UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Correções multipolares para a precessão de Lense-Thirring

Este exemplar corresponde a redação final da dissertação de mestrado defendida pelo aluno Marcelo Zimbres Silva aprovada pela comissão julgadora.

13/08/2008

Autor: MARCELO ZIMBRES SILVA

Orientador: PROF. DR. PATRICIO A. LETELIER SOTOMAYOR

Defesa 25/04/2008

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

Silva, Marcelo Zimbres
Si38c Correções multipolares para a precessão de *Lense-Thirring* / Marcelo Zimbres Silva. -- Campinas, SP : [s.n.], 2008.

Orientador: Patricio Anibal Letelier Sotomayor.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”.

1 1. Relatividade geral (Física). 2. Momentos multipolares.
2 3. Lense-Thirring, Efeito. I. Sotomayor, Patricio Anibal Letelier.
3 II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física “Gleb
4 Wataghin”. III. Título.

5 (vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Multipolar corrections for the Lense-Thirring precession
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. General relativity (Physics)
  2. Multipolar moments
  3. Lense-Thirring effect
- **Área de concentração:** Relatividade e Gravitação
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca examinadora:**
  Prof. Patricio Anibal Letelier Sotomayor
  Prof. Orlando Luis Goulart Peresl
  Prof. George Emanuel Avraam Matsas
- **Data da defesa:** 27/04/2008
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **MARCELO ZIMBRES SILVA – RA 015308** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 25 / 04 / 2008.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Patrício Anibal Letelier Sotomayor (Orientador do Candidato)
IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas
IFT/UNESP

Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres
DRCC/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, João Francisco da Silva e Eliana Zimbres Silva e a minha avó Ivone Forghieri Zimbres pelo apoio que sempre me deram.

Agradeço a minha tia Edit, dentre outras coisas, por sua disposição em me dar carona para Campinas.

Agradeço, ao Prof. Patricio A. Letelier a orientação séria, completa e de qualidade inquestionável.

Finalmente, agradeço o apoio financeiro da CAPES.

Dedico este trabalho ao meu pai João Francisco da Silva

Resumo

Para estudar de forma completa a precessão de um giroscópio em órbita, revisamos a dedução das equações de Papapetrou, em particular, para mostrar que em uma aproximação de partícula teste essas equações implicam o transporte de Fermi-Walker do spin. Para estudar as correções devidas a oblaticidade de um corpo central na precessão do spin, fizemos uma revisão da teoria dos multipolos relativísticos focados nas definições de Geroch-Hansen e de Thorne. Usamos todos esses conceitos para estimar as correções multipolares na precessão de Lense-Thirring, em especial, encontramos uma fórmula exata para a precessão em termos de dois escalares, as partes real e imaginária do potencial de Ernst. Em uma aproximação linear para o campo gravitacional, escrevemos nossa fórmula em termos dos multipolos de Thorne. Para estimar essas correções usamos alguns modelos conhecidos para a métrica do planeta Terra e comparamos nossos resultados com outros trabalhos.

Abstract

To study the precession of an orbiting gyroscope we review the theory of the Papapetrou equations and show that they imply the Fermi-Walker transport law. We review also the theory of relativistic multipole moments, specifically the definitions of Geroch-Hansen and Thorne, to describe non-spherical bodies in general relativity. For stationary axially symmetric spacetimes we find a simple expression for the Lense-Thirring precession in terms of the Ernst potential. This expression is used to compute, in the weak field approximation, the major non-spherical contributions to the precession of a gyroscope orbiting the Earth. We use some known models for the earth metric to estimate the contributions and compare our results with some previously known ones.

Sumário

1

Introdução

Em 1918 Lense e Thirring [1], usando uma aproximação linear para a relatividade geral, mostraram que a rotação de um corpo também gera campo gravitacional, a "corrente" de matéria cria um campo gravitacional que arrasta referencias inerciais no sentido da rotação, efeito conhecido como efeito Lense-Thirring. Por estar relacionado a termos não diagonais da métrica, a verificação experimental desse efeito é de grande importância para o estabelecimento da relatividade geral.

Em 1960 Schiff [2] propôs um experimento onde seria possível medir esse efeito. Usando as equações de Mathisson-Papapetrou, que descrevem o movimento de uma partícula com spin, Schiff mostrou que um giroscópio em órbita em torno da Terra iria precessar e que na velocidade angular de precessão estariam incluídos os termos não diagonais da métrica que descrevem o efeito Lense-Thirring. Na época em que Schiff publicou seu artigo ainda não haviam condições experimentais para a realização do experimento, mas depois de longa colaboração entre cientistas da universidade de Stanford e a NASA foi possível em 2004 lançar o satélite *Gravity Probe B*, que tem como objetivo principal medir a precessão de Lense-Thirring e a precessão geodética [3]. O satelite, que possui um conjunto de giroscópios, foi colocado em uma órbita polar a 642km de altitude. De acordo com a teoria, o spin de um giroscópio em tal órbita irá precessar $6,606$ arcseg/ano (0,0018 graus/ano) no plano orbital, efeito conhecido como precessão geodética ou de de Sitter e 39 miliarcseg/ano (0,000011 graus/ano) perpendicular ao plano orbital, efeito conhecido como precessão de Lense-Thirring [4].

A idéia principal de todo o trabalho que vem a seguir é bem simples. Considerando a precessão de Lense-Thirring, qual é a influência da oblaticidade do planeta Terra na velocidade angular de precessão? A oblaticidade de um corpo pode ser descrita por sua estrutura multipolar, portanto para descrever essas correções seria conveniente que descrevêssemos o campo gravitacional de um corpo através de seus momentos de multipolo.

No caso de um espaço-tempo estático o conceito de corpo deformado pode ser entendido como os desvios em relação a métrica de Schwarzschild, que descreve o campo gravitacional de um corpo com simetria esférica, no caso de um espaço-tempo estacionário podemos considerar esses desvios em relação a métrica de Kerr, já que assintoticamente todas as soluções estacionárias assintoticamente planas das equações de Einstein tendem a solução de Kerr [5]. Existem várias maneiras de definir esses multipolos, as definições mais conhecidas e já bem fundamentadas matematicamente são as definicões de Thorne [6] e de Geroch [7][8] e Hansen [9].

Esse estudo parece ser de grande utilidade na interpretação das soluções exatas das equações de Einstein. Por exemplo, usando o método de Thorne ou o de Geroch e Hansen para calcular os momentos multipolares, podemos estudar as correções multipolares na precessão de Lense-Thirring mesmo no caso em que não conhecemos a solução de interior, como no caso da métrica de Kerr por exemplo.

Em geral, o tratamento da precessão do spin em relatividade geral é feito usando o transporte de Fermi-Walker, mas quase nunca é citado que essa lei de transporte é apenas uma aproximação para uma lei de transporte mais geral que chamaremos de transporte de Dixon [10]. No contexto da relatividade geral um corpo "clássico" deve ser descrito por um tensor de energia-momento, que de acordo com as equações de Einstein tem divergência nula. Partindo disso, Mathisson [11], Papapetrou [12] e posteriormente Dixon [13] deduzem as equações de movimento para um corpo extenso em relatividade geral. Somente no caso em que o spin do corpo que orbita não é muito grande (o que significa que seu quadri-momento e sua quadri-velocidade estão na mesma direção) e no caso em que a partícula pode ser considerada pontual, ou seja, podemos desprezar a interação de seus momentos multipolares com o campo, é que o transporte de Dixon se reduz ao transporte de Fermi-Walker. Por isso achamos que, para tratar o problema de forma completa, seria necessária uma revisão da teoria que descreve o movimento de um corpo extenso em relatividade geral como apresentado por Dixon [14], lembrando que essa teoria se limita ao caso em que o campo gravitacional do corpo que orbita não tem nenhuma infuência no campo total.

Para descrever matematicamente a deformação de um corpo foi necessária uma revisão da teoria dos multipolos relativísticos. O método de Geroch-Hansen para calcular os multipolos juntamente com o algorítimo de Fodor-Hoenselaers-Perjes [15] é muito poderoso pois é necessário apenas que conheçamos o potencial ξ de uma solução para que possamos calcular seus multipolos, além disso os multipolos de Geroch-Hansen diferem dos de Thorne apenas por um fator multiplicativo. A liberdade na escolha de um sistema de coordenadas em relatividade geral faz com que grande parte das soluções das equações Einstein sejam apresentadas em um sistema de coordenadas que apesar de consistentes não trazem nenhuma informação sobre a física que há por tras e que a interpretação física de nossas equações não seja um trabalho simples, por isso usamos a teoria dos multipolos de Thorne que fornece uma expanção dos coeficientes da métrica em termos dos multipolos e de coordenadas harmônicas, que são assintoticamente cartesianas.

O corpo principal desse trabalho está dividido em três partes. No Capítulo 2 fazemos uma dedução minunciosa das equações de Papapetrou e mostramos suas propriedades mais importantes. No Capitulo 3 introduzimos os multipolos relativísticos de Geroch-Hansen e de Thorne e, usando o algorítimo de Fodor-Hoenselaers-Perjes, calculamos os multipolos das métricas de Tommimatsu-Sato para $\delta = 1$ e 2. No capitulo 4, usando os conceitos apresentados anteriormente calculamos as correções multipolares na precessão de Lense-Thirring.

2

Equações de Papapetrou

2.1 Movimento em relatividade geral

Antes de entrarmos no problema do movimento propriamente dito, é interessante lembrar que em mecânica clássica as leis físicas se dividem em duas categorias, a primeira delas consiste de equações diferenciais parciais, que com as condições de contorno adequadas, determinam o campo em termos da distribuição e do movimento da matéria que o gera. A segunda delas são chamadas de leis dinâmicas e determinam o movimento da matéria em termos das forças exercidas pelos campos. A independencia das leis dinâmicas com respeito às equações de campo é uma consequência direta da linearidade dessas, já teorias de campo lineares não podem determinar o movimento de partículas interagentes.

Esses motivos levam-nos a suspeitar que em relatividade geral não é necessário introduzir separadamente uma lei dinâmica para descrever o movimento dos corpos, já que essa é uma teoria de campo não linear. De fato essa dúvida foi eliminada em 1937 num artigo de Einstein, Infeld e Hoffmann [16] sobre o problema do movimento, onde eles evitaram o uso do tensor de energia-momento e consideraram a matéria como partículas pontuais, cada uma representando uma singularidade do campo e o problema dos dois corpos foi solucionado (em aproximação) pela primeira vez, mostrando que o princípio de que os corpos se movem ao longo de geodésicas não é independente das equações de campo da gravitação mas sim uma consequência delas.

Independentemente deles, Fock [17] derivou as equações de movimento considerando, diferentemente de Einstein, a divergência nula do tensor de energia-momento, que também é uma consequência das equações de campo, e a partir daí pode obteve as equações de movimento. Seguindo o método de Fock, Papapetrou [12] deduziu as equações de movimento para uma partícula com spin. A idéia principal de Papapetrou foi considerar a estrutura multipolar do corpo, que são obtidas do tensor de energia-momento. Apesar de não ter feito uma dedução covariante, no fim do trabalho ele apresenta a forma covariante das equações. Essas equações são conhecidas como equações de Mathisson-Papapetrou, devido a alguns trabalhos pioneiros de Mathisson [11] sobre o assunto. Posteriormente Dixon [14], fazendo uso da função de mundo, obteve as equações de movimento de uma maneira covariante para qualquer aproximação desejada, ou seja, quando queremos incluir os efeitos devidos aos termos de quadrupolo, octupolo, etc.

