

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Instituto de Física “Gleb Wataghin”

Departamento de Eletrônica Quântica

Grupo de Óptica Quântica

Dissertação de Mestrado

Influência de um meio tipo Kerr na dinâmica de um átomo
Raman acoplado a dois modos do campo de radiação

Paulo Silva Melo

Tese apresentada ao Instituto de Física da
Universidade Estadual de Campinas para
obtenção do título de **Mestre em Física**.

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Antônio Vidiella Barranco (orientador) - IFGW/UNICAMP

Profa. Dra. Célia Maria Alves Dantas - IF/UFG

Prof. Dr. Kaled Dechoum (suplente) - IF/UFF

Profa. Dra. Kyoko Furuya - IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. José Antônio Roversi (suplente) - IFGW/UNICAMP

20 de fevereiro de 2003

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

M491i

Melo, Paulo Silva

Influência de um meio tipo Kerr na dinâmica de um átomo Raman acoplado a dois modos do campo de radiação / Paulo Silva Melo. -- Campinas, SP : [s.n.], 2003.

Orientador: Antonio Vidiella Barranco.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Raman, Efeito de.
 2. Ótica quântica.
 3. Kerr, Efeito de.
 4. Mecânica quântica.
- I. Vidiella Barranco, Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.



Instituto
de Física
Gleb Wataghin

C.P. 6165
CEP: 13083-970
Tel. (19) 788-5305
e-mail: secpos@ifi.unicamp.br

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE PAULO SILVA MELO – RA 005324 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 20 / 02 / 2003.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco (Orientador do Candidato)
DEQ/IFGW/UNICAMP

Profa. Dra. Célia Maria Alves Dantas – IF/UFG

Profa. Dra. Kyoko Furuya – DFMC/IFGW/UNICAMP

Dedico à minha querida esposa

Deborah Smith B. Melo

*“Advances are made by answering questions.
Discoveries are made by questioning answers...”*

Bernhard Haisch

Agradecimentos

Em primeiro lugar, eu gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, o Prof. Antônio Vidiella Barranco por todas as discussões e sugestões do trabalho, pois sem sua ajuda este trabalho jamais teria sido realizado, então fica aí o meu muito obrigado.

- Eu gostaria de agradecer ao Prof. José Antônio Roversi, pelas várias explicações e sugestões nos meus seminários, e por ter feito parte da banca no meu exame de qualificação, pré-requisito e também como suplente na defesa desta tese;

- Agradeço também à Profa. Kyoko Furuya, por ter feito parte da banca examinadora do meu pré-requisito e também da defesa desta tese, e pelas valiosas sugestões as quais enriqueceram muito este trabalho;

- Também agradeço muito à Profa. Célia M. A. Dantas, que desde o início muito me incentivou. Agradeço por ter aceitado o convite para fazer parte da banca examinadora da defesa desta tese, e por ter dado valiosas sugestões as quais também enriqueceram e muito este trabalho;

- Ao amigo Álvaro pela ajuda com os artigos, pelas várias sugestões nos cálculos, e pelos bate papos na hora do café;

- Ao amigo Pablo Parmezani Munhoz, pela paciência e ajuda computacional, pelos artigos e pelas várias horas de discussões que ocorreram durante o desenvolvimento deste trabalho.

Grannnde Pablo!!!

- Ao grande amigo Lázaro pela amizade, pelo incentivo e pela ajuda com o fortran;
- Sou muito grato também ao Ricardo J. Missori, Adenilson O. dos Santos, e a Luzeli M. da Silva, pela amizade e companheirismo nos bons e maus momentos que passamos juntos;
- Aos amigos Fernando Semião, e Renato M. Angelo pela ajuda com os cálculos, pelas dicussões e decisivas sugestões a respeito deste trabalho;
- A todos os amigos do grupo de Óptica Quântica do Instituto de Física “Gleb Wataghin” pelas discussões e explicações nos vários seminários apresentados nas reuniões de grupo, pois todos contribuíram de uma forma ou de outra para o meu desenvolvimento profissional;
- Meu já tardio muito obrigado ao Sr. Itamar e a Sra. Maria Portilho por ter me acolhido e muito me incentivado a proceguir com os estudos e me ingressar em um curso superior;
- Ao apoio financeiro da CAPES;
- E a toda a minha família, inclusive minha esposa pelo apoio e incentivo todos os dias.

Conteúdo

Agradecimentos	vi
Lista de Figuras	x
Resumo	xiii
Abstract	xiv
1 Introdução	1
2 Modelo Raman acoplado	6
2.1 Quantização do campo eletromagnético	7
2.2 Estados do Campo Eletromagnético	9
2.2.1 Estado de Fock	9
2.2.2 Estado coerente	11
2.3 Modelo de Jaynes-Cummings	13
2.3.1 Aproximação de dipolo	13
2.3.2 Hamiltoniano do sistema átomo-campo	14

2.4	Modelo Raman acoplado	17
2.4.1	Hamiltoniano do sistema átomo-campo	17
2.5	Hamiltoniano efetivo do modelo Raman acoplado	19
2.5.1	Diagonalização do Hamiltoniano	20
2.6	Meio não linear	24
2.6.1	Modelo Raman acoplado com um meio tipo Kerr em cada modo	25
2.6.2	Diagonalização do Hamiltoniano com o meio tipo Kerr	26
3	Dinâmica dos subsistemas	29
3.1	Campos inicialmente em estados de Fock	29
3.1.1	Evolução temporal	30
3.1.2	Inversão atômica	31
3.1.3	Número médio de fótons de cada modo	33
3.1.4	Parâmetro Q de Mandel de cada modo	34
3.1.5	Pureza dos subsistemas - emaranhamento	36
3.2	Campos inicialmente em estados coerentes	37
3.2.1	Evolução temporal	37
3.2.2	Inversão atômica	39
3.2.3	Número médio de fótons de cada modo	41
3.2.4	Parâmetro Q de Mandel de cada modo	41
3.2.5	Pureza dos subsistemas - emaranhamento	43

4	Conclusões	48
A	Cálculo de $A_{m,n}(t)$ e $B_{m,n}(t)$	50
	Bibliografia	51

Lista de Figuras

2.1	Diagrama dos níveis de energia na configuração Λ	18
3.1	Inversão atômica onde os campos estão inicialmente em estados de Fock. Consideramos que $m_1 = n_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $ 1\rangle$	32
3.2	Número médio de fótons. Consideramos que $m_1 = n_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $ 1\rangle$	34
3.3	Parâmetro Q de Mandel dos modos 1 e 2. Consideramos que $m_1 = n_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $ 1\rangle$	36
3.4	Pureza do átomo. Consideramos que $m_1 = n_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $ 1\rangle$	37
3.5	Inversão atômica onde os campos estão inicialmente em estados coerentes. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $ 1\rangle$	40
3.6	Parâmetro Q de Mandel do modo 1. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $ 1\rangle$	42

3.7	Parâmetro Q de Mandel do modo 2. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $ 1\rangle$	43
3.8	Pureza do átomo. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $ 1\rangle$	44
3.9	Pureza do modo 1. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $ 1\rangle$	45
3.10	Pureza do modo 2. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $ 1\rangle$	46

Resumo

No presente trabalho estudamos, como uma extensão de um sistema de poucos níveis, um sistema que consiste de um átomo de três níveis na configuração Λ interagindo com dois modos do campo de radiação. Supomos que o nível 2 esteja bem fora da ressonância e que será eliminado adiabaticamente, de modo que ele possa agir apenas como um estado virtual nas transições entre os níveis 1 e 3. Este é conhecido como modelo Raman acoplado. Derivamos o Hamiltoniano do sistema Raman acoplado através de uma transformação unitária. Investigamos a influência dos “Stark-shifts” e de um meio tipo Kerr na evolução dos subsistemas por meio da inversão atômica, do parâmetro Q de Mandel e da pureza dos subsistemas. Em particular investigamos a competição entre os efeitos dos “Stark-shifts” e do meio Kerr, buscando sob quais condições o átomo apresentaria evolução periódica, o que implica no desemaranhamento entre os estados atômico e dos campos.

Abstract

In the present work we study, as an extension of few-level systems, a system which consists of a three-level atom in the Λ configuration interacting with two modes of the radiation field. The level 2 is assumed to be far off resonance and will be adiabatically removed so that it participates as a virtual state in the transitions between levels 1 and 3. This is the Raman-coupled model. We derive a Raman coupled Hamiltonian by a unitary transformation. We investigate the influences of the “Stark-shifts” and the Kerr-like medium in the sub-systems by means of the atomic inversion, Mandel’s Q parameter and the purity of the sub-systems. We investigate the competition between the effects of the “Stark-shifts” and the Kerr-like medium, looking for the conditions leading to atomic periodic evolution, which is related to the disentanglement between the atom and the fields.

Capítulo 1

Introdução

O alicerce do nosso conhecimento presente a respeito da natureza da luz foi iniciado na segunda metade do século XVII, embora a moderna teoria não tivesse forma definida até o século seguinte.

Em 1666, Isaac Newton realizou a decomposição da luz branca em suas componentes coloridas, e provou que não havia mudança na cor proveniente de uma refração subsequente. Além disso, ele recombinau os espectros coloridos e formou a luz branca. Newton também elaborou o que é conhecido como teoria corpuscular da luz, e abraçou com persistência essa idéia, retardando o desenvolvimento da teoria ondulatória, a qual foi primeiro expressada em 1678. Na teoria corpuscular, a luz foi considerada como vôos de partículas de matéria emitidas por uma fonte, e a sensação de sinal sendo produzida por sua ação mecânica na retina.

A teoria ondulatória da luz foi primeiro anunciada por Huygens em 1678, e 20 anos mais tarde, ele explicou satisfatoriamente a reflexão e a refração. Mas somente no início do século

XIX, que o efeito de interferência foi observado por Thomas Young, e foi este experimento que consagrou a teoria ondulatória da luz. Em 1860, James Clerk Maxwell mostrou que a propagação da luz poderia ser considerada como um fenômeno eletromagnético, onde a onda consistia de campos elétrico e magnético acoplados.

Foi em 1900 que surgiu a primeira indicação da natureza quântica da luz, quando Max Planck descobriu que podia estimar a distribuição espectral da luz térmica postulando que a energia de um oscilador harmônico é quantizada. Esta idéia teve grandes contribuições desenvolvidas por Einstein (1905), Compton (1923), Dirac (1927), entre outros. Outro trabalho que deu uma grande contribuição à teoria quântica da luz foi publicado em 1923 por A. Smekal [1], trabalho o qual falava sobre a teoria quântica da dispersão, mostrando que no caso do espalhamento da luz por um meio transparente, frequências diferentes das frequências da luz original poderiam ser encontradas na radiação espalhada, um fenômeno agora conhecido como efeito Raman. Ele considerou que uma molécula de massa m com uma energia E_p (que é a soma de suas energias eletrônica, vibracional e rotacional) movendo com uma velocidade v , em colisão com um quanta de luz de energia $h\nu$, poderia passar para outro estado de energia E_q e mudar sua velocidade. Ele mostrou que a mudança na velocidade era negligenciável de modo que:

$$E_p + h\nu = E_q + h\nu' \quad (1.1)$$

ou

$$\nu' = \nu - \frac{E_q - E_p}{h}, \quad (1.2)$$

o que significa que o quantum de luz dá energia para a molécula e é espalhado com uma energia

menor. A diferença de frequência entre a radiação original e a defletida é designada por

$$\Delta\nu = \frac{E_q - E_p}{h} \quad (1.3)$$

onde se $\Delta\nu$ for igual a zero, significa que o quantum de luz é espalhado sem mudar a frequência, a colisão nesse caso é elástica e nós temos o espalhamento de Rayleigh. A prova experimental do efeito predito por A. Smekal foi anunciada em 1928 por C. V. Raman [2] e poucas semanas depois por Landsberg e Mandelstamm que trabalhavam com líquidos e redes de cristais de quartzo.

Uma nova teoria foi publicada por Kramers e Heisenberg em 1925, teoria hoje bem conhecida como teoria completa do efeito Raman, que evidencia como um aspecto essencial, que são necessárias duas transições ao invés de uma, como no caso da absorção ordinária. Se existe três níveis de energia a, b, e c, estando o nível c distante das transições ordinárias dos níveis a e b, uma linha de frequência diferente da original poderia ser encontrada.

