

Universidade Estadual de Campinas

**Aplicação das Funções de Quase-Probabilidade no
Estudo da Dinâmica de Emaranhamento.**

Liliana Sanz de la Torre

Orientadora **Profa. Dra. Kyoko Furuya**

Tese apresentada ao Instituto de Física
“Gleb Wataghin” como requisito para
a obtenção do título de Doutora em
Ciências.

Campinas, SP

13 de Agosto de 2003

A Carolina e Augusto.

Agradecimentos

Quero agradecer à professora Kyoko Furuya pela sua orientação, sua paciência (infinita) e seu grande zelo que não deu espaço para o desânimo, nem nos momentos mais difíceis nestes quatro anos de trabalho.

A Renato Moreira Angelo, pelas inúmeras discussões que foram fundamentais no desenvolvimento desta tese e sua insistência sobre o trabalho em grupo, sendo isso o que fez toda a diferença.

Também quero agradecer a José Geraldo Peixoto de Faria e à professora Maria Carolina Nemes pelas discussões sobre sistemas abertos e as propostas de cálculo das funções de Wigner associadas às soluções do operador densidade de suas autorias. A Giancarlo Q. Pellegrino pelas discussões sobre o método de cálculo numérico usado no desenvolvimento desta tese.

Ao professor Antonio Vidiella Barranco pelas discussões sobre a função de Wigner dos estados de campo. Também devo a ele e ao professor Marcus A. M. de Aguiar valiosas observações e sugestões no Exame de Pre-requisito.

A Jerson pela sua insistência para que eu viesse para a UNICAMP, e pela grande ajuda desde os primeiros dias. A Karen Fonseca, por mandar aquele abraço para Kyoko, cuja consequência foram estas cento e poucas páginas. A Carol pela sua amizade e, sobretudo, pela sua grande sensibilidade aos problemas de todos que a rodeiam. As minhas amigas Valeria e Maya, por “cuidar” de mim tantas vezes. A Renato, de novo, pela sua amizade. A Emerson pelas discussões dos últimos tempos e pela força. A Ana Luiza pela suas muitas gentilezas e aos colegas da sala de Estudos do DFMC pelo maravilhoso ambiente de trabalho e camaradagem. Aos meus pais e irmão pela ajuda nos momentos de crise. A Carolina pelas maiores alegrias da minha vida. E a Augusto, por tudo.

Finalmente, agradeço ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo apoio financeiro a través do processo No. 146010/1999-0.

Resumo

A dinâmica do emaranhamento de sistemas bipartites ideais é analisada através da entropia linear reduzida e funções de quase-probabilidade no regime semiclássico. Os modelos abordados são o oscilador quártico bidimensional e o maser de Dicke. O primeiro está relacionado com a propagação de dois modos de campo num meio Kerr e o segundo descreve a interação de um modo do campo eletromagnético com uma coleção de N átomos de dois níveis não interagentes entre si. No primeiro modelo, além da interação não linear, biquadrática, consideramos a interação bilinear dipolo-dipolo na aproximação de onda girante. Encontramos as condições nas quais o emaranhamento entre os dois modos é reversível, onde o instante no qual o estado se torna separável depende do tipo de estado inicial escolhido. Quando o estado inicial dos osciladores é um produto de estados de Fock, ou um produto de estados de Fock e um estado coerente, o responsável pelo emaranhamento é a interação bilinear. Entretanto, se o estado inicial é um produto de estados coerentes, a interação não linear é a principal responsável pela não separabilidade dos subsistemas. No limite de $\hbar \rightarrow 0$, a perda de pureza dos subsistemas torna-se praticamente irreversível e a dinâmica da entropia linear reduzida e da função de Husimi nos permitem mostrar que existem dois regimes temporais: antes e depois do início das auto-interferências. Mostramos que o tempo que separa os dois regimes se comporta de forma similar ao tempo de Ehrenfest já que tem a mesma dependência na constante de Planck.

No modelo de Dicke, analisamos a evolução temporal da função de Wigner atômica no limite de muitos átomos para estados iniciais onde os dois subsistemas são preparados em estados coerentes e aprofundamos no conhecimento da dinâmica da perda de pureza baseados nas informações da dinâmica clássica. Os nossos resultados, inéditos, da função de Wigner atômica indicam que existe uma relação clara entre a localização e deslocalização do estado atômico em cada uma das variáveis angulares da esfera de Bloch, nos mínimos e máximos sucessivos da entropia linear reduzida.

Abstract

Entanglement dynamics of two ideal bipartite systems is analyzed using reduced linear entropy and quasiprobability distribution functions in the semiclassical regime. Two models are studied: the quartic bidimensional oscillator and the Dicke's Maser model. The first one describes the propagation of two monochromatic field modes in a Kerr medium, and the second describes the interaction of one mode of electromagnetic field with a collection of N non-interacting two-levels atoms. In the first model, besides the nonlinear interaction, we have considered the bilinear dipole-dipole interaction in the Rotating Wave Approximation. We have found the conditions at which the entanglement is reversible, and that recoherence times depend on the type of the chosen initial state. When a direct product of Fock states or a product of a coherent state and a Fock state are considered as initial states, bilinear interaction is the responsible for the entanglement. Whereas, if the initial state is a product of coherent states, the nonlinear interaction is the one responsible for the non-separability of the subsystems. In the limit of $\hbar \rightarrow 0$, the loss of purity of the subsystems becomes practically irreversible. The behavior of reduced linear entropy and the Q-function allow us to show that there exist two regimens in time: before and after the beginning of the self-interferences. We have show that the time that separates the two regimes has the same dependence in the Planck's constant as the Ehrenfest time.

In the Dicke's maser model, we have analyzed the temporal evolution of atomic Wigner function in the limit of many atoms for initial states where the two subsystems are prepared in coherent states. This allowed us to deepen our knowledge about the dynamics of the loss of purity based on the phase space classical dynamics. Our results about the dynamics of atomic Wigner function indicates that there is a clear relation between localization and delocalization of the atomic state, in terms of angular variables in Bloch sphere and the minima e maxima of the reduced linear entropy.

