

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

**DIEGO ROSSI GRATIERI**

**FENOMENOLOGIA DE NEUTRINOS ATMOSFÉRICOS  
COM NEUTRINOS DE MASSA VARIÁVEL**

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN  
DA UNICAMP PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM CIÊNCIAS

**ORIENTADOR: Dr. Prof. Orlando Luis Goulart Peres**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO  
DIEGO ROSSI GRATIERI, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ORLANDO LUIS GOULART PERES.

Assinatura do orientador



CAMPINAS, 2012

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR  
VALKÍRIA SUCCI VICENTE – CRB8/5398 - BIBLIOTECA DO IFGW  
UNICAMP**

G772f Gratieri, Diego Rossi, 1982-  
Fenomenologia de neutrinos atmosféricos com neutrinos  
de massa variável / Diego Rossi Gratieri. -- Campinas, SP :  
[s.n.], 2012.

Orientador: Orlando Luis Goulart Peres.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Física “Gleb Wataghin”.

1. Neutrinos. 2. Neutrinos atmosféricos. 3. Neutrinos  
de massa variável. I. Peres, Orlando Luis Goulart, 1969-  
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física “Gleb  
Wataghin”. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Atmospheric neutrino phenomenology with mass varying neutrinos

**Palavras-chave em inglês:**

Neutrinos

Atmospheric neutrino

Mass varying neutrino

**Área de Concentração:** Física

**Titulação:** Doutor em Ciências

**Banca Examinadora:**

Orlando Luis Goulart Peres [Orientador]

Carola Dobrigkeit Chinellato

Celso Chikahiro Nishi

Pedro Cunha de Holanda

Ricardo Avelino Gomes

**Data da Defesa:** 07-05-2012

**Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA Tese de DOUTORADO DE **DIEGO ROSSI GRATIERI** – RA 29466, APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN” DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 07/05/2012.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres – DRCC/IFGW/UNICAMP  
(Orientador do Candidato)

Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda – DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dra. Carola Dobrigkeit Chinelato - DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Ricardo Avelino Gomes – IF/UFG

Prof. Dr. Celso Chikahiro Nishi – CMCC/UFABC



# Agradecimentos

Ao longo do período de realização desta tese de doutorado recebi ajuda de muitas pessoas, as quais gostaria de lembrar aqui. Agradeço então

À minha mãe Reni Ines Rossi, que depois de passar por uma cirurgia do coração ainda voltou a estudar. Mãe, a senhora continua me ensinando muita coisa.

Ao meu pai Narcizo Gratieri, por me ensinar a jogar bola, pescar, andar de bicicleta, assar carne, e a trabalhar de forma séria desde os tempos do nosso velho açougue.

A toda a gauchada lá de casa, Nona, Tios, Tias, primos, primas.... além da família ser grande, mexeu com um, mexeu com todos!

À minha namorada Maiara Pereira Assis, que compreende que eu realmente estava trabalhando nos finais de semana, que sabe que essa distância é passageira e o que temos é eterno, e que faz a batalha diária ficar mais fácil.

Ao meu orientador Orlando L. G. Peres, por me colocar no meio de um problema desse tamanho e confiar que seríamos capazes de resolvê-lo.

Aos professores que de alguma maneira contribuíram diretamente para o trabalho, dentre eles Pedro Holanda, Marcelo Guzzo, Márcio Menon, Carola Chinellato, Francesco Vissani, Victor Gonçalves, ...

Aos amigos e colegas da pós-graduação do IFGW-Unicamp, em especial Jacson, Gustavo, Larissa, Helka, Daniel, ...

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Morro seco mas não me entrego

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Neutrinos atmosféricos</b>	<b>5</b>
2.1	O fluxo de neutrinos atmosféricos . . . . .	10
2.2	Características do fluxo de neutrinos e de RC's primários . . . . .	11
2.3	Simulação do fluxo de neutrinos atmosféricos . . . . .	11
2.4	O detector Super-Kamiokande . . . . .	13
<b>3</b>	<b>A seção de choque neutrino-nucleon</b>	<b>16</b>
3.1	Seção de Choque Quasi-elástica . . . . .	16
3.2	Dinâmica da seção de choque . . . . .	17
3.2.1	Fatores de forma nucleares . . . . .	18
3.2.2	Forma da amplitude de probabilidade para $\bar{\nu}$ . . . . .	19
3.3	Gráficos da seção de choque quasi-elástica . . . . .	19
3.4	Correções nucleares . . . . .	21
3.5	Espalhamento profundamente inelástico . . . . .	22
3.6	Cinemática do DIS para $\nu_l + N \rightarrow l + H$ . . . . .	24
3.7	Funções de estrutura nuclear . . . . .	29
3.8	Produção de Píons . . . . .	30
3.9	Resultados para a seção de choque . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Oscilação de sabores induzida por diferença de massa</b>	<b>39</b>
4.1	Oscilação no vácuo . . . . .	39
4.1.1	Oscilação de sabores em duas gerações de neutrinos . . . . .	43

<b>5</b>	<b>Resposta do detector Super-Kamiokande</b>	<b>47</b>
5.1	Número de eventos . . . . .	50
5.2	Dependência energética do número de eventos em SK . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Distribuição angular de eventos em Super-Kamiokande</b>	<b>54</b>
6.1	Ingredientes necessários para o cálculo da distribuição angular de eventos em SK . . . . .	60
6.2	Nossos resultados para a distribuição angular de eventos em SK . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Neutrinos com massa variável, MaVaN's</b>	<b>66</b>
7.1	Formalismo MaVaN . . . . .	67
7.2	Probabilidade de oscilação na base de massa . . . . .	70
7.3	Caso $\alpha_3 \neq 0$ : . . . . .	71
7.4	Caso $\alpha_3 \neq 0$ : Diagonalização via Rotação . . . . .	72
7.5	Cálculo de $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}$ . . . . .	73
7.5.1	Casos especiais: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . . . . .	74
<b>8</b>	<b>Análise de dados: Teste de <math>\chi^2</math></b>	<b>77</b>
8.1	Análise de oscilações usuais usando $\chi^2$ . . . . .	78
8.2	Análise de $\chi^2$ MaVaN's em SK . . . . .	79
<b>9</b>	<b>Conclusões</b>	<b>88</b>
<b>A</b>	<b>Variáveis cinemáticas para a detecção de um antineutrino incidindo em um nêutron (<math>\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n</math>)</b>	<b>90</b>
A.0.1	Cinemática no sistema de repouso do próton, $S_{LAB}$ . . . . .	92
A.0.2	Cinemática no sistema de centro de momento, $S_{CM}$ . . . . .	95
A.1	Variáveis cinemáticas para a detecção de um neutrino . . . . .	96
<b>B</b>	<b>Desenvolvimento algébrico da dinâmica da seção de choque</b>	<b>98</b>
B.0.1	Somas em spins . . . . .	99
B.0.2	Cálculo da corrente leptônica . . . . .	99
B.0.3	Cálculo dos traços para a corrente hadrônica . . . . .	101
B.0.4	Forma explícita da corrente hadrônica . . . . .	106
B.0.5	Contração das correntes leptônica e hadrônica . . . . .	107



<b>C</b>	<b>Cinemática do DIS</b>	<b>111</b>
C.1	Cinemática no referencial do laboratório ( $\vec{p}_p = \vec{0}$ ) . . . . .	111
C.2	O referencial do centro de massa ( $\vec{p}_{p,cm} + \vec{p}_{\nu cm} = \vec{0}$ ) . . . . .	112
C.2.1	Limites cinemáticos . . . . .	114
C.3	Limites cinemáticos em $S_{CM}$ quando $m_l \neq 0$ . . . . .	116
<b>D</b>	<b>Probabilidade na base de massa</b>	<b>118</b>
D.1	Probabilidade . . . . .	119
D.1.1	Cálculo de $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}$ : . . . . .	119
<b>E</b>	<b>Diagonalização para o caso <math>\alpha_3 \neq 0</math>:</b>	<b>122</b>
E.1	Cálculo de $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}$ . . . . .	124
<b>F</b>	<b>Teste da função <math>P_{\mu\mu}</math></b>	<b>126</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática de uma possível configuração para um chuveiro de RC na atmosfera mostrando as principais fases de sua evolução e o detector SK[8], retirada da referência [18]. . . . .	6
2.2	Comparação do fluxo de neutrinos atmosféricos e solares. Todas as linhas cheias referem-se ao fluxo de neutrinos solares, enquanto que o fluxo de neutrinos atmosféricos está representado pela linha tracejada [29]. . . . .	7
2.3	Esquemas de neutrinos produzidos na atmosfera atingindo detector de várias direções. [8], [19] . . . . .	9
2.4	Distância percorrida pelo neutrino produzido na atmosfera terrestre até atingir o experimento SK em função de $\cos(\theta_z)$ . . . . .	10
2.5	Fluxos em SK de (anti)neutrinos muônicos e eletrônicos em função do ângulo zenital do neutrino para o intervalo de energia $0,1 < E_\nu < 0,3$ GeV retirados da referência [21]. . . . .	14
2.6	Fluxos em SK de (anti)neutrinos muônicos e eletrônicos em função do ângulo zenital do neutrino para o intervalo de energia $0,3 < E_\nu < 1$ GeV retirados da referência [21]. . . . .	14
2.7	Fluxos ponderados pelo quadrado da energia do neutrino de (anti)neutrinos muônicos e eletrônicos em função da energia do neutrino retirados da referência [21]. . . . .	15
3.1	Representação em primeira ordem em diagramas de Feynman para a reação de detecção via corrente carregada, a qual se dá através da troca de um bóson vetorial $W^\pm$ , para um neutrino (esquerda), e para um antineutrino (direita). Cada uma destas reações necessita de descrição cinemática própria, então vamos sempre identificá-las. . . . .	17

3.2	Na linha (tracejada)cheia mostramos nossos resultados para a seção de choque para um (anti)neutrino eletrônico incidente em função da energia ( $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ ) $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$ . Os pontos referem-se aos resultados mostrados na Ref[27]. Podemos observar que na região de baixa energia aqui mostrada, a seção de choque é aproximadamente linear com a energia do (anti)neutrino incidente. . . . .	20
3.3	Linhas: Nossos resultados para o cálculo da seção de choque elástica dividida pela energia do neutrino para (anti)neutrino muônico dividida por sua energia levando em conta as correções devidas ao Princípio de Pauli para o caso do átomo de ferro, $^{56}Fe$ . Para o caso de neutrinos muônicos, estes resultados são comparados com os obtidos nas referências [39] e [40], indicados por <i>lipari</i> e <i>G.G.</i> . Como (anti)neutrinos vão interagir somente com (prótons)nêutrons do núcleo de ferro, e sendo assim, o fator $(\frac{Z}{Z+N})\frac{N}{Z+N}$ é necessário para normalizar a seção de choque para cada nucleon. . . . .	23
3.4	Representação em nível de árvore do espalhamento profundamente inelástico. Para o processo que estamos interessados l representa um (anti)neutrino interagindo com um nucleon qualquer $N$ dando origem a um (pósitron)elétron representado por $l'$ mais um uma gama de partículas hadrônicas representadas por $H$ . . . . .	24
3.5	Densidades de pártons que obtivemos utilizando a parametrização [43] multiplicadas pela variável de Bjorken $x$ a fim de reproduzir os resultados publicados no Particle Data Book [16]. Os sub-índices $v$ , $s$ distinguem a contribuição dos quarks $u$ e $d$ de valência e de mar respectivamente. . . . .	30
3.6	Seção de choque total para neutrinos eletrônicos dividida pela energia do neutrino incidente, juntamente com as contribuições individuais dos processos espalhamento elástico, DIS e produção de píons. . . . .	34
3.7	Seção de choque total para antineutrinos eletrônicos dividida pela energia do neutrino incidente, juntamente com as contribuições individuais dos processos espalhamento elástico, DIS e produção de píons. . . . .	35
3.8	Seção de choque total para neutrinos muônicos dividida pela energia do neutrino incidente, juntamente com as contribuições individuais dos processos espalhamento elástico, DIS e produção de píons. . . . .	36

3.9	Seção de choque total para antineutrinos muônicos dividida pela energia do neutrino incidente, juntamente com as contribuições individuais dos processos espalhamento elástico, DIS e produção de píons. . . . .	37
4.1	Comparação entre a Eq. (4.28), linha cheia, e os dados de SK, pontos, para o fluxo de neutrinos muônicos retirada da referência [76]. . . . .	45
5.1	Comparamos nossos resultados para a resposta do detector SK para eventos do tipo eletrônico e muônico com os obtidos por [75] para eventos do tipo muônico. Dividimos os dados em Sub-GeV e Multi-GeV e somamos as contribuições devidas a neutrinos e anti-neutrinos. . . . .	52
5.2	Dependência energética do número de eventos em SK em função do momento do lépton carregado produzido na reação de detecção. Nossos resultados são mostrados juntamente com os da referência ([40]). . . . .	53
6.1	Limites na energia do múon produzido via espalhamento elástico em função da energia do neutrino incidente, $E_1, E_2$ , juntamente com valores da energia do múon para diferentes valores do cosseno do ângulo de espalhamento, $\cos(\theta^*)$ . . . . .	58
6.2	Mostramos para o caso do espalhamento profundamente inelástico, a energia permitida para o múon é dada pela escala de cores em função de $c\theta_*$ e $E_\nu$ . Para a energia do muon produzido ser próxima a do neutrino incidente ele precisa ser espalhado com ângulo próximo de zero. Quanto maior o ângulo de espalhamento, menor a razão $\frac{E_\mu}{E_{\nu\mu}}$ . . . . .	59
6.3	A figura mostra a energia permitida para o múon vindo da produção de pión, em função de $c\theta_*$ e $E_\nu$ . Para a energia do múon ser próxima à do neutrino ele precisa ser espalhado com ângulo próximo de zero. Quanto maior o ângulo de espalhamento, menor a razão $\frac{E_\mu}{E_{\nu\mu}}$ . . . . .	60

6.4	Nossos resultados para o número de múons mais anti-múons em SK para a região de Sub-GeV são comparados com os resultados da própria colaboração SK. Tanto em nossos resultados como nos da colaboração SK são usados como entrada os fluxos calculados por Honda[21]. Podemos ver que dentro da margem de erro nossos resultados reproduzem os dados obtidos por SK para o número de múons mais anti-múons esperado. . . . .	64
6.5	Nossos resultados para o número de múons mais anti-múons em SK para a região de Multi-GeV comparado com os dados da colaboração SK. Em ambos os casos são usados como entrada os fluxos calculados por Honda [21]. . . . .	65
7.1	Perfil de densidade eletrônica terrestre em função do ângulo zenital e da razão entre a distância percorrida no interior da Terra e o raio terrestre. . . . .	70
7.2	Na figura temos a probabilidade de sobrevivência $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)$ em função do ângulo zenital para o caso padrão comparada com o valor obtido quando fazemos $\alpha_3 = 0.8$ e $\alpha_3 = 1.5$ . A curva tracejada mostra o caso com $\alpha_3 = 0$ , que é o caso de oscilação padrão. A energia do neutrino foi mantida fixa em 250 MeV, $\sin(2\theta) = 1,0$ e $\Delta m_{32}^2 = 0,003 \text{ eV}^2$ . . . . .	75
8.1	Nossos resultados para $\Delta\mathcal{X}^2$ em função de $\Delta m_{32}^2$ para o caso de $\sin^2(2\theta_{23}) = 1$ . Obtivemos $\mathcal{X}_{min}^2 = 43.7$ para 38 graus de liberdade, quando $\Delta m_{32}^2 = 0.0027$ . As linhas tracejadas se referem à 68%, 90%, e 99% de nível de confiança. . . . .	82
8.2	Nossos resultados para a região permitida para os parâmetros $\Delta m_{32}^2, \theta_{23}$ . Obtivemos $\mathcal{X}_{min}^2 = 43.7$ para 38 graus de liberdade. As linhas tracejadas representam as regiões permitidas para o nível de confiança de 68%, 90% e 99%, e são obtidas fazendo $\Delta\mathcal{X}^2 = 2, 33, \Delta\mathcal{X}^2 = 4, 61$ e $\Delta\mathcal{X}^2 = 5, 9$ . respectivamente. . . . .	83
8.3	Nossos resultados para o $\mathcal{X}^2$ em função de $\Delta m_{32}^2 \text{ eV}^2$ . As linhas horizontais representam $\Delta\mathcal{X}^2 = 4, 61$ que nos dá a região de 90%. . . . .	84
8.4	Nossos resultados para o $\mathcal{X}^2$ em função de $\alpha_{MaVaN}$ para alguns valores específicos de $\Delta m_{32}^2 (\text{eV}^2)$ . . . . .	85
8.5	Nossos resultados para o $\mathcal{X}^2$ em função de $\alpha_{MaVaN}$ para alguns valores específicos de $\Delta m_{32}^2 (\text{eV}^2)$ . . . . .	86

8.6 Nossos resultados para a região permitida para o espaço de parâmetros de  $(\alpha_{MaVaN}, \Delta m_{32}^2)$  com nível de confiança de 90%. . . . . 87

# Resumo

Neste trabalho obtemos de forma independente a descrição da distribuição angular dos eventos de neutrinos atmosféricos vistos pelo detector Super-Kamiokande tanto para as regiões de sub-GeV como multi-GeV. Para tal, estudamos de forma detalhada a seção de choque neutrino-nucleon para processos de espalhamento via corrente carregada para todo o intervalo de energia pelo qual o fluxo de neutrinos atmosféricos se estende. Integramos então o produto do fluxo de neutrinos atmosféricos pela seção de choque de detecção dos neutrinos e pela probabilidade de oscilação padrão de neutrinos atmosféricos e obtemos a distribuição angular de eventos em Super-Kamiokande. Através de análise de  $\chi^2$  obtivemos uma região permitida para os parâmetros de oscilação padrão de neutrinos atmosféricos, a diferença quadrática de massas, e o ângulo de mistura,  $\sin^2(2\theta_{23})$ , compatível com a existente na literatura. Como um teste para oscilação não padrão introduzimos o modelo de neutrinos com massa variável (MaVaN's), no qual a massa dos neutrinos depende da densidade do meio. Tal efeito é obtido ao incluir um acoplamento do tipo Yukawa entre os neutrinos e um campo escalar neutro cuja concentração depende da densidade do meio. Estudamos como a inclusão deste efeito altera a probabilidade de oscilação  $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}$  e, consequentemente, a descrição dos dados de Super-Kamiokande. Obtemos um limite para o parâmetro  $\alpha_{MaVaN}$  responsável pela intensidade deste novo efeito, sendo que soluções cuja intensidade do efeito de MaVaN é de 40% ou maior, em comparação com a intensidade da oscilação padrão são excluídas com 90% de nível de confiança.

# Abstract

In this work we obtain in an independent way the description of the angular distribution of atmospheric neutrino events as seen by the Super-Kamiokande collaboration for the events in the sub-GeV and multi-GeV range. As a first step in this description, we study the neutrino-nucleon charged current cross section for the hole energy range of the experiment, and obtain the number of neutrino events as a function of energy and zenith angle. Including neutrino oscillations in the picture allows us to describe the data from the Super-Kamiokande experiment. We obtain the allowed region for the oscillation parameters  $\Delta m_{23}^2$  and  $\sin^2(2\theta_{23})$  in reasonable agreement with the result found in the literature. As a test for a non-standard oscillation mechanism we introduce the concept of MaVaN (Mass Varying Neutrinos), derived from the coupling of the neutrinos with a neutral scalar who has its concentration depending on local matter density. The neutrino oscillation probability so changes from the standard oscillation with consequences for the allowed region of oscillation parameters. The parameter  $\alpha_{mavan}$  describes the relative weight of usual oscillation terms and the MaVaN terms, being  $\alpha_{MaVaN} = 1$  when the two terms are equal. We have found that  $\alpha_{MaVaN}$  should be smaller than 0,4 at 90 % C.L.



# Capítulo 1

## Introdução

A física de neutrinos começa em 1930, quando W. Pauli [1] propõe a existência de uma nova partícula para dar conta da energia que estava faltando no decaimento  $\beta$ . Esta nova partícula foi por ele chamada de nêutron. Sua idéia era que a massa dessa nova partícula fosse da mesma ordem da massa do elétron. Posteriormente, esta partícula foi rebatizada por E. Fermi [2] como neutrino (pequeno nêutron em italiano) ao incluir o neutrino na descrição do decaimento beta. Não havia, no entanto, qualquer razão para que a massa dos neutrinos fosse diferente de zero.

Sabemos que um dos principais processos que ocorrem no interior do Sol é a fusão de quatro núcleos de hidrogênio em um átomo de hélio acompanhado da emissão de dois pósitrons e dois neutrinos eletrônicos. Em 1964 Raymond Davis Jr. leva a cabo um experimento capaz de contar quantos átomos de cloro em  $C_2Cl_4$  são convertidos em argônio ( $^{37}Ar$ ) devido a interações desses neutrinos [3]. Os primeiros resultados deste experimento foram anunciados em 1968, e apenas aproximadamente um terço dos neutrinos esperados foram detectados. Este número de neutrinos emitidos pelo Sol em diferentes energias foi calculado por John N. Bahcall\* através de simulação computacional [4]. A discrepância entre o valor esperado e medido neste caso deu origem ao chamado *Problema do Neutrino Solar*.

Em 1969, Bruno Pontecorvo e Vladimir Gribov [5], [6], inspirados pela oscilação entre káons neutros, propõem que os neutrinos de sabor, aqueles produzidos juntamente com os léptons carregados, não são auto-estados da Hamiltoniana de evolução temporal, mas sim descritos por uma combinação linear destes auto-estados, que seriam, portanto, os auto-estados de massa. Sendo os auto-estados de sabor uma combinação linear ou mistura dos auto-estados de massa, a evolução

---

\*Texto extraído de *Solving the Mystery of the Missing Neutrinos*, de J. N. Bahcall. [4]

temporal de um auto-estado de sabor pode levar a outra combinação dos auto-estados de massa. O efeito pode ser descrito como a oscilação de sabores de neutrinos, e esta só é possível graças à diferença entre os auto-valores de massa dos neutrinos.

De fato, no dia 18 de Junho de 2001 a colaboração (SNO) [7] anuncia a solução do Problema do Neutrino Solar ao medir não apenas os neutrinos eletrônicos mas todos os neutrinos que interagem no detector vindos do Sol. Somando em sabores o número de neutrinos medidos, tem-se a concordância entre as predições teóricas e os valores observados. Este fato corrobora a existência do mecanismo de oscilação de sabores de neutrinos induzida por massa, e implica, portanto, que não apenas os neutrinos devem ter massa, como também que os auto-valores de massa devem ser não degenerados.

De fato, este déficit entre o número de neutrinos previsto e esperado existe não apenas em neutrinos vindos do Sol. O detector Super-Kamiokande (SK) [8] é capaz de medir com grande precisão tanto neutrinos vindos do Sol, confirmando o *Problema do neutrino solar* e sua solução através do mecanismo de oscilação, mas também neutrinos produzidos nas interações de raios cósmicos com a atmosfera da Terra, os chamados neutrinos atmosféricos, para os quais também havia discrepância entre o número de neutrinos esperado e medido. Neste caso, contudo, ao contrário do que acontece com neutrinos solares, o número de neutrinos eletrônicos medido concorda com o esperado. O déficit de neutrinos atmosféricos se faz presente majoritariamente quando comparamos o número de neutrinos muônicos produzidos pelas colisões de raios cósmicos com a atmosfera da Terra com seu valor esperado. Também nesse caso o mecanismo de oscilação de neutrinos induzido por massa ajuda a resolver esta tensão entre teoria e dados experimentais. Embora uma pequena fração dos neutrinos do múon se convertam para eletrônicos, na grande maioria dos casos a oscilação de neutrinos atmosféricos se dá entre neutrinos do múon se convertendo em neutrinos do tau, os quais não são detectados em SK devido à grande energia necessária para gerar a massa de um tau.

No modelo padrão das partículas elementares os neutrinos foram incluídos como partículas de massa zero, mas sabemos hoje dos experimentos de oscilação que os neutrinos devem ter massa. Desta forma o modelo padrão precisa ser revisto e alguma extensão incluindo nova física poderia ser a responsável pela geração da massa dos neutrinos.

Uma proposta de extensão do modelo padrão é o modelo de Neutrinos com Massa Variável (MaVaN), o qual supõe que a massa dos neutrinos é devida à interação dos neutrinos com algum campo escalar neutro [9]. Este modelo surgiu na cosmologia [10], onde um campo escalar neutro surge como

proposta para explicar a variação dinâmica da densidade de energia escura. Este campo poderia se acoplar com os neutrinos e como consequência deste acoplamento a massa dos neutrinos se torna variável. Como consequência na cosmologia, valor das massas dos neutrinos nos instantes imediatamente subsequentes ao Big-Bang influencia o padrão de grandes estruturas tais como galáxias e aglomerados de galáxias que vemos hoje, e resultados de investigações a esse respeito podem ser encontrados em [12], [13], [14].

Neste trabalho nos perguntamos como as alterações na probabilidade de oscilação devidas ao mecanismo MaVaN alteram a descrição dos dados de SK para a distribuição zenital de eventos de neutrinos atmosféricos. Para tal, supomos um modelo fenomenológico para a dependência da massa dos neutrinos com a densidade bariônica da matéria terrestre. Estudos a esse respeito já foram realizados pela própria colaboração Super-Kamiokande [15] para o caso específico da interação dos neutrinos com o campo escalar ser diagonal na base de massa dos neutrinos. Em nosso trabalho estudamos o caso no qual a interação dos neutrinos com o campo escalar é não-diagonal na base dos neutrinos de massa.

O efeito de incluir o mecanismo MaVaN na descrição dos neutrinos atmosféricos pode alterar significativamente a probabilidade de oscilação, e, conseqüentemente o número de neutrinos esperado no detector. Podemos analisar os dados de SK com as hipóteses de ausência de oscilação de sabores, presença de oscilação padrão e presença de oscilação modificada pelo modelo MaVaN e, obter limites para os parâmetros tanto de oscilação padrão, para o ângulo de mistura e para a diferença quadrática de massas,  $(\sin^2 2\theta_{23}, \Delta m_{32}^2)$ , como para o parâmetro  $\alpha_{MaVaN}$  responsável pela intensidade da interação entre o neutrino e a matéria não diagonal na base de massa dos neutrinos.

No capítulo 2 abordamos os neutrinos atmosféricos, suas fontes, sua intensidade, sua dependência com energia e as principais incertezas com relação a intensidade do fluxo de neutrinos, distribuição energética e perfil zenital. No capítulo 3 descrevemos a seção de choque neutrino-nucleon, tanto a cinemática quanto a dinâmica dos diferentes processos que ocorrem na vasta faixa de energia pela qual o fluxo de neutrinos atmosféricos se estende. O mecanismo de oscilação padrão de neutrinos é tratado no capítulo 4. No capítulo 5 definimos a função resposta do detector Super-Kamiokande, e mostramos como podemos obter o número total de eventos no detector e sua dependência energética. Já no capítulo 6 introduzimos a distribuição angular de eventos em SK, descrevemos os passos intermediários do processo de cálculo e mostramos nossos resultados para

esta que é o nosso observável de interesse. Introduzimos no capítulo 7 um modelo fenomenológico para neutrinos com massa variável e estudamos as consequências no mecanismo de oscilação de neutrinos atmosféricos. Finalmente, no capítulo 8 fazemos a análise dos dados da distribuição angular de eventos de neutrinos atmosféricos em SK, tanto na ausência de oscilações de neutrinos, como na presença do mecanismo de oscilação padrão e do mecanismo MaVaN. Encontramos uma região permitida para os parâmetros de oscilação padrão e limites para exclusão do modelo MaVaN em neutrinos atmosféricos.

# Capítulo 2

## Neutrinos atmosféricos

Neutrinos atmosféricos são provenientes das colisões de raios cósmicos (RC's) com um núcleo de nitrogênio ou oxigênio presentes na atmosfera terrestre, dando início a uma série de reações e decaimentos responsáveis pela produção de uma enorme quantidade de partículas. Esta estrutura é conhecida como chuva atmosférica de partículas. Inicialmente são produzidos hádrons, partículas que se caracterizam por interagirem via força nuclear forte além da força nuclear fraca e força eletromagnética, e que na sua maioria são instáveis, tendo píons, ( $\pi^0$ ,  $\pi^\pm$ ), como produto final de seus decaimentos. Salientamos que na atmosfera são produzidos tanto neutrinos quanto anti-neutrinos, porém, os detectores de neutrinos atmosféricos que tomamos como referência, tais como o Super-Kamiokande (SK)[8], não são capazes de distinguir a carga do lépton carregado produzido, e sendo assim, não há como distinguirmos entre neutrinos e anti-neutrinos. Deixamos sempre implícito quando nos referimos a neutrinos que também são produzidos anti-neutrinos, e ambos são levados em conta. Píons carregados apresentam como modo principal de decaimento a reação  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ , (99,98%) [16]. Por sua vez, múons decaem principalmente através de  $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ , ( $\approx 100\%$ ), e por isso esperari-se-ia que a soma do número de neutrinos mais antineutrinos muônicos, ( $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ ), medidos fosse o dobro da soma do número de neutrinos mais antineutrinos eletrônicos, ( $\nu_e + \bar{\nu}_e$ ), medidos. Definimos  $R$  como sendo a razão entre o fluxo de neutrinos muônicos,  $\phi(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)$ , e o número de neutrinos eletrônicos,  $\phi(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ , medidos [17], ou seja,

$$R = \frac{\phi(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)}{\phi(\nu_e + \bar{\nu}_e)} \approx 2 \quad . \quad (2.1)$$

Esta quantidade apresenta dependência com a energia dos neutrinos, uma vez que múons com energia da ordem de alguns GeV ou superior podem alcançar o solo antes de decair, suprimindo a produção de neutrinos eletrônicos, e sendo assim, esperamos um aumento em  $R$  com o aumento da energia. Na Fig. (2.1) estão representados o raio cósmico primário incidente na atmosfera, os píons carregados gerados no estágio final da evolução da cascata hadrônica, e seus decaimentos em múons e neutrinos.

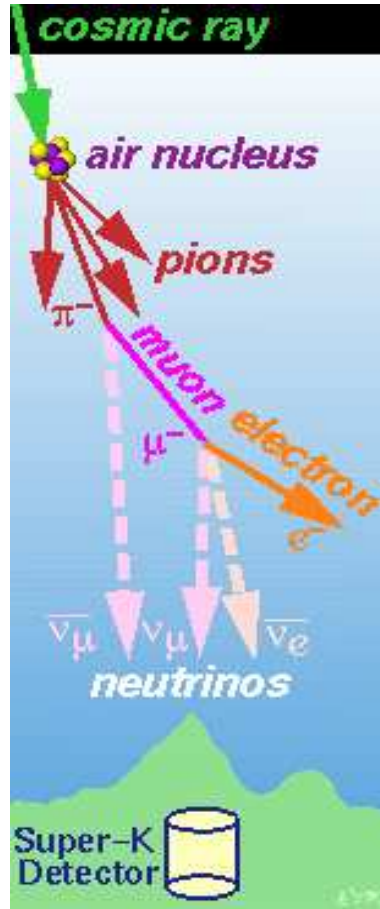


Figura 2.1: Representação esquemática de uma possível configuração para um chuva de RC na atmosfera mostrando as principais fases de sua evolução e o detector SK[8], retirada da referência [18].

Káons carregados,  $K^\pm$ , apresentam massa igual a  $m_K = 493,7 \text{ MeV}$ , que é aproximadamente três vezes maior que a massa de píons carregados,  $m_\pi = 139,4 \text{ MeV}$ , o que sugere que sua produção ocorra de forma significativa apenas em chuvas muito energéticas, os quais são mais raros. Sendo assim, a contribuição dos neutrinos oriundos do modo principal de decaimento  $K^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ , (63, 43%) só será importante para a região de maior energia do espectro dos neutrinos atmosféricos.

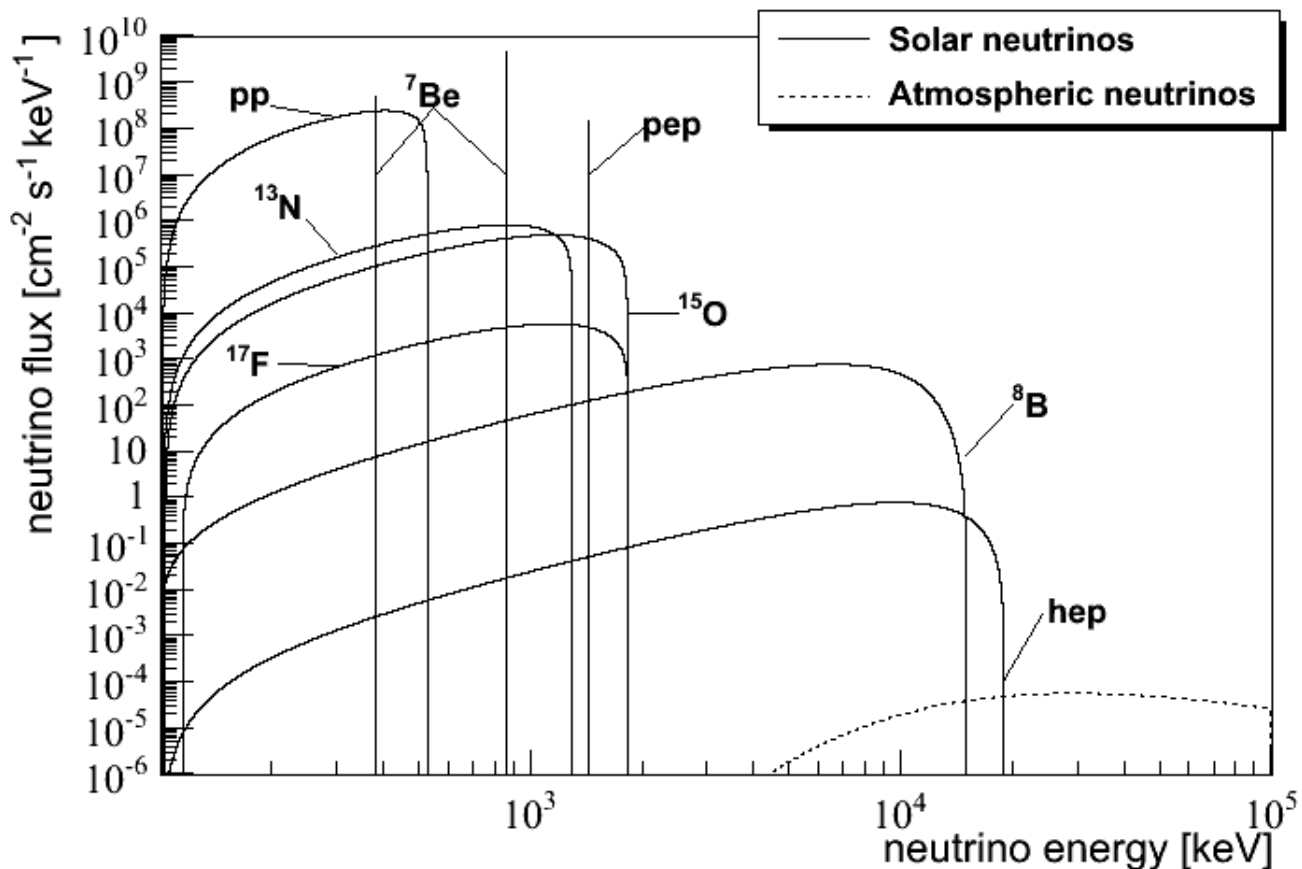


Figura 2.2: Comparação do fluxo de neutrinos atmosféricos e solares. Todas as linhas cheias referem-se ao fluxo de neutrinos solares, enquanto que o fluxo de neutrinos atmosféricos está representado pela linha tracejada [29].

Na Fig. (2.2) mostramos uma comparação do fluxo e do intervalo de energia dos neutrinos atmosféricos e neutrinos solares. Trataremos nesta tese de eventos de neutrinos atmosféricos com energia entre 0,1 GeV e 100 GeV, uma vez que estes são os neutrinos que dão origem a léptons carregados nos intervalos de energia de sub-GeV e multi-GeV em SK.

Como neutrinos interagem apenas por interação fraca, seu caminho médio de interação é da ordem de  $10^{40}$  cm para as energias típicas com as quais estes são produzidos na atmosfera terrestre, da ordem de GeV. Isso se deve ao fato de que a baixas energias, a seção de choque neutrino-nucleon,  $\sigma_{\nu-N}$ , é da ordem de  $10^{-38}$  cm<sup>2</sup>, [20]. No Capítulo 3 trataremos a seção de choque neutrino-nucleon detalhadamente. Aqui nos basta saber que no intervalo de energia que estamos interessados ela

apresenta crescimento linear com a energia do neutrino incidente,

$$\sigma_{\nu-N} \approx \left( \frac{E_\nu}{GeV} \right) cm^2; \quad \sigma_{\nu-N}(E_\nu = 1, 0 GeV) \approx 10^{-38} cm^2. \quad (2.2)$$

Sendo assim, um detector tal como o SK é sensível não apenas aos neutrinos produzidos em regiões atmosféricas acima deste, mas a todos os neutrinos produzidos na atmosfera terrestre na direção de SK, conforme ilustrado na Fig. (2.3).

Ainda, a seção de choque da ordem de  $10^{-38} cm^2$  implica em uma probabilidade da mesma ordem de grandeza para a ocorrência da reação de detecção dos neutrinos,

$$\nu_l (\bar{\nu}_l) + x \rightarrow x^* + l (\bar{l}) \quad , \quad (2.3)$$

onde  $l$  refere-se a um lépton carregado e  $\nu_l$  ao neutrino associado a este lépton. Esta é a razão pela qual detectores de neutrinos atmosféricos que funcionam através deste processo, tais como SK, precisam conter dezenas de quilotoneladas de água. A seção de choque deve ser compensada pelo número de nucleons no detector.

Como os neutrinos que são produzidos diretamente acima do detector se propagam verticalmente para baixo até o atingirem, estes são chamados *down-going neutrinos*, da mesma forma que os neutrinos que são produzidos em uma região diametralmente oposta ao detector e atravessam toda a Terra antes de o atingirem, apresentam trajetória verticalmente para cima quando vistos do mesmo, e por isso são chamados de *up-going neutrinos*. Definimos o ângulo zenital do neutrino,  $\theta_{z\nu}$ , como o ângulo em relação à direção normal ao detector, e dessa forma  $\cos\theta_{z\nu} = 1$  corresponde a neutrinos que chegam ao SK com trajetórias verticalmente para baixo, e  $\cos\theta_{z\nu} = -1$  corresponde a neutrinos com trajetórias verticalmente para cima.

Supomos em nosso trabalho que os neutrinos atmosféricos são todos produzidos a uma altitude média de 15 km, muito embora saibamos que a região atmosférica onde ocorre a maior parte dos decaimentos dos píons e múons que produzem estes neutrinos se estenda por uma faixa que vai desde 10 km até 30 km de altitude [21]. Em função de  $\cos\theta_z$ , a distância percorrida por um neutrino produzido na atmosfera terrestre até atingir SK é dada pela Eq. (2.4), cuja solução mostramos na Fig. (2.4). Destacamos por  $Atm$  a distância percorrida apenas na atmosfera, por  $T$  a distância percorrida na Terra e por  $T + Atm$  a distância total percorrida. Esta apresenta como casos limites a distância mínima percorrida igual a  $R_{T+Atm} = R_T + 15$  km e  $R_T = 6371$  é o raio da Terra. Para neutrinos com  $\theta_{z\nu} = 0^\circ$ , a distância máxima percorrida é da da pelo diâmetro terrestre mais a



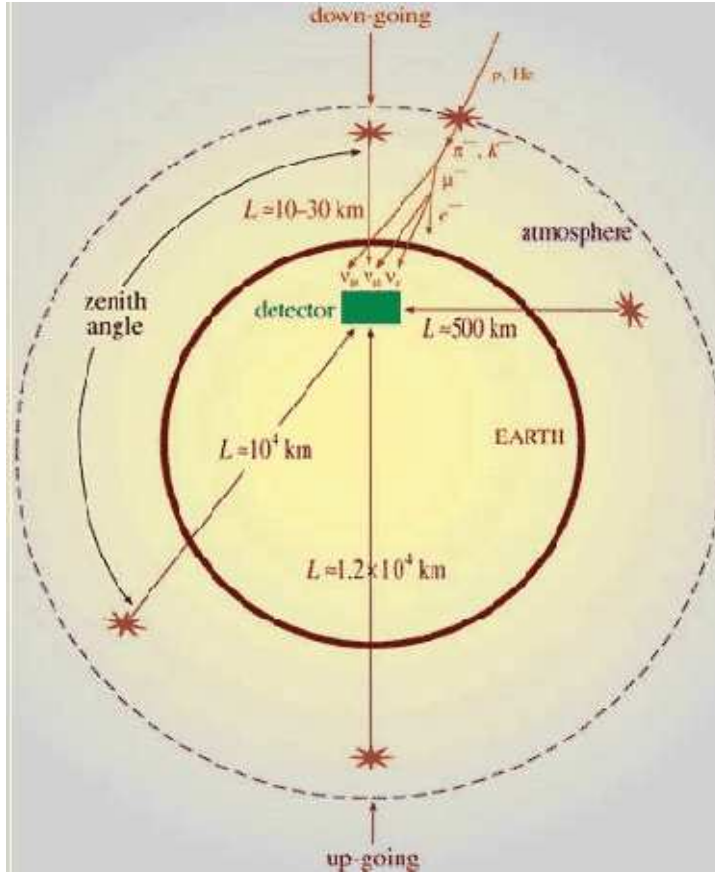


Figura 2.3: Esquemas de neutrinos produzidos na atmosfera atingindo detector de várias direções. [8], [19] .

distância percorrida na atmosfera antes de adentrar a Terra,  $2R_T + 15$  km. Também destacamos que a distância máxima percorrida na atmosfera é de aproximadamente 437,4 km, para o caso em que o neutrino incide a  $\theta_{z\nu} = 90^\circ$ . A relação para a distância total percorrida em função do ângulo zenital escreve-se

$$d = -R_T \cos(\theta_{z\nu}) + \sqrt{\cos^2(\theta_{z\nu})R_T^2 + R_{Atm}^2 + 2R_t R_{Atm}} , \quad (2.4)$$

e a distância percorrida somente dentro da Terra é dada por

$$d_T = -2R_T \cos(\theta_Z) . \quad (2.5)$$

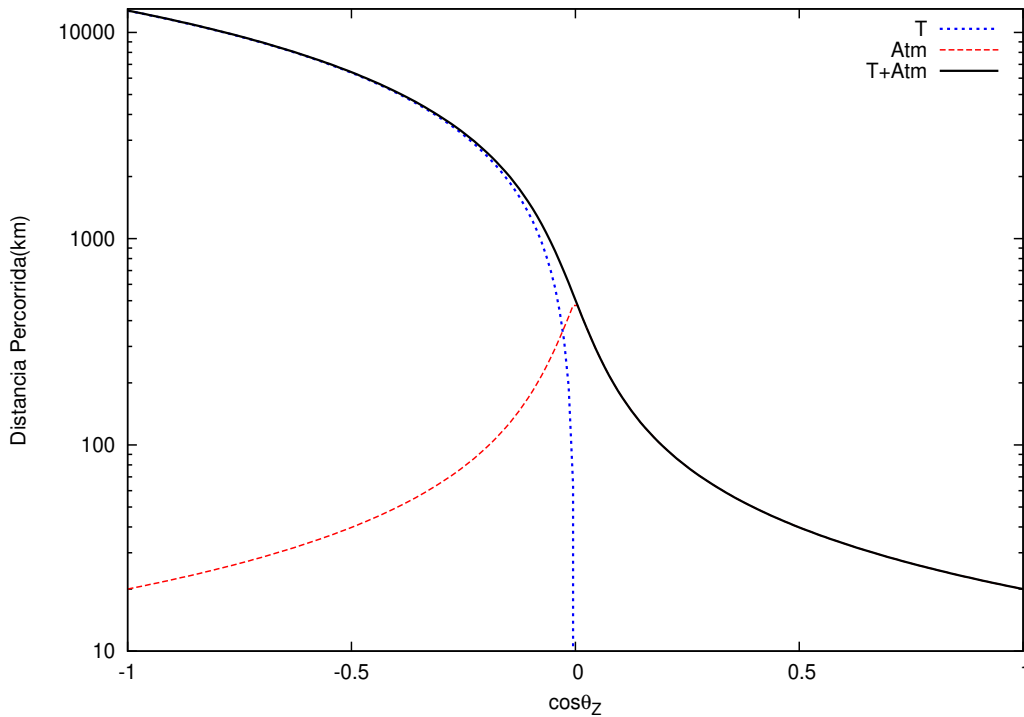


Figura 2.4: Distância percorrida pelo neutrino produzido na atmosfera terrestre até atingir o experimento SK em função de  $\cos(\theta_z)$ .

## 2.1 O fluxo de neutrinos atmosféricos

O fluxo de neutrinos atmosféricos pode ser obtido através de uma convolução do fluxo de RC's primários com uma produção de  $Y$  neutrinos por primário. Nesse sentido, podemos escrever o fluxo de neutrinos do tipo  $i$ ,  $\phi_i$ , através de

$$\phi_i = \phi_p \otimes R_p \otimes Y_{p \rightarrow \nu_i} + \sum_A \phi_A \otimes R_A \otimes Y_{A \rightarrow \nu_i} \quad , \quad (2.6)$$

onde  $\phi_p$  ( $\phi_A$ ) é o fluxo de prótons (núcleos) primários e  $R_p$  ( $R_A$ ) representa a barreira imposta pelo campo geomagnético aos prótons (núcleos atômicos) primários respectivamente.  $Y_{p \rightarrow \nu_i}$  ( $Y_{A \rightarrow \nu_i}$ ) representa o número de neutrinos produzidos em chuva iniciado por um próton (núcleo) primário. Sendo assim, o fluxo de neutrinos atmosféricos depende diretamente do fluxo de RC's primários. A seguir, ressaltamos algumas características interessantes do fluxo de RC's primários que são transmitidas ao fluxo de neutrinos atmosféricos.

## 2.2 Características do fluxo de neutrinos e de RC's primários

Os resultados experimentais mais recentes de [75] para o fluxo de RC's primários confirmam que este fluxo é dependente da energia do raio cósmico primário. Segundo [21], para energias inferiores a 100 GeV, este fluxo pode ser ajustado por

$$\phi(E_k) = K \times \left( E_k + b \exp[-c\sqrt{E_k}] \right)^{-\alpha}, \quad (2.7)$$

onde  $\alpha$ ,  $K$ ,  $b$ ,  $c$  são parâmetros de ajuste e  $E_k$  é a energia do RC primário. Especificamente,  $\alpha$  é o parâmetro que informa a dependência energética da redução no fluxo de RC's. Dos experimentos [75] sabemos que a dependência energética da Eq.(2.7) pode ser ajustada aos dados de RC's fazendo  $\alpha \approx 2$  para energias de até 100 GeV. Contudo, o fluxo de neutrinos atmosféricos não obedece esta relação com a energia. Em analogia à Eq.(2.7), a dependência energética do fluxo de neutrinos atmosféricos pode ser modelada fazendo  $\alpha \approx 3.5$ . Ou seja, o fluxo de neutrinos cai mais rapidamente com a energia do que o fluxo de raios cósmicos primários que o originou, sendo estatisticamente significativo até energias em torno de 10 GeV. O fluxo de neutrinos está centrado em valores de energia bem menores, da ordem de 1 GeV. Uma razão para isso é que, para energias elevadas, múons alcançam o solo antes de decair.

Também é importante salientar os efeitos do ciclo de atividade solar sobre o fluxo de raios cósmicos primários de baixas energias, tipicamente da ordem de 10 GeV, e, conseqüentemente, sobre o fluxo de neutrinos a baixas energias. Tanto a emissão luminosa como a emissão das partículas obedecem a este ciclo de atividade, o qual apresenta um período de aproximadamente onze anos. Partículas carregadas emitidas pelo Sol formam o vento solar, e, ao interagirem com o campo magnético terrestre, podem ficar presas nos chamados cinturões de Van-Allen. Essa concentração de partículas carregadas funciona como uma blindagem que impede que raios cósmicos atinjam a atmosfera e dessa forma não é formado o chuva de partículas secundárias. Temos então uma modulação do fluxo de neutrinos atmosféricos devida a atividade solar.

## 2.3 Simulação do fluxo de neutrinos atmosféricos

O fluxo de neutrinos atmosféricos apresenta forte dependência na energia do neutrino,  $E_\nu$ , e no ângulo zenital,  $\theta_{z\nu}$ . Mesmo hoje, modelar exatamente qual é o fluxo de neutrinos atmosféricos ainda é um problema em aberto, muito embora grandes progressos tenham sido obtidos através

de simulações computacionais [21]. Estas recentemente experimentaram avanços significativos na busca da descrição dos dados experimentais quando passaram a tratar as interações dos RC's primários e decaimentos de seus produtos responsáveis pela produção de neutrinos, píons e múons, tridimensionalmente. O fluxo de neutrinos obtido através de simulações em três dimensões difere do fluxo obtido em uma dimensão principalmente para baixas energias e próximo à linha do horizonte.

Em uma simulação unidimensional, a direção de propagação de múons é considerada a mesma da direção de propagação dos píons que lhes deram origem. Já em três dimensões este vínculo é removido. Como os píons produzidos na atmosfera são os produtos do decaimento dos hádrons produzidos nas colisões dos RC's primários e das partículas secundárias, os fluxos de neutrinos atmosféricos apresentam forte dependência com a evolução dinâmica da cascata hadrônica.

Para obter o fluxo de neutrinos no detector SK, procedemos a interpolação e posterior integração das tabelas fornecidas por [45] em relação ao ângulo azimutal dos neutrinos incidentes. Estes são os mesmos fluxos de neutrinos usados pela colaboração SK.

Nas Figs (2.5-2.6) mostramos os resultados de [45] para o perfil do fluxo zenital tanto para neutrinos como para antineutrinos eletrônicos e muônicos em SK. Podemos verificar a dependência do fluxo de neutrinos atmosféricos com relação a  $\theta_{z\nu}$ . A diferença entre cada uma das figuras está nos valores inicial e final do intervalo de energia dos neutrinos.

Como característica geral, ao aumentarmos o intervalo de energia dos neutrinos, devido à lei de potência seguida pelo espectro dos neutrinos atmosféricos, Eq. (2.7), percebemos uma redução no fluxo integrado. Esta redução pode ser diretamente verificada ao compararmos fluxos para intervalos de energias diferentes.

Além da dependência com a energia do neutrino, o fluxo de neutrinos atmosféricos apresenta uma dependência com o ângulo zenital do neutrino, quantificado por  $\cos\theta_{z\nu}$ . Vemos claramente que ocorre um aumento no fluxo para valores de  $|\cos\theta_{z\nu}|$  próximos a zero. Este aumento, conhecido como *aumento horizontal*, o qual descrece com o aumento da energia do neutrino.

A dependência com a energia do fluxo de neutrinos atmosféricos que chegam ao detector SK pode ser verificada na Fig. (2.7), na qual os fluxos interpolados são integrados tanto na componente azimutal como na zenital. Além disso, mostramos os resultados multiplicados pelo quadrado da energia do neutrino, assim como é feito na referência [21]. Isso é devido ao fato de que o fluxo de neutrinos atmosféricos apresenta uma dependência de lei de potência,  $\Phi_\nu \approx E_\nu^{-2,5}$ ,

e portanto, graficamos  $E_\nu^2 \times \Phi_\nu$  quando queremos mostrar o comportamento dos fluxos de neutrinos atmosféricos para grandes intervalos de energia. Uma vez que reproduzimos exatamente esses fluxos, temos certeza de que estamos utilizando os mesmos fluxos usados pela colaboração Super-Kamiokande [8] de forma correta como entrada de nosso código.

## 2.4 O detector Super-Kamiokande

Aqui vamos descrever o principal experimento para a detecção dos neutrinos atmosféricos, o detector Super-Kamiokande [8]. Este experimento tem seu funcionamento baseado na radiação Cherenkov emitida pelo léptons carregados produzidos em seu interior pela interação dos neutrinos. A radiação Cherenkov foi descoberta por 1934 por P. Cherenkov [25], e ocorre quando uma partícula carregada se propaga em um meio material com velocidade maior do que a velocidade da luz neste meio. A velocidade da luz na água,  $v$ , é, aproximadamente

$$v = \frac{c}{\eta_{H_2O}} = \frac{3 \times 10^8 \text{m/s}}{1,33} \approx 2,26 \times 10^8 \text{m/s}. \quad (2.8)$$

Quando uma partícula carregada se propaga na água com velocidade maior do que  $v$ , ocorre a emissão de um cone de radiação similar a onda de choque que ocorre quando um objeto rompe a barreira da velocidade do som, e dessa forma, é possível se detectar os neutrinos atmosféricos através do cone de radiação Cherenkov produzido quando estes neutrinos interagem com o detector produzindo létons carregados em seu interior.

O detector SK consiste de um tanque de 50 kt de água localizado no interior de uma caverna aproximadamente 1000m abaixo da superfície. O volume definido pelas 22,5 kt mais internas do detector é chamado de volume fiducial e está envolto por um cilindro contendo 11146 células fotomultiplicadoras sensíveis aos fótons provenientes dos cones de radiação Cherenkov. Estas células tem 50 cm de diâmetro e foram desenvolvidas pela Hamamatsu Photonics Corporation especialmente para SK [8]. Existem outras 1885 células fotomultiplicadoras com 20 cm de diâmetro voltadas para a parte externa do tanque, coletando a radiação devida a partículas carregadas produzidas fora do detector, principalmente múons e elétrons de raios cósmicos. Dessa forma é possível determinar quais cones de radiação são devidos unicamente a interação de neutrinos.

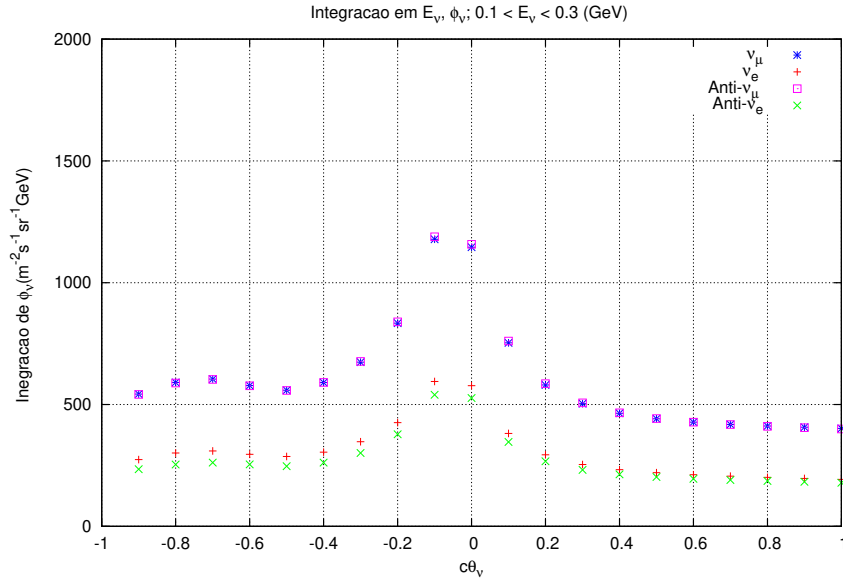


Figura 2.5: Fluxos em SK de (anti)neutrinos muônicos e eletrônicos em função do ângulo zenital do neutrino para o intervalo de energia  $0,1 < E_\nu < 0,3$  GeV retirados da referência [21].

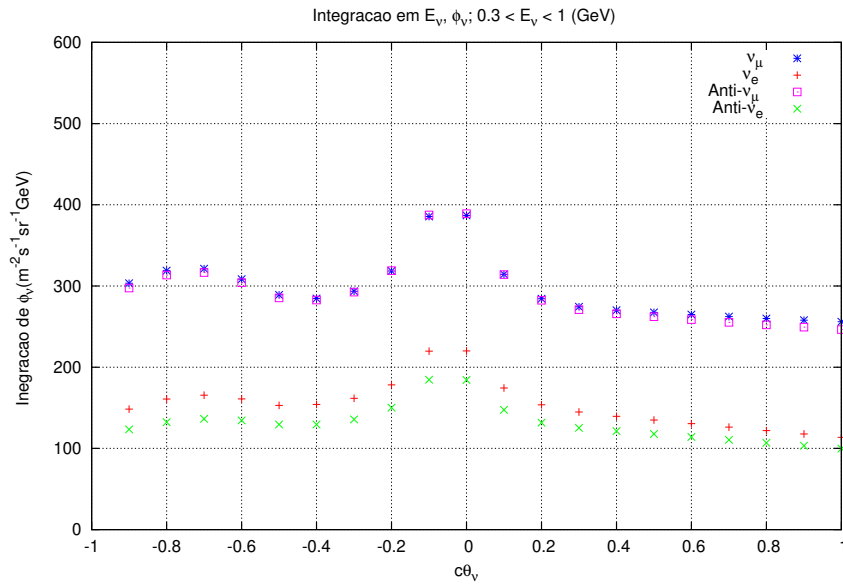


Figura 2.6: Fluxos em SK de (anti)neutrinos muônicos e eletrônicos em função do ângulo zenital do neutrino para o intervalo de energia  $0,3 < E_\nu < 1$  GeV retirados da referência [21].

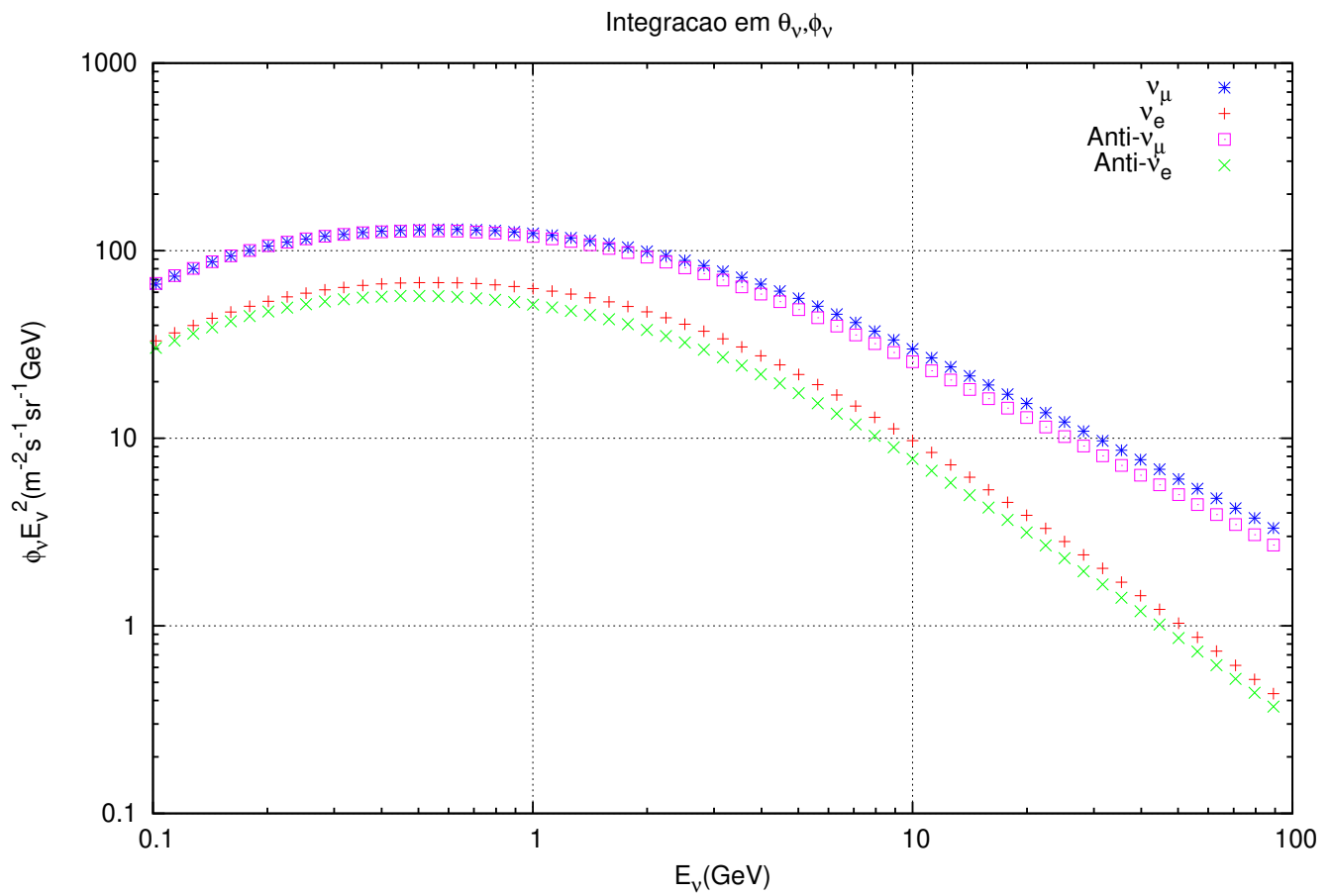


Figura 2.7: Fluxos ponderados pelo quadrado da energia do neutrino de (anti)neutrinos muônicos e eletrônicos em função da energia do neutrino retirados da referência [21].

# Capítulo 3

## A seção de choque neutrino-nucleon

1 Conforme visto no capítulo 2, o fluxo de neutrinos atmosféricos se estende por três ordens de grandeza em energia. Estamos interessados no intervalo de 0,1 GeV até 100 GeV. Sabemos que processos diferentes de interação do neutrino ocorrem a diferentes energias, e todos eles precisam ser levados em conta.

A baixas energias, para  $E_\nu$  da ordem de algumas centenas de MeV's, o processo predominante é o espalhamento quasi-elástico, ao passo que a altas energias, para  $E_\nu$  da ordem de alguns GeV's ou mais, o processo dominante é o espalhamento profundamente inelástico (DIS). Além disso, a energias intermediárias,  $E_\nu \approx 1$  GeV ocorre a produção ressonante de píons. Vamos estudar cada um destes processos separadamente.

### 3.1 Seção de Choque Quasi-elástica

Iniciamos o estudo da seção de choque neutrino-nucleon analisando duas reações específicas do tipo decaimento beta inverso (*inverse beta decay*), ou seja, o espalhamento quasi-elástico de um antineutrino eletrônico com um próton originando um pósitron e um nêutron, e o espalhamento de um neutrino eletrônico com um nêutron originando um próton e um elétron. descrevemo-os como

$$\bar{\nu}_e(p_\nu) + p(p_p) \rightarrow e^+(p_e) + n(p_n) , \quad \nu_e(p_\nu) + n(p_n) \rightarrow e^-(p_e) + p(p_p), \quad (3.1)$$

onde  $p_i$  é o momentum da partícula  $i$ , com  $i = \{e, \bar{\nu}_e, p, n\}$ , referindo-se ao pósitron, anti-neutrino eletrônico, próton e nêutron respectivamente. Inicialmente dividiremos o cálculo em uma parte devida à cinemática do processo, e outra devida à dinâmica, onde entram os efeitos de interação



propriamente ditos. Todos os efeitos dinâmicos, ou seja devidos à natureza da interação, estão contidos na amplitude de probabilidade para o processo em questão,  $\mathcal{M}$ . Em uma reação envolvendo dois corpos, sempre podemos definir variáveis cinemáticas que sejam invariantes frente a uma transformação de Lorentz, as chamadas variáveis de Mandelstam,  $\{s, t, u\}$ . Aqui  $s$  é o quadrado da soma dos quadrimomenta iniciais,  $t$  é o quadrado da diferença entre os quadrimomenta iniciais e finais das partículas mais semelhantes, e  $u$  é o quadrado da diferença entre os momenta iniciais e finais dos outros 2 estados. Estamos interessados em duas reações diferentes, a detecção de um neutrino e de um antineutrino. Ambos os processos são representados na Fig 3.1.

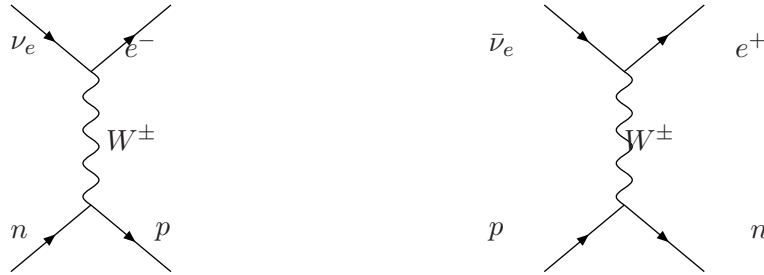


Figura 3.1: Representação em primeira ordem em diagramas de Feynman para a reação de detecção via corrente carregada, a qual se dá através da troca de um bóson vetorial  $W^\pm$ , para um neutrino (esquerda), e para um antineutrino (direita). Cada uma destas reações necessita de descrição cinemática própria, então vamos sempre identificá-las.

No apêndice (A) mostramos em detalhe a cinemática da seção de choque quasi-elástica.

## 3.2 Dinâmica da seção de choque

A amplitude de probabilidade  $\mathcal{M}$  para a reação do decaimento beta inverso, para um neutrino incidente, pode ser escrita como,

$$\mathcal{M}(\nu) = \bar{u}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e} \cdot \bar{u}_p \left( f_1 \gamma_\alpha + g_1 \gamma_\alpha \gamma_5 + i f_2 \sigma_{\alpha b} \frac{q^b}{2M} + g_2 \frac{q_\alpha}{M} \gamma_5 \right) u_n, \quad (3.2)$$

e para um anti-neutrino incidente,

$$\mathcal{M}(\bar{\nu}) = \bar{v}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) v_{\nu_e} \cdot \bar{u}_n \left( f_1 \gamma_\alpha + g_1 \gamma_\alpha \gamma_5 + i f_2 \sigma_{\alpha b} \frac{q^b}{2M} + g_2 \frac{q_\alpha}{M} \gamma_5 \right) u_p, \quad (3.3)$$

tal como feito em [27]. Aqui  $m_n, m_p$  são, respectivamente, a massa do nêutron e do próton, e  $q$  é a diferença entre o quadrimomento do neutrino e do lépton carregado produzido.

### 3.2.1 Fatores de forma nucleares

Uma vez que prótons e nêutrons não são partículas elementares, precisamos descrevê-los através de seu conteúdo de quarks e glúons. Como ainda hoje não existe uma descrição exata das interações fortes, uma vez que esta possui caráter não perturbativo, o que podemos fazer é parametrizar nossa ignorância sobre a estrutura dos hádrons em termos de quarks e glúons através de funções de estrutura,  $f_i, g_i$ . As funções  $f_1, f_2$  são os fatores de forma dipolares vetoriais (respeitam a simetria de paridade), ambas funções do 4-momentum transferido, ou seja, da variável  $t \equiv q^2$ , e podem ser então determinados experimentalmente, através de medidas da seção de choque elétron-próton,  $\frac{d\sigma_{ep}(\theta, q^2)}{d\Omega}$ , comparadas com as previsões teóricas para esta seção de choque obtida assumindo-se os núcleos como pontuais,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{pontual} |f_i(q)|^2. \quad (3.4)$$

Explicitamente estas funções podem ser expressas por [36],

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\{1 - (1 + \xi)t/4M^2, \xi\}}{(1 - t/4M^2)(1 - t/M_V)^2}. \quad (3.5)$$

onde  $g_1(0) = -1, 27$ ,  $M_V^2 = 0, 71 GeV^2$ ,  $M_A^2 \approx 1 GeV^2$  e  $\xi = \kappa_p - \kappa_n = 3, 706$  é a diferença entre os momentos magnéticos anômalos do próton e do nêutron em unidades do magneton nuclear.  $g_1$  e  $g_2$  são fatores de forma dipolares axiais,

$$g_1 = \frac{g_1(0)}{(1 - t/M_A)^2}, \quad (3.6)$$

$$g_2 = \frac{2M^2 g_1}{m_\pi^2 - t}. \quad (3.7)$$

Supomos que  $Im\{f_i\} = Im\{g_i\} = 0$ .

### 3.2.2 Forma da amplitude de probabilidade para $\bar{\nu}$

Podemos escrever a amplitude de probabilidade para o espalhamento elástico em função destes fatores de forma como sendo

$$\begin{aligned}
\Sigma_s |\mathcal{M}(\bar{\nu})|^2 &= +(s-u)^2 \times 2 \left\{ 4(|g_1|^2 + |f_1|^2) - t \frac{|f_2|^2}{M^2} \right\} \\
&- (s-u) \times 2 \left\{ 16g_1(f_1 + f_2) + 4m_e^2 \left[ -|f_2|^2 - (f_1 f_2 + g_1 g_2) \right] \right\} \\
&+ (t - m_e^2) \times 2 \left[ 4|f_1|^2(4M^2 + t + m_e^2) + [4|g_1|^2(-4M^2 + t + m_e^2)] \right. \\
&+ |f_2|^2(t^2/M^2 + 4t + 4m_e^2) + 4m_e^2|g_2|^2/M^2 + 8f_1 f_2(2t + m_e^2) + 16m_e^2 g_1 g_2 \left. \right] \\
&+ -\Delta^2 \times 2 \left[ (4|f_1|^2 + t|f_2|^2/M^2)(4M^2 + t - m_e^2) + 4|g_1|^2(4M^2 - t + m_e^2) \right. \\
&+ \left. 4m_e^2|g_2|^2(t - m_e^2)/M^2 + 8f_1 f_2(2t - m_e^2) + 16m_e^2 g_1 g_2 \right] - 2 \times 32m_e^2 M \Delta g_1 (f_1 + f_2) .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

O cálculo detalhado desta expressão é mostrado no Apêndice A. Esta é a Eq. (5) da Ref [27] multiplicada por  $2^4$ . Este fator vem dos estados da estrutura de polarização das partículas envolvidas. Estamos trabalhando na aproximação em que o nêutron e o próton se comportam como partículas fundamentais, muito embora não sejam, e usando as funções de estrutura nuclear,  $(f_i, g_i)$ , para descrever a parte dos constituintes dos nucleons, e sendo assim, vamos supor auto-estados do operador helicidade  $H^*$  para o nêutron e para o próton. Fazendo a média sobre os estados iniciais temos um fator  $\frac{1}{2}$  associado a cada partícula envolvida.

Quando fazemos o limite em que a massa do nêutron é igual à do próton,  $\Delta = 0$ , obtemos a Eq. (3.22) da Ref. [36]. A amplitude de espalhamento para um neutrino pode ser obtida através da Eq. (3.8) fazendo  $p_\nu \leftrightarrow p_e$ ,  $m_n \leftrightarrow m_p$  e  $(s-u) \rightarrow -(s-u)$ . Para neutrinos de outros sabores,  $\nu_\mu, \nu_\tau$ , a amplitude é obtida substituindo  $m_e \rightarrow m_\mu$ , e  $m_e \rightarrow m_\tau$ , respectivamente.

### 3.3 Gráficos da seção de choque quasi-elástica

Neste ponto mostramos nossos resultados para a seção de choque obtidos através da substituição da Eq. (A.31) na Eq. (3.8) e integrando numericamente. Para tal utilizamos métodos de Monte Carlo, especificamente a sub-rotina de integração VEGAS [37]. Na Fig. (3.3) são mostradas as seções de choque que obtivemos, tanto para um neutrino como para um anti-neutrino incidente,

---

\*  $H = p.S = \frac{1}{2} p_i \text{diag}(\sigma_i, \sigma_i)$

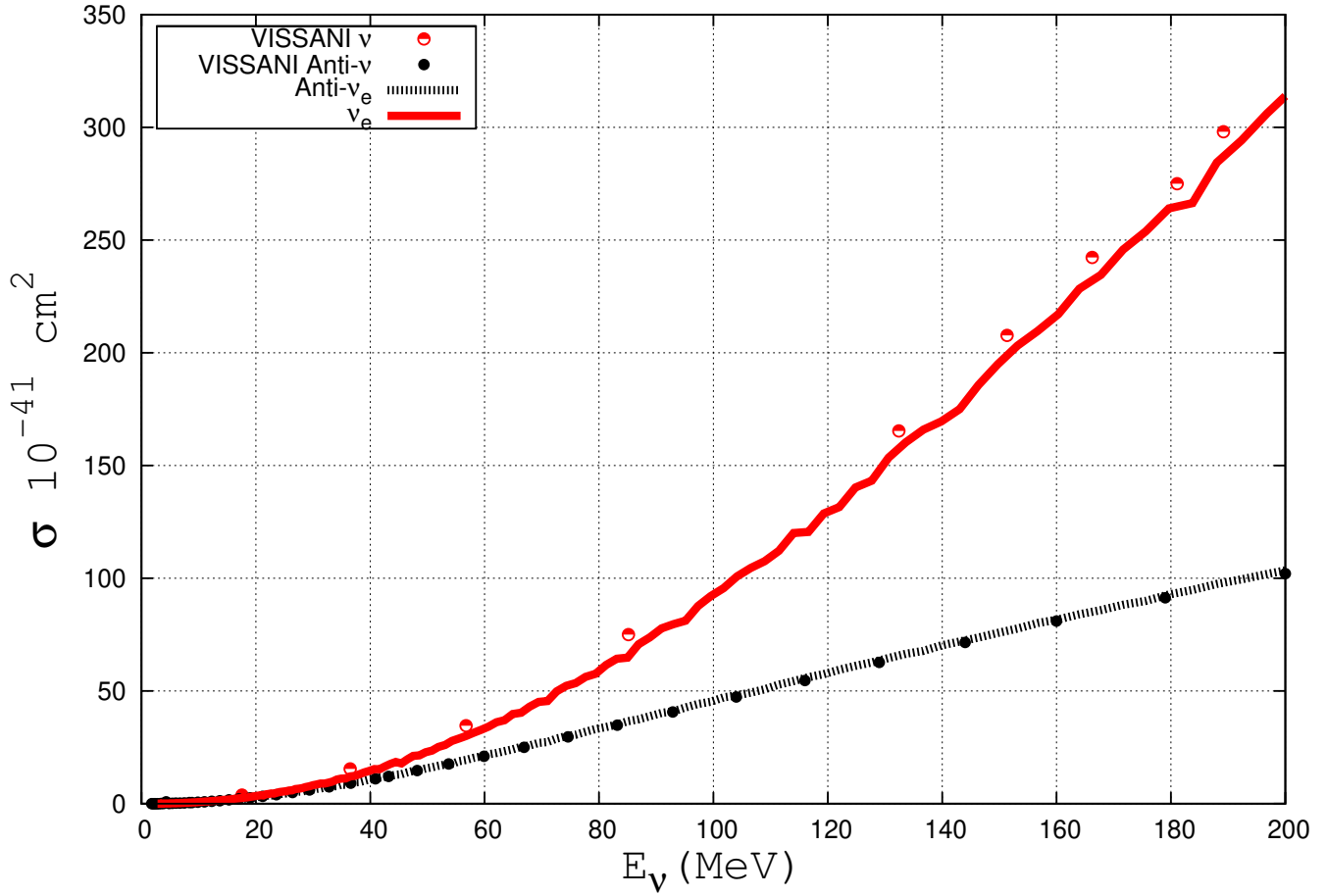


Figura 3.2: Na linha (tracejada)cheia mostramos nossos resultados para a seção de choque para um (anti)neutrino eletrônico incidente em função da energia ( $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ )  $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$ . Os pontos referem-se aos resultados mostrados na Ref[27]. Podemos observar que na região de baixa energia aqui mostrada, a seção de choque é aproximadamente linear com a energia do (anti)neutrino incidente.

em função da energia do (anti)neutrino incidente, para o intervalo de energia entre 0 e 200 GeV. As pequenas flutuações são devidas ao compromisso entre precisão e velocidade de processamento que adotamos. Além disso, neste gráfico incluímos correções radiativas [27]

$$d\sigma(E_\nu, E_e) \rightarrow d\sigma(E_\nu, E_e) \left[ 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left( 6,00 + \frac{3}{2} \log \frac{m_p}{2E_e} + 1, 2 \left( \frac{m_e}{E_e} \right)^{1,5} \right) \right], \quad (3.9)$$

onde  $\alpha$  é a constante de estrutura fina.

### 3.4 Correções nucleares

Até agora falamos de interação neutrino-nucleon, porém na prática os detectores são formados por átomos mais pesados que hidrogênio, na maioria dos casos água ou ligas à base de ferro ( $^{56}Fe$ ). Seria inocência pensar que a seção de choque de um neutrino com um núcleo atômico com  $N$  nêutrons e  $Z$  prótons fosse igual à seção de choque neutrino-nucleon corrigida apenas pelo fator de normalização  $\frac{N}{A}$ , onde  $A = N + Z$  é o número de massa, e  $Z$  é o número atômico. A implementação de correções nucleares pode ser um processo tão sofisticado quanto quisermos, mas no fundo sempre será uma aproximação dependente do modelo nuclear escolhido. No caso de espalhamento quasi-elástico, o núcleo atômico é descrito como se fosse uma coleção de nucleons *quase-livres*, de tal forma que podemos ignorar efeitos de muitos corpos, termos fora da camada de massa, etc [36]. Nesse caso os efeitos nucleares mais importantes são o do nucleon alvo dentro do núcleo atômico, o **movimento de Fermi**, o **Princípio de exclusão de Pauli**, e **re-espalhamento e reabsorção dos hádrons envolvidos**. No espalhamento quasi-elástico ocorre a produção de estados finais tais como  $\nu N \rightarrow \mu N \pi$ , o que dificulta em muito a interpretação dos experimentos, uma vez que as massas do múon e do pión têm a mesma ordem de grandeza. Segundo [36], o movimento de Fermi tem como consequência o alargamento do pico da seção de choque elástica. Para maiores detalhes veja [31, 32, 42].

Inicialmente então nos preocuparemos em implementar os efeitos devidos ao princípio de Pauli, uma vez que este é comumente tido na literatura como o efeito nuclear mais importante [36], [41].

Ao se modelar o núcleo atômico por um gás de Fermi relativístico [38], vemos que espalhamento elástico é permitido apenas se o momentum de recuo do nucleon estiver fora da esfera de Fermi formada pelos nucleons do nucleon inicial. Segundo [33] podemos levar em conta esse efeito escrevendo a seção de choque por nêutron como sendo a seção de choque para o nêutron livre multiplicada por um fator de correção

$$1 - N^{-1}D, \quad (3.10)$$

onde  $N$  é o número de nêutrons, e  $D$  é dado por

$$\begin{aligned} D &= Z && (2x < u - v); \\ &= \frac{1}{2}A \left\{ 1 - \frac{3x}{4}(u^2 + v^2) + \frac{x^3}{3} - \frac{3}{32x}(u^2 - v^2) \right\} && (u - v < x < u + v); \\ &= 0 && (x > u + v); \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde

$$x = \frac{|q|}{2k_f}, \quad u = \left(\frac{2N}{A}\right)^{1/3}, \quad v = \left(\frac{2Z}{A}\right)^{1/3}, \quad (3.12)$$

$k_f$  é o momentum de Fermi e  $|q| = \sqrt{(q^2 + m_l^2)/4M^2 - q^2}$ ,  $m_l$  é a massa do lépton carregado produzido e  $M$  é a massa do nucleon. Para o caso de antineutrinos incidindo sobre prótons, basta fazer  $N \leftrightarrow Z$ .

Lembramos que o limiar de produção de múons é obtido através da substituição  $m_e \rightarrow m_\mu$  na Eq. (A.12),

$$E_\mu^{min} = 113,03\text{MeV}. \quad (3.13)$$

Acima deste valor de energia para o neutrino incidente devemos levar em conta as diferenças de massas devidas à massa do elétron e do múon. Como esperado, a única diferença na seção de choque destes dois léptons é devido a sua massa, e sendo assim, para energias ainda maiores, a contribuição da energia de repouso do lépton produzido tende a se tornar desprezível em comparação com sua energia cinética, de tal forma que ambas as curvas de seção de choque para produção de elétrons e múons coincidem, tal qual mostrado na Fig. (3.3).

## 3.5 Espalhamento profundamente inelástico

O espalhamento quasi-elástico é o processo dominante para a detecção de neutrinos a baixas energias. Contudo, se a energia do neutrino for superior ao limiar de produção dos dos hádrons do estado final, o núcleon alvo pode ser fragmentado, produzindo uma grande quantidade de hádrons no estado final. A este processo é dado o nome de *espalhamento profundamente inelástico*, o qual é descrito para correntes neutras (N.C.) e carregadas (C.C.) respectivamente por

$$\nu_l(\bar{\nu}_l)(K_1) + N(p_1) \rightarrow \nu_l(\bar{\nu}_l)(k_2) + H(p_2) \quad N.C. \quad (3.14)$$

$$\nu_l(\bar{\nu}_l)(K_1) + N(p_1) \rightarrow l^-(l^+)(k_2) + H(p_2) \quad C.C. \quad (3.15)$$

onde  $N$  é um nucleon,  $l = \{e, \mu, \tau\}$  e  $H$  é o estado hadrônico final.

Mantendo as massas de todos os léptons carregados presentes na interação diferentes de zero, a seção de choque para o DIS é dada por [41]

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{G_F^2 M}{\pi} E_\nu \left\{ y \left( xy + \frac{m_l^2}{2E_\nu M} \right) F_1 + \left( 1 - y - \frac{Mxy}{2E_\nu} - \frac{m_l^2}{4E_\nu^2} \right) F_2 \right.$$

### NUCLEAR CORRECTIONS FOR $Fe_{56}$ (Fermi Motion)

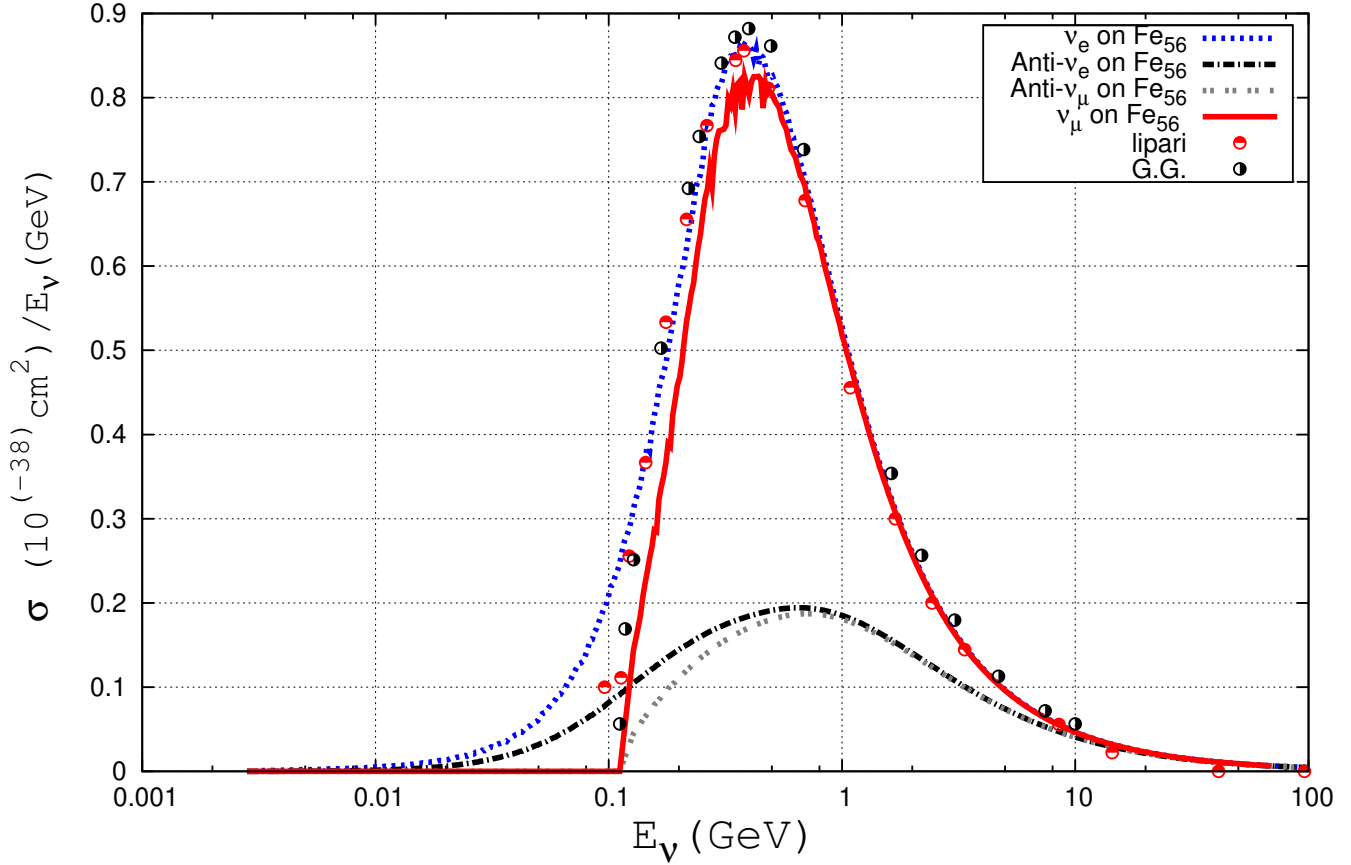


Figura 3.3: Linhas: Nossos resultados para o cálculo da seção de choque elástica dividida pela energia do neutrino para (anti)neutrino muônico dividida por sua energia levando em conta as correções devidas ao Princípio de Pauli para o caso do átomo de ferro,  $^{56}Fe$ . Para o caso de neutrinos muônicos, estes resultados são comparados com os obtidos nas referências [39] e [40], indicados por *lipari* e *G.G.*. Como (anti)neutrinos vão interagir somente com (prótons)nêutrons do núcleo de ferro, e sendo assim, o fator  $(\frac{Z}{Z+N})\frac{N}{Z+N}$  é necessário para normalizar a seção de choque para cada nucleon.

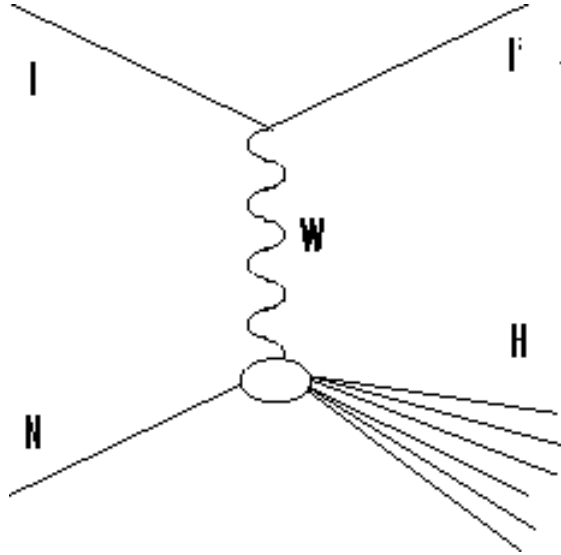


Figura 3.4: Representação em nível de árvore do espalhamento profundamente inelástico. Para o processo que estamos interessados  $l$  representa um (anti)neutrino interagindo com um nucleon qualquer  $N$  dando origem a um (pósitron)elétron representado por  $l'$  mais um uma gama de partículas hadrônicas representadas por  $H$ .

$$\pm \left( xy \left( 1 - \frac{y}{2} \right) - y \frac{m_l^2}{4ME_\nu} \right) F_3 + \left( xy \frac{m_l^2}{2ME_\nu} + \frac{m_l^4}{4M^2 E_\nu^2} \right) F_4 - \frac{m_l^2}{2ME_\nu} F_5 \Bigg\} \quad (3.16)$$

Onde  $x$  é a variável de Bjorken e  $y$  informa qual fração da energia do neutrino incidente é levada pelo lépton carregado produzido no estado final. Ambas são adimensionais e definidas usualmente por

$$y = \frac{E_\nu - E_{lep}}{E_\nu} ; \quad x = \frac{Q^2}{2M(E_\nu - E_{lep})}, \quad (3.17)$$

então, podemos escrever a energia do estado hadrônico produzido como

$$E_{lep} = E_\nu(1 - y) ; \quad \text{onde} \quad xy = \frac{Q^2}{2ME_\nu}. \quad (3.18)$$

A seguir mostramos detalhes da cinemática envolvida.

### 3.6 Cinemática do DIS para $\nu_l + N \rightarrow l + H$

A separação do cálculo da seção de choque do neutrino nos processos elástico, inelástico e troca de píons não se dá por acaso. Enquanto no espalhamento elástico o estado hadrônico final é



perfeitamente conhecido, no sentido de que, embora não possamos determinar experimentalmente sua energia e momento, sabemos que o espalhamento elástico de um (anti) neutrino por um (proton)nêutron só pode ter como produto um (anti)elétron e um (nêutron) próton. Nesse caso a massa do estado hadrônico final é perfeitamente conhecida. Por outro lado, quando a energia do neutrino incidente é suficientemente grande ocorre a fragmentação do alvo, gerando um espectro contínuo de hádrons no estado final. Esta situação difere muito do caso elástico, pois não há maneira de se determinar *a priori* qual a massa deste novo estado hadrônico.

Por outro lado, ao fazer os cálculos percebemos facilmente a grande dependência da seção de choque com relação ao espaço de fase permitido para a reação. Ocorre que o espaço de fase depende exclusivamente da cinemática do processo e, por consequência, das massas das partículas envolvidas. Para um maior detalhamento destes cálculos veja o apêndice C. A seguir mostraremos como obtivemos os limites no ângulo de emissão do lépton carregado produzido e de sua energia, a qual passa a ser escrita em função do ângulo de espalhamento,  $\theta^*$ , e da massa do estado final  $W$ . Uma forma interessante de obtermos estes limites cinemáticos é através da analogia com o espaço de fase do decaimento em três corpos, tal como feito na referência [46].

Estamos interessados na cinemática da reação

$$\nu_l + N \rightarrow l + H \quad (3.19)$$

onde um neutrino interage com um núcleon dando origem a um lépton carregado e um novo estado hadrônico, com quadri-momenta respectivamente dados por  $p_\nu$ ,  $p_l$ ,  $p_N$ , e  $p_H$ , e energias  $E_\nu$ ,  $E_l$ ,  $E_N$ , e  $E_H$ . Podemos então definir produtos entre os quadri-momenta, que são invariantes pela transformada de Lorentz. Normalmente são usadas as variáveis de Mandelstam [28], as quais são definidas por

$$s = (p_\nu + p_N)^2 = (p_e + p_H)^2; \quad t = (p_\nu - p_e)^2 = (p_N - p_H)^2; \quad u = (p_\nu - p_N)^2 = (p_e - p_H)^2 \quad (3.20)$$

Dada a variável  $t$  de Mandelstam para o processo, Eq. (C.3),

$$\begin{aligned} t &= (p_\nu - p_l)^2 = (p_N - p_H)^2 \\ &= (p_\nu - p_l)^2 = m_l^2 - 2E_\nu(E_l - p_l \cos \theta_{\nu l}) = m_N^2 + m_H^2 - 2m_N E_{HLAB}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

e lembrando que em  $S_{LAB}$  a energia do estado hadrônico final pode ser escrita como

$$E_H = E_\nu + m_N - E_l, \quad (3.22)$$

podemos obter uma relação para o ângulo de emissão do lépton carregado no sistema do laboratório,  $\cos(\theta_{\nu e})$  com relação ao ângulo zenital de chegada do neutrino ao detector dada por

$$\begin{aligned}
\cos\theta_{\nu e} &= \frac{m_p^2 + m_H^2 - m_l^2 + 2(E_\nu E_l - m_N E_H)}{2p_\nu p_l} \\
&= \frac{2[(E_\nu + m_N)E_l - m_N E_\nu] - m_N^2 + m_H^2 - m_l^2}{2p_\nu p_l} \\
&= \frac{2[(E_\nu + m_N)E_l] - s + m_H^2 - m_l^2}{2p_\nu p_l} \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Este resultado é importante porque, como discutiremos em detalhe no Cap. 5, nesta tese estamos interessados na distribuição angular dos léptons carregados produzidos em SK pelos neutrinos atmosféricos. Nesse sentido, os eventos em SK são divididos em intervalos segundo o ângulo zenital dos léptons carregados produzidos. Uma vez sabendo os limites inicial e final para o cosseno do ângulo zenital dos léptons carregados produzidos,  $\cos\theta_l$ , podemos através do ângulo de espalhamento que acabamos de calcular,  $\cos\theta_{\nu e}$ . Apenas dessa forma é possível determinar limites sobre qual energia o lépton carregado produzido no detector precisa ter para estar contido no bin zenital em questão, se ele foi produzido por um neutrino que incide no detector com determinada energia  $E_\nu$ , e ângulos zenital e azimutal  $(\theta_\nu, \phi_\nu)$ . Para isso agora calculamos o momento do lépton produzido no detector em função de  $\cos\theta_{\nu e}$ .

Escrevemos então a energia do neutrino no sistema do laboratório,  $E_{\nu LAB}$ , em função de  $s$  como

$$E_{\nu LAB} = \frac{s - m_N^2}{2m_N}, \tag{3.24}$$

Por outro lado no sistema de centro de momento, a energia do lépton carregado emitido,  $E_l^*$ , pode ser escrita em função de  $s$  como

$$E_l^* = \frac{s + m_N^2 - W^2}{2m_N}, \tag{3.25}$$

Podemos então encontrar da Eq. (3.23)  $p_l$  como sendo

$$\begin{aligned}
\cos\theta_e &= \frac{E_l(E_\nu + m_N) - \sqrt{s}E_l^*}{p_\nu p_l}; & E_l &= (E_l^2 + m_l^2)^{1/2} \\
(p_l^2 + m_l^2)^{1/2} &= \frac{\cos\theta_l p_\nu p_l + \sqrt{s}E_l^*}{E_\nu + m_N} \\
p_l^2 + m_l^2 &= \frac{\cos^2\theta_l p_\nu^2 p_l^2 + sE_l^2 + 2\sqrt{s}E_l^* p_\nu p_l \cos\theta_l}{E_\nu^2 + m_N^2 + 2m_N E_\nu}, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

expandindo e agrupando em função de  $p_l$  temos

$$\begin{aligned} m_l^2(E_\nu^2 + m_N^2 + 2m_N E_\nu) - sE_l^{*2} &= p_l^2(p_\nu^2 \cos^2 \theta_l - (E_\nu^2 + m_N^2 + 2m_N E_\nu)) + 2\sqrt{s}E_l^* p_\nu p_l \cos \theta_l p_l \\ m_l^2(\dots) - sE_l^{*2} &= p_l^2(p_\nu^2 \cos^2 \theta_l - (\dots)) + 2\sqrt{s}E_l^* p_\nu p_l \cos \theta_l p_l. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Resolvendo a equação de segunda ordem, e escrevendo  $(\dots) = (E_\nu + m_N)^2$ ,

$$\begin{aligned} p_l &= \frac{-2\sqrt{s}E_l^* p_\nu \cos \theta_l \pm \sqrt{4sE_l^{*2} p_\nu^2 \cos^2 \theta_c - 4(p_\nu^2 \cos^2 \theta_l - (\dots))(-m_l^2(\dots) + sE_l^{*2})}}{2(p_\nu^2 \cos^2 \theta_l - (\dots))} \\ &= \frac{\sqrt{s}E_l^* p_\nu \cos \theta_l \mp \sqrt{sE_l^{*2} p_\nu^2 \cos^2 \theta_c - (p_\nu^2 \cos^2 \theta_l - (\dots))(-m_l^2(\dots) + sE_l^{*2})}}{-p_\nu^2 \cos^2 \theta_l + (\dots)} \\ &= \frac{\sqrt{s}E_l^* p_\nu \cos \theta_l \mp (E_\nu + m_p) \sqrt{m_l^2 p_\nu^2 \cos^2 \theta_l - sE_l^{*2} - (E_\nu + m_p)^2 m_l^2}}{(E_\nu + m_N)^2 - p_\nu^2 \cos^2 \theta_l}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Nesse processo o radicando foi simplificado da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dots &= sE_l^{*2} p_\nu^2 \cos^2 \theta_l - (m_l^2 (E_\nu + m_N)^2 p_\nu^2 \cos^2 \theta_l + sE_l^{*2} p_\nu^2 \cos^2 \theta_l) \\ &+ ((E_\nu + m_N)^2)^2 m_l^2 - (E_\nu + m_N)^2 sE_l^{*2} \\ &= (E_\nu + m_N)^2 (m_l^2 p_\nu^2 \cos^2 \theta_l - m_l^2 (E_\nu + m_N)^2 - sE_l^{*2}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde o termo contido no segundo parênteses fica

$$\begin{aligned} (\dots) &= m_l^2 p_\nu^2 \cos^2 \theta_l - E_\nu^2 m_l^2 + 2m_N E_\nu m_l^2 - m_N^2 m_l^2 - sE_l^{*2} \\ &= -m_l^2 p_\nu^2 \sin^2 \theta_l + m_l^2 (p_\nu^2 - E_\nu^2 + 2m_N E_\nu + m_N^2) - sE_l^{*2} \\ &= s p_l^{*2} - m_l^2 p_\nu^2 \sin^2 \theta_l, \end{aligned} \quad (3.30)$$

e identificamos  $s = (p_\nu^2 - E_\nu^2 + 2m_N E_\nu + m_N^2)$ . Agora precisamos eliminar uma das duas soluções da Eq. (3.28). Para tal faremos considerações físicas a respeito dos quadri-vetores. Sabemos que  $p_l$  deve ser real, e sendo assim o termo  $\sqrt{\dots}$  implica em restrições sobre  $\theta_l$

$$\sin \theta_l \leq \frac{\sqrt{s} p_l^*}{m_l p_\nu}. \quad (3.31)$$

Ou seja, caso se cumpra a condição

$$\sqrt{s} p_l^* \geq m_l p_\nu, \quad (3.32)$$

não temos restrição sobre  $\theta_l$ . Substituindo agora

$$p_l^* = \frac{m_l v_l^*}{\sqrt{1 - v_l^{*2}}}; \quad p_\nu = \frac{m_\nu v_\nu}{\sqrt{1 - v_\nu^2}}, \quad (3.33)$$

na Eq. (3.32) encontramos simplesmente que para o intervalo angular ser máximo,  $0 \leq \theta_l \leq \pi$  a seguinte condição deve ser verificada

$$v_l^* \geq v_\nu . \quad (3.34)$$

Uma vez estabelecido na Eq. (3.28) que  $\dots > 0$  e fazendo  $\theta_l = 0$ , vemos que o numerador desta equação se reduz simplesmente a  $\sqrt{s}(E_l^* p_\nu \pm E_\nu p_l^*)$ . Para que o numerador da Eq. (3.28) seja negativo a condição  $E_l^* p_\nu < E_\nu p_l^*$  deve ser verificada. Substituindo  $v_l^* = \frac{p_l^*}{E_l^*}$ , e  $v_\nu = \frac{p_\nu}{E_\nu}$  nesta inequação, encontramos  $v_l^* \geq v_\nu$ . Como partimos dessa hipótese, a solução com sinal negativo deve ser excluída pois, mesmo no caso onde  $\cos\theta_l = 1, 0$  o numerador da Eq. (3.28) se torna negativo caso esta condição sobre as velocidades se cumpra.

Por outro lado, se  $v_l^* < v_\nu$ , temos uma condição limite para  $\theta_l$

$$\text{sen}^2\theta_l \leq \frac{sp_l^{*2}}{m_l^2 p_\nu^2} . \quad (3.35)$$

Reescrevendo esta condição em termos das velocidades obtemos

$$\text{sen}^2\theta_l \leq \frac{v_l^{*2} - v_l^* v_\nu}{v_\nu^2 - v_l^* v_\nu} \leq 1 , \quad (3.36)$$

pois agora assumimos  $v_l^* < v_\nu$ . Esta condição pode ser reescrita como

$$\text{sen}\theta_l \leq \frac{\sqrt{sp_l^*}}{m_l p_\nu} \leq 1 . \quad (3.37)$$

Como assumimos  $v_l^* < v_\nu$ , a condição para o numerador da Eq. (3.28) ser maior do que zero pode ser expressa por

$$\sqrt{s}E_l^* \frac{v_\nu}{1 - v_\nu^2} \cos\theta_l \geq \pm m_l E_\nu \sqrt{\frac{v_l^{*2}}{1 - v_l^{*2}} - \frac{v_\nu^2}{1 - v_\nu^2}} \text{sen}^2\theta_l \quad (3.38)$$

Dessa forma, resolvendo a Eq. (3.23) para  $p_l$  obtemos o momento do lépton carregado produzido em função da energia do neutrino incidente e do ângulo de espalhamento.

$$\begin{aligned} p_l &= \frac{2[(E_\nu + m_N)E_l] - s + W^2 - m_l^2}{2p_\nu \cos\theta_{\nu e}} \\ &= \frac{(E_\nu + m_N)E_l + \sqrt{s}E_l^*}{p_\nu \cos\theta_{\nu e}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Esta informação nos permitirá encontrar a distribuição zenital de eventos em SK.

### 3.7 Funções de estrutura nuclear

Devido ao caráter não perturbativo da interação forte, a descrição do alvo nuclear em termos de seus constituintes fundamentais, quarks e glúons, é um processo ainda não perfeitamente entendido. O que faremos será usar o que de melhor existe na literatura, mas lembramos aqui que ainda são um tema em aberto. Trata-se de parametrizações das densidades de cada tipo de párton através de experimentos. Em vez de citar aqui todos eles, por razões práticas, vamos citar apenas as referências que usamos, [43] e o PDG [16].

Podemos dizer que as funções  $F_i$  da Eq. (3.16) são funções das densidades de pártons (quarks e glúons) contidas no interior do nucleon alvo. Seguindo a referência [41], escrevemos estas funções em *leading order (LO)* e com duas gerações apenas (quatro quarks) como

$$\begin{aligned}
 2xF_1 &= F_2 \\
 F_4 &= 0 \\
 xF_5 &= F_2 \\
 F_2(\nu p) &= 2x[d + s + \bar{u} + \bar{c}] \\
 F_2(\bar{\nu} p) &= 2x[u + c + \bar{d} + \bar{s}] \\
 F_2(\nu n) &= 2x[u + s + \bar{d} + \bar{c}] \\
 F_2(\bar{\nu} n) &= 2x[d + c + \bar{u} + \bar{s}] \\
 xF_3(\nu p) &= 2x[d + s - \bar{u} - \bar{c}] \\
 xF_3(\bar{\nu} p) &= 2x[u + c - \bar{d} - \bar{s}] \\
 xF_3(\nu n) &= 2x[u + s - \bar{d} - \bar{c}] \\
 xF_3(\bar{\nu} n) &= 2x[d + c - \bar{u} - \bar{s}]
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

Onde as densidades de pártons,  $u, d, c, s$  foram obtidas usando a parametrização [43]. Na Figura (3.7) mostramos estas densidades tal qual obtivemos da parametrização, em função da variável de Bjorken,  $x$ , para o caso de  $-t = Q^2 = 10 \text{ GeV}$ . Estas densidades também dependem fortemente de  $Q^2$ , contudo diferentes grupos de pesquisa obtêm resultados ligeiramente diferentes para esta evolução. Estas variações podem, sim, afetar, ainda que fracamente, os nossos resultados.

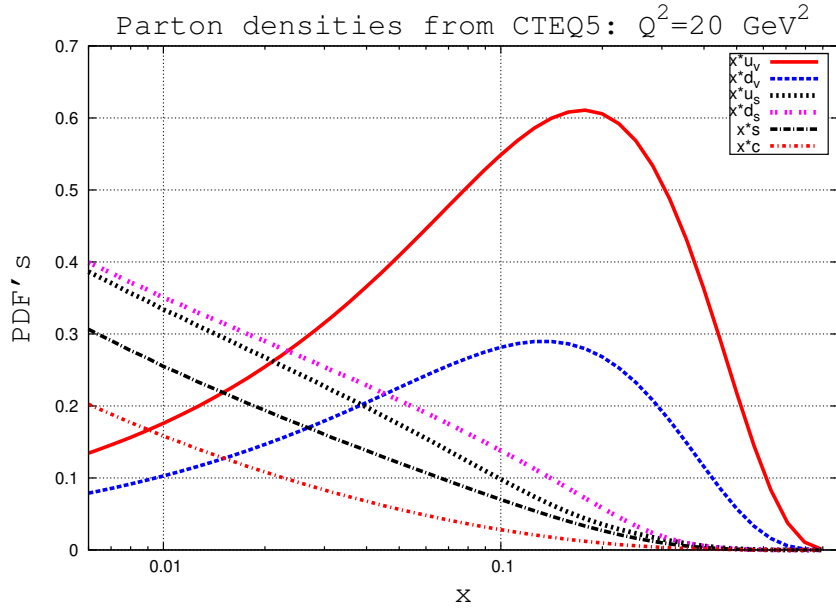


Figura 3.5: Densidades de pártons que obtivemos utilizando a parametrização [43] multiplicadas pela variável de Bjorken  $x$  a fim de reproduzir os resultados publicados no Particle Data Book [16]. Os sub-índices  $v$ ,  $s$  distinguem a contribuição dos quarks  $u$  e  $d$  de valência e de mar respectivamente.

Efetuamos nossos cálculos também com a parametrização GRV [16]. Não encontramos mudanças significativas na seção de choque usando esta parametrização da seção de choque obtida usando a parametrização CTEQ5 [43]. Na Fig. (3.7) reproduzimos os resultados contidos em [16] para as densidades partônicas.

Neste ponto vale lembrar a região cinemática que estamos interessados. Como discutido extensivamente em [45], os fluxos de neutrinos atmosféricos decaem exponencialmente com a energia, se estendendo pelo intervalo de 100 MeV até algumas dezenas de GeV, e nessa região cinemática as densidades partônicas são bem comportadas.

### 3.8 Produção de Píons

Como vimos no capítulo anterior, a reação de detecção dos neutrinos atmosféricos pode ter seu estado final modificado caso o neutrino incidente apresente energia suficientemente alta, gerando novos estados hadrônicos além do alvo inicial. No cálculo da seção de choque DIS fizemos um corte na massa invariante do estado final,  $W^2 \geq 1,4 \text{ GeV}^2$ . Este valor vem da massa de repouso

da ressonância  $\Delta$ ,  $M_\Delta = 1,232$  GeV. Passamos agora a tratar de modo especial a região do espaço de fase que apresenta  $W^2 \leq 1,4$  GeV<sup>2</sup>. Nessa região a seção de choque de produção de píons é considerável quando comparada com a seção de choque total. Sendo a massa do pión  $m_\pi = 139,57$  MeV próxima a massa do múon,  $m_\mu = 105,65$  MeV, detectores de radiação Cerenkov tal qual Super-Kamiokande têm dificuldade de distinguir entre píons e múons. Desconsiderar este fato poderia alterar consideravelmente o número de eventos esperados em SK nesta região cinemática. A própria colaboração apresenta seus resultados divididos sempre em dois grupos distintos: Eventos ditos *single-ring*, quando apenas um cone de radiação Cerenkov é visto no detector, e eventos *multi-ring*, quando dois ou mais cones foram identificados. Neste trabalho estamos interessados em eventos do tipo *single-ring*.

Um dos processos que precisamos levar em conta é a produção do estado hadrônico intermediário no qual estão presentes as ressonâncias bariônicas  $\Delta$  ( $uuu$ ,  $uud$ ,  $udd$ ,  $ddd$ ). A mais leve dessas ressonâncias apresenta massa de  $M_\Delta = 1,232$  GeV e decaimento no canal  $\Delta \rightarrow N + \pi$  ( $\approx 100\%$ ) enquanto a seguinte ressonância Delta apresenta  $M_{\Delta'} = 1,600$  GeV e decaimentos nos canais  $\Delta' \rightarrow N + \pi$  ( $10 - 25\%$ ) e  $\Delta' \rightarrow N + \pi + \pi$  ( $25 - 90\%$ ) [16]. A produção destas partículas pode se dar tanto via corrente carregada

$$\nu_l + N \rightarrow l + \Delta \rightarrow l + \pi + N', \quad (3.41)$$

como via corrente neutra

$$\nu_l + N \rightarrow \nu + \Delta \rightarrow \nu + \pi + N', \quad (3.42)$$

Existe ainda a possibilidade do neutrino incidente produzir múltiplos píons via corrente neutra,

$$\nu + N \rightarrow \nu + N' + m\pi; \quad m \geq 1, \quad (3.43)$$

e via corrente carregada

$$\nu + N \rightarrow l + N' + m\pi; \quad m \geq 1. \quad (3.44)$$

Agora que já especificamos as principais reações que produzem píons, chamamos a atenção para o fato de que um cálculo microscópico de todas as seções de choque deve levar em conta algumas suposições sobre o modelo hadrônico em questão. Não iremos neste trabalho nos aprofundar nesse tópico e discutir as vantagens e incertezas de cada um deles. Sendo assim seguiremos simplesmente o procedimento usado na literatura, que é basicamente usar o modelo que ajusta os dados vindos dos detectores de câmaras de bolhas[65]. Da análise destes dados é que resulta o limiar  $W^2 = 1,4$

GeV<sup>2</sup> para a produção de múltiplos píons enquanto abaixo desse valor predomina a produção da ressonância  $\Delta(1232)$ , uma vez que segundo [64] a massa invariante do estado hadrônico final para a produção de múltiplos píons se distribui principalmente acima deste valor.

Além disso a produção de múltiplos píons na região  $W^2 \geq 1,4 \text{ GeV}^2$  implica em correções no DIS, uma vez que estes píons poderiam ser contados como múons no detector SK. A forma de se fazer essa correção segue os mesmos critérios que a correção da seção de choque de produção da ressonância  $\Delta$  para  $W^2 \leq 1,4 \text{ GeV}^2$ , que é basicamente aplicar os cortes que ajustam os dados das câmaras de bolhas.

O cálculo preciso da seção de choque para a produção de píons em cada um destes canais é devido a Fogli e Nardulli [66]. Uma vez determinada a distribuição da massa invariante  $W^2$  para o estado final  $\pi + N$ , a distribuição em  $Q^2$  pode ser fenomenologicamente obtida, supondo o escalonamento de Bjorken [28] e usando as funções de estrutura  $F_2$  e  $F_3$ . Sendo assim, podemos escrever a seção de choque para produção de píons em termos das mesmas variáveis usadas para a definição da seção de choque DIS,

$$\frac{d^2\sigma_{\nu(\bar{\nu})+N \rightarrow l(\bar{l})+\pi+N'}}{dxdy} = \frac{G^2 M E_\nu}{\pi} \times \left\{ \left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) F_2(x) \pm y \left(1 - \frac{y}{2}\right) x F_3(x) \right\}. \quad (3.45)$$

Aqui a variável de Bjorken  $x$  é escrita como

$$x = \frac{Q^2}{2M(E_\nu - E_l) + M^2}, \quad (3.46)$$

e os fatores de forma nucleares  $F_2$  e  $F_3$  são determinados fenomenologicamente, através dos dados de Gargamelle [44].

### 3.9 Resultados para a seção de choque

Uma vez calculadas as seções de choque para espalhamento elástico, DIS e produção de píons, mostramos agora nossos resultados para a integração da seção de choque total para neutrinos e antineutrinos, eletrônicos e muônicos. Na Fig.(3.6) mostramos a seção de choque total para neutrinos eletrônicos, juntamente com a contribuição de cada um dos processos acima citados. Já na Fig. (3.7) mostramos nossos resultados para a seção de choque total para antineutrinos eletrônicos. Comparando estes dois gráficos acima citados podemos ver claramente a redução de aproximadamente 1/3 na seção de choque para anti-neutrinos eletrônicos em comparação com a seção de choque para neutrinos eletrônicos.



Mostramos na Fig. (3.8) nossos resultados para a seção de choque para neutrinos muônicos juntamente com as contribuições de cada processo, e na Fig. (3.9) mostramos a seção de choque para anti-neutrinos muônicos. De forma geral, podemos dizer que nossos resultados estão de acordo com o que encontramos na literatura para a seção de choque de neutrinos. Nosso objetivo até aqui foi reproduzir estas seções de choque da forma mais precisa possível, levando em conta as correções mais importantes existentes na literatura. Longe de querer esgotar o assunto, simplesmente buscamos obter um nível de precisão suficientemente alto para podermos investigar efeitos secundários ao mecanismo de oscilação padrão em neutrinos atmosféricos. Existem, é claro, fontes de incertezas implícitas em nossos resultados, as quais discutiremos brevemente a seguir.

Dentre as principais fontes de incertezas em nossos resultados está o desconhecimento sobre a estrutura nuclear dos alvos, parametrizada através dos fatores de forma  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $G_1$  e  $G_2$  envolvidos cada processo, bem como os termos de massa axial ( $M_A$ ) e vetorial ( $M_V$ ). Para o espalhamento elástico, uma fonte de incerteza está nas correções devidas à interação do lépton carregado produzido com o meio nuclear. Outra fonte é o desconhecimento do valor para a massa axial,  $M_A$ . O valor obtido por experimentos atuais, tal como os resultados preliminares da colaboração Minerva [30], difere significativamente dos resultados anteriores [67].

No caso DIS, usamos a função CTEQ5 [43] como padrão para as densidades de quarks no interior do nucleon, e dessa forma as incertezas e hipóteses presentes nesse modelo também estão presentes em nossos cálculos. Nesse ponto cabe a nós quantificarmos essas incertezas. Na Tabela 3.1, tal como feito em [67], relacionamos as diferentes seções de choque presentes na detecção de neutrinos atmosféricos com as incertezas associadas a cada uma delas, bem como o intervalo de energia no qual o processo em questão é relevante.

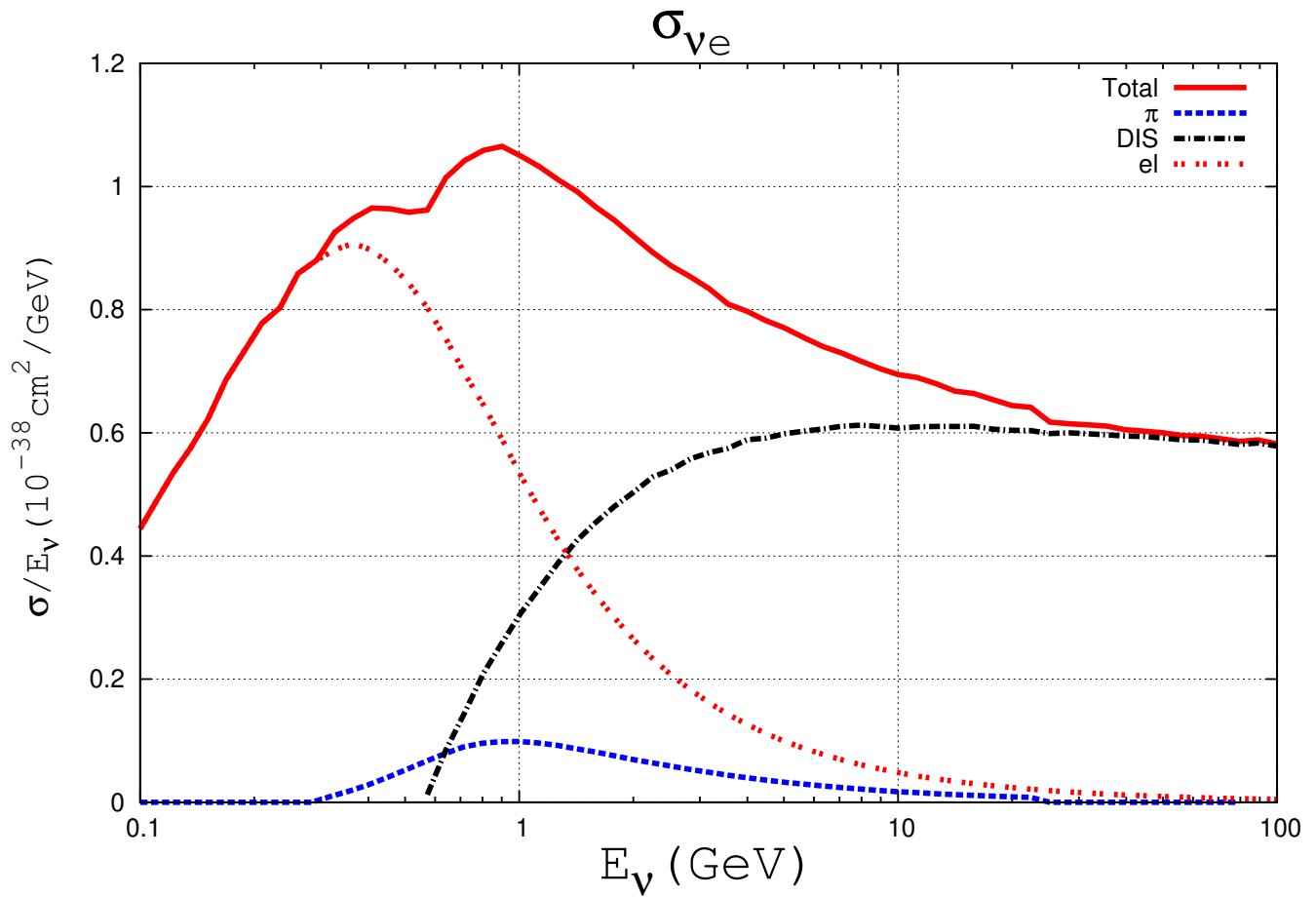


Figura 3.6: Seção de choque total para neutrinos eletrônicos dividida pela energia do neutrino incidente, juntamente com as contribuições individuais dos processos espalhamento elástico, DIS e produção de píons.

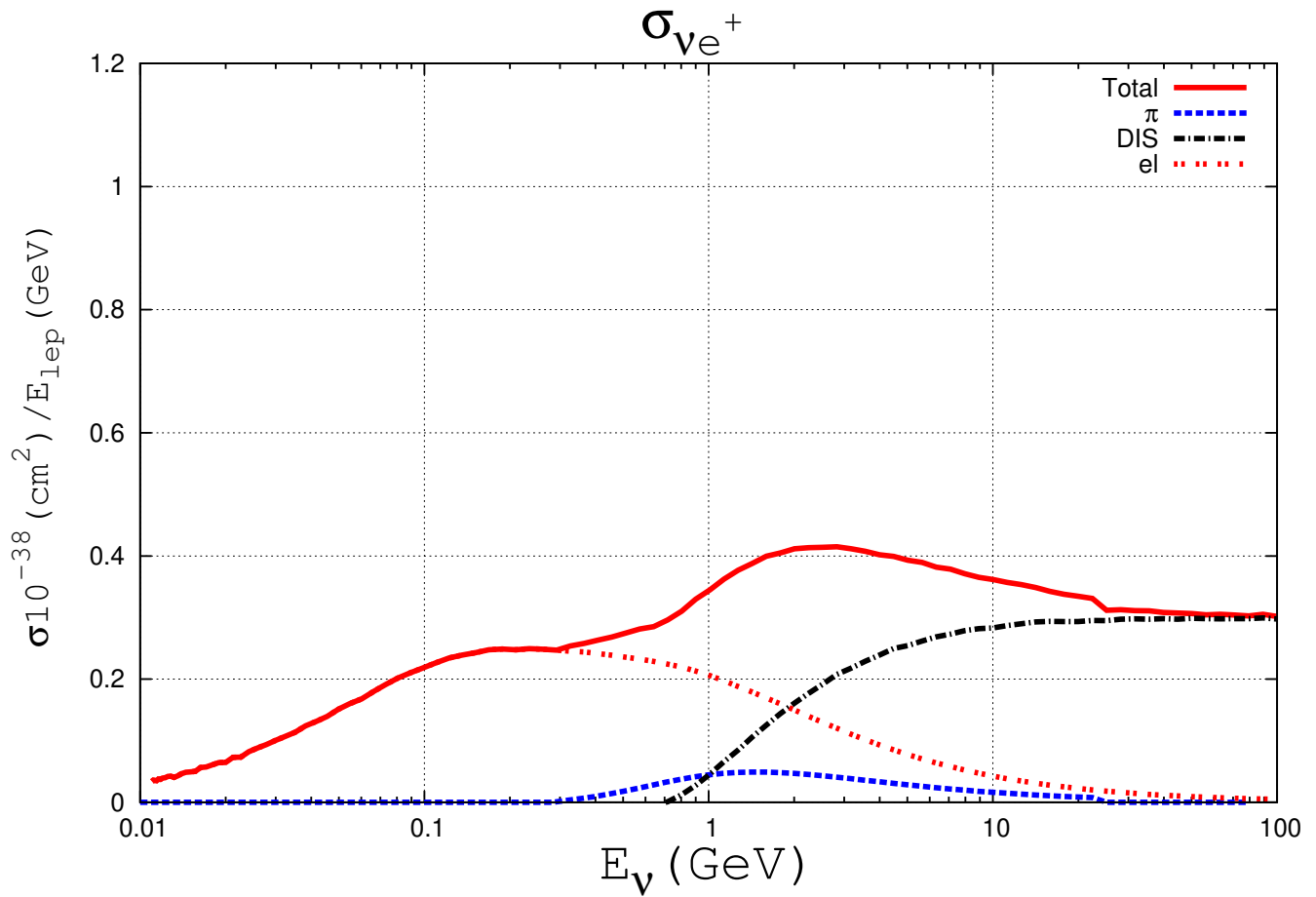


Figura 3.7: Seção de choque total para antineutrinos eletrônicos dividida pela energia do neutrino incidente, juntamente com as contribuições individuais dos processos espalhamento elástico, DIS e produção de píons.

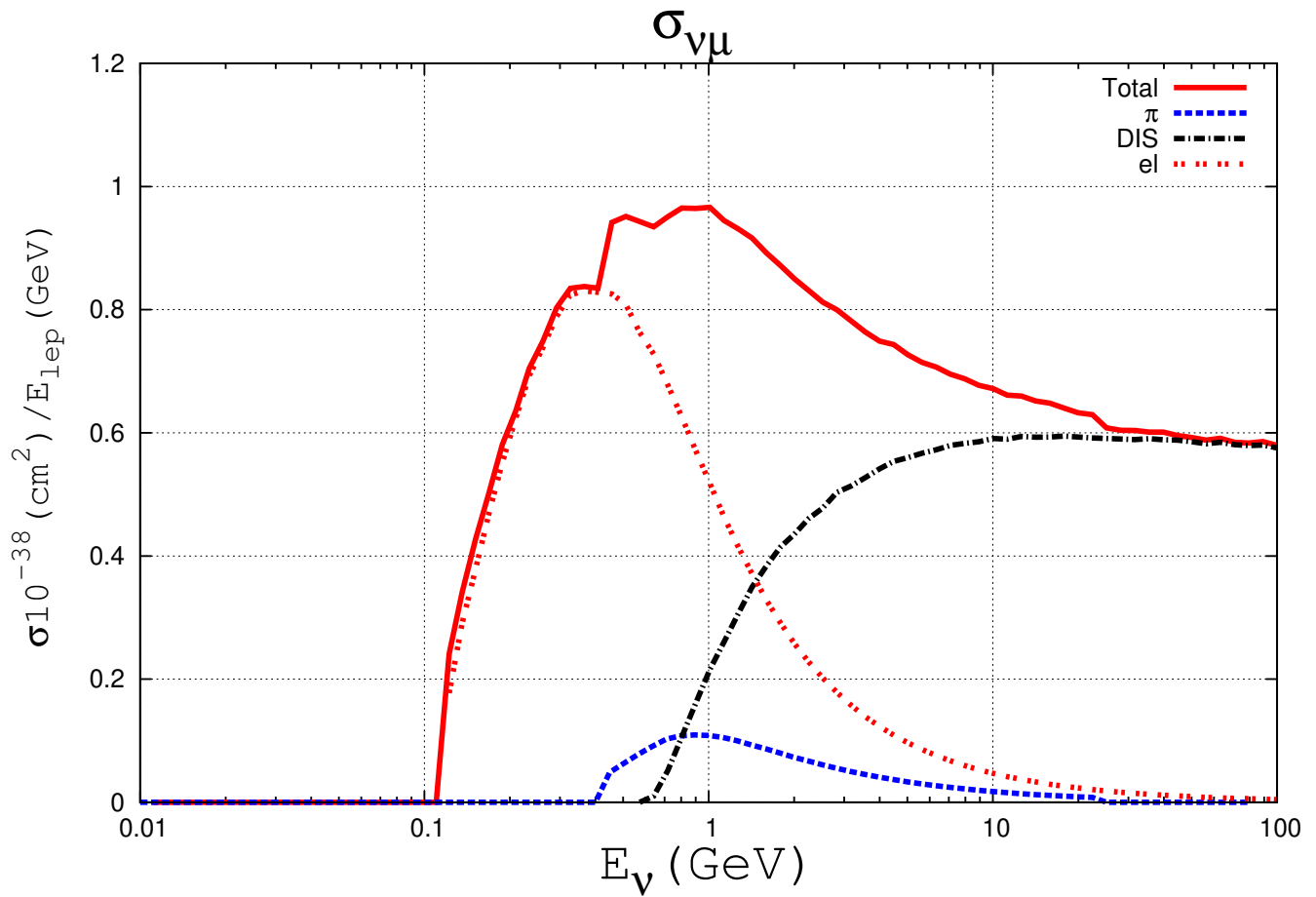


Figura 3.8: Seção de choque total para neutrinos muônicos dividida pela energia do neutrino incidente, juntamente com as contribuições individuais dos processos espalhamento elástico, DIS e produção de píons.

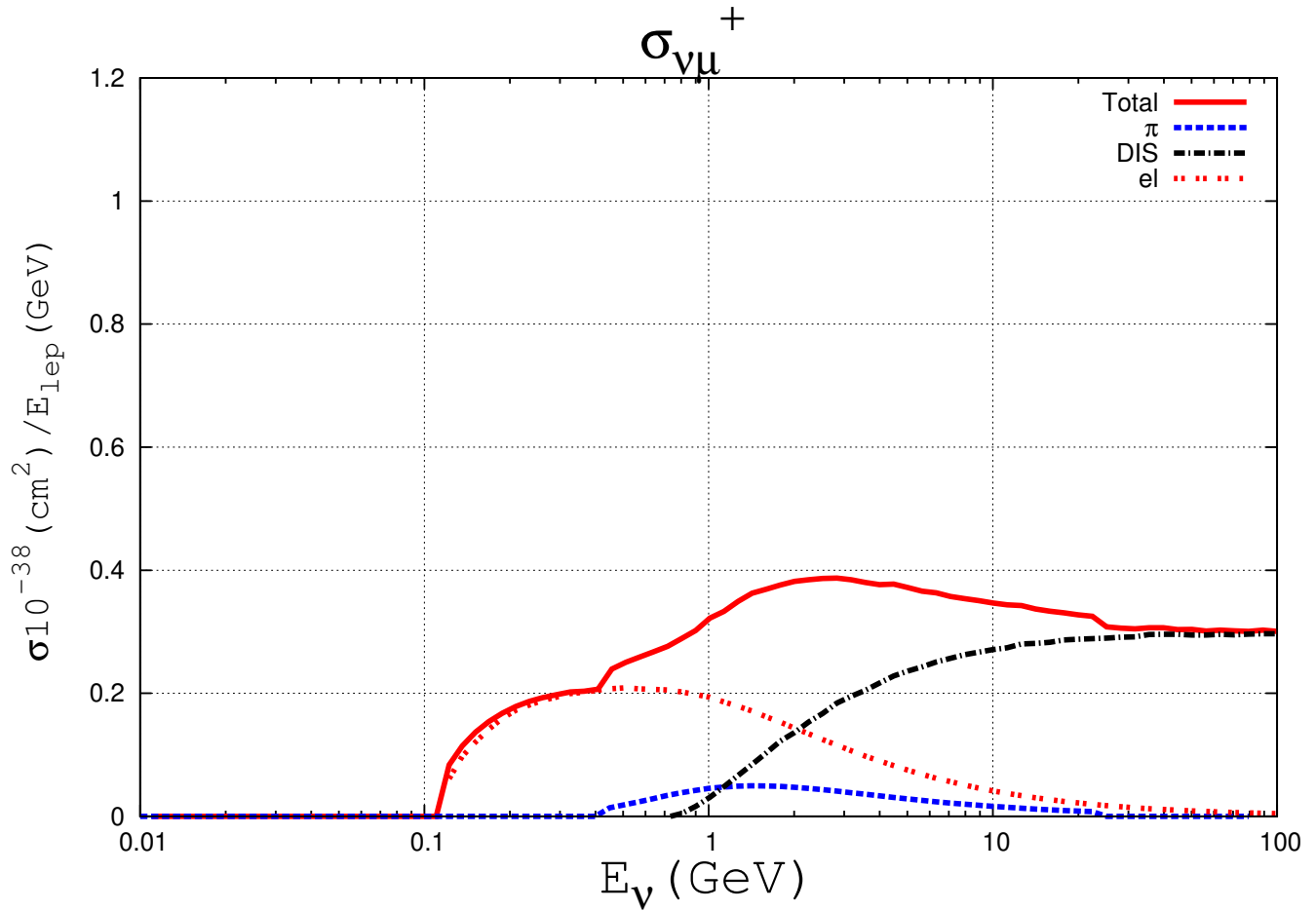


Figura 3.9: Seção de choque total para antineutrinos muônicos dividida pela energia do neutrino incidente, juntamente com as contribuições individuais dos processos espalhamento elástico, DIS e produção de píons.

Tabela 3.1: As várias seções de choque dos neutrinos atmosféricos e suas incertezas.

$E_\nu$	$\sigma$	Alvo	Incerteza (%)	Origem da incerteza	Ref.
$< 100$ MeV	Elástica	Próton	3	$\Phi_\nu$	[68]
$< 100$ MeV	Elástica	Pr[oton	1,4	$\Phi_\nu$	[69]
$\approx 10$ MeV	Elástica	Dêuteron	1	Modelo Nuclear	[70]
$\approx 100$ MeV	Elástica	Dêuteron	10	Modelo Nuclear	[70]
$\approx 100$ MeV	Elástica	Dêuteron	20 - 30	Não Concordância Experimental	[71]
$\approx 100$ MeV	Elástica	$^{12}C$	10 - 20	Não Concordância Experimental	[72]
$\approx 1$ GeV	Elástica	$^{12}C$	20 - 30	$M_A$ e efeitos nucleares	[73]
$\approx 1$ GeV	$1\pi$	Nêutron	25 - 40	$M_A$ e efeitos nucleares	[74]
$\approx 100$ GeV	DIS	Nêutron	2	Modelo Hadrônico	[16]

# Capítulo 4

## Oscilação de sabores induzida por diferença de massa

### 4.1 Oscilação no vácuo

Iniciaremos nossa discussão sobre oscilação de sabores pelo caso mais simples: neutrino se propagando em um meio material com densidade tão baixa que podemos descrever sua propagação sem levar em conta nenhum tipo de efeito de interação do neutrino com a matéria, ou seja, tudo acontece como se o neutrino estivesse no vácuo. Esta simplificação é aplicada com sucesso para neutrinos se propagando pela atmosfera terrestre e para neutrinos que deixam o Sol e viajam até a Terra, por exemplo.

Sabemos da Mecânica Quântica que dada a base de auto-estados de massa  $\{|\nu_i\rangle: \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$  que diagonaliza a Hamiltoniana de massas para os neutrinos,

$$H|\nu_i\rangle = E|\nu_i\rangle, \quad (4.1)$$

nesta base a evolução dos auto-estados de um operador que não comuta com a hamiltoniana de massas, tal como os auto-estados da hamiltoniana da interação fraca, ou seja, os auto-estados de sabor,  $\{|\nu_\alpha\rangle: \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}$  associados aos léptons carregados  $e$ ,  $\mu$  e  $\tau$ , respectivamente, devem ser descritos como uma combinação linear (mistura) dos auto-estados de massa, tal que,

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} |\nu_i\rangle. \quad (4.2)$$

Sendo assim, a propagação de um auto estado de sabor pode ser entendida como a propagação de uma combinação linear de auto-estados de massas. Supondo agora que os neutrinos tenham massa e que o espectro de auto-estados de massa seja não degenerado, auto-estados de massa diferentes se propagarão com momnetos de fase diferentes, o que causa a interferência entre as funções de onda associadas aos diferentes auto-estados de massa que formam o auto estado de sabor. Esta interferência é capaz de alterar a combinação dos auto-estados de massa, fazendo com que a probabilidade de medirmos um auto estado de sabor  $\beta$  ortonormal ao estado  $\alpha$  na base de sabor seja não nula. A este efeito dá-se o nome de oscilação de sabores de neutrinos, e o modelo que o descreve foi proposto para o setor de neutrinos por Bruno Pontecorvo em 1957 [5], em analogia com o fenômeno no setor de káons [50] neutros.

Na Eq.(4.2),  $U$  é a matriz de mistura para o setor de neutrinos introduzida por Maki, Nakagawa e Sakata em 1962 [49] para três gerações. A parametrização mais comum é a adotada pelo *Particle Data Group* [16], obtida através de rotações consecutivas,  $U = U_{23}U_{13}U_{12}$ , ou explicitamente,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\phi} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{13}e^{-i\phi} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Aqui  $\theta_{ij}$  é o ângulo de mistura entre os auto-estados de massa  $i$  e  $j$ . Da mesma forma temos que  $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$  e  $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$ . totalizando três ângulos de mistura e uma fase  $\phi$  é responsável pela violação CP para o setor leptônico, e para facilitar os cálculos será considerada como sendo zero. A primeira matriz refere-se à oscilação  $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ , a segunda à oscilação  $\nu_l \leftrightarrow \nu_\tau$  e o terceiro à  $\nu_l \leftrightarrow \nu_\mu$ .

Para se obter a evolução temporal de  $\nu_\alpha$ , no vácuo, aplicamos a equação de Schrödinger ao auto estado  $\nu_i$

$$H|\nu_i, t_0 \rangle = i\frac{d}{dt}|\nu_i, t_0 \rangle. \quad (4.4)$$

Estamos descrevendo auto-estados no vácuo, e sendo assim o Hamiltoniano não contém nenhum termo associado à energia potencial, apenas termos referentes à energia cinética. A solução da Eq.(4.4) é,



$$|\nu_i, t_0; t_i \rangle = e^{-i(E_i t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{L})} |\nu_i, t_0 \rangle, \quad (4.5)$$

onde

$$e^{-iHt} \quad e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}}, \quad (4.6)$$

são os operadores de evolução temporal e translação espacial, respectivamente.

Como os neutrinos são partículas relativísticas, pode-se assumir sem maiores prejuízos que, em unidades naturais, onde  $\hbar = c = 1$ , podemos escrever  $L \approx t$ . Dessa forma podemos escrever,

$$|\nu_i, L \rangle = e^{-i(E_i - \mathbf{p} \cdot \mathbf{L})} |\nu_i \rangle. \quad (4.7)$$

Mas para partículas relativísticas temos que

$$E = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} = p_i \left( \sqrt{1 + \frac{m_i^2}{p_i^2}} \right) \approx p_i + \frac{m_i^2}{2p_i}. \quad (4.8)$$

Sendo  $E \approx p$  a energia média dos auto-estados de massa que compõem o auto estado de sabor.

Sendo assim, podemos escrever,

$$|\nu_i, L \rangle \approx e^{-i\left(\frac{m_i^2}{2p_i}\right)L} |\nu_i \rangle \approx e^{-i\left(\frac{m_i^2}{2E}\right)L} |\nu_i \rangle. \quad (4.9)$$

Dessa forma,

$$|\nu_\alpha, L \rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* |\nu_i, L \rangle \approx \sum_{i=1}^n U_{\alpha i}^* e^{-i\left(\frac{m_i^2}{2E}\right)L} |\nu_i \rangle. \quad (4.10)$$

Substituindo a Eq. (4.2) na Eq. (4.9),

$$|\nu_\alpha, L \rangle \approx \sum_{\beta} \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* e^{-i\left(\frac{m_i^2}{2E}\right)L} U_{\beta i} |\nu_\beta \rangle \quad (4.11)$$

Usaremos a definição de [28] da matriz  $S$  como sendo a matriz das amplitudes de probabilidade de transição de um estado de sabor  $\alpha(L)$  para outro estado de sabor  $\beta$ ,

$$S_{\alpha\beta} = \langle \beta | \alpha(L) \rangle \quad . \quad (4.12)$$

Dessa forma, a probabilidade de um dado neutrino de sabor inicial  $\alpha$  apresentar sabor  $\beta$  após ter se propagado por uma distância  $L$  é dada por,

$$P_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha} \equiv P_{\beta \rightarrow \alpha} = |S_{\beta\alpha}|^2 = |\langle \nu_\alpha | \nu_\beta, L \rangle|^2 = \left| \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n U_{\alpha j}^* U_{\beta i} e^{i \left( \frac{m_i^2}{2E} \right) L} \delta_{ij} \right|^2 \quad . \quad (4.13)$$

Ou seja, se  $CP$  é conservada,  $U$  é Hermitiana, o que implica que os elementos de  $U$  devem ser reais, e dessa forma,

$$\begin{aligned} P_{\beta \rightarrow \alpha} &= \sum_{j=k=1}^n U_{\beta k}^2 U_{\alpha k}^2 \\ &+ \sum_{j \neq k}^n U_{\beta k} U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j} \\ &- 2 \sum_{j \neq k}^n U_{\beta k} U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j} \text{sen}^2 \left( \frac{\Delta m_{jk}^2}{4E} L \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Quando é feita a conversão da massa para eV  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{6,64 \cdot 10^{-34}}{2\pi} \text{J.s} = 6,6 \cdot 10^{-16} \text{eV.s}$ . Logo,  $\hbar c = 1,978 \cdot 10^{-7} \text{eV.m}$ , onde  $\Delta m_{jk}^2 = m_k^2 - m_j^2$  é dado em  $\text{eV}^2$ ,  $L$  em  $\text{km}$  e  $E$  em  $\text{GeV}$ , podemos escrever,

$$\left( \frac{\Delta m_{jk}^2 (\text{kg})}{4E (\text{J})} L (\text{m}) \right) \approx 1,27 \frac{\Delta m_{jk}^2 (\text{eV}^2) L (\text{km})}{E (\text{GeV})} \quad , \quad (4.15)$$

e sendo assim,

$$\begin{aligned} P_{\beta \rightarrow \alpha} &= \sum_{j=k=1}^n U_{\beta k}^2 U_{\alpha k}^2 + \sum_{j \neq k}^n U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} \\ &- 2 \sum_{j \neq k}^n U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} \text{sen}^2 \left( 1,27 \frac{\Delta m_{jk}^2 (\text{eV}^2) L (\text{km})}{E (\text{GeV})} \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ou seja, a probabilidade de oscilação de sabor  $\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha$  apresenta um comportamento oscilatório. Vamos definir o chamado comprimento de oscilação como sendo a distância para que o

argumento da oscilação seja igual a  $2\pi$ ,

$$L_{jk}^{osc} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi E}{\Delta m_{jk}^2} (\text{km}) \quad (4.17)$$

Isto reflete o fato de que a oscilação é induzida pela diferença dos quadrados das massas, uma vez que se esta última fosse zero, não haveria oscilação.

Usualmente caracteriza-se cada experimento pela distância da fonte ao detector,  $L$ , e pelo espectro de energia do neutrino,  $E_\nu$ .

### 4.1.1 Oscilação de sabores em duas gerações de neutrinos

Como vimos no capítulo 2, para o caso dos neutrinos atmosféricos, os dados obtidos pelos detectores indicam uma redução de até 50% no fluxo de neutrinos muônicos quando comparados com a teoria padrão, enquanto que o fluxo de neutrinos eletrônicos permanece aproximadamente constante. Sendo assim, em primeira aproximação a oscilação se dá entre  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ . Pode-se então descrever o fenômeno de oscilação para neutrinos atmosféricos utilizando oscilação em dois sabores, a qual é um caso particular mais simples do modelo.

Os auto-estados de sabor  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  são descritos como combinação linear dos auto-estados de massa  $\nu_1, \nu_2$ . Podemos escrever a Eq. (4.2) como

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de mistura e a matriz de mistura com dois sabores,  $U_{2 \times 2}$ , pode ser escrita como,

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Aplicando-se a equação de Schrödinger para se obter a evolução temporal do estado

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U H U^\dagger \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

onde na base de auto-estados de massa, o Hamiltoniano é diagonal, e pode ser escrito em termos dos seus auto-valores de energia,  $E_i$ . Como desejamos aplicar este formalismo de oscilação em dois sabores ao problema do neutrino atmosférico, trataremos da evolução temporal dos auto-estados de massa 2 e 3,

$$H = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_3 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Desenvolvendo a Eq.(4.20), obtemos

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_2 \cos^2\theta + E_3 \sin^2\theta & \frac{1}{2}(E_3 - E_2) \sin(2\theta) \\ \frac{1}{2}(E_3 - E_2) \sin(2\theta) & E_3 \cos^2\theta + E_2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ou seja, comparando as Eq. (4.20 , 4.22)

$$UHU^\dagger = \begin{pmatrix} E_2 \cos^2\theta + E_3 \sin^2\theta & \frac{1}{2}(E_3 - E_2) \sin(2\theta) \\ \frac{1}{2}(E_3 - E_2) \sin(2\theta) & E_3 \cos^2\theta + E_2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Em um problema de duas espécies de neutrinos é útil fazer uso das matrizes de Pauli,  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , definidas em [28]. Em termos destas matrizes, o Hamiltoniano pode ser escrito como:

$$\bar{H} = UHU^\dagger = \frac{(E_2 + E_3)I}{2} + \frac{E_2 - E_3}{2} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) \quad (4.24)$$

Novamente usando  $L \approx t$ , a evolução temporal de um auto estado de sabor é dada, em termos dos dois sabores que compõem a base,  $(\nu_\mu \ \nu_\tau)$ , como,

$$|\nu_\mu; L \rangle = e^{-i\bar{H}L} |\nu_\mu; L = 0 \rangle = e^{\frac{(E_2 - E_3)}{2} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) L} |\nu_\mu; L = 0 \rangle \quad (4.25)$$

e,

$$|\nu_\tau; L \rangle = e^{-i\bar{H}L} |\nu_\tau; L = 0 \rangle = e^{\frac{(E_2 - E_3)}{2} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) L} |\nu_\tau; L = 0 \rangle \quad (4.26)$$

Ou seja, a probabilidade de oscilação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 P_{\tau \rightarrow \mu}(L, E) &= P_{\mu \rightarrow \tau}(L, E) = |\langle \nu_\tau | \nu_\mu(L) \rangle|^2 = \left| -i \text{sen} 2\theta \text{sen} \left( \frac{\Delta E}{2} L \right) \langle \nu_\tau | \nu_\mu \rangle \right|^2 \\
 &= \text{sen}^2 2\theta \text{sen}^2 \left( \frac{\Delta E}{2} L \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

Sendo o neutrino uma partícula relativística, podemos agora através da Eq. (4.8), e supondo que  $p_2 \approx p_3 \approx E$ , escrever a Eq. (4.27) como,

$$P_{\mu \rightarrow \tau}(L, E) = \text{sen}^2 2\theta \text{sen}^2 \left( \frac{\Delta m_{32}^2}{4E} L \right) .
 \tag{4.28}$$

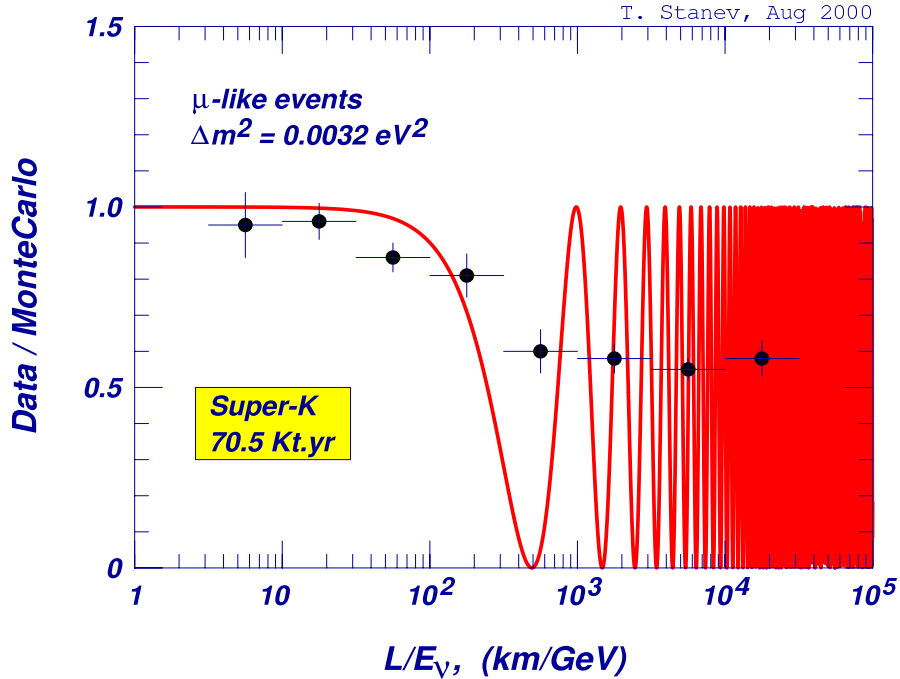


Figura 4.1: Comparação entre a Eq. (4.28), linha cheia, e os dados de SK, pontos, para o fluxo de neutrinos muônicos retirada da referência [76].

Lembramos que a Eq. (4.28) foi obtida quando usamos apenas dois sabores e descreve os efeitos do mecanismo dominante na oscilação de neutrinos atmosféricos, a propagação de  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  sem efeitos de matéria. Sendo assim, os efeitos descritos por ela são devido apenas à diferença quadrática de massas entre os auto-estados, a energia e a distância percorrida. A Fig. (4.1) mostra o comportamento da Eq. (4.28) em comparação com os dados de neutrinos atmosféricos.

O primeiro mínimo da oscilação de neutrinos atmosféricos se dá quando estes percorrem a distância  $L \approx 400$  km, o que implica em neutrinos chegando a SK vindos horizontalmente, e como consequência, pequenas variações angulares resultam em grande variação da distância percorrida pelos neutrinos. Como consequência da limitação em resolução angular e de energia vinda da cinemática da reação de detecção, o primeiro mínimo da oscilação não pode ser verificado. Podemos apenas observar os efeitos da oscilação atingindo o valor médio,  $\langle \text{sen}^2 \left( \frac{\Delta m_{32}^2}{4E} L \right) \rangle = \frac{1}{2}$ .

# Capítulo 5

## Resposta do detector Super-Kamiokande

Como desejamos analisar os dados do detector Super-Kamiokande, precisamos ter claro o tipo de evento que o experimento mede e em quais intervalos estes eventos são divididos.

Como sabemos, na reação de detecção dos neutrinos em SK, conhecida como decaimento beta inverso, um (anti)neutrino interage com a água no interior do detector produzindo um ou mais léptons carregados. Estes léptons são emitidos com velocidade maior do que a velocidade da luz na água, e por conta disso, um cone de radiação Cerenkov é emitido. Dessa forma é possível contar o número de léptons produzidos no detector, e a partir daí, determinar o número de neutrinos que interagiram. A colaboração SK classifica estes eventos segundo alguns critérios.

Segundo a fração de energia depositada no volume fiducial do detector, os eventos são divididos entre totalmente contidos, nos quais todo o cone de Cerenkov está contido no volume fiducial do detector e parcialmente contidos, nos quais o vértice do cone de radiação está contido no interior do volume fiducial, mas não todo o cone. Dessa forma parte da energia escapa ao detector. Ainda temos os eventos classificados como *Up Going Muons* nos quais múons que são produzidos nas interações de neutrinos com a rocha que circunda o detector se propagam até o interior do mesmo.

Outro critério para classificação dos eventos é segundo o número de cones de radiação identificados no detector. Conforme a seção 3.8, sendo a massa do pión  $m_\pi = 139,57$  MeV próxima à massa do múon,  $m_\mu = 105,65$  MeV, detectores de radiação Cerenkov tal qual Super-Kamiokande têm dificuldade de distinguir entre pions e múons. Desconsiderar este fato poderia alterar consideravelmente o número de eventos esperados em SK, tanto que a própria colaboração apresenta seus resultados divididos sempre em dois grupos distintos. Nos eventos ditos *single-ring* apenas um cone de radiação Cerenkov é visto no detector, enquanto nos eventos *multi-ring* dois ou mais

cones são identificados. Em nossas análises estaremos interessados apenas em eventos do tipo *single-ring*.

Além da divisão do eventos segundo o número de cones de radiação produzidos no detector, a colaboração SK também divide os eventos com relação à energia que o lépton carregado produzido deposita no detector. Os eventos são divididos nos intervalos de *Sub-GeV* e *Multi-GeV*, e *Upward-Going muon*.

Para eventos do tipo Sub-GeV a energia do lépton carregado, elétron(múon), produzido na reação de deteção deve estar contida no intervalo

$$0,1(0,2)\text{GeV} \leq E_l \leq 1,2\text{GeV} . \quad (5.1)$$

Já para eventos classificados como Multi-GeV a energia do lépton carregado produzido deve estar no intervalo

$$1,2\text{GeV} < E_l \leq 10,0\text{GeV} . \quad (5.2)$$

Para o intervalo de

$$10,0\text{GeV} < E_l \leq 100,0\text{GeV} \quad (5.3)$$

o que ocorre é a produção dos *Upward-Going muons*.

Pois bem, a resposta do detector,  $R_{SK}$ , nos diz qual é o valor mais provável e a forma da distribuição em energia dos neutrino atmosféricos que geram os eventos nesses três intervalos de energia.

Nosso procedimento para reproduzir os resultados da literatura para esta  $R_{SK}$  foi calcular numericamente a integração da seção de choque total do neutrino-nucleon,  $\sigma_{\nu TOT}$ , multiplicada pelo fluxo de neutrinos atmosféricos,  $\Phi_{\nu ATM}$ . Esta integração deve ser feita com relação aos ângulos zenital,  $\theta_\nu$ , e azimutal do neutrino incidente,  $\phi_{\nu A}$ , e a energia do lépton carregado produzido, além da variável  $x$  de Bjorken.

$$R_{SK} = \int_0^1 dx \int_{-1}^1 d\cos(\theta_\nu) \int_0^{2\pi} d\phi_{\nu A} \int_{E_{lMIN}}^{E_{lMAX}} dE_l \frac{d\sigma_{\nu T}(E_\nu, E_l, x)}{dE_\nu dE_l dx} \otimes \Phi_{\nu ATM}(E_\nu, \theta_{\nu Z}, \phi_{\nu A}) \quad (5.4)$$

Como usamos a seção de choque diferencial total, a qual obtivemos através da soma das seções de choque quasi-elástica, profundamente inelástica e de produção de píons, precisamos descrever as moléculas de  $H_2O$  presentes no detector em função dos nucleons presentes. Devemos distinguir entre prótons e nêutrons, uma vez que reações diferentes ocorrem em cada caso. Para espalhamento



elástico temos

$$\begin{aligned}\nu_l + n &\rightarrow n + l^- \\ \bar{\nu}_l + p &\rightarrow n + l^+\end{aligned}\tag{5.5}$$

Para espalhamento inelástico ambos neutrinos e anti-neutrinos interagem com prótons e nêutrons

$$\nu(\bar{\nu}) + N_i \rightarrow l^-(l^+) + X, \quad i = N, P\tag{5.6}$$

onde  $X$  refere-se ao estado final hadrônico produzido. Para a produção de píons as reações levadas em conta são as que constam no capítulo dedicado à seção de choque para a produção de píons.

A fim de reproduzir os valores correntes na literatura padrão [45] escrevemos a resposta de SK como

$$R_{SK} = \frac{dN}{d\ln E_\nu} = E_\nu \frac{dN}{dE_\nu}.\tag{5.7}$$

Lembramos que os fluxos de neutrinos atmosféricos são fornecidos em unidades de  $[m^{-2}s^{-1}sr^{-1}GeV^{-2}]$ , e que a seção de choque total neutrino-nucleon tal qual calculamos anteriormente está em unidades de  $[10^{-38}cm^2]$ .

Forneceremos nossos resultados em unidades de quilotoneladas-ano. Nas 22,5 kt contidas no volume fiducial de SK estão presentes  $\approx 1,83 \times 10^9$  mols de água ou  $\approx 1,1 \times 10^{33}$  moléculas de água. Isso implica em  $\approx 1,9673 \times 10^{34}$  nucleons em SK. Adotamos (1ano=3,1536  $10^7$  s). Nesse caso, levando em conta as reações acima, Eqs. (5.4-5.7), a resposta do detector pode ser escrita como

$$\begin{aligned}R_{SK}(kt; y)^{-1} &= \frac{0,01963}{GeV^2} \int_0^1 dx \int_{-1}^1 d\cos(\theta_{\nu_A}) \int_0^{2\pi} d\phi_{\nu_Z} \int_{E_{l_{MIN}}}^{E_{l_{MAX}}} dE_l \{ \Phi_{\nu_l}(E_\nu, \theta_{\nu_Z}, \phi_{\nu_A}) \\ &\otimes \{ 8\sigma_{\nu_{EL}}(E_\nu, E_l, x; N_O) + 18(\sigma_{\nu_\pi}(E_\nu, E_l, x; N) + \sigma_{\nu_{DIS}}(E_\nu, E_l, x; N)) \} \\ &+ \{ \Phi_{\bar{\nu}_l}(E_\nu, \theta_{\nu_Z}, \phi_{\nu_A}) \otimes \{ 8\sigma_{\bar{\nu}_{EL}}(E_\nu, E_l, x; P_O) + 2\sigma_{\bar{\nu}_{EL}}(E_\nu, E_l, x; P_H) \\ &+ 18(\sigma_{\bar{\nu}_\pi}(E_\nu, E_l, x; N) + \sigma_{\bar{\nu}_{DIS}}(E_\nu, E_l, x; N)) \} \}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Aqui  $P(N)$  indica um próton(nêutron) como alvo, enquanto que se os subíndices  $H(O)$ , quando presentes, indicam o núcleo atômico ao qual o nucleon pertence.

Nossos resultados para a resposta de SK para neutrinos eletrônicos e muônicos são comparados com os da literatura padrão na Fig. (5.1). Analisando este resultado vemos que a função resposta é diferente para eventos de sub-GeV e multi-GeV, o que implica que estamos testando diferentes

intervalos de energia. Dessa forma, ao separar os eventos do detector SK em dois intervalos distintos de energia, e sabendo como se dá a distribuição em energia dos neutrinos atmosféricos no detector, podemos investigar como os efeitos de oscilação de neutrinos se manifestam em diferentes energias.

## 5.1 Número de eventos

Passamos agora ao cálculo do número de eventos em Super-Kamiokande. Para o cálculo do número total de eventos simplesmente integramos a Eq. (5.8) com relação à energia do neutrino eletrônico (muônico) incidente no intervalo de  $0,1(0,2) < E_\nu < 100$  GeV, para um período de 25,5 quilotoneladas-ano. Na Tabela (5.1) mostramos nossos resultados juntamente com os obtidos nas referências ([39],[8]) para a região de sub-GeV, ou seja  $0,1(0,2) < E_{e(\mu)} < 1,33$  GeV para eventos do tipo eletrônico (muônico). Comparando os resultados da colaboração SK(Simulação via Monte Carlo) para o número de neutrinos esperados com os que obtivemos independentemente nesta tese de doutorado, percebemos a concordância entre estes valores. Isto nos permite afirmar que conseguimos neste trabalho descrever o número de eventos de neutrinos esperados em SK.

Tabela 5.1: Os valores tomados das diferentes referências foram normalizados para 25,5 quilotoneladas-ano de SK. A incerteza estatística pode ser estimada como 10% do valor obtido para o número de eventos.

REF	Lipa(MC)	SK(DATA)	SK(MC)	Esta tese	ISHI(MC)
e-like	689	1110	806	820	877,0
$\mu$ -like	1050	1017	1317	1307	1308,6
$R(\frac{\mu}{e})$	1,50	1,60	1,63	1,59	1,5

## 5.2 Dependência energética do número de eventos em SK

Integrando a Eq. (5.8) em intervalos do momento do lépton carregado produzido obtemos a distribuição energética do número de eventos em SK. Dessa forma, mostramos na Fig. (5.2) o número de léptons carregados (elétrons e múons) produzidos em SK em função do momento do lépton

carregado produzido.

Vemos que o número de eventos em SK é maior para energias de algumas centenas de MeV e diminui rapidamente com o aumento da energia do lépton carregado. Esta característica se verifica tanto para eventos do tipo eletrônico como muônico. Ressaltamos que nos dois casos estão somadas as contribuições de neutrinos e anti-neutrinos.

O observável de interesse em SK para experimentos de oscilação de neutrinos é a distribuição angular de eventos, e não a distribuição em energia. Mesmo assim, reproduzir de forma independente este resultado nos permitiu entender o funcionamento do detector.

Nos próximos capítulos descreveremos o nossos cálculos para a distribuição angular de eventos em SK.

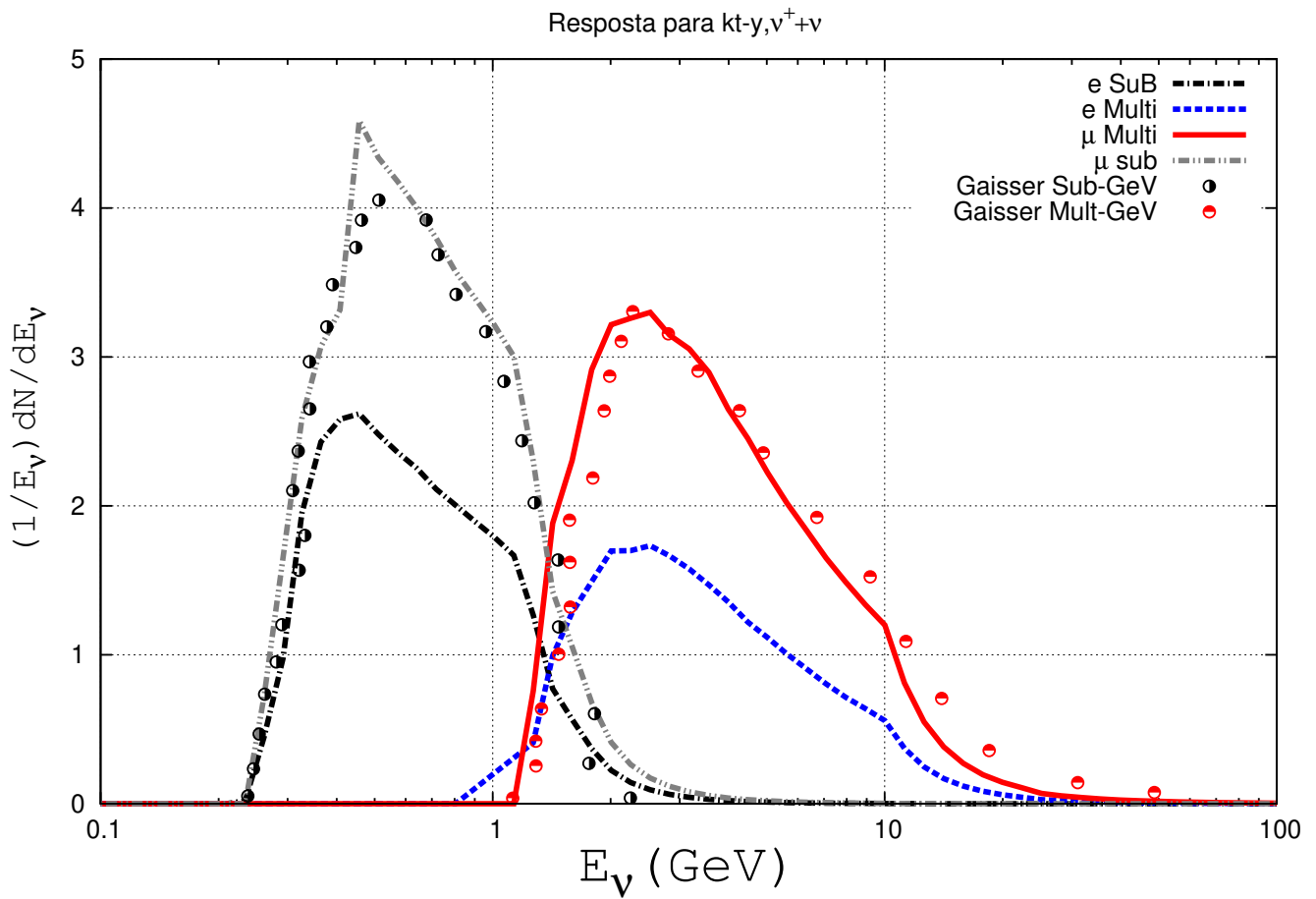


Figura 5.1: Comparamos nossos resultados para a resposta do detector SK para eventos do tipo eletrônico e muônico com os obtidos por [75] para eventos do tipo muônico. Dividimos os dados em Sub-GeV e Multi-GeV e somamos as contribuições devidas a neutrinos e anti-neutrinos.

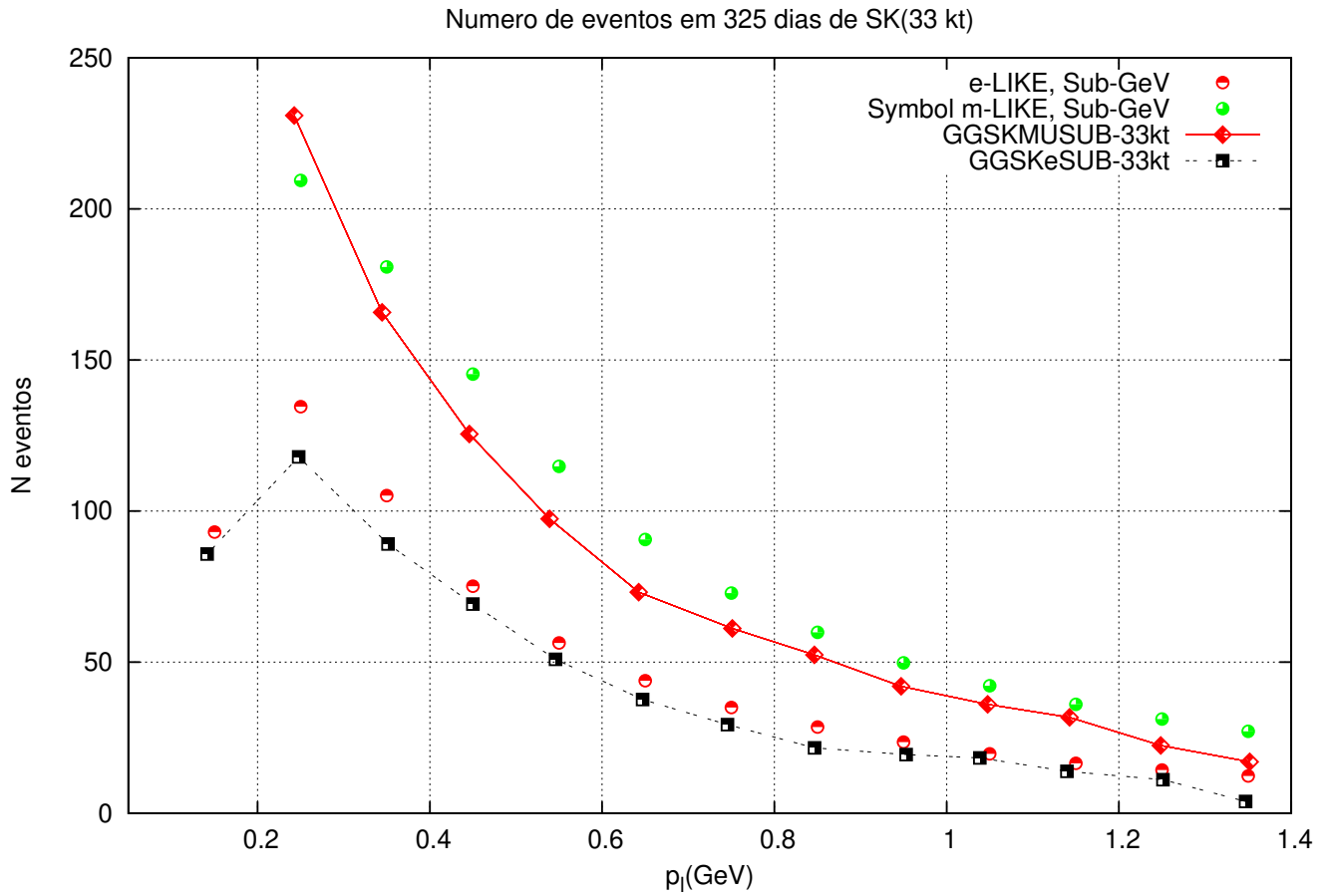


Figura 5.2: Dependência energética do número de eventos em SK em função do momento do lépton carregado produzido na reação de detecção. Nossos resultados são mostrados juntamente com os da referência ([40]).

## Capítulo 6

# Distribuição angular de eventos em Super-Kamiokande

Passamos agora a olhar para a distribuição de eventos em SK com relação ao ângulo zenital do lépton carregado produzido. Este é o nosso observável de interesse, pois é através da análise da distribuição angular de eventos em Super-Kamiokande que é possível determinar os parâmetros de oscilação atmosféricos, ângulo de mistura e diferença quadrática de massas,  $(\theta_{32}, \Delta m_{32}^2)$ . Nosso objetivo inicial é reproduzir os resultados obtidos pela colaboração SK para a distribuição no ângulo zenital do número de neutrinos do tipo muônico esperados em seu detector, tanto na ausência quanto na presença do fenômeno de oscilação de neutrinos em duas gerações. Uma vez feito isso, poderemos testar hipóteses sobre a existência de fenômenos outros que não a oscilação padrão de neutrinos utilizando para isso os dados de SK para neutrinos atmosféricos. Especificamente, neste trabalho usaremos a distribuição zenital dos eventos de neutrinos atmosféricos para testar as alterações no comportamento das oscilações de neutrinos devidas ao mecanismo de neutrinos de massa variável.

Nesse ponto vamos recapitular o que fizemos até aqui, e dessa forma entender porque tais aspectos são tão relevantes na descrição do número de eventos em SK.

Primeiramente, através da interpolação e posterior integração numérica das tabelas de fluxos de neutrinos atmosféricos fornecidas por [21], nos certificamos que estamos usando como entrada em nossos cálculos os mesmos fluxos de neutrinos que a colaboração SK. Estes fluxos dependem da energia do neutrino incidente, e de seus ângulos de chegada no detector, tanto com relação à direção zenital quanto azimutal.

Agora precisamos ressaltar o método de detecção usado por Super-Kamiokande, o qual é sensível aos fótons devidos à radiação Cherenkov produzida pelos léptons carregados (elétrons ou múons) produzidos no interior do detector quando um neutrino interage com o mesmo. Sendo assim, estritamente falando, Super-Kamiokande não detecta neutrinos, mas sim os léptons carregados produzidos nas interações dos neutrinos com o detector. Ou seja, a distribuição angular dos eventos em SK, que é o nosso observável de estudo neste trabalho, contém a informação sobre a direção na qual os elétrons e múons foram produzidos no detector. Precisamos então relacionar as coordenadas zenital e azimutal dos neutrinos atmosféricos que chegam ao detector SK com a direção dos léptons carregados que estes neutrinos produzem ao interagirem no detector.

A forma como fizemos isso foi calcular toda a cinemática relativística da reação de detecção dos neutrinos, definindo os invariantes de Lorentz, e através deles, determinamos o espaço de fase possível para a energia dos léptons carregados produzidos no detector. É importante esclarecer aqui o fato de que, ao contrário do comumente feito na literatura padrão quando se descreve o espalhamento lépton-nucleon, nós mantivemos a massa de todos os léptons carregados diferente de zero. Não fizemos portanto nenhuma aproximação\*. Se por um lado este fato torna os cálculos cinemáticos significativamente laboriosos, também permite estender nossos cálculos a situações em que as energias envolvidas sejam da mesma ordem da massa do lépton carregado produzido.

---

\*Agradecemos ao professor M. Menon pela ajuda nesta parte do trabalho.

Como SK é sensível aos léptons carregados produzidos pelos neutrinos, ( $e, \mu$ ), devemos calcular a distribuição de eventos em função das variáveis do lépton produzido no detector. Para tal, inicialmente decompomos o momento do neutrino incidente e do lépton carregado com relação às coordenadas retangulares no referencial do detector:

$$\begin{aligned} p_{\nu,x} &= \text{sen}\theta_\nu \cos\phi_\nu p_\nu, & p_{\nu,y} &= \text{sen}\theta_\nu \text{sen}\phi_\nu p_\nu, & p_{\nu,z} &= \cos\theta_\nu p_\nu, \\ p_{l,x} &= \text{sen}\theta_l \cos\phi_l p_l, & p_{l,y} &= \text{sen}\theta_l \text{sen}\phi_l p_l, & p_{l,z} &= \cos\theta_l p_l. \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde  $p_\nu$  é o momentum do neutrino,  $\theta_\nu$  é o ângulo zenital do neutrino com relação a direção vertical no detector SK, e  $\phi_\nu$  o ângulo azimutal. Da mesma forma,  $\theta_l$  é o ângulo zenital do lépton carregado e  $\phi_l$  o ângulo azimutal.

A forma mais geral de se relacionar a direção do momentum do neutrino inicial, no sistema do detector, com a direção do lépton carregado produzido é através de rotações em função dos ângulos que definem a direção do lépton carregado produzido com relação a direção do neutrino incidente, respectivamente, o ângulo zenital ( $\theta_*$ ), e azimutal, ( $\phi_*$ ). A direção do neutrino incidente é especificada pelo ângulo zenital ( $\theta_\nu$ ), e azimutal, ( $\phi_\nu$ ).

$$\mathbf{p}_l = R_z(\phi_*)R_x(\theta_*)\mathbf{p}_\nu, \quad (6.2)$$

onde as matrizes de rotação são dadas por

$$R_z(\phi_*) = \begin{pmatrix} c\phi_* & s\phi_* & 0 \\ -s\phi_* & c\phi_* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_x(\theta_*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_* & s\theta_* \\ 0 & -s\theta_* & c\theta_* \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Estas equações relacionam o cosseno do ângulo de espalhamento do lépton carregado,  $c\theta_*$  com os cossenos dos ângulos zenital do neutrino incidente no referencial do detector,  $c\theta_\nu$ , com o cosseno do ângulo zenital do lépton carregado visto pelo detector,  $c\theta_l$ , e com o ângulo azimutal do neutrino incidente no referencial do detector,  $\phi_\nu$ . Dessa forma conseguimos obter um sistema de equações para as coordenadas do lépton carregado produzido em função das coordenadas do neutrino incidente (no referencial de SK) e do ângulo de espalhamento:

$$\begin{aligned} c\theta_l &= c\theta_*c\theta_\nu - s\theta_*s\theta_\nu s\phi_\nu \\ s\theta_l s\phi_l &= s\phi_*c\theta_\nu c\phi_\nu + c\phi_*c\theta_*s\theta_\nu s\phi_\nu + c\phi_*s\theta_*c\theta_\nu \\ s\theta_l c\phi_l &= c\phi_*c\theta_\nu c\phi_\nu + s\phi_*c\theta_*s\theta_\nu s\phi_\nu + s\phi_*s\theta_*c\theta_\nu. \end{aligned} \quad (6.4)$$



Substituindo  $s\theta_* = \sqrt{1 - c^2\theta_*}$  na primeira equação e resolvendo para  $c\theta_*$  obtemos

$$c\theta_* = \frac{c\theta_l c\theta_\nu \pm |s\theta_\nu| |s\phi_\nu| \sqrt{c^2\theta_\nu + s^2\theta_\nu s^2\phi_\nu - c^2\theta_l}}{c^2\theta_\nu + s^2\theta_\nu s^2\phi_\nu} \quad (6.5)$$

e para  $s\theta_*$

$$s\theta_* = \frac{-c\theta_l s\theta_\nu s\phi_\nu \pm |c\theta_\nu| \sqrt{c^2\theta_\nu + s^2\theta_\nu s^2\phi_\nu - c^2\theta_l}}{c^2\theta_\nu + s^2\theta_\nu s^2\phi_\nu}. \quad (6.6)$$

Podemos agora relacionar a energia do lépton carregado e mudar a integração em  $\int dE_l \rightarrow \int d\cos(\theta_l)$ . Isto deve ser feito, uma vez que nosso observável é a distribuição angular dos léptons carregados produzidos em SK. Para isso calculamos o jacobiano da transformação levando em conta a variação da energia com o ângulo de espalhamento, e a variação do ângulo de espalhamento com relação ao ângulo de emissão do lépton carregado:

$$\frac{dE_l}{d\cos(\theta_l)} = \frac{dE_l}{d\cos(\theta_*)} \frac{d\cos(\theta_*)}{d\cos(\theta_l)} \quad (6.7)$$

Da Eq. (6.5) podemos escrever

$$\frac{d\cos(\theta_*)}{d\cos(\theta_l)} = \left| \frac{c\theta_\nu + \frac{s\theta_\nu c\phi_\nu}{\sqrt{c^2\theta_\nu - c\theta_l s^2\theta_\nu^2 c\phi_\nu^2}}}{1 - s\theta_\nu^2 s\phi_\nu^2} \right|. \quad (6.8)$$

Para a primeira parte da transformação,  $\frac{dE_l}{d\cos\theta_l}$ , lembramos que a relação entre energia do lépton carregado emitido e o ângulo de emissão tem forma funcional diferente para cada um dos processos de espalhamento envolvidos.

Uma vez que a energia do lépton carregado produzido deixa de ser uma variável cinemática independente, no caso do espalhamento elástico ela passa a ser completamente determinada pela energia do neutrino e pelos ângulos de integração

$$E_l(el) = \frac{(E_\nu - \delta)(1 + \epsilon) + \epsilon \sqrt{(E_\nu - \delta)^2 - m_l^2 [(1 + \epsilon)^2 - (\epsilon \cos\theta_*)^2]} \cos\theta_*}{(1 + \epsilon)^2 - (\epsilon \cos\theta_*)^2}, \quad (6.9)$$

onde  $\delta = \frac{1}{2m_p}(m_n^2 - m_p^2 - m_e^2)$ ,  $\epsilon = \frac{E_\nu}{m_p}$ . Esta é a mesma definição da energia do lépton carregado produzido na reação que havíamos definido no cálculo da seção de choque elástica. Contudo, agora o ângulo de espalhamento é determinado pela condição de que o lépton produzido esteja dentro do bin angular em questão, Eq. (6.5), ou seja, a posição zenital do lépton carregado produzido nos diz qual deve ser o ângulo de espalhamento, e a cinemática relativística determina para este ângulo qual deve ser a energia do lépton carregado produzido por um neutrino que interagiu via espalhamento elástico com o detector.

Na Fig. (6.1) mostramos o intervalo de energia permitido para múons produzidos via espalhamento elástico em função da energia do neutrino. A energia permitida para múons produzidos via espalhamento elástico deve sempre estar entre os limites inferior e superior,  $E_1$  e  $E_2$ . Assim mostramos também a energia do neutrino incidente, estes limites, e a energia do múon para três valores do ângulo de espalhamento elástico,  $c\theta_* = -1, 0, 1$ .

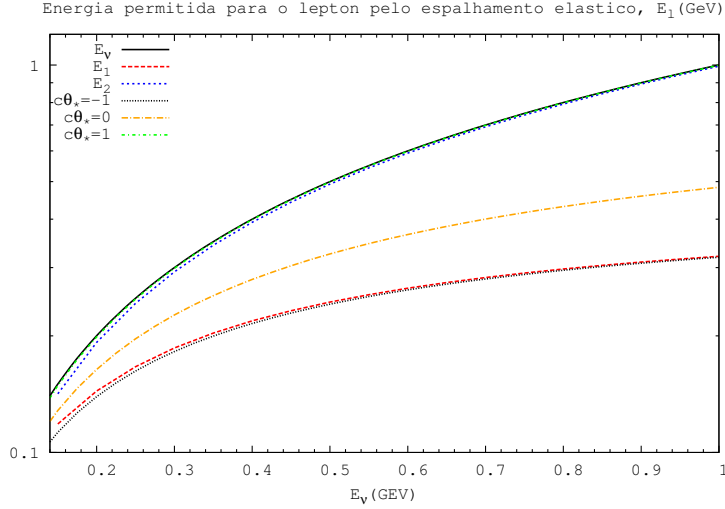


Figura 6.1: Limites na energia do múon produzido via espalhamento elástico em função da energia do neutrino incidente,  $E_1, E_2$ , juntamente com valores da energia do múon para diferentes valores do cosseno do ângulo de espalhamento,  $\cos(\theta^*)$ .

Desejamos agora determinar os limites na energia do lépton carregado produzido em função da energia do neutrino incidente e do cosseno do ângulo de espalhamento para neutrinos interagindo via espalhamento profundamente inelástico. Conforme já mencionado no cálculo da seção de choque inelástica, ganhamos agora uma nova variável de integração, pois a massa do estado hadrônico final não é mais conhecida a priori. Ainda assim, como integramos com relação à variável  $x$ , podemos escrever da relação entre  $x$  e  $Q^2$

$$x = \frac{Q^2}{2M_p(E_\nu - E_l)}, \quad Q^2 = 2E_\nu E_l(1 - \cos\theta_*) \quad (6.10)$$

uma expressão para a energia do lépton carregado produzido via espalhamento inelástico na qual as variáveis independentes são  $x, E_\nu, \theta_*$ .

$$E_l(DIS) = \frac{M_p x E_\nu}{2E_\nu \sin(\frac{\theta_*}{2}) + M_p x} \quad (6.11)$$

Na Fig.(6.2) mostramos os valores permitidos para a energia do múon produzido via DIS como função da energia do neutrino e do ângulo de espalhamento.

Finalmente, para o caso da produção de píons, supomos a massa invariante do estado hadrônico como sendo  $W^2 = 1,44 \text{ GeV}^2$ . Nesse caso temos

$$E_l(\pi) = \frac{s - 1,44(\text{GeV}^2)}{2(E_\nu \sin^2(\frac{\theta_*}{2}) + M_p)} \quad (6.12)$$

Sabemos que o limiar para a produção de píons é de  $0,3 \text{ GeV}$ , e sendo a variável de Mandelstam  $s = m_p^2 + 2m_p E_\nu$  garantimos que  $E_l(\pi) \geq 0$ . Na Fig. (6.3) mostramos a região permitida para a produção de múons vindos da produção de píons com relação ao ângulo de espalhamento.

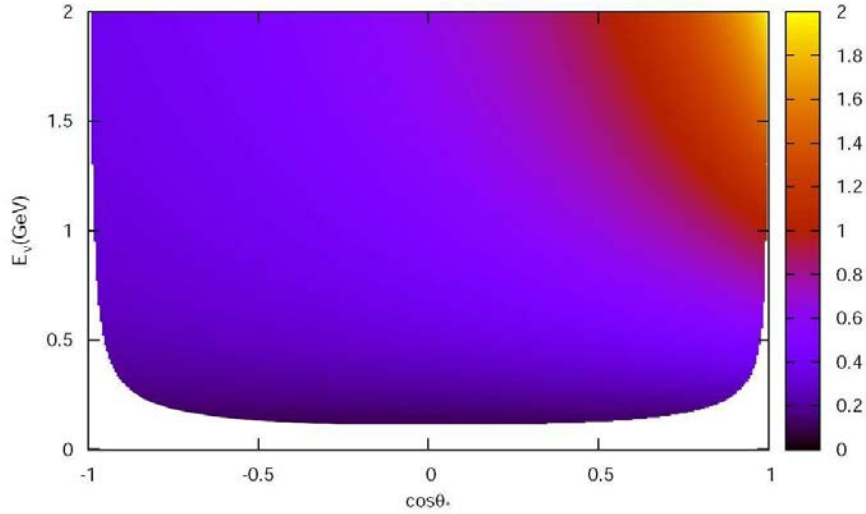


Figura 6.2: Mostramos para o caso do espalhamento profundamente inelástico, a energia permitida para o múon é dada pela escala de cores em função de  $\cos \theta_*$  e  $E_\nu$ . Para a energia do muon produzido ser próxima a do neutrino incidente ele precisa ser espalhado com ângulo próximo de zero. Quanto maior o ângulo de espalhamento, menor a razão  $\frac{E_\mu}{E_{\nu_\mu}}$ .

Como consequência de termos três diferentes formas funcionais para a energia do lépton carregado, a relação  $\frac{dE_l}{d\cos(\theta_*)}$  é diferente para cada um dos processos, elástico, inelástico e produção de píons. Ambos são levados em conta na transformação de variáveis  $E_l \rightarrow \cos(\theta^*)$ .

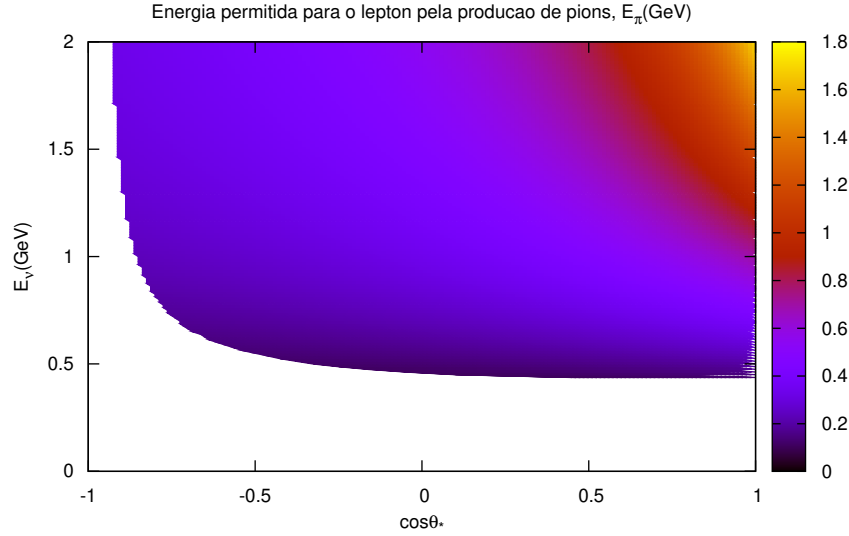


Figura 6.3: A figura mostra a energia permitida para o múon vindo da produção de pión, em função de  $c\theta_*$  e  $E_\nu$ . Para a energia do múon ser próxima à do neutrino ele precisa ser espalhado com ângulo próximo de zero. Quanto maior o ângulo de espalhamento, menor a razão  $\frac{E_\mu}{E_{\nu\mu}}$ .

## 6.1 Ingredientes necessários para o cálculo da distribuição angular de eventos em SK

Apenas após termos realizado estes cálculos de cinemática relativística é que pudemos entender o quão incerta é a direção de emissão dos léptons carregados com relação à direção dos neutrinos incidentes para os valores de energias típicos de neutrinos atmosféricos. Especificamente, quanto menor for a razão entre as energias do lépton carregado e do neutrino incidente,  $\frac{E_l}{E_{\nu_l}}$ , maior pode ser o ângulo de espalhamento,  $\theta_*$ . Mostramos anteriormente nas Figs. (6.2, 6.3) que esta incerteza pode chegar a valores próximos a  $\theta_* \approx 60^\circ$ , mas tende a diminuir com o aumento da energia do neutrino incidente. Dessa forma, a descrição da distribuição angular de eventos em SK não é trivial. Quando limitamos em intervalos o ângulo zenital dos léptons carregados produzidos não limitamos exatamente o mesmo intervalo de ângulo zenital para os neutrinos incidentes. A relação entre essas duas distribuições angulares se dá através da cinemática da reação de detecção, a qual depende fortemente das energias envolvidas no processo. Sendo assim a relação entre estas duas distribuições angulares se torna não trivial, e mais, é diferente para cada valor possível para o par

de energias ( $E_\nu, E_l$ ).

Além do cuidado que tomamos com relação à cinemática, também fizemos um estudo detalhado da dinâmica da seção de choque para a reação de detecção dos neutrinos. Procedemos um estudo sistemático desta seção de choque, a qual é composta por três contribuições principais, espalhamento quasi-elástico, espalhamento profundamente inelástico e produção de píons.

Para o espalhamento elástico lembramos que em nossos cálculos, assim como feito em [27],<sup>†</sup> e por nós reproduzido, mantivemos a diferença entre a massa do nêutron e do próton diferente de zero.

Também precisamos lembrar que a dinâmica da seção de choque para os processos DIS e produção de píons não nos permite saber exatamente qual é a quantidade de energia do neutrino incidente que foi usada na geração das massas dos hádrons presentes no estado final,  $W$ , e ganhamos então mais uma variável para a descrição da interação, ou seja, quando calculamos a seção de choque para DIS e produção de píons, ganhamos mais uma variável de integração. Além disso, quando escrevemos a amplitude de probabilidade para o caso do espalhamento profundamente inelástico Eq. (3.16), levamos em conta todas as massas dos léptons carregados presentes na reação. Novamente, isto valida nossos resultados para casos em que a energia do neutrino incidente seja da ordem da massa do lépton carregado produzido.

---

<sup>†</sup>Agradecemos ao professor F. Vissani por sua ajuda nesta parte do trabalho.

Como resultado disso tudo, a descrição da distribuição angular do número de eventos em SK por quilotoneladas-ano precisa ser dada através de uma integral em cinco dimensões. São elas a energia do neutrino incidente,  $E_\nu$ , seus ângulos zenital e azimutal,  $\theta_\nu$  e  $\phi_\nu$ , a variável  $x$  de Bjorken, e o ângulo zenital de emissão do lépton carregado produzido,  $\theta_l$ , cujos limites variam entre  $(c\theta_{l_0}, c\theta_{l_f})$ .

$$\begin{aligned}
N(kt; y)^{-1} &= \frac{0.01963}{GeV^2} \int_{E_{\nu 0}}^{E_{\nu f}} dE_\nu \int_0^1 dx \int_{-1}^1 d\cos(\theta_\nu) \int_0^{2\pi} d\phi_\nu \int_{c\theta_{l_0}}^{c\theta_{l_f}} dc\theta_l \{ \Phi_{\nu l}(E_\nu, \theta_\nu, \phi_\nu) \\
&\otimes \{ 8\sigma_{\nu EL}(E_\nu, E_l, x; N_O) + 18(\sigma_{\nu\pi}(E_\nu, E_l, x; N) + \sigma_{\nu DIS}(E_\nu, E_l, x; N)) \} \\
&+ \{ \Phi_{\bar{\nu} l}(E_\nu, \theta_\nu, \phi_\nu) \otimes \{ 8\sigma_{\bar{\nu} EL}(E_\nu, E_l, x; P_O) + 2\sigma_{\bar{\nu} EL}(E_\nu, E_l, x; P_H) \\
&+ 18(\sigma_{\bar{\nu}\pi}(E_\nu, E_l, x; N) + \sigma_{\bar{\nu} DIS}(E_\nu, E_l, x; N)) \} \}. \tag{6.13}
\end{aligned}$$

Aqui divisão entre os intervalos é feita variando os limites de integração em  $c\theta_{l_0}$ , e  $c\theta_{l_f}$ .

## 6.2 Nossos resultados para a distribuição angular de eventos em SK

Como feito usualmente na literatura, separamos os eventos em duas regiões segundo a energia do lépton carregado produzido, sub-GeV ( $0, 1 \text{ GeV} \leq E_l \leq 1, 2 \text{ GeV}$ ) e multi-GeV ( $1, 2 \text{ GeV} < E_l \leq 100, 0 \text{ GeV}$ ).

Nossos resultados são comparáveis com os dados de SK [78] para o número de eventos esperado sem a presença do mecanismo de oscilação padrão para neutrinos eletrônicos e muônicos, tanto na região de sub-GeV como multi-GeV. Lembramos que a probabilidade de sobrevivência de neutrinos do tipo muônico é dada por

$$P_{\mu\mu} = 1 - \text{sen}^2(2\theta_{23})\text{sen}^2\left(\frac{1, 27\Delta m_{32}^2 L(\text{km})}{E(\text{GeV})}\right), \tag{6.14}$$

onde  $\theta_{23}$  é o ângulo de mistura e  $\Delta m_{32}^2$  é a diferença entre o quadrado dos auto-valores de massa  $m_3$  e  $m_2$ .  $L$  é a distância percorrida pelos neutrinos e  $E$  sua energia. Incluindo este mecanismo na propagação dos neutrinos atmosféricos, nossos resultados concordam com a distribuição angular de eventos em SK. A Fig. (6.4) mostra nossos resultados para a região de Sub-GeV para a distribuição angular do número de eventos do tipo muônico, com e sem a presença do mecanismo de oscilação em dois sabores de neutrinos, comparado com os dados de SK [8]. Já na Fig. (6.5) mostramos os

nossos resultados para a região de Multi-GeV para a distribuição angular do número de eventos do tipo muônico, com e sem a presença do mecanismo de oscilação em dois sabores de neutrinos, comparado com os dados de SK [8]. Podemos afirmar que, em ambos os gráficos acima citados, existe boa concordância entre nossos cálculos e os dados de SK.

Na Fig. (6.5) vemos que na região de  $\cos\theta_Z \geq 0$ , as curvas com  $\Delta m_{32}^2 = 5.0 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$  ou  $\Delta m_{32}^2 = 2.3 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$  concordam entre si e com os pontos experimentais, pois nessa região a distância percorrida pelos neutrinos que chegam ao detector ainda é pequena para que os efeitos do mecanismo de oscilação sejam percebidos.

No outro extremo, para  $\cos\theta_l \rightarrow -1$  existe uma redução de praticamente 50% no número de eventos quando comparamos as mesmas curvas. Lembrando que o comprimento de oscilação para os neutrinos atmosféricos é de  $L_{osci} \approx 500 \text{ km}$ , esta redução no número de neutrinos se deve ao fato de que nesta região de  $\cos\theta_l \rightarrow -1$  e o caminho percorrido pelos neutrinos que chegam ao detector é praticamente  $L = 2R_{Terra} \approx 12000 \text{ km}$ , e sendo assim, os neutrinos já oscilaram tantas vezes que o efeito líquido é dado pelo valor médio da função seno quadrado. Por causa disso, estes intervalos não são sensíveis a diferentes valores de  $\Delta m_{32}^2 \approx 10^{-3} \text{ eV}^2$ , pois para todos os casos, o mecanismo de oscilação faz com que ocorram tantas oscilações que o efeito líquido nesta região será a redução pelo valor médio da função seno quadrado presente na Eq. (6.14).

Nas regiões onde  $\cos\theta_Z \rightarrow \pm 1$  não podemos distinguir entre soluções com diferentes valores de  $\Delta m_{32}^2 \approx 10^{-3} \text{ eV}^2$ . A sensibilidade ao parâmetro  $\Delta m_{32}^2$  vem da região próxima a  $\cos\theta_Z \rightarrow 0$ . Nesta região diferentes valores de  $\Delta m_{32}^2$  farão com que o valor médio da função seno quadrado seja atingido com diferentes distâncias percorridas pelos neutrinos, e dessa forma, o ajuste dos dados nos permite apontar não apenas que o mecanismo de oscilação é necessário mas também qual é o melhor valor para os parâmetros de oscilação.

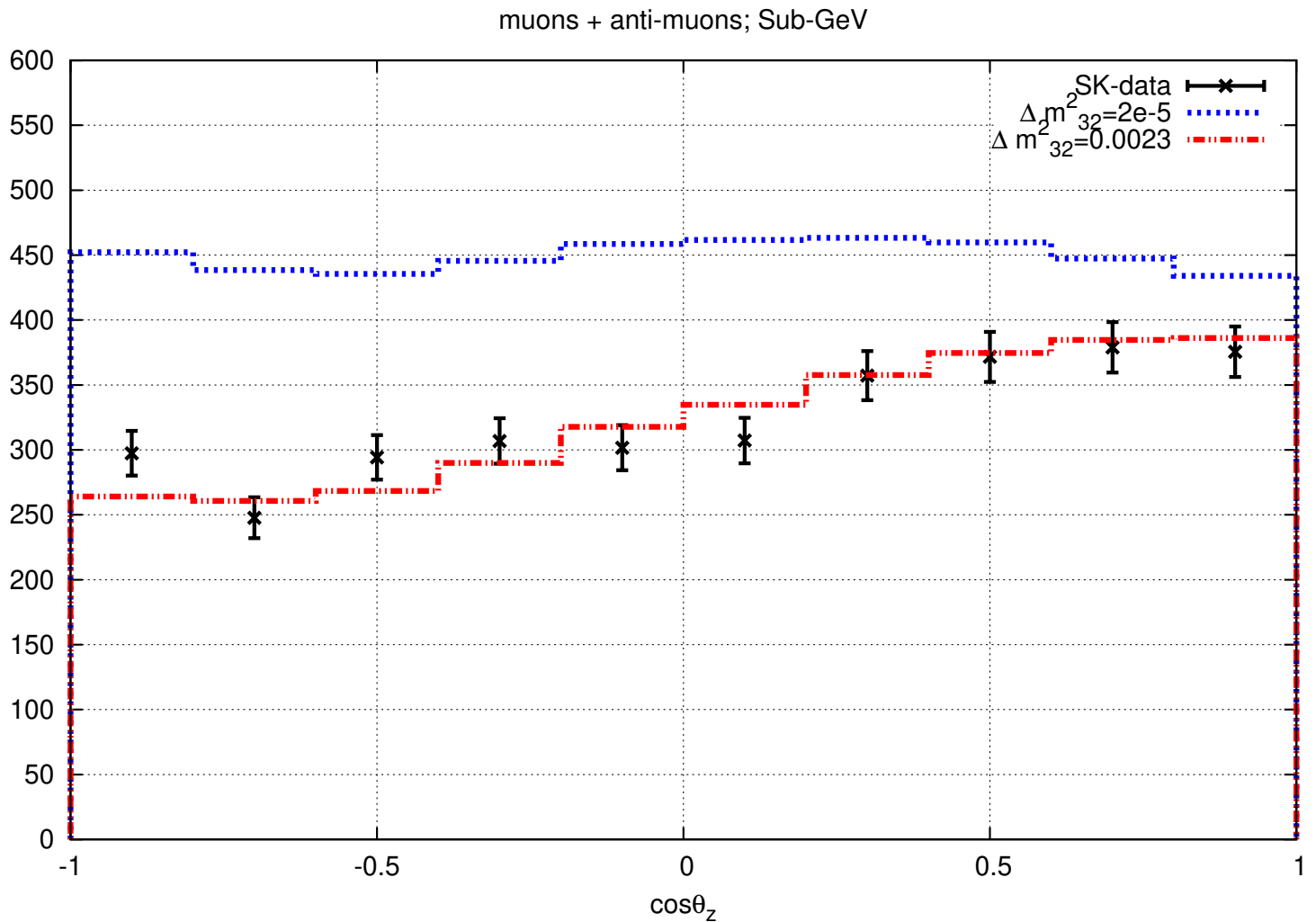


Figura 6.4: Nossos resultados para o número de múons mais anti-múons em SK para a região de Sub-GeV são comparados com os resultados da própria colaboração SK. Tanto em nossos resultados como nos da colaboração SK são usados como entrada os fluxos calculados por Honda[21]. Podemos ver que dentro da margem de erro nossos resultados reproduzem os dados obtidos por SK para o número de múons mais anti-múons esperado.



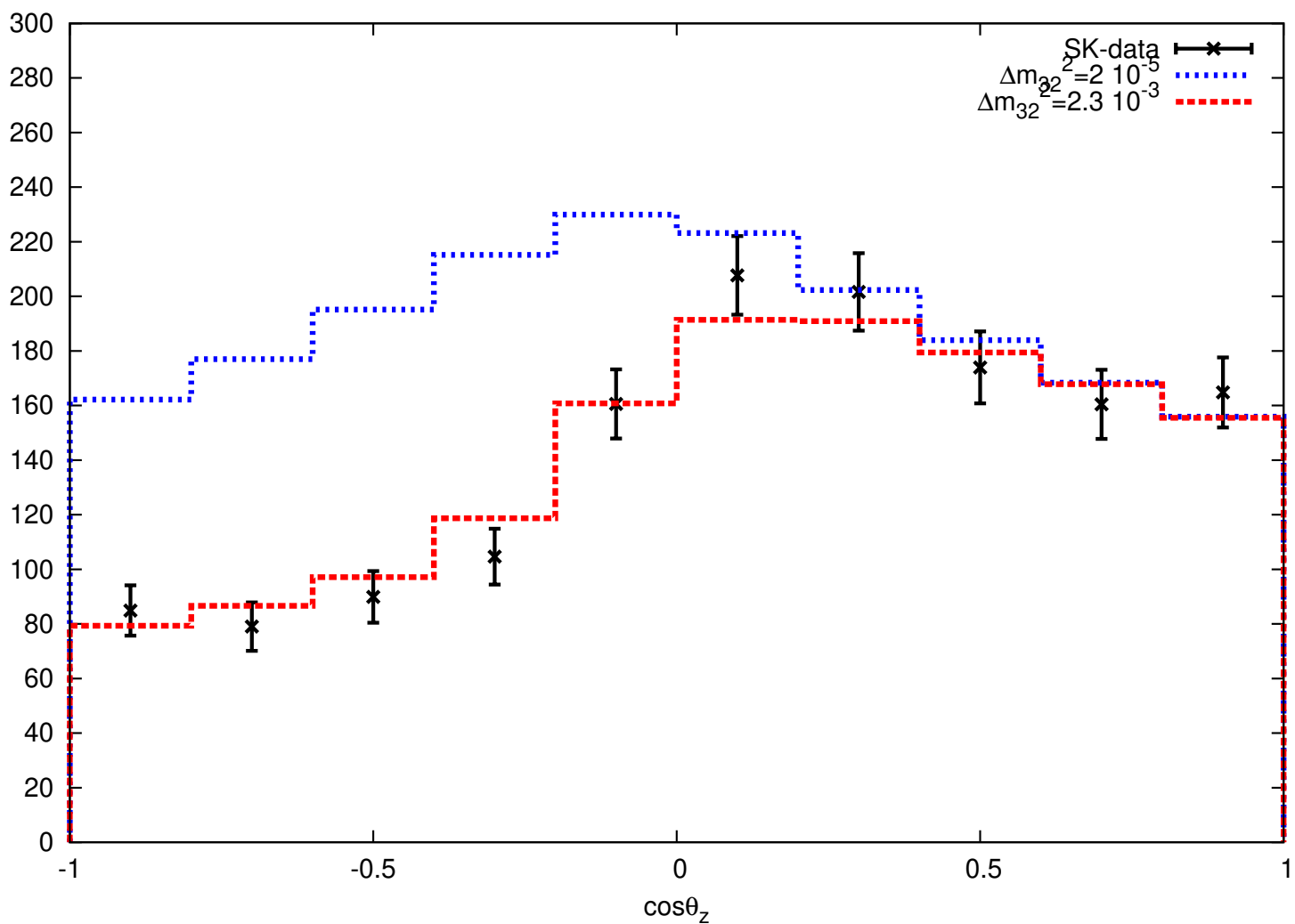


Figura 6.5: Nossos resultados para o número de múons mais anti-múons em SK para a região de Multi-GeV comparado com os dados da colaboração SK. Em ambos os casos são usados como entrada os fluxos calculados por Honda [21].