2.2 A função de Mundo

Um bitensor é uma função de dois pontos do espaço-tempo que tem caráter tensorial em cada um desses pontos que denotaremos por x_1 e x_2 ou por x e z. Para distinguir entre índices tensoriais que se referem a x daqueles que se referem a z usaremos nesta seção $a, b, c, ...$ para x e $l, m, n, ...$ para z. Assim t^a_l é um vetor contravariante em x e um vetor covariante em z. Nas ocasiões em que precisarmos de um terceiro ponto y usaremos os índices i, j, k. A derivada covariante pode ser feita em relação a qualquer ponto e será denotada por ∇_a e ∇_l, para qualquer tensor de dois pontos a derivada covariante com respeito a x comuta com a derivada covariante com respeito a z. Para mais propriedades e aplicações dos bitensores ver [35]. O mais importante bitensor é a função de mundo que denotaremos por $\sigma(x_1, x_2)$ ou $\sigma(x, z)$ e definimos como

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \int_{u_1}^{u_2} g_{ab}(x(u)) \frac{dx^a}{du} \frac{dx^b}{du} du, \tag{2.1}$$

onde $x(u)$ é a forma paramétrica de uma geodésica que liga os pontos $x_1 = x(u_1)$ e $x_2 = x(u_2)$. Se calcularmos a variação da integral acima com uma variação do tipo $x^a \to x^a + \delta x^a$ para a variável x encontramos

$$\delta\sigma = (u_1 - u_2)[g_{ab}\dot{x}^a \delta x^b]_{u_2}^{u_1} - (u_1 - u_2)\int_{u_2}^{u_1} \frac{D\dot{x}_a}{Du}\delta x^a, \tag{2.2}$$

onde também variamos os pontos finais. Como sabemos, a segunda parte dessa equação se anula pelo fato de $x^a(u)$ ser uma geodésica e portanto a forma final da variação é

$$\delta\sigma = (u_1 - u_2)[g_{ab}\dot{x}^a \delta x^b]_{u_2}^{u_1}. \tag{2.3}$$

Por outro lado, a variação da função de mundo também é dada por

$$\delta\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial x_1^a}\delta x_1^a + \frac{\partial\sigma}{\partial x_2^a} x_2^a, \tag{2.4}$$

e portanto, comparando as duas expressões para a variação da função de mundo obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial x_1^a} &= -(u_1 - u_2) g_{ab}(x_1)\dot{x}^b(u_1), \\ \frac{\partial\sigma}{\partial x_2^a} &= (u_1 - u_2) g_{ab}(x_2)\dot{x}^b(u_2). \end{aligned} \tag{2.5}$$

No caso particular em que tomamos $u_1 = 0$ e $u_2 = u$, denotamos $x_1 = z$ e $x_2 = x$ e a relação (2.5) fica

$$\sigma^l = -u\dot{x}^l \;\text{ e }\; \sigma^a = u\dot{x}^a. \tag{2.6}$$

Da equação acima vemos que $-\sigma^l(z,x)$ é a generalização natural de um vetor posição de x relativo a z como o definido em espaço-tempo plano. É um vetor em z que é tangente a geodésica que liga z a x e seu comprimento é o comprimento dessa geodésica. Como se sabe, o valor da integral (2.1) pode ser calculado explicitamente usando-se o fato de $x^a(u)$ ser uma geodésica. Obtemos assim

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)^2 g_{ab}(x_1)\dot{x}^a(u_1)\dot{x}^b(u_1), \tag{2.7}$$

usando (2.5) e a mudança de notação, obtemos da equação acima a importante relação

$$\begin{aligned} 2\sigma &= \sigma_a\sigma^a \\ &= \sigma_l\sigma^l, \end{aligned} \tag{2.8}$$

de onde as propriedades mais importantes de σ são deduzidas.

Derivando (2.8) ficamos com

$$\sigma^a = \sigma^a_{\ b}\sigma^b \ \text{ e } \ \sigma^l = \sigma^l_{\ a}\sigma^a, \tag{2.9}$$

então, no limite em que $x \to z$, temos

$$\lim_{x\to z} \sigma^a_{\ b} = \delta^a_{\ b} \ \text{ e } \ \lim_{x\to z} \sigma^l_{\ a} = -\delta^l_{\ a}. \tag{2.10}$$

Para se determinar um vetor de Killing em qualquer ponto do espaço-tempo é preciso apenas conhecer os valores de ξ^a e $2\nabla_a\xi_b = \nabla_{[a}\xi_{b]}$ num ponto p (ver apêndice A). Com o uso da função de mundo e de suas propriedades apresentadas acima podemos obter a forma explícita dessa solução.

Consideremos uma família de geodésicas $x^a(u,v)$ que dependam de dois parâmetros, onde u é o parâmetro afim ao longo da geodésica e v um parâmetro usado para numerar as geodésicas. Denotaremos também

$$\dot{x}^a = \frac{\partial x^a}{\partial u} \ \text{ e } \ \eta^a = \frac{\partial x^a}{\partial v}. \tag{2.11}$$

Usando a equação (2.6) obtemos

$$\sigma^l(z(v), x(u,v)) = -u\dot{x}^l(0,v), \tag{2.12}$$

onde $z(v) = x(0,v)$, de acordo com a convenção adotada σ^l denota a derivada de σ no ponto $z(v)$. Tomando a derivada total de (2.12) com respeito a v temos

$$\sigma^l_{\ m}\eta^m + \sigma^l_{\ a}\eta^a = -u\frac{D\dot{x}^l}{Du}. \tag{2.13}$$

Além disso, da equação (2.11), sabemos que

$$\frac{D\dot{x}^l}{Dv} = \frac{D\dot{x}^l}{Du}. \tag{2.14}$$

Denotando H^a_l como a matriz inversa de $-\sigma^l_{\ a}$, tal que $H^a_l(-\sigma^l_{\ a}) = \delta^a_{\ a}$, e definindo

$$K^a_l = H^a_m\sigma^m_l, \tag{2.15}$$

encontramos a solução desejada a partir de (2.13) e (2.14), ou seja

$$\eta^a = K^a{}_l \eta^l + uH^a{}_l \frac{D\eta^l}{Du}. \tag{2.16}$$

Assumimos agora que η^a é um vetor de Killing, e o denotaremos por ξ^a. Usando a equação (2.12) obtemos

$$\xi_a = K_a{}^l \xi_l + H_a{}^l \sigma^r \nabla_l \xi_r, \tag{2.17}$$

para $x \to z$ temos os limites

$$\begin{aligned} \lim_{x \to z} H^a_l &= \lim_{x \to z} K^a_l \\ &= \delta^a_l. \end{aligned} \tag{2.18}$$

E o resultado obtido acima também pode ser obtido considerando que as órbitas dos vetores de Killing são simetrias do espaço-tempo e portanto, o campo ξ^a satisfaz

$$L_\xi \sigma^l(z, x) = 0, \tag{2.19}$$

onde L_ξ denota a derivada de Lie com respeito a ξ, ou explicitamente

$$\xi^r \sigma^l{}_r + \xi^a \sigma^l{}_a - \sigma^r \nabla_r \xi^l = 0. \tag{2.20}$$

Usando H^a_l e K^a_l podemos resolver essa equação para ξ^a obtendo (2.17).

2.3 Dedução das equações de movimento

Começamos com as definições de momento e momento angular. Consideremos um corpo num espaço-tempo que tenha uma simetria descrita por um vetor de Killing ξ^a. Usando a equação fundamental para os vetores de Killing

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0, \tag{2.21}$$

e o fato de que a divergência do tensor de energia-momento T^{ab} se anula

$$\nabla_a T^{ab} = 0, \tag{2.22}$$

podemos mostrar que

$$\nabla_a(T^{ab}\xi_b) \;=\; 0. \tag{2.23}$$

Denotando $d\Sigma_a$ um elemento de área de uma hipersuperfície Σ, segue-se então que a integral

$$E(\Sigma) \;=\; \int_\Sigma T^{ab}\xi_a d\Sigma_b \tag{2.24}$$

é independente da hipersuperfície Σ escolhida. Como já mencionado um campo vetorial de Killing fica completamente determinado especificando os valores de ξ^a e de $\nabla_a\xi_b$ num ponto z qualquer, denotamos esses valores por

$$A_l = \xi_l(z) \quad \text{e} \quad B_{lm} = \nabla_l\xi_m, \tag{2.25}$$

usando (2.17) em (2.24), a dependência de $E(\Sigma)$ em relação a A^l e B_{lm} pode ser fatorada. Definimos então as quantidades

$$p^l(z,\Sigma) \;=\; \int_\Sigma K_a{}^l T^{ab} d\Sigma_b, \tag{2.26}$$

$$S^{lm}(z,\Sigma) \;=\; 2\int_\Sigma H_a{}^{[l}\sigma^a T^{m]b} d\Sigma_b, \tag{2.27}$$

e então (2.24) pode ser escrita como

$$E(\Sigma) \;=\; A_l p^l(z,\Sigma) + \frac{1}{2}B_{lm}S^{lm}(z,\Sigma). \tag{2.28}$$

Portanto, sempre que temos um espaço-tempo com uma simetria descrita por um vetor de Killing, a equação (2.28) nos dá uma combinação de p^l e S^{lm} para um ponto z fixo, mas arbitrário, que é independente da hipersuperfície Σ escolhida, portanto concluímos que a quantidade E é conservada. Quando o espaço-tempo é plano e o sistema de coordenadas cartesiano, $K_a{}^l$ e $H_a{}^l$ ambos se reduzem a $\delta_a{}^l$ e as expressões (2.26) e (2.27) se reduzem às expressões para o momento e momento angular total em relatividade especial. Por causa da forte relação que existe entre a conservação do momento e do momento angular com as simetrias do espaço-tempo e a relação dada pela equação (2.28), tomaremos p^l e S^{lm} como definições para o momento e para o momento angular total de um corpo em relação a um ponto z.

Consideremos novamente a equação (2.28), podemos reescrevê-la na forma

$$E(\Sigma) = \xi_l p^l(z,\Sigma) + \frac{1}{2}\nabla_l \xi_m S^{lm}(z,\Sigma). \tag{2.29}$$

Agora consideremos que z se move ao longo de uma curva parametrizada $z(s)$, então derivando (2.29) com respeito a um parâmetro s e usando a equação (A.12), que relaciona as segundas derivadas de um vetor de Killing com o tensor de Riemann, chegamos a

$$A_l\left[\frac{Dp^l}{Ds} + \frac{1}{2}S^{mn}u^p R_{mnp}{}^{l}\right] + \frac{1}{2}B_{lm}\left[\frac{DS^{lm}}{Ds} - 2p^{[l}u^{m]}\right] = 0, \tag{2.30}$$

onde $u^l = \dot{z}^l$. Para entendermos melhor o que se passa, consideremos um espaço-tempo de curvatura constante, nesse caso os valores de ξ_a e $\nabla_a \xi_b$ podem ser arbitrários em qualquer ponto do espaço-tempo e portanto teremos

$$\frac{Dp^l}{Ds} + \frac{1}{2}S^{mn}u^p R_{mnp}{}^{l} = 0, \tag{2.31}$$

$$\frac{DS^{lm}}{Ds} - 2p^{[l}u^{m]} = 0. \tag{2.32}$$

Num espaço-tempo de curvatura constante, as contribuições devida a força e torque originárias da interação entre a curvatura e os momentos multipolares do corpo são nulas, portanto tomamos as equações (2.31) e (2.32) como as equações de movimentos e de spin de uma partícula livre, ou seja, quando as contribuições para a força e o torque devidas aos momentos multipolares(quadrupolo, etc) do corpo podem ser desprezadas. Denotando essa força e esse torque por F^l e G^{lm}, respectivamente teremos

$$\frac{Dp^l}{Ds} + \frac{1}{2}S^{mn}u^p R_{mnp}{}^{l} = F^l, \tag{2.33}$$

$$\frac{DS^{lm}}{Ds} - 2p^{[l}u^{m]} = G^{lm}, \tag{2.34}$$

no caso em que os momentos não podem ser desprezados.