Classicamente, a radiação luminosa é tratada como uma onda eletromagnética com fase e amplitude bem definidas. Uma proposta para a quantização do campo eletromagnético veio com Dirac em 1927 [3]. Inicialmente foi questionada a necessidade da quantização do campo, visto que a teoria de vários fenômenos envolvendo luz, tais como interferência, difração e a geração da luz eram bem entendidos com a física semi-clássica, ou seja, tratando a luz por meio de uma teoria clássica e a matéria por meio de uma teoria quântica. Entretanto, com os trabalhos pioneiros de Glauber [4] e Sudarshan [5], tornou-se claro que alguns estados da luz não poderiam ser descritos em termos da física clássica, assim como a análise da geração de estados não poderia ser feita semi-classicamente. O primeiro fenômeno previsto pela teoria

quântica da luz [6] e detectado um ano depois, foi o anti-agrupamento de fótons. Kimble, Dagenais e Mandel [7] mediram a correlação da flutuação da intensidade de dois campos distintos, mostrando a desagregação apresentada pelos fótons, e a probabilidade quase nula para a detecção simultânea de dois ou mais fótons. E foi devido à comprovação de fenômenos sem análogos clássicos (exclusivamente descritos por meio de uma teoria quântica da luz), que surgiu uma nova área de pesquisa, a Óptica Quântica, a qual está inteiramente voltada aos aspectos quânticos da luz, e tem demonstrado a existência de muitos efeitos quânticos da luz que até então não tinham sido nem imaginados. E é nesse espírito que fomos motivados a fazer um estudo do modelo Raman acoplado, baseado num átomo de três níveis na configuração Λ interagindo com dois modos do campo. Este sistema tem sido o protagonista de vários estudos na literatura [8]-[10], e devido às suas características ele tem se demonstrado ser um candidato à aplicações na área de computação quântica [11]-[13], pois trata-se de um modelo envolvendo três subsistemas quânticos. Também é de nosso interesse adicionar a esse sistema um elemento como um meio não linear do tipo Kerr.

Os meios não lineares tem servido como base para uma rica variedade de fenômenos Ópticos que surgem da resposta não linear quando aplicados a campos elétricos intensos. Cada material tem suas características específicas como por exemplo simetria, densidade e etc, e são estas características que proporcionam o surgimento dos efeitos ópticos não lineares tais como: geração de harmônicos, absorção de dois fótons, absorção saturada, efeito Kerr, e muitos outros [14]. Tendo em mente a quantidade de efeitos proporcionados devido a presença dos meios não lineares,

nos parece razoável adicionar um meio não linear do tipo Kerr no nosso sistema, e tentar verificar qual a sua influência tanto para o átomo quanto para os campos ao longo do tempo.

O nosso trabalho está organizado da seguinte maneira: vamos iniciar o capítulo 2 descrevendo a quantização do campo eletromagnético; em seguida faremos uma breve descrição de dois estados do campo eletromagnético, de número e coerente os quais vamos admitir como condição inicial do nosso sistema; depois apresentaremos o modelo de Jaynes-Cummings, mostrando alguns passos de como chegar no Hamiltoniano do sistema átomo-campo. Em seguida introduziremos o modelo Raman acoplado, onde vamos chegar a um Hamiltoniano efetivo através de uma transformação unitária. Adicionaremos nesse Hamiltoniano mais um elemento, um meio não linear tipo Kerr, e a partir daí procederemos com a diagonalização desse Hamiltoniano.

No capítulo 3, faremos um estudo das propriedades estatísticas de cada um dos subsistemas durante a evolução a partir de condições iniciais específicas. Em relação ao átomo analisaremos a inversão atômica, e para os campos estudaremos a evolução temporal do número médio de fótons, parâmetro Q de Mandel e do grau de pureza de cada subsistema.

No capítulo 4, apresentaremos as conclusões do nosso trabalho.

Capítulo 2

Modelo Raman acoplado

A luz pode ser irradiada e absorvida por átomos, e a interação entre o campo eletromagnético quantizado e um átomo representa um dos problemas fundamentais da Óptica Quântica. Além disso, átomos reais são sistemas complicados, o que muitas vezes se faz necessário aproximar o comportamento de um átomo real por um sistema quântico mais simples. Para muitos tratamentos apenas dois níveis de energia atômicos desempenham um papel significativo na interação com um campo eletromagnético, de modo que tem se tornado rotineiro em muitos tratamentos teóricos representar o átomo por um sistema com apenas dois estados de energia.

Um protótipo do modelo que descreve a interação de um átomo de dois níveis com um único modo do campo, onde ambos são tratados do ponto de vista quântico, é o bem conhecido modelo de Jaynes-Cummings (JC). Esse modelo foi proposto em 1963 [15], e através dele foram reveladas várias propriedades estatísticas do campo que não são encontradas em tratamentos clássicos.

No modelo de JC, o processo básico consiste em envolver perda ou ganho de fótons. Neste

nosso trabalho, vamos fazer um estudo de um sistema que é uma extensão dos sistemas de poucos níveis. Na verdade trata-se de um átomo no qual vamos considerar apenas três níveis (na configuração Λ), o qual está interagindo com dois modos do campo eletromagnético em uma cavidade, que também é conhecido como modelo Raman acoplado. Mas antes de descrever este modelo, vamos discutir um pouco sobre a quantização do campo eletromagnético, pois como já foi dito, estamos interessados em tratar tanto o átomo como o campo quanticamente.

2.1 Quantização do campo eletromagnético

Na mecânica quântica, as grandezas físicas são descritas por operadores, os quais são associados às grandezas em analogia com sua forma clássica. As grandezas que classicamente são canonicamente conjugadas (seu parênteses de Poisson é igual a 1), quanticamente, serão associados operadores que devem obedecer a uma certa relação de comutação. Para o oscilador unidimensional de massa unitária e frequência ω , o Hamiltoniano quântico é dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \omega^2 \hat{X}^2) \quad (2.1)$$

onde \hat{X} e \hat{P} são respectivamente os operadores posição e momento, e obedecem à relação de comutação:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar. \quad (2.2)$$

Como \hat{H} não depende do tempo, o problema se reduz a resolver a equação de auto-valores:

$$\hat{H}|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle. \quad (2.3)$$

Na representação de coordenadas, as soluções são dadas em termos dos polinômios de Hermite

H_n ,

$$\Psi_n(x) = H_n \left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} x \right) \exp\left(-\frac{\omega}{2\hbar} x^2\right) \quad (2.4)$$

com auto-valores discretos:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

É no entanto, mais conveniente trabalharmos no âmbito da segunda quantização, onde uma transformação leva os operadores \hat{X} e \hat{P} nos operadores de criação e aniquilação de quanta \hat{a}^\dagger e \hat{a} , respectivamente definidos por:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{(\omega\hat{X} - i\hat{P})}{\sqrt{2\hbar\omega}} \quad (2.6)$$

$$\hat{a} = \frac{(\omega\hat{X} + i\hat{P})}{\sqrt{2\hbar\omega}}. \quad (2.7)$$

A definição destes operadores é extremamente útil apesar deles não serem hermitianos e portanto não representarem observáveis do oscilador.

O Hamiltoniano (2.1) pode ser escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação de quanta, resultando em:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \quad (2.8)$$

que é o hamiltoniano de um oscilador harmônico quantizado, onde os operadores de aniquilação

e criação de quanta do oscilador harmônico satisfazem a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (2.9)$$

A quantização do campo é feita através da associação de cada modo de oscilação destes campos a um oscilador harmônico quantizado. Um campo de luz polarizada linearmente e oscilando com uma única frequência (ou modo), é expresso como um oscilador harmônico, sendo o número de fótons do modo de oscilação associado ao nível de excitação do oscilador. Podemos escrever o campo eletromagnético em termos de suas partes de frequência (positiva e negativa) como [16]:

$$\hat{E}(t) = E_0[\hat{X} \cos(\omega t - kz) + \hat{P} \sin(\omega t - kz)], \quad (2.10)$$

onde $E_0 = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}$ é a amplitude do operador campo, V é o volume quantizado (interior da cavidade), e ω é a frequência do modo de oscilação da onda.

2.2 Estados do Campo Eletromagnético

2.2.1 Estado de Fock

Os estados de Fock, também conhecidos como estados de número, são estados do campo com um número bem definido de fótons. Eles formam uma base completa para o espaço de estados do campo. Suas relações de completeza e ortogonalidade são dadas respectivamente por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{1} \quad (2.11)$$

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}. \quad (2.12)$$

Os operadores de criação \hat{a}^\dagger e aniquilação \hat{a} atuando neste estado produzem as seguintes transformações:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2.13)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (2.14)$$

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.15)$$

Estes estados podem ser associados aos estados de ocupação possíveis a um oscilador harmônico, apropriado para a descrição do campo eletromagnético.

É importante dizer também que estes estados são auto-estados do operador número,

$$\hat{n}|\hat{n}\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (2.16)$$

Um resultado útil é obtido usando a Eq.(2.12), e aplicando o operador \hat{a}^\dagger ao vácuo n vezes.

Fazendo isto, gera-se o estado $|n\rangle$ dado por:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (2.17)$$

Na linguagem do campo eletromagnético quantizado, a probabilidade de encontrar n fótons em um estado genérico $|\Psi\rangle$ é dada por:

$$P = |\langle n|\Psi\rangle|^2. \quad (2.18)$$

Para um estado de número $|m\rangle$, devido à ortogonalidade destes estados, esta distribuição é dada por

$$P_m = \delta_{mn}, \quad (2.19)$$

ou seja, tem um número de fótons m bem definido.

2.2.2 Estado coerente

Os estados coerentes tornaram-se populares a partir de 1963, com Glauber [4], por serem úteis para descrever o campo de radiação. É que a radiação num laser operando bem acima do limiar pode ser descrita por um estado coerente [17].

O estado coerente é definido como auto-estado do operador de aniquilação \hat{a} [4],

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.20)$$

com $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, sendo que $|\alpha|$ indica a intensidade do deslocamento a partir da origem no espaço das quadraturas, enquanto que θ indica a direção do deslocamento. Ele pode ser gerado pelo deslocamento do vácuo,

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (2.21)$$

onde $\hat{D}(\alpha)$ é o operador deslocamento de Glauber, dado por [4],

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger + \alpha^*\hat{a}}. \quad (2.22)$$

O operador deslocamento é unitário, ou seja,

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha) = \hat{1} \quad (2.23)$$

e permite-nos realizar as seguintes transformações:

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \quad (2.24)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (2.25)$$

Usando a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff [18]

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} \cdot e^{\hat{B}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}, \quad (2.26)$$

$|\alpha\rangle$ pode ser escrito como:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \cdot e^{-\alpha^*\hat{a}} \cdot e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle. \quad (2.27)$$

A expansão de um estado coerente em termos da base de número é dada por:

$$|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m|m\rangle, \quad (2.28)$$

já que os estados de número formam uma base completa, conforme Eq.(2.11), onde

$$C_m = \langle m|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}. \quad (2.29)$$

Estados coerentes distintos não são ortogonais,

$$\langle\beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2+|\alpha|^2)+\beta^*\alpha}, \quad (2.30)$$

e formam uma base super completa, com sua relação de completeza dada por [18]:

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{1}. \quad (2.31)$$

2.3 Modelo de Jaynes-Cummings

A forma mais simples de descrever a interação da radiação com a matéria é através do modelo de Jaynes-Cummings [15]. Este modelo considera a interação de um modo do campo quantizado com um átomo de dois níveis.

2.3.1 Aproximação de dipolo

Como sabemos, um dipolo consiste em duas cargas de mesma intensidade e de sinais contrários, separados por uma distância r . Assim, no caso do átomo, considera-se que a soma das cargas contidas em seu núcleo representa a carga positiva e a eletrônica total das órbitas, é a carga negativa, distribuída em órbitas de raio r_n , onde n representa o número quântico principal. Esta consideração só é válida quando o comprimento de onda do campo contido na cavidade é muito maior que as dimensões do átomo. Para campos ópticos que possuem comprimentos de onda da ordem de 10^3 \AA , a aproximação de dipolo é razoável mesmo para átomos nos primeiros estados excitados, cujo tamanho típico é de poucos angstroms.

A utilização de átomos de Rydberg, que possuem número quântico principal $n \approx 50$, implica na utilização de campos de microondas, a que garante a validade da aproximação de dipolo. Esse tipo de átomo é muito apropriado para medir os efeitos quânticos na interação com o campo [19], pois tem uma vida média maior que $1ms$ e devido a suas grandes dimensões, apresenta um intenso momento de dipolo, o que gera um forte acoplamento entre o átomo e o campo.