Conteúdo

Introdução	1
1 Conceitos Fundamentais.	7
1.1 O Formalismo do Operador Densidade.	8
1.2 Quantização do campo eletromagnético.	11
1.3 Funções de quase-probabilidade.	18
1.3.1 A função de Distribuição de Husimi.	20
1.3.2 A função de Wigner.	20
1.4 O Oscilador Quártico Bidimensional.	22
1.5 Modelo de Jaynes-Cummings e o maser de Dicke.	26
1.5.1 Estados atômicos e a função de Wigner atômica.	29
2 Função de Wigner em dois modelos de sistemas abertos.	35
2.1 Efeitos da temperatura sobre superposições de estados coerentes.	36
2.1.1 Solução da Equação Mestra.	36
2.1.2 Cálculo da função de Wigner.	38
2.2 Dissipação no sistema átomo-campo.	44
2.2.1 Operador densidade para o modelo Jaynes-Cummings com dissipação.	44
2.2.2 Evolução temporal das funções de Wigner reduzidas.	47
3 O oscilador quártico bidimensional.	57
3.1 Solução da Equação de Schrödinger e dinâmica do emaranhamento.	59
3.1.1 Solução analítica para um produto direto de estados de Fock	60
3.1.2 Evolução temporal do produto de estados coerentes.	65
3.1.3 Evolução Temporal do estado inicial $ n_1\rangle_1 \otimes \alpha_2\rangle_2$	71

3.2	Formação de Gatos de Schrödinger.	75
3.3	Limite semiclássico da dinâmica do produto de estados coerentes. . .	80
3.3.1	Regime de tempos curtos e a escala de Ehrenfest.	82
3.3.2	Dinâmica a tempos longos e irreversibilidade.	85
4	Funções de Wigner atômicas e o Maser de Dicke.	89
4.1	Hamiltoniano de Dicke e resultados preliminares.	91
4.2	Emaranhamento no caso integrável.	94
4.2.1	Dinâmica da função de Wigner do subsistema atômico.	100
4.3	Emaranhamento no caso não integrável.	113
4.3.1	Dinâmica da Função de Wigner.	118
5	Conclusões.	123
A	Detalhes na análise do Oscilador quártico bidimensional.	127
A.1	Evolução do produto de estados de número	127
A.2	Evolução do produto de estados coerentes	130
B	Projeções da trajetória clássica no subespaço atômico.	135

Lista de Figuras

1.1	Funções de Wigner do campo eletromagnético no plano (q, p)	23
1.2	Representação esférica da função de Wigner sobre a esfera de Bloch. .	32
1.3	Representação polar esférica da função de Wigner atômica.	33
2.1	Curvas de nível da função de Wigner do gato par a $T = 0K$ para os tempos indicados e $\alpha = (2, 2)$, $\kappa/\omega_0 = 0.1$ e $\omega_0 = 1$	40
2.2	Evolução da função de Wigner do mesmo estado inicial para os tempos indicados e $T = 0.2K$, $\alpha = (2, 2)$, $\kappa/\omega_0 = 0.1$ e $\omega_0 = 1.0$	41
2.3	Evolução da função de Wigner do mesmo estado inicial para tempos indicados e $T = 4K$, $\alpha = (2, 2)$, $\kappa/\omega_0 = 0.1$ e $\omega_0 = 1.0$	42
2.4	Funções de Wigner Reduzidas dos subsistemas (a) campo e (b) átomo no tempo inicial e $\alpha = (x, y) = (2, 0)$	49
2.5	Função de Wigner reduzida do campo no plano β sem dissipação ($\alpha = 2$, $\kappa/\omega_0 = 0$ e $\omega_0 = 1$).	50
2.6	Função de Wigner atômica reduzida no caso não dissipativo usando os mesmos parâmetros da Fig. 2.5.	51
2.7	Função de Wigner reduzida para o campo no plano β para $\alpha = 2$, $\kappa/\omega_0 = 0.1$ e $\omega_0 = 1$	53
2.8	Parametrização esférica da função de Wigner reduzida atômica para $\alpha = 1$ e $\kappa/\omega_0 = 0.01$	54
2.9	Parametrização esférica da função de Wigner reduzida atômica para $\alpha = 1$ e $\kappa/\omega_0 = 0.1$	55
2.10	Parametrização esférica da função de Wigner reduzida atômica para $\alpha = 2$ e $\kappa/\omega_0 = 0.1$	56
3.1	Entropia linear reduzida associada ao produto de estados de Fock. . .	64

3.2	Entropia linear reduzida associada ao produto de estados coerentes. . .	70
3.3	Entropia linear reduzida para o estado inicial dado pelo produto $ n_1\rangle_1 \otimes \alpha_2\rangle_2$ e diferentes valores de n_1	74
3.4	Entropia linear reduzida para o estado inicial dado pelo produto $ n_1\rangle_1 \otimes \alpha_2\rangle_2$ e diferentes escolhas de ω_g e ω_λ	76
3.5	Curvas de nível da função- Q para algumas superposições de estados coerentes.	80
3.6	Evolução temporal da entropia linear reduzida para diferentes valores do parâmetro de classicalidade $\mathcal{R}$	83
3.7	Curvas de nível da função- Q no regime de delocalização de fase. . . .	86
3.8	Tempo de ruptura T_r como função de $\hbar$	87
3.9	Curvas de nível da função- Q no regime de auto-interferência.	88
4.1	Seção de Poincaré do sub-sistema atômico considerando o modelo de Dicke na aproximação de onda girante.	95
4.2	Entropia linear como função do tempo para $J = 10.5$ e as condições iniciais da tabela 4.2.	97
4.3	Projeção da trajetória clássica para cada uma das condições iniciais da tabela 4.2.	99
4.4	Evolução temporal da Entropia Linear Reduzida Atômica (ELRA) associada à Condição Inicial (C.I.) do toro interno.	100
4.5	Funções de Wigner Atômicas (FWA) na representação polar esférica para $J = 10.5$, no instante inicial.	103
4.6	Funções de Wigner Reduzidas Atômicas (FWRA) para $J = 10.5$ considerando a condição inicial localizada sobre um toro interno.	106
4.7	Evolução temporal da função de Wigner atômica na representação polar esférica. C.I. sobre um toro interno.	108
4.8	FWRA para $J = 10.5$ considerando a condição inicial localizada perto da separatriz.	111
4.9	FWRA para $J = 10.5$ considerando a condição inicial localizada perto da borda.	112
4.10	Evolução temporal da função de Wigner atômica na representação polar esférica. C.I. separatriz (cinza escuro) e borda (cinza claro). . .	114

