup>Notamos que outras parametrizações semelhantes à (4.8) poderiam ser realizadas, apenas mudando-se os estados utilizados como base. Por exemplo, se utilizássemos como base  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$ , obteríamos novos ângulos  $\theta'_n, \phi'_n$ , calculados com respeito a um eixo na esfera de Bloch inclinado de  $90^\circ$ . A vantagem da parametrização em termos dos estados vestidos é justamente a simplicidade da descrição (4.11a, b) da evolução temporal no MJC.

fatorar eventualmente; o limite, evidentemente, se dá nos próprios pólos, que correspondem aos autoestados maximamente correlacionados. Ressaltamos que este caráter de um estado ser 'mais ou menos propenso a fatorar' é determinado por uma quantidade ( $\theta_n$ ) conservada durante a evolução.

Estas observações podem ser quantificadas através da introdução de um limite inferior  $S_{\min}$  para a entropia reduzida atômica. Para isto, calculamos inicialmente o operador reduzido atômico na base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  em termos das coordenadas de Bloch:

$$\rho_A(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sin(\theta_n) \cos(\phi_n(t)) & 0 \\ 0 & 1 - \sin(\theta_n) \cos(\phi_n(t)) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Notamos que, como os estados atômicos em questão estão associados com estados ortogonais do campo (números distintos de fótons),  $\rho_A(t)$  é sempre diagonalizável nesta base (i.e., a polarização atômica é identicamente nula nestes estados). Deste modo, os seus autovalores (e a entropia atômica associada) podem ser obtidos diretamente do elemento de matriz  $\rho_{ee}(t)$ , o qual oscila periodicamente entre  $\frac{1}{2}(1 - \sin(\theta_n))$  e  $\frac{1}{2}(1 + \sin(\theta_n))$ . Lembrando que a entropia atômica

$$S_A(t) = -\rho_{ee}(t) \ln(\rho_{ee}(t)) - (1 - \rho_{ee}(t)) \ln(1 - \rho_{ee}(t)) \quad (4.13)$$

é uma função *convexa* de  $\rho_{ee}(t)$  (v. seção 1.2.1), com valor máximo =  $\ln(2)$  em  $\rho_{ee} = \frac{1}{2}$ , então o seu valor *mínimo* durante a evolução temporal ocorre quando  $\rho_{ee}(t)$  assume os valores-limite acima:

$$S_{\min} \equiv \lim . \inf . (S_A) = -\frac{1}{2}(1 - \sin(\theta_n)) \ln\left(\frac{1}{2}(1 - \sin(\theta_n))\right) - \frac{1}{2}(1 + \sin(\theta_n)) \ln\left(\frac{1}{2}(1 + \sin(\theta_n))\right) \quad (4.14)$$

Obtemos assim para cada valor de  $\theta_n$  um limite inferior para a entropia atômica, válido para toda a evolução temporal, o qual vai desde zero (se  $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ ) até  $\ln 2$  (se  $\theta_n = 0$  ou  $\pi$ ) (fig. 4-2). Dado um estado arbitrário da forma (4.8), este valor fornece então uma medida quantitativa do quão próximo de fatorar ele chega.

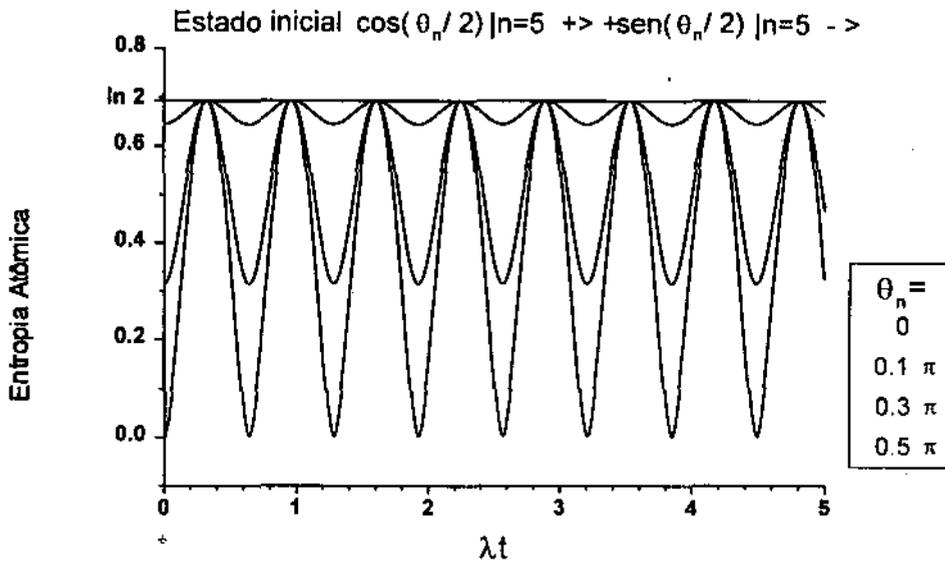


Figura 4-2: Evolução temporal da entropia reduzida atômica para estados iniciais pertencentes ao subespaço  $\mathbb{H}_5$ , variando-se o peso relativo dos estados vestidos  $|n = 5 \pm\rangle$ .

### 4.2.1 Coordenadas ‘Vestidas’ para o modelo de Jaynes-Cummings

Embora instrutivo, este exemplo é limitado pelo fato de que, no subespaço em questão, a dinâmica é sempre periódica, pois só existe uma frequência de Rabi envolvida. Ainda, os únicos estados maximamente correlacionados são os estados vestidos, nos quais essencialmente não há evolução. É razoável então procurar outros estados também com  $S_{\min} > 0$  a partir de combinações dos estados vestidos pertencentes a subespaços distintos.

Para isto, vamos generalizar o ponto de vista ‘geométrico’ introduzido acima de modo a aplicá-lo para um estado  $|\Psi\rangle$  arbitrário do sistema átomo-campo. Queremos expandi-lo em termos da base completa de estados vestidos, de forma a obter coordenadas com as mesmas propriedades dos ângulos introduzidos acima (i.e., que descrevam a evolução temporal de forma simples, e que sejam também adequadas para descrever  $S_{\min}$ ).

Podemos então escrever um estado arbitrário na forma

$$|\Psi\rangle = w_{-1} |g, 0\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} w_n \exp(i\chi_n) |\psi_n\rangle \quad (4.15)$$

onde

$$|\psi_n\rangle = \left[ \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n+\rangle + e^{-i\phi_n} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n-\rangle \right] \quad (4.16a)$$

$$w_n \in [0, 1]; \theta_n \in [0, \pi]; \chi_n, \phi_n \in [0, 2\pi] \quad (4.16b)$$

com a condição de normalização

$$\sum_{n=-1}^{\infty} w_n^2 = 1 \quad (4.17)$$

Chamamos esses parâmetros de ‘coordenadas vestidas’. Através deles, podemos fornecer uma descrição alternativa para o MJC.

Notamos inicialmente que para cada valor de  $n \geq 0$  é possível agora imaginar uma casca esférica independente ‘tipo Bloch’ análoga à do exemplo acima, correspondendo ao sistema de dois níveis gerado pelos estados vestidos  $|n\pm\rangle$  e parametrizada pelas coordenadas angulares esféricas  $\theta_n$  e  $\phi_n$ . Desta vez, os pontos sobre cada esfera indicam as contribuições  $|\psi_n\rangle$  de cada um desses subespaços 2-dimensionais para o estado global  $|\Psi\rangle$ . Como antes, os pólos ( $\theta_n = 0, \pi$ ) correspondem aos estados  $|n\pm\rangle$ , e os pontos no equador ( $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ ) aos estados de

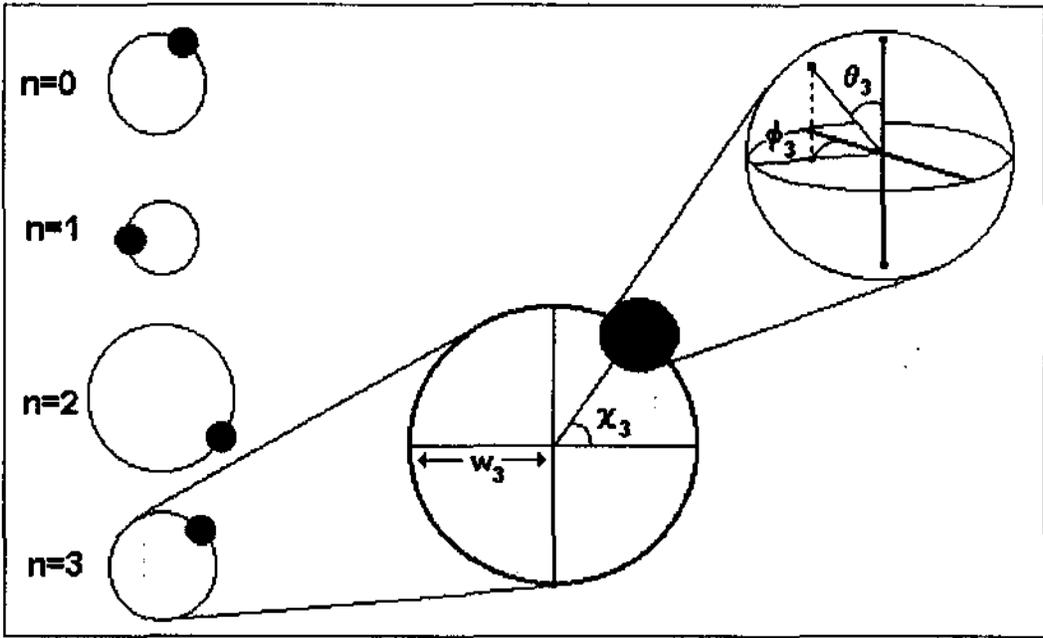


Figura 4-3: Coordenadas 'vestidas': Um estado quântico arbitrário é determinado pela atribuição, para cada valor de  $n \geq 0$ , de um ponto com coordenadas polares  $w_n, \chi_n$  e, para cada um desses, de um outro ponto com coordenadas esféricas  $\theta_n, \phi_n$ .

forma  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|n+\rangle + e^{-i\phi_n} |n-\rangle)$  entre os quais estão os estados fatoráveis  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  ( $\phi_n = 0, \pi$ ). Podemos dizer então que as coordenadas  $\theta_n$  e  $\phi_n$  determinam a importância e a fase relativas entre  $|n+\rangle$  e  $|n-\rangle$  no estado global  $|\Psi\rangle$ .

Além dessas coordenadas esféricas, temos ainda dois conjuntos adicionais de parâmetros,  $w_n$  e  $\chi_n$ , que correspondem ao peso e à fase relativa da componente  $|\psi_n\rangle$  na composição de  $|\Psi\rangle$ . No caso particular em que  $|\Psi\rangle$  é fatorável, com o átomo em um dos estados  $|g\rangle$  ou  $|e\rangle$ , então  $w_n^2$  se reduz à distribuição de fótons  $P(n) = |\langle n | \Psi \rangle|^2$ .

Podemos visualizar essas coordenadas geometricamente da seguinte maneira (v. fig 4-3): para cada valor de  $n$ , imaginamos  $w_n$  e  $\chi_n$  respectivamente como a parte radial e angular de coordenadas polares, determinando um ponto sobre um disco de raio 1 (valor máximo de  $w_n$ ). Para cada ponto desses discos podemos imaginar então uma casca esférica unitária, cujos pontos são parametrizados por  $\theta_n$  e  $\phi_n$ .

### Observações

1. Embora útil, esta representação pictórica não é completamente rigorosa. A razão é que ela não leva em conta a condição de vínculo (4.17) entre os pesos  $w_n$ ; na verdade, os raios dos discos acima dependem todos uns dos outros. Isto não será um problema, visto que, como veremos adiante, estes pesos se mantêm constantes durante a evolução temporal.
2. A fase global do estado (4.15) foi escolhida de modo que a componente constante no tempo (i.e., proporcional a  $|g, 0\rangle$ ) seja real: esta escolha determina a origem para todos os ângulos  $\chi_n$ . Muitas vezes, porém, não estaremos interessados nesta componente ( $w_{-1} = 0$ ); neste caso, podemos impor  $\chi_0 = 0$  para definir uma fase global bem-determinada para o estado.