2.3.2 Hamiltoniano do sistema átomo-campo

Consideremos agora a aproximação de dipolo para expressar o Hamiltoniano que descreve a interação entre um átomo e um único modo do campo eletromagnético.

O Hamiltoniano do sistema átomo-campo é dado por [20]:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_C + \hat{H}_I, \quad (2.32)$$

onde \hat{H}_A é o Hamiltoniano do átomo, \hat{H}_C é o Hamiltoniano do campo livre dado pela Eq.(2.8), e \hat{H}_I , é o Hamiltoniano de interação do sistema átomo-campo que é dado por:

$$\hat{H}_I = -e\hat{r} \cdot \hat{\mathbf{E}}, \quad (2.33)$$

sendo $\hat{E} = E\hat{e}$ onde

$$E = \varepsilon(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (2.34)$$

$\varepsilon = \sqrt{\hbar\omega/\varepsilon_0V}$ e \hat{e} o vetor polarização.

Podemos expressar \hat{H}_A e \hat{H}_I em termos dos operadores de transição σ_{ij} , dado por [20]:

$$\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|, \quad (2.35)$$

onde σ_{ij} representa o conjunto completo dos auto-estados de energia atômica, sendo que é válida a seguinte relação de completeza:

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1. \quad (2.36)$$

Para os auto-estados de energia atômica $|i\rangle$, vale a relação:

$$\hat{H}_A|i\rangle = E_i|i\rangle, \quad (2.37)$$

onde E_i são as energias do campo associadas a cada estado atômico.

Multiplicando a Eq.(2.16) por $\langle i|$ pela direita e somando sobre todos os estados $|i\rangle$, teremos:

$$\begin{aligned} \sum_i \hat{H}_A |i\rangle \langle i| &= \sum_i \hat{E}_i |i\rangle \langle i| \\ \hat{H}_A &= \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Da mesma forma, podemos obter uma nova expressão para o Hamiltoniano de interação. Utilizando a relação de completeza dos estados atômicos, o operador momento de dipolo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \hat{d} &= e\hat{r} = \sum_{ij} e|i\rangle \langle i|\hat{r}|j\rangle \langle j| \\ &= \sum_{ij} \wp_{ij} \hat{\sigma}_{ij}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde

$$\wp_{ij} = e \langle i|\hat{r}|j\rangle \quad (2.40)$$

é o elemento de matriz de transição [20].

Consideraremos em nossas equações que $\hbar = 1$. Então substituindo as Eqs.(2.8), (2.12), (2.13) e (2.17) em (2.11), o Hamiltoniano do sistema átomo-campo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} + \sum_{i,j} g^{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (2.41)$$

onde a energia de ponto zero do campo, $\frac{1}{2}\omega$, foi omitida, e

$$g^{ij} = -\wp_{ij} \cdot \hat{\epsilon}\epsilon. \quad (2.42)$$

Para um átomo de apenas dois níveis considerando $|1\rangle$ como sendo o estado fundamental, e $|2\rangle$ como sendo o estado excitado, teremos: $\sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} = (E_1 \hat{\sigma}_{11} + E_2 \hat{\sigma}_{22})$. Segue daí que o Hamiltoniano do sistema átomo-campo será dado por:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + (E_1 \hat{\sigma}_{11} + E_2 \hat{\sigma}_{22}) + g_{12}(\hat{\sigma}_{21} + \hat{\sigma}_{12})(\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (2.43)$$

Usando as seguintes identidades [20]

$$\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{21} = |2\rangle\langle 1| \quad (2.44)$$

$$\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{12} = |1\rangle\langle 2| \quad (2.45)$$

podemos reescrever \hat{H} como:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{i=1}^2 E_i \sigma_{ii} + g_{12}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (2.46)$$

onde os operadores atômicos $\hat{\sigma}_z$, $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_-$ atuam somente nos estados atômicos. As atuações destes operadores nos estados do átomo resultam em:

$$\hat{\sigma}_+ |1\rangle = |2\rangle \quad (2.47)$$

$$\hat{\sigma}_- |2\rangle = |1\rangle. \quad (2.48)$$

A energia de interação, correspondente ao terceiro termo da Eq.(2.25) pode ser expressa da forma:

$$\hat{H}_I = g_{12} \left[(\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+ \hat{a}) + (\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{a}) \right]. \quad (2.49)$$

O termo $\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$ descreve o processo em que abaixa-se o nível do átomo enquanto um fóton é criado no campo da cavidade. O termo $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$ descreve o processo contrário. Em ambos os

casos a energia é conservada. Os demais termos $\hat{\sigma}_-\hat{a}$ e $\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$, chamados de termos contra-girantes, parecem à primeira vista violar a conservação da energia, o que na verdade não ocorre. Já foi mostrado que a contribuição destes termos é bem menor que aquela fornecida pelos termos ressonantes [21]. Podemos então desprezá-los, o que consiste na chamada aproximação de onda girante, ou RWA. Portanto, o operador Hamiltoniano para a interação átomo-campo, na aproximação de dipolo e onda girante, é dado por:

$$\hat{H}_I = g_{12}(\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+\hat{a}), \quad (2.50)$$

onde podemos escrever o Hamiltoniano total do sistema átomo-campo da seguinte forma:

$$\hat{H} = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_{i=1}^2 E_i\hat{\sigma}_{ii} + g_{12}(\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+\hat{a}), \quad (2.51)$$

que é o Hamiltoniano do modelo de Jaynes-Cummings para processos de um fóton.

2.4 Modelo Raman acoplado

O modelo utilizado nesta tese, conhecido na literatura como Raman acoplado [22], consiste num átomo de três níveis interagindo com dois modos do campo de radiação. O nível atômico 2 se encontra bem fora da ressonância, como mostrado na Fig. 2.1.

2.4.1 Hamiltoniano do sistema átomo-campo

A configuração dos níveis de energia do nosso modelo está dada na Fig. 2.1, onde E_1 , E_2 e E_3 são as energias dos níveis 1, 2 e 3 respectivamente. O Hamiltoniano que descreve este sistema

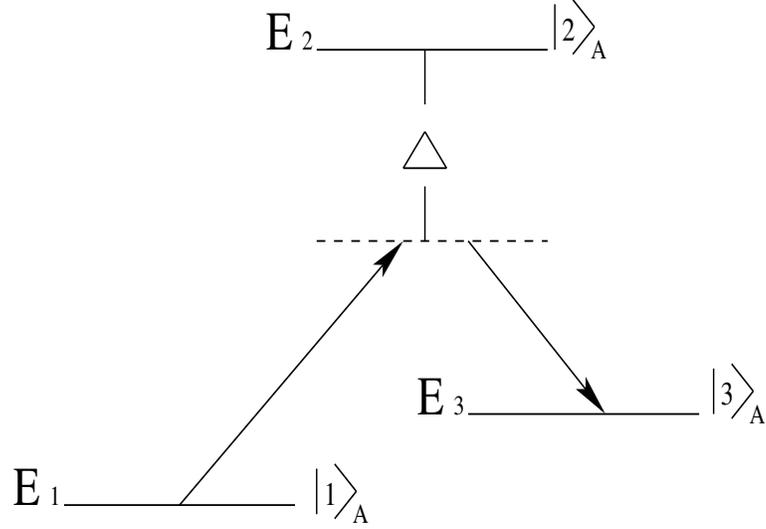


Figura 2.1: Diagrama dos níveis de energia na configuração Λ .

é dado por:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I \quad (2.52)$$

onde

$$\hat{H}_0 = E_1 \hat{\sigma}_{11} + E_2 \hat{\sigma}_{22} + E_3 \hat{\sigma}_{33} + \omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \quad (2.53)$$

é o Hamiltoniano do átomo livre mais o Hamiltoniano do campo livre, e

$$\hat{H}_I = g_{12}(\hat{a}_1 \hat{\sigma}_{21} + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_{12}) + g_{23}(\hat{a}_2 \hat{\sigma}_{23} + \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_{32}), \quad (2.54)$$

é o Hamiltoniano de interação. Os símbolos \hat{a}_i ($i=1,2$) representam os operadores do campo dos modos 1 e 2, enquanto que $\hat{\sigma}_{ij}$ ($i,j=1, 2, 3$) são operadores do sub-espaço do átomo. $\hat{\sigma}_{ii}$

representa o nível de ocupação atômico e $\hat{\sigma}_{ij}(i \neq j)$ são operadores que representam a transição do nível j para i . O modo 1 (também conhecido como modo “pump”) tem frequência ω_1 e o modo 2 (também conhecido como modo “Stokes”) frequência ω_2 , e vamos supor que $\omega_1 > \omega_2$. O Hamiltoniano da Eq.(2.33) representa o acoplamento do modo 1 com os níveis 1 e 2, e o modo 2 com os níveis 2 e 3, onde g_{12} e g_{23} são as respectivas constantes de acoplamento, que por razão de simplicidade vamos supor como sendo reais. Vamos supor que a transição direta entre os níveis 1 e 3 não é dipolo-permitida. Nós consideramos que a cavidade está sintonizada com o campo de tal forma que exista um único parâmetro de (dessintonia) “detuning” Δ , que é definido por: $\Delta = E_2 - E_1 - \omega_1 = E_2 - E_3 - \omega_2$ de tal forma que a diferença entre os níveis 1 e 3 é dada por $E_3 - E_1 = \omega_1 - \omega_2$.

2.5 Hamiltoniano efetivo do modelo Raman acoplado

Para que tenhamos mais facilidade em desenvolver os nossos cálculos, estamos interessados em obter um Hamiltoniano efetivo de dois níveis para o nosso sistema. Nesse sistema a transição entre os níveis $|1\rangle$ e $|3\rangle$ diretamente é dipolo proibida, e para a condição em que Δ é grande o nível 2 torna-se meta-estável, o que torna o sistema efetivamente de dois níveis. Nesta condição um fóton do modo 1 sendo absorvido pelo átomo, é emitido no modo 2 (e vice-versa). Então seguindo os passos de M. Alexanian [23], podemos introduzir uma transformação unitária $\hat{U} = \exp \hat{S}$, sendo

$$\hat{S} = \beta_1(\hat{a}_1\hat{\sigma}_{21} - \hat{a}_1^\dagger\hat{\sigma}_{12}) + \beta_2(\hat{a}_2\hat{\sigma}_{23} - \hat{a}_2^\dagger\hat{\sigma}_{32}), \quad (2.55)$$

onde β_1 e β_2 serão especificados mais tarde. Fazendo a expansão da transformação unitária nós temos [18]:

$$\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger = e^{\hat{S}}\hat{H}e^{-\hat{S}} = \hat{H} + [\hat{S}, \hat{H}] + \frac{1}{2}[\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] + \dots \quad (2.56)$$

Considerando o parâmetro de “detuning” Δ grande (o que nos conduz a trabalhar apenas dentro desse regime), isto é, $\Delta \gg g_{ij}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^3 E_i \sigma_{ii} + \omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{2g_{12}^2}{\Delta} a_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{\sigma}_{11} + \frac{2g_{23}^2}{\Delta} a_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma}_{22} \\ & + \frac{2g_{12}g_{23}}{\Delta} (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{\sigma}_+ + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma}_-), \end{aligned} \quad (2.57)$$

que é um Hamiltoniano efetivo de dois níveis, ou seja, o nível dois foi adiabaticamente eliminado. Podemos ver que temos a parte do átomo livre, a parte dos modos 1 e 2, os termos $2g_{12}^2/\Delta a_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{\sigma}_{11}$ e $2g_{23}^2/\Delta a_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma}_{22}$, conhecidos na literatura como “Stark-shifts”. Temos que $\beta_1 = 2g_{12}^2/\Delta$ e $\beta_2 = 2g_{23}^2/\Delta$ representa a intensidade dos “Stark-shifts”, e $2g_{12}g_{23}/\Delta$ é a constante de acoplamento efetiva, $\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{31}$ é o perador que representa a transição do átomo do nível 1 para o nível 3 e $\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{13}$ representa a transição do nível três para o nível 1. Os “Stark-shifts” foram desprezados por Gerry e Eberly [22], mas decidimos mantê-los para tentar verificar qual é a importância dos mesmos na evolução temporal de cada subsistema, dentro do regime que é válido o Hamiltoniano da Eq.(2.57), ou seja, para $\Delta \gg g_{ij}$.

