

Decaimentos de neutrinos induzidos por escalares e aplicações a supernovas

Bruce Lehmann Sánchez Vega

Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin
como requisito para a obtenção do título de Mestre em
Física

Banca Examinadora:

Orientador: Marcelo Moraes Guzzo, DRCC/IFGW
Co-Orientador: Renata Zukanovich Funchal, FMA/IFUSP
Dr. Orlando Luis Goulart Peres, DRCC/IFGW
Dr. Juan Carlos Montero Garcia, IFT/UNESP

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia

Universidade Estadual de Campinas

Campinas
2006

A mi padre, el careloco, mi madre y mi hermana, que los amo. A Catalina, mi novia, la mujer más espectacular del mundo y a Sonia, una mujer sencillamente bella.

“When people run around and around in circles we say they are crazy. When planets do it we say they are orbiting.”

Agradecimentos

Aos professores Marcelo Moraes Guzzo e Renata Zukanovich Funchal por suas discussões.

Aos professores do IFGW, especialmente à Prof. Carola Dobrigkeit Chinellato e ao Prof. Orlando Luis Gurlart Peres por ter me apoiado em minha formação.

Aos meus amigos da Kzona, especialmente ao Alan, Paco, Mila e Vladimir pelo apoio nos momentos difíceis e pelos bons momentos.

Ao Alexis por sua grande amizade e por seus conselhos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos os decaimentos não radiativos de neutrinos de Majorana, via bósons sem massa, no vácuo e na matéria. Os acoplamentos considerados entre os neutrinos e os bósons foram de tipo escalar ou pseudoescalar. Em particular estudamos os processos $\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi$ e $\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi$ (onde χ representa o campo escalar ou pseudoescalar). No vácuo, calculamos as taxas efetivas na ordem mais baixa da teoria de perturbações usando o formalismo convencional para neutrinos de Majorana. Calculamos estas mesmas taxas para o caso da matéria usando o formalismo de helicidade de dois componentes introduzido em [P. Mannheim, Phys. Rev. D. 37, 1935 (1988)] para uma teoria geral (n, m) , onde se tem n campos que pertencem a isodubletos de $SU_L(2)$ (neutrinos ativos) e m campos isosingletos de $SU_L(2)$ (neutrinos estéreis).

Decaimentos de neutrinos com tempos de vida relativamente longos podem ser provados, em princípio, através de observações de neutrinos relíquias de supernovas. Portanto, calculamos o fluxo de antineutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas que chegam à terra considerando simultaneamente as oscilações e os decaimentos dos neutrinos mencionados anteriormente.

Abstract

In this work we study nonradiative decays of Majorana neutrinos, via massless bosons, in vacuum and matter. The considerate couplings between the neutrinos and the bosons were scalar and pseudoscalar. In particular we study the processes $\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi$ and $\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi$ (where χ is either scalar or pseudoscalar field). In vacuum, we calculate effective rates in the lowest order of the perturbation theory using the conventional formalism for Majorana neutrinos. We calculate the same rates in the matter case using the two-component helicity formalism introduced in [P. Mannheim, Phys. Rev. D. 37, 1935 (1988)] for a general theory, where there are neutrino fields belong to $SU_L(2)$ isodoublets (active neutrinos) and neutrino fields belong to $SU_L(2)$ isosinglets (sterile neutrinos).

Neutrino decays of relatively long lifetimes could be proved, in principle, through of supernova relic neutrino (SRN) observations. Therefore, we calculate the antineutrinos flux of SRN that arrive to the Earth simultaneously considering both neutrino oscillations and the previously mentioned neutrino decays.

Sumário

Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xix
Introdução	1
1 Decaimento de um neutrino no vácuo via um bóson de Nambu-Goldstone	3
1.1 Introdução	3
1.2 Cálculo das taxas de decaimento para os casos $\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi$ e $\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi$	4
2 Decaimento de neutrinos na matéria via um bóson de Nambu-Goldstone	9
2.1 Introdução	9
2.2 Formalismo de helicidade para campos de neutrinos na matéria	10
2.3 Cálculo das massas efetivas para duas gerações de neutrinos na matéria	16
2.3.1 Caso (2,0)	16
2.3.2 Caso (1,1)	18
2.4 Decaimento majoron de neutrinos na matéria	22
2.4.1 Generalidades	22
2.4.2 Decaimentos que não conservam a helicidade	25
2.4.3 Decaimentos que conservam a helicidade	28
3 Oscilações e decaimentos de neutrinos relíquias de supernovas	33
3.1 Introdução	33
3.2 Supernovas	34
3.2.1 Supernovas tipo Ia	35
3.2.2 Supernovas tipo Ib e Ic	35
3.2.3 Supernovas tipo II	36
3.3 Algumas equações básicas de cosmologia	38
3.4 Oscilações de neutrinos de supernova	41
3.4.1 Formalismo geral	41
3.4.2 Probabilidade de Transição	44
3.4.3 Ângulos de mistura e diferenças quadradas de massa. Limites e valores experimentais	45
3.4.4 Regiões de ressonância	46
3.4.5 Probabilidades de salto	47

3.4.6	Probabilidades de transição para neutrinos de supernovas	47
3.5	Fluxos de neutrinos relíquias de supernovas com oscilações	47
3.5.1	Formulação do cálculo do fluxo	48
3.5.2	Taxa de formação de supernovas	48
3.5.3	Fatores Y_ν	49
3.5.4	Fluxo de $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas	49
3.6	Fluxos de neutrinos relíquias de supernovas com oscilações e decaimentos	52
3.6.1	Solução da equação de Boltzmann	53
3.7	Aplicações	58
3.7.1	Decaimentos para três famílias de neutrinos com hierarquia normal e massas quase degeneradas	58
3.7.2	Decaimentos para três famílias de neutrinos com hierarquia invertida	60
4	Conclusões	63
A	Potenciais efetivos induzidos na matéria	65
A.1	Generalidades do modelo padrão das interações fracas	65
A.2	Potencial efetivo induzido na matéria	66
A.2.1	Potencial efetivo de corrente carregada devido aos elétrons no meio	67
A.2.2	Potencial efetivo de corrente neutra devido aos elétrons no meio	68
A.2.3	Potenciais efetivos para ν_e e $\bar{\nu}_e$ em diferentes meios	69
B	Transformação de Fierz	71
C	Equação de evolução de neutrinos na matéria	73
	Referências Bibliográficas	75

Lista de Figuras

2.1	Comportamento das massas quadradas efetivas em função da densidade de matéria para o caso $(2, 0)$. A energia do neutrino é 10 MeV e os parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV.	18
2.2	Potenciais e densidades relativas considerados.	19
2.3	Comportamento das massas quadradas efetivas em função da densidade da matéria para o caso $(2, 0)$. A energia do neutrino é 10 MeV e os parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV. Esta é a região de ressonância na aproximação MSW do caso da figura 2.1.	20
2.4	Comportamento das massas quadradas efetivas em função da densidade de matéria para o caso $(1, 1)$. A energia do neutrino é 10 MeV e os parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV.	21
2.5	Comportamento das massas quadradas efetivas em função da densidade de matéria para o caso $(1, 1)$. A energia do neutrino é 10 MeV e os parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV.	21
2.6	Comportamento das massas quadradas efetivas em função da densidade da matéria para o caso $(1, 1)$. A energia do neutrino é 10 MeV e os parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV. A região de ressonância para o caso das figuras 2.4 e 2.5 é mostrada.	22
2.7	Taxa diferencial de decaimento para $\nu_2^{(+)} \rightarrow \nu_1^{(-)} + \chi$, com $P_i = 10$ MeV. Os valores dos parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$ e $G_{12}^M = 10^{-4}$. O tempo de decaimento é $\tau \cong 0.66$ s.	27
2.8	Taxa diferencial de decaimento para $\nu_2^{(+)} \rightarrow \nu_1^{(-)} + \chi$, com $P_i = 10$ MeV. Os valores dos parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$ e $G_{12}^M = 10^{-4}$. O tempo de decaimento é $\tau \cong 73$ s.	27
2.9	Taxa diferencial de decaimento para $\nu_2^{(-)} \rightarrow \nu_1^{(-)} + \chi$ no vácuo para um acoplamento pseudoescalar. O momento do neutrino é $P_i = 10$ MeV e os valores dos parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$ e $G_{12}^M = 10^{-4}$. O tempo de decaimento é $\tau \cong 0.69$ s.	30
2.10	Taxa diferencial de decaimento para $\nu_2^{(-)} \rightarrow \nu_1^{(-)} + \chi$ no vácuo para um acoplamento pseudoescalar. O momento do neutrino é $P_i = 10$ MeV e os valores dos parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$ e $G_{12}^M = 10^{-4}$. O tempo de decaimento é $\tau \cong 95$ s.	31
3.1	Curva de luz das supernovas de tipo Ia. Seu máximo de emissão é o mais alto de todos. Aprecia-se perfeitamente a fase de emissão do Ni diferenciada da do Co. Quanto mais rápido decresce a luz, menor é seu máximo.	35

3.2	A primeira fase da supernova é um colapso rápido do núcleo incapaz de manter-se. Isto leva a uma forte emissão de fótons e nêutrons que são absorvidos pelas capas interiores freando assim seu colapso. Simultaneamente uma onda de choque de neutrinos é gerada durante a neutronização do núcleo compacto. Finalmente, a neutrinosfera se choca contra a cobertura de estrela, transmitindo seu momento, expulsando as camadas exteriores, e produzindo a explosão da supernova.	37
3.3	Curvas de luz das SNII-P e SNII-L.	38
3.4	Massas quadradas dos três neutrinos autoestados de massa como função de potencial.	42
3.5	Taxa de formação de supernovas em função do <i>redshift</i>	49
3.6	Fatores Y_ν para os diferentes sabores de neutrinos em função da energia. Aqui a dependência do <i>redshift</i> não foi levada em conta.	50
3.7	Seção de choque total em ordem zero de $1/M_p$, σ_{tot}^0 , para o processo $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$	51
3.8	Fluxo de $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas em presença de oscilações de sabor de três famílias de neutrinos sem decaimentos. Mostram-se as duas hierarquias de massas possíveis. O resultado para a hierarquia normal é independente da probabilidade P_H	53
3.9	Espectro de energia do pósitron produzido na reação $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$, para o caso de neutrinos sem decaimentos.	54
3.10	Fluxo de neutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas para três neutrinos com hierarquia de massa normal e massas quase degeneradas, isto é, $m_i^2 \gg \Delta m_{23}^2, \Delta m_{12}^2$	59
3.11	Espectro de energia do pósitron produzido na reação $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$, para três neutrinos com hierarquia de massa de normal e massas quase degeneradas, isto é, $m_i^2 \gg \Delta m_{23}^2, \Delta m_{12}^2$	59
3.12	Fluxo de neutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas para o caso de uma hierarquia invertida de massa, e uma massa m_3 qualquer.	61
3.13	Espectro de energia do pósitron produzido na reação $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$, para três neutrinos com hierarquia de massa de normal e massas quase degeneradas, isto é, $m_i^2 \gg \Delta m_{23}^2, \Delta m_{12}^2$, para o caso de uma hierarquia de massa invertida, e uma massa m_3 qualquer.	61

Lista de Tabelas

2.1	Potenciais $V_i^{(h_i)}$ para o caso de duas gerações de neutrinos ativos num meio muito denso.	25
3.1	Probabilidades de transição para neutrinos e antineutrinos com hierarquia normal (HN).	47
3.2	Probabilidades de transição para neutrinos e antineutrinos com hierarquia invertida (HI).	47
3.3	Fatores Y_ν para os quatro cenários de 3ν possíveis	51
A.1	Potenciais efetivos para ν_e e $\bar{\nu}_e$ em diferentes meios. O sinal superior (inferior) se refere ao $\nu_e(\bar{\nu}_e)$. N_x denota a densidade do número da partícula do tipo x	70

Introdução

Um número de experimentos atuais, os quais têm observado neutrinos atmosféricos [1–3], solares [4–8] e neutrinos de reatores [9], têm revelado que os neutrinos têm massas diferentes de zero e que são misturados. Estas propriedades estão além do modelo padrão. O conhecimento aprendido graças a estes experimentos, diferenças de massas e ângulos de mistura, nos permite considerar outras propriedades mais exóticas dos neutrinos, tais como o momento magnético diferente de zero [10, 11] e decaimentos de neutrinos [12–15].

Nesta dissertação nosso principal objetivo é considerar decaimentos de neutrinos relíquias de supernovas (SRN) motivados por observações atuais e futuras no detector Super-Kamiokande (SK) [16]. A alternativa mais favorável para decaimentos de neutrinos [17–20] é introduzir uma lagrangiana de decaimento efetiva que acople os campos de neutrinos a bósons sem massa carregando um número leptônico, isto é, um campo escalar complexo ou um campo de majoron [21, 22]. A lagrangiana de interação que consideramos nesta dissertação é

$$L_{int} = \sum_{i,j}^3 g_{ij} \bar{\nu}_i \nu_j \chi + h_{ij} i \bar{\nu}_i \gamma_5 \nu_j \chi, \quad (1)$$

onde os ν 's são campos próprios de massa de Majorana, g_{ij} e h_{ij} são as constantes de acoplamento, e χ é um campo de majoron.

Os decaimentos dos neutrinos tem sido considerados como soluções exóticas aos problemas dos neutrinos solares ou atmosféricos [19, 23–27]. Estas soluções não têm sido validadas experimentalmente, implicando que os tempos de vida devem ser suficientemente longos para não perturbar a atual fenomenologia dos neutrinos. Embora os resultados experimentais não possam ser explicados só por decaimentos, estes podem ser subdominantes. O melhor limite atual é deduzido no contexto dos neutrinos solares [13], $\tau_i/m_i \geq 5 \times 10^{-4} \text{s/eV}$. De outra maneira, para que os efeitos dos decaimentos dos neutrinos sejam observáveis em nosso universo, τ_i/m_i deve ser aproximadamente $\tau_i E/m_i \leq 1/H_0$, onde H_0 é a constante de Hubble, fazendo $H_0 = 70 \text{ Km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, e tomando $E \approx O(10) \text{MeV}$, então $\tau_i/m_i \leq O(10^{11}) \text{s/eV}$. Os dois limites anteriores implicam que muitas décadas em τ_i/m_i estão ainda abertas para pesquisas experimentais e teóricas.

A exploração de tempos de vida relativamente longos para neutrinos, e os efeitos dos decaimentos, podem ser estudados através de observações astrofísicas e cosmológicas. Decaimentos de neutrinos podem mudar profundamente o fluxo de SRN e deixar-lhe perto do limite atual superior [16], como foi apontado em [12].

Com as motivações anteriores consideramos especificamente decaimentos não radiativos via um escalar (pseudoescalar) e seu efeito no fluxo de $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas. Para conseguir este objetivo, esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no primeiro capítulo estudamos os decaimentos no vácuo de neutrinos de majorona via um bóson de Nambu-Goldstone calculando as taxas de decaimento gerais para $\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi$ e $\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi$ [28]. No capítulo 2 resolvemos as equações de campo de neutrinos de Majorana na matéria, usando o formalismo de helicidade

de duas componentes introduzido em [29] para uma teoria geral (n, m) , onde se tem n campos que pertencem a isodoublets de $SU_L(2)$ (neutrinos ativos) e m campos isosinglets de $SU_L(2)$ (neutrinos estéreis). Estas equações são obtidas da lagrangiana efetiva a baixas energias. Com a expressão geral do campo encontramos uma equação que permite obter o espectro de energia e as massas dos estados próprios de helicidade. Esta expressão se aplica para o caso particular de duas gerações. Os casos de dois neutrinos ativos e o de um neutrino ativo mais um estéril são tratados. Equações gerais para o espectro de massa são dadas e mostramos que no caso de neutrinos relativísticos na matéria ordinária este espectro coincide com o obtido do efeito Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW). Demonstramos que a matéria incrementa o espaço de fase disponível para os decaimentos entre os diferentes autoestados de helicidade e que quase todos estes decaimentos são permitidos. Obtemos expressões gerais para as taxas de decaimento e para os acoplamentos efetivos. Finalmente, este formalismo será usado para deduzir as taxas de decaimento dos neutrinos de Majorana no vácuo, cujo resultado, comparado com o resultado do capítulo 1, será usado como teste de validade e generalidade. No capítulo 3 calculamos o fluxo de antineutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas que chegam à terra considerando simultaneamente as oscilações e os decaimentos dos neutrinos no vácuo. Este fluxo é obtido encontrando uma solução geral da equação de Boltzman para a função de densidade de número de neutrinos relíquias de supernovas por unidade de energia. Esta solução é implementada no software Mathematica para fazer o cálculo do fluxo dos neutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas para dois casos diferentes. No primeiro são tratados os decaimentos para neutrinos com massas quase degeneradas e hierarquia normal. No segundo são considerados os decaimentos para neutrinos com hierarquia invertida e qualquer valor da massa m_3 . Os fluxos obtidos são comparados com os casos de neutrinos estáveis e de decaimento total. Finalmente se apresentam as conclusões desta dissertação.

Decaimento de um neutrino no vácuo via um bóson de Nambu-Goldstone

1.1 Introdução

A estabilidade dos neutrinos é uma das questões em aberto das propriedades básicas desta partícula. Se os neutrinos são todos sem massa, eles são absolutamente estáveis, pelo menos no vácuo; se eles são massivos, um neutrino mais pesado pode decair em outro mais leve emitindo partículas tais como fótons e bósons sem massa de Nambu-Goldstone [22, 30]. No caso das oscilações, a discussão da instabilidade supõe a existência de pelo menos um neutrino massivo, e portanto, supõe-se que os neutrinos sejam todos massivos, misturados e $m(\nu_i) \neq m(\nu_j)$ se $i \neq j$ (veja [31, 32] alguns trabalhos atuais que discutem evidências experimentais de massa e mistura dos neutrinos). Por neutrinos misturados se entende que os autoestados de interação do neutrino, ν_α , estão relacionados com os autoestados de massa, ν_i , pela seguinte relação [33]

$$\nu_\alpha = \sum_i^3 U_{\alpha i} \nu_i, \quad \alpha = e, \mu, \tau, \quad (1.1)$$

onde U é uma matriz unitária.

Possíveis decaimentos são

$$\begin{aligned} \nu_i &\rightarrow \nu_j + \gamma, \\ \nu_i &\rightarrow \nu_j + \nu_k + \bar{\nu}_k, \\ \nu_i &\rightarrow \nu_j + \chi, \\ \nu_i &\rightarrow \bar{\nu}_j + \chi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Neste capítulo serão considerados os dois últimos tipos de decaimentos dados na equação (1.2). Isto é, decaimentos onde um neutrino ν_i decai via um bóson de Nambu-Goldstone, χ , a outro neutrino estado de massa ν_j . Alguns limites experimentais e teóricos atuais sobre os decaimentos dados na equação (1.2) podem ser encontrados em [34, 35].

Os decaimentos de neutrinos aqui devem ser sempre entendidos a partir dos estados de massa, ν_i , e não dos estados de interação, ν_α , isto é, os decaimentos tais como $\nu_\tau \rightarrow e^- + e^+ + \nu_\tau$ não podem acontecer a menos que exista uma corrente neutra efetiva que mude o sabor (o acoplamento $\nu_l \rightarrow l'^- + W^+$ sendo $l \neq l'$, onde $l, l' = \{e, \mu, \tau\}$, não existe no modelo padrão). Por exemplo, o

decaimento $\nu_\mu \rightarrow \nu_e + \gamma$ significa que, no contexto de duas gerações, a componente ν_2 de ν_μ decai via $\nu_2 \rightarrow \nu_1 + \gamma$, o que é permitido devido à mistura. O estado final já não é mais o ν_μ mas ele tem uma componente ν_e que é ortogonal a ν_μ . Neste sentido ν_μ pode decair em ν_e .

Com estas motivações, neste capítulo se calcula as taxas de decaimento gerais no vácuo para $\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi$ e $\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi$ e se mostra que estas podem ser comparáveis para o caso de $m_2 \gg m_1$ [28].

1.2 Cálculo das taxas de decaimento para os casos $\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi$ e $\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi$

Considera-se o caso em que três sabores diferentes de neutrinos de Majorana (ver [33, 36] para uma definição do campo de neutrino de Majorana) interagem com um bóson de Nambu-Goldstone, majoron, via uma combinação de acoplamentos tipo Yukawa e pseudoescalar, g_{ij} e h_{ij} . Existem modelos nos quais estas constantes de acoplamento dependem da origem das massas, mas, neste caso, se considera um modelo genérico onde elas são independentes da origem da massa do neutrino e seus valores são limitados unicamente por experimentos.

A parte relevante da lagrangiana é

$$L = \sum_{i=1}^3 \bar{\nu}_i \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{m_i}{2} \right) \nu_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^3 (g_{ij} \bar{\nu}_i \nu_j + h_{ij} \bar{\nu}_i i\gamma_5 \nu_j) \chi, \quad (1.3)$$

onde ν_i é um neutrino de Majorana numa notação de quatro componentes, g_{ij} e h_{ij} são as constantes de acoplamento e χ representa o campo do majoron.

Trabalhando em ordem mais baixa da teoria de perturbação, assumindo $m_i > m_j$ ($i \neq j$) e levando em conta que o propagador dos neutrinos de Majorana tem a mesma forma que para os neutrinos de Dirac [33], tem-se que a amplitude de decaimento, M , pode ser escrita como

$$M = M_1 + M_2 = \frac{g_{ij}}{2} \bar{\nu}_j(p_j, s_j) \nu_i(p_i, s_i) + \frac{ih_{ij}}{2} \bar{\nu}_j(p_j, s_j) \gamma_5 \nu_i(p_i, s_i), \quad (1.4)$$

onde M_1 e M_2 representam as amplitudes de decaimento de $\nu_i \rightarrow \nu_j^{(-)} + \chi$ ($i \neq j$) devidas a parte escalar e pseudoescalar, respectivamente. p_x, s_x , $x = \{i, j\}$, são os momenta e spins dos neutrinos.

O módulo ao quadrado desse elemento de matriz é dado por

$$|M|^2 = |M_1|^2 + |M_2|^2 + 2\text{Re}[M_1 M_2^*], \quad (1.5)$$

onde,

$$\begin{aligned}
|M_1|^2 &= \frac{g_{ij}^2}{16m_1m_i} \text{Tr} \left[(\not{p}_j + m_j) (1 - \gamma_5 \not{s}_j) (\not{p}_i + m_i) (1 - \gamma_5 \not{s}_i) \right] \\
&= \frac{g_{ij}^2}{4m_im_j} [(p_j \cdot p_i + m_im_j) (1 - s_j \cdot s_i) - (p_j \cdot s_i) (p_i \cdot s_j) \\
&\quad + 4 (p_j \cdot s_j) (p_i \cdot s_i)] \\
|M_2|^2 &= \frac{h_{ij}^2}{16m_im_j} \text{Tr} \left[(\not{p}_i + m_i) (1 - \gamma_5 \not{s}_i) (\not{p}_j - m_j) (1 + \gamma_5 \not{s}_j) \right] \\
&= \frac{h_{ij}^2}{4m_im_j} [(p_j \cdot p_i - m_im_j) (1 + s_j \cdot s_i) - (p_j \cdot s_i) (p_i \cdot s_j) \\
&\quad + 4 (p_j \cdot s_j) (p_i \cdot s_i)] \\
2\text{Re} [M_1 M_2^*] &= -\frac{g_{ij}h_{ij}}{2m_im_j} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{i\mu} s_{i\nu} p_{j\lambda} s_{j\sigma},
\end{aligned} \tag{1.6}$$

como também $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ possuirá três valores; será $+1$ se for uma permutação par de 0123, será -1 se for uma permutação ímpar de 0123, e 0 se qualquer dos índices estiverem repetidos.

Para calcular essas expressões para o caso $\nu_i \rightarrow \overset{(-)}{\nu}_j + \chi$ simplesmente se usa a definição do s^μ

$$s_R^\mu = -s_L^\mu = \frac{1}{m\beta} p^\mu - \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} g^{\mu 0}, \tag{1.7}$$

onde s_R^μ e s_L^μ representam os spins dos estados de helicidade direito e esquerdo respectivamente.

Em unidades naturais, $\hbar = c = 1$, $\beta = v$, onde v é a velocidade do neutrino. Usando essa definição de s^μ se chega a

$$\begin{aligned}
p \cdot s &= p^\mu \left[\frac{1}{m\beta} p_\mu - \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} g_{\mu 0} \right] = \frac{p^2}{m\beta} - \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} E \\
&= \frac{m^2}{m\beta} - \frac{m}{E\beta} E = 0,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{i\mu} s_{i\nu} p_{j\lambda} s_{j\sigma} &= \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \left[\frac{1}{m_im_j\beta_i\beta_j} p_{i\mu} p_{i\nu} p_{j\lambda} p_{j\sigma} + \frac{\sqrt{1-\beta_j^2}\sqrt{1-\beta_i^2}}{\beta_i\beta_j} p_{i\mu} p_{i\lambda} g_{\nu 0} g_{\sigma 0} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{1-\beta_j^2}}{m_i\beta_i\beta_j} p_{i\mu} p_{i\nu} p_{j\lambda} g_{\sigma 0} - \frac{\sqrt{1-\beta_i^2}}{m_i\beta_i\beta_j} p_{j\lambda} p_{j\sigma} p_{i\mu} g_{\nu 0} \right],
\end{aligned} \tag{1.9}$$

sendo $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ anti-simétrico em qualquer par de índices, bem como o termo em colchetes é simétrico em, ao menos, dois pares de índices, a contração é zero, logo

$$2\text{Re} [M_1 M_2^*] = 0. \tag{1.10}$$

Assim, a equação (1.5) fica

$$\begin{aligned}
 |M|^2 &= |M_1|^2 + |M_2|^2 \\
 &= \frac{g_{ij}^2}{4m_i m_j} [(p_j \cdot p_i + m_i m_j) (1 - s_j \cdot s_i) + (p_j \cdot s_i) (p_i \cdot s_j)] \\
 &\quad + \frac{h_{ij}^2}{4m_i m_j} [(p_j \cdot p_i - m_i m_j) (1 + s_j \cdot s_i) - (p_j \cdot s_i) (p_i \cdot s_j)].
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Para calcular esta expressão para o caso de um neutrino decaindo em neutrino ou antineutrino, será assumido que $s_i = s_L$ e $s_j = \pm s_L$, já que a terminologia usual adota o estado de helicidade negativa para o neutrino e o estado de helicidade positiva para o antineutrino. Assim

$$\begin{aligned}
 (p_j \cdot p_i + m_i m_j) (1 - s_j \cdot s_i) + (p_j \cdot s_i) (p_i \cdot s_j) &= \\
 &= [(p_j \cdot s_i) (p_i \cdot s_j) - (p_j \cdot p_i) (s_j \cdot s_i)] \\
 &\quad + [p_j \cdot p_i + m_i m_j] - m_i m_j (s_j \cdot s_i);
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

mas, neste último termo

$$\begin{aligned}
 p_{j\mu} \left[-\frac{1}{m_i \beta_i} p_i^\mu + \frac{\sqrt{1 - \beta_i^2}}{\beta_i} g^{\mu 0} \right] &= -\frac{1}{m_i \beta_i} p_j \cdot p_i + \frac{\sqrt{1 - \beta_i^2}}{\beta_i} E_j \\
 p_{i\mu} \left[-\frac{1}{m_j \beta_j} p_j^\mu + \frac{\sqrt{1 - \beta_j^2}}{\beta_j} g^{\mu 0} \right] &= -\frac{1}{m_j \beta_j} p_j \cdot p_i + \frac{\sqrt{1 - \beta_j^2}}{\beta_j} E_i,
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 (p_i \cdot s_j) (p_j \cdot s_i) &= \frac{(p_j \cdot p_i)^2}{m_i m_j \beta_i \beta_j} - \frac{(p_j \cdot p_i)}{m_j \beta_j} \frac{\sqrt{1 - \beta_i^2}}{\beta_i} E_j - \frac{(p_j \cdot p_i)}{m_i \beta_i} \frac{\sqrt{1 - \beta_j^2}}{\beta_j} E_i \\
 &\quad + \frac{\sqrt{1 - \beta_j^2} \sqrt{1 - \beta_i^2}}{\beta_j \beta_i} E_i E_j,
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

e

$$\begin{aligned}
 (p_j \cdot p_i) (s_j \cdot s_i) &= \frac{(p_j \cdot p_i)^2}{m_i m_j \beta_i \beta_j} - \frac{(p_j \cdot p_i)}{m_j \beta_j} \frac{\sqrt{1 - \beta_i^2}}{\beta_i} E_j - \frac{(p_j \cdot p_i)}{m_i \beta_i} \frac{\sqrt{1 - \beta_j^2}}{\beta_j} E_i \\
 &\quad + \frac{\sqrt{1 - \beta_j^2} \sqrt{1 - \beta_i^2}}{\beta_i \beta_j} (p_j \cdot p_i).
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Então, o termo

$$[(p_j \cdot s_i) (p_i \cdot s_j) - (p_j \cdot p_i) (s_j \cdot s_i)] = \frac{\sqrt{1 - \beta_j^2} \sqrt{1 - \beta_i^2}}{\beta_i \beta_j} [E_i E_j - p_j \cdot p_i]. \tag{1.16}$$

Com a definição de s_i e s_j se pode obter

$$s_j \cdot s_i = \frac{(p_j \cdot p_i)}{m_i m_j \beta_j \beta_i} - \frac{1}{m_j \beta_j} \frac{\sqrt{1 - \beta_i^2}}{\beta_i} E_j - \frac{1}{m_i \beta_i} \frac{\sqrt{1 - \beta_j^2}}{\beta_j} E_i + \frac{\sqrt{1 - \beta_j^2} \sqrt{1 - \beta_i^2}}{\beta_i \beta_j}. \quad (1.17)$$

Assim, substituindo (1.16),(1.17) em (1.12), e essa em (1.11),

$$|M_1|^2 = \frac{g_{ij}^2}{4\beta_i \beta_j} \left[(p_j \cdot p_i) \left[\frac{\beta_i \beta_j}{m_i m_j} - \frac{1}{m_i m_j} - \frac{1}{E_i E_j} \right] + \beta_i \beta_j + \frac{m_i E_j}{m_j E_i} + \frac{m_j E_i}{m_i E_j} - \frac{m_i m_j}{E_i E_j} + 1 \right], \quad (1.18)$$

$$|M_2|^2 = \frac{h_{ij}^2}{4\beta_i \beta_j} \left[(p_j \cdot p_i) \left[\frac{\beta_i \beta_j}{m_i m_j} - \frac{1}{m_i m_j} + \frac{1}{E_i E_j} \right] - \beta_i \beta_j + \frac{m_i E_j}{m_j E_i} + \frac{m_j E_i}{m_i E_j} - \frac{m_i m_j}{E_i E_j} - 1 \right]. \quad (1.19)$$

Agora, $p_i \cdot p_j$ pode ser calculado no referencial, no qual o neutrino ν_i está em repouso e da conservação do quadrimomento (o qualquer outro referencial), tem-se

$$p_j \cdot p_i = \frac{m_i^2 + m_j^2}{2}. \quad (1.20)$$

Substituindo a equação (1.20) em (1.18) e (1.19) chegamos à fórmula geral para $|M_1|^2$ e $|M_2|^2$

$$|M_1|^2 = \frac{g_{ij}^2}{4\beta_i \beta_j} \left[\frac{m_i^2 + m_j^2}{2} \left[\frac{\beta_i \beta_j}{m_i m_j} - \frac{1}{m_i m_j} - \frac{1}{E_i E_j} \right] + \beta_i \beta_j + \frac{m_i E_j}{m_j E_i} + \frac{m_j E_i}{m_i E_j} - \frac{m_j m_i}{E_i E_j} + 1 \right], \quad (1.21)$$

$$|M_2|^2 = \frac{h_{ij}^2}{4\beta_i \beta_j} \left[\frac{m_i^2 + m_j^2}{2} \left[\frac{\beta_i \beta_j}{m_i m_j} - \frac{1}{m_i m_j} + \frac{1}{E_i E_j} \right] - \beta_i \beta_j + \frac{m_i E_j}{m_j E_i} + \frac{m_j E_i}{m_i E_j} - \frac{m_j m_i}{E_j E_i} - 1 \right]. \quad (1.22)$$

Para neutrinos ultra-relativísticos onde $\beta_i = \beta_j \approx 1$ e $E_i \gg m_i$, $E_j \gg m_j$ se pode escrever

$$|M_1|^2 \cong \frac{g_{ij}^2}{4} \left[2 + \frac{m_j E_i}{m_i E_j} + \frac{m_i E_j}{m_j E_i} \right], \quad (1.23)$$

$$|M_2|^2 \cong \frac{h_{ij}^2}{4} \left[\frac{m_j E_i}{m_i E_j} + \frac{m_i E_j}{m_j E_i} - 2 \right]. \quad (1.24)$$

Substituindo (1.23),(1.24) em (1.11), finalmente a amplitude de decaimento pode ser escrita como

$$|M(\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi)|^2 = \frac{g_{ij}^2}{2} (A + 2) + \frac{h_{ij}^2}{2} (A - 2), \quad (1.25)$$

onde $A = (m_j E_i)/(m_i E_j) + (m_i E_j)/(m_j E_i)$.

