

Pedro Simoni Pasquini

Fenomenologia em modelos com dimensões extras

campinas,

2013



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física “Gleb Wataghin”

Pedro Simoni Pasquini

Fenomenologia em Modelos com Dimensões Extras

Orientador: **Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção de Título de Mestre em Física.

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Pedro Simoni Pasquini e orientada pelo Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres.

A handwritten signature in blue ink is positioned above a horizontal line. The signature is stylized and appears to be the initials "O. L. G. P." followed by a flourish.

Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Valkíria Succi Vicente - CRB 8/5398

P265f Pasquini, Pedro Simoni, 1988-
Fenomenologia em modelos com dimensões extras / Pedro Simoni Pasquini. –
Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Orlando Luis Goulart Peres.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Física Gleb Wataghin.

1. Fenomenologia de neutrinos. 2. Massa de neutrinos. 3. Supersimetria. 4.
Dimensões extras. 5. Extensões do modelo padrão. I. Peres, Orlando Luis
Goulart, 1969-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb
Wataghin. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Phenomenology in models with extra dimensions

Palavras-chave em inglês:

Neutrino phenomenology

Neutrino mass

Supersymmetry

Extra dimensional models

Standard model extension

Área de concentração: Física

Titulação: Mestre em Física

Banca examinadora:

Orlando Luis Goulart Peres [Orientador]

Vicente Pleitez

Marcelo Moraes Guzzo

Data de defesa: 28-06-2013

Programa de Pós-Graduação: Física

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE PEDRO SIMONI PASQUINI – RA 074306 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 28 / 06 / 2013.

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres
Orientador do Candidato - DRCC/IFGWUNICAMP



Prof. Dr. Vicente Pleitez
IAT/UNESP



Prof. Dr. Marcela Moraes Guzzo
DRCC/IFGWUNICAMP

Agradecimentos

Um trabalho bem feito só pode ser realizado com ajuda, mesmo que indireta, de muitas pessoas. Podem ser pequenas coisas, desde um sorriso até o auxílio com coisas imprescindíveis. Todos que participaram da minha vida tiveram contribuições para a formação da pessoa que sou hoje e, conseqüentemente, da realização dessa tese.

Em especial cabe realizar alguns agradecimentos para pessoas e entidades sem as quais a realização do trabalho não seria possível. Primeiramente aos meus pais, Isabela C. Simoni e Marco A. P. Pasquini, que me criaram e educaram durante muitos anos para que eu pudesse dar esse pequeno passo rumo a minha carreira. à Minha irmã, que me aturou todos esses anos. Aos amigos e namorada que sempre estiveram ao meu lado e mesmo aqueles que não puderam estar presentes de corpo, mas sempre na torcida. Evitarei nomes, mas tenho certeza de que eles sabem a que falo.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Orlando G. Peres, por me guiar, orientar e confiar em minhas mãos um trabalho de mestrado, ao grupo GEFAN por auxiliar em discussões e quaisquer dúvidas que tive, aos professores da minha graduação e pós-graduação pela paciência e empenho.

Agradeço também à Unicamp pela oportunidade e ambiente de trabalho, bem como a todos os funcionarios que permitiram o seu bom funcionamento e me auxiliaram em qualque dificuldade.

Às agencias de fomento que me concederam bolsa, acreditando no meu potencial científico, CNPQ, pelo primeiro ano de bolsa e à FAPESP, que concedeu o processo 2011/15823-7 no segundo ano de bolsa de mestrado.

Abstract

In spite of the great success reached by the Standard Model (SM) of particle physics, there are some puzzles that seems as a new physics at the $\sim \text{TeV}$ scale, such as the origin of neutrino mass and neutrino oscillations. The framework for dealing with those effects are the interpretation of the SM as an effective theory valid at maximum energy $E \approx \Lambda$, where $\Lambda \sim \text{TeV}$. In this work we study the evolution of neutrino masses and their mixing angles, which are supposed to be generated via the 5-dimensional Weinberg operator as a consequence of the see-saw mechanism. The studied models are: (1) A minimal extension of the standard model with three heavy sterile neutrinos, (2) Minimal Supersymmetric Standar Model, (3) Minimal Unified Extra Dimensions in $5D$. We show that the running of the mixing are very sutil in the first two models, less then 10% for θ_{12} , and a bit bigger, of order of 10%, also θ_{12} , in a power law growth with energy, as expected by the effectiviness nature of the model. The neutrino mass square diference tend to decrease, but not enough to reach a equality of masses in some energy scale near $\sim \text{TeV}$.

Resumo

Apesar do grande sucesso alcançado pela teoria do modelo padrão baseada nas simetrias $SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U(1)$, ainda existem alguns desafios a serem conquistados. Uma maneira direta de resolver os problemas é interpretar o modelo padrão (SM) como um modelo efetivo cuja validade chega até uma escala de energia $E \approx \Lambda$, na qual ele deixa de ser válido. Suspeita-se de que $\Lambda \sim \text{TeV}$, e poderá ser observada nova física com as análises do Large Hadron Collider (LHC). No sentido de teoria efetiva do SM, é possível explicar a origem da oscilação de neutrinos[2] via mecanismo de Higgs, combinado com o modelo *See-Saw*[1]. Esse mecanismo produz um operador 5-dimensional renormalizável que gera os ângulos de mistura dos neutrinos. Esse trabalho faz um estudo sobre a evolução dos ângulos de mistura dos neutrinos com a energia, via equações do grupo de renormalização. Comparando o modelo padrão com sua possível extensão, o modelo supersimétrico e modelos com uma dimensão espacial extra. A evolução dos ângulos de mistura é bem sutil mesmo para altas energias na ordem de 14TeV , $\sim 2.5\%$ para os modelos padrão e supersimétrico, com evolução com a escala na forma logarítmica e, um pouco mais acentuada, $\sim 15\%$ para o modelos com dimensões extras, cujo resultado esperado pela dependência quadrática na escala de energia problema. A análise foi feita para alguns valores nos raios das dimensões extras, e foi visto, como o esperado, que quanto menor o raio, menor é a mudança visível a baixas energias. Tais resultados podem ajudar na seleção de modelos, entretanto a variação no ângulo de mistura não é observável fora dos erros experimentais atuais- de medições já realizadas sobre oscilação de neutrinos. A variação entre os modelos é portanto, leve, de forma que não é possível verificá-la com os dados atuais.

Conteúdo

Agradecimentos	vi
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Figuras	xiv
Breve Nota Sobre a Notação utilizada	xvi
1. Introdução	1
2. Princípios Básicos	2
2.1 Teoria Clássica	2
2.1.1 Leis de Conservação	3
2.1.2 Equações de Hamilton-Jacob	5
2.1.3 Problema da Causalidade e Índícios da Mecânica Quântica	6
2.2 Mecânica Quântica	6
2.2.1 Postulados	7
2.2.2 Quantização Canônica	10
2.2.3 Translação Espacial	12
3. Teoria Quântica de Campos	13
3.1 Quantização Canônica	13
3.1.1 Oscilador Harmônico	13
3.1.1.1 A Segunda Quantização	15
3.1.1.2 Interações	18
3.1.2 Integrais de Caminho	22
3.1.2.1 Quantização	22
3.1.2.2 Grandezas Físicas	24
3.1.2.3 Quantização de Campos Fermiônicos	26
4. Lagrangeano	27
4.1 Introdução	27
4.2 O Grupo de Poincaré	27
4.2.1 Definição	28
4.2.2 Representações	30
4.2.3 Quantização de Campos Fermiônicos	33
4.2.4 Interações Fermiônicas	35
4.2.4.1 Campos de Gauge	36
4.2.4.2 Quantização dos Campos de Gauge	38
4.2.4.3 Regras de Feynman da QED	40

5. Renormalização	42
5.1 Introdução à Renormalização	42
5.1.1 Renormalização na Eletrodinâmica Quântica (QED)	43
5.1.2 Teorias Renormalizáveis	46
5.1.3 Renormalização da Teorias de Gauge e do Acoplamento de Yukawa	47
5.1.4 Equações do Grupo de Renormalização	48
5.1.4.1 Renormalização da QED	48
5.1.4.2 Renormalização Através de Contra termos	50
5.1.4.3 Equações do Grupo de Renormalização	51
5.2 O Modelo Padrão	53
5.2.1 O Problema das Massas	55
5.3 Quebra Espontânea de Simetria	56
5.3.1 Quebra de Simetria no Formalismo Lagrangeano	56
5.3.2 Boson de Goldstone	58
5.3.3 Quebra Espontânea de Simetria no Modelo Padrão	59
5.4 A Lagrangeana do Modelo Padrão	60
5.4.1 Unificação Eletrofraca	60
5.4.2 Geração de Massa para férmions	63
6. Supersimetria	65
6.1 Modelo Supersimétrico	65
6.1.1 Quantização da Gravidade	65
6.1.2 O Problema da Hierarquia	65
6.1.3 Matéria Escura	66
6.1.4 Oscilação de Neutrinos	67
6.2 SuperSimetria	67
6.2.1 Simetrias Tradicionais	68
6.2.2 Unificando Simetrias	68
6.2.3 O Grupo Supersimétrico	69
6.2.3.1 Uma Abordagem Intuitiva	69
6.2.3.2 Álgebra	70
6.2.4 Modelo Supersimétrico	72
6.2.4.1 Representações Irredutíveis	73
6.2.4.2 Lagrangeanas Invariantes	74
6.2.5 Teorias de Gauge Supersimétricas	77
6.2.5.1 Gauge de Wess-Zumino	78
6.2.5.2 Tensor de Energia-Momento dos Campos de Gauge	79
6.2.5.3 Lagrangeana Final	81

6.3	Quebra de Supersimetria	81
6.3.1	Espectro de Massa	83
6.3.1.1	O Modelo de O’Raifeartaigh	83
6.3.1.2	Regra de Soma das Massas	85
6.3.2	O Modelo Supersimétrico Mínimo	86
6.3.2.1	Massa do Modelo Padrão	86
6.3.2.2	Massa das Superpartículas	87
6.3.3	Resolução dos Problemas	88
6.3.3.1	Hierarquia	88
6.3.3.2	Oscilação de Neutrinos	89
7.	Método de Análise	90
7.1	Análise dos modelos	90
7.1.1	Mecanismo SeeSaw	90
7.1.1.1	Método Formal	91
7.1.2	Equações do Grupo de Renormalização	92
7.1.2.1	Regularização dimensional	93
7.1.2.2	A função Beta da Matriz de acoplamento	95
7.1.2.3	As Constantes de Acoplamento	96
7.1.3	Resultados Finais	97
7.1.3.1	Parâmetros Iniciais a 91GeV	98
7.1.3.2	RGE para Matrizes de Rotação	98
7.1.3.3	Valores iniciais a 2TeV	100
7.1.3.4	Ângulos de Mistura	101
7.2	Conclusão da Análise	105
8.	Dimensões Extras	108
8.1	Teoria de Campos em D-dimensões	108
8.2	Torres de Kaluza-Klein	110
8.2.1	Espectro de Massa	110
8.3	Renormalizabilidade em D Dimensões	112
8.3.1	Equações de Renormalização em D Dimensões	112
8.3.2	O Modelo Extradimensional	113
8.4	Resultados	114
8.5	Conclusão dos Resultados	115
9.	Conclusão	120
	Literatura Citada	121

APÊNDICES

A. Cálculo da Renormalização	123
B. Cálculo das Integrais em D Dimensões	130
B.1 Correções Loops de Bosons de Gauge	130

Lista de Tabelas

5.1	Grau da Renormalização da teoria, com férmions ψ , escalares ϕ e bosons de Gauge A_μ	47
5.2	Notação das Partículas do SM	61
5.3	Léptons	61
5.4	Parâmetros dos quarks, mass renormalization scale ($\mu = 2GeV$)	61
5.5	Parâmetros adicionais	61
7.1	Valores Iniciais	99
7.2	Valores da constante B_U e T que aparecem nas equações do grupo de renormalização dos neutrinos para o modelo padrão e para o modelo supersimétrico mínimo.	100
7.3	Valores dos parâmetros da teoria após rodar as equações de renormalização do modelo padrão até 2TeV, ie, valores iniciais no teste dos modelos. $\nu = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ é a translação do campo de Higgs para seu estado de vácuo.	103
8.1	Dimensões do Campo	112

Lista de Figuras

3.1	Criação de Estados via operadores escada	18
3.2	Realização gráfica da Eq.(3.31)	21
3.3	Criação de Estados via operadores escada	22
4.1	Funções da QED.	41
5.1	Gráfico de Feynman da QED	43
5.2	correções ao gráfico da fig.5.1 em ordem quadrática	44
5.3	Diagramas divergentes da QED, em ordem: Auto-interação do fóton, Auto-interação do elétron e Correção de Vértice.	48
5.4	equação de correção do propagador em primeira ordem	49
5.5	Running da constante de acoplamento eletromagnética	53
5.6	Running da constante de acoplamento da força forte	54
5.7	Interações do Modelo Padrão	62
6.1	Seção do potencial V_X para $X_I = 0$, para $m^2/2\mu = 1$	84
7.1	Auto energia do lépton.	93
7.2	Auto energia do Higgs.	93
7.3	vertice efetivo da matriz Kappa.	94
7.4	Loops de Primeira ordem na regularização da matriz κ	95
7.5	Constantes de Acoplamento no SM, $g_1 = Vermelho$ correspondente a $U(1)$, $g_2 = verde$ correspondente a $SU(2)$ e $g_3 = azul$ correspondente a $SU(3)$	97
7.6	Constantes de Acoplamento no MSSM, $g_1 = Vermelho$ correspondente a $U(1)$, $g_2 = verde$ correspondente a $SU(2)$ e $g_3 = azul$ correspondente a $SU(3)$	98
7.7	Ângulos de Mistura no SM, $\theta_{12} = Vermelho$, $\theta_{13} = Marrom$, $\theta_{23} = Azul$. .	101
7.8	Variação da diferença de massa, $\Delta m_{12}^2 = vermelho$ e $\Delta m_{32}^2 = azul$, para hierarquia normal no SM.	102
7.9	Ângulos de Mistura no MSSM, $\theta_{12} = Vermelho$, $\theta_{13} = Marrom$, $\theta_{23} = Azul$.	104
7.10	Variação percentual do ângulo de mistura no SM $\Delta\theta_{12} = Vermelho$, $\Delta\theta_{13} = Marrom$, $\Delta\theta_{23} = Azul$	105

7.11	variação percentual do ângulo de mistura no MSSM $\Delta\theta_{12} =$ Vermelho, $\Delta\theta_{13} =$ Marrom, $\Delta\theta_{23} =$ Azul, em radianos.	106
7.12	Variação da diferença de massa, $\Delta m_{12}^2 =$ Vermelho e $\Delta m_{32}^2 =$ Azul, para hierarquia normal no MSSM.	107
8.1	Ângulos de Mistura no SM em $5D$, $\theta_{12} =$ Vermelho, $\theta_{13} =$ Marrom, $\theta_{23} =$ Azul, raio da dimensão de $R = 1\text{TeV}$	116
8.2	Desvio relativo no SM em $5D$, $\Delta\theta_{12} =$ Vermelho, $\Delta\theta_{13} =$ Marrom, $\Delta\theta_{23} =$ Azul, raio da dimensão de $R = 1\text{TeV}$	117
8.3	Variação da diferença de massa, $\Delta m_{12}^2 =$ Vermelho e $\Delta m_{32}^2 =$ azul, para hierarquia normal no SM em $5D$, com raio da dimensão de $R = 1\text{TeV}$	118
8.4	Variação da diferença de massa Δm_{12}^2 no SM em $5D$, para diversos raios, $R = 0.5\text{TeV} =$ Vermelho, $R = 1\text{TeV} =$ Marrom, $R = 2\text{TeV} =$ Azul, Modelo Padrão em Preto.	118
8.5	Ângulo de mistura θ_{12} no SM em $5D$ para diversos raios, $R = 0.5\text{TeV} =$ Marrom, $R = 1\text{TeV} =$ Vermelho, $R = 2\text{TeV} =$ Azul.	119
A.1	equação de correção do propagador em primeira ordem	128

Breve Nota Sobre a Notação utilizada

Notação

- 1 A regra de soma de Einstein estará implícita a menos que seja dito o contrário.
- 2 Os índices serão utilizados de forma a manter um padrão, índices romanos minúsculos, i, j, k, a, b, c , denotarão índices espaciais, exemplo, $i = 1, 2, 3 \dots D$ onde D será usado sempre para denotar a dimensão do espaço. Índices romanos maiúsculos, $A, B, C \dots$ denotarão índices de simetrias de Gauge ou simetrias internas de um grupo, $A = 1, 2 \dots n$, onde n será usado sempre para denotar dimensão do grupo em questão. Por fim, índices gregos $\alpha, \beta \dots$ serão utilizados para denotar índices espinoriais, e correrão de acordo com a dimensionalidade do spin em questão, por exemplo, um espinor de dirac em 4 dimensões terá $\alpha = 1, 2, 3, 4$.
- 3 Por questões históricas, as letras gregas μ e ν serão usadas para denotar índices espaciais quadridimensionais quando não houver perigo de confusão.
- 4 Muitas vezes a generalização para espaços com D dimensões significará espaços da forma $N+1$ dimensão, onde a métrica é da forma $diag\{1, -1, -1 \dots -1\}$. Será mantida a notação $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \dots \partial_N)$ e as integrações, quando não denotadas, significam no espaço todo em todas as direções, $dk = d^D k$ ao passo que $d^N k$ significa nas dimensões espaciais.
- 5 A unidade de medida utilizada será sempre a unidade natural, $c = \hbar = G = k_B = 1$, onde há apenas dimensão de potencias de energia. Dessa forma, a unidade de grandezas físicas qualquer, F , serão sempre denotadas por colchetes, e.g. $[F]$ e, como representam sempre unidades de energia (ou equivalentemente massa), apenas a potencia é denotada, e.g. $[F] = m^x = x$. Em algumas partes do texto, $\hbar \neq 1$ e $c \neq 1$ poderão ser utilizadas para fins de expansão perturbativa.
- 6 A derivada parcial de uma função será denotada como $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f$ quando não houver chance de confusão, ou $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f$, caso contrário.
- 7 A notação de Feynman para multiplicação de matrizes gamma será adotada, $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu = \gamma_\mu A^\mu$.

Capítulo 1

Introdução

A supersimetria é um conceito criado para resolver o *problema da Hierarquia* [25], que consiste em um ajuste muito fino dos parâmetros de massa do boson de Higgs. Tal ajuste não é proibido, mas vai de encontro ao conceito de naturalidade da lagrangeana, já que o ajuste dos parâmetros deveriam ser da ordem de uma parte em 10^{26} , uma precisão muito grande para que seja apenas coincidência. Para que esse problema seja eliminado, uma nova simetria é imposta no modelo, cuja troca de bósons por férmions torna a lagrangeana invariante. Essa nova simetria protege a massa do Higgs e é chamada de supersimetria. Ao mesmo tempo que tal simetria retira o problema da hierarquia, ele introduz um espectro de partículas muito maior do que o espectro usual, de tal forma que suas partículas podem ser utilizadas para explicar a existência de matéria escura além de alguns mecanismos ainda em aberto, como mecanismo *see-saw*, utilizado para explicar a geração de massa para os neutrinos, onde a massa é interpretada como consequência de uma teoria efetiva. Dessa forma é possível calcular uma equação do grupo de renormalização sobre a matriz de mistura e obter a forma como os ângulos de mistura evoluem com a energia na qual o problema é tratado. Para entender como tais coisas são apresentadas e estudadas é necessário uma apresentação teórica, encontrada na seção de princípios básicos, mecânica quântica e teoria quântica de campos, enquanto que a análise encontra-se na seção 7.

Capítulo 2

Princípios Básicos

A revisão teórica a seguir introduz o conceito de lagrangeano e de ação de um sistema, mostrando como é possível obter as equações de movimento e as analogias entre a mecânica clássica e a mecânica quântica - necessárias para ter uma compreensão mais intuitiva das teorias.

2.1 Teoria Clássica

O modo de observar a natureza está restrito sempre ao ponto de vista de quem o observa e isso leva a uma visão parcial de um dado fenômeno estudado. É por esse fato que as equações físicas consideradas mais formais e belas são aquelas que não estão restritas à uma base e a um único sistema de coordenadas. Tal visão levou Einstein a propor que todas as equações devem estar presentes na forma covariante: um dos princípios da relatividade geral. O estudo da possibilidade de se escrever equações gerais sem relação a um ponto de vista específico, também levou ao surgimento da mecânica lagrangiana.

Em termos gerais, a lagrangeana de um sistema físico qualquer, pode ser escrita como,

$$L = L(q, \dot{q}; t) = T - U \quad (2.1)$$

Onde T é a energia cinética do sistema, e U é a energia potencial. As variáveis $q = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ são variáveis de um sistema de coordenadas qualquer.

A beleza dessa formulação da mecânica clássica provém de dois pontos fundamentais:

- Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton é um postulado, associado à Lagrangeana, que condensa o conhecimento cinemático e dinâmico, e gera uma abordagem mais prática e formal da mecânica. Ele estipula que qualquer movimento físico deve seguir a seguinte norma:

A ação, S de um sistema deve ser sempre um extremo. Onde ação é definida

como:

$$S = \int L(q, \dot{q}; t) dt \quad (2.2)$$

que leva às equações de Euler-Lagrange(EL) do movimento¹

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (2.3)$$

- A lagrangeana pode ser escrita em qualquer sistemas de coordenadas $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ em um espaço de n dimensões, correspondentes aos n graus de liberdade do sistema, sem qualquer alteração do princípio de Hamilton.

2.1.1 Leis de Conservação

Essa formulação livre de um sistema de coordenadas base, gera inumeros benefícios práticos e teóricos, sendo um dos principais a relação entre simetrias de uma dada lagrangeana implicando em leis de conservação. A prova do argumento surge do *Teorema de Noether*.

Definição: Uma transformação de coordenadas, é uma operação matemática, que muda um sistema de coordenadas $\{q_1, q_2, \dots, q_n, t\}$ para um novo sistema de coordenadas, $\{q'_1, q'_2, \dots, q'_n, t'\}$ qualquer. O caso geral de uma transformação infinitesimal pode ser denotado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q'_i(t') &= A_i^j q_j(t) + \delta q_i(t) \\ t' &= t + \delta t \end{aligned}$$

Definição: Dizemos que uma função $L(q, \dot{q}; t)$ é simétrica sob uma transformação de coordenadas², se

$$L'(q', \dot{q}'; t') = L(q, \dot{q}; t)$$

Teorema de Noether: Consideremos uma transformação de coordenadas atuando sobre a lagrangeana de um sistema,

¹onde a notação usada foi $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$

²Para o caso do princípio de Noether a formulação é um pouco mais geral. Espera-se que a ação S seja um escalar e, portanto, invariante por quaisquer transformações de sistemas de coordenadas. Nesse caso, como a ação está entrelaçada com a lagrangeana por uma integral por todo espaço, a lagrangeana não precisa ser completamente invariante, ela pode ser invariante por uma derivada total, onde espera-se que qualquer termo resultante se anule nos extremos de integração

$$q'_i(t') = A_i^j q_j(t) + \delta q_i(t)$$

$$t' = t + \delta t$$

onde, $\delta q = \epsilon f(q, \dot{q}, t)$ e $\delta t = \epsilon g(q, \dot{q}, t)$, com $\epsilon \ll 1$. Se a lagrangeana for simétrica em relação à transformação de coordenadas, então

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\delta q - \dot{q} \delta t) + L \delta t + \delta \omega \right] = 0 \quad (2.4)$$

A quantidade entre colchetes $J = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\delta q - \dot{q} \delta t) + L \delta t + \delta \omega$ é, portanto, conservada no tempo. Ou seja, é uma constante do movimento.

O conceito de minimização funcional e leis de conservação podem ser diretamente estendidos ao promover as coordenadas dependentes $q(t)$ para coordenadas independentes $t, x_1, x_2, \dots, x^n = x^0, x^1, \dots, x^n = x^\mu$ e tornar a lagrangeana funções de campos $\phi^a(x^\mu)$: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$ e assim a ação é definida como,

$$S = \int d^D x \mathcal{L} \quad (2.5)$$

onde $D = n + 1$. Na qual é possível impor dois tipos de transformações:

(1) *Transformações de coordenadas,*

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \quad (2.6)$$

As transformações de coordenadas do tipo $a^\mu = 0$ são tidas como rotações e boosts no espaço de coordenadas- em especial são as transformações de Lorentz que serão descritas posteriormente. Para $\Lambda_\nu^\mu = 0$ é possível introduzir o conceito do *tensor energia-momento*,

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi_a} \partial_\nu \phi_a - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu, \quad (2.7)$$

que é uma quantidade conservada para qualquer teoria onde há invariância por translação, ou seja $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$, que é a tradicional equação da continuidade. Essa equação pode ser interpretada também através de uma carga conservada, $Q_\nu = \int d^n x T_\nu^0$, $n = D - 1$, que através do teorema da divergência de Gauss aplicado à equação da continuidade resulta em $\partial_0 Q_\nu = \frac{d}{dt} Q_\nu = 0$.

(2) *Transformações internas,*

$$\phi'_a(x^\mu) = \phi_a(x^\mu) + \alpha \Delta \phi_a(x^\mu) \quad (2.8)$$

que geram também uma equação de continuidade e uma corrente conservada,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \Delta \phi_a - \mathcal{J}^\mu \quad (2.9)$$

onde \mathcal{J}^μ é uma derivada total a qual a lagrangeana pode mudar e $\partial_\mu J^\mu = 0$.

2.1.2 Equações de Hamilton-Jacob

Uma outra abordagem para o problema clássico de obter equações de movimento é a introdução da quantidade

$$H = \sum_i q_i(t) p_i(t) - L \quad (2.10)$$

onde H é chamado de Hamiltoniano do sistema e $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, $\dot{q} = \frac{dq_i}{dt}$, o momento canônico conjugado. Tal transformação é uma generalização da transformação de Legendre e com ela a minimização da ação é dada através de condições de contorno para os campos q_i e também para seu momento canônico p_i . A grande diferença dessa abordagem é que ela pode ser dada através de relações operatoriais chamadas *Parênteses de Poisson* que tornam a transição clássico/quântico mais intuitiva. Os parênteses de Poisson são definidos como³,

$$[A, B] = (\partial_{x_i} A)(\partial_{p_i} B) - (\partial_{x_i B})(\partial_{p_i} A) \quad (2.11)$$

E as equações de movimento se tornam,

$$\begin{aligned} \dot{q} &= [q, H] = \partial_p H \\ \dot{p} &= [p, H] = -\partial_q H \\ [q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0 \\ [q_i, p_j] &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Em especial, se uma quantidade é conservada $\dot{A} = [A, H] + \partial_t A = 0$. A terceira e quarta equação têm um significado especial: Uma pequena modificação em sua forma e uma reinterpretação de seu princípio gera a mecânica quântica. Em especial, se uma quantidade u não depende explicitamente do tempo, uma expansão em série de

³A descrição dada aqui será apenas para o caso inicial onde as variáveis são q_i e seu momento canônico $p_i = \partial_{\dot{q}_i} L$, mas pode ser estendido facilmente com as identificações $\phi_a \leftrightarrow q_i$ e $\pi_a \leftrightarrow p_i$ e $\delta_{ab} \leftrightarrow \delta^{(n)}(x^\mu - y^\mu)$

taylor é escrita na forma,

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{2} \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} t + \frac{1}{3} \left. \frac{d^2u}{dt^2} \right|_{t=0} t^2 + \dots =$$

$$u(0) + \frac{1}{2} [u(0), H] t + \frac{1}{3} t^2 [[u(0), H], H] + \dots = e^{[.,H]t} u(0) \quad (2.13)$$

que também possui uma forma extremamente similar à evolução temporal na mecânica quântica.

2.1.3 Problema da Causalidade e Indícios da Mecânica Quântica

O princípio de Hamilton e a minimização de funcional gera um paradoxo: Como os objetos sabem qual o caminho que extremiza a ação? Para tanto, o objeto deveria ter conhecimento em todos os caminhos e escolhido o mais curto deles, mas isso parece gerar um problema ainda maior, como seria possível obter o conhecimento de um ponto distante sem ao menos chegar nele? Isso violaria a causalidade. Uma maneira de pensar que levará direto à quantização por integrais de caminho é imaginar que, na verdade, a partícula passa por **todos** os caminhos possíveis e que o caminho que extremiza a ação tem uma importância tão grande que ofusca a visão para os caminhos diferentes. Uma maneira de formalizar o problema é pensar que a observação O do objeto é dada por uma quantidade relacionada com a ação de tal maneira que apenas o extremo da ação é importante. Pensando nisso, é possível utilizar, por exemplo, o lema de Riemann-Lebesgue e o método da fase estacionária e escrever

$$O \sim \int dx e^{iS[x]}, \quad (2.14)$$

assim, o mínimo da ação $S = \int dt L(x, \dot{x})$ tem uma contribuição muito importante, enquanto os pontos distantes do mínimo têm uma contribuição pequena, pois suas fases $iS[x]$ variam muito rapidamente e se cancelam. Essa formulação ainda é um pouco estranha: Como é possível passar por todos os caminhos ao mesmo tempo? Nessa linha de raciocínio surge a necessidade de ondas-partículas.

2.2 Mecânica Quântica

No final do século XIX, os cientistas da época acreditavam que o universo estava quase por completo explicado pela física. A evolução da mecânica newtoniana, para conceitos variacionais, e a introdução da mecânica estatística de Boltzman, pareciam

explicar quase tudo, a não ser por alguns experimentos, dentre eles, a radiação de corpo negro. Foi em 1900 que Max Planck propôs uma hipótese matemática para explicar os dados experimentais, a quantização, onde a energia só poderia ser absorvida e emitida em pacotes bem definidos.

Essa ideia de quantização evoluiu, cientistas como Einstein, Bohr, Schrödinger, Heisenberg dentre outros, começaram a ver o mundo de uma perspectiva completamente diferente das antigas leis de Newton, onde antes o mundo era algo regido pelo princípio determinístico, agora existiam incertezas e probabilidades, as partículas passaram a se comportar como ondas, e as ondas como partículas.

Schrödinger propôs que a física segue uma equação cuja função de onda que a soluciona é o objeto que contem o máximo de informação possível de obter de um sistema físico. A equação tem uma forma aparentemente simples, mas que gera grandes consequências

$$H\psi = -i\hbar \frac{d}{dt}\psi \quad (2.15)$$

Na discussão da seção 2.1.3 o objeto chamado de *Função de Onda* determina a probabilidade de observação da partícula no espaço entre $(x, x + dx)$, ou seja, a observação é $O \propto |\psi|^2$ e agora H é um operador que dá a evolução temporal do sistema de forma análoga a vista na Eq. (2.23).

2.2.1 Postulados

Os novos conceitos concebidos pela visão probabilística surgem através de uma série de postulados e foram criados para organizar idéias em poucas linhas para que fosse possível uma abordagem prática formal. Eles são equivalentes às três leis de Newton, e é de fundamental importância entender bem o significado de cada um deles e suas consequências[4].

1. O estado de um sistema físico, em um tempo t_0 é definido especificando um vetor $|\psi(t_0)\rangle$ pertencente ao espaço de Hilbert \mathcal{H}

Este postulado implica que toda a informação que se pode obter de um sistema está contida no vetor pertencente ao espaço de Hilbert. Esse vetor é equivalente à função de onda da partícula. Como o espaço de Hilbert é um espaço vetorial, o princípio da superposição é válido: uma combinação linear de estados é também um estado.

2. Toda quantidade física A , que pode ser medida, é descrita por um operador que age no espaço ε . Esse operador é chamado de observável.

A definição de observável é dada a seguir:

Seja um operador A com auto-valores contínuos ou discretos - os auto-valores discretos serão denotados a_n e os auto-vetores correspondentes, $|\phi_n^i\rangle$ onde $i = 1, 2, 3 \dots g_n$ com g_n o grau de degenerescência e $a(\nu)$ os auto-valores contínuos com seus auto-vetores correspondentes $|\phi_\nu\rangle$ - então, A é um observável se $A = A^+$ e

$$\sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |\phi_n^i\rangle\langle\phi_n^i| + \int d\nu |\phi_\nu\rangle\langle\phi_\nu| = I. \quad (2.16)$$

Esses dois primeiros postulados garantem a existência de quantidades físicas essenciais para entender algum sistema, e definem como essas quantidades devem ser, para que seja possível tratá-las de maneira como é descrita na mecânica quântica. Os observáveis de momento e posição são definidos como:

$$R|r\rangle = r|r\rangle \quad (2.17)$$

$$P|r\rangle = -i\hbar\nabla|r\rangle \quad (2.18)$$

onde $|r\rangle$ é um estado pertencente ao espaço de Hilbert, e é definido pela equação de auto-estados do operador R .

3. Os únicos resultados possíveis ao medir-se uma quantidade física A são os auto-valores do observável correspondente A .

Esse postulado dita as regras do que se é possível medir quando é feita uma medida. Pela definição, o observável é Hermitiano e, portanto, seus auto-valores são sempre reais. Se relaciona com a equivalência entre a medição e o ato de projetar um estado do sistema nas bases de auto-estados do observável.

4. Este postulado é dividido em duas partes, usando a notação descrita na definição de observáveis:

- Se os auto-valores são discretos, dado um estado normalizado $|\psi\rangle$ de um sistema físico, quando uma quantidade física A é medida, a probabilidade $P(a_n)$ de se obter o auto-valor a_n é dada por:

$$P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle \phi_n^i | \psi \rangle|^2 \quad (2.19)$$

onde $\langle a|b\rangle$ é o produto escalar entre dois vetores do espaço de Hilbert.

- Se os auto-valores são contínuos, dado um estado normalizado $|\psi\rangle$ de um sistema físico. Quando uma quantidade física A é medida, a probabilidade $P(\alpha)$ de se obter um resultado entre α e $\alpha + d\alpha$ é dada por

$$dP(\alpha) = \int |\langle \phi_\nu | \psi \rangle|^2 d\alpha \quad (2.20)$$

Esse postulado caracteriza o caráter probabilístico do sistema: quando uma quantidade física é medida, pode-se dizer apenas a probabilidade de obter algum resultado, e essa probabilidade está diretamente relacionada com o tamanho da projeção do estado físico em um dos auto-estados do observável a ser medido.

5. Se uma medida física é realizada, e o auto-valor a_n é obtido, o estado do sistema logo após a medida é uma projeção normalizada sobre um dos auto-estados do observável, isto é

$$\frac{\sum_{i=1}^{g_n} \langle \phi_n^i | \psi \rangle |\phi_n^i\rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^{g_n} |\langle \phi_n^i | \psi \rangle|^2}} \quad (2.21)$$

Esse postulado está relacionado com o fato de qualquer medida alterar o sistema. Quanto um observador faz uma medida, ele atua diretamente no estado, e muda-o, tornando-o não mais o estado original, mas um dos estados possíveis de serem medidos.

6. A evolução temporal do sistema, ou seja, do estado $|\psi(t)\rangle$, é governada pela equação de Schrödinger:

$$H|\psi(t)\rangle = -i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \quad (2.22)$$

Onde H é a Hamiltoniana do sistema e é um observável que está relacionado com a energia do sistema, e $|\langle \vec{r} | \psi \rangle|^2 = |\psi(\vec{r})|^2$ é a densidade de probabilidade

de encontrar o sistema em um dado estado.

2.2.2 Quantização Canônica

Embora a quantização venha para responder efeitos experimentais que a mecânica clássica não observa, ela precisa ainda seguir a mecânica clássica em algum limite a ser definido. Tal limite surge ao perceber que na mecânica quântica as variáveis do problema clássico p e q passam a ser operadores P e Q que atuam no sistema ψ , mas que de alguma forma precisam ser equivalentes aos seus análogos clássicos. Para entender como é feita a conexão clássica/quântica é preciso entender profundamente o que a Eq. (2.22) representa: Ela define como um estado evolui com o tempo e abre a possibilidade de existência de um operador que conecta o estado do sistema de um tempo t_0 para o tempo t : $|\psi(t_0)\rangle \xrightarrow{U(t,t_0)} |\psi(t)\rangle$. Para que haja consistência no método, isto é, a probabilidade se conserve, o operador U precisa ser *unitário*⁴. Como $|\psi(t)\rangle = U(t,t) |\psi(t)\rangle$, então $U(t,t) = \mathcal{I}$. Com tal operador, é possível jogar toda a dinâmica da equação de Schrödinger para fora da função de onda e colocá-la no operador U ,

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = H(t) U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

e a Eq.(2.22) se reduz a

$$\left[i\hbar \frac{d}{dt} - H(t) \right] U(t, t_0) = 0 \quad (2.23)$$

com a condição $U(t_0, t_0) = \mathcal{I}$ que tem solução formal⁵

$$U(t, t_0) = \mathcal{IT} \left\{ e^{-i \int_{t_0}^t H(t) dt} \right\} \quad (2.24)$$

Aqui já aparece a semelhança entre a mecânica clássica e a quântica. A evolução de um estado ψ é dada por um operador $\sim e^{iHt}$.

A Eq.(2.23) junto com a Eq.(2.22) mostram que existem várias maneiras (representações) de abordar a mecânica quântica. Em especial estão as representações de Schrödinger que descreve a mecânica quântica através da evolução temporal do estados e a *representação de Heisenberg* que transfere o problema para a evolução dos

⁴ Isso pode ser visto facilmente impondo que $1 = |\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle|^2 = |\langle \psi(t_0) | U^\dagger U | \psi(t_0) \rangle|^2$ e o estado $|\psi\rangle$ é definido a menos de uma fase global.

⁵ $T\{\}$ representa ordenamento temporal, onde operadores com tempos menores devem ser escritos à direita.

operadores. Para isso, é introduzido o conceito de *valor médio* de um operador A ,

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \int d^3 |\psi(x, t)|^2 A(x) \quad (2.25)$$

que é definido baseando-se no conceito de densidade de probabilidade adquirido pela quantidade $|\psi|^2$. Pode-se escrever o valor médio como $\langle \psi(t) | A_s | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | A_H(t) | \psi(t_0) \rangle$ onde o subscrito H e S significam as representações de Heisenberg e Schrödinger, respectivamente. Com isso,

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \left[\frac{d}{dt} \langle \psi | \right] A | \psi \rangle + \langle \psi | A \left[\frac{d}{dt} | \psi \rangle \right] + \langle \psi | \frac{\partial A}{\partial t} | \psi \rangle,$$

utilizando a equação de Schrödinger, fica

$$\frac{d\langle A_H \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [A_H - H A_H] | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial A_H}{\partial t} | \psi \rangle$$

Definindo o comutador de dois operadores A e B como sendo,

$$[A, B] = \langle \psi | [AB - BA] | \psi \rangle \quad (2.26)$$

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A, H] + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \quad (2.27)$$

Em especial, para um operador Q e P independentes explicitamente do tempo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Q \rangle &= \frac{1}{i\hbar} [Q, H] \\ \frac{d}{dt} \langle P \rangle &= \frac{1}{i\hbar} [P, H] \end{aligned} \quad (2.28)$$

e aqui novamente fica evidente a semelhança com a mecânica clássica.

Para montar o *Princípio de Equivalência* primeiro nota-se uma propriedade operacional, se $[A, B] = \alpha = cte$

$$[A, f(B)] = \alpha \frac{\partial f(B)}{\partial B} \quad (2.29)$$

Impõem-se então que a constante $\hbar \ll l$, onde l é algum parâmetro característico do sistema e para que as Eqs. (2.12) e (2.28) façam sentido nesse limite, $[X, P_x] = i\hbar$. Assim, os postulados anteriores podem ser substituídos por,

1 Seja H um operador hermitiano idêntico em forma ao operador clássico, mas substituindo os momentos e coordenadas por seus operadores.

2 São válidas as relações

$$[X_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk} \quad (2.30)$$

que descrevem o Hamiltoniano e são denominados X_i e P_i operadores de posição e momento, respectivamente.