4.11	Seção de Poincaré do subsistema atômico onde $J = 10.5$, $\omega_0 = 1.0$, $\hbar = 1.0$ e energia média do sistema $E/N = 1$. Aqui $G = 0.5$ e $G' = 0.2$ e os pontos indicam as condições iniciais da escolhidas. . . .	115
4.12	Evolução da ERLA para as C.I.s escolhidas centradas sobre os pontos da seção da Fig. 4.11.	117
4.13	FWRA para $J = 10.5$ e considerando as condições iniciais localizadas em regiões regulares da seção de Poincaré.	119
4.14	FWRA para $J = 10.5$ e considerando as condições iniciais localizadas na região caótica.	121
A.1	Colapsos e ressurgimentos na evolução do valor esperado do operador $\hat{Q}_k$ para $\frac{\omega_0}{\omega_g} = 20$, $\frac{\omega_\lambda}{\omega_g} = 2$, $q_{k0} = p_{k0} = 1.0$, $\Lambda = 4.0$ e $\hbar = 1$	132
B.1	Projeção das órbitas clássicas no espaço de Spin nas condições iniciais pertencentes as ilhas principais (a) e a região caótica (b).	135

Lista de Tabelas

4.1	Condições iniciais escolhidas no caso do sistema integrável. J é o spin total do sub-sistema atômico.	95
4.2	Resultados do cálculo numérico de $\langle \hat{J}_z \rangle$ para o instante inicial e as condições iniciais escolhidas e diferentes valores de J	96
4.3	Tempos correspondentes a máximos e mínimos da entropia linear associados as três condições iniciais escolhidas.	104
4.4	Convenções usadas nos gráficos das FWRA, W_θ e W_ϕ . Os tempos correspondentes aos mínimos da entropia tem a mesma convenção que o máximo com igual número de ordenamento.	104

Introdução

Processos envolvendo informação quântica, tais como computação, criptografia e teletransporte, representam novas áreas nas quais exploram-se os fenômenos intrínsecos à Mecânica Quântica [1]. Nesses contextos, superposições de estados e emaranhamento são usados na criação de novos algoritmos computacionais [2]. Na procura da realização do *computador quântico*, sistemas físicos variados têm sido considerados como candidatos: armadilhas de ions [3, 4], eletrodinâmica quântica de cavidades [5], pontos quânticos [6] e Condensados de Bose-Einstein [7], entre outros. Independentemente do sistema de interesse, um dos objetivos da pesquisa básica nestas áreas está relacionada com o estudo da dinâmica do emaranhamento. Isto é, dada uma certa condição inicial separável, como podemos criar estados emaranhados, quantificar o grau de emaranhamento e determinar condições em que o sistema volta a ser separável, ou seja, os subsistemas são puros novamente.

Por outro lado, cem anos após o surgimento da teoria quântica, a correspondência entre esta descrição e a mecânica clássica é ainda um assunto não fechado, gerando discussões sobre questões fundamentais. Particularmente fenômenos como a perda de pureza e coerência [8, 9] no limite clássico são questões bastante debatidas na literatura. Motivados no trabalho de Zurek e Paz [10], voltado para a análise do efeito do caos no processo de decoerência, foi proposto por Furuya, Nemes e Pellegrino [11], e continuado no trabalho de Angelo *et al.* [12, 13], o estudo dos efeitos do caos no processo de emaranhamento de um sistema fechado, bipartite, onde um modo de campo eletromagnético e N átomos de dois níveis interagem no regime semiclássico. Nestes trabalhos, a dinâmica do análogo clássico do sistema foi usada como guia para mostrar como a taxa de emaranhamento apresenta sensibilidade às condições iniciais.

Uma outra ferramenta usada neste tipo de estudo são as funções de quase-

probabilidade, definidas a partir do operador densidade do sistema. Elas têm sido de grande utilidade na análise da conexão entre quântica-clássica pois permitem a representação da dinâmica de um sistema quântico no espaço de fase [14]. Das possíveis definições de funções de quase-probabilidade, queremos destacar duas: a função de Husimi [15] e a função de Wigner [16]. A primeira é definida sempre positiva, característica que compartilha com as distribuições de probabilidade clássicas. Pode ser usada para comparar diferenças entre a dinâmica quântica de estados inicialmente coerentes e a evolução temporal de um ensemble clássico de condições iniciais [17, 18]. A segunda pode apresentar valores negativos como no caso de uma superposição de estados coerentes do oscilador harmônico, por exemplo. Este aspecto é explorado ao estudar o processo de decoerência, isto é a evolução de um estado de superposição quântico até um estado de mistura estatística num sistema aberto. Na literatura abunda este tipo de pesquisa sendo um exemplo o estudo da dinâmica de um oscilador, inicialmente construído no estado mencionado acima, em contato com um reservatório [19, 20, 21].

A função de Wigner permite estimar o tempo de decoerência, tempo durante o qual um estado de superposição perde as franjas de interferência, as quais estão associadas à parte negativa da função. Uma experiência para medir diretamente o valor da função de Wigner [16], foi proposta por Lutterbach e Davidovich [22], envolvendo eletrodinâmica quântica de cavidades ou CQE (*Cavity Quantum Electrodynamics*) e armadilhas de íons. Posteriormente, este esquema foi realizado, primeiro medindo a função num único ponto [23]; logo depois, foi medida a função de Wigner completa para o estado fundamental do campo e o estado de um fóton [24]. Outra proposta teórica adaptada a um sistema diferente, como o esquema para experimentos QND (do inglês *Quantum NonDemolition*) que consiste de um interferômetro onde campos interagem num meio não linear, são encontradas na literatura [25].

O objetivo geral do nosso trabalho consiste no estudo da dinâmica do emaranhamento num sistema bipartite com a ajuda do formalismo de matriz densidade e das funções de quase-probabilidade e da análise do comportamento do sistema elegido no limite semiclássico. Dois modelos de interesse são considerados: dois modos bosônicos acoplados via uma interação que possui um termo bilinear e outro biquadrático e o maser de Dicke.