2.5.1 Diagonalização do Hamiltoniano

Antes de fazer a diagonalização do Hamiltoniano Eq.(2.57), vamos colocar uma constante α acompanhado os “Stark-shifts”, a qual só poderá ser 0 ou 1. Estamos fazendo isso, porque se a

qualquer momento quizermos um Hamiltoniano sem “Stark-shifts”, faremos $\alpha = 0$ e obteremos o resultado encontrado por Gerry e Eberly [22], caso contrário poderemos fazer $\alpha = 1$ e obteremos o resultado com a presença dos “Stark-shifts”. Então o Hamiltoniano (Eq.(2.57)) fica da seguinte forma:

$$\hat{H} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^3 E_i \sigma_{ii} + \omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \alpha \frac{2g_{12}^2}{\Delta} a_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{\sigma}_{11} + \alpha \frac{2g_{23}^2}{\Delta} a_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma}_{22} + \quad (2.58)$$

$$\frac{2g_{12}g_{23}}{\Delta} (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \sigma_+ + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \sigma_-). \quad (2.59)$$

Os auto-estados deste Hamiltoniano efetivo podem ser escritos como a Eq.(20) da ref.[23]:

$$|\Psi_{m,n}^+\rangle = -\sin(\theta_{m,n})|1\rangle|m\rangle_1|n\rangle_2 + \cos(\theta_{m,n})|3\rangle|m-1\rangle_1|n+1\rangle_2 \quad (2.60)$$

$$|\Psi_{m,n}^-\rangle = \cos(\theta_{m,n})|1\rangle|m\rangle_1|n\rangle_2 + \sin(\theta_{m,n})|3\rangle|m-1\rangle_1|n+1\rangle_2, \quad (2.61)$$

que podem ser facilmente invertidos

$$|1\rangle|m\rangle_1|n\rangle_2 = -\sin(\theta_{m,n})|\Psi_{m,n}^+\rangle + \cos(\theta_{m,n})|\Psi_{m,n}^-\rangle \quad (2.62)$$

$$|3\rangle|m-1\rangle_1|n+1\rangle_2 = \cos(\theta_{m,n})|\Psi_{m,n}^+\rangle + \sin(\theta_{m,n})|\Psi_{m,n}^-\rangle. \quad (2.63)$$

Vamos fazer uso da seguinte equação de auto-valores:

$$\hat{H}|\Psi_{m,n}^+\rangle = E_{m,n}|\Psi_{m,n}^+\rangle. \quad (2.64)$$

Após um pouco de álgebra, chegamos à seguinte equação:

$$\hat{H}|\Psi_{m,n}^+\rangle = -(k_1 \sin(\theta) + k_2 \cos(\theta))|1\rangle|m\rangle_1|n\rangle_2 + \quad (2.65)$$

$$(k_3 \cos(\theta) + k_2 \sin(\theta))|3\rangle|m-1\rangle_1|n+1\rangle_2$$

$$= E_{m,n}|\Psi_{m,n}^+\rangle, \quad (2.66)$$

onde

$$k_1 = E_1 + \omega_1 m + \omega_2 n - \frac{2g_{12}^2}{\Delta} m \alpha$$

$$k_2 = \frac{2g_{12}g_{23}}{\Delta} \sqrt{m(n+1)}$$

$$k_3 = E_1 + \omega_1 m + \omega_2 n - \frac{2g_{23}^2}{\Delta} (n+1)\alpha. \quad (2.67)$$

Rearranjando os termos temos que:

$$k_1 \sin(\theta) + k_2 \cos(\theta) = E_{m,n} \sin(\theta)$$

$$k_2 \sin(\theta) + k_3 \cos(\theta) = E_{m,n} \cos(\theta), \quad (2.68)$$

o que nos dá:

$$E_{m,n}^2 - (k_1 + k_3)E_{m,n} + (k_1 k_3 - k_2^2) = 0, \quad (2.69)$$

ou de outra forma,

$$E_{m,n} = Q_{m,n} + \Omega_{m,n} \quad (2.70)$$

sendo

$$Q_{m,n} = \frac{k_1 + k_3}{2}$$

$$\Omega_{m,n} = \frac{\sqrt{(k_1 + k_3)^2 - 4(k_1 k_3 - k_2^2)}}{2}. \quad (2.71)$$

Substituindo (2.67) na Eq.(2.71), e fazendo um pouco de álgebra, chegamos às seguintes expressões:

$$Q_{m,n} = E_1 + \omega_1 m + \omega_2 n - \frac{g_{12}^2}{\Delta} m \alpha - \frac{g_{23}^2}{\Delta} (n+1) \alpha, \quad (2.72)$$

e

$$\Omega_{m,n} = \frac{1}{2} \sqrt{4\alpha^2 \left[m \frac{g_{12}^2}{\Delta} + (n+1) \frac{g_{23}^2}{\Delta} \right]^2 - 16 \frac{g_{12}^2}{\Delta} \frac{g_{23}^2}{\Delta} m(n+1) \alpha^2 + 16 \frac{g_{12}^2}{\Delta} \frac{g_{23}^2}{\Delta} m(n+1)}. \quad (2.73)$$

Podemos ver que se fizermos $\alpha = 1$ na Eq.(2.73), teremos:

$$\Omega_{m,n} = \left[m \frac{g_{12}^2}{\Delta} + (n+1) \frac{g_{23}^2}{\Delta} \right], \quad (2.74)$$

e se fizermos $\alpha = 0$, teremos:

$$\Omega_{m,n} = 2 \frac{g_{12} g_{23}}{\Delta} \sqrt{m(n+1)}, \quad (2.75)$$

Fazendo a normalização encontramos que:

$$\sin(\theta) = \frac{r\sqrt{n+1}}{\sqrt{m+r^2(n+1)}}; \quad \cos(\theta) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+r^2(n+1)}}; \quad r = \frac{g_{23}}{g_{12}}. \quad (2.76)$$

A Eq.(2.74), é a mesma expressão encontrada por Alexanian [23] que é linear em m e n , e a Eq.(2.75) a menos de um fator 2 é a expressão encontrada por Gerry e Eberly [22] na ausência dos “Stark-shifts”. Podemos observar que a presença dos “Stark-shifts” torna linear em m e n a expressão da frequência de Rabi $\Omega_{m,n}$, e como veremos posteriormente, essa mudança vai nos levar a uma evolução periódica dos subsistemas.

2.6 Meio não linear

Quando um meio material é submetido a um campo elétrico, os elétrons do meio são polarizados. Para campos elétricos fracos, a polarização é linearmente proporcional ao campo aplicado e dada por [24]:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}, \quad (2.77)$$

onde $\chi^{(1)}$ é a susceptibilidade óptica linear, e ε_0 é a permissividade do vácuo. A susceptibilidade linear está relacionada com o índice de refração do meio n por $\chi^{(1)} = n^2 - 1$.

A resposta à luz torna-se não linear para campos elétricos intensos. Em um nível fundamental, a origem da resposta não linear está relacionada com o movimento anarmônico dos elétrons devido a influência do campo elétrico aplicado. Como resultado, a polarização induzida no meio não é linear no campo elétrico \mathbf{E} , mas satisfaz uma relação mais geral [25]

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \left[\chi^{(1)} + \chi^{(2)} \mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E}^2 + \dots \right] \mathbf{E}, \quad (2.78)$$

onde $\chi^{(2)}$ é a susceptibilidade não linear de segunda ordem, e $\chi^{(3)}$ é a susceptibilidade não linear de terceira ordem. Termos de ordem quarta e superiores, podem se tornar importantes dependendo do meio físico estudado, ou da intensidade do campo aplicado. As susceptibilidades $\chi^{(n)}$, são funções apenas das frequências da radiação e da característica do material.

Um número de interessantes fenômenos ópticos surge das susceptibilidades de segunda e terceira ordem [14]. Por exemplo, $\chi^{(2)}$ dá a geração de segundo harmônico, retificação dc e etc. A susceptibilidade de terceira ordem $\chi^{(3)}$, é responsável pela geração de terceiro harmônico, o

efeito eletro óptico quadrático ou efeito Kerr, dentre outros.

Os meios não lineares nem sempre são meios cristalinos. Eles também podem ser líquidos ou gasosos. Para materiais com simetria de inversão, os termos $\chi^{(n)}$, $n = \text{par}$, são identicamente nulos e o termo não linear mais importante é o $\chi^{(3)}$. Os meios não lineares que apresentam a susceptibilidade não linear de terceira ordem ($\chi^{(3)}$), também são conhecidos como meios tipo Kerr, e é este tipo de meio que vamos considerar em nossos estudos.

2.6.1 Modelo Raman acoplado com um meio tipo Kerr em cada modo

Como é conhecido, várias generalizações do modelo de Jaynes-Cummings foram propostas na literatura, principalmente com um meio tipo Kerr presente no sistema [26]-[31]. Nesta seção vamos fazer um estudo do nosso sistema, onde vamos adicionar um elemento no nosso Hamiltoniano. Vamos considerar um meio tipo Kerr em cada modo, e vamos observar o comportamento de cada subsistema ao longo do tempo.

Adicionando um meio tipo Kerr, o Hamiltoniano da Eq.(2.57) pode ser escrito da seguinte forma [32], [33]:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^3 E_i \sigma_{ii} + \omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \alpha \frac{2g_{12}^2}{\Delta} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{\sigma}_{11} + \alpha \frac{2g_{23}^2}{\Delta} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma}_{22} + \chi_1 \hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_1^2 + \chi_2 \hat{a}_2^{\dagger 2} \hat{a}_2^2 + \\ & \frac{2g_{12}g_{23}}{\Delta} (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{\sigma}_+ + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma}_-), \end{aligned} \quad (2.79)$$

onde consideramos que χ_1 e χ_2 são proporcionais às susceptibilidades não linear de terceira ordem do meio Kerr dos modos 1 e 2 respectivamente.

2.6.2 Diagonalização do Hamiltoniano com o meio tipo Kerr

A diagonalização desse Hamiltoniano pode ser feita seguindo os mesmos passos da sub-seção

2.5.1, o que nos dá:

$$E_{m,n} = Q'_{m,n} - \Omega'_{m,n} \quad (2.80)$$

onde

$$Q'_{m,n} = E_1 + \chi_1 - \frac{g_{23}^2}{\Delta} + m \left[-\frac{g_{12}^2}{\Delta} + \omega_1 + (m-2)\chi_1 \right] + n \left[-\frac{g_{23}^2}{\Delta} + \omega_2 + n\chi_2 \right], \quad (2.81)$$

e

$$\Omega'_{m,n} = \frac{g_{12}g_{23}}{\Delta} \sqrt{[G_1]^2 + 4\left(\frac{g_{12}g_{23}}{\Delta}\right)^2 m(n+1)}. \quad (2.82)$$

Temos também que:

$$\sin(\theta') = \frac{G_1 + 2\Omega'_{m,n}}{2\sqrt{\left(\frac{g_{12}g_{23}}{\Delta}\right)^2 m(n+1) + \frac{1}{4}[G_1 + 2\Omega'_{m,n}]^2}} \quad (2.83)$$

e

$$\cos(\theta') = \frac{g_{12}g_{23}}{\Delta} \frac{\sqrt{m(n+1)}}{\sqrt{m(n+1) + \frac{1}{4}[G_1 + 2\Omega'_{m,n}]^2}} \quad (2.84)$$

onde

$$G_1 = \frac{2g_{23}^2}{\Delta}(n+1) - \frac{2g_{12}^2}{\Delta}m + 2\chi_1(m-1) - 2n\chi_2. \quad (2.85)$$

Temos na Eq.(2.82), a expressão para a frequência do sistema com os “Stark-shifts” e o meio Kerr. Podemos verificar que se fizermos $\chi_1 = \chi_2 = 0$, voltamos à Eq.(2.74), de M. Alexanian.

A Eq.(2.82) não é linear em m e n , sendo esta não linearidade devido à presença do meio Kerr. Como podemos observar na Eq.(2.85), temos uma competição entre os “Stark-shifts” e o

meio Kerr. Então uma das perguntas que nos ocorreu foi: será que tem algum valor específico para os “Stark-shifts” e a susceptibilidade não linear de terceira ordem tal que o sistema volte a ter periodicidade? No estudo desse sistema, Abdel-Aty [32] relata apenas o caráter não periódico na evolução da entropia do sistema, e deixa evidente que esse elemento faz com que o sistema se emaranhe e que jamais volte à sua condição inicial. Entretanto, poderíamos perguntar, o que acontece com o sistema quando variamos Δ ? Em busca dessa resposta, fizemos $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, parametrizamos a Eq.(2.82) em $g1/\Delta$ e $\chi/g1$, e pudemos observar que se admitirmos que $g_1 = g_2 = g$, e que $g/\Delta = \chi/g = 0.1$, a equação (2.82) torna-se:

$$\Omega''_{m,n} = \frac{0.1}{2}g(m+n+1) \quad (2.86)$$

que é linear em m e n . Esse resultado nos diz que o sistema evoluirá de maneira periódica.

