

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física Gleb Wataghin

Departamento de Física da Matéria Condensada

Tese de Mestrado

Quebra de Simetria e Transição de Fase Quântica em Alguns Modelos de Acoplamento Spin-Bóson

Emiliano Augusto Chagas

Comissão Julgadora:

Prof. Dra. (orientadora) Kyoko Furuya - IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo Silva Sarandy - IF/UFF

Prof. Dr. Marcos César de Oliveira - IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. (suplente) Giancarlo Queiroz Pellegrino - CEFET/MG

Prof. Dr. (suplente) Marcos Aloizio Martinez de Aguiar - IFGW/UNICAMP

Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado defendida pelo aluno Emiliano Augusto Chagas e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 07 de fevereiro de 2008.



Prof. Dra. Kyoko Furuya

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

C346q	<p>Chagas, Emiliano Augusto Quebra de simetria e transição de fase quântica em alguns modelos de acoplamento spin-boson / Emiliano Augusto Chagas. – Campinas, SP : [s.n.], 2008.</p> <p style="text-align: center;">Orientador: Kyoko Furuya. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”.</p> <p style="text-align: center;">1. Simetria quebrada (Física). 2. Emaranhamento quântico. 3. Transição de fase quântica. I. Furuya, Kyoko. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física “Gleb Wataghin”. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">(vsv/ifgw)</p>
-------	---

- **Título em inglês:** Symmetry breaking and quantum phase transition in spin-boson models.
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Symmetry breaking (Physics)
 2. Quantum entanglement
 3. Quantum phase transition
- **Área de concentração:** Física
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca examinadora:**

Prof^a. Kyoko Furuya
Prof. Marcos Cesar de Oliveira
Prof. Marcelo Silva Sarandy
- **Data da defesa:** 14.01.2008
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **EMILIANO AUGUSTO CHAGAS – RA 0016273** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 14 / 01 / 2008.

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Kyoko Furuya (Orientadora do Candidato) –
DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo Silva Sarandy – IF/UFF

Prof. Dr. Marcos César de Oliveira – DFMC/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar a professora Kyoko Furuya pela ótima orientação nestes últimos anos. Quero agradecer: o apoio da minha família, em especial do meu pai Cesar Martins Chagas, a minha namorada Adriana pelo apoio emocional durante o mestrado e aos meus amigos e colegas de pós-graduação pelas conversas mais aleatórias possíveis.

Agradeço também o apoio financeiro do CNPq.

Resumo

Neste trabalho estudamos o efeito sobre a Transição de Fase Quântica (TFQ) do Modelo de Dicke Integrável devido a adição de um pequeno termo (fixo) de interação de dois bósons na Aproximação de Onda Girante (RWA). Mostramos que, embora a descontinuidade na derivada da energia do Estado Fundamental (EF) como função do parâmetro principal de interação (λ) continue presente para qualquer valor de spin (J), o emaranhamento entre spin e boson sofre uma mudança bastante significativa devido à perturbação, especialmente no limite de grandes valores de J ($N = 2J \gg 1$). Este comportamento novo é entendido através do estudo conjunto de duas quantidades como função de λ (interação) e J (tamanho do spin), a saber: (i) o ponto fixo e vizinhanças da dinâmica no espaço de fase de spin do análogo clássico do modelo e (ii) a Função de Wigner de spin EF do sistema nas vizinhanças do máximo.

Abstract

In this work we study the effect on the Quantum Phase Transition (QPT) of the integrable version of the Dicke model when we add a small (fixed) two boson interaction in the Rotating Wave Approximation (RWA). We show that, although the discontinuity of the Ground State (GS) energy derivative as a function of the principal parameter of interaction (λ) remains present for any value of spin (J), the entanglement between the spin and boson undergoes a significant change due the perturbation, specially in the limit of large values of J ($N = 2J \gg 1$). This new behavior has been understood through the combined study of two quantities as a function of λ (interaction) and J (size of the spin): (i) the fixed point and its vicinity in the dynamics of the spin phase space o the model's classical analogue, and (ii) the behavior of the maxima of the spin Wigner function and its vicinity for the GS of the system.

Sumário

Introdução	2
1 Conceitos Fundamentais	5
1.1 Conceitos Quânticos	5
1.1.1 Operador Densidade	5
1.1.2 Emaranhamento e Entropia	10
1.1.3 Transição de Fase Quântica	10
1.1.4 Função de Wigner	13
1.2 Conceitos Clássicos	14
1.2.1 Análogo Clássico de Sistemas Quânticos	14
1.2.2 Seção de Poincaré	15
2 O Maser de Dicke	17
2.1 Quantização do Campo Eletromagnético	17
2.2 Hamiltoniano de Interação Átomo-Campo	21
2.3 O Modelo de Dicke	24
2.3.1 O MDI	29
2.3.2 O MDNI	37
3 O MD com um termo de interação de dois fótons	47
3.1 Análise Quântica	47
3.2 Análise Clássica	51
3.3 FWA e Comparações	53
4 Comparações e Conclusões	57
4.1 Análise Quântica	57
4.2 Análise Clássica	60
4.3 Função de Wigner Atômica	60
4.4 Conclusões	61
Bibliografia	62

Introdução

Sistemas do tipo spin-boson, como por exemplo átomo-campo, já vem sendo largamente estudados há décadas em várias áreas da física. Em particular na ótica quântica temos, por exemplo, o modelo de Jaynes-Cummings [15] ou modelo de Dicke [16]. O primeiro deles é um modelo fundamental de interação radiação-matéria que descreve a interação de um único modo de campo de radiação quantizado com um único átomo em que apenas dois de seus níveis são relevantes. O segundo modelo, que é a motivação deste trabalho, descreve o comportamento coletivo de um gás de N átomos de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético de um modo, dando origem ao efeito coletivo chamado de *Superradiância* (SR), previsto teoricamente por Dicke em 1954 e observado experimentalmente em 1973 [17].

Apesar de relativamente antigo, o modelo de Dicke voltou a ser estudado mais recentemente [26, 30] sob novos pontos de vista devido ao surgimento de novos conceitos em mecânica quântica, como o Caos Quântico (QC) [2], ou conceitos que, embora antigos, recentemente estão sendo melhor explorados como o Emaranhamento [3, 4] e suas medidas. Como este modelo descreve a interação entre átomos e campo, o Emaranhamento entre estes dois subsistemas é um novo elemento para o estudo deste sistema, uma vez que tal fenômeno exclusivamente quântico mostrou ser um recurso importante para possibilitar tanto a comunicação quântica como computação quântica [5].

Ainda mais recentemente, foi introduzido o conceito de Transição de Fase Quântica [6] que se aplica a sistemas à temperatura absoluta nula e no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $\frac{N}{V} = \text{constante}$). Embora as condições experimentais do fenômeno de superradiância não satisfaçam completamente os critérios desta transição ($T = 0$), o modelo de Dicke é de grande importância na análise e compreensão de efeitos quânticos coletivos e apresenta duas fases: A fase conhecida como Normal e a fase Superradiante.

A conexão entre a Transição de Fase Quântica e o Emaranhamento começou a ser estudada [8] por volta de 2000, e é ainda a motivação de muitos trabalhos nos dias de hoje [22, 23].

Em contrapartida, o Análogo Clássico de sistemas quânticos escaláveis já vem sendo estudado há bastante tempo [19], e sempre pode ser utilizado como mais um elemento para análise do sistema, em especial para a comparação com os resultados quânticos, por exemplo, no limite de grande número de partículas ($N \gg 1$) no caso do Modelo de Dicke que corresponde ao limite semiclássico do modelo [24, 25] e também no estudo da bifurcação de pontos fixos e sua relação com a Transição de Fase Quântica [31].

Neste trabalho utilizaremos um método de estudos similar a alguns trabalhos encontrados na literatura [26, 33], e para tanto, dividiremos o trabalho da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentamos os principais conceitos quânticos e clássicos. No Capítulo 2 deduzimos e fazemos o estudo do modelo de Dicke para dois regimes separados utilizando os conceitos apresentados no Capítulo 1. Através do conceito de operador densidade podemos descrever o emaranhamento entre subsistemas para verificar que tipo de transição de fase quântica ocorre em cada regime do modelo de Dicke. Podemos comparar os resultados quânticos e clássicos através de uma função de quasi-probabilidade.

No Capítulo 3, introduzimos uma interação perturbativa de dois fótons no Modelo de Dicke na aproximação integrável (RWA) para estudar os efeitos sobre a transição de fase quântica. Finalmente no Capítulo

4, comparamos os principais resultados provenientes dos três modelos estudados neste trabalho e traçamos algumas conclusões.

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais

O estudo sobre sistemas onde ocorre acoplamento átomo-campo requer alguns conceitos importantes da mecânica quântica como por exemplo o *Operador Densidade* e o *Emaranhamento* entre dois subsistemas. Este último por sua vez tem se mostrado muito relacionado com a *Transição de Fase Quântica*. Uma outra forma de analisar estes sistemas quânticos, no limite em que o número N de átomos é grande ($N \rightarrow \infty$), é através do uso de seus *Análogos Clássicos*, e podemos através destes, estudar a natureza da dinâmica do sistema através de *Seções de Poincaré*. Finalmente, podemos confrontar, no espaço de fase, os estados fundamentais dos dois mundos, quântico e clássico, através de uma função de quasi-probabilidade como por exemplo a *Função de Wigner* para o sistema quântico. Neste capítulo serão expostos estes principais conceitos mencionados para a melhor compreensão desta dissertação.

1.1 Conceitos Quânticos

1.1.1 Operador Densidade

Seja um sistema quântico fechado. Se, por exemplo, for possível encontrar o vetor de estado deste sistema medindo um conjunto completo de observáveis que comutam em um certo tempo inicial, então toda a informação possível sobre este sistema é completamente conhecida, e o vetor de estado do sistema está indubitavelmente determinado e dizemos que tal estado é puro.

O formalismo do *Operador Densidade* [1] permite tratar os sistemas quânticos mesmo no caso em que há falta de conhecimento sobre o sistema, já que na prática, há muitas situações em que os estados dos sistemas não são perfeitamente determinados. É preciso aceitar este fato e tirar o máximo proveito do que se conhece para fazer previsões sobre os sistemas.

Este tratamento que tem como base a falta de certezas clama por probabilidades, ou seja, o estado do sistema em questão pode estar num estado misto, isto é, no estado $|\psi_1\rangle$ com probabilidade p_1 , ou no estado $|\psi_2\rangle$ com probabilidade p_2 , assim por diante. Como se trata de probabilidades devemos ter:

$$0 \leq p_1, p_2, \dots, p_k, \dots \leq 1 \quad \text{e também} \quad \sum_k p_k = 1 \quad (1.1)$$

Desta forma, estamos diante de uma *mistura estatística* de estados $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$ com respectivas probabilidades p_1, p_2, \dots , onde estas probabilidades são de natureza clássica.

Ao se pensar na palavra estatística é até razoável tentar encontrar um vetor de estado médio que descreva esta mistura estatística. Na verdade, a descrição mais simples que pode ser obtida é através de um operador definido como uma média ponderada de operadores de projeção, chamado de *Operador Densidade*.

Para fins didáticos vamos considerar inicialmente uma representação discreta e separar em dois casos: o primeiro em que temos apenas uma das probabilidades não nula, ou seja, existe um k tal que $p_k = 1$, e todas as demais probabilidades são zero. Em outras palavras, o estado do sistema está completamente definido, e já que este sistema não é uma mistura de estados, ele está em um *estado puro*. O segundo caso é aquele em que existe uma *mistura estatística de estados*, ou seja, existem duas ou mais probabilidades não nulas.

Em seguida será feita uma análise e uma pequena explicação do significado físico dos termos da diagonal e fora da diagonal do *operador densidade* numa dada representação. Finalmente é desenvolvido o conceito de traço parcial, quando se faz apenas uma descrição de uma parte de um sistema físico, quando não estamos interessados no que ocorre com o restante do sistema.

Estado Puro

Vamos considerar um sistema cujo vetor de estado em um instante t , cuja descrição na representação da base ortonormal discreta $\{|u_n\rangle\}$, seja dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |u_n\rangle \quad (1.2)$$

O *Operador Densidade* $\rho(t)$ é definido como:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \quad (1.3)$$

tal que: os elementos de matriz na representação $\{|u_n\rangle\}$ são dados por

$$\langle u_m | \rho(t) | u_n \rangle = \rho_{mn}(t) = c_m(t) c_n^*(t) \quad (1.4)$$

A partir desta definição é possível expressar propriedades importantes do estado do sistema em função deste operador.

- Normalização do vetor estado:

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = \sum_n \rho_{nn}(t) = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Tr } \rho(t) = 1} \quad (1.5)$$

- Valor médio de uma observável A em um tempo t :

$$\langle A \rangle (t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_m \langle u_m | \rho(t) A | u_m \rangle \Rightarrow \boxed{\langle A \rangle (t) = Tr [\rho(t) A]} \quad (1.6)$$

- Evolução temporal do operador $\rho(t)$:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|) = \left(\frac{d}{dt} |\psi\rangle\right) \langle \psi| + |\psi\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi|\right) \Rightarrow \boxed{i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)]} \quad (1.7)$$

- Hermiticidade de $\rho(t)$

$$\rho^\dagger(t) = \rho(t) \quad (1.8)$$

No caso puro ainda existem algumas propriedades particulares:

$$\rho^2(t) = \rho(t) \quad (1.9)$$

$$Tr \rho^2(t) = 1 \quad (1.10)$$

Mistura Estatística de Estados

Este é o caso mais geral, em que o sistema pode estar no estado $|\psi_k\rangle$ com probabilidade p_k , respeitando as condições de probabilidade já mencionadas anteriormente. Se olharmos individualmente para um certo estado destes, notamos que ele é puro. O nome *mistura estatística de estados* surge como sendo de fato uma mistura de estados puros, cada um deles com uma certa probabilidade.

Como cada estado individual é puro, podemos definir um *operador densidade* correspondente ao estado $|\psi_k\rangle$:

$$\rho_k = |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \quad (1.11)$$

O *operador densidade* geral que descreve a possibilidade do sistema estar em algum estado $|\psi_k\rangle$ com probabilidade p_k é:

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k \quad (1.12)$$

Como esta *mistura estatística* de estados é uma coleção de estados *puros* já bem descritos anteriormente através do *operador densidade*, é razoável tentar encontrar relações análogas para este caso. De fato elas serão as mesmas descritas por (1.5), (1.6) e (1.7), e de imediato este operador satisfaz (1.8).

Já as relações (1.9) e (1.10) não são verdadeiras, o que não é difícil de entender. A própria forma do *operador densidade* (1.12) já evidencia este fato. Para *mistura estatística de estados* temos:

$$\rho^2(t) \neq \rho(t) \quad (1.13)$$

$$Tr \rho^2(t) \leq 1 \quad (1.14)$$

Populações e Coerências

Para obter um pouco mais de informação e intuição sobre o *operador densidade*, é muito importante olhar para os elementos ρ_{nm} na base $\{|u_n\rangle\}$. Trabalharemos no caso mais geral, onde ocorre *mistura estatística de estados*.

Primeiramente vamos olhar para os termos diagonais, ou seja ρ_{nn} . Utilizando (1.12):

$$\rho_{nn} = \sum_k p_k [\rho_k]_{nn} \quad (1.15)$$

Utilizando (1.11) e introduzindo os componentes $c_n^{(k)} = \langle u_n | \psi_k \rangle$ de $|\psi_k\rangle$ na base $\{|u_n\rangle\}$.

$$\rho_{nn} = \sum_k p_k |c_n^{(k)}|^2 \quad (1.16)$$

A equação acima já nos diz que estes elementos diagonais serão positivos. Se o estado do sistema for $|\psi_k\rangle$, então $|c_n^{(k)}|^2$ é a probabilidade de encontrar, em uma medida, este sistema no estado $|u_n\rangle$. Mas para encontrar ρ_{nn} , é preciso fazer uma soma sobre k possíveis estados com suas respectivas probabilidades. De uma forma sucinta, ρ_{nn} representa a probabilidade média de encontrar o sistema no estado $|u_n\rangle$, por causa disto, ρ_{nn} é chamado de *população* do estado $|u_n\rangle$.

Os termos não diagonais são encontrados de uma forma análoga:

$$\rho_{nm} = \sum_k p_k c_n^{(k)} c_m^{(k)*} \quad (1.17)$$

Veja que $c_n^{(k)} c_m^{(k)*}$ é um termo cruzado que expressa os efeitos de interferência entre os estados $|u_n\rangle$ e $|u_m\rangle$ que podem aparecer quando o estado $|\psi_k\rangle$ é uma superposição coerente linear destes estados. Para encontrar ρ_{nm} basta realizar uma soma nos k possíveis estados, logo se trata de uma média destes termos cruzados. Diferentemente do cálculo das *populações*, em que $\rho_{nn} = 0 \Leftrightarrow |c_n^{(k)}|^2 = 0$, neste caso ρ_{nm} pode ser zero mesmo que os termos $c_n^{(k)} c_m^{(k)*}$ não sejam nulos. Caso isto aconteça, esta média cancelou os efeitos de interferência entre $|u_n\rangle$ e $|u_m\rangle$. Por outro lado, se o elemento ρ_{nm} for diferente de zero, então dizemos que existe alguma coerência entre estes estados, por causa disso, ρ_{nm} é chamado de *coerência*.

Traço Parcial

Sejam dois sistemas diferentes (1) e (2), e também o sistema global (1) + (2), cujo espaço de estados deste último seja dado pelo produto tensorial $\mathcal{E} = \mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(2)$, onde os índices numéricos remetem aos respectivos sistemas (1) e (2).

Seja também $\{|u_n(1)\rangle\}$ uma base de $\mathcal{E}(1)$ e $\{|v_p(2)\rangle\}$ uma base de $\mathcal{E}(2)$, então os kets $|u_n(1)\rangle \otimes |v_p(2)\rangle$ formam uma base para \mathcal{E} .

O objetivo agora é obter, a partir do *operador densidade* ρ do sistema global (e que portanto atua em \mathcal{E}) um operador $\rho(1)$ associado que atua apenas em $\mathcal{E}(1)$, e com este operador seríamos capazes de

fazer previsões físicas concernentes apenas ao sistema (1). Chamaremos esta operação de *traço parcial* com respeito ao sistema (2).

Definindo os elementos de matriz do operador $\rho(1)$ como:

$$\rho_{nn'}(1) = \sum_p (\langle u_n(1) | \otimes \langle v_p(2) |) \rho (|u_{n'}(1)\rangle \otimes |v_p(2)\rangle) = \langle u_n(1) | \otimes \left(\sum_p \langle v_p(2) | \rho |v_p(2)\rangle \right) \otimes |u_{n'}(1)\rangle \quad (1.18)$$

Vemos que, essencialmente, o que foi feito para se obter o $\rho(1)$ foi um traço nos elementos de matriz associados aos vetores do espaço (2), por este motivo a nomenclatura *traço parcial* (com respeito ao sistema (2)) é adequada. Da mesma forma é possível obter o operador $\rho(2)$ utilizando o mesmo processo que foi feito para se obter $\rho(1)$, tomando os devidos cuidados com os espaços (1) e (2). Desta forma, o elemento de matriz do operador $\rho(2)$ fica:

$$\rho_{pp'}(2) = \sum_n (\langle u_n(1) | \otimes \langle v_p(2) |) \rho (|u_n(1)\rangle \otimes |v_{p'}(2)\rangle) = \langle v_p(2) | \otimes \left(\sum_n \langle u_n(1) | \rho |u_n(1)\rangle \right) \otimes |v_{p'}(2)\rangle \quad (1.19)$$

Assim, temos:

$$\rho(1) = \sum_p \langle v_p(2) | \rho |v_p(2)\rangle \quad \text{e} \quad \rho(2) = \sum_n \langle u_n(1) | \rho |u_n(1)\rangle \quad (1.20)$$

Uma notação mais enxuta para os dois operadores parciais é:

$$\rho(1) = Tr_2 \rho \quad \text{e analogamente} \quad \rho(2) = Tr_1 \rho \quad (1.21)$$

Tomando o traço total do operador ρ :

$$Tr \rho = \sum_{n,p} (\langle u_n(1) | \otimes \langle v_p(2) |) \rho (|u_n(1)\rangle \otimes |v_p(2)\rangle) \quad (1.22)$$

Notamos que podemos tomar primeiramente a soma em p e então somar em n , ou então fazer na ordem inversa, tomar a soma em n e depois efetuar a soma em p . Em outras palavras, não é muito difícil ver que:

$$Tr \rho = Tr_1 (Tr_2 \rho) = Tr_2 (Tr_1 \rho) \quad (1.23)$$

Existe um fato interessante a respeito de $\rho(1)$ e $\rho(2)$. Se tomarmos um *Operador Densidade* ρ que descreve um estado puro, i.e. $Tr \rho^2 = 1$, em geral é possível verificar que esta propriedade não ocorre para $\rho(1)$ e $\rho(2)$. Isto é, ao se tomar o traço parcial de um subsistema com relação ao outro subsistema, é possível que se obtenha um operador densidade que descreva um estado misto. Existe na verdade uma conexão muito íntima entre os dois subsistemas, esta correlação quântica existente entre os sistemas (1) e (2) é passível de ser estudada e recebe o nome de *Emaranhamento*.

1.1.2 Emaranhamento e Entropia

Emaranhamento são correlações quânticas que ocorrem entre subsistemas. Neste trabalho utilizaremos sistemas que são formados por dois subsistemas, em outras palavras, trabalharemos com sistemas bipartites. Para este caso em especial, podemos fazer a seguinte definição formal sobre *emaranhamento* para estados puros [4]:

Seja um sistema quântico bipartite tal que o espaço de Hilbert associado a ele é $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, onde \mathcal{H}_i é o espaço de Hilbert associado a cada subsistema. Se $|\Psi\rangle$ é o estado que descreve este sistema, então ele não está emaranhado \Leftrightarrow podemos escreve-lo como $|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$, $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$.

Esta é uma definição formal e não é direta, já que define o que não é *emaranhamento*. O ideal é encontrar uma forma de se medir esta quantidade, fazer uma quantificação, poder transformar este conceito em números. De fato existem algumas medidas de *emaranhamento* e para sistemas bipartite puros a medida padrão é a *Entropia de von Neumann* S_{vN} . Sendo ρ o operador densidade que descreve um estado puro e os operadores $\rho(1)$ e $\rho(2)$ já definidos anteriormente, temos a entropia parcial:

$$S(1)_{vN} = -Tr \{ \rho(1) \log \rho(1) \} = -Tr \{ \rho(2) \log \rho(2) \} = S(2)_{vN} \quad (1.24)$$

A *Entropia de von Neumann* vale zero quando o estado não está emaranhado, e quanto maior for o valor de S_{vN} , mais o estado está emaranhado.

Existe ainda outra medida de emaranhamento que pode ser computada de uma forma mais simples, já que não é muito confortável trabalhar com uma quantidade que dependa do logaritmo de um operador. A *Entropia Linear* S_l é uma medida que essencialmente reproduz os mesmos resultados da *Entropia de von Neumann*, com a vantagem de depender apenas do quadrado do operador densidade:

$$S_l = \frac{D}{D-1} (1 - Tr \rho^2(1)) = \frac{D}{D-1} (1 - Tr \rho^2(2)) \quad (1.25)$$

onde D é a dimensão do espaço de Hilbert do subsistema.

Novamente, se escolhermos um estado não emaranhado, esta medida dá zero, caso contrário esta medida tem um valor maior do que zero, sendo que ela atinge 1 para estados maximamente emaranhados.

1.1.3 Transição de Fase Quântica

Nos últimos anos, uma nova classe de transição de fase tem chamado a atenção: a *Transição de Fase Quântica* (TFQ). Diferentemente da transição de fase clássica, que ocorre à temperatura finita e é dirigida por flutuações térmicas, a TFQ ocorre à **temperatura nula** e é dirigida somente por flutuações quânticas. Como estamos lidando com $T = 0$, todo o estudo da TFQ é realizado em termos do estado fundamental do sistema quântico.

