

Universidade Estadual de Campinas

**ESTUDO DO VOLUME CAÓTICO
E OBSERVAÇÕES DO EFEITO DE BORDA
PARA O MODELO DO MASER CLÁSSICO**

por

Renato Moreira Angelo

Orientadora: Prof^ª Dr^ª Kyoko Furuya

Dissertação submetida ao
Instituto de Física “Gleb Wataghin”
para a obtenção do título de
Mestre em Física.

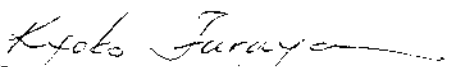
Campinas, São Paulo, Brasil

23/02/99

Instituto de Física "Gleb Wataghin"
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DO Sr.
RENATO MOREIRA ANGELO, RA 930221 APRESENTADA E APROVADA AO
INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS, EM 23 DE FEVEREIRO DE 1999.**

COMISSÃO JULGADORA:



Profª. Dra. Kyoko Furuya
(Orientadora do Candidato) DFESCM/IFGW/UNICAMP



Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino
DM/UFSCar-SP



Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar
DFESCM/IFGW/UNICAMP

À memória de minha tia Norma.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Kyoko, pelas inúmeras discussões, por todas as sugestões e pela orientação brilhante, que fez com que o trabalho se tornasse sempre muito agradável.

Agradeço especialmente à Maísa por todas as discussões e por toda a ajuda prestada no início deste trabalho. Agradeço também ao Gian, pessoa extremamente humilde e capaz, que me ajudou em muitas discussões e ao Marcus, por todas as sugestões e por ter sido um excelente professor em cursos que eu deveria ter aproveitado melhor.

A todos os amigos que conviveram comigo na Unicamp, principalmente à "nossa turminha", sem os quais certamente a vida seria menos preciosa. Aos amigos Wesley, Júlio e Fábio, pela amizade completa e à minha família, pelo incentivo constante. Agradeço principalmente à Tânia por estar sempre presente apesar da distância e de todos os meus defeitos.

Sou grato a todos que me ajudaram em outros projetos de vida. Ao pessoal do Oficina Coral, Gilberto Mendes e do InCena por tantos momentos prazerosos e ao pessoal do PEIS por me fazer sentir útil. Agradeço enfim, a todos que tornaram esse momento possível e finalmente, à FAPESP, pelo imprescindível apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho, apresentamos um estudo sistemático do volume caótico no espaço de fase do Hamiltoniano clássico associado ao modelo do Maser Caótico em função dos parâmetros de interação G e G' . O estudo foi realizado utilizando-se um ensemble médio de 100 condições iniciais. Cada condição inicial foi caracterizada como caótica ou regular através do cálculo de seu respectivo expoente de Lyapunov acompanhado da visualização da seção de Poincaré correspondente. O número relativo de trajetórias caóticas obtidas equivale ao volume caótico do sistema correspondente ao regime dinâmico definido pelos parâmetros de acoplamento. Apresentamos também a relação entre o expoente de Lyapunov e o parâmetro G' , que indica que não só a quantidade de caos do sistema é incrementada com G' mas também a divergência média entre trajetórias vizinhas. Outro resultado importante deste trabalho se refere à borda clássica para as variáveis de spin, a qual é oriunda de uma mudança de topologia do sistema. Observa-se que, em regiões próximas da borda, trajetórias vizinhas regulares apresentam afastamento exponencial, comportamento característico de trajetórias caóticas. Também foi observado afastamento exponencial para um pacote clássico de condições iniciais regulares preparado sobre a separatriz do movimento. O pacote clássico se deforma à medida que se aproxima da borda e, em tempos longos, forma seções de toros acima e abaixo da separatriz na seção de Poincaré. O *efeito de borda* tem sido utilizado recentemente para explicar efeitos puramente quânticos em regimes semiclássicos.

Abstract

In the present work, we show a systematic study of the chaotic volume in the classical Hamiltonian phase space associated to the Chaotic Maser Model as a function of the interaction parameters G and G' . The study has been realized using an average ensemble with 100 initial conditions. Each condition has been classified as chaotic or regular by means of their respective Lyapunov exponent together with their corresponding Poincaré section. The relative number of chaotic trajectories corresponds to the chaotic volume of the system for the dynamical regime determined by the coupling parameters. We also show the dependence of the Lyapunov exponent on the parameter G' , which indicates that the amount of chaos and the average divergence between close trajectories both increase with G' . Another important result is connected with the classical border of the spin coordinates, which comes out from a topological change in the spin phase space. We have observed exponential departure of two nearby trajectories, an usual behavior of chaotic trajectories, which manifests here for regular trajectories close to the border. This sort of divergence has also been observed for a classical patch of regular initial conditions prepared on the separatrix region. The patch deforms itself near the border and, for long times, develops sections of tori both above and below the separatrix in the Poincaré section. The *border effect* has been recently used to explain purely quantum effects in semiclassical regimes.

Conteúdo

Introdução	8
1 Formalismo Clássico	12
1.1 Volume Caótico	12
1.2 Ferramentas Clássicas	13
1.2.1 Expoentes de Lyapunov	13
1.2.2 Seções de Poincaré	15
2 O Modelo do Maser Caótico	17
2.1 O Modelo Quântico	17
2.2 O Análogo Clássico	19
3 Métodos Numéricos	21
3.1 Procedimentos	21
3.2 Limites do Espaço de Fase	22
3.3 Ensemble de Trajetórias	25
3.4 Classificação dos Elementos do Ensemble	26
3.4.1 Cálculo dos Expoentes de Lyapunov	28
3.4.2 O Papel das Seções de Poincaré	29
3.5 Escolha dos Regimes Dinâmicos	30
3.6 Programação	31
4 Quantificando o Caos	33
4.1 Primeiros Testes	33
4.1.1 Dependência em d e τ	33
4.1.2 Dependência em $\mathbf{x}_0$	36
4.2 Cálculo do Volume Caótico	43
4.3 Expoentes de Lyapunov vs G	49

5	Efeito de Borda e Caos Determinístico	53
5.1	Aspectos Topológicos	53
5.2	Esboroamento do Volume no Espaço de Fase Clássico	55
5.3	Separatriz do Movimento	56
5.4	Efeito de Borda e Caos Quântico	58
	Conclusão	66
	Bibliografia	69
A	Estimativa de q_2 máximo	72
A.1	Máximos e mínimos para função de duas variáveis reais	72
A.2	Máximos e mínimos para função de três variáveis reais	74
A.3	Superestimando q_2	76
	Lista de Figuras	78

Introdução

O fenômeno do caos se tornou bastante conhecido e estudado desde o início dos anos 60 com a volta aos trabalhos de Poincaré [1]. Com isso a teoria de sistemas dinâmicos foi enriquecida com inúmeras contribuições levantadas pela teoria do caos, a qual passou a ser objeto de estudo interdisciplinar, atingindo quase todas as áreas do conhecimento humano. Uma das principais características do caos foi vislumbrada por Poincaré, que notou que sistemas muito simples, de baixa dimensionalidade, poderiam apresentar comportamentos bastante complicados. De fato, num sistema apresentando caos, duas trajetórias inicialmente muito próximas se afastam de maneira exponencialmente rápida. Consequentemente, uma pequena incerteza nas condições iniciais, o que sempre acontece na prática, resulta na perda da previsão do estado futuro do sistema.

O caos clássico atualmente se encontra bem entendido, com inúmeros trabalhos científicos e livros didáticos publicados sobre o assunto. Desta forma, estaremos utilizando conceitos importantes da teoria do caos sem entrar em detalhes ou demonstrações, os quais poderão ser encontrados em livros de grande importância na área, como por exemplo as referências [2, 3, 4]. Mais especificamente, estaremos trabalhando dentro do referencial do caos determinístico Hamiltoniano, de modo que utilizaremos também os conceitos fundamentais da teoria de sistemas Hamiltonianos, cuja referência básica é [5].

Neste contexto, o estudo do volume caótico exerce papel relevante, pois traz informações quantitativas a respeito da *quantidade de caos* exibida pelo sistema clássico em diversos regimes de trabalho. Em outras palavras, é uma estimativa da probabilidade de se obter uma condição inicial caótica mediante um sorteio imparcial em toda a extensão do espaço de fase clássico. Para tanto, o volume caótico é definido como o número de trajetórias caóticas encontradas em um ensemble de condições iniciais, o qual deve ser um bom

representante do volume do espaço de fase do sistema analisado.

Nosso campo de pesquisa será o modelo do Maser Caótico, que corresponde ao modelo de Jaynes-Cummings de N átomos, o qual consiste no mais simples modelo de interação radiação-matéria em alguns regimes específicos. A importância desse modelo se encontra também no fato de que pode ser implementado experimentalmente [6], permitindo, em alguns casos, o confronto entre a experiência e a teoria. Além disso, esse sistema possui um análogo clássico bem determinado, o que tem possibilitado a análise de comportamentos caóticos em regimes semiclássicos [7], estudos de fundamental importância para o entendimento do caos quântico.

Para se implementar o estudo sistemático do volume caótico do modelo do Maser Caótico Clássico, é necessário o auxílio de um gerador de números aleatórios que produza o ensemble de condições iniciais que devem ser classificadas como caóticas ou regulares proporcionando a análise percentual do caos apresentado pelo sistema. Esse gerador deve ser capaz de realizar um sorteio imparcial de modo que não haja porções privilegiadas do hipervolume do espaço de fase. Além disso, precisa conhecer os limites¹ desse espaço de fase, os quais são determinados pela superfície de energia definida através da Hamiltoniana clássica do sistema. Por isso mesmo, uma etapa importante do processo é a determinação dos limites clássicos do sistema. O próximo passo é a classificação de cada elemento do ensemble de trajetórias por meio do cálculo de seu maior expoente de Lyapunov. Assim, a trajetória será classificada como regular, caso esse expoente seja nulo e será caótica quando o expoente for positivo, sendo que teremos sempre o amparo das seções de Poincaré para análise da condição dinâmica de cada trajetória. De fato, a seção deve mostrar um toro ou um ponto (caso de uma órbita periódica) para trajetórias regulares e um *mar aleatório de pontos* para uma trajetória caótica. Com essas ferramentas, resta então definir os regimes dinâmicos com os quais se quer trabalhar e fazer os devidos "ajustes" numéricos necessários.

Este trabalho traz ainda um outro resultado que merece grande destaque. O sistema estudado apresentou uma propriedade extremamente interessante e que possivelmente poderá ser vislumbrada em outros sistemas. Essa propriedade, que entendemos, é determinada pela borda do espaço de fase clássico nas variáveis de spin, tem mostrado que trajetórias regulares, situadas em um regime estritamente integrável, apresentam expoente de Lyapunov

¹Estamos nos referindo aos limites que definem o volume energeticamente acessível à dinâmica do sistema.

positivo. Em outras palavras, obtemos uma divergência exponencial média entre trajetórias vizinhas regulares. Outros testes numéricos corroboram este resultado, mostrando que um elemento de volume clássico, preparado em um regime integrável, se deforma de maneira significativamente rápida nas vizinhanças da borda do sistema.

Esta propriedade clássica, a qual chamamos de *efeito de borda*, tem trazido contribuições importantes para estudos de propriedades quânticas como o da decoerência. Recentemente, tentamos entender o comportamento oscilatório da entropia linear quântica em regime semiclássico, através da análise da evolução dinâmica de um pacote clássico frente ao efeito de borda. Os resultados até então obtidos são bem explicados levando-se em conta o efeito de borda, o que fundamenta ainda mais esse conceito.

A tese foi organizada em cinco capítulos, descrevendo os resultados para o volume caótico e as evidências clássicas da presença do efeito de borda. No primeiro capítulo, apresentamos sucintamente o ferramental teórico necessário para o desenvolvimento do trabalho, onde explicitamos as definições do volume caótico, expoentes de Lyapunov e seções de Poincaré. No segundo capítulo, fazemos uma breve apresentação do modelo do Maser Caótico, descrevendo a Hamiltoniana quântica e seu análogo clássico. No capítulo três, discutimos o aparato computacional envolvido nos cálculos do volume caótico e apresentamos o cálculo analítico dos limites numéricos do espaço de fase clássico. No quarto capítulo, apresentamos os resultados do estudo sistemático do volume caótico em função dos parâmetros de acoplamento do sistema quântico. Neste capítulo são mostrados todos os cálculos e justificativas para os regimes adotados e valores de parâmetros utilizados. Além disso, apresentamos as primeiras evidências do efeito de borda e a relação entre o valor quantitativo dos expoentes de Lyapunov e a constante de acoplamento G' . Este resultado mostra que a divergência média entre trajetórias cresce junto com o parâmetro G' , ou seja, à medida que G' aumenta, ocorre não só o aumento da *quantidade de caos* (probabilidade de se encontrar uma trajetória caótica no espaço de fase) mas também da *qualidade do caos* (divergência média entre trajetórias). Finalmente, no capítulo cinco, é feita a discussão do efeito de borda, onde se observa que a borda é oriunda de uma mudança de topologia no espaço de fase de spin. Nesse capítulo apresentamos todos os resultados numéricos e as evidências teóricas que levam a crer que o efeito de borda existe e que proporciona um efeito de afastamento exponencial em regimes completamente integráveis. Além disso, observa-se um efeito semelhante para a separatriz do movimento, que também provoca

(indiretamente) um afastamento exponencial entre as partes de um pacote clássico de condições iniciais. De qualquer forma, ambos os efeitos parecem nos advertir de que é imprudente associar caos simplesmente à separação exponencial entre trajetórias vizinhas, pelo menos no caso em que parte do sistema possui espaço de fase finito. Na última parte desse trabalho, discutimos criticamente os resultados obtidos e apresentamos algumas perguntas ou propostas que podem ser observadas como um complemento para esse trabalho.

Capítulo 1

Formalismo Clássico

O nosso estudo do volume caótico está todo baseado na Mecânica Clássica de sistemas Hamiltonianos, de modo que iniciamos nosso trabalho com a apresentação de alguns conceitos fundamentais para a compreensão dos fenômenos que serão discutidos nessa tese. Estaremos pressupondo conhecimentos básicos da teoria clássica do formalismo Hamiltoniano, o qual é fundamental para a descrição dos sistemas caóticos.

Desta forma, esse capítulo foi dividido em seções com os principais conceitos a serem entendidos. Começamos definindo o conceito de Volume Caótico, o qual é o objetivo central desse trabalho, e em seguida fazemos uma breve discussão sobre os expoentes de Lyapunov e as seções de Poincaré, quantidades de fundamental importância para o desenvolvimento desse trabalho.

1.1 Volume Caótico

O volume caótico, definido nos trabalhos [8, 9], é uma quantidade clássica que nos permite dizer qual a quantidade de caos existente no espaço de fase clássico de um sistema Hamiltoniano. De maneira mais exata, o volume caótico fornece uma medida quantitativa da fração do espaço de fase que é preenchida por trajetórias caóticas. Guiados pelos trabalhos citados acima, definimos o volume caótico Σ como:

$$\Sigma = \frac{\eta}{N} \quad (1.1)$$

onde η é o número de condições iniciais caóticas observadas no número total N de condições “sorteadas” no espaço de fase do sistema em questão. É

importante notarmos que, da maneira como foi definido o volume caótico, precisaríamos, em princípio, de um número infinito de trajetórias para que cada fração de volume do espaço de fase fosse representada. Para evitar tamanho trabalho, precisaremos de algum critério que possibilite o cálculo a partir de um número finito de trajetórias. Tal critério será comentado e demonstrado, numericamente, nas seções posteriores.

1.2 Ferramentas Clássicas

A teoria clássica do caos determinístico se encontra atualmente em situação bastante cômoda, dispondo de vários teoremas importantes e uma boa quantidade de informações bem definidas a respeito dos sistemas caóticos. Nas próximas seções daremos especial atenção a duas ferramentas fundamentais para nosso trabalho: expoentes de Lyapunov e seções de Poincaré. Tais objetos constituem duas importantes ferramentas para a teoria de sistemas dinâmicos em geral, pois nos permitem identificar e quantificar o caos de maneira bem determinada.

1.2.1 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov podem ser considerados grandes medidores “qualitativos” de caos. Ao contrário do volume caótico, que fornece uma medida da quantidade de caos que ocupa o espaço de fase, os expoentes de Lyapunov atestam a intensidade do caos existente. De fato, da maneira como são definidos, esses números fornecem, a tempos longos, uma medida quantitativa do afastamento exponencial médio das vizinhanças de uma determinada trajetória. Em outras palavras, proporcionam uma medida da estocasticidade do sistema, além de manterem relação íntima com medidas de aleatoriedade como a entropia de Kolmogorov [20]. Um pequeno histórico dos expoentes de Lyapunov é apresentado na referência [3] com citações de trabalhos que foram determinantes no processo de evolução do próprio conceito e dos métodos de cálculo desses expoentes.

De maneira geral, podemos definir o expoente de Lyapunov dentro de um fluxo $\mathbf{x}(t)$ gerado por um sistema autônomo m -dimensional de 1ª ordem representado por m equações diferenciais:

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m \quad (1.2)$$

onde $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ é um campo vetorial arbitrário.

Considere-se então uma m -esfera infinitesimal de raio $d(0)$, centrada em um vetor condição inicial $\mathbf{x}(0)$ e uma segunda condição inicial $\mathbf{y}(0) \equiv \mathbf{x}(0) + \mathbf{d}(0)$, a qual define a direção do vetor $\mathbf{d}(0)$. Então, o raio inicial é dado por:

$$d(0) = \|\mathbf{y}(0) - \mathbf{x}(0)\| = \|\mathbf{d}(0)\|. \quad (1.3)$$

No limite de um raio inicial arbitrariamente pequeno teremos num instante t , após uma aplicação $\mathcal{T}$ (que determina a evolução temporal do sistema), uma distorção linear da m -esfera que a transformará em um elipsóide. Então, sendo $\mathbf{d}(t)$ a nova distância entre as duas trajetórias vizinhas evoluídas, definimos o coeficiente de divergência exponencial média, ou expoente de Lyapunov, como:

$$\lambda(\mathbf{x}(0), \mathbf{d}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{d}(t)\|}{d(0)} \quad (1.4)$$

o qual, pode ser mostrado [20], existe e é finito. A direção do vetor $\mathbf{d}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)$ é determinada pela evolução das trajetórias em questão, mas podemos escolher uma base arbitrária $\{\hat{e}_i\}$ a partir da qual define-se um *espectro de expoentes de Lyapunov*:

$$\lambda_i(\mathbf{x}(0)) = \lambda(\mathbf{x}(0), \hat{e}_i) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|\mathbf{d}(t) \cdot \hat{e}_i|}{d(0)} \quad (1.5)$$

os quais podem ser ordenados de acordo com sua magnitude

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_m \quad (1.6)$$

Uma vez definida a base $\{\hat{e}_i\}$, cada expoente indicará a divergência média em uma direção específica. Logo, os expoentes positivos (negativos) indicarão que a esfera infinitesimal está se expandindo (contraíndo). Por outro lado os expoentes nulos serão indicadores de que o volume sob o fluxo dinâmico não está se expandindo significativamente, ou não o faz exponencialmente. Assim, esperamos que em sistemas Hamiltonianos integráveis todos os expoentes se anulem (um exemplo analítico bastante simples desse fato é dado na referência [3]). Além disso, qualquer sistema dinâmico sem um ponto fixo, deve apresentar pelo menos um expoente de Lyapunov nulo, correspondendo

à direção tangente ao fluxo, para a qual o volume sofre uma mudança muito lenta. Da mesma forma, espera-se obter pelo menos um expoente negativo para o caso de sistemas dinâmicos dissipativos.

No nosso caso em particular, estudaremos um sistema dinâmico Hamiltoniano conservativo com dois graus de liberdade que apresenta regimes mistos (contendo caos e ilhas de regularidade) e faremos medidas do maior expoente de Lyapunov, $\lambda(\mathbf{d}) = \lambda_1$. Então poderemos identificar as trajetórias como sendo caóticas, se λ_1 for positivo, ou regulares, caso λ_1 seja nulo. Mais tarde voltaremos a falar dos expoentes de Lyapunov afim de explicitarmos os detalhes para a implementação numérica do conceito.

1.2.2 Seções de Poincaré

Na seção anterior observamos a importância dos expoentes de Lyapunov como “detectores” da divergência média entre trajetórias vizinhas e, portanto, indicadores da existência de caos. Agora, discutiremos de maneira sucinta, as seções de Poincaré, que também funcionam como indicadores de caos e, por isso mesmo, têm sua parcela de importância no estudo de sistemas dinâmicos Hamiltonianos.

O conceito de seção foi introduzido por Poincaré para resolver o problema da visualização das trajetórias no espaço de fase. De fato, para um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade, teremos um espaço de fase com dimensão $2N$ e a visualização se torna impossível já para dois graus de liberdade. Poincaré mostrou que as propriedades do fluxo dinâmico contínuo podem ser vislumbradas em um mapa discreto bidimensional, o qual passou a ser chamado *seção de Poincaré*.

