



Claiton Pimentel de Oliveira

Um método espectral eficiente para domínios não limitados:
aplicações a toros autogravitantes ao redor de buracos negros

Campinas, 2014



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física Gleb Wataghin

Claiton Pimentel de Oliveira

Um método espectral eficiente para domínios não limitados:
aplicações a toros autogravitantes ao redor de buracos negros

Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb
Wataghin da Universidade Estadual de Cam-
pinas como parte dos requisitos exigidos para a
obtenção do título de **Doutor em Ciências**.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FI-
NAL DA TESE DEFENDIDA POR CLAITON PI-
MENTEL DE OLIVEIRA, SOB ORIENTAÇÃO DE
PROF. DR. ALBERTO VAZQUEZ SAA.

A handwritten signature in purple ink, reading "Alberto Vazquez Saa", is positioned above a horizontal line.

Assinatura do Orientador

Campinas, 2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Valkíria Succi Vicente - CRB 8/5398

OL4m Oliveira, Claiton Pimentel de, 1982-
Um método espectral eficiente para domínios não limitados : aplicações a toros autogravitantes ao redor de buracos negros / Claiton Pimentel de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Alberto Vazquez Saa.
Coorientador: Orlando Luis Goulart Peres.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Métodos espectrais. 2. Discos auto-gravitantes. 3. Domínios não limitados. 4. Buracos negros (Gravitação). I. Saa, Alberto Vazquez, 1966-. II. Peres, Orlando Luis Goulart, 1969-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: An efficient spectral method for unbounded domains : applications to self-gravitating tori around black holes

Palavras-chave em inglês:

Spectral methods

Self-gravitating disks

Unbounded domains

Black holes (Gravitation)

Área de concentração: Física

Titulação: Doutor em Ciências

Banca examinadora:

Alberto Vazquez Saa [Orientador]

Javier Fernando Ramos Caro

Vilson Tonin Zanchin

Arlene Cristina Aguiar

Samuel Rocha de Oliveira

Data de defesa: 16-06-2014

Programa de Pós-Graduação: Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **CLAITON PIMENTEL DE OLIVEIRA – RA: 023388** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 16 / 06 / 2014.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa
Orientador do Candidato - IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro - UFSCar

Prof. Dr. Wilson Tonin Zanchin - UFABC

Profa. Dra. Arlene Cristina Aguiar - DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira - IMECC/UNICAMP

Resumo

Matéria, ao se acumular ao redor de um objeto compacto (e.g., um buraco negro), se configura naturalmente na forma de um disco grosso (toro) em rotação. A matéria do disco pode ser considerada como um fluido, e suas estruturas de equilíbrio hidrodinâmico podem ser obtidas a partir das equações básicas da hidrodinâmica.

Nesse trabalho apresento uma extensa revisão da teoria básica de discos grossos de acreção, no âmbito das teorias clássica e relativística, incluindo uma análise da chamada *órbita circular marginalmente estável*.

Formulo o problema incluindo a *autointeração gravitacional* do toro, caso em que o problema das estruturas de equilíbrio se torna um problema de *fronteira livre*, o que dificulta a obtenção das soluções. Reviso os métodos e técnicas numéricas já utilizadas ao se atacar esse problema e desenvolvo um código numérico próprio, chamado BLATOS, que gera soluções autogravitantes de toros ao redor de buracos negros.

Desenvolvo ainda uma metodologia para se aplicar o método nodal dos elementos espectrais a domínios não limitados. O desenvolvimento desse novo tipo de elemento, os chamados *elementos infinitos*, gera uma extensão natural a elementos não limitados com bordas curvas assintóticas.

Aplico as soluções numéricas obtidas no estudo da instabilidade *runaway*, mostrando como a identificação da situação de instabilidade pode ser feita a partir dessas soluções. A partir do código numérico é possível alterar o perfil de rotação e a razão das massas toro/buraco negro, de forma a se realizar um estudo do espaço de soluções.

Abstract

Matter, accumulating around a compact object (e.g., a black hole), appears naturally in the form of a thick disk (torus) in rotation. The material of the disk can be considered as a fluid, and its hydrodynamic equilibrium structures can be obtained from the basic equations of hydrodynamics.

In this work I present an extensive review of the basic theory of thick accretion disks, in the framework of the classical and relativistic theories, including an analysis of the so called *marginally stable circular orbit*.

I formulate the problem including the torus *self gravitational interaction*, in which case the equilibrium structures problem becomes a *free boundary problem*, making it difficult getting the solutions. I revise the methods and numerical techniques used to attack this problem and I develop a numeric code, named **BLATOS**, that generates autogravitating tori solutions around black holes.

Further, I develop a methodology for applying the nodal spectral element method to unbounded domains. The development of this new type of element, the so called *infinite element*, generates a natural extension to unbounded elements with asymptotic curved edges.

I apply the resulting numerical solutions in the study of *runaway* instability, showing how the identification of the instability can be done from these solutions. The rotation law and the torus/black hole mass ratio can be changed from the numerical code in order to conduct a study of the solution space.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	ix
Sumário	xi
Dedicatória	xvii
Agradecimentos	xix
1 Introdução	1
1.1 Buracos negros e ISCO	1
1.2 Medidas de spin de buracos negros	2
1.3 Objetivo e metodologia	4
I Formulação Física	11
2 Potencial efetivo e ISCO	13
2.1 Hipóteses e notação	13
2.2 Órbitas na métrica de Schwarzschild	14
2.2.1 Equações de movimento e potencial efetivo	14
2.2.2 Órbitas circulares e ISCO	18
2.3 ISCO's na gravitação Newtoniana	21
2.3.1 Critério de estabilidade epicíclica radial	21
2.3.2 Potencial efetivo e ISCO	23
2.3.3 ISCO para uma distribuição geral de matéria	28
2.4 ISCO's na gravitação relativística	30
2.4.1 Métrica e observador Euleriano	30
2.4.2 Interpretação da métrica estacionária axialmente simétrica	33
2.4.3 Generalização relativística da densidade de momento angular	34

2.4.4	Equação de movimento e potencial efetivo	36
2.4.5	Determinação da ISCO	39
2.4.6	Critério de Rayleigh relativístico	44
2.5	Potenciais pseudonewtonianos	48
2.5.1	O potencial de Paczyński-Wiita	48
2.5.2	Generalização para outras métricas	49
2.5.3	Critério de estabilidade	51
3	Hidrodinâmica	53
3.1	Hidrodinâmica clássica	53
3.1.1	Descrição Euleriana e Lagrangiana de fluidos	53
3.1.2	Equilíbrio termodinâmico	55
3.1.3	Equações de movimento	56
3.1.4	Leis da termodinâmica	58
3.1.5	Relação de Euler	59
3.1.6	Conservação de energia	61
3.1.7	Equação de Bernoulli	63
3.2	Hidrodinâmica relativística	63
3.2.1	Observadores Eulerianos e Lagrangianos	63
3.2.2	Coordenadas comóveis	64
3.2.3	Considerações termodinâmicas	66
3.2.4	Conservação de energia	68
3.2.5	Tensor energia-momento de um fluido ideal	70
3.2.6	Tensor energia-momento na base LNRF	71
3.2.7	Equações de movimento de um fluido ideal	74
3.2.8	Equação de Bernoulli e conservação de momento angular	77
3.2.9	Integral de movimento em espaços-tempo simétricos	79
4	O modelo Polish doughnuts	83
4.1	Modelos de discos	83
4.1.1	Bases observacionais	83
4.1.2	Estabilidade de discos grossos de acreção	86
4.1.3	Margem interna do disco e ISCO	87
4.1.4	O modelo Polish doughnuts	90
4.2	Equação de estado politrópica	92
4.2.1	Propriedades térmicas da matéria e politropos	92
4.2.2	Condição de estabilidade	98
4.3	Formulação Newtoniana	100
4.3.1	Simplificações	100

4.3.2	Fluidos barotrópicos	102
4.3.3	Determinação da superfície	105
4.3.4	Toro com vorticidade nula	107
4.4	Formulação relativística	111
4.4.1	Equações básicas	111
4.4.2	Equação de Estado	112
4.4.3	Fluidos barotrópicos	113
4.4.4	Forma das superfícies equipotenciais	116
4.4.5	Toro com momento angular constante	117
4.4.6	Equações de campo para toros autogravitantes	123
4.5	Soluções analíticas	131
4.5.1	Introdução	131
4.5.2	Soluções Newtonianas	132
4.5.3	Soluções relativísticas (casos limite)	134
4.6	Soluções numéricas	135
4.7	Distribuição de momento angular	141
II	Métodos Numéricos	145
5	Técnicas numéricas	147
5.1	Evolução histórica dos métodos numéricos	147
5.2	Resolução numérica de equações diferenciais parciais	151
5.3	Problema de fronteira livre	153
5.4	Singularidade do sistema de coordenadas	154
5.5	Domínio não limitado	159
6	Método dos elementos espectrais	163
6.1	Método de Galerkin	163
6.2	Singularidade do sistema cilíndrico de coordenadas	170
6.3	Método dos elementos espectrais	173
7	Elementos Infinitos	177
7.1	Introdução	177
7.2	Mapeamento do domínio físico para o domínio computacional	180
7.3	Elementos infinitos mapeados	184
7.3.1	Elementos infinitos mapeados de Zienkiewicz	185
7.3.2	Funções de mapeamento de ordem superior	187
7.4	Elementos infinitos para o método dos elementos espectrais	190

7.5	Bordas curvas assintóticas	193
7.6	Elementos infinitos bidimensionais	201
8	O código BLATOS	213
8.1	Malha	213
8.2	Método do campo autoconsistente	216
8.3	Remapeamento do domínio	218
8.4	Testes de precisão e exatidão	225
8.5	Um modelo físico de disco grosso de acreção	227
8.6	Equações relativísticas	235
9	Conclusão	243
	Referências Bibliográficas	245
	Apêndices	263
A	Derivada de Lie	265
A.1	Derivada de Lie de um campo vetorial	265
A.2	Derivada de Lie em uma variedade	268
B	Tetradas ortonormais	271
B.1	Transporte paralelo	271
B.2	Transporte de Fermi-Walker	272
B.3	Tetradas ortonormais	274
B.4	Conexão de spin	276
C	Métrica de um espaço-tempo estacionário axialmente simétrico	279
C.1	Métrica estacionária axialmente simétrica	279
C.2	Simetrias e vetores de Killing	280
C.3	Espaços-tempo estacionários e axissimétricos	281
C.4	Circularidade	283
C.5	Forma da métrica	285
D	Observador Euleriano ou ZAMO	289
D.1	Congruências de curvas tipo-tempo	290
D.1.1	Vorticidade da congruência	290
D.1.2	Teorema de Frobenius	294
D.1.3	Congruências geodésicas	295
D.2	Decomposição 3+1 e observador Euleriano	295

D.3	Coordenadas adaptadas e vetor deslocamento	297
D.4	LNRF de um espaço estacionário axialmente simétrico	298
D.5	Observadores, fator de Lorentz e velocidades relativas	301
E	Politropos e processos politrópicos	305
E.1	Processos politrópicos	305
E.2	Processos politrópicos em um gás perfeito	307
E.3	Processos politrópicos para uma equação de estado geral	309
F	Ambiente de desenvolvimento	313

Aos meus pais Antonio (*in memoriam*) e Edna, que sempre me apoiaram nos caminhos que escolhi em minha vida, e me deram a liberdade necessária para isso. Mas que acima de tudo me deram amor e o bem inestimável que é a disciplina.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus por me permitir me ocupar com algo em que encontro satisfação e realização. Agradeço à minha família, pelo apoio e incentivo que sempre me deram ao longo desses anos de trabalho.

Agradeço ao professor Patricio Letelier por me propor esse trabalho e pelos anos de orientação, muito importantes em minha formação, e ainda ao professor Alberto Saa, pelo incentivo e por aceitar a orientação desse trabalho em um estágio já avançado após a triste perda do Prof. Patrício.

Por fim agradeço à FAPESP¹ e ao CNPq² pelo apoio financeiro.

¹Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, processo 2007/01145-1.

²Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, processo 140187/2007-3.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Buracos negros e ISCO

Buracos negros astrofísicos são objetos muito massivos, com massa entre algumas até 10^9 vezes a massa do Sol. Eles são observados em galáxias (na maioria das vezes como sistemas binários) e também como buracos negros “supermassivos” no centro de galáxias. Supõe-se que nossa própria galáxia tenha um buraco negro em seu centro. Sendo tão massivos, buracos negros são muito bem descritos pela teoria da relatividade geral clássica.

Ao se observar esses objetos astrofísicos a uma grande distância o que se vê são centros atrativos de matéria conforme descritos pela teoria da gravitação de Newton, na medida em que a teoria da relatividade geral se reduz à essa no caso de campos gravitacionais fracos. No entanto, em regiões próximas ao buraco negro, como no caso de estrelas em órbitas próximas e, principalmente, no caso de discos de acreção, efeitos intrinsecamente relativísticos são importantes e, de fato, têm um papel fundamental na dinâmica das órbitas nessa região.

Um efeito relativístico particularmente importante é o fato de haver um limite interno para a existência de órbitas circulares estáveis. Esse fato define o que chamamos de órbita circular estável mais interna, ou ISCO (*innermost stable circular orbit*), também chamada de órbita circular marginalmente estável, cujo raio é denotado por r_{ms} . A existência de uma órbita circular marginalmente estável é uma previsão da teoria da relatividade geral para partículas “teste” orbitando um buraco negro, e esse efeito tem um impacto importante na estrutura de um disco de acreção: em raios $r \geq r_{ms}$ a matéria do disco se move em órbitas aproximadamente circulares e lentamente espirala em direção ao buraco negro; na ISCO, no entanto, a dinâmica muda “repentinamente” e a matéria do disco, que pode ser considerada como um gás, não encontrando mais órbitas circulares estáveis precipita-se em direção ao buraco negro (porém, veremos na seção 4.1.3 que isso não é tão repentinamente como se poderia pensar, e outros efeitos devem ser levados

em consideração). O gás em um disco de acreção se inicia a um raio grande e percorre uma espiral, através de uma sequência de órbitas circulares próximas, ao perder momento angular por viscosidade (bem como por outras instabilidades dinâmicas). Quando o gás atinge a ISCO não existem mais órbitas circulares estáveis possíveis, de forma que o gás acelera rapidamente em direção ao centro. Dessa forma, a ISCO deve funcionar efetivamente como uma margem interna para um disco de acreção. Note que discos grossos autogravitantes naturalmente se conformarão como toros ao redor do objeto central, seja ele um buraco negro ou não.

Buracos negros podem ser vistos como partículas elementares perfeitas descritas inteiramente por três parâmetros: massa (M), carga elétrica (Q) e spin (ou parâmetro de rotação a_* , definido de forma que seu momento angular J seja dado por a_*GM^2/c), sendo esse restrito ao intervalo entre 0 (buraco negro sem rotação) e 1 (rotação máxima). No entanto, é pouco provável que um buraco negro dentro de uma galáxia tenha carga elétrica significativa porque normalmente ela seria neutralizada pelo plasma ao seu redor [1]. Porém, supõe-se que tenham momento angular não nulo. É quase que certo que os progenitores de buracos negros com massa estelar rodavam quando colapsaram, de forma que seus produtos finais deveriam estar em rotação. Buracos negros supermassivos também deveriam ter momento angular considerável, pois acredita-se que tenham obtido grande parte de suas massas de um disco de acreção orbital.

O spin de buracos negros obviamente não tem nenhum efeito gravitacional na aproximação Newtoniana. Contudo, em um quadro relativístico o spin de um buraco negro tem um efeito dinâmico sobre as órbitas que o circundam, e em particular sobre o raio da ISCO. Por exemplo, para um buraco negro sem rotação $r_{ms} = 6GM/c^2$, enquanto que para um buraco negro com rotação máxima $r_{ms} = GM/c^2$ se a órbita tem o mesmo sentido de rotação do buraco negro, e $r_{ms} = 9GM/c^2$ se tem sentido contrário.

Dessa forma, existe uma relação entre o spin e o raio r_{ms} , fato esse que tem sido usado em medidas de spin de buracos negros. Sendo a medida da massa relacionada com a própria identificação do buraco negro, a medida do spin é muito mais complicada, e os métodos atualmente empregados para isso exigem o conhecimento do raio da órbita circular marginalmente estável. De fato essa relação motivou o desenvolvimento do presente trabalho e, portanto, falo um pouco mais sobre essa relação a seguir.

1.2 Medidas de spin de buracos negros

Muito provavelmente buracos negros astrofísicos tem spin não nulo, considerando a maneira como se formam (spin natal) ou o momento angular ganho pela acreção, porém há fortes evidências de que o spin de alguns buracos negros de massa estelar seja natal [2]. Um conhecimento preciso sobre o spin desses buracos negros irá gerar uma maior

compreensão dos modelos de formação de buracos negros em supernovas [3] e explosões de raios gama. De maneira similar, conhecer o spin de buracos negros supermassivos pode nos ajudar a entender a história evolutiva de buracos negros e o papel da acreção e fusões [4]. Uma outra aplicação das medidas de spin de buracos negros será a compreensão da relação entre o spin e os jatos relativísticos, vistos em ambos os tipos de buracos negros, de massa estelar e supermassivos. Por muitos anos reconheceu-se os buracos negros como sendo importantes fontes de energia e tem-se especulado que esses jatos sejam alimentados pelo spin do buraco negro através de um processo tipo Penrose, associado com campos magnéticos [1].

Como acredita-se que qualquer carga elétrica inicial seja neutralizada pelo material ao seu redor, buracos negros astrofísicos são completamente definidos por sua massa e spin. Estimar a massa de um buraco negro é relativamente fácil pois essa tem um efeito mensurável mesmo a grandes distâncias, onde a gravitação Newtoniana se aplica, e, assim, as massas de muitos buracos negros foram medidas usando métodos dinâmicos através de órbitas de estrelas próximas. De fato, a medida da massa está associada à própria identificação do buraco negro: encontre um objeto com massa maior que três massas solares (limite máximo para a massa de uma estrela de nêutrons) e esse objeto é muito provavelmente um buraco negro.

O spin, por outro lado, não tem nenhum efeito Newtoniano, e somente tem efeitos mensuráveis para órbitas relativísticas. Consequentemente, para medir o parâmetro de rotação a_* são necessárias “partículas” em órbitas de raio muito pequeno. Felizmente buracos negros astrofísicos têm “partículas teste” na forma de gás de acreção, e de fato a maioria dos dados disponíveis para a medida do spin provém da radiação eletromagnética emitida pelo disco de acreção ao redor do buraco negro (ao contrário da massa, que pode ser deduzida de movimentos orbitais). Dada a massa do buraco negro, conforme o spin aumenta o disco pode mover-se mais próximo do buraco negro. Assim, existe uma relação direta entre o spin do buraco negro e o raio interno do disco.

Como já mencionado, supõe-se que a margem interna do disco coincida com o raio da órbita marginalmente estável, o que nos leva a uma relação direta entre a_* e o raio r_{ms} (o que obviamente depende da métrica utilizada). Para um buraco negro isolado e com uma determinada massa mantida constante, a localização da ISCO é uma função monotônica decrescente do seu spin. Dessa forma, uma vez que a massa do buraco negro é conhecida, saber a localização da ISCO é suficiente para se medir seu spin. Sendo assim, uma variedade de métodos observacionais foram propostos para estimar o raio $r_{in} = r_{ms}$ da borda interna do disco de acreção (ou outras quantidades relacionadas como a velocidade angular e a energia de ligação de uma partícula em órbita) em vista de através disso estimar a_* .

Como a região de interesse para o spin é o disco interno, é a emissão de raios-X

provindos dessa região que é usada nos diferentes métodos de medida do spin. Pode-se, por exemplo, observar a eficiência radiativa do disco de acreção de um núcleo galáctico ativo, definida como a razão da energia irradiada por unidade de massa acretada. Ela é determinada pela energia de ligação do gás na ISCO, que depende de a_* [5]. Ou ainda, para buracos negros em sistemas binários emissores de raio-X o espectro de potência de variações de intensidade apresenta um ou dois picos em frequências de algumas centenas de Hertz. Os picos são relativamente largos, indicando que não correspondem a oscilações coerentes, e sim a oscilações quase periódicas. A alta frequência observada sugere que as oscilações surgem no gás que está próximo ao buraco negro. Supõe-se que esse gás seja altamente influenciado por efeitos relativísticos, incluindo efeitos particulares associados com o spin do buraco negro [5], o que também pode ser usado nessas estimativas.

De fato, nos últimos anos tornou-se possível medir o spin das duas classes de buracos negros (de massa estelar e supermassivos). Os dois principais métodos que estão sendo empregados [2], são o método $Fe\ K\alpha$, em que se modela o perfil relativisticamente alargado dessa linha do ferro, que se aplica a ambas as classes de buracos negros, e o método do ajuste contínuo, em que se modela o espectro térmico contínuo de raio-X do disco de acreção, que tem sido aplicado até agora somente a buracos negros de massa estelar. O importante aqui é que ambos os métodos dependem da identificação da margem interna do disco de acreção com a ISCO [2, 3].

O método do ajuste contínuo, por exemplo, consiste no ajuste do espectro de raios-X observado a modelos em que um parâmetro de ajuste é o spin do buraco negro [2]. Nesse método identifica-se a margem interna do disco de acreção com a ISCO, e estima-se r_{ms} pelo ajuste do espectro contínuo de raios-X. Como o raio r_{ms} é uma função estritamente monotônica decrescente do parâmetro de spin a_* do buraco negro, sabendo o seu valor imediatamente infere-se o valor de a_* (veja por exemplo [2], onde é determinado o valor de spin para oito buracos negros diferentes).

1.3 Objetivo e metodologia

A posição da ISCO é um fator crítico para as medidas de spin de buracos negros, e depende estritamente do modelo (no caso a métrica do espaço-tempo) utilizado. Para o caso de um buraco negro em rotação o espaço-tempo é descrito pela métrica de Kerr (Kerr-Newman caso considere-se carga elétrica não nula), na medida em que efeitos gravitacionais de outros corpos possam ser desprezados. Dada a métrica, pode-se calcular órbitas de partículas teste (geodésicas) em torno do buraco negro sendo que, nesse caso específico, a chamada ISCO é muito bem determinada. (ver por exemplo seção 2.2 para caso de um buraco negro estático — métrica de Schwarzschild)

No entanto, o intenso campo gravitacional em torno do buraco negro agrega todo

material gasoso em torno dele na forma de um disco em rotação, e essa grande quantidade de matéria altera as propriedades do espaço-tempo (e sua métrica) e deve influenciar de forma significativa na determinação dessa órbita. Contudo, ainda assim de maneira geral utiliza-se a métrica de Kerr, pois no modelo padrão de discos finos despreza-se a autointeração gravitacional do disco, considerando-a insignificante perante o campo gravitacional do buraco negro (além de simplificar imensamente as equações a serem tratadas). Porém, isso é apenas uma hipótese e o próprio modelo padrão de discos finos não pode descrever corretamente um disco astrofísico próximo ao buraco negro, como veremos na seção 4.1. Além disso, devemos lembrar que o disco está em um delicado equilíbrio entre as forças gravitacional e centrífuga, e é somente a diferença entre elas que integra o potencial efetivo. Essa não é a mesma situação em que a massa extra adicionada ao sistema pelo disco residisse no buraco negro. Considere, por exemplo, o campo gravitacional gerado por um anel dentro do disco: somente para a porção externa — e não para a porção interna ao anel — a força gravitacional sentida devido a esse anel seria em direção ao centro. Abramowicz *et al.* [6], em um estudo qualitativo preliminar sobre os efeitos globais da autointeração gravitacional, mostrou que essa tem um papel importante mesmo em casos em que a massa do disco é pequena. Isso porque ela perturba o equilíbrio delicado que há entre as forças gravitacional e centrífuga, e a estrutura global do disco é muito sensível a tal equilíbrio.

O efeito da autointeração gravitacional, tanto local (como em instabilidades) quanto em quantidades globais do disco, não é ainda completamente compreendido. Assim, o objetivo do presente trabalho é estudar de que forma a autointeração gravitacional da matéria agregada ao redor do buraco negro na forma de um disco de acreção afeta a determinação da métrica do espaço-tempo, e consequentemente a determinação do raio da órbita circular marginalmente estável. Não realizo aqui um estudo de como essa alteração na posição da ISCO modificaria as medidas de spin de buracos negros que vem sendo realizadas (onde considera-se a métrica de Kerr, desprezando-se outros efeitos gravitacionais [2, 3]), sendo esse uma possível extensão desse trabalho.

No âmbito da gravitação Newtoniana as ISCO's somente existem para centros de atração com deformações quadripolares, conforme veremos na seção 2.3. Nesse caso, é possível adotar uma abordagem pseudonewtoniana (ver seção 2.5) para simular o campo gravitacional de um buraco negro. Isso permite que efeitos notáveis da relatividade geral sejam incluídos através de um tratamento tanto conceitual quanto computacionalmente mais simples que um modelo relativístico completo, por se tratar apenas de gravitação Newtoniana com um potencial modificado. Potenciais pseudonewtonianos foram introduzidos por Paczyński e Wiita [7], e são tradicionalmente aplicados em sistemas astrofísicos quando um tratamento relativístico completo se mostra muito complexo. Apresento esses potenciais na seção 2.5. Soluções Newtonianas servem como resultados preliminares para

soluções numéricas relativísticas, e ainda como forma de comparativo e de consistência dos resultados. O uso de potenciais pseudonewtonianos pode ser validado na medida em que seus resultados se aproximam ao resultado relativístico completo.

Esse estudo requer ainda um modelo de disco de acreção a ser empregado. Vários modelos já foram elaborados, e a escolha de um deles tem implicações na aplicabilidade dos resultados, sendo que cada modelo se aplica a determinados sistemas astrofísicos específicos (ver breve discussão na seção 4.1). Adoto o modelo de discos grossos chamado de *Polish doughnuts* [8–10] (que descrevo no capítulo 4) por sua generalidade e simplicidade, apesar do chamado *modelo padrão* de discos ser um modelo de discos finos. Por se tratar de um modelo de discos grossos, ou toros, ele de certa forma se generaliza a discos finos, pois é possível manipular o seu formato por meio de parâmetros específicos.

O modelo relativístico analítico de toros ao redor de buracos negros em espaços-tempo fixos foi introduzido por Abramowicz, Jaroszynski e Sikora [8][9]. Esse modelo foi então generalizado para discos relativísticos autogravitantes por Nishida e Eriguchi [11], usando uma representação integral das equações de Einstein, de forma que se possa levar em conta automaticamente o comportamento assintótico das funções métricas.

O atual interesse na teoria da estrutura, evolução e estabilidade de discos grossos de acreção é devido à possibilidade de que discos grossos devem ser relevantes para se compreender as fontes de energia nos centros de radio-galáxias e quasares. Discos grossos também podem ocorrer durante estágios iniciais da formação estelar: eles poderiam estar envolvidos na geração de jatos e correntes bipolares, e eles devem se formar durante a fusão de duas estrelas na medida em que o sistema tenta lidar com o excesso de momento angular (ver seção 4.1.1).

Há uma vasta literatura referente a discos de acreção. Em geral eles são tratados como sendo fluidos ideais com uma determinada equação de estado (e.g., equação de estado politrópica), e algumas outras simplificações para facilitar a análise do problema. Considero nesse trabalho estruturas fluidos autogravitantes na forma de um toroide, em um estado de rotação **estacionário** ao redor de um buraco negro, e assumindo ainda **simetria axial**. O problema então se resume a encontrar soluções das equações da hidrodinâmica em conjunto com as equações da gravitação clássica (equação de Poisson) ou relativística (equações de Einstein), utilizando essas hipóteses.

A dificuldade em se obter soluções numéricas de fluidos autogravitantes em equilíbrio hidrodinâmico está no fato de que a superfície de equilíbrio não é conhecida *a priori*, onde as condições de contorno sobre a densidade e a pressão são impostas. Trata-se, portanto, de um *problema de fronteira livre*, onde a própria superfície do fluido deve ser obtida em conjunto com a distribuição de densidade, sendo as condições de contorno para o potencial gravitacional dadas somente no infinito espacial.

Devido à complexidade das equações envolvidas e ao fato de se tratar de um problema

de fronteira livre, ele é em geral tratado numericamente. Vários códigos numéricos foram desenvolvidos com a finalidade de se calcular esse tipo de estrutura. Na seção 4.6 apresento os principais resultados obtidos nessa área e na seção 5.1 a evolução histórica dos métodos numéricos desenvolvidos.

O que faço nesse trabalho é utilizar várias técnicas numéricas em conjunto para desenvolver um código específico, o qual batizo de **BLATOS** (*black hole - torus sistem*), para a obtenção dessas estruturas, e para as quais é possível se calcular a ISCO. Parte considerável desse trabalho, portanto, consiste no desenvolvimento e aplicação de técnicas numéricas apropriadas para a obtenção de soluções do problema em questão. A segunda parte desse trabalho é dedicada aos métodos numéricos utilizados no desenvolvimento desse código.

Tradicionalmente, o problema de se encontrar estruturas em equilíbrio de fluidos autogravitantes é abordado numericamente no âmbito do chamado *método do campo autoconsistente*, proposto inicialmente por Ostriker e Mark [12] para o problema de fronteira livre. A equação de equilíbrio do fluido e a equação de Poisson são resolvidas iterativamente, a partir de um estado inicial, até que a convergência seja obtida. Nos modelos relativísticos, os modelos analíticos de Abramowicz *et al.* [8] servem como estados iniciais para o processo iterativo.

Uma abordagem diferente foi adotada por Ansorg *et al.* [13], que realizam uma expansão em série dos campos de forma que o problema como um todo se torna um sistema algébrico não linear para o conjunto total dos coeficientes (dos campos e da superfície desconhecida, também expandida em série), que é resolvido iterativamente a partir de um “chute” inicial através do método Newton-Raphson.

De qualquer forma, os métodos utilizados na resolução do problema de fronteira livre são métodos iterativos: ou aplicam o chamado método do campo autoconsistente, que resolve iterativamente a equação de equilíbrio e a equação de Poisson (e.g., Bonazzola *et al.* [14]), ou geram um sistema não linear, que é resolvido iterativamente pelo método de Newton. Diante do caráter iterativo de ambas as abordagens, optei pelo método do campo autoconsistente, o qual apresento na seção 8.2.

Utilizo ainda um método espectral na resolução da equação de Poisson/Einstein, em particular o método de Galerkin, cuja principal característica é a expansão dos campos físicos em funções base que satisfazem as condições de contorno. Métodos espectrais têm a vantagem de terem convergência exponencial, ou seja, têm uma ordem de convergência “infinita” se a solução satisfaz as certas condições de suavidade. No entanto, a implementação de um método espectral sobre um disco apresenta uma complicação intrínseca ao sistema de coordenadas: coordenadas adaptadas ao contorno de um disco terão sempre uma singularidade, de tal forma que se faz necessária a imposição de condições de regularidade das funções no ponto singular. Apresento essa dificuldade na seção 5.4 e cito

algumas formas já utilizadas para contorná-la. Minha estratégia é a aplicação de uma técnica de multidomínios, em que o disco é dividido em subdomínios, tendo cada um seu próprio sistema de coordenadas, evitando assim a singularidade. Em particular, utilizo o *método dos elementos espectrais*, que é um método intermediário entre os métodos espectrais e o método dos elementos finitos, e que herda vantagens de ambas as abordagens. Nele o domínio é dividido em subdomínios, chamados de elementos, sendo que dentro de cada elemento é feita uma aproximação polinomial de alta ordem (diferentemente dos elementos finitos onde se usam funções lineares ou quadráticas). Difere ainda dos métodos espectrais multidomínio tradicionais no que se refere às condições de acoplamento dos domínios. Descrevo em linhas gerais o método dos elementos espectrais no capítulo 6.

No cálculo numérico de soluções de toros ao redor de buracos negros o domínio se estende até o infinito espacial, onde as condições de contorno são aplicadas. Dependendo do método numérico utilizado, várias estratégias já foram empregadas para lidar numericamente com um domínio não limitado. Alguns trabalhos utilizam um grid numérico truncado em um raio externo finito. No entanto, modelos que preenchem completamente o lóbulo de Roche (ser seção 4.1.1) podem ter raio externo muito grande comparado com o raio do buraco negro central, o que faz com que seja necessária uma boa resolução em diversas escalas de distância, e complica a tarefa de se calcular esses modelos.

Uma abordagem simples e eficiente é o uso de um grid compactificado. Em particular, pode-se construir um grid compactificado através de uma redefinição da coordenada radial, como feito por Cook *et al.* [14] para modelos de estrelas de nêutrons. Este tipo de compactificação foi adotado também por Stergioulas [15, 16], dentro da metodologia do campo autoconsistente. Porém, não encontrei na literatura uma compactificação utilizada dentro do método dos elementos espectrais na abordagem nodal (somente uma referência [17] no caso da abordagem modal), e aparentemente não existe uma abordagem “padrão” para elementos não limitados dentro desse método. O que faço então é estender uma compactificação de coordenadas desenvolvida para o método dos elementos finitos [18] para uso dentro do método dos elementos espectrais, gerando o que podemos chamar de *elementos infinitos*. Dada a similaridade dos métodos, essa extensão é um tanto quanto direta, porém existem alguns pontos importantes a serem observados. Além disso, mostro que a extensão dessa metodologia a elementos de ordem superior como usados aqui resulta em elementos com bordas curvas assintóticas. Dedico o capítulo 7 ao desenvolvimento desses chamados elementos infinitos, e a seção 5.5 à algumas outras possíveis abordagens a esse problema.

Em suma, aplico o método dos elementos espectrais na resolução da equação de Poisson/equações de Einstein, no âmbito do método do campo autoconsistente para tratar o problema de fronteira livre, e ainda as estratégias acima citadas para tratar as questões de singularidade do sistema de coordenadas e de elementos não limitados. Empregando

esses métodos, desenvolvi um código numérico (descrito no capítulo 8) que gera soluções autoconsistentes de toros autogravitantes em ao redor de buracos negros.

O trabalho está organizado em duas partes: **I**: Formulação Física e **II**: Métodos Numéricos. No capítulo 2, apresento equações de movimento e cálculos básicos das ISCOS's na métrica de Schwarzschild e em uma métrica estacionária e axialmente simétrica geral, e de como se relacionam a potenciais pseudonewtonianos derivados dessas métricas. No capítulo 3 faço uma revisão das equações básicas da hidrodinâmica, clássica e relativística, bem como elementos de termodinâmica utilizados na sequência. Ainda na primeira parte, no capítulo 4, apresento o modelo de discos grossos Polish doughnuts, também em sua formulação Newtoniana e relativística. Na segunda parte descrevo os métodos numéricos que empreguei no desenvolvimento do código BLATOS, começando no capítulo 5 pelas estratégias adotadas na abordagem dos problemas citados acima, e em sequência pelo método dos elementos espectrais no capítulo 6. No capítulo 7 discuto do emprego de elementos não limitados dentro do método dos elementos espectrais e a maneira com que realizo isso, bem como um novo tipo de elemento que surge dessa formulação: elementos com bordas assintóticas. A seguir, no capítulo 8, descrevo o código BLATOS e por fim as considerações finais no capítulo 9.

Apresento ainda alguns apêndices para explicitar alguns elementos e conceitos utilizados no texto principal. No apêndice A a derivada de Lie, utilizada em derivações relativísticas, e como essa se relaciona às coordenadas Lagrangianas de fluidos. No apêndice B introduzo o conceito de tetradas ortonormais e como o transporte de vetores ao longo de curvas é usado para se estabelecer um sistema de referência *sem rotação*. A dedução da métrica de um espaço estacionário e axialmente simétrico completamente geral pode ser vista no apêndice C e no apêndice D a definição e a dedução da tetrada ortonormal associada ao chamado observador com momento angular nulo, que vem a ser o sistema de referência sem rotação¹. Encontra-se no apêndice E a definição de uma classe de processos termodinâmicos chamados de processos politrópicos, que será a base para a descrição termodinâmica do modelo de disco utilizado. Por fim, no apêndice F apresento as ferramentas computacionais (compilador, bibliotecas, etc.) utilizadas no desenvolvimento do sistema computacional BLATOS.

¹A importância desse sistema de referência é que ao se projetar as quantidades físicas e equações relativísticas nele obtém-se suas *componentes físicas* (componentes medidas por esses observadores), que são em geral mais simples do que as componentes tensoriais usuais.

Parte I

Formulação Física

Capítulo 2

Potencial efetivo e ISCO

2.1 Hipóteses e notação

O presente trabalho consiste no estudo de discos grossos ao redor de buracos negros. Considero o disco como sendo um fluido perfeito, com uma equação de estado politrópica, em um estado de rotação estacionário e ainda com simetria axial com relação ao eixo de rotação que passa pelo centro do corpo central, no caso o buraco negro. O fluido deve então estar em um estado de equilíbrio hidrodinâmico, onde todas as forças aplicadas sobre ele estão em equilíbrio, inclusive a pressão hidrodinâmica. O fato de haver uma pressão não desprezável faz com que o disco se torne espesso, assumindo a forma de um toro.

A hipótese fundamental do modelo padrão de discos finos é que a pressão hidrodinâmica seja desprezável diante da força de atração gravitacional, fazendo com que o fluido assuma um movimento de rotação *Kepleriano*, ou seja, um movimento onde a força gravitacional equilibra-se perfeitamente com a força centrífuga. O fato da pressão ser desprezável simplifica a estrutura vertical do disco, fazendo com que esse assuma uma configuração “fina”, onde a espessura vertical é muito menor que a dimensão radial. Dessa forma, esse modelo contempla apenas movimentos no plano de simetria equatorial do fluido em rotação.

Para o estudo de discos grossos, como faço no presente trabalho, considero o teorema de Lichtenstein [19] (1933), que provou que na teoria Newtoniana corpos fluidos em movimento de rotação estacionário sempre apresentam uma simetria com respeito a reflexões em um plano ortogonal ao eixo de rotação contendo o baricentro do corpo (plano equatorial). Para fluidos estacionários, axialmente simétricos, o plano equatorial é ele próprio rotacionalmente simétrico, e assim podemos introduzir nele uma família de círculos concêntricos em torno do centro de simetria. O raio circunferencial desses círculos nos dá uma coordenada radial conveniente no plano equatorial.

Ainda não se sabe se o teorema de Lichtenstein é válido na relatividade de Einstein,

mas muitas soluções conhecidas das equações de Einstein descrevendo espaços-tempo axialmente simétricos apresentam essa simetria discreta e, portanto, a assumirei como hipótese.

Assumo ainda que o fluido apresenta um movimento de rotação puramente circular, ou seja, que as componentes poloidais da velocidade sejam nula, sendo a única componente não nula a componente azimutal: $\vec{u} = u\hat{\varphi}$.

Utilizo ao longo de todo o trabalho coordenadas cilíndricas usuais $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, z, \varphi)$, e algumas vezes coordenadas esféricas $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, R, \theta, \varphi)$. Quaisquer índices gregos $\mu, \nu, \alpha, \beta \dots = (0, 1, 2, 3)$ serão usados para denotar componentes tensoriais na base de coordenadas. Os índices latinos $i, j, k = (1, 2, 3)$ denotam componentes tensoriais na base de coordenadas excluindo-se a componente temporal. Índices latinos do início do alfabeto $a, b, c \dots = (0, 1, 2, 3)$ (escritos entre parênteses — e.g., $T_{(a)(b)}$) serão usados para denotar componentes em uma base ortonormal, e os índices $l, m, n = (1, 2, 3)$ também, mas excluindo a componente temporal.

Emprego ainda a convenção de Einstein ($x^\alpha x_\alpha \equiv \sum_{\alpha=0}^3 x^\alpha x_\alpha$), métricas com assinatura 2 (-+++), e unidades geométricas, $G = c = 1$. A velocidade da luz c será escrita apenas quando se quiser enfatizar alguma relação dimensional ou limite.

2.2 Órbitas na métrica de Schwarzschild

2.2.1 Equações de movimento e potencial efetivo

Começarei mostrando como surge a órbita marginalmente estável para um buraco negro isolado, estático e esfericamente simétrico, ou seja, para a métrica de Schwarzschild:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1}dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.1)$$

onde M é a massa do buraco negro, sendo $R = 2M$ o raio do *horizonte de eventos*.

Devido à simetria o problema tridimensional das órbitas de partículas teste na métrica de Schwarzschild, restritas ao plano equatorial, se reduz a um problema unidimensional usando um potencial efetivo na coordenada r , como veremos a seguir [20].

As equações de movimento de uma partícula teste são obtidas aplicando o princípio variacional que extremiza o intervalo relativístico ao longo de sua linha de mundo

$$\delta \int ds = \delta \int \frac{ds}{d\lambda} d\lambda = \delta \int (-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} d\lambda = 0, \quad (2.2)$$

onde $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ e λ é um parâmetro qualquer ao longo da linha de mundo. Assim, para trajetórias tipo tempo ($ds^2 < 0$) temos a Lagrangiana $\mathcal{L} = (-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2}$. Para evitar

raízes podemos substituí-la pela Lagrangiana equivalente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\lambda^2} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (2.3)$$

que resulta nas mesmas equações de movimento, mas com a condição de que λ seja um parâmetro afim (de forma que $\lambda = as + b$, com a e b constantes quaisquer) [20]. Tipicamente para partículas massivas é usado o tempo próprio. Essa escolha resulta que $\mathcal{L}$ é constante ao longo da trajetória, assumindo os valores $-\frac{1}{2}$, 0 ou $\frac{1}{2}$, dependendo se temos trajetórias tipo tempo, tipo luz (partículas sem massa) ou tipo espaço (trajetórias não físicas) respectivamente ($ds^2 < 0$, $ds^2 = 0$ e $ds^2 > 0$ respectivamente). Como estamos tratando trajetórias físicas de partículas massivas temos que $2\mathcal{L} = -1$, o que, para a métrica (2.1), resulta em

$$-\left(1 - \frac{2M}{R}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} \dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 = -1. \quad (2.4)$$

As equações de movimento são obtidas através das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}, \quad (2.5)$$

que resultam na equação da geodésica

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0, \quad (2.6)$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta})$ ¹ é o chamado símbolo de Christoffel. Para a métrica de Schwarzschild temos o seguinte sistema de equações acopladas

$$\ddot{t} + \frac{2M}{R(R-2M)} \dot{R} \dot{t} = 0, \quad (2.7)$$

$$\ddot{R} + \frac{M}{R^3} (R-2M) \dot{t}^2 - \frac{2M}{R(R-2M)} \dot{R}^2 - (R-2M) (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = 0, \quad (2.8)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{R} \dot{\varphi} \dot{R} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (2.9)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{R} \dot{\varphi} \dot{R} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0. \quad (2.10)$$

Consideremos movimentos no plano equatorial apenas, de forma que $\theta = \pi/2$ e $R = r$. A equação (2.9) mostra que se a partícula se move inicialmente no plano equatorial $\dot{\theta} = 0$, ela se manterá nesse plano. Isso segue do teorema de unicidade para soluções de tais equações diferenciais, pois $\theta = \pi/2$ para todo λ satisfaz a equação (2.9). Além disso,

¹Introduzo aqui a notação simplificada $\partial_\mu f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$.

as equações para as coordenadas cíclicas φ e t resultam nas respectivas constantes de movimento

$$\frac{d}{d\lambda}[r^2\dot{\varphi}] = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{\varphi} \equiv L = \text{constante}, \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} \equiv E = \text{constante}, \quad (2.12)$$

que podem ser vistas como o momento angular e a energia por unidade de massa para partículas massivas.

Juntas essas quantidades conservadas fornecem uma forma conveniente para estudarmos órbitas na geometria de Schwarzschild. Ao invés de usarmos a equação (2.8) para r diretamente podemos usar a expressão (2.4), que vem do fato de que a própria Lagrangiana é uma constante de movimento. Multiplicando essa equação por $(1 - 2M/r)$ e usando as expressões para E e para L obtemos

$$-E^2 + \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = 0, \quad (2.13)$$

o que resulta em apenas uma equação pra $r(\lambda)$ ao invés de um sistema de equações acopladas. A equação (2.13), juntamente com as equações (2.11, 2.12), resulta em integrais elípticas que particularmente não são muito informativas, mas podemos obter uma descrição geral das órbitas escrevendo-a na forma

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \mathcal{U}(r, L) = \frac{1}{2}E^2, \quad (2.14)$$

por meio do potencial efetivo

$$\mathcal{U}(r, L) = \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}. \quad (2.15)$$

A equação (2.14) é exatamente a equação para uma partícula Newtoniana com uma unidade de massa, e “energia” $\frac{1}{2}E^2$ movendo-se em um potencial efetivo unidimensional dado por $\mathcal{U}(r, L)$. (A verdadeira energia por unidade de massa é E , mas o potencial efetivo para a coordenada r responde a $\frac{1}{2}E^2$.)

É evidente que a nossa situação física é completamente diferente de uma partícula Newtoniana se movendo em uma dimensão. As trajetórias em consideração são órbitas ao redor de um buraco negro. As quantidades de interesse são não apenas $r(\lambda)$, mas também $t(\lambda)$ e $\varphi(\lambda)$. No entanto, podemos obter uma descrição satisfatória das órbitas compreendendo o seu movimento radial, reduzindo o seu comportamento a um problema que sabemos resolver.

Uma análise similar das órbitas usando gravitação Newtoniana produziria um resultado similar: a equação geral (2.14) seria a mesma, mas o potencial efetivo (2.15) não teria

o último termo. Nesse potencial o primeiro termo é apenas uma constante, o segundo corresponde exatamente ao potencial gravitacional Newtoniano, e o terceiro termo é a contribuição do momento angular que assume a mesma forma na gravitação Newtoniana e na relatividade geral. O último termo, a contribuição da relatividade geral, fará uma grande diferença na região com r pequeno.

Sabemos que na teoria Newtoniana as órbitas são seções cônicas - órbitas ligadas são círculos ou elipses, enquanto órbitas não ligadas são parábolas ou hipérboles. Em relatividade geral a situação é diferente, mas somente para r suficientemente pequeno, pois para $r \rightarrow \infty$ o comportamento será idêntico ($\mathcal{U} \rightarrow \text{constante}$). No entanto, para $r \rightarrow 0$ o potencial tende a $-\infty$ ao invés de $+\infty$ como no caso Newtoniano. Da equação (2.15) vemos que em $r = 2M$, no chamado horizonte de eventos, o potencial efetivo sempre se anula.

Há diferentes curvas $\mathcal{U}(r, L)$ para diferentes valores de L (por isso escrevo L como um parâmetro); em qualquer uma dessas curvas o comportamento da órbita pode ser analisado comparando-se $\frac{1}{2}E^2$ com $\mathcal{U}(r, L)$ (figura. 2.1). A distância entre uma linha

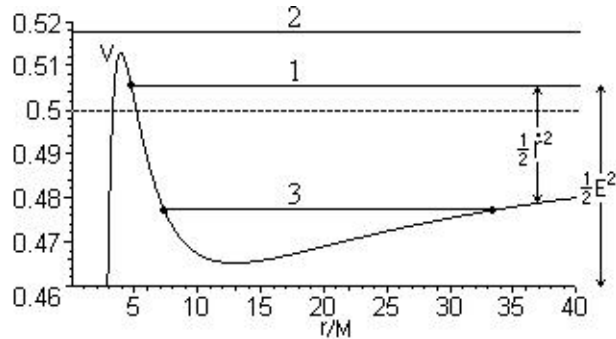


Figura 2.1: Perfil do potencial efetivo para uma partícula com massa de repouso *não nula* orbitando um buraco negro de Schwarzschild de massa M . As três linhas horizontais, traçadas para três diferentes valores de E^2 , correspondem a órbitas (1) não ligada, (2) de captura, e (3) ligada, respectivamente.

horizontal que determina a energia $\frac{1}{2}E^2$, e $\mathcal{U}$ nos dá $\frac{1}{2}\dot{r}^2$ (vide equação (2.14)).

Portanto, o comportamento geral de uma partícula vinda do infinito com energia $\frac{1}{2}E^2$ será se mover pelo potencial até encontrar um ponto de retorno, onde $\mathcal{U} = \frac{1}{2}E^2$, onde começará a se mover no sentido oposto. Tal órbita é chamada de não ligada similar ao caso Newtoniano de órbita hiperbólica. Em alguns casos pode não haver um ponto de retorno, casos onde a energia supera a barreira de potencial, e a partícula “cai” para dentro do buraco negro. Dizemos então que temos uma órbita de captura.

Para $r \rightarrow \infty$ temos que $\mathcal{U}(r, L) \rightarrow \frac{1}{2}$, o que significa que se $\frac{1}{2}E^2$ for menor que $\frac{1}{2}$, ou seja, se $E < 1$, pela equação (2.14) tais órbita não são possíveis. Então, para energias

$E < 1$ a partícula não pode se afastar infinitamente do buraco negro. Temos nesse caso uma órbita ligada, com dois pontos de retorno no caso geral, em analogia à órbitas elípticas no caso Newtoniano, em que a partícula oscila entre dois pontos de retorno.

2.2.2 Órbitas circulares e ISCO

Órbitas circulares, com $r = r_c = \text{constante}$, ocorrem nos pontos de máximo e mínimo locais do potencial efetivo, ou seja, para

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}\right)_L = 0. \quad (2.16)$$

onde indicamos que a derivada ocorre para L constante, pois o momento angular por unidade de massa é uma constante de movimento da partícula, e é necessária para se definir um determinado potencial efetivo.

Essas órbitas são estáveis sob perturbações radiais em pontos de mínimo, e instáveis em pontos de máximo local da curva $\mathcal{U}(r, L)$ (ver figura 2.1). Ou seja,

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{órbita estável} \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{órbita instável} \quad (2.18)$$

onde uso a notação $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L \equiv \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}\right)_L\right)_L$, pois a derivada segunda é calculada mantendo-se L constante.

Fazendo $\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}\right)_L = 0$ para $\mathcal{U}(r, L)$ da equação (2.15) encontro a equação que nos fornece o raio r_c de órbitas circulares:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}\right)_L \Big|_{r_c} = \frac{1}{r_c^4} (Mr_c^2 - L^2 r_c + 3ML^2) = 0. \quad (2.19)$$

No caso Newtoniano, onde o terceiro termo dentro dos parênteses não aparece, $r_c = \frac{L^2}{M}$. Para o caso relativístico temos

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12M^2 L^2}}{2M}. \quad (2.20)$$

Para $L > \sqrt{12}M$ há duas órbitas circulares, uma estável (sinal +) e outra instável (sinal -), o que pode ser visto calculando-se $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L$ nesses pontos ou simplesmente observando o gráfico de $\mathcal{U}(r, L)$. Calculando a derivada segunda obtenho

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L = \frac{1}{r^5} (-2Mr^2 + 3L^2 r - 12ML^2). \quad (2.21)$$

O ponto em que $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L = 0$ se caracteriza como um ponto de inflexão, onde os pontos de máximo e mínimo se encontram (ou seja, as órbitas estável e instável se encontram). No entanto, estou interessado apenas em órbitas circulares e, portanto, essa relação deve ser calculada em $r = r_c$:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L \Big|_{r_c} &= \frac{1}{r_c^5} (-2Mr_c^2 + 3L^2r_c - 12ML^2) \\
 &= \frac{1}{r_c^5} (-2Mr_c^2 + [2L^2r_c + L^2r_c] + [-6ML^2 - 6ML^2]) \\
 &= \frac{1}{r_c^5} ([-2Mr_c^2 + 2L^2r_c - 6ML^2] + L^2r_c - 6ML^2) \\
 &= \frac{L^2}{r_c^5} (r_c - 6M) = 0,
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde o termo entre colchetes se anula devido à equação (2.19) para r_c .

Dessa forma, tem-se que $r_{ms} = 6M$ é tal que $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L \Big|_{r_c=r_{ms}} = 0$. Órbitas circulares com raio $r_c > 6M$ são estáveis, e as com raio $r_c < 6M$ são instáveis, de forma que a órbita circular com raio igual a $r_{ms} = 6M$ é a chamada órbita circular marginalmente estável, ou ISCO (*innermost stable circular orbit*) do buraco negro. Esse é o menor raio possível de uma órbita circular estável na métrica de Schwarzschild (ver figura 2.2).

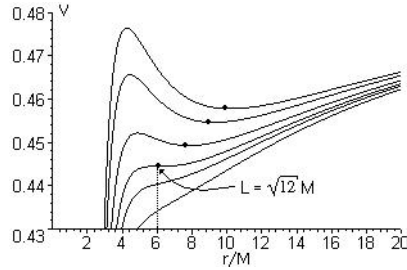


Figura 2.2: Potencial efetivo para partículas com vários momentos angulares L orbitando um buraco negro de Schwarzschild de massa M . Os pontos de mínimo local marcam o raio de órbitas circulares estáveis. Essas órbitas existem somente para $L > \sqrt{12}M$.

No limite $L \rightarrow \infty$ o raio (2.20) das órbitas circulares se tornam

$$r_c \rightarrow \frac{L^2 \pm L^2(1 - 6M^2/L^2)}{2M} = \left(3M, \frac{L^2}{M}\right). \tag{2.23}$$

Nesse limite a órbita circular estável se torna cada vez mais distante e o seu raio se aproxima do valor encontrado para o caso Newtoniano (para um determinado momento angular L), enquanto que a instável se aproxima de $r_{ph} \equiv 3M$, o raio da órbita circular

de uma partícula sem massa, o que efetivamente é um valor limite (inferior) para o raio das órbitas circulares de partículas massivas.

Vemos pela equação (2.20) que para $L < \sqrt{12}M$ não há órbitas circulares possíveis, caso em que existem apenas órbitas de captura (a barreira de potencial desaparece). Se $L = \sqrt{12}M$, temos que $r_c = \frac{L^2}{2M} \equiv r_{ms}$. Ou seja, $L_{ms} = \sqrt{12}M$ é o valor do momento angular para a ISCO.

Podemos ainda calcular a energia e o momento angular de uma partícula teste em órbitas circulares quaisquer. Da equação (2.19) obtemos diretamente que

$$L^2 = \frac{Mr_c^2}{r_c - 3M}. \quad (2.24)$$

Substituindo o resultado acima na equação (2.14), e lembrando que para órbitas circulares $\dot{r} = 0$, obtemos a energia:

$$E^2 = 2\mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad E^2 = \frac{(r_c - 2M)^2}{r_c(r_c - 3M)}. \quad (2.25)$$

Observe que, de acordo com a expressão (2.20) r_c não pode assumir valores menores ou iguais a $r_{ph} = 3M$, o raio da órbita circular do fóton.

Uma órbita será ligada se $E < 1$ e não ligada se $E > 1$. Para órbitas circulares a equação (2.25) nos mostra que isso ocorre respectivamente para $r_c > r_{mb}$ e $r_c < r_{mb}$, onde $r_{mb} = 4M$ é o raio da órbita circular marginalmente ligada, que tem $E = 1$. Órbitas circulares estáveis são sempre ligadas, mas podemos ter órbitas circulares instáveis ligadas ou não ligadas, e toda órbita circular não ligada é instável. Isso pode ser resumido na seguinte tabela:

	r_{ph}	r_{mb}	r_{ms}
$r < 3M$	$3M < r < 4M$	$4M < r < 6M$	$6M < r$
não permitida	não ligada	ligada	ligada
não permitida	instável	instável	estável

Uma quantidade de grande interesse para a eficiência de um disco de acreção em um buraco negro como uma fonte de energia é a energia de ligação da órbita circular marginalmente estável. A energia de ligação de uma partícula é dada pela diferença entre sua massa e energia total. Para uma partícula na última órbita circular estável em $r = 6M$, a energia de ligação por unidade de massa é

$$E_{lig} = \frac{m - (mE_{ms})}{m} = 1 - E_{ms} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{1/2} \approx 5,72\%, \quad (2.26)$$

calculando-se a energia por unidade de massa E através da equação (2.25). Essa é a fração de energia da massa de repouso liberada quando, digamos, uma partícula originalmente

em repouso no infinito espirala lentamente em direção ao buraco negro para a órbita circular estável mais interna, e então “cai” em direção ao buraco negro. Uma quantidade desprezável de energia é liberada durante a queda final de r_{ms} ao buraco negro. Então, a conversão de massa de repouso em outras formas de energia é potencialmente mais eficiente para acreção em um buraco negro do que para fusão nuclear, que libera um máximo de somente 0,9% da massa de repouso ($H \rightarrow Fe$).

2.3 ISCO's na gravitação Newtoniana

Antes de avaliar uma métrica estacionária axialmente simétrica geral, vou mostrar que no âmbito da gravitação Newtoniana a ISCO existe (em primeira aproximação) apenas para uma distribuição de massa com momento de quadrupolo não nulo, o que exclui a sua existência para um corpo central com distribuição esférica de massa. Estabelecerei ainda a notação e a metodologia a serem usadas no caso relativístico.

2.3.1 Critério de estabilidade epicíclica radial

O raio mínimo r_{ms} de estabilidade epicíclica radial é calculado exigindo-se que

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \right) \Big|_L \Big|_{r_{ms}} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2} \right) \Big|_L \Big|_{r_{ms}} = 0 \quad (2.27)$$

para o potencial radial efetivo. No entanto, esse critério se equivale, como mostrarei a seguir, a um conhecido critério de estabilidade epicíclica radial para fluidos, chamado de critério de Rayleigh [21] (1916), que se mostrará mais conveniente no estudo da órbita marginalmente estável de uma distribuição geral de matéria autogravitante. Considero o critério de Rayleigh na escolha da distribuição de momento angular do disco a ser usado mais adiante, mas aqui ele será reinterpretado para ser aplicado a partículas teste e, consequentemente, no cálculo do raio da órbita marginalmente estável.

A condição necessária (mas não suficiente) para a estabilidade de fluidos isentrópicos incompressíveis em rotação, com simetria axial, sob pequenas perturbações adiabáticas axissimétricas, chamada de critério de Rayleigh [21] (1916), consiste em que o momento angular específico (por unidade de massa) L do fluido deva *aumentar* com o aumento do raio circunferencial r das trajetórias circulares do fluido, ou seja,

$$\left(\frac{dL^2}{dr} \right) > 0. \quad (2.28)$$

Esse critério foi generalizado para fluidos isentrópicos e compressíveis por Solberg, e para fluidos não isentrópicos por Høiland [22]. O critério de Rayleigh e Solberg, ambos tendo

a mesma forma (2.28), podem ser derivados como casos especiais do critério mais geral de Høiland. Apresento aqui uma derivação heurística do critério de Raileigh e Solberg conforme feito por Abramowicz [22].

O princípio do método consiste em considerar um pequeno elemento do fluido e supor que esse elemento é levemente deslocado da trajetória que segue, segundo o fluxo estacionário considerado. Como resultado desse deslocamento, surgem forças que agem sobre o elemento deslocado. Se o fluxo original é estável, essas forças devem fazer com que o elemento tenda a retornar à sua posição original.

Consideremos o caso de um corpo central rodeado por um disco-teste de matéria (sem autointeração gravitacional) na mecânica Newtoniana. Cada elemento de fluido no fluxo não perturbado se move em um círculo de raio $r = \text{constante}$. A discussão será restrita a movimentos no plano equatorial de simetria do fluido, porém essa restrição não é relevante para os resultados, mas simplifica enormemente alguns argumentos.

No sistema de referência que roda junto com o elemento de fluido, há três forças agindo sobre ele: a força gravitacional f_g , a força centrífuga f_{cf} , e a força aplicada (e.g., pressão) f_a . Em um elemento com trajetória circular em $r = r_0$ e momento angular L_0 essas forças devem se cancelar,

$$f_g(r_0) + f_{cf}(r_0, L_0^2) + f_a(r_0) = 0. \quad (2.29)$$

Considere uma perturbação adiabática axissimétrica, em que o pequeno elemento inicialmente localizado em r_0 é deslocado para $r = r_0 + \delta r$. Como a perturbação é adiabática e axissimétrica, ela não muda o momento angular específico do elemento. O (quadrado do) momento angular na posição perturbada $r = r_0 + \delta r$ continua sendo, portanto L_0^2 . No entanto, o (quadrado do) momento angular específico necessário nesta nova posição para o equilíbrio das forças (2.29) deveria ser

$$L^2 = L^2(r_0 + \delta r) = L_0^2 + \delta L^2 = L_0^2 + \left(\frac{dL^2}{dr} \right) \delta r, \quad (2.30)$$

para que tivéssemos

$$f_g(r) + f_{cf}(r, L^2) + f_a(r) = 0. \quad (2.31)$$

Como $L_0^2 \neq L^2$, há uma força não balanceada δf_a em $r = r_0 + \delta r$,

$$f_g(r) + f_{cf}(r, L_0^2) + f_a(r) = \delta f_a. \quad (2.32)$$

Subtraindo (2.31) de (2.32) temos

$$f_{cf}(r, L^2 - \delta L^2) - f_{cf}(r, L^2) = \delta f_a, \quad (2.33)$$

ou seja,

$$- \left(\frac{\partial f_{cf}}{\partial L^2} \right) \delta L^2 = \delta f_a. \quad (2.34)$$

Usando ainda a equação (2.30) obtemos

$$\delta f_a = - \left(\frac{\partial f_{cf}}{\partial L^2} \right) \left(\frac{dL^2}{dr} \right) \delta r. \quad (2.35)$$

Obviamente o sistema será estável perante a perturbação somente se a força não balanceada tender o elemento perturbado de volta a sua posição original, isto é, somente se $\delta f_a \delta r < 0$. Portanto, essa condição necessária para estabilidade conduz à condição

$$\left(\frac{\partial f_{cf}}{\partial L^2} \right) \left(\frac{dL^2}{dr} \right) > 0. \quad (2.36)$$

Na teoria Newtoniana $f_{cf}(r, L^2) = L^2/r^3$, portanto $\frac{\partial f_{cf}}{\partial L^2}$ é incondicionalmente positivo,

$$\left(\frac{\partial f_{cf}}{\partial L^2} \right) = \frac{1}{r^3} > 0, \quad (2.37)$$

resultando no critério de Rayleigh (2.28) para a estabilidade, ou seja,

$$\left(\frac{dL^2}{dr} \right) > 0. \quad (2.38)$$

Usando a convenção de que $L > 0$, ou seja, o disco roda no sentido de φ positivo, temos que

$$\frac{dL}{dr} > 0. \quad (2.39)$$

Esse critério se mantém válido no caso da teoria de Einstein. A versão relativística do critério de Høiland foi derivada por Seguin [23] e um curioso efeito reverso para órbitas com raio menor que o raio do fóton por Abramowicz [22]. O critério de Rayleigh, Solberg e Høiland é válido para fluidos com simetria axial em rotação e equilíbrio hidrodinâmico, e sua generalização relativística é portanto derivada em espaços-tempo estacionários e axialmente simétricos [22]. Reproduzirei a dedução eurística do critério relativístico na seção 2.4.6, conforme feito por Abramowicz [22].

2.3.2 Potencial efetivo e ISCO

O fato de que para um fluido axissimétrico sob a ação de uma perturbação axissimétrica o momento angular específico de uma partícula de fluido se mantém constante faz dessa situação equivalente à de uma partícula teste para a qual o momento angular é uma constante de movimento. Dessa forma, o raio da órbita circular marginalmente estável pode ser calculado a partir do critério de Rayleigh em uma configuração com simetria axial, pois de fato esse critério, aplicado ao momento angular Kepleriano, é equivalente ao critério (2.27) imposto sobre o potencial efetivo, como mostrarei a seguir.

Considere uma partícula teste (ou equivalentemente uma partícula de fluido) que gira, com momento angular L , ao redor de um centro gravitacional. Seja $\Phi(r, z)$ o potencial gravitacional gerado não só pelo corpo central, mas sim pela soma desse como o potencial de autointeração gravitacional do disco. No sistema de referência que roda junto com a partícula há três forças agindo sobre ela: a força gravitacional $\vec{f}_g = -\vec{\nabla}\Phi$, a força centrífuga $\vec{f}_{cf} = L^2/r^3\hat{r}$ e uma força aplicada genérica $\vec{f}$ não dependente de L (no caso de uma partícula de fluido ideal essa força é simplesmente a pressão hidrodinâmica).

Órbitas estritamente circulares correspondem à situação em que essas três forças estão em equilíbrio

$$\vec{f}_g + \vec{f}_{cf} + \vec{f} = 0, \quad (2.40)$$

ou seja

$$-\vec{\nabla}\Phi + \frac{L^2}{r^3}\hat{r} = -\vec{f}. \quad (2.41)$$

Assim como fizemos para a métrica de Schwarzschild, podemos definir o potencial efetivo²

$$\mathcal{U}(r, L) \equiv \Phi(r) + \frac{L^2}{2r^2}. \quad (2.42)$$

O (negativo do) gradiente do potencial efetivo, calculado mantendo-se o momento angular L constante, nos fornece a força gravitacional e a força centrífuga:

$$(\vec{\nabla}\mathcal{U})_L = \vec{\nabla}\Phi - \frac{L^2}{r^3}\hat{r}, \quad (2.43)$$

ou em termos de componentes

$$(\partial_i\mathcal{U})_L = \partial_i\Phi - \frac{L^2}{r^3}\delta_i^r. \quad (i = r, z) \quad (2.44)$$

Assim, a equação de equilíbrio (2.41) se torna simplesmente

$$(\partial_i\mathcal{U})_L = f_i. \quad (2.45)$$

Observe que o potencial efetivo é construído de forma que ele nos forneça o “potencial correto” somente mantendo-se L constante. No caso de um fluido, o momento angular é uma função das coordenadas $L = L(r, z)$, de maneira que o potencia efetivo tem uma forma $\mathcal{U}(r, z)$ mais geral. Isso pode ser explicitado calculando-se o gradiente de $\mathcal{U}$:

$$\partial_i\mathcal{U} = (\partial_i\mathcal{U})_L + (\partial_L\mathcal{U})_{r,z}\partial_iL. \quad (2.46)$$

²Quando estiver considerando o cálculo do raio da órbita circular marginalmente estável apenas órbitas no plano equatorial serão analisadas, dada a simetria de reflexão nesse plano. Assim, os potenciais e forças aplicadas no plano equatorial são funções somente do raio cilíndrico (com exceção do potencial efetivo, que assume a forma $\mathcal{U}(r, L)$, e da força centrífuga, pois dependem também do momento angular específico).

Calculando a derivada parcial de $\mathcal{U}$ (2.42) com relação a L temos

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial L}\right)_{r,z} = \frac{L}{r^2} = \Omega, \quad (2.47)$$

e, portanto,

$$\partial_i \mathcal{U} = (\partial_i \mathcal{U})_L + \Omega \partial_i L. \quad (2.48)$$

Dessa forma, a equação de equilíbrio (2.45) para um fluido pode ser escrita como

$$\partial_i \mathcal{U} - \Omega \partial_i L = f_i. \quad (2.49)$$

Usarei agora o potencial efetivo no cálculo do raio da órbita circular marginalmente estável. Cálculos totalmente análogos serão usados na versão relativística, como mostrarei na seção (2.4.4).

Consideremos por um momento que não haja nenhuma outra força (pressão, viscosidade, etc.) atuando na partícula teste (ou partícula de fluido), de forma que $\vec{f} = 0$. Assim, a equação (2.45), na ausência de forças extras, se torna

$$(\partial_r \mathcal{U})_L = 0, \quad (2.50)$$

ou seja,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{L_k^2}{r^3} = 0, \quad (2.51)$$

o que define o equilíbrio entre a força de atração gravitacional e a força centrífuga. As órbitas que satisfazem a essa condição são chamadas de órbitas *Keplerianas*. O momento angular que resulta em uma força centrífuga que equilibra exatamente a força gravitacional local é chamado de momento angular Kepleriano, e será denotado L_k . Da equação acima vemos que ele é dado por

$$L_k^2(r) = r^3 \frac{d\Phi}{dr}. \quad (2.52)$$

Podemos observar que o momento angular Kepleriano depende exclusivamente do campo gravitacional, ou seja, é independente das propriedades da partícula. Assim, o momento angular Kepleriano é equivalente à força gravitacional, e isso será usado mais adiante para escrever os potenciais pseudonewtonianos.

Como $L = rv$ e $v \equiv \Omega r$, podemos escrever ainda a velocidade e a velocidade angular Keplerianas

$$v_k = \left(r \frac{d\Phi}{dr}\right)^{1/2}, \quad \Omega_k = \left(\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}\right)^{1/2}. \quad (2.53)$$

Vimos para a métrica de Schwarzschild que o a órbita circular marginalmente estável é um ponto onde as órbitas circulares estável e instável se encontram, e portanto é definida

por

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2} \right)_{L=L_{ms}} = 0, \quad (2.54)$$

ou seja

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{3L_{ms}^2}{r^4} = 0. \quad (2.55)$$

Assim, o raio r_{ms} da ISCO pode ser dado implicitamente fazendo-se $L_{ms} = L_k$:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_{ms}} = 0. \quad (2.56)$$

Portanto, dado o campo gravitacional total (do corpo central mais o campo de autointeração gravitacional do disco), o raio da ISCO pode ser calculada pela equação acima. Não uso diretamente a equação (2.54) para o potencial efetivo porque derivadas numéricas resultam em derivadas totais, e como $L(r, z)$ é uma função das coordenadas, a derivada segunda de $\mathcal{U}$ não seria calculada a L constante. Contudo, veremos mais adiante uma maneira mais conveniente de se realizar esse cálculo, por meio do momento angular Kepleriano.

Como exemplo, considere uma partícula teste ao redor de uma distribuição esférica de massa com potencial

$$\Phi(R) = -\frac{M}{R}, \quad (2.57)$$

que gera no plano equatorial o potencial efetivo

$$\mathcal{U} = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2}. \quad (2.58)$$

As órbitas Keplerianas são caracterizadas por

$$L_k^2 = Mr, \quad v_k^2 = M/r, \quad \Omega_k^2 = M/r^3. \quad (2.59)$$

Vejamos como fica a órbita circular marginalmente estável. A equação (2.56) nos fornece

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2} \right)_L = \left(-\frac{2M}{r^3} + \frac{3M}{r^3} \right)_{r=r_{ms}} = \frac{M}{r^3} > 0, \quad (2.60)$$

e essa órbita será sempre estável. Não existe ponto em que a derivada segunda do potencial efetivo se anule, e portanto, não existe órbita circular marginalmente estável.

O que mostro a seguir é uma maneira mais conveniente de realizar o cálculo acima. Mostrarei que o critério de estabilidade epicíclica radial aplicado sobre o potencial efetivo é na verdade equivalente ao critério de Rayleigh, se aplicado em termos do momento

angular Kepleriano. Primeiramente vou usar o momento angular Kepleriano (2.52) para fazer o papel da força gravitacional na derivada do potencial efetivo (2.44)

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}\right)_L = \frac{L_k^2 - L^2}{r^3}, \quad (2.61)$$

ou seja,

$$r^3 \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}\right)_L = L_k^2 - L^2. \quad (2.62)$$

Tomando a derivada radial a L constante:

$$3r^2 \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}\right)_L + r^3 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L = \frac{\partial L_k^2}{\partial r}. \quad (2.63)$$

Órbitas circulares se caracterizam por $(\partial_r \mathcal{U})_L = 0$, e portanto

$$r^3 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L = \frac{\partial L_k^2}{\partial r}. \quad (\text{órbitas circulares}) \quad (2.64)$$

Como r^3 é sempre positivo, podemos ver que o critério de estabilidade sobre o potencial efetivo é equivalente ao critério de Rayleigh sobre o momento angular Kepleriano:

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial L_k^2}{\partial r} > 0. \quad (2.65)$$

Dessa forma, uma vez que temos o potencial gravitacional podemos calcular o momento angular Kepleriano e, assim, calcular o raio da ISCO por meio do critério de Rayleigh.

Vejamos novamente como exemplo o campo gravitacional esfericamente simétrico (2.57), com um momento angular Kepleriano $L_k^2(r) = Mr$. Aplicando o critério de Rayleigh obtemos

$$\frac{dL_k^2}{dr} = M > 0, \quad (2.66)$$

o que resulta em uma órbita estável, como havíamos obtido anteriormente.

Por fim, quero enfatizar que o resultado acima, de que uma órbita circular Kepleriana ao redor de um centro esférico de massa ser sempre estável, não implica que um *fluido* rodando ao redor desse centro de gravidade será estável. Essa critério diz respeito a órbitas de partículas teste sob a ação apenas do campo gravitacional. No caso de um fluido, existe ainda uma força aplica $\vec{f}$ (devido à pressão hidrodinâmica) que deve ainda ser levada em consideração. Nesse caso, temos que considerar a equação (2.45), que inclui $\vec{f}$. O critério de estabilidade incluindo a força $\vec{f}$ é o próprio critério de Rayleigh descrito na seção anterior, envolvendo o momento angular L . Poderia escrever o critério de estabilidade de Rayleigh em termos de um novo “potencial efetivo” que incluía $\vec{f}$, porém, convém ressaltar que esse critério de estabilidade mais geral não diz respeito à ISCO, que é definida tradicionalmente com relação ao campo gravitacional apenas.

2.3.3 ISCO para uma distribuição geral de matéria

O fato de não existir uma órbita marginalmente estável para uma distribuição esférica de matéria na teoria Newtoniana não significa que as ISCO's não existam de maneira alguma. Para alguns modelos simples a órbita marginalmente estável pode ser determinada exatamente, como mostrado por Zdunik e Gourgoulhon [24] em casos uni e bidimensionais. Consideremos, por exemplo, uma barra em uma dimensão com densidade linear constante ρ_0 , de forma que a massa da barra é $M = 2\rho_0 r_g$, onde r_g é o “raio” da barra, igual à metade do seu comprimento. A atração gravitacional na linha que coincide com a barra, a uma distância r do seu centro, é dada por

$$f_g = - \int_{-r_g}^{r_g} \frac{\rho_0}{(r - r')^2} dr' = - \frac{M}{r^2 - r_g^2}. \quad (2.67)$$

Obviamente, para uma configuração bidimensional temos que assumir que o campo não muda durante o movimento orbital da partícula, isto é, que a barra roda com a mesma velocidade angular que a partícula.

Fazendo $f_g = \partial_r \Phi$ na equação (2.56) temos que o raio da órbita marginalmente estável é igual a

$$r_{ms}^{(barra)} = \sqrt{3} r_g \cong 1.73 r_g. \quad (2.68)$$

O momento angular da partícula nesta órbita é igual a

$$L_{ms}^{(barra)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} M r_g \cong 2.60 M r_g. \quad (2.69)$$

Vimos no caso da geometria de Schwarzschild que a origem da órbita marginalmente estável é um termo proporcional a $1/r^3$ em $\mathcal{U}$ (ver equação (2.15)) com o mesmo sinal do potencial gravitacional (ou seja, com o sinal oposto à força centrífuga). Na teoria Newtoniana este termo é gerado, em primeira aproximação, por um momento de quadrupolo Q como veremos a seguir. No plano equatorial a força gravitacional por unidade de massa da partícula em órbita é

$$f_g = -\frac{M}{r^2} - \frac{3Q}{2r^4}, \quad (2.70)$$

com a convenção de que $Q > 0$ para distribuições oblatas, e $Q < 0$ para prolatas. Vejamos como isso se dá no caso tridimensional geral. Consideremos uma distribuição de matéria localizada, não nula apenas dentro de uma esfera de raio R_0 . O potencial gravitacional é dado pela equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\vec{R}) = 4\pi \rho(\vec{R}), \quad (2.71)$$

cujas solução na forma integral é dada por

$$\Phi(\vec{R}) = - \int \frac{\rho(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} d^3 R'. \quad (2.72)$$

Usando a expansão de $1/|\vec{R} - \vec{R}'|$ em harmônicos esféricos (considerando $R > R'$, ou seja, pontos fora da distribuição de matéria) [25],

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{R'^l}{R^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.73)$$

temos a seguinte expansão multipolar

$$\Phi(\vec{R}) = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{R^{l+1}}, \quad (2.74)$$

dada em termos dos *momentos de multipolo*

$$q_{lm} \equiv \int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') R'^l \rho(\vec{R}') d^3 R'. \quad (2.75)$$

Em coordenadas retangulares temos

$$\Phi(\vec{R}) = -\frac{M}{R} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x^i x^j}{R^5} + \dots \quad (2.76)$$

onde o momento de monopolo ($l = 0$) é dado pela massa M , o vetor momento de dipolo ($l = 1$) dado por

$$\vec{p} \equiv \int \vec{R}' \rho(\vec{R}') d^3 R', \quad (2.77)$$

e o tensor momento de quadrupolo Q_{ij} pelos coeficientes q_{lm} com $l = 2$:

$$Q_{ij} \equiv \int (3x'_i x'_j - R'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{R}') d^3 R'. \quad (2.78)$$

Considerando uma distribuição de massa com simetria cilíndrica e simétrica com relação ao plano xy , o vetor momento de dipolo se anula, e o único momento de quadrupolo não nulo é q_{20} , ou Q_{zz} , e é dado por

$$Q_{zz} = \int (3z'^2 - R'^2) \rho(\vec{R}') d^3 R'. \quad (2.79)$$

Q_{xx} e Q_{yy} também são diferentes de zero, porém não são independentes de Q_{33} , sendo dados por

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz} \equiv Q. \quad (2.80)$$

Substituindo então esse resultado na expansão em coordenadas retangulares (2.76) obtemos o potencial em aproximação de quadrupolo

$$\Phi(\vec{R}) = -\frac{M}{R} - \frac{1}{2} \frac{Q}{R^3} \left(1 - \frac{3z^2}{R^2} \right), \quad (2.81)$$

resultando na equação (2.70) para a força de atração gravitacional em aproximação de quadrupolo, no plano equatorial ($z = 0$). Fazendo o cálculo do raio da órbita marginalmente estável através desse potencial em aproximação de quadrupolo obtemos

$$r_{ms}^{(quad)} = \sqrt{\frac{3Q}{2M}}. \quad (2.82)$$

Vemos então que nessa aproximação a distribuição de massa do corpo central deve ser oblata ($Q > 0$) para que a ISCO exista.

2.4 ISCO's na gravitação relativística

2.4.1 Métrica e observador Euleriano

Passo a tratar agora a existência e o cálculo da ISCO no âmbito da teoria da relatividade geral de Einstein. De acordo com as hipóteses estabelecidas na seção (2.1) estou considerando um espaço-tempo estacionário e axialmente simétrico. Apresento no apêndice C a construção da forma geral de uma métrica estacionária e axialmente simétrica, que tradicionalmente é dada pela equação (C.40):

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\lambda} (dr^2 + dz^2). \quad (2.83)$$

Existem quatro funções métricas: $\Phi(r, z)$, $\psi(r, z)$, $\omega(r, z)$ e $\lambda(r, z)$, que devido à simetria considerada são funções de r e z apenas.

Em algumas situações, no entanto, é conveniente usar as funções $B(r, z)$ e $\zeta(r, z)$, definidas por

$$e^\psi = rB e^{-\Phi}, \quad \text{e} \quad \zeta \equiv \Phi + \lambda, \quad (2.84)$$

no lugar de ψ e λ . Assim a métrica assume a forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{-2\Phi} \left[r^2 B^2 (d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\zeta} (dr^2 + dz^2) \right]. \quad (2.85)$$

Considero nesse trabalho apenas movimentos circulares, ou seja, qualquer partícula ou elemento de fluido terá velocidade azimutal apenas, o que matematicamente significa que o quadri vetor velocidade $u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ assume a forma (C.26)

$$u^\mu = A (\xi^\mu + \Omega \zeta^\mu). \quad (2.86)$$

ξ^μ e ζ^μ são os dois vetores de Killing associados às simetrias do espaço-tempo, estacionariedade e simetria axial respectivamente (ver apêndice C.2-C.3), Ω é a velocidade angular (C.24)

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u^\varphi}{u^t}, \quad (2.87)$$

e $A \equiv u^t$ o chamado *fator redshift* (C.25).

A existência de um vetor de Killing ξ^μ implica que a quantidade $u^\mu \xi_\mu$ é conservada ao longo de qualquer *geodésica* (u^μ sendo a quadrivelocidade associada à geodésica):

$$u^\nu \nabla_\nu (u^\mu \xi_\mu) = u^\nu u^\mu \nabla_\nu \xi_\mu + \xi^\mu u^\nu \nabla_\nu u_\mu = 0. \quad (2.88)$$

O primeiro termo se anula por causa da equação de Killing (equação C.8 do apêndice C)³ e o segundo pela própria equação geodésica. Com isso, há duas constantes de movimento em nossa métrica estacionária axialmente simétrica: u_t e u_φ , associadas aos dois vetores de Killing ξ^μ e ζ^μ .⁴

É conveniente, e simplifica as equações, calcularmos as quantidades físicas e equações em uma base ortonormal que “rode junto” com o espaço-tempo. O sistema de referência que tem essa propriedade é chamado de “referencial localmente sem rotação”, ou *LNR* (*locally non-rotating frame*), e os observadores associados a ele são chamados de “observadores com momento angular nulo”, ou *ZAMO* (*zero angular momentum observers*). Esse observadores são tais que a vorticidade da congruência de linhas de fluxo é nula, o que faz com a congruência seja ortogonal a uma família de hipersuperfícies. Dessa forma, existe uma geometria espacial bem determinada na qual pode-se definir o conceito de simultaneidade para todos os observadores. Por essa razão são conhecidos também como *observadores Eulerianos*, em analogia com o caso Newtoniano em que existe a definição de um tempo absoluto. Apresento no apêndice D a construção dessa base — $e_{(a)}^\mu$ e $e_\mu^{(a)}$, equações (D.67) e (D.68) — sobre a qual serão projetadas as equações e quantidades tensoriais como velocidade e tensor de energia-momento.

O quadrivetor velocidade associado aos observadores ZAMO é denotado por n^μ . Como eles giram com a geometria do espaço-tempo, sua velocidade angular é dada por $\Omega_0 = \omega$, e seu fator redshift por $A_0 = e^{-\Phi}$, de tal forma que sua quadrivelocidade seja

$$n^\mu = e^{-\Phi} (\xi^\mu + \omega \zeta^\mu). \quad (2.89)$$

Em qualquer instante de tempo, o referencial local de *qualquer* observador físico (com uma tetrad ortonormal associada), difere do LNR na posição do observador por uma transformação de Lorentz. É preciso apenas saber a velocidade relativa do observador com relação ao LNR e as fórmulas da relatividade especial, para se obter qualquer quantidade física em um referencial arbitrário. Considerando apenas movimentos circulares do tipo (2.86) a única componente não nula da velocidade relativa com relação ao LNR será a componente azimutal (invariante) $v \equiv v^{(\varphi)} = v^\mu e_\mu^{(l)}$, dada por (ver apêndice D.5)

$$v = e^{\psi-\Phi} (\Omega - \omega). \quad (2.90)$$

³O resultado de se contrair a equação de Killing (C.8) com $u^\nu u^\mu$ é $u^\nu u^\mu (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) = 2u^\nu u^\mu \nabla_\nu \xi_\mu = 0$

⁴Pela equação C.14 do apêndice C $\xi^\mu = \delta_t^\mu$ e $\zeta^\mu = \delta_\varphi^\mu$, o que implica que $u^\mu \xi_\mu = u_\mu \xi^\mu = u_\mu \delta_t^\mu = u_t$ e analogamente para $u_\varphi = u^\mu \zeta_\mu$.

Além disso, o fator redshift é dado por

$$A = u^t = \gamma e^{-\Phi}, \quad (2.91)$$

e a quadrivelocidade (2.86) pode ser escrita em termos de suas componentes como

$$u^\mu = \gamma e^{-\Phi} (1, 0, 0, \Omega). \quad (2.92)$$

Aqui γ é o fator de Lorentz da relatividade especial

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (2.93)$$

Calculando as componentes contravariantes $u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu$ diretamente da métrica obtive:

$$u_\mu = \gamma e^\psi \left(-e^{\Phi-\psi} - \omega v, 0, 0, v \right), \quad (2.94)$$

e ainda as componentes covariante $u_{(a)} = u_\mu e_{(a)}^\mu$ e contravariante $u^{(a)} = u^\mu e_\mu^{(a)}$ na base ortonormal do ZAMO, através das tetradas (D.67) e (D.68):

$$u_{(a)} = \gamma (-1, 0, 0, v), \quad u^{(a)} = \gamma (1, 0, 0, v). \quad (2.95)$$

A aceleração desses observadores é definida por

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu, \quad (2.96)$$

onde ∇_ν denota a derivada covariante. Veremos mais adiante que essa expressão resulta em

$$a_i = \partial_i \ln(-u_t) - \frac{\Omega \partial_i L}{1 - \Omega L}. \quad (2.97)$$

com $i = 1, 2$ e $x^1 = r$ e $x^2 = z$, sendo nulas as componentes em φ e t . L é o momento angular, que será definido posteriormente, na equação (2.108), e para o qual dedicarei a seção 2.4.3.

As componentes contravariantes são dadas simplesmente por

$$a^i = e^{-2\lambda} a_i, \quad (2.98)$$

e as componentes na base ortonormal por

$$a^{(l)} = a_{(l)} = e^{-\lambda} a_l. \quad (2.99)$$

2.4.2 Interpretação da métrica estacionária axialmente simétrica

Ao contrário da gravitação Newtoniana, os referenciais inerciais dentro de um fluido relativístico em rotação não estão em repouso com relação a observadores infinitamente distantes. Ao invés disso, os referenciais inerciais são “arrastados” pelo fluido em rotação. Esse arrasto de referenciais inerciais é a razão da distinção entre observadores estáticos e observadores que localmente não estão em rotação. O arrasto de referenciais inerciais aparece na métrica (2.85) como a componente não nula $g_{t\varphi}$. A quantidade $\omega = \omega(r, z)$ é a velocidade angular do observador que localmente não está em rotação, e é considerada como sendo a taxa de rotação (a taxa de arrasto) do referencial inercial local.

Hipersuperfícies Σ_t com $t = \text{const}$ ($dt = 0$) são ortogonais à quadrivelocidade do observador ZAMO. Portanto, eventos pertencentes a Σ_t podem ser considerados como sendo simultâneos para esse observador. Dessa forma, pode-se medir o comprimento circunferencial ao redor do eixo de simetria sobre as hipersuperfícies Σ_t , e esse será o comprimento circunferencial próprio para o ZAMO. Da métrica (2.85) é possível observar que impor $dt = dr = dz = 0$ resulta que $ds = e^\psi d\varphi$. Como $\psi = \psi(r, z)$, essa função permanece constante sobre uma circunferência, e portanto o comprimento circunferencial é $\mathcal{C} = \int ds = 2\pi e^\psi$. Assim, $e^\psi = rBe^{-\Phi}$ é o *raio circunferencial próprio* para o observador ZAMO.

A quantidade $e^{-\Phi}$ é o fator redshift do observador ZAMO (ver equação D.60). Ela pode ser vista então como a razão entre a frequência observada no infinito e a frequência emitida de fótons com momento angular nulo no referencial LNRF. Dessa forma, $(e^{-\Phi} - 1)$ é identificado com o *redshift gravitacional*, e Φ pode ser considerado como o “potencial gravitacional” relativístico (como veremos abaixo). Fótons com momento angular nulo que são emitidos em um referencial com velocidade de rotação $v \neq 0$ sofrerão deslocamento Doppler. A razão entre a frequência observada e a emitida é $A^{-1} = \gamma^{-1}e^\Phi$, dada pela equação (D.82). O deslocamento de frequência nesse caso é uma combinação do redshift gravitacional e do efeito Doppler transversal, pois o fato do fóton ter momento angular nulo implica que sua emissão é em uma direção perpendicular à direção φ no referencial LNRF.

Assumindo que o campo gravitacional é fraco e estático, é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas $(x^\mu) = (x^0 = t, x^i)$ tal que as componentes métricas assumam a forma

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(1 + 2\bar{\Phi})dt^2 + (1 - 2\bar{\Phi})f_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.100)$$

onde $\bar{\Phi}$ é o potencial gravitacional Newtoniano (solução da equação de Poisson $\nabla^2\bar{\Phi} = 4\pi G\rho$) e f_{ij} são as componentes da métrica Euclidiana no espaço tridimensional. No limite de campo gravitacional fraco (limite Newtoniano) $|\bar{\Phi}| \ll 1$ (em unidades onde a

velocidade da luz não é um, isto seria $|\bar{\Phi}|/c^2 \ll 1$). Na decomposição “3+1” a métrica toma a forma (D.50), de onde vemos que $e^\Phi = \sqrt{1 + 2\bar{\Phi}} \approx 1 + \bar{\Phi}$. Assim, nesse limite, $\Phi \ll 1$, de tal maneira que $e^\Phi \approx 1 + \Phi$. Dessa forma vemos que

$$\Phi \rightarrow \bar{\Phi}, \quad (2.101)$$

e a função métrica Φ tende ao campo gravitacional Newtoniano.

Permita-me ainda fazer uma interpretação do movimento circular, em termos de seu limite Newtoniano. Vimos que o momento angular L é uma constante de movimento para uma partícula (ou ainda como veremos para uma partícula de fluido). Portanto, nesse caso, de um único observador ou partícula, a quadriaceleração (2.97) se torna:

$$a_i = \partial_i \ln(-u_t). \quad (L \text{ constante}) \quad (2.102)$$

Mas $-u_t = \gamma(e^\Phi + \omega v e^\psi)$, e no limite Newtoniano $\omega \rightarrow 0$, o que implica que

$$a_i \rightarrow \partial_i (\Phi + \ln \gamma). \quad (2.103)$$

Ainda nesse limite $\ln \gamma = -(1/2) \ln(1 - v^2) \rightarrow v^2/2$ ($v \ll 1$). Com isso, vemos que o termo $\ln(-u_t)$ se reduz, no limite Newtoniano, ao potencial efetivo

$$\ln(-u_t) \rightarrow \bar{\Phi} + \ln \gamma \rightarrow \bar{\Phi} + \frac{L^2}{2r^2}, \quad (2.104)$$

o que faz com que a aceleração seja composta pela força gravitacional e força centrífuga

$$a_i \rightarrow \partial_i \Phi + \partial_i \left(\frac{L^2}{2r^2} \right). \quad (2.105)$$

Para entender a ausência do sinal negativo nos gradientes dos potenciais gravitacional e centrífugo precisamos lembrar que estamos tratando órbitas circulares em que há três forças em equilíbrio $\vec{f}_g + \vec{f}_{cf} + \vec{f} = 0$, e que a aceleração relativística é devida à força não gravitacional apenas: $\vec{a} = \vec{f} = -\vec{f}_g - \vec{f}_{cf}$.

2.4.3 Generalização relativística da densidade de momento angular

O momento angular por unidade de massa, ou densidade de momento angular (ou, por simplicidade, somente momento angular), é definido na teoria Newtoniana por $L = \Omega r^2$ onde Ω é a velocidade angular e r é a distância ao eixo de rotação.

Vimos na seção 2.3 que o critério de estabilidade, que determina o raio da órbita circular marginalmente estável, dado segundo o potencial efetivo, pode ser escrito também

em termos do momento angular. Para podermos aplicar esse critério de estabilidade no caso relativístico precisamos de uma generalização relativística do conceito de densidade de momento angular que imite da melhor maneira possível as propriedades de L para o caso Newtoniano. Além do critério de estabilidade, as principais propriedades a serem consideradas são:

- Para um movimento arbitrário em um campo gravitacional estacionário axissimétrico, L é uma constante de movimento (não muda sobre uma linha de fluxo):

$$\frac{DL}{D\tau} = 0. \quad (2.106)$$

- No caso de fluídos barotrópicos o *teorema de von Zeipel* garante que as superfícies de $\Omega = \text{const}$ coincidem com a superfície $L = \text{const}$ (como veremos na seção 4.3.2). Isto significa que $L = L(r)$ e $\Omega = \Omega(r)$ e, portanto, a lei de rotação de um corpo pode ser caracterizada especificando a forma da função $L = L(\Omega)$;
- L tem uma relação simples com o escalar de rotação, ω , da congruência das linhas de fluxo:

$$-\omega^2 = \frac{1}{4}r^{-2}(\nabla_i L)(\nabla^i L). \quad (2.107)$$

A definição de ω é: $-\omega^2 = (1/2)\omega^{ik}\omega_{ik}$; ω^{ik} é a parte antissimétrica de $\nabla^i u^k$.

As definições relativísticas mais frequentemente usadas da densidade de momento angular são as seguintes:

$$L \equiv -\frac{u_\varphi}{u_t}, \quad (2.108)$$

$$\mathcal{L} \equiv u_\varphi, \quad (2.109)$$

$$j \equiv u_\varphi u^t, \quad (2.110)$$

todas convergindo para Ωr^2 no limite Newtoniano. Kozłowski *et al.* [9] apresenta a tabela 2.1, que compara essas definições de densidade de momento angular com respeito às propriedades acima citadas. Com isso, parece claro que L seja a escolha mais razoável e natural. Observe, no entanto que na seção 2.2 usei a definição $L = u_\varphi$ (equação (2.11)) no desenvolvimento do potencial efetivo (devido simplesmente por ser uma constante de movimento), mas de agora em diante passo a denotar L apenas por $-u_\varphi/u_t$.

Escrevendo as definições (2.108-2.110) em termos do quadri vetor velocidade (2.94) temos

$$L = \frac{v}{e^{\Phi-\psi} + \omega v}, \quad (2.111)$$

$$\mathcal{L} = \gamma v e^\psi, \quad (2.112)$$

$$j = \gamma^2 v e^{\psi-\Phi}. \quad (2.113)$$

Definição	Newtoniano $L = \Omega r^2$	Relativístico $L = -u_\varphi \backslash u_t$	Relativístico $\mathcal{L} = u_\varphi$	Relativístico $j = u_\varphi u^t$
Limite Newtoniano	Ωr^2	Ωr^2	Ωr^2	Ωr^2
Teorema von Zeipel	Satisfaz	Satisfaz	Não satisfaz	Satisfaz
É uma constante de movimento?	Sim	Sim	Somente no vácuo	Não
Critério de estabilidade	Simples, L aumenta com r	Simples, L aumenta com r	Simples somente no vácuo, $\mathcal{L}$ aumenta com r	Não tem um critério simples
Escalar de rotação	$\omega^2 \sim (\nabla L)^2$	$\omega^2 \sim (\nabla L)^2$	Sem relação simples	Sem relação simples
Distribuição Kepleriana	Monotônica	Mínimo em r_{ms}	Mínimo em r_{ms} , singular em r_{ph}	Mínimo e singular em r_{ph}

Tabela 2.1: Propriedades do momento angular por unidade de massa - (tabela retirada de Kozłowski *et al.* [9])

No limite Newtoniano $\gamma \rightarrow 1$, $\Phi, \omega \rightarrow 0$, $B \rightarrow 1$ e $e^\psi = rBe^{-\Phi} \rightarrow r$. Portanto, as três definições se reduzem a rv .

Manipulando as equações acima podemos ainda relacionar j com L :

$$j = \frac{L}{1 - \Omega L}, \quad (2.114)$$

o que nos mostra que $L = L(\Omega) \Leftrightarrow j = j(\Omega)$.

2.4.4 Equação de movimento e potencial efetivo

Vimos na seção 2.2 que dada a métrica, as equações do movimento geodésico são geradas pela Lagrangiana $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, e resultam na equação (2.6), a chamada equação do movimento geodésico:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma = 0, \quad (2.6)$$

No entanto, podemos ver que essa é exatamente a equação do transporte paralelo do quadri vetor velocidade $u^\mu = \dot{x}^\mu$ (ver apêndice B):

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu u^\nu u^\sigma = u^\nu \left[\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu u^\sigma \right] = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0. \quad (2.115)$$

Isso mostra que o movimento geodésico equivale exatamente a um movimento não acelerado

$$a^\mu = 0, \quad (2.116)$$

como deveria ser.

De modo geral, os observadores circulares não seguem geodésicas, e portanto devem haver outras forças além da força gravitacional para os manterem em suas órbitas (no caso que trataremos posteriormente será a força devido ao gradiente de pressão). É possível introduzir essas forças adicionais adicionando termos ao lado direito da equação da geodésica. Assim, a equação de movimento geral é da forma

$$a^\mu = f^\mu. \quad (2.117)$$

De fato, como veremos na seção 3.2.7, ao se desenvolver a equação de conservação do tensor energia-momento de um fluido ideal surge um termo de força devido à pressão hidrodinâmica, exatamente como no caso Newtoniano (equação (3.117)).

O que precisamos agora é simplesmente escrever uma expressão para a_μ , e teremos nossa equação de movimento. Farei isso utilizando o fato de que a aceleração é a derivada de Lie (ver apêndice A) do quadri vetor velocidade u_μ com relação a si mesmo:⁵

$$a_\mu = \mathcal{L}_{\vec{u}} u_\mu. \quad (2.118)$$

Utilizarei o quadri vetor velocidade (2.86) na forma $u^\mu = Ak^\mu$ onde $k^\mu \equiv \xi^\mu + \Omega \zeta^\mu$, e a propriedade abaixo

$$\mathcal{L}_{A\vec{k}} u_\mu = A \mathcal{L}_{\vec{k}} u_\mu + u_\nu k^\nu \partial_\mu A, \quad (2.119)$$

derivada no apêndice A, equação (A.21). Para o primeiro termo podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{k}} u_\mu &= \mathcal{L}_{\xi} u_\mu + \mathcal{L}_{\Omega \zeta} u_\mu \\ &= \mathcal{L}_{\xi} u_\mu + \Omega \mathcal{L}_{\zeta} u_\mu + u_\nu \zeta^\nu \partial_\mu \Omega \\ &= u_\varphi \partial_\mu \Omega, \end{aligned} \quad (2.120)$$

onde usamos a propriedade acima novamente para $\mathcal{L}_{\Omega \zeta} u_\mu$, e o fato de que $\mathcal{L}_{\xi} u_\mu = \mathcal{L}_{\zeta} u_\mu = 0$ devido à simetria do espaço-tempo. Substituindo esse resultado em (2.119):

$$\mathcal{L}_{A\vec{k}} u_\mu = u^t u_\varphi \partial_\mu \Omega + u_\nu k^\nu \partial_\mu A. \quad (2.121)$$

⁵ $\mathcal{L}_{\vec{u}} u_\mu = u^\nu \nabla_\nu u_\mu + u_\nu \nabla_\mu u^\nu = u^\nu \nabla_\nu u_\mu = a_\mu$, pois $u_\nu \nabla_\mu u^\nu = \frac{1}{2} \nabla_\mu (u^\nu u_\nu) = \frac{1}{2} \nabla_\mu (-1) = 0$.

Lembrando que $A = u^t$, $u_\nu k^\nu = A^{-1} u_\nu u^\nu = -A^{-1}$ e $u^t u_\varphi = j = L/(1 - \Omega L)$ (equações (2.110) e (2.114)) obtemos

$$a_i = -\partial_i \ln u^t + \frac{L \partial_i \Omega}{1 - \Omega L}. \quad (2.122)$$

As componentes t e φ dessa equação são nulas pois nenhuma função depende de tais coordenadas, e, portanto, emprego o índice $i = 1, 2$, onde $x^1 = r$ e $x^2 = z$.

Como veremos a seguir, é conveniente transferir a derivada em Ω que aparece na expressão acima para uma derivada em L . Para isso escrevo ΩL como

$$\Omega L = -\frac{u^\varphi}{u^t} \frac{u_\varphi}{u_t} \Rightarrow 1 - \Omega L = \frac{u^t u_t + u^\varphi u_\varphi}{u^t u_t} = -\frac{1}{u^t u_t},$$

ou seja,

$$-(u^t u_t)^{-1} = 1 - \Omega L. \quad (2.123)$$

Derivando essa equação obtemos

$$(u^t u_t)^{-2} (u^t \partial_i u_t + u_t \partial_i u^t) = -\Omega \partial_i L - L \partial_i \Omega,$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \partial_i \ln(-u_t) + \partial_i \ln u^t &= \frac{\Omega \partial_i L + L \partial_i \Omega}{1 - \Omega L}, \\ \Rightarrow \partial_i \ln u^t - \frac{L \partial_i \Omega}{1 - \Omega L} &= -\partial_i \ln(-u_t) + \frac{\Omega \partial_i L}{1 - \Omega L}. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reescrever a equação (2.122) como

$$a_i = \partial_i \ln(-u_t) - \frac{\Omega \partial_i L}{1 - \Omega L}. \quad (2.124)$$

Aparece aqui o termo $\ln(-u_t)$ que, como visto na seção 2.4.2, se reduz ao potencial efetivo no limite Newtoniano. Mostrarei que de fato esse é o potencial efetivo relativístico, e portanto, o definirei como

$$\mathcal{U} \equiv \ln(-u_t). \quad (2.125)$$

($u_t = u_\mu \xi^\mu < 0$ pois u_μ e ξ^μ são vetores tipo-tempo.) De acordo com a quadrivelocidade (2.94) podemos escrever

$$\mathcal{U} \equiv \ln(\gamma(e^\Phi + \omega v e^\psi)). \quad (2.126)$$

No entanto, o potencial efetivo é de fato um potencial efetivo somente a L constante e, portanto, temos que escrevê-lo em termos de L para podermos realizar a derivação apropriada. Da condição de normalização $u_\mu u_\nu g^{\mu\nu} = -1$ podemos observar que

$$u_t u_t g^{tt} + 2u_t u_\varphi g^{t\varphi} + u_\varphi u_\varphi g^{\varphi\varphi} = -1. \quad (2.127)$$

Multiplicando por $(u_t)^{-2}$:

$$g^{tt} + 2\frac{u_\varphi}{u_t}g^{t\varphi} + \left(\frac{u_\varphi}{u_t}\right)^2 g^{\varphi\varphi} = -(u_t)^{-2}. \quad (2.128)$$

Como $\mathcal{U} = \ln(-u_t) = -\frac{1}{2} \ln(u_t^{-2})$, temos que

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2} \ln(-g^{tt} + 2Lg^{t\varphi} - L^2g^{\varphi\varphi}). \quad (2.129)$$

Com isso, fica explícito a dependência de $\mathcal{U}$ em L . Calculemos então o seu gradiente:

$$\partial_i \mathcal{U} = (\partial_i \mathcal{U})_L + \partial_i L \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial L} \right)_{r,z}, \quad (2.130)$$

com

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial L} \right)_{r,z} &= \frac{g^{t\varphi} - Lg^{\varphi\varphi}}{g^{tt} - 2Lg^{t\varphi} + L^2g^{\varphi\varphi}} \\ &= -\left(g^{t\varphi} + \frac{u_\varphi}{u_t}g^{\varphi\varphi} \right) (u_t)^2 \\ &= -u^\varphi u_t = -\Omega u^t u_t \\ &= \frac{\Omega}{1 - \Omega L}, \end{aligned} \quad (2.131)$$

onde usamos a equação (2.128) para $(u_t)^2$ na segunda linha, $u^\varphi = u_t g^{t\varphi} + u_\varphi g^{\varphi\varphi}$ na terceira linha e a equação (2.123) para $u_t u^t$ na quarta linha. Assim, a equação (2.130) se torna

$$\partial_i \mathcal{U} - \frac{\Omega \partial_i L}{1 - \Omega L} = (\partial_i \mathcal{U})_L. \quad (2.132)$$

Podemos ver então que o quadrivetor aceleração (2.124) se torna simplesmente

$$a_i = (\partial_i \mathcal{U})_L, \quad (2.133)$$

e com isso mostro que, de fato, $\mathcal{U}$ é o potencial efetivo a L constante. A equação de movimento então se torna

$$f_i = (\partial_i \mathcal{U})_L. \quad (2.134)$$

2.4.5 Determinação da ISCO

Com o potencial efetivo em mãos, basta seguirmos o mesmo procedimento que fizemos no caso Newtoniano, seção (2.3.2), para definir as órbitas Keplerianas e a órbita circular marginalmente estável. Dizemos que ocorre um movimento *Kepleriano* quando as órbitas

circulares são geodésicas ($a_i = f_i = 0$). Assim, o chamado *momento angular Kepleriano* L_k , para o qual ocorre um movimento geodésico, é dado por

$$(\partial_r \mathcal{U})_{L=L_k} = 0. \quad (2.135)$$

Usando o potencial da equação (2.129) podemos escrever

$$(\partial_i \mathcal{U})_L = -\frac{1}{2} \frac{\partial_i g^{tt} - 2L \partial_i g^{t\varphi} + L^2 \partial_i g^{\varphi\varphi}}{g^{tt} - 2L g^{t\varphi} + L^2 g^{\varphi\varphi}}, \quad (2.136)$$

o que resulta na equação abaixo para o momento angular Kepleriano:

$$\frac{1}{2} \partial_r g^{tt} - L_k \partial_r g^{t\varphi} + \frac{1}{2} L_k^2 \partial_r g^{\varphi\varphi} = 0. \quad (2.137)$$

Resolvendo para L_k obtemos

$$L_k^\pm = \frac{\partial_r g^{t\varphi} \pm \sqrt{\Delta}}{\partial_r g^{\varphi\varphi}}, \quad (2.138)$$

onde

$$\Delta \equiv (\partial_r g^{t\varphi})^2 - \partial_r g^{tt} \partial_r g^{\varphi\varphi}. \quad (2.139)$$

A expressão acima mostra que órbitas circulares existem somente para $\Delta \geq 0$. O limite $\Delta = 0$ corresponde às órbitas de partículas não massivas (fótons).