3 Os operadores são descritos pela Eq. (2.27)

2.2.3 Translação Espacial

Dada a quantização canônica e os operadores canonicamente conjugados, X_n e P_n , pode-se associar uma base de auto estados tal que,

$$\begin{aligned} X_n |\vec{r}\rangle &= x_n |\vec{r}\rangle \\ P_n |\vec{p}\rangle &= p_n |\vec{p}\rangle \end{aligned} \quad (2.31)$$

Assim, a função de onda que descreve a posição do sistema pode ser descrita por

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \langle \vec{r} | \psi \rangle \\ \psi(p) &= \langle \vec{p} | \psi \rangle = \int \frac{d^n x}{(2\pi)^{n/2}} \psi(x) e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

E, portanto, $P^\mu \psi(x) = -i\hbar \partial^\mu \psi(x)$. Como uma translação infinitesimal é da forma $\psi(x_0 + \delta a) \approx \psi(x_0) + \delta a^\mu \partial_\mu \psi(x_0) = [1 + i\delta a^\mu P_n] \psi(x_0)$, pode-se definir as transformações de translação espacial finitas através do operador $e^{ia^\mu P_n}$, onde agora identifica-se P^μ como o gerador das transformações de translação. Em especial, utilizando-se do operador translação, pode-se escrever,

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= e^{-itH} e^{ix^n P_n} \psi(0) = e^{ix^\mu P_\mu} \psi(0) \\ \hat{\phi}(x, t; y, t') &= e^{-itH} e^{ix^n P_n} \hat{\phi}(0) e^{-iy^n P_n} e^{+it'H} = e^{ix^\mu P_\mu} \hat{\phi}(0) e^{-iy^\mu P_\mu} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Onde $\hat{\phi}$ é um operador qualquer e $P_\mu = (P_0, P_1, \dots, P_n) = (H, P_1, \dots, P_n)$ ⁶.

⁶A última relação é obtida para $[H, P_j] = 0$ que é o caso para a teoria de campos.

Capítulo 3

Teoria Quântica de Campos

Aqui será apresentada uma breve revisão teórica sobre os conceitos básicos de teoria quântica de campos necessários para a análise dos modelos teóricos e os conceitos envolvidos em sua construção.

3.1 Quantização Canônica

A mecânica quântica representa um dos maiores sucessos da humanidade em descrever aspectos físicos a baixas energias e pequenas distâncias, mas que não consegue lidar com a criação e destruição de partículas- essencial para analisar colisões a altas energias e processos termodinâmicos complexos. Para completar a descrição dos fenômenos naturais, foi criada uma leve reformulação conceitual da mecânica quântica, que permite englobar em seu arcabouço teórico a descrição de tais processos, chamada *Teoria Quântica de Campos* que promove a função de onda ψ que descreve o sistema para o estatus de *operador* $\hat{\phi}$ que atua em um determinado espaço de Hilbert próprio e permite de forma natural descrever como é feita a criação de partículas. O valor médio dos novos campos são agora vistos como funções de onda de tal forma a fornecer de maneira direta a conexão entre os dois ramos.

3.1.1 Oscilador Harmônico

Existem duas abordagens para a conceitualização da teoria de campos. Uma delas, que será tratada nessa sessão, é a quantização canônica que traz uma abordagem mais intuitiva como uma extensão direta da mecânica quântica. Nesse sentido ela é essencialmente a mesma mecânica quântica e, portanto, seus postulados iniciais são os mesmos, embora os estados permitidos do sistema são restritos ao *espaço de Fock*. A introdução do espaço de Fock se torna natural na análise do oscilador harmônico, cuja Hamiltoniana é dada por,

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}X^2 \tag{3.1}$$

No qual define-se dois operadores não-hermitiano a e a^\dagger por,

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(X + i \frac{P}{m\omega} \right). \quad (3.2)$$

Com isso o Hamiltoniano pode ser escrito como,

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (3.3)$$

A perda de operadores hermitiano é suplantada por um benefício muito maior, a álgebra satisfeita por a ,

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (3.4)$$

que pode ser obtida da imposição $[X, P] = i\hbar$. Isso mostra que, uma renomeação dos operadores descritores do sistema, é possível obter resultados bastante interessantes. A diferença crucial está no fator complexo i que não está presente na álgebra dos operadores a , resultando em uma álgebra bastante conveniente para tratar o sistema. Os estados possíveis são descritos pelos vetores $|n\rangle$ onde $n \in \mathcal{N}$ de maneira que é auto-estado do denominado operador número, \hat{N} ⁷,

$$\hat{N} |n\rangle = a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle \quad (3.5)$$

Os estados $|n\rangle$ são criados através de um estado de vácuo $|0\rangle$ definido por $a |0\rangle = 0$ e assim,

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle \\ a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

e,

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (3.7)$$

Ou seja, os operadores a e a^\dagger atuam como criação e destruição de estados do tipo 'n', cada um com energia $\hbar\omega$ e o operador número dá o número de estados do tipo n acima do estado de vácuo. Uma extensão imediata é o caso do oscilador harmônico D dimensional, onde não existe apenas um, mas D tipos de operadores de criação e

⁷o que significa que o espectro de energia é dado por $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$

destruição, a_j , $j = 1, 2..D$, que satisfazem,

$$[a_j, a_k^\dagger] = 1\delta_{jk} \quad (3.8)$$

e com isso,

$$|n_j, n_k\rangle = \frac{(a^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \frac{(a^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle \quad (3.9)$$

3.1.1.1 A Segunda Quantização

Como os estados do oscilador harmônico são interpretados como uma escada de energia de maneira que a cada degrau contém um novo objeto, onde o primeiro é construído a partir de um estado onde não há objetos, ($\hat{N}|0\rangle = 0$), escrever um hamiltoniano da forma

$$H \sim \int dp E(p) a(p)^\dagger a(p) \quad (3.10)$$

e impondo a existência de um estado da forma $a|0\rangle = 0$ e regras de comutação análogas a Eq.(3.8) extendidas para o contínuo em D dimensões, $[a(p), a^\dagger(p')] = \delta^{(D)}(p - p')$ é possível fazer a descrição de um estado $|p\rangle = a^\dagger(p)|0\rangle$ que possui energia $E(p)$ que é criado a partir do vácuo. Colocando a função $E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$, a descrição de uma partícula relativística está quase completa.

A formalização do conceito pode ser feita através do formalismo canônico de uma maneira bem direta. Primeiro, propõe-se uma lagrangeana clássica invariante perante uma transformação de lorentz, por exemplo a lagrangeana de Klein-Gordon do campo escalar real,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi(x))(\partial^\mu\phi(x)) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + \Omega_0. \quad (3.11)$$

onde $\Omega_0 = cte$ é uma constante colocada por conveniência e que não muda a física do problema.

Para aplicar o formalismo canônico é necessário encontrar o Hamiltoniano do sistema, como

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \partial_0\phi(x), \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(x))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) - \Omega_0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

O passo crucial é a proposição de regras de comutação adequadas para que a Eq.(3.10) faça algum sentido físico. Para isso basta impor as regras de comutação a tempos

iguais,

$$\begin{aligned}
[\phi(\vec{x}, x_0), \phi(\vec{y}, x_0)] &= 0 \\
[\pi(\vec{x}, x_0), \pi(\vec{y}, x_0)] &= 0 \\
[\phi(\vec{x}, x_0), \pi(\vec{y}, x_0)] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

a Eq.(3.12) tem equação de movimento da forma,

$$\partial^2 \phi - m^2 \phi = 0 \tag{3.14}$$

cuja solução mais geral é

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int \frac{d^N k}{(2\pi)^{N/2} 2\omega} \left(a(\vec{k}) e^{ik \cdot x} + b(k) e^{-ik \cdot x} \right) \\
\pi(x) &= -i \int \frac{d^N k}{(2\pi)^{N/2} 2\omega} \left(-a(\vec{k}) e^{ik \cdot x} + b(k) e^{-ik \cdot x} \right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde⁸ $k = (\omega, \vec{k})$, $\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2$ e $a(\vec{k})$, $b(\vec{k})$ são funções que dependem das condições iniciais. A condição de realidade implica que $a^\dagger(\vec{k}) = b(-\vec{k})$ e as Eqs.(3.13) impõe para a e a^\dagger regras de comutação,

$$\begin{aligned}
[a(p), a(p')] &= [a^\dagger(p), a^\dagger(p')] = 0 \\
[a(p), a^\dagger(p')] &= (2\pi)^{N/2} 2\omega \delta^{(N)}(\vec{p} - \vec{p}')
\end{aligned} \tag{3.16}$$

como agora a e a^\dagger são operadores e não comutam,

$$\begin{aligned}
&\left(a_k e^{ik \cdot x} \pm a_k^\dagger e^{-ik \cdot x} \right) \left(a_{k'} e^{ik' \cdot x} \pm a_{k'}^\dagger e^{-ik' \cdot x} \right) = \\
&a_k a_{k'} e^{ix \cdot (k-k')} \pm a_k a_{k'}^\dagger e^{ix \cdot (k-k')} \pm a_k^\dagger a_{k'} e^{-ix \cdot (k-k')} \pm a_k^\dagger a_{k'}^\dagger e^{-ix \cdot (k-k')}
\end{aligned}$$

que colocando no Hamiltoniano, $H = \int dt \mathcal{H}$ resulta em,

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^{N/2} 2\omega} \omega a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \frac{\delta(0)}{2} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \omega - \Omega_0 V \tag{3.17}$$

sendo V o volume do espaço. O segundo termo da equação representa a energia de vácuo que, embora infinita⁹, pode ser eliminada com uma escolha conveniente de Ω_0 .

⁸O fator $\frac{1}{(2\pi)^{N/2} 2\omega}$ é colocado por conveniência, pois a quantidade $\frac{d^N k}{(2\pi)^{N/2} 2\omega}$ é invariante de Lorentz, o que significa que ϕ e a se transformada da mesma maneira, e.g. escalares de Lorentz

⁹Tal infinito já era esperado dado que o hamiltoniano é construído a partir de um infinito número de osciladores harmônicos de energia $\omega(k)$

Assim, um estado de vácuo que é eliminado por $a(\vec{k})$, pode gerar uma função de onda bem conhecida,

$$Ha^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \int \frac{d^N k}{(2\pi)^{N/2} 2\omega} \omega a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) a(\vec{p})^\dagger |0\rangle$$

como $a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{p}) = [(2\pi)^N 2\omega \delta^{(N)}(\vec{p} - \vec{k}) - a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k})]$,

$$H|\vec{p}\rangle = Ha^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \omega(\vec{p})|\vec{p}\rangle, \quad (3.18)$$

ou seja, $a^\dagger(\vec{p})$ cria um estado com energia $\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Mais ainda, o valor esperado do campo $\phi(x)$ resulta em,

$$\tilde{\psi}(p) = \langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle = \frac{e^{ik \cdot x}}{(2\pi)^{N/2}} \quad (3.19)$$

que é a equação da onda plana. Com isso, a interpretação do valor médio dos campos como uma aproximação à mecânica quântica tradicional é imediata. Ainda mais importante é o comutador entre dois campos, dessa vez a tempos diferentes, $x_0 \neq y_0$,

$$[\phi(x), \phi(y)] \neq 0 \quad (3.20)$$

Tal campo está relacionado com a causalidade do sistema e possui uma interpretação muito intuitiva através dos gráficos de Feynman. A Eq.(3.19) dá a interpretação física, o campo $\phi(x)$ deve ser interpretado como uma partícula do tipo ϕ na posição x . Isso significa que para que dois campos a uma distância do tipo espaço não interajam (ou seja, a causalidade não seja violada) a 'medida' do campo não pode interferir na medida do outro campo, e isso significa que o comutador dos dois campos deve se anular para distâncias do tipo espaço. No entanto, tal comutador não precisa se anular em geral e, de fato, ele representa uma propagação do campo de um ponto x a um ponto y (mais precisamente a probabilidade de propagação), à essa função denomina-se *propagador* e é dada por,

$$D(x - y) = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^N p}{(2\pi)^N 2\omega} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) \quad (3.21)$$

Tal equação pode ser reescrita de uma maneira mais interessante, notando-se que tal integral pode ser estendida para uma integral em p_0 através de uma integração pelo plano complexo, evitando-se os polos onde $\omega^2(p) = \vec{p}^2 + m^2$, operação denotada pelo acréscimo do infinitésimo ϵ . Tal descrição é bastante conveniente pois representa o

campo com menor tempo antes do campo com maior tempo e pode ser denotada pelo operador de ordenamento temporal. Essa função tem extrema importância na teoria de perturbação, necessária quando a interação entre campos é colocada. Tal função pode ser representada matematicamente e graficamente, E é chamada de *propagador*

$$x \xrightarrow{\hspace{10em}} y = D(x - y) = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^N p}{(2\pi)^N 2\omega} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)})$$

Figura 3.1: Criação de Estados via operadores escada

de Feynman, cuja transformada de Fourier é

$$D(k) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.22)$$

3.1.1.2 Interações

A quantização canônica pode ser realizada para diversos tipos de lagrangeanas invariantes de Lorentz geradas por diversas representações, tais como espinores e quadrivetores, no entanto a intuição física gerada pelo campo escalar é semelhante para todos os tipos de campos e evita complicações a mais que possam surgir. Assim, o tratamento de campos mais complexos serão tratados diretamente na quantização via integrais de caminho. Com isso, o próximo passo é introduzir interações entre campos escalares. Isso significa alterar a lagrangeana com mais um termo, o mais simples é acrescentar à teoria um termo da forma $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$. A expansão em operadores criação e destruição seria imediata caso fosse possível resolver analiticamente a equação de movimento de forma similar à anterior, nesse caso ataca-se o problema perturbativamente. A teoria de perturbação fica evidente na representação de Dirac da mecânica quântica, aonde divide-se o Hamiltoniano total H em uma parte cuja resolução é possível, H_0 , e uma na qual ele será perturbado H_I , chamado de Hamiltoniano de Interação, e assim: $H = H_0 + H_I$. Definindo o operador¹⁰,

$$i \frac{d}{dt} \tilde{U} = H_0(t) \tilde{U} \quad (3.23)$$

¹⁰tal operador regia a evolução temporal no caso onde $H_I = 0$

e condição $U(t, t) = \mathcal{I}$. Escrevendo,

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(t)\rangle &= \tilde{U}(t, t_0) |\psi(t)\rangle \\ \tilde{A}(t) &= \tilde{U}^\dagger(t, t_0) A \tilde{U}(t, t_0) \end{aligned} \quad (3.24)$$

e a equação de Schrödinger se torna,

$$i \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = -\tilde{H}_I |\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (3.25)$$

Isso significa que, nessa base (que evolui no tempo) o operador $H_I = \tilde{H}_i(t)$ é o operador que comanda a evolução temporal do sistema através de $U(t, t') = T\{e^{-i\int_{t'}^t H_I(t'')dt''}\}$. A quantidade interessante a ser calculada é o propagador de Feynman que deve ser calculado para o vácuo, $|\Omega\rangle$, e os campos, ψ , da teoria total, H . Para obter o estado de vácuo, cuja energia é E_0 e é a menor energia do sistema, nota-se que é possível¹¹ expandir o estado de vácuo, $|0\rangle$, da teoria H_0 na base de auto-estados de H ,

$$e^{-iHT} |0\rangle = \sum_n e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (3.26)$$

Tomando um tempo infinito¹², com um pequeno deslocamento no plano complexo, o estado de vácuo da teoria total é o único estado que sobra (pois sua energia é a menor) e então,

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{U(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle} \quad (3.27)$$

como $\phi(x) = U^\dagger(x^0, t_0) \tilde{\phi}(x) U(x^0, t_0)$ e $U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3)$, para $x_0 > y^0$,

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | U(T, x^0) \tilde{\phi}(x) U(x^0, y^0) \tilde{\phi}(y) U(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle} \quad (3.28)$$

¹¹ A possibilidade de tal expansão só acontece quando a interação não é forte o suficiente para modificar o estado de vácuo, a ponto de que o torne ortogonal ao estado de vácuo da teoria original

¹² Tal passagem matemática é garantida quando trata-se de interações aonde o tempo de interação é muito curto em relação ao tempo relevante da observação, como é o caso de interações em aceleradores de partículas.

ou, com o ordenamento temporal, o resultado conhecido como *Teorema de Gell-Mann-Low*, generalizado para M campos a serem calculados,

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_M) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \tilde{\phi}(x_1) \tilde{\phi}(x_2) \dots \phi(\tilde{x}_M) e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} \} | 0 \rangle} \quad (3.29)$$

Essa resultado expõe o que é necessário calcular para obter interações para a teoria e está em uma forma ideal para fazer teorias de perturbação. Para o caso estudado, $H_I = \frac{\lambda}{4!} \tilde{\phi}^4$, e assim, $e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} \approx \mathcal{I} - \frac{i\lambda}{4!} \int dx \tilde{\phi}^4(x)$ e em primeira ordem, uma interação entre duas partículas que partem de x_1, x_2 e interagem e voltam para x_3, x_4 , pode ser calculado por,

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | \Omega \rangle &\approx \langle 0 | T \{ \tilde{\phi}(x_1) \tilde{\phi}(x_2) \tilde{\phi}(x_3) \tilde{\phi}(x_4) \} | 0 \rangle \\ &+ \frac{-i\lambda}{4!} \langle 0 | T \{ \tilde{\phi}(x_1) \tilde{\phi}(x_2) \tilde{\phi}(x_3) \tilde{\phi}(x_4) \int dz \tilde{\phi}^4(z) \} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.30)$$

Como $\tilde{\phi}$ em primeira ordem é dado por Eq.(3.15) o resultado é calculável em primeira ordem escrevendo explicitamente os operadores criação e destruição,

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | \Omega \rangle &= D(x_1 - x_3) D(x_2 - x_4) + D(x_1 - x_4) D(x_2 - x_3) \\ &+ D(x_1 - x_2) D(x_3 - x_4) + D(x_1 - z) D(x_2 - z) D(x_3 - z) D(x_4 - z) \\ &+ D(x_1 - x_4) D(x_2 - x_3) D^2(0) + \dots \end{aligned} \quad (3.31)$$

em primeira ordem o cálculo já fica bastante extenso para uma teoria simples e as primeiras divergências já começam a aparecer com $D(0)$. Para que o problema se torne tratável, duas ferramentas são dispostas, o *teorema de Wick* e os *Gráficos de Feynmann*. O teorema de Wick descreve como o ordenamento temporal de operadores que seguem uma dada regra de comutação podem ser escritos no ordenamento normal¹³. Isso é útil pois no ordenamento normal o estado de vácuo é sempre aniquilado. Em particular o teorema de Wick pode ser dado por,

Teorema de Wick: Seja um conjunto de campos ϕ que obedecem a alguma regra de comutação independente dos campos, de tal forma que seu propagador em relação ao estado de vácuo é dado por, $D(x, y) = \langle 0 | T \{ \phi(x), \phi(y) \} | 0 \rangle$. Então, o ordenamento temporal de M operadores pode ser escrito como[5],

¹³Um conjunto de operadores escada está em ordenamento normal quando todos os operadores destruição estão à direita dos operadores criação.

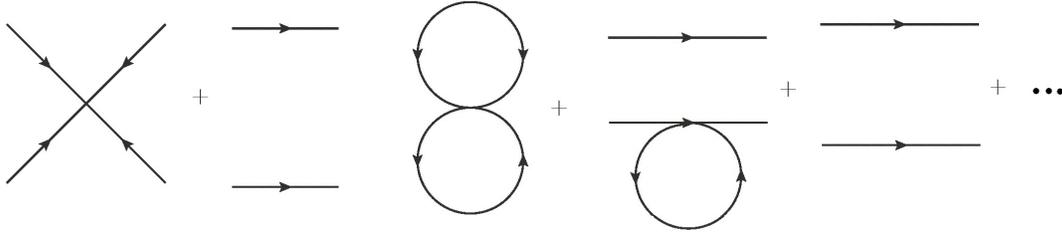


Figura 3.2: Realização gráfica da Eq.(3.31)

$$T\{\phi(x_1)\phi(x_1)\dots\phi(x_M)\} = N\{\phi(x_1)\phi(x_1)\dots\phi(x_M)\} + \text{Todas as possíveis combinações de comutações}$$

onde $N\{\}$ significa ordenamento normal.

Quando aplicado ao estado de vácuo, qualquer sequência de operadores em ordem normal se anulam, sobrando apenas os termos totalmente formados por comutações que se tornam conjuntos de propagadores. Para que fosse possível lidar com esse grande número de propagadores R. P. Feynman criou um método de descrição da conta via símbolos intuitivos, como os da fig.3.1. Para cada propagador associa-se um traço e para cada ordem de perturbação (vértice) associa-se um fator correspondente à constante de acoplamento do vértice. assim a Eq.(3.31) é descrita pela figura (3.2). As regras de Feynman auxiliam a calcular ordem a ordem os termos de interação e são mais simples na representação de momento, que é a mais fácil de se associar em um experimento,

1 Para cada propagador, associar, $\xrightarrow{k} = D(k)$

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = \frac{-i\lambda}{4!}$$

2 Para cada ordem de interação,

3 Impor conservação de momento para cada vértice.

$$\bullet \xleftarrow{k} = e^{-ikx}$$

4 Para cada ponto externo, associar

5 Integre sobre todos os momentos, utilizando um fator $\int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D/2}}$

Para calcular a amplitude de probabilidade de uma partícula do tipo ϕ com momento p_1 interagir com uma partícula também ϕ com momento p_2 e elas saírem com mo-

mento p_3 e p_4 , é preciso calcular termos da forma, $\mathcal{M} = \langle 0 | \phi(p_1)\phi(p_2)\phi(p_3)\phi(p_4)\phi^{4n} | 0 \rangle$ que, com a ajuda das regras de Feynman, em primeira ordem, é mostrado na fig. 3.3.

Esse resultado já possui alguns gráficos com valores infinitos. Gráficos fechados

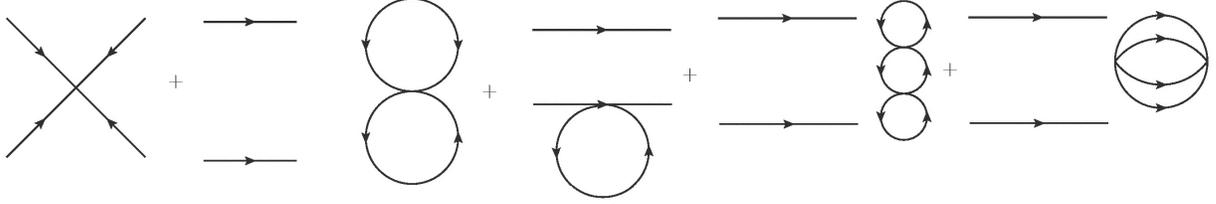


Figura 3.3: Criação de Estados via operadores escada

sem pontos externos são associados aos termos $D(0)$ proveniente de auto-interação dos campos dentro da integral $\int dz \phi^4(z)$. Para cada ordem de perturbação, mais e mais termos dessa forma serão formados. No entanto, a Eq.(3.29) possui um termo no denominador da forma $\langle 0 | e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} | 0 \rangle$ cuja expansão é, $\langle 0 | \mathcal{I} | 0 \rangle - \frac{i\lambda}{4!} \int_{-T}^T \langle 0 | \phi^4(x) dx | 0 \rangle + \dots$ Tal termo possui justamente cada parte dos diagramas fechados e cancelam os termos já obtidos na expansão. Esse problema de infinitos surge pela tentativa de associar o vácuo da teoria sem interação com o vácuo da teoria interagente e são associados à auto-interação do vácuo e, por causa do argumento apresentado, não precisam ser levados em conta, desde que não se leve em conta o denominador da Eq.(3.29).

3.1.2 Integrais de Caminho

3.1.2.1 Quantização

Com o formalismo canônico pronto e a intuição física formada, o próximo passo a ser realizado para o tratamento de teorias mais realistas é entender o processo de integrais de caminho que permite a quantização de teorias não-abelianas de maneira direta. Uma grande vantagem desse tipo de abordagem é explicitar os grupos de simetria presentes na teoria. O processo de quantização surge ao calcular probabilidades de transição de dois estados $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$. Baseando-se nas ideias de que todos os caminhos possíveis são percorridos, pode-se discretizar todas essas opções

colocando diversas bases completas em cada tempo, $t_n > t_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \int dq_1 dq_2 \dots dq_n \langle q_f, t_f | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \langle q_{n-1}, t_{n-1} | q_{n-2}, t_{n-2} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{i=0}^{n-1} dq_i \right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} \langle q_{k+1}, t_{k+1} | q_k, t_k \rangle \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

No limite, divide-se o intervalo de tempo em diversas partes de valores iguais, $t_{k+1} - t_k = \epsilon = (t_f - t_i)/n$, assim,

$$\begin{aligned} \langle q_{k+1}, t_{k+1} | q_k, t_k \rangle &= \langle q_{k+1} | U^\dagger(t_k + \epsilon, 0) U(t_k, 0) | q_k \rangle = \\ &= \langle q_{k+1} | [U^\dagger(t_k, 0) + \dot{U}^\dagger(t_k, 0) + O(\epsilon^2)] U(t_k, 0) | q_k \rangle \\ &\Rightarrow \langle q_{k+1}, t_{k+1} | q_k, t_k \rangle \approx \langle q_{k+1} | (\mathcal{I} + iH\epsilon) | q_k \rangle \end{aligned}$$

definindo¹⁴,

$$H = \begin{cases} H_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} Q_\alpha P_\beta \\ H_- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha, \beta} P_\alpha Q_\beta \end{cases}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \langle q_{k+1}, t_{k+1} | p_k, t_k \rangle &= \langle q_{k+1} | q_k \rangle e^{i\epsilon H_+} + O(\epsilon^2) \approx e^{-i(p_k q_{k+1} - \epsilon H_+)} \\ \langle p_k, t_k | q_k, t_k \rangle &\approx e^{-i(p_k q_k - \epsilon H_-)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

ou seja, introduzindo uma base completa de momento entre cada um dos $\langle q_{k+1}, t_{k+1} | q_k, t_k \rangle$, é possível reescrever,

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{i=0}^{n-1} dq_i \frac{p_i}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{i \frac{T}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (p_k \dot{q}_k - H_c)} \quad (3.34)$$

com $T = t_f - t_i$, $H_c = (H_+(q_{k+1}, p_k) + H_-(q_k, p_k))/2$ e $\dot{q}_k \approx (q_{k+1} - q_k)/\epsilon$. No limite $n \rightarrow \infty$, \dot{q} se torna a derivada e a soma se torna uma integral no tempo, e é definida a quantidade $\prod_{i=0}^{n-1} dq_i = Dq$, ou seja,

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int Dq Dp e^{i \int L(q, \dot{q}) dt} \quad (3.35)$$

¹⁴As constantes a e b são obtidas comutando os operadores P e Q do Hamiltoniano clássico para obter nessa ordem de comutação

que é um resultado já intuitivo na seção 2.1.3. Para Hamiltonianas do tipo $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ a integral no momento é gaussiana e possível de se calcular,

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int Dq e^{iS_c[q]} \quad (3.36)$$

onde $S_c[q]$ é a ação clássica. Essa abordagem é conhecida como quantização por integrais de caminho e sua transição para a segunda quantização é imediata, basta apenas escrever $q(t) \rightarrow \phi(x)$ e $S[\phi] = \int d^D x \mathcal{L}$.

3.1.2.2 Grandezas Físicas

O processo de obter as grandezas físicas através de integrais de caminho é feito também por regras de Feynman, no entanto, tais regras ficam mais evidentes e de maneira mais direta, além de permitir trabalhar de maneira mais genérica com qualquer tipo de campo. O truque está em introduzir uma corrente $J_\alpha(x)$ como campo auxiliar, que irá alterar a lagrangeana do sistema físico. O índice α representam os tipos de campo $\phi_\alpha(x)$ correspondentes e não necessariamente reais¹⁵ ou escalares. A lagrangeana que descreve o sistema é da forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cin} + \mathcal{L}_{int}$, a primeira parte é a parte cinética que é possível de resolver, a segunda parte representa interações que serão resolvidas perturbativamente. A corrente J é introduzida de forma linear,

$$\mathcal{L}[J(x)] = \mathcal{L} + \int dx J_\alpha(x) \phi_\alpha(x), \quad (3.37)$$

Definindo o funcional gerador,

$$Z[J] = \int D\phi_\alpha e^{i(S[\phi] + \int dx J_\alpha(x) \phi_\alpha(x))} \quad (3.38)$$

ou seja,

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta J_\alpha(x)} \right|_{J=0} = i \int D\phi \phi_\alpha(x) e^{iS[\phi]} \quad (3.39)$$

em especial, o propagador,

$$D_{\alpha,\beta}(x, y) = \frac{1}{Z[0]} \left(\frac{1}{i^2} \right) \left. \frac{\delta^2 Z}{\delta J_\alpha(x) \delta J_\beta(y)} \right|_{J=0} \quad (3.40)$$

¹⁵Nesse caso, sempre que aparecer um campo não real, é necessário que o termo hermitiano conjugado apareça para que a lagrangeana seja real, como é possível sempre lidar com componentes reais e imaginárias de forma independente, o índice α percorre por este índice também

e de maneira genérica,

$$f(\phi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{i^n n!} \left(\frac{\delta}{\delta J_\alpha(x)} \right)^n \Big|_{J=0} Z[J] \quad (3.41)$$

e assim,

$$Z[J] = e^{\int dx \mathcal{L}_{int}(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\alpha(x)})} Z_0[J] \Big|_{J=0} \quad (3.42)$$

onde, $Z_0[J] = \int D\phi_\alpha e^{i \int dx \mathcal{L}_{cin} + J_\alpha \phi_\alpha}$. Como em geral o lagrangeano pode ser escrito como

$$\mathcal{L} = \int dy \phi_\alpha(x) F_{\alpha,\beta}(x,y) \phi_\beta(y) + \mathcal{L}_{int} + \phi_\alpha J_\alpha + \text{Termos de Superfície.}$$

e já que o termo de integração $D\phi$ é invariante por translação, pode-se mudar a variável para $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$, tal que, $\phi_{\alpha,0} = \int dy D_{\alpha,\beta}(x,y) J_\beta$, onde,

$$\int dy F_{\alpha,\gamma}(x,y) D_{\gamma,\beta}(y,z) = \delta_{\alpha,\beta} \delta^D(x-z) \quad (3.43)$$

e fica evidente que $D(x,y)$ é o inverso do operador $F(x,y)$ ¹⁶ com isso pode-se escrever,

$$Z[J] = Z_0[0] e^{\int dx \mathcal{L}_{int}(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\alpha(x)})} e^{i \int dx dy J_\alpha(x) D_{\alpha,\beta}(x,y) J_\beta(y)} \quad (3.44)$$

e fica evidente porque $D(x,y)$ é a segunda derivada da função geratriz. Ainda mais, o termo $Z[0]$ nada mais é do que a auto-interação do vácuo, que é cancelada no teorema de Wick, descrito sem prova anteriormente: a função geratriz $Z[J]$ precisa ser normalizada para fazer sentido físico. Dito isso, a função de interação entre duas partículas é dada, portanto, por quatro derivadas da função geratriz normalizada em $J = 0$, ou devido a forma de $Z[j]$, em especial, a função,

$$W[J] = \log Z[J] \quad (3.45)$$

que implica,

$$\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J_{\alpha_1}(x_1) \delta J_{\alpha_2}(x_2) \delta J_{\alpha_3}(x_3) \delta J_{\alpha_4}(x_4)} \Big|_{J=0} = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J_{\alpha_1}(x_1) \delta J_{\alpha_2}(x_2) \delta J_{\alpha_3}(x_3) \delta J_{\alpha_4}(x_4)} \Big|_{J=0}. \quad (3.46)$$

¹⁶em especial, para operadores diferenciais como é o caso das teorias aqui tratadas, $D(x,y)$ é a função de Green da equação de movimento do campo sem interação

O funcional $Z[J]$ (ou $W[J]$) pode ser expandido em série de forma que ficam evidentes as regras de Feynman,

$$\hat{Z}[J] = \frac{Z[J]}{Z[0]} \approx \left[\mathcal{I} + i \int dx \mathcal{L}_f \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\alpha(x)} \right) \right] \hat{Z}_0[J], \quad (3.47)$$

e assim, pode-se reescrever as regras de Feynman genéricas na representação de momento como,

1 Para cada propagador, associar, $\left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 \hat{Z}}{\delta J_\alpha(x) \delta J_\beta(y)} \Big|_{J=0} = \xrightarrow{k}$

2 Para cada ordem de interação, o vértice

$$i \int dx \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\alpha(x)} \right) \Big|_{J=0} Z_0[J] = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$$

3 Impor conservação de momento para cada vértice.

4 Para cada ponto externo associar ϕ , tal que, $\int dy F(x, y) \phi_\alpha(y) = 0$ $\bullet \xleftarrow{k}$

5 Integre ou some sobre todos os momentos e outros possíveis índices, utilizando um fator $\int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D/2}}$, considerando apenas os gráficos onde os vértices estão ligados a algum momento externo.

3.1.2.3 Quantização de Campos Fermiônicos

Com a quantização em mãos, o próximo passo é descrever os Lagrangeanos que podem servir para descrever os sistemas de partículas. O primeiro passo é entender que a ação precisa ser escalar, isto é, um invariante. Nesse caso, qualquer combinação de campos que nela esteja presente, precisa ser invariante perante as mudanças no grupo de transformação do sistema. Isso reflete a invariância por diversos observadores. O primeiro ponto é por simetrias internas, em geral o sistema físico é invariante por uma ou mais transformações de um grupo interno, por exemplo, paridade ou transformações de conjugação de carga. Nesse caso, a lagrangeana precisa possuir tais simetrias. As duas outras simetrias importantes são as *Simetrias de Gauge* e *Simetrias de Lorentz*

Capítulo 4

Lagrangiano

O lagrangeano do sistema é o que define a estrutura do modelo físico abordado. Nesse capítulo é apresentado como construir um lagrangeano consistente com as simetrias conhecidas e necessárias para existir as leis de conservação comprovadas experimentalmente, consistente com o modelo padrão que é válido para as escalas de energia já investigadas.

4.1 Introdução

Com a quantização em mãos, o próximo passo é descrever os lagrangeanos que podem servir para descrever os sistemas de partículas. O primeiro passo é observar que a ação precisa ser um escalar, isto é, um invariante perante as mudanças no grupo de transformação do sistema. As duas simetrias mais importantes são as *simetrias de Gauge* (relacionadas com as simetrias internas do lagrangeano) e *Simetrias de Poincaré* (relacionada com as simetrias espaciais). A primeira simetria, junto com princípios de renormalização que serão discutido, definem os tipos de interação possíveis enquanto as simetrias de Poincaré definem as estruturas geométricas das partículas, isto é, seus spins.

4.2 O Grupo de Poincaré

Uma das maneiras que se mostram mais eficientes para obter e estudar leis da física é a concepção de um conceito que parece surgir quase intuitivamente e subjetivamente no pensamento humano, as simetrias. A busca natural por simetria trás bons resultados, elas permitem simplificar e estudar um problema indiretamente já que são características mais genéricas do todo e não de pequenas partes. Isso significa que uma das perguntas fundamentais a ser feita em uma análise profunda de qualquer problema é: Qual a simetria esse problema contém (se contém alguma)? Para respondê-la é necessário entender quais as características fundamentais que precisam ser descritas e o trabalho de identificá-las nem sempre é fácil.

4.2.1 Definição

Partindo dos princípios descritos anteriormente, a descrição do espaço requer a suposição de alguns conceitos básicos e fundamentais,

- i O espaço é homogêneo (ie, qualquer ponto é equivalente)
- ii O tempo é homogêneo (ie, qualquer tempo é equivalente)
- iii As leis da física não privilegiam qualquer tipo de referencial (todos os observadores devem prever leis equivalentes entre si).
- iv Dois experimentos suficientemente distantes dão resultados não-correlacionados.

Os dois primeiros princípios postulam uma equivalência em posição e tempo. Embora bastante naturais no dia a dia, eles impõem restrições bastante fortes sob a forma das equações que descrevem o espaço, elas precisam ser invariantes por translação. Eles surgem de um requerimento bastante intuitivo. Quando falamos de posição, velocidade e qualquer grandeza relativa é necessário montar um sistema de referências que indicam a dois interlocutores como eles precisam correlacionar seus resultados. No entanto, essa escolha de referência é totalmente arbitrária e sua escolha não pode alterar qualquer resultado físico observável.

Nesse mesmo espírito surge o princípio (iii), é necessário impor uma transformação contínua entre qualquer tipo de referencial, nesse caso, qualquer referencial que possa estar se movimentando de forma arbitrária. Essas transformações induzem transformações nas equações que podem ser invertidas para se obter o resultado observado por outros referenciais. Novamente essa imposição surge pois como os movimentos são sempre relativos à escolha de qual referencial está em movimento e qual está parado é arbitrária.

Por último, o princípio (iv) também conhecido como *Cluster Decomposition Principle*[6], é o que permite a existência de qualquer ciência experimental. Precisamos garantir a possibilidade da realização de vários experimentos sob as mesmas (ou próximas) condições iniciais de forma que eles sejam não correlacionados e possam gerar dados equivalentes. Em especial, na física de partículas esse princípio indica que um processo de multi-partículas pode ser dividido em sub-processos que permitem fatorizar os elementos de matriz da teoria, dado que os eventos estão suficientemente distantes.

Os três primeiros postulados apresentados garantem a existência de um grupo de

transformações entre os vetores posição espaço-temporal (quadrivetores). Para entender como acontece o surgimento do grupo de transformações, vamos definir o espaço vetorial V de todos os possíveis pontos do espaço, sob a operação usual de soma de componentes e o produto escalar a ser definido, vamos denotar tais vetores como $\langle r|$ ¹⁷. Os postulados (i) e (ii) garantem a existência de uma transformação, U , aplicada a esse vetores de tal forma que para quaisquer dois pontos $\langle r|$ e $\langle r'|$ no espaço deve-se ter,

$$\langle r'| = U(r, r') \langle r| \quad (4.1)$$

em particular, para dois pontos coincidentes, $U(r, r) = \mathcal{I}$. O postulado (iii) garante a existência de uma transformação inversa $U^{-1}(r, r')$. A experiência matemática e a intuição nos fornecem uma maneira simples de descrever as transformações U , através de translações espaciais, rotações e boosts. Ainda do postulado (iii), como qualquer referencial é equivalente, se temos três pontos distintos, r_1 , r_2 e r_3 podemos levar nosso vetor de r_1 a r_3 por uma transformação $U(r_1, r_3)$ ou de r_1 a r_2 e depois de r_2 a r_3 e elas precisam ser equivalentes, $U(r_1, r_3) = U(r_1, r_2)U(r_2, r_3)$. Ou seja, existe um grupo de transformações G que descreve os pontos no espaço.

A primeira pergunta que surge a partir dessa conclusão é: qual é esse grupo? Como a ideia é construir as equações e sistemas físicos dentro do espaço vetorial V , da matemática sabemos que ele contém objetos que não são apenas vetores, mas também escalares, espinores e tensores. Os escalares são definidos por sua invariância perante alguma transformação, nada mais natural do que definir tal transformação como as transformações U . Definindo o produto escalar de dois vetores $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = \langle x|$ e $y^\mu = (y^0, y^1, y^2, y^3) = \langle y|$ como¹⁸,

$$x^\dagger G y = y^\dagger G x = \langle x|y\rangle = |x\rangle G \langle y| = (G)_{\mu\nu}(x - y)^\mu(x - y)^\nu \quad (4.2)$$

onde $G = G^\dagger$ é chamada de métrica. Se as transformações U são as transformações que definem o caráter escalar do espaço, então deve-se ter,

$$|x\rangle U^\dagger G U \langle y| = |x\rangle G \langle y| \quad (4.3)$$

¹⁷Denotaremos vetores por letras romanas minúsculas e números reais por letras gregas, caso haja possibilidade de confusão, a notação para vetores incluirá um índice r^μ que deve ser tomado na convenção de Einstein da soma

¹⁸o ponto $x_i = (x_i^0, x_i^1, x_i^2, x_i^3)$ é o ponto referência do sistema.

ou, uma definição mais interessante, as transformações U são tais que,

$$U^\dagger G U = G \quad (4.4)$$

O problema central agora é escolher a forma do produto escalar (ou seja, escolher a métrica G). Cada métrica irá gerar um espaço diferente, com propriedades diferentes e um grupo G de transformações diferentes. Pela falta de um postulado razoável, a escolha da métrica fica arbitrária teoricamente, mas uma análise experimental indica que a luz possui velocidade constante para todos os referenciais físicos. Isso indica transformações que possuem um pólo em $v = c$, c é a velocidade da luz. Em particular, podemos tomar a velocidade c como uma velocidade de referência e impor um sistema de coordenadas $c = 1$, assim, o pólo das transformações deve ser em $v = 1$. Uma opção de métrica que trás as características necessárias para descrever a constância da velocidade da luz e condiz com o eletromagnetismo é a opção $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. As transformações que obedecem a definição (4.4), com a métrica dada, formam o *Grupo de Poincaré*

4.2.2 Representações

Com uma definição mais apropriada podemos buscar as representações possíveis do grupo de Poincaré. Como já mencionado, uma forma natural de tratar o problema é separar as transformações de Poincaré em um subgrupo invariante de translação e o grupo de rotações. Por construção o produto escalar já é invariante por translações $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$. Para rotações tem-se,

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (4.5)$$

onde Λ_ν^μ é uma matriz de rotação de coeficientes reais agindo sob os elementos do vetor x . Isso significa que duas transformações são combinadas da forma,

$$U(\Lambda_1, a_1)U(\Lambda_2, a_2) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \quad (4.6)$$

das eqs. (4.5) e (4.4) obtem-se a relação $g_{\mu\nu}\Lambda_\rho^\mu\Lambda_\sigma^\nu = g_{\rho\sigma}$. O determinante resulta na propriedade

$$(\text{Det}\Lambda)^2 = 1 \quad (4.7)$$

ou seja, dentro do grupo de transformações $a^\mu = 0$ (*Grupo de Lorentz*), existem dois tipos, $Det\Lambda = -1$ e $Det\Lambda = 1$. O segundo caso forma um subgrupo e é denominado grupo de Lorentz próprio. Ainda da relação obtida, $(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \Lambda_0^i \Lambda_0^i$, ou seja, $\Lambda_0^0 \leq -1$ ou $\Lambda_0^0 \geq 1$. No segundo caso temos novamente um subgrupo, o subgrupo de Lorentz ortócrono. E. Wigner [8] mostrou que todas as transformações do grupo de Lorentz (e conseqüentemente) do grupo de Poincaré podem ser descritas por um subgrupo do grupo de Poincaré, o chamado *Little Group*, que é análogo ao grupo de rotações através de um eixo. De fato, tal grupo é definido como o grupo de transformações Λ_k , tal que $\Lambda_k k^\mu = k^\mu$. Assim, o grupo é totalmente determinado pelas transformações de paridade,

$$P_\nu^\mu = (P^{-1})_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

temporal,

$$T_\nu^\mu = (T^{-1})_\nu^\mu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

E os geradores do Little Group.