As seções de Poincaré, ou mapas de seção como são comumente chamados, podem ser conceitualmente entendidos como um *corte* no fluxo dinâmico. De fato, sua construção é feita da seguinte maneira: seja um sistema Hamiltoniano conservativo¹ com N graus de liberdade definido com o vínculo $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E$: à medida que o sistema evolui, monitora-se o fluxo de trajetórias através de um dos subespaços de fase, por exemplo o plano $q_k p_k$: isso é feito localizando esse plano no espaço de fase através de uma escolha do tipo $q_i = 0$ (com $i = 1, \dots, N$ e $i \neq k$) e $p_j = 0$ (com $j = 1, \dots, N$ e $j \neq (k \text{ e } a)$); então, sempre que uma trajetória chegar a essa superfície com

¹A partir desse momento estaremos sempre nos referindo a sistemas dinâmicos como sendo também Hamiltonianos e conservativos, pelo fato de serem nosso objeto de estudo, a menos que especifiquemos o contrário.

$p_a > 0$ (sentido escolhido arbitrariamente), marcamos o ponto na seção. O resultado é a seção de Poincaré, que consiste em um mapa discreto bidimensional que reflete o fluxo dinâmico atravessando um determinado plano num sentido específico². Um exemplo analítico do cálculo da seção de Poincaré é desenvolvido para o oscilador harmônico bidimensional em uma linguagem bastante introdutória por Aguiar [10]. Para abordagens mais formais, pode-se consultar as referências [2] e [3].

Através dos mapas de seção, podemos identificar o aspecto caótico do sistema. Tomando-se um grande número de condições iniciais, evoluímos o sistema e construímos a seção utilizando o método acima descrito. Caso o sistema se encontre em um regime totalmente caótico, teremos uma seção completamente preenchida de pontos, pois cada trajetória deve visitar todo o espaço de fase energeticamente acessível. Em contrapartida, no caso de um sistema integrável a seção mostrará curvas fechadas (concêntricas) de pontos, indicando que as trajetórias evoluem sobre *toros*, o que implica em regularidade [2]. No caso de sistemas mistos, as duas situações devem ocorrer e a seção exibirá ilhas de regularidade (curvas fechadas concêntricas) e um mar caótico preenchendo todo o espaço restante. As seções podem revelar também a presença de *separatrizes* ou regiões com *caos fino*³, explicitando, portanto, todos os detalhes e riquezas do sistema dinâmico. De maneira igualmente boa, as seções podem ser utilizadas ainda para caracterizar *qualitativamente* uma trajetória específica como caótica ou regular. Basta observarmos o padrão exibido pela seção utilizando o critério citado acima. Nesse trabalho, as seções de Poincaré e os expoentes de Lyapunov exercerão papel fundamental para a identificação da caoticidade dos ensembles de trajetórias que serão utilizados para a determinação do volume caótico.

Nesse capítulo, apresentamos as ferramentas necessárias para o desenvolvimento desse trabalho, os expoentes de Lyapunov e as seções de Poincaré. Além disso, definimos o volume caótico, que é o objeto central da tese. No próximo capítulo apresentaremos o Modelo do Maser Caótico, o qual será nosso campo de estudo.

²Em seções posteriores serão mostrados diversos exemplos de seções de Poincaré para diversos regimes de um sistema

³Chamamos de caos fino as estreitas regiões de caos quase invisíveis nas seções. Podem ser observadas por exemplo, próximas da separatriz do movimento durante a quebra de integrabilidade do sistema.

Capítulo 2

O Modelo do Maser Caótico

Neste capítulo apresentamos as versões quântica e clássica do modelo Spin-Bóson, também chamado modelo do Maser Caótico, o qual será investigado e para o qual será realizado o estudo sistemático do volume caótico. Discutiremos também, de maneira sucinta, as principais características de cada uma das Hamiltonianas apresentadas, introduzindo os conceitos básicos sobre o sistema.

2.1 O Modelo Quântico

O modelo do Maser Caótico descreve quanticamente a interação de N átomos de dois níveis com um campo eletromagnético de apenas uma frequência dentro de uma cavidade óptica de alta qualidade. Essa situação física é descrita pelo Hamiltoniano quântico que representa o modelo de Jaynes-Cummings para N átomos [11]:

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \varepsilon J_z + \frac{G}{\sqrt{N}} (\hat{a} J_+ + \hat{a}^\dagger J_-) + \frac{G'}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger J_- + \hat{a} J_+) \quad (2.1)$$
$$(\hbar = 1)$$

onde ω_0 é o modo do campo eletromagnético da cavidade utilizada, ε corresponde à frequência da separação em energia dos níveis dos átomos incidentes, $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ são os operadores usuais de Bose e J_z e $J_\pm$ são os operadores usuais do grupo $SU(2)$. Este Hamiltoniano corresponde ao sistema mais

simples que simula o modelo do Maser de Dicke [12], e representa, em alguns regimes específicos, o modelo mais simples para o estudo da interação radiação-matéria. Assim, além de poder ser resolvido analiticamente em alguns regimes ($G' = 0$), esse modelo recebeu também bastante atenção pelo fato de poder ser implementado experimentalmente [6].

Este Hamiltoniano é constituído basicamente por dois termos livres e dois de interação. O primeiro termo corresponde ao Hamiltoniano da cavidade óptica, que descreve o número de fótons na cavidade com um único modo permitido, dado por ω_0 . O segundo termo representa o Hamiltoniano dos $N = 2J$ átomos, que estão dispostos na cavidade de uma tal maneira que se pode desprezar termos de interação entre átomos. Podemos representar esse termo utilizando o operador de spin J_z [13], lembrando que estamos trabalhando com átomos de dois níveis relevantes e que ε corresponde à frequência da separação em energia dos níveis dos átomos incidentes. O terceiro e quarto termos são Hamiltonianos de interação que representam dois diferentes processos elementares. No terceiro termo, temos os processos *ressonantes*, onde podemos ter a absorção de um fóton pelo átomo e sua consequente transição para o estado excitado ($\hat{a}J_+$) e a emissão de um fóton pelo átomo seguida de sua desexcitação ($\hat{a}^\dagger J_-$). No quarto termo, estão relacionados os termos chamados *anti-ressonantes* ou *termos contra-girantes*¹, que representam a absorção de um fóton pelo átomo seguida de sua desexcitação ($\hat{a}J_-$) e a emissão de um fóton pelo átomo seguida da excitação do mesmo ($\hat{a}^\dagger J_+$). Essa interpretação é completamente válida no caso ressonante $\varepsilon = \omega_0$, regime adotado para o nosso estudo.

Outra característica bastante importante desse sistema, é a diferença de dimensão de cada subespaço. Para os átomos, temos um subespaço de dimensão finita $2J+1$, determinada pelas projeções do spin total, enquanto que para o subespaço do campo, temos dimensão infinita. Essa propriedade do sistema será determinante para a compreensão de algumas manifestações do sistema clássico. Para uma descrição mais detalhada do modelo de Jaynes-Cummings, ver referências [14] e [15].

¹Esses termos, isoladamente, não conservam energia e por isso são reconhecidos como processos virtuais.

2.2 O Análogo Clássico

O análogo clássico desse sistema pode ser obtido, como mostram Aguiar *et al* [16], através de uma representação de estados coerentes normalizados seguida de uma transformação usual de coordenadas. O cálculo se inicia tomando-se o valor esperado da Hamiltoniana quântica:

$$H_{cl}(z, \bar{z}, w, \bar{w}) \equiv \langle zw | \hat{H} | zw \rangle \quad (2.2)$$

onde usamos estados $|zw\rangle$ construídos a partir do produto tensorial entre $|z\rangle$, o usual estado coerente para bósons sendo que $|0\rangle$ é o estado fundamental do oscilador harmônico isolado, e $|w\rangle$, o estado de Bloch associado ao grupo $SU(2)$ sendo que $|J, -J\rangle$ representa o estado com spin J e projeção $J_z = -J$. Matematicamente, temos as expressões:

$$\begin{aligned} |zw\rangle &= |z\rangle \otimes |w\rangle \\ |z\rangle &= e^{-z\bar{z}/2} e^{z\hat{a}^\dagger} |0\rangle \\ |w\rangle &= (1 + w\bar{w})^{-J} e^{wJ_-} |J, -J\rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

Agora, realizamos uma transformação para coordenadas cartesianas utilizando as seguintes equações:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 + iq_2) \quad w = \frac{p_1 + iq_1}{\sqrt{4J - (p_1^2 + q_1^2)}} \quad (2.4)$$

onde $\bar{z}$ e $\bar{w}$ são obtidos tomando-se o complexo conjugado de z e w . Assim, utilizando as equações (2.3) e (2.4), calcula-se a Hamiltoniana clássica que satisfaz as equações de movimento usuais²:

$$H_{cl}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \varepsilon H_1 + \omega_0 H_2 - \varepsilon J - \sqrt{1 - \frac{p_1^2 + q_1^2}{4J}} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2) \quad (2.5)$$

onde

$$H_1 \equiv \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2)$$

²Devemos notar que a inversão de sinais nas equações de movimento se devem à escolha feita na parametrização de z e w [16].

$$\begin{aligned}
H_2 &\equiv \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) \\
G_{\pm} &\equiv G \mp G'
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

de modo que temos um sistema clássico Hamiltoniano bidimensional com espaço de fase quadridimensional. Como fica claro, a Hamiltoniana clássica é composta por dois Hamiltonianos de osciladores harmônicos, H_1 e H_2 , e termos de acoplamento não linear controlados pelos parâmetros G_+ e G_- . Os índices “1” e “2” referem-se respectivamente aos correspondentes clássicos das variáveis dos átomos e do campo. Tal correspondência pode ser imediatamente identificada se notarmos que o espaço de fase é finito nas variáveis p_1 e q_1 (observe-se a raiz quadrada do termo de interação), o que corresponde à limitação quântica das projeções do spin. As equações de movimento encontradas mediante o processo acima descrito são:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial p_1} = -\varepsilon p_1 - G_- p_2 \sqrt{1 - \frac{q_1^2 + p_1^2}{4J}} - \frac{p_1}{4J} \frac{G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2}{\sqrt{1 - \frac{q_1^2 + p_1^2}{4J}}} \\
\dot{p}_1 &= \frac{\partial H}{\partial q_1} = \varepsilon q_1 + G_- q_2 \sqrt{1 - \frac{q_1^2 + p_1^2}{4J}} - \frac{q_1}{4J} \frac{G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2}{\sqrt{1 - \frac{q_1^2 + p_1^2}{4J}}} \\
\dot{q}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial p_2} = -\omega_0 p_2 - G_+ p_1 \sqrt{1 - \frac{q_1^2 + p_1^2}{4J}} \\
\dot{p}_2 &= \frac{\partial H}{\partial q_2} = \omega_0 q_2 + G_- q_1 \sqrt{1 - \frac{q_1^2 + p_1^2}{4J}}
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

Esse sistema clássico já foi bastante estudado quanto às suas propriedades dinâmicas e sua existência e unicidade foram devidamente discutidas [17]. O sistema apresenta regimes de integrabilidade, com $G' = 0$ e $G > 0$, quando pode ser identificada uma separatriz do movimento, e regimes mistos ou completamente caóticos (aparentemente) para G e G' não nulos. Dentro desse contexto, o estudo do volume caótico recebe sua devida importância, pois trata de quantificar o caos do sistema, atribuindo-lhe números percentuais, em função dos parâmetros de acoplamento G e G' , os quais determinam o regime dinâmico.

Já temos então definidas todas as ferramentas básicas e o campo de estudo sobre o qual vamos trabalhar. No próximo capítulo, vamos organizar os procedimentos e métodos que deverão ser adotados para atacarmos numericamente a questão do cálculo do volume caótico.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

Neste capítulo serão apresentados os procedimentos e métodos numéricos necessários para o cálculo do volume caótico associado ao espaço de fase clássico do modelo do Maser Caótico. Iniciaremos redefinindo os conceitos de expoente de Lyapunov e volume caótico dentro do referencial numérico, utilizando as direções usuais apresentadas em diversos trabalhos relacionados ao tema.

3.1 Procedimentos

De acordo com a definição apresentada no capítulo 1, o cálculo do volume caótico requer alguns cuidados para sua execução. De fato, como sugere o próprio nome, precisamos em primeiro lugar definir o volume do espaço que queremos classificar. No caso de um hipervolume no espaço de fase quadridimensional, o qual é limitado por uma superfície de energia constante, sua definição numérica não é tão imediata. Em seguida, precisaremos definir o nosso ensemble de trajetórias que “represente” todo o espaço de fase e estabelecer critérios para a classificação das mesmas como caóticas ou regulares. Com estes dados, teremos condições de determinar a porcentagem caótica do espaço de fase para uma escala pré-determinada para os parâmetros de controle.

De maneira geral, o estudo sistemático do volume caótico pode ser implementado por meio das seguintes etapas:

- (1) Definição numérica dos limites do espaço de fase.
- (2) Definição do ensemble de trajetórias representante do volume delimitado.

(3) Classificação de cada elemento do ensemble através de mapas de seção e expoentes de Lyapunov.

(4) Cálculo sistemático do volume caótico em função dos parâmetros de interação.

Nas próximas seções, entraremos nos detalhes da implementação de cada passo citado acima, explicitando os detalhes dos métodos numéricos utilizados. Lembremo-nos que daqui por diante todo o cálculo será desenvolvido no espaço de fase clássico associado ao Hamiltoniano Maser Caótico.

3.2 Limites do Espaço de Fase

De acordo com nossa definição de volume caótico, esse conceito nos dará a informação da porcentagem caótica do espaço de fase. Assim, é inevitável delimitarmos em primeiro lugar o volume sobre o qual estamos falando para que possamos “escolher”, de maneira adequada, o ensemble de condições iniciais a serem estudadas. Mais tarde, ficará evidente a necessidade de se definir numericamente os limites do espaço de fase.

O volume do espaço de fase é dado como sendo o hipervolume limitado pela superfície de energia definida sobre a qual a função Hamiltoniana tem valor constante $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E$. No nosso caso de estudo (ver eq. 2.5), temos uma limitação “extra” no espaço de fase das variáveis (q_1, p_1) , representantes clássicas do spin, dada pela raiz quadrada. Devido a essa característica do sistema, definido o valor de J , temos a limitação do subespaço de fase das variáveis (q_1, p_1) :

$$p_1^2 + q_1^2 \leq 4J \quad (3.1)$$

onde fica claro que a região energeticamente acessível nessas variáveis é o interior de um círculo de raio $\sqrt{4J}$ centrado na origem. Temos, portanto, os limites numéricos para essas variáveis dinâmicas:

$$-\sqrt{4J} \leq q_1 \leq \sqrt{4J} \quad -\sqrt{4J} \leq p_1 \leq \sqrt{4J} \quad (3.2)$$

Por outro lado, para as variáveis (q_2, p_2) , não há nenhuma indicação imediata do limite numérico do espaço de fase como aquele da eq. 3.2. A saída é então tentarmos encontrar o limite de uma das coordenadas restantes e calcular o limite da outra através do vínculo com a superfície de energia constante.

Tudo isso pode ser feito, através do cálculo de máximos e mínimos de uma função $q_2 = q_2(q_1, p_1, p_2, E)$. Essa função pode ser encontrada resolvendo-se uma equação do segundo grau oriunda de (2.5), com $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E = \text{constante}$:

$$q_2^2 + bq_2 + c = 0$$

$$\begin{cases} b \equiv \frac{2q_1 G_-}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{q_1^2 + p_1^2}{4J}} \\ c \equiv p_2^2 + \frac{\varepsilon}{\omega_0} (q_1^2 + p_1^2) + \frac{2p_1 p_2 G_-}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{q_1^2 + p_1^2}{4J}} - 2 \frac{E + \varepsilon J}{\omega_0} \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $b = b(q_1, p_1)$ e $c = c(q_1, p_1, p_2)$ são constantes determinadas pelas demais variáveis dinâmicas. Dessa forma, nosso trabalho se resume em encontrar máximos e mínimos de uma função de três variáveis reais, dada por:

$$q_{2\pm}(q_1, p_1, p_2) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (3.4)$$

O método utilizado para se calcular máximos e mínimos de uma função desse tipo é fundamentado em uma série de teoremas do cálculo, os quais podem ser encontrados na maioria dos livros didáticos especializados em cálculo [18]. O procedimento, envolve o cálculo de diversas derivadas parciais de primeira e de segunda ordem, seguido de análises de seus valores e do cálculo de determinantes Hessianos. Para a função (3.4), esse é um cálculo extremamente complexo. Em primeiro lugar, seria necessário encontrar o ponto crítico de q_2 , ou seja, precisaríamos resolver o sistema $\frac{\partial}{\partial r_i} q_2(q_1, p_1, p_2) = 0$, com $r_i = q_1, p_1, p_2$. No entanto, se substituirmos b e c , dados por (3.3), na eq.(3.4), veremos que esta é uma tarefa nada fácil. De fato, o que acontece é que se obtém um sistema de equações transcendentais a ser resolvido. Uma possível alternativa seria resolvermos o problema numericamente, porém optamos por um caminho que nos pareceu mais rápido e prático.

A saída encontrada foi fundamentada na seguinte idéia: sabemos que em uma equação de segundo grau com apenas uma variável real ($y = f(x) = x^2 - bx + c$), a constante b está relacionada com a posição do máximo da parábola ($x_{max} = -b/2$) enquanto a constante c corresponde ao ponto em que a parábola intercepta o eixo y . Então, esperamos que a maior raiz (y_+) seja obtida quando tivermos um valor máximo para $|b|$ e um valor mínimo

para c , o que também fica evidente na equação (3.4). Dessa forma, o problema se resume ao problema de máximos e mínimos de duas funções simples de três variáveis reais: $b = b(q_1, p_1)$ e $c = c(q_1, p_1, p_2)$. Obviamente, tomando essa direção, obteremos a maximização de $|b|$ e a minimização de c não necessariamente com os mesmo valores de (q_1, p_1, p_2) . No entanto, este não constitui um problema muito sério pois o que estaremos fazendo é *superestimar* o valor da raiz da equação (3.4). Em outras palavras, estaremos atribuindo uma amplitude maior ao espaço de fase na direção q_2 . Entretanto, se em algum momento escolhermos um valor de q_2 que esteja realmente fora dos limites da superfície de energia e que, portanto, não permita o cálculo da última variável dinâmica, p_2 , então este será automaticamente desprezado pelo programa numérico como uma condição inadequada.

O cálculo de $q_{2m\acute{a}x}$ foi realizado com os métodos comuns já citados acima e se encontra detalhado no apêndice A. Para se obter o resultado, depois da análise de máximos e mínimos, são impostas algumas condições sobre G_+ e G_- . O resultado final obtido foi:

$$|q_{2m\acute{a}x}| = G_- \sqrt{J} + \sqrt{2(E + J) + JG_-^2}$$

$$\text{com } \begin{cases} 0 < |G_-| \leq 1 \\ 0 \leq G_- < 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

e

$$|q_{2m\acute{a}x}| = G_- \sqrt{J} + \sqrt{2E + J \left(G_-^2 + G_+^2 + \frac{1}{G_-^2} \right)}$$

$$\text{com } \begin{cases} 0 < |G_-| \leq 1 \\ 1 < G_+ \leq 2 \end{cases} \quad (3.6)$$

onde $G_{\pm} = G \pm G'$. Assim, temos estabelecido também os limites para as constantes de acoplamento G e G' , os quais são ditados pelas equações (3.5) e (3.6) sendo que, para alguns valores específicos, não teremos a definição dos limites do espaço de fase. Esses valores críticos correspondem, matematicamente, aos pontos em que b ou c se transformam em pontos de sela, ou seja, os critérios de máximos e mínimos não são satisfeitos. Assim, os limites dos parâmetros de acoplamento são:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \leq G \leq 1 \\ \Rightarrow 0 \leq G' \leq 1 \end{aligned} \quad \text{com} \begin{cases} G + G' \neq 1 \\ G - G' \neq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Desta forma, temos definida a escala dos valores dos parâmetros de interação para a qual será realizado o estudo do volume caótico. Note-se que esses valores podem situar os termos de interação como termos perturbativos (G e G' pequenos) ou como termos significativos na Hamiltoniana quântica, o que possibilita a análise de efeitos devidos à quebra da integrabilidade do sistema clássico.

Apesar da exclusão de regimes com $G = G'$, podemos determinar facilmente os limites do espaço de fase no caso $G = G' = 0$, notando simplesmente que a superfície de energia passa a ser descrita por um elipsóide quadridimensional:

$$\frac{p_1^2}{(1/\varepsilon)} + \frac{q_1^2}{(1/\varepsilon)} + \frac{p_2^2}{(1/\omega_0)} + \frac{q_2^2}{(1/\omega_0)} = E + \varepsilon J \quad (3.8)$$

De posse das equações (3.2)-(3.8), podemos sempre escolher três variáveis dinâmicas e calcular a quarta (p_2) através do vínculo da energia constante. Assim, ¹ pode-se escolher condições iniciais que estejam sobre a superfície de energia dada. Logo, já temos o conhecimento dos limites numéricos do espaço de fase com o qual estamos trabalhando, de modo que podemos escolher de maneira adequada o ensemble de condições iniciais que representará o volume do espaço de fase.