Escolhendo apropriadamente as constantes associadas a cada um dos termos da

interação não linear do Hamiltoniano associado ao primeiro modelo, é possível obter soluções analíticas. A escolha é feita de modo que todos os termos do Hamiltoniano comutem entre si. Desta forma, o nosso interesse neste modelo é a obtenção analítica do estado evoluído ao considerar diferentes tipos de condições iniciais, de maneira que possamos estabelecer qual dentre os termos de interação governa o emaranhamento.

Este Hamiltoniano pode ser usado para descrever a propagação de dois modos de campo eletromagnético num meio Kerr. Neste contexto, o termo bilinear está relacionado com a interação dipolo-dipolo na aproximação de onda girante (RWA do inglês *Rotating-Wave Approximation*). O termo não linear inclui potências quárticas dos operadores de criação e destruição dos osciladores e correspondem a dois tipos diferentes: os chamados termos de auto-modulação, da forma $(\hat{a}^\dagger \hat{a})^2$, que só contêm operadores associados a um único subsistema e os termos *Cross-Kerr* onde aparecem operadores dos dois osciladores [26]. Outra situação que pode ser descrita usando este Hamiltoniano efetivo é a interação de duas espécies de condensados de Bose-Einstein. Neste caso, a interação bilinear descreve o acoplamento Josephson entre os dois condensados e o termo não linear e o hamiltoniano efetivo que descreve as colisões inter e intra espécies. Neste contexto, as constantes associadas ao termo não linear estão relacionadas com os comprimentos de espalhamento que caracterizam estas colisões [27].

Estudamos a dinâmica associada ao Hamiltoniano quando o estado inicial escolhido é inicialmente preparado num estado puro e sendo ele um produto de estados de Fock ou de estados coerentes. Já que é possível calcular a forma explícita do estado global para qualquer instante de tempo, analisamos a dinâmica do emaranhamento usando os nossos resultados para a entropia linear reduzida. Analisamos também as condições que devem ser cumpridas para a obtenção de superposições de estados coerentes separados no espaço de fase, conhecidos comumente como estados de “gato de Schrödinger”. Para isto, nos servimos tanto da análise do comportamento da entropia linear quanto da função de distribuição de Husimi. Finalmente apresentamos o comportamento da entropia linear reduzida no limite semiclássico, sendo o estado inicial um produto de estados coerentes.

Na segunda parte da tese, continuando com a série de trabalhos iniciado por Furuya, Nemes e Pellegrino, estudamos o maser de Dicke [28]. Este modelo descreve

uma coleção de N átomos não interagentes entre si, que por sua vez interagem com um modo de campo eletromagnético dentro de uma cavidade. Neste caso, é considerado o termo dipolar da interação radiação-materia, tanto na aproximação de onda girante como para o caso onde os termos contra-girantes são mantidos. Queremos explorar a dinâmica do emaranhamento entre o subsistema atômico e o campo no regime semiclássico onde podemos fazer a conexão entre a descrição clássica e quântica do problema, utilizando a função de Wigner do subsistema atômico.

Dividimos este trabalho em cinco partes organizadas da seguinte forma: no Capítulo 1 revisamos alguns conceitos fundamentais da mecânica quântica que usaremos no decorrer da tese. Discutimos brevemente as propriedades das funções de quase-distribuição: a função de Husimi [15] e a função de Wigner [14]. Da mesma forma, apresentamos os Hamiltonianos associados aos nossos modelos de interesse. No Capítulo 2, usamos a função de Wigner no estudo do processo de decoerência em dois sistemas abertos onde a solução analítica do operador densidade é conhecida. A análise destes exemplos ajuda na compreensão das diferenças entre os processos de emaranhamento e decoerência, que no contexto deste trabalho se referem respectivamente ao processo de perda de coerência parcial devida à interação de: (i) dois subsistemas quânticos de poucos graus de liberdade sem contato com reservatório (emaranhamento); (ii) pela interação do sistema “menor” com um reservatório representado por um segundo sistema de muitos graus de liberdade (decoerência). No primeiro destes exemplos é calculada a função de Wigner para um sistema que consiste de um modo de campo em contato com reservatório a temperatura finita, resultado amplamente discutido na literatura [19, 29]. No segundo exemplo são calculadas a função de Wigner conjunta do sistema de átomo-campo e as correspondentes funções reduzidas dos subsistemas, onde o modelo que descreve a interação entre eles é o Jaynes-Cummings na aproximação dispersiva e a dissipação do campo a temperatura nula é levada em consideração.

No Capítulo 3 apresentamos uma discussão analítica da dinâmica do emaranhamento do sistema que descreve a interação de dois modos bosônicos e a solução exata para três tipos diferentes de condições iniciais é apresentada. Também são discutidas condições de separabilidade do estado global, reversibilidade e recorrência. Na última seção desse capítulo, discutimos o comportamento do sistema no limite de $\hbar \rightarrow 0$. Estudamos os efeitos do emaranhamento sobre o estado dos subsis-

temas usando tanto a entropia linear reduzida como a função de distribuição de Husimi reduzida. No Capítulo 4 estudamos a dinâmica do emaranhamento do subsistema atômico, no problema da interação de uma coleção de N átomos e campo eletromagnético descrito pelo modelo de Dicke dentro do limite de muitos átomos. Em particular, nos concentraremos na relação entre o emaranhamento e a localização e delocalização do estado de N átomos, além da sensibilidade desta relação às condições iniciais. Usaremos para este propósito a função de Wigner atômica [30]. Finalmente, o Capítulo 5 é dedicado às nossas conclusões e perspectivas futuras de pesquisa.

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais.