A forma das equações (2.31) e (2.32) é devida a Dixon [13], a forma apresentada por Papapetrou [12] para essas equações é um pouco diferente

$$\frac{D}{Ds}\left(mu^a + u_b\frac{DS^{ab}}{Ds}\right) + \frac{1}{2}R^a_{bcd}u^b S^{cd} = 0,$$

$$\frac{DS^{ab}}{Ds} + u^a u_c \frac{DS^{bc}}{Ds} - u^b u_c \frac{DS^{ac}}{Ds} = 0,$$

mas a partir destas, podemos chegar na forma apresentada por Dixon identificando

$$p^a = mu^a + u_b \frac{DS^{ab}}{Ds}.$$

Ainda não é possível achar uma solução única para as equações acima pois temos mais incógnitas do que equações. Temos 4 incógnitas de p^a mais 4 de u^a e mais seis de S^{ab}, somando 14 incógnitas e 10 equações. O que ainda está faltando ser definido é o ponto z dentro do corpo em relação ao qual tomaremos os multipolos. Muitas escolhas já foram propostas. Em [18], Corinaldesi e Papapetrou usam a condição $S^{\mu 0} = 0$ no sistema em que o corpo central está em repouso, Pirani [19] posteriormente propõe a condição covariante $u_a S^{ab} = 0$, Micoulaut [20] usando a condição de Pirani encontra resultados diferentes dos de Corinaldesi e Papapetrou. O problema com a condição de Pirani é que ela permite movimentos não físicos, ver por exemplo Weyssenhoff [21]. Dixon [13] sugere a condição $p_l S^{lm} = 0$. Para entendermos melhor a interpretação físicas dessas condições, notamos que no referencial em que o corpo tem quadri-velocidade zero teremos $S^{a4} = 0$ e o mesmo ocorre no referencial em que o 3-momento p^μ se anula. Usando a definição de momento angular da equação (2.27) e tomando a métrica de Minkowski vemos que

$$z^a \int T^{00} dv = \int x^a T^{00} dv,$$

e portanto concluímos que z é a generalização natural de um centro de massa newtoniano para um espaço-tempo curvo. Sendo assim a interpretação física para a condição de Pirani é a de que z^a é o centro de massa no referencial em que a 3-velocidade u^μ se anula e a interpretação física da condição de Dixon é a de que z^a é o centro de massa no referencial em que o momento p^μ se anula. Portanto, usando a condição de Pirani, um observador só estará em repouso em relação ao centro de massa do corpo se também tiver $u^\mu = 0$ e o análogo para a condição de Dixon.

O problema com a condição de Pirani é que não determina o movimento de forma única e permite movimentos não físicos para a partícula. Mostraremos essa característica da condição de Pirani usando a métrica de Minkowski para simplificar. Nesse caso as equações (2.31) e (2.32) se reduzem a

- $\dot{p}^a = 0$ e $\dot{S}^{ab} = p^a u^b - p^b u^a$.

Em um referencial em que $p^\mu = 0$

- $\dot{p}^a = 0 \rightarrow \dot{M} = 0$,
- $\dot{S}^{ab} = p^a u^b - p^b u^a \rightarrow \dot{S}^{\mu\nu} = 0$ e $S^{\mu 4} = 0$,

usando

$$p^a = mu^a + u_b \frac{DS^{ab}}{Ds}$$

chegamos, em forma vetorial, a

$$M\mathbf{v} + \mathbf{a} \times \mathbf{S} = 0,$$

comparando a equação acima com a relação entre a velocidade e a velocidade angular no caso de um movimento circular, $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, concluímos que

- Temos um movimento circular.
- Velocidade angular $\omega = M/S$. Usando $M = m_e$ e $S = h/4\pi$, esse ω tem o mesmo valor que o movimento análogo do elétron de Dirac, do Zitterbewegung.

Portanto adotaremos a condição de Dixon daqui para frente em nossas deduções. A partir dela derivamos agora uma série de propriedades importantes das equações (2.33) e (2.34), para isso denotaremos $p^l = Mn^l$ com $n_l n^l = 1$, a interpretação do escalar M será feita adiante.

2.4 Propriedades das equações de movimento

Para começar, deduzimos a equação que determina o tipo de transporte que devemos usar para transportar o spin ao longo de uma trajetória tipo tempo. Introduzindo os quadrivetores

$$S_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abcd} n^b S^{cd} \quad e \quad L_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abcd} n^b L^{cd}, \tag{2.35}$$

teremos automaticamente

$$n^a S_a = 0 \quad e \quad n^a L_a = 0, \tag{2.36}$$

as relações inversas são dadas por

$$S_{ab} = \epsilon_{abcd} n^c S^d \quad e \quad L_{ab} = \epsilon_{abcd} n^c L^d, \tag{2.37}$$

a equação (2.34) implica

$$\frac{DS^a}{Ds} = -n^a \frac{Dn^b}{Ds} S_b + L^a. \tag{2.38}$$

Para o caso em que $L^a = 0$ e usando $n^a S_a = 0$, podemos escrever esse transporte como

$$\frac{DS^a}{Ds} = (\dot{n}^a n_b - n^a \dot{n}_b) S^b.$$

Usamos a equação acima para definir o transporte de uma tetrada que não gira no sentido newtoniano. Portanto todo tensor que está fixo em relação a tetrada obedece esse transporte, que tem as importantes propriedades

- Mesmo para uma partícula livre S^a não é paralelamente transportado e portanto permite a precessão de Thomas.
- Preserva a ortogonalidade ao momento p^a ao longo da curva.
- Preserva o produto escalar entre dois vetores ao longo da curva.

Denotaremos esse transporte para um vetor qualquer da forma

$$\frac{\delta B^a}{Ds} = \frac{DB^a}{Ds} - (\dot{n}^a n_b - n^a \dot{n}_b) B^b = 0.$$

Se tivermos uma tetrada E^a, que gira com velocidade Ω^{ab} em relação a tetrada que é transportada de acordo com a definição acima, então seu transporte ao longo de uma curva tipo tempo será

$$\frac{\delta E^a}{Ds} = -2\Omega^a_b E^b.$$

A equação acima é a generalização da equação de Euler para um espaço-tempo curvo, podemos ver isso facilmente no caso em que usamos a métrica de Minkowski. Supondo que o spin S^a do corpo está relacionado com uma velocidade angular Ω^a da forma $S^a = I^{ab}\Omega_b$ e supondo que

$$\frac{\delta I^{ab}}{Ds} = 2\Omega^{(a}_{\ c} I^{b)c},$$

ou seja, que tensor I^{ab} está fixo em relação a uma base(tetrada) fixa no corpo, o transporte de Fermi fica

$$I_{ab}\dot{\Omega}_b = \epsilon_{abc}\Omega_b\Omega_e I_{ec},$$

onde o vetor Ω^a é dado por $\Omega_a = (1/2)\epsilon_{abcd}n^b S^{cd}$, que é a equação de Euler para o pião livre.

Mostramos agora que, sempre que a força F^l e o torque L^{lm} são desprezados, M é uma constante de movimento. Contraindo (2.33) com u^l e usando a parametrização escolhida temos

$$\frac{dM}{ds} + Mu_a\frac{Dn^a}{Ds} = F^a u_a, \tag{2.39}$$

calculando a derivada total da condição de Dixon $p_a S^{ab} = 0$ encontramos

$$n_a\frac{DS^{ab}}{Ds} = -\frac{Dn_a}{Ds}S^{ab}, \tag{2.40}$$

contraindo a equação acima com Dn_b/Ds encontramos

$$n_a\frac{Dn_b}{Ds}\frac{DS^{ab}}{Ds} = 0, \tag{2.41}$$

usando DS^{ab}/Ds da equação (2.34) encontramos

$$Mu^b\frac{Dn_b}{Ds} = \frac{Dn_b}{Ds}n_a L^{ab}, \tag{2.42}$$

e usando essa equação em (2.39) encontramos finalmente

$$\frac{dM}{ds} = F^a u_a + \frac{Dn_b}{Ds}n_a L^{ab}, \tag{2.43}$$

que é um resultado muito importante pois mostra que o primeiro momento de multipolo que causa perda de energia gravitacional é o de quadrupolo. Nessa ordem de aproximação teremos

$$F_l = \frac{1}{6}J^{mnrs}\nabla_l R_{mnrs} \quad \text{e} \quad G^{lm} = \frac{4}{3}R^{[l}{}_{rsp}J^{m]rsp}, \tag{2.44}$$

onde J^{abcd} é o tensor de quadupolo. Com isso podemos estimar a variação da massa. Introduzindo essa força F^l em (2.43) chegamos a

$$\frac{dM}{ds} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{6} R_{abcd} \frac{\delta J^{abcd}}{ds},$$

onde $\theta = \frac{1}{6} R_{abcd} J^{abcd}$. O termo é considerado a variação da energia potencial interna do corpo. J^{abcd} é constante relativo a alguma tetrada, que não é necessáriamente transportada de acordo com o transporte de Fermi, para um corpo que tem um movimento interno puramente rotacional, portanto teremos

$$\frac{\delta J^{abcd}}{Ds} = -2\Omega_e^{[a} J^{becd} - 2J^{abe[d}\Omega_e^{c]}. \tag{2.45}$$

Com isso podemos mostrar que

$$\frac{dM}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \Omega_a G^a. \tag{2.46}$$

Em mecânica newtoniana, se um corpo rígido tem uma velocidade angular $\mathbf{\Omega}$ e está acoplado a um torque $\mathbf{G}$, sua energia cinética de rotação aumenta a uma taxa $\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{G}$, que concorda com o limite newtoniano de $\Omega_a G^a$ de (2.46).

A seguir obtemos a interpretação física para o potencial θ. Para um corpo que se move devagar as componentes de J^{abcd} diferentes de zero são

$$J_{a0b0} = \frac{3}{8}(I_{cc}\delta_{ab} - 2I_{ab}), (a, b = 1, 2, 3),$$

notando que como estamos trabalhando numa aproximação newtoniana, não faz diferença usar índices covariantes ou contravariantes. Portanto

$$\frac{1}{6} R_{abcd} J^{abcd} = \frac{1}{4}(I_{cc}\delta_{ab} - 2I_{ab})\partial_{ab}\varphi,$$

que tem o limite newtoniano correto

$$\begin{aligned} \theta &= \int \rho\varphi(z + r) dv \\ &= \frac{1}{2}\partial_{ab}\varphi \int \rho r^a r^b dv \\ &= \frac{1}{4}(I_{cc}\delta_{ab} - 2I_{ab})\partial_{ab}\varphi. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Em [10] Ehlers e Rudolf obtiveram a importante relação entre a velocidade cinemática u^a com a velocidade dinâmica n^a, ver também [22]. Para obtê-la usamos a equação (2.40). Inserindo as equações (2.33) e (2.34) temos

$$M^2(u^a - h^a) = S^{ab}W_b, \tag{2.48}$$

com

$$h^a = n^a + M^{-1}L^{ab}n_b \tag{2.49}$$

e

$$W_a = F_a - \frac{1}{2}S^{cd}u^e R_{cdea}. \tag{2.50}$$

Eliminando u^a entre (2.48) e (2.50) e multiplicando o resultado por S^{ab} obtemos

$$S^{ab}W_b = S^{ab}(F_a - \frac{1}{2}S^{cd}u^e R_{cdea}) - \frac{1}{2}M^{-2}S^{ac}S^{de}S^{fg}W_e R_{fgdc}. \tag{2.51}$$

Notando que

$$\begin{aligned} R_{abcd}S^{ea}S^{bf} &= R_{abcd}S^{e[a}S^{b]f} \\ &= \frac{1}{2}R_{abcd}S^{ba}S^{ef} \end{aligned} \tag{2.52}$$

e usando isso na equação acima é possível resolver a equação para $S^{ab}W_b$. Com a solução substituída em (2.48) encontramos

$$(M^2 + \frac{1}{4}R_{bcde}S^{bc}S^{de})(n^a + h^a) = S^{ab}(F_b + \frac{1}{2}R_{bcde}h^c S^{de}). \tag{2.53}$$

Que é a relação procurada. Notamos que para um movimento livre, $F^a = 0$ e $L^{ab} = 0$ e desprezando termos da ordem da ordem de (S^2) teremos

$$n^a = u^a \tag{2.54}$$

relação que será usada adiante.

3

Os multipolos relativísticos

Apesar da existência de modelos matemáticos consistentes para a descrição dos fenômenos físicos em muitas áreas da física, o número de soluções exatas conhecidas é normalmente muito baixo e em geral essas soluções representam casos, que por serem muito idealizados não ajudam muito na interpretação da maioria dessas soluções. No caso da relatividade geral se conhece um número relativamente grande de soluções exatas, mas normalmente não se sabe muito sobre a interpretação física dessas soluções devido a grande variedade de sistemas de coordenadas em que são apresentadas. Esse é um dos motivos que faz com que a teoria dos momentos multipolares em Relatividade Geral seja tão importante. Os momentos multipolares relativísticos podem ser usados na interpretação dessas soluções, por exemplo, comparando-os com análogos da gravitação newtoniana. Nesse trabalho usamos os momentos de multipolo relativísticos para entender melhor a influência da deformação de um corpo, que pode ser descrita em primeira aproximação pelos seus momentos de quadrupolo, na precessão de Lense-Thirring de um giroscópio. As duas definições mais importantes de momentos multipolares em Relatividade Geral foram propostas por Geroch, Hansen e Thorne. Essas duas definições, a menos de um fator multiplicativo, produzem os mesmos momentos multipolares. Na próxima seção mostraremos que, quando o espaço-tempo que estamos estudando possui um vetor de Killing ξ^a, podemos escrever as equações de Einstein em termos de dois escalares fundamentais, o primeiro é chamados de norma ξ^a e é denotado por λ, o segundo está relacionado ao twist de ξ^a e é denotado por ω. Esses dois escalares serão usados em seguida na definição de momentos multipolares de Geroch-Hansen. Por último definiremos os momentos de Thorne

3.1 Espaço-tempo com um vetor de Killing

No caso em que o espaço-tempo que estamos considerando possui um vetor de Killing do tipo tempo, ξ^a, podemos introduzir de maneira natural um espaço cujos elementos são dados pelas órbitas dos vetores de Killing que denotaremos por S, ou seja as soluções das equações

$$\frac{dy^a}{dt} = k^a(y^1(t), ..., y^n(t)), \tag{3.1}$$

onde $(y^1, ..., y^n)$ são coordenadas locais. Para cada ponto p de nossa variedade $\hat{M}$ o campo vetorial ξ determina uma única curva $\gamma_p(t)$ tal que $\gamma_p(0) = p$ com ξ^a tangente a curva. Esta família de curvas é chamada de congruência associada ao campo vetorial. Definimos o mapeamento $\psi : \hat{M} \to S$: da forma, para cada p de $\hat{M}$, $\psi(p)$ é a trajetória de ξ^a passando por p. No caso em que ξ^a é ortogonal a uma hipersuperfície, é possível representar S como hipersuperfícies em $\hat{M}$ que em todo ponto é ortogonal a ξ^a. Geroch [36] mostrou que existe uma correspondência do tipo um pra um entre tensores de S e tensores de $\hat{M}$ que satisfazem

$$\xi^a T^{c...d}_{a...b} = 0, \quad \xi_c T^{c...d}_{a...b} = 0, \quad \text{e} \quad L_\xi T^{c...d}_{a...b} = 0. \tag{3.2}$$

Alguns exemplos de tensores em S que serão usados adiante são

$$h_{ab} = g_{ab} - (\xi^m \xi_m)^{-1} \xi_a \xi_b, \quad \text{e} \quad \epsilon_{abc} = (\xi^m \xi_m)^{-1} \epsilon_{abcd} \xi^d. \tag{3.3}$$

A derivada covariante em S, que satisfaz todos os axiomas para a derivada covariante associada métrica h_{ab}, é dada por

$$D_e T^{b...d}_{a...c} = h^p_e h^m_a ... h^n_c h^b_r ... h^d_s \nabla_s T^{r...s}_{m...n}. \tag{3.4}$$

E com isso podemos calcular o tensor de Riemann em S a partir de sua definição, as segundas derivadas de um vetor k^a qualquer em S é dada por

$$
\begin{aligned}
D_a D_b k_c = h_a^p h_b^q h_c^r \nabla_p (h_q^s h_r^t \nabla_s k_t) \\
+ h_a^p h_b^s h_c^t \nabla_p \nabla_s k_t - (k^n k_n)^{-1} h_a^p h_b^q h_c^r (\nabla_p k_q) k^s \nabla_s k_r \\
- (k^n k_n)^{-1} h_a^p h_b^q h_c^r (\nabla_p k_r) k^t \nabla_q k_t.
\end{aligned} \quad (3.5)
$$

Para encontrarmos o tensor de Riemann em S antisimetrisamos os índices a e b, na equação acima. As derivadas de k_c do segundo termo do lado direito são eliminadas usando-se o fato de que $L_\xi k_r = 0$ e para o terceiro termo o fato de que $\xi_a k^a = 0$, então, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
D_{[a} D_{b]} k_c = h_a^p h_b^q h_c^r \nabla_{[p} \nabla_{q]} k_t - (\xi^m \xi_m)^{-1} h_a^p h_b^q h_c^r (\nabla_p \xi_q)(\nabla_r \xi_s) k^s \\
+ (\xi^m \xi_m)^{-1} h_{[a}^p h_{b]}^q h_c^r (\nabla_p \xi_r)(\nabla_q \xi_t) k^t.
\end{aligned} \quad (3.6)
$$

Como o vetor k^a é arbitrário, o tensor de Riemann em S, que será denota do por ${}_3R_{abcd}$, está relacionado com o tensor de Riemann R_{abcd} em $\hat{M}$ por

$$
{}_3R_{abcd} = h_{[a}^p h_{b]}^q h_{[c}^r h_{d]}^s [R_{pqrs} + 2(\xi^n \xi_n)^{-1} (\nabla_p \xi_q)(\nabla_r \xi_s) + 2(\xi^n \xi_n)^{-1} (\nabla_p \xi_r)(\nabla_q \xi_s)]. \quad (3.7)
$$

Introduziremos agora dois campos tensoriais em S, em termos dos quais, escreveremos as equações de campo em S de uma maneira simples. Esses campos são a norma λ e o twist ω_a do campo tensorial ξ, definidos como

$$
\lambda = \xi^m \xi_m, \quad (3.8)
$$

$$
\omega_a = \epsilon_{abcd} \xi^b \nabla^c \xi^d. \quad (3.9)
$$

Segue das definições acima que a derivada covariante do vetor de Killing ξ^a pode ser expressa em termos de λ e ω_a

$$
\nabla_a \xi_b = \frac{1}{2} \lambda^{-1} \epsilon_{abcd} \xi^c \omega^d + \lambda^{-1} \xi_{[b} D_{a]} \lambda. \quad (3.10)
$$

Tomamos agora o rotacional e o divergente da equação (3.9) e usando as equações (3.10) e (A.12) encontramos

$$D_{[a}\omega_{b]} = -\epsilon_{abmn}\xi^m R^n_p \xi^p, \tag{3.11}$$

$$D^a\omega_a = \frac{3}{2}\lambda^{-1}\omega_m D^m\lambda. \tag{3.12}$$

Aplicando $D^2 = D^a D_a$ a (3.8) e usando (3.10) e (A.12) obtemos

$$D^2\lambda = \frac{1}{2}\lambda^{-1}(D^m\lambda)(D_m\lambda) - \lambda^{-1}\omega^m\omega_m - 2R_{mn}\xi^m\xi^n. \tag{3.13}$$

Contraindo (3.7) e usando novamente (3.10) e (A.12) encontramos

$${}_3R_{ab} = \frac{1}{2}\lambda^{-2}[\omega_a\omega_b - h_{ab}\omega_m\omega^m] + \frac{1}{2}\lambda^{-1}D_aD_b\lambda - \frac{1}{4}\lambda^{-2}(D_a\lambda)(D_b\lambda) + h_a^m h_b^n R_{mn}. \tag{3.14}$$

Então as equações de campo para um espaço-tempo que possui um vetor de Killing são as equações (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14).

No caso em que estamos estudando soluções de vácuo $R_{ab} = 0$, a equação (3.11) implica que ω_a é um gradiente $\omega_a = D_a\omega$, e então as equações (3.11)-(3.14) assumem a forma

$$\begin{aligned}
{}_3R_{ab} &= \frac{1}{2}\lambda^{-2}[D_a\omega D_b\omega - h_{ab}D_m\omega D^m\omega] + \frac{1}{2}\lambda^{-1}D_aD_b\lambda - \frac{1}{4}\lambda^{-2}(D_a\lambda)(D_b\lambda), \\
D^2\lambda &= \frac{1}{2}\lambda^{-1}(D^m\lambda)(D_m\lambda) - \lambda^{-1}D^m\omega D_m\omega, \qquad (3.15) \\
D^2\omega &= \frac{3}{2}\lambda^{-1}D_m\omega D^m\lambda.
\end{aligned}$$

Geroch [36] mostrou como é possível recuperar o espaço tempo original, ou seja, dado um espaço-tempo $\hat{M}$, um campo vetorial ξ^a em $\hat{M}$ e uma solução $(h_{ab}, \lambda, \omega_a)$ das equações (3.15) podemos achar a métrica estacionária correspondente

$$g_{ab} = h_{ab} + \lambda^{-1}\xi_a\xi_b. \tag{3.16}$$

É possível simplificar as equações (3.15) um pouco mais. Considerando uma transformação conforme do tipo $\hat{h}_{ab} = \lambda h_{ab}$, usando as equações (B.4) e (B.8) e introduzindo o potencial complexo $\Gamma = -\lambda + i\omega$, as equações de Einstein no vácuo num espaço-tempo com um vetor de Killing do tipo tempo se reduzem a

$$ {}_3\hat{R}_{ab} = \frac{1}{2}\lambda^{-2}\Gamma_{,(a}\Gamma_{,b)}, \tag{3.17}$$

$$ (\Gamma + \Gamma^*)\Gamma_{a}^{:a} + \hat{h}^{ab}\Gamma_{,a}\Gamma_{,b} = 0, \tag{3.18}$$

onde os dois pontos significam derivada covariante com respeito a métrica conforme. Introduzindo o potencial

$$ \Gamma = \frac{1-\phi}{1+\phi}, \tag{3.19}$$

podemos escrever a equação (3.18) da forma

$$ (\phi\phi^* - 1)\phi_{,a}{}^{:a} = 2\phi^*\phi_{,a}\phi^{,a}. \tag{3.20}$$

Na literatura ϕ é normalmente denotado por ξ.

3.2 Os multipolos de Geroch-Hansen

A teoria desenvolvida por Geroch [7] e [8] se aplica apenas para espaços-tempos estáticos, a teoria para o caso estacionário foi estendida por Hansen [9].

Na seção acima introduzimos uma variedade diferenciável tridimencional S descrita pela métrica

$$ h_{ab} = g_{ab} - \lambda^{-1}\xi_a\xi_b, \tag{3.21}$$

onde λ é a norma do vetor de Killing. Os nossos momentos multipolares são definidos com respeito a esta métrica. O conceito de expanção multipolar, que temos da gravitação newtoniana, parece não fazer muito sentido no caso da Relatividade Geral, onde as equações de campo não são lineares, por isso é adequado que no caso relativístico analisemos as propriedades dos campos em regiões muito longe das fontes que os geram ou em outras palavras, no infinito, onde supostamente os momentos podem ser separados e o conceito de expanção multipolar do campo passa a ter mais sentido. Para fazer isso, é necessário que a curvatura tenda a zero conforme nos aproximamos do infinito, e também é conveniente incluir o infinito como um ponto de nosso espaço-tempo. Este procedimento é conhecido como compactificação. Dessa forma, podemos calcular explicitamente o valor de nossas quantidades no infinito sem a necessidade de tomar limites. Este p rocedimento será feito através de uma transformação conforme. Para saber se podemos incluir esse ponto em nosso espaço-tempo, definimos o que vem a ser um espaço-tempo assintoticamente plano.

Uma variedade tridimensional S com métrica h_{ab} é dita assintoticamente plana se existe uma variedade $\hat{S}$ com métrica $\hat{h}_{ab}$ tal que

1. $\hat{S} = S \cup \Lambda$, onde Λ é um único ponto. No nosso caso, o ponto será interpretado como sendo o infinito.

2. $\hat{h}_{ab} = \hat{\Omega}^2 h_{ab}$ é uma métrica em $\hat{S}$.

3. $\hat{\Omega}_{|\Lambda} = 0$, $\hat{D}_a\hat{\Omega}_{|\Lambda} = 0$ e $\hat{D}_a\hat{D}_b\hat{\Omega}_{|\Lambda} = 2\hat{h}_{ab}$.

onde $\hat{D}_a$ é o operador de derivação associado a $\hat{h}_{ab}$. Um espaço-tempo estacionário com simetria axial pode ser caracterizado por dois potenciais, como por exemplo os potenciais de Hansen Φ_M e Φ_J em [9]. Beig e Simon [23] mostraram que diferentes potenciais produzem os mesmos momentos de multipolo e portanto denotaremos os potenciais da forma Q_A com $A = 1, 2$. Denotamos $\hat{Q}_A = \hat{\Omega}^{1/2} Q_A$,

$$P^{(0)}_A = \hat{Q}_A, \qquad P^{(1)}_{A_\alpha} = \hat{D}_\alpha \hat{Q}_A,$$

$$P^{(n+1)}_{A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}}} = C\left[\hat{D}_{\alpha_{n+1}} P^{(n)}_{A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} - \frac{1}{2} n(2n-1) \hat{R}_{\alpha_1\alpha_2} P^{(n)}_{A_{\alpha_3 \ldots \alpha_{n+1}}}\right], \tag{3.22}$$

onde o símbolo C significa que devemos tomar a parte simétrica e com traço nulo da quantidade entre colchetes. Os momentos multipolares $m^{(n)}_{A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}$ são definidos como

$$m^{(n)}_{A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} = P^{(n)}_{A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}|_\Lambda, \tag{3.23}$$

com $A = 1, 2$.

Em geral, não é uma tarefa simples encontrar o fator conforme $\hat{\Omega}$ para compactificar nosso espaço-tempo e assim calcular os momentos correspondentes. Felizmente Fodor, Hoenselaers e Perjes apresentam em [15] um algorítimo para o cálculo dos momentos a partir do potencial ϕ introduzido na equação (3.19), esse algorítimo leva em conta que é possível determinar ϕ completamente, dado seu valor no eixo de simetria.

A seguir, mostramos como calcular esses momentos a partir de ϕ. Dado o potencial ϕ calculamos seu valor no eixo de simetria. No caso em que o potencial ϕ está escrito em termos das coordenadas de Weyl (ρ, z) basta fazer $\phi(\rho = 0)$. No caso em que ϕ é dado em coordenadas elipsoidais prolatas é equivalente fazer $y = 1$ e assim $z = \sigma x$. A seguir, substituímos $z = 1/\bar{z}$ para encontrar $\phi(\bar{z}, 1)$. Denotando as quantidades m_l por

$$m_l = \frac{1}{(l+1)!}\frac{d^{l+1}\phi(\bar{z},1)}{d\bar{z}^{l+1}}\,|_{\bar{z}=0}, \tag{3.24}$$

os primeiros 6 momentos multipolares são dados por

$$\begin{aligned}
P_0 &= m_0, \\
P_1 &= m_1, \\
P_2 &= m_2, \\
P_3 &= m_3, \\
P_4 &= m_4 - \frac{1}{7}M_{20}m_0^*, \\
P_5 &= m_5 - \frac{1}{21}M_{20}m_1^* - \frac{1}{3}M_{30}m_0^*,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde $M_{ij} = m_i m_j - m_{i-1}m_{j+1}$. As partes real e imaginária dos P's são chamadas de momentos de massa e de momento angular respectivamente.

A seguir, apresentamos os valores de m_l para a classe de soluções de Tomimatsu-Sato com $\delta = 1, 2$, onde o caso $\delta = 1$ representa a solução de Kerr, ver [24].

- $\delta = 1$

  Nesse caso o potencial ϕ é dado por

$$\phi = \frac{1}{px - iqy}. \tag{3.26}$$

Calculando m_l, encontramos

$$m_l = i^l m(qm)^l. \tag{3.27}$$

Vemos que $M_{ij} = 0$ e portanto

$$P_l \;=\; i^l m(mq)^l. \tag{3.28}$$

A massa dessa solução é dada por $P_0 = m$, o momento angular por $P_1 = qm^2$, e o momento de quadrupolo fica $M_2 = -m^3 q^2$.

- $\delta = 2$

Nesse caso o potencial ϕ é dado por

$$\phi = \frac{2px(x^2-1) - 2iqy(1-y^2)}{p^2(x^4-1) - 2ipqxy(x^2-y^2) + q^2(y^4-1)}. \tag{3.29}$$

Com $y = 1$ a expressão se simplifica bastante, pois podemos colocar (x^2-1) em evidência. Denotando $x = 1/\zeta$ e notando que temos um polinômio de ordem 2 no denominador, escrevemos ϕ no eixo de simetria em termos dessa nova variável como

$$\phi(\zeta, 1) = \frac{2\zeta}{p(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}, \tag{3.30}$$

onde α e β são as raízes do polinômio $p(\zeta) = p\zeta^2 - 2iq\zeta + p$ e são dadas por

$$\alpha = i\frac{q+1}{p} \quad \text{e} \quad \beta = i\frac{q-1}{p}. \tag{3.31}$$

Expandindo o denominador em termos de frações parciais, chegamos a forma

$$\phi(\zeta, 1) = \frac{i\zeta}{\zeta-\beta} - \frac{i\zeta}{\zeta-\alpha}. \tag{3.32}$$

A partir dessa forma fica mais fácil calcular a n-ésima derivada de $\phi(\zeta, 1)$. Usando $\zeta = \sigma\bar{z}$ chegamos a um m_l da forma

$$m_l = \frac{(-1)^{l+1} i^l m^{l+1}}{2^{l+1}}[(q+1)^{l+1} - (q-1)^{l+1}]. \tag{3.33}$$

Como pode ser vista, essa solução tem massa $P_0 = m$, momento angular $P_1 = qm^2$ e momento de quadrupolo $P_2 = -m^3(3q^2+1)/4$.

3.3 Os multipolos de Thorne

Na definição de Thorne [6] para os momentos multipolares não é necessário deixar o espaço-tempo físico para calcular os momentos relativísticos como na teoria de Geroch-Hansen. O ponto principal está na definição de uma coordenada radial adequada, que no caso vem do sistema de coordenadas harmônicas. Integrando as equações de Einstein, Thorne acha a forma geral de uma métrica quando escrita em termos de coordenadas harmônicas, e os momentos multipolares são dados em termos dos coeficientes das potências de $1/r$, onde r é a coordenada radial adequada. Então, em princípio, para calcular os momentos multipolares de uma solução das equações de Einstein, teríamos somente que transformar a métrica dada para um sistema de coordenadas harmônicas e compará-la com a forma geral fornecida por Thorne. Infelizmente tal procedimento é impraticável, já que é muito difícil achar uma solução para a condição harmônica mesmo nos casos mais simples, como, por exemplo, no caso da solução de Kerr. Mas como mostrado por Thorne [6], isso não é necessário, em uma classe de coordenadas chamadas de "ACMC" (asymptotically cartesian and mass centered), é possível ler os momentos multipolares de mais baixa ordem, i.e., monopolo, dipolo, quadrupolo etc.

Em um sistema de coordenadas do tipo ACMC, para qualquer solução de vácuo que seja assintoticamente plana e estacionária das equações de Einstein, a métrica até ordem $O(1/r^l)$ contém apenas multipolos de ordem menor que l e o momento de dipolo de massa é zero. A forma geral desta métrica é dada por

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{r} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left[\frac{2(2l-1)!!}{l!} M_{A_l} N_{A_l} + h_{l-1} \right], \tag{3.34}$$

$$M_a = 0, \tag{3.35}$$

$$g_{0j} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left[-\frac{4l(2l-1)!!}{(l+1)!} \epsilon_{jka_l} S_{kA_{l-1}} N_{A_l} + h_{l-1} \right], \tag{3.36}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} h_{l-1}, \tag{3.37}$$

onde aqui, as quantidades h_l são símbolos que denotam uma quantidade que é independente de r e tem dependência angular com harmônicos de ordem $l, l-1, ..., 0$, o símbolo A_l é uma abreviação para $a_1, ..., a_n$, N_l uma abreviação para $n_{a_1}, ..., n_{a_l}$ com $n_a = x^a/r$, e as quantidades M_{A_l} e S_{A_l} são os momentos de massa e momento angular respectivamente.

Os momentos de Thorne estão relacionados aos de Geroch-Hansen da seguinte forma

$$M_{A_l}^{GH} = (2l-1)!!M_{A_l}^{T}, \tag{3.38}$$

$$S_{A_l}^{GH} = \frac{2l(2l-1)!!}{l+1}S_{A_l}^{T}. \tag{3.39}$$

4

As correções multipolares

4.1 Introdução

Em 2004, a NASA lançou o satélite GP-B, que tem como objetivo principal verificar algumas previsões da relatividade geral ligadas ao efeito do campo gravitacional do planeta Terra no spin de um giroscópio em órbita [3] [4]. O experimento está agora em fase final de análise de dados. De acordo com a teoria, o spin de um giroscópio em órbita deve precessar em relação a um observador distante. A velocidade angular de precessão pode ser separada em dois termos quando consideramos sua origem física, o primeiro termo é responsavel pela precessão de deSitter ou geodética e está associada, em primeira aproximação, à massa do planeta Terra. O segundo termo é a precessão induzida pelo efeito Lense-Thirring e portanto relacionada com a rotação ou o momento angular do corpo central. A precessão associada ao efeito Lense-Thirring é de grande interesse físico, pois está acoplada a termos não diagonais da métrica e portanto sua verificação experimental é fundamental para o estabelecimento da relatividade geral.

Nesse trabalho nos empenhamos apenas no estudo da parte devida ao efeito Lense-Thirring. As estimativas sobre os valores dessa velocidade angular são feitas, em geral, considerando o campo gravitacional de um corpo esfericamente simétrico e portanto não incluem os termos multipolares que descrevem, por exemplo, a oblaticidade do planeta Terra. E os trabalhos onde são feitas essas inclusões [25],[26] falham, em nossa opinião, em um ponto, pois eles não deixam clara a relação entre os multipolos usados por eles com os multipolos de Thorne e Geroch-Hansen, e portanto também não fica clara a aplicabilidade de todos os teoremas relacionados e a fundamentação matemática correspondente (para um resumo sobre os principais teoremas veja [27]). Outra vantagem de usar os momentos de Thorne (ou equivalentemente os de Geroch-Hansen) é que podemos calculá-los mesmo sem conhecer a solução de interior (por exemplo no caso da solução de Kerr), o que se mostra muito útil no caso em que queremos analisar algumas soluções exatas de vácuo das equações de Einstein. Nesse trabalho usamos a métrica de Thorne para um espaço-tempo axial-estacionário e nos limitamos a uma aproximação linear da relatividade geral. Portanto devemos restringir nossa análise a fontes que tenham limites newtonianos não nulos. A generalização do método para o caso de um campo gravitacional não linear e sem simetria axial pode ser feito calculando a métrica de Thorne interativamente como em [28].

4.2 O vetor $\mathbf{\Omega}_{LT}$

Como mostrado no Capítulo 2 de acordo com a teoria de Dixon o spin de um giroscópio em órbita obedece a lei de transporte de Fermi-Walker. Essa lei de transporte não se aplica somente a uma partícula que percorre uma trajetória descrita pelas equações de Mathisson-Papapetrou, mas sim para qualquer trajetória. Usando esse transporte e uma aproximação linear para a relatividade geral, podemos dividir a velocidade angular de precessão em três partes, de acordo com a origem física [29], da seguinte forma

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_T + \mathbf{\Omega}_{LT} + \mathbf{\Omega}_{DS}, \tag{4.1}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_T &= -\frac{1}{2}\mathbf{v} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{\Omega}_{LT} &= -\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{g}, \\ \mathbf{\Omega}_{dS} &= \frac{3}{2}\mathbf{v} \times \nabla U. \end{aligned} \tag{4.2}$$

O primeiro termo da equação acima é chamado de precessão de Thomas, como podemos ver depende da aceleração da trajetória e portanto se anula no caso em que o giroscópio se desloca ao longo de uma geodésica, o segundo e o terceiro termo estão diretamente acoplados com o campo gravitacional, o segundo termo está relacionado com o efeito Lense-Thirring, e o último é conhecido como precessão de de-Sitter ou precessão geodética. O segundo termo está acoplado a termos não diagonais da métrica e portanto permite-nos medir o que chamamos de "arrasto de referenciais", vemos também que esse termo é o único que indepente da velocidade do giroscópio ao longo da trajetória.

O fato dessa velocidade angular de precessão devida ao efeito Lense-Thirring ser independe da velocidade ao longo da trajetória sugere que analisemos o comportamento do spin quando este se encontra parado em relação as estrelas distantes, isso faz com que a precessão geodética e a precessão de Thomas sejam nulas neste referencial e assim estaremos estudando apenas a precessão devida ao efeito Lense-Thirring.

Mostraremos agora como escolher um referencial que esteja parado em relação ao infinito. Sabemos que a métrica que descreve um espaço-tempo com simetria axial e estacionário pode ser colocada na forma

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 + 2g_{34}dx^3dx^4 + g_{44}(dx^4)^2, \tag{4.3}$$

ou, completando os quadrados,

$$ds^2 = -\left(\sqrt{-g_{44}}dx^4 - \frac{g_{34}}{\sqrt{-g_{44}}}dx^3\right)^2 + (\sqrt{F}dx^3)^2 + (\sqrt{g_{22}}dx^2)^2 + (\sqrt{g_{11}}dx^1)^2, \tag{4.4}$$

onde $F = g_{33} - g_{34}^2/g_{44}$. Da forma acima fica fácil ler as tetradas

$$\mathbf{e}_{\hat{1}} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \mathbf{e}_{\hat{2}} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \mathbf{e}_{\hat{3}} = \frac{1}{\sqrt{F}}\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{g_{34}}{g_{44}}\frac{1}{\sqrt{F}}\frac{\partial}{\partial x^4}, \quad \mathbf{e}_{\hat{4}} = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}}\frac{\partial}{\partial x^4}, \tag{4.5}$$

e a base dual

$$\mathbf{m}^{\hat{1}} = \sqrt{g_{11}}dx^1, \quad \mathbf{m}^{\hat{2}} = \sqrt{g_{22}}dx^2, \quad \mathbf{m}^{\hat{3}} = \sqrt{F}dx^3, \quad \mathbf{m}^{\hat{4}} = \frac{g_{34}}{\sqrt{-g_{44}}}dx^3 - \sqrt{-g_{44}}dx^4. \tag{4.6}$$

A quadri-velocidade u^a de uma partícula em relação as tetradas é dada por $u^a = e_{\hat{c}}{}^a u^{\hat{c}} = e_{\hat{4}}{}^a$. No nosso caso teremos $u^a = (0,0,0,(-g_{44})^{-1/2})$ e portanto a partícula satisfaz a condição de estar parada em relação ao infinito.

Para calcular a velocidade angular de precessão, em relação às tetradas escolhidas, usamos o transporte de Fermi-Walker

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} = \mathbf{u}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}), \quad \mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \tag{4.7}$$

ver equação (2.38) também. Vemos que

$$\begin{aligned} \frac{dS_{\hat{j}}}{ds} &= \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{j}}}) \\ &= (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S})\cdot\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{j}}} + \mathbf{S}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{j}}}) &(4.8)\\ &= \mathbf{S}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{j}}}) &(4.9)\end{aligned}$$

devido a ortogonalidade das tetradas $\mathbf{e}_{\hat{i}}\cdot\mathbf{e}_{\hat{i}} = \eta_{\hat{i}\hat{j}}$. Se considerarmos uma partícula que tenha sua velocidade dada pelo vetor $\mathbf{u} = \mathbf{e}_4$, como é no nosso caso, devido a condição $\mathbf{u}\cdot\mathbf{S} = 0$ teremos $S_{\hat{4}} = 0$, já que $u^{\hat{i}} = 0, \;\; i = 1,2,3$, pois o giroscópio está parado em relação ao infinito. Usando a expansão $\nabla\mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_\nu\mathbf{m}^\nu_\mu$, a equação para o spin fica então

$$\begin{aligned} \frac{dS_{\hat{j}}}{ds} &= (\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_{\hat{\nu}})(\mathbf{m}^{\hat{\nu}}_{\hat{j}}\cdot\mathbf{u}), \\ &= S_{\hat{a}}(\mathbf{m}^{\hat{a}}_{\hat{j}}\cdot\mathbf{e}_{\hat{4}}). &(4.10)\end{aligned}$$

Para o cálculo dos símbolos $\mathbf{m}_{\mu\nu}$ usamos as equações de estrutura de Cartan, que fornecem imediatamente as componentes relativas as tetradas, ver mais em [29]. A equação de compatibilidade $\mathbf{d}g_{\mu\nu} = \mathbf{d}\eta_{\mu\nu} = 0$ já nos diz que temos apenas seis $\mathbf{m}_{\mu\nu}$. Usando

$$0 = \mathbf{dm}^\mu + \mathbf{m}^\mu_\nu \times \mathbf{m}^\nu \tag{4.11}$$

para os $\mathbf{m}_{\hat{a}\hat{b}}$, encontramos uma expanção da forma

$$\begin{aligned} &\mathbf{m}_{\hat{1}\hat{2}} = \Gamma_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}}\mathbf{m}^{\hat{1}} + \Gamma_{\hat{1}\hat{2}\hat{2}}\mathbf{m}^{\hat{2}}, \quad \mathbf{m}_{\hat{1}\hat{3}} = \Gamma_{\hat{1}\hat{3}\hat{3}}\mathbf{m}^{\hat{3}} + \Gamma_{\hat{1}\hat{3}\hat{4}}\mathbf{m}^{\hat{4}}, &(4.12)\\ &\mathbf{m}_{\hat{2}\hat{3}} = \Gamma_{\hat{2}\hat{3}\hat{3}}\mathbf{m}^{\hat{3}} + \Gamma_{\hat{2}\hat{3}\hat{4}}\mathbf{m}^{\hat{4}}, \quad \mathbf{m}_{\hat{4}\hat{1}} = \Gamma_{\hat{4}\hat{1}\hat{3}}\mathbf{m}^{\hat{3}} + \Gamma_{\hat{4}\hat{1}\hat{4}}\mathbf{m}^{\hat{4}}, \\ &\mathbf{m}_{\hat{4}\hat{2}} = \Gamma_{\hat{4}\hat{2}\hat{3}}\mathbf{m}^{\hat{3}} + \Gamma_{\hat{4}\hat{2}\hat{4}}\mathbf{m}^{\hat{4}}, \quad \mathbf{m}_{\hat{4}\hat{3}} = \Gamma_{\hat{4}\hat{3}\hat{1}}\mathbf{m}^{\hat{3}} + \Gamma_{\hat{4}\hat{3}\hat{2}}\mathbf{m}^{\hat{2}}, \end{aligned}$$

onde

$$\Gamma_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}} = \frac{g_{11,2}}{2g_{11}\sqrt{g_{22}}}, \quad \Gamma_{\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = \frac{g_{22,1}}{2g_{22}\sqrt{g_{11}}}, \quad \Gamma_{\hat{3}\hat{1}\hat{3}} = \frac{F_{,1}}{2F\sqrt{g_{11}}}, \tag{4.13}$$

$$\Gamma_{\hat{3}\hat{2}\hat{3}} = \frac{F_{,2}}{2F\sqrt{g_{22}}}, \quad \Gamma_{\hat{1}\hat{4}\hat{4}} = \frac{g_{44,1}}{2g_{44}\sqrt{g_{11}}}, \quad \Gamma_{\hat{4}\hat{2}\hat{4}} = \frac{g_{44,2}}{2g_{44}\sqrt{g_{22}}}, \tag{4.14}$$

$$\Gamma_{\hat{3}\hat{1}\hat{4}} = \frac{g_{34}}{2\sqrt{-g_{44}g_{11}F}}\left[\ln\left(\frac{g_{34}}{g_{44}}\right)\right]_{,1} \quad \Gamma_{\hat{3}\hat{2}\hat{4}} = \frac{g_{34}}{2\sqrt{-g_{44}g_{22}F}}\left[\ln\left(\frac{g_{34}}{g_{44}}\right)\right]_{,2}, \tag{4.15}$$

$$\Gamma_{\hat{4}\hat{2}\hat{3}} = \Gamma_{\hat{3}\hat{2}\hat{4}}, \quad \Gamma_{\hat{4}\hat{3}\hat{1}} = \Gamma_{\hat{1}\hat{3}\hat{4}}, \quad \Gamma_{\hat{4}\hat{1}\hat{3}} = \Gamma_{\hat{3}\hat{1}\hat{4}}, \quad \Gamma_{\hat{4}\hat{3}\hat{2}} = \Gamma_{\hat{2}\hat{3}\hat{4}}. \tag{4.16}$$

Usando os símbolos mostrados acima na equação (4.10), especificamente os símbolos $\Gamma_{\hat{3}\hat{2}\hat{4}}$ e $\Gamma_{\hat{3}\hat{1}\hat{4}}$, chegamos a uma equação para o spin da forma

$$\frac{d\mathbf{S}}{ds} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{S}, \tag{4.17}$$

onde

$$\mathbf{\Omega} = \Gamma_{\hat{2}\hat{3}\hat{4}}\mathbf{m}^{\hat{1}} + \Gamma_{\hat{3}\hat{1}\hat{4}}\mathbf{m}^{\hat{2}}. \tag{4.18}$$

Podemos simplificar a expressão acima um pouco mais, usando o escalar λ e o vetor ω_a definidos pelas equações (3.8) e (3.9), respectivamente. Como mostrado na seção (3.1), a equação (3.11) implica que ω_a deve ser o gradiente de um campo escalar no caso de uma solução de vácuo, e denotamos esse escalar por ω. Esses dois escalares, λ e ω, podem ser encontrados diretamente a partir do potencial de ernst $\Gamma = -\lambda + i\omega$, como mostrado pela equação (3.18).

Então, calculando o twist do vetor de killing tipo tempo

$$\omega_a = \epsilon_{abcd}\xi^b\nabla^c\xi^d \tag{4.19}$$

em termos da métrica (4.3), usando os símbolos de Christoffel

$$\Gamma^3_{a4} = \frac{g_{34}}{2F}\frac{\partial}{\partial x^a}\left[\ln\left(\frac{g_{34}}{g_{44}}\right)\right] \tag{4.20}$$

e referindo as componentes de (3.9) em relação as tetradas (4.4), vemos que podemos expressar os coeficientes $\Gamma_{\hat{3}\hat{1}\hat{4}}$ e $\Gamma_{\hat{3}\hat{2}\hat{4}}$ da forma

$$\Gamma_{\hat{3}\hat{2}\hat{4}} = -\frac{1}{2\lambda}\omega_{\hat{1}}, \quad \text{e} \quad \Gamma_{\hat{3}\hat{1}\hat{4}} = -\frac{1}{2\lambda}\omega_{\hat{2}}. \tag{4.21}$$

Com isso colocamos a velocidade angular Ω na forma

$$\Omega_{\hat{a}} \;=\; \frac{1}{2\lambda}\nabla_{\hat{a}}\omega. \tag{4.22}$$

Até onde sabemos essa fórmula não apareceu na literatura.