Os geradores do grupo são obtidos impondo o que as transformações de Poincaré ($a_\mu = 0$) formem um grupo,

$$\begin{cases} U^{-1}(\Lambda) = U^\dagger(\Lambda) & \text{Transformação unitária} \\ U(\Lambda'\Lambda) = U(\Lambda)U(\Lambda') & \text{Regra de composição de Grupos} \end{cases} \quad (4.10)$$

Que em forma infinitesimal implica em

$$U\left(1 + \frac{i}{2\hbar}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) \approx \mathcal{I} + \frac{i}{2\hbar}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \quad (4.11)$$

ou seja,

$$U^{-1}(\Lambda)M^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu M^{\rho\sigma} \quad (4.12)$$

A partir das leis de transformação dadas pela Eq. (4.12), e fazendo $\Lambda = 1 + \delta\omega$, segue as regras de comutação para os geradores:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\hbar[g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)] - [\rho \leftrightarrow \sigma] \quad (4.13)$$

Que descrevem a álgebra dos geradores $M^{\mu\nu}$. Definindo,

$$\begin{aligned} J_i &\equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijl}M^{jk} && \text{O vetor } \vec{J} \\ K^i &\equiv M^{i0} && \text{O vetor } \vec{K} \end{aligned} \quad (4.14)$$

A Eq.(4.13) fica em uma forma mais intuitiva,

$$\begin{cases} [J_i, J_j] = i\epsilon^{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] = i\epsilon^{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] = i\epsilon^{ijl} J_k \end{cases}$$

Ou seja, as quantidades \vec{J} formam um subgrupo idêntico ao subgrupo de momento angular em 3 dimensões, $SO(2)$ estão relacionados com o momento angular e o spin da partícula. Esses operadores são justamente os operadores geradores da simetria $SO(4) = SO(2) \times SO(2)$. Uma maneira de observar isso é notar que redefinindo $M_l = \frac{1}{2}(J_l + iK_l)$ e $N_l = \frac{1}{2}(J_l - iK_l)$ resulta em,

$$\begin{cases} [M_i, M_j] = i\epsilon^{ijk} M_k \\ [N_i, N_j] = i\epsilon^{ijk} N_k \\ [M_i, N_j] = 0 \end{cases}$$

Assim, os geradores M_i e N_i não se conectam e formam grupos separados que podem ser caracterizados por seus auto-valores inteiros e semi-inteiros, l_m e l_n e cujos auto-vetores podem ser agrupados de forma a descrever a maneira com que se transformam, (l_m, l_n) . Assim, o auto-vetor correspondente a $(0, 0)$ é chamado de escalar, os auto-vetores correspondentes a $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ são espinores, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ são vetores, etc. Com o mesmo procedimento é possível obter as regras de comutação para os operadores P^μ tal que $U(0, a^\mu) \approx \mathcal{I} + a^\mu P_\mu$,

$$\begin{aligned} [J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk} P_k \\ [K_l, P_j] &= iH\delta_{lj} \\ [J_j, P_0] &= [P_j, P_0] = [P_i, P_j] = 0 \\ [K_j, P_0] &= iP_j \end{aligned}$$

Note que P_μ também forma um subgrupo abeliano invariante, o subgrupo das translações. Isso significa que suas transformações devem obedecer $D(a_\mu)D(a'_\mu) = D(a_\mu + a'_\mu)$. E, portanto, seus auto-vetores podem ser caracterizados por um vetor k_μ da forma

$$D(a_\mu)\psi_k = e^{ik_\mu a^\mu} \psi_k \quad (4.15)$$

E as funções $e^{-ik_\mu x^\mu}$ se tornam uma base natural para tal grupo. Isso quer dizer que uma função $\psi(x)$ pode ser descrita pela base de auto-estados através de sua transformada de Fourier,

$$\psi_\sigma(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} a_\sigma(k) e^{ikx} \quad (4.16)$$

onde σ denota possíveis números que descrevem as bases formadas pelos geradores M_i e N_i . Com isso é possível associar a cada vetor k^μ as transformações do Little Group correspondente W_k e com isso determinar de maneira completa as transformações do grupo de Poincaré[9],

$$D(W_k)a(k, \sigma) = \sum_\alpha D(W_{k_0})_{\sigma, \alpha} a(k, \alpha) \quad (4.17)$$

Em particular, o Casimir do subgrupo formado por P_μ é $P^2 = P_\mu P^\mu$, assim, cada modo $a(k, \sigma)$ pode ser descrito por $k^2 = k^\mu k_\mu = m^2$ e existem quatro opções,

- 1 $\langle k_0^\mu | k_0^\mu \rangle = m^2 > 0$
- 2 $\langle k_0^\mu | k_0^\mu \rangle = 0, k_0^\mu \neq 0$
- 3 $k_0^\mu = 0$
- 4 $\langle k_0^\mu | k_0^\mu \rangle = -m^2 < 0$

A opção 3 descreve os estados do vácuo que são invariantes por translação espacial. Os estados 1 descrevem as partículas de massa $M = m$ e os estados 2 as partículas sem massa.

4.2.3 Quantização de Campos Fermiônicos

O modelo padrão precisa explicar todas as partículas fundamentais encontradas na natureza, dentre elas encontra-se o elétron, partícula massiva de spin-1/2

que obedece o princípio de exclusão de Pauli e, por consequência, regras de anti-comutação. Partículas com tais características são chamadas de Férmions massivos e dizer que seu spin é $1/2$ significa dizer que dada uma função $\psi_\alpha(x)$ que descreva a sua dinâmica, a função $\psi_\gamma(Wx) = \sum_\alpha D(W_{k_0})_{\sigma,\alpha} \psi_\alpha(x)$ também descreve o sistema, onde nesse caso $D(W_{k_0})_{\sigma,\alpha}$ é a matriz da representação $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ do grupo de Poincaré, que é dada pelas matrizes γ , definidas em uma dimensão par como¹⁹,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (4.18)$$

De tal forma que dado dois espinores ψ e seu hermitiano conjugado, se conectam vetorialmente através de,

$$J^\mu = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi \quad (4.19)$$

de forma que J^μ é um quadri-vetor pois se transforma sob as transformações de Lorentz como o vetor x^μ . Em especial $\bar{\psi}\psi$ é um escalar, onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, Isso quer dizer que a lagrangeana quadrática mais genérica²⁰ e invariante de Poincaré a ser construída é da forma,

$$\mathcal{L}_e = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (4.20)$$

onde $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. A grande diferença entre os campos fermiônicos e os campos escalares é que eles precisam obedecer regras de anti-comutação, pois são espinores. Portanto, impor regras de comutação similares à quantização canônica gerará equações de movimento errôneas e assim as regras de comutação precisam ser substituídas por regras de anti-comutação. Tal característica é representada por um conjunto de variáveis chamadas *variáveis de Grassmann*, que obedecem,

$$\{\eta_i, \eta_j\} = 0 \quad (4.21)$$

em especial, $\eta_i^2 = 0$. Isso quer dizer que funções dessas variáveis possuem uma expansão no máximo linear, $f(\eta_i) = a + b\eta_i$. Em especial, suas derivadas e integrais

¹⁹A quantidade $\{A, B\} = AB + BA$ é chamada de anticomutador.

²⁰Na verdade é possível dar um passo a mais e generalizar o Lagrangeano de forma que vários campos fermiônicos sejam unidos, de forma que m passa a ser uma matriz, não necessariamente diagonal

possuem a mesma característica²¹,

$$\partial_{\eta_i} f(\eta_i) = \int d\eta_i f(\eta_i) = b \quad (4.22)$$

E em especial,

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} M \eta} = \det\{M\} \quad (4.23)$$

Dessa forma, a imposição de que os campos $\psi(x)$ sejam também variáveis de Grassmann resolve o problema e torna a a quantização imediata, o lagrangeano é da forma,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi = \int dy \bar{\psi}(i\delta^{(4)}(x-y)\not{\partial}_y - m)\psi(y) = \int dy \bar{\psi}(x)F(x,y)\psi(y) \quad (4.24)$$

cuja equação de movimento é da forma,

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad (4.25)$$

de soluções na representação de momento $u(p)$ e $v(p)$ [6],[5] Assim,

$$D(x,y) = F^{-1}(x,y) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{ie^{ip \cdot (x-y)}}{\not{p} - m} \quad (4.26)$$

e a função geradora sem interação é escrita através das correntes $J = \begin{pmatrix} -\bar{\eta} \\ \eta \end{pmatrix}$,

$$Z_0[J] = Z_0[0] \int D\bar{\psi} D\psi e^{i \int dx dy \bar{J}(x) D(x-y) J(y)} \quad (4.27)$$

4.2.4 Interações Fermiônicas

Ao introduzir interações na lagrangeana de férmions surge um problema sério que atrasou por muito tempo a física, o problema dos infinitos em uma teoria física, também conhecido como *problema da renormalização*. Como descrito, alguns infinitos podem surgir durante o cálculo de grandezas físicas ordem a ordem, o que torna a resolução do problema perturbativamente inconsistente. Para entender de maneira intuitiva aonde surge o problema, basta imaginar o cálculo de uma grandeza física F

²¹Um detalhe importante é que as derivadas anticomutam com as variáveis, $\partial_{\eta_2}(\eta_1 \eta_2) = -\eta_1 \partial_{\eta_2} \eta_2$, isso quer dizer que pode-se definir dois tipos de derivadas, as derivadas à direita, e as derivadas à esquerda. O primeiro caso é a mais utilizada e será padronizado $\partial = \partial_L$ a derivada à esquerda

qualquer, em termos de alguma constante de acoplamento da teoria, λ . Tal expansão se dá através de gráficos de Feynman que representam integrais sobre momentos,

$$F = g^{(0)} + \lambda g^{(1)} + \lambda^2 g^{(2)} + \dots \quad (4.28)$$

Se em algum momento da expansão os fatores $g^{(n)}$ possuírem valor infinito, devido a sua forma funcional $g^{(n)} = \int dp_1 dp_2 \dots g^{(n)}(p)$, tal expansão, a princípio, não é mais justificada tornando o resultado inconsistente. Entretanto, através do processo de renormalização, que será descrito posteriormente, é possível absorver tal infinito na constante de acoplamento λ de forma sistemática, tornando a expansão novamente consistente. Entretanto, caso a constante λ possua, nas unidades naturais, $[\lambda] < 0$, então a forma funcional de $g^{(n)}$ precisa necessariamente aumentar o grau de divergência, pois a cada passo haverá mais e mais integrais de momento para compensar a unidade da constante de acoplamento, nesse caso, a cada ordem de expansão o próximo termo será mais e mais divergente e o processo de renormalização falha, pois a correção de infinitos precisa ser realizada a cada ordem. Não há motivos para imaginar que a natureza seja constituída apenas de teorias renormalizáveis, ainda mais pois a renormalização é um processo intrínseco da forma de atacar o problema perturbativamente. No entanto, a imposição de renormalizabilidade da teoria trouxe bons resultados experimentais.

Dessa forma, acoplamentos como $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ ou $(\bar{\psi}\psi)^2$ não podem ser considerados, já que em unidades naturais, $[\mathcal{L}] = 4$, e então, $[\psi] = [\bar{\psi}] = 3/2$ e tais interações requerem constantes de acoplamento com $[\lambda] = -2$ que não são renormalizáveis. Ainda nesse princípio, a interação $\lambda\phi^4$ é a única renormalizável possível de ser feita apenas com campos escalares em 4 dimensões. A última possível interação que pode ser realizada de forma renormalizável utilizando apenas campos escalares e fermiônicos é a chamada *Interação de Yukawa*, $\phi\bar{\psi}\psi$ que tem particular importância no processo de geração de massa para férmions do modelo padrão.

4.2.4.1 Campos de Gauge

O terceiro e último passo necessário para a construção da lagrangeana do modelo padrão e suas extensões é acrescentar os campos vetoriais. Eles surgem de forma quase automática ao impor a invariância da teoria perante *Transformações de Gauge*. Os campos escalares e espinoriais são descritos na teoria sempre por lagrangeanas invariantes por transformações da forma $\phi'_\alpha = e^{ia}\phi_\alpha$ onde a é um número real. Isso

porque os termos da lagrangeana sempre aparece na forma $M_{\alpha\beta}\phi_\alpha^\dagger\phi_\beta$ ²². Isso significa que os campos são determinados a menos de uma termo de fase que representa uma rotação nas simetrias internas do problema. Em especial, se houverem vários campos e for permitido uma transformação entre tais grupos a lagrangeana ainda é invariante por transformações desse tipo, $\phi'_\alpha = e^{ia_A T^A} \phi$, nesse caso, T^A são chamadas de matrizes geradoras da transformação e atuam nos campos ϕ_α de maneira a misturá-los. Entretanto como os campos possuem uma dependência nas variáveis espaciais, uma transformação de fase desse tipo significa rotacionar o espaço inteiro ao mesmo tempo, o que parece contradizer a invariância de Lorentz. Essa interpretação leva a impor que a lagrangeana do sistema seja invariante por transformações de gauge locais, $a = a(x)$. No entanto o termo cinético $\phi_\alpha \partial_\mu \phi_\alpha$ deixa de ser invariante por tais transformações. Isso sugere a existência de algum termo extra que compense tal problema. Assim, define-se a derivada covariante D_μ de tal forma que as transformações de gauge sejam invariantes,

$$D'_\mu \phi'_\alpha = D_\mu \phi_\alpha \quad (4.29)$$

e $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, onde A_μ é algum campo vetorial no qual se transforma de tal maneira a manter a Eq.(4.29) verdadeira. Para o caso de transformações da forma $e^{ia(x)}$ isso significa que,

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu a(x) \quad (4.30)$$

E isso impõe uma interação da forma $e^2 \phi^\dagger \phi A_\mu A^\mu$ para os campos escalares e $e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ para os fermiônicos. Com a introdução de uma interação para um campo $A^\mu(x)$ é necessário introduzir uma parte cinética correspondente. Para isso é necessário que tal parte cinética seja ainda invariante de gauge, a Eq.(4.29) expõe a forma de transformação de gauge, como $e^{-ia} D' e^{ia} = D$, objetos da forma $D_\mu D_\nu$ se transformam de maneira covariante. Em especial, como $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$, o objeto,

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.31)$$

é o candidato ideal para o termo cinético lagrangeano. Tal objeto se comporta de forma tensorial e, portanto, na lagrangeana deve aparecer como,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.32)$$

²²Note que o termo de Yukawa não é invariante de Gauge nessa prescrição não formalizada.

sua lagrangeana é idêntica à do campo eletromagnético clássico o que leva a associar o campo A_μ com o campo eletromagnético. Através dessa construção a extensão para diversos campos é imediata: Dado um grupo de simetria interno cujas transformações são geradas por $[T^A, T^B] = f_C^{AB} T^C$, para criar uma lagrangeana invariante perante esse grupo, troca-se as derivadas normais pela derivada covariante $D_{b\mu}^a = \delta_b^a \partial_\mu + ig(T_A)_b^a W_\mu^A$ onde W_μ^A são campos vetoriais de gauge sob a ação de transformações de gauge $U(a) = e^{ia_A T^A}$ se transformam como,

$$W_\mu^A = W_\mu^A + \frac{i}{e} \partial_\mu a^A + f_C^{AB} a_B W_\mu^C \quad (4.33)$$

a parte cinética deve ser um escalar,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{Tr} \{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} \quad (4.34)$$

onde $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig [W_\mu, W_\nu]$. O último termo do tensor $F_{\mu\nu}$ expõe explicitamente o caráter não abeliano das teorias de gauge formada por campos de gauge que não comutam entre si, e por isso são comumente chamadas de teorias de gauge não-abelianas.

4.2.4.2 Quantização dos Campos de Gauge

Diferente de como é construída a lagrangeana dos campos fermiônicos e escalares na lagrangeana de gauge não abeliana já surge com dois termos de interação da forma $g^2 \partial_\mu W_\nu [W_\mu, W_\nu]$ e $\sim W^\mu W^\nu W_\mu W_\nu$. Para quantizá-la é necessário separar a quantidade cinética, $(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2$ que é solúvel. Primeiramente reescrevendo-a como,

$$\mathcal{L}_{cinA} = \frac{1}{2} A^\mu (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu + \text{termos de superfície} \quad (4.35)$$

Os termos de superfície resultam em zero para campos evanescentes no infinito. O próximo passo para a quantização é definir correntes $J_\mu(x)$ que irão acoplar em A^μ no funcional gerador $Z[J]$ e inverter o funcional, $\frac{1}{2} \int dy (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu)$ que não possui inversa. O problema existe justamente por causa da liberdade de gauge da teoria que tornam a solução de encontrar a inversa não-única e assim uma maneira consistente de inverter o funcional em $Z[J]$ precisa levar em conta essa simetria. O método criado por Faddeev e Popov foi notar que um truque de integração permitia reescrever o lagrangeano de forma a tornar a parte cinética inversível. Para tanto, é necessário tomar uma condição de gauge na forma $F^A[W_\mu] = C^A(x)$ e reescrevê-la na forma

funcional,

$$\Delta_F^{-1}[W_\mu] = \int DU \delta[F^A[W_\mu^U] - C^A(x)] \quad (4.36)$$

onde $\delta[F] = \prod_{x^\mu, A} \delta(F^A[W_\mu])$ é o funcional delta de Dirac e W^μ são os possíveis campos W relacionados por transformações de gauge U . Como o elemento DU é invariante de gauge, $\Delta[W_\mu]$ também o é, e é possível reescrever o gerador funcional de uma maneira interessante²³,

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int DW_\mu \Delta[W_\mu] \int DU \delta[F^A[W_\mu^U] - C^A(x)] e^{iS} = \\ &= \int DU \int DW_\mu \Delta[W_\mu] \delta[F^A[W_\mu^U] - C^A(x)] e^{iS} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Fazendo uma transformação de gauge que leve $A_\mu^U \rightarrow A_\mu$ e notando que $DA_\mu^U = DA_\mu$,

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int DU \left(\int DW_\mu \Delta[W_\mu] \delta[F^A[W_\mu] - C^A(x)] e^{iS} \right) = \\ &= (cte) \int DW_\mu \Delta[W_\mu] \delta[F^A[W_\mu] - C^A(x)] e^{iS} = \\ &= (cte) e^{\frac{i}{2\zeta} \int dx (C^A(x))^2} e^{-\frac{i}{2\zeta} \int dx (C^A(x))^2} \int DW_\mu \Delta[W_\mu] \delta[F^A[W_\mu] - C^A(x)] e^{iS} \end{aligned} \quad (4.38)$$

ou seja,

$$Z[J] = N \int DW_\mu \Delta[W_\mu] e^{i(S + \frac{i}{2\zeta} \int dx (F^A[W_\mu])^2)} \quad (4.39)$$

Com isso o termo $(F^A[W_\mu])^2$ somado ao termo cinético permite que o funcional seja invertido. Para completar a quantização é necessário obter uma forma para o termo $\Delta[A_\mu]$ que possa ser utilizado para o cálculo. O funcional delta de Dirac é semelhante à função de Dirac onde,

$$\delta(f(w)) = \sum_i \frac{\delta(w - w_i)}{\left| \frac{df(w_i)}{dw} \right|} \quad (4.40)$$

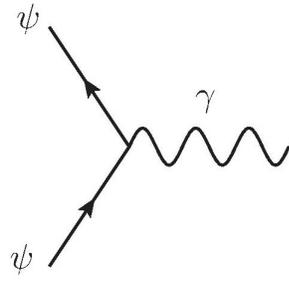
onde w_i são os zeros da função f . Ou seja, escrevendo $\Delta[A_\mu] = \det \left\{ \frac{\delta F}{\delta a} \Big|_{F=0} \right\} = \det\{M\}$, obtém-se,

$$\Delta[A_\mu] \Delta^{-1}[A_\mu] = \int DU \quad (4.41)$$

e assim, ignorando as constantes,

$$Z[J] = \int DW_\mu \det \left\{ \frac{\delta F}{\delta a} \Big|_{F=0} \right\} e^{i(S + \frac{i}{2\zeta} \int dx (F^A[W_\mu])^2)} \quad (4.42)$$

²³pois $\Delta[W_\mu] \Delta^{-1}[W_\mu] = 1$



$$= i \int dx \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\alpha(x)} \right) \Big|_{J=0} Z_0[J] = e \gamma^\mu$$

e as funções externas[13],

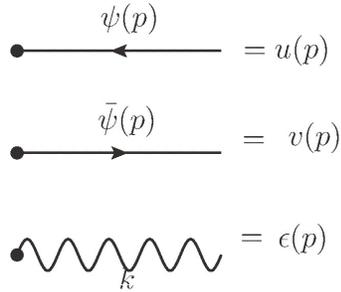


Figura 4.1: Funções da QED.

Capítulo 5

Renormalização

Aqui será apresentada uma revisão teórica sobre os conceitos básicos envolvidos na estruturação, motivação e interpretação física da abordagem das equações do grupo e renormalização sobre a evolução das constantes da teoria.

5.1 Introdução à Renormalização

O tratamento de problemas que envolvem o conceito de campos quânticos envolve a resolução de equações que, em sua maioria, não possui uma solução analítica e, com isso, é necessário uma análise perturbativa do problema.

Em geral, sabe-se o Hamiltoniano de dois tipos de partículas, H_1 e H_2 , cuja solução já é conhecida:

$$H_i a_{\alpha_i}^\dagger |0\rangle = E(\alpha_i) a_{\alpha_i}^\dagger |0\rangle, \quad (5.1)$$

e tem por objetivo estudar as consequências de uma interação ou um termo adicional no Hamiltoniano,

$$H = H_1 + H_2 + H_{1,2}, \quad (5.2)$$

que possui, agora, um estado de vácuo diferente, por suposição, não degenerado, $|\Omega\rangle$.

A análise é feita utilizando-se do Teorema de Gell-Mann–Low, que permite relacionar o estado de vácuo da teoria sem a interação com a teoria com interação de forma que seja possível fazer uma expansão da exponencial em termos do operador H_I , que pode ser representada pelos diagramas e regras Feynman. Ao efetuar o cálculo de tais diagramas (ou de alguma ordem da expansão), encontra-se integrais divergentes que parecem tornar o cálculo inconsistente. O processo de renormalização surgiu para 'curar' tais divergências de forma sistemática, a cada ordem do cálculo perturbativo e é feito a partir de três passos, primeiro regulariza-se as integrais divergentes, ou seja, modifica a teoria de tal forma que ela se torne dependente de um parâmetro finito e se torne finita em todas as ordens de perturbação, o parâmetro deve ser introduzido de tal forma que, ao final do cálculo, um limite sobre o parâmetro pode ser tomado para tornar a teoria de volta à original.

O segundo passo, o mais crucial, é perceber que as partículas da teoria sem interação **não** são as mesmas que as partículas interagentes, ou seja, os parâmetros, tais como massa e carga, normalização da função de onda, devem ser expressos com os parâmetros da teoria interagente e não da teoria livre. Esse reconhecimento é exatamente a renormalização, e consiste em relacionar as propriedades da teoria livre para a teoria interagente.

O ultimo passo consiste em tomar o limite, agora controlado, e voltar para a teoria original, interagente. Essa forma é consistente, pois as relações entre os parâmetros não-renormalizadas e renormalizadas são totalmente não-observáveis e essa relação possibilita gerar resultados finitos e que concordam experimentalmente.

5.1.1 Renormalização na Eletrodinâmica Quântica (QED)

Um exemplo importante onde é possível analisar aonde surge o problema das divergências e como é possível eliminá-las de forma sistemática é o problema encontrado na QED.

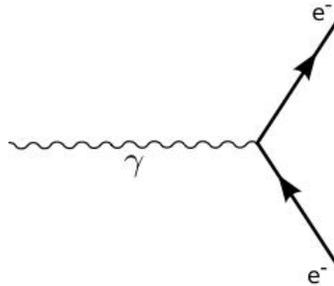


Figura 5.1: Gráfico de Feynman da QED

A teoria consiste em um Hamiltoniano de férmions de Dirac em quatro dimensões, $D = 4$, livres (ψ), com espectro de energia da forma $E(\vec{p}) = \sqrt{p^2 + m_0^2}$, onde m_0 é interpretado como a massa da partícula, e bósons (A^μ) sem massa, com espectro de energia da forma $E(\vec{k}) = |\vec{k}|$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. A interação é feita através de um hamiltoniano da forma:

$$H_i = e_0 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (5.3)$$

Tal interação gera um diagrama representado na figura 5.1 e que descreve o fator de

vértice $-e_0\gamma^\mu$. O propagador do fóton, cuja equação, no espaço de momentos é:

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (5.4)$$

A partir do gráfico de vértice da figura 5.1, é possível construir correções de segunda ordem ao propagador do fóton e que é diagramada em primeira ordem na figura 5.2. Tal correção, chamada *auto-energia do fóton* é escrita matematicamente na forma[11],

$$\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \left[1 - g_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \right] \quad (5.5)$$

Onde,

$$ig^{\mu\nu} A(k^2) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m_0)\gamma^\nu(\not{p} + m_0)]}{[(p+k)^2 - m_0^2 + i\epsilon][p^2 - m_0^2 + i\epsilon]} \quad (5.6)$$

Tal integral é quadraticamente divergente, para ver isso basta notar que o numerador vai com $\sim p^6$ enquanto o denominador vai com $\sim p^4$, assim, como os limites de integração são por todo o espaço de momento, a integral diverge.

Essa aparente inconsistência da segunda ordem de perturbação ser infinita, enquanto deveria ser menor que o termo principal, é a motivação para a criação do método de renormalização.

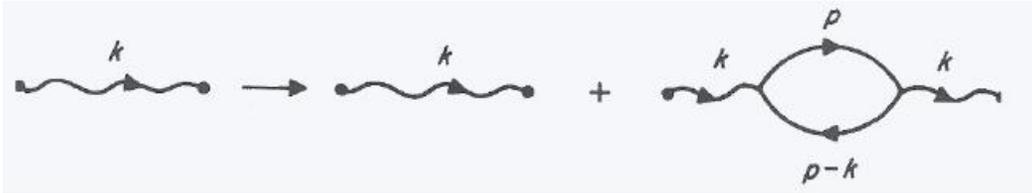


Figura 5.2: correções ao gráfico da fig.5.1 em ordem quadrática

O primeiro passo para retirar a divergência é usar algum método de regularização. O método mais intuitivo é limitar a integral da Eq.(5.6), para $|p| < \Lambda$. Assim, para recuperar a teoria original, basta fazer $\Lambda \rightarrow \infty$ no fim do cálculo (Esse método, denominado de método de Pauli-Villars, apesar de bastante intuitivo quebra a invariância de Gauge e atribui uma massa para o fóton enquanto o limite não for feito. Existem outros métodos que evitam esse problema, tais como a regularização dimensional). Seja então $A(k^2)$ uma quantidade que depende de um parâmetro Λ , de tal forma que não seja mais divergente. Para manter a massa do *fóton livre* ainda

nula no limite $k^2 \approx 0$, $A(k^2) \rightarrow 0$ e assim,

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi(k^2), \quad (5.7)$$

onde,

$$A'(0) = \left. \frac{dA(k^2)}{d(k^2)} \right|_{k^2=0}$$

Toda a divergência da função $A(k^2)$ é direcionada para a sua primeira derivada. A função $\Pi(k^2)$, precisa ser a mesma para *qualquer método* de regularização e precisa ser finita e bem comportada ao tomar o limite para retornar à teoria original. Inserindo a Eq.(5.7) na Eq.(A.17),

$$\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e_0^2 \rightarrow \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)] + \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e_0^4 \Pi(k^2) \quad (5.8)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq.(5.8) é, justamente, o lado esquerdo, multiplicado por uma constante, $[1 - e_0^2 A'(0)]$, que se tornará infinita no limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Aqui, surge o ponto crucial: o parâmetro e_0 é o parâmetro da teoria livre, que cujo objetivo é relacionar com o parâmetro de uma teoria interagente. Essa tentativa gera divergências que precisam ser re-interpretadas, a carga observada está relacionada com a carga de um elétron livre, da forma

$$e^2 = e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)]. \quad (5.9)$$

Essa equação é uma reinterpretação da carga observável do elétron, e é o equivalente a imaginar que ao construir a hamiltoniana do sistema, utilizamos o parâmetro de forma errônea (a hamiltoniana real, é aquela com a carga renormalizada). Embora o cálculo para a Eq.(5.9) tenha sido feito apenas em primeira ordem, ele pode ser incorporado em todas as ordens de grandeza, eliminando quaisquer divergências que apareçam para esse tipo gráfico em cada ordem²⁴. Invertendo a Eq.(5.9)

$$e_0 = e [1 + O(e^2)], \quad (5.10)$$

²⁴Para teorias não-renormalizáveis, o número de gráficos divergentes é *infinito*, a cada ordem de grandeza podem aparecer mais gráficos, diferentes dos anteriores, o que torna o método inviável

e inserindo na Eq.(5.8),

$$\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e_0^2 \rightarrow \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e^2 + \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e^4 \Pi(k^2) + O(e^6) = \frac{-e^2 g^{\mu\nu}}{k^2 + e^2 \Pi(k^2) + i\epsilon} \quad (5.11)$$

para $e \ll 1$. Obtendo uma nova forma para o propagador.

5.1.2 Teorias Renormalizáveis

Para propor uma lagrangeana consistente com o método de quantização apresentado é necessário entender quais interações são possíveis de inclusão sem que o princípio de renormalização seja quebrado. De maneira geral, o grau de divergência está ligado às possíveis correções do propagador da teoria, que irá constituir todas as interações internas possíveis. Tal termo é calculado a partir dos gráficos de Feynman irreduzíveis de uma partícula, dados pela expansão da função W , $\left(\frac{1}{i}\right)^{E_f} \left(\frac{\delta^{E_f}}{\delta J_\alpha(x)}\right)^{E_f} \hat{W} \Big|_{J=0}$. O grau de divergência $d_{\text{divergencia}}$ de tal função é dado pela potência de momentos a serem integrados no numerador menos a potência de momentos no denominador. Em geral se $d > 0$ a interação diverge para $p \rightarrow \infty$. A integral tem fator $d_{\text{divergencia}} \left(\int d^D p\right) = D$. Para calcular $d_1 \equiv d_{\text{divergencia}} \left(\left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 \hat{Z}}{\delta J_\alpha(x) \delta J_\beta(y)} \Big|_{J=0}\right)$, $\hat{w} = \ln \hat{z}$, são necessários conhecer três números relativos à ordem de perturbação,

$$I_f = \text{número de linhas internas do tipo } f$$

$$E_f = \text{número de linhas externas do tipo } f$$

$$N_i = \text{número de vértices de interação do tipo } i.$$

como o grau de divergência de cada propagador é da ordem $2(s_f - 1)$, onde s_f é o spin da partícula f ²⁵ e assim a contribuição dos propagadores para o grau de divergência é $\sum_f 2I_f(s_f - 1)$. A forma da interação dá um fator $\sum_f N_i d_i$ onde d_i é o número de derivadas atuando na interação i . O número de momento independente dentro de cada ordem de expansão é dado pelo número de linhas internas, entretanto cada vértice impõe uma condição nos momentos internos a menos da conservação de momento total da interação, portanto a contribuição é da forma $D \left[\sum_f I_f - \sum_i N_i + 1 \right]$, cuja soma dos fatores resulta em,

$$d = \sum_f I_f(2s_f + 2) + \sum_i N_i(d_i - D) + D \quad (5.12)$$

²⁵ Isso se aplica para campos massivos, no caso de spin-1 não massivos $s_f = 0$

entretanto as linhas externas e as linhas internas estão associadas ao número n_{if} de campos do tipo f em cada interação i na forma $2I_f + E_f = \sum_i N_i n_{if}$, ou seja,

$$d = D - \sum_f E_f (s_f + 1) - \sum_i N_i \Delta_i \quad (5.13)$$

onde

$$\Delta_i \equiv D - d_i - \sum_f n_{if} (s_f + 1) \quad (5.14)$$

Como Δ_i está diretamente associado à ordem de interação calculada $\sum_i N_i$, se $\Delta_i > 0$ em algum momento do cálculo perturbativo $D \leq 0$ e a integral é convergente para os momentos internos. Isso significa que em um dado momento a renormalização pode ser truncada. Caso contrário, infinitos gráficos divergentes aparecerão e a cada ordem a renormalização precisa ser refeita. Se $\Delta_i = 0$ a renormalização depende do tipo de partícula e da dimensão espacial. O parâmetro Δ_i define, portanto, se dada interação é ou não renormalizável.

5.1.3 Renormalização da Teoria de Gauge e do Acoplamento de Yukawa

O Modelo Padrão da teoria de partículas e suas extensões são criadas a partir das teorias de Gauge e o acoplamento de Yukawa e sua renormalizabilidade deve ser apresentada. Na tabela (5.1), como é possível notar, todas as interações possuem $\Delta_i = 0$ para $D = 4$ e o grau de divergência é dado pelas linhas externas. Em especial

Interação	Δ_i	$\Delta_i(D = 4)$
$\lambda \phi^N$	$D - N$	$4 - N$
$g \phi \bar{\psi} \psi$	$D - 4$	0
$g^2 \phi^2 A_\mu A^\mu$	$D - 4$	0
$A_\mu A_\nu A^\mu A^\nu$	$D - 4$	0
$A_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu$	$D - 4$	0
$g A \bar{\psi} \psi$	$D - 4$	0

Tabela 5.1: Grau da Renormalização da teoria, com férmions ψ , escalares ϕ e bosons de Gauge A_μ .

está a *QED*. Como $s_f = 0, 1/2$ para os campos A_μ e ψ respectivamente, os gráficos de Feynman divergentes são aqueles onde $d > 0$. Para $D = 4$ isso acontece quando há,

1 Duas linhas externas de Fótons $d = 2$, auto-interação do fóton fig.5.3

2 Duas linhas externas de Férmions $d = 1$ auto-interação do elétron fig.5.3

3 Duas linhas externas de Férmions $d = 0$ correção de vértice fig.5.3

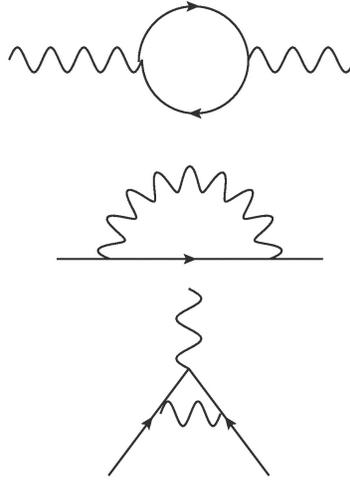


Figura 5.3: Diagramas divergentes da QED, em ordem: Auto-interação do fóton, Auto-interação do elétron e Correção de Vértice.

5.1.4 Equações do Grupo de Renormalização

O processo de renormalização através das equações do grupo de renormalização utiliza-se das considerações citadas e da propriedade de invariância das constantes físicas perante à escala. O princípio surge no fato de que as constantes da lagrangeana nua (sem a renormalização), que serão denotadas com um sub-índice B , não podem depender da escala tratada no problema. Em contrapartida, o processo de regularização (dimensional) impõe uma escala natural no problema fazendo com que as constantes observadas experimentalmente dependam da escala, isso somado com o teorema de Euler para funções homogêneas implica em uma equação diferencial que relaciona a escala de energia do problema e o valor das 'constantes' que, por possuírem tal característica dinâmica, são chamadas de *running coupling constants*.

5.1.4.1 Renormalização da QED

Para ilustrar o método do grupo de renormalização o estudo inicia-se através da renormalização da QED, que como mostrado possui três gráficos divergentes. O primeiro passo para a renormalização é a identificação de tais gráficos e a utilização de algum processo de regularização para que as divergências sejam momentaneamente controladas, o método de regularização aqui utilizado é a regularização dimensional

que substitui a dimensão D da teoria por uma dimensão D' de tal forma que é possível escrever as equações e propagadores em função do parâmetro $D - D' = \epsilon$ que ao final é tomado como zero nos termos finitos. Na QED os três gráficos a serem analisados estão apresentados na fig.5.3 e cada gráfico contribui para uma equação na forma,

Figura 5.4: equação de correção do propagador em primeira ordem

A regularização dimensional requer que a constante de acoplamento da teoria $e_B = e_0$ seja substituída por um fator que depende de uma escala qualquer μ , de forma que sua dimensão permaneça a mesma $e_0 \rightarrow e_0 \mu^{2-D/2} = e_0 \mu^\epsilon$. Com isso o cálculo das correções dos fatores são dadas por quatro parâmetros infinitos Z_1 , Z_2 , Z_3 e m' e três funções finitas, $\Pi(q)$, $\Sigma(p)$ e $\Gamma(p)$,

$$\begin{aligned} D^{\mu\nu}(q) &= \frac{-iZ_3^{-1}g^{\mu\nu}}{q^2(1 + \Pi(q))} \\ D(p) &= \frac{-iZ_2^{-1}}{\not{p} - m' - i\Sigma(p)} \\ \gamma^\mu \rightarrow \Gamma^\mu &= (1 - Z_1)\gamma^\mu - \frac{e_0^2}{16\pi^2 m} p^\mu \end{aligned} \quad (5.15)$$

As formas das funções $\Pi(q)$, $\Sigma(p)$ não são relevantes para o processo de renormalização, embora elas precisem ser calculadas ao analisar quantidades físicas em alguma ordem de perturbação. O cálculo se encontra no apêndice A e obtém-se,

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 - \frac{me^2}{8\pi^2\epsilon} \\ Z_2 &= 1 - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} \\ Z_3 &= 1 - \frac{e^2}{12\pi^2\epsilon} \\ m' &= m + \delta m = m + \frac{5e^2}{16\pi^2\epsilon} \end{aligned} \quad (5.16)$$

note que $Z_i, m' \rightarrow \infty$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ e é por essa razão que os infinitos aparecem na teoria. A forma que tais correções aparecem na teoria são cruciais, em primeiro lugar a massa do fóton em seu propagador continua sendo zero, o que é uma consequência garantida pela invariância de Gauge. O segundo ponto aparece ao perceber que

todas essas correções são correções causadas por termos equivalentes aos termos *já existentes* na lagrangeana, ou seja, os termos Z_i são gerados por

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &\rightarrow Z_3 F_{\mu\nu}, \\
\bar{\psi}\not{\partial}\psi &\rightarrow Z_2 \bar{\psi}\not{\partial}\psi \\
e_0 \bar{\psi} \not{A} \psi &\rightarrow e_0 Z_1 \bar{\psi} \not{A} \psi \\
m \bar{\psi} \psi &\rightarrow \delta m \bar{\psi} \psi
\end{aligned} \tag{5.17}$$

assim, a proposta se torna a modificação da lagrangeana para uma nova lagrangeana, $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{ct}$, onde

$$\mathcal{L}_{ct} = i Z_2 \bar{\psi} \not{\partial} \psi - \delta m \bar{\psi} \psi - \frac{Z_3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - Z_1 e_0 \mu^{2-D/2} \bar{\psi} \not{A} \psi \tag{5.18}$$

com isso, renomeando os campos $\psi_r = \sqrt{Z_2} \psi$, $A_{r\mu} = \sqrt{Z_3} A_\mu$, $m_r = (m + \delta m) Z_2^{-1}$ e em especial,

$$e_r = z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} \mu^{2-D/2} e_0 = Z_3^{-1/2} e_0 \mu^\epsilon \tag{5.19}$$

e utilizando-se dos propagadores e funções de vértices corrigidas, não há necessidade de incluir os gráficos divergentes e qualquer grandeza física se torna automaticamente finita em qualquer ordem de interação que a correção na lagrangeana for feita. Esse é o processo de renormalização.