Neste capítulo apresentamos as ferramentas teóricas usadas no desenvolvimento desta tese. Conceitos fundamentais como o formalismo da matriz densidade [31] e algumas definições que serão usadas na análise da dinâmica do emaranhamento dos sistemas bipartites escolhidos, serão brevemente revisadas na Seção 1.1. Uma rápida revisão sobre a quantização do campo eletromagnético numa cavidade ressonante [32] será apresentada na Seção 1.2, onde também definiremos os estados de Fock, os estados coerentes do oscilador harmônico [33], superposições dos mesmos (estados de gato de Schrödinger) e a mistura estatística. Na Seção 1.3, enumeraremos as propriedades das funções de quase-probabilidade [32, 14] e definiremos aquelas que usaremos nos capítulos posteriores: A função de Husimi [15] e a função de Wigner [16]. Na Seção 1.4 apresentaremos o Hamiltoniano que descreve dois modos bosônicos acoplados via dois termos de interação: o termo dipolar na aproximação de onda girante e uma interação não-linear. Por último, na Seção 1.5 revisaremos alguns conceitos relacionados com o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings [34], que descreve a interação entre um átomo e o campo eletromagnético dentro de uma cavidade, e sua extensão para uma coleção de N átomos, o modelo de Dicke [28]. Também definiremos alguns estados associados a uma coleção de N átomos: o estado de Dicke e o estado coerente atômico [35]. Apresentaremos a definição de função de Wigner atômica [36, 30], a qual será usada para estudar os efeitos do emaranhamento do sistema atômico com o campo sobre a localização do estado atômico.

1.1 O Formalismo do Operador Densidade.

Na mecânica quântica, dado um certo Hamiltoniano com autovalores e autoestados definida, podemos descrever qualquer estado puro como uma superposição de autoestados $|\psi_k\rangle$ assim

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle, \quad (1.1)$$

Toda a informação sobre o estado está reunida no vetor $|\psi\rangle$ e os coeficientes c_k são interpretados como amplitudes de probabilidade. O valor esperado de qualquer observável pode ser calculado usando a Eq.(1.1).

No contexto da física estatística, o conceito de “probabilidade” está relacionado com o fato de não possuir a informação completa sobre o estado do sistema. Neste formalismo (tomamos de novo a base de autoestados $|\psi_k\rangle$), um sistema é descrito como um estado *misto* onde tem probabilidade (estatística) p_1 de ocupar o estado $|\psi_1\rangle$, probabilidade p_2 de ocupar o estado $|\psi_2\rangle$ e assim por diante, tal que $\sum_k p_k = 1$. Consequentemente, não é possível escrever uma mistura estatística na forma de um vetor de estado.

No estudo de fenômenos de emaranhamento ou processos de decoerência, precisamos de ambas categorias de estado, puro e misto, devido ao fato de que estamos interessados em descrever situações onde estados puros evoluem para misturas e viceversa. O formalismo do *Operador Densidade* ou Matriz Densidade é uma ferramenta importante pelo fato de que descreve apropriadamente as duas situações. A definição geral de matriz densidade, expandida na base de autoestados $|\psi_k\rangle$ é dada por

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{i,j} \rho_{ij}(t) |\psi_i\rangle \langle\psi_j|. \quad (1.2)$$

onde cumpre-se que $\rho_{ji} = \rho_{ij}^*$. Esta definição descreve apropriadamente tanto os sistemas puros quanto as misturas estatísticas. No primeiro caso, $\rho_{ij} = c_i(t) c_j^*(t)$ onde os coeficientes c_k correspondem aqueles definidos no vetor de estado. Consequentemente, se conhecemos o estado (puro) do sistema evoluído no tempo $|\Phi(t)\rangle$, podemos definir o operador densidade como

$$\hat{\rho}(t) = |\Phi(t)\rangle \langle\Phi(t)| \quad (1.3)$$

Numa mistura estatística $\rho_{ii} = p_i < 1$ e os elementos fora da diagonal são nulos. Os elementos diagonais da matriz densidade são chamados *populações*, enquanto

que os elementos fora da diagonal recebem o nome de *coerências*. Em ambos os casos, o formalismo abrange os dois conceitos sem ambigüidades e permite calcular adequadamente valores médios e o valor do traço do quadrado do operador densidade. A última quantidade permite estabelecer se um determinado sistema está num estado puro ou num estado misto como veremos a seguir:

1. **Valores médios:** A definição do valor médio do operador $\hat{A}$ usando a matriz densidade é dado pela expressão

$$\begin{aligned}\langle \hat{A} \rangle &= \text{Tr} [\hat{\rho}(t) \hat{A}] \\ &= \sum_k \langle \psi_k | \hat{\rho}(t) \hat{A} | \psi_k \rangle.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Vemos que, no caso do estado puro, o valor esperado do operador $\hat{A}$ é dado por

$$\langle \hat{A} \rangle_{\text{puro}} = \sum_{i,j} \rho_{ij} A_{ji} = \sum_{i,j} c_i(t) c_j^* A_{ji}$$

onde $A_{ji} = \langle \psi_j | \hat{A} | \psi_i \rangle$ é o elemento de matriz do operador $\hat{A}$ projetado na base cujos elementos são $|\psi_k\rangle$. No caso do estado misto, a média estatística do mesmo operador está dada por

$$\langle \hat{A} \rangle_{\text{mistura estatística}} = \sum_i \rho_{ii} A_{ii} = \sum_i p_i A_{ii}$$

2. **Pureza.** No caso do estado puro, o operador densidade é por sua vez um projetor no espaço de Hilbert definido pelos autoestados $|\psi_k\rangle$. Como consequência disto, cumpre-se que

$$\hat{\rho}^2(t) = \hat{\rho}(t) \quad (1.5)$$

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2(t) = 1. \quad (1.6)$$

Já no caso de um estado de mistura estatística, o operador densidade não é um projetor, o quadrado do mesmo é diferente do operador densidade e assim

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2(t) \neq 1.$$

Independentemente se o operador descreve o estado puro ou misto, cumpre-se a conservação da probabilidade expressa pela igualdade

$$\text{Tr} \hat{\rho}(t) = 1$$

e a evolução temporal do operador densidade obedece a equação

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)].$$

Podemos estender o formalismo de matriz densidade para o caso dos sistemas bipartites. Neste caso, dois subsistemas diferentes (1) e (2) formam o sistema global (1+2), sendo o espaço definido pelo produto tensorial dos subespaços correspondentes. Isto pode ser expresso como

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(2).$$

Se $\hat{\rho}(t)$ é o operador densidade global, $|\psi_k\rangle_1$ são os estados que formam a base associada ao espaço $\mathcal{E}(1)$ ($k = 1..n_1$) e $|\psi_k\rangle_2$ aos correspondentes elementos da base do espaço $\mathcal{E}(2)$ ($k = 1..n_2$), podemos definir os operadores densidade reduzidos, através do *traço parcial* como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_i(t) &= \sum_k \langle \psi_k |_j \hat{\rho}(t) | \psi_k \rangle_j \\ &= \text{Tr}_j \hat{\rho}(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$. Estes operadores tem as mesmas propriedades do operador densidade global e permitem a descrição total dos subsistemas envolvidos. Em particular pode-se demonstrar que

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho}_1(t) \hat{A}_1]$$

onde, para este caso, $\hat{A}$ é a extensão no espaço global do observável $\hat{A}_1$ que atua só no subespaço $\mathcal{E}_1$.