4.3 Aproximação linear para Ω

Nesta seção vamos calcular o escalar ω em ordem linear para a relatividade geral. Para isso partimos da equação que define o twist de um campo vetorial ξ

$$\omega_a = \epsilon_{abcd}\xi^b\nabla^d\xi^c. \tag{4.23}$$

Para trabalhar numa aproximação linear definimos as quantidades

$$\gamma^{ab} \;=\; -\eta^{ab} - \sqrt{-g}g^{ab}, \qquad \gamma^{ab}{}_{,b} = 0. \tag{4.24}$$

onde η^{ab} denota a métrica de Minkowski. Com isso escrevemos a métrica de Thorne [6] para campo fraco da forma

$$\gamma_{00} \;=\; \frac{4M}{r} + \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l\frac{4M_{A_l}}{l!}[r^{-1}]_{,A_l}, \tag{4.25}$$

$$\gamma_{0j} \;=\; -\frac{2\epsilon_{jpq}S_pn_q}{r^2} - \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l\frac{4l\epsilon_{jpq}S_{pA_{l-1}}}{(l+1)!}[r^{-1}]_{,qA_{l-1}}, \tag{4.26}$$

$$\gamma_{jk} \;=\; 0. \tag{4.27}$$

Com isso a equação para o twist do vetor de Killing em primeira ordem fica

$$\omega_a = \epsilon_{abc}\gamma_{0c,d} \tag{4.28}$$

e então, substituindo (4.26) na equação acima chegamos a

$$\omega = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4l(2l-1)!!}{(l+1)!} \frac{S_{A_l} N_{A_l}}{r^{l+1}}. \tag{4.29}$$

Essa solução pode ser expressa em termos de coordenadas esféricas. Como estamos trabalhando em um espaço-tempo que possui simetria axial nossos momentos multipolares são múltiplos de $\hat{z}^{A_l}$ consigo mesmo, onde $\hat{z}^{A_l}$ é o produto tensorial do vetor $\hat{z}$ que define o eixo de simetria. Portanto os momentos M_{A_l} e S_{A_l} ficam determinados pelos escalares M_l e S_l [9] definidos por

$$M_l = M_{a_1 \ldots a_l} \hat{z}^{A_l} \quad S_l = S_{a_1 \ldots a_l} \hat{z}^{A_l}. \tag{4.30}$$

E daí tiramos que

$$M_{a_1 \ldots a_l} = \frac{(2l-1)!!}{l!} M_l \hat{z}^{<A_l>}, \quad S_{a_1 \ldots a_l} = \frac{(2l-1)!!}{l!} S_l \hat{z}^{<A_l>}, \tag{4.31}$$

onde o símbolo $< A_l >$, informa que devemos tomar a parte simétrica e com traço nulo dos índices A_l. Para calcular os termos $S_{A_l} N_{A_l}$ usamos a fórmula $S_{A_l} N_{A_l} = S_l P_l(\cos\theta)$, onde $P_l(\cos\theta)$ são os polinômios de Legendre, então

$$\omega = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4l(2l-1)!!}{(l+1)!} \frac{S_l P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}. \tag{4.32}$$

Para uma aproximação linear da relatividade geral, temos a identificação $g_{44} = -1 + 2\varphi$, onde φ é o potencial Newtoniano. Como estamos usando um ω calculado usando a aproximação linear, para obtermos essa precisão em $\mathbf{\Omega}$, devemos colocar $g_{44} = -1$ em (4.22) e então a velocidade angular fica

$$\Omega_a = -\frac{1}{2} \nabla_a \omega. \tag{4.33}$$

Em coordenadas esféricas teremos então

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l(2l-1)!!}{(l+1)!} \frac{S_l}{r^{l+1}} [(l+1) P_l(\cos\theta)\hat{r} + P_l^{'}(\cos\theta) \sin\theta \hat{\theta}] \tag{4.34}$$

onde $'$ indica derivada com respeito a $\cos\theta$. Vemos a partir da fórmula acima que nessa aproximação as correções são devidas apenas aos momentos de corrente S_l. No apêndice C mostramos que a fórmula acima é equivalente a fórmula (23) da referência [26]. O vetor $\mathbf{\Omega}$ pode ser escrito em termos de $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$.Fazendo essa transformação chegamos a um $\mathbf{\Omega}$ da forma

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l(2l-1)!!}{(l+1)!} \frac{S_l}{r^{l+1}} \mathbf{f}(l,\theta), \tag{4.35}$$

onde as componentes de $\mathbf{f}(l,\theta)$ são

$$\begin{aligned} f^x &= (l+1)P_l(\cos\theta)\sin\theta + P_l^{'}(\cos\theta)\cos\theta\sin\theta, \\ f^y &= 0, \\ f^z &= (l+1)P_l(\cos\theta)\cos\theta - P_l^{'}(\cos\theta)\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Para uma trajetória circular usamos a coordenada radial corrigida para uma fonte que apresenta termos de quadrupolo dada em [31] que, em termos do momento de quadrupolo de Thorne Q, fica

$$r = r_0\left(1 - \frac{3Q}{8M}\frac{\cos 2\theta}{r_0^2}\right). \tag{4.37}$$

Usando essa equação em (4.35) e expandindo em potencias de $1/r_0$ até ordem de $1/r_0^5$ chegamos a

$$\mathbf{\Omega} = \frac{S}{2r_0^3}\left[\mathbf{g}_1(\theta) - \frac{27SQ}{16Mr_0^2}\left(\mathbf{g}_2(\theta) - \frac{5MS_3}{2QS}\mathbf{g}_3(\theta)\right)\right], \tag{4.38}$$

onde as componentes de $\mathbf{g}_j(\theta), \quad j = 1, 2, 3,$ são

$$\mathbf{g}_1 = 2\mathbf{f}(1,\theta) \quad \mathbf{g}_2 = \frac{4}{3}\mathbf{f}(1,\theta)\cos 2\theta \quad e \quad \mathbf{g}_3 = \frac{16}{9}\mathbf{f}(3,\theta). \tag{4.39}$$

Os vetores $\mathbf{g}_j$ tem a propriedade $\langle g_j^x\rangle = \langle g_j^y\rangle = 0$ e $\langle g_j^z\rangle = 1$, onde $\langle g_j^i\rangle$ significa a média de $g_j^i(\theta)$ em relação a θ no intervalo $[0,\pi]$. Chamando

$$A = \frac{I\omega}{2r_0^3}, \quad B = \frac{27Q}{16Mr_0^2} \quad \text{e} \quad C = \frac{MS_3}{QS}, \tag{4.40}$$

a média de $\mathbf{\Omega}$ fica

$$\langle\overrightarrow{\Omega}\rangle = A\left[1 - B\left(1 - \frac{5C}{2}\right)\right]\hat{z}. \tag{4.41}$$

É interessante notar que no caso em que $C = 2/5$ não teremos correção, apesar de o espaço-tempo ser deformado.

4.4 Comparação com outros trabalhos

Devido ao fato de os momentos de corrente serem independentes dos momentos de massa, para estimar a constante C precisaremos de um modelo para a métrica do planeta Terra oblato. Alguns autores, usando modelos diferentes, já calcularam as contribuições multipolares [25] e [26], e nós usaremos esses modelos para calcular as correções a partir de nossa fórmula (4.41). Além disso, daremos uma nova estimativa baseado no modelo da métrica do planeta Terra apresentado em [32].

- Modelo de Teyssandier [26]

Comparando a forma geral da métrica de Thorne com a obtida nesse trabalho obtemos

$$Q = -\frac{2MR^2J_2}{3}, \quad S_3 = -\frac{4SR^2k_2}{5}, \quad C = 0,97, \tag{4.42}$$

onde usamos os valores $J_2 = (1082.64 \pm 0.01) \times 10^{-6}$ e $k_2 = 0.874 \times 10^{-3}$, nesse caso teremos

$$\langle \overrightarrow{\Omega} \rangle = A(1 + 1.42B)\hat{z}. \tag{4.43}$$

Esse valor é diferente do valor obtido em [26] porque usamos o ângulo θ em (4.35) em vez de $\psi = \pi/2 - \theta$ como na referência citada. Portanto tomando a média em (4.38) encontramos um valor diferente, mas equivalente.

- Modelo Adler-Silbergeit [25]

Neste caso a comparação com a métrica de Thorne nos dá para seu modelo B, onde

$$Q = -\frac{2MR^2J_2}{3}, \quad S_3 = -\frac{8\omega MR^4J_2}{35}, \quad S = I\omega. \tag{4.44}$$

Daí podemos calcular facilmente a constante C, e colocando esse valor em (4.41) obtemos

$$\langle \overrightarrow{\Omega} \rangle = A\left[1 - B\left(1 - \frac{6}{7}\frac{MR^2}{I}\right)\right]\hat{z}. \tag{4.45}$$

Comparando esse resultado com a fórmula (61) do trabalho deles, vemos que nosso terceiro termo é duas vezes maior. Usando $MR^2/I = 3.024$ dado pelos autores obtemos

$$\langle \overrightarrow{\Omega} \rangle = A(1 + 1,59B)\hat{z}. \tag{4.46}$$

O valor deles é $\langle \overrightarrow{\Omega} \rangle = A(1 + 0,30B)\hat{z}$.

- Modelo de Adler [32]

Nesse caso teremos

$$Q = -\frac{2Ma^2}{9}, \quad S_3 = -\frac{4Sa^2}{25}, \quad C = 0.72, \tag{4.47}$$

então

$$\langle\overrightarrow{\Omega}\rangle = A(1 + 0,80B)\hat{z} \tag{4.48}$$

que, até onde sabemos, é uma nova estimativa.

É muito interessante estimar as correções no caso em que nossa geometria é dada por uma solução exata das equações de Einstein que tem momento de quadrupolo arbitrário, escolhemos a solução [33]. Seus primeiros momentos de multipolo de Geroch-Hansen diferentes de zero são dados por

$$\begin{aligned} M_0 &= k(1+\alpha^2)/(1-\alpha^2), \\ J_1 &= -2\alpha k^2(1+\alpha^2)/(1-\alpha^2)^2, \\ M_2 &= -k^3[\beta + 4\alpha^2(1+\alpha^2)(1-\alpha^2)^{-3}], \\ J_3 &= 4\alpha k^4[\beta + 2\alpha^2(1+\alpha^2)(1-\alpha^2)^{-3}]/(1-\alpha^2), \end{aligned} \tag{4.49}$$

onde M_n, J_n são multipolos de massa e corrente respectivamente e α, β and k são parâmetros. Com um pouco de manipulação algébrica encontramos a seguinte relação entre os momentos,

$$J_3 = \frac{J}{M}(2M_2 - M_2^{kerr}), \tag{4.50}$$

onde $M_2^{kerr} = -J^2/M$ é o momento de quadrupolo da solução de Kerr. Como M_2^{kerr} tem limite newtoniano nulo, em nossa aproximação teremos

$$J_3 = \frac{2M_2 J}{M}. \tag{4.51}$$

Usando a correspondência entre os momentos de Geroch-Hansen e os de Thorne [28], obtemos facilmente $C = 4/15$ e então a equação (4.41) fica

$$\langle\overrightarrow{\Omega}\rangle = A(1 - 0,33B)\hat{z}. \tag{4.52}$$

Que difere bastante dos modelos anteriores.

5

Conclusão e Perspectivas

Fizemos um estudo completo sobre o movimento de uma partícula clássica com spin em relatividade geral, a partir das equações de Papapetrou, com o objetivo principal de mostrar que o spin da partícula obedece a lei de transporte de Fermi-Walker e de que as equações de movimento são uma consequência das equações de campo. Para analisar a influência que um corpo central oblato induz na precessão de Lense-Thirring, revisamos também a teoria dos multipolos relativísticos como apresentados por Thorne e por Geroch e Hansen. Conseguimos encontrar uma fórmula geral para a precessão de Lense-Thirring em termos da parte real e imaginária do potencial de Ernst que, em nosso conhecimento, não tinha aparecido ainda na literatura. A grande vantagem da fórmula é que permite calcular a velocidade angular de precessão em termos dos dois escalares fundamentais para um espaço-tempo estacionário e que está livre de aproximações. Usando uma aproximação linear para a relatividade geral, escrevemos uma fórmula geral em termos dos multipolos de Thorne para as correções multipolares até termos de quadrupolo de massa e octupolo de momento angular. Usando essa fórmula, geral reproduzimos de uma maneira mais simples os resultados conhecidos sobre o assunto, e além disso incluímos em nossa análise o caso em que o espaço-tempo é descrito por uma solução exata das equações de Einstein com quadrupolo arbitrário.

Referências Bibliográficas

[1] J. Lense und H. Thirring, Phys. Z. **19**, 156 (1918).

[2] L. I. Schiff, Proc. of the Nat. Academy of Sciences of the USA **46**, 871 (1960).

[3] Para informaçãoes técnicas sobre o satélite GP-B ver: *http://einstein.stanford.edu/*

[4] *GP-B POST-FLIGHT ANALYSIS–FINAL REPORT TO NASA*(Disponivel para download na página:*http://einstein.stanford.edu/*)

[5] R. Beig and W. Simon, GRG **12**, 1003 (1980).

[6] Kip S. Thorne, Rev. Mod. Phys, **52**, 299 (1980).

[7] R. Geroch, J. Math. Phys. **11**, 1955 (1970).

[8] R. Geroch J. Math Phys. **11**, 2580 (1970).

[9] R. O. Hansen J. Math. Phys. **15**, 46 (1974).