3.3 Ensemble de Trajetórias

Uma vez determinadas as amplitudes no espaço de fase, podemos encontrar o ensemble de condições iniciais que representará o volume do espaço de fase no cálculo do volume caótico. De fato, se observarmos que estamos utilizando pontos, cuja dimensão é nula, para descrever um hipervolume de dimensão quatro, veremos que seria necessário um número infinito de trajetórias para descrever completamente cada elemento do hipervolume. Em outras palavras, a primeira pista que temos a respeito do ensemble utilizado é que ele deve ser bastante denso e estar contido dentro do volume limitado pela superfície de energia E .

¹Obviamente devemos lembrar que $q_{2\max}$ foi superestimado e, portanto, algumas condições iniciais serão automaticamente desconsideradas.

Sabemos entretanto, que é inviável analisar um número razoavelmente grande de trajetórias durante tempos longos, ou seja, estamos diante de limitações práticas. O tempo de computação e a quantidade de informação armazenada seriam extremamente grandes. Diante desse inconveniente, somos forçados a “escolher” um número reduzido de condições iniciais, mas que sejam as mais representativas possível do volume em questão. A idéia, utilizada na referência [9], é então utilizar uma distribuição aleatória de condições iniciais, ou seja, utilizar uma distribuição tal que não privilegie alguma região particular do espaço de fase.

Para implementar essa idéia, utilizamos uma das subrotinas usuais encontradas em [19]. A escolha dessa rotina aconteceu por observação de critérios de velocidade em competição com critérios de *períodos*² das subrotinas oferecidas. A subrotina “ran0”, segundo informações da própria referência, é uma das mais simples e a que oferece a melhor relação velocidade-período e, portanto, nos pareceu a mais adequada aos nossos objetivos.

A subrotina escolhida, gera números aleatórios dentro do intervalo $[0, 1]$. Por essa razão ela foi colocada dentro de um programa que utiliza as informações sobre os limites do espaço de fase para acomodar o intervalo gerado pela subrotina dentro do espaço de fase. Além disso, a subrotina também é acionada para gerar um outro dígito que determina o sinal da variável gerada. Com essas ferramentas, geramos, a cada iteração, o trio (q_1, p_1, q_2) , com seus respectivos sinais, sendo que a quarta variável dinâmica é calculada com E constante. Na figura 3.1, temos um exemplo de 10000 condições iniciais, “sorteadas” pelo gerador aleatório e projetadas em cada subespaço.

3.4 Classificação dos Elementos do Ensemble

Uma vez definido numericamente o volume do espaço de fase e preparado o ensemble de condições iniciais representantes desse volume, o cálculo do volume caótico se dará com a classificação de cada elemento do ensemble como *caótico* ou *regular*. Nessa seção, discutiremos os métodos numéricos que serão utilizados nesse processo de seleção, a saber os expoentes de Lyapunov e as seções de Poincaré.

²A definição de período encontrada na referência [19] se refere ao número de saídas geradas até que comece a ocorrer algum tipo de repetição.

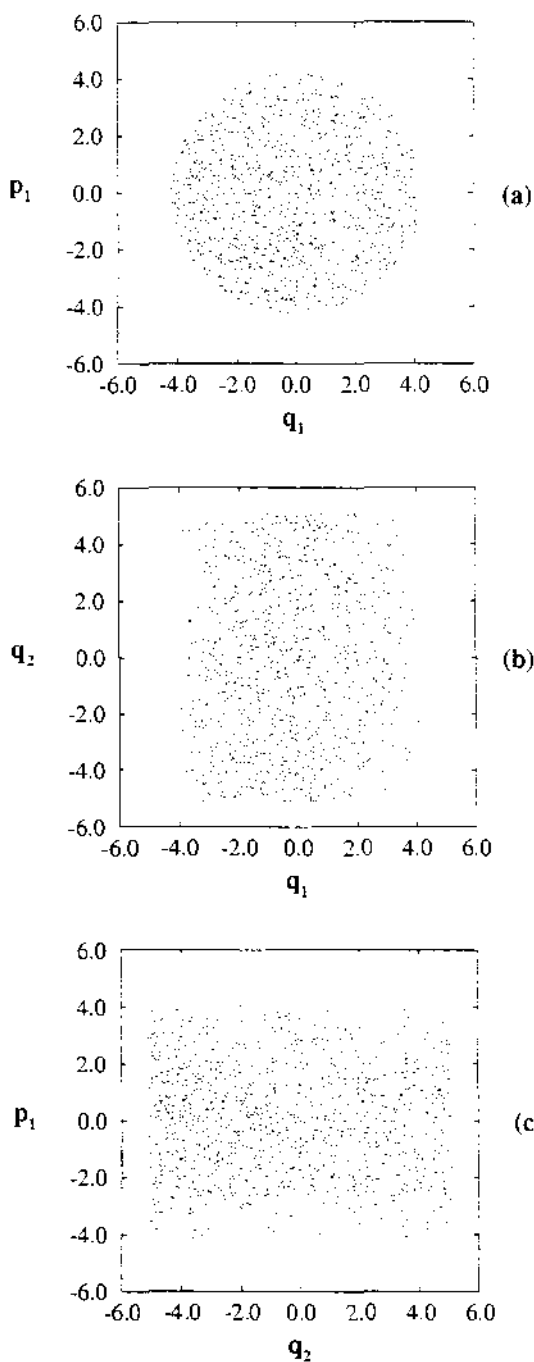


Figura 3.1: Projeções da saída do gerador aleatório com 10000 condições iniciais. Cálculo realizado com $G = 0.5$, $G' = 0.2$, $E = 8.5$ e $J = 4.5$. Observe-se a topologia cilíndrica do espaço de fase.

3.4.1 Cálculo dos Expoentes de Lyapunov

No capítulo 1, definimos de maneira bastante geral, apesar de pouco formal, os expoentes de Lyapunov para um fluxo dinâmico Hamiltoniano. Naquele instante, o cálculo era feito simplesmente comparando-se a distância, no espaço de fase m -dimensional, entre duas trajetórias arbitrariamente próximas inicialmente. No entanto, numericamente, quando tratamos sistemas caóticos, onde ocorre divergência exponencial das condições iniciais, a comparação entre essas distâncias pode trazer inconvenientes, dada a ordem de grandeza dos números em questão. De fato, quando comparadas com a distância inicial adotada, as distâncias para tempos longos, podem tomar dimensões realmente grandes, provocando dificuldades (“overflows”) e imprecisões no cálculo numérico.

Em 1976 (Benettin *et al* [20]) foi proposto um *método de reescalas* para se resolver essa dificuldade no cálculo dos expoentes de Lyapunov. Naquele trabalho, é definido um parâmetro quantitativo que, como se mostra, está intimamente relacionado à entropia de Kolmogorov e que, no limite de tempos longos, resulta no maior expoente de Lyapunov para o fluxo dinâmico associado. Utilizando a mesma notação do referido artigo, temos:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n \quad (3.9)$$
$$k_n(\tau, \mathbf{x}, d) \equiv \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^n \ln \frac{d_i}{d}$$

onde λ é o maior expoente de Lyapunov e k_n é o parâmetro quantitativo relacionado à entropia de Kolmogorov. A definição de k_n pode ser melhor compreendida na figura 3.2, onde n é o número de vezes que o sistema sofre reescala após evoluir por intervalos iguais a τ . $d_i \equiv \mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i$ é a distância no espaço de fase multidimensional no momento da reescala e d é a distância inicial entre as trajetórias a cada reescala, sendo que seu módulo é constante.

De acordo com o que está demonstrado em [20], no limite de $n \rightarrow \infty$, $k_n \rightarrow \lambda$, o qual existe, é finito e corresponde ao valor do máximo expoente de Lyapunov. Além disso, no trabalho citado acima, algumas das propriedades do parâmetro $k_n(\tau, \mathbf{x}, d)$ são listadas. A primeira delas, diz respeito à dependência nos valores dos parâmetros τ e d . De fato, no limite de d suficientemente pequeno, $k_n(\tau, \mathbf{x}, d)$ deve ser independente dos valores de τ e d . Quanto à dependência em $\mathbf{x}$, teremos as características do expoente de Lyapunov, sendo que λ será positivo e finito se a condição inicial for to-

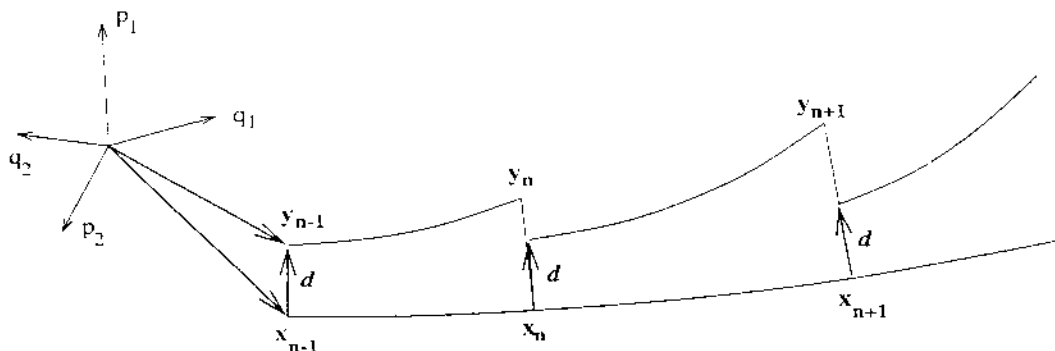


Figura 3.2: Esquema do método de reescalonamento [20] para o cálculo do expoente de Lyapunov.

mada numa região caótica e será nulo caso a condição inicial seja escolhida numa região regular. Desta forma, em princípio, temos uma maneira “segura” de identificarmos as trajetórias como caóticas ou regulares. No próximo capítulo, serão apresentados os testes das propriedades citadas acima, utilizando o Modelo do Maser Caótico com campo de estudo.

3.4.2 O Papel das Seções de Poincaré

Uma outra maneira de conseguirmos a identificação dos elementos do ensemble de condições iniciais, é utilizando as seções de Poincaré. Em princípio, a seção apresenta algumas dificuldades numéricas para se atingir tal objetivo, pois os integradores utilizados geralmente apresentam imprecisões numéricas de forma a apresentar um certo esboroamento numa região onde se espera um toro. Além disso, se o sistema apresentar um regime quase totalmente caótico, teremos dificuldades para identificar uma trajetória regular em meio a esse mar caótico. No entanto, para os nossos objetivos de identificação do *status* de cada trajetória, a seção pode ser utilizada para se observar trajetórias individuais. Nesses casos, sempre é possível separar as regulares das caóticas pois essas últimas, visitam toda a porção do espaço de fase que apresenta caos, de modo que podemos visualizar um mar caótico com apenas uma trajetória. Na prática, a seção trará a informação de várias trajetórias sendo que cada uma será diferenciada por uma cor em particular.

A seção de Poincaré terá também uma outra função importante nesse trabalho. Como já foi discutido anteriormente, precisaremos em algum momento definir o número de condições iniciais que será utilizado para representar o

volume do espaço de fase. Em princípio isso pode ser estimado a partir de uma visualização prévia da seção de Poincaré do sistema em diversos regimes. Se imaginarmos por exemplo, um regime em que o sistema seja quase completamente caótico, veremos na seção um mar caótico e saberemos que uma trajetória regular só seria encontrada mediante a escolha de um ensemble extremamente denso, ou seja, poderíamos ter um resultado de cem por cento de caos com as primeiras 10000 condições iniciais escolhidas. Em outras palavras, nesse caso, a seção indica que podemos tomar um ensemble menor de condições iniciais. Analogamente, podemos utilizar o mesmo argumento para o caso oposto, ou seja, quando o sistema se encontra num regime quase completamente integrável. Nesse sentido, a seção de Poincaré pode ser um bom indicador do tamanho do ensemble que pode ser utilizado. Por outro lado, essa argumentação traz à tona, uma outra questão bastante importante. A impossibilidade prática de monitorarmos um ensemble totalmente denso de condições iniciais sobre todo o espaço de fase acarreta um certo “erro” no cálculo do volume caótico que precisa ser entendido e estimado. Voltaremos a essa discussão no momento da apresentação dos resultados.

De maneira geral, entendemos que o processo de classificação dos elementos do ensemble pode ser bem sucedido mediante aplicação do monitoramento via seção de Poincaré e expoentes de Lyapunov simultaneamente. Em princípio, nos parece perfeitamente possível implementar o processo utilizando qualquer uma dessas duas ferramentas, porém as utilizaremos em conjunto buscando sempre uma maior confiabilidade para o estudo proposto. No próximo capítulo serão mostrados exemplos numéricos do processo de classificação das trajetórias.

3.5 Escolha dos Regimes Dinâmicos

Já estão definidos então todas as ferramentas e procedimentos necessários à implementação do cálculo do volume caótico. Os limites do espaço de fase já foram determinados e temos à disposição um gerador de números aleatórios que pode criar um conjunto de condições iniciais distribuído por todo o espaço de fase energeticamente acessível ao sistema dinâmico. Criado esse conjunto, podemos calcular o expoente de Lyapunov de cada uma das trajetórias e classificar como caótica (regular) aquela que apresentar expoente de Lyapunov positivo (nulo). Além disso, via seção de Poincaré, temos uma visualização da condição de caos do sistema e obtemos a confirmação da

informação dada pelos expoentes de Lyapunov. Então o passo final é fazer a divisão dos números obtidos em cada contagem, como é proposto na equação (1.1).

O estudo sistemático do volume caótico será feito mediante a repetição do processo citado acima para uma grade de variação dos parâmetros de interação G e G' . A amplitude dessa escala foi escolhida com base nas condições impostas sobre essas constantes quando definimos os limites do espaço de fase (equação 3.7). Além disso, fisicamente o sistema passa a ter comportamentos qualitativamente diferentes (regime super-radiante [12, 21]) para parâmetros fora dessa escala. Por esses motivos, decidiu-se realizar o estudo tomando-se G e G' dentro do intervalo $[0, 1]$, igualmente dividido em 10 partes. Portanto, temos ao todo 100 regimes a serem quantificados através do processo acima descrito.

Para energia e spin total, foram escolhidos, respectivamente $E = 8.5$ e $J = 4.5$ ($N = 2J = 9$). A razão desta escolha, reside no fato de que o sistema quântico já se apresenta num limite semiclássico quando $J \geq 4.5$ [22, 23, 24], de modo que eventuais comparações entre os fenômenos quânticos e clássicos, possam ser feitas com maior segurança. Além disso, como será mostrado no próximo capítulo, o valor de energia escolhido permite que o limite do subespaço de fase nas variáveis q_1 e p_1 se torne energeticamente acessível, o que pode trazer alguma informação importante sobre a dinâmica do sistema. Alguns outros parâmetros, como por exemplo aqueles referentes ao cálculo dos expoentes de Lyapunov e seções de Poincaré, serão definidos a posteriori, quando suas características numéricas estiverem bem entendidas.

3.6 Programação

Toda a programação foi realizada na linguagem FORTRAN, com a utilização de várias subrotinas prontas. Foram utilizados basicamente três programas:

- gerador de condições iniciais;
- programa para cálculo da Seção de Poincaré;
- programa para cálculo dos expoentes de Lyapunov.

O primeiro deles já foi comentado: utilizamos uma subrotina encontrada em [19] e utilizamos os limites conhecidos do espaço de fase para otimizar a saída do programa. Dessa forma, todas as condições iniciais geradas por esse programa podem ser utilizadas como um elemento do ensemble de trajetórias

a ser estudado.

O segundo programa citado, sofreu apenas algumas adaptações, uma vez que já havia uma versão pronta para o Modelo do Maser Caótico dentro do nosso grupo de pesquisa.

O terceiro programa foi construído com a ajuda de duas subrotinas de integração (Runge-Kutta de 5ª ordem com passo fixo e variável), já utilizadas no programa para o cálculo das seções. A função da rotina com passo variável é evoluir a trajetória referência, otimizando o tempo de evolução nos momentos em que a trajetória visite pontos afastados da borda³. A cada iteração, o passo de integração é transmitido para a subrotina com passo fixo, a qual é responsável pela evolução da trajetória vizinha. Assim, garante-se que ambas as trajetórias evoluam em tempos iguais. Depois das evoluções, realiza-se o cálculo de cada ponto $(n\tau, k_n)$ e obtemos como resultado final, uma tabela desses pontos, cujo limite deve coincidir com o expoente de Lyapunov da referida trajetória. O programa trabalha com um número qualquer de trajetórias sendo que, em princípio, pode-se utilizar todo o ensemble de condições iniciais como entrada, obtendo-se o expoente de Lyapunov para cada elemento do ensemble na saída.

Esses três programas em conjunto simulam todos os passos descritos anteriormente e, portanto, são suficientes para o estudo sistemático proposto.

³Estaremos utilizando o termo “borda” para nos referirmos ao círculo definido em (3.1), que é a limitação clássica correspondente à finitude quântica do espaço do spin.

Capítulo 4

Quantificando o Caos

Neste capítulo, serão apresentados os resultados obtidos para o estudo do volume caótico. Iniciamos relatando o resultado numérico de alguns testes com os programas desenvolvidos e sua comparação com o resultado apresentado nas referências. Depois apresentamos a estratégia tomada diante de tais resultados para iniciarmos o estudo sistemático proposto e, finalmente, apresentamos o resultado do volume caótico seguido de alguns comentários importantes.

4.1 Primeiros Testes

Iniciamos apresentando o resultado de alguns testes com o programa para o cálculo dos expoentes de Lyapunov. O objetivo aqui é verificar se conseguimos reproduzir as características básicas do método apresentadas em [20] e definir alguns critérios para se determinar os valores de alguns parâmetros.

4.1.1 Dependência em d e τ

Começamos pelos testes referentes ao parâmetro quantitativo dado pela equação (3.9), onde procuramos estabelecer *valores de trabalho* para os parâmetros d e τ . No primeiro teste, tentamos verificar a dependência de k_n em relação a esses parâmetros. De acordo com o resultado apresentado em [20], $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n$ deve ser independente de d e τ para d suficientemente pequeno. O resultado pode ser observado na figura 4.1, onde são apresentadas duas condições iniciais (uma regular e uma caótica), para as quais calcula-se o expoente de

Lyapunov em situações diferentes de parâmetros. Como pode ser constatado (fig. 4.1-a), fixando-se o valor de d , obtemos o mesmo valor do expoente dentro de uma variação de uma ordem de grandeza no valor de τ , para qualquer tipo de trajetória. Por outro lado (fig. 4.1-b), para a trajetória caótica, a faixa permitida para a variação de d , com τ fixo, é sensivelmente menor. De fato, muitos testes foram feitos, e todos mostraram que o expoente tem o mesmo valor dentro de uma faixa muito pequena.

Não podemos esperar que o expoente seja o mesmo para quaisquer valores de parâmetros. Imaginemos, por exemplo, uma situação em que τ seja muito pequeno. Nesse caso, teríamos um tempo de reescala muito menor que o próprio incremento numérico de tempo, que é da ordem de 0.01. Por outro lado, não podemos ter τ muito grande, pois duas trajetórias poderiam ter se afastado muito e depois voltado a ficar próximas e o método não identificaria o afastamento exponencial. Da mesma forma, não podemos escolher d grande demais, pois estaríamos correndo o risco de escolher duas trajetórias em regiões com dinâmicas qualitativamente diferentes. Assim, a escolha de valores ótimos para esses parâmetros não pode ser feita baseada em alguma "calibração", mesmo porque não sabemos qual o valor correto de expoente que devemos obter. Entretanto, como mostra a figura 4.1, a diferenciação qualitativa entre condições iniciais regulares e caóticas pôde ser feita para quaisquer valores de parâmetros dentro da faixa indicada.

Devemos nos atentar ainda para o fato de que, uma vez escolhido o valor de d , estamos restringindo o espaço de fase que pode ser testado. Vamos imaginar por exemplo, o caso em que tomamos uma condição inicial sobre a seção de Poincaré (com $q_2 = 0$). Sabemos que no plano q_1p_1 , o espaço de fase energeticamente acessível está delimitado por um círculo de raio $R = \sqrt{4J}$. Pois bem, se tomarmos uma condição inicial posicionada entre R e $R - d$, certamente esta condição será descartada do ensemble, pois sua trajetória vizinha estará fora dos limites do espaço de fase. Portanto, para um determinado d , já poderíamos descartar a seguinte fração de área da seção q_1p_1 :

$$\delta \equiv \frac{A_{descartada}}{A_{total}} = \frac{(\pi R^2) - (\pi(R-d)^2)}{(\pi R^2)} = \frac{4d\sqrt{J} - d^2}{4J} \quad (4.1)$$

o que, obviamente, já constitui um pequeno "erro" no cálculo do volume caótico, pois é impossível representar todo o volume do espaço de fase com um cálculo desse tipo. Por isso, é imprescindível que d seja o menor possível. Para um valor típico $d = 0.1$, com $J = 4.5$, a fração descartada seria $\delta \cong 0.047$.