5.1.4.2 Renormalização Através de Contra termos

Com isso é possível descrever o método de renormalização de forma prática,

- 1 Calcule a divergência da teoria através da função d .
- 2 Encontre os gráficos infinitos.
- 3 Utilize algum método de regularização para evidenciar a parte infinita dos gráficos.
- 4 Reescreva a lagrangeana como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{ct}$, onde \mathcal{L}_0 é a lagrangeana inicial e \mathcal{L}_{ct} é a lagrangeana de contra-termos, escrita com os termos necessários para cancelar a divergência.
- 5 No cálculo dos gráficos de Feynman utilize os novos propagadores e não utilize os gráficos divergentes na durante a perturbação.

6 Reinterprete as novas constantes como constantes renormalizáveis que dependem da escala de energia através das *equações do grupo de renormalização*.

O último passo é necessário pois o valor das constantes renormalizadas varia com a escala, efeito causado pela imposição das constantes da teoria não mudarem. Isso significa que em algumas teorias, como a *cromodinâmica quântica* (QCD), pode acontecer de a constante de acoplamento deixar de ter um valor $\ll 1$ e a teoria de perturbação se tornar inconsistente. Com esses passos é possível eliminar os infinitos intrínsecos da teoria e com isso calcular grandezas físicas de forma sistemática e eficiente, assim uma teoria renormalizável é aquela que permite tal processo e isso quer dizer que apenas a contagem da divergência não é o suficiente para dizer se uma teoria é ou não renormalizável, três fatores devem ser considerados: (1) Existem constantes o suficiente que possam ser renormalizadas para absorver os infinitos. (2) A lagrangeana de contra-termos deve ter a mesma estrutura que a lagrangeana inicial, caso contrário novas correções precisarão ser feitas e o processo se torna infinito (3) Por fim, se a teoria possui quebra espontânea de simetria, a renormalizabilidade ainda precisa ser provada.

5.1.4.3 Equações do Grupo de Renormalização

O próximo passo consiste em entender o que acontece com as constantes de acoplamento com a mudança na escala de energia. Como durante o processo a introdução de uma escala μ é necessária para compensar a mudança de dimensões, a equação que define a constante de acoplamento e_r (renormalizada) se torna dependente do parâmetro μ . No entanto a constante e_0 é um parametro fixo da lagrangeana e não pode depender de tal escala. Isso quer dizer que para compensar essa dependencia explicita em μ a constante obedece $e_r = e_r(\mu)$. Para encontrar a dependencia na escala de energia faz-se uso do *teorema de Euler para funções homogêneas*,

Definição : Uma função $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ é dita homogênia de grau p se,

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall t \in \mathcal{R} \quad (5.20)$$

Teorema de Euler: Seja $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ uma função homogênia de grau p , então,

$$x_i \partial_i f(x_1, x_2, \dots, x_n) = p f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.21)$$

De fato, como $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$\frac{d}{dt} f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = x_i \partial_i f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = pt^{p-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.22)$$

como vale para qualquer $t \in \mathcal{R}$, é verdade para $t = 1$ e, portanto, a Eq.(5.21) está provada.

Dessa forma, dada uma função $\Gamma_r = \Gamma_r(p_i, g_i, \mu)$ uma função que descreve alguma quantidade física e que depende dos momentos p_i da reação e as possíveis constantes de acoplamento g_i e a escala de renormalização μ e que possui dimensionalidade D e está relacionado com a sua quantidade não renormalizada através das funções Z_i ,

$$\Gamma = f(Z_i) \Gamma_r(\mu) \quad (5.23)$$

assim,

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma = [\mu \partial_\mu f(Z_i) + \mu \partial_\mu + \mu (\partial_\mu g_r) \partial_{g_r}] \Gamma_r = 0 \quad (5.24)$$

define-se então as funções beta das constantes da teoria,

$$\mu \partial_\mu g_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \beta_{g_i}(g_i, \mu) \quad (5.25)$$

e assim, sabendo a forma da função beta de cada constante é possível calcular a forma que as funções Γ_r , pois como a função Γ_r tem dimensionalidade D e é formada pelas variáveis g_{ri}, p_{ri} e μ que tem a mesma dimensionalidade, irão aparecer sempre como polinômios de mesma ordem e isso significa que Γ_r é uma função homogênea de ordem D . Daí, ao aplicar uma mudança de escala, $p \rightarrow tp$, $g_i \rightarrow tg_i$ e $\mu \rightarrow t\mu$,

$$[t \partial_t + g_i \partial_{g_i} + \mu \partial_\mu - D] \Gamma = 0 \quad (5.26)$$

onde os índices r foram omitidos. Usando Eq.(5.26) em Eq.(5.24),

$$[-t \partial_t + (\beta_i - 1) \partial_{g_i} + D] \Gamma(tp, g_i, \mu) = 0 \quad (5.27)$$

Em especial, na QED, derivando a Eq.(5.19) resulta em,

$$\beta_e = \frac{e^3}{12\pi^2} > 0 \quad (5.28)$$

o que significa que a carga e varia com a escala na forma,

$$e^2 = \frac{e^2(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{12\pi^2} \ln(\mu/\mu_0)} \quad (5.29)$$

que tem a forma,

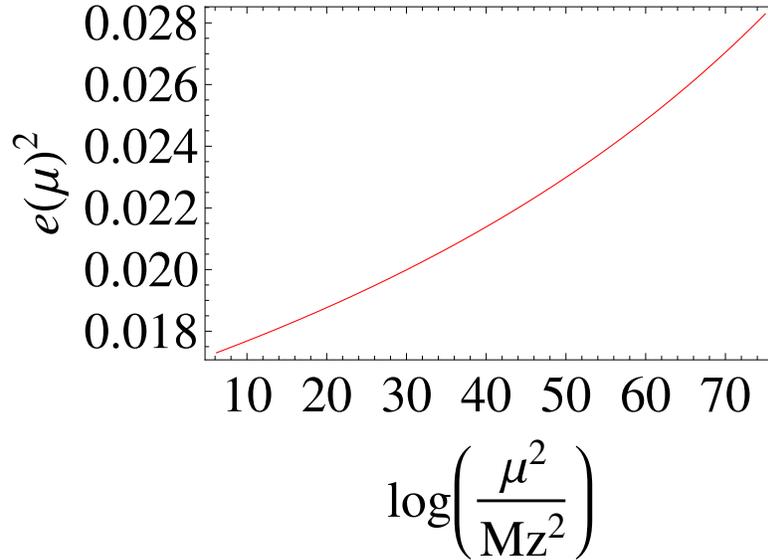


Figura 5.5: Running da constante de acoplamento eletromagnética

O ponto interessante acontece em teorias não-abelianas que em alguns casos permite $\beta < 0$ e isso faz com que a equação mude para,

$$g^2 = \frac{g^2(\mu_0)}{1 + bg^2 \ln(\mu/\mu_0)} \quad (5.30)$$

que possui um comportamento $g^2 \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow \infty$ que é conhecido como liberdade assintótica, aonde a constante de acoplamento tende a zero e a interação é nula nessa escala, como é possível ver no gráfico,

5.2 O Modelo Padrão

Com as cartas em mãos, a construção do Modelo Padrão, em inglês *Standard Model* (SM), através de simetrias, que devem ser escolhidas e impostas através de experimentos, se torna possível. A lagrangeana do sistema precisa ser invariante de Lorentz: isso quer dizer que qualquer partícula deve pertencer a alguma representação do grupo de Lorentz. Em especial, observações mostram que as partículas elementares até hoje descobertas são descritas por escalares, espinores e vetores. Em

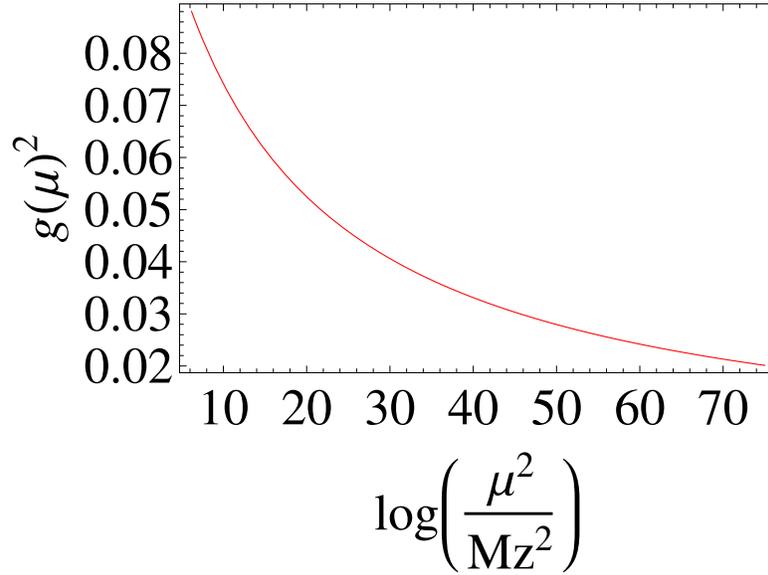


Figura 5.6: Running da constante de acoplamento da força forte

especial ainda há a possibilidade de existencia de tensores de ordem dois na quantização da gravidade. O SM possui dois setores de férmions que se distinguem pela capacidade (ou incapacidade) de interagir via força forte. Cada setor é constituído de três famílias que se transformam como uma representações do grupo $SU(2)$ e, para manter a invariância de gauge, existem três bósons vetoriais W_i^μ que mediam as interações do grupo, as interações fracas. As representações do modelo padrão seguem a notação *left/right*, onde os spinors são definidos como,

$$\psi_{L/R} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi. \quad (5.31)$$

Onde as partículas do tipo left são organizadas em uma representação de dubleto do grupo $SU(2)$ e se transformam da forma $\phi_L = e^{-i\alpha_a T^a} \phi_L$ e interagem fracamente e as partículas do tipo right não mudam sob transformações do grupo e são singletos de $SU(2)$. Assim, os férmions, carregados, $i = 1, 2, 3(e, \mu, \tau)$, são agrupados de forma que denota-se E_l , $l = 1, 2, 3$, os férmions incapazes de interagir via força forte, e são chamados de *léptons*. Enquanto os capazes de interagir via força forte são chamados de *quarks* e denotados como Q_i , $i = 1, 2, 3$. Dado o grupo de representação, os férmions podem ser,

$$E_{lL} = \begin{pmatrix} \psi_{lL} \\ \nu_l \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

e,

$$\psi_{eR} \quad (5.33)$$

enquanto que os quarks,

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d_{iL} \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

e

$$\begin{pmatrix} u_{iR} \\ d_{iR} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

Ambas as classes de férmions possuem partículas com carga hipercarga²⁶ e com isso fazem parte também de um grupo abeliano $U(1)_Y$ cujo campo de gauge é B^μ . Por fim, os quarks ainda possuem outro tipo de carga, a carga forte, que é uma representação do grupo $SU(3)$ e por consequência precisa de oito geradores g_μ^a . Além da invariância de gauge, a interação entre as partículas devem obedecer o princípio de renormalização e, portanto, as interações geradas pela mudança $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ de forma que D_μ seja renormalizável e seja invariante de gauge. Isso significa escrever,

$$D_\mu = \partial_\mu + giT^a W_\mu^a \quad (5.36)$$

onde W^a são os bósons de gauge e T^a são as matrizes dadas na representação do grupo de gauge. Para o SM, as partículas são descritas em uma representação bi-dimensional do grupo $SU(2)$ através das matrizes de Pauli.

5.2.1 O Problema das Massas

Com as interações definidas a partir das simetrias, existe os parâmetros das massas no modelo padrão. O experimento proposto por Yang e Lee [16] e realizado por C. S. Wu [17], sugere que deve haver alguma supressão da existência das interações fracas do tipo right. Isso significa que as interações W^μ não podem se conectar com as partículas right o que, de outra forma, significa $D_\mu \phi_R = \partial_\mu \phi_R$. Entretanto férmions massivos possuem um termo de massa da forma,

$$m\bar{\psi}_e \psi_e = m(\bar{\psi}_{eR} \psi_{eL} + \bar{\psi}_{eL} \psi_{eR}) \quad (5.37)$$

que não é invariante de gauge. Para consertar esse problema foi proposto por Glashow-Weinberg-Salam[19], um modelo de unificação entre os grupos de interação

²⁶A hipercarga após a quebra de simetria via modelo de Higgs se juntará com os auto-valores de um dos operadores do grupo $SU(2)$ para formar a carga elétrica

eletromagnética e fraca através do mecanismo de Nambu-Goldstone[21] e o mecanismo de Higgs[22] de quebra espontânea de simetria através da introdução de uma partícula escalar H que pode ter sido detectada recentemente [22] que, para manter a invariância de gauge precisa se conectar de forma invariante aos campos fermiônicos, a escolha do modelo padrão é propor um dubleto de $SU(2)$,

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

As partículas presentes no modelo padrão e suas características podem ser encontradas na tabela 5.5 e completam todas as partículas elementares do modelo padrão, cuja simetria de gauge é dada por²⁷ $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

5.3 Quebra Espontânea de Simetria

O conceito de quebra espontânea de simetria trouxe consigo a ideia de que embora um sistema possua uma certa simetria ela pode estar escondida, de forma que embora suas equações sejam simétricas as soluções não. Na física de partículas isso acontece já que em alguns casos o estado de vácuo é degenerado. Para construir a torre de partículas a partir dos operadores aniquilação e destruição é necessário a escolha de um estado de vácuo. Quando essa escolha é feita, o resultado é um sistema que não é mais simétrico, mas cujas outras soluções estão ligadas por transformações do grupo de simetria e são equivalentes.

5.3.1 Quebra de Simetria no Formalismo Lagrangeano

Uma simetria exata implica em duas propriedades,

- Sob uma transformação do grupo de simetria, $\delta L = 0$, ou, de outra forma, se $\delta L = 0$, para alguma transformação, existe um grupo de simetria associado a tal transformação, de forma que as equações de movimento são invariantes.
- O estado de vácuo (ou estado de menor energia) fica *invariante* perante a ação de alguma transformação de um grupo de geradores (cargas), Q_i , tal que, $Q_i |0\rangle = 0, Q_i \in G$

²⁷Os índices nos grupos significam, C de tripleto de cores, L de dubleto de isospin e Y de hipercarga

E isso implica que $[Q_i, L] = 0$, e portanto, os multipletos de partículas precisam ser degenerados de massa.

Existem dois tipos de quebra de simetria,

A) O primeiro consiste em adicionar à lagrangeana simétrica, L_0 , um pedaço L_1 que não é invariante completamente ao grupo de simetria G , referente à lagrangeana inicial, porém, podendo ser simétrico a algum subgrupo $G' \in G$. Escrevemos, então,

$$L = L_0 + cL_1 \quad (5.39)$$

e assim, $Q_i |0\rangle \rightarrow 0$, quando $c \rightarrow 0$.

B) O segundo passo é o mecanismo de quebra espontânea de simetria, nesse caso, $\delta L = 0$, mas $Q_i |0\rangle \neq 0$ [12]. Esse resultado é uma consequência da *dinâmica*: ela torna o estado de vácuo *degenerado* e isso acontece por causa da simetria original. Como o estado de vácuo é degenerado, existe uma inevitável escolha de um dos estados de vácuo (que podem ser continuamente degenerado), essa escolha mesmo que arbitrária quebra espontaneamente a simetria.

Como consequência dessa quebra, existe o *Teorema de Goldstone*:

Quando há uma quebra espontânea de uma simetria contínua, é necessário existir uma partícula sem massa de spin zero (Bóson de Nambu-Goldstone)

Para compreender como se dá esse processo, é necessário entender o que acontece quando há uma simetria com relação a translação espacial, isto é, $[P^\mu, Q] = [L, Q] = 0$. Nesse caso existem não apenas uma, mas duas opções, e isso é ilustrado pelo

Teorema de Fabri-Picasso[12]: Seja uma lagrangeana L dada, invariante por alguma simetria contínua global interna, cuja corrente conservada $J^\mu \rightarrow \partial^\mu J_\mu = 0$, cuja carga associada é $Q = \int J^0 d^3x$. Então, existem duas possibilidades,

- (a) $Q |0\rangle = 0, Q \in G$
- (b) $Q |0\rangle \neq 0$.

Prova: Considere o elemento $\langle 0 | J^0(x) Q |0\rangle = \langle 0 | e^{iPx} J^0(0) e^{-iPx} Q |0\rangle$. Como Q é uma simetria interna e $[L, P_\mu] = 0, [Q, P_\mu] = 0$, assim,

$$\langle 0 | J^0(x) Q |0\rangle = \langle 0 | J^0(0) Q |0\rangle \quad (5.40)$$

integrando,

$$\int d^3x \langle 0 | J^0(x) Q | 0 \rangle = \langle 0 | Q Q | 0 \rangle = \int d^3x \langle 0 | J^0(0) Q | 0 \rangle = V \langle 0 | J^0(0) Q | 0 \rangle \quad (5.41)$$

No limite de volume infinito, a segunda parte da equação é infinito a menos que $Q | 0 \rangle = 0$, ou seja, $|Q | 0 \rangle|^2 = 0$ ou ∞ .

5.3.2 Boscão de Goldstone

O resultado anterior traz uma consequência fundamental: Na possibilidade onde $Q | 0 \rangle \neq 0$, partículas *sem massa*, isto é, $P^0(x) | \alpha \rangle = 0$ devem existir. Suponha que um campo $\phi(x)$ não seja invariante pela simetria anterior descrita, Q , mas que $\exists \phi'(x) = [Q, \phi(x)]$, de tal forma que o seu valor esperado no vácuo (VEV) seja diferente de zero:

$$\langle 0 | \phi'(x) | 0 \rangle \neq 0 \quad (5.42)$$

Note que, caso seu VEV seja de fato zero, o que acontece é a possibilidade (a) do teorema de Fabri-Picasso. Mas como não é zero,

$$\begin{aligned} 0 \neq \langle 0 | \phi'(x) | 0 \rangle &= \langle 0 | [Q, \phi(x)] | 0 \rangle = \langle 0 | \left[\int d^3x' J^0(x'), \phi(x) \right] | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \left[\int d^3x' J^0(x'), \phi(0) \right] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (5.43)$$

Como a corrente J^μ é conservada²⁸

$$\partial_0 \langle 0 | \left[\int d^3x' J^0(x'), \phi(0) \right] | 0 \rangle = - \int dS \langle 0 | \left[\int d^3x' \vec{J}(x'), \phi(0) \right] | 0 \rangle = 0 \quad (5.44)$$

Isso mostra que $\langle 0 | \phi'(x) | 0 \rangle \neq 0$ é independente de x^0 , dessa forma, usando uma base completa de auto-estados $\sum_n |n\rangle \langle n| = \infty$,

$$0 \neq \langle 0 | \phi'(x) | 0 \rangle = \int d^3x \sum_n [\langle 0 | J^0(0) | n \rangle \langle n | \phi'(0) | 0 \rangle e^{-ip_n x} - \langle 0 | \phi'(0) | n \rangle \langle n | J^0(0) | 0 \rangle e^{ip_n x}] \quad (5.45)$$

²⁸O último passo da equação é necessariamente verdade se a simetria for local via campos de Gauge, caso contrário, existe a possibilidade de que a igualdade não seja satisfeita.

agora é possível realizar a integração em \vec{x} , obtendo,

$$0 \neq \sum_n \delta^3(\vec{p}_n) [\langle 0 | J^0(0) | n \rangle \langle n | \phi'(0) | 0 \rangle e^{-ip_n^0 x} - \langle 0 | \phi'(0) | n \rangle \langle n | J^0(0) | 0 \rangle e^{ip_n^0 x}] \quad (5.46)$$

essa expressão é, no entanto, *independente de x^0* , isso significa que todas as contribuições com $p_n^0 \neq 0$ irão se anular, mas como tal quantidade não pode ser igual a zero, por hipótese, *devem* existir pelo menos um estado tal que $p_n^0 = 0$ que não se anule, mas essa condição só pode ser satisfeita para uma partícula de massa zero. Disso segue o teorema de Goldstone.

Teorema de Goldstone: Nas condições descritas, dada a existência de $[Q, P^\mu] = 0$ onde $Q |0\rangle \neq 0$ e de um campo cujo $VEV \neq 0$, tal campo possui modos *não massivos*.

Note que tal consequência não faz alusão ao tipo de operador Q e nem ao tipo de partícula ϕ . No entanto, se Q for um operador conhecido como *operador bosônico (fermiônico)*, o campo ϕ necessariamente precisa ser bosônico (fermiônico) para satisfazer as condições do teorema. A partícula sem massa é chamada de *Bóson de Goldstone*. Um detalhe importante é a necessidade de que ϕ seja um escalar ou espinor para que a lagrangeana seja invariante de Lorentz e para que $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle \neq 0$ ao mesmo tempo.

5.3.3 Quebra Espontânea de Simetria no Modelo Padrão

O mecanismo de quebra espontânea de simetria é largamente utilizado no Modelo Padrão, sendo uma de suas pedras fundamentais, já que bosons vetoriais massivos violam a tão celebrada simetria de Gauge. A necessidade de bosons massivos surge de um argumento experimental: A massa de W^\pm e Z^0 estão em torno de $90\text{GeV}/c^2$ sendo que a simetria de gauge impõe uma massa nula. O que acontece para que seja possível essa conciliação é o chamado mecanismo de Higgs, onde um bóson escalar com estado de vácuo degenerado é adicionado de forma que, ao haver a quebra espontânea de simetria, tais bósons possam adquirir massa sem violar a invariância de Gauge na lagrangeana inicial. Para ilustrar o processo será tratado aqui tal mecanismo mas de forma a evidenciar a geração de massas para férmions,

pois esta será a principal abordagem teórica desse trabalho.

5.4 A Lagrangeana do Modelo Padrão

Com isso, pode-se escrever a lagrangeana do modelo padrão antes da quebra espontânea de simetria,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SM} = & \sum_{l=e,\mu,\tau,u,c,b} l_L(i\not{D} - m_l)l_L + l_R(i\not{D} - m_l)l_R \\
& + Y_e l_R H^\dagger l_L + Y_u u_R (H_+^\dagger, H_0^\dagger) Q_L + Y_u^\dagger d_R (H_0^\dagger, H_+^\dagger) Q_L^T + H.c. \\
& - \frac{1}{4} F_B^{\mu\nu} F_{\mu\nu B} - \frac{1}{4} Tr \{ F_W^{\mu\nu} F_{\mu\nu W} \} - \frac{1}{4} Tr \{ F_g^{\mu\nu} F_{\mu\nu g} \} \\
& (D_\mu H)^\dagger (D_\mu H) + \mu^2 H^\dagger H - \lambda (H^\dagger H)^2
\end{aligned} \tag{5.47}$$

com, $D_\mu l_{L,R} = (\partial_\mu - iyg_1 B_\mu - ig_2 \epsilon_{L,R} W_\mu)$, onde $\epsilon_L = 1, \epsilon_R = 0$ e também, $D_\mu H = (\partial_\mu - ig_1 B_\mu - ig_2 W_\mu) H$. Os parâmetros da teoria foram medidos através de experimentos e são fornecidos pelo PDG[18] e os gráficos de Feynman na fig.5.7

Por fim, os parâmetros como a massa do Boson de Higgs, e as constantes da lagrangeana, são,

$$\begin{aligned}
\mu & \sim 90\text{GeV} \\
\lambda & \sim 0.13 \\
m_H & = 126\text{GeV}
\end{aligned}$$

e o ângulo de mistura de Weinberg,

$$\sin^2 \theta_w = 0.2277(16) \tag{5.48}$$

5.4.1 Unificação Eletrofraca

O mecanismo de Higgs pode ser utilizado para arrumar dois problemas, a violação de CP que é resolvido introduzindo a matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa, que diagonaliza a matriz de massa dos quarks²⁹[23] gerada também pelo mecanismo de Higgs, bastando tomar a matriz de acoplamento de Yukawa, Y_u , diferentemente do caso leptônico, não diagonal na base das famílias. O segundo problema a ser

²⁹Um mecanismo parecido mais a frente será utilizado para explicar a oscilação de neutrinos

Partículas	Geração (Sabor)/interação	Representação Lorentz
(e, ν_e) e (u, d)	1 ^a	spinors
(μ, ν_μ) e (c, s)	2 ^a	spinors
(τ, ν_τ) e (b, t)	3 ^a	spinors
glúons= g	força forte	vetores
W^\pm, Z^0	força fraca	vetores
A_μ	força eletromagnética	vetor
H	quebra de simetria	escalar

Tabela 5.2: Notação das Partículas do SM

Partículas	Massas (MeV)	Hypercarga	Carga
$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 548.57990943(23) \\ ? > 0 \end{pmatrix}$	$Y_L = -1, Y_R = -2$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 931.494061(21) \\ ? > 0 \end{pmatrix}$	$Y_L = -1, Y_R = -2$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \tau \\ \nu_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1776.82(16) \\ ? > 0 \end{pmatrix}$	$Y_L = -1, Y_R = -2$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tabela 5.3: Léptons

Partículas	Massas(MeV)	hypercara	Carga
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.4(7) \\ 4.8(7) \end{pmatrix}$	$Y_L = 1/3, Y_{u_r} = 4/3, Y_{d_r} = -2/3$	$\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 95(5) \\ 1275(25) \end{pmatrix}$	$Y_L = 1/3, Y_{c_r} = 4/3, Y_{s_r} = -2/3$	$\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4180(30) \\ 173500(600) \end{pmatrix}$	$Y_L = 1/3, Y_{b_r} = 4/3, Y_{t_r} = -2/3$	$\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

Tabela 5.4: Parâmetros dos quarks, mass renormalization scale ($\mu = 2GeV$)

Interação	Acoplamento ($\mu = M_Z$)	Massas (GeV)	carga
γ (eletromagnética)	$\alpha = e^2/4\pi = 0.0075072(7)$	0	0
Z (fraca)	$\hat{\alpha} = 1/127.944(14)$	$M_Z = 91.1876(21),$	$Z = 0$
W^\pm (fraca)	$\hat{\alpha} = 1/127.944(14)$	$M_\pm = 80.385(15)$	$W^\pm = \pm 1$
g (Forte)	$\alpha_s = 0.118(3)$	0	0

Tabela 5.5: Parâmetros adicionais

resolvido é como gerar a massa dos bósons de Gauge sem que a invariância seja quebrada. O problema é resolvido ao impor invariância de gauge para a lagrangeana do bóson de Higgs, H , através da derivada covariante,

$$\partial_\mu H \rightarrow D_\mu H = (\partial_\mu + ig_1 B_\mu + ig_2 W_\mu) H \quad (5.49)$$

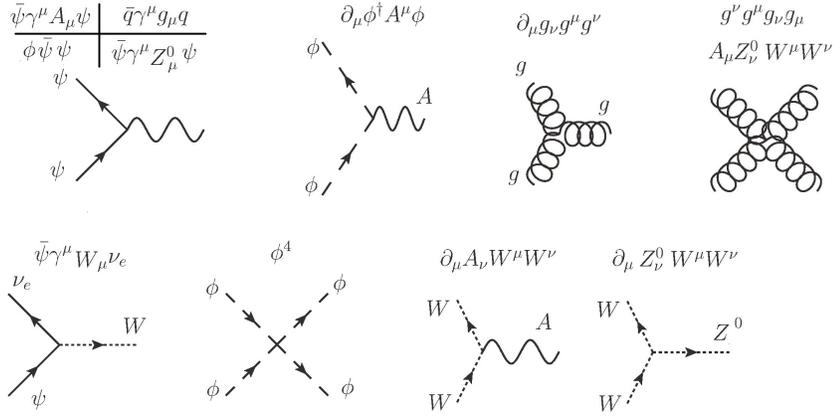


Figura 5.7: Interações do Modelo Padrão

que gera termos de interação na lagrangeana da forma,

$$\mathcal{L}_I \equiv g_1^2 H^\dagger B_\mu B^\mu H + 2g_1 g_2 H^\dagger B_\mu W_i^\mu \tau^i H + g_2^2 H^\dagger \vec{W}_\mu \times \vec{W}^\mu H \quad (5.50)$$

onde τ são as matrizes geradoras do grupo $SU(2)$. Ao escolher um estado de vácuo, $H^0 \rightarrow H^0 - \xi$, as interações se tornam termos semelhantes a termos de massa,

$$\mathcal{L}_i = \nu^2 (g_1^2 B_\mu B^\mu + g_2^2 W_3^\mu W_\mu^3) \quad (5.51)$$

Esses termos podem ser reescritos com uma mudança de base,

$$\begin{aligned} B_\mu &= \cos\theta_w A_\mu + \sin\theta_w Z_\mu \\ W_\mu^3 &= -\sin\theta_w A_\mu + \cos\theta_w Z_\mu \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde θ_w é o ângulo de mistura fraco e relaciona o quanto o bóson A_μ do eletromagnetismo está relacionado com o bóson Z_μ da interação fraca. Para que A_μ não possua massa, como é o caso do fóton,

$$\tan\theta_w = \frac{g_2}{g_1} \quad (5.53)$$

e a Eq.(5.54) se torna,

$$\mathcal{L}_i = 4\nu^2 g_2^2 \sin^2 \theta_w Z^\mu Z^\mu = m_z^2 Z^\mu Z_\mu \quad (5.54)$$

Onde $Z = Z^0$ é responsável pela corrente neutra da força fraca e as correntes carregadas, $W^\pm = \frac{W^1 \pm iW^2}{\sqrt{2}}$. Esse resultado significa que quando há a quebra espontânea de simetria a simetria final é dada por $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_y \rightarrow SU(3) \times U(1)_{em}$

5.4.2 Geração de Massa para férmions

A lagrangeana do modelo padrão para a parte fermiônica (E_l, l_R) pode ser quebrada em duas partes, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I$. A primeira parte, a parte dinâmica tem a forma,

$$\mathcal{L}_D = i\bar{E}_l \not{D} E_l + i\bar{l}_R \not{D} l_R + \frac{1}{2}(D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) + \frac{1}{2}\mu^2 H^\dagger H - \frac{1}{4}\lambda(H^\dagger H)^2 + H.c. \quad (5.55)$$

Aqui, D_μ é a derivada covariante que depende dos bósons vetoriais \vec{W}_μ e B_μ de forma que E_l seja um dubleto $SU(2)_L \times U(1)_Y$, ou seja, $E_l = \begin{pmatrix} \psi_l \\ \nu_l \end{pmatrix}$, H - o campo de Higgs - seja também um dubleto escalar, complexo, $H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}$ e l_R é um singleto $SU(2)_R \times U(1)_Y$. Identifica-se o potencial referente ao Higgs,

$$V(H) = -\frac{1}{2}\mu^2 H^\dagger H + \frac{1}{4}\lambda(H^\dagger H)^2 \quad (5.56)$$

Cujo mínimo acontece com $|H|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$. Com isso é possível ver que existe um contínuo de estados onde o mínimo permanece o mesmo, basta fazer uma transformação de gauge da forma, $H' = e^{i\tau^A \alpha_A} H$, onde τ^A são as matrizes de representação de dubleto de $SU(2)$, que preserva a norma e portanto $|H'|^2 = |H|^2$ mantém o sistema no mínimo do potencial. Para $\mu \neq 0$, o mínimo é diferente de zero e o VEV do campo H é diferente de zero. Como existe a simetria de gauge na lagrangeana e tal simetria permanece existindo localmente, então há uma quebra espontânea de simetria prevista pelo teorema de Goldstone.

Para que os férmions ganhem massa a partir dessa quebra de simetria é necessário existir um acoplamento Higgs-Férmions. Uma forma de fazer isso sem que a simetria de gauge seja quebrada é através do *acoplamento de Yukawa*,

$$\mathcal{L}_I = \bar{l}_R Y H^\dagger E_l + H.c. \quad (5.57)$$

A matriz Y é chamada de matriz de Yukawa e precisa ser entendida como uma matriz de acoplamento entre os campos de Higgs, e as famílias de férmions, assim, abrindo de forma explícita a Eq. (5.57),

$$\mathcal{L}_I = (Y)^{ab} \epsilon^{ij} (H_i) (\bar{l}_R)_a (E_l)_{jb} + H.c. \quad (5.58)$$

ϵ é o tensor totalmente antisimétrico, cujos índices correm em $i, j = +, 0$ e a, b percorrem as possíveis famílias de férmions, no modelo padrão $a, b = e, \mu, \tau = 1, 2, 3$. Como o estado de vácuo do campo de Higgs é degenerado há a necessidade de escolha de um estado em particular. Embora todos sejam completamente equivalentes, a escolha $H_{VEV} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu^2}{\lambda} \end{pmatrix}$ é conveniente, nesse caso, fazendo $H^0 \rightarrow H^0 - \frac{\mu^2}{\lambda}$ o potencial $V(H)$ assume a forma³⁰,

$$V = -\frac{1}{2} \mu^2 |H_R^0|^2 + \frac{1}{4} \lambda |H_R^0|^4 + \text{termos lineares em } H + \text{termos de interação} \quad (5.59)$$

Os termos lineares em H são absorvidos por uma escolha no Gauge³¹ dos bósons \vec{W}_μ, B_μ e o escalar H_R^0 adquire uma massa diferente de zero e os outros três escalares provenientes do teorema de Goldstone são absorvidos pelos campos de gauge. Com essa escolha particular o acoplamento de Yukawa gera um termo de massa da forma,

$$\mathcal{L}_I = \nu^2 \bar{l}_R Y l_l + H.c. + \text{termos de interação} \quad (5.60)$$

Onde $\nu^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$. Assim, os leptons carregados l se tornam massivos e os leptons neutros ν_l ficam sem massa. Escolhendo $Y = \frac{1}{\xi^2} \text{diag}[m_e, m_\mu, m_\tau]$ ficamos com os leptons do modelo padrão, com as massas usuais e interações com os escalares de Higgs.

³⁰ H_R significa $Re[H]$.

³¹Isso significa que nesse estágio a teoria não é invariante de Gauge, já que um gauge particular foi escolhido, no entanto, sua lagrangeana inicial era.

Capítulo 6

Supersimetria

6.1 Modelo Supersimétrico

O testes experimentais para o modelo padrão são inúmeros, além das confirmações de previsão, como o bóson Z e as massas de W^\pm , o quark t , a possível descoberta do bóson de Higgs e o running da carga do elétron. Em especial está o momento magnético anômalo do elétron, cujos testes estão na casa de uma parte em um bilhão[24],

$$\begin{aligned} \text{teórico: } a &= 1159652182.79(7.71).10^{-12} \\ \text{experimental: } a &= 115965218073(28).10^{-12} \end{aligned}$$

e que está dentro do erro experimental com uma precisão de 12 casas decimais. Tal precisão gera uma pergunta importante: Porque modificar um modelo que funciona tão bem? Aqui serão apresentados quatro questões que o modelo padrão deixa de fora.

6.1.1 Quantização da Gravidade

O método de contagem de potências já torna a gravidade uma quantidade não renormalizável. Esse é um problema central na teoria de campos, pois além do apelo na unificação das teorias existentes a gravidade é a força que rege a cosmologia e na escala de formação do universo a energia estava próxima à escala de plank, $\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \sim 10^{19}\text{GeV}$ onde a gravidade provavelmente traz correções significativas.

6.1.2 O Problema da Hierarquia

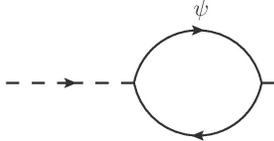
O problema da hierarquia surge a partir da existência de bósons escalares como o Higgs, que possuem um potencial da forma,

$$V(H) = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda(H^\dagger H)^2 \quad (6.1)$$

cujo valor esperado no vácuo (VEV) é diferente de zero, $H_{VE} \neq 0$. No cálculo da renormalização das massas encontra-se,

$$m(M_{EW}) = m^2(\Lambda) + \delta m^2(\Lambda \rightarrow M_{EW}) \quad (6.2)$$

as correções de massa provém, dentre outros gráficos, de,



$$= -\frac{3g_t^2}{8\pi^2}\Lambda^2$$

$$\Rightarrow \delta m \approx \frac{-3g_t^2}{8\pi^2}\Lambda^2$$

que corre com uma lei de potência em Λ . Como a massa do Higgs é da ordem de 100GeV ³², a partir de uma escala $\Lambda \approx 4\pi M_{EW} \sim 1\text{TeV}$ as correções δm começam a ser maiores do que a própria massa da partícula e é necessário que exista um ajuste muito fino entre os parâmetros da teoria para que essa condição seja satisfeita. Embora esse ajuste seja possível de existir, ele é um indício de que é provável que exista alguma física além da conhecida. Esse argumento é chamado de *argumento da naturalidade* e já foi utilizado, com bons resultados, na teoria forte em energias aonde o méson de Yukawa, também de spin zero, π^0 , media as interações. A origem desse problema vem da falta de uma simetria protetora, que só não existe para esse tipo de partícula. Os bósons vetoriais possuem a simetria de gauge que protegem ao running de suas massas. Os férmions possuem uma simetria axial que aparece quando $m \rightarrow 0$, isso significa que as correções da massa são proporcionais à massa $\delta m \propto m$ e a escala só pode entrar de maneira logarítmica,

$$\delta m_\psi = m \log \lambda/M \quad (6.3)$$

e o problema da hierarquia só apareceria em uma escala de energia muitas e muitas ordens de grandeza maior. Isso significa que uma maneira de consertar o problema do Higgs é criar uma simetria adicional na lagrangeana onde ao colocar $m_H \rightarrow 0$ ela aparece. Uma maneira de fazer isso é através da supersimetria.

6.1.3 Matéria Escura

Evidências cosmológicas sugerem que cerca de 25% de toda a energia no universo está na forma da chamada *Matéria Escura*. A matéria faz parte da formação do universo na formação de estruturas de larga escala e também na nucleosíntese, entretando o modelo padrão não possui partícula que possa explicar os dados experimentais, a matéria escura deve possuir algumas características não encontradas em nenhuma partícula já detectada,

³²Argumentos de unitariedade impõe uma massa não maior do que $\sim 1\text{TeV}$

- Não possui carga elétrica (Pois assim interagiria com o fóton tornando-a detectável)
- Não possui número bariônico (Descartado pela nucleosíntese)
- Não interage fortemente (Isótopos Exóticos)
- Estável (Existem nas estruturas cosmológicas)

A única partícula que encaixa perfeitamente em tais características é o neutrino, entretanto sua massa $M_\nu \leq 1\text{eV}$ não permite um desacoplamento no tempo de formação de estruturas. Isso quer dizer que o modelo padrão precisa de alguma extensão que proponha partículas que encaixem em tais características. Em especial os modelos supersimétricos propõem a existência de várias partículas, entre elas, candidatos a matéria escura que interagem fracamente, e podem ser associados aos *Wimps* (Weak Interacting Massive Particles).

6.1.4 Oscilação de Neutrinos

A oscilação de neutrinos é um fenômeno intrigante no qual partículas são detectadas como se fossem outras partículas: Anti-neutrinos eletrônicos produzidos em reatores nucleares parecem desaparecer em alguns quilômetros ao passo que anti-neutrinos mônicos aparecem. A forma de explicar esse efeito é através da oscilação de não-autoestados do Hamiltoniano, ou seja, os sabores de neutrinos ($i = e, \mu, \tau$) são composições dos verdadeiros autoestados, ($i = 1, 2, 3$). Para isso é necessário introduzir um termo não diagonal na lagrangeana,

$$\mathcal{L}_{mass} = -m_{ij}\bar{\nu}_i\nu_j + H.c. \quad (6.4)$$

onde m_{ij} é uma matriz não diagonal conectando os sabores, $i, j = e, \mu, \tau$. Com isso duas questões surgem automaticamente: (1) Porque há esse termo na lagrangeana (2) Esse termo implica a existência de neutrinos de mão direita?

6.2 SuperSimetria

As simetrias são uma das características mais importantes de um sistema físico a ser estudado, visto que grande parte da descrição de tal sistema surge naturalmente das descrições das soluções simétricas do problema. De forma ainda mais natural surgem as simetrias na teoria das partículas elementares, são elas que vão definir que

tipo de partículas e suas interações podem surgir da lagrangeana proposta.