Os operadores reduzidos cumprem igualmente a conservação da probabilidade

$$\text{Tr}_i \hat{\rho}_i = 1$$

e as propriedades do quadrado da matriz re-escritas como

$$\text{Tr}_i \hat{\rho}_i^2(t) = 1$$

se o estado é puro e

$$\text{Tr}_i \hat{\rho}_i^2(t) < 1$$

se o estado é misto. Como consequência das propriedades da operação do traço parcial, podemos medir o grau de emaranhamento entre os subsistemas usando os operadores reduzidos, $\hat{\rho}_i(t)$, sendo uma boa medida a *entropia linear reduzida* definida como:

$$\delta_i(t) = 1 - \text{Tr}_i \hat{\rho}_i^2(t). \quad (1.8)$$

Das propriedades do traço, vemos que $\delta_1 = \delta_2$ para qualquer tempo. Se a entropia linear reduzida é nula em algum instante, quer dizer que os estados dos dois subsistemas são estados puros, e o estado global pode ser escrito como o produto direto dos mesmos. Usaremos o termo *estado separável*, para descrever tal situação. A análise da evolução da entropia linear reduzida permite estabelecer se um determinado sistema interage de tal forma que o emaranhamento é irreversível ou existem condições nas quais o sistema se torna separável ou recorrente, voltando ao estado original depois de um certo período.

1.2 Quantização do campo eletromagnético.

As equações de Maxwell que descrevem o campo eletromagnético confinado numa cavidade, na ausência de cargas e correntes em unidades SI ($c^2 = \mu_0 \epsilon_0$) tomam a forma [37]

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde $\mathbf{E}$ é o campo elétrico, $\mathbf{H}$ o campo magnético, ϵ_0 é a permissividade elétrica e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. A partir destas equações, obtemos a equação de onda para o campo elétrico

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.10)$$

A velocidade de propagação do campo é igual a velocidade da luz no vácuo c . Consideremos o campo confinado dentro de uma cavidade de comprimento L , tal que $0 \leq z \leq L$. Resulta ser conveniente considerar o campo elétrico polarizado na

direção x , $\mathbf{E} = (E_x(z, t), 0, 0)$. Ao expandir E_x nos modos normais da cavidade temos [32]

$$E_x(z, t) = \sum_j A_j q_j(t) \sin(k_j z) \quad (1.11)$$

onde o índice $j = 1, 2, 3, \dots$ numera os modos, $k_j = j\pi/L$ é a componente na direção z do vetor de onda $\mathbf{k}$ e definimos

$$A_j = \left(\frac{2\omega_j^2 m_j}{V\epsilon_0} \right)^{1/2}$$

O campo descrito pela expressão anterior é solução da equação de onda, como pode ser verificado substituindo a Eq.(1.11) na expressão (1.10). Aqui ω_j é a frequência de cada modo normal, q_j tem dimensão do comprimento e corresponde à amplitude do modo, V é o volume da cavidade e m_j é uma constante com unidades de massa, incluída aqui para estabelecer a analogia com o modelo de oscilador harmônico, como veremos a seguir. Usando as equações de Maxwell e a forma do campo elétrico, obtemos a expressão para o campo magnético $\mathbf{H}$, sendo este um vetor cuja única componente não nula é H_y

$$H_y(z, t) = \sum_j A_j \left(\frac{\epsilon_0 \dot{q}_j(t) L}{j\pi} \right) \sin(k_j z). \quad (1.12)$$

A energia associada ao campo eletromagnético é calculada usando

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V d\tau (\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2) \quad (1.13)$$

e a integral é definida sobre todo o volume da cavidade. Ao substituir no integrando a forma dos campos elétrico e magnético, Eq.(1.11) e Eq.(1.12), obtemos a forma da função Hamiltoniana clássica

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_j \left(m_j \omega_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{m_j} \right) \quad (1.14)$$

onde $p_j = m_j \dot{q}_j$ é o momento canônico do j -ésimo modo. Vemos como o campo de radiação dentro de uma cavidade ressonante é expresso como a soma de osciladores harmônicos independentes, onde cada oscilador corresponde a um modo normal. Já que $\mathcal{H}$ está expresso como função das variáveis canônicas conjugadas, q_j e p_j podemos usar o processo de quantização canônica e encontrar a expressão do Hamiltoniano que descreve o problema mecânico-quântico. Associando os operadores $\hat{q}_j$ e $\hat{p}_j$ às

variáveis q_j e p_j , onde os operadores cumprem a relação de comutação dada por $[\hat{q}_j, \hat{p}_{j'}] = \delta_{j,j'}$, obtemos o Hamiltoniano para o campo quantizado em função dos operadores $\hat{q}_j$ e $\hat{p}_j$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_j \left(m_j \omega_j^2 \hat{q}_j^2 + \frac{\hat{p}_j^2}{m_j} \right) \quad (1.15)$$

Novos operadores são definidos como ($\imath = \sqrt{-1}$)

$$\begin{aligned} \hat{a}_j &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m_j \omega_j}} (m_j \omega_j \hat{q}_j + \imath \hat{p}_j) \\ \hat{a}_j^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m_j \omega_j}} (m_j \omega_j \hat{q}_j - \imath \hat{p}_j). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Estes operadores são denominados de criação e de aniquilação devido a sua relação com os autoestados do Hamiltoniano, como veremos depois. Ao reescrever a Eq.(1.15) como função de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ obtemos

$$\hat{H} = \hbar \sum_j \omega_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right) \quad (1.17)$$