[10] J. Ehlers, E. Rudolf, GRG **8**, 197 (1977).

[11] M. Mathisson, Acta Phys. Pol. **VI**, 218 (1937).

[12] A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc. **A209** 248 (1951).

[13] W. G. Dixon, Nuovo Cimento **34**, 317 (1964).

[14] W. G. Dixon, Proc. Roy. Soc. **A314**, 499 (1970); *ibid* **A319**, 509 (1970); Journ. Gen. Rel. Grav. **4**, 193 (1973); Phil. Trans. Roy. Soc. **277**, 59 (1974).

[15] G. Fodor, C. Hoenselaers and Z. Perjes, J. Math. Phys. **30**, 2252 (1989).

[16] A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffmann, Ann. Math. **39**, 65 (1938).

[17] V. A. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation* (Pergamon Press, The Macmillan Co., New York, 1964).

[18] E. Corinaldesi and A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc. **A209**, 259 (1951).

[19] F. A. E. Pirani, Acta Phys. Pol. **15**, 389 (1956).

[20] R. Micoulaut, Zeitschrift für Physik **206**, 394 (1967).

[21] J. Weyssenhoff e A. Raabe, Acta Phys. Pol. **9**, 7 (1947).

[22] J. Ehlers, Proc. of the Int. school of Physics Enrico Fermi, Course LXVII.

[23] R. Beig and W. Simon, Acta Phys. Austr. **53**, 249 (1981).

[24] A. Tomimatsu e H. Sato, Prog. Theor. Phys, **50** 95 (1973).

[25] R. J. Adler and A. S. Silbergleit, Internat. J. Theor. Phys. **39**, 1291 (2000).

[26] P. Teyssandier, Phys. Rev. D **16**, 946 (1977).

[27] H. Quevedo, Fortschr. Phys. **38**, 733 (1990).

[28] Y. Gürsel, Gen. Rel. Grav. **15**, 737 (1983).

[29] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, New York, 1973).

[30] H. Stephani, D. Kramer, M. Maccolum, C. Hoenselaers, E. Hertl, *Exact solutions of Einsteins field equations* (Cambridge, 2003).

[31] B. M. Barker and R. F. O'Connell, Phys. Rev. D **2**, 1428 (1970).

[32] R. J. Adler, Gen. Rel. Grav. **31**, 1837 (1999).

[33] V. S. Manko, I. D. Novikov, Clas. Quantum Grav. **9** 2477 (1992).

[34] J. M. Bardeen, S. A. Teukolsk , W. H. Press, Astrophysical J. **178**, 347 (1972).

[35] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1966).

[36] R. Geroch, J. Math. Phys. **12** 918 (1971).

A

Vetores de Killing

O movimento de uma partícula num campo gravitacional é determinado pelo princípio da ação mínima

$$\delta I = -m \int ds = 0, \tag{A.1}$$

de acordo com o qual a trajetória de uma partícula assume valores extremos entre dois pontos de sua trajetória. A fim de encontrar geodésicas podemos usar equivalentemente a ação

$$I = \int g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b ds, \tag{A.2}$$

consideremos agora uma transformação da forma $x^a \rightarrow x^a + \alpha \xi^a(x)$, com essa transformação, a métrica teria um acréscimo da forma $\delta g_{ab} = \alpha g_{ab,c} \xi^c$ e a variação total da ação seria dada por

$$\delta I = \alpha \int \dot{x}^a \dot{x}^b (L_\xi g)_{ab} ds + O(\alpha^2), \tag{A.3}$$

onde

$$(L_\xi g)_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a. \tag{A.4}$$

Para uma ação invariante para uma transformação do tipo mostrado acima teremos

$$(L_\xi g)_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0. \tag{A.5}$$

Um campo vetorial que satisfaça essa condição é chamado de vetor de Killing e está associado a uma simetria da ação, e portanto a uma quantidade conservada. Denotando a velocidade de uma partícula que descreve uma geodésica por u^a, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{D(u^a \xi_a)}{Ds} &= u^a \nabla_a u^b \xi_b \\ &= u^a u^b \nabla_a \xi_b + u^a \xi_b \nabla_a u^b \\ &= 0, \end{aligned} \tag{A.6}$$

o primeiro termo do lado direito é zero pela equação de Killing e o segundo pela equação da geodésica, e portanto temos a carga conservada $Q = \xi_a u^a$. Consideremos agora os vetores de Killing como um elemento do espaço tangente então escrevemos

$$\xi = \xi^a \partial_a, \tag{A.7}$$

e para qualquer campo vetorial ξ podemos encontrar um sistema de coordenadas onde $\xi = \partial/\partial\alpha$ onde α é uma coordenada. Em tal sistema de coordenadas a derivada de Lie fica

$$(L_\xi g)_{ab} = \frac{\partial}{\partial\alpha} g_{ab}, \tag{A.8}$$

então, se ξ é um vetor de Killing, g_{ab} é independente de α. Agora deduzimos outra formula importante, que relaciona um vetor de Killing com o tensor de Riemann. Temos por definição

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c - \nabla_b \nabla_a \xi_c = R_{abcd} \xi^d, \tag{A.9}$$

usando a equação de Killing na equação acima escrevemos

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c + \nabla_b \nabla_c \xi_a = R_{abcd} \xi^d, \tag{A.10}$$

escrevendo as permutações cíclicas dessa equação combinando e usando a propriedade $R^d_{[\ abc]} = 0$, chegamos a

$$2\nabla_b \nabla_c \xi_a = (R_{abcd} + R_{bcad} + R_{cabd}) \xi^d. \tag{A.11}$$

Então os vetores de Killing satisfazem

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c = R_{abcd} \xi^d \tag{A.12}$$

e, como consequência importante das equações (A.5) e (A.12), tiramos que ξ^a fica completamente determinado dados os valores de ξ^a e $\nabla_a \xi_b$ num ponto p. Para ver isso mais facilmente multiplicamos a equação (A.12) por $u^a u^b$, como u^a é uma geodésica, chegamos a

$$\frac{D^2 \xi_a}{Ds^2} + R_{abcd} u^b u^c \xi^d = 0, \tag{A.13}$$

que é a equação para o desvio geodésico. Vemos que o valor dessa equação é determinado fornecendo-se os valores de ξ^a e $D\xi^a/Ds$ num ponto p. Por outro lado multiplicando (A.5) por u^a obtemos

$$\frac{D\xi_b}{Ds} = u^a \nabla_b \xi_a, \tag{A.14}$$

e então precisamos apenas dos valores de ξ^a e $\nabla_a \xi_b$ num dado ponto p.

Transformação conforme

B

Em algumas partes desse trabalho fizemos uso do conceito de transformação conforme e nesse apêndice apresentaremos as principais fórmulas que foram usadas ao longo do texto. Se denotamos g_{ab} a métrica de uma variedade $\hat{M}$ então a métrica $g\ '_{ab}$ é dita conformalmente relacionada a g_{ab} se

$$g'_{ab} \;=\; \hat{\Omega}^2 g_{ab}, \tag{B.1}$$

onde $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}(x^a)$ é um escalar. E a métrica inversa é dada por

$$g'^{ab} \;=\; \hat{\Omega}^{-2} g^{ab}. \tag{B.2}$$

Usando essas relações, encontramos que os símbolos de Christoffel estão relacionados por

$$\Gamma'^a{}_{bc} \;=\; \Gamma^a{}_{bc} + C^a{}_{bc}, \tag{B.3}$$

onde

$$C^a{}_{bc} \;=\; -2\delta^a{}_{(b}\nabla_{c)} \ln\hat{\Omega} + g_{bc}g^{al}\nabla_l \ln\hat{\Omega}. \tag{B.4}$$

Com essa relação, vemos que o operador diferencial nos dois espaços se relacionam da forma

$$\nabla T^{b_1\ldots b_k}{}_{c_1\ldots c_l} = \nabla'_a T^{b_1\ldots b_k}{}_{c_1\ldots c_l} + \sum_i C^{b_i}{}_{ad} T^{b_1\ldots d\ldots b_k}{}_{c_1\ldots c_l} - \sum_j C^d{}_{ac_j} T^{b_1\ldots b_k}{}_{c_1\ldots d\ldots c_l}. \tag{B.5}$$

Agora podemos calcular a relação entre os tensores de Riemann dos dois espaços-tempos, usando a relação acima na definição de tensor de Riemann $2\nabla_{[a}\nabla_{b]}k_c = R_{abc}{}^d k_d$ encontramos

$$R'_{abc}{}^d \;=\; R_{abc}{}^d - 2\nabla_{[a}C^d{}_{b]c} + 2C^e{}_{c[a}C^d{}_{b]e}, \tag{B.6}$$

usando (B.4) na equação acima encontramos

$$R_{abc}^{'\ \ d} = R_{abc}{}^{d} + 2\delta^{d}{}_{[a}\nabla_{b]}\nabla_{c}\ln\hat{\Omega} - 2g^{de}g_{c[a}\nabla_{b]}\nabla_{e}\ln\hat{\Omega}$$
$$+ 2(\nabla_{[a}\ln\hat{\Omega})\delta^{d}{}_{b]}\nabla_{c}\ln\hat{\Omega} - 2(\nabla_{[a}\ln\hat{\Omega})g_{b]c}g^{df}\nabla_{f}\ln\hat{\Omega}$$
$$- 2g_{c[a}\delta^{d}{}_{b]}g^{ef}(\nabla_{[a}\ln\hat{\hat{\Omega}})\nabla_{f}\ln\hat{\Omega}, \quad \text{(B.7)}$$

contraindo nos índices b e d obtemos o tensor de Ricci

$$R_{ac}^{'} = R_{ac} + (n-2)\nabla_{a}\nabla_{c}\ln\hat{\Omega} + g_{ac}g^{de}\nabla_{d}\nabla_{e}\ln\hat{\Omega}$$
$$- (n-2)(\nabla_{a}\ln\hat{\Omega})(\nabla_{c}\hat{\Omega}) + (n-2)g_{ac}g^{de}(\nabla_{d}\ln\hat{\Omega})\nabla_{e}\ln\hat{\Omega}, \quad \text{(B.8)}$$

e contraindo a equação acima com $g^{'ac}$ obtemos o escalar de Ricci

$$R^{'} = \hat{\Omega}^{2}[R - 2(n-1)g^{ac}\nabla_{a}\nabla_{c}\ln\hat{\Omega} - (n-2)(n-1)g^{ac}(\nabla_{a}\ln\hat{\Omega})\nabla_{c}\ln\hat{\Omega}]. \quad \text{(B.9)}$$

Fórmulas equivalentes

C

Nesse apêndice mostramos que nossa fórmula (4.34) é equivalente a fórmula (23) da referência [26]. Usando a relação

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta\hat{r} - \hat{z}), \tag{C.1}$$

podemos escrever a equação (4.34) em termos dos vetores $\hat{r}$ e $\hat{z}$,

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l(2l-1)!!}{(l+1)!} \frac{S_l}{r^{l+2}}[(l+1)P_l(\cos\theta)\hat{r} + \cos\theta P_l^{'}(\cos\theta)\hat{r} - P_l^{'}(\cos\theta)\hat{z}]. \tag{C.2}$$

Usando a relação

$$P_{l+1}^{'}(\cos\theta) = (l+1)P_l(\cos\theta) + \cos\theta P_l^{'}(\cos\theta) \tag{C.3}$$

nós colocamos (C.2) na forma,

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l(2l-1)!!}{(l+1)!} \frac{S_l}{r^{l+2}}[P_{l+1}^{'}(\cos\theta)\hat{r} - P_l^{'}(\cos\theta)\hat{z}], \tag{C.4}$$

ou como

$$\mathbf{\Omega} = \frac{S}{r^3}(3\cos\theta\hat{r} - \hat{z} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l(2l+1)!!}{(l+2)l!} \frac{(S_l/S)}{r^l}[P_{l+1}^{'}(\cos\theta)\hat{r} - P_l^{'}(\cos\theta)\hat{z}]). \tag{C.5}$$

Identificando

$$S_{l+1} = -\frac{(l+2)!SK_lR^l}{2(2l+1)!!}, \tag{C.6}$$

obtemos a equação (23) da referência [26].