Para calcular $|M(\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi)|^2$ apenas é necessário mudar $s_j \rightarrow -s_j$, e desta maneira para o decaimento envolvendo o antineutrino as amplitudes são

$$|M_1|^2 = \frac{g_{ij}^2}{4\beta_i\beta_j} \left[\frac{m_i^2 + m_j^2}{2} \left[\frac{\beta_i\beta_j}{m_i m_j} + \frac{1}{m_i m_j} + \frac{1}{E_i E_j} \right] + \beta_i\beta_j \right. \\ \left. - \frac{m_i E_j}{m_j E_i} - \frac{m_j E_i}{m_i E_j} + \frac{m_i m_j}{E_i E_j} - 1 \right], \quad (1.26)$$

$$|M_2|^2 = \frac{h_{ij}^2}{4\beta_i\beta_j} \left[\frac{m_i^2 + m_j^2}{2} \left[\frac{\beta_i\beta_j}{m_i m_j} + \frac{1}{m_i m_j} - \frac{1}{E_i E_j} \right] - \beta_i\beta_j \right. \\ \left. - \frac{m_i E_j}{m_j E_i} - \frac{m_j E_i}{m_i E_j} - \frac{m_i m_j}{E_i E_j} + 1 \right]. \quad (1.27)$$

Novamente, para neutrinos ultra-relativísticos onde $\beta_i = \beta_j \approx 1$ e $E_i \gg m_i$, $E_j \gg m_j$ se obtém

$$|M_1|^2 \cong \frac{g_{ij}^2}{4} \left[\frac{m_i^2 + m_j^2}{m_i m_j} - A \right], \quad (1.28)$$

$$|M_2|^2 \cong \frac{h_{ij}^2}{4} \left[\frac{m_i^2 + m_j^2}{m_i m_j} - A \right], \quad (1.29)$$

portanto nessa aproximação

$$|M(\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi)|^2 = \frac{g_{ij}^2 + h_{ij}^2}{4} \left[\frac{m_i^2 + m_j^2}{m_i m_j} - A \right]. \quad (1.30)$$

As taxas de decaimento correspondentes são

$$\Gamma(\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi) = \frac{m_i m_j}{16\pi E_i} \left[g_{ij}^2 \left[\frac{x}{2} + 2 + \frac{2}{x} \ln(x) - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2x^3} \right] \right. \\ \left. + h_{ij}^2 \left[\frac{x}{2} - 2 + \frac{2}{x} \ln(x) + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2x^3} \right] \right], \quad (1.31)$$

$$\Gamma(\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi) = \frac{m_i m_j}{16\pi E_i} (g_{ij}^2 + h_{ij}^2) \left[\frac{x}{2} - \frac{2}{x} \ln(x) - \frac{1}{2x^3} \right], \quad (1.32)$$

onde $x = m_i/m_j$. Pode ser visto de (1.31) e (1.32) que as taxas de decaimento para os dois processos considerados são comparáveis, independente da natureza dos acoplamentos. De fato, no limite $m_i \gg m_j$ as taxas de decaimento para os dois casos são iguais:

$$\Gamma(\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi) = \Gamma(\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi) = \frac{g_{ij}^2 + h_{ij}^2}{32\pi E_i} m_i^2. \quad (1.33)$$

Decaimento de neutrinos na matéria via um bóson de Nambu-Goldstone

2.1 Introdução

As propriedades dos neutrinos na matéria podem ser muito diferentes daquelas no vácuo. Um fenômeno interessante muito conhecido é o efeito MSW [37, 38]. As equações do MSW descrevem a evolução dos estados de interação dos neutrinos e sua mistura com os estados próprios da energia. Mas elas não contêm informação da estrutura do campo do neutrino na matéria. Esta só se pode achar resolvendo as equações efetivas de campo dos neutrinos. De outra maneira, o campo efetivo do neutrino na matéria, em presença de mistura, é essencial para fazer cálculos realísticos de decaimentos de neutrinos.

Portanto, neste capítulo resolvemos as equações de campo de neutrinos de Majorana na matéria, usando o formalismo de helicidade de dois componentes introduzido em [29] para uma teoria geral (n, m) , onde se tem n campos que pertencem a isodubletos de $SU_L(2)$ (neutrinos ativos) e m campos isosingletos de $SU_L(2)$ (neutrinos estéreis). Estas equações são obtidas da lagrangiana efetiva a baixas energias. Com a expressão geral do campo se encontra uma equação que permite obter o espectro de energia e as massas dos estados próprios de helicidade. Esta expressão se aplica para o caso particular de duas gerações. Os casos de dois neutrinos ativos e o de um neutrino ativo mais um estéril são tratados. Equações gerais para o espectro de massa são dadas e se mostra que no caso de neutrinos relativísticos na matéria ordinária este espectro coincide com o obtido do efeito MSW. Demonstra-se que a matéria incrementa o espaço de fase disponível para os decaimentos entre os diferentes autoestados de helicidade e que quase todos estes decaimentos, por exemplo, $\nu_1^- \rightarrow \nu_2^+$, são possíveis para diferentes densidades de matéria, a despeito do caso do vácuo¹. Estudam-se os decaimentos de neutrinos de Majorana na matéria via dois tipos diferentes de acoplamentos, pseudoescalar e escalar. O tipo de lagrangiana usada é genérica, isto é, independente do modelo. Neste enfoque, as constantes de acoplamentos são independentes da origem das massas e unicamente são limitadas pelos experimentos. Obtêm-se expressões gerais para as taxas de decaimento e para os acoplamentos efetivos. Destes acoplamentos pode se ver que a despeito do vácuo eles são misturados, implicando que decaimentos rápidos podem acontecer, ainda que a matriz de acoplamentos seja gerada pelo mesmo mecanismo que a matriz de massa.

Finalmente, este formalismo será usado para deduzir as taxas de decaimento dos neutrinos de

¹A este respeito ver capítulo 1

Majorana no vácuo, cujo resultado, comparado com o resultado do capítulo 1, será usado como teste de validez e generalidade.

2.2 Formalismo de helicidade para campos de neutrinos na matéria

Considera-se uma teoria geral (n, m) na qual há n campos de neutrinos isodoublets de $SU(2)_L$ e m campos de neutrinos isosinglets de $SU(2)_L$. Denotamos os campos de neutrinos de dois componentes na base de interação por Φ_α^W , com $\alpha = 1, \dots, n$ para os n campos de neutrinos isodoublets de $SU(2)_L$ e $\alpha = n + 1, \dots, N$ para os m campos de neutrinos isosinglets de $SU(2)_L$ ($N \equiv n + m$).

A lagrangiana no vácuo é

$$L = \sum_{\alpha=1}^N \Phi_\alpha^{W\dagger} (i\partial_0 - i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \Phi_\alpha^W - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N (\Phi_\alpha^{W^T} M_{\alpha\beta}^W i\sigma^2 \Phi_\beta^W - \Phi_\alpha^{W\dagger} M_{\alpha\beta}^{W*} i\sigma^2 \Phi_\beta^{W*}), \quad (2.1)$$

onde M^W é uma matriz de massa simétrica complexa $N \times N$ que pode ser decomposta como

$$M^W = \begin{bmatrix} M_{(n)}^W & M_{(D)}^W \\ M_D^{W^T} & M_{(m)}^W \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde $M_{(n)}^W$ e $M_{(m)}^W$ são duas matrizes de massa de Majorana simétricas complexas $n \times n$ e $m \times m$, respectivamente, e $M_{(D)}^W$ é uma matriz de massa de Dirac complexa. A matriz de massa M^W complexa pode ser diagonalizada por uma transformação

$$U^\dagger M^W U = M^M, \quad (2.3)$$

onde $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ e M^M é uma matriz $N \times N$ diagonal com valores próprios reais e definidos positivamente ($M_{ab}^M = m_a \delta_{ab}$).

Para termos uma idéia de como obter a lagrangiana (2.1), ilustraremos o caso para um único neutrino. O caso para N neutrinos é facilmente derivável deste. A lagrangiana para um único neutrino é

$$L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_M (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \nu_M, \quad (2.4)$$

onde

$$\nu_M = \nu_L(x) + \nu_L^C(x), \quad (2.5)$$

aqui o sub-índice M se refere ao fato que o neutrino é de Majorana e a L ao fato que estamos tomando o campo de quiralidade esquerda.

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \{ \bar{\nu}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + \bar{\nu}_L^C i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L^C - m[\bar{\nu}_L \nu_L^C + \bar{\nu}_L^C \nu_L] \} \\ & + \frac{1}{2} \{ \bar{\nu}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L^C + \bar{\nu}_L^C i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L - m[\bar{\nu}_L \nu_L + \bar{\nu}_L^C \nu_L^C] \}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

O segundo termo de (2.6) é zero, e portanto

$$L = \bar{\nu}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L - \frac{m}{2} [\bar{\nu}_L \nu_L^C + \bar{\nu}_L^C \nu_L], \quad (2.7)$$

a equação de campo para $\bar{\nu}_L$ fica

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L - m\nu_L^C = 0. \quad (2.8)$$

Os quadri-espinores ν_L e ν_L^C estão relacionados com os bi-espinores Φ^W por

$$\begin{aligned} \nu_L &= \begin{pmatrix} \Phi^W \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \nu_L^C &= i\gamma^2 \nu_L^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sigma^2 \Phi^{W*} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde σ^2 é a matriz de Pauli.

Substituindo (2.9) em (2.7) a lagrangiana na representação bi-espinorial é facilmente derivável.

$$L = \Phi^{W\dagger} (i\partial_0 - i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \Phi^W - \frac{m}{2} \left\{ \Phi^{W^T} i\sigma^2 \Phi^W - \Phi^{W\dagger} i\sigma^2 \Phi^{W*} \right\}, \quad (2.10)$$

de (2.10) se vê facilmente que para N partículas a lagrangiana toma a forma de (2.1).

Os campos de neutrinos de duas componentes na base de massa Φ_a^M ($a = 1, \dots, N$) podem se definir como

$$\Phi_\alpha^W = \sum_{a=1}^N U_{\alpha a} \Phi_a^M. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.1) se tem para a parte cinética da lagrangiana

$$L_K = \sum_{a=1}^N \Phi_a^{M\dagger} (i\partial_0 - i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \Phi_a^M, \quad (2.12)$$

e para o termo de massa de (2.1)

$$L_M = -\frac{1}{2} m_a \sum_{a=1}^N \left(\Phi_a^{M^T} i\sigma^2 \Phi_a^M - \Phi_a^{M\dagger} i\sigma^2 \Phi_a^{M*} \right). \quad (2.13)$$

Portanto a lagrangiana total no vácuo na base de massa é

$$L = \sum_{a=1}^N \left[\Phi_a^{M\dagger} (i\partial_0 - i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \Phi_a^M - \frac{1}{2} m_a \left(\Phi_a^{M^T} i\sigma^2 \Phi_a^M - \Phi_a^{M\dagger} i\sigma^2 \Phi_a^{M*} \right) \right]. \quad (2.14)$$

Da equação (2.14) se vê que a base de massa diagonaliza o Hamiltoniano no vácuo e portanto é correto usa-la para quantizar os campos dos neutrinos no vácuo. Os campos Φ_α^W no vácuo são superposições dos campos de massa Φ_α^M .

A corrente leptônica carregada da lagrangiana de interação fraca é dada por

$$j^\mu = 2 \sum_{\alpha=1}^n \bar{l}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L}^W = 2 \sum_{\alpha=1}^n \sum_{a=1}^N \bar{l}_{\alpha L} \gamma^\mu K_{\alpha a} \nu_{aL}^M, \quad (2.15)$$

onde $l_{\alpha L}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) são os campos leptônicos esquerdos carregados e se define por conveniência K (matriz $n \times N$) tal que $K_{\alpha a} = U_{\alpha a}$ para $\alpha = 1, \dots, n$ e $a = 1, \dots, N$. Esta matriz satisfaz $KK^\dagger = I$ mas não $K^\dagger K \neq I$ para $m \neq 0$.

Quando o neutrino se propaga na matéria, sua energia é mudada devido às interações fracas com partículas do meio. A lagrangiana efetiva na matéria é dada por

$$L_W = - \sum_{\alpha=1}^n \Phi_{\alpha}^{W\dagger} V_{\alpha\alpha}^W \Phi_{\alpha}^W, \quad (2.16)$$

onde a matriz potencial é diagonal, com $V_{11}^W = V_C + V_N$ e $V_{\alpha\alpha} = V_N$ para $\alpha = 2, \dots, n$ e supondo aqui um meio rico em elétrons e nucleons. Os potenciais V_C e V_N descrevem a interação coerente de corrente carregada e corrente neutra dos neutrinos com a matéria. Para ver como a lagrangiana de (2.16) chega a ter essa forma se faz

$$iL_{W_{eff}} = \left(\frac{ig_W}{\sqrt{2}} \right)^2 [\bar{e}(p_1) \gamma^{\mu} \nu_{eL}(p_2)] \frac{ig_{\mu\sigma}}{M_W^2} [\bar{\nu}_e(p_3) \gamma^{\sigma} e_L(p_4)]. \quad (2.17)$$

Esta é a lagrangina efetiva de interação fraca para corrente carregada (podemos desprezar o momento do W^- no propagador em comparação com sua massa, já que estamos trabalhando em baixas energias). Usando $\frac{g_W^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$ e fazendo uma transformação de Fierz (apêndice B) se chega a

$$L_{W_{eff}} = - \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e(p_3) \gamma_{\mu} \nu_{eL}(p_2) \bar{e}(p_1) \gamma^{\mu} e_L(p_4). \quad (2.18)$$

Isto dá a seguinte contribuição à lagrangiana efetiva

$$L_{W_{eff}} = -\sqrt{2}G_F N_e \bar{\nu}_{eL} \gamma_0 \nu_{eL}, \quad (2.19)$$

onde se calculou o espalhamento para frente e foi feita uma média sobre os campos dos elétrons no meio. N_e é a densidade do número de elétrons ². Escrevendo (2.19) na representação de dois componentes obtemos a equação (2.16).

A lagrangiana efetiva na matéria na base de massa é

$$L_{eff} = \sum_{a=1}^N \left[\Phi_a^{M\dagger} (i\partial_0 - i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \Phi_a^M - \frac{1}{2} m_a \left(\Phi_a^{MT} i\sigma^2 \Phi_a^M - \Phi_a^{M\dagger} i\sigma^2 \Phi_a^{M*} \right) \right] - \sum_{a,b=1}^N \Phi_a^{M\dagger} V_{ab}^M \Phi_b^M, \quad (2.20)$$

onde

$$V_{ab}^M = \sum_{\alpha=1}^N K_{a\alpha}^* V_{\alpha\alpha}^W K_{\alpha b}, \quad (2.21)$$

contrariamente à lagrangiana no vácuo (2.14), que pode ser diagonalizada na base de massa Φ_{α}^M , a lagrangiana na matéria não pode ser diagonalizada nesta base, como se vê de (2.20). Além disso, não se pode falar de uma mistura adicional devido aos efeitos da matéria, já que, como é facilmente visto de (2.20), os termos de massa e potencial na lagrangiana não são simultaneamente diagonalizáveis. Apesar disso, as equações de campo podem ser resolvidas. Aplicando as equações de Euler-Lagrange obtemos as seguintes equações de campo

$$(i\partial_0 - i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \Phi_a^M(x) + m_a i\sigma^2 \Phi_a^{M*}(x) - \sum_{b=1}^N V_{ab}^M \Phi_b^M(x) = 0, \quad (2.22)$$

²Para ver uma dedução completa dos potenciais efetivos de corrente carregada e corrente neutra dos neutrinos em meio rico de elétrons e nucleons ver o apêndice A.

onde $a = 1, \dots, N$. Para resolver estas equações de campo se expandem os campos $\Phi_a^M(x)$ como superposições de espinores de onda plana com helicidade definida.

$$\Phi_a^M(x) = \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \times \sum_{h=\pm 1} \left[A_a^{(h)}(\vec{p}, t) + B_a^{(h)}(\vec{p}, t) \right] w(\vec{p}, h), \quad (2.23)$$

onde $h = \pm 1$ denota a helicidade, $A_a^{(h)}(\vec{p}, t)$ e $B_a^{(h)}(\vec{p}, t)$ a parte de frequência (+) e (-) respectivamente, e $w(\vec{p}, t)$ são bi-espinores ortonormalizados que são estados próprios da helicidade.

$$A_a^{(h)}(\vec{p}, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_{aj}^{(h)}(P) a_j(\vec{p}, h) e^{-iE_j^{(h)} t}, \quad (2.24)$$

$$h\eta(\vec{p}, h) B_a^{(h)*}(-\vec{p}, t) = \sum_{j=1}^N \beta_{aj}^{(h)}(P) a_j(\vec{p}, h) e^{-iE_j^{(h)} t}, \quad (2.25)$$

onde

$$w(\vec{p}, +) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad w(\vec{p}, -) = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

e $\vec{p} = (P, \theta, \phi)$. $P \equiv |\vec{p}|$, $\eta(\vec{p}, h)$ são fatores de fase, $E_j^{(h)}$ ($j = 1, \dots, N$) são os valores próprios da energia e $a_j(\vec{p}, h)$ ($j = 1, \dots, N$) são os operadores que obedecem as relações de anticomutação canônica. Para achar os valores dos coeficientes $\alpha_{aj}^{(h)}(P)$ e $\beta_{aj}^{(h)}(P)$ para cada valor próprio de helicidade $h = \pm 1$ se substitui (2.24) e (2.25) em (2.23) e isto em (2.22). De (2.25) se tem

$$B_a^{(h)}(\vec{p}, t) = h\eta(-\vec{p}, h) \sum_{j=1}^N \beta_{aj}^{(h)*}(P) a_j^\dagger(-\vec{p}, h) e^{iE_j^{(h)} t}, \quad (2.27)$$

substituindo (2.27) em (2.23)

$$\begin{aligned} \Phi_a^M(x) = \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^N \sum_{h=\pm 1} \left[\alpha_{aj}^{(h)}(P) a_j(\vec{p}, h) e^{-iE_j^{(h)} t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, h) \right. \\ \left. + h\eta(\vec{p}, h) \beta_{aj}^{(h)*}(P) a_j^\dagger(\vec{p}, h) e^{iE_j^{(h)} t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(-\vec{p}, h) \right], \end{aligned} \quad (2.28)$$

agora como $\eta(\vec{p}, h) w(-\vec{p}, h) = -w(\vec{p}, -h)$ o campo finalmente tem a forma

$$\begin{aligned} \Phi_a^M(x) = \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^N \sum_{h=\pm 1} \left[\alpha_{aj}^{(h)}(P) a_j(\vec{p}, h) e^{-iE_j^{(h)} t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, h) \right. \\ \left. - h\beta_{aj}^{(h)*}(P) a_j^\dagger(\vec{p}, h) e^{iE_j^{(h)} t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, -h) \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

com o campo, escrito desta maneira, podemos calcular as seguintes relações

$$\begin{aligned} i\partial_0 \Phi_a^M(x) = \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^N \sum_{h=\pm 1} E_j^{(h)} \left[\alpha_{aj}^{(h)}(P) a_j(\vec{p}, h) e^{-iE_j^{(h)} t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, h) \right. \\ \left. + h\beta_{aj}^{(h)*}(P) a_j^\dagger(\vec{p}, h) e^{iE_j^{(h)} t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, -h) \right], \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$m_a i \sigma^2 \Phi_a^M(x) = m_a \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^N \sum_{h=\pm 1} \left[\alpha_{aj}^{(h)*}(P) a_j^\dagger(\vec{p}, h) e^{iE_j^{(h)} t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} (i \sigma^2 w^*(\vec{p}, h)) \right. \\ \left. - h \beta_{aj}^{(h)}(P) a_j(\vec{p}, h) e^{-iE_j^{(h)} t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} (i \sigma^2 w^*(\vec{p}, -h)) \right], \quad (2.31)$$

usando $i \sigma^2 w^*(\vec{p}, h) = -h w(\vec{p}, -h)$ a equação anterior fica

$$m_a i \sigma^2 \Phi_a^M(x) = m_a \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^N \sum_{h=\pm 1} \left[-\alpha_{aj}^{(h)*}(P) a_j^\dagger(\vec{p}, h) e^{iE_j^{(h)} t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, -h) \right. \\ \left. - h \beta_{aj}^{(h)}(P) a_j(\vec{p}, h) e^{-iE_j^{(h)} t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, h) \right], \quad (2.32)$$

$$-i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \Phi_a^M(x) = \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^N \sum_{h=\pm 1} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left[\alpha_{aj}^{(h)}(P) a_j(\vec{p}, h) e^{-iE_j^{(h)} t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right. \\ \left. w(\vec{p}, h) + h \beta_{aj}^{(h)*}(P) a_j^\dagger(\vec{p}, h) e^{iE_j^{(h)} t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, -h) \right], \quad (2.33)$$

usando $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} w(\vec{p}, h) = h P w(\vec{p}, h)$ se tem

$$-i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \Phi_a^M(x) = \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^N \sum_{h=\pm 1} h P \left[\alpha_{aj}^{(h)}(P) a_j(\vec{p}, h) e^{-iE_j^{(h)} t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right. \\ \left. w(\vec{p}, h) - h \beta_{aj}^{(h)*}(P) a_j^\dagger(\vec{p}, h) e^{iE_j^{(h)} t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, -h) \right], \quad (2.34)$$

e finalmente

$$-\sum_{b=1}^N V_{ab}^M \Phi_b^M(x) = - \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^N \sum_{h=\pm 1} \sum_{b=1}^N \left[V_{ab}^M \alpha_{bj}^{(h)}(P) a_j(\vec{p}, h) e^{-iE_j^{(h)} t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right. \\ \left. w(\vec{p}, h) - h V_{ab}^M \beta_{bj}^{(h)*}(P) a_j^\dagger(\vec{p}, h) e^{iE_j^{(h)} t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, -h) \right]. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.30), (2.32), (2.34), (2.35) em (2.22) se tem

$$\int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{j=1}^N \sum_{h=\pm 1} \left\{ \left[E_j^{(h)} \alpha_{aj}^{(h)}(P) + h P \alpha_{aj}^{(h)}(P) - m_a \beta_{aj}^{(h)}(P) - \sum_{b=1}^N V_{ab}^M \alpha_{bj}^{(h)}(P) \right] \right. \\ \left. a_j(\vec{p}, h) e^{-iE_j^{(h)} t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, h) + \left[h \beta_{aj}^{(h)*} E_j^{(h)} - P \beta_{aj}^{(h)*}(P) - m_a h \alpha_{aj}^{(h)}(P) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{b=1}^N V_{ab}^M h \beta_{aj}^{(h)*}(P) \right] a_j^\dagger(\vec{p}, h) e^{iE_j^{(h)} t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} w(\vec{p}, -h) \right\} = 0, \quad (2.36)$$

como os $w(\vec{p}, h)$ são linearmente independentes, esta equação satisfaz se

$$(E_j^{(h)} + h P) \alpha_{aj}^{(h)}(P) - m_a \beta_{aj}^{(h)}(P) - \sum_{b=1}^N V_{ab}^M \alpha_{bj}^{(h)}(P) = 0, \quad (2.37)$$

$$(E_j^{(h)} - h P) \beta_{aj}^{(h)}(P) - m_a \alpha_{aj}^{(h)}(P) + \sum_{b=1}^N V_{ab}^{M*} \beta_{aj}^{(h)}(P) = 0. \quad (2.38)$$

As equações (2.37) e (2.38) nos permitem calcular os valores próprios da energia e os valores dos coeficientes $\alpha_{bj}^{(h)}(P)$ e $\beta_{aj}^{(h)}(P)$. Também se pode ver como as soluções são ortogonais se cumpre a seguinte relação

$$\sum_{a=1}^N \left[\alpha_{ai}^{(h)*}(P) \alpha_{aj}^{(h)}(P) + \beta_{ai}^{(h)*}(P) \beta_{aj}^{(h)}(P) \right] = \delta_{ij}. \quad (2.39)$$

Interpretando os operadores $a_j(\vec{p}, h)$ e $a_j^\dagger(\vec{p}, h)$ como os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, obedecendo as regras de anticomutação canônicas se chega ao hamiltoniano correto, normalmente ordenado dado por

$$H = \int d\vec{p} \sum_{j=1}^N \left[E_j^{(-)} a_j^\dagger(\vec{p}, -) a_j(\vec{p}, -) + E_j^{(+)} a_j^\dagger(\vec{p}, +) a_j(\vec{p}, +) \right]. \quad (2.40)$$

Para neutrinos relativísticos para os quais $m_a \ll P$ ($a = 1, \dots, N$) e $V \ll P$, as relações de dispersão $E_j^{(h)2} = P^2 + m_j^{(h)2}$ podem ser aproximadas a

$$E_j^{(h)} \cong P + \frac{m_j^{(h)2}}{2P}, \quad (2.41)$$

onde $j = 1, \dots, N$ e $m_j^{(h)2}$ são as massas efetivas quadradas na matéria. A ordem mais baixa se tem

$$\beta_{aj}^{(-)}(P) = \frac{m_a}{2P} \alpha_{aj}^{(-)}(P), \quad (2.42)$$

e

$$\alpha_{aj}^{(+)}(P) = \frac{m_a}{2P} \beta_{aj}^{(+)}(P). \quad (2.43)$$

Substituindo (2.41), (2.42) e (2.43) em (2.37) e (2.38)

$$\frac{m_j^{(-)2} - m_a^2}{2P} \alpha_{aj}^{(-)}(P) - \sum_{b=1}^N V_{ab}^M \alpha_{bj}^{(-)}(P) = 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{m_j^{(+)2} - m_a^2}{2P} \beta_{aj}^{(+)}(P) + \sum_{b=1}^N V_{ab}^{M*} \beta_{bj}^{(+)}(P) = 0, \quad (2.45)$$

onde $a = 1, \dots, N$. Da equação (2.39) e (2.42) podemos escrever

$$\sum_{a=1}^N \left[\alpha_{ai}^{(-)*}(P) \alpha_{aj}^{(-)}(P) + \left(\frac{m_a}{2P} \right)^2 \alpha_{ai}^{(-)*}(P) \alpha_{aj}^{(-)}(P) \right] = \delta_{ij}, \quad (2.46)$$

e aplicando a condição para neutrinos relativísticos ($m_a \ll P$) obtemos

$$\sum_{a=1}^N \alpha_{ai}^{(-)*}(P) \alpha_{aj}^{(-)}(P) \cong \delta_{ij}. \quad (2.47)$$

Fazendo um cálculo similar com (2.39) e (2.43)

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^N \left[\left(\frac{m_a}{2P} \right)^2 \beta_{ai}^{(+)*}(P) \beta_{aj}^{(+)}(P) + \beta_{ai}^{(+)*}(P) \beta_{aj}^{(+)}(P) \right] &= \delta_{ij} \\ &\cong \sum_{a=1}^N \beta_{ai}^{(+)*}(P) \beta_{aj}^{(+)}(P). \end{aligned} \quad (2.48)$$

De (2.47) e (2.48) se pode concluir que as N soluções $\alpha_{aj}^{(-)}(P)$ e as N $\beta_{aj}^{(+)}(P)$ para neutrinos relativísticos formam matrizes $N \times N$ unitárias. Multiplicando (2.44) por $\sum_{i=1}^N \alpha_{ai}^{(-)\dagger}(P)$ e usando a unitariedade de $\alpha_{aj}^{(-)}(P)$ e $\beta_{aj}^{(+)}(P)$ obtemos

$$\left[\frac{m_j^{(-)2} - m_a^2}{2P} \right] \delta_{ij} - \sum_{i=1}^N \sum_{b=1}^N \alpha_{ai}^{(-)\dagger}(P) V_{ab}^M \alpha_{bj}^{(-)}(P) = 0. \quad (2.49)$$

A equação anterior pode ser escrita em forma matricial

$$\alpha^{(-)\dagger}(P)(M^{M^2} + 2PV^M)\alpha^{(-)}(P) = M^{(-)2}(P), \quad (2.50)$$

onde $M_{ab}^{M^2}(P) = m_a^2 \delta_{ab}$ e $M_{ab}^{(-)2} = m_{ab}^{(-)2}(P) \delta_{ab}$. Fazendo um procedimento similar para (2.45) se obtém

$$\beta^{(+)\dagger}(P)(M^{M^2} - 2PV^{M*})\beta^{(+)}(P) = M^{(+)2}(P). \quad (2.51)$$

De (2.50) e (2.51) se deduz que na aproximação relativística as componentes da expansão de onda plana do campo $\Phi_a^M(x)$ misturam de uma maneira simples através das matrizes unitárias $\alpha_{aj}^{(-)}(P)$ e $\beta_{aj}^{(+)}(P)$. Isto leva a uma mistura simples dos estados do neutrino que é a fonte das oscilações dos neutrinos. Devido à mistura, que depende do momento, e de um campo, que contém uma superposição de um número infinito de componentes de momento, não se tem uma mistura simples dos campos na matéria.

2.3 Cálculo das massas efetivas para duas gerações de neutrinos na matéria

2.3.1 Caso (2,0)

Como uma aplicação simples do formalismo da seção anterior, considera-se o caso de $(n, m) = (2, 0)$, isto é, quando se tem dois neutrinos ativos e nenhum estéril. As matrizes de mistura K e U , e as matrizes de interação V^W e V^M são dadas neste caso por

$$K = U = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi e^{i\delta} \\ -\sin \phi & \cos \phi e^{i\delta} \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

$$V^W = \begin{bmatrix} V_N + V_C & 0 \\ 0 & V_N \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

$$V^M = K^\dagger V^W K = \begin{bmatrix} V_N + V_C \cos^2 \phi & V_C \cos \phi \sin \phi e^{i\delta} \\ V_C \cos \phi \sin \phi e^{-i\delta} & V_N + V_C \sin^2 \phi \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

onde V_N e V_C são os potenciais de corrente neutra e corrente carregada, respectivamente. O sistema de $2N = 4$ equações (2.37) e (2.38) pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mp P + V_{11}^M & m_1 & V_{12}^M & 0 \\ m_1 & \pm P - V_{11}^M & 0 & -V_{21}^M \\ V_{21}^M & 0 & \mp P + V_{22}^M & m_2 \\ 0 & -V_{12}^M & m_2 & \pm P - V_{22}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1j}^{(\pm)}(P) \\ \beta_{1j}^{(\pm)}(P) \\ \alpha_{2j}^{(\pm)}(P) \\ \beta_{2j}^{(\pm)}(P) \end{bmatrix} = E_j^{(\pm)} \begin{bmatrix} \alpha_{1j}^{(\pm)}(P) \\ \beta_{1j}^{(\pm)}(P) \\ \alpha_{2j}^{(\pm)}(P) \\ \beta_{2j}^{(\pm)}(P) \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Esta equação permite achar os valores próprios da energia e, com isto, usando a equação de dispersão, as massas efetivas quadradas na matéria. Portanto, as massas são

$$\begin{aligned} m_1^{(\pm)2}(P) &= \mp P(2V_N + V_C) + \frac{1}{2} [m_1^2 + m_2^2 + V_N^2 + (V_N + V_C)^2] - \frac{1}{2} \Delta^{(\pm)}, \\ m_2^{(\pm)2}(P) &= \mp P(2V_N + V_C) + \frac{1}{2} [m_1^2 + m_2^2 + V_N^2 + (V_N + V_C)^2] + \frac{1}{2} \Delta^{(\pm)}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(\pm)2} &= [\Delta \cos(2\phi) - 2V_C(\mp P + V_N)]^2 + [\Delta \sin(2\phi)]^2 \\ &+ V_C^2 \{ V_C^2 + 4V_C(\mp P + V_N) + (m_2 - m_1)^2 \sin^2(2\phi) - 2\Delta \cos(2\phi) \\ &+ 2m_1 m_2 \sin^2(2\phi) [1 - \cos(2\delta)] \}, \end{aligned}$$

onde $\Delta = m_2^2 - m_1^2$.

A contribuição da matéria às massas quadradas dos neutrinos são muito importantes em seus decaimentos, uma vez que isto induza um incremento no espaço de fase disponível. Isto se pode ver na figura 2.1, onde se mostra as massas efetivas quadradas como funções da densidade da matéria ρ . A composição da matéria em geral não é constante, e então, para ilustrar isso, fizemos uma densidade relativa de número de elétrons, Y_e (ver o apêndice A), e os potenciais V_N e V_C variáveis exponencialmente, como se mostra nas figuras 2.2(a) e 2.2(b). Da figura 2.1 se pode ver que para altas densidades de energia, o incremento no espaço de fase é significativo e os modos possíveis de decaimento dependem da densidade relativa do números de elétrons. Por exemplo, das figuras 2.1 e 2.2 é claro que quando $Y_e > 0.5$ o decaimento $\nu_2^{(-)} \rightarrow \nu_1^{(+)}$ (o qual num meio muito denso corresponde ao decaimento $\nu_e^{(-)} \rightarrow \nu_\mu^{(+)}$) é possível, mas quando $Y_e < 0.5$ o decaimento inverso é possível, e, similarmente, para os outros decaimentos.