Observa-se que em geral existem *duas* soluções diferentes de órbitas circulares Keplerianas: L_k^+ e L_k^- ; correspondendo aos dois sinais na expressão (2.138). Elas correspondem às órbitas *direta*, rodando na mesma direção que o espaço-tempo, e *retrógrada*, “tentando” rodar na direção contrária. A órbita direta corresponde ao maior momento angular Kepleriano L_k^d ; a órbita retrógrada, ao menor, L_k^r . Portanto,

$$L_k^d = L_k^+ \quad e \quad L_k^r = L_k^- \quad (\text{se } \partial_r g^{\varphi\varphi} > 0), \quad (2.140)$$

$$L_k^d = L_k^- \quad e \quad L_k^r = L_k^+ \quad (\text{se } \partial_r g^{\varphi\varphi} < 0), \quad (2.141)$$

$$\text{com } L_k^d > L_k^r. \quad (2.142)$$

Dadas as componentes da métrica inversa $g^{tt} = -e^{-2\Phi}$, $g^{\varphi\varphi} = e^{-2\psi} - \omega^2 e^{-2\Phi}$ e $g^{t\varphi} = -\omega e^{-2\Phi}$ da métrica estacionária axialmente simétrica, o potencial efetivo (2.129) se torna

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2} \ln \left[e^{-2\Phi} \left([1 - \omega L]^2 - e^{-2(\psi-\Phi)} L^2 \right) \right], \quad (2.143)$$

e a equação do momento angular Kepleriano (2.137)

$$\partial_r (e^{-2\Phi}) - 2L_k \partial_r (\omega e^{-2\Phi}) + L_k^2 \partial_r (e^{-2\Phi} \omega^2 - e^{-2\psi}) = 0. \quad (2.144)$$

O momento angular Kepleriano e o valor de Δ que determina a existência das órbitas circulares são dados por

$$L_k^\pm = \frac{\omega \partial_r \Phi - \frac{1}{2} \partial_r \omega \pm \sqrt{(\partial_r \omega)^2 + 4e^{2(\Phi-\psi)} (\partial_r \Phi)(\partial_r \psi)}}{\omega^2 \partial_r \Phi - e^{2(\Phi-\psi)} \partial_r \psi - \omega \partial_r \omega}, \quad (2.145)$$

$$\Delta = e^{-4\Phi} \left[(\partial_r \omega)^2 + 4e^{2(\Phi-\psi)} (\partial_r \Phi)(\partial_r \psi) \right]. \quad (2.146)$$

Podemos ainda escrever a velocidade e a velocidade angular Keplerianas usando as equações (2.90) e (2.111):

$$v_k = \frac{e^{\psi-\Phi} \partial_r \omega}{2 \partial_r \psi} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\partial_r(e^{2\Phi}) \partial_r(e^{-2\psi})}{(\partial_r \omega)^2}} \right), \quad (2.147)$$

$$\Omega_k = \omega + \frac{\partial_r \omega}{2 \partial_r \psi} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\partial_r(e^{2\Phi}) \partial_r(e^{-2\psi})}{(\partial_r \omega)^2}} \right). \quad (2.148)$$

Outra propriedade importante que podemos calcular é a órbita circular marginalmente ligada, determinada pela equação $\mathcal{U}|_{L_{mb}} = 0$,

$$g^{tt} - 2L_{mb}g^{t\varphi} + L_{mb}^2g^{\varphi\varphi} = -1. \quad (2.149)$$

O raio r_{mb} dessa órbita é determinado implicitamente igualando-se L_{mb} com L_k . No entanto, o significado físico desta órbita não é muito claro. Uma partícula está em uma órbita Kepleriana não ligada (isto é, com $(-u_t)_k > 1 \Leftrightarrow \mathcal{U}_k > 0$) se é capaz de escapar para o infinito sob uma perturbação infinitesimal, enquanto que uma partícula com $(-u_t)_k < 1 \Leftrightarrow \mathcal{U}_k < 0$ não é (estou usando $\mathcal{U}_k \equiv \mathcal{U}(L_k)$ como o potencial efetivo para momento angular Kepleriano). Por outro lado, para um elemento de fluido, tal conclusão não pode ser obtida porque simplesmente u_t não é mais uma quantidade conservada.

Por fim, a órbita circular marginalmente estável, ou ISCO, é a órbita circular Kepleriana para a qual

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2} \right)_{L=L_{ms}} = 0, \quad (2.150)$$

onde L_{ms} é seu o momento angular. Usando a equação (2.136), que dá a dependência explícita em L , a derivada segunda do potencial efetivo é escrita como

$$\left(\partial_r^2 \mathcal{U} \right)_L = -\frac{1}{2} \frac{\partial_r^2 g^{tt} - 2L \partial_r^2 g^{t\varphi} + L^2 \partial_r^2 g^{\varphi\varphi}}{g^{tt} - 2Lg^{t\varphi} + L^2 g^{\varphi\varphi}} + \frac{1}{2} \frac{(\partial_r g^{tt} - 2L \partial_r g^{t\varphi} + L^2 \partial_r g^{\varphi\varphi})^2}{(g^{tt} - 2Lg^{t\varphi} + L^2 g^{\varphi\varphi})^2}. \quad (2.151)$$

O segundo termo dessa expressão se anula por causa da equação (2.137) para o momento angular Kepleriano, e portanto, o momento angular L_{ms} da ISCO é determinado pela expressão

$$\partial_r^2 g^{tt} - 2L_{ms} \partial_r^2 g^{t\varphi} + L_{ms}^2 \partial_r^2 g^{\varphi\varphi} = 0, \quad (2.152)$$

e o seu raio r_{ms} implicitamente fazendo $L_k = L_{ms}$, usando a equação (2.137) para o momento angular Kepleriano.

Já possuímos então uma expressão que determina o raio da ISCO. Contudo, procuro uma expressão em termos do critério de estabilidade sobre o momento angular Kepleriano, exatamente como fiz na seção (2.3.2) para o caso Newtoniano. Para tanto, escrevo novamente a equação (2.151) da derivada segunda do potencial efetivo como

$$\left(\partial_r^2 \mathcal{U}\right)_L = -\frac{1}{2} \frac{\partial_r (\partial_r g^{tt} - 2L \partial_r g^{t\varphi} + L^2 \partial_r g^{\varphi\varphi})_L}{u_t^{-2}}, \quad (\text{órbitas Keplerianas}) \quad (2.153)$$

sem o segundo termo, por considerar órbitas Keplerianas. Escrevo agora o termo dentro da derivada do numerador em termos do momento angular Kepleriano usando a equação (2.137):

$$\begin{aligned} (u_t^{-2}) \left(\partial_r^2 \mathcal{U}\right)_L &= -\frac{1}{2} \partial_r \left[-2(L - L_k) \partial_r g^{t\varphi} + (L^2 - L_k^2) \partial_r g^{\varphi\varphi} \right]_L \\ &= (L - L_k) \partial_r^2 g^{t\varphi} - (\partial_r L_k) \partial_r g^{t\varphi} - \frac{1}{2} (L^2 - L_k^2) \partial_r^2 g^{\varphi\varphi} + L_k (\partial_r L_k) \partial_r g^{\varphi\varphi} \\ &= -(\partial_r L_k) \partial_r g^{t\varphi} + L_k (\partial_r L_k) \partial_r g^{\varphi\varphi} \\ &= \left(-\partial_r g^{t\varphi} + L_k \partial_r g^{\varphi\varphi} \right) \partial_r L_k, \end{aligned} \quad (2.154)$$

onde usei que $L = L_k$ por tratar apenas de órbitas Keplerianas. Como u_t^{-2} é sempre positivo, o critério de estabilidade sobre o potencial efetivo é dado pela seguinte expressão:

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2}\right)_L > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\partial g^{\varphi\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{L_k} \frac{\partial g^{t\varphi}}{\partial r}\right) \frac{\partial L_k^2}{\partial r} > 0. \quad (2.155)$$

Usando a equação do movimento Kepleriano (2.137), esse critério pode ainda ser escrito como

$$\left(\frac{1}{L_k} \frac{\partial g^{t\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{L_k^2} \frac{\partial g^{tt}}{\partial r}\right) \frac{\partial L_k^2}{\partial r} > 0, \quad (2.156)$$

ou ainda, somando as duas expressões, como

$$\left(\frac{\partial g^{\varphi\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{L_k^2} \frac{\partial g^{tt}}{\partial r}\right) \frac{\partial L_k^2}{\partial r} > 0. \quad (2.157)$$

De acordo com a equação quadrática (2.137), as duas soluções Keplerianas L_k^+ e L_k^- e são relacionadas pelos coeficientes da equação:

$$L_k^+ L_k^- = \frac{\partial_r g^{tt}}{\partial_r g^{\varphi\varphi}}. \quad (2.158)$$

Multiplicando a equação (2.157) por L_k^2 e usando o resultado acima obtemos

$$\left(L_k^2 - L_k^+ L_k^-\right) (\partial_r g^{\varphi\varphi}) \frac{\partial L_k^2}{\partial r} > 0, \quad (2.159)$$

ou ainda,

$$\left(L_k^2 - L_k^+ L_k^-\right) \left(\frac{\partial_r g^{tt}}{L_k^+ L_k^-}\right) \frac{\partial L_k^2}{\partial r} > 0. \quad (2.160)$$

Calculando o valor de $L_k^+ L_k^-$ explicitamente temos:

$$\begin{aligned} L_k^+ L_k^- &= \frac{\partial_r g^{tt}}{\partial_r g^{\varphi\varphi}} = \frac{\partial_r (-e^{-2\Phi})}{\partial_r (e^{-2\psi} - \omega^2 e^{-2\Phi})} \\ &= \frac{(\partial_r \Phi)}{-e^{2(\Phi-\psi)}(\partial_r \psi) + \omega^2(\partial_r \Phi) - \omega(\partial_r \omega)} \\ &= \frac{(\partial_r \Phi)^2}{-e^{2(\Phi-\psi)}(\partial_r \psi)(\partial_r \Phi) + \omega^2(\partial_r \Phi)^2 - \omega(\partial_r \omega)(\partial_r \Phi)}. \end{aligned} \quad (2.161)$$

A hipótese das soluções Keplerianas existirem, $\Delta \geq 0$, utilizando a expressão (2.146), expressa-se como

$$-4e^{2(\Phi-\psi)}(\partial_r \psi)(\partial_r \Phi) \leq (\partial_r \omega)^2. \quad (2.162)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L_k^+ L_k^- &\geq \frac{(\partial_r \Phi)^2}{\frac{1}{4}(\partial_r \omega)^2 + \omega^2(\partial_r \Phi)^2 - \omega(\partial_r \omega)(\partial_r \Phi)} \\ &= \frac{(\partial_r \Phi)^2}{\left[\frac{1}{2}(\partial_r \omega) - \omega(\partial_r \Phi)\right]^2} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Isso significa que os dois momentos angulares Keplerianos, quando existirem, têm o mesmo sinal!

Usando esse resultado, e o fato de que $\partial_r g^{tt} = 2e^{-2\Phi} \partial_r \Phi$, podemos escrever condição de estabilidade (2.160) como

$$\left(L_k^2 - L_k^+ L_k^-\right) (\partial_r \Phi) \frac{\partial L_k^2}{\partial r} > 0. \quad (2.164)$$

Vimos que a função métrica Φ se reduz ao potencial gravitacional no limite Newtoniano. Para distribuições usuais de matéria vale a condição $\partial_r \Phi > 0$, que diz que o potencial gravitacional diminui com o raio.

Considere então a quantidade

$$\mathcal{Q} \equiv \left(L_k^2 - L_k^+ L_k^-\right). \quad (2.165)$$

Como $L_k^d > L_k^r$, a órbita direta terá sempre um valor $\mathcal{Q} > 0$ e a órbita retrógrada $\mathcal{Q} < 0$. Portanto, considerando a situação em que $\partial_r \Phi > 0$, o critério usual (Newtoniano) de estabilidade $\partial_r L_k^2 > 0$ vale para a órbita direta e um critério inverso $\partial_r L_k^2 < 0$ para a órbita retrógrada. Se $\partial_r \Phi < 0$ a situação se inverte.

Usando as definições de L_k^d e L_k^r das equações (2.140-2.141), e considerando que $\partial_r g^{\varphi\varphi} \geq 0 \Leftrightarrow \partial_r \Phi \geq 0$, podemos verificar que o critério direto de estabilidade $\partial_r L_k^2 > 0$ se aplica a L_k^+ e o critério inverso $\partial_r L_k^2 < 0$ a L_k^- .

O caso $L_k^+ = L_k^-$ corresponderá sempre a uma órbita marginalmente estável ($\mathcal{Q} = 0$).

2.4.6 Critério de Rayleigh relativístico

O que mostro agora é que as condições de estabilidade (2.155-2.157), que determinam a órbita circular marginalmente estável, são equivalentes ao critério de estabilidade epicíclica radial para fluidos na teoria relativística aplicado ao momento angular Kepleriano, de forma totalmente análoga ao caso Newtoniano. A derivação eurística do critério de Rayleigh relativístico pode ser feita da mesma forma como na seção 2.3.1 para o caso Newtoniano, conforme descrito por Abramowicz [22]. Obtenho aqui, no entanto, uma forma diferente desse trabalho, aplicada ao movimento Kepleriano.

Para essa dedução precisamos de uma generalização relativística da força centrífuga (bem como da força gravitacional). A questão de como definir forças inercias na teoria relativística consiste em como decompor a “força aparente” total em gravitacional, centrífuga, Coriolis e de Euler. Para tanto, Abramowicz *et al.* [26] sugeriram uma decomposição de forças a partir da decomposição 3+1 do espaço-tempo através de congruências de observadores especiais. No entanto, essa decomposição foi criticada por alguns autores dizendo que as forças inerciais, segundo a definição de Abramowicz *et al.* [26], tem propriedades indesejadas e ainda que são em certo sentido ambíguas.

De fato, a decomposição da força total em suas componentes inerciais requer alguma informação adicional que permita uma decomposição 3+1, ou seja, a definição de uma geometria tridimensional para cada observador, de uma forma absoluta, não ambígua (a proposição de que a força gravitacional não tenha sentido absoluto é uma das versões do princípio de equivalência). Dessa forma, a definição de forças inerciais em espaços-tempo arbitrários é ainda matéria de debate. Contudo, em espaços-tempo estacionários vimos que existe uma congruência de observadores que permite uma decomposição 3+1 não arbitrária, o que permite a definição não ambígua de forças inerciais.

O que faço agora é escrever a aceleração de uma forma que apareçam os termos inerciais conforme definido por Abramowicz *et al.* [26]. De acordo com a equação (2.133) a aceleração pode ser calculada pela derivada do potencial efetivo, que escreverei conforme a equação (2.126):

$$\mathcal{U} \equiv \ln \left(\gamma (e^\Phi + \omega v e^\psi) \right). \quad (2.126)$$

Invertendo a equação (2.111) do momento angular L em termos de v obtemos

$$v = \frac{e^{\Phi-\psi} L}{1 - \omega L}, \quad (2.166)$$

o que faz com que o potencial efetivo acima possa ser escrito como

$$\mathcal{U} = \ln \left(\frac{\gamma e^\Phi}{1 - \omega L} \right) = \Phi + \ln \gamma - \ln(1 - \omega L). \quad (2.167)$$

Tomando a derivada a L constante:

$$\begin{aligned} (\partial_i \mathcal{U})_L &= a_i = \partial_i \Phi + \partial_i (\ln \gamma)_L - \partial_i [\ln(1 - \omega L)]_L \\ &= \partial_i \Phi + v \gamma^2 (\partial_i v)_L + \left(\frac{L}{1 - \omega L} \right) \partial_i \omega \\ &= \partial_i \Phi + \gamma^2 v (\partial_i v)_L + v e^{\psi - \Phi} \partial_i \omega \end{aligned} \quad (2.168)$$

A derivada de v , calculada pela equação (2.166) resulta em

$$(\partial_i v)_L = v \partial_i (\Phi - \psi) + v^2 e^{\psi - \Phi} \partial_i \omega, \quad (2.169)$$

o que nos leva a uma aceleração da forma

$$a_i = \partial_i \Phi + \gamma^2 v^2 \partial_i (\Phi - \psi) + \gamma^2 v e^{\psi - \Phi} \partial_i \omega. \quad (2.170)$$

Abramowicz, Nurowski e Wex [26] explicam que a aceleração na forma acima sugere uma forma natural e conveniente de se definir as forças inerciais (por unidade de massa) gravitacional $\mathcal{G}$, centrífuga $\mathcal{Z}$, e de Coriolis $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{G} = \partial_i \Phi; \quad (2.171)$$

$$\mathcal{Z} = \gamma^2 v^2 \partial_i (\Phi - \psi); \quad (2.172)$$

$$\mathcal{C} = \gamma^2 v e^{\psi - \Phi} \partial_i \omega. \quad (2.173)$$

De acordo com Foertsch *et al.* [27] as forças inerciais gravitacional, centrífuga, de Coriolis e de Euler podem ser definidas de maneira não ambígua sobre superfícies tipo-tempo Σ , para observadores arbitrários n_μ sobre ela, em termos de uma decomposição única da aceleração a_μ . Tomando a componente de a_μ ortogonal a n_μ : i) a aceleração gravitacional é a parte independente de v ; ii) a aceleração centrífuga é a parte ortogonal a v_μ e par em v ; iii) a aceleração de Coriolis é a parte ortogonal a v_μ e ímpar em v ; iv) A aceleração de Euler é a parte paralela a v_μ .

Podemos observar que essa definição corresponde à decomposição acima. Escolhendo n_μ como sendo a quadrivelocidade do ZAMO, eles serão ortogonais às hipersuperfícies que contém a velocidade relativa $v_\mu \propto \zeta_\mu$. Portanto, a componente de a_μ ortogonal a n_μ são simplesmente as componentes espaciais a_i , com $(i = r, z, \varphi)$. A velocidade relativa está na direção φ , portanto, a força de Euler é identicamente nula ($a_\varphi = 0$). As acelerações gravitacional, centrífuga e de Coriolis são simplesmente a parte independente de v , a parte par em v e a parte ímpar em v da expressão (2.170).

Precisamos agora especificar qual é o momento angular conservado durante perturbações radiais axissimétricas e *não estacionárias*, pois as perturbações não precisam ser necessariamente estacionárias. As quantidades $u_t = u^\mu \xi_\mu$ e $u_\varphi = u^\mu \zeta_\mu$ são conservadas sob perturbações estacionárias e axissimétricas respectivamente. Isso significa que o momento angular que estamos usando, $L = -\frac{u_\varphi}{u_t}$ (equação (2.108)), somente é conservado sob perturbações estacionárias também. Devemos utilizar portanto o momento angular $\mathcal{L} = u_\varphi$ (equação (2.109)), que é conservado em perturbações somente axissimétricas. Escrevendo as expressões (2.171-2.173) em termos de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{G}(r) = \partial_i \Phi; \quad (2.174)$$

$$\mathcal{Z}(r, \mathcal{L}^2) = e^{-2\psi} \mathcal{L}^2 \partial_i (\Phi - \psi); \quad (2.175)$$

$$\mathcal{C}(r, \mathcal{L}) = e^{-\Phi} \mathcal{L} \sqrt{1 + e^{-2\psi} \mathcal{L}} \partial_i \omega. \quad (2.176)$$

Portanto, a equação da aceleração (2.170) pode ser escrita, no plano equatorial, em uma forma similar à equação Newtoniana (2.29):

$$\mathcal{G}(r_0) + \mathcal{Z}(r_0, \mathcal{L}_0^2) + \mathcal{C}(r_0, \mathcal{L}_0) + \mathcal{T}(r_0) = 0 \quad (2.177)$$

para um elemento de fluido em r_0 , com momento angular $\mathcal{L}_0$, sob a ação de uma força aplicada $\mathcal{T}(r_0)$. Observe que a força de Coriolis $\mathcal{C}$ não está presente no caso Newtoniano.

Deslocando esse elemento para uma nova posição $r = r_0 + \delta$ haverá uma força não balanceada, porque o momento angular será o mesmo:

$$\mathcal{G}(r) + \mathcal{Z}(r, \mathcal{L}_0^2) + \mathcal{C}(r, \mathcal{L}_0) + \mathcal{T}(r) = \delta \mathcal{T}. \quad (2.178)$$

O desenvolvimento seguinte é completamente análogo ao feito na seção 2.3.1, bastando observar que no lugar de f_{cf} temos agora $\mathcal{Z} + \mathcal{C}$. Portanto, obtemos o resultado análogo à equação (2.36):

$$\left[\left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \mathcal{L}^2} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathcal{L}^2} \right) \right] \left(\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial r} \right) > 0, \quad (2.179)$$

ou seja,

$$\left[\left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \mathcal{L}^2} \right) + \left(\frac{1}{2\mathcal{L}} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathcal{L}} \right) \right] \left(\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial r} \right) > 0. \quad (2.180)$$

Usando as funções (2.175-2.176) obtemos

$$\left[\partial_r (\Phi - \psi) + \left(\frac{1 + v^2}{2v} \right) e^{\psi - \Phi} \partial_r \omega \right] \left(\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial r} \right) > 0. \quad (2.181)$$

Essa é uma forma do critério de estabilidade epicíclica radial para fluidos, em termos do momento angular $\mathcal{L}$. Para compará-lo com o critério de estabilidade dado em termos do

potencial efetivo, devo escrevê-lo em termos do momento angular Kepleriano L_k . Começo então escrevendo o logaritmo da relação $\mathcal{L} = -u_t L$:

$$\ln \mathcal{L} = \ln(-u_t) + \ln L. \quad (2.182)$$

Como $\ln(-u_t) \equiv \mathcal{U}$ temos

$$\frac{\partial_r \mathcal{L}}{\mathcal{L}} = \partial_r \mathcal{U} + \frac{\partial_r L}{L}. \quad (2.183)$$

Usando a equação (2.132) para $\partial_r \mathcal{U}$ e que $(\partial_r \mathcal{U})_L = a_r = 0$ (equação (2.133)) para o movimento Kepleriano, temos que

$$\frac{\partial_r \mathcal{L}_k}{\mathcal{L}_k} = \left(\frac{\Omega_k}{1 - \Omega L_k} + \frac{1}{L_k} \right) \partial_r L_k. \quad (2.184)$$

Manipulando essa expressão chegamos a

$$\partial_r \mathcal{L}_k = - \left(\frac{(u_t)_k}{1 - \Omega_k L_k} \right) \partial_r L_k \quad \Rightarrow \quad \partial_r \mathcal{L}_k^2 = \left(\frac{(u_t)_k^2}{1 - \Omega_k L_k} \right) \partial_r L_k^2. \quad (2.185)$$

A quantidade $1 - \Omega L = -(u^t u_t)$, equação (2.123), é sempre positiva pois $u^t u_t < 0$ para trajetórias tipo-tempo. Assim, podemos escrever o critério de Rayleigh relativístico (2.181) em termos de L_k :

$$\left[\partial_r (\Phi - \psi) + \left(\frac{1 + v_k^2}{2v_k} \right) e^{\psi - \Phi} \partial_r \omega \right] \left(\frac{\partial L_k^2}{\partial r} \right) > 0. \quad (2.186)$$

A velocidade Kepleriana v_k é definida pela equação (2.170) com $a_r = 0$. Com isso obtemos a relação

$$(\gamma_k^2 v_k^2) \partial_i (\Phi - \psi) = -\partial_i \Phi - \gamma_k^2 v_k e^{\psi - \Phi} \partial_i \omega. \quad (2.187)$$

Multiplicando a equação (2.186) por $(\gamma_k^2 v_k^2)$ e substituindo a relação acima obtemos

$$\left[-\partial_r \Phi - \left(\frac{v_k e^{\psi - \Phi}}{2} \right) \partial_r \omega \right] \left(\frac{\partial L_k^2}{\partial r} \right) > 0, \quad (2.188)$$

ou em termos de L_k , usando a equação (2.166):

$$\left[-\partial_r \Phi - \left(\frac{L_k}{2(1 - \omega L_k)} \right) \partial_r \omega \right] \left(\frac{\partial L_k^2}{\partial r} \right) > 0, \quad (2.189)$$

Multiplicando-se por⁶ $2e^{-2\Phi}(1 - \omega L_k)/L_k^2$, e depois de alguma manipulação, essa equação resulta em

$$\left(-\frac{1}{L_k} \frac{\partial (\omega e^{-2\Phi})}{\partial r} + \frac{1}{L_k^2} \frac{\partial (e^{-2\Phi})}{\partial r} \right) \frac{\partial L_k^2}{\partial r} > 0, \quad (2.190)$$

que vem a ser a condição de estabilidade (2.156) derivada do potencial efetivo:

$$\left(\frac{1}{L_k} \frac{\partial g^{t\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{L_k^2} \frac{\partial g^{tt}}{\partial r} \right) \frac{\partial L_k^2}{\partial r} > 0.$$

⁶Usando as equações (2.113), (2.114) e (2.166) pode-se mostrar que $(1 - \omega L_k) = \gamma^2(1 - \Omega L_k) > 0$.

2.5 Potenciais pseudonewtonianos

2.5.1 O potencial de Paczyński-Wiita

Grande parte do que é conhecido sobre hidrodinâmica próxima a objetos compactos, em particular na astrofísica de buracos negros, tem sido descrita de forma satisfatória usando modelos Newtonianos. A maneira de se modelar o potencial gravitacional de um buraco negro sem recorrer às complexidades da teoria da Relatividade Geral é usando um potencial *pseudonewtoniano*, que imita a existência de um horizonte de eventos no raio gravitacional de Schwarzschild.

Em 1980 Paczyński [7] introduziu o seguinte potencial:

$$\Phi_{PW} = -\frac{M}{R - r_g} \quad \text{com} \quad r_g \equiv 2M, \quad (2.191)$$

que se mostrou muito prático, e foi usado por inúmeros pesquisadores na teoria de acreção em buracos negros, e se tornou uma ferramenta padrão em astrofísica relativística. Paczyński escreveu intuitivamente a forma do potencial, no entanto, ele pode ser derivado de um procedimento formal, baseado na definição padrão de “potencial efetivo” relativístico no espaço-tempo de Schwarzschild [28].

O potencial de Paczyński-Wiita, como ficou conhecido o potencial pseudonewtoniano acima, pode ainda ser “deduzido” a partir da equação do movimento circular Kepleriano no plano equatorial (2.137). Aplicando essa equação à métrica de Schwarzschild, para a qual $g^{tt} = -r/(r - r_g)$, $g^{\phi\phi} = 1/r^2$ e $g^{t\phi} = 0$ (para o plano equatorial), obtemos

$$\frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{2} \frac{r}{r - r_g} \right) - L_k^2 \left(\frac{1}{r^3} \right) = 0. \quad (2.192)$$

Se pensarmos nessa equação como uma equação de movimento no âmbito da teoria Newtoniana podemos então definir um potencial gravitacional Φ

$$\Phi(r) \equiv -\frac{1}{2} \frac{r}{r - r_g} = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_g}{r - r_g} + 1 \right) = \Phi_{PW}(r, 0) - \frac{1}{2}, \quad (2.193)$$

de tal forma que a equação (2.192) assuma a mesma forma que sua versão Newtoniana (equação 2.51), que expressa o balanço entre as forças “gravitacional” e “centrífuga”. Vemos com isso que o potencial Φ difere do potencial de Paczyński e Wiita (2.191) no plano equatorial apenas por uma constante.

Podemos observar ainda que o momento angular derivado de acordo com a teoria de Einstein (no espaço-tempo de Schwarzschild) e o derivado pelo potencial pseudonewtoniano são dados pela mesma equação (2.192), resultando, portanto, na expressão:

$$L_k^2 = \frac{Mr^3}{(r - r_g)^2}. \quad (2.194)$$

Na teoria Newtoniana o momento angular e a velocidade angular são relacionados por $L = \Omega r^2$, mas na geometria de Schwarzschild a velocidade angular é dada pela equação (2.87):

$$\begin{aligned}\Omega \equiv \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} &= \frac{L/r^2}{E/(1 - \frac{2M}{r})}, \\ \Rightarrow L_k &= \frac{1}{1 - r_g/r} r^2 \Omega_k.\end{aligned}\tag{2.195}$$

Portanto, a velocidade angular Kepleriana calculada na geometria de Schwarzschild e no potencial pseudonewtoniano *não* são iguais:

$$\Omega_k = \left(\frac{M}{r^3}\right)^{1/2} \neq \left(\frac{M}{r^3}\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r - r_g}\right) = \Omega_{PW}.\tag{2.196}$$

O potencial (2.191) também não reproduz exatamente, mas apenas aproximadamente, a frequência epicíclica radial. Além disso, velocidades de matéria calculadas por meio dele podem exceder a velocidade da luz. No entanto, Abramowicz [29] encontrou uma solução para esse problema, mostrando como incorporar efeitos de relatividade especial no esquema de Paczyński-Wiita: para isso deve-se interpretar as velocidades físicas “verdadeiras” v_{ver} em termos das calculadas v_{cal} por $v_{cal} = v_{ver}/(1 - v_{ver}^2/c^2)$.

2.5.2 Generalização para outras métricas

O potencial de Paczyński-Wiita, pode ainda ser “deduzido” a partir da generalização relativística do momento angular aplicado à métrica de Schwarzschild, definindo o potencial pseudonewtoniano como sendo aquele que gera uma força gravitacional que equilibra exatamente a força centrífuga gerada pelo momento angular Kepleriano L_k . De acordo com a seção (2.4.3), a generalização relativística da densidade de momento angular mais consistente é dada por $L \equiv -u_\phi/u_t$, o que resulta na expressão (2.145) para o momento angular Kepleriano. Para métrica de Schwarzschild isso se reduz a

$$L_k^2 = \frac{Mr^3}{(r - r_g)^2}.\tag{2.197}$$

Na teoria Newtoniana a força centrífuga é dada então por

$$f_{cf} = \frac{L_k^2}{r^3},\tag{2.198}$$

que deve equilibrar a força de atração gravitacional

$$f_g \equiv -\frac{d\Phi}{dr}\tag{2.199}$$

para uma órbita circular. Podemos então integrar a equação de equilíbrio ($f_g = -f_{cf}$) para se obter o potencial $\Phi(r)$

$$\Phi(r) = \int \frac{L_k^2}{r^3} dr. \quad (2.200)$$

Realizando a integração acima utilizando o momento angular Kepleriano (2.197) para a métrica de Schwarzschild obtemos o potencial de Paczyński-Wiita (2.191)

$$\Phi(r) = \int \frac{Mr^3}{(r - r_g)^2 r^3} dr = -\frac{M}{r - r_g} = \Phi_{PW}(r, 0) \quad (2.201)$$

(a menos de uma constante), fornecendo uma outra “derivação” possível para esse potencial pseudonewtoniano.

O mesmo procedimento poderia ser utilizado para se “derivar” potenciais pseudonewtonianos de outras métricas. Foi exatamente isso o que fez Mukhopadhyay [30] para o caso da métrica de Kerr. Aplicando agora a expressão do momento angular Kepleriano (2.145) para métrica de Kerr, a força centrífuga será

$$\frac{L_k^2}{r^3} = \frac{M^2(r^2 - 2a\sqrt{Mr} + a^2)^2}{r^3 \left(\sqrt{Mr}(r - 2M) + aM \right)^2} \equiv -f_g. \quad (2.202)$$

Então, f_g pode ser identificado com a força gravitacional do buraco negro sobre uma órbita Kepleriana. A expressão acima se reduz à forma de Paczyński-Wiita para $a = 0$. A forma geral do pseudopotencial correspondente é algebricamente complicada, mas se simplifica para qualquer valor dado de a [30].

Outros potenciais pseudonewtonianos já foram propostos para a métrica de Kerr, como por exemplo por Artemova *et al.* [31]. Porém essas outras formas não mantêm uma relação clara com a métrica do espaço-tempo. Como essa forma envolve a métrica diretamente, muitas propriedades da geometria de Kerr são inerentes ao potencial por construção, e por isso deve fornecer resultados mais precisos, apesar da forma mais complicada.

O mesmo procedimento aplicado acima para a métrica de Kerr pode ser aplicado às métricas de Reissner-Nordström (para um buraco negro carregado eletricamente)

$$f_g \equiv -\frac{L_k^2}{r^3} = -\frac{r(Mr - Q^2)}{(r^2 - 2Mr + Q^2)^2}, \quad (2.203)$$

e de Kerr-Newman (para um buraco negro carregado eletricamente e em rotação):

$$f_g \equiv -\frac{L_k^2}{r^3} = -\frac{\left(\sqrt{Mr - Q^2}(r^2 + a^2) + a(Q^2 - 2Mr) \right)^2}{r^3 \left(r^2 - 2Mr + Q^2 + a\sqrt{Mr - Q^2} \right)^2}. \quad (2.204)$$

2.5.3 Critério de estabilidade

As equações (2.197), (2.202), (2.203) e (2.204) fornecem o momento angular Kepleriano L_k para os potenciais pseudonewtonianos de Schwarzschild, Kerr, Reissner-Nordström e Kerr-Newman respectivamente (que são os mesmos da derivação relativística). Como descrito nas seções 2.3.2 e 2.4.5, o critério de estabilidade de Rayleigh (2.39), ou seja, a condição de que o momento angular aumente com o raio r , aplicado ao momento angular Kepleriano é equivalente à condição de estabilidade sobre o potencial efetivo de uma órbita circular de uma partícula teste. Dessa forma, aplicando esse critério de estabilidade a cada um desses potenciais efetivos, obtemos exatamente a condição obedecida pelo raio da órbita circular marginalmente estável em cada uma dessas métricas.

Primeiramente para o momento angular Kepleriano do potencial de Paczyński e Wiita:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{PW}}{\partial r^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dL_k^2}{dr} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{Mr^3}{(r-2M)^2} \right) > 0 \quad (2.205)$$

$$\Rightarrow \quad r > 6M, \quad (2.206)$$

ou seja, obtemos o raio da órbita marginalmente estável $r_{ms} = 6m$ de Schwarzschild. Esse é um dos motivos pelos quais esse potencial tem uma grande aplicabilidade e se tornou muito prático na abordagem de problemas envolvendo matéria ao redor de buracos negros. Esse potencial também reproduz de maneira exata o raio da órbita marginalmente ligada $r_{mb} = 4M$. Isso pode ser visto da definição Newtoniana de energia

$$E_n \equiv \frac{L_k^2}{2r} + \Phi, \quad (2.207)$$

e aplicando a condição $E_n < 0$, usando o potencial Φ_{PW} (2.191).

Aplicando agora a condição de estabilidade para o momento angular Kepleriano de Kerr (2.202), obtemos

$$\frac{d}{dr} L_k^2 = \frac{d}{dr} \left(\frac{M(r^2 - 2a\sqrt{Mr} + a^2)}{\sqrt{Mr}(r-2M) + aM} \right) > 0 \quad (2.208)$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 6Mr + 8a\sqrt{Mr} - 3a^2 > 0, \quad (2.209)$$

que é então a mesma condição sobre o raio da órbita marginalmente estável para a métrica de Kerr. Analogamente, para o momento angular Kepleriano de Reissner-Nordström (2.203) e de Kerr-Newman (2.204) obtemos, respectivamente,

$$\frac{d}{dr} L_k^2 = \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \sqrt{Mr - Q^2}}{r^2 - 2Mr + Q^2} \right) > 0 \quad (2.210)$$

$$\Rightarrow \quad r^3 - 6Mr^2 + 9Q^2r - 4Q^2/M > 0, \quad (2.211)$$

e

$$\frac{d}{dr}L_k^2 = \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{Mr - Q^2}(r^2 + a^2) + a(Q^2 - 2Mr)}{r^2 - 2Mr + Q^2 + a\sqrt{Mr - Q^2}} \right) > 0 \quad (2.212)$$

$$\Rightarrow Mr\Delta - 4(Mr - Q^2) \left[\sqrt{Mr - Q^2} - a \right]^2 > 0. \quad (2.213)$$

Fazendo $Q = 0$, $a = 0$ e $Q = a = 0$ a condição acima para a métrica de Kerr-Newman se reduz às condições (2.209), (2.211) e (2.206) para as métricas de Kerr, Reissner-Nordström e Schwarzschild respectivamente, como o esperado.

Capítulo 3

Hidrodinâmica

3.1 Hidrodinâmica clássica

Nesse capítulo faço uma revisão das equações utilizadas na descrição matemática de fluidos, tanto na abordagem clássica quanto na relativística, dado que o modelo de discos grossos que utilizo nesse trabalho trata os discos como sendo fluidos ideais em um estado de equilíbrio hidrodinâmico, que assumem estruturas toroidais.

3.1.1 Descrição Euleriana e Lagrangiana de fluidos

Um fluido é considerado como um meio contínuo. Isso significa que um pequeno elemento de volume em um fluido, mesmo que tomado como sendo infinitesimal, é sempre considerado grande o suficiente para conter um grande número de moléculas. As expressões *partícula de fluido* e *ponto em um fluido* devem sempre ser entendidas dessa forma. Se falarmos por exemplo no deslocamento de alguma partícula de fluido, não nos referimos ao deslocamento de moléculas individuais, mas sim em um elemento de volume contendo muitas moléculas, apesar de ainda considerado como um ponto.

A diferença entre as coordenadas Eulerianas e Lagrangianas é que em uma o referencial é o mundo externo, e na outra é o fluido em movimento. Ambas são corretas, mas dependendo da situação, ambas não são igualmente apropriadas.

Coordenadas espaciais físicas (isto é, coordenadas Eulerianas) são escritas como $\vec{x} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$, com t denotando o tempo. Partículas individuais de fluido são distinguidas pelas coordenadas Lagrangianas $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, e o seu movimento descrito por um fluxo $\vec{\chi}(\tau, \vec{a})$, que dá a posição da partícula identificada por $\vec{a}$ no instante τ . A variável temporal τ é usada em conjunto com $\vec{a}$ ($a^\mu = (\tau, a^1, a^2, a^3)$). Portanto, $\vec{x} = \vec{\chi}(\tau, \vec{a})$ faz a transformação de $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$, enquanto que a transformação inversa é dada por $\vec{a} = \vec{a}(t, \vec{x})$, onde $t = \tau$ e $\vec{x} = (x, y, z)$ são as coordenadas Eulerianas.

Por definição, as coordenadas (a, b, c) permanecem constantes seguindo o movimento das partículas de fluido, então a velocidade da partícula é dada por

$$\vec{u}_a(\tau, \vec{a}) \equiv \frac{\partial \vec{\chi}(\tau, \vec{a})}{\partial \tau}. \quad (3.1)$$

Isso define um campo de velocidade em cada ponto do espaço, o qual denotaremos por $\vec{u}(t, \vec{x})$:

$$\vec{u}_a(\tau, \vec{a}) = \vec{u}(t = \tau, \chi(\tau, \vec{a})), \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}(t, \vec{x}) = \vec{u}_a(\tau = t, \vec{a}(t, \vec{x})). \quad (3.2)$$

Considere uma massa de fluido contida em um volume M_τ se movendo com as partículas materiais. Sejam as partículas $\forall \vec{a} \in A$ (onde $A \subset \mathbb{R}^3$) que compõem a massa em movimento M_τ (mapeadas para M_τ por $\vec{\chi}(\tau, \vec{a})$). É conveniente definir as coordenadas (a, b, c) de tal forma que $d^3\vec{a} = da db dc$ represente a massa em um elemento de volume $d^3\vec{x} = dx dy dz$:

$$dm = d^3\vec{a} = \rho(t, \vec{x}) d^3\vec{x}. \quad (3.3)$$

Portanto, $\vec{a} = (a, b, c)$ é considerada uma coordenada de massa. Essa igualdade expressa a invariância do elemento de massa dm , ou seja, a conservação de massa. Dessa relação vemos que a densidade de massa é dada por

$$\rho(t, \vec{x}) = \frac{1}{J(t, \vec{x})}, \quad (3.4)$$

onde

$$J = \frac{\partial(\chi^1, \chi^2, \chi^3)}{\partial(a^1, a^2, a^3)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} \quad (3.5)$$

é o Jacobiano da transformação $\chi : \vec{x} \rightarrow \vec{x}(\vec{a})$ em um instante de tempo t específico.

Podemos tratar todas as quantidades físicas escalares, representadas genericamente por F , em coordenadas Eulerianas, ou seja, como função de t e $\vec{x}$: $F = F(t, \vec{x})$. Usando coordenadas comóveis, $F = F(\tau, \vec{\chi}(\tau, \vec{a}))$, podemos definir a chamada *derivada convectiva* como sendo a derivada temporal nesse referencial comóvel:

$$\begin{aligned} \frac{DF}{D\tau} &\equiv \frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \tau} \cdot \vec{\nabla} F, \\ \Rightarrow \quad \frac{DF}{D\tau} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} F, \end{aligned} \quad (3.6)$$

que funciona como se as coordenadas $\vec{x}$ fossem funções da variável temporal t para as partículas de fluido. Porém deve estar claro que isso é uma simplificação de notação, e que as coordenadas $\vec{x}$ e t são variáveis independentes. Aqui e sempre que aparecerem, $\partial/\partial\tau$ e $\partial/\partial t$ querem dizer $(\partial/\partial\tau)_a$ e $(\partial/\partial t)_x$ respectivamente.

A hipótese de que $\vec{a} = \vec{a}(t, \vec{x})$ segue o movimento do fluido pode ser expressa pela independência de $\vec{a}$ e τ , ou seja, $\partial_\tau \vec{a} = 0$,

$$\frac{D\vec{a}}{D\tau} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} = 0, \quad (3.7)$$

mostrando que $\vec{a}$ permanece constante conforme é transportado pela partícula de fluido.

3.1.2 Equilíbrio termodinâmico

Sabemos que a dinâmica de um fluido está sujeita ao comportamento de variáveis termodinâmicas (e.g., pressão), e não apenas a variáveis cinemáticas. A termodinâmica trata de sistemas em equilíbrio, e processos entre estados de equilíbrio.

Por equilíbrio termodinâmico nós entendemos um sistema termodinâmico de matéria que atingiu um estado perfeitamente estacionário, estando em equilíbrio mecânico (hidrostático) e a uma temperatura uniforme. Normalmente, em grandes sistemas de matéria, o equilíbrio termodinâmico é satisfeito somente de forma aproximada ou mesmo não satisfeito de forma global, no sistema como um todo. Contudo, muitos casos de interesse podem ser divididos em sistemas menores onde o equilíbrio termodinâmico vale, pelo menos com uma boa aproximação. Nesse caso estamos falando em equilíbrio termodinâmico local. Esse é o caso quando estamos tratando de fluidos, que estritamente falando só podem estar em equilíbrio termodinâmico no caso estacionário (e sem gradientes de velocidade).

Em um sistema que não está em equilíbrio termodinâmico, como um fluido com gradientes de temperatura ou velocidade, as definições usuais das quantidades termodinâmicas não mais fazem sentido e devem ser modificadas. As definições necessárias são, primeiramente, que ρ , U e $\vec{u}$ são definidas como antes: ρ e ρU são a massa e a energia interna por unidade de volume, e $\vec{u}$ é o momento de uma unidade de massa do fluido. As quantidades termodinâmicas restantes são então definidas como sendo as mesmas funções de ρ e U que são em equilíbrio térmico.

O simples fato de existir um gradiente de velocidade implica na ausência de equilíbrio termodinâmico. A pressão P que aparece na expressão para o tensor de densidade de fluxo de momento em um fluido viscoso deve ser tomada então como sendo a mesma função $P = P(\rho, U)$ que em equilíbrio térmico. Nesse caso P não será, estritamente falando, a pressão no sentido usual, ou seja, a força normal em um elemento de superfície. Há uma diferença de primeira ordem com respeito aos gradientes; a componente normal da força inclui, além de P , um termo proporcional a $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ (em um fluido incompressível esse termo é zero, e a diferença é então de ordem superior) [32].

Dado que nenhuma reação química ocorra, o estado termodinâmico de um sistema de matéria em equilíbrio pode ser descrito completamente por três quantidades: a pressão

P , a temperatura absoluta T , e a densidade de massa ρ (ou o volume específico $V = 1/\rho$). Para qualquer sistema de matéria existe uma função termodinâmica F conectando as três variáveis, chamada de *equação de estado*:

$$F(\rho, P, T) = 0. \quad (3.8)$$

Todas as quantidades termodinâmicas são determinadas pelos valores de duas delas quaisquer, junto com a equação de estado.

3.1.3 Equações de movimento

A descrição matemática do estado de um fluido em movimento é feita por meio de funções que dão a distribuição de velocidade do fluido $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ e de quaisquer duas quantidades termodinâmicas pertencentes ao fluido, a pressão $P(\vec{x}, t)$ e a densidade $\rho(\vec{x}, t)$ por exemplo. Se forem dadas as cinco quantidades a seguir: as três componentes da velocidade $\vec{u}$, a pressão P e a densidade ρ , o estado do fluido em movimento estará completamente determinado.

Dessa forma, um sistema completo de equações da dinâmica de fluidos deve ter um total de cinco equações (além da equação de estado). A primeira equação determina a conservação de massa, e é chamada de *equação da continuidade*

$$\frac{D\rho}{D\tau} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u}. \quad (3.9)$$

Temos também a *equação de Navier-Stokes*¹

$$\frac{D\vec{u}}{D\tau} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{f}, \quad (3.10)$$

que na verdade é a 2ª lei de Newton aplicada a uma partícula de fluido (de massa unitária) sujeita a uma força devido ao gradiente de pressão, a forças dissipativas de origem arbitrária (e.g., viscosidade ordinária, turbulência, viscosidade radiativa, dissipação por radiação gravitacional), representadas pelo tensor das tensões $\vec{\sigma}$, e a outras forças externas (por unidade de massa), representadas genericamente por $\vec{f}$. P é a pressão hidrostática e $\vec{u}$ é o campo de velocidade do fluido.

As equações acima estão escritas em sua forma Lagrangiana. Em sua forma conservativa, elas assumem a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (3.11)$$

¹Para um texto básico em dinâmica de fluidos, com as equações apresentadas aqui, ver Landau e Lifshits [32]

e

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\Pi} = \rho \vec{f}, \quad (3.12)$$

onde $\vec{j} \equiv \rho \vec{u}$ é o vetor densidade de fluxo de massa (ou densidade de momento), e $\Pi_j^i \equiv P\delta_j^i + \rho u^i u_j - \sigma_j^i$ é o tensor densidade de fluxo de momento. Essa forma das equações de conservação tem a vantagem de mostrar explicitamente as quantidades conservadas pelo fluxo, além de terem se mostrado convenientes para cálculos numéricos.

Na abordagem Lagrangiana, quantidades físicas extensivas (como as variáveis termodinâmicas extensivas) são tratadas em termos de suas quantidades “específicas” (locais), que dizem respeito às quantidades por unidade de massa, enquanto que na abordagem Euleriana são tratadas em termos de quantidades por unidade de volume. Exemplo: seja S a entropia por unidade de massa, ρS é a entropia por unidade de volume. Nesse trabalho utilizo na maior parte do tempo quantidades físicas específicas.

Em situações em que a condutividade térmica e a viscosidade não são importantes a equação de Navier-Stokes se reduz à *equação de Euler*²

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{\nabla} \Phi. \quad (3.13)$$

Essa equação se aplica aos chamados *fluidos ideais*, para os quais não é levado em conta processos de dissipação de energia que possam ocorrer em consequência da fricção interna (viscosidade) e da troca de calor entre as diferentes partes do fluido em movimento.

As equações de Euler e de Navier-Stokes são equações vetoriais, e são compostas por três equações escalares. Cada uma delas, junto com a equação da continuidade formam um total de quatro equações, faltando ainda uma equação para se especificar o movimento do fluido completamente. A equação faltante é a equação que estabelece a conservação de energia, chamada de *equação geral do transporte de calor*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho U \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{u} \left(\frac{1}{2} u^2 + h \right) - \vec{u} \cdot \vec{\sigma} - \kappa \vec{\nabla} T \right], \quad (3.14)$$

que pode ainda ser escrita em termos de S , a entropia específica do fluido (ver Landau e Lifshits [32, p. 193]):

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} T) \quad (3.15)$$

κ é a condutividade térmica, U é a energia interna por unidade de massa e $h \equiv U + P/\rho$ é a entalpia por unidade de massa do fluido.

²Utilizo aqui $\vec{f} = -\vec{\nabla} \Phi$ por considerar somente forças externas do tipo gravitacional, determinadas pelo potencial gravitacional total Φ .

Se não há viscosidade ou condução térmica, o lado direito da equação acima se anula, o que resulta na *equação de conservação de entropia*:

$$\frac{DS}{D\tau} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) S = 0. \quad (3.16)$$

Processos termodinâmicos que ocorrem sem troca de energia térmica com o exterior do sistema são chamados de processos **adiabáticos**. Por essa razão, a equação de conservação de entropia também é chamada de *equação do movimento adiabático*.

A ausência de troca de calor entre as diferentes partes de um fluido ideal significa que o seu movimento é adiabático por todo o fluido. Assim, o movimento de um fluido ideal deve necessariamente ser considerado adiabático, e suas equações de movimento devem ser usada em conjunto com a equação do movimento adiabático. Nesse trabalho considero apenas fluidos ideais, de forma que as equações do movimento adiabático e de Euler serão suficientes.

Em um modelo de disco autogravitante a autointeração gravitacional do fluido deve ainda ser considerada. Nesse caso, o campo gravitacional total Φ aplicado sobre o fluido pode ser escrito em termos de um campo gravitacional externo Φ_o (que no caso será o campo gravitacional devido ao buraco negro) e do campo gravitacional Ψ gerado pelo próprio fluido:

$$\Phi = \Phi_o + \Psi. \quad (3.17)$$

De acordo com a teoria da Gravitação clássica, esse último depende exclusivamente da distribuição de densidade do fluido, e satisfaz a chamada *equação de Poisson* (ver Marion e Thornton [33, p. 194]):

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi\rho. \quad (3.18)$$

3.1.4 Leis da termodinâmica

Considerando apenas processos térmicos e mecânicos infinitesimais em um sistema material, e desprezando o movimento de massas, a 1ª lei da termodinâmica (lei da conservação da energia) pode ser escrita como

$$\mathfrak{d}Q = d\mathcal{E} + PdV. \quad (3.19)$$

$\mathfrak{d}Q$ denota a quantidade infinitesimal³ de energia térmica adicionada ao sistema, que é usada para aumentar a energia interna total $\mathcal{E}$ do sistema em $d\mathcal{E}$ e para realizar o trabalho mecânico PdV . dV é a mudança infinitesimal do volume V do sistema.

³Normalmente utiliza-se $\mathfrak{d}Q$ para denotar a quantidade infinitesimal de calor devido ao fato de não se tratar de um diferencial exato, que seria denotado por dQ . [34]

A 2ª lei da Termodinâmica pode ser descrita como segue: para cada estado de um sistema termodinâmico existe uma função das variáveis de estado $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\rho, P, T)$ chamada entropia. A mudança de entropia $d\mathcal{S}$ durante um processo termodinâmico do sistema obedece à restrição

$$d\mathcal{S} \geq dQ/T. \quad (3.20)$$

Para processos reversíveis $d\mathcal{S} = dQ/T$, enquanto que para processos irreversíveis $d\mathcal{S} > dQ/T$. Uma consequência imediata da segunda lei é que processos adiabáticos ($dQ = 0$) reversíveis tem $d\mathcal{S} = 0$ ($\mathcal{S} = \text{const.}$), enquanto que processos adiabáticos irreversíveis tem $d\mathcal{S} > dQ/T = 0$, isto é, $d\mathcal{S} > 0$ ($\mathcal{S}$ não é constante, mesmo não havendo trocas de calor).

Para processos reversíveis $dQ = Td\mathcal{S}$, e podemos escrever a 1ª lei da termodinâmica (3.19) como

$$d\mathcal{E} = Td\mathcal{S} - PdV. \quad (3.21)$$

Veremos na seção a seguir que essa equação pode ser escrita em termos das quantidades específica U e S

$$dU = TdS + \frac{P}{\rho^2}d\rho, \quad (3.22)$$

ou ainda em termos da entalpia específica:

$$dh = TdS + \frac{1}{\rho}dP. \quad (3.23)$$

3.1.5 Relação de Euler

Quantidades termodinâmicas extensivas como a energia e a entropia têm a propriedade da aditividade. A aditividade de uma quantidade significa que, quando a matéria (e consequentemente o número de partículas N) muda por um dado fator, a quantidade também muda pelo mesmo fator. Em outras palavras, podemos dizer que uma quantidade termodinâmica aditiva deve ser uma função homogênea de primeira ordem (linear) com respeito às variáveis aditivas.

A energia interna total $\mathcal{E}$, que poderia ser vista como uma função somente da entropia total $\mathcal{S}$ e do volume V , também deve ser função do número de partículas N . Como $\mathcal{S}$ e V são eles próprios aditivos, esta função deve ser da forma

$$\mathcal{E} = Nf\left(\frac{\mathcal{S}}{N}, \frac{V}{N}\right) = Nf(s, v), \quad (3.24)$$

onde $s \equiv \mathcal{S}/N$ e $v \equiv V/N$. Essa é a função homogênea de primeira ordem mais geral em N , $\mathcal{S}$ e V .

Considerando N como uma variável independente, a equação (3.24) é uma equação de estado $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{S}, V, N)$, e sua diferencial total deve incluir um termo proporcional a dN :

$$d\mathcal{E} = Td\mathcal{S} - PdV + \mu dN, \quad (3.25)$$

onde μ é o chamado *potencial químico*, e denota a derivada parcial

$$\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N} \right)_{\mathcal{S}, V}. \quad (3.26)$$

No entanto, diferenciando a equação (3.24) obtemos,

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= f dN + N \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{1}{N} d\mathcal{S} - \frac{\mathcal{S}}{N^2} dN \right) + N \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{1}{N} dV - \frac{V}{N^2} dN \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial s} d\mathcal{S} + \frac{\partial f}{\partial v} dV + \left(f - \frac{\mathcal{S}}{N} \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{V}{N} \frac{\partial f}{\partial v} \right) dN. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Comparando essa equação com (3.25) encontramos que

$$T = \frac{\partial f}{\partial s}, \quad P = -\frac{\partial f}{\partial v}, \quad (3.28)$$

$$\mu = f - \frac{\mathcal{S}}{N} \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{V}{N} \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (3.29)$$

Usando $f = \mathcal{E}/N$ (equação (3.24) novamente), isso resulta na chamada *relação de Euler*

$$\mathcal{E} = T\mathcal{S} - PV + \mu N. \quad (3.30)$$

A energia interna e a entropia totais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{S}$, escritas em termos da energia interna e da entropia específicas (por unidade de massa) U e S são

$$\mathcal{E} = mNU \quad e \quad \mathcal{S} = mNS. \quad (3.31)$$

(sendo m a massa de uma partícula mN é a massa total do sistema.) Com isso, a relação de Euler (3.30), dividida por mN , resulta em

$$TS + \frac{\mu}{m} = U + \frac{P}{\rho} = h, \quad (3.32)$$

onde usamos ainda que $V/(mN) = 1/\rho$.

A característica mais importante de um sistema extensivo é que o número de parâmetros requeridos para uma completa especificação do estado termodinâmico pode ser reduzido por um, de tal forma que sobram somente variáveis termodinâmicas intensivas. Podemos ver isso escrevamos a equação para a energia interna específica U em termos da energia total (3.24)

$$U = \frac{\mathcal{E}}{mN} = \frac{N}{mN} f \left(\frac{mNS}{N}, \frac{V}{N} \right) = \frac{1}{m} f \left(mS, \frac{m}{\rho} \right) = U(S, \rho),$$

ou seja,

$$U(S, \rho) = \frac{1}{m} f\left(mS, \frac{m}{\rho}\right) = \frac{1}{m} f(s, v). \quad (3.33)$$

Calculando as derivadas parciais de $U(S, \rho)$ a partir de (3.33):

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_\rho = \frac{\partial f}{\partial s} = T, \quad (3.34)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_S = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{P}{\rho^2}, \quad (3.35)$$

devido às equações (3.28). Assim a diferencial de $U(S, \rho)$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_\rho dS + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_S d\rho \quad (3.36)$$

resulta na 1ª lei da termodinâmica (3.22), escrita em termos de variáveis intensiva (específicas):

$$dU = TdS + \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad (3.37)$$

Essa equação é equivalente à forma (3.21) para uma única partícula, dividindo aquela equação por m e usando $dV = -md\rho/\rho^2$.

3.1.6 Conservação de energia

A lei de conservação local de energia em um fluido ideal segue imediatamente da 1ª lei da termodinâmica (3.22) e das equações de movimento do fluido (3.9) e (3.10) (com $\bar{\sigma} = 0$). Seja E a energia total por unidade de massa, definida como sendo a energia cinética mais a energia interna específicas:

$$E = \frac{1}{2}u^2 + U. \quad (3.38)$$

Calculando a derivada convectiva da energia cinética:

$$\frac{1}{2} \frac{Du^2}{D\tau} = \vec{u} \cdot \frac{D\vec{u}}{D\tau} = -\vec{u} \cdot \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{u} \cdot \vec{f}, \quad (3.39)$$

e a derivada convectiva da energia interna:

$$\begin{aligned} \frac{DU}{D\tau} &= T \frac{DS}{D\tau} + \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{D\tau} \\ &= \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{D\tau} = -\frac{P}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

no caso de um fluido ideal ($\frac{DS}{D\tau} = 0$). Dessa forma, a derivada convectiva da energia específica E é

$$\frac{DE}{D\tau} = -\frac{P}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{u} \cdot \vec{f},$$

ou seja,

$$\frac{DE}{D\tau} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (P\vec{u}) + \vec{u} \cdot \vec{f}. \quad (3.41)$$

Assim, a variação da energia de uma partícula de fluido devido à pressão é proporcional ao divergente de $P\vec{u}$.

No caso particular em que a pressão não depende explicitamente do tempo ($\vec{u} \cdot \vec{\nabla} P = \frac{DP}{D\tau}$) temos que

$$\frac{DE}{D\tau} = \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{D\tau} - \frac{1}{\rho} \frac{DP}{D\tau} + \vec{u} \cdot \vec{f}. \quad (3.42)$$

Reagrupando os termos:

$$\frac{D}{D\tau} \left(E + \frac{P}{\rho} \right) = \vec{u} \cdot \vec{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{D\tau} \left(\frac{u^2}{2} + h \right) = \vec{u} \cdot \vec{f}. \quad (3.43)$$

Com isso vemos que a pressão funciona como uma forma de energia por unidade de volume, e P/ρ se adiciona à energia específica (de uma partícula de fluido), o que motiva a definição da entalpia, como a energia interna mais P/ρ . Essa expressão mostra que a equação de Bernoulli (3.52), que vamos obter a seguir, nada mais é do que a manifestação da conservação de energia no caso estacionário.

Vamos agora obter a forma conservativa do balanço energético local. Calculando-se a derivada convectiva de energia por unidade de volume:

$$\begin{aligned} \frac{D(\rho E)}{D\tau} &= E \frac{d\rho}{D\tau} + \rho \frac{DE}{D\tau} \\ &= -E \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (P\vec{u}) + \rho \vec{u} \cdot \vec{f}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\rho E) = -\rho E \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (P\vec{u}) + \rho \vec{u} \cdot \vec{f}.$$

Isso resulta na equação

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho E + P)\vec{u}] = \rho \vec{u} \cdot \vec{f}, \quad (3.44)$$

ou em termos da entalpia específica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{1}{2} u^2 + U \right) \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{u} \left(\frac{1}{2} u^2 + h \right) \right] = \rho \vec{u} \cdot \vec{f}. \quad (3.45)$$

A quantidade

$$(\rho E + P)\vec{u} = \rho(u^2/2 + h)\vec{u} \quad (3.46)$$

é o vetor densidade de fluxo de energia.

3.1.7 Equação de Bernoulli

Consideremos um fluido ideal sob a ação apenas de campos gravitacionais (ou de forças conservativas, com um potencial total Φ). Considerando que seu movimento é *estacionário* a equação de movimento (3.13) pode ser escrita como

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P - \vec{\nabla}\Phi. \quad (3.47)$$

Usando a identidade vetorial

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}u^2 = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \quad (3.48)$$

obtemos

$$\vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2 + \Phi\right). \quad (3.49)$$

Tomando o produto escalar dessa equação com $\vec{u}$, o lado esquerdo se anula pois $\vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$ é ortogonal a $\vec{u}$. O lado direito, por sua vez, pode ser transformado em derivadas convectivas, visto que nenhuma quantidade depende explicitamente do tempo:

$$\frac{1}{\rho}\frac{DP}{D\tau} + \frac{D}{D\tau}\left(\frac{1}{2}u^2 + \Phi\right) = 0. \quad (3.50)$$

Da 1ª lei da termodinâmica (3.23) vemos que

$$T\frac{DS}{D\tau} = \frac{Dh}{D\tau} - \frac{1}{\rho}\frac{DP}{D\tau} = 0, \quad (3.51)$$

que se anula para fluidos adiabáticos. Portanto, substituindo esse resultado em (3.50):

$$\frac{D}{D\tau}\left(\frac{1}{2}u^2 + h + \Phi\right) = 0, \quad (3.52)$$

e temos a chamada *equação de Bernoulli*, que diz que a quantidade escalar $\frac{1}{2}u^2 + h + \Phi$ é constante ao longo de uma linha de fluxo em um fluido adiabático estacionário. Em geral, a equação de Bernoulli é obtida para um fluido barotrópico. Essa generalização para casos não barotrópicos é útil pois tem uma analogia relativística (ver seção 3.2.8).

3.2 Hidrodinâmica relativística

3.2.1 Observadores Eulerianos e Lagrangianos

A diferença chave entre fluidos Newtonianos e seus análogos relativísticos é que para os primeiros se tem uma noção *a priori* de tempo. Fluidos Newtonianos tem também

uma noção *a priori* de espaço. Tal estrutura tem uma clara vantagem em problemas evolutivos, onde é necessário se falar em taxas de variação do sistema de forma não ambígua. Felizmente, para teorias covariantes do espaço-tempo há o chamado formalismo “3+1” (ver apêndice D, seção D.2) que permite definir “taxas de variação” de forma não ambígua, introduzindo uma família de hipersuperfícies tipo-espaço (o “3”) definidas como as superfícies de nível de um escalar no espaço-tempo (o “1”).

Algo que fluidos Newtonianos e relativísticos tem em comum é que há um referencial preferencial para se medir variações: aquele que está fixo aos elementos de fluido. Nos referimos na hidrodinâmica clássica como observadores Lagrangianos, em contrapartida aos observadores Eulerianos, que são aqueles estáticos com relação a um ponto fixo no espaço, e que “vê” os elementos de fluido passarem por ele, enquanto faz medidas da sua densidade, velocidade etc. em uma dada posição. Em contrapartida, observadores Lagrangianos viajam junto com um elemento de fluido particular e mede variações daquele elemento conforme esse se move pelo espaço e tempo. Um observador Lagrangiano relativístico é totalmente análogo. O observador Euleriano relativístico, no entanto é mais complicado de se definir. Eles podem ser definidos como aqueles que seguem uma linha de mundo que permanece, em cada ponto, ortogonal a uma família de hipersuperfícies tipo-espaço. Essa é exatamente a estratégia utilizada para se definir os chamados observadores *Eulerianos* que utilizo (e utilizei na seção 2.4), e que apresento no apêndice D.

3.2.2 Coordenadas comóveis

Seja um sistema de coordenadas geral com x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) em que o elemento de linha é dado por $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Em tais coordenadas $x^\mu = \chi^\mu(\tau)$ representa uma curva, com um parâmetro τ que identifica um evento sobre a curva. O vetor tangente a essa curva é dado por

$$V^\mu = \frac{d\chi^\mu}{d\tau}. \quad (3.53)$$

Se $V^\mu V_\mu$ for maior, menor ou igual a zero a curva será tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz respectivamente. Trajetórias de partículas de um fluido em movimento são sempre descritas por curvas tipo-tempo, que são também chamadas de linha de mundo das partículas. Para tal curva o parâmetro τ pode ser sempre escolhido tal que $V^\mu V_\mu = -1$. Nesse caso $d\tau^2 = -ds^2$, e τ é chamado de tempo próprio ao longo da linha de mundo.

Suponha que em uma dada região aberta do espaço-tempo o movimento do fluido é tal que em cada ponto dessa região passe somente uma linha de mundo de partículas de fluido, ou seja, as trajetórias das partículas de fluido não se interceptam. Dizemos então que as linhas de mundo formam uma *congruência* de curvas tipo-tempo. Denotaremos por $x^\mu = \chi^\mu(\tau, a^i)$ cada curva da congruência, onde a^i ($i = 1, 2, 3$) identifica a curva.

A congruência de linhas de mundo determina um campo vetorial normalizado u^μ , chamado de quadri vetor velocidade, que é uma função dos eventos no espaço-tempo, que é definido como sendo o vetor tangente ao longo de cada trajetória

$$u^\mu \equiv \frac{d\chi^\mu}{d\tau}, \quad (3.54)$$

onde na diferenciação os a^i são mantidos constantes, caso em que uma linha de mundo particular é selecionada. Se pelo contrário, um campo de velocidade u^μ for dado pela equação diferencial (3.54), o teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias garante uma solução, pelo menos para algum subconjunto do domínio. Denotaremos essas soluções por

$$x^\mu = \chi^\mu(\tau, a^i), \quad (3.55)$$

que são as equações das linhas de mundo de cada partícula de fluido. Temos também que

$$x^\mu = \chi_0^\mu(a^i) = \chi^\mu(0, a^i) \quad (3.56)$$

são as equações paramétricas requeridas da hipersuperfície Σ_0 , a hipersuperfície inicial sobre a qual as partículas estão localizadas no tempo próprio $\tau = 0$. As quatro variáveis a^i , τ , denotadas por $a^\mu = (\tau, a^i)$, formam um sistema *comóvel* de coordenadas no espaço-tempo. Elas são análogas às coordenadas Lagrangianas da hidrodinâmica clássica.

Como a^i é constante ao longo de cada curva, podemos escrever u^μ como

$$u^\mu = \left(\frac{\partial \chi^\mu}{\partial \tau} \right)_{a^i}. \quad (3.57)$$

Podemos então definir uma base $x_{(a)}^\mu$ adaptada às coordenadas comóveis, ou *base comóvel*:

$$x_{(l)}^\mu = \left(\frac{\partial \chi^\mu}{\partial a^l} \right)_\tau, \quad (3.58)$$

com $x_{(t)}^\mu = u^\mu$.

No apêndice A descrevo como uma base adaptada às coordenadas Lagrangianas é transportada pelo fluxo de u^μ , e de como isso se relaciona à *derivada de Lie*. No entanto, podemos observar essa relação aqui calculando as derivadas segundas a partir das equações (3.57) e (3.58):

$$\frac{\partial^2 \chi^\mu}{\partial \tau \partial a^l} = u^\nu \partial_\nu x_{(l)}^\mu \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \chi^\mu}{\partial a^l \partial \tau} = x_{(l)}^\nu \partial_\nu u^\mu. \quad (3.59)$$

Com isso, vemos então que

$$\mathcal{L}_{\vec{u}} x_{(l)}^\mu = u^\nu \partial_\nu x_{(l)}^\mu - x_{(l)}^\nu \partial_\nu u^\mu = 0. \quad (3.60)$$

A equação acima é análoga à equação (A.13) para o caso não relativístico. Essa equação diz que o comutador $[u, x_{(l)}] \equiv \mathcal{L}_{\vec{u}} x_{(l)}^\mu$, equação (A.18), é nulo quando a base $x_{(a)}$ é adaptada a um sistema de coordenadas. Essa condição é de fato o inverso do chamado *teorema de Frobenius* (ver seção D.1.2) que diz que se $[e_{(a)}, e_{(b)}] = 0$ para uma base qualquer, então essa base é adaptada a um sistema de coordenadas.

Cabe ressaltar, no entanto, que **essa base assim definida não é necessariamente ortogonal!** Em particular, a condição $x_{(l)}^\mu u_\mu = 0$ não é válida em geral. Isso somente acontece quando as linhas de fluxo são, em cada ponto, ortogonal a uma família de hipersuperfícies tipo-espaco, quando a congruência é dita ser *hipersuperfície-ortogonal*. A condição para que isso aconteça é que a vorticidade $\omega_{\mu\nu}$ da congruência seja nula. Esse resultado é um caso particular do de teorema de Frobenius, e é a base para a definição dos observadores Eulerianos, ou *observadores com momento angular nulo*, apresentados no apêndice D. A partir disso, constrói-se uma base ortonormal, ou *tetrada*, ao longo de cada curva da congruência “transportando-se” os vetores ao longo das trajetórias de forma que a ortogonalidade da base permaneça, o que é feito por meio do *transporte de Fermi-Walker*. Descrevo esse transporte de vetores, e a definição das tetradas ortonormais no apêndice B.

3.2.3 Considerações termodinâmicas

Os princípios de conservação que guiam as leis de movimento na hidrodinâmica não relativística são: i) conservação de matéria; ii) conservação de momento; e iii) conservação de energia. Poderia parecer que, com a equivalência de massa e energia, a condição i) seria supérflua em uma teoria relativística. Mas esse não é o caso, o que se torna claro se *matéria* for interpretada como número de moléculas ao invés de inércia.

Os princípios ii) e iii) se combinam em uma única equação tensorial. Isto é de certa forma desconcertante, pois a primeira lei da termodinâmica é uma equação escalar: sua relação com o princípio de energia-momento deve então ser estabelecida.

Eckart [35] introduz o conceito de vetor de matéria j^μ , com unidade de massa por volume, que depende somente do peso molecular e do movimento das moléculas. A inércia e a energia interna serão introduzidos depois, de forma que o peso molecular deve ser considerado somente como um fator de conversão conveniente. A conservação de matéria é expressa pela equação

$$\nabla_\mu j^\mu = 0. \quad (3.61)$$

É assumido que $j^0 > 0$, e que a densidade invariante

$$\rho \equiv \sqrt{-g_{\mu\nu} j^\mu j^\nu}, \quad (3.62)$$

é real e positiva. O vetor (adimensional) velocidade de matéria é definido por

$$u^\mu \equiv j^\mu / \rho, \quad (3.63)$$

de forma que

$$u^\mu u_\mu = -1. \quad (3.64)$$

O vetor u^μ será uma função das coordenadas, e determinará uma direção em cada ponto do espaço-tempo – o eixo local do tempo próprio.

Adotando o sistema de referência em que o fluido se encontra em repouso, ou seja, o chamado sistema de referência próprio ou *sistema comóvel*, as quantidades físicas são ditas assumirem seus *valores próprios*. Como os valores medidos de quantidades físicas dependem do referencial adotado, em geral as denotaremos por seus valores próprios (escalares, i.e., invariantes). Por exemplo ρ , pela definição (3.62) é e será sempre a densidade própria de massa.

Definiremos então a densidade própria de partículas n (ou densidade bariônica, para contemplar casos em que há criação e aniquilação de pares de partículas), medida em partículas por unidade de volume:

$$\rho = mn, \quad (3.65)$$

onde m é a massa de uma partícula. Com isso, de (3.63) obtemos também o quadrivetor fluxo de partículas

$$\eta^\mu \equiv j^\mu / m = nu^\mu, \quad \text{com} \quad n = \sqrt{-g_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu}, \quad (3.66)$$

e a lei de conservação de matéria (3.61) pode ser escrita como

$$\nabla_\mu \eta^\mu = 0. \quad (3.67)$$

A energia e o momento da matéria são descritos pelo tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$. Veremos que T^{00} é a densidade de energia, T^{0i}/c são as componentes da densidade de momento e T^{ij} forma o tensor fluxo de momento. A densidade de fluxo de energia cT^{0i} difere da densidade de momento somente por um fator c^2 .

As equações de Einstein implicam o princípio de energia-momento na forma relativística usual

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (3.68)$$

Eckart argumenta que a equação obtida fazendo $\mu = 0$ na equação (3.68) deve ser vista como a equação de conservação de energia, diferenciando-a dos conceitos de conservação de matéria, massa ou inércia. A equação $T^{0\nu} = T^{\nu 0}$ pode ser vista como o princípio de inércia da energia.

O vetor u^μ determina em cada ponto do espaço-tempo a direção do eixo local do tempo próprio. Três direções ortogonais a essa são os eixos locais do espaço próprio. Usando o

tensor $h^\mu_\nu \equiv \delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu$ que projeta um vetor qualquer no espaço próprio local (equação (B.6)), podemos resolver o tensor $T^{\mu\nu}$ em componentes próprias: se

$$E \equiv \rho^{-1} T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu, \quad (3.69)$$

$$p^\mu \equiv -h^\mu_\alpha T^{\alpha\beta} u_\beta, \quad (3.70)$$

$$\Pi^{\mu\nu} \equiv h^\mu_\alpha h^\nu_\beta T^{\alpha\beta}, \quad (3.71)$$

então

$$T^{\mu\nu} = \rho E u^\mu u^\nu + p^\mu u^\nu + u^\mu p^\nu + \Pi^{\mu\nu}. \quad (3.72)$$

Cada uma dessas componentes tem uma interpretação física importante. E é a densidade específica (própria) de energia. O vetor $q^\mu \equiv cp^\mu$ é o fluxo de calor (em coordenadas comóveis a densidade espacial de momento tem origem exclusivamente no fluxo de calor) e $\Pi^{\mu\nu}$ é o tensor de tensões. A componente espacial Π^{ij} pode ser entendida como a componente i da força através de uma unidade de área perpendicular à direção j .

3.2.4 Conservação de energia

O fato da energia interna não relativística conter uma constante aditiva arbitrária pode parecer incompatível com uma teoria relativística, pois o princípio de equivalência entre massa e energia parece dar um sentido absoluto para o conteúdo energético de qualquer porção de matéria. No entanto, veremos que para a conservação de energia essa constante é inócua. A densidade de energia interna ϵ (por unidade de massa) é definida por

$$E = \epsilon + a, \quad (3.73)$$

onde a é uma constante arbitrária. Eckart [35] mostrou que se a matéria for conservada (ou seja, se vale a equação (3.67)) a constante a não entra na primeira lei da termodinâmica (como veremos a seguir).

A densidade de energia interna relativística por unidade de volume

$$\varepsilon \equiv \rho \epsilon \quad (3.74)$$

inclui a energia de repouso $nmc^2 = \rho c^2$ das partículas de fluido. Portanto, denotando por U a densidade específica de energia térmica (análoga à energia interna não relativística) temos que

$$\varepsilon = \rho c^2 + \rho U, \quad (3.75)$$

ou seja,

$$\epsilon = 1 + U. \quad (3.76)$$

(usando $c = 1$.) A entalpia específica é definida como

$$h = \frac{\varepsilon + P}{\rho} = 1 + U + \frac{P}{\rho}. \quad (3.77)$$

A equação de conservação de energia pode ser derivada de (3.68) e das definições adotadas. Multiplicando-se a equação (3.68) por $-u_\nu$ e rearranjando, obtemos

$$-\nabla_\mu (u_\nu T^{\mu\nu}) + T^{\mu\nu} \nabla_\mu u_\nu = 0. \quad (3.78)$$

Usando a decomposição (3.72) do tensor energia-momento na base comóvel, e o fato de que $u^\nu \nabla_\mu u_\nu = 0$, obtido da condição de normalização (3.64), temos a identidade

$$T^{\mu\nu} \nabla_\mu u_\nu = p^\nu u^\mu \nabla_\mu u_\nu + \Pi^{\mu\nu} \nabla_\mu u_\nu. \quad (3.79)$$

Devido às definições (3.69-3.71) temos ainda que

$$-u_\nu T^{\mu\nu} = \rho E u^\mu + p^\mu \quad (3.80)$$

$$= \rho(\epsilon + a)u^\mu + q^\mu. \quad (3.81)$$

Como $\rho u^\mu = j^\mu$, a constante a desaparece da equação (3.78) se o princípio de conservação de massa (3.61) for válido:

$$-\nabla_\mu (u_\nu T^{\mu\nu}) = \nabla_\mu (\rho \epsilon u^\mu + q^\mu) + a \underbrace{\nabla_\mu (\rho u^\mu)}_{=0} \quad (3.82)$$

$$= \rho u^\mu \nabla_\mu \epsilon + \epsilon \underbrace{\nabla_\mu (\rho u^\mu)}_{=0} + \nabla_\mu q^\mu \quad (3.83)$$

$$= \rho \frac{D\epsilon}{D\tau} + \nabla_\mu q^\mu. \quad (3.84)$$

$D(\cdot)/D\tau \equiv u^\mu \nabla_\mu (\cdot)$ denota a *derivada absoluta* ao longo da curva com vetor tangente dado por u^μ . τ é o tempo próprio ao longo dessa linha de mundo (ver apêndice B).

Juntando essa equação com a equação (3.79) na equação (3.78) obtemos

$$\rho \frac{D\epsilon}{D\tau} + \nabla_\mu q^\mu + q^\mu \frac{Du_\mu}{D\tau} + \Pi^{\mu\nu} \nabla_\mu u_\nu = 0. \quad (3.85)$$

Podemos notar nesse ponto que a introdução do vetor de matéria j^μ serve somente para definir a velocidade e a densidade de matéria u^μ e ρ . Alternativamente poderia-se introduzir diretamente o vetor u^μ , no entanto é importante que a matéria seja conservada (equação (3.61) ou equivalentemente a equação (3.67)), devendo ser postulado o princípio de conservação. Se assim não fosse, a constante a apareceria na equação de conservação de energia na forma de um termo $a \nabla_\mu u^\mu$.

Para comparar a equação acima com a equação clássica de conservação de energia tomemos o caso de um fluido ideal, para o qual $q^\mu = 0$ e $\Pi^{\mu\nu} = Ph^{\mu\nu}$. Usando a relação (3.76) a equação (3.85) pode ser escrita como

$$\frac{DU}{D\tau} + \frac{P}{\rho} h^{\mu\nu} \nabla_\mu u_\nu = 0. \quad (3.86)$$

A equação acima é equivalente à equação clássica da derivada convectiva da energia interna (3.40):

$$\frac{DU}{D\tau} = -\frac{P}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}. \quad (3.40)$$

Em coordenadas comóveis a energia cinética do fluido é nula e a variação da energia total se dá exclusivamente pela variação da energia interna. Por outro lado, se fizermos a decomposição do tensor energia-momento não com relação à base comóvel, mas com relação a um observador que se move em relação ao fluido, a componente T^{00} do tensor vai conter a energia cinética com relação a esse observador. Note que aqui aparece um termo proporcional a $\nabla_\mu(\rho n^\mu)$, já que ρn^μ não é conservado.

3.2.5 Tensor energia-momento de um fluido ideal

Consideremos um elemento de volume em um fluido sob a ação apenas de forças devido à pressão (sem forças externas). Se adotarmos o sistema de referência próprio, ou comóvel, a densidade de momento obviamente é zero, dado que o fluido está em repouso. Considerando um fluido ideal o fluxo de energia também é nulo e, dado que não há forças tangenciais a uma dada superfície no fluido, o tensor densidade de momento é diagonalizável. Portanto podemos escrever o tensor energia-momento, no sistema comóvel $\hat{e}^\mu_{(a)}$ que realiza essa diagonalização, como

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon \hat{e}^\mu_{(0)} \hat{e}^\nu_{(0)} + P_1 \hat{e}^\mu_{(1)} \hat{e}^\nu_{(1)} + P_2 \hat{e}^\mu_{(2)} \hat{e}^\nu_{(2)} + P_3 \hat{e}^\mu_{(3)} \hat{e}^\nu_{(3)}, \quad (3.87)$$

onde a densidade de energia é simplesmente a energia interna por unidade de volume $\varepsilon \equiv \rho E$ (no sistema comóvel a energia cinética é nula). Nesse sistema se aplica o princípio de Pascal, ou seja, o fluido é isotrópico, com $P_1 = P_2 = P_3 = P$ iguais à pressão hidrodinâmica; a força por unidade de área normal à uma superfície no fluido.

Nesse caso a base pode ser escolhida como sendo uma tetrada ortonormal (ver apêndice B) satisfazendo a relação de completeza (B.25), com $\hat{e}^\mu_{(0)} = u^\mu$ (sistema comóvel). Portanto

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \varepsilon u^\mu u^\nu + P(\hat{e}^\mu_{(1)} \hat{e}^\nu_{(1)} + \hat{e}^\mu_{(2)} \hat{e}^\nu_{(2)} + \hat{e}^\mu_{(3)} \hat{e}^\nu_{(3)}) \\ &= \varepsilon u^\mu u^\nu + P(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu), \end{aligned}$$

ou seja,

$$T^{\mu\nu} = (P + \varepsilon)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}, \quad (3.88)$$

ou ainda em termos da entalpia específica $h = (P + \varepsilon)/\rho$:

$$T^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}. \quad (3.89)$$

Esse tensor tem componentes comóveis (3.69-3.71) dadas por

$$\rho E_{ideal} = \varepsilon; \quad (3.90)$$

$$p_{ideal}^\mu = 0; \quad (3.91)$$

$$\Pi_{ideal}^{\mu\nu} = P h^{\mu\nu}. \quad (3.92)$$

3.2.6 Tensor energia-momento na base LNRF

Os observadores Eulerianos, chamados também de observadores com momento angular zero (*ZAMO*), definem uma base ortonormal de vetores, chamada de sistema de referência localmente sem rotação (*LNRF*), conforme descrito no apêndice D. As equações relativísticas se simplificam nessa base (conforme veremos mais detalhadamente na seção 4.4.6), e portanto, escreverei as quantidades tensoriais (e.g., tensor energia-momento) em termos de suas *componentes físicas*, ou seja, suas projeções na base *LNRF*.

Podemos calcular as componentes em tetradas do tensor energia-momento de um fluido ideal diretamente de suas componentes ordinárias (3.89) por meio da projeção

$$T_{(a)(b)} = T_{\mu\nu} e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu, \quad (3.93)$$

onde $e_{(a)}^\mu$, dados pelas equações D.67, são os vetores da base LNRF. Então,

$$\begin{aligned} T_{(a)(b)} &= [(P + \varepsilon)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}] e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu, \\ &= (P + \varepsilon)u_{(a)}u_{(b)} + P \eta_{(a)(b)}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

$\eta_{(a)(b)} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ são as componentes físicas da métrica, ou seja, é a própria *métrica de Minkowski* do espaço-tempo plano.

Usando ainda as componentes da quadrivelocidade na base ortonormal $u_{(a)} = e_{(a)}^\mu u_\mu = \gamma(-1, 0, 0, v)$, equação (2.95), obtemos:

$$\begin{aligned} T_{(t)(t)} &= \gamma^2 (v^2 P + \varepsilon), & T_{(t)(\varphi)} &= -\gamma^2 v (P + \varepsilon), \\ T_{(\varphi)(\varphi)} &= \gamma^2 (P + v^2 \varepsilon), & T_{(r)(r)} &= T_{(z)(z)} = P, \end{aligned} \quad (3.95)$$

e, calculando seu traço:

$$T \equiv T^{(a)}_{(a)} = -\varepsilon + 3P. \quad (3.96)$$

Podemos ainda fazer uma decomposição do tensor energia-momento em uma base genérica, equivalente à decomposição (3.72),

$$T^{\mu\nu} = \rho \tilde{E} n^\mu n^\nu + \tilde{p}^\mu n^\nu + n^\mu \tilde{p}^\nu + \tilde{\Pi}^{\mu\nu}, \quad (3.97)$$

mas agora em termos de quantidades relativas ao observador Euleriano, sendo n^μ a quadri-velocidade desses observadores. Teremos assim as seguintes definições, análogas a (3.69-3.71):

$$\tilde{E} \equiv \rho^{-1} T^{\mu\nu} n_\mu n_\nu, \quad (3.98)$$

$$\tilde{p}^\mu \equiv -\gamma^\mu_\alpha T^{\alpha\beta} n_\beta, \quad (3.99)$$

$$\tilde{\Pi}^{\mu\nu} \equiv \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta T^{\alpha\beta}, \quad (3.100)$$

usando agora γ^μ_ν , o projetor espacial do observador Euleriano, definido pela equação (D.41):

$$\gamma^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu. \quad (3.101)$$

A equação (D.77) nos dá u^μ em termos de v^μ (a velocidade fluido relativa ao observador Euleriano):

$$u^\mu = \gamma (n^\mu + v^\mu), \quad \text{com} \quad n^\mu v_\mu = 0, \quad (3.102)$$

com o fator de Lorentz γ dado pela equação (D.74):

$$\gamma = -u^\mu n_\mu. \quad (3.103)$$

As equações acima implicam ainda que

$$u^\mu v_\mu = \gamma v^2, \quad \text{e} \quad \gamma^\mu_\nu u^\nu = \gamma v^\mu. \quad (3.104)$$

Usando o tensor energia-momento (3.88) de um fluido ideal, e as expressões acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho \tilde{E} &= T^{\mu\nu} n_\mu n_\nu \\ &= (P + \varepsilon) u^\mu n_\mu u^\nu n_\nu + P g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu \\ &= \gamma^2 (P + \varepsilon) - P, \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}^\mu &= -\gamma^\mu_\alpha T^{\alpha\beta} n_\beta \\ &= -(P + \varepsilon) \gamma^\mu_\alpha u^\alpha u^\beta n_\beta + P \gamma^\mu_\alpha g^{\alpha\beta} n_\beta \\ &= \gamma^2 (P + \varepsilon) v^\mu, \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}^{\mu\nu} &= \gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\beta}^{\nu} T^{\alpha\beta} \\
&= (P + \varepsilon) \gamma_{\alpha}^{\mu} u^{\alpha} \gamma_{\beta}^{\nu} u^{\beta} + P g^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\beta}^{\nu} \\
&= \gamma^2 (P + \varepsilon) v^{\mu} v^{\nu} + P \gamma^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Para matéria sem pressão (poeira), a equação (3.105) se reduz a $\rho \tilde{E} = \gamma^2 \varepsilon$, ou equivalentemente a $\tilde{E} = \gamma^2 \varepsilon$. Isso vem da famosa fórmula $E = \gamma m c^2$ da energia relativística de um corpo de massa m (ver equação (3.75) para ε). O fator γ adicional se deve ao fato de que $\rho \tilde{E}$ é energia por unidade de volume, e portanto esse termo extra aparece devido à “contração do espaço” na direção do movimento.

Podemos obter o limite não relativístico ($v \ll 1$) da densidade volumétrica de energia $\rho \tilde{E}$ fazendo

$$\begin{aligned}
\rho \tilde{E} &= \gamma^2 (\varepsilon + v^2 P) \approx (1 + v^2) (\rho + \rho U + v^2 P) \\
&= \rho + \rho U + v^2 P + \rho v^2 + \rho U v^2 + v^4 P \\
&\approx \rho (1 + U + v^2).
\end{aligned} \tag{3.108}$$

em primeira ordem em v^2 (a pressão e a energia interna não relativística são da ordem da energia cinética: $P, U \approx v^2 \ll 1$).

Devemos lembrar ainda que ρ é a densidade “própria”, ou seja, massa por volume próprio (comóvel ao fluido). Dessa forma, ao tomar o limite não relativístico devemos fazer

$$\rho \rightarrow \frac{\varrho}{\gamma} = \varrho \sqrt{1 - v^2} \approx \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) \varrho, \tag{3.109}$$

onde ϱ é a densidade não relativística (o fator γ aparece devido à contração do espaço). Dessa forma, a componente $T^{00} = \rho \tilde{E}$ na base do observador Euleriano tem limite não relativístico dado por

$$\begin{aligned}
\rho \tilde{E} &\approx \rho (1 + U + v^2) \\
&\approx \varrho \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) (1 + U + v^2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho \tilde{E} \approx \varrho \left(1 + U + \frac{v^2}{2}\right), \tag{3.110}$$

que é a energia de repouso ϱc^2 (estamos usando $c^2 = 1$) mais a densidade de energia não relativística.

A relação simples entre densidade de momento e densidade de fluxo de energia (dividida por c^2) não vale no limite não relativístico porque a energia não relativística não

inclui a energia de repouso. O vetor tridimensional $\tilde{p}^i$ é aproximadamente igual a

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}^i &= \gamma^2(P + \varepsilon)v^i \\
 &= (\rho\tilde{E} + P)v^i \\
 &\approx \left(\varrho\left(1 + U + v^2/2\right) + P\right)v^i \\
 &= \varrho v^i + \left(\varrho U + P + \frac{1}{2}\varrho v^2\right)v^i,
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

onde usamos a equação (3.105) na primeira linha e (3.110) para $\rho\tilde{E}$ na segunda linha.

Portanto, o valor limite da densidade de momento é exatamente ϱv^i , como deveria ser. A densidade de fluxo de energia, no entanto, com a ausência do termo $(\varrho c^2)v^i$ da energia de repouso, resulta na expressão não relativística $(\varrho U + P + \frac{1}{2}\varrho v^2)v^i$ encontrada na equação (3.46).

A forma limite do tensor tridimensional $\tilde{\Pi}_j^i$ é

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Pi}_j^i &= \gamma^2(P + \varepsilon)v^i v_j + P\gamma_j^i \\
 &= p^i v_j + P\gamma_j^i \\
 &\approx \varrho v^i v_j + P\delta_j^i,
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

que coincide com a expressão usual para a densidade de fluxo de momento, que denotamos em (3.12) por $\bar{\Pi}$.

3.2.7 Equações de movimento de um fluido ideal

As equações de movimento de um fluido ideal relativístico são dadas pela lei de conservação de energia-momento (3.68)

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu = 0, \tag{3.113}$$

com tensor energia e momento dado por (3.89). Calculemos primeiro a projeção da equação (3.113) na direção de u^μ :

$$\begin{aligned}
 u^\mu \nabla_\nu T^\nu_\mu &= u^\mu \nabla_\nu (\rho h u^\nu u_\mu + P \delta_\mu^\nu) \\
 &= \underbrace{(u^\mu u_\mu)}_{=-1} \nabla_\nu (\rho h u^\nu) + \rho h u^\nu \underbrace{(u^\mu \nabla_\nu u_\mu)}_{=0} + u^\nu \nabla_\nu P \\
 &= -h \nabla_\nu (\rho u^\nu) - \rho u^\nu \nabla_\nu h + u^\nu \nabla_\nu P \\
 &= -h \nabla_\nu j^\nu - \rho \frac{Dh}{D\tau} + \frac{DP}{D\tau} = 0
 \end{aligned}$$

Pela 1ª lei da termodinâmica na forma (3.23) temos que

$$\rho dh - dP = \rho T dS, \tag{3.114}$$

e a equação (3.114) resulta em

$$\frac{DS}{D\tau} = -\frac{h}{\rho T} \nabla_\nu j^\nu. \quad (3.115)$$

Aplicando a lei de conservação de massa (3.61) obtemos a *equação adiabática*

$$\frac{DS}{D\tau} = 0, \quad (3.116)$$

o que faz sentido, dado que partimos do tensor energia-momento de um fluido ideal.

Projetando agora a equação (3.113) na direção ortogonal a u^μ obtemos:

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu \nabla_\nu T^\nu{}_\mu &= h_\alpha^\mu \nabla_\nu (\rho h u^\nu u_\mu + P \delta_\mu^\nu) \\ &= \underbrace{(h_\alpha^\mu u_\mu)}_{=0} \nabla_\nu (\rho h u^\nu) + h_\alpha^\mu \rho h \underbrace{(u^\nu \nabla_\nu u_\mu)}_{=a_\mu} + h_\alpha^\nu \nabla_\nu P \\ &= \rho h h_\alpha^\mu a_\mu + h_\alpha^\nu \nabla_\nu P = 0, \end{aligned}$$

Usando ainda que $h_\alpha^\mu a_\mu = a_\alpha$ obtemos a chamada *equação de Euler relativística*:

$$a_\mu = -h_\mu^\nu \frac{\nabla_\nu P}{P + \varepsilon}. \quad (3.117)$$

As três componentes espaciais desta equação são a generalização relativística da equação de Euler. A componente temporal é uma implicação das outras três.

A equação (3.117) pode ser escrita em outra forma interessante. Escrevendo-a como

$$h u^\nu \nabla_\nu u_\mu = -(\delta_\mu^\nu + u^\nu u_\mu) \frac{\nabla_\nu P}{\rho}, \quad (3.118)$$

e aplicando a 1ª lei da termodinâmica (3.23) novamente, na forma

$$\nabla_\nu h = T \nabla_\nu S + \frac{\nabla_\nu P}{\rho} \quad (3.119)$$

obtemos

$$h u^\nu \nabla_\nu u_\mu = -\frac{\nabla_\mu P}{\rho} - u_\mu u^\nu \nabla_\nu h + T u_\mu u^\nu \nabla_\nu S.$$

Como $u^\nu \nabla_\nu S = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_\mu P}{\rho} &= -h u^\nu \nabla_\nu u_\mu - u_\mu u^\nu \nabla_\nu h \\ &= -u^\nu \nabla_\nu (h u_\mu) \\ &= -u^\nu \nabla_\nu (h u_\mu) - h u_\nu \nabla_\mu u^\nu, \end{aligned}$$

onde usamos ainda o fato de que $u_\nu \nabla_\mu u^\nu = 0$. Dessa forma, o lado direito vem a ser (menos) a derivada de Lie de hu_μ (ver equação (A.22) do apêndice A):

$$\frac{\nabla_\mu P}{\rho} = -\mathcal{L}_{\vec{u}}(hu_\mu). \quad (3.120)$$

Há ainda uma outra forma alternativa de se escrever $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$, que faz com que fluidos ideais tenham muito em comum com o eletromagnetismo no vácuo. Partindo da equação (3.118) e usando novamente a 1ª lei da termodinâmica na forma (3.119) obtemos

$$\begin{aligned} h u^\nu \nabla_\nu u_\mu &= T \nabla_\mu S - \nabla_\mu h + T u_\mu \underbrace{u^\nu \nabla_\nu S}_{=0} - u_\mu u^\nu \nabla_\nu h, \\ &= T \nabla_\mu S - \nabla_\mu h - u_\mu u^\nu \nabla_\nu h, \end{aligned}$$

ou seja,

$$T \nabla_\mu S = u^\nu \nabla_\nu (hu_\mu) + \nabla_\mu h. \quad (3.121)$$

Usando o fato de que $u^\nu u_\nu = -1$ e $u^\nu \nabla_\mu u_\nu = 0$, podemos escrever essa equação como

$$\begin{aligned} T \nabla_\mu S &= u^\nu \nabla_\nu (hu_\mu) - u^\nu u_\nu \nabla_\mu h - h u^\nu \nabla_\mu u_\nu \\ &= u^\nu (\nabla_\nu (hu_\mu) - \nabla_\mu (hu_\nu)). \end{aligned} \quad (3.122)$$

Definindo então o chamado *tensor vorticidade* $\Omega_{\mu\nu}$ por

$$\Omega_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu (hu_\nu) - \nabla_\nu (hu_\mu), \quad (3.123)$$

chegamos na chamada *equação de Carter-Lichnerowicz*:

$$u^\nu \Omega_{\nu\mu} = T \nabla_\mu S. \quad (3.124)$$

É importante ressaltar a diferença entre a vorticidade (3.123), formada pelo momento hu_μ , e a quantidade correspondente em termos da velocidade, o chamado *tensor de rotação* $\omega_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2} (\nabla_\mu u_\nu - \nabla_\nu u_\mu + u_\mu a_\nu - a_\mu u_\nu) \\ &= \frac{1}{2} (h^\alpha_\mu \nabla_\alpha u_\nu - h^\alpha_\nu \nabla_\alpha u_\mu), \end{aligned} \quad (3.125)$$

definido no apêndice D.1.1, equação (D.20). Pode-se mostrar que enquanto $\Omega_{\mu\nu}$ é conservado ao longo do fluxo, $\omega_{\mu\nu}$ não é.

Calculando-se $\omega_{\mu\nu}$ diretamente da equação (3.125), usando a aceleração dada pela equação de Euler relativística (3.117) e a 1ª lei da termodinâmica (3.119) obtemos uma relação entre esses dois tensores:

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2h} (\Omega_{\mu\nu} + T (u_\mu \nabla_\nu S - u_\nu \nabla_\mu S)). \quad (3.126)$$

Dessa forma vemos que a equação de movimento (3.124) é simplesmente a condição (D.18) de transversalidade de $\omega_{\mu\nu}$:

$$\omega_{\mu\nu}u^\nu = 0. \quad (D.18)$$

No caso isentrópico ($\nabla_\mu S = 0$) os dois tensores de vorticidade diferem apenas por um fator de proporcionalidade: $\Omega_{\mu\nu} = 2h\omega_{\mu\nu}$.

3.2.8 Equação de Bernoulli e conservação de momento angular

O teorema de Bernoulli se aplica para um sistema estacionário, que no caso relativístico significa que temos um vetor de Killing ξ^μ associado com a estacionariedade (ver apêndice C.2), tal que para qualquer quantidade física escalar q a condição de estacionariedade implica que $\mathcal{L}_\xi q = \xi^\mu \nabla_\mu q = 0$.

Assim, vamos usar a equação de movimento na forma (3.121)

$$u^\nu \nabla_\nu (hu_\mu) + \nabla_\mu h = T \nabla_\mu S, \quad (3.127)$$

e contraí-la com ξ^μ :

$$\begin{aligned} & \xi^\mu u^\nu \nabla_\nu (hu_\mu) + \xi^\mu \nabla_\mu h = T \xi^\mu \nabla_\mu S = 0 \\ 0 &= \xi^\mu u^\nu \nabla_\nu (hu_\mu) \\ 0 &= u^\nu \nabla_\nu (hu_\mu \xi^\mu) - hu^\nu u_\mu \nabla_\nu \xi^\mu \\ 0 &= u^\nu \nabla_\nu (hu_\mu \xi^\mu) - hu^\nu u^\mu \nabla_\nu \xi_\mu. \end{aligned} \quad (3.128)$$

O resultado de se contrair a equação de Killing (C.8) com $u^\nu u^\mu$

$$u^\nu u^\mu (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) = 2u^\nu u^\mu \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (3.129)$$

pode ser usado em (3.128), de maneira que chegamos a uma generalização relativística do teorema clássico de Bernoulli:

$$u^\nu \nabla_\nu (hu_\mu \xi^\mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{D}{D\tau} (hu_\mu \xi^\mu). \quad (3.130)$$

Essa equação nos mostra que a quantidade

$$\mathcal{E} \equiv -hu^\mu \xi_\mu \quad (3.131)$$

é conservada ao longo das linhas de fluxo.

Sabemos que a existência de um vetor de Killing ξ^μ implica que a quantidade $u^\mu \xi_\mu$ é conservada ao longo de qualquer *geodésica* (u^μ sendo a quadrivelocidade associada à geodésica):

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} (u^\mu \xi_\mu) &= u^\nu \nabla_\nu (u^\mu \xi_\mu) \\ &= u^\nu u^\mu \nabla_\nu \xi_\mu + \xi^\mu u^\nu \nabla_\nu u_\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.132)$$

O primeiro termo se anula por causa de (3.129) e o segundo pela equação geodésica.

No caso da equação de Bernoulli (3.130) não é mais a quantidade $u^\mu \xi_\mu$ que é conservada ao longo das linhas de fluxo, mas $h u^\mu \xi_\mu$. O “fator de correção” h aparece porque as linhas de mundo das partículas de fluido não são geodésicas devido à pressão no fluido. Como visto na equação de Euler relativística (3.117), elas são geodésicas somente se P for constante ($P = 0$ por exemplo).

É interessante verificar o limite não relativístico da quantidade conservada:

$$\mathcal{E} = -h u_\mu \xi^\mu = -h u_\mu \delta_t^\mu = -h u_t = h\gamma (e^\Phi + \omega v e^\psi), \quad (3.133)$$

onde usamos (2.94) para u_t . Tomando o logaritmo de $\mathcal{E}$ vemos que

$$H + \Phi + \ln \gamma + \ln (1 + e^{\psi-\Phi} \omega v) = \text{constante ao longo das linhas de fluxo}, \quad (3.134)$$

onde aparece a chamada *entalpia logarítmica*

$$H \equiv \ln h = \ln (1 + U + P/\rho). \quad (3.135)$$

No limite não relativístico $U + P/\rho \ll 1$ (energias não relativísticas muito menores que a energia de repouso relativística). Portanto $H \rightarrow U + P/\rho$, que é a própria entalpia não relativística (sem a energia de repouso).

Além disso, é fácil ver do fator de Lorentz (D.79) que $\ln \gamma = v^2/2$ para $v \rightarrow 0$. Considerando que nesse limite $\omega \rightarrow 0$ e que, como vimos na seção 2.4.2, Φ tende ao potencial gravitacional Newtoniano, o limite não relativístico da equação (3.134) se torna

$$H + \Phi + \frac{v^2}{2} = \text{constante ao longo das linhas de fluxo}, \quad (3.136)$$

que nada mais é do que o teorema clássico de Bernoulli (3.52).

Para estabelecer a equação de Bernoulli relativística (3.130) não usamos nada além do fato de que o fluxo obedece a uma simetria e que ξ^μ é um vetor de Killing. Para um fluxo que é axialmente simétrico, com vetor de Killing ζ^μ associado a essa simetria, temos a propriedade análoga

$$\frac{D}{D\tau} (h u_\mu \zeta^\mu) = 0. \quad (3.137)$$

A quantidade conservada nesse caso é

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\equiv h u_\mu \xi^\mu \\ &= h u_\mu \delta_\varphi^\mu = h u_\varphi = h \gamma v e^\psi = h \gamma v r B e^{-\Phi}.\end{aligned}\quad (3.138)$$

No limite Newtoniano, $\gamma \rightarrow 1$, $\Phi \rightarrow 0$, $B \rightarrow 1$ e $h = 1 + U + P/\rho \rightarrow 1$ de tal forma que a quantidade conservada ao longo das linhas de fluxo é vr . Isso nada mais é do que o momento angular específico na direção do eixo de rotação.