Seja o Hamiltoniano $H(g)$, que varia em função de uma constante de acoplamento adimensional g . Este hamiltoniano pode descrever um sistema com N átomos ou N spins nos sítios de uma rede, por exemplo. Em geral, as propriedades físicas do estado fundamental do sistema variam suavemente conforme variamos o parâmetro adimensional g , mas dependendo da forma do Hamiltoniano, pode ocorrer algum caso em que exista cruzamento de níveis entre os estados fundamental e primeiro excitado, em outras palavras, pode existir um ponto $g = g_c$ em que o primeiro estado excitado se torna o estado fundamental do sistema, gerando um ponto não analítico da energia do estado fundamental em função de g . Um comportamento similar ocorre quando tratamos o caso limite do sistema, quando os N átomos, ou sítios, tendem a infinito. Os níveis fundamental e primeiro excitado, quando variamos o parâmetro g , podem se repelir na vizinhança de algum ponto g_c , e à medida que aumentamos o valor de N , esta distância entre os dois níveis fica cada vez mais próxima, levando no limite, ao surgimento de um ponto não analítico em $g = g_c$.

Qualquer ponto não analítico na energia do estado fundamental no caso limite $N \rightarrow \infty$ do sistema, é considerado uma manifestação da *Transição de Fase Quântica*. Esta não analiticidade pode ser tanto devido ao cruzamento de níveis, ou no caso limite da repulsão dos níveis [6].

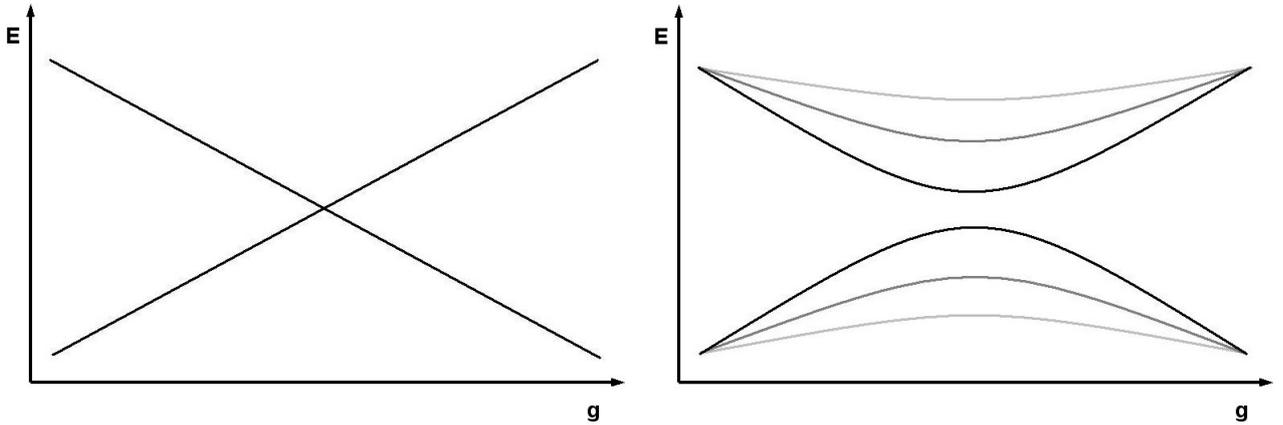


Figura 1.1: Gráfico da energia dos níveis pelo parâmetro g onde ocorre cruzamento de níveis (esquerda) e repulsão de níveis (direita). Para este último, quanto maior o N , mais escuros são os níveis.

Portanto, assim como na transição de fase clássica, existem dois tipos de TFQ, as de primeira e de segunda ordem. As TFQ de primeira ordem são aquelas que possuem um cruzamento de níveis e este cruzamento persiste no limite $N \rightarrow \infty$, já as TFQ de segunda ordem são aquelas em que a escala de energia característica das flutuações acima do estado fundamental vão a zero quando g se aproxima de g_c . Seja Δ uma energia de escala representando alguma densidade espectral de flutuações à temperatura nula, como por exemplo, a energia da menor excitação acima do estado fundamental. Na maioria dos casos, quando g se aproxima de g_c , Δ se anula da seguinte forma:

$$\Delta \sim J|g - g_c|^{z\nu} \quad (1.26)$$

onde J é a escala de energia, z é o expoente crítico do comprimento de correlação e ν o expoente crítico

dinâmico.

As TFQ de segunda ordem possuem também um comprimento de correlação característico ξ divergente, da seguinte forma:

$$\xi^{-1} \sim \Lambda |g - g_c|^\nu \quad (1.27)$$

Aqui, Λ é o inverso de um comprimento de escala.

É necessário enfatizar que o tratamento da TFQ está fundamentado no estudo das propriedades do estado fundamental do sistema à temperatura nula.

O grande questionamento que pode (e deve) ser feito é com respeito à inacessibilidade experimental da temperatura nula. É preciso se perguntar então: quando a mecânica quântica é importante, e o que ocorre com o ponto crítico à temperatura não nula. Inicialmente é preciso distinguir flutuações de caráter predominantemente térmico e quântico. Para fazer isto basta comparar a energia térmica $k_B T$ com a energia de escala quântica $\hbar \omega_c$. Flutuações quânticas serão importantes enquanto sua energia de escala típica for maior do que a energia térmica $k_B T$ [7].

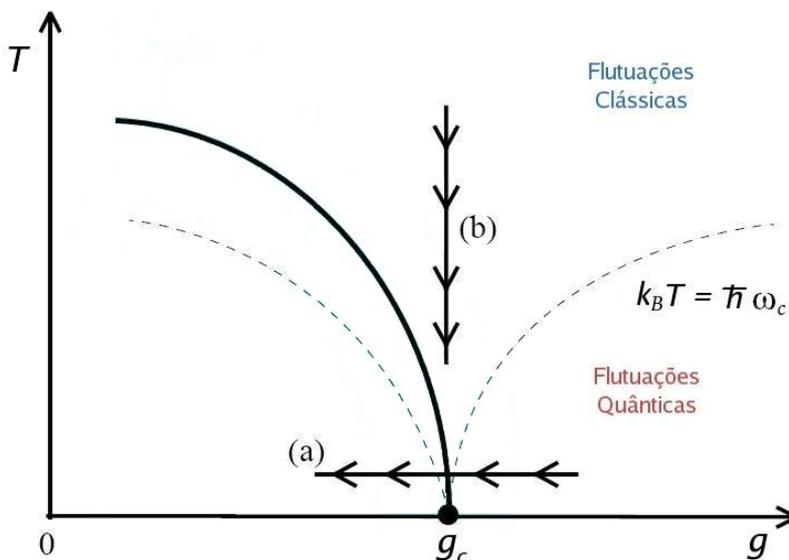


Figura 1.2: Diagrama de fase na vizinhança do ponto crítico g_c . A linha sólida marca a fronteira entre as fases, a região próxima da linha sólida é a chamada região crítica. A linha tracejada marca o limiar entre as flutuações predominantemente clássicas e quânticas.

Mas em um experimento realizado a uma temperatura não nula, conforme nos aproximamos do ponto onde ocorre a transição, i.e. quando experimentamos os expoentes críticos, as flutuações clássicas se tornam predominantes. Agora, se a temperatura for bem baixa, como é o caso do caminho (a) da Figura 1.2, é quase impossível experimentalmente diferenciar flutuações quânticas e clássicas arbitrariamente próximas à transição, e no limite em que a temperatura vai para zero as flutuações clássicas desaparecem e a transição de fase é comandada exclusivamente pela mecânica quântica, recebendo o nome de TFQ. É possível fazer um

experimento no caminho (b) da Figura 1.2 e chegar arbitrariamente perto de $T = 0$ mesmo sem experimentar flutuações quânticas.

1.1.4 Função de Wigner

Em mecânica quântica, devido ao princípio de incerteza, não é possível encontrar uma verdadeira distribuição de probabilidades no espaço de fase para uma partícula. Entretanto, existem distribuições quânticas que possuem uma certa semelhança com as funções de distribuição clássicas no espaço de fase, chamadas de funções de *quasi-probabilidade* tais como a de Wigner, Husimi ou a de Glauber-Sudarshan. O uso destas funções proporcionam uma grande ajuda, já que permitem estudar a correspondência entre a mecânica quântica e a mecânica clássica.

A nomenclatura *quasi-probabilidade* é fruto de dois fatores: o primeiro já foi mencionado, devido ao princípio de incerteza, um ponto (q, p) no espaço de fase das funções de *quasi-probabilidade* não representa uma densidade de probabilidade de fato nestes pontos. O segundo fator é que uma destas funções pode assumir valores negativos, um assunto proibido para a teoria de probabilidades. Mesmo assim, estas funções ainda possuem algumas características de densidade de probabilidade.

Se existe interesse em encontrar um análogo clássico para um determinado sistema quântico, é de fundamental importância confrontar os resultados obtidos a partir deste análogo clássico com aqueles obtidos através destas funções de *quasi-probabilidade*. Particularmente, no caso de sistemas que apresentam *TFQ*, é importante comparar as regiões de máximo das funções de *quasi-probabilidade* com os pontos fixos do análogo clássico que apresentam bifurcações de pontos fixos no ponto de transição.

Wigner [9] propôs a seguinte função para representar o estado de um sistema no espaço de fase através do *operador densidade*:

$$W(q, p; t) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle q - y | \rho(t) | q + y \rangle e^{2ipy/\hbar} \quad (1.28)$$

No caso de um *estado puro* o operador densidade ρ pode ser escrito de uma forma mais simples em termos de funções de onda, e podemos reescrever a *Função de Wigner* como:

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi^*(q + y) \psi(q - y) e^{2ipy/\hbar} \quad (1.29)$$

Abaixo estão listadas algumas propriedades da *Função de Wigner*, também encontradas em [9, 10]:

1. $W(q, p)$ é real.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp = \langle q | \rho | q \rangle$.
3. $\int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dq = \langle p | \rho | p \rangle$.
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp dq = \text{Tr } \rho = 1$

As propriedades (2) e (3) de $W(q, p)$ são associadas a densidades de probabilidades quando fazemos a integração em uma das coordenadas. Isto fica mais evidente no caso em que temos um estado puro:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp = |\psi(q)|^2$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dq = |\phi(p)|^2$$

onde ϕ é a transformada de Fourier da função ψ .

Entretanto, mesmo que a função W seja real, não significa necessariamente que ela seja positiva. Na verdade, o que diferencia a *Função de Wigner* das outras funções de *quasi-probabilidade* é justamente a possibilidade dela ser negativa em algumas regiões. O que a princípio aparenta ser um grande desconforto se mostra um elemento a mais para o estudo do sistema, já que este fato está relacionado à interferência quântica.

De fato, uma possível medida de não classicalidade do estado pode estar associada ao quão negativo é a Função de Wigner, que pode ser interpretada então como uma assinatura do quão quântico é o estado em que o sistema se encontra [11].

1.2 Conceitos Clássicos

1.2.1 Análogo Clássico de Sistemas Quânticos

Seja um sistema quântico descrito por um Hamiltoniano H . Uma das formas de se obter o análogo clássico deste sistema é através dos estados coerentes [12], que são, dentre os estados quânticos, os que mais se comportam classicamente. Para o caso de nosso interesse, o estado coerente do sistema spin-boson pode ser escrito da seguinte forma:

$$|z, w\rangle = |z\rangle \otimes |w\rangle \quad (1.30)$$

ou seja, o produto de um estado coerente bosônico $|z\rangle$ com o estado coerente de spin $|w\rangle$, que por sua vez podem ser escritos, em função do estado de vácuo $|0\rangle$ e spin $|J, -J\rangle$, como:

$$|z\rangle = e^{\frac{z\bar{z}}{2}} e^{za^\dagger} |0\rangle \quad (1.31)$$

$$|w\rangle = \frac{1}{(1 + w\bar{w})^J} e^{wJ_+} |J, -J\rangle \quad (1.32)$$

e finalmente, para se obter o Hamiltoniano que descreve o análogo clássico deste sistema quântico, é necessário atingir os limites $J \rightarrow \infty$, $\hbar \rightarrow 0$ mas mantendo $\hbar J$ constante. Assim, uma possível maneira de obter [19] o Hamiltoniano clássico H_{Cl} é calculando o valor esperado de H nos estados coerentes:

$$\boxed{H_{Cl} = \langle z, w | H | z, w \rangle} \quad (1.33)$$

como o Hamiltoniano H é descrito em uma base de spin e bóson, é natural que apareçam operadores de criação e destruição juntamente com operadores de momento angular. São listados abaixo os valores esperados de alguns operadores de spin e bóson.

$$\langle z | a | z \rangle = z \quad \text{e} \quad \langle z | a^2 | z \rangle = z^2 \quad (1.34)$$

$$\langle z | a^\dagger | z \rangle = \bar{z} \quad \text{e} \quad \langle z | a^{\dagger 2} | z \rangle = \bar{z}^2 \quad (1.35)$$

$$\langle w | J_+ | w \rangle = \frac{2Jw}{1 + w\bar{w}} \quad (1.36)$$

$$\langle w | J_- | w \rangle = \frac{2J\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \quad (1.37)$$

$$\langle w | J_z | w \rangle = -J \left(\frac{1 - w\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \right) \quad (1.38)$$

O Hamiltoniano Clássico ficará em função das variáveis z e w , e a partir destas é possível descrever o sistema em um espaço de fases utilizando as seguintes relações [25].

$$z = \frac{q_2 + ip_2}{\sqrt{2}} \quad (1.39)$$

$$w = \frac{q_1 + ip_1}{\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \quad (1.40)$$

Finalmente, é possível ver o Hamiltoniano Clássico como função das variáveis canônicas (q_i, p_i) , $i = 1, 2$: $H_{Cl} = H_{Cl}(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Conforme foi mencionado inicialmente, este análogo clássico só é atingido quando temos o limite $J \rightarrow \infty$ e $\hbar \rightarrow 0$

1.2.2 Seção de Poincaré

Vamos considerar um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade, portanto, seu espaço de fases possui dimensão $2N$. Para um sistema com dois graus de liberdade, o espaço de fases terá dimensão quatro, onde já temos dificuldade de visualização. A grande contribuição de Poincaré para contornar este problema foi inventar um dispositivo chamado *Seção de Poincaré*, que reduz o estudo de um fluxo contínuo num espaço de fases de dimensão $2N$ para o estudo de um mapa em um espaço de fase com dimensão $2N - 1$.

Para estudar melhor este conceito vamos tomar exemplo simples [21]. Seja um sistema Hamiltoniano conservativo com espaço de fases de dimensão 4, em outras palavras temos: $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Devido ao vínculo de conservação de energia, vale a relação $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E$, o que diminui a dimensão do nosso problema para 3, ou seja, uma superfície. A idéia agora é escolher, nesta superfície, um plano onde serão marcadas as sucessivas interseções das trajetórias do sistema com este plano. Este plano onde são marcados

os pontos é chamado de *Seção de Poincaré* e as intercessões sucessivas geram o mapa de Poincaré, e este substitui o fluxo contínuo das trajetórias por um conjunto discreto de pontos. A escolha deste plano é arbitrária, podemos tomar por exemplo o plano $q_2 = 0$, e neste caso, toda vez que a coordenada q_2 passar por zero, é marcado um ponto no plano (q_1, p_1) . Mas é possível que as trajetórias passem por $q_2 = 0$ vindos de $p_2 > 0$ ou $p_2 < 0$. Por convenção vamos contabilizar apenas os pontos (q_1, p_1) cujas trajetórias se anulem em q_2 originadas de p_2 positivo. Em outras palavras, serão levados em conta apenas os pontos cujas trajetórias atravessem a superfície da seção em um dos sentidos.

Além da melhor visualização de um sistema através de um espaço de fases bidimensional, a *Seção de Poincaré* possui outra grande utilidade no estudo de sistemas Hamiltonianos: a identificação de movimento caótico e outras estruturas no espaço de fase tais como toros no caso integrável e ilhas de estabilidade no caso misto. Existem essencialmente três casos a serem estudados. No primeiro, vamos supor que o sistema em questão seja integrável, então a seção apresentará uma coleção de curvas fechadas, indicando toros. No segundo caso vamos tomar um sistema não integrável que esteja em um regime totalmente caótico, sua seção será completamente preenchida, já que as trajetórias atingem todo o espaço de fases, respeitando a condição de energia fixa do sistema. O terceiro e último caso ocorre quando o sistema apresenta uma seção mista, ou seja, regiões regulares onde ocorrem curvas fechadas (ilhas de estabilidade) e regiões caóticas que preenchem o espaço restante (mar de caos). Finalmente, a seção ainda possui mais uma utilidade, é possível identificar separatrizes de movimento.

A *Seção de Poincaré* é uma ferramenta fundamental e muito versátil no estudo de sistemas hamiltonianos, e através dela é possível adquirir muita intuição sobre estes sistemas.

Capítulo 2

O Maser de Dicke

O *Maser de Dicke* é um modelo que descreve a interação de N átomos de dois níveis com um campo eletromagnético quantizado de um modo. O objetivo deste capítulo é descrever o modelo e fazer algumas análises tanto no âmbito quântico quanto no limite clássico deste sistema, ambas as análises são feitas em dois possíveis regimes deste sistema.

Antes de entender o funcionamento deste modelo, é conveniente, em primeiro lugar, estudar a *Quantização do Campo Eletromagnético* para então conseguir descrever a interação deste campo quantizado com um átomo de dois níveis com as devidas considerações, esta descrição leva o nome de *Modelo de Jaynes-Cummings* (JCM). Finalmente, após compreender esta interação de um único átomo com o campo quantizado, é possível estender o modelo para a interação de N átomos com este campo, tomando as precauções necessárias, e este é o chamado *Modelo de Dicke* ou *Maser de Dicke*.

Com este modelo em mãos, é possível fazer uma análise um pouco mais cuidadosa do sistema. Primeiramente separamos o *Modelo de Dicke* em dois, o *Modelo de Dicke Integrável* (*MDI*) e o *Modelo de Dicke Não Integrável* (*MDNI*), onde esta nomenclatura se refere às propriedades destes dois sistemas nos regimes clássico e quântico. Então fazemos um estudo quântico do *MDI* e *MDNI* para alguns valores de N , encontrando o espectro de baixas energias, o emaranhamento entre o átomo e o campo para o estado fundamental do sistema e a *Função de Wigner* deste estado para o subsistema atômico, também chamada de *Função de Wigner Atômica* (*FWA*). Em seguida fazemos uma análise do limite clássico deste sistema para finalmente confrontar os resultados quânticos e clássicos, tanto no *MDI* quanto no *MDNI*, conforme obtidos nas referências [24, 25, 26, 28, 29, 30, 32].

2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

O estudo da quantização do campo eletromagnético é muito encontrado na literatura, especialmente em livros de *Ótica Quântica* [13], e também existem várias maneiras de se fazer este processo. Optamos por fazer a abordagem da referência [14] que é bem completa e esclarecedora. Vamos tomar as equações de Maxwell sem a presença de fontes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Aqui, \vec{E} é o vetor campo elétrico, \vec{B} é o vetor campo magnético e c é a velocidade da luz no vácuo. A primeira e terceira equação de Maxwell são automaticamente satisfeitas quando for possível definir o potencial escalar U e o potencial vetor \vec{A} como:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.5)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} U \quad (2.6)$$

Tomamos o gauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.7)$$

$$U(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.8)$$

Com este gauge o vetor campo elétrico \vec{E} e o vetor campo magnético \vec{B} podem ser expressos somente em termos do potencial vetor \vec{A} . Substituindo a equação (2.7) na quarta equação de Maxwell, obtemos uma equação de onda para o potencial vetor \vec{A}

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

A quantização do campo eletromagnético livre ocorre quando trocamos o potencial vetor clássico \vec{A} pelo operador potencial vetor. Para tal propósito, primeiramente consideramos o problema clássico do campo eletromagnético livre em um cubo de lado L , ou seja, de volume $V = L^3$. Assim, o potencial vetor clássico \vec{A} nesta cavidade pode ser expandido em uma série de Fourier:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 V}} \sum_{m_1, m_2, m_3} \{ \vec{A}_{\vec{m}}(t) e^{i\vec{k}_{\vec{m}} \cdot \vec{r}} + \vec{A}_{\vec{m}}^*(t) e^{-i\vec{k}_{\vec{m}} \cdot \vec{r}} \} \quad (2.10)$$

onde $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$, cada componente m_i de \vec{m} é um número inteiro e a soma é efetuada sobre os modos $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$. Podemos ainda reescrever esta equação de uma forma mais conveniente fazendo $\vec{A}_{\vec{m}}(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_{m_i}(t) \hat{e}_i$, onde \hat{e}_i é um vetor unitário na direção i .

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 V}} \sum_{m_1, m_2, m_3} \left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha_{m_i}(t) \hat{e}_i e^{i \vec{k}_m \cdot \vec{r}} + c.c. \right\} \quad (2.11)$$

As condições de contorno que desejamos satisfazer são

$$\vec{A}(\vec{r} + L \hat{e}_1) = \vec{A}(\vec{r} + L \hat{e}_2) = \vec{A}(\vec{r} + L \hat{e}_3) = \vec{A}(\vec{r}) \quad (2.12)$$

Devido a estas condições de contorno, as componentes do vetor de onda \vec{k} assumem

$$\vec{k}_{\vec{m}} = \frac{2\pi}{L} (m_1 \hat{e}_1 + m_2 \hat{e}_2 + m_3 \hat{e}_3) \quad (2.13)$$

Desta equação acima podemos observar a seguinte relação entre as componentes do vetor de onda \vec{k} e o respectivo modo na componente: $k_i = \frac{2\pi m_i}{L}$. Então, podemos realizar, ao invés da soma nos modos m_i , a soma nas componentes do vetor de onda. Fazemos então:

$$\sum_{\vec{k}} \equiv \sum_{k_1, k_2, k_3} \Leftrightarrow \sum_{m_1, m_2, m_3} \quad (2.14)$$

e escrevemos o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ como

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 V}} \sum_{\vec{k}} \left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha_{k_i}(t) \hat{e}_i e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} + c.c. \right\} \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) em (2.9) obtemos uma equação para $\alpha_{k_i}(t)$ que é o único termo dependente do tempo na expressão:

$$\frac{\partial^2 \alpha_{k_i}(t)}{\partial t^2} + \omega_{k_i}^2 \alpha_{k_i}(t) = 0 \quad (2.16)$$

com $\omega_k = c |\vec{k}|$ ou de uma forma mais simples $\omega_k = c k$. Esta equação acima é a de um oscilador harmônico de frequência ω_k cujas soluções são dadas por:

$$\alpha_{k_i}(t) = \alpha_{k_i} e^{-i \omega_k t} \quad (2.17)$$

$$\alpha_{k_i}^*(t) = \alpha_{k_i}^* e^{i \omega_k t} \quad (2.18)$$

Substituindo estes resultados na expressão do potencial vetor, obtemos:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 V}} \sum_{\vec{k}} \left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha_{k_i} \hat{e}_i e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + c.c. \right\} \quad (2.19)$$

É ainda mais conveniente escrever as componentes α_{k_i} em termos de duas componentes ortogonais escolhidas de maneira que a condição (2.7) seja válida automaticamente, para este propósito, tomamos o par de vetores $\hat{e}_{k,1}$ e $\hat{e}_{k,2}$ que satisfazem:

$$\hat{k} \cdot \hat{e}_{k,\lambda} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot \hat{e}_{k,\lambda} = 0 \quad (2.20)$$

$$\hat{\epsilon}_{k,\lambda} \cdot \hat{\epsilon}_{k,\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'} \quad (2.21)$$

$$\hat{\epsilon}_{k_1} \times \hat{\epsilon}_{k_2} = \hat{k} \quad (2.22)$$

onde $\lambda, \lambda' = 1, 2$. Para escrever o potencial vetor em função destas novas componentes fazemos simplesmente a troca das somas:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_{k_i} \hat{\epsilon}_i \leftrightarrow \sum_{\lambda=1}^2 \alpha_{\vec{k},\lambda} \hat{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} \quad (2.23)$$

finalmente escrevemos o potencial vetor com estas novas componentes

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 V}} \sum_{\vec{k},\lambda} \{ \alpha_{\vec{k},\lambda} \hat{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} + c.c. \} \quad (2.24)$$

e a partir do potencial vetor, encontramos os campos elétrico e magnético, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ respectivamente, utilizando as relações:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.25)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.26)$$

Para os passos finais da quantização, olhamos para a energia do campo clássico

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_V dV [\epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t)] \quad (2.27)$$

reduzindo a forma acima, podemos reescrever o Hamiltoniano \mathcal{H} utilizando a seguinte transformação conveniente, do par de variáveis canônicas $p_{\vec{k},\lambda}$ e $q_{\vec{k},\lambda}$:

$$q_{\vec{k},\lambda} = \alpha_{\vec{k},\lambda} + \alpha_{\vec{k},\lambda}^* \quad (2.28)$$

$$p_{\vec{k},\lambda} = -i\omega_k (\alpha_{\vec{k},\lambda} - \alpha_{\vec{k},\lambda}^*) \quad (2.29)$$

e o Hamiltoniano \mathcal{H} fica:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},\lambda} (p_{\vec{k},\lambda}^2 + \omega_k^2 q_{\vec{k},\lambda}^2) \quad (2.30)$$

e a equação acima descreve a energia de um sistema de osciladores harmônicos independentes.