Para o caso de neutrinos relativísticos na matéria ordinária ($V \ll m_a$) se pode usar as equações (2.44) e (2.45) para achar o espectro de massas dos neutrinos autoestados de massa na matéria. Nesta aproximação, as massas estão dadas por

$$\begin{aligned} m_1^{(\pm)2}(P) &= \mp P(2V_N + V_C) + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) - \frac{1}{2} \Delta^{(\pm)}(P), \\ m_2^{(\pm)2}(P) &= \mp P(2V_N + V_C) + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) + \frac{1}{2} \Delta^{(\pm)}(P), \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde $\Delta^{(\pm)}$ é

$$\Delta^{(\pm)} = \sqrt{[\Delta \cos(2\phi) \pm 2PV_C]^2 + [\Delta \sin(2\phi)]^2}. \quad (2.58)$$

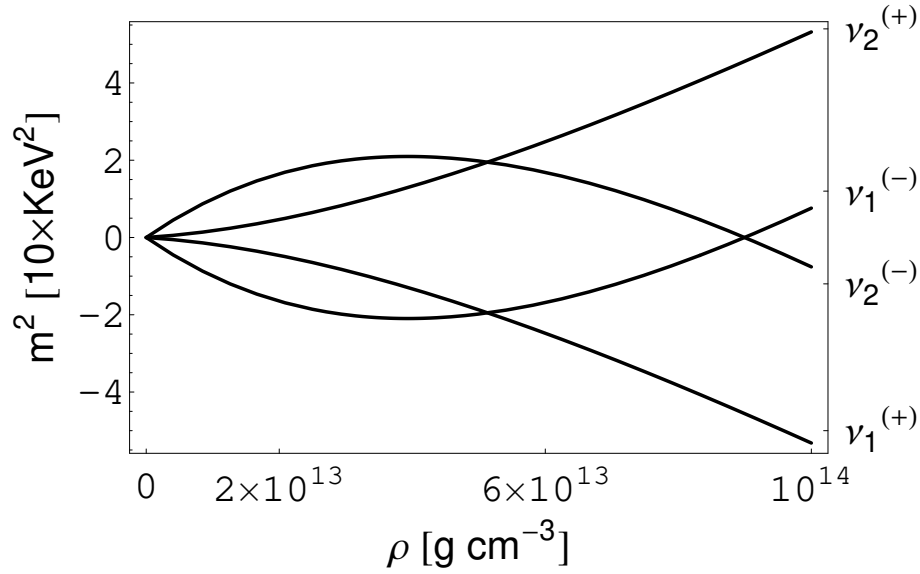


Figura 2.1: Comportamento das massas quadradas efetivas em função da densidade de matéria para o caso (2,0). A energia do neutrino é 10 MeV e os parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV.

O ângulo de mistura na matéria está dado por

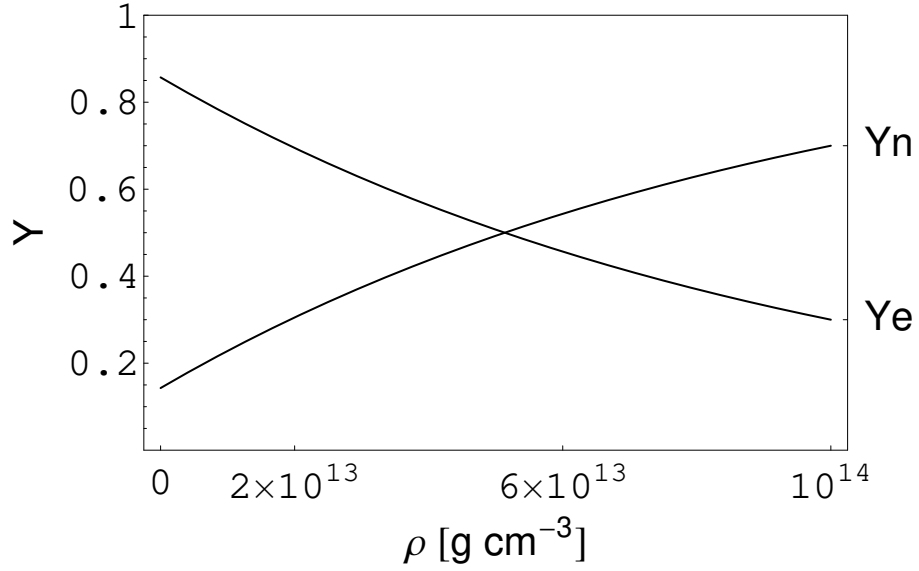
$$\tan[2\phi(P)] = \frac{\mp 2PV_C \sin(2\phi)}{\Delta \pm 2PV_C \cos(2\phi)}. \quad (2.59)$$

As equações (2.57) e (2.59) coincidem com os valores calculados no efeito MSW [37–39]. Esta aproximação é relevante para as densidades de matéria $V \ll P$ e $m_a \ll P$, e em particular na proximidade da região de ressonância para neutrinos relativísticos onde $PV \approx m_a^2 \ll P$. Veja figura 2.3.

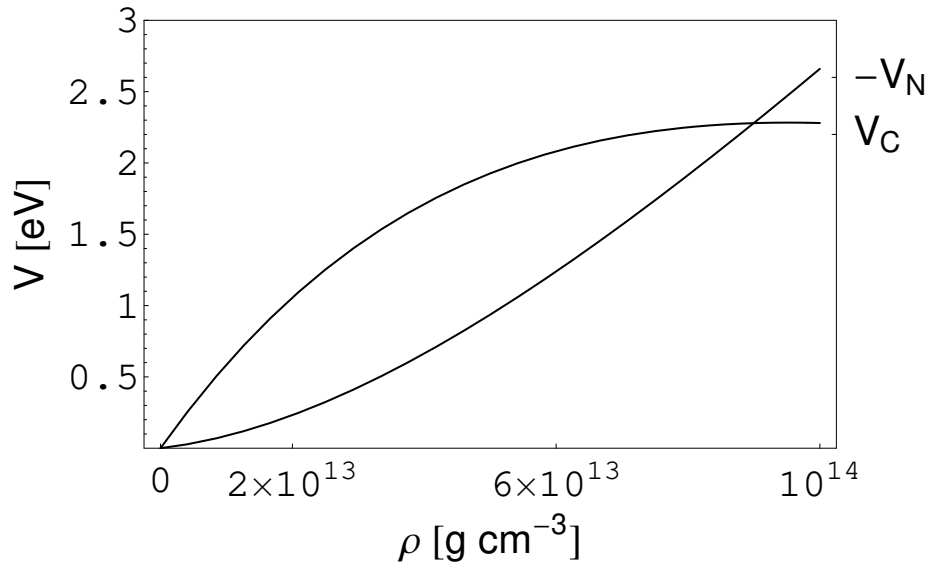
2.3.2 Caso (1,1)

Para o caso de duas gerações (1,1), isto é, quando se tem um neutrino ativo e um estéril, o cálculo das massas efetivas é similar ao caso anterior. Neste caso, tem-se $V_{11}^W = V_N + V_C$ e $V_{22}^W = 0$. O sistema de $2N = 4$ equações (2.37) e (2.38) pode ser escrito em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mp P + V_{11}^W C_\phi^2 & m_1 & V_{11}^W C_\phi S_\phi e^{i\delta} & 0 \\ m_1 & \pm P - V_{11}^W C_\phi^2 & 0 & -V_{11}^W C_\phi S_\phi e^{-i\delta} \\ V_{11}^W C_\phi S_\phi e^{-i\delta} & 0 & \mp P + V_{11}^W S_\phi^2 & m_2 \\ 0 & -V_{11}^W C_\phi S_\phi e^{i\delta} & m_2 & \pm P - V_{11}^W S_\phi^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_{1j}^{(\pm)}(P) \\ \beta_{1j}^{(\pm)}(P) \\ \alpha_{2j}^{(\pm)}(P) \\ \beta_{2j}^{(\pm)}(P) \end{bmatrix} = E_j^{(\pm)} \begin{bmatrix} \alpha_{1j}^{(\pm)}(P) \\ \beta_{1j}^{(\pm)}(P) \\ \alpha_{2j}^{(\pm)}(P) \\ \beta_{2j}^{(\pm)}(P) \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$



(a) Densidades relativas de números de elétrons Y_e e de número de núcleons Y_n ($Y_e + Y_n = 1$).



(b) Comportamento dos potenciais efetivos $V_N(\rho)$ e $V_C(\rho)$ em função da densidade de matéria.

Figura 2.2: Potenciais e densidades relativas considerados.

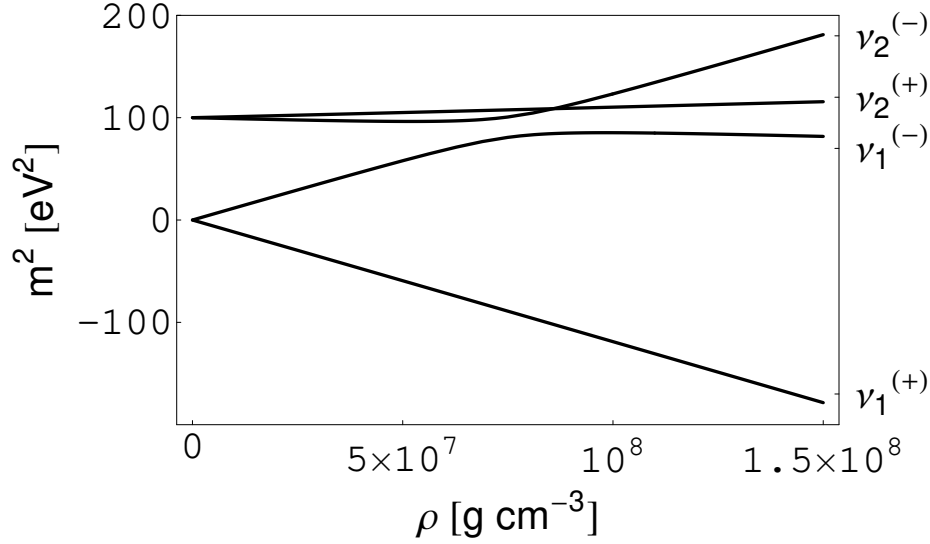


Figura 2.3: Comportamento das massas quadradas efetivas em função da densidade da matéria para o caso (2, 0). A energia do neutrino é 10 MeV e os parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV. Esta é a região de ressonância na aproximação MSW do caso da figura 2.1.

onde $C_\phi = \cos \phi$ e $S_\phi = \sin \phi$. Esta equação permite achar os valores próprios da energia, e, usando a equação de dispersão, as massas efetivas quadradas na matéria. Portanto, as massas são

$$\begin{aligned} m_1^{(\pm)2}(P) &= \mp P(V_N + V_C) + \frac{1}{2} [m_1^2 + m_2^2 + (V_N + V_C)^2] - \frac{1}{2} \Delta^{(\pm)}, \\ m_2^{(\pm)2}(P) &= \mp P(V_N + V_C) + \frac{1}{2} [m_1^2 + m_2^2 + (V_N + V_C)^2] + \frac{1}{2} \Delta^{(\pm)}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(\pm)2} &= [\Delta \cos(2\phi) \pm 2P(V_N + V_C)]^2 + [\Delta \sin(2\phi)]^2 \\ &+ (V_N + V_C)^2 \{ (V_N + V_C)^2 \mp 4P(V_N + V_C) + (m_2 - m_1)^2 \sin^2(2\phi) - 2\Delta \cos(2\phi) \\ &+ 2m_1 m_2 \sin^2(2\phi) [1 - \cos(2\delta)] \}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde $\Delta = m_2^2 - m_1^2$.

Para o caso de neutrinos relativísticos na matéria ordinária ($m_a \ll P$ e $V \ll m_a$)

$$\begin{aligned} m_1^{(\pm)2}(P) &= \mp P(V_N + V_C) + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) - \frac{1}{2}\Delta^{(\pm)}(P), \\ m_2^{(\pm)2}(P) &= \mp P(V_N + V_C) + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) + \frac{1}{2}\Delta^{(\pm)}(P), \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde $\Delta^{(\pm)}$

$$\Delta^{(\pm)} = \sqrt{[\Delta \cos(2\phi) \pm 2P(V_N + V_C)]^2 + [\Delta \sin(2\phi)]^2}, \quad (2.64)$$

e o ângulo de mistura na matéria está dado por

$$\tan[2\phi(P)] = \frac{\mp 2P(V_N + V_C) \sin(2\phi)}{\Delta \pm 2P(V_N + V_C) \cos(2\phi)}. \quad (2.65)$$

Como se vê da equação (2.65), o ângulo de mistura na matéria para este caso depende do potencial de corrente neutra a despeito do caso anterior. Isto se deve a que um dos neutrinos não tem interação com a matéria, e portanto, o termo V_N não pode ser visto como uma simples fase comum nas funções de onda dos neutrinos.

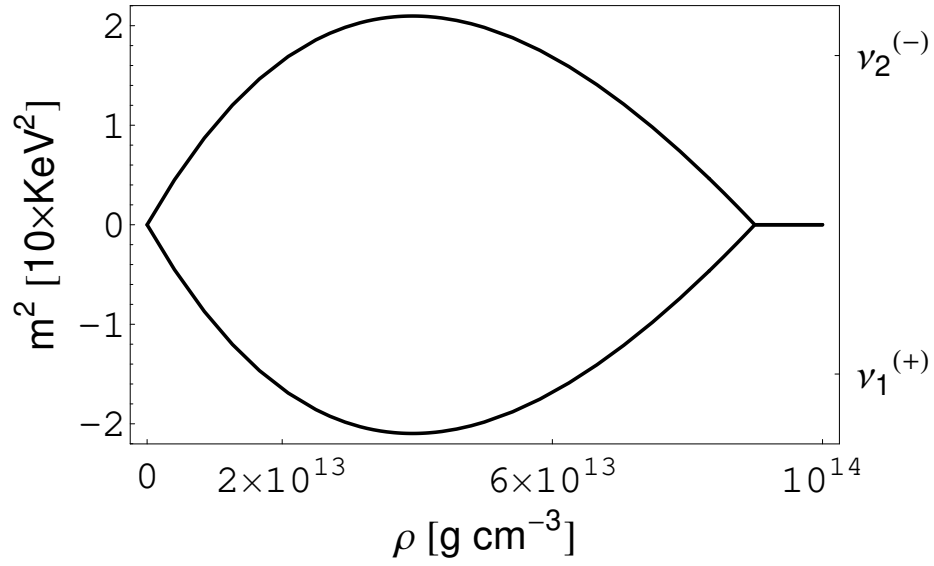


Figura 2.4: Comportamento das massas quadradas efetivas em função da densidade de matéria para o caso (1,1). A energia do neutrino é 10 MeV e os parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV.

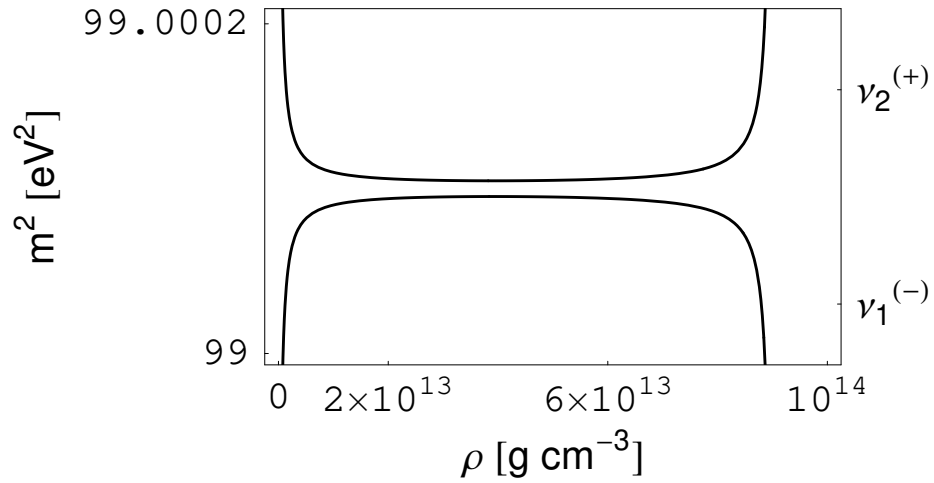


Figura 2.5: Comportamento das massas quadradas efetivas em função da densidade de matéria para o caso (1,1). A energia do neutrino é 10 MeV e os parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV.

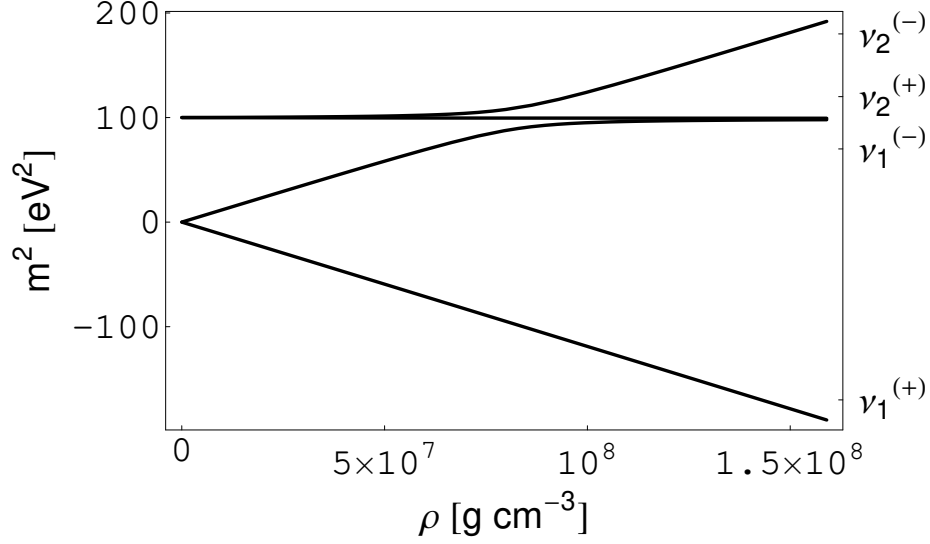


Figura 2.6: Comportamento das massas quadradas efetivas em função da densidade da matéria para o caso (1,1). A energia do neutrino é 10 MeV e os parâmetros do vácuo são $\sin\phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV. A região de ressonância para o caso das figuras 2.4 e 2.5 é mostrada.

2.4 Decaimento majoron de neutrinos na matéria

2.4.1 Generalidades

Para N gerações, a langrangiana de interação que descreve o acoplamento entre os campos dos neutrinos de Majorana na base de massa $\bar{\nu}_a^M(x)$ e o campo de um bóson pseudoescalar (por exemplo o majoron) ou um bóson escalar é

† **Pseudoescalar**

$$\begin{aligned} L_I(x) &= \frac{i}{2}\chi(x) \sum_{a,b=1}^N \bar{\nu}_a^M(x) G_{ab,p}^M \gamma_5 \nu_b^M(x) \\ &= -\chi(x) \sum_{a,b=1}^N \frac{G_{ab,p}^M}{2} \left[\Phi_a^{MT}(x) \sigma^2 \Phi_b^M(x) + \Phi_a^{M\dagger}(x) \sigma^2 \Phi_b^{M*}(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

† **Escalar**

$$\begin{aligned} L_I(x) &= \frac{\chi(x)}{2} \sum_{a,b=1}^N \bar{\nu}_a^M(x) G_{ab,s}^M \nu_b^M(x) \\ &= i\chi(x) \sum_{a,b=1}^N \frac{G_{ab,s}^M}{2} \left[\Phi_a^{MT}(x) \sigma^2 \Phi_b^M(x) - \Phi_a^{M\dagger}(x) \sigma^2 \Phi_b^{M*}(x) \right], \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde χ representa o campo pseudoescalar ou escalar.

Considera-se o decaimento $\nu_i^{(h_i)}(p_i) \rightarrow \nu_f^{(h_f)}(p_f) + \chi(q)$, onde os $\nu_i^{(h_i)}(p_i)$ e $\nu_f^{(h_f)}(p_f)$ são os neutrinos de Majorana estados próprios de energia ($i, f = 1, \dots, N$) que se propagam na matéria com quadrimomento $p_i = (E_i^{(h_i)}, \vec{p}_i)$, $p_f = (E_f^{(h_f)}, \vec{p}_f)$ e helicidades h_i, h_f , respectivamente. A

amplitude de transição está dada por

$$\begin{aligned} A &= \left\langle \nu_f^{(h_f)}(p_f); \chi(q) \left| - \int d^4x L_I(x) \right| \nu_i^{(h_i)}(p_i) \right\rangle \\ &= (2\pi)^4 \frac{\delta^4(p_i - p_f - q)}{\sqrt{(2\pi)^9 2E_M}} \tau_{fi}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde E_M é a energia do Escalar ou pseudoescalar e o τ_{fi} é o elemento de matriz

$$\tau_{fi} = (2\pi)^3 \sum_{a,b=1}^N \left\langle \nu_f^{(h_f)}(p_f) \left| \left[\Phi_a^{MT}(0) \sigma^2 \Phi_a^M(0) \pm \Phi_a^{M\dagger}(0) \sigma^2 \Phi_a^{M*}(0) \right] \right| \nu_i^{(h_i)}(p_i) \right\rangle, \quad (2.69)$$

o (+) corresponde ao bóson pseudoescalar e o (−) ao escalar.

Fazendo as contrações dos campos com os estados de neutrino se tem

$$\begin{aligned} \tau_{fi} &= \sum_{a,b=1}^N \frac{G_{ab}^M}{2} \left[\mp h_f \beta_{af}^{(h_f)*}(P_f) \alpha_{bi}^{(h_i)}(P_i) w^T(\vec{p}_f, -h_f) \sigma^2 w(\vec{p}_i, h_i) \right. \\ &\quad \pm h_f \beta_{bf}^{(h_f)*}(P_f) \alpha_{ai}^{(h_i)}(P_i) w^T(\vec{p}_i, h_i) \sigma^2 w(\vec{p}_f, -h_f) \\ &\quad - h_i \beta_{bi}^{(h_i)}(P_i) \alpha_{af}^{(h_f)*}(P_f) w^\dagger(\vec{p}_f, h_f) \sigma^2 w^*(\vec{p}_i, -h_i) \\ &\quad \left. + h_i \beta_{ai}^{(h_i)}(P_i) \alpha_{bf}^{(h_f)*}(P_f) w^\dagger(\vec{p}_i, -h_i) \sigma^2 w^*(\vec{p}_f, h_f) \right], \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde o sinal acima corresponde ao caso pseudoescalar e o outro ao caso escalar.

Usando a identidade

$$-h \sigma^2 w^*(\vec{p}, -h) = i w(\vec{p}, h), \quad (2.71)$$

em (2.70)

$$\begin{aligned} \tau_{fi} &= i \sum_{a,b=1}^N \frac{G_{ab}^M}{2} \left[\mp \beta_{af}^{(h_f)*}(P_f) \alpha_{bi}^{(h_i)}(P_i) \mp \beta_{bf}^{(h_f)*}(P_f) \alpha_{ai}^{(h_i)}(P_i) \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{af}^{(h_f)*}(P_f) \beta_{bi}^{(h_i)}(P_i) + \alpha_{bf}^{(h_f)*}(P_f) \beta_{ai}^{(h_i)}(P_i) \right] w^\dagger(\vec{p}_f, h_f) w(\vec{p}_i, h_i), \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde o (−) e o (+) correspondem ao campo pseudoescalar e ao campo escalar, respectivamente. Os elementos de matriz τ_{fi} podem ser escritos como

$$\tau_{fi} = i g_{eff}(P_i, P_f) w^\dagger(\vec{p}_f, h_f) w(\vec{p}_i, h_i), \quad (2.73)$$

onde o acoplamento efetivo $g_{eff}(P_i, P_f)$ se define como

$$\begin{aligned} g_{eff}(P_i, P_f) &= \sum_{a,b=1}^N \frac{G_{ab,p}^M}{2} \left[-\beta_{af}^{(h_f)*}(P_f) \alpha_{bi}^{(h_i)}(P_i) - \beta_{bf}^{(h_f)*}(P_f) \alpha_{ai}^{(h_i)}(P_i) \right. \\ &\quad \left. \pm \alpha_{af}^{(h_f)*}(P_f) \beta_{bi}^{(h_i)}(P_i) \pm \alpha_{bf}^{(h_f)*}(P_f) \beta_{ai}^{(h_i)}(P_i) \right], \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde o (+) e o (−) correspondem ao campo pseudoescalar e ao campo escalar, respectivamente. A taxa de decaimento é dada por

$$\begin{aligned} d\Gamma &= (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f - q) \frac{d\vec{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{q}_f}{(2\pi)^3 2E_M} |\tau_{fi}|^2 \\ &= \frac{|g_{eff}(P_i, P_f)|^2}{8\pi} \frac{P_f}{P_i} (1 + h_i h_f \cos \theta) dP_f, \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{p}_i$ e $\vec{p}_f$. Da cinemática ($p_i^2 + p_f^2 - 2p_i^\mu p_{f\mu} = q^2$)

$$\cos \theta = \frac{2E_i^{(h_i)} E_f^{(h_f)} - m_i^{(h_i)2}(P_i) - m_f^{(h_f)2}(P_f)}{2P_i P_f}. \quad (2.76)$$

Os valores extremos do espectro de energia podem ser calculados aproveitando que $-1 \leq \cos \theta \leq 1$. Substituindo $\cos \theta = \pm 1$ e $P_f^2 = E_f^2 - m_f^2$ em (2.76) se tem

$$m_i^2 E_f^2 - E_i(m_i^2 + m_f^2)E_f + P_i^2 m_f^2 + \frac{(m_i^2 + m_f^2)^2}{4} = 0. \quad (2.77)$$

Resolvendo esta equação para E_f se acha que os valores extremos do espectro de energia são

$$E_{fmin}^{(h_f)} = \left[\frac{E_i^{(h_i)} + P_i}{2} \right] \frac{m_f^{(h_f)2}(P_{fmin})}{m_i^{(h_i)2}(P_i)} + \left[\frac{E_i^{(h_i)} - P_i}{2} \right], \quad (2.78)$$

$$E_{fmax}^{(h_f)} = \left[\frac{E_i^{(h_i)} - P_i}{2} \right] \frac{m_f^{(h_f)2}(P_{fmax})}{m_i^{(h_i)2}(P_i)} + \left[\frac{E_i^{(h_i)} + P_i}{2} \right]. \quad (2.79)$$

Devido a que o neutrino inicial é relativístico, o neutrino final é também relativístico na parte superior do espectro de energia e P_{fmax} pode ser aproximado a P_i . Para demonstrar isso se usa a (2.41) e (2.79)

$$\begin{aligned} E_{fmax}^{(h_f)} &\cong P_i + \frac{m_i^{(h_i)2}(P_i)}{4P_i} + \frac{m_f^{(h_f)2}(P_{fmax})}{4P_i} \\ &\approx P_i + \frac{m_i^{(h_i)2}(P_i)}{2P_i}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

De (2.80) podemos concluir que $P_{fmax} = P_i$ na aproximação relativística.

Na parte inferior do espectro de energia o neutrino final pode ser não relativístico, e portanto, em geral, de (2.41) e (2.78) tem-se que

$$E_{fmin}^{(h_f)} \cong \frac{m_f^{(h_f)2}(P_{fmin})}{m_i^{(h_i)2}(P_i)} P_i + \frac{m_f^{(h_f)2}(P_{fmin}) + m_i^{(h_i)2}(P_i)}{4P_i}. \quad (2.81)$$

No vácuo, se a razão m_f/m_i não é tão pequena, o neutrino final sempre é relativístico já que (2.81) fica

$$E_{fmin}^{(h_f)} = \frac{m_f^{(h_f)2}(P_{fmin})}{m_i^{(h_i)2}(P_i)} P_i + \frac{m_f^{(h_f)2}(P_{fmin})}{2 \frac{m_f^{(h_f)2}(P_{fmin})}{m_i^{(h_i)2}(P_i)} P_i}, \quad (2.82)$$

o que implica que

$$P_{fmin} = \frac{m_f^{(h_f)2}(P_{fmin})}{m_i^{(h_i)2}(P_i)} P_i. \quad (2.83)$$

Num meio muito denso, tal como o núcleo de uma supernova, a massa efetiva quadrada do neutrino inicial pode ser escrita como $m_i^{(h_i)2}(P_i) \approx 2P_i V_i^{(h_i)}$ (para o caso de duas gerações os potenciais $V_i^{(h_i)}$ são definidos na tabela 2.1) e portanto, (2.81) fica

$$E_{fmin}^{(h_f)} \cong \frac{m_f^{(h_f)2}(P_{fmin})}{2V_i^{(h_i)}} + \frac{V_i^{(h_i)}}{2}. \quad (2.84)$$

Massa	$V_i^{(h_i)}$
$m_1^{(+)^2}$	$-V_N - V_C$
$m_1^{(-)^2}$	V_N
$m_2^{(+)^2}$	$-V_N$
$m_2^{(-)^2}$	$V_N + V_C$

Tabela 2.1: Potenciais $V_i^{(h_i)}$ para o caso de duas gerações de neutrinos ativos num meio muito denso.

2.4.2 Decaimentos que não conservam a helicidade

Por simplicidade, considera-se o caso de duas gerações de neutrinos de Majorana. As constantes de acoplamento $g_{eff}(P_i, P_f)$ se calculam usando (2.74). Em ordem mais baixa da aproximação relativística $\beta_{aj}^{(-)}(P)$ e $\alpha_{aj}^{(+)}(P)$ são desprezíveis, como se pode ver de (2.42) e (2.43). Como um exemplo, calcula-se a constante de acoplamento para o decaimento $\nu_2^{(-)} \rightarrow \nu_2^{(+)} + \chi$ para o caso pseudoescalar

$$\begin{aligned}
g_{eff}(P_i, P_f) &= G_{11}^M \left[-\beta_{12}^{(+)*}(P_f) \alpha_{12}^{(-)}(P_i) + \alpha_{12}^{(+)}(P_f) \beta_{12}^{(-)*}(P_i) \right] \\
&+ G_{22}^M \left[-\beta_{22}^{(+)*}(P_f) \alpha_{22}^{(-)}(P_i) + \alpha_{22}^{(+)}(P_f) \beta_{22}^{(-)*}(P_i) \right] \\
&+ G_{12}^M \left[-\beta_{12}^{(+)*}(P_f) \alpha_{22}^{(-)}(P_i) - \beta_{22}^{(+)*}(P_f) \alpha_{12}^{(-)}(P_i) \right. \\
&\quad \left. + \alpha_{12}^{(+)}(P_f) \beta_{22}^{(-)*}(P_i) + \alpha_{22}^{(+)}(P_f) \beta_{12}^{(-)*}(P_i) \right] \\
&\approx -G_{11}^M \beta_{12}^{(+)*}(P_f) \alpha_{12}^{(-)}(P_i) - G_{22}^M \beta_{22}^{(+)*}(P_f) \alpha_{22}^{(-)}(P_i) \\
&- G_{12}^M \left[\beta_{12}^{(+)*}(P_f) \alpha_{22}^{(-)}(P_i) + \beta_{22}^{(+)*}(P_f) \alpha_{12}^{(-)}(P_i) \right].
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Agora, substituindo os valores de $\alpha_{i2}^{(-)}(P)$ e $\beta_{i2}^{(+)*}(P)$, que são obtidos da equação (2.55), na equação (2.85), finalmente $g_{eff}(P_i, P_f)$ fica

$$\begin{aligned}
g_{eff}(P_i, P_f) &= -G_{11}^M \sin[\phi^{(+)}(P_f)] \sin[\phi^{(-)}(P_i)] - G_{22}^M \cos[\phi^{(+)}(P_f)] \cos[\phi^{(-)}(P_i)] e^{-2i\delta} \\
&- G_{12}^M \left[\sin[\phi^{(+)}(P_f)] \cos[\phi^{(-)}(P_i)] + \cos[\phi^{(+)}(P_f)] \sin[\phi^{(-)}(P_i)] \right] e^{-i\delta},
\end{aligned} \tag{2.86}$$

as outras constantes de acoplamento são obtidas de uma maneira similar. Pode-se mostrar facilmente da equação (2.74) que a constante de acoplamento para o caso escalar tem a mesma expressão.

Para os decaimentos que não conservam helicidade é suficiente avaliar a taxa de decaimento na aproximação relativística, ver [18]. Para achar esta taxa na aproximação relativística se usa (2.75), (2.76) e o fato que $h_i h_f = -1$

$$\frac{d\Gamma}{dP_f} = \frac{|g_{eff}|^2}{8\pi} \frac{P_f}{P_i} \frac{\left[2P_i P_f - 2E_i^{(h_i)} E_f^{(h_f)} + m_i^{(h_i)^2}(P_i) + m_f^{(h_f)^2}(P_f) \right]}{2P_i P_f}. \tag{2.87}$$

O termo $2E_i^{(h_i)} E_f^{(h_f)}$ na aproximação relativística é

$$2E_i^{(h_i)} E_f^{(h_f)} = 2P_i P_f + \frac{P_i}{P_f} m_f^2(P_f) + \frac{P_f}{P_i} m_i^2(P_i) + \frac{1}{2} \frac{m_i^{(h_i)2}(P_i)}{P_i} \frac{m_f^{(h_f)2}(P_f)}{P_f}. \quad (2.88)$$

Substituindo (2.88) na equação (2.87) se tem

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dP_f} = \frac{|g_{eff}|^2}{16\pi} \left\{ \frac{1}{P_i^2} \left[m_i^{(h_i)2}(P_i) + m_f^{(h_f)2}(P_f) - \frac{P_f}{P_i} m_i^{(h_i)2} - \frac{P_i}{P_f} m_f^{(h_f)2} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{m_i^{(h_i)2}}{P_i^2} \frac{m_f^{(h_f)2}}{P_i P_f} \right\}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

O último termo, $\propto \left(\frac{m}{P}\right)^4$, é desprezível em comparação com os outros termos que são $\propto \left(\frac{m}{P}\right)^2$, e, portanto, na aproximação relativística se tem

$$\frac{d\Gamma}{dP_f} = \frac{|g_{eff}|^2}{8\pi} \left[\frac{P_i - P_f}{P_i^2} \right] \left[\frac{m_i^{(h_i)2}(P_i)}{2P_i} - \frac{m_f^{(h_f)2}(P_f)}{2P_f} \right]. \quad (2.90)$$

Esta equação é geral para o cálculo da taxa de decaimento diferencial de neutrinos na matéria na aproximação relativística. A taxa dos decaimentos que mudam a helicidade são suprimidos pela conservação do momento angular expressado pelo termo $1 - \cos\theta$ na equação (2.75) com $h_i h_f = -1$, mas na matéria esta supressão é menor que no vácuo porque as massas efetivas quadradas são incrementadas pelos efeitos da matéria. Portanto, estes decaimentos na matéria são muito mais rápidos que no vácuo.

Para o caso particular de um meio muito denso, como o núcleo de uma supernova, onde $PV \gg m_i^2$, as massas na matéria podem ser escritas como $m_i^{(h_i)2}(P_i) = 2P_i V_i^{(h_i)}$ e $m_f^{(h_f)2}(P_f) = 2P_f V_f^{(h_f)}$, como pode ser deduzido da equação (2.56) (para o caso de duas gerações os potenciais $V_i^{(h_i)}$ são definidos na tabela 2.1). Com isto, e usando (2.59), vemos que

$$\phi^{(+)}(p) \approx -\phi \quad \phi^{(-)}(p) \approx \frac{\pi}{2} - \phi. \quad (2.91)$$

Isso implica que o acoplamento efetivo pode ser considerado aproximadamente constante e a taxa de decaimento diferencial pode ser expresso por

$$\frac{d\Gamma}{dP_f} = \frac{|g_{eff}|^2}{8\pi} \frac{(P_i - P_f)(V_i^{(h_i)} - V_f^{(h_i)})}{P_i^2}. \quad (2.92)$$

Integrando esta equação entre $0 \approx P_{fmin} \ll P_i$ e $P_{fmax} \approx P_i$, encontramos a taxa de decaimento

$$\Gamma \approx \frac{|g_{eff}|^2}{16\pi} (V_i^{(h_i)} - V_f^{(h_i)}), \quad (2.93)$$

que concorda com [40] e com o resultado relativístico para o caso de duas gerações em [27].

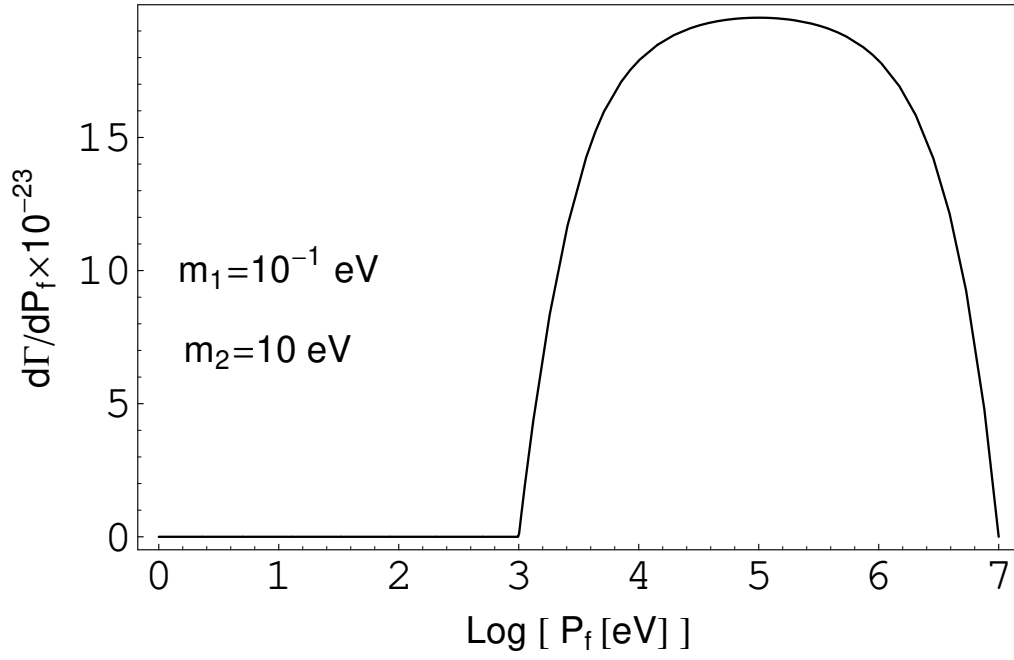


Figura 2.7: Taxa diferencial de decaimento para $\nu_2^{(+)} \rightarrow \nu_1^{(-)} + \chi$, com $P_i = 10 \text{ MeV}$. Os valores dos parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$ e $G_{12}^M = 10^{-4}$. O tempo de decaimento é $\tau \cong 0.66 \text{ s}$.

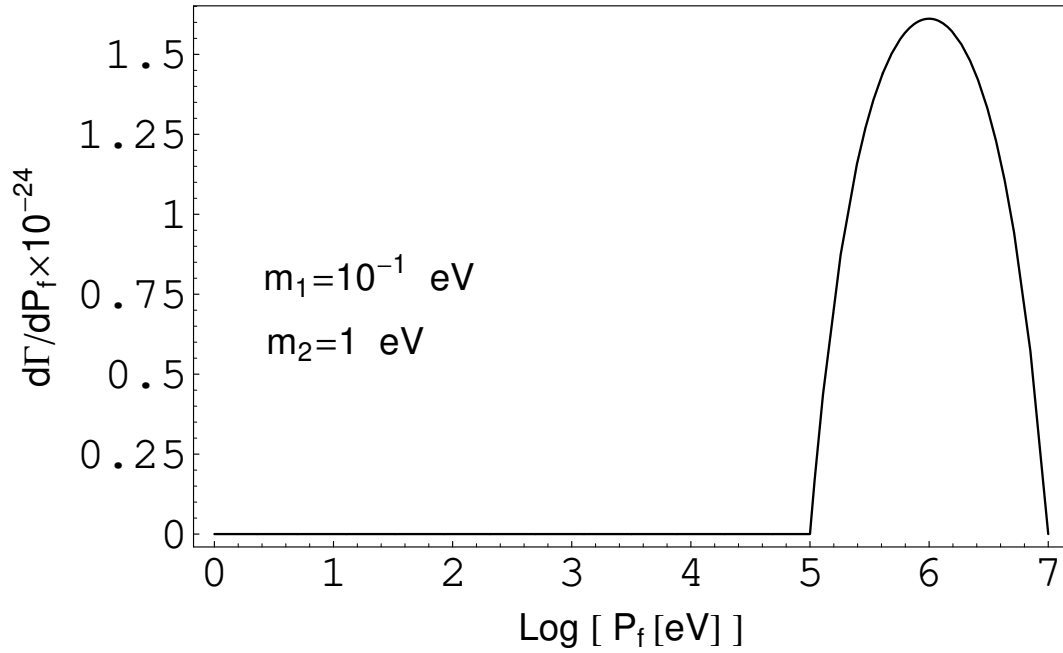


Figura 2.8: Taxa diferencial de decaimento para $\nu_2^{(+)} \rightarrow \nu_1^{(-)} + \chi$, com $P_i = 10 \text{ MeV}$. Os valores dos parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$ e $G_{12}^M = 10^{-4}$. O tempo de decaimento é $\tau \cong 73 \text{ s}$.

Todas as expressões nesta seção são dadas na base de massa dos neutrinos na matéria. Para obter expressões equivalentes na base de interação é útil ter uma relação explícita entre os acoplamentos na base de massa e de interação. Estes estão relacionados por ($G^W = UG^M U^\dagger$),

$$\begin{bmatrix} G_{ee} & G_{e\mu} \\ G_{e\mu} & G_{\mu\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^M \cos^2 \phi + G_{22}^M \sin^2 \phi e^{-2i\delta} & \frac{1}{2}(-G_{11}^M + G_{22}^M e^{-2i\delta}) \sin(2\phi) \\ +G_{12}^M \sin(2\phi) e^{-i\delta} & +G_{12}^M \cos(2\phi) e^{-i\delta} \\ \frac{1}{2}(-G_{11}^M + G_{22}^M e^{-2i\delta}) \sin(2\phi) & G_{11}^M \sin^2 \phi + G_{22}^M \cos^2 \phi e^{-2i\delta} \\ +G_{12}^M \cos(2\phi) e^{-i\delta} & -G_{12}^M \sin(2\phi) e^{-i\delta} \end{bmatrix}. \quad (2.94)$$

De (2.90) o cálculo da taxa de decaimento no vácuo é direto. Para achar uma expressão analítica usa-se que $m_i^{(\pm)}(P_i) = m_i^2$ e $m_f^{(\pm)}(P_f) = m_f^2$. Agora, se $m_2 > m_1$ apenas os decaimentos $\nu_2(p_i, \pm) \rightarrow \nu_1(p_f, \mp) + \chi(q)$ são permitidos. Como no vácuo, $\phi^{(\pm)}(P) = 0$ o acoplamento efetivo g_{eff} é uma constante igual a G_{12}^M , ver equação (2.74). O limite de integração mais baixo é $P_{fmin} = (m_1^2/m_2^2)P_i$ e a taxa de decaimento é

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{G_{12}^{M^2}}{8\pi} \int_{\frac{m_1^2}{m_2^2}P_i}^{P_i} \left[\frac{m_2^2}{2P_i^2} - \frac{m_1^2}{2P_i P_f} - \frac{P_f m_2^2}{2P_i^3} + \frac{m_1^2}{2P_i^2} \right] dP_f \\ &= \frac{G_{12}^{M^2} m_1 m_2}{16\pi P_i} \left[\frac{m_2}{2m_1} - \frac{m_1^3}{2m_2^3} - \frac{2m_1}{m_2} \ln \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Como uma verificação da validade da equação (2.95) se pode ver que esta concorda com os resultados obtidos nas equações (1.31) e (1.32), para o caso do decaimento dos neutrinos no vácuo calculado a partir do formalismo convencional.

Para dar alguns exemplos numéricos das taxas de decaimento, as equações (2.90) e (2.95) podem ser integradas para o caso de neutrinos na matéria e no vácuo, respectivamente. Fazendo isto com os seguintes parâmetros: $P_i = 10$ MeV, $\sin \phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV, $G_{11}^M = 10^{-4}$, $G_{22}^M = 10^{-2}$, $G_{12}^M = 10^{-4}$, $\rho = 10^{14}$ g/cm³, $Y_e = 0.3$ na matéria, e para o caso do vácuo se usa $\rho = 0$ g/cm³ e $Y_e = 0$. Os tempos de decaimento são $\tau \cong 6.3 \times 10^{-11}$ s para a matéria (ver [18]) e $\tau \cong 0.66$ s para o vácuo, ver figura 2.7. Vemos assim que a matéria pode induzir decaimentos rápidos que podem, por exemplo, no caso dos neutrinos vindo de uma supernova mudar fortemente a fenomenologia dada por oscilações.

As taxas diferenciais e os tempos de decaimento para $\nu_2^{(+)} \rightarrow \nu_1^{(-)} + \chi$ para dois conjuntos de massas no vácuo são mostradas nas figuras 2.7 e 2.8. Estes resultados são facilmente entendidos da equação (2.90), já que a diferença de massa quadrada é maior na figura 2.7 que no caso da figura 2.8, e a que a taxa diferencial de decaimento é proporcional a esta diferença, o tempo de decaimento no primeiro caso é menor.

2.4.3 Decaimentos que conservam a helicidade

A taxa de decaimento diferencial nesse caso está dada por

$$\frac{d\Gamma}{dP_f} = \frac{|g_{eff}(P_i, P_f)|^2}{16\pi} \left[\frac{2P_i P_f + 2E_i^{(h)} E_f^{(h)} - m_i^{(h)2}(P_i) - m_f^{(h)2}(P_f)}{P_i^2} \right]. \quad (2.96)$$

Por simplicidade, será considerado um caso particular $\nu_2^{(-)}(p_i) \rightarrow \nu_1^{(-)}(p_f) + \chi(q)$. Na aproximação relativística de mais baixa ordem o acoplamento efetivo depende de

$$g_{eff}(P_i, P_f) = G_{11}^M A(P_i, P_f) + G_{22} B(P_i, P_f) + G_{12} C(P_i, P_f), \quad (2.97)$$

$$A(P_i, P_f) = \cos[\phi^{(-)}(P_f)] \sin[\phi^{(-)}(P_i)] \left[\pm \frac{m_1}{2P_i} - \frac{m_1}{2P_f} \right], \quad (2.98)$$

$$B(P_i, P_f) = \sin[\phi^{(-)}(P_f)] \cos[\phi^{(-)}(P_i)] \left[\frac{m_2}{2P_i} \mp \frac{m_2}{2P_f} \right], \quad (2.99)$$

$$C(P_i, P_f) = \left\{ \left[\pm \frac{m_2}{2P_i} - \frac{m_1}{2P_f} \right] \cos[\phi^{(-)}(P_f)] \cos[\phi^{(-)}(P_i)] e^{-i\delta} + \left[\frac{m_2}{2P_f} \mp \frac{m_1}{2P_i} \right] \sin[\phi^{(-)}(P_f)] \sin[\phi^{(-)}(P_i)] e^{i\delta} \right\}, \quad (2.100)$$

onde o sinal de cima e de baixo correspondem ao acoplamento pseudoescalar e escalar, respectivamente. Para o caso pseudoescalar, esta constante pode ser ainda mais simplificada, já que nesta aproximação $P_f \approx P_i$, portanto, a equação (2.97) fica

$$g_{eff}(P_i, P_f) = G_{12}^M \left\{ \left[\frac{m_2}{2P_i} - \frac{m_1}{2P_f} \right] \cos[\phi^{(-)}(P_f)] \cos[\phi^{(-)}(P_i)] e^{-i\delta} + \left[\frac{m_2}{2P_f} - \frac{m_1}{2P_i} \right] \sin[\phi^{(-)}(P_f)] \sin[\phi^{(-)}(P_i)] e^{i\delta} \right\}, \quad (2.101)$$

onde vemos que o acoplamento só depende da constante G_{12}^M .

O fato de que o acoplamento efetivo na aproximação relativística é suprimida para valores grandes de P_f , e é divergente para valores pequenos de P_f , indica que o neutrino final pode ser não relativístico na parte dominante do espectro de energia onde as aproximações feitas nas equações (2.97) e (2.101) já não são válidas. Neste caso, é preciso usar a equação exata (2.74).

Das equações (2.97),(2.98),(2.99),(2.100) pode se ver que a constante de acoplamento depende explicitamente do momento, e portanto, não é uma constante para o caso de um meio muito denso, como no caso anterior, ver equação (2.92).

Com um exemplo numérico se pode calcular o tempo de decaimento de $\nu_2^{(-)} \rightarrow \nu_1^{(-)} + \chi$ para um neutrino inicial com momento $P_i = 10$ MeV num meio com densidade $\rho = 10^{14}$ g/cm³ e $Y_e = 0.3$. Os valores do vácuo são $\sin \phi = 0.1$, $m_1 = 0.1$ eV, $m_2 = 10$ eV, $G_{11}^M = 10^{-4}$, $G_{22}^M = 10^{-2}$ e $G_{12}^M = 10^{-4}$. Para estes valores o tempo de decaimento é $\tau \cong 2.5 \times 10^{-4}$ s. Este tempo é obtido integrando a equação (2.96) usando o valor exato da constante de acoplamento dado pela equação (2.74).

No vácuo se a razão m_f/m_i não for tão pequena, $P_{fmin} = \frac{m_f^2}{m_i^2} P_i \approx P_i$, e portanto, o neutrino é sempre relativístico. Os ângulos de mistura no vácuo $\phi^{(\pm)} = 0$. Neste caso, diferentemente do decaimento com troca a helicidade, o acoplamento efetivo não chega a ser uma constante e toma o valor

$$g_{eff}^{vac}(P_i, P_f) = G_{12}^M \left[\pm \frac{m_2}{2P_i} - \frac{m_1}{2P_f} \right], \quad (2.102)$$

onde os sinais (+) e (−) são para os casos de acoplamento pseudoescalar e escalar, respectivamente.

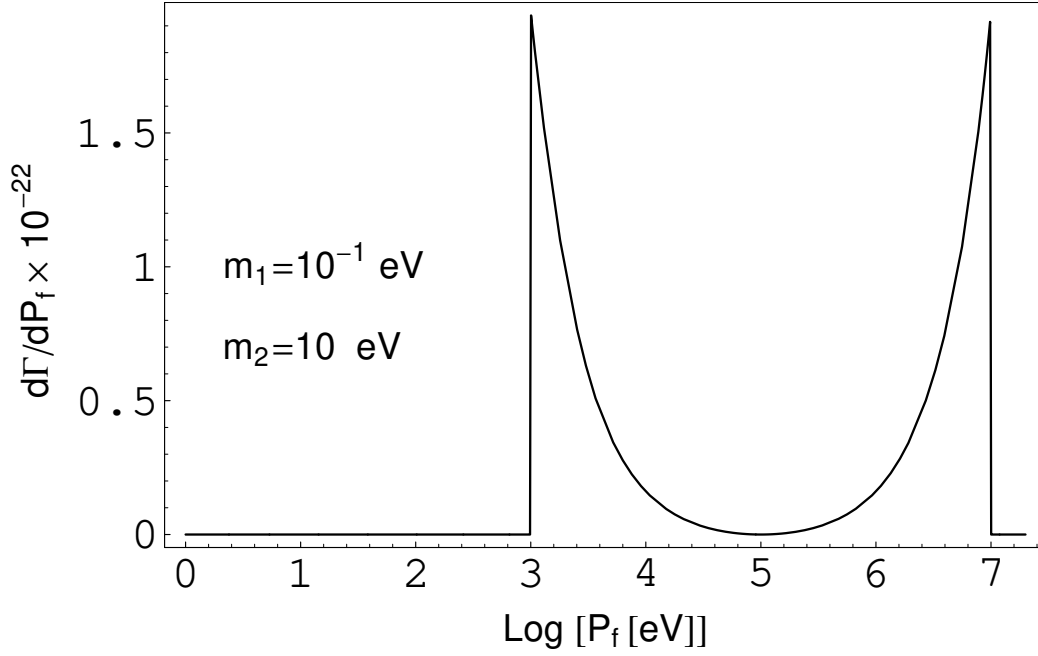


Figura 2.9: Taxa diferencial de decaimento para $\nu_2^{(-)} \rightarrow \nu_1^{(-)} + \chi$ no vácuo para um acoplamento pseudoescalar. O momento do neutrino é $P_i = 10$ MeV e os valores dos parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$ e $G_{12}^M = 10^{-4}$. O tempo de decaimento é $\tau \cong 0.69$ s.

Integrando a equação (2.96) se tem que a taxa de decaimento é

$$\Gamma = \frac{G_{12}^{M2} m_1 m_2}{16\pi P_i} \left[\frac{m_2}{2m_1} \mp 2 \pm \frac{2m_1^2}{m_2^2} - \frac{m_1^3}{2m_2^3} + \frac{2m_1}{m_2} \ln \left[\frac{m_2}{m_1} \right] \right], \quad (2.103)$$

onde o sinal da possibilidade de cima correspondem ao caso de acoplamento pseudoescalar e o sinal de baixo ao acoplamento escalar. Isto concorda com a equação (1.31), deduzida pelo formalismo usual para o vácuo.

Como um exemplo numérico, integramos a taxa de decaimento diferencial para dois conjuntos diferentes de massas no vácuo. Os tempos de decaimento podem ser vistos nas figuras 2.9 e 2.10. Comparando o tempo de decaimento da figura 2.9 no vácuo com o obtido para os mesmos valores para o caso da matéria, pode-se ver que o efeito induzido pela matéria produz decaimentos mais rápidos, e isto se deve ao incremento no espaço de fase. Mas, comparando os decrementos dos tempos devidos aos efeitos da matéria dos decaimentos que mudam a helicidade $\tau_{\text{vácuo}} - \tau_{\text{matéria}} = 0.66 - 6.3 \times 10^{-11}$ s e os que conservam a helicidade $\tau_{\text{vácuo}} - \tau_{\text{matéria}} = 0.69 - 2.5 \times 10^{-4}$ s, se vê que no primeiro caso estes são maiores, e portanto, pode-se concluir que os decaimentos que conservam a helicidade são relativamente suprimidos com respeito aos que não conservam a helicidade.

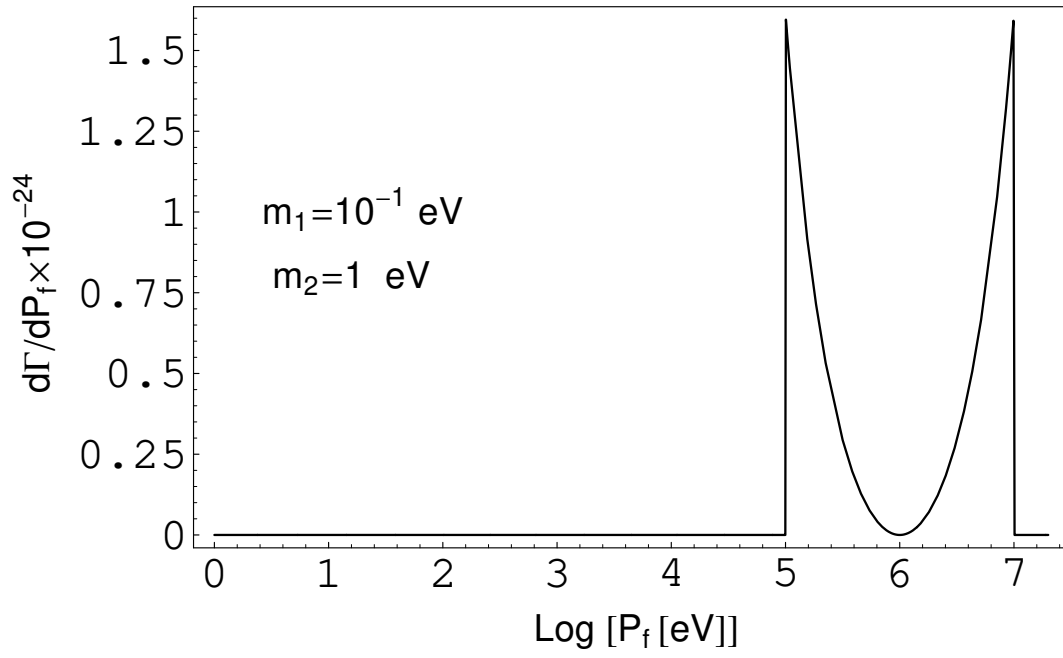


Figura 2.10: Taxa diferencial de decaimento para $\nu_2^{(-)} \rightarrow \nu_1^{(-)} + \chi$ no vácuo para um acoplamento pseudoescalar. O momento do neutrino é $P_i = 10 \text{ MeV}$ e os valores dos parâmetros do vácuo são $\sin \phi = 0.1$ e $G_{12}^M = 10^{-4}$. O tempo de decaimento é $\tau \cong 95 \text{ s}$.

Oscilações e decaimentos de neutrinos relíquias de supernovas

3.1 Introdução

Atualmente existem dois resultados experimentais sobre neutrinos de supernovas (SN). O primeiro é a bem conhecida observação de neutrinos da supernova 1987A [41, 42], e o segundo é o recente limite superior sobre o fluxo de SRN, o qual é a acumulação de neutrinos de todas as supernovas passadas observadas por SK [16]. Quando neutrinos da supernova 1987A foram detectados, uma nova era de astrofísica de neutrinos começou. Estas observações confirmaram que o colapso do núcleo de uma supernova emite a maior parte de sua energia de ligação ($\approx 10^{53}$ erg) na forma de neutrinos, que a duração da emissão de neutrinos é de aproximadamente 10 s e que a energia média dos neutrinos (pelo menos do $\bar{\nu}_e$) é aproximadamente 15 MeV.

Existem várias áreas da física que se beneficiarão grandemente de futuras observações de neutrinos de supernovas. Estas podem ser divididas em três grandes categorias. A primeira é o estudo das propriedades dos neutrinos, tais como massas, parâmetros de mistura, tempos de decaimentos, etc. A segunda é o estudo das propriedades das supernovas, em particular do sinal de neutrinos poderia ser possível determinar as luminosidades e as energias médias de todas as três componentes do fluxo de neutrinos: ν_e , $\bar{\nu}_e$ e ν_x . A última categoria é a localização de supernovas. Usando a distribuição angular dos produtos do sinal de neutrinos induzidos poderia ser possível achar a localização das supernovas [43].

Neste capítulo se calculará o fluxo de antineutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas que chegam à terra considerando simultaneamente as oscilações e os decaimentos dos neutrinos. Vários estudos sobre os fluxos de SRN e sua possível detecção levando em conta só oscilações tem sido feitos [44–49]. Estes efeitos também serão considerados aqui para apreciar as diferenças com o caso de neutrinos instáveis. Considera-se só decaimentos não radiativos no vácuo em dois corpos $\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi$ ($\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi$) [17], onde χ é uma partícula escalar (majoron) [22]. Também se considera que o fenômeno das oscilações de sabor e o decaimento não apresentam interferência.

A organização deste capítulo é a seguinte: na seção 3.2 e 3.3 se apresentam generalidades do colapso do núcleo de supernovas e de cosmologia básica, respectivamente. Na seção 3.4 o formalismo geral de oscilações de três sabores de neutrinos ativos no vácuo e na matéria é tratado. Expressões gerais para as probabilidades de transição são encontradas. Também são dados os valores atuais das diferenças de massa (Δm_{12}^2 e Δm_{23}^2), e dos ângulos de mistura (θ_{12} , θ_{23} , θ_{13}) de recentes experimentos [32]. As diferentes probabilidades de transição entre os auto-estados de

interação e os auto-estados de massa para neutrinos de supernovas são escritos explicitamente para as duas hierarquias de massas (hierarquia de massas normal (HN), $\Delta m_{23}^2 > 0$; e para a hierarquia de massas invertida (HI), $\Delta m_{23}^2 < 0$). Na seção 3.5 se calcula o fluxo por unidade de energia do neutrino $\bar{\nu}_e$ considerando só a oscilação de neutrinos para as duas hierarquias de massa. Na última seção, 3.7, é calculado o fluxo de SRN para o caso de oscilações e decaimentos não radiativos em dois corpos via um escalar, $\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi$. Encontra-se uma solução geral da equação de Boltzman para a função de densidade de número de neutrinos relíquias de supernovas por unidades de energia. Esta solução é implementada no software Mathematica para fazer o cálculo do fluxo dos neutrino $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas para dois casos diferentes. No primeiro, são tratados os decaimentos de neutrinos com massas quase degeneradas e hierarquia normal. No segundo, são considerados os decaimentos para neutrinos com hierarquia invertida e qualquer valor da massa m_3 . Os fluxos obtidos são comparados com os casos de neutrinos estáveis e de decaimento total. Para o caso de hierarquia normal e massas quase degeneradas é encontrado que o fluxo para o caso de neutrinos instáveis é maior que para o caso de neutrinos estáveis. A conclusão oposta é encontrada para o caso de hierarquia invertida.

3.2 Supernovas

A evolução das supernovas e sua subsequente explosão produzem a maior parte dos elementos pesados do universo. Os humanos devem sua própria existência a isto. As supernovas dão lugar a lampejos de luz intensíssimos que podem durar até varias semanas ou vários meses. Caracterizam-se por um rápido incremento de intensidade até alcançar um máximo, para depois decrescer em intensidade mais ou menos suave até desaparecer completamente.

Fundamentalmente as supernovas se originam de estrelas massivas que já não podem fusionar mais seu esgotado núcleo, e que não podem sustentarse pela pressão do gás elétrons degenerados, o que as leva a contrair-se repentinamente e gerar, no processo, uma forte emissão de energia. Também existe outro processo mais violento ainda, capaz de emitir radiação mais intensa. Este acontece quando uma anã branca companheira ainda ativa, adiciona massa suficiente à estrela superando o limite de Chandrasekhar e levando a uma fusão praticamente instantânea do núcleo gerando assim uma explosão que expulsa da estrela quase todo o material que a formava.

As supernovas podem se classificar de acordo com as linhas de absorção de diferentes tipos de elementos químicos que aparecem em seus espectros. Se seu espectro não contém a linha de Balmer do H é classificada como supernova de tipo I, do contrário, é classificada como supernova de tipo II. Estes grupos principais têm subdivisões de acordo com a presença de outras linhas na curva de luz. Esta divisão é a seguinte [50]:

- Tipo I: Sem linhas de Balmer do H
 - Tipo Ia: Linha de Si II a 615.0 nm
 - Tipo Ib: Linha de He I a 587.6 nm
 - Tipo Ic: Sem linhas de He
- Tipo II: Com linhas de Balmer do H
 - Tipo II-P: Decrescimento com achatamento
 - Tipo II-L: Decrescimento linear

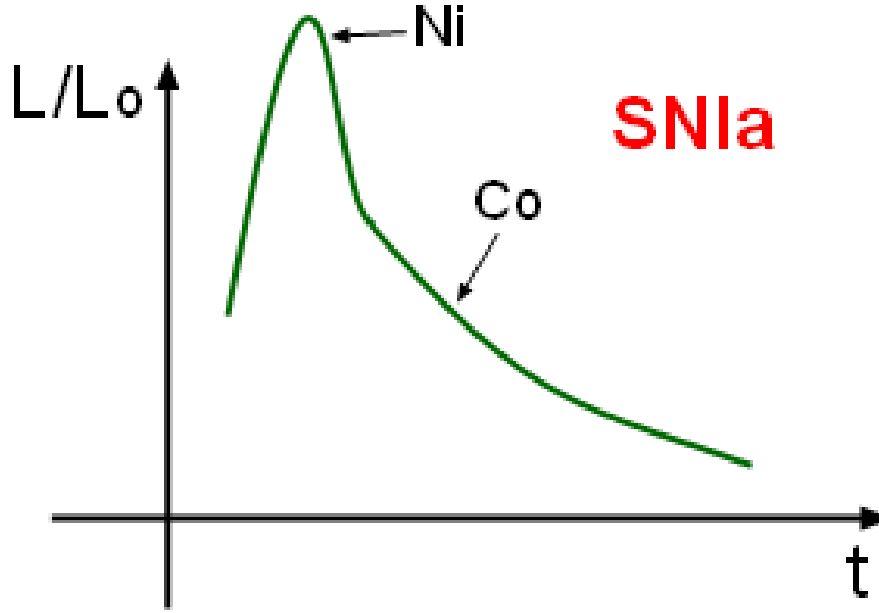


Figura 3.1: Curva de luz das supernovas de tipo Ia. Seu máximo de emissão é o mais alto de todos. Aprecia-se perfeitamente a fase de emissão do Ni diferenciada da do Co. Quanto mais rápido decresce a luz, menor é seu máximo.

3.2.1 Supernovas tipo Ia

As supernovas tipo Ia não têm a linha de He, mas apresentam uma linha de Si no espectro de emissão, veja, por exemplo, referência [51]. A teoria mais aceita com respeito a este tipo de supernovas considera que estas são o resultado do incremento de massa de uma anã branca de carbono-oxigênio devido a uma estrela companheira, geralmente uma gigante vermelha. Isto pode acontecer em sistemas binários muito próximos. Ambas estrelas têm aproximadamente a mesma idade e suas massas são semelhantes. Mas normalmente uma é mais massiva que a outra e isto faz que esta morra primeiro. Se a estrela tem uma massa entre $0.08M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$ ($M_{\odot}$ é a massa do sol), esta formará uma anã branca [52]. Devido a tudo isto, é muito comum que nas etapas finais dos sistemas binários se tenha uma anã branca orbitando junto a uma gigante vermelha agonizante e com suas capas exteriores muito expandidas.

As supernovas de tipo Ia possuem uma curva de luz característica, veja figura 3.1. Perto do momento de luminosidade máxima, o espectro contém linhas de elementos de massa intermédia que vão desde o O até o Ca (elementos das camadas externas da estrela). Meses depois da explosão, estes elementos são totalmente transparentes e a luz que domina é a que vêm de elementos mais pesados procedentes do núcleo. No máximo de emissão se concentra a luz emitida pelo ^{56}Ni . Este decai radiativamente em ^{56}Co também radiativo. A luminosidade termina com a conversão de todo o ^{56}Co em ^{56}Fe .

3.2.2 Supernovas tipo Ib e Ic

Os tipos Ib e Ic não possuem a linha do Si presente no tipo Ia e se acredita que correspondam a estrelas no limite de sua extinção (como as do tipo II), mas que perderam seu hidrogênio anteriormente, pelo que as linhas de hidrogênio não estão presentes em seus espectros. Conhecem-se várias

destas supernovas em sistemas binários e isto se deve ao fato da estrela companheira desprender gravitacionalmente o gás das camadas mais externas da outra estrela a qual perde sua cobertura sem necessidade de ser tão massiva. Em casos extremos não só escapa o hidrogênio senão também o Hélio deixando desnudo o núcleo de carbono, este é o caso das supernovas Ic. Estas supernovas têm um mecanismo de explosão essencialmente idêntico ao das supernovas de colapso gravitacional típicas, as tipo II.

3.2.3 Supernovas tipo II

As supernovas de tipo II são o resultado da impossibilidade de produzir energia uma vez que a estrela alcance o equilíbrio estatístico com um núcleo denso de ferro e níquel. Estes elementos já não podem fundir-se para fornecer mais energia e portanto esse núcleo estelar inerte deixa de se autosustentar e às camadas que estão por cima dele. A desestabilização definitiva da estrela ocorre quando a massa do núcleo de ferro chega ao limite de Chandrasekhar, isto normalmente toma só alguns dias. É nesse momento, quando vence a pressão que é gerada pelos elétrons degenerados do núcleo que este sucumbe. Com o colapso do núcleo este chega a esquentar-se entorno dos 3.000 milhões de graus, momento em que a estrela emite fótons de tão alta energia que até conseguem fragmentar os átomos de ferro em partículas alfa e nêutrons num processo chamado fotodesintegração. Estas partículas são, a sua vez, destruídas por outros fótons gerando-se assim uma avalanche de nêutrons no centro da estrela.



Estas reações são endotérmicas e portanto não ajudam a manter o núcleo estável e este continua colapsando-se, emitindo mais e mais nêutrons. De fato, provocam um esfriamento do mesmo, o que se traduz numa menor pressão e, portanto, numa aceleração do processo. Os próprios átomos de ferro captam parte do imenso fluxo de nêutrons transformando-se em elementos mais pesados num processo chamado captura de nêutrons.

O núcleo colapsa tão rapidamente que deixa um espaço de baixa densidade, quase vácuo entre ele e o resto de material estelar. O manto, por sua parte, começa a cair sobre o núcleo freando-se pela imensa quantidade de fótons de altíssima frequência que mantém o colapso fotodesintegrando as camadas mais interiores da cobertura estelar. Esta destruição de núcleos não só transmite momento senão que também produz um fluxo de nêutrons e prótons que serão capturados pelas camadas seguintes para formar elementos mais pesados. Simultaneamente, as densidades altíssimas que se alcançam na sopa de íons pesados e nêutrons em que se converteu o núcleo super compacto da estrela, permitem uma nova reação. Os elétrons do núcleo estelar começam a cair sobre os núcleos atômicos enlaçando-se com os prótons para formar nêutrons em um processo chamado captura de elétrons pelo que, pouco a pouco, o núcleo vai se convertendo em uma massa de nêutrons muito densa. Os processos de fotodesintegração e de captura de elétrons aceleram ainda mais o colapso da estrela, já que, agora também a pressão de degeneração perde força rapidamente:



Mas a captura de elétrons não só resulta na produção de nêutrons senão também na de neutrinos. A captura se produz a tal razão que gera um fluxo explosivo de neutrinos que é arrastado pelo colapso, até que se tornem um gás quantidade crescente os faz degenerar e bloquear assim a

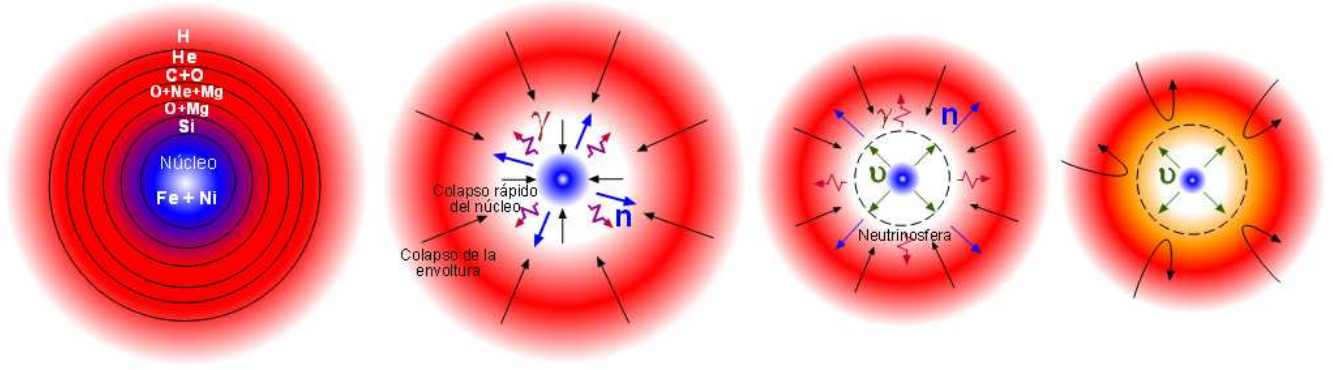


Figura 3.2: A primeira fase da supernova é um colapso rápido do núcleo incapaz de manter-se. Isto leva a uma forte emissão de fótons e nêutrons que são absorvidos pelas capas interiores freando assim seu colapso. Simultaneamente uma onda de choque de neutrinos é gerada durante a neutronização do núcleo compacto. Finalmente, a neutrinosfera se choca contra a cobertura de estrela, transmitindo seu momento, expulsando as camadas exteriores, e produzindo a explosão da supernova.

captura de novos elétrons. Por breves instantes, os elétrons não podem continuar combinando-se com os prótons já que não há espaço de fase para os neutrinos que daí resultariam, dado que estes estão já degenerados. Mas isto se resolve rapidamente já que, se produz um escape de neutrinos do núcleo, levando grande quantidade de energia, o que reativa as capturas e realimenta aos frentes de onda de neutrinos que se expandem com grande rapidez. A emissão de neutrinos durará aproximadamente uns 10 segundos. As camadas externas de material que caem sobre o núcleo se encontram com a frente de choque dos neutrinos, também chamada neutrinosfera. Através dum processo que não sem entende por completo ainda, parte da energia liberada na explosão de neutrinos é transferida às capas externas da estrela. Acredita-se que, como se vê na fórmula (3.3), os neutrinos são capazes de gerar fótons. Quando a onda de choque alcança a superfície da estrela varias horas mais tarde, ocorre um incremento massivo em sua luminosidade. Se a massa do núcleo que colapsa é o suficientemente pequena, entre 1,5 e 2,5 massas solares, os próprios nêutrons podem frear o colapso, senão seguirá contraíndo-se até concentrar-se toda a matéria numa singularidade, formando assim um buraco negro. Esta fronteira entre estrela de nêutrons e buraco negro não está bem definida devido à falta de entendimento dos processos de colapso de uma supernova.

$$\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma. \quad (3.3)$$

No caso das supernovas que geram estrelas de nêutrons, as camadas externas provavelmente não chegam a se chocar com a superfície do núcleo compacto. É possível que nem o alcancem e antes tenham sido varridas pelo fluxo de neutrinos. Estrelas que terminam em buracos negros, passam inicialmente pelo estágio de estrelas de neutrões. entre tanto a cobertura possui tanta massa e força que grande parte desta cai sobre a estrela de nêutrons fazendo que esta supere a massa máxima de umas 2,5 massas solares, limite que também não se conhece com certeza. Todos os processos anteriores podem ser vistos na figura 3.2.

As supernovas de tipo II podem dividir-se nos subtipos II-P e II-L, conforme figura 3.3. Os tipos II-P têm um achatamento em sua curva de luz perto do máximo de intensidade enquanto os tipos II-L possuem um decrescimo linear em sua curva de luz. Acredita-se que a causa disto se deva às diferenças na envoltória das estrelas. As supernovas de tipo II-P possuem uma grande envoltória de H que não deixa sair a energia liberada em forma de raios gama e a liberam em frequências mais baixas, enquanto o tipo II-L, se acredita, possuem envoltórias muito menores,

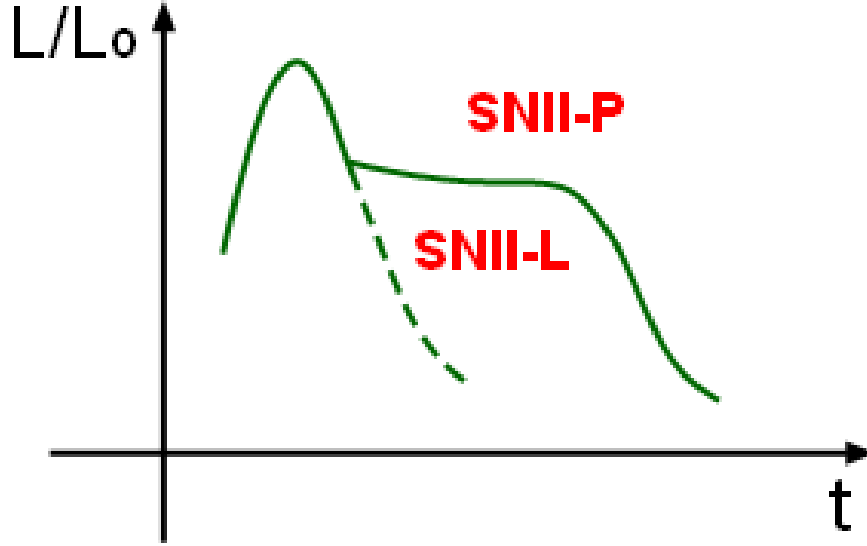


Figura 3.3: Curvas de luz das SNII-P e SNII-L.

convertendo menor quantidade de energia de raios gamma em luz visível.

As massas das estrelas que dão lugar a supernovas tipo II estão entre aproximadamente $8M_{\odot} - 50M_{\odot}$. Para massas maiores que este limite, os momentos finais da estrela são implosões completas nas quais nada escapa ao buraco negro que se forma rápida e diretamente, engolindo tudo antes que um só raio de luz possa escapar.

3.3 Algumas equações básicas de cosmologia

Como tem sido verificado pelas observações cosmológicas, a distribuição da matéria e da radiação no universo observável é homogênea e isotrópica. Isto não garante que todo o universo seja suave, apenas garante que pelo menos numa região tão grande quanto nosso presente volume Hubble a distribuição de matéria e radiação sejam suaves. Então para propósitos de descrição de nosso volume local Hubble se pode assumir que todo o universo em boa aproximação é homogêneo e isotrópico.

A métrica, $g_{\mu\nu}$, para um espaço espacialmente homogêneo e isotrópico é a métrica de Robertson-Walker (RW) que pode ser escrita como [53]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3.4)$$

onde (t, r, θ, ϕ) são coordenadas (chamadas coordenadas co-móveis), $R(t)$ é o fator de escala cósmico, e, com uma escala apropriada, k pode tomar os valores 1, -1, 0, para espaços de constante de curvatura espacial positiva, negativa ou zero, respectivamente. A coordenada r é adimensional, isto é, $R(t)$ tem dimensões de comprimento, e r toma valores de 0 até 1 para $k = +1$. A coordenada temporal é o tempo próprio medido por um observador no referencial co-móvel, isto é, $(r, \theta, \phi) = \text{const.}$

Uma questão fundamental na cosmologia é: Que fração do universo está em contato causal? Mais precisamente, para um observador com coordenadas (r_0, θ_0, ϕ_0) no referencial co-móvel, para

que valores de (r, θ, ϕ) poderia um sinal de luz emitido em $t = 0$ alcançar um observador no, ou antes do tempo t ? Isto pode ser calculado diretamente da equação (3.4). Um sinal de luz satisfaz a equação de geodésica $ds^2 = 0$. Devido à homogeneidade do espaço, se pode escrever, sem perda de generalidade, $r_0 = 0$. Geodésicas passando por $r_0 = 0$ são linhas com θ e ϕ constantes, portanto $d\theta = 0$ e $d\phi = 0$. Devido à isotropia do espaço, os valores θ_0 e ϕ_0 podem ser quaisquer. Assim, um sinal de luz emitida da coordenada (r_H, θ_0, ϕ_0) em um tempo $t = 0$ alcançará o ponto $r_0 = 0$ num tempo t determinado por:

$$\int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (3.5)$$

Define-se a distancia própria ao horizonte medido no tempo t , como

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')}. \quad (3.6)$$

Se $d_H(t)$ é finita, então nosso cone de luz é limitado por um horizonte de partículas, que é o limite entre o universo visível e a parte do universo para o qual os raios de luz não nos alcançam.

Agora o movimento de uma partícula não necessariamente sem massa é dado por

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu u^\nu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0, \quad (3.7)$$

onde $u^\mu \equiv dx^\mu/ds$ é a quadrivelocidade, $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$ são os símbolos de Christoffel ($\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \frac{1}{2} [\partial_\nu g_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\alpha}]$) e λ é algum parâmetro afim. A quadrivelocidade pode ser expressa em termos da tri-velocidade ordinária $u^i \equiv dx^i/dt$ pela relação familiar $u^\mu = (\gamma, \gamma u^i)$, onde $\gamma \equiv (1 - |\vec{u}|^2)^{-\frac{1}{2}}$ e $|\vec{u}|^2 = -g_{ij}u^i u^j$. Escolhendo o parâmetro λ como sendo o comprimento próprio s^2 , a componente $\mu = 0$ da equação (3.7) fica

$$\frac{du^0}{ds} + \Gamma_{\nu\alpha}^0 u^\nu u^\alpha = 0. \quad (3.8)$$

Para a métrica de Robertson-Walker, os únicos componentes diferentes de zero de $\Gamma_{\nu\alpha}^0$ são $\Gamma_{ij}^0 = -(\dot{R}/R)g_{ij}$, portanto a equação anterior fica

$$\frac{1}{u^0} \frac{du^0}{ds} + \frac{\dot{R}}{R} |\vec{u}| = 0, \quad (3.9)$$

finalmente, como $u^0 \equiv dt/ds$ esta equação se reduz a $|\dot{\vec{u}}|/|\vec{u}| = -\dot{R}/R$, que implica que $|\vec{u}| \propto R^{-1}$.

Como $p^\mu = mu^\mu$, se vê que a magnitude do tri-momentum de uma partícula propagando-se livremente tem um deslocamento para o vermelho (*redshift*) que vai com R^{-1} . Note que na equação (3.9) ds se cancela. Isto implica que a discussão anterior é válida para partículas sem massa, onde $ds = 0$ (formalmente escolhendo outro parâmetro afim).

A luz emitida por um objeto distante pode ser entendida em mecânica quântica como fótons propagando-se livremente, ou classicamente como ondas planas. Na descrição da mecânica quântica, o comprimento de onda da luz é inversamente proporcional ao momento do fóton ($\lambda = h/p$). Se o momento muda, o comprimento de onda da luz deve mudar. Como demonstramos anteriormente o momento do fóton muda em proporção a R^{-1} . Como o comprimento de onda do fóton é inversamente proporcional a seu momento, o comprimento de onda no tempo t_0 , denotado como λ_0 , será diferente daquele no tempo t_1 , denotado como λ_1 , por

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)}. \quad (3.10)$$

Como o universo se expande, o comprimento de onda de um fóton propagando-se livremente aumenta. Isto significa que o *redshift* do comprimento de onda do fóton é devido ao fato do universo ter sido menor quando o fóton foi emitido.

Os astrônomos definem o *redshift* de um objeto, z , em termos da razão do comprimento de onda detectado (λ_0) e o comprimento de onda emitido (λ_1):

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)}. \quad (3.11)$$

Calcula-se $R(t)$ com as equações de Einstein da gravidade [53, 54]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = -8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

onde $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$, são os tensores de Ricci, métrica e energia-momento, respectivamente. $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Λ é a constante cosmológica e G_N é a constante universal de Newton. Para um universo isotrópico e homogêneo o tensor energia-momento tem a forma:

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \rho, \\ T_i^j &= -p\delta_i^j, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $(i, j = 1, 2, 3)$. ρ e p são as densidades de energia e pressão, respectivamente. No caso onde Λ é ignorada, as equações de Einstein são reduzidas a

$$\begin{aligned} \ddot{R}(t) &= -(4\pi G_N/3)(\rho + 3p)R(t), \\ \left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2 &\equiv H(t)^2 = \frac{8\pi}{3}G_N\rho - \frac{k}{R(t)^2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde se define o parâmetro de Hubble, $H(t) \equiv \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$. A equação (3.14) também é conhecida como a equação de Friedmann, [53]. Desta equação se pode deduzir a lei covariante de conservação de energia

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (3.15)$$

Usualmente as magnitudes das densidades de massa ou da energia no universo, ρ , são escritas em termos de uma razão adimensional,

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (3.16)$$

onde a densidade crítica do universo, ρ_c , isto é a densidade ρ para $k = 0$, é dada por

$$\rho_c = \frac{3H^3}{8\pi G_N}, \quad (3.17)$$

o valor atual desta densidade é [30]

$$\rho^{(0)} = 10.54 \times h^2 \text{keV cm}^3, \quad (3.18)$$

onde h é uma fração sem dimensões do valor presente da constante de Hubble H_0 em $100 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Este valor ainda não é conhecido com exatidão. Mas se sabe que seu valor está no intervalo entre $0.5 - 1.0$.

3.4 Oscilações de neutrinos de supernova

Os diferentes sabores de neutrinos podem oscilar entre seu ponto de produção, no núcleo da supernova, até que chegam ao detector. Primeiro, quando eles atravessam as camadas externas do núcleo estelar, depois, no meio entre a estrela e a terra, que se pode considerar como vácuo, e finalmente, quando eles chegam na terra atravessando o manto e/ou núcleo terrestre antes que sejam detectados.

Nesta seção se considera o caso de oscilações de sabor de três tipos de neutrinos ativos estáveis. Nas últimas duas décadas muitos trabalhos têm sido dedicados ao estudo da fenomenologia de oscilação de neutrinos vindo de uma supernova [44–46, 55, 56]. Alguns destes resultados serão resumidos a seguir.

3.4.1 Formalismo geral

Neutrinos são produzidos e detectados como auto-estados de interação fraca ν_α ($\alpha = e, \mu, \tau$). Sabe-se que os estados de sabor não diagonalizam a matriz de massa, e que depois de que eles são produzidos se propagam como auto-estados de massa ν_i ($i = 1, 2, 3$). Os estados de interação e os de massas estão relacionados por uma transformação unitária:

$$\vec{\nu}_W = U \vec{\nu}_M, \quad (3.19)$$

onde $\vec{\nu}_W = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)^T$, $\vec{\nu}_M = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T$, e a matriz U , definida como [39]

$$U = \exp(i\theta_{23}\lambda_7)\Gamma \exp(i\theta_{13}\lambda_5) \exp(i\theta_{12}\lambda_2) \\ = \begin{bmatrix} C_{12}C_{13} & C_{13}S_{12} & S_{13} \\ -C_{23}S_{12}e^{i\delta} - S_{23}S_{13}C_{12}e^{-i\delta} & C_{23}C_{12}e^{i\delta} - S_{23}S_{13}S_{12}e^{-i\delta} & S_{23}C_{13}e^{-i\delta} \\ S_{23}S_{12}e^{i\delta} - C_{23}S_{13}C_{12}e^{-i\delta} & -S_{23}C_{12}e^{i\delta} - C_{23}S_{13}S_{12}e^{-i\delta} & C_{23}C_{13}e^{-i\delta} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

onde se tem usado a notação $C_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $S_{ij} = \sin \theta_{ij}$. As λ 's são as matrizes de Gell-Mann que correspondem às matrizes de spin 1 de $SO(3)$. Assim

$$\exp(i\theta_{23}\lambda_7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\exp(i\theta_{13}\lambda_5) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} & 0 & \cos \theta_{13} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\exp(i\theta_{12}\lambda_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

e Γ é dado por

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

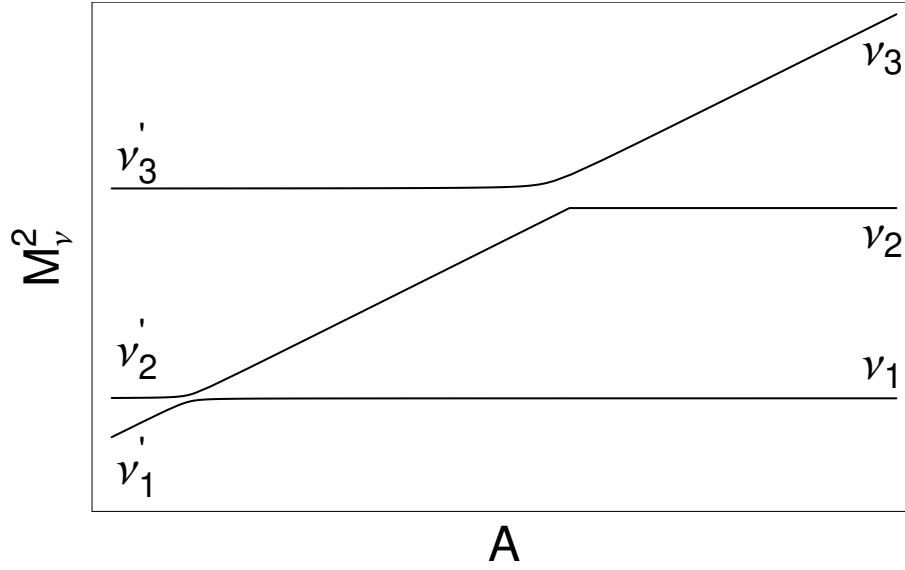


Figura 3.4: Massas quadradas dos três neutrinos autoestados de massa como função de potencial.

A propagação de neutrinos ultra-relativísticos na matéria obedece aproximadamente a uma equação de movimento tipo Schrödinger (veja apêndice C para maiores detalhes).

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix} &= \frac{1}{2E} M^2 \begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2E} \left\{ U \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{bmatrix} U^\dagger + \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix}, \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

onde $A = 2V_C E$ para neutrino, e $A \rightarrow -A$, $U \rightarrow U^*$ para antineutrino. Assume-se $m_3^2 > m_2^2 > m_1^2$.

Para o caso dum potencial constante, as funções e os valores próprios de M^2 podem ser calculados de forma analítica [57], mas como a equação é cúbica, as implicações físicas não são fáceis de ver. Por esta razão se fazem soluções aproximadas cujo significado físico é transparente. Pode-se obter uma idéia da solução da figura 3.4, onde os estados de massa estão em função do potencial A . Este é um caso representativo de pequena mistura e com hierarquia de massa no vácuo. Vê-se duas regiões de ressonância. A ressonância baixa ocorre em $A \approx m_2^2$ e a ressonância alta em $A \approx m_3^2$ (se m_1 é desprezível). Pode-se calcular soluções aproximadas perto das regiões de ressonância [58]. Para estudar a ressonância baixa, podemos rodar M^2 por $\exp(-\theta_{13}\lambda_5)\Gamma^\dagger \exp(-\theta_{13}\lambda_5)$ para obter a matriz de massa transformada

$$\tilde{M}^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Sigma - \Delta C_{2\theta_{12}} + 2AC_{\theta_{13}}^2 & \Delta S_{2\theta_{12}} & AS_{2\theta_{13}} \\ \Delta S_{2\theta_{12}} & \Sigma + \Delta C_{2\theta_{12}} & 0 \\ AS_{2\theta_{13}} & 0 & 2(m_3^2 + AS_{\theta_{13}}^2) \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

onde $\Sigma = m_2^2 + m_1^2$, $\Delta \equiv m_2^2 - m_1^2$, $C_{2\theta_{13}} = \cos 2\theta_{13}$, etc. Perto da ressonância, $A \approx \Delta$ o termo $AS_{2\theta_{13}}$ pode ser tratado como uma perturbação se é pequeno comparado com $m_3^2 - \Sigma$. Neste caso $\tilde{M}^2$ pode ser quebrado em uma matriz que descreve um neutrino desacoplado e uma submatriz

2×2 . Os valores próprios são

$$\begin{aligned}\lambda_{\pm} &= \left\{ (\Sigma + AC_{\theta_{13}}^2) \pm [(AC_{\theta_{13}}^2 - \Delta C_{\theta_{13}})^2 + (\Delta S_{2\theta_{12}})^2]^{1/2} \right\} / 2, \\ \lambda_3 &= m_3^2 + AS_{\theta_{13}}^2,\end{aligned}\tag{3.27}$$

e o ângulo de mistura na matéria

$$\sin 2\theta_{12}^m = \Delta S_{2\theta_{12}} / [(AC_{\theta_{13}}^2 - \Delta C_{2\theta_{12}})^2 + (\Delta S_{2\theta_{12}})^2]^{1/2}.\tag{3.28}$$

Das equações (3.26), (3.27), (3.28) se vê que os estados próprios de sabor estão relacionados aos estados próprios de massa na matéria por

$$\nu_{\alpha} = \sum_i U_{\alpha i}^m \nu_i^m, \quad i = +, -, 3,\tag{3.29}$$

com

$$U^m = \exp(i\theta_{23})\Gamma \exp(i\theta_{13}) \exp(i\theta_{12}^m).\tag{3.30}$$

A posição da ressonância é dado por

$$AC_{\theta_{13}}^2 = \Delta C_{2\theta_{12}}.\tag{3.31}$$

No caso da ressonância alta, com $A \approx m_3^2$, é mais conveniente rodar a base de sabor por $\Gamma^{\dagger} \exp(-i\theta_{23}\lambda_7)$,

$$\bar{M}^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Lambda C_{\theta_{13}}^2 + 2m_3^2 S_{\theta_{13}}^2 + 2A & \Delta S_{2\theta_{12}} C_{\theta_{13}} & (m_3^2 - \Lambda/2) S_{2\theta_{13}} \\ \Delta S_{2\theta_{12}} C_{\theta_{13}} & \Sigma + \Delta C_{2\theta_{12}} & -\Delta S_{2\theta_{12}} S_{\theta_{13}} \\ (M_3^2 - \Lambda/2) S_{2\theta_{13}} & -\Delta S_{2\theta_{12}} S_{\theta_{13}} & \Lambda S_{\theta_{13}}^2 + 2m_3^2 C_{\theta_{13}}^2 \end{bmatrix},\tag{3.32}$$

onde $\Lambda \equiv (\Sigma - \Delta C_{2\theta_{13}})$. Agora o termo $\Delta S_{2\theta_{12}}$ pode ser tratado como uma perturbação. Na ordem zero em $\Delta S_{2\theta_{12}}/2m_3^2$, $\bar{M}^2$ toma a forma de um neutrino desacoplado e dois neutrinos acoplados. Os valores próprios são

$$\begin{aligned}\lambda_{\pm} &= ((m_3^2 + \Lambda/2 + A) \\ &\quad \pm \left\{ [A - C_{2\theta_{13}}(m_3^2 - \Lambda/2)]^2 + [(m_3^2 - \Lambda/2) S_{2\theta_{13}}]^2 \right\}^{1/2}) / 2, \\ \lambda_3 &= (\Sigma + \Delta C_{2\theta_{12}}) / 2,\end{aligned}\tag{3.33}$$

e o ângulo de mistura é

$$\sin 2\theta_{13}^m = (m_3^2 - \Lambda/2) S_{2\theta_{13}} / \left\{ [A - C_{2\theta_{13}}(m_3^2 - \Lambda/2)]^2 + [(m_3^2 - \Lambda/2) S_{2\theta_{13}}]^2 \right\}.\tag{3.34}$$

Portanto os auto-estados de massa estão relacionados com os estados de sabor por

$$\nu_{\alpha} = \sum_j W_{\alpha j} \nu_j^m, \quad j = -, 2, +,\tag{3.35}$$

com

$$W = \exp(i\theta_{23}\lambda_7)\Gamma \exp(i\theta_{13}^m\lambda_5).\tag{3.36}$$

A ressonância alta se encontra em

$$A = C_{2\theta_{13}}(m_3^2 - \Lambda/2). \quad (3.37)$$

Este formalismo aproximado assume que existam duas ressonâncias separadas e calcula as massas e os ângulos de mistura perto das ressonâncias em função de A . A validade desta suposição depende dos valores dos ângulos de mistura e das massas no vácuo, já que eles são os que determinam a localização e a largura das ressonâncias.

Quando a densidade do meio não é constante, um grau de liberdade é adicionado. Da equação (3.25) se pode deduzir uma equação para os auto-estados de massa

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{2E} \begin{bmatrix} \mu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3^2 \end{bmatrix} + (U^m)^\dagger_i \frac{\partial}{\partial t} U^m \right] \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

onde μ_1^2 , μ_2^2 e μ_3^2 são os valores próprios de M^2 na equação (3.25). Como se pode ver, os auto-estados de massa já não diagonalizam o hamiltoniano efetivo, portanto eles não são mais auto-estados de propagação.

A aproximação adiabática consiste em ignorar por completo os termos $(U^m)^\dagger(dU^m/dt)$. Esta aproximação recebe correções perto das ressonâncias. Na ressonância baixa, $d\theta_{12}^m/dt$ é fortemente incrementada, e ocorrem cruzamentos entre os níveis 1 e 2. Na ressonância alta, $d\theta_{13}^m/dt$ é fortemente incrementada, portanto ocorrem cruzamentos entre os níveis 2 e 3. Nesta aproximação, a propagação dos estados será como estados de massa, exceto próximo as ressonâncias (pontos de cruzamento) onde um estado ν_i pode ir a um estado ν_j . A probabilidade de um estado ν_i ir a um estado ν_j , $P(\nu_i \rightarrow \nu_j)$, é chamada probabilidade de salto. Se denotará a probabilidade de salto na ressonância baixa como P_L , e na ressonância alta como P_H . Existem muitas expressões para estas probabilidades na literatura, ver [58].

3.4.2 Probabilidade de Transição

Num processo não adiabático a amplitude de transição, $A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, t)$, está dada por

$$\begin{aligned} A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, t) &= \langle \nu_\beta(t) | \nu_\alpha(t_0) \rangle \\ &= \sum_{a,b,c,d,e,f} \langle \nu_\beta(t) | \nu_a(t) \rangle \langle \nu_a(t) | \nu_b(t_{RL}) \rangle \langle \nu_b(t_{RL}) | \nu_c(t_{RL}) \rangle \\ &\quad \langle \nu_c(t_{RL}) | \nu_d(t_{RH}) \rangle \langle \nu_d(t_{RH}) | \nu_e(t_{RH}) \rangle \langle \nu_e(t_{RH}) | \nu_f(t_0) \rangle \\ &\quad \langle \nu_f(t_0) | \nu_\alpha(t_0) \rangle, \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde t_{RL} é o tempo onde ocorre a ressonância baixa, e o t_{RH} , é o tempo onde ocorre a ressonância alta. Os sub-índices α e β indicam estados de sabor e os sub-índices a, b, c, d, e, f indicam estados de massa.

Na aproximação relativística e supondo que todos os auto-estados de massa têm o mesmo momento se tem:

$$\begin{aligned} \langle \nu_f(t_0) | \nu_\alpha(t_0) \rangle &= U_{\alpha f}^*(t_0), \\ \langle \nu_\beta(t) | \nu_a(t) \rangle &= U_{\beta a}(t), \end{aligned} \quad (3.40)$$

e

$$\langle \nu_a(t) | \nu_b(t_{RL}) \rangle \langle \nu_c(t_{RL}) | \nu_d(t_{RH}) \rangle \langle \nu_e(t_{RH}) | \nu_f(t_0) \rangle = \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{ef} \exp \left(i \int_{t_0}^t E_a(t') dt' \right), \quad (3.41)$$

portanto $A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, t)$ fica

$$A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, t) = \sum_{a,b,c} U_{\beta a}(t) U_{\alpha c}^*(t_0) \exp \left(i \int_{t_0}^t E_a(t') dt' \right) \langle \nu_a(t_{RL}) | \nu_b(t_{RL}) \rangle \langle \nu_b(t_{RH}) | \nu_c(t_{RH}) \rangle. \quad (3.42)$$

De (3.42) a probabilidade de transição é facilmente calculável:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, t) &= \left| \sum_{a,b,c} U_{\beta a}(t) U_{\alpha c}^*(t_0) \exp \left(i \int_{t_0}^t E_a(t') dt' \right) \langle \nu_a(t_{RL}) | \nu_b(t_{RL}) \rangle \langle \nu_b(t_{RH}) | \nu_c(t_{RH}) \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{a,b,c,d,e,f} U_{\beta a}(t) U_{\alpha c}^*(t_0) U_{\beta d}(t)^* U_{\alpha f}(t_0) \exp \left(\frac{i}{2E} \delta(t) \right) \langle \nu_a(t_{RL}) | \nu_b(t_{RL}) \rangle \\ &\quad \langle \nu_d(t_{RL}) | \nu_e(t_{RL}) \rangle^* \langle \nu_b(t_{RH}) | \nu_c(t_{RH}) \rangle \langle \nu_e(t_{RH}) | \nu_f(t_{RH}) \rangle^*, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde o $\delta(t)$ é

$$\delta(t) = \int_{t_0}^t (\mu_a^2(t') - \mu_d^2(t')) dt', \quad (3.44)$$

os $\mu_i(t)^2$ são valores próprios da matriz M^2 da equação (3.25) no tempo t . Para ver o significado físico da equação (3.43), podemos escrever lha como

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, t) &= \sum_{a,b,c} |U_{\beta a}(t)|^2 |U_{\alpha c}^*(t_0)|^2 |\langle \nu_a(t_{RL}) | \nu_b(t_{RL}) \rangle|^2 |\langle \nu_b(t_{RH}) | \nu_c(t_{RH}) \rangle|^2 \\ &\quad + \sum_{a \neq d, b \neq e, c \neq f} U_{\beta a}(t) U_{\alpha c}^*(t_0) U_{\beta d}(t)^* U_{\alpha f}(t_0) \langle \nu_a(t_{RL}) | \nu_b(t_{RL}) \rangle \langle \nu_d(t_{RL}) | \nu_e(t_{RL}) \rangle^* \\ &\quad \langle \nu_b(t_{RH}) | \nu_c(t_{RH}) \rangle \langle \nu_e(t_{RH}) | \nu_f(t_{RH}) \rangle^* \exp \left(\frac{i}{2E} \delta(t) \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

O primeiro termo da equação (3.45) é a probabilidade clássica de transição dum estado de sabor α a um estado de sabor β . O segundo termo é um termo oscilante. A média deste termo sobre todo o espaço percorrido pelos neutrinos desde o núcleo da supernova até a terra é zero. Os termos $|\langle \nu_a(t_{RL}) | \nu_b(t_{RL}) \rangle|^2$ e $|\langle \nu_b(t_{RH}) | \nu_c(t_{RH}) \rangle|^2$ são as probabilidades de salto P_L e P_H definidas anteriormente, respectivamente. Então a probabilidade usada na nossa discussão será

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, t) = \sum_{a,b,c} |U_{\beta a}(t)|^2 |U_{\alpha c}^*(t_0)|^2 P_{L,ab} P_{H,bc}, \quad (3.46)$$

onde

$$\begin{aligned} P_{L,ab} &\equiv |\langle \nu_a(t_{RL}) | \nu_b(t_{RL}) \rangle|^2, \\ P_{H,bc} &\equiv |\langle \nu_b(t_{RH}) | \nu_c(t_{RH}) \rangle|^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.4.3 Ângulos de mistura e diferenças quadradas de massa. Limites e valores experimentais

Os estudos de oscilação de neutrinos solares, atmosféricos, de reatores e de aceleradores tem permitido medir alguns dos seus ângulos de mistura e diferenças de massas. Uma análise recente

destes resultados experimentais [32], permite chegar aos seguintes valores os quais correspondem aos melhores ajustes

$$\begin{aligned}\Delta m_{12}^2 &= m_2^2 - m_1^2 \cong 7.2 \times 10^{-5} \text{eV}^2, \\ |\pm \Delta m_{23}^2| &= |\pm(m_3^2 - m_2^2)| \cong 2.0 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \\ \sin^2 \theta_{12} &\cong 0.29, \\ \sin^2 \theta_{23} &\cong 0.50.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Para o limite superior (em 3σ)

$$\sin^2 \theta_{13} < 0.067.\tag{3.49}$$

Da equação (3.48) e (3.49) se vê que $\Delta m_{12}^2 < |\Delta m_{23}^2|$ favorecendo assim à chamada hipótese hierárquica [59]. Com isto o espectro de massa pode ser parametrizado como

$$(m_1^2, m_2^2, m_3^2) = m_o^2 + \left(-\frac{\Delta m_{12}^2}{2}, \frac{\Delta m_{12}^2}{2}, \pm |\Delta m_{23}^2| \right).\tag{3.50}$$

O valor m_o fixa a escala absoluta das massas (ainda não é conhecido). O sinal mais corresponde ao caso chamado de hierarquia normal, e o sinal menos ao caso chamado hierarquia invertida. Devido a pequenez de $\sin^2 \theta_{13}$ e da hierarquia de massas a dinâmica se pode reduzir aproximadamente a dois subsistemas de dois neutrinos dominados pelos valores da densidade de matéria perto da ressonância alta e baixa como se mostrou na seção 3.1.1. Portanto, o espaço de parâmetros, $S_{3\nu}$, necessários para descrever as oscilações de neutrinos de supernovas são

$$S_{3\nu} \approx L_{2\nu} \otimes H_{2\nu} = (\Delta m_{12}^2, \theta_{12}, V \cos^2 \theta_{13}) \otimes (\Delta m_{23}^2, \theta_{13}, V),\tag{3.51}$$

onde V é potencial da matéria na respectiva ressonância, ver a seção 3.3.4. No caso desta tese é o potencial de corrente carregada V_C . Defina-se o número de onda de oscilação "baixa" como

$$k_L = \Delta m_{12}^2 / 2E,\tag{3.52}$$

e o número de onda de oscilação "alta" como

$$k_H = |\Delta m_{23}^2| / 2E.\tag{3.53}$$

3.4.4 Regiões de ressonância

Neutrinos vindo do núcleo de uma supernova atravessam densidades de matéria entre 10^9 g/cm^3 a quase 0. Neste percurso, os neutrinos podem atravessar duas regiões de ressonância. Devido aos valores atuais dos parâmetros de mistura, estas se encontram localizadas em:

- Ressonância alta: corresponde à conversão no estado de massa ν_3 . Segundo as equações (3.37), (3.48) e (3.49) esta está localizada em:

$$2EV_C(\rho_H^{res}) = \Delta m_{13}^2 \cos 2\theta_{13},\tag{3.54}$$

onde ρ_H^{res} é a densidade de matéria na ressonância alta.