## Evolução Temporal

Da equação de evolução temporal (2.37), segue que o estado (4.15) evolui da forma:

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= w_{-1} |g, 0\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} w_n e^{i\chi_n} \left[ \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}\Omega_n t} |n+\rangle + e^{\frac{-i}{2}(2\phi_n - \Omega_n t)} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n-\rangle \right] \\
 &= w_{-1} |g, 0\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} w_n e^{\frac{i}{2}(2\chi_n - \Omega_n t)} \times \\
 &\quad \times \left[ \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n+\rangle + e^{-i(\phi_n - \Omega_n t)} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n-\rangle \right]
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Em termos das coordenadas vestidas, a evolução pode ser representada então como :

$$w_n(t) = w_n(0) = cte. \tag{4.20a}$$

$$\theta_n(t) = \theta_n(0) = cte. \tag{4.20b}$$

$$\chi_n(t) = \chi_n(0) - \frac{1}{2}\Omega_n t \tag{4.20c}$$

$$\phi_n(t) = \phi_n(0) - \Omega_n t \tag{4.20d}$$

onde lembramos que  $\Omega_n$  valem (v. seção 2.2):

$$\Omega_n = 2\lambda\sqrt{n+1} \tag{4.21}$$

As coordenadas  $w_n$  e  $\theta_n$  são portanto *constantes do movimento*. Isto naturalmente apenas reflete o fato de que os estados vestidos são autoestados, já que

$$w_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = |\langle n+ | \Psi(t) \rangle| \quad (4.22)$$

$$w_n \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = |\langle n- | \Psi(t) \rangle| \quad (4.23)$$

Podemos ainda encontrar mais um conjunto de constantes notando que

$$\begin{aligned} 2(\chi_n(t) - \chi_n(0)) &= -\Omega_n t = \phi_n(t) - \phi_n(0) \\ \therefore 2\chi_n(t) - \phi_n(t) &= 2\chi_n(0) - \phi_n(0) = \text{cte.} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Redefinindo

$$\tilde{\chi}_n(t) \equiv 2\chi_n(t) - \phi_n(t), \quad (4.25)$$

temos então que esta nova coordenada *também* é uma constante do movimento<sup>4</sup>. A evolução do estado pode então ser reescrita :

$$|\Psi(t)\rangle = w_{-1} |g, 0\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} w_n e^{\frac{i}{2}(\tilde{\chi}_n + \phi_n(t))} \left[ \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n+\rangle + e^{-i\phi_n(t)} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n-\rangle \right] \quad (4.26)$$

onde

$$\phi_n(t) = \phi_n(0) - \Omega_n t \quad (4.27)$$

e  $w_n, \theta_n, \tilde{\chi}_n$  são constantes. Vemos assim que a evolução dinâmica de qualquer estado assume uma forma bastante simples quando descrita em termos dessas coordenadas, como desejávamos.

Podemos pensar nessa evolução como o movimento de um ponto no espaço de configuração parametrizado pelas coordenadas. Evidentemente, não é possível visualizar esse espaço como um todo, mas é sempre possível decompor o movimento nas coordenadas vestidas usando a imagem geométrica introduzida acima (fig. 4-4). Assim, a evolução (4.18) pode ser imaginada da seguinte maneira: para cada  $n \geq 0$ , o ponto  $(w_n, \chi_n)$  em coordenadas polares gira no sentido

---

<sup>4</sup> A existência desta nova constante reflete o fato de que a interação do MJC quebra a degenerescência de cada par  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$  de forma *simétrica*.

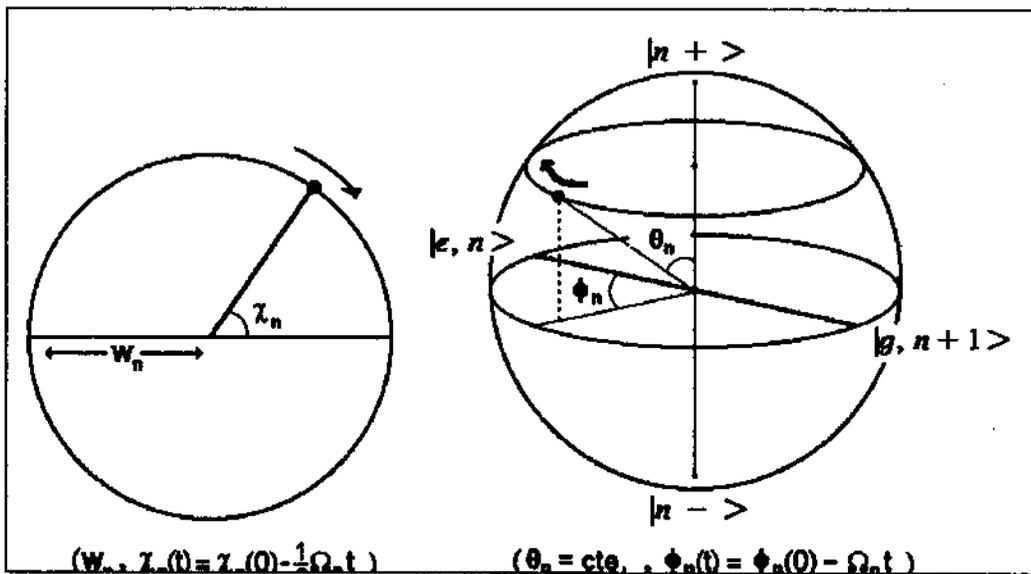


Figura 4-4: Imagem geométrica da evolução temporal no MJC em termos de 'coordenadas vestidas'

horário com velocidade angular constante  $\frac{1}{2}\Omega_n$ , enquanto o ponto  $(\theta_n, \phi_n)$  em coordenadas esféricas gira ao redor do eixo vertical ( $\hat{z}$ ), também no sentido horário, com velocidade angular constante  $\Omega_n$ . Tanto o raio  $w_n$ , para as coordenadas polares, como a altura  $\cos(\theta_n)$ , no caso das coordenadas esféricas, se mantêm constantes. A terceira constante se manifesta através da manutenção da diferença de fase  $2\chi_n(t) - \phi_n(t)$  entre os dois movimentos giratórios.

Obtemos desta maneira uma imagem 'mecânica' para o MJC, composta de infinitas rodas em movimento, cada uma com a sua frequência de rotação. Esta multiplicidade de frequências é responsável pela complexidade da evolução, permitindo a existência de fenômenos como os colapsos e ressurgimentos discutidos na seção 2.3.

#### 4.2.2 Operador Densidade Reduzido Atômico

Uma vez obtida a evolução do estado completo do sistema átomo-campo em termos das coordenadas vestidas, podemos calcular a partir dele o operador reduzido atômico. Reescrevendo os

estados vestidos em termos da base produto  $\{|e, n\rangle, |g, n\rangle\}$ , a expressão (4.26) acima se torna

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= w_{-1} |g, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} w_n e^{\frac{i}{2}(\bar{x}_n + \phi_n(t))} \times \\
 &\times \left[ \left( \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) + e^{-i\phi_n(t)} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \right) |e, n\rangle + \right. \\
 &\left. + \left( \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) - e^{-i\phi_n(t)} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \right) |g, n+1\rangle \right]
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

O operador densidade reduzido atômico na base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  fica então:

$$\rho_A(t) = \begin{bmatrix} \rho_{ee}(t) & \rho_{eg}(t) \\ \rho_{eg}(t) & \rho_{gg}(t) \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

onde

$$\rho_{ee}(t) = \frac{1}{2} (1 - w_{-1}^2) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} w_n^2 \sin(\theta_n) \cos(\phi_n(t)) \tag{4.30a}$$

$$\rho_{gg}(t) = \frac{1}{2} (1 + w_{-1}^2) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} w_n^2 \sin(\theta_n) \cos(\phi_n(t)) \equiv 1 - \rho_{ee} \tag{4.30b}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{eg}(t) &= \frac{w_{-1}w_0}{\sqrt{2}} e^{\frac{i}{2}(\bar{x}_0 + \phi_0(t))} \left( \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + e^{-i\phi_0(t)} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} w_n w_{n+1} e^{\frac{i}{2}(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n + \phi_n(t) - \phi_{n+1}(t))} \left( \cos\left(\frac{\theta_{n+1}}{2}\right) + e^{-i\phi_{n+1}(t)} \sin\left(\frac{\theta_{n+1}}{2}\right) \right) \times \\
 &\times \left( \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) - e^{i\phi_n(t)} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.30c}$$

Ao contrário do que ocorre com o estado completo do sistema, a evolução do estado reduzido atômico não é necessariamente descrita de maneira simples usando estas coordenadas. Assim, geralmente não é uma tarefa simples determinar um limite inferior para a entropia reduzida da maneira feita no exemplo anterior.

### 4.2.3 Limites para a entropia de estados despolarizados

Existem entretanto situações particulares onde isto pode ser feito com facilidade: por exemplo, basta garantir que o átomo esteja sempre despolarizado, isto é:

$$\rho_{eg}(t) \equiv 0 \quad (4.31)$$

Assim como no exemplo 4.1 acima, neste caso a entropia atômica  $S_A(t)$  passa a depender apenas do elemento de matriz  $\rho_{ee}(t)$ , ou equivalentemente, da inversão de população:

$$\langle \sigma_z(t) \rangle = 2\rho_{ee}(t) - 1 = -w_{-1}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} w_n^2 \sin(\theta_n) \cos(\phi_n(t)) \quad (4.32)$$

(v. seção 2.3.1). Mais especificamente, quanto menor for a inversão (em módulo), maior será a entropia, e portanto o emaranhamento entre os dois sistemas. Assim, nestes casos o problema de determinar  $S_{\min}$  se reduz ao de encontrar limites para a inversão.

Que tipo de estado satisfaz à propriedade (4.31)? Observando a expressão (4.30c) para  $\rho_{eg}(t)$ , podemos ver que uma condição suficiente é os pesos  $w_n$  satisfazerem

$$w_n w_{n+1} = 0, \forall n \geq -1 \quad (4.33)$$

Na verdade, esta condição é também *necessária*: levando em conta (4.20d) e (4.21) podemos ver que o  $n$ -ésimo termo da série evolui com as frequências

$$\nu_n^+ = \lambda(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \quad (4.34a)$$

$$\text{e } \nu_n^- = \lambda(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad (4.34b)$$

Não é difícil mostrar que estas frequências são sempre incomensuráveis entre si para valores distintos de  $n$ , o que mostra que o *único* modo de anular todos os termos de  $\rho_{eg}(t)$  em todos os instantes é satisfazendo (4.33).

O sentido físico desta condição é simples: essencialmente, ela fixa uma correspondência entre cada número de fótons do campo e um valor específico ( $e$  ou  $g$ ) para a excitação atômica. Em outras palavras, se um estado  $|\Psi\rangle$  tem amplitude não-nula em uma determinada componente

$|e, n\rangle$  (o que implica  $w_n \neq 0$ ), o contrário deve valer para as componentes em  $|g, n\rangle$  e  $|e, n \pm 1\rangle$  (e vice-versa). Como consequência disto, nesses estados os valores médios tanto da polarização atômica (v. eqs (2.53a, b)) quanto dos operadores campo elétrico e magnético (proporcionais a  $\langle a + a^\dagger \rangle$  e  $\langle a - a^\dagger \rangle$ )<sup>5</sup> são iguais a zero. Estas propriedades continuam valendo durante toda a evolução a partir da condição inicial  $|\Psi\rangle$ .