Podemos ver que este resultado surgiu de uma combinação da competição entre os “Stark-shifts” e o meio Kerr. Como vimos anteriormente, se tivermos apenas os “Stark-shifts” ($\chi_1 = \chi_2 = 0$), o sistema é periódico Eq.(2.74). Outra observação que podemos fazer, é que na ausência dos “Stark-shifts” e na presença do meio tipo Kerr, o sistema perde a periodicidade. Podemos ver isso tomando $\alpha = 0$ na Eq.(2.79), o que nos dá:

$$\Omega'''_{m,n} = \sqrt{16\left(\frac{g_{12}g_{23}}{\Delta}\right)^2 m(n+1) + [\chi_1(m-1) - n\chi_2]^2}. \quad (2.87)$$

Podemos ver que esta expressão não é linear em m e n .

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foram encontrados vários artigos na literatura que tratam do mesmo sistema. Um destes artigos [34], nos chamou muito a atenção já que apresenta

o sistema Raman acoplado sem aproximação. Neste artigo, foi demonstrado que para a condição de Δ grande, a Eq.(2.74) foi obtida, o que demonstra que realmente estamos trabalhando com uma aproximação válida do sistema Raman acoplado, e o Hamiltoniano que temos em mãos é apropriado para este regime.

Capítulo 3

Dinâmica dos subsistemas

Neste capítulo faremos um estudo da evolução temporal de cada subsistema, modo 1, modo 2 e o átomo. Para isso partiremos do Hamiltoniano da Eq.(2.79).

3.1 Campos inicialmente em estados de Fock

A primeira condição inicial que vamos supor é que o átomo esteja inicialmente o estado fundamental $|1\rangle$, e que os dois modos do campo estejam inicialmente em estados de Fock $|m\rangle_1$ e $|n\rangle_2$, ou seja, o estado inicial do sistema é dado pelo produto direto dos estados dos subsistemas por:

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= |1\rangle|m\rangle_1|n\rangle_2 \\ &= |1; m_1, n_2\rangle. \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.1.1 Evolução temporal

Para calcularmos a evolução temporal deste sistema, vamos fazer uso da seguinte equação de auto-valores:

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (3.2)$$

onde E é dado pela Eq.(2.80). A partir daí, fazendo uso da Eq.(2.62) nós temos que:

$$|\Psi_{m_1, n_2}(t)\rangle = e^{i\hat{H}t}|\Psi(0)\rangle = e^{i\hat{H}t}|1; m_1, n_2\rangle, \quad (3.3)$$

o que nos dá:

$$|\Psi_{m_1, n_2}(t)\rangle = e^{-itQ_{m_1, n_2}}[B_{m_1, n_2}(t)|1; m_1, n_2\rangle + A_{m_1, n_2}(t)|3; m_1 - 1, n_2 + 1\rangle] \quad (3.4)$$

onde

$$B_{m_1, n_2}(t) = \cos(\Omega_{m_1, n_2}t) + i \cos(2\theta) \sin(\Omega_{m_1, n_2}t) \quad (3.5)$$

e

$$A_{m_1, n_2}(t) = i \sin(2\theta) \sin(\Omega_{m_1, n_2}t), \quad (3.6)$$

como descrito no apêndice A. Q_{m_1, n_2} , Ω_{m_1, n_2} , $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ são dados pelas Eqs.(2.81)-(2.84) respectivamente.

Podemos agora calcular o operador matriz densidade da evolução temporal dado por:

$$\hat{\rho}(t) = |\Psi_{m_1, n_2}(t)\rangle\langle\Psi_{m_1, n_2}(t)|, \quad (3.7)$$

o que nos dá:

$$\hat{\rho}_{AC}(t) = |B_{m_1, n_2}(t)|^2|1; m_1, n_2\rangle\langle 1; m_1, n_2| + |A_{m_1, n_2}(t)|^2|3; m_1 - 1, n_2 + 1\rangle\langle 3; m_1 - 1, n_2 + 1| \quad (3.8)$$

Podemos calcular também o operador evolução temporal para cada subsistema separadamente utilizando o traço parcial da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_A(t) &= Tr_{C_1 C_2}[\hat{\rho}_{AC}(t)] \implies \text{operador densidade do átomo} \\
\hat{\rho}_C(t) &= Tr_A[\hat{\rho}_{AC}(t)] \implies \text{operador densidade dos modos 1 e 2} \\
\hat{\rho}_{C_1}(t) &= Tr_{C_2}[\hat{\rho}_C(t)] \implies \text{operador densidade do modo 1} \\
\hat{\rho}_{C_2}(t) &= Tr_{C_1}[\hat{\rho}_C(t)] \implies \text{operador densidade do modo 2}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.1.2 Inversão atômica

Vamos analisar agora a dinâmica da inversão atômica do sistema Raman acoplado. A inversão atômica $W(t)$ é definida como:

$$W(t) = \rho_{33}(t) - \rho_{11}(t) \tag{3.10}$$

onde $\rho_{33}(t)$ é a probabilidade de encontrar o átomo no estado excitado, e $\rho_{11}(t)$ é a probabilidade de encontrar o átomo no estado fundamental.

Utilizando a Eq.(3.8), podemos calcular $\rho_{33}(t)$ e $\rho_{11}(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\rho_{33}(t) &= \sum_{x_1, x_2=0}^{\infty} \langle 3; x_1, x_2 | \hat{\rho}_{AC}(t) | 3; x_1, x_2 \rangle \\
\rho_{11}(t) &= \sum_{x_1, x_2=0}^{\infty} \langle 1; x_1, x_2 | \hat{\rho}_{AC}(t) | 1; x_1, x_2 \rangle
\end{aligned} \tag{3.11}$$

o que nos dá:

$$\rho_{33}(t) = |A_{m_1, n_2}(t)|^2 \text{ e } \rho_{11}(t) = |B_{m_1, n_2}(t)|^2. \tag{3.12}$$

Então para os campos inicialmente no estado de Fock temos:

$$W(t) = |A_{m_1, n_2}(t)|^2 - |B_{m_1, n_2}(t)|^2 \quad (3.13)$$

sendo $B_{m_1, n_2}(t)$ e $A_{m_1, n_2}(t)$ dados pelas Eqs.(3.5) e (3.6) respectivamente, e que após um pouco de algebra nos dá:

$$W(t) = -1 + 2 \sin^2(2\theta') \sin^2(\Omega'_{m_1, n_2} t) \quad (3.14)$$

onde Ω'_{m_1, n_2} é dado pela Eq.(2.82), e $\sin(\theta')$ e $\cos(\theta')$ são dados pelas Eqs.(2.83, 2.84).

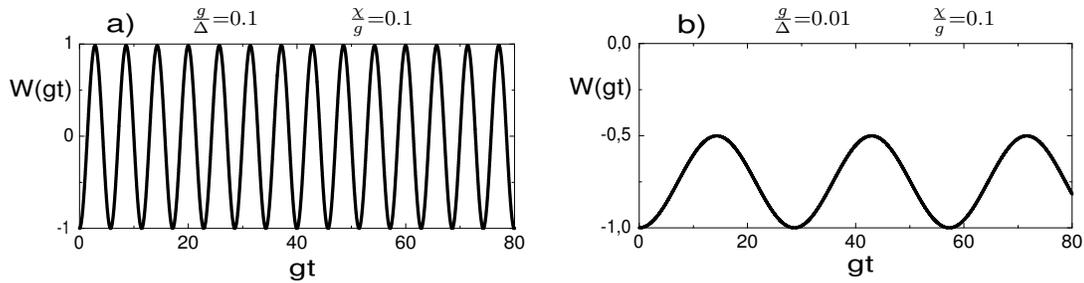


Figura 3.1: Inversão atômica onde os campos estão inicialmente em estados de Fock. Consideramos que $m_1 = n_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $|1\rangle$.

Na Fig.(3.1), apresentamos o gráfico da inversão atômica, onde os campos estão inicialmente em estados de Fock. Observamos que a frequência das oscilações aumenta, de acordo com a Eq.(2.82).

Para estas condições iniciais, podemos observar que os “Stark shifts” estão dominando a dinâmica do sistema, pois com o aumento de Δ ocorre uma diminuição substancial na frequência

e na amplitude da inversão. Fizemos várias simulações para diferentes valores da susceptibilidade de terceira ordem do meio Kerr, e observamos que ocorre apenas pequenas variações na frequência de Rabi do sistema.

3.1.3 Número médio de fótons de cada modo

Vamos analisar nesta seção a evolução temporal do número médio de fótons de cada modo do campo.

Para qualquer operador \hat{O}_s na representação de Schrödinger, nós temos que:

$$\langle \hat{O}_s \rangle = Tr[\hat{\rho}(t)\hat{O}_s]. \quad (3.15)$$

Desta mesma forma, fazendo uso de $\hat{\rho}(t)$ da Eq.(3.8), podemos calcular os números médios de fótons $\langle \hat{n}_1 \rangle$, $\langle \hat{n}_2 \rangle$ o que nos dá:

$$\langle \hat{n}_1 \rangle = m_1 |B_{m_1, n_2}(t)|^2 + (m_1 - 1) |A_{m_1, n_2}(t)|^2 \quad (3.16)$$

$$\langle \hat{n}_2 \rangle = n_2 |B_{m_1, n_2}(t)|^2 + (n_2 + 1) |A_{m_1, n_2}(t)|^2. \quad (3.17)$$

Na Fig.(3.2), apresentamos os gráficos do número médio de fótons de cada modo, e também da inversão atômica para comparação. Como podemos observar, o gráfico da inversão atômica começa em -1 , e os gráficos do número médio de fótons de cada modo começa em 5 , pois admitimos que o átomo estivesse inicialmente no estado fundamental, e que cada modo tivesse inicialmente 5 fótons. Podemos ver que a dinâmica da evolução ocorre da seguinte forma: um fóton do modo 1 (que está inicialmente com 5 fótons), é absorvido pelo átomo, este faz a transição

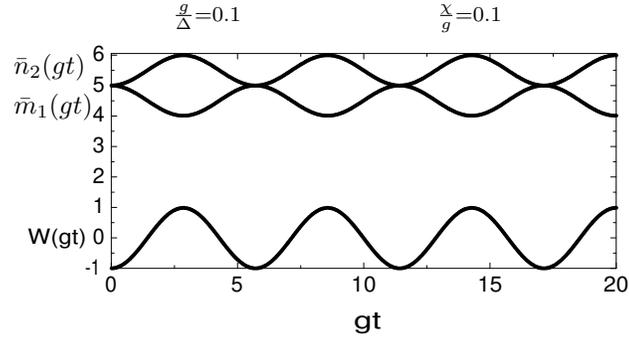


Figura 3.2: Número médio de fótons. Consideramos que $m_1 = n_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $|1\rangle$.

do nível 1 para o nível 3, e o modo 2 ganha um fóton. Em seguida o átomo absorve um fóton do modo 2, faz a transição do nível 3 para o estado fundamental (nível 1), e o modo 1 ganha um fóton. Para esta condição inicial, esse comportamento ocorre continuamente.

3.1.4 Parâmetro Q de Mandel de cada modo

As propriedades estatísticas dos estados da luz são importantes e permitem dizer se um determinado estado é puramente clássico ou se pode apresentar efeitos quânticos. Um teste muito útil para determinar o tipo de estatística de um estado é dado pelo parâmetro Q de Mandel [35], definido como:

$$Q_i \equiv \frac{\langle (\Delta \hat{n}_i)^2 \rangle - \langle \hat{n}_i \rangle}{\langle \hat{n}_i \rangle} \quad (3.18)$$

onde

$$\langle (\Delta \hat{n}_i)^2 \rangle = \langle \hat{n}_i^2 \rangle - \langle \hat{n}_i \rangle^2. \quad (3.19)$$

Utilizando esta definição, classificamos a estatística dos campos da seguinte maneira:

$$Q = 0 \implies \text{estatística } Poissoniana$$

$$Q > 0 \implies \text{estatística } super - Poissoniana$$

$$Q < 0 \implies \text{estatística } sub - Poissoniana$$

Por esta definição, vemos que o estado de número tem estatística sub-Poissoniana e é o estado mais sub-Poissoniano possível, com $Q = -1$. Isto implica que o estado de número é um estado não-clássico. Como $\langle \hat{n}_i \rangle$ já foram calculados (Eqs.(3.16) e (3.17)), precisamos calcular apenas $\langle \hat{n}_i^2 \rangle$, o que nos dá:

$$\langle \hat{n}_1^2 \rangle = m_1^2 |B_{m_1, n_2}(t)|^2 + (m_1 - 1)^2 |A_{m_1, n_2}(t)|^2 \quad (3.20)$$

$$\langle \hat{n}_2^2 \rangle = n_2^2 |B_{m_1, n_2}(t)|^2 + (n_2 + 1)^2 |A_{m_1, n_2}(t)|^2. \quad (3.21)$$

Na Fig.(3.3), apresentamos os gráficos do parâmetro Q de Mandel dos modos 1 e 2 respectivamente, onde podemos observar uma evolução periódica na qual tanto o modo 1 quanto o modo 2 (os quais têm uma estatística sub-Poissoniana) retornam à condição de estado mais sub-Poissoniano (ou seja, $Q = -1$), com a mesma periodicidade da inversão atômica conforme Fig.(3.1).