Vamos considerar só um dos modos normais do campo confinado na cavidade. Porém, denominando $\omega_1 = \omega_0$ e usando $\hat{a}_1 = \hat{a}$, podemos re-escrever o Hamiltoniano para um campo monocromático dentro de uma cavidade

$$\hat{H}_c = \hbar \omega_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.18)$$

sendo os autovalores

$$E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

sendo $n = 0, 1, 2, \dots$ e o espectro de energia é discreto. Distinto do espectro para o oscilador harmônico na mecânica clássica, o oscilador harmônico quântico possui uma energia diferente de zero para o estado fundamental ($\hbar \omega_0/2$). Os autoestados de $\hat{H}_c$ são conhecidos como estados de número ou estados de Fock. Eles podem ser obtidos do estado fundamental $|0\rangle$ a partir de aplicações sucessivas do operador $\hat{a}^\dagger$, assim

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle. \quad (1.19)$$

A ação dos operadores de criação e aniquilação sobre estes estados podem ser resumida nas seguintes regras

$$\begin{aligned} \hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Consequentemente, podemos definir o operador de número, $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ tal que

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad (1.21)$$

o que quer dizer que o número médio de fótons, $\langle \hat{n} \rangle$, de um estado $|n\rangle$ é exatamente o índice n . De fato, uma característica dos estados de Fock, é o fato de ter um número médio de fótons bem definido mas estar completamente delocalizado em fase. A única exceção é o estado fundamental $|0\rangle$ o qual é um estado de incerteza mínima.

Resulta ser interessante escrever o operador associado ao campo elétrico. Ele é encontrando ao substituir q por $\hat{q}$ na Eq.(1.11) onde consideramos só o termo $j = 1$. A forma do operador é dada por

$$\hat{E}_x(z, t) = A_1 \hat{q}(t) \sin(kz) = \mathcal{E}_0 \sin(kz) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (1.22)$$

onde $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\hbar\omega_0/V\epsilon_0}$ representa o campo elétrico por fóton. Se calculamos o valor médio deste operador nos estados de Fock, vemos que

$$\langle n | \hat{E}_x(z, t) | n \rangle = 0$$

enquanto

$$\langle n | \hat{E}_x^2(z, t) | n \rangle = 2\mathcal{E}_0^2 \sin^2 \left[kz \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]$$

é porém

$$\left\langle \left(\Delta \hat{E}_x(z, t) \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{E}_x^2(z, t) \rangle - \langle \hat{E}_x(z, t) \rangle^2 = 2\mathcal{E}_0^2 \sin^2 \left[kz \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]$$

Assim, embora $|n\rangle$ descreva um estado de energia bem definida, ele não descreve adequadamente um campo eletromagnético com propriedades clássicas, já que tanto o valor médio do campo elétrico como aquele do campo magnético são nulos para qualquer estado de Fock. Além disso, as variâncias são diferentes de zero ainda para o estado fundamental ($n = 0$). Usando um tipo particular de superposição dos estados de número podemos encontrar valores esperados para os operadores de campo elétrico e magnético cuja forma coincide com aquelas encontradas na eletrodinâmica clássica. Estas superposições são denominadas *estados coerentes*.

Estado coerente do campo eletromagnético.

O estado coerente, $|\alpha\rangle$, pode ser definido como um autoestado do operador de aniquilação

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

onde a amplitude α é um número complexo sendo definido como $\alpha = \text{Re}(\alpha) + i\text{Im}(\alpha)$ ou $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$. O estado coerente pode ser expandido na base de estados de Fock como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.23)$$

Usando a definição para o estado de Fock dada pela Eq.(1.19) podemos redefinir o estado coerente a partir do estado fundamental $|0\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}[\alpha] |0\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle. \quad (1.24)$$

$\hat{D}[\alpha]$ recebe o nome de *Operador de Deslocamento*. O efeito deste operador consiste em “deslocar” o estado fundamental até o centro dele coincidir com o ponto $(\text{Re}(\alpha), \text{Im}(\alpha))$, conservando as suas características de estado de incerteza mínima. Podemos enumerar as propriedades do estado coerente assim:

1. O número médio de fótons está dado por

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2.$$

Usando este fato, podemos reescrever a amplitude do estado coerente como $\alpha = \sqrt{n} e^{i\varphi}$.

2. Cumpre-se que

$$\Delta p \Delta q = \frac{\hbar}{2}$$

e o estado coerente é um estado de incerteza mínima.

3. O conjunto de todos os estados coerentes é super-completo. Existe uma relação de completeza dada por

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = 1, \quad (1.25)$$

onde $d^2\alpha = d\text{Re}(\alpha) d\text{Im}(\alpha) = d|\alpha| d\varphi$. Por outro lado, estados com amplitudes diferentes, $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, não são ortonormais e o produto escalar dos mesmos está dado pela expressão

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp \left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} |\beta|^2 + \beta \alpha^* \right) \quad (1.26)$$

4. Ao calcular o valor esperado associados ao campo eletromagnético obtemos

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(z, t) | \alpha \rangle = \mathcal{E}_0 \text{Re}(\alpha) \sin kz$$

enquanto

$$\left\langle \left(\Delta \hat{E}_x(z, t) \right)^2 \right\rangle = \mathcal{E}_0^2 \sin^2 kz$$

Desta forma, vemos como o estado coerente descreve adequadamente o campo de radiação clássica e o valor médio do campo é diferente de zero e tem uma forma similar ao campo elétrico clássico.

Uma expressão equivalente à Eq.(1.24) pode ser encontrada ao desacoplar o operador de deslocamento usando o lema de Baker-Hausdorff

$$\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp\left(-\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]\right) e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}.$$

Desta forma, podemos reescrever o estado coerente como sendo

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle. \quad (1.27)$$

Generalização da definição do estado de Gato de Schrödinger.