A maneira mais simples de satisfazer a estas condições é quando  $|\Psi\rangle$  é da forma

$$|\Psi\rangle = \cos(\gamma) |e\rangle_A \otimes |par\rangle_C + \sin(\gamma) \exp(i\xi) |g\rangle_A \otimes |ímpar\rangle_C \quad (4.35a)$$

$$(\Leftrightarrow w_{2n-1} = 0, \forall n \geq 0)$$

$$\text{ou } |\Psi\rangle = \cos(\gamma) |e\rangle_A \otimes |ímpar\rangle_C + \sin(\gamma) \exp(i\xi) |g\rangle_A \otimes |par\rangle_C \quad (4.35b)$$

$$(\Leftrightarrow w_{2n} = 0, \forall n \geq 0)$$

onde  $|par\rangle_C$  e  $|ímpar\rangle_C$  têm amplitudes apenas para a presença de números pares e ímpares de fótons, respectivamente. Nestes casos, os estados atômicos  $|e\rangle_A$  ou  $|g\rangle_A$  funcionam como ‘etiquetas’ quânticas para a paridade do estado do campo; usando a nomenclatura do cap. 1, podemos dizer que a inversão atômica  $\sigma_z$  e a paridade do campo são observáveis de Schmidt de  $|\Psi\rangle$ .

Em casos como estes, torna-se simples calcular um limite inferior para a entropia reduzida atômica. Por exemplo, se o estado for da forma “par-ímpar” (4.35a), então

$$\rho_{ce}(t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_n w_{2n}^2 \sin(\theta_{2n}) \cos(\phi_{2n}(t)) \right) \quad (4.36)$$

$$\Rightarrow \langle \sigma_z(t) \rangle = \sum_n w_{2n}^2 \sin(\theta_{2n}) \cos(\phi_{2n}(t)) \quad (4.37)$$

o que implica no limite superior para o módulo da inversão:

$$|\langle \sigma_z(t) \rangle| \leq \sum_n w_{2n}^2 \sin(\theta_{2n}) \equiv M \quad (4.38)$$

Notamos que este limite é dado essencialmente pelo ‘caráter vestido’ médio de todas as esferas

<sup>5</sup>Rigorosamente, os campos elétrico e magnético na representação de interação são proporcionais respectivamente a  $a \exp(-i\omega t) \pm a^\dagger \exp(+i\omega t)$ , o que não altera esta observação.

de Bloch, ponderadas pelos pesos  $w_{2n}^2$  correspondentes.

Assim, a exemplo do que fizemos anteriormente, podemos obter um limite  $S_{\min}$  calculando o valor da entropia (4.13) correspondente a este limite.

$$S_{\min} = -\frac{1}{2}(1-M) \ln\left(\frac{1}{2}(1-M)\right) - \frac{1}{2}(1+M) \ln\left(\frac{1}{2}(1+M)\right) \quad (4.39)$$

É importante ressaltar que, ao contrário do que ocorre no exemplo 4.1 acima, neste caso  $S_{\min}$  é apenas um *limite inferior* para o valor de  $S_A(t)$ , não sendo necessariamente atingido durante a evolução a partir do estado em questão. Para que efetivamente  $S_A(t) = S_{\min}$ , é preciso que todos os ângulos  $\phi_{2n}(t)$  satisfaçam simultaneamente  $\cos(\phi_{2n}(t)) = 1$  ou  $\cos(\phi_{2n}(t)) = -1$ . Devido à incomensurabilidade das várias frequências de Rabi, um acontecimento deste tipo é extremamente raro. Na prática, o valor mínimo de  $S_A(t)$  tenderá a ser atingido quando os ângulos  $\phi_{2n}(t)$  correspondentes aos pesos  $w_{2n}^2$  mais importantes estiverem o mais próximos destes valores extremos.

#### 4.2.4 Evolução da inversão atômica em uma classe de estados correlacionados do MJC

No capítulo 3, introduzimos uma classe de estados não-fatoráveis que batizamos de estados tipo ‘gato-par-ímpar’:

$$|GPI(\alpha, \gamma, \xi)\rangle = \cos(\gamma) |e\rangle \otimes |\alpha_{par}\rangle + \sin(\gamma) e^{-i\xi} |g\rangle \otimes |\alpha_{impar}\rangle \quad (4.40)$$

e mostramos como poderiam ser gerados experimentalmente. Lembrando que  $|\alpha_{par}\rangle$  e  $|\alpha_{impar}\rangle$  possuem respectivamente apenas as componentes  $|n\rangle$  de  $n$  par e ímpar (eqs. 3.33a, b), vemos que os GPIs são da forma ‘despolarizada’ (4.35a) discutida acima. Assim, a evolução de sua inversão atômica reflete a forma como átomo e campo se emaranham ao longo do tempo.

No restante deste capítulo, analisaremos como se comporta esta evolução de acordo com os parâmetros  $\alpha, \gamma, \xi$  destes estados. Veremos que, escolhendo-os adequadamente, é possível obter desde estados com  $S_{\min} = 0$  até outros com  $S_{\min} \approx \ln 2$ . Quanto mais próximo deste limite, mais amortecidas serão as oscilações no valor da inversão; assim, para valores apropriados de  $\alpha, \gamma, \xi$  os estados tipo GPI apresentarão ‘trapping’ de população.

A forma detalhada deste ‘trapping’ será obtida através de uma generalização apropriada do método de Fleischhauer e Schleich introduzido no capítulo 2. Mostraremos que, de modo geral, as oscilações na inversão dependem não da distribuição inicial de fótons do campo, mas da de coordenadas vestidas. O mesmo mecanismo permitirá também explicar a existência de ‘trapping’ nos estados (2.75) introduzidos por Zafeer e Zubairy.

### Coordenadas vestidas para os estados tipo GPI

Antes de mais nada, precisamos calcular as coordenadas vestidas dos estados tipo GPI em termos dos parâmetros  $\xi, \gamma$  e  $\alpha \equiv |\alpha| e^{-i\nu_\alpha}$ :

$$w_{2n}^2(\alpha, \gamma, \xi) = \frac{2|\alpha|^{4n} e^{-|\alpha|^2}}{(2n+1)!} \left[ (2n+1) \cos^2(\gamma) + |\alpha|^2 \sin^2(\gamma) \right] \quad (4.41a)$$

$$\tan\left(\frac{\theta_{2n}(\alpha, \gamma, \xi)}{2}\right) = \frac{|\sqrt{2n+1} \cos(\gamma) - \alpha e^{-i\xi} \sin(\gamma)|}{|\sqrt{2n+1} \cos(\gamma) + \alpha e^{-i\xi} \sin(\gamma)|} = \left(\frac{A_{2n} - B_{2n}}{A_{2n} + B_{2n}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.41b)$$

$$\text{onde} \begin{cases} A_{2n} = (2n+1) \cos^2(\gamma) + |\alpha|^2 \sin^2(\gamma) \\ B_{2n} = \sqrt{2n+1} \sin(2\gamma) |\alpha| \cos(\nu_\alpha - \xi) \end{cases} \quad (4.41c)$$

$$\therefore \sin(\theta_{2n}(\alpha, \gamma, \xi)) = \frac{\sqrt{A_{2n}^2 - B_{2n}^2}}{A_{2n}} \quad (4.41d)$$

$$= \frac{|(2n+1) \cos^2(\gamma) - |\alpha|^2 e^{2i(\nu_\alpha - \xi)} \sin^2(\gamma)|}{(2n+1) \cos^2(\gamma) + |\alpha|^2 \sin^2(\gamma)} \quad (4.41e)$$

$$\cos \phi_{2n}(\alpha, \gamma, \xi) = \frac{(2n+1) \cos^2(\gamma) - |\alpha|^2 \sin^2(\gamma)}{|(2n+1) \cos^2(\gamma) - |\alpha|^2 e^{2i(\nu_\alpha - \xi)} \sin^2(\gamma)|} \quad (4.41f)$$

$$\sin \phi_{2n}(\alpha, \gamma, \xi) = \frac{\sqrt{2n+1} \sin(2\gamma) |\alpha| \sin(\nu_\alpha - \xi)}{|(2n+1) \cos^2(\gamma) - |\alpha|^2 e^{2i(\nu_\alpha - \xi)} \sin^2(\gamma)|} \quad (4.41g)$$

$$\chi_{2n}(\alpha, \gamma, \xi) = 2n\nu_\alpha + \quad (4.41h)$$

$$+ \tan^{-1} \left( \frac{|\alpha| \sin(\gamma) \sin(\nu_\alpha - \xi)}{\sqrt{2n+1} \cos(\gamma) + |\alpha| \sin(\gamma) \cos(\nu_\alpha - \xi)} \right) \quad (4.41i)$$

<sup>6</sup>Por simplicidade, usamos valores aproximados para as coordenadas, válidos na condição de que os fatores de normalização para  $|\alpha_{par}\rangle$  e  $|\alpha_{impar}\rangle$  podem ser tomados iguais a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (i.e.,  $\alpha \gtrsim 3$ ) (v. eq. 2.67).

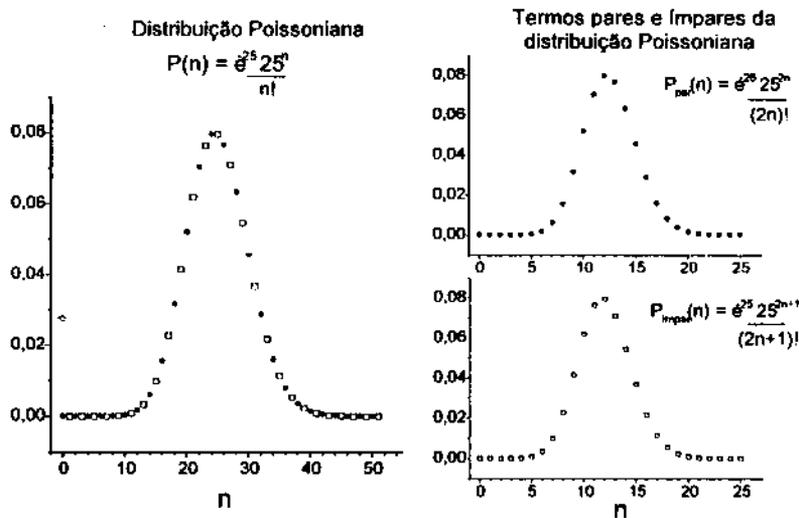


Figura 4-5: Termos pares e ímpares da distribuição de Poisson  $\exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$  ( $|\alpha| = 5$ ).

Vamos olhar mais de perto as quantidades conservadas  $w_{2n}, \theta_{2n}$ , as quais são particularmente importantes para os cálculos posteriores:

Os ‘pesos’  $w_{2n}^2$  interpolam entre as distribuições de número de fótons das componentes  $|\alpha_{par}\rangle$  e  $|\alpha_{impar}\rangle$  de  $|GPI(\alpha, \gamma, \xi)\rangle$ , as quais são formadas respectivamente pelos termos pares e ímpares de uma distribuição de Poisson:

$$|\langle 2n | \alpha_{par} \rangle|^2 = 2 \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{4n}}{(2n)!} \quad (4.42a)$$

$$|\langle 2n + 1 | \alpha_{impar} \rangle|^2 = 2 \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{4n+2}}{(2n+1)!} \quad (4.42b)$$

Para os valores de  $|\alpha|$  que estamos considerando ( $|\alpha| \gtrsim 3$ ) essas duas distribuições (vistas como funções de  $n$ ) se tornam muito semelhantes (fig. 4-5). Deste modo, a distribuição (4.41a) de  $w_{2n}^2$  é praticamente independente de  $\gamma$ ; essencialmente, sua forma é semelhante à de uma Poissoniana ‘esticada’, com o dobro da altura e a metade da largura em  $n$  (fig. 4 – 6).