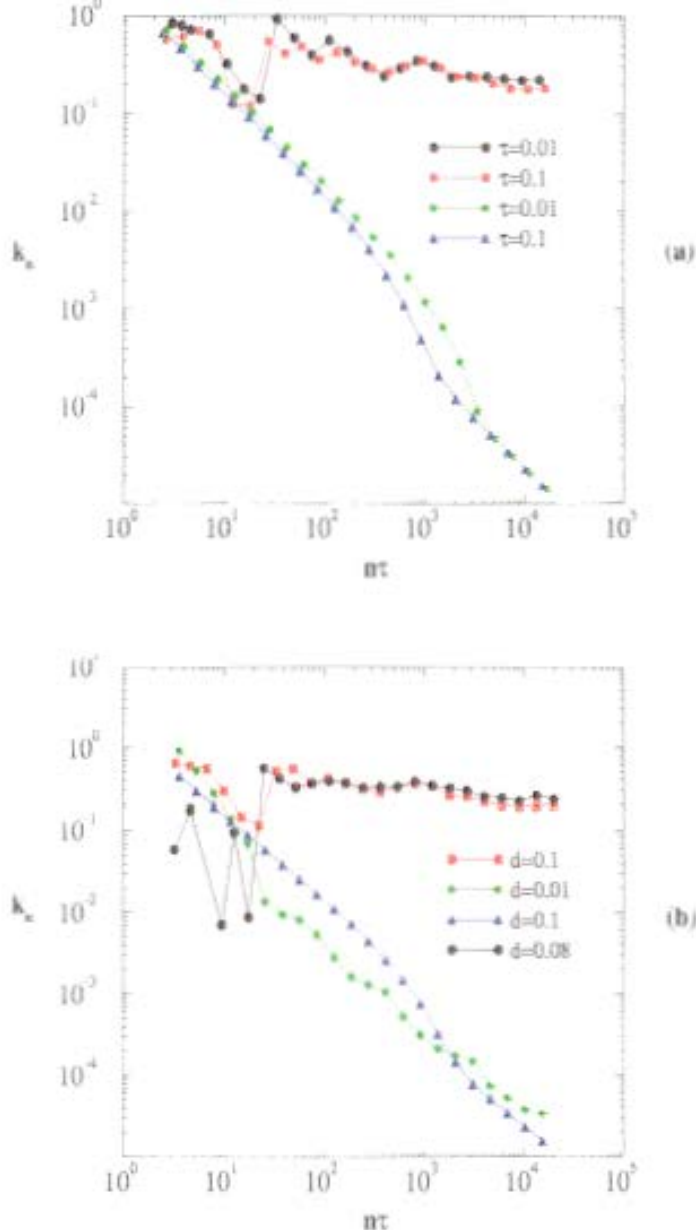


Figura 4.1. Expoentes de Lyapunov para duas condições iniciais com $G = 0.5$, $G' = 0.2$, $E = 8.5$ e $J = 4.5$. Em (a), utilizamos $d = 0.16$ e variamos o valor de τ e em (b) fixamos $\tau = 0.08$ e variamos d . As curvas vermelha e preta se referem à condição inicial caótica e as curvas azul e verde à condição inicial regular.

ou seja, somente na seção já teríamos praticamente 5% de área descartada.

Um limite inferior para d pode ser estimado de maneira análoga àquela utilizada para se limitar τ . Numericamente, sabemos que o passo mínimo no tempo é de $\delta t \cong 0.01$. Assim também, podemos definir uma distância mínima como sendo o “passo físico”, δd , que seria a distância típica entre dois pontos consecutivos de uma mesma trajetória. Simulações numéricas mostraram que essa quantidade teria um valor em torno de $\delta d \cong 0.1$. Desta forma, podemos tomar esses valores como unidades de medida escolhendo δd como o menor valor possível para d e $\tau \cong n\delta t$, onde n seria um número natural da ordem de 10.

Concluimos esta seção destacando o fato de que a dificuldade de se estabelecer o valor correto para d e τ , uma vez que k_n não é completamente independente desses parâmetros, nos impede de olhar para o valor quantitativo do expoente de Lyapunov obtido para as trajetórias caóticas. De fato, não há nenhum indicativo de qual a melhor escolha para os parâmetros e consequentemente para o expoente. Por outro lado, os primeiros resultados mostraram que o comportamento qualitativo das curvas $(n\tau, k_n)$ é capaz de identificar os dois tipos de manifestação dinâmica (caos e regularidade) para as trajetórias do ensemble, o que é suficiente para o nosso objetivo.

4.1.2 Dependência em x_0

O primeiro teste realizado nessa etapa do trabalho, tentou verificar a dependência nas condições iniciais: $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0$, para uma condição inicial regular e $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \lambda$ positivo, para uma condição inicial caótica. Começamos verificando o comportamento da curva $(n\tau, k_n)$ num regime integrável e separável: $G = G' = 0$. Neste caso temos dois osciladores harmônicos separáveis. O resultado desta simulação é apresentado na figura 4.2, onde pode-se constatar a reprodução dos resultados apresentados na bibliografia, ou seja, temos realmente um expoente nulo no limite $n\tau \rightarrow \infty$.

Outro teste foi feito, agora para um regime integrável¹ mas **não separável**: $G' = 0$ e $G > 0$. O resultado, apresentado na figura 4.3, traz informações surpreendentes, uma vez que todas as trajetórias convergem para um valor positivo. Por estarmos trabalhando em um regime integrável, era esperado exatamente o oposto. Além disso, fica evidente que maior é o

¹Na referência [16] pode ser encontrada a segunda constante de movimento, o que é prova suficiente de que o sistema é integrável nesse regime

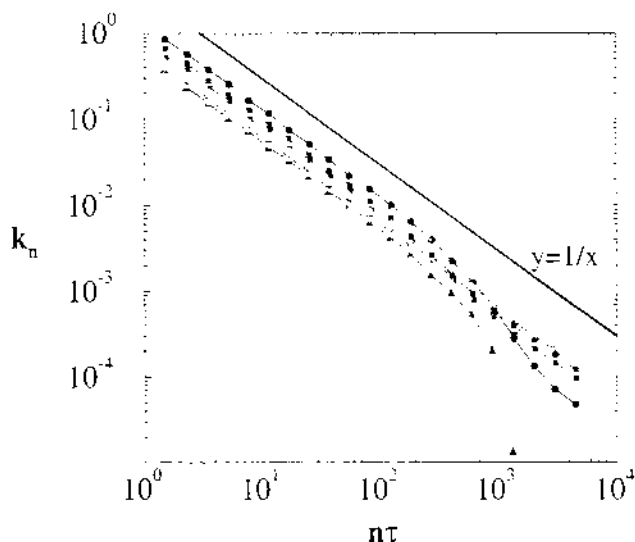


Figura 4.2: Expoentes de Lyapunov para 12 condições iniciais com $G = G' = 0$. $E = 8.5$ e $J = 4.5$. Observe-se o comportamento comparável ao da curva $y = 1/x$, que indica que o expoente se manifesta com o inverso do tempo.

valor dessa constante quanto mais próximo da borda do espaço de fase se encontra o toro.

A primeira hipótese levantada para se explicar esse fato foi a da imprecisão do integrador numérico, ou seja, dada a imprecisão do programa a trajetória que deveria estar sobre um toro acabava visitando toros vizinhos, formando um padrão esborado que se identificaria a um tipo de *caos fino*. De fato, isso foi observado em uma das simulações (figura 4.4).

No entanto, depois de realizada uma série de simulações, um outro efeito se mostrou mais efetivo para o tipo de comportamento exibido pelos expoentes. A imprecisão numérica existe e não pode ser controlada, mas seus efeitos são pequenos, ou seja, não podemos esperar, pela ordem de grandeza do erro numérico (observe-se a escala do gráfico na figura 4.4), que isso cause separações exponenciais em trajetórias vizinhas. Ao novo responsável pelo comportamento atípico dos expoentes de Lyapunov chamamos *efeito de borda*. Este efeito, que parece ser uma peculiaridade de sistemas que apresentam espaço de fase limitados, pode ser vislumbrado, no nosso caso, diretamente nas equações de movimento (2.7). Observe-se que as equações para $\dot{q}_1$ e $\dot{p}_1$

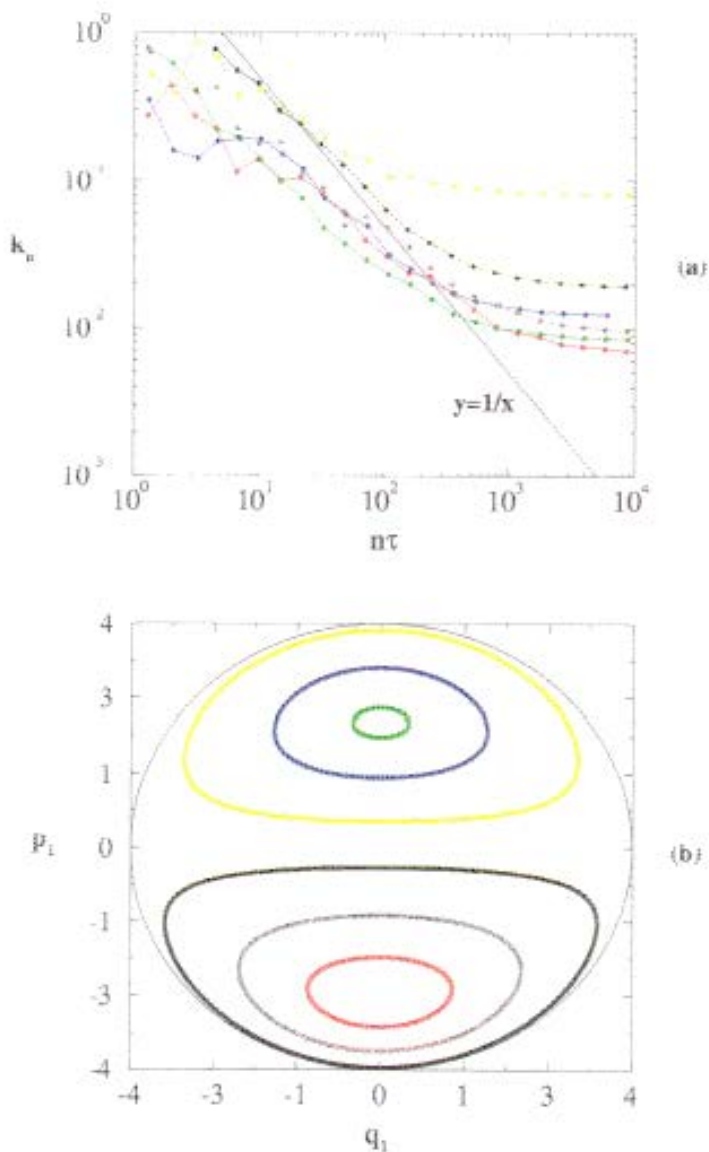


Figura 4.3: (a) Expoentes de Lyapunov para 6 condições iniciais escolhidas sobre a seção ($q_2 = 0$) com $G = 0.8$, $G' = 0$, $E = 8.5$, $J = 4.5$, $d = 1.6$ e $\tau = 0.08$ e (b) seção de Poincaré correspondente para as respectivas trajetórias. A borda do espaço de fase também é apresentada.

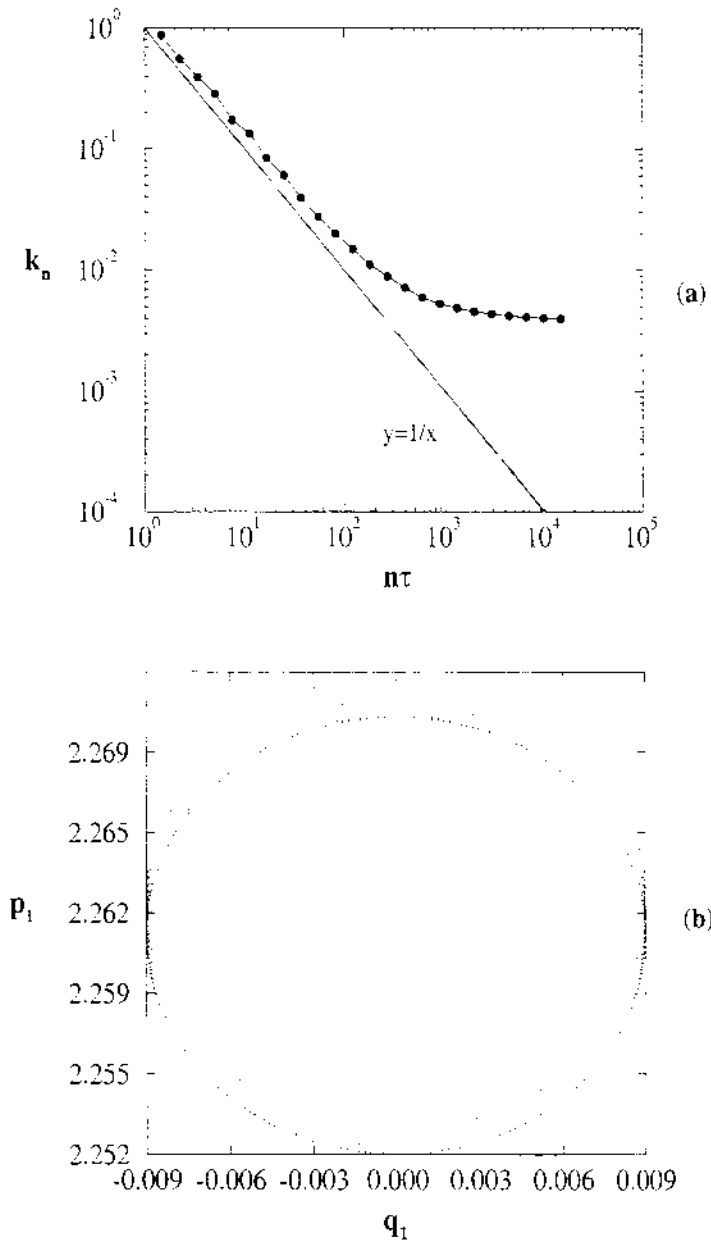


Figura 4.4: (a) Expoente de Lyapunov para uma condição inicial regular em um regime integrável ($G' = 0$) e (b) a respectiva seção de Poincaré mostrando um padrão esborado no lugar de um toro. Efeitos da imprecisão do integrador numérico.

apresentam termos cujo denominador pode ser nulo (ou muito próximo de zero) em algum instante da evolução. De fato, isso acontece quando a trajetória visita a borda do sistema, ou seja, quando $(q_1^2 - p_1^2) \rightarrow 4J$. Nesse caso, ocorre uma grande variação em q_1 e p_1 . Como essa variação não deve ocorrer simultaneamente para a trajetória referência e sua vizinha, o efeito final é o de um afastamento exponencial.

Na figura 4.5-(a), apresentamos a série da derivada temporal da coordenada p_1 em função do tempo, onde pode-se notar claramente a presença dos referidos picos de variação. Em 4.5-(b), mostra-se a seção de Poincaré para as mesmas trajetórias, evidenciando a “posição” de cada trajetória em relação à borda do espaço de fase. Voltaremos a falar sobre o *efeito de borda* em seções posteriores, quando apresentaremos mais detalhes e resultados mais conclusivos sobre o mesmo.

No momento, é importante destacarmos que, apesar do comportamento aparentemente *caótico* de trajetórias regulares próximas da borda, é possível, na maioria dos casos, fazer a distinção entre trajetórias caóticas e regulares. Isso ocorre porque todas as trajetórias caóticas convergem para um único valor de expoente enquanto que as regulares que sofrem influência da borda convergem para valores distintos² (observe-se a figura 4.3). Esse fato pode ser verificado observando-se trajetórias de naturezas diferentes em um regime misto do sistema, como é mostrado na figura 4.6. Nesse exemplo fica claro que os expoentes das trajetórias regulares convergem para valores distintos ($\Delta\lambda_{t=10^4} \simeq \Delta\lambda_{t=10^6} \simeq 0.025$)³ enquanto que os expoentes das trajetórias caóticas parecem convergir para um mesmo valor à medida que $t \rightarrow \infty$ ($\Delta\lambda_{t=10^4} > \Delta\lambda_{t=10^6} \simeq 0.004$). Além disso, nota-se que a convergência individual de cada expoente é mais rápida no caso das trajetórias regulares.

O fato de termos o mesmo valor de expoente para todas as trajetórias caóticas, pode ser entendido diretamente da equação (3.9) mediante algumas suposições. Imaginemos inicialmente, que cada subregião caótica do espaço tenha uma razão de divergência média dada por λ_i , de modo que o vetor distância entre duas trajetórias vizinhas pertencentes a essa região tenha módulo, após evoluir por um tempo τ , dado por:

$$d_i = de^{\tau\lambda_i} \quad (4.2)$$

²Além disso, como já dissemos anteriormente, a visualização da seção de Poincaré correspondente acaba com qualquer dúvida sobre a natureza da trajetória.

³Definimos $\Delta\lambda$ como sendo a diferença entre os expoentes de Lyapunov das trajetórias de mesma condição dinâmica (regular ou caótica).

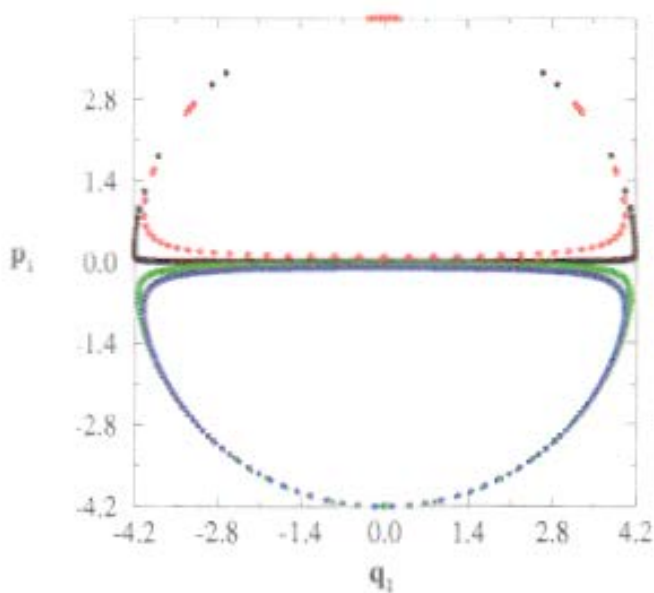
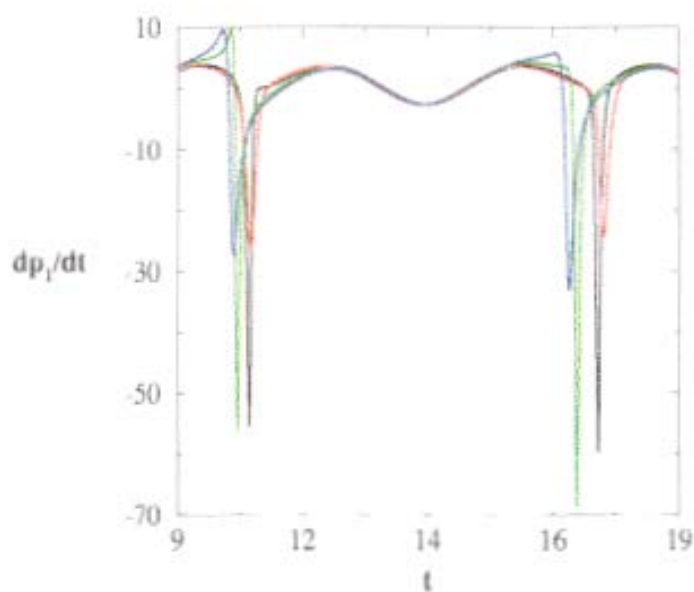


Figura 4.5: (a) Série temporal de dp_i/dt para quatro condições iniciais regulares próximas da borda do espaço de fase e (b) respectiva seção de Poincaré.

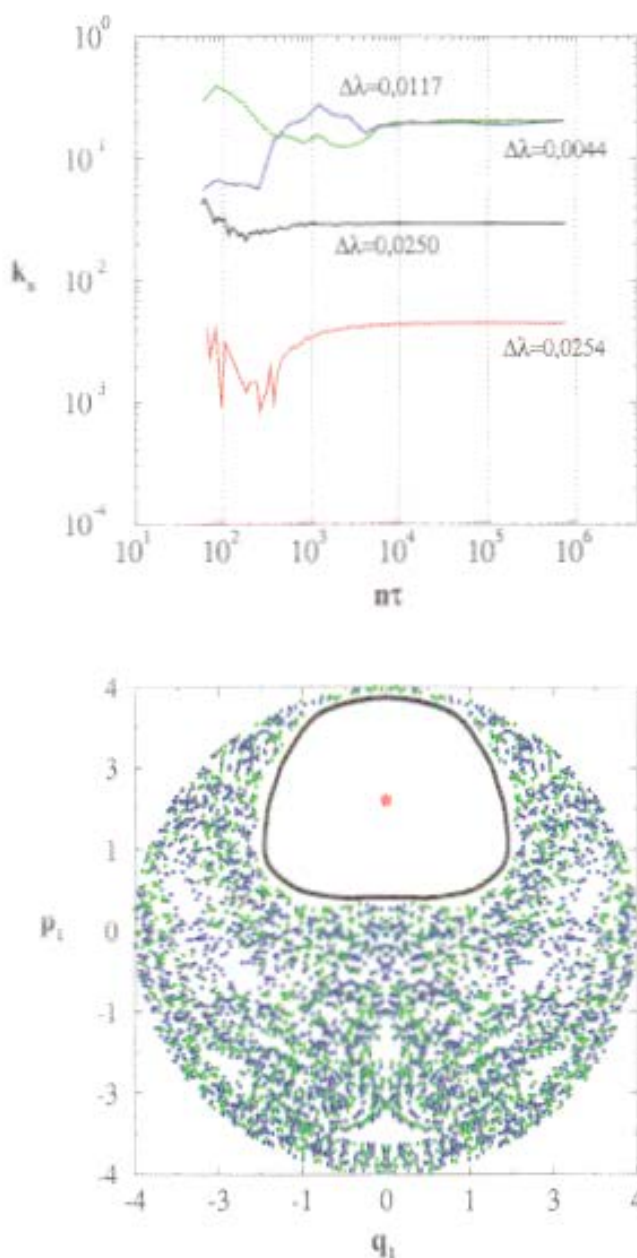


Figura 4.6. (a) Expoentes de Lyapunov para duas trajetórias caóticas (verde e azul) e duas trajetórias regulares em um regime misto ($G = 0.5$ e $G' = 0.2$) para $d = 0.1$ e $\tau = 0.08$ e (b) respectiva seção de Poincaré. Os valores de $\Delta\lambda$ foram calculados nos instantes 10^4 e 10^6 .

Com essa suposição, o valor do expoente de Lyapunov seria dado por:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^n \ln \frac{d_i}{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \bar{\lambda} \quad (4.3)$$

Nota-se imediatamente que o valor final do expoente é um valor médio. Então, se nos lembrarmos de que uma trajetória caótica visita todo o espaço de fase caótico energeticamente acessível, podemos concluir que, no limite de tempos longos (ou de muitas iterações, $n \rightarrow \infty$), o cálculo de cada trajetória caótica deve envolver cada um dos possíveis λ_i . Consequentemente, em média, se reproduz o mesmo valor $\bar{\lambda}$ para qualquer trajetória caótica, o que concorda com os comportamentos apresentados.

Diante desses resultados, podemos considerar em primeiro lugar que estamos conseguindo reproduzir as características destacadas em [20] para o parâmetro k_n , apesar do *efeito de borda* apresentado pelo sistema. De fato, esse novo elemento não deve afetar o objetivo delimitado para esse trabalho, uma vez que a classificação das trajetórias sempre será feita via expoente de Lyapunov *mais* seções de Poincaré. Pelo contrário, os expoentes de Lyapunov trazem uma informação adicional surpreendente sobre esse sistema: *mesmo condições iniciais regulares podem apresentar um comportamento semelhante ao de uma divergência exponencial*. Mais tarde, voltaremos a dar atenção ao comportamento dos expoentes de Lyapunov como indicadores do *efeito de borda*.

4.2 Cálculo do Volume Caótico

Para o cálculo do volume caótico, utilizamos sempre os valores de energia e spin descritos anteriormente: $E = 8.5$ e $J = 4.5$. Quanto a d e τ , escolhemos valores que produziam o melhor efeito visual, ou seja, valores que facilitassem a identificação de cada tipo de condição inicial utilizada (caótica, regular ou regular próxima da borda), sem nenhuma preocupação com o valor quantitativo dos expoentes. Assim, utilizamos como valores típicos $d = 0.1$ e $\tau = 0.08$. O resultado produzido com esses valores é mostrado por exemplo em um regime misto com $G = 0.6$ e $G' = 0.3$, na figura 4.7. Esta figura é bastante ilustrativa, pois traz um conjunto de informações já mencionadas. Observe-se por exemplo que todas as trajetórias caóticas produzem o mesmo expoente e que todas as regulares, as quais devem passar perto da borda em algum instante de sua evolução, convergem para diferentes valores

positivos. Além disso, podemos observar a identificação de uma trajetória regular (curva verde no centro) via expoentes de Lyapunov (fig. 4.7-a). De fato, o toro correspondente é quase imperceptível na seção de Poincaré, pois consiste de um pequena ilha localizada na parte inferior da seção em meio ao mar de caos. A figura 4.7 indica assim, todo o panorama construído para a identificação dos elementos do ensemble, onde se procede uma contagem do número de trajetórias caóticas e se divide pelo número total de trajetórias usadas.

Voltando à questão da quantidade de elementos do ensemble de condições iniciais, realizamos alguns testes a fim de tentar entender qual a melhor escolha. Calculamos o volume caótico de alguns regimes em função do número total de trajetórias utilizadas (N). O resultado (figura 4.8) nos mostrou a solução para o problema da definição do número de elementos do ensemble: *devemos tomar tantas condições iniciais quantas forem necessárias para se observar a convergência do valor do volume caótico*. Como se observa na figura, com um ensemble médio de 100 trajetórias já é possível se obter um valor convergido para o volume caótico.

Finalmente, temos estabelecido todos os critérios e procedimentos necessários ao cálculo do volume caótico. O cálculo foi feito com os valores de parâmetros relacionados acima e com ensembles com um número médio de 100 condições iniciais. Cada condição, foi evoluída por um tempo total de 10000 em unidades relativas sendo que o passo de tempo inicial utilizado foi de 0.001.

É importante destacarmos ainda que todo o estudo foi feito para a situação de ressonância do sistema quântico, ou seja, a situação em que $\varepsilon = \omega_0$, o que significa que o modo de vibração da cavidade tem exatamente a mesma frequência da separação entre os dois níveis relevantes dos átomos utilizados. O valor numérico usado para essas frequências foi $\varepsilon = \omega_0 = 1.0$. O resultado obtido para o estudo sistemático do volume caótico, o qual constitui o objetivo inicial deste trabalho, é apresentado na figura 4.9.

A escala de cores indica o intervalo de valores para o volume caótico. A informação da quantidade de caos, é obtida da seguinte maneira: por exemplo, as regiões em azul indicam regimes para os quais apenas 10% do espaço de fase apresenta caos, ou ainda, que esta é a probabilidade de se obter uma condição inicial caótica mediante um sorteio sobre todo o espaço. Por outro lado, as regiões avermelhadas correspondem à maior quantidade relativa no espaço de fase.

Um dado bastante interessante é aquele para os regimes com $G = 0$. O

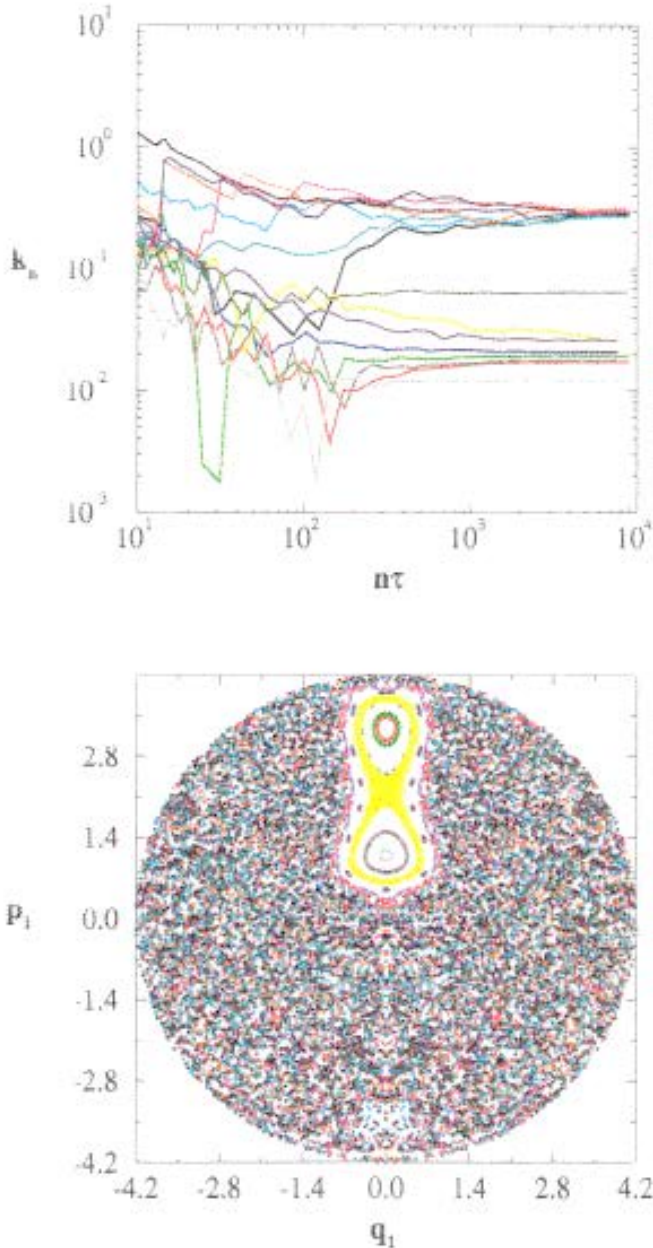


Figura 4.7: (a) Expoentes de Lyapunov e (b) seção de Poincaré para um regime misto com $G = 0.6$, $G' = 0.3$, $E = 8.5$, $J = 4.5$, $d = 0.1$ e $\tau = 0.08$. A curva verde dos expoentes, localizada no centro, se refere a um pequenino toro localizado na parte inferior da seção (imperceptível na seção).

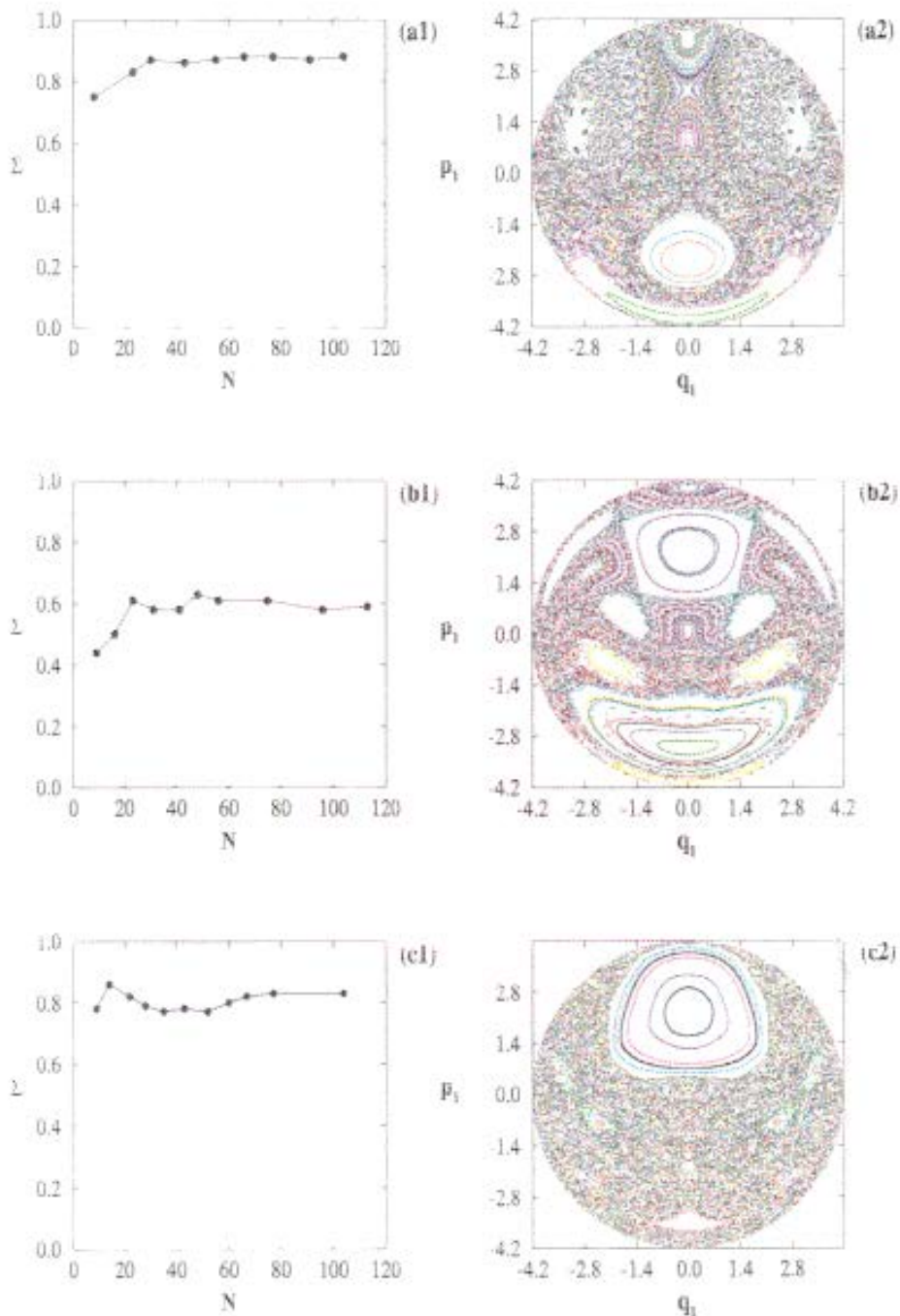


Figura 4.8: Volume caótico em função do número total N de elementos do ensemble, com $E = 8.5$ e $J = 4.5$, para três regimes distintos: (a) $G = 0.7$ e $G' = 0.1$, (b) $G = 0.3$ e $G' = 0.3$ e (c) $G = 0.5$ e $G' = 0.2$. Note-se a convergência de Σ para valores relativamente pequenos de elementos.

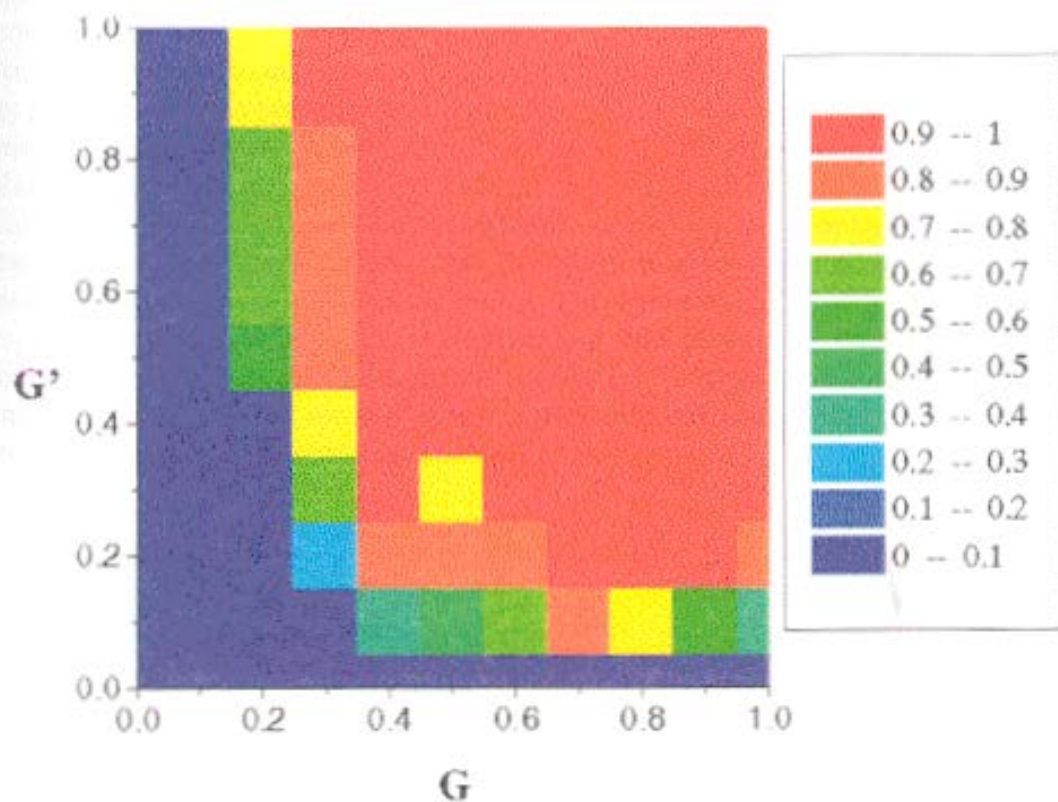


Figura 4.9: Volume caótico para o Modelo do Maser Caótico Clássico em função dos parâmetros de acoplamento G e G' .

estudo do volume caótico indica que temos aí um regime de regularidade, apesar de nenhuma constante de movimento ter sido obtida para tal regime. Além disso, observa-se imediatamente que o sistema possui muitos regimes onde o caos impera quase que completamente, sendo que apenas alguns poucos regimes intermediários podem ser visualizados.

O “passo” de 0.1 utilizado para se representar o volume caótico foi escolhido levando-se em consideração o fato de que o cálculo não é exato. Lembremo-nos de que estamos utilizando um número finito de condições e, portanto, mesmo obtendo um valor convergido já para 100 condições, devemos considerar um certo “erro” no cálculo. De fato, basta imaginarmos a situação em que exista uma pequena ilha no meio do mar caótico. Nesse caso, podemos obter o patamar com o ensemble de 100 pontos mas em algum momento, pode-se escolher uma condição sobre essa ilha e o patamar pode mudar levemente. Pensando nisso, tentamos estimar o erro cometido em um cálculo com apenas 100 trajetórias utilizando valores típicos encontrados durante o cálculo do volume caótico. Então, vamos imaginar que no primeiro ensemble com N_0 elementos, encontramos η_0 trajetórias caóticas. Tomando um segundo ensemble com o mesmo número de elementos, encontra-se aproximadamente o mesmo número de trajetórias caóticas com uma certa quantidade extra $\pm\delta$. O mesmo acontece nos cálculos posteriores. Assim, após cálculos sucessivos, obtemos a série:

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \frac{\eta_0}{N_0} \\ \Sigma_1 &= \frac{2\eta_0 \pm \delta}{2N_0} \\ \Sigma_2 &= \frac{3\eta_0 \pm \delta \pm \delta}{3N_0} \\ &\vdots \\ \Sigma_m &= \frac{(m+1)\eta_0 \pm \delta \pm \delta \dots \pm \delta}{(m+1)N_0}\end{aligned}\tag{4.4}$$

Então, supondo que o valor exato do volume caótico ocorre quando o número de trajetórias estudadas vai para infinito, pode-se obter o maior valor possível para o volume caótico:

$$\Sigma = \lim_{m \rightarrow \infty} \Sigma_m = \frac{\eta_0}{N_0} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m\delta}{(m+1)N_0} = \frac{\eta_0}{N_0} + \frac{\delta}{N_0}\tag{4.5}$$

Assim, nota-se que o maior erro obtido é $\pm \frac{\delta}{N_0}$. Nos nossos cálculos ti-

vemos sempre $N_0 \simeq 30$ e $\delta \simeq 3$, de modo que o erro máximo obtido nesses cálculos foi de ± 0.1 , que é o valor escolhido para a escala do volume caótico. Por outro lado, para se estimar o valor do erro *relativo* para cada regime, é necessário estabelecermos um compromisso entre o valor obtido para Σ e o número de elementos do ensemble e, portanto, vincular o estudo do volume caótico ao número médio de elementos do ensemble.

Outro responsável pela “inexatidão” do valor de Σ , é a questão, já mencionada, a respeito do valor do parâmetro d , ou seja, estamos atribuindo ao espaço de fase do Modelo do Maser Clássico um valor de volume caótico que foi calculado para um espaço de fase aproximadamente 5% menor. Assim, o “passo” de 10% para o volume caótico nos parece adequado, uma vez que garante uma certa variação em torno do valor calculado.

Com estas considerações, temos calculado o volume caótico para o Modelo do Maser Caótico Clássico em função das constantes de acoplamento quânticas G e G' para um ensemble médio de 100 condições iniciais. Como já foi dito anteriormente, este resultado traz a informação da *quantidade de caos* existente no espaço de fase do modelo do Maser para diversos regimes, com valores de E e J que colocam o sistema quântico em um regime semiclássico. Desta forma, a importância deste resultado pode ser voltada também para o ambiente quântico, informando o regime adequado para aplicações experimentais.

4.3 Expoentes de Lyapunov vs G'

Um resultado bastante interessante deste trabalho foi a relação obtida entre os expoentes de Lyapunov e o parâmetro de interação G' . De fato, o que se procura com este estudo é tentar entender como o expoente de Lyapunov das trajetórias caóticas responde à variação do parâmetro que “regula” o caos. Em outras palavras, busca-se entender como se relacionam dois componentes que são determinantes da “instabilidade” das trajetórias, ou seja, agora estaremos observando a “qualidade” do caos.