Quando quantizamos as variáveis canônicas p e q obtemos os operadores \hat{p} e \hat{q} respectivamente, que obedecem as regras usuais de comutação. O Hamiltoniano \mathcal{H} passa a descrever um sistema quântico de osciladores harmônicos independentes, e é justamente deste sistema que surgem dois operadores consagrados da mecânica quântica, o operador de criação a^\dagger e o operador de aniquilação a , que podem ser escritos em função dos operadores conjugados \hat{p} e \hat{q} como:

$$a_{\vec{k},\lambda} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k}} (\omega_{\vec{k}} \hat{q}_{\vec{k},\lambda} + i\hat{p}_{\vec{k},\lambda}) \quad (2.31)$$

$$a_{\vec{k},\lambda}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k}} (\omega_{\vec{k}} \hat{q}_{\vec{k},\lambda} - i\hat{p}_{\vec{k},\lambda}) \quad (2.32)$$

Invertendo essas equações temos:

$$\hat{p}_{\vec{k},\lambda} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} (a_{\vec{k},\lambda} - a_{\vec{k},\lambda}^\dagger) \quad (2.33)$$

$$\hat{q}_{\vec{k},\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_{\vec{k},\lambda} + a_{\vec{k},\lambda}^\dagger) \quad (2.34)$$

e agora substituindo $\alpha_{\vec{k},\lambda}$ e $\alpha_{\vec{k},\lambda}^*$ em (2.17) e (2.18) pelos operadores correspondentes, podemos escrever o operador potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ em termos dos operadores de criação e aniquilação, a^\dagger e a respectivamente.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \{ a_{\vec{k},\lambda} \hat{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + h.c. \} \quad (2.35)$$

Finalmente, utilizando as relações (2.25) e (2.26) obtemos os operadores, campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e campo magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k},\lambda} i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \{ a_{\vec{k},\lambda} \hat{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + h.c. \} \quad (2.36)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k},\lambda} i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \{ a_{\vec{k},\lambda} (\vec{k} \times \hat{\epsilon}_{\vec{k},\lambda}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + h.c. \} \quad (2.37)$$

e o Hamiltoniano quântico do campo, \mathcal{H}_F , é encontrado quando substituímos (2.36) e (2.37) em (2.30):

$$\mathcal{H}_F = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} (a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2}) \quad (2.38)$$

Temos em mãos a forma quântica dos campos elétrico e magnético, bem como o Hamiltoniano do campo. Com estas informações estamos preparados para descrever a interação deste campo quantizado com um átomo de dois níveis.

2.2 Hamiltoniano de Interação Átomo-Campo

Seja um elétron de carga e e massa m . Sua interação com um campo eletromagnético externo é descrita através do Hamiltoniano de acoplamento mínimo [13]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} [\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + eU(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \quad (2.39)$$

onde \vec{p} é o operador de momento usual, $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e $U(\vec{r}, t)$ já foram apresentados como potencial vetor e escalar do campo externo, respectivamente, e $V(\vec{r})$ é um potencial eletrostático que é normalmente o potencial de ligação atômico.

O formato mais robusto da interação átomo-campo, é encontrado quando impomos que a equação de Schrödinger deve satisfazer a invariância de gauge na aproximação de dipolo para o potencial vetor, ou seja, na aproximação $\vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1$, quando o campo é considerado uniforme mediante as dimensões atômicas. Desta forma o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}_0 + \vec{r}, t)$, onde \vec{r}_0 é a distância do elétron ao núcleo, pode ser escrito como:

$$\vec{A}(\vec{r}_0 + \vec{r}, t) \approx \vec{A}(t)e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} \quad (2.40)$$

e a equação de Schrödinger para este problema é:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0, t) \right]^2 + V(r) \right\} \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.41)$$

Definimos então uma nova função de onda $\phi(\vec{r}, t)$ que satisfaça:

$$\psi(\vec{r}, t) = \exp\left[\frac{ie}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{r}\right] \phi(\vec{r}, t) \quad (2.42)$$

e ao inserir esta equação na Equação de Schrödinger acima, é possível rearranjá-la, utilizando a equação (46) e desprezando o termo $A^2(\vec{r}_0, t)$, para finalmente obter uma forma simples (para mais detalhes ver em [13]):

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t) = \left[\frac{p^2}{2m} + V(r) - e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t) \right] \phi(\vec{r}, t) \quad (2.43)$$

A soma dos dois primeiros termos, isto é, $\frac{p^2}{2m} + V(r)$ nos dá o Hamiltoniano não perturbado do elétron, e o terceiro termo $-e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t)$ é exatamente o Hamiltoniano que utilizaremos para estudar a interação átomo-campo:

$$\mathcal{H}_I = -e\vec{r} \cdot \vec{E} \quad (2.44)$$

Como já temos a forma quântica do campo elétrico \vec{E} , podemos finalmente escrever o Hamiltoniano da interação deste campo quantizado com um átomo de dois níveis na aproximação de dipolo feita acima:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_I \quad (2.45)$$

Aqui, \mathcal{H}_A é a energia do átomo, \mathcal{H}_F é a energia do campo, deduzida na seção anterior e \mathcal{H}_I é a energia de interação átomo-campo na aproximação de dipolo. Fazemos agora uma escolha conveniente da fase do campo elétrico para escreve-lo de uma forma mais amigável, também utilizaremos a polarização linear com vetores de polarização reais. Desta forma, temos então que:

$$\mathcal{H}_F = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}) \quad (2.46)$$

Podemos expressar \mathcal{H}_A e o termo $e\vec{r}$ da interação átomo campo em termos do operador de transição atômico

$$\sigma_{ij} = |i\rangle \langle j| \quad (2.47)$$

Pela completudeza é satisfeito $\sum_i |i\rangle \langle i| = 1$. Utilizando esta equação de completudeza na equação de autovalores $\mathcal{H}_A |i\rangle = E_i |i\rangle$ obtemos

$$\mathcal{H}_A = \sum_i E_i \sigma_{ii} \quad (2.48)$$

e também

$$e \vec{r} = \sum_{i,j} e |i\rangle \langle i| \vec{r} |j\rangle \langle j| = \sum_{i,j} \vec{\mathcal{P}}_{ij} \sigma_{ij} \quad (2.49)$$

onde $\vec{\mathcal{P}}_{ij} = \langle i| \vec{r} |j\rangle$ é o elemento de matriz de transição dipolo elétrico. Para a fase escolhida de forma conveniente, temos da equação (2.36):

$$\vec{E} = \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}} \mathcal{E}_{\vec{k}} (a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger) \quad (2.50)$$

onde $\mathcal{E}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}}$. Substituindo todas estas equações no Hamiltoniano \mathcal{H} temos:

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \sum_i E_i \sigma_{ii} + \hbar \sum_{i,j} \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^{ij} \sigma_{ij} (a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger) \quad (2.51)$$

onde

$$g_{\vec{k}}^{ij} = -\frac{\mathcal{E}_{\vec{k}}}{\hbar} \vec{\mathcal{P}}_{ij} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k}} \quad (2.52)$$

Omitimos também a energia de ponto zero no primeiro termo de \mathcal{H} .

Para o caso de um átomo de dois níveis, onde $\mathcal{P}_{ab} = \mathcal{P}_{ba}$, podemos escrever $g_{\vec{k}} = g_{\vec{k}}^{ab} = g_{\vec{k}}^{ba}$. Utilizando um pouco de álgebra, podemos reescrever o Hamiltoniano de uma forma um pouco mais cômoda, e utilizando as seguintes notações, onde o índice a se refere ao nível superior enquanto b se refere ao nível inferior

$$\hbar \omega_a = E_a - E_b \quad (2.53)$$

$$\sigma_z = \sigma_{aa} - \sigma_{bb} = |a\rangle \langle a| - |b\rangle \langle b| \quad (2.54)$$

$$\sigma_+ = \sigma_{ab} = |a\rangle \langle b| \quad (2.55)$$

$$\sigma_- = \sigma_{ba} = |b\rangle \langle a| \quad (2.56)$$

onde estes operadores σ_+ , σ_- e σ_z são simplesmente os operadores de Pauli que obedecem a álgebra de spin 1/2, o Hamiltoniano toma finalmente a seguinte forma:

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} (\sigma_+ + \sigma_-) (a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger) \quad (2.57)$$

Aqui já foi descartado o termo $\frac{1}{2}$, a energia de ponto zero, que vem do \mathcal{H}_F .

Em particular, se estamos interessados em descrever um átomo de dois níveis interagindo com um campo de apenas um modo na cavidade, o Hamiltoniano que devemos tomar deve ser:

$$\boxed{\mathcal{H}_{JC} = \hbar \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar g (\sigma_+ + \sigma_-) (a + a^\dagger)} \quad (2.58)$$

que é mais conhecido como o Hamiltoniano de *Jaynes-Cummings* [15].

Podemos interpretar o ultimo termo deste Hamiltoniano, para tanto, vamos abrir o ultimo produto:

$$\mathcal{H}_{JC} = \hbar \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar g (a \sigma_+ + a^\dagger \sigma_- + a^\dagger \sigma_+ + a \sigma_-) \quad (2.59)$$

Olhemos agora os ultimos quatro termos. O termo $a \sigma_+$ descreve o processo no qual um átomo vai do estado fundamental $|b\rangle$ para o estado excitado $|a\rangle$ mediante o operador σ_+ , e simultaneamente um fóton é aniquilado mediante o operador a . Já o termo $a^\dagger \sigma_-$ descreve justamente o processo inverso, ou seja, desexcitação do átomo seguido de criação de um fóton. Estes dois termos são conhecidos como termos *girantes*. Já os outros dois termos oferecem uma certa surpresa, o termo $a^\dagger \sigma_+$ descreve o processo no qual um átomo vai do estado fundamental $|b\rangle$ para o estado excitado $|a\rangle$ mediante o operador σ_+ , e simultaneamente um fóton é criado mediante o operador a^\dagger , e o ultimo termo, $a \sigma_-$ descreve o processo inverso, a desexcitação de um átomo seguido da aniquilação de um fóton. E estes outros dois termos também são conhecidos como termos *contra-girantes*.

Estes últimos termos, apesar de não parecerem convencionais, podem ser interpretados como processos virtuais, no sentido de que são processos que podem ocorrer a tempos muito curtos e embora não observemos, contribuem para a energia do sistema.

2.3 O Modelo de Dicke

Na seção anterior vimos como era a interação de apenas um átomo de dois níveis com o campo de um modo, que era descrito pelo Hamiltoniano de *Jaynes-Cummings*. Já o modelo que descreve uma coleção de N átomos de dois níveis interagindo com um campo de um modo através de interação de dipolo é chamado de *Modelo de Dicke* [16]. A grande contribuição de Dicke foi a de perceber que, já que estes N átomos estão interagindo com o mesmo campo, podemos tratar este gás como um único sistema quântico se fizermos as considerações adequadas.

É possível descrever este sistema, mas se nenhuma hipótese for lançada sobre este problema ele se torna complicado. Em seu trabalho, Dicke estudou o comportamento deste sistema em um regime muito especial, as hipóteses dele foram essencialmente estas:

1. A distância média entre os átomos é grande o suficiente para que não ocorra sobreposição entre as funções de onda destes átomos.
2. Não é esperado um número significativo de colisões entre as partículas.
3. O comprimento de onda da radiação da cavidade é muito maior que o comprimento da região em que os átomos estão, e que este último comprimento, por sua vez, é muito maior que a distância entre os átomos.
4. Consideramos, para todos os efeitos, que os átomos possuem dois níveis. Esta hipótese é válida quando $\omega \approx \omega_a$, isto é, na ressonância entre a frequência do campo e a frequência de Bohr entre estes dois níveis do átomo, que passamos a chamar a partir de agora de nível excitado e fundamental.

Os dois primeiros itens são satisfeitos quando estamos lidando com um gás diluído, porém, como desejamos que o gás se comporte como um único sistema quântico, ele não pode ser muito diluído. O terceiro item permite fazer a aproximação de dipolo.

Vamos, a partir de agora, utilizar os operadores usuais de spin $\frac{1}{2}$, para tanto, podemos expressar estes operadores através dos operadores de Pauli:

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z \quad S_+ = \frac{\hbar}{2}\sigma_+ \quad S_- = \frac{\hbar}{2}\sigma_- \quad (2.60)$$

Podemos reescrever o Hamiltoniano de *Jaynes-Cummings* da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_{JC} = \hbar\omega a^\dagger a + \omega_a S_z + g(S_+ + S_-)(a + a^\dagger) \quad (2.61)$$

Vamos tomar inicialmente $N = 2$ para termos um pouco mais de intuição sobre o que acontece quando estendemos o sistema para N átomos. Escrevemos então o Hamiltoniano \mathcal{H}_2 de dois átomos de dois níveis interagindo com um campo de um modo da seguinte forma: a energia do campo é a mesma que a do caso *Jaynes-Cummings*, ou seja, $\mathcal{H}_F = \hbar\omega a^\dagger a$. A energia de cada átomo será identificada com um índice, então \mathcal{H}_A^1 é a energia do átomo 1 e \mathcal{H}_A^2 a energia do átomo 2. Analogamente identificamos as energias de interação como \mathcal{H}_I^1 e \mathcal{H}_I^2 . Então temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 &= \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_A^1 + \mathcal{H}_A^2 + \mathcal{H}_I^1 + \mathcal{H}_I^2 \\ \mathcal{H}_2 &= \hbar\omega a^\dagger a + \omega_a S_z^1 + \omega_a S_z^2 + g(S_+^1 + S_-^1)(a + a^\dagger) + g(S_+^2 + S_-^2)(a + a^\dagger) \\ \mathcal{H}_2 &= \hbar\omega a^\dagger a + \omega_a \sum_{i=1}^2 S_z^i + g \sum_{i=1}^2 (S_+^i + S_-^i)(a + a^\dagger) \end{aligned} \quad (2.62)$$

A extensão para N átomos agora é natural. Escrevemos então o Hamiltoniano de Dicke \mathcal{H}_{Dicke} para estes N átomos como:

$$\mathcal{H}_{Dicke} = \hbar\omega a^\dagger a + \omega_a \sum_{i=1}^N S_z^i + g \sum_{i=1}^N (S_+^i + S_-^i)(a + a^\dagger) \quad (2.63)$$

Vamos olhar por partes agora. O primeiro termo surgiu devido ao campo e o segundo termo contém um operador que representa a soma de N operadores de spin meio. Definimos então o operador de momento angular coletivo:

$$J_z \equiv \sum_{i=1}^N S_z^i \quad (2.64)$$

Uma definição análoga pode ser feita para os operadores do terceiro termo, mas antes vamos olhar com mais cautela este novo operador de momento angular coletivo J_z e seu papel no sistema.

Sejam então os N átomos deste sistema. Cada um deles pode ter energia de $\pm \frac{\hbar\omega}{2}$, conforme o átomo esteja no estado excitado (+) ou fundamental (-). Como temos uma coleção destes átomos vamos supor que um número n_+ de átomos estão excitados, enquanto n_- átomos estão no estado fundamental. Temos então que $N = n_+ + n_-$.

Cada um destes n_+ átomos contribui com energia $\frac{\hbar\omega}{2}$ totalizando uma energia de $\frac{n_+\hbar\omega}{2}$ para o sistema de N átomos, enquanto que, analogamente, n_- átomos contribuem com uma energia de $\frac{n_-\hbar\omega}{2}$. Então, tomamos $|\alpha_N\rangle$ como o estado que representa os N átomos. Então:

$$\omega_a J_z |\alpha_N\rangle = \frac{\hbar\omega_a}{2} (n_+ - n_-) |\alpha_N\rangle \quad (2.65)$$

Definimos agora a quantidade $m = \frac{1}{2}(n_+ - n_-)$. Vemos que $|m\rangle$ é auto estado do operador J_z com autovalor $m\hbar$.

$$J_z |m\rangle = m\hbar |m\rangle \quad (2.66)$$

Isto é um total paralelo com os operadores de momento angular. É possível perceber também que existe uma degenerescência neste estado devido à permutação, por exemplo, no caso de $N = 2$ podemos ter o primeiro átomo excitado e o outro não excitado, ou vice-versa. Este degenerescência só não ocorre nos casos extremos, onde todos os átomos estão excitados $N = n_+$ ou não excitados $N = n_-$.

Vamos encontrar os outros operadores de momento angular coletivo para manter a analogia destes com os operadores de momento angular:

$$J_x \equiv \sum_{i=1}^N S_x^i, \quad J_y \equiv \sum_{i=1}^N S_y^i \quad \text{e também} \quad J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad (2.67)$$

e conseqüentemente, devido a relação dos operadores S_x e S_y com S_+ e S_- :

$$J_+ \equiv \sum_{i=1}^N S_+^i \quad \text{e} \quad J_- \equiv \sum_{i=1}^N S_-^i \quad (2.68)$$

Assim como no caso de momento angular, temos $[J^2, J_z] = 0$, i.e., podemos encontrar um autoestado comum a J^2 e J_z , e de fato:

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \quad (2.69)$$

com $|m| \leq j \leq \frac{N}{2}$, lembrando que a igualdade $j = \frac{N}{2}$ só se dá nos extremos $N = n_+$ ou $N = n_-$. Para um dado j temos válida a relação $-m \leq j \leq m$. Os operadores J_+ e J_- atuando em $|j, m\rangle$ se comportam da mesma forma que os mesmos operadores de momento angular:

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle \quad (2.70)$$

O grande problema que temos agora é encontrar um conjunto completo de observáveis que comutam, já que, à exceção dos casos extremos onde todos os átomos estão no estado excitado, ou no estado fundamental, não conseguimos definir univocamente um estado para o sistema apenas com os valores de j e m . Para contornar de forma simples este problema, basta tomar exatamente o estado inicial do sistema em um dos dois casos onde não ocorre degenerescência por permutação. Nestas condições, j e m definem de forma única o estado do sistema e, J^2 e J_z formam um conjunto completo de observáveis que comutam, além disso ainda temos que $j = \frac{N}{2}$.

Vamos reescrever o Hamiltoniano de Dicke com estes novos operadores

$$\mathcal{H}_{Dicke} = \hbar\omega a^\dagger a + \omega_a J_z + g(J_+ + J_-)(a + a^\dagger) \quad (2.71)$$

e para escrever este Hamiltoniano em uma forma mais robusta, vamos lembrar que $g = \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar\epsilon_0 V}}$. O que podemos definir agora é uma densidade d de partículas na cavidade de volume V , assim, $d = \frac{N}{V}$ e como temos satisfeita a condição $j = \frac{N}{2} \Leftrightarrow N = 2j$, então escrevemos o volume V em termos destes parâmetros: $V = \frac{2j}{d}$. Desta forma $g = \sqrt{\frac{\omega d}{\hbar\epsilon_0 j}}$. Definimos agora o parâmetro de interação λ em função do g como

$$\frac{\lambda}{\sqrt{N}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2j}} \equiv g \quad (2.72)$$

e como não há mais a possibilidade de confundir operador com número neste estágio, transformamos $j \leftrightarrow J$ para enfatizar que este valor é o de momento angular total, obtemos finalmente o formato do Hamiltoniano de Dicke que é o mais popular na literatura [28]:

$$\boxed{\mathcal{H}_{Dicke} = \hbar\omega a^\dagger a + \omega_a J_z + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}}(J_+ + J_-)(a + a^\dagger)} \quad (2.73)$$

Devemos enfatizar que o principal resultado deste sistema de N átomos de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético de um modo é o fenômeno chamado de *Superradiância*, onde a intensidade da radiação emitida por estes N átomos é proporcional a N^2 e a duração desta radiação é inversamente proporcional a N . Ou seja, é um pulso muito intenso e de curta duração.

Assim como fizemos no Hamiltoniano de *Jaynes-Cummings*, podemos abrir o produto do último termo e fazer um estudo dos quatro termos expandidos. Mas vamos proceder de um outro modo, vamos separar os termos *girantes* dos *contra-girantes*, definir $\hbar = 1$ e utilizar a condição de ressonância deste modelo, ou seja $\omega = \omega_a = 1$, onde simplesmente definimos estas frequências como unidade. O Hamiltoniano que trabalharemos durante este capítulo fica então escrito da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_{Dicke} = a^\dagger a + J_z + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}}(aJ_+ + a^\dagger J_-) + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}}(a^\dagger J_+ + aJ_-) \quad (2.74)$$

A interpretação destes quatro termos é essencialmente a mesma daquela feita para o Hamiltoniano de *Jaynes-Cummings*, lembrando que agora possuímos operadores de momento angular coletivo.

Utilizaremos, para fazer um estudo mais aprofundado do *Modelo de Dicke*, uma abordagem muito parecida com alguns trabalhos encontrados na literatura [24, 25, 26]. O caminho escolhido consiste essencialmente em separar este modelo em dois. Podemos trabalhar apenas com o primeiro termo do Hamiltoniano, o *girante*, ou trabalhar com os dois termos. O descarte do segundo termo, também chamado de *Aproximação de Onda Girante*, é válido para pequenos valores de λ [13, 29] para átomos em cavidades, mas de qualquer forma trabalharemos com esta aproximação mesmo para valores consideráveis do parâmetro de interação.

Como será estudado a seguir, a presença ou não deste segundo termo muda radicalmente as propriedades do sistema. O modelo que possui apenas o termo *girante* é o que chamamos de Modelo de Dicke Integrável (*MDI*), já o outro sistema, que possui os dois termos, é o Modelo de Dicke Não Integrável (*MDNI*). O que existe em comum entre estes dois casos é que em ambos ocorre *TFQ*, cada um dos sistemas passam de uma fase normal para uma fase *Superradiante*, e para que seja possível fazer este estudo deve-se enfatizar que a temperatura do sistema é nula, em outras palavras, estaremos estudando sempre o *Estado Fundamental* dos modelos.

Para ambos os casos, o sistema é estudado em uma base de Dicke $|n, m\rangle$ que é simplesmente o produto de um ket bosônico $|n\rangle$, que representa o número de fótons do campo eletromagnético, por outro ket de momento angular $|m\rangle$. Para este último, lembramos que $-J \leq m \leq J$ e $J = \frac{N}{2}$, em outras palavras, existem $2J + 1$ valores possíveis para m . Já o ket bosônico não possui um valor máximo de n , de fato, se quisermos utilizar a base completa de bósons, devemos ter $n \rightarrow \infty$, ou seja, um número infinito de valores de n . Com relação a este problema, verificamos que, para estudar o estado fundamental, é possível truncar esta base bosônica em um n máximo, já que os n 's maiores que este máximo não farão uma diferença considerável para este estado do sistema.

Antes de estudar estes dois problemas separadamente, vamos apresentar um operador que será útil na análise dos dois sistemas. Vamos tomar apenas os dois primeiros termos do Hamiltoniano de Dicke e somar com o valor de J escolhido, denotamos estes termos como o operador \hat{N} :

$$\hat{N} = a^\dagger a + J_z + J. \quad (2.75)$$

A sua atuação em uma base de Dicke é simples

$$\hat{N}|n, m\rangle = (a^\dagger a + J_z + J)|n, m\rangle = (n + m + J)|n, m\rangle, \quad (2.76)$$

mas veja que n é o número de fótons no campo enquanto m está relacionado com a quantidade de átomos no estado excitado. Definimos o número $n_e = n + m + J$. Devido sua relação com a quantidade de átomos e fótons excitados, denotaremos n_e por *Número de Excitações* do sistema.

Com estas considerações iniciais, começaremos a análise dos dois sistemas.

2.3.1 O MDI

Análise Quântica

Para este caso descartamos o termo contra girante. O Hamiltoniano do *MDI*, \mathcal{H}_{MDI} , pode ser escrito da seguinte forma:

$$\boxed{\mathcal{H}_{MDI} = a^\dagger a + J_z + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}}(aJ_+ + a^\dagger J_-)} \quad (2.77)$$

Podemos representar este operador na forma matricial. Primeiramente vamos escolher $J = \frac{1}{2}$ ($N = 1$) para tentar ganhar alguma intuição sobre este Hamiltoniano, então vamos escolher a ordenação matricial da seguinte forma: $|0, -\frac{1}{2}\rangle$, $|0, \frac{1}{2}\rangle$, $|1, -\frac{1}{2}\rangle$, $|1, \frac{1}{2}\rangle$, $|2, -\frac{1}{2}\rangle$, etc. Nesta representação os termos diagonais são fáceis de serem encontrados pois são justamente os autovalores de $\hat{N} - J = a^\dagger a + J_z$, enquanto que os termos não diagonais são encontrados com um pouco mais de cautela através dos operadores do terceiro termo, o termo *girante*, do Hamiltoniano de Dicke. Abaixo estão os primeiros elementos desta matriz:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \lambda\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\sqrt{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \lambda\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\sqrt{3} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

O primeiro fato a se notar é que esta matriz é bloco diagonal, outro fato não tão imediato se refere a uma regularidade nos blocos 2×2 desta matriz. O primeiro destes blocos é formado utilizando os kets $|0, \frac{1}{2}\rangle$ e $|1, -\frac{1}{2}\rangle$, e é possível perceber que ambos possuem o mesmo n_e , que no caso vale 1. Já o segundo bloco é formado através dos kets $|1, \frac{1}{2}\rangle$ e $|2, -\frac{1}{2}\rangle$, cujo $n_e = 2$.

Portanto, agrupamos estes blocos 2×2 que possuem o mesmo número de excitação, e podemos escreve-los de uma forma geral em função de n ($n \in N$) e λ :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + n & \lambda\sqrt{n+1} \\ \lambda\sqrt{n+1} & \frac{1}{2} + n \end{bmatrix}$$

Assim, basta diagonalizar a matriz acima e encontrar os autovalores destes blocos, em especial, estamos interessados no menor autovalor E_- .

$$E_- = n + \frac{1}{2} - \lambda\sqrt{n+1} \quad (2.78)$$

É importante notar o seguinte: o menor autovalor vai depender também dos parâmetros n e λ . Cada valor de n representa um bloco, então, para um dado bloco, temos que a menor energia varia conforme o parâmetro

λ . Mais do que isso, conforme aumentamos o valor de n , o coeficiente linear desta energia aumenta, enquanto o coeficiente angular se torna cada vez mais negativo. Se encontrarmos então um conjunto razoável destas menores energias, então é possível conhecer a forma do estado fundamental fazendo um gráfico.

Para J 's (N 's) maiores o processo é o mesmo, vamos encontrar a representação matricial do Hamiltoniano para $J = \frac{3}{2}$ ($N = 3$). Novamente ordenaremos a matriz utilizando o número de excitação como guia, ou seja, $|0, -\frac{3}{2}\rangle$ que tem $n_e = 0$, depois $|0, -\frac{1}{2}\rangle$ e $|1, -\frac{3}{2}\rangle$ com $n_e = 1$, seguido de $|0, \frac{1}{2}\rangle$, $|1, -\frac{1}{2}\rangle$ e $|2, -\frac{3}{2}\rangle$ com $n_e = 2$, e assim por diante. Nesta ordenação os primeiros termos do Hamiltoniano são escritos como:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\sqrt{6} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \lambda\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\sqrt{8} & \frac{1}{2} & \lambda\sqrt{6}\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\sqrt{6}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \lambda\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\sqrt{6} & \frac{3}{2} & \lambda\sqrt{8}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\sqrt{8}\sqrt{2} & \frac{3}{2} & \lambda\sqrt{6}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\sqrt{6}\sqrt{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Novamente obtemos uma matriz bloco diagonal: um bloco unitário no começo, depois um bloco 2×2 , o próximo é 3×3 , e o restante serão blocos 4×4 escritos de uma forma geral em função dos parâmetros n ($n \in N$) e λ como:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} + n & \lambda\sqrt{6}\sqrt{n+1} & 0 & 0 \\ \lambda\sqrt{6}\sqrt{n+1} & \frac{3}{2} + n & \lambda\sqrt{8}\sqrt{n+2} & 0 \\ 0 & \lambda\sqrt{8}\sqrt{n+2} & \frac{3}{2} + n & \lambda\sqrt{6}\sqrt{n+3} \\ 0 & 0 & \lambda\sqrt{6}\sqrt{n+3} & \frac{3}{2} + n \end{bmatrix}$$

agora é só diagonalizar esta matriz e encontrar seus autovalores, e dentre eles o de menor energia e fazer um processo análogo ao descrito para o caso $J = \frac{1}{2}$ ($N = 1$).

Em geral, para um valor J ocorre essencialmente o mesmo, se ordenarmos a matriz agrupando estados de mesmo número de excitação, obteremos blocos, sendo que o primeiro bloco é unitário, o próximo é 2×2 , assim sucessivamente até encontrarmos blocos do tamanho máximo $(2J + 1) \times (2J + 1)$, que podem ser diagonalizados para se obter os autovalores de energia em função de n e λ . Embora as equações de autovalores se tornem cada vez mais complicadas lembramos que estas equações são apenas polinomiais, portanto computacionalmente razoáveis de se resolver. É importante frisar que, quando diagonalizamos este bloco $(2J + 1) \times (2J + 1)$, encontramos $(2J + 1)$ equações de autovalores, devemos tomar, dentre estas equações, aquela que tem menor energia para construir o estado fundamental.

Note que a ordenação que fizemos da base está toda fundamentada no número de excitação. Esta constante parece ser uma informação importante do sistema. De fato, o número de excitação \hat{N} é uma constante de movimento do *MDI*. Isto é:

$$[\mathcal{H}_{MDI}, \hat{N}] = 0 \quad (2.79)$$

Outra conclusão que tiramos é a de que os termos girantes comutam com o número de excitação, em outras palavras, os termos girantes não afetam o número de excitação do sistema. Note que, neste caso temos um conjunto completo de observáveis que comutam, e é possível determinar os autoestados conhecendo-se apenas a energia e o número de excitação.

Outra forma de encontrar o estado fundamental do *MDI* é diagonalizar computacionalmente o Hamiltoniano, encontrando assim seus autovalores e autovetores. Para este propósito escolhemos um valor adequado de n que chamaremos de n_{max} para truncar esta matriz.

Tendo encontrado os autovalores e autovetores do Hamiltoniano, primeiramente vamos analisar o espectro de baixas energias em função de λ e então analisaremos a energia do estado fundamental separadamente. Abaixo está o gráfico das energias do sistema para dois valores de J (N) diferentes.

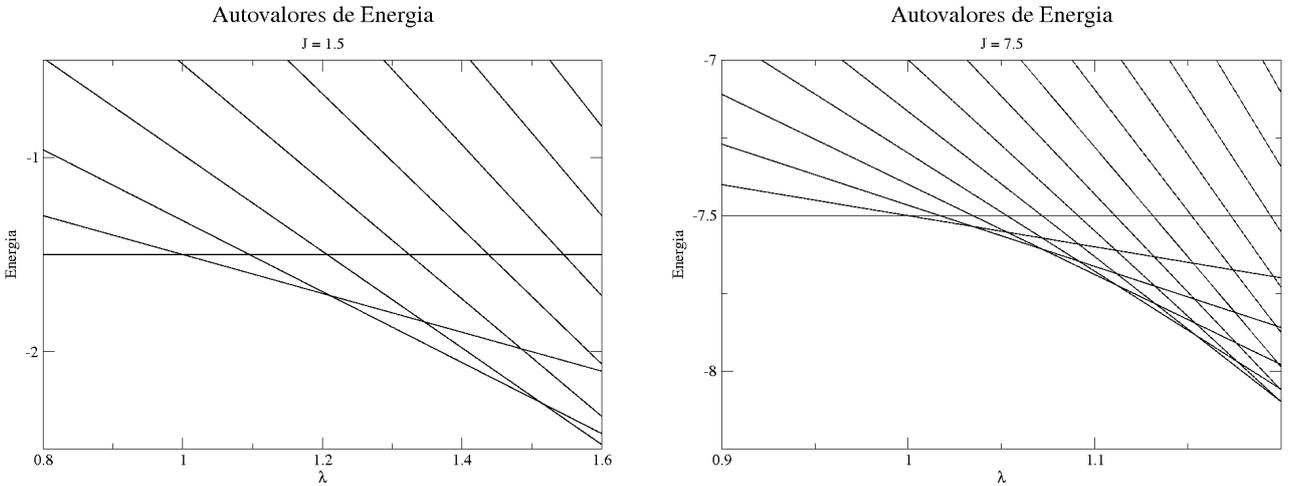


Figura 2.1: Gráfico de espectro inferior para $J=1.5$ (esquerda) e $J=7.5$ (direita)

Percebemos que ocorrem cruzamentos de níveis para estes J 's o que nos leva a acreditar na existência de uma *TFQ* de primeira ordem. De fato, para qualquer valor de J , existe cruzamento de níveis de energia, entre o fundamental e o primeiro estado excitado, e este primeiro cruzamento sempre ocorre em $\lambda = 1$. Recordando que ao recuperarmos a dimensão, isto corresponde a $\lambda = \omega = \omega_a$. Para que esta transição se confirme é necessário que este resultado se mantenha no limite em que $J \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$).

Vamos interpretar o que os gráficos estão dizendo tomando o primeiro gráfico onde $J = \frac{3}{2}$. Para $\lambda < 1$ o estado fundamental do sistema é simplesmente $|0, -\frac{3}{2}\rangle$, ou seja, zero fótons no campo e todos os 3 átomos no estado fundamental, portanto $n_e = 0$, e conforme aumentamos o valor do parâmetro λ , verificamos que ocorre um cruzamento entre os níveis para $\lambda = 1$, ou seja, a energia do primeiro estado excitado conforme aumentamos o valor de λ vai se aproximando da energia do estado fundamental de tal forma que existe, de fato, a igualdade destes níveis em $\lambda = 1$, e aumentando um pouco mais o valor do parâmetro percebemos que, o que era o estado excitado para $\lambda < 1$ é agora o estado fundamental para λ ligeiramente maior do

que 1, e aumentando ainda mais o parâmetro notamos um novo cruzamento, e assim por diante. De uma forma resumida, o que ocorre com o sistema quando passamos de $\lambda = 1$, é que o sistema passa do estado fundamental tipo produto tensorial $|0, -\frac{3}{2}\rangle$, para um estado com um número maior de fótons e também com a presença de átomos no estado excitado. Em outras palavras, como o termo de interação agora tem um peso maior que a parte livre, torna-se mais vantajoso para o sistema ter um certo número finito de fótons no campo e ter átomos excitados.

Outra análise interessante que pode ser feita neste sistema é com relação à estatística de níveis e distribuição dos vizinhos mais próximos (*NND*), utilizada como critério de caos quântico. A estatística de níveis para o *MDI* fornece uma *NND* de Poisson, não indicando portanto caos quântico neste modelo, conforme feito no artigo [35].

Podemos agora observar o comportamento da derivada da energia do estado fundamental E_0 em função do parâmetro λ já que esta análise pode trazer mais informação sobre a natureza da *TFQ*. Primeiramente fazemos um gráfico da energia do estado fundamental normalizada E_0 em função de λ para ter em mãos uma imagem conjunta do que acontece com o comportamento de E_0 para alguns valores de J . Em seguida fazemos o gráfico da derivada de E_0 com respeito a λ :

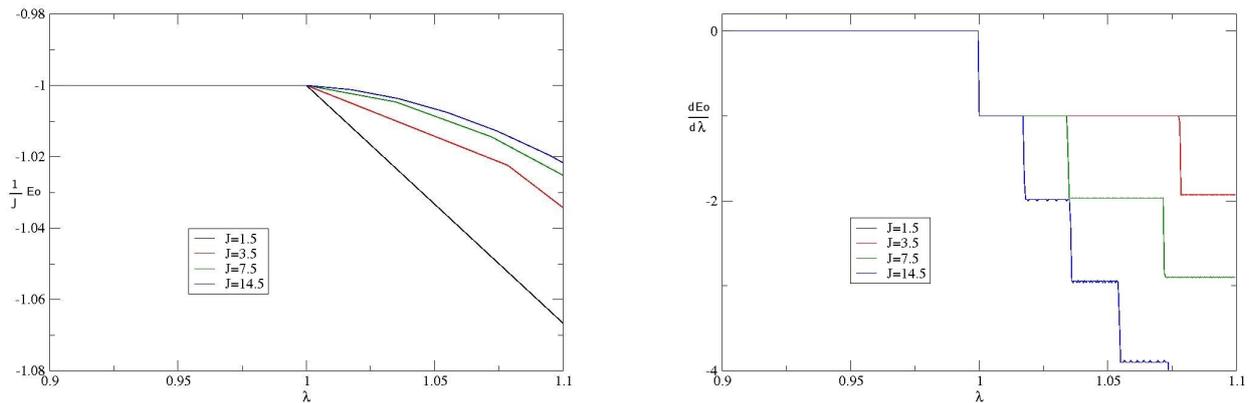


Figura 2.2: Gráfico de $\frac{1}{J} E_0$ por λ (esquerda) e $\frac{dE_0}{d\lambda}$ por λ (direita) para $J = 1.5, 3.5, 7.5$ e 14.5

O comportamento do gráfico da derivada de E_0 com relação a λ confirma a nossa suspeita de que existe neste sistema uma *TFQ* de primeira ordem, pois a descontinuidade da derivada da energia do estado fundamental com relação ao parâmetro não térmico indica uma *TFQ* de primeira ordem [22].

Outra forma de obter informações sobre este sistema é analisar a *Entropia Linear* (1.25) S_l deste modelo. Para obtê-la, primeiramente tomamos o estado fundamental do sistema e a partir dele encontramos a matriz densidade do estado fundamental. Fazemos um *Traço Parcial* desta matriz nos fótons conforme foi explicado no primeiro capítulo, resultando então em uma matriz reduzida. Então encontramos a *Entropia Linear* desta matriz reduzida, e chama-la-emos de *Entropia Linear Atômica* (*ELA*). Como existe uma relação muito forte entre *Emaranhamento* e *TFQ*, podemos ganhar um pouco mais de intuição estudando a *ELA*. Para alguns

valores de J obtemos o seguinte gráfico, reproduzindo o resultado da referência [26]:

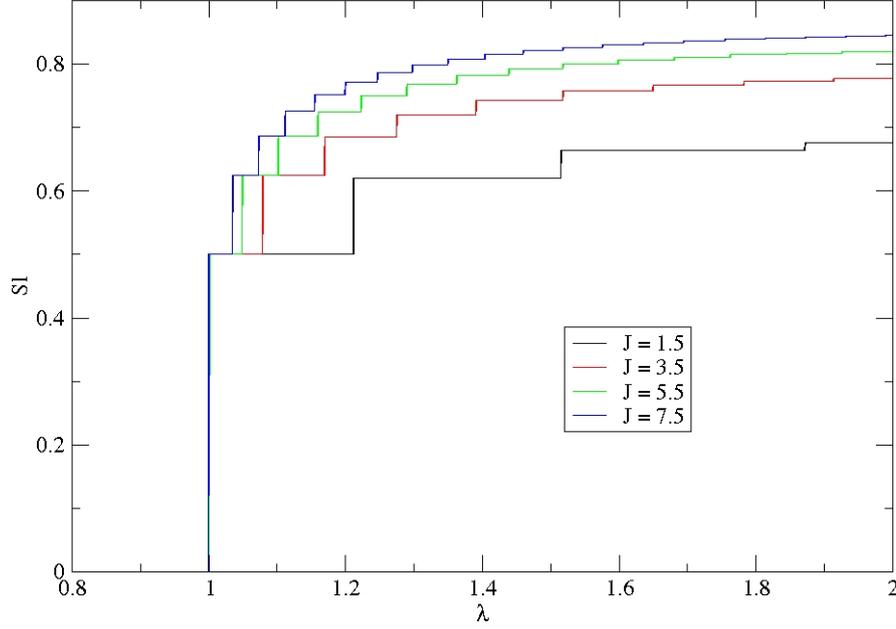


Figura 2.3: Gráfico da Entropia Linear S_l por λ para $J = 1.5, 3.5, 5.5$ e 9.5

Podemos verificar que a *ELA* possui saltos conforme aumentamos o valor do parâmetro λ , e que o primeiro salto ocorre no mesmo lugar para todos os J 's, $\lambda = 1$, e que o valor deste salto é sempre o mesmo: 0.5 . Se compararmos os gráficos do Estado Fundamental com estes da *ELA* chegamos a mais uma conclusão: Onde ocorre um cruzamento de níveis no estado fundamental existe um salto na *ELA*.

Não é difícil explicar este comportamento, já que como vimos, a energia do estado fundamental é uma curva cheia de bicos. Esta mudança brusca não se dá apenas na energia, mas o estado fundamental também muda radicalmente, e é exatamente com este estado que calculamos a *ELA*. Então cada mudança do estado fundamental provoca um salto no gráfico da *ELA*.

Uma vez que a *TFQ* só é bem definida no limite $N \rightarrow \infty$, é interessante olhar agora o análogo clássico deste sistema, o qual foi descoberto na referência [24] que ocorrem bifurcações de pontos fixos estáveis no espaço de fase, exatamente no ponto onde acontece a transição, $\lambda = 1$ (ou $\frac{\lambda}{\omega_a} = 1$).

Análise Clássica

Como foi explicado no primeiro capítulo, seção 1.2.1, utilizaremos os estados coerentes de spin e bóson para encontrar o Hamiltoniano Clássico do *MDI*, H_{MDI} [25], deste sistema:

$$H_{MDI} = \langle z, w | H | z, w \rangle = z\bar{z} - J\left(\frac{1 - w\bar{w}}{1 + w\bar{w}}\right) + \frac{\lambda\sqrt{2J}}{1 + w\bar{w}}(\bar{w}z + w\bar{z}) \quad (2.80)$$

Passando para as coordenadas cartesianas q e p através de (1.39) e (1.40):

$$z = \frac{q_2 + ip_2}{\sqrt{2}} \quad w = \frac{q_1 + ip_1}{\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \quad (2.81)$$

o Hamiltoniano Clássico é escrito da seguinte forma:

$$H_{MDI} = \frac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2 - 2J) + \frac{\lambda}{\sqrt{4J}}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}(p_1p_2 + q_1q_2) \quad (2.82)$$

O índice 1 se refere ao átomo e o 2 ao campo. Podemos observar que existe muita simetria espacial neste sistema, por esta quantidade grande de simetrias devemos suspeitar que exista alguma constante de movimento neste sistema, de fato esta já foi mencionada na análise quântica e se trata do número de excitação $\hat{N} = a^\dagger a + J_z + J$, que classicamente corresponde aos dois primeiros termos deste Hamiltoniano mais o valor de J , a saber $\frac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2 - 2J)$. Portanto, o sistema é integrável. Abaixo temos uma Seção de Poincaré deste sistema para visualizar este fato:

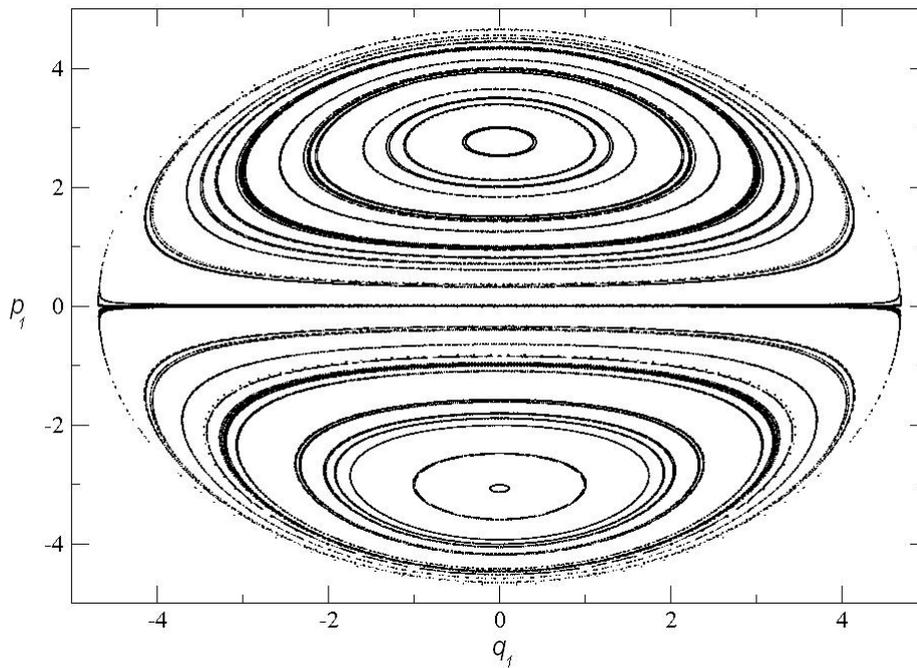


Figura 2.4: Seção de Poincaré para $J = 5.5$, $\lambda = 0.5$ e $E = 11.0$

Conforme explicado anteriormente, trata-se de uma seção de um sistema integrável onde observamos os toros regulares e uma separatriz de movimento.

Encontraremos agora os pontos fixos de H_{MDI} através das Equações de Hamilton, como feito em [24, 25]:

$$\dot{q}_1 = -\frac{\partial H_{MDI}}{\partial p_1} = -p_1 - \lambda \frac{p_2}{\sqrt{2J}} \sqrt{2J - H_1} + \lambda \frac{p_1}{\sqrt{2J}} \frac{(p_1 p_2 + q_1 q_2)}{\sqrt{2J - H_1}} = 0 \quad (2.83)$$

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial H_{MDI}}{\partial q_1} = q_1 + \lambda \frac{q_2}{\sqrt{2J}} \sqrt{2J - H_1} + \lambda \frac{q_1}{\sqrt{2J}} \frac{(p_1 p_2 + q_1 q_2)}{\sqrt{2J - H_1}} = 0 \quad (2.84)$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{\partial H_{MDI}}{\partial p_2} = -p_2 - \lambda \frac{p_1}{\sqrt{2J}} \sqrt{2J - H_1} = 0 \quad (2.85)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\partial H_{MDI}}{\partial q_2} = q_2 + \lambda \frac{q_1}{\sqrt{2J}} \sqrt{2J - H_1} = 0 \quad (2.86)$$

Onde $H_1 = \frac{q_1^2 + p_1^2}{2}$. Os pontos fixos estáveis podem ser encontrados [24], e são os seguintes:

i. Solução trivial: Estável para $\lambda < 1$

$$q_1 = p_1 = q_2 = p_2 = 0 \quad (2.87)$$

ii. Solução não trivial: Estável para $\lambda \geq 1$

$$R_1^2 = q_1^2 + p_1^2 = 2J \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (2.88)$$

$$R_2^2 = q_2^2 + p_2^2 = J \left(\frac{\lambda^4 - 1}{\lambda^2}\right) \quad (2.89)$$

A solução estável no caso (i) é a origem, ou seja, em cada espaço de fases, tanto do átomo quanto do campo, a solução é a origem $(0, 0)$, já no caso (ii) a solução estável é um conjunto de pontos formado por duas circunferências, uma para cada espaço de fases. Este é um tipo especial de bifurcação e leva o nome de *Bifurcação do tipo Hopf*. Vamos interpretar apenas o espaço de fases do átomo. Pela análise quântica, antes de ocorrer a TFQ o estado fundamental do sistema é $|0, -J\rangle$ (zero fótons e todos os átomos de dois níveis no estado inferior), logo após a transição, ocorre uma ocupação de estados de número maior do que zero, e ao mesmo tempo, estados de Dicke diferentes de todos os átomos no nível inferior. Voltando aos pontos fixos que encontramos, o caso (i) representa todos os átomos de dois níveis no estado fundamental e Zero Fótons, enquanto o caso (ii) leva em conta, no caso do átomo, este aumento na componente z do Spin, e se aumentarmos cada vez mais o parâmetro λ a circunferência terá um raio R_1 cada vez maior, e no limite, atinge $\sqrt{2J}$, ou seja, neste limite os átomos de dois níveis ocupam todos os níveis superiores.

FWA e Comparações

Como já foi discutido no capítulo anterior, a *Função de Wigner* é um meio de se estudar sistemas quânticos representando os seus estados em um espaço de fase, que é uma forma visualmente mais apelativa e que também nos permite associar os estados às trajetórias clássicas no espaço de fase. Podemos também confrontar os resultados quânticos e clássicos que foram obtidos por meio desta função de quase-probabilidade.

Vamos tomar alguns valores para os parâmetros do sistema. Precisaremos na verdade escolher apenas os valores de J e λ para caracterizar nosso sistema. Abaixo estão graficadas algumas FWA para alguns valores de J e λ .

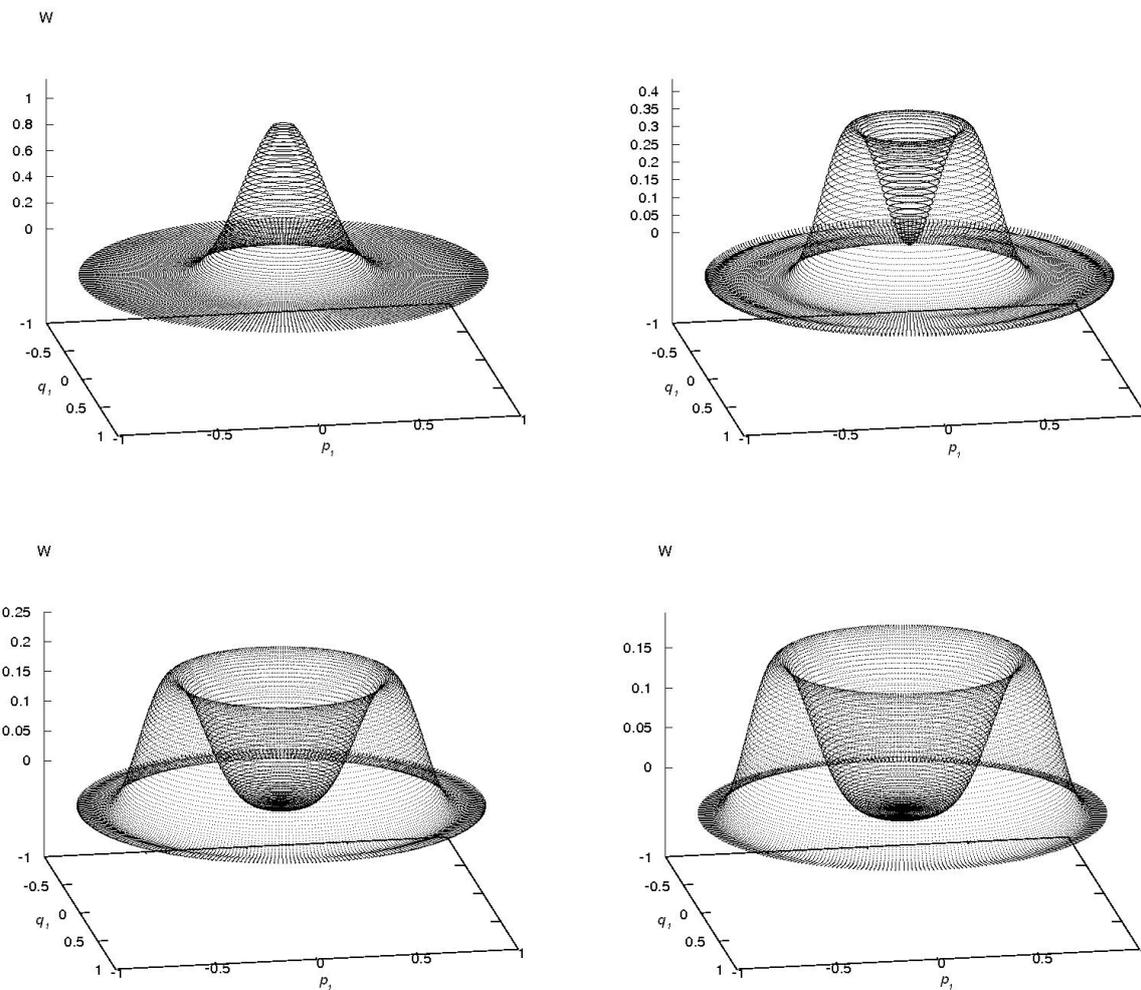


Figura 2.5: FWA normalizada para $J = 3.5$, antes da transição (esquerda em cima), logo após a transição para $\lambda = 1.01$ (direita em cima), para $\lambda = 1.4$ (esquerda embaixo) e $\lambda = 1.8$ (direita embaixo)

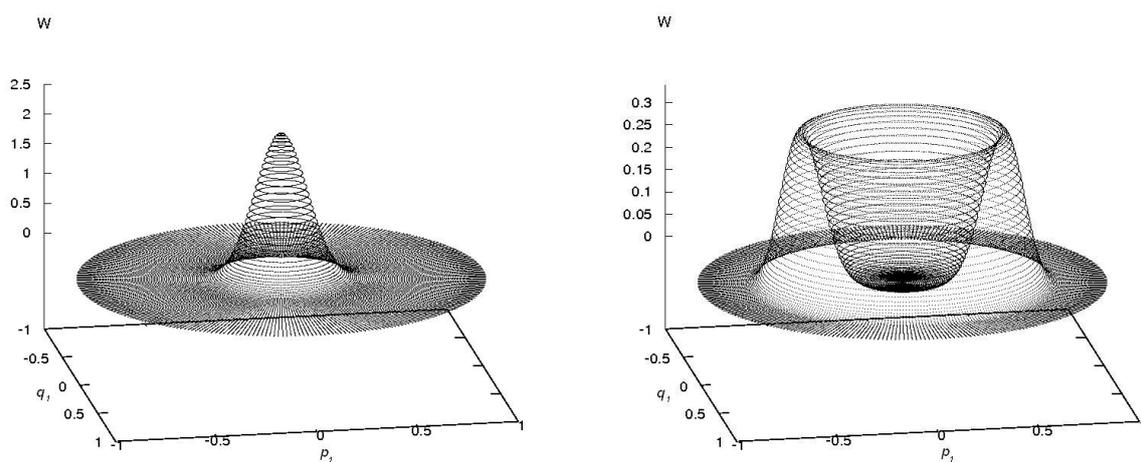


Figura 2.6: FWA normalizada para $J = 7.5$, antes da transição (esquerda) e depois da transição para $\lambda = 1.4$ (direita)

Podemos verificar que antes da transição, ou seja, $\lambda < 1$, a *FWA* fornece uma superfície centrada na origem para todos os valores de J , o que está de acordo com a análise clássica que fornece a origem como ponto fixo estável. Logo após a transição, a *FWA* adquire uma forma de “pudim” com o seu máximo descrevendo uma circunferência, e esta circunferência da *FWA* tem seu raio aumentado conforme aumentamos o parâmetro λ . Portanto este sistema possui simetria no sentido de, se rotacionarmos o sistema, a *FWA* se comporta da mesma forma. Em palavras, não há direção preferencial.

Vamos comparar a trajetória clássica, que é a circunferência de pontos fixos estáveis do análogo clássico, com a circunferência da *FWA* para tirar algumas conclusões.

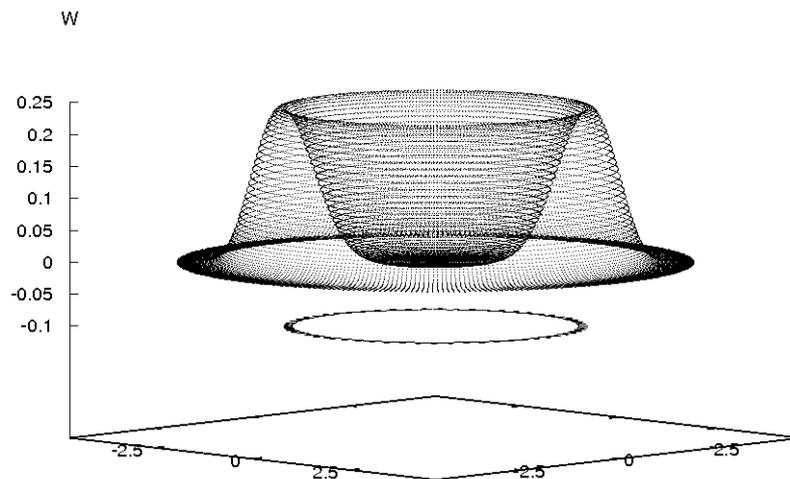


Figura 2.7: FWA para $J = 1.5$

Esta trajetória clássica é tomada com a energia do sistema um pouco acima do mínimo, já que estamos tratando o caso quântico com a energia do estado fundamental.

Percebemos no gráfico acima que não existe discrepância entre estas duas informações, ou seja, as duas circunferências estão razoavelmente próximas. Esperamos que à medida que aumentamos o valor de J (N) esta distância diminua, e no limite em que $J \rightarrow \infty$ deveríamos ter as duas circunferências coincidindo. Infelizmente não é isso que ocorre, as duas circunferências não ficam tão próximas conforme aumentamos o valor de J [26].

2.3.2 O MDNI

Análise Quântica

O Hamiltoniano do MDNI, \mathcal{H}_{MDNI} , contém todos os termos, portanto ele é escrito como:

$$\mathcal{H}_{MDNI} = a^\dagger a + J_z + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}}(aJ_+ + a^\dagger J_-) + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}}(a^\dagger J_+ + aJ_-) \quad (2.90)$$

Novamente vamos representar o Hamiltoniano na forma matricial. Para tanto, escolhemos $J = \frac{1}{2}$ ($N = 1$) e mais uma vez ordenaremos a base utilizando o número de excitação como guia, isto é, na ordem $\left|0, -\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle$, $\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left|1, \frac{1}{2}\right\rangle$, $\left|2, -\frac{1}{2}\right\rangle$, etc.

Encontramos sem problemas a diagonal desta matriz, já que os elementos para este modelo são iguais ao do Hamiltoniano do *MDI*. Outros elementos semelhantes, na comparação entre os dois modelos, são aqueles que surgem devido aos termos girantes. Resta então colocar os elementos provenientes do termo contra-girante na matriz para finalmente contemplar sua estrutura:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \lambda\sqrt{2} & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \lambda\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\sqrt{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\sqrt{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \lambda\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\sqrt{3} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Diferentemente do caso integrável, esta matriz não é bloco diagonal, portanto não podemos usar a mesma estratégia do *MDI* para encontrar os autovalores do Hamiltoniano. Na verdade, para o *MDNI*, o número de excitação não é mais uma constante do sistema já que:

$$\left[\mathcal{H}_{MDNI}, \hat{N}\right] \neq 0 \quad (2.91)$$

Como os dois primeiros termos deste Hamiltoniano comutam com o operador número de excitação \hat{N} , chegamos a conclusão de que os termos contra-girantes quebram esta constante. Em palavras, os termos contra-girantes afetam o número de excitação do sistema.

Sobra então a opção de diagonalizar esta matriz inteira truncando-a em um determinado número de fótons que chamaremos de n_{max} (por volta de 100), que, pelo fato de estarmos interessados apenas no estado fundamental, não necessitará ser muito grande para valores razoáveis de λ . Este trabalho se torna computacionalmente cada vez mais exaustivo conforme aumentamos o valor de J (N), já que o tamanho da matriz será de $(n_{max} + 1) \cdot (2J + 1)$. Primeiramente, vamos olhar o comportamento da energia do estado fundamental e dos níveis próximos do sistema em função do parâmetro λ_+ para alguns valores de J , aqui $\lambda_+ = 2\lambda$ apenas para que os gráficos fiquem em uma escala compatível com o caso do *MDI*.

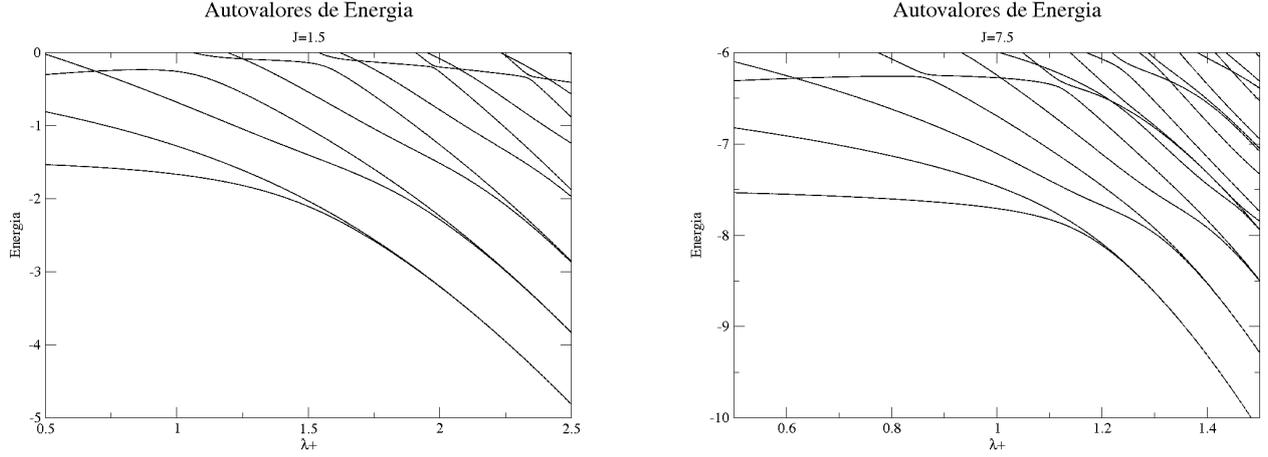


Figura 2.8: Gráfico do espectro inferior para $J = 1.5$ (esquerda) e $J = 7.5$ (direita)

O comportamento do espectro dos níveis mais baixos é diferente daquele apresentado pelo *MDI*, onde ocorriam cruzamento de níveis. Desta vez os níveis não se cruzam, e sim alguns deles tendem a se evitarem quando se aproximam, e outros se aproximam bastante passando a impressão de que existe de fato um encontro, mas não se cruzam [27]. Conforme aumentamos o valor de J , percebemos que, os dois primeiros níveis de energia se aproximam cada vez mais perto de $\lambda_+ = 1$. Esta aproximação é um forte indício de que existirá um ponto de não analiticidade, no limite em que $J \rightarrow \infty$, para a energia do estado fundamental, o que caracteriza uma *TFQ*. Resta apenas saber a natureza desta transição e o ponto onde esta ocorre. Como não há cruzamento de níveis, espera-se que este seja um caso de *TFQ* de segunda ordem.

Na verdade, o grande problema para qualquer sistema é encontrar uma forma de alcançar o limite termodinâmico ($J \rightarrow \infty$) analiticamente. Neste sistema, existe uma forma bem interessante de se atingir tal limite [28, 29, 30].

Outro comportamento diferente do *MDI* é de que para $\lambda_+ > 0$ o estado fundamental do sistema já é diferente de $|0, -J\rangle$, ou seja, existe uma ocupação de estados de número não nulo do campo e o sistema de N átomos possui um valor médio de átomos de dois níveis no estado excitado diferente de zero, mesmo para um valor pequeno do parâmetro de interação.

A estatística de níveis para este modelo, encontrada nas referências [29, 32], também fornece resultados interessantes. Para valores razoáveis de J ($J > 15$), a estatística de níveis possui uma *NND* próxima a de Poisson para $\lambda_+ \approx 0,4$ e converge para uma *NND* de Wigner para $\lambda_+ > 1$. Em palavras, este modelo passa de um comportamento “quase-integrável” para caótico quântico em $\lambda_+ \approx 1$.

Para ganhar um pouco mais de intuição sobre a natureza deste sistema, vamos observar o comportamento da derivada da energia do estado fundamental E_0 em função do parâmetro λ_+ , bem como sua energia E_0 normalizada para compararmos com o *MDI*.

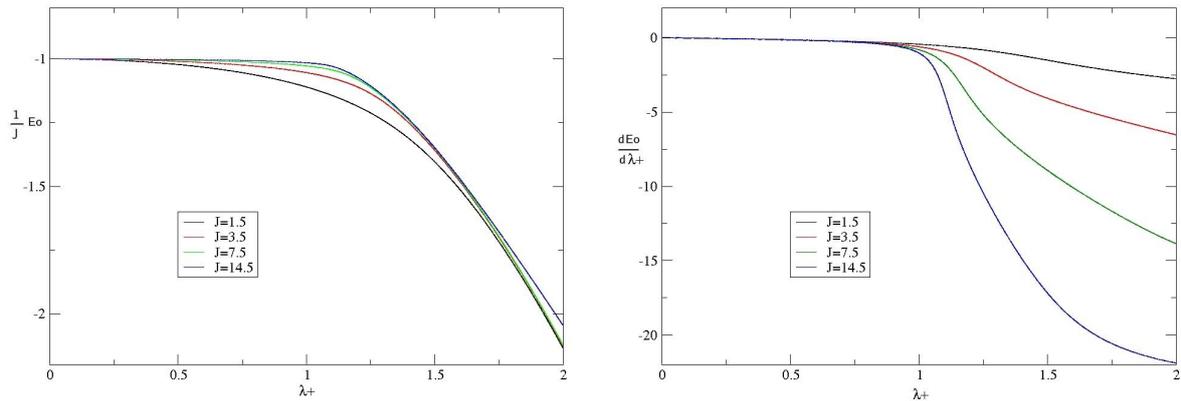


Figura 2.9: Gráfico de $\frac{1}{J}E_0$ por λ_+ (esquerda) e $\frac{dE_0}{d\lambda_+}$ por λ_+ (direita) para $J = 1.5, 3.5, 7.5$ e 14.5

O gráfico de E_0 normalizado em função de λ_+ neste modelo é de uma curva suave, diferentemente do mesmo tipo de gráfico para o *MDI* onde ocorriam bicos. Este fato já nos indica que não teremos descontinuidades na primeira derivada de E_0 com relação à λ_+ para este sistema, e de fato é o que ocorre se observarmos o gráfico da derivada acima. Este resultado simplesmente nos diz que, se ocorrer uma *TFQ* neste modelo, ela não será de primeira ordem. Mas existe uma propriedade da segunda derivada de E_0 que está relacionada com a natureza da transição, então vamos observar este fato no gráfico abaixo:

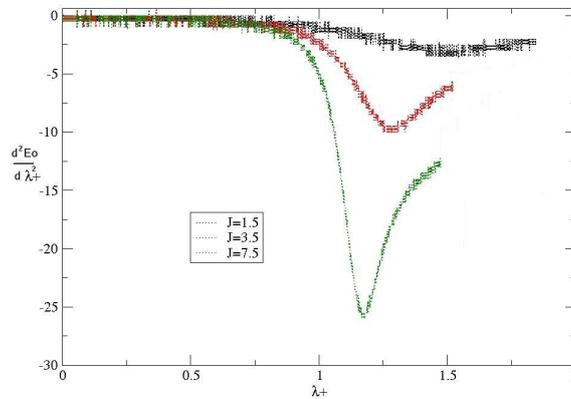


Figura 2.10: Gráfico de $\frac{d^2E_0}{d\lambda_+^2}$ por λ_+ para $J = 1.5, 3.5$ e 7.5

Percebemos que conforme aumentamos o valor de J a curva vai formando um mínimo cada vez mais pontudo e com um valor cada vez menor. Se pensarmos no limite, onde $J \rightarrow \infty$, é razoável imaginar que a segunda derivada de E_0 com respeito à λ_+ não será mais contínua, de fato reproduzimos um dos resultados do trabalho [28]. O que de realmente interessante acontece com o gráfico da segunda derivada de E_0 com respeito a λ_+ é uma descontinuidade desta função exatamente em $\lambda_+ = 1$, o que nos indica uma *TFQ* de

segunda ordem para o *MDNI*.

Finalmente podemos ver como se comporta o emaranhamento entre os subsistemas átomo e campo e ver se conseguimos mais um elemento que indique uma *TFQ* de segunda ordem.

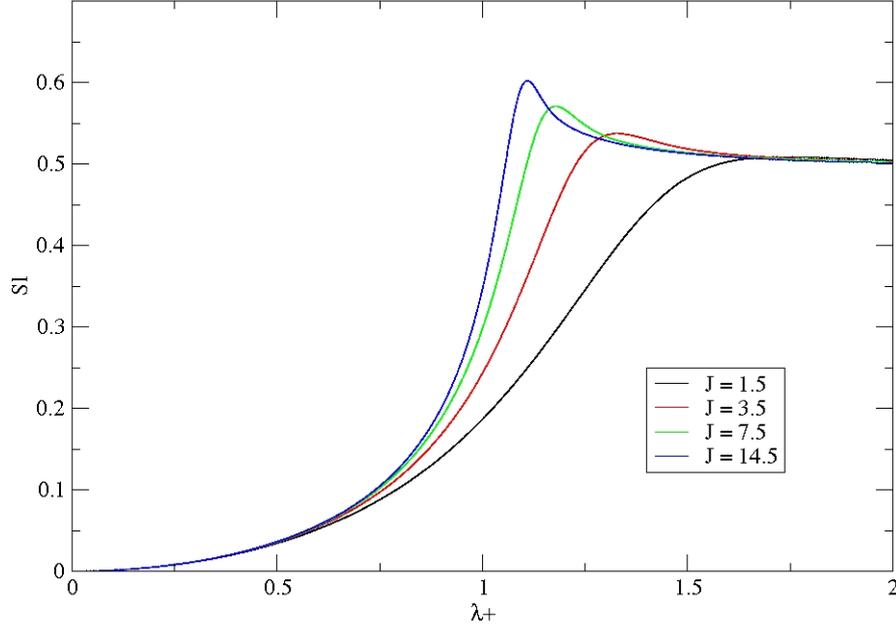


Figura 2.11: Gráfico da Entropia Linear S_l por λ_+ para alguns valores de J

Diferentemente do caso do *MDI* onde ocorre uma descontinuidade da *ELA*, neste modelo obtemos uma curva suave que conforme aumentamos o valor de J , o máximo começa a se destacar e a ficar cada vez mais pontiagudo. Novamente reproduzimos resultados já obtidos na literatura [29, 30].

O único resultado que não obtivemos foi no limite em que $J \rightarrow \infty$. Nesta situação ocorre uma divergência para a Entropia de von Neumann exatamente em $\lambda_+ = 1$ (ou $\frac{\lambda_+}{\omega_a} = 1$) [28]. Esta situação caracteriza uma *TFQ* de segunda ordem, separando este modelo, que é o *Modelo de Dicke* proposto originalmente em duas fases: Uma normal, antes da transição e outra fase *Superradiante*.

Novamente faremos um estudo do análogo clássico para ver se ocorre algum fenômeno interessante no ponto de *TFQ* e para compararmos com o *MDI*.

Análise Clássica

Para encontrar o Hamiltoniano Clássico do *MDNI*, H_{MDNI} , utilizaremos o mesmo processo feito no modelo anterior:

$$H_{MDNI} = \langle z, w | H | z, w \rangle = z\bar{z} - J \left(\frac{1 - w\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \right) + \frac{2\lambda\sqrt{2J}}{1 + w\bar{w}} (\bar{w}z + w\bar{z} + wz + \bar{w}\bar{z}) \quad (2.92)$$

Passando para as coordenadas cartesianas q e p , o Hamiltoniano Clássico é escrito da seguinte forma:

$$H_{MDNI} = \frac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2 - 2J) + \frac{\lambda}{\sqrt{J}}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}p_1p_2 \quad (2.93)$$

Como este modelo pode ser entendido como o *MDI* com a inserção do termo contra girante, podemos nos perguntar agora se este Hamiltoniano Clássico é integrável ou não. Como vimos no sistema quântico deste modelo, o termo contra-girante quebra a constante de movimento que existia no *MDI*, e além disso também quebra parte de sua simetria [25]. Portanto este sistema é caótico. Abaixo segue uma Seção de Poincaré para visualizar este fato:

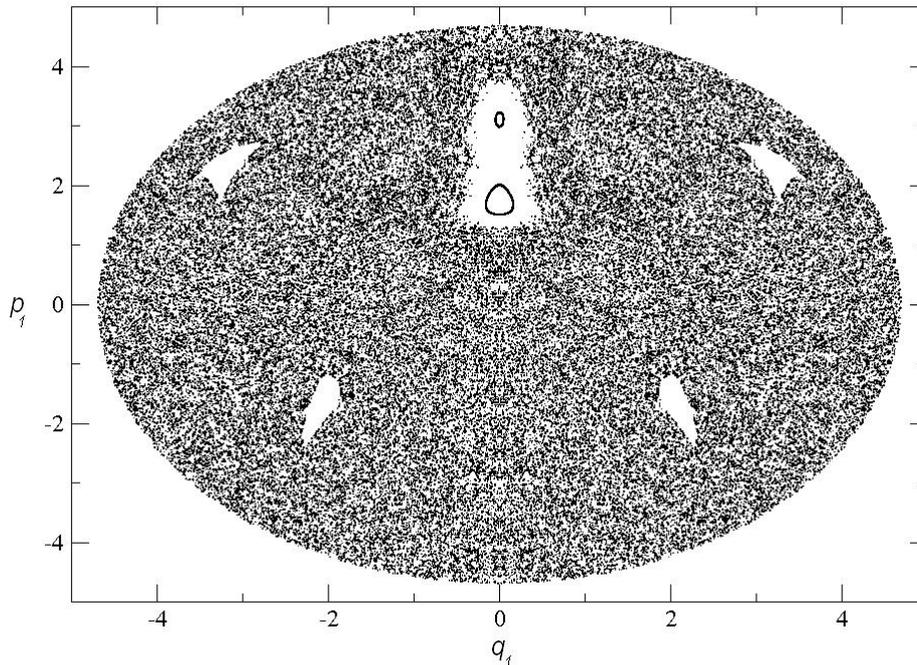


Figura 2.12: Seção de Poincaré para $J = 5.5$, $\lambda_+ = 1.0$ e $E = 11.0$

Encontraremos agora os pontos fixos de H_{MDNI} através das Equações de Hamilton:

$$\dot{q}_1 = -\frac{\partial H_{MDNI}}{\partial p_1} = -p_1 - \lambda\sqrt{\frac{2}{J}}p_2\sqrt{2J - H_1} + \lambda\sqrt{\frac{2}{J}}\frac{p_1^2p_2}{\sqrt{2J - H_1}} = 0 \quad (2.94)$$

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial H_{MDNI}}{\partial q_1} = q_1 + \lambda\sqrt{\frac{2}{J}}\frac{q_1p_1p_2}{\sqrt{2J - H_1}} = 0 \quad (2.95)$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{\partial H_{MDNI}}{\partial p_2} = -p_2 - \lambda\sqrt{\frac{2}{J}}p_1\sqrt{2J - H_1} = 0 \quad (2.96)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\partial H_{MDNI}}{\partial q_2} = q_2 + \lambda\sqrt{\frac{2}{J}}q_1\sqrt{2J - H_1} = 0 \quad (2.97)$$

Onde novamente $H_1 = \frac{q_1^2 + p_1^2}{2}$ e os pontos fixos podem ser encontrados [24, 25]:

i. Solução trivial: Estável para $\lambda_+ < 1$

$$q_1 = p_1 = q_2 = p_2 = 0 \quad (2.98)$$

ii. Solução não trivial: Estável para $\lambda_+ \geq 1$

$$q_1 = q_2 = 0 \quad (2.99)$$

$$p_1^\pm = \pm \sqrt{\frac{J(4\lambda_+^2 - 1)}{2\lambda_+^2}} \quad (2.100)$$

$$p_2^\mp = \mp \sqrt{4J\lambda_+^2 - \frac{J}{4\lambda_+^2}} \quad (2.101)$$

Assim como no sistema anterior, temos uma solução trivial estável (i), ou seja a origem $(0, 0)$ tanto para o átomo quanto para o campo, mas neste caso para $\lambda_+ < 1$. Mas diferentemente do sistema anterior, após a transição, ou seja, no caso (ii), obtemos uma solução estável correspondente a dois pares ordenados para o átomo (1) e dois para o campo (2): os pares ordenados $(0, p_1^\pm)$ para o átomo e os pares $(0, p_2^\mp)$ para o campo. Este é outro tipo de bifurcação e leva o nome de *Bifurcação do tipo Pitchfork* [31]. Se tomarmos apenas o sistema atômico, observamos que, para $\lambda_+ < 1$ o ponto fixo é a origem $(0, 0)$, aumentando o valor do parâmetro de tal forma que $\lambda_+ > 1$, ocorre o surgimento de dois pares ordenados, que se distanciam conforme aumentamos o valor do parâmetro.

Aqui é preciso mencionar uma hipótese sobre tipos de sistema em que ocorre bifurcação do tipo *Pitchfork*. Em um trabalho recente, Hines [31] sugere que todo sistema quântico que sofre uma transição de fase quântica de segunda ordem, tem, em seu análogo clássico, bifurcações de ponto fixo do tipo *Pitchfork*.

FWA e Comparações

Faremos o mesmo processo da seção anterior, utilizando a *FWA* para confrontar os resultados quânticos e clássicos.

Escolhemos alguns valores de J e λ para ver o comportamento das *FWA* neste sistema. Esperamos que ocorra um comportamento semelhante ao conjunto de pontos fixos do análogo clássico.

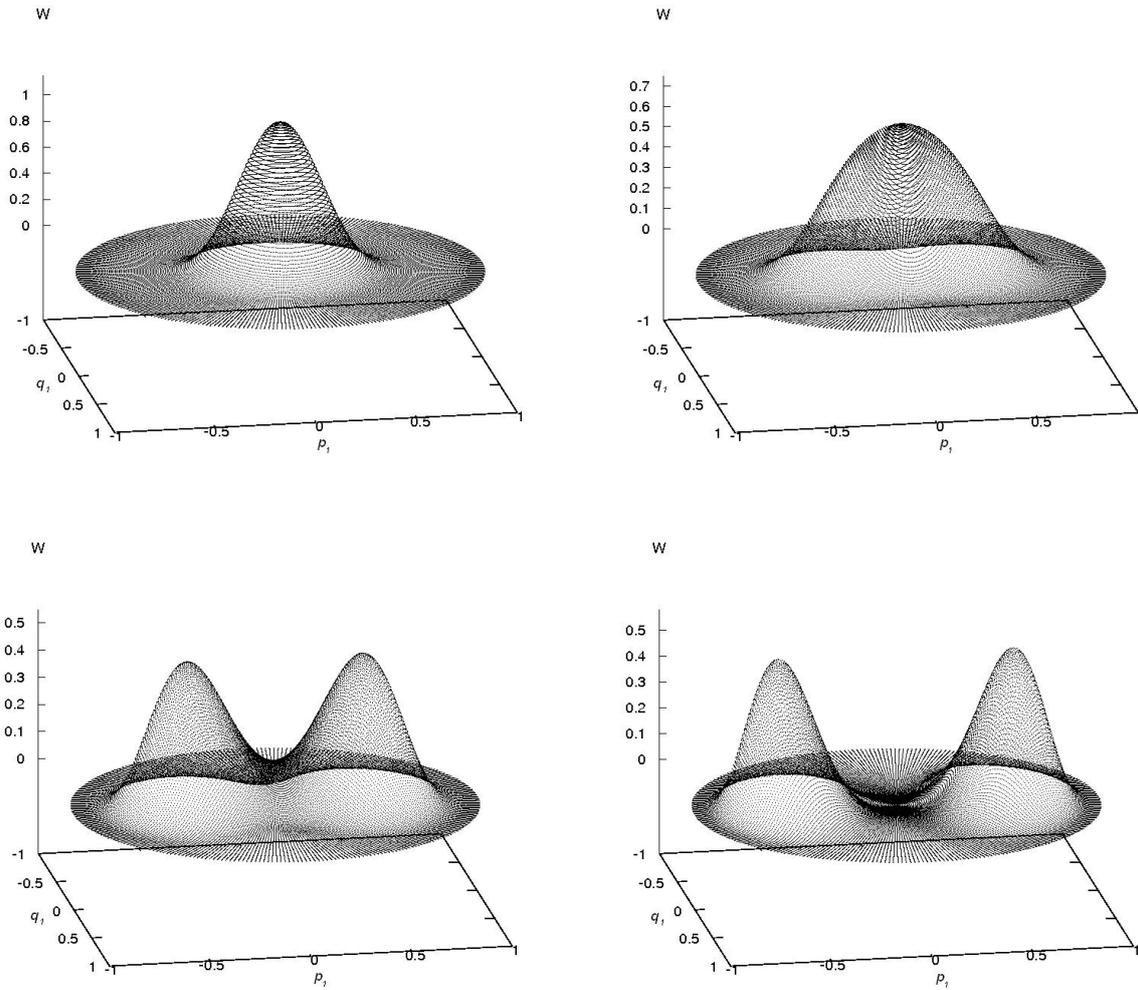


Figura 2.13: FWA normalizada para $J = 3.5$, para $\lambda_+ = 0.5$ (esquerda em cima), para λ_+ no máximo da *ELA* (direita em cima), para $\lambda_+ = 1.4$ (esquerda embaixo) e $\lambda_+ = 1.8$ (direita embaixo)

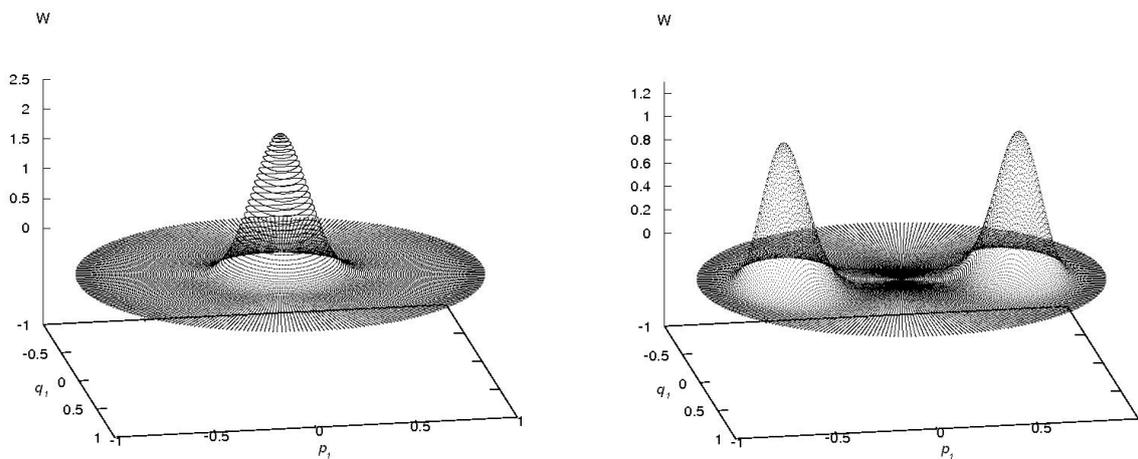


Figura 2.14: FWA normalizada para $J = 7.5$, para $\lambda_+ = 0.5$ (esquerda) e $\lambda_+ = 1.8$ (direita)

Novamente observamos, para $\lambda_+ < 1$, uma superfície com o pico centrado na origem, o que esta de acordo com os resultados obtidos na análise do análogo clássico, já que a origem é o ponto fixo estável para $\lambda_+ < 1$. Conforme aumentamos o valor do parâmetro λ_+ , de tal forma que ele passe a transição, ocorre um fenômeno curioso. A *FWA* se divide em dois lóbulos, e conforme aumentamos o valor de λ_+ estes lóbulos se afastam. Percebemos que ocorreu uma quebra de simetria, já que este sistema não possui mais a mesma característica do *MDI*. Neste caso existe uma direção preferencial.

Mais uma vez temos uma concordância nos resultados quânticos e clássicos, já que, após a transição, temos dois pares ordenados de pontos fixos estáveis do análogo clássico, que se distanciam conforme aumentamos o parâmetro de interação λ_+ . Vamos colocar em um gráfico os resultados quântico e clássicos para a melhor visualização:

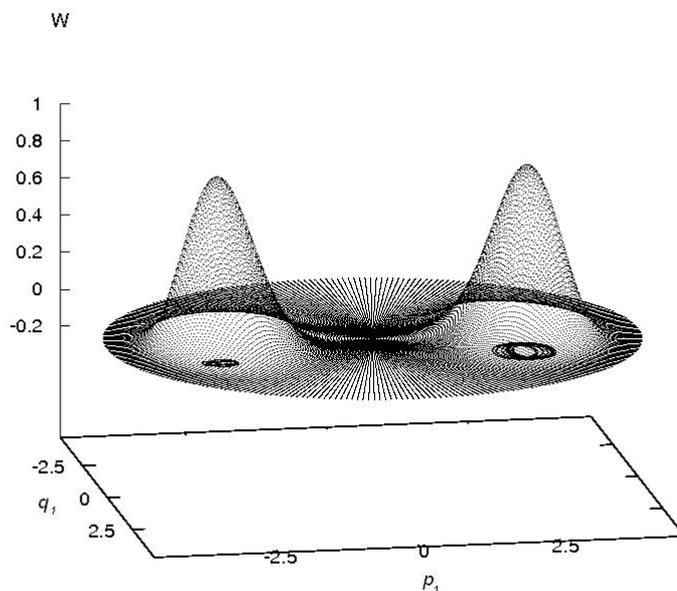


Figura 2.15: FWA com trajetória

Novamente, para produzir as trajetórias, utilizamos a energia do sistema clássico um pouco acima do mínimo, com duas condições iniciais próximas dos dois pontos fixos.

Assim como no *MDI*, existe uma concordância entre os resultados quânticos e clássicos, já que as trajetórias clássicas se concentram próximas aos centros dos lóbulos da *FWA*.

Capítulo 3

O MD com um termo de interação de dois fótons

No capítulo anterior fizemos um estudo detalhado do *Modelo de Dicke* com base em trabalhos já existentes. A análise quântica de ambos os sistemas mostrou a presença de *TFQ*, sendo que a natureza dela é diferente para cada um dos modelos. O estudo do análogo clássico dos modelos também forneceu algumas diferenças fundamentais, em especial, com respeito a natureza da bifurcação de equilíbrio, que nos deu uma pista para as diferenças do estado fundamental nos dois modelos.

Neste capítulo vamos estudar o *MD* com um termo adicional de dois fótons (*MD2F*). Nossa idéia agora é adicionar um termo de interação de dois fótons no *MDI* para ver como esta pequena modificação afeta as propriedades quânticas e clássicas deste novo sistema e se estas possuem proximidade com algum dos modelos estudados no capítulo 2.

Procedemos como no capítulo anterior, separando as análises quânticas e clássicas para então tentar relaciona-las no espaço de fase através da *FWA*.

Esperamos que os novos operadores de dois fótons que inserimos para gerar o *MD2F* nos apresente resultados distintos dos modelos anteriores, tanto em relação à *TFQ* como em relação à bifurcação de equilíbrio do análogo clássico.

3.1 Análise Quântica

Escrevemos o Hamiltoniano deste modelo ¹, na ressonância $\omega = \omega_a = 1$ e $\hbar = 1$, como:

$$\mathcal{H}_{MD2F} = a^\dagger a + J_z + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}}(aJ_+ + a^\dagger J_-) + \frac{\lambda'}{2J}(a^2 J_+ + a^{\dagger 2} J_-) \quad (3.1)$$

¹Este Hamiltoniano pode ser deduzido a partir de primeiros princípios como no *MDI* com a aplicação de campo externo clássico apropriado [34]

Aqui temos o termo de interação de um fóton com acoplamento λ e o termo de interação de dois fótons com acoplamento λ' . Uma condição importante para que este modelo seja físico é de que $\lambda' < 1$, de preferência que ele seja bem pequeno. Para observarmos as propriedades já mencionadas da matriz que descreve este Hamiltoniano, vamos mostrar os primeiros termos desta matriz para $J = \frac{1}{2}$ ($N = 1$) na mesma ordenação do capítulo 2: $|0, -\frac{1}{2}\rangle$, $|0, \frac{1}{2}\rangle$, $|1, -\frac{1}{2}\rangle$, $|1, \frac{1}{2}\rangle$, $|2, -\frac{1}{2}\rangle$, etc. Ou seja, utilizando o *Número de Excitação* como guia.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \lambda & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \lambda\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda' \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda' & 0 & \lambda\sqrt{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \lambda\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda' & 0 & \lambda\sqrt{3} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Como este Hamiltoniano possui os termos do *MDI*, então temos os elementos de uma matriz que é bloco diagonal e também elementos que conectam estes blocos, provenientes do termo de dois fótons. De fato esta matriz pode ser separada em dois blocos, o primeiro no início que é um bloco unitário 1×1 e o segundo bloco que é infinito. A impossibilidade de deixar esta matriz como bloco diagonal, em especial para a ordenação que fizemos utilizando o número de excitação, está no fato de que \hat{N} não é uma constante de movimento deste sistema:

$$[\mathcal{H}_{MD2F}, \hat{N}] \neq 0 \quad (3.2)$$

Portanto, não temos uma forma simples de encontrar o estado fundamental do sistema, então devemos recorrer ao procedimento utilizado no *MDNI*. Truncamos esta matriz escolhendo apropriadamente um valor para n_{max} (próximo de 100), em seguida diagonalizamos computacionalmente para encontrar os autovalores de energia. Podemos então observar o espectro de baixas energias deste sistema para alguns valores distintos de J (N), onde tomamos um valor fixo para o parâmetro de interação de dois fótons, escolhemos $\lambda' = 0.1$.

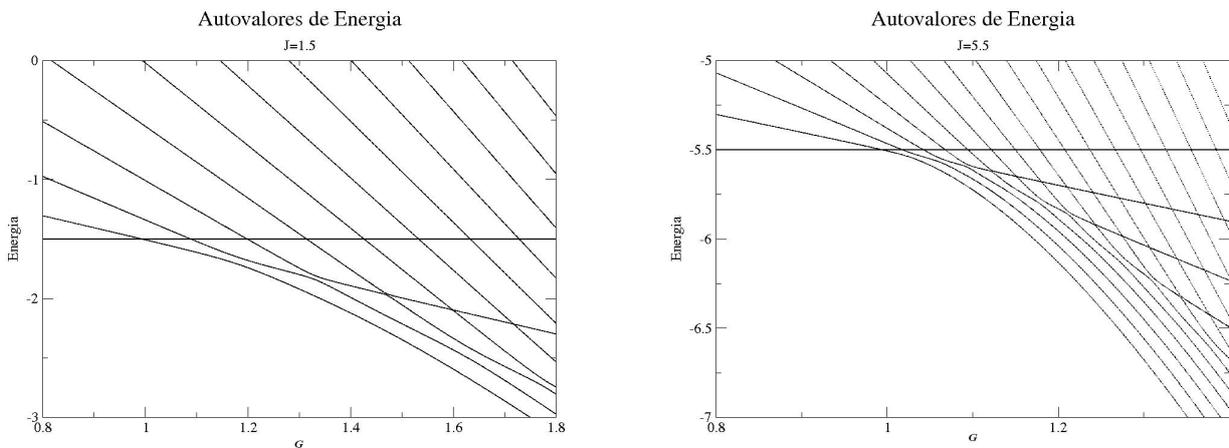


Figura 3.1: Gráfico do espectro inferior para $J = 1.5$ (esquerda) e $J = 5.5$ (direita)

O primeiro comportamento a se notar nas figuras acima é de que existe de fato um único cruzamento de níveis, do nível fundamental, a saber, aquele cujo estado é $|0, -J\rangle$ com o primeiro excitado, e este ocorre em um valor próximo de $\lambda = 1$. Aumentando ainda mais o valor de λ percebemos que não ocorre mais cruzamentos entre os primeiros níveis, e sim uma leve repulsão entre o fundamental e primeiro excitado, embora o nível de energia correspondente a spin down e zero fótons $|0, -J\rangle$ continue cruzando todos os níveis que diminuem a energia abaixo de $-J$.

Este cruzamento de níveis, entre o estado fundamental e o primeiro excitado, ocorre para valores de J distintos, o que é um forte indício de *TFQ* de primeira ordem. Para fortalecer este fato vamos olhar a derivada da energia do estado fundamental E_0 em função de λ para este sistema e também E_0 normalizado.

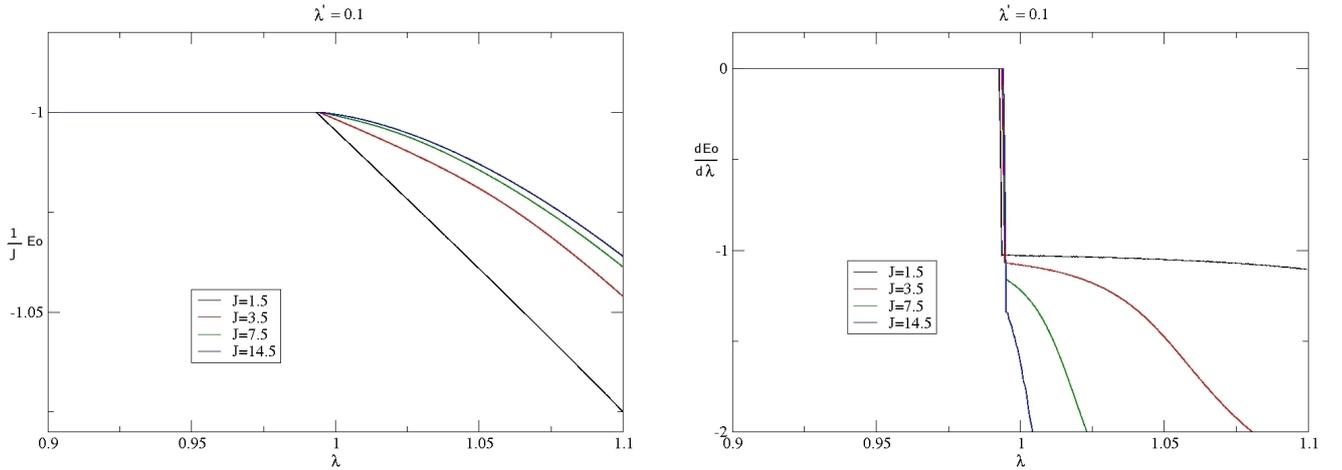


Figura 3.2: Gráfico de $\frac{1}{J}E_0$ por λ (esquerda) e $\frac{dE_0}{d\lambda}$ por λ (direita) para $\lambda' = 0.1$.

O gráfico da derivada de E_0 com relação a λ neste modelo mostra uma descontinuidade nas proximidades de $\lambda = 1$ para qualquer valor de J . Mais do que isso, esta descontinuidade só aumenta conforme o tamanho de J cresce.

Sendo assim, não esperamos que para valores maiores de J esta descontinuidade da derivada de E_0 em função de λ pare de crescer e volte a ser contínua. Então, estamos lidando com um sistema que sofre uma *TFQ* de primeira ordem nas proximidades de $\lambda = 1$.

Por último, podemos utilizar a *ELA* para analisar o emaranhamento bipartite entre os subsistemas átomo e campo, e também para confirmar a presença de uma *TFQ* de primeira ordem neste sistema.

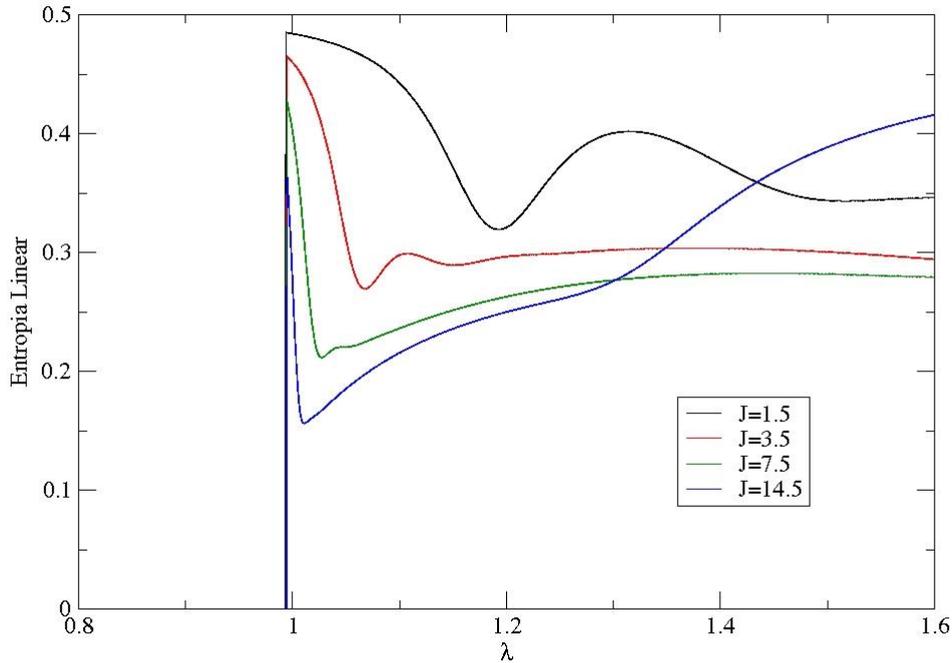


Figura 3.3: Gráfico da entropia linear S_l por λ

O gráfico acima mostra um comportamento interessante. Para valores de λ menores que aproximadamente 1, o valor da ELA é zero não importante o valor de J . Em outras palavras, não há emaranhamento entre os subsistemas átomo e campo. Aumentando um pouco mais o valor do parâmetro λ a ELA repentinamente dá um salto, e o tamanho deste salto é maior para valores pequenos de J , e a medida que aumentamos o número de átomos o tamanho deste salto diminui.

Aumentando ainda mais o parâmetro λ notamos a existência de um mínimo local na ELA qualquer que seja o valor de J . Em outras palavras, existe um certo ponto, para cada valor de J , que os subsistemas átomo e campo estão menos emaranhados. Para valores pequenos de J , este mínimo está a uma certa distância de $\lambda = 1$ e o valor de sua entropia não está próximo de zero. Conforme tomamos valores maiores de J , notamos que este mínimo local ocorre cada vez mais próximo de $\lambda = 1$ e também o valor de sua entropia torna-se mais próximo de zero.

Lembrando que só é possível falar em TFQ para o limite termodinâmico $J \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ com N/V fixo, temos um fenômeno interessante para analisar neste gráfico da ELA em função de λ . Imaginamos que neste limite, o mínimo local tenha um valor de entropia cada vez mais próximo de zero, e este mínimo ocorre cada vez mais próximo do ponto onde ocorre o salto, e que este salto, por sua vez tem um tamanho cada vez menor.

Infelizmente não temos um processo analítico para encontrar este limite, como existe por exemplo no

MDNI [28, 29, 30]. Podemos apenas estudar com um pouco mais de cautela este efeito através da *FWA*, após a análise clássica deste sistema.

3.2 Análise Clássica

Para encontrar o análogo clássico deste novo modelo utilizaremos o mesmo processo feito no capítulo anterior:

$$H_{MD2F} = z\bar{z} - J\left(\frac{1 - w\bar{w}}{1 + w\bar{w}}\right) + \frac{\lambda\sqrt{2J}}{1 + w\bar{w}}(\bar{w}z + w\bar{z}) + \frac{2\lambda'J}{1 + w\bar{w}}(z^2\bar{w} + \bar{z}^2w) \quad (3.3)$$

Vamos passar agora para as coordenadas canônicas q e p utilizando (1.39) e (1.40), mas primeiramente definimos os seguintes raios:

$$R_i = q_i^2 + p_i^2 \quad (3.4)$$

onde $i = 1$ se refere ao átomo, enquanto $i = 2$ se refere ao campo. Finalmente escrevemos o Hamiltoniano do análogo clássico como:

$$H_{MD2F} = \frac{R_2^2}{2} + \left(\frac{R_1^2}{2} - J\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}}\sqrt{2J - \frac{R_1^2}{2}}(p_1p_2 + q_1q_2) + \frac{\lambda'}{2J}\sqrt{J - \frac{R_1^2}{4}}(p_1(p_2^2 - q_2^2) + 2q_1p_2q_2) \quad (3.5)$$

Os três primeiros termos de H_{MD2F} formam exatamente o Hamiltoniano Clássico do *MDI*, que é um sistema que possui uma constante de movimento e muita simetria, e que portanto, como diz o nome, é integrável. Então é razoável imaginar que a inserção do termo de dois fótons no Hamiltoniano, que gera o quarto termo do H_{MD2F} , quebre a constante de movimento bem como algumas dessas simetrias.

De fato, como vimos no sistema quântico deste modelo, o *Número de Excitação* não é mais uma constante de movimento do sistema, e uma única simetria persiste neste novo modelo, a saber: $(q_1, q_2) \rightarrow (-q_1, -q_2)$. Portanto, este modelo apresenta caos, embora pelo fato do termo de quebra de integrabilidade ser pequeno, esperamos uma seção de Poincaré mista.

Abaixo, na figura (3.4) temos uma seção de Poincaré para visualizar este fato.

Encontraremos agora os pontos fixos de H_{MD2F} através das Equações de Hamilton:

$$\dot{q}_1 = p_1 - \frac{\lambda p_1}{2\sqrt{2J}A}(p_1p_2 + q_1q_2) + \frac{\lambda}{2J}Ap_2 - \frac{\lambda'p_1}{4\sqrt{2J}A}[p_1(p_2^2 - q_2^2) + 2q_1q_2p_2] + \frac{\lambda'}{2\sqrt{2J}}A(p_2^2 - q_2^2) = 0 \quad (3.6)$$

$$\dot{p}_1 = q_1 - \frac{\lambda q_1}{2\sqrt{2J}A}(p_1p_2 + q_1q_2) + \frac{\lambda}{2J}Aq_2 - \frac{\lambda'q_1}{4\sqrt{2J}A}[p_1(p_2^2 - q_2^2) + 2q_1q_2p_2] + \frac{\lambda'}{\sqrt{2J}}A(q_2p_2) = 0 \quad (3.7)$$

$$\dot{q}_2 = p_2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}}Ap_1 + \frac{\lambda'}{\sqrt{2J}}A(p_1p_2 + q_1q_2) = 0 \quad (3.8)$$

$$\dot{p}_2 = q_2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}}Aq_1 + \frac{\lambda'}{\sqrt{2J}}A(q_1p_2 - p_1q_2) = 0 \quad (3.9)$$

onde $A = \sqrt{2J - \frac{R_1^2}{2}}$. Estamos procurando o conjunto de pontos que satisfaz mutuamente as quatro equações. A aposta que fazemos é de que devemos achar para as coordenadas q_1 e p_1 uma equação do tipo : $q_1^2 + p_1^2 = f(\lambda, \lambda', J)$.

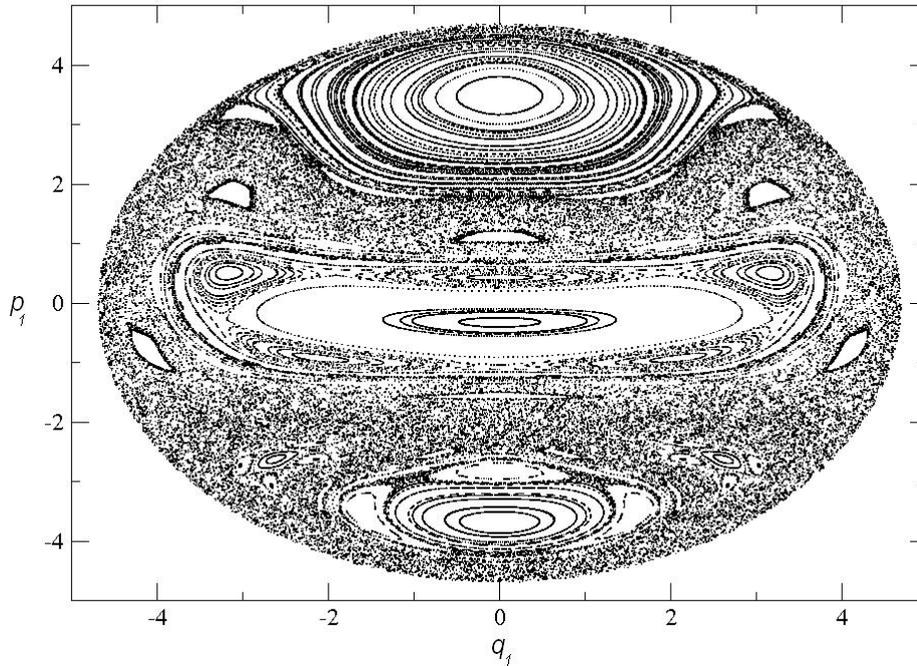


Figura 3.4: Seção de Poincaré para $J = 5.5$, $\lambda' = 0.1$, $\lambda = 0.5$ e $E = 11.0$

A primeira idéia então é isolar uma equação apenas com as coordenadas de índice 1. É possível fazer isso se tomarmos as equações $q_1 \cdot (3.9) + p_1 \cdot (3.8) = 0$ e $p_1 \cdot (3.9) - q_1 \cdot (3.8) = 0$ para q_1 e p_1 diferentes de zero. Desta forma obtemos:

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}} A R_1^2 + \frac{\lambda'}{\sqrt{2J}} A p_2 R_1^2 = 0 \quad (3.10)$$

$$p_1 q_2 - q_1 p_2 - \frac{\lambda'}{\sqrt{2J}} A q_2 R_1^2 = 0 \quad (3.11)$$

Utilizando estas equações com as próprias equações (3.8) e (3.9) podemos, com alguma álgebra isolar as coordenadas com índice 2:

$$q_2 = -\frac{\sqrt{2J} J \lambda A q_1}{2J^2 - \lambda'^2 R_1^2} \quad (3.12)$$

$$p_2 = \lambda A \sqrt{J} \left(\frac{\lambda' R_1^2 A - \sqrt{2} J p_1}{2J^2 - \lambda'^2 R_1^2 A^2} \right) \quad (3.13)$$

Como as coordenadas de índice 2 estão em função das coordenadas de índice 1, podemos substituí-las nas equações (3.6) e (3.7). O passo de encontrar um formato para $q_1^2 + p_1^2$ se torna bem maçante devido à álgebra, mas após algumas contas conseguimos encontrar:

$$q_1^2 + p_1^2 = \sqrt{2J(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda'^2}})} \quad (3.14)$$

Apesar de ser uma forma razoável para um conjunto de pontos fixos, note que ela não se encaixa no nosso problema, já que, sendo λ' pequeno, o argumento da raiz acima é negativo e esta equação não possui solução real.

Desta forma, como não vislumbramos outro conjunto simples de pontos fixos estáveis para o índice 1, faremos uma busca destes pontos numericamente. Vamos tomar, para um sistema, um J fixo e uma certa energia para o sistema um pouco maior que a energia mínima. Obtemos então alguns gráficos de trajetórias.

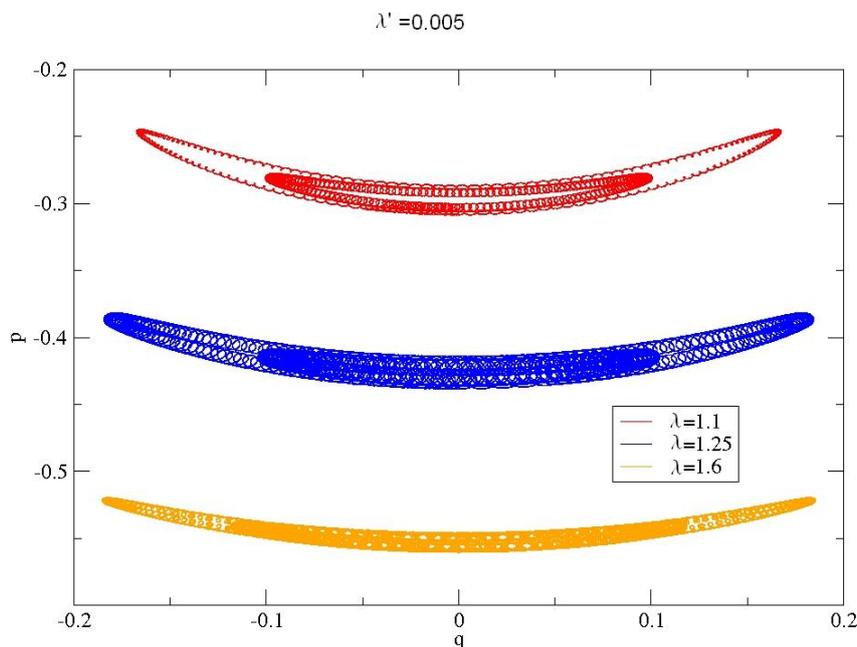


Figura 3.5: Trajetórias para $J = 1.5$ e $\lambda' = 0.005$

3.3 FWA e Comparações

Vamos novamente confrontar os resultados quânticos e clássicos através da *FWA* para este sistema. Para tal propósito escolhemos alguns valores de J e λ para observar que tipo de mudanças ocorre na *FWA* para este sistema.

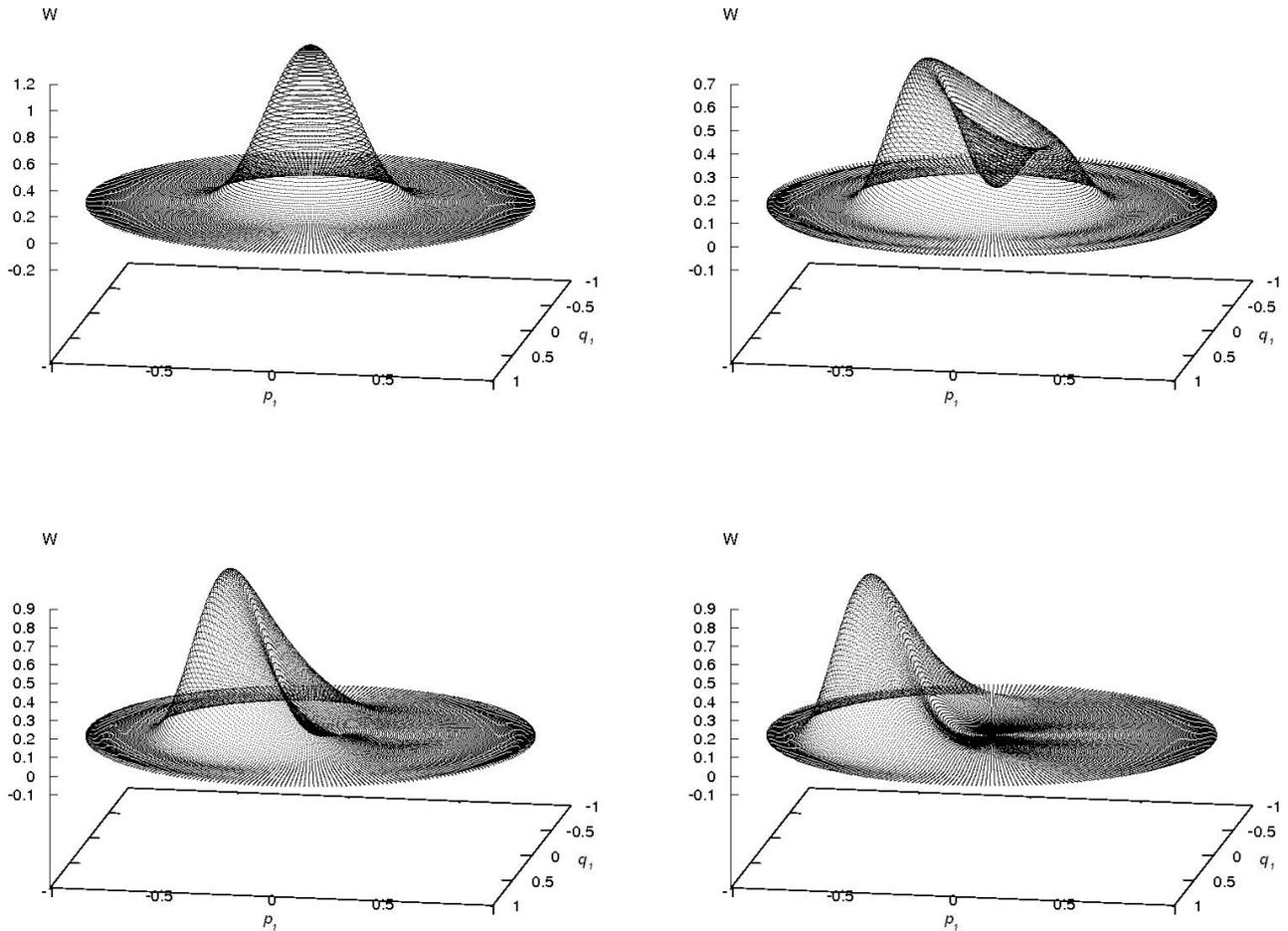


Figura 3.6: FWA normalizada para $J = 3.5$, para $\lambda = 0.8$ (esquerda em cima), para $\lambda = 1$ (direita em cima), para $\lambda = 1.068$ no mínimo da ELA (esquerda embaixo) e $\lambda = 1.4$, além do mínimo (direita embaixo)

Assim como ocorre no *MDI*, antes da transição a *FWA* é uma distribuição centrada na origem para qualquer valor de J , o que está novamente de acordo com a análise clássica, que fornece a origem como ponto fixo estável. Logo após a transição, a *FWA* toma a forma de um “pudim”, mas não uniforme como no caso do *MDI*, já que um dos lados da *FWA* está um pouco tombado. E este é exatamente o resultado que foi obtido na análise do análogo clássico, onde a trajetória se acumula em um dos lados da circunferência no espaço de fase, exatamente o mesmo lado onde a *FWA* é maior. Novamente existe uma semelhança entre os resultados quânticos e clássicos.

Aumentando ainda mais o valor do parâmetro λ , observamos que o lado tombado vai a zero enquanto o outro lado cresce, e se aumentarmos o parâmetro λ ainda mais, observamos apenas que o lado remanescente da *FWA* se distancia um pouco mais da origem, enquanto o lado tombado permanece zero.

Existe um outro fato muito curioso neste modelo, se tomarmos o gráfico da *ELA* notamos que para todo J existe um mínimo logo após a transição. Este fenômeno como função de J já foi discutido. O que podemos fazer agora é analisar exatamente o que acontece com a *FWA* nestes mínimos, onde os subsistemas átomo e

campo estão menos emaranhados.

Uma forma de entender o comportamento da entropia é apelar para o conceito de que a entropia pode ser vista como uma contagem de estados ocupados no espaço de estados (espaço de fase, classicamente). Assim, se associarmos o tamanho da área $S_0(\lambda)$ sob a FWA à meia altura na figura 3.6, nota-se que esta área dá um salto quando $\lambda = \lambda_c = 1$ e em $\lambda = 1.068$ novamente.

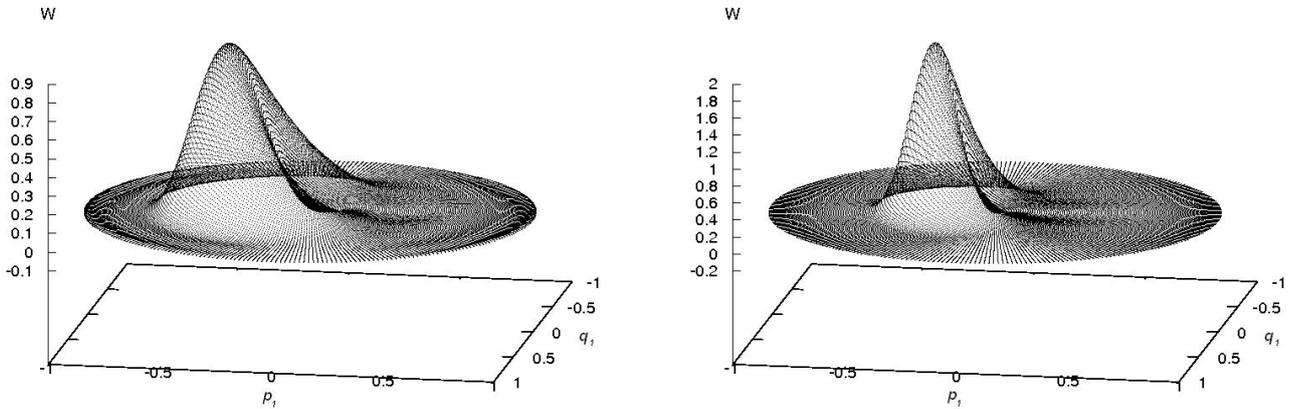


Figura 3.7: FWA para λ no mínimo da ELA. $J = 3.5$ (esquerda) e $J = 7.5$ (direita)

Notamos que um dos lados da FWA cai a zero, e este fenômeno ocorre independentemente do valor de J escolhido. Na verdade, se variarmos lentamente o parâmetro λ entre o ponto logo após a transição, e o mínimo, descobriremos que este lado tombado do “pudim” vai a zero suavemente. Se continuarmos aumentando o valor de λ , depois de passar o mínimo, o lado tombado permanece em zero e o máximo da FWA apenas se afasta da origem.

Como estas funções de distribuição Wigner possuem uma certa simetria, vamos utilizar apenas a vista lateral dela, que já possui toda a informação necessária para análise. Colocamos agora de perfil alguns gráficos sobrepostos da FWA normalizada (Figura 3.8), nos mínimos da ELA para alguns valores de J , para observarmos qual é o comportamento do sistema.

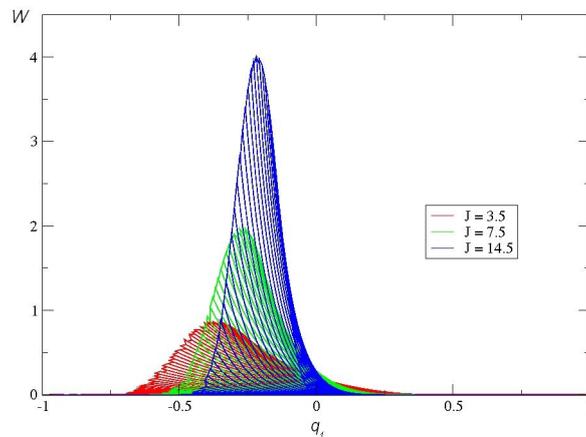


Figura 3.8: FWA em perfil para λ no mínimo da ELA

Notamos que o aumento de J provoca também um aumento do valor do máximo da FWA , ou seja, uma concentração maior desta função bem como a aproximação do ponto onde ocorre este máximo com a origem do sistema.

Este resultado mostra uma correlação entre os comportamentos da ELA e FWA . O ponto de mínimo local no gráfico da ELA mostra uma região em que os subsistemas átomo e campo estão menos emaranhados, para o mesmo conjunto de dados a FWA nos mostra uma superfície centrada em uma região, que se aproxima cada vez mais da origem conforme aumentamos o valor de J . Esta superfície com um pico bem definido mostra uma certa direção preferencial para a FWA , ocorrendo portanto uma quebra de simetria neste sistema.

Novamente recorrendo à área $S_0(\lambda)$ sob a FWA , é claro que ela vai diminuindo com J na Figura 3.8, e essa diminuição é compatível com os picos da ELA na Figura 3.3 com λ . Enquanto que para o MDI , na Figura 2.5, quanto maior o raio onde está concentrada a FWA , maior seria $S_0(\lambda)$, assim a ELA cresce com λ .

É muito razoável imaginar que, quanto mais concentrada a FWA , menor é a entropia entre os subsistemas. De fato já existem resultados relacionando esta concentração de funções de quasi-probabilidade com entropia [20]. Resumindo: Neste sistema, antes da transição, a FWA esta centrada na origem e tem simetria circular, após a transição a FWA esta centrada fora da origem e ocorre uma quebra de simetria na amplitude da FWA embora mantendo a região circular. A manutenção da região circular é compreensível uma vez que o valor de $\lambda' = 0.1$ é pequeno comparado ao $\lambda > 1$ para estes casos.

Para confrontar os resultados quânticos e clássicos vamos colocar em um gráfico a FWA com uma trajetória clássica logo abaixo.

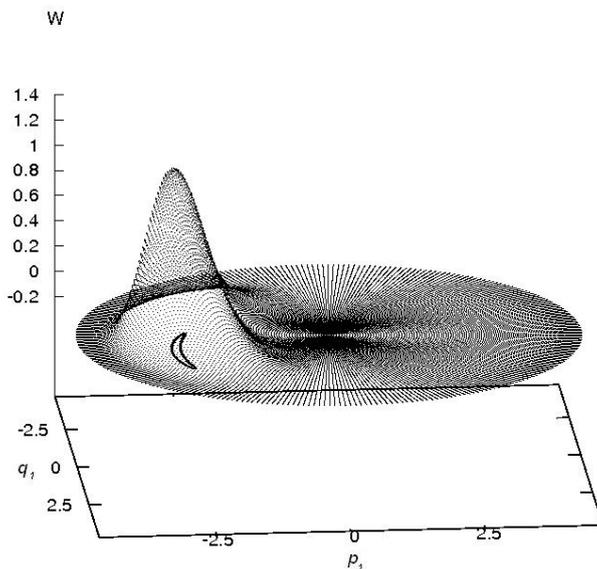


Figura 3.9: FWA com respectiva trajetória clássica para $J = 5.5$ e $\lambda = 1.8$

Novamente não existe discrepância entre os resultados quânticos e clássicos já que a trajetória se acumula exatamente no lado onde a FWA tem um pico protuberante.

Capítulo 4

Comparações e Conclusões

Neste capítulo serão desenvolvidas as conclusões deste trabalho referentes a semelhanças e diferenças entre os dois modelos já existentes na literatura, *MDI* e *MDNI*, e também um novo modelo proposto para o estudo de *TFQ* em sistemas spin-boson, *MD2F*.

Vamos separar estes resultados pelas análises feitas, como procedemos no estudo destes três modelos, ou seja, discutiremos as conclusões referentes às análises quânticas dos sistemas, depois às análises clássicas, etc., para no final atribuir a este trabalho uma conclusão geral.

4.1 Análise Quântica

Primeiramente vamos observar a estrutura matricial dos três Hamiltonianos, já que ordenamos a base da mesma forma para todos os casos.

1. **MDI**: Matriz bloco diagonal.
2. **MDNI**: Matriz esparsa não bloco diagonal.
3. **MD2F**: Matriz com dois blocos, um 1×1 e o outro bloco infinito e esparsa.

A estrutura das matrizes pode dizer muito sobre o sistema. Para o *MDI*, devido a seu corpo bloco diagonal, podemos encontrar de um modo simples as menores energias destes blocos, e com eles em mão, fica fácil encontrar a energia do estado fundamental. O que não é o caso do *MDNI*, onde podemos apenas encontrar esta energia do estado fundamental truncando o sistema para algum n_{max} e diagonalizar a matriz.

Já o *MD2F* é um caso que de certa forma possui um pouco das propriedades dos outros dois modelos. Existem dois blocos na matriz, sendo que um deles é infinito. Em palavras, já temos um valor de energia, referente ao primeiro bloco unitário, mas precisamos proceder truncando o sistema em um n_{max} para encontrar a energia do estado fundamental. Estas características, que estão relacionadas aos dois modelos anteriores, foi uma das motivações para estudar este sistema.

É necessário lembrar que o operador \hat{N} , o número de excitação, comuta apenas como Hamiltoniano do *MDI*, ou seja, ele é uma constante de movimento neste modelo. O mesmo não ocorre no *MDNI* e *MD2F* onde o número de excitação não comuta com o Hamiltoniano dos dois sistemas, ou seja, \hat{N} não é uma constante de movimento para estes dois sistemas. Como utilizamos este operador para ordenar a base das três matrizes, fica fácil entender por que apenas o *MDI* é totalmente bloco diagonal.

A manifestação imediata da estrutura matricial dos Hamiltonianos ocorre no estudo do espectro inferior dos sistemas, em especial, na energia do estado fundamental.

1. **MDI**: Cruzamento entre os níveis. A energia do estado fundamental em função de λ é uma curva seccionalmente contínua.
2. **MDNI**: Alguns cruzamentos e algumas repulsões entre níveis. Se considerarmos apenas estados de mesma paridade, só repulsão. A energia do estado fundamental em função de λ_+ é uma curva suave e a energia do próximo nível se aproxima rapidamente conforme aumentamos o valor de λ_+
3. **MD2F**: Alguns cruzamentos e algumas repulsões entre níveis. A energia do estado fundamental em função de λ possui um bico nas proximidades de $\lambda = 1$, onde ocorre um cruzamento, e depois ela é uma curva suave.

O caso do *MDI* já foi discutido, os menores autovalores dos blocos possuem coeficientes lineares cada vez maiores enquanto que seus coeficientes angulares ficam cada vez mais negativos, proporcionando uma curva de níveis cheia de cruzamentos, em particular, a energia do estado fundamental fica cheia de bicos. Já no *MDNI*, a energia do estado fundamental é uma curva suave, embora a energia do nível imediatamente acima se aproxime rapidamente, dando a impressão de provocar uma degenerescência para valores grandes de λ_+ . Se diagonalizássemos separadamente as paridades, haveria sempre repulsão de níveis [35].

O *MD2F* carrega um pouco das características dos dois modelos, embora o que nos chama mais a atenção é o fato de ocorrer um cruzamento entre os níveis de menor energia para $\lambda \approx 1$. Ou seja, quando o estado $|0, -J\rangle$ deixa de ser o fundamental, embora a energia deste estado, $-J$, continue cruzando para outros níveis quando aumentamos o valor do parâmetro λ . Para valores de λ maiores, o comportamento da curva da energia do estado fundamental é suave, sem a presença de outro nível para provocar uma possível não analiticidade. Então, a curva que representa a energia do estado fundamental em função de λ possui um bico nas proximidades de $\lambda = 1$ enquanto que para valores maiores deste parâmetro o comportamento é suave.

Desta análise acima concluímos que este novo modelo possui mais semelhança com o *MDI*, já que de fato ocorre um cruzamento entre os dois menores níveis de energia. Este cruzamento, como ocorre para vários valores de J , nos dá um indício de *TFQ* de primeira ordem para este sistema.

É interessante mencionar agora uma comparação entre as estatísticas de níveis entre os três modelos. Como já vimos, o *MDI* possui uma *NND* de Poisson, enquanto que o *MDNI* possui uma *NND* de Wigner nas vizinhanças do ponto de transição, e o *MD2F* seguiria uma *NND* de Wigner, exceto pelos cruzamentos do nível $|0, -J\rangle$.

Um outro bom indicativo para esta transição é a utilização da derivada da energia do estado fundamental em função do parâmetro:

1. **MDI**: Curva com degraus. Quanto maior o J , mais degraus.
2. **MDNI**: Curva suave. Formação de um bico em $\lambda_+ = 1$ conforme aumentamos J .
3. **MD2F**: Curva com descontinuidade. Quanto maior o J , maior a descontinuidade em $\lambda \approx 1$.

No *MDI*, a presença de uma descontinuidade em $\lambda = 1$ confirma uma *TFQ* de primeira ordem neste ponto. Em contrapartida, o *MDNI* não apresenta tal descontinuidade na primeira derivada, apenas na segunda. Neste caso, estamos lidando com uma *TFQ* de segunda ordem.

Como já era de se esperar, o *MD2F* acompanha a nossa hipótese de *TFQ* de primeira ordem, já que o gráfico da primeira derivada da energia do estado fundamental com relação à λ mostra uma descontinuidade para qualquer valor de J , e esta só tende a aumentar conforme aumentamos J .

Com relação à *ELA* temos:

1. **MDI**: Curva com degraus e crescente. Quanto maior o J , mais degraus e mais emaranhado.
2. **MDNI**: Curva suave com um máximo global. Quanto maior o J , maior o valor do máximo e mais pontuda a curva nas vizinhanças deste ponto.
3. **MD2F**: Curva com uma descontinuidade próxima de $\lambda = 1$, o restante suave e um mínimo local. Quanto maior o J , menor é o valor da descontinuidade, mais próximo da descontinuidade fica o mínimo local e menor é o emaranhamento.

A curva da *ELA* do *MDI* é simples de explicar. Cada cruzamento entre os menores níveis de energia provoca um salto brusco no gráfico da *ELA*, já que o estado fundamental também muda bruscamente. Não é o caso do *MDNI*, onde não existe uma mudança brusca no estado fundamental em função do λ_+ . Desta forma, o gráfico da *ELA* é de uma curva suave que possui um máximo global que se aproxima de $\lambda_+ = 1$ conforme aumentamos o valor de J , e que também aumenta o valor deste máximo, além de deixa-lo mais pontiagudo. No limite em que $J \rightarrow \infty$, a *ELA* do *MDNI* possui um máximo protuberante exatamente em $\lambda_+ = 1$.

No caso do *MD2F*, o gráfico da *ELA* é igual ao do *MDI* antes da transição, já que o estado fundamental de ambos os modelos é o mesmo, $|0, -J\rangle$. Ocorre então um salto neste ponto $\lambda \approx 1$, embora não sabemos exatamente o que ocorre no limite $J \rightarrow \infty$, assim como também ocorre no *MDI*, mas neste caso no ponto $\lambda = 1$. Após este ponto, o gráfico é uma curva suave, mas conforme aumentamos o valor de J , ocorre o aparecimento de um mínimo global, que não surge em nenhum dos outros modelos, cada vez mais pontiagudo e mais próximo do valor zero de emaranhamento.

Podemos dizer então que a única semelhança existente entre este novo modelo e o *MDI* se dá antes e na transição. Após a transição o *MD2F* possui características completamente diferentes dos outros dois modelos. Em especial, não ocorre um mínimo local para estes modelos.

Vamos observar o que ocorre na análise clássica destes três sistemas.

4.2 Análise Clássica

Começaremos esta análise com as trajetórias do sistema atômico dos três modelos. Para este objetivo escolhemos energias um pouco maiores que a menor energia possível do sistema, com as variáveis no espaço de fase (q_1, p_1, q_2, p_2) próximas dos pontos fixos estáveis:

1. **MDI**: Pontos fixos estáveis: Origem para $\lambda < 1$. Circunferência para $\lambda > 1$.
2. **MDNI**: Pontos fixos estáveis: Origem para $\lambda_+ < 1$. Dois pontos para $\lambda_+ > 1$.
3. **MD2F**: Pontos fixos estáveis: Origem para antes da transição. Não encontramos uma forma analítica para as condições do modelo.

Nos três casos, as trajetórias se acumulam na origem antes do ponto de transição. O que ocorre após a transição é muito diferente para cada um dos modelos. O *MDI* sofre uma bifurcação do tipo *Hopf*, após a transição, as trajetórias formam uma circunferência que tem seu raio aumentado a medida que aumentamos o valor do parâmetro λ . No *MDNI* ocorre uma bifurcação do tipo *Pitchfork*, as trajetórias, separadas, se acumulam em torno dos pontos fixos separados, e estes se afastam conforme aumentamos o valor do parâmetro λ_+ .

Já no *MD2F*, as trajetórias começam a se acumular em um dos lados do espaço de fases. Se tomarmos o parâmetro de interação de dois fótons λ' bem pequeno, vemos que as trajetórias são no fundo um setor de circunferência, sendo esta circunferência exatamente aquela das trajetórias do análogo clássico do *MDI* para o mesmo parâmetro de um fóton λ .

Vamos conectar as duas análises, quântica e clássica, através da *FWA* para os três modelos.

4.3 Função de Wigner Atômica

Para relacionar os resultados obtidos nas duas seções anteriores, utilizaremos a *FWA* para comparar os três modelos.

1. **MDI**: Antes da transição: *FWA* centrada na origem. Depois da transição: *FWA* em forma de “pudim”.
2. **MDNI**: Antes da transição: *FWA* centrada na origem. Depois da transição: Dois lóbulos.
3. **MD2F**: Antes da transição: *FWA* centrada na origem. Depois da transição: *FWA* em forma de “pudim” com um de seus lados tombado.

Os resultados quânticos e clássicos do *MDI* possuem uma certa concordância como já foi mencionado anteriormente. De fato, o conjunto dos pontos fixos estáveis para este modelo, após a transição, é formado por circunferências que aumentam seu raio conforme aumentamos o valor de λ . Este é exatamente o resultado

da *FWA* no mesmo regime, onde o máximo desta função tem o formato de uma circunferência que também aumenta seu raio conforme aumentamos λ .

O *MDNI* também mostra resultados parecidos entre as análises quântica e clássica. Os pontos fixos estáveis deste modelo após a transição, são pares de pontos que se distanciam conforme aumentamos o valor do parâmetro λ . A *FWA* deste modelo, também após a transição, mostra dois lóbulos se distanciando conforme aumentamos o parâmetro de interação.

Finalmente, o *MD2F* também possui concordância entre os resultados quânticos e clássicos. Embora não possua bifurcação do ponto fixo estável, as trajetórias deste modelo se acumulam em um canto do espaço de fases, e é exatamente este o comportamento da *FWA*, que tem o formato de um “pudim” deformado onde um dos lados é maior do que o outro. Em comparação entre os outros dois modelos, o *MD2F* tem um comportamento semelhante ao *MDI*, já que, após a transição, o próprio formato da *FWA* é um “pudim”, embora com um de seus lados tombados. Os “raios” destes pudins, comparando os dois modelos, também são próximos. Em outras palavras, há uma fase (ângulo) preferencial no espaço de fase atômico, enquanto que no *MDI* todas as fases eram equiprováveis e, portanto, ocorre uma quebra de simetria após a *TFQ*.

Finalmente, a área sob a *FWA* (á meia altura), qualitativamente podemos ver que:

1. **MDI**: Dá um salto quando $\lambda = \lambda_c$ e continua aumentando com λ .
2. **MDNI**: Cresce quando ocorre bifurcação, depois diminui e finalmente estabiliza.
3. **MD2F**: Cresce quando passa por $\lambda = \lambda_c$, mas logo em seguida tem um mínimo quando a *FWA* se concentra para um dos lados.

4.4 Conclusões

Após estudar aprofundadamente os modelos de spin-boson já existentes na literatura, conseguimos obter informações e análises importantes para o estudo de outro modelo de mesma natureza, que chamamos de *Modelo de Dicke Integrável com um Termo de Interação de 2 Fótons*.

A principal dificuldade que encontramos neste modelo foi com relação a classificação de uma *TFQ*, já que só podemos falar neste tipo de transição no limite do sistema $J \rightarrow \infty$. Como o gráfico do espectro inferior em função do parâmetro λ mostra um cruzamento entre os dois menores níveis, para qualquer valor de J , podemos desconfiar que fenômeno ocorre para todo J , já que neste modelo, o primeiro bloco da matriz Hamiltoniana fornece a energia constante $-J$, e é razoável imaginar que para algum valor de λ , outro nível de energia fique menor que este valor $-J$. Então, ao que tudo indica, estamos lidando com uma *TFQ* de primeira ordem.

A natureza desta transição se confirma quando observamos o gráfico da derivada da energia do estado fundamental em relação ao parâmetro λ , em função deste parâmetro. O tamanho da descontinuidade desta curva, que não pára de crescer conforme aumentamos o valor de J confirma a existência desta transição, além de dizer que esta é de primeira ordem.

Portanto, o principal resultado deste trabalho é de que o *Modelo de Dicke Integrável com um Termo de Interação de 2 Fótons*, para λ' pequeno e fixo sofre uma *Transição de Fase Quântica* de primeira ordem, associado a uma quebra de simetria angular no espaço de fase atômico, embora mantendo uma estrutura circular na *FWA* devido à forte componente do *MDI*.

Desta forma, não foi possível testar a hipótese de Hines, de que o análogo clássico de um sistema quântico que passa por uma *TFQ* de segunda ordem possui uma bifurcação do tipo *Pitchfork*. Em compensação temos outro resultado interessante. Mostramos que para um sistema quântico que passa por uma *TFQ* de primeira ordem, seu análogo clássico não precisa passar por uma bifurcação do tipo *Hopf*. De fato, não precisa passar nem por uma bifurcação.

Está claro que sistemas do tipo spin-boson possuem muitas características interessantes, passíveis de serem ricos objetos de estudo, tanto no regime quântico quanto no regime clássico. E o amadurecimento das idéias e dos conceitos para este tipo de sistema ocorre após um longo estudo sobre diversos sistemas.

Referências Bibliográficas

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë. *Quantum Mechanics, vol 1*, ed John Wiley and Sons (1977).
- [2] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer, Berlin (1990).
- [3] J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge (1987).
- [4] Gustavo Garcia Rigolin, *Estados Quânticos Emaranhados*. Tese de doutoramento IFGW (2005).
- [5] M. A. Nielsen, I. L. Chang, *Computação Quântica e Informação Quântica*; tradução Ivan S. Oliveira - Porto Alegre, Bookman (2005).
- [6] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge University Press (1999).
- [7] T. Vojta, *Quantum phase transitions in electronic systems*, Ann. Phys. 9 (6), 403-440 Leipzig (2000).
- [8] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, R. Fazi, *Scaling of entanglement close to a QPT*. Nature 416, 608 (2002).
- [9] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner, *Distribution functions in physics: Fundamentals*. Phys. Rep. 106, 121-167 (1984).
- [10] Liliana Sanz de la Torre. *Aplicações das Funções de Quase-Probabilidade no Estudo da Dinâmica do Emaranhamento*. Tese de doutoramento. IFGW UNICAMP 2003.
- [11] A. Kenfack, K. Życzkowski. *Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality*. J. Opt. B 6, 396-404 (2004).
- [12] J. R. Klauder, B. Skagerstam. *Coherent States : Applications in Physics and Mathematical Physics*. World Scientific (1985)
- [13] M. O. Scully, M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press (2001).
- [14] Pablo Parmezani Munhoz. *Dinâmica do Modelo de Jaynes-Cummings com Meio Kerr e Diferentes Desintonias*. Dissertação de Mestrado. IFGW UNICAMP (2002).
- [15] E. T. Jaynes, F. W. Cummings. *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc. IEEE 51, 89 (1963).

- [16] R. H. Dicke. *Coherence in Spontaneous Radiation Process*. Phys. Rev. 93 (1954) 99.
- [17] H. I. P. Skribanowitz et al. *Observation of Dicke Superradiance in Optically Pumped HF Gas*. Phys. Rev. Lett. 30, 309-312 (1973).
- [18] Fausto de Camargo Júnior. *Manifestações de Caos no Modelo do Maser de Dicke*. Tese de Doutorado. IFGW UNICAMP (1995).
- [19] P. Kramer, M. Saraceno. *Geometry of the Time-Dependent Variational Principle in Quantum Mechanics*. Lecture Notes in Physics 140, Springer-Verlag (1981).
- [20] Renato Moreira Angelo. *Aspectos Quânticos e Clássicos da Dinâmica de Emaranhamento em Sistemas Hamiltonianos*. Tese de Doutorado. IFGW UNICAMP (2003).
- [21] M. A. M. de Aguiar. *Caos em Sistemas Clássicos Conservativos*. Revista Brasileira do Ensino de Física 16, 1-4 (1994).
- [22] L. Wu, M. S. Sarandy, D. A. Lidar. *Quantum Phase Transition and Bipartite Entanglement*. Phys. Rev. Lett. 93, 250404 (2004).
- [23] T. R. de Oliveira, G. Rigolin, M. C. de Oliveira, E. Miranda. *Multipartite Entanglement Signature of Quantum Phase Transitions*. Phys. Rev. Lett. 97, 170401 (2006).
- [24] M. A. M. de Aguiar, K. Furuya, M. C. Nemes. *The Classical Analogue of the Super-Radiant Phase Transition in the Dicke Model*. Quantum Opt. 3, 305-314 (1991).
- [25] M. A. M. de Aguiar, K. Furuya, C. H. Lewenkopf, M. C. Nemes. *Chaos in a Spin-Boson System: Classical Analysis*. Ann. of Phys. 206 No 2, 291-312 (1992).
- [26] M. C. Nemes et al. *Quantum Entanglement and Fixed Point Hopf Bifurcation*. Phys. Lett. A 354 No 1-2, 60-66 (2006).
- [27] O. Bohigas. *Random Matrix Theories and Chaotic Dynamics*. Les Houches, Session LII, Chaos and Quantum Physics (1989).
- [28] N. Lambert, C. Emary, T. Brandes. *Entanglement and the Phase Transition in Single-Mode Superradiance*. Phys. Rev. Lett. 92, 073602 (2004).
- [29] C. Emary, T. Brandes. *Chaos and the Quantum Phase Transition in the Dicke Model*. Phys. Rev. E 67, 066207 (2003).
- [30] N. Lambert, C. Emary, T. Brandes. *Entanglement and Entropy in a Spin-Boson Quantum Phase Transition*. Phys. Rev. A 71, 053804 (2005).
- [31] A. P. Hines, R. H. McKenzie, G. J. Milburn. *Quantum Entanglement and Fixed-Point Bifurcations*. Phys. Rev. A 71, 042303 (2005).

- [32] C. Emary, T. Brandes. *Quantum Chaos Triggered by Precursors of a Quantum Phase Transition: The Dicke Model*. Phys. Rev. Lett. 90 No 4, 044101 (2003).
- [33] X. Hou, B. Hu. *Decoherence, Entanglement, and Chaos in the Dicke Model*. Phys. Rev. A 69 (2004).
- [34] F. L. Semião, comunicação interna.
- [35] C. H. Lewenkopf, M. C. Nemes, V. Marvulle, M. P. Pato, W. F. Wreszinski. *Level Statistics Transitions in the Spin Boson Model*. Phys. Lett. A 155, 113 (1991).