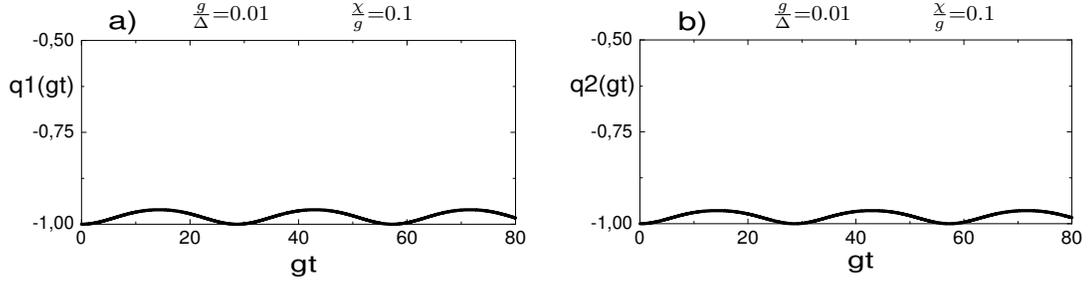


Figura 3.3: Parâmetro Q de Mandel dos modos 1 e 2. Consideramos que $m_1 = n_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $|1\rangle$.

3.1.5 Pureza dos subsistemas - emaranhamento

A dinâmica quântica descrita pelo Hamiltoniano da Eq.(2.79), leva a um emaranhamento entre os subsistemas ao longo do tempo. Nesta seção vamos usar a pureza descrita por:

$$\zeta_i(t) = 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}_i^2(t)], \quad (3.22)$$

onde $i = A, C_1, C_2$. Aqui $\hat{\rho}(t)$ é o operador densidade dado pela Eq.(3.8). Se $\hat{\rho}(t)$ descreve um estado puro, então $\zeta = 0$, se não $\zeta \neq 0$. Para estas condições iniciais, nós encontramos que

$\zeta_A = \zeta_C = \zeta_{C_1} = \zeta_{C_2}$, onde

$$\zeta_A = 1 - \left[|B_{m_1, n_2}(t)|^2 + |A_{m_1, n_2}(t)|^2 \right]. \quad (3.23)$$

Na Fig.(3.4), apresentamos os gráficos da pureza do átomo, onde podemos observar que o sistema volta à sua condição inicial com a mesma frequência da inversão atômica. Uma

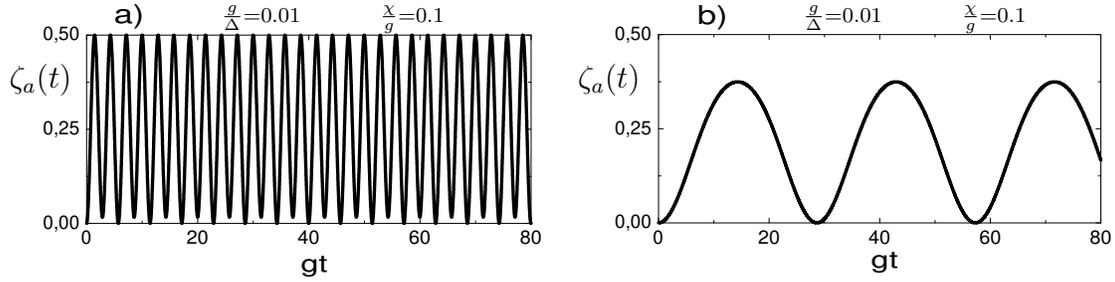


Figura 3.4: Pureza do átomo. Consideramos que $m_1 = n_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $|1\rangle$.

característica importante que não poderíamos deixar de mencionar é que os subsistemas (átomo e $C_1 + C_2$) tendem a se desemaranhar com o aumento de Δ .

3.2 Campos inicialmente em estados coerentes

Vamos considerar aqui uma nova condição inicial, onde os dois modos do campo estão inicialmente em estados coerentes, e o átomo mais uma vez está inicialmente no estado fundamental.

3.2.1 Evolução temporal

Inicialmente temos que:

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{m_1, n_2=0}^{\infty} C_{m_1, n_2} |1| m\rangle_1 | n\rangle_2, \quad (3.24)$$

onde $C_{m,n}$ são os coeficientes dos estados coerentes dados por:

$$C_{m,n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)} \alpha_1^m \alpha_2^n}{\sqrt{m!} \sqrt{n!}}. \quad (3.25)$$

Então seguindo os mesmos passos da subseção 3.1.1, temos:

$$|\Psi_{m,n}(t)\rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} e^{-itQ_{m,n}} [B_{m,n}(t)|1; m, n\rangle + A_{m,n}(t)|3; m-1, n+1\rangle] \quad (3.26)$$

onde $Q_{m,n}$, $B_{m,n}$ e $A_{m,n}$ são dados pelas Eqs.(2.81), (3.5) e (3.6) respectivamente. Podemos agora calcular o operador densidade:

$$\hat{\rho}(t) = |\Psi_{m,n}(t)\rangle\langle\Psi_{k,l}(t)|, \quad (3.27)$$

o que nos dá:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AC}(t) = & \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\infty} C_{m,n} C_{k,l}^* e^{-it[(k-m)\gamma_1 + (l-n)\gamma_2]} \\ & \{B_{m,n}(t)B_{k,l}^*(t)|1; m, n\rangle\langle 1; k, l| + \\ & B_{m,n}(t)A_{k,l}^*(t)|1; m, n\rangle\langle 3; k-1, l+1| + \\ & A_{m,l}(t)B_{k,l}^*(t)|3; m-1, n+1\rangle\langle 1; k, l| + \\ & A_{m,n}(t)A_{k,l}^*(t)|3; m-1, l+1\rangle\langle 3; k-1, l+1|\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Utilizando as Eqs.(3.9), temos que:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_C(t) = & \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\infty} C_{m,n} C_{k,l}^* e^{-it[(k-m)\gamma_1 + (l-n)\gamma_2]} \\ & \{B_{m,n}(t)B_{k,l}^*(t)|m, n\rangle\langle k, l| + \\ & A_{m,n}(t)A_{k,l}^*(t)|m-1, n+1\rangle\langle k-1, l+1|\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{C_1}(t) = & \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{m,n} C_{k,l}^* e^{-it(k-m)\gamma_1} \\ & \{B_{m,n}(t)B_{k,l}^*(t)|m\rangle\langle k| + A_{m,n}(t)A_{k,l}^*(t)|m-1\rangle\langle k-1|\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{C_2}(t) = & \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_{m,n} C_{k,l}^* e^{-it(l-n)\gamma_2} \\ & \{B_{m,n}(t)B_{m,l}^*(t)|n\rangle\langle l| + A_{m,n}(t)A_{m,l}^*(t)|n+1\rangle\langle l+1|\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.2.2 Inversão atômica

Vamos calcular aqui a inversão atômica para os campos inicialmente no estado coerente. Da Eq.(3.26) temos que:

$$\rho_{33}(t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} |C_{m,n}|^2 |A_{m,n}(t)|^2 \quad (3.32)$$

$$\rho_{11}(t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} |C_{m,n}|^2 |B_{m,n}(t)|^2 \quad (3.33)$$

onde $C_{m,n}$ são os coeficientes dos estados coerentes dados pela Eq.(3.25). Após um pouco de álgebra temos que:

$$W(t) = -1 + \sum_{m,n=0}^{\infty} 2|C_{m,n}|^2 \sin^2(2\theta') \sin^2(\Omega'_{m,n}t) \quad (3.34)$$

onde Ω'_{m_1,n_2} é dado pela Eq.(2.82), e $\sin(\theta')$ e $\cos(\theta')$ são dados pelas Eqs.(2.83, 2.84).

Na Fig(3.5), apresentamos a inversão atômica onde os campos estão inicialmente no estado coerente. Como já mencionamos anteriormente, é conhecido na literatura que na ausência do meio Kerr, o sistema apresenta uma evolução periódica de acordo com a Eq.(2.74), como pode ser visto no gráfico a). Fizemos também várias simulações e verificamos que na ausência deste elemento, variando Δ temos apenas uma modificação na frequência, a qual diminui com o aumento de Δ . Já na presença do meio Kerr, podemos observar uma evolução diferente. O

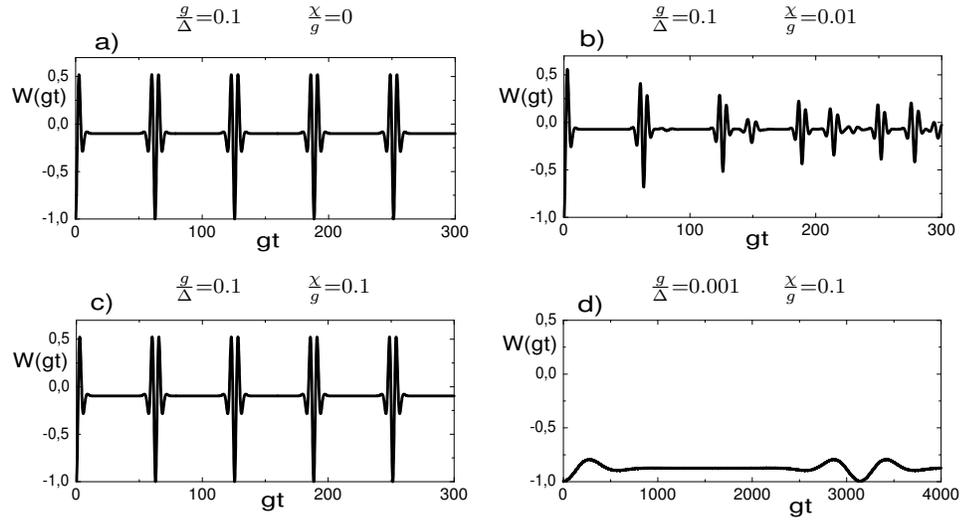


Figura 3.5: Inversão atômica onde os campos estão inicialmente em estados coerentes. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $|1\rangle$.

sistema não apresenta uma evolução periódica (não linear em m e n) como descrito na Eq.(2.82), e pode ser confirmado no gráfico da figura 3.5 b).

Podemos perguntar, como fica o comportamento do sistema quando a razão χ/g é comparável à razão g/Δ ? Podemos ver no gráfico da figura 3.5 c), que o sistema volta a ter uma evolução periódica, como já havíamos comentado anteriormente, de acordo com a Eq(2.86). Então ao contrário do que está descrito na literatura [32], o meio Kerr nem sempre destrói a periodicidade do sistema. E como no caso da primeira condição inicial (com os campos inicialmente em estados de Fock), com o aumento de Δ , a amplitude da inversão diminui, como pode ser visto em 3.5 d).

3.2.3 Número médio de fótons de cada modo

Vamos analisar nesta seção a evolução temporal do número médio de fótons de cada modo do campo, com os campos inicialmente no estado coerente.