Para se obter essa informação, fixamos o valor de G e, variando G' entre 0 e 1, calculamos o valor médio do expoente de Lyapunov de aproximadamente 15 trajetórias para cada valor de G' . O resultado obtido é apresentado na figura 4.10.

As barras de erro se referem ao desvio padrão da média e tem aproximadamente o mesmo valor. Como pode ser observado, a relação é *linear* exceto

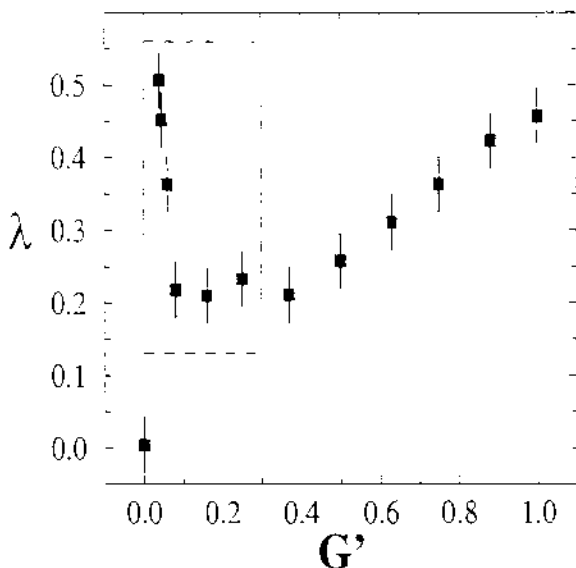


Figura 4.10: Expoente de Lyapunov para trajetórias caóticas em função do parâmetro de acoplamento G' , com $G = 0.5$. Foram utilizados $d = 0.1$ e $\tau = 0.08$. Observe-se os pontos em destaque.

na região inicial, onde o valor dos expoentes atinge amplitudes maiores do que o máximo obtido (em $G' = 1.0$). Isso constitui um fato curioso mas que pode ser explicado observando-se as seções de Poincaré nesse regime. Observe-se na figura 4.11 que, para $G' = 0.05$, temos uma região de caos bastante estreita e de fato, o valor do volume caótico deve ser de menos de 30% nesse regime. O que parece estar acontecendo é que a trajetória caótica ao percorrer a região de caos que lhe é acessível acaba, em algum momento, chegando muito perto das regiões regulares. Como o tempo de reescala utilizado foi relativamente pequeno, deve acontecer uma reescala tal que as duas trajetórias monitoradas estejam em regiões distintas, ou seja, podemos ter o caso de a trajetória referência ser caótica e a trajetória vizinha ser regular. Isso explicaria a separação tão brusca proposta pelos expoentes.

Não podemos, como já discutimos, considerar o valor de cada expoente como sendo o “correto”, uma vez que ele tem se mostrado dependente de parâmetros numéricos como d e τ . Por outro lado a taxa de variação de λ com G' parece ser constante. Isso pode ser verificado na figura 4.12, onde se compara o resultado anterior com um novo estudo, agora com $d = 0.2$ e

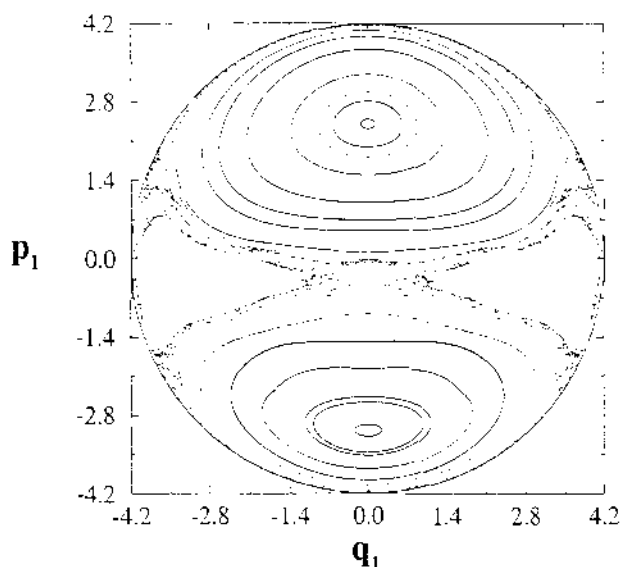


Figura 4.11: Seção de Poincaré para $G' = 0.05$ e $G = 0.5$, evidenciando-se uma estreita região de caos na região próxima da separatriz.

$\tau = 0.1$.

De posse desses dados, podemos dizer com relativa segurança que o expoente de Lyapunov mantém uma relação linear com o parâmetro de acoplamento G' . Essa informação nos revela também que à medida que aumentamos o valor de G , ocorre o aumento da porção do espaço de fase que contém caos, além de se aumentar a divergência média entre trajetórias vizinhas (λ).

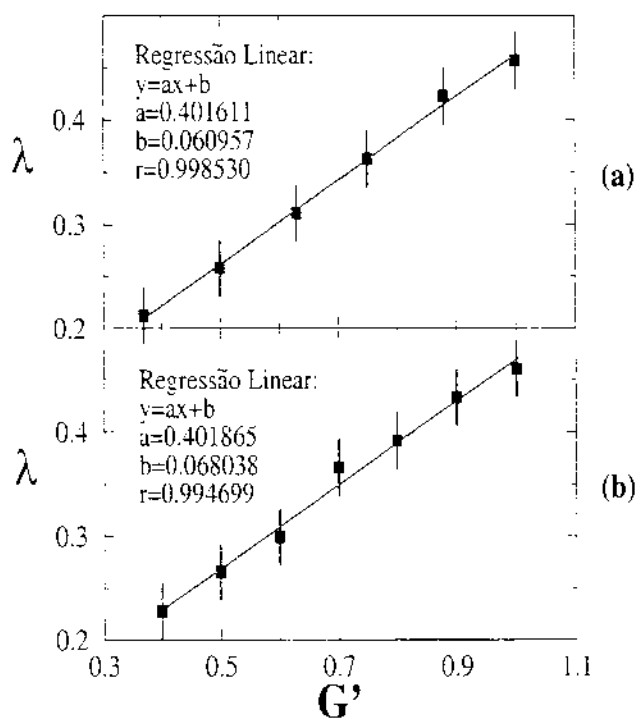


Figura 4.12: Expoente de Lyapunov em função de G' para (a) $d = 0.1$ e $\tau = 0.08$ e (b) $d = 0.2$ e $\tau = 0.1$, com $G = 0.5$. Os coeficientes lineares são bastante parecidos.

Capítulo 5

Efeito de Borda e Caos Determinístico

Neste capítulo vamos discutir o efeito citado no capítulo anterior e situá-lo dentro do contexto do caos determinístico. Esse efeito, ao qual batizamos *efeito de borda*, apareceu primeiramente na medida dos expoentes de Lyapunov. Observou-se que, mesmo num regime integrável ($G' = 0$), obtinha-se valores positivos para os expoentes, sendo que maior era o valor numérico quanto mais próximo da borda do espaço de fase se localizava o toro na seção de Poincaré (q_1, p_1) . A explicação imediata para esse fenômeno, foi dada via equações de movimento, onde se observa claramente que as variáveis dinâmicas $\dot{p}_1(t)$ e $\dot{q}_1(t)$ sofrem grandes variações à medida que nos aproximamos da borda ($p_1^2 + q_1^2 \rightarrow 4J$).

Esse efeito toma dimensão relativamente grande quando nos atentamos para o fato de que um sistema em regime integrável apresenta situações de divergência exponencial (expoente de Lyapunov positivo), característica até então atribuída a sistemas em regimes caóticos. Essa talvez seja a grande motivação para se tentar entender um pouco mais sobre esse efeito que parece ser uma peculiaridade do sistema do Maser Caótico.

5.1 Aspectos Topológicos

Nossa investigação sobre o efeito de borda, inicia-se pela tentativa de entender a origem da raiz quadrada que contém a informação clássica sobre a limitação do espaço de fase. Como já foi mencionado, esse termo é o correspondente

clássico para a limitação quântica da projeção do spin na direção z ($J_z = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J$), com $2J + 1$ possibilidades. Assim, no processo de obtenção da Hamiltoniana clássica, operam-se mudanças de coordenadas que transformam os operadores quânticos ($\hat{a}, \hat{a}^\dagger$) e ($\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$) em variáveis clássicas (q_2, p_2) e (q_1, p_1) respectivamente:

$$\begin{cases} \hat{a} \rightarrow \sqrt{I_2} e^{i\theta_2} \\ \hat{a}^\dagger \rightarrow \sqrt{I_2} e^{-i\theta_2} \\ \hat{J}_x \rightarrow I_1 = J \sin \theta_1 \cos \phi_1 \\ \hat{J}_y \rightarrow J \sin \theta_1 \sin \phi_1 \\ \hat{J}_z \rightarrow J \cos \theta_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_2 = \sqrt{2I_2} \sin \theta_2 \\ p_2 = \sqrt{2I_2} \cos \theta_2 \\ q_1 = \sqrt{2(J + I_1)} \sin \phi_1 \\ p_1 = \sqrt{2(J + I_1)} \cos \phi_1 \end{cases} \quad (5.1)$$

com θ_1 e ϕ_1 sendo os ângulos polar e azimutal respectivamente e (I_2, θ_2) variáveis de ângulo e ação definidas para o grau de liberdade de partícula [16].

Devemos observar imediatamente que o espaço de spin sofre uma transformação topológica, passando de um espaço tridimensional para outro bidimensional. De acordo com a transformação mostrada na eq. (5.1), temos uma esfera sendo transformada em uma circunferência. Podemos vislumbrar geometricamente essa situação através do esquema apresentado na figura 5.1.

Observe-se que ocorre um “furo” exatamente no pólo norte para que se possa proceder a transformação e, portanto, o ponto $J_z = J$, com $\theta_1 = 0$, o qual corresponde à borda do sistema clássico ($p_1^2 + q_1^2 = 4J$) não pertence mais à dinâmica do sistema. Assim, as vizinhanças desse ponto são esticadas a medida que se transforma o objeto de três dimensões em um outro de duas apenas, o que dá origem ao que chamamos de *efeito de borda*. De fato, se imaginarmos uma trajetória que cruza o pólo norte na esfera do momento angular veremos que, no novo sistema, esta deve ir de um ponto a outro do espaço de fase quase que instantaneamente, e o faz contornando a borda pois qualquer ponto da borda corresponde a um único ponto (N) do sistema antigo. Na figura 5.2, apresentamos um exemplo desta situação para uma trajetória regular no regime integrável. Pode-se observar que existe um instante em que a trajetória praticamente atravessa toda a dimensão do espaço de fase do spin, levando para isso o mesmo intervalo de tempo de $\Delta t = 0.3$ (fig. 5.2-a) como se de fato ela “entrasse” de um lado e “saísse” imediatamente do outro. Como isso não pode acontecer, a trajetória percorre toda a borda (fig. 5.2-b), o que teria o efeito de estar “cruzando” o pólo norte.

Deste modo, somos induzidos a pensar que o efeito de borda é na realidade um efeito causado pela limitação do espaço de fase de um dos subsistemas, no caso o do spin. De fato, efeito semelhante não foi observado em nenhum momento para as variáveis de campo, cujo espaço é ilimitado. A finitude do espaço, primeiramente descrita pela esfera do momento angular total (spin total) e mais tarde pelo círculo ($p_1^2 + q_1^2 = 4J$), tem se mostrado determinante no processo de afastamento de trajetórias vizinhas, principalmente no caso integrável, onde temos certeza da ausência do caos.

Os resultados numéricos juntamente com o formato das equações de movimento têm sugerido que existe um afastamento exponencial entre trajetórias regulares e que ele ocorre pela presença da borda. Nesta direção de raciocínio caberia uma questão um tanto quanto contundente: como separar caos de efeito de borda? As trajetórias caóticas visitam todo o espaço de fase, de modo que em algum momento, devem passar pelas vizinhanças da borda e sofrer o mesmo efeito. Realmente, esta não é uma questão que pode ser respondida facilmente. De fato, se observarmos a Hamiltoniana clássica do sistema, veremos que o termo de acoplamento não linear do sistema é exatamente o termo da raiz quadrada, ou seja, “a borda”. Assim, não nos parece evidente como separar qualitativamente ambos os efeitos, embora tenha ficado claro, na maioria dos casos, que o valor do expoente para trajetórias caóticas é em geral maior que o das trajetórias regulares que sofrem o efeito de borda. Diga-se de passagem, devemos sempre ter cuidado com a visualização da seção de Poincaré pois mesmo uma trajetória localizada sobre um pequeno toro no centro da seção pode, em algum instante, passar perto da borda com outros valores de coordenada q_2 .

5.2 Esboreamento do Volume no Espaço de Fase Clássico

Na tentativa de visualizar o suposto afastamento exponencial entre trajetórias vizinhas causado pelo efeito de borda implementamos, a partir dos programas à disposição, uma rotina para se monitorar a evolução de um volume clássico. O processo consiste em gerar um ensemble de condições iniciais dentro de um elemento de volume com a forma do espaço de fase do sistema, e evoluir cada condição observando-se, em intervalos de tempos iguais, qual a nova posição de cada trajetória e, portanto, a nova forma do elemento de

volume.

Começamos observando o que acontece para um volume clássico com raio $R = 0.1$, em unidades relativas, na projeção de spin e com aproximadamente a mesma amplitude na projeção do campo. O ensemble preparado contém 1000 condições iniciais e o intervalo entre cada “foto” do volume é de $\Delta t = 4.0$. Nessa primeira simulação, testamos o caso integrável e “quase” separável ($G = G' = 0$) e obtivemos o resultado apresentado na figura 5.3.

Fica claro nesse caso, que o termo não linear da Hamiltoniana tem um peso perturbativo muito pequeno (como se não existisse borda), de modo que o sistema se apresenta quase totalmente separável e o resultado apresentado pelo expoente é realmente o que se espera. Vê-se, nesse caso, que o volume clássico permanece com as mesmas dimensões que o volume inicial, mesmo para tempos aproximadamente 10 vezes maiores que o tempo característico do sistema¹. Naturalmente, observa-se o mesmo comportamento para a outra projeção do pacote. Por outro lado, para o caso integrável mas não separável (borda presente), ou seja, o caso em que a borda passa a existir e a ter efeitos significativos sobre a dinâmica do sistema, nota-se claramente que o expoente torna-se positivo e que ocorre um esboroamento bastante significativo do pacote clássico, o qual passa a ter dimensões e formas superiores à inicial (figura 5.4).

Mais uma vez, são obtidos resultados que corroboram a questão do efeito de borda, onde se observa agora o esboroamento de um pequeno elemento de volume a tempos longos. É importante dizer que nas outras direções do espaço também ocorre o esboroamento, mas não de maneira tão intensa.

5.3 Separatriz do Movimento

Baseando-nos no estudo do volume clássico, não há como não pensar nos possíveis efeitos da separatriz do movimento. De fato, mesmo pensando em sistema simples como o pêndulo, ocorre imediatamente a questão: o que aconteceria se prepararmos um volume de condições iniciais sobre a separatriz? A resposta emerge imediatamente da observação das linhas do fluxo dinâmico, que nos indicam que haveria separação das partes do volume acima e abaixo da separatriz. Somos portanto induzidos a pensar que o mesmo deve ocorrer no sistema do Maser Caótico Clássico no regime integrável e, mais do que

¹Considera-se o tempo característico como sendo o período da menor órbita do sistema.

isso, podemos imaginar que podem ocorrer expoentes de Lyapunov positivos para condições iniciais localizadas próximas da separatriz.

Para entender melhor tais processos estudamos no regime integrável dois pacotes clássicos de condições iniciais, sendo que um deles foi colocado sobre a separatriz do movimento. O resultado é apresentado na figura 5.5, onde se observa a notável diferença entre os dois casos.

Pode-se observar que em ambos os casos, há esboroamento do pacote clássico, porém isso ocorre de maneira muito mais acentuada no segundo caso. Portanto, nota-se que a separatriz tem uma parcela de responsabilidade no resultado do expoente de Lyapunov (figura 5.6), pois ela é capaz de atribuir a ele valores tão grandes quanto aqueles obtidos para trajetórias caóticas. De fato, em regimes mistos, quando não há separatriz², nota-se que as trajetórias regulares apresentam expoentes positivos de menores amplitudes.

Concluimos esta seção organizando os resultados: (1) a limitação do espaço de fase (borda) é a responsável por todo efeito de separação entre trajetórias pois é sempre neste lugar do espaço de fase que ocorre o esticamento do volume; (2) a separatriz reforça o efeito de esticamento, uma vez que trajetórias imediatamente acima e abaixo da separatriz seguem as linhas de fluxo do seu espaço dinâmico o que causa uma separação exponencial entre trajetórias vizinhas (que são levadas à borda).

De posse desses resultados, vemos que a simples definição do caos como *sensibilidade às condições iniciais* pode ser errônea, pois estará incluindo casos como o do Maser Caótico Clássico. De fato, os resultados acima devem ser também encontrados em qualquer sistema que apresente uma separatriz do movimento ou um espaço de fase com alguma limitação específica.

É importante que se diga que a limitação no espaço de fase à qual sempre nos referimos não é a limitação energética do sistema. No nosso caso a limitação é imposta pelo spin total J . Isso é facilmente comprovado matematicamente se tomarmos por exemplo o limite em que $J \rightarrow \infty$ (com E fixo). Nesse caso a raiz quadrada desaparece da Hamiltoniana e o sistema deixa de apresentar borda. Esse caso foi testado numericamente e de fato, não se observaram os efeitos da borda, ou seja, tivemos expoentes nulos para trajetórias regulares e assim por diante. Nesse limite de spin total, o espaço do momento angular seria infinito pois quanticamente teríamos infinitos valores possíveis para a projeção J_z .

Na figura 5.7, simulamos o caso oposto: mantivemos $J = 4.5$ fixo e

²A região da separatriz se torna um mar caótico conforme G' se torna não nulo.

diminuímos o valor da energia. De fato o resultado é completamente análogo: à medida que diminuímos o valor da energia, o sistema passa a se confinar a uma região onde as variáveis dinâmicas assumem valores pequenos. Como consequência, a borda do sistema (cujo raio é definido somente por J) passa a influenciar menos a dinâmica do sistema. Consequentemente, a trajetória regular volta a ter expoente nulo.

5.4 Efeito de Borda e Caos Quântico

O estudo do volume clássico atualmente tem sido aplicado dentro do contexto levantado por vários trabalhos desenvolvidos na área do caos quântico. De acordo com a proposta de Zurek e Paz [25], a razão de crescimento da entropia de Von Neumann calculada a partir da matriz densidade reduzida de um sistema quântico aberto é um excelente indicador do comportamento dinâmico de seu análogo clássico Hamiltoniano.

Nessa linha, Furuya *et al* [26], propõem o estudo do modelo do Maser Caótico, o qual constitui um sistema acoplado do tipo campo-átomo e cuja matriz densidade reduzida pode ser utilizada para se calcular o defeito de idempotência ou entropia linear do átomo $(\delta(t))^3$. Os resultados desse estudo corroboram uma série de outros, mostrando que o incremento em $\delta(t)$ depende da condição inicial clássica que gerou o estado coerente inicial do sistema quântico. Nesses trabalhos, quando o estado é preparado através de uma condição inicial clássica caótica, mostra-se que a entropia linear cresce muito mais rapidamente que no caso regular.

Recentemente, obtivemos resultados, via estudo da evolução do volume clássico, que explicam as oscilações vislumbradas na quantidade $\delta(t)$ bem como seu crescimento inesperado em alguns casos, utilizando-se do conceito clássico do *efeito de borda* [27]. Observamos numericamente que os picos de $\frac{d\delta(t)}{dt}$ estão relacionados com a passagem do pacote de trajetórias perto da borda, pois nesses instantes o pacote clássico sofre um esboroamento e parece que o mesmo deve acontecer com o pacote coerente quântico.

Além disso, pode-se explicar alguns comportamentos de $\delta(t)$ analisando-se a posição do pacote clássico em relação à separatriz do movimento no caso integrável. Para uma tal condição inicial (próxima da separatriz), o pacote

³Quantidade puramente quântica que mede o emaranhamento entre os átomos e o campo.

quântico preparado, cuja largura é definida pelo estado coerente, possui partes localizadas em ambos os lados da separatriz. Nesse caso a entropia linear cresce muito rapidamente, como se a condição inicial tomada fosse caótica. Como já foi mostrado, o pacote clássico preparado próximo da separatriz se esboroa e provoca o efeito de uma separação exponencial característica de uma trajetória caótica.

Desta forma, observa-se que o efeito de borda ou o efeito causado pela limitação do espaço de fase de um dos subsistemas em estudo, tem se mostrado extremamente importante para se entender comportamentos clássicos e quânticos, trazendo portanto sua contribuição também para o caos quântico.