Em geral, o estado de gato é definido como a superposição de **dois** estados, da mesma forma que Schrödinger fala dos estados de “gato vivo” e “gato morto” quando ele formulou o paradoxo em 1935 [38]. Apesar disso, a definição de estado de gato pode ser generalizada ao dizer que denominaremos desta forma qualquer estado de superposição que envolva dois ou mais estados, sempre e quando estes forem distinguíveis um do outro no espaço de fase.

A definição geral de um estado de gato envolvendo o estado coerente $|\alpha\rangle$ e um segundo estado com fase relativa de π denotado como $|\alpha\rangle$ toma a forma [39]

$$|G\rangle = \mathcal{N} \left[|\alpha\rangle + e^{i\phi} |\alpha\rangle \right], \quad (1.28)$$

onde

$$\mathcal{N} = \left(2 + 2 \cos \phi e^{-2|\alpha|^2} \right)^{-1/2} \quad (1.29)$$

é a constante de normalização, $\mathcal{N}$, depende tanto do valor da amplitude, α , quanto da fase relativa, ϕ , dos estados envolvidos na superposição. Geralmente, são discutidos na literatura três casos, que dependem do valor da fase relativa. Se $\phi = 0$

obtemos

$$|G\rangle = \frac{|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle}{\sqrt{2 + 2e^{-2|\alpha|^2}}}. \quad (1.30)$$

Da mesma maneira, se $\phi = \pi$ obtemos

$$|G\rangle = \frac{|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle}{\sqrt{2 - 2e^{-2|\alpha|^2}}}. \quad (1.31)$$

Estes dois estados são conhecidos como gato par e ímpar, e o interesse neles está no fato de que podem ser gerados usando Eletrodinâmica Quântica ou em íons dentro de armadilhas eletromagnéticas. Uma última escolha consiste em fazer $\phi = \pi/2$ obtendo

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha\rangle + i |-\alpha\rangle. \quad (1.32)$$

Este estado é conhecido como gato de Yurke-Stoler, recebendo o nome dos autores que propuseram um esquema para a geração deste estado em 1986 [40].

Misturas estatísticas e o estado térmico.

Com o objetivo de discutir a diferença entre a mistura estatística de estados coerentes com uma superposição do mesmo tipo de estado, resulta ser conveniente escrever a forma geral para o operador densidade da definição de gato de Schrödinger dado pela Eq.(1.28)

$$\hat{\rho}_G = \mathcal{N}^2 \left[|\alpha\rangle \langle\alpha| + |-\alpha\rangle \langle-\alpha| + e^{-i\phi} |\alpha\rangle \langle-\alpha| + e^{i\phi} |-\alpha\rangle \langle\alpha| \right]. \quad (1.33)$$

Se comparamos com a forma do operador densidade para uma mistura estatística dos estados $|\alpha\rangle$ e $|-\alpha\rangle$

$$\hat{\rho}_{ME} = c_1 |\alpha\rangle \langle\alpha| + c_2 |-\alpha\rangle \langle-\alpha| \quad (1.34)$$

podemos ver como o estado de superposição possui dois termos adicionais que representam os termos de interferência. Lembrando os conceitos de populações e coerências, numa mistura as coerências são nulas, enquanto as populações podem obedecer ou não uma determinada estatística. No exemplo anterior, $\rho_{11} = \rho_{22} = 1/2$, os pesos são iguais. Um caso onde as populações ρ_{ii} obedecem uma estatística particular é o campo térmico de uma cavidade a uma certa temperatura T . A matriz densidade do estado térmico é

$$\hat{\rho}_T = \sum_n \frac{\bar{n}^n (T)}{(1 + \bar{n} (T))^{1+n}} |n\rangle \langle n| \quad (1.35)$$

onde $\bar{n}(T)$ é a estatística de Bose-Einstein

$$\bar{n}(T) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (1.36)$$

A $T = 0K$, vemos que $\hat{\rho}_0 = |0\rangle\langle 0|$. Só neste caso crítico, o estado térmico corresponde a um estado puro que coincide com o estado fundamental $|0\rangle$ do oscilador harmônico.

1.3 Funções de quase-probabilidade.

O princípio de incerteza na descrição quântica traz problemas na hora de tentar representar um estado sobre o espaço de fase. Como consequência deste princípio, não é possível definir uma verdadeira distribuição de probabilidades como uma função das variáveis clássicas do espaço de fase. No entanto, as chamadas Funções de Quase-Probabilidade (FQP), as quais conservam algumas características das distribuições clássicas, vem tendo um enorme sucesso no estudo de sistemas quânticos. O seu uso principal está concentrado na análise das conexões entre as descrições clássica e quântica.

No seu trabalho de 1957, Stratonovich [41] resumiu em quatro pontos os requerimentos gerais necessários para a definição das FQP:

1. O espaço sobre o qual devem ser definidas estas funções deve ser o espaço de fase clássico. No caso do campo eletromagnético, este espaço é o plano (q, p) . No caso de sistemas com spin $1/2$, o espaço corresponde à esfera de Bloch.
2. A função deve ser real;
3. A distribuição depende linearmente do operador densidade associado ao espaço.
4. Médias estatísticas da função real associada a um certo observável, obtida usando a FQP, devem coincidir com os resultados do valor médio do operador, calculado a partir da matriz densidade.

Notemos que a função deve ser real mas não necessariamente positiva para todo ponto no espaço de fase. Devido ao princípio de incerteza, podemos definir diversos tipos de funções de quase-probabilidade dependendo do ordenamento da base de

operadores associado ao espaço de Hilbert do sistema de interesse. É verdade que sempre é possível associar uma distribuição de probabilidade marginal, relacionada com uma determinada variável clássica e com o operador respectivo. O problema começa quando se quer definir a probabilidade *conjunta*, onde ordenamentos diferentes dos operadores leva a diversas definições de FQP. Usando um exemplo concreto, se consideramos a base dos operadores do oscilador harmônico, formada por $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$, obtemos ao menos três tipos de ordenamento diferentes para o produto dos dois operadores

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) & \text{ ordenamento simétrico;} \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} & \text{ ordenamento normal;} \\ \hat{a} \hat{a}^\dagger & \text{ ordenamento antinormal,} \end{aligned}$$

de maneira que podemos definir pelo menos três FQP diferentes. As funções de quasi-probabilidