

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Inflação Vetorial: Uma Introdução

André Luís Delvas Fróes

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Alberto Saa (Orientador)- IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Orlando L. G. Peres - IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Elcio Abdalla - IF/USP

Prof. Dr. Marcelo M. Guzzo - IFGW/UNICAMP (suplente)

Prof. Dr. Alex E. de Bernardini - DF/UFSCAR (suplente)

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
“Gleb Wataghin” para a obtenção do título de
Mestre em Ciências.

18 de Março de 2009

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado defendida pelo aluno
André Luís Delvas Fróes e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 18 de Março de 2009



Prof. Dr. Alberto Saa

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

F922i Fróes, André Luís Delvas
Inflação vetorial : uma introdução / André Luís Delvas
Fróes. -- Campinas, SP : [s.n.], 2009.

Orientador: Alberto Vazquez Saa.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Gravitação. 2. Cosmologia. 3. Universo inflacionário.
I. Saa, Alberto Vazquez. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

- **Título em inglês:** Vector inflation : an introduction
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Gravitation
 2. Cosmology
 3. Inflationary universe
- **Área de Concentração:** Cosmologia
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca examinadora:**
Prof. Alberto Vazquez Saa
Prof. Orlando Luis Goulart Peres
Prof. Elcio Abdalla
- **Data da Defesa:** 18/03/2009
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **ANDRÉ LUIS DELVA FRÓES** – RA 023134 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 18 / 03 / 2009.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa
DMA/IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Elcio Abdalla – IF/USP

Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres - DRCC/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Em primeiro e inegavelmente mais importante lugar, agradeço a meus pais Marilda e Vicente. Essa é uma frase bastante batida, e não sem razão. Afinal, sem o apoio incondicional dado a todas minhas escolhas ao longo da vida, a inteira confiança e liberdade que me foi oferecida, nada disso teria sido possível. Esse é um agradecimento e, ao mesmo tempo, uma declaração de Amor.

Agradeço ao Professor Alberto Saa pela dedicada orientação e amizade ao longo dos últimos anos, desde minha segunda iniciação científica, durante a graduação, até o presente momento, com a finalização do mestrado.

Agradeço a todos os meus familiares pelo apoio e orgulho que sempre expressaram por minhas escolhas. Agradeço também a todos os meus amigos, embora os nomes André Duarte, Bruno Brunetta, Daniel Consalter, Daniel Valente, Danilo Borim, Diego Mano, Fernando Lussani, Júlio Bertin, Luis Fernando Gonzalez e Pedro Conte devam ser citados pelo especial estímulo acadêmico que sempre me proporcionaram, auxiliando, portanto, a realização desse trabalho.

Agradeço também a meus Professores, que ao longo do tempo me ensinaram os fundamentos da Física, e a tantas outras pessoas, anônimas ou não, que me ensinaram os fundamentos da vida. Viver é uma arte difícil que, assim como a Física, se aprende a duras penas. Entretanto, tornar-se um bom físico e não um bom ser humano, seria uma realização vazia.

Agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro imprescindível para a realização desse Mestrado, por meio do processo 2006/05108-0.

Enfim, agradeço a todos os que auxiliaram direta ou indiretamente para a realização desse trabalho.

Resumo

O foco do presente trabalho é a realização de períodos inflacionários baseados em campos vetoriais. Os conhecimentos necessários para atingir esse objetivo foram introduzidos de maneira sistemática, na ordem em que o autor julgou mais lógica. No primeiro capítulo são descritos numerosos detalhes acerca de nosso Universo e da capacidade atual de observá-lo. No segundo, apresenta-se o modelo cosmológico padrão. São também apresentados os alguns dos principais resultados da Relatividade Geral, a partir dos quais constroem-se os fundamentos teóricos da Cosmologia. No terceiro capítulo a teoria inflacionária é estudada, e são comentados seus resultados mais importantes e modelos mais conhecidos, baseados em campos escalares. No quarto capítulo inicia-se o estudo de períodos inflacionários utilizando campos vetoriais. Esse assunto despertou a atenção e gerou diversas publicações ao longo do ano de 2008. Por fim, são apresentadas as impressões do autor e as perspectivas futuras da área são delineadas.

Abstract

The main point of the present work is the realisation of inflationary periods based on vector fields. The knowledge needed to achieve this objective were introduced in a systematic manner, in the order that the author found more logical. In the first chapter numerous details about our universe and the present capacity to observe it were described. In the second, the standard model of cosmology is presented. Some of the most important results of General Relativity and observational cosmology are also presented, and on these grounds the theoretical fundamentals of Cosmology are established. In the third chapter inflationary cosmology is studied, and its most important results and some well known models based on scalar fields are presented. In the fourth chapter begins the study of inflationary periods that uses vector fields. This subject attracted attention and generated many papers in the year of 2008. At last, the author's impressions and future perspectives in the subject are presented.

Índice

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	ix
Introdução	1
1 O Universo	3
1.1 Estrutura	3
1.2 Cosmologia Observacional	4
1.2.1 Radiação Cósmica de Fundo	5
1.2.2 Estrutura de Larga Escala	7
1.2.3 Supernovas Tipo Ia	7
1.2.4 Emissão Lyman Alfa	7
1.2.5 Lentes Gravitacionais	8
2 Modelo Cosmológico Padrão	9
2.1 O Modelo Λ CDM	9
2.2 Relatividade Geral	11
2.2.1 Dedução das Equações de Einstein	12
2.3 Universo Friedmann-Robertson-Walker	13
2.3.1 Os Horizontes e o Universo Observável	15
2.3.2 Perturbações no Universo Friedmann-Robertson-Walker	16
2.3.3 A Métrica Perturbada	16
2.3.3.1 Perturbações Independentes de Calibre	17
2.3.3.2 Calibres	19
2.3.3.3 Perturbações Escalares	20
2.3.3.4 Perturbações Tensoriais	20
3 Cosmologia Inflacionária	21
3.1 Introdução	21
3.2 Implementação com Campos Escalares	23

3.2.1	Inflação Híbrida	25
3.2.2	O Caso não-Minimamente Acoplado	25
3.2.3	Modelo Mais Simples	26
3.2.4	Aproximação Slow-Roll	28
3.2.4.1	Formulação Hamilton-Jacobi	29
3.2.4.2	Soluções Exatas	30
3.2.5	Quantização do Campo Escalar	31
3.2.6	Reheating	31
3.2.7	Perturbações no Campo Escalar	33
3.2.7.1	Dentro da Escala de Curvatura	34
3.2.7.2	Fora da Escala de Curvatura	34
3.2.7.3	Espectro de Potências	35
4	Inflação Vetorial	37
4.1	Campos Eletromagnéticos	38
4.2	Campo Vetorial Minimamente Acoplado	40
4.2.1	O Universo Anisotrópico	41
4.2.2	Reestabelecimento Parcial da Isotropia	42
4.2.3	Reestabelecimento Total da Isotropia	42
4.3	Campo Vetorial mais Geral	43
4.4	Campo Vetorial não Minimamente Acoplado.	44
4.4.1	Campos Vetoriais como Impureza	46
4.5	Acoplamento e Potencial quaisquer	46
5	Considerações Finais e Perspectivas Futuras	50
	Referências	52

Lista de Figuras

1.1	À direita do núcleo da galáxia NGC7541 : Supernova 1998dh [1]	3
1.2	Galáxia espiral NGC2997 [3]	4
1.3	Satélite utilizado no experimento WMAP [8]	5
1.4	A radiação cósmica de fundo, experimento WMAP ano 5 [8]	6
1.5	Telescópio do experimento SDSS [16]	7
3.1	Diagrama de fase de um campo escalar massivo	27

Introdução

Desde os primórdios da inteligência e da civilização, a humanidade se pergunta a respeito de sua origem, e da origem do mundo a sua volta. Olhando para o céu, os homens do passado tentavam compreender a miríade de corpos que cintilam a distâncias inimagináveis de nossas cabeças. As gerações se passaram e o curso dos planetas e das estrelas foi mapeado, com a utilização de técnicas rudimentares e exaustivas.

As primeiras teorias foram estabelecidas, na tentativa de explicar as observações. As estrelas já assumiram o papel de ancestrais, já foram os olhos vigilantes de deuses severos. Já foram jóias na abóbada que separava os homens do mundo divino. Seu curso foi associado com a personalidade dos homens, os acontecimentos de suas vidas, com as estações do ano e com as épocas de plantio. A complexidade das teorias cresceu paralelamente com o aumento da complexidade e da capacidade técnica das sociedades humanas.

O avanço tecnológico de nossos tempos nos tem colocado em condições desiguais com nossos predecessores. Hoje, temos acesso a quantidades inimagináveis de dados experimentais, que podem ser estocados e analisados de maneira eficiente por nossos computadores. Somos capazes de observar uma vasta gama do espectro eletromagnético, e não só a pequena faixa da luz visível. Observamos a luz emitida por corpos celestes muito distantes de nós, tanto no tempo como no espaço.

Nessa dissertação, estudaremos modelos que descrevem um período muito breve na história de nosso Universo. É o período inflacionário, que ocorre quando o Universo possui bem menos de um segundo de vida e dura uma fração irrisória de tempo, e entretanto é a chave para a solução de diversos problemas da cosmologia moderna. Ele permite que, mesmo com condições iniciais bastante gerais, o Universo evolua para uma estrutura espacialmente plana, homogênea e isotrópica, similar à observada atualmente. Além disso, esse período gera as sementes capazes de originar a estrutura de larga escala do Universo.

Tal período pode ser obtido pela inserção de certos campos na composição do Universo, ou mesmo por modificações na Relatividade Geral de Einstein. Até hoje, não foram criados modelos alternativos à inflação que resolvam todos os problemas supracitados, de modo que este modelo é considerado bastante robusto. Entretanto, a não observação direta de partículas com as características necessárias para a geração de tal período faz com que muitos pesquisadores se perguntem se realmente estamos no rumo certo.

Em meio a muitas incertezas, pesquisadores propõem uma vasta quantidade de modelos, modificando as propostas mais simples e adicionando novos elementos a um quebra-cabeça já bastante complicado. Outros esforçam-se por desenvolver métodos estatísticos mais sofisticados para a análise de um já vasto conjunto de dados experimentais, e sempre crescente, devido a novos experimentos, lançados a todo momento. Esse esforço visa a obtenção de um modelo definitivo para o Universo, a derradeira resposta

à antiquíssima pergunta: Qual a origem de nosso Universo? Como ele se desenvolveu, dando origem à vida e à humanidade?

O passado conheceu homens que buscaram com afincos suas respostas. As soluções encontradas por eles podem ser desprezadas e ridicularizadas em nossos tempos, entretanto elas tiveram seu valor, e foram úteis à sociedade de sua época.

A teoria cosmológica atual também é um reflexo de nossos tempos. Vivemos na era da técnica, onde tudo é verificado, dividido, analisado, comparado. Tudo deve ser estudado até seus ínfimos detalhes, e em seguida deve-se descobrir uma utilidade para o conhecimento adquirido. A cosmologia de nossa época reflete a grandeza, a complexidade e, em certo sentido, a confusão de nossa sociedade. Um pesquisador do passado remoto, quando confrontado com nossas descobertas, certamente ficaria fascinado, por tudo o que pudemos descobrir. Entretanto, é possível que ele ficasse um pouco decepcionado, ao verificar que passamos tanto tempo debruçados sobre computadores e equações, e não temos mais tempo para observar um céu estrelado...

1 O Universo

Este capítulo aborda aspectos elementares do Universo fascinante no qual vivemos, e discute certos fenômenos cosmológicos que podem ser observados por nossos aparatos experimentais, e dos quais colhe-mos informações preciosas. Deseja-se que o leitor leigo tenha capacidade de compreender a maior parte dos tópicos abordados, e o rigor matemático será evitado. É a esperança do autor que a simplicidade da linguagem não tenha resultado em uma imprecisão nas informações transmitidas.

1.1 Estrutura

Vislumbrando o céu diurno e noturno, o homem, ao longo do tempo, se habituou com as diversas estruturas que nele podem ser observadas. Em um primeiro momento, chamam a atenção o Sol e a Lua, por seu tamanho e brilho. A seguir, os planetas são diferenciados, por apresentarem trajetórias destoantes do fundo de estrelas. Eles gravitam em torno de nosso Sol, e são nossa vizinhança mais próxima. O Sol e todos os elementos que o gravitam compõe o Sistema Solar.

Nosso Sol, que tanto nos inspira como exemplo de força e poder, torna-se muito modesto, se com- parado a outras estrelas que somos capazes de observar. Estima-se que ele tenha uma idade de aprox- imadamente 4,5 bilhões de anos, e que esteja na metade de sua vida. Estrelas são grandes estruturas de gás, em especial hidrogênio e hélio. O hidrogênio é levado a se fundir em hélio, no núcleo da estrela, pela grande pressão exercida pela força gravitacional. Esse processo de fusão libera energia na forma de radiação, que deixa a estrela e viaja pelo Universo, podendo eventualmente ser captada por nos- sos olhos. No caminho para deixar a estrela, essa radiação interage com os materiais em seu interior, gerando uma força que se opõe à gravitacional. Portanto, em uma estrela há um delicado equilíbrio entre a força gravitacional, que tende a colapsar toda a matéria em seu centro, e a energia liberada pela fusão nuclear, que tende a desagregar a estrutura, expulsando a matéria para o exterior.



Figura 1.1: À direita do núcleo da galáxia NGC7541 : Supernova 1998dh [1]

No interior da estrela o hélio pode ser fundido em átomos mais pesados, que podem, por sua vez, ser fundidos em átomos ainda mais pesados. Desse modo foram formados os elementos que encontramos em nosso planeta, tais como o ferro, o carbono, etc. Com o envelhecimento da estrela, tais elementos pesados tornam-se cada vez mais abundantes. Isso pode vir a prejudicar o delicado equilíbrio citado anteriormente, pois a fusão de elementos pesados é bem menos generosa, em energia liberada, do que a fusão do hidrogênio, de modo que a força gravitacional poderá causar o colapso da estrela.

Estrelas da massa de nosso Sol, ao fim de suas vidas, tornam-se objetos conhecidos como anãs brancas. Tais corpos celestes brilham devido a sua elevada temperatura. À medida em que uma anã branca emite energia na forma de radiação, ela resfria, e sua emissão diminui em frequência e intensidade. Com o tempo, elas deixam de brilhar.

Estrelas mais pesadas do que o sol, após seu colapso, podem tornar-se estrelas de neutrons ou, caso sejam realmente massivas, buracos negros. Acredita-se que a maior parte das galáxias possuam em seus centros buracos negros gigantes. Ao colapsar, uma estrela emite elevada quantidade de radiação, capaz de ofuscar o brilho de galáxias inteiras. Esses eventos são conhecidos como supernovas. Para uma pequena animação realizada com imagens reais da supernova 2001V, na galáxia NGC3987, vide [2].

As galáxias podem ser classificadas por seu formato. Em geral, elas são espirais ou elípticas. As galáxias espirais são compostas por uma região central, aproximadamente esférica e de elevada concentração de estrelas, e pelos braços de espiral, de menor concentração de estrelas aproximadamente distribuídas em um plano. As galáxias elípticas, por sua vez, costumam ser formadas em colisões de duas galáxias espirais. Nossa galáxia é do tipo espiral, e o sistema solar é uma minúscula estrutura situada na periferia de um de seus braços. O plano galáctico é observado da superfície terra como uma faixa no céu com uma maior concentração de estrelas. Essa faixa branca foi batizada nos tempos antigos como Via Láctea, nome esse que eventualmente foi atribuído à galáxia como um todo. Ao redor da Via Láctea gravitam galáxias satélite, como por exemplo as núvens de magalhães. Algumas delas eventualmente desaparecerão em meio a Via Láctea, destino esse que já foi enfrentado por diversas dessas pequenas estruturas.



Figura 1.2: Galáxia espiral NGC2997 [3]

Em conjunto com outras galáxias vizinhas, como por exemplo a de Andrômeda, a Via Láctea forma o chamado Grupo Local. As galáxias se agrupam em estruturas conhecidas como Clusters de Galáxias. Estes Clusters, por sua vez, se agrupam em Clusters de Clusters de galáxias. Em escalas maiores, entretanto, temos grandes evidências para afirmar que os clusters de clusters de galáxias não se agrupam, por sua vez, em clusters, mas se distribuem de maneira aproximadamente homogênea pelo Universo.

1.2 Cosmologia Observacional

Diversos autores afirmam que nas últimas duas décadas a cosmologia entrou na era da precisão. Isso devido à vasta gama de dados observacionais que se tornaram disponíveis por meio dos experimentos iniciados no período, colocando restrições severas em parâmetros cosmológicos que anteriormente mal podiam ser estimados. Quando combinados, os dados observacionais favorecem [4, 5] o modelo Λ CDM

dentre todas as teorias já propostas, que por esse motivo costuma ser chamado “Modelo Cosmológico Padrão”. Esse modelo será estudado em detalhes no próximo capítulo.

Embora o Λ CDM seja favorecido, ele não é o único modelo permitido por tais dados experimentais. Por isso, necessita-se de experimentos cada vez mais precisos, para que ocorra uma seleção rigorosa, e possamos nos aproximar cada vez mais do modelo cosmológico definitivo.

Em tais experimentos, em geral, é detectada a radiação eletromagnética emitida por corpos celestes e eventos cosmológicos. Outras possíveis fontes de informação são os raios cósmicos, já bastante explorados experimentalmente, e também os neutrinos cosmológicos e as ondas gravitacionais, cuja detecção ainda é um desafio.

Raios cósmicos são partículas de altíssima energia que atingem continuamente a atmosfera terrestre. A origem dos raios cósmicos de mais alta energia ainda não é bem conhecida. Os neutrinos são partículas abundantemente produzidas, de massa muito pequena e extremamente difíceis de detectar. As ondas gravitacionais, por sua vez, são previstas pela Relatividade Geral de Einstein. Embora nenhuma onda gravitacional tenha sido detectada até os dias de hoje, os primeiros passos nessa direção tem sido empreendidos, em experimentos como o LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) [6] e o LISA (Laser Interferometer Space Antenna) [7].

1.2.1 Radiação Cósmica de Fundo

Em 1965, Arno Penzias e Robert Wilson descobrem um ruído de microondas em sua antena, nos laboratórios Bell, que não dependia da direção para a qual a antena era apontada. A origem desse ruído gerou intensas discussões, e com o tempo percebeu-se que um fenômeno físico extremamente interessante estava por trás dele.

As temperaturas extremas do Universo primordial não permitiam que os elétrons se mantivessem ligados aos prótons, como nos dias de hoje, formando átomos. Os elétrons mantinham-se livres, e a radiação eletromagnética continuamente interagia com eles, não podendo, portanto, se propagar livremente. Com o tempo, o Universo se expandiu, e a temperatura do mesmo caiu progressivamente, até tornar-se suficientemente baixa para permitir a formação dos átomos, quando o Universo tinha aproximadamente 300 mil anos de idade. A partir desse momento, a luz pode movimentar-se livremente, praticamente não interagindo com o meio. Toda a radiação liberada nesse momento chega até nós nos dias de hoje, e é conhecida como a radiação cósmica de fundo

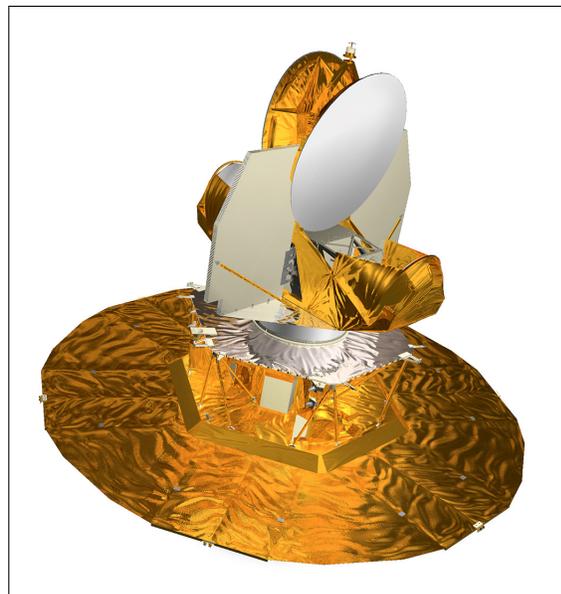


Figura 1.3: Satélite utilizado no experimento WMAP [8]

(CMB), composta principalmente por microondas de temperatura $2,73K$.

Esse foi o ruído observado por Penzias e Wilson, que lhes rendeu um Nobel em Física. Diversos experimentos posteriores estudaram a CMB, sendo os mais conhecidos o COBE [9] (Cosmic Background Explorer) e o WMAP [5,10–12] (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). A radiação cósmica de fundo nos mostra um Universo primordial quase homogêneo e isotrópico. Entretanto, desvios da ordem de 10^{-5} do valor de fundo são observados. Esses desvios são ricos em informação sobre as sementes que geraram a formação de estrutura no Universo. No futuro, espera-se não somente detectar com precisão os desvios da homogeneidade e da isotropia na CMB, mas também a sua polarização.

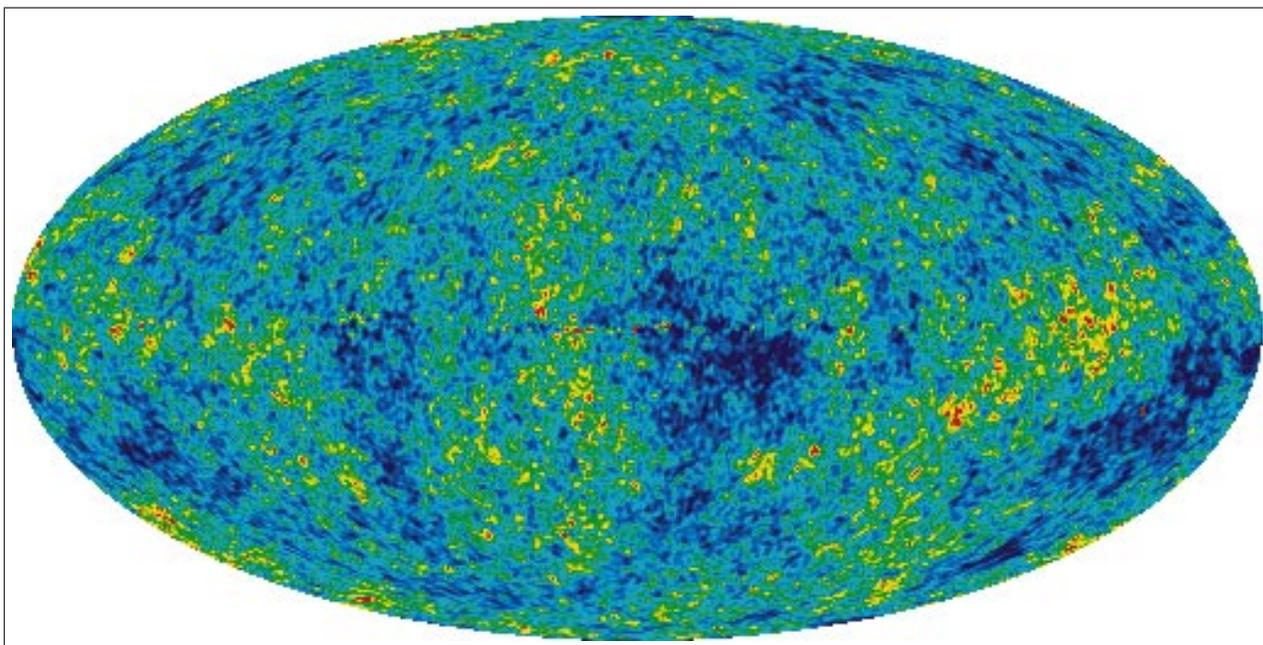


Figura 1.4: A radiação cósmica de fundo, experimento WMAP ano 5 [8]

1.2.2 Estrutura de Larga Escala

Diversos experimentos buscam definir com precisão a estrutura de larga escala do Universo. Eles consistem em uma contagem de galáxias e no mapeamento de suas posições, o que oferece informações sobre a composição material do Universo e sobre as perturbações primordiais capazes de gerar tal configuração.

Os experimentos mais conhecidos na área são o 2dFGRS [13] (Two-Degree-Field Galaxy Redshift Survey), com aproximadamente 200 mil galáxias mapeadas, e o SDSS (Sloan Digital Sky Survey) [14], com quase 1 milhão de galáxias mapeadas.

Um fenômeno interessante observado por estes experimentos é a oscilação acústica de bárions [15]. No período anterior à formação da radiação cósmica de fundo, efeitos atrativos da força gravitacional, aliados à pressão gerada pelo aprisionamento da radiação na matéria, formaram efeitos semelhantes a ondas acústicas no plasma universal. Estes padrões oscilatórios, previstos teoricamente, deixam marcas nos padrões de formação de estrutura, e puderam ser comprovados com base nesses experimentos.

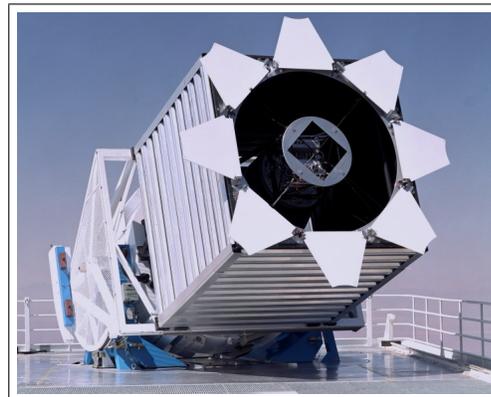


Figura 1.5: Telescópio do experimento SDSS [16]

1.2.3 Supernovas Tipo Ia

Em sistemas binários onde uma anã branca gravita em torno de uma estrela, quando a estrela começa a envelhecer, ela tende a ceder matéria para a anã branca. A massa da anã aumenta gradativamente, excedendo em algum momento o conhecido limite de Chandrasekhar (1,4 Massas Solares). Nesse caso ela colapsará, gerando uma estrela de nêutrons e uma supernova do tipo Ia. A luminosidade e as características peculiares do espectro de tais supernovas são conhecidas. Por isso, as supernovas do tipo Ia são consideradas velas padrão em cosmologia.

Portanto, a diferença entre espectro observado da supernova do tipo Ia e seu espectro teórico traz informações relevantes sobre a distância de ocorrência do evento e sobre a expansão do Universo desde sua emissão. As primeiras pistas sobre a atual expansão acelerada das escalas foram obtidas desse modo [17,18]. Um trabalho muito recente no assunto, que apresenta um novo conjunto de supernovas, pode ser encontrado em [19].

1.2.4 Emissão Lyman Alfa

Quando o hidrogênio, elemento abundantemente presente em galáxias, é exposto a uma radiação de frequências características, seus elétrons absorvem-na, realizam um salto quântico e a reemitem na

mesma frequência, não necessariamente na direção original da radiação. Há diversas galáxias emissoras de linhas Lyman- α [20], de modo que é possível estimar a abundância do hidrogênio nas mesmas.

Outro fenômeno interessante ocorre quando eventos cosmológicos emitem um determinado espectro conhecido de radiação. Essa radiação se propaga até nossos detectores, encontrando diversas núvens de hidrogênio em seu caminho. Essas núvens absorverão essas linhas Ly- α , deixando um buraco no espectro original. Uma particularidade nesse caso é que o comprimento de onda da luz sofre redshift a medida em que se propaga. Portanto, não só haverão buracos no espectro do evento, como também o comprimento de onda do buraco traz informação sobre a distância dessas núvens de gás até o planeta Terra, e portanto sobre a composição material do Universo e sua taxa de expansão.

1.2.5 Lentes Gravitacionais

O fenômeno das lentes gravitacionais é bastante conhecido, por ter sido utilizado para testar a Relatividade Geral de Einstein, no episódio de Sobral, em 1919, quando foi observada a curvatura da luz emitida por uma estrela ao passar nas proximidades do Sol, em um eclipse. Ele também permite a extração de relevantes informações sobre a composição material do Universo. Para maiores informações, vide [21].

2 Modelo Cosmológico Padrão

Nas últimas décadas, a cosmologia avançou muito. Diversos experimentos, alguns dos mais importantes citados no último capítulo, permitiram que essa ciência se tornasse bem menos especulativa. Os dados experimentais fornecidos por eles foram ajustados aos modelos existentes, e uma rigorosa seleção pode ser iniciada. Apesar disso, a interpretação desses dados ainda pode estar incorreta, ou ao menos incompleta. A busca por um modelo cosmológico definitivo ainda está longe de terminar.

A cosmologia moderna apóia-se na Relatividade Geral, formulada por Einstein no início do século passado. Uma apresentação detalhada dessa teoria foge do escopo desse trabalho, e o leitor interessado é remetido a [22] para uma apresentação extensa e completa, e a [23] para um tratamento mais moderno. São dignas de nota a referência [24], por seu tratamento robusto, com menor ênfase em aspectos geométricos, e a [25] por seu tratamento avançado. Com base na Relatividade Geral, serão estabelecidos conceitos essenciais de cosmologia, seguindo [26–28].

Em todo esse trabalho, $c = \hbar = G = 1$, e a assinatura utilizada será + - - -.

2.1 O Modelo Λ CDM

O modelo cosmológico padrão [10], conhecido como Λ CDM, sugere um Universo com três componentes principais:

- Matéria Bariônica
- Matéria Escura.
- Energia Escura.

Em primeiro lugar, matéria bariônica ordinária. Essa nomenclatura será utilizada para descrever os bárions, léptons, fótons, e demais componentes descritos pelo atual Modelo Padrão de Física de Partículas. A quantidade de matéria bariônica pode ser estimada devido à emissão de radiação ou por meio de processos indiretos, descritos brevemente no capítulo anterior. Portanto, a quantidade desse material contida no interior de galáxias e clusters de galáxias é conhecida com alguma precisão. A fração da energia total do Universo nessa componente corresponde a 4,4% [5] da energia total.

Em segundo lugar, matéria escura [29]. Essa componente foi sugerida para resolver o conhecido problema das curvas de rotação das galáxias [30]. Há diversos anos, sabe-se que a velocidade de rotação de algumas estrelas muito distantes do núcleo de galáxias, em torno dos mesmos, é maior do que o esperado pela gravitação Newtoniana (As velocidades em questão são muito baixas para que a Relatividade precise ser invocada). Também a velocidade média das galáxias no interior de clusters de galáxias é superior à esperada. Isso pode significar duas coisas: Ou faz-se necessária uma modificação

na gravitação Newtoniana nessas escalas de distância, ou há mais matéria no interior das galáxias e clusters de galáxias do que é observado. Esse excesso de matéria deverá ser de origem não bariônica, pois não emite radiação eletromagnética, caso contrário já teria sido detectado. O modelo que melhor ajusta os dados experimentais é o CDM (Cold Dark Matter), ou seja, matéria escura não relativística. Essa componente corresponde a 21,4% [5] da energia do Universo.

Diversos modelos alternativos, visando modificar a gravitação Newtoniana foram propostos, como por exemplo a MOND [31, 32] (Modified Newtonian Dynamics). Embora tais modelos resolvam o problema das curvas de rotação, eles falham, até o presente momento, em ajustar importantes dados de emissão de Raios-X e de Lentes Gravitacionais, por exemplo. Além disso, a generalização Relativística de tais modelos apresenta problemas difíceis de contornar. Até que novas idéias sejam propostas nesse sentido, supor a existência de matéria escura continuará sendo a solução mais viável para o problema.

Em terceiro lugar, temos a Energia Escura [33]. Levando-se em conta a quantidade de matéria bariônica e escura necessárias para explicar o comportamento dinâmico das galáxias, seria esperado que o Universo estivesse em uma expansão desacelerada, devido à característica atrativa da gravidade. Entretanto, a partir de observações do redshift de supernovas do tipo IA [17, 18], conclui-se que o Universo está em expansão acelerada.

Isso só é possível com a inserção de uma componente gravitacionalmente repulsiva na composição do Universo, ou por meio de modificações da Relatividade Geral. A forma mais simples de se obter esse resultado é por meio de uma constante cosmológica (Λ). Outra maneira simples de se realizar essa expansão acelerada é por meio de campos escalares. Temos, nesse caso, O modelo conhecido como Quintessência, entre outras variantes. Outra proposta bastante conhecida consiste na inserção de um fluido exótico na composição do Universo, conhecido como gás de Chaplygin [34, 35]. Uma extensa discussão sobre os diversos modelos de Energia Escura pode ser encontrada em [36]. A Energia Escura, corresponde a 74,2% [5] da energia do Universo.

Uma vez estimada a composição do Universo nos dias de hoje, pode-se estudar de que forma a evolução temporal do Universo se processa, e quais condições iniciais poderiam tê-lo gerado. O espectro térmico da radiação cósmica de fundo nos mostra que o modelo Big Bang descreve muito bem essa evolução. Em poucas palavras, ele afirma que o Universo em seu início era muito pequeno e muito quente, e com o passar do tempo se expandiu e resfriou, até a configuração atual. Nesse processo, inicialmente o Universo era dominado pela radiação (A energia dos fótons representava a maior fração da energia total do Universo), e posteriormente passou a ser dominado pela matéria (escura e bariônica).

Entretanto, esse modelo Big Bang precisou sofrer duas alterações principais, desde sua proposição. A inserção do supracitado período de dominação da Energia Escura, para descrever adequadamente os dias de hoje, e também um período inflacionário no início do Universo, quando ele tinha uma idade de aproximadamente 10^{-34} s. Esse importante período é o foco principal do presente trabalho, e será estudado detalhadamente nos próximos capítulos. Nesse período também ocorre uma expansão acelerada das escalas, o que torna sua modelagem muito similar à do período de dominação da energia

escura.

Portanto, os principais períodos do Universo são:

- Período Inflacionário.
- Domínio da Radiação.
- Domínio da Matéria.
- Domínio da Energia Escura.

Após o período inflacionário o Universo, para um vasto conjunto de condições iniciais, torna-se espacialmente plano, isotrópico e aproximadamente homogêneo, com perturbações na homogeneidade aproximadamente adiabáticas.

2.2 Relatividade Geral

A Relatividade Geral afirma que a geometria do Universo e seu conteúdo de energia/matéria se influenciam reciprocamente. Esta relação é expressa pelas equações de Einstein

$$G_{\beta}^{\alpha} = 8\pi T_{\beta}^{\alpha}, \quad (2.1)$$

onde G_{β}^{α} é o tensor de Einstein, que expressa a geometria do espaço-tempo e T_{β}^{α} é o tensor energia-momento, no qual são inseridas todas as informações sobre o conteúdo de matéria e energia do Universo. O tensor de Einstein é dado por

$$G_{\beta}^{\alpha} = R_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\beta}^{\alpha}R \quad (2.2)$$

onde R_{β}^{α} é o tensor de Ricci

$$R_{\beta}^{\alpha} = g^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial \Gamma_{\gamma\beta}^{\delta}}{\partial x^{\delta}} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\delta}^{\beta}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\delta} \Gamma_{\delta\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\gamma\delta}^{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\delta} \right), \quad (2.3)$$

R a curvatura escalar $R = R_{\alpha}^{\alpha}$ e $\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$ é a conexão Levi-Civita, dada, em uma base coordenada, pela expressão

$$\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\delta}} \right). \quad (2.4)$$

A variável dinâmica dos tensores geométricos apresentados acima é a métrica $g_{\mu\nu}$, na qual está contida toda a informação sobre a curvatura do espaço-tempo em questão.

As identidades de Bianchi [22] exigem que $\nabla_{\alpha}G_{\beta}^{\alpha} = 0$, onde ∇_{α} é a derivada covariante:

$$\nabla_{\alpha}A^{\beta} = \partial_{\alpha}A^{\beta} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta}A^{\gamma}. \quad (2.5)$$

Conclui-se, portanto, que o lado direito das equações de Einstein satisfazem obrigatoriamente a expressão

$$\nabla_\alpha T_\beta^\alpha = 0, \quad (2.6)$$

fato esse que pode ser interpretado como uma generalização das leis de conservação de energia e momento.

A forma das componentes do tensor energia-momento dependem das propriedades da matéria presente no espaço-tempo em questão. Em cosmologia, devido às incomensuráveis escalas de comprimento em questão, a interação entre os diversos materiais que compõe o Universo é bastante limitada. Portanto, em geral a suposição de que o conteúdo comporta-se como um fluido ideal é adequada. Para um fluido ideal com densidade de energia ϵ , pressão p e quadri-velocidade u^α , o tensor energia-momento assumirá a forma

$$T_\beta^\alpha = (\epsilon + p)u^\alpha u_\beta - p\delta_\beta^\alpha. \quad (2.7)$$

A escolha dos tensores $g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ mais adequados dependerão do problema em questão.

2.2.1 Dedução das Equações de Einstein

Supondo que toda a matéria contida no Universo possa ser descrita por meio de campos, verifica-se que a Relatividade Geral pode ser deduzida por meio do princípio da ação. Em coordenadas gerais, o elemento de volume é dado pela expressão $dx^4\sqrt{-g}$, e portanto a ação de um sistema terá a forma

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}L, \quad (2.8)$$

onde L é uma densidade de Lagrangiana, que é uma quantidade escalar. O escalar mais simples que podemos gerar utilizando a métrica é a curvatura escalar R . Por meio desse escalar mais simples, é possível gerar a ação

$$S = \int \sqrt{-g}d^4x \left(\frac{R}{2} \right). \quad (2.9)$$

Variando-a com relação à sua variável dinâmica, a métrica $g_{\mu\nu}$, obtém-se

$$G_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.10)$$

Ou seja, as equações de Einstein em um espaço-tempo na ausência de energia. Suponhamos agora a nova ação

$$S = \int \sqrt{-g}d^4x \left(-\frac{R}{16\pi} + L_m \right), \quad (2.11)$$

conhecida como ação Einstein-Hilbert, onde L_m representa a composição energética do espaço-tempo em questão. As constantes da ação são adequadas para que no limite não-relativístico a gravitação de Newton seja obtida. Variando esta nova ação com relação a uma métrica qualquer, obtém-se:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi \left(2 \frac{\partial L_m}{\partial g^{\alpha\beta}} - g_{\alpha\beta} L_m - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g} L_m)}{\partial(\partial_\mu g^{\alpha\beta})} \right), \quad (2.12)$$

de modo que definindo

$$T_{\alpha\beta} \equiv 2 \frac{\partial L_m}{\partial g^{\alpha\beta}} - g_{\alpha\beta} L_m - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g} L_m)}{\partial(\partial_\mu g^{\alpha\beta})} \quad (2.13)$$

as equações de Einstein(2.1) são reobtidas. Esse formalismo será essencial no trabalho que se segue.

2.3 Universo Friedmann-Robertson-Walker

Dentre as infinitas geometrias imagináveis, qual escolher para descrever o Universo? Inicialmente, quando os dados experimentais eram escassos, essa escolha teve de ser fundamentada em razões filosóficas, que originaram o conhecido Princípio Cosmológico. Ele afirma que não devem haver direções privilegiadas no Universo, que portanto deve ser isotrópico, e também que a distribuição de matéria e energia do Universo deve ser aproximadamente homogênea. A suposição de homogeneidade contraria a intuição, pois localmente verifica-se um Universo composto por planetas, estrelas, galáxias e clusters de galáxias, separados entre si por grandes distâncias de baixas densidades de matéria e energia. Entretanto, nas grandes escalas cosmológicas, todas essas estruturas podem ser vistas como pequenos desvios da homogeneidade, que serão tratados por teoria de perturbação.

O Princípio Cosmológico restringe muito as geometrias possíveis do Universo: a métrica mais geral possível que respeita a homogeneidade e a isotropia é a métrica Robertson-Walker:

$$ds^2 = (dt)^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right], \quad (2.14)$$

com $k = 1, 0, -1$ para uma curvatura espacial fechada, plana ou aberta, respectivamente. A distância Física entre dois objetos comóveis varia com o tempo, proporcionalmente fator de escala $a(t)$.

Como foi verificado no capítulo anterior, pode-se afirmar com alguma segurança que o Universo é espacialmente plano ($k = 0$). Por isso nesse trabalho será utilizada apenas a métrica Robertson-Walker espacialmente plana

$$ds^2 = (dt)^2 - a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.15)$$

Ou equivalentemente, introduzindo o tempo conforme $d\eta = dt/a$:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (2.16)$$

De posse da métrica do Universo, e supondo um conjunto de fluidos ideais permeando o Universo, pode-se substituir tais informações nas equações de Einstein, obtendo-se as importantíssimas equações de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\epsilon + 3p) \quad (2.17)$$

e

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi}{3}\epsilon.. \quad (2.18)$$

Tais cálculos, relativamente trabalhosos, se encontram descritos detalhadamente na referência [27]. É digno de nota que em nossa convenção de sinais $R = -6(\dot{H} + 2H^2)$.

Diferenciando a expressão (2.18) e substituindo (2.18) e (2.17), obtém-se

$$\dot{\epsilon} = -3H(\epsilon + p).. \quad (2.19)$$

As equações de estado $p = p(\epsilon)$ dos fluidos presentes no espaço-tempo descrito, conjuntamente com duas dentre as três expressões (2.18), (2.17) e (2.19) formam um sistema de equações completo, capaz de definir univocamente as funções $a(t)$ e $\epsilon(t)$. Com isso, a evolução posterior do Universo estará completamente determinada.

Como exemplos concretos, podem-se citar os 3 casos importantes a seguir:

Para um Universo dominado por um fluido não relativístico (poeira), a equação de estado é $p = 0$. Substituindo-a em (2.19) obtém-se $\epsilon \propto a^{-3}$. Substituindo em (2.18) resulta

$$a \propto t^{2/3} \quad e \quad H \propto \frac{2}{3t}. \quad (2.20)$$

Para um fluido relativístico, como por exemplo um gás de fótons, a equação de estado é $p = \epsilon/3$. Substituindo em (2.19) obtém-se $\epsilon \propto a^{-4}$. Substituindo em (2.18) resulta

$$a \propto t^{1/2} \quad e \quad H \propto \frac{1}{2t}. \quad (2.21)$$

Para descrever um Universo dominado por uma Constante Cosmológica, o tensor energia-momento será:

$$T_{\mu}^{\nu} = \Lambda \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (2.22)$$

Comparando com o tensor energia-momento de um fluido ideal(2.7), com a imposição da isotropia, verifica-se que a constante cosmológica mimetiza um fluido ideal de equação de estado

$$p = -\epsilon = -\Lambda. \quad (2.23)$$

Substituindo em (2.18), resulta

$$a \propto \exp \frac{8\pi\Lambda}{3} t \equiv \exp H_\Lambda t. \quad (2.24)$$

É digno de nota que, nesse caso, $H \equiv H_\Lambda = cte$. Um Universo cujo tensor energia-momento é dominado pela componente constante cosmológica, é conhecido como Universo de-Sitter.

2.3.1 Os Horizontes e o Universo Observável

A medida de distâncias cosmológicas é a chave para a obtenção de dados experimentais em cosmologia. É interessante, portanto, realizar uma breve reflexão a esse respeito.

A distância Física r entre dois observadores é definida da seguinte maneira:

$$r(t) = a(t)x(t). \quad (2.25)$$

Desse modo, a velocidade de um observador com relação ao outro é dada pela expressão

$$v = \dot{a}x + a\dot{x} \equiv v_{recuo} + v_{peculiar}. \quad (2.26)$$

Verifica-se, portanto, que dois observadores comóveis ($\dot{x} = 0$) atribuirão um ao outro a velocidade não nula

$$v_c = \dot{a}(t)x = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}r \equiv H(t)r, \quad (2.27)$$

referente unicamente à expansão do Universo. A objetos distando mais do que um comprimento de Hubble ($r \geq H^{-1}$) de um observador são atribuídas velocidades superiores à da luz. Isso não deve ser surpreendente, pois localmente nenhum observador alcançará um raio de luz, e localmente todos os observadores medem a velocidade da luz como c . Em conjunto, esses dois observadores distantes não formam um único referencial inercial.

A esfera de Hubble não pode ser considerada um horizonte, nem o limite do Universo observável. Mesmo que a luz emitida por esses objeto além da esfera esteja se afastando do observador a velocidades superiores à da luz, deve-se lembrar que a esfera de hubble cresce com o tempo, e pode em algum momento alcançar a luz que se afastava, permitindo que ela se dirija até o observador.

Existem apenas dois horizontes nos modelos cosmológicos:

O horizonte de eventos, que é a distância máxima que a luz emitida por um evento será capaz de percorrer no futuro, e o horizonte de partículas, que é a distância que a luz pode percorrer desde o início do Universo. Este horizonte marca o limite do Universo observável. Para calculá-los, bastará lembrar que para um fóton $ds = 0$. Inspeccionando a métrica RW (2.15), verifica-se que

$$dr = \frac{dt}{a} \quad (2.28)$$

e portanto o horizonte de partículas em um dado momento t é dado pela expressão

$$dr_p = \int_0^t \frac{dt}{a}, \quad (2.29)$$

enquanto o horizonte de eventos é dado por

$$dr_e = \int_t^{t_f} \frac{dt}{a}, \quad (2.30)$$

onde t_f é o momento final do Universo (caso o modelo cosmológico em questão afirma que haja um). Portanto, bastará conhecer o fator de escala $a(t)$ para calcular a evolução temporal dos horizontes em cada instante de tempo. Para um tratamento preciso e detalhado sobre os horizontes cosmológicos e enganos comuns a esse respeito, vide referência [37].

2.3.2 Perturbações no Universo Friedmann-Robertson-Walker

Visando o tratamento de pequenos desvios da homogeneidade em nosso Universo, será necessário resolver novamente as equações de Einstein, inserindo uma métrica perturbada no tensor de Einstein e perturbações no conteúdo de matéria e energia do Universo no tensor energia momento. Nesse trabalho, serão estudadas apenas as contribuições em primeira ordem. Ao longo dessa seção, é utilizado o tempo conforme η .

2.3.3 A Métrica Perturbada

A métrica de um Universo espacialmente plano com pequenas flutuações pode ser escrita como

$$ds^2 = \left[{}^{(0)}g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}(x^\gamma) \right] dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.31)$$

onde $|\delta g_{\alpha\beta}| \ll |{}^{(0)}g_{\alpha\beta}|$. As perturbações na métrica podem ser classificadas em três tipos: perturbações escalares, vetoriais e tensoriais [26]. Essa classificação é baseada nas propriedades de simetria do fundo homogêneo e isotrópico, que é invariante com respeito a rotações espaciais e translações.

A componente δg_{00} se comporta como um escalar sob essas rotações e, portanto

$$\delta g_{00} = 2a^2\phi. \quad (2.32)$$

As componentes mistas δg_{i0} podem ser decompostas em uma soma de um gradiente espacial de um escalar B e um vetor S_i com divergência 0 ($\partial_i S^i = 0$). Portanto

$$\delta g_{i0} = a^2(\partial_i B + S_i). \quad (2.33)$$

De maneira similar, as componentes δg_{ij} se comportam como um tensor sob 3-rotações, e podem ser escritas como a soma das partes irredutíveis

$$\delta g_{ij} = a^2(2\psi\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j E + \partial_j F_i + \partial_i F_j + h_{ij}), \quad (2.34)$$

onde ψ e E são funções escalares, o vetor F_i possui divergência zero e o 3-tensor h_{ij} satisfaz as quatro restrições $h^i_i = 0$ e $\partial_i h^i_j = 0$.

Retornando à classificação anterior, verifica-se que as perturbações escalares são caracterizadas pelas quatro funções escalares ϕ , ψ , E e B . Elas são induzida por desvios da homogeneidade da densidade de energia, e são responsáveis pela formação de estrutura no Universo.

As perturbações vetoriais são descritas pelos dois vetores S_i e F_i e são relacionadas a movimentos rotacionais do fluido. Na maioria dos modelos cosmológicos elas não são relevantes.

As perturbações tensoriais h_{ij} descrevem ondas gravitacionais, que são graus de liberdade do campo gravitacional em si. Em aproximação linear as ondas gravitacionais não induzem perturbações em um fluido perfeito.

Contando o número de funções independentes utilizadas para formar $\delta g_{\alpha\beta}$, há quatro funções para perturbações escalares, quatro funções para perturbações vetoriais (dois 3-vetores com uma restrição cada) e duas funções para perturbações tensoriais (um 3-tensor simétrico tem 6 funções independentes, mas ainda há 4 restrições).

Esses três tipos de perturbações estão desacoplados no tratamento de primeira ordem, e podem ser estudados independentemente.

2.3.3.1 Perturbações Independentes de Calibre

A liberdade de definição de sistemas de coordenadas inerente à Relatividade Geral, nesse ponto do formalismo, gera um problema. Para ilustrá-lo, basta supor-se um Universo homogêneo e isotrópico, onde a densidade de energia assuma a forma $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon(t)$. Em princípio, nada impede a escolha um novo tempo \tilde{t} , relacionado com o antigo pela transformação $\tilde{t} = t + \delta t(\mathbf{x}, t)$, onde $\delta t \ll t$. Nesse caso

$$\epsilon(t) = \epsilon(\tilde{t} - \delta t(\mathbf{x}, t)) \simeq \epsilon(\tilde{t}) - \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \delta t(\mathbf{x}, t) \equiv \epsilon(\tilde{t}) + \delta \epsilon(\mathbf{x}, \tilde{t}). \quad (2.35)$$

Portanto, pela simples mudança na coordenada temporal, foi criada uma perturbação fictícia em um Universo declarado homogêneo. Por um processo similar, podemos remover perturbações reais por meio de mudanças de coordenadas. Portanto, será necessário um mecanismo capaz de distinguir as perturbações reais (existentes em todos os sistemas de coordenadas) das fictícias (que desaparecem tão logo uma transformação de coordenadas adequada é realizada). Desse modo, os resultados deverão ser escritos em termos de variáveis independentes de calibre. Para que isso seja realizado, será necessário compreender como as perturbações se comportam sob transformações de variáveis

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \quad (2.36)$$

onde ξ^α são funções infinitesimalmente pequenas do tempo e do espaço. Para as perturbações escalares a métrica assume a forma

$$ds^2 = a^2[(1 + 2\phi)d\eta^2 + 2\partial_i B dx^i d\eta - ((1 - 2\psi)\delta_{ij} - 2\partial_i \partial_j E) dx^i dx^j]. \quad (2.37)$$

Sob a mudança de coordenadas considerada, obtém-se

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a} \partial_\eta (a \xi^0), \quad (2.38)$$

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \psi + \frac{\partial_\eta a}{a} \xi^0, \quad (2.39)$$

$$E \rightarrow \tilde{E} = E + \zeta, \quad (2.40)$$

e

$$B \rightarrow \tilde{B} = B + \partial_\eta \zeta - \xi^0. \quad (2.41)$$

É visível que apenas ξ^0 e ζ contribuem para as transformações das perturbações escalares, e que escolhendo-as apropriadamente podemos anular duas das quatro funções ϕ , ψ , E e B . A combinação mais simples dessas funções, que se mantém invariante por calibre, é

$$\Phi \equiv \phi - \frac{1}{a} \partial_\eta [a(B - \partial_\eta E)] \quad e \quad \Psi \equiv \psi + \frac{\partial_\eta a}{a} (B - \partial_\eta E). \quad (2.42)$$

Portanto, Φ e Ψ são invariantes por transformação de coordenadas. Agora é possível distinguir as flutuações reais das fictícias: se Φ e Ψ forem nulas em um sistema de coordenadas, serão nulas em qualquer sistema de coordenadas, e então quaisquer perturbações não nulas encontradas serão necessariamente fictícias.

Para perturbações vetoriais, a métrica é

$$ds^2 = a^2[d\eta^2 + 2\partial_i S dx^i d\eta - (\delta_{ij} - \partial_j F_i - \partial_i F_j) dx^i dx^j], \quad (2.43)$$

e as variáveis se transformam de modo que

$$S_i \rightarrow \tilde{S}_i = S_i + \partial_\eta \xi_{\perp i}, \quad e \quad F_i \rightarrow \tilde{F}_i = F_i + \partial_\eta \xi_{\perp i}. \quad (2.44)$$

Fica claro, portanto, que a combinação

$$V_i = S_i - F_i \quad (2.45)$$

é invariante por calibre.

Para as variáveis tensoriais, temos a métrica

$$ds^2 = a^2[d\eta^2 - (\delta_{ij} - h_{ij})dx^i dx^j], \quad (2.46)$$

e h_{ij} não muda por transformações de coordenadas. Ele já descreve as ondas gravitacionais de maneira invariante.

2.3.3.2 Calibres

Há sempre a liberdade de definir um calibre. A simetria e as características intrínsecas do problema fazem com que um ou outro calibre sejam interessantes no caso em questão. Segue um breve estudo dos mais utilizados na literatura.

O Calibre Longitudinal é definido pelas condições $B_l = E_l = 0$. Essas condições fixam unicamente nosso sistema de coordenadas, pois qualquer transformação que modifique ξ^0 ou ζ violará as mesmas. Nesse caso, a métrica toma a forma

$$ds^2 = a^2[(1 + 2\phi_l)d\eta^2 - (1 - 2\psi_l)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (2.47)$$

Se o tensor energia momento for diagonal, então obrigatoriamente $\phi_l = \psi_l$. Nesse calibre, em particular:

$$\Psi = \psi_l \quad e \quad \Phi = \phi_l. \quad (2.48)$$

O Calibre Sincrônico, um dos mais utilizados na literatura, é definido de modo que $\delta g_{0\alpha} = 0$. Isso pode ser obtido com a escolha de $\phi_s = 0$ e $B_s = 0$. Essas condições definem uma classe de sistemas de coordenadas, ligados por uma transformação específica. Nesse calibre:

$$\Psi = \psi_s - \left(\frac{\partial_\eta a}{a}\right) \partial_\eta E_s \quad e \quad \Phi = \frac{1}{a} \partial_\eta (a \partial_\eta E_s). \quad (2.49)$$

Um calibre que será utilizado posteriormente nesse trabalho é o Corte Espacialmente Plano, no qual $\delta g_{ij} = -a^2 \delta_{ij}$. Ele é obtido com as condições $\psi_p = 0$ e $E_p = 0$. Nesse calibre:

$$\Phi \equiv \phi - \partial_\eta B, \quad e \quad \Psi \equiv \left(\frac{\partial_\eta a}{a}\right) B. \quad (2.50)$$

Finalmente, após todo o desenvolvimento introdutório, é possível escrever as flutuações em seu formato final.

2.3.3.3 Perturbações Escalares

As perturbações escalares são importantes por serem responsáveis pela formação da estrutura de larga escala do Universo, e estarem diretamente relacionadas com as flutuações da radiação cósmica de fundo. Utilizando o calibre longitudinal(2.47), obtém-se as seguintes equações para essas flutuações:

$$\nabla^2\Psi - 3H(\partial_\eta\Psi + H\Phi) = 4\pi a^2\delta T_0^0, \quad (2.51)$$

$$\partial_i(\partial_\eta\Psi + H\Phi) = 4\pi a^2\delta T_i^0 \quad (2.52)$$

e

$$[\partial_\eta\partial_\eta\Psi + H\partial_\eta(2\Psi + \Phi) + (2\partial_\eta H + H^2)\Phi + \frac{1}{2}\nabla^2(\Phi - \Psi)]\delta_{ij} - \nabla_i\nabla_j\frac{1}{2}(\Phi - \Psi) = -4\pi a^2\delta T_j^i. \quad (2.53)$$

Cabe ressaltar que essas equações são gerais, a escolha do calibre longitudinal apenas simplifica os cálculos. A utilização da regra de transformação (2.42) fornece a expressão para qualquer calibre escolhido.

2.3.3.4 Perturbações Tensoriais

Para as perturbações tensoriais, bastará substituir a métrica (2.46) nas equações de Einstein:

$$(\partial_\eta\partial_\eta h_{ij} + 2H\partial_\eta h_{ij} - \nabla^2 h_{ij}) = 16\pi a^2\delta T_{j(T)}^i. \quad (2.54)$$

Essas perturbações correspondem às já citadas ondas gravitacionais. Elas também geram distorções na radiação cósmica de fundo, especialmente em grandes escalas. Espera-se que em pouco tempo seja possível realizar uma detecção direta das ondas gravitacionais.

3 Cosmologia Inflacionária

Introduzida por Guth [38] em 1981, a teoria inflacionária é um dos pilares da cosmologia moderna. O período inflacionário é inserido no início do Universo para resolver problemas relativos à necessidade de condições iniciais específicas. Espera-se que ele termine muito antes da nucleossíntese, de modo a não perturbar os já consagrados resultados dessa teoria, e também uma transição suave do período inflacionário para um Universo Big-Bang usual. Atualmente, não há modelos seriamente considerados que prescindam de uma fase inflacionária.

3.1 Introdução

A inflação pode ser definida como um período do Universo no qual o fator de escala $a(t)$ aumenta aceleradamente, ou seja:

$$\ddot{a} > 0. \quad (3.1)$$

Definição essa que pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{Ha} < 0. \quad (3.2)$$

O que tem uma interpretação Física muito simples: o comprimento de Hubble comóvel $1/Ha$, a escala característica mais importante do Universo em expansão, diminui com o tempo. Visto em coordenadas comóveis, o Universo observável torna-se menor com o tempo.

Por inspeção de (2.17), vemos que essas condições só podem ser realizadas caso

$$p < -\frac{\epsilon}{3}. \quad (3.3)$$

Essa condição é satisfeita por meio de uma constante cosmológica $p = -\epsilon$. Entretanto, como foi visto no capítulo anterior, a densidade de energia da constante cosmológica não se altera com o tempo, enquanto a densidade de energia da radiação e da matéria decaem com potências do fator de escala. Portanto, um Universo inicialmente dominado por uma constante cosmológica jamais sairia do período inflacionário. Por esse motivo, caso realmente exista uma constante cosmológica, esta deve ter uma densidade de energia muito pequena.

O próximo modo mais simples de se obter um período inflacionário é por meio de um campo escalar. Esses modelos são os mais comuns e foram exaustivamente estudados. Trataremos os modelos desse tipo nesse capítulo.

O uso de campos spinoriais, vetoriais e tensoriais para a obtenção de expansão acelerada das escalas é possível. Entretanto sua implementação pode ser bastante complicada. No último capítulo, será justamente tratada a realização de inflação por meio de campos vetoriais.

A inserção de um período inflacionário no Universo primordial resolve uma vasta gama de problemas cosmológicos. Esses problemas são:

- Problema dos Horizontes.
- Homogeneidade.
- Isotropia.
- Universo espacialmente plano.
- Relíquias cosmológicas (Monopolos Magnéticos, etc.)
- Geração de sementes para a formação de estrutura.

Antes do advento da teoria inflacionária, todos esses problemas eram resolvidos postulando-se condições iniciais muito específicas para o Universo. Nos próximos parágrafos apresenta-se uma breve descrição de como um período inflacionário resolve os problemas citados.

Observando dois conjuntos de galáxias diametralmente opostos com relação ao planeta terra, verifica-se que as galáxias contidas em ambos os conjuntos são muito similares entre si. Essas galáxias encontram-se fora dos horizontes umas das outras, de modo que essas regiões tão distantes do espaço nunca tiveram a possibilidade de interagir entre si e de se homogeneizar. Não há, portanto, razão para que elas sejam tão similares. Esse é o problema dos Horizontes. Em um período inflacionário, vimos que os comprimentos de Hubble comóveis diminuem. Isso significa que os horizontes eram muito maiores no início do Universo do que o são hoje em dia. Portanto, essas regiões tão distantes entre si, e mesmo todo o nosso Universo observável, fizeram parte de uma mesma região conectada causalmente, capaz de se homogeneizar, supondo-se uma inflação suficiente.

A radiação cósmica de fundo, que observamos atualmente é extremamente homogênea e isotrópica. As perturbações nessa radiação são da ordem de 10^{-5} com relação aos valores de fundo. Outros dados experimentais nos comprovam essa homogeneidade e isotropia do Universo em largas escalas. Por quê, dentre todas as possibilidades de condições iniciais para o Universo, temos justamente um Universo aproximadamente homogêneo e isotrópico? O período inflacionário gera um aumento acelerado das escalas, de forma que todo o Universo observável pode ter surgido de uma região ínfima do Universo primordial. Portanto, com um período de inflação suficiente, a não homogeneidade e anisotropia primordiais são expulsas de nossas escalas cosmológicas.

O fato do Universo ser espacialmente plano e livre de relíquias cosmológicas pode ser explicado de maneira idêntica. Mesmo em um Universo primordial extremamente aberto ou fechado, se nosso Universo observável tiver se originado de um pedaço muito pequeno do mesmo, essa curvatura não

pode ser percebida por nossa atual capacidade técnica. E mesmo que o Universo primordial fosse povoado de diversas relíquias cosmológicas, apenas um pequeno número delas restaria em todo o nosso Universo observável, de modo que encontrá-las seria um enorme golpe de sorte.

Para a solução desses problemas, portanto, é necessário que haja uma quantidade suficiente de inflação. A partir de um dado instante t , a quantidade de inflação ocorrida é medida em termos de e-foldings $N(t)$:

$$N(t) = \ln \frac{a(t_f)}{a(t)} \equiv \int_t^{t_f} H dt. \quad (3.4)$$

Onde t_f é a idade do Universo ao fim do período inflacionário. A quantidade de inflação suficiente para a solução dos problemas cosmológicos supracitados depende do modelo em questão. Para a maior parte deles, $N \approx 50$ é considerado um valor adequado, embora alguns modelos exijam mais e-foldings de inflação.

O último dos problemas é resolvido de maneira diferente. De fato, a descoberta de que um período inflacionário é capaz de gerar as sementes para a formação de estrutura só ocorreu algum tempo depois da proposta inicial. Verificou-se que pequenas perturbações no campo escalar são geradas continuamente e expandidas pelo aumento das escalas, até eventualmente deixarem o horizonte. Entretanto, após o fim da inflação, essas perturbações reentram no horizonte, quebrando suficientemente a homogeneidade para que haja a formação de estrutura observada em nosso Universo. A geração dessas perturbações será estudada no presente capítulo.

3.2 Implementação com Campos Escalares

Nessa seção será tratada a implementação do período inflacionário por meio de campos escalares. Suponha-se um campo escalar clássico ϕ , minimamente acoplado com a gravidade, caracterizado por um potencial $V(\phi)$. A ação de tal campo é dada pela expressão

$$S = \int \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.5)$$

Variando essa ação com relação ao campo escalar, obtém-se a equação de Klein-Gordon para espaços tempos curvos:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi + V' = 0, \quad (3.6)$$

onde $\partial_\phi A \equiv A'$. Para uma métrica Robertson-Walker espacialmente plana, e supondo o campo escalar homogêneo ($\partial_i \phi = 0$), a equação do movimento resultante é

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (3.7)$$

É digno de nota que a equação obtida corresponde a um oscilador harmônico com termo dissipativo, com uma única complicação: H é dependente do tempo. Por analogia, compreende-se que a expansão do Universo causa uma dissipação de energia no sistema. Variando a ação com relação à métrica obtém-se as componentes do tensor energia-momento de um campo escalar:

$$T_{\beta}^{\alpha} = \partial^{\alpha} \phi \partial_{\beta} \phi - \left(\frac{1}{2} \partial_{\gamma} \phi \partial^{\gamma} \phi - V(\phi) \right) \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (3.8)$$

Portanto:

$$T_0^0 = \epsilon = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.9)$$

e

$$T_j^i = -p \delta_j^i = - \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \delta_j^i, \quad (3.10)$$

onde a suposição de um campo escalar homogêneo foi utilizada. Fica claro que a condição (3.3) poderá ser satisfeita, contanto que $V(\phi)$ tenha um valor suficientemente maior do que $\dot{\phi}^2$.

As equações de Friedmann (2.18) e (2.17) para o campo escalar homogêneo tornam-se, respectivamente,

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (3.11)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi}{3} (\dot{\phi}^2 - V(\phi)). \quad (3.12)$$

Com essas expressões, é possível avaliar o desenvolvimento posterior do Universo. Para realizar previsões, por meio do modelo exposto acima, será necessária uma escolha adequada do potencial escalar. Essa escolha deverá partir de uma motivação específica.

Uma motivação típica é a fenomenológica. Deseja-se, nesse caso, definir um potencial que ajuste os dados observacionais adequadamente. Em muitos casos, corre-se o risco de criar modelos com muitos parâmetros livres e baixa capacidade de realizar previsões.

Outra motivação provém do fato de que um modelo inflacionário adequado deverá, sem sombra de dúvidas, emergir de um modelo de Física de partículas. Sabe-se que o único campo escalar do modelo padrão de partículas elementares, o Higgs, não serve como candidato a Inflaton, pois as escalas de energia exigidas pela teoria cosmológica para o campo escalar são incompatíveis com a massa exigida para o bóson de Higgs pelas mais recentes restrições experimentais. Modelos além do modelo padrão de partículas, como a supersimetria ou a teoria de cordas, abundam em campos escalares que podem ser utilizados. Entretanto, nesse caso somam-se as incertezas do modelo de partículas envolvido às incertezas dos modelos cosmológicos.

Uma terceira motivação parte do pressuposto de que a Relatividade Geral é apenas um limite de baixas curvaturas de alguma outra teoria gravitacional. Nesse caso, não se utiliza a ação de Einstein-Hilbert(2.11) para gerar as equações de campo, mas somam-se a ela termos do tipo R^n ou do tipo $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$. Os efeitos de algumas dessas ações pode ser reinterpretado, por meio de transformações conformes, como uma gravitação baseada na Relatividade Geral em um Universo preenchido de um campo escalar com propriedades bem definidas. Embora esses modelos sejam extremamente bem fundamentados, a dificuldade fica em ajustar os dados observacionais disponíveis por meio dos potenciais escalares gerados nessas teorias.

3.2.1 Inflação Híbrida

Também é comum a realização da inflação envolvendo dois ou mais campos escalares. Nessa classe de modelos, conhecida como Inflação Híbrida [39, 40], os modelos mais simples utilizam dois campos: um Inflaton ϕ , que gera o período inflacionário mas não contribui de maneira relevante para a densidade de energia do Universo e um campo ψ , que cumpre esse papel. Um potencial típico desses modelos é:

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda(\psi^2 - M^2)^2 + \frac{1}{2}\lambda'\psi^2\phi^2. \quad (3.13)$$

Nesse caso, enquanto ϕ assume valores superiores ao valor crítico ($\phi > \phi_c$)

$$\phi_c = \left(\frac{\lambda'}{\lambda} M^2 \right)^{1/2}, \quad (3.14)$$

o campo ψ tem seu mínimo em $\psi = 0$. Entretanto, assim que ϕ assume valores inferiores, existe a quebra da simetria $\psi \rightarrow -\psi$ do potencial e ψ terá mínimos nos valores $\pm M$. O campo ψ eventualmente se deslocará para um desses mínimos, dando um fim ao período inflacionário.

3.2.2 O Caso não-Minimamente Acoplado

Suponha-se um campo escalar clássico ϕ , não-minimamente acoplado com a gravidade, caracterizado por um potencial $V(\phi)$. A ação de tal campo é dada pela expressão

$$S = \int \left(-\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V(\phi) - \frac{1}{2}\xi R\phi^2 \right) \sqrt{-g}d^4x. \quad (3.15)$$

Um valor natural para o acoplamento com a gravidade é $\xi = 1/6$, conhecido como acoplamento conforme, pois com ele, a invariância conforme é mantida para campos escalares desprovidos de massa. Isso significa que uma solução das equações de movimento para um campo escalar desprovido de massa, obtidas em uma determinada métrica $g_{\mu\nu}$ também serão soluções em outra métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, caso ambas estejam relacionadas por uma transformação conforme:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(\mathbf{x}, t)g_{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

O outro valor natural para esse acoplamento é o acoplamento mínimo $\xi = 0$.

Variando essa ação com relação ao campo escalar, obtém-se a equação de Klein-Gordon para espaços tempos curvos

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi + V'(\phi) + \xi R\phi = 0. \quad (3.17)$$

Utilizando-se a métrica Robertson-Walker espacialmente plana, e supondo-se o campo escalar homogêneo:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) + \xi R\phi = 0, \quad (3.18)$$

que, obviamente, reduz-se ao resultado (3.6) quando $\xi = 0$.

Para a obtenção do tensor energia-momento, bastará variar a ação com relação à métrica:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} V - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi + \xi G_{\mu\nu} \phi^2 + \xi \left[g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu \right] \phi^2, \quad (3.19)$$

de onde obtém-se

$$T_0^0 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + 3\xi H^2 \phi^2 + 6\xi H \phi \dot{\phi} \quad (3.20)$$

e

$$T_i^j = \left[-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 (1 - 4\xi) - V(\phi) - 2V'(\phi)\phi + 2\xi H \phi \dot{\phi} + \xi \phi^2 (27H^2 + 14\dot{H}) \right] \delta_{ij}. \quad (3.21)$$

Verifica-se, portanto, que com um acoplamento as equações tornam-se bem mais complexas, o que restringe muito as condições iniciais que permitem a realização de um período inflacionário. Por outro lado, sua utilização pode enriquecer a dinâmica do Universo, abrindo novas possibilidades para sua evolução. Para maiores detalhes e exemplos, vide [41–43].

3.2.3 Modelo Mais Simples

A inflação proposta por Guth [38] ficou conhecida como “Old Inflation”. Esse modelo assume a Relatividade Geral e um campo escalar preso em um mínimo local do potencial. O período inflacionário terminaria com o tunelamento do campo escalar para o vácuo verdadeiro, formando uma “bolha” de vácuo verdadeiro em um “mar” de vácuo falso. Já em seu paper original, Guth reconheceu que o modelo na forma como foi proposto não funcionaria adequadamente, pois a expansão acelerada do Universo venceria a taxa de formação de bolhas. Aumentar a taxa de formação de bolhas, nesse caso, apenas resulta em um fim prematuro do período inflacionário.

Outro modelo inflacionário, conhecido como “New Inflation”, proposto por Albrecht e Steinhardt [44] e Linde [45], consiste em campo que se afasta da origem sobre a influência de um potencial do tipo $V \approx V_0(1 - \mu\phi^p)$, terminando com um módulo do campo escalar da ordem da massa de Planck.

Um dos modelos mais favorecidos pelas observações experimentais, proposto por Linde [46], é a Inflação Caótica. Ela permite a implementação de um período inflacionário a partir de grande variedade de potenciais, inclusive alguns muito simples, como os monomiais do tipo $V = \phi^\alpha$. Nessa seção, estudaremos um período inflacionário gerado pelo potencial caótico mais simples possível, um campo escalar com termo de massa $m^2\phi^2/2$. É o mais simples porque um termo constante não nos permitiria obter as perturbações necessárias para a formação da estrutura em larga escala, enquanto um termo linear pode ser eliminado por uma simples redefinição de ϕ .

Nesse caso, a expressão (3.6) torna-se

$$\ddot{\phi} + \sqrt{12\pi}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)^{1/2}\dot{\phi} + m^2\phi = 0, \quad (3.22)$$

onde H foi substituído com o auxílio da equação de Friedmann (3.11). A expressão (3.22) pode ser reescrita como uma equação diferencial de primeira ordem por meio da definição $\psi = \dot{\phi}$:

$$\frac{d\psi}{d\phi} = -\frac{\sqrt{12\pi}\sqrt{\psi^2 + m^2\phi^2}\psi + m^2\phi}{\psi}. \quad (3.23)$$

O comportamento do sistema em questão, dentro do diagrama de fases, tem o seguinte formato:

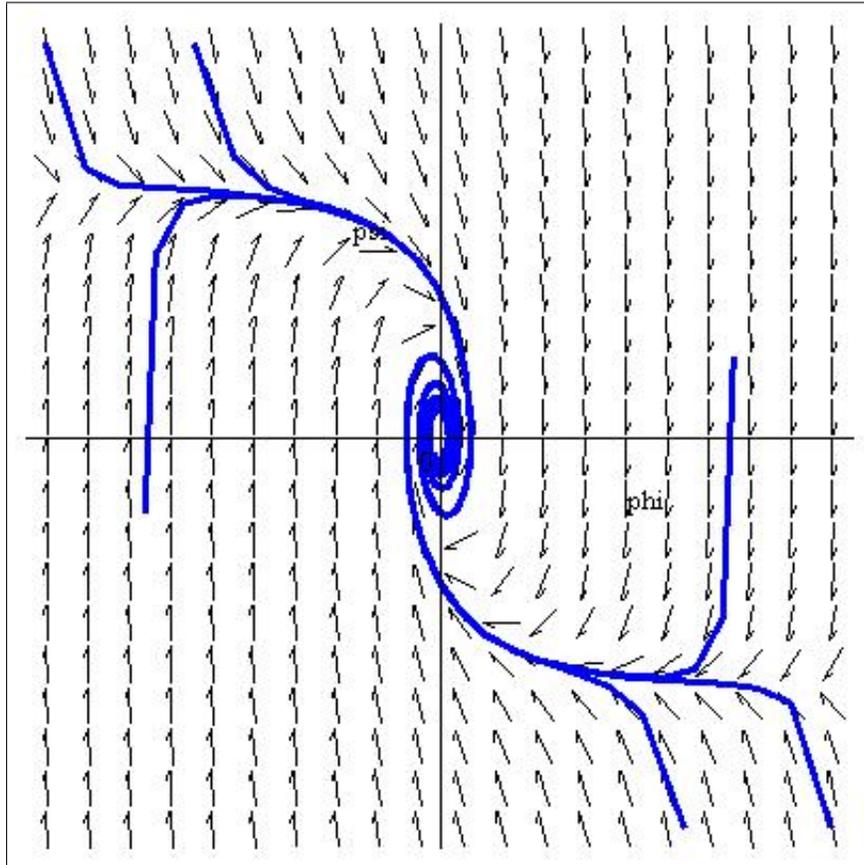


Figura 3.1: Diagrama de fase de um campo escalar massivo

Fica clara no diagrama a existência de uma solução atratora. Nas proximidades dessa solução, $d\dot{\phi}/d\phi \approx 0$. Caso $\phi \ll \dot{\phi}$, pela expressão (3.23),

$$-\sqrt{12\pi}(\dot{\phi}^2 - m^2\phi^2)^{1/2}\dot{\phi} + m^2\phi \approx 0 \quad (3.24)$$

e, portanto:

$$\dot{\phi}_{atr} = -\frac{m}{\sqrt{12\pi}}. \quad (3.25)$$

é a solução atratora. Portanto, para uma grande parte das condições iniciais, o sistema passará por um período inflacionário, nos arredores da solução atratora.

3.2.4 Aproximação Slow-Roll

No caso do campo escalar massivo, verificou-se que na solução atratora do sistema, $m^2\phi^2 \gg \dot{\phi}^2$. Sabe-se que essa condição é bastante geral, e que para uma vasta gama de potenciais e condições iniciais do campo escalar, o Universo passará por um período inflacionário satisfazendo essa mesma condição.

Essa naturalidade deu origem à conhecida aproximação Slow-Roll, onde supõe-se que o campo escalar satisfaz as condições $\dot{\Phi}^2 \ll V(\Phi)$ e $\ddot{\Phi} \ll 3H\dot{\Phi} \sim V'$. Nesse caso, as equações que regem o sistema são muito simplificadas, assumindo a forma:

$$3H\dot{\phi} + V'(\phi) \simeq 0 \quad e \quad H \simeq \sqrt{\frac{8\pi}{3}V(\phi)}. \quad (3.26)$$

Torna-se muito mais fácil analisar o comportamento do período inflacionário, mesmo para os mais complicados tipos de potenciais, quando a aproximação Slow-Roll é satisfeita. Considerando que $H = \dot{\phi}(d \ln a / d\phi)$, substituindo as expressões (3.26) e integrando,

$$a(\phi) \simeq a_i \exp\left(8\pi \int_{\phi}^{\phi_i} \frac{V}{V'} d\phi\right). \quad (3.27)$$

obtém-se portanto o fator de escala a partir do potencial. As condições slow-roll podem ser reescritas com a ajuda das expressões (3.26) em termos do potencial apenas:

$$\epsilon_{sr} = \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll 1, \quad e \quad |\eta_{sr}| = \left|\frac{V''}{V}\right| \ll 1. \quad (3.28)$$

As expressões acima são vastamente utilizadas na literatura, e diversos parâmetros observacionais são escritos em termos das variáveis ϵ_{sr} e η_{sr} .

A duração da inflação, em e-foldings, pode ser calculada utilizando essa aproximação, bastando para isso reescrever (3.4) em termos do potencial inflacionário:

$$N \approx \frac{1}{8\pi} \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V}{V'} d\phi. \quad (3.29)$$

Transcorrido certo tempo, espera-se que as condições slow-roll deixem de ser satisfeitas e a inflação chegue a seu fim.

3.2.4.1 Formulação Hamilton-Jacobi

Para facilitar a obtenção de resultados inflacionários, podemos utilizar o formalismo Hamilton-Jacobi [27, 28, 47]. Ele consiste na utilização do potencial escalar no lugar da variável temporal, o que pode ser realizado quando o campo escalar varia monotonamente com o tempo.

Diferenciando (3.11) com respeito a t e substituindo em (3.6), obtém-se

$$\dot{H} = -4\pi\dot{\phi}^2. \quad (3.30)$$

Por outro lado, inspecionando a mesma expressão (3.11), verifica-se que:

$$H = H(\phi, \dot{\phi}). \quad (3.31)$$

Derivando-se esta equação em relação a t tem-se:

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial H}{\partial \dot{\phi}} \ddot{\phi}. \quad (3.32)$$

Durante o período de slow-roll, sabe-se que $|\ddot{\phi}| \ll |\dot{\phi}|$, então:

$$\dot{H} \approx \frac{\partial H}{\partial \phi} \dot{\phi}. \quad (3.33)$$

Substituindo-se essa equação em (3.32), obtém-se:

$$\frac{dH}{d\phi} = -4\pi\dot{\phi}. \quad (3.34)$$

Isso permite que a expressão (3.11) seja reescrita, isolando o potencial V , na forma:

$$V(\phi) = \frac{3H^2}{8\pi} - \frac{4}{(8\pi)^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \phi} \right)^2. \quad (3.35)$$

Esta é a equação de Hamilton-Jacobi, a rota mais direta para a obtenção de potenciais inflacionários. Especificando-se H , obtém-se imediatamente o potencial correspondente através da equação (3.35).

O número de e-foldings de inflação pode ser calculado dessa maneira, bastando reescrever (3.4):

$$N = 4\pi \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{H}{H'} d\phi. \quad (3.36)$$

No formalismo Hamilton-Jacobi, é possível reescrever as condições slow-roll:

$$\left(\frac{H'}{H}\right)^2 \ll 1, \quad e \quad \left|\frac{H''}{H}\right| \ll 1. \quad (3.37)$$

3.2.4.2 Soluções Exatas

Algumas soluções exatas das equações (3.11) e (3.6) são muito conhecidas e suas propriedades foram exaustivamente estudadas. Elas podem ser obtidas facilmente com a utilização do formalismo Hamilton-Jacobi, discutido na seção anterior.

Uma solução conhecida como Power-Law Inflation [48] surge a partir de

$$H(\phi) \propto \exp\left[-\sqrt{\frac{4\pi}{p}}\phi\right], \quad (3.38)$$

onde p é uma constante. Substituindo a expressão acima em 3.35, obtém-se:

$$V(\phi) \propto \exp\left(-\left(\frac{16\pi}{p}\right)^{1/2}\phi\right). \quad (3.39)$$

Integrando a expressão (3.34), obtém-se a dependência temporal de ϕ :

$$\phi = \sqrt{\frac{p}{4\pi}} \ln \frac{t}{p}. \quad (3.40)$$

Substituindo o resultado acima na expressão (3.38) e integrando, obtém-se a dependência temporal do fator de escala:

$$a = a_0 t^p. \quad (3.41)$$

Como $\ddot{a} = p(p-1)t^{p-2}$, verifica-se que a inflação somente se realizará caso $p > 1$, e que não terá um fim natural, pois sempre $\ddot{a} > 0$ nessas condições.

Já a solução conhecida como Intermediate Inflation [49], uma das mais estudadas dentre todas as soluções exatas, vem de:

$$H(\phi) \propto \phi^{-\beta/2} \left(1 - \frac{\beta^2 \phi^{-2}}{48\pi}\right). \quad (3.42)$$

Substituindo em 3.35:

$$V(\phi) \propto \phi^{-\beta/2} \left(1 - \frac{\beta^2 \phi^{-2}}{48\pi}\right). \quad (3.43)$$

Nesse caso, o fator de escala ficará na forma $a \propto \exp(At^f)$

Onde $\beta = 4(f^{-1} - 1)$ com $0 < f < 1$ e $A > 0$. Este potencial gera uma inflação mais rápida do que a do modelo Power Law, mas também não há fim natural nela.

3.2.5 Quantização do Campo Escalar

Ao fim da inflação, o campo escalar começa a oscilar em torno de $\phi = 0$. Nesse momento, espera-se que o campo escalar decaia nas partículas observadas em nosso presente Universo, reaquentando-o. Portanto, faz-se imprescindível um tratamento quântico [50–52] do campo escalar em questão. Segue um pequeno resumo.

A quantização do campo escalar é possível com a utilização do formalismo da quantização canônica. Nele, a quantização se realiza tratando-se o campo ϕ como um operador, impondo as relações de comutação

$$\begin{aligned} [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] &= 0, \\ [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] &= 0, \\ [\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde π é a variável canônica conjugada de ϕ , definida por:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial(\dot{\phi})} = \dot{\phi}. \quad (3.45)$$

No caso, L é a densidade de Lagrangiana utilizada no problema em questão ((3.7) ou (3.18) por exemplo). Na maior parte dos casos de interesse [50], pode-se obter uma base completa ortonormal de soluções $u_{\mathbf{k}}$, de modo que ϕ poderá ser expandido no espaço fourrier como:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}) \right). \quad (3.46)$$

A relação de comutação entre ϕ e π será, portanto, equivalente a:

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= 0, \\ [a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] &= 0, \\ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

No formalismo de Heisenberg, os estados quânticos formam um espaço de Hilbert. Uma base conveniente nesse espaço de Hilbert é a representação de Fock. Nela, uma base de kets apropriada é $|n_{\mathbf{k}}\rangle$, onde n é o número de partículas com momento k . O estado $|0_{\mathbf{k}}\rangle$, portanto, é o vácuo do sistema. Nesse caso, $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ são os operadores aniquilação e criação, respectivamente.

3.2.6 Reheating

Como esse período do Universo depende fortemente do modelo de Física de partículas escolhido para o Universo, de modo que esse processo só poderá ser estudado de maneira definitiva quando

houver uma real compreensão de modelos de Física de partículas além do modelo padrão e da natureza da matéria e energia escuras. Até que isso ocorra, resultados gerais podem ser obtidos utilizando-se modelos simplificados.

Durante o Reheating, verificou-se que a amplitude da oscilação do campo escalar homogêneo diminui com o tempo, devido ao termo de atrito. Um campo escalar oscilante pode ser interpretado como um condensado de partículas de spin 0 e massa m em repouso. Por esse motivo, a densidade numérica dessas partículas pode ser estimada como:

$$n_\phi = \frac{\epsilon_\phi}{m} = \frac{1}{2m}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2) = \frac{3}{8\pi m}H^2 \simeq \frac{1}{2}m\Phi^2. \quad (3.48)$$

Esse número é muito grande: logo após o fim da inflação, quando $\Phi \approx 1$ em unidades de Planck, para um $m \approx 10^{13}$ obtém-se $n_\phi \approx 10^{92} \text{cm}^{-3}$.

Considere-se essas partículas acopladas com um campo escalar χ e um campo espinorial ψ . Suas interações mais simples são descritas por diagramas de Feynman de três linhas externas, que correspondem aos seguintes termos de uma Lagrangiana:

$$\Delta L = -g\phi\chi^2 - h\phi\bar{\psi}\psi. \quad (3.49)$$

Estes acoplamentos surgem naturalmente em teorias de calibre com quebra espontânea de simetria, e são suficientes para uma primeira abordagem. Entretanto, os termos da Equação (3.49) devem ser encarados como interações efetivas. Todos os cálculos posteriores são feitos em nível de árvore, *i.e.*, sem correções radiativas. As taxas de decaimento do inflaton em $\chi\chi$ e $\psi\psi$ são determinadas pelas constantes de acoplamento g e h respectivamente. Elas são:

$$\Gamma_\chi \equiv \Gamma(\phi \rightarrow \chi\chi) = \frac{g^2}{8\pi m} \quad e \quad \Gamma_\psi \equiv \Gamma(\phi \rightarrow \psi\psi) = \frac{h^2 m}{8\pi}. \quad (3.50)$$

As correções quânticas não modificam as interações (3.49) quando $g < m$ e $h < \sqrt{m}$. No caso limite em que as correções quânticas são desprezíveis e em que $m \ll m_{pl}$, portanto, a taxa de decaimento nas partículas χ é muito superior à taxa de decaimento nas partículas ψ . Levando em conta a expansão do Universo, as equações para as densidades numéricas de ϕ e χ podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{d(a^3 n_\phi)}{dt} = -\Gamma_{eff} n_\phi a^3 \quad e \quad \frac{d(a^3 n_\chi)}{dt} = 2\Gamma_{eff} n_\phi a^3, \quad (3.51)$$

onde o fator 2 da segunda expressão acima ocorre pelo fato de uma partícula ψ decair em duas partículas χ , e o fator a^3 multiplica n_ϕ para levar em conta a expansão do Universo. Na teoria conhecida como elementary reheating, utiliza-se $\Gamma_{eff} = \Gamma_\chi$, como dado na expressão (3.50). A aplicabilidade dessa teoria é muito restrita. Substituindo (3.48) na primeira equação de (3.51), lembrando que no fim da inflação $m\phi \sim \dot{\phi}$, obtém-se a expressão aproximada

$$\ddot{\phi} + (3H + \Gamma_{eff})\dot{\phi} + m^2\phi \simeq 0. \quad (3.52)$$

Efeitos quânticos se tornam importantes logo após o início do decaimento do inflaton, de modo que o modelo estruturado nessa seção serve apenas para uma compreensão elementar do que se processa ao fim da inflação. Um tratamento adequado exigiria um estudo aprofundado do fenômeno conhecido como ressonância paramétrica. O estudo detalhado do período do Reheating foge ao escopo desse trabalho, de modo que o leitor interessado é referido a [26] e [53].

3.2.7 Perturbações no Campo Escalar

Introduzindo uma pequena perturbação $\delta\phi$ no campo escalar, obtém-se:

$$\phi = \phi_0(\eta) + \delta\phi(\mathbf{x}, \eta). \quad (3.53)$$

Inserindo o campo perturbado na equação de Klein-Gordon (3.6), e tomando apenas os termos em primeira ordem, resulta

$$\partial_\eta\partial_\eta\delta\phi + 2H\partial_\eta\delta\phi - \nabla^2\delta\phi + a^2V''\delta\phi - \partial_\eta\phi_0\partial_\eta(3\Psi + \Phi) + 2a^2V'\Phi = 0. \quad (3.54)$$

Na expressão acima, há 3 variáveis. Portanto, serão necessárias as equações de Einstein, para a solução completa do sistema. As expressões para campos escalares já foram obtidas (2.51, 2.52 e 2.53). As componentes fora da diagonal do tensor energia momento deverão ser nulas, de modo que inspecionando (2.53), verifica-se que $\Psi = \Phi$. Portanto, a equação (2.52) assumirá a forma:

$$\partial_\eta\Phi + H\Phi = 4\pi\partial_\eta\phi_0\delta\phi. \quad (3.55)$$

Utilizando-se o fato de que $\delta T_i^0 = a^{-2}\partial_i(\phi_0\delta\phi)$ [26].

Reescrevendo em termos do tempo físico t , (3.54) se tornará:

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \nabla^2\delta\phi - 4\dot{\phi}_0\dot{\Phi} + 2V'\Phi = 0, \quad (3.56)$$

onde o fato de que $\Psi = \Phi$ já foi levado em conta. E (3.55) se tornará:

$$\dot{\Phi} + H\Phi = 4\pi\dot{\phi}_0\delta\phi. \quad (3.57)$$

A partir dessas expressões, podem-se obter as perturbações geradas no período inflacionário. Elas podem ser resolvidas em dois casos limites: As perturbações com comprimento de onda físico $\lambda_{ph} \approx a/k$ muito menor do que a escala de curvatura H^{-1} e para comprimentos de onda físicos muito maiores do que a escala de curvatura. O comprimento de onda físico aumenta com o tempo, proporcionalmente ao fator de escala a , enquanto a escala de curvatura mantém-se aproximadamente constante no período

inflacionário. Os modos de interesse, nesse caso, iniciarão menores do que a escala de curvatura e eventualmente a excederão.

3.2.7.1 Dentro da Escala de Curvatura

O campo gravitacional não é importante na evolução das perturbações com $\lambda_{ph} \ll H^{-1}$ ou, equivalentemente com $k \gg Ha \sim |\eta|^{-1}$. De fato, para grandes valores de $k|\eta|$ a derivada espacial dominará na expressão (3.54). O campo gravitacional também oscila, de modo que $\partial_\eta \Phi \sim k\Phi$ e, por (3.55), obtém-se $\Phi \sim \partial_\eta \phi_0 \delta\phi$. Com todas essas informações reunidas, lembrando que durante a inflação $\partial_\eta \partial_\eta V \ll V \sim H^2$, verifica-se que apenas os 3 primeiros termos da expressão (3.54) são relevantes. Substituindo $\delta\phi = u_k/a$:

$$\partial_\eta \partial_\eta u_k + \left(k^2 - \frac{\partial_\eta \partial_\eta a}{a} \right) u_k \approx 0. \quad (3.58)$$

Para $k|\eta| \gg 1$ o último termo poderá ser desprezado, resultando na solução:

$$\delta\phi \simeq \frac{C_k}{a} \exp(\pm ik\eta), \quad (3.59)$$

onde C_k é uma constante de integração, que deverá ser fixada nas condições iniciais, ou poderá surgir por meio de flutuações quânticas do vácuo. Utilizando o princípio da incerteza, é possível estimar essa constante [26], obtendo $\delta\phi \sim k^{-1/2}$. Portanto:

$$\delta\phi \simeq \frac{1}{ak} \exp(\pm ik\eta). \quad (3.60)$$

3.2.7.2 Fora da Escala de Curvatura

Para determinar a evolução das perturbações para $\lambda_{ph} \gg H^{-1}$ será necessário utilizar a aproximação slow-roll. Nessas escalas, o termo $\nabla^2 \delta\phi$ pode ser desprezado, assim como os termos proporcionais a $\delta\ddot{\phi}$ e $\dot{\Phi}$.

Utilizando-se dessas aproximações, as equações (3.56) e (3.57) assumem a forma:

$$3H\delta\dot{\phi} + V''\delta\phi + 2V'\Phi \simeq 0 \quad (3.61)$$

e

$$H\Phi \simeq 4\pi\dot{\phi}_0\delta\phi. \quad (3.62)$$

Introduzindo uma nova variável $y \equiv \delta\phi/V'$, essas equações podem ser solucionadas, e o modo crescente será

$$\delta\phi_k = A_k \frac{V'}{V} \quad (3.63)$$

e

$$\Phi_k = -\frac{1}{2}A_k \left(\frac{V'}{V} \right)^2. \quad (3.64)$$

3.2.7.3 Espectro de Potências

Após esses desenvolvimentos, é possível definir a quantidade conhecida como espectro de potências:

$$\delta_{\Phi}^2(k) \equiv \frac{|\Phi_k|k^3}{2\pi^2}. \quad (3.65)$$

Essa definição permite que a densidade de energia das flutuações seja calculada facilmente. Dentro de certas restrições, é possível definir o espectro de potências com a forma

$$\delta_{\Phi}^2(k) \propto k^{(n-1)}, \quad (3.66)$$

onde n é o chamado índice espectral. Um espectro plano terá $n = 1$. Para os modelos inflacionários habituais [28]:

$$n = 1 - 3\epsilon_{sr} + 2\eta_{sr}. \quad (3.67)$$

Definido como função dos parâmetros slow roll definidos em (3.28). Seguem alguns exemplos:

Para um potencial monomial, do tipo

$$V(\phi) = \lambda\phi^\alpha, \quad (3.68)$$

com alfa inteiro positivo é possível obter-se o índice espectral das perturbações escalares. Para isso, basta utilizar a definição (3.67), de modo que

$$\epsilon_{sr} = \frac{\alpha^2}{\phi^2}, \quad \eta_{sr} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\phi^2}. \quad (3.69)$$

Considerando que o fim da inflação ocorre quando $\phi_f \approx \frac{\alpha}{8\pi}$ (E o campo começa a oscilar em torno do valor $\phi = 0$) e utilizando a expressão para o número de e-folds de inflação para a aproximação slow-roll (3.29), obtém-se que quando as escalas de interesse cosmológico deixam o horizonte, $\phi \approx \sqrt{N\alpha}/\sqrt{4\pi}$. Portanto:

$$n = 1 - \frac{2 + \alpha}{2N}. \quad (3.70)$$

Para o potencial tipo termo de massa, tratado nas seções anteriores:

$$n = 1 - \frac{2}{N} \approx 0.96, \quad (3.71)$$

com $\alpha = 2$ e $N = 50$. Definição essa que pode ser comparada com os dados experimentais disponíveis.

Para uma inflação do tipo Power-Law, tratada anteriormente, obtém-se:

$$\epsilon_{sr} = \frac{1}{p}, \quad e \quad \eta_{sr} = \frac{2}{p}. \quad (3.72)$$

Esses valores são constantes, o que confirma que o modelo não tem um fim natural, uma vez que as condições de inflação, uma vez satisfeitas ($p > 1$), jamais serão violadas. Para esse modelo inflacionário, obtém-se:

$$n = 1 - \frac{2}{p}. \quad (3.73)$$

4 Inflação Vetorial

No capítulo anterior, verificou-se que um período inflacionário gerado por campos escalares é capaz de resolver inúmeros problemas da cosmologia moderna, com a simples inserção de um campo escalar na composição do Universo primordial.

A única partícula escalar prevista pelo modelo padrão de partículas, o bóson de Higgs, não foi observada até o presente momento. Espera-se que o LHC [54] (Large Hadron Collider) seja capaz de fazê-lo em breve. A confirmação da existência de partículas escalares na natureza será mais um ponto a favor da teoria inflacionária. Diversos autores, inclusive, tentaram associar o bóson de Higgs ao Inflaton, mas percebeu-se que a escala de energia de ambas as partículas são incompatíveis. Entretanto, enquanto tal detecção não ocorrer, continuará a dúvida se realmente vale a pena utilizar campos escalares na confecção de modelos cosmológicos.

Além disso, a maior parte dos modelos escalares só descrevem bem nosso Universo em casos de extremo ajuste fino. Por razões estéticas e filosóficas, diversos autores buscam modelos para a formação do atual Universo que não necessitem de tais ajustes. Segundo eles, nosso Universo atual deveria ser uma solução atratora de um modelo cosmológico definitivo. Entretanto, não se sabe ao certo se o ajuste fino das constantes do Universo realmente poderá ser evitado.

Essas razões tem levado à busca de modelos alternativos, baseados em partículas espinoriais, vetoriais e tensoriais. Devido à complexidade intrínseca a tais campos, a criação desses modelos pode ser bastante trabalhosa.

Em 1987, Ford [55] propõe um modelo de inflação não isotrópica baseada em campos vetoriais. Essa anisotropia ocorre naturalmente em modelos de inflação vetorial, pois todo campo vetorial possui uma direção preferencial. Existem diversas formas de contornar o problema, como por exemplo supor um campo no qual as componentes espaciais se anulam. Essas formas serão discutidas no presente capítulo. Também é discutida a possibilidade do Universo possuir uma anisotropia residual.

Nos últimos anos, o interesse por modelos desse tipo tem se intensificado. No início de 2008, Golovnev, Mukhanov e Vanchurin [56] propuseram um interessante cenário onde um certo número de campos vetoriais não minimamente acoplados com a gravidade são capazes de gerar um período inflacionário onde a aproximação *slow-roll* pode ser utilizada. Isso deu um novo ânimo ao estudo de modelos similares, e no ano de 2008 diversos trabalhos surgiram nesse âmbito.

Nesse capítulo, serão analisadas diversas tentativas extremamente recentes de se obter um modelo cosmológico viável a partir de campos vetoriais [55–58, 60–73]. Para isso, serão estudados diversos tipos de acoplamentos com a gravidade. Os efeitos desses termos nas equações de movimento e nas componentes do tensor energia-momento também serão estudados.

4.1 Campos Eletromagnéticos

Campos vetoriais correspondem a partículas de spin 1. Uma tentativa de se descrever um período inflacionário a partir de campos vetoriais deverá levar em conta a mais simples das possibilidades: que campos eletromagnéticos sejam responsáveis por esse período. Nesse caso, não seria necessária a inserção de nenhum campo exótico na composição do Universo.

Um campo eletromagnético, na ausência de fontes, em um espaço tempo curvo, será descrito pela ação:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (4.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.2)$$

Portanto, um campo vetorial desprovido de massa. Variando essa ação com relação ao campo vetorial, obtém-se

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.3)$$

Essa expressão, em um espaço-tempo Minkowsky, conjuntamente com a identidade

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0, \quad (4.4)$$

que provém da anti-simetria do tensor, constituem as equações de Maxwell no vácuo.

As equações de Maxwell são naturalmente invariantes por transformações de Gauge. Portanto, invariantes por uma transformação do tipo

$$A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\alpha \Sigma, \quad (4.5)$$

onde Σ é qualquer função escalar diferenciável. Sabe-se que essa invariância de Gauge impede a quantização canônica do campo vetorial de maneira consistente [50]. Para que isso se torne possível, a escolha de Gauge deverá ser fixada, o que geralmente é feito por meio da inclusão de um termo proporcional a $(\nabla_\alpha A^\alpha)^2$ na densidade de lagrangiana do campo eletromagnético livre. Nesse caso, a nova ação terá a forma:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\sigma}{2} (\nabla_\mu A^\mu)^2 \right). \quad (4.6)$$

Variando a ação acima com relação ao campo vetorial, obtém-se

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} + \sigma \nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu = 0, \quad (4.7)$$

as equações de movimento do sistema. Supondo um campo eletromagnético homogêneo ($\partial_i A_\alpha = 0$), em um espaço-tempo descrito pela métrica Robertson-Walker espacialmente plana, obtém-se, para $\nu = 0$

$$\ddot{A}_0 + 3H\dot{A}_0 + 3\dot{H}A_0 = 0 \quad (4.8)$$

e, para $\nu = i$:

$$a\ddot{A}_i + \dot{a}\dot{A}_i = 0. \quad (4.9)$$

Para obter a contribuição do campo eletromagnético para o tensor energia momento, bastará variar a ação com relação à métrica, de modo que

$$T_\beta^\alpha = \frac{1}{4}F^{\gamma\delta}F_{\gamma\delta}\delta_\beta^\alpha - F^{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma} + \sigma\nabla^\alpha A_\beta\nabla_\mu A^\mu - \frac{\sigma}{2}\delta_\beta^\alpha(\nabla_\mu A^\mu)^2. \quad (4.10)$$

As equações do movimento, no caso dos campos eletromagnéticos, são bem mais complicadas do que no caso dos campos escalares. Entretanto, com a utilização de aproximações adequadas nas expressões acima, poderá ser realizada uma análise da viabilidade do campo eletromagnético gerar um período inflacionário. Uma pesquisa inicial da literatura disponível mostra que isso ainda não foi realizado em grandes detalhes.

Entretanto, em [57], os autores estudam a viabilidade de se realizar a atual expansão do Universo utilizando campos eletromagnéticos. Para isso, calculam a densidade de energia do campo eletromagnético:

$$T_0^0 = \sigma \left(\frac{9}{2}H^2 A_0^2 + 3HA_0\dot{A}_0 + \frac{1}{2}\dot{A}_0^2 + \frac{1}{2a^2}\dot{A}_k^2 \right), \quad (4.11)$$

com soma subentendida sobre k . Nesse caso, a equação de Friedmann (2.18) assumirá a forma

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{9}{2}H^2 A_0^2 + 3HA_0\dot{A}_0 + \frac{1}{2}\dot{A}_0^2 + \frac{1}{2a^2}\dot{A}_k^2 \right). \quad (4.12)$$

Com essa expressão, supondo que o campo vetorial sobreviva ao período inflacionário, as equações (4.8) e (4.9) podem ser resolvidas para um período de domínio da radiação (utilizando (2.21)) ou da matéria (utilizando (2.20)), de modo que sua evolução posterior pode ser observada. As soluções são

$$A_0(t) = A_0^+ t + A_0^- t^{-3p} \quad (4.13)$$

e

$$A_i(t) = A_i^+ t^{1-p} + A_i^-. \quad (4.14)$$

Onde $p = 2/3$ para o período de domínio da matéria e $1/2$ para o período de domínio da radiação. Essa solução mostra o comportamento do campo vetorial com relação ao tempo. Verifica-se que o modo

(+) da componente temporal dominará o Universo com o passar do tempo, por aumentar proporcionalmente ao tempo cósmico em todos os períodos do Universo. O modo (+) das componentes espaciais também sobreviverá.

Portanto, campos eletromagnéticos em escalas cosmológicas podem originar a atual expansão acelerada de escalas. Mais estudos deverão ser realizados para que os efeitos de campos eletromagnéticos em escalas cosmológicas sejam plenamente conhecidos em seus efeitos.

4.2 Campo Vetorial Minimamente Acoplado

Também é possível supor novos campos vetoriais, não contidos no modelo padrão de partículas, e seus efeitos podem ser estudados. Nessa seção, serão tratados campos vetoriais minimamente acoplados com a gravidade, nos moldes da referência [58].

Considere-se a ação vetorial:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - V(A_\mu A^\mu) \right), \quad (4.15)$$

idêntica à ação (4.1), com a adição de um termo potencial. Variando-a com relação ao campo vetorial, obtém-se a equação do movimento do campo:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} + V'(A^2) A^\nu = 0. \quad (4.16)$$

Com a exigência da homogeneidade, obtém-se

$$A_0 = 0 \quad (4.17)$$

para $\nu = 0$ e

$$\ddot{A}_i + H\dot{A}_i - a^2 V'(A^2) = 0 \quad (4.18)$$

para $\nu = k$, com uma soma sobre i subentendida. Trata-se, portanto, de um vetor tipo espaço. Como

$$A^2 = A_0 A_0 - \frac{1}{a^2} A_k A_k \equiv -\frac{1}{a^2} A_k A_k \equiv -I, \quad (4.19)$$

justifica-se a redefinição $A_i/a = B_i$ que fará com que a equação acima assuma a forma

$$\ddot{B}_i + 3H\dot{B}_i + \frac{\partial V(I)}{\partial I} + (\dot{H} + 2H^2) B_i = 0, \quad (4.20)$$

que pode ser reescrita em termos do escalar R ,

$$\ddot{B}_i + 3H\dot{B}_i + \frac{\partial V(I)}{\partial I} B_i - \frac{1}{6} R B_i = 0, \quad (4.21)$$

com uma expressão para cada componente espacial. Um fato digno de nota: inspecionando a expressão (3.18), verifica-se uma óbvia analogia entre o campo escalar não minimamente acoplado e o campo vetorial minimamente acoplado. Supondo-se um acoplamento conforme ($\xi = 1/6$), obtém-se expressões idênticas.

Continuando o desenvolvimento, pode-se também obter as componentes do tensor energia-momento, bastando para tal variar a densidade de Lagrangiana com relação à métrica $g_{\mu\nu}$:

$$T_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{4}F^{\gamma\delta}F_{\gamma\delta}\delta_{\beta}^{\alpha} - F^{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma} + \frac{\partial V(I)}{\partial I}A^{\alpha}A_{\beta} - V(I)\delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (4.22)$$

Para um vetor quase-homogêneo em um Universo Friedmann espacialmente plano, obtém-se

$$T_0^0 = \frac{1}{2}(\dot{B}_k + HB_k)^2 + V(I) \quad (4.23)$$

e

$$T_j^i = \left[-\frac{1}{2}(\dot{B}_k + HB_k)^2 + V(I) \right] \delta_j^i + (\dot{B}_i + HB_i)(\dot{B}_j + HB_j) - \frac{\partial V(I)}{\partial I}B_iB_j, \quad (4.24)$$

soma sobre o índice k . Verifica-se que esse tensor energia momento não é isotrópico. Portanto, a suposição de uma métrica Robertson-Walker para a descrição do Universo preenchido por um campo vetorial foi inadequada. Campos vetoriais cujas componentes espaciais não se anulam naturalmente privilegiarão uma determinada direção no espaço. A seguir, serão discutidas 3 soluções para esse problema.

4.2.1 O Universo Anisotrópico

Uma das possibilidades ao prosseguir seria aceitar o fato de o Universo não ser isotrópico, e refazer os cálculos acima utilizando uma métrica, por exemplo, do tipo Bianchi I:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 dx^2 - b^2 dy^2 - c^2 dz^2. \quad (4.25)$$

Dessa forma, é suposta a existência de um desvio da isotropia, que deverá ser cancelado por algum mecanismo, ou evoluir de forma a se manter dentro dos parâmetros permitidos pelos dados experimentais. Recentemente, diversos trabalhos tem versado sobre a possível anisotropia do Universo, tanto em caráter experimental (Por exemplo, [59]) como em caráter teórico, inclusive envolvendo campos vetoriais (Por exemplo, [60–62]).

O próprio paper de Ford [55], citado anteriormente, trabalha nesse contexto. Nele, utiliza-se um campo vetorial minimamente acoplado e supõe-se uma métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(dx^2 + dy^2) + c^2 dz^2. \quad (4.26)$$

As equações de Einstein, com essa métrica, assumirão a forma:

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\epsilon, \quad (4.27)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi p_z, \quad (4.28)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{b}}{b} = -8\pi p_i, \quad (4.29)$$

com $i = x, y$. Supondo o campo vetorial apontando na direção z , Ford obtém as equações do movimento do problema. As citadas pistas sobre a anisotropia da radiação cósmica de fundo sugerem um alinhamento em um eixo, do mesmo modo que modelo esboçado nessa seção, onde há uma anisotropia na direção do eixo z . Não será levado a diante o estudo de tal modelo no presente trabalho, mas ele foi citado por sua possível importância futura, em face das presentes descobertas experimentais.

4.2.2 Reestabelecimento Parcial da Isotropia

Outro modo de se resolver o problema é supor a existência de um grande número (N) de campos vetoriais similares [56], embora aleatoriamente orientados. Nesse caso, a componente temporal do tensor energia-momento será:

$$T_0^0 \approx \frac{N}{2}(\dot{B}_k + HB_k)^2 + V(I). \quad (4.30)$$

Para estimar as componentes espaciais do tensor, bastará a suposição:

$$\sum_{a=1}^N B_i^{(a)} B_j^{(a)} \simeq \frac{N}{3} B^2 \delta_j^i + O(1)\sqrt{N}B^2, \quad (4.31)$$

onde $B^2 = B_k^2$, soma subentendida. A correção da ordem de \sqrt{N} é de origem estocástica, devido à orientação aleatória dos campos vetoriais. Portanto:

$$T_j^i \simeq \left[\frac{N}{2}(-\dot{B}_k + HB_k)^2 + V(I) \right] \delta_j^i. \quad (4.32)$$

A isotropia foi reestabelecida parcialmente, a métrica Robertson-Walker poderá ser utilizada e o desvio residual poderá ser tratado perturbativamente.

4.2.3 Reestabelecimento Total da Isotropia

Outra possibilidade é reestabelecer a isotropia do tensor energia momento. Isso pode ser realizado, conforme proposto por Armendáriz-Picón [58], pela suposição de uma tríade de vetores, de mesmo módulo e ortogonais entre si (Lembrando que $A_0 = 0$). Desse modo:

$$T_0^0 = \epsilon = \frac{3}{2}(\dot{B}_k + HB_k)^2 + 3V \quad (4.33)$$

e

$$T_j^i = -p\delta_j^i = \left(-\frac{3}{2}(\dot{B}_k + HB_k)^2 + 3V\right) \delta_j^i. \quad (4.34)$$

A isotropia foi reestabelecida, e portanto a métrica Robertson-Walker espacialmente plana pode descrever o sistema, e as soluções das equações de Einstein obtidas no segundo capítulo são válidas. Portanto, a evolução do Universo será descrito pelas expressões

$$H^2 = \frac{4\pi}{3} \left((\dot{B}_k + HB_k)^2 + V \right) \quad (4.35)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -2\pi \left((\dot{B}_k + HB_k)^2 - V \right). \quad (4.36)$$

Desse modo, a influência causada por um vetor que domina o tensor energia momento pode ser calculada. Essa solução será a mais utilizada até o fim do presente trabalho.

4.3 Campo Vetorial mais Geral

Em diversos trabalhos, como por exemplo [64] e [63], utiliza-se a ação mais geral para um campo vetorial, que não contenha derivadas dos campos de ordem superior a 2. Essa ação terá a forma:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} V(A^\mu A_\mu) + \frac{1}{2} \xi R A^\mu A_\mu + \lambda A^\mu A^\nu R_{\mu\nu} \right). \quad (4.37)$$

Variando com relação ao campo vetorial:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} - \frac{\partial V}{\partial A^2} A^\nu + \xi R A^\nu + \lambda A_\mu R^{\mu\nu} = 0, \quad (4.38)$$

e com relação à métrica:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} - F_{\mu\gamma} F_\nu^\gamma - \frac{\partial V}{\partial A^2} A_\mu A_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(A^2) + \xi R A_\mu A_\nu \\ & \xi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) A^\gamma A_\gamma + \xi (g_{\mu\nu} \nabla_\gamma \nabla^\gamma - \nabla_\mu \nabla_\nu) A^\gamma A_\gamma + \\ & \lambda A^\gamma A^\delta (g_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} + g_{\nu\delta} R_{\mu\gamma}) - \frac{1}{2} \lambda g_{\mu\nu} A^\gamma A^\delta R_{\gamma\delta} + \\ & \frac{1}{2} \lambda [g_{\mu\nu} \nabla_\gamma \nabla_\delta (A^\gamma A^\delta) + \nabla_\gamma \nabla^\delta (A_\mu A_\nu) - \nabla_\gamma \nabla_\mu (A_\nu A^\gamma) - \nabla_\gamma \nabla_\nu (A_\mu A^\gamma)]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Com essa informação em mãos, a influência de cada um dos termos citados pode ser estudada independentemente. Os autores de [64] e [63] verificam se a gravitação gerada pelo modelo acima são compatíveis com a gravitação encontrada nas proximidades do sistema solar, estabelecendo vínculos para os parâmetros ξ , λ e para o potencial.

4.4 Campo Vetorial não Minimamente Acoplado.

Em [56], Golovnev, Mukhanov e Vanchurin consideram um campo vetorial (A^μ) massivo e com parâmetros $\xi = 1/6$ e $\lambda = 0$. Portanto:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(m^2 + \frac{R}{6} \right) A_\mu A^\mu \right). \quad (4.40)$$

Perceba-se aqui uma violação proposital na invariância por transformações conformes. No caso minimamente acoplado, as equações do movimento 4.21 traziam o mesmo termo que a equação do movimento do campo escalar conformemente acoplado (3.18). Podemos, portanto, violar a invariância conforme, para tornar a equação do movimento (4.21) idêntica à equação do movimento do campo escalar minimamente acoplado, o qual sabemos tratar tão bem devido à aproximação slow-roll, e todo o formalismo desenvolvido no capítulo anterior.

Para isso, bastará proceder de maneira habitual. Variando essa ação com relação ao campo vetorial:

$$\nabla_\mu (F^{\mu\nu}) + \left(m^2 + \frac{R}{6} \right) A^\nu = 0. \quad (4.41)$$

Para a componente temporal $\nu = 0$, obtém-se

$$-\frac{1}{a^2} \nabla^2 A_0 + \left(m^2 + \frac{R}{6} \right) A_0 + \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{A}_i = 0, \quad (4.42)$$

enquanto para as componentes espaciais $\nu = k$

$$\ddot{A}_i + H \dot{A}_i - \frac{1}{a^2} \Delta A_i + \frac{1}{a^2} \partial_i (\partial_k A_k) - \frac{1}{a} \partial_0 (a \partial_i A_0) + \left(m^2 + \frac{R}{6} \right) A_i = 0, \quad (4.43)$$

com soma sobre i subentendida. Considerando um campo vetorial quase-homogêneo ($\partial_i A_\alpha = 0$) e definindo $B_\mu = A_\mu/a$, as expressões (4.42) e (4.43) tornam-se, respectivamente,

$$A_0 = 0 \quad (4.44)$$

e

$$\ddot{B}_i + 3H \dot{B}_i + m^2 B_i = 0. \quad (4.45)$$

Uma equação para cada índice espacial. Verifica-se que a expressão obtida tem o formato desejado, idêntico à expressão (3.7). Pode-se também obter as componentes do tensor energia-momento, bastando para tal variar a densidade de Lagrangiana com relação à métrica $g_{\mu\nu}$:

$$T_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{4}F^{\gamma\delta}F_{\gamma\delta}\delta_{\beta}^{\alpha} - F^{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma} + \left(m^2 + \frac{R}{6}\right)A^{\alpha}A_{\beta} - \frac{1}{2}m^2A^{\gamma}A_{\gamma}\delta_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{6}\left(R_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}R\delta_{\beta}^{\alpha}\right)A^{\gamma}A_{\gamma} + \frac{1}{6}(\delta_{\beta}^{\alpha}\square - \nabla^{\alpha}\nabla_{\beta})A^{\gamma}A_{\gamma}. \quad (4.46)$$

Para um vetor quase-homogêneo em um Universo Friedmann espacialmente plano, obtém-se

$$T_0^0 = \frac{1}{2}[\dot{B}_k^2 + m^2B_k^2] \quad (4.47)$$

e

$$T_j^i = \left[-\frac{5}{6}(\dot{B}_k + m^2B_k^2) - \frac{2}{3}HB_k\dot{B}_k - \frac{1}{3}(\dot{H} + 3H^2)B_k^2\right]\delta_j^i + \dot{B}_i\dot{B}_j + H(\dot{B}_iB_j + \dot{B}_jB_i) + (\dot{H} + 3H^2 - m^2)B_iB_j. \quad (4.48)$$

Onde há uma soma sobre o índice k. É visível que o tensor Energia-Momento representado acima novamente não satisfaz as equações de Einstein em um Universo Friedmann, pois não é isotrópico. Seguindo Armendáriz-Picón [58], a existência do tripleto é suposta. Nesse caso, o tensor energia-momento para os três campos vetoriais será:

$$T_0^0 = \rho = \epsilon = \frac{3}{2}[\dot{B}_k^2 + m^2B_k^2] \quad (4.49)$$

e

$$T_j^i = -p\delta_j^i = -\frac{3}{2}[\dot{B}_k^2 - m^2B_k^2]\delta_j^i. \quad (4.50)$$

A isotropia foi, portanto, reestabelecida. Resolvendo as equações de Einstein, obtém-se

$$H^2 = 4\pi[\dot{B}_k^2 + m^2B_k^2] \quad (4.51)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi[2\dot{B}^2 + V]. \quad (4.52)$$

Para $|B| > 1$, o Universo poderá entrar em um período Slow-Roll ($\dot{B}_k \ll m^2B_k^2$), durante o qual $p \approx -\epsilon$. E todo o formalismo do capítulo anterior poderá ser utilizado para o estudo das características do período inflacionário em questão.

A questão das condições iniciais necessárias para a ocorrência da inflação vetorial necessária para esse modelo foi analisada por Chiba [65]. O autor estuda especificamente um Universo inicialmente curvo, e verifica se a inflação ocorrerá para curvaturas arbitrárias. Ele conclui que o período inflacionário não ocorrerá para uma vasta gama de condições iniciais. O modelo é bem mais sensível a tais condições do que o modelo mais simples de inflação caótica, descrito no capítulo anterior.

Em um trabalho ainda mais recente, os próprios autores Golovnev, Mukhanov e Vanchurin ampliaram seu trabalho [66] e realizaram um estudo sobre a geração de ondas gravitacionais pelo campo vetorial em questão. Também ampliaram as possibilidades, estudando potenciais do tipo Power-Law, Coleman-Weinberg, Exponencial e potenciais que emergem de quebras de simetria, além do termo de massa.

As conclusões gerais foram que embora em ordem zero as semelhanças entre os modelos escalares habituais e os vetoriais sejam grandes, em perturbações de primeira ordem grandes diferenças são encontradas. As teorias que envolvem módulos do campo superiores a 1 (Como o termo de massa) podem gerar instabilidades taquiónicas na geração de ondas gravitacionais. Os modelos de módulos pequenos são estáveis enquanto a aproximação slow roll for válida.

4.4.1 Campos Vetoriais como Impureza

O caso de um Universo com a inflação gerada por campos escalares contendo uma impureza vetorial, semelhante à tratada na última seção, foram estudados pelos autores [61]. Nesse modelo, a inflação é anisotrópica.

A ação utilizada é:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\mu A_\mu - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right). \quad (4.53)$$

A equação do movimento do campo vetorial será a expressão (4.45) descrita na seção anterior e a equação do movimento do campo escalar será a equação de Klein-Gordon habitual (3.7). Os autores conseguiram, desse modo, gerar uma inflação anisotrópica que termina satisfatoriamente em oscilações.

4.5 Acoplamento e Potencial quaisquer

Na seção anterior, a invariância conforme do campo vetorial foi quebrada com a inserção de um acoplamento $\xi = 1/6$, para a obtenção das equações do movimento similares às do campo escalar minimamente acoplado. Entretanto, o único valor natural para esse acoplamento é o acoplamento mínimo $\xi = 0$, com o qual o campo é invariante por transformações conformes. Resta a pergunta:

Quão natural é o valor $\xi = 1/6$? Inserindo-se a mão um valor qualquer para o acoplamento, não se estaria apenas revivendo o velho problema do ajuste fino dos parâmetros? Para estudar mais a fundo

essa suposição, decidimos supor um campo vetorial com um acoplamento ξ qualquer e um potencial arbitrário. A ação desse campo será:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} V(A^\mu A_\mu) + \frac{1}{2} \xi R A^\mu A_\mu \right). \quad (4.54)$$

A partir dessa ação, são obtidas as equações do movimento

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}) + (V'(A^\mu A_\mu) + \xi R) g^{\nu\beta} A_\beta = 0. \quad (4.55)$$

Para $\nu = 0$,

$$-\frac{1}{a^2} \partial_i \partial_i A_0 + \left(\frac{\partial V(I)}{\partial I} + \xi R \right) A_0 + \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{A}_i = 0, \quad (4.56)$$

enquanto para $\nu = k$

$$\ddot{A}_i + H \dot{A}_i - \frac{1}{a^2} \Delta A_i + \frac{1}{a^2} \partial_i (\partial_k A_k) - \frac{1}{a} \partial_0 (a \partial_i A_0) + \left(\frac{\partial V(I)}{\partial I} + \xi R \right) A_i = 0. \quad (4.57)$$

Soma sobre i subentendida. Considerando um campo vetorial quase-homogêneo ($\partial_i A_\alpha = 0$) e definindo $B_\mu = A_\mu/a$, as expressões (4.56) e (4.57) tornam-se, respectivamente,

$$A_0 = 0 \quad (4.58)$$

e

$$\ddot{B}_k + 3H \dot{B}_k + \frac{\partial V(I)}{\partial I} B_k + (1 - 6\xi) (\dot{H} + 2H^2) B_k = 0. \quad (4.59)$$

Também é possível variar a densidade de Lagrangiana com relação à métrica $g^{\mu\nu}$, resultando:

$$T_\beta^\alpha = \frac{1}{4} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \delta_\beta^\alpha - F^{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma} + V' A^\alpha A_\beta + \xi R A^\alpha A_\beta - \frac{1}{2} V(A^\gamma A_\gamma) \delta_\beta^\alpha \\ \xi \left(R_\beta^\alpha - \frac{1}{2} R \delta_\beta^\alpha \right) A^\gamma A_\gamma + \xi (\delta_\beta^\alpha \square - \nabla^\alpha \nabla_\beta) A^\gamma A_\gamma. \quad (4.60)$$

Para um vetor quase-homogêneo em um Universo Friedmann espacialmente plano,

$$T_0^0 = \frac{1}{2} [\dot{B}_k^2 + V] + (1 - 6\xi) H B_k \dot{B}_k + \frac{1}{2} (1 - 6\xi) H^2 B_k^2 \quad (4.61)$$

e

$$T_j^i = \left[-\frac{1}{2} (4\xi + 1) \dot{B}_k^2 + \frac{1}{2} (4\xi V' B_k^2 + V) (-1 + 2\xi) H B_k \dot{B}_k + \frac{1}{2} (-1 + 2\xi - 48\xi^2) H^2 B_k^2 \right] \delta_i^j + \\ \left[-12\xi^2 \dot{H} B_k^2 \right] \delta_j^i + \dot{B}_i \dot{B}_j + H (\dot{B}_i B_j + \dot{B}_j B_i) + (H^2 (1 + 12\xi) + 6\xi \dot{H} - V') B_i B_j. \quad (4.62)$$

Seguindo novamente a referência [58], obtém-se

$$T_0^0 = \epsilon = \frac{3}{2}[\dot{B}_k^2 - V] - 3(6\xi - 1)HB_k\dot{B}_k + \frac{3}{2}(6\xi - 1)H^2B_k^2 \quad (4.63)$$

e

$$T_j^i = -p\delta_j^i = -\frac{1}{2}(12\xi + 1)\dot{B}_k^2 - \frac{3}{2}V + (6\xi - 1)V'B^2 + (6\xi - 1)HB_k\dot{B}_k + \frac{1}{2}(-1 + 30\xi - 144\xi^2)H^2B_k^2 + 6\xi(1 - 6\xi)\dot{H}B_k^2. \quad (4.64)$$

Desse modo, obtém-se as equações relevantes para o problema:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\epsilon = 4\pi \left[\dot{B}_k^2 - V - 2(6\xi - 1)HB_k\dot{B}_k + (6\xi - 1)H^2B_k^2 \right] \quad (4.65)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\epsilon + 3p) = -4\pi \left[(1 + 6\xi)\dot{B}^2 + V + 6\xi(1 - 6\xi)\dot{H}B^2 + 2(1 - 6\xi)HB\dot{B} \right] - 4\pi \left[(1 - 6\xi)V'B^2 + 12\xi(6\xi - 1)H^2B^2 \right]. \quad (4.66)$$

Com alguma álgebra, pode-se reescrever essas expressões em um formato mais adequado, que isole $\dot{B}(B, H)$ e $\dot{H}(B, H)$:

$$\dot{H} = \frac{1}{1 + 24\pi(6\xi - 1)B^2} \left[-H^2 - 4\pi \left((1 + 6\xi)\dot{B}^2 + V + 2(1 - 6\xi)HB\dot{B} + (1 - 6\xi)V'B^2 \right) \right] + \frac{1}{1 + 24\pi(6\xi - 1)B^2} \left[-4\pi \left(+12\xi(6\xi - 1)H^2B^2 \right) \right] \quad (4.67)$$

e

$$\dot{B} = (6\xi - 1)HB \pm \sqrt{\frac{H^2}{4\pi} + V + 2(1 - 6\xi)(3\xi - 1)H^2B^2}. \quad (4.68)$$

Com a definição

$$G(H, B) = \frac{H^2}{4\pi} + V + 2(1 - 6\xi)(3\xi - 1)H^2B^2, \quad (4.69)$$

obtém-se

$$\dot{B} = (6\xi - 1)HB \pm \sqrt{G(H, B)} \quad (4.70)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{H} = \frac{1}{1 + 24\pi(6\xi - 1)B^2} & \left[2(1 - 3\xi)(H^2 + 4\pi V) + 4\pi(1 - 6\xi)V'B^2 \pm 48\pi\xi(1 - 6\xi)HB\sqrt{G} \right] \\ & + \frac{1}{1 + 24\pi(6\xi - 1)B^2} \left[4\pi(6\xi - 1)(36\xi^2 + 1)H^2B^2 \right]. \quad (4.71) \end{aligned}$$

Pode-se utilizar esse conjunto de equações e estudar seu comportamento, avaliando até que ponto o acoplamento $\xi = 1/6$ é um valor natural. Para tal, será necessário utilizar técnicas de sistemas dinâmicos. Pretende-se seguir especialmente referência [41], com a suposição de diversos potenciais.

5 Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Ao longo dessa dissertação, foram revisados alguns dos principais tópicos da cosmologia moderna. Com os fundamentos bem estabelecidos, tornou-se possível um estudo detalhado da cosmologia inflacionária, e de seus desenvolvimentos mais recentes. Verificou-se que um período inflacionário movido por campos vetoriais pode ser realizado, e diversas publicações, a maior parte do ano de 2008, foram revisadas. São desenvolvimentos recentes, e ainda não é certo se tais modelos são permitidos ou excluídos pelos dados experimentais disponíveis.

O problema do ajuste fino nos modelos cosmológicos é praticamente onipresente em qualquer desenvolvimento na área, e como não poderia deixar de ser, ele permeou esse trabalho. As tentativas de gerar um Universo livre da necessidade de ajustes finos costumam ser enganadoras. Na busca de tais soluções atratoras, interessantes de um ponto de vista filosófico e estético, diversos autores recorrem a certas práticas, como a adição de parâmetros livres aos modelos, potenciais artificiais e sem qualquer possibilidade de embasamento em Física de partículas. Seria isso diferente de ajustar finamente as constantes da natureza?

Na dúvida se tais soluções atratoras descreverão bem nosso Universo, a última palavra será apresentada pela própria natureza, que nos fornece os dados experimentais que são cada vez melhor e mais precisamente estudados. É possível que tenhamos um dia de nos conformar com um conjunto de condições iniciais inexplicáveis para o Universo, sem as quais a vida e a humanidade não poderiam se formar.

Nesse momento, um dos caminhos possíveis para fugir de especulações é voltar a atenção para os períodos do Universo que nossa capacidade técnica nos permite observar. Assim, evitam-se as embaraçosas condições iniciais, e é possível reconstruir a história do Universo “de frente para trás”, com o avanço progressivo da compreensão dos fenômenos cosmológicos. Entretanto, deve ser lembrado que em muitos momentos especulações rendem frutos inestimáveis, de modo que todo o esforço e trabalho nesse campo acaba sendo útil.

Portanto, campos vetoriais poderão gerar modelos eficazes de inflação ou de energia escura. Mas ter certeza disso demandará muito esforço para que tais modelos sejam bem construídos do ponto de vista teórico, e também para confrontá-los com os dados experimentais. Esse último desenvolvimento poderá demonstrar, entretanto, que esses modelos são inadequados e deverão ser descartados. Isso restringirá o leque de modelos disponíveis, nos deixando mais próximos, possivelmente, de um modelo definitivo para o Universo.

Ao longo do texto dessa dissertação, as certezas foram diminuindo progressivamente, dando lugar a dúvidas. Comparar o capítulo 2 com o capítulo 4 mostra claramente que no último, foram tratados

assuntos ainda mal estabelecidos em seus detalhes. Aqui, pisa-se em solo escorregadio e pouco explorado. Isso, por outro lado, significa que há diversas possibilidades de trabalho futuro disponíveis.

Tais estudos são uma continuação natural desse trabalho, agora que os fundamentos estão estabelecidos. Um projeto de Doutorado nesse assunto deverá ser iniciado em Março de 2009, e de forma alguma haverá falta de tópicos a serem estudados. Uma grande medida de trabalho analítico e teórico ainda faz-se necessária.

Há alguns tópicos de especial urgência:

- Problemas de ajuste fino do acoplamento $\xi = 1/6$ (Em andamento).
- Tratamento metódico e adequado das flutuações geradas por campos vetoriais.
- Modelos que gerem a possível anisotropia observada no Universo.
- Campos vetoriais como Energia Escura.
- Restringir modelos vetoriais utilizando outros conjuntos de dados ou fenômenos ainda não tratados.
- Esgotar a fenomenologia possível para campos vetoriais.

Esses são alguns exemplos do que pode ser realizado.

Até a finalização dessa dissertação, o estudo detalhado das equações obtidas para um campo vetorial com potencial e acoplamento qualquer com a gravidade não pode ser finalizado. Tal análise deverá estar pronta em um curto espaço de tempo. Portanto, ainda não se pode afirmar até que ponto a seleção de um acoplamento específico no modelo de Golovnev, Mukhanov e Vanchurin [56], que chamou tanto a atenção no ano de 2008, é natural ou é mais uma forma oculta de ajuste fino de parâmetros.

Referências

- [1] http://www.rochesterastronomy.org/SNIMAGES/best_img.html .
- [2] <http://www.supernovae.net/sn2001/n3987s16.gif> .
- [3] <http://www.aao.gov.au/images/captions/aat017.html> .
- [4] Tegmark et al. , “Cosmological Parameters from SDSS and WMAP”, *Phys. Rev.* **D69** 103501 (2004).
- [5] Komatsu et al. , “Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation”, arXiv:0803.0547v2 [astro-ph] (2008).
- [6] Página oficial do experimento LIGO: <http://www.ligo.org/> .
- [7] Página oficial do experimento LISA: <http://lisa.jpl.nasa.gov/> .
- [8] Página oficial do experimento WMAP: <http://map.gsfc.nasa.gov/> .
- [9] Smoot G. F. , “COBE Observations and Results”, *AIP Conference Proceedings* **476** 1 (1999).
- [10] Spergel et al. , “First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters”, *Astrophys. J. Suppl.* **148** 175 (2003).
- [11] Peiris et al. , “First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for inflation”, *Astrophys. J. Suppl.* **148** 213 (2003).
- [12] Spergel et al. , “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Observations: Implications for Cosmology”, *Astrophys. J. Suppl.* **170** 377 (2007).
- [13] Colless, M. M. et al. , “First results from the 2dF galaxy redshift survey”, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **A357** 105 (2004).
- [14] Adelman-McCarthy, J.K. et al. , “ The Sixth Data Release of the Sloan Digital Sky Survey”, *ApJS* **175** 297 (2008).
- [15] Percival, W. J. et al. , “Measuring the Baryon Acoustic Oscillation Scale using the SDSS and 2dFGRS”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **381** 1053 (2007).
- [16] Página oficial do experimento SDSS: <http://www.sdss.org/> .
- [17] Perlmutter et al. , “Measurements of Ω and λ from 42 High-Redshift Supernovae”, *Astrophys. J.* **517** 565 (1999).

- [18] Riess et al. , “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”, *Astron. J.* **116** 1009 (1998).
- [19] Kowalsky, M. et al. , “Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets ”, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **A357** 105 (2004).
- [20] Weinberg, D. H. et al. , “The Lyman α Forest as a Cosmological Tool”, *AIP Conf.Proc.* **666** 157 (2003).
- [21] Blandford, R. D. ; Narayan, R. , “Cosmological Applications of Gravitational Lensing”, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **30** 311 (1992).
- [22] Misner, C. W. ; Thorne, K. S.; Wheeler J. A. , “Gravitation”, W. H. Freeman and Company (1993).
- [23] Carroll, S. M. , “Spacetime and Geometry” , Addison Wesley (2004).
- [24] Weinberg, S. , “Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity”, John Wiley & Sons (1972).
- [25] Wald, R. M. , “General Relativity”, The University of Chicago Press (1984).
- [26] Mukhanov, V. , “Physical Foundations of Cosmology” , Cambridge University Press (2005).
- [27] Dodelson, S. , “Modern Cosmology” , Academic Press (2003).
- [28] Liddle, A. R. ; Lyth, D. H. , “Cosmological Inflation and Large Scale Structure”, Cambridge University Press (2000).
- [29] Rubin, V. , “Dark Matter in the Universe”, *Scientific American*, (1998).
- [30] Bahcall, J. et al , “Jerusalem Winter School for Theoretical Physics: Dark Matter in the Universe”, World Scientific Publishing Company (2004).
- [31] Milgrom, M. , “A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis”, *Astroph. J.* **270** 365 (1983).
- [32] Bekenstein, J. D. , “The modified Newtonian dynamics - MOND and its implications for new physics”, [astro-ph/0701848](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0701848) (2007).
- [33] Peebles, P. J. E. ; Ratra, B. , “The Cosmological Constant and Dark Energy”, *Rev. Mod. Phys.* **75** 559 (2003).
- [34] Kamenshchik, A. ; Moschella, U. ; Pasquier, V. , “An alternative to quintessence”, *Phys. Lett.* **B511** 265 (2001).

- [35] Bento, M. C. ; Bertolami, O. ; Sen, A. A. , “Generalized Chaplygin Gas, Accelerated Expansion and Dark Energy-Matter Unification”, *Phys. Rev.* **D66** 043507 (2002).
- [36] Copeland, E. J. ; Sami, M. ; Tsujikawa, S. , “Dynamics of Dark Energy”, *Int. J. Mod. Phys.* **D15** 1753 (2006).
- [37] Davis, T. M. ; Lineweaver, C. H. , “Expanding Confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe”, *Astronomical Society of Australia* **21** 97 (2003).
- [38] Guth, A. , “Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems”, *Phys. Rev.* **D23** 347 (1981).
- [39] Linde, A. , “Eternal extended inflation and graceful exit from old inflation without Jordan-Brans-Dicke”, *Phys. Lett.* **B249** 18 (1990).
- [40] Linde, A. , “Hybrid Inflation”, *Phys. Rev.* **D49** 748 (1994).
- [41] Saa, A. ; Gunzig, E. ; Brenig, L. ; Faraoni, V. ; Rocha Filho, T. M. ; Figueiredo, A. , “Superinflation, quintessence, and the avoidance of the initial singularity”, *Int. J. Theor. Phys.* **40** 2295 (2001).
- [42] Kofman, L. ; Mukohyama, S. , “Rapid Roll Inflation With Conformal Coupling”, *Phys Rev* **D77** 043519 (2008).
- [43] Kobayashi, A. ; Mukohyama, S. , “Conformal Inflation, Modulated Reheating, and WMAP5”, *arXiv:0810.0810[hep-th]* (2008).
- [44] Albrecht, A. ; Steinhardt, P. J. , “Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking”, *Phys. Rev. Lett.* **48** 1220 (1982).
- [45] Linde, A. , “A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems”, *Phys. Lett.* **B108** 389 (1982).
- [46] Linde, A. , “Chaotic Inflation”, *Phys. Lett.* **B129** 177 (1983).
- [47] Salopek, D. S. ; Bond, J. R. , “Nonlinear evolution of long-wavelength metric fluctuations in inflationary models”, *Phys. Rev* **D42** 3936 (1990).
- [48] Lucchin, F. ; Matarrese, S. , “Power Law Inflation”, *Phys. Rev* **D32** 1316 (1985).
- [49] Barrow, A. , “Graduated Inflationary Universes”, *Phys. Lett.* **B235** 40 (1990).
- [50] Birrell, N. D. ; Davies, P. C. W. , “Quantum Fields in Curved Space”, Cambridge University Press (1989).

- [51] Fulling, S. A. , “Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time”, Cambridge University Press (1989).
- [52] Itzykson, C. ; Zuber, J. B. , “Quantum Field Theory”, McGraw-Hill (1980).
- [53] Kofman, L. ; Linde, A. ; Starobinsky, A. A., “Towards the Theory of Reheating after Inflation”, Phys. Rev. **D56** 3258 (1997).
- [54] Página oficial do experimento LHC: <http://lhc.web.cern.ch/lhc/> .
- [55] Ford, L. H. , “Inflation driven by a vector field”, Phys. Rev. **D40** 967 (1989).
- [56] Golovnev, A. ; Mukhanov, V. ; Vanchurin, V. , “Vector Inflation”, JCAP 0806:009 (2008).
- [57] Jiménez, J. B. ; Maroto, A. L. , “Cosmological Electromagnetic Fields and Dark Energy” , astro-ph/08110566 (2008).
- [58] Armendáriz-Picón, C. , “Could dark energy be vector-like?” , JCAP 0407:007 (2004).
- [59] Hansen, F. K. ; Banday, A. J. ; Górski, K. M. ; Eriksen, H. K. , “Power Asymmetry in Cosmic Microwave Background Fluctuations from Full Sky to Sub-degree Scales: Is the Universe Isotropic?” , arXiv:0812.3795v1[astro-ph] (2008)
- [60] Koivisto, T. ; Mota, D. F. , “Vector Field Models of Inflation and Dark Energy”, JCAP 0808:021 (2008).
- [61] Kanno, S. ; Kimura, M. ; Soda, J. ; Yokoyama, S. , “Anisotropic Inflation from Vector Impurity” , JCAP 0808:034 (2008).
- [62] Himmetoglu, B. ; Contaldi, C. R. ; Peloso, M. , “Instability of Anisotropic Cosmological Solutions Supported by Vector Fields” , astro-ph/0809.2779v1 (2008).
- [63] Böhmer, C. G. ; Harko, T. , “Dark Energy as a Massive Vector Field” , The European Physical Journal, **C50** 423 (2007).
- [64] Jiménez, J. B. ; Maroto, A. L. , “Viability of Vector-Tensor theories of Gravity” , astro-ph/08110784 (2008).
- [65] Chiba, T. , “Initial Conditions for Vector Inflation” , JCAP 0808:004 (2008).
- [66] Golovnev, A. ; Mukhanov, V. ; Vanchurin, V. , “Gravitational Waves in Vector Inflation”, JCAP 0811:018 (2008).
- [67] Dimopoulos, D. ; Karciuskas, M. , “Non-minimally Coupled Vector Curvaton” , JHEP **07** 119 (2008).

-
- [68] Membiela, A. ; Bellini, M. , “Dark Energy from Gravitoelectromagnetic Inflation?” , Il Nuovo Cimento, **B123** 241 (2008).
- [69] Jiménez, J. B. ; Maroto, A. L. , “A Cosmic Vector for Dark Energy” , Phys. Rev. **D78** 063005 (2008).
- [70] Jiménez, J. B. ; Maroto, A. L. , “Avoiding the Dark Energy Coincidence Problem with a Cosmic Vector” , astro-ph/08121970 (2008).
- [71] Lewis, C. M. , “Vector inflation and vortices” , Phys. Rev. **D44** 1661 (1991).
- [72] Dimopoulos, D. ; Lyth, D. H. ; Yeinzon, R. , “Statistical anisotropy of the curvature perturbation from vector field perturbations” , astro-ph/0809.1055v3 (2008).
- [73] Koh, S. ; Hu, B. , “Timelike Vector Field Dynamics in the Early Universe” , hep-th/0901.0429v3 (2009).