A partir do estudo de tais simetrias é possível ainda fazer algumas generalizações e impor restrições formais em modelos físicos, tais generalizações se mostraram bastante úteis na construção do SM [6]. A supersimetria ainda tem um caráter especial pois propõe explicações para três, o problema da hierarquia 6.1.2, Matéria Escura 6.1.3 e Oscilação de neutrinos 6.1.4, dos quatro pontos apresentados deixando de fora apenas a gravidade 6.1.1, a unificação entre a gravidade e as outras forças fundamentais, entretanto a supersimetria ainda permite a utilização da teoria de cordas que pode ser utilizada como unificação da gravidade.

6.2.1 Simetrias Tradicionais

Antes de introduzir o conceito de *supersimetria*, a simetria utilizada em alguns modelos mais recentes propostos [25],[27] e [7], a introdução de duas simetrias fundamentais faz-se necessário, a primeira é a *Simetria de Lorentz* [8], utilizada na descrição de transformações relativísticas de referenciais inerciais da relatividade restrita. Experimentalmente tal simetria foi testada e é uma dos pilares da física moderna e, por tanto, qualquer modelo experimental deve ao menos conter tal simetria assintoticamente. A segunda simetria apresentada é a famosa *Simetria de Gauge*, a raiz do modelo de interação eletromagnética aceito atualmente.

6.2.2 Unificando Simetrias

Como as simetrias de Lorentz e de gauge fazem um papel muito importante para a estrutura da lagrangeana de uma teoria, uma ideia tentadora surgiu, uma tentativa de generalizar e unificar as duas em uma simetria que possuísse um grupo localmente isomorfo ao grupo de Poincaré e aos grupos de Lie. Muitas tentativas nesse caminho foram feitas e resultaram em alguns teoremas 'no-go', sendo um dos mais importantes apresentado por S. Coleman e J. Mandula[26], o qual foi mostrado que qualquer tentativa de criar um grupo nesse contexto, baseado em algebra de Lie usuais acabava tendo consequências não-físicas: (1) Massas contínuas próximas de zero, (2) Matriz, S , de espalhamento trivial (3) infinitos estados com mesma massa. A ideia tentadora foi quase descartada pela aparente impossibilidade de unificação, até que os cientistas R. Haag, J. T. Lopuszanski e M. Sohnius[7] mostraram que tal unificação é possível através da utilização de superalgebras de Lie, aonde não

somente regras de comutação, mas também de anticomutação entravam em jogo.

6.2.3 O Grupo Supersimétrico

O grupo supersimétrico surge naturalmente como uma generalização do grupo de Poincaré. A transformação induzida devido a transformações de um certo grupo, cujos geradores são t_A , atuam na forma

$$e^{i\alpha_A Q_A} \phi_m e^{-i\alpha_B Q_B} = (e^{-i\alpha_A t_A})_{ml} \phi_l \quad (6.5)$$

onde Q_A são os geradores das transformações e α_A são parâmetros que definem a transformação. Através dessa equação, os geradores e suas representações matriciais t_A seguem regras de comutação da forma $[Q_A, Q_B] = if_{ABC} Q_C$. No entanto, generalizando os parâmetros α_a de forma a englobar não só números reais para parâmetros que podem ser também variáveis Grassmanianas definidas a partir da regra de anticomutação,

$$\{\bar{\alpha}, \alpha\} = 0, \quad (6.6)$$

e as regras de comutação dos operadores Q_A se tornam de forma análogas, $\{Q_A, Q_B\} = if_{ABC} Q_C$. Assim, agora o grupo se estende de uma forma natural com geradores P_a que obedecem regras de comutação, e geradores Q_A que obedecem regras de anticomutação que são chamados de operadores espinoriais.

6.2.3.1 Uma Abordagem Intuitiva

Antes de descrever a álgebra supersimétrica de uma maneira formal, é interessante analisá-la de uma maneira mais intuitiva e uma abordagem um pouco mais física.

A grande motivação teórica na utilização de supersimetria é a possibilidade de uma transformação linear que conecte escalares, espinores e vetores. Assume-se a existência de um campo escalar A , um campo espinorial χ_a e outros campos bosônicos que mais a frente se mostrarão necessários.

Como a ideia é a existência de uma simetria que conecte partículas de spin diferentes, a transformação linear mais simples é,

$$\delta A = \bar{\epsilon}^\beta \chi_\beta \quad (6.7)$$

Uma análise rápida da dimensionalidade física (massa) dos objetos, $[A] = 0$ e $[\chi] = 1/2$ revela que $[\bar{\epsilon}^a] = -1/2$ e, portanto, precisa ser um número de Grassman já que a única forma de conectar linearmente outro campo presente na teoria de forma que a dimensão já consistente é através de um campo com spin $1/2$, ou seja é necessário impor, $\{\epsilon^a, \epsilon^b\} = 0$.

O próximo passo é entender as possibilidades de conexão entre o campo χ e o campo A . Pela análise dimensional, a única maneira de conectá-los é via derivada, já que $[\partial_i] = 1$. Para manter invariância de Lorentz na transformação o termo correto é $(\gamma^i)^\alpha_\beta \partial_i$ e assim

$$\delta\chi^\alpha = (\gamma^a)^\alpha_\beta \partial_a A \epsilon^\beta + \text{outros campos} \quad (6.8)$$

para achar a álgebra, é necessário calcular o comutador de duas transformações,

$$[\delta_1, \delta_2]A = \delta_1\delta_2A - \delta_2\delta_1A = \bar{\epsilon}_2\gamma^a\epsilon_1\partial_aA - (1 \leftrightarrow 2) + \text{outros campos} \quad (6.9)$$

lembrando-se que o operador de translação $P_a = i\partial_a$, isso mostra que impondo uma simetria que misture spins e que seja linear, naturalmente surge uma conexão entre espaço e a geometria dos objetos em questão.

6.2.3.2 Álgebra

Por causa do teorema de Coleman-Mandula, qualquer tentativa de unificação dos grupos de simetria de Poincaré, cujos geradores obedecem a álgebra,

$$[P_a, P_b] = 0 \quad (6.10)$$

$$[P_a, J_{bc}] = g_{ab}P_c - g_{ac}P_b \quad (6.11)$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = -(g_{ac}J_{bd} + g_{ad}J_{bc} - g_{bc}J_{ad} - g_{cd}J_{ab}) \quad (6.12)$$

e os grupos de simetria internos, cuja álgebra é

$$[T_A, T_B] = f_{ABC}T_C \quad (6.13)$$

resulta na forma de produtos diretos, ou seja,

$$[P_a, T_B] = [J_{bc}, T_D] = 0 \quad (6.14)$$

Assim, a forma para resolver esse impasse é adicionar um grupo de operadores de forma que a noção de álgebra fica mais abrangente, e os geradores adicionais podem obedecer a regras de anti-comutação, $\{Q_A, Q_B\} = Q_A Q_B + Q_B Q_A$. Denomina-se os geradores que obedecem regras de comutação de geradores *Pares* e os geradores que obedecem as regras de anticomutação de geradores *Ímpares*, impondo apenas que,

$$[Par, Par] = Par \quad (6.15)$$

$$\{Impar, Impar\} = Par \quad (6.16)$$

$$[Par, Impar] = Impar \quad (6.17)$$

Como o teorema de Coleman-Mandula ainda é válido, os operadores pares ainda seguem as regras $[P_a, T_B] = [J_{bc}, T_D] = 0$. A equação (6.17), obriga que,

$$[Q_A, J_{ab}] = (b_{ab})^\alpha_\beta Q_\beta \quad (6.18)$$

onde $(b_{ab})^\alpha_\beta$ é uma matriz a ser determinada. Para obter as outras relações de comutação é necessário a utilização das identidades de Jacobi Generalizadas³³,

$$[[B_1, B_2], B_3] + [[B_3, B_1], B_2] + [[B_2, B_3], B_1] = 0 \quad (6.19)$$

$$[[B_1, B_2], F_3] + [[F_3, B_1], B_2] + [[B_2, F_3], B_1] = 0 \quad (6.20)$$

$$\{[B_1, F_2], F_3\} + \{[B_1, F_3], F_2\} + \{\{F_2, F_3\}, B_1\} = 0 \quad (6.21)$$

$$\{\{F_1, F_2\}, F_3\} + \{\{F_1, F_3\}, F_2\} + \{\{F_2, F_3\}, F_1\} = 0 \quad (6.22)$$

Da segunda identidade de Jacobi generalizada, obtem-se

$$[(b_{ab}), (b_{cd})]^\alpha_\beta = -\eta_{ac}(b_{bd})^\alpha_\beta - \eta_{bd}(b_{ac})^\alpha_\beta + \eta_{ad}(b_{bc})^\alpha_\beta + \eta_{bc}(b_{ad})^\alpha_\beta \quad (6.23)$$

Ou seja, as matrizes que conectam os operadores de rotação J_{ab} são uma representação do grupo de Lorentz. Assim, a escolha mais simples são as matrizes de Pauli, $(b_{ab}) = \frac{1}{2}\sigma_{ab} = [\gamma_a, \gamma_b]$ Procedendo da mesma forma é possível obter as regras de comutação para os operadores P_a . No entanto, as identidades de Jacobi implicam que $[Q_\alpha, P_a] = 0$. Definindo o operador,

$$\bar{Q}_\alpha = C^{\alpha\beta} Q_\beta \quad (6.24)$$

³³ B_i são operadores pares e F_i ímpares

onde $C^{\alpha\beta}$ é a conjugação de carga, usando a Eq.(6.16)

$$\{\bar{Q}_\alpha, Q_\beta\} = r\gamma^a P_a + s\sigma^{ab} J_{ab},$$

que, usando a terceira identidade de Jacobi implica $r = 2, s = 0$, ou seja,

$$\{\bar{Q}_\alpha, Q_\beta\} = 2\gamma^a P_a \Delta_{\alpha,\beta} \quad (6.25)$$

6.2.4 Modelo Supersimétrico

Para introduzir a álgebra supersimétrica dentro do contexto da mecânica quântica de campos é necessário impor a existência de um supercampo $\hat{\phi} = \hat{\phi}(x^\mu, \theta)$ que é uma função do quadrivetor x^μ . A intenção é conectar, através das transformações supersimétricas, os campos bosônicos com os campos fermiônicos. Para isso, são introduzidas variáveis de Grassman θ^a . Onde $\{\theta_a, \theta_b\} = 0$. Tais variáveis são necessárias para implementar as transformações dos operadores Q_α como ilustrado na Eq. (6.5). Dessa forma as transformações do grupo supersimétrico são tais que $U(\Lambda, a^\mu, \bar{\alpha})$ atuam em um supercampo. Para as translações ($\Lambda = 0, \bar{\alpha} = 0$), como de costume,

$$\hat{\phi}'(x, \theta) = (1 + ia^\mu P_\mu)\hat{\phi}(1 - ia^\mu P_\mu) = \hat{\phi}(x + a, \theta) \quad (6.26)$$

Ou seja, na forma infinitesimal,

$$[P_\mu, \hat{\phi}] = -i\partial_\mu \hat{\phi} \quad (6.27)$$

e são obtidas as translações espaciais no espaço usual de Minkowski. De forma análoga, espera-se que as transformações para as variáveis de Grassman ($\Lambda = 0, a^\mu = 0$) estejam relacionadas com as derivadas como no caso anterior. Entretanto ao realizar o cálculo é possível ver que apenas as derivadas não é suficiente e uma generalização um pouco maior é necessária,

$$[\bar{\alpha}Q_a, \hat{\phi}] = i\bar{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + N\theta \right) \hat{\phi} \quad (6.28)$$

Utilizando a identidade de Jacobi na forma $[[\bar{\alpha}_1 Q, \bar{\alpha}_2 Q], \hat{\phi}] = [\bar{\alpha}_1 Q, [\bar{\alpha}_2 Q, \hat{\phi}] - [\bar{\alpha}_2 Q, [\bar{\alpha}_1 Q, \hat{\phi}]]$ e abrindo os dois termos do lado direito e notando que as variáveis α anti-comutam, é possível escrever,

$$\bar{\alpha}_{1A}\bar{\alpha}_{2B}\{Q_A, Q_B\}\hat{\phi} = [-\bar{\alpha}_{1A}\bar{\alpha}_{2B}(NC)_{BA} + \bar{\alpha}_{2B}\bar{\alpha}_{1A}(NC)_{AB}]\hat{\phi} \quad (6.29)$$

Utilizando-se do resultado já obtido para a anticomutação dos operadores Q , encontra-se uma equação para a matriz N que satisfaz a identidade Jacobi,

$$(NC)_{BA} + (NC)_{AB} = 2i(\not{C})_{BA} \quad (6.30)$$

com uma solução evidente, $N = i\not{\delta}_{AB}$. Ou seja,

$$\delta\hat{\phi} = [\bar{\alpha}Q_a, \hat{\phi}] = i\bar{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\not{\phi}\theta \right) \hat{\phi} \quad (6.31)$$

6.2.4.1 Representações Irredutíveis

Uma maneira simples de construir um modelo com uma dada simetria consiste em obter as possíveis representações irredutíveis de tal grupo e usar a forma como tais transformações relacionam as componentes para construir termos simétricos. Para obter as representações irredutíveis interessantes para os modelos aqui estudados basta aplicar a transformação (6.31) na forma mais genérica possível de escrever o campo escalar $\hat{\phi}$. Como existem quatro variáveis θ , o grau máximo do polinômio em θ é 4. Uma forma simples de escrever o supercampo $\hat{\phi}$ seria através de uma expansão de Taylor usual $\sum A_i\theta_i + A_{ij}\theta_{ij} + \dots$, entretanto uma forma que evidencia explicitamente o caráter geométrico de cada componente do campo e torna a expansão mais intuitiva é na forma,

$$\begin{aligned} \hat{\phi} = & S - i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma_5\psi - \frac{i}{2}(\theta\gamma_5\theta)M + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)N + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta)V^\mu \\ & + i(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\bar{\theta}\left[\lambda + \frac{i}{\sqrt{2}}\not{\phi}\psi\right] - \frac{1}{4}(\theta\gamma_5\theta)^2\left[D - \frac{1}{2}\partial^2S\right] \end{aligned} \quad (6.32)$$

Os campos S, N, D se transformam como escalares, os campos ψ, λ se transformam como spinores e o campo V^μ se transforma como um quadrivetor, M como um pseudo escalar por transformações de Lorentz. Aplicando (6.31) em (6.32) é possível obter as transformações entre o caráter geométrico dos campos, cujo resultado é

$$\delta S = i\sqrt{2}\bar{\alpha}\gamma_5\psi, \quad (6.33)$$

$$\delta\psi = -\frac{\alpha M}{\sqrt{2}} - \frac{i\alpha\gamma_5 N}{\sqrt{2}} - \frac{i\gamma_\mu\alpha V^\mu}{\sqrt{2}} - \frac{\gamma_5\not{\phi}S\alpha}{\sqrt{2}} \quad (6.34)$$

$$\delta M = \bar{\alpha}(\lambda + i\sqrt{2}\not{\phi}\psi) \quad (6.35)$$

$$\delta N = i\bar{\alpha}\gamma_5(\lambda + i\sqrt{2}\not{\phi}\psi) \quad (6.36)$$

$$\delta V^\mu = -i\bar{\alpha}\gamma^\mu\lambda + \sqrt{2}\bar{\alpha}\partial^\mu\psi \quad (6.37)$$

$$\delta\lambda = -i\gamma_5\alpha D - \frac{1}{2}[\not{\phi}, \gamma_\mu]V^\mu\alpha \quad (6.38)$$

$$\delta D = \bar{\alpha}\not{\phi}\gamma_5\lambda \quad (6.39)$$

Isso mostra que a atuação das supertransformações no supercampo escalar induzem campos fermiônicos em campos bosônicos e vice-versa. das equações 6.35,6.36 e 6.39 é possível ver que se um supercampo $\hat{\phi}$ começar com $\lambda = D = 0$ e $V^\mu = \partial^\mu\xi$ as transformações do grupo supersimétrico não alteram tais condições. Isso quer dizer que, nesse caso, os campos $R = S \pm i\xi$, $\psi_{L,R}$ e $F = M \pm iN$ formam uma representação de um subgrupo. Nesse caso particular é possível escrever $\hat{x} = x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta$ e,

$$\hat{\phi}_L(\hat{x}) = R(\hat{x}) + i\sqrt{2}\bar{\theta}\psi_L(\hat{x}) + i\bar{\theta}\theta_L F(\hat{x}) \quad (6.40)$$

ϕ_L é chamado de supercampo left, ou supercampo chiral e $\hat{\phi}_R = \hat{\phi}_L^\dagger$ o supercampo right. Ainda é possível ver que os campos D , λ e $F^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu$ se transformam num ao outro, entretando não é possível fixar S, ψ, M, N todos iguais a zero. Numa teoria de gauge onde há mais graus de liberdade tal escolha é possível de se realizar.

6.2.4.2 Lagrangeanas Invariantes

O próximo passo para a constuição de modelos supersimétricos é entender quais lagrangeanas invariantes podem ser construídas. Entretando para uma lagrangeana ser invariante por esses tipos de transformação implicam $[Q, \mathcal{L}] = 0 \rightarrow [Q_1, [Q_2, \mathcal{L}]] \propto \partial_\mu \mathcal{L} = 0$, ou seja, a lagrangeana é constante e não tem dinâmica. Assim as possíveis lagrangeanas físicas devem se transformar no máximo em derivadas totais. Funções desse tipo são descritas nas equações (6.35), (6.36) e (6.39),

$$\delta F = \delta \frac{M + iN}{\sqrt{2}} = 2i\not{\phi}\psi_L \quad (6.41)$$

$$\delta D = \bar{\alpha}\not{\phi}\gamma_5\lambda \quad (6.42)$$

Isso significa que qualquer supercampo ou produto de supercampos possui um 'termo-D' (coeficiente a frente de $(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2$) que se transforma como uma derivada total e o produto de qualquer supercampo left gerará um 'Termo F' (coeficiente a frente de $\bar{\theta}\theta_L$) que também se transforma como uma derivada total e são, portanto, candidatos a lagrangeanas invariantes por supertransformações. A ideia é então começar com duas possíveis funções de N supercampos \hat{S}_i ($i = 1, 2, \dots, N$): $K(\hat{S}_L^\dagger, \hat{S}_L)$, chamado de potencial de Kähler e $f(\hat{S}_L)$ chamado de superpotencial. E os termos que irão gerar a lagrangeana são os termos D, do potencial K e o termo F, do superpotencial f ³⁴. O próximo passo para obter as possíveis formas da lagrangeana a ser construída é impor a construção dos termos em termos de sua renormalizabilidade. Isso significa que $[K_D] \leq 4$. Para calcular a dimensionalidade dos termos do potencial, primeiro é necessário notar que, como $\{Q, \bar{Q}\} = 2\gamma^\mu P_\mu$ e $[P^\mu] = 1$, $[Q] = [\bar{Q}] = 1/2$ e, de Eq.(6.31), $[\theta] = [\bar{\theta}] = -1/2$. Impondo as dimensões usuais para os campos $[S] = 1$, $[\psi] = 1/2$, então $[\hat{S}_L] = 1$ e assim, o termo D, que está à frente de $[(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2] = -2$ tem dimensão $[K_D] = [K] + 2$ e, com isso, uma teoria renormalizável impõe a restrição,

$$[K] \leq 2 \quad (6.43)$$

Isso significa que a maior potencia do campo \hat{S}_L é quadrática, mais precisamente, a forma mais geral renormalizável é $K = \sum_{i,j} A_{ij} \hat{S}_i^\dagger \hat{S}_j$. Como pode-se escolher uma base para trabalhar, é mais conveniente trabalhar com a base onde $A_{ij} = \delta_{ij}$ e assim, o potencial de Kähler mais genérico é,

$$K(\hat{S}_L^\dagger, \hat{S}_L) = \sum_i^N \hat{S}_i^\dagger \hat{S}_i \quad (6.44)$$

Fazendo a multiplicação, é possível mostrar que,

$$\hat{S}_L^\dagger \hat{S}_L \ni -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2[(\partial_\mu S^\dagger)(\partial^\mu S) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\not{\partial}\psi + F^\dagger F], \quad (6.45)$$

ou seja, o termo da lagrangeana gerado pelo potencial de Kähler é da forma³⁵,

$$\mathcal{L}_D = (\partial_\mu S^\dagger)(\partial^\mu S) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\not{\partial}\psi + F^\dagger F \quad (6.46)$$

³⁴Note que o termo D da função f é uma derivada total, o mesmo ocorre com termos do potencial K que não são função de ambos os campos \hat{S}_L^\dagger e \hat{S}_L

³⁵O potencial tem a forma idêntica ao termo cinético usual, onde foi imposto apenas o requerimento de normalização. Os campos F são campos auxiliares que não possuem dinâmica e servem para garantir a invariância via super transformações

Uma análise dimensional similar à realizada fornece o resultado $[\hat{f}] \leq 3$. Isso significa que \hat{f} é no máximo um polinômio de grau três no campo \hat{S} . Assim, é possível fazer uma expansão em torno de $\hat{S} = S$, e a contribuição mais genérica é da forma,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{S}) &= \hat{f}(\hat{S} = S) + \sum_i \left. \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{S}_i} \right|_{\hat{S}=S} (\hat{S} - S)_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{S}_i \partial \hat{S}_j} \right|_{\hat{S}=S} (\hat{S} - S)_i (\hat{S} - S)_j \\ &\quad + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} \left. \frac{\partial^3 \hat{f}}{\partial \hat{S}_i \partial \hat{S}_j \partial \hat{S}_k} \right|_{\hat{S}=S} (\hat{S} - S)_i (\hat{S} - S)_j (\hat{S} - S)_k \end{aligned} \quad (6.47)$$

O primeiro e último termo não contribuem para o termo F, pois têm zero e três ou mais θ 's respectivamente. O segundo termo contribui com o termo vindo diretamente de $(\hat{S} - S)$ com $\bar{\theta}\theta_L$, ou seja³⁶,

$$\sum_i \left. \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{S}_i} \right|_{\hat{S}=S} (\hat{S} - S)_i \ni \sum_j \left. \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{S}_j} \right|_{\hat{S}=S} ({}_i F_j \bar{\theta}\theta_L) \quad (6.48)$$

Para o segundo termo,

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{S}_i \partial \hat{S}_j} \right|_{\hat{S}=S} (\hat{S} - S)_i (\hat{S} - S)_j \ni \bar{\theta}\theta_L \left[i \left. \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{S}_i} \right|_{\hat{S}=S} F_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{S}_i \partial \hat{S}_j} \right|_{\hat{S}=S} \bar{\psi}_i P_L \psi_j \right] \quad (6.49)$$

Onde $P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}$ é o operador de projeção 'left'. Assim, a contribuição do superpotencial para a lagrangeana é da forma,

$$\mathcal{L}_F = -i \left. \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{S}_i} \right|_{\hat{S}=S} F_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{S}_i \partial \hat{S}_j} \right|_{\hat{S}=S} \bar{\psi}_i P_L \psi_j + H.c. \quad (6.50)$$

E a lagrangeana mais genérica que contenha campos de spin 0 e 1/2 apenas são da forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F$. É possível eliminar os campos auxiliares através de suas equações de movimento,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i^\dagger} = F_i + i \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{S}_i} \right)^\dagger = 0 \quad (6.51)$$

³⁶Um termo dessa forma pode gerar termos equivalente a termos de massa para o campo S quando os campos da teoria obedecem suas equações de movimento. Nesse caso, $F = mS$ e termos da forma $m^2 S^2$ são possíveis.

e a lagrangeana final é obtida,

$$\mathcal{L} = \sum_i \left[(\partial_\mu S_i)^\dagger (\partial^\mu S_i) + \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i - \left| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{S}_i} \right|_{\hat{S}=S}^2 \right] - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{S}_i \partial \hat{S}_j} \Big|_{\hat{S}=S} \bar{\psi}_i P_L \psi_j + H.c \right] \quad (6.52)$$

Uma forma de expressar a lagrangeana na forma de integrais é notar que os termos específicos estão relacionados com as quantidades de variáveis Grassmanianas, o termo do potencial de Kähler possui 4 θ 's, $(\bar{\theta} \gamma_5 \theta)^2 = 8\theta_4 \theta_3 \theta_2 \theta_1$ enquanto que o superpotencial possui 2 variáveis, $\bar{\theta} \theta_L = 2\theta_{L2} \theta_{L1}$, onde $\theta_{Li} = \frac{1-\gamma_5}{2} \theta_i$. Com isso,

$$\int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} d^4 \theta K(\hat{S}^\dagger, \hat{S}) - \frac{1}{2} d^2 \theta_L (\hat{f}(\hat{S}_L) + H.c.) \right] \quad (6.53)$$

6.2.5 Teorias de Gauge Supersimétricas

Como usual o próximo passo para construir teorias físicas consistentes é impor a simetria de gauge. Mas primeiro é necessário entender o que significa transformações de gauge supersimétricas. A tentativa mais óbvia é tentar escrever,

$$\hat{S}(\hat{x}, \theta) \rightarrow e^{igT_A \omega^A(\hat{x})} \hat{S}(\hat{x}, \theta) \quad (6.54)$$

Entretanto, o supercampo \hat{S} da Eq.(6.52) é um campo de mão esquerda, mas $\omega_a(\hat{x})$ é um supercampo genérico e a transformação perde o caráter invariante chiral. Com isso, substituindo $\omega_A \rightarrow \Omega_A$, onde agora Ω_A é um campo de mão esquerda, o que torna a transformação mais consistente. Como de costume o 'termo cinético' não é invariante pela transformação de gauge,

$$K' = \hat{S}'^\dagger \hat{S}' = \hat{S}^\dagger e^{-igT^A \Omega_A^\dagger(\hat{x})} e^{igT_B \Omega^B(\hat{x})} \hat{S} \quad (6.55)$$

Para que a invariância seja mantida introduz-se um novo supercampo $\hat{\phi}_A^\dagger = \hat{\phi}_A$ ³⁷ no potencial de Kähler,

$$K = \hat{S}^\dagger e^{-2gT^A \hat{\phi}_A} \hat{S} = \hat{S}^\dagger (1 - 2gT^A \hat{\phi}_A + \dots) \hat{S} \quad (6.56)$$

³⁷Tal condição implica que suas componentes bosônicas são reais e suas componentes fermiônicas são campos de Majoranas

de tal forma que para torná-lo invariante a seguinte condição é necessária,

$$e^{-igT^P\Omega_P^\dagger(\hat{x})}e^{-2gT^A\hat{\phi}'_A}e^{igT_Q\Omega^Q(\hat{x})} = e^{-2gT^A\hat{\phi}_A} \quad (6.57)$$

Notemos que diferentemente das teorias de gauge usuais o campo $\hat{\phi}$ não surge de maneira polinomial, mas em um expotente. Isso aparentemente violaria a condição de normalização, no entanto a liberdade de gauge permitirá trabalhar em um gauge onde as componentes S , ψ , M e N de $\hat{\phi}$ são zeros. Isso significa que os campos restantes são V , λ e D . Impondo a dimensão usual, $[V^\mu] = 1$, necessariamente precisamos ter $[\lambda] = 3/2$ e $[D] = 2$ e mais ainda, $[\hat{\phi}] = 0$. Isso significa que tal campo não está limitado por potências devido à renormalização.

6.2.5.1 Gauge de Wess-Zumino

Para provar a existência de tal gauge o passo inicial será trabalhar com transformações de gauge abelianas. A Eq.(6.57) implica,

$$\hat{\phi}' = \hat{\phi} + \frac{i}{2}(\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^\dagger) \quad (6.58)$$

Como $\hat{\Omega}$ é um supercampo chiral, pode-se escrever,

$$\hat{\Omega} = \omega + i\sqrt{2}\bar{\theta}\xi_L + i\bar{\theta}\theta_L\zeta + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta\partial^\mu\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\gamma_5\theta\bar{\theta}\phi_{\xi_L} + \frac{1}{8}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2\partial^2\omega \quad (6.59)$$

que em Eq.(6.58) fica,

$$\begin{aligned} S' &= S - \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_I \\ \psi' &= \psi - \frac{i}{2}\gamma_5\xi \\ M' + iN' &= M + iN - \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_I + i\zeta_R) \\ V^{\mu'} &= V^\mu - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu\omega_R \\ \lambda' &= \lambda D' = D \end{aligned}$$

E fica evidente que é possível escolher um gauge de forma que as componentes chirais se anulem. Para o caso não-abeliano, a transformação Eq.(6.57) é um produto de três exponenciais de operadores que não comutam. Usando a equação de Baker-

Campbell-Hausdorff é possível escrever a transformação como,

$$\hat{\phi}' = \hat{\phi} + \frac{i}{2}(\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^\dagger) + gf_{BCD}T_D(\hat{\phi}_B\hat{\Omega}_C - \hat{\phi}_B\hat{\Omega}_C^\dagger + \frac{i}{2}\hat{\Omega}_B\hat{\Omega}_C^\dagger) + g^2\dots \quad (6.60)$$

onde f_{ABC} são as constantes de grupo. Isso significa que é possível achar o gauge de forma perturbativa, começa-se com a transformação obtida para o caso não-abeliano e realiza-se correções de primeira ordem em g , e assim por diante. Esse gauge é chamado de gauge de *Wess-Zumino Gauge* e nele o supercampo $\hat{\phi}$ tem a forma,

$$\hat{\phi} = \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta V_A^\mu + i\bar{\theta}\gamma_5\theta\bar{\theta}\lambda_A + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2 D_A \quad (6.61)$$

É importante ter em mente que uma vez que o gauge é escolhido a teoria passa a não ser mais invariante por transformações supersimétricas. Isso quer dizer que as componentes ω_I, ξ_A e ζ_A são automaticamente fixadas e podem ser tomadas de forma genérica como sendo zero, dado que o campo $\hat{\phi}$ possui a forma Eq.(6.61), o único parâmetro que sobra é, então, $\omega_{RA}/\sqrt{2} \equiv \alpha_A$. Tal transformação é exatamente a transformação de gauge usual. Expandindo em primeira ordem a transformação Eq.(6.60) e utilizando o gauge de Wess-Zumino para o campo $\hat{\phi}$, obtém-se,

$$\begin{aligned} V_C^\mu &= V_C^\mu - \partial^\mu\alpha_C - gf_{ABC}\alpha_A V_B^\mu \\ \lambda'_C &= \lambda_C - gf_{ABC}\alpha_A \lambda_B \\ D'_C &= D_C - gf_{ABC}\alpha_A D_B \end{aligned} \quad (6.62)$$

A primeira transformação obtida nesse gauge é exatamente o usual de uma transformação de gauge do modelo padrão.

6.2.5.2 Tensor de Energia-Momento dos Campos de Gauge

Para encontrar o tensor que definirá a lagrangeana dos campos de gauge é necessário encontrar objetos que se transformem de forma covariante perante transformações de gauge supersimétricas. Uma maneira de fazer isso é utilizar-se de derivadas covariantes supersimétricas \mathcal{D} definidas de forma análoga as usuais, usando-se das regras de transformação de supercampos Eq.(6.31)

$$\bar{\alpha} \left[-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\bar{\alpha}\not{\partial}\theta \right] \mathcal{D}\hat{\phi} = \mathcal{D}\bar{\alpha} \left[-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\bar{\alpha}\not{\partial}\theta \right] \hat{\phi} \quad (6.63)$$

Notando-se que,

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i\bar{\alpha}\not{\partial}\theta \quad (6.64)$$

anticomuta com o termo entre colchetes, e que a variável α é também uma variável de Grassmann e anticomuta com as variáveis θ , então Eq.(6.64) é a solução correta para a derivada covariante. Em especial ainda pode-se definir duas derivadas covariantes, Left e Right, $\mathcal{D}_{L,R} = P_{L,R}\mathcal{D}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_L + \mathcal{D}_R$, $\{\mathcal{D}_{L,R}, \mathcal{D}_{L,R}\} = 0$ e $\{\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R\} = 2i\not{\partial}C$.

Para construir um termo que é invariante sob a transformação de gauge, primeiro nota-se que Ω^\dagger é um campo de mão direita, ou seja, $\mathcal{D}_L\Omega = 0$, ou seja,

$$e^{-igT^P\Omega_P^\dagger(\hat{x})}\mathcal{D}_L e^{igT^P\Omega_P(\hat{x})} = \mathcal{D}_L.$$

Da mesma forma, termos do tipo \mathcal{D}_R ou $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R$ quando atuados em funções geram $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R e^{igT^P\Omega_P(\hat{x})}f(\theta) = e^{igT^P\Omega_P(\hat{x})}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R f(\theta)$. E equivalentemente termos da forma $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R\mathcal{D}_L e^{igT^P\Omega_P(\hat{x})}f(\theta)$ utilizando-se da regra de anticomutação geram,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R\mathcal{D}_L e^{igT^P\Omega_P(\hat{x})}f(\theta) &= (-2i\partial_\mu\bar{\mathcal{D}}_L\gamma_\mu C e^{igT^P\Omega_P(\hat{x})})f(\theta) + e^{igT^P\Omega_P(\hat{x})}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R\mathcal{D}_L f(\theta) = \\ &= (-2i\partial_\mu\bar{\mathcal{D}}_L\gamma_\mu C)f(\theta) + e^{igT^P\Omega_P(\hat{x})}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R\mathcal{D}_L f(\theta) = e^{igT^P\Omega_P(\hat{x})}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R\mathcal{D}_L f(\theta) \end{aligned}$$

Ou seja, como um termo da forma $e^{-2gT_A\hat{\phi}}$ se transforma como, $e^{-igT^P\Omega_P^\dagger(\hat{x})}e^{-2gT_A\hat{\phi}}e^{-igT^P\Omega_P(\hat{x})}$, escrevendo $e^{2gT_A\hat{\phi}}\mathcal{D}_L e^{-2gT_A\hat{\phi}} \rightarrow e^{igT^P\Omega_P(\hat{x})}e^{2gT_A\hat{\phi}}\mathcal{D}_L(e^{-2gT_A\hat{\phi}}e^{-igT^P\Omega_P(\hat{x})})$.

Com isso, aplicando termos da forma $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R$ obtém-se,

$$\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R e^{2gT_A\hat{\phi}}\mathcal{D}_L e^{-2gT_A\hat{\phi}} \rightarrow e^{igT^P\Omega_P(\hat{x})} \left[\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R e^{2gT_A\hat{\phi}}\mathcal{D}_L e^{-2gT_A\hat{\phi}} \right] e^{-igT^P\Omega_P(\hat{x})}$$

e define-se o tensor equivalente ao tensor de energia e momento $F^{\mu\nu}$ do eletromagnetismo como,

$$gT_A\hat{W}^A \equiv -\frac{i}{8}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R \left[e^{2gT_A\hat{\phi}}\mathcal{D}_L e^{-2gT_A\hat{\phi}} \right] \quad (6.65)$$

Uma característica importante do campo definido à cima é o fato de ser um campo de mão esquerda³⁸. Assim sendo, o produto de dois campos \hat{W} também é de mão esquerda e em especial o campo invariante de gauge $\bar{\hat{W}}_A^c\hat{W}^A$ e seu F-term é candidato a lagrangeana. O cálculo de tal termo é relativamente grande e pode ser encontrada na ref.([25]) e resulta em,

$$\mathcal{L}_{GK} = \frac{i}{2}\bar{\lambda}_A\not{D}_{AC}\lambda_C - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_A D_A \quad (6.66)$$

³⁸Para verificar isso basta notar que a derivada covariante direita aplicada no operador $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R$ é zero, $\mathcal{D}_R\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_R = \mathcal{D}_R\mathcal{D}_R^T C\mathcal{D}_R$, e como \mathcal{D}_R anticomuta com sigo mesmo, qualquer combinação maior de dois termos \mathcal{D}_R resulta em zero.

onde $F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu V_\nu^A - \partial_\nu V_\mu^A - gf_{ABC}V_\mu^B V_\nu^C$ como de costume e $\not{D}_{AC} = \not{\partial}\delta_{AC} + ig(T_B \not{V}_B)_{AC}$ a derivada covariante para campos de gauge.

Tal resultado ilustra o resultado das suposições iniciais, como a simetria de gauge usual e a simetria de Lorentz são subgrupos da supersimetria a lagrangeana final apresenta forma equivalente à forma encontrada em teorias como o Modelo Padrão. A principal diferença encontra-se na necessidade de adição de dois campos, um campo escalar S_A simétrico ao campo espinorial ψ_A e um campo espinorial λ_A simétrico ao campo vetorial V_A^μ , tal fato acontece justamente pois cada representação do grupo supersimétrico tem o dobro de graus de liberdade do que as representações do grupo de Lorentz. Tal resultado surge como um problema no atual cenário experimental da física de partículas, já que os campos λ_A e S_A não foram observados, já que a simetria na lagrangeana impõe massas equivalentes para os campos e seus simétricos. Uma forma de contornar tal problema é utilizar a quebra espontânea de simetria nos termos da supersimetria. Tal quebra pode acontecer de forma análoga ao mecanismo de Higgs, mas também de uma forma interessante, aonde os férmions podem fazer o papel de 'bósons' de Goldstone.

6.2.5.3 Lagrangeana Final

Por fim, aqui é apresentada a lagrangeana final aonde serão trabalhados os modelos. O termo cinético é semelhante ao termo cinético usual para os campos e seus respectivos spins,

$$\mathcal{L}_{cin} = (D_\mu S_i)^\dagger (D^\mu S_i) + \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \not{D} \psi_i + \frac{i}{2} \bar{\lambda}_A \not{D}_A B \lambda_B - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} \quad (6.67)$$

e os termos de interação,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & -\sqrt{2}g(S^\dagger T_A \lambda^A \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_i + H.c.) \frac{1}{2} (S_i^\dagger T_A S_i)^2 - \left| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{S}_i} \right|_{\hat{S}=S}^2 \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(\bar{\psi}_i \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{S}_i \partial \hat{S}_j} \right)_{\hat{S}=S} \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_j + h.c \right] \end{aligned} \quad (6.68)$$

6.3 Quebra de Supersimetria

Com os elementos já apresentados, a descrição da quebra espontânea de supersimetria (SUSY) é o que completa o arcabouço necessário para a discussão do modelo supersimétrico mínimo (MSSM). A necessidade de quebra de supersimetria

surge de uma motivação experimental já descrita, para cada auto-estado bósonico $|\beta\rangle$ do hamiltoniano, com auto-energia E_B existe um auto-estado fermiônico $|F\rangle = Q|\beta\rangle$ também com auto-energia E_B , onde Q é um operador gerador de supersimetria. Tal necessidade é fácil de observar e tem suas origens no grupo supersimétrico e na característica abeliana do subgrupo de translação, como $[Q, P^\mu] = 0$,

$$P^0 |F\rangle = P^0 Q |\beta\rangle = Q P^0 |\beta\rangle = E_B Q |\beta\rangle = E_B |F\rangle$$

A quebra de simetria tem origem e arcabouço teórico similar aos teoremas descritos na seção 5.3, lembrando-se que o causador da necessidade de quebra de simetria é a escolha de um estado de vácuo aonde serão construídos os estados de partículas (pois tal estado é degenerado), ou seja, o gerador do grupo supersimétrico Q não pode aniquilar o estado de vácuo de algum campo O : $\delta O = i \langle 0 | [\bar{\alpha} Q, O] | 0 \rangle \neq 0$. O fator interessante é que agora tal simetria não precisa ser gerada apenas por transformações de gauge reais, mas também por transformações Grassmanianas. Para que seja mantida a invariância por transformações de Poincaré (já que experimentalmente a simetria de Lorentz não parece ser quebrada) o operador δO precisa ser escalar, entretanto as transformações supersimétricas conectam escalares em espinores, ou seja o campo O precisa ser um campo espinorial. Pelo formalismo os possíveis campos são,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \delta \psi_L^A | 0 \rangle &= \langle 0 | -\sqrt{2} F_A \alpha_L + \sqrt{2} \not{D} S_A \alpha_R | 0 \rangle \neq 0 \\ \langle 0 | \delta \lambda_A | 0 \rangle &= \langle 0 | -i \gamma_5 \alpha D_A + \frac{1}{4} [\gamma_\nu, \gamma_\mu] F_A^{\mu\nu} \alpha | 0 \rangle \neq 0 \end{aligned} \quad (6.69)$$

Para que cada equação seja satisfeita e ainda as transformações de Poincaré sejam mantidas invariantes $\langle 0 | \partial_\mu S | 0 \rangle = \langle 0 | F^{\mu\nu} | 0 \rangle = 0$. Ou seja, os campos auxiliares F e D precisam ter VEV diferente de zero. Disso surgem as denominações de quebra de simetria *tipo F* e *tipo D* respectivamente. Usando essas condições e as equações de movimento dos campos F e D , obtém-se as equações,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial S_i} \right)_{\hat{S}=S} &= 0 & \text{Tipo F} \\ g \hat{S}_i^\dagger T_A S_i &= 0 & \text{Tipo D} \end{aligned} \quad (6.70)$$

Para que haja quebra espontânea de simetria tais equações não podem possuir solução. Um ponto a se notar é o fato de que o potencial do campo escalar também

possui termos F e D similares de forma que quando há quebra espontânea de supersimetria há também quebra da simetria usual.

6.3.1 Espectro de Massa

Antes de obter uma regra para soma das massas, um modelo que ilustra de maneira interessante como a quebra espontânea de supersimetria permite a existência de partículas simétricas com massas diferentes é o modelo de O’Raifeartaigh.

6.3.1.1 O Modelo de O’Raifeartaigh

Esse é um tipo de quebra de simetria do tipo F . Começa-se com uma simetria de três campos chirais, $\hat{X}(X, \psi_x, F_x)$, $\hat{Y}(Y, \psi_y, F_y)$, $\hat{Z}(Z, \psi_z, F_z)$ e um superpotencial da forma,

$$\hat{f} = \lambda(\hat{X}^2 - \mu^2)\hat{Y} + m\hat{X}\hat{Z} \quad (6.71)$$

O que implica em,

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{X}}\hat{f} &= iF_x = 2\lambda\hat{Y}^\dagger\hat{X}^\dagger + m\hat{Z}^\dagger \\ \partial_{\hat{Y}}\hat{f} &= iF_y = \lambda(\hat{X}^2 - \mu^2) \\ \partial_{\hat{Z}}\hat{f} &= iF_z = m\hat{X}^\dagger \end{aligned} \quad (6.72)$$

As duas últimas equações claramente não podem ter VEV’s simultaneamente iguais à zero a menos que $\mu^2 = 0$. Isso quer dizer que a quebra espontânea de supersimetria ocorrerá. Tal modelo é similar ao chapéu mexicano comumente utilizado para descrever a quebra de simetria do campo de Higgs, o potencial lagrangeano para os campos escalares tem equação,

$$V(X, Y, Z) = \sum_i |F_i|^2 = |2\lambda\hat{Y}\hat{X} + m\hat{Z}|^2 + \lambda^2|\hat{X}^2 - \mu^2|^2 + m^2|\hat{X}|^2 \quad (6.73)$$

Para escolhas apropriadas de $\langle Z \rangle$ é possível anular sempre o primeiro termo do potencial, sobrando apenas,

$$V_X = \lambda^2|\hat{X}^2 - \mu^2|^2 + m^2|\hat{X}|^2 \quad (6.74)$$

cuja forma é dada na fig.6.1

O caso mais simples para tratar é o caso onde $m^2 > 2\lambda^2\mu^2$ aonde o mínimo acontece em $\langle Z \rangle = \langle X \rangle = 0$ e $\langle Y \rangle = Y_m$ qualquer. Assim, ao realizar uma translação

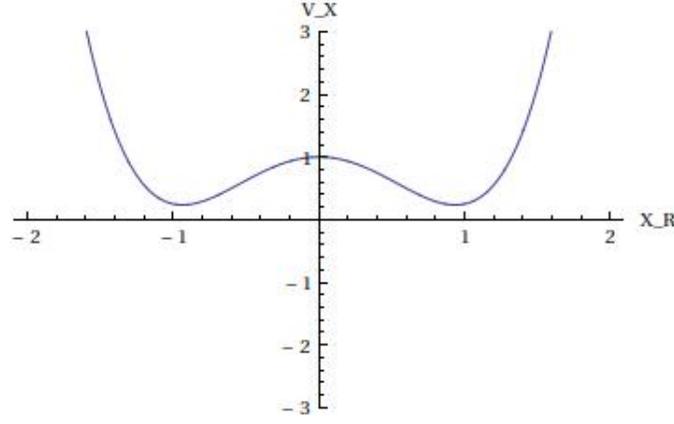


Figura 6.1: Seção do potencial V_X para $X_I = 0$, para $m^2/2\mu = 1$

$Y = Y - Y_m$ o campo Y continua com valor esperado igual à zero e ele é o bóson de Goldstone, enquanto isso os bósons X, Z adquirem massa que podem ser obtidos pela equação,

$$V = 2\lambda|Y_m|^2|X|^2 + 2\lambda m y_m (XZ^* + X^*Z) + m^2|Z|^2 + \text{termos de interação} \quad (6.75)$$

ou seja, a matriz de massa tem a forma, na base (X_R, Z_R, X_I, Z_I)

$$\begin{pmatrix} m^2 + 4\lambda^2 Y_m^2 - 2\lambda m Y_m & 2\lambda m Y_m & 0 & 0 \\ 2\lambda m Y_m & m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 + 4\lambda^2 Y_m^2 + 2\lambda^2 \mu^2 & 2\lambda m Y_m \\ 0 & 0 & 2\lambda m Y_m & m^2 \end{pmatrix}$$

o detalhe importante sobre a matriz de massa é notar o valor do traço,

$$\sum_{boson} M^2 = 2m^2 + 2(m^2 + 4\lambda^2 Y_m^2) \quad (6.76)$$

Para o caso dos férmions, os termos da função \hat{f} que não dão contribuições nulas são $\partial_{\hat{X}}^2 \hat{f}$ e $\partial_{\hat{X}} \partial_{\hat{Z}} \hat{f}$ que resulta na matriz de massa na base (ψ_x, ψ_y) como,

$$M_{fermion} M_{fermion}^\dagger = \begin{pmatrix} 2\lambda Y_m & m \\ m & 0 \end{pmatrix}$$

E o férmion ψ_y possui massa zero e é juntamente o 'bóson de Goldstone' para a quebra supersimétrica, tal bóson é chamado de *goldstino*. Nesse caso o traço fica, $\sum M^2 = 2m^2 + 4\lambda^2 Y_m^2$. Entretanto um outro traço mais interessante é definido como

o supertraço,

$$STrM^2 = \sum_{particulas} (-1)^{2J} (2J + 1) m_j^2 \quad (6.77)$$

onde J é o spin correspondente da partícula. Para esse modelo $STrM^2 = 0$. Essa será uma característica de teorias do tipo F e tal resultado pode ser previsto por um teorema.

6.3.1.2 Regra de Soma das Massas

O traço das matrizes é bastante importante pois ao diagonalizá-las a partir de transformações unitárias seu traço continua invariante, ou seja, as massas das partículas estão presas por uma relação vinda do traço que dependerá da forma que é construída o modelo.

A contribuição escalar para o traço surge do potencial,

$$V = \sum_i \left| \frac{\hat{f}}{\partial \hat{S}_i} \right|_{\hat{S}=S}^2 + \frac{g^2}{2} \sum_A (S_i^\dagger T_A S_i)^2 \quad (6.78)$$

A contribuição surge de termos da forma $S^\dagger S$ e $S^2 + H.c.$. O segundo termo dá contribuições da forma $\frac{1}{2}(m_{ij} + m_{ij}^*)(S_{Ri}S_{Rj} - S_{Li}S_{Lj})$ ³⁹. Entretanto, escrevendo $\partial_{S_i} = \frac{1}{2}(\partial_{S_{Ri}} - i\partial_{S_{Li}})$ é possível mostrar que $m_{ij} + m_{ij}^* = \partial_{S_{Ri}}\partial_{S_{Rj}}V = -\partial_{S_{Li}}\partial_{S_{Lj}}V$ e assim o traço da matriz de massa se anula, pois $\partial_{S_i}\partial_{S_j}V\partial_{S_i^\dagger}\partial_{S_j^\dagger}V = \partial_{S_{Ri}}\partial_{S_{Rj}}V + \partial_{S_{Li}}\partial_{S_{Lj}}V$. A contribuição para o supertraço é, portanto,

$$StrM_{scalar}^2 = 2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial S_i \partial S_j} \left(\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial S_i \partial S_j} \right)^* + 2 \sum_A \left(g S_i^\dagger S_i Tr T_A + 2g^2 S_i^\dagger T_A T_A S_i \right) \quad (6.79)$$

A contribuição vetorial surge da derivada covariante que conecta os escalares com os vetores, $M = -g^2 V_\mu^A (S_i^\dagger T_A T_A S_i) V^\mu$, ou seja,

$$STrM_{vec}^2 = 6g^2 \sum_{A,i} (S_i^\dagger T_A T_A S_i) \quad (6.80)$$

Por fim a matriz de interação dos férmions, na base (λ_A, ψ_i) pode ser escrita como,

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}g(S^\dagger T_A)_j \\ g\sqrt{2}(S_B^\dagger)_i & \partial_{S_i}\partial_{S_j}\hat{f} \end{pmatrix} + H.c.$$

³⁹ $S_{R,I}$ correspondem à parte real e imaginária de S

isso implica que,

$$Str M_{fermi}^2 = -2 \left[\sum_{i,A} 4g^2 (S^\dagger T_A)_i (T_A S)_i + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial S_i \partial S_j} \left(\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial S_i \partial S_j} \right)^* \right] \quad (6.81)$$

juntando as Eq. (6.79),(6.80) e (6.81) chega-se ao resultado final,

$$STr M^2 = 2 \sum_{i,A} (S_i^\dagger T_A S_i) Tr(g T_A) \quad (6.82)$$

6.3.2 O Modelo Supersimétrico Mínimo

O modelo supersimétrico mínimo é criado a partir do modelo padrão de forma a minimizar o número de parâmetros necessários para que a supersimetria seja possível. A lagrangeana se torna equivalente a lagrangeana já apresentada, no entanto, todas as partículas do modelo padrão são promovidas para partículas supersimétricas e o espectro passa a ter o dobro do número de partículas de forma que os termos cinéticos passam a ser os já calculados nas seções anteriores. A introdução de partículas supersimétricas para o campo de Higgs cria um problema, as anomalias chirais que são canceladas no modelo padrão por causa do exato número de férmions, porém, agora surge um espinor cuja anomalia não é cancelada. Para solucionar o problema é introduzido não apenas o Higgs, mas um dubleto de isospin $H = \begin{pmatrix} H_u \\ H_d \end{pmatrix}$, onde os campos H_u e H_d são dubletos que irão gerar massa ao se conectarem aos quarks da primeira e segunda componente do dubleto de quarks respectivamente .

6.3.2.1 Massa do Modelo Padrão

O potencial é da forma⁴⁰,

$$\begin{aligned} V_F &= \sum_i \left| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{S}_i} \right|_{\hat{s}=S}^2 \\ V_D &= \frac{1}{2} \sum_A \left[\sum_i S_i^\dagger g T_A S_i \right]^2 \\ V_{soft} &= -B\mu(H_d H_u + h.c.) + m_{H_u}^2 h_u^0 + m_{H_d}^2 h_d^0 \end{aligned} \quad (6.83)$$

⁴⁰É possível ainda incluir potenciais que quebrem a supersimetria de forma suave, isto é, não volte o problema de hierarquia, como o caso do último termo apresentado.

onde h^0 são as componentes que neutras dos respectivos bosons H_i^0 . O único escalar que pode possuir um mínimo com $VEV \neq 0$ é o Higgs, pois caso contrário as simetrias de cores e eletromagnéticas seriam quebradas e o modelo padrão não seria recuperado e assim o potencial mais genérico para a quebra de simetria se torna,

$$V = (m_{H_u}^2 + \mu^2)|h_u^0|^2 + (m_{H_d}^2 + \mu^2)|h_d^0|^2 - B\mu(h_u^0 h_d^0 + h.c.) + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(|h_u^0|^2 - |h_d^0|^2)^2 \quad (6.84)$$

o mínimo acontece com $\partial_{h_u^0} V = \partial_{h_d^0} V = 0$, para que o ponto de $\langle h_u^0 \rangle_{VEV} = \langle h_d^0 \rangle_{VEV} = 0$ não seja um mínimo o jacobiano do potencial deve ter determinante menor que zero na origem o que resulta na condição,

$$(B\mu)^2 > (m_{H_u}^2 + \mu^2)(m_{H_d}^2 + \mu^2) \quad (6.85)$$

para que o potencial tenha um mínimo de energia é necessário ainda que os pontos tenham equilíbrio estável, isto é, seja limitado inferiormente. Em geral o termo quártico do potencial é o suficiente para garantir essa condição, a menos no caso onde $|h_u^0| = |h_d^0|$ onde o termo se anula. Nesse caso é necessário impor a condição de positividade,

$$m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 + 2\mu^2 > 2|B\mu| \quad (6.86)$$

Dessa forma a massa das partículas do modelo padrão podem ser obtidas via quebra espontânea de simetria da mesma forma que no modelo padrão.

6.3.2.2 Massa das Superpartículas

As superpartículas precisam ser ter massas bem maiores que as usuais do modelo padrão e isso gera o problema de conciliar com a quebra de simetrias, em especial os gluinos, superparceiros do glúon, não podem se conectar com nenhum outro férmion pois possuem carga de cor e tal acoplamento geraria termos que quebram o grupo $SU(3)_c$, de forma que o único termo de massa possível é,

$$\mathcal{L}_{sg} = -\frac{1}{2}M_3\bar{\tilde{g}}\tilde{g} \quad (6.87)$$

que é um termo de quebra suave de supersimetria. A quebra do grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ gera o acoplamento entre B, W^i , e por consequência seus superparceiros $\psi_{h_u^0}, \psi_{h_d^0}, \lambda_0, \lambda_i$ também se acoplarão. Em especial os superparceiros neutros do higgs, do fóton e Z^0 se acoplarão para formar autoestados neutros, chamados de neutralinos,

enquanto que os superparceiros de W^\pm e dos bósons de higgs carregados formarão férmions carregados, chamados de charginos.

6.3.3 Resolução dos Problemas

No começo da seção foi dito que os problemas apresentados na seção 6 podem ser resolvidos através de supersimetria. Com o surgimento de um espectro completamente novo de partículas é possível encontrar possíveis Wimps ou candidatos à matéria escura, como os *sneutrinos*, $\tilde{\nu}$, superpartícula irmã do neutrino e os *neutralinos* partículas, ou composições de partículas, supersimétricas irmãs dos bósons de gauge Z^0 e A e do Higgs. O requerimento mais difícil de conseguir para essas partículas é a estabilidade, como suas massas precisam ser muito grandes para que sejam compatíveis com os dados experimentais seu tempo de vida será curto a menos que alguma simetria proteja o decaimento. Um aparente problema do modelo é a solução para isso, as interações entre os quarks e seus parceiros supersimétricos permitem o decaimento do próton ($p \rightarrow e^+ + \pi^0$) de forma que sua vida média fica muito a baixo da estabilidade já testada experimentalmente. Essa aparente contradição pode ser contornada com a imposição da simetria discreta R , na qual implica que cada partícula do modelo padrão possuir $R_{SM} = +1$ e cada partícula supersimétrica $R_{SS} = -1$. Assim, gráficos que não conservam R não podem ser formados e o decaimento do próton não é mais permitido. Isso faz com que necessariamente existam partículas supersimétricas estáveis, pois a partícula supersimétrica mais leve (LSP) não pode decair para nenhuma partícula do modelo padrão, já que isso significaria em uma violação da paridade R .

6.3.3.1 Hierarquia

Como intuído, o problema da hierarquia é resolvido ao impor que a simetria da lagrangeana seja aumentada quando $m_H \rightarrow 0$. Isso de fato ocorre e as correções de massa ficam protegidas por essa simetria. Para entender matematicamente como isso ocorre basta calcular as novas correções da massa do Higgs gerada pela supersimetria, além das correções do modelo padrão

$$\begin{array}{c}
 \psi \\
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \\
 \text{---} \rightarrow \text{---} \quad \text{---} \rightarrow \text{---} = -\frac{3y_t^2}{8\pi^2} \Lambda^2 \\
 \sim -\frac{3y_t^2}{(8\pi^2)} \Lambda^2
 \end{array}$$

é necessário incluir as correções da forma,

$$\begin{array}{c}
 \tilde{\psi} \\
 \text{---} \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \text{---} = \frac{3y_t^2}{8\pi^2} \Lambda^2 \\
 \sim +2 \frac{3y_t^2}{(16\pi^2)} \Lambda^2
 \end{array}$$

O fator 3 surge das cores, o fator $16\pi^2$ do loop e o fator 2 das partículas left e right. O crucial é o fator -1 de diferença entre as duas correções, que não existe na correção supersimétrica pois as partículas não são fermiônicas e assim as duas correções se cancelam deixando apenas correções proporcionais à massa do Higgs, como o esperado.

6.3.3.2 Oscilação de Neutrinos

A oscilação de neutrinos e suas massas pode ser explicada através do acoplamento do neutrino com as novas partículas de Higgs supersimétricas, λ que são partículas fermiônicas. Como tais partículas são muito massivas é possível estudar um acoplamento efetivo que gera massas as neutrinos para baixas energias de forma que explique a origem das massas. Tal mecanismo é conhecido como *mecanismo see-saw* e será estudada mais a frente.

Capítulo 7

Método de Análise

7.1 Análise dos modelos

A existência de oscilação de neutrinos do modelo padrão requer uma matriz de massa com parâmetros muito menores do que qualquer partículas massiva já observada ($O(1\text{eV})$), uma abordagem para explicar esse ajuste fino nos parâmetros é o modelo *SeeSaw*[30] de geração de massa e consiste em uma tentativa de gerar massa aos neutrinos left-handed de forma a deixar neutrinos right-handed com uma massa grande. O modelo consiste em adicionar ao modelo padrão (SM), $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, neutrinos estéreis, com uma matriz de massa e um acoplamento de Yukawa, de tal forma que para baixas energias a teoria se torna uma teoria efetiva $SU(2)_L$ com neutrinos massivos. A lagrangeana de interação dos neutrinos tem a forma,

$$\mathcal{L}_N = iN_R \not{\partial} N_R - \frac{1}{2} N_R^c M_R N_R + H.c. \quad (7.1)$$

onde N_R é um espinor, N^c é o espinor N sob ação do operador de conjugação de carga e *c.h.* significa Conjugado Hermitiano.

O acoplamento é feito através de um acoplamento de Yukawa dos neutrinos estéreis via Higgs (H), cuja forma é,

$$\mathcal{L}_I = \bar{E}_l H Y_l l_R + \bar{E}_l H^c Y_\nu N_R + c.h. \quad (7.2)$$

onde E_l é a parte leptônica do modelo padrão. Com isso a lagrangeana é $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{aI}$.

7.1.1 Mecanismo SeeSaw

Uma forma interessante de entender como acontece o mecanismo é reescrever o acoplamento de Yukawa e a matriz de massa em forma matricial,

$$\mathcal{L}_\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \bar{\nu} & \bar{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Y^\dagger H^T \\ HY & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ N \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Assim, a proposta é reescrever os neutrinos descritos por tais lagrangeanas em

outra base,

$$\begin{aligned}\nu_i &\approx \nu_l + \alpha N_R e \\ N'_R &\approx N_R + \beta \nu_i,\end{aligned}\tag{7.4}$$

de modo a diagonalizar a matriz de acoplamento de $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$. Ao realizar tal diagonalização, dois resultados interessantes aparecem: o primeiro são as matrizes de massa da nova base de neutrinos,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}} \approx \begin{pmatrix} \bar{\nu}_i & \bar{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_\nu & 0 \\ 0 & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_i \\ N \end{pmatrix},$$

resultante da aproximação $M_R \gg HY$, onde $M_\nu = HY^\dagger M_R^{-1} Y^\dagger H^T = H\kappa H^T$ que é obtido a partir do Ansatz Eq.(7.4) colocado na Eq.(7.3) e impondo a condição de que a matriz de massa resultante seja diagonal. De forma que, se M_R for grande o suficiente é possível explicar a baixa massa dos neutrinos através da quebra espontânea de simetria do Higgs, gerando um fator de massa proporcional ao inverso da matriz de massa M_R .

O segundo resultado é que a mudança de base gera um termo de interação lepton-Higgs, da forma,

$$\mathcal{L}_\nu = \frac{1}{2} \bar{E}_l H \kappa H^T E_l^c + H.c.\tag{7.5}$$

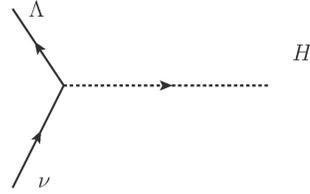
Como em 4 dimensões $[E] = \frac{3}{2}$ e $[H] = 1$, a dimensão total do termo é 5 a menos da dimensão da matriz κ . Tal termo é, portanto, chamado de operador de Weinberg que é um operador de dimensão 5 que não é renormalizável no contexto da interação efetiva. Tal matriz está diretamente associada aos ângulos de oscilação dos neutrinos e, por isso, entender como é sua evolução com a energia e abre uma oportunidade de verificação experimental do modelo.

7.1.1.1 Método Formal

A introdução formal do mecanismo see-saw surge do método de integrais de caminho. Como a massa dos neutrinos estéreis é grande, sua presença se torna significativa a partir de uma energia grande, e assim é possível utilizar uma teoria efetiva, calculando, em primeira ordem, as integrais de caminho, de forma que a função de partição é dada por,

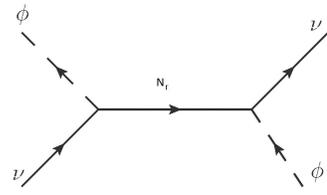
$$Z = \int D\phi_i \left[e^{i \int dx \mathcal{L}_0} \int DN_R D\bar{N}_R e^{i \int dx \mathcal{L}_N} \right]\tag{7.6}$$

onde ϕ_i são todos os campos da lagrangeana que não serão aproximados e \mathcal{L}_N é a lagrangeana que contém todos os termos com N_R . Uma lagrangeana efetiva que pode ser calculada em primeira ordem levando-se em conta todos os campos ϕ_i como constantes. No caso especial da interação de Yukawa, os gráficos de Feynman de interação de tais campos são da forma,



$$\bar{N}_R \phi Y_\nu \nu_{eL} + H.c.$$

para gerar o termo da forma da eq.(7.5) é necessário considerar as interações onde entram um campo de Higgs e um neutrino e saem um neutrino e um campo de Higgs. A correção, em primeira ordem, gerada pela introdução do campo N_R pode ser obtida pelo gráfico,

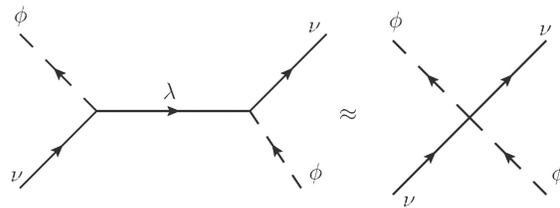


$$= Y_\nu^\dagger \int d^4 q \frac{\not{q} - M_R}{q^2 - M_R^2} Y_\nu$$

Tal integral pode ser aproximada, levando-se em conta que a aproximação é válida para momentos $q \ll M_R$, assim,

$$\frac{\not{q} - M_R}{q^2 - M_R^2} \approx -M_R^{-1} \left[1 + O\left(\frac{\not{q}}{M_R}\right)^2 \right] \quad (7.7)$$

e o gráfico pode ser substituído por uma lagrangeana efetiva em primeira ordem,



$$\mathcal{L}_{eff} = \bar{\nu} H Y^\dagger M_R^{-1} Y^\dagger H^T \nu = \bar{\nu} H \kappa H^T \nu$$

7.1.2 Equações do Grupo de Renormalização

Utilizando-se do método de contra-termos, a renormalização das quantidades relevantes ao problema são descritas através da adição dos termos abaixo, à lagran-

geana inicial,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\nu &= \frac{1}{2}\bar{E}_l H \delta\kappa H^T E_l^c + H.c. \\ \mathcal{C}_l &= iE_l \not{\partial} \delta Z_l E_l \\ \mathcal{C}_Y &= \bar{E}_l H \delta Y_l e_R + H.c. \\ \mathcal{C}_H &= \delta Z_H (\partial_\mu H)^\dagger \partial^\mu H - \delta m^2 |H|^2 - \frac{1}{4} \delta\lambda |H|^4\end{aligned}$$

dessa forma, a renormalização da matriz κ é dada por,

$$\kappa_B = (Z_l^T)^{-1/2} Z_H^{-1/2} (\kappa + \delta\kappa) \mu^\epsilon Z_H^{-1/2} (Z_l)^{-1/2} \quad (7.8)$$

onde o fator μ^ϵ surge pois em D dimensões, $[E_l] = \frac{D-1}{2}$ e $[H] = \frac{D-2}{2}$, assim, $[\kappa] = 4 - D - 1 = \epsilon - 1$, portanto, para garantir a renormalização, precisamos substituir $\kappa \rightarrow \kappa\mu^\epsilon$, onde $[\mu] = 1$, e assim, $[\kappa] = -1$ em qualquer dimensão.

7.1.2.1 Regularização dimensional

Para o cálculo das quantidades Z_l , Z_H e $\delta\kappa$ será utilizado o método de regularização dimensional, considerando-se os gráficos das fig. (7.1) e (7.2), provenientes dos acoplamentos de Yukawa, auto-interação do Higgs, e acoplamento com os bósons de Gauge.

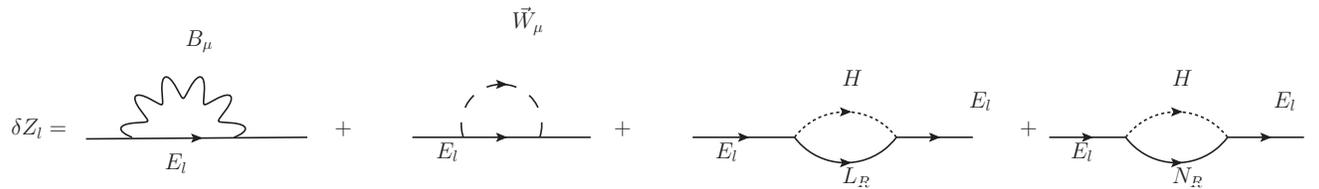


Figura 7.1: Auto energia do lépton.

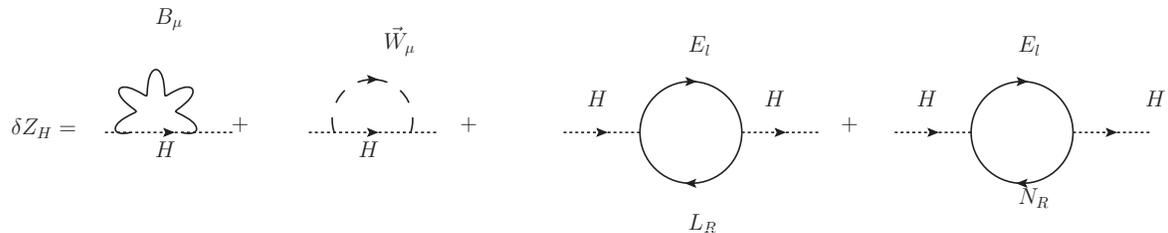


Figura 7.2: Auto energia do Higgs.

Em ambas as figuras, os três primeiros gráficos são os usuais do modelo padrão, o último gráfico é o gerado pela adição do acoplamento de Yukawa com o neutrino estéril. Em particular, todos os acoplamentos são da forma, $\mathcal{L}_{int} = Y_c^{ab} \phi^c \psi_{1a} \psi_{2b}$, onde ϕ e ψ_i são campos que podem ser fermiônicos ou bosônicos. Dessa forma, as integrais a se calcular devem ser, pelas regras de Feynman,

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (-iY) D_1(q) D_2(q-p) (-iY) \quad (7.9)$$

onde D_i são os propagadores dos campos em loop e é subentendido um traço caso haja algum loop de férmions. O cálculo em primeira ordem para cada um dos gráficos⁴¹ resulta, no Gauge R_ξ , em

$$\delta Z_l = \frac{-1}{16\pi^2 \epsilon} [Y_\nu^\dagger Y_\nu + Y_l^\dagger Y_l + \frac{1}{2}(\xi_B - 1)g_1^2 + \frac{3}{2}(\xi_W - 1)g_2^2] \quad (7.10)$$

$$\delta Z_H = \frac{-1}{16\pi^2 \epsilon} [2Tr(Y_\nu^\dagger Y_\nu) + 2Tr(Y_l^\dagger Y_l) + 6Tr(Y_u^\dagger Y_u) + 6Tr(Y_d^\dagger Y_d) \frac{1}{2}(\xi_B - 3)g_1^2 + \frac{3}{2}(\xi_W - 3)g_2^2] \quad (7.11)$$

onde g_1 e g_2 são as constante de acoplamento do modelo padrão para os bósons de Gauge e Y_u, Y_d são os acoplamentos do Higgs com os quarks.

Para o cálculo da regularização da matriz κ , é possível pensá-la como um acoplamento de quatro vértices que conecta Higgs e Leptons,

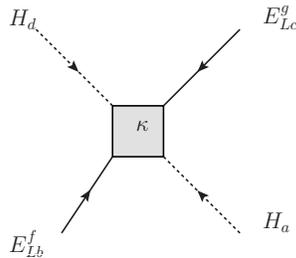


Figura 7.3: vértice efetivo da matriz Kappa.

com isso as correções de primeira ordem para tal termo surgem dos acoplamentos de Yukawa e auto-interação do Higgs Fig.(7.4) onde foi omitida as correções via bosons de Gauge,

⁴¹Parte das contas encontra-se no apêndice

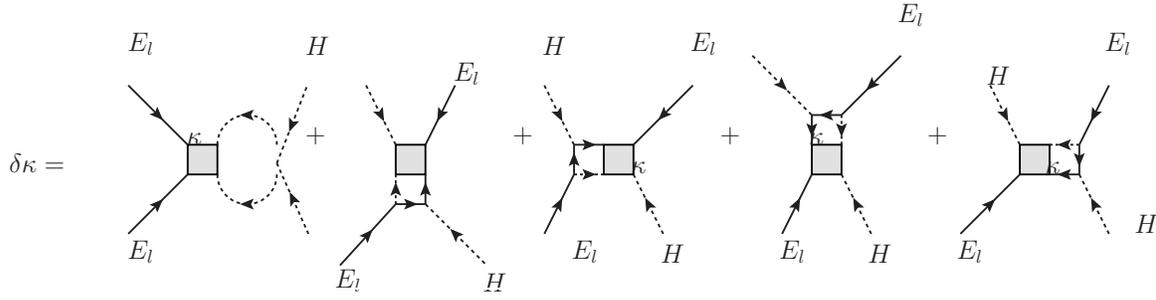


Figura 7.4: Loops de Primeira ordem na regularização da matriz κ .

Tais correções tem origem na auto-interação do Higgs e no acoplamento de Yukawa dos leptons carregados⁴²,

$$\delta\kappa = \frac{-1}{16\pi^2\epsilon} [2(Y_e^\dagger Y_e)^T \kappa + 2\kappa Y_e^\dagger Y_e - \lambda\kappa + \frac{1}{2}(2\xi_B - 3)g_1^2\kappa + \frac{3}{2}(2\xi_W - 1)g_2^2\kappa] \quad (7.12)$$

Note que tal correção é linear em κ .

7.1.2.2 A função Beta da Matriz de acoplamento

Para encontrar a equação do grupo de renormalização é necessário resolver o problema dado por,

$$\mu \frac{d\kappa_B}{d\mu} = 0, \quad (7.13)$$

de forma a encontrar a maneira como a constante κ em questão se altera com a escala μ do problema. Isso significa encontrar uma equação da forma,

$$\mu \frac{d\kappa}{d\mu} = \beta_\kappa. \quad (7.14)$$

A maior dificuldade para obter a equação do grupo de renormalização para a matriz κ se dá pelo seu caráter tensorial, que conecta campos espinoriais e escalares, tornando a álgebra um tanto quanto trabalhosa, desas forma o método utilizado para cálculo da função β_κ é baseado no trabalho apresentado na referência [1], onde foi calculado de forma genérica a função β_Q de uma quantidade tensorial que obedece $Q_B = \left(\prod_{i \in I} Z_{\phi_i}^{n_i}\right) (Q + \delta Q) \mu^{D_Q \epsilon} \left(\prod_{j \in J} Z_{\phi_j}^{n_j}\right)$,

⁴²parte do cálculo pode ser encontrado no apêndice

$$\begin{aligned}
\beta_Q^{(0)} &= D_Q \left\langle \frac{d\delta Q\epsilon}{dQ} \middle| Q \right\rangle - D_Q \delta Q\epsilon + \\
&\quad + \sum_A D_{V_A} \left\langle \frac{d\delta Q\epsilon}{dV_A} \middle| V_A \right\rangle + \\
+ Q \cdot \sum_{j \in J} n_j &\left[\left\langle \frac{d\delta Z_{\phi_j}\epsilon}{dQ} \middle| Q \right\rangle + \sum_A D_{V_A} \left\langle \frac{d\delta Z_{\phi_j}\epsilon}{dV_A} \middle| V_A \right\rangle \right] + \\
+ \sum_{i \in I} n_i &\left[\left\langle \frac{d\delta Z_{\phi_i}\epsilon}{dQ} \middle| Q \right\rangle + \sum_A D_{V_A} \left\langle \frac{d\delta Z_{\phi_i}\epsilon}{dV_A} \middle| V_A \right\rangle \right] \cdot Q \tag{7.15}
\end{aligned}$$

onde V_A são outros possíveis parâmetros da teoria e

$$\left\langle \frac{dF}{dx} \middle| y \right\rangle \begin{cases} \frac{dF}{dx} y, \text{ para } x, y \text{ escalares} \\ \frac{dF}{dx_i} y_i, \text{ para } x, y \text{ vetores} \\ \frac{dF}{dx_{ij}} y_{ij}, \text{ para } x, y \text{ tensores} \\ \text{etc..} \end{cases}$$

Como $\delta\kappa$ é linear em κ , os dois primeiros termos da equação (7.15) se anulam. Ainda mais, como δZ_H e δZ_l não tem correções de primeira ordem em κ , os termos $\left\langle \frac{d\delta Q\epsilon}{dV_A} \middle| V_A \right\rangle$ também se anulam, resultando em,

$$16\pi^2 \beta_k = -\frac{3}{2} [\kappa(Y_e^\dagger Y_e) + (Y_e^\dagger Y_e)^T \kappa] + \lambda\kappa - 3g_2^2 \kappa + 2Tr(Y_e^\dagger Y_e + 3Y_u^\dagger Y_u + 3Y_d^\dagger Y_d) \kappa \tag{7.16}$$

Tal equação foi reobtida e confirma o resultado da referência [32], conhecido na literatura.

7.1.2.3 As Constantes de Acoplamento

Com a introdução da supersimetria um outro fenômeno referente às equações do grupo de renormalização aparece, a chamada *unificação das constantes de acoplamento*. Tal problema é largamente encontrado na literatura[25] , [18] . A partir dos gráficos de auto-interação dos bósons de gauge, dos férmions, do Higgs e das correções de vértices para cada uma dos grupos do modelo padrão, é possível calcular a forma como as constantes de acoplamento $\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$ varia com a escala de energia. Tal equação é bem simples e tem a forma,

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{b_i}{4\pi} \alpha_i^2. \tag{7.17}$$

Onde $i = 1, 2, 3$ onde $i = 1, 2$ representam as constantes dos grupos $U(1)$, $SU(2)$ e $i = 3$ representa a constante forte, do grupo $SU(3)$, e o parâmetro

$$t = \log \left(\frac{\mu^2}{M_Z^2} \right), \quad (7.18)$$

com μ é a escala do problema e M_Z a massa do bóson Z^0 . No modelo padrão, $(b_1, b_2, b_3) = (41/10, -19/6, -7)$. Tais equações tem solução da forma, como é

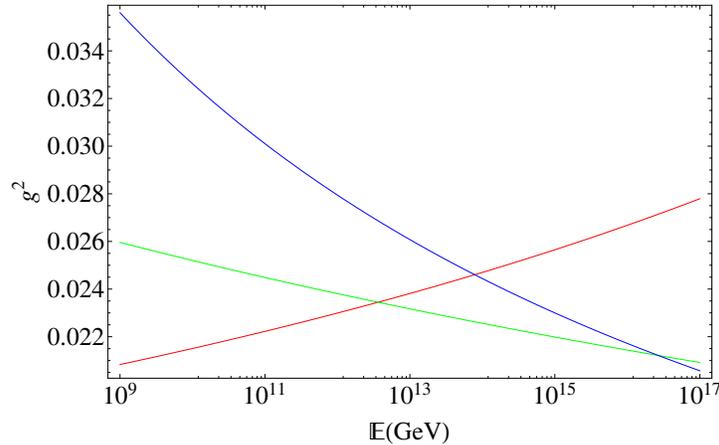


Figura 7.5: Constantes de Acoplamento no SM, $g_1 =$ Vermelho correspondente a $U(1)$, $g_2 =$ verde correspondente a $SU(2)$ e $g_3 =$ azul correspondente a $SU(3)$.

possível ver, para $t \sim 60$ ou $E \sim 10^{16} \text{ GeV}$ as constantes possuem um valor bastante similar. Entretanto elas não chegam a cruzar no mesmo ponto.

Ao introduzir o modelo supersimétrico, o número de partículas aumenta consideravelmente e as constantes b_i adquirem os valores, $(b_1, b_2, b_3) = (33/5, 1, -3)$. De tal forma que sua estrutura fica, é possível notar no gráfico da figura 7.6, as constantes de acoplamento possuem um valor muito próximo, em uma energia da ordem de $E \sim 10^{16} \text{ GeV}$. Essa é um dos resultados mais interessantes da supersimetria, que dá uma luz na escala de acoplamento entre as forças fundamentais da natureza gerando a possibilidade da existência de uma teoria que unifica as forças fundamentais.

7.1.3 Resultados Finais

A forma numérica das funções dos parâmetros dos modelos foram obtidas através da utilização do programa *Mathematica*. Os parâmetros iniciais em geral são obtidos na escala de $E \sim M_z \approx 91 \text{ GeV}$. Para fazer a análise em algum modelo supersimétrico é necessário calcular a forma de todos os parâmetros no modelo padrão

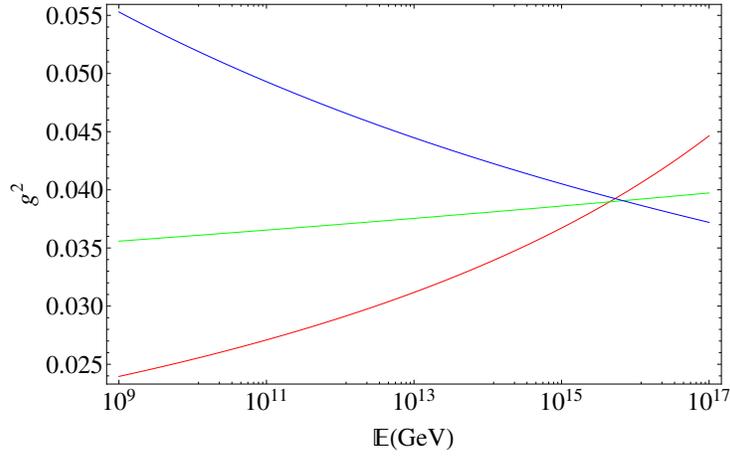


Figura 7.6: Constantes de Acoplamento no MSSM, $g_1 = \text{Vermelho}$ correspondente a $U(1)$, $g_2 = \text{verde}$ correspondente a $SU(2)$ e $g_3 = \text{azul}$ correspondente a $SU(3)$.

através das condições iniciais e obtê-los a uma energia aonde as novas partículas supersimétricas começam a aparecer e assim suas correções se tornam significativas. O valor exato de aonde tais partículas podem aparecer não é conhecido, no entanto, dado que o problema da hierarquia acontece por volta de $\sim 1\text{TeV}$, é natural imaginar que próximo a essa escala também começam a aparecer novas partículas. Assim, é necessário evoluir o valor das constantes na tabela 7.1 com o modelo padrão, e obtê-los em uma energia por volta de 1TeV e assim começar a evoluir as constantes em cada modelo, os parâmetros que foram usados como iniciais a 2TeV encontram-se na tabela 7.3.

7.1.3.1 Parâmetros Iniciais a 91GeV

A tabela 7.1 contém os dados obtidos do particle data group (PDG)[18], E também a matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa,

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 0.97425(22) & -0.2252(9) & -4.15(49).10^{-3} \\ 0.230(11) & 1.006(23) & -49.1(1.1).10^{-3} \\ 8.4(6).10^{-3} & -42.9(2.6).10^{-3} & 0.89(7) \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

7.1.3.2 RGE para Matrizes de Rotação

A tabela 7.1 e a eq.7.19 são os dados obtidos experimentalmente, ou seja, elas contém as massas dos neutrinos e quarks, e seus ângulos de mistura. Entretanto as equações do grupo de renormalização são dadas numa base genérica aonde κ e

<i>Parâmetro</i> ($E \approx 91\text{GeV}$)	<i>Valor</i> (GeV)
m_u	$2.3(6).10^{-3}$
m_s	$95(5).10^{-3}$
m_b	$4.18(3)$
m_d	$4.8(5).10^{-3}$
m_c	$1.275(25)$
m_t	$173.5(7)$
m_e	$0.510998928(11).10^{-3}$
m_μ	$105.6583715(35).10^{-3}$
m_τ	$1.77682(16)$
m_{ν_1}	1.10^{-9}
Δm_{21}^2	$7.50(20).10^{-23}\text{GeV}^2$
Δm_{32}	$2.32(10).10^{-21}\text{GeV}^2$
$\sin^2(2\theta_{12})$	$0.857(24)$
$\sin^2(2\theta_{23})$	$0.97(1)$
$\sin^2(2\theta_{13})$	$0.098(13)$
α_1	$0.01681(5)$
α_2	$0.03373(31)$
α_3	$0.120(12)$

Tabela 7.1: Valores Iniciais

a matriz de acoplamento dos quarks não é necessariamente diagonal. Para conseguir conectar os dados experimentais com as equações de renormalização é preciso reescrever as equações de renormalização de forma a evidenciar a base nos quais os dados são obtidos. Assim, impondo que a base de massa é a base diagonal e que ela se mantém diagonal ao longo do processo de renormalização, a matriz κ pode ser escrita através de uma diagonalização por uma matriz U unitária na forma

$$U^\dagger \kappa U = \text{diag}\{m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}\}. \quad (7.20)$$

Que, na eq.7.16 multiplicada por κ^\dagger pela direita e somada pelo seu hermitiano conjugado, dá duas equações,

$$16\pi^2 \frac{dm_i^2}{dt} = 2Tm_i^2 - 3 \sum_{i,j} m_i m_j A_{ij} \quad (7.21)$$

$A_{ij} = m_{en}^2 U_{i,n} U_{nj}$, $y_{en}^2 = m_{en}^2/\nu^2$ e $m_{en}e$ é a massa do n – *esimo* lépton carregado, $n = 1, 2, 3 = e, \mu, \tau$ e m_n é a massa do n – *esimo* neutrino. Usando o fato de que os

termos não diagonais são gerados por U e precisam⁴³ se anular para todo E ,

$$16\pi^2 \frac{dU_{ik}}{dt} = B_u \left(\sum_{j \neq i, n} \frac{m_i^2 + m_j^2}{m_i^2 - m_j^2} U_{in} U_{jn}^* y_{en}^2 U_{jk} + \sum_{j \neq k, n} \frac{m_j^2 + m_k^2}{m_k^2 - m_j^2} U_{im} y_{en}^2 U_{jm}^* U_{jk} \right) \quad (7.22)$$

onde os valores de B_U e T estão na tabela 7.2. Tal equação foi rederivada e confirma o resultado obtido na referência [35]. A matriz U está relacionada com os ângulos

Modelo	B_U	T	
SM	-3	$\lambda + 2Tr$	$3Y_d^\dagger Y_d + 3Y_u^\dagger Y_u + Y_e^\dagger Y_e - 3g_2^2$
MSSM	2	$-2g_1^2 - 6g_2^2 + 6Tr [Y_u^\dagger Y_u]$	

Tabela 7.2: Valores da constante B_U e T que aparecem nas equações do grupo de renormalização dos neutrinos para o modelo padrão e para o modelo supersimétrico mínimo.

de mistura por,

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

com $c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$ e $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$. As equações do modelo padrão geraram um running para os ângulos de mistura mostrados na fig.7.7, a banda corresponde à utilização dos erros experimentais dados pelo PDG, aonde as condições iniciais foram variadas entre o maior e o menor erro experimental fornecido.

O gráfico da fig.7.8 mostra o crescimento da diferença de massa entre os neutrinos no Modelo Padrão,

7.1.3.3 Valores iniciais a 2TeV

O programa *Mathematica* forneceu os dados a 2TeV através da resolução das equações diferenciais para todos os parâmetros do modelo, dada as condições iniciais e as funções beta já obtidas, os resultados estão presentes na tabela 7.3 e eq.7.24

$$V_{ckm} = \begin{pmatrix} 0.9742(30) & -0.22520(15) & -0.004110(25) \\ 0.23002(35) & 1.00603(31) & -0.04863(10) \\ 0.008398(31) & -0.04425(10) & 0.907285(10) \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

⁴³Essa condição é necessária para que a base de massa seja a mesma durante todo o processo.

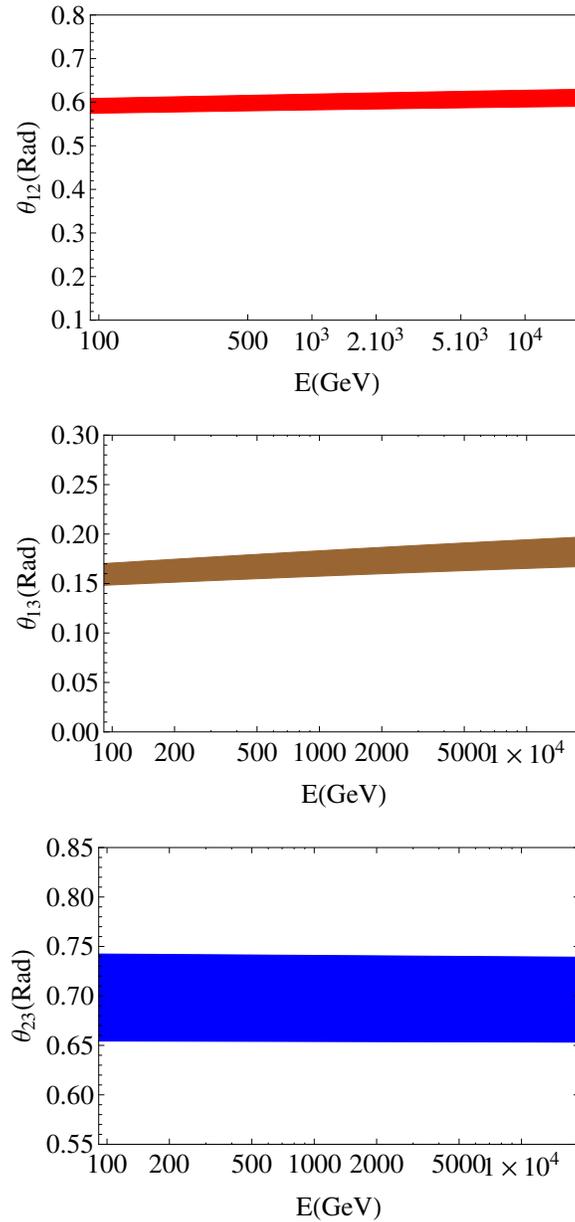


Figura 7.7: Ângulos de Mistura no SM, θ_{12} = Vermelho, θ_{13} = Marrom, θ_{23} = Azul.

7.1.3.4 Ângulos de Mistura

Com as equações do grupo de renormalização do MSSM e os valores dados pelo modelo padrão a 2TeV foi feita nova análise cujo resultado está presente nas fig.(7.9)

Como é possível ver, nos dois casos há uma mudança rápida para baixas energias $\sim 1\text{TeV}$ e a partir de⁴⁴ $t = 10$ ou $E \approx 14\text{TeV}$ os ângulos passam a ter um crescimento bem devagar.

Uma pergunta que surge ao observar as figs.7.7 e 7.9 é se a diferença entre os ângulos

⁴⁴lembrando que o parâmetro $t = \log\left(\frac{\mu^2}{M_z^2}\right)$, μ é a escala do problema e M_z a massa do bóson Z^0

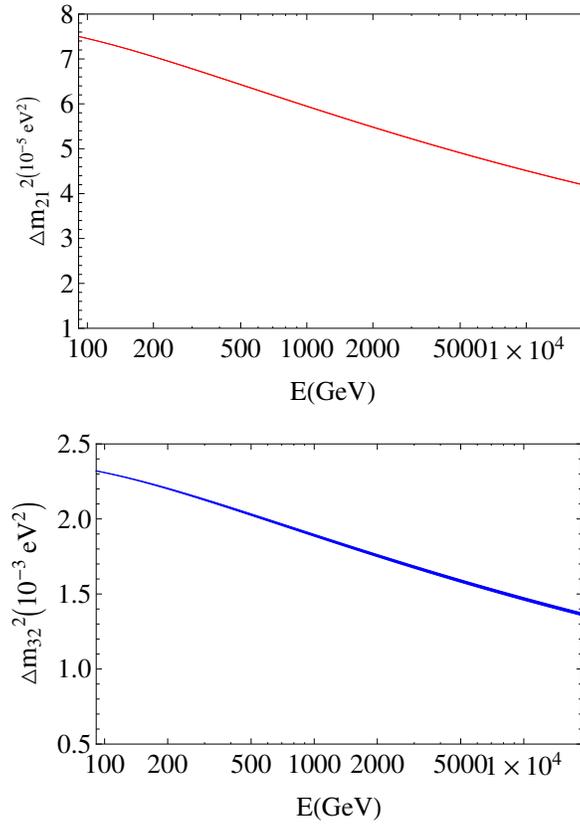


Figura 7.8: Variação da diferença de massa, $\Delta m_{12}^2 =$ vermelho e $\Delta m_{32}^2 =$ azul, para hierarquia normal no SM.

de mistura são realmente observáveis experimentalmente. Os erros experimentais de medição dos ângulos de mistura estão da ordem de $\Delta \sin^2(\theta_{12}) = 0.024 \text{ rad}$ [18] o que é um problema para esse tipo de análise, onde a diferença entre o SM e o MSSM é maior a uma energia próxima de 10^6 TeV e vale $\Delta \sin^2(\theta_{12}) = 0.021 \text{ rad}$.

Para entender como acontece a evolução do ângulo de mistura, é interessante analisar em especial o valor de θ_{13} que possui mudança mais evidente. Em especial, sua equação pode ser obtida a partir da equação de $U_{13} = \sin(\theta_{13}) \approx \theta_{13}$. Como a equação da matriz de mistura está relacionada sempre com y_{en}^2 , o termo mais relevante será para y_τ^2 , já que⁴⁵ $y_\mu^2 \ll y_\tau^2$, assim,

$$16\pi^2 \frac{d\theta_{13}}{dt} \approx B_u \left[\frac{2m_1^2 - \Delta m_{1j}^2}{\Delta m_{1j}^2} m_\tau^2 |U_{j3}|^2 + \frac{2m_3^2 - \Delta m_{3j}^2}{\Delta m_{3j}^2} m_\tau^2 |U_{3j}|^2 \right] \theta_{13} \quad (7.25)$$

⁴⁵pois $y_{fermion}$ está diretamente relacionado com a massa dos férmions, na base onde a matriz de massa é diagonal

Parâmetro ($E = 2\text{TeV}$)	Valor (GeV)
$(m_u/\nu)^2$	$4.42(34).10^{-8}$
$(m_s/\nu)^2$	$7.55(59).10^{-8}$
$(m_b/\nu)^2$	$1.42(20).10^{-4}$
$(m_d/\nu)^2$	$1.92(15).10^{-10}$
$(m_c/\nu)^2$	$1.31(58).10^{-5}$
$(m_t/\nu)^2$	$0.261(21)$
$(m_e/\nu)^2$	$4.13(33).10^{-12}$
$(m_\mu/\nu)^2$	$1.76(14).10^{-7}$
$(m_\tau/\nu)^2$	$4.99(40).10^{-5}$
$(m_{\nu_1}/\nu)^2$	$1.7609(21)10^{-23}$
$(m_{\nu_2}/\nu)^2$	$1.7610(21).10^{-23}$
$(m_{\nu_3}/\nu)^2$	$1.7651(22).10^{-23}$
θ_{12}	$0.614(17)$
θ_{23}	$0.697(22)$
θ_{13}	$0.168(12)$
$1/\alpha_1$	$57.78(18)$
$1/\alpha_2$	$30.95(27)$
$1/\alpha_3$	$11.3(1)$

Tabela 7.3: Valores dos parâmetros da teoria após rodar as equações de renormalização do modelo padrão até 2TeV, ie, valores iniciais no teste dos modelos. $\nu = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ é a translação do campo de Higgs para seu estado de vácuo.

como $\Delta m_{12}^2 \ll \Delta m_{23}^2, \Delta m_{13}^2$ e $\Delta m_{12}^2 \ll m_1^2$,

$$16\pi^2 \frac{d\theta_{13}}{dt} \approx B_U \left[y_\tau^2 \frac{2m_1^2}{\Delta m_{21}^2} \right] \theta_{13} \quad (7.26)$$

Assim, a grande diferença na evolução do ângulo de mistura gerada pelo modelo supersimétrico é o fator B_U . Supondo $Y_\tau^2 \frac{2m_1^2}{\Delta m_{21}^2} = \alpha \approx cte$, pois a variação das massas é pequena em comparação com seu valor inicial, a equação é facilmente resolvida,

$$\theta_{13}(t) \approx \theta_{13}(0) e^{\frac{B_U \alpha}{16\pi^2} t} \quad (7.27)$$

O fator α é da ordem da unidade. Como o fator $16\pi^2 \gg 1$, a exponencial corre de maneira bem vagarosa, o que explica a baixa mudança no valor de θ . A mudança entre 1 e 5 TeV chega a aproximadamente 5% no valor do ângulo. Como o erro experimental nas medições é da ordem de 7%, o próprio crescimento no ângulo fica mascarado pelo erro experimental a baixas energias. Os gráficos das fig. 7.10 e 7.11 mostram o desvio relativo $1 - \theta(t)/\theta(2\text{TeV})$, no modelo padrão e modelo

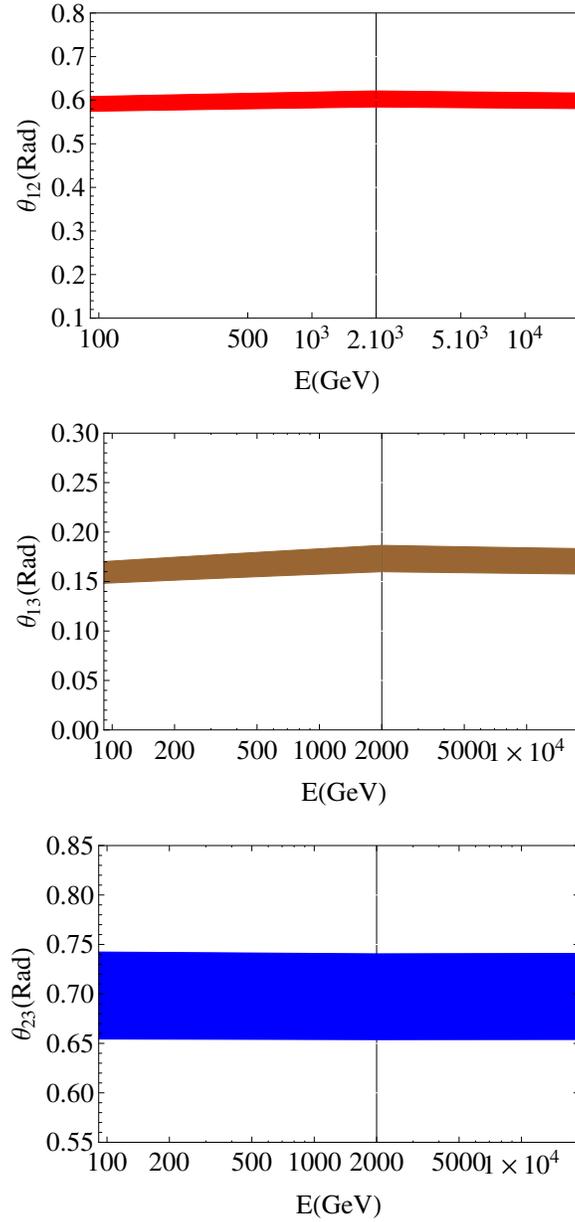


Figura 7.9: Ângulos de Mistura no MSSM, θ_{12} = Vermelho, θ_{13} = Marrom, θ_{23} = Azul.

supersimétrico respectivamente.

Caso seja possível medir a variação dos ângulos, os desvios relativos mostram uma mudança bem distinta, já que o fator B_U é positivo para o modelo supersimétrico e negativo para o modelo padrão, gerando um crescimento positivo para o primeiro e negativo para o segundo.

O gráfico da fig.7.12 mostra o crescimento da diferença de massa entre os neutrinos no Modelo Super Simétrico Mínimo,

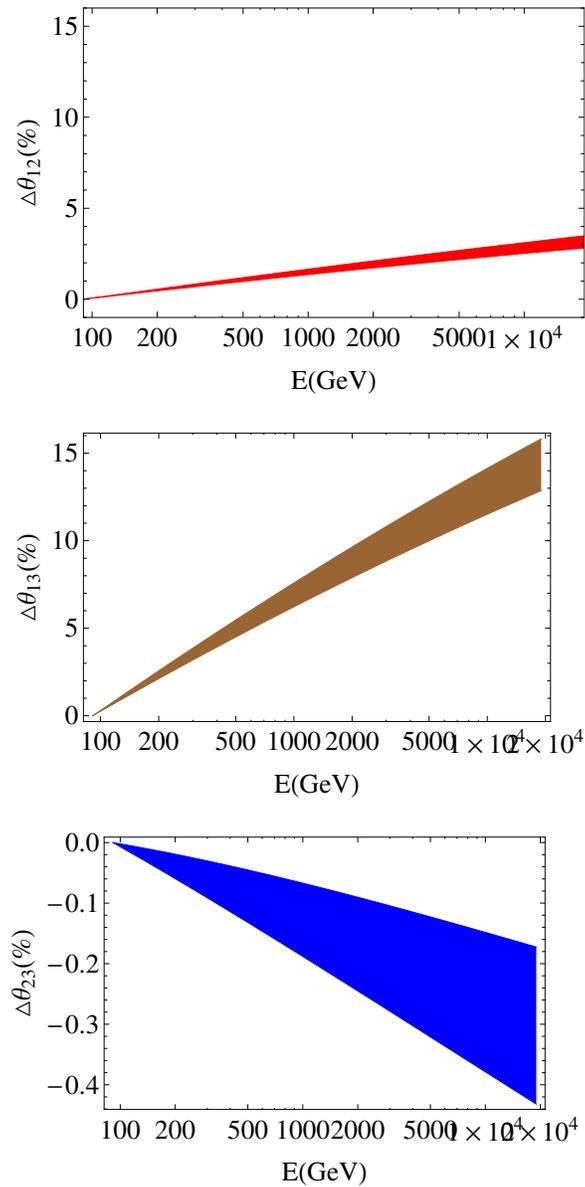


Figura 7.10: Variação percentual do ângulo de mistura no SM $\Delta\theta_{12} =$ Vermelho, $\Delta\theta_{13} =$ Marrom, $\Delta\theta_{23} =$ Azul.

7.2 Conclusão da Análise

A análise do modelo mostra que a evolução dos ângulos de mistura é bastante diferente nos dois modelos estudados principalmente causado pela mudança de sinal no parâmetro B_U , que tem valor -3 para o modelo padrão e 2 para o modelo supersimétrico mínimo, tabela 7.2. Com isso, enquanto em um modelo há um aumento no valor das constantes, no outro há uma diminuição. Embora essa variação seja evidentemente diferente, ela é bastante suave e pequena, com variações de 4% para o ângulo com medições de maior precisão experimental, isso significa que a observação na variação dos ângulos de mistura seja difícil de ser observada.

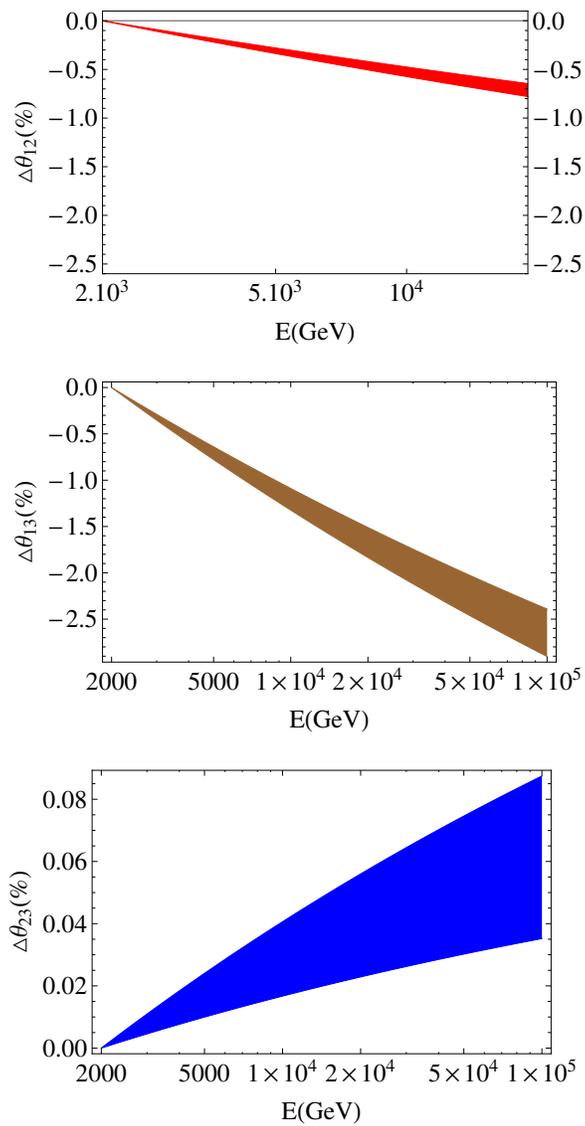


Figura 7.11: variação percentual do ângulo de mistura no MSSM $\Delta\theta_{12} =$ Vermelho, $\Delta\theta_{13} =$ Marrom, $\Delta\theta_{23} =$ Azul, em radianos.

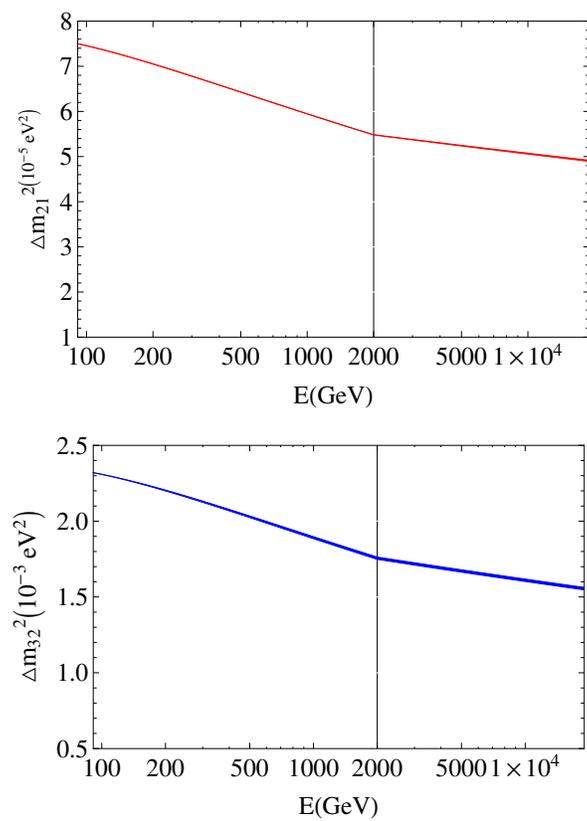


Figura 7.12: Variação da diferença de massa, $\Delta m_{12}^2 =$ Vermelho e $\Delta m_{32}^2 =$ Azul, para hierarquia normal no MSSM.

Capítulo 8

Dimensões Extras

Um tipo de modelo em física de partículas que tem mostrado novos caminhos são os modelos de dimensões extras. A ideia de colocar mais dimensões do que as $1 + 3$ (uma temporal e três espaciais) usuais do modelo padrão surgiu em 1914 (antes da relatividade geral) com Gunnar Nördshon, que tentou unificar o campo escalar gravitacional ϕ como a quinta componente de um campo vetorial A_μ do eletromagnetismo. Alguns anos depois Theodor Kaluza (1921) e Oskar Klein (1926) tiveram ideias mais robustas e inovadoras, a ideia de Kaluza era descrever o campo gravitacional em 5 dimensões $x = (x^\mu, y)$ de tal forma que a nova métrica G_{MN} fosse uma combinação da métrica $g_{\mu\nu}$ da relatividade e um campo vetorial A_μ ,

$$G_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ \hline A_\mu & g_{55} \end{array} \right). \quad (8.1)$$

O grande problema surge ao se perguntar porque não é possível ver as dimensões extras com os experimentos? A resposta para essa pergunta foi proposta por Klein através do argumento no qual as dimensões extras são compactificadas, isto é, elas possuem um tamanho finito, por exemplo um toro de raio R no qual a coordenada y é periódica, $y = y + 2\pi R$. Essa condição impõe condições de periodicidade para as funções de onda, de forma que apenas alguns comprimentos de onda, relacionados com $k_y = \pm \frac{n_y}{R}$, $n \in \mathcal{N}$, podem ser acessados. Assim se $R \ll 1\text{TeV}^{-1}$, a energia necessária para acessar tais dimensões é grande e elas ficam invisíveis para experimentos a baixa energia. Para os modelos atuais a ideia de unificação foram abandonados, no entanto a ideia de compactificação das dimensões extras ainda existem.

8.1 Teoria de Campos em D-dimensões

O processo de criação do modelo requer algumas sutilezas, para que ele seja consistente a baixas energias é necessário que reproduza o modelo padrão. A ação em D dimensões é escrita através das D coordenadas, 4 usuais, x^μ e $D-4$, $(y_1, y_2 \dots y_{D-4})$,

compactificadas, tal que a métrica se reduza ao espaço de Minkowski usual em $4D$,

$$ds^2 = e^{-2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - (dy)^2 \quad (8.2)$$

onde $A(y)$ é uma função que descreve a curvatura no espaço $5D$. Dessa forma a ação é descrita por,

$$S_D = \int d^D x \sqrt{G} \mathcal{L}. \quad (8.3)$$

Para entender a forma de quantização, vale a pena usar o exemplo de uma lagrangiana para um campo escalar ϕ , em 5 dimensões⁴⁶,

$$\mathcal{L} = G_{MN}\partial_M\phi^\dagger\partial_N\phi - V(\phi) \quad (8.4)$$

encontra-se a variação da ação δS para uma variação do campo escalar $\delta\phi$,

$$\delta S = \delta S_V + \delta S_s \quad (8.5)$$

A variação δS_V é uma variação associada a um volume que dará origem à equação de movimento (EOM) clássica,

$$\delta S_V = \int_0^L d^5 x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \partial_M \left[\sqrt{G} G^{MN} \partial_N \phi \right] + V' \phi \right\} \delta \phi \quad (8.6)$$

onde $V' = \partial_\phi V(\phi)$. O termo de superfície δS_s , gerado pela integração por parte, é dado por,

$$\delta S_s = \int d^4 x \sqrt{-g} G^{5N} \partial_N \phi \delta \phi \Big|_0^L \quad (8.7)$$

em teorias em 4 dimensões tal termo não possui uma importancia tão imediata, pois a abordagem usual é supor que o campo ϕ caia de forma rápida o suficiente quando $x^\mu \rightarrow \infty$. Esse não é o caso, porém, com teorias onde há compactificação. Isso significa que, além de estabelecer o campo e a lagrangeana, uma descrição física do modelo precisa abordar também suas condições de contorno na fronteira $[0, L]$. Mesmo para o caso do campo escalar existem diversas maneiras de impor as condições, uma delas é a compactificação em um círculo: $\phi(L) = \phi(0)$, essa compactificação, entretanto, não é fenomenologicamente consistente, pois não permite gerar campos fermionicos

⁴⁶A notação aqui estabelecida e que será usada em diante consiste em letras maiúsculas romanas para o espaço inteiro e letras gregas quando trata-se das 4 dimensões usuais.

chirais distinguíveis. Condições mais realistas são as condições de Newmann,

$$\partial_y \phi|_0^L = 0 \quad (8.8)$$

e de Dirichlet

$$\phi|_0^L = 0 \quad (8.9)$$

8.2 Torres de Kaluza-Klein

Para analisar um modelo em D dimensões é necessário compará-lo de alguma forma como algum limite de um modelo em 4 dimensões compatível com o observado em baixas energias. A maneira de fazer isso é através das torres de Kaluza-Klein (KK-tower), que consiste em interpretar as partículas observadas como reflexos de um campo em mais dimensões. Visto dessa forma, cada campo em um espaço de D dimensões gera infinitos campos em 4 dimensões, e são as chamadas torres de partículas.

A forma intuitiva de ver a origem dos infinitos campos que podem surgir é através da análise do momento observado. Como na direção da dimensão compactificada o momento é $K_y \propto \frac{n_y}{R}$, o quadrado do quadrimomento fica,

$$k^\mu k_\mu = m_0^2 + \frac{n^2}{R^2}, \quad (8.10)$$

Para $n = 0$ a massa da partícula vista por um observador em $4D$ é m_0 , quando a energia é suficientemente grande, $E \geq m_0^2 + \frac{n^2}{R^2}$, o primeiro estado do campo é excitado e a massa observada se torna $m^2 = m_0^2 + \frac{n^2}{R^2}$. Assim, um observador irá interpretar o campo como uma nova partícula. Dada energia suficiente não há, a priori, motivos para que o número natural n tenha algum limite máximo. Isso quer dizer que na teoria efetiva em $4D$, para as correções em loop dos gráficos de Feynman, as novas partículas com $n \neq 0$ devem ser levadas em conta, de forma que sejam englobadas de acordo com a escala de energia do problema.

8.2.1 Espectro de Massa

Para calcular o espectro de massa que irá surgir devido as torres de Kaluza-Klein, é necessário primeiro minimizar a ação S_D e obter as equações de movimento e a partir dela realizar uma separação de variáveis de forma a explicitar os campos em 4 dimensões e suas partes que viajam pelas outras. Para entender como é feito

é interessante voltar ao exemplo do campo escalar real, cuja equação de movimento (EOM) é

$$e^{2A(y)}\partial_\mu\partial^\mu\Phi - e^{4A(y)}\partial_y[e^{-4A(y)}\partial_y\Phi] - m_0^2\Phi^2 = 0 \quad (8.11)$$

Reescrevendo o campo $\Phi(x, y)$ como,

$$\Phi(x, y) = \frac{e^{A(y)}}{\sqrt{R}} \sum_n \phi_n(x) f_n(y) \quad (8.12)$$

Onde o fator \sqrt{R} foi colocado como forma de deixar o campo $\phi_n(x)$ com a dimensão usual para a teoria em $4D$. Colocando Eq.(8.12)em Eq.(8.11) e usando a constante m_n como constante de separação de variável, obtem-se duas equações,

$$f_n''(y) - 2A'f_n'(y) + (A'' - 3A'^2 - m_0^2 + e^{2A}m_n^2)f_n(y) = 0 \quad (8.13)$$

onde a linha significa derivada em relação a y . Essa é uma equação de auto-valores m_n que junto com as condições iniciais (que definem a compactificação) definem o valor de m_n e as funções $f_n(y)$, que formam uma base ortogonal completa.

E a segunda que caracterizará a equação de movimento em $4D$ fica,

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi_n(x) - m_n^2\phi_n = 0 \quad (8.14)$$

que é a equação usual de Klein-Gordon para os campos escalares ϕ_n com massa m_n e gera um lagrangeano efetivo,

$$S_4 = \sum_n \int d^4x [(\partial_\mu\phi_n)^2 - m_n^2\phi_n^2] \quad (8.15)$$

ou seja, a teoria inicialmente com apenas 1 campo escalar Φ em D dimensões se torna uma teoria efetiva em $4D$ dimensões com infinitas partículas escalares com espectro de massa m_n . Para lagrangeanos com interações por exemplo $\lambda\Phi^4$ a quebra em uma lagrangeana efetiva utilizando o método de KK-tower gera novas interações efetivas $\lambda_{nmlk}\phi_n\phi_m\phi_l\phi_k$ que aparecem a medida que a energia possibilite que as partículas com números n, m, l, k apareçam.

8.3 Renormalizabilidade em D Dimensões

O acréscimo de dimensões extras para a teoria torna ela inerentemente não-renormalizável, isso pode ser visto de maneira imediata através da análise dimensional, em D dimensões os campos possuem as dimensões listadas na Tabela (8.1)

<i>Spin do Campo em $4D$</i>	<i>Notação</i>	<i>dimensão</i>
0 (escalar)	$\Phi(x, y)$	$\frac{D-2}{2}$
1/2 (Férmion)	$\Psi(x, y)$	$\frac{D-1}{2}$
1 (bóson de Gauge)	$(A_\mu^i(x, y), A_5^i(x, y))$	$\frac{D-2}{2}$

Tabela 8.1: Dimensões do Campo

O que que dizer que mesmo um termo Φ^3 terá uma constante de acoplamento com dimensão menor que zero. Isso significa que a não-renormalizabilidade estará sempre presente e é preciso lidar com isso com cuidado.

8.3.1 Equações de Renormalização em D Dimensões

No aspecto apresentado na seção anterior, falar em quações de renormalização não faz mais sentido, uma vez que a teoria não é renormalizável. Entretanto as constantes de acoplamento, bem como a massa das partículas, possui correções a nível de loop que devem ser levada em conta e equações análogas às equações de renormalização da teoria precisam ser calculadas e fazem parte fundamental da construção do modelo. O método de renormalização dimensional não funciona mais e uma escala de energia μ não tem mais sentido físico, é necessário colocar um *cutoff*, Λ , explícito nas integrais de loop e que caracteriza até aonde chega a validade da teoria, como a cada energia característica aparecerão novas partículas, provenientes das torres de Kaluza-Klein, a cada passo há uma escala de energia onde as equações precisam ser re-avaliadas. A maneira de fazer isso é notar que cada nova escala de energia há uma contribuição idêntica à anterior para a função β , e é possível[34] fatorar tal contribuição a partir do parâmetro S que define o número de torres de Kaluza-Klein novas, e a função de contribuição de loop pode ser escrita,

$$\beta = \beta^{SM} + S\tilde{\beta} \quad (8.16)$$

Onde $\tilde{\beta}$ é a contribuição das torres de Kaluza-Klein. Por conta da não renormalizabilidade termos que dependem da escala de forma quadrática podem aparecer, o que

torna a dinâmica das constantes de acoplamento muito mais significante.

8.3.2 O Modelo Extradimensional

A não renormalizabilidade dos modelos com dimensões extras precisam ser entendidos como uma limitação em sua validade, tais modelos não podem ser considerados teorias finais e completas. Isso quer dizer que ao construir um modelo em dimensão extra é necessário ter em mente que, a partir de uma escala M_U o modelo deve deixar de existir e uma nova física surge de forma a explicar a origem das interações que aparecem.

A extensão mais simples para do modelo padrão e que será analisada aqui nesse trabalho consiste em propor as mesmas partículas do modelo padrão podendo propagar em $4 + 1$ dimensões, onde a ultima dimensão espacial y é compactificada em um S_1/Z_2 orbitfold, o que significa eimpor para o espaço a característica $y = -y$ e o fator na metrica $A(y) = cte$. A nova dimensão precisa ter um tamanho da ordem de $R^{-1} \geq 1\text{TeV}$ para que o problema da Hierarquia possa ser solucionado. As novas funções beta, $\tilde{\beta}$ podem ser encontradas em [34] e [35],

$$\tilde{\beta}_{g_i} = \frac{1}{16\pi^2} \tilde{b}_i g_i^2 \quad (8.17)$$

onde $(b_1, b_2, b_3) = (\frac{27}{2}, \frac{7}{6}, -\frac{5}{2})$,

$$\tilde{\beta}_e = Y_e \left[-\left(\frac{15}{8}g_2^2 + \frac{33}{8}g_1^2\right) + \frac{3}{2}Y_e^\dagger Y_e + 2T \right], \quad (8.18)$$

$$\tilde{\beta}_u = \left[-\left(\frac{28}{3}g_3^2 + \frac{15}{8}g_2^2 + \frac{101}{72}g_1^2\right) + \frac{3}{2}(Y_d^\dagger Y_d - Y_u^\dagger Y_u) + 2T \right] Y_u, \quad (8.19)$$

$$\tilde{\beta}_d = \left[-\left(\frac{28}{3}g_3^2 + \frac{15}{8}g_2^2 + \frac{17}{72}g_1^2\right) + \frac{3}{2}(Y_d^\dagger Y_d - Y_u^\dagger Y_u) + 2T \right] Y_d \quad (8.20)$$

e a constante de acoplamento do Higgs,

$$\tilde{\beta}_\lambda = 2g_1^4 + 4g_1^2 g_2^2 + 6g_2^4 - 3\lambda(9g_2^2 + 3g_1^2) + 6\lambda^2 + 8T - 16[(Y_e^\dagger Y_e)^2 + 3(Y_u^\dagger Y_u)^2 + 3(Y_d^\dagger Y_d)^2] \quad (8.21)$$

O acoplamento que gera massa do neutrino é pensado como uma interação que é originária da nova física que aparece na escala M_U e tem a forma análoga

a da Eq.(7.5) e cuja função beta é modificada pelos mesmos gráficos mostrados anteriormente mais um novo gráfico proveniente da quinta componente do campo de gauge A_5 que surge devido à nova dimensão espacial, resultando na função beta,

$$\tilde{\beta}_\kappa = -\frac{3}{2}\kappa(Y_e^\dagger Y_e) - \frac{3}{2}(Y_e^\dagger Y_e)^T \kappa - \left(\frac{1}{4}g_1^2 + \frac{11}{4}g_2^2 - 4T - \lambda\right)\kappa \quad (8.22)$$

Percebendo que a equação para a função κ tem forma similar ao SM, a equação para a matriz de acoplamento fica equivalente à do modelo padrão Eq.(7.21)

$$16\pi^2 \frac{dm_i^2}{dt} = 2Tm_i^2 - 3 \sum_{i,j} m_i m_j A_{ij}, \quad (8.23)$$

$T = (1 + S)T^{SM} + \frac{S}{4}(g_1^2 + g_2^2)$ e Eq.(7.22),

$$16\pi^2 \frac{dU_{ik}}{dt} = B_u \left(\sum_{j \neq i,n} \frac{m_i^2 + m_j^2}{m_i^2 - m_j^2} U_{in} U_{jn}^* y_{en}^2 U_{jk} + \sum_{j \neq k,n} \frac{m_j^2 + m_k^2}{m_k^2 - m_j^2} U_{im} y_{en}^2 U_{jm}^* U_{jk} \right), \quad (8.24)$$

porém, com

$$B_u = (1 + S)B_u^{SM} \quad (8.25)$$

o termo $(1 + S)$ é proveniente das torres de Kaluza-Klein dos acoplamentos já existentes e o segundo termo de T vem da quinta componente dos campos de Gauge que gera novos acoplamentos. Isso mostra que, a cada torre excitada o acoplamento corre mais rápido, reflexo da dependência quadrática com a escala.

8.4 Resultados

A partir das equações apresentadas, foi feita uma análise equivalente à das sessões anteriores utilizando-se das mesmas condições iniciais apresentadas na tabela 7.3, pag. 98. Foi suposto que as dimensões extras tem raio de $R \approx 0.5, 1$ e 2TeV . Os resultados para $R = 1\text{TeV}$ encontram-se nas fig. 8.1 e 8.2.

Como é possível notar, os ângulos têm um crescimento bastante acentuado em comparação com o modelo padrão, isso é causado pelo termo $1 + S$ gerado devido ao aparecimento de torres de Kaluza-Klein, reflexo do crescimento quadrático com a escala de energia. Para uma energia de 14TeV o crescimento do ângulo θ_{12} já é significativo, nota-se, no entanto, que o ângulo de mistura θ_{13} não cresce de maneira tão significativa assim.

Outro dado interessante é a diferença de massa entre os neutrinos, mostrados

na fig.8.3, nesse caso a diferença de massa não tende a diminuir como no modelo padrão e no modelo supersimétrico.

As figuras 8.5 e 8.4 contêm uma comparação para a evolução dos ângulos de mistura e a massa dos neutrinos de acordo com o raio. Nota-se que as correções só começam a aparecer quando a energia chega na escala de energia correspondente ao raio, reflexo do aparecimento das torres de Kaluza-Klein, que só são acessíveis a partir dessa energia.

Por fim, um gráfico comparativo da evolução dos ângulos de mistura θ_{12} e a diferença de massa Δm_{12}^2 nos três modelos se encontram nas fig. 8.5 e 8.4 respectivamente.

8.5 Conclusão dos Resultados

Como é possível ver pelos gráficos da fig. 8.1 e 8.2 a evolução no ângulo de mistura no modelo padrão em $5D$ é bastante significativa, chegando a 10% no caso de $R = 1\text{TeV}$. Isso é evidenciado pela dependência quadrática com a escala de energia nas equações. A diferença de massa possui também uma variação significativa, fig.8.5, mas é equivalente à variação nos outros dois modelos. Nota-se ainda que, em todos os modelos, há uma queda na diferença de massa, embora mesmo para altas energias essa diferença de massa não chegue a zero, de forma que não chega a variar nem uma ordem de grandeza. É interessante verificar a dependência das constantes com relação ao tamanho do raio, fig. 8.5. Para um raio menor, mais torres de Kaluza-Klein são acessíveis em baixas energias e a evolução dos parâmetros é mais acentuada e o contrário ocorre para um raio maior, menos torres são acessíveis e a evolução demora mais para ser distinguível do modelo padrão.

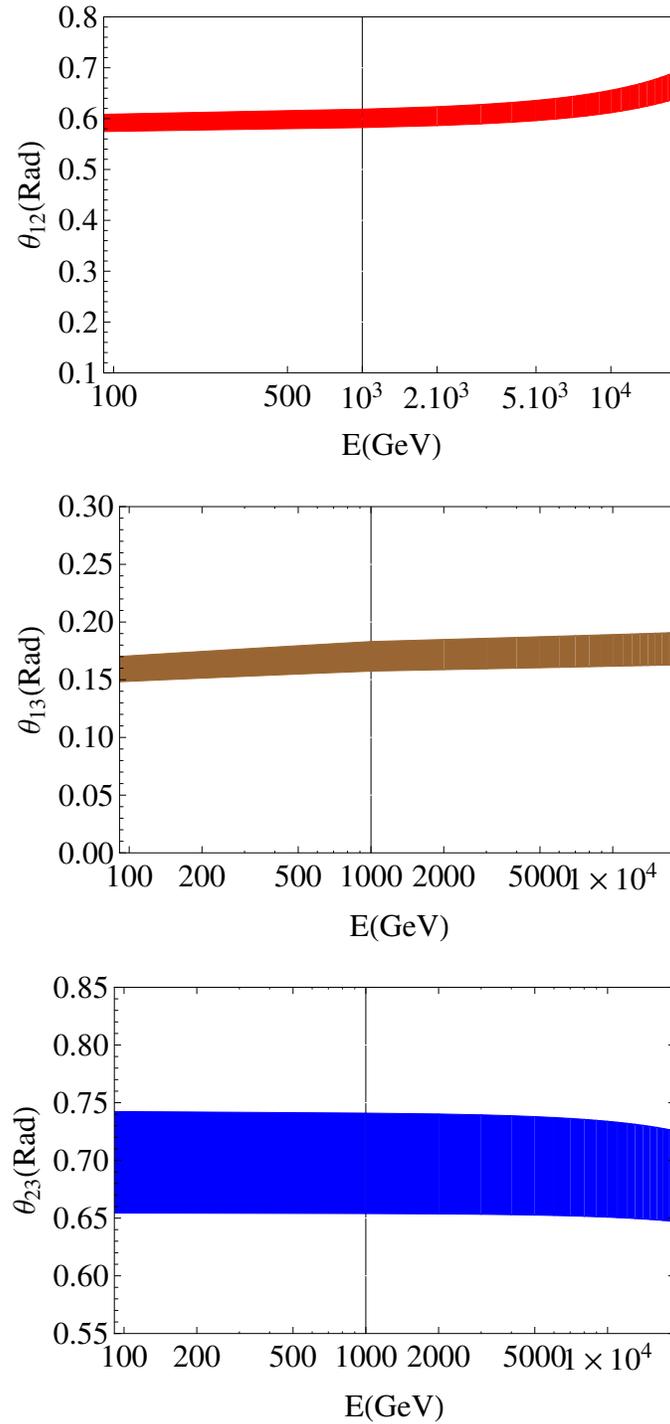


Figura 8.1: Ângulos de Mistura no SM em $5D$, θ_{12} = Vermelho, θ_{13} = Marrom, θ_{23} = Azul, raio da dimensão de $R = 1\text{TeV}$.

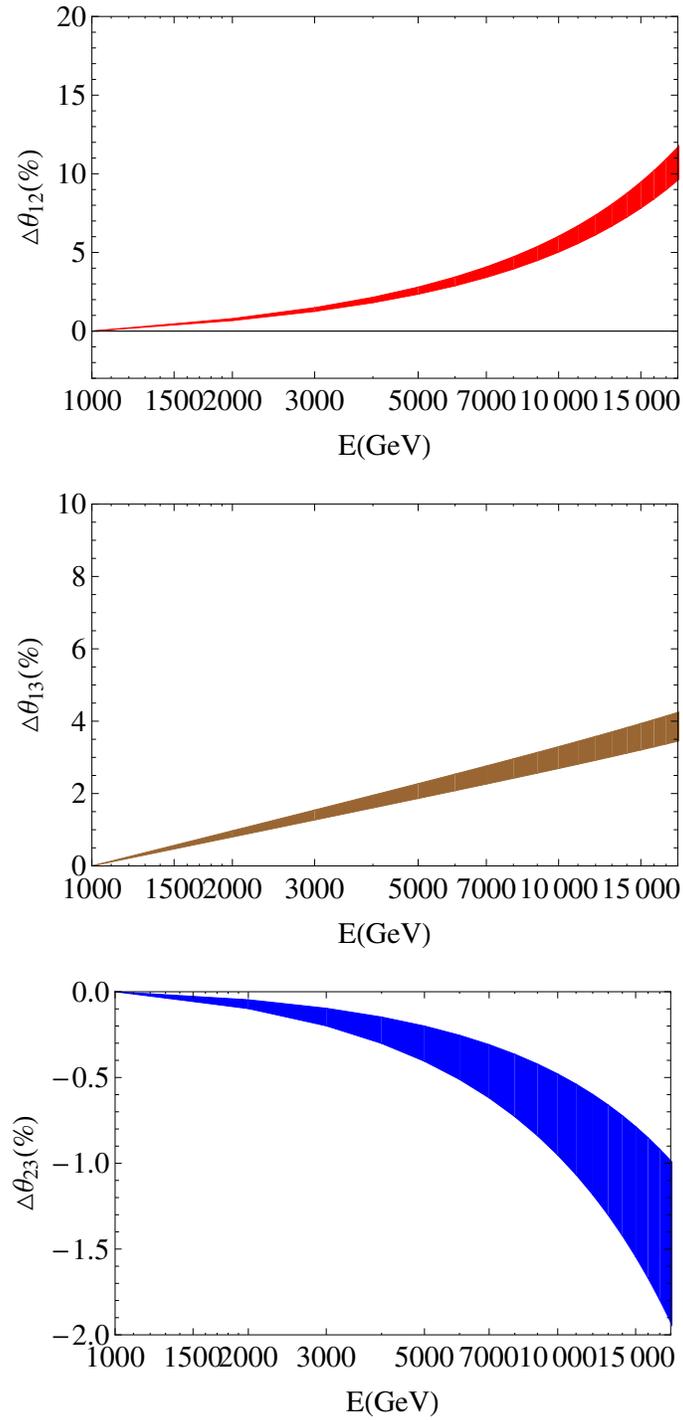


Figura 8.2: Desvio relativo no SM em $5D$, $\Delta\theta_{12}$ = Vermelho, $\Delta\theta_{13}$ = Marrom, $\Delta\theta_{23}$ = Azul, raio da dimensão de $R = 1\text{TeV}$.

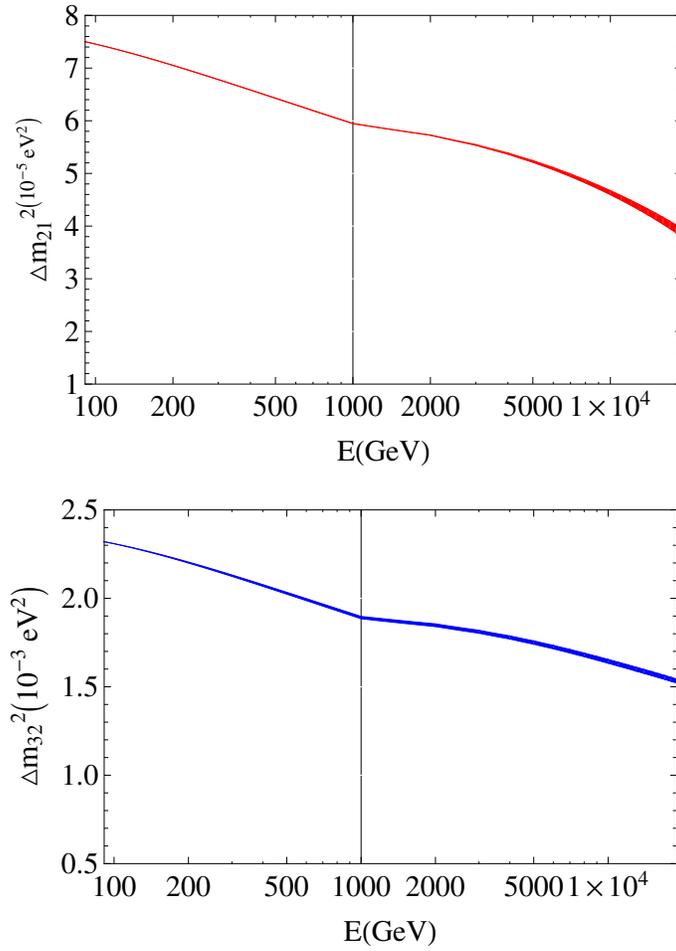


Figura 8.3: Variação da diferença de massa, $\Delta m_{12}^2 =$ Vermelho e $\Delta m_{32}^2 =$ azul, para hierarquia normal no SM em $5D$, com raio da dimensão de $R = 1\text{TeV}$.

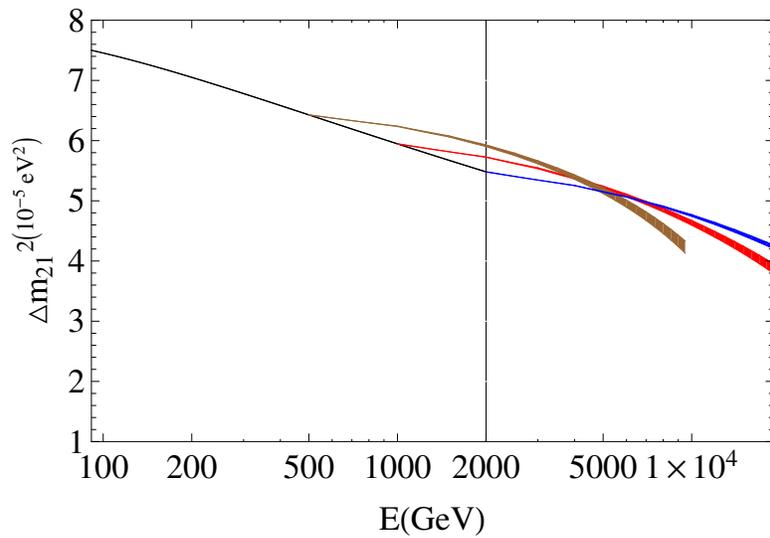


Figura 8.4: Variação da diferença de massa Δm_{12}^2 no SM em $5D$, para diversos raios, $R = 0.5\text{TeV} =$ Vermelho, $R = 1\text{TeV} =$ Marrom, $R = 2\text{TeV} =$ Azul, Modelo Padrão em Preto.

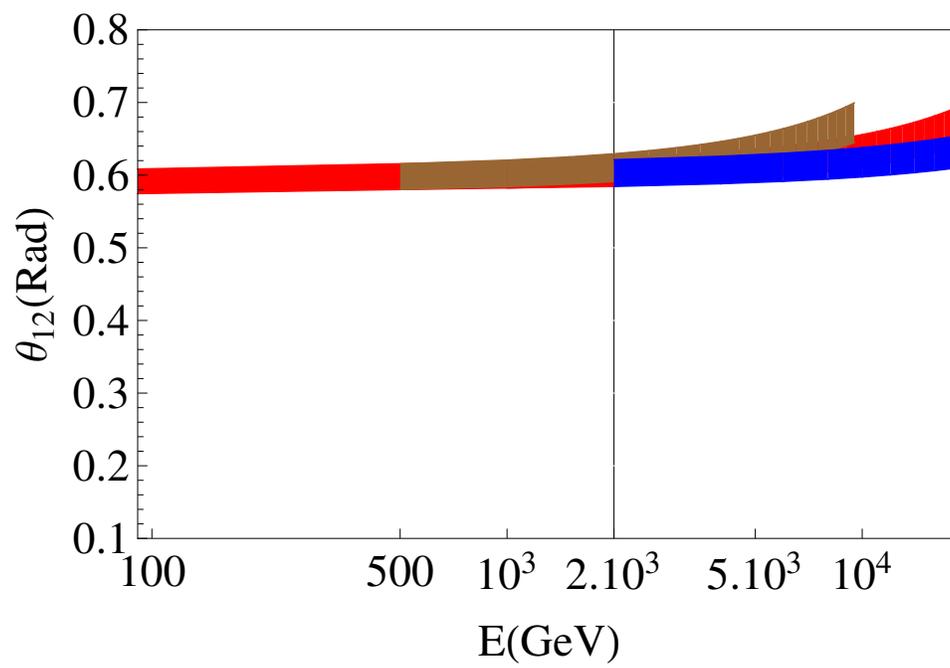


Figura 8.5: Ângulo de mistura θ_{12} no SM em $5D$ para diversos raios, $R = 0.5\text{TeV} = \text{Marrom}$, $R = 1\text{TeV} = \text{Vermelho}$, $R = 2\text{TeV} = \text{Azul}$.

Capítulo 9

Conclusão

O modelo supersimétrico mínimo consegue resolver muitas das arestas faltantes no modelo padrão, tais como a hierarquia, oscilação de neutrinos, matéria escura e ajuda a entender um pouco o conceito de grande unificação, entretanto sua detecção experimental ainda não ocorreu no LHC, aonde muitos dos modelos supersimétricos razoáveis já foram descartados. A evolução dos ângulos de mistura do MSSM difere do modelo padrão, de uma ordem de 14% do valor ganho entre o SM e o MSSM, esse ganho está por volta de 7–20% em relação ao valor total do próprio parâmetro, o que significa que a variação não pode ser detectada com os dados experimentais e seus erros associados atuais. Durante essa análise foi recalculada a Eq.7.22 bem como a Eq.7.16 ambas conhecidas na literatura [1] e [35]. Já a análise de uma extensão extra-dimensional do modelo padrão para 4 + 1 dimensões, onde 4 são as dimensões usuais e 1 a dimensão espacial fechada, mostra um crescimento mais acentuado devido ao aparecimento das torres de Kaluza-Klein com ganho bastante acentuado para energias da escala de $14TeV$, que varia com o tamanho do raio da dimensão, onde quanto menor o raio, maior a variação (note que a energia de acesso às torres de Kaluza-Klein é da forma $\sim n/R$, onde n é o número de torres acessíveis e R o raio da dimensão). Durante essa análise foi utilizada a Eq.8.22 conhecida da literatura [35]. A análise experimental do ângulo de mistura dos neutrinos e da evolução de sua diferença de massa pode impor restrições na construção de modelos, já que a forma do crescimento é bastante dependente do modelo, para o modelo supersimétrico há um aumento no ângulo, enquanto no modelo padrão há um decréscimo e em modelos com dimensões-extras o crescimento é bastante acentuado, entretanto a sua medição ainda é bastante complicada e só realizada para baixas energias.

Literatura Citada

- [1] S. Antusch, M. Drees, Phys. Lett. B 519(2001) 238.
- [2] M. Guzzo, G. Valdivieso, Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2005, vol.27, n.4, pp. 495-506. ISSN 1806-1117.

<http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172005000400002>
- [3] M. A. M. Aguiar, *Tópicos de Mecânica Clássica*, Livraria da Física, novembro de 2010

<http://www.ifi.unicamp.br/~aguiar/top-mec-clas.pdf>
- [4] C. Cohen Tannouji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics, Vol. 1*, John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [5] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1997
- [6] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. I, Cambridge University Press, 1996
- [7] R. Haag, J. T. Lopuszanski e M. Sohnius, *All Possible Generators of Supersymmetries of the S-Matrix*, Nuclear Physics B88 (1975) 257-274
- [8] E. Wigner, *On Unitary Representations of The Inhomogeneous Lorentz Group*, Annals Of Mathematics vol.40 No.1, p.149, January 1939.
- [9] Morton Hamermesh, *Group Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, INC. 1962
- [10] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Second Edition, 2010, Princeton University Press.
- [11] F. Mandl & G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons, 1986.
- [12] I.J.R. Aitchison, A.J.G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics, volume II: QCD and the Eletroweak Theory*, IOP Publishing Ltd, 2004
- [13] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH
- [14] Kenneth G. Wilson, *The Renormalization Group and Critical Phenomena*, Reviews of Modern Physics, Vol. 55, No.3 July 1983
- [15] A. L. Fetter e J. D. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*, McGraw-Hill, 1971
- [16] T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. 104, 254 (1956)

- [17] C. S. Wu, Phys. Rev. 105, 1413 (1957)
- [18] <http://pdg.lbl.gov>
- [19] S. Weinberg (1967), Phys. Rev. Lett. 19, 1264-1266
A. Salam (1968) Almqvist Forlag AB, 367
S.L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani (1970), Phys. Rev. D2, 1285-1292
- [20] ATLAS Collaboration, LHC collaboration,

arXiv:1202.1488, arXiv:1202.1408
- [21] Nambu, Y Physical Review 117, 648-663 (1960) Goldstone, J. Nuovo Cimento 19: 154-164. (1961) doi:10.1007/BF02812722.
- [22] P. W. Higgs (1964). Physical Review Letters 13 (16): 508-509.
- [23] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 10, 531 (1963); M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. 49, 652 (1973).
- [24] <http://arxiv.org/pdf/1208.6583v2.pdf>
- [25] H. Baer, X. Tata, *Weak Scale Supersymmetry*, Cambridge University Press, 2006
- [26] Coleman-Mandula, *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys. Rev. vol. 159, p.1251, year1967.
- [27] P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, extended second edition, King's College University of London, 1990.
- [28] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 43, 1566 (1979)
- [29] P. Chankowski, Z. Pluciennik, Phys. Lett. B 316 (1993) 312.
- [30] R. Mohapatra, G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. Vol.44, Number 14, p.912.
- [31] J. Mei, Phys. Rev. D, 71, 073012 (2005).
- [32] S. Antusch Et Al., Phys. Lett. B 538(2002), 87.
- [33] A. S. Cornell, Aldo Deandrea, Lu-Xin Liu and Ahmad Tarhini, arXiv:1110.1942v2
- [34] G. Bhattacharyya, A. Datta, S. K. Majee, A. Raychaudhuri, hep-ph/0608208
- [35] M. Blennow, H. Melb us, T. Ohlsson and H. Zhang, JHEP04, doi:10.1007/JHEP04(2011)052, eprint hep-ph/1101.2585

Apêndice A

Cálculo da Renormalização

Usando as regras de Feynman tem-se,

$$-i\Sigma(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-ie\gamma^\mu) \left(\frac{i}{\not{p} + \not{k} - m} \right) \left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \right) (-ie\gamma^\nu) \quad (\text{A.1})$$

como

$$\frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} = \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2},$$

podemos escrever

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{\not{p} + \not{k} + m}{[(p-k)^2 - m^2]k^2} \gamma_\mu$$

Podemos observar que no numerador tem-se $\sim k^5$, enquanto que no denominador $\sim k^4$ e portanto tal integral é divergente para $k \rightarrow \infty$. Para arrumar tal divergência usaremos a regularização dimensional.

Lembremos que,

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}(\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

Como $[L_0] = [M]^D = D$ e $[\not{\partial}] = 1$, devemos ter, $[\psi^2] + 1 = D \rightarrow [\psi] = \frac{D-1}{2}$ e $[m] = 1$. Também, $[A] = \frac{D-2}{2}$. Portanto, o termo de vértice que é a interação da QED tem dimensão, $[e\bar{\psi}A\psi] = D \rightarrow [e] = \frac{4-D}{2}$.

Com isso, introduzimos um parâmetro dimensional μ de dimensão $[\mu] = [M]$ de tal forma que $e \rightarrow e\mu^{4-D/2}$ mantém e sem dimensão na lagrangeana de interação. Assim,

$$-i\Sigma(p) = (-ie\mu^{4-D/2})^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \gamma^\mu \frac{\not{p} + \not{k} + m}{[(p-k)^2 - m^2]k^2} \gamma_\mu$$

onde, agora, $tr\gamma^\mu\gamma^\nu = f(D)g^{\mu\nu}$; $TrI = f(D)$, $\gamma^\mu\gamma^\nu = D$; $\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu = (2-D)\gamma^\mu$. Que é a álgebra de Dirac generalizada,

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

$g_{\mu\nu} = (+ - - - - \dots)$ que é a álgebra de Clifford $Cl_{p,q}(\mathcal{C})$, $p + q = 2n$.

Assim,

$$\Sigma(p) = \frac{-e^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{(2-D)(\not{p} + \not{k}) + Dm}{[(p-k)^2 - m^2]k^2} \quad (\text{A.4})$$

Usando os parâmetros de Feynman,

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dz}{[Az + B(1-z)]^2}, \quad (\text{A.5})$$

podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2]k^2} &= \int_0^1 \frac{dz}{\{[(p-k)^2 - m^2]z + k^2(1-z)\}^2} = \int_0^1 \frac{dz}{\{p^2z - 2pkz - m^2z + k^2\}^2} = \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{\{p^2z - p^2z^2 + (p^2z^2 - 2pkz + k^2) - m^2z\}^2} = \int_0^1 \frac{dz}{\{(k-pz)^2 + C(p,m)\}^2}, \end{aligned}$$

$$C(p, m) = p^2z(1-z) - m^2z.$$

Fazendo a mudança $k \rightarrow k - pz$, tem-se,

$$\Sigma(p) = \frac{-e^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int dz d^D k \frac{(2-D)(\not{p}(1-z) + \not{k}) + Dm}{[k^2 + C^2]^2} \quad (\text{A.6})$$

como o denominador é uma função par em k e estamos integrando em todo o espaço, o termo com \not{k} dá zero e tem-se,

$$\Sigma(p) = \frac{-e^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int dz [(2-D)(\not{p}(1-z) + Dm)] \int \frac{d^D k}{[k^2 + C^2]^2} \quad (\text{A.7})$$

precisa-se agora efetuar a integral em D dimensões no espaço de Minkowski, para futuras referências, resolveremos uma integral um pouco mais geral,

$$I(q, D, m, \alpha) = \int \frac{d^D k}{(k^2 + 2qk - m^2)^\alpha} \quad (\text{A.8})$$

para tanto, usaremos as coordenadas polares em D dimensões, $k = (k_0, r, \phi, \theta_1, \theta_2 \dots \theta_{D-3})$ de tal forma que,

$$d^D k = r^{D-2} dk_0 dr d\phi \prod_{i=1}^{D-3} \sin^k \theta_k d\theta_k.$$

Como $\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n-1} (\cos\theta)^{2m-1} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$, $\int \sin^k \theta_k d\theta_k = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k+2}{2})}$ ou seja,

$$\int \prod_{i=1}^{D-3} \sin^k \theta_k d\theta_k = \prod_{i=1}^{D-3} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{i+1}{2})}{\Gamma(\frac{i+2}{2})} = \frac{(\pi)^{\frac{D-3}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})}$$

com isso, obtem-se,

$$I(q, D, m, \alpha) = \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int dk_0 \int \frac{r^{D-2} dr}{(k_0^2 - r^2 + 2qk - m^2)^\alpha} \quad (\text{A.9})$$

podemos escolher um sistema de coordenadas tal que $2kq = 2\mu k_0$ e escrevendo, $k_0^2 + 2\mu k_0 + \mu^2 - \mu^2 = (k_0 + \mu)^2 - \mu^2 = (k_0 + \mu)^2 - q^2$, podemos fazer uma mudança de variável, $k \rightarrow k_0 + \mu$ e tem-se,

$$I(q, D, m, \alpha) = \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int dk_0 \int \frac{r^{D-2} dr}{[k_0^2 - r^2 - (q^2 + m^2)]^\alpha} \quad (\text{A.10})$$

usando a propriedade da função gamma,

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2 \int_0^\infty \frac{r'^{2x-1}}{(1+r'^2)^{x+y}} dr' \quad (\text{A.11})$$

e fazendo $r' = \frac{r}{q^2 + m^2 - k_0^2}$, $x = d - 1/2$, $y = \alpha - x$, obtem-se,

$$I(q, D, m, \alpha) = (-1)^{2\alpha+(D-1)/2} 2\pi^{\frac{D-1}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D-1}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int \frac{dk_0}{[k_0^2 - (q^2 + m^2)]^{\alpha-(D-1)/2}} \quad (\text{A.12})$$

por fim, usando novamente a eq.(A.11) conseguimos o resultado,

$$I(q, D, m, \alpha) = (-1)^\alpha i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha-D/2}} \quad (\text{A.13})$$

para o nosso caso, $\alpha = 2$, $m^2 = C$ e $q = 0$, e assim obtem-se,

$$\Sigma(p) = \frac{e^2 \mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dz \frac{[(2-D)(\not{p}(1-z) + Dm)]}{[k^2 + C^2]^{2-D/2}} \quad (\text{A.14})$$

a função

$$G_D(p, m) = \int_0^1 \frac{[(2-D)(\not{p}(1-z) + Dm)]}{[k^2 + C^2]^{2-D/2}} dz$$

embora complicada é finita para todo $D > 0$. O problema da divergência encontra-se na função $\Gamma(2 - D/2)$. Podemos evidenciar tal divergência escrevendo $D = 4 - 2\epsilon$, ou seja $\Gamma(2 - D/2) = \Gamma(\epsilon)$. Para $\epsilon \rightarrow 0$, como

$$\begin{aligned} \Gamma(\epsilon + 1) &= \Gamma(\epsilon), \\ \Gamma(1 + \epsilon) &= \Gamma(1) + \epsilon\Gamma'(1) + o(\epsilon^2) = \epsilon\Gamma(\epsilon). \end{aligned}$$

Mas, $\Gamma(1) = 1$, ou seja,

$$\Gamma(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \quad (\text{A.15})$$

onde $\gamma \simeq 0,577$ é a constante de *Euler-Mascheroni*. Portanto, para $\epsilon \rightarrow 0$, $\Gamma(\epsilon) \rightarrow \infty$ e é essa a causa da divergência na integral. Nesse caso,

$$G_{D \rightarrow 4}(p, m) = \int_0^1 (2 - D) \not{p}(1 - z) + D m dz = (-\not{p} + 4m)$$

A partir disso, obtem-se,

$$\Sigma(p) = \frac{e^2 \mu^{2\epsilon}}{32\pi^2} (-\not{p} + 4m) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \dots \right) = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon} (-\not{p} + 4m) + \textit{finito} \quad (\text{A.16})$$

como $S_F'^{-1}(p) = S^{-1}(p) - i\Sigma(p)$,

$$S_F'^{-1}(p) = -i \left(1 - \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon} \right) \left[\not{p} - m \frac{4(4pi^2 \epsilon + e^2)}{16\pi^2 \epsilon - e^2} \right] \quad (\text{A.17})$$

com isso, vemos que o termo Z_2 vale,

$$Z_2 = \left(1 - \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon} \right) \quad (\text{A.18})$$

Em seguida calcularemos as contribuições do segundo gráfico. Pelas regras de feynman, precisa-se calcular a quantidade,

$$\begin{aligned} -i\Pi^{\mu\nu} &= -(-ie\mu^{4-D/2})^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \right) \\ &= e^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p} - \not{k} + m)]}{(p^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

novamente aplicando o truque de Feynman,

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2](p^2 - m^2)} &= \int_0^1 \frac{dz}{\{[(p-k)^2 - m^2]z + (p^2 - m^2)(1-z)\}^2} = \int_0^1 \frac{dz}{\{p^2 - 2kpz + k^2z - m^2\}^2} = \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{\{p^2 - 2kpz + k^2z^2 - k^2z^2 + k^2z - m^2\}^2} = \int_0^1 \frac{dz}{\{(p-kz)^2 + C(k, m)\}^2}, \end{aligned}$$

onde $C(k, m) = k^2z(1 - z) - m^2$.

Fazendo $p \rightarrow p - zk$, podemos escrever

$$N = \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \right) = [p^\sigma p^\lambda - k^\sigma k^\lambda z(1 - z)] \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\lambda) + m^2 \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) + \alpha^\nu p^\mu$$

onde α representa termos que não dependem de p , e assim, como esse é um termo linear em p , dentro da integral resulta em contribuição nula. Usando as propriedades das matrizes gamma generalizadas, podemos escrever,

$$N = f(D)[2p_\mu p_\nu - 2z(1 - z)(k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) - g_{\mu\nu}(p^2 - C)]$$

Com isso, precisa-se calcular 3 integrais da força da eq.(A.13):

$$\Pi^{\mu\nu} = ie^2 \mu^{4-D} \int dz \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{2p_\mu p_\nu}{(p^2 - c)^2} - \frac{2[k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2]z(1-z)}{(p^2 - c)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{(p^2 - c)} \quad (\text{A.20})$$

A segunda integral é idêntica à primeira (a menos das constantes multiplicativas) e resulta em um termo divergente como anteriormente. A terceira basta fazer $\alpha = 1$, ou seja,

$$\int d^D p \frac{g_{\mu\nu}}{(p^2 - c)} = -i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(1)} \frac{g_{\mu\nu}}{(q^2 + m^2)^{1-D/2}}$$

Para o primeiro termo, note que podemos derivar duas vezes a eq.(A.13) em relação à q^μ e obtem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial q^\mu \partial q^\nu} I(q, D, m, \alpha) = \int d^D p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = \\ & = (-1)^\alpha i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha - D/2}} [q_\mu q_\nu \Gamma(\alpha - D/2) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (-q^2 - m^2) \Gamma(\alpha - 1 - D/2)] \end{aligned}$$

fazendo $q_\mu \rightarrow 0$ vemos que a integral da contribuição idêntica ao terceiro termo e portanto se cancelam. Ficamos, portanto, com a integral do meio, que nos dá:

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{ie^2 \mu^{4-D}}{2^D \pi^{D/2}} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \int dz \frac{[k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2]z(1-z)}{(k^2 z(1-z) - m^2)^{2-D/2}} \quad (\text{A.21})$$

fazendo novamente $D = 4 - 2\epsilon$, e escrevendo explicitamente os termos, obtem-se,

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{16\pi^2} \Gamma(\epsilon) \int dz [k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2] z(1-z) \left(\frac{k^2 z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon}$$

como $a^x \approx 1 + x \ln(a)$, tem-se

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{16\pi^2} \Gamma(\epsilon) \int dz [k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2] z(1-z) (1-\epsilon) \ln \left(\frac{k^2 z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right)$$

Em ordem ϵ , tem-se,

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{4\pi^2} (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) \left[\frac{1}{3\epsilon} - \frac{\gamma}{6} - \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left(\frac{k^2 z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right) + O(\epsilon) \right] \quad (\text{A.22})$$

Dois pontos interessantes a se notar é primeiro a invariância de Gauge é mantida, $k^\mu \Pi_{\mu\nu} = k^\nu \Pi_{\mu\nu} = 0$ e a correção devido ao termo μ acrescentado aparece logaritmicamente. O termo de correção entra na equação para a correção do propagador como,

Ou,

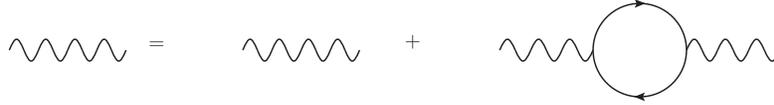


Figura A.1: equação de correção do propagador em primeira ordem

$$D_{\mu\nu} = -i\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} - \left(-i\frac{g_{\mu\alpha}}{k^2}\right)\Pi^{\alpha\beta}D_{\beta\nu}$$

ou, usando $\Pi^{\mu\nu} = i(k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k^2)\Pi(k^2)$,

$$[(1 + \Pi(k^2))g_\mu^\beta - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}]D_{\mu\nu} = -i\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}$$

Supondo $D_{\mu\nu} = f(k^2)g_{\mu\nu} + G(k^2)k_\mu k_\nu$, obtem-se⁴⁷,

$$(1 + \Pi)f(k^2)g_{\mu\nu} + [G + \frac{f}{k^2}]k_\mu k_\nu = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}$$

Ou seja,

$$D_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2(1 + \Pi)} + \frac{-i\Pi k_\mu k_\nu}{k^4(1 + \Pi)} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2(1 + \Pi)} + \text{termos de gauge} \quad (\text{A.23})$$

Como vimos, $\Pi = \frac{ie^2}{12\epsilon\pi^2} + \Pi_f(k)$, para $\epsilon \rightarrow 0$, o termo diverge. Assim, escrevemos,

$$D_{\mu\nu} = -i\frac{\left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2\epsilon}\right)g_{\mu\nu}}{k^2(1 + \Pi_f)} + \text{gauge} = -i\frac{Z_3 g_{\mu\nu}}{k^2(1 + \Pi_f)} + \text{gauge}$$

portanto,

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2\epsilon} \quad (\text{A.24})$$

por fim, precisa-se calcular o termo de vértice. Pelo exercício 5, tem-se a identidade de ward-takahashi,

$$q^\mu \Gamma_\mu(p, q, p + q) = S_f^{-1}(p + q) - S_f^{-1}(p) \quad (\text{A.25})$$

ou, fazendo $q \rightarrow 0$, a identidade de Ward,

$$\Gamma_\mu(p, 0, p) = \frac{\partial S_f^{-1}(p)}{\partial p^\mu} \quad (\text{A.26})$$

O cálculo do propagador do elétron nos dá, pela eq.(A.17),

$$S_f^{-1} = -iZ_2(\not{p} - m) - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{ip^2}{2m} + S_0$$

⁴⁷note que um termo que geraria uma massa para o foton sempre se cancela devido ao termo $(k^\mu k^\beta - g_\mu^\beta)G(k^2)k^\beta k^\nu = 0$, tal termo aparece sempre da mesma forma devido à invariância de Gauge

onde S_0 são termos que não dependem do momento p^μ . Assim, pela identidade de ward, tem-se,

$$\Gamma_\mu = Z_2 \gamma_\mu - \frac{e^2}{16\pi^2 m} p_\mu = z_2 \gamma_\mu + \text{finito} \quad (\text{A.27})$$

E assim vemos que $Z_1 = Z_2 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon}$. Tais termos são infinitos, porém podem ser interpretados usando a renormalização. Supomos que na verdade, a lagrangeana verdadeira é $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{ct}$, onde \mathcal{L}_i é a lagrangeana total de interação e

$$\mathcal{L}_{ct} = iB\bar{\psi}\not{\partial}\psi - A\bar{\psi}\psi - \frac{C}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{E}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - He\mu^{2-D/2}\bar{\psi}\not{A}\psi \quad (\text{A.28})$$

ou seja,

$$\mathcal{L}_{ct} = i(1+B)\bar{\psi}\not{\partial}\psi - (1+A)\bar{\psi}\psi - \frac{(1+C)}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{(1+E)}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - (1+H)e\mu^{2-D/2}\bar{\psi}\not{A}\psi \quad (\text{A.29})$$

Com isso, definindo,

$$\begin{aligned} A &= \frac{-m\epsilon^2}{2\pi^2\epsilon} \\ B &= -\frac{\epsilon^2}{8\pi^2\epsilon} \\ C &= -\frac{\epsilon^2}{6\pi^2\epsilon} \\ H &= -\frac{\epsilon^2}{8\pi^2\epsilon} \end{aligned}$$

modificamos os propagadores e constantes da teoria de tal forma que, reescrevendo,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_r\not{\partial}\psi_r - m_r\bar{\psi}_r\psi_r - \frac{1}{4}F_{r\mu\nu}F_r^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_r^\mu)^2 - e_r\mu^{2-D/2}\bar{\psi}_r\not{A}_r\psi_r \quad (\text{A.30})$$

e não é necessário mais calcular as contribuições divergentes da QED, usando os novos propagadores. Esse método pode ser feito ordem a ordem bastando somente alterar os valores das constantes A, B, C, \dots para que cancele os termos infinitos.

Apêndice B

Cálculo das Integrais em D Dimensões

B.1 Correções Loops de Bosons de Gauge

Para o cálculo das correções de primeira ordem para loops de Gauge existem duas possibilidades de integrais, a primeira devido ao acoplamento lepton-Boson, no gauge R_ξ , da forma,

$$-i\Sigma(p)^{ab} = \left(\frac{-ig}{2}\right)^2 T_c^{ad} T_c^{db} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \gamma^\mu \left[\frac{-1}{q^2} \left(g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \right] \gamma^\nu \quad (\text{B.1})$$

e

$$-iD(p) = \left(\frac{-ig}{2}\right)^2 T_c^{ad} T_c^{da} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[\frac{(p-q)^\mu}{q^2} \left(g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{(p-q)^\nu}{(p-q)^2 - m^2} \right] \quad (\text{B.2})$$

Para a primeira integração, nota-se que,

$$\frac{1}{q^2} \frac{1}{(p-q)^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[(q-pz)^2 + p^2 z(1-z)]^2} \quad (\text{B.3})$$

e

$$\frac{1}{q^2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{(p-q)^2} = 2 \int_0^1 \frac{dz_1 dz_2}{[(q-p(z_1-z_2))^2 + p^2(z_1+z_2)(1-z_1-z_2)]^3} \quad (\text{B.4})$$

assim,

$$\Sigma(p)^{ab} = \frac{-ig^2}{(2\pi)^D} \int d^D q \left(dz \frac{z\gamma^\mu \not{p}\gamma_\mu}{[q^2 + p^2 z(1-z)]^2} + \frac{2(2\xi - 1) dz_1 dz_2 (\not{q}\not{p}\not{q} + (1-z_1-z_2)^2 p^2 \not{p})}{[(q-p(z_1-z_2))^2 + p^2(z_1+z_2)(1-z_1-z_2)]^3} \right) \quad (\text{B.5})$$

Como o termo $p^2 \not{p}$ só irá contribuir em ordem maior que $O(\frac{1}{\epsilon})$ podemos desconsiderá-lo para o cálculo. Usando as relações,

$$\int \frac{d^D q}{[q^2+c]^2} = (-1)^{D/2} i(\pi)^{D/2} \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)c^{2-D/2}} \approx \frac{i\pi^2}{\epsilon}$$

e

$$\int \frac{d^D q q^\mu q^\nu}{[q^2+c]^3} = \frac{(-1)^{D/2} i(\pi)^{D/2}}{\Gamma(3)} \frac{\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Gamma(2-D/2)}{c^{2-D/2}} \approx \frac{i\pi^2 g^{\mu\nu}}{4\epsilon}$$

para $\epsilon = 4 - D$ a eq.(B.1) fica

$$\Sigma(p)^{ab} = \frac{\xi g^2 T_c^{ad} T_c^{db}}{16\pi^2 \epsilon} \not{p} \quad (\text{B.6})$$

para a segunda integral, pode-se utilizar as seguintes relações,

$$\frac{1}{q^2} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[(q-p(1-z))^2 + p^2 z(1-z) - m^2(1-z)]^2}$$

e

$$\frac{1}{q^2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2} = 2 \int \frac{dz_1 dz_2}{[(q-p(1-z_1-z_2))^2 + p^2(-1z_1-z_2)(z_1+z_2) - m^2(1-z_1-z_2)]^3}$$

procedendo de forma similar, levando-se em conta apenas termos de divergencia da ordem $O(\frac{1}{\epsilon})$,

$$D(p) = \frac{-(2\xi - 3)g^2 T_c^{ab} T_c^{ab}}{24\pi^2 \epsilon} (p^2 - \frac{3m}{2\xi - 3}) \quad (\text{B.7})$$

Por fim, é necessário o cálculo do termo de vértice, que possui a forma,

$$-i\Pi(p_1 - p_2) = 4T_c^{ad} T_c^{db} \kappa_{ab} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^\mu (p_1 - q)_\mu}{q^2 [(p_2 + q)^2 - m^2] (p_1 - q)^2} \quad (\text{B.8})$$

e usando,

$$\frac{1}{q^2 [(p_2 + q)^2 - m^2] (p_1 - q)^2} = 2 \int_0^1 \frac{dz_1 dz_2}{[(q + p_2 z_1 - p_1 z_2)^2 - (p_1 z_2 - p_2 z_1)^2 + p_2^2 z_1^2 + p_1^2 z_2^2 - m^2 z_1]^3}$$

e

$$\int d^D q \frac{q^2}{(q^2 + c)^3} = \frac{(-1)^{D/2} i(\pi)^{D/2}}{\Gamma(3)} \frac{D}{2} \frac{c^2}{c^{2-D/2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \approx \frac{i\pi^2}{2\epsilon} c^2$$

O que resulta em,

$$\Pi(p_1 - p_2) = \frac{-1}{16\pi^2 \epsilon} T_c^{ad} T_c^{db} \kappa_{ab} [(p_1 - p_2)^2 + f(m^2, p_1, p_2)] \quad (\text{B.9})$$

Com isso, os fatores referentes às equações (7.12), (7.10) e (7.11) se devem à forma das matrizes de acoplamento e os fatores de grupos associados em cada caso.