Fazendo uso de $\hat{\rho}(t)$ da Eq.(3.28), podemos calcular $\langle \hat{m}_1 \rangle$, $\langle \hat{n}_2 \rangle$ o que nos dá:

$$\langle \hat{m}_1 \rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} |C_{m,n}|^2 \left(m |B_{m,n}(t)|^2 + (m-1) |A_{m,n}(t)|^2 \right) \quad (3.35)$$

e

$$\langle \hat{n}_2 \rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} |C_{m,n}|^2 \left(n |B_{m,n}(t)|^2 + (n+1) |A_{m,n}(t)|^2 \right). \quad (3.36)$$

3.2.4 Parâmetro Q de Mandel de cada modo

Podemos calcular também o parâmetro Q de Mandel para os modos 1 e 2 inicialmente no estado coerente. Utilizando as Eqs.(3.30), (3.31) temos:

$$\langle (\hat{m}_1)^2 \rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} |C_{m,n}|^2 \left[\left(m^2 |B_{m,n}(t)|^2 + (m-1)^2 |A_{m,n}(t)|^2 \right)^2 \right] \quad (3.37)$$

para o modo 1, e

$$\langle (\hat{n}_2)^2 \rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} |C_{m,n}|^2 \left[\left(n^2 |B_{m,n}(t)|^2 + (n+1)^2 |A_{m,n}(t)|^2 \right)^2 \right] \quad (3.38)$$

para o modo 2. Como $\langle m_1 \rangle$ e $\langle n_2 \rangle$ já foram calculados (Eqs.(3.35) e (3.36)), podemos fazer uso da Eq.(3.17).

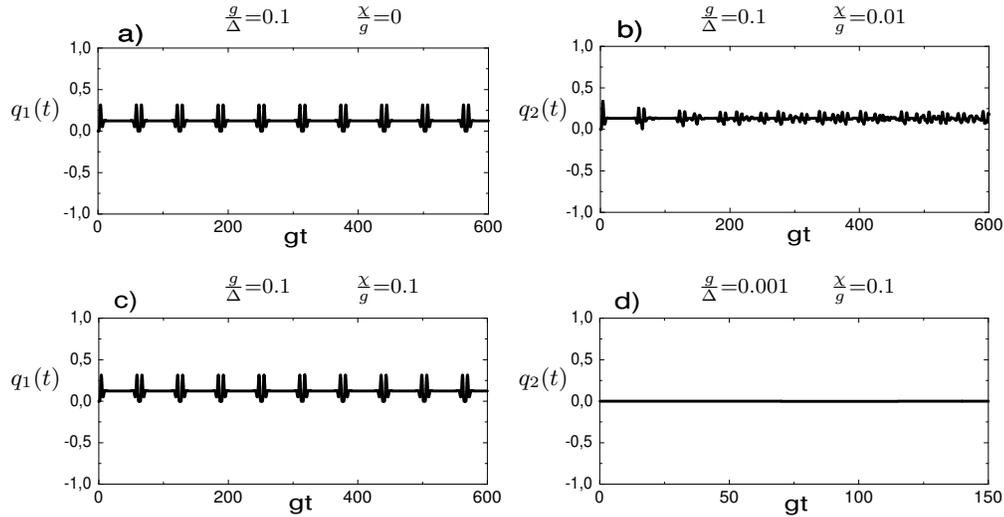


Figura 3.6: Parâmetro Q de Mandel do modo 1. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $|1\rangle$.

Nas Fig.(3.6) e (3.7), apresentamos o parâmetro Q de Mandel de cada modo, onde os campos estão inicialmente no estado coerente. Como era esperado, tanto o modo 1 quanto o modo 2 iniciam em $Q = 0$, pois o estado coerente tem estatística Poissoniana. Com relação à periodicidade, as mesmas características da inversão e número médio de fótons são observadas aqui, mas é bom salientar que para Δ pequeno, a evolução do parâmetro Q de Mandel do modo 1 é predominantemente super-Poissoniana. Porém observando a evolução do modo 2 Fig(3.7), podemos ver que apesar da frequência ser a mesma do modo 1, o modo 2 apresenta evolução predominantemente sub-Poissoniana. Para os dois modos, a estatística torna-se Poissoniana ($Q=0$), com o aumento de Δ . Gerry e Eberly [22] observaram um comportamento semelhante, tanto para o modo um quanto para o modo 2, o que deixa claro que este comportamento não é devido a presença dos

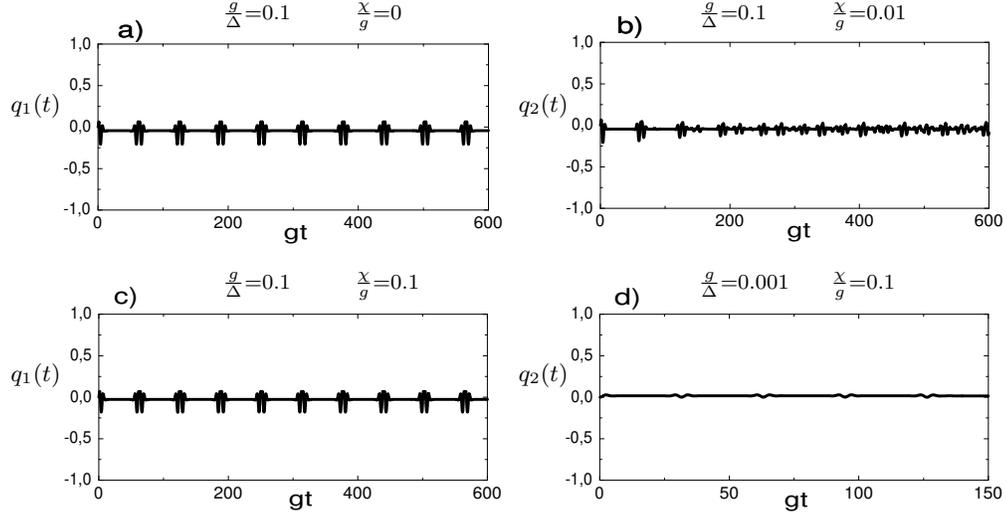


Figura 3.7: Parâmetro Q de Mandel do modo 2. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $|1\rangle$.

Stak-shifts nem do meio Kerr, uma vez que os mesmos não foram considerados naquele trabalho.

3.2.5 Pureza dos subsistemas - emaranhamento

Como já foi dito, estamos interessados em observar como ocorre o emaranhamento entre os subsistemas ao longo do tempo. Queremos conhecer quais são as influências dos “Stark-shifts” e do meio tipo Kerr nesse emaranhamento, uma vez que estamos estudando como ocorre a competição dos mesmos no sistema Raman acoplado. Para isso vamos usar a pureza descrita pela Eq.(3.22). Utilizando a Eq.(3.28) e as Eqs.(3.30) e (3.31), podemos calcular a pureza de cada subsistema, o que nos dá:

$$\zeta_A = \zeta_C \quad (3.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \zeta_A = & 1 - \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\infty} \left\{ |C_{m,n}|^2 |C_{k,l}|^2 |B_{m,n}(t)|^2 |B_{k,l}(t)|^2 + \right. \\ & C_{m,n+1} C_{k,l+1}^* C_{k+1,l} C_{m+1,n}^* B_{m,n+1}(t) B_{k,l+1}^*(t) A_{k+1,l}(t) A_{m+1,n}^*(t) + \\ & C_{m+1,n} C_{k+1,l}^* C_{k,l+1} C_{m,n+1}^* A_{m+1,n}(t) B_{k+1,l}^*(t) B_{k,l+1}(t) B_{m,n+1}^*(t) + \\ & \left. |C_{m,n}|^2 |C_{k,l}|^2 |A_{m,n}(t)|^2 |A_{k,l}(t)|^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

que é a pureza do átomo;

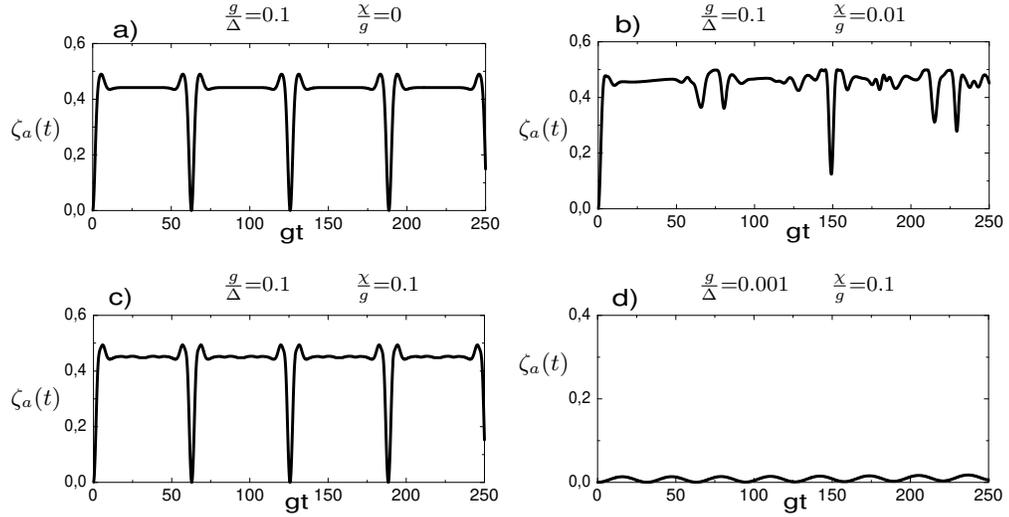


Figura 3.8: Pureza do átomo. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $|1\rangle$.

$$\begin{aligned} \zeta_{C_1} = & 1 - \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\infty} \left\{ C_{m,n} C_{k,n}^* C_{k,l} C_{m,l}^* B_{m,n}(t) B_{k,n}^*(t) B_{k,l}(t) B_{m,l}^*(t) + \right. \\ & C_{m,n+1} C_{k,l+1}^* C_{k+1,l} C_{m+1,n}^* B_{m,n+1}(t) B_{k,l+1}^*(t) A_{k+1,l}(t) A_{m+1,n}^*(t) + \\ & C_{m+1,n} C_{k+1,l}^* C_{k,l+1} C_{m,n+1}^* A_{m+1,n}(t) B_{k+1,l}^*(t) B_{k,l+1}(t) B_{m,n+1}^*(t) + \end{aligned}$$

$$\left\{ C_{m,n} C_{k,n}^* C_{k,l} C_{m,l}^* A_{m,n}(t) A_{k,n}^*(t) A_{k,l}(t) A_{m,l}^*(t) \right\} \quad (3.41)$$

é a pureza do modo 1, e

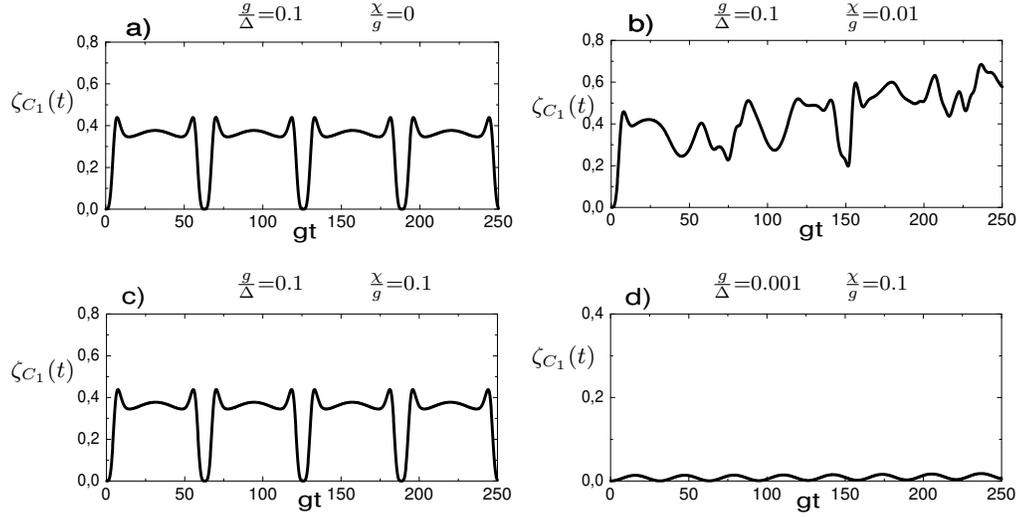


Figura 3.9: Pureza do modo 1. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $|1\rangle$.

$$\begin{aligned} \zeta_{C_2} = 1 - \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\infty} \left\{ C_{m,n} C_{m,l}^* C_{k,l} C_{k,n}^* B_{m,n}(t) B_{m,l}^*(t) B_{k,l}(t) B_{k,n}^*(t) + \right. \\ C_{m,n+1} C_{m,l+1}^* C_{k,l} C_{k+1,n}^* B_{m,n+1}(t) B_{m,l+1}^*(t) A_{k,l}(t) A_{k+1,n}^*(t) + \\ C_{m,n} C_{m,l}^* C_{k,l+1} C_{k,n+1}^* A_{m,n}(t) A_{m,l}^*(t) B_{k,l+1}(t) B_{k,n+1}^*(t) + \\ \left. C_{m,n} C_{m,l}^* C_{k,l} C_{k,n}^* A_{m,n}(t) A_{m,l}^*(t) A_{k,l}(t) A_{k,n}^*(t) \right\} \quad (3.42) \end{aligned}$$

é a pureza do modo 2, com os campos inicialmente no estado coerente.

Nas Figs.(3.8), (3.9) e (3.10), apresentamos a pureza do átomo, e de cada modo do campo, onde os campos estão inicialmente em estados coerentes. Uma semelhança que podemos ver na

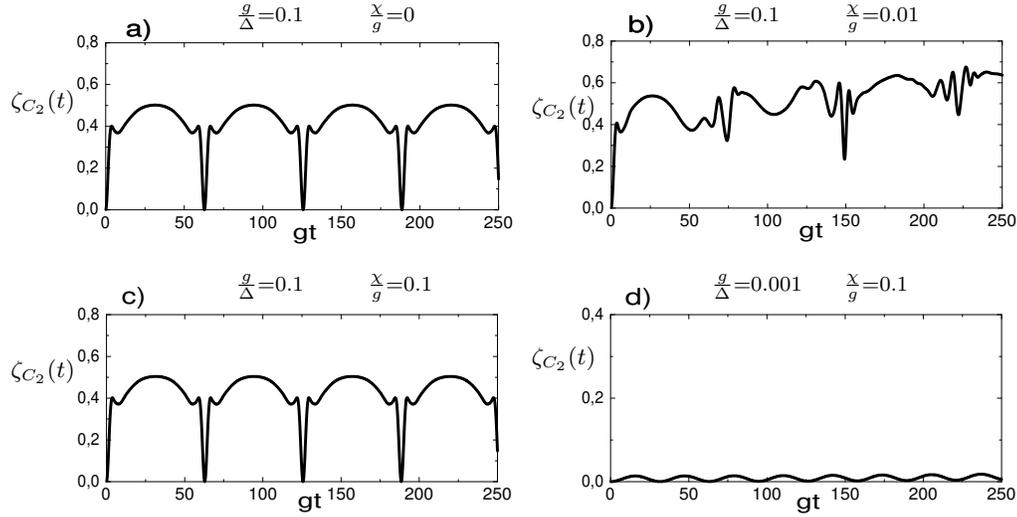


Figura 3.10: Pureza do modo 2. Consideramos que $\bar{m}_1 = \bar{n}_2 = 5$, e o átomo no estado fundamental $|1\rangle$.

evolução da pureza de cada subsistema separadamente é que tanto a pureza do átomo quanto a pureza dos modos 1 e 2 retornam à condição de $\zeta = 0$ com a mesma frequência, que por sua vez é a mesma da inversão atômica para as mesmas condições iniciais. É interessante observar que quando adicionamos o meio tipo Kerr ($\chi_1/g = \chi_2/g = 0.01$), tanto a pureza do átomo quanto a pureza dos modos 1 e 2 não voltam à condição de $\zeta = 0$, ou seja estado puro. Aumentando o valor da susceptibilidade do meio tipo Kerr, os subsistemas se emaranham, ocorrem fortes oscilações e o máximo da pureza tende a permanecer em torno de 0,7. Esse é o mesmo comportamento descrito na entropia de M. Abdel-Aty [32], mas como dissemos anteriormente, quando a razão g/Δ fica comparável à razão χ/g , o sistema volta a ser linear, e a evolução da pureza torna-se periódica novamente. Outro detalhe interessante, é que quando a razão g/Δ fica muito menor

que a razão χ/g , o estado fica mais puro como pode ser visto em 3.10 d). Isso era esperado pois com o aumento de Δ , fica cada vez mais difícil o elétron passar para o estado excitado, uma vez que esta transição é feita via nível 2.

Capítulo 4

Conclusões

Ao longo deste trabalho fizemos um estudo de um sistema relacionado à interação da radiação com a matéria, ou um átomo de três níveis interagindo com dois modos do campo, conhecido na literatura como sistema Raman acoplado. Durante nosso estudo, especial atenção foi dispensada em observar o comportamento do sistema ao longo do tempo. Em particular, queríamos observar o comportamento de cada subsistema, átomo e os campos, por isso consideramos condições iniciais diferentes e analisamos algumas propriedades estatísticas.

Para facilitar o desenvolvimento dos cálculos, resolvemos trabalhar na condição de Δ grande, ou seja, $\Delta \gg g_{ij}$. Dentro deste regime, foi possível escolher uma transformação unitária que levou o Hamiltoniano total do sistema a um Hamiltoniano efetivo de dois níveis. Essa transformação nos permitiu fazer um estudo mais geral em relação a um trabalho já conhecido na literatura [22], pois nos permitiu analisar a importância de termos normalmente desprezados, os “Stark-shifts”. Pudemos verificar que os mesmos desempenham um papel fundamental no

sistema, pois como vimos eles tornam a frequência linear em m e n , fazendo com que os subsistemas se emaranhem e desemaranhem periodicamente. Como eles dependem do parâmetro Δ (dessintonia), acreditamos que é possível controlar a intensidade destes “Stark-shifts” variando Δ , e com isso controlar a periodicidade do sistema.

Também nos interessamos em saber qual seria o comportamento desses subsistemas na presença de algum elemento que fizesse o papel de um oscilador anarmônico. Adicionamos então um meio não linear do tipo Kerr no Hamiltoniano do nosso sistema. Na primeira condição inicial que assumimos (onde o átomo estava no estado fundamental e os campos no estado de Fock), não pudemos observar muita influência desse meio na evolução dos subsistemas. No entanto para condição inicial onde o átomo estava no estado fundamental, e os modos do campo em estados coerentes, verificamos que o campo se apresenta mais sensível à presença de meios não lineares, e que esse meio tem a característica de “adicionar ruído” no sistema, o que causa a destruição da regularidade na evolução (antes proporcionada pelos “Stark-shifts”).

Nós verificamos um resultado interessante que surge da competição entre os “Stark-shifts”, e o meio Kerr. Verificamos que nem sempre o meio Kerr ocasiona a destruição da periodicidade do sistema. Vimos que para determinados valores de Δ , a frequência de Rabi generalizada $\Omega_{m,n}$ da Eq.(2.82) torna-se linear em m e n , e o sistema volta a exibir periodicidade Eq.(2.86).

Apêndice A

Cálculo de $A_{m,n}(t)$ e $B_{m,n}(t)$

A partir da Eq.(2.62) temos que:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|1; m_1, n_2\rangle \quad (\text{A.1})$$

$$= e^{-i\hat{H}t} \left(-\sin(\theta)|\Psi_{m,n}^+\rangle + \cos(\theta)|\Psi_{m,n}^+\rangle \right) \quad (\text{A.2})$$

$$= -\sin(\theta)e^{-iE_{m,n}^-t}|\Psi_{m,n}^-\rangle + \cos(\theta)e^{-iE_{m,n}^+t}|\Psi_{m,n}^-\rangle \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a Eq.(2.80) em A3, temos que:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iQ_{m,nt}} \left\{ -\sin(\theta)e^{-i\Omega_{m,n}t}|\Psi_{m,n}^-\rangle + \cos(\theta)e^{-i\Omega_{m,n}t}|\Psi_{m,n}^-\rangle \right\} \quad (\text{A.4})$$

Agora substituindo as Eqs.(2.60 e 2.61), e fazendo um pouco de algebra, temos que:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-iQ_{m,nt}} \left\{ \left(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \right) \cos(\Omega_{m,n}t)|1; m, n\rangle \right. \\ &\quad + \left(\sin(\theta) \cos(\theta) - \sin(\theta) \cos(\theta) \right) \cos(\Omega_{m,n}t)|3; m-1, n+1\rangle \\ &\quad + i \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \right) \sin(\Omega_{m,n}t)|1; m, n\rangle \\ &\quad \left. + i \left(\sin(\theta) \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta) \right) \sin(\Omega_{m,n}t)|3; m-1, n+1\rangle \right\} \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

O que após um rearranjo nos dá:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iQ_{m,n}t} \left\{ \left[\cos(\Omega_{m,n}t) + i \cos(2\theta) \sin(\Omega_{m,n}t) \right] |1; m, n\rangle + \right. \quad (\text{A.6})$$

$$\left. + i \sin(2\theta) \sin(\Omega_{m,n}t) |3; m-1, n+1\rangle \right\}, \quad (\text{A.7})$$

ou de outra forma,

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iQ_{m,n}t} \left\{ B_{m,n}(t) |1; m, n\rangle + A_{m,n}(t) |3; m-1, n+1\rangle \right\}, \quad (\text{A.8})$$

onde

$$B_{m,n} = \cos(\Omega_{m,n}t) + i \cos(2\theta) \sin(\Omega_{m,n}t) \quad (\text{A.9})$$

$$A_{m,n} = i \sin(2\theta) \sin(\Omega_{m,n}t) \quad (\text{A.10})$$

que são as Eqs.(3.5 e 3.6) respectivamente.

Referências

- [1] P. A. Smekal, *Naturwiss*, **11**, 873 (1923).
- [2] C. V. Raman, and K. S. Krishnan, *Nature* **121**, 501 (1928).
- [3] P. A. Dirac, *Proc. Soc. (London), Ser. A***114**, 243 (1927).
- [4] R. J. Glauber, *Phys. Rev. A* **131**, 2766 (1963).
- [5] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277 (1963).
- [6] J. F. Clauser, *Phys. Rev. D* **9**, 853 (1974).
- [7] H. J. Kimble, M. Dagenais e L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691 (1977).
- [8] R. R. Puri and G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **45**, 5073 (1992)
- [9] C. K. Law and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **47**, 3195 (1993)
- [10] Gao-Xiang Li and Jin-Sheng Peng, *Phys. Rev. A* **52**, 465 (1995)
- [11] D. P. Vicenzo, *Science* **270**, 255 (1995)
- [12] A. Steane, *Rep. Prog. Phys.* **61**, 117 (1998)

-
- [13] P. L. Knight, M. Muraio, M. B. Plenio, V. Vedral, *Chaos, Solitons & Fractals* **10**, 1621 (1999)
- [14] G. C. Baldwin, “*An Introduction to Nonlinear Optics*”, New York (1969)
- [15] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963)
- [16] H. M. Nussenzveig “*Introduction to Quantum Optics*” (Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1973)
- [17] R. Loudon, “*The Quantum Theory of Light*“, (Oxford University Press, 1973)
- [18] W. H. Louisell, “*Quantum Statistical Properties of Radiation*”, (Wiley, 1973).
- [19] M. Brune, S. Haroche, V. Lefreuve, J. M. Raimond and N. Zagury, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 976 (1990)
- [20] M. O. Scully and M. Zubairy, ” *Quantum Optics*”, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [21] A. P. S. de Moura, ” *Efeitos dos termos contra-girantes no modelo de Jaynes-Cummings*”, dissertação de mestrado (Unicamp-1997)
- [22] C. C. Gerry, and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **42**, 6805 (1990)
- [23] M. Alexanian and S. K. Bose, *Phys. Rev. A* **52**, 2218 (1995)
- [24] P. G. Harper, “*Nonlinear Optics*”, New York (1977) P. 51

-
- [25] N. Bloembergen “*Nonlinear Optics*”, New York (1965)
- [26] V. Buzek and I. Jex Optics. Commu. **78**, 425 (1990)
- [27] N. Nayak and V. Bartiz, Phys. Rev. A **42**, 2953 (1990)
- [28] M. M. Ahmmed, Inter. J. Theoretical Phys. **34**, No 9, 1877 (1995)
- [29] A. -S. F. Obada, M. A. -H. Ahmed and A. -A. Mahmoud, J. Phys. Soc. of Japan, **68**, No 7, 2269 (1999)
- [30] A. -S. F. Obada and M. Abdel Aty, Acta Phys. Pol. B **31**, 589 (2000)
- [31] M. Abdel-Aty, J. Phys. B **33**, 2665 (2000)
- [32] M. Abdel-Aty, S. A. Kahalek, A. -S. F. Obada, Chaos, Solitons & Fractals, **12**, 2015-2022 (2001)
- [33] M. Abdel-Aty, G. M. A. Al-Kader, A. -S. F. Obada, Chaos, Solitons & Fractals, **12**, 2455 (2001).
- [34] Ying Wu, Phys. Rev. A **54**, 1586 (1996).
- [35] L. Mandel e E. Wolf Optical ”*Coherence and Quantum Optical*” (Cambridge University Press, 1995).