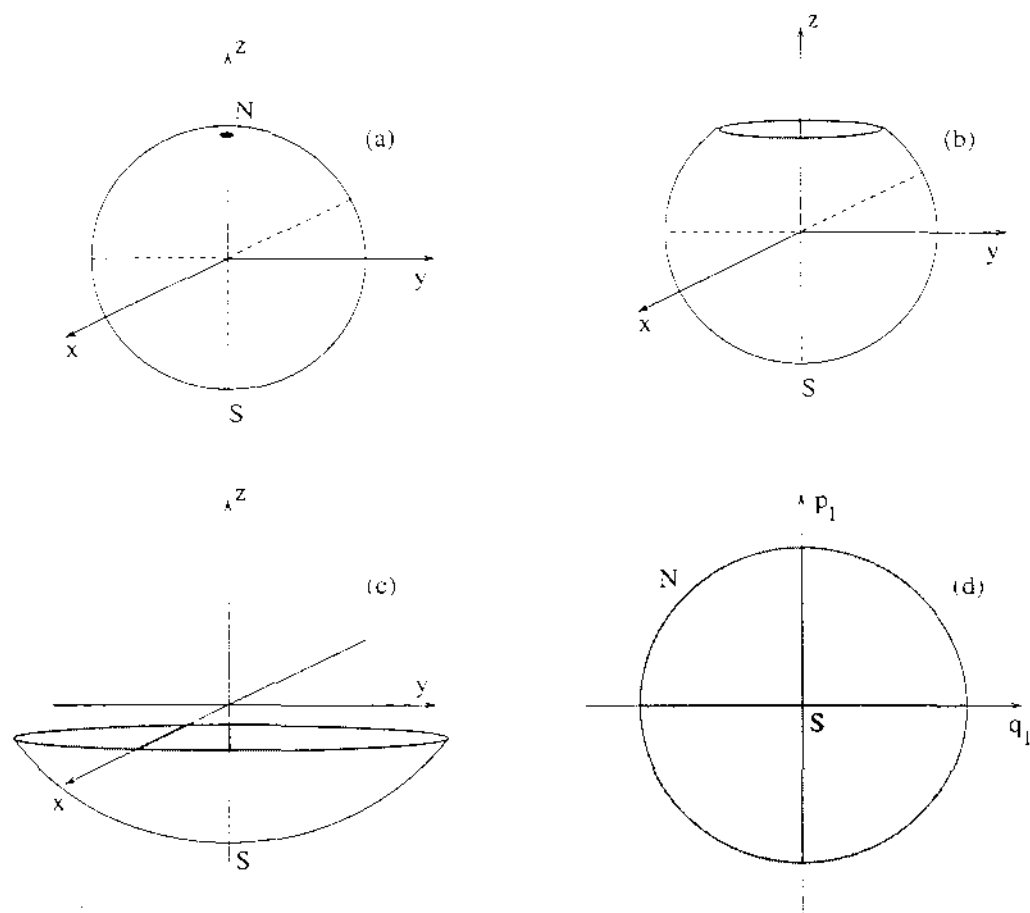


Figura 5.1: Esquema geométrico da mudança de topologia do sistema. Em (a), a esfera é furada e tem seu furo alargado (b e c) até se transformar numa superfície bidimensional (d).

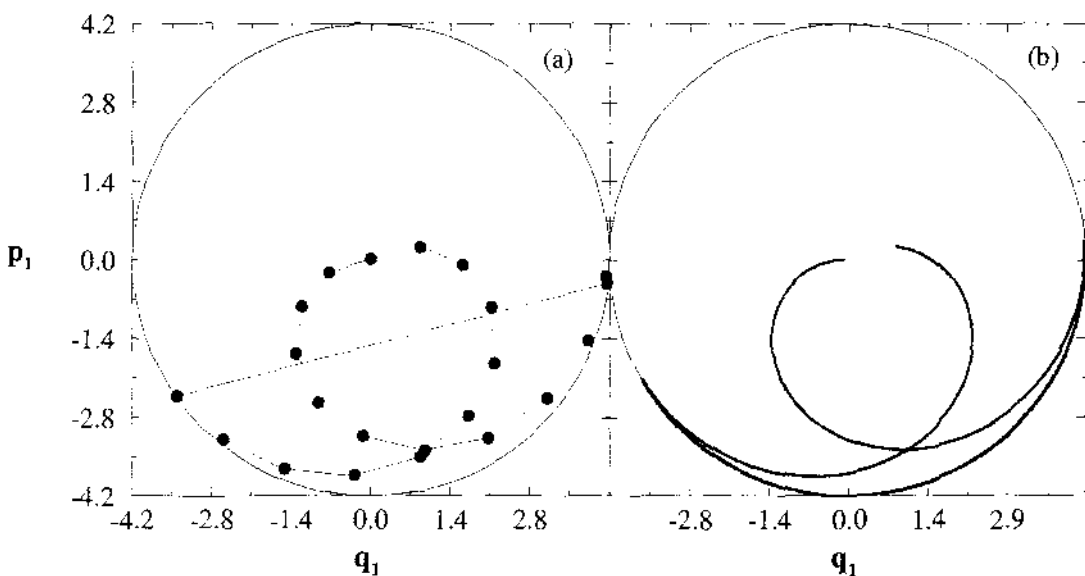


Figura 5.2: (a) Fotografias tiradas a cada $\Delta t = 0.3$, para um tempo total de evolução de $t = 7.0$. A linha sólida tem a função apenas de mostrar a sequência das fotos. Em (b), temos a projeção da trajetória no espaço $q_1 p_1$. Observe-se o aumento de velocidade perto da borda.

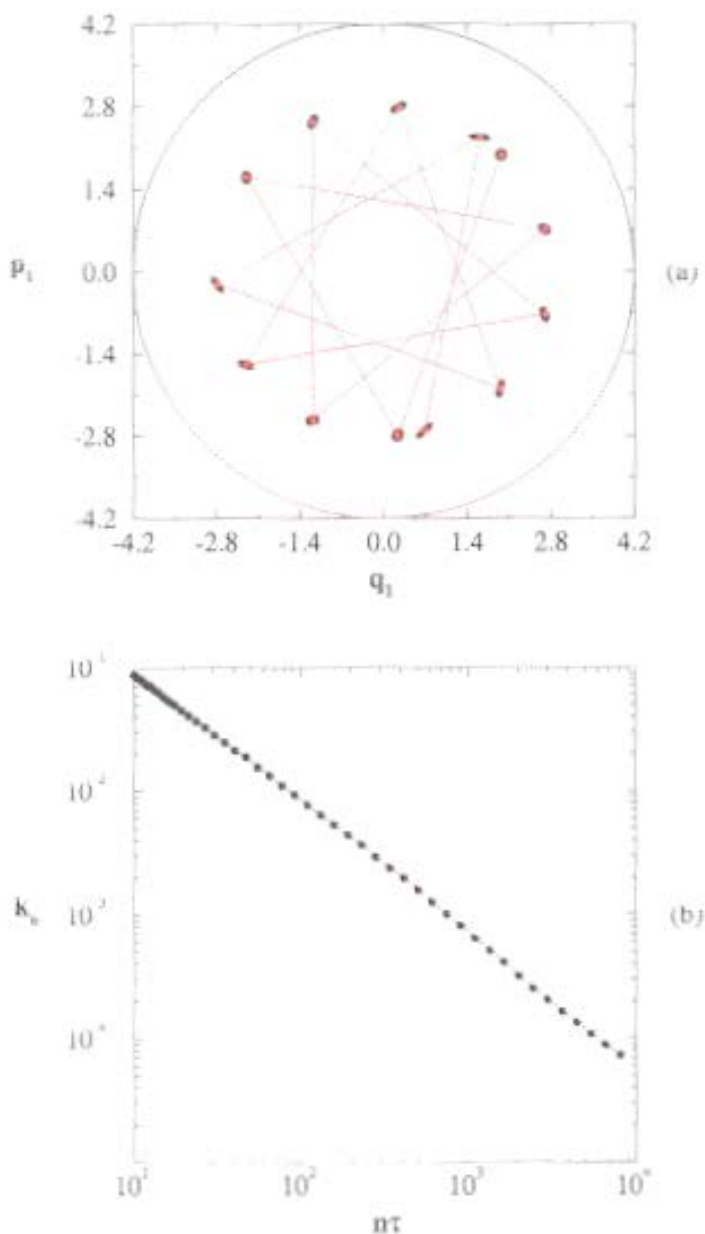


Figura 5.3: (a) Fotos tiradas com intervalos de $\Delta t = 4$, para um tempo total de evolução de $t = 50$, no caso $G = G' = 0$. A linha sólida vermelha, destaca a evolução da condição do centro do ensemble de 1000 pontos. Em (b), temos o expoente de Lyapunov, notadamente nulo.

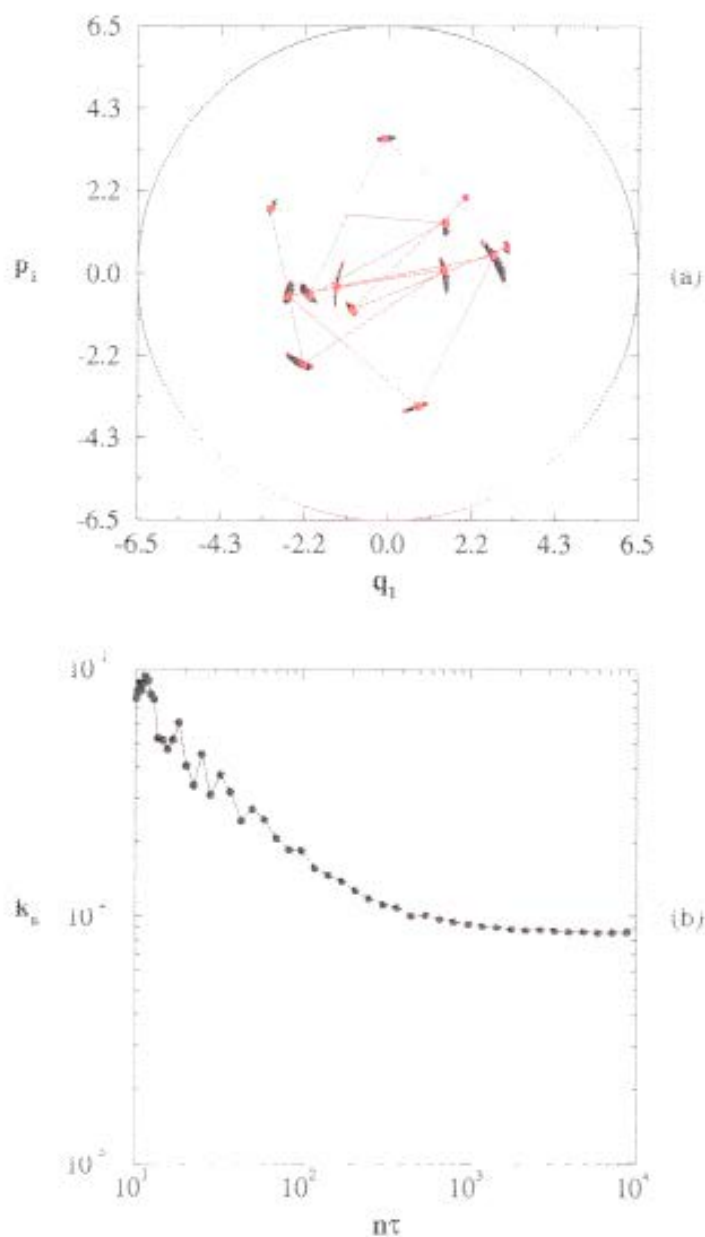


Figura 5.4: (a) Fotos com intervalos de $\Delta t = 1.8$, para um tempo total de evolução de $t = 23$, no caso $G = 0.5$ e $G' = 0$ e (b) expoente de Lyapunov, positivo nesse caso.

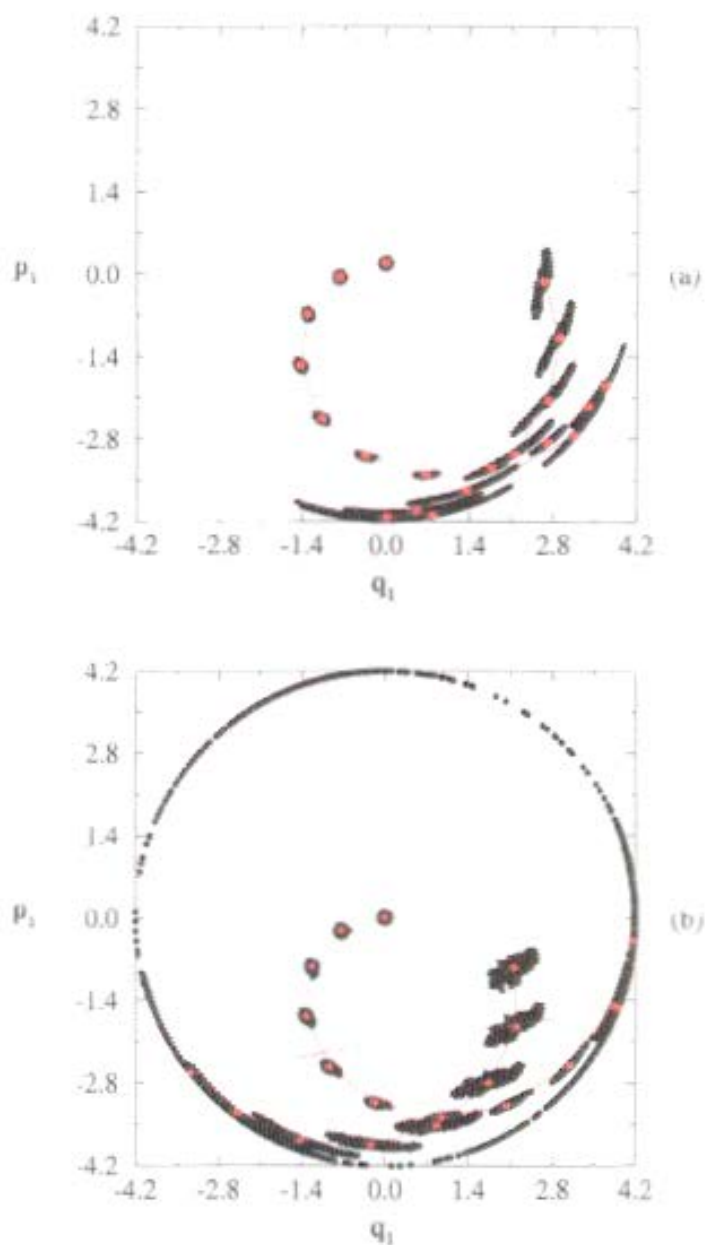


Figura 5.5. Pacotes clássicos preparados num regime integrável ($G = 0.5$ e $G^* = 0$). Em (b), o pacote foi preparado sobre a separatriz do movimento. Observe-se o esboroamento consideravelmente maior para esse caso.

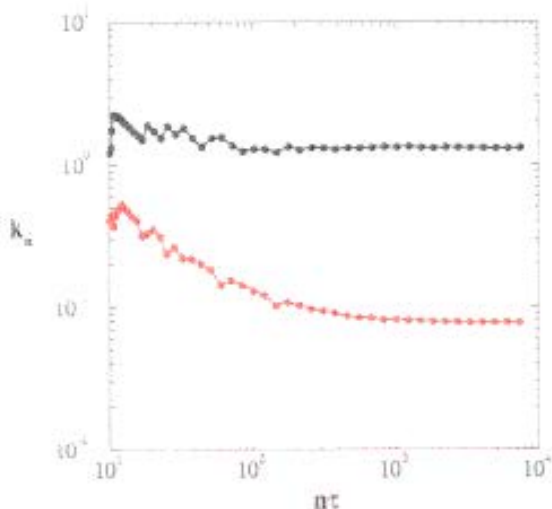


Figura 5.6. Expoentes de Lyapunov para as trajetórias do centro dos pacotes da figura 5.5. A curva de baixo corresponde à trajetória contida no pacote fora da separatriz.

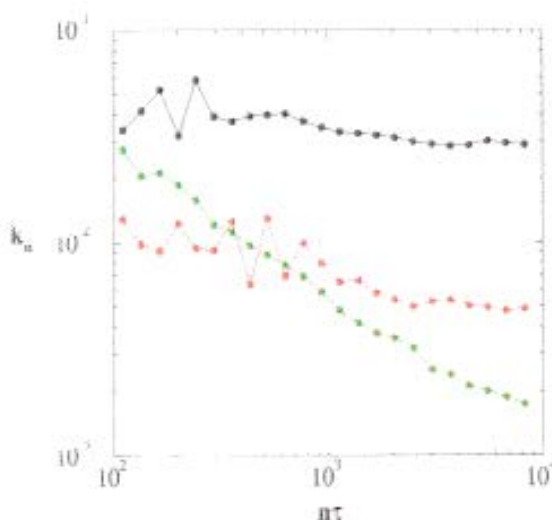


Figura 5.7. Expoentes de Lyapunov para uma trajetória regular para diversos valores de E , com $J = 4.5$ fixo. Em ordem decrescente do valor do expoente, temos $E = 8.5$, $E = 7.5$ e $E = 6.5$.

Conclusão

Neste trabalho, desenvolvemos um estudo sistemático do volume caótico associado ao espaço de fase do Hamiltoniano clássico do Maser Caótico em função dos parâmetros de acoplamento G e G' . Para tanto foi necessário o desenvolvimento de rotinas computacionais que criassem um ensemble de condições iniciais e verificassem, através do cálculo do expoente de Lyapunov, quantas destas eram caóticas. Além disso, contamos com as seções de Poincaré que trataram de dar a palavra final em casos de dúvidas a respeito da condição dinâmica de determinadas trajetórias. Com estas ferramentas, realizou-se o estudo sistemático com G e G' assumindo valores discretos dentro do intervalo $[0, 1]$.

Em última análise, o método utilizado para se classificar os elementos do ensemble de trajetórias nos pareceu bastante adequado apesar dos inconvenientes causados pelo inesperado efeito de borda. De fato, em qualquer regime sempre foi possível identificar a condição dinâmica da trajetória, seja através dos expoentes de Lyapunov, seja através das seções de Poincaré. Talvez o único inconveniente seja o tempo de computação necessário para se obter tais resultados. Aliás, deve se destacar a grande utilidade do método utilizado para o cálculo do expoente de Lyapunov, o qual foi o primeiro a detetar a presença do efeito causado pela limitação do espaço de fase de spin.

Quanto aos valores obtidos no cálculo do volume caótico, devemos nos lembrar de citar o número médio de elementos utilizados nos ensembles de trajetórias. De fato, como já discutimos, o fato de não podermos monitorar um número infinitamente grande de trajetórias, nos impede de calcular o valor exato do expoente de Lyapunov. No entanto, a escala escolhida para se representar o volume caótico, procura levar em consideração esse possível "erro". Assim, consideramos que os valores obtidos são confiáveis e bem representativos da dinâmica do sistema para um ensemble médio de 100 trajetórias. Lembremo-nos ainda de que esse número foi sugerido por simulações

que mostraram a convergência do valor de Σ em diversos regimes.

Outro resultado interessante obtido nesse trabalho é aquele que mostra relação linear entre o expoente de Lyapunov e um dos parâmetros de interação G' . Esse resultado mostra que, aumentando o valor de G' , provocamos um aumento não só da porção do espaço de fase que contém caos mas também da razão média de divergência entre trajetórias. Apesar da dependência do expoente de Lyapunov com os parâmetros d e τ , a relação entre λ e G' se mostrou linear mesmo quando tais parâmetros foram alterados.

Talvez a grande contribuição do presente trabalho seja referente àquilo que chamamos de efeito de borda. No estudo da evolução da Hamiltoniana quântica até o análogo clássico, foi feita uma mudança de topologia que permite evidenciar o efeito de borda. A transformação de um ponto (pólo norte) em círculo durante o processo de mudança de coordenadas, fez com que este último se tornasse uma região de incremento de velocidades no espaço de fase do spin (variáveis q_1 e p_1), fazendo com que duas trajetórias inicialmente próximas se afastem muito rapidamente. Esse efeito faz com que o expoente de Lyapunov reconheça trajetórias regulares como caóticas. De fato, esse efeito foi vislumbrado de três formas:

- via expoentes de Lyapunov: os expoentes forneceram valores positivos para condições iniciais escolhidas dentro de um regime puramente integrável e, portanto, atribuíram a trajetórias regulares, um comportamento que é o usual de trajetórias caóticas.
- via equações de movimento: pode-se notar claramente a presença da raiz quadrada no denominador das equações para $\dot{q}_1$ e $\dot{p}_1$, o que torna a borda uma região "proibida". Além disso, a figura 4.5 evidencia os picos nas evoluções temporais das derivadas dessas variáveis, o que indica o comportamento típico exigido pela mudança de topologia do sistema.
- via pacote clássico: os pacotes clássicos formados por um ensemble de condições iniciais agrupadas em forma de um volume infinitesimal, também são indicadores do efeito de borda. Pode-se notar, observando-se a evolução temporal desses objetos, que o volume inicial sofre sensível deformação à medida que se aproxima da borda do sistema.