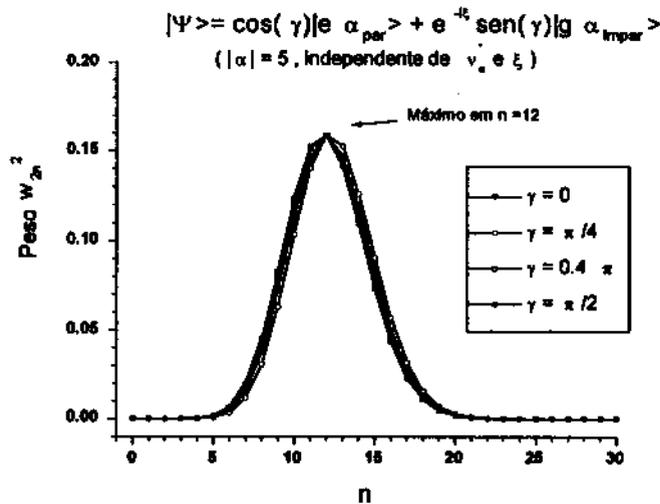


Figura 4-6: Distribuição de pesos  $w_{2n}^2$  para os estados tipo 'gato par-ímpar' com  $|\alpha| = 5$

O pico desta distribuição se encontra no inteiro  $n_{\text{max}}$  mais próximo de:

$$\frac{|\alpha|^2}{2} \text{ ou } \frac{|\alpha|^2 - 1}{2} \quad (4.43)$$

Assim, as componentes  $|\psi_{2n}\rangle$  de  $|GPI(\alpha, \gamma, \xi)\rangle$  com valores de  $2n$  em torno de  $2n_{\text{max}}$  serão aquelas com a maior influência nas diversas propriedades deste estado. Isto implica que as respectivas frequências de Rabi  $\Omega_{2n}$  regerão a sua evolução temporal, determinando os pontos de ocorrência de colapsos e ressurgimentos.

Em contrapartida, a distribuição (4.41b) de  $\sin(\theta_{2n})$  depende decisivamente dos parâmetros específicos do estado  $|GPI(\alpha, \gamma, \xi)\rangle$ . Considerando  $n$  como uma variável contínua em (4.41b) e derivando, pode-se mostrar que esta distribuição possui um único mínimo, localizado no inteiro  $n_{\text{min}}$  mais próximo de

$$\frac{1}{2} \left( |\alpha|^2 \tan^2(\gamma) - 1 \right) \quad (4.44)$$

Dado  $|\alpha|$ , o valor de  $n_{\text{min}}$  varia assim desde zero<sup>7</sup> até  $+\infty$  à medida em que variamos o peso

<sup>7</sup>Quando  $\tan^2(\gamma) \rightarrow 0$ ,  $n_{\text{min}}$  se torna negativo, fazendo com que o valor mínimo de  $\sin(\theta_{2n})$  se encontre em  $n = 0$ .

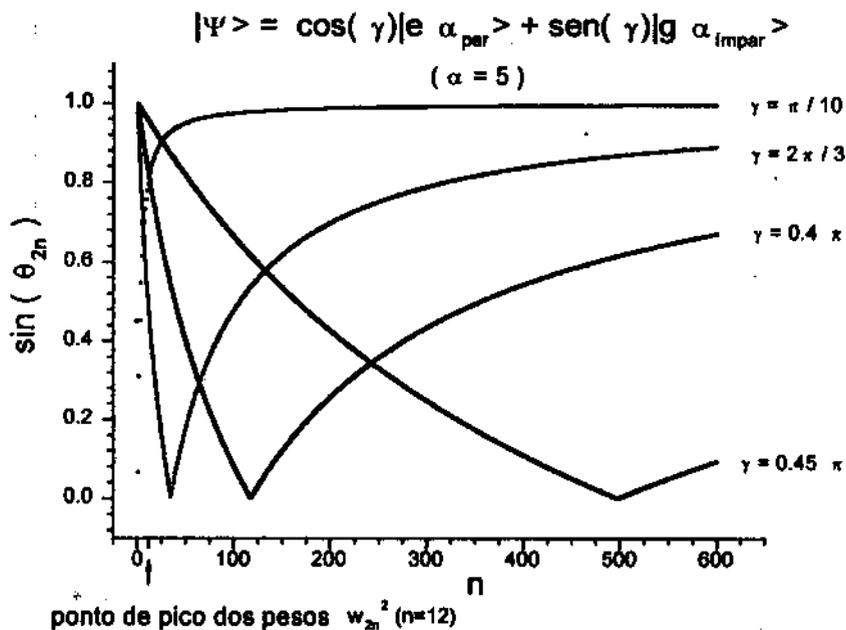


Figura 4-7: Distribuição de  $\sin(\theta_{2n})$  para um estado GPI com diferença de fase  $|\nu_\alpha - \xi| = 0$ , de acordo com o peso relativo entre as partes par e ímpar

$\gamma$  (fig 4-7). Substituindo (4.44) em (4.41b), obtemos que o valor mínimo correspondente para  $\sin(\theta_{2n})$  é:

$$\sin(\theta_{2n_{\min}}) \simeq \sin(|\nu_\alpha - \xi|) \quad (4.45)$$

Lembrando que os ângulos  $\theta_{2n}$  medem o 'caráter vestido' das componentes  $|\psi_{2n}\rangle$  correspondentes, vemos assim o significado físico da 'diferença de fase'  $\nu_\alpha - \xi$ : seu valor fornece o 'caráter vestido' da componente  $|\psi_{2n_{\min}}\rangle$  mais 'vestida' de todas (fig. 4-8).

### Limites de entropia para os estados tipo GPI

As figuras acima mostram que, para os GPIs, em geral  $\sin(\theta_{2n}) < 1$ . As eqs. (4.38) e (4.39) implicam assim que em geral estes estados nunca se decorrelacionam ao longo de sua evolução ( $S_{\min}(\alpha, \gamma, \xi) > 0$ ). Mostramos a seguir que, escolhendo adequadamente os parâmetros  $(\alpha, \gamma, \xi)$ , podemos otimizar esse emaranhamento, chegando até a estados com  $S_{\min} \simeq \ln 2$ ,

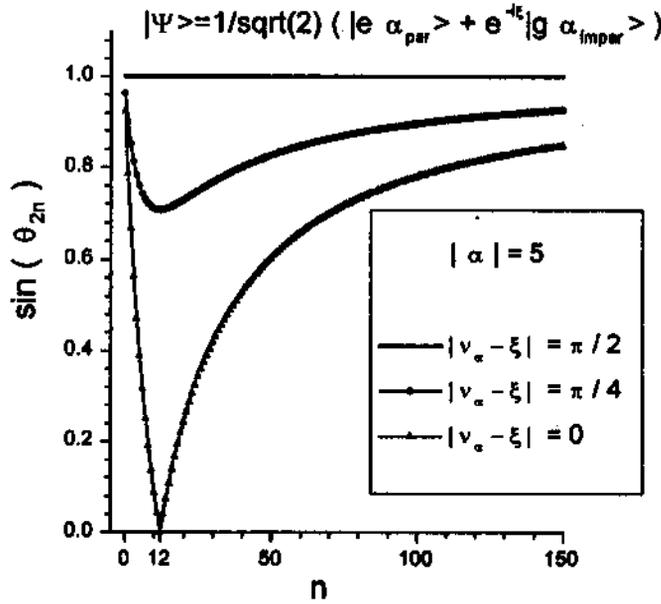


Figura 4-8: Distribuição de  $\sin(\theta_{2n})$  para um GPI com pesos iguais para as partes par e ímpar ( $\gamma = \frac{\pi}{4}$ ). O ponto de mínimo indica a componente de maior 'caráter vestido', o qual depende da diferença de fase  $|\nu_\alpha - \xi|$ .

com supressão máxima da inversão.

De fato, o limite superior  $M$  para o módulo da inversão (eq. (4.38)) vale neste caso:

$$M(\alpha, \gamma, \xi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{4n} e^{-|\alpha|^2}}{(2n+1)!} \left| (2n+1) \cos^2(\gamma) - \alpha^2 \sin^2(\gamma) e^{-2i\xi} \right| \quad (4.46)$$

Mesmo sem fornecer uma expressão fechada para esta soma, podemos minimizá-la notando que ela depende dos produtos  $w_{2n}^2 \cdot \sin(\theta_{2n})$ . Desta forma, precisamos apenas que as componentes de maior peso  $w_{2n}^2$  na soma (aqueles com  $n \simeq n_{max}$ ) sejam o mais 'vestidas' possível ( $\sin(\theta_{2n}) \simeq 0$ ).

Para isto, basta que o ponto de *máximo* de  $w_{2n}^2$  (i.e.,  $n_{max}$ ) coincida com o de *mínimo* de

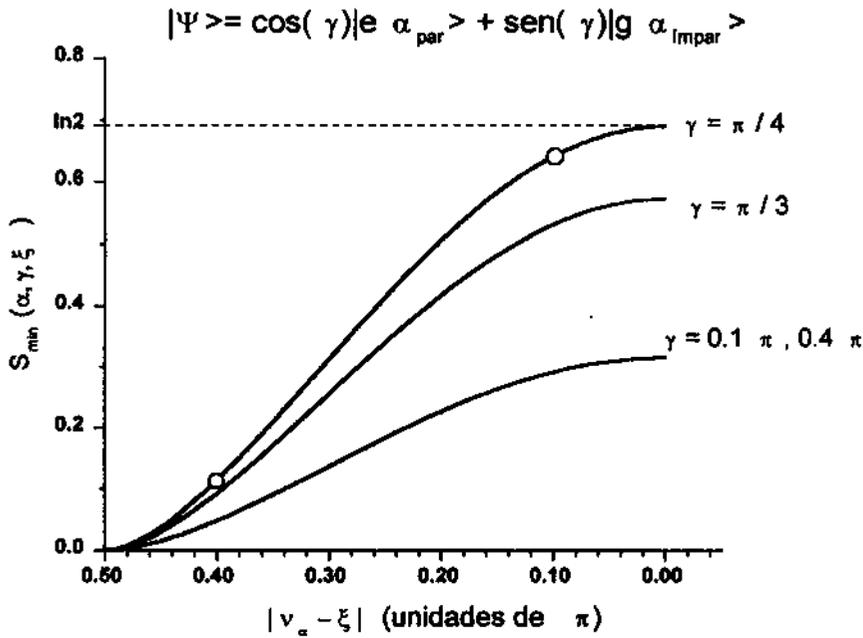


Figura 4-9: Limite inferior para a evolução da entropia  $S_A(t)$  a partir de estados tipo GPI com  $|\alpha| = 5$ . (Os pontos ressaltados correspondem às evoluções temporais na figura 4-10).

$\sin(\theta_{2n})$  (i.e.,  $n_{\min}$ ), e ainda que este valor mínimo seja  $\simeq 0$ :

$$\begin{cases} n_{\min}(\theta_{2n}) = n_{\max}(w_{2n}^2) \\ \sin(\theta_{2n_{\min}}) = 0 \end{cases} \quad (4.47)$$

Substituindo (4.44), (4.43) e (4.45) nesta condição, obtemos que os estados tipo GPI que maximizam  $S_{\min}$  são aqueles em que

$$\begin{cases} \tan(\gamma) \simeq 1 \rightarrow \gamma \simeq \frac{\pi}{4} \\ |\nu_{\alpha} - \xi| = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Por exemplo, para

$$|GPI(\alpha = 5, \gamma = \frac{\pi}{4}, \xi = 0)\rangle = \frac{1}{2} [|e\rangle \otimes (|\alpha = 5\rangle + |\alpha = -5\rangle) + |g\rangle \otimes (|\alpha = 5\rangle - |\alpha = -5\rangle)] \quad (4.49)$$

obtemos numericamente de (4.39) e (4.46)  $S_{\min} = 0.69005$ , quase igual ao valor máximo possível ( $\ln 2 \simeq 0.69315$ ). Este estado permanece assim na prática maximamente correlacionado durante toda a sua evolução temporal. A figura 4-9 resume a dependência de  $S_{\min}$  com os parâmetros de  $|GPI(\alpha, \gamma, \xi)\rangle$ .

### Evolução temporal e 'trapping' de população

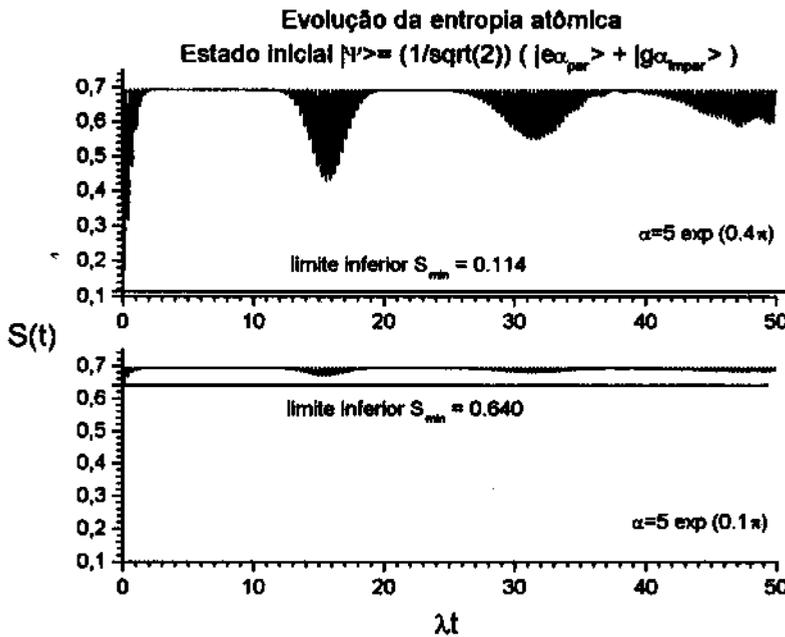


Figura 4-10: Evolução da entropia reduzida atômica para dois estados iniciais do tipo GPI (são aqueles assinalados na figura 4-9)

Os limites calculados acima fornecem uma estimativa do grau de 'trapping' em cada caso, mas nada dizem sobre os detalhes específicos da evolução temporal da inversão e/ou entropia reduzida. Como é ilustrado nas figs. (4-10) e (4-11), esta consistirá em geral de uma

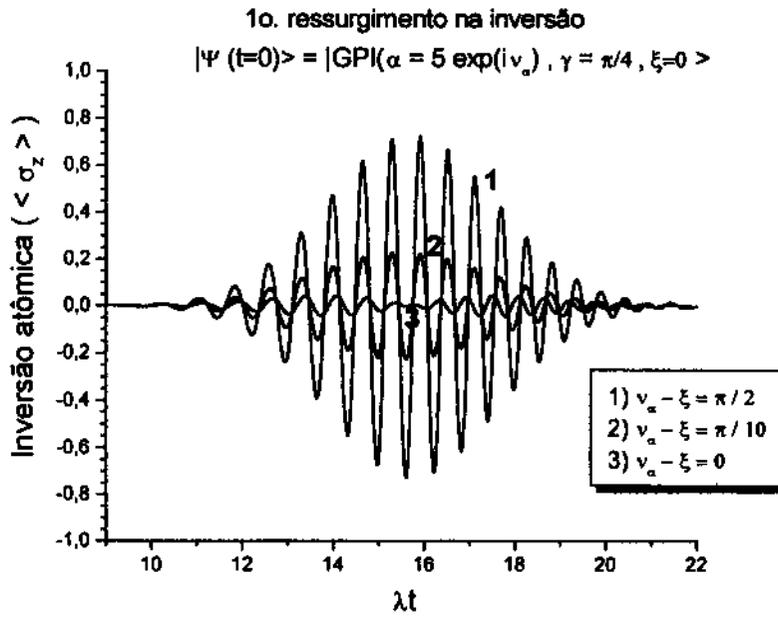


Figura 4-11: Inibição do 1º ressurgimento na inversão de alguns estados iniciais tipo GPI. Notar a variação na forma do envelope à medida em que  $\nu_\alpha - \xi \rightarrow 0$ .

estrutura de colapsos e ressurgimentos, de amplitude mais ou menos suprimida de acordo com  $S_{\min}$ .

A expressão exata para este comportamento pode ser obtida substituindo-se as coordenadas vestidas (4.41a – 4.41g) do estado inicial na eq. (4.32) para a inversão. Usando ainda (4.27), obtemos então:

$$\langle \sigma_z \rangle (t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{2n}^2 \sin(\theta_{2n}) \cos(\phi_{2n}(t)) = \quad (4.50)$$

$$= \sum_n \frac{2|\alpha|^{4n} e^{-|\alpha|^2}}{(2n+1)!} \left[ \begin{aligned} & \left[ (2n+1) \cos^2(\gamma) - |\alpha|^2 \sin^2(\gamma) \right] \cos \Omega_{2n} t + \\ & + \left[ \sqrt{2n+1} \sin(2\gamma) |\alpha| \sin(\nu_a - \xi) \right] \sin \Omega_{2n} t \end{aligned} \right] \quad (4.51)$$

onde  $\Omega_{2n} = 2\lambda\sqrt{2n+1}$ .

Assim como nos exemplos vistos no cap. 2 (v. seção 2.3), a dependência das freqüências de Rabi  $\Omega_{2n}$  com  $\sqrt{n}$  impede que esta série seja somada de forma exata. Entretanto, uma expressão aproximada pode ser calculada usando uma generalização do método de Fleischhauer e Schleich [53] válida para estados iniciais não necessariamente das formas  $\begin{smallmatrix} |e\rangle_A \\ |g\rangle_A \end{smallmatrix} \otimes |\psi_C\rangle$  (v. apêndice A, eq. A.30).

$$\langle \sigma_z \rangle (t) \simeq \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{\lambda t}{\pi k^{\frac{3}{2}}} \right) \left[ E(2n) \cos \left( \phi_{2n}(0) \pm \frac{\lambda^2 t^2}{2\pi k} + \pi k - \frac{\pi}{4} \right) \right] \Big|_{2n = \frac{\lambda^2 t^2 - \pi^2 k^2}{\pi^2 k^2}} + \omega_0^1 + \omega_0^2 + \tau_0 \quad (4.52)$$

onde

$$\omega_0^1 + \omega_0^2(t) = \int_0^{\infty} dn E(2n) \cos(\phi_n(0) - 2\lambda t \sqrt{2n+1}) \quad (4.53a)$$

$$\tau_0(t) = \frac{1}{2} E(0) \cos(\phi_0(0) - 2\lambda t) \quad (4.53b)$$

e  $E(2n)$  é uma 'versão contínua' de  $E_{2n} \equiv w_{2n}^2 \sin(\theta_{2n})$  (uma função contínua que interpola entre os valores de  $E_{2n}$  nos pontos de  $n$  inteiro).

Para o caso específico dos GPs, temos, de (4.41a, d) que

$$E_{2n}(\alpha, \gamma, \xi) = w_{2n}^2 \sin(\theta_{2n}) = \quad (4.54)$$

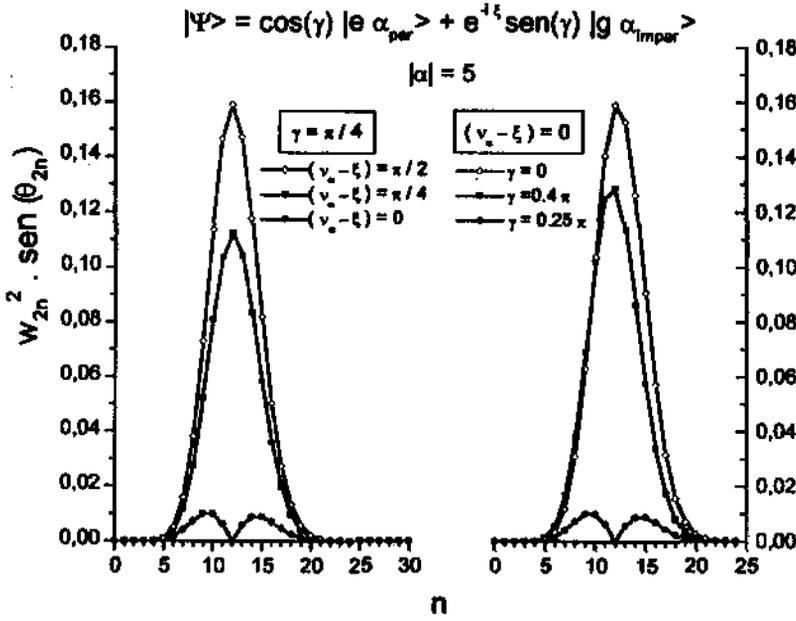


Figura 4-12: Variação da distribuição  $E_{2n} \equiv w_{2n}^2 \sin(\theta_{2n})$  de acordo com os parâmetros do estado  $|GPI(\alpha, \gamma, \xi)\rangle$

$$= \frac{2|\alpha|^{4n} e^{-|\alpha|^2}}{(2n+1)!} \left| (2n+1) \cos^2(\gamma) - |\alpha|^2 e^{2i(\nu_\alpha - \xi)} \sin^2(\gamma) \right| \quad (4.55)$$

$$= \sqrt{P_1^2(n) + P_2^2(n) + 2P_1(n) \cdot P_2(n) \cdot \cos 2(\nu_\alpha - \xi)} \quad (4.56)$$

onde

$$P_1(n) = 2 \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{4n}}{(2n)!} \cos^2(\gamma) \quad (4.57a)$$

$$P_2(n) = 2 \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{4n+2}}{(2n+1)!} \sin^2(\gamma) \quad (4.57b)$$

No limite em que  $|\alpha| \gg 1$  (que é de qualquer maneira necessário para a validade da aproximação, v. Apendice A), podemos substituir estas distribuições 'quase-Poissonianas' por aproximações

Gaussianas adequadas:

$$\tilde{P}_1(n) \simeq \frac{2 \cos^2(\theta)}{\sqrt{2\pi} |\alpha|} \exp\left(\frac{-\left(2n - |\alpha|^2\right)^2}{2|\alpha|^2}\right) \quad (4.58a)$$

$$\tilde{P}_2(n) \simeq \frac{2 \sin^2(\theta)}{\sqrt{2\pi} |\alpha|} \exp\left(\frac{-\left(2n + 1 - |\alpha|^2\right)^2}{2|\alpha|^2}\right) \quad (4.58b)$$

deste modo, podemos tomar:

$$E(2n) = \sqrt{\tilde{P}_1^2(n) + \tilde{P}_2^2(n) + 2\tilde{P}_1(n) \cdot \tilde{P}_2(n) \cdot \cos 2(\nu_\alpha - \xi)} \quad (4.59)$$

Como antes, cada termo do somatório em  $k$  na expressão (4.52) assume valores  $\neq 0$  em uma região limitada, com centro no instante  $t_k$  correspondente ao ponto médio  $2\bar{n}$  de  $E(2n)$ .

$$t_k \simeq \frac{\pi k}{\lambda} \sqrt{2\bar{n} + 1} \quad (4.60)$$

e largura dependente da variância de  $E(2n)$ . Assim, se esta distribuição for suficientemente estreita em  $n$ , cada termo do somatório dá origem a um ressurgimento isolado. A exemplo do que ocorre com os estados da forma (2.69a), esses ressurgimentos ocorrem com o dobro da freqüência daqueles no caso de estados iniciais  $|e\rangle \otimes |\alpha\rangle$  (como pode ser visto comparando as figuras 4-11 e ?? ).

Há uma diferença, porém: no caso dos GPIs o ‘envelope’ desses ressurgimentos *não* é dado pela distribuição inicial de fótons do campo (como ocorre naqueles casos), mas pela forma de  $E(2n)$  como função de  $n$ . Como mencionamos anteriormente, esta distribuição mede o ‘caráter vestido’ de cada componente  $|\psi_{2n}\rangle$ , ponderado pelo seu peso no estado global  $|GPI(\alpha, \gamma, \xi)\rangle$ : quanto maior for  $E(2n)$ , mais importante e menos ‘vestida’ tenderá a ser a componente  $|\psi_{2n}\rangle$ .

Esta distribuição é muito sensível à variação dos parâmetros do estado  $|GPI(\alpha, \gamma, \xi)\rangle$ , como é ilustrado na figura (4-12). Em particular, no limite (4.48), em que a componente  $|\psi_{2n}\rangle$  *mais importante* do estado (o ponto de pico de  $w_{2n}^2$ ) é um estado vestido ( $\sin(\theta_{2n \min}) \rightarrow 0$ ), a distribuição  $E(2n)$  do estado é quase totalmente suprimida, com uma depressão (ou

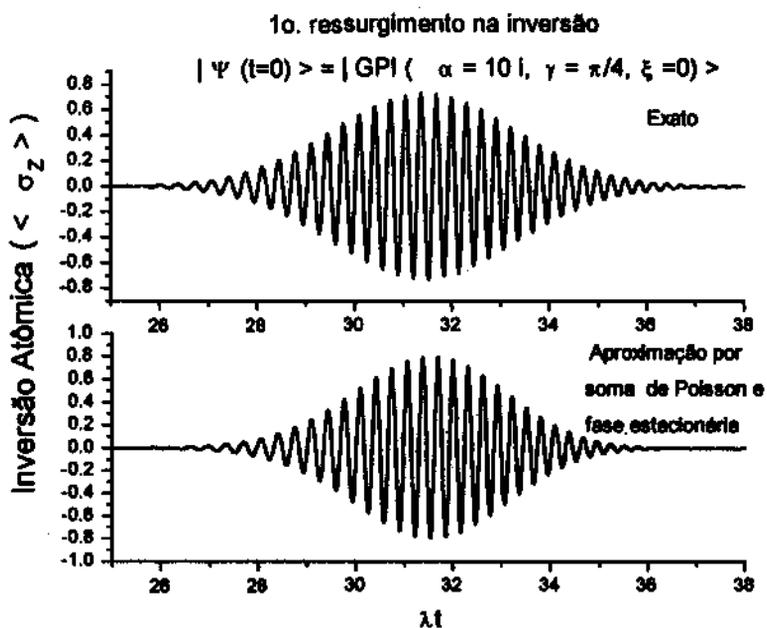


Figura 4-13: Primeiro 'ressurgimento' na inversão para um estado inicial tipo GPI de acordo com a série exata (4.51) e a aproximação (4.52) para o caso de mínimo 'trapping'

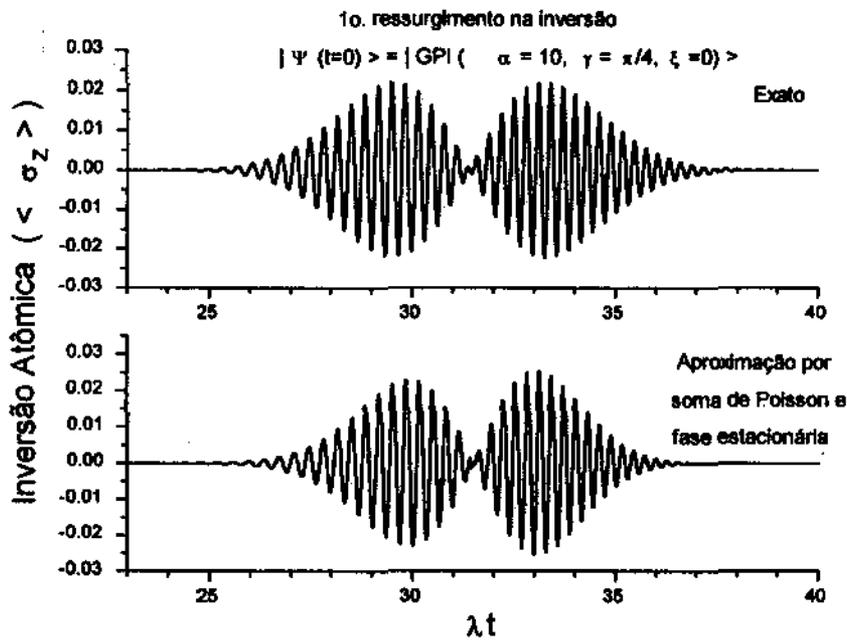


Figura 4-14: Primeiro 'ressurgimento' na inversão para um estado inicial tipo GPI de acordo com a série exata (4.51) e a aproximação (4.52) para o caso de máximo 'trapping'. Notar a depressão central no envelope de ressurgimento, causada pela existência de uma componente maximamente correlacionada.

'kink') no ponto central  $n = n_{\max} = n_{\min}$  onde pico e vale se encontram. Neste caso, os ressurgimentos descritos pela série (4.52) refletem este envelope, sendo achatados (máximo 'trapping' de população) e com uma depressão no centro. Estas características são claramente ilustradas nas figuras 4-13 e 4-14, demonstrando a eficácia do método de aproximação para a compreensão do fenômeno de 'trapping' nesta classe de estados pré-correlacionados.

A mesma análise em termos de coordenadas vestidas pode ser utilizada para explicar a ocorrência de 'trapping' também em casos onde as condições iniciais são *fatoráveis*, como por exemplo os estados com 'coerência atômica' estudados por Zaheer e Zubairy (v. seção 2.3). De fato, um simples cálculo mostra que as coordenadas vestidas  $w_n, \theta_n, \phi_n$  para o estado

$$|ZZ(\alpha, \gamma, \xi)\rangle \equiv \left( \cos(\gamma) |e\rangle_A + e^{(-i\xi)} \sin(\gamma) |g\rangle_A \right) \otimes |\alpha\rangle_C \quad (4.61)$$

têm a *mesma* forma daquelas do

$$|GPI(\alpha, \gamma, \xi)\rangle = \cos(\gamma) |e\rangle \otimes |\alpha_{par}\rangle + \sin(\gamma) e^{-i\xi} |g\rangle \otimes |\alpha_{impar}\rangle \quad (4.62)$$

(4.41a – 4.41g), porém para *todos* os valores de  $n$  (não só os pares). Desta forma, a expressão para a evolução de população naquele caso pode ser aproximada de forma inteiramente análoga à eq. (4.52), apenas usando a eq. (A.26) no lugar da (A.30) e fazendo as correções apropriadas. O resultado são ressurgimentos suprimidos com o mesmo perfil daqueles estudados neste capítulo (compare as figuras 2-4 e 4-11), apenas ocorrendo com o dobro da frequência.

Assim, apesar destes estados serem fatoráveis como um todo, *o fato de suas componentes*  $|\psi_n\rangle$  *em cada subespaço gerado por*  $|n\pm\rangle$  *não serem fatoráveis* implica na ocorrência de 'trapping'. Naturalmente, como estes estados não são da forma despolarizada (4.31), neste caso a supressão na inversão não está ligada diretamente à maximização da correlação entre átomo e campo.

# Conclusões

Neste trabalho demonstramos a possibilidade de se emaranhar um átomo de dois níveis e o campo em uma cavidade *sem* a necessidade de interação direta entre estes dois sistemas, e investigamos algumas consequências de se permitir uma interação após a criação desta ‘pré-correlação’.

Em primeiro lugar, exploramos maneiras de produzir ‘cruzamentos de trajetória’ em subsistemas de um sistema de átomos e cavidades, usando tanto a transferência unitária de coerência como a projeção não-unitária através de medidas atômicas. Desta forma, pudemos desenvolver esquemas experimentais utilizando as técnicas atuais de eletrodinâmica quântica de cavidades, capazes em princípio de gerar uma variedade de estados pré-correlacionados de um átomo e uma cavidade.

Para melhor compreender as propriedades destes estados, introduzimos um conjunto de coordenadas ‘vestidas’ apropriadas para se estudar o MJC do ponto de vista dos seus autoestados não-fatoráveis. Com seu auxílio, pudemos

1. encontrar limites superiores (em módulo) para a evolução temporal da inversão atômica a partir de um estado inicial *arbitrário*
2. identificar uma classe de estados com átomos permanentemente despolarizados, nos quais o campo se emaranha e desemaranha com o átomo na mesma medida em que o excita.

Combinando estas características, fomos capazes de encontrar estados com limites inferiores maiores do que zero para a evolução de suas entropias reduzidas, e que portanto jamais são descorrelacionados pela evolução Jaynes-Cummings ressonante. Desta forma, não podem ser produzidos a partir de condições iniciais fatoráveis por interação direta. Apesar disto, en-

contramos uma classe destes estados (os 'gatos par-ímpar') que podem ser gerados usando os métodos experimentais propostos.

Investigamos as características da evolução dinâmica da inversão atômica a partir desta classe de estados iniciais. Mostramos que em geral ocorre 'trapping' da população atômica, e que para uma escolha apropriada dos parâmetros destes estados, este 'trapping' pode ser quase total (a inversão quase não deixa o valor zero). Devido à ligação entre inversão e entropia nestes estados, isto significa que eles permanecem praticamente maximamente correlacionados ao longo de toda a sua evolução.

Para compreender melhor a maneira como se dão os colapsos e ressurgimentos nesses e em outros estados, desenvolvemos uma generalização do método de fases estacionárias de Fleischhauer e Schleich também baseada nas 'coordenadas vestidas'. Através dela, identificamos a origem do 'trapping' no modelo de Jaynes-Cummings como sendo o elevado 'caráter vestido' médio das componentes do estado (i.e, dividindo-o em suas componentes em cada subespaço invariante, aquelas de maior peso são próximas de estados vestidos). Mais especificamente, mostramos que mesmo os detalhes finos do formato dos ressurgimentos é governado por essa distribuição do caráter vestido das componentes.

Estas características não são porém uma consequência do estado ser 'pré-correlacionado', pois mostramos que uma classe de estados fatoráveis sofre trapping por motivos inteiramente análogos. Assim, concluímos que o emaranhamento das *componentes* de um estado em cada subespaço invariante pode ter consequências dinâmicas importantes, independentemente do estado como um todo ser ou não emaranhado.

## Apêndice A

# Expressões aproximadas para os ressurgimentos na inversão de população

Neste apêndice, calculamos expressões aproximadas para os ressurgimentos na inversão atômica, válidas para algumas classes de estados iniciais puros do sistema átomo-campo. Este desenvolvimento generaliza o método apresentado por Fleischhauer e Schleich em [53], o qual assume um estado inicial fatorável da forma  $|g\rangle_A \otimes |\psi\rangle_C$ . O resultado por eles obtido para o  $k$ -ésimo ressurgimento é:

$$\langle \sigma_Z(t) \rangle = -P \left( n = \frac{\lambda^2 t^2}{4\pi^2 k^2} \right) \frac{\lambda t}{\pi \sqrt{2k^3}} \cos \left( \frac{\lambda^2 t^2}{2\pi k} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{A.1})$$

onde  $P(n)$  é a distribuição de fótons para  $|\psi\rangle_C$ .

No caso de estados iniciais mais gerais, veremos aqui que a forma dos envelopes dos ressurgimentos depende não da distribuição de fótons do estado, mas da distribuição de coordenadas vestidas

$$E_n = w_n^2 \sin(\theta_n) \quad (\text{A.2})$$

Mostramos no capítulo 4 que a inversão, escrita em termos das coordenadas vestidas, tem

a forma:

$$\langle \sigma_Z(t) \rangle = -w_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(\phi_n(t)) \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\phi_n(t) = \phi_n(0) - \Omega_n t \quad (\text{A.4})$$

Esta expressão pode ser reescrita usando a fórmula de soma de Poisson (v. Courant e Hilbert [81], pag 76 )

$$\langle \sigma_Z(t) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_k(t) + \tau_0(t) \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\omega_k(t) = \int_0^{\infty} dn E(n) \cos(\phi_n(0) - \Omega_n t) e^{2i\pi kn} \quad (\text{A.6a})$$

$$\tau_0(t) = E(0) \cos(\phi_0(0) - 2\lambda t) - w_{-1} \quad (\text{A.6b})$$

e onde  $E(n)$  é *qualquer* função 'razoável' (contínua, diferenciável, etc) que interpole entre os valores de  $E_n$  nos pontos em que  $n$  é inteiro.

Notando que a soma em  $k$  em (A.5) se estende a  $\pm\infty$ , de modo que a expressão é invariante por  $k \leftrightarrow -k$ , é possível substituir (A.6a) por:

$$\omega_k(t) = \int_0^{\infty} dn E(n) \cos(\phi_n(0) - 2S_k(n,t)) = \quad (\text{A.7})$$

$$= \int_0^{\infty} dn E(n) \cos(\phi_n(0)) \cos(2S_k(n,t)) + \int_0^{\infty} dn \sin(\phi_n(0)) \sin(2S_k(n,t)) \quad (\text{A.8})$$

$$= \text{Re} \int_0^{\infty} dn E_1(n) \exp(2iS_k(n,t)) + \text{Im} \int_0^{\infty} dn E_2(n) \exp(2iS_k(n,t)) \quad (\text{A.9})$$

onde definimos

$$S_k(n,t) = \pi kn - \lambda t \sqrt{n+1} \quad (\text{A.10a})$$

$$E_1(n) = E(n) \cos(\phi_n(0)) \quad (\text{A.10b})$$

$$E_2(n) = E(n) \sin(\phi_n(0)) \quad (\text{A.10c})$$

Desta forma, a inversão pode se reescrita (de forma *exata*) como

$$\langle \sigma_Z(t) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_k^1(t) + \omega_k^2(t) + \tau_0(t) \quad (\text{A.11})$$

onde

$$\omega_k^1(t) \equiv \text{Re} \int_0^{\infty} dn E_1(n) \exp(2iS_k(n,t)) \quad (\text{A.12a})$$

$$\omega_k^2(t) \equiv \text{Im} \int_0^{\infty} dn E_2(n) \exp(2iS_k(n,t)) \quad (\text{A.12b})$$

Agora, assumindo que os envelopes  $E_1(n)$  e  $E_2(n)$  são suficientemente suaves se comparados às funções oscilantes  $\cos(2S_k(n,t))$ ,  $\sin(2S_k(n,t))$ , podemos aplicar o método de fases estacionárias, aproximando as equações acima por

$$\omega_k^1(t) \simeq E_1(n=n_k) \text{Re} \left\{ \exp(2iS_k(n=n_k)) \int_0^{\infty} dn \exp \left[ i \frac{\partial^2 S_k}{\partial n^2} \Big|_{n=n_k} (n-n_k)^2 \right] \right\} \quad (\text{A.13a})$$

$$\omega_k^2(t) \simeq E_2(n=n_k) \text{Im} \left\{ \exp(2iS_k(n=n_k)) \int_0^{\infty} dn \exp \left[ i \frac{\partial^2 S_k}{\partial n^2} \Big|_{n=n_k} (n-n_k)^2 \right] \right\} \quad (\text{A.13b})$$

onde  $n_k$  é o ponto em que  $\frac{\partial S_k}{\partial n} = 0$ :

$$n_k + 1 = \frac{\lambda^2 t^2}{4\pi^2 k^2} \quad (\text{A.14})$$

obs: estas expressões *não valem* para  $k = 0$ , visto que neste caso a fase é sempre estacionária ( $=0$ ).

Substituindo em (A.10a), obtemos:

$$S_k(n=n_k) = - \left( \pi k + \frac{\lambda^2 t^2}{4\pi k} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial n^2} \Big|_{n=n_k} = 2 \frac{\pi^3 k^3}{\lambda^2 t^2} \equiv F \quad (\text{A.16})$$

Agora, a integral em (A.13a, b) pode ser escrita em termo das integrais de Fresnel [82]

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x dy \cos(y^2) dy \quad (\text{A.17a})$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x dy \sin(y^2) dy \quad (\text{A.17b})$$

Para  $F > 0$ , por exemplo,

$$\int_0^\infty dn \exp(iF(n - n_k)^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2F}} \left[ C(x \rightarrow \infty) + C(\sqrt{F}n_k) + i \left( S(x \rightarrow \infty) + S(\sqrt{F}n_k) \right) \right] \quad (\text{A.18})$$

A forma assintótica das integrais de Fresnel para  $x \rightarrow \infty$  [82] é:

$$C(x) \simeq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\sin(x^2)}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (\text{A.19a})$$

$$S(x) \simeq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\cos(x^2)}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (\text{A.19b})$$

Assumindo  $\sqrt{|F|}n_k \gg 1$  e tomando a ordem zero destas expressões temos então:

$$\int_0^\infty dn \exp(iF(n - n_k)^2) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2F}} (1 + i) \quad (\text{válido p/ } F > 0) \quad (\text{A.20})$$

Similarmente, para  $F < 0$

$$\int_0^\infty dn \exp(iF(n - n_k)^2) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2|F|}} (1 - i) \quad (\text{A.21})$$

Usando (A.16) e (A.14), a condição  $\sqrt{|F|}n_k \gg 1$ , fica:

$$\lambda t \gg 2 \left( \sqrt{\pi |k|} + \sqrt{2\pi |k| + 4\pi^2 k^2} \right) \quad (\text{A.22a})$$

$$\text{ou } \ll 2 \left( \sqrt{\pi |k|} - \sqrt{2\pi |k| + 4\pi^2 k^2} \right) \quad (\text{A.22b})$$

para  $k = 1$ , por exemplo, precisamos  $\lambda t \gg 17.07$

Substituindo as expressões assintóticas (A.20), (A.21) em (A.13a, b), obtemos para  $k \geq 0$ :

$$\omega_k^1(t) \simeq E_1(n = n_k) \sqrt{\frac{\pi}{2F}} \left[ \cos(2S_k|_{n=n_k}) \mp \sin(2S_k|_{n=n_k}) \right] \quad (\text{A.23a})$$

$$\omega_k^2(t) \simeq E_2(n=n_k) \sqrt{\frac{\pi}{2F}} \left[ \cos(2S_k|_{n=n_k}) \pm \sin(2S_k|_{n=n_k}) \right] \quad (\text{A.23b})$$

Assim, usando (A.16)c (A.11), a inversão pode ser escrita:

$$\langle \sigma_Z(t) \rangle = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{\lambda t}{2\pi k^{\frac{3}{2}}} \right) \left[ \begin{array}{l} E_1(n=n_k) \left[ \cos(2S_k|_{n=n_k}) \mp \sin(2S_k|_{n=n_k}) \right] + \\ E_2(n=n_k) \left[ \cos(2S_k|_{n=n_k}) \pm \sin(2S_k|_{n=n_k}) \right] \end{array} \right] + \omega_0^1 + \omega_0^2 + \tau_0 \quad (\text{A.24})$$

(onde o sinal superior(inferior) vale para os termos com  $k > 0 (< 0)$ ). Substituindo finalmente o valor (A.15) de  $S_k|_{n=n_k}$ :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_Z(t) \rangle &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{\lambda t}{2\pi k^{\frac{3}{2}}} \right) \left[ \begin{array}{l} (E_1 + E_2|_{n=n_k}) \cos\left(2\pi k + \frac{\lambda^2 t^2}{2\pi k}\right) \pm \\ \pm (E_1 - E_2|_{n=n_k}) \sin\left(2\pi k + \frac{\lambda^2 t^2}{2\pi k}\right) \end{array} \right] + \omega_0^1 + \omega_0^2 + \tau_0 \\ &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{\lambda t}{2\pi k^{\frac{3}{2}}} \right) E(n)|_{n=n_k} \left[ \begin{array}{l} (\cos(\phi_n(0)) + \sin(\phi_n(0))|_{n=n_k}) \cos\left(\frac{\lambda^2 t^2}{2\pi k}\right) \pm \\ \pm (\cos(\phi_n(0)) - \sin(\phi_n(0))|_{n=n_k}) \sin\left(\frac{\lambda^2 t^2}{2\pi k}\right) \end{array} \right] + \\ &\quad + \omega_0^1 + \omega_0^2 + \tau_0 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Finalmente, como

$$(\cos(x) + \sin(x)) \cos(y) \pm (\cos(x) - \sin(x)) \cos(y) = \sqrt{2} \cos\left(x \pm y - \frac{\pi}{4}\right)$$

então a expressão aproximada para a inversão é:

$$\langle \sigma_Z(t) \rangle = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{\lambda t}{\sqrt{2\pi k^{\frac{3}{2}}}} \right) \left[ E(n) \cos\left(\phi_n(0) \pm \frac{\lambda^2 t^2}{2\pi k} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \Big|_{n=\frac{\lambda^2 t^2 - 4\pi^2 k^2}{4\pi^2 k^2}} + \omega_0^1 + \omega_0^2 + \tau_0 \quad (\text{A.26})$$

onde

$$\omega_0^1 + \omega_0^2(t) = \int_0^{\infty} dn E(n) \cos(\phi_n(0) - 2\lambda t \sqrt{n+1}) \quad (\text{A.27a})$$

$$\tau_0(t) = \frac{1}{2} E(0) \cos(\phi_0(0) - 2\lambda t) - w_{-1} \quad (\text{A.27b})$$

(onde o sinal superior(inferior) vale para os termos com  $k > 0 (< 0)$ )

Quando o estado inicial é da forma  $|g\rangle_A \otimes |\psi\rangle_C$ , então

$$\phi_n(0) \rightarrow \pi, E(n) \rightarrow P(n+1) \quad (\text{A.28})$$

(onde  $P(n)$  é a distribuição de fótons de  $|\psi\rangle_C$ ), de modo que recupera-se o resultado (A.1) (eq. (2.8b) de [53]) ■

Esta expressão é válida desde que:

- a) As distribuições de  $w_n^2 \sin(\theta_n) \cos(\phi_n(0))$  e  $w_n^2 \sin(\theta_n) \sin(\phi_n(0))$  variem lentamente com  $n$  se comparadas com  $\cos S_k(n, t) = \cos(\pi k n - \lambda t \sqrt{n+1})$ .
- b) O valor de  $t$  obedeça às condições (A.22a, b). Isto implica que, para o  $k$ -ésimo termo do somatório acima descrever bem o  $k$ -ésimo ressurgimento,  $E(n)$  deve assumir seus valores mais importantes na região onde

$$n+1 \gg \frac{4(3\pi k + 4\pi^2 k^2 + 2\pi k \sqrt{2+4\pi k})}{4\pi^2 k^2} \simeq 4 + \frac{2}{\pi k} \sqrt{2+4\pi k} \quad (\text{A.29})$$

Assim, a aproximação deve ser boa para estados iniciais com 10 fótons ou mais em média no campo. (De modo que o termo em  $E(0)$  geralmente pode ser ignorado).

## A.1 Variação para estados apenas com componentes $w_n$ de $n$ par

No caso de estados tipo ‘par-ímpar’, em que a distribuição das coordenadas vestidas  $w_n$  só possui os termos *pares* ( $w_{2n+1} = 0$ ), a condição de suavidade de  $E(n)$  como função de  $n$  é violada. No entanto, um desenvolvimento semelhante pode ser realizado se reescrevermos a eq. (A.3), considerando apenas os termos de ‘ $n$ ’ par. Neste caso, se a ‘versão contínua’ das distribuições  $w_{2n}^2 \sin(\theta_{2n}) \cos(\phi_{2n}(0))$  e  $w_{2n}^2 \sin(\theta_{2n}) \sin(\phi_{2n}(0))$  como função de  $n$  forem suficientemente suaves, é possível novamente aplicar o método de fase estacionária, chegando no final a

$$\langle \sigma_Z(t) \rangle \simeq \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{\lambda t}{\pi k^{\frac{3}{2}}} \right) \left[ E(2n) \cos \left( \phi_{2n}(0) \pm \frac{\lambda^2 t^2}{2\pi k} + \pi k - \frac{\pi}{4} \right) \right] \Bigg|_{2n = \frac{\lambda^2 t^2 - \pi^2 k^2}{\pi^2 k^2}} + \omega_0^1 + \omega_0^2 + \tau_0 \quad (\text{A.30})$$

onde  $\omega_0^1 + \omega_0^2$  e  $\tau_0$  continuam dados por (A.27a, b), apenas fazendo  $n \rightarrow 2n$ .