Dado que as quantidades $\mathcal{E} = -hu_t$ e $\mathcal{L} = hu_\varphi$ são conservadas ao longo das linhas de fluxo, o momento angular específico para partículas de fluido (ver seção 2.4.3 e equação 2.108)

$$L \equiv -\frac{u_\varphi}{u_t} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}}, \quad (3.139)$$

que vem a ser uma quantidade puramente cinemática, também será conservado.

3.2.9 Integral de movimento em espaços-tempo simétricos

Encontraremos uma condição para que $h u_\mu \xi^\mu$ seja uma integral de movimento, supondo apenas que o espaço-tempo possua alguma simetria descrita pelo vetor de Killing ξ^μ . Nesse caso, o movimento do fluido será tal que essa simetria deve ser satisfeita para qualquer quantidade física q : $\mathcal{L}_\xi q = 0$. Vamos aplicar essa condição para a quantidade hu_μ , usando a expressão para a derivada de Lie (A.22):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi(hu_\mu) &= \xi^\nu \nabla_\nu (hu_\mu) + hu_\nu \nabla_\mu \xi^\nu \\ &= \xi^\nu \nabla_\nu (hu_\mu) + \nabla_\mu (h u_\nu \xi^\nu) - \xi^\nu \nabla_\mu (h u_\nu) \\ &= \xi^\nu \Omega_{\nu\mu} + \nabla_\mu (h u_\nu \xi^\nu) = 0.\end{aligned}\quad (3.140)$$

Ou seja, quanto a condição $\xi^\nu \Omega_{\nu\mu} = 0$ for satisfeita, $h u_\nu \xi^\nu$ será uma constante global, e não meramente uma constante ao longo de cada linha de fluxo que pode variar de uma linha para outra:

$$\xi^\nu \Omega_{\nu\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\mu (h u_\nu \xi^\nu) = 0 \quad (3.141)$$

Um caso particular interessante em que vale a condição acima acontece quando $\Omega_{\nu\mu} = 0$, caso em que há duas quantidades conservadas, $h u_\nu \xi^\nu$ e $h u_\nu \zeta^\nu$. Da equação de Carter-Lichnerowicz (3.124) podemos ver que se $\Omega_{\mu\nu} = 0$ o fluido é necessariamente isentrópico $\nabla_\mu S = 0$ (ou a temperatura é nula $T = 0$). Nesse caso, o próprio tensor rotação $\omega_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu}/(2h) = 0$ se anula, e o fluido será então *irrotacional*. O contrário, porém, não é verdadeiro: $\omega_{\mu\nu} = 0$ não implica que $\Omega_{\mu\nu} = 0$, o que significa que existem fluxos irrotacionais para os quais $\Omega_{\mu\nu} \neq 0$.

Vamos considerar um fluido com movimento puramente circular, cuja quadrivelocidade é dada pela equação (2.86):

$$u^\mu = A (\xi^\mu + \Omega \zeta^\mu). \quad (2.86)$$

Definindo o vetor

$$k^\mu \equiv \xi^\mu + \Omega \zeta^\mu, \quad (3.142)$$

temos que

$$u^\mu = A k^\mu. \quad (3.143)$$

Note que se Ω for constante, k^μ será um vetor de Killing, satisfazendo trivialmente a equação de Killing, dado que ambos ξ^μ e ζ^μ a satisfazem. Nesse caso u^μ é colinear a um vetor de Killing, e dizemos que o fluido está em *rotação rígida*. Se Ω não é constante, dizemos que ocorre uma *rotação diferencial*.

No caso de uma rotação rígida k^μ é um vetor de Killing, e a equação de movimento (3.124)

$$u^\nu \Omega_{\mu\nu} = A k^\nu \Omega_{\mu\nu} = T \nabla_\mu S \quad (3.144)$$

implica que a condição (3.141) é satisfeita para um fluido *isentrópico*. Assim, a quantidade

$$h u_\mu k^\mu = \text{const.} \quad (3.145)$$

é uma constante global em um fluido isentrópico em rotação rígida.

Podemos calcular $k^\mu u_\mu$ a partir da condição de normalização de u^μ e do valor de A , equação (2.91):

$$-1 = u^\mu u_\mu = A k^\mu u_\mu. \quad \Rightarrow \quad k^\mu u_\mu = -A^{-1} = -\gamma^{-1} e^\Phi. \quad (3.146)$$

Tomando então o logaritmo de menos a equação (3.145), vemos que a seguinte quantidade é uma constante:

$$H + \Phi - \ln \gamma = \text{const.} \quad (3.147)$$

Seu limite Newtoniano é obtido fazendo $\ln \gamma \approx v^2/2$ e lembrando que Φ se reduz ao potencial gravitacional Newtoniano:

$$H + \Phi - \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (3.148)$$

Note a diferença do sinal em frente ao termo $v^2/2$ com relação ao teorema de Bernoulli (3.136). Aparece aqui o potencial efetivo

$$\mathcal{U} = \Phi - \frac{r^2 \Omega^2}{2}, \quad (3.149)$$

(gerado pela força gravitacional e pela força centrífuga) no referencial em rotação com velocidade angular Ω (observe que $v \rightarrow r\Omega$, tomando o limite Newtoniano da equação (2.90)).

No caso geral em que u^μ não é proporcional a um vetor de Killing (rotação diferencial), a condição (3.141) não se aplica. No entanto, veremos na seção 4.4.3 que se o fluido for *barotrópico* haverá uma quantidade conservada, e as equações de movimento poderão ser integradas.

Capítulo 4

O modelo Polish doughnuts

4.1 Modelos de discos

Nesse capítulo faço uma breve introdução histórica aos modelos de discos astrofísicos e motivo a introdução do chamado modelo *Polish doughnuts*, que utilizo nesse trabalho. Desenvolvo então o formalismo matemático necessário para a obtenção dessas estruturas, tanto no caso Newtoniano quanto no relativístico, quando se introduz autointeração gravitacional e apresento as soluções autogravitantes (analíticas e numéricas) existentes. Apresento ainda a escolha que faço para a distribuição de momento angular, baseado no trabalho de Qian *et al.* [36], que é construída de forma a se obter modelos analíticos qualitativamente semelhantes a resultados mais complexos de simulações numéricas.

4.1.1 Bases observacionais

O modelo de discos de acreção tratado com maior frequência é o modelo de discos finos desenvolvido por Shakura e Sunyaev [37], Novikov e Thorne [38] e Lynden-Bell e Pringle [39]). Nesse modelo o gás é suposto estar frio, de forma que, i) forças de pressão radial são desprezáveis e a velocidade angular do gás é essencialmente igual ao valor Kepleriano, e ii) o gás forma um disco fino com espessura vertical muito menor que o raio.

A equação de energia que descreve o balanço entre a geração de energia local devido à dissipação pela viscosidade e o resfriamento devido à transferência radiativa vertical e radiação da superfície do disco, se simplifica consideravelmente na geometria do disco fino e o cálculo da densidade e temperatura do gás como função da distância radial é direto. O modelo de disco fino tem sido aplicado com sucesso a anãs brancas e estrelas em pré-sequência principal [40]. No entanto, apesar de plausível e autoconsistente, o modelo de disco fino não é capaz de explicar uma componente do espectro observado (raios X duros e raios gamma) em discos acretivos ao redor de buracos negros [41].

Em vista da incapacidade dos modelos de discos finos de acreção produzirem raios X e raios gamma, várias tentativas foram feitas para desenvolver modelos alternativos de acreção: modelos de corona; modelo de duas temperaturas SLE (Shapiro, Lightman e Eardley [42]); modelos opticamente finos dominados por advecção (Narayan e Yi [43], Chen *et al.* [44]).

Apesar disso, a teoria de discos finos é razoavelmente bem entendida e amplamente corroborada por firmes bases observacionais. O caso de discos grossos de acreção é, no entanto, muito menos convincente pela teoria ainda estar em desenvolvimento, e as observações relevantes serem poucas, difíceis e indiretas.

Contudo, há razões teóricas para se insistir no estudo de discos grossos. Na teoria de discos finos o gradiente radial de pressão é desprezado e o balanço vertical de forças é resolvido separadamente. Foi mostrado que esta aproximação é adequada na medida em que o disco é geometricamente fino. Esta condição deve ser violada nas regiões mais internas dos discos de acreção em torno de buracos negros estelares e estrelas de nêutrons (ver discussão na seção 4.1.3). O estudo de discos grossos fornece um melhor entendimento teórico de discos finos como um caso limite, e nos permite lidar com situações intermediárias.

Além disso, atualmente acredita-se que sistemas compreendendo discos grossos de acreção relativísticos ao redor de buraco negros são comuns no universo. Em diversos modelos astrofísicos tais sistemas podem ser formados como estruturas transientes. Acredita-se que a região central de um núcleo ativo de galáxia consista em um buraco negro supermassivo, de massa aproximadamente entre 10^6 e 10^9 massas solares, rodeado por um toro, sendo formados provavelmente a partir do colapso de estrelas supermassivas [45]. É provável também que a fusão de estrelas de nêutrons binárias e sistemas binários buraco negro/estrela de nêutrons também resulte em um buraco negro e um toro [46].

Supõe-se que os eventos de fusão e colapso estão ligados a explosões de raios gama de curta e longa duração, respectivamente [47]. A duração da emissão de raios gamma é de $> 2s$ ($\leq 2s$) para emissões longas (curtas). Porém, além da emissão inicial de raios gama há ainda uma emissão posterior de raios X que pode durar um longo período de tempo, até cerca de $\approx 10^5s$ [48]. A quantidade de energia liberada na fase posterior da emissão pode ser comparada àquela produzida durante a fase “rápida” de emissão de raios gama. Em ambos os casos a grande emissão de energia pode ser explicada como o resultado da atividade do mecanismo central [48, 49] (apesar de existirem modelos alternativos [50]).

Para que esses modelos de explosões de raios gamma sejam plausíveis um disco suficientemente massivo (grosso) precisa estar presente para suprir matéria para um processo de acreção quase estacionário que dure por um período de alguns segundos [48]. Porém, alguns estudos prévios da estabilidade de discos grossos de acreção revelaram que esses estão sujeitos a instabilidades axissimétricas e não axissimétricas [51–53] que poderiam

destruir o toro em uma escala de tempo de milissegundos. Em anos subsequentes alguns efeitos estabilizadores foram descobertos [54], mas a total implicação desses efeitos permanece ainda a ser entendida. Apresento na seção a seguir um resumo desses estudos de estabilidade, porém, em resumo, os resultados são ainda inconclusivos e a possibilidade da existência de toros astrofísicos ao redor de buracos negros permanece. Os resultados obtidos até agora praticamente excluem a realidade de discos grossos como sendo toroides não acretivos em equilíbrio, mas deixam em aberto a possibilidade da existência de toros de acreção intimamente relacionados a toros em equilíbrio, que poderiam ser de interesse astrofísico.

De fato, depois da descoberta dessas instabilidades dinâmicas em toros com rotação diferencial, o interesse em discos grossos nessas estruturas inicialmente diminuiu, e se voltou para os modelos de acreção dominados por advecção, ou ADAF's (*advection dominated accretion flows*) contornando, mas deixando em aberto muitas questões sobre os toros. Apesar de restarem incertezas teóricas sobre sua estrutura e estabilidade, discos grossos são ainda uma possibilidade e devem ser, apesar do pessimismo inicial, centrais nos fenômenos mais energéticos observados no universo.

No presente trabalho adoto o modelo de discos grossos chamado de *Polish doughnuts* [8–10], o qual apresento na seção (4.1.4). Considero apenas discos em equilíbrio hidrostático, e é óbvio que em tais discos não pode ocorrer acreção. De fato, discos de acreção astrofisicamente relevantes devem extravasar (ligeiramente) o seu lóbulo de Roche de tal maneira a resultar em um fluxo acretivo. O lóbulo de Roche em sistemas buraco negro/toro é uma superfície toroidal análoga ao lóbulo de Roche em sistemas binários. Um corte meridional dessa superfície tem uma *cúspide* localizada no ponto de Lagrange L_1 , que se configura como sendo um círculo localizado entre a órbita circular marginalmente estável e a órbita circular marginalmente ligada. Então, o lóbulo de Roche toroidal é a superfície “equipotencial” que se cruza ao longo da cúspide, e o extravasamento dessa superfície induz perda de massa do disco. A figura 4.1 mostra duas situações em que o

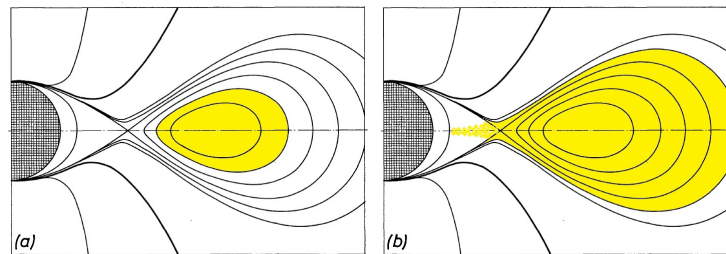


Figura 4.1: Superfícies equipotenciais de um disco grosso ao redor de um buraco negro: a) Disco estacionário; b) Disco extravasando o lóbulo de Roche, causando um processo acretivo

disco não preenche, e em que ele extravasa o lóbulo de Roche.

A taxa de acreção (fluxo de massa) na cúspide depende fortemente do quanto o lóbulo de Roche é extravasado. Isso gera um mecanismo de estabilização autorregulador contra perturbações térmicas e viscosas. Em uma situação astrofísica típica envolvendo acreção em estado estacionário a quantidade em que o lóbulo de Roche é extravasado é sempre muito pequena [55] e, portanto, discos grossos de acreção estacionários devem ser descritos por modelos idealizados que preenchem exatamente o seu lóbulo de Roche (figura 4.2).

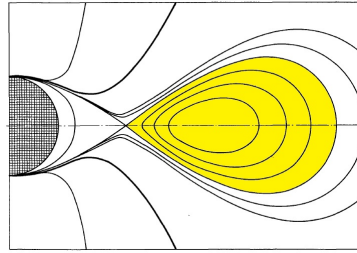


Figura 4.2: Modelo de disco grosso preenchendo exatamente o lóbulo de Roche

Considero então estados de equilíbrio baseando-me no fato de que estados acretivos quase estacionários podem ser aproximados por estados em equilíbrio preenchendo completamente o lóbulo de Roche. Aproximação essa que deve ser válida para baixas taxas de acreção, e portanto baixas luminosidades [55].

4.1.2 Estabilidade de discos grossos de acreção

Estudos iniciais da estabilidade de discos grossos de acreção revelaram que esses estão sujeitos a instabilidades axissimétricas e não axissimétricas [51–53] que poderiam destruir o toro em uma escala de tempo de milissegundos. Dentre elas a instabilidade não axissimétrica de Papaloizou-Pringle [52], e a chamada instabilidade *runaway* [51], que é uma instabilidade axissimétrica.

Papaloizou e Pringle [52] descobriram a existência dessa instabilidade hidrodinâmica global, que se desenvolve na escala de tempo dinâmica, em discos com autointeração gravitacional desprezável e momento angular específico constante. Trabalhos subsequentes esclareceram a natureza da instabilidade Papaloizou-Pringle [56], como ela redistribui momento angular específico [57] e descobriram que a acreção tem um efeito estabilizador sobre o disco [54, 57]. Já a instabilidade *runaway* de discos de acreção grossos foi descoberta primeiramente por Abramowicz, Calvani e Nobili [51]. Essa instabilidade é similar à instabilidade dinâmica em sistemas binários próximos, quando o elemento mais massivo transborda para além do lóbulo de Roche. Nesse caso, o raio do lóbulo de Roche diminui mais rápido que o raio da estrela, levando à sua ruptura. Se o disco extravasa o lóbulo de

Roche, então a transferência de massa através da cúspide vai transportar a cúspide para dentro do disco, ou seja, radialmente em direção pra fora. Isso poderia resultar em um aumento catastrófico da transferência de massa e na ruptura do disco em pouco tempo na escala dinâmica.

Estudos subsequentes mostraram que a rotação do buraco negro tem um efeito estabilizador [58], e que um perfil não constante de momento angular tem efeito fortemente estabilizador [58, 59]. Contudo, estudos usando potenciais pseudonewtonianos [60] e cálculos relativísticos com espaço-tempo fixo [53, 61] encontraram indicações de que a autointeração gravitacional favorece a instabilidade.

Recentemente Montero *et al.* [62] realizaram as primeiras simulações de discos de acreção grossos completamente relativísticas e autoconsistentes, para um curto período de tempo na escala dinâmica. Eles não encontraram sinal da instabilidade *runaway* durante o período de tempo simulado, indicando talvez que a autointeração gravitacional do disco não tem papel crítico em favor da instabilidade, pelo menos não durante a escala de tempo simulada. No entanto, deixaram em aberto a influência de instabilidades não axissimétricas. O mesmo resultado com relação à instabilidade *runaway* foi encontrado por Korobkin *et al.* [63], que observaram ainda o desenvolvimento de certos tipos de instabilidade não axissimétrica, dentro do regime linear da instabilidade. Kiuchi *et al.* [64] mostrou ainda que uma instabilidade não axissimétrica se desenvolve, para além do regime linear, em uma grande gama de toros autogravitantes ao redor de buracos negros. Porém, o disco não é destruído, mas a estrutura não axissimétrica resultante, que persiste por uma escala de tempo muito maior que a escala dinâmica, se torna uma forte emissora de ondas gravitacionais quase periódicas de grande amplitude, possivelmente detectáveis.

Apesar do esforço significativo, tanto teórico quanto numérico, os estudos de instabilidade não deram ainda uma resposta definitiva a essa questão. O espaço de parâmetros a ser investigado para as condições da “ativação” dessas instabilidades, em particular da instabilidade *runaway*, ainda é grande e ainda são necessários modelos autoconsistentes precisos que sirvam como condições iniciais para as simulações.

4.1.3 Margem interna do disco e ISCO

O truncamento do disco na ISCO é uma hipótese em geral assumida, e utilizada em cálculos, por exemplo de medição de spin de buracos negros citados na introdução. Essa hipótese é obviamente válida no modelo padrão de discos finos, porém, sua validade para discos de acreção realísticos tem sido objeto de debate [65]. O modelo de disco padrão no uso de ajuste espectral é o modelo de disco fino de Shakura e Sunyaev [37], que é um modelo hidrodinâmico Newtoniano que simplifica o problema do disco de acreção através das hipóteses de que o disco seja geometricamente fino, estacionário e axissimétrico, e

ainda aplica o que hoje é conhecida como *prescrição de viscosidade α* . Resolvendo as equações de conservação da hidrodinâmica usando essas hipóteses, ele nos fornece expressões analíticas para o padrão radial de dissipação de energia nesses discos. Este é um modelo simples no qual a matéria tem somente velocidade azimutal Kepleriana, apesar de que perto do buraco negro o disco deva ter velocidade radial para que haja acreção. Apesar disso, o modelo tem tido sucesso em ajustes espectrais durante décadas, e é a base para modelos mais avançados que estão sendo desenvolvidos. No entanto, questões relativas à região de transição e à margem interna do disco não podem ser corretamente abordadas no modelo padrão de discos finos de Shakura-Sunyaev por causa das duas simplificações matemáticas cruciais que esse modelo faz: o momento angular específico do disco $L(r)$ deve ser Kepleriano por todo o disco, $L(r) = L_k(r)$, e que o aquecimento por viscosidade é equilibrado pelo resfriamento radiativo. Em regiões mais externas do disco, $r \gg r_{ms}$, essas hipóteses são certamente aceitáveis no sentido de que muitas propriedades do disco, em particular o seu espectro, não dependem muito delas. No entanto, elas falham completamente na região mais interna, $r < r_{ms}$, onde elas fornecem uma descrição qualitativamente errada do fluido.

Essas e outras questões relativas à região de transição onde o fluxo de matéria acretada muda seu caráter de quase circular para quase em queda livre, foram estudadas extensivamente e muitas delas respondidas nos anos 70 e 80 por dois grupos de pesquisa: o grupo de Warsaw, liderado por Bohdan Paczyński, e pelo grupo de Kyoto, liderado por Shoji Kato.

Pesquisadores em Warsaw e Kyoto formularam muitos teoremas e fórmulas analíticas exatas, simples, e práticas, que são praticamente independentes da natureza da dissipação, processos radiativos e viscosidade. Eles deram uma descrição geral da parte mais interna de um disco de acreção ao redor de um buraco negro, isto é, da região localizada entre o horizonte do buraco negro e a ISCO. Desenvolvimentos posteriores em hidrodinâmica e magneto-hidrodinâmica de discos de acreção confirmaram esses resultados. Isso inclui modelos numéricos detalhados de discos de acreção com luminosidade supercrítica (taxa de acreção maior que a de Eddington), opticamente grossos e geometricamente grossos ou delgados, e ADAFs subcríticos, opticamente finos e geometricamente grossos (veja Kato *et al.* [66] para uma revisão desses modelos).

Abramowicz e Kato [67] fizeram um sumário curto, útil e conveniente dos trabalhos dos grupos de Warsaw e Kyoto, com citações de resultados particulares. Repetirei aqui três pontos do seu sumário. Todas as afirmações abaixo são teoremas gerais provados e confirmados posteriormente por simulações numéricas (veja Igumenshchev *et al.* [68] para referências descrevendo os resultados dessas simulações).

1. Dinâmica: na parte mais interna do disco o momento angular da matéria acretada não é Kepleriana. A dinâmica do fluxo depende sobretudo da magnitude do mo-

mento angular nessa região: fluxos com momento angular baixo tem propriedades muito diferentes daqueles com momento angular alto.

O fluxo com baixo momento angular, do tipo Bondi, tem $L(r) < L_{ms} = L_k(r_{ms})$. A força centrífuga não é importante nessa região, e o fluxo está longe do equilíbrio mecânico. Linhas de fluxo não são círculos fechados, e as propriedades do fluxo são similares às do caso bem conhecido de acreção esférica. Para fluxos do tipo Bondi, o conceito de margem interna perde sua utilidade: nesse tipo de fluxo acretivo simplesmente não existe um raio característico que possa ser chamado de margem interna.

Os fluxos com momento angular alto tem $L(r) > L_{ms}$. A parte mais externa do fluxo, isto é, o disco propriamente dito, está próximo do equilíbrio mecânico determinado pelas forças gravitacional, centrífuga e da pressão. O potencial efetivo Φ_{ef} (potencial gravitacional total mais o potencial centrífugo) tem dois extremos em posições r_* dadas pelas duas soluções da equação $L(r_*) = L_k(r_*)$, ou seja, o raio r_* em que o momento angular $L(r_*)$ da matéria se iguala ao valor Kepleriano correspondente. Note que, como a distribuição relativística de momento angular Kepleriano tem um mínimo em r_{ms} e que estamos interessados no caso $L(r) > L_{ms}$, devem haver duas dessas posições em ambos os lados de r_{ms} . A primeira, $r_* = r_0 > r_{ms}$, corresponde a um mínimo de $\Phi_{ef}(r, 0)$ no plano equatorial $z = 0$ (que pode ser definido como sendo o “centro” do disco). A outra, $r_* = r_{cusp} < r_{ms}$, define o lóbulo de Roche, ou seja, a superfície equipotencial $\Phi(r, z) = const = \Phi(r_{cusp}, 0)$ que cruza a si mesma ao longo do círculo $(r, z) = (r_{cusp}, 0)$. Dentro do disco, isto é, para $r > r_{cusp}$, a matéria se move lentamente em direção ao centro devido à ação de torque devido à viscosidade. Para $r < r_{cusp}$ ela vai para dentro muito rápido devido à ausência de um estado de equilíbrio, dado que a sustentação centrífuga é insuficiente. Essa é uma situação similar à do extravasamento do lóbulo de Roche, mais conhecido no contexto de binárias próximas.

Portanto, na região próxima à posição da cúspide, $r = r_{cusp}$, o fluxo muda seu caráter de quase circular para quase em queda livre, e por essa razão, a cúspide representa exatamente o significado físico crucial de uma “margem interna” do disco. Uma outra possibilidade seria o raio sônico r_{sonic} , onde a velocidade radial do fluxo muda de sub para supersônica. O raio sônico é ligeiramente mais próximo do buraco negro que a cúspide, $r_{mb} < r_{sonic} < r_{cusp} < r_{ms}$.

2. Viscosidade e dois tipos de fluxo: para fluxos acretivos estacionários que são descritos pelo modelo padrão de Shavkura-Sunyaev assintoticamente, isto é, para raios grandes, e que tem viscosidade dada pela prescrição α padrão, o valor do momento angular na parte interna do disco, expresso em unidades adimensionais de $L_k(r_{ms})$,

depende de α e da taxa de acreção $\dot{M}$.

Para qualquer valor de $\dot{M}$ há um valor crítico α_{crit} tal que para $\alpha > \alpha_{crit}$ o fluxo é do tipo Bondi, enquanto que para $\alpha < \alpha_{crit}$ o fluxo é do tipo de disco. Para taxas de acreção baixas, muito subcríticas, $\alpha_{crit} < 0.1$.

3. Localização da margem interna e eficiência: assumindo a “condição de torque nulo na margem interna”, isto é, que o torque dado pela viscosidade não pode agir através do horizonte do buraco negro, a localização da cúspide é diretamente conectada com a eficiência da acreção. A eficiência se iguala a menos a energia orbital de ligação na margem interna dividida pelo quadrado da velocidade da luz $\eta = -E_k(r_{in})/c^2$. Em particular, para discos de acreção que são radiativamente ineficientes $\eta \approx 0$, ou seja, para discos grossos, discos delgados e ADAFs, a margem interna se aproxima da localização da órbita circular Kepleriana marginalmente ligada r_{mb} , porque $\eta(r_{mb}) = 0$.

Esses resultados fundamentais dos grupos de Warsaw e Kyoto foram revisados muitas vezes, também em vários livros texto e monografias sobre teoria de acreção (Frank, King e Raine [40]; Kato, Fukue e Mineshige [66]; Abramowicz, Bjornsson e Pringle [69]). Alguns deles se enquadram entre os resultados mais citados em teoria de discos de acreção em buracos negros.

Em suma, é pouco provável que a margem mais interna de um disco de acreção coincida com a posição de sua órbita Kepleriana circular marginalmente estável r_{ms} . No entanto, esse fato é uma forte motivação ao estudo de modelos além do modelo padrão de discos finos, em particular, de discos grossos de acreção. O raio mais pertinente nesse caso, que pode ser identificado com a margem interna do disco, é o raio da cúspide ao invés do raio da órbita marginalmente estável. Ainda assim, uma análise do comportamento da ISCO nesses modelos é importante pois é óbvio que ambas as órbitas estão relacionadas.

4.1.4 O modelo Polish doughnuts

Modelos de discos grossos em estado estacionário são baseados no fato de que a maioria dos fenômenos interessantes que ocorrem em discos de acreção em buracos negros tem escalas de tempo características t_* muito menores que o tempo t_L necessário para a redistribuição do momento angular, ou o tempo t_S necessário para a redistribuição da entropia ($t_* \ll t_L, t_S$). Durante o tempo t_* as distribuições de momento angular e entropia não mudam. Portanto, ao se desenvolver um modelo de situações estacionárias e axialmente simétricas de equilíbrio dinâmico, as distribuições de momento angular e entropia

$$L = L(r, z), \quad S = S(r, z), \quad (4.1)$$

podem ser consideradas como funções livres [36]. No entanto, em uma descrição física completa essas funções (4.1) não são arbitrárias, mas dadas por processos dissipativos tais como viscosidade, convecção, turbulência ou transporte radiativo, e ainda pelas condições iniciais.

Aspectos importantes desses processos são ainda desconhecidos, de forma que não há ainda uma forma prática de se calcular modelos fisicamente consistentes de fluxos acretivos a partir de primeiros princípios, sem envolver algumas hipótese *ad hoc*, ou desprezando alguns processos importantes. As simplificações feitas são matematicamente equivalentes a supor uma forma determinada para essas funções de distribuição. Paczyński argumentou que seria mais pragmático fazer hipóteses fisicamente motivadas do resultado final, isto é, da forma do momento angular e da entropia.

Portanto, quando são *calculados*, por exemplo com a ajuda de simulações numéricas longas e complexas, os resultados são, pelo menos em certa medida, *arbitrários*:

$$\left| \begin{array}{c} \text{passo 1} \\ \text{hipóteses} \\ \text{arbitrárias} \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{c} \text{passo 2} \\ \text{cálculos} \\ \text{complexos} \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{c} \text{passo 3} \\ L = L(r, z) \\ S = S(r, z) \end{array} \right|$$

Dessa forma, não haveria uma razão óbvia para se acreditar que seria mais fácil prever quais as hipóteses necessárias no passo 1 do que assumir (“chutar”) o resultado no passo 3. Então, as distribuições de momento angular e entropia (4.1) poderiam ser consideradas como *funções livres*. A hipótese possível mais simples seria uma situação com momento angular constante. Ela foi usada por Paczyński e por seu grupo Warsaw (ver [8], [9] e [70]) para construir o modelo **Polish doughnuts**, isto é, o modelo de discos grossos de acreção com luminosidade super-Eddington. Discos grossos têm uma forma toroidal característica, lembrando uma rosquinha (*doughnut*).

Os modelos de discos grossos assim desenvolvidos mostram os mesmos traços característicos de buracos negros acretivos:

- i) um funil ao longo do eixo de rotação, relevante para a colimação e aceleração de jatos;
- ii) uma pressão máxima, possivelmente relevante para modos oscilatórios epicíclicos;
- iii) uma superfície equipotencial particular que cruza a si mesma em uma *cúspide*, relevante para a condição de contorno interna, e para a estabilização das instabilidades térmicas, viscosas e de Papaloizou-Pringle.

Para se construir o modelo, são assumidas as hipóteses de fluxo estacionário e axissimétrico, e que a escala de tempo dinâmica é muito menor que as escalas de tempo térmica

e de viscosidade. Dessa forma, qualquer efeito de dissipação térmica é desprezado, assumindo um tensor de energia-momento de um fluido ideal.

A matéria é ainda suposta seguir trajetórias puramente circulares. Essa condição não é satisfeita perto do limite interno do disco, ou seja, na *cúspide*, onde há uma transição de trajetórias “quase circulares” para trajetórias radiais de “queda livre”. Contudo, a transição pode ser incorporada na forma de condições de contorno na margem interna (ver Abramowicz [55]).

4.2 Equação de estado politrópica

4.2.1 Propriedades térmicas da matéria e politropos

O fato de considerar nesse trabalho apenas fluidos ideais se deve ao fato de que as propriedades térmicas da matéria são desprezáveis ou podem ser ignoradas para um toro sob determinadas condições, de forma que suas propriedades termodinâmicas possam ser descritas por simples relações entre pressão e densidade. Veremos a seguir (na seção 4.3.2) que para um disco em estado de rotação obedecendo a algumas condições simples existe uma relação puramente geométrica do tipo $P = P(\rho)$ entre a pressão e a densidade independente de suas propriedades térmicas, o que faz com que essas últimas não sejam importantes no estabelecimento dessa relação.

Escolho então trabalhar com uma relação do tipo *politrópica*, adotando a hipótese de que no fluido ocorram apenas processos termodinâmicos chamados de *processos politrópicos*¹. Uma mudança politrópica ou processo politrópico é definido como sendo uma mudança reversível (quase-estática) em um sistema termodinâmico que ocorre de tal maneira que o calor específico por unidade de massa seja constante durante essa mudança reversível. Isso implica que as funções termodinâmicas se relacionam pelas expressões abaixo (ver apêndice E para uma revisão dos processos politrópicos)

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}; \quad 1 + n' = \frac{d \ln P}{d \ln T}; \quad \frac{1}{n''} = \frac{d \ln T}{d \ln \rho}. \quad (4.2)$$

Juntamente com a equação de estado, as relações acima implicam que um politropo (ou fluido politrópico) contém apenas uma variável termodinâmica independente.

De maneira geral os chamados *índices politrópicos* n , n' e n'' são variáveis, mas isso introduziria muitos graus de liberdade. Por isso, em geral considera-se todos os índices

¹Geralmente se faz uma distinção entre processos politrópicos ocorrendo em um ponto fixo (e.g., oscilações locais), e uma distribuição espacial global de matéria obedecendo a uma equação de estado politrópica. Estarei tratando sempre de mudanças politrópicas ocorrendo em um ponto fixo no espaço, de tal forma que todas as variáveis termodinâmicas são funções do espaço e do tempo (e.g., $P = P(\vec{x}, t)$).

como constantes, de forma que as expressões acima possam ser integradas:

$$P\rho^{-1-1/n} = \text{const.}; \quad PT^{-1-n'} = \text{const.}; \quad T\rho^{-1/n''} = \text{const.}, \quad (4.3)$$

para $(n, n', n'') = \text{const.}$

Da primeira dessas equações, obtemos a equação de estado geral para um politropo:

$$P = K\rho^\Gamma. \quad (4.4)$$

K é referida como *constante politrópica* e $\Gamma \equiv 1 + 1/n$ o chamado *expoente politrópico*. Geralmente o índice politrópico n (ou expoente politrópico Γ) é considerado constante quando usado em conexão com uma equação de estado da forma (4.4) acima.

A variação de ρ com T ou a relação entre P e T podem ser obtidas pelas outras duas equações, ou de forma genérica pelas expressões em (4.2). No entanto, em muitas aplicações as propriedades térmicas da matéria são desprezáveis ou podem ser ignoradas, e os sistemas são descritos por simples relações pressão-densidade da forma $P = K\rho^{1+1/n}$. Por exemplo, algumas vezes até mesmo a estrutura *espacial* de sistemas sem colisão (clusters de estrelas por exemplo) é descrita por uma lei politrópica de “pressão-densidade”. Dessa forma, o único índice politrópico pertinente em muitos problemas práticos é n , podendo ser ignorados os outros dois índices n' e n'' , relacionados às propriedades térmicas da matéria. Equações de estado politrópicas podem ser usadas com sucesso (as vezes com índice politrópico variável) sempre que equações envolvendo a temperatura não são bem estabelecidas ou podem ser ignoradas. Esse é o caso de um disco de matéria satisfazendo às condições de rotação adotadas nesse trabalho (ver seção 4.3.2).

A noção de politropo (ou variações politrópicas) teve sucesso em muitos aspectos devido ao fato de que:

- i) Ela oferece uma equação de estado concreta e concisa, contendo somente duas variáveis de estado, P e ρ , uma vez que o índice politrópico n e a constante politrópica K são fixadas.
- ii) Para certos intervalos de n a equação de estado politrópica é válida - pelo menos de forma aproximada - para muitos sistemas termodinâmicos ocorrendo no universo: zonas convectivas de estrelas ordinárias, atmosferas convectivas planetárias e estelares, interiores planetários, matéria interestelar, anãs brancas, estrelas de nêutrons, ventos solares e estelares, distribuição de massa em sistemas estelares, campos de radiação de corpo negro, pares elétron-pósitron, etc. [71]

Podemos destacar alguns casos especiais de variações politrópicas (ver Maciel [72]):

- $n = 3/2$: $P_r \ll P_g$ (pressão da radiação for desprezável frente à pressão do gás); caso adiabático; Aplica-se também a um gás degenerado não relativístico, onde $P \propto \rho^{5/3}$;

- $n = 3$: $P_r \gg P_g$ (radiação pura); aplica-se ao caso degenerado relativístico, onde $P \propto \rho^{4/3}$;
- $n = -1$: Politropo de pressão constante;
- $n = 0$: Politropo de densidade constante;
- $n \rightarrow \infty$: Politropo de temperatura constante;

onde a pressão P na equação de equilíbrio hidrostático é a *pressão total*, incluindo no caso mais geral a *pressão do gás* P_g (íons, elétrons etc.) e a *pressão da radiação* P_r : $P = P_g + P_r$.

O caso $n = 3/2$ é associado ao equilíbrio convectivo adiabático, isto é, o interior é completamente convectivo, e elementos de massa subindo (ou descendo) de uma região com densidade ρ e temperatura T para outra com densidade ρ' e temperatura T' ajustam-se rapidamente às novas condições sem trocas de calor. O caso $n = 3$ corresponde ao equilíbrio radiativo, sendo a pressão puramente de radiação.

Para a maioria dos processos adiabáticos em sistemas termodinâmicos simples os índices politrópicos estão contidos no pequeno intervalo $1, 5 \leq n, n', n'' \leq 3$ (ver Horedt [71] para índices de diversos sistemas, onde se discute ainda a generalização obtida introduzindo equações de estado com índices no intervalo $-\infty \leq n \leq \infty$).

É importante notar que ao se utilizar uma equação de estado politrópica do tipo $P = K\rho^\Gamma$ a pressão é uma função da densidade de massa de repouso somente, e a equação de estado não fornece nenhuma informação sobre as propriedades da energia interna específica, que fica livre (sem restrições). Uma hipótese perfeitamente possível seria assumir $U = 0$,² por exemplo.

Uma equação de estado amplamente utilizada para se determinar as propriedades térmicas do fluido é a equação de um *fluido perfeito* (ou gás perfeito)

$$P = \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu} \right) \rho T. \quad (4.5)$$

Essa é a equação clássica de um fluido monoatômico, mas é usada como um protótipo para comportamentos mais gerais de uma equação de estado em que a pressão pode ser expressa em termos da densidade (densidade de energia de repouso no caso relativístico) e da temperatura (ou energia interna específica), e que se mostrou apropriada para fluidos que são não degenerados e relativísticos, não degenerados e não relativísticos, ou não degenerados e ultrarelativísticos. [73]

²Um fluido obedecendo a equação de estado de um fluido perfeito com $U = 0$ teria temperatura zero, e seria um modelo razoável para uma estrela de nêutrons antiga e fria, por exemplo. [73]

Lembrando que a 1ª lei da termodinâmica para a transformação a volume constante de um fluido monoatômico é simplesmente dada por $dU = C_V dT$, é possível escrever, para um fluido com calor específico C_V constante, que $U = C_V T$. Usando ainda o fato de que $\mathcal{R}/\mu = C_P - C_V$ (equação (E.10) do apêndice E.2) podemos escrever a equação (4.5) como

$$P = \left(\frac{C_P - C_V}{C_V} \right) \rho U,$$

de tal forma que, utilizando o *expoente adiabático* $\gamma = C_P/C_V$ do fluido, temos

$$P = \rho U (\gamma - 1). \quad (4.6)$$

A equação acima é amplamente usada em simulações numéricas. Sua nomenclatura, contudo, é de certa forma confusa pois é chamada por alguns de equação de estado de um fluido ideal. Reservo nesse trabalho o termo *fluido ideal* àqueles para os quais $\frac{DS}{D\tau} = 0$ (que alguns chamam de fluido perfeito), referindo-me à equação de estado acima como equação de estado de um *fluido perfeito* (ou gás perfeito).

Se utilizada em conjunto com uma equação de estado politrópica, a equação (4.6) pode ser escrita como

$$U = \frac{K \rho^{\Gamma-1}}{\gamma - 1}, \quad (4.7)$$

o que determina a energia interna do fluido.

O que mostro agora é que a equação acima se assemelha à energia interna de um politropo geral no caso isentrópico. A 1ª lei da termodinâmica (3.22) com $dS = 0$ escreve-se como

$$dU = \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad (4.8)$$

Então, usando $P = K \rho^\Gamma$ e o limite $\lim_{\rho \rightarrow 0} U = 0$ temos

$$U = \frac{K \rho^{\Gamma-1}}{\Gamma - 1}. \quad (4.9)$$

A equação acima é similar mas distinta de (4.7), mas é claro que coincidem quando $\Gamma = \gamma$. Colocando de outra forma, uma equação de estado politrópica é equivalente a uma equação de um fluido perfeito *somente* sob a condição de *isentropia*, para a qual o índice adiabático do fluido γ é o mesmo que o índice politrópico Γ . Na prática, simulações numéricas que aplicam uma equação de estado politrópica fazem em geral a suposição implícita de que $\Gamma = \gamma$, de forma que a energia interna pode ser computada e integrada para obter a expressão algébrica (4.9).

A constante politrópica K introduzida em (4.4) é mais que somente uma constante e é de fato relacionada à entropia ao longo das linhas de fluido. Para mostrar isso, vamos

relaxar por um momento a condição de que K seja constante, e considerar o caso particular de um fluido perfeito, em que a energia interna é dada pela equação (4.9). Então

$$\begin{aligned} dU &= dK \frac{\rho^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} + K \rho^{\Gamma-2} d\rho \\ &= \frac{U}{K} dK + \frac{P}{\rho^2} d\rho. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Comparando essa expressão com a 1ª lei da termodinâmica (3.22) temos que

$$TdS = U \frac{dK}{K} \quad \Rightarrow \quad dS = \frac{U}{T} d \ln K. \quad (4.11)$$

A equação acima mostra que (o logaritmo natural da) constante politrópica é diretamente proporcional à entropia específica, e portanto constante para cada linha de fluxo se o elemento de fluido sofre uma transformação adiabática ($\frac{DS}{D\tau} = 0 \Rightarrow \frac{DK}{D\tau} = 0$). No entanto, assim como S , K pode variar ao longo das linhas de fluxo. Isso reflete o fato de que um fluido perfeito é intrinsecamente adiabático, mas não necessariamente isentrópico. Todas as implementações numéricas da equação de estado politrópica assumem que K é constante ao longo de todas as linha de fluxo, o que, em conjunto com a hipótese de um fluido perfeito, implica que o fluido é isentrópico.

A equação de estado politrópica não precisa necessariamente ser usada em conjunto com a de um fluido perfeito. No entanto, um politropo completamente geral ainda terá energia interna dada por uma lei do tipo $U = U(\rho)$ (como veremos a seguir), de tal forma que $dU = \frac{dU}{d\rho} d\rho$. Então, pela 1ª lei da termodinâmica:

$$TdS = \left(\frac{dU}{d\rho} - \frac{P}{\rho^2} \right) d\rho. \quad (4.12)$$

A expressão acima esclarece o fato de que um fluido politrópico *não* é necessariamente isentrópico, e que a condição

$$dS = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dU}{d\rho} = \frac{P}{\rho^2} \quad (4.13)$$

deve ser satisfeita pela energia interna específica para que isso aconteça.

Como a equação de estado politrópica coincide com a equação de estado de um fluido perfeito no caso de transformações isentrópicas, para as quais o índice politrópico Γ coincide com o índice adiabático γ do fluido, não é surpresa que a condição de isentropia é satisfeita somente quando a energia interna específica é expressa como em (4.9).

De fato, um fluido politrópico que é também isentrópico *somente* poderá ter energia interna como em (4.9). Uma transformação (e.g., o desenvolvimento de ondas de choque)

que leve a uma violação da equação acima essa transformação será acompanhada por um incremento de entropia. Por outro lado, se em uma simulação numérica a equação (4.9) for imposta, então a conservação de entropia é automaticamente garantida. [73]

A elaboração de um modelo Polish doughnuts necessita da escolha de uma distribuição de entropia $S(r, z)$, que especifique as propriedades térmicas da matéria. O que é feito em geral é a suposição de um fluido perfeito na condição de isentropia. No entanto, isso não é estritamente necessário, e uma equação de estado politrópica geral, sem a condição adicional de um fluido perfeito e sem a condição de isentropia, terá suas propriedades térmicas determinadas exclusivamente pelos outros índices politrópicos n' e n'' .

Apesar disso, as propriedades térmicas da matéria não terão efeito na dinâmica do fluido quando uma equação de estado politrópica for utilizada (fluido barotrópico), como veremos na seção (4.3.2). Porém, mesmo assim podemos determiná-las a partir dos índices politrópicos.

Um processo politrópico é definido como sendo um processo termodinâmica que ocorre de tal forma que o calor específico C permanece constante (ou varia de uma maneira fixa). Considerando apenas processos quase-estáticos (reversíveis), isso implica que (ver apêndice E)

$$TdS = CdT. \quad (4.14)$$

Por exemplo, se a entropia for constante ao longo das linhas de fluxo (fluido adiabático, $\frac{DS}{D\tau} = 0$), então a equação acima diz então que a temperatura também será ($\frac{DT}{D\tau} = 0$). O fluido será isentrópico ($dS = 0$) somente se $C = 0$.³

De acordo com a equação (4.2)

$$\frac{d\rho}{\rho} = n'' \frac{dT}{T}. \quad (4.15)$$

Utilizando a condição politrópica (4.14) isso resulta em

$$dS = \left(\frac{C}{n''} \right) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (4.16)$$

Com isso vemos que a entropia é determinada exclusivamente pela distribuição de densidade, $S = S(\rho)$, e dados o calor específico C e o índice politrópico n'' essa função pode ser integrada:

$$S(\rho) = S_0 + \left(\frac{C}{n''} \right) \ln \rho. \quad (4.17)$$

³Em se tratando de fluidos, o termo fluido politrópico ou politropo é definido como sendo um fluido para o qual vale a relação (4.14) acima entre a entropia e a temperatura, mesmo quando a variação dS se der em função de uma variação entre linhas de fluxo diferentes. Então, mesmo um fluido adiabático pode ter $C \neq 0$. Nesse caso, essa relação diz somente que em um deslocamento virtual de uma partícula de fluido entre linhas de fluxo implicaria em determinada troca de calor.

Portanto, a função $S(r, z)$ não é mais uma função livre mas calculada a partir de $\rho(r, z)$. Além disso, os índice politróticos das propriedades térmicas da matéria (incluindo n'') não influenciam na dinâmica do fluido e na determinação de $\rho(r, z)$.

Usando (4.16) e a 1ª lei da termodinâmica podemos ainda escrever uma equação para a energia interna na forma $U = U(\rho)$:

$$dU = \left(\frac{CT}{n''} + \frac{P}{\rho} \right) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (4.18)$$

A temperatura pode ser integrada de (4.15),

$$T(\rho) = K'' \rho^{\Gamma''-1}, \quad (4.19)$$

onde K'' é uma constante de integração e $\Gamma'' = 1 + \frac{1}{n''}$. Isso resulta então na energia interna

$$U(\rho) = CK'' \rho^{\Gamma''-1} + \frac{K \rho^{\Gamma-1}}{\Gamma-1}. \quad (4.20)$$

Obviamente o caso isentrópico $C = 0$ retoma a forma (4.9).

4.2.2 Condição de estabilidade

Abramowicz *et al.* [74] estudou a estabilidade de discos grossos axissimétricos perante perturbações adiabáticas locais no caso de viscosidade desprezável e sem autointeração gravitacional, e mostrou a validade nesse caso do chamado *critério de estabilidade Høiland-Solberg* [75]

$$\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial L^2}{\partial r} \right) - \frac{1}{C_P \rho} \vec{\nabla} P \cdot \vec{\nabla} S > 0, \quad (4.21)$$

$$- \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \left[\left(\frac{\partial L^2}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial L^2}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right) \right] > 0, \quad (4.22)$$

bem conhecido no estudo da estabilidade de estrelas em rotação. Aqui, $C_P = -\rho \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_P$ é o calor específico a pressão constante.

No caso de uma configuração isentrópica ($\vec{\nabla} S = 0$) o critério acima se torna

$$\frac{dL^2}{dr} > 0, \quad (4.23)$$

ou seja, para que haja estabilidade o momento angular específico deve aumentar para fora. A condição (4.23) é o critério de Solberg, que generaliza para configurações isentrópicas o critério de Rayleigh para um fluido ideal incompressível.

Quando não há rotação envolvida ($L = 0$), o critério de Høiland-Solberg resulta em

$$\frac{1}{C_P \rho} \frac{dS}{dP} |\vec{\nabla} P|^2 < 0 \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dP} < 0, \quad (4.25)$$

para o caso em que existe uma relação biunívoca entre P e S (e.g., fluido politrópico), onde usamos ainda o fato de que $C_P > 0$. Esse é justamente o critério de Schwarzschild para a estabilidade convectiva. Essa condição, derivada via considerações termodinâmicas simples [32], é necessária para que um elemento de fluido, em algum campo gravitacional fixo $\vec{g}$, sofra uma força que o impulse à sua posição original após ter sofrido um deslocamento adiabático por uma distância pequena. Nesse caso simples de um campo fixo

$$(-\vec{g}) \cdot \vec{\nabla} S > 0. \quad (4.26)$$

Se o campo $\vec{g}$ está na direção $-\hat{z}$ então

$$\frac{\partial S}{\partial z} > 0. \quad (4.27)$$

O que vamos ver agora é que se ambos os critérios, de Schwarzschild e o de Rayleigh forem satisfeitos, então o critério de Høiland-Solberg também será, para um fluido politrópico (para o qual existe uma relação $S = S(P)$). Se usarmos uma distribuição de momento angular que satisfaça ao critério de Rayleigh (4.23) então uma condição suficiente para a equação (4.21) será dada pela equação (4.25). Então, escolhendo uma distribuição de entropia que satisfaça à condição de Schwarzschild, a equação (4.21) é satisfeita.

Por outro lado, usando o fato de que $\partial_z L = 0$ para um fluido barotrópico (para o qual $P = P(\rho) \Rightarrow L = L(r)$ — ver seção (4.3.2)), a equação (4.22) pode ser escrita como

$$\frac{dP}{dz} \frac{dL^2}{dr} \frac{\partial S}{\partial z} < 0. \quad (4.28)$$

Como

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{dS}{dP} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.29)$$

a equação (4.28) será satisfeita se ambas as equações (4.23) e (4.25) valerem, e assim, o critério de Høiland-Solberg será satisfeito.

Para um fluido politrópico existe uma relação do tipo $S = S(P)$. Substituindo a equação (4.2)

$$\frac{dP}{P} = (1 + n') \frac{dT}{T} \quad (4.30)$$

na condição politrópica (4.14) temos

$$\frac{dS}{dP} = \frac{C}{(1+n')P}. \quad (4.31)$$

Basta então utilizar um índice politrópico e calor específico tais que $\frac{C}{1+n'} < 0$ e a condição de Schwarzschild (4.25) será satisfeita. Utilizando ainda uma distribuição de momento angular que satisfaça o critério de Rayleigh a condição de estabilidade de Høiland-Solberg será satisfeita.

Isso não significa que não possam existir outros tipos de instabilidade, como modos não axissimétricos ou gerados por autointeração gravitacional por exemplo. A questão da estabilidade de toros autogravitantes é uma questão complexa e não completamente resolvida (como discutido na seção 4.1.2).

Convém observar que normalmente para discos grossos

$$\frac{\partial P}{\partial z} < 0 \quad e \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{d\rho} > 0. \quad (\text{para } z > 0) \quad (4.32)$$

A equação de estado politrópica (4.4) implica que

$$\frac{dP}{d\rho} = \Gamma \frac{P}{\rho}, \quad (4.33)$$

de tal forma que a condição $dP/d\rho > 0$ é equivalente a $\Gamma > 0$. Escrevendo a condição (4.31) em termos dos outros expoentes politrópicos temos:

$$\frac{dS}{dP} = \left(\frac{\Gamma'' - 1}{\Gamma} \right) \frac{C}{P}. \quad (4.34)$$

Como em geral $C > 0$, a condição de estabilidade se reduz a $\Gamma'' \equiv 1 + \frac{1}{n''} < 1 \Leftrightarrow n'' < 0$.

4.3 Formulação Newtoniana

4.3.1 Simplificações

As equações de movimento de um fluido ideal são compostas pela equação da continuidade (3.9), equação de Euler (3.13) e equação do movimento adiabático (3.16) e foram descritas no capítulo 3. Em nosso modelo de discos grossos elas serão simplificadas pela hipótese de que o disco seja uma estrutura estacionária, em equilíbrio hidrodinâmico, e com simetria axial. Adotando um sistema de coordenadas cilíndricas (r, z, φ) com eixo z coincidente com o eixo de rotação do fluido (eixo de simetria), nenhuma quantidade física dependerá explicitamente da coordenada temporal t (devido à estacionariedade) e nem da coordenada

azimutal φ (devido à simetria axial). Dessa forma, qualquer quantidade física q será expressa por uma função apenas de r e z , $q(r, z)$.

De acordo com as condições acima, a componente φ da equação de Euler e a equação do movimento adiabático podem ser escritas como

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_r \partial_r L + u_z \partial_z L = 0 \quad (4.35)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_r \partial_r S + u_z \partial_z S = 0 \quad (4.36)$$

respectivamente, com $L = ru_\varphi$ sendo o momento angular específico e S a entropia específica. Se temos um fluido estacionário axissimétrico sem dissipação e u_r e/ou u_z não nulos, as equações acima nos dizem que as superfícies de nível de S e L coincidem (a não ser que $L = \text{const}$ ou $S = \text{const}$) e uma relação $S = S(L)$ pode ser estabelecida. Mas se $u_r = u_z = 0$, então as equações acima são automaticamente satisfeitas, e portanto as superfícies de S e L não necessariamente coincidem.

Quando o fluido é isentrópico ($S = \text{const}$ por todo o fluido) a equação (4.36) é satisfeita, e a distribuição de L é independente de S , mesmo se u_r e/ou u_z forem não nulos, mas L deve obedecer à condição (4.35). Grande parte dos modelos de discos grossos usam uma equação de estado politrópica em conjunto com a condição de isentropia.

Modelos plausíveis de discos grossos com superfícies de S e L coincidentes já foram construídos (e.g., Paczynski e Abramowicz [76]) usando uma relação do tipo $S = S(L)$. Isso pode parecer excessivamente restritivo, porém deve-se notar que discos grossos são intermediários entre discos finos e acreções esféricas e podem ter u_r e u_z não nulos com valores de α (constante de viscosidade) extremamente pequenos.

No entanto, na medida em que as velocidades não azimutais são pequenas com relação a u_φ , e essa é uma condição chave em discos grossos [77], as superfícies de S e L não necessariamente coincidem. Dessa forma, na aproximação $u_r = u_z = 0$, formas pré-estabelecidas para $S = S(r, z)$ e $L = L(r, z)$ podem ser adotadas *independentemente*, pois as superfícies de S e L não necessitam ser coincidentes. Essa é a hipótese adotada pelo modelo Polish doughnuts, pelo fato de não compreendemos completamente os mecanismos de viscosidade e condução de calor em um disco grosso. Assim esse desconhecimento das propriedades térmicas são incorporadas na escolha arbitrária das distribuições de entropia e momento angular, sendo o fluido tratado como um fluido ideal.

Assumirei então a hipótese do fluido estar em um estado de pura rotação sobre o eixo de simetria, ou seja, que o campo de velocidade tenha componentes

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = r\Omega, \quad v_z = 0, \quad (4.37)$$

onde $\Omega = \Omega(r, z)$ é a velocidade angular. Fluidos com essa forma de campo de velocidade, em conjunto com as hipóteses de estacionariedade e simetria axial, têm um fluxo

necessariamente incompressível, ou seja, fluem como se fossem incompressíveis:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0, \quad (4.38)$$

dado que a densidade não tem gradiente na direção φ . Dessa forma, a equação da continuidade (3.9) se torna

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (4.39)$$

que é automaticamente satisfeita para o campo de velocidade (4.37).

Aplicando ainda essas restrições sobre a equação de Euler (3.13) obtemos

$$-\frac{L^2}{r^3} \hat{r} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{\nabla} \Phi, \quad (4.40)$$

cujas componentes na direção φ é identicamente nula para a simetria adotada. Essa equação representa o balanço das forças (nas direções r e z) agindo em um elemento de fluido: do lado esquerdo da equação (o negativo da) força centrífuga e do lado direito a força devido ao gradiente de pressão e a força gravitacional.

4.3.2 Fluidos barotrópicos

Em um fluido com uma equação de estado geral da forma (3.8) as superfícies isobáricas (pressão constante) e isopícnicas (densidade constante) são, de um modo geral, inclinadas, e se cruzam a um determinado ângulo. Neste caso o sistema é chamado *baroclínico* (“inclinado na pressão”). No entanto, se a equação de estado tem a seguinte forma especial

$$P = P(\rho), \quad (4.41)$$

o sistema é chamado de *barotropo* ou sistema *barotrópico* (“se comportando como a pressão”). Em um sistema barotrópico as superfícies isobáricas e isopícnicas coincidem, pois $\rho = \text{const}$ implica $P = \text{const}$ na equação (4.41), e vice-versa.

Por outro lado, se as superfícies isopícnicas e isobáricas coincidem, os vetores $\vec{\nabla} \rho$ e $\vec{\nabla} P$, ortogonais às superfícies isopícnicas e isobáricas respectivamente, são colineares, ou seja, $\vec{\nabla} P = k \vec{\nabla} \rho$, para alguma constante k . Portanto, a pressão e a densidade devem ter uma relação funcional do tipo (4.41) (com $k = dP/d\rho$).

A condição para que isso aconteça, chamada de *condição barotrópica*, pode ser escrita como:

$$\vec{\nabla} \rho \times \vec{\nabla} P = 0. \quad (4.42)$$

Em resumo, essa condição diz que o *estado térmico do sistema depende somente da densidade*.

De modo geral, a estratificação de pressão e de densidade não coincidem. No entanto, há uma condição simples sobre a lei de rotação que governa a relação entre essas duas famílias de superfícies. Vejamos isso a partir da equação de equilíbrio (4.40), escrita em termos da velocidade angular $\Omega = L/r^2$:

$$\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{\nabla} \Phi = \Omega^2 \vec{r}, \quad (4.43)$$

onde $\vec{r} \equiv r\hat{r}$. Tomando o rotacional da equação acima:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \vec{\nabla} P = 2\Omega \vec{\nabla} \Omega \times \vec{r}, \quad (4.44)$$

pois $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$. Tendo em vista que $\vec{u} = r\Omega\hat{\phi}$, podemos escrever essa equação como

$$\frac{1}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \times \vec{\nabla} P = -2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) \vec{u}. \quad (4.45)$$

Assim, se $\partial \Omega / \partial z = 0$ em todos os pontos, as superfícies isobáricas e isopícnicas coincidem, e existe uma relação $P = P(\rho)$ entre a pressão e a densidade. Por outro lado, se as superfícies isobáricas e isopícnicas coincidem, então a equação (4.45) implica que $\Omega = \Omega(r)$ para rotação não nula. Portanto,

$$\Omega = \Omega(r) \quad \Leftrightarrow \quad P = P(\rho). \quad (4.46)$$

Esse resultado, chamado de teorema de *von Zeipel* (Tassoul [75]), é importante porque o fato da velocidade angular ser constante sobre cilindros simplifica consideravelmente a tarefa de encontrar a estrutura de um disco.

É importante notar que, em geral, (4.46) não é a equação de estado do fluido: se $\partial \Omega / \partial z = 0$, então existe uma relação *geométrica* da forma $P = P(\rho)$ seja qual for a equação de estado. Algumas vezes esses sistemas são chamados *pseudobarotrópicos*, para distingui-los dos barotropos verdadeiros, para os quais $P = P(\rho)$ por razões físicas independentes do estado de rotação.

Considerando a situação em que exista uma relação um-para-um entre a pressão e a densidade (um fluido que satisfaz a condição barotrópica), a relação $P = P(\rho)$ pode, em princípio, ser invertida: $\rho = \rho(P)$. Podemos então definir uma função $W = W(P)$ tal que

$$\frac{dW}{dP} = -\frac{1}{\rho(P)}. \quad (4.47)$$

Isso pode ser feito definindo W como sendo a função

$$W(P) \equiv - \int^P \frac{dP'}{\rho(P')}, \quad (4.48)$$

o que resulta na relação

$$\vec{\nabla}W = \frac{dW}{dP}\vec{\nabla}P = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P. \quad (4.49)$$

Dessa forma, a quantidade $\vec{\nabla}P/\rho$ que aparece na equação de Euler pode sempre ser substituída por $-\vec{\nabla}W$ para um fluido barotrópico.

Podemos verificar que um fluido isentrópico é barotrópico, com $-W = h$ (equação (3.23) com $dS = 0$ implica que $dh = dP/\rho$). Ou seja, a função $-W$ é a entalpia específica nesse caso. Da 1ª lei da termodinâmica (3.22) obtemos que, para um fluido isentrópico,

$$dU = \frac{P}{\rho^2}d\rho \quad \Rightarrow \quad U = U(\rho), \quad \text{com} \quad \frac{dU}{d\rho} = \frac{P}{\rho^2}. \quad (4.50)$$

Portanto

$$P = \rho^2 \frac{dU}{d\rho} = P(\rho), \quad (4.51)$$

e um fluido isentrópico é necessariamente barotrópico.

O fato de um fluido barotrópico ter velocidade angular constante sobre cilindros implica que a mesma condição vale para o momento angular $L = r^2\Omega$, ou seja, $L = L(r)$. Dessa forma podemos introduzir o chamado *potencial rotacional*

$$F(r) \equiv - \int^r \frac{L^2(r')}{r'^3} dr', \quad (4.52)$$

que é tal que

$$\vec{\nabla}F = -\frac{L^2}{r^3}\hat{r}. \quad (4.53)$$

Com isso, e com a função potencial W , a equação de Euler (4.40) se torna simplesmente

$$\vec{\nabla}F = \vec{\nabla}W - \vec{\nabla}\Phi, \quad (4.54)$$

que pode ser imediatamente integrada:

$$W(r, z) = \Phi(r, z) + F(r). \quad (4.55)$$

Um caso particular de fluido barotrópico é o caso de uma equação de estado politrópica (4.4)

$$P(\rho) = K\rho^{1+1/n}, \quad (K, n = \text{const.}),$$

que é a equação de estado que usarei nesse trabalho (conforme descrito na seção 4.2). Utilizando essa relação barotrópica para integrar a função W (4.48) obtemos

$$W(\rho) = W_s - (n+1)K\rho^{1/n}, \quad \Leftrightarrow \quad W(\rho) = W_s - \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\right)K\rho^{\Gamma-1}, \quad (4.56)$$

onde W_s é uma constante (o potencial efetivo na superfície se usada a condição de contorno $P = \rho = 0$). Em geral existe um círculo interno ao toro onde a pressão e a densidade atingem seus valores máximos. Denotando esses valores por P_0 e ρ_0 respectivamente, a constante K é então dada por $K = P_0/\rho_0^{1+1/n}$.

4.3.3 Determinação da superfície

Resumindo o que foi tratado até o momento, as equações que determinam a estrutura do nosso toro, que devem ser resolvidas em conjunto, são a equação de Euler integrada (4.55),

$$W(r, z) = \Phi(r, z) + F(r),$$

a equação de Poisson (3.18)

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi\rho,$$

e a equação de estado politrópica (4.56)

$$W(\rho) = W_s - (n+1)K\rho^{1/n}.$$

Além disso, temos as seguintes condições de contorno⁴

$$\begin{aligned} \Phi, \Psi &\rightarrow 0 \quad \text{para} \quad R \rightarrow \infty, \\ P = \rho &= 0 \quad \text{e} \quad W = W_s \quad \text{na superfície,} \end{aligned} \tag{4.57}$$

que dizem que o potencial gravitacional deve se anular no infinito espacial e que a pressão e a densidade se anulem na superfície do toro. A equação de Poisson deve ser resolvida em todo o espaço, sendo a condição de contorno sobre o potencial gravitacional aplicado no infinito espacial. Já a equação de Euler integrada é aplicada somente na região de matéria (dentro do disco), e portanto a função W tem condição de contorno sobre o disco. A constante de integração de $F(r)$ é incorporada na constante W_s .

Porém, surge aqui o problema de que a superfície do toro não é conhecida *a priori* e, portanto, não é possível (em geral) aplicar as condições de contorno acima de maneira direta. Trata-se portanto de um **problema de fronteira livre**.

De modo geral, os potenciais do disco Ψ e do objeto central Φ_o (suposto conhecido) se somam para formar o potencial gravitacional total ($\Phi = \Phi_o + \Psi$), e então o potencial gravitacional total depende da distribuição de massa dentro do disco. Contudo, no caso em que a massa do disco é relativamente pequena e que as forças gravitacionais são dominadas pela massa central ($\Phi_o \gg \Psi$), então $\Phi \approx \Phi_o$ e conhecemos o potencial gravitacional independentemente da forma e estratificação do disco. Isso nos permite encontrar a forma a equação da superfícies equipotenciais como veremos a seguir.

Introduzirei, a partir da equação de Euler, a chamada aceleração gravitacional efetiva $\vec{g}_{ef}$ como sendo a soma vetorial das acelerações gravitacional e centrífuga:

$$\vec{g}_{ef} \equiv -\vec{\nabla}\Phi + \Omega^2 \vec{r} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}P. \tag{4.58}$$

⁴Usarei em todo o texto $R \equiv \sqrt{r^2 + z^2}$ como sendo o raio esférico, que em conjunto com as coordenadas θ e φ formam sistema de coordenadas esférico (R, θ, φ) .

Portanto, a aceleração gravitacional efetiva deve ser ortogonal às superfícies de pressão constante (superfícies isobáricas). Em particular, se o fluido em consideração estiver imerso em um meio externo de pressão constante, sua superfície (livre) deve ser perpendicular a $\vec{g}_{ef}$ em cada ponto.

Esta propriedade pode ser explorada para se obter uma relação geral entre a forma da superfície (qualquer superfície isobárica) e o campo de rotação. Suponha que sabemos a equação da superfície. Dada a simetria, temos especificada a equação da seção meridional

$$z_s = z_s(r), \quad (4.59)$$

onde o subscrito s indica quantidades sobre a superfície (isobárica). Portanto, $\vec{g}_{ef} \cdot d\vec{x}_s = 0$, ou seja,

$$g_{ef,r} dr_s + g_{ef,z} dz_s = 0. \quad (4.60)$$

Usando a equação acima e a definição de aceleração gravitacional efetiva (4.58), obtemos

$$\left(\Omega^2 r\right)_s = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_s \frac{dz_s}{dr_s} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_s. \quad (4.61)$$

Sob essas condições a equação (4.61) nos permite encontrar o campo de rotação que gera a situação de equilíbrio sobre a superfície sem referência ao interior. Por outro lado, se são conhecidas as coordenadas de algum ponto sobre a superfície, então a equação (4.61) pode ser integrada para encontrar a seção reta dado um determinado um dado campo de rotação.

A equação (4.58) diz que a função $W = F + \Phi$ funciona como um *potencial efetivo* para aceleração gravitacional efetiva $\vec{g}_{ef}$:

$$\vec{g}_{ef} = -\vec{\nabla} W, \quad (4.62)$$

e a equação para as superfícies isobárica e isopícnicas se tornam simplesmente

$$W = \text{const.} \quad (4.63)$$

Portanto, em uma configuração barotrópica as superfícies de pressão, densidade e potencial efetivo constantes todas coincidem. Assim, encontrar a forma e estratificação de um disco barotrópico é reduzido a obter as superfícies equipotenciais de W . Essa tarefa é simplificada se o potencial gravitacional é conhecido *a priori*, como no caso onde Φ é devido a fontes externas. Como todas as superfícies de nível satisfazem $W = \text{constante}$, temos

$$W = \Phi(r, z) + F(r) = \text{constante}. \quad (4.64)$$

Podemos resolver (4.64) para z como função de r para obter uma expressão para a seção reta das superfícies equipotenciais para cada valor de W . Por outro lado, podemos usar (4.64) para obter o campo de rotação de equilíbrio para uma dada forma das equipotenciais

$$F(r) = W_s - \Phi(r, z_s(r)). \quad (4.65)$$

Este método pode ainda ser aplicado para discos autogravitantes se soubermos uma expressão geral para o potencial gerado por uma estratificação de densidade da forma $z_s(r)$.

No caso mais geral em que isso não é possível a equação de Poisson deve ser resolvida e temos um problema de fronteira livre. Essa é a situação que estamos tratando: dados $\Phi_o(r, z)$ e $\Omega(r)$ (ou equivalentemente $L(r)$) conhecidos *a priori*, precisamos resolver as equações para a distribuição de matéria $\rho(r, z)$ e para a superfície $z_s(r)$ desconhecida.

4.3.4 Toro com vorticidade nula

Diante do modelo descrito nas seções anteriores, os graus de liberdade que temos na determinação de uma estrutura toroidal autogravitante em equilíbrio hidrodinâmico, com simetria axial e rotação pura (sem movimento poloidal) está na escolha do potencial central $\Phi_o(r, z)$ e na escolha de uma distribuição de momento angular $L(r)$. Usarei como modelo Newtoniano do potencial gravitacional $\Phi_o(r, z)$ de um buraco negro um potencial pseudonewtoniano conforme descrito na seção 2.5. A distribuição de momento angular que escolherei será baseada em um modelo analítico que imita resultados numéricos mais realísticos, conforme descreverei na seção 4.7.

Para ilustrar as características básicas de um disco grosso descreverei aqui um modelo mais simples: um toro em equilíbrio ao redor de um objeto compacto Newtoniano de massa M muito maior que a massa do disco (i.e., desprezando-se a autointeração gravitacional do disco), com distribuição de momento angular dada por $L(r) = \text{const}$ (i.e., momento angular constante).

Essa distribuição equivale à situação em que a vorticidade do fluido é nula como veremos abaixo, e é possivelmente a distribuição de momento angular mais simples possível. De fato, o toro com vorticidade nula foi a primeira situação de equilíbrio discutida na literatura e foco dos primeiros estudos de estabilidade de discos grossos. Além disso, grande parte dos estudos iniciais de estabilidade se restringiram a toroides barotrópicos em equilíbrio em um estado de rotação pura [40, seção 10.6], com uma lei de potência simples da forma $\Omega(r) \propto r^{-q}$ (sendo o toro com momento angular constante correspondente a $q = 2$).

Um cálculo direto da vorticidade de um campo de velocidade definido pela equação (4.37) resulta em

$$\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u} = \left(2\Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \hat{z} - r \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) \hat{r}. \quad (4.66)$$

Supondo que $\Omega = \Omega(r)$ temos que $\partial\Omega/\partial z = 0$. Além disso, fazendo $\vec{\omega} = 0$ obtemos

$$\frac{d\Omega}{dr} = -\frac{2\Omega}{r} \quad \Rightarrow \quad \Omega(r) = Lr^{-2}, \quad \text{com } L = \text{const.} \quad (4.67)$$

Isso implica em uma estrutura barotrópica com momento angular $L = r^2\Omega = \text{const}$ constante por todo o fluido.

Dada que a condição barotrópica é satisfeita, existe um potencial efetivo (equações (4.52) e (4.64)):

$$W = -\frac{M}{R} + \frac{L^2}{2r^2}. \quad (4.68)$$

Nesse caso W é a energia por unidade de massa (isso é uma propriedade exclusiva do campo de rotação $L = \text{const.}$). A estratificação de densidade e pressão é obtida simplesmente fazendo $W = \text{const.}$ na equação (4.68) e resolvendo para z como função de r , com parâmetro W . Mas antes de encontrar as superfícies equipotenciais, introduziremos uma notação mais conveniente. Seja r_k o raio Kepleriano⁵ de um elemento de fluido rodando com momento angular específico L :

$$L^2 = Mr_k. \quad (4.69)$$

Podemos expressar todos os comprimentos em unidades de r_k , e reescrever (4.68) como

$$E \equiv \frac{2r_k W}{M} = \left(\frac{r_k}{r}\right)^2 - \frac{2r_k}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (4.70)$$

onde E é a energia específica do fluido em unidades da energia de ligação de uma órbita circular de raio r_k . Pode ser mostrado que essa equação atinge um valor mínimo $E = -1$ no círculo $r = r_k$, $z = 0$. Para que o fluido se mantenha ligado ao objeto central temos que ter $-1 \leq E < 0$.

Introduzindo a coordenada polar θ da definição usual $r = R \sin \theta$, obtemos

$$\sin^2 \theta = \frac{r_k^2}{ER^2 + 2r_k R}, \quad (4.71)$$

que é uma equação quadrática para R como função de θ , com parâmetro E . A figura 4.3 mostra uma seção reta de algumas superfícies equipotenciais identificadas por seu valor E . O disco resultante é toroidal, com os elementos de fluido mais fortemente ligados se movendo em um círculo equatorial de raio r_k . Esta é também a posição de maior pressão e densidade, sendo seus valores ainda arbitrários. Conforme nos afastamos desses equipotenciais limites o fluido se torna mais fracamente ligado e a pressão e a densidade diminuem.

⁵O raio Kepleriano é definido como sendo o raio em que o momento angular L se iguala ao momento angular Kepleriano L_k , que por sua vez satisfaz a equação $\frac{L_k^2}{r_k^3} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}$.

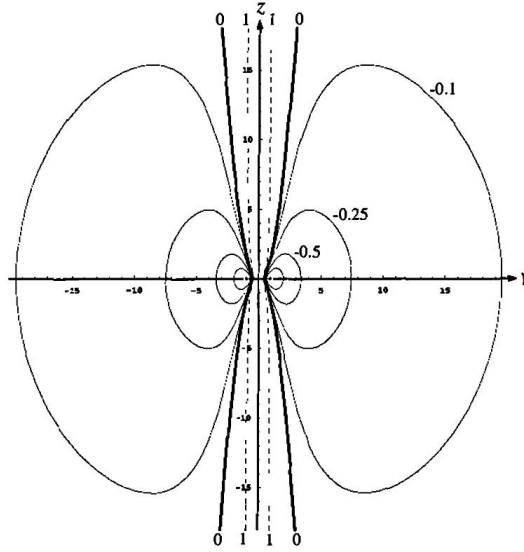


Figura 4.3: Seção reta de superfícies equipotenciais do disco toroidal com $L = \text{constante}$. Contornos são identificados pelo valor adimensional de energia E . O fluido é ligado se $E < 0$. Os pontos sobre o eixo r correspondem à máxima pressão: $r = r_k$, $z = 0$. (figura retirada de Frank *et al.* [40])

Pode-se mostrar da equação (4.71) que uma dada superfície equipotencial se estende entre os raios equatoriais interno r_{in} e externo r_{out} . Expressões para esses raios são obtidas resolvendo (4.71) com $\sin^2 \theta = 1$:

$$r_{in} = r_k \left[1 + \sqrt{1 + E} \right]^{-1}, \quad (4.72)$$

$$r_{out} = r_k \left[1 - \sqrt{1 + E} \right]^{-1}. \quad (4.73)$$

Como esperado, quando $E = -1$, $r_{in} = r_{out} = r_k$, mostrando que a superfície toroidal mais fortemente ligada degenera em um círculo equatorial de raio r_k . Quando $E \rightarrow 0$ vemos que $r_{in} \rightarrow r_k/2$ e $r_{out} \rightarrow \infty$. Dessa forma, a equipotencial limite para discos ligados é uma superfície aberta. Para $E > 0$ todas as equipotenciais são abertas (um exemplo é mostrado na figura 4.3 por linhas pontilhadas).

Uma característica importante desse disco e de outros modelos de discos grossos é a existência de um funil axial estreito. A matéria em rotação estacionária, sustentada pela pressão, pode “preencher” todas as equipotenciais até um valor negativo pequeno de E . (O valor preciso de E pode ser obtido, como em modelos de estrutura estelar, fornecendo condições de contorno apropriadas e a massa do disco.) A configuração resultante é um toro gordo distorcido com um canal axial estreito ao longo do qual há grandes gradientes de pressão-radiação. Isso pode ser visto observando-se diretamente a figura 4.3: próximo ao equador as equipotenciais estão compactadas, “espremidas”, resultando em grandes

gradientes de pressão, e portanto, grandes fluxos de radiação. Conforme nos movemos ao longo do funil, nos afastando do plano equatorial e em direção à “abertura” do funil em ambos os lados, o fluxo radiativo emitido pelas paredes diminui. Portanto, a densidade de radiação ao longo do funil é máxima perto do equador e diminui em direção à “saída”. Se, como resultado de uma pequena viscosidade ou simplesmente de um “preenchimento” excessivo de matéria o gás se acumular no funil, ele será sugado pelo objeto central ou será expelido ao longo do eixo pela pressão de radiação.

Podemos estimar a abertura do funil diferenciando a equação (4.71) com respeito a R e encontrando que o valor mínimo de θ . Isso ocorre em $R = -r_k/E$ para um dado valor (negativo) de E . Substituindo de volta em (4.71) obtemos

$$\sin^2 \theta_{min} = -E. \quad (4.74)$$

Se a superfície do disco é a equipotencial E então um cone de abertura θ_{min} com vértice na origem é contido no funil e é tangente à superfície do disco (veja figura 4.4). Portanto,

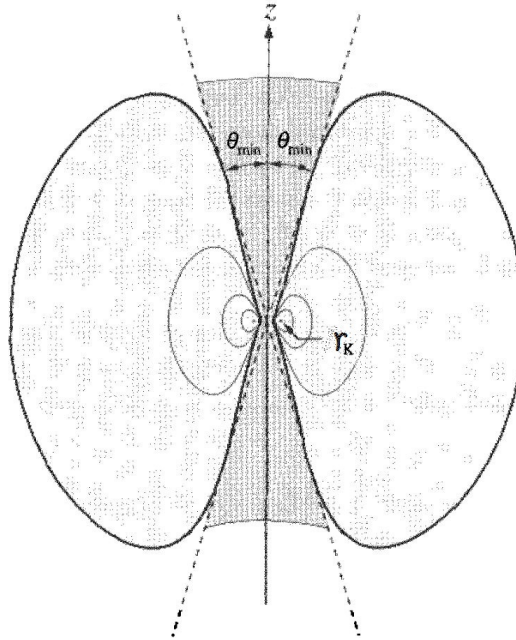


Figura 4.4: Uma visão perspectiva do funil axial de semi-abertura θ_{min} gerado por um toro com energia superficial E . (figura retirada de Frank *et al.* [40])

a colimação gerada pelo funil é da ordem de θ_{min} . Um funil estreito requer $|E|$ pequeno e consequentemente tal funil é definido por paredes em rápida rotação fracamente ligadas. Como a energia de ligação da matéria próxima à superfície do funil é relativamente baixa é fácil, em princípio, para a matéria das paredes escapar para o infinito impulsionada pela pressão de radiação. Esse é o mecanismo básico pelo qual um par de jatos colimados em direções opostas poderia ser gerado por um disco grosso.

4.4 Formulação relativística

4.4.1 Equações básicas

Apresento aqui as equações necessárias na elaboração de um modelo de disco grosso relativístico. Estou supondo uma métrica estacionária e axialmente simétrica (2.85)

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\lambda} (dr^2 + dz^2),$$

um fluido ideal, com tensor energia-momento (3.88)

$$T^{\mu\nu} = (P + \varepsilon)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu},$$

e movimento puramente circular na direção φ (2.92):

$$u^\mu = A(1, 0, 0, \Omega).$$

A equação de movimento é a equação de Euler relativística (3.117)

$$a_\mu = -h_\mu^\nu \frac{\nabla_\nu P}{P + \varepsilon}.$$

Vimos na seção (2.4.4) que as componentes t e φ da quadriaceleração são nulas, pois nenhuma função depende dessas coordenadas devido à estacionariedade e simetria axial. Com isso, o projetor espacial h_μ^ν não tem nenhum efeito, e podemos escrever essa equação como

$$a_i = -\frac{\partial_i P}{P + \varepsilon}, \quad \text{com} \quad i = r, z. \quad (4.75)$$

Usando a aceleração da equação (2.124) essa equação é escrita como

$$\frac{\partial_i P}{P + \varepsilon} = -\partial_i \mathcal{U} + \frac{\Omega \partial_i L}{1 - \Omega L}, \quad (4.76)$$

ou ainda, com a aceleração da equação (2.122), como

$$\frac{\partial_i P}{P + \varepsilon} = \partial_i \ln A - j \partial_i \Omega, \quad (4.77)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\equiv \ln(-u_t) \\ &= \ln(\gamma(e^\Phi + \omega v e^\psi)) \\ &= \ln\left(\frac{\gamma e^\Phi}{1 - \omega L}\right) \end{aligned}$$

o potencial efetivo – equações (2.125), (2.126) e (2.167),

$$A \equiv u^t = \gamma e^{-\Phi}$$

o fator redshift (2.91), e

$$j = \frac{L}{1 - \Omega L}.$$

equação (2.114).

4.4.2 Equação de Estado

Devido ao princípio de equivalência, a 1ª lei da termodinâmica no referencial comóvel do fluido é a mesma que no espaço-tempo plano, e basicamente define a conservação de *energia interna* $\epsilon = c^2 + U$ (composta da energia de repouso por unidade de massa c^2 e da *energia térmica* U – veja equação (3.76) e a discussão sobre a energia relativística na seção 3.2.4). A relação $U(S, \rho)$ (como vimos na seção (3.1.5)) pode então ser vista como a equação de estado, a ser determinada no espaço tangente a cada ponto do espaço-tempo, ou fisicamente, em uma região pequena o suficiente na qual as mudanças no campo gravitacional são desprezáveis, mas grande o bastante para conter um grande número de partículas. Em outras palavras, é suficiente determinar as propriedades da matéria na relatividade especial, desprezando efeitos da curvatura do espaço-tempo [34]. A equação de estado é a maior ligação entre a microfísica que governa o comportamento local do fluido e as quantidades globais.

A equação de estado de um fluido perfeito (4.6) se estende ao caso relativístico fazendo a identificação de U com a energia térmica. Escrevendo essa equação de estado em termos da densidade volumétrica de energia interna $\epsilon = \rho(1 + U)$ (3.75):

$$P = (\epsilon - \rho)(\gamma - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon = \rho + \frac{P}{\gamma - 1}. \quad (4.78)$$

Da mesma forma, a equação de estado politrópica (4.4) se generaliza para o caso relativístico por

$$P = K\rho^\Gamma, \quad (4.79)$$

onde ρ denota aqui a densidade *própria* de massa (ou densidade de repouso).

A definição (4.79) de uma equação de estado politrópica relativística foi introduzida por Tooper [78] para permitir um expoente politrópico Γ que coincidisse com o índice adiabático γ de um fluido perfeito relativístico *isentrópico* (da mesma maneira como vimos na seção 4.2.1). Tooper [79] havia tentado previamente usar a forma $P = K\epsilon^\Gamma$. Porém, essa forma não é consistente com a 1ª lei da termodinâmica para um fluido isentrópico

pois, escrevendo essa em termos da densidade de energia ε temos

$$dU = \frac{P}{\rho} d\rho \quad \Rightarrow \quad d\varepsilon = \frac{P + \varepsilon}{\rho} d\rho. \quad (4.80)$$

Utilizando então a definição (4.2) para o índice politrópico

$$\Gamma = \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho}, \quad (4.81)$$

chegamos a

$$d\varepsilon = \frac{P + \varepsilon}{\Gamma P} dP, \quad (4.82)$$

condição essa não satisfeita por $P = K\varepsilon^\Gamma$. Isso obviamente se deve ao fato de se usar a densidade de repouso para definir o índice politrópico. Se fosse adotada outra definição, o resultado seria diferente.

A literatura contudo não aceita universalmente uma única convenção. Em particular, duas das melhores introduções a equações de estado de objetos compactos, Shapiro e Teukolsky [20] e Glendenning [80] usam as duas definições diferentes, com Shapiro e Teukolsky adotando a escolha $P = K\rho^\Gamma$, que considero mais natural e que adoto aqui. (Convém observar, no entanto, que o uso de Glendenning da equação de estado $P = K\varepsilon^\Gamma$ é restrito aos dois casos onde as definições concordam: matéria não relativística, para a qual $\varepsilon = \rho$, e gás de Fermi ultrarelativístico, para o qual $\varepsilon = 3P$.)

4.4.3 Fluidos barotrópicos

Considere a equação de Euler relativística (4.76)

$$\frac{\partial_i P}{P + \varepsilon} = -\partial_i \mathcal{U} + \frac{\Omega \partial_i L}{1 - \Omega L},$$

Se o lado esquerdo da equação acima for um gradiente o lado direito também será. Isso significa que $P = P(\varepsilon)$ implica que $L = L(\Omega)$, e vice-versa. Portanto,

$$P = P(\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad L = L(\Omega), \quad (4.83)$$

o que pode ser visto mais claramente tomando-se o comutador $\partial_r \partial_z - \partial_z \partial_r$ da derivada segunda da equação toda:

$$\frac{\partial_r P \partial_z \varepsilon - \partial_z P \partial_r \varepsilon}{(P + \varepsilon)^2} = \frac{\partial_r \Omega \partial_z L - \partial_z \Omega \partial_r L}{(1 - \Omega L)^2}. \quad (4.84)$$

Temos com isso a condição de que as superfícies $P(r, z) = \text{const}$ coincidem com as de $\varepsilon(r, z) = \text{const}$ se e somente se as superfícies $L(r, z) = \text{const}$ coincidirem com as superfícies $\Omega(r, z) = \text{const}$. Essa é a versão relativística do teorema de *von Zeipel*, análoga à condição Newtoniana de que para um *fluido barotrópico* (que satisfaz a condição $P = P(\rho)$)

ambos o momento angular e a velocidade angular são constantes em cilindros: $L = L(r)$, $\Omega = \Omega(r) \Rightarrow L = L(\Omega)$. Observe que o que caracteriza um fluido barotrópico agora é a condição $P = P(\varepsilon)$, e que as superfícies de momento angular constante não são mais necessariamente cilindros ($L = L(r, z)$ em geral), valendo apenas a relação $L = L(\Omega)$.

Apesar do resultado acima, a extensão da definição de fluido barotrópico em hidrodinâmica relativística não é única. Geralmente assume-se a condição $\varepsilon = \varepsilon(P)$ como aqui (assumindo que a relação é inversível), mas alguns autores utilizam a definição $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ ao invés disso (e.g., Gourgoulhon [81] 2006).

De acordo a definição, um fluido perfeito (4.78) não é em geral um fluido barotrópico, apesar de poder ser em um determinado caso. Para um fluido perfeito

$$P = P(\rho, \varepsilon) = (\varepsilon - \rho)(\gamma - 1),$$

que em geral não é uma função de ε somente. Nesse caso, a condição barotrópica será satisfeita somente se $\rho = \rho(\varepsilon)$.

Uma equação de estado politrópica é uma relação do tipo $P = P(\rho)$, e também requer certos cuidados. No caso em que ela descreve um fluido com $U = 0$ (energia térmica nula), a densidade de energia $\varepsilon = \rho(1 + U)$ coincide com a densidade de massa de repouso ρ , isto é $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$, e o fluido é obviamente barotrópico, pois $P = P(\rho) = P(\varepsilon)$. Contudo, se o fluido tiver uma energia térmica específica não nula, o fluido politrópico será barotrópico somente se $U = U(\rho)$, pois isso implica que $\varepsilon = \rho(1 + U(\rho)) = \varepsilon(\rho)$. Supondo que essa relação é inversível $\rho = \rho(\varepsilon)$, e portanto $P = P(\varepsilon)$.

Observe que isso faz com que ambos um fluido perfeito e um fluido politrópico se tornem barotrópicos sob a mesma condição $U = U(\rho)$, e esse é o único caso em que um fluido perfeito é barotrópico.⁶ Além disso, vimos na seção (4.2.1) que um fluido politrópico completamente geral terá suas propriedades térmicas dependentes do índice politrópico n'' e terá necessariamente uma relação do tipo $U = U(\rho)$ (equação (4.18)), garantindo a condição barotrópica.

Como outros exemplos de fluidos *barotrópicos* temos o fluido de matéria escura, fluido de fótons, e ainda fluidos ultrarelativísticos não degenerados ou fluidos de Fermi ultrarelativísticos degenerados. Por outro lado, fluidos relativísticos degenerados ou não degenerados, um fluido não relativístico não degenerado ou qualquer fluido de Fermi degenerado que não seja ultrarelativístico *não são* barotrópicos. [73]

Assim como para fluidos barotrópicos não relativísticos, se a equação de estado é da forma $\varepsilon = \varepsilon(P)$, podemos definir uma função $W = W(P)$ tal que $\partial_i W = -\partial_i P / (P + \varepsilon)$:

$$W(P) \equiv - \int^P \frac{dP'}{P' + \varepsilon(P')}, \quad (4.85)$$

⁶Se um fluido perfeito tem $U = U(\rho)$, então $P = P(\rho, \varepsilon) = P(\rho)$, mas isso não força o fluido perfeito a ser politrópico. Qualquer dependência funcional, diferente de $P = K\rho^\Gamma$, poderia em princípio ser usada.

No caso isentrópico (ou equivalentemente, no caso de um fluido perfeito politrópico), a 1ª lei da termodinâmica (3.23), escrita em termos de h é escrita como $\partial_i h = \partial_i P / \rho$. Isso implica que⁷

$$\partial_i \ln h = \frac{\partial_i h}{h} = \frac{\partial_i P}{\rho h} = -\partial_i W, \quad (\partial_i S = 0) \quad (4.86)$$

e W se reduz $-\ln h$, que como vimos na seção 3.2.8 é igual a menos a entalpia no limite não relativístico. Portanto,

$$W(\rho) = -\ln \left[1 + \left(\frac{K\Gamma}{\Gamma-1} \right) \rho^{\Gamma-1} \right], \quad (\partial_i S = 0) \quad (4.87)$$

onde usamos a função $U(\rho)$ da equação (4.9) (fluido isentrópico/fluido perfeito politrópico).

No caso politrópico geral, podemos usar que $\varepsilon = \rho(1 + U(\rho))$ e a equação (4.20) para $U(\rho)$ para escrever a integral (4.85) como

$$W(\rho) = - \int^\rho \frac{\Gamma K \rho'^{\Gamma-1} d\rho'}{\rho' + \left(\frac{K\Gamma}{\Gamma-1} \right) \rho'^\Gamma + CK'' \rho'^{\Gamma''}}. \quad (4.88)$$

Com isso, vemos que os índices politróticos referentes às propriedades térmicas da matéria (C e Γ''), que não tinham influência dinâmica no caso Newtoniano, atuam de maneira efetiva no tratamento relativístico. Se, por outro lado, adotássemos a convenção $P = K\varepsilon^\Gamma$ para um fluido politrópico relativístico eles permaneceriam inócuos, pois essa equação de estado por si só já seria uma equação barotrópica, do tipo $P = P(\varepsilon)$.

O integrando de (4.88) acima é uma função racional e, para quaisquer valores dados das constantes politróticas, pode ser integrado por frações parciais. Em particular, se $\Gamma'' = \Gamma$ obtemos

$$W(\rho) = - \left(1 + \frac{CK''(\Gamma-1)}{K\Gamma} \right)^{-1} \ln \left[1 + \left(\frac{K\Gamma}{\Gamma-1} + CK'' \right) \rho^{\Gamma-1} \right], \quad (\Gamma'' = \Gamma). \quad (4.89)$$

Definindo então o *potencial rotacional*

$$F(L) \equiv - \int^L \frac{\Omega(L') dL'}{1 - \Omega(L')L'} \quad (4.90)$$

de tal forma que $\partial_i F = -\frac{\Omega \partial_i L}{1 - \Omega L}$, a equação de Euler (4.76) é escrita como

$$\partial_i W = \partial_i \mathcal{U} + \partial_i F, \quad (4.91)$$

⁷O denominador que aparece na definição de W pode ser escrito em termos da entropia relativística h :

$$h = 1 + U + \frac{P}{\rho} \Rightarrow \rho h = \varepsilon + P \Rightarrow \partial_i W = -\frac{\partial_i P}{\rho h}.$$

o que pode ser imediatamente integrado:

$$W(r, z) = \mathcal{U}(r, z) + F(r, z). \quad (4.92)$$

Como $j = L/(1 - \Omega L)$, equação (2.114), vemos que $L = L(\Omega) \Rightarrow j = j(\Omega)$. Então, a equação de Euler pode ser integrada também na forma (4.77):

$$W = -\ln A + \int^{\Omega} j(\Omega') d\Omega'. \quad (4.93)$$

4.4.4 Forma das superfícies equipotenciais

A construção de um toro relativístico pode ser feita no caso em que as funções métricas são conhecidas, ou seja, desprezando os efeitos de autointeração gravitacional. Nesse caso, escolhida uma forma $L(r, z)$ para a distribuição de momento angular, o potencial efetivo $\mathcal{U}(r, z)$ e o potencial rotacional $F(r, z)$ são determinados.

Por meio das equações (2.90), (2.111) e (2.114) vemos que se as funções métricas são dadas o momento angular $L(r, z)$, a velocidade $v(r, z)$, a velocidade angular $\Omega(r, z)$ e a função $j(r, z)$ são determinadas por uma dessas quantidades apenas. Escrevendo-as em termos da velocidade temos,

$$L = \frac{v}{e^{(\Phi-\psi)} + \omega v}, \quad j = \gamma^2 v e^{\psi-\Phi}, \quad \Omega = \omega + v e^{\Phi-\psi}, \quad (4.94)$$

ou ainda em termos do momento angular:

$$v = \frac{L e^{\Phi-\psi}}{1 - \omega L}, \quad j = \frac{(1 + \omega L)L}{1 - L^2(\omega^2 + e^{2(\Phi-\psi)})}, \quad \Omega = \omega + \frac{L e^{2(\Phi-\psi)}}{1 + \omega L}, \quad (4.95)$$

Pode-se então encontrar facilmente todas as superfícies equipotenciais pelo seguinte procedimento:

- i) Especificar a função $L = L(r, z)$ e então encontrar a forma explícita da função $F(r, z)$ por meio da equação (4.90), com a forma (4.95) para Ω ; (poderia-se alternativamente apenas especificar uma função $\Omega = \Omega(L)$ – ou $L = L(\Omega)$ – e integrar $F(L)$ diretamente, ou mesmo $j = j(\Omega)$, como veremos na seção 4.7, integrando $\int^{\Omega} j(\Omega') d\Omega'$.)
- ii) Calcular a forma explícita de $\mathcal{U}(r, z)$ por meio da equação (2.167) (ou alternativamente, calcular $A = A(r, z)$ por meio de (2.91));
- iii) Calcular $W = W(r, z)$ usando a equação (4.92) (ou alternativamente usando a equação (4.93)) e então, conhecendo a equação de estado, calcular $P = P(r, z)$.

Dessa forma, para um campo gravitacional fixo conhecido, as superfícies de pressão constante (equipotenciais, pois $W = W(P)$) são determinadas por

$$W(r, z) = \text{const.} \quad (4.96)$$

Portando, o problema da construção do modelo do disco está completamente resolvido, no caso considerado (desprezando-se a autointeração gravitacional).

Para um fluido não barotrópico a equação de Euler não pode ser integrada diretamente. Esse caso foi discutido por Jaroszynski *et al.* [70], que começa notando que se $z_s = z_s(r)$ é a equação da superfície isobárica $P(r, z) = \text{const}$, então obviamente

$$\frac{dz_s}{dr} = -\frac{\partial_r P}{\partial_z P}. \quad (4.97)$$

Utilizando o potencial efetivo na forma da equação (2.129)

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2} \ln \left(-g^{tt} + 2Lg^{t\varphi} - L^2g^{\varphi\varphi} \right)$$

podemos escrever a equação de movimento $a_i = (\partial_i \mathcal{U})_L$ (2.133) como

$$\frac{\partial_i P}{P + e} = \frac{1}{2} \frac{\partial_i g^{tt} - 2L\partial_i g^{t\varphi} + L^2\partial_i g^{\varphi\varphi}}{g^{tt} - 2Lg^{t\varphi} + L^2g^{\varphi\varphi}} = -(\partial_i \mathcal{U})_L. \quad (4.98)$$

Pode-se então escrever a equação de movimento (4.98) duas vezes, uma para $i = r$ e outra para $i = z$, e dividir as duas equações, resultando em

$$\frac{\partial_r P}{\partial_z P} = \frac{\partial_r g^{tt} - 2L\partial_r g^{t\varphi} + L^2\partial_r g^{\varphi\varphi}}{\partial_z g^{tt} - 2L\partial_z g^{t\varphi} + L^2\partial_z g^{\varphi\varphi}} \equiv -\mathcal{F}(r, z). \quad (4.99)$$

O fato importante aqui é que novamente se a métrica $g^{\mu\nu}$ é conhecida explicitamente em termos de r e z , e assumindo-se ou calculando-se a distribuição de momento angular $L(r, z)$, o lado direito dessa equação é uma função explícita de r e z , denotada por $\mathcal{F}(r, z)$. Combina-se então as equações (4.97) com (4.99) na forma de uma equação diferencial ordinária,

$$\frac{dz_s}{dr} = \mathcal{F}(r, z), \quad (4.100)$$

com o lado direito explicitamente conhecido. Isso pode ser integrado diretamente para se obter todas as possíveis posições das superfícies isobáricas.

4.4.5 Toro com momento angular constante

De forma a ilustrar o modelo, apresento o caso simples de distribuição de momento angular constante,

$$L(r, z) = L_0 = \text{const}, \quad (4.101)$$

na métrica de Schwarzschild (2.1)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{R'}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{R'}\right)^{-1} dR'^2 + R'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

desenvolvido por Abramowicz *et al.* [8] e Kozłowski *et al.* [9].

A forma original da métrica de Schwarzschild envolve coordenadas anisotrópicas. A métrica de um espaço estacionário axialmente simétrico geral na forma (2.85) está escrita em coordenadas isotrópicas (ver seção C.4). Então, para escrever as funções métricas Φ , ψ , ω e λ para o espaço de Schwarzschild é preciso escrever a métrica de Schwarzschild acima em coordenadas isotrópicas, o que foi feito por Eddington [82, p. 93] (para $R > 2M$):

$$ds^2 = - \left(\frac{2R - M}{2R + M}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^4 (dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2), \quad (4.102)$$

onde utiliza-se ao invés de R' uma nova coordenada radial R que é tal que $R^2 = r^2 + z^2$. Elas são relacionadas por

$$R' = R \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^2, \quad R = \frac{R' - M}{2} + \sqrt{\frac{R'}{4}(R' - 2M)}. \quad (4.103)$$

Comparando-se a métrica acima com as formas gerais (2.83) e (2.85) temos as seguintes funções métricas:

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= \ln \left(\frac{2R - M}{2R + M}\right), & \omega(r, z) &= 0, \\ \lambda(r, z) &= 2 \ln \left(1 + \frac{M}{2R}\right), & \psi(r, z) &= 2 \ln \left(r + \frac{Mr}{2R}\right), \\ \zeta(r, z) &= \ln \left(1 - \frac{M^2}{4R^2}\right), & B(r, z) &= 1 - \frac{M^2}{4R^2}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Para momento angular constante temos que $F(L) = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} W(r, z) &= \mathcal{U}(r, z) \\ &= \Phi(r, z) + \ln \gamma(r, z) \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left[\left(1 + \frac{M}{2R}\right)^2 \left(\frac{2R}{2R - M} - \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^2 r^2 L^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.105)$$

pelas equações (4.92), (2.167) e (4.95) para W , $\mathcal{U}$ e v respectivamente.

A figura 4.5 mostra as superfícies equipotenciais $W = \text{const}$ com $L_0 = 3,77M$ para a métrica de Schwarzschild. As superfícies equipotenciais $W(r, z) = \text{const} < 0$ são superfícies fechadas enquanto que as superfícies $W(r, z) = \text{const} > 0$ são abertas. A matéria

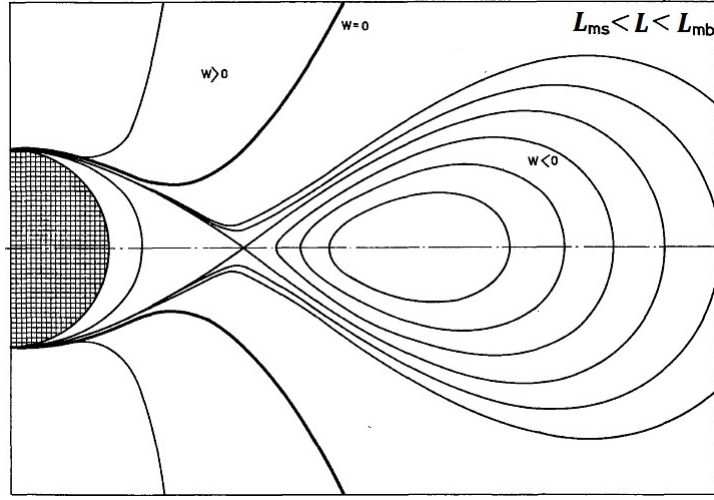


Figura 4.5: Superfícies equipotenciais de um disco com $L_0 = 3,77M$ orbitando um buraco negro de Schwarzschild. Esta é a seção meridional do disco. A topologia das superfícies equipotenciais é a mesma no caso correspondente da métrica de Kerr. (figura retirada de Abramowicz *et al.* [8])

pode preencher qualquer superfície fechada, formando um toróide. Perceba que uma dessas superfícies tem uma *cúspide* no plano equatorial. Kozłowski *et al.* [9] mostraram que tipicamente a cúspide existe para qualquer distribuição estável de momento angular.

As posições do centro do disco e da cúspide podem ser encontradas observando que nesses pontos $\vec{\nabla}W = 0$. Isso significa que $\vec{\nabla}P = 0$, e o fluido se move livremente pois não há forças de gradiente de pressão. Ou seja, nesses pontos temos um movimento Kepleriano:

$$L_0 = L_K(r), \quad z = 0. \quad (4.106)$$

Temos ainda que, como o gradiente da pressão é nulo, a pressão no centro do disco é máxima.

A existência da cúspide é típica para qualquer distribuição estável de momento angular simplesmente porque a distribuição será estável se L aumenta com o raio. Dessa forma, uma distribuição de momento angular “geral” pode cruzar a distribuição Kepleriana tipicamente em dois pontos, exatamente como no caso $L = \text{const}$ (ver figura 4.6).

Podemos entender melhor a natureza dessa solução com momento angular constante examinando o comportamento do potencial W no plano equatorial. A figura 4.7 mostra, para a métrica de Kerr, esse comportamento que qualitativamente não depende do parâmetro a da métrica. O valor mínimo de W corresponde ao centro do disco (isto é, pontos em que a pressão é máxima) e o valor máximo corresponde à cúspide.

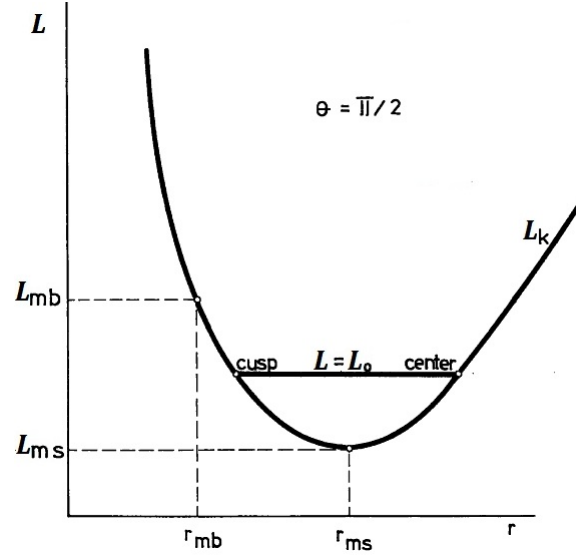


Figura 4.6: Momento angular Kepleriano $L_K(r)$ para a métrica de Kerr e a localização do centro do disco e da cúspide. r_{mb} e r_{ms} são os raios e $L_{mb} \equiv L_K(r_{mb})$ e $L_{ms} \equiv L_K(r_{ms})$ os momentos angulares Keplerianos das órbitas circulares marginalmente ligada e marginalmente estável respectivamente. (figura retirada de Abramowicz *et al.* [8])

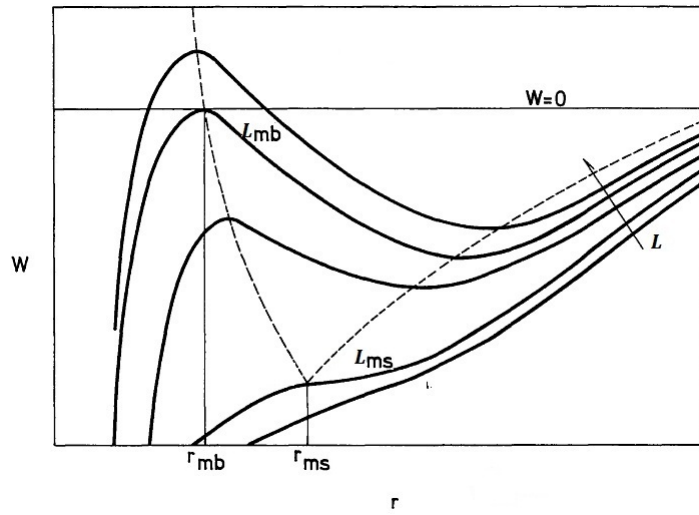


Figura 4.7: Comportamento do potencial W no plano equatorial, com $L = L_0 = \text{const}$, para vários valores de L_0 . A linha tracejada mostra a posição de mínimo (centro do disco) e de máximo (cúspide) de W ao longo dos valores de L_0 . (figura retirada de Kozłowski *et al.* [9])

A configuração de disco é possível (ou seja, existe o centro) somente quando

$$L \geq L_{ms} \quad (4.107)$$

Para o valor crítico $L = L_{ms}$ o centro e a cúspide estão no mesmo ponto r_{ms} . É evidente que r_{ms} é o valor mínimo de r para o centro e o valor máximo de r para a cúspide. O valor mínimo de r para a cúspide (e portanto o valor mínimo também para a margem interna do disco) é atingido quando a cúspide é localizada na superfície equipotencial marginalmente aberta $W = 0$. Tal situação é possível quando $L = L_{mb}$. Dessa forma, as

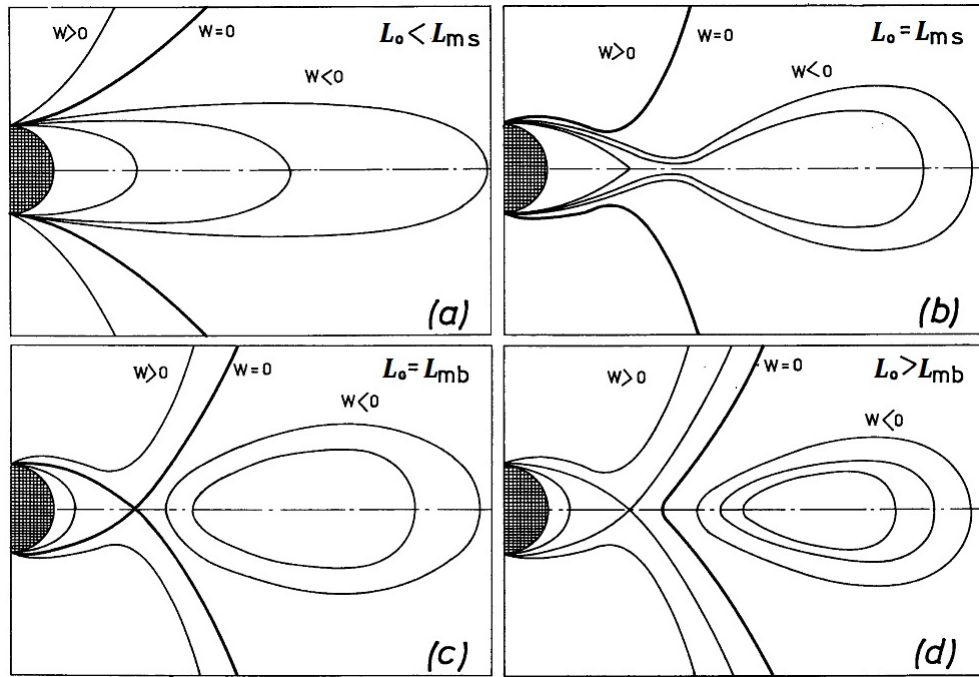


Figura 4.8: Topologia das superfícies equipotenciais. (figura retirada de Abramowicz *et al.* [8])

cinco possibilidades topológicas dos modelos de disco grossos são as seguintes:

- I) $L_0 < L_{ms}$; Não são possíveis estruturas de disco (figura 4.8a).
- II) $L_0 = L_{ms}$; O disco existe como um anel instável infinitamente fino, localizado no círculo $r = r_{ms}$ (figura 4.8b).
- III) $L_{ms} < L_0 < L_{mb}$; Muitos discos sem cúspide são possíveis, e um disco com cúspide (figura 4.5).
- IV) $L_0 = L_{mb}$; O cúspide está localizado sobre a superfície equipotencial marginalmente fechada ($W = 0$) (figura 4.8c).

V) $L_0 > L_{mb}$; O disco não tem cúspide (figura 4.8d).

É fácil ver das figuras 4.6 e 4.7 que a cúspide tem que estar localizada entre a órbita circular marginalmente ligada de uma partícula livre orbitando o buraco negro (r_{mb}) a órbita circular marginalmente estável (r_{ms}). O mesmo é válido para a margem interna do disco:

$$r_{mb} \leq r_{in} \leq r_{ms}. \quad (4.108)$$

Kozłowski *et al.* [9] dá uma prova formal da condição $r_{in} \geq r_{mb}$ para uma distribuição de momento angular estável e contínua. Para essa prova, notemos primeiro que, pelas nossas convenções

$$\Omega > 0, \quad A = u^t = \frac{dt}{ds} > 0, \quad u_t = u_\alpha \xi^\alpha < 0. \quad (4.109)$$

Portanto, a equação (2.131) nos mostra que

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial L} \right)_{r,z} = \frac{\Omega}{1 - \Omega L} = -\Omega u^t u_t = \Omega A u_t > 0. \quad (4.110)$$

Além disso, a equação (4.92) nos mostra que

$$W_{in} = \mathcal{U}_{in} + \int_{L_{in}}^{L_\infty} \frac{\Omega dL}{1 - \Omega L}. \quad (4.111)$$

pois $W, \mathcal{U} \rightarrow 0$ no infinito ($u_t = g_{tt}u^t + g_{t\varphi}u^\varphi \rightarrow -u^t \rightarrow -1$). Dessa forma, a integral na equação acima é negativa, e portanto

$$W_{in} > \mathcal{U}_{in}. \quad (4.112)$$

A condição $L_{in} \geq L_k(r_{in})$ é necessária para o equilíbrio (ver figura 4.6). Dessa condição, e do fato da derivada de $\mathcal{U}$ com respeito a L ser positiva, equação (4.110), temos que $\mathcal{U}_{in} \geq \mathcal{U}_k(r_{in})$, e portanto

$$W_{in} > \mathcal{U}_k(r_{in}). \quad (4.113)$$

A condição para a superfície W_{in} ser fechada é $0 \geq W_{in}$, então

$$0 \geq W_{in}, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_k(r_{in}) \leq 0. \quad (4.114)$$

Conforme vimos na seção (2.4.5) uma órbita Kepleriana de raio r será ligada se $\mathcal{U}_k(r) < 0$ e não ligada se $\mathcal{U}_k(r) > 0$. O raio r_{mb} da órbita marginalmente ligada é definido por $\mathcal{U}_k(r_{mb}) = 0$, de tal forma que uma órbita Kepleriana será ligada se $r > r_{mb}$. Portanto, chegamos à conclusão de que

$$r_{in} \geq r_{mb}, \quad (4.115)$$

mostrando que não é possível qualquer superfície fechada $W = \text{const}$ na região $r < r_{mb}$.

4.4.6 Equações de campo para toros autogravitantes

Como visto, o modelo de disco grosso e o problema de se encontrar suas superfícies equipotenciais é bem posto e pode ser resolvido de maneira simples quando é possível desprezar efeitos de autointeração gravitacional do disco. Nesse caso, dada a métrica, a equação de estado politrópica e a distribuição de momento angular, todas as propriedades do disco podem ser obtidas. O próximo passo agora é considerar um tratamento relativístico completo, levando em conta todos os efeitos gravitacionais do disco.

De modo geral, efeitos relativísticos em configurações de fluidos em rotação podem ser considerados basicamente de quatro diferentes maneiras: i) Efeitos de rotação e efeitos relativísticos são levados em conta como uma perturbação de uma configuração Newtoniana estática; ii) Efeitos relativísticos são levados em conta como uma correção de primeira ordem na gravitação Newtoniana, mas sem limitação no momento angular; iii) Velocidades angulares pequenas, quando a rotação é considerada como uma perturbação de uma configuração completamente relativística que não está em rotação; iv) Abordagens numéricas, quando praticamente não existem limitações na magnitude da velocidade angular e em efeitos relativísticos. Adoto aqui a abordagem iv), com um tratamento numérico das equações.

Para problemas em que o campo gravitacional do fluido pode ser desprezado as equações básicas são somente a equação da conservação de matéria (3.61)

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) = 0$$

e a equação (3.113)

$$\nabla_\nu T^\nu{}_\mu = 0,$$

O tensor métrico determina o campo gravitacional criado pela fonte e nesse caso não é influenciado pelo fluido, ou seja, é pré-estabelecido e não muda. Quando o campo de alguma outra matéria ou energia deve ser levada em conta (buraco negro central por exemplo) esses problemas diferem daqueles em relatividade especial no fato de que o espaço-tempo muda do espaço de Minkowski para um cujo tensor métrico é $g_{\mu\nu}$. Os coeficientes nas equações diferenciais satisfeitas pelas variáveis do fluido são em muitos casos mais complicadas que aqueles que ocorrem na relatividade especial.

No caso em que o fluido pode ser considerado como um fluido ideal, $T_{\mu\nu}$ é dado pela equação (3.89)

$$T_{\mu\nu} = \rho h u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}.$$

e as equações (3.61) e (3.113) valem em regiões onde as variáveis do fluido são contínuas e tem derivadas contínuas.

Para problemas em que o campo gravitacional do fluido é relevante o tensor métrico é determinado pelas equações de Einstein⁸

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (4.116)$$

onde $R \equiv R^\mu{}_\mu$ é o *escalar de curvatura* e $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ o *tensor de Ricci*, calculado a partir do *tensor de Riemann*:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\beta}. \quad (4.117)$$

As equações de Einstein formam um conjunto de 10 equações diferenciais parciais não lineares de segunda ordem para $g_{\mu\nu}$. Ao se “resolver” essas equações juntamente com a equação (3.61), precisamos determinar as dez componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, as três componentes independentes da quadrivelocidade u^μ e as duas funções termodinâmicas escalares, digamos P e ρ . A função escalar $\varepsilon(\rho, P)$ é a equação de estado, que é dada quando a natureza do fluido é conhecida. É necessário então resolver as dez equações (4.116) quando nem o lado esquerdo, nem o lado direito são dados. Uma abordagem para se resolver esse problema seria resolver a equação de conservação (3.61) em *coordenadas comoveis* e assim reduzir as variáveis independentes para $g_{\mu\nu}$ somente.

Um outro método consiste em escolher coeficientes $g_{\mu\nu}$ apropriados e então calcular $T_{\mu\nu}$. Como o tensor de curvatura deve satisfazer as identidades de Bianchi, as equações de conservação (3.113) são uma consequência das equações de Einstein (4.116), que podem ser consideradas como uma integral das equações (3.113). Esse fato pode ser usado para determinar as variáveis do fluido quando a métrica é conhecida de outras considerações. Pode-se utilizar a liberdade na escolha do sistema de coordenadas em um problema autogravitante para se resolver as equações de conservação para as variáveis do fluido em termos das variáveis da métrica e então reduzir o número de variáveis independentes do problema. As equações de Einstein que permanecem a serem resolvidas são equações não lineares para os coeficientes métricos $g_{\mu\nu}$.

Em geral as equações resultantes são muito complicadas e um tratamento numérico é feito. A abordagem que adoto aqui é direta: assumo uma forma para a métrica, a forma geral para um espaço-tempo estacionário com simetria axial (2.83), e escrevo as equações de Einstein (4.116), para as quais ambos os lados são desconhecidos – funções métricas e variáveis do fluido. Essas equações podem então ser resolvidas por um método numérico autoconsistente, em que as equações são resolvidas iterativamente até que uma situação de equilíbrio seja obtido (até que as equações sejam resolvidas com a precisão desejada). Descrevo com maiores detalhes o método numérico no capítulo 8.

O tratamento numérico é baseado na projeção das equações de campo (4.116) sobre a tetrada LNRF do observador com momento angular nulo. Ao invés de descrever as

⁸Para um texto básico em relatividade geral contendo as equações apresentadas aqui ver Schutz [83].

quantidades físicas por suas componentes coordenadas em cada ponto, elas são descritas por suas projeções na tetrada ortonormal, que são as componentes medidas fisicamente no sistema de referência do observador local. A vantagem em se descrever processos físicos por esse observador é que nesse sistema eles são mais simples. Em um sistema de referência como o de Boyer-Lindquist a física não é simples porque i) o *arrasto de referenciais inerciais* se torna tão intenso que o vetor base $\vec{\partial}_t$ da coordenada t se torna tipo-espaço em determinadas regiões do espaço-tempo, e ii) como a métrica não é diagonal, subir e descer índices tipicamente introduz complexidade algébrica.

A simplicidade do referencial localmente sem rotação é transparecido na simplicidade matemática das componentes do tensor de Riemann e do tensor de Ricci medidas por esse observador quando expresso em termos das funções métricas na equação (2.85). Em particular, a componente

$$R_{(t)(r)(z)(\varphi)} = \frac{1}{2} e^{\psi - \Phi - 2\lambda} (\partial_r \omega \partial_z (\psi - \Phi) - \partial_z \omega \partial_r (\psi - \Phi)) \quad (4.118)$$

é um invariante sob transformações de Lorentz na direção φ . Denotando $\vec{\nabla} \equiv \hat{r}\partial_r + \hat{z}\partial_z$ como o operador gradiente no espaço Euclidiano tridimensional⁹ usual e $\tilde{v} = -\omega e^{\psi - \Phi}$ a velocidade do sistema estacionário ($\varphi = \text{const} \Leftrightarrow \Omega = 0$) com relação ao sistema LNRF, então

$$R_{(t)(r)(z)(\varphi)} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \omega \times \vec{\nabla} \tilde{v})_{(\varphi)}. \quad (4.119)$$

Isso é, portanto, uma medida invariante da “rotação” do espaço-tempo devido ao arrasto de referenciais inerciais [84].

As equações de Einstein (4.116) podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi (T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} T/2), \quad (4.120)$$

e $R = -8\pi T$, com $T \equiv T^\mu{}_\mu$. Como visto no apêndice B.3, para se obter as componentes físicas¹⁰ dos tensores, basta contraí-los com os elementos $e^\mu_{(a)}$ da tetrada ortonormal:

$$R_{(a)(b)} = R_{\mu\nu} e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)}; \quad T_{(a)(b)} = T_{\mu\nu} e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)}; \quad \eta_{(a)(b)} = g_{\mu\nu} e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)}. \quad (4.121)$$

Portanto, a forma em tetradas das equações de Einstein é simplesmente

$$R_{(a)(b)} = 8\pi (T_{(a)(b)} - \eta_{(a)(b)} T/2). \quad (4.122)$$

⁹Dada a simetria adotada nenhuma quantidade física q depende das coordenadas t e φ , e portanto, $q = q(r, z)$. Dessa forma, as equações diferenciais podem ser escritas de tal forma que $(\partial_i q)$ (com $i = r, z$) $\Leftrightarrow \vec{\nabla} q = (\partial_r q) \hat{r} + (\partial_z q) \hat{z}$.

¹⁰Para subir e descer índices usamos a métrica de Minkowski $\eta_{(a)(b)} = \eta^{(a)(b)} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

A tetrada do LNRF foi obtida no apêndice D, e é dada pelas equações D.67:

$$\begin{aligned} e_{(t)}^\mu &= e^{-\Phi} (1, 0, 0, \omega), \\ e_{(r)}^\mu &= e^{-\lambda} (0, 1, 0, 0), \\ e_{(z)}^\mu &= e^{-\lambda} (0, 0, 1, 0), \\ e_{(\varphi)}^\mu &= e^{-\psi} (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Na seção 3.2.6 calculei as componentes em tetradas do tensor energia-momento de um fluido ideal utilizado a base ortonormal acima – equações (3.95):

$$\begin{aligned} T_{(t)(t)} &= \gamma^2 (v^2 P + \varepsilon), & T_{(t)(\varphi)} &= -\gamma^2 v (P + \varepsilon), \\ T_{(\varphi)(\varphi)} &= \gamma^2 (P + v^2 \varepsilon), & T_{(r)(r)} &= T_{(z)(z)} = P, \\ T &= T^{(a)}_{(a)} = -\varepsilon + 3P. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Calculando as componentes do tensor de Ricci $R_{(a)(b)} = R^{(c)}_{(a)(c)(b)}$ e inserindo-as nas equações (4.122) juntamente com as componentes do tensor energia momento acima, obtemos equações diferenciais para as quatro funções métricas ω , Φ , λ e B :

$$\begin{aligned} R_{(t)(t)} &= e^{-2\lambda} \left(B^{-1} \vec{\nabla} \cdot (B \vec{\nabla} \Phi) - \frac{r^2 B^2}{2} e^{-4\Phi} \vec{\nabla} \omega \cdot \vec{\nabla} \omega \right) \\ &= 8\pi \left(\frac{(P + \varepsilon)}{2} \frac{1 + v^2}{1 - v^2} + P \right), \end{aligned} \quad (4.124)$$

$$R_{(t)(\varphi)} = \frac{1}{2} r^{-1} B^{-2} e^{2(\Phi - \lambda)} \vec{\nabla} \cdot (r^2 B^3 e^{-4\Phi} \vec{\nabla} \omega) = -8\pi \gamma^2 v (P + \varepsilon). \quad (4.125)$$

A equação para $\Phi(r, z)$ (4.124) é a própria equação de Raychaudhuri para a linha de mundo do ZAMO. Usando o quadrivetor aceleração do ZAMO $a_{0i} = \partial_i \Phi$ (equação (2.170) com $v = v_0 = 0$), e o quadrado do cisalhamento (D.21) das linhas de mundo do ZAMO

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2} \sigma_{0\mu\nu} \sigma_0^{\mu\nu} = \frac{1}{4} e^{2(\psi - \Phi)} e^{-2\lambda} \vec{\nabla} \omega \cdot \vec{\nabla} \omega, \quad (4.126)$$

a equação (4.124) pode ser escrita como

$$\nabla_\mu a_0^\mu = 2\sigma_0^2 + R_{(t)(t)}. \quad (4.127)$$

Em configurações altamente relativísticas e com rápida rotação o cisalhamento das linhas de mundo do ZAMO podem predominar sobre os termos de matéria como uma fonte para o potencial gravitacional relativístico Φ [85].

A função métrica $\omega(r, z)$ é determinada pela equação (4.125). Sua origem é o momento angular da matéria, pois um campo gravitacional axialmente simétrico não carrega

momento angular próprio. Isto pode ser visto da equação (4.125): o momento angular por unidade de volume em coordenadas é [85]

$$T^t_{\mu}\zeta^{\mu}(-g)^{1/2} = -16\pi\gamma v(P + \varepsilon)rB^2e^{2(-\Phi+\lambda)}. \quad (4.128)$$

A função métrica $B(r, z)$ é obtida das equações de Einstein $R^{(t)}_{(t)} + R^{(\varphi)}_{(\varphi)}$:

$$-R^{(t)}_{(t)} - R^{(\varphi)}_{(\varphi)} = r^{-1}B^{-1}e^{-2\lambda}\vec{\nabla} \cdot (r\vec{\nabla}B) = 16\pi P. \quad (4.129)$$

Como esta equação é linear em B , é relativamente fácil de resolvê-la. Em particular, se a pressão é efetivamente nula sobre um espaço inteiro com topologia Euclidiana, a solução para B é determinada de maneira única por $B = \text{const.}$

A função métrica restante $\lambda(r, z)$ aparece somente multiplicando termos de matéria em (4.124), (4.125) e (4.129), de tal forma que se desacopla de ω , Φ e B no vácuo. Uma vez que as funções ω , Φ e B são conhecidas, λ pode ser encontrada por quadratura por qualquer combinação das equações de Einstein $R_{(r)(z)}$ e $R_{(r)(r)} - R_{(z)(z)}$. Definindo a função métrica $\zeta = \Phi + \lambda$ — equação (2.84) — a equação de Einstein $R_{(r)(r)} - R_{(z)(z)}$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} (R_{(r)(r)} - R_{(z)(z)})e^{2\lambda} &= r^{-1}\partial_r\zeta + B^{-1}(\partial_rB\partial_r\zeta - \partial_zB\partial_z\zeta) \\ &\quad - \frac{1}{2}r^{-2}B^{-1}\partial_r(r^2\partial_rB) + \frac{1}{2}B^{-1}\partial_{zz}B - (\partial_r\Phi)^2 \\ &\quad + (\partial_z\Phi)^2 + \frac{1}{4}r^2B^2e^{-4\Phi}((\partial_r\omega)^2 - (\partial_z\omega)^2) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.130)$$

e a equação de Einstein $R_{(r)(z)}$ como

$$\begin{aligned} R_{(r)(z)}e^{2\lambda} &= r^{-1}\partial_z\zeta + B^{-1}(\partial_rB\partial_z\zeta + \partial_zB\partial_r\zeta) \\ &\quad - r^{-1}B^{-1}\partial_r(r\partial_zB) - 2\partial_r\Phi\partial_z\Phi \\ &\quad + \frac{1}{2}r^2B^2e^{-4\Phi}\partial_r\omega\partial_z\omega \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Cada uma dessas equações é uma equação diferencial parcial de primeira ordem para ζ (e portanto para λ); sua consistência é garantida pelas identidades de Bianchi. Os termos de matéria não entram nessas equações pela hipótese de um tensor de energia momento de um fluido ideal.

As componentes não nulas restantes das equações do campo gravitacional produzem mais duas equações elípticas e mais uma equação diferencial parcial de primeira ordem, que são consistentes com as quatro equações acima [85].

Os operadores operadores diferenciais vetoriais $\vec{\nabla}$ e $\vec{\nabla} \cdot$ que aparecem nas equações elípticas são o gradiente e o divergente no espaço *Euclidiano* tridimensional, em que r , z e φ são coordenadas cilíndricas. Se esse significado for mantido, as equações (4.124), (4.125) e (4.129) mantém a mesma forma para quaisquer coordenadas x^1 e x^2 cobrindo o plano perpendicular aos vetores de Killing, com r uma função conhecida de x^1 e x^2 . As equações (4.130) e (4.131) não tem uma forma invariante, mas sua nova forma pode ser obtida da maneira com que as novas coordenadas estão relacionadas com r e z de uma maneira direta.

Butterworth e Ipsen [86] usaram coordenadas esféricas (R, θ, φ) usuais (tais que $r = R \sin \theta$ e $z = R \cos \theta$) para manipular as equações (4.130) e (4.131) de forma a obter uma equação para $\partial_\Theta \zeta$:

$$\begin{aligned}
\partial_\Theta \zeta = & \left((1 - \Theta^2)(1 + rB^{-1}\partial_r B)^2 + (\Theta - (1 - \Theta^2)B^{-1}\partial_\Theta B)^2 \right)^{-1} \\
& \times \left\{ \frac{1}{2}B^{-1} \left(r^2 \partial_{rr}^2 B - \partial_\Theta \left((1 - \Theta^2) \partial_\Theta B \right) - 2\Theta \partial_\Theta B \right) \left(-\Theta + (1 - \Theta^2)B^{-1}\partial_\Theta B \right) \right. \\
& + rB^{-1}\partial_r B \left(\frac{1}{2}\Theta + \Theta rB^{-1}\partial_r B + \frac{1}{2}(1 - \Theta^2)B^{-1}\partial_\Theta B \right) \\
& + \frac{3}{2}B^{-1}\partial_\Theta B \left(-\Theta^2 + \Theta(1 - \Theta^2)B^{-1}\partial_\Theta B \right) - (1 - \Theta^2)rB^{-1}\partial_{\Theta r}^2 (1 + rB^{-1}\partial_r B) \\
& - \Theta r^2(\partial_r \Phi)^2 - 2(1 - \Theta^2)r\partial_\Theta \Phi \partial_r \Phi + \Theta(1 - \Theta^2)(\partial_\Theta \Phi)^2 \\
& - 2(1 - \Theta^2)r^2B^{-1}\partial_r B \partial_\Theta \Phi \partial_r \Phi + (1 - \Theta^2)B^{-1}\partial_\Theta B \left(r^2(\partial_r \Phi)^2 - (1 - \Theta^2)(\partial_\Theta \Phi)^2 \right) \\
& + (1 - \Theta^2)B^2 e^{-4\Phi} \left[\frac{1}{4}\Theta r^4(\partial_r \omega)^2 + \frac{1}{2}(1 - \Theta^2)r^3\partial_\Theta \omega \partial_r \omega \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4}\Theta(1 - \lambda^2)r^2(\partial_\Theta \omega)^2 + \frac{1}{2}(1 - \Theta^2)r^4B^{-1}\partial_r B \partial_\Theta \omega \partial_r \omega \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4}(1 - \Theta^2)r^2B^{-1}\partial_\Theta B \left(r^2(\partial_r \omega)^2 - (1 - \Theta^2)(\partial_\Theta \omega)^2 \right) \right] \}, \quad (4.132)
\end{aligned}$$

(onde $\Theta \equiv \cos \theta$), que pode ser integrada diretamente. Há também uma equação para $\partial_R \zeta$, mas ela não introduz nenhuma informação nova.

O que faço, no entanto, é definir as quantidades

$$\Xi_o \equiv \varrho \left[(\partial_r \Phi)^2 - (\partial_z \Phi)^2 \right] + \frac{1}{2} [\partial_{rr} \varrho - \partial_{zz} \varrho] - \frac{\varrho^3 e^{-4\Phi}}{4} \left[(\partial_r \omega)^2 - (\partial_z \omega)^2 \right] \quad (4.133)$$

$$\Xi_x \equiv 2\varrho \partial_r \Phi \partial_z \Phi + \partial_{rz} \varrho - \frac{1}{2} \varrho^3 e^{-4\Phi} \partial_r \omega \partial_z \omega \quad (4.134)$$

(onde introduzo ainda a função métrica $\varrho \equiv e^{\Phi+\psi} = rB$ para simplificar as equações) de forma que as as equações (4.130) e (4.131) podem ser escritas como

$$\Xi_o = \partial_r \varrho \partial_r \zeta - \partial_z \varrho \partial_z \zeta \quad (4.135)$$

$$\Xi_x = \partial_z \varrho \partial_r \zeta + \partial_r \varrho \partial_z \zeta. \quad (4.136)$$

Dessa forma, podemos escrever equações para $\partial_r \zeta$ e $\partial_z \zeta$ como:

$$\partial_r \zeta = \frac{1}{|\vec{\nabla} \varrho|^2} (\partial_r \varrho \Xi_o + \partial_z \varrho \Xi_x), \quad (4.137)$$

$$\partial_z \zeta = \frac{1}{|\vec{\nabla} \varrho|^2} (\partial_r \varrho \Xi_x - \partial_z \varrho \Xi_o). \quad (4.138)$$

A função métrica $\zeta(r, z)$ pode então ser obtida a partir de uma integral de linha¹¹

$$\zeta(r, z) = \int (\partial_r \zeta dr + \partial_z \zeta dz) = \int \vec{\nabla} \zeta \cdot d\vec{\ell} \quad (4.139)$$

dada uma condição de contorno, se as outras funções métricas são conhecidas.

As equações (4.124), (4.125), (4.129) e (4.137-4.138) determinam as quatro funções métricas $\Phi(r, z)$, $\omega(r, z)$, $B(r, z)$ e $\zeta(r, z)$ a partir da distribuição de matéria. As três primeiras são determinadas por equações elípticas, enquanto que ζ por equações diferenciais parciais de primeira ordem (ou pela integral de linha (4.139)) envolvendo somente funções métricas.

Por outro lado, a distribuição de matéria é determinada através das duas equações não triviais de equilíbrio hidrostático $\nabla_\mu T_i^\mu = 0$, com $(i = r, z)$, que vem a ser as duas componentes não triviais da equação de Euler relativística (4.76). Esta, por sua vez, pode ser integrada e escrita como (4.92)

$$W(r, z) = \mathcal{U}(r, z) + F(r, z).$$

As equações (4.124) e (4.125), (4.129), (4.139) e (4.92), mais a equação de estado $\varepsilon = \varepsilon(\rho, S)$, formam um conjunto completo de equações. No entanto, para resolvê-las são necessárias condições de contorno. A equação (4.92) foi integrada utilizando a condição de que $P = 0$ na superfície da configuração de matéria. Já para as equações de Einstein devemos impor condições sobre o eixo de simetria, no infinito assintoticamente plano e ainda, quando há a presença de um buraco negro, condições sobre o horizonte de eventos. As condições usuais de continuidade sobre os potenciais gravitacionais devem ainda ser satisfeitas [87].

No limite da coordenada radial esférica $R \rightarrow \infty$, a condição de que o espaço seja assintoticamente plano implica que (ver apêndice C.5)

$$\Phi, \omega, \zeta \rightarrow 0, \quad \text{e} \quad B \rightarrow 1. \quad (R \rightarrow \infty) \quad (4.140)$$

Exigindo que um único sistema de coordenadas cubra, de forma suave, toda a hipersuperfície tipo-espaço $t = \text{const}$, existe uma única solução para $B(r, z)$ correspondente a

¹¹Usando $d\vec{\ell} \equiv dr \hat{r} + dz \hat{z}$.

uma dada configuração de matéria. Fora do disco é possível fazer $B = 1$ por uma transformação de coordenadas, mas dessa forma as coordenadas exteriores não se juntam de maneira suave às coordenadas interiores, a não ser que $B = 1$ no interior seja consistente com a equação (4.129).

Sobre os eixos de simetria Φ , ω e B devem ser regulares com gradientes normais aos eixos nulos. As equações (4.137-4.138) garantem então que o mesmo vale para a função ζ (ou para λ). A constante de integração em ζ é fixada pela exigência de que o espaço-tempo seja localmente plano no eixo, isto é, que o raio linear de um círculo ao redor do eixo de simetria, $\delta r e^\lambda$, deve ser igual ao raio circunferencial, $B e^{-\Phi} \delta r$. Então, sobre o eixo temos que

$$e^\zeta = B, \quad (r = 0) \quad (4.141)$$

o que determina a constante de integração em (4.139) para ζ .

As condições de contorno restantes são as condições sobre as funções Φ , ω e B no limite interno do intervalo em R . Se é o caso de não haver um buraco negro, se aplicam as condições usuais de regularidade na origem ($R = 0$) de um sistema de coordenadas esférico.

No caso de um buraco negro estar presente, as condições devem estar fundadas sobre as propriedades gerais de horizontes de eventos estacionários e axialmente simétricos, assim com discutido por Hawking [88] e Carter [89]. Sem perda de generalidade, o lugar geométrico do horizonte pode ser feito uma esfera de raio constante [89]. O valor da coordenada radial no horizonte,

$$R = R_H \quad (4.142)$$

é um parâmetro livre do buraco negro. Dessa forma é removida a ambiguidade na escolha das coordenadas associada com transformações que deixam inalterada a forma do elemento de linha (2.83). Quando não há um buraco negro, a mera regularidade de B é suficiente para essa determinação, pois $R = 0$ é um ponto singular da equação para B .

O coeficiente métrico $e^{2\Phi}$ é zero no horizonte (hipersuperfície nula gerada por dois vetores de Killing). Os coeficientes métricos $e^{2\psi}/\sin^2\theta$ e $R^2 e^{2\lambda}$ devem ser funções regulares positivas de $\cos\theta$ no horizonte, para que a intersecção do horizonte com uma hipersuperfície tipo-espaço tenha uma geometria regular [85]. Com isso concluímos que

$$R^2 B^2 = e^{2(\Phi+\psi)}/\sin^2\theta = 0 \quad (4.143)$$

no horizonte, ou seja, $B = 0$ (para horizontes não degenerados).

Carter [89] mostrou que certas quantidades são necessariamente constantes sobre o horizonte. Uma delas é a velocidade angular do buraco negro,

$$\omega_H \equiv \omega|_{R=R_H}. \quad (4.144)$$

Outra delas é a quantidade κ , que é a aceleração gravitacional (redimensionada) do ZAMO no horizonte. Usando $a_{0i} = \partial_i \Phi$ e $a_0^i = e^{-2\lambda} a_{0i}$ (equações (2.170) com $v = v_0 = 0$ e (2.98) respectivamente) a aceleração real sentida pelo ZAMO é

$$(a_\mu a^\mu)^{1/2} = e^{-\lambda} \left((\partial_r \Phi)^2 + (\partial_z \Phi)^2 \right)^{1/2}. \quad (4.145)$$

A aceleração física é dada por unidade de tempo próprio do ZAMO. Quando ela é redimensionada por um fator e^Φ para ser dada por unidade de tempo da coordenada temporal (tempo próprio no infinito), seu limite no horizonte é

$$\kappa_H \equiv e^{-\lambda} \left(\partial_R e^\Phi \right) \Big|_{R=R_H}, \quad (4.146)$$

que é uma constante, independente de θ .

O buraco negro tem dois parâmetros livres que o determinam, que devem ser especificados juntamente com a distribuição de matéria ao redor do buraco negro. Os valores desses dois parâmetros podem ser considerados como parte das condições de contorno sobre o horizonte. É conveniente usar R_H como um desses parâmetros. O outro parâmetro poderia ser ω_H ou κ_H . Bardeen [85] argumenta que pode ser conveniente ainda usar a área superficial do buraco negro.

Resumindo, as condições de contorno no horizonte de eventos para as equações (4.124), (4.125) e (4.129) são:

$$e^\Phi = 0, \quad \omega = \omega_H, \quad B = 0. \quad (R = R_H) \quad (4.147)$$

As condições de regularidade seguem naturalmente da solução das equações com essas condições de contorno.

Em termos da massa M e do momento angular por unidade de massa a da métrica de Kerr, os parâmetros do horizonte de um buraco negro de Kerr são [85]

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{1}{2} \left(M^2 - a^2 \right)^{1/2}, \\ \omega_H &= \frac{a}{2M(M + (M^2 - a^2)^{1/2})}, \\ \kappa_H &= \frac{(M^2 - a^2)^{1/2}}{2M(M + (M^2 - a^2)^{1/2})}. \end{aligned} \quad (4.148)$$

4.5 Soluções analíticas

4.5.1 Introdução

Nas seções (4.3.4) e (4.4.5) apresentei modelos *analíticos* de toros, descritos por fluidos em equilíbrio hidrodinâmico com uma distribuição de momento angular simples (constante),

no âmbito das teorias Newtoniana e relativística respectivamente. Esses modelos analíticos só são possíveis de serem obtidos de maneira simples na hipótese da autointeração gravitacional do disco ser desprezável. Ao se levar em conta os efeitos gravitacionais, o problema se torna um problema de **fronteira livre**, pois existem condições de contorno a serem aplicadas na superfície do disco, que é desconhecida, e que deve ser obtida em conjunto com sua estrutura interna.

O estudo de figuras de equilíbrio de corpos fluidos em rotação sob influência de seu campo gravitacional é relevante para se entender a forma e a estrutura de estrelas e planetas. Desde o início do desenvolvimento da gravitação de Newton se têm procurado soluções de fluidos autogravitantes em equilíbrio hidrodinâmico (em geral com topologia esférica), e grandes nomes da ciência se dedicaram à procura de tais soluções, dentre eles Newton, Maclaurin, Jacobi, Liouville, Dirichlet, Dedekind, Riemann, Poincaré, F.W. Dyson, Kowalewskaja, H. Cartan, Linchtenstein e Chandrasekhar.

A procura por estruturas toroidais é mais recente, e se deve à descoberta de que tais sistemas podem estar presentes em alguns cenários astrofísicos. Hoje em dia acredita-se que sistemas compreendendo discos grossos ou toros de acreção relativísticos ao redor de buraco negros são comuns no universo (ver comentário na introdução 1.3 e referências).

Mesmo na gravitação Newtoniana o problema é difícil, e soluções analíticas são escassas. Em geral um tratamento numérico é necessário. Apesar do grande esforço, ainda não foi possível explorar o espectro completo de soluções Newtonianas – sem contar as relativísticas – mesmo restringindo-se ao caso de simetria axial e estacionariedade. Contudo, já existe um estudo do espectro de soluções relativísticas para de fluido homogêneo em rotação uniforme (ver Ansorg *et al.* [90]).

Para um texto detalhado de figuras relativísticas de equilíbrio ver Meinel *et al.* [91] e Friedman e Stergioulas [92]. Uma referência básica para caso Newtoniano é Chandrasekhar [93].

4.5.2 Soluções Newtonianas

Soluções analíticas são possíveis quando se têm um bom chute da forma da superfície. As soluções analíticas existentes se utilizam desse fato, como a solução para rotação nula (simetria esférica), para o limite de um disco fino, ou ainda para os esferoides de Maclaurin (elipsoides de rotação).

Foi demonstrado Jardetzky [94] que a esfera é a única solução do problema de equilíbrio hidrostático para um fluido em repouso no espaço tridimensional. No entanto, o problema complica enormemente se a esfera está rodando rigidamente ou de forma diferencial, e/ou se é perturbada magneticamente ou por forças de maré. Mesmo para o caso mais simples de um fluido homogêneo com rotação uniforme essas soluções não são fáceis de serem

encontradas (Zharkov e Trubitsyn [95, p.222]).

No caso de um disco fino o problema se torna um problema de valor de contorno e se simplifica enormemente, bastando apenas resolver a equação de Laplace com as condições de contorno dadas. Para cada função descontínua no plano do disco e que tenha o Laplaciano nulo, temos uma distribuição de densidade sobre o plano satisfazendo as equações dadas. Algumas dessas soluções podem ser encontradas em Binney e Tremaine [96] (1987).

Em 1742 MacLaurin [97] mostrou que para um fluido homogêneo com rotação uniforme (velocidade angular constante) lenta (abaixo de um valor crítico), há duas soluções com superfícies esferoidais, uma quase esférica e outra muito achatada, e que acima de uma determinada rotação crítica Ω_{max} , não há figuras de equilíbrio esferoidais. Ele encontrou a seguinte relação entre a excentricidade ϵ do elipsoide de revolução e a velocidade angular Ω :

$$\frac{\Omega^2}{\pi\rho} = \frac{2}{\epsilon^2} \sqrt{1 - \epsilon^2} \arcsin \epsilon - \frac{6}{\epsilon^2} (1 - \epsilon^2). \quad (4.149)$$

Conforme a rotação é diminuída a solução achatada se aproxima de um disco de diâmetro

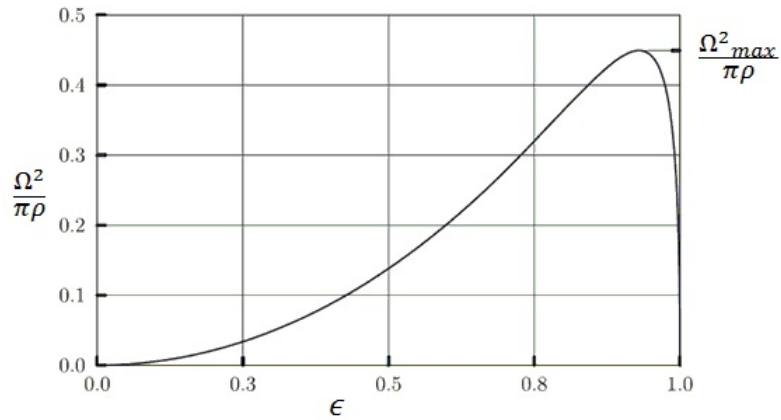


Figura 4.9: Velocidade angular dos elipsoides de Maclaurin em função de sua excentricidade.

infinito, enquanto a outra, de uma solução esférica (ver figura 4.9).

Por quase um século se pensou que os esferoides de Maclaurin fossem as únicas configurações de equilíbrio possíveis para corpos fluídos homogêneos em rotação uniforme. Porém, em 1834 Jacobi [98] provou que também há soluções elipsoidais com três eixos diferentes (não axissimétricas) para rotações lentas, chamados de elipsoides de Jacobi, e que para determinada rotação, ela coincide com os esferoides de Maclaurin. Em 1860 Riemann [99] mostrou que os elipsoides de Jacobi são uma classe especial de uma família muito mais ampla de configurações elipsoidais de equilíbrio, chamadas de elipsoides

de Riemann. Em 1885 Poincaré [100] mostrou que os elipsoides de Jacobi são de fato as configurações preferidas de fluidos em rotação por possuírem a mais baixa energia de rotação por massa e momento angular fixos. Poincaré encontrou que, no limite de um anel (razão $\frac{r_i}{r_e}$ entre raio interno e raio externo tendendo a 1) existe uma solução com velocidade angular

$$\frac{\Omega^2}{\pi\rho} \rightarrow \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r_i}{r_e}\right)^2 \ln \frac{16}{1 - \frac{r_i}{r_e}} \quad \text{para} \quad \frac{r_i}{r_e} \rightarrow 1. \quad (4.150)$$

Dyson [101] obteve então uma expansão de quarta ordem desses anéis homogêneos com simetria axial e rotação uniforme (com seção circular). Em 1971 Bardeen [102] fez a conjectura, que foi mostrada posteriormente por Eriguchi e Sugimoto [103] (1981), de que os anéis de Dyson são conectados parametricamente aos esferoides de Maclaurin.

Para valores altos o suficientes de Ω sabemos que um fluido não pode estar em equilíbrio (força centrífuga grande o suficiente para vencer a atração gravitacional e a pressão). Ao valor limite dá-se o nome de *limite de perda de massa*, que ocorre quando a superfície do fluido gira com a mesma velocidade angular de uma partícula teste nesse ponto (velocidade angular Kepleriana). A forma geométrica correspondente do fluido possui uma *cúspide* nesse ponto.

4.5.3 Soluções relativísticas (casos limite)

Algumas poucas soluções da formulação relativística se baseiam no fato de que o problema se simplifica enormemente em certos casos limites:

1. no limite Newtoniano, onde se tem um potencial gravitacional satisfazendo a equação de Poisson: o limite Newtoniano é atingido quando são satisfeitas as seguintes condições: i) A métrica difere muito pouco da métrica de Minkowski; ii) a velocidade de rotação é muito baixa comparada à velocidade da luz; iii) e a pressão é pequena comparada à densidade de massa-energia. Nesse caso temos as soluções encontradas no cálculo Newtoniano como soluções limites para a formulação relativística.
2. o limite estático (sem rotação), em que se têm simetria esférica e o sistema de equações diferenciais parciais se torna um sistema de equações diferenciais ordinárias: a solução global das equações de Einstein descrevendo um fluido perfeito esférico de densidade de massa-energia constante foi encontrada por Schwarzschild (1916), que é dada pelas chamadas soluções interna e externa de Schwarzschild.
3. o limite de disco fino, onde um problema de valor de contorno para as equações no vácuo pode ser formulado: a formulação relativística de um disco infinitamente fino

em rotação uniforme conduz à um problema de valor de contorno para a equação de Ernst, que pode ser resolvido pelo chamado “método inverso”. Uma solução aproximada desse problema foi encontrada por Bardeen e Wagoner [104] 1971, resolvendo numericamente a expansão post-Newtoniana até altas ordens. A solução exata foi encontrada em 1995 por Neugebauer e Meinel [105], que confirmaram muitas das previsões feitas no trabalho anterior. A ideia está em se descrever o limite de disco fino do fluido como um problema de valor de contorno das equações de vácuo de Einstein com condições de contorno derivadas das equações de campo de dentro do fluido, que degenera para um disco circular.

4. existe ainda o limite ultrarelativístico, quando o corpo degenera para um buraco negro: Meinel [106] (2006) mostrou que uma condição necessária e suficiente para a existência de uma transição paramétrica contínua entre um fluido estacionário para um buraco negro é que $M - 2\Omega J \rightarrow 0$, onde M , J e Ω são a massa e momento angular do buraco negro, e velocidade de rotação do fluido, respectivamente. Uma consequência direta disso é que tal limite sempre leva a um buraco negro de Kerr com rotação máxima ($J = M^2$), e Ω se torna a velocidade angular do horizonte de eventos.

4.6 Soluções numéricas

Ao longo de muitos anos, e depois do trabalho de muitos, o estudo numérico de figuras de equilíbrio se fez de maneira muito extensa, mas pode-se dizer que o quadro qualitativo geral foi desenhado por Eriguchi e Hachisu nos anos oitenta, em conjunto com o trabalho de outros. Na seção 5.1 apresento a evolução dos métodos numéricos utilizado nesses trabalhos.

O quadro qualitativo geral obtido é o seguinte: ao se mover ao longo da sequência de Maclaurin de fluidos elipsoidais homogêneos, axissimétricos, com rotação uniforme e massa e densidade fixas, começando com uma configuração sem rotação e prosseguindo em direção ao aumento do momento angular, encontra-se primeiro o ponto de ramificação de Jacobi, onde os elipsoides se tornam instáveis com relação à primeira perturbação não axissimétrica (veja, por exemplo, Chandrasekhar [93]). A sequência de Jacobi bifurcando nesse ponto conduz a outras ramificações, em particular para a sequência em “forma de pera” (veja Eriguchi, Hachisu e Sugimoto [107] 1982b). Seguindo pelo ramo de Maclaurin chega-se aos pontos de bifurcação das sequências não axissimétricas (veja figura 4.10) em forma de “triângulo”, “quadrado” e “amonite” (Chandrasekhar [93], Eriguchi e Hachisu [108] 1982a), antes de se chegar a primeira sequência axissimétrica bifurcando a uma excentricidade $\epsilon_1 = 0,98523$ (Chandrasekhar [109], Bardeen [102]). Como conjecturado

por Bardeen [102] (1971), e confirmado por Eriguchi e Sugimoto [103] 1981, as estruturas nessa sequência se apertam gradualmente no centro até que eventualmente formam as configurações em forma de anel estudadas por Dyson.

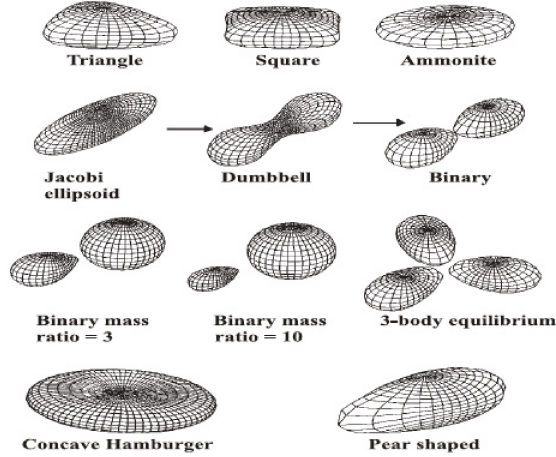


Figura 4.10: Algumas formas de figuras de equilíbrio sem simetria axial. Algumas figuras bifurcam de pontos de instabilidade da sequência de Maclaurin (axissimétrica), onde há uma quebra espontânea de simetria (veja figura 4.11). (figura retirada de Horedt [71])

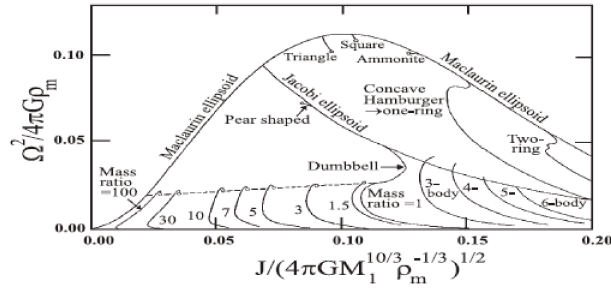


Figura 4.11: Diagrama do momento angular adimensional versus velocidade angular adimensional para configurações hidrodinâmicas com densidade constante. Os círculos pequenos no final das curvas denotam o término de sequências de estados de equilíbrio devido à perda de massa pela superfície, ou – no caso de binárias com massas diferentes – devido ao fluxo de massa de uma para a outra. O término de sequências binárias é localizado na linha tracejada. (figura retirada de Horedt [71])

Uma outra conjectura, ainda não confirmada, de Bardeen 1971 diz respeito à uma sequência axissimétrica de configurações com “bojo central”, também bifurcando em ε_1 . Ansorg *et al.* [110] de fato encontraram essa sequência, que deve ser considerada uma continuação da sequência dos anéis de Dyson além dos elipsoides de Maclaurin e que termina em um limite de perda de massa (o outro extremo da sequência segue até anéis

arbitrariamente finos – com razão entre o raio interno e externo próxima de 1). Contudo, a forma das superfícies dos corpos fluidos correspondentes não geram uma região com “bojo central”, tendo na verdade uma aparência mais como uma “forma de lente”.

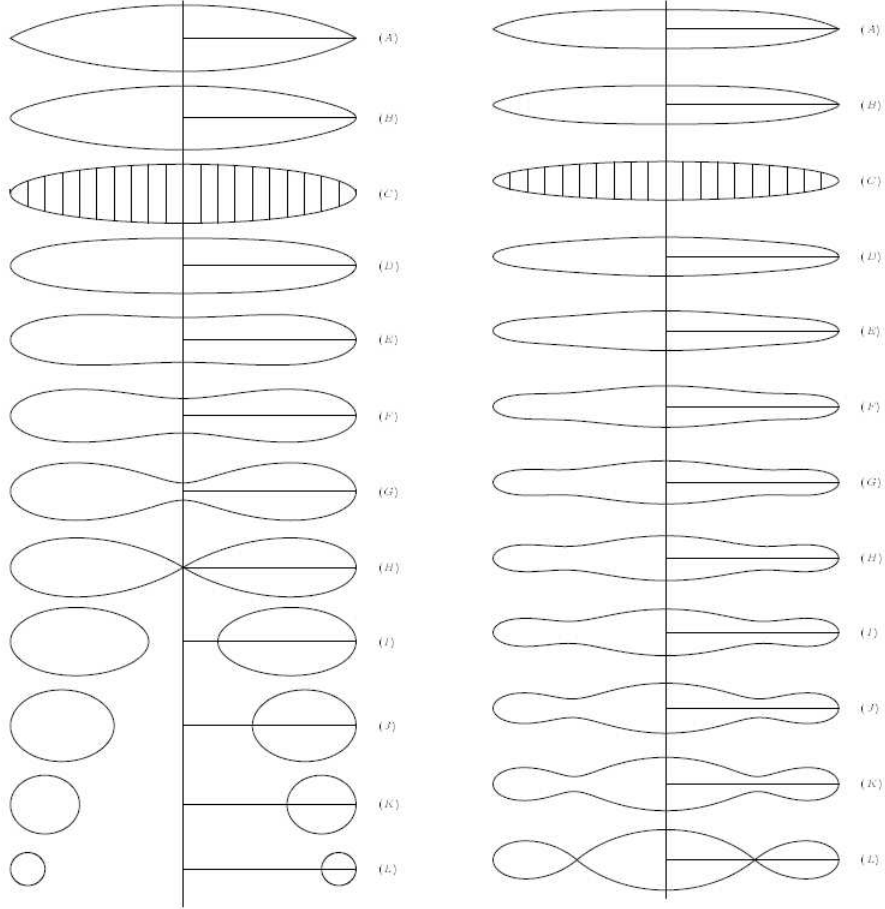


Figura 4.12: Seção transversal de configurações pertencendo à sequência ϵ_1 (coluna da esquerda) e à sequência ϵ_2 (coluna da direita). As figuras hachuradas correspondem às configurações de Maclaurin. (figura retirada de Ansorg *et al.* [110])

A próxima sequência axissimétrica bifurcando da sequência de Maclaurin, o primeiro ramo “núcleo-anel”, ocorre em $\epsilon_2 = 0,99375$. Da mesma forma, há uma sequência bifurcando em $\epsilon_3 = 0,99657$, tendo em um de seus extremos um limite de perda de massa, e segue além da sequência de Maclaurin terminando na formação de um sistema de “dois anéis” (ver figura 4.12).

O mesmo quadro qualitativo se repete ao seguir para pontos de bifurcação axissimétricos mais altos em $\epsilon_4 = 0,99784$, $\epsilon_5 = 0,99851$ etc., os quais há um número infinito,

acumulando em $\epsilon = 1$ [102]. Iniciando no limite de perda de massa, as sequências seguem em direção à sequência de Maclaurin e além, levando eventualmente à formação de um sistema “núcleo-anel” e “dois anéis”. Continuando o processo além da formação de um sistema de dois corpos, o sulco externo deve também se cortar, gerando eventualmente um sistema “multi-corpos”, consistindo de um núcleo e anéis ou somente anéis.

Dado o que foi descrito acima, percebe-se que o espaço completo de soluções é muito rico e contém um número infinitamente grande de sequências Newtonianas que ramificam da sequência de Maclaurin (observe grande parte do espaço de soluções na figura 4.11). Ao considerar essas configurações no âmbito da relatividade geral pode-se imaginar a total complexidade do espaço de soluções nesse caso. Ansorg *et al.* [111] estenderam o estudo de anéis de Dyson para esse caso da gravitação relativística. Ao se afastar de configurações Newtonianas, observaram efeitos relativísticos típicos como a formação de ergosfera e a transição para um buraco negro de Kerr extremo (rotação máxima).

Em 2004 Ansorg *et al.* [90] fizeram um estudo completo do espaço de soluções para um fluido homogêneo em rotação uniforme no âmbito da relatividade geral. Suas considerações numéricas não excluem a possibilidade da existência de soluções desconhecidas, porém eles sugerem que as classes apresentadas cobrem todo o espaço de soluções (veja figuras 4.13 e 4.14).

Eles descobriram que o espaço de soluções consiste de um número infinitamente grande de classes de soluções disjuntas. Dentro dessas classes (que são subconjuntos bidimensionais do espaço de soluções), seções específicas das sequências Newtonianas acima formam curvas limites particulares. Uma consequência dessa estrutura de classes é que qualquer sequência contínua de soluções relativísticas começando em um corpo esférico e estático e seguindo pela *classe esferoidal* associada, não é conectada ao regime de configurações com forma toroidal. Ao invés disso, tais sequências eventualmente levam a um limite de perda de massa ou um limite de pressão central infinita. Tomando as soluções dos anéis de Dyson no regime relativístico encontra-se a chamada *classe toroidal*, que é disjunta com respeito a classe esferoidal. Em contraste com a classe esferoidal, ela possui sequências contínuas de soluções relativísticas que levam a toros finos.

Anéis com outras equações de estado foram ainda estudados por Fischer *et al.* [112] (equações de estado politrópica e gás de Fermi completamente degenerado) e Labranche *et al.* [113] (matéria estranha: fluido formado por quarks *up*, *down* e *strange*).

Os trabalhos acima descritos foram desenvolvidos para fluidos com rotação rígida (uniforme). Ansorg *et al.* [114] fizeram então um estudo das mudanças sofridas pelo espaço de soluções devido ao perfil de rotação. O perfil de rotação utilizado é o mais amplamente aplicado em relatividade geral, que foi introduzido por Komatsu *et al.* [115] 1989 (equação (4.151), que apresento na seção a seguir), e que permite ir de rotação rígida até perfis de rotação com altos gradientes a partir de um parâmetro $\mathcal{A}$. Eles descobriram

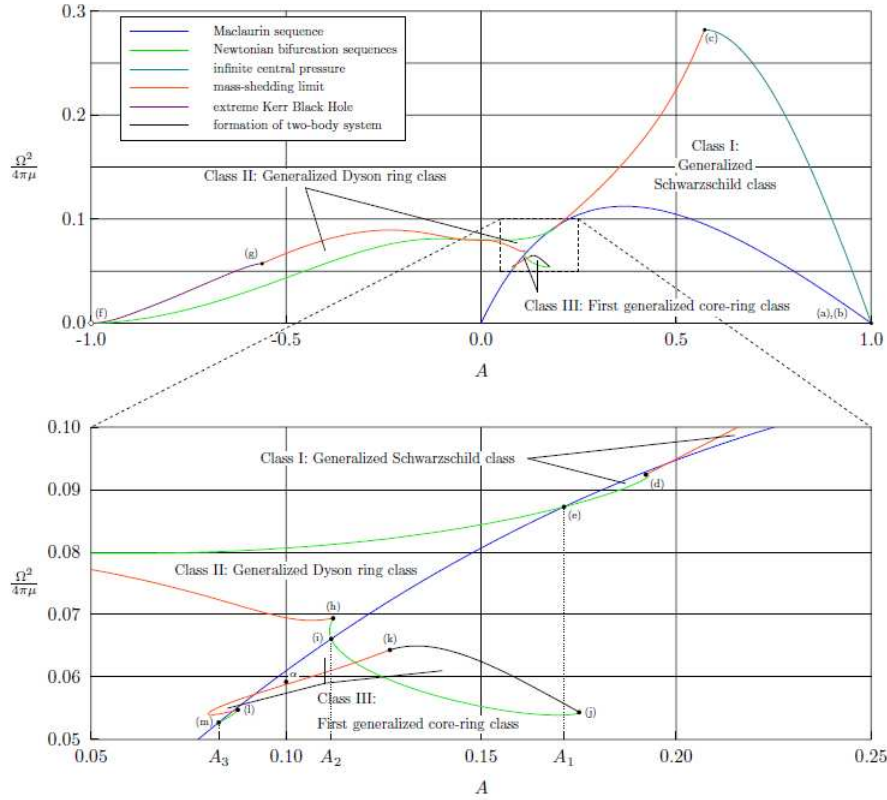


Figura 4.13: O quadrado da velocidade angular normalizada versus a razão $A = r_1/r_2$ dos raios para curvas limites das três primeiras classes; $r_1 =$ raio polar; $r_2 =$ raio equatorial para o caso esférico (com $\epsilon = \sqrt{1 - A^2}$) e $r_1 =$ raio interno; $r_2 =$ raio externo para o caso toroidal. (figura retirada de Ansorg *et al.* [90])

que aparecem alguns valores críticos de $\mathcal{A}$ em que ocorre a fusão de classes típicas. Esse resultado mostra que a introdução de diversas classes *disjuntas*, inicialmente assumidas para caracterizar o espaço de soluções correspondendo a *rotação uniforme*, somente tem sentido para rotação diferencial suficientemente pequena. Além disso, esses valores críticos dependem sensivelmente da equação de estado.

Todos os trabalhos acima citados contemplam fluidos em equilíbrio hidrodinâmica sob a ação somente de seu próprio campo gravitacional. Ao se inserir o campo gravitacional de um objeto central (em geral um objeto compacto como um buraco negro ou estrela de nêutrons) o cenário é muito menos claro, e os trabalhos se voltaram principalmente ao estudo da estabilidade e da possibilidade de existência de tais objetos do que de outras propriedades de soluções de equilíbrio.

Bodo e Curir [116] obtiveram numericamente discos grossos autogravitantes em equilíbrio hidrodinâmico ao redor de um objeto central (buraco negro, usando um potencial

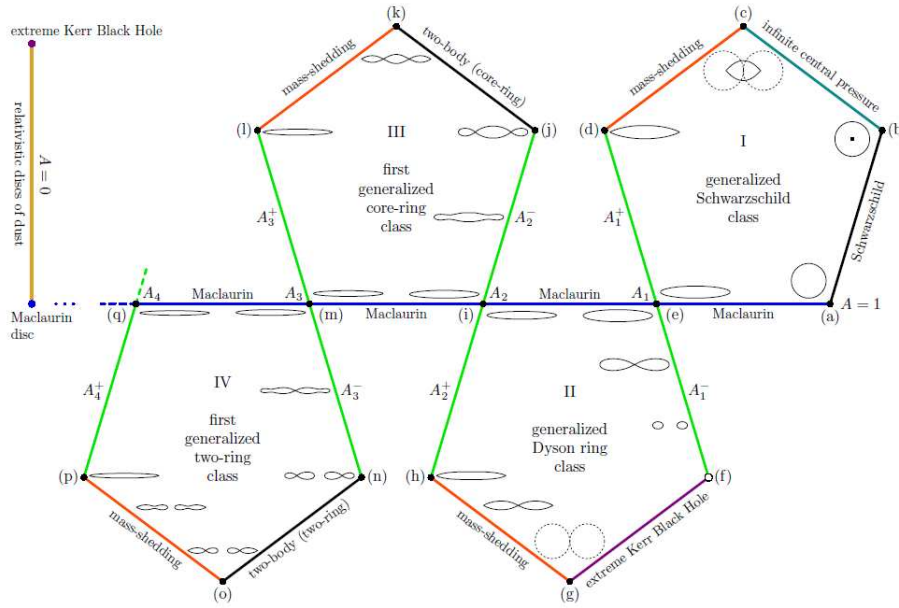


Figura 4.14: Uma representação esquemática das classes e seus contornos. Um esquema da seção transversal da superfície é dada para configurações no ponto de intersecção de duas sequências – exceto para o ponto (f). Além disso, várias superfícies são mostradas para ajudas a ilustrar a transição entre cada intersecção e a seguinte. Sempre que ergosferas aparecem, elas são representadas por linhas tracejadas. (figura retirada de Ansorg *et al.* [90])

pseudonewtoniano) no âmbito da gravitação Newtoniana, e analisaram a influência da autointeração gravitacional nas propriedades globais do disco. Consideraram o disco como sendo um fluido politrópico geral, resolvendo a equação de Poisson e a equação de equilíbrio hidrostático separadamente e iterativamente, até que a convergência fosse obtida.

Nishida e Eriguchi [11] resolveram numericamente, pela primeira vez em relatividade geral, o problema de um toro com rotação diferencial (não uniforme) ao redor de um buraco negro, usando uma formulação integral das equações de Einstein. Eles consideraram o toro como sendo um fluido politrópico perfeito e uma prescrição de um único parâmetro para a lei de rotação (equação (4.152), conforme discutiremos na seção 4.7). Os métodos usados (há cerca de vinte anos atrás) não permitiram uma precisão suficiente para descrever completamente o impacto da distribuição de matéria sobre o buraco negro, e ainda os autores se enganaram ao fazer conjectura incorretas a respeito da forma de um buraco negro com momento angular nulo [117].

Em 2005 Ansorg e Petroff [117] utilizaram um código pseudoespectral para estudar o problema de anéis homogêneos (densidade constante) com rotação uniforme ao redor de buracos negros. Analisaram a influência da matéria nas propriedades do buraco negro e

verificaram como a forma do horizonte se desvia de seu valor não perturbado.

Shibata [118], utilizando o chamado método da punção (*puncture framework*), considera um fluido perfeito com uma equação de estado politrópica e densidade de momento angular arbitrária. Os modelos assim gerados servem como dados iniciais para códigos de evolução temporal desenvolvidos dentro do mesmo formalismo (e.g., Montero *et al.* [119], Shibata e Sekiguchi [120]).

Stergioulas [16] obtém ainda modelos com momento angular constante, em que o toro preenche exatamente o lóbulo de Roche (ver discussão na seção 4.1.4). Seus modelos foram usados como estados iniciais por Korobkin *et al.* [121] em estudos de estabilidade.

4.7 Distribuição de momento angular

Dado o que foi exposto na seção anterior, o caso de um fluido com rotação *uniforme* é bem compreendido, havendo estudos do espaço completo de soluções de equilíbrio hidrodinâmico, principalmente na ausência de um corpo central. A situação não é a mesma para toros autogravitantes com *rotação diferencial*, e ainda mais no caso de haver um buraco negro central. Veremos abaixo parametrizações apropriadas para a distribuição de momento angular ao se introduzir rotação diferencial no disco.

O perfil de rotação mais amplamente difundido em relatividade geral foi introduzido por Komatsu *et al.* [115]:

$$j(\Omega) = \mathcal{A}^2(\Omega_c - \Omega). \quad (4.151)$$

onde $\mathcal{A}$ é uma constante positiva e Ω_c é a velocidade angular no centro do sistema de coordenadas. Essa é uma escolha simples que se mostrou conveniente computacionalmente.

Aqui a distribuição geral de momento angular é determinada especificando-se a quantidade $j \equiv u_\varphi u^t = \gamma^2 v e^{\psi-\nu}$ (equação 4.94), que é uma quantidade que se reduz ao momento angular no limite Newtoniano. Especificar $j(\Omega)$ determina a função $\Omega(L)$ (de acordo com as equações 4.95). Apesar da escolha de $j(\Omega)$ ser arbitrária, o critério de estabilidade deve ser observado nessa escolha.

Devemos notar aqui que Ω_c depende implicitamente do valor de $\mathcal{A}$. Calculando o valor de j em termos de Ω (por meio das equações 4.94) temos que

$$\mathcal{A}^2(\Omega_c - \Omega) = \frac{(\Omega - \omega)r^2 B^2 e^{-4\Phi}}{1 - (\Omega - \omega)^2 r^2 B^2 e^{-4\Phi}}. \quad (4.152)$$

Essa relação implica que a velocidade angular no eixo de rotação ($r = 0$) deve ser igual a Ω_c .

Quando $\mathcal{A} \rightarrow \infty$ a lei de rotação acima se reduz ao caso de rotação rígida $\Omega \rightarrow \Omega_c$. Quanto menor a constante $\mathcal{A}$, também chamada de *parâmetro de rotação*, maior é o “grau”

de rotação diferencial. Para valores pequenos de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \rightarrow 0$), podemos ver que $\Omega \rightarrow \omega$. Isso levaria à condição absurda de que o potencial de arrasto é igual à velocidade angular mesmo se a gravidade é fraca. Podemos ver que se $\Omega > \omega$ em algum ponto do espaço (i.e., se o fluido não está completamente em repouso), o lado direito da equação (4.152) não é nulo. Portanto, conforme $\mathcal{A} \rightarrow 0$, a seguinte relação deve valer:

$$\Omega_c - \Omega \approx 1/\mathcal{A}^2. \quad (4.153)$$

Fazendo $j \rightarrow \Omega r^2$, o limite Newtoniano do perfil de rotação (4.152) pode ser escrito como

$$\frac{\Omega}{\Omega_c} = \frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{A}^2 + r^2}. \quad (4.154)$$

Quando $\mathcal{A} \rightarrow \infty$, isso se aproxima da rotação rígida, com dito acima. Quando $\mathcal{A} \rightarrow 0$, temos que $\Omega/\Omega_c \rightarrow \mathcal{A}^2/r^2$, ou seja, temos um perfil de rotação com momento angular $j \rightarrow \Omega r^2$ constante (exceto perto do eixo de rotação). Esse perfil de rotação satisfaz o critério de Rayleigh para estabilidade dinâmica local com perturbações radiais axissimétricas, isto é, j não deve diminuir com o raio.

Jaroszynski *et al.* [70], por outro lado, apresenta argumentos bastante gerais mostrando que a distribuição do momento angular específico deve variar entre dois extremos: $L = \text{const}$ e aquele para o qual $\Omega = \text{const}$. Esses dois casos, juntos com o caso Kepleriano $L = L_k$, devem ser considerados como casos fundamentais em discussões referentes à distribuição de momento angular.

Para regiões longe do buraco negro $r \gg r_G$ os argumentos são bem conhecidos (ver Frank *et al.* [40] 2002), e junto com numerosas simulações numéricas mostram que tipicamente (no caso estacionário e sem ondas de choque) o momento angular específico deve ser levemente sub-Kepleriano $L(r, z=0) \approx L_k(r)$. Há um sólido consenso nesse ponto.

A situação perto do buraco negro é menos clara porque não há conhecimento suficiente sobre a natureza da tensão em operação na parte mais interna, isto é, aproximadamente entre o horizonte de eventos e a ISCO. Formalmente, considera-se dois casos ideais extremos, dependendo se a tensão é muito pequena ou muito grande.

No primeiro caso, a tensão quase nula implica que o fluido está quase em queda livre, e portanto o momento angular é praticamente constante ao longo das linhas de fluxo. Isso implica que $L(r, z=0) \approx \text{const}$. Essa é a situação típica para discos finos (Shakura e Sunyaev [37] 1973) e discos *slim* (Abramowicz *et al.* [122] 1988). No segundo caso, imagina-se que ocorra uma instabilidade muito forte quando $d\Omega/dr \neq 0$. Isso deve forçar o fluido na direção de um estado marginalmente estável $\Omega = \text{const}$. Esta situação é relevante para ADAFs (Narayan e Yi [43]).

Considerando isso, Qian *et al.* [36] sugerem uma distribuição de momento angular fisicamente flexível e realística que se assemelha a resultados de simulações. Essa distribuição

é escrita na forma:

$$\begin{aligned} L(R, \theta) &= L_0 \left(\frac{L_k(R)}{L_0} \right)^\beta \sin^{2\gamma} \theta & \text{para } R \geq R_{ms} \\ &= L_0 \left(\frac{L_{ms}}{L_0} \right)^\beta \sin^{2\gamma} \theta & \text{para } R < R_{ms} \end{aligned} \quad (4.155)$$

A constante L_0 é definida por $L_0 \equiv \eta L_{ms}$, e $L_{ms} = L_k(R_{ms})$. Dessa forma, há *três* parâmetros livres adimensionais no modelo: (β, γ, η) . Seus intervalos são,

$$0 \leq \beta \leq 1, \quad -1 \leq \gamma \leq 1 \quad 1 \leq \eta \leq \eta_{max}. \quad (4.156)$$

A função $L_k(R)$ é o momento angular Kepleriano no plano equatorial, $\theta = \pi/2$, e $\eta_{max} = L_k(R_{mb})/L_k(R_{ms})$.

A figura 4.15 mostra seqüências de modelos de Qian *et al.* [36] calculados a partir de diferentes escolhas de β e γ , com $\eta = \eta_{max}$ fixo, para a métrica de Schwarzschild.

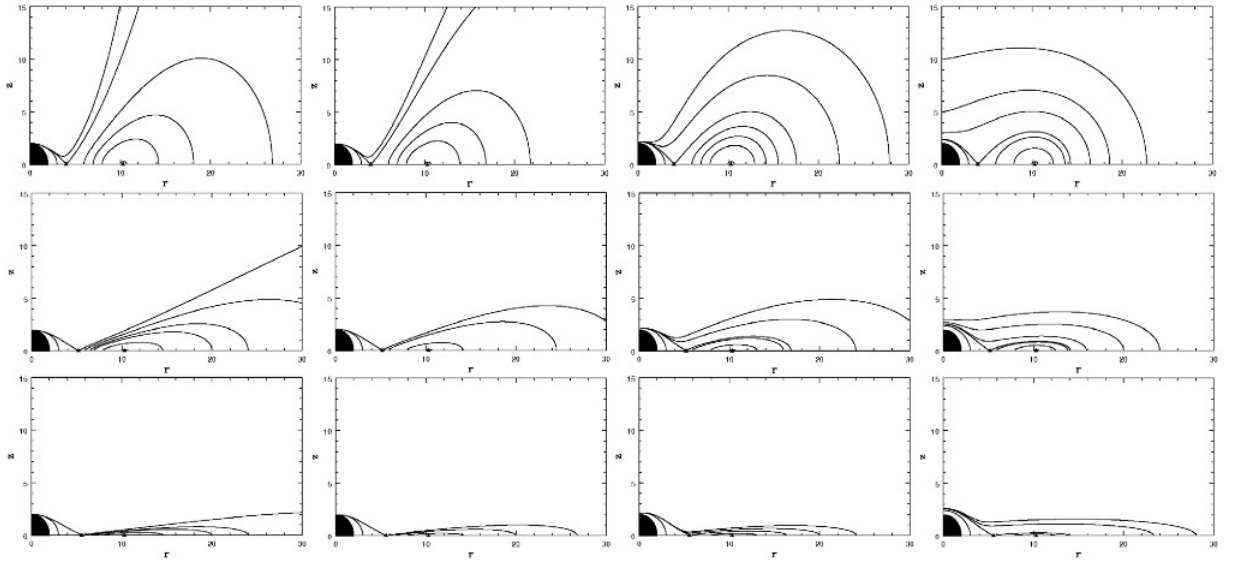


Figura 4.15: Superfícies equipotenciais, para $\eta = \eta_{max} = 1,085$. As linhas correspondem a $\beta = (0, 0), (0, 9)$ e $(0, 99)$ de cima pra baixo. As colunas correspondem a $\gamma = (0, 0), (0, 1), (0, 5)$ e $(0, 9)$ da esquerda pra direita. O canto superior esquerdo mostra um toroide Polish doughnuts “padrão”. O canto inferior direito mostra um disco quase Kepleriano no plano equatorial, envolto por um envelope de momento angular muito baixo. (figura retirada de Qian *et al.* [36])

Parte II

Métodos Numéricos

Capítulo 5

Técnicas numéricas

Nesse capítulo introduzo as técnicas numéricas e motivo as escolhas que fiz na implementação do código numérico, que estão relacionadas às dificuldades que se apresentam nessa implementação, a saber: i) o problema de fronteira livre; ii) a existência de pontos singulares em um sistema de coordenadas adaptado a um disco (utilizado nos métodos espectrais); iii) o problema de domínio não limitado.

Começo apresentando os trabalhos que já foram feitos nessa área e sua evolução histórica, e em sequência dou um panorama geral dos principais métodos de resolução numérica de equações diferenciais parciais. Apresento então os três problemas citados e as estratégias que adotei para solucioná-los.

5.1 Evolução histórica dos métodos numéricos

Há uma vasta literatura referente a discos de acreção, que em geral são tratados como sendo fluidos ideais. Vários códigos numéricos foram desenvolvidos com a finalidade de se calcular esse tipo de estrutura: fluidos autogravitantes em equilíbrio hidrodinâmico. Apresento aqui a evolução dos métodos propostos para a determinação das estruturas de equilíbrio de sistemas autogravitantes, em que a fronteira não é conhecida *a priori*.

O método de James [123] (1964) foi o primeiro a obter sequências de equilíbrio de politropos axissimétricos e rotação uniforme por meio de um computador. Contudo, este método não foi capaz de gerar modelos com índice politrópico $n > 3$ e nem modelos muito achatados.

Pouco tempo após o trabalho de James dois outros métodos foram propostos, por Stoeckly [124] (1965) e por Ostriker e Mark [12] (1968). O método de Stoeckly, muito mais fácil de se lidar que o método de James, foi estendido para calcular estruturas de estrelas relativísticas em rotação (Butterworth e Ipser [86] e Butterworth [125], 1976) e foi aplicado também a politropos em rotação sem simetria axial (Ipser e Managan [126], 1981).

Entretanto, seu método numérico não funcionou para todos os problemas. Não foi possível obter soluções para configurações altamente relativísticas [12] nem para configurações Newtonianas não axissimétricas altamente deformadas [126]. Apesar de não ser claro a causa dessas limitações, quando as equações são usadas em sua forma diferencial, as dificuldades são provavelmente devido ao tratamento das condições de contorno.

Outra abordagem foi adotada por Ostriker e Mark [12] (1968), o chamado *método do campo autoconsistente* ou SCF (*self-consistent field method*), em que o potencial gravitacional é obtido da equação de Poisson em sua forma integral, de modo que as condições de contorno podem ser incluídas facilmente. Como o método SCF é mais fácil de lidar e é tão poderoso quanto os métodos de James e de Stoeckly, muitos pesquisadores usaram o método SCF. Esse método permitiu a eles estudar extensivamente estruturas de estrelas em rotação (e.g., Bodenheimer e Ostriker [127], 1973). Infelizmente o método SCF não se aplica a qualquer problema, o que foi indicado por alguns autores [127, 128]. Para estruturas muito achatadas ou configurações com um alto contraste de densidade (estrutura núcleo-halo) o método não funciona satisfatoriamente, porque o potencial gravitacional e a equação de equilíbrio hidrostático não são resolvidos simultaneamente, mas iterativamente, com se fossem independentes. Não há garantia de que tal esquema iterativo convirja, e de fato para configurações altamente deformadas ou para estruturas com alto contraste de densidade, o número de ciclos iterativos requerido se torna muito alto e no final nenhuma solução pode ser obtida, apesar de existir o equilíbrio.

Em 1978 Eriguchi [129] propôs um método diferente para eliminar essas limitações. Em seu método uma equação do tipo elíptica (equação de Poisson) é convertida em uma do tipo hiperbólica usando uma continuação analítica de uma variável no plano complexo, e a estrutura pode ser obtida resolvendo-se um problema de Cauchy, que é muito mais fácil de lidar do que um problema de valor de contorno. O método foi ainda estendido para se aplicar a politropos relativísticos em rotação (Eriguchi [130], 1980). Contudo, no método original haviam alguns erros no tratamento das condições de contorno, que foram corrigidos em 1982 por Hachisu, Eriguchi e Sugimoto [131]. O método revisado, que foi chamado de método EFGH, dado o nome de seus desenvolvedores (Eriguchi, Fukushima, Garabedian e Hachisu), pôde gerar soluções para estruturas altamente achatadas e configurações possuindo um alto contraste de densidade. Foram então obtidos vários tipos de estruturas para politropos em rotação, como estruturas não axissimétricas semelhantes a elipsoides de Jacobi (Hachisu e Eriguchi [132], 1982). Apesar desse método ter se mostrado muito poderoso, ele também tem alguns defeitos. Se qualquer das quantidades físicas como densidade ou temperatura for descontínua em algum lugar o método não funciona, devido ao fato de que a solução não será mais analítica no ponto de descontinuidade.

Eriguchi e Mueller [133] (1985) propuseram um outro método que supera todas as dificuldades mencionadas acima. Nesse método, o campo gravitacional é calculado a partir

de uma representação integral da equação de Poisson como no método SCF (que permite o tratamento simples das condições de contorno), e a distribuição de densidade é obtida diretamente com o uso de um procedimento iterativo Newton-Raphson. A equação de equilíbrio hidrostático para uma lei de rotação (barotrópica) arbitrária é usada na forma integral também, e resolvida simultaneamente com a equação de Poisson. A resolução simultânea de ambas as equações é necessária se se deseja calcular o equilíbrio de configurações altamente deformadas, como pôde ser constatado nos métodos mais antigos, que tratam as equações separadamente.

Com esse método, chamado de SFNR (*straightforward Newton-Raphson*), eles conseguiram obter estruturas altamente achatadas de politropos em rotação [133]. Em se tratando de configurações em equilíbrio, esse método não tem limitações. De fato, o método é muito poderoso, e sua única desvantagem é o seu custo computacional, pois uma matriz densa grande tem que ser invertida. Para as iterações, são usados os valores da densidade nos pontos do grid, portanto a ordem da matriz do sistema linear é igual ao número de pontos no grid, e ainda a matriz é densa, e não esparsa.

Hachisu [134] (1986) propôs um método alternativo que é tão poderoso quanto o método SFNR, mas muito mais eficiente, e muito mais rápido que o SFNR em muitos casos. O método, chamado de método HSCF, é uma variação do método SCF, mas sem as limitações da versão original. Se alguns pontos (geralmente dois) da superfície do politropo são especificados, o resto da configuração não deve distanciar da solução original, e converge para ela se ela existir [135]. Desta forma são eliminadas as dificuldades numéricas dos cálculos anteriores de Ostriker e Bodenheimer [136], que especificavam a massa e o momento angular ao invés de pontos fixos na superfície e a densidade máxima. Com essa escolha de condições iniciais Hachisu estendeu as investigações numéricas prévias para muitas sequências de equilíbrio novas, que aumentaram consideravelmente a nossa visão sobre politropos distorcidos em rotação. De fato, a maioria das figuras de equilíbrio obtidas com o método do campo autoconsistente de Hachisu, já haviam sido encontradas com precisão similar pela estratégia do plano complexo de Eriguchi [129].

Para uma visão geral comparativa de cada método ver Horedt [71] (2004). Vejamos agora os códigos numéricos desenvolvidos para a resolução de sistemas relativísticos. Os primeiros códigos foram computados por Hartle e Thorne [137] (1968) na aproximação de rotação lenta. Os primeiros modelos com rotação rápida foram obtidos por Bonazzola e Maschio [138] (1971) usando uma formulação baseada em coordenadas Lewis-Papapetrou (a versão cilíndrica das coordenadas quase isotrópicas) e aplicando o método do campo autoconsistente.

Todos os códigos numéricos desenvolvidos desde então foram baseados no método do campo autoconsistente (até surgirem os métodos espectrais mais recentemente). Em 1972, Wilson [139] usou a formulação de Bardeen e Wagoner [104] para computar modelos de es-

trelas com rotação diferencial sem uma equação de estado explícita. Em 1974 Bonazzola e Schneider [140] melhoraram o código de Bonazzola e Maschio e computaram os primeiros modelos de estrelas relativísticas em rotação construídos sobre uma equação de estado explícita (um gás ideal de Fermi de nêutrons). Em 1975, Ostriker e Mark [12], Butterworth e Ipser [141] desenvolveram um código baseado na formulação de Bardeen-Wagoner e computaram corpos homogêneos em rotação [12, 141] bem como politropos [125]. Friedman, Parker e Ipser [142, 142] (1986, 1989) aplicaram seu método para algumas equações de estado realísticas (isto é, baseadas em cálculos de microfísica detalhados). Este estudo foi estendido em 1990 por Lattimer *et al.* [143] para incluir mais equações de estado.

Em 1989, Komatsu *et al.* [144] desenvolveram um novo código (KEH), também baseado na formulação de Bardeen-Wagoner, e o aplicaram a politropos em rotação diferencial [115]. Seu método foi melhorado por Cook, Shapiro e Teukolsky [14, 145] (CST, 1992, 1994), pela introdução da variável radial $s = R/(R + R_{eq})$, onde R_{eq} é a coordenada R do equador estelar, para que o domínio computacional se estenda ao infinito espacial — o único lugar onde as condições de contorno são conhecidas. Em 1995, Stergioulas e Friedman [146] desenvolveram seu próprio código baseado no esquema CST, melhorando sua precisão, resultando no famoso código de domínio público *rns* ¹.

Em 1993, Bonazzola, Gourgoulhon, Salgado e Marck [147] (BGSM) desenvolveram um novo código usando métodos espectrais, enquanto todos os códigos anteriores empregavam diferenças finitas. Este código foi melhorado em 1998 [14, 148] (introduzindo domínios numéricos adaptados à superfície da estrela) e incorporado na biblioteca *LORENE*, se tornando o código de domínio público *nrotstar* ².

Em 1998, Nozawa *et al.* [149] fez uma comparação de performance detalhada dos códigos KEH, *rns* e BGSM, mostrando que a diferença relativa entre KEH e BGSM é somente da ordem de 10^{-3} a 10^{-2} . Isto é devido ao domínio computacional finito usado por KEH, implicando em condições de contorno aproximadas para um valor finito de R . Ao contrário, graças a compactação espacial, ambos *rns* e BGSM são baseados em um domínio que se estende para $R = +\infty$ onde condições de contorno exatas podem ser impostas.

Um novo código espectral multidomínio foi desenvolvido por Ansorg, Kleinwachter e Meinel [13][90] (AKM) em 2002. Ele é muito preciso, resultando em modelos que atingem até a precisão da máquina. Ele foi usado para calcular sequências de estrelas com rotação diferencial, com um alto grau de rotação diferencial, levando a formas estelares toroidais [114]. Nesse método espectral multidomínio o interior e o exterior do corpo são mapeados separadamente em um quadrado. Os campos, assim como a forma da superfície do corpo são escritos em termos de expansões de Chebyshev, cujos coeficientes geram um conjunto

¹<http://www.gravity.phys.uwm.edu/rns/>

²<http://www.lorene.obspm.fr/>

de equações não lineares de alta dimensão, que incorporam tanto as equações de campo quanto as condições de transição. Esse sistema é resolvido por um método de Newton-Raphson, e um chute inicial para a solução é dado pelos esferoides de Maclaurin, que são conhecidos analiticamente.

Shibata [118] apresentou uma nova formulação em que as equações de Einstein para as funções métricas, em sua decomposição 3+1, são resolvidas por meio do chamado método da punção (*puncture framework*).

Em 2011 Stergioulas [15] apresenta um método em que as equações elípticas para as funções métricas são invertidas usando funções de Green, e as somatórias resultantes são truncadas em um número máximo de 10 termos. No entanto, sua formulação apresenta dificuldades com derivadas de duas funções métricas, que individualmente divergem no horizonte de eventos apesar de sua diferença ser regular. Como cada termo é calculado separadamente, e devido a erros numéricos do método das diferenças finitas empregado, não há um cancelamento exato dos dois termos. Dessa forma, aceita-se uma certa aproximação para manter a regularidade no horizonte.

Stergioulas [150] apresenta uma discussão mais extensa dos códigos numéricos, em particular, uma comparação entre os códigos AKM, KEH, BGSM, *rns* e *LORENE/rotstar*.

Atualmente já existem códigos numéricos que realizam a evolução temporal de sistemas hidrodinâmicos (e magneto-hidrodinâmicos) em relatividade geral (e.g., código *Nada* [119]), onde ainda estão sendo introduzidos efeitos de radiação [120]. Porém, ainda assim soluções precisas de sistemas estacionários são necessárias como dados iniciais para tais simulações, bem como em estudos de instabilidade (e.g., Montero *et al.* [119], Shibata e Sekiguchi [120], Korobkin *et al.* [121]). Como há muito pouco disponível em dados iniciais para o problema de dois corpos em geral, tais soluções numéricas são ainda muito importantes. Além disso, me parece válido o estudo dos poucos tipos de soluções *físicas* das equações de Einstein que podem ser obtidas e trabalhadas (mesmo que apenas numericamente) com alta precisão.

5.2 Resolução numérica de equações diferenciais parciais

Métodos de elementos finitos constituem uma das mais gerais e poderosas classes de técnicas para a resolução numérica de equações diferenciais parciais e são amplamente usadas no design e análise de problemas em engenharia. O procedimento de elementos finitos vem a ser, no final das contas, uma técnica de resíduos ponderados aplicada a uma série de expansões, cada uma sobre apenas uma pequena região do espaço (um “elemento”). Quando a técnica de resíduos ponderados é derivada diretamente de um princípio varia-

cional, a continuidade das condições naturais de contorno é satisfeita implicitamente na fronteira entre os elementos como parte do processo de convergência.

Métodos espectrais envolvem a expansão da solução de uma equação diferencial em uma expansão ortogonal de alta ordem, cujos coeficientes são determinados por uma técnica de projeção de resíduos ponderados. Os métodos têm uma ordem de convergência “infinita” se as funções de expansão são escolhidas apropriadamente. Em outras palavras, a solução é expandida em uma série de funções base ortogonais, a expansão é então substituída na equação diferencial, e os coeficientes da expansão são calculados por projeção ou por colocação. Esses métodos geralmente são apropriados quando o domínio da solução tem geometria simples. Conforme a geometria se torna complexa, os métodos espectrais se tornam cada vez mais inconvenientes e trabalhosos.

A principal vantagem das técnicas espectrais é a precisão. A principal vantagem do método dos elementos finitos é a generalidade; os elementos são tipicamente escolhidos como no máximo quadráticos, e conseqüentemente, uma precisão muito boa é obtida somente a muito custo. A vantagem prática mais significativa dos elementos finitos é a capacidade em lidar com domínios com geometria arbitrária. Uma outra vantagem importante é que a transformação das equações diferenciais em um sistema de equações algébricas é feita de uma forma teoricamente sólida e consistente, e livre de hipótese *ad hoc* e aproximações numéricas heurísticas. O método dos elementos finitos é construído sobre uma base teórica rigorosa. Em particular, para uma certa classe de equações diferenciais, pode ser mostrado que o método dos elementos finitos é equivalente a um método de minimização funcional bem posto.

Os *elementos espectrais* foram inventados no intuito de se construir aproximações de alta ordem, mais precisas que o método dos elementos finitos, mas que evitassem algumas das restrições dos métodos espectrais com um único domínio. O *método dos elementos espectrais* permite aproximações em domínios com geometrias mais complicadas, quando comparado ao método espectral com domínio único, dividindo o domínio do problema em subdomínios não sobrepostos. Dentro de cada domínio é construída uma aproximação por meio de uma combinação linear de polinômios ortogonais de alta ordem. Em outras palavras, o método dos elementos espectrais é uma técnica de elementos finitos de alta ordem que combina a flexibilidade em lidar com geometrias complexas dos elementos finitos com a alta precisão dos métodos espectrais. A vantagem do método dos elementos finitos é que é possível se obter algoritmos estáveis e de alta precisão com um baixo número de elementos.

O ponto de partida de métodos espectrais polinomiais é a construção de uma base ortogonal para funções quadrado integráveis, de forma a se expandir as funções que queremos aproximar. Uma forma conveniente de gerar essas bases é usar o teorema de Sturm-Liouville, que diz respeito ao problema de autofunções e autovalores conhecido

como problema de Sturm-Liouville. Algumas escolhas de funções de expansão são mais úteis que outras. Uma classe de funções são os polinômios de Jacobi: em particular, as bases de Legendre e Chebyshev são as mais úteis para se aproximar soluções de equações diferenciais. Essas bases são ditas expansões *modais* ou hierárquicas, porque as variáveis fundamentais são os coeficientes da expansão de funções ortogonais, ou modos, e o conjunto de funções base de ordem $p - 1$ está contido dentro do conjunto de funções base de ordem p . Há uma noção de hierarquia no sentido em que os conjuntos de expansão de ordens altas são construídos a partir dos conjuntos de expansão de ordens mais baixas.

Os polinômios de Lagrange formam uma base não hierárquica porque consistem de $p+1$ polinômios de ordem p , e fornecem uma forma alternativa de representar a solução em termos dos valores sobre os pontos do grid, por meio de um interpolante. Uma abordagem por interpolação está relacionada àquela feita por aproximações de *diferenças finitas*, onde as variáveis desconhecidas são valores em pontos específicos no espaço. Nas aproximações por diferenças finitas, as derivadas nos pontos do grid são aproximadas por derivadas de um polinômio que interpola a solução no ponto em questão e em seus vizinhos. Da mesma forma que podemos representar uma série de potência (uma forma modal de um polinômio) como um interpolante na forma de Lagrange ou de Newton, podemos também representar uma aproximação polinomial ortogonal por um interpolante através de um conjunto de pontos, ou valores nodais. Tais aproximações são chamadas de *nodais* ou ainda de aproximações *pseudoespectrais*. Aproximações nodais são intimamente ligadas à introdução de uma regra de quadratura para manter as propriedades de ortogonalidade que são usadas para se encontrar os coeficientes modais. De modo geral, sejam modais ou nodais, todas as expansões são ditas como consistindo de *modos* de expansão, que normalmente são chamadas de *funções de forma*, como em mecânica estrutural.

5.3 Problema de fronteira livre

Conforme citado na introdução, a dificuldade em se obter estruturas autogravitantes em um estado de rotação estacionário se complica pelo fato de não se tratar de um problema de valor de contorno usual, mas sim de um *problema de fronteira livre*, onde a superfície do toro não é conhecida *a priori*, e portanto, deve ser obtida em conjunto com sua estrutura interna. Vimos que tradicionalmente esse tipo de problema é abordado por meio do *método do campo autoconsistente*, proposto por Ostriker e Mark [12]. A equação de equilíbrio e a equação de Poisson são resolvidas iterativamente, a partir de um estado inicial, até que a convergência seja obtida.

Uma abordagem diferente foi adotada por Ansorg *et al.* [13], que realizam uma expansão em série dos campos de forma que o problema como um todo se torna um sistema algébrico não linear para o conjunto total dos coeficientes (dos campos e da superfície

desconhecida, também expandida em série), que é resolvido iterativamente a partir de um “chute” inicial através do método Newton-Raphson.

De qualquer forma, os métodos utilizados na resolução do problema de fronteira livre são métodos iterativos: ou aplicam o chamado método do campo autoconsistente, que resolve iterativamente a equação de equilíbrio e a equação de Poisson (e.g., Bonazzola et. al. [14]), ou geram um sistema não linear, que é resolvido iterativamente pelo método de Newton. Diante do caráter iterativo de ambas as abordagens, optei pelo método do campo autoconsistente, o qual apresento na seção 8.2.

Para a resolução da equação de Poisson/Einstein, boa parte dos trabalhos já realizados utilizam o método dos elementos finitos, no qual o domínio é particionado em pequenos elementos, e dentro de cada elemento a solução é aproximada por uma função linear ou quadrática. No entanto, é interessante a utilização de métodos espectrais, pois esses atingem uma convergência espectral (decaimento exponencial do erro com o aumento da ordem de aproximação utilizada) para funções suficientemente suaves. A utilização de métodos espectrais para a resolução desse tipo de problema foi introduzida por Bonazzola et. al. [147], e aperfeiçoada posteriormente com a técnica de multidomínio por Bonazzola et. al. [14], no âmbito da gravitação relativística. Além desse, um novo método espectral multidomínio foi desenvolvido por Ansorg *et al.* [13]. O que utilizo aqui é na verdade o *método dos elementos espectrais*, que é um método *pseudoespectral*, em que os coeficientes da expansão (modal) em série são obtidos por meio de quadraturas Gaussianas.

Em suma, utilizo o método do campo autoconsistente para lidar com o problema de fronteira livre, onde, a cada iteração são obtidas uma nova superfície e uma distribuição de densidade. Em cada iteração, as equações de Poisson/Einstein são resolvidas por meio do método dos elementos espectrais, que é um método multidomínio para evitar a singularidade do sistema de coordenadas. O processo segue até que se obtenha convergência. No próximo capítulo descrevo o método dos elementos espectrais, passado para os elementos infinitos (não limitados) no capítulo 7. Por fim, no capítulo 8, os detalhes do código BLATOS, que compreendem o processo iterativo, a malha utilizada e o remapeamento do domínio numérico a cada iteração. Antes, porém, veremos os problemas de singularidade do sistema de coordenadas e do domínio infinito nas seções a seguir.

5.4 Singularidade do sistema de coordenadas

Além da questão fundamental de que nem a superfície nem a distribuição de densidade são dadas (problema de fronteira livre), uma particularidade numérica encontrada no uso de métodos espectrais na resolução desse problema é que um sistema de coordenadas adaptado a um disco, como o que estou tratando, terá sempre pontos singulares (como veremos abaixo) e se faz necessário um tratamento especial desses pontos.

O sistema de coordenadas melhor adaptado a um disco é o sistema de coordenadas toroidais simples (q, α) , que se relaciona com o sistema cilíndrico por

$$r = r_c - q \cos \alpha, \quad (5.1)$$

$$z = q \sin \alpha, \quad (5.2)$$

onde r_c é o raio de máxima pressão e densidade (ou centro) do disco. Nesse sistema, a superfície pode ser representada por $q = q_s(\alpha)$ e o centro do disco por $q = 0$.

Uma característica dos métodos espectrais é a utilização de um sistema de coordenadas adaptado ao domínio, e o mapeamento do domínio físico a um domínio numérico, geralmente tomado como sendo em um quadrado unitário $[-1, 1] \times [-1, 1]$ (em duas dimensões). Dessa forma, fazendo a seguinte transformação de coordenadas:

$$\alpha(y) = (y + 1)\pi, \quad (5.3)$$

$$q(x, y) = \left(\frac{x + 1}{2} \right) q_s(\alpha(y)). \quad (5.4)$$

a superfície será dada por $x = 1$ e o centro por $x = -1$.

No entanto, como todos sabem, esse sistema de coordenadas tem uma singularidade em $q = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (exatamente como a origem do sistema de coordenadas polares), e o cálculo de operadores diferenciais *regulares* tais como o Laplaciano irá divergir. Essa singularidade é apenas “aparente”, pois o cálculo do Laplaciano de uma função *regular* deveria ter um resultado bem definido, já que em coordenadas cilíndricas ele é $\nabla^2 = \partial/\partial r^2 + \partial/\partial z^2$. Para se evitar calcular coeficientes de equações diferenciais onde eles são infinito, o grid espectral pode simplesmente excluir o ponto singular [151]. No entanto, isso é somente uma complicação trivial. Boyd [152] mostra que as condições de contorno devem ser impostas como condições de regularidade das funções nesses pontos.

Para métodos de diferenças finitas, normalmente impõem-se explicitamente condições de contorno numéricas, baseadas em uma cuidadosa análise do comportamento da solução próxima à origem, no ponto do grid mais próximo dela. Para métodos espectrais, no entanto, a condição de contorno na origem é *comportamental* e não *numérica*: o comportamento correto é que a solução deveria ser analítica na origem mesmo que os coeficientes da equação diferencial não sejam. Como os termos de uma série espectral são individualmente analíticos, segue que uma série de Chebyshev ou outra similar no raio satisfaz automaticamente as condições de contorno na origem, e não são necessárias condições adicionais. De certa forma a existência da singularidade na origem é uma questão de consistência, pois sem ela seria necessário impor explicitamente condições de contorno numéricas nesse ponto.

Portanto, sempre haverá uma singularidade qualquer que seja o sistema de coordenadas que mapeie o disco no quadrado unitário, mas ainda assim métodos espectrais podem ser

aplicados de maneira eficiente. Contudo, para isso é necessário lidar com condições de regularidades das funções, o que nem sempre é uma tarefa simples.

Nas coordenadas (x, y) dadas por (5.3-5.4), baseadas nas coordenadas toroidais, uma expansão espectral simples seria uma série de Chebyshev-Fourier, Chebyshev em x e Fourier em y (ou α). Uma expansão em série desse tipo, de Chebyshev-Fourier, é usada por Bonazzola *et al.* [14] no método BGSF. Vejamos abaixo como exemplo como a condição de regularidade é tratada nesse trabalho.

A condição de regularidade é baseada no fato de que, se uma função $f(x, y)$ for analítica em $R = 0$, então ela pode ser escrita como uma série

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} R^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^j(\theta). \quad (5.5)$$

Em [153] temos duas demonstrações de a condição de regularidade implica que sua série de Fourier em coordenadas polares (R, θ)

$$f(R, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(R) \cos(m\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} b_m(R) \sin(m\theta) \quad (5.6)$$

deve ter coeficientes que satisfazem

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{a_m}{R^m} < \infty, \quad (5.7)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{b_m}{R^m} < \infty. \quad (5.8)$$

Em outras palavras,

$$a_m(R) = R^m A_m(R), \quad b_m(R) = R^m B_m(R), \quad (5.9)$$

onde $A_m(R)$ e $B_m(R)$ são não singulares em $R = 0$. Além disso, através dessa condição e das condições de paridade [153] chega-se que

$$a_m(R) = R^m \left[a_{m,0} + a_{m,2} R^2 + a_{m,4} R^4 + \dots \right], \quad (5.10)$$

sendo a dependência do coeficiente $b_m(R)$ da mesma forma.

Em coordenadas esféricas, a condição de regularidade implica que uma função regular deve ser expansível como [14]

$$f(R, \theta, \varphi) = \sum_{m=-M}^M \sum_{\ell=|m|}^L R^\ell T(R^2) \sin^{|m|} \theta P_{\ell-|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (5.11)$$

onde L e M são inteiros positivos, $L \geq M$, $P_{\ell-|m|}$ é um polinômio de grau $\ell - |m|$ e $T(R^2)$ é um polinômio par.

No método BGSM, Bonazzola *et al.* [14] aplicam o método espectral para modelos de estrelas, e realizam o cálculo em três dimensões, mas não aplicam a condição acima diretamente. Isso porque, como dito acima, nos métodos espectrais são necessárias coordenadas adaptadas à superfície de tal forma que essa possa ser representada por uma coordenada $x = 1$, como por exemplo na transformação $R(x, \theta, \varphi) = R_s(\theta, \varphi)x$. E para tal transformação de coordenadas a condição de regularidade (5.11) seria muito complicada quando expressa em termos de (x, θ, φ) . Utilizaram então, alternativamente, a transformação

$$R(x, \theta, \varphi) = a_0 [x + A_0(x)F_0(\theta, \varphi) + B_0(x)G_0(\theta, \varphi)], \quad (5.12)$$

onde A_0 e B_0 são os seguintes polinômios

$$A_0(x) = 3x^4 - 2x^6, \quad (5.13)$$

$$B_0(x) = (5x^3 - 3x^5)/2. \quad (5.14)$$

A constante a_0 bem como as funções $F_0(\theta, \varphi)$ e $G_0(\theta, \varphi)$ são tais que i) a expansão de $F_0(\theta, \varphi)$ ($G_0(\theta, \varphi)$) com respeito a φ contém somente harmônicos pares (ímpares) e ii) a equação da superfície pode ser escrita como

$$R_s(\theta, \varphi) = a_0 [x + F_0(\theta, \varphi) + G_0(\theta, \varphi)]. \quad (5.15)$$

Os polinômios A_0 e B_0 foram escolhidos de tal maneira a satisfazer em um nível mínimo as condições de regularidade mencionadas acima. Em particular, próximo à origem R se comporta como $R \approx a_0 x$ e é independente de (θ, φ) , o que não seria o caso para a transformação $R = R_s(\theta, \varphi)x$.

Gourgoulhon *et al.* [148] utiliza uma especialização desse método para o caso de simetria axial, em que a transformação (5.12) se reduz a

$$R(x, \theta) = a_0 [x + (3x^4 - 2x^6)F_0(\theta)], \quad (5.16)$$

onde a equação da superfície é dada por

$$R_s(\theta) = a_0 [1 + F_0(\theta)]. \quad (5.17)$$

Boyd e Yu [153] compararam sete métodos espectrais para interpolar e resolver a equação de Poisson em um disco, a saber: séries de Chebyshev-Fourier; mapa conforme quadrado-para-disco; polinômios Zernike; polinômios Logan-Shepp; funções cilíndricas de Robert; expansões Fourier-Bessel; e funções base radiais. Concluem que não existe uma base que seja “a melhor” para o disco em todas as situações, e apresentam as vantagens e desvantagens de cada uma.

A imposição de condições de regularidade não se aplicam de maneira direta a métodos espectrais. Por isso, muitas aplicações empregam vários truques diferentes para se evitar

ter de lidar com essas condições de regularidade. Por exemplo, em Foucart *et al.* [154] a região próxima à origem é descrita por coordenadas cartesianas. Ansorg *et al.* [151] procuram a solução no espaço de configuração com pontos de colocação que evitam a origem.

Minha conclusão é que não há uma maneira simples, ao meu ver, de lidar com a singularidade utilizando um único sistema de coordenadas. Uma abordagem totalmente diferente das citadas acima seria a utilização de uma técnica de *multidomínios*. Ao subdividir o domínio do disco em subdomínios é possível obter sistemas de coordenadas sem pontos singulares, evitando assim a imposição de condições de regularidade. Observe na figura 5.1 como a divisão do disco em domínios, cada qual com seu próprio sistema de

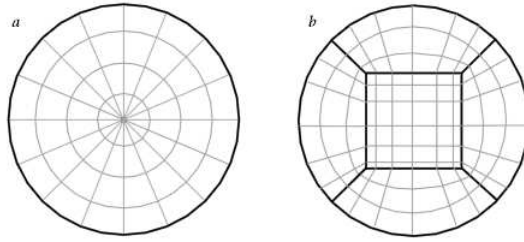


Figura 5.1: Decomposição de um disco em (a) domínio único; e (b) multidomínios.

coordenadas, pode evitar a singularidade.

A técnica multidomínios apresenta uma maneira muito mais direta e simples de lidar com a singularidade, e portanto, adoto essa abordagem no presente trabalho. Ao invés de usar o método espectral multidomínio tradicional, opto por aplicar o chamado *método dos elementos espectrais*, que difere do anterior no que diz respeito às condições de acoplamento entre os subdomínios. Difere ainda no fato de ser, na realidade, um método *pseudoespectral*, ou seja, utiliza-se de uma base nodal de funções. Nele são utilizadas fórmulas de quadratura no cálculo das integrais utilizadas no cálculo dos coeficientes de uma expansão modal, resultando assim em uma expansão nodal (veja o capítulo 6 a seguir).

Os métodos espectrais nodais, ou pseudoespectrais, também sofrem do problema da singularidade do sistema de coordenadas. No entanto, a formulação de Galerkin utilizada para a geração do sistema algébrico resultante implica que é possível aplicar esse método mesmo sem condições adicionais. Contudo, a singularidade faz com que a convergência seja lenta e compromete a precisão e a eficiência do método, e assim, algum tratamento da singularidade também se faz necessário (o que apresento na seção 6.2).

5.5 Domínio não limitado

Uma outra questão pertinente na implementação de um código numérico na resolução do problema dado diz respeito ao fato de estarmos lidando com um *domínio não limitado*. A região externa ao disco se estende até o infinito espacial, que é exatamente onde as condições de contorno sobre o potencial gravitacional são impostas.

Os métodos espectrais lidam de maneira natural com domínios não limitados por meio de funções base decrescentes com o raio, tendendo a zero no infinito (veja seção 7.1). No entanto, aparentemente não existe uma abordagem “padrão” para lidar com elementos não limitados no âmbito do método dos elementos espectrais. Uma forma possível seria utilizar a técnica de *mapping* para realizar uma compactificação do espaço, assim como feito no método dos elementos finitos [18]. Isso é exatamente o que Black [17] faz, porém dentro do formalismo modal do método dos elementos espectrais. Não é do conhecimento do autor a aplicação de uma compactificação do espaço no âmbito do formalismo nodal do método dos elementos espectrais. O que faço então é estender a metodologia de [18], desenvolvida para o método dos elementos finitos, para o método (nodal) dos elementos espectrais. Dedico então o capítulo 7 para apresentar como isso é feito.

Contudo, inicialmente me pareceu que havia uma outra abordagem que poderia ser eficiente no tratamento de elementos não limitados, que seria por meio do chamado *método de elementos de contorno*. Na região externa ao disco o potencial gravitacional obedece à equação de Laplace, e se forem dadas condições de contorno sobre a superfície, bastaria obter soluções dessa equação.

O método de elementos de contorno é uma maneira eficiente e direta de se resolver um problema externo porque se utiliza apenas de informações na superfície para obter o potencial em *qualquer* ponto do domínio. A solução exata da equação diferencial é escrita na forma de uma equação integral sobre a superfície somente. Se o potencial for conhecido em todos os pontos da superfície, então a integral pode ser calculada para se obter o potencial em toda a região externa.

Para escrever a equação integral é necessário encontrar uma solução fundamental do problema (ou função de Green), ou seja uma solução da equação de Laplace que não necessariamente satisfaça as condições de contorno. Portanto, o método somente se aplica a problemas para os quais funções de Green podem ser calculadas.

A grande dificuldade no método dos elementos de contorno é o cálculo das integrais, que vêm a ser integrais impróprias pois os integrandos não são bem definidos sobre pontos na superfície e devem ser interpretados no sentido do valor principal de Cauchy. No entanto, existem maneiras aproximadas (e.g., quadraturas) de se calcular essas integrais de maneira eficiente. Veja por exemplo Hunter e Pullan [155] e Gray *et al.* [156].

Observe, no entanto, que não existem condições de contorno para o potencial sobre

a superfície, mas somente no infinito. O que poderia ser feito é acoplar a resolução do problema externo, discretizado por meio do método dos elementos de contorno, com a resolução do problema interno, por exemplo por meio do método dos elementos espectrais. Para a obtenção da solução numérica no método dos elementos de contorno é preciso discretizar a equação integral em elementos que, nesse caso, são elementos sobre o contorno da região procurada, ou seja, *elementos de contorno*. Para realizar a discretização é possível usar o método de Galerkin, o método da colocação, dentre outros. Usando o método de Galerkin, *talvez* seja possível acoplar o sistema resultante dessa formulação para a região externa com o sistema resultante do método dos elementos espectrais para a região interna, por meio dos mesmos pontos de colocação. Isso seria feito aplicando-se o método dos elementos de contorno na abordagem simétrica de Galerkin [157], que tem a possibilidade de se usar aproximações de alta ordem e tem a característica de gerar uma matriz simétrica (essencial para se fazer o acoplamento com os elementos espectrais).

Porém, ao avaliar as particularidade do método citado observei que com ele não conseguiria a generalidade desejada, pois ele resulta em integrais singulares difíceis de serem computadas (através de métodos muito específicos), o que implicaria que, por exemplo, se precisássemos alterar a ordem dos polinômios de interpolação, o algoritmo de resolução dessas integrais deveria ser alterado. Devido a essas dificuldades e à própria dificuldade de implementação desse método (razoavelmente mais complicado que o dos elementos espectrais), procurei uma alternativa que fosse equivalente, ou seja, um outro método de contorno. Dentre eles existe o chamado método das soluções fundamentais [158], através do qual podemos obter a solução de uma equação por meio de uma solução fundamental, fazendo uma combinação linear de soluções que envolvem essa solução fundamental. O método é desenvolvido para equações lineares e homogêneas mas pode ser ampliado para equações não lineares e não homogêneas também. Porém, se torna muito mais complexo, e ainda, haveria a complicação de realizar o acoplamento com o método dos elementos espectrais para a região interna. Existem ainda outros métodos de contorno, como o método simétrico de nó de contorno [159] e métodos sem malha baseados em funções base radiais [160], por exemplo. Porém, devido à dificuldade que teria em resolver equações não lineares e de realizar o acoplamento com os elementos espectrais (já que não tenho referências sobre isso), busquei uma alternativa dentro do próprio método dos elementos espectrais, abordando o problema por meio de uma compactificação do espaço. Como dito acima, adaptei ao método dos elementos espectrais a forma de compactificação aplicada ao método dos elementos finitos [18].

Se usasse um método de contorno para resolver a região externa não teria o problema da singularidade do sistema de coordenadas cilíndrico no eixo de simetria, pois a solução externa seria obtida por meio de informações sobre a superfície somente. Porém, ao optar por usar a técnica de *mapping*, é preciso levar em consideração que o sistema de

coordenadas cilíndrico é singular no eixo pois a solução externa é obtida em pontos por todo o espaço.

Capítulo 6

Método dos elementos espectrais

Nesse capítulo, descrevo em linhas gerais o método dos elementos espectrais, que é um método multidomínio baseado no método de Galerkin. Começo descrevendo o *método nodal de Galerkin*, que é a abordagem de resolução da equação diferencial adotada pelo método dos elementos espectrais, dentro de cada elemento. Na verdade, esse é um método pseudoespectral, pois se utiliza de quadraturas Gaussianas no cálculo das integrais.

A técnica multidomínio não resolve completamente o problema da singularidade do sistema de coordenadas para o caso que estou tratando. Persiste ainda a singularidade do sistema cilíndrico de coordenadas sobre o eixo de rotação $r = 0$, o que apresento na seção 6.2, e a maneira que adotei para resolvê-lo.

Na seção 6.3 descrevo então como é feito o acoplamento entre os elementos, que é o que de fato distingue esse método dos métodos espectrais multidomínio. Reservei um capítulo a parte, o capítulo 7, para descrever a forma com que introduzo elementos não limitados dentro do formalismos dos elementos espectrais.

Todos os detalhes de implementação dessas técnicas podem ser encontrados em Kopriva [161] (2009).

6.1 Método de Galerkin

Considere o problema de Dirichlet para a equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho \quad \text{em} \quad \mathcal{V} \quad (6.1)$$

$$\Phi = \Phi_s \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{V} \quad (6.2)$$

onde $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ é a região de $\mathbb{R}^3$ para a qual $\rho > 0$, e $\partial\mathcal{V}$ é sua fronteira. ρ e Φ_s são funções dadas em $\mathcal{V}$ e $\partial\mathcal{V}$ respectivamente.

Para simplificar a exposição usarei condições de contorno homogêneas $\Phi_s = 0$, porém o método pode ser estendido para condições não homogêneas. Para isso basta achar uma

função $B(r, z)$ que satisfaça as condições não homogêneas (uma maneira simples é através de *interpolação transfinita* – veja seção 7.2), definir um novo “potencial” $\bar{\Phi} \equiv \Phi - B$ e uma nova “densidade” $\bar{\rho} \equiv \rho - \nabla^2 B$ tais que o problema é modificado para

$$\nabla^2 \bar{\Phi} = 4\pi \bar{\rho} \quad \text{em} \quad \mathcal{V} \quad (6.3)$$

$$\bar{\Phi} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{V} \quad (6.4)$$

e $\bar{\Phi}$ satisfaz condições de contorno homogêneas.

Trato aqui um problema com simetria axial e, portanto, basta considerar o problema no plano Orz , em que r e z são coordenadas cilíndricas usuais. Dessa forma, denoto por $\mathcal{S}$ a projeção de $\mathcal{V}$ sobre o plano Orz , ou seja, a região nesse plano onde $\rho > 0$, e por $\partial\mathcal{S}$ a sua fronteira. Portanto, o problema se torna

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi \rho \quad \text{em} \quad \mathcal{S} \quad (6.5)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{S} \quad (6.6)$$

Métodos espectrais se caracterizam por aplicar um sistema de coordenadas (x, y) adaptado ao domínio físico $\mathcal{S}$, através de uma transformação de coordenadas que leva o domínio físico no quadrado unitário $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Em geral tem-se a transformação inversa $(x, y) \rightarrow (r, z)$

$$r = R(x, y), \quad (6.7)$$

$$z = Z(x, y), \quad (6.8)$$

em que $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-1, 1]$ são as novas coordenadas. Adiarei até a seção 7.2 a descrição do mapeamento do domínio físico (curvo) para o domínio numérico (quadrado), i.e., a determinação das funções $R(x, y)$ e $Z(x, y)$. Utilizarei para isso a chamada *interpolação transfinita*, e ainda estenderei essa metodologia a domínios não limitados.

As coordenadas x e y definem uma nova base covariante

$$\vec{e}_x = \frac{\partial R}{\partial x} \hat{r} + \frac{\partial Z}{\partial x} \hat{z}, \quad (6.9)$$

$$\vec{e}_y = \frac{\partial R}{\partial y} \hat{r} + \frac{\partial Z}{\partial y} \hat{z}. \quad (6.10)$$

Como não é feita uma transformação na coordenada φ o Jacobiano da transformação se torna

$$J = r \hat{\varphi} \cdot (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) = R \left(\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial x} \right). \quad (6.11)$$

No caso de um domínio na forma de um disco, os pontos singulares aparecem nos pontos onde o Jacobiano se anula (em particular $R = 0$ para esse sistema cilíndrico de coordenadas – veja seção a seguir).

Podemos calcular o produto vetorial dos vetores da base diretamente, e definir os vetores normais¹

$$\vec{n}^x \equiv J\vec{e}^x = r\vec{e}_y \times \hat{\varphi} = R \left(\frac{\partial R}{\partial y} \hat{z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \hat{r} \right), \quad (6.12)$$

$$\vec{n}^y \equiv J\vec{e}^y = r\hat{\varphi} \times \vec{e}_x = R \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \hat{r} - \frac{\partial R}{\partial x} \hat{z} \right). \quad (6.13)$$

As componentes $g^{ij} \equiv \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$ da métrica contravariante do novo sistema de coordenadas podem ser calculadas facilmente a partir dos vetores (6.12-6.13) acima:

$$g^{xx} = \frac{R^2}{J^2} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{(\partial_y R)^2 + (\partial_y Z)^2}{[\partial_x R \partial_y Z - \partial_y R \partial_x Z]^2}, \quad (6.14)$$

$$g^{yy} = \frac{R^2}{J^2} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{(\partial_x R)^2 + (\partial_x Z)^2}{[\partial_x R \partial_y Z - \partial_y R \partial_x Z]^2}, \quad (6.15)$$

$$g^{xy} = g^{yx} = -\frac{R^2}{J^2} \left[\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} \right] = -\frac{\partial_x R \partial_y R + \partial_x Z \partial_y Z}{[\partial_x R \partial_y Z - \partial_y R \partial_x Z]^2}. \quad (6.16)$$

O Laplaciano deve então ser escrito na forma tensorial:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{J} \frac{\partial (J f^i)}{\partial x^i}, \quad (6.17)$$

onde

$$f^i \equiv g^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \quad (6.18)$$

são as componentes contravariantes do gradiente de Φ na nova base. Por conveniência, trabalharei com as componentes $F^i \equiv J f^i$, chamados de *fluxos contravariantes*, ao invés das componentes contravariantes f^i :

$$F^x = J g^{xx} (\partial_x \Phi) + J g^{xy} (\partial_y \Phi), \quad (6.19)$$

$$F^y = J g^{yy} (\partial_y \Phi) + J g^{xy} (\partial_x \Phi), \quad (6.20)$$

ou seja,

$$F^x = \frac{R^2}{J} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{R^2}{J} \left[\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (6.21)$$

$$F^y = \frac{R^2}{J} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{R^2}{J} \left[\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (6.22)$$

¹Os vetores contravariantes são calculado por $\vec{e}^i = J^{-1}(\vec{e}_j \times \vec{e}_k)$, onde (i, j, k) é uma permutação *par* de (x, y, φ) , com $\vec{e}_\varphi = r\hat{\varphi}$.

Assim, o Laplaciano (6.17) se torna

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial F^x}{\partial x} + \frac{\partial F^y}{\partial y} \right). \quad (6.23)$$

Para derivar a aproximação de Galerkin, a *forma forte* da equação (6.5) sobre o domínio físico é convertida para uma *forma fraca* no quadrado de referência. A forma fraca (integral) inclui soluções não diferenciáveis com uma exigência de suavidade menor do que a forma forte, e é obtida multiplicando-se a equação (6.5) por uma função arbitrária ϕ que satisfaça às condições de contorno homogêneas de Dirichlet, e integrando-se sobre o domínio:

$$\int_S \nabla^2 \Phi \phi \, dA = 4\pi \int_S \rho \phi \, dA. \quad (6.24)$$

(Como vamos integrar por partes não inserimos uma função peso, significando que essa deve ser a identidade e, portanto, a quadratura utilizada mais adiante deverá ser a quadratura de Legendre. No caso do uso de uma quadratura diferente a função peso correspondente deve ser inserida)

Convertendo as integrais sobre o quadrado de referência usando o Laplaciano na forma (6.23) e o elemento de área $dA = r \, dr \, dz = J \, dx \, dy$ temos

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial F^x}{\partial x} + \frac{\partial F^y}{\partial y} \right] \phi \, dx \, dy = 4\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho J \phi \, dx \, dy. \quad (6.25)$$

Integrando por partes a integral do Laplaciano:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [F^x \phi] \Big|_{x=-1}^1 dy + \int_{-1}^1 [F^y \phi] \Big|_{y=-1}^1 dx - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[F^x \frac{\partial \phi}{\partial x} + F^y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx \, dy \\ = 4\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho J \phi \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Como ϕ é nulo na fronteira, as integrais de contorno se anulam, restando

$$- \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[F^x \frac{\partial \phi}{\partial x} + F^y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx \, dy = 4\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho J \phi \, dx \, dy. \quad (6.27)$$

Agora que temos a forma fraca da equação, podemos aproximar a solução Φ fazendo uma interpolação polinomial de Lagrange:

$$\Phi(x, y) \approx \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \Phi_{ij} \ell_i(x) \ell_j(y), \quad (6.28)$$

onde $\ell_i(x)$ são os polinômios cardinais de Lagrange² e Φ_{ij} são as aproximações (nodais) de $\Phi(x_i, y_j)$ sobre os pontos (x_i, y_j) do grid, com $i = 0 \dots N$ e $j = 0 \dots M$. Das condições de contorno é fácil ver que $\Phi_{0j} = \Phi_{i0} = \Phi_{NM} = 0$, de tal forma que temos um total de $(N-1)^2$ graus de liberdade para determinar.

Para encontrar as equações que determinam esses graus de liberdade, usamos ϕ como sendo um polinômio de mesmo grau que a solução, também escrito na forma nodal

$$\phi(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \phi_{ij} \ell_i(x) \ell_j(y). \quad (6.29)$$

Como ϕ é uma função arbitrária, os coeficientes ϕ_{ij} com $i = 1, 2, \dots, N-1$ e $j = 1, 2, \dots, M-1$ são arbitrários, com $\phi_{ij} = 0$ nas fronteiras. Substituindo essa expansão em (6.27) obtemos:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \phi_{ij} \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(F^x \frac{\partial \ell_i}{\partial x} \ell_j(y) + F^y \ell_i(x) \frac{\partial \ell_j}{\partial y} \right) dx dy \right] \\ = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \phi_{ij} \left[4\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho J \ell_i(x) \ell_j(y) dx dy \right] \end{aligned} \quad (6.30)$$

Da independência dos valores nodais ϕ_{ij} temos que:

$$- \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[F^x \ell'_i(x) \ell_j(y) + F^y \ell_i(x) \ell'_j(y) \right] dx dy = 4\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho J \ell_i(x) \ell_j(y) dx dy, \quad (6.31)$$

para $i = 1, 2, \dots, N-1$ e $j = 1, 2, \dots, M-1$. Podemos agora substituir as integrais por quadraturas de Gauss-Lobatto:

$$\begin{aligned} - \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \left[F^x(x_n, y_m) \ell'_i(x_n) \ell_j(y_m) + F^y(x_n, y_m) \ell_i(x_n) \ell'_j(y_m) \right] w_n w_m \\ = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M 4\pi \rho(x_n, y_m) J(x_n, y_m) \ell_i(x_n) \ell_j(y_m) w_n w_m, \end{aligned} \quad (6.32)$$

que usa apenas valores das funções nos pontos nodais (x_n, y_m) . Como nas integrais em (6.31) as funções peso são a identidade, precisamos usar quadraturas de Legendre, para as quais

$$w_n = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{[P_N(x_n)]^2}, \quad (6.33)$$

²Os polinômios de Lagrange são calculados a partir de um conjunto de pontos x_i , com $i = 0 \dots N$ e $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Cada ℓ_i pode ser definido como sendo o único polinômio de ordem $\leq N$ que satisfaz a condição $\ell_i(x_j) = \delta_j^i$. Uma forma dos polinômios de Lagrange é dada por

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

e x_n são os valores da fronteira ± 1 e os $N - 1$ zeros da derivada $P'_N(x)$ do polinômio de Legendre de ordem N .

Os valores nodais de ρ e J são denotados por $\rho_{nm} = \rho(x_n, y_m)$ e $J_{nm} = J(x_n, y_m)$. Já para os fluxos contravariantes, temos que tomar um certo cuidado. Usando a matriz $D_{nm}^{(x)} \equiv \ell'_m(x_n)$ que representa o operador derivada no espaço dos coeficientes (ver [161]), podemos calcular, através das equações (6.21-6.22), os fluxos contravariantes referente ao interpolante (6.28):

$$F_{nm}^x \equiv \left\{ \frac{R^2}{J} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}_{nm} \sum_{l=0}^N D_{nl}^{(x)} \Phi_{lm} - \left\{ \frac{R^2}{J} \left[\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} \right] \right\}_{nm} \sum_{l=0}^M D_{ml}^{(y)} \Phi_{nl}, \quad (6.34)$$

$$F_{nm}^y \equiv \left\{ \frac{R^2}{J} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}_{nm} \sum_{l=0}^M D_{ml}^{(y)} \Phi_{nl} - \left\{ \frac{R^2}{J} \left[\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} \right] \right\}_{nm} \sum_{l=0}^N D_{nl}^{(x)} \Phi_{lm}. \quad (6.35)$$

No entanto, é importante notar que, em geral, isso é diferente dos valores nodais $F^i(x_n, y_m)$ do interpolante dos fluxos contravariantes:

$$F^i(x_n, y_m) = \left[J g^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \right] |_{(x_n, y_n)} \neq F_{nm}^i = \left[J g^{ij} \right] |_{(x_n, y_n)} \sum_{l=0}^N D_{nl}^{(x^j)} \Phi_{lm}. \quad (6.36)$$

Ou seja, o interpolante do fluxo é diferente do fluxo do interpolante. Isso porque a diferenciação e a interpolação não comutam, e o erro associado a essa diferença é chamado de erro de *aliasing*, que em geral é pequeno.

No entanto, a comutação entre a diferenciação e a interpolação é necessária para que as identidades métricas sejam satisfeitas e, portanto, deve ser imposta para que o método numérico seja consistente. Essa comutação só ocorre quando não há erros de *aliasing*, ou seja, quando a quadratura usada no cálculo dos coeficientes da expansão em polinômios ortogonais é exata, e o interpolante é igual à série truncada de polinômios ortogonais [161].

A quadratura de Gauss-Lobatto é exata somente quando o integrando é um polinômio de grau $2N - 1$ ou menor. Portanto, as funções $R(x, y)$ e $Z(x, y)$, cujas derivadas determinam a métrica, devem ser polinômios de grau $N - 1$ ou menor, para que as quadraturas sejam exatas. Para o nosso caso isso é conveniente porque as funções que determinam a fronteira (usadas na construção das funções R e Z , que veremos mais detalhadamente na seção 7.2) são dadas apenas numericamente, e não analiticamente, de tal forma que são naturalmente aproximadas por um polinômio interpolante. Dessa forma, mesmo que tivéssemos a forma analítica da transformação, não deveríamos usá-la para calcular as derivadas, pois isso introduziria erros de *aliasing*.

Dentro dessa condição então temos que $F^i(x_n, y_m) = F_{nm}^i$, e a equação (6.32) se torna

$$\begin{aligned} - \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \left[F_{nm}^x \ell'_i(x_n) \ell_j(y_m) + F_{nm}^y \ell_i(x_n) \ell'_j(y_m) \right] w_n w_m \\ = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M 4\pi \rho_{nm} J_{nm} \ell_i(x_n) \ell_j(y_m) w_n w_m, \end{aligned} \quad (6.37)$$

Por fim, usando a propriedade dos polinômios cardinais de Lagrange $\ell_i(x_n) = \delta_{in}$ e as matrizes $D_{ij}^{(x)} = \ell'_j(x_i)$:

$$- \sum_{n=0}^N D_{in}^{t(x)} F_{nj}^x w_n w_j - \sum_{m=0}^M D_{jm}^{t(y)} F_{im}^y w_i w_m = 4\pi \rho_{ij} J_{ij} w_i w_j. \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N-1 \\ j = 1, 2, \dots, M-1 \end{array} \right) \quad (6.38)$$

Essa é a forma final do sistema linear gerado pelo método de Galerkin, que deve ser resolvido para se obter Φ_{ij} , e conseqüentemente, a aproximação (6.28) do potencial $\Phi(x, y)$.

O caso de termos condições de contorno de Newman pose ser facilmente implementado observando que, nesse caso, a integral de contorno em (6.26) referente a condição de Newman não se anula. Quando substituimos o polinômio interpolante e trocamos a integral por quadratura,

$$\begin{aligned} [F^x(1, y_j) \phi(1, y_j) - F^x(-1, y_j) \phi(-1, y_j)] w_j \\ + [F^y(x_i, 1) \phi(x_i, 1) - F^y(x_i, -1) \phi(x_i, -1)] w_i \end{aligned} \quad (6.39)$$

aproxima os termos de fronteira. Para contornos de Dirichlet, o valor de ϕ correspondente se anula. Ao longo de fronteiras de Newman uma contribuição do fluxo deve ser adicionada à equação (6.38). Por exemplo, se o contorno definido por $x = -1$ for um contorno de Newman, e os outros de Dirichlet, então a equação (6.38) se torna

$$-F^x(-1, y_j) \ell_i(-1) w_j - \sum_{n=0}^N D_{in}^{t(x)} F_{nj}^x w_n w_j - \sum_{m=0}^M D_{jm}^{t(y)} F_{im}^y w_i w_m = 4\pi \rho_{ij} J_{ij} w_i w_j, \quad (6.40)$$

e especificamos o valor de contorno do fluxo contravariante nessa fronteira. Note que $\ell_i(-1) = \delta_{iN}$ é nulo para todos os pontos interiores do grid. Dessa forma, basta adicionar o termo de fluxo para a equação ao longo das fronteiras de Newman e resolver Φ_{ij} para os pontos interiores e de fronteira. Por exemplo, no caso de uma condição de Newman homogênea $F^x(-1, y_j) = 0$ (como é o caso sobre o eixo de simetria $R = 0$ se esse corresponder ao índice $i = 0$), basta utilizar resolver a forma padrão (6.38) para os pontos dessa fronteira também, inserindo as equações $i = 0$ e as variáveis Φ_{0j} .

6.2 Singularidade do sistema cilíndrico de coordenadas

Observe que, de acordo com o método de Galerkin, os pontos em que o Jacobiano da transformação se anula são pontos *singulares* do Laplaciano (6.23). De acordo com a expressão (6.11), isso ocorre em $R = 0$ para coordenadas cilíndricas. No entanto, percebe-se as componentes métricas (6.14-6.16), bem como o gradiente (6.18) de Φ na nova base, são bem comportadas sobre o eixo de simetria (contanto que $\partial_x R \partial_y Z - \partial_y R \partial_x Z \neq 0$). Isso faz com que seja possível escrever o sistema algébrico resultante mesmo sobre o eixo.

Escrevendo a forma fraca (6.27) da equação de Poisson em termos de f^i :

$$- \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[f^x \frac{\partial \phi}{\partial x} + f^y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] J dx dy = 4\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\rho \phi) J dx dy. \quad (6.41)$$

Observe que o Jacobiano insere um fator J na integração. Substituindo as funções por suas expansões em série e as integrais por quadraturas chega-se à forma final (6.38) do sistema algébrico em termos de f^i :

$$- \sum_{n=0}^N D_{in}^{t(x)} f_{nj}^x J_{nj} w_n w_j - \sum_{m=0}^M D_{jm}^{t(y)} f_{im}^y J_{im} w_i w_m = 4\pi \rho_{ij} J_{ij} w_i w_j. \quad (6.42)$$

Supondo que os pontos sobre o eixo $R = 0$ tenham um índice relativo à coordenada x como sendo $i = 0$ (correspondendo a $x_0 = -1$), teremos $J_{0j} = 0$, e

$$\sum_{n=0}^N D_{0n}^{t(x)} f_{nj}^x J_{nj} w_n w_j = 0. \quad (6.43)$$

Assim, as equações sobre o eixo não resultam em $0 = 0$, e isso se deve ao fato de que a integração por partes transfere a derivada para a função teste. No entanto, a contribuição dos fluxos f^y e da densidade ρ para o sistema algébrico é nula, afetando as propriedades de convergência do método.

Os métodos espectrais podem então produzir soluções convergentes para muitos problemas singulares mesmo sem um tratamento especial. Contudo, as singularidades resultam em uma convergência muito lenta, comprometendo a precisão e a eficiência computacional. A convergência pode ser acelerada significativamente impondo condições de contorno adicionais para recuperar o comportamento da solução conforme $R \rightarrow 0$ (Eisen *et al.* [162], Huang e Sloan [162], Shen [162]). Uma abordagem diferente é usar pontos de colocação de Gauss Radau, que excluem o centro $R = 0$ evitando a singularidade, e portanto não necessitam de condições de contorno adicionais (Chen *et al.* [163], 2000). Para se evitar a singularidade Lai e Wang [164] (2002) adotaram expansões em série de Fourier especiais juntamente com um deslocamento do grid para anular as dificuldades

numéricas introduzidas pela singularidade. Em contrapartida, Gerritsma e Phillips (2000) [165] propuseram construir polinômios de Jacobi incorporando o fator R na função peso da quadratura utilizada.

Resolvi seguir a metodologia proposta por Gerritsma e Phillips [165], que exponho em sequência. As regras de quadratura e os polinômios de interpolação de Lagrange são definidos com uma função peso capaz de compensar a singularidade do polo. Esse método pode ainda ser aplicado de maneira totalmente análoga ao polo do sistema de coordenadas esférico (como veremos abaixo).

Permita-me escrever apenas uma das integrais de (6.41), sendo a outra desenvolvida da mesma maneira:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[f^x \frac{\partial \phi}{\partial x} + f^y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \mathcal{J}_\chi dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 (\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \phi) \mathcal{J}_\chi dx \right] dy, \quad (6.44)$$

onde $J = \mathcal{J}_\chi$. χ é o termo responsável pelos pontos singulares, o que depende do sistema de coordenada: $\chi = 1, R, R^2$ para coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas respectivamente. Para o sistema cilíndrico que utilizo aqui $\chi = R$ e $\mathcal{J} = \partial_x R \partial_y Z - \partial_y R \partial_x Z$.

Na metodologia usual, aplica-se a quadratura de Gauss-Lobatto-Legendre para substituir as integrais por somatórias, pois o peso de integração é considerado como sendo 1. Sendo assim, os pontos da quadratura são zeros dos polinômios de Legendre.

No entanto, para se evitar o problema apresentado acima, pode-se alterar esse peso de integração para ω :

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 (\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \phi) \mathcal{J} \left(\frac{\chi}{\omega} \right) \omega dx \right] dy. \quad (6.45)$$

Fazendo com que $R = 0$ corresponda à coordenada $x = -1$, os pontos singulares corresponderão apenas à integral em x , e portanto, precisamos apenas alterar o peso correspondente a essa integral. O peso na integral em y permanece sendo 1 como usualmente.

A ideia é escolher um peso ω de tal forma que $\frac{\chi}{\omega}(x \rightarrow -1)$ seja diferente de zero. Assim, após a integração, as somatórias (6.42) não irão conter um termo que se anula em $x = -1$ ($i = 0$).

Veremos na seção 7.2 que a transformação $R(x, y)$ obtida por interpolação transfinita para um elemento com uma aresta sobre o eixo é dada pela equação³ (7.10):

$$R(x, y) = \frac{\Gamma_r(y)}{2}(1 + x). \quad (6.46)$$

Isso motiva a escolha do peso ω para coordenadas cilíndricas ($\chi = R$):

$$\omega(x) = 1 + x, \quad (6.47)$$

³Fazendo as seguintes identificações: $\xi = x$, $\eta = y$, $\vec{I}_1 = 0$ e $\vec{I}_2 \cdot \hat{r} = \Gamma_r(y)$.

de tal forma que, mesmo quem ambos $\chi(x)$ e $\omega(x)$ tendam a zero para $R \rightarrow 0$, a sua razão permanece não nula. Podemos ver isso calculando a derivada parcial $\partial_x R$ no ponto (x_0, y) :

$$\frac{\partial R}{\partial x}(x_0, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{R(x, y) - R(x_0, y)}{x - x_0} \right). \quad (6.48)$$

Usando $x_0 = -1$ e $R(-1, y) = 0$ temos

$$\frac{\partial R}{\partial x}(-1, y) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{R}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\chi}{\omega}. \quad (6.49)$$

Assim, basta escolher uma transformação $R(x, y)$ tal que $\partial_x R(-1, y) \neq 0$ que a singularidade será removida. Por exemplo, uma transformação do tipo (6.46) terá $\partial_x R = \Gamma_r(y)/2$. ($\Gamma_r(y)$ é necessariamente não nulo para um elemento com quatro lados.)

O mesmo pode ser feito para coordenadas polares ($\chi = R^2$), por meio da função peso $\omega(x) = (1+x)^2$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\chi}{\omega} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{R^2}{(1+x)^2} = \left(\lim_{x \rightarrow -1} \frac{R}{1+x} \right)^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial x}(-1, y) \right)^2. \quad (6.50)$$

Sabemos que os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$ são autofunções de um problema de Sturm-Liouville singular, e assim, satisfazem a uma relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \omega^{(\alpha, \beta)}(x) dx = 0 \quad m \neq n. \quad (6.51)$$

com peso

$$\omega^{(\alpha, \beta)} = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta. \quad (6.52)$$

Os polinômios de Legendre ($\alpha = \beta = 0$) e os polinômios de Chebyshev ($\alpha = \beta = 1/2$) são casos particulares dos polinômios de Jacobi. Portanto, os pesos cilíndrico e esféricos correspondem, respectivamente, aos casos ($\alpha = 0, \beta = 1$) e ($\alpha = 0, \beta = 2$). Os polinômios de Lagrange podem então ser gerados pelos zeros dos polinômios de Jacobi, e a integral em x (6.45) substituída por uma quadratura de Gauss-Lobatto-Jacobi conveniente.

Fournier *et al.* [166] (2004) apresenta algumas fórmulas de recorrência e de derivadas satisfeitas pelos polinômios de Jacobi utilizados nessa formulação. Ainda, em Ferdinando *et al.* [167] (2007), foi verificada a convergência espectral dessa formulação para um problema de convecção-difusão.

Aplico então, em meu código numérico, quadraturas Gauss-Lobatto-Jacobi (com $\alpha = 0$ e $\beta = 1$) nos elementos que contém uma aresta sobre o eixo singular (e somente na integração em x) e quadraturas Gauss-Lobatto-Legendre para todos os outros elementos, de acordo com o que foi apresentado.

6.3 Método dos elementos espectrais

Nos *métodos multidomínios* o domínio de interesse é dividido em subdomínios menores, dentro dos quais é possível realizar as aproximações individualmente, impondo certas condições de acoplamento. A extensão dos métodos espectrais para métodos multidomínios tem muitas vantagens, dentre as quais podemos elencar o tratamento de geometrias complexas, problemas com soluções descontínuas, singularidades nas coordenadas e questões sobre eficiência e precisão. Além disso, métodos multidomínios são melhor adaptados a sistemas de computação paralela.

O método espectral nodal (também chamado de método pseudoespectral) baseado no método de Galerkin discutido na seção anterior pode ser estendido ao caso multidomínio, caso em que é chamado de *método dos elementos espectrais*. Nele o domínio é dividido em quadriláteros que não se sobrepõem (o que sempre é possível de ser feito em duas dimensões). Cada quadrilátero é chamado de *elemento*. O conjunto de todos os elementos é chamado de *malha*. Os elementos podem ter lados retos ou curvos, assim como em um único domínio. Dentro de cada elemento coloca-se um conjunto de $N \times M$ nós de Gauss-Lobatto, sobre os quais a aproximação de Galerkin da solução é feita. Para evitar confusão, o conjunto de nós dentro de um elemento é chamado *grid*, enquanto que o conjunto de elementos é a *malha*.

Para facilitar a implementação, elementos vizinhos devem compartilhar um lado inteiro ou um único vértice. Malhas que satisfazem essa condição são chamadas de *geometricamente conforme*. Os nós em cada lado da fronteira para dois elementos vizinhos podem não coincidir, caso em que a malha é chamada de *funcionalmente não conforme*. Porém, por facilidade de implementação utiliza-se a condição de que os nós sobre as arestas de elementos vizinhos coincidam, ou seja, os polinômios têm sempre a mesma ordem na direção da aresta para elementos vizinhos.

Para estender o método nodal de Galerkin para o caso multidomínios é necessário somente uma maneira de se acoplar os domínios. No método dos elementos espectrais o acoplamento é feito impondo-se apenas a *continuidade* das aproximações nas fronteiras. Como o método nodal de Galerkin segue da forma fraca das equações, é natural que as condições de suavidade das soluções sejam atenuadas. Com isso, são obtidas soluções não estritamente diferenciáveis, o que é conveniente ao se tratar de problemas em que as soluções têm esse perfil, necessitando somente ajustar o domínio numérico às linhas (ou superfícies) físicas de não diferenciabilidade⁴.

À classe de métodos multidomínios que se utilizam dessa formulação Kopriva [161]

⁴Um exemplo desse comportamento é a densidade de matéria em um disco grosso politrópico. A função $\rho(r, z)$ deve ser contínua na superfície do toro, com $\rho(r, z_s(r)) = 0$, mas não necessariamente diferenciável: $\left| \vec{\nabla} \rho \right|_s = \left| \Gamma K \rho^{2-\Gamma} \vec{\nabla} W \right|_s \rightarrow \infty$ para $\Gamma > 2$.

chama de métodos de elementos espectrais, por causa da similaridade com os métodos dos elementos finitos. Alguns autores, porém, dão esse nome a métodos espectrais multidomínios em geral. Tradicionalmente, nos chamados *métodos espectrais multidomínio*, é utilizada a *forma forte* das equações e o acoplamento é feito exigindo-se a continuidade das funções e dos *fluxos* (derivadas primeiras) através de domínios vizinhos.

Vejamos então como é feito o acoplamento entre os elementos vizinhos no método dos elementos espectrais. O método é baseado na forma fraca, dada pela equação (6.24)

$$\int_S \nabla^2 \Phi \phi \, dA = 4\pi \int_S \rho \phi \, dA.$$

Integrando por partes, e para condições de Dirichlet $\phi = 0$ ao longo da fronteira temos

$$- \int_S \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \phi \, dA = 4\pi \int_S \rho \phi \, dA. \quad (6.53)$$

Nesse ponto, no método dos elementos espectrais o domínio S é subdividido em K elementos quadriláteros que não se sobrepõem, denotados por S_k , $k = 1..K$. As integrais podem então ser quebradas em uma soma de integrais sobre os elementos

$$- \sum_{k=1}^K \int_{S_k} \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \phi \, dA_k = \sum_{k=1}^K 4\pi \int_{S_k} \rho \phi \, dA_k, \quad (6.54)$$

de tal forma que em cada elemento contribui

$$I_k \equiv \int_{S_k} \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \phi \, dA_k + 4\pi \int_{S_k} \rho \phi \, dA_k \quad (6.55)$$

para a integral total, que são contribuições exatamente iguais à integral para um único domínio. Note, no entanto, que as somas acima não se anulam para cada elemento individualmente, mas somente para a soma de todos eles ($\sum_{k=1}^K I_k = 0$). As contribuições não nulas vem dos elementos de fronteira, que se anulam quando somadas às contribuições de elementos vizinhos, iguais ao negativo dessas.

Mapeando agora cada elemento no quadrado unitário através de uma transformação de coordenadas $r_k = R_k(x_k, y_k)$, $z_k = Z_k(x_k, y_k)$,

$$I_k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[F^x \frac{\partial \phi}{\partial x} + F^y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx_k dy_k + 4\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho J^{(k)} \phi \, dx_k dy_k, \quad (6.56)$$

o que é análogo ao caso de domínio único (6.27). A diferença agora é que, para aproximar a expressão (6.56), aproxima-se ρ e Φ por polinômios *contínuos por partes*. O mesmo para as funções teste ϕ :

$$\phi^{(k)} = \sum_{i=0}^{N_k} \sum_{j=0}^{M_k} \Phi_{ij}^{(k)} \ell_i(x) \ell_j(y). \quad (6.57)$$

Para forçar a continuidade das funções teste exigimos que os valores nodais $\phi_{ij}^{(k)}$ sejam os mesmos ao longo de cada borda e de cada vértice dos elementos na malha. O mesmo vale para o potencial e para a densidade. Perceba, no entanto, que isso garante que as aproximações sejam apenas *contínuas* nas fronteiras, e não necessariamente diferenciáveis.

Substituindo a expansão (6.57) por ϕ em (6.56):

$$I_k = \sum_{i=0}^{N_k} \sum_{j=0}^{M_k} \phi_{ij}^{(k)} \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[F^x \ell'_i(x) \ell_j(y) + F^y \ell_i(x) \ell'_j(y) \right] dx_k dy_k \right] \\ + \sum_{i=0}^{N_k} \sum_{j=0}^{M_k} \phi_{ij}^{(k)} \left[4\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho J^{(k)} \ell_i(x) \ell_j(y) dx_k dy_k \right]. \quad (6.58)$$

A expressão acima é igual à equação (6.30) do problema de domínio único, com a única diferença que naquele caso as somatórias vão de 1 a $N - 1$ e 1 a $M - 1$, pois os valores nodais de fronteira se anulavam devido às condições de contorno de Dirichlet. No caso da expressão (6.58) esses valores de fronteira não se anulam, mas devem igualar aos valores nodais dos outros domínios dos quais o ponto em questão pertence.

Como as integrais da expressão (6.58) acima são idênticas às integrais da equação (6.31), já sabemos quais são suas aproximações nodais após aplicadas as quadraturas: são dadas pela equação (6.38). Assim,

$$I_k = \sum_{i=0}^{N_k} \sum_{j=0}^{M_k} \phi_{ij}^{(k)} \left[\sum_{n=0}^{N_k} D_{in}^{t(x)} F_{nj}^{x(k)} w_n w_j + \sum_{m=0}^{M_k} D_{jm}^{t(y)} F_{im}^{y(k)} w_i w_m + 4\pi \rho_{ij}^{(k)} J_{ij}^{(k)} w_i w_j \right]. \quad (6.59)$$

A soma global sobre todos os elementos nos dá a forma final da aproximação:

$$\sum_{k=1}^K \left\{ \sum_{i=0}^{N_k} \sum_{j=0}^{M_k} \phi_{ij}^{(k)} \left[\sum_{n=0}^{N_k} D_{in}^{t(x)} F_{nj}^{x(k)} w_n w_j + \sum_{m=0}^{M_k} D_{jm}^{t(y)} F_{im}^{y(k)} w_i w_m + 4\pi \rho_{ij}^{(k)} J_{ij}^{(k)} w_i w_j \right] \right\} = 0. \quad (6.60)$$

Assim como no caso de domínio único, um termo do tipo (6.39) que dá a contribuição do fluxo, deve ser adicionado à cada borda que tenha condições de contorno de Newman.

Uma última coisa a ser feita: usar o fato de que os valores nodais $\phi_{ij}^{(k)}$ são independentes, exceto ao longo da borda dos elementos e nos seus vértices, para obter as equações referentes a cada ponto que a solução deve satisfazer.

Para obter as equações de cada ponto para a aproximação (6.60), a primeira coisa é notar que os termos dentro das chaves é simplesmente a aproximação de domínio único aplicada ao elemento $\mathcal{S}_k$. Em pontos interiores aos elementos os valores nodais $\phi_{ij}^{(k)}$ são independentes, o que significa que a aproximação em um elemento é exatamente a aproximação de domínio único aplicada a ele. Isso porque podemos tomar as funções teste $\phi_{ij}^{(k)}$ como sendo igual a 1 em um único ponto x_{ij} interior ao elemento k e zero em todos os outros, sobrando apenas um termo entre colchetes.

Os elementos se acoplam porque a solução e as funções teste são contínuas nos pontos compartilhados por mais de um elemento. Em pontos de borda, a aproximação será a soma das aproximações de domínio único dos dois elementos que compartilham essa borda. Finalmente, nos vértices todos os elementos que compartilham o mesmo ponto contribuirão para a soma. Escrever todas as somas explicitamente seria muito longo, mas isso é relativamente fácil de se implementar.

Capítulo 7

Elementos Infinitos

7.1 Introdução

Uma vasta gama de técnicas foram desenvolvidas para lidar com domínios não limitados dentro dos métodos espectrais e dos elementos finitos. O que procuro é uma metodologia para tratar eficientemente esse tipo de domínio utilizando o método dos elementos espectrais, e assim manter as vantagens de ambos os métodos, a saber a eficiência espectral com a generalidade dos elementos finitos. Os métodos para a resolução de equações diferenciais parciais em domínios não limitados podem ser classificados, essencialmente, em três categorias:

- i)* Truncamento do domínio: trunca o domínio não limitado, tornando-o limitado e resolve as equações diferenciais parciais no domínio limitado, suplementado por condições de contorno artificiais ou transparentes;
- ii)* Funções de decaimento: aproxima a solução por funções de decaimento para garantir que o comportamento da aproximação no infinito reflita a física do problema;
- iii)* Mapeamento: Mapeia o domínio não limitado a um domínio limitado e aplica métodos usuais para resolver as equações diferenciais mapeadas no domínio limitado.

Boyd [152] apresenta uma excelente revisão sobre as propriedades gerais e implementações práticas para muitas dessas abordagens. Em geral, a estratégia de domínio truncado somente é uma opção viável para problemas com soluções com decaimento rápido (exponencial), ou quando condições de contorno exatas ou bastante precisas estão disponíveis para a superfície de truncamento. Por outro lado, com uma escolha apropriada de mapeamento e/ou parâmetros de dimensionamento, as duas outras abordagens podem ser aplicadas de maneira efetiva a uma variedade de problemas que apresentem soluções com decaimento rápido ou lento (ou mesmo crescentes).

Nos métodos espectrais, a técnica de mapeamento é aplicada essencialmente resolvendo-se a equação diferencial parcial mapeada (o que geralmente é trabalhoso de se lidar) por meio de técnicas usuais. A principal vantagem dessa abordagem é que ela pode ser implementada e analisada usando procedimentos e resultados de aproximação padrão, mas sua principal desvantagem é que a equação transformada geralmente é muito complicada, o que, em muitos casos, faz com que sua análise e implementação sejam muito onerosos. Por outro lado, no método dos elementos finitos são necessários dois mapeamentos em geral: um para a função de forma e um para a fórmula de integração [18]. São algumas vezes chamados de elementos infinitos “mapeados”.

Uma variedade infinita de mapeamentos é possível, mas podemos classificá-las em três classes, ilustradas cada uma por um exemplo:

- Mapeamento algébrico:

$$x = \frac{s(1 + \xi)}{1 - \xi}, \quad \xi = \frac{x - s}{x + s}. \quad (7.1)$$

- Mapeamento logarítmico:

$$x = s \operatorname{arctanh} \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) = \frac{s}{2} \ln \frac{3 + \xi}{1 - \xi}, \quad \xi = 1 - 2 \tanh \left(s^{-1} x \right). \quad (7.2)$$

- Mapeamento exponencial:

$$x = \sinh \left(\frac{s}{2} (1 + \xi) \right), \quad \xi = \frac{2}{s} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) - 1. \quad (7.3)$$

Esses são mapeamentos do intervalo semi-infinito, i.e., mapeamentos entre $x \in (0, \infty)$ e $\xi \in (-1, 1)$, com $s > 0$, mas mapeamentos para intervalos infinitos, $x \in (-\infty, \infty)$, das mesmas classe são também possíveis.

A característica especial que distingue esses mapeamentos é que, conforme $\xi \rightarrow 1$, x varia algebricamente, logaritmicamente ou exponencialmente para mapeamentos algébricos, logarítmicos ou exponenciais respectivamente. O parâmetro s é um fator de escala/dimensionamento que pode ser usado para um ajuste fino do espaçamento entre os pontos de colocação.

Métodos espectrais podem lidar de uma forma muito natural com domínios infinitos quando é possível usar funções de decaimento como as funções de Hermite (para domínios infinitos) ou de Laguerre (para domínios semi-infinitos), que são o produto de uma exponencial de decaimento com um polinômio, apesar de necessitarem de parâmetros de escala apropriados para melhorar os resultados numéricos [168].

Para o método dos elementos finitos, a ideia básica na abordagem de funções de decaimento é manter a função de forma dos elementos finitos mas multiplicá-la por uma

função de decaimento [18, 169]. O papel da função de decaimento é garantir que o comportamento do elemento no infinito reflete bem a física do problema lá. Isso em geral significa que a variável de campo deve tender monotonicamente ao seu valor de campo limite. Se a geometria do problema é simples (retangular) as integrais resultantes do método podem ser resolvidas analiticamente. Para elementos paramétricos (curvos) deve ser realizada uma integração numérica no intervalo de zero a infinito.

O uso de funções de decaimento tem algumas desvantagens. Por exemplo, polinômios de Laguerre dimensionam muito mal para polinômios de alta ordem [170] e resultam em uma convergência lenta para aproximações de soluções que não decaem a zero exponencialmente [171]. Para evitar essas dificuldades Boyd [171] propôs uma nova abordagem, que poderia ser enquadrada em duas das classes apresentadas. De fato, as três estratégias acima citadas não são completamente distintas: pode-se sempre combinar o mapeamento de coordenadas com o truncamento de domínio ou qualquer base para um intervalo não limitado, por exemplo. Além disso, o mapeamento é equivalente a se criar novas funções base cujo espaço natural de aplicação seja o intervalo infinito ou semi-infinito. E foi exatamente isso que Boyd fez: ele usou uma família de polinômios ortogonais, no caso os polinômios de Chebyshev $T_i(\xi)$, e realizou um mapa do infinito a um intervalo finito — o mapa algébrico $\xi(x)$ da equação (7.1) — obtendo uma nova família de funções ortogonais em $x \in (0, \infty)$, as funções base racionais ortogonais $T_i(\xi(x))$. Esse método foi estudado extensivamente na literatura (e.g., [172]).

Apesar de todas essas estratégias desenvolvidas no âmbito dos métodos espectrais e dos elementos finitos, aparentemente não existe uma abordagem padrão para lidar com elementos infinitos dentro do método dos elementos espectrais. Qualquer uma das técnicas usadas com os outros métodos poderia ser tentada. Além disso, não é de meu conhecimento referências na literatura sobre o uso elementos infinitos com esse método numérico, a não ser por Black [17], que faz uso do mapeamento e das funções racionais introduzidas por Boyd, porém utilizando polinômios de Legendre. Nesse trabalho a metodologia de Boyd foi aplicada dentro do chamado método dos elementos finitos $h - p$, que permite um refinamento em h (escala dos elementos utilizados) e outro em p (ordem do polinômio dentro de cada elemento). Essa, no entanto, é uma abordagem *modal* do método dos elementos espectrais, em que as variáveis essenciais são os coeficientes de uma expansão modal em funções base ortogonais, como os polinômios de Legendre, usando uma função peso para utilizar a ortogonalidade de tais funções¹. A aproximação é portanto construída no espaço espectral, como uma combinação linear de polinômios de Legendre. A matriz de

¹No caso dos polinômios de Legendre essa função peso é a identidade, $\omega = 1$. Para polinômios de Jacobi em geral é dada pela equação (6.52): $\omega^{(\alpha, \beta)} = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$.

rigidez² resultante dessa formulação, apesar de não ser diagonal, é uma matriz de banda mas que não é simétrica. Black [17] faz uma comparação de seu método com o método de polinômios de Laguerre e mostra também que esse último gera uma convergência rápida para equações cuja solução decai exponencialmente, mas não mais para àquelas cuja solução decai somente algebricamente. Por outro lado, usando a técnica de mapeamento com polinômios de Legendre (funções racionais), obtém a convergência em ambas as situações.

O método que emprego nesse trabalho, no entanto, é o método dos elementos espectrais *nodal*, em que a aproximação é encontrada a partir de um polinômio interpolante sobre as abscissas de uma quadratura de Gauss-Lobatto, os pontos de colocação. O que desenvolvo então no restante desse capítulo é uma técnica para implementar elementos não limitados, seguindo as linhas gerais sugeridas por Zienkiewicz para o método dos elementos finitos. Trabalho aqui somente com mapas para intervalos semi-infinitos, i.e., mapas entre $x \in [0, \infty]$ e $\xi \in [-1, 1]$. O que faço é basicamente mapear as bordas que se estendem ao infinito, aplicando em seguida uma interpolação linear transfinita para obter o mapeamento final. Dessa forma as equações mapeada podem trabalhadas da maneira usual por meio do método dos elementos espectrais.

A teoria dos elementos infinitos mapeados na forma dada por Zienkiewicz foi esboçada em 1981 por Zienkiewicz, Bettess, Chiam e Emson [173], em um artigo que revisou todos os tipos de problemas exteriores até então, e os primeiros resultados usando o novo elemento publicados em 1983, por Zienkiewicz *et al.* [174]. Apresento essa formulação na seção 7.3.

Na próxima seção apresento escrevo as equações mapeadas do método espectral nodal e a técnica de interpolação transfinita para lidar com elementos gerais (curvos). Em seguida, na seção 7.3, introduzo o mapa usado no método dos elementos finitos, conforme descrito por Bettess [18]. Então, apresento a minha estratégia para introduzir elementos infinitos no método dos elementos espectrais, para o caso em duas dimensões, na seção 7.4. Por fim, na seção 7.5, mostro como a minha metodologia gera elementos com bordas curvas assintóticas ao utilizar mapas de ordens superiores para as bordas que se estendem ao infinito.

7.2 Mapeamento do domínio físico para o domínio computacional

Nesta seção apresento o mapeamento usado nos métodos espectrais para lidar com geometrias curvas. Por simplicidade mostrarei as equações para o caso de duas dimensões,

²A matriz de rigidez é a matriz do sistema algébrico de equações resultante do processo de discretização, e que deve ser resolvido para se obter a aproximação da solução. Para a equação de Poisson e o método de Galerkin apresentado na seção 6.1 é dada pelo lado esquerdo da equação 6.38. O nome se deve ao desenvolvimento do método dos elementos finitos em análise estrutural.

mas a extensão para três pode ser feita de maneira direta.

Geralmente em um método espectral nós temos *coordenadas no espaço computacional* $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$, onde $\xi, \eta \in [-1, 1]$, que mapeiam *coordenadas do espaço físico* $\vec{x} = (x, y)$ através da transformação $\vec{x} = \vec{X}(\xi, \eta)$. Por motivo de simplicidade e generalidade da metodologia desenvolvida, trabalho nesse capítulo com coordenadas retangulares $\vec{x} = (x, y)$ ao invés das coordenadas cilíndricas $\vec{r} = (r, z)$ apresentadas no capítulo 6, e denoto as coordenadas numéricas por (ξ, η) ao invés de (x, y) . Assim, a transformação será dada pelas funções $\vec{X}(\xi, \eta) = (X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta))$ ao invés de $\vec{R} = (R(x, y), Z(x, y))$. Chamarei a atenção às situações em que o sistema cilíndrico (ou esférico) apresentar alguma particularidade, o que basicamente ocorre na determinação dos pontos singulares do Jacobiano e dos coeficientes métricos, como veremos abaixo.

No método dos elementos espectrais uma transformação desse tipo é feita dentro de cada elemento. A situação mais geral ocorre quando cada elemento é limitado por quatro curvas, $\vec{\Gamma}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$), o que gera um sistema muito flexível para tratar geometrias complexas (veja figura 7.1).

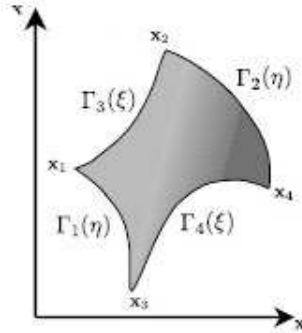


Figura 7.1: Elemento genérico, com quatro lados curvos. O elemento é limitado pelas quatro curvas $\vec{\Gamma}_1(\eta)$, $\vec{\Gamma}_2(\eta)$, $\vec{\Gamma}_3(\xi)$ e $\vec{\Gamma}_4(\xi)$, que ligam os quatro vértices $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ e $\vec{x}_4$. As curvas $\vec{\Gamma}_1$ e $\vec{\Gamma}_2$ são parametrizadas pela coordenada η e $\vec{\Gamma}_3$ e $\vec{\Gamma}_4$ pela coordenada ξ .

Essas curvas devem ser representadas por uma fórmula analítica ou por interpolação. No entanto, vimos na seção 6.1 que mesmo se tivermos sua forma analítica, devemos usar uma interpolação polinomial para evitar erros de *aliasing*. Portanto, geralmente é usada uma interpolação transfinita *isoparamétrica*, onde essas curvas são aproximadas por polinômios de mesma ordem que as aproximações para as soluções espectrais. Ao se fazer isso diferenciação e interpolação comutam, o que faz com que as identidades métricas sejam satisfeitas, o que evita assim erros de *aliasing* [161].

Parametrizando as curvas $\vec{\Gamma}_1(\eta)$ e $\vec{\Gamma}_2(\eta)$ pela coordenada η e $\vec{\Gamma}_3(\xi)$ e $\vec{\Gamma}_4(\xi)$ pela coordenada ξ , e denotando por $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ e $\vec{x}_4$ os quatro vértices do elemento de acordo com

a figura 7.1, orientamos as coordenadas numéricas de forma que

$$\begin{aligned}\vec{I}_1(-1) &= \vec{I}_3(-1) = \vec{x}_1, \\ \vec{I}_2(-1) &= \vec{I}_3(+1) = \vec{x}_2, \\ \vec{I}_1(+1) &= \vec{I}_4(-1) = \vec{x}_3, \\ \vec{I}_2(+1) &= \vec{I}_4(+1) = \vec{x}_4.\end{aligned}\tag{7.4}$$

A transformação é criada por uma interpolação linear entre as quatro curvas que representam as fronteiras, chamada de *interpolação transfinita*. O mapa $\vec{X}(\xi, \eta)$ resultante é dado por [161]

$$\begin{aligned}\vec{X}(\xi, \eta) &= M_1(\xi)\vec{I}_1(\eta) + M_2(\xi)\vec{I}_2(\eta) + L_1(\eta)\vec{I}_3(\xi) + L_2(\eta)\vec{I}_4(\xi) + \\ &\quad -M_1(\xi)[L_1(\eta)\vec{x}_1 + L_2(\eta)\vec{x}_3] - M_2(\xi)[L_1(\eta)\vec{x}_2 + L_2(\eta)\vec{x}_4].\end{aligned}$$

$L_i(\eta)$ e $M_i(\xi)$ são funções interpolantes de Lagrange, que interpolam as coordenadas η e ξ respectivamente, para os pontos ± 1

$$L_1(\eta) = \frac{1 - \eta}{2}, \quad L_2(\eta) = \frac{1 + \eta}{2},\tag{7.5}$$

com $M_1(\xi) = L_1(\xi)$ e $M_2(\xi) = L_2(\xi)$, de tal forma que $L_1(-1) = 1$, $L_1(+1) = 0$, $L_2(-1) = 0$, $L_2(+1) = 1$.

Essa transformação é criada impondo-se a condição de resultar nas quatro curvas limitantes para as coordenadas numéricas $\xi, \eta = \pm 1$:

$$\begin{aligned}\vec{X}(-1, \eta) &= \vec{I}_1(\eta), \\ \vec{X}(+1, \eta) &= \vec{I}_2(\eta), \\ \vec{X}(\xi, -1) &= \vec{I}_3(\xi), \\ \vec{X}(\xi, +1) &= \vec{I}_4(\xi),\end{aligned}\tag{7.6}$$

e fazendo-se um acoplamento linear entre elas no interior.

Em geral, a região física é limitada por quatro bordas curvas, e os elementos que contém um de seus lados sobre a fronteira do domínio total terão necessariamente a borda correspondente curva. No entanto, podemos utilizar *retas* para separar elementos interiores ao domínio. Seria então suficiente manter apenas *uma* borda do elemento curva, a borda do domínio físico, tomando as outras como sendo linhas retas, as chamadas *bordas internas*. Manterei aqui, no entanto, *duas* bordas genéricas (curvas), $\Gamma_1(\eta)$ e $\Gamma_2(\eta)$, o que não tornará a formulação muito mais complicada e permitirá construir um sistema de coordenadas global mais suave para elementos infinitos bidimensionais, na seção 7.6.

Dessa forma, as outras duas curvas $\Gamma_3(\xi)$ e $\Gamma_4(\xi)$ serão retas, que podem ser escritas por meio dos interpolantes de Lagrange $M_i(\xi)$ e dos vértices de cada curva:

$$\vec{\Gamma}_3(\xi) = M_1(\xi)\vec{x}_1 + M_2(\xi)\vec{x}_2, \quad (7.7)$$

$$\vec{\Gamma}_4(\xi) = M_1(\xi)\vec{x}_3 + M_2(\xi)\vec{x}_4. \quad (7.8)$$

A equação (7.5) resulta então na transformação de coordenadas

$$\vec{X}(\xi, \eta) = M_1(\xi)\vec{\Gamma}_1(\eta) + M_2(\xi)\vec{\Gamma}_2(\eta), \quad (7.9)$$

ou seja,

$$\vec{X}(\xi, \eta) = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)\vec{\Gamma}_1(\eta) + \left(\frac{1+\xi}{2}\right)\vec{\Gamma}_2(\eta). \quad (7.10)$$

$\vec{\Gamma}_1(\eta)$ e $\vec{\Gamma}_2(\eta)$ podem ainda ser tomadas como sendo linhas retas, como em (7.7-7.8), resultando em um elemento quadrilátero com lados retos.

A partir dessa transformação, as equações podem ser mapeadas, elas mesmas, para o novo sistema de coordenadas, essencialmente como resultado da regra da cadeia. Na seção 6.1 vimos como é feito esse mapeamento, mas para o caso de coordenadas cilíndricas. Nas coordenadas retangulares apresentadas nessa seção o Laplaciano (6.23) é escrito da mesma forma

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial F^\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial F^\eta}{\partial \eta} \right), \quad (7.11)$$

com o Jacobiano (6.11) dado por

$$J = \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}. \quad (7.12)$$

Observe que aqui não aparece um termo R na frente como no caso cilíndrico. F^i são os fluxos contravariantes

$$F^i = Jg^{i\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + Jg^{i\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad (7.13)$$

dados em termos dos coeficientes métricos

$$g^{\xi\xi} = \frac{1}{J^2} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \frac{(\partial_\eta X)^2 + (\partial_\eta Y)^2}{[\partial_\eta X \partial_\xi Y - \partial_\xi X \partial_\eta Y]^2}, \quad (7.14)$$

$$g^{\eta\eta} = \frac{1}{J^2} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 \right] = \frac{(\partial_\xi X)^2 + (\partial_\xi Y)^2}{[\partial_\eta X \partial_\xi Y - \partial_\xi X \partial_\eta Y]^2}, \quad (7.15)$$

$$g^{\xi\eta} = g^{\eta\xi} = -\frac{1}{J^2} \left[\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right] = -\frac{\partial_\xi X \partial_\eta X + \partial_\xi Y \partial_\eta Y}{[\partial_\eta X \partial_\xi Y - \partial_\xi X \partial_\eta Y]^2}. \quad (7.16)$$

Observe que a segunda forma dos coeficientes métricos acima segue a mesma relação funcional com as derivadas de $X(\xi, \eta)$ e $Y(\xi, \eta)$ que os coeficientes (6.14-6.16) da transformação das coordenadas cilíndricas com as derivadas de $R(x, y)$ e $Z(x, y)$.

Assumindo que $\vec{X}(\xi, \eta)$ é definido pelo mapa transfinito da equação (7.10), as derivadas da transformação, que compõem os termos métricos g^{ij} acima, são dadas por:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} [\vec{I}_2(\eta) - \vec{I}_1(\eta)], \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \eta} = \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) \vec{I}'_2(\eta) + \left(\frac{1 - \xi}{2} \right) \vec{I}'_1(\eta). \quad (7.18)$$

Construindo as curvas $\vec{I}_i$ por meio de interpolações sobre nós prefixados usando polinômios interpolantes de Lagrange, os coeficientes métricos pode ser obtidos utilizando derivadas desses polinômios de Lagrange. Esse é o procedimento padrão no método nodal dos elementos espectrais.

Dada essa formulação padrão para elementos curvos, a tarefa agora é modificá-la para permitir elementos infinitos. Para tanto, o que faço é modificar as curvas $\vec{I}_3(\xi)$ e $\vec{I}_4(\xi)$ para fazer com que elas se estendam ao infinito espacial (veja seção 7.4), de forma que o restante do procedimento padrão pode ser mantido inalterado. Contudo, ao se fazer isso surgem algumas complicações: o Jacobiano e alguns termos métricos explodem no infinito de forma que para descrever o comportamento correto da aproximação no infinito é necessário uma análise da equação mapeada.

Permita-me antes, no entanto, descrever o procedimento dos elementos infinitos mapeados, conforme formulado por Bettess [18], para o método dos elementos finitos.

7.3 Elementos infinitos mapeados

Dois dos principais conceitos envolvendo elementos infinitos são o uso de funções de decaimento que multiplicam a função de forma³ do elemento na direção infinita, e o uso de alguma função de forma completamente nova na direção infinita. Esse segundo tipo de elemento infinito quase sempre envolve um mapeamento, ao menos para obter uma fórmula de integração numérica, e são chamados de elementos infinitos “mapeados”.

Normalmente o processo envolve dois mapeamentos: um para a função de forma e um para a integração numérica, geralmente realizada por quadratura de Gauss-Legendre. A metodologia de Zienkiewicz *et al.* [173, 174] identifica esses dois mapas. Isso tem a

³No método dos elementos finitos constrói-se a aproximação da solução sobre um conjunto de pontos. A *função de forma* é qualquer fórmula matemática que realiza a interpolação entre esses pontos para se obter as aproximações onde não há pontos definidos pela malha. No caso do método dos elementos espectrais *nodal* as funções de forma são os polinômios de Lagrange.

grande vantagem de que as abscissas e pesos da integração original de Gauss-Legendre são mantidos. A única mudança em uma rotina de elementos finitos para tornar o elemento infinito é um novo cálculo da matriz Jacobiana. O principal benefício desse método é sua simplicidade, e a forma com que polinômios de ξ são mapeados em polinômios em potências inversas de x , o que é altamente desejável para convergência. Outras abordagens são similares, mas têm algumas desvantagens: alguns executam a integração no domínio infinito, e portanto devem modificar as abscissas e pesos, por exemplo.

7.3.1 Elementos infinitos mapeados de Zienkiewicz

Considere a geometria de um problema unidimensional. O elemento se estende do ponto x_1 , passando por x_2 , até o ponto x_3 que está no infinito. x_0 é tomado como sendo o “polo” do comportamento radial. Esse elemento deve então ser mapeado no domínio finito $-1 \leq \xi \leq 1$. Isso é mostrado na figura 7.2.

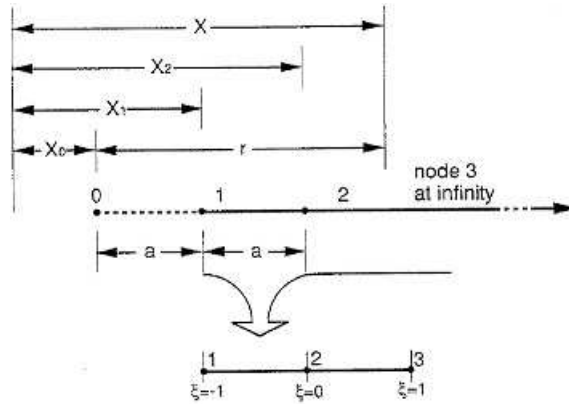


Figura 7.2: Elemento infinito mapeado de Zienkiewicz.

Um mapa apropriado seria

$$x = \tilde{N}_0(\xi)x_0 + \tilde{N}_2(\xi)x_2 \quad (7.19)$$

onde

$$\tilde{N}_0(\xi) = -\frac{\xi}{1-\xi} \quad \tilde{N}_2(\xi) = \frac{1}{1-\xi}. \quad (7.20)$$

Em

$$\begin{aligned} \xi = 1, & \quad x = \frac{\xi}{1-\xi}(x_2 - x_0) + x_2 = x_3 = \infty \\ \xi = 0, & \quad x = x_2 \\ \xi = -1, & \quad x = \frac{x_0 + x_2}{2} = x_1. \end{aligned} \quad (7.21)$$

O ponto em $\xi = -1$ deve corresponder ao ponto x_1 , que é definido como sendo o ponto médio entre x_0 e x_2 . Isso significa que a metade interna do elemento infinito tem a mesma extensão que a distância, finita, do “polo” à borda interna do elemento infinito. Se isso não for adequado, é possível escolher x_1 tal que ele fique em qualquer lugar entre x_0 e x_2 e não simplesmente no meio. Isso pode ser obtido escrevendo

$$x_1 = x_0 + \gamma(x_2 - x_0), \quad (7.22)$$

mas o formalismo foi desenvolvido somente para o caso $\gamma = 1/2$.

O mapa acima pode ser escrito em termos de quaisquer duas das quantidades seguintes: x_0, x_1, x_2, a , onde $a \equiv x_2 - x_1 = x_1 - x_0$. Por exemplo o mapa poderia ser escrito como

$$x = (2x_1 - x_2)\tilde{N}_0 + x_2\tilde{N}_2. \quad (7.23)$$

É mais conveniente relacionar o mapa aos nós do elemento (conforme feito nos elementos finitos e elementos espectrais), ao invés do polo x_0 . Então, substituindo as funções $\tilde{N}_0(\xi)$ e $\tilde{N}_2(\xi)$ na equação (7.23) obtemos

$$x = M_1(\xi)x_1 + M_2(\xi)x_2, \quad (7.24)$$

onde

$$M_1(\xi) = -\frac{2\xi}{1-\xi} \quad M_2(\xi) = \frac{1+\xi}{1-\xi} \quad (7.25)$$

são as funções de mapeamento para os nós x_1 e x_2 respectivamente. Elas têm as mesmas propriedades de interpolação das funções de Lagrange para os pontos $x_1 = -1$ e $x_2 = 0$ (que seriam $L_1(\xi) = -\xi$ e $L_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$), ou seja, $M_1(-1) = 1$, $M_1(0) = 0$, $M_2(-1) = 0$ e $M_2(0) = 1$. A diferença é que contêm um fator adicional $\frac{2}{1-\xi}$.

Em teoria teríamos que ter uma função de mapeamento para o último nó x_3 em $\xi = 1$ também, o nó no infinito, mas ela não é escrita porque é difícil de conceber e de definir. Além do mais ela não é necessária pois a transformação já “interpola” esse ponto, visto que $x(1) = \infty = x_3$.

Uma propriedade importante para esses mapas é a condição de que

$$\tilde{N}_0(\xi) + \tilde{N}_2(\xi) = M_1(\xi) + M_2(\xi) = 1, \quad (7.26)$$

pois caso contrário o mapeamento será afetado por qualquer mudança na origem do sistema de coordenadas.

Um mapa entre os domínios finito e infinito foi então estabelecido. O próximo passo é verificar qual a forma que polinômios no domínio finito, em ξ , são transformados no domínio não limitado x . Considere o polinômio

$$P = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 + \dots \quad (7.27)$$

que o polinômio típico usado no método dos elementos finitos. O mapa de ξ para x (7.24) e sua inversa, escritos em termos de x_0 e a são

$$x = x_0 + \frac{2a}{1 - \xi}, \quad \xi = 1 - \frac{2a}{x - x_0}. \quad (7.28)$$

Definindo $r \equiv x - x_0$, podem ser escritos como

$$r = \frac{2a}{1 - \xi}, \quad \xi = 1 - \frac{2a}{r}. \quad (7.29)$$

Substituindo isso no polinômio geral P , obtém-se um novo polinômio em potências do inverso de r :

$$P = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \frac{\beta_3}{r^3} + \dots \quad (7.30)$$

onde β_i podem ser determinados dos α 's e a . Se exige-se que o polinômio decaia a zero no infinito então $\beta_0 = 0$. Agora vemos o porquê x_0 é dito ser o polo do mapa. Muitos problemas de potencias externos tem soluções da forma (7.30) e a grande vantagem desse mapa é que eles podem ser modelados usando polinômios ordinários em elementos finitos. Qualquer grau de precisão pode ser obtido adicionando termos extras à serie.

A equação (7.29) implica em uma relação estrita entre ξ e r , que deve ser seguido ao se posicionar os nós do elemento infinito na direção radial. Por exemplo, ao se usar o mapa quadrático acima, se o primeiro nó está a uma distância a do “polo” do problema, o nó central deve estar a uma distância $2a$ para se obter um mapa apropriado. Se os nós são colocado em outras posições o resultado não estará necessariamente errado, mas são imprevisíveis. Certamente o polinômio em ξ não mapeará a uma forma como a equação (7.30). Contudo, o uso de espaçamentos entre nós não ditados pela relação entre ξ e r dada pela equação (7.29), em conjunto com funções de mapeamento mais complicadas, abrem a possibilidade de modelar tipos de comportamentos mais complicados. Muitas formas de funções racionais poderiam ser simuladas, por exemplo.

7.3.2 Funções de mapeamento de ordem superior

A função de mapeamento de um elemento unidimensional linear, ou seja, com dois nós: um em r_1 e outro em $r_2 = \infty$, seria simplesmente

$$\tilde{M}_1(\xi) = \frac{2}{1 - \xi}. \quad (7.31)$$

Pode-se mostrar que esse mapeamento já fornece um desempenho satisfatório. Seja a coordenada r_1 do limite esquerdo do elemento infinito igual a a . Então,

$$r = \tilde{M}_1(\xi)r_1 = \frac{2a}{1 - \xi} \quad (7.32)$$

que é o mapa obtido antes, na equação (7.29), usando funções quadráticas (para três nós: x_1 , x_2 e $x_3 = \infty$). Ele possui todas as características interessante do mapeamento de um polinômio em ξ em outro em $1/r$. Poderia-se então argumentar que não há necessidade de se ir além disso para obter uma função de mapeamento ideal para elementos infinitos. O benefício adicional de funções de mapeamento quadráticas e de ordens superiores está no controle da posição do polo da expansão (através da transformação $r = x - x_0$ para funções quadráticas), que pode variar de elemento para elemento.

Além disso, o que de fato estou interessado aqui, é que funções de mapeamento de ordem superior abrem a possibilidade de se construir elementos infinitos isoparamétricos de ordem superior. De fato, o método dos elementos finitos é usado em sua grande maioria com funções de forma lineares e quadráticas, sendo o método dos elementos espectrais sua extensão a funções de forma de ordens superiores. Bettess [18] sugere uma forma com que elementos infinitos mapeados podem ser estendidos a funções de mapeamento de ordens superiores. O método, que mostro abaixo, é uma extensão natural da formulação acima, e é o que de fato usarei para estender os elementos infinitos mapeados ao método dos elementos espectrais.

Considere um elemento finito quadrático unidimensional, com os nós convenientemente posicionados em $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ e $\xi_3 = 1$. As funções de forma são dadas pelos polinômios interpolantes padrão de Lagrange para esses nós, e são dadas por

$$L_1(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \right) \left(\frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} \right) = \left(\frac{\xi - 0}{-1 - 0} \right) \left(\frac{\xi - 1}{-1 - 1} \right) = -\xi \left(\frac{1 - \xi}{2} \right), \quad (7.33)$$

$$L_2(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \right) \left(\frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \right) = \left(\frac{\xi + 1}{0 + 1} \right) \left(\frac{\xi - 1}{0 - 1} \right) = (1 + \xi)(1 - \xi), \quad (7.34)$$

$$L_3(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} \right) \left(\frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} \right) = \left(\frac{\xi + 1}{1 + 1} \right) \left(\frac{\xi - 0}{1 - 0} \right) = \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) \xi. \quad (7.35)$$

Comparando as duas primeiras funções, para ξ_1 e ξ_2 , com as funções de mapeamento (7.25) notamos que a única diferença entre elas é o termo referente a $\xi = 1$, isto é, o termo no “infinito” (os quais envolve um $(1 - \xi)/2$). Isso é demonstrado na tabela (7.1): O termo no

Número do Nó: i	ξ_i	Funções de Forma $L_i(\xi)$ do Elemento Finito Quadrático	Funções de Mapeamento $M_i(\xi)$ do Elemento Infinito Quadrático
1	-1	$-\xi \times (1 - \xi)/2$	$-\xi \times 2/(1 - \xi)$
2	0	$(1 + \xi) \times (1 - \xi)$	$(1 + \xi)/(1 - \xi)$
3	1	$[(1 + \xi)/2] \times \xi$	—

Tabela 7.1: Comparação entre funções de forma do elemento finito e infinito.

infinito é invertido. Isso abre imediatamente a possibilidade de gerar um vasta gama de

funções de mapeamento de elementos infinitos. Isto é, o mesmo processo pode ser feito em qualquer ordem: construa as funções de forma dos elementos finitos da ordem desejada e então inverta o termo no infinito. Como exemplo, veja a tabela (7.2), que mostra funções de forma L_i e funções de mapeamento M_i de ordem cúbica, i.e., interpolando quatro nós (sendo o quarto no infinito). O elemento infinito pode ser imediatamente estendido a

Nó: i	ξ_i	$L_i(\xi)$	$M_i(\xi)$
1	-1	$\left(\frac{9\xi^2-1}{8}\right) \cdot \left(\frac{1-\xi}{2}\right)$	$\frac{9\xi^2-1}{4(1-\xi)}$
2	$-\frac{1}{3}$	$\left(\frac{-9\xi^2-6\xi+3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3(1-\xi)}{4}\right)$	$\frac{-3\xi^2-2\xi+1}{1-\xi}$
3	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{9\xi^2+12\xi+3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3(1-\xi)}{2}\right)$	$\frac{3\xi^2+4\xi+1}{4(1-\xi)}$
4	1	$\frac{9\xi^3+9\xi^2-\xi-1}{16}$	—

Tabela 7.2: Funções de forma cúbicas $L_i(\xi)$ e funções de mapeamento $M_i(\xi)$ do elemento infinito.

duas ou três dimensões. O caso mais usual seria aquele em que o elemento é finito em uma direção e se estende ao infinito na outra. Mais raros são os casos em que o elemento se estende ao infinito em duas direções. Para o primeiro caso, que é a situação que irei trabalhar, a função de mapeamento bidimensional é derivada da função de mapeamento unidimensional na direção ξ , que é considerada como sendo infinita, e das funções de forma usuais, os polinômios de Lagrange, na direção η . Essas expressões são obtidas multiplicando-se as correspondentes funções de forma e de mapeamento. Por exemplo, para o elemento de 6 nós da figura 7.3 (dois dos quais estão no infinito), quadrático em ξ e linear em η , as funções de mapeamento correspondentes são mostradas na tabela (7.3) abaixo: A numeração dos nós está definida de acordo com a figura 7.3.

Nó: i	ξ_i	η_i	$M_i(\xi, \eta)$
1	-1	-1	$(1-\eta)\xi/(1-\xi)$
2	0	-1	$(1-\eta)(1+\xi)/2(1-\xi)$
3	-1	1	$-(1+\eta)\xi/(1-\xi)$
4	0	1	$(1+\eta)(1+\xi)/2(1-\xi)$
5	1	-1	—
6	1	1	—

Tabela 7.3: Funções de mapeamento $M_i(\xi, \eta)$; ξ infinito; η finito.

Isso leva a uma transformação da forma $\vec{X}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 M_i(\xi, \eta) \vec{x}_i$ para elementos com bordas retas. A matriz Jacobiana e sua inversa podem então ser calculadas e a matriz do elemento formada.

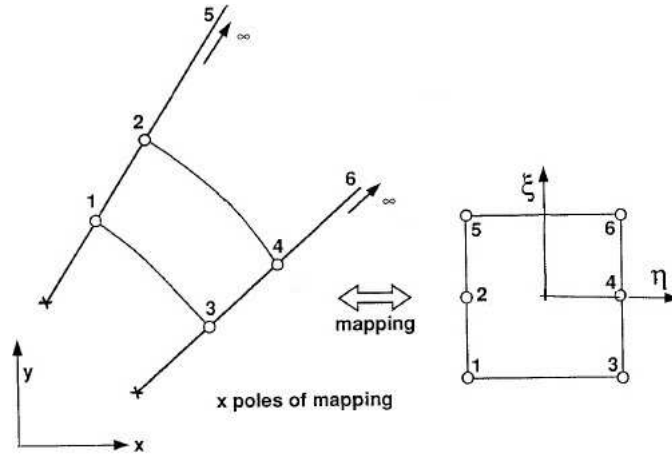


Figura 7.3: Elemento infinito mapeado bidimensional de 6 nós, finito na direção η e infinito na direção ξ .

Na seção 7.6 mostrarei as alterações necessárias à essa transformação permitir bordar curvas em elementos infinitos, e qual a transformação resultante.

7.4 Elementos infinitos para o método dos elementos espectrais

Munido de um procedimento que constrói elementos infinitos com mapeamentos de alta ordem, posso agora ajustá-lo ao método dos elementos espectrais, estendendo esse procedimento a elementos com fronteiras curvas. Essa generalização se dá de maneira direta, mas são necessárias algumas considerações:

- i) Primeiramente, não é conveniente relacionar a ordem das funções de mapeamento à ordem das funções de forma, isto é, gerar ambos os conjuntos de funções pelo mesmo conjunto de nós. Se isso fosse feito, o mapeamento dependeria dos nós utilizados e da quantidade deles. Se qualquer alteração nesses nós fosse feita (como alterar a precisão aumentando o grau do polinômio utilizado por exemplo), o mapeamento deveria também ser alterado. Portanto, é mais conveniente *não* relacioná-lo, e usar os nós de Gauss-Lobatto-Legendre da ordem desejada para as funções de forma normalmente, e alguma ordem apropriada para a função de mapeamento;
- ii) A segunda consideração é sobre a ordem de mapeamento. Como discutido na seção anterior, seria suficiente utilizar a função de mapeamento do elemento linear, pois essa já possui as propriedades de convergência desejadas. No entanto, isso não permitiria um controle sobre a posição do polo. Então, o uso de um elemento infinito

mapeado quadrático, com três nós posicionados em $x = a, 2a$ e ∞ é mais adequado. O que mostro na seção seguinte 7.5 é que o uso de funções de mapeamento de ordens superiores (em particular de ordem três), gera bordas curvas que tendem ao infinito de forma assintótica quando se flexibiliza o posicionamento dos nós. Isso pode ser útil ao se construir malhas para geometrias complexas. Além disso, o uso de ordens ainda maiores nos daria a possibilidade de controlar a forma dessa bordas;

- iii) Por fim, o Jacobiano e os termos métricos do elemento infinito envolve derivadas da função de mapeamento, que “explode” no infinito. Então, algumas delas também “explodirão”, de forma que é necessário analisar a equação mapeada para garantir que o comportamento da aproximação no infinito seja o correto. Faço essa análise a seguir para um simples termo, o Laplaciano.

Seguindo a primeira consideração, escrevo a transformação de coordenadas para o elemento infinito usando a função de mapeamento independentemente das funções de forma, construídas depois. Permita-me escrever novamente as funções $\Gamma_3(\xi)$ e $\Gamma_4(\xi)$ – equações (7.7,7.8) – que agora descrevem as bordas que se estendem até o infinito:

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_3(\xi) &= M_1(\xi)\vec{x}_1 + M_2(\xi)\vec{x}_2, \\ \vec{\Gamma}_4(\xi) &= M_1(\xi)\vec{x}_3 + M_2(\xi)\vec{x}_4.\end{aligned}$$

A numeração das curvas e vértice segue o que foi utilizado na seção 7.2 (veja figura 7.1).

Agora, as funções $M_1(\xi)$ e $M_2(\xi)$ não são mais as funções de forma usuais (7.5). Como citado na segunda consideração acima, utilizarei funções de mapeamento quadráticas (7.25):

$$M_1(\xi) = -\frac{2\xi}{1-\xi}, \quad M_2(\xi) = \frac{1+\xi}{1-\xi}. \quad (7.36)$$

As curvas Γ_3 e Γ_4 são ainda linhas retas, mas agora estendendo-se até o infinito (veremos a seguir como relaxar essa condição). De acordo com a figura 7.1 os pontos $\vec{x}_2$ e $\vec{x}_4$ (e portanto a curva $\vec{\Gamma}_2$) estariam no infinito, a função M_2 acima é a função para o nó central (em $\xi = 0$). Então, a partir de agora denoto os pontos $\vec{x}_2$ e $\vec{x}_4$ como sendo os nós centrais, de acordo com a figura 7.3, e Γ_2 uma curva ligando esses dois nós.

Essa mudança na posição de Γ_2 não muda a forma da interpolação transfinita (7.5), contanto que reinterpretemos os nós e as curvas conforme a figura 7.3, e usemos as funções de forma M_i adequadamente.

Além disso, como as curvas Γ_3 e Γ_4 são descritas pelas equações (7.7,7.8) (apenas agora com uma reinterpretação das funções de forma M_i), a expressão da interpolação transfinita ainda resulta em (7.9)

$$\vec{X}(\xi, \eta) = M_1(\xi)\vec{\Gamma}_1(\eta) + M_2(\xi)\vec{\Gamma}_2(\eta)$$

sejam quais forem $M_1(\xi)$ e $M_2(\xi)$. O que fazemos aqui é utilizar as funções de forma (7.36) para fazer com que o elemento se estenda a infinito. Portanto, isso resulta na transformação

$$\vec{X}(\xi, \eta) = - \left(\frac{2\xi}{1-\xi} \right) \vec{I}_1(\eta) + \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \vec{I}_2(\eta), \quad (7.37)$$

A grande vantagem em se inserir o mapeamento ao infinito nas curvas $\vec{I}_3$ e $\vec{I}_4$ está no fato de que são as coordenadas computacionais que são usadas na construção das funções de forma e na integração numérica. Dessa forma, nenhuma mudança deve ser feita no procedimento padrão de obtenção dessas funções ou nas abscissas ou pesos de integração, que são construídas sobre as coordenadas padrão $(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$, e portanto podem ser escolhidas independentemente da função de mapeamento. A única mudança é a própria função de mapeamento, que é dada pela equação (7.37) acima (ou mais especificamente, as funções M_i dadas pelas equações (7.36)), ao invés da forma padrão (7.10).

A matriz Jacobiana é calculada usando as derivadas dessa função de mapeamento, e não mais pelas formas (7.17-7.18):

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi} = \frac{2}{(1-\xi)^2} [\vec{I}_2(\eta) - \vec{I}_1(\eta)] = \frac{\vec{X}_\xi(\eta)}{(1-\xi)^2}, \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \eta} = \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \vec{I}'_2(\eta) - \left(\frac{2\xi}{1-\xi} \right) \vec{I}'_1(\eta) = \frac{\vec{X}_\eta(\xi, \eta)}{1-\xi}, \quad (7.39)$$

onde defino

$$\vec{X}_\xi(\eta) \equiv 2 [\vec{I}_2(\eta) - \vec{I}_1(\eta)], \quad (7.40)$$

$$\vec{X}_\eta(\xi, \eta) \equiv (1+\xi) \vec{I}'_2(\eta) - 2\xi \vec{I}'_1(\eta), \quad (7.41)$$

para separar os fatores que explodem no infinito ($\xi = 1$). Dadas essas derivadas, o Jacobiano e os termos métricos se tornam

$$J = \frac{1}{(1-\xi)^3} [X_\eta Y_\xi - X_\xi Y_\eta], \quad (7.42)$$

$$Jg^{\xi\xi} = (1-\xi) \left[\frac{X_\eta^2 + Y_\eta^2}{X_\eta Y_\xi - X_\xi Y_\eta} \right], \quad (7.43)$$

$$Jg^{\xi\eta} = - \left[\frac{X_\eta X_\xi + Y_\eta Y_\xi}{X_\eta Y_\xi - X_\xi Y_\eta} \right], \quad (7.44)$$

$$Jg^{\eta\eta} = \frac{1}{(1-\xi)} \left[\frac{X_\xi^2 + Y_\xi^2}{X_\eta Y_\xi - X_\xi Y_\eta} \right]. \quad (7.45)$$

Os termos métricos Jg^{ij} são os que aparecem nos fluxos contravariantes (7.13), cujas derivadas compõem o Laplaciano e outros operadores diferenciais. Podemos observar que

o termo métrico $J^{\eta\eta}$ explode no infinito, apesar desse termo ser necessário para descrever o comportamento correto da aproximação no infinito. Mesmo para o problema de Dirichlet isso é verdade porque ele é usado para se calcular numericamente a derivada em ξ dos fluxos contravariante no infinito (usando é claro pontos de Gauss-Lobatto usuais). As coisas são ainda piores em coordenadas cilíndricas e esféricas, para as quais cada termo métrico acima inclui um fator $(1 - \xi)^{-1}$ ou $(1 - \xi)^{-2}$ a mais, respectivamente (provindos dos fatores adicionais R e R^2 do Jacobiano nessas coordenadas).

O que mostro agora é a análise para o caso de um problema de Dirichlet, sendo as outras condições de contorno tratadas de maneira análoga. Observa-se que nos fluxos contravariantes (7.13) os termos métricos sempre acompanham uma derivada da função Φ . Por exemplo, em F^η aparece o termo $Jg^{\eta\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$. Aplicando a condição de Dirichlet $\Phi(\infty) = \Phi(\xi, \eta)|_{\xi=1} = 0$, temos que $\frac{\partial \Phi(1, \eta)}{\partial \eta} = 0$, e portanto, é possível aplicar a regra do l'Hopital:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 1} Jg^{\eta\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= \lim_{\xi \rightarrow 1} \left[\frac{X_\xi^2 + Y_\xi^2}{X_\eta Y_\xi - X_\xi Y_\eta} \right] \frac{1}{(1 - \xi)} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \\ &= - \left[\frac{X_\xi^2 + Y_\xi^2}{X_\eta Y_\xi - X_\xi Y_\eta} \right] \bigg|_{\xi=1} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial \xi} \bigg|_{\xi=1} \end{aligned} \quad (7.46)$$

Dessa forma, contanto que $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial \xi} \big|_{\xi=1}$ não exploda, podemos calcular esse termo numericamente.

Essa é a formulação básica para se usar elementos infinitos no método dos elementos espectrais. O que veremos na próxima seção é o que acontece quando usamos mapeamentos de ordens superiores, e como isso leva naturalmente a bordas curvas assintóticas.

7.5 Bordas curvas assintóticas

Foi citado na seção 7.3.2 que o mapeamento básico é o baseado no elemento linear (dois nós, sendo um no infinito), escrito em (7.29) e (7.32):

$$r = \frac{2a}{1 - \xi},$$

que converte um polinômio em ξ em um polinômio em $1/r$, conforme explicado na seção 7.3.1, equações (7.27) e (7.30). Isso implica em uma estrita relação entre ξ e r , que deve ser seguida ao se posicionar os nós do elemento infinito na direção radial. Essa relação é mostrada na tabela 7.4, por meio de alguns valores específicos. Se os nós forem colocados em outras posições, o resultado do mapeamento será seriamente afetado e é provável que o polinômio em ξ não mapeie mais um polinômio em $1/r$. Por exemplo, permita-me escrever a equação (7.7), as equações paramétricas de $\vec{I}_3(\xi)$ para um mapeamento

ξ	-1	-1/2	-1/3	0	1/3	1/2	1
r	a	$4a/3$	$3a/2$	$2a$	$3a$	$4a$	∞

Tabela 7.4: Relação entre ξ e r para elementos infinitos mapeados.

quadrático novamente, em termos de suas componentes:

$$x(\xi) = \left(-\frac{2\xi}{1-\xi} \right) x_1 + \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) x_2, \quad (7.47)$$

$$y(\xi) = \left(-\frac{2\xi}{1-\xi} \right) y_1 + \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) y_2, \quad (7.48)$$

De acordo com a tabela 7.4, a distância entre x_1 ($\xi = -1$) e x_2 ($\xi = 0$) deveria ser $a_x \equiv x_1 - x_0$, que é a distância de x_1 com relação ao polo (o mesmo para a coordenada y). Definindo $r_x \equiv x - x_0$ obtemos

$$r_x(\xi) = \frac{2a_x}{1-\xi}, \quad r_y(\xi) = \frac{2a_y}{1-\xi}. \quad (7.49)$$

Nesse caso, a posição dos nós, i.e., os valores de x_1 e x_2 , fixam a posição do polo por meio de $a_x = x_2 - x_1$, e quaisquer que sejam esses valores as posições tabeladas serão satisfeitas se a_x for definido desta forma (perceba que para isso é necessário uma flexibilização da posição do polo da transformação).

É possível mostrar que as equações paramétricas (7.47,7.48) (e portanto as equações equivalentes (7.49)) resultam em uma linha reta, quaisquer que sejam os valores x_1 e x_2 . Primeiramente, note que no limite $\xi \rightarrow 1$:

$$a \equiv \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{y(\xi)}{x(\xi)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a_y}{a_x}. \quad (7.50)$$

Depois, calculo

$$b \equiv y(\xi) - ax(\xi) = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}, \quad (7.51)$$

que é constante (independente de ξ). Isso prova que as equações paramétricas se tratam realmente de uma linha reta: $y(\xi) = ax(\xi) + b$.

As coisas mudam quando vamos para um mapa cúbico. A tabela 7.2 mostra funções de mapeamento para a transformação cúbica, de tal forma que podemos construir o mapa

$$x(\xi) = \left(\frac{9\xi^2 - 1}{4(1-\xi)} \right) x_1 + \left(\frac{-3\xi^2 - 2\xi + 1}{1-\xi} \right) x_2 + \left(\frac{3\xi^2 + 4\xi + 1}{4(1-\xi)} \right) x_3, \quad (7.52)$$

e uma equação totalmente análoga para $y(\xi)$ (escreverei apenas as equações para x , sendo as equações para y as mesmas).

As coordenadas computacionais ξ de x_1 , x_2 e x_3 são, -1 , $-1/3$ e $1/3$ respectivamente. A tabela 7.4 mostra que as diferenças $x_2 - x_1$ e $x_3 - x_2$ deveriam ser $a_x/2$ e $3a_x/2$ respectivamente. Isso pode ser obtido fazendo-se

$$x_3 - x_2 = 3(x_2 - x_1), \quad (7.53)$$

o que fixa a posição do polo por $a_x = 2\delta_x$, onde defino ainda $\delta_x \equiv x_2 - x_1$. Isso resulta no mesmo mapeamento (7.49), assim como no caso quadrático, e a também, é claro, a uma linha reta, devido ao fato da transformação ser a mesma. O mesmo valeria para um mapa de qualquer ordem superior se os nós satisfizerem a relação dada pela tabela 7.4, ou seja, todos resultam na mesma transformação.

Porém, essa não é a única possibilidade: outras relações entre $x_3 - x_2$ e $x_2 - x_1$ resultariam em outros mapeamentos. Parametrizo essa escolha por

$$x_3 - x_2 = d_x(x_2 - x_1) \quad (7.54)$$

(sendo $d_x = 3$ a escolha padrão, como feito acima). Por exemplo, se fazemos $d_x = 1$, a equação (7.52) resulta no mapeamento

$$x(\xi) = x_1 + \frac{3}{2}(1 + \xi)\delta_x, \quad (7.55)$$

que é uma relação linear, e nem mesmo tende a infinito conforme $\xi \rightarrow 1$. As outras possibilidades podem ser analisadas colocando-se a equação (7.52) na forma abaixo:

$$x(\xi) = \frac{1}{4(1 - \xi)} \left[(9x_1 - 12x_2 + 3x_3)\xi^2 + (4x_3 - 8x_2)\xi + (x_3 + 4x_2 - x_1) \right], \quad (7.56)$$

que em geral não resultará em uma relação do tipo (7.49) para x_1 , x_2 e x_3 arbitrários. A inversa $\xi(r_x)$ não converte, em geral, um polinômio em ξ em um polinômio em $1/r$ como desejado.

Poderia-se perguntar então qual é a vantagem de um mapa cúbico, porque se usarmos os nós conforme a tabela 7.4 obteremos a mesma transformação que no caso quadrático. Se não posicionarmos os nós dessa forma, teremos uma transformação que não se comporta da maneira que desejamos. O que mostro agora é que existem outros posicionamentos para os nós, além daquele mostrado na tabela 7.4, que se ajustam à propriedade de transformar um polinômio em ξ em um outro em $1/r$.

Primeiramente, mostro que as equações paramétricas do mapa cúbico geral (equação (7.56) sua análoga em y) descreve uma curva assintótica, cuja assíntota é $y = ax + b$:

$$a \equiv \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{y(\xi)}{x(\xi)} = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{x_1 - 2x_2 + x_3}, \quad (7.57)$$

$$b \equiv \lim_{\xi \rightarrow 1} [y(\xi) - ax(\xi)] = \left(\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{x_1 - 2x_2 + x_3} \right) (x_1 - x_2 - x_3) - (y_1 - y_2 - y_3). \quad (7.58)$$

Como $x_1 - 2x_2 + x_3 = (d_x - 1)\delta_x$, o caso $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow d_x = 1$ equivale a uma assíntota vertical (para $d_y \neq 1$). Se $d_x = d_y = 1$, então as equações paramétricas se tornam

$$x(\xi) = x_1 + \frac{3}{2}(1 + \xi)\delta_x, \quad y(\xi) = y_1 + \frac{3}{2}(1 + \xi)\delta_y, \quad (7.59)$$

que são simplesmente as equações paramétricas do seguimento de reta (limitado) entre (x_1, y_1) e $(x_1 + 3\delta_x, y_1 + 3\delta_y)$. O caso padrão $d_x = d_y = 3$ também é um caso particular, em que as equações paramétricas serão do tipo (7.49), e que formam simplesmente uma semireta tendendo ao infinito.

O que veremos agora é que, para uma escolha apropriada da posição dos nós, a curva assintótica geral é uma rotação de uma curva assintótica padrão⁴, a qual tem o comportamento que desejamos. Permita-me escrever as equações paramétricas para $d_x = 1$ e $d_y = 3$:

$$x'(\xi) = x'_1 + \frac{3}{2}(1 + \xi)\delta'_x, \quad y'(\xi) = y'_0 + \frac{4\delta'_y}{1 - \xi}, \quad (7.60)$$

onde uso variáveis com linhas para distingui-las das variáveis rotacionadas, que escreverei a seguir. Essa curva é a curva assintótica mostrada na figura 7.4a), cuja assíntota é dada pela equação $x' = x'_1 + 3\delta'_x$.

Em um novo sistema de coordenadas, rodado de um ângulo θ , essa curva é descrita pelas equações

$$x(\xi) = \cos(\theta)x'(\xi) - \sin(\theta)y'(\xi), \quad (7.61)$$

$$y(\xi) = \sin(\theta)x'(\xi) + \cos(\theta)y'(\xi), \quad (7.62)$$

isto é,

$$x(\xi) = \left[\cos(\theta)\frac{3}{2}\delta'_x\right]\xi + \left[\cos(\theta)(x'_1 + \frac{3}{2}\delta'_x) - \sin(\theta)y'_0\right] - \frac{4\delta'_y \sin(\theta)}{1 - \xi}, \quad (7.63)$$

$$y(\xi) = \left[\sin(\theta)\frac{3}{2}\delta'_x\right]\xi + \left[\sin(\theta)(x'_1 + \frac{3}{2}\delta'_x) + \cos(\theta)y'_0\right] + \frac{4\delta'_y \cos(\theta)}{1 - \xi}. \quad (7.64)$$

Essa transformação é mostrada na figura 7.4b).

Podemos ver que há três termos distintos em cada equação, um independente de ξ , outro linear em ξ e ainda um outro proporcional a $(1 - \xi)^{-1}$. Além disso, podemos colocar a expressão geral (7.56) para o mapa cúbico nessa forma:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{3}{4}(-3x_1 + 4x_2 - x_3)\xi + \frac{1}{4}(-9x_1 + 20x_2 - 7x_3) + \frac{2(x_1 - 2x_2 + x_3)}{1 - \xi}, \\ y(\xi) &= \frac{3}{4}(-3y_1 + 4y_2 - y_3)\xi + \frac{1}{4}(-9y_1 + 20y_2 - 7y_3) + \frac{2(y_1 - 2y_2 + y_3)}{1 - \xi}. \end{aligned} \quad (7.65)$$

⁴Exceto para os caso particulares citados $d_x = d_y = 1$ e $d_x = d_y = 3$.

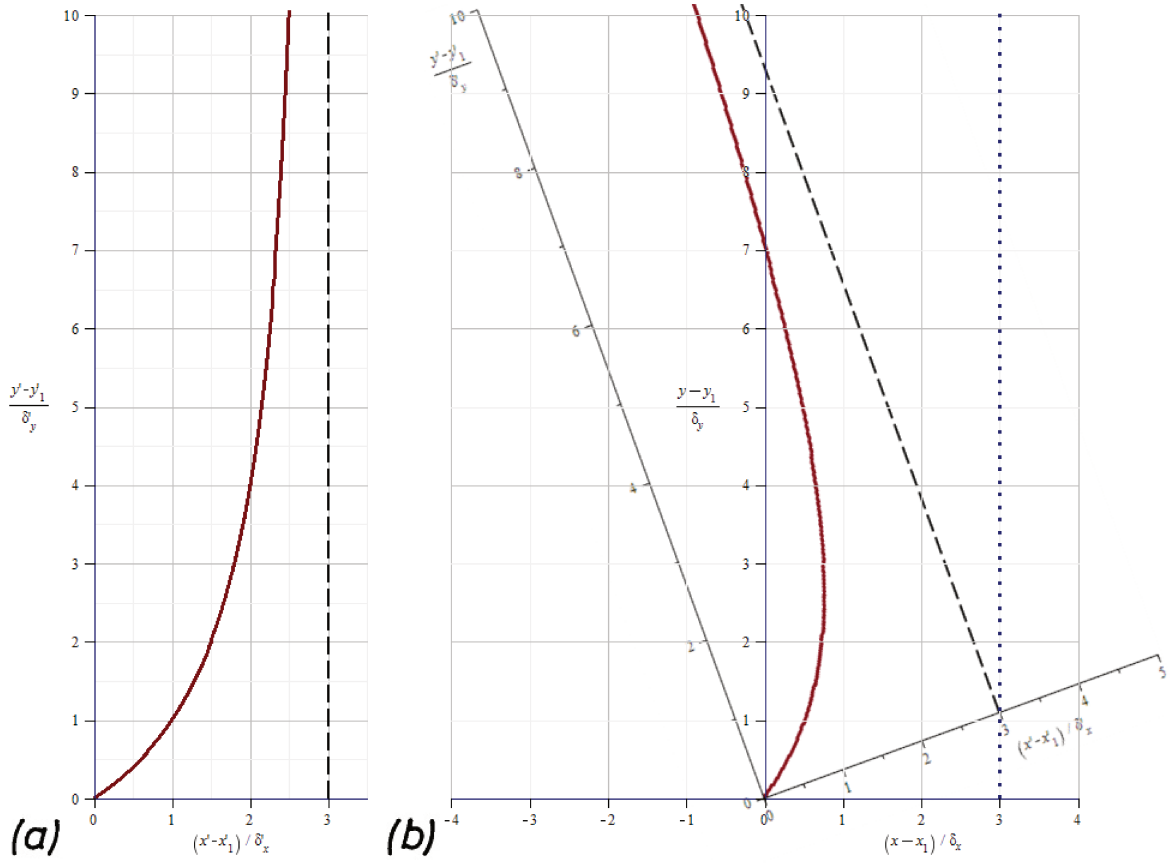


Figura 7.4: a) Curva assintótica padrão: $d_x = 1$ e $d_y = 3$; b) Sistema rodado de coordenadas.

Então, identificando os termos com a mesma dependência em ξ obtemos relações que nos permitem encontrar θ , x'_1 , δ'_x , y'_0 e δ'_y em termos de x_1 , x_2 , x_3 , y_1 , y_2 e y_3 . No entanto, estou interessado nas condições de consistência, isto é, nas condições que garantem que tal transformação existe. Identificando os últimos termos podemos escrever

$$\tan(\theta) = -\frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{y_1 - 2y_2 + y_3}. \quad (7.66)$$

Por outro lado, dos termos lineares em ξ obtemos

$$\tan(\theta) = \frac{-3y_1 + 4y_2 - y_3}{-3x_1 + 4x_2 - x_3}. \quad (7.67)$$

Portanto, a condição de consistência é que⁵

$$-\frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{y_1 - 2y_2 + y_3} = \frac{-3y_1 + 4y_2 - y_3}{-3x_1 + 4x_2 - x_3}, \quad (7.68)$$

⁵Verifica-se que a identificação dos termos independentes de ξ segue dessa condição.

que pode ser escrita como

$$(d_x - 1)(d_x - 3)\delta_x^2 = -(d_y - 1)(d_y - 3)\delta_y^2. \quad (7.69)$$

Os casos $(d_x = 1, d_y = 3)$ e $(d_x = 3, d_y = 1)$ satisfazem a essa condição (que equivalem a rotações de 0° e 90° – assíntotas vertical e horizontal – respectivamente). Além disso, das equações (7.66) e (7.57) obtemos

$$\tan(\theta) = -\frac{1}{a}, \quad (7.70)$$

o que vem do fato de que a assíntota e o eixo x' são ortogonais (veja figura 7.4b)). Assim, da identidade acima e da equação (7.69) obtemos duas relações:

$$a = \frac{(d_y - 1)\delta_y}{(d_x - 1)\delta_x}, \quad a = -\frac{(d_x - 3)\delta_x}{(d_y - 3)\delta_y}, \quad (7.71)$$

que podem ser resolvidas para d_x e d_y :

$$d_x = 1 + \frac{2(a\frac{\delta_y}{\delta_x} + 1)}{1 + a^2} = 1 + \frac{2\sigma}{\delta_x}, \quad d_y = 1 + \frac{2a^2(\frac{\delta_x}{a\delta_y} + 1)}{1 + a^2} = 1 + \frac{2a\sigma}{\delta_y}. \quad (7.72)$$

onde defino a quantidade σ abaixo:

$$\sigma \equiv \left(\frac{\delta_x + a\delta_y}{1 + a^2} \right). \quad (7.73)$$

Permita-me agora escrever a equação (7.54) como

$$x_3 = x_2 + d_x\delta_x, \quad y_3 = y_2 + d_y\delta_y. \quad (7.74)$$

Assim, uma vez que a , δ_x e δ_y são fixados, as equações acima definem x_3 e y_3 como

$$x_3 = x_1 + 2(\delta_x + \sigma), \quad y_3 = y_1 + 2(\delta_y + a\sigma). \quad (7.75)$$

Os casos particulares $d_x = d_y = 1$ e $d_x = d_y = 3$, que não correspondem a curvas assintóticas, equivalem às condições $\delta_x + a\delta_y = 0$ e $\delta_y - a\delta_x = 0$ respectivamente. Isto é, a única condição a ser observada é que a direção (δ_x, δ_y) não pode ser nem ortogonal nem paralela à assíntota, senão as equações paramétricas não corresponderão a uma rotação da curva assintótica padrão.

Podemos substituir os valores de x_3 e y_3 no mapa cúbico geral. A transformação geral, na forma (7.65), pode ser reescrita como

$$x(\xi) = x_1 + \frac{1}{4} [13(x_2 - x_1) - 7(x_3 - x_2)] + \frac{3}{4} [3(x_2 - x_1) - (x_3 - x_2)] \xi + \frac{2[(x_3 - x_2) - (x_2 - x_1)]}{1 - \xi},$$

e uma equação equivalente para y . Usando que $x_2 - x_1 = \delta_x$ e $x_3 - x_2 = d_x \delta_x = \delta_x + 2\sigma$ obtemos

$$x(\xi) = x_1 + \frac{1}{2} [3\delta_x - 7\sigma] + \frac{3}{2} [\delta_x - \sigma] \xi + \frac{4\sigma}{1 - \xi},$$

o que nos leva ao resultado

$$x(\xi) = x_1 + \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) \left[3\delta_x + \left(\frac{1 + 3\xi}{1 - \xi} \right) \sigma \right], \quad (7.76)$$

$$y(\xi) = y_1 + \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) \left[3\delta_y + \left(\frac{1 + 3\xi}{1 - \xi} \right) a\sigma \right]. \quad (7.77)$$

Podemos escrever ainda as equações acima em uma forma vetorial. Manipulando as equações acima temos que

$$x(\xi) = x_1 + \frac{3}{2} (1 + \xi) a \left(\frac{a\delta_x - \delta_y}{1 + a^2} \right) + 2 \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) \left(\frac{a\delta_y + \delta_x}{1 + a^2} \right) \quad (7.78)$$

$$y(\xi) = y_1 + \frac{3}{2} (1 + \xi) \left(\frac{\delta_y - a\delta_x}{1 + a^2} \right) + 2 \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) a \left(\frac{a\delta_y + \delta_x}{1 + a^2} \right). \quad (7.79)$$

Definindo o vetor da curva assintótica como $\vec{r}_a(\xi) \equiv x(\xi)\hat{x} + y(\xi)\hat{y}$, o vetor unitário na direção da assíntota

$$\hat{a} \equiv \frac{\hat{x} + a\hat{y}}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad (7.80)$$

e o vetor $\vec{\delta} \equiv \delta x \hat{x} + \delta y \hat{y}$, chegamos à forma final

$$\vec{r}_a(\xi) = \vec{x}_1 + \frac{3}{2} (1 + \xi) \hat{a} \times (\vec{\delta} \times \hat{a}) + 2 \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) (\hat{a} \cdot \vec{\delta}) \hat{a}. \quad (7.81)$$

Para posicionar a assíntota conforme desejado bastaria especificarmos as constantes a e b que a definem, que são dadas pelas equações (7.57) e (7.58):

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 &= a(x_1 - 2x_2 + x_3) \\ y_1 - y_2 - y_3 &= a(x_1 - x_2 - x_3) - b. \end{cases} \quad (7.82)$$

Somando as duas equações temos que

$$(y_1 + 3\delta_y) = a(x_1 + 3\delta_x) + b. \quad (7.83)$$

Essa relação mostra que o ponto $(x_4, y_4) \equiv (x_1 + 3\delta_x, y_1 + 3\delta_y)$ pertence à assíntota. Então, ao invés de escolhermos b para definir a assíntota, podemos escolher (x_4, y_4) , um ponto sobre o qual a assíntota passa. Veja um exemplo na figura 7.5.

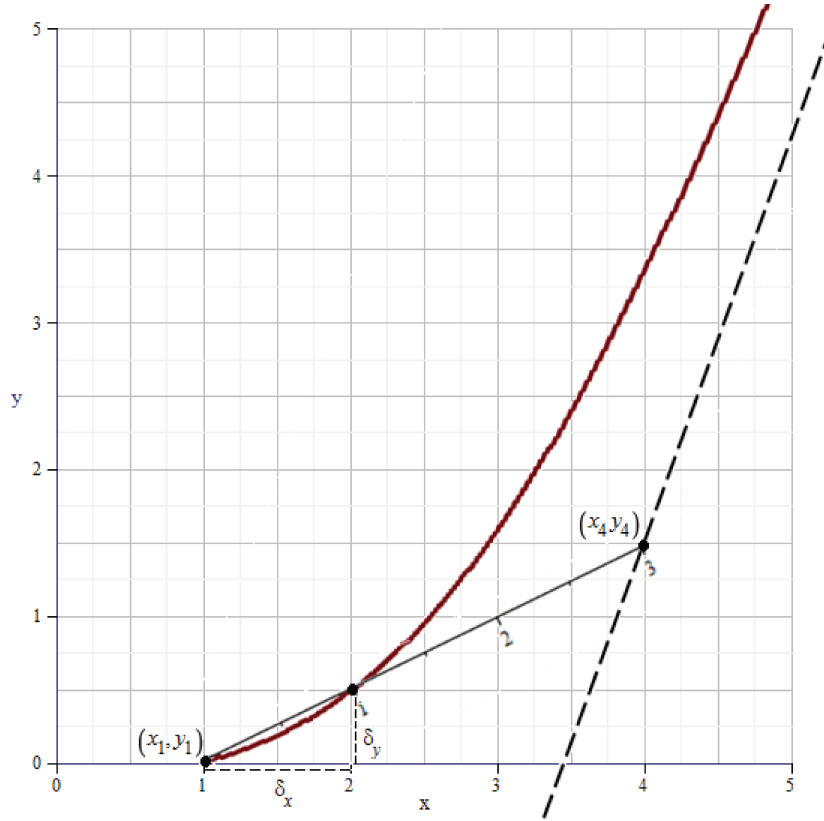


Figura 7.5: Posicionamento da assíntota: exemplo para o caso de um ponto $(x_1, y_1) = (1, 0)$ e uma assíntota com inclinação $a = 3$. Escolhendo $(\delta_x, \delta_y) = (1, 0.5)$ a assíntota passará pelo ponto $(x_4, y_4) = (x_1 + 3\delta_x, y_1 + 3\delta_y) = (4, 1.5)$ e terá a inclinação especificada.

Na construção da malha é importante ainda saber a inclinação das bordas nos vértices com relação aos elementos vizinhos. Isso significa saber a inclinação $\bar{a}$ da curva resultante no ponto (x_1, y_1) . Para a curva padrão isso é calculado por

$$\bar{a}' \equiv \left. \frac{dy'}{dx'} \right|_{\xi=-1} = \frac{\frac{dy'}{d\xi}(-1)}{\frac{dx'}{d\xi}(-1)} = \frac{2\delta'_y}{3\delta'_x}. \quad (7.84)$$

Para a curva rodada basta notar que a inclinação será a da curva padrão mais a da rotação, ou seja, será $\bar{a} = \tan(\alpha + \theta)$ onde $\tan(\alpha) \equiv \bar{a}'$. Se o valor exato for necessário, ele pode ser calculado por

$$\bar{a} = \frac{\frac{dy}{d\xi}(-1)}{\frac{dx}{d\xi}(-1)} = \frac{(3 + 2a^2)\delta_y - a\delta_x}{(2 + 3a^2)\delta_x - a\delta_y}. \quad (7.85)$$

Em resumo, dado um ponto inicial (x_1, y_1) , a prescrição para se construir uma borda assintótica é:

1. escolha uma inclinação a para a assíntota;
2. escolha uma direção (δ_x, δ_y) de tal forma que o ponto $(x_1 + 3\delta_x, y_1 + 3\delta_y)$ posicione a assíntota e resulte em uma inclinação $\bar{a}$ conforme desejado, respeitando as condições $\delta_x + a\delta_y \neq 0$ e $\delta_y - a\delta_x \neq 0$. Isso define o ponto (x_2, y_2) .
3. calcule a transformação (o mapa cúbico) por meio das equações (7.76-7.77).

O mapeamento resultante converte um polinômio em ξ em um polinômio em $1/r_{y'}$ conforme o esperado, onde $r_{y'} = y' - y'_0$ é uma coordenada radial na direção da assíntota, e y'_0 é a posição do polo.

7.6 Elementos infinitos bidimensionais

Nesta seção desenvolvo elementos bidimensionais que se estendem ao infinito em uma direção, o pode ser estendido de maneira direta a elementos em três dimensões, mantendo a terceira direção limitada.

Como já citado anteriormente, para cada elemento é suficiente permitir que apenas um de seus lados seja curvo, de maneira que se adapte à geometria do problema. As bordas internas podem ser tomadas como sendo linhas retas. Porém, para gerar um sistema de coordenadas mais “suave” em elementos infinitos, mantenho *duas* de suas bordas curvas, sendo uma ajustada à geometria do problema e outra tendendo ao infinito. A transformação geral para um elemento desse tipo é dada pela equação (7.9):

$$\vec{X}(\xi, \eta) = M_1(\xi)\vec{I}_1(\eta) + M_2(\xi)\vec{I}_2(\eta).$$

As funções $M_1(\xi)$ e $M_2(\xi)$ são dadas pela equação (7.5) para um elemento limitado (finito):

$$M_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad M_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2},$$

e pela equação (7.36) para um elemento não limitado (infinito):

$$M_1(\xi) = -\frac{2\xi}{1 - \xi}, \quad M_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{1 - \xi}.$$

As funções $\vec{I}_1(\eta)$ e $\vec{I}_2(\eta)$ são as duas bordas (não adjacentes) que podem ser curvas. Para elementos infinitos $\vec{I}_1(\eta)$ será o lado curvo ajustado ao domínio físico, e será tomado como sendo o lado oposto ao lado “no infinito”. Os lados que se estendem ao infinito são $\vec{I}_3(\xi)$ e $\vec{I}_4(\xi)$, dados pelas equações (7.7-7.8):

$$\begin{aligned} \vec{I}_3(\xi) &= M_1(\xi)\vec{x}_1 + M_2(\xi)\vec{x}_2, \\ \vec{I}_4(\xi) &= M_1(\xi)\vec{x}_3 + M_2(\xi)\vec{x}_4. \end{aligned}$$

Usarei um elemento com quatro vértices como na figura 7.3. $\vec{\Gamma}_1(\eta)$ será a borda entre os nós 1 e 3, sobre a fronteira “física” do problema, e $\vec{\Gamma}_2(\eta)$ será a borda “média” do elemento, que liga os nós 2 e 4, que nesse caso permitirei que seja curva também. Para um sistema de coordenadas melhor ajustado à geometria do problema, construirei $\vec{\Gamma}_2(\eta)$ com a mesma “forma” de $\vec{\Gamma}_1(\eta)$, como mostrarei a seguir. Veja um elemento infinito genérico na figura 7.6 abaixo, com as curvas e nós que o determinam. Utilizo nessa seção, para simplificar a

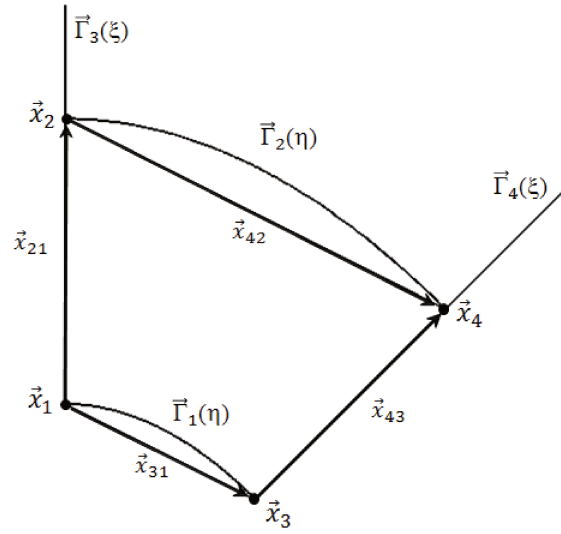


Figura 7.6: Elemento infinito com bordas laterais $\vec{\Gamma}_3(\xi)$ e $\vec{\Gamma}_4(\xi)$ retas (que se estendem até o infinito), com os pontos e curvas que o definem.

notação, a seguinte definição:

$$\vec{x}_{ij} \equiv \vec{x}_i - \vec{x}_j. \quad (7.86)$$

Começo tratando do caso em que os dois lados que tendem ao infinito são retos, para o qual é usado o mapeamento quadrático e as funções de forma 7.36. Tratarei o caso de bordas curvas assintóticas (utilizando um mapa cúbico) a seguir.

Os pontos $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_3$ estão sobre a superfície física, e são definidos na construção da malha. Os pontos $\vec{x}_2$ e $\vec{x}_4$ podem ser escolhidos livremente, de forma que as retas $\vec{\Gamma}_3(\xi)$ e $\vec{\Gamma}_4(\xi)$, nas direções de $\vec{x}_{21}$ e $\vec{x}_{43}$, delimitem o elemento infinito conforme desejado. Note, no entanto, que essa escolha determina a parametrização das retas $\vec{\Gamma}_3(\xi)$ e $\vec{\Gamma}_4(\xi)$. Dependendo dessa escolha, pode acontecer que no limite de $\xi = 1$ (no infinito), a reta $\vec{\Gamma}_4(\xi) - \vec{\Gamma}_3(\xi)$, que liga dois lados opostos do elemento, seja *paralela* a um dos lados $\vec{\Gamma}_3(\xi)$ ou $\vec{\Gamma}_4(\xi)$. Isso geraria um ponto singular no sistema de coordenadas, onde o Jacobiano tenderia a zero.

Por exemplo, calculemos o produto vetorial entre $\vec{x}_{43}$ e $\vec{\Gamma}_4(\xi) - \vec{\Gamma}_3(\xi)$ para o limite no infinito, cujo módulo (dividido pelo módulo de ambos) resulta no seno do ângulo entre

eles:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{\vec{x}_{43} \times [\vec{\Gamma}_4(\xi) - \vec{\Gamma}_3(\xi)]}{|\vec{x}_{43}| |\vec{\Gamma}_4(\xi) - \vec{\Gamma}_3(\xi)|} &= \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{\vec{x}_{43} \times \left[-\left(\frac{2\xi}{1-\xi}\right) (\vec{x}_3 - \vec{x}_1) + \left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) (\vec{x}_4 - \vec{x}_2) \right]}{|\vec{x}_{43}| \left| -\left(\frac{2\xi}{1-\xi}\right) (\vec{x}_3 - \vec{x}_1) + \left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) (\vec{x}_4 - \vec{x}_2) \right|} \\
 &= \frac{\vec{x}_{43} \times [-(\vec{x}_3 - \vec{x}_1) + (\vec{x}_4 - \vec{x}_2)]}{|\vec{x}_{43}| |-\vec{x}_{31} + \vec{x}_{42}|} \\
 &= -\frac{\vec{x}_{43} \times \vec{x}_{21}}{|\vec{x}_{43}| |\vec{x}_{42} - \vec{x}_{31}|}. \tag{7.87}
 \end{aligned}$$

Podemos ver que isso se anula para $\vec{x}_{43} \propto \vec{x}_{21}$, mas com $\vec{x}_{43} \neq \vec{x}_{21}$ (pois isso anularia o denominador também). Essa situação é mostrada na figura 7.7. Um elemento desse tipo

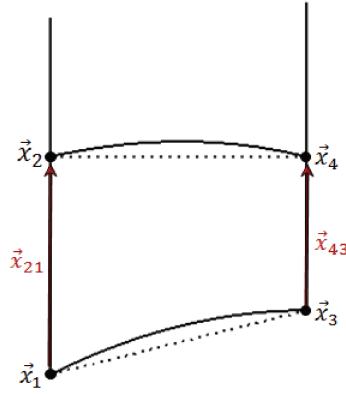


Figura 7.7: Elemento infinito com bordas laterais paralelas. Se $\vec{x}_{43} \neq \vec{x}_{21}$ então o sistema de coordenadas desse elemento é singular no infinito, e portanto não deve ser utilizado.

tem um sistema de coordenadas singular no infinito, e deve ser evitado.

Se $\vec{x}_{43} = \vec{x}_{21}$ teremos simplesmente $\vec{\Gamma}_4(\xi) - \vec{\Gamma}_3(\xi) = \vec{x}_{31}$ constante (serão sempre retas paralelas para cada ξ), o que não gera problemas no infinito.

Podemos escolher $\vec{x}_4$ e $\vec{x}_2$ de forma que $\vec{x}_{31}$ e $\vec{x}_{42}$ sejam paralelos, o que simplifica e evita a situação de singularidade acima. Fazendo

$$\vec{x}_{42} = K \vec{x}_{31}, \tag{7.88}$$

onde

$$K \equiv \frac{|\vec{x}_{42}|}{|\vec{x}_{31}|}, \tag{7.89}$$

a direção das retas $\vec{\Gamma}_4(\xi) - \vec{\Gamma}_3(\xi)$, que ligam os dois lados do elemento para cada ξ , serão sempre paralelas:

$$\begin{aligned}
 \vec{\Gamma}_4(\xi) - \vec{\Gamma}_3(\xi) &= M_1(\xi) (\vec{x}_3 - \vec{x}_1) + M_2(\xi) (\vec{x}_4 - \vec{x}_2), \\
 &= [M_1(\xi) + K M_2(\xi)] \vec{x}_{31}. \tag{7.90}
 \end{aligned}$$

Além disso, é preciso notar ainda que a distância entre $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ determina a distância do polo da transformação das coordenadas físicas para as coordenadas numéricas (veja figura 7.2) para a curva $\vec{I}_3(\xi)$. O mesmo vale para $\vec{I}_4(\xi)$. Dessa forma, dados os vértices $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_3$, escolhe-se um dentre $\vec{x}_2$ e $\vec{x}_4$ de forma que se posicione o polo de sua respectiva curva conforme desejado. O outro ponto deve ser encontrado pela condição de paralelismo (7.88).

Então, dados os pontos $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_3$, e escolhido $\vec{x}_4$ (por exemplo) que posicione o polo conforme desejado, é preciso encontrar $\vec{x}_2$ que satisfaça à condição de paralelismo. Em geral, na construção da malha podemos facilmente encontrar um ponto arbitrário $\vec{x}'_2$ sobre a reta $\vec{I}_3(\xi)$ que desejamos construir. Na figura 7.8 vemos um exemplo em que escolhe-se

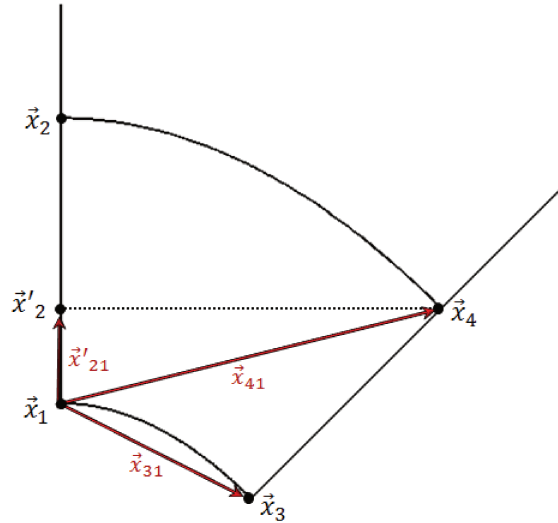


Figura 7.8: Construção de um elemento que satisfaz à condição de paralelismo $\vec{x}_{42} \propto \vec{x}_{31}$. Dados os pontos $\vec{x}_1$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ e $\vec{x}'_2$, o ponto $\vec{x}_2$ é obtido por meio da equação (7.91).

a coordenada y de $\vec{x}'_2$ como sendo a mesma de $\vec{x}_4$ ($y'_2 = y_4$), e a coordenada x a mesma de $\vec{x}_1$ ($x'_2 = x_1$).

Encontra-se por simples geometria que o ponto $\vec{x}_2$ que satisfaz à condição de paralelismo (7.88) é obtido por

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \frac{|\vec{x}_{31} \times \vec{x}_{41}|}{|\vec{x}_{31} \times \vec{x}'_{21}|} \vec{x}'_{21}, \quad (7.91)$$

onde $\vec{x}'_{21} \equiv \vec{x}'_2 - \vec{x}_1$.

Definidos os quatro vértices, nos resta agora construir a curva $\vec{I}_2(\eta)$ com a mesma “forma” de $\vec{I}_1(\eta)$. Para isso, faço com que o vetor $\vec{I}_2(\eta) - \vec{x}_2$ seja paralelo a $\vec{I}_1(\eta) - \vec{x}_1$, ou seja,

$$\vec{I}_2(\eta) - \vec{x}_2 = K [\vec{I}_1(\eta) - \vec{x}_1],$$

o que resulta em

$$\vec{I}_2(\eta) = \vec{x}_2 + K [\vec{I}_1(\eta) - \vec{x}_1]. \quad (7.92)$$

Isso implica que todas as curvas $\vec{X}(\tilde{\xi}, \eta)$ (para cada valor fixado de $\tilde{\xi}$) serão semelhantes e não apenas $\vec{I}_1(\eta)$ e $\vec{I}_2(\eta)$, que correspondem a $\vec{X}(\tilde{\xi}, \eta)$ com $\tilde{\xi} = -1$ e $\tilde{\xi} = 0$ respectivamente.

Com isso, temos todos os elementos para a construção da transformação de coordenadas (7.9) para o elemento infinito bidimensional com os lados $\vec{I}_3(\xi)$ e $\vec{I}_4(\xi)$ retos.

Passemos agora para o caso dos elementos infinitos bidimensionais com lados curvos assintóticos. Na seção 7.5 desenvolvi uma *curva* assintótica $\vec{I}_a(\xi)$, descrita pela equação (7.81), que é parametrizada pela coordenada numérica ξ de tal forma que um polinômio em ξ sobre essa curva é mapeado em um polinômio em $1/r_{y'}$, onde $r_{y'} = y' - y'_0$ e (x', y') são coordenadas rodadas com relação a (x, y) .

Para construir um elemento infinito bidimensional com bordas curvas assintóticas, basta permitir que as curvas “laterais” $\vec{I}_3(\xi)$ e $\vec{I}_4(\xi)$ sejam curvas do tipo (7.81), isto é,

$$\vec{I}_3(\xi) = \vec{x}_1 + \frac{3}{2} (1 + \xi) \hat{a}_3 \times (\vec{x}_{21} \times \hat{a}_3) + 2 \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) (\hat{a}_3 \cdot \vec{x}_{21}) \hat{a}_3, \quad (7.93)$$

$$\vec{I}_4(\xi) = \vec{x}_3 + \frac{3}{2} (1 + \xi) \hat{a}_4 \times (\vec{x}_{43} \times \hat{a}_4) + 2 \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) (\hat{a}_4 \cdot \vec{x}_{43}) \hat{a}_4, \quad (7.94)$$

onde cada curva $\vec{I}_3(\xi)$ e $\vec{I}_4(\xi)$ têm sua própria assíntota, com inclinações a_3 e a_4 respectivamente.

Começemos verificando a condição de singularidade no infinito. Calculando para essa nova situação (o vetor cujo módulo é) o seno do ângulo entre $(\vec{x}_4 - \vec{x}_3)$ e $\vec{I}_4(\xi) - \vec{I}_3(\xi)$ para o limite no infinito obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{\vec{x}_{43} \times \left[2 \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) (\hat{a}_4 \cdot \vec{x}_{43}) \hat{a}_4 - 2 \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) (\hat{a}_3 \cdot \vec{x}_{21}) \hat{a}_3 \right]}{|\vec{x}_{43}| \left| 2 \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) (\hat{a}_4 \cdot \vec{x}_{43}) \hat{a}_4 - 2 \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) (\hat{a}_3 \cdot \vec{x}_{21}) \hat{a}_3 \right|} &= \\ &= \frac{\vec{x}_{43} \times [(\hat{a}_4 \cdot \vec{x}_{43}) \hat{a}_4 - (\hat{a}_3 \cdot \vec{x}_{21}) \hat{a}_3]}{|\vec{x}_{43}| |(\hat{a}_4 \cdot \vec{x}_{43}) \hat{a}_4 - (\hat{a}_3 \cdot \vec{x}_{21}) \hat{a}_3|} \\ &= \frac{(\hat{a}_4 \cdot \vec{x}_{43}) [\vec{x}_{43} \times \hat{a}_4] - (\hat{a}_3 \cdot \vec{x}_{21}) [\vec{x}_{43} \times \hat{a}_3]}{|\vec{x}_{43}| |(\hat{a}_4 \cdot \vec{x}_{43}) \hat{a}_4 - (\hat{a}_3 \cdot \vec{x}_{21}) \hat{a}_3|}. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Observe que o numerador se anula somente⁶ para $\hat{a}_3 = \hat{a}_4$. Se o denominador for não nulo, ou seja, se $(\hat{a}_4 \cdot \vec{x}_{43}) \neq (\hat{a}_3 \cdot \vec{x}_{21})$, o numerador será nulo se $\vec{x}_{43} \propto \hat{a}_3 = \hat{a}_4$. Isso implica que as bordas serão retas (não assintóticas) e paralelas, o que resultará na mesma situação *singular* mostrada na figura 7.7.

⁶Lembre-se que para que essas curvas sejam de fato assintóticas é necessário que $(\hat{a}_3 \cdot \vec{x}_{21}) \neq 0$ e $(\hat{a}_4 \cdot \vec{x}_{43}) \neq 0$.

Caso o denominador seja nulo, então $(\hat{a}_4 \cdot \vec{x}_{43}) = (\hat{a}_3 \cdot \vec{x}_{21})$, com $\hat{a}_3 = \hat{a}_4$. Se $\vec{x}_{43} = \vec{x}_{21}$ teremos simplesmente $\vec{I}_4(\xi) - \vec{I}_3(\xi) = \vec{x}_{31}$ constante (situação não singular, também já citada na discussão de elementos com bordas retas). A situação $\vec{x}_{43} \neq \vec{x}_{21}$ também é não singular, pois somente os últimos termos de (7.93-7.94), os termos singulares de $\vec{I}_4(\xi)$ e $\vec{I}_3(\xi)$, se cancelam em $\vec{I}_4(\xi) - \vec{I}_3(\xi)$. Essa situação é mostrada na figura 7.9.

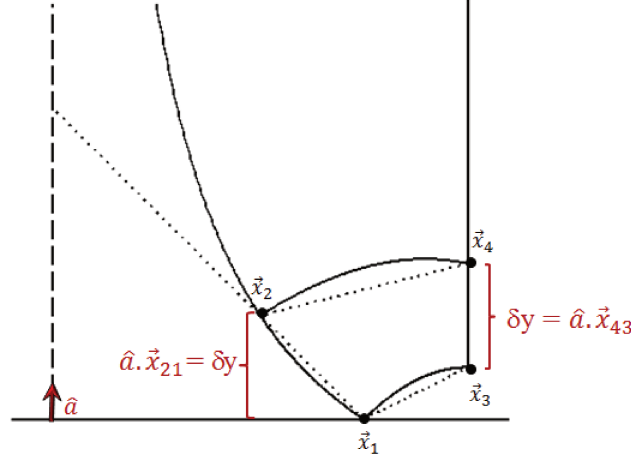


Figura 7.9: Elemento infinito com assíntotas paralelas ($\hat{a}_3 = \hat{a}_4 \equiv \hat{a}$) e $\vec{x}_{43} \neq \vec{x}_{21}$. Para que esse elemento não tenha um sistema de coordenadas singular no infinito é necessário que $(\hat{a}_4 \cdot \vec{x}_{43}) = (\hat{a}_3 \cdot \vec{x}_{21}) \equiv \delta y$.

Observe que para o elemento mostrado na figura 7.9 não é possível manter as direções de $\vec{x}_{31}$ e $\vec{x}_{42}$ paralelas como em (7.88), pois isso geraria uma situação singular no infinito, como descrito acima. Portanto, para se construir a curva $\vec{I}_2(\eta)$ com a mesma “forma” de $\vec{I}_1(\eta)$ devemos considerar essa situação mais geral, mostrada na figura 7.10. Usarei a seguir, para simplificar a notação, a definição

$$\vec{\gamma}_i(\eta) \equiv \vec{I}_i(\eta) - \vec{x}_i. \quad (7.96)$$

O vetor $\vec{S}_1$ é definido como sendo a projeção ortogonal de $\vec{\gamma}_1(\eta)$ sobre $\vec{x}_{31}$:

$$\vec{S}_1(\eta) \equiv \left(\frac{\vec{\gamma}_1(\eta) \cdot \vec{x}_{31}}{\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31}} \right) \vec{x}_{31}, \quad (7.97)$$

e o vetor $\vec{T}_1(\eta)$ é definido por

$$\vec{T}_1(\eta) \equiv \vec{\gamma}_1(\eta) - \vec{S}_1. \quad (7.98)$$

O mesmo vale para $\vec{S}_2(\eta)$ e $\vec{T}_2(\eta)$.

O vetor $\vec{S}_2(\eta)$ pode ser construído de forma que ele parametrize o seguimento de reta $\vec{x}_4 - \vec{x}_2$ da mesma maneira que $\vec{S}_1(\eta)$ parametriza $\vec{x}_3 - \vec{x}_1$, ou seja,

$$\vec{S}_2(\eta) = \left(\frac{\vec{\gamma}_1(\eta) \cdot \vec{x}_{31}}{\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31}} \right) \vec{x}_{42}. \quad (7.99)$$

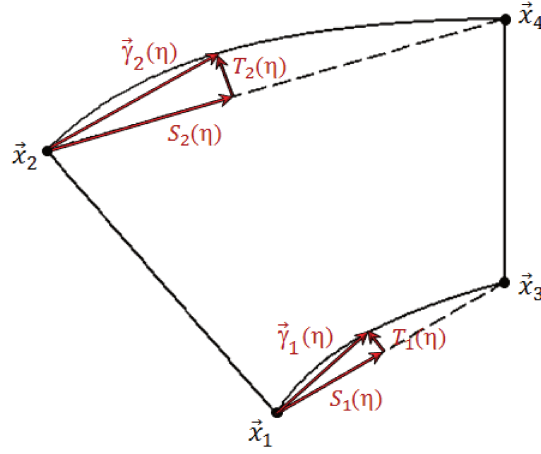


Figura 7.10: Construção da curva $\vec{I}_2(\eta)$ para um elemento infinito com lados curvos assintóticos.

De acordo com a figura 7.10, para que a curva $\vec{I}_2(\eta)$ tenha a mesma “forma” de $\vec{I}_1(\eta)$ os dois triângulos retângulos formados por $\vec{\gamma}_i(\eta)$, $\vec{S}_i(\eta)$ e $\vec{T}_i(\eta)$ ($i = 1, 2$) devem ter um fator de proporcionalidade de K (equação (7.89)) para todo η . Dessa forma, podemos escrever o vetor $\vec{T}_2(\eta)$ em termos de sua direção e de seu módulo (com um fator K com relação ao módulo de $\vec{T}_1(\eta)$):

$$\vec{T}_2(\eta) = \left(\frac{\hat{z} \times \vec{x}_{42}}{\sqrt{\vec{x}_{42} \cdot \vec{x}_{42}}} \right) K |\vec{T}_1(\eta)|. \quad (7.100)$$

Escrevendo o módulo de $\vec{T}_1(\eta)$ como

$$|\vec{T}_1(\eta)| = \frac{\hat{z} \cdot [\vec{x}_{31} \times \vec{\gamma}_1(\eta)]}{\sqrt{\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31}}} \quad (7.101)$$

obtemos o vetor $\vec{T}_2(\eta)$:

$$\vec{T}_2(\eta) = \hat{z} \times \vec{x}_{42} \left(\frac{\hat{z} \cdot [\vec{x}_{31} \times \vec{\gamma}_1(\eta)]}{\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31}} \right), \quad (7.102)$$

o que resulta na curva $\vec{I}_2(\eta)$

$$\begin{aligned} \vec{I}_2(\eta) &= \vec{x}_2 + \vec{S}_2 + \vec{T}_2(\eta) \\ &= \vec{x}_2 + \left(\frac{\vec{\gamma}_1(\eta) \cdot \vec{x}_{31}}{\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31}} \right) \vec{x}_{42} + \left(\frac{\hat{z} \cdot [\vec{x}_{31} \times \vec{\gamma}_1(\eta)]}{\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31}} \right) \hat{z} \times \vec{x}_{42} \\ &= \vec{x}_2 + \frac{1}{(\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31})} \{ [\vec{\gamma}_1(\eta) \cdot \vec{x}_{31}] \vec{x}_{42} + (\hat{z} \cdot [\vec{x}_{31} \times \vec{\gamma}_1(\eta)]) \hat{z} \times \vec{x}_{42} \}. \end{aligned} \quad (7.103)$$

É possível ainda simplificar essa expressão, separando a dependência em $\vec{\gamma}_1(\eta)$. Para isso, usarei algumas identidades vetoriais. Primeiro, a expansão de um dado vetor $\vec{v}$ em termos de outros três $\vec{e}_i$, com $i = 1, 2, 3$:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)} \vec{e}_1 + \frac{\vec{v} \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)} \vec{e}_2 + \frac{\vec{v} \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)} \vec{e}_3. \quad (7.104)$$

A expansão de $\hat{z} \times \vec{x}_{42}$ em termos de $\vec{e}_1 = \hat{z}$, $\vec{e}_2 = \vec{x}_{31}$ e $\vec{e}_3 = \vec{\gamma}_1(\eta)$ resulta em

$$\begin{aligned} (\hat{z} \cdot [\vec{x}_{31} \times \vec{\gamma}_1(\eta)]) \hat{z} \times \vec{x}_{42} &= (\hat{z} \times \vec{x}_{42}) \cdot \underbrace{(\vec{x}_{31} \times \vec{\gamma}_1(\eta))}_{\substack{\propto \hat{z} \\ =0}} \hat{z} + \\ &[(\hat{z} \times \vec{x}_{42}) \cdot (\vec{\gamma}_1(\eta) \times \hat{z})] \vec{x}_{31} + \\ &[(\hat{z} \times \vec{x}_{42}) \cdot (\hat{z} \times \vec{x}_{31})] \vec{\gamma}_1(\eta). \end{aligned} \quad (7.105)$$

Da simetria do Jacobiano

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) \quad (7.106)$$

e do produto vetorial triplo

$$\vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_3 \quad (7.107)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} (\hat{z} \times \vec{x}_{42}) \cdot (\vec{\gamma}_1(\eta) \times \hat{z}) &= \vec{\gamma}_1(\eta) \cdot [\hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{x}_{42})] \\ &= \vec{\gamma}_1(\eta) \cdot \left[\underbrace{(\hat{z} \cdot \vec{x}_{42})}_{=0} \hat{z} - (\hat{z} \cdot \hat{z}) \vec{x}_{42} \right] \\ &= -\vec{\gamma}_1(\eta) \cdot \vec{x}_{42}. \end{aligned} \quad (7.108)$$

O mesmo vale para o último termo de (7.105):

$$(\hat{z} \times \vec{x}_{42}) \cdot (\hat{z} \times \vec{x}_{31}) = \vec{x}_{42} \cdot \vec{x}_{31}. \quad (7.109)$$

Assim, a expressão (7.105), que é o último termo de (7.103), se torna

$$(\hat{z} \cdot [\vec{x}_{31} \times \vec{\gamma}_1(\eta)]) \hat{z} \times \vec{x}_{42} = (\vec{x}_{42} \cdot \vec{x}_{31}) \vec{\gamma}_1(\eta) - (\vec{\gamma}_1(\eta) \cdot \vec{x}_{42}) \vec{x}_{31}, \quad (7.110)$$

ou seja,

$$\vec{I}_2(\eta) = \vec{x}_2 + \frac{1}{(\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31})} \{ [\vec{\gamma}_1(\eta) \cdot \vec{x}_{31}] \vec{x}_{42} - [\vec{\gamma}_1(\eta) \cdot \vec{x}_{42}] \vec{x}_{31} + (\vec{x}_{42} \cdot \vec{x}_{31}) \vec{\gamma}_1(\eta) \}. \quad (7.111)$$

Utilizando novamente a identidade do produto triplo (7.107)

$$[\vec{\gamma}_1(\eta) \cdot \vec{x}_{31}] \vec{x}_{42} - [\vec{\gamma}_1(\eta) \cdot \vec{x}_{42}] \vec{x}_{31} = \vec{\gamma}_1(\eta) \times (\vec{x}_{42} \times \vec{x}_{31}) \quad (7.112)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \vec{I}_2(\eta) &= \vec{x}_2 + \frac{1}{(\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31})} \{ \vec{\gamma}_1(\eta) \times (\vec{x}_{42} \times \vec{x}_{31}) + (\vec{x}_{42} \cdot \vec{x}_{31}) \vec{\gamma}_1(\eta) \} \\ &= \vec{x}_2 + \left(\frac{\hat{z} \cdot (\vec{x}_{42} \times \vec{x}_{31})}{\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31}} \right) \vec{\gamma}_1(\eta) \times \hat{z} + \left(\frac{\vec{x}_{42} \cdot \vec{x}_{31}}{\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31}} \right) \vec{\gamma}_1(\eta). \end{aligned} \quad (7.113)$$

Colocando em termos das componentes $\vec{I}_i(\eta) = X_i(\eta)\hat{x} + Y_i(\eta)\hat{y}$ obtemos:

$$X_2(\eta) = x_2 + K_o [X_1(\eta) - x_1] + K_\times [Y_1(\eta) - y_1] \quad (7.114)$$

$$Y_2(\eta) = y_2 + K_o [Y_1(\eta) - y_1] - K_\times [X_1(\eta) - x_1] \quad (7.115)$$

onde

$$K_o = \frac{(\vec{x}_{42} \cdot \vec{x}_{31})}{(\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31})} = \frac{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1) + (y_4 - y_2)(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_1)} \quad (7.116)$$

$$K_\times = \frac{\hat{z} \cdot (\vec{x}_{42} \times \vec{x}_{31})}{(\vec{x}_{31} \cdot \vec{x}_{31})} = \frac{(x_4 - x_2)(y_3 - y_1) - (y_4 - y_2)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_1)}. \quad (7.117)$$

Enfim, as expressões acima geram uma curva $\vec{I}_2(\eta) = X_2(\eta)\hat{x} + Y_2(\eta)\hat{y}$ com a mesma “forma” de $\vec{I}_1(\eta) = X_1(\eta)\hat{x} + Y_1(\eta)\hat{y}$, dados os quatro vértices $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ e $\vec{x}_4$.

O próximo passo é gerar a transformação de coordenadas para o elemento bidimensional com bordas assintóticas. Como as curvas $\vec{I}_3(\xi)$ e $\vec{I}_4(\xi)$ não estão escritas em termos das funções de forma como em (7.7-7.8) não é possível aplicar a expressão para a interpolação transfinita (7.5) diretamente. Então, o que faço é impor a condição de que a transformação $\vec{X}(\xi, \tilde{\eta})$ seja uma curva assintótica, do tipo (7.81), para cada $\tilde{\eta}$.

Note que uma curva assintótica do tipo (7.81) é determinada simplesmente pelos pontos $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2 = \vec{\delta} - \vec{x}_1$, e por uma inclinação a para a assíntota. Dessa forma, posso definir pontos que sejam *funções* de η , isto é, curvas $\vec{x}_1(\eta) = \vec{I}_1(\eta)$, $\vec{x}_2(\eta) = \vec{I}_2(\eta)$, e especificar uma inclinação para a assíntota $a(\eta)$, para cada curva $\vec{X}(\xi, \eta)$ com η fixo. Fazendo isso, escrevo a transformação geral como

$$\begin{aligned} \vec{X}(\xi, \eta) &= \vec{I}_a^{(\eta)}(\xi) = \\ &= \vec{x}_1(\eta) + \frac{3}{2} (1 + \xi) \hat{a}(\eta) \times [\vec{\delta}(\eta) \times \hat{a}(\eta)] + 2 \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) [\hat{a}(\eta) \cdot \vec{\delta}(\eta)] \hat{a}(\eta), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{X}(\xi, \eta) = \vec{I}_1(\eta) + \frac{3}{2} (1 + \xi) \hat{a}(\eta) \times [\delta \vec{I}(\eta) \times \hat{a}(\eta)] + 2 \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) [\hat{a}(\eta) \cdot \delta \vec{I}(\eta)] \hat{a}(\eta), \quad (7.118)$$

onde $\delta\vec{\Gamma}(\eta) \equiv \vec{\Gamma}_2(\eta) - \vec{\Gamma}_1(\eta)$.

Falta ainda especificar as inclinações $a(\eta)$ das assíntotas, de tal forma que $a(-1) = a_3$ e $a(1) = a_4$ (assíntotas laterais). Para que não ocorra um “cruzamento” das curvas $\vec{X}(\xi, \eta)$ para cada valor de η constante, é necessário que a função $a(\eta)$ seja uma função monótona entre os valores a_3 e a_4 . Ao invés de simplesmente especificar uma função $a(\eta)$ monótona, vou exigir que todas as assíntotas passem por um mesmo ponto, denotado por $\vec{x}_0$, o ponto de cruzamento das assíntotas laterais:

$$\begin{cases} y_0 = a_3x_0 + b_3 \\ y_0 = a_4x_0 + b_4 \end{cases} \quad (7.119)$$

Isso naturalmente satisfaz a condição de monotonicidade. Veja na figura 7.11 as curvas

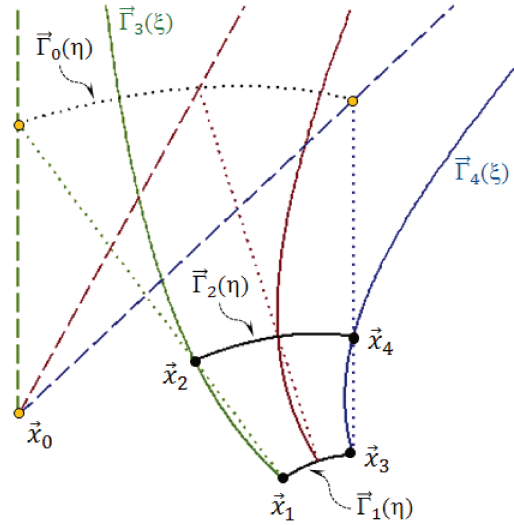


Figura 7.11: Determinação da inclinação das assíntotas para as curvas assintóticas interiores ao elemento infinito. As curvas laterais e suas assíntotas ($\eta = \pm 1$, em verde e azul) determinam o ponto $\vec{x}_0$. Exige-se então que a assíntota de qualquer curva interna (e.g. $\eta = 0$, em vermelho) passe por $\vec{x}_0$.

laterais ($\eta = \pm 1$) com suas assíntotas em verde e azul, e uma curva interior (e.g. $\eta = 0$) com sua assíntota em vermelho.

Um ponto de cada assíntota já é fixado⁷ pelas curvas $\vec{\Gamma}_1(\eta)$ e $\vec{\Gamma}_2(\eta)$ por meio da equação (7.83). Vou denotar esse ponto (para cada η , o que na verdade gera uma curva) por $\vec{\Gamma}_0(\eta) = X_0(\eta)\hat{x} + Y_0(\eta)\hat{y}$. Então

$$Y_0(\eta) = a(\eta)X_0(\eta) + b(\eta), \quad (7.120)$$

⁷Portanto, especificar um outro ponto pelo qual essa assíntota passa implica em especificar sua inclinação.

com

$$X_0(\eta) = 3X_2(\eta) - 2X_1(\eta), \quad (7.121)$$

$$Y_0(\eta) = 3Y_2(\eta) - 2Y_1(\eta) \quad (7.122)$$

dados pela equação (7.83)

Esses pontos podem ser usados para eliminar as constantes b_3 e b_4 das assíntotas “laterais”:

$$\begin{cases} b_3 = Y_0(-1) - a(-1)X_0(-1) = 3y_2 - 2y_1 - a_3(3x_2 - 2x_1) \\ b_4 = Y_0(+1) - a(+1)X_0(+1) = 3y_4 - 2y_3 - a_4(3x_4 - 2x_3) \end{cases} \quad (7.123)$$

Substituindo essas constantes na equação (7.119) podemos escrever o ponto $\vec{x}_0$ em termos dos valores dados:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{b_3 - b_4}{a_4 - a_3} \\ y_0 = \frac{b_3 a_4 - b_4 a_3}{a_4 - a_3} \end{cases} \quad (7.124)$$

ou seja,

$$\begin{cases} x_0 = \{a_4(3x_4 - 2x_3) - a_3(3x_2 - 2x_1) + 3(y_4 - y_2) - 2(y_3 - y_1)\} / (a_4 - a_3) \\ y_0 = \{a_4(3y_2 - 2y_1) - a_3(3y_4 - 2y_3) + a_3 a_4 [3(x_4 - x_2) - 2(x_3 - x_1)]\} / (a_4 - a_3) \end{cases} \quad (7.125)$$

Se $a_4 = a_3$ essa análise é desnecessária pois basta fazer $a(\eta) = a_3 = a_4$. Se uma das assíntotas for vertical (inclinação “infinita”) basta calcular o limite das expressões acima.

Por fim, a inclinação de cada assíntota é escrita em termos de seus pontos $\vec{x}_0$ e $\vec{I}_0(\eta)$:

$$a(\eta) = \frac{Y_0(\eta) - y_0}{X_0(\eta) - x_0} = \frac{3Y_2(\eta) - 2Y_1(\eta) - y_0}{3X_2(\eta) - 2X_1(\eta) - x_0}, \quad (7.126)$$

com (x_0, y_0) dado pela equação (7.125).

Para finalizar essa seção, se os elementos com bordas assintóticas forem usados em conjunto com elementos infinitos com bordas retas, é necessário que a parametrização de ambos coincidam, pois os nós de ambos os lados deverão ser os mesmo. No entanto, as parametrizações utilizadas nas duas formulações não coincidem, pois os mapeamentos foram construídos de forma que os pontos $\vec{x}_2$ e $\vec{x}_4$ correspondam à coordenada $\xi = 0$ para elementos com bordas retas ($\vec{I}_3(0) = \vec{x}_2$ e $\vec{I}_4(0) = \vec{x}_4$, pois utiliza-se um mapa quadrático do tipo (7.47)), e à coordenada $\xi = -1/3$ para elementos com bordas curvas assintóticas ($\vec{I}_3(-1/3) = \vec{x}_2$ e $\vec{I}_4(-1/3) = \vec{x}_4$, pois utiliza-se um mapa cúbico do tipo (7.52)). Poderíamos alterar a parametrização do mapa cúbico, mas é mais fácil alterar a parametrização do mapa quadrático. Isso pode ser feito simplesmente alterando as funções de forma (7.36) – como explicado na seção (7.3.1) – para

$$M_1(\xi) = -\left(\frac{1 + 3\xi}{1 - \xi}\right), \quad M_2(\xi) = 2\left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right). \quad (7.127)$$

Isso corresponde a $\gamma = 2/3$ na equação (7.22).

Capítulo 8

O código BLATOS

Nesse capítulo apresento o código numérico **BLATOS**. Na verdade, as técnicas numéricas utilizadas no seu desenvolvimento já foram apresentadas em capítulos anteriores, faltando apenas a descrição da malha numérica utilizada (seção 8.1), e apresentação do método do campo autoconsistente (seção 8.2), que trata do problema de fronteira livre. Na seção 8.3 descrevo como é feito o remapeamento do domínio a cada passo do processo iterativo, visto que emprego um método espectral, que têm por característica básica ajustar o domínio numérico aos contornos do domínio físico.

Apresento então na seção 8.5 um modelo físico de disco grosso de acreção e alguns resultados numéricos originais que obtenho a partir desse código. Não realizo aqui um estudo das propriedades das soluções, apenas ilustro as soluções gerais obtidas. No entanto, mostro como posso realizar um estudo da estabilidade *runaway* a partir dessas soluções, exemplificando com soluções numéricas estáveis de acordo com essa metodologia.

8.1 Malha

Para a resolução numérica das equações por meio de um método espectral é necessário a utilização de uma malha adaptada à geometria do problema, nesse caso, à superfície do toro. Assim, construí a malha mostrada na figura 8.1. Dada a simetria assumida $\Psi(r, z) = \Psi(r, -z)$ das soluções, trabalho apenas com a metade superior ($z \geq 0$) do toro.

A decomposição do domínio numérico em subdomínios depende da superfície do toro, nesse caso da curva $\partial\mathcal{S}$, descrita de maneira geral por uma função $z_s(r)$. Na seção 8.3 mostro como a malha é construída a partir dessa superfície.

Essa malha é composta de 14 elementos, dentro dos quais é realizada uma interpolação polinomial de alta ordem. Na figura também é possível visualizar os nós internos e de fronteira de cada elemento. O número de nós de cada aresta é igual ao grau do polinômio utilizado nessa direção.

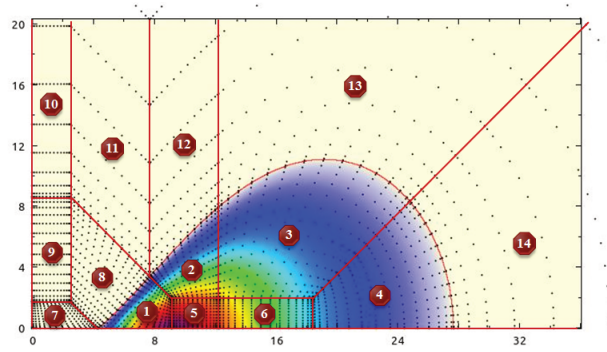


Figura 8.1: Malha composta de 14 elementos, 5 dos quais são elementos não limitados.

Essa é uma malha conforme, ou seja, elementos somente compartilham vértices ou arestas inteiras. Elementos que compartilham uma aresta utilizam os mesmos nós sobre essa aresta, e consequentemente a mesma ordem de interpolação nessa direção. O número de nós (e a ordem de interpolação) utilizado em uma aresta é totalmente independente das outras, devendo apenas satisfazer a condição de conformidade da malha.

Dentro de cada elemento o sistema de coordenadas e os nós internos são construídos por interpolação transfinita, conforme descrito na seção 7.2. Já a superfície do toro é construída utilizando interpolação isoparamétrica, o que quer dizer que a superfície é descrita por um polinômio de mesma ordem que o utilizado internamente nos elementos que contêm uma aresta sobre a superfície. Dessa forma, são os próprios nós internos das arestas sobre a superfície que são utilizados para interpolar a superfície.

Sobre cada aresta são utilizados os nós e quadraturas de Gauss-Lobatto-Legendre para integração numérica, com exceção dos elementos 7, 9 e 10, que contêm uma aresta sobre o eixo z . Como descrito na seção 6.2, para esses elementos (e somente na direção do eixo r) é preciso utilizar nós e quadraturas de Gauss-Lobatto-Jacobi para se evitar a singularidade do sistema cilíndrico de coordenadas.

Os elementos 1 e 4 em geral cobrem uma região física menor, fazendo com que a resolução da malha nessas regiões seja maior. Isso é conveniente porque o gradiente das quantidades físicas aproximadas (potencial gravitacional e densidade) são maiores nessas regiões, mais próximas ao centro.

Os elementos 10, 11, 12, 13 e 14 são elementos não limitados, que são mapeados de acordo com os elementos infinitos descritos na seção 7.4. Para testar os elementos infinitos com bordas assintóticas construí ainda a malha mostrada na figura 8.2, a qual contém três elementos desse tipo. Perceba que esse tipo de borda simplifica a construção da malha nesse caso.

Construí ainda outra malha para a resolução das equações relativísticas, para as quais há condições de contorno impostas sobre o horizonte de eventos do buraco negro. Essa

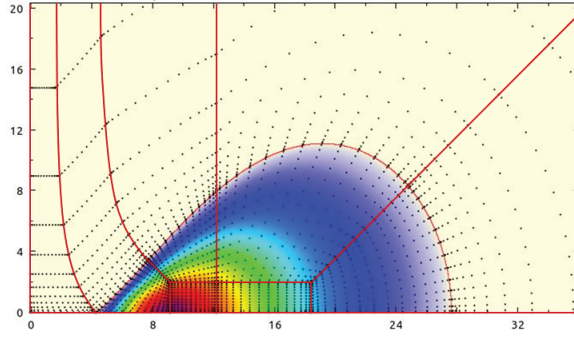


Figura 8.2: Malha contendo elementos com bordas curvas assintóticas.

malha é vista na figura 8.3. Observe que ela é bem semelhante à malha da figura 8.1, com

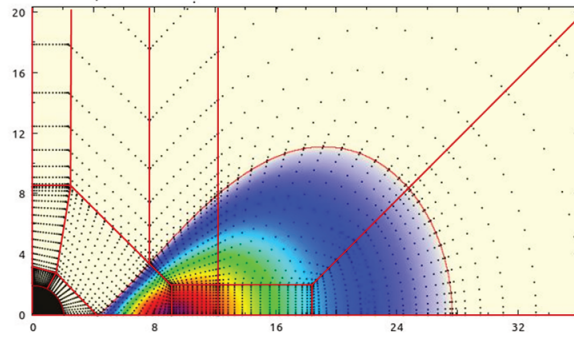


Figura 8.3: Malha adequada à resolução das equações relativísticas e que se adapta ao horizonte de eventos do buraco negro, onde são impostas condições de contorno de Dirichlet.

a diferença que o elemento 7 é dividido em três partes: dois elementos e a região interna ao buraco negro, que por sua vez não é um elemento numérico pois essa região está fora do domínio de resolução.

As decomposições do domínio em elementos mostradas acima não foram as únicas decomposições consideradas. Analisei outras possibilidades, mas essas me pareceram as mais consistentes e robustas com relação às variações da superfície do toro. Alguns fatores que determinam a qualidade da malha foram levados em conta nessa escolha.

Como regra geral, é preciso tornar os ângulos na malha o mais próximo possível de 90° . Perceba que utilizei alguns ângulos com 45° e 135° , mas isso se deve ao fato de que não sabemos *a priori* os ângulos com que as arestas que se ligam à superfície $\partial\mathcal{S}$ farão com ela, então é necessário uma estrutura que garanta que esses ângulos não se anulem ou cheguem a 180° . As malhas mostradas evitam situações extremas em que surgem ângulos muito pequenos e/ou muito grandes (caso algum desses ângulos seja igual a 0° ou 180° a

decomposição não mais funciona). Com as estruturas acima consigo que todos os ângulos estejam no intervalo $[45^\circ, 135^\circ]$ para as formas usuais de $\partial\mathcal{S}$.

As condições de contorno aplicadas nas arestas internas de cada elemento são condições de continuidade da solução. A condição de continuidade da derivada primeira é obtida pelo processo de convergência do método dos elementos espectrais, conforme descrito na seção 6.3. Para arestas sobre os eixos r e z aplica-se condições homogêneas de Newman, dadas as simetrias axial e de reflexão sobre o plano $z = 0$. Aplica-se condições homogêneas de Dirichlet sobre as arestas no “infinito” (para os elementos infinitos) e ainda condições não homogêneas de Dirichlet para arestas sobre o horizonte de eventos.

8.2 Método do campo autoconsistente

O método do campo autoconsistente foi aplicado a politropos primeiramente por Ostriker e Mark (1968) [12]. Na verdade, um esquema de campo autoconsistente foi originalmente criado por Hartree e Fock em conexão com cálculos de estrutura molecular (veja Tassoul [75]). Veremos nessa capítulo em que consiste essa metodologia.

De acordo com o modelo apresentado no capítulo 4 as figuras axissimétricas de equilíbrio de um fluido barotrópico autogravitante com equação de estado $P = P(\rho)$ ao redor de um corpo central com potencial gravitacional $\Phi_o(r, z)$ são governadas pelo conjunto de equações não lineares

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi = 4\pi \rho, \\ W(\rho(r, z)) = \Phi(r, z) + F(r), \end{cases} \quad (8.1)$$

formado pela equação de Poisson (3.18) e pela equação de Euler integrada (4.55). A função $F(r)$ é o potencial rotacional calculado por (4.52) a partir de dada uma distribuição de momento angular $L(r)$, e $W(\rho)$ definida pela equação (4.56) para uma equação de estado politrópica¹:

$$W(\rho) = W_s - (n + 1)K_0 \rho^{1/n}.$$

Assume-se que o potencial gravitacional é composto por dois termos

$$\Phi = \Phi_o + \Psi, \quad (8.2)$$

onde Φ_o é o potencial gravitacional de um corpo central esfericamente simétrico, assumido ser estático e não influenciado pelo fluido em rotação, e Ψ é o potencial gravitacional associado ao fluido autogravitante em rotação.

É claro que as equações (8.1) devem ser suplementadas por condições de contorno. Como trata-se de corpos isolados, é natural impor que o campo gravitacional Φ se anule

¹Nesse capítulo denoto a constante politrópica usual por K_0 . Reservo a letra K para a constante definida pela equação (8.5), que incorpora o fator $(n + 1)$ e cancela a potência n na equação (8.4).

no infinito. Em coordenadas cilíndricas, isto é equivalente a impor que

$$\begin{cases} \partial_z \Psi(r, 0) = \Psi(r, \infty) = 0, \\ \partial_r \Psi(0, z) = \Psi(\infty, z) = 0, \end{cases} \quad (8.3)$$

dado que as soluções de (8.1) são supostas simétricas sob reflexões em z ($\Psi(r, z) = \Psi(r, -z)$, $\rho(r, z) = \rho(r, -z)$) para corpos centrais esfericamente simétricos. Além disso, é preciso impor que $\rho = P = 0$ (o que corresponde a $W = W_s$, condição essa satisfeita por (4.56)) sobre a superfície de equilíbrio. De fato, as equações (8.1) fora do fluido devem ter $\rho = 0$. Contudo, não sabemos *a priori* a superfície do fluido, e portanto esse é um clássico problema de fronteira livre. A principal complicação na resolução desse problema vem dessa particularidade.

Pode-se eliminar a função W das equações (8.1). Invertendo a equação (4.56)

$$\rho(W) = K [W_s - W]^n, \quad (8.4)$$

onde

$$K \equiv [(n+1)K_0]^{-n}, \quad (8.5)$$

as equações (8.1) se tornam

$$\nabla^2 \Psi = \begin{cases} 4\pi K (W_s - \Psi(r, z) - \Phi_o(r, z) - F(r))^n, & \text{para } (r, z) \in \mathcal{S}(\Psi), \\ 0, & \text{para } (r, z) \notin \mathcal{S}(\Psi), \end{cases} \quad (8.6)$$

O lugar geométrico $\mathcal{S}(\Psi)$ corresponde à região ocupada pelo fluido, que é a dada pela região conexa contendo o ponto central $(r_0, 0)$ e delimitada pela superfície

$$\partial \mathcal{S}(\Psi) = \{(r, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ | \Psi(r, z) + \Phi_o(r, z) + F(r) = W_s\}. \quad (8.7)$$

O algoritmo consiste em rodar os passos iterativos

$$\nabla^2 \Psi_{k+1} = \begin{cases} 4\pi K (W_s - \Psi_k(r, z) - \Phi_o(r, z) - F(r))^n, & \text{para } (r, z) \in \mathcal{S}(\Psi_k), \\ 0, & \text{para } (r, z) \notin \mathcal{S}(\Psi_k), \end{cases} \quad (8.8)$$

Começando com $\Psi_0(r, z) = 0$. A cada passo, a equação de Poisson é resolvida para Ψ_{k+1} impondo-se as condições de contorno (8.3).

A cada iteração, a distribuição de densidade é calculada por

$$\rho_k = \begin{cases} [W_s - \Psi_k(r, z) - \Phi_o(r, z) - F(r)]^n, & \text{para } (r, z) \in \mathcal{S}(\Psi_k), \\ 0, & \text{para } (r, z) \notin \mathcal{S}(\Psi_k), \end{cases} \quad (8.9)$$

e o processo iterativo é repetido até que a diferença relativa

$$e_k \equiv \max_{(r_{ij}^k, z_{ij}^k) \in \mathcal{S}} \frac{|\rho_k - \rho_{k-1}|}{\rho_k} \quad (8.10)$$

entre dois passos se torne suficientemente pequena. Essa é uma medida da precisão obtida e não da *exatidão* do resultado.

A primeira aplicação desse método em relatividade geral foi feita por Bonazzola e Maschio [138] para computar modelos estelares com rotação rápida. A análise matemática do método do campo autoconsistente aplicado às equações de Einstein foi feita por Schaudt e Pfister [175]. Eles provaram a convergência exponencial do método e que o problema interno e externo de Dirichlet para estrelas relativísticas em rotação é solúvel, sob algumas condições nos valores de contorno.

Uma observação importante com relação ao método do campo autoconsistente é que não há uma prova formal de que esse método convirja. Porém ele tem sido usado com sucesso em muitas aplicações e aparentemente converge para todas as situações fisicamente relevantes. Para o caso particular de uma estrela estacionária em rotação, no âmbito da relatividade geral, uma prova rigorosa da convergência (exceto pelo remapeamento do espaço físico a cada iteração) foi dada por Schaudt e Pfister [175].

8.3 Remapeamento do domínio

Nos métodos “não espectrais”, assume-se uma região sobre a qual é realizado o cálculo numérico, e a simulação não se estende até o infinito espacial. Com isso, é possível aplicar o método do campo autoconsistente de forma direta, pois não é preciso que se altere a malha numérica utilizada na resolução da equação de Poisson a cada iteração. Para isso o método adota uma representação integral, ao invés do uso de equações diferenciais, porque as condições de contorno são mais fáceis de se manipular na forma integral.

Em sua forma integral, a equação de Poisson é dada por

$$\Psi(\vec{r}) = - \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (8.11)$$

A vantagem da formulação integral é que as condições de contorno para o campo gravitacional podem ser incluídas facilmente, e a desvantagem é que para configurações onde o desvio da simetria esférica é grande, altas ordens dos polinômios de Legendre devem ser consideradas para se calcular (8.11) numericamente, implicando em um grande custo computacional. Se o problema é formulado na forma diferencial, um sistema de equações lineares deve ser resolvido, o que pode ser feito de maneira muito eficiente. A desvantagem da formulação diferencial é que é mais difícil de se incluir as condições de contorno.

Para se resolver a equação de Poisson, são usadas expansões em série dos campos da seguinte forma: a equação (8.11) pode ser escrita, em coordenadas esféricas, como [71]

$$\Psi(R, \theta) = -4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} f_{2l}(R, R') P_{2l}(\cos \theta) P_{2l}(\cos \theta') \rho(R', \theta') R'^2 \sin \theta' dR' d\theta'. \quad (8.12)$$

onde

$$f_{2l}(R, R') = \begin{cases} R'^{2l}/R^{2l+1} & \text{para } R \geq R', \\ R^{2l}/R'^{2l+1} & \text{para } R < R'. \end{cases} \quad (8.13)$$

Essa expansão se adequa melhor a modelos que incluem a origem, como modelos estelares. Para o caso de um toro convém expandir em coordenadas esferoidais oblatas

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta) = & -2\pi r_c^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\eta) \\ & \times [p_l(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \int_{-1}^1 (\xi'^2 + \eta'^2) P_l(n') q_l(\xi') \rho(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\ & + q_l(\xi) \int_0^{\xi} \int_{-1}^1 (\xi'^2 + \eta'^2) P_l(n') p_l(\xi') \rho(\xi', \eta') d\xi' d\eta']. \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$+ q_l(\xi) \int_0^{\xi} \int_{-1}^1 (\xi'^2 + \eta'^2) P_l(n') p_l(\xi') \rho(\xi', \eta') d\xi' d\eta']. \quad (8.15)$$

Inserindo as expansões

$$\rho(r, z) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \rho_{ij} r^i z^j, \quad (\rho_{ij} = \text{const}), \quad (8.16)$$

$$\Psi(r, z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \Psi_{kl} r^k z^l, \quad (\Psi_{kl} = \text{const}). \quad (8.17)$$

na equação (8.12) obtém-se um tensor T_{ijkl} tal que

$$\Psi_{kl} = \sum_{i,j=0}^{\infty} T_{ijkl} \rho_{ij}. \quad (8.18)$$

Além das expansões em série muitos outros métodos já foram empregados para se resolver a equação de Poisson. Clement [128] e Blinnikov [176] utilizam, ao invés de expansões em série, o *método de diferenças finitas* para resolver a equação de Poisson, alegando que as expansões envolvem erros de truncamento incertos e não representam variações radiais com precisão suficiente.

Storzer [177] utilizou o *método dos elementos finitos*, resolvendo o problema variacional equivalente. O problema variacional é dado pela condição de que o potencial gravitacional extremiza a seguinte expressão

$$I = \int_S \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi^2}{\partial r} + \frac{\partial \Psi^2}{\partial z} \right) + 4\pi \rho \right] r dr dz. \quad (8.19)$$

Com isso quero mostrar que a aplicação tradicional do método do campo autoconsistente com métodos “não espectrais” envolve certas complicações que derivam do fato das condições de contorno serem impostas somente no infinito.

Métodos espectrais, por outro lado, lidam com domínios não limitados de uma forma muito mais natural, a partir de funções de expansão que decaem no infinito. No entanto,

nesse tipo de método a região espacial é separada em domínios, de tal forma que um domínio (ou vários) limita exatamente a região de matéria $\mathcal{S}$. Isso faz com que, a cada iteração esse domínio deva ser recalculado, procurando uma nova fronteira $\partial\mathcal{S}$, definida pela curva $z = z_s(r)$ (superfície) equipotencial satisfazendo $W_k(r, z) = W_s$, ou equivalentemente, a curva onde $\rho_k(r, z) = 0$. Isso define um novo domínio $\mathcal{S}$ com um novo contorno, e um novo sistema de coordenadas deve ser construído a cada iteração.

A seguir descrevo com a malha é readaptada à superfície do toro a cada iteração. Utilizo a função $\Psi_k(r, z)$ como quantidade física fundamental para se determinar a superfície (e consequentemente a malha) ao invés de $\rho_k(r, z)$. Portanto, dada a função $\Psi_k(r, z)$, três passos são executados:

1. Encontrar os 4 vértices de cada elemento;
2. Encontrar (os nós sobre) a superfície e gerar os nós sobre as arestas;
3. Gerar os nós internos a cada elemento.

Na primeira etapa encontro (ou defino) todos os vértices. Vou denotar aqui cada vértice pelo ponto $\vec{x}_i$, segundo a numeração mostrada na figura 8.4.

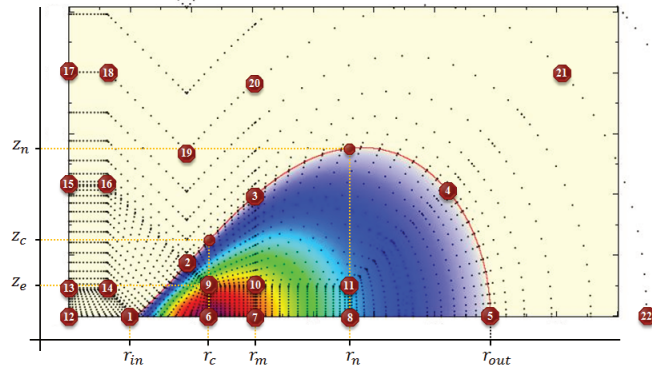


Figura 8.4: Numeração e construção dos vértices da malha.

O primeiro a ser encontrado é o vértice central $\vec{x}_6 = (r_c, 0)$, que é o ponto sobre o eixo r para o qual $\frac{\partial\Psi}{\partial r}(r_c, 0) = 0$. Em seguida vêm os vértices internos e sobre a superfície $\partial\mathcal{S}$. Por meio de uma busca por bissecção que descrevo na seção ?? encontro primeiramente os limites interno $\vec{x}_1 = (r_{in}, 0)$ e externo do toro $\vec{x}_5 = (r_{out}, 0)$. Os dois outros vértices internos sobre o eixo r são definidos simplesmente por $\vec{x}_7 = (r_m, 0)$ e $\vec{x}_8 = (r_n, 0)$, onde

$$r_m \equiv r_c + \frac{r_{out} - r_c}{6}, \quad (8.20)$$

$$r_n \equiv \frac{r_{out} + r_c}{2}. \quad (8.21)$$

Escolhi essa distribuição baseado na forma geral do toro, em que os gradientes são maiores próximo do limite interno.

Encontro dois pontos auxiliares (r_c, z_c) e (r_n, z_n) fazendo uma busca vertical da superfície a partir dos pontos $(r_c, 0)$ e $(r_n, 0)$. Defino então o valor z_e como

$$z_e \equiv 0.4 \min\{z_c, z_n\}, \quad (8.22)$$

de tal forma que os três vértices internos são definidos como $\vec{x}_9 = (r_c, z_e)$, $\vec{x}_{10} = (r_m, z_e)$ e $\vec{x}_{11} = (r_n, z_e)$.

Um dos três vértices restantes sobre a superfície, o ponto médio $\vec{x}_3 = (r_m, z_m)$, é encontrado por uma busca vertical da superfície partindo de $\vec{x}_7$. Os outros dois, $\vec{x}_2$ e $\vec{x}_4$, por uma busca da superfície partindo de $\vec{x}_9$ e $\vec{x}_{11}$, ao longo das direções de 135° e 45° respectivamente.

Os vértices externos são definidos por simples geometria. O vértice $\vec{x}_{12} = (0, 0)$ é a origem do sistema de coordenadas. $\vec{x}_{13}$ e $\vec{x}_{14}$ são definidos de tal forma que $|\vec{x}_1 - \vec{x}_{14}| = |\vec{x}_{14} - \vec{x}_{13}|$, e que a aresta $\vec{x}_{14} - \vec{x}_{13}$ seja horizontal. O vértice $\vec{x}_{16}$ está no cruzamento da reta de 135° partindo de $\vec{x}_2$ e da reta vertical que passa por $\vec{x}_{14}$, enquanto que o vértice $\vec{x}_{15}$ é tal que a aresta $\vec{x}_{16} - \vec{x}_{15}$ seja horizontal.

Os vértices de $\vec{x}_{17}$ a $\vec{x}_{22}$ não são de fato vértices de elementos, mas sim pontos utilizados na construção do mapa dos elementos infinitos. Dados esses vértices, a curva $\vec{I}_2(\eta)$ de cada elemento infinito é obtida de tal maneira que essa tenha a mesma forma da superfície $\vec{I}_1(\eta)$. As curvas $\vec{I}_2(\eta)$ de cada elemento infinito são mostradas na figura 8.5 em vermelho.

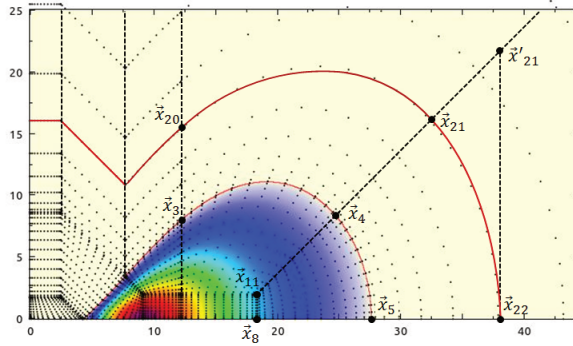


Figura 8.5: Obtenção dos vértices “médios” que satisfazem à condição de paralelismo para a construção das curvas $\vec{I}_2(\eta)$ (em vermelho) dos elementos infinitos.

Algo importante a se observar na fixação desses pontos é que a parametrização de elementos vizinhos deve coincidir, pois eles compartilham os nós da fronteira. Além disso, eles são construídos de forma que os vetores $[\vec{I}_1(1) - \vec{I}_1(-1)]$ e $[\vec{I}_2(1) - \vec{I}_2(-1)]$ sejam paralelos (veja seção 7.6). Isso implica que eles devem ser obtidos em sequência, seguindo a condição de paralelismo, para ajustar todas as parametrizações.

Começo então escolhendo um ponto sobre o eixo r para o vértice $\vec{x}_{22}$, o que posiciona o polo desse elemento. Em particular, utilizo a condição $r_{22} - r_5 = r_5 - r_8$. Isso ajusta a “extensão” do elemento infinito, e pode ser alterado conforme se necessite que a malha se estenda ou se reduza. A partir dos nós $\vec{x}_4$, $\vec{x}_5$ e $\vec{x}_{22}$ escrevo um ponto auxiliar $\vec{x}'_{21}$ sobre a reta de 45° partido de $\vec{x}_4$ e tal que $\vec{x}'_{21} - \vec{x}_{22}$ seja vertical. Então $\vec{x}_{21}$ é obtido pela condição de paralelismo (7.91)

$$\vec{x}_{21} = \vec{x}_4 + \frac{|(\vec{x}_5 - \vec{x}_4) \times (\vec{x}_{22} - \vec{x}_4)|}{|(\vec{x}_5 - \vec{x}_4) \times (\vec{x}'_{21} - \vec{x}_4)|}(\vec{x}'_{21} - \vec{x}_4). \quad (8.23)$$

O mesmo é feito em seguida para o nó $\vec{x}_{20}$, e assim por diante para os demais.

Isso finaliza o primeiro passo de encontrar os vértices. O próximo passo é encontrar os nós sobre a superfície e sobre as arestas. Para arestas “comuns” basta gerar nós de Gauss-Lobatto-Legendre entre os vértices que a definem, lembrando que para arestas com um de seus vértices sobre o eixo z esses nós serão os nós de Gauss-Lobatto-Jacobi.

Para a superfície, é preciso encontrar os nós sobre ela, que são utilizados para interpolar sua forma final. Para isso, seleciono uma das direções r ou z , dependendo de qual componente de $[\vec{I}_2(1) - \vec{I}_2(-1)]$ for maior, para distribuir os nós da quadratura, e a outra para procurar a superfície. Por exemplo, seja o elemento entre os nós $\vec{x}_{10}$, $\vec{x}_{11}$, $\vec{x}_4$ e $\vec{x}_3$, que de acordo com a figura 8.6 tem $r_4 - r_3 > z_4 - z_3$. Distribuo então retas *verticais* nos

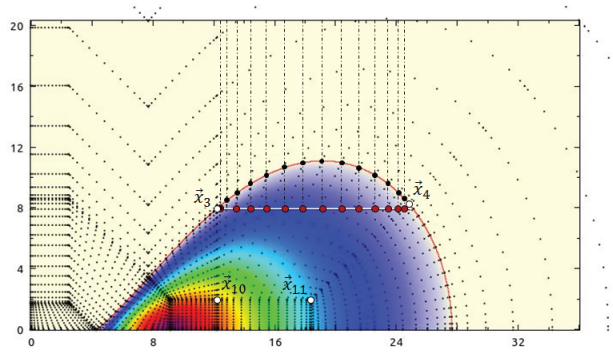


Figura 8.6: Determinação dos nós sobre a superfície: distribuí-se retas verticais ao longo dos raios r_i , que são os nós de Gauss-Lobatto-Legendre entre $\vec{x}_3$ e $\vec{x}_4$, e encontra-se a coordenada z_i da superfície em cada uma delas por uma busca por bissecção.

raios r_i

$$r_i = \left(\frac{r_4 - r_3}{2}\right)\eta_i + \left(\frac{r_4 + r_3}{2}\right) \quad (8.24)$$

onde η_i são nós da quadratura de Gauss-Lobatto-Legendre, e procuro as posições z_i da superfície, como mostra a figura 8.6. Se $z_4 - z_3 > r_4 - r_3$, inverte-se a situação, distribuindo-se z_i nos nós da quadratura e procurando r_i da superfície. Fazendo isso para todos os

quatro elementos com arestas sobre a superfície determina-se a própria superfície. Como aplico interpolação isoparamétrica, esses nós serão os mesmos utilizados internamente nos elementos, o que finaliza a definição dos nós sobre as arestas de todos os elementos.

O terceiro e último passo é gerar os nós internos a cada elemento, o que significa na verdade construir a transformação de coordenadas $\vec{X}(\xi, \eta)$ dentro de cada elemento. Para elementos finitos (limitados) essa transformação é feita por meio da interpolação transfinita, e para elementos infinitos (não limitados), o que foi descrito na seção 7.6. Dada a transformação de coordenadas, os nós internos serão simplesmente $\vec{X}(\xi_i, \eta_j)$, onde x_i e η_j são os pontos da quadratura apropriada.

Terminada a construção da malha, é necessário ainda obter a função $\Psi(r, z)$ nos novos pontos da malha. Perceba que a solução que temos na verdade são os valores nodais $\Psi_k(r_{ij}^k, z_{ij}^k)$, e que agora os pontos de colocação (r_{ij}^k, z_{ij}^k) não são mais os mesmos da iteração anterior, ou seja, variam com k (de iteração pra iteração). Isso porque dependem do sistema de coordenadas, que é reconstruído a cada iteração. Com isso, os valores nodais devem ser recalculados a cada iteração.

Nos métodos “não nodais”, ou modais (e.g., expansões modais de Legendre) esses valores nodais são calculados por meio da série que dá a expansão espectral do campo, calculando-se diretamente as somas dessas séries. Essas somas têm um alto custo computacional e de fato, essa é a operação de maior custo computacional do método [14]. A substituição da soma completa por uma interpolação sobre os pontos de colocação diminui o custo computacional. A vantagem da soma direta (formalismo modal) é que ela não introduz nenhum erro no método, e o valor da função é calculado com a precisão espectral. Nos métodos espectrais nodais, como o método da colocação e o método nodal de Galerkin que utilizo aqui, os campos são conhecidos nos pontos nodais, e portanto, esses valores são calculados por interpolação dos valores sobre os pontos do grid anterior.

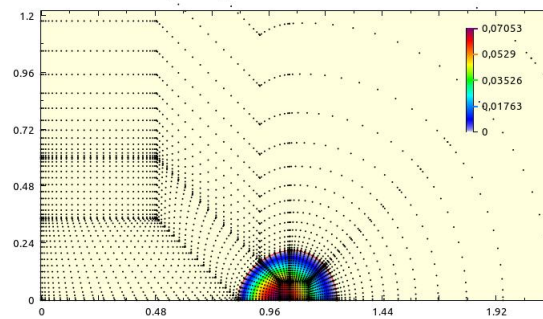


Figura 8.7: Primeira iteração: malha adaptada à superfície do toro, com distribuição de densidade ρ_1 .

Com isso, se completa o remapeamento do domínio. Resumindo o que foi feito, dada

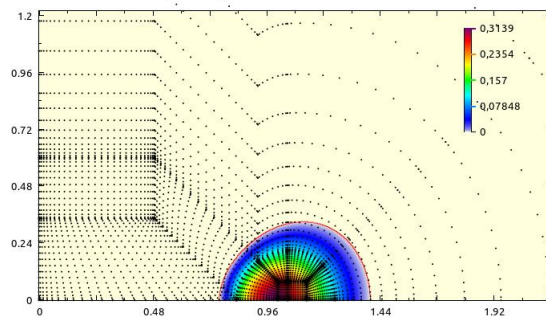


Figura 8.8: Segunda iteração: nova distribuição de densidade ρ_2 sobre a malha construída e ajustada à densidade ρ_1 .

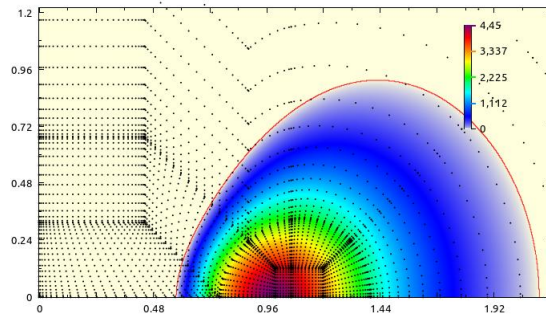


Figura 8.9: Terceira iteração: nova distribuição de densidade ρ_3 sobre a malha construída e ajustada à densidade ρ_2 .

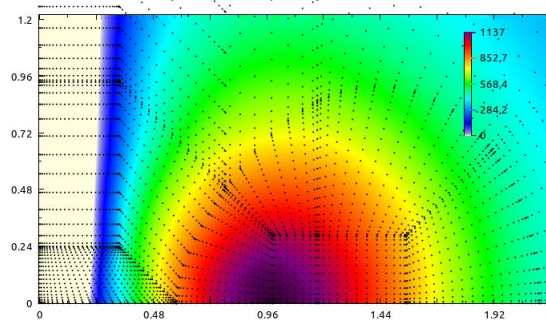


Figura 8.10: Quarta iteração: nova distribuição de densidade ρ_4 sobre a malha construída e ajustada à densidade ρ_3 .

a solução de uma iteração $\Psi_k(r_{ij}^k, z_{ij}^k)$, calculada sobre os nós (r_{ij}^k, z_{ij}^k) , calcula-se os novos nós $(r_{ij}^{k+1}, z_{ij}^{k+1})$ (e um novo sistema de coordenadas) pelo procedimento descrito acima, de tal forma que a nova malha se ajusta à superfície $z = z(r)$ que satisfaz a condição $W_k(r, z) = Ws$. Então, a solução é interpolada sobre a malha “antiga” para os pontos nodais da nova malha, resultado em novos valores nodais $\Psi_k(r_{ij}^{k+1}, z_{ij}^{k+1})$, que estão prontos para uma nova iteração.

As figuras 8.7-8.10 mostram a saída do sistema BLATOS de quatro iterações seguidas. Foi escolhido um valor “grande” para a constante K , de forma que a cada iteração a massa do sistema aumente consideravelmente e a nova superfície seja relativamente distante da anterior para se observar o efeito de remapeamento. Obviamente essa sequência não convergiu.

8.4 Testes de precisão e exatidão

A convergência do processo pode ser observada verificando a evolução do valor do “erro” e_k , equação (8.10), ao longo das iterações. As figuras 8.11 e 8.12 apresentam gráficos de

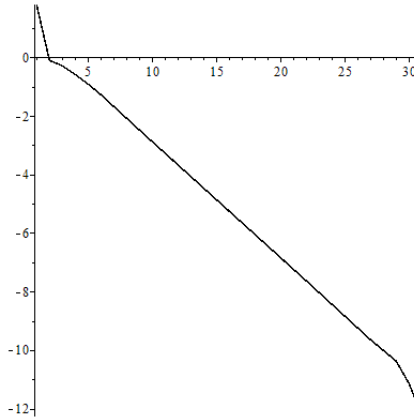


Figura 8.11: Gráfico $\log_{10} e_k \times k$ para uma malha com 1331 graus de liberdade.

$\log_{10} e_k \times k$ do mesmo sistema, alterando-se apenas a resolução da malha (com 1331 e 3046 graus de liberdade respectivamente).

Observa-se que o sistema converge a uma taxa constante, com a precisão seguindo uma “lei” de convergência do tipo $e_k \approx e_0 10^{-0.4k}$ até uma determinada precisão limite. Em geral foi possível obter precisões próximas da precisão da máquina, até ordem de 10^{-13} aproximadamente, como mostra o gráfico 8.11. No entanto, em algumas situações observou-se um limite inferior a esse, como mostra a figura 8.12.

A exatidão do procedimento numérico foi aferida apenas no que se refere à resolução do problema de valor de contorno de cada iteração, e não do problema de fronteira livre

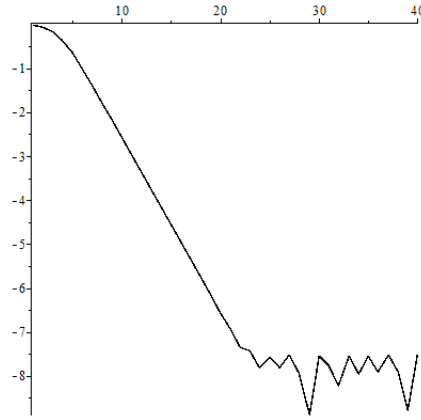


Figura 8.12: Gráfico $\log_{10} e_k \times k$ para uma malha com 3046 graus de liberdade.

completo (que carece de soluções analíticas a serem testadas). Para isso, realizei uma simples resolução de um problema de valor de contorno com solução analítica conhecida e avaliei o erro do resultado numérico. A equação analisada foi a equação de Poisson abaixo

$$\nabla^2 \Psi = \frac{45}{(r^2 + z^2 + 5)^{5/2}} \quad (8.25)$$

com as condições de contorno (8.3), cuja solução analítica é

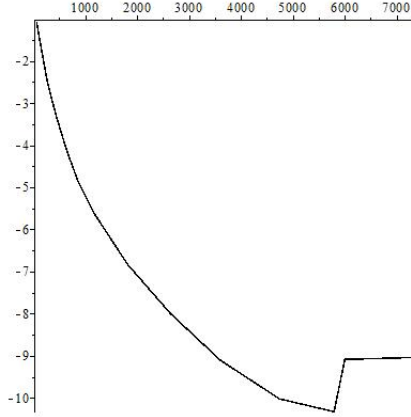
$$\Psi_{ex}(r, z) = -\frac{3}{\sqrt{r^2 + r^2 + 5}}. \quad (8.26)$$

O erro avaliado foi simplesmente

$$e_r \equiv \max_{(r_{ij}, z_{ij}) \in \mathcal{S}} \frac{|\Psi_n - \Psi_{ex}|}{\Psi_n}, \quad (8.27)$$

onde $\Psi_n(r, z)$ é a solução numérica.

Ao se aumentar o número de graus de liberdade da solução numérica (aumentando a resolução da malha) o seu erro com relação à solução analítica acima deve diminuir, evidenciando a convergência. O gráfico 8.13 mostra essa tendência, até um valor de erro de 10^{-10} aproximadamente, a partir do qual não houve melhora na exatidão do resultado numérico. Isso se deve principalmente ao fato de que, para os valores de máxima exatidão foram necessários polinômios interpolantes de grau em torno de 20. Para polinômios de graus maiores que esse observei um aumento no erro numérico ao invés de uma queda, o que pode ser explicado pela instabilidade intrínseca do processo de interpolação polinomial de alta ordem. Portanto, para se obter soluções com maior exatidão seria necessário refinar a malha aumentando-se o número de elementos, e não apenas aumentar o grau do polinômio interpolante dentro de cada elemento.

Figura 8.13: Gráfico $\log_{10} e_r \times$ graus de liberdade.

8.5 Um modelo físico de disco grosso de acreção

Apresento agora um modelo físico de disco grosso de acreção. Utilizarei uma equação de estado politrópica e o cálculo será feito no âmbito da gravitação Newtoniana, utilizando o potencial pseudonewtoniana de Paczyński-Wiita (2.191).

A primeira coisa para se obter uma solução numérica é escrever o conjunto total de equações que descrevem esse sistema físico em uma forma adimensional, escolhendo unidades de comprimento a e de massa M apropriadamente. Uma unidade de comprimento conveniente é o raio do horizonte de eventos, que para um buraco negro esfericamente simétrico é o chamado raio de Schwarzschild $r_g = 2GM/c^2$. Defino então a escala de comprimento $a \equiv GM/c^2 = r_g/2$. Para a escala de massa usarei a massa M do buraco negro. Teremos então as quantidades físicas em sua forma adimensional, dadas abaixo²:

$$\begin{aligned}
 r &\leftarrow \frac{r}{a}, & \Psi &\leftarrow \left(\frac{a}{MG}\right) \Psi, \\
 z &\leftarrow \frac{z}{a}, & \Phi &\leftarrow \left(\frac{a}{MG}\right) \Phi, \\
 \rho &\leftarrow \frac{a^3}{M} \rho, & \Phi_o &\leftarrow \left(\frac{a}{MG}\right) \Phi_o, \\
 L^2 &\leftarrow \frac{L^2}{MGa}, & W &\leftarrow \left(\frac{a}{MG}\right) W.
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

Usando essas definições, a equação de estado politrópica se torna simplesmente

$$\rho(W) = K (W_s - W)^n, \tag{8.29}$$

sendo a constante adimensional K (redefinida em termos da constante politrópica original

²Manterei as mesmas letras para denotar as formas adimensionais das quantidades físicas.

K_0 pela equação (8.5)) dada por

$$K \leftarrow \frac{a^3}{M} \left[\frac{GM}{aK_0(n+1)} \right]^n. \quad (8.30)$$

A constante adimensional W_s incorpora o mesmo fator que W .

As equações de Poisson e Euler integrada em sua forma adimensional são

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi\rho, \quad (8.31)$$

$$W(r, z) = \Psi(r, z) + \Phi_o(r, z) + F(r), \quad (8.32)$$

onde aparece o potencial gravitacional de Paczyński-Wiita³

$$\Phi_o(r, z) = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2} - 2}. \quad (8.33)$$

A distribuição de momento angular que emprego é uma simplificação da distribuição desenvolvida por Qian *et al.* [36], descrita na seção 4.7. Para o cálculo Newtoniano precisamos de uma forma funcional do tipo $L = L(r)$. Aplicarei simplesmente a hipótese de que o momento angular deva ser constante para $r \leq r_{ms}$ e Kepleriano para $r > r_{ms}$. Portanto, para o potencial de Paczyński-Wiita temos que

$$L^2(r) = \begin{cases} L_{ms}^2 = \frac{r_{ms}^3}{(r_{ms}-2)^2}, & \text{para } r \leq r_{ms} \\ L_k^2(r) = \frac{r^3}{(r-2)^2}, & \text{para } r > r_{ms}, \end{cases} \quad (8.34)$$

sendo o momento angular Kepleriano dado pela equação (2.194). Observe que essa distribuição é contínua, com derivada primeira contínua, pois $\left. \frac{dL_k^2}{dr} \right|_{r_{ms}} = 0$ (segundo a definição do raio r_{ms}), e satisfaz ao critério de estabilidade de Rayleigh para $r > r_{ms}$ (para $r < r_{ms}$ ela é somente marginalmente estável).

Podemos integrar esse momento angular de acordo com a equação (4.52), para obter o potencial rotacional $F(r)$. Para isso, divido a integral em duas

$$F(r) = \begin{cases} -\int_{\infty}^{r_{ms}} \frac{L_k^2(r')}{r'^3} dr' - \int_{r_{ms}}^r \frac{L_{ms}^2}{r'^3} dr', & \text{para } r \leq r_{ms} \\ -\int_{\infty}^r \frac{L_k^2(r')}{r'^3} dr', & \text{para } r > r_{ms} \end{cases}$$

e utilizo a condição⁴ $F(r \rightarrow \infty) = 0$:

$$F(r) = \begin{cases} \frac{L_{ms}^2}{2r^2} - \frac{L_{ms}^2}{2r_{ms}^2} + \frac{1}{r_{ms}-2}, & \text{para } r \leq r_{ms} \\ \frac{1}{r-2}, & \text{para } r > r_{ms} \end{cases} \quad (8.35)$$

³Observe que nessas unidade $r_g = 2$.

⁴Essa condição é necessária para que $W(r \rightarrow \infty, z) = 0$, o que faz com que a constante de integração da equação de Euler integrada (8.32) seja nula (integrando-se do infinito até o ponto em questão.)

com

$$L_{ms}^2 = \frac{r_{ms}^3}{(r_{ms} - 2)^2}. \quad (8.36)$$

Observe que os termos providos da integração de L_k^2 resultam simplesmente no potencial $\Phi_o(r, 0)$ no plano equatorial (o que era de se esperar, pois a função potencial do momento angular Kepleriano se iguala ao potencial gravitacional). Dessa forma, a função $W(r, z)$ (8.32) pode ser escrita como

$$W(r, z) = \begin{cases} \Psi(r, z) + \Phi_o(r, z) - \Phi_o(r_{ms}, 0) + \frac{L_{ms}^2}{2r^2} - \frac{L_{ms}^2}{2r_{ms}^2}, & \text{para } r \leq r_{ms} \\ \Psi(r, z) + \Phi_o(r, z) - \Phi_o(r, 0), & \text{para } r > r_{ms} \end{cases} \quad (8.37)$$

No plano equatorial essa equação se torna

$$W(r, 0) = \begin{cases} \Psi(r, 0) + \Phi_o(r, 0) - \Phi_o(r_{ms}, 0) + \frac{L_{ms}^2}{2r^2} - \frac{L_{ms}^2}{2r_{ms}^2}, & \text{para } r \leq r_{ms} \\ \Psi(r, z), & \text{para } r > r_{ms} \end{cases} \quad (8.38)$$

de tal forma que o raio da órbita circular marginalmente estável é obtido simplesmente pelo potencial Φ :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \Big|_{r_{ms}} = 0, \quad (8.39)$$

o que pode ser calculado numericamente a partir de uma solução da equação de Poisson (8.31).

Dadas as formas adimensionais das equações e essa escolha de distribuição de momento angular e equação de estado politrópica, os parâmetros do modelo são W_s , K e n . Contudo, analisarei modelos com índice politrópico n fixo, de forma que os parâmetros livres sejam apenas W_s e K . Portanto, fixados esses dois parâmetros obtém-se como solução um único estado de equilíbrio (quando esse existir). A unidade de comprimento a é fixada pelo raio do horizonte de eventos do buraco negro central, o que fixa a escala de comprimento da solução. As massas, no entanto, são dadas em termos da massa M do buraco negro, que é livre e pode ser assumida como sendo qualquer valor. Então, a solução na verdade é uma família de soluções, válida para qualquer escolha de M .

A constante W_s seleciona a superfície equipotencial que o toro “preencherá”, e pode ser definida independentemente de K . Vimos na seção 4.1.1 que para que seja possível um estado quase-estacionário de acreção é necessário que o disco preencha completamente o lóbulo de Roche. Essa condição, dentro do modelo apresentado, fixa o valor do parâmetro W_s , definindo-o como sendo o valor de $W(r, z)$ calculado no plano equatorial ($z = 0$) e no raio da cúspide r_{cusp} . Esse raio é ponto é um ponto crítico de W , e pode ser definido como sendo a menor raiz da equação

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{(r=r_{cusp}, z=0)} = 0. \quad (8.40)$$

A outra raiz dessa equação é o raio do “centro” do toro r_0 , o círculo de máxima densidade e pressão. Dessa forma,

$$W_s = W(r_{cusp}, 0), \quad (8.41)$$

restando-nos apenas o parâmetro K para especificar o modelo, que como veremos a seguir, está relacionado à massa do sistema.

A massa do toro resultante pode ser obtida por uma integração simples:

$$m \equiv \int_V \rho dV = \int \int \int_V \rho r dr dz d\varphi = 2\pi \int \int_S \rho r dr dz, \quad (8.42)$$

ou, usando a equação (8.29),

$$m = 2\pi \int \int_S K (W_s - W)^n r dr dz. \quad (8.43)$$

Essa massa é na verdade a massa “adimensional” m/M , ou seja, a massa do toro em termos da buraco negro, pois integra a densidade adimensional. Posso escrever essa relação como

$$m = K I(W_s, K), \quad (8.44)$$

onde defino a integral

$$I(W_s, K) \equiv 2\pi \int \int_S [W_s - \Psi(r, z) - \Phi_o(r, z) - F(r)]^n r dr dz. \quad (8.45)$$

A integral acima pode ser calculada a partir de um estado de equilíbrio (solução das equações acima), e portanto tem uma dependência funcional em W_s e K , os parâmetros do modelo. A dependência em W_s aparece explicitamente dentro da integral, mas a dependência em K é implícita e vem da equação de estado (8.29), da qual depende a solução (que aparece na integral como sendo o potencial Ψ).

Determinada a massa m do toro, a *massa total* do sistema toro/buraco negro será então:

$$M_T \equiv (m + 1)M, \quad (8.46)$$

lembrando que m é a razão da massa do toro pela massa do buraco negro. Obviamente a massa total do sistema depende da “escala” de massa M escolhida, o que *aparentemente* não é relevante para a obtenção de uma solução. Na verdade, a massa do buraco negro aparece dentro da definição da constante K (8.30), e definidos a constante K_0 e o índice n politrópicos (além do raio a do buraco negro), ela pode ser calculada por

$$M = \left[K a^{n-3} \left(\frac{K_0(n+1)}{G} \right)^n \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad (8.47)$$

o que posso escrever em termos de uma nova constante com unidade de massa M_0 :

$$M(K) = M_0 K^{\frac{1}{n-1}}, \quad (8.48)$$

onde

$$M_0 = \left[a^{n-3} \left(\frac{K_0(n+1)}{G} \right)^n \right]^{\frac{1}{n-1}}. \quad (8.49)$$

Podemos então escrever uma forma adimensional para a massa total (8.46), que escrevo como sendo $\mathcal{M} \equiv M_T/M_0$, dividindo aquela equação por M_0 :

$$\mathcal{M} = (m+1) \frac{M}{M_0}, \quad (8.50)$$

Usando a expressão (8.48) para $M(K)$ e a equação (8.44) para $m(W_s, K)$ podemos escrever a forma funcional $F(W_s, K)$ da massa total adimensional em termos dos parâmetros do modelo:

$$F(W_s, K) = \mathcal{M}, \quad (8.51)$$

onde

$$F(W_s, K) = [K I(W_s, K) + 1] K^{\frac{1}{n-1}}. \quad (8.52)$$

Isso nos permite fazer um estudo da instabilidade *runaway*. Escolhendo um parâmetro inicial de superfície W_s que gere um toro que preenche completamente o lóbulo de Roche, e uma determinada constante adimensional K , o toro em equilíbrio (caso ele exista) que terá uma massa m dada pela equação (8.44). Haverá então uma massa total adimensional $\mathcal{M}$ dada pela equação (8.51).

Podemos então gerar um outro modelo que diminua “levemente” a massa do toro, com $m' < m$, mas que mantenha a massa total $\mathcal{M}$, simulando um processo acretivo quase-estacionário em que matéria é deslocada do toro para o buraco negro. Isso pode ser feito alterando-se “levemente” a constante K de um modelo para o outro, ou seja, fazendo-se $K' = K + \delta K$. Para que esse modelo final mantenha a massa total inicial, o parâmetro de superfície final W'_s será diferente de W_s , ou seja, $W'_s = W_s + \delta W_s$, pois será determinado implicitamente pela equação (8.51)

$$F(W'_s, K') = \mathcal{M}. \quad (8.53)$$

Diferenciando-se essa expressão podemos ver que, para “pequenas” alterações δK teremos que

$$\frac{\partial F}{\partial W_s} \delta W_s + \frac{\partial F}{\partial K} \delta K = 0, \quad (8.54)$$

ou seja,

$$\delta W_s = - \left(\frac{\partial_K F}{\partial_{W_s} F} \right) \delta K. \quad (8.55)$$

Utilizando a forma funcional (8.52) podemos calcular essas derivadas parciais em termos de I :

$$(\partial_k F) = K^{\frac{1}{n-1}} \left[K \partial_k I + \left(\frac{1}{n-1} \right) \left(nI + \frac{1}{K} \right) \right], \quad (8.56)$$

$$(\partial_{W_s} F) = K^{\frac{n}{n-1}} \partial_{W_s} I. \quad (8.57)$$

Assim, a equação (8.54) se torna

$$\delta W_s = - \left(\frac{1}{\partial_{W_s} I} \right) \left[\partial_K I + \frac{1}{K(n+1)} \left(nI + \frac{1}{K} \right) \right] \delta K. \quad (8.58)$$

No entanto, as derivadas $\partial_{W_s} I$ e $\partial_K I$ não podem se encontrar analiticamente, pois dependem da solução, que por sua vez depende do próprio valor de δW_s por meio de $W'_s = W_s + \delta W_s$.

Dessa forma, o novo modelo, com parâmetro $K' = K + \delta K$, deve ser calculado numericamente utilizando como segundo parâmetro a massa total $\mathcal{M}$ e não mais W'_s . Isso pode ser feito exigindo que, a cada iteração, a nova superfície gerada satisfaça a condição da massa total (8.53), de onde calcula-se o novo valor W'_s .

Portanto, podemos observar que o novo modelo terá um novo valor W'_s , que em geral não corresponderá a uma superfície que coincida com o lóbulo de Roche. Assim, esse modelo somente resultará em uma solução de *equilíbrio* se a nova superfície for *interna* ao lóbulo de Roche, ou seja, se a superfície $W(r, z) = W'_s$ for uma superfície fechada. Caso contrário, se essa for uma superfície aberta (significando que não haverá a formação de um toro em *equilíbrio*), isso significa que haveria matéria do toro na região interna da cúspide (em um estado de não equilíbrio). Isso implicaria em uma “reação em cadeia”, pois a perda de massa pelo toro resultaria em uma cúspide posicionada *mais externamente*, o que geraria maior perda de massa. Esse processo é o que caracteriza a chamada instabilidade *runaway*.

O procedimento acima, ainda que possível para se estudar a instabilidade *runaway*, é inconveniente pois encontrar uma superfície que encerra uma determinada massa nesse caso se torna complicado pois a própria densidade depende da constante W'_s que determina a superfície por meio da expressão (8.29). O que mostro abaixo é que pode-se realizar esse estudo de uma forma muito mais direta.

A situação que desencadearia o processo de instabilidade (em um toro preenchendo completamente o lóbulo de Roche) seria quando $\delta W_s \delta m < 0$, pois nesse caso uma perda de massa pelo toro ($\delta m < 0$) faria com que ele “preenchesse” uma superfície equipotencial “superior”, i.e., a superfície com W_s constante se deslocaria para “dentro” das outras superfícies, e a posição que antes estava a cúspide agora estará fora do lóbulo de Roche ($\delta W_s > 0$) desencadeando o processo acretivo.

Então, como *condição de estabilidade* temos que

$$\delta W_s \delta m > 0. \quad (8.59)$$

Considerando que o processo acretivo não altera a massa total ($\delta F = 0$), e escrevendo a equação (8.52) como

$$F = (m + 1)K^{\frac{1}{n-1}}$$

temos que

$$\delta m K^{\frac{1}{n-1}} + (m + 1) \left(\frac{1}{K(n-1)} \right) K^{\frac{1}{n-1}} \delta K = 0,$$

ou seja,

$$\delta m = - \left[\frac{KI + 1}{K(n-1)} \right] \delta K. \quad (8.60)$$

Podemos observar que para $n > 1$ o fator acima será negativo, $\delta K \delta m < 0$, o que significa que um aumento em K gera uma diminuição da massa do toro (ao se fixar a massa total). Usando essa condição, podemos escrever a condição de estabilidade (8.59) como

$$- \left[\frac{KI + 1}{K(n-1)} \right] \delta K \delta W_s > 0, \quad \Rightarrow \quad \delta K \delta W_s < 0. \quad (8.61)$$

Usando ainda a equação (8.55) para δW_s obtemos

$$- \left(\frac{\partial_K F}{\partial_{W_s} F} \right) (\delta K)^2 < 0. \quad (8.62)$$

A constante K é sempre positiva, e portanto, a integral I deve ser uma função monótona crescente de W_s pois a massa $m = KI$ do toro deve *aumentar* ao se “preencher” uma superfície com um valor de W_s maior (mantendo-se K constante). Isso é equivalente a dizer que $(\partial_{W_s} I) > 0$. A equação (8.57) mostra então que a derivada $(\partial_{W_s} F)$ também será positiva:

$$(\partial_{W_s} F) = K^{\frac{n}{n-1}} (\partial_{W_s} I) > 0. \quad (8.63)$$

Com isso, a condição de estabilidade (8.62) se torna simplesmente

$$\left(\frac{\partial F}{\partial K} \right) > 0. \quad (8.64)$$

Isso significa que a condição de estabilidade é que a massa total *aumente* com o aumento de K , ao se manter W_s constante.

Esse resultado permite um procedimento muito mais direto para se estudar a instabilidade *runaway*. Para isso, primeiro constrói-se um modelo preenchendo completamente o lóbulo de Roche como anteriormente, usando parâmetros K e W_s , e calcula-se sua

massa total⁵ $\mathcal{M} = F(K, W_s)$ (equação 8.52). A seguir, basta realizar um pequeno *aumento* em K de forma que o novo valor seja $K' = K + \delta K$, mantendo-se o mesmo valor de W_s . Encontra-se então a nova solução de equilíbrio e calcula-se a massa total final $\mathcal{M}' = F(K', W_s)$. Se $\mathcal{M}' > \mathcal{M}$, então o sistema é estável, se $\mathcal{M}' < \mathcal{M}$, instável.

A partir dessa análise, obtive alguns resultados preliminares ao rodar o código e calcular as massas envolvidas na solução. A figura 8.14 mostra um disco grosso típico

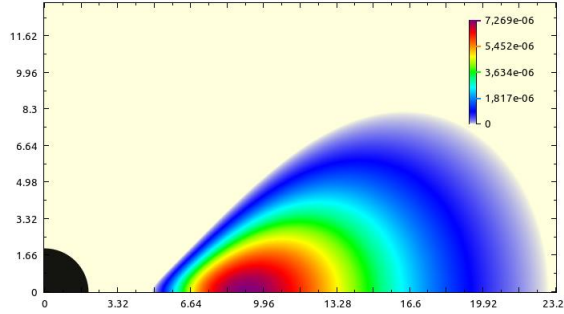


Figura 8.14: Solução numérica típica preenchendo “quase” completamente o lóbulo de Roche.

preenchendo “quase” completamente o lóbulo de Roche. Na figura 8.15 vemos a malha

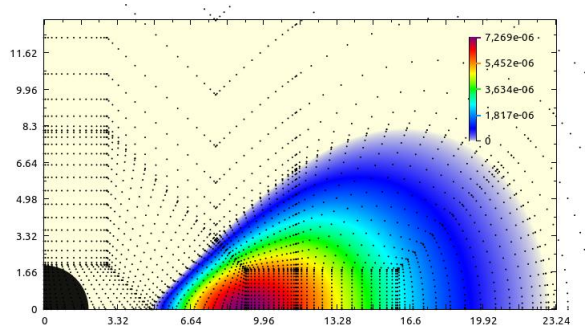


Figura 8.15: Solução numérica típica preenchendo “quase” completamente o lóbulo de Roche, mostrando a malha ajustada à sua superfície.

ajustada à sua superfície.

Modelos preenchendo *exatamente* o lóbulo de Roche podem ser obtidos facilmente não mais fixando a cada iteração o valor de W_s mas escolhendo o valor de W_s da cúspide. Assim, a cada iteração obtém-se um toro que preenche o seu lóbulo de Roche. Com isso, dado o valor inicial escolhido de K , essas soluções fornecem o valor de W_s de preenchimento completo. Pode-se então a partir disso alterar a constante K mantendo-se esse valor de W_s constante.

⁵A integral $I(K, W_s)$ (8.45) é calculada numericamente a partir da solução $\Psi(r, z)$.

No entanto, em uma situação muito próxima do preenchimento completo do lóbulo de Roche o resultado de um determinado passo iterativo pode “extravasar” o lóbulo de Roche, parando o processo. Para evitar isso, o que faço é calcular a solução preenchendo *exatamente* o lóbulo de Roche com uma precisão baixa (calculando W_s a cada passo iterativo), para só então fixar o valor W_s para o seu valor de preenchimento completo, i.e., A solução de preenchimento completo para K' serve como estado inicial para o processo iterativo da solução próxima.

A partir desse procedimento, obtive alguns resultados preliminares apresentados na tabela 8.1:

K	m	$\mathcal{M}/M_0$	W_s	(lóbulo de Roche completo)
0,001	0,001567	$1,002e - 06$	$-0,03064$	sim
0,00099	0,001488	$9,230e - 07$	$-0,03064$	não
0,0009	0,001372	$8,111e - 07$	$-0,03064$	não
0,1724	0,04419	0,03104	$-0,10313$	sim
0,1707	0,02859	0,02997	$-0,10313$	não

Tabela 8.1: Soluções numéricas para a análise da instabilidade *runaway*.

A tabela apresenta dois sistemas estáveis sob a instabilidade *runaway*, pois o valor de $\mathcal{M}$ diminui com a diminuição de K . Ao se aumentar o valor de K dessas soluções o sistema extravasa o lóbulo de Roche e não é mais possível obter soluções de equilíbrio.

O lóbulo de Roche funciona como de fato um limitante para a massa do toro, pois esse não pode conter mais que uma dada massa limite ao se fixar o perfil de rotação.

8.6 Equações relativísticas

O problema relativístico também podem ser resolvido por meio do método do campo autoconsistente. Para isso basta substituir a equação de Euler integrada pela equação relativística equivalente (4.92):

$$W(r, z) = \mathcal{U}(r, z) + F(r, z).$$

e a equação de Poisson pelas equações de Einstein (4.124, 4.125, 4.129, 4.139),

$$\begin{aligned}
e^{-2\lambda} \left(B^{-1} \vec{\nabla} \cdot (B \vec{\nabla} \Phi) - \frac{r^2 B^2}{2} e^{-4\Phi} \vec{\nabla} \omega \cdot \vec{\nabla} \omega \right) &= S_\Phi, \\
r^{-1} B^{-2} e^{2(\Phi-\lambda)} \vec{\nabla} \cdot (r^2 B^3 e^{-4\Phi} \vec{\nabla} \omega) &= -S_\omega, \\
r^{-1} B^{-1} e^{-2\lambda} \vec{\nabla} \cdot (r \vec{\nabla} B) &= S_B, \\
\int \frac{dr}{|\vec{\nabla} \varrho|^2} (\partial_r \varrho \Xi_\circ + \partial_z \varrho \Xi_\times) + \int \frac{dz}{|\vec{\nabla} \varrho|^2} (\partial_r \varrho \Xi_\times - \partial_z \varrho \Xi_\circ) &= \int \vec{\nabla} \zeta \cdot d\vec{\ell} = \zeta(r, z),
\end{aligned}$$

respectivamente, onde

$$S_\Phi \equiv 8\pi \left(\frac{(P + \varepsilon)}{2} \frac{1 + v^2}{1 - v^2} + P \right), \quad (8.65)$$

$$S_\omega \equiv 16\pi \gamma^2 v (P + \varepsilon) \quad (8.66)$$

$$S_B \equiv 16\pi P. \quad (8.67)$$

As funções acima são “fontes” para as funções métricas $\Phi(r, z)$, $\omega(r, z)$ e $B(r, z)$, e são completamente definidas dadas a equação de estado e a distribuição de velocidades (ou momento angular).

As equações elípticas, para as funções métricas $\Phi(r, z)$, $\omega(r, z)$ e $B(r, z)$, são suplementadas por condições de contorno. Sobre os eixos r e z , as simetrias axial e de reflexão sobre o plano $z = 0$ implicam que

$$\begin{cases} \partial_r \Phi(0, z) = \partial_z \Phi(r, 0) = 0, \\ \partial_r \omega(0, z) = \partial_z \omega(r, 0) = 0, \\ \partial_r B(0, z) = \partial_z B(r, 0) = 0. \end{cases} \quad (8.68)$$

Temos ainda condições de contorno no infinito espacial (4.140)

$$\begin{cases} \Phi(\infty, z) = \Phi(r, \infty) = 0, \\ \omega(\infty, z) = \omega(r, \infty) = 0, \\ B(\infty, z) = B(r, \infty) = 1, \end{cases} \quad (8.69)$$

e sobre o horizonte de eventos (4.147):

$$\begin{cases} \Phi(R_H, \theta) \rightarrow -\infty, \\ \omega(R_H, \theta) = \omega_H, \\ B(R_H, \theta) = 0, \end{cases} \quad (8.70)$$

sendo essas últimas dadas em coordenadas polares.

A função $\zeta(r, z)$ é obtida por uma integração de linha que envolve apenas as outras três funções métricas, e não depende diretamente dos termos de fonte (equação de estado

e distribuição de momento angular). A integração deve ser feita a partir de uma das condições de contorno (4.140) ou (4.141):

$$\begin{cases} \zeta(\infty, z) = \zeta(r, \infty) = 0, \\ \zeta(0, z) = \ln B. \end{cases} \quad (8.71)$$

A resolução numérica das equações e condições de contorno acima apresenta alguns desafios. Em primeiro lugar, a função Φ tende a (menos) infinito no horizonte de eventos, o que obviamente não pode ser implementado como uma condição de contorno usual de Dirichlet. Em segundo, dentro do divergente das três equações elípticas aparece termos envolvendo r , B e e^Φ , que se anulam no eixo z (r) e no horizonte de eventos⁶ (B e e^Φ). Essa situação é equivalente à singularidade do sistema cilíndrico de coordenadas, onde aparece um fator r no cômputo dos fluxos contravariantes⁷ (o que gera uma “perda de informação” sobre eixo z), e à singularidade no infinito devido à não regularidade do Jacobiano e de alguns termos métricas lá. Em ambas as situações anteriores de singularidade foi possível aplicar um limite (em geral por meio da regra do l’Hopital) que o removesse. Veremos que aqui é possível aplicar um procedimento semelhante.

O primeiro dos problemas apresentado (i.e., a condição de contorno $\Phi \rightarrow -\infty$ no horizonte de eventos) pode ser resolvido por uma transformação de variáveis, definindo uma nova função métrica a partir de Φ que seja regular por todo o domínio, inclusive sobre o horizonte de eventos. Aproveito para modificar as outras funções também para obter o mesmo comportamento para todas elas. Colocando as condições do contorno no horizonte de eventos e no infinito espacial em uma tabela temos:

	R_H	∞
Φ	$-\infty$	0
ω	ω_H	0
B	0	1

(8.72)

Utilizando as seguintes definições:

$$\Psi(r, z) \equiv e^{\Phi(r, z)} - 1, \quad (8.73)$$

$$\varpi(r, z) \equiv -\frac{\omega(r, z)}{\omega_H}, \quad (8.74)$$

$$C(r, z) \equiv B(r, z) - 1, \quad (8.75)$$

⁶A situação é pior ainda para a equação de ω , em que aparece um fator $e^{-4\Phi}$ que diverge no horizonte.

⁷O Laplaciano em coordenadas cilíndricas é $\nabla^2 \Psi = r^{-1} \partial_r (r \partial_r \Psi) + \partial_{zz}^2 \Psi$. O fator r dentro da derivada é que gera a singularidade sobre o eixo cilíndrico. O mesmo ocorrerá para termos dentro do divergente que se anulam em alguma fronteira.

as funções métricas são normalizadas de tal forma a satisfazerem às mesmas condições de contorno:

$$\begin{array}{c|cc} & R_H & \infty \\ \hline \Psi & -1 & 0 \\ \varpi & -1 & 0 \\ C & -1 & 0 \end{array} \quad (8.76)$$

As condições de contorno sobre os eixos (8.68) permanecem as mesmas. Isso pode ser visto calculando-se as derivadas das novas funções métricas:

$$\partial_i \Psi = e^\Phi \partial_i \Phi \quad \Rightarrow \quad (\partial_i \Psi = 0 \Leftrightarrow \partial_i \Phi = 0) \quad (\text{para } \Phi \nrightarrow -\infty) \quad (8.77)$$

$$\partial_i \varpi = -\frac{\partial_i \omega}{\omega_H} \quad \Rightarrow \quad (\partial_i \varpi = 0 \Leftrightarrow \partial_i \omega = 0) \quad (8.78)$$

$$\partial_i C = \partial_i B \quad \Rightarrow \quad (\partial_i C = 0 \Leftrightarrow \partial_i B = 0) \quad (8.79)$$

Obviamente isso resolve o problema da imposição da condição de contorno de Dirichlet, mas os termos singulares dentro dos divergentes permanecerão, só que agora escritos em termos das novas funções métricas.

O que é preciso então para se retirar os termos singulares dos fluxos contravariantes é retirar esses termos de dentro do divergente. Então, reescrevo as equações (4.124), (4.125) e (4.129) como

$$\nabla^2 \Phi + \frac{1}{B} (\vec{\nabla} B \cdot \vec{\nabla} \Phi) = \left(\frac{r^2 B^2}{2e^{4\Phi}} \right) \vec{\nabla} \omega \cdot \vec{\nabla} \omega + e^{2\lambda} S_\Phi, \quad (8.80)$$

$$\nabla^2 \omega + \left(\frac{e^{4\Phi}}{r^2 B^3} \right) \left[\vec{\nabla} \left(\frac{r^2 B^3}{e^{4\Phi}} \right) \cdot \vec{\nabla} \omega \right] = - \left(\frac{e^{2\Phi}}{rB} \right) e^{2\lambda} S_\omega, \quad (8.81)$$

$$\nabla^2 B + \frac{1}{r} (\vec{\nabla} r \cdot \vec{\nabla} B) = B e^{2\lambda} S_B. \quad (8.82)$$

Com isso, não aparece mais os termos divergentes no cômputo dos fluxos contravariantes. Perceba, no entanto, que nas equações acima ainda aparece os fluxos (gradientes) multiplicados por termos que divergem em algumas fronteiras. O que acontece é que se as fronteiras onde esses termos divergem forem fronteiras de Dirichlet (se forem aplicadas condições de contorno de Dirichlet sobre elas) os nós sobre ela não serão graus de liberdade da solução, ou seja, estarão fora da resolução numérica. Isso ocorre para o horizonte de eventos mas não para o eixo z . Com isso, permanece apenas o problema da divisão por r , que se anula em uma fronteira de Newman, pois B e e^Φ se anulam em uma fronteira de Dirichlet.

Observando as equações (8.80-8.82), vemos que elas têm uma estrutura semelhante.

Reescrevendo-as em termos das novas funções métricas temos:

$$\nabla^2 \Psi + \vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{\nabla} \ln \left(\frac{1+C}{1+\Psi} \right) = \left[\frac{r^2(1+C)^2}{2(1+\Psi)^3} \right] \vec{\nabla} \omega \cdot \vec{\nabla} \omega + (1+\Psi)e^{2\lambda} S_\Phi, \quad (8.83)$$

$$\nabla^2 \varpi + \vec{\nabla} \varpi \cdot \vec{\nabla} \ln \left[r^2 \frac{(1+C)^3}{(1+\Psi)^4} \right] = \left[\frac{(1+\Psi)^2}{r(1+C)} \right] \left(\frac{e^{2\lambda}}{\omega_H} \right) S_\omega, \quad (8.84)$$

$$\nabla^2 C + \vec{\nabla} C \cdot \vec{\nabla} \ln r = (1+C)e^{2\lambda} S_B. \quad (8.85)$$

Existem duas principais (e grandes) diferenças entre essas equações e a equação de Poisson. Primeiro, temos três equações acopladas, ou seja, um sistema de três equações elípticas nas três funções métricas ao invés de uma única. Segundo, e talvez mais importante, é que essas equações são não lineares, enquanto que a equação de Poisson é linear.

Contudo, podemos tomar vantagem do caráter iterativo do método do campo autoconsistente para contornar essas duas dificuldades. Como a solução é refinada iterativamente a partir de uma aproximação inicial, é possível utilizar o resultado da iteração anterior de cada função nas não linearidades, e se resolver um problema linear a cada iteração. Além disso, é possível ainda resolver cada uma das três equações separadamente, recorrendo novamente aos resultados da iteração anterior (ou mesmo da própria iteração para funções cujas equações já foram resolvidas) das funções que não a função cuja equação está sendo resolvida.

Então, posso escrever cada uma das três equações (8.83-8.85) como

$$\nabla^2 \mathcal{Q} + \vec{\nabla} \ln(r^\alpha f) \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q} = g\mathcal{Q} + s, \quad (8.86)$$

fazendo $\mathcal{Q} = \Psi, \varpi, C$. Aqui α é uma constante e f, g e s são funções das coordenadas, das funções métricas e dos termos de fonte. Contudo, no processo iterativo do método do campo autoconsistente é possível utilizar os valores da iteração anterior para se calcular as funções f, g e s , de tal forma que a equação acima se torna uma equação *linear* em $\mathcal{Q}$, e cada uma das três equações pode ser resolvida separadamente.

Os valores particulares de f, g e s para cada equação são:

$\mathcal{Q} = \Psi$:

$$\begin{cases} \alpha_\Psi = 0 \\ f_\Psi = \frac{1+C}{1+\Psi} \\ g_\Psi = e^{2\lambda} S_\Phi \\ s_\Psi = e^{2\lambda} S_\Phi + \left[\frac{r^2(1+C)^2}{2(1+\Psi)^3} \right] \vec{\nabla} \omega \cdot \vec{\nabla} \omega \end{cases} \quad (8.87)$$

$\mathcal{Q} = \varpi$:

$$\begin{cases} \alpha_\varpi = 2 \\ f_\varpi = \frac{(1+C)^3}{(1+\Psi)^4} \\ g_\varpi = 0 \\ s_\varpi = \left[\frac{(1+\Psi)^2}{r(1+C)} \right] \left(\frac{e^{2\lambda}}{\omega_H} \right) S_\omega \end{cases} \quad (8.88)$$

$\underline{\mathcal{Q}} = C$:

$$\begin{cases} \alpha_c = 1 \\ f_c = 1 \\ g_c = e^{2\lambda} S_B \\ s_c = e^{2\lambda} S_B \end{cases} \quad (8.89)$$

Separei o fator r de dentro do logaritmo porque é o termo singular sobre o eixo z . Reescrevendo esse termo:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \ln(r^\alpha f) \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q} &= \vec{\nabla} \ln f \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q} + \alpha \vec{\nabla} \ln r \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q} = \\ &= \vec{\nabla} \ln f \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q} + \frac{\alpha}{r} \vec{\nabla} r \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q} = \\ &= \vec{\nabla} \ln f \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q} + \frac{\alpha}{r} \hat{r} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q} = \vec{\nabla} \ln f \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r}, \end{aligned}$$

o que resulta na equação abaixo:

$$\nabla^2 \mathcal{Q} + \vec{\nabla} \ln f \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r} = g\mathcal{Q} + s. \quad (8.90)$$

Para implementar essas equações dentro do formalismo dos elementos espectrais é preciso discretizá-las da mesma forma com que foi feito para a equação de Poisson na seção 6.1, por meio do método de Galerkin.

A ação do *operador discreto de Laplace*, que vou denotar por $(\nabla^2 \mathcal{Q}, \ell_i \ell_j)_{NM}$, foi deduzida na seção 6.1, e encontra-se na equação (6.38):

$$(\nabla^2 \mathcal{Q}, \ell_i \ell_j)_{NM} = - \sum_{n=0}^N D_{in}^{t(x)} F_{nj}^x w_n w_j - \sum_{m=0}^M D_{jm}^{t(y)} F_{im}^y w_i w_m, \quad (8.91)$$

assim como o termo independente

$$(s, \ell_i \ell_j)_{NM} = s_{ij} J_{ij} w_i w_j. \quad (8.92)$$

A discretização do termo $g\mathcal{Q}$ é totalmente análoga à de s :

$$(g\mathcal{Q}, \ell_i \ell_j)_{NM} = g_{ij} \mathcal{Q}_{ij} J_{ij} w_i w_j. \quad (8.93)$$

O produto escalar dos gradientes escrito na forma tensorial é

$$g^{kl} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x^l} \frac{\partial \ln f}{\partial x^k}, \quad (8.94)$$

e sua discretização se torna

$$(\vec{\nabla} \ln f \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q}, \ell_i \ell_j)_{NM} = (g^{kl})_{ij} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x^l} \right)_{ij} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x^k} \right)_{ij} J_{ij} w_i w_j.$$

Lembrando que $Jg^{kl} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x^l} = F^k$ são simplesmente os fluxos contravariantes, já utilizados na discretização do Laplaciano, temos que

$$(\vec{\nabla} \ln f \cdot \vec{\nabla} \mathcal{Q}, \ell_i \ell_j)_{NM} = \left[F_{ij}^x \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x} \right)_{ij} + F_{ij}^y \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y} \right)_{ij} \right] w_i w_j. \quad (8.95)$$

Nos resta apenas a discretização do termo da derivada radial de $\mathcal{Q}$. Considerando que esse termo é igual ao termo acima (8.95) com $f = r^\alpha$, podemos escrever diretamente

$$(\alpha r^{-1} \partial_r \mathcal{Q}, \ell_i \ell_j)_{NM} = \frac{\alpha}{R_{ij}} \left[F_{ij}^x \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)_{ij} + F_{ij}^y \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)_{ij} \right] w_i w_j. \quad (8.96)$$

Utilizando os fluxos das equações (6.34-6.35) obtemos

$$(\alpha r^{-1} \partial_r \mathcal{Q}, \ell_i \ell_j)_{NM} = \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_{ij} \sum_{n=0}^N D_{in}^{(x)} \mathcal{Q}_{nj} - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{ij} \sum_{m=0}^M D_{jm}^{(y)} \mathcal{Q}_{im} \right] \alpha w_i w_j. \quad (8.97)$$

O fator R no denominador se cancela com um fator que vem do Jacobiano definido junto com os fluxos F^k , de tal forma que a quantidade acima é regular. Esse termo pode ser calculado diretamente sobre um elemento regular.

Note, no entanto, que como os fluxos contravariantes se anulam em $r = 0$, é adotada uma metodologia para se eliminar o fator singular (como explicado na seção 6.2), absorvendo o fator r no peso de integração. Porém, esse procedimento aplicado ao termo acima gera um fator r^{-1} (divergente) adicional (pois o termo inicial não é singular).

Esse problema pode ser resolvido observando que o termo a ser integrado é $r^{-1} \partial_r \mathcal{Q}$. Sobre o eixo z temos que $r = 0$ ao mesmo tempo que $\partial_r \mathcal{Q} = 0$. Isso significa que o termo acima entre colchetes se anula em $r = 0$ de tal forma que a regra de l'Hopital pode ser aplicada.

Escrevendo o termo (8.97), incluindo o fator r^{-1} inserido pelo tratamento da singularidade do sistema cilíndrico de coordenadas, temos

$$(\alpha r^{-1} \partial_r \mathcal{Q}, \ell_i \ell_j)_{NM} = R_{ij}^{-1} \left[(\partial_y Z)_{ij} (\mathcal{Q}_x)_{ij} - (\partial_x Z)_{ij} (\mathcal{Q}_y)_{ij} \right] \alpha w_i w_j. \quad (8.98)$$

onde $(\mathcal{Q}_x)_{ij} \equiv \sum_{n=0}^N D_{in}^{(x)} \mathcal{Q}_{nj}$ e $(\mathcal{Q}_y)_{ij} \equiv \sum_{m=0}^M D_{jm}^{(y)} \mathcal{Q}_{im}$. Aplicando, então, a regra de l'Hopital, temos

$$\begin{aligned} (\alpha r^{-1} \partial_r \mathcal{Q}, \ell_i \ell_j)_{NM} &= (\partial_x R)_{ij}^{-1} \left[(\partial_{xy}^2 Z)_{ij} (\mathcal{Q}_x)_{ij} + (\partial_y Z)_{ij} (\mathcal{Q}_{xx})_{ij} \right. \\ &\quad \left. - (\partial_{xx}^2 Z)_{ij} (\mathcal{Q}_y)_{ij} - (\partial_x Z)_{ij} (\mathcal{Q}_{xy})_{ij} \right] \alpha w_i w_j. \end{aligned} \quad (8.99)$$

Em suma, para elementos regulares aplica-se a forma (8.97); para elementos que contém uma aresta sobre o eixo z aplica-se a forma (8.99) (mas apenas para os pontos sobre o eixo). Com isso, completa-se a descrição das equações relativísticas dentro do formalismo de Galerkin dos elementos espectrais desenvolvido para o sistema cilíndrico de coordenadas.

Capítulo 9

Conclusão

Nesse trabalho realizei uma extensa revisão da teoria básica de discos grossos (toros) de acreção, no âmbito das teorias clássica e relativística, introduzindo o fator fundamental da autointeração gravitacional do toro.

Considera-se atualmente que discos grossos ao redor de objetos compactos tenham relevância astrofísica, já que acredita-se que essas estruturas sejam o mecanismo por trás de eventos energéticos com geração de jatos e correntes bipolares como em quasares e fusões de sistemas binários compactos.

Atualmente existe um esforço para se medir a rotação dos buracos negros astrofísicos, o que é feito em geral supondo uma métrica subjacente, na grande maioria dos casos a métrica de Kerr, que é a métrica de um buraco negro “isolado” com simetria axial. É possível, no entanto, que apesar da massa do toro ser pequena comparativamente à do buraco negro, ela tenha influência significativa na métrica e desse modo nos resultados de medidas astrofísicas. É necessário portanto entender de que forma o campo gravitacional do toro influencia e se pode alterar de maneira significativa as medidas astrofísicas que vêm sendo feitas.

A matéria do disco, considerada como sendo um fluido, ao se acumular ao redor de um objeto central (e.g., um buraco negro) se configura naturalmente na forma de um disco grosso em rotação. As estruturas de equilíbrio hidrodinâmico, assumindo-se simetria axial, devem ser calculadas a partir das equações básicas da hidrodinâmica, levando-se em conta ainda as equações da gravitação Newtoniana (equação de Poisson) ou relativística (equações de Einstein).

Devido à sua complexidade matemática, se faz necessário um tratamento numérico desse conjunto de equações. Dessa forma, revisei os métodos e técnicas numéricas já utilizadas ao se atacar esse problema e apresentei os resultados numéricos obtidos até o momento e o que se sabe sobre figuras de equilíbrio e seu espaço de soluções.

A partir de toda essa revisão do assunto pude então desenvolver um código numérico

próprio que gera soluções numéricas de toros autogravitantes ao redor de buracos negros, que chamo de BLATOS. Os resultados numéricos da seção anterior mostram que a partir da metodologia apresentada é possível realizar um estudo da estabilidade *runaway*, investigando o espaço de parâmetros das soluções e como variam em relação à condição de estabilidade. A partir do código numérico pode-se alterar o perfil de rotação e a razão de massas toro/buraco negro, bem como o índice politrópico das soluções. É possível ainda implementar as equações de Einstein ao invés da equação de Poisson, e com isso, obter como solução as funções métricas das soluções de equilíbrio.

O presente trabalho constituiu em desenvolver apenas uma ferramenta de estudo, uma código numérico para a obtenção de soluções de equilíbrio de toros autogravitantes ao redor de buracos negros, a partir da qual é possível estudar a estabilidade de tais estruturas (para verificar a viabilidade de sua existência física e como explicação para fenômenos astrofísicos) bem como suas propriedades (como por exemplo a métrica e propriedades associadas como o raio da órbita circular marginalmente estável). Esses resultados numéricos podem então ser usados em ajustes teóricos de observações astrofísicas, como por exemplo em medidas de momento angular de buracos negros. Como extensão natural desse trabalho pretendo implementar as equações relativísticas e realizar um estudo do espaço de parâmetros da instabilidade *runaway*.

Referências Bibliográficas

- [1] R. BLANDFORD e R. ZNAJEK, *Electromagnetic extractions of energy from Kerr black holes*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **179** (1977) 433–456.
- [2] J. E. MCCLINTOCK, R. SHAFEE, R. NARAYAN, R. A. REMILLARD, S. W. DAVIS *et al.*, *The Spin of the Near-Extreme Kerr Black Hole GRS 1915+105*, Astrophys.J. **652** (2006) 518–539, doi:[10.1086/508457](https://doi.org/10.1086/508457), [arXiv:astro-ph/0606076](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0606076) [astro-ph].
- [3] R. A. REMILLARD e J. E. MCCLINTOCK, *X-ray Properties of Black-Hole Binaries*, Ann.Rev.Astron.Astrophys. **44** (2006) 49–92, doi:[10.1146/annurev.astro.44.051905.092532](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.44.051905.092532), [arXiv:astro-ph/0606352](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0606352) [astro-ph].
- [4] R. MODERSKI e M. SIKORA, *On black hole evolution in active galactic nuclei*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **283** (1996) 854–864, ads:[1996MNRAS.283..854M](https://ui.adsabs.org/abs/1996MNRAS.283..854M).
M. VOLONTERI, P. MADAU, E. QUATAERT e M. J. REES, *The Distribution and cosmic evolution of massive black hole spins*, Astrophys.J. **620** (2005) 69–77, doi:[10.1086/426858](https://doi.org/10.1086/426858), [arXiv:astro-ph/0410342](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0410342) [astro-ph].
- [5] R. NARAYAN, *Black holes in astrophysics*, New Journal of Physics **7** (2005) 199, doi:[10.1088/1367-2630/7/1/199](https://doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/199), [arXiv:gr-qc/0506078](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0506078).
- [6] M. A. ABRAMOWICZ, A. CURIR, A. SCHWARZENBERG-CZERNY e R. E. WILSON, *Self-gravity and the global structure of accretion discs*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **208** (1984) 279–291, ads:[1984MNRAS.208..279A](https://ui.adsabs.org/abs/1984MNRAS.208..279A).
- [7] B. PACZYŃSKY e P. J. WITA, *Thick accretion disks and supercritical luminosities*, Astron. Astrophys. **88** (1980) 23–31, ads:[1980A%26A...88...23P](https://ui.adsabs.org/abs/1980A%26A...88...23P).
- [8] M. ABRAMOWICZ, M. JAROSZYNSKI e M. SIKORA, *Relativistic, accreting disks*, Astron. Astrophys. **63** (1978) 221–224, ads:[1978A%26A...63..221A](https://ui.adsabs.org/abs/1978A%26A...63..221A).
- [9] M. KOZŁOWSKI, M. JAROSZYNSKI e M. A. ABRAMOWICZ, *The analytic theory of fluid disks orbiting the Kerr black hole*, Astron. Astrophys. **63** (1978) 209–220, ads:[1978A%26A...63..209K](https://ui.adsabs.org/abs/1978A%26A...63..209K).

- [10] Q. LEI, M. ABRAMOWICZ, P. FRAGILE, J. HORAK, M. MACHIDA *et al.*, *The Polish doughnuts revisited I. The angular momentum distribution and equipressure surfaces*, *Astron.Astrophys.* **498** (2009) 471–477, doi:[10.1051/0004-6361/200811518](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200811518), [arXiv:0812.2467](https://arxiv.org/abs/0812.2467) [astro-ph].
- [11] S. NISHIDA e Y. ERIGUCHI, *A general relativistic toroid around a black hole*, *Astrophys. J.* **427** (1994) 429–437, doi:[10.1086/174153](https://doi.org/10.1086/174153).
- [12] J. P. OSTRICKER e J. W.-K. MARK, *Rapidly rotating stars. I. The self-consistent-field method*, *Astrophys. J.* **151** (1968) 1075–1088, doi:[10.1086/149506](https://doi.org/10.1086/149506).
- [13] M. ANSORG, A. KLEINWACHTER e R. MEINEL, *Highly accurate calculation of rotating neutron stars: detailed description of the numerical methods*, *Astron.Astrophys.* **405** (2003) 711, doi:[10.1051/0004-6361:20030618](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20030618), [arXiv:astro-ph/0301173](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0301173) [astro-ph].
- [14] S. BONAZZOLA, E. GOURGOULHON e J.-A. MARCK, *Numerical approach for high precision 3D relativistic star models*, *Phys. Rev. D* **58**(10) 104020, doi:[10.1103/PhysRevD.58.104020](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.104020), [arXiv:astro-ph/9803086](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9803086).
G. B. COOK, S. L. SHAPIRO e S. A. TEUKOLSKY, *Rapidly rotating polytropes in general relativity*, *Astrophys. J.* **422** (1994) 227–242, doi:[10.1086/173721](https://doi.org/10.1086/173721).
- [15] N. STERGIOULAS, *Black hole spacetimes with self-gravitating, massive accretion tori*, *Journal of Physics Conference Series* **283**(1) 012036, doi:[10.1088/1742-6596/283/1/012036](https://doi.org/10.1088/1742-6596/283/1/012036).
- [16] N. STERGIOULAS, *An Improved method for constructing models of self-gravitating tori around black holes*, *Int.J.Mod.Phys.* **D20** (2011) 1251–1263, doi:[10.1142/S021827181101944X](https://doi.org/10.1142/S021827181101944X), [arXiv:1104.3685](https://arxiv.org/abs/1104.3685) [gr-qc].
- [17] K. BLACK, *Spectral elements on infinite domain*, *SIAM J. Sci. Comput.* **19**(5) (1998) 1667–1681, doi:[10.1137/S1064827596301418](https://doi.org/10.1137/S1064827596301418).
- [18] P. BETTESS, *Infinite Elements*, Penshaw Press, second edition, revised ed. (1992), url <http://www.btinternet.com/~penshaw.press/penshaw/infel.html>.
P. BETTESS, *Infinite Elements*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **11** (1977) 53–64, doi:[10.1002/nme.1620110107](https://doi.org/10.1002/nme.1620110107).
- [19] L. LICHTENSTEIN, *Gleichgewichtsfiguren rotierender flüssigkeiten, von Leon Lichtenstein ... MIT 4 abbildungen.* (1933), ads:[1933QB410.L5](https://ui.adsabs.org/1933QB410.L5).....
- [20] S. L. SHAPIRO e S. A. TEUKOLSKY, *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects* (1983), ads:[1983bhwd.book](https://ui.adsabs.org/1983bhwd.book).....S.

- [21] L. RAYLEIGH, *On the Dynamics of Revolving Fluids*, Royal Society of London Proceedings Series A **93** (1917) 148–154, doi:[10.1098/rspa.1917.0010](https://doi.org/10.1098/rspa.1917.0010).
- [22] M. A. ABRAMOWICZ, *Rayleigh and Solberg criteria reversal near black holes: the optical geometry explanation*, ArXiv Astrophysics e-prints [arXiv:astro-ph/0411718](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0411718), ads:[2004astro.ph.11718A](https://arxiv.org/abs/2004astro.ph.11718A).
- [23] F. H. SEGUIN, *The stability of nonuniform rotation in relativistic stars*, Astrophys. J. **197** (1975) 745–765, doi:[10.1086/153563](https://doi.org/10.1086/153563).
- [24] J. L. ZDUNIK e E. GOURGOULHON, *Small strange stars and marginally stable orbit in Newtonian theory*, Phys. Rev. D **63**(8) 087501, doi:[10.1103/PhysRevD.63.087501](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.63.087501), [arXiv:astro-ph/0011028](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0011028).
- [25] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics* (1962), ads:[1962clel.book.....J](https://arxiv.org/abs/1962clel.book.....J).
- [26] M. A. ABRAMOWICZ, P. NUROWSKI e N. WEX, *Covariant definition of inertial forces*, Classical and Quantum Gravity **10** (1993) L183–L186, doi:[10.1088/0264-9381/10/10/001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/10/001).
- [27] T. FOERTSCH, W. HASSE e V. PERLICK, *Inertial forces and photon surfaces in arbitrary spacetimes*, Classical and Quantum Gravity **20** (2003) 4635–4651, doi:[10.1088/0264-9381/20/21/006](https://doi.org/10.1088/0264-9381/20/21/006), [arXiv:gr-qc/0306042](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0306042).
- [28] M. A. ABRAMOWICZ, *The Paczyński-Wiita potential. A step-by-step "derivation". Commentary on: Paczyński B. and Wiita P. J., 1980, A&A, 88, 23*, Astron. Astrophys. **500** (2009) 213–214, doi:[10.1051/0004-6361/200912155](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200912155), [arXiv:0904.0913](https://arxiv.org/abs/0904.0913) [[astro-ph.HE](https://arxiv.org/abs/astro-ph.HE)].
- [29] M. A. ABRAMOWICZ, A. M. BELOBORODOV, X.-M. CHEN e I. V. IGUMENSHCHEV, *Special relativity and the pseudo-Newtonian potential.*, Astron. Astrophys. **313** (1996) 334–335, [arXiv:astro-ph/9601115](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9601115), ads:[1996A%26A...313..334A](https://arxiv.org/abs/1996A%26A...313..334A).
- [30] B. MUKHOPADHYAY, *Description of Pseudo-Newtonian Potential for the Relativistic Accretion Disks around Kerr Black Holes*, Astrophys. J. **581** (2002) 427–430, doi:[10.1086/344227](https://doi.org/10.1086/344227), [arXiv:astro-ph/0205475](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0205475).
- [31] I. V. ARTEMOVA, G. BJOERNSSON e I. D. NOVIKOV, *Modified Newtonian Potentials for the Description of Relativistic Effects in Accretion Disks around Black Holes*, Astrophys. J. **461** (1996) 565, doi:[10.1086/177084](https://doi.org/10.1086/177084).
- [32] L. LANDAU e E. LIFSHITS, *Fluid mechanics*, A-W series in advanced physics, Pergamon Press (1959), url <http://books.google.com.br/books?id=v6kNAQAIAAJ>.

- [33] J. MARION e S. THORNTON, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Saunders College Publishing, Harcourt Brace College Publishers (1995), url <http://books.google.com.br/books?id=i1DYPwAACAAJ>.
- [34] L. D. LANDAU e E. M. LIFSHITZ, *Statistical Physics*, Butterworth-Heinemann, 3^a ed. (1980), url <http://www.worldcat.org/isbn/0750633727>.
- [35] C. ECKART, *The Thermodynamics of Irreversible Processes. III. Relativistic Theory of the Simple Fluid*, Physical Review **58** (1940) 919–924, doi:[10.1103/PhysRev.58.919](https://doi.org/10.1103/PhysRev.58.919).
- [36] L. QIAN, M. A. ABRAMOWICZ, P. C. FRAGILE, J. HORÁK, M. MACHIDA e O. STRAUB, *The Polish doughnuts revisited. I. The angular momentum distribution and equipressure surfaces*, Astron. Astrophys. **498** (2009) 471–477, doi:[10.1051/0004-6361/200811518](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200811518), [arXiv:0812.2467](https://arxiv.org/abs/0812.2467).
- [37] N. I. SHAKURA e R. A. SUNYAEV, *Black holes in binary systems. Observational appearance.*, Astron. Astrophys. **24** (1973) 337–355, ads:[1973A%26A...24..337S](https://ui.adsabs.org/1973A%26A...24..337S).
- [38] I. D. NOVIKOV e K. S. THORNE, *Astrophysics of black holes.*, in *Black Holes (Les Astres Occlus)*, editado por C. DeWitt e B. S. DeWitt, págs. 343–450, New York: Gordon and Breach (1973) Proceedings of the 23rd Les Houches Summer School, Les Houches (France), August 1972, ads:[1973bIho.conf..343N](https://ui.adsabs.org/1973bIho.conf..343N).
- [39] D. LYNDEN-BELL e J. E. PRINGLE, *The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables.*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **168** (1974) 603–637, ads:[1974MNRAS.168..603L](https://ui.adsabs.org/1974MNRAS.168..603L).
- [40] J. FRANK, A. KING e D. J. RAINE, *Accretion Power in Astrophysics: Third Edition* (2002), ads:[2002apa..book.....F](https://ui.adsabs.org/2002apa..book.....F).
- [41] R. NARAYAN, *Accretion Flows Around Black Holes.*, pág. 301 (1996) ads:[1996upa..book..301N](https://ui.adsabs.org/1996upa..book..301N).
- [42] S. SHAPIRO, A. LIGHTMAN e D. EARDLEY, *A two - temperature accretion disk model for Cygnus X-1. 1. Structure and spectrum*, Astrophys.J. **204** (1976) 187–199, doi:[10.1086/154162](https://doi.org/10.1086/154162).
- [43] R. NARAYAN e I.-S. YI, *Advection dominated accretion: A Selfsimilar solution*, Astrophys.J. **428** (1994) L13, doi:[10.1086/187381](https://doi.org/10.1086/187381), [arXiv:astro-ph/9403052](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9403052) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
R. NARAYAN e I.-S. YI, *Advection dominated accretion: Selfsimila-*

- uity and bipolar outflows*, *Astrophys.J.* **444** (1995) 231, doi:[10.1086/175599](https://doi.org/10.1086/175599), [arXiv:astro-ph/9411058](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9411058) [astro-ph].
- R. NARAYAN e I. YI, *Advection dominated accretion: Underfed black holes and neutron stars*, *Astrophys.J.* **452** (1995) 710, doi:[10.1086/176343](https://doi.org/10.1086/176343), [arXiv:astro-ph/9411059](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9411059) [astro-ph].
- [44] X. CHEN, M. A. ABRAMOWICZ, J.-P. LASOTA, R. NARAYAN e I. YI, *Unified description of accretion flows around black holes*, *Astrophys. J. Lett.* **443** (1995) L61–L64, doi:[10.1086/187836](https://doi.org/10.1086/187836), [arXiv:astro-ph/9502015](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9502015).
- [45] M. J. REES, *Black Hole Models for Active Galactic Nuclei*, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **22** (1984) 471–506, doi:[10.1146/annurev.aa.22.090184.002351](https://doi.org/10.1146/annurev.aa.22.090184.002351).
- M. SHIBATA e S. L. SHAPIRO, *Collapse of a Rotating Supermassive Star to a Supermassive Black Hole: Fully Relativistic Simulations*, *Astrophys. J. Lett.* **572** (2002) L39–L43, doi:[10.1086/341516](https://doi.org/10.1086/341516), [arXiv:astro-ph/0205091](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0205091).
- A. HEGER, C. L. FRYER, S. E. WOOSLEY, N. LANGER e D. H. HARTMANN, *How Massive Single Stars End Their Life*, *Astrophys. J.* **591** (2003) 288–300, doi:[10.1086/375341](https://doi.org/10.1086/375341), [arXiv:astro-ph/0212469](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0212469).
- [46] L. REZZOLLA, L. BAIOTTI, B. GIACOMAZZO, D. LINK e J. A. FONT, *Accurate evolutions of unequal-mass neutron-star binaries: properties of the torus and short GRB engines*, *Classical and Quantum Gravity* **27**(11) 114105, doi:[10.1088/0264-9381/27/11/114105](https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/11/114105), [arXiv:1001.3074](https://arxiv.org/abs/1001.3074) [gr-qc].
- K. KIUCHI, Y. SEKIGUCHI, M. SHIBATA e K. TANIGUCHI, *Exploring Binary-Neutron-Star-Merger Scenario of Short-Gamma-Ray Bursts by Gravitational-Wave Observation*, *Physical Review Letters* **104**(14) 141101, doi:[10.1103/PhysRevLett.104.141101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.141101), [arXiv:1002.2689](https://arxiv.org/abs/1002.2689) [astro-ph.HE].
- Z. B. ETIENNE, Y. T. LIU, S. L. SHAPIRO e T. W. BAUMGARTE, *General relativistic simulations of black-hole-neutron-star mergers: Effects of black-hole spin*, *Phys. Rev. D* **79**(4) 044024, doi:[10.1103/PhysRevD.79.044024](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.044024), [arXiv:0812.2245](https://arxiv.org/abs/0812.2245).
- [47] R. NARAYAN, B. PACZYNSKI e T. PIRAN, *Gamma-ray bursts as the death throes of massive binary stars*, *Astrophys. J. Lett.* **395** (1992) L83–L86, doi:[10.1086/186493](https://doi.org/10.1086/186493), [arXiv:astro-ph/9204001](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9204001).
- [48] P. MÉSZÁROS, *Gamma-ray bursts*, *Reports on Progress in Physics* **69** (2006) 2259–2321, doi:[10.1088/0034-4885/69/8/R01](https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/8/R01), [arXiv:astro-ph/0605208](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0605208).
- [49] N. GEHRELS, E. RAMIREZ-RUIZ e D. B. FOX, *Gamma-Ray Bursts in the Swift Era*, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **47** (2009) 567–617, doi:[10.1146/annurev.astro.46.060407.145147](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.46.060407.145147), [arXiv:0909.1531](https://arxiv.org/abs/0909.1531) [astro-ph.HE].

- [50] S. KOBAYASHI, B. ZHANG, P. MÉSZÁROS e D. BURROWS, *Inverse Compton X-Ray Flare from Gamma-Ray Burst Reverse Shock*, *Astrophys. J.* **655** (2007) 391–395, doi:[10.1086/510198](https://doi.org/10.1086/510198), [arXiv:astro-ph/0506157](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0506157).
B. ZHANG, Y. Z. FAN, J. DYKS, S. KOBAYASHI, P. MÉSZÁROS, D. N. BURROWS, J. A. NOUSEK e N. GEHRELS, *Physical Processes Shaping Gamma-Ray Burst X-Ray Afterglow Light Curves: Theoretical Implications from the Swift X-Ray Telescope Observations*, *Astrophys. J.* **642** (2006) 354–370, doi:[10.1086/500723](https://doi.org/10.1086/500723), [arXiv:astro-ph/0508321](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0508321).
- [51] M. A. ABRAMOWICZ, M. CALVANI e L. NOBILI, *Runaway instability in accretion disks orbiting black holes*, *Nature* **302** (1983) 597–599, doi:[10.1038/302597a0](https://doi.org/10.1038/302597a0).
- [52] J. C. B. PAPALOIZOU e J. E. PRINGLE, *The dynamical stability of differentially rotating discs with constant specific angular momentum*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **208** (1984) 721–750, ads:[1984MNRAS.208..721P](https://ui.adsabs.org/1984MNRAS.208..721P).
J. C. B. PAPALOIZOU e J. E. PRINGLE, *The dynamical stability of differentially rotating discs. II*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **213** (1985) 799–820, ads:[1985MNRAS.213..799P](https://ui.adsabs.org/1985MNRAS.213..799P).
- [53] J. A. FONT e F. DAIGNE, *The runaway instability of thick discs around black holes - I. The constant angular momentum case*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **334** (2002) 383–400, doi:[10.1046/j.1365-8711.2002.05515.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05515.x), [arXiv:astro-ph/0203403](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0203403).
O. ZANOTTI, L. REZZOLLA e J. A. FONT, *Quasi-periodic accretion and gravitational waves from oscillating ‘toroidal neutron stars’ around a Schwarzschild black hole*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **341** (2003) 832–848, doi:[10.1046/j.1365-8711.2003.06474.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06474.x), [arXiv:gr-qc/0210018](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0210018).
- [54] O. M. BLAES, *Stabilization of non-axisymmetric instabilities in a rotating flow by accretion on to a central black hole*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **227** (1987) 975–992, ads:[1987MNRAS.227..975B](https://ui.adsabs.org/1987MNRAS.227..975B).
- [55] M. A. ABRAMOWICZ, *A note on the geometrical thickness of the accretion flow close to the black hole*, *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **37** (1985) 727–734, ads:[1985PASJ...37..727A](https://ui.adsabs.org/1985PASJ...37..727A).
- [56] P. GOLDREICH, J. GOODMAN e R. NARAYAN, *The stability of accretion tori. I - Long-wavelength modes of slender tori*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **221** (1986) 339–364, ads:[1986MNRAS.221..339G](https://ui.adsabs.org/1986MNRAS.221..339G).
O. M. BLAES e W. GLATZEL, *On the stability of incompressible constant an-*

- gular momentum cylinders*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **220** (1986) 253–258, ads:[1986MNRAS.220..253B](#).
- J. FRANK e J. A. ROBERTSON, *Numerical studies of the dynamical stability of differentially rotating tori*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **232** (1988) 1–33, ads:[1988MNRAS.232....1F](#).
- [57] W. H. ZUREK e W. BENZ, *Redistribution of angular momentum by nonaxisymmetric instabilities in a thick accretion disk*, Astrophys. J. **308** (1986) 123–133, doi:[10.1086/164483](#).
- O. M. BLAES e J. F. HAWLEY, *Nonaxisymmetric disk instabilities - A linear and nonlinear synthesis*, Astrophys. J. **326** (1988) 277–291, doi:[10.1086/166089](#).
- [58] M. A. ABRAMOWICZ, V. KARAS e A. LANZA, *On the runaway instability of relativistic tori*, Astron. Astrophys. **331** (1998) 1143–1146, [arXiv:astro-ph/9712245](#), ads:[1998A%26A...331.1143A](#).
- [59] J. A. FONT e F. DAIGNE, *On the Stability of Thick Accretion Disks around Black Holes*, Astrophys. J. Lett. **581** (2002) L23–L26, doi:[10.1086/345942](#), [arXiv:astro-ph/0211102](#).
- F. DAIGNE e J. A. FONT, *The runaway instability of thick discs around black holes - II. Non-constant angular momentum discs*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **349** (2004) 841–868, doi:[10.1111/j.1365-2966.2004.07547.x](#), [arXiv:astro-ph/0311618](#).
- F. DAIGNE e J. A. FONT, *Erratum: The runaway instability of thick discs around black holes - II. Non-constant angular momentum discs*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **351** (2004) 1120–1120, doi:[10.1111/j.1365-2966.2004.07935.x](#).
- [60] R. KHANNA e S. K. CHAKRABARTI, *Effects of a self-gravitating disc on test particle motion around a Kerr black hole*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **259** (1992) 1–5, ads:[1992MNRAS.259....1K](#).
- N. MASUDA, S. NISHIDA e Y. ERIGUCHI, *The runaway instability of self-gravitating tori with non-constant specific angular momentum around black holes*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **297** (1998) 1139–1144, doi:[10.1046/j.1365-8711.1998.01573.x](#).
- [61] S. NISHIDA, A. LANZA, Y. ERIGUCHI e M. A. ABRAMOWICZ, *Runaway instability and gamma-ray bursts*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **278** (1996) L41–L45, ads:[1996MNRAS.278L..41N](#).
- [62] P. J. MONTERO, J. A. FONT e M. SHIBATA, *Influence of Self-Gravity on the Runaway Instability of Black-Hole-Torus Systems*, Physical Review Letters **104**(19) 191101, doi:[10.1103/PhysRevLett.104.191101](#), [arXiv:1004.3102 \[gr-qc\]](#).

- [63] O. KOROBKIN, E. B. ABDIKAMALOV, E. SCHNETTER, N. STERGIOULAS e B. ZINK, *Stability of general-relativistic accretion disks*, Phys. Rev. D **83**(4) 043007, doi:[10.1103/PhysRevD.83.043007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.043007), [arXiv:1011.3010](https://arxiv.org/abs/1011.3010) [astro-ph.HE].
- [64] K. KIUCHI, M. SHIBATA, P. J. MONTERO e J. A. FONT, *Gravitational Waves from the Papaloizou-Pringle Instability in Black-Hole-Torus Systems*, Physical Review Letters **106**(25) 251102, doi:[10.1103/PhysRevLett.106.251102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.251102), [arXiv:1105.5035](https://arxiv.org/abs/1105.5035) [astro-ph.HE].
- [65] K.-Y. WATARAI e S. MINESHIGE, *Where is a Marginally Stable Last Circular Orbit in Super-Critical Accretion Flow?*, Publ. Astron. Soc. Jpn. **55** (2003) 959–965, doi:[10.1093/pasj/55.5.959](https://doi.org/10.1093/pasj/55.5.959), [arXiv:astro-ph/0308391](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0308391).
- [66] S. KATO, J. FUKUE e S. MINESHIGE, editores, *Black-hole accretion disks* (1998), ads:[1998bhad.conf.....K](https://ui.adsabs.org/abs/1998bhad.conf.....K).
- [67] M. A. ABRAMOWICZ e S. KATO, *Constraints for transonic black hole accretion*, Astrophys. J. **336** (1989) 304–312, doi:[10.1086/167012](https://doi.org/10.1086/167012).
- [68] I. V. IGUMENSHCHEV, R. NARAYAN e M. A. ABRAMOWICZ, *Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Radiatively Inefficient Accretion Flows*, Astrophys. J. **592** (2003) 1042–1059, doi:[10.1086/375769](https://doi.org/10.1086/375769), [arXiv:astro-ph/0301402](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0301402).
- [69] M. A. ABRAMOWICZ, G. BJORNSSON e J. E. PRINGLE, editores, *Theory of Black Hole Accretion Disks* (1998), ads:[1998tbha.conf.....A](https://ui.adsabs.org/abs/1998tbha.conf.....A).
- [70] M. JAROSZYNSKI, M. A. ABRAMOWICZ e B. PACZYNSKI, *Supercritical accretion disks around black holes*, Acta Astron. **30** (1980) 1–34, ads:[1980AcA....30....1J](https://ui.adsabs.org/abs/1980AcA....30....1J).
- [71] G. P. HOREDT, editor, *Polytropes - Applications in Astrophysics and Related Fields*, volume 306 de *Astrophysics and Space Science Library* (2004), ads:[2004ASSL..306.....H](https://ui.adsabs.org/abs/2004ASSL..306.....H).
- [72] W. MACIEL, *Introdução à Estrutura e Evolução Estelar Vol. 24*, Acadêmica, n.24, EDUSP (1999), url http://books.google.com.br/books?id=ZtMJ_kYoK2gC.
- [73] L. REZZOLLA e O. ZANOTTI, *Relativistic Hydrodynamics* (2013), ads:[2013rehy.book.....R](https://ui.adsabs.org/abs/2013rehy.book.....R).
- [74] M. A. ABRAMOWICZ, M. LIVIO, T. PIRAN e P. J. WITA, *Local stability of thick accretion disks. I - Basic equations and parallel perturbations in the negligible viscosity case*, Astrophys. J. **279** (1984) 367–383, doi:[10.1086/161898](https://doi.org/10.1086/161898).

- [75] J.-L. TASSOUL, *Stellar rotation.*, Cambridge Astrophysics Series **36**, ads:[2000CAS....36.....T](#).
- [76] B. PACZYNSKI e M. A. ABRAMOWICZ, *A model of a thick disk with equatorial accretion*, Astrophys. J. **253** (1982) 897–907, doi:[10.1086/159689](#).
- [77] M. A. ABRAMOWICZ e W. H. ZUREK, *Rotation-induced bistability of transonic accretion onto a black hole*, Astrophys. J. **246** (1981) 314–320, doi:[10.1086/158924](#).
- [78] R. F. TOOPER, *Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity.*, Astrophys. J. **142** (1965) 1541, doi:[10.1086/148435](#).
- [79] R. F. TOOPER, *General Relativistic Polytropic Fluid Spheres.*, Astrophys. J. **140** (1964) 434, doi:[10.1086/147939](#).
- [80] N. GLENDENNING, *Compact Stars. Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity.* (1996), ads:[1996csnp.book.....G](#).
- [81] E. GOURGOULHON, *An introduction to relativistic hydrodynamics*, in *EAS Publications Series*, editado por M. Rieutord e B. Dubrulle, volume 21 de *EAS Publications Series* (2006) págs. 43–79, doi:[10.1051/eas:2006106](#), [arXiv:gr-qc/0603009](#).
- [82] A. EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, The University press (1952), url <http://books.google.com.br/books?id=smQmAAAAMAAJ>.
- [83] B. SCHUTZ, *A First Course in General Relativity* (2009), ads:[2009fcgr.book.....S](#).
- [84] J. M. BARDEEN, *A variational principle for rotating stars in general relativity*, Astrophys. J. **162** (1970) 71, doi:[10.1086/150635](#).
- [85] J. M. BARDEEN, *Rapidly rotating stars, disks, and black holes*, in *Black Holes (Les Astres Occlus)*, editado por C. DeWitt e B. S. DeWitt, págs. 241–290, New York: Gordon and Breach (1973) Proceedings of the 23rd Les Houches Summer School, Les Houches (France), August 1972.
- [86] E. M. BUTTERWORTH e J. R. IPSER, *On the structure and stability of rapidly rotating fluid bodies in general relativity. I - The numerical method for computing structure and its application to uniformly rotating homogeneous bodies*, Astrophys. J. **204** (1976) 200–223, doi:[10.1086/154163](#).
- [87] J. SYNGE, *Relativity: the general theory*, Series in physics, North-Holland (1960), url <http://books.google.com.br/books?id=06kNAQAIAAJ>.

- [88] S. W. HAWKING, *The event horizon*, in *Black Holes (Les Astres Occlus)*, editado por C. DeWitt e B. S. DeWitt, págs. 1–56, New York: Gordon and Breach (1973) Proceedings of the 23rd Les Houches Summer School, Les Houches (France), August 1972.
- [89] B. CARTER, *Black hole equilibrium states*, in *Black Holes (Les Astres Occlus)*, editado por C. DeWitt e B. S. DeWitt, págs. 57–214, New York: Gordon and Breach (1973) Proceedings of the 23rd Les Houches Summer School, Les Houches (France), August 1972, ads:[1973b1ho.conf...57C](#).
- [90] M. ANSORG, T. FISCHER, A. KLEINWÄCHTER, R. MEINEL, D. PETROFF e K. SCHÖBEL, *Equilibrium configurations of homogeneous fluids in general relativity*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **355** (2004) 682–688, doi:[10.1111/j.1365-2966.2004.08371.x](#), [arXiv:gr-qc/0402102](#).
- [91] R. MEINEL, M. ANSORG, A. KLEINWÄCHTER, G. NEUGEBAUER e D. PETROFF, *Relativistic Figures of Equilibrium* (2008), ads:[2008rfe..book....M](#).
- [92] J. L. FRIEDMAN e N. STERGIOULAS, *Rotating Relativistic Stars* (2013), ads:[2013rrs..book....F](#).
- [93] S. CHANDRASEKHAR, *Ellipsoidal figures of equilibrium* (1987), ads:[1987QB410.C47.....](#)
- [94] W. JARDETZKY, *Theories of figures of celestial bodies*. (1958), ads:[1958QB351.J3.....](#)
- [95] V. N. ZHARKOV e V. P. TRUBITSYN, *Physics of planetary interiors* (1978), ads:[1978ppi..book....Z](#).
- [96] J. BINNEY e S. TREMAINE, *Galactic dynamics* (1987), ads:[1987gady.book....B](#).
- [97] C. MACLAURIN, *A Treatise of Fluxions*, n^o v. 1 in *A Treatise of Fluxions*, T. W. T. Ruddimans (1742), url <http://books.google.com.br/books?id=dCAOAAAQAAJ>.
- [98] C. G. J. JACOBI, *Ueber die Figur des Gleichgewichts*, Annalen der Physik **109** (1834) 229–233, doi:[10.1002/andp.18341090808](#).
- [99] B. RIEMANN, *Ein beitrage zu den untersuchungen über die bewegung eines flüssigen gleichartigen ellipsoides*, Abhandlungen der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **9** (1860) 3–36, url <http://www.emis.de/classics/Riemann/Ellipsd.tex>.

- [100] H. POINCARÉ, *Mémoires et observations. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, Bulletin Astronomique, Serie I **2** (1885) 405–413, ads:[1885BuAsI...2..405P](#).
- [101] F. W. DYSON, *The Potential of an Anchor Ring. [Abstract]*, Royal Society of London Proceedings Series I **51** (1892) 448–452, ads:[1892RSPS...51..448D](#).
- [102] J. M. BARDEEN, *A Reexamination of the Post-Newtonian Maclaurin Spheroids*, Astrophys. J. **167** (1971) 425, doi:[10.1086/151040](#).
- [103] Y. ERIGUCHI e D. SUGIMOTO, *Another Equilibrium Sequence of Self-Gravitating and Rotating Incompressible Fluid*, Progress of Theoretical Physics **65** (1981) 1870–1875, doi:[10.1143/PTP.65.1870](#).
- [104] J. M. BARDEEN e R. V. WAGONER, *Relativistic disks. I. uniform rotation*, Astrophys. J. **167** (1971) 359, doi:[10.1086/151039](#).
- [105] G. NEUGEBAUER e R. MEINEL, *General Relativistic Gravitational Field of a Rigidly Rotating Disk of Dust: Solution in Terms of Ultraelliptic Functions*, Physical Review Letters **75** (1995) 3046–3047, doi:[10.1103/PhysRevLett.75.3046](#), [arXiv:gr-qc/0302060](#).
- [106] R. MEINEL, *On the black hole limit of rotating fluid bodies in equilibrium*, Classical and Quantum Gravity **23** (2006) 1359–1363, doi:[10.1088/0264-9381/23/4/016](#), [arXiv:gr-qc/0506130](#).
- [107] Y. ERIGUCHI, I. HACHISU e D. SUGIMOTO, *Dumb-Bell-Shape Equilibria and Mass-Shedding Pear-Shape of Selfgravitating Incompressible Fluid*, Progress of Theoretical Physics **67** (1982) 1068–1075, doi:[10.1143/PTP.67.1068](#).
- [108] Y. ERIGUCHI e I. HACHISU, *New Equilibrium Sequences Bifurcating from Maclaurin Sequence*, Progress of Theoretical Physics **67** (1982) 844–851, doi:[10.1143/PTP.67.844](#).
- [109] S. CHANDRASEKHAR, *The Post-Newtonian Effects of General Relativity on the Equilibrium of Uniformly Rotating Bodies. II. The Deformed Figures of the Maclaurin Spheroids*, Astrophys. J. **147** (1967) 334, doi:[10.1086/149003](#).
- [110] M. ANSORG, A. KLEINWÄCHTER e R. MEINEL, *Uniformly rotating axisymmetric fluid configurations bifurcating from highly flattened Maclaurin spheroids*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **339** (2003) 515–523, doi:[10.1046/j.1365-8711.2003.06190.x](#), [arXiv:astro-ph/0208267](#).

- [111] M. ANSORG, A. KLEINWÄCHTER e R. MEINEL, *Relativistic Dyson Rings and Their Black Hole Limit*, *Astrophys. J. Lett.* **582** (2003) L87–L90, doi:[10.1086/367632](https://doi.org/10.1086/367632), [arXiv:gr-qc/0211040](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0211040).
- [112] T. FISCHER, S. HORATSCHKE e M. ANSORG, *Uniformly rotating rings in general relativity*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **364** (2005) 943–947, doi:[10.1111/j.1365-2966.2005.09629.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09629.x), [arXiv:gr-qc/0506105](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0506105).
- [113] H. LABRANCHE, D. PETROFF e M. ANSORG, *The parametric transition of strange matter rings to a black hole*, *General Relativity and Gravitation* **39** (2007) 129–143, doi:[10.1007/s10714-006-0377-z](https://doi.org/10.1007/s10714-006-0377-z), [arXiv:gr-qc/0603059](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0603059).
- [114] M. ANSORG, D. GONDEK-ROSIŃSKA e L. VILLAIN, *On the solution space of differentially rotating neutron stars in general relativity*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **396** (2009) 2359–2366, doi:[10.1111/j.1365-2966.2009.14904.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.14904.x), [arXiv:0812.3347](https://arxiv.org/abs/0812.3347) [gr-qc].
- [115] H. KOMATSU, Y. ERIGUCHI e I. HACHISU, *Rapidly rotating general relativistic stars. I - Numerical method and its application to uniformly rotating polytropes*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **237** (1989) 355–379, ads:[1989MNRAS.237..355K](https://ui.adsabs.org/1989MNRAS.237..355K).
- [116] G. BODO e A. CURIR, *Models of self-gravitating accretion disks*, *Astron. Astrophys.* **253** (1992) 318–328, ads:[1992A%26A...253..318B](https://ui.adsabs.org/1992A%26A...253..318B).
- [117] M. ANSORG e D. PETROFF, *Black holes surrounded by uniformly rotating rings*, *Phys.Rev.* **D72** (2005) 024019, doi:[10.1103/PhysRevD.72.024019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.024019), [arXiv:gr-qc/0505060](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0505060) [gr-qc].
- [118] M. SHIBATA, *Rotating black hole surrounded by self-gravitating torus in the puncture framework*, *Phys.Rev.* **D76** (2007) 064035, doi:[10.1103/PhysRevD.76.064035](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.064035).
- [119] P. J. MONTERO, J. A. FONT e M. SHIBATA, *NADA: A New code for studying self-gravitating tori around black holes*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 064037, doi:[10.1103/PhysRevD.78.064037](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.064037), [arXiv:0805.3099](https://arxiv.org/abs/0805.3099) [gr-qc].
- [120] M. SHIBATA e Y. SEKIGUCHI, *Radiation magnetohydrodynamics for black hole-torus system in full general relativity: A step toward physical simulation*, *Prog.Theor.Phys.* **127** (2012) 535–559, doi:[10.1143/PTP.127.535](https://doi.org/10.1143/PTP.127.535), [arXiv:1206.5911](https://arxiv.org/abs/1206.5911) [astro-ph.HE].

- [121] O. KOROBKIN, E. ABDIKAMALOV, N. STERGIIOULAS, E. SCHNETTER, B. ZINK *et al.*, *The runaway instability in general-relativistic accretion disks*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 431, Issue 1, pp. **349–354**, doi:[10.1093/mnras/stt166](https://doi.org/10.1093/mnras/stt166), [arXiv:1210.1214](https://arxiv.org/abs/1210.1214) [astro-ph.HE].
- [122] M. A. ABRAMOWICZ, B. CZERNY, J. P. LASOTA e E. SZUSZKIEWICZ, *Slim accretion disks*, Astrophys. J. **332** (1988) 646–658, doi:[10.1086/166683](https://doi.org/10.1086/166683).
- [123] R. A. JAMES, *The Structure and Stability of Rotating Gas Masses.*, Astrophys. J. **140** (1964) 552, doi:[10.1086/147949](https://doi.org/10.1086/147949).
- [124] R. STOECKLY, *Polytropic Models in Fast, Non-Uniform Rotation.*, Astrophys. J. **142** (1965) 208, doi:[10.1086/148278](https://doi.org/10.1086/148278).
- [125] E. M. BUTTERWORTH, *On the structure and stability of rapidly rotating fluid bodies in general relativity. II - The structure of uniformly rotating pseudopolytropes*, Astrophys. J. **204** (1976) 561–572, doi:[10.1086/154204](https://doi.org/10.1086/154204).
- [126] J. R. IPSER e R. A. MANAGAN, *On the existence and structure of inhomogeneous analogs of the Dedekind and Jacobi ellipsoids*, Astrophys. J. **250** (1981) 362–372, doi:[10.1086/159383](https://doi.org/10.1086/159383).
- [127] P. BODENHEIMER e J. P. OSTRICKER, *Rapidly Rotating Stars. VIII. Zero-Viscosity Polytropic Sequences*, Astrophys. J. **180** (1973) 159–170, doi:[10.1086/151951](https://doi.org/10.1086/151951).
- [128] M. J. CLEMENT, *On the solution of Poisson's equation for rapidly rotating stars*, Astrophys. J. **194** (1974) 709–714, doi:[10.1086/153292](https://doi.org/10.1086/153292).
- [129] Y. ERIGUCHI, *Hydrostatic Equilibria of Rotating Polytropes*, Publ. Astron. Soc. Jpn. **30** (1978) 507–518, ads:[1978PASJ...30..507E](https://ui.adsabs.org/1978PASJ...30..507E).
- [130] Y. ERIGUCHI, *Rapidly Rotating and Fully General Relativistic Polytropes*, Progress of Theoretical Physics **64** (1980) 2009–2020, doi:[10.1143/PTP.64.2009](https://doi.org/10.1143/PTP.64.2009).
- [131] I. HACHISU, Y. ERIGUCHI e D. SUGIMOTO, *Rapidly Rotating Polytropes and Concave Hamburger Equilibrium*, Progress of Theoretical Physics **68** (1982) 191–205, doi:[10.1143/PTP.68.191](https://doi.org/10.1143/PTP.68.191).
- [132] I. HACHISU e Y. ERIGUCHI, *Bifurcation and Fission of Three Dimensional, Rigidly Rotating and Self-Gravitating Polytropes*, Progress of Theoretical Physics **68** (1982) 206–221, doi:[10.1143/PTP.68.206](https://doi.org/10.1143/PTP.68.206).

- [133] Y. ERIGUCHI e E. MUELLER, *A general computational method for obtaining equilibria of self-gravitating and rotating gases*, Astron. Astrophys. **146** (1985) 260–268, ads:[1985A%26A...146..260E](#).
Y. ERIGUCHI e E. MUELLER, *Equilibrium models of differentially rotating polytropes and the collapse of rotating stellar cores*, Astron. Astrophys. **147** (1985) 161–168, ads:[1985A%26A...147..161E](#).
- [134] I. HACHISU, *A versatile method for obtaining structures of rapidly rotating stars*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **61** (1986) 479–507, doi:[10.1086/191121](#).
- [135] I. HACHISU, J. E. TOHLIN e Y. ERIGUCHI, *Fragmentation of rapidly rotating gas clouds. I - A universal criterion for fragmentation*, Astrophys. J. **323** (1987) 592–613, doi:[10.1086/165856](#).
I. HACHISU, J. E. TOHLIN e Y. ERIGUCHI, *Fragmentation of rapidly rotating gas clouds. II - Polytropes - Clues to the outcome of adiabatic collapse*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **66** (1988) 315–342, doi:[10.1086/191259](#).
- [136] J. P. OSTRICKER e P. BODENHEIMER, *On the Oscillations and Stability of Rapidly Rotating Stellar Models. III. Zero-Viscosity Polytropic Sequences*, Astrophys. J. **180** (1973) 171–180, doi:[10.1086/151952](#).
- [137] J. B. HARTLE e K. S. THORNE, *Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars*, Astrophys. J. **153** (1968) 807, doi:[10.1086/149707](#).
- [138] S. BONAZZOLA e G. MASCHIO, *Models of Rotating Neutron Stars in General Relativity*, in *The Crab Nebula*, editado por R. D. Davies e F. Graham-Smith, volume 46 de *IAU Symposium* (1971) pág. 346, ads:[1971IAUS...46..346B](#).
- [139] J. R. WILSON, *Models of Differentially Rotating Stars.*, Astrophys. J. **176** (1972) 195, doi:[10.1086/151621](#).
- [140] S. BONAZZOLA e J. SCHNEIDER, *An Exact Study of Rigidly and Rapidly Rotating Stars in General Relativity with Application to the Crab Pulsar*, Astrophys. J. **191** (1974) 273–290, doi:[10.1086/152965](#).
- [141] E. M. BUTTERWORTH e J. R. IPSER, *Rapidly rotating fluid bodies in general relativity*, Astrophys. J. Lett. **200** (1975) L103–L106, doi:[10.1086/181907](#).
- [142] J. L. FRIEDMAN, L. PARKER e J. R. IPSER, *Rapidly rotating neutron star models*, Astrophys. J. **304** (1986) 115–139, doi:[10.1086/164149](#).
J. L. FRIEDMAN, L. PARKER e J. R. IPSER, *Implications of a half-millisecond*

- pulsar*, Physical Review Letters **62** (1989) 3015–3019, doi:[10.1103/PhysRevLett.62.3015](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.62.3015).
- [143] J. M. LATTIMER, M. PRAKASH, D. MASAK e A. YAHIL, *Rapidly rotating pulsars and the equation of state*, Astrophys. J. **355** (1990) 241–254, doi:[10.1086/168758](https://doi.org/10.1086/168758).
- [144] H. KOMATSU, Y. ERIGUCHI e I. HACHISU, *Rapidly rotating general relativistic stars. II - Differentially rotating polytropes*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **239** (1989) 153–171, ads:[1989MNRAS.239..153K](https://ui.adsabs.org/1989MNRAS.239..153K).
- [145] G. B. COOK, S. L. SHAPIRO e S. A. TEUKOLSKY, *Spin-up of a rapidly rotating star by angular momentum loss - Effects of general relativity*, Astrophys. J. **398** (1992) 203–223, doi:[10.1086/171849](https://doi.org/10.1086/171849).
- [146] N. STERGIOULAS e J. L. FRIEDMAN, *Comparing models of rapidly rotating relativistic stars constructed by two numerical methods*, Astrophys. J. **444** (1995) 306–311, doi:[10.1086/175605](https://doi.org/10.1086/175605), [arXiv:astro-ph/9411032](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9411032).
- [147] S. BONAZZOLA, E. GOURGOULHON, M. SALGADO e J. A. MARCK, *Axisymmetric rotating relativistic bodies: A new numerical approach for 'exact' solutions*, Astron. Astrophys. **278** (1993) 421–443, ads:[1993A%26A...278..421B](https://ui.adsabs.org/1993A%26A...278..421B).
- [148] E. GOURGOULHON, P. HAENSEL, R. LIVINE, E. PALUCH, S. BONAZZOLA e J.-A. MARCK, *Fast rotation of strange stars*, Astron. Astrophys. **349** (1999) 851–862, [arXiv:astro-ph/9907225](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9907225), ads:[1999A%26A...349..851G](https://ui.adsabs.org/1999A%26A...349..851G).
- [149] T. NOZAWA, N. STERGIOULAS, E. GOURGOULHON e Y. ERIGUCHI, *Construction of highly accurate models of rotating neutron stars - comparison of three different numerical schemes*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser. **132** (1998) 431–454, doi:[10.1051/aas:1998304](https://doi.org/10.1051/aas:1998304), [arXiv:gr-qc/9804048](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9804048).
- [150] N. STERGIOULAS, *Rotating Stars in Relativity*, Living Reviews in Relativity **6** (2003) 3, doi:[10.12942/lrr-2003-3](https://doi.org/10.12942/lrr-2003-3), [arXiv:gr-qc/0302034](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0302034).
- [151] M. ANSORG, B. BRÜGMANN e W. TICHY, *Single-domain spectral method for black hole puncture data*, Phys. Rev. D **70**(6) 064011, doi:[10.1103/PhysRevD.70.064011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.064011), [arXiv:gr-qc/0404056](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0404056).
- [152] J. P. BOYD, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition (Dover Books on Mathematics)*, Dover Publications, second edition, revised ed. (2001), url <http://www.worldcat.org/isbn/0486411834>.

- [153] J. P. BOYD e F. YU, *Comparing seven spectral methods for interpolation and for solving the Poisson equation in a disk: Zernike polynomials, Logan-Shepp ridge polynomials, Chebyshev-Fourier Series, cylindrical Robert functions, Bessel-Fourier expansions, square-to-disk conformal mapping and radial basis functions*, Journal of Computational Physics **230** (2011) 1408–1438, doi:[10.1016/j.jcp.2010.11.011](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.11.011).
- [154] F. FOUCART, L. E. KIDDER, H. P. PFEIFFER e S. A. TEUKOLSKY, *Initial data for black hole neutron star binaries: A flexible, high-accuracy spectral method*, Phys. Rev. D **77**(12) 124051, doi:[10.1103/PhysRevD.77.124051](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.124051), [arXiv:0804.3787](https://arxiv.org/abs/0804.3787) [gr-qc].
- [155] P. HUNTER e A. PULLAN, *Fem/bem notes*, Departament of Engineering Science. The University of Auckland, New Zealand url <http://www.cs.rutgers.edu/~suejung/fembemnotes.pdf>.
- [156] L. J. GRAY, M. GARZON, V. MANTIČ e E. GRACIANI, *Galerkin boundary integral analysis for the axisymmetric Laplace equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **66** (2006) 2014–2034, doi:[10.1002/nme.1613](https://doi.org/10.1002/nme.1613).
- [157] M. BONNET, G. MAIER e C. POLIZZOTTO, *Symmetric Galerkin Boundary Element Methods*, Applied Mechanics Reviews **51** (1998) 669, doi:[10.1115/1.3098983](https://doi.org/10.1115/1.3098983).
- [158] G. FAIRWEATHER e A. KARAGEORGHIS, *The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems*, Advances in Computational Mathematics **9**(1-2) (1998) 69–95, doi:[10.1023/A:1018981221740](https://doi.org/10.1023/A:1018981221740).
- [159] W. CHEN, *Symmetric boundary knot method*, Engng. Anal. Bound. Elem. **26**(06) (2002) 489, [arXiv:cs/0207010](https://arxiv.org/abs/cs/0207010), ads:[2002cs.....7010C](https://arxiv.org/abs/2002cs.....7010C).
- [160] W. CHEN e M. TANAKA, *A meshless, integration-free, and boundary-only RBF technique*, Computers and Mathematics with Applications **43** (2002) 379, [arXiv:cs/0207043](https://arxiv.org/abs/cs/0207043), ads:[2002cs.....7043C](https://arxiv.org/abs/2002cs.....7043C).
- [161] D. A. KOPRIVA, *Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations* (2009), doi:[10.1007/978-90-481-2261-5](https://doi.org/10.1007/978-90-481-2261-5).
- [162] H. EISEN, W. HEINRICHS e K. WITSCH, *Spectral Collocation Methods and Polar Coordinate Singularities*, Journal of Computational Physics **96** (1991) 241–257, doi:[10.1016/0021-9991\(91\)90235-D](https://doi.org/10.1016/0021-9991(91)90235-D).
W. HUANG e D. M. SLOAN, *Pole Condition for Singular Problems: The Pseu-*

- dospectral Approximation*, Journal of Computational Physics **107** (1993) 254–261, doi:[10.1006/jcph.1993.1141](https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1141).
- J. SHEN, *Efficient spectral-galerkin methods iii: Polar and cylindrical geometries*, SIAM J. Sci. Comput **15** (1997) 1489–1505.
- [163] H. CHEN, Y. SU e B. D. SHIZGAL, *A Direct Spectral Collocation Poisson Solver in Polar and Cylindrical Coordinates*, Journal of Computational Physics **160** (2000) 453–469, doi:[10.1006/jcph.2000.6461](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6461).
- [164] M.-C. LAI e W.-C. WANG, *Fast direct solvers for poisson equation on 2d polar and spherical geometries*, Numerical Methods for Partial Differential Equations **18**(1) (2002) 56–68, doi:[10.1002/num.1038](https://doi.org/10.1002/num.1038).
- [165] M. I. GERRITSMA e T. N. PHILLIPS, *Spectral Element Methods for Axisymmetric Stokes Problems*, Journal of Computational Physics **164** (2000) 81–103, doi:[10.1006/jcph.2000.6574](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6574).
- [166] A. FOURNIER, H.-P. BUNGE, R. HOLLERBACH e J.-P. VILOTTE, *Application of the spectral-element method to the axisymmetric Navier-Stokes equation*, Geophysical Journal International **156** (2004) 682–700, doi:[10.1111/j.1365-246X.2004.02149.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2004.02149.x).
- [167] M. FERNANDINO, C. DORAO e H. JAKOBSEN, *Jacobi galerkin spectral method for cylindrical and spherical geometries*, Chemical Engineering Science **62**(23) (2007) 6777 – 6783, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.ces.2007.07.062>.
- [168] J. SHEN e L. LIAN WANG, *Some recent advances on spectral methods for unbounded domains*, COMMUNICATIONS IN COMPUTATIONAL PHYSICS **5**(2) (2009) 195–241.
- [169] P. BETTESS, *More on infinite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **15** (1980) 1613–1626, doi:[10.1002/nme.1620151105](https://doi.org/10.1002/nme.1620151105).
- [170] D. FUNARO, *Computational aspects of pseudospectral laguerre approximations*, Applied Numerical Mathematics **6**(6) (1990) 447 – 457, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0168-9274\(90\)90003-X](http://dx.doi.org/10.1016/0168-9274(90)90003-X).
- [171] J. P. BOYD, *Orthogonal Rational Functions on a Semi-infinite Interval*, Journal of Computational Physics **70** (1987) 63–88, doi:[10.1016/0021-9991\(87\)90002-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90002-7).
- [172] B.-Y. GUO, J. SHEN e Z.-Q. WANG, *Chebyshev rational spectral and pseudospectral methods on a semi-infinite interval*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **53** (2002) 65–84, doi:[10.1002/nme.392](https://doi.org/10.1002/nme.392).

- [173] O. C. ZIENKIEWICZ, P. BETTESS, T. C. CHIAM e C. EMSON, *Numerical methods for unbounded field problems and a new infinite element formulation*, in *Computational methods for infinite domain mediastructure interaction*, editado por A. J. Kalinowski, volume 46, New York, N.Y. (345 East 47th St., New York 10017) : ASME: American Society of Mechanical Engineers. Winter Meeting (1981 : Washington, D.C.) (1981) pág. 115, presented at the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers.
- [174] O. C. ZIENKIEWICZ, C. EMSON e P. BETTESS, *A novel boundary infinite element*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **19** (1983) 393–404, doi:[10.1002/nme.1620190307](https://doi.org/10.1002/nme.1620190307).
- [175] U. M. SCHAUDT e H. PFISTER, *The Boundary Value Problem for the Stationary and Axisymmetric Einstein Equations is Generically Solvable*, Physical Review Letters **77** (1996) 3284–3287, doi:[10.1103/PhysRevLett.77.3284](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.3284).
U. M. SCHAUDT, *On the Dirichlet Problem for Stationary and Axisymmetric Einstein Equations*, Communications in Mathematical Physics **190** (1998) 509–540, doi:[10.1007/s002200050250](https://doi.org/10.1007/s002200050250).
- [176] S. I. BLINNIKOV, *Self-consistent field method in the theory of rotating stars*, Soviet Astron. **19** (1975) 151–156, ads:[1975SvA...19..151B](https://ui.adsabs.org/1975SvA...19..151B).
- [177] H. STORZER, *Structure and Spectra of Accretion Disks in the Innermost Parts of Active Galaxies*, Astron. Astrophys. **271** (1993) 25, ads:[1993A%26A...271...25S](https://ui.adsabs.org/1993A%26A...271...25S).
- [178] E. GOURGOULHON, *An introduction to the theory of rotating relativistic stars*, ArXiv e-prints [arXiv:1003.5015 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1003.5015), ads:[2010arXiv1003.5015G](https://ui.adsabs.org/2010arXiv1003.5015G).
- [179] S. M. CARROLL, *Lecture Notes on General Relativity*, ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints [arXiv:gr-qc/9712019](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019), ads:[1997gr.qc....12019C](https://ui.adsabs.org/1997gr.qc....12019C).
- [180] J. B. HARTLE e D. H. SHARP, *Variational principle for the equilibrium of a relativistic, rotating star*, Astrophys. J. **147** (1967) 317, doi:[10.1086/149002](https://doi.org/10.1086/149002).
- [181] B. CARTER, *The commutation property of a stationary, axisymmetric system*, Communications in Mathematical Physics **17** (1970) 233–238, doi:[10.1007/BF01647092](https://doi.org/10.1007/BF01647092).
- [182] B. CARTER, *Killing Horizons and Orthogonally Transitive Groups in Space-Time*, Journal of Mathematical Physics **10** (1969) 70–81, doi:[10.1063/1.1664763](https://doi.org/10.1063/1.1664763).
- [183] A. PAPAPETROU, *Champs gravitationnels stationnaires a symetrie axiale*, Ann.Inst.Henri Poincare Phys.Theor. **IV** (1966) 83–105.

- [184] W. KUNDT e M. TRÜMPER, *Orthogonal decomposition of axi-symmetric stationary spacetimes*, Zeitschrift für Physik **192** (1966) 419–422, doi:[10.1007/BF01325677](https://doi.org/10.1007/BF01325677).
- [185] L. P. EISENHART, *Riemannian geometry*, Princeton, New Jersey: [s.n.] (1926).
- [186] T. LEWIS, *Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields*, Royal Society of London Proceedings Series A **136** (1932) 176–192, doi:[10.1098/rspa.1932.0073](https://doi.org/10.1098/rspa.1932.0073).
- [187] J. M. BARDEEN, W. H. PRESS e S. A. TEUKOLSKY, *Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation*, Astrophys. J. **178** (1972) 347–370, doi:[10.1086/151796](https://doi.org/10.1086/151796).
- [188] C. LIAO, O. HERNANDEZ, B. M. CHAPMAN, W. CHEN e W. ZHENG, *OpenUH: an optimizing, portable OpenMP compiler*, Concurrency and Computation: Practice and Experience **19**(18) (2007) 2317–2332, doi:[10.1002/cpe.1174](https://doi.org/10.1002/cpe.1174).
- [189] L. DAGUM e R. MENON, *OpenMP: an Industry Standard API for Shared-Memory Programming*, Computational Science Engineering, IEEE **5**(1) (1998) 46–55, doi:[10.1109/99.660313](https://doi.org/10.1109/99.660313).
- [190] C. ADDISON, J. LAGRONE, L. HUANG e B. CHAPMAN, *OpenMP 3.0 tasking implementation in OpenUH*, in *Open64 Workshop in Conjunction with the International Symposium on Code Generation and Optimization(CGO)* (2009) url http://web.cs.uh.edu/~hpctools/Pub/openmp_tasking.pdf.

Apêndice A

Derivada de Lie

A.1 Derivada de Lie de um campo vetorial

O campo de velocidade do fluido $\vec{u}(t, \vec{x})$ pode também ser usado para definir uma derivada de um outro campo vetorial $\vec{v}(t, \vec{x})$ ao longo de $\vec{u}$. Essa será a chamada *derivada de Lie*, que apresentaremos a seguir.

Podemos transportar o vetor $\vec{v}$ ao longo de uma dada linha de fluxo, com parâmetro $\vec{a}$, de um ponto $\mathcal{P}$ com $\tau = p$ a um ponto vizinho $\mathcal{Q}$ com $\tau = q = p + \epsilon$ (onde ϵ é uma variação infinitesimal), e então definir a variação de $\vec{v}$ como a diferença entre o valor em si de $\vec{v}$ em $\mathcal{Q}$ e o valor transportado via $\vec{u}$. O vetor $\vec{v}(q)$ em $\mathcal{Q}$ pode ser obtido a partir do vetor $\vec{v}(p)$ em $\mathcal{P}$ por expansão de Taylor:

$$\vec{v}(q) = \vec{v}(p + \epsilon) = \vec{v}(p) + \epsilon \frac{\partial \vec{v}(p)}{\partial \tau}, \quad (\text{A.1})$$

ou seja,

$$\vec{v}(q) - \vec{v}(p) = \epsilon \frac{d\vec{v}(p)}{dt}. \quad (\text{A.2})$$

Temos agora que definir o vetor transportado ao longo de $\vec{u}$. Se multiplicarmos o vetor $\vec{v}(p)$ por um parâmetro infinitesimal λ , ele se torna um vetor infinitesimal. Então existe um único ponto $\mathcal{P}'$ em $\vec{\chi}(\tau = p', \vec{a}')$ em uma dada linha de fluxo com parâmetro $\vec{a}'$ tal que $\lambda \vec{v}(p) = \vec{\chi}(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}')$:

$$\vec{\chi}(p', \vec{a}') = \vec{\chi}(p, \vec{a}) + \lambda \vec{v}(p). \quad (\text{A.3})$$

Podemos transportar esse ponto ao longo da trajetória dada pelas coordenadas $\vec{a}'$ pela mesma “distância” ϵ até o ponto $\mathcal{Q}'$, em $\vec{\chi}(q', \vec{a}') = \vec{\chi}(p', \vec{a}') + \epsilon \vec{u}(p')$ com $q' = p' + \epsilon$. (estamos usando a simplificação de notação $\vec{u}(p') \equiv \vec{u}_a(p', \vec{a}')$.) Definimos então o vetor transportado $\vec{v}_\epsilon$ como $\frac{1}{\lambda} \vec{\chi}(\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}')$ (ver figura A.1):

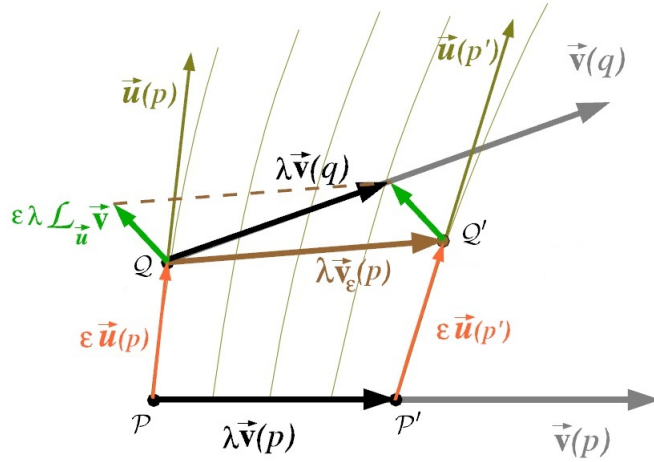


Figura A.1: Construção geométrica da derivada de Lie de um campo vetorial: dado um parâmetro pequeno λ , cada extremidade do vetor $\lambda \vec{v}$ é transportado por algum parâmetro pequeno ϵ ao longo de $\vec{u}$, para formar o vetor $\vec{v}_\epsilon(p)$. Esse último é então comparado com o valor em si de $\lambda \vec{v}$ no ponto Q , a diferença (dividida por $\lambda \epsilon$) define a derivada de Lie $\mathcal{L}_{\vec{u}} \vec{v}$. (figura retirada de Gourgoulhon [178])

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_\epsilon(p) &= \frac{1}{\lambda} (\vec{\chi}(q', \vec{a}') - \vec{\chi}(q, \vec{a})) \\
 &= \frac{1}{\lambda} (\vec{\chi}(p', \vec{a}') + \epsilon \vec{u}(p') - \vec{\chi}(p, \vec{a}) - \epsilon \vec{u}(p)) \\
 &= \frac{1}{\lambda} (\lambda \vec{v}(p) + \epsilon \vec{u}(p') - \epsilon \vec{u}(p)) \\
 &= \vec{v}(p) + \frac{\epsilon}{\lambda} (\vec{u}(p') - \vec{u}(p)).
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Podemos então subtraí-lo do valor real do campo $\vec{v}$ em Q e definir a derivada de Lie como

$$\mathcal{L}_{\vec{u}} \vec{v} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\vec{v}(q) - \vec{v}_\epsilon(p)), \tag{A.5}$$

que, substituindo-se (A.4) resulta em

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\vec{u}} \vec{v} &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\vec{v}(q) - \vec{v}(p) - \frac{\epsilon}{\lambda} (\vec{u}(p') - \vec{u}(p)) \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\epsilon \frac{d}{dt} \vec{v}(p) - \frac{\epsilon}{\lambda} (\vec{u}(p') - \vec{u}(p)) \right).
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

onde usamos ainda a equação (A.2) para $\vec{v}(q) - \vec{v}(p)$. Ou seja,

$$\mathcal{L}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{v}(p) - \frac{1}{\lambda} (\vec{u}(p') - \vec{u}(p)). \tag{A.7}$$

Podemos usar $\vec{\chi}(p', \vec{a}') = \vec{\chi}(p, \vec{a}) + \lambda \vec{v}(p)$ (equação (A.3)) para reduzir a expressão $\vec{u}(p') - \vec{u}(p)$:

$$\begin{aligned} \vec{u}(p') - \vec{u}(p) &= \vec{u}_a(p', \vec{a}') - \vec{u}_a(p, \vec{a}) \\ &= \vec{u}(t, \vec{\chi}(p', \vec{a}')) - \vec{u}(t, \vec{\chi}(p, \vec{a})) \\ &= \vec{u}(t, \vec{x} + \lambda \vec{v}(p)) - \vec{u}(t, \vec{x}) \\ &= (\lambda \vec{v}(p) \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(t, \vec{x}), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

por expansão de Taylor novamente. Por fim, usando esse resultado em (A.7), escrevemos a derivada de Lie como

$$\mathcal{L}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}. \quad (\text{A.9})$$

Vamos ver então como a base adaptada às coordenadas Lagrangianas (sistema comóvel) é transportado pelo fluxo $\vec{u}$. Essa base pode ser definida como

$$\vec{e}_{(i)} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial a^i} \vec{\chi}(\tau, \vec{a}) \right)_{\tau} \quad (\text{A.10})$$

Para usar as definições acima tomemos um vetor da base $\vec{e}_{(i)}$ no ponto $\mathcal{P}$ como sendo na direção de $\vec{v}(p)$

$$\vec{e}_{(i)}(p) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{\chi}(p, \vec{a}') - \vec{\chi}(p, \vec{a})}{\lambda} = \vec{v}(p), \quad (\text{A.11})$$

onde parametrizamos a trajetória dada por $\vec{a}'$ de forma que no ponto $\mathcal{P}'$ a coordenada $\tau = p'$ seja igual a $p' = p$. Dessa forma, o ponto $\mathcal{Q}'$ terá coordenada $\tau = q' = p + \epsilon = q$, e teremos que $\vec{e}_{(i)}$, no ponto $\mathcal{Q}$ será

$$\vec{e}_{(i)}(q) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{\chi}(q, \vec{a}') - \vec{\chi}(q, \vec{a})}{\lambda} = \vec{v}_{\epsilon}(p). \quad (\text{A.12})$$

Como o vetor $\vec{e}_{(i)}$ em $\mathcal{Q}$ é o próprio vetor transportado pelo campo $\vec{u}$, a sua derivada de Lie é nula (pela definição (A.5)):

$$\mathcal{L}_{\vec{u}} \vec{e}_{(i)} = 0, \quad (\text{A.13})$$

ou seja

$$\frac{d\vec{e}_{(i)}}{dt} = (\vec{e}_{(i)} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}. \quad (\text{A.14})$$

Portanto, a base adaptada às coordenadas Lagrangianas tem derivada de Lie nula com relação ao fluxo $\vec{u}$.

Vamos agora escrever o campo $\vec{v}$ em componentes na base comóvel ($\vec{v} = v^{(i)} \vec{e}_{(i)}$) e calcular a sua derivada convectiva:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{dv^{(i)}}{dt} \vec{e}_{(i)} + v^{(i)} \frac{d\vec{e}_{(i)}}{dt} \\ &= \frac{dv^{(i)}}{dt} \vec{e}_{(i)} + v^{(i)} (\vec{e}_{(i)} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \frac{dv^{(i)}}{dt}\vec{e}_{(i)},$$

ou seja,

$$\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \tau}\vec{e}_{(i)}. \quad (\text{A.15})$$

A derivada de Lie pode então ser vista como a taxa de variação de um vetor (de suas componentes) com relação à base comóvel. Por isso a taxa de variação da base adaptada às coordenadas Lagrangianas é nula (pois não varia com relação a si mesma!).

A.2 Derivada de Lie em uma variedade

Da mesma forma como feito anteriormente, a definição da derivada de Lie em uma dada variedade requer um campo vetorial $\vec{u}$ de referência, para que se possa estabelecer o conceito de derivada de um dado vetor $\vec{v}$ ao longo de $\vec{u}$. Seguindo a análise feita acima, essa definição é dada pela equação (A.5):

$$\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{v} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\vec{v}(q) - \vec{v}_\epsilon(p)), \quad (\text{A.5})$$

Se considerarmos um sistema de coordenadas (x^μ) adaptado ao campo $\vec{u}$ no sentido de que $\vec{u} = \vec{\partial}_0$, onde $\vec{\partial}_0$ é o primeiro vetor da base natural associada às coordenadas (x^μ) , então a derivada de Lie é dada simplesmente pela derivada parcial das componentes do vetor com respeito a x^0 (veja figura A.1):

$$(\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{v})^\mu = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^0}. \quad (\text{A.16})$$

Em um sistema de coordenadas arbitrário, esta fórmula se generaliza para

$$\mathcal{L}_{\vec{u}}v^\mu = u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}, \quad (\text{A.17})$$

onde usamos a notação de que $\mathcal{L}_{\vec{u}}v^\mu \equiv (\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{v})^\mu$. A relação acima mostra que a derivada de Lie de um vetor com respeito a um outro nada mais é que o comutador desses dois vetores:

$$\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{v} = [\vec{u}, \vec{v}]. \quad (\text{A.18})$$

A derivada de Lie é estendida para qualquer campo tensorial por: i) exigindo que para um campo escalar f , $\mathcal{L}_{\vec{u}}f = u^\mu \partial_\mu f$, e ii) usando a regra de Leibniz. Como resultado, a derivada de Lie $\mathcal{L}_{\vec{u}}\mathbf{T}$ de um tensor do tipo (k, l) é um tensor do mesmo tipo, com componentes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{u}}T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} &= \\ &= u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} - \sum_{i=1}^k T^{\alpha_1 \dots \sigma \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} \frac{\partial u^{\alpha_i}}{\partial x^\sigma} + \sum_{i=1}^l T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \sigma \dots \beta_l} \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^{\beta_i}}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

em um dado sistema de coordenadas (x^μ) . Por exemplo, a derivada de Lie de um vetor covariante se torna

$$\mathcal{L}_{\vec{u}}v_\mu = u^\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\nu} + v_\nu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.20})$$

No caso em que a torsão nula, ou seja, quando a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ é simétrica, todas as derivadas parciais que aparecem na expressão da derivada de Lie de um tensor qualquer podem ser substituídas por derivadas covariantes.

Uma propriedade útil, derivada da equação acima, é que a derivada de Lie de um vetor covariante com relação a um vetor da forma $A\vec{u}$, onde A é uma função arbitrária, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A\vec{u}}v_\nu &= Au^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\nu} + v_\nu \frac{\partial Au^\nu}{\partial x^\mu} \\ &= Au^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\nu} + Av_\nu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} + v_\nu u^\nu \frac{\partial A}{\partial x^\mu} \\ &= A\mathcal{L}_{\vec{u}}v_\nu + v_\nu u^\nu \frac{\partial A}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

No caso em que a torsão é identicamente nula, ou seja, quando a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é simétrica, todas as derivadas parciais que aparecem na expressão da derivada de Lie de um tensor qualquer podem ser substituídas por derivadas covariantes. Em particular temos:

$$\mathcal{L}_{\vec{u}}v_\mu = u^\nu \nabla_\nu v_\mu + v_\nu \nabla_\mu u^\nu, \quad (\text{A.22})$$

e

$$\mathcal{L}_{A\vec{u}}v_\nu = A\mathcal{L}_{\vec{u}}v_\nu + v_\nu u^\nu \nabla_\mu A. \quad (\text{A.23})$$

Apêndice B

Tetradas ortonormais

B.1 Transporte paralelo

Definiremos a *derivada absoluta* de um campo tensorial geral $T_{\nu\dots}^{\mu\dots}$ ao longo de uma curva Γ com vetor tangente dado por u^μ , como

$$\frac{DT_{\nu\dots}^{\mu\dots}}{D\tau} \equiv u^\alpha \nabla_\alpha T_{\nu\dots}^{\mu\dots} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \nabla_\alpha T_{\nu\dots}^{\mu\dots}. \quad (\text{B.1})$$

No caso específico de um campo vetorial $V^\mu(x^\nu)$ temos que

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} = u^\nu \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\alpha \right) = \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\alpha u^\nu. \quad (\text{B.2})$$

A derivada absoluta é a generalização relativística do conceito de derivada convectiva do caso não relativístico. O campo tensorial $T_{\nu\dots}^{\mu\dots}$ é dito ser *transportado paralelamente* ao longo de Γ se

$$\frac{DT_{\nu\dots}^{\mu\dots}}{D\tau} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Intuitivamente isso quer dizer que o tensor é transportado sem alteração (ou “constante”, o que no caso de um vetor significa sem alterar sua “direção” e módulo). Ou seja, que é conservado pelo fluxo (obviamente levando-se em consideração a variação local da base, ou seja, a curvatura do espaço-tempo). Curvas que satisfazem a condição $a^\mu = 0$ são geodésicas, com

$$a^\mu \equiv \frac{Du^\mu}{D\tau} = u^\nu \nabla_\nu u^\mu \quad (\text{B.4})$$

sendo o quadrivetor aceleração. O quadrivetor velocidade é portanto transportado paralelamente ao longo de uma geodésica. Uma característica importante do quadrivetor aceleração é que ele é ortogonal a u^μ :

$$\frac{D(u^\mu u_\mu)}{D\tau} = 2u_\mu a^\mu = 0, \quad (\text{B.5})$$

pois $u^\mu u_\mu = -1$.

B.2 Transporte de Fermi-Walker

Introduziremos aqui a ideia de um vetor que é transportado de forma rígida com relação a um observador comóvel ao longo de uma curva. Ou seja, um vetor que é fixo ao observador comóvel, e se movimenta com ele.

Considere um observador comóvel ao fluido, com um campo de quadri-velocidade u^μ , e um dado vetor V^μ que queremos que seja transportado com o fluido. Para isso, vamos impor uma certa condição sobre a derivada absoluta desse vetor. Porém, antes disso, precisamos decompor esse vetor em uma componente na direção de u^μ e outra componente ortogonal a u^μ . Para isso usaremos o tensor

$$h^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu, \quad (\text{B.6})$$

que projeta um vetor arbitrário no espato-tempo em um ortogonal a u^μ , com

$$h^\mu{}_\nu u^\nu = 0. \quad (\text{B.7})$$

Temos ainda que

$$h^\mu{}_\alpha h^\alpha{}_\nu = h^\mu{}_\nu. \quad (\text{B.8})$$

Além disso, o tensor

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} h^\alpha{}_\nu = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu \quad (\text{B.9})$$

deve ser interpretado como sendo a métrica no espaço tridimensional ortogonal ao vetor $u^\mu(\mathcal{P})$ no evento $\mathcal{P}$. De fato, ele é efetivamente tridimensional: no sistema de Lorentz comóvel em um dado ponto $\mathcal{P}$, $u^\mu \stackrel{*}{=} (-1, 0, 0, 0)$ e $g_{\mu\nu} \stackrel{*}{=} \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, e portanto $h_{\mu\nu} \stackrel{*}{=} \text{diag}(0, 1, 1, 1)$.

Com isso, a derivada absoluta de V^μ pode então ser decomposta

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} = h^\mu{}_\nu \frac{DV^\nu}{D\tau} - u^\mu u_\nu \frac{DV^\mu}{D\tau}. \quad (\text{B.10})$$

Vamos então impor a condição de que a projeção de V^μ na direção de u^μ seja constante, ou seja, que $D(V^\nu u_\nu)/D\tau = 0$:

$$\frac{D(V^\nu u_\nu)}{D\tau} = \frac{DV^\nu}{D\tau} u_\nu + V^\nu \frac{Du_\nu}{D\tau} = 0, \quad (\text{B.11})$$

o que, multiplicando por u^μ , resulta em

$$u^\mu u_\nu \frac{DV^\nu}{D\tau} = -V^\nu a_\nu u^\mu, \quad (\text{B.12})$$

onde usamos a quadriaceleração (B.4).

Agora temos que impor uma condição sobre a projeção ortogonal. Queremos te convencer que a condição que garante que o vetor V^μ será fixo ao observador comóvel, e que ainda *não apresente rotação*, é dada por

$$h^\mu{}_\alpha \frac{D(h^\alpha{}_\nu V^\nu)}{D\tau} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Essa condição diz que o vetor $h^\alpha{}_\nu V^\nu$, que dá a projeção ortogonal de V^ν , ao ser transportado ao longo da trajetória tem uma derivada absoluta não nula somente na direção paralela a u^μ . Para o observador comóvel, isso garante que a componente perpendicular de V^ν ficará fixa.

Vejamos então em que isso resulta. Da equação (B.13) temos que

$$h^\mu{}_\alpha h^\alpha{}_\nu \frac{DV^\nu}{D\tau} = -h^\mu{}_\alpha \frac{Dh^\alpha{}_\nu}{D\tau} V^\nu. \quad (\text{B.14})$$

Usando a equação para (B.6) para $h^\mu{}_\nu$ e o fato de que esse é um projetor (B.8) temos

$$h^\mu{}_\nu \frac{DV^\nu}{D\tau} = -h^\mu{}_\alpha \frac{Dh^\alpha{}_\nu}{D\tau} V^\nu = -h^\mu{}_\alpha \frac{D(u^\alpha u_\nu)}{D\tau} V^\nu = -h^\mu{}_\alpha (a^\alpha u_\nu + u^\alpha a_\nu) V^\nu, \quad (\text{B.15})$$

onde usamos ainda o fato de que o tensor δ^μ_ν sempre é transportado paralelamente ($D\delta^\mu_\nu/D\tau = 0$). Por fim, usando que a projeção de u^μ é nula ($h^\mu{}_\alpha u^\alpha = 0$) e que a^μ é ortogonal a u^μ ($h^\mu{}_\alpha a^\alpha = a^\mu$), temos

$$h^\mu{}_\nu \frac{DV^\nu}{D\tau} = -V^\nu u_\nu a^\mu. \quad (\text{B.16})$$

Juntando agora essa equação da componente ortogonal com a componente paralela (B.12) na equação (B.10) obtemos

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} = V_\nu (a^\nu u^\mu - u^\nu a^\mu). \quad (\text{B.17})$$

Vetores que tem sua derivada absoluta dada pela equação acima são ditos serem transportados por *Fermi-Walker*. Perceba que se a trajetória é uma geodésica então $a^\mu = 0$ e o transporte de Fermi-Walker coincide com o transporte paralelo.

Uma característica importante do transporte de Fermi-Walker é que o vetor tangente unitário u^μ automaticamente sofre transporte de Fermi-Walker, dado que $u_\mu u^\mu = -1$ e $u_\mu a^\mu = 0$. Para vetores ortogonais a u^μ , o transporte de Fermi-Walker se torna

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} = V_\nu a^\nu u^\mu, \quad (\text{B.18})$$

sendo então chamado simplesmente de *transporte de Fermi*.

Assim como no caso do transporte paralelo, a equação (B.17) define V^μ ao longo de uma curva Γ se V^μ é dado em um ponto qualquer de Γ . Por ser definido por uma equação mais simples, o transporte paralelo é matematicamente mais fundamental que o transporte de Fermi-Walker, mas o transporte de Fermi-Walker é mais importante em algumas situações físicas. A razão para isto é mostrada na figura B.1.

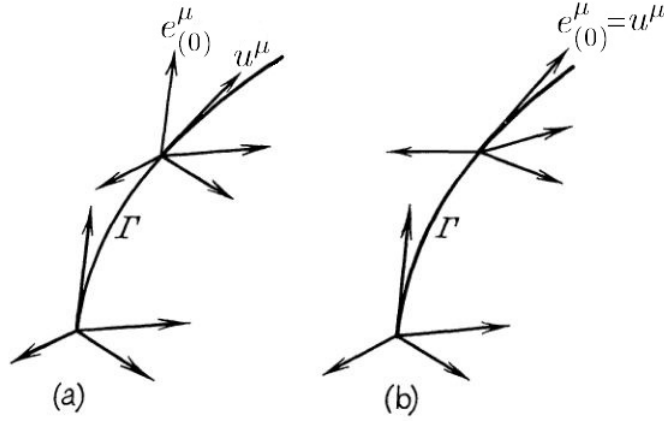


Figura B.1: (a) Transporte paralelo. (b) Transporte de Fermi-Walker. (figura retirada de Synge [87])

Tanto o transporte paralelo quanto o transporte de Fermi-Walker conservam o produto escalar, e portanto podem ser usados para definir uma base ortonormal ao longo de uma dada curva Γ . Se tomarmos uma base ortonormal sobre Γ , com o primeiro membro tangente a Γ em algum ponto (de forma que $e^\mu_{(0)} = u^\mu$), então, sob transporte paralelo, $e^\mu_{(0)}$ separa de u^μ (a não ser que Γ seja uma geodésica). Mas sob transporte de Fermi-Walker $e^\mu_{(0)}$ permanece tangente a Γ . Portanto, o transporte de Fermi-Walker não só fornece uma *tetrada* (base ortonormal) ao longo de Γ , mas também fornece uma *tríade* ortonormal a Γ . Isso forma um “sistema de referência espacial” para um observador cuja linha de mundo no espaço-tempo é Γ e é este sistema de referência que nos dá a generalização relativística correta do conceito Newtoniano de um “sistema de referência sem rotação”.

B.3 Tetradas ortonormais

Um conjunto de quatro quadri-vetores unitários $e^\mu_{(a)}$ ($a = 0, 1, 2, 3$) mutuamente ortogonais (no sentido apropriado para a assinatura da métrica do espaço-tempo) é chamado de uma *tetrada ortonormal*. Escolhendo três dos vetores do tipo-espaço $e^\mu_{(l)}$ ($l = 1, 2, 3$) e um tipo-tempo $e^\mu_{(0)}$, a ortonormalidade

$$e^\mu_{(0)} e_{(0)\mu} = -1; \quad e^\mu_{(l)} e_{(l)\mu} = 1; \quad e^\mu_{(a)} e_{(b)\mu} = 0 \quad \text{se} \quad a \neq b, \quad (\text{B.19})$$

é expressa de forma sintética pela condição

$$g_{\mu\nu}e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu = \eta_{(a)(b)}, \quad (\text{B.20})$$

onde $\eta_{(a)(b)} = \eta^{(a)(b)} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski. A possibilidade de se usar uma base ortonormal em cada ponto do espaço-tempo é equivalente ao fato de que o espaço-tempo é localmente plano, ou seja, existe uma base em que a conexão se anula $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \stackrel{*}{=} 0$ (qualquer tetrada ortonormal).

Os índices latinos não tem significado tensorial, contudo podemos subir e descer esses índices por meio da matriz $\eta_{(a)(b)}$. Portanto, podemos definir a base recíproca como

$$e_\mu^{(a)} = \eta^{(a)(b)} e_{(b)\mu}, \quad (\text{B.21})$$

e deduzir que

$$e_{(a)}^\mu = \eta_{(a)(b)} e^{(b)\mu}. \quad (\text{B.22})$$

Dessa forma, a equação (B.20) pode ser escrita como

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \delta_b^a, \quad (\text{B.23})$$

e como consequência disso

$$e_{(a)}^\mu e_\nu^{(a)} = \delta_\nu^\mu. \quad (\text{B.24})$$

Ainda podemos escrever (B.20) como

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} \eta_{(a)(b)}. \quad (\text{B.25})$$

Podemos construir uma tetrada ao longo de uma dada curva Γ escolhendo uma solução das equações acima em um evento da curva com parâmetro τ_0 , e fazendo

$$e_{(0)}^\mu(\tau_0) = u^\mu(\tau_0), \quad (\text{B.26})$$

e então transportando a tetrada por Fermi-Walker para o evento com parâmetro τ . Tal tetrada contém uma tríade ortonormal $e_{(l)}^\mu$ ($l = 1, 2, 3$) ortogonal a Γ . Isso forma um sistema de referência espacial para um observador cuja linha de mundo é Γ , e esse sistema de referência é o chamado *referencial sem rotação*.

Observe que quando $e_{(0)}^\mu = u^\mu$, então $e_\mu^{(0)} = -u_\mu$. Portanto, a condição (B.24) pode ser escrita como

$$e_{(l)}^\mu e_\nu^{(l)} = h_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + u^\mu u_\nu, \quad (\text{B.27})$$

onde a soma é feita para $l = 1, 2, 3$, e o projetor h_ν^μ é dado em termos da tetrada.

Se, em um determinado ponto no espaço-tempo, forem dadas duas tetradas $e_{(a)}^\mu$ e $\lambda_{(0)}^\mu$, elas são conectadas por uma transformação de Lorentz. Seja a *matriz de Lorentz*

$$\Lambda_{(b)}^{(a)} = e_{(b)}^\mu \lambda_{(a)\mu}, \quad (\text{B.28})$$

de forma que $\Lambda_{(b)}^{(a)} = \delta_b^a$ se as duas tetradas coincidem. Multiplicando-se (B.28) por $e_{(a)}^\mu$ e por $\lambda_{(b)}^\mu$ resulta em

$$\lambda_{(b)}^\mu = \Lambda_{(b)}^{(a)} e_{(a)}^\mu, \quad e_{(b)}^\mu = \Lambda_{(b)}^{(a)} \lambda_{(a)}^\mu, \quad (\text{B.29})$$

respectivamente. Essas são expressões equivalentes para a transformação de Lorentz. Podemos definir também a chamada transformação inversa

$$\Lambda_{(a)}^{(b)} = \lambda_{(a)}^{(b)} e_{(b)}^\mu, \quad (\text{B.30})$$

de tal forma que

$$\Lambda_{(c)}^{(a)} \Lambda_{(b)}^{(c)} = \delta_b^a. \quad (\text{B.31})$$

As transformações de Lorentz deixam a forma canônica da métrica inalterada, ou seja,

$$\eta_{(c)(d)} \Lambda_{(a)}^{(c)} \Lambda_{(b)}^{(d)} = \eta_{(a)(b)}. \quad (\text{B.32})$$

Temos a liberdade de realizar uma transformação de Lorentz em cada ponto do espaço-tempo (alterando a tetrada em cada ponto). Essas transformações são chamadas de *transformações de Lorentz locais*.

Qualquer vetor ou tensor pode ser decomposto em componentes ao longo de uma tetrada ortonormal $e_{(a)}^\mu$. Essas componentes são invariantes no sentido tensorial (isto é, com respeito a transformações de coordenadas), mas dependem da escolha da tetrada ortonormal, e são covariantes ou contravariantes com respeito às transformações de Lorentz da tetrada. Temos as seguintes decomposições típicas:

$$\begin{aligned} V_{(a)} &= V_\mu e_{(a)}^\mu, & V_{(a)} &= V_\mu e_\mu^{(a)}, \\ V_\mu &= V_{(a)} e_\mu^{(a)}, & V^\mu &= V^{(a)} e_{(a)}^\mu, \\ T_{(a)(b)} &= T_{\mu\nu} e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu, & T_{\mu\nu} &= T_{(a)(b)} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)}, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

e assim por diante.

B.4 Conexão de spin

Estou interessado em definir uma base ortonormal sobre uma determinada curva Γ no espaço-tempo, e dessa forma generalizar para uma congruência de curvas em um fluido. Definimos então uma quantidade $\omega_{\mu(a)}^{(b)}$, chamada de *conexão de spin*, que determina a derivada covariante da base escolhida, e define como essa base muda ao longo das trajetórias:

$$\nabla_\mu e_{(a)}^\nu = \partial_\mu e_{(a)}^\nu + e_{(a)}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \equiv e_{(b)}^\nu \omega_{\mu(a)}^{(b)}, \quad (\text{variação da tetrada com relação à base coordenada}) \quad (\text{B.34})$$

onde consideramos os índices latinos como meros identificadores dos vetores da base. No entanto, como o conceito de derivada covariante depende da base escolhida, pois nos dá a noção de variação com relação à base, e a base não pode variar com relação a si mesma, *redefinimos* então a derivada covariante de forma que

$$\nabla_\mu e_{(a)}^\nu = 0. \quad (\text{B.35})$$

Com isso a equação (B.34) nos mostra que,

$$\nabla_\mu e_{(a)}^\nu = \partial_\mu e_{(a)}^\nu + e_{(a)}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\nu - e_{(b)}^\nu \omega_{\mu(a)}^{(b)} = 0, \quad (\text{B.36})$$

e portanto $\omega_{\mu(a)}^{(b)}$ funciona como a conexão da base ortonormal. Dessa forma, cada índice latino em um tensor ganha um termo em $\omega_{\mu(a)}^{(b)}$ na derivada covariante.

Sob uma transformação geral de coordenadas, a conexão de spin $\omega_{\mu(a)}^{(b)}$ se transforma como um vetor covariante, como indicado pelo índice μ . No entanto, sob transformações de Lorentz locais ela se transforma de forma não homogênea, como [179]

$$\omega'_{\mu(a)}^{(b)} = \Lambda_{(a)}^{(c)} \Lambda_{(d)}^{(b)} \omega_{\mu(c)}^{(d)} - \Lambda_{(a)}^{(c)} \partial_\mu \Lambda_{(c)}^{(b)}. \quad (\text{B.37})$$

A compatibilidade métrica, $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$, expressa na base ortonormal nos conduz a

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \eta_{(a)(b)} &= \partial_\mu \eta_{(a)(b)} - \omega_{\mu(a)}^{(c)} \eta_{(c)(b)} - \omega_{\mu(b)}^{(c)} \eta_{(a)(c)} = \\ &= -\omega_{\mu(b)(a)} - \omega_{\mu(a)(b)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Ou seja,

$$\omega_{\mu(a)(b)} = -\omega_{\mu(b)(a)}, \quad (\text{B.39})$$

e a compatibilidade métrica é equivalente à antissimetria da conexão de spin nos índices latinos.

Apêndice C

Métrica de um espaço-tempo estacionário axialmente simétrico

C.1 Métrica estacionária axialmente simétrica

Vamos nos limitar a configurações em equilíbrio axialmente simétricas, que somente podem estar em equilíbrio se não irradiarem ondas gravitacionais. Uma condição necessária e suficiente para a ausência de radiação gravitacional é a ausência de momentos dependentes do tempo na distribuição de massa, e esta condição é garantida pela hipótese de campos gravitacionais axialmente simétricos (Hartle e Sharp [180, p318]). Note que em campos estacionários (diferentemente de campos estáticos), as componentes mistas $g_{0\nu}$ do tensor métrico são definitivamente diferentes de zero. Podemos ignorar o caso especial não realístico de um campo axialmente simétrico produzido por um corpo estático, que exigiria campos de tensão muito especiais dentro da distribuição de massa.

Vamos denotar por Ω a velocidade angular de um elemento de massa, medida por um observador a grandes distâncias da configuração, isto é, medida no espaço-tempo assintoticamente plano. Antes de tudo, precisamos de uma métrica apropriada para o estudo de configurações relativísticas em rotação, estacionárias axialmente simétricas. Para se ter uma ideia do tipo de métrica envolvida, vamos voltar para um sistema inercial, Galileano, com a métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dr'^2 + dz'^2 + r'^2 d\phi'^2, \quad (\text{C.1})$$

para um sistema em rotação uniforme, com velocidade angular Ω . As coordenadas espaciais cilíndricas são denotadas por r' , z' , ϕ' , e t é a coordenada temporal universal, no sistema estacionário considerado. Obviamente, as coordenadas esféricas r , z e ϕ no referencial em rotação estão relacionadas a r' , z' e ϕ' por $r' = r$, $z' = z$ e $\phi' = \phi + \Omega t$.

Inserindo isto em (C.1) encontramos:

$$ds^2 = -dt^2 + r^2 (d\varphi + \Omega dt)^2 + dr^2 + dz^2. \quad (\text{C.2})$$

ou

$$ds^2 = -\left(1 - \Omega^2 r^2\right) dt^2 + 2\Omega r^2 d\varphi dt + dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (\text{C.3})$$

Como $g_{00} = 1 - \Omega^2 r^2 > 0$, o sistema em rotação pode ser usado até uma distância $r \leq 1/\Omega$. Em coordenadas cartesianas, a transformação equivalente de um referencial inercial para um em rotação é

$$x'^1 = x^1 \cos \Omega t - x^2 \sin \Omega t; \quad x'^2 = x^1 \sin \Omega t + x^2 \cos \Omega t; \quad x'^3 = x^3, \quad (\text{C.4})$$

e as duas métricas (C.1) e (C.3) se tornam, respectivamente

$$ds^2 = -dt^2 + (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2, \quad (\text{C.5})$$

$$ds^2 = -\left(1 - \Omega^2 \left[(x^1)^2 + (x^2)^2\right]\right) dt^2 - 2\Omega x^2 dx^1 dt + 2\Omega x^1 dx^2 dt + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (\text{C.6})$$

Veremos que no caso geral obteremos também uma métrica com componentes $g_{0\nu}$ não nulas, semelhante a (C.3).

C.2 Simetrias e vetores de Killing

Estamos interessados em estudar espaços-tempo que possuem duas simetrias: estacionariedade e simetria axial. As simetrias do espaços-tempo podem ser descritas através de grupos de transformações sob os quais a métrica seja invariante. Um espaço-tempo é dito ser *estacionário* se existe um grupo de translações unidimensionais sob a ação do qual a métrica seja invariante, e as órbitas geradas por essas translações forem do tipo-tempo. Isto significa que existe um conjunto de hipersuperfícies tipo-espaço invariantes sob translação temporal preenchendo todo o espaço-tempo. Seja t uma parametrização das órbitas geradas pela ação do grupo (indexando cada hipersuperfície invariante), o vetor tangente $\vec{\xi}$ correspondente à essa parâmetro é chamado de *gerador do grupo de simetria associado com a parametrização t* . A invariância da métrica sob a ação do grupo é descrita como

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}} g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{C.7})$$

A derivada de Lie $\mathcal{L}_{\vec{\xi}} g_{\mu\nu}$ mede a variação de $g_{\mu\nu}$ ao longo das linhas de campo de $\vec{\xi}$, ou seja, sua variação sob a ação do grupo de transformações (ver apêndice A).

Um vetor $\vec{\xi}$ que satisfaz à condição (C.7) é chamado de *vetor de Killing*. Usando a compatibilidade métrica $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$, encontramos que (C.7) resulta na condição

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (\text{C.8})$$

Esta é a chamada *equação de Killing*, e o vetor $\vec{\xi}$ gerador da simetria é chamado de *vetor de Killing*.

A propriedade (C.7) é independente da escolha do gerador $\vec{\xi}$, isto é, é independente da parametrização t das hipersuperfícies. De fato, se mudarmos a parametrização $t \mapsto t'$, induzindo uma mudança de gerador $\vec{\xi} \mapsto \vec{\xi}'$, a seguinte regra se segue:

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}'} g_{\mu\nu} = \frac{dt}{dt'} \mathcal{L}_{\vec{\xi}} g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.9})$$

Para um espaço-tempo assintoticamente plano, como o que queremos considerar, podemos determinar o campo de Killing $\vec{\xi}$ unicamente exigindo que longe do objeto central $\vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \rightarrow -1$. Consequentemente, o parâmetro associado t coincide com o tempo próprio do observador *estático* assintoticamente inercial (cuja quadrivelocidade u^μ é paralela ao vetor de Killing $\vec{\xi}$).

Estacionariedade não quer dizer estaticidade. Um espaço-tempo é dito ser *estático* se: i) ele for estacionário; e ii) o campo de Killing $\vec{\xi}$ associado for **ortogonal** a uma família de hipersuperfícies. De maneira não rigorosa, a condição i) significa que nada depende do tempo, e a condição ii) que não há “movimento” no espaço-tempo.

Passemos agora para o caso de simetria axial. Um espaço-tempo é dito ser *axialmente simétrico* se existe um grupo de transformações isomórfico à $SO(2)$, ou seja, ao grupo de rotações no plano, sob a ação do qual a métrica seja invariante:

$$\mathcal{L}_{\vec{\zeta}} g_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{C.10})$$

sendo $\vec{\zeta}$ o gerador associado com algum parâmetro φ e $\mathcal{L}_{\vec{\zeta}} g_{\mu\nu}$ denota a derivada de Lie de $g_{\mu\nu}$ ao longo do campo vetorial $\vec{\zeta}$. O conjunto de pontos fixos sob a ação do grupo deve ainda ser uma superfície bidimensional, denotada por Ξ . Carter [181] (1970) demonstrou que para espaços-tempo assintoticamente planos, essa condição de que Ξ seja uma superfície bidimensional é implicada pela propriedade de simetria enunciada. Além disso, ele mostrou também que Ξ é necessariamente uma 2-superfície tipo-tempo, ou seja, a métrica induzida por $g_{\mu\nu}$ tem assinatura $(-, +)$. Ξ é chamada de *eixo de rotação*. Dado um grupo de ação $SO(2)$, podemos determinar o vetor de Killing $\vec{\zeta}$ unicamente exigindo que φ assumam os valores $[0, 2\pi[$.

C.3 Espaços-tempo estacionários e axissimétricos

Consideraremos um espaço-tempo que é ambos, estacionário e axissimétrico. Carter [181] mostrou em 1970 que não há perda de generalidade se considerarmos que as ações de estacionariedade e simetria axial comutam. Em outras palavras, o espaço-tempo é invariante sob a ação do grupo *Abeliano* $\mathbb{R} \times SO(2)$ e não somente sob a ação de $\mathbb{R}$ e $SO(2)$

separadamente. Esta propriedade pode ser traduzida em termos dos vetores de Killing $\vec{\xi}$ e $\vec{\zeta}$ por

$$[\vec{\xi}, \vec{\zeta}] = 0. \quad (\text{C.11})$$

Uma consequência importante da propriedade de comutação é que os parâmetros t e φ , que rotulam os dois grupos de simetria, podem ser escolhidos como coordenadas sobre o espaço-tempo. De fato, tendo determinado as coordenadas $(0, 0)$ para um dado ponto $\mathcal{P}$, (C.11) implica que podemos atribuir as coordenadas (t, φ) de forma não ambígua para o ponto obtido de $\mathcal{P}$ por uma translação temporal de parâmetro t e uma rotação de parâmetro φ , seja qual for a ordem das duas transformações.

Completemos então (t, φ) com outras duas coordenadas $(x^1, x^2) = (r, z)$ para se ter um sistema completo de coordenadas:

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, z, \varphi). \quad (\text{C.12})$$

(r, z) são escolhidas de tal maneira que $r \in [0, +\infty[$, $z \in \mathbb{R}$ e $r = 0$ em Ξ . As coordenadas espaciais (r, z, φ) são então do *tipo cilíndricas*.

Por construção, o sistema de coordenadas (C.12) é tal que o primeiro e o quarto vetores associados à base natural são os dois vetores de Killing:

$$\vec{\partial}_t = \vec{\xi} \quad e \quad \vec{\partial}_\varphi = \vec{\zeta}, \quad (\text{C.13})$$

ou seja

$$\xi^\mu = \delta_0^\mu \quad e \quad \zeta^\mu = \delta_3^\mu. \quad (\text{C.14})$$

Consequentemente, em termos de componentes tensoriais nas coordenadas (x^μ) , as derivadas de Lie com respeito a $\vec{\xi}$ e $\vec{\zeta}$ se reduzem a derivadas parciais com respeito a t e a φ . Em particular, as condições de estacionariedade e axissimetria (C.7) e (C.10) são, respectivamente, equivalentes a

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0 \quad e \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \varphi} = 0, \quad (\text{C.15})$$

e portanto, $g = g(x^1, x^2) = g(r, z)$. Por esta razão, t e φ são chamadas de *coordenadas ignoráveis*. As quatro coordenadas (x^μ) são ditas *coordenadas adaptadas* às simetrias do espaço-tempo.

Há uma certa liberdade na escolha das coordenadas (x^μ) com as propriedades acima. De fato, qualquer transformação de coordenadas na forma

$$\begin{aligned} t' &= t + T(r, z) \\ r' &= R(r, z) \\ z' &= Z(r, z) \\ \varphi' &= \varphi + \Phi(r, z) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

onde T , R , Z e Φ são funções (suaves) arbitrárias, resulta em um outro sistema de coordenadas adaptado tal que

$$\vec{\partial}_{t'} = \vec{\xi} \quad e \quad \vec{\partial}_{\varphi'} = \vec{\zeta}. \quad (\text{C.17})$$

(R e Z devem ainda satisfazer a certas propriedades para se manter o caráter cilíndrico das coordenadas espaciais.)

No entanto, é importante notar que na equação (C.17) acima $\vec{\xi}$ e $\vec{\zeta}$ são ainda os mesmos vetores que em (C.13). A mudança de coordenadas $t \mapsto t'$ de acordo (C.16) é meramente uma reparametrização de cada órbita gerada pela ação do grupo de translações temporais - reparametrização que deixa invariante o vetor tangente associado $\vec{\xi}$ (ver figura C.1). Um

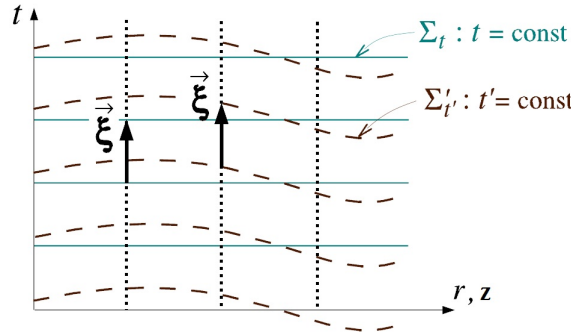


Figura C.1: Transformação de coordenadas $t \mapsto t'$ de acordo com (C.16). As linhas sólidas representam hipersuperfícies de t constante (Σ_t) e as linhas tracejadas são as de t' constante ($\Sigma'_{t'}$). As linhas pontilhadas são as órbitas das ações de estacionariedade (gerador $\vec{\xi}$). (figura retirada de Gourgoulhon [178])

argumento similar pode ser dito para $\varphi \mapsto \varphi'$.

Como visto na figura C.1, estacionariedade por si mesma não introduz uma decomposição 3+1 privilegiada do espaço-tempo, pois a mudança da coordenada t para t' em (C.16) muda as hipersuperfícies de t constante.

C.4 Circularidade

Com relação às componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{C.18})$$

as propriedades (C.15) são as únicas resultantes diretamente das simetrias do espaço-tempo (estacionariedade e simetria axial). Em particular, não podemos anular outras componentes de $g_{\mu\nu}$, que simplificaria a expressão das equações de Einstein. No entanto,

há uma classe de espaços-tempo estacionários axissimétricos para os quais podemos fazer isso para 5 componentes: os chamados *espaços-tempo circulares*. Além disso, esses espaços-tempo são muito relevantes para astrofísica.

Primeiro notemos que ter $g_{\mu\nu}$ para algum valor de (μ, ν) é uma condição de *ortogonalidade*: dos vetores $\vec{\partial}_\mu$ e $\vec{\partial}_\nu$, isto é, das linhas $\{x^{\mu'} = \text{const}, \mu' \neq \mu\}$ e $\{x^{\nu'} = \text{const}, \nu' \neq \nu\}$. Além disso, notemos que, no presente contexto, há superfícies bidimensionais privilegiadas no espaço-tempo: as órbitas do grupo de ação $\mathbb{R} \times \text{SO}(2)$. Elas são chamadas de *superfícies de transitividade*, e são denotadas por $\mathcal{T}_{rz}$ (rz rotula determinada superfície). Os dois vetores de Killing $\vec{\xi}$ e $\vec{\zeta}$ são tangentes a essas superfícies em cada ponto (exceto no eixo de rotação).

Dada a família de superfícies $\mathcal{T}_{rz}$, se existir uma outra família de superfícies bidimensionais, digamos $\mathcal{M}_{t\varphi}$, que for ortogonal a $\mathcal{T}_{rz}$ em cada ponto, dizemos que o grupo $\mathbb{R} \times \text{SO}(2)$ é *ortogonalmente transitivo* [182], e o espaço-tempo é dito ser *circular*. As superfícies $\mathcal{M}_{t\varphi}$, nas quais t e φ são constantes, são chamadas de *superfícies meridionais*. No caso de transitividade ortogonal, a ortogonalidade entre $\mathcal{T}_{rz}$ e $\mathcal{M}_{t\varphi}$ implica que as seguintes componentes da métrica são nulas:

$$g_{tr} = 0, \quad g_{tz} = 0, \quad g_{\varphi r} = 0, \quad g_{\varphi z} = 0. \quad (\text{C.19})$$

O teorema de Papapetrou generalizado diz que um espaço-tempo estacionário axissimétrico regrado pelas equações de Einstein é circular se e somente se o tensor de energia-momento $T_\mu{}^\nu$ obedece a

$$\xi^\mu T_\mu{}^{[\nu} \xi^\alpha \zeta^{\beta]} = 0 \quad (\text{C.20})$$

$$\zeta^\mu T_\mu{}^{[\nu} \xi^\alpha \zeta^{\beta]} = 0. \quad (\text{C.21})$$

Este teorema foi demonstrado por Papapetrou [183] (1966) para soluções no vácuo, e generalizado para casos de não vácuo por Kundt e Trümper [184] (1966) e Carter [182] (1969). No caso de um tensor energia-momento de um fluido perfeito, na forma (3.89), essa condição equivale à condição [178]

$$u^{[\nu} \xi^\alpha \zeta^{\beta]} = 0, \quad (\text{C.22})$$

o que é equivalente a dizer que $\vec{u}$ deve ser uma combinação linear de $\vec{\xi}$ e $\vec{\zeta}$, ou seja, que pertence ao espaço tangente a $\mathcal{T}_{rz}$. Considerando que $\vec{\xi} = \vec{\partial}_t$ e $\vec{\zeta} = \vec{\partial}_\varphi$, essa condição equivale a $u^r = 0$ e $u^z = 0$, ou seja,

$$\vec{u} = u^t (\vec{\xi} + \Omega \vec{\zeta}). \quad (\text{C.23})$$

A quantidade Ω , definida por

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} / \frac{dt}{ds} = \frac{u^\varphi}{u^t}, \quad (\text{C.24})$$

é a velocidade angular de um elemento de fluido medida por um observador estático com relação às coordenadas (x^μ) . Definindo ainda o chamado *fator redshift*

$$A \equiv u^t, \quad (\text{C.25})$$

temos, em componentes,

$$u^\mu = A(\xi^\mu + \Omega \zeta^\mu). \quad (\text{C.26})$$

O fator A leva esse nome porque se τ denota o tempo próprio do observador com quadri-velocidade $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, então $A = u^t = dt/d\tau$, portanto

$$dt = A d\tau. \quad (\text{C.27})$$

O campo de velocidade (C.26) descreve um movimento do fluido *puramente circular* em torno do eixo de rotação, de tal forma que a qualificação de *circularidade* é dada a espaços-tempo que obedecem a propriedade de transitividade ortogonal. Nesse caso não há movimento do fluido nas superfícies meridionais, isto é, não há convecção. Existem estudos de espaço-tempo estacionários axissimétrico não circulares, mas não consideraremos tal situação no presente trabalho.

Podemos ainda usar os graus de liberdade associados à escolha das coordenadas adaptadas através da transformação de coordenadas (C.16) para reduzir o número de funções métricas independentes. Fazendo uma transformação em r e z como em (C.16), podemos escolher coordenadas (r, z) *ortogonais* em cada superfície bidimensional $\mathcal{M}_{t\varphi}$, tais que

$$g_{rz} = 0 \quad \text{e} \quad g_{rr} = g_{zz}, \quad (\text{C.28})$$

ou seja, coordenadas tais que a métrica induzida $g'_{\mu\nu}$ em $\mathcal{M}_{t\varphi}$ assuma a forma

$$g'_{ij} dx^i dx^j = f(r, z) (dr^2 + dz^2), \quad (i, j = 1, 2). \quad (\text{C.29})$$

Em duas dimensões isso sempre pode ser feito (veja Eisenhart [185] 1926), mas não em três ou mais dimensões. Dessa forma, as três componentes g_{rr} , g_{rz} , g_{zz} podem ser expressas em termos de uma única função independente, digamos $g_{rr} = f(r, z)$. Coordenadas que satisfazem a condição (C.28) são chamadas de *coordenadas quase-isotrópicas*, e as coordenadas cilíndricas que usamos aqui satisfazendo a essa condição são chamadas de *coordenadas de Lewis-Papapetrou*, do trabalho de Lewis (1932) [186] e Papapetrou (1966) [183].

C.5 Forma da métrica

Combinando todos os argumentos acima, obtemos que o elemento de linha (C.18) de um fluido estacionário axialmente simétrico em rotação circular depende de quatro funções

métricas distintas, e tem a forma

$$ds^2 = g_{tt}(r, z)dt^2 + g_{rr}(r, z)(dr^2 + dz^2) + g_{\varphi\varphi}(r, z)d\varphi^2 + 2g_{t\varphi}(r, z)dt d\varphi. \quad (\text{C.30})$$

Esta métrica *tipo Kerr* pode também ser escrita sob a forma equivalente

$$ds^2 = \left(g_{tt} - \frac{(g_{t\varphi})^2}{g_{\varphi\varphi}} \right) dt^2 + g_{\varphi\varphi} \left(d\varphi + \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} dt \right)^2 + g_{rr}(dr^2 + dz^2). \quad (\text{C.31})$$

As condições para que as métricas (C.30) e (C.31) sejam assintoticamente planas são, no infinito espacial,

$$g_{tt} \rightarrow -1; \quad g_{rr}, g_{zz}, g_{\varphi\varphi} \rightarrow 1; \quad g_{t\varphi} \rightarrow 0; \quad (\text{C.32})$$

Podemos escrever componentes do tensor métrico como combinações invariantes dos vetores de Killing $\vec{\xi}$ e $\vec{\zeta}$:

$$g_{tt} = \xi^\alpha \xi_\alpha < 0, \quad g_{\varphi\varphi} = \zeta^\alpha \zeta_\alpha > 0, \quad g_{t\varphi} = \xi^\alpha \zeta_\alpha. \quad (\text{C.33})$$

Com isso, podemos definir as funções ω , ψ , Φ e λ :

$$\omega \equiv -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = -\frac{\xi^\mu \zeta_\mu}{\zeta^\nu \zeta_\nu}, \quad (\text{C.34})$$

$$e^{2\psi} \equiv g_{\varphi\varphi} = \zeta^\mu \zeta_\mu > 0, \quad (\text{C.35})$$

$$e^{2\Phi} \equiv -g_{tt} + \frac{(g_{t\varphi})^2}{g_{\varphi\varphi}} = -\xi^\mu \xi_\mu + \frac{(\xi^\mu \zeta_\mu)^2}{\zeta^\nu \zeta_\nu} > 0, \quad (\text{C.36})$$

$$e^{2\lambda} \equiv g_{rr} > 0, \quad (\text{C.37})$$

Assim, a métrica (C.30) pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\lambda} (dr^2 + dz^2). \quad (\text{C.38})$$

(Comparar com a forma (C.2) da métrica para um sistema Galileano em rotação uniforme.)

A forma acima é a mais comumente usada para a métrica de espaços estacionários axialmente simétricos. Contudo, usarei uma transformação de variáveis adicional. No vácuo, as equações de Einstein permitem uma transformação de r e z que pode ser usada para reduzir e^ψ para $e^\psi = r e^{-\Phi}$. No entanto, conforme o campo gravitacional tem pressão não desprezável, um único sistema de coordenadas do tipo (C.38) requer uma forma mais geral,

$$e^\psi = r B e^{-\Phi}, \quad (\text{C.39})$$

sobre o espaço-tempo todo, e não somente na região onde a pressão é não nula, o que define, portanto uma nova função métrica B , com a condição de que $B \geq 0$.

Portanto, a métrica para um espaço-tempo estacionário axialmente simétrico geral pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + r^2 B^2 e^{-2\Phi} (d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\lambda} (dr^2 + dz^2). \quad (\text{C.40})$$

As condições de contorno no infinito espacial (C.32) aplicadas sobre essas funções métricas são escritas como

$$\Phi, \omega, \lambda \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad B \rightarrow 1. \quad (\text{C.41})$$

Apêndice D

Observador Euleriano ou ZAMO

Para se ter uma interpretação física das componentes do tensor métrico poderíamos usar uma descrição de uma geometria espacial local vinculada a observadores estáticos. No entanto, quando estamos tratando problemas envolvendo rápida rotação em campos gravitacionais arbitrariamente grandes e envolvendo tanto as fontes do campo gravitacional quanto a métrica do vácuo exterior, uma análise baseada em observadores estáticos, observadores em repouso vistos do infinito, não é apropriada porque não há uma propriedade local do espaço-tempo que selecione tais observadores. Isso porque, quando o campo gravitacional é forte, é perfeitamente possível que

$$g_{tt} = -e^{2\Phi} + \omega^2 e^{2\psi} \quad (\text{D.1})$$

seja positivo em parte do espaço-tempo. Em tal região onde $g_{tt} > 0$ o “eixo do tempo”, a linha com $(r, z, \varphi) = \text{const}$, não é uma direção tipo-tempo. Em outras palavras, um observador local com $\Omega = d\varphi/dt = 0$ e $r = z = 0$, que seria estacionário visto do infinito em um espaço-tempo assintoticamente plano, não existiria nessas regiões.

Queremos então uma interpretação física das componentes do tensor métrico que permaneça válida não importando o quão rápida é a rotação ou o quão forte são os campos gravitacionais, contanto que o espaço-tempo seja estacionário e axissimétrico. Para isso é possível usar um sistema de referência local amarrado aos observadores que localmente não estão em rotação, pois eles são os únicos observadores *estacionários* (cuja quadri-velocidade é uma combinação linear dos dois vetores de Killing) para os quais existe uma geometria espacial em uma região finita contendo o eixo de simetria $r = 0$. Esses observadores devem ter linhas de mundo tipo-tempo contanto que o espaço-tempo seja estacionário, como veremos isso a seguir.

D.1 Congruências de curvas tipo-tempo

D.1.1 Vorticidade da congruência

A cinemática de um meio contínuo trata do comportamento relativo de linhas de fluxo adjacentes. Tratando uma congruência de curvas tipo-tempo, que são as linhas de mundo das partículas de fluido, considere uma linha de mundo Γ e seja $\mathcal{P}$ um ponto sobre ela, com coordenada $\tau = \tau_P$. Considere a hipersuperfície Σ_{τ_P} formada pelos eventos de todas as curvas da congruência com coordenada $\tau = \tau_P$. Construimos então em uma pequena vizinhança ao redor de $\mathcal{P}$, um pequeno conjunto de pontos $\delta\Sigma_{\tau_P} \in \Sigma_{\tau_P}$ tais que através de cada um desses pontos passe uma outra curva da congruência. Esse conjunto forma uma região tridimensional, um pequeno seguimento da hipersuperfície Σ_{τ_P} . Denotando cada curva por $x^\mu = \chi^\mu(\tau, a^l)$, as coordenadas a^l ($l = 1, 2, 3$) identificam cada curva em $\delta\Sigma_{\tau_P}$. As quatro variáveis a^l , τ , denotadas por $a^\mu = (\tau, a^i)$, formam um sistema *comóvel* de coordenadas. Elas são análogas às coordenadas Lagrangianas da hidrodinâmica clássica.

Como a^l é constante ao longo de cada curva, u^μ é escrito como

$$u^\mu = \left(\frac{\partial \chi^\mu}{\partial \tau} \right)_{a^i}. \quad (\text{D.2})$$

Podemos então definir uma base $x_{(a)}^\mu$ adaptada às coordenadas comóveis, ou *base comóvel*:

$$x_{(l)}^\mu = \left(\frac{\partial \chi^\mu}{\partial a^l} \right)_\tau, \quad (\text{D.3})$$

com $x_{(t)}^\mu = u^\mu$.

Calculando as derivadas segundas a partir das equações (D.2) e (D.3):

$$\frac{\partial^2 \chi^\mu}{\partial \tau \partial a^l} = u^\nu \partial_\nu x_{(l)}^\mu \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \chi^\mu}{\partial a^l \partial \tau} = x_{(l)}^\nu \partial_\nu u^\mu \quad (\text{D.4})$$

podemos observar que

$$\mathcal{L}_{\vec{u}} x_{(l)}^\mu = u^\nu \partial_\nu x_{(l)}^\mu - x_{(l)}^\nu \partial_\nu u^\mu = 0. \quad (\text{D.5})$$

Consideremos então um vetor r^μ , tangente a $\delta\Sigma_{\tau_P}$, chamado de *vetor desvio*, que “aponta” na direção de uma outra curva qualquer de $\delta\Gamma_{\tau_P}$:

$$r^\mu = r_*^{(l)} x_{(l)}^\mu. \quad (\text{D.6})$$

Os escalares $r_*^{(l)}$ são as coordenadas de r^μ na base comóvel, e identificam uma curva em $\delta\Gamma_{\tau_P}$.

Multiplicando-se a equação (D.5) por $r_*^{(l)}$ vemos que $\mathcal{L}_{\vec{u}} r^\mu = 0$, ou seja,

$$u^\nu \nabla_\nu r^\mu = r^\nu \nabla_\nu u^\mu. \quad (\text{D.7})$$

A definição de Einstein de *simultaneidade* diz que o conjunto dos eventos que localmente podem ser considerados simultâneos a $\mathcal{P}$ para um observador com linha de mundo Γ formam uma hipersuperfície ortogonal a Γ em $\mathcal{P}$. No entanto, como os vetores $x_{(l)}^\mu$ da base adaptada às coordenadas comóveis, tangentes a $\delta\Sigma_{\tau_P}$, não são necessariamente ortogonais às linhas de mundo Γ das partículas, a hipersuperfície $\delta\Sigma_{\tau_P}$ não é necessariamente ortogonal a Γ . Dessa forma, as componentes $r_*^{(l)}$ não podem ser consideradas como “componentes espaciais” físicas para esses observadores.

Vimos no apêndice B que uma triade $e_{(l)}^\mu$ transportada por Fermi é sempre ortogonal a u^μ e ainda identifica-se fisicamente com um sistema de referência espacial sem rotação. Dessa forma, é razoável (segundo o conceito de simultaneidade) considerar as *componentes física* do vetor desvio como suas componentes na base de Fermi:

$$r_{(l)} = r^\mu e_{(l)\mu}. \quad (\text{D.8})$$

Essas são as “componentes espaciais” do vetor r^μ para um observador com linha de mundo Γ . Podemos então calcular a derivada absoluta dessas componentes:

$$\begin{aligned} \frac{Dr_{(l)}}{D\tau} &= \frac{Dr^\mu}{D\tau} e_{(l)\mu} + r^\alpha \frac{De_{(l)\alpha}}{D\tau} \\ &= \frac{Dr^\mu}{D\tau} e_{(l)\mu} + r^\alpha \left(e_{(l)\mu} a^\mu u_\alpha \right). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Aplicamos aqui a equação (B.18) para a derivada da base de Fermi.

Usando ainda a equação (D.7) para $\frac{Dr^\mu}{D\tau}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{Dr_{(l)}}{D\tau} &= (r^\nu \nabla_\nu u^\mu) e_{(l)\mu} + r^\alpha \left(e_{(l)\mu} u^\nu \nabla_\nu u^\mu u_\alpha \right) \\ &= (r^\nu + r^\alpha u_\alpha u^\nu) e_{(l)\mu} \nabla_\nu u^\mu \\ &= r^\alpha (\delta_\alpha^\nu + u_\alpha u^\nu) e_{(l)}^\mu \nabla_\nu u_\mu \\ &= r^\alpha h_\alpha^\nu e_{(l)}^\mu \nabla_\nu u_\mu, \\ &= r^\alpha e_{(m)}^\nu e_{(l)}^\mu \nabla_\nu u_\mu, \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

usando o projetor ortogonal h_ν^μ dado pela equação (B.27). Por fim, podemos reescrever essa equação como

$$\frac{Dr_{(l)}}{D\tau} = B_{(l)(m)} r^{(m)}, \quad (\text{D.11})$$

onde

$$B_{(l)(m)} \equiv e_{(l)}^\mu e_{(m)}^\nu \nabla_\nu u_\mu. \quad (\text{D.12})$$

Considerando as coordenadas de Fermi $r^{(m)}$ como cartesianas, reconhecemos na equação (D.11) as equações de movimento de um meio contínuo sob deformação linear. Dessa forma, podemos falar em uma *matriz de tensão* (simétrica), dada por

$$\sigma_{(l)(m)} = \frac{1}{2} \left(B_{(m)(l)} + B_{(l)(m)} \right), \quad (\text{D.13})$$

e uma *matriz de rotação* (antissimétrica), dada por

$$\omega_{(l)(m)} = \frac{1}{2} (B_{(m)(l)} - B_{(l)(m)}). \quad (\text{D.14})$$

Para um observador viajando ao longo da linha de mundo τ e usando eixos propagados por Fermi-Walker, $\omega_{(l)(m)}$ e $\sigma_{(l)(m)}$ representam a velocidade de rotação, e a taxa de deformação (expansão e cisalhamento) de uma nuvem de partículas vizinhas.

É desejável trabalhar com tensores ao invés de com invariantes, e devemos procurar um tensor simétrico $\sigma_{\mu\nu}$ e um antissimétrico $\omega_{\mu\nu}$ que tenham componentes invariantes dadas por (D.13) e (D.14) respectivamente. Ou seja, procuramos tensores tais que

$$\sigma_{(l)(m)} = \sigma_{\alpha\beta} e_{(l)}^\alpha e_{(m)}^\beta = \frac{1}{2} \nabla_\alpha u_\beta (e_{(l)}^\alpha e_{(m)}^\beta + e_{(m)}^\alpha e_{(l)}^\beta) \quad (\text{D.15})$$

$$\omega_{(l)(m)} = \omega_{\alpha\beta} e_{(l)}^\alpha e_{(m)}^\beta = \frac{1}{2} \nabla_\alpha u_\beta (e_{(l)}^\alpha e_{(m)}^\beta - e_{(m)}^\alpha e_{(l)}^\beta). \quad (\text{D.16})$$

No entanto, essas componentes não servem para definir os tensores completamente pois $\sigma_{(l)(m)}$ e $\omega_{(l)(m)}$ são matrizes 3×3 simétrica e antissimétrica tendo 6 e 3 componentes independentes respectivamente, enquanto que os tensores $\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são quadridimensionais. Com isso, temos a liberdade de impor outras condições adicionais para determiná-los. A maneira mais simples seria estender os tensores $\sigma_{(l)(m)}$ e $\omega_{(l)(m)}$ a quatro dimensões (ou seja, a $\sigma_{(a)(b)}$ e $\omega_{(a)(b)}$, com $a, b = 0, 1, 2, 3$) e definir as componentes:

$$\sigma_{(a)(0)} = 0, \quad \omega_{(a)(0)} = 0; \quad (\text{D.17})$$

condições essas que são equivalentes às condições tensoriais

$$\sigma_{\mu\nu} u^\nu = 0, \quad \omega_{\mu\nu} u^\nu = 0. \quad (\text{D.18})$$

Assim, voltando à equação (D.16), multiplicando-a por $e_\mu^{(l)} e_\nu^{(m)}$, e usando a condição (D.18) obtemos

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \nabla_\alpha u_\beta (e_{(l)}^\alpha e_\mu^{(l)} e_{(m)}^\beta e_\nu^{(m)} - e_{(m)}^\alpha e_\nu^{(m)} e_{(l)}^\beta e_\mu^{(l)}) \\ &= \frac{1}{2} \nabla_\alpha u_\beta (h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - h_\nu^\alpha h_\mu^\beta) \\ &= \frac{1}{2} \nabla_\alpha u_\beta ((\delta_\mu^\alpha + u^\alpha u_\mu)(\delta_\nu^\beta + u^\beta u_\nu) - (\delta_\nu^\alpha + u^\alpha u_\nu)(\delta_\mu^\beta + u^\beta u_\mu)) \\ &= \frac{1}{2} \nabla_\alpha u_\beta (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\alpha u^\beta u_\nu + u^\alpha u_\mu \delta_\nu^\beta + u^\alpha u^\beta u_\mu u_\nu + \\ &\quad - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta - \delta_\nu^\alpha u^\beta u_\mu - u^\alpha u_\nu \delta_\mu^\beta - u^\alpha u^\beta u_\nu u_\mu). \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Como $u^\beta \nabla_\alpha u_\beta = \frac{1}{2} \nabla_\alpha (u^\beta u_\beta) = 0$ obtemos

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\nabla_\mu u_\nu - \nabla_\nu u_\mu + u_\mu a_\nu - a_\mu u_\nu). \quad (\text{D.20})$$

Analogamente para $\sigma_{\mu\nu}$ temos:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu + u_\mu a_\nu + a_\mu u_\nu). \quad (\text{D.21})$$

Somando as equações (D.20) e (D.21) obtemos a seguinte decomposição para $\nabla_\mu u_\nu$:

$$\nabla_\mu u_\nu = \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} - u_\mu a_\nu, \quad (\text{D.22})$$

ou em termos do escalar de expansão $\theta \equiv \nabla^\mu u_\mu$ e do tensor de cisalhamento (de traço nulo) $\sigma'_{\mu\nu} \equiv \sigma_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}$:

$$\nabla_\mu u_\nu = \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} + \sigma'_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} - u_\mu a_\nu, \quad (\text{D.23})$$

O tensor $\sigma_{\mu\nu}$ não tem 10 componentes independentes, mas somente 6 em vista de (D.18). Da mesma forma ω tem somente 3 componentes independentes, que quando resolvidas na tetrada de Fermi são $\omega_{(12)}$, $\omega_{(23)}$ e $\omega_{(31)}$. O tensor de rotação é intimamente ligado ao *vetor velocidade angular*, definido por

$$\omega^\mu = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\rho\sigma} u_\nu \nabla_\rho u_\sigma, \quad (\text{D.24})$$

onde $\eta^{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor permutação

$$\eta^{\mu\nu\rho\sigma} = (-g)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{D.25})$$

com $\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ sendo a densidade tensorial completamente antissimétrica de Levi-Civita. As componentes de ω_μ na tetrada de Fermi são

$$\omega^{(a)} = \frac{1}{2} \zeta \mathcal{E}^{abcd} u_{(b)} \nabla_{(c)} u_{(d)}, \quad \zeta^{-1} = (-g)^{\frac{1}{2}} \det e_{(a)}^\mu. \quad (\text{D.26})$$

Agora, como $u_{(0)} = -1$ e $u_{(l)} = 0$ temos

$$\omega^{(l)} = \frac{1}{2} \zeta \mathcal{E}^{lmn} \nabla_{(m)} u_{(n)} = \zeta \mathcal{E}^{lmn} \omega_{(m)(n)}, \quad \omega^{(0)} = 0, \quad (\text{D.27})$$

de forma que

$$\omega^{(1)} = \zeta \omega_{(2)(3)}, \quad \omega^{(2)} = \zeta \omega_{(3)(1)}, \quad \omega^{(3)} = \zeta \omega_{(1)(2)}. \quad (\text{D.28})$$

O tensor de rotação e o vetor velocidade angular são essencialmente a mesma coisa em diferentes formas. No limite não relativístico, ω^μ nada mais é do que o rotacional da velocidade do fluido, e é portanto chamado também de *vetor vorticidade*. Perceba que por construção (D.24) a vorticidade é ortogonal à quadrivelocidade:

$$\omega^\mu u_\mu = 0. \quad (\text{D.29})$$

D.1.2 Teorema de Frobenius

Congruências de linhas de fluxo podem ter um tensor de rotação $\omega_{\mu\nu} = 0$. Essas congruências são ditas serem *hipersuperfície-ortogonais*, o que significa que a congruência é em cada ponto ortogonal a uma família de hipersuperfícies tipo-espaço.

A congruência será ortogonal a hipersuperfícies se u^μ for em cada ponto proporcional a n^μ , a normal às hipersuperfícies. Supondo que essas hipersuperfícies são descritas por equações da forma $\Psi(x^\mu) = C$, onde C é uma constante específica para cada hipersuperfície, de forma que $n_\mu \propto \nabla_\mu \Psi$, e

$$u_\mu = -\kappa \nabla_\mu \Psi, \quad (\text{D.30})$$

para algum fator de proporcionalidade κ . (Estamos supondo que Ψ aumenta em direção ao futuro, e a quantidade positiva κ pode ser determinada da condição de normalização $u^\mu u_\mu = -1$.) Diferenciando esta equação temos $\nabla_\mu u_\nu = -\kappa \nabla_{\mu\nu} \Psi - \nabla_\nu \Psi \nabla_\mu \kappa$. Calculemos então, com essas definições, o tensor $\omega_{\mu\nu}$ utilizando a forma (D.19):

$$\begin{aligned} 2\omega_{\mu\nu} &= \nabla_\alpha u_\beta (h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - h_\nu^\alpha h_\mu^\beta) \\ &= (\nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha) h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \\ &= -(\kappa \nabla_{\alpha\beta} \Psi + \nabla_\beta \Psi \nabla_\alpha \kappa - \kappa \nabla_{\beta\alpha} \Psi - \nabla_\alpha \Psi \nabla_\beta \kappa) h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \\ &= (\nabla_\beta \Psi \nabla_\alpha \kappa - \nabla_\alpha \Psi \nabla_\beta \kappa) h_\mu^\alpha h_\nu^\beta = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

onde usamos o fato de que $\nabla_{\alpha\beta} \Psi = \nabla_{\beta\alpha} \Psi$ e que, como $\nabla_\alpha \Psi \propto u_\alpha$, $h_\mu^\alpha \nabla_\alpha \Psi = 0$.

Chegamos então ao resultado de que se a congruência é ortogonal a uma família de superfícies tipo-espaço então $\omega_{\mu\nu} = 0$. Esse é um caso particular do chamado *teorema de Frobenius*, que diz que de uma maneira geral, uma congruência de curvas (tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz) é ortogonal a uma família de hipersuperfícies se e somente se $\nabla_{[\mu} u_\nu u_{\rho]} = 0$, onde u_μ é o vetor tangente às curvas, não necessariamente normalizado. O contrário também é verdadeiro, de que $\omega_{\mu\nu} = 0$ implica a existência de um campo escalar Ψ tal que $u_\mu \propto \nabla_\mu \Psi$ (mas mais difícil de se provar!).

Da equação (D.24) vemos que $\omega^\mu = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_{[\nu} u_\rho u_{\sigma]}$, pois $\eta^{\mu\nu\rho\sigma}$ é completamente antissimétrico, e portanto o teorema de Frobenius se aplica quando

$$\begin{aligned} &\text{congruência ortogonal à hipersuperfícies} \\ \nabla_{[\mu} u_\nu u_{\rho]} = 0 &\quad \Leftrightarrow \quad \omega^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

O caso relativístico $\omega^\mu = 0$ é análogo ao fluxo potencial não relativístico $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$. Mas nesse caso u_μ não é *igual* a um gradiente, mas somente *proporcional* a um. Veremos a seguir que a igualdade ocorre quando lidamos com uma congruência geodésica.

D.1.3 Congruências geodésicas

Para um fluido em movimento onde a congruência é formada pelas linhas de fluxo, estamos lidando com curvas tipo-tempo. No caso particular em que estas linhas de fluxo são geodésicas, e considerando o caso em que se aplica o teorema de Frobenius ($\omega_{\mu\nu} = 0$), u_μ não é apenas proporcional a um gradiente, mas é *igual* a um. No caso geodésico $a_\mu = 0$ a equação (D.20) se reduz a

$$\begin{aligned} 2\omega_{\mu\nu} &= \nabla_\mu u_\nu - \nabla_\nu u_\mu = 0 \\ &= \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \kappa - \nabla_\nu \Psi \nabla_\mu \kappa = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando-se por κu^μ :

$$\begin{aligned} (\kappa u^\mu \nabla_\mu \Psi) \nabla_\nu \kappa &= (\kappa u^\mu \nabla_\mu \kappa) \nabla_\nu \Psi \\ -\nabla_\nu \kappa &= (u^\mu \nabla_\mu \kappa) u_\nu. \end{aligned} \quad (D.33)$$

Portanto, κ dever ser constante em cada hipersuperfície, porque varia somente na direção de u_ν ortogonal às hipersuperfícies. Então, κ pode ser expresso como função de Ψ , e definindo um novo escalar $\Psi' = \int \kappa(\Psi) d\Psi$, encontramos que $u_\mu = -\partial_\mu \Psi'$. Note que se u_μ puder ser expresso dessa forma, a equação geodésica é satisfeita automaticamente:

$$\begin{aligned} a_\mu &= u^\nu \nabla_\nu u_\mu \\ &= \partial^\nu \Psi \nabla_{\nu\mu} \Psi = \partial^\nu \Psi \nabla_{\mu\nu} \Psi \\ &= \frac{1}{2} \nabla_\mu (\partial^\nu \Psi \partial_\nu \Psi) = \frac{1}{2} \nabla_\mu (u^\nu u_\nu) = 0 \end{aligned} \quad (D.34)$$

D.2 Decomposição 3+1 e observador Euleriano

O formalismo 3 + 1 consiste em “fatiar” o espaço-tempo $\mathcal{M}$ por uma família de hipersuperfícies tipo-espaço $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ tal que o espaço-tempo como um todo seja a união dessas hipersuperfícies,

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t, \quad (D.35)$$

as quais não se sobrepõem,

$$\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset \quad \text{para} \quad t \neq t'. \quad (D.36)$$

Nem todos os espaços-tempo permitem uma decomposição global dessa forma, mas somente àqueles pertencentes ao conjunto de espaços chamados de *espaços-tempo globalmente hiperbólicos*. Esses espaços-tempo são os que admitem uma hipersuperfície tipo-espaço de Cauchy, que seria uma hipersuperfície tal que cada curva causal (isto é, nula ou

tipo-tempo) sem um ponto final intercepta Σ em um único ponto. O nome globalmente hiperbólico vem do fato de que para esses espaços a equação de onda escalar é bem posta.

Essa classe é grande o suficiente para englobar todos os espaços-tempo estacionários axialmente simétricos. As hipersuperfícies tipo-espaço Σ_t nesse caso são as hipersuperfícies obtidas fazendo-se $t = \text{const.}$ A coordenada t pode então ser considerada como um campo escalar sobre o espaço-tempo, cujo gradiente $\nabla^\mu t$ é um quadrivetor tipo-tempo ortogonal a qualquer quadrivetor v^μ tangente a Σ_t ($v_\mu \nabla^\mu t = 0$). Como as hipersuperfícies Σ_t são tipo-espaço, elas têm em cada ponto um vetor normal tipo-tempo n^μ , orientado para o futuro:

$$n^\mu n_\mu = -1, \quad (\text{D.37})$$

e os dois vetores normais $\nabla^\mu t$ e n^μ devem ser necessariamente colineares

$$n^\mu = -N \nabla^\mu t. \quad (\text{D.38})$$

O fator de proporcionalidade $N = (-\nabla^\mu t \nabla_\mu t)^{-1/2}$ é chamado de *função lapso*. O sinal de menos é escolhido de tal forma que $N > 0$ para o campo escalar t aumentando em direção ao futuro.

Como n^μ é um vetor unitário tipo-tempo, podemos considerar a família de observadores cuja quadri-velocidade é n^μ . Suas linhas de mundo são as linhas de campo de n^μ , e portanto são ortogonais às hipersuperfícies Σ_t em cada ponto. Fisicamente isso significa que, de acordo com a convenção de Einstein, cada hipersuperfície Σ_t é um conjunto de eventos que *localmente* são simultâneos para tais observadores, e formam portanto uma geometria espacial para todos eles. Esses são os chamados *observadores Eulerianos*, em analogia com o caso Newtoniano, para o qual existe uma geometria espacial absoluta para todos os observadores.

Vimos na seção D.1.2 que a condição necessária e suficiente para que uma congruência de linhas de fluxo seja ortogonal a uma família de hipersuperfícies tipo-espaço é que a sua vorticidade seja nula, ou seja, que $\omega_{\mu\nu} = 0$ (D.32). Por isso, esses observadores são também chamados de “observadores com momento angular nulo”, ou *ZAMO* (*zero angular-momentum observers*), e a base associada a esses observadores, de “referencial localmente sem rotação”, ou *LNRF* (*locally non-rotating frame*) [187].

Devido a relação (D.38), o tempo próprio τ do ZAMO é relacionado a t por

$$d\tau = N dt, \quad (\text{D.39})$$

e por isso o nome *função lapso* dado a N . Comparando a equação acima com a equação (C.27), vemos o fator redshift A_0 do ZAMO é o inverso de N :

$$A_0 = \frac{1}{N}. \quad (\text{D.40})$$

Como cada hipersuperfície Σ_t é tipo-espaço, a métrica $\gamma_{\mu\nu}$ induzida por $g_{\mu\nu}$ em Σ_t é definida positiva, ou seja, para qualquer vetor não nulo $\vec{v}$ tangente a Σ_t , $v^2 = \gamma_{\mu\nu}v^\mu v^\nu > 0$. $\gamma_{\mu\nu}$ é o projetor ortogonal (B.9) sobre Σ_t :

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (\text{D.41})$$

D.3 Coordenadas adaptadas e vetor deslocamento

Um sistema de coordenadas (x^μ) é adaptado à decomposição $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ se $x^0 = t$. O tripleto $(x^i) = (x^1, x^2, x^3)$ constitui um sistema de coordenadas em cada hipersuperfície Σ_t , e podem então ser chamadas de *coordenadas espaciais*. Dado tal sistema de coordenadas adaptado, podemos decompor o vetor da base natural $\vec{\partial}_t = \vec{\xi}$, que é o próprio vetor de Killing (C.13) associado à estacionariedade, em uma componente ao longo de $\vec{n}$ e outra tangente a Σ_t :

$$\xi^\mu = N n^\mu + \beta^\mu, \quad \text{com} \quad n^\mu \beta_\mu = 0. \quad (\text{D.42})$$

O vetor tipo-espaço β^μ é chamado de *vetor deslocamento*. De fato ele mede o deslocamento das linhas que tem coordenadas espaciais constantes, com relação à normal às hipersuperfícies Σ_t (ver figura D.1).

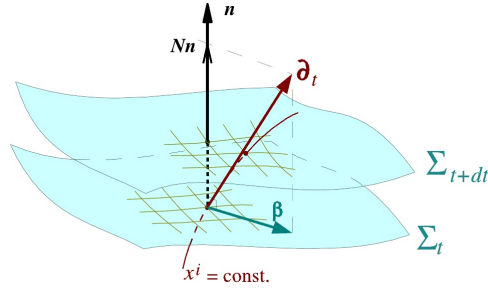


Figura D.1: Coordenadas (x^i) em cada hipersuperfície Σ_t : cada linha $x^i = \text{const}$ atravessa a fatia $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ e define o vetor temporal $\vec{\partial}_t = \vec{\xi}$ e o vetor deslocamento $\vec{\beta}$ do sistema de coordenadas do espaço-tempo $(x^\mu) = (t, x^i)$. (figura retirada deourgoulhon [178])

O fato do coeficiente de n^μ em (D.42) ser a função lapso N vem do fato de que

$$\vec{\xi} \cdot \vec{n} = \vec{\partial}_t \cdot \vec{n} = -N \vec{\partial}_t \cdot \vec{\nabla} t = -N, \quad (\text{D.43})$$

onde usamos a equação (D.38) e que $\vec{\partial}_t \cdot \vec{\nabla} t = 1$. Assim como qualquer vetor tangente a Σ_t , o vetor deslocamento não tem componente ao longo de $\vec{\partial}_t$:

$$\vec{\beta} = \beta^i \vec{\partial}_i. \quad (\text{D.44})$$

A equação (D.42) leva à seguinte expressão para as componentes de $\vec{n}$:

$$n^\mu = \frac{1}{N} (1, -\beta^1, -\beta^2, -\beta^3). \quad (\text{D.45})$$

As componentes covariantes de $\vec{n}$ são dadas por (D.38):

$$n_\mu = (-N, 0, 0, 0). \quad (\text{D.46})$$

Pode-se checar diretamente de (D.45) e (D.46) que $\vec{n}$ é um vetor unitário tipo-tempo: $\vec{n} \cdot \vec{n} = n^\mu n_\mu = (-N)(1/N) = -1$.

Vamos escrever a decomposição “3+1” da métrica $g_{\mu\nu}$ utilizando a métrica $\gamma_{\mu\nu}$ induzida em Σ_t . Como os vetores da base adaptada $\vec{\partial}_i$ são tangentes a Σ_t , temos que

$$\gamma_{ij} = \vec{\partial}_i \cdot \vec{\partial}_j = g_{ij}. \quad (\text{D.47})$$

Além disso,

$$g_{tt} = \vec{\partial}_t \cdot \vec{\partial}_t = \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = -N^2 + \beta^i \beta_i, \quad (\text{D.48})$$

onde usamos (D.42). Por fim,

$$g_{ti} = \vec{\partial}_t \cdot \vec{\partial}_i = \vec{\xi} \cdot \vec{\partial}_i = N\vec{n} \cdot \vec{\partial}_i + \vec{\beta} \cdot \vec{\partial}_i = \beta_i, \quad (\text{D.49})$$

pois $\vec{n} \cdot \vec{\partial}_i = 0$. Dessa forma, as componentes $g_{\mu\nu}$ da métrica do espaço-tempo são expressas em termos das componentes do vetor deslocamento e da função lapso:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt). \quad (\text{D.50})$$

(Lembrando que $\gamma_{ij}\beta^j = \beta_i$). Comparando-se essa expressão com a expressão (C.40) da métrica de um espaço-tempo estacionário axialmente simétrico, obtemos as seguintes identificações:

$$N = e^\Phi, \quad (\text{D.51})$$

$$\beta^i = -\omega \zeta^i, \quad (\text{D.52})$$

$$\gamma_{ij} = \text{diag} (e^{2\lambda}, e^{2\lambda}, r^2 B^2 e^{-2\Phi}). \quad (\text{D.53})$$

D.4 LNRf de um espaço estacionário axialmente simétrico

Nessa seção vamos obter uma tetrada relativa aos observadores Eulerianos (a base LNRf) para um espaço-tempo estacionário e axialmente simétrico. Esses observadores são tais

que suas linhas de mundo são ortogonais à família de hipersuperfícies Σ_t com $t = \text{const.}$ Ou seja, seu vetor quadrivelocidade u^μ é o quadrivetor n^μ da seção anterior.

Comparando a equação (D.42) da decomposição do vetor de Killing ξ^μ com a equação (C.26) da quadrivelocidade para um movimento puramente circular, fazendo $u^\mu = n^\mu$, e usando que $N = 1/A_0$ (D.40) encontramos que

$$\beta^\mu = -\Omega_0 \zeta^\mu, \quad (\text{D.54})$$

onde Ω_0 é a velocidade angular do ZAMO. Portanto, o vetor deslocamento β^μ é proporcional ao vetor de Killing ζ^μ . Assim, reescrevendo a equação (D.42) novamente usando esse resultado obtemos

$$\xi^\mu = N n^\mu - \Omega_0 \zeta^\mu. \quad (\text{D.55})$$

Em particular, em uma espaço-tempo em que $\Omega_0 = 0$, ξ^μ é colinear a n^μ e, portanto, ortogonal às hipersuperfícies Σ_t . De acordo com a definição no apêndice C.2, isto significa que para $\Omega_0 = 0$ o espaço-tempo é estático.

Seja então $e_{(a)}^\mu$ a base ortonormal (ver tetradas ortonormais no apêndice B.3) com componente temporal dada pelo quadrivetor velocidade n^μ :

$$e_{(t)}^\mu = n^\mu. \quad (\text{D.56})$$

A equação (D.55) é então a equação (C.26) da sua quadrivelocidade, assumindo que seja do tipo circular:

$$n^\mu = A_0 (\xi^\mu + \Omega_0 \zeta^\mu), \quad (\text{D.57})$$

com $A_0 = N^{-1}$. Portanto, esse observador é necessariamente estacionário, ou seja, n^μ é dada por uma combinação linear dos vetores de Killing.

Temos agora que determinar A_0 e Ω_0 desse observador. Isso é conseguido impondo que esse quadrivetor seja ortogonal às hipersuperfícies Σ_t e, conseqüentemente, ortogonal a $\beta^\mu \propto \zeta^\mu$, que é tangente a Σ_t (pois $n^\mu \beta_\mu = 0$):

$$e_{(t)}^\mu \zeta_\mu = 0. \quad (\text{D.58})$$

Com isso,

$$\begin{aligned} e_{(0)}^\mu \zeta_\mu &= A_0 (\xi^\mu + \Omega_0 \zeta^\mu) \zeta_\mu \\ &= A_0 (\xi^\mu \zeta_\mu + \Omega_0 \zeta^\mu \zeta_\mu) \\ &= A_0 (-\omega e^{2\psi} + \Omega_0 e^{2\psi}) = 0, \\ \Rightarrow \quad \Omega_0 &= \omega, \end{aligned} \quad (\text{D.59})$$

onde usamos as equações (C.34) e (C.35) para $\xi^\mu \zeta_\mu$ e $\zeta^\mu \zeta_\mu$. Portanto, esse observador tem uma velocidade angular igual a ω . Para se determinar A_0 basta impor a condição de normalização:

$$\begin{aligned}
-1 &= e_{(0)}^\mu e_{(0)\mu} \\
&= A_0 (\xi^\mu + \omega \zeta^\mu) A_0 (\xi_\mu + \omega \zeta_\mu) \\
&= A_0^2 (\xi^\mu \xi_\mu + 2\omega \xi^\mu \zeta_\mu + \omega^2 \zeta^\mu \zeta_\mu) \\
&= A_0^2 \left(\xi^\mu \xi_\mu + 2 \left(-\frac{\xi^\alpha \zeta_\alpha}{\zeta^\beta \zeta_\beta} \right) \xi^\mu \zeta_\mu + \left(\frac{\xi^\alpha \zeta_\alpha}{\zeta^\beta \zeta_\beta} \right)^2 \zeta^\mu \zeta_\mu \right) \\
&= A_0^2 \left(\xi^\mu \xi_\mu - \frac{(\xi^\alpha \zeta_\alpha)^2}{\zeta^\beta \zeta_\beta} \right) \\
&= A_0^2 (-e^{2\Phi}) \\
\Rightarrow \quad A_0^{-1} &= N = e^\Phi,
\end{aligned} \tag{D.60}$$

onde usamos as equações (C.34) e (C.36).

O triploto (r, z, φ) forma um sistema de coordenadas espaciais para cada hipersuperfície Σ_t . Portanto, os vetores $\vec{\partial}_r$, $\vec{\partial}_z$ e $\vec{\partial}_\varphi$ da base natural adaptada à essas coordenadas são tangentes a Σ_t , e consequentemente ortogonais a $\vec{e}_{(t)} = \vec{n}$. Basta então normalizá-los para encontrar os três vetores espacial da tetrada procurada. Denotemos os vetores da base por

$$\vec{e}_{(l)} = A_l \vec{\partial}_l, \quad \text{com} \quad (l = 1, 2, 3), \tag{D.61}$$

onde A_l são funções a se determinar. Impondo a condição de normalização:

$$1 = A_l \vec{\partial}_l \cdot A_l \vec{\partial}_l = A_l^2 (\vec{\partial}_l \cdot \vec{\partial}_l) = A_l^2 g_{ll},$$

ou seja,

$$A_r = (g_{rr})^{-1/2} = e^{-\lambda}, \quad A_z = (g_{zz})^{-1/2} = e^{-\lambda}, \quad A_\varphi = (g_{\varphi\varphi})^{-1/2} = e^{-\psi}. \tag{D.62}$$

Em resumo, um observador Euleriano tem linha de mundo dada por $r = \text{const}$, $z = \text{const}$, $\varphi = \omega t + \text{const}$, e carrega uma base ortonormal (o conjunto de vetores da base LNRf) dada por:

$$\vec{e}_{(t)} = e^{-\Phi} (\vec{\partial}_t + \omega \vec{\partial}_\varphi), \tag{D.63}$$

$$\vec{e}_{(r)} = e^{-\lambda} \vec{\partial}_r, \tag{D.64}$$

$$\vec{e}_{(z)} = e^{-\lambda} \vec{\partial}_z, \tag{D.65}$$

$$\vec{e}_{(\varphi)} = e^{-\psi} \vec{\partial}_\varphi, \tag{D.66}$$

ou, em termos de componentes $e_{(a)}^\mu$ tais que $\vec{e}_{(a)} = e_{(a)}^\mu \vec{\partial}_a$:

$$\begin{aligned} e_{(t)}^\mu &= e^{-\Phi} (1, 0, 0, \omega), \\ e_{(r)}^\mu &= e^{-\lambda} (0, 1, 0, 0), \\ e_{(z)}^\mu &= e^{-\lambda} (0, 0, 1, 0), \\ e_{(\varphi)}^\mu &= e^{-\psi} (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (\text{D.67})$$

A base recíproca pode ser encontrada diretamente da condição (B.23), de onde obtemos:

$$\begin{aligned} e_\mu^{(t)} &= e^\Phi (-1, 0, 0, 0), \\ e_\mu^{(r)} &= e^\lambda (0, 1, 0, 0), \\ e_\mu^{(z)} &= e^\lambda (0, 0, 1, 0), \\ e_\mu^{(\varphi)} &= e^\psi (-\omega, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (\text{D.68})$$

Em qualquer instante de tempo, o referencial local de *qualquer* observador físico (com uma tetrad ortonormal associada), difere do LNRF na posição do observador por uma transformação de Lorentz. É preciso apenas saber a velocidade relativa do observador com relação ao LNRF e as fórmulas da relatividade especial, para se obter qualquer quantidade física em um referencial arbitrário. Veremos na próxima seção como se define a velocidade relativa entre dois observadores.

D.5 Observadores, fator de Lorentz e velocidades relativas

Consideremos um observador $\mathcal{O}_0$ com linha de mundo Γ_0 , e quadrivelocidade n^μ . Lembremos que segundo a convenção de Einstein para a definição de *simultaneidade*, os eventos considerados por $\mathcal{O}_0$ como sendo simultâneos a um dado evento $\mathcal{P}$ sobre sua linha de mundo formam uma hipersuperfície $\mathcal{M}$ localmente ortogonal (com relação a $g_{\mu\nu}$) a Γ_0 em P . Portanto, se $e_{(a)}^\mu$ é uma tetrad ortonormal sobre sua linha de mundo (tal que $e_{(t)}^\mu = n^\mu$), os eventos localmente simultâneos a $\mathcal{P}$ são aqueles ligados a $\mathcal{P}$ por um vetor $dx^{(l)} = dx^\mu e_\mu^{(l)}$, com $(l = 1, 2, 3)$.

Seja então um outro observador $\mathcal{O}$, com quadrivelocidade u^μ , cuja linha de mundo Γ intersepta a linha de mundo de $\mathcal{O}_0$ em $\mathcal{P}$. Podemos escrever o quadrivetor u^μ , na base local $e_{(a)}^\mu$ de $\mathcal{O}_0$:

$$u^{(a)} = u^\mu e_\mu^{(a)}. \quad (\text{D.69})$$

Denotando o tempo próprio de $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}$ por τ_0 e τ respectivamente temos que, depois de um intervalo infinitesimal de tempo próprio $d\tau$, $\mathcal{O}$ estará localizado em $\mathcal{Q}$ (ver figura

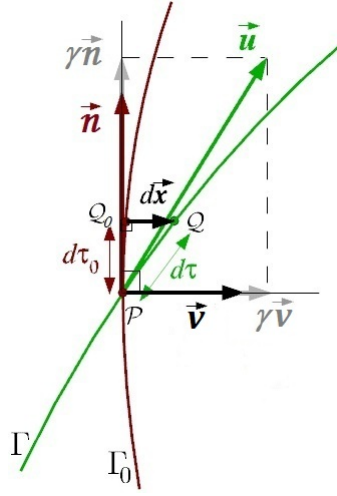


Figura D.2: Velocidade relativa $\vec{v} = d\vec{x}/d\tau_0$ de uma partícula com quadrivelocidade $\vec{u}$ com relação a um observador com quadrivelocidade $\vec{n}$. $\vec{v}$ entra na decomposição ortogonal de $\vec{u}$ com relação a $\vec{n}$ via $\vec{u} = \gamma(\vec{n} + \vec{v})$. Obs.: ao contrário do que a figura sugere $d\tau_0 > d\tau$. (figura retirada de Gourgoulhon [81])

D.2). Para o observador $\mathcal{O}_0$ terá transcorrido um intervalo de tempo $d\tau_0$ até o evento $\mathcal{Q}_0$ simultâneo a $\mathcal{Q}$, em sua base local $e_{(a)}^\mu$, segundo a convenção de simultaneidade de Einstein.

O vetor deslocamento espacial $d\vec{x} \equiv \overrightarrow{\mathcal{Q}_0\mathcal{Q}}$, ortogonal a Γ_0 em $\mathcal{Q}_0$, é dado pela componente espacial $u^{(l)}$ da velocidade de $\mathcal{O}$ na base $e_{(a)}^\mu$, multiplicada pelo tempo transcorrido $d\tau$ (isso porque $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$):

$$dx^{(l)} = u^{(l)} d\tau \quad \text{com} \quad (l = 1, 2, 3). \quad (\text{D.70})$$

A *velocidade de $\mathcal{O}$ relativa a $\mathcal{O}_0$* é definida então simplesmente como sendo o vetor deslocamento $dx^{(l)}$ dividido pelo tempo próprio $d\tau_0$ transcorrido para $\mathcal{O}_0$:

$$v^{(l)} \equiv \frac{dx^{(l)}}{d\tau_0} = u^{(l)} \frac{d\tau}{d\tau_0}. \quad (\text{D.71})$$

Podemos definir ainda o chamado *fator de Lorentz* γ entre os observadores $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}$ pela dilatação temporal

$$\gamma \equiv \frac{d\tau_0}{d\tau}. \quad (\text{D.72})$$

γ pode ser expresso também em termos das quadrivelocidades n^μ e u^μ de $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}$. Como $n^{(a)}$ e $u^{(a)}$ são vetores unitários, a seguinte igualdade se aplica (ver figura D.2):

$$d\tau u^{(a)} = d\tau_0 n^{(a)} + dx^{(a)}. \quad (\text{D.73})$$

Além disso, $dx^{(t)} = 0$ e $n^{(t)} = n^\mu e_\mu^{(t)} = n^\mu n_\mu = -1$. Portanto, a componente $(a) = (t)$ da equação (D.73) acima resulta no fator de Lorentz como

$$\gamma = -u^{(t)} = -u^\mu n_\mu, \quad (\text{D.74})$$

onde usamos ainda que $u^{(t)} = u^\mu e_\mu^{(t)} = u^\mu n_\mu$. Dessa forma, do ponto de vista geométrico, o fator de Lorentz nada mais é do que (menos) o produto escalar dos vetores unitários tangentes às linhas de mundo dos dois observadores.

Usando (D.72) podemos escrever a velocidade relativa (D.71) como

$$v^{(l)} = \frac{u^{(l)}}{\gamma}, \quad (\text{D.75})$$

ou seja,

$$v^{(l)} = -\frac{u^{(l)}}{u^{(t)}} = -\frac{u^\mu e_\mu^{(l)}}{u^\nu e_\nu^{(t)}}. \quad (\text{D.76})$$

Diferentemente da quadrivelocidade u^μ , que é intrínseca a $\mathcal{O}$, $v^{(l)}$ depende do observador $\mathcal{O}_0$. Geometricamente, $v^{(l)}$ pode ser vista como sendo a parte de u^μ que é ortogonal a n^μ (ver figura D.2) pois, combinando (D.72) com (D.73) obtemos

$$u^{(a)} = \gamma \left(n^{(a)} + v^{(a)} \right), \quad \text{com} \quad n^{(a)} v_{(a)} = v_{(t)} = 0. \quad (\text{D.77})$$

Note que (D.74) e (D.75) são meras consequências da relação acima. Usando a equação (D.75) podemos calcular o quadrado $v^2 \equiv v^{(l)} v_{(l)}$ do módulo da velocidade relativa:

$$v^2 = \frac{1}{\gamma^2} u^{(l)} u_{(l)} = \frac{1}{\gamma^2} \left(u^{(a)} u_{(a)} - u^{(t)} u_{(t)} \right) = \frac{1}{\gamma^2} \left(-1 + \gamma^2 \right) = 1 - \frac{1}{\gamma^2}, \quad (\text{D.78})$$

onde usamos ainda que $u_{(t)} = \eta_{(t)(a)} u^{(a)} = -u^{(t)} = \gamma$. Assim temos uma expressão para o fator de Lorentz que é idêntica à expressão da relatividade especial:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (\text{D.79})$$

O caso em que estamos interessados é na velocidade relativa de um dado observador com movimento puramente circular, com quadrivelocidade u^μ dada por (C.26)

$$u^\mu = A \left(\xi^\mu + \Omega \zeta^\mu \right). \quad (\text{C.26})$$

com relação ao observador ZAMO com momento angular nulo, cuja quadrivelocidade n^μ também é dada por (C.26), mas especificamente com $\Omega_0 = \omega$ e $A_0 = N^{-1} = e^{-\Phi}$

$$n^\mu = e^{-\Phi} \left(\xi^\mu + \omega \zeta^\mu \right), \quad (\text{D.80})$$

em um espaço-tempo estacionário axialmente simétrico, com métrica dada por (C.40). Nesse caso, o fator de Lorentz (D.74) se torna

$$\gamma = -u^\mu n_\mu = -A (\xi^\mu n_\mu + \Omega \zeta^\mu n_\mu) = -A \xi^\mu n_\mu, \quad (\text{D.81})$$

pois n^μ é ortogonal a ζ^μ . Multiplicando (D.80) por n_μ vemos que $\xi^\mu n_\mu = -e^\Phi$, e a equação (D.81) acima se torna

$$\gamma = A e^\Phi. \quad (\text{D.82})$$

Substituindo-se então as expressões de quadrivelocidade (C.26) e (D.80) na velocidade relativa (D.77), e usando o fator de Lorentz (D.82), obtemos

$$v^\mu = e^{-\Phi} (\Omega - \omega) \zeta^\mu. \quad (\text{D.83})$$

Considerando que $\zeta^\mu = \delta_\varphi^\mu$, a única componente não nula é v^φ . Portanto, a única componente invariante $v^{(l)} = v^\mu e_\mu^{(l)} = v^\varphi e_\varphi^{(l)}$ não nula é dada por

$$v \equiv v^{(\varphi)} = e^{\psi-\Phi} (\Omega - \omega), \quad (\text{D.84})$$

dadas as componentes (D.68) da tetrada.

Apêndice E

Politropos e processos politrôpicos

E.1 Processos politrôpicos

O objetivo do estudo da estrutura do disco é determinar as variações internas das principais propriedades físicas, como a pressão, a densidade e a temperatura em termos dos parâmetros de entrada como a massa total e a composição química. Para isso é necessário conhecer os principais processos físicos que ocorrem no disco, quantificar esses processos e obter um sistema de equações, cuja solução deve em princípio levar às variações desejadas. Existem, entretanto, modelos muito simplificados que permitem obter essas soluções de forma analítica. Esses modelos são chamados de politropos.

A equação de estado é quem determina como as variáveis termodinâmicas variam umas com relação às outras diante de determinados processos termodinâmicos. Revisarei aqui uma determinada classe de mudanças termodinâmicas, chamadas de mudanças politrôpicas. Uma mudança politrôpica ou processo politrôpico é definido como sendo uma mudança reversível (quase-estática) em um sistema termodinâmico, que ocorre de tal maneira que a derivada dQ/dT , o chamado calor específico C (onde nos referiremos sempre ao calor específico por unidade de massa), varia de uma maneira pré-determinada durante essa mudança reversível:

$$C \equiv \frac{dQ}{dT} = \text{determinada função.} \quad (\text{E.1})$$

Um caso especial muito importante ocorre quando

$$C = \frac{dQ}{dT} = \text{const.} \quad (\text{E.2})$$

Apesar de que algumas derivações e resultados envolvendo processos politrôpicos sejam válidos também com a definição mais geral (E.1), geralmente é assumido que $C = \text{const.}$ As definições (E.1) ou (E.2) produzem uma segunda equação, junto à equação de estado

$F(\rho, P, T) = 0$. Desse conjunto de duas equações podemos eliminar duas das três variáveis de estado ρ , P , T , e o sistema termodinâmico politrópico tem portanto uma única variável de estado independente.

Se o calor específico C da mudança politrópica é zero, o processo politrópico se torna adiabático ($dQ = 0$). Ainda, se o calor específico do politropo é $C = \pm\infty$, a mudança politrópica se torna isotérmica ($dT = 0$). Portanto, processos politróticos são processos intermediários entre processos adiabáticos e isotérmicos.

Quando o calor específico do processo politrópico C é igual ao calor específico a pressão constante $C_P \equiv \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P$, o processo politrópico é um processo isobárico ($P = \text{const}$), e quando C é igual ao calor específico a volume constante $C_V \equiv \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$, o processo é isométrico.

A definição de processos politróticos envolve uma certa arbitrariedade. Estamos adotando a definição mais restritiva, definindo processos politróticos como mudanças reversíveis (quase-estáticas). É claro que, de maneira geral, processos politróticos poderiam também ser processos irreversíveis.

Para processos politróticos reversíveis temos que $dQ = TdS$, e portanto

$$C = T \frac{dS}{dT} = \text{const.} \quad (\text{E.3})$$

Dessa forma, para $C \neq 0$ temos que

$$S = S(T) = C \ln(T) + \text{const.} \quad (\text{E.4})$$

Um fluido para o qual $C = 0$ é isentrópico, pois $dS = 0$ dada a equação (E.3).

Em fluidos adiabáticos (não necessariamente isentróticos) $\frac{DS}{D\tau} = 0$, e para uma partícula de fluido sofrendo processos politróticos

$$\frac{DT}{D\tau} = \left(\frac{T}{C}\right) \frac{DS}{D\tau} = 0, \quad (\text{E.5})$$

ou seja, a temperatura também não muda ao longo das linhas de fluxo, mantendo a relação (E.4) com a entropia.

No entanto, em se tratando de fluidos, falaremos em termos de fluidos *politróticos*, ou *politropos*, que são definidos como fluidos para os quais sempre vale a relação (E.3) entre a entropia e a temperatura, mesmo quando a variação dS se der em função de uma variação entre linhas de fluxo diferentes. Por exemplo, seja r uma coordenada espacial ortogonal a diferentes linhas de fluxo, então de maneira geral $\frac{dS}{dr} \neq 0$, mesmo não havendo uma transferência real de calor envolvida no fluido (de onde vemos que mesmo um fluido adiabáticos pode ter $C \neq 0$). Nesse caso essa relação diz somente que em um deslocamento virtual de uma partícula de fluido entre linhas de fluxo implicaria em determinada troca de calor.

De forma totalmente genérica, politropos poderiam ser definidos como sistemas onde a pressão e a densidade são conectados por uma lei da forma (E.18). Contudo, tal definição esquece completamente a base termodinâmica por trás da noção de politropo.

Para entender melhor as definições de expoentes politróticos e índices politróticos, definiremos essas quantidades primeiramente para sistemas termodinâmicos que obedecem à equação de estado de um gás perfeito.

E.2 Processos politróticos em um gás perfeito

Para um gás perfeito, a pressão é dada pela equação

$$P = \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu} \right) \rho T = nkT. \quad (\text{E.6})$$

$\mu = mN_A$ é o peso molecular (a massa de repouso de um mol de partículas livres), k é a constante de Boltzmann, $\mathcal{R} = kN_A$, a constante dos gases perfeitos, e N_A o número de Avogadro.

Devemos notar que a lei dos gases perfeitos (E.6) é válida para sistemas compostos de partículas não interagentes e não degeneradas, em ambos os limites, não relativístico (quando a energia relativística total das partículas é praticamente igual a sua energia de repouso) e relativístico (quando a energia relativística total das partículas não é quase igual a sua energia de repouso). Para partículas relativísticas a equação (E.6) tem o mesmo significado que no caso não relativístico, com ρ igual à densidade de massa de repouso.

A energia interna U de um gás perfeito é uma função somente da temperatura absoluta $U = U(T)$. E, de acordo com a 1ª lei da termodinâmica (3.37):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \frac{dU}{dT}. \quad (\text{E.7})$$

O calor específico a pressão constante C_P pode ser determinado diferenciando a equação de estado (E.6)

$$PdV = (\mathcal{R}/\mu)dT - VdP \quad (\text{E.8})$$

e introduzindo na equação (3.37) da 1ª lei da termodinâmica

$$dQ = dU + (\mathcal{R}/\mu)dT - VdP. \quad (\text{E.9})$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} C_P &= \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P = \frac{dU}{dT} + \frac{\mathcal{R}}{\mu} \\ C_P &= C_V + (\mathcal{R}/\mu). \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Usando que $dQ = CdT$ e $dU = C_V dT$

$$dQ = dU + PdV = dU - (P/\rho^2)d\rho \quad (\text{E.11})$$

$$\Rightarrow CdT = C_V dT - \left(\frac{\mathcal{R}T}{\mu\rho} \right) d\rho. \quad (\text{E.12})$$

Como $\mathcal{R}/\mu = C_P - C_V$:

$$(C_V - C)dT/T = (C_P - C_V)d\rho/\rho. \quad (\text{E.13})$$

Por convenção, definimos o índice politrópico n de um gás perfeito como

$$n = (C_V - C) / (C_P - C_V). \quad (\text{E.14})$$

Se $n = \text{const}$, ou seja, se fizermos $C, C_V, C_P = \text{const}$, podemos integrar a equação (E.13), resultando na equação para um politropo com calor específico constante C :

$$T\rho^{-1/n} = \text{const}. \quad (\text{E.15})$$

Com a ajuda da equação de estado (E.6) encontramos outras duas formas equivalentes

$$PT^{-1-n} = \text{const}, \quad (\text{E.16})$$

$$P\rho^{-1-1/n} = \text{const}. \quad (\text{E.17})$$

Das duas equações acima é óbvio que quando $n = -1$, $P = \text{const}$ (processo politrópico isobárico). Da equação (E.15) observamos que $T = \text{const}$ se $n = \pm\infty$ (processo politrópico isotérmico). Se escrevermos a equação (E.15) como $T^{-n}\rho = \text{const}$, vemos que se $n = 0$ temos $\rho = 1/V = \text{const}$: Ocorre então um processo politrópico isopícnico ($\rho = \text{const}$) ou isométrico ($V = \text{const}$).

Da equação (E.17) obtemos a equação de estado para um gás perfeito:

$$P = K\rho^{1+1/n}, \quad (K, n = \text{const}). \quad (\text{E.18})$$

Se $n = 0$, poderia parecer que $P = \infty$, mas esta aparente singularidade pode ser removida de uma vez por todas, se escrevermos (E.18) sob a forma $P = L^{1/n}\rho^{1+1/n}$, ou $P^n = L\rho^{n+1}$, ($K = L^{1/n} = \text{const}$). Se $n = 0$, vemos que $\rho = 1/L = \text{const}$, não importando qual o valor de P . Portanto, sempre que o fator $K\rho^{1/n}$ aparecer, podemos substituí-lo por P/ρ , de acordo com a equação (E.18), e a aparente singularidade para $n = 0$ é removida.

Em analogia com o expoente adiabático $\gamma = C_P/C_V$ para um gás perfeito, podemos definir o *expoente* politrópico de um gás perfeito por

$$\gamma' = (C_P - C)/(C_V - C), \quad (\text{E.19})$$

e considerando a definição (E.14), o índice politrópico de um gás perfeito pode ser escrito como

$$n = 1/(\gamma' - 1); \quad \gamma' = 1 + 1/n. \quad (\text{E.20})$$

Com essa definição, as equações (E.15-E.17) podem ser escritas como

$$P\rho^{-\gamma'} = \text{const}; \quad PT^{\gamma'/(1-\gamma')} = \text{const}; \quad T\rho^{1-\gamma'} = \text{const}. \quad (\text{E.21})$$

Somente para um gás perfeito isentrópico ($C = dQ/dT = 0$) é que $\gamma' = \gamma = C_P/C_V$ e as equações acima se tornam as equações usuais de processos adiabáticos em gases perfeitos.

Usando a derivada logarítmica $dP/P = d\rho/\rho + dT/T$ da equação de estado $T\rho/P = \text{const}$, podemos escrever a equação (E.13) sob as formas equivalentes $(C_V - C)dP/P = (C_P - C)d\rho/\rho$ e $(C_P - C_V)dP/P = (C_P - C)dT/T$. Essas equações, junto com a equação (E.13), podem ser usadas para definir o expoente politrópico da equação (E.19) nas três diferentes formas seguintes:

$$\gamma' = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}; \quad \frac{\gamma'}{\gamma' - 1} = \frac{d \ln P}{d \ln T}; \quad \gamma' - 1 = \frac{d \ln T}{d \ln \rho}. \quad (\text{E.22})$$

Usando ainda a definição (E.20) e a equação (E.22) acima, o índice politrópico para um gás perfeito pode também ser definido por uma das três equações

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}; \quad 1 + n = \frac{d \ln P}{d \ln T}; \quad \frac{1}{n} = \frac{d \ln T}{d \ln \rho}. \quad (\text{E.23})$$

E.3 Processos politrópicos para uma equação de estado geral

Quando a equação de estado tem a forma geral (3.8), o expoente politrópico não é o mesmo entre as definições dadas pelas equações (E.22). Contudo, podemos ainda definir, analogamente às equações (E.22) os três expoentes politrópicos

$$\Gamma = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}; \quad \frac{\Gamma'}{\Gamma' - 1} = \frac{d \ln P}{d \ln T}; \quad \Gamma'' - 1 = \frac{d \ln T}{d \ln \rho}. \quad (\text{E.24})$$

Dividindo a primeira equação pela terceira, obtemos uma importante identidade:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma'' - 1} = \frac{\Gamma'}{\Gamma' - 1}, \quad (\text{E.25})$$

o que mostra que apenas dois dos três expoentes politrópicos são variáveis independentes.

Consideremos então uma equação de estado geral

$$P = P(\rho, T), \quad (\text{E.26})$$

e as derivadas parciais

$$\chi_\rho = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T; \quad \chi_T = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho. \quad (\text{E.27})$$

Diferenciando logaritmicamente a equação de estado (E.26), obtemos

$$d \ln P = \chi_T d \ln T + \chi_\rho d \ln \rho \quad \text{ou} \quad \Gamma = \chi_T(\Gamma'' - 1) + \chi_\rho. \quad (\text{E.28})$$

Portanto, quando as derivadas parciais χ_ρ e χ_T são calculadas da equação de estado (E.26) e se um dos expoentes politróticos (E.24) é conhecido, os outros dois expoentes podem ser calculados de acordo com as equações (E.25) e (E.28).

Podemos escrever os expoentes politróticos (E.24) como função dos calores específicos C_P e C_V , e das derivadas parciais χ_ρ e χ_T [71]:

$$\Gamma = \frac{C_P - C}{C_V - C} \chi_\rho; \quad \frac{\Gamma'}{\Gamma' - 1} = \frac{C_P - C}{C_P - C_V} \chi_T; \quad \Gamma'' - 1 = \frac{C_P - C_V}{C_V - C} \frac{\chi_\rho}{\chi_T}. \quad (\text{E.29})$$

Se $C = dQ/dT = 0$, obtemos de (E.29) os expoentes *adiabáticos* para uma equação de estado geral $P = P(\rho, T)$, calculada à entropia constante:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ad} &= \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S = \frac{C_P}{C_V} \chi_\rho; & \frac{\Gamma'_{ad}}{\Gamma'_{ad} - 1} &= \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_S = \frac{C_P}{C_P - C_V} \chi_T; \\ \Gamma''_{ad} - 1 &= \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S = \frac{C_P - C_V}{C_V} \frac{\chi_\rho}{\chi_T}. \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

Ou em termos da razão $\gamma = C_P/C_V$ entre os calores específicos:

$$\gamma = \Gamma_{ad}/\chi_\rho = 1/[1 - \chi_T(\Gamma'_{ad} - 1)/\Gamma'_{ad}] = 1 + \chi_T(\Gamma''_{ad} - 1)/\chi_\rho. \quad (\text{E.31})$$

Os três expoentes adiabáticos são iguais à razão dos calores específicos ($\Gamma_{ad} = \Gamma'_{ad} = \Gamma''_{ad} = \gamma$) se e somente se $\chi_\rho = \chi_T = 1$. Quando $\chi_\rho = \chi_T = 1$, a equação de estado deve ser da forma de uma equação de gás perfeito (E.6): $P \propto \rho T$. Os três expoentes adiabáticos podem ser iguais entre si mesmo se $\chi_\rho, \chi_T \neq 1$, mas nesse caso $\Gamma_{ad} \neq \gamma$. Tal situação ocorre por exemplo para radiação do corpo negro, para um gás completamente degenerado nos limites não relativístico e extremamente relativístico, e para pares elétron-pósitron [71].

Analogamente às equações (E.22) e (E.23), podemos definir os índices politróticos para uma equação de estado geral

$$1 + \frac{1}{n} = \Gamma; \quad 1 + n' = \frac{\Gamma'}{\Gamma' - 1}; \quad \frac{1}{n''} = \Gamma'' - 1, \quad (\text{E.32})$$

que podem ser reescritos como

$$n = \frac{1}{\Gamma - 1}; \quad n' = \frac{1}{\Gamma' - 1}; \quad n'' = \frac{1}{\Gamma'' - 1}. \quad (\text{E.33})$$

Geralmente os índices politróticos n , n' e n'' são diferentes entre si para a equação de estado (E.26).

No caso particular onde todos os expoentes são constantes, podemos integrar as equações (E.24) para obter um sistema equivalente à equação (E.21)

$$\begin{aligned} P\rho^{-\Gamma} &= \text{const}; & PT^{\Gamma'/(1-\Gamma')} &= \text{const}; & T\rho^{1-\Gamma''} &= \text{const}, \\ (\Gamma, \Gamma', \Gamma'') &= \text{const}. \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

Da primeira dessas equações, junto com a definição (E.32), obtemos a equação de estado geral para um politropo em uma forma similar às equações (E.17) e (E.18):

$$P\rho^{-1-1/n} = \text{const} \quad \text{ou} \quad P = K\rho^{1+1/n}, \quad (K, n = \text{const}). \quad (\text{E.35})$$

K será referida como constante politrótica. Se $n = -1$ e $K, \rho \neq 0$, temos que $P = K = \text{const}$. Se $n = 0$, temos $\rho = \text{const}$, como visto subsequentemente à equação (E.18). E finalmente, se $n = \pm\infty$, temos que $P = K\rho$.

A equação de estado (E.35) é válida para processos politróticos obedecendo a equação de estado geral $P = P(\rho, T)$, mas somente no caso particular $\Gamma, n = \text{const}$. A definição mais geral (E.24), juntamente com (E.32), permite um expoente politrótico Γ e um índice politrótico n variáveis, mas isso introduziria muitos graus de liberdade; geralmente, o índice politrótico n é considerado constante quando usado em conexão com uma equação de estado da forma (E.35).

O expoente adiabático Γ_{ad} (E.30) caracteriza o comportamento local da matéria politrótica quando são realizadas oscilações adiabáticas e é relevante em determinadas situações físicas. Por exemplo, a velocidade do som adiabática a em um fluido politrótico é determinada a entropia S constante, de modo a garantir que o processo físico subjacente é adiabático e reversível (quase-estático). Portanto, é definida como

$$a^2 \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = \Gamma_{ad} \frac{P}{\rho}, \quad (\text{E.36})$$

ao invés de, $a^2 = (1 + 1/n)K\rho^{1/n} = \Gamma P/\rho$, por meio da equação (E.35) $P = K\rho^{1+1/n}$. Isso levaria a inconsistências como ao resultado absurdo de que a velocidade do som em um politropo Newtoniano homogêneo com $n = 0$ é infinito. Em geral $\Gamma_{ad} \neq \Gamma = 1 + 1/n$, e somente para o caso de politropos isentróticos é que $\Gamma_{ad} = \Gamma$.

Apêndice F

Ambiente de desenvolvimento

Faço aqui uma breve descrição das ferramentas computacionais que utilizei no desenvolvimento do sistema BLATOS. Desenvolvido por um grupo de pesquisa da universidade de Houston ¹, o compilador de código aberto **OpenUH** ² [188], gera códigos de aplicações x86, AMD64 (arquitetura AMD x86-64) e Intel64 (arquitetura Intel x86-64). Ele deriva do compilador Open64 ³ (estendendo muitas de suas funcionalidades), e oferece muitas otimizações avançadas incluindo otimização global, vetorização, análise interprocessual e transformações de loop, e é voltado para o desenvolvimento em linguagem C/C++ e Fortran em plataformas Linux 32 e 64 bits. Escolhi a linguagem de programação C++ em uma plataforma Linux 64 bits, com suporte a aplicações *multithread*, isto é, para programação paralela em sistemas com memória compartilhada.

O compilador OpenUH oferece suporte à *API* (*application programming interface*) **OpenMP** ⁴ [189] para o desenvolvimento de aplicações *multithread*. Esta é constituída por um conjunto de diretivas para o compilador, rotinas de biblioteca e variáveis de ambiente. A paralelização é feita basicamente de duas formas: i) através da paralelização automática do compilador, que são basicamente paralelizações de loops em que a dependência de dados permita (o compilador OpenUH oferece tais otimizações); e ii) através de diretivas inseridas diretamente no código que indicam ao compilador quais os trechos que devem ser executados em paralelo. OpenUH estende ainda a implementação OpenMP do compilador Open64, adicionando suporte a *tasks* (tarefas) e paralelismo aninhado, características introduzidas no OpenMP 3.0 [190].

Como ambiente de desenvolvimento (geralmente conhecido como *IDE - Integrated Development Environment*) utilizei o **Eclipse CDT** (C/C++ *Development Tooling*) ⁵, que

¹<http://web.cs.uh.edu/~hpctools/>

²<http://www2.cs.uh.edu/~openuh/>

³<http://www.open64.net>

⁴<http://www.openmp.org>

⁵<http://www.eclipse.org/cdt/>

é um conjunto de ferramentas que permite a criação, edição, navegação, teste, depuração de programas em C/C++. O CDT não inclui compilador e depurador, que converte o código C/C++ em um programa executável, mas fornece uma base em que tais ferramentas possam ser integradas de forma consistente e produtiva.

Para as rotinas básicas de álgebra linear conhecidas como *BLAS* (*Basic Linear Algebra Subprograms*) utilizei a biblioteca **ACML** (*AMD Core Math Library*) ⁶ ao invés de escrever minhas próprias rotinas, pois essa foi especificamente desenvolvida e otimizada para processadores AMD64 (incluindo Opteron e Athlon64). O pacote ACML fornece ainda uma biblioteca suplementar de funções matemáticas (seno, cosseno, log, etc.) e funções matemáticas vetoriais rápidas (otimizadas). Suas rotinas tem ainda uma versão paralelizada em OpenMP, oferecendo otimização em sistemas *multithread*.

Para o desenvolvimento da interface gráfica em Linux utilizei a biblioteca **GTK+** (*The GIMP Toolkit*) ⁷, integrada com o desenvolvedor de interfaces **Glade** ⁸. Por fim, para a geração de gráficos utilizei a biblioteca **GDK** ⁹.

⁶<http://developer.amd.com/tools-and-sdks/cpu-development/amd-core-math-library-acml>

⁷<http://www.gtk.org.br>

⁸<http://glade.gnome.org>

⁹<http://developer.gnome.org/gdk/>