Destaque especial também é merecido pela separatriz do movimento. No estudo realizado, pode-se notar claramente o forte esboroamento causado sobre o pacote de trajetórias quando este é preparado sobre a separatriz. Nota-se que a separatriz parece "usar" a borda como agente responsável pela deformação do pacote, pois como mostram as figuras, o esboroamento só ocorre próximo da borda do sistema. Desta forma, a separatriz do movi-

mento também passa a merecer atenção especial em quaisquer sistemas, pois pode provocar afastamento exponencial entre trajetórias vizinhas mesmo se tratando de um regime integrável. Extrapolando o raciocínio, poderíamos pensar na hipótese de o próprio sistema do pêndulo simples apresentar afastamento exponencial (com expoente pequeno mas positivo) entre trajetórias próximas, separadas pela separatriz⁴. Apesar do efeito de borda ter se mostrado uma propriedade típica de um sistema contendo uma limitação em um de seus graus de liberdade, a separatriz do movimento deve exercer um efeito semelhante independentemente. Assim, de fato, pode ser ilustrativo um teste com um pacote clássico nas vizinhanças da separatriz de um sistema simples como o do pêndulo.

Recentemente, estamos utilizando os pacotes clássicos juntamente com a idéia do efeito de borda para tentar explicar efeitos observados em grandes quânticas relacionadas à decoerência quântica, computadas em regimes semiclássicos. Já foram feitos alguns avanços e a idéia parece ser promissora. Com isso, além da possibilidade de explicação de efeitos desconhecidos classicamente, a observação dessa propriedade típica do sistema do Maser Caótico, a qual chamamos de *efeito de borda*, pode ser utilizada para explicação de algumas manifestações quânticas, a fim de estabelecer algumas relações entre os mundos clássico e quântico e, eventualmente, dar alguma contribuição ao caos quântico.

⁴Nota: M. T. Cunha, em comunicação privada.

Bibliografia

- [1] H. Poincaré. "Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Dover publications inc., New York, 1957 (3 vols., Gauthier - Villars, Paris, 1899).
- [2] A. M. O. de Almeida, "Sistemas Hamiltonianos - Caos e Quantização". Editora da UNICAMP, Campinas (1995).
- [3] A. J. Lichtenberg e M. A. Lieberman, "Regular and Chaotic Dynamics - Applied Mathematical Sciences", Springer-Verlag, New York (1992).
- [4] M. C. Gutzwiller, "Chaos in Classical and Quantum Mechanics", Springer-Verlag, New York (1990).
- [5] H. Goldstein, "Classical Mechanics", A-W Publishing Company, California (1980).
- [6] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J. M. Raymond e N. Zagury, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990), 976; M. Brune, S. Haroche, J. M. Raymond, L. Davidovich and N. Zagury, *Phys. Rev. A* **45** (1992), 5193; V. Burek, H. Moya-Cessa, P. L. Knight e S. J. D Phoenix, *Phys. Rev. A* **45** (1992), 8190; S. Haroche e J. P. Raimond, *Coherence and Quantum Optics VII*, editado por J. H. Eberly, L. Mandel e E. Wolf (Plenum Press, New York, 1996), p. 83; L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raymond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996), 4887.
- [7] P. W. Milonni, J. R. Ackerhalt e H. W. Galbraith, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983), 966; P. W. Milonni, M. L. Shih e J. R.

Ackerhalt, *Chaos in Laser-Matter Interactions*. World Scientific Lecture Notes in Physics Vol. 6 (World Scientific, Singapore, 1987).

- [8] D. C. Meredith, S. E. Koonin e M. R. Zirnbauer, *Phys. Rev. A* **37** (1988), 3499-3513.
- [9] M. O. Terra, "Efeitos de Temperatura Finita nas Versões Integrável e Não-Integrável do Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick", tese de Doutorado, Instituto de Física, USP, 1996; M. O. Terra, M. C. Nemes, C. da Providência e J. da Providência, *Ann. Phys. (N.Y.)* **262** (1998), 1.
- [10] Marcus A. M. de Aguiar, "Caos em Sistemas Clássicos Conservativos", *Revista Brasileira de Ensino de Física* **16** (1994), 1-4.
- [11] M. Tavis e F. W. Cummings, *Phys. Rev.* **170** (1970), 379.
- [12] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93** (1954), 99.
- [13] H. J. Lipkin, N. Meshkov e A. J. Glick, *Nuclear Physics* **62** (1965), (I) 188.
- [14] A. P. S. de Moura, "Efeito dos Termos Contra-Girantes no Modelo de Jaynes-Cummings", tese de Mestrado, Instituto de Física "Gleb Wataghin", UNICAMP, 1997.
- [15] D. Jonathan, "Estados Pré-Correlacionados e Análise de Colapsos e Resurgimentos no Modelo de Jaynes Cummings", tese de Mestrado, Instituto de Física "Gleb Wataghin", UNICAMP, 1997.
- [16] M. A. M. de Aguiar, K. Furuya, C. H. Lewenkopf e M. C. Nemes, *Ann. Phys. (N.Y.)* **216** (1992), 291-312.
- [17] K. Hepp e E. H. Lieb, *Ann. Phys. (N.Y.)* **93** (1954), 99.
- [18] H. L. Guidorizzi, "Um Curso de Cálculo II", LTC, Rio de Janeiro (1986).

- [19] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling e B. P. Flannery, "Numerical Recipes", Cambridge University Press (1992).
- [20] G. Benettin, L. Galgani e J. M. Strelcyn, *Phys. Rev. A* **14** (6) (1976), 2338.
- [21] M. A. M. de Aguiar, K. Furuya e M. C. Nemes, *Quantum Optics* **3** (1991), 305.
- [22] C. H. Lewenkopf, M. C. Nemes, V. Marvulle, M. Pato e W. F. Wreszinski, *Phys. Lett. A* **155** (1991), 113.
- [23] J. N. Maki, M. C. Nemes e M. P. Pato, *Opt. Comm.* **72** (1989), 113.
- [24] R. Graham e M. Höhnertbach, *Z. Phys. B* **57** (1984), 233; idem in *Quantum Measurements and Chaos*, editado por E. R. Pike e S. Sakar, NATO Advanced Study Institute, Series B, Vol. 161, (Plenum, New York, 1987), p. 147; M. Kús, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985), 1343.
- [25] W. H. Zurek e J. P. Paz, "Quantum chaos: a decoherent definition", *Physica D* **83** (1995), 300-308.
- [26] K. Furuya, M. C. Nemes e G. Q. Pellegrino, "Quantum Dynamical Manifestation of Chaotic Behavior in the Process of Entanglement", *Phys. Rev. Lett.* **80** (25) (1998), 5524.
- [27] R. M. Angelo, K. Furuya, G. Q. Pellegrino e M. C. Nemes: *preprint*.

Apêndice A

Estimativa de q_2 máximo

Nesse apêndice, serão apresentados os cálculos realizados para determinação da quantidade $q_{2\pm}(q_1, p_1, p_2)$ definida no capítulo 3 através das equações (3.3) e (3.4). Lembremo-nos que o objetivo é maximizar $|b(q_1, p_1)|$ e minimizar $c(q_1, p_1, p_2)$ separadamente e, então, proceder o cálculo de $q_{2máx}$.

A.1 Máximos e mínimos para função de duas variáveis reais

Teorema 1: Seja (x_0, y_0) um ponto interior ao domínio (D_f) de f e suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existam. Nestas condições, uma *condição necessária* para que (x_0, y_0) seja um extremante local de f é que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Definição 1: Dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto crítico* ou *estacionário* de f se (x_0, y_0) for interior a D_f e se $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Definição 2: Seja $f(x, y)$ de classe C^2 . Denomina-se *hessiano* de f a função dada por:

$$\mathcal{H}_1(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Teorema 2: Sejam $f(x, y)$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior a D_f . Uma *condição necessária* para que (x_0, y_0) seja ponto de máximo local de f é que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f e, além disso, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$.

Teorema 3: Sejam $f(x, y)$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior a D_f . Se (x_0, y_0) é ponto crítico de f , então:

- (a) se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $\mathcal{H}_1 > 0$, (x_0, y_0) será *ponto de mínimo local* de f .
- (b) se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $\mathcal{H}_1 > 0$, (x_0, y_0) será *ponto de máximo local* de f .
- (c) se $\mathcal{H}_1 < 0$, (x_0, y_0) não será extremante local. Nesse caso, (x_0, y_0) será *ponto de sela*.
- (d) se $\mathcal{H}_1 = 0$, nada se pode afirmar.

Obs.: Este teorema constitui uma *condição suficiente* para que um ponto crítico seja extremante local de f .

Utilizando esses teoremas podemos encontrar os pontos de máximo de $|b(q_1, p_1)|$. O primeiro passo é encontrar os pontos críticos da função estudada, o que é feito realizando-se o cálculo de $\nabla b(q_1, p_1) = (0, 0)$. Assim, obtém-se os seguintes pontos críticos para b :

$$(q_1, p_1)_c = \begin{cases} (-\sqrt{2J}, 0) \\ (\sqrt{2J}, 0) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Calculando-se o determinante hessiano para cada um desses pontos críticos, obtemos, em ambos os casos:

$$\mathcal{H}_1(q_1, p_1)_c = 4 \frac{G_-^2}{J} \quad (\text{A.3})$$

valor que descarta a possibilidade de usarmos $G_- = 0$ ou, equivalentemente, os pontos pertencentes à reta $G = G'$. A análise das demais condições

necessárias e suficientes, nos indicam imediatamente que cada um dos pontos críticos será de máximo ou de mínimo dependendo do sinal de G_- . Assim, obtém-se o máximo valor possível para b mediante

$$\boxed{|b|_{\max} = 2G_- \sqrt{J}} \quad (A.4)$$

com $\begin{cases} 0 < |G_-| \leq 1 \\ 0 \leq G_+ \leq 2 \end{cases}$

A.2 Máximos e mínimos para função de três variáveis reais

Teorema 4: Seja (x_0, y_0, z_0) um ponto interior ao domínio (D_f) de f e suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ existam. Nestas condições, uma *condição necessária* para que (x_0, y_0, z_0) seja um extremante local de f é que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Definição 3: Dizemos que (x_0, y_0, z_0) é um *ponto crítico* ou *estacionário* de f se (x_0, y_0, z_0) for interior a D_f e se $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

Teorema 5: Seja $f(x, y, z)$ de classe C^2 e seja (x_0, y_0, z_0) um ponto interior de D_f . Suponhamos que (x_0, y_0, z_0) seja ponto crítico de f . Sejam ainda os determinantes hessianos $\mathcal{H}(x, y, z)$ e $\mathcal{H}_1(x, y, z)$:

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad (A.5)$$

Então:

(a) se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) > 0$, $\mathcal{H}_1 > 0$ e $\mathcal{H} > 0$, (x_0, y_0, z_0) será *ponto de mínimo local* de f .

(b) se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) < 0$, $\mathcal{H}_1 > 0$ e $\mathcal{H} < 0$, (x_0, y_0, z_0) será ponto de máximo local de f .

Teorema 6: Sejam $f(x, y, z)$ de classe C^2 e (x_0, y_0, z_0) um ponto interior a D_f . Suponhamos que (x_0, y_0, z_0) seja ponto crítico de f . Então:

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$ é uma condição necessária para o ponto crítico (x_0, y_0, z_0) ser ponto de mínimo local de f .

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$ é uma condição necessária para o ponto crítico (x_0, y_0, z_0) ser ponto de máximo local de f .

Agora repetimos os mesmos passos para o cálculo do valor mínimo de c . Em primeiro lugar, são obtidos os pontos críticos calculando-se $\nabla c(q_1, p_1, p_2)$:

$$(q_1, p_1, p_2)_c = \begin{cases} (0, 0, 0) \\ (0, -\frac{\sqrt{2J(G_+^2 - 1)}}{G_+}, \frac{\sqrt{J(G_-^4 - 1)}}{G_-}) \\ (0, \frac{\sqrt{2J(G_+^2 - 1)}}{G_+}, -\frac{\sqrt{J(G_+^4 - 1)}}{G_+}) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Calculando-se os determinantes hessianos para cada um desses pontos críticos, obtemos, respectivamente:

$$\mathcal{H}(q_1, p_1, p_2)_c = \begin{cases} -8(G_-^2 - 1) \\ 8(G_+^4 - 1) \\ 8(G_+^4 - 1) \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1(q_1, p_1, p_2)_c = \begin{cases} 4 \\ 4G_-^4 \\ 4G_-^4 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Observe-se imediatamente que $\mathcal{H}_1$ é sempre positivo, como se espera para pontos de máximo e de mínimo. Por outro lado, $\mathcal{H}$ será positivo ou negativo dependendo do valor de G_- e do ponto crítico em questão. Note-se que, se $G_- < 1$, o ponto de mínimo de c será o primeiro dos pontos críticos: $(0, 0, 0)$. Por outro lado, se $G_+ > 1$, então os outros dois pontos críticos serão pontos de mínimo de c . Nessas condições, temos os seguintes valores para o mínimo de c :

$$\boxed{c_{min} = -2(E + J)} \quad \text{com} \quad \begin{cases} -1 \leq |G_-| \leq 1 \\ 0 \leq G_- < 1 \end{cases}$$

e

(A.8)

$$\boxed{c_{min} = -2E - \frac{J(1 + G_-^4)}{G_-^2}} \quad \text{com} \quad \begin{cases} -1 \leq |G_-| \leq 1 \\ 1 < G_- \leq 2 \end{cases}$$

A.3 Superestimando q_2

Como pode ser verificado nos cálculos acima, a maximização de $|b|$ e a minimização de c não ocorrem para mesmos valores das variáveis (q_1, p_1, p_2) , ou seja, $|b|_{m\acute{a}x}$ e c_{min} não podem coincidir em nenhum instante da evolução dinâmica do sistema físico em estudo. Assim, o cálculo do valor máximo de q_2 consiste em uma superestimativa de seu valor máximo. Isso é feito substituindo as constantes encontradas acima (onde utilizamos $\varepsilon = \omega_0 = 1$) na raiz da equação do segundo grau encontrada no capítulo 3 (eq. 3.4):

$$|q_{2m\acute{a}x}| = \frac{|b|_{m\acute{a}x} + \sqrt{|b|_{m\acute{a}x}^2 - 4c_{min}}}{2} \quad (\text{A.9})$$

Utilizando os valores encontrados acima e respeitando as condições encontradas para os parâmetros de acoplamento e seus limites¹, obtemos os resultados procurados:

$$\boxed{|q_{2m\acute{a}x}| = G_- \sqrt{J} + \sqrt{2(E + J) + JG_-^2}}$$

(A.10)

com $\begin{cases} 0 < |G_-| \leq 1 \\ 0 \leq G_+ < 1 \end{cases}$

e

¹O intervalo $[0, 1]$ para de G e G' foi definido na seção 3.5.

$$|q_{2m\acute{a}x}| = G_- \sqrt{J} + \sqrt{2E + J \left(G_-^2 + G_+^2 + \frac{1}{G_+^2} \right)} \quad (\text{A.11})$$

$$\text{com} \begin{cases} 0 < |G_-| \leq 1 \\ 1 < G_+ \leq 2 \end{cases}$$

onde podemos notar que est\~ao proibidos os valores $G_- = 0$ (ou $G = G'$, equivalentemente) e G_- (ou $G = -G' + 1$).

Lista de Figuras

3.1	Projeções da saída do gerador aleatório com 10000 condições iniciais. Cálculo realizado com $G = 0.5$, $G' = 0.2$, $E = 8.5$ e $J = 4.5$. Observe-se a topologia cilíndrica do espaço de fase.	27
3.2	Esquema do método de reescalonamento [20] para o cálculo do expoente de Lyapunov.	29
4.1	Expoentes de Lyapunov para duas condições iniciais com $G = 0.5$, $G' = 0.2$, $E = 8.5$ e $J = 4.5$. Em (a), utilizamos $d = 0.16$ e variamos o valor de τ e em (b) fixamos $\tau = 0.08$ e variamos d . As curvas vermelha e preta se referem à condição inicial caótica e as curvas azul e verde à condição inicial regular.	35
4.2	Expoentes de Lyapunov para 12 condições iniciais com $G = G' = 0$, $E = 8.5$ e $J = 4.5$. Observe-se o comportamento comparável ao da curva $y = 1/x$, que indica que o expoente se manifesta com o inverso do tempo.	37
4.3	(a) Expoentes de Lyapunov para 6 condições iniciais escolhidas sobre a seção ($q_2 = 0$) com $G = 0.8$, $G' = 0$, $E = 8.5$, $J = 4.5$, $d = 1.6$ e $\tau = 0.08$ e (b) seção de Poincaré correspondente para as respectivas trajetórias. A borda do espaço de fase também é apresentada.	38
4.4	(a) Expoente de Lyapunov para uma condição inicial regular em um regime integrável ($G' = 0$) e (b) a respectiva seção de Poincaré mostrando um padrão esborado no lugar de um toro. Efeitos da imprecisão do integrador numérico.	39
4.5	(a) Série temporal de dp_1/dt para quatro condições iniciais regulares próximas da borda do espaço de fase e (b) respectiva seção de Poincaré.	41

4.6	(a) Expoentes de Lyapunov para duas trajetórias caóticas (verde e azul) e duas trajetórias regulares em um regime misto ($G = 0.5$ e $G' = 0.2$) para $d = 0.1$ e $\tau = 0.08$ e (b) respectiva seção de Poincaré. Os valores de $\Delta\lambda$ foram calculados nos instantes 10^4 e 10^6 .	42
4.7	(a) Expoentes de Lyapunov e (b) seção de Poincaré para um regime misto com $G = 0.6$, $G' = 0.3$, $E = 8.5$, $J = 4.5$, $d = 0.1$ e $\tau = 0.08$. A curva verde dos expoentes, localizada no centro, se refere a um pequenino toro localizado na parte inferior da seção (imperceptível na seção).	45
4.8	Volume caótico em função do número total N de elementos do ensemble, com $E = 8.5$ e $J = 4.5$, para três regimes distintos: (a) $G = 0.7$ e $G' = 0.1$, (b) $G = 0.3$ e $G' = 0.3$ e (c) $G = 0.5$ e $G' = 0.2$. Note-se a convergência de Σ para valores relativamente pequenos de elementos.	46
4.9	Volume caótico para o Modelo do Maser Caótico Clássico em função dos parâmetros de acoplamento G e G' .	47
4.10	Expoente de Lyapunov para trajetórias caóticas em função do parâmetro de acoplamento G' , com $G = 0.5$. Foram utilizados $d = 0.1$ e $\tau = 0.08$. Observe-se os pontos em destaque.	50
4.11	Seção de Poincaré para $G' = 0.05$ e $G = 0.5$, evidenciando-se uma estreita região de caos na região próxima da separatriz.	51
4.12	Expoente de Lyapunov em função de G' para (a) $d = 0.1$ e $\tau = 0.08$ e (b) $d = 0.2$ e $\tau = 0.1$, com $G = 0.5$. Os coeficientes lineares são bastante parecidos.	52
5.1	Esquema geométrico da mudança de topologia do sistema. Em (a), a esfera é furada e tem seu furo alargado (b e c) até se transformar numa superfície bidimensional (d).	60
5.2	(a) Fotografias tiradas a cada $\Delta t = 0.3$, para um tempo total de evolução de $t = 7.0$. A linha sólida tem a função apenas de mostrar a sequência das fotos. Em (b), temos a projeção da trajetória no espaço $q_1 p_1$. Observe-se o aumento de velocidade perto da borda.	61
5.3	(a) Fotos tiradas com intervalos de $\Delta t = 4$, para um tempo total de evolução de $t = 50$, no caso $G = G' = 0$. A linha sólida vermelha, destaca a evolução da condição do centro do ensemble de 1000 pontos. Em (b), temos o expoente de Lyapunov, notadamente nulo.	62

5.4	(a) Fotos com intervalos de $\Delta t = 1.8$, para um tempo total de evolução de $t = 23$, no caso $G = 0.5$ e $G' = 0$ e (b) expoente de Lyapunov, positivo nesse caso.	63
5.5	Pacotes clássicos preparados num regime integrável ($G = 0.5$ e $G' = 0$). Em (b), o pacote foi preparado sobre a separatriz do movimento. Observe-se o esboroamento consideravelmente maior para esse caso.	64
5.6	Expoentes de Lyapunov para as trajetórias do centro dos pacotes da figura 5.5. A curva de baixo corresponde à trajetória contida no pacote fora da separatriz.	65
5.7	Expoentes de Lyapunov para uma trajetória regular para diversos valores de E , com $J = 4.5$ fixo. Em ordem decrescente do valor do expoente, temos $E = 8.5$, $E = 7.5$ e $E = 6.5$	65