Em particular, se o estado inicial for da forma fatorável  $|e\rangle_A \otimes |\psi\rangle_C$ , com

$$|\langle 2n | \psi \rangle_C|^2 = P(2n) \quad (\text{A.31})$$

então

$$\phi_{2n}(0) \rightarrow 0, \quad E(2n) \rightarrow P(2n) \quad (\text{A.32})$$

e

$$\begin{aligned} \langle \sigma_Z(t) \rangle \simeq & \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{\lambda t}{\pi k^{\frac{3}{2}}} \right) P \left( 2n = \frac{\lambda^2 t^2}{\pi^2 k^2} - 1 \right) \cos \left( \pm \frac{\lambda^2 t^2}{2\pi k} + \pi k - \frac{\pi}{4} \right) + \\ & + \frac{1}{2} P(0) \cos(2\lambda t) + \int_0^{\infty} dn P(2n) \cos(2\lambda t \sqrt{2n+1}) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Assim como acima, é possível mostrar que as aproximações realizadas durante a dedução implicam que estas expressões só são confiáveis quando  $E(2n)$  assume seus maiores valores em  $2n \gtrsim 10$ . (de forma que o termo em  $E(0)$  pode ser ignorado).

# Bibliografia

- [1] E. Schrödinger. The present situation in quantum mechanics. *Naturwiss.*, (23):807–812; 823–828; 844–849, 1935. Tradução para inglês em *Proc. Am. Phil. Soc.* 124 (1980), reproduzida em [3].
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777, 1935. Reproduzido em [3].
- [3] J.A. Wheeler and W.H. Zurek, editors. *Quantum Theory and Measurement*. Princeton University Press, Princeton, 1982.
- [4] D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. *Phys. Rev.*, pages 166–193, 1952. Reproduzido em [3], p. 369.
- [5] N. Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 46(696), 1935. Reproduzido em [3].
- [6] J.S. Bell. *Speakable and Unspeakeable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [7] D. Home and F. Selleri. Bell's theorem and the EPR paradox. *Riv. Nuovo Cimento*, 14(9):1, 1991.
- [8] P. Grangier, A. Aspect and G. Roger. Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 47:460, 1981.
- [9] W. Tittel et al. Experimental demonstration of quantum-correlations over more than 10 kilometers. *preprint LANL quant-ph/9707042*, julho 1997. (submetido para *Phys. Rev. Lett.*).

- [10] V. Vedral, M.B. Plenio, M.A.Rippin, and P.L.Knight. Quantifying entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 78(12):2275, 1997.
- [11] A.K. Ekert. *Phys. Rev. Lett.*, 67:661–663, 1991.
- [12] C. H. Bennett et al. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895, 1993.
- [13] A.K. Ekert and R. Josza. Quantum computing, factoring, and Shor's algorithm. *Rev. Mod. Phys.*, 68:733, 1996.
- [14] S. Haroche. Cavity quantum electrodynamics. In *Les Houches, Session LIII (1990) - Fundamental Systems in Quantum Optics*, pages 767–939. Elsevier, 1992.
- [15] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, J.M. Raimond, and S. Haroche. Quantum Rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 76(11):1800, 1996.
- [16] C. Fabre. États très excités des atomes alcalins: I. Description générale et propriétés radiatives. *Ann. Phys. Fr.*, (7):5–86, 1982.
- [17] E.T. Jaynes and F.W. Cummings. *Proc. IEEE*, (51):89, 1963.
- [18] B.W. Shore and P.L. Knight. The Jaynes-Cummings model. *J. Mod. Opt.*, 40(7):1195, 1993.
- [19] S.J.D Phoenix and P.L. Knight. Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance. *Ann. Phys. (N. Y.)*, 186:381, 1988.
- [20] S.J.D. Phoenix and P.L. Knight. Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. A*, 44(9):6023, 1991.
- [21] M. Gross and S. Haroche. *Phys. Rep.*, 93(5):301–396, 1982.
- [22] A.K. Ekert. *Correlations in Quantum Optics*. PhD thesis, University of Oxford, 1991.
- [23] J. Von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, 1955.

- [24] D. Ter Haar. Theory and applications of the density matrix. *Rept. Progr. Phys.*, 24:304, 1961.
- [25] B. D'Espagnat. *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1976.
- [26] A. Wehrl. General properties of entropy. *Rev. Mod. Phys.*, 50(2):221, 1978.
- [27] A. Ekert and P.L. Knight. Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition. *Am. J. Phys.*, 63(5):415, 1995.
- [28] C. Cohen-Tannoudji, F. Laloë, and B. Diu. *Mécanique Quantique*. Hermann, Paris, 1973.
- [29] L.D. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique Quantique*. Mir, Moscou, 1966.
- [30] R.C. Tolman. *Principles of Statistical Mechanics*. Dover edition, New York, 1979.
- [31] H. Everett III. "Relative-state" formulation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 29:454, 1957. Reproduzido em [3], pp. 315.
- [32] E. Schmidt. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. *Math. Annalen*, 63:433, 1907.
- [33] P.L. Knight. Quantum fluctuations in optical systems. In *Les Houches Session '95 (Unpublished)*, 1996.
- [34] C. Shannon and W. Weaver. *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois, Urbana, 1963.
- [35] E.P. Wigner and M.M. Yanase. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 49:910, 1963.
- [36] G. Lindblad. Entropy, information and quantum measurements. *Comm. Math. Phys.*, 33:305, 1973.
- [37] H. Araki and E.H. Lieb. Entropy inequalities. *Comm. Math. Phys.*, 18(2):160, 1970.
- [38] S.M. Barnett and S.J.D. Phoenix. Entropy as a measure of quantum optical correlation. *Phys. Rev. A*, 40(5):2404, 1989.
- [39] W. Vogel and D.-G. Welsch. *Lectures on Quantum Optics*. Akademie Verlag, Berlin, 1994.

- [40] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [41] A.P.S. De Moura. Efeitos dos termos contra-girantes no modelo de Jaynes-Cummings. Tese de Mestrado, submetida à UNICAMP (1997).
- [42] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons et atomes: Introduction à l'électrodynamique quantique*. InterEditions / Editions du CNRS, Paris, 1987.
- [43] V.F. Weisskopf and E.P. Wigner. Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie. *Z. Physik*, 63:54, 1930.
- [44] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, 1975.
- [45] E.M. Purcell. *Phys. Rev.*, 69:681, 1946.
- [46] D. Kleppner. *Phys. Rev. Lett.*, 47:233, 1981.
- [47] P. Meystre and M. Sargent III. *Elements of Quantum Optics*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1991.
- [48] S. Haroche and J.M. Raimond. Manipulation of nonclassical field states in a cavity by atomic interferometry. In *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics, Supplement 2*. Academic Press, 1994.
- [49] F.W. Cummings. *Phys. Rev.*, 140:A1051, 1965.
- [50] J.H. Eberly, N.B. Narozhny, and J.J. Sanchez-Mondragon. *Phys. Rev. Lett.*, 44(1980):1323, 1980.
- [51] N.B. Narozhny, J.J. Sanchez-Mondragon, and J.H. Eberly. Coherence versus incoherence: collapse and revival in a simple quantum model. *Phys. Rev. A*, 23(1):236, 1981.
- [52] A. Vidiella-Barranco. *Quantum Superpositions of Coherent States of Light*. PhD thesis, University of London, 1992.
- [53] M. Fleischhauer and W. Schleich. Revivals made simple: Poisson summation formula as a key to the revivals in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. A*, 47(5):4258, 1993.

- [54] A. Vidiella-Barranco, H. Moya-Cessa, and V. Buzek. Interaction of superpositions of coherent states with two-level atoms. *J. Mod. Opt.*, 39:1441, 1992.
- [55] K. Zaheer and M.S. Zubairy. Phase sensitivity in atom-field interaction via coherent superposition. *Phys. Rev. A*, 39(4):2000, 1989.
- [56] J.I. Cirac and L.L. Sánchez-Soto. Population trapping in the Jaynes-Cummings model via phase coupling. *Phys. Rev. A*, 42(5):2851, 1990.
- [57] J.I. Cirac and L.L. Sánchez-Soto. Population trapping in two-level models: spectral and statistical properties. *Phys. Rev. A*, 44(5):3317, 1991.
- [58] P.A. Nussenzweig, J. Hare, A.M. Steinberg, L. Moi, M. Gross, and S. Haroche. A continuous beam of circular Rydberg atoms for fundamental tests and applications in metrology. *Europhys. Lett.*, 14(8):755, 1991.
- [59] P. Nussenzweig et al. Preparation of high-principal-quantum-number 'circular' states of Rubidium. *Phys. Rev. A*, 48:3991, 1993.
- [60] G. Rempe, F. Schmidt-Kaler, and H. Walther. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2783, 1990.
- [61] J.I. Cirac, S. Parkins, R. Blatt, and P. Zoller. Nonclassical states of motion in ion traps. In *Advances in Atomic and Molecular Physics*, volume 37, page 238. Academic Press, 1996.
- [62] X. Maitre et al. Quantum memory with a single photon in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 79(4):769, 1997.
- [63] E. Hagley et al. Generation of Einstein-Podolski-Rosen pairs of atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 79(1):1, 1997.
- [64] S. Haroche. Rydberg atoms and radiation in a resonant cavity. In *Les Houches, Session XXXVIII, 1982- New Trends in Atomic Physics*, pages 193-309. Elsevier, 1984.
- [65] S. Haroche and J.M. Raimond. Radiative properties of Rydberg atoms in resonant cavities. In *Advances in Atomic and Molecular Physics*, volume 20. Academic Press, 1985.
- [66] A. Messiah. *Mécanique Quantique*. Dunod, Paris, 1964.

- [67] M. Brune et al. Observing the progressive decoherence of the "meter" in a quantum measurement. *Phys. Rev. Lett.*, 77(24):4887, 1996.
- [68] I.I. Rabi. *Phys. Rev.*, 49:324, 1936.
- [69] N.F. Ramsey. *Molecular Beams*. Oxford University Press, New York, 1985.
- [70] G. Raithel, O. Benson, and H. Walther. Atomic interferometry with the micromaser. *Phys. Rev. Lett.*, 75(19):3446, 1995.
- [71] L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J.M. Raimond, and S. Haroche. Quantum switches and nonlocal microwave fields. *Phys. Rev. Lett.*, 71(15):2360, 1993.
- [72] L. Davidovich, M. Brune, J.M. Raimond, and S. Haroche. Mesoscopic quantum coherences in cavity QED: Preparation and decoherence monitoring schemes. *Phys. Rev. A*, 53(3):1295, 1996.
- [73] A. Barenco, D. Deutsch, and A. Ekert. Conditional quantum dynamics and logic gates. *Phys. Rev. Lett.*, 74(20):4083, 1995.
- [74] Julio Gea-Banacloche. Atom- and field-state evolution in the Jaynes-Cummings model for large initial fields. *Phys. Rev. A*, 44(9):5913, 1991.
- [75] P. Domokos, J.M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche. Simple cavity-QED two-bit universal quantum logic gate: The principle and expected performances. *Phys. Rev. A*, 52(5):3554, 1995.
- [76] S.J.D. Phoenix and S.M. Barnett. Non-local interatomic correlations in the micromaser. *J. Mod. Opt.*, 40(6):979, 1993.
- [77] J.I. Cirac and P. Zoller. Preparation of macroscopic superpositions in many-atom systems. *Phys. Rev. A*, 50(4):2799, 1994.
- [78] L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J.M. Raimond, and S. Haroche. Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields. *Phys. Rev. A*, 50(2A):895, 1994.

- [79] J.A. Wheeler. The "past" and the "delayed-choice" double-slit experiment. In A.R. Marlow, editor, *Mathematical Foundations of Quantum Theory*. Academic Press, 1978.
- [80] M. Brune, S. Haroche, J.M. Raimond, L. Davidovich, and N. Zagury. Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum non-demolition measurements and generation of "Schrödinger cat" states. *Phys. Rev. A*, 45(7):5193, 1992.
- [81] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*, volume I. Interscience, 1953.
- [82] I.S. Gradshteyn and L.M. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New York, 1965.