# Capítulo 7

## Neutrinos com massa variável, MaVaN's

Através da observação de supernovas IA sabemos que o universo está em expansão acelerada [79],[80], [81] \*. Quando olhamos para supernovas muito distantes, percebemos que elas estão se afastando de nós. Quanto mais distante a estrela, maior é a velocidade com que ela se afasta, tanto de um observador na Terra como das outras estrelas. Desta forma, para descrever um universo no qual todos os pontos estão se afastando entre si é preciso que este universo esteja em expansão.

O efeito de expansão pode ser obtido se adicionarmos ao conteúdo do universo um fluido homogêneo com densidade de energia  $\rho_\lambda = \frac{\lambda c^4}{8\pi G}$  [82], a chamada *energia escura*. Este fluido apresenta pressão negativa e faz com que o universo como um todo se expanda de forma acelerada. É um fato marcante que 73% do universo deve estar sob a forma de energia escura .

Uma forma de acomodar a expansão acelerada do universo na Teoria da Relatividade Geral de A. Einstein é incluir a chamada constante cosmológica que é responsável pela expansão acelerada do universo. Uma possibilidade seria atribuir este à densidade de energia do vácuo, constante, de tal forma que a pressão  $p$  e a densidade  $\rho$  estão relacionadas pela equação de estado  $p = -\rho$ . Contudo existe uma grande discrepância entre os valores teóricos e os exigidos pelos experimentos cosmológicos, [83],[85],[86], e dessa forma outras explicações para o setor de energia escura passaram a ser buscadas.

Existe hoje na literatura uma quantidade enorme de modelos teóricos que se destinam, de alguma forma, a explicar a expansão acelerada do universo. Dentre todas essas possibilidades, uma forma interessante de se obter a pressão negativa necessária à expansão do universo é através da inclusão de um campo escalar responsável pela variação do valor esperado da energia do vácuo.

---

\*Trabalho agraciado com o Prêmio Nobel de Física em 2011.

Como a energia escura deve estar uniformemente distribuída em todo o espaço, sua densidade é constante em todos os pontos e também em todos os instantes. A chamada *coincidência cósmica* se refere ao fato de que, hoje, a densidade de energia da matéria bariônica tem aproximadamente o mesmo valor da densidade da energia escura. Faz sentido pensar em um efeito dinâmico relacionando estas duas escalas. A inclusão de um campo escalar permite então criar um mecanismo responsável por esta relação entre as densidades de neutrinos e da energia escura através do acoplamento neutrino-escalar. Neste modelo o escalar faz o papel de energia escura e o acoplamento com os neutrinos torna a massa dos neutrinos dependente da densidade do meio. Assim temos neutrinos cuja massa é variável (MaVaN's) [10], [87], [56], [55].

O formalismo *MaVaN's* leva em conta uma interação *não padrão* entre o neutrino e um campo escalar neutro que pode acoplar os neutrinos tanto com a matéria bariônica quanto com os chamados neutrinos de fundo, o análogo em neutrinos para a radiação cósmica de fundo. Este acoplamento pode ter consequências importantes em cosmologia sendo portanto objeto de estudos atualmente tal qual relatado em [58] [88].

Um sinal estatisticamente favorável à existência de tal acoplamento implicará invariavelmente em um futuro estudo detalhado deste modelo no formalismo de teoria quântica de campos. Neste trabalho, todavia, nos limitamos inicialmente a uma investigação fenomenológica.

## 7.1 Formalismo MaVaN

Nós adotamos o formalismo usado por [58] para qualquer lagrangeano para neutrinos do tipo de Dirac. Como segue na própria referência, um Lagrangeano similar pode ser construído para neutrinos do tipo de Majorana. Nesse modelo incluímos no Lagrangeano do Modelo Padrão das partículas elementares mais um campo escalar leve ( $\phi$ ) de massa  $m_S$  o qual acopla muito fracamente com os neutrinos  $\nu_i$  e com os campos fermiônicos  $f = e, n, p$ . A forma de tal Lagrangeano é dada então por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \Sigma_i \bar{\nu}_i (i\partial - m_i^0) \nu_i + \Sigma_f \bar{f} (i\partial - m_i^0) f \\ & + \frac{1}{2} [\phi (\partial^2 - m_S^2) \phi] + \Sigma_{ij} \lambda_{ij}^\nu \bar{\nu}_i \nu_j \phi + \Sigma_{pq} \lambda^f \bar{f}_p f_q \phi \end{aligned} \quad (7.1)$$

onde  $m_i^0$  são as massas dos neutrinos no vácuo devidas aos neutrinos de fundo já mencionados anteriormente.  $\lambda_{ij}^\nu$  e  $\lambda_{ij}^f$  são, respectivamente, os acoplamentos de Yukawa neutrino-escalar e

férmion-escalar. Nesse meio os neutrinos adquirem massas dadas por

$$\begin{aligned} m_{ij}(r) &= m_i^0 \delta_{ij} - M_{ij}(r) \\ M_{ij}(r) &= \frac{\lambda_{ij}^\nu}{m_S^2} \left( \Sigma_f \lambda^f n_f(r) + \Sigma_a \lambda_{aa}^\nu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{M_{aa}}{\sqrt{k^2 + M_{aa}^2}} f_a(r, k) \right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Aqui  $n_f(r)$  é a densidade de número para o férmion  $f$  e  $f_a(r, k)$  são os números de ocupação para  $\nu + \bar{\nu}$  com momento  $k$  acima dos neutrinos de fundo e  $r$  é o ponto aonde o neutrino se encontra.. Se o escalar  $\phi$  puder ser o aceleron [11], ele contribui para a massa do neutrino com um potencial efetivo que varia como função da densidade de neutrinos,

$$\lambda^\nu = \frac{\partial m_\nu}{\partial \phi} |_{\langle \phi \rangle}. \quad (7.3)$$

Aqui  $\langle \phi \rangle$  é o valor esperado no vácuo para o campo escalar  $\phi$ . Este campo pode ser o aceleron, cujos acoplamentos com a matéria visível podem ser limitados via gravitação quântica, sendo parametrizados por [61]

$$\lambda^f = \lambda'^f \frac{m_f}{M_{PL}} < 10^{-21}, \quad (7.4)$$

onde  $M_{PL}$  é massa de Planck,  $M_{PL} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2$ , e especifica a escala na qual os efeitos de gravidade quântica se tornam importantes. Aqui  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N(m/kg)}^2$  é a constante gravitacional.

Caso as massas dos neutrinos, no vácuo, sejam hierarquizadas,  $0 = m_1^0 < m_2^0 < m_3^0$ , então tal como feito em [62, 63], podemos negligenciar a princípio a contribuição devida aos neutrinos de fundo, e escrever a dependência com a a matéria bariônica devida a esta interação efetiva não padrão, a qual ocorre paralelamente ao efeito MSW [84], como

$$M_{ij}(r) = \frac{\lambda_{ij}^\nu}{m_S^2} \Sigma_f \lambda^f n_f(r). \quad (7.5)$$

Na oscilação padrão a evolução de três neutrinos depende de duas diferenças de massas e três ângulos de mistura. Em três sabores de neutrinos, portanto, a evolução temporal padrão dos neutrinos atmosféricos pode ser dada por  $i \frac{d}{dt} |\Psi \rangle = H |\Psi \rangle$ , onde,

$$H = \left( \frac{UM^2U^\dagger}{2E} + V \right), \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

$\Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\odot}^2 \ll \Delta m_{32}^2 = \Delta m_{atm}^2$  e parametrizamos a matriz de mistura,  $U$ , da seguinte

forma

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\phi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\phi} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde as sub-matrizes de  $U$  fazem referência aos diferentes ângulos de mistura.  $\theta_{ij}$  se refere à oscilação entre os auto-estados de massa  $\nu_i$  e  $\nu_j$ .

A modificação devida a MaVaN's é a introdução de um termo dependente da densidade em cada elemento da matriz de massas. Usualmente, na literatura de MaVaN's, efeitos devidos aos termos não diagonais na Eq. (7.5) são negligenciados, e buscam-se apenas mudanças nos auto-estados de massa devidas à variação na densidade do meio, sem alterar a mistura entre os neutrinos. É precisamente neste ponto que **nosso modelo difere**, pois levamos em conta termos não diagonais na matriz de mistura na base de massa. Isso significa que não estamos restringindo que a nova interação responsável pelo acoplamento do neutrino com o campo escalar seja diagonal na base de massa dos neutrinos. Podemos gerar a massa dos termos não diagonais multiplicando a diferença quadrática de massas atmosférica,  $\Delta m_{32}^2$ , por um parâmetro de acoplamento  $\alpha_i$  o qual descreve a intensidade da interação e uma função da densidade. Além disso, a fim de suavizar os efeitos das variações abruptas da densidade sentida pelos neutrinos ao cruzar a Terra, usaremos a definição da dependência efetiva da massa dos neutrinos com a densidade terrestre adotada em [58] a qual faz uso da função  $\tanh(\frac{\rho_l}{\rho_0})$ . Sendo assim para os termos não diagonais da matriz de massa temos

$$\Delta m_{MaVaN}^2 \rightarrow \alpha_i \Delta m_{32}^2 \times \tanh\left(\frac{\rho_l}{\rho_0}\right), \quad (7.7)$$

onde  $\rho_l$  é a densidade eletrônica que o neutrino sente ao se propagar através da Terra e  $\rho_0$  é a densidade eletrônica no centro da Terra. Os valores da densidade terrestre que usamos são fornecidos por [77]. O perfil de densidade eletrônica é mostrado na Fig. (7.1). Vemos que para neutrinos que cruzam apenas a crosta terrestre,  $\cos\theta \rightarrow 0$ , o valor da densidade atravessado pelo neutrino é da ordem de 1/3 do valor do valor da densidade atravessado por neutrinos que se propagam através da região do centro da Terra,  $\cos\theta \rightarrow -1$ . Esperamos portanto que os efeitos de MaVaN sejam intensificados para neutrinos que atravessam o centro da Terra.

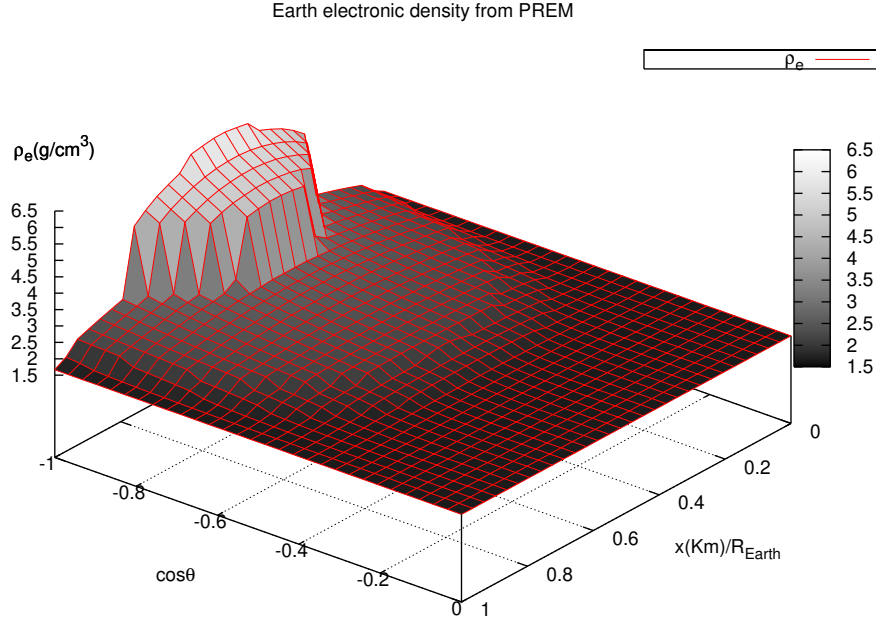


Figura 7.1: Perfil de densidade eletrônica terrestre em função do ângulo zenital e da razão entre a distância percorrida no interior da Terra e o raio terrestre.

## 7.2 Probabilidade de oscilação na base de massa

Para obter a evolução temporal dos neutrinos, supomos inicialmente o desacoplamento entre a escala solar e a atmosférica, [23], nos concentrando na transição  $|\nu_\mu\rangle \rightarrow |\nu_\tau\rangle$ . Ou seja, estamos resolvendo um sistema de dimensão 2. Como dito anteriormente, não excluimos termos não diagonais na base de massa. Dessa forma, obtemos para a evolução temporal do neutrino nessa base

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{pmatrix} \equiv \delta \begin{bmatrix} (\alpha_1 f(\rho))^2 & (\alpha_3 f(\rho))^2 \\ (\alpha_3 f(\rho))^2 & (1 + \alpha_2 f(\rho))^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu_2(0) \\ \nu_3(0) \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

onde  $f(\rho)$  é uma função da densidade bariônica do meio em que o neutrino se propaga, e o conjunto de parâmetros  $[\alpha_i]$  se refere aos acoplamentos da interação não padrão do neutrino com a matéria bariônica. Primeiramente, resolvemos o caso simplificado de  $\alpha_3 = 0$ . Podemos neste caso escrever a probabilidade de conversão  $P_{(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)}$  como

$$\begin{aligned} P_{(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)} &= \cos^2(b_3 t) + \text{sen}^2(b_3 t) \cos^2(2\theta_{23}) \\ &= 1 - \text{sen}^2(2\theta_{23}) \text{sen}^2(b_3 t), \end{aligned} \quad (7.9)$$

onde

$$b_3 = \frac{\delta}{2}(a_1 - a_2) = \frac{1}{2} \frac{\Delta m_{32}^2}{2E} [(\alpha_1 f(\rho))^2 - (1 + \alpha_2 f(\rho))^2] . \quad (7.10)$$

Para o caso  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  e  $t = L$  recuperamos o caso padrão para oscilação do neutrino atmosférico,

$$P_{(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)} = 1 - \text{sen}^2(2\theta_{23}) \text{sen}^2 \left[ \frac{\Delta m_{32}^2}{4E} L \right] . \quad (7.11)$$

No apêndice (D) descrevemos em detalhes o procedimento de cálculo.

### 7.3 Caso $\alpha_3 \neq 0$ :

O caso mais geral possível para a evolução dos neutrinos segundo o formalismo MaVaN em duas gerações de neutrinos é dado pela Eq. (7.8). Contudo a própria colaboração Super-Kamiokande já realizou a análise para o caso  $\alpha_3 = 0$ . Dessa forma, em nosso trabalho estudamos o caso não diagonal, pois não existe, a priori, nenhuma indicação de que a interação não padrão responsável pelo mecanismo MaVaN deva ser diagonal na base de massa dos neutrinos. Para isso fazemos  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , e mantemos o termo  $a_{12} = a_{21} = (\alpha_3 f(\rho))^2$  onde  $\alpha_3 = \alpha_{MAVAN}$ . Isso nos leva a seguinte equação de evolução:

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \nu_\mu(t) \\ \nu_\tau(t) \end{bmatrix} = \frac{\Delta m_{32}^2}{2E_\nu} \begin{pmatrix} c\theta_{23} & -s\theta_{23} \\ s\theta_{23} & c\theta_{23} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (\alpha_3 f(\rho))^2 \\ (\alpha_3 f(\rho))^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c\theta_{23} & s\theta_{23} \\ -s\theta_{23} & c\theta_{23} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \nu_\mu(0) \\ \nu_\tau(0) \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

onde  $f(\rho)^2 = \alpha_i \tanh\left(\frac{\rho_i}{\rho_0}\right)$ ,  $c\theta_{23}$  representa  $\cos\theta_{23}$  e  $s\theta_{23}$  representa  $\sin\theta_{23}$ .

Dada a forma como esta equação de evolução foi escrita, vemos que para o caso  $\alpha_3 = 0$ , o problema se reduz ao mecanismo de oscilação padrão em duas gerações de neutrinos, e para o caso  $\alpha_3 = 1, 0$  temos que o efeito MaVaN tem a mesma intensidade que o mecanismo de oscilação padrão. Para mostrar como o formalismo de neutrinos MaVaN's altera a probabilidade de oscilação dos neutrinos atmosféricos mostramos na Fig. (7.2) nossos resultados para a evolução numérica da probabilidade dada pela Eq. (7.12) para diferentes valores do parâmetro  $\alpha_3$  e energia fixa em  $E_\nu = 250$  MeV.

De forma geral, podemos dizer que a inclusão do mecanismo MaVaN altera tanto a fase quanto a amplitude de oscilação dos neutrinos atmosféricos. Conforme pode ser visto quando analisamos as curvas mostradas na Fig. (7.2), as alterações são mais intensas quanto maior for o valor do

parâmetro  $\alpha_3$  e quanto mais próximo de -1 for o valor de  $\cos\theta_\nu$ , pois nesse caso maior é a densidade de matéria que o neutrino atravessa.

Especificamente falando, o efeito MaVaN atua reduzindo a probabilidade de oscilação  $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau}$ . Nesse sentido, quanto maior for o valor do parâmetro  $\alpha_{MaVaN}$ , maior será a redução do efeito de oscilação, aumentando dessa forma a probabilidade de sobrevivência dos (anti) neutrinos muônicos. Como consequência do mecanismo MaVaN, a intensidade deste efeito depende da densidade bariônica da matéria que os neutrinos atravessam. Sendo assim ocorre maior redução dos efeitos de oscilação dos neutrinos muônicos para valores de  $\cos\theta_\nu \rightarrow -1$ . Como consequência, de modo geral a inclusão do mecanismo MaVaN aumenta o número de neutrinos esperados em SK quando comparado ao número de neutrinos esperados quando usamos o mecanismo de oscilação padrão.

A pergunta agora é como essas alterações na probabilidade de oscilação de neutrinos atmosféricos modifica a nossa descrição dos dados de SK. Porém antes disso, achamos conveniente explicitar alguns detalhes de um procedimento de cálculo que nos permita escrever a evolução temporal dos neutrinos atmosféricos de forma analítica com relação ao ângulo de mistura  $\theta_{23}$ .

## 7.4 Caso $\alpha_3 \neq 0$ : Diagonalização via Rotação

Novamente deixamos os detalhes dos cálculos para o apêndice E e mencionamos apenas as principais passagens para a obtenção da probabilidade de oscilação. Aqui podemos diagonalizar  $H$  através da rotação  $|\nu_i\rangle = U'|\Psi_i\rangle$  obtendo dessa forma

$$\begin{aligned} H'' &= U' H U'^{\dagger} \\ &= \begin{pmatrix} A \cos^2(\eta) + C \sin^2(\eta) + 2B \sin(\eta) \cos(\eta) & (C - A) \sin(\eta) \cos(\eta) + B \cos(2\eta) \\ (C - A) \sin(\eta) \cos(\eta) + B \cos(2\eta) & A \sin^2(\eta) + C \cos^2(\eta) - 2B \sin(\eta) \cos(\eta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Ou seja, para diagonalizar o sistema, temos que

$$\tan(2\eta) = \frac{2(\alpha_3 f(\rho))^2}{(\alpha_1 f(\rho))^2 - (1 - \alpha_2 f(\rho))^2}. \quad (7.14)$$

Como definimos a rotação, temos que os auto-estados dos neutrinos de massa estão relacionados com os auto-estados que diagonalizam  $H$  por

$$|\nu_1\rangle = \cos(\eta)|\Psi_1\rangle + \sin(\eta)|\Psi_2\rangle$$



$$|\nu_2\rangle = -\sin(\eta)|\Psi_1\rangle + \cos(\eta)|\Psi_2\rangle . \quad (7.15)$$

Na base  $|\Psi\rangle$ , a matriz  $H''$  é diagonal, e, por causa disso, podemos escrever

$$|\Psi_i, t\rangle = e^{-iE_i''t}|\Psi_i, 0\rangle . \quad (7.16)$$

Logo, para a amplitude de probabilidade de conversão temos

$$\langle\nu_2|\nu_1, t\rangle = \cos(\eta)\sin(\eta)[e^{-iE_2''t} - e^{-iE_1''t}] . \quad (7.17)$$

Então a probabilidade de oscilação na base de massa fica

$$P_{(\nu_1 \rightarrow \nu_2)} = 2\cos^2(\eta)\sin^2(\eta)\{1 - \cos[(E_2'' - E_1'')t]\} . \quad (7.18)$$

Aqui os auto-valores de energia  $E_i''$  (na base  $\{|\Psi_i\rangle\}$  que diagonaliza  $H''$ ) podem ser escritos como

$$\begin{aligned} E_1'' &= A\cos^2(\eta) + C\sin^2(\eta) + 2B\sin(\eta)\cos(\eta) \\ E_2'' &= A\sin^2(\eta) + C\cos^2(\eta) - 2B\sin(\eta)\cos(\eta) , \end{aligned} \quad (7.19)$$

ou seja, a diferença  $E_2'' - E_1''$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E_2'' - E_1'' &= -A\cos(2\eta) + C\cos(2\eta) - 2B\sin(2\eta) \\ &= (C - A)\cos(2\eta) - 2B\sin(2\eta) . \end{aligned} \quad (7.20)$$

Para o caso de  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  temos

$$\tan(2\eta) = 0 \rightarrow \sin(2\eta) = 0 \rightarrow \cos(2\eta) = 1 . \quad (7.21)$$

Nesse caso,

$$E_2'' - E_1'' = C(\alpha_2 = 0) - A(\alpha_1 = 0) = \delta . \quad (7.22)$$

Ainda assim, se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ,  $\sin^2(\eta) = 0$  e desse modo  $P_{(\nu_1 \rightarrow \nu_2)} = 0$ .

## 7.5 Cálculo de $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}$

Uma vez conhecida a evolução temporal dos auto-estados de massa do neutrino, podemos agora calcular a probabilidade de sobrevivência para um auto estado de sabor,  $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = |\langle\nu_\mu|\nu_\mu, t\rangle|^2$ .

Podemos relacionar os neutrinos de sabor com os neutrinos de massa através de

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{23}) & \sin(\theta_{23}) \\ -\sin(\theta_{23}) & \cos(\theta_{23}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} , \quad (7.23)$$

ou seja,

$$|\nu_\mu\rangle = \cos(\theta)|\nu_1\rangle + \sin(\theta)|\nu_2\rangle, \quad (7.24)$$

onde a evolução temporal dos auto-estados de massa é dada pela Eq. (7.15). Desta forma para a amplitude de probabilidade de sobrevivência do neutrino muônico temos

$$\begin{aligned} \langle \nu_\mu | \nu_\mu, t \rangle &= \left[ \cos^2(\theta) \sin^2(\eta) + \sin^2(\theta) \cos^2(\eta) + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\eta) \sin(\eta) \right] \left( e^{-iE_2''t} - e^{-iE_1''t} \right) \\ &+ e^{-iE_1''t} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Escrevendo agora

$$B' = 1 - A', \quad (7.26)$$

onde

$$A' = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta) \cos(2\eta) + \sin(2\theta) \sin(2\eta)]^2, \quad (7.27)$$

a probabilidade de sobrevivência do neutrino muônico é dada por

$$\begin{aligned} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} &= \left| B' e^{-iE_1''t} + A' e^{-iE_2''t} \right|^2 \\ &= 1 + 2A'(A' - 1) \left\{ \sin^2 \left[ \frac{1}{2} (E_2'' - E_1'')t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Da Eq. (7.14) vemos que

$$\tan(2\eta) = \frac{2(\alpha_3 f(\rho))^2}{(\alpha_1 f(\rho))^2 - (1 - \alpha_2 f(\rho))^2}. \quad (7.29)$$

Usando relações trigonométricas podemos escrever

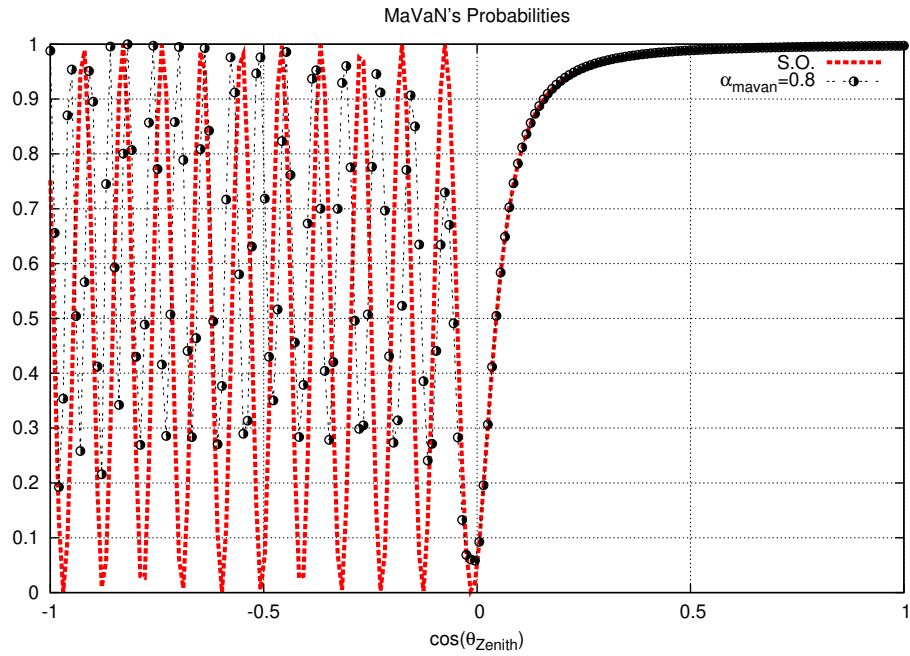
$$\begin{aligned} \cos(2\eta) &= \frac{(A - C)}{\sqrt{(A - C)^2 + (2B)^2}} \\ \sin(2\eta) &= \frac{2B}{\sqrt{(A - C)^2 + (2B)^2}}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

### 7.5.1 Casos especiais: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

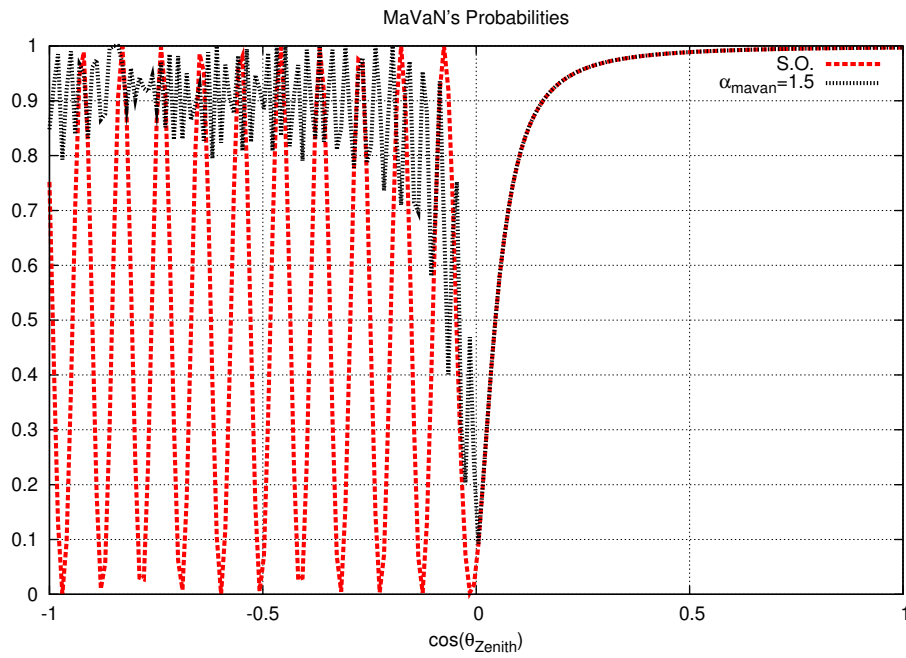
Novamente, se  $\alpha_3 = 0$ , temos  $\sin(2\eta) = 0$ , e  $\cos(2\eta) = 1$ . Ou seja,  $\sin(\eta) = 0$ , e  $\cos(\eta) = \pm 1$ .

Nesse caso, segundo a Eq. (7.27), temos

$$\begin{aligned} A' &= \left[ \cos^2(\theta) \sin^2(\eta) + \sin^2(\theta) \cos^2(\eta) + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\eta) \sin(\eta) \right]; \\ A' &= \sin^2(\theta). \end{aligned} \quad (7.31)$$



(a)



(b)

Figura 7.2: Na figura temos a probabilidade de sobrevivência  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)$  em função do ângulo zenital para o caso padrão comparada com o valor obtido quando fazemos  $\alpha_3 = 0.8$  e  $\alpha_3 = 1.5$ . A curva tracejada mostra o caso com  $\alpha_3 = 0$ , que é o caso de oscilação padrão. A energia do neutrino foi mantida fixa em 250 MeV,  $\sin(2\theta) \approx 1,0$  e  $\Delta m_{32}^2 = 0,003 \text{ eV}^2$ .

Nesse caso,

$$\begin{aligned}
P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} &= 1 + 2A'(A' - 1)\{1 - \cos[(E_2'' - E_1'')t]\} \\
&= 1 - \sin^2(2\theta_{23}) \left\{ \sin^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E_\nu} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Para implementar numericamente a evolução temporal do neutrino dada pela Eq. (7.12) fizemos uso do fato de que podemos descrever a dependência no ângulo de mistura atmosférico padrão,  $\theta_{23}$ , de forma analítica, evitando assim mais uma integração numérica. Isso é possível quando evoluímos numericamente as amplitudes de probabilidade e então, uma vez de posse dessas amplitudes de probabilidade de conversão na base de massa evoluídas no tempo, podemos obter a probabilidade de conversão  $P_{\mu\mu}$  na base de sabor .

$$\begin{aligned}
P_{\mu \rightarrow \mu} &= AA^* \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta_{23})) \right]^2 + CC^* \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta_{23})) \right]^2 \\
&+ (4BB^* + AC^* + CA^*) \frac{1}{4} \sin^2(2\theta_{23})(AB^* + BA^*) \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta_{23})) \right] \sin(2\theta_{23}) \\
&+ (BC^* + CB^*) \sin(2\theta_{23}) \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta_{23})) \right]
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Dessa forma, fatoramos a probabilidade de oscilação dos neutrinos atmosféricos em cinco termos, cada um deles dependente de forma diferente de  $\theta_{23}$ . No apêndice F mostramos detalhes desse cálculo.

No próximo capítulo estudaremos como a inclusão destes efeitos altera o ajuste dos dados de de neutrinos atmosféricos em Super-Kamiokande.

# Capítulo 8

## Análise de dados: Teste de $\chi^2$

Aqui descreveremos nosso método para analisar os dados de SK. Em geral, podemos usar diferentes métodos para tratar os dados. Escolhemos fazer uma análise de  $\chi^2$ . Comparamos o resultado que obtivemos para o número de eventos em SK, utilizando oscilação padrão. Utilizamos o método do  $\chi^2$  descrito a seguir.

$$\chi^2(\alpha) = \sum_{i=1}^{10} \left( \frac{N_i^{data} - \alpha N_i^{teo}}{\sigma_i} \right)^2 + \frac{(\alpha - 1)^2}{\sigma_\alpha^2} \quad (8.1)$$

Na Eq. (8.1) a função  $\chi^2(\alpha)$  contém o parâmetro  $\alpha$  que se refere à normalização dos dados, além diferença quadrática de massas,  $\Delta m_{32}^2$ ,  $N_i^{data}$  são os dados de SK,  $N_i^{teo}$  são os nossos pontos obtidos via integração do fluxo de neutrinos multiplicado pela seção de choque e probabilidade de oscilação padrão.  $\sigma_i$  se refere ao erro do ponto  $i$  informado pela colaboração SK, e  $\sigma_\alpha$  é a incerteza na normalização total do número de eventos, suposta por nós como de 30%. Este valor se refere à diferença nos resultados para o fluxo de neutrinos atmosféricos fornecidos pelos diferentes modelos disponíveis. O índice  $i$  se refere ao intervalo angular, e estamos utilizando 10 intervalos para a análise.

Derivando a Eq. (8.1) em relação a  $\alpha$  encontramos o valor de  $\alpha_{min}$ ,

$$\alpha_{min} = \frac{\sum_i \left( \frac{N_i^{data} N_{ij}^{teo}}{\sigma_i^2} \right) + \frac{1}{\sigma_\alpha^2}}{\sum_i \left( \frac{N_{ij}^{teo}}{\sigma_i} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_\alpha^2}}. \quad (8.2)$$

Podemos agora construir a dependência no ângulo de mistura atmosférico. Para tal escrevemos a dependência no número de eventos em função de  $\text{sen}^2(2\theta_{23})$ . Para isso, escrevemos o número de eventos de neutrinos obtido levando em conta o mecanismo de oscilação de sabores,  $N_i^{teo}$  como sendo o número de eventos de neutrinos obtido sem o mecanismo de oscilação,  $N_{i,NOsc}^{teo}$ , mais

a dependência em  $\sin^2(2\theta_{23})$  multiplicada pela diferença entre  $N_{i,NOsc}^{teo}$  e o número de neutrinos obtido levando em conta o mecanismo de oscilação no caso de  $\sin^2(2\theta_{23}) = 1$ ,  $N_{i,Osc}^{teo}$ .

$$N_i^{teo} = N_{i,NOsc}^{teo} + \sin^2(2\theta_{23})[N_{i,Osc}^{teo} - N_{i,NOsc}^{teo}] \quad (8.3)$$

Dessa forma, encontramos  $\alpha_{min}$  fazendo

$$\frac{d\mathcal{X}^2[\Delta m_{32}^2, \sin^2(2\theta_{23})]}{d\alpha} = 0, \quad (8.4)$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned} \alpha_{min} &= \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \frac{N_i^{data}}{\sigma_i^2} N_{i,NOsc}^{theo} + \sum_{i=1}^N \frac{N_i^{data}}{\sigma_i^2} \sin^2(2\theta_{23}) [N_{i,Osc}^{theo} - N_{i,NOsc}^{theo}] + \frac{1}{\sigma_\alpha^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{(N_{i,NOsc}^{theo})^2}{\sigma_i^2} + \sum_{i=1}^N (\sin^2(2\theta_{23}))^2 \frac{[N_{i,Osc}^{theo} - N_{i,NOsc}^{theo}]^2}{\sigma_i^2} + 2\sum_{i=1}^N \sin^2(2\theta_{23}) \frac{N_{i,NOsc}^{theo}}{\sigma_i^2} [N_{i,Osc}^{theo} - N_{i,NOsc}^{theo}] + \frac{1}{\sigma_\alpha^2}}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Substituindo este valor na Eq. (8.1) podemos obter a função  $\mathcal{X}^2$  em função dos parâmetros de oscilação. Na Fig. (8.1) mostramos nosso resultado para  $\Delta\mathcal{X}^2 \equiv \mathcal{X}^2 - \mathcal{X}_{min}^2$  em função de  $\Delta m_{32}^2$  para o caso de  $\sin^2(2\theta_{23}) = 1$ , levando em conta eventos do tipo eletrônico e neutrino muônico para as regiões de sub-GeV e multi-GeV.

## 8.1 Análise de oscilações usuais usando $\mathcal{X}^2$

Na Fig. (8.2) mostramos nosso resultado para a região permitida para os parâmetros atmosféricos  $\Delta m_{32}^2$  e  $\sin^2(2\theta_{23})$  para diferentes valores de nível de confiança. Para o caso de dois parâmetros livres, estes são obtidos fazendo  $\Delta\mathcal{X}^2 = 2, 3$ ,  $\Delta\mathcal{X}^2 = 4, 61$ , e  $\Delta\mathcal{X}^2 = 5, 3$ , que se referem as regiões permitidas de 68%, 90%, e 99% de nível de confiança. Para obter este gráfico, assumimos máxima correlação entre os histogramas quando levamos em consideração os eventos do tipo eletrônico e muônico de SK para as duas regiões de energia, sub-GeV e multi-GeV, e os comparamos com nossos resultados para o número de eventos em SK utilizando o modelo padrão de oscilação de neutrinos. O ponto de melhor ajuste é para o conjunto de pontos  $(\Delta m_{32}^2, \sin^2(2\theta_{23})) = (0, 0027eV^2; 1, 0)$ , o que está em acordo com as análises da colaboração SK para a oscilação padrão [89].

## 8.2 Análise de $\mathcal{X}^2$ MaVaN's em SK

Como sabemos, o mecanismo de oscilação de neutrinos [47] explica a *Anomalia do neutrino atmosférico*, nome dado ao déficit no número de eventos de neutrinos muônicos medido no detector Super-Kamiokande quando comparado com as previsões vindas de raios cósmicos. No mecanismo de oscilação, a conversão de sabores de neutrinos é devida à diferença na propagação de auto-estados de neutrinos com massa diferente, e por isso surge a necessidade de que os neutrinos tenham massa.

A própria colaboração Super-Kamiokande, já realizou análises nos dados de neutrinos atmosféricos buscando efeitos devidos ao mecanismo de massa variável [57], [15]. Nestas análises foi feita a redução a um problema de oscilação de apenas dois sabores de neutrinos,  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  e o resultado confrontado com os dados de Super-Kamiokande. Nesse caso simples, um neutrino do tipo muônico tem a probabilidade de conversão para um neutrino do tipo tauônico dada por

$$\begin{aligned}
 P_{\mu\tau} &= 1 - P_{\mu\mu} = |\langle \nu_\tau | \nu_\mu; t \rangle|^2 \\
 &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left( 1,27 \frac{\Delta m_{jk}^2 (eV^2) L(\text{km})}{E(\text{GeV})} \right) \\
 P_{ee} &= 1 - P_{e\mu} = 1;
 \end{aligned}
 \tag{8.6}$$

Existem ainda outras publicações, tal qual [15], nas quais esta aproximação em dois sabores também é feita. Podemos interpretar ambos os resultados como se não houvesse necessidade da massa dos neutrinos depender da densidade bariônica do meio no qual o neutrino se propaga para descrever os dados de SK I. Nesse trabalho os autores usaram o modelo de oscilação simplificado ao caso de duas gerações de neutrinos, e incluíram tal dependência com a matéria da forma:

$$\Delta m_{32}^2 \rightarrow \Delta m_{32}^2 \times \left( \frac{\rho_l}{\rho_0} \right)^n
 \tag{8.7}$$

Aqui  $\rho_l$  é a densidade bariônica local e  $\rho_0$  é o seu valor padrão para o centro da Terra, e  $n$  é um parâmetro do modelo a ser determinado pela análise dos dados.

Uma característica comum às análises de MaVaN's em neutrinos atmosféricos já existentes é o fato de que o ângulo de mistura entre os neutrinos foi mantido constante, apenas o parâmetro associado à diferença de massa entre os auto-estados foi dado como dependente da densidade local, como pode ser verificado na Eq. (8.7).

A fim de verificar se os efeitos de neutrinos com massa variável são necessários para a descrição dos neutrinos atmosféricos, realizamos o mesmo tipo de análise de  $\chi^2$  dado pela Eq. (8.1), substituindo a probabilidade de oscilação de neutrinos dada pelo modelo padrão pela probabilidade MaVaN dada pela evolução temporal da Eq. (7.12) para diferentes valores de  $\alpha_3$ . Dessa forma, portanto, a probabilidade de oscilação passa a depender não mais de dois parâmetros, mas sim de três:

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(\Delta m_{32}^2, \sin^2(2\theta)) \longrightarrow P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(\Delta m_{32}^2, \sin^2(2\theta), \alpha_3) . \quad (8.8)$$

Dessa forma, agora o número de eventos preditos pela teoria também passa a depender destes três parâmetros,

$$N_i^{teo} = N_i^{teo}(\Delta m_{32}^2, \sin^2(2\theta_{23}), \alpha_3) . \quad (8.9)$$

Uma vez que obtivemos a descrição do número de eventos preditos pela inclusão do efeito MaVaN na evolução dos neutrinos atmosféricos, podemos escrever a função  $\chi^2$  dependente agora de três parâmetros,

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \chi^2(\Delta m_{32}^2, \sin^2(2\theta_{23}), \alpha_3) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{N_i^{data} - \alpha N_i^{teo}(\Delta m_{32}^2, \sin^2(2\theta_{23}), \alpha_3)}{\sigma_i} \right)^2 + \frac{(\alpha - 1)^2}{\sigma_\alpha^2} . \end{aligned} \quad (8.10)$$

Fazendo uso apenas dos dados de neutrinos muônico, inicialmente mantivemos fixo  $\sin^2(2\theta_{23}) = 1,0$  e mostramos na Fig. (8.3) nossos resultados para o  $\chi^2$  em função de  $\Delta m_{32}^2$  para  $\alpha_3 = 0, 0,5$  e  $1,0$ . Podemos dizer que a solução com  $\alpha_3 = 1,0$  foi completamente excluída pelos dados. Para o caso de  $\alpha_3 = 0,5$  a solução é desfavorecida pelos dados. Mais do que isso, ao estender a análise para o intervalo  $0,0 \leq \alpha_{MaVaN} \leq 1,0$  podemos encontrar qual é o melhor valor para o parâmetro  $\alpha_{MaVaN}$ .

Na Fig. (8.4) podemos ver esta dependência de  $\chi^2$  com o parâmetro  $\alpha_{MaVaN}$  para alguns valores de  $\Delta m_{32}^2$  próximos ao ponto de melhor ajuste,  $\Delta m_{32}^2 = 3 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ .

A principal característica a ser ressaltada é que para valores de  $\alpha_{MaVaN}$  próximos de zero, a descrição dos dados não é significativamente alterada, quando comparada com o caso  $\alpha_{MaVaN} = 0$ . Esta situação permanece até valores de  $\alpha_{MaVaN} \approx 0,25$ . Nesse caso, o efeito da interação não padrão tem intensidade igual a 25% da intensidade do efeito da oscilação padrão de neutrinos.

Para  $\alpha_{MaVaN} > 0,25$  vemos que a descrição dos dados fica pior, e para valores de  $\alpha_{MaVaN} > 0,4$  a solução já está excluída com mais de 90% de confiança.



Mostraremos agora nossos resultados para a análise dos eventos do tipo neutrino muônico na presença do mecanismo Mavan. Na Fig. (8.5) mostramos como o ajuste dos dados se altera com relação ao parâmetro  $\alpha_{MaVaN}$  para alguns valores de  $\Delta m_{32}^2$  até uma ordem de grandeza menor do que o valor de melhor ajuste. Podemos ver claramente que o fato de incluir o efeito MaVaN com pequena intensidade,  $\alpha_{MaVaN} < 0,25$ , não favorece valores do parâmetro  $\Delta m_{32}^2$  que são desfavorecidas pelo ajuste feito usando o mecanismo de oscilação padrão. Além disso, ao aumentar a intensidade do efeito MaVaN, as soluções que já eram desfavorecidas pela oscilação padrão se tornam ainda mais desfavorecidas.

Finalmente, na Fig. (8.6) mostramos nosso resultado para a região permitida a 90% no espaço dos parâmetros de  $\alpha_{MaVaN}$  e  $\Delta m_{32}^2$ . Podemos concluir que, independentemente do valor do parâmetro  $\Delta m_{32}^2$ , para valores de  $\alpha_{MaVaN} > 0,4$  a solução de MaVaN está excluída com 90% de confiança.

Para valores do parâmetro  $\Delta m_{32}^2$  próximos ao valor de melhor ajuste obtido pela análise da oscilação padrão, valores de  $\alpha_{MaVaN} < 0,4$  ainda são permitidos. Contudo, estas soluções em nada melhoram a descrição dos dados experimentais.

Dessa forma podemos concluir que a solução MaVaN para neutrinos atmosféricos está descartada para uma grande região do espaço de parâmetros e, na região na qual esta solução ainda é permitida pelos dados, ela não melhora o ajuste.

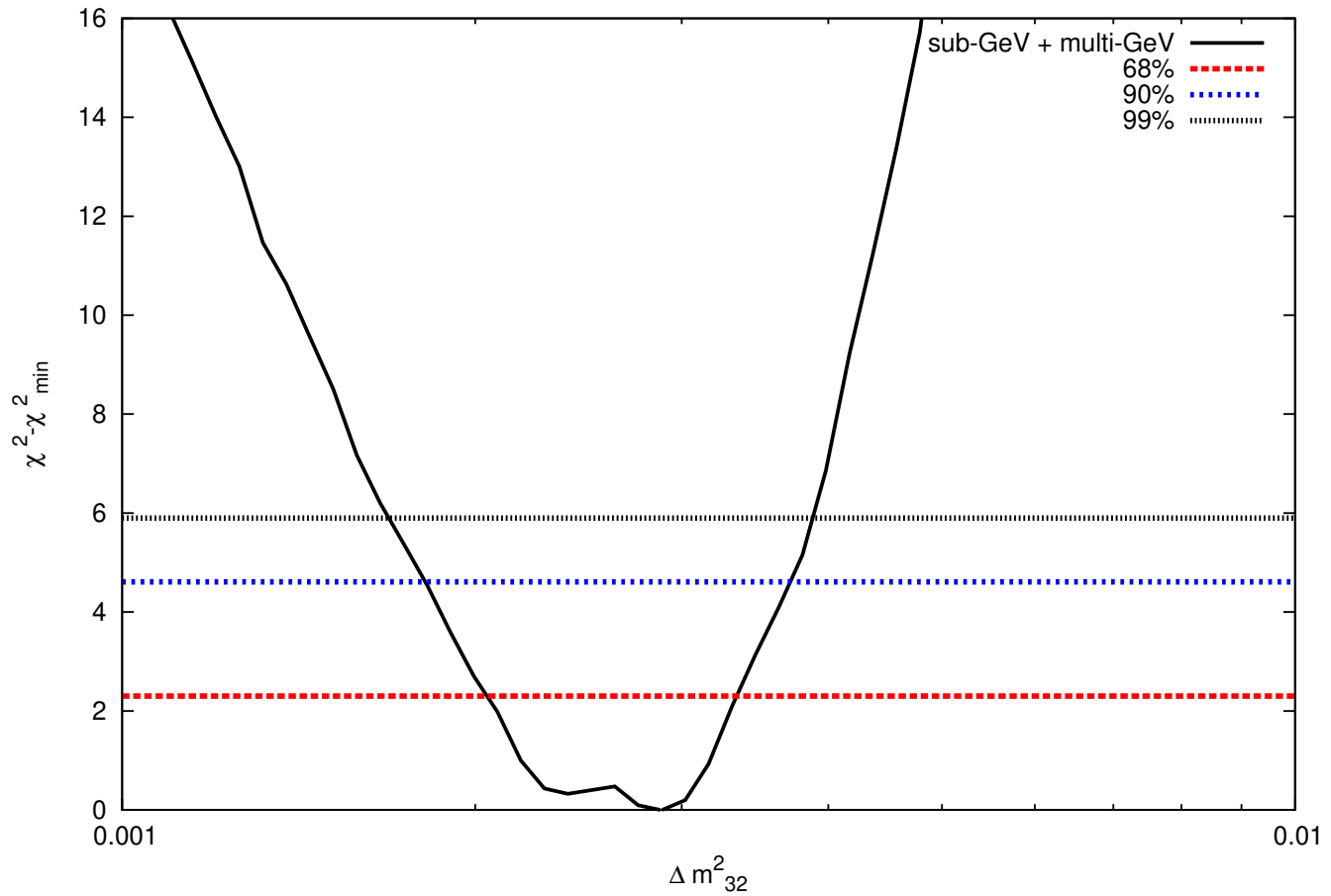


Figura 8.1: Nossos resultados para  $\Delta\mathcal{X}^2$  em função de  $\Delta m^2_{32}$  para o caso de  $\text{sen}^2(2\theta_{23}) = 1$ . Obtivemos  $\mathcal{X}^2_{min}$  43.7 para 38 graus de liberdade, quando  $\Delta m^2_{32} = 0.0027$ . As linhas tracejadas se referem à 68%, 90%, e 99% de nível de confiança.

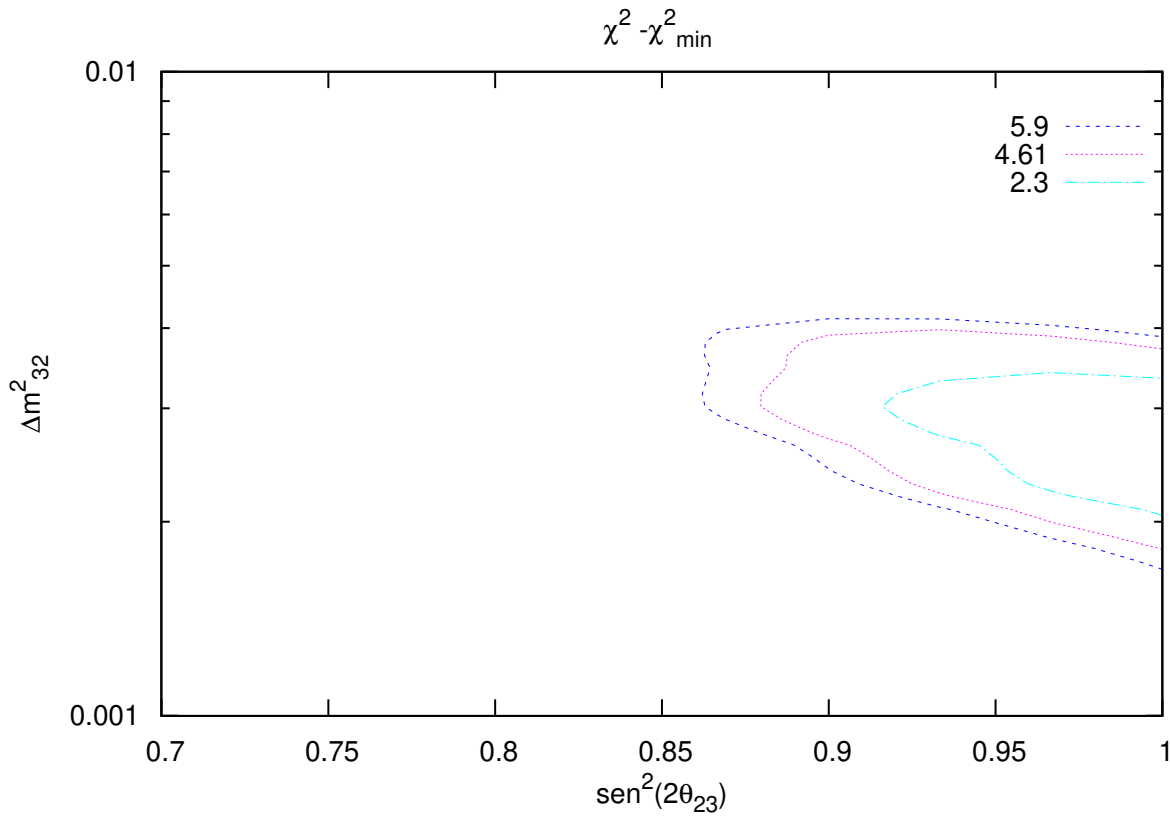


Figura 8.2: Nossos resultados para a região permitida para os parâmetros  $\Delta m^2_{32}, \theta_{23}$ . Obtivemos  $\chi^2_{\min} = 43.7$  para 38 graus de liberdade. As linhas tracejadas representam as regiões permitidas para o nível de confiança de 68%, 90% e 99%, e são obtidas fazendo  $\Delta\chi^2 = 2, 33$ ,  $\Delta\chi^2 = 4, 61$  e  $\Delta\chi^2 = 5, 9$ , respectivamente.

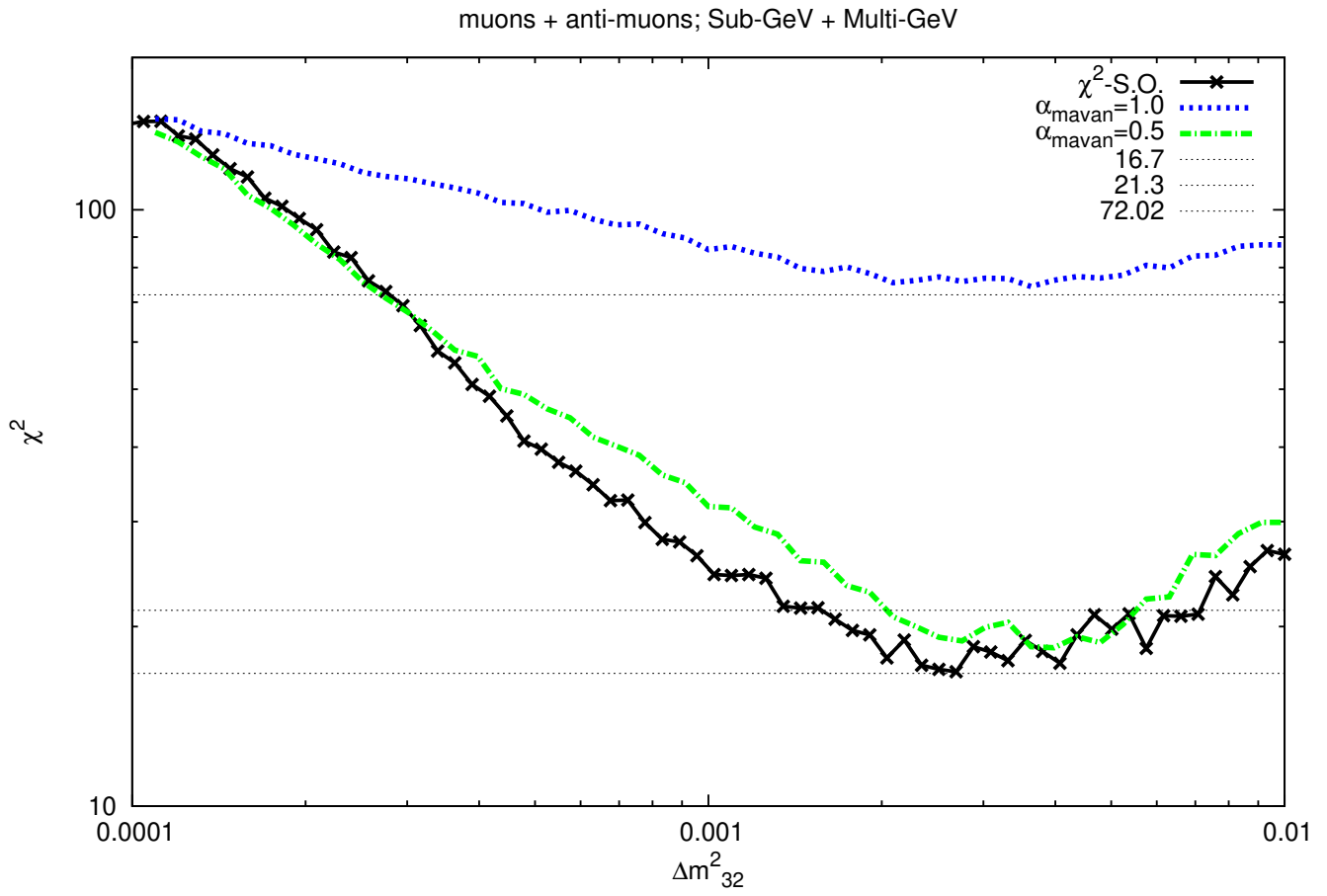


Figura 8.3: Nossos resultados para o  $\chi^2$  em função de  $\Delta m_{32}^2$  eV<sup>2</sup>. As linhas horizontais representam  $\Delta\chi^2 = 4,61$  que nos dá a região de 90%.

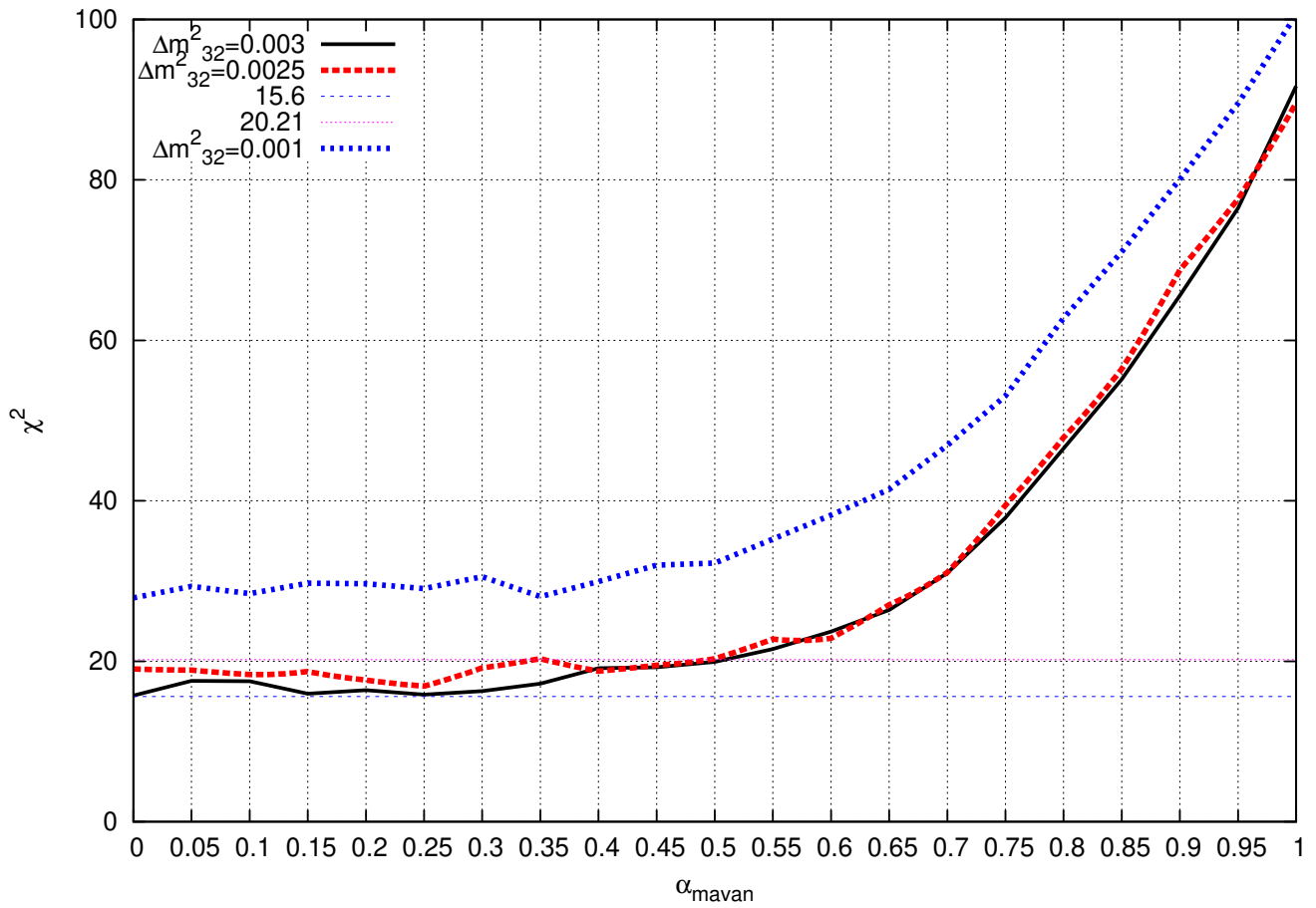


Figura 8.4: Nossos resultados para o  $\chi^2$  em função de  $\alpha_{MaVaN}$  para alguns valores específicos de  $\Delta m_{32}^2$  ( $eV^2$ ).

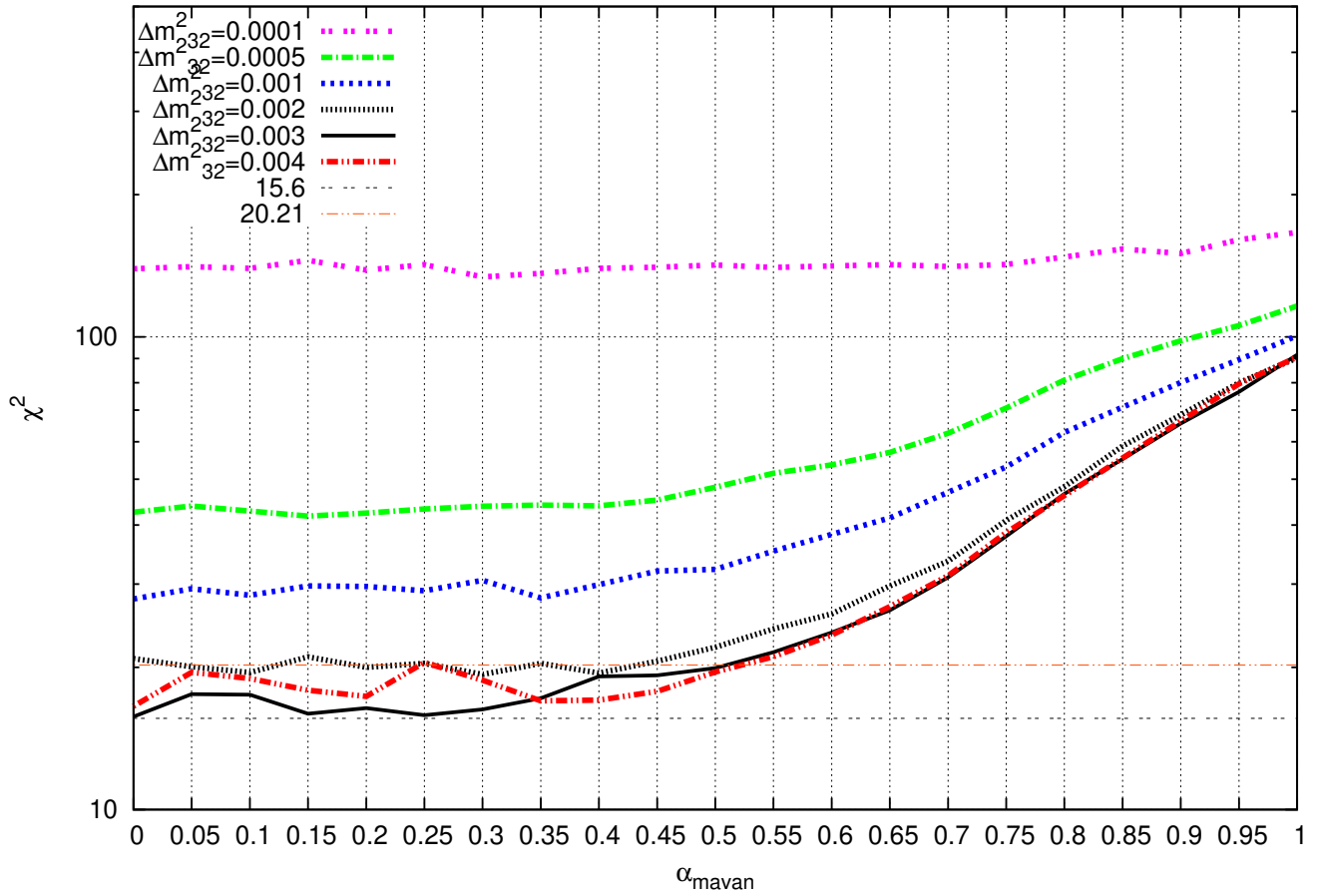


Figura 8.5: Nossos resultados para o  $\chi^2$  em função de  $\alpha_{MaVaN}$  para alguns valores específicos de  $\Delta m_{32}^2(eV^2)$ .

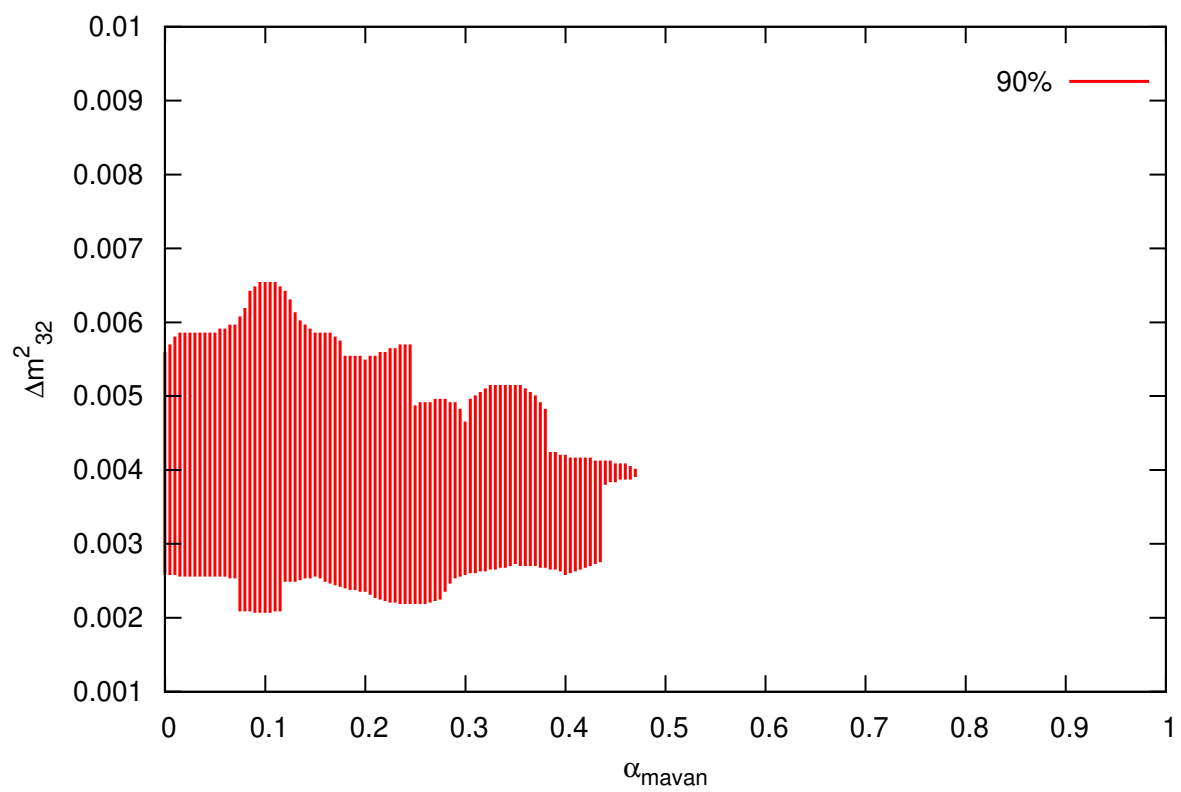


Figura 8.6: Nossos resultados para a região permitida para o espaço de parâmetros de  $(\alpha_{MaVaN}, \Delta m^2_{32})$  com nível de confiança de 90%.

# Capítulo 9

## Conclusões

Neste trabalho fizemos uma análise de neutrino atmosféricos. Para tal, desenvolvemos um estudo da seção de choque neutrino-nucleon, descrevendo todas as características da interação de neutrinos para energias intermediárias, de 0,1 GeV até 100 GeV. Estudamos eventos de neutrinos atmosféricos em Super-Kamiokande, como estes eventos se comportam com relação à energia dos neutrinos incidentes, e que tipo de informação está disponível para a fenomenologia de neutrinos atmosféricos.

Ainda sobre os eventos de neutrinos atmosféricos no detector Super-Kamiokande, nossos estudos nos permitiram entender porque o observável de interesse é a distribuição zenital dos eventos de neutrino e a razão porquê esta distribuição é afetada pelas oscilações de neutrinos. Podemos generalizar nosso formalismo para outros experimentos além de SK.

Dessa forma, um ponto central neste trabalho é o fato de que obtivemos de forma independente, a função resposta para o detector SK. Isto nos possibilitou entender que neutrinos com energia da ordem 0,1 -5 GeV são a parte central dos eventos estudados por SK. Analisamos oscilações para estes eventos, e obtivemos a sensibilidade dos parâmetros de oscilação,  $\Delta m_{32}^2$  e  $\text{sen}^2(2\theta_{23})$ .

Mais do que isso, conseguimos descrever a distribuição zenital de eventos do tipo eletrônico e muônico em SK, tanto para as regiões de Sub-GeV como Multi-GeV. Esta foi sem dúvida a parte mais trabalhosa de toda a tese, mas nos permitiu encontrar uma região aceitável para os parâmetros de oscilação padrão de neutrinos atmosféricos,  $\Delta m_{32}^2$  e  $\text{sin}^2(2\theta_{23})$ .

Introduzimos, então, na descrição da evolução dos neutrinos atmosféricos o mecanismo de neutrinos com massa variável, MaVaN's, como um novo mecanismo em que a massa do neutrino é afetada pela densidade do meio. Em nosso trabalho, supomos que este fenômeno é consequência



de uma interação não padrão entre os neutrinos e a matéria bariônica usual.

Em nosso modelo fenomenológico, o fato de introduzirmos um termo não-diagonal na matriz de massa dos neutrinos leva a modificações na evolução temporal dos neutrinos, possibilitando agora oscilações entre auto-estados de massa. Essa interação não-padrão, não-diagonal na base de massa dos neutrinos cria a possibilidade de oscilação entre os auto-estados de massa.

Ao incluirmos em nosso modelo a mistura entre neutrinos, obtivemos uma nova descrição da evolução temporal dos neutrinos de sabor, ou seja, um novo hamiltoniano de evolução dos neutrinos o qual contempla o mecanismo de oscilação padrão acrescido desta nova interação não-diagonal na base de massa dos neutrinos.

Implementamos computacionalmente a evolução temporal dos neutrinos atmosféricos segundo este modelo fenomenológico e estudamos como esta probabilidade de oscilação se comporta.

A partir daí analisamos os dados de SK, usando a hipótese de MaVaN e obtemos limites para os parâmetros de MaVaN. Encontramos que valores do parâmetro  $\alpha_{MaVaN} > 0,4$  são excluídos com 90% de confiança.

Independentemente de quais são os valores dos parâmetros de oscilação, a inclusão do modelo de MaVaN's sempre torna pior o ajuste dos dados. Mostramos aqui os resultados para  $\text{sen}^2\theta_{23} = 1,0$ , que é o ponto de melhor ajuste para a oscilação padrão.

Contudo, se lembrarmos que o efeito de incluir MaVaN's na descrição dos neutrinos atmosféricos é reduzir a oscilação  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ , e sabendo que valores de  $\text{sen}^2 2\theta_{23} < 1,0$  causam exatamente o mesmo tipo de redução no efeito de oscilação, concluimos que o limite por nós obtido é o mais conservador possível. Para todos os outros valores permitidos para o ângulo de mistura,  $\text{sen}^2 2\theta_{23} = 1,0$ , podemos esperar limites de exclusão ainda mais severos sobre o parâmetro  $\alpha_{MaVaN}$ .

Estes resultados serão submetidos para publicação.

# Apêndice A

## Variáveis cinemáticas para a detecção de um antineutrino incidindo em um nêutron ( $\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n$ )

Para reação de detecção de um antineutrino, temos,

$$\begin{aligned} s &= (p_{\bar{\nu}} + p_p)^2 = (p_{e^+} + p_n)^2 , \\ t &= (p_{e^+} - p_{\bar{\nu}})^2 = (p_n - p_p)^2 = q^2 , \\ u &= (p_n - p_{\bar{\nu}})^2 = (p_p - p_{e^+})^2 . \end{aligned} \tag{A.1}$$

Aqui definimos a variável  $q$  como sendo o momentum transferido na reação,

$$q \equiv p_{\bar{\nu}} - p_{e^+} = p_n - p_p , \tag{A.2}$$

e está relacionado com a variável  $t$  de Mandelstam,  $t = q^2$ . Desejamos escrever a seção de choque em termos de  $s$  e  $u$  e para isso definimos as seguintes variáveis de momento,

$$p_l \equiv p_{\bar{\nu}} + p_l , \quad p_h \equiv p_n + p_p , \tag{A.3}$$

as quais estão relacionadas com as variáveis de Mandelstam da seguinte maneira <sup>\*</sup>,

$$q \cdot p_l = (p_{\bar{\nu}} - p_{e^+})_\alpha (p_{\bar{\nu}} + p_l)^\alpha = p_{\bar{\nu}}^2 - p_l^2 = m_{\bar{\nu}}^2 - m_l^2 = -m_l^2 \quad (\text{A.4})$$

$$q \cdot p_h = (p_n - p_p)_\alpha (p_n + p_p)^\alpha = p_n^2 - p_p^2 = m_n^2 - m_p^2 = 2M\Delta \quad (\text{A.5})$$

onde  $M$  e  $\Delta$  são definidos respectivamente por

$$M = \frac{m_n + m_p}{2} \approx 938,9 \text{ MeV} . \quad (\text{A.6})$$

$$\Delta = m_n - m_p \approx 1,293 \text{ MeV} . \quad (\text{A.7})$$

Dadas agora as Eqs .(A.2, A.3), podemos escrever

$$p_\nu = \frac{1}{2}(p_l + q) , \quad p_l = \frac{1}{2}(p_l - q) , \quad p_n = \frac{1}{2}(p_h + q) , \quad p_p = \frac{1}{2}(p_h - q) . \quad (\text{A.8})$$

Substituindo estas relações na Eq .(A.1) temos para as variáveis  $s$ , e  $u$

$$s = \frac{1}{4}(p_l + p_h)^2 , \quad u = \frac{1}{4}(p_l - p_h)^2 , \quad (\text{A.9})$$

de tal forma que

$$s - u = p_l \cdot p_h . \quad (\text{A.10})$$

Obtemos então as seguintes relações entre as variáveis de momentum:

$$\begin{aligned} p_n \cdot p_p &= \frac{1}{4}(p_h^2 - q^2) = \frac{m_n^2 + m_p^2 - t}{2} , \\ p_n \cdot q &= \frac{1}{2}(p_h \cdot q + q^2) = \frac{m_n^2 - m_p^2 + t}{2} , \\ p_p \cdot q &= \frac{1}{2}(p_h \cdot q - q^2) = \frac{m_n^2 - m_p^2 - t}{2} , \\ p_n \cdot p_l &= \frac{1}{4}(p_h \cdot p_l - p_h \cdot q + p_l \cdot q - q^2) = \frac{s - m_n^2 - m_e^2}{2} , \\ p_n \cdot p_\nu &= \frac{1}{4}(p_h \cdot p_l + p_h \cdot q + p_l \cdot q + q^2) = \frac{m_n^2 - u}{2} , \\ p_p \cdot p_l &= \frac{1}{4}(p_h \cdot p_l - p_h \cdot q - p_l \cdot q + q^2) = \frac{s + t - m_n^2}{2} , \end{aligned}$$

---

<sup>\*</sup>Lembramos que trabalhamos com dois sistemas de coordenadas distintos, o sistema do laboratório,  $S_{LAB}$  e o sistema de centro de momentum,  $S_{CM}$ , o qual se move com velocidade  $\vec{v} = v_z \vec{k}$  em relação ao  $S_{LAB}$ . Quando trabalharmos com o sistema de centro de momento, devemos definir a 4-velocidade  $\eta_\mu$  de uma partícula como a derivada de sua 4-posição  $x_\mu$  em relação ao tempo próprio,  $\tau$ , e o 4-momentum  $p_\mu^{CM} = m\eta_\mu$ . Como  $\eta_\mu \eta^\mu = c^2 = 1$ , temos que  $p_\mu^{CM} p_\mu^{CM} = m^2$ , ou seja  $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ , onde  $m$  é a massa dessa partícula.

$$\begin{aligned}
p_p \cdot p_\nu &= \frac{1}{4}(p_h \cdot p_l + p_h \cdot q - p_l \cdot q - q^2) = \frac{s - m_p^2}{2}, \\
p_\nu \cdot p_l &= \frac{1}{4}(p_l^2 - q^2) = \frac{m_e^2 - t}{2}, \\
p_\nu \cdot q &= \frac{1}{2}(p_l \cdot q + q^2) = \frac{t - m_e^2}{2}, \\
p_e \cdot q &= \frac{1}{2}(p_l \cdot q - q^2) = \frac{-t - m_e^2}{2}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

### A.0.1 Cinemática no sistema de repouso do próton, $S_{LAB}$

No sistema de repouso do próton, ou seja,  $S_{LAB}$ , temos que  $\vec{p}_p = 0$ , e dessa forma, calculando o invariante  $p_i^\mu p_{i\mu} = p_f^\mu p_{f\mu}$  podemos escrever a energia mínima do antineutrino para que ocorra a reação como,

$$\begin{aligned}
(p_{\bar{\nu}} + p_p)^2 &= (p_{e^+} p_n)^2 \\
p_{\bar{\nu}}^2 + p_p^2 + 2p_{\bar{\nu}} \cdot p_p &= p_{e^+}^2 + p_n^2 + 2p_{e^+} \cdot p_n \\
m_{\bar{\nu}}^2 + m_p^2 + 2(E_{\bar{\nu}}, \vec{p}_{\bar{\nu}})^\alpha (E_p, \vec{p}_p)_\alpha &= m_{e^+}^2 + m_n^2 + 2(E_{e^+}, \vec{p}_{e^+})^\alpha (E_n, \vec{p}_n)_\alpha \\
E_\nu \sqrt{p_p^2 + m_p^2} - \vec{p}_{\bar{\nu}} \cdot \vec{p}_p &= \frac{m_n^2 + m_l^2 - m_p^2 + \sqrt{p_n^2 + m_n^2} \sqrt{p_{e^+}^2 + m_e^2} - \vec{p}_{e^+} \cdot \vec{p}_n}{2} \\
E_\nu \min &= \frac{(m_n + m_l)^2 - m_p^2}{2m_p} = 1,806 MeV,
\end{aligned} \tag{A.12}$$

onde o lado direito da equação foi calculado para que os produtos da reação sejam emitidos em repouso no referencial do centro de momento, indicando assim a energia mínima do antineutrino necessária para a reação ocorrer [35]. Nesse caso o lépton carregado será emitido exatamente na mesma direção do neutrino incidente, ou seja  $\cos\theta_l = 1$ . Para a variável  $s$  temos agora que no  $S_{LAB}$ ,

$$s = m_p^2 + 2(E_\nu E_p - \vec{p}_{\bar{\nu}} \cdot \vec{p}_p) = m_p^2 + 2E_\nu m_p = m_n^2 + m_e^2 + 2(E_{e^+} E_n - p_{e^+} p_n \cos\phi_{lab}), \tag{A.13}$$

onde  $\phi_{lab}$  é o ângulo entre os momentos do pósitron e o nêutron emitidos.

A energia total no sistema do laboratório é

$$E_{S_{LAB}} = E_\nu + m_p. \tag{A.14}$$

Para a variável  $u$

$$u = m_p^2 + m_e^2 - 2E_{e^+} m_p = m_n^2 - 2E_{\bar{\nu}}(E_n - p_n \cos\theta'_{lab}). \tag{A.15}$$

onde  $\theta'_{lab}$  é o ângulo entre os momentos do antineutrino incidente e o nêutron emitido. Temos então para a diferença  $s - u$ ,

$$s - u = 2m_p(E_{\bar{\nu}} + E_{e^+}) - m_e^2, \quad (\text{A.16})$$

e usando  $s + t + u = m_{\bar{\nu}}^2 + m_n^2 + m_p^2 + m_{e^+}^2$ , temos para  $t$

$$t = m_n^2 - m_p^2 - 2m_p(E_{\bar{\nu}} - E_{e^+}). \quad (\text{A.17})$$

De outra forma,

$$(p_n - p_p) = t = m_n^2 + m_p^2 - 2m_p E_n = m_e^2 - 2E_{\bar{\nu}}(E_{e^+} - p_{e^+} \cos \theta_{lab}). \quad (\text{A.18})$$

onde  $\theta_{lab}$  é o ângulo entre os momentos do antineutrino incidente e do pósitron emitido.

Agora, através das Eqs. (A.17,A.18), podemos escrever,

$$E_e = \frac{E_{\nu} - \delta + \epsilon p_e \cos \theta_{lab}}{1 + \epsilon}, \quad (\text{A.19})$$

onde  $\delta = \frac{1}{2m_p}(m_n^2 - m_p^2 - m_e^2) = 1,2907 \text{MeV}$ ,  $\epsilon = \frac{E_{\nu}}{m_p}$ ,  $p_e = \sqrt{E_e^2 - m_e^2}$ ,  $k = (1 + \epsilon)^2 - (\epsilon \cos \theta_{lab})^2$ , e  $Rad = \sqrt{(E_{\nu} - \delta)^2 - m_e^2 k}$ . Obtemos então

$$E_e^2 k + 2(1 + \epsilon)(\delta - E_{\nu})E_e + (E_{\nu} - \delta)^2 + m_e^2 \epsilon^2 \cos^2 \theta_{lab} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Resolvendo para  $E_e$  obtemos

$$E_e = \frac{(E_{\nu} - \delta)(1 + \epsilon) + \epsilon Rad \cos \theta}{k}, \quad (\text{A.21})$$

A função  $k$  apresenta apenas raízes negativas e sendo assim é bem comportada para todas as energias permitidas para o neutrino incidente.

Para o caso do neutrino incidir exatamente com a energia mínima Eq. (A.12), e com  $\cos \theta_l = 1$ ,

$$E_{\nu_{min}} - \delta = \frac{1}{m_p}(m_e^2 + m_n m_e) = 0,5153 \text{MeV} \quad ; \quad k = \frac{m_n^2 + m_e^2}{m_p^2} = 1,00279. \quad (\text{A.22})$$

$$1 + \epsilon = 1,00925 \quad ; \quad Rad = \sqrt{0,5153^2 - 0,51099^2 \times 1,00279} = 0,06 \text{MeV}. \quad (\text{A.23})$$

Dessa forma e energia mínima portada pelo lépton carregado emitido é,

$$E_l(E_{\nu_{min}}) = \frac{0,5153 \text{MeV} \times 1,00925 + 1,806 \times 0,06 \text{MeV}}{1,00279} = 0,627 \text{MeV}. \quad (\text{A.24})$$

Resolvendo a Eq. (A.20) para  $E_\nu$  podemos escrever a energia do neutrino em função da energia do lépton carregado produzido e de seu ângulo com relação à direção do neutrino incidente como

$$E_\nu = \frac{-(\delta + E_e)(1 + E_e/m_p) \pm \sqrt{rad}}{k'}, \quad (\text{A.25})$$

onde  $k' = \frac{1}{m_p} \cos^2 \theta_l (E_e^2 - m_e^2) - (\frac{E_e}{m_p} + 1)$ . Assim como  $k$ , a função  $k'$  apresenta apenas raízes negativas e sendo assim é bem comportada para todas as energias permitidas para  $E_e$ , Eq. (A.26). Essa inversão de função é necessária para a integração numérica da seção de choque em função da energia do lépton produzido.

$$E_l = \frac{-m_p \mp \sqrt{m_p^2 - \sin^2 \theta_l (\cos^2 \theta_l m_e^2 + m_p^2)}}{\sin^2 \theta_l}. \quad (\text{A.26})$$

Ainda temos que

$$rad02 = \frac{1}{m_p^2} (\delta + E_e)^2 \cos^2 \theta_l (E_e^2 - m_e^2) \quad (\text{A.27})$$

Podemos escrever o ângulo de emissão do lépton carregado com relação ao neutrino como sendo,

$$\cos \theta_l = \sqrt{\frac{E_e^2 (1 + \epsilon)^2 + 2(1 + \epsilon)(\delta - E_\nu)E_e + (E_\nu - \delta)^2}{\epsilon^2 (E_e^2 - m_e^2)}} \quad (\text{A.28})$$

Através da Eq. (A.18) podemos escrever a seção de choque no referencial  $S_{LAB}$  em função da energia do antineutrino incidente como

$$\frac{d\sigma}{dE_{e^+}} = \frac{d\sigma}{dt} \frac{dt}{dE_{e^+}} = 2m_p \frac{d\sigma}{dt}, \quad (\text{A.29})$$

sendo que em função da variável  $t$ , a seção de choque já somada nas polarizações finais e feita a média sobre as polarizações iniciais, é dada dada por

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{4\pi (s - m_p^2)^2} |\mathcal{M}^2| \quad (\text{A.30})$$

onde  $G_F = 1,16637 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  é a constante de Fermi,  $\cos \theta_C = 0,9746$  é o ângulo de Cabibbo, e  $|\mathcal{M}^2|$  é a amplitude de probabilidade de ocorrência da reação. Daí então

$$\frac{d\sigma(E_{\bar{\nu}}, E_{e^+})}{dE_{e^+}} = \frac{m_p G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2\pi (s - m_p^2)^2} |\mathcal{M}^2|. \quad (\text{A.31})$$

## A.0.2 Cinemática no sistema de centro de momento, $S_{CM}$

Através da variável  $s$  podemos obter a energia no sistema centro de momenta como sendo

$$\begin{aligned} s &= (E_{\bar{\nu}} + E_p)^2 - (\vec{p}_{\bar{\nu}} + \vec{p}_p)^2 = E_{\bar{\nu}}^2 - p_{\bar{\nu}}^2 + E_p^2 - p_p^2 + 2(E_{\bar{\nu}}E_p - p_{\bar{\nu}}p_p \cos\theta) \\ &= m_p^2 + 2E_{\nu}E_p(1 - \beta_{\bar{\nu}}\beta_p \cos\theta) , \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

onde  $\vec{\beta}_i = \vec{p}_i/E_i$ . Ou seja, a energia total sendo dada por  $\sqrt{s} = E^*$ , no referencial do centro de momentum nos leva a

$$E^* = \sqrt{m_p^2 + 2E_{\nu}E_p(1 - \beta_{\bar{\nu}}\beta_p \cos\theta)}. \quad (\text{A.33})$$

Podemos ainda escrever para a variável  $t$

$$t = m_l^2 - 2(E_{e^+}^{CM} E_{\bar{\nu}}^{CM} - \vec{p}_{e^+}^{CM} \cdot \vec{p}_{\bar{\nu}}^{CM}) = m_l^2 - 2E_{\bar{\nu}}^{CM}(E_{e^+}^{CM} - p_{e^+}^{CM} \cos\theta_{CM}) \quad (\text{A.34})$$

onde  $\theta_{CM}$  é o ângulo entre os momenta do antineutrino incidente e pósitron emitido, no referencial do centro de momenta. Dada a simetria axial em torno do eixo da colisão (colinear ao momentum do antineutrino incidente), temos como limites  $0 \leq \theta_{CM} \leq \pi$ . Como as variáveis de Mandelstam são invariantes por "boosts", temos que  $t_{SLAB} = t_{SCM}$ . Daí obtemos os limites cinemáticos para a energia do pósitron emitido, visto do referencial  $S_{LAB}$ .

$$m_l^2 - 2E_{\bar{\nu}}^{CM}(E_{e^+}^{CM} \pm p_{e^+}^{CM}) = m_n^2 - m_p^2 - 2m_p(E_{\bar{\nu}} - E_{e^+}) , \quad (\text{A.35})$$

ou

$$E_{e^+}(\min, \max) = E_{\bar{\nu}} - \delta - \frac{1}{m_p} E_{\bar{\nu}}^{CM}(E_{e^+}^{CM} \pm p_{e^+}^{CM}) , \quad (\text{A.36})$$

onde

$$\delta = \frac{m_n^2 - m_p^2 - m_e^2}{2m_p} , \quad (\text{A.37})$$

$$E_{\bar{\nu}}^{CM} = \frac{s - m_p^2}{2\sqrt{s}} = \frac{E_{\bar{\nu}}}{\sqrt{1 + 2\epsilon}} , \quad E_{e^+}^{CM} = \frac{s - m_n^2 + m_l^2}{2\sqrt{s}} = \frac{E_{\bar{\nu}} - \delta}{\sqrt{1 + 2\epsilon}} , \quad (\text{A.38})$$

$$p_{e^+}^{CM} = \frac{\sqrt{[s - (m_n - m_l)^2][s - (m_n + m_l)^2]}}{2\sqrt{s}} , \quad (\text{A.39})$$

onde fizemos uso da Eq. (A.13).

É usual na literatura se usar a aproximação na qual os nucleons estão sempre em repouso,  $\frac{\Delta}{E_{\nu}} \rightarrow 0$ , que implica em

$$E_e = E_{\nu} - \Delta \quad (\text{A.40})$$

Como vemos, para baixas energias,  $E_\nu \approx \text{MeV}$ , a aproximação deixa de ser boa, e dessa forma se torna interessante substituir a Eq. (A.40) pela energia média do neutrino,

$$\langle E_e \rangle \approx \frac{E_{max} - E_{min}}{2} = E_\nu - \delta - \frac{E_\nu^{CM} E_e^{CM}}{m_p} . \quad (\text{A.41})$$

Esta aproximação pode ser usada para qualquer regime de energia.

## A.1 Variáveis cinemáticas para a detecção de um neutrino

Tendo em vista que um neutrino interage com um nêutron e não com um próton, como era o caso para um antineutrino, apresentamos a seguir as variáveis cinemáticas que se modificam para este caso.

$$\begin{aligned} s &= (p_\nu + p_n)^2 = (p_{e^-} + p_p)^2 , \\ t &= (p_{e^-} - p_\nu)^2 = (p_p - p_n)^2 = q^2 , \\ u &= (p_p - p_\nu)^2 = (p_n - p_{e^-})^2 , \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

onde a variável  $q$  é dada por,

$$q \equiv p_\nu - p_{e^-} = p_p - p_n . \quad (\text{A.43})$$

Substituindo a Eq. (A.3) obtemos para o caso de um neutrino,

$$q \cdot p_l = (p_\nu - p_{e^+})_\alpha (p_\nu + p_l)^\alpha = p_\nu^2 - p_l^2 = m_\nu^2 - m_l^2 = -m_l^2 \quad (\text{A.44})$$

$$q \cdot p_h = (p_p - p_n)_\alpha (p_n + p_p)^\alpha = p_p^2 - p_n^2 = m_p^2 - m_n^2 = -2M\Delta , \quad (\text{A.45})$$

e obtemos agora através das Eqs. (A.3, A.43),

$$p_\nu = \frac{1}{2}(p_l + q) , \quad p_l = \frac{1}{2}(p_l - q) , \quad p_p = \frac{1}{2}(p_h + q) , \quad p_n = \frac{1}{2}(p_h - q) . \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{aligned} p_n \cdot p_p &= \frac{1}{4}(p_h^2 - q^2) = \frac{m_n^2 + m_p^2 - t}{2} , \\ p_p \cdot q &= \frac{1}{2}(p_h \cdot q + q^2) = \frac{m_p^2 - m_n^2 + t}{2} , \\ p_n \cdot q &= \frac{1}{2}(p_h \cdot q - q^2) = \frac{m_p^2 - m_n^2 - t}{2} , \\ p_p \cdot p_l &= \frac{1}{4}(p_h \cdot p_l - p_h \cdot q + p_l \cdot q - q^2) = \frac{s - m_p^2 - m_e^2}{2} , \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
p_n \cdot p_l &= \frac{1}{4}(p_h \cdot p_l - p_h \cdot q - p_l \cdot q + q^2) = \frac{s + t - m_p^2}{2}, \\
p_p \cdot p_\nu &= \frac{1}{4}(p_h \cdot p_l + p_h \cdot q + p_l \cdot q + q^2) = \frac{m_p^2 - u}{2}, \\
p_n \cdot p_\nu &= \frac{1}{4}(p_h \cdot p_l + p_h \cdot q - p_l \cdot q - q^2) = \frac{s - m_n^2}{2}, \\
p_\nu \cdot p_l &= \frac{1}{4}(p_l^2 - q^2) = \frac{m_e^2 - t}{2}, \\
p_\nu \cdot q &= \frac{1}{2}(p_l \cdot q + q^2) = \frac{t - m_e^2}{2}, \\
p_e \cdot q &= \frac{1}{2}(p_l \cdot q - q^2) = \frac{-t - m_e^2}{2}.
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Para as demais considerações cinemáticas que são mostradas para o caso de um antineutrino, as equações devem apresentar a mesma forma para o caso de um neutrino, quando trocamos  $m_n \leftrightarrow m_p$  e  $p_n \leftrightarrow p_p$ .

# Apêndice B

## Desenvolvimento algébrico da dinâmica da seção de choque

A amplitude de probabilidade  $\mathcal{M}$  pode ser escrita como

$$\mathcal{M}(\nu) = \bar{u}_e \gamma^a (1 - \gamma_5) u_{\nu_e} \cdot \bar{u}_p \left( f_1 \gamma_a + g_1 \gamma_a \gamma_5 + i f_2 \sigma_{ab} \frac{q^b}{2M} + g_2 \frac{q_a}{M} \gamma_5 \right) u_n . \quad (\text{B.1})$$

Como estamos interessados no módulo quadrado da amplitude, temos para a parte conjugada de  $\mathcal{M}(\nu)$ :

$$(\bar{u}_{\nu_l} \gamma^a u_l)^* = u_l^\dagger (\gamma^a)^\dagger \bar{u}_{\nu_l}^\dagger = u_l^\dagger \gamma^0 (\gamma^0)^\dagger (\gamma^a)^\dagger \gamma^0 u_{\nu_l} = u_l^\dagger \gamma^0 \gamma^a u_{\nu_l} = \bar{u}_l \gamma^a u_{\nu_l} \quad (\text{B.2})$$

$$(-\bar{u}_{\nu_l} \gamma^a \gamma_5 u_l)^* = -u_l^\dagger \gamma_5 (\gamma^a)^\dagger \bar{u}_{\nu_l}^\dagger = -u_l^\dagger \gamma_5 \gamma^0 (\gamma^0)^\dagger (\gamma^a)^\dagger \gamma^0 u_{\nu_l} = u_l^\dagger \gamma^0 \gamma_5 \gamma^a u_{\nu_l} = \bar{u}_l \gamma_5 \gamma^a u_{\nu_l} \quad (\text{B.3})$$

$$(\bar{u}_p f_1 \gamma_a u_n)^* = u_n^\dagger \gamma_a^\dagger f_1^* \bar{u}_p^\dagger = u_n^\dagger \gamma_0 (\gamma_0)^\dagger (\gamma_a)^\dagger \gamma_0 f_1^* u_p = \bar{u}_n \gamma_a f_1^* u_p \quad (\text{B.4})$$

$$(\bar{u}_p g_1 \gamma_a \gamma_5 u_n)^* = u_n^\dagger \gamma_5 \gamma_a^\dagger g_1^* \bar{u}_p^\dagger = u_n^\dagger \gamma_5 \gamma_0 (\gamma_0)^\dagger (\gamma_a)^\dagger \gamma_0 g_1^* u_p = u_n^\dagger \gamma_5 \gamma_0 \gamma_a g_1^* u_p = -\bar{u}_n \gamma_5 \gamma_a g_1^* u_p \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} (\bar{u}_p i f_2 \sigma_{ab} \frac{q^b}{2M} u_n)^* &= u_n^\dagger \left( \frac{-i f_2^*}{2M} \right) (q^b)^\dagger \sigma_{ab}^\dagger \gamma_0 u_p \\ &= u_n^\dagger \left( \frac{-i f_2^*}{2M} \right) \gamma_0 (\gamma_0)^\dagger (q^b)^\dagger \left( \frac{-i}{4} \right) (\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a)^\dagger \gamma_0 u_p \\ &= u_n^\dagger \left( \frac{-i f_2^*}{2M} \right) \gamma_0 (\gamma_0)^\dagger (q^b)^\dagger \left( \frac{-i}{4} \right) \gamma_0 (\gamma_0^\dagger \gamma_b^\dagger \gamma_0 \gamma_0^\dagger \gamma_a^\dagger - \gamma_0^\dagger \gamma_a^\dagger \gamma_0 \gamma_0^\dagger \gamma_b^\dagger) \gamma_0 u_p \\ &= u_n^\dagger \left( \frac{-i f_2^*}{2M} \right) \gamma_0 (\gamma_0)^\dagger (q^b)^\dagger \left( \frac{-i}{4} \right) \gamma_0 (\gamma_b \gamma_a - \gamma_a \gamma_b) u_p \\ &= \bar{u}_n \left( \frac{-i f_2^*}{2M} \right) q^b \left( \frac{i}{4} \right) (\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a) u_p \\ &= -\bar{u}_n \left( \frac{i f_2^*}{2M} \right) q^b \sigma_{ab} u_p \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned}
(\bar{u}_p g_2 \frac{q^a}{M} \gamma_5 u_n)^* &= u_n^\dagger \gamma_5 g_2^* \frac{(q^a)^\dagger}{M} u_p^\dagger = u_n^\dagger \gamma_5 g_2^* \gamma_0 (\gamma_0)^\dagger \frac{(q^a)^\dagger}{M} \gamma_0 u_p \\
&= -u_n^\dagger \gamma_0 \gamma_5 \frac{g_2^* q^a}{M} u_p = -\bar{u}_n \gamma_5 \frac{g_2^* q^a}{M} u_p
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Sendo assim, para o módulo quadrado da amplitude de probabilidade, temos:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}(\nu)|^2 &= \mathcal{M}^*(\nu) \mathcal{M}(\nu) = [\bar{u}_{\nu_l} \gamma^a (1 - \gamma_5) u_l] [\bar{u}_{\nu_l} \gamma^a (1 - \gamma_5) u_l]^* \\
&\times \left[ \bar{u}_p \left( f_1 \gamma_a + g_1 \gamma_a \gamma_5 + i f_2 \sigma_{ab} \frac{q^b}{2M} + g_2 \frac{q_a}{M} \gamma_5 \right) u_n \right] \\
&\times \left[ \bar{u}_p \left( f_1 \gamma_a + g_1 \gamma_a \gamma_5 + i f_2 \sigma_{ab} \frac{q^b}{2M} + g_2 \frac{q_a}{M} \gamma_5 \right) u_n \right]^* \\
&= [\bar{v}_{\nu_l} \gamma^a (1 - \gamma_5) v_l] [\bar{u}_l (1 + \gamma_5) \gamma^a u_{\nu_l}] \\
&\times \left[ \bar{u}_p \left( f_1 \gamma_a + g_1 \gamma_a \gamma_5 + i f_2 \sigma_{ab} \frac{q^b}{2M} + g_2 \frac{q_a}{M} \gamma_5 \right) u_n \right] \\
&\times \left[ \bar{u}_n \left( f_1^* \gamma_c - g_1^* \gamma_5 \gamma_c - i f_2^* \frac{q^d \sigma_{cd}}{2M} - g_2^* \frac{\gamma_5 q_c}{M} \right) u_p \right].
\end{aligned} \tag{B.8}$$

### B.0.1 Somas em spins

Uma vez que os experimentos não são sensíveis aos estados de polarização dos férmions envolvidos, neste ponto podemos efetuar a média sobre as possíveis polarizações dos estados iniciais e somas sobre as possíveis polarizações dos estados finais,

$$\Sigma_s = [\bar{u}_a \Gamma_1 u_b] [\bar{u}_a \Gamma_2 u_b]^* = Tr \left[ \Gamma_1 (\gamma^b p_b + m_b c) \bar{\Gamma}_2 (\gamma^a p_a + m_a c) \right], \tag{B.9}$$

onde, para a corrente leptônica

$$(j_l)^a = \bar{u}_{\nu_l} \gamma^a (1 - \gamma_5) u_l, \tag{B.10}$$

e identificamos as matrizes:

$$\Gamma_1 = \gamma^a (1 - \gamma^5), \quad e \tag{B.11}$$

$$\Gamma_2 = \gamma^c (1 - \gamma^5) \longrightarrow \bar{\Gamma}_2 = \gamma^0 (\gamma^c (1 - \gamma^5))^\dagger \gamma^0 = (1 + \gamma^5) \gamma^c. \tag{B.12}$$

### B.0.2 Cálculo da corrente leptônica

Dessa forma a soma em spin para a corrente leptônica é dada por,

$$\Sigma_s |j_l|^2 = Tr [\gamma^a (1 - \gamma^5) (\gamma^\alpha p_{e_\alpha} + m_l c) (1 + \gamma^5) \gamma^c (\gamma^\beta p_{\nu_\beta})]. \tag{B.13}$$

Nesse caso temos quatro traços não nulos, apenas dois traços distintos,

$$2 \times p_{e\alpha} p_{\nu\beta} \text{Tr}[\gamma^a \gamma^\alpha \gamma^c \gamma^\beta] = 8(p_\nu^a p_l^c - g^{ac} p_\nu \cdot p_l + p_l^a p_\nu^c) , \quad (\text{B.14})$$

$$2 \times -p_{e\alpha} p_{\nu\beta} \text{Tr}[\gamma^a \gamma^\alpha \gamma^c \gamma^\beta \gamma^5] = +8i p_{e\alpha} p_{\nu\beta} \epsilon^{a\alpha c\beta} , \quad (\text{B.15})$$

e a soma em spin para a corrente leptônica tem a forma,

$$L^{ac} = \Sigma_s |j_l|^2 = 8 \left( p_l^a p_\nu^c + p_\nu^a p_l^c - g^{ac} p_l \cdot p_\nu + i p_{e\alpha} p_{\nu\beta} \epsilon^{a\alpha c\beta} \right) . \quad (\text{B.16})$$

Chamamos a atenção para o fato da corrente leptônica não depender explicitamente da massa do lépton carregado produzido, no caso um elétron.

Passamos agora ao cálculo da corrente hadrônica,

$$(J_H)_a = \bar{u}_n \left( f_1 \gamma_a + g_1 \gamma_a \gamma_5 + i f_2 \sigma_{ab} \frac{q^b}{2M} + g_2 \frac{q_a}{M} \gamma_5 \right) u_p . \quad (\text{B.17})$$

Para isso escrevemos as seguintes matrizes,

$$\Gamma_3 = f_1 \gamma_a + g_1 \gamma_a \gamma_5 + i f_2 \sigma_{ab} \frac{q^b}{2M} + g_2 \frac{q_a}{M} \gamma_5 , \quad (\text{B.18})$$

$$\Gamma_4 = f_1 \gamma_c + g_1 \gamma_c \gamma_5 + i f_2 \sigma_{cd} \frac{q^d}{2M} + g_2 \frac{q_c}{M} \gamma_5 . \quad (\text{B.19})$$

Podemos agora escrever,

$$[\bar{u}_n \Gamma_4 u_p]^* = u_p^\dagger \Gamma_4^\dagger \gamma^0 u_n = u_p^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Gamma_4^\dagger \gamma^0 u_n = \bar{u}_p \bar{\Gamma}_4 u_n , \quad (\text{B.20})$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_4 &= \gamma^0 \Gamma_4^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left( f_1 \gamma_c + g_1 \gamma_c \gamma_5 + i f_2 \sigma_{cd} \frac{q^d}{2M} + g_2 \frac{q_c}{M} \gamma_5 \right)^\dagger \gamma^0 \\ &= f_1^* \gamma_c - g_1^* \gamma_5 \gamma_c - i f_2^* \sigma_{cd} \frac{q^d}{2M} - g_2^* \frac{\gamma_5 q_c}{M} , \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

e a soma em spin para a corrente hadrônica fica:

$$\Sigma_s (J_H)_a = \text{Tr}[\Gamma_3 (\gamma^\alpha p_{n\alpha} + m_n c) \bar{\Gamma}_4 (\gamma^\beta p_{p\beta} + m_p c)] . \quad (\text{B.22})$$

### B.0.3 Cálculo dos traços para a corrente hadrônica

Substituímos agora as Eqs. (B.18, B.21) na Eq. (B.22), e procedemos o cálculo de  $2 \times 4 \times 2 \times 4 = 64$  traços de matrizes  $\gamma$  de Dirac. Destes 42 são nulos por apresentar número ímpar de matrizes  $\gamma$ . Os 22 traços não nulos\* são mostrados a seguir, bem como dois traços que são nulos por razões de simetria.

$$\begin{aligned} Tr01 : \rightarrow \quad f_1 f_1^* p_n^\alpha p_p^\beta Tr[\gamma_a \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_\beta] &= 4|f_1|^2 p_n^\alpha p_p^\beta (g_{a\alpha} g_{c\beta} - g_{ac} g_{\alpha\beta} + g_{a\beta} g_{\alpha c}) \\ &= 4|f_1|^2 (p_{na} p_{pc} - g_{ac} p_n \cdot p_p + p_{pa} p_{nc}) . \end{aligned} \quad (B.23)$$

$$Tr02 : \rightarrow \quad -f_1 g_1^* p_n^\alpha p_p^\beta Tr[\gamma_a \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_c \gamma_\beta] = 4i f_1 g_1^* p_n^\alpha p_p^\beta \epsilon_{a\alpha c\beta} . \quad (B.24)$$

$$\begin{aligned} Tr03 : \rightarrow \quad -i f_1 f_2^* p_n^\alpha \frac{q^d}{2M} m_p c Tr[\gamma_a \gamma_\alpha \sigma_{cd}] &= \frac{m_p c}{2} f_1 f_2^* \frac{q^d}{2M} p_n^\alpha (Tr[\gamma_a \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d] - Tr[\gamma_a \gamma_\alpha \gamma_d \gamma_c]) \\ &= 2m_p c f_1 f_2^* \frac{1}{M} (q_a p_{nc} - g_{ac} p_n \cdot q) . \end{aligned} \quad (B.25)$$

$$Tr04 : \rightarrow \quad f_1 f_1^* m_n m_p c^2 Tr[\gamma_a \gamma_c] = 4m_n m_p c^2 |f_1|^2 g_{ac} . \quad (B.26)$$

$$\begin{aligned} Tr05 : \rightarrow \quad -i m_n c f_1 f_2^* \frac{q^d}{2M} p_p^\beta Tr[\gamma_a \sigma_{cd} \gamma_\beta] &= \frac{m_n c}{2} f_1 f_2^* \frac{q^d}{2M} p_p^\beta (Tr[\gamma_a \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] - Tr[\gamma_a \gamma_d \gamma_c \gamma_\beta]) \\ &= 2m_n c f_1 f_2^* \frac{1}{M} (g_{ac} p_p \cdot q - q_a p_{pc}) . \end{aligned} \quad (B.27)$$

$$Tr06 : \rightarrow \quad g_1 f_1^* p_n^\alpha p_p^\beta Tr[\gamma_a \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_\beta] = 4i g_1 f_1^* p_n^\alpha p_p^\beta \epsilon_{a\alpha c\beta} . \quad (B.28)$$

$$Tr07 : \rightarrow \quad -g_1 g_1^* p_n^\alpha p_p^\beta Tr[\gamma_a \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_c \gamma_\beta] = 4|g_1|^2 (p_{na} p_{pc} - g_{ac} p_n \cdot p_p + p_{pa} p_{nc}) . \quad (B.29)$$

$$\begin{aligned} Tr08 : \rightarrow \quad -i m_p c g_1 f_2^* \frac{q^d}{2M} p_n^\alpha Tr[\gamma_a \gamma_5 \gamma_\alpha \sigma_{cd}] &= \frac{m_p c}{2} g_1 f_2^* \frac{q^d}{2M} p_n^\alpha (Tr[\gamma_a \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d] - Tr[\gamma_a \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_d \gamma_c]) \\ &= 2i m_p c g_1 f_2^* \frac{q^d}{M} p_n^\alpha \epsilon_{a\alpha cd} . \end{aligned} \quad (B.30)$$

---

\*Relações úteis ao cálculo destes traços podem ser encontradas por exemplo em [28], ou [34].

$$Tr09 : \rightarrow -m_p c g_1 g_2^* \frac{q_c}{M} p_n^\alpha Tr[\gamma_a \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_5] = 4m_p c g_1 g_2^* \frac{1}{M} q_c p_{na} . \quad (B.31)$$

$$Tr10 : \rightarrow -m_n m_p c^2 g_1 g_1^* Tr[\gamma_a \gamma_5 \gamma_5 \gamma_c] = -4m_n m_p c^2 |g_1|^2 g_{ac} . \quad (B.32)$$

$$\begin{aligned} Tr11 : \rightarrow -im_n c g_1 f_2^* \frac{q^d}{2M} p_p^\beta Tr[\gamma_a \gamma_5 \sigma_{cd} \gamma_\beta] &= \frac{m_n c}{2} g_1 f_2^* \frac{q^d}{2M} p_p^\beta (Tr[\gamma_a \gamma_5 \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] - Tr[\gamma_a \gamma_5 \gamma_d \gamma_c \gamma_\beta]) \\ &= 2im_n c g_1 f_2^* \frac{q^d}{M} p_p^\beta \epsilon_{acd\beta} . \end{aligned} \quad (B.33)$$

$$Tr12 : \rightarrow -m_n c g_1 g_2^* \frac{q^c}{M} p_p^\beta Tr[\gamma_a \gamma_5 \gamma_5 \gamma_\beta] = -4m_n c g_1 g_2^* \frac{1}{M} p_{pa} q_c . \quad (B.34)$$

$$\begin{aligned} Tr13 : \rightarrow im_p c f_2 f_1^* \frac{q^b}{2M} p_n^\alpha Tr[\sigma_{ab} \gamma_\alpha \gamma_c] &= -m_p c \frac{f_2 f_1^*}{2} \frac{q^b}{2M} p_n^\alpha (Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c] - Tr[\gamma_b \gamma_a \gamma_\alpha \gamma_c]) \\ &= -2m_p c f_2 f_1^* \frac{1}{M} (g_{ac} p_n \cdot q - p_{na} q_c) . \end{aligned} \quad (B.35)$$

$$\begin{aligned} Tr14 : \rightarrow -im_p c f_2 g_1^* \frac{q^b}{2M} p_n^\alpha Tr[\sigma_{ab} \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_c] &= \frac{m_p c}{2} f_2 g_1^* \frac{q^b}{2M} p_n^\alpha (Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_c] - Tr[\gamma_b \gamma_a \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_c]) \\ &= 2im_p c f_2 g_1^* \frac{q^b}{M} p_n^\alpha \epsilon_{abac} . \end{aligned} \quad (B.36)$$

$$\begin{aligned} Tr15 : \rightarrow |f_2|^2 \frac{q^b}{2M} \frac{q^d}{2M} p_n^\alpha p_p^\beta Tr[\sigma_{ab} \gamma_\alpha \sigma_{cd} \gamma_\beta] &= -\frac{|f_2|^2}{4} \frac{q^b}{2M} \frac{q^d}{2M} p_n^\alpha p_p^\beta (Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] \\ &\quad - Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_d \gamma_c \gamma_\beta] - Tr[\gamma_b \gamma_a \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] \\ &\quad + Tr[\gamma_b \gamma_a \gamma_\alpha \gamma_d \gamma_c \gamma_\beta]) \\ &= -\frac{|f_2|^2}{4} \frac{q^b}{2M} \frac{q^d}{2M} p_n^\alpha p_p^\beta 4(Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] \\ &\quad - g_{cd} Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_\beta] - g_{ba} Tr[\gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] + 4g_{ab} g_{cd} g_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (B.37)$$

onde usamos a relação de anti-comutação entre as matrizes  $\gamma$ ,

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} . \quad (B.38)$$

O traço de 6 matrizes  $\gamma$  é dado por,

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] &= 2g_{ab} Tr[\gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] - 2g_{a\alpha} Tr[\gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] + 2g_{ac} Tr[\gamma_b \gamma_\alpha \gamma_d \gamma_\beta] \\ &\quad - 2g_{ad} Tr[\gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_\beta] + 2g_{a\beta} Tr[\gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d] - Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta], \end{aligned} \quad (B.39)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] &= g_{ab} Tr[\gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] - g_{a\alpha} Tr[\gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] + g_{ac} Tr[\gamma_b \gamma_\alpha \gamma_d \gamma_\beta] \\ &\quad - g_{ad} Tr[\gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_\beta] + g_{a\beta} Tr[\gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d] \end{aligned} \quad (B.40)$$

Agora podemos substituir a Eq.(B.40) na Eq.(B.37), juntamente com os traços de 4 matrizes  $\gamma$ , obtendo para este traço de 6 matrizes gamma de Dirac,

$$\begin{aligned} |f_2|^2 \frac{q^b}{2M} \frac{q^d}{2M} p_n^\alpha p_p^\beta &\times Tr[\sigma_{ab} \gamma_\alpha \sigma_{cd} \gamma_\beta] = \frac{|f_2|^2}{4} \frac{q^b}{2M} \frac{q^d}{2M} p_n^\alpha p_p^\beta 4(Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] \\ &\quad - g_{dc} Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_\beta] - g_{ba} Tr[\gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] + 4g_{ab} g_{cd} g_{\alpha\beta}) \\ &= -|f_2|^2 \frac{q^b}{2M} \frac{q^d}{2M} p_n^\alpha p_p^\beta (g_{ab} Tr[\gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] - g_{a\alpha} Tr[\gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] \\ &\quad + g_{ac} Tr[\gamma_b \gamma_\alpha \gamma_d \gamma_\beta] - g_{ad} Tr[\gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_\beta] + g_{a\beta} Tr[\gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d] \\ &\quad - g_{cd} Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_\beta] - g_{ba} Tr[\gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] + 4g_{ab} g_{cd} g_{\alpha\beta}) \\ &= -\frac{|f_2|^2}{M^2} q^b q^d p_n^\alpha p_p^\beta (g_{ac}(g_{b\alpha} g_{d\beta} - g_{bd} g_{\alpha\beta} + g_{b\beta} g_{\alpha d}) \\ &\quad - g_{a\alpha}(g_{bc} g_{d\beta} - g_{bd} g_{c\beta} + g_{b\beta} g_{cd}) - g_{ad}(g_{b\alpha} g_{c\beta} - g_{bc} g_{\alpha\beta} + g_{b\beta} g_{\alpha c}) \\ &\quad + g_{a\beta}(g_{b\alpha} g_{cd} - g_{bc} g_{\alpha d} + g_{bd} g_{\alpha c}) - g_{cd}(g_{ab} g_{\alpha\beta} - g_{a\alpha} g_{b\beta} + g_{a\beta} g_{b\alpha}) \\ &\quad + g_{ab} g_{cd} g_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{|f_2|^2}{M^2} (p_n \cdot q (p_{pa} q_c + q_a p_{pc}) + p_p \cdot q (p_{na} q_c + q_a p_{nc}) \\ &\quad - g_{ac} (2 p_n \cdot q p_p \cdot q - q^2 p_n \cdot p_p) - p_n \cdot p_p q_a q_c - q^2 (p_{na} p_{pc} + p_{pa} p_{nc})) \end{aligned} \quad (B.41)$$

$$\begin{aligned} Tr16 : \rightarrow &\quad - i f_2 g_2^* \frac{q^b}{2M} \frac{q_c}{M} p_n^\alpha p_p^\beta Tr[\sigma_{ab} \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\beta] = \frac{f_2 g_2^*}{2} \frac{q^b}{2M} \frac{q_c}{M} p_n^\alpha p_p^\beta (Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\beta] - Tr[\gamma_b \gamma_a \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\beta]) \\ &= 2i f_2 g_2^* \frac{q^b}{M} \frac{q_c}{M} p_n^\alpha p_p^\beta \epsilon_{ab\alpha\beta} = i f_2 g_2^* \frac{q^b}{M} \frac{q_c}{M} \epsilon_{ab\alpha\beta} (p_h^\alpha + q^\alpha) (p_h^\beta - q^\beta) \\ &= 2i f_2 g_2^* \frac{q^b}{M} \frac{q_c}{M} \epsilon_{ab\alpha\beta} (p_h^\alpha p_h^\beta - q^\alpha q^\beta - p_h^\beta q^\alpha + p_h^\alpha q^\beta) = 0, \end{aligned} \quad (B.42)$$

onde usamos a Eq. (A.8) e o fato que produtos entre partes simétricas e anti-simétricas é zero.

$$\begin{aligned}
Tr17 : \rightarrow \quad im_n c f_2 f_1^* \frac{q^b}{2M} p_p^\beta Tr[\sigma_{ab} \gamma_c \gamma_\beta] &= -\frac{m_n c}{2} f_2 f_1^* \frac{q^b}{2M} p_p^\beta (Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_\beta] - Tr[\gamma_b \gamma_a \gamma_c \gamma_\beta]) \\
&= -2m_n c f_2 f_1^* \frac{1}{M} (p_{pa} q_c - g_{ac} p_p \cdot q) . \tag{B.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr18 : \rightarrow \quad -im_n c f_2 g_1^* \frac{q^b}{2M} p_p^\beta Tr[\sigma_{ab} \gamma_5 \gamma_c \gamma_\beta] &= +\frac{m_n c}{2} f_2 g_1^* \frac{q^b}{2M} p_p^\beta (Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_5 \gamma_c \gamma_\beta] - Tr[\gamma_b \gamma_a \gamma_5 \gamma_c \gamma_\beta]) \\
&= -2im_n c f_2 g_1^* \frac{q^b}{M} p_p^\beta \epsilon_{abc\beta} . \tag{B.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr19 : \rightarrow \quad -i^2 m_n m_p c^2 f_2 f_2^* \frac{q^b}{2M} \frac{q^d}{2M} Tr[\sigma_{ab} \sigma_{cd}] &= -\frac{m_n m_p c^2}{4} |f_2|^2 \frac{q^b}{2M} \frac{q^d}{2M} Tr[(\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a) \times \\
&\quad \times (\gamma_c \gamma_d - \gamma_d \gamma_c)] \\
&= -\frac{m_n m_p c^2}{4} |f_2|^2 \frac{q^b}{2M} \frac{q^d}{2M} (Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d] \\
&\quad - Tr[\gamma_a \gamma_b \gamma_d \gamma_c] - Tr[\gamma_b \gamma_a \gamma_c \gamma_d] + Tr[\gamma_b \gamma_a \gamma_d \gamma_c]) \\
&= m_n m_p c^2 \frac{|f_2|^2}{M^2} (g_{ac} q^2 - q_a q_c) . \tag{B.45}
\end{aligned}$$

$$Tr20 : \rightarrow \quad -m_p c g_2 g_1^* \frac{q_a}{M} p_n^\alpha Tr[\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_c] = +4m_p c g_2 g_1^* \frac{q_a}{M} p_{nc} . \tag{B.46}$$

$$\begin{aligned}
Tr21 : \rightarrow \quad -i g_2 f_2^* \frac{q_a}{M} \frac{q^d}{2M} p_n^\alpha p_p^\beta Tr[\gamma_5 \gamma_\alpha \sigma_{cd} \gamma_\beta] &= \frac{g_2 f_2^*}{2} \frac{q_a}{M} \frac{q^d}{2M} p_n^\alpha p_p^\beta (Tr[\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_c \gamma_d \gamma_\beta] - Tr[\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_d \gamma_c \gamma_\beta]) \\
&= 2i g_2 f_2^* \frac{q_a}{M} \frac{q^d}{M} p_n^\alpha p_p^\beta \epsilon_{\alpha cd\beta} = 2i g_2 f_2^* \frac{q_a}{M} \frac{q^d}{M} \epsilon_{\alpha cd\beta} (p_h^\alpha + q^\alpha) (p_h^\beta - q^\beta) \\
&= 2i g_2 f_2^* \frac{q_a}{M} \frac{q^d}{M} \epsilon_{\alpha cd\beta} (p_h^\alpha p_h^\beta - q^\alpha q^\beta - p_h^\beta q^\alpha + p_h^\alpha q^\beta) = 0 , \tag{B.47}
\end{aligned}$$

onde usamos a Eq. (A.8) e o fato que produtos entre partes simétricas e anti-simétricas é zero.

$$Tr22 : \rightarrow \quad -g_2 g_2^* \frac{q_a}{M} \frac{q_c}{M} p_n^\alpha p_p^\beta Tr[\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\beta] = +4|g_2|^2 \frac{q_a}{M} \frac{q_c}{M} p_n \cdot p_p . \tag{B.48}$$

$$Tr23 : \rightarrow \quad -m_n c g_2 g_1^* \frac{q_a}{M} p_p^\beta Tr[\gamma_5 \gamma_5 \gamma_c \gamma_\beta] = -4m_n c g_2 g_1^* \frac{q_a}{M} p_{pc} . \tag{B.49}$$



$$Tr24 : \rightarrow -m_n m_p c^2 g_2 g_2^* \frac{q_a}{M} \frac{q_c}{M} Tr[\gamma_5 \gamma_5] = -4m_n m_p c^2 |g_2|^2 \frac{1}{M^2} q_a q_c . \quad (\text{B.50})$$

## B.0.4 Forma explícita da corrente hadrônica

Substituindo estes 22 traços, Eqs. (B.23-B.36,B.41-B.50), na Eq. (B.22), obtemos para a soma em spins para a corrente hadrônica,

$$\begin{aligned}
\Sigma_s(J_H)_{ac} &= \left[ -4 \left[ (|f_1|^2 + |g_1|^2) p_n \cdot p_p + (|g_1|^2 - |f_1|^2) m_n m_p c^2 \right] \right. \\
&+ \frac{2c}{M} (f_1 f_2^* + f_2 f_1^*) (m_n p_p \cdot q - m_p p_n \cdot q) \\
&- \left. \frac{|f_2|^2}{M^2} \left[ 2p_n \cdot q p_p \cdot q - (p_n \cdot p_p + m_n m_p c^2) q^2 \right] \right] \times g_{ac} \\
&+ \left[ \left( \frac{|4g_2|^2}{M^2} - \frac{|f_2|^2}{M^2} \right) p_n \cdot p_p - \left( \frac{|f_2|^2}{M^2} + \frac{|4g_2|^2}{M^2} \right) m_n m_p c^2 \right] \times q_a q_c \\
&+ \left[ 4(|f_1|^2 + |g_1|^2) - \frac{|f_2|^2}{M^2} q^2 \right] \times (p_{na} p_{pc} + p_{pa} p_{nc}) \\
&+ \frac{|f_2|^2}{M^2} [p_p \cdot q \times (p_{na} q_c + q_a p_{nc}) + p_n \cdot q \times (p_{pa} q_c + q_a p_{pc})] \\
&+ \frac{2m_p c}{M} \{ q_a p_{nc} (f_1 f_2^* + 2g_2 g_1^*) + 2p_{na} q_c (f_2 f_1^* + 2g_1 g_2^*) \} \\
&- \frac{2m_n c}{M} \{ q_a p_{pc} (2g_2 g_1^* + f_1 f_2^*) + 2p_{pa} q_c (2g_1 g_2^* + f_2 f_1^*) \} \\
&+ i \left[ -4 (g_1 f_1^* + f_1 g_1^*) p_n^\alpha p_p^\beta \epsilon_{\alpha\beta ac} + \frac{2cq^b}{M} (m_n p_p^\alpha + m_p p_n^\alpha) (g_1 f_2^* + f_2 g_1^*) \epsilon_{b\alpha ac} \right] \\
&= \left[ -4 \left[ (|f_1|^2 + |g_1|^2) p_n \cdot p_p + (|g_1|^2 - |f_1|^2) m_n m_p c^2 \right] \right. \\
&+ \frac{2c}{M} Re \{ f_1 f_2^* \} (m_n p_p \cdot q - m_p p_n \cdot q) \\
&- \left. \frac{|f_2|^2}{M^2} \left[ 2p_n \cdot q p_p \cdot q - (p_n \cdot p_p + m_n m_p c^2) q^2 \right] \right] \times g_{ac} \\
&+ \left[ \left( \frac{|4g_2|^2}{M^2} - \frac{|f_2|^2}{M^2} \right) p_n \cdot p_p - \left( \frac{|f_2|^2}{M^2} + \frac{|4g_2|^2}{M^2} \right) m_n m_p c^2 \right] \times q_a q_c \\
&+ \left[ 4(|f_1|^2 + |g_1|^2) - \frac{|f_2|^2}{M^2} q^2 \right] \times (p_{na} p_{pc} + p_{pa} p_{nc}) \\
&+ \frac{|f_2|^2}{M^2} [p_p \cdot q \times (p_{na} q_c + q_a p_{nc}) + p_n \cdot q \times (p_{pa} q_c + q_a p_{pc})] \\
&+ \frac{m_p c}{M} \{ 2q_a p_{nc} (f_1 f_2^* + 2g_2 g_1^*) + 2p_{na} q_c (f_2 f_1^* + 2g_1 g_2^*) \} \\
&- \frac{m_n c}{M} \{ 2q_a p_{pc} (2g_2 g_1^* + f_1 f_2^*) + 2p_{pa} q_c (2g_1 g_2^* + f_2 f_1^*) \} \\
&+ i \left[ -8 Re \{ g_1 f_1^* \} p_n^\alpha p_p^\beta \epsilon_{\alpha\beta ac} + \frac{4cq^b}{M} (m_n p_p^\alpha + m_p p_n^\alpha) Re \{ g_1 f_2^* \} \epsilon_{b\alpha ac} \right]. \quad (B.51)
\end{aligned}$$

O próximo passo a ser dado é fazer a contração entre as correntes leptônica e hadrônica, levando em consideração as simetrias presentes.

$$\begin{aligned}
\Sigma_s |\mathcal{M}(\nu)|^2 &= 8 [p_l^a p_\nu^c + p_\nu^a p_l^c - g^{ac} p_l \cdot p_\nu]_{sim} \times \left\{ \left[ -4 \left[ (|f_1|^2 + |g_1|^2) p_n \cdot p_p + (|g_1|^2 - |f_1|^2) m_n m_p c^2 \right] \right. \right. \\
&+ \left. \frac{2c}{M} Re \{ f_1 f_2^* \} (m_n p_p \cdot q - m_p p_n \cdot q) - \frac{|f_2|^2}{M^2} [2p_n \cdot q p_p \cdot q - (p_n \cdot p_p + m_n m_p c^2) q^2] \right] \times g_{ac} \\
&+ \left[ \left( \frac{|4g_2|^2}{M^2} - \frac{|f_2|^2}{M^2} \right) p_n \cdot p_p - \left( \frac{|f_2|^2}{M^2} + \frac{|4g_2|^2}{M^2} \right) m_n m_p c^2 \right] \times q_a q_c \\
&+ \left[ 4(|f_1|^2 + |g_1|^2) - \frac{|f_2|^2}{M^2} q^2 \right] \times (p_{na} p_{pc} + p_{pa} p_{nc}) \\
&+ \frac{|f_2|^2}{M^2} [p_p \cdot q \times (p_{na} q_c + q_a p_{nc}) + p_n \cdot q \times (p_{pa} q_c + q_a p_{pc})] \\
&+ \frac{m_p c}{M} \{ 2q_a p_{nc} (f_1 f_2^* + 2g_2 g_1^*) + 2p_{na} q_c (f_2 f_1^* + 2g_1 g_2^*) \} \\
&- \frac{m_n c}{M} \{ 2q_a p_{pc} (2g_2 g_1^* + f_1 f_2^*) + 2p_{pa} q_c (2g_1 g_2^* + f_2 f_1^*) \} \}_{sim} \\
&+ 8i p_{e_l} \cdot p_{\nu_m} \epsilon^{acm} \times i \left\{ -8 Re \{ g_1 f_1^* \} p_n^\alpha p_p^\beta \epsilon_{\alpha\beta ac} + \frac{4c q^b}{M} (m_n p_p^\alpha + m_p p_n^\alpha) \right. \\
&\times \left. Re \{ g_1 f_2^* \} \epsilon_{baac} \right\}_{anti-sim} . \tag{B.52}
\end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que, frente à troca de índices,  $a \rightarrow c$ ,  $c \rightarrow a$ , o produto de componentes simétricas com anti-simétricas é zero. Explicitamente temos:

### B.0.5 Contração das correntes leptônica e hadrônica

\*Para as partes simétricas,

$$8 \{ p_l^a p_\nu^c + p_\nu^a p_l^c - g^{ac} p_l \cdot p_\nu \}_{sim} \times g_{ac} = 8(2p_l \cdot p_\nu - 4p_l \cdot p_\nu) = -16p_l \cdot p_\nu \tag{B.53}$$

$$8 \{ p_l^a p_\nu^c + p_\nu^a p_l^c - g^{ac} p_l \cdot p_\nu \}_{sim} \times q_a q_c = 8(2p_l \cdot q p_\nu \cdot q - q^2 p_l \cdot p_\nu) \tag{B.54}$$

$$8 \{ p_l^a p_\nu^c + p_\nu^a p_l^c - g^{ac} p_l \cdot p_\nu \}_{sim} \times (p_{na} p_{pc} + p_{pa} p_{nc}) = 16(p_l \cdot p_n p_\nu \cdot p_p + p_\nu \cdot p_n p_l \cdot p_p - p_n \cdot p_p p_l \cdot p_\nu) \tag{B.55}$$

$$8 \{ p_l^a p_\nu^c + p_\nu^a p_l^c - g^{ac} p_l \cdot p_\nu \}_{sim} \times (p_{na} q_c + q_a p_{nc}) = 16(p_l \cdot p_n p_\nu \cdot q + p_\nu \cdot p_n p_l \cdot q - p_n \cdot q p_l \cdot p_\nu) ; \tag{B.56}$$

$$8 \{ p_l^a p_\nu^c + p_\nu^a p_l^c - g^{ac} p_l \cdot p_\nu \}_{sim} \times (p_{pa} q_c + q_a p_{pc}) = 16(p_l \cdot p_p p_\nu \cdot q + p_\nu \cdot p_p p_l \cdot q - p_p \cdot q p_l \cdot p_\nu) ; \tag{B.57}$$

$$\begin{aligned}
& 8[p_l^a p_\nu^c + p_\nu^a p_l^c - g^{ac} p_l \cdot p_\nu] \times \left\{ \frac{m_p^c}{M} \{2q_a p_{nc}(f_1 f_2^* + 2g_2 g_1^*) + 2p_{na} q_c(f_2 f_1^* + 2g_1 g_2^*)\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{m_n^c}{M} \{2q_a p_{pc}(2g_2 g_1^* + f_1 f_2^*) + 2p_{pa} q_c(2g_1 g_2^* + f_2 f_1^*)\} \right\} \\
& = 16 \frac{m_p^c}{M} [f_1 f_2^* + f_2 f_1^* + 2g_1 g_2^* + 2g_2 g_1^*] \times (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_n + p_l \cdot p_n p_\nu \cdot q - q \cdot p_n p_l \cdot p_\nu) \\
& \quad - 16 \frac{m_n^c}{M} [2(g_1 g_2^* + g_2 g_1^*) + f_1 f_2^* + f_2 f_1^*] \times (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_p + p_l \cdot p_p p_\nu \cdot q - q \cdot p_p p_l \cdot p_\nu) \\
& = 16 \frac{m_p^c}{M} [Re\{f_1 f_2^*\} + 2Re\{g_2 g_1^*\}] \times (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_n + p_l \cdot p_n p_\nu \cdot q - q \cdot p_n p_l \cdot p_\nu) \\
& \quad - 16 \frac{m_n^c}{M} [2Re\{g_2 g_1^*\} + Re\{f_1 f_2^*\}] \times (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_p + p_l \cdot p_p p_\nu \cdot q - q \cdot p_p p_l \cdot p_\nu) \\
& = 32 [Re\{f_1 f_2^*\} + 2Re\{g_2 g_1^*\}] \left( \frac{m_p^c}{M} (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_n + p_l \cdot p_n p_\nu \cdot q - q \cdot p_n p_l \cdot p_\nu) \right. \\
& \quad \left. - \frac{m_n^c}{M} (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_p + p_l \cdot p_p p_\nu \cdot q - q \cdot p_p p_l \cdot p_\nu) \right) \tag{B.58}
\end{aligned}$$

\*Para as partes anti-simétricas,

$$8ip_{e_l p_{\nu_m}} \epsilon^{alcm} \times -8i Re\{g_1 f_1^*\} p_n^\alpha p_p^\beta \epsilon_{\alpha\beta ac} = 128 Re\{g_1 f_1^*\} (p_n \cdot p_\nu p_p \cdot p_l - p_n \cdot p_l p_p \cdot p_\nu) ; \tag{B.59}$$

$$\begin{aligned}
8ip_{e_l p_{\nu_m}} \epsilon^{alcm} & \times -4i \frac{cq^b}{M} Re\{g_1 f_2^*\} (m_n p_p^\alpha + m_p p_n^\alpha) \epsilon_{abc\alpha} \\
& = \frac{64c}{M} Re\{g_1 f_2^*\} [m_n (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_p - p_l \cdot p_p p_\nu \cdot q) \\
& \quad + m_p (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_n - p_l \cdot p_n p_\nu \cdot q)] \tag{B.60}
\end{aligned}$$

Como o produto de partes simétricas e antisimétricas deve ser nulo, temos de forma explícita<sup>†</sup>.

†

$$\begin{aligned}
ip_{e_l p_{\nu_m}} \epsilon^{alcm} & \times \left\{ \frac{m_p^c}{M} \{q_a p_{nc}(f_1 f_2^* + 4g_2 g_1^*) + p_{na} q_c(f_2 f_1^* + 4g_1 g_2^*)\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{m_n^c}{M} \{q_a p_{pc}(4g_2 g_1^* + f_1 f_2^*) + p_{pa} q_c(4g_1 g_2^* + f_2 f_1^*)\} \right\} \\
& = i(p_{L_l} - q_l)(p_{L_m} + q_m) \epsilon^{alcm} \times \left\{ \frac{m_p^c}{M} \{q_a (p_{hc} + q_c)(f_1 f_2^* + 4g_2 g_1^*) \right. \\
& \quad + (p_{ha} + q_a) q_c(f_2 f_1^* + 4g_1 g_2^*)\} - \frac{m_n^c}{M} \{q_a (p_{hc} - q_c)(4g_2 g_1^* + f_1 f_2^*) \\
& \quad \left. + (p_{ha} - q_a) q_c(4g_1 g_2^* + f_2 f_1^*)\} \right\} \\
& = i(p_{L_l} q_m - q_l p_{L_m}) \epsilon^{alcm} \times \left\{ \frac{m_p^c}{M} \{q_a p_{hc}(f_1 f_2^* + 4g_2 g_1^*) \right. \\
& \quad + p_{ha} q_c(f_2 f_1^* + 4g_1 g_2^*)\} - \frac{m_n^c}{M} \{q_a p_{hc}(4g_2 g_1^* + f_1 f_2^*) \\
& \quad \left. + p_{ha} q_c(4g_1 g_2^* + f_2 f_1^*)\} \right\} = 0 , \tag{B.61}
\end{aligned}$$

onde usamos a Eq .(A.8). O termo se anula devido à multiplicação de partes simétricas e anti-simétricas com relação aos índices  $a, c, l, m$ .

$$\begin{aligned}
\Sigma_s |\mathcal{M}(\nu)|^2 &= 64 \left[ (|f_1|^2 + |g_1|^2) p_n \cdot p_p p_l \cdot p_\nu + (|g_1|^2 - |f_1|^2) m_n m_p c^2 p_l \cdot p_\nu \right] \\
&+ \frac{32c}{M} \text{Re} \{ f_1 f_2^* \} (m_p p_n \cdot q p_l \cdot p_\nu - m_n p_p \cdot q p_l \cdot p_\nu) \\
&+ \frac{16|f_2|^2}{M^2} \left[ 2p_n \cdot q p_p \cdot q p_l \cdot p_\nu - (p_n \cdot p_p p_l \cdot p_\nu + m_n m_p c^2 p_l \cdot p_\nu) q^2 \right] \\
&+ 8 \left( \frac{|4g_2|^2}{M^2} - \frac{|f_2|^2}{M^2} \right) (2p_l \cdot q p_\nu \cdot q p_n \cdot p_p - q^2 p_l \cdot p_\nu p_n \cdot p_p) \\
&- 8 \left( \frac{|f_2|^2}{M^2} + \frac{|4g_2|^2}{M^2} \right) m_n m_p c^2 (2p_l \cdot q p_\nu \cdot q - q^2 p_l \cdot p_\nu) \\
&+ 16 \left[ 4(|f_1|^2 + |g_1|^2) - \frac{|f_2|^2}{M^2} q^2 \right] (p_l \cdot p_n p_\nu \cdot p_p + p_\nu \cdot p_n p_l \cdot p_p - p_n \cdot p_p p_l \cdot p_\nu) \\
&+ \frac{16|f_2|^2}{M^2} [p_l \cdot p_n p_\nu \cdot q p_p \cdot q + p_\nu \cdot p_n p_l \cdot q p_p \cdot q - p_n \cdot q p_l \cdot p_\nu p_p \cdot q \\
&+ p_l \cdot p_p p_\nu \cdot q p_n \cdot q + p_\nu \cdot p_p p_l \cdot q p_n \cdot q - p_p \cdot q p_l \cdot p_\nu p_n \cdot q] \\
&+ 32 [\text{Re} \{ f_1 f_2^* \} + 2\text{Re} \{ g_2 g_1^* \}] \left( \frac{m_p c}{M} (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_n + p_l \cdot p_n p_\nu \cdot q - q \cdot p_n p_l \cdot p_\nu) \right. \\
&- \left. \frac{m_n c}{M} (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_p + p_l \cdot p_p p_\nu \cdot q - q \cdot p_p p_l \cdot p_\nu) \right) \\
&+ 128 \text{Re} \{ g_1 f_1^* \} (p_n \cdot p_\nu p_p \cdot p_l - p_n \cdot p_l p_p \cdot p_\nu) \\
&+ \frac{64c}{M} \text{Re} \{ g_1 f_2^* \} [m_n (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_p - p_l \cdot p_p p_\nu \cdot q) + m_p (p_l \cdot q p_\nu \cdot p_n - p_l \cdot p_n p_\nu \cdot q)] ; \\
&= \frac{4|f_2|^2}{M^2} [-4p_l \cdot q q \cdot p_\nu p_n \cdot p_p - 4p_l \cdot q q_l \cdot p_\nu m_p m_n + 4p_l \cdot q q \cdot p_n p_\nu \cdot p_p + 4p_l \cdot q q \cdot p_p p_\nu \cdot p_n \\
&+ 2p_l \cdot p_\nu q^2 p_n \cdot p_p - 2p_l \cdot p_\nu q^2 m_p m_n - 4p_l \cdot p_n q^2 p_\nu \cdot p_p + 4p_l \cdot p_n q \cdot p_\nu q \cdot p_p \\
&- 4p_l \cdot p_p q^2 p_\nu \cdot p_n + 4p_l \cdot p_p q \cdot p_\nu q_l \cdot p_n] \\
&+ \frac{32|g_2|^2}{M^2} [2p_l \cdot q q_l \cdot p_\nu p_n \cdot p_p - 2p_l \cdot q q \cdot p_\nu m_p m_n - p_l \cdot p_\nu q^2 p_n \cdot p_p + p_l \cdot p_\nu q^2 m_p m_n] \\
&+ 64|f_1|^2 [-p_l \cdot p_\nu m_p m_n + p_l \cdot p_n p_\nu \cdot p_p + p_l \cdot p_p p_\nu \cdot p_n] \\
&+ 64|g_1|^2 [p_l \cdot p_\nu m_p m_n + p_l \cdot p_n p_\nu \cdot p_p + p_l \cdot p_p p_\nu \cdot p_n] \\
&+ 128 f_1 g_1 [p_l \cdot p_p p_\nu \cdot p_n - p_l \cdot p_n p_\nu \cdot p_p] \\
&+ \frac{64g_1 g_2}{M} [-p_l \cdot p_p q_l \cdot p_\nu m_n + p_l \cdot q p_\nu \cdot p_n m_p - p_l \cdot q p_\nu \cdot p_p m_n - p_l \cdot p_\nu q \cdot p_n m_p \\
&+ p_l \cdot p_\nu q_l \cdot p_p m_n + p_l \cdot p_n q \cdot p_\nu m_p] \\
&+ \frac{32f_1 f_2}{M} [+p_l \cdot q p_\nu \cdot p_n m_p - p_l \cdot q p_\nu \cdot p_p m_n + p_l \cdot p_\nu q_l \cdot p_n m_p - p_l \cdot p_\nu q_l \cdot p_p m_n \\
&+ p_l \cdot p_n q_l \cdot p_\nu m_p - p_l \cdot p_p q_l \cdot p_\nu m_n] \\
&+ \frac{64g_1 f_2}{M} [p_l \cdot q p_\nu \cdot p_n m_p + p_l \cdot q p_\nu \cdot p_p m_n - p_l \cdot p_n q \cdot p_\nu m_p - p_l \cdot p_p q_l \cdot p_\nu m_n], \tag{B.62}
\end{aligned}$$

onde substituímos os resultados das Eqs. (B.53-B.61) na Eq. (B.52).

Tal como feito em [27], é útil escrever a estrutura polinomial de  $\Sigma_s |\mathcal{M}(\bar{\nu})|^2$ , Eq. (B.52) respectivamente, em função da Eq. (A.11). Dessa forma obtemos a amplitude de probabilidade de espalhamento elástico de um *antineutrino*, Eq. (5) da referência [27],

$$\begin{aligned}
\Sigma_s |\mathcal{M}(\bar{\nu})|^2 &= +(s-u)^2 \times 2 \left\{ 4(|g_1|^2 + |f_1|^2) - t \frac{|f_2|^2}{M^2} \right\} \\
&- (s-u) \times 2 \left\{ -4m_e^2 \frac{|f_2|^2}{M} \Delta - 4m_e^2 \frac{g_1 g_2}{M} \Delta - 4m_e^2 \frac{f_1 f_2}{M} \Delta - 16t g_1 (f_2 + f_1) \right\} \\
&- 32|g_1|^2 M^2 \Delta^2 - 32|f_1|^2 M^2 \Delta^2 - 32m_e^2 g_1 f_2 m_n \Delta - 32m_e^2 g_1 f_2 m_p \Delta \\
&- 32m_e^2 g_1 g_2 m_n \Delta + 32m_e^2 g_1 g_2 m_p \Delta + 32m_e^2 |g_1|^2 m_p m_n + 16m_e^2 f_1 f_2 m_n \Delta \\
&- 16m_e^2 f_1 f_2 m_p \Delta - 64m_e^2 f_1 g_1 M \Delta - 32m_e^2 |f_1|^2 m_p m_n - 2m_e^4 \frac{|f_2|^2}{M^2} m_n^2 \\
&- 4m_e^4 \frac{|f_2|^2}{M^2} m_p m_n - 2m_e^4 \frac{|f_2|^2}{M^2} m_p^2 + 8m_e^4 \frac{|g_2|^2}{M^2} m_n^2 - 16m_e^4 \frac{|g_2|^2}{M^2} m_p m_n \\
&+ 8m_e^4 \frac{|g_2|^2}{M^2} m_p^2 - 16m_e^4 \frac{g_1 g_2}{M} m_n - 16m_e^4 \frac{g_1 g_2}{M} m_p - 8m_e^4 |g_1|^2 \\
&- 8m_e^4 \frac{f_1 f_2}{M} m_n - 8m_e^4 \frac{f_1 f_2}{M} m_p - 8m_e^4 |f_1|^2 - 8t |f_2|^2 \Delta^2 - 32t |g_1|^2 m_p m_n \\
&- 32t f_1 f_2 m_n \Delta + 32t f_1 f_2 m_p \Delta + 32t |f_1|^2 m_p m_n + 2tm_e^2 \frac{|f_2|^2}{M^2} m_n^2 \\
&- 4tm_e^2 \frac{|f_2|^2}{M^2} m_p m_n + 2tm_e^2 \frac{|f_2|^2}{M^2} m_p^2 - 8tm_e^2 \frac{|g_2|^2}{M^2} m_n^2 + 16tm_e^2 \frac{|g_2|^2}{M^2} m_p m_n \\
&- 8tm_e^2 \frac{|g_2|^2}{M^2} m_p^2 + 16tm_e^2 \frac{g_1 g_2}{M} m_n + 16tm_e^2 \frac{g_1 g_2}{M} m_p - 8tm_e^2 \frac{f_1 f_2}{M} m_n \\
&- 8tm_e^2 \frac{f_1 f_2}{M} m_p - 8tm_e^4 \frac{|g_2|^2}{M^{-2}} + 8t^2 \frac{|f_2|^2}{M^2} m_p m_n + 8t^2 |g_1|^2 \\
&+ 16t^2 \frac{f_1 f_2}{M} m_n + 16t^2 \frac{f_1 f_2}{M} m_p + 8t^2 |f_1|^2 - 2t^2 m_e^2 \frac{|f_2|^2}{M^2} + 8t^2 m_e^2 \frac{|g_2|^2}{M^2} + 2t^3 \frac{|f_2|^2}{M^2};
\end{aligned} \tag{B.63}$$

# Apêndice C

## Cinemática do DIS

### C.1 Cinemática no referencial do laboratório ( $\vec{p}_p = \vec{0}$ )

Sabemos que existe um vínculo sobre a soma das variáveis de Mandelstan [28]:

$$s + t + u = \sum_i m_i^2, \quad (\text{C.1})$$

onde  $m_i$  é a massa de cada uma das partículas presentes na reação e estamos assumindo nesse caso  $m_\nu = 0$ . Para o caso do DIS as variáveis de Mandelstam têm a forma

$$\begin{aligned} s &= (p_\nu + p_p)^2 = (p_l + p_X)^2 \\ s &= m_l^2 + 2E_\nu(E_p - p_p \cos \phi_{\nu p}) = m_l^2 + m_X^2 + 2(E_l E_X - p_l p_X \cos \eta_{e_X}) \\ s &= m_p^2 + 2m_p E_{\nu_{LAB}}; \quad (S_{lab}) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

e para t,

$$\begin{aligned} t &= (p_\nu - p_l)^2 = (p_p - p_X)^2 \\ t &= m_l^2 - 2E_\nu(E_l - p_l \cos \theta_{\nu e}) = m_p^2 + m_X^2 - 2(E_p E_X - p_p p_X \cos \eta_{p_X}) \\ t &= m_p^2 + m_X^2 - 2m_p E_{X_{LAB}} \quad (S_{lab}) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} u &= (p_\nu - p_n)^2 = (p_l - p_p)^2 \\ u &= m_n^2 - 2E_\nu(E_n - p_n \cos \theta_{\nu n}) = m_p^2 + m_l^2 - 2(E_p E_l - p_p p_l \cos \eta_{pe}) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Aqui  $\eta_{ij}$  é o ângulo formado entre as partículas  $i$  e  $j$ . Na notação usual para a cinemática do DIS, a massa do estado hadrônico final é identificada por  $W$  em vez de  $m_x$ . Vamos seguir esta notação, bem como as definições usuais para esta grandeza,

$$\begin{aligned}
W^2 &= (p_p + q)^2 = m_p^2 + q^2 + 2p_p^\alpha q_\alpha = m_p^2 + q^2 + 2m_p\nu && \text{onde} \\
m_p\nu &\equiv p_p^\alpha q_\alpha = E_p(E_\nu - E_l) - \vec{p}_p \cdot \vec{p}_\nu + \vec{p}_p \cdot \vec{p}_l \\
\nu &\equiv E_{\nu_{LAB}} - E_{e_{LAB}} && (S_{lab}) ;
\end{aligned} \tag{C.5}$$

No sistema  $S_{LAB}$ ,  $\nu$  é a energia transferida do neutrino para o sistema hadrônico, sendo que a energia total deste sistema é  $E_x = \nu + m_p$ . Substituindo  $E_{x_{lab}}$  em  $W^2$  temos

$$\begin{aligned}
W^2 &= m_p^2 + (m_p^2 + W^2 - 2m_p E_{x_{LAB}}) + 2m_p\nu && \text{ou} \\
E_{x_{LAB}} &= m_p + \nu = m_p + E_{\nu_{LAB}} - E_{e_{LAB}} && (S_{lab})
\end{aligned} \tag{C.6}$$

## C.2 O referencial do centro de massa ( $\vec{p}_{p,cm} + \vec{p}_{\nu cm} = \vec{0}$ )

Nesse caso a variável  $s$  tem a forma

$$\begin{aligned}
s &= (p_{\nu,CM} + p_{p,CM})^2 = (p_{e,CM} + p_{X,CM})^2 \\
&= (E_{\nu CM} + E_{pCM})^2
\end{aligned} \tag{C.7}$$

e para  $t$ ,

$$\begin{aligned}
t &= (p_{\nu CM} - p_{eCM})^2 = (p_{pCM} - p_{XCM})^2 \\
t &= m_l^2 - 2(E_{\nu CM} E_{eCM} - p_{\nu CM} p_{eCM} \cos\theta_{\nu eCM})
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Neste referencial temos que  $s = (p_{\nu CM} + p_{pCM})^2 = (E_{\nu CM} + E_{pCM})^2$ , que é a energia total no referencial do centro de massa, ou seja  $E = \sqrt{s}$ . Escrevendo agora

$$E_{pCM} = \sqrt{m_p^2 + p_{pCM}^2} = \sqrt{m_p^2 + E_{\nu CM}^2 - m_\nu^2} \tag{C.9}$$

Ou seja

$$E_{\nu CM} + E_{pCM} = E_{\nu CM} + \sqrt{m_p^2 + E_{\nu CM}^2 - m_\nu^2} = \sqrt{s} \tag{C.10}$$



Encontramos como solução

$$E_{\nu_{CM}} = \frac{s + m_\nu^2 - m_p^2}{2\sqrt{s}} = \frac{s - m_p^2}{2\sqrt{s}}, \quad (\text{C.11})$$

Onde fizemos  $m_\nu = 0$ . Também temos que  $s = (p_{e_{CM}} + p_{X_{CM}})^2 = (E_{e_{CM}} + E_{X_{CM}})^2$ . Fazendo o mesmo procedimento encontramos que

$$E_{e_{CM}} = \frac{s + m_l^2 - W^2}{2\sqrt{s}} \quad (\text{C.12})$$

Como temos que  $\vec{p}^2 = E^2 - m^2$ , podemos escrever

$$\vec{p}_{\nu_{CM}} = \frac{\sqrt{(s - (m_p + m_\nu)^2)(s - (m_p - m_\nu)^2)}}{2\sqrt{s}} = \frac{s - m_p^2}{2\sqrt{s}} \quad (\text{C.13})$$

e

$$\vec{p}_{e_{CM}} = \frac{\sqrt{(s - (W + m_l)^2)(s - (W - m_l)^2)}}{2\sqrt{s}} \quad (\text{C.14})$$

Sendo assim, temos para  $t$

$$\begin{aligned} t &= m_l^2 - 2(E_{\nu_{CM}}E_{e_{CM}} - p_{\nu_{CM}}p_{e_{CM}}\cos\theta_{\nu e_{CM}}) \\ &= m_l^2 - \frac{1}{2s} \left\{ s^2 + s(m_p^2 - m_l^2 - W^2) - m_p^2(m_l^2 + W^2) \right. \\ &\quad \left. + (s - m_p^2)\sqrt{s^2 + W^4 + m_l^2 - 2(W^2m_l^2 + s(W^2 + m_l^2))}\cos\theta_{\nu e_{CM}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Para o caso de  $m_l = m_\nu = 0$ ,  $t$  tem simplesmente a forma

$$t(m_l = m_\nu = 0) = - \left( s + \frac{m_p^2 W^2}{s} - (W^2 + m_p^2) \right) \left( \frac{1 + \cos\theta_{\nu e_{CM}}}{2} \right) \quad (\text{C.16})$$

Ainda neste referencial podemos escrever o invariante  $W^2$  como sendo

$$W^2 = s + m_l^2 - 2\sqrt{s}E_{e_{CM}}. \quad (\text{C.17})$$

ou da definição da variável  $s$

$$W^2 = s - m_l^2 - 2(E_{e_{CM}}E_{X_{CM}} - p_{e_{CM}}p_{X_{CM}}). \quad (\text{C.18})$$

Se aproximarmos  $m_l = 0$

$$W^2 = s - 2p_{e_{CM}}(E_{X_{CM}} - p_{X_{CM}}). \quad (\text{C.19})$$

Ainda, no caso limite de  $\vec{p}_{e_{cm}} = \vec{0}$ , temos que  $W^2 = s$ , que  o valor máximo permitido. Sendo assim  $m_p^2 \leq W^2 \leq s$ .

### C.2.1 Limites cinemáticos

Sabemos que no referencial do centro de massa a energia máxima permitida para o elétron é obtida quando a energia convertida em massa do jato hadrônico for a menor possível, ou seja, no caso em que  $W = m_p$ . A energia mínima no referencial de centro de momentum é obtida para o caso no qual o momento do elétron é zero neste referencial. Sendo assim podemos escrever os limites cinemáticos como

$$0 \leq \theta_{\nu e_{CM}} \leq \pi; \quad m_l \leq E_{e_{CM}} \leq \frac{s + m_l^2 - m_p^2}{2\sqrt{s}} \quad (\text{C.20})$$

Aplicando os limites em  $\theta_{\nu e_{CM}}$  temos para  $t$ :

$$\begin{aligned} t(\theta_{\nu e_{CM}} = 0, \pi) &= m_l^2 - 2E_{\nu_{CM}}(E_{e_{CM}} - |\vec{p}_{e_{CM}}| \cos \theta_{\nu e_{CM}}) \\ &= m_l^2 - \frac{2(s - m_p^2)}{2\sqrt{s}} \left\{ \frac{s + m_l^2 - W^2}{2\sqrt{s}} \mp \frac{\sqrt{(s - (W + m_l)^2)(s - (W - m_l)^2)}}{2\sqrt{s}} \right\} \\ &= m_l^2 - \frac{(s - m_p^2)}{2s} \left\{ s + m_l^2 - W^2 \mp \sqrt{(s - (W + m_l)^2)(s - (W - m_l)^2)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Para o limite inferior na energia do elétron ejetado temos

$$\begin{aligned} t(\theta_{\nu e_{CM}} = 0, \pi; E_{e_{CM}} = m_l) &= m_l^2 - 2E_{\nu_{CM}}(E_{e_{CM}} - |\vec{p}_{e_{CM}}| \cos \theta_{\nu e_{CM}}) \\ &= m_l^2 - \frac{(s - m_p^2)}{\sqrt{s}} m_l \\ &= m_l^2 + \left( \frac{m_p^2}{\sqrt{s}} - \sqrt{s} \right) m_l \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Sabemos que  $t \leq 0$ . Para tal, substituindo a Eq. (C.2), temos que  $E_{\nu_{CM}} > m_l$ , o que nos mostra que podemos aplicar este resultado para todas as energias acima do limiar da reação. Vemos facilmente que se a massa do lépton produzido, um elétron no caso, for desconsiderada, obtemos automaticamente  $t = 0$  como limite superior. Para o caso do limite superior na energia do elétron emitido, temos

$$\begin{aligned} t(\theta_{\nu e_{CM}} = 0, \pi; E_{e_{CM}} = \frac{s + m_l^2 - m_p^2}{2\sqrt{s}}) &= m_l^2 - 2E_{\nu_{CM}}(E_{e_{CM}} - |\vec{p}_{e_{CM}}| \cos \theta_{\nu e_{CM}}) \\ &= m_l^2 - \frac{2(s - m_p^2)}{2\sqrt{s}} \left\{ \frac{s + m_l^2 - m_p^2}{2\sqrt{s}} \mp \frac{\sqrt{(s - (m_p + m_l)^2)(s - (m_p - m_l)^2)}}{2\sqrt{s}} \right\} \end{aligned}$$

$$= m_l^2 - \frac{(s - m_p^2)}{2s} \left\{ s + m_l^2 - m_p^2 \mp \sqrt{(s - (m_p + m_l)^2)(s - (m_p - m_l)^2)} \right\} \quad (\text{C.23})$$

Novamente se fizermos o limite usual de que  $m_l = 0$ , a Eq. (C.23) se reduz a

$$t \left( \theta_{\nu_{eCM}} = 0, \pi; E_{eCM} = \frac{s + m_l^2 - m_p^2}{2\sqrt{s}}; m_l = 0 \right) = -\frac{(s - m_p^2)^2}{2s} \{1 \mp 1\} \quad (\text{C.24})$$

neste caso limite em que a energia do elétron é máxima, temos que a variável  $t$  apresenta dependência em  $\theta_{\nu_{cm}}$  dada simplesmente por

$$t \left( \pi; E_{eCM} = \frac{s + m_l^2 - m_p^2}{2\sqrt{s}}; m_l = 0 \right) = -\frac{(s - m_p^2)^2}{2s} \{1 \mp \cos\theta_{\nu_{CM}}\} \quad (\text{C.25})$$

Além disso podemos dizer que, na aproximação de  $m_l = 0$ , para quaisquer valores de energia do elétron  $t$  está limitada ao intervalo

$$-\frac{(s - m_p^2)^2}{s} \leq t \leq 0 \quad (\text{C.26})$$

Esta equação foi obtida ao se fazer o limite no qual a energia carregada pelo elétron é máxima.

Caso mantivermos a massa do sistema hadrônico como sendo  $W$ , a Eq. (C.26) tem a forma

$$-\frac{(s - m_p^2)(s - W^2)}{s} \leq t \leq 0 \quad (\text{C.27})$$

ou escrevendo  $W$  em função de  $t$

$$\begin{aligned} -\frac{(s - m_p^2)(s - W^2)}{s} &\leq t \\ -(s - W^2) &\leq \frac{st}{(s - m_p^2)} \\ W^2 &\leq \frac{s(s - m_p^2 + t)}{(s - m_p^2)} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Ou seja, para um valor fixo de  $t$ , obtemos os limites para a variável  $W^2$

$$m_p \leq W^2 \leq \frac{s(s - m_p^2 + t)}{(s - m_p^2)} \quad (\text{C.29})$$

Dada a Eq.(C.5) podemos escrever

$$\nu = \frac{W^2 - t - m_p^2}{2m_p} \quad (\text{C.30})$$

Aplicando os limites obtidos para  $W^2$ , se a variável  $Q^2 = -t$  for fixada e estiver contida no intervalo  $0 \leq Q^2 \leq (s - m_p^2)/s$  obtemos os limites para  $\nu$

$$\nu(W = m_p) = \frac{Q^2}{2m_p} \quad (\text{C.31})$$

$$\nu \left( W^2 = \frac{s(s - m_p^2 + t)}{(s - m_p^2)} \right) = \frac{(s - m_p^2)^2 - Q^2 m_p^2}{2m_p(s - m_p^2)} \quad (\text{C.32})$$

Nesse caso, para agora  $\nu$  fixo, obtemos que

$$0 \leq Q^2 \leq 2m_p \nu \quad (\text{C.33})$$

Substituindo estes limites em  $Q^2$  nas Eqs. (C.31, C.32) temos os limites em  $\nu$

$$0 \leq \nu \leq \frac{s - m_p^2}{2m_p} = E_\nu(m_l = 0) \quad (\text{C.34})$$

Substituindo finalmente esses limites em  $Q^2$  e  $\nu$ , Eqs. (C.33,C.34) respectivamente, nas Eqs. (3.17), e lembrando que temos o caso especial onde  $\nu(Q^2 = 0; W = m_p) = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} x(Q^2 = 0) &= 0 && ; W^2 > m_p^2 \\ x(Q^2 = 2m_p \nu) &= 1 && ; W^2 = m_p^2 \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

$$\begin{aligned} y(\nu = 0) &= 0 \\ y(\nu = E_\nu) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

### C.3 Limites cinemáticos em $S_{CM}$ quando $m_l \neq 0$

Passamos agora ao cálculo dos limites cinemáticos quando a massa do lépton carregado produzido for levada em conta. Faremos os cálculos para um elétron, mas estes permanecem válidos para o caso de múons e taus, desde que alteremos o valor da massa do lépton produzido. Basicamente vamos recalculas as Eqs. (C.23 - C.36) agora com  $m_l \neq 0$ .

Quando fazemos  $\{\theta_{\nu e_{CM}} = 0, \pi\}$ , a Eq. (C.21) pode ser escrita como

$$\epsilon = (2s - m_l^2)W^2 - W^4 = \left( \pm 1 \mp \frac{W^2}{s} \right) \sqrt{(s - (W + m_l)^2)(s - (W - m_l)^2)} \quad (\text{C.37})$$

onde

$$\epsilon = \frac{2s(t - m_l^2) + s^2 + m_l^2 s - m_p^2 s - m_p^2 m_l^2}{s - m_p^2} \quad (\text{C.38})$$

Elevando os dois lados da Eq. (C.37) ao quadrado, eliminamos a raiz e encontramos

$$\begin{aligned} W^2 \pm \sqrt{(s - (W - m_l)^2)(s - (W + m_l)^2)} &= \epsilon \\ s^2 + m_l^4 + W^4 - 2sW^2 - 2sm_l^2 + 2m_l^2W^2 &= \epsilon^2 + W^4 - 2W^2\epsilon \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Resolvendo para  $W$ , temos

$$W^2 = \frac{s^2 + m_l^4 - 2sm_l^2 - \epsilon^2}{2(s - m_l^2 - \epsilon)} \quad (\text{C.40})$$

Substituindo  $\epsilon$ , encontramos após alguma álgebra a solução para  $W^2$  como sendo

$$W^2 = \frac{m_l^2 m_p^2 (m_l^2 + m_p^2 - s - t) + (s + t - m_l^2 - m_p^2)st}{m_l^2 m_p^2 - m_l^2 s + m_p^2 t + st} \quad (\text{C.41})$$

O denominador da Eq. (C.41) só é nulo se  $s = m_p^2$ , condição que não é permitida pela cinemática.

No limite de  $m_l = 0$  recuperamos a Eq. (C.28)

$$W^2 = \frac{(s + t - m_p^2)s}{s - m^2 - p} \quad (\text{C.42})$$

A Eq. (C.29) modificada para levar em conta a massa do lépton carregado tem agora a forma

$$m_p^2 \leq W^2 \leq \frac{s^2 + m_l^4 - 2sm_l^2 - \epsilon^2}{2(s - m_l^2 - \epsilon)} \quad (\text{C.43})$$

O intervalo no qual a variável  $Q^2 = -t$  deve agora estar contida depende da massa do lépton,

$$\begin{aligned} Q_{min}^2 \leq Q^2 &\leq Q_{max}^2 \\ Q_{min}^2 &= \frac{(s - m_p^2)}{2s} \left\{ s + m_l^2 - m_p^2 - \sqrt{(s - (m_p + m_l)^2)(s - (m_p - m_l)^2)} \right\} \\ Q_{MAX}^2 &= \frac{(s - m_p^2)}{2s} \left\{ s + m_l^2 - m_p^2 + \sqrt{(s - (m_p + m_l)^2)(s - (m_p - m_l)^2)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

Aplicamos agora o limite superior em  $W^2$  dado pela Eq. (C.43) na Eq. (C.30), obteremos o limite generalizado para  $\nu$

$$\begin{aligned} \nu(W^2 = W_{sup}^2) &= \frac{st(s - 2m_p^2) + m_p^2(m_l^4 + t^2 + m_p^2 t - 2m_l^2 t)}{2m_p(m_l^2 m_p^2 - m_l^2 s - m_p^2 t + st)} \\ &= \frac{(s - 2m_p^2)^2 + m_p^2 t + m_p^2 m_l^2 \left(\frac{m_l^2}{t} - 2\right)}{2m_p(s - m_p^2) \left(1 - \frac{m_l^2}{t}\right)} \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Se acaso fizermos  $t = 0$  nessa equação obteremos

$$E_{\nu_{CM}} - E_{e_{CM}} = \nu_{sup}(Q^2 = 0) = -\frac{m_l^2 m_p^2}{s - m_p^2} < 0. \quad (\text{C.46})$$

que está claramente fora do espaço físico permitido para  $E_l$ . A Eq. (C.45b) nos mostra isso de forma ainda mais clara, pois o termo  $\left(\frac{m_l^2}{t}\right)$  implica em  $t \neq 0$

# Apêndice D

## Probabilidade na base de massa

Desejamos escrever o Hamiltoniano na forma

$$H = Ib_0 + \sigma_3 b_3 = \begin{bmatrix} b_0 + b_3 & 0 \\ 0 & b_0 - b_3 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} (\alpha_1 f(\rho))^2 & 0 \\ 0 & (1 + \alpha_2 f(\rho))^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Ou seja

$$\begin{bmatrix} b_0 + b_3 & 0 \\ 0 & b_0 - b_3 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Isso implica em

$$\delta a_1 = b_0 + b_3 \quad (\text{D.3})$$

$$\delta a_2 = b_0 - b_3 \quad (\text{D.4})$$

cuja solução é

$$b_0 = \frac{\delta}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2} \frac{\Delta m_{32}^2}{2E} [(\alpha_1 f(\rho))^2 + (1 + \alpha_2 f(\rho))^2] \quad (\text{D.5})$$

$$b_3 = \frac{\delta}{2}(a_1 - a_2) = \frac{1}{2} \frac{\Delta m_{32}^2}{2E} [(\alpha_1 f(\rho))^2 - (1 + \alpha_2 f(\rho))^2] \quad (\text{D.6})$$

A solução para a Eq(D.1) é:  $U = \cos(b_3 t)I + i \sin(b_3 t)\sigma_3$ , em forma matricial,

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos(b_3 t) + i \sin(b_3 t) & 0 \\ 0 & \cos(b_3 t) - i \sin(b_3 t) \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

então

$$\begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(b_3 t) + i \sin(b_3 t) & 0 \\ 0 & \cos(b_3 t) - i \sin(b_3 t) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1(0) \\ \nu_2(0) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.8})$$

Substituindo a solução encontrada na Eq. (D.6), temos para os elementos ( $M_{11}$ ) e ( $M_{22}$ ) da matriz de evolução

$$\begin{aligned} M_{(11,22)} &= \cos(b_3 t) \pm i \sin(b_3 t) \\ &= \cos \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta m_{32}^2}{2E} [(\alpha_1 f(\rho))^2 + (1 + \alpha_2 f(\rho))^2] \right) t \right] \\ &\pm i \sin \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta m_{32}^2}{2E} [(\alpha_1 f(\rho))^2 + (1 + \alpha_2 f(\rho))^2] \right) t \right] \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

## D.1 Probabilidade

No caso em que  $\alpha_3 = 0$ , ou seja, a matriz de evolução na base de sabores é diagonal, temos a probabilidade de sobrevivência do auto estado  $|\nu_1\rangle$  dada por

$$\begin{aligned} P_{\nu_1 \rightarrow \nu_1} &= |\langle \nu_1 | \nu_1(t) \rangle|^2 = |\cos(b_3 t) + i \sin(b_3 t)|^2 = [\cos(b_3 t) + i \sin(b_3 t)][\cos(b_3 t) - i \sin(b_3 t)] \\ &= \cos(b_3 t) \cos(b_3 t) - i \cos(b_3 t) \sin(b_3 t) + i \sin(b_3 t) \cos(b_3 t) - (i)^2 \sin(b_3 t) \sin(b_3 t) \\ &= \cos^2(b_3 t) + \sin^2(b_3 t) = 1. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

### D.1.1 Cálculo de $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}$ :

Quando transformamos a Eq. (D.8) na base de sabor temos,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nu_\mu(t) \\ \nu_\tau(t) \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \cos(b_3 t) + i \sin(b_3 t) & 0 \\ 0 & \cos(b_3 t) - i \sin(b_3 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \nu_\mu(0) \\ \nu_\tau(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Fazendo as multiplicações necessárias temos,

$$\begin{bmatrix} \nu_\mu(t) \\ \nu_\tau(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{pmatrix} [\cos(b_3t) + i \sin(b_3t)] \cos(\theta) & -[\cos(b_3t) + i \sin(b_3t)] \sin(\theta) \\ (\cos(b_3t) - i \sin(b_3t)) \sin(\theta) & (\cos(b_3t) - i \sin(b_3t)) \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \nu_\mu(0) \\ \nu_\tau(0) \end{bmatrix} \\
& = M'' \begin{bmatrix} \nu_\mu(0) \\ \nu_\tau(0) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{D.12}$$

E finalmente para a matriz  $M''$  podemos escrever

$$\begin{aligned}
M'' & = \begin{pmatrix} \cos(b_3t) + i \sin(b_3t)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) & -2i \sin(b_3t) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ -2i \sin(b_3t) \sin(\theta) \cos(\theta) & \cos(b_3t) - i \sin(b_3t)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \cos(b_3t) + i \sin(b_3t) \cos(2\theta) & -i \sin(b_3t) \sin(2\theta) \\ -i \sin(b_3t) \sin(2\theta) & \cos(b_3t) - i \sin(b_3t) \cos(2\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{D.13}$$

Em termos das matrizes de Pauli:

$$M'' = \cos(b_3t)I + i \sin(b_3t) \cos(2\theta)\sigma_3 - i \sin(b_3t) \sin(2\theta)\sigma_1 \tag{D.14}$$

Dessa forma, partindo da condição inicial

$$\begin{bmatrix} \nu_\mu(0) \\ \nu_\tau(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{D.15}$$

a probabilidade de conversão  $P_{(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)}$  é dada por

$$\begin{aligned}
P_{(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)} & = |\cos(b_3t) + i \sin(b_3t) \cos(2\theta)|^2 \\
& = [\cos(b_3t) + i \sin(b_3t) \cos(2\theta)][\cos(b_3t) - i \sin(b_3t) \cos(2\theta)] \\
& = \cos^2(b_3t) - i \sin(b_3t) \cos(b_3t) \cos(2\theta) + i \sin(b_3t) \cos(b_3t) \cos(2\theta) + \sin^2(b_3t) \cos^2(2\theta) \\
& = \cos^2(b_3t) + \sin^2(b_3t) \cos^2(2\theta) .
\end{aligned} \tag{D.16}$$

Finalmente, podemos escrever a probabilidade de conversão  $P_{(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)}$  como

$$\begin{aligned}
P_{(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)} & = \cos^2(b_3t) + \sin^2(b_3t) \cos^2(2\theta) \\
& = 1 - \sin^2(b_3t) \sin^2(2\theta),
\end{aligned} \tag{D.17}$$



onde

$$b_3 = \frac{\delta}{2}(a_1 - a_2) = \frac{1}{2} \frac{\Delta m_{32}^2}{2E} [(\alpha_1 f(\rho))^2 - (1 + \alpha_2 f(\rho))^2] , \quad (\text{D.18})$$

e então para o caso  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  e  $t = L$  teremos

$$P_{(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)} = 1 - \sin^2 \left[ \frac{\Delta m_{32}^2}{4E} L \right] \sin^2(2\theta) . \quad (\text{D.19})$$

# Apêndice E

## Diagonalização para o caso $\alpha_3 \neq 0$ :

Podemos diagonalizar  $H$  através da rotação  $|\nu_i\rangle = U'|\Psi_i\rangle$

$$\begin{aligned} H'' &= U' H U'^{\dagger} = \begin{pmatrix} \cos(\eta) & \sin(\eta) \\ -\sin(\eta) & \cos(\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\eta) & -\sin(\eta) \\ \sin(\eta) & \cos(\eta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A \cos^2(\eta) + C \sin^2(\eta) + 2B \sin(\eta) \cos(\eta) & (C - A) \sin(\eta) \cos(\eta) + B \cos(2\eta) \\ (C - A) \sin(\eta) \cos(\eta) + B \cos(2\eta) & A \sin^2(\eta) + C \cos^2(\eta) - 2B \sin(\eta) \cos(\eta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Para diagonalizar a matriz de evolução basta fazer

$$\frac{(C - A)}{2} \sin(2\eta) + B \cos(2\eta) = 0 \quad (\text{E.2})$$

Ou seja, para diagonalizar o sistema temos que

$$\tan(2\eta) = \frac{2B}{A - C} \quad (\text{E.3})$$

Especificamente temos,

$$\tan(2\eta) = \frac{2(\alpha_3 f(\rho))^2}{(\alpha_1 f(\rho))^2 - (1 - \alpha_2 f(\rho))^2} \quad (\text{E.4})$$

Como definimos a rotação, temos que os auto-estados dos neutrinos de massa estão relacionados com os auto-estados que diagonalizam  $H$  por

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &= \cos(\eta)|\Psi_1\rangle + \sin(\eta)|\Psi_2\rangle \\ |\nu_2\rangle &= -\sin(\eta)|\Psi_1\rangle + \cos(\eta)|\Psi_2\rangle \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Na base  $|\Psi\rangle$ , a matriz  $H''$  é diagonal, e por causa disso podemos escrever

$$|\Psi_i, t\rangle = e^{-iE_i''t}|\Psi_i, 0\rangle \quad (\text{E.6})$$

Logo, para a amplitude de probabilidade de conversão temos

$$\begin{aligned} \langle \nu_2 | \nu_1, t \rangle &= [-\sin^*(\eta)\langle \Psi_1 | + \cos^*(\eta)\langle \Psi_2 |] \otimes [\cos(\eta)|\Psi_1, t\rangle + \sin(\eta)|\Psi_2, t\rangle] \\ &= [-\sin^*(\eta)\langle \Psi_1 | + \cos^*(\eta)\langle \Psi_2 |] \otimes [\cos(\eta)e^{-iE_1''t}|\Psi_i, 0\rangle + \sin(\eta)e^{-iE_2''t}|\Psi_2, 0\rangle] \\ &= -\sin^*(\eta)\cos(\eta)e^{-iE_1''t} + \cos^*(\eta)\sin(\eta)e^{-iE_2''t} \\ &= \cos(\eta)\sin(\eta)[e^{-iE_2''t} - e^{-iE_1''t}] \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Então a probabilidade de oscilação na base de massa fica

$$\begin{aligned} P_{(\nu_1 \rightarrow \nu_2)} &= |\langle \nu_2 | \nu_1, t \rangle|^2 = |\cos(\eta)\sin(\eta)[e^{-iE_2''t} - e^{-iE_1''t}]|^2 \\ &= \cos^*(\eta)\sin^*(\eta)\cos(\eta)\sin(\eta)[(e^{-iE_2''t})^* - (e^{-iE_1''t})^*][e^{-iE_2''t} - e^{-iE_1''t}] \\ &= \cos^2(\eta)\sin^2(\eta)\{[e^{iE_2''t} - e^{iE_1''t}][e^{-iE_2''t} - e^{-iE_1''t}]\} \\ &= \cos^2(\eta)\sin^2(\eta)\{[e^{-iE_2''t}e^{iE_2''t} - e^{-iE_2''t}e^{iE_1''t} - e^{-iE_1''t}e^{iE_2''t} + e^{-iE_1''t}e^{iE_1''t}]\} \\ &= \cos^2(\eta)\sin^2(\eta)\{1 - (e^{i(E_2''-E_1'')t} + e^{-i(E_2''-E_1'')t}) + 1\} \\ &= 2\cos^2(\eta)\sin^2(\eta)\{1 - \cos[(E_2'' - E_1'')t]\} . \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Aqui os auto-valores de energia  $E_i''$  (na base  $\{|\Psi_i\rangle\}$  que diagonaliza  $H''$ ) podem ser escritos como

$$\begin{aligned} E_1'' &= A\cos^2(\eta) + C\sin^2(\eta) + 2B\sin(\eta)\cos(\eta) \\ E_2'' &= A\sin^2(\eta) + C\cos^2(\eta) - 2B\sin(\eta)\cos(\eta) , \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

ou seja, a diferença  $E_2'' - E_1''$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E_2'' - E_1'' &= -A\cos(2\eta) + C\cos(2\eta) - 2B\sin(2\eta) \\ &= (C - A)\cos(2\eta) - 2B\sin(2\eta) . \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Para o caso de  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  temos

$$\tan(2\eta) = 0 \rightarrow \sin(2\eta) = 0 \rightarrow \cos(2\eta) = 1 . \quad (\text{E.11})$$

Nesse caso,

$$E_2'' - E_1'' = C(\alpha_2 = 0) - A(\alpha_1 = 0) = \delta . \quad (\text{E.12})$$

Ainda assim, se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ,  $\sin^2(\eta) = 0$  e desse modo  $P_{(\nu_1, \nu_2)} = 0$ .

## E.1 Cálculo de $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}$

Uma vez conhecida a evolução temporal dos auto-estados de massa do neutrino, podemos agora calcular a probabilidade de sobrevivência para um auto estado de sabor,  $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = |\langle \nu_\mu | \nu_\mu, t \rangle|^2$ . Podemos relacionar os neutrinos de sabor com os neutrinos de massa através de

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.13})$$

ou seja,

$$|\nu_\mu\rangle = \cos(\theta)|\nu_1\rangle + \sin(\theta)|\nu_2\rangle, \quad (\text{E.14})$$

onde a evolução temporal dos auto-estados de massa é dada pela Eq. (E.5). Dessa forma para a amplitude de probabilidade de sobrevivência do neutrino muônico temos

$$\begin{aligned} \langle \nu_\mu | \nu_\mu, t \rangle &= [\cos^*(\theta)\langle \nu_1 | + \sin^*(\theta)\langle \nu_2 |] \otimes [\cos(\theta)|\nu_1, t\rangle + \sin(\theta)|\nu_2, t\rangle] \\ &= \{\cos^*(\theta)[\cos^*(\eta)\langle \Psi_1 | + \sin^*(\eta)\langle \Psi_2 |] + \sin^*(\theta)[-\sin^*(\eta)\langle \Psi_1 | + \cos^*(\eta)\langle \Psi_2 |]\} \otimes \\ &\otimes \{\cos(\theta)[\cos(\eta)|\Psi_1, t\rangle + \sin(\eta)|\Psi_2, t\rangle] + \sin^*(\theta)[-\sin(\eta)|\Psi_1, t\rangle + \cos(\eta)|\Psi_2, t\rangle]\} \\ &= \{\cos^*(\theta)[\cos^*(\eta)\langle \Psi_1 | + \sin^*(\eta)\langle \Psi_2 |] + \sin^*(\theta)[-\sin^*(\eta)\langle \Psi_1 | + \cos^*(\eta)\langle \Psi_2 |]\} \otimes \\ &\otimes \{\cos(\theta)[\cos(\eta)e^{-iE_1''t}|\Psi_1, 0\rangle + \sin(\eta)e^{-iE_2''t}|\Psi_2, 0\rangle] + \sin(\theta)[-\sin(\eta)e^{-iE_1''t}|\Psi_1, 0\rangle \\ &+ \cos(\eta)e^{-iE_2''t}|\Psi_2, 0\rangle]\} \\ &= \left[ \cos^2(\theta) \cos^2(\eta) - 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\eta) \sin(\eta) + \sin^2(\theta) \sin^2(\eta) \right] e^{-iE_1''t} \\ &+ \left[ \cos^2(\theta) \sin^2(\eta) + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\eta) \sin(\eta) + \sin^2(\theta) \cos^2(\eta) \right] e^{-iE_2''t} \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Expandindo  $\cos^2(\eta) = 1 - \sin^2(\eta)$ , e  $\sin^2(\eta) = 1 - \cos^2(\eta)$  na Eq. (E.15) temos

$$\begin{aligned} \langle \nu_\mu | \nu_\mu, t \rangle &= \left[ 1 - \cos^2(\theta) \sin^2(\eta) - 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\eta) \sin(\eta) - \sin^2(\theta) \cos^2(\eta) \right] e^{-iE_1''t} \\ &+ \left[ \cos^2(\theta) \sin^2(\eta) + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\eta) \sin(\eta) + \sin^2(\theta) \cos^2(\eta) \right] e^{-iE_2''t} \\ &= \left[ \cos^2(\theta) \sin^2(\eta) + \sin^2(\theta) \cos^2(\eta) + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\eta) \sin(\eta) \right] \left( e^{-iE_2''t} - e^{-iE_1''t} \right) \\ &+ e^{-iE_1''t} \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Nesse caso, escrevendo

$$B' = 1 - A' \quad (\text{E.17})$$

onde

$$\begin{aligned}
A' &= \left[ \cos^2(\theta) \sin^2(\eta) + \sin^2(\theta) \cos^2(\eta) + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\eta) \sin(\eta) \right] \\
&= [\cos(\theta) \sin(\eta) + \sin(\theta) \cos(\eta)]^2 \\
&= \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta) \cos(2\eta) + \sin(2\theta) \sin(2\eta)]^2.
\end{aligned} \tag{E.18}$$

A probabilidade de sobrevivência do neutrino muônico é dada por

$$\begin{aligned}
P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} &= \left| B' e^{-iE_1'' t} + A' e^{-iE_2'' t} \right|^2 \\
&= \left[ B' e^{-iE_1'' t} + A' e^{-iE_2'' t} \right] \otimes \left[ B' e^{+iE_1'' t} + A' e^{+iE_2'' t} \right] \\
&= A'^2 + B'^2 + A' B' (e^{+i(E_2'' - E_1'') t} + e^{-i(E_2'' - E_1'') t}) \\
&= A'^2 + B'^2 + 2A' B' \cos[(E_2'' - E_1'') t] \\
&= 1 + 2A'(A' - 1) - 2A'(A' - 1) \cos[(E_2'' - E_1'') t] \\
&= 1 + 2A'(A' - 1) \{1 - \cos[(E_2'' - E_1'') t]\}
\end{aligned} \tag{E.19}$$

$$= 1 + 2A'(A' - 1) \left\{ \sin^2 \left[ \frac{1}{2} (E_2'' - E_1'') t \right] \right\}. \tag{E.20}$$

Da Eq. (E.4) vemos que

$$\tan(2\eta) = \frac{2(\alpha_3 f(\rho))^2}{(\alpha_1 f(\rho))^2 - (1 - \alpha_2 f(\rho))^2}. \tag{E.21}$$

Usando relações trigonométricas podemos escrever

$$\begin{aligned}
\cos(2\eta) &= \frac{(A - C)}{\sqrt{(A - C)^2 + (2B)^2}} \\
\sin(2\eta) &= \frac{2B}{\sqrt{(A - C)^2 + (2B)^2}}.
\end{aligned} \tag{E.22}$$

# Apêndice F

## Teste da função $P_{\mu\mu}$

Usando cálculo numérico obtemos a evolução dos auto-estados de massa, para qualquer caso, inclusive o caso padrão. Sabemos que a evolução dos auto-estados de massa para a oscilação padrão é dada por

$$\begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.1})$$

Podemos então escrever a evolução dos auto-estados de sabor como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_\mu(t) \\ \nu_\tau(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta)e^{-i\delta t} & \cos(\theta)e^{-i\delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)e^{-i\delta t} & -\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)e^{-i\delta t} \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)e^{-i\delta t} & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)e^{-i\delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Neste caso temos que

$$\begin{aligned} P_{\mu\mu} &= |\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)e^{-i\delta t}|^2 \\ &= [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)e^{-i\delta t}][\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)e^{+i\delta t}] \\ &= \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) + \cos^2(\theta)\sin^2(\theta)[e^{+i\delta t} + e^{-i\delta t}] \\ &= \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) + \cos^2(\theta)\sin^2(\theta)2\cos(\delta t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) + \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \cos(\delta t) \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) + \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \cos(\delta t) \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) [1 - \cos(\delta t)] \\
&= 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\delta}{2} t\right) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right)
\end{aligned} \tag{F.3}$$

e

$$\begin{aligned}
P_{\mu\tau} &= \left| \sin(\theta) \cos(\theta) [e^{-i\delta t} - 1] \right|^2 \\
&= \left[ \sin(\theta) \cos(\theta) [e^{-i\delta t} - 1] \right] \left[ \sin(\theta) \cos(\theta) [e^{+i\delta t} - 1] \right] \\
&= (\sin(\theta) \cos(\theta))^2 [e^{-i\delta t} - 1] [e^{+i\delta t} - 1] \\
&= \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) [e^{-i\delta t} - 1] [e^{+i\delta t} - 1] \\
&= \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \left[ 1 - \cos\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \\
&= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right).
\end{aligned} \tag{F.4}$$

Para o caso geral temos então

$$\begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \tag{F.5}$$

Podemos então escrever a evolução dos auto-estados de sabor como

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \nu_\mu(t) \\ \nu_\tau(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos(\theta) + B \sin(\theta) & -A \sin(\theta) + B \cos(\theta) \\ B \cos(\theta) + C \sin(\theta) & -B \sin(\theta) + C \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A \cos^2(\theta) + 2B \cos(\theta) \sin(\theta) + C \sin^2(\theta) & -A \cos(\theta) \sin(\theta) + B \cos^2(\theta) - B \sin^2(\theta) + C \sin(\theta) \cos(\theta) \\ -A \sin(\theta) \cos(\theta) - B \sin^2(\theta) + B \cos^2(\theta) + C \cos(\theta) \sin(\theta) & A \sin^2(\theta) - 2B \sin(\theta) \cos(\theta) + C \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{F.6}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
P_{\mu\mu} &= \left| A \cos^2(\theta) + 2B \cos(\theta) \sin(\theta) + C \sin^2(\theta) \right|^2 \\
&= \left[ A \cos^2(\theta) + 2B \cos(\theta) \sin(\theta) + C \sin^2(\theta) \right] \times \left[ A^* \cos^2(\theta) + 2B^* \cos(\theta) \sin(\theta) + C^* \sin^2(\theta) \right] \\
&= AA^* \cos^4(\theta) + 4BB^* \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + CC^* \sin^4(\theta) + 2AB^* \cos^3(\theta) \sin(\theta) + AC^* \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\
&\quad + 2BA^* \cos^3(\theta) \sin(\theta) + 2BC^* \cos(\theta) \sin^3(\theta) + CA^* \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + 2CB^* \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\
&= AA^* \cos^4(\theta) + CC^* \sin^4(\theta) + (4BB^* + AC^* + CA^*) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\
&\quad + 2(AB^* + BA^*) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + 2(BC^* + CB^*) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \\
&= AA^* \cos^4(\theta) + CC^* \sin^4(\theta) + (4BB^* + AC^* + CA^*) \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \\
&\quad + (AB^* + BA^*) \cos^2(\theta) \sin(2\theta) + (BC^* + CB^*) \sin(2\theta) \sin^2(\theta) \\
&= AA^* \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \right]^2 + CC^* \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \right]^2 + (4BB^* + AC^* + CA^*) \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \\
&\quad + (AB^* + BA^*) \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \right] \sin(2\theta) + (BC^* + CB^*) \sin(2\theta) \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \right] \\
&= \frac{1}{4} [2 - \sin^2(2\theta)] (AA^* + CC^*) + 2 \cos(2\theta) (AA^* - CC^*) + (4BB^* + AC^* + CA^*) \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \\
&\quad + (AB^* + BA^*) \cos^2(\theta) \sin(2\theta) + (BC^* + CB^*) \sin(2\theta) \sin^2(\theta)
\end{aligned} \tag{F.7}$$

Como feito anteriormente, sabemos que para o caso padrão, os elementos da matriz  $M$  evoluídos no tempo são

$$\begin{aligned}
A &= A^* = 1 \\
B &= B^* = 0 \\
C &= e^{-i\delta t} \\
C^* &= e^{+i\delta t}
\end{aligned}$$

(F.8)



Sendo assim, para a Eq. (F.7) temos

$$\begin{aligned}
P_{\mu\mu} &= \cos^4(\theta) + CC^* \sin^4(\theta) + (C^* + C) \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \\
&= \cos^4(\theta) + e^{-i\delta t} e^{+i\delta t} \sin^4(\theta) + (e^{+i\delta t} + e^{-i\delta t}) \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \\
&= \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) + \frac{1}{2} \cos(\delta t) \sin^2(2\theta) \\
&= 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right). \tag{F.9}
\end{aligned}$$

Para o caso geral, na Eq. (F.4)

$$\begin{aligned}
P_{\nu_1\nu_1}(t > t_0) &= |A|^2 = AA^* = [Re\{A\} + iIm\{A\}][Re\{A\} - iIm\{A\}] = Re^2\{A\} + Im^2\{A\} \\
&= Y^2(1) + Y^2(2), \tag{F.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\nu_1\nu_2}(t > t_0) &= |B|^2 = BB^* = [Re\{B\} + iIm\{B\}][Re\{B\} - iIm\{B\}] = Re^2\{B\} + Im^2\{B\} \\
&= Y^2(3) + Y^2(4), \tag{F.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\nu_2\nu_2}(t > t_0) &= |C|^2 = CC^* = [Re\{C\} + iIm\{C\}][Re\{C\} - iIm\{C\}] = Re^2\{C\} + Im^2\{C\} \\
&= Y^2(5) + Y^2(6), \tag{F.12}
\end{aligned}$$

onde usamos que

$$\begin{aligned}
A &= Re\{A\} + iIm\{A\} = Y(1) + iY(2) \\
A^* &= Re\{A\} - iIm\{A\} = Y(1) - iY(2) \\
B &= Re\{B\} + iIm\{B\} = Y(3) + iY(4) \\
B^* &= Re\{B\} - iIm\{B\} = Y(3) - iY(4) \\
C &= Re\{C\} + iIm\{C\} = Y(5) + iY(6) \\
C^* &= Re\{C\} - iIm\{C\} = Y(5) - iY(6), \tag{F.13}
\end{aligned}$$

e dessa forma, os produtos cruzados das amplitudes que aparecem na probabilidade são

$$\begin{aligned}
AC^* + CA^* &= 2[Y(1)Y(5) + Y(2)Y(6)] \\
AB^* + BA^* &= 2[Y(1)Y(3) + Y(2)Y(4)] \\
BC^* + CB^* &= 2[Y(3)Y(5) + Y(4)Y(6)] \tag{F.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu\mu} &= AA^* \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \right]^2 + CC^* \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \right]^2 + (4BB^* + AC^* + CA^*) \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \\
&+ (AB^* + BA^*) \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \right] \sin(2\theta) + (BC^* + CB^*) \sin(2\theta) \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \right] \\
&= [Y^2(1) + Y^2(2)] \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \right]^2 + [Y^2(5) + Y^2(6)] \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \right]^2 \\
&+ \{4[Y^2(3) + Y^2(4)] + 2[Y(1)Y(5) + Y(2)Y(6)]\} \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \\
&+ 2[Y(1)Y(3) + Y(2)Y(4)] \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \right] \sin(2\theta) \\
&+ 2[Y(3)Y(5) + Y(4)Y(6)] \sin(2\theta) \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \right]
\end{aligned} \tag{F.15}$$

Substituindo as Eqs .(F.8,F.14), temos

$$\begin{aligned}
P_{\mu\mu} &= 1 \times 1 \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \right]^2 + 1 \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \right]^2 + (1 \times C^* + C \times 1) \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \\
&= \frac{1}{4} \left\{ 1 + 2 \cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) + 1 - 2 \cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) + (C^* + C) \sin^2(2\theta) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ 2 + 2 \cos^2(2\theta) + (C^* + C) \sin^2(2\theta) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ 2 + 2 - 2 \sin^2(2\theta) + (C^* + C) \sin^2(2\theta) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ 4 + \sin^2(2\theta) [(C^* + C) - 2] \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ 4 + \sin^2(2\theta) [Y(5) + Y(6) - 2] \right\}
\end{aligned} \tag{F.16}$$

Para o teste mais simples faço  $\sin^2(2\theta) = 1$  e dessa forma

$$P_{\mu\mu} = 1 + \frac{1}{4} [Y(5) + Y(6) - 2] \tag{F.17}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] W. Pauli, disponível em <http://library.web.cern.ch/library/archives/pauli/paulibiog.html>
- [2] E. Fermi, disponível em <http://www-numi.fnal.gov/public/images/enricoletter.gif>
- [3] R. Davis, disponível em <http://www.bnl.gov/bnlweb/raydavis/research.htm>
- [4] J. N. Bahcall review disponível em <http://www.nobelprize.org>
- [5] B. Pontecorvo, J. Exptl. Theoret. Phys. **33**, 549 (1957); *ibid.* **34**, 247 (1958).
- [6] B. Pontecorvo, disponível em Zh. Eksp. Teor. Fiz. 53, 1717
- [7] [http://www.sno.phy.queensu.ca/sno/first results/](http://www.sno.phy.queensu.ca/sno/first_results/)
- [8] Colaboração Super-Kamiokande, S. Fukuda, *et al.*, Phys.Rev.Lett. **81** 1158 (1999); *ibid.* **85** 3999 (2000).
- [9] R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. **80**, 1582 (1998) [arXiv:astro-ph/9708069].
- [10] D. B. Kaplan, A. E. Nelson and N. Weiner, Phys. Rev. Lett **93**, 091801, (2004)
- [11] R. Fardon, A. E. Nelson and N. Weiner, arXiv:astro-ph/0309800, (2003)
- [12] A. W. Brookfield, C. van de Bruck, D. F. Mota and D. Tocchini-Valentini, Phys. Rev.Lett. **96**, 061301 (2006) [arXiv:astro-ph/0503349].
- [13] A. W. Brookfield, C. van de Bruck, D. F. Mota and D. Tocchini-Valentini, Phys. Rev. D **73**, 083515 (2006) [Erratum-*ibid.* D **76**, 049901 (2007)] [arXiv:astro-ph/0512367].
- [14] 14. K. Ichiki and Y. Y. Keum, arXiv:0705.2134 [astro-ph]

- [15] K. S. Kiyoshi PhD. Tesis. at <http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/doc/sk/pub/>
- [16] The Review of Particle Physics. C. Amsler et al. (Particle Data Group), Physics Letters B667, 1 (2008)
- [17] M. C. Gonzalez-Garcia, H. Nunokawa, O. L. G. Peres, T. Stanev, , J. W. F. Valle. Phys. Rev. D**58**, 033004 (1998).
- [18] <http://hep.bu.edu/superk/atmnu/>
- [19] <http://www.pheno.info/hottopics/neutrinosmass>
- [20] M. C. Gonzalez-Garcia. arXiv:hep-ph/0504364.
- [21] M.Honda, T. Kajita, arXiv:astro-ph/0404457.
- [22] Colab. MINOS. E. Ables *et al.*, Addendum To P-875, A Long Baseline Neutrino Oscillation Experiment At Fermilab, FERMILAB-PROPOSAL-P-875-ADD, NUMI-L-79, Apr 1995. 241pp.
- [23] D. R. Gratieri, Dissertação de Mestrado. (2006)(Teses )IFGW/UNICAMP
- [24] Colaboração WMAP, L. Verde et al., arXiv:astro-ph/0302218
- [25] Selected Papers of Soviet Physicists, Usp. Fiz. Nauk 93 (1967) 385.
- [26] R. F. Sawyer. Phys Lett. **B448**, 174 (1999).
- [27] A. Strumia, F. Vissani. Phys.Lett. **B564**, 42 (2003)
- [28] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, An introduction to Quantum Field Theory, (1995) Addison-Wesley Publishing Company.
- [29] A. Gütlen et al. arXiv:hep-ph 1003.5530
- [30] D. Drakoulakos et. al. hep-ex/0405002
- [31] J. Lovseth, Nuovo Cimento 57 382, (1968)
- [32] Y. P. Yao, Phis. Rev. 176 1680, (1968)
- [33] R. Gatto. Nuovo Cimento 10 1559 (1953)

- [34] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields. Cambridge, Cambridge U. P. (1995)
- [35] P. Vogel, J. F. Beacom, Phys.Rev. **D60** (1999)
- [36] C. H. Llewellyn-Smith Phys. Rep. **3**, 261 (1972)
- [37] Brain P. Flannery. Numerical Recipes in Fortran. Cambridge, Cambridge U. P. (1994)
- [38] E. J. Monitz. Phys. Rev. Lett. 26 445 (1971)
- [39] Lipari et al. Phys. Rev. D58 073003(1996)
- [40] M.C.Gonzalez-Garcia et al. Rev. of Modern Phys. 75, 345(2003)
- [41] E. A. Paschos, J. Y. Yu, arXiv:hep-ph/0107261
- [42] G. Battistoni et. al. eprint-arxhive hep-ph/9801246
- [43] MRS Distribution at <http://wwwasd.web.cern.ch/wwwasd/>
- [44] Gargamelle Collaboration. CRN-HE-84-13,1982.
- [45] T. K. Gaisser, M. Honda, arXiv:hep-ph/0203272
- [46] V. I. Goldanski, and I. L. Rosenthal, Kinematics of Nuclear Reactions (Oxford University Press, London, 1961)
- [47] Y. Ashie et al, Super-Kamiokande Collaboration. Phys. Rev. D. 74, 032002(2006)
- [48] Y. Ashie et al, Super-Kamiokande Collaboration. Phys. Rev. D**71** 112005, (2005).
- [49] Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [50] M. Gell-Mann, A. Pais, Phys. Rev. **97**, 1387 (1955).
- [51] L. Wolfenstein. Phys. Rev. D **17**, 1978.
- [52] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Vol. 1 , Cambridge. Cambridge University Press (1933).
- [53] S. Weinberg. Phys Rev. Lett. **19**, 1264 (1967); A. Salam Proceedings of the Eight Nobel Symposium (1968); S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).

- [54] O. L. G. Peres, A. Yu. Smirnov, Nucl. Phys. B **680**479(2004)
- [55] S. Choubey and P. Roy, Phys. Rev D 73, 01306(2006)
- [56] R. Gandhi, P. Ghoshal, S. Goswami, and S. U. Sankar, arxiv: 0805.344[hep-ph]
- [57] K. Abe et al, Phys. Rev. D 77, 052001, (2008)
- [58] M.C. Gonzalez-Garcia and P. C. Holanda, arxiv:hep-ph/0511093
- [59] S. Coubey and P. Roy, Phys. Rev D73 013006(2006)
- [60] K. Abe et al. Phys. Rev. D 77, 052001,(2008)
- [61] E. G. Adelgerger, B.R. Heckel and A. E. Nelson, Ann Rev. Nucl. Part. Sci. 53, 77 (2003)
- [62] V. Barger et al. Phys. Rev. Lett. 95, 211802
- [63] M. Cirelli et al, Nucl. Phys. B 719, 219 (2005)
- [64] M. Takita. Phd Tesis ICR-Report-186-89-3
- [65] S. J. Barish et. al. Phys. Rev. D19 (1979)2521
- [66] G. L. Fogli and G. Nardulli, Nucl. Phys. B160(1979) 116
- [67] S. Zeller talk at INSS 2009.
- [68] G. Zacek et al. PRD 34, 2621, 1986
- [69] Y. Declais et al. PLB, 338,383, 1994
- [70] T. Nakamura et al. PRC 63, 034617 (2001)
- [71] G. A. Kozlov et al., Phys. Atom. Nucl. 63, 1016 (2000)
- [72] G. S. Auerbach et al., PRC 66, 015501 (2002)
- [73] T. Katori talk at Sixth International Workshop on Neutrino-Nucleus Interactions in the Few-GeV Region. Madrid. (2009).
- [74] G. Zeller, hep-ex/0312061

- [75] T. K. Gaisser and M. Honda, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **52**, 153 (2002)
- [76] T. K. Gaisser, M. Honda, arXiv:hep-ph/0203272.
- [77] A. M. Dziewonski, D. L. Anderson, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **25** 297 (1981).
- [78] T. Toshito. arXiv:hep-ex/0105023v1(2001)
- [79] A. Riess et al. 1998, *Astronomical Journal*, 116, 1009, Perlmutter, S. et al. 1999, *Astrophysical Journal*, 517, 56
- [80] S. Perlmutter et al. (Supernova Cosmology Collaboration), *Astrophys. J.* 517,565 (1999)
- [81] P. Astier et al, *Astron. Astrophys.* 447, 31(2006)
- [82] *Rev. Mod. Phys.* Vol 61, 1 (1989)
- [83] S. Burles et al. *Astrophys. J.* 552 L1.(2001)
- [84] Mikheev, S. P., Smirnov, A. Yu., *Nuovo Cim.* C9 (1986) 17-26.
- [85] C. L. Bernardis. et al. *Nature* 404, 955(2000)
- [86] D. N. Spergel et al, *Astrophys. J Suppl. Ser.* 148, 175
- [87] P. Gu, X. Wang, and X. Zhang. *Phys. Rev D.* 68, 087301(2003)
- [88] A. E. Bernardini and O. Bertolami. *Phys. Rev. D* 77, 083506 (2008)
- [89] C. Giunti, C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*,(2007), Oxford University Press, Oxford.