- Ressonância baixa: corresponde à transições entre os estados de massa mais leves. Segundo as equações (3.31), (3.48) e (3.49) esta está localizada em:

$$2EV_C(\rho_L^{res}) = \Delta m_{12}^2 \cos 2\theta_{12},\tag{3.55}$$

onde ρ_L^{res} é a densidade de matéria na ressonância baixa.

	Neutrinos				Antineutrinos		
	ν_1	ν_2	ν_3		$\bar{\nu}_1$	$\bar{\nu}_2$	$\bar{\nu}_3$
ν_e	$P_H P_L$	$P_H(1 - P_L)$	$(1 - P_H)$	$\bar{\nu}_e$	1	0	0
ν_μ	$(1 - P_L)$	P_L	0	$\bar{\nu}_\mu$	0	1	0
ν_τ	$(1 - P_H)P_L$	$(1 - P_H)(1 - P_L)$	P_H	$\bar{\nu}_\tau$	0	0	1

Tabela 3.1: Probabilidades de transição para neutrinos e antineutrinos com hierarquia normal (HN).

	Neutrinos				Antineutrinos		
	ν_1	ν_2	ν_3		$\bar{\nu}_1$	$\bar{\nu}_2$	$\bar{\nu}_3$
ν_e	0	P_L	$(1 - P_L)$	$\bar{\nu}_e$	$\bar{P}_H$	0	$(1 - \bar{P}_H)$
ν_μ	0	$(1 - P_L)$	P_L	$\bar{\nu}_\mu$	0	1	0
ν_τ	1	0	0	$\bar{\nu}_\tau$	$(1 - \bar{P}_H)$	0	$\bar{P}_H$

Tabela 3.2: Probabilidades de transição para neutrinos e antineutrinos com hierarquia invertida (HI).

Como $\Delta m_{12}^2 > 0$ a ressonância baixa só acontecerá no canal do neutrino (e não do antineutrino). Por outro lado, a ressonância alta afetará aos neutrinos ou aos antineutrinos de acordo com a hierarquia de massas:

- Para hierarquia normal ($\Delta m_{23}^2 > 0$) a ressonância alta afetará os neutrinos,
- Para hierarquia invertida ($\Delta m_{23}^2 < 0$) a ressonância alta afetará os antineutrinos.

3.4.5 Probabilidades de salto

Para os valores de $(\Delta m_{12}^2, \sin^2 \theta_{12})$ dados na equação (3.48) e (3.49) se pode ver que na ressonância baixa a aproximação adiabática é válida, [55], isto é, $P_L = 0$.

O caso de ressonância alta não é tão simples. Em geral, a probabilidade de salto P_H depende da forma de V [32]. Esta dependência desaparece no caso limite de transições adiabáticas ($P_H = 0$) e de transições fortemente não adiabáticas, ($P_H = 1$) as quais correspondem aproximadamente a $\sin^2 \theta_{13} \gg 10^{-2}$ e $\sin^2 \theta_{13} \ll 10^{-6}$, respectivamente [60]. Neste estudo, por simplicidade, serão considerados unicamente os dois valores extremos desta probabilidade, isto é $P_H = \{0, 1\}$.

3.4.6 Probabilidades de transição para neutrinos de supernovas

Para levar em conta as oscilações de sabor nos cálculos dos fluxos de $\bar{\nu}_e$, vindo das relíquias de supernovas, é útil ter explicitamente as probabilidades de transição entre os estados de sabor e os estados de massa. Nas tabelas 3.1 e 3.2 mostramos essas probabilidades.

3.5 Fluxos de neutrinos relíquias de supernovas com oscilações

Nesta seção se calculará a densidade do número de antineutrinos eletrônicos por intervalo de energia, $n_{\bar{\nu}_e}(E)$, vindo de todas as supernovas passadas, também chamado fluxo de neutrinos

reliíquias de supernovas (SRN), levando em conta apenas as oscilações de sabor.

3.5.1 Formulação do cálculo do fluxo

A presente densidade de antineutrinos $\bar{\nu}_i$ (ou neutrinos ν_i), auto-estados de massa, vindo de todas as supernovas passadas, cuja energia está no intervalo entre E e $E + dE$, emitida com *redshift* z e $z + dz$, é dada por [61]

$$\begin{aligned} dn_{\bar{\nu}_i}(E) &= R_{SN}(z)(1+z)^3 \left| \frac{dt}{dz} \right| dz \frac{dN_{\bar{\nu}_i}((1+z)E)}{dE} \times (1+z)dE(1+z)^{-3} \\ &= R_{SN}(z) \left| \frac{dt}{dz} \right| dz \frac{dN_{\bar{\nu}_i}((1+z)E)}{dE} (1+z)dE, \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde o fator $(1+z)^3$ é devido a expansão do universo. $R_{SN}(z)$ é a taxa de formação das supernovas, por unidade de tempo e volume comóvel, (ver seção 3.3 para uma definição de coordenadas comóveis). $dN_{\bar{\nu}_i}/dE$ é o número de antineutrinos $\bar{\nu}_i$ (ou neutrinos ν_i) por supernova emitidos por unidade de energia E . A equação de Friedmann (3.14) permite calcular a relação entre t e z como segue:

$$\frac{dz}{dt} = (1+z)H(z) = -(1+z)H_0 \sqrt{(1+\Omega_M z)(1+z)^2 - \Omega_\Lambda(2z+z^2)}, \quad (3.57)$$

onde Ω_M e Ω_Λ são parâmetros cosmológicos definidos na equação (3.16). Adotaremos aqui os valores $\Omega_M = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$.

Pode-se obter facilmente o fluxo da densidade do número de antineutrinos $\bar{\nu}_i$ (ou neutrinos ν_i) detectados atualmente por unidade de energia, $dF_{\bar{\nu}_i}/dE$, da equação (3.56) usando a relação simples $dF_{\bar{\nu}_i}/dE = c [dn_{\bar{\nu}_i}/dE]$ (já que se estão supondo neutrinos ultra-relativísticos com velocidades $\approx c$):

$$\frac{dF_{\bar{\nu}_i}}{dE} = c \int_0^{z_{max}} \frac{1}{H(z)} R_{SN}(z) Y_{\bar{\nu}_i}(E(1+z)) dz, \quad (3.58)$$

z_{max} é o *redshift* onde começam os colapsos das supernovas, consideramos $z_{max} = 5$ [61]. Também definimos aqui $Y_{\bar{\nu}_i}(E(1+z))$ como:

$$Y_{\bar{\nu}_i}(E(1+z)) = \frac{dN_{\bar{\nu}_i}(E(1+z))}{dE}. \quad (3.59)$$

3.5.2 Taxa de formação de supernovas

Estudos da taxa de formação de estrelas (SFR) em função do *redshift* têm sido realizados [62–64]. Observações cósmicas do SFR podem ser, hoje em dia, feitas até um *redshift* $z \approx 4$, mas ainda alguns detalhes são controversos. Espera-se que a taxa de formação de supernovas seja proporcional à SFR, já que o tempo de vida de progenitores de supernovas é menor que a escala de tempo cosmológica.

O modelo usado aqui, figura 3.5, está dado pela seguinte expressão [65]:

$$R_{SN}(z) = 0.0122 \times 0.3 h_{65} \frac{\exp(3.4z)}{45 + \exp(3.8z)} \text{ yr}^{-1} \text{ Mpc}^{-3}, \quad (3.60)$$

onde $h_{65} = H_0/65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-3}$. A equação (3.60) é válida para uma cosmologia Einstein-de Sitter ($\Omega_M, \Omega_\Lambda = (1, 0)$). Para uma diferente cosmologia se tem que aplicar um fator de correção

$$R_{SN} \rightarrow R_{SN} \frac{[(1+z)^2(1+\Omega_M z) - \Omega_\Lambda(2z+z^2)]^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.61)$$

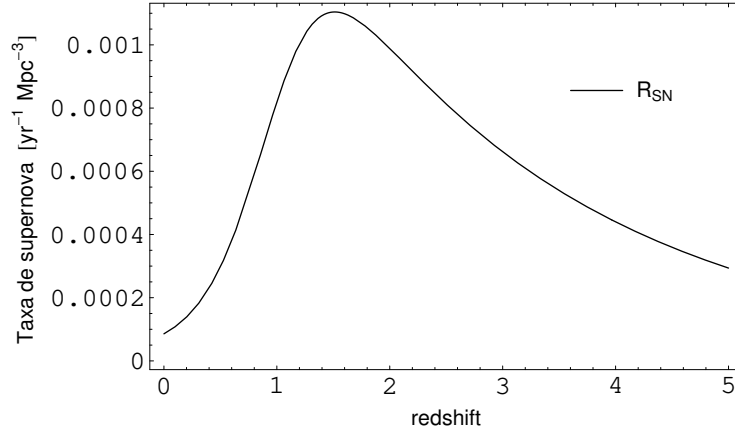


Figura 3.5: Taxa de formação de supernovas em função do *redshift*.

É importante ver que devido à correção feita na equação (3.61), o fluxo de neutrinos (3.58) não depende dos parâmetros cosmológicos Ω_M e Ω_Λ .

3.5.3 Fatores Y_ν

Usaremos aqui a parametrização para $Y_\nu(E)$ utilizada na referência [66]:

$$Y_\nu(E) = \frac{E_b}{6 \langle E \rangle_\nu} \times \frac{(\alpha + 1)^{(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha + 1)} \times \left[\frac{E}{\langle E \rangle_\nu} \right]^\alpha \times \frac{e^{-(\alpha+1)E/\langle E \rangle_\nu}}{\langle E \rangle_\nu}, \quad (3.62)$$

onde E_b é a energia total de ligação que será considerada igual a 3×10^{53} erg para todos os estados de sabor dos neutrinos relevantes na neutrinosfera ($\nu = \nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_x$). $\langle E \rangle_\nu$ é a energia média do neutrino ν , α é um parâmetro espectral e Γ é a função gama de Euler. Consideraremos aqui:

$$\begin{aligned} (\langle E \rangle_{\nu_e}, \langle E \rangle_{\bar{\nu}_e}, \langle E \rangle_{\nu_x}) &= (12, 15, 18) \text{ MeV}, \\ \alpha &= 3, \end{aligned} \quad (3.63)$$

que são valores permitidos pelas simulações numéricas [66].

Esta hierarquia no espectro de energia dos neutrinos na neutrinosferas pode ser entendida da seguinte maneira. Os neutrinos ν_x ($x = \mu, \tau$) têm unicamente interações de corrente neutra, portanto seu caminho livre meio é mais longo que dos outros neutrinos, e assim sua temperatura de desacoplamento é maior, e portanto, sua energia média também é maior. Ambos ν_e e $\bar{\nu}_e$ tem interações de corrente carregada. Mas, como as estrelas contêm mais nêutrons que prótons, o caminho livre médio de ν_e é mais curto do que o caminho livre médio do $\bar{\nu}_e$, portanto, a energia do $\bar{\nu}_e$ será maior.

Na figura 3.6 mostramos as funções $Y_{\nu_e}(E)$, $Y_{\bar{\nu}_e}(E)$ e $Y_{\nu_x}(E)$ para os parâmetros anteriormente escolhidos. Supomos que $Y_{\nu_\mu} = Y_{\nu_\tau} = Y_{\bar{\nu}_\mu} = Y_{\bar{\nu}_\tau} = Y_{\nu_x}$.

3.5.4 Fluxo de $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas

O caso de interesse neste estudo é o cálculo do fluxo de $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas. A detecção de $\bar{\nu}_e$ é relativamente fácil já que quase todos os detectores têm prótons livres que podem ser usados

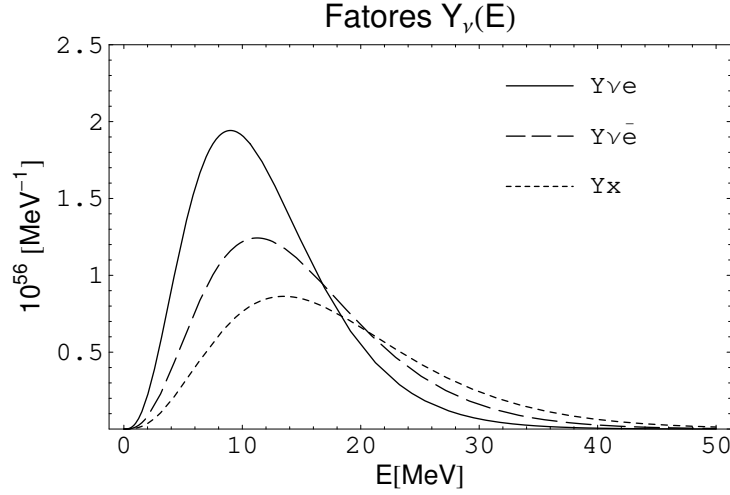


Figura 3.6: Fatores Y_ν para os diferentes sabores de neutrinos em função da energia. Aqui a dependência do *redshift* não foi levada em conta.

na reação $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ com uma grande seção de choque. Esta seção de choque é bem conhecida [67, 68]. Desprezando a energia de recuo do nêutron $\approx (E_\nu^2/M_p)$, podemos simplesmente relacionar a energia do pósitron, $E_e^{(0)}$, com a energia do neutrino, E_ν :

$$E_e^{(0)} = E_\nu - \Delta, \quad \Delta = M_n - M_p = 1.293 \text{ MeV}. \quad (3.64)$$

A seção de choque diferencial nesta ordem ($M_p \rightarrow \infty$) é

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right)^{(0)} = \frac{\sigma_0}{2} [(f^2 + 3g^2) + (f^2 - g^2) v_e^{(0)} \cos\theta] E_e^{(0)} p_e^{(0)}, \quad (3.65)$$

$$\sigma_0 = \frac{G_F^2 \cos^2\theta}{\pi} (1 + \Delta_{in}^R),$$

onde as constantes de acoplamentos vetorial e pseudo-vetorial são $f = 1$, $g = 1.26$, respectivamente. $\Delta_{in}^R \approx 0.024$ representa as correções radiativas internas. Integrando sobre os ângulos se obtém a seção de choque total (ver figura 3.7),

$$\sigma_{tot}^{(0)} = \sigma_0 (f^2 + 3g^2) E_e^{(0)} p_e^{(0)} = 0.0952 \left(\frac{E_e^{(0)} p_e^{(0)}}{1 \text{ MeV}^2} \right). \quad (3.66)$$

Expressões para a seção transversal de ordem $1/M_p$ não serão usadas, mas podem ser encontradas em [68].

Para determinar o fluxo de $\bar{\nu}_e$ que chegam à terra tendo em conta as oscilações na matéria (desde a neutrinoesfera até sair da supernova) e no vácuo (desde a saída da supernova até o detector, já que os efeitos da matéria da terra não vão ser considerados aqui) é necessário ter uma relação explícita entre os estados de massa, ν_i , e os estados de interação, ν_α . Das equações (3.46) e (3.47) se pode deduzir esta relação:

$$Y_{\nu_i} = \sum_{\alpha,j} P_{ij} |U_{\alpha,j}^m|^2 Y_{\nu_\alpha}, \quad (3.67)$$

onde P_{ij} são as respectivas probabilidades de salto. Usando as equações (3.20) (com $\delta = 0$), (3.28), (3.34), e a informação nas tabelas 3.1 e 3.2 na equação (3.67) se pode obter a tabela 3.3.

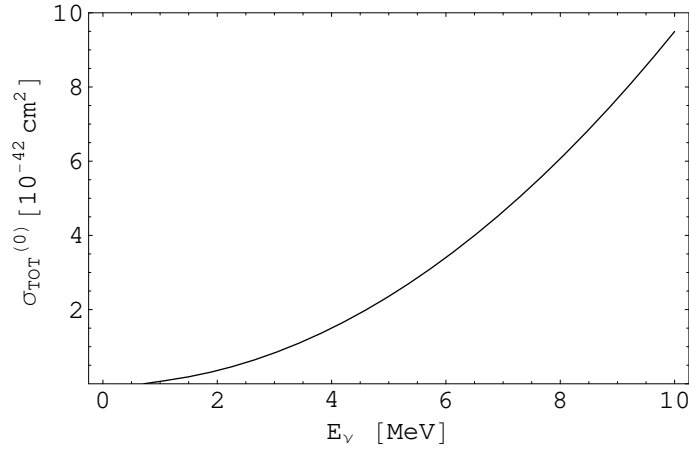


Figura 3.7: Seção de choque total em ordem zero de $1/M_p$, σ_{tot}^0 , para o processo $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$.

Cenário	Y_{ν_i}
ν , HN	$Y_{\nu_1} = Y_{\nu_x}$ $Y_{\nu_2} = (1 - P_H)Y_{\nu_x} + P_H Y_{\nu_e}$ $Y_{\nu_3} = P_H Y_{\nu_x} + (1 - P_H)Y_{\nu_e}$
$\bar{\nu}$, HN	$Y_{\bar{\nu}_1} = Y_{\bar{\nu}_e}$ $Y_{\bar{\nu}_2} = Y_{\nu_x}$ $Y_{\bar{\nu}_3} = Y_{\nu_x}$
ν , HI	$Y_{\nu_1} = Y_{\nu_x}$ $Y_{\nu_2} = Y_{\nu_e}$ $Y_{\nu_3} = Y_{\nu_x}$
$\bar{\nu}$, HI	$Y_{\bar{\nu}_1} = (1 - P_H)Y_{\nu_x} + P_H Y_{\bar{\nu}_e}$ $Y_{\bar{\nu}_2} = Y_{\nu_x}$ $Y_{\bar{\nu}_3} = P_H Y_{\nu_x} + (1 - P_H)Y_{\bar{\nu}_e}$

Tabela 3.3: Fatores Y_ν para os quatro cenários de 3ν possíveis .

Desprezando os efeitos da matéria na terra o fluxo de qualquer tipo de neutrino ou antineutrino autoestados de interação vindo de todas as supernovas passadas, $\Phi_{\bar{\nu}_\alpha}(E) = dF_{\bar{\nu}_\alpha}/dE$ é dado por:

$$\Phi_{\bar{\nu}_\alpha}(E) = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 \Phi_{\bar{\nu}_i}(E), \quad (3.68)$$

onde $\Phi_{\bar{\nu}_i}(E) = dF_{\bar{\nu}_i}/dE$, se calcula como na equação (3.58). Para nosso caso de interesse, antineutrinos $\bar{\nu}_e$, a equação (3.68) fica

$$\Phi_{\bar{\nu}_e}(E) = \cos^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{12} \Phi_{\bar{\nu}_1}(E) + \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{12} \Phi_{\bar{\nu}_2}(E) + \sin^2 \theta_{13} \Phi_{\bar{\nu}_3}(E), \quad (3.69)$$

e como $\sin^2 \theta_{13}$ é muito pequeno, ver equação (3.48) e (3.49),

$$\Phi_{\bar{\nu}_e}(E) \cong \cos^2 \theta_{12} \Phi_{\bar{\nu}_1}(E) + \sin^2 \theta_{12} \Phi_{\bar{\nu}_2}(E). \quad (3.70)$$

Na figura 3.8 mostramos o resultado do cálculo do fluxo de neutrinos ν_e relíquias de supernovas para o caso de três gerações de neutrinos com oscilações como função da energia do neutrino. Os casos para as diferentes hierarquias são apresentados. O caso para a hierarquia normal, HN, independente do valor da probabilidade de salto (P_H), e o caso de hierarquia invertida, HI, com $P_H = 1$ coincidem. O valor para o caso de hierarquia invertida com $P_H = 0$ é facilmente distinguível. Para ver explicitamente o anteriormente dito, se pode usar as equações (3.58) e (3.70) para obter, para o caso de hierarquia normal

$$\Phi_{\bar{\nu}_e}(E) = \int_0^{z_{max}} dz H^{-1}(z) R_{SN}(z) [\cos^2 \theta_{12} Y_{\bar{\nu}_e}(E(1+z)) + \sin^2 \theta_{12} Y_{\nu_x}(E(1+z))], \quad (3.71)$$

e para o caso de hierarquia invertida

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{\nu}_e}(E) = \int_0^{z_{max}} dz H^{-1}(z) R_{SN}(z) \times \\ \{ \cos^2 \theta_{12} [P_H Y_{\bar{\nu}_e}(E(1+z)) + (1 - P_H) Y_{\nu_x}(E(1+z))] + \sin^2 \theta_{12} Y_{\nu_x}(E(1+z)) \}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Das equações (3.71) e (3.72) se vê facilmente que os casos de HN e de HI com $P_H = 1$ coincidem, e que o fluxo para o caso de HI com $P_H = 0$ é menor que os dois casos anteriores.

Na figura 3.9 mostramos a taxa absoluta de pósitrons que devem ser observados por unidade de MeV e por quilo tonelada de água em um ano (kT yr), como função da energia verdadeira do pósitron. Neste estudo não especificamos um detector em particular. Para obter a figura 3.9 foi feito o seguinte:

$$\Phi_{e^+}(E_{e^+}) = K \times \sigma_{tot}^{(0)}(E_{e^+}) \times \Phi_{\bar{\nu}_e}(E_{e^+} + 1.293), \quad (3.73)$$

onde K é a constante de conversão de unidades e é igual a 2.114×10^{41} [s kT⁻¹ yr⁻¹]. E_{e^+} é a energia do pósitron.

3.6 Fluxos de neutrinos relíquias de supernovas com oscilações e decaimentos

Nesta seção o fluxo de neutrinos relíquias de supernovas será calculado levando em conta oscilações de sabor e decaimentos. Consideram-se τ_i/m_i (onde os τ_i são tempos de decaimentos genéricos),

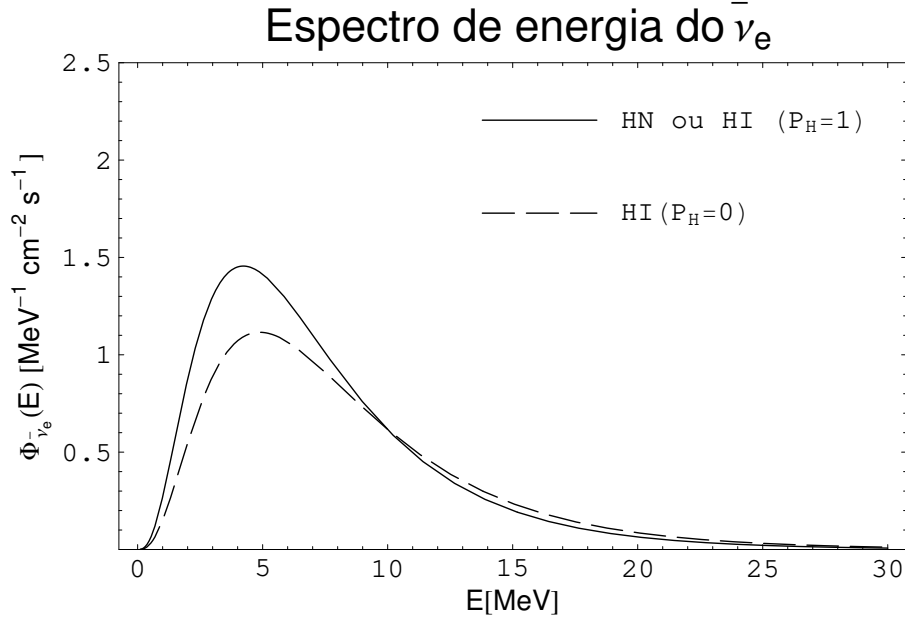


Figura 3.8: Fluxo de $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas em presença de oscilações de sabor de três famílias de neutrinos sem decaimentos. Mostram-se as duas hierarquias de massas possíveis. O resultado para a hierarquia normal é independente da probabilidade P_H .

muito maiores que o limite dado em [13], ($\tau_i/m_i > 5 \times 10^{-4}$ s/eV). Desta maneira, as oscilações de sabor ocorrem na matéria, e chegam a ser incoerentes, antes que os efeitos por decaimento cheguem a ser significantes. Portanto, podemos desprezar os termos de interferência entre estes dois fenômenos [15].

Serão considerados aqui apenas no vácuo, ver capítulo 1. Decaimentos na matéria, capítulo 2, serão ignorados aqui.

3.6.1 Solução da equação de Boltzmann

A equação de evolução da função de distribuição do espaço de fase de uma partícula, $f(p^\mu, x^\mu)$, para o caso de neutrinos, está dada por

$$\hat{L}[f] = C[f], \quad (3.74)$$

onde C é o chamado operador de colisão e $\hat{L}$ é o chamado operador de Liouville, [53]. O operador de Liouville relativístico é

$$\hat{L}[f] = \left[P^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \right] f. \quad (3.75)$$

onde $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ são os símbolos de Christoffel. Para a métrica dada em 3.3 função de distribuição do espaço de fase é homogênea e isotrópica: $f = f(|\vec{p}|^2, t)$, ou equivalentemente $f(E, t)$. Portanto, o operador de Liouville fica

$$\hat{L}[f(E, t)] = \left[E \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dot{R}}{R} |\vec{p}|^2 \frac{\partial}{\partial E} \right] f. \quad (3.76)$$

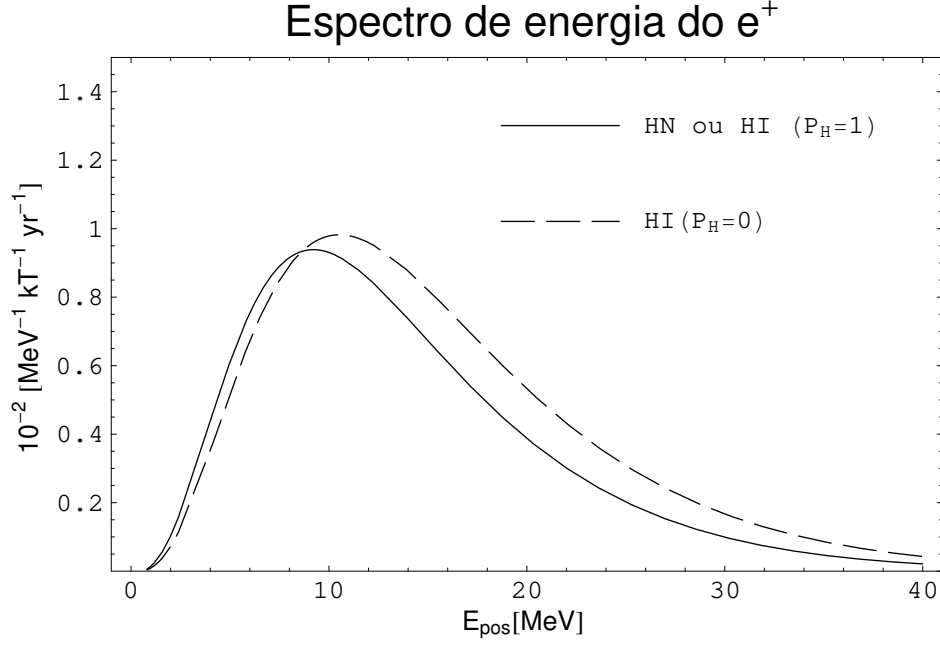


Figura 3.9: Espectro de energia do pósitron produzido na reação $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$, para o caso de neutrinos sem decaimentos.

Para neutrinos relativísticos que são considerados neste capítulo, a energia $E \approx |\vec{p}|$, portanto, o operador de Liouville finalmente pode ser escrito como

$$\hat{L}[f(E, t)] = \left[E \frac{\partial}{\partial t} - H(t) E^2 \frac{\partial}{\partial E} \right] f, \quad (3.77)$$

onde se usou a definição de $H(t)$, equação (3.14). Então a equação de Boltzmann para a função de distribuição no espaço de fase é

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - H(t) E \frac{\partial}{\partial E} \right] f(E, t) = C[f(E, t)]. \quad (3.78)$$

A densidade de número de neutrinos relíquias de supernova por unidade de energia está relacionada com a função $f(E, t)$ por [53]

$$\Phi_{\nu_i}(E, t) = 4\pi p^2 \frac{R^3}{R_0^3} f(E, t), \quad (3.79)$$

onde o fator R^3/R_0^3 é devido à expansão do universo. Substituindo a equação (3.79) em (3.78) obtemos

$$\frac{R_0^3}{4\pi E R^3} \left[\frac{\partial}{\partial t} - H(t) E \frac{\partial}{\partial E} - H(t) \right] \Phi_{\nu_i}(E, t) = C[\Phi_{\nu_i}(E, t)]. \quad (3.80)$$

O operador de colisão que consideramos aqui será [49]:

$$C[\Phi_{\nu_i}(E, t)] = \frac{R_0^3}{4\pi E R^3} \left[-\frac{m_i}{\tau_i E} \Phi_{\nu_i}(E, t) + \sum_{m_j > m_i} q_{ji}(E, t) + R_{SN}(t) Y_{\nu_i}(E) \right]. \quad (3.81)$$

Substituindo a equação (3.81) em (3.80)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - H(t)E \frac{\partial}{\partial E} - H(t) \right] \Phi_{\nu_i}(E, t) = -\frac{m_i}{\tau_i E} \Phi_{\nu_i}(E, t) + \sum_{m_j > m_i} q_{ji}(E, t) + R_{SN}(t)Y_{\nu_i}(E). \quad (3.82)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (3.82) leva em conta os decaimentos do neutrino ν_i em outros neutrinos mais leves; τ_i é o tempo de decaimento no referencial de repouso do neutrino ν_i . O segundo termo da direita leva em conta o incremento do número de neutrinos ν_i a decaimentos de neutrinos mais pesados neste estado. Este pode ser escrito como

$$q_{ji} = B_{ji} \frac{m_j}{\tau_j} \int_0^\infty \frac{dE'}{E'} \Phi_{\nu_j}(E', t) \psi_{ji}(E', E), \quad (3.83)$$

onde B_{ji} é o razão de ramificação do proceso $\nu_j \rightarrow \nu_i$ definido como

$$B_{ji} = B(\nu_j \rightarrow \nu_i) = \Gamma(\nu_j \rightarrow \nu_i)/\Gamma_j, \quad (3.84)$$

onde Γ_j é a taxa de decaimento total, e $\Gamma(\nu_j \rightarrow \nu_i)$ é a taxa de decaimento parcial do neutrino ν_j em ν_i . ψ_{ji} é o espectro de energia do decaimento, isto é, a probabilidade do neutrino $\nu_j(E_j)$ decair em $\nu_i(E_i)$,

$$\psi(E', E) = \text{Prob}[\nu_j(E_j) \rightarrow \nu_i(E_i)]. \quad (3.85)$$

O último termo leva em conta a emissão do neutrino ν_i no tempo t por todas as supernovas passadas. $R_{SN}(t)$ e $Y_{\nu_i}(E)$ são definidos da mesma maneira que na seção 3.5.

A equação (3.82) é realmente um conjunto de equações, uma para cada tipo de neutrino. Este conjunto de equações são de primeira ordem nas derivadas com respeito ao tempo e à energia. Uma forma de simplificar estas equações é eliminar alguma das derivadas, ($\partial/\partial t$ ou $\partial/\partial E$) usando umas novas variáveis. Para ver quais são as novas coordenadas, $\lambda = \lambda(t, E)$ e $\epsilon = \epsilon(t, E)$, que permitem simplificar a equação (3.82) se procede da seguinte maneira: Os dois primeiros termos da equação (3.82) em função das novas coordenadas se podem expressar como

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} - H(t)E \frac{\partial}{\partial E} \right] &= \left[\frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \epsilon} - H(t)E \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial E} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial \epsilon}{\partial E} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right\} \right] \\ &= \left[\frac{\partial \lambda}{\partial t} - H(t)E \frac{\partial \lambda}{\partial E} \right] \frac{\partial}{\partial \lambda} + \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - H(t)E \frac{\partial \epsilon}{\partial E} \right] \frac{\partial}{\partial \epsilon}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

A equação (3.86) é simétrica na duas novas coordenadas, λ e ϵ . Portanto é indiferente qual das derivadas se elimina. Para eliminar uma das duas se tem que igualar o termo entre colchetes a zero. Por preferência será eliminada a derivada $\partial/\partial \epsilon$.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - H(t)E \frac{\partial \epsilon}{\partial E} = 0. \quad (3.87)$$

Para encontrar a solução mais geral da equação (3.87), a função $\epsilon(t, E)$ pode ser escrita como

$$\epsilon(t, E) = A(t)B(E). \quad (3.88)$$

Substituindo (3.88) em (3.87)

$$\frac{1}{A(t)H(t)} \frac{dA(t)}{dt} = C_1 \quad \text{e} \quad \frac{E}{B(E)} \frac{dB(E)}{dE} = C_1, \quad (3.89)$$

onde C_1 é a constante de separação de variáveis. Portanto, de (3.89) se tem

$$\epsilon(t, E) = C \left[E \exp \left(\int^t H(t') dt' \right) \right]^{C_1}, \quad (3.90)$$

onde C é uma constante arbitrária. Mas

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}. \quad (3.91)$$

Portanto,

$$\int^t H(t') dt' = \ln R(t). \quad (3.92)$$

De (3.92), a equação (3.90) fica

$$\epsilon(t, E) = C [ER(t)]^{C_1}. \quad (3.93)$$

Esta é a forma mais geral da coordenada ϵ para que a equação (3.82) não tenha a derivada $\partial/\partial\epsilon$. Podemos ver facilmente que se a $C_1 = 1$ e $C = 1/R_0$ a coordenada ϵ fica

$$\epsilon(t, E) = \frac{ER(t)}{R_0} = \frac{E}{1+z(t)}, \quad (3.94)$$

onde $z(t)$ é o *redshift* definido em (3.11) e R_0 é o raio atual do universo.

A coordenada λ é arbitrária. Mas, da equação (3.86), se pode ver que se obtém uma simplificação a mais escolhendo $\lambda = \lambda(t)$, já que neste caso $\partial\lambda/\partial E = 0$.

A equação (3.82) expressa nestas novas coordenadas, λ e ϵ , toma a seguinte forma:

$$\left[\frac{\partial\lambda}{\partial t} \frac{\partial}{\partial\lambda} - H(\lambda) \right] \Phi_{\nu_i}(\epsilon, \lambda) = -\frac{\Gamma_i m_i}{(1+z(\lambda))\epsilon} \Phi_{\nu_i}(\epsilon, \lambda) + \sum_{m_j > m_i} q_{ji}(\epsilon, \lambda) + R_{SN}(\lambda) Y_{\nu_i}(\epsilon). \quad (3.95)$$

onde $\Gamma_i = 1/\tau_i$.

A equação (3.95) é de primeira ordem, portanto se pode solucionar de uma maneira geral usando um fator integrante. Mas primeiro, é bom expressá-la da seguinte maneira

$$\frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial\Phi_{\nu_i}(\epsilon, \lambda)}{\partial\lambda} - \left[H(\lambda) - \frac{\Gamma_i m_i}{(1+z(\lambda))\epsilon} \right] \Phi_{\nu_i}(\epsilon, \lambda) = F(\epsilon, \lambda), \quad (3.96)$$

onde

$$F(\epsilon, \lambda) = \sum_{m_j > m_i} q_{ji}(\epsilon, \lambda) + R_{SN}(\lambda) Y_{\nu_i}(\epsilon). \quad (3.97)$$

A equação (3.96) tem uma solução da forma

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu_i}(\epsilon, \lambda) = & \exp \left(\int_0^\lambda \frac{1}{\dot{\lambda}} \left[H(\lambda') - \frac{\Gamma_i m_i}{(1+z(\lambda'))\epsilon} \right] d\lambda' \right) \times \\ & \int_\lambda^\infty d\lambda' \left\{ \exp \left(- \int_0^{\lambda'} \frac{1}{\dot{\lambda}} \left[H(\lambda'') - \frac{\Gamma_i m_i}{(1+z(\lambda''))\epsilon} \right] d\lambda'' \right) F'(\epsilon, \lambda') \right\} + C(\epsilon), \end{aligned} \quad (3.98)$$

onde $\dot{\lambda} = d\lambda/dt$, $F'(\epsilon, \lambda) = F(\epsilon, \lambda)/\dot{\lambda}$ e $C(\epsilon)$ é uma função arbitrária.

λ é uma função arbitrária do tempo, t , mas para poder realizar as integrais em (3.98) explicitamente, se tem que escolher uma forma particular de $\lambda(t)$. Ao mesmo tempo, essa forma particular de $\lambda(t)$, tem que permitir o cálculo da função $\Phi_{\nu_i}(\epsilon, \lambda)$ em termos de variáveis físicas disponíveis atualmente. A forma adequada para $\lambda(t)$ é facilmente vista da equação (3.97), já que a função R_{SN} é dada atualmente em função da variável de *redshift*, z . Portanto $\lambda(t)$ pode depender do tempo, t , através de z , isto é $\lambda = \lambda(z)$. Por simplicidade se escolhe $\lambda = z$.

$$\Phi_{\nu_i}(\epsilon, z) = \frac{1}{1+z} \exp \left(\frac{\Gamma_i m_i}{\epsilon} \int_0^z H(z'')^{-1} (1+z'')^{-2} dz'' \right) \times \int_z^\infty dz' \left\{ (1+z') \exp \left(-\frac{\Gamma_i m_i}{\epsilon} \int_0^{z'} H(z'')^{-1} (1+z'')^{-2} dz'' \right) F'(\epsilon, z') \right\} + C(\epsilon), \quad (3.99)$$

$$\Phi_{\nu_i}(\epsilon, z) = \frac{1}{1+z} \exp \left(\frac{\Gamma_i m_i}{\epsilon} \eta(z) \right) \times \int_z^\infty dz' \left\{ (1+z') \exp \left(-\frac{\Gamma_i m_i}{\epsilon} \eta(z') \right) F'(\epsilon, z') \right\} + C(\epsilon), \quad (3.100)$$

onde

$$\eta(z) = \int_0^z H(z')^{-1} (1+z')^{-2} dz'. \quad (3.101)$$

Então a função $\Phi_{\nu_i}(\epsilon, z)$ em termos de ϵ e z é

$$\Phi_{\nu_i}(\epsilon, z) = \frac{1}{1+z} \int_z^\infty \frac{dz'}{H(z')} \left\{ \exp \left[\frac{-\Gamma_i m_i}{\epsilon} \left(\eta(z') - \eta(z) \right) \right] F(\epsilon, z') \right\} + C(\epsilon), \quad (3.102)$$

voltando à variável E , a equação (3.102) fica,

$$\Phi_{\nu_i}(E, z) = \frac{1}{1+z} \int_z^\infty \frac{dz'}{H(z')} \left\{ \sum_{m_j > m_i} q_{ji} \left(E \frac{1+z'}{1+z}, z \right) + R_{SN}(z') Y_{\nu_i} \left(E \frac{1+z'}{1+z} \right) \right\} \times \exp \left[\frac{-\Gamma_i m_i (1+z)}{E} \left(\eta(z') - \eta(z) \right) \right] + C(E). \quad (3.103)$$

A função $C(E)$ ainda continua arbitrária. O valor desta função pode ser encontrado tendo em vista que a equação (3.103) para $z = 0$ e $\Gamma_i = 0$ deve ser igual à equação (3.58). Neste caso $q_{ji} = 0$, como se pode ver da equação (3.83). Portanto, se vê que $C(E) = 0$. Então finalmente se tem que $\Phi_{\nu_i}(\epsilon, z)$ é

$$\Phi_{\nu_i}(E, z) = \frac{1}{1+z} \int_z^\infty \frac{dz'}{H(z')} \left\{ \sum_{m_j > m_i} q_{ji} \left(E \frac{1+z'}{1+z}, z \right) + R_{SN}(z') Y_{\nu_i} \left(E \frac{1+z'}{1+z} \right) \right\} \times \exp \left[\frac{-\Gamma_i m_i (1+z)}{E} \left(\eta(z') - \eta(z) \right) \right]. \quad (3.104)$$

Esta equação é válida para um espectro de massa genérico m_i , uma taxa de decaimento Γ_i , e um espectro de energia $\psi_{\nu_j \rightarrow \nu_i}(E, E')$. Os efeitos de oscilações de sabor estão incluídos nos Y_{ν_i} da mesma maneira como para o caso em que apenas oscilações foram considerados na seção 3.5.

Da equação (3.104), se vê que $1/H(z')$ cancela os efeitos dos parâmetros cosmológicos, Ω_M e Ω_Λ , de $R_{SN}(z')$, mas estes efeitos não são cancelados com os outros termos da equação (3.104). Portanto, para o caso de oscilações com decaimentos, o fluxo de neutrinos de relíquias de supernovas depende dos parâmetros cosmológicos.

3.7 Aplicações

Nesta seção se aplicam os resultados gerais obtidos na seção 3.6 para decaimentos de neutrinos via um majoron no vácuo. Algumas simplificações serão feitas para fazer a análise independente do modelo e para que os efeitos devidos aos decaimentos sejam ressaltados.

3.7.1 Decaimentos para três famílias de neutrinos com hierarquia normal e massas quase degeneradas

Neste cenário a hierarquia de massa é normal, $\Delta m_{23}^2 > 0$, e as massas quadradas são consideradas bem maiores maiores que as suas diferenças quadradas de massas, $m_i^2 \gg \Delta m_{23}^2, \Delta m_{12}^2$. As funções $\psi_{ji}(E_j, E_i)$ definidas na equação (3.85), que representam a probabilidade por unidade de energia que ocorra o processo $\nu_i(E_i) \rightarrow \overset{(-)}{\nu_j}(E_j) + \chi$, se podem calcular das equações (1.31) e (1.32) deduzidas no capítulo 1 ou das equações (2.95) e (2.103) deduzidas no capítulo 2. Por comodidade, serão repetidas aqui (só para o acoplamento escalar):

$$\Gamma(\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi) = \frac{m_i m_j}{16\pi E_i} g_{ij}^2 \left[\frac{x}{2} + 2 + \frac{2}{x} \ln(x) - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2x^3} \right], \quad (3.105)$$

$$\Gamma(\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi) = \frac{m_i m_j}{16\pi E_i} g_{ij}^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{2}{x} \ln(x) - \frac{1}{2x^3} \right], \quad (3.106)$$

onde $x = m_i/m_j$ e g_{ij} é a constante de acoplamento escalar.

No limite quando $m_i \rightarrow m_j$, mas mantendo a diferença $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2 \neq 0$, as equações (3.105) e (3.106) são iguais a

$$\Gamma(\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi) = \frac{g_{ij}^2}{16\pi} \frac{\Delta m_{ij}^2}{4E_i}, \quad (3.107)$$

e

$$\Gamma(\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi) = \frac{g_{ij}^2}{16\pi} \frac{m_i^2}{E_i} \times \vartheta \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{m_i^2} \right)^3. \quad (3.108)$$

Para o caso de $m_i^2(m_j^2) \gg \Delta m_{ij}^2$ a equação (3.108) é

$$\Gamma(\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi) \approx 0. \quad (3.109)$$

Portanto, para este caso $\psi_{21}(\nu_2(E_2) \rightarrow \bar{\nu}_1(E_1)) = 0$. A outra função $\psi_{21}(\nu_2(E_2) \rightarrow \nu_1(E_1))$ é diferente de zero, como se vê da equação (3.107), e por simplicidade pode ser tomada igual a

$$\psi_{21}(\nu_2(E_2) \rightarrow \nu_1(E_1)) = \delta(E_2 - E_1). \quad (3.110)$$

A equação (3.110) também pode ser justificada percebendo que se $m_2 \approx m_1$ o neutrino filho, ν_1 , deve ter quase a mesma energia que o neutrino pai e portanto é natural que a probabilidade por unidade de energia, ψ , seja dada por uma função δ de Dirac. Portanto, para o contexto de neutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas só serão considerados os decaimentos $\bar{\nu}_3 \rightarrow \bar{\nu}_{1,2}$ e $\bar{\nu}_2 \rightarrow \bar{\nu}_1$.

Para usar a solução da equação (3.104) para o caso do fluxo de neutrinos $\bar{\nu}_e$ ainda falta definir os valores das B_{ji} . Por simplicidade se supõe que $B(\bar{\nu}_3 \rightarrow \bar{\nu}_2) = B(\bar{\nu}_3 \rightarrow \bar{\nu}_1) = 1/2$. Como o

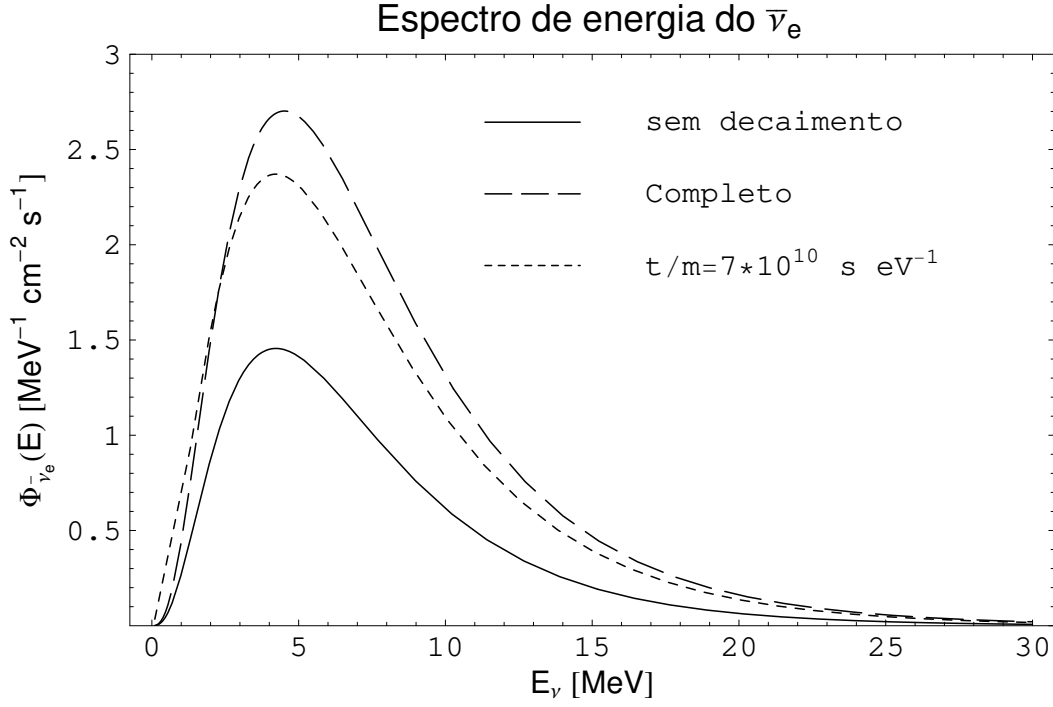


Figura 3.10: Fluxo de neutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas para três neutrinos com hierarquia de massa normal e massas quase degeneradas, isto é, $m_i^2 \gg \Delta m_{23}^2, \Delta m_{12}^2$.

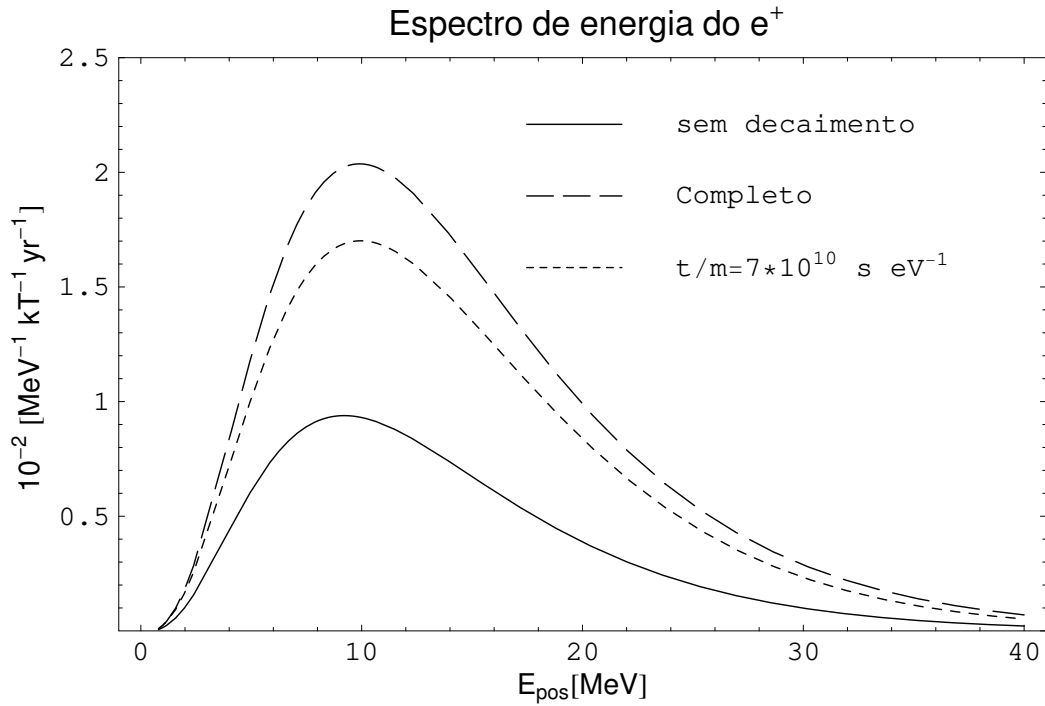


Figura 3.11: Espectro de energia do pósitron produzido na reação $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$, para três neutrinos com hierarquia de massa de normal e massas quase degeneradas, isto é, $m_i^2 \gg \Delta m_{23}^2, \Delta m_{12}^2$.

decaimento $\nu_2 \rightarrow \bar{\nu}_1$ está proibido, $B(\nu_2 \rightarrow \bar{\nu}_1) = 0$, e portanto, $B(\bar{\nu}_2 \rightarrow \bar{\nu}_1) = 1$. Também as razões dos tempos de decaimento com respeito as masas, τ_i/m_i , serão consideradas iguais, isto é, $\tau_2/m_2 = \tau_3/m_3 = \tau/m$.

Na figura 3.10 mostramos o fluxo de neutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas por unidade de energia para o caso discutido nesta seção. Para $\tau_i/m_i = 7 \times 10^{10}$ s/eV, o fluxo é quase ≈ 1.5 vezes maior que para o caso em que só há oscilação (sem decaimentos), discutido na seção 3.6. O caso de decaimento completo é ainda maior. Isto é entendido da seguinte maneira: no estado final todos os neutrinos decaíram no neutrino ν_1 que é absolutamente estável, portanto a função final $Y_{\bar{\nu}_1}$ é composta da componente inicial, $Y_{\bar{\nu}_1} = Y_{\bar{\nu}_e}$, e das componentes provenientes dos decaimentos dos outros dois tipos de neutrinos, $\bar{\nu}_2$ e $\bar{\nu}_3$, os quais contribuem com $Y_{\bar{\nu}_2} + Y_{\bar{\nu}_3} = Y_{\nu_x} + Y_{\nu_x} = 2Y_{\nu_x}$ (ver tabela 3.3). Portanto, o fluxo final de $\bar{\nu}_e$ que está dado por (3.70), é proporcional a $\cos^2 \theta_{12}$ vezes a densidade final de $\bar{\nu}_1$, isto é, $\cos^2 \theta_{12} Y_{\bar{\nu}_e} + 2 \cos^2 \theta_{12} Y_{\nu_x}$, que comparado ao caso de só oscilações, onde o fluxo é proporcional a $\cos^2 \theta_{12} Y_{\bar{\nu}_e} + \sin^2 \theta_{12} Y_{\nu_x}$, é maior. Na figura 3.11 se mostra o espectro de energia do pósitron produzido na reação $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ para o caso tratado aqui.

Pode-se concluir que no caso considerado nesta seção, é possível obter fluxos de neutrinos $\bar{\nu}_e$ maiores do que no caso usual de oscilações. Em particular, se o decaimento for total o fluxo chega a ser quase 2 vezes maior que para o caso de oscilações.

3.7.2 Decaimentos para três famílias de neutrinos com hierarquia invertida

Neste cenário a hierarquia de massa é invertida, $\Delta m_{23}^2 < 0$. Também, se assume que $B(\bar{\nu}_2 \rightarrow \bar{\nu}_1) = 1/2 = B(\nu_2 \rightarrow \nu_1)$ são fixas, e que as razões τ_1/m_1 e τ_2/m_2 são iguais, isto é, $\tau_1/m_1 = \tau_2/m_2 = \tau/m$. Com estas suposições, unicamente o decaimento $\bar{\nu}_2 \rightarrow \bar{\nu}_1$ é relevante para o fluxo de neutrinos $\bar{\nu}_e$.

Para o neutrino $\bar{\nu}_2(\nu_2)$, fazemos as mesmas suposições da seção anterior de que o decaimento $\bar{\nu}_2 \rightarrow \nu_1(\nu_2 \rightarrow \bar{\nu}_1)$ é proibido. Os decaimentos em neutrino $\bar{\nu}_3$ ($\bar{\nu}_2 \rightarrow \bar{\nu}_3$, $\nu_2 \rightarrow \bar{\nu}_3$, $\bar{\nu}_1 \rightarrow \bar{\nu}_3$, $\nu_1 \rightarrow \bar{\nu}_3$) são desprezíveis para o cálculo do fluxo de neutrinos $\bar{\nu}_e$, já que eles são proporcionais a $\sin^2 \theta_{13}$, que é muito pequeno e não foi considerado na equação (3.70).

Neste cenário, o valor da massa do neutrino $\bar{\nu}_3$, m_3 , não é relevante no cálculo do fluxo do neutrino $\bar{\nu}_e$, já que o efeito produzido por esta é abrir ou fechar os decaimentos $\nu_2 \rightarrow \bar{\nu}_3$, $\nu_1 \rightarrow \bar{\nu}_3$, que já mencionamos, contribuem proporcionalmente a $\sin^2 \theta_{13}$.

Na figura 3.12, mostramos o fluxo de neutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas para o caso de uma hierarquia de massa invertida, e qualquer valor de m_3 . Desta figura se vê que o caso de decaimento total neste cenário é trivial, já que quando isto ocorre, todos os neutrinos instáveis ($\bar{\nu}_2$, $\bar{\nu}_1$, ν_2 , ν_1) decaem em $\bar{\nu}_3$ totalmente estável, que na aproximação feita na equação (3.48) e (3.49), não contribui ao fluxo do neutrino $\bar{\nu}_e$, e portanto, o fluxo final de neutrino $\bar{\nu}_e$ é zero. Apresentam-se os fluxos para um decaimento parcial, com $\tau/m = 10^{10}$ s/eV, que a despeito do caso da seção 3.7.1, depende do valor da probabilidade P_H . Na figura 3.12, mostramos os casos para com $P_H = 1$ e $P_H = 0$. Como se pode ver, o fluxo nesses casos são menores que os fluxos sem decaimentos. Na figura 3.13 se mostra o espectro de energia do pósitron produzido na reação $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ para o caso tratado aqui.

Em conclusão, neste cenário e na aproximação de $\sin \theta_{13}$ muito pequeno, o fluxo do neutrino $\bar{\nu}_e$, é suprimido pelos decaimentos, chegando a ser zero para o caso de decaimento total.

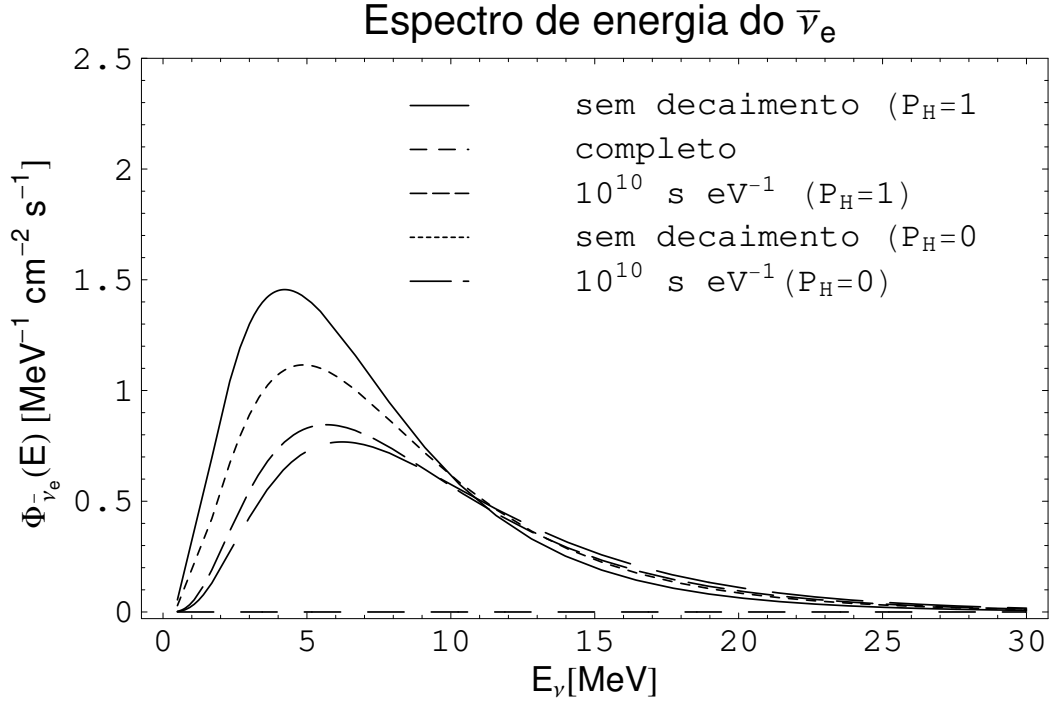


Figura 3.12: Fluxo de neutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas para o caso de uma hierarquia invertida de massa, e uma massa m_3 qualquer.

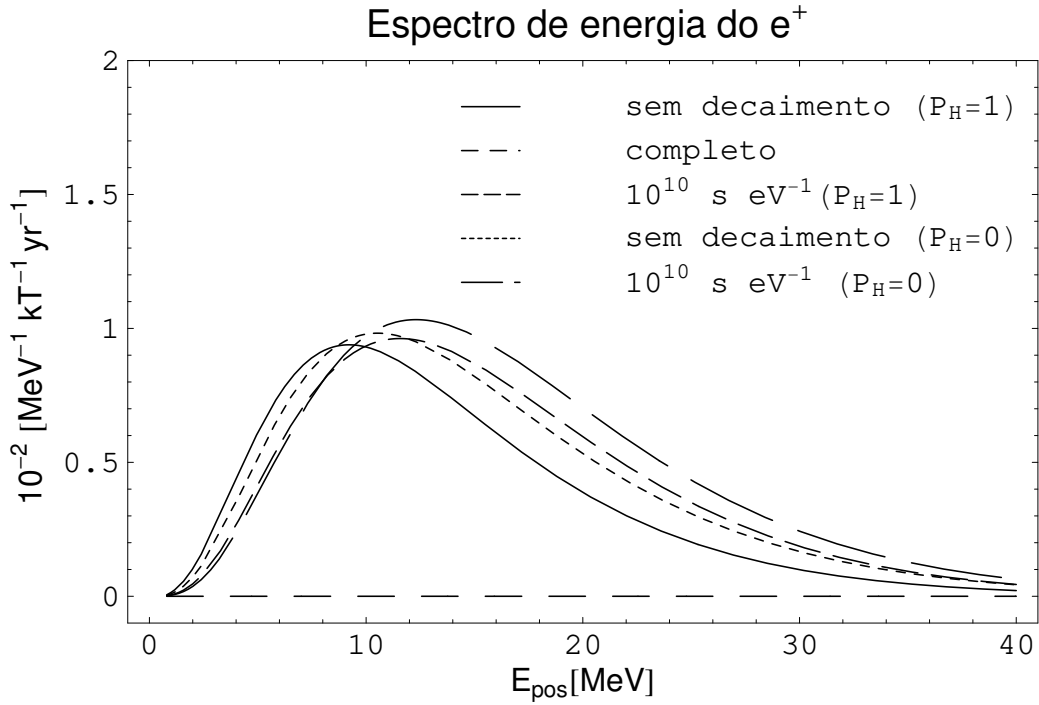


Figura 3.13: Espectro de energia do pósitron produzido na reação $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$, para três neutrinos com hierarquia de massa de normal e massas quase degeneradas, isto é, $m_i^2 \gg \Delta m_{23}^2, \Delta m_{12}^2$, para o caso de uma hierarquia de massa invertida, e uma massa m_3 qualquer.

Conclusões

Nesta dissertação, estudamos os decaimentos não radiativos de neutrinos de Majorana, via bósons sem massa, no vácuo e na matéria. Os acoplamentos considerados entre os neutrinos e os bósons foram de tipo escalar ou pseudoescalar. Em particular estudamos os processos $\nu_i \rightarrow \nu_j + \chi$ e $\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi$ (onde χ representa o campo escalar ou pseudoescalar).

No vácuo, calculamos as taxas efetivas na ordem mais baixa da teoria de perturbações usando o formalismo convencional para neutrinos de Majorana. Mostramos que as taxas de decaimento para os dois processos considerados são comparáveis, independentemente da natureza dos acoplamentos. Para o caso particular de $m_i \gg m_j$ (onde m_x representa a massa do neutrino x) demonstramos que as taxas de decaimentos para os dois processos são iguais. Também estudamos estas taxas de decaimento no caso limite quando $m_i \rightarrow m_j$, mas mantendo a diferença $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2 \neq 0$, concluindo que o processo $\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j + \chi$ é proibido.

Na matéria, resolvemos as equações de campo de neutrinos de Majorana, usando o formalismo de helicidade de dois componentes introduzido em [29] para uma teoria geral (n, m) , onde se tem n campos que pertencem a dubletos de $SU_L(2)$ (neutrinos ativos) e m campos isosingletos de $SU_L(2)$ (neutrinos estéreis). Estas equações são obtidas da lagrangiana efetiva a baixas energias. Com estas expressões gerais, calculamos as taxas de decaimentos para todos os casos possíveis, isto é, decaimentos que conservam e que não conservam a helicidade. A despeito do vácuo, na matéria, encontramos duas profundas mudanças. A primeira mudança se deve ao fato de que na matéria, as massas quadradas dos neutrinos são altamente incrementadas, o que conduz a um maior espaço de fase disponível para os decaimentos, permitindo assim, decaimentos que não são possíveis no vácuo. Para mostrar este fenômeno, usamos o formalismo geral para encontrar o espectro de massas quadradas para o caso de dois neutrinos de Majorana, especificamente dois neutrinos ativos ou um neutrino ativo e um neutrino estéril. Também mostramos que para o caso de neutrinos relativísticos na matéria ordinária ($V < m \ll P$, $V \ll P$) as expressões para as massas quadradas coincidem com aquelas calculadas do efeito MSW. A segunda mudança ocorre devido ao fato dos acoplamentos serem misturados, o que implica que decaimentos rápidos são possíveis, inclusive no caso da matriz de acoplamentos na base de massa seja diagonal. Mostramos esse fenômeno para alguns casos particulares onde comparamos os tempos de decaimento na matéria com os respectivos tempos no vácuo. Observamos um decréscimo considerável nos tempos de decaimento na matéria. Adicionalmente, usamos este formalismo para deduzir as taxas de decaimento dos neutrinos de Majorana no vácuo e comparamos os resultados com aqueles obtidos no formalismo convencional (no vácuo) o que de certa forma foi usado como teste de validade e generalidade.

Decaimentos de neutrinos com tempos de vida relevantes podem ser provados, em princípio,

através de observações de neutrinos relíquias de supernovas, portanto, nesta dissertação, calculamos o fluxo de antineutrinos $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas que chegam à terra considerando simultaneamente as oscilações e os decaimentos dos neutrinos estudados anteriormente. Para o cálculo deste fluxo só consideramos decaimentos de neutrinos no vácuo. Primeiro, calculamos o fluxo de $\bar{\nu}_e$ relíquias de supernovas levando em conta as oscilações de neutrinos para os dois tipos de hierarquia de massas possíveis atualmente, hierarquia de massa normal e invertida. Depois, incluímos os efeitos dos decaimentos de neutrinos no fluxo resolvendo as equações de Boltzmann para a função de densidade de neutrinos relíquias de supernovas por unidades de energia. Implementamos esta solução no software Mathematica para dois casos diferentes. No primeiro, tratamos os decaimentos de neutrinos com massas quase degeneradas e hierarquia normal. No segundo, consideramos os decaimentos para neutrinos com hierarquia invertida e qualquer valor da massa m_3 . Comparamos os fluxos obtidos com os casos de neutrinos estáveis e de decaimento total. Para o caso de hierarquia normal e massas quase degeneradas foi encontrado que o fluxo para o caso de neutrinos instáveis é maior que para o caso de neutrinos estáveis. A conclusão oposta foi encontrada para o caso de hierarquia invertida.

Em nosso cálculo do fluxo, não consideramos os efeitos da matéria da terra, nem o efeito dos detectores atuais e futuros, tais como, o Super-kamiokande, SNO [69], KamLand [70], Hyper-Kamiokande [71]. Outro importante efeito a ser incluído são os efeitos de decaimentos de neutrinos na matéria (estudados no capítulo 2 desta dissertação), que podem alterar profundamente o fluxo aqui calculado. Todos estes efeitos podem ser considerados em futuros trabalhos.

Potenciais efetivos induzidos na matéria

A.1 Generalidades do modelo padrão das interações fracas

Os neutrinos são férmions que não tem interações fortes nem eletromagnéticas. Na linguagem da teoria de grupos, eles são singletos de $SU(3)_C \times U(1)_{EM}$. Os neutrinos ativos tem interações fracas, isto é, eles não são singletos de $SU(2)_L$. No modelo padrão de interações fracas há três neutrinos ativos. Estes estão organizados em três dubletos leptônicos.

$$L_\ell = \begin{pmatrix} \nu_{\ell,L} \\ \ell_L \end{pmatrix}, \quad \ell = e, \mu, \tau, \quad (\text{A.1})$$

aqui e, μ, τ , são os autoestados leptônicos carregados. Os três neutrinos estados próprios de interação, ν_e, ν_μ, ν_τ , estão associados com os anteriores léptons carregados de $SU(2)_L$. Como os neutrinos não se acoplam diretamente com o fóton, a lagrangina da interação fraca envolvendo neutrinos pode se escrever como [52],

$$L_W = i \frac{g_W}{\sqrt{2}} (j_\mu^{(+)} W^\mu + j_\mu^{(-)} W^{\mu\dagger}) + i \frac{g_W}{2 \cos \theta_W} j_\mu^{(Z)} Z^\mu, \quad (\text{A.2})$$

onde g_W é a constante de acoplamento das interações fracas. A corrente neutra $j_\mu^{(Z)}$ pode ser escrita como

$$j_\mu^{(Z)} = 2(j_\mu^{(3)} - \sin^2 \theta_W j_\mu^{em}). \quad (\text{A.3})$$

Escrevendo explicitamente as correntes fracas para o caso da primeira família de léptons se tem

$$\begin{aligned} j_\mu^{(+)} &= \bar{\nu}_{e,L} \gamma_\mu e_L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e, \\ j_\mu^{(-)} &= \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_{e,L} = \frac{1}{2} \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e, \\ j_\mu^{(Z)} &= \bar{\nu}_{e,L} \gamma_\mu \nu_{e,L} - \bar{e}_L \gamma_\mu e_L + 2 \sin^2 \theta_W \bar{e} \gamma_\mu e \\ &= \frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e - \frac{1}{2} \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \\ &\quad + 2 \sin^2 \theta_W \bar{e} \gamma_\mu e. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A lagrangiana na equação (A.2) conduz ao seguinte hamiltoniano efetivo definido através da matriz S até segunda ordem em g_W

$$S = \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y \ T[[i \frac{g_W}{\sqrt{2}} (j_\mu^{(+)} W^\mu + j_\mu^{(-)} W^{\mu\dagger}) + i \frac{g_W}{2 \cos \theta_W} j_\mu^{(Z)} Z^\mu] [i \frac{g_W}{\sqrt{2}} (j_\mu^{(+)} W^\mu + j_\mu^{(-)} W^{\mu\dagger}) + i \frac{g_W}{2 \cos \theta_W} j_\mu^{(Z)} Z^\mu]] = -i \int H_{eff}(x) d^4x, \quad (A.5)$$

onde $T[\dots]$ denota o produto temporalmente ordenado. Aplicando o teorema de Wick e deixando só aquelas contrações que tem dois campos de elétrons e dois campos de neutrinos sem contrair, o hamiltoniano efetivo fica

$$H_{eff} = \frac{g_W^2}{4m_W^2} (j^{(+)\mu} j_\mu^{(-)} + h.c.) + \frac{g_W^2}{8m_Z^2 \cos^2 \theta_W} j^{(Z)\mu} j_\mu^{(Z)}, \quad (A.6)$$

onde se tem aproximado os propagadores dos bósons $W^\pm$ e Z abaixo energias, isto é para $q^2 \leq m_z^2$ e $q^2 \leq m_w^2$, da seguinte maneira

$$W^\mu W^{\nu\dagger} = -i \frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / m_w^2}{q^2 - m_w^2} \cong \frac{g_{\mu\nu}}{m_w^2}, \quad (A.7)$$

$$Z^\mu Z^{\nu\dagger} = -i \frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / m_z^2}{q^2 - m_z^2} \cong \frac{g_{\mu\nu}}{m_z^2}. \quad (A.8)$$

O Hamiltoniano efetivo, (A.6), se pode escrever de outra maneira usando as seguintes relações

$$\frac{g_w^2}{8m_w^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \quad e \quad m_W^2 = m_Z^2 \cos^2 \theta_W, \quad (A.9)$$

onde G_F é a constante de Fermi. Por tanto usando essas duas relações se tem que o hamiltoniano efetivo se pode escrever como

$$H_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (2j^{(+)\mu} j_\mu^{(-)} + h.c.) + \frac{G_F}{\sqrt{2}} j^{(Z)\mu} j_\mu^{(Z)}. \quad (A.10)$$

A.2 Potencial efetivo induzido na matéria

Quando um neutrino se propaga na matéria, suas propriedades são modificadas pela interação das partículas no meio, resultando mudanças coerentes ou incoerentes. Com mudanças coerentes o meio permanece o mesmo, permitindo a interferência das funções de onda do neutrino esalhado e não esalhado. O requerimento de coerência é que o estado final e inicial no meio permanecem exatamente os mesmos. Qualquer mudança nos estados poderia produzir ondas incoerentes que poderiam não interferir com as ondas não esalhadas [72]. A preservação da coerência gera uma energia potencial adicional $V_\ell = V_{\ell,C} + V_{\ell,N}$. Isto é determinado pelo espalhamento elástico para frente devido à interação de corrente neutra ($V_{\ell,N}$) e de corrente carregada ($V_{\ell,C}$) com as partículas no meio, como foi primeiro discutido por Wolfenstein [37]. A seguir calcularei o potencial efetivo V_e devido aos elétrons no meio.

A.2.1 Potencial efetivo de corrente carregada devido aos elétrons no meio

O hamiltoniano efetivo de corrente carregada devido aos elétrons na matéria é [73]

$$H_C^{(e)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3 p_e f(E_e, T) \times \langle \langle e(p_e) | \bar{e}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e(x) \bar{\nu}_e(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e(x) | e(p_e) \rangle \rangle, \quad (\text{A.11})$$

onde $f(E_e, T)$ é a distribuição de elétrons com energia E_e num meio homogêneo e isotrópico com temperatura T (no referencial de repouso do meio). A condição de coerência é implementada escolhendo o mesmo momento para os elétrons iniciais e finais. Fazendo uma transformação de Fierz (ver Apêndice B), a equação (A.11) fica

$$H_C^{(e)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e(x) \times \int d^3 p_e f(E_e, T) \langle \langle e(p_e) | \bar{e}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(x) | e(p_e) \rangle \rangle. \quad (\text{A.12})$$

Expandindo os campos dos elétrons em ondas parciais e fazendo as diversas contrações com os estados iniciais e finais se tem

$$\begin{aligned} \langle e(p_e, s) | \bar{e}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(x) | e(p_e, s) \rangle &= e^{ip_e x} \langle 0 | \bar{u}_s(p_e) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_s(p_e) | 0 \rangle e^{-ip_e x} \\ &= \bar{u}_s(p_e) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_s(p_e). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Agora supondo que o meio tem igual número de elétrons com spin $\pm \frac{1}{2}$ esta equação fica

$$\begin{aligned} \langle \langle e(p_e) | \bar{e}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(x) | e(p_e) \rangle \rangle &= \langle \bar{u}_s(p_e) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_s(p_e) \rangle \\ &= \frac{N_e(p_e)}{2} \sum_s \bar{u}_s(p_e) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_s(p_e) \\ &= \frac{N_e(p_e)}{2} \left[\sum_s (\bar{u}_s)_{1a}(p_e) (u_s)_{b1}(p_e) \right] (\gamma_\mu (1 - \gamma_5))_{ab} \\ &= \frac{N_e(p_e)}{2} \left(\frac{\not{p}_e + m_e}{2E_e} \right)_{ba} \gamma_\mu (1 - \gamma_5)_{ab} \\ &= \frac{N_e(p_e)}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{p}_e + m_e}{2E_e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

O traço é facilmente calculável

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{p}_e + m_e) \gamma_\mu (1 - \gamma_5)] &= \text{Tr}[\not{p}_e \gamma_\mu] + m_e \text{Tr}[\gamma_\mu] - \text{Tr}[\not{p}_e \gamma^\mu \gamma_5] \\ &\quad - m_e \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_5] \\ &= 4p_{e\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Finalmente se chega a

$$\langle \langle e(p_e) | \bar{e}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(x) | e(p_e) \rangle \rangle = N_e \frac{p_{e\mu}}{E_e}, \quad (\text{A.16})$$

onde N_e é a densidade de número de elétrons. Substituindo isto na equação (A.12)

$$H_C^{(e)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e(x) \int d^3 p_e f(E_p, T) N_e \frac{p_{e\mu}}{E_e}, \quad (\text{A.17})$$

$$H_C^{(e)} = N_e \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3 p_e f(E_p, T) \bar{\nu}_e(x) \frac{\gamma^\mu p_{e\mu}}{E_e} (1 - \gamma_5) \nu_e(x), \quad (\text{A.18})$$

mas devido à isotropia do meio, $\int d^3 p f(E, T) p_e = 0$ e à normalização da função $\int d^3 p f(E, T) = 1$, a integral pode ser escrita como

$$\int d^3 p_e f(E_p, T) \frac{\gamma^\mu p_{e\mu}}{E_e} = \int d^3 p_e f(E_p, T) [\gamma^0 - \frac{\gamma^i p_e^i}{E_e}] = \gamma^0. \quad (\text{A.19})$$

Com isto o hamiltoniano finalmente fica

$$H_C^{(e)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e(x) \gamma^0 (1 - \gamma_5) \nu_e(x). \quad (\text{A.20})$$

Deste hamiltoniano se pode calcular o potencial induzido pelos elétrons no meio. Isto se faz da seguinte forma

$$\begin{aligned} V_C &= \left\langle \nu_e \left| \int d^3 x H_C^{(e)} \right| \nu_e \right\rangle \\ &= \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}} \left\langle \nu_e \left| \int d^3 x \bar{\nu}_e(p_e) \gamma^0 (1 - \gamma_5) \nu_e(x) \right| \nu_e \right\rangle \\ &= \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}} \int d^3 x \bar{u}^s(p_e) \gamma^0 (1 - \gamma_5) u^s(p_e) \\ &= \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}} \int d^3 x \bar{u}^s(p_e) \gamma^0 u^s(p_e) \\ &= \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}} \int d^3 x 2 \bar{u}^{s\dagger}(p_e) u^s(p_e) \\ &= \sqrt{2} G_F N_e. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Este é potencial induzido de corrente carregada para os ν_e devido aos elétrons no meio.

A.2.2 Potencial efetivo de corrente neutra devido aos elétrons no meio

O hamiltoniano efetivo de corrente neutra para os ν_e devido aos elétrons no meio é

$$\begin{aligned} H_N^{(e)} &= -\frac{G_F}{2\sqrt{2}} \int d^3 p_e f(E_e, T) \\ &\times \left\langle \langle e(p_e) | \bar{\nu}_e(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e(x) \bar{e}(x) [\gamma^\mu (1 - \gamma_5) - 4 \sin^2 \theta_W \gamma^\mu] e(x) | e(p_e) \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

O hamiltoniano efetivo neutro da equação (A.22) tem duas partes. A primeira

$$\begin{aligned} H_{N1}^{(e)} &= -\frac{G_F}{2\sqrt{2}} \int d^3 p_e f(E_e, T) \\ &\times \left\langle \langle e(p_e) | \bar{\nu}_e(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e(x) \bar{e}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e(x) | e(p_e) \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

já foi calculada na seção anterior e seu resultado com a diferença de um fator de $-\frac{1}{2}$ é a equação (A.20).

A segunda parte do Hamiltoniano se calcula da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
H_{N2}^{(e)} &= 4 \sin^2 \theta_W \frac{G_F}{2\sqrt{2}} \int d^3 p_e f(E_{e,T}) \\
&\quad \times \langle \langle e(p_e) | \bar{\nu}_e(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e(x) \bar{e}(x) \gamma^\mu e(x) | e(p_e) \rangle \rangle \\
&= 4 \sin^2 \theta_W \frac{G_F}{2\sqrt{2}} \int d^3 p_e f(E_{e,T}) \\
&\quad \times \bar{\nu}_e(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e(x) \langle \langle e(p_e) | \bar{e}(x) \gamma^\mu e(x) | e(p_e) \rangle \rangle.
\end{aligned} \tag{A.24}$$

O elemento de matriz é igual a

$$\langle \langle e(p_e) | \bar{e}(x) \gamma^\mu e(x) | e(p_e) \rangle \rangle = \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{p}_e + m_e}{2E_e} \right) \gamma^\mu \right] = \frac{N_e p_e^\mu}{E_e}. \tag{A.25}$$

Fazendo cálculos similares aos da seção anterior se obtém finalmente para a segunda parte e para o hamiltoniano total, obtemos as seguintes expressões

$$H_{N2}^{(e)}(x) = \frac{G_F N_e}{2\sqrt{2}} 4 \sin^2 \theta_W \bar{\nu}_e(x) \gamma_0 (1 - \gamma_5) \nu_e(x), \tag{A.26}$$

$$H_N^{(e)}(x) = -\frac{G_F N_e}{2\sqrt{2}} (1 - 4 \sin^2 \theta_W) \bar{\nu}_e(x) \gamma_0 (1 - \gamma_5) \nu_e(x). \tag{A.27}$$

O potencial induzido é

$$\begin{aligned}
V_N &= \left\langle \nu_e \left| \int d^3 x H_N^{(e)} \right| \nu_e \right\rangle \\
&= -\frac{G_F N_e}{\sqrt{2}} (1 - 4 \sin^2 \theta_W).
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Para o potencial efetivo de corrente neutra devido aos nucleons podemos fazer um cálculo análogo.

A.2.3 Potenciais efetivos para ν_e e $\bar{\nu}_e$ em diferentes meios

Os potenciais efetivos que ν_e e $\bar{\nu}_e$ sentem em diferentes meios são listados na tabela A.1.

É comum expressar os potenciais V_C e V_N devido aos elétrons e aos nêutrons no meio da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
V_C &= \sqrt{2} G_F N_e \cong 7.6 Y_e \rho_{14} \text{ eV}, \\
V_N &= -\frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n \cong -3.8 Y_n \rho_{14} \text{ eV},
\end{aligned} \tag{A.29}$$

onde N_e e N_n são a densidades do número de elétrons e nêutrons no meio, Y_e e Y_n são suas densidades relativas, isto é, $Y_e = N_e/(N_e + N_n)$ e ρ_{14} é a densidade medida em unidades de 10^{14} g/cm^3 .

Meio	V_C	V_N
e^- e e^+	$\pm\sqrt{2}G_F(N_e - N_{\bar{e}})$	$\mp\frac{1}{\sqrt{2}}G_F(N_e - N_{\bar{e}})(1 - 4\sin^2\theta_W)$
p^+ e $\bar{p}$	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}G_F(N_p - N_{\bar{p}})(1 - 4\sin^2\theta_W)$
n e $\bar{n}$	0	$\mp\frac{1}{\sqrt{2}}G_F(N_n - N_{\bar{n}})$
ν_e e $\bar{\nu}_e$	0	$\pm 2\sqrt{2}G_F(N_{\nu_e} - N_{\bar{\nu}_e})$
$\nu_{\mu,\tau}$ e $\bar{\nu}_{\mu,\tau}$	0	$\pm 2\sqrt{2}G_F(N_{\nu_e} - N_{\bar{\nu}_e})$
e^- e p	$\pm\sqrt{2}G_F N_e$	0
e^-, n, p	$\pm\sqrt{2}G_F N_e$	$\mp\frac{1}{\sqrt{2}}G_F N_n$

Tabela A.1: Potenciais efetivos para ν_e e $\bar{\nu}_e$ em diferentes meios. O sinal superior (inferior) se refere ao ν_e ($\bar{\nu}_e$). N_x denota a densidade do número da partícula do tipo x .

Transformação de Fierz

O produto de duas formas bilineares, $\bar{u}\Gamma u$, se pode reordenar da seguinte maneira

$$(\bar{u}_1\Gamma^A u_2)(\bar{u}_3\Gamma^B u_4) = \sum_{C,D} C_{CD}^{AB} (\bar{u}_1\Gamma^C u_4)(\bar{u}_3\Gamma^D u_2), \quad (\text{B.1})$$

com C_{CD}^{AB} dado por

$$C_{CD}^{AB} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\Gamma^A \Gamma^D \Gamma^B \Gamma^C], \quad (\text{B.2})$$

onde Γ^i ($i = A, B, C, D$) podem ser qualquer uma das seguintes matrizes 4×4 : $\{1, i\gamma_\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5\}$.

• Demonstração

Como as matrizes Γ^A , ($\Gamma = 1, i\gamma_\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5$) formam uma base para as matrizes 4×4 o produto de duas formas bilineares podem se escrever como

$$\begin{aligned} (\bar{u}_{1a}\Gamma_{ab}^A u_{2b})(\bar{u}_{3c}\Gamma_{cd}^B u_{4d}) &= \sum_{C,D} C_{CD}^{AB} (\bar{u}_1\Gamma^C u_4)(\bar{u}_3\Gamma^D u_2) \\ &= (\bar{u}_{1a}u_{2b}\bar{u}_{3c}u_{4d}) \sum_{C,D} C_{CD}^{AB} \Gamma_{ad}^C \Gamma_{cb}^D. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Da equação B.3 se vê

$$\Gamma_{ab}^A \Gamma_{cd}^B = \sum_{C,D} C_{CD}^{AB} \Gamma_{ad}^C \Gamma_{cb}^D. \quad (\text{B.4})$$

Multiplicando a equação B.4 por $\Gamma_{da}^E \Gamma_{bc}^F$ e somando sobre a, b, c, d se tem

$$\sum_{a,b,c,d} \Gamma_{ab}^A \Gamma_{bc}^F \Gamma_{cd}^B \Gamma_{da}^E = \sum_{a,b,c,d} \sum_{C,D} C_{CD}^{AB} \Gamma_{ad}^C \Gamma_{da}^E \Gamma_{cb}^D \Gamma_{bc}^F, \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Tr}[\Gamma^A \Gamma^F \Gamma^B \Gamma^E] = \sum_{C,D} C_{CD}^{AB} \text{Tr}[\Gamma^C \Gamma^E] \text{Tr}[\Gamma^D \Gamma^F], \quad (\text{B.6})$$

da propriedade $\text{Tr}[\Gamma^A \Gamma^B] = 4\delta^{AB}$ (onde δ^{AB} é o delta de Kronecker) se chega finalmente a

$$C_{CD}^{AB} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\Gamma^A \Gamma^D \Gamma^B \Gamma^C]. \quad (\text{B.7})$$

Equação de evolução de neutrinos na matéria

Os neutrinos podem ter massas de Dirac ou de Majorana [33], mas na propagação dos neutrinos ultra-relativísticos a estrutura completa do spin não é testada [39]. A interação fraca acopla unicamente as componentes de mão esquerda do campo dos neutrinos. Para partículas ultra-relativísticas, a conservação da quiralidade, que é exata para partículas sem massa é uma boa aproximação pois as correções são da ordem (m/E) . Assim, para neutrinos com $E \gg m$, a propagação da componente de mão esquerda é a única relevante. Por tanto, assumindo um termo de massa de Dirac, a equação de evolução para dois tipos de neutrinos ativos é

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - V_\ell \gamma^0) \nu_{L,\ell} - m \nu_{R,\ell} = 0, \quad (C.1)$$

$$i\partial_\mu \gamma^\mu \nu_{R,\ell} - m \nu_{L,\ell} = 0, \quad (C.2)$$

onde $\ell = \{e, x\}$, $\nu_{(R,L),\ell} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\nu_\ell$, $V_\ell = V_C + V_N$ é o potencial induzido pela matéria para neutrinos eletrônicos e $V_\ell = V_x + V_N$ é o potencial induzido para os outros sabores de neutrinos. O cálculo destes potenciais à baixas energias encontra-se no apêndice A. No modelo padrão o potencial de corrente neutra é o mesmo para todas as famílias de neutrinos.

Para eliminar a estrutura do spin das equações (C.1) e (C.2), multiplicamos por $\partial_\alpha \gamma^\alpha$

$$\begin{aligned} (i\partial_\mu \partial_\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha - \gamma^\alpha \gamma^0 \partial_\alpha V_\ell) \nu_{L,\ell} - m \gamma_\alpha \partial^\alpha \nu_{R,\ell} &= 0, \\ (i\frac{1}{2}[\gamma^\mu \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \gamma^\mu] \partial_\mu \partial_\alpha - \gamma^\alpha \gamma^0 \partial_\alpha V_\ell) \nu_{L,\ell} - m \gamma_\alpha \partial^\alpha \nu_{R,\ell} &= 0, \\ (ig^{\mu\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha - \gamma^\alpha \gamma^0 \partial_\alpha V_\ell) \nu_{L,\ell} - m \gamma_\alpha \partial^\alpha \nu_{R,\ell} &= 0, \\ i\partial^\mu \partial_\mu \nu_{L,\ell} - \gamma^\alpha \gamma^0 \partial_\alpha V_\ell \nu_{L,\ell} - m \gamma_\alpha \partial^\alpha \nu_{R,\ell} &= 0, \end{aligned} \quad (C.3)$$

e se as variações da densidade dos elétrons são pequenas em comparação à escala do comprimento de onda de Broglie, $\frac{1}{V_\ell E} \partial_0 V_\ell \ll 1$ podemos fazer a aproximação $i\partial^\mu V_\ell \approx iV_\ell \partial^\mu$. Adicionalmente, para neutrinos relativísticos e pequenos potenciais, temos que

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha \gamma^0 \partial_\alpha (V_\ell \nu_{L,\ell}) &= \gamma^\alpha \gamma^0 V_\ell \partial_\alpha \nu_{L,\ell} \\ &= V_\ell (\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i) \gamma^0 \nu_{L,\ell} \\ &= V_\ell \gamma^0 (\gamma^0 \partial_0 - \gamma^i \partial_i) \nu_{L,\ell}. \end{aligned} \quad (C.4)$$

Como $E \gg m$, podemos desprezar o termo de massa ($m \rightarrow 0$) na equação de Dirac para obter

$$\begin{aligned} (\gamma^\alpha \partial_\alpha - m) \nu_{L,\ell} &= 0, \\ \gamma^0 \partial^0 \nu_{L,\ell} &\approx -\gamma^i \partial_i \nu_{L,\ell}, \end{aligned} \quad (C.5)$$

e substituindo (C.5) em (C.4) obtemos

$$V_\ell \gamma^0 (\gamma^0 \partial_0 - \gamma^i \partial_i) \nu_{L,\ell} \approx 2V_\ell \partial_0 \nu_{L,\ell}. \quad (\text{C.6})$$

Utilizando a equação (C.6) na equação de movimento (C.3) ficamos com

$$i\partial^\mu \partial_\mu \nu_{L,\ell} - 2V_\ell \partial_0 \nu_{L,\ell} - m\gamma_\alpha \partial^\alpha \nu_{R,\ell} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Para deixar a equação (C.7) somente em termos de $\nu_{L,\ell}$ usamos (C.2), obtendo assim a equação de movimento neutrinos de mão esquerda

$$(\partial^\mu \partial_\mu + 2iV_\ell \partial_0 + m^2) \nu_{L,\ell} = 0. \quad (\text{C.8})$$

Para obter a equação para os neutrinos de mão direita usamos a equação (C.2) e (C.5) em (C.1) obtendo

$$\begin{aligned} i(i\partial_\mu \gamma^\mu - V_\ell \gamma^0) \partial_\alpha \gamma^\alpha \nu_{R,\ell} - m^2 \nu_{R,\ell} &= 0, \\ \partial_\mu \partial^\mu \nu_{R,\ell} + iV_\ell \gamma^0 (\partial_\mu \gamma^\mu) \nu_{R,\ell} + m^2 \nu_{R,\ell} &= 0, \\ \partial_\mu \partial^\mu \nu_{R,\ell} + m^2 \nu_{R,\ell} + iV_\ell \gamma^0 (\partial_0 \gamma^0 + \partial_i \gamma^i) \nu_{R,\ell} &= 0, \\ (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \nu_{R,\ell} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

que é uma equação do tipo Klein-Gordon.

Supondo um tri-momento comum para os estados próprios de massa o termo $\partial^i \partial_i$ da equação (C.8) pode ser eliminado já que só corresponde a um termo proporcional à matriz identidade e portanto pode ser interpretado como uma fase global da função de onda. Portanto as equações (C.8) e (C.9) ficam finalmente

$$\begin{aligned} (\partial^0 \partial_0 + 2iV_\ell \partial_0 + m^2) \nu_{L,\ell} &= 0, \\ (\partial^0 \partial_0 + m^2) \nu_{R,\ell} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Expressando $\nu_{L,\ell}$ como $e^{-iEt} |\nu_{L,\ell}\rangle$, $\nu_{R,\ell}$ como $e^{-iEt} |\nu_{R,\ell}\rangle$ e substituindo na equação (C.10) se obtém

$$\begin{aligned} iE \partial_0 |\nu_{L,\ell}\rangle &= (2V_\ell E + m^2) |\nu_{L,\ell}\rangle, \\ (-iE \partial_0 + m^2) |\nu_{R,\ell}\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Na base de interação, onde o potencial é diagonal, se tem para dois sabores de neutrinos, a equação para a propagação dos neutrinos na matéria

$$i \frac{d}{dt} |\nu_\ell\rangle = \frac{1}{2E} M^2 |\nu_\ell\rangle, \quad (\text{C.12})$$

$$M^2 = U \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} A_e + A_N & 0 \\ 0 & A_x + A_N \end{pmatrix}, \quad (\text{C.13})$$

onde U é a transformação unitária entre as bases de sabor e de massa. A_ℓ ($\ell = e, x$) é $2V_{\ell,C}E$ e A_N é $2V_N E$ (para antineutrinos $A \rightarrow -A$ e $U \rightarrow U^*$). Esta equação foi deduzida pela primeira vez na referência [37]. Para ver uma demonstração usando o formalismo da teoria quântica de campos veja [29].

Referências Bibliográficas

- [1] Y. Fukuda and et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 2644 (1999).
- [2] Y. Fukuda and et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).
- [3] Y. Ashie and et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 101801 (2004).
- [4] S. Fukuda and et al., Phys. Rev. Lett. **539**, 179 (2002).
- [5] Q. R. Ahmad and et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002).
- [6] Q. R. Ahmad and et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 011302 (2002).
- [7] M. B. Smy and et al. (Super-Kamiokande Collaboration), Phys. Rev. D **69**, 011104 (2004).
- [8] B. T. Cleveland and et al., Astrophys. J. **496**, 505 (1998).
- [9] K. Eguchi and et al., Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003).
- [10] K. Sato and S. Ando, Phys. Rev. D **67**, 023004 (2003).
- [11] K. Sato and S. Ando, Phys. Rev. D **68**, 023003 (2003).
- [12] S. Ando, Phys. Lett. B **570**, 11 (2003).
- [13] J. F. Beacom and N. F. Bell, Phys. Rev. D. **65**, 113009 (2002).
- [14] G. Fogli, E. Lisi, A. Mirizzi, and D. Montanino, Phys. Rev. D **69**, 017301 (2004).
- [15] M. Lindner, T. Ohlsson, and W. Winter, nucl. Phys. B **607**, 326 (2001).
- [16] M. Malek and et al, Phys. Rev. Lett. **90**, 061101 (2003).
- [17] C. Kim and W. Lam, Mod. Phys. Lett. A **5**, 297 (1990).
- [18] C. Giunti, C. Kim, and U. Lee, Phys. Rev. D **45**, 1557 (1992).
- [19] J. Bahcall, N. Cabibbo, and A. Yahill, Phys. Rev. Lett. **28**, 316 (1972).
- [20] S. Pakvasa and K. Tennakone, Phys. Rev. Lett. **28**, 1415 (1972).
- [21] G. Gelmini and M. Roncadelli, Phys. Lett. B **99**, 411 (1981).

- [22] G. Gelmini and E. Roulet, Rep. Prog. Phys. **58**, 1207 (1995).
- [23] S. Pakvasa, *Exotic explanations for neutrino anomalies* (1999), URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9905426>.
- [24] V. Barger, J. Learned, S. Pakvasa, and T. Weiler, Phys. Rev. Lett. **82**, 2640 (1999).
- [25] Z. Berezhiani, G. Fiorentini, M. Moretti, and A. Rossi., JETP Lett. **55**, 3 (1992).
- [26] J. Frieman, H. Haber, and K. Freese, Phys. Lett. B **200**, 115 (1988).
- [27] Z. Berezhiani and M. Visotsky, Phys. Lett. B **199**, 281 (1987).
- [28] C. Kim and W. Lam, Mod. Phys. Lett. A **5**, 297 (1990).
- [29] P. Mannheim, Phys. Rev. D **37**, 1935 (1988).
- [30] A. D. Dolgov, Phys. Reports **370**, 333 (2002).
- [31] H. Nunokawa, S. Parke, and R. Z. Funchal, Phys. Rev. D **72**, 013009 (2005).
- [32] G. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, and A. Palazzo, Phys. Rev. D **69**, 017301 (2004).
- [33] S. Bilenki and S. Petcov, Rev. Mod. Phys. **59**, 671 (1987).
- [34] N. F. Bell, E. Pierpaoli, and K. Sigurdson, Phys. Rev. D **73**, 06352 (2006).
- [35] S. Hannestad and G. Raffelt, Phys. Rev. D **72**, 103514 (2005).
- [36] E. Majorana, Nuovo Cimento **14**, 170 (1937).
- [37] L. Wolfenstein, Phys. Rev. D. **17**, 2369 (1978).
- [38] S. Mikheyev and A. Y. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42**, 903 (1985).
- [39] T. Kuo and J. Pantaleone, Rev. Mod. Phys. **61**, 937 (1989).
- [40] Z. Berezhiani and A. Smirnov, Phys. Lett. B **220**, 439 (1989).
- [41] K. Hirata and et al., Phys. Rev. Lett. **58**, 1490 (1987).
- [42] R. Bionta and et al., Phys. Rev. Lett. **58**, 1494 (1987).
- [43] J. F. Beacom and N. F. Bell, Phys. Rev. D. **60**, 033007 (1999).
- [44] S. Ando, K. Sato, and T. Tonani, Astropart. Phys. **18**, 307 (2003).
- [45] S. Ando and K. Sato, Phys. Lett. B **559**, 113 (2003).
- [46] M. Fukugita and M. Kawasaki, Mon. Not. Roy. Astron. Soc **340**, L7 (2003).
- [47] L. E. Strigari, M. Kaplinghat, G. Steigman, and T. P. Walker, JCAP **03**, 007 (2004).
- [48] S. Ando, K. Sato, and T. Totani, Nuc. Phys. A **721**, 541 (2003).
- [49] G. Fogli, E. Lisi, A. Mirizzi, and D. Montanino, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **145**, 246 (2005).

-
- [50] J. Wheeler, *Supernovae* (World Scientific, Singapore, 1990).
- [51] T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics, Volume II: Stars and Stellar Systems* (Harwood Academic Publisher, USA, 1993).
- [52] C. Kim and A. Pevsner, *Neutrinos in Physics and Astrophysics* (Harwood Academic Publisher, USA, 1993).
- [53] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1994).
- [54] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, USA, 1972).
- [55] A. S. Dighe and A. Y. Smirnov, Phys. Rev. D **62**, 033007 (2000).
- [56] M. Aglietta, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **110**, 410 (2002).
- [57] V. Barger, K. Whisnant, and S. Pakvasa, Phys. Rev. D **22**, 2718 (1980).
- [58] T. K. Kuo and J. Pantaleone, Phys. Rev. Lett. **57**, 1805 (1986).
- [59] G. Fogli, E. Lisi, and D. Montanino, Phys. Rev. D **49**, 3626 (1994).
- [60] C. Lunardini and A. Y. Smirnov, JCAP **0306**, 009 (2003).
- [61] S. Sando, K. Sato, and T. Totani, Astropart. Phys. **18**, 307 (2003).
- [62] P. Madau, H. C. Ferguson, M. E. Dickinson, M. Giavalisco, and A. F. C. C. Steidel, Mon. Not. R. Astron. Soc. **283**, 1388 (1996).
- [63] P. Madau and L. Pozzetti, Mon. Not. R. Astron. Soc. **312**, L9 (2000).
- [64] C. Porciani and P. Madau, Astrophys. J. **548**, 522 (2001).
- [65] P. Madau and *et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **283**, 1388 (1996).
- [66] M. Keil, G. Raffelt, and H. Janka, Astrophys. J. **590**, 971 (2003).
- [67] P. Vogel, Prog. Part. Nucl. Phys. **48**, 29 (2002).
- [68] P. Vogel and J. F. Beacom, Phys. Rev. D. **60**, 053003 (1999).
- [69] *Superkamiokande homepage*, URL <http://neutrino.phys.washington.edu/~superk/>.
- [70] *Kamland homepage*, URL <http://kamland.lbl.gov/>.
- [71] K. Nakamura, Int. J. Mod. Phys. A **18**, 4053 (2003).
- [72] G. Breit, Rev. Mod. Phys. **5**, 91 (1933).
- [73] M. Gonzalez-Garcia and Y. Nir, Rev. Mod. Phys. **75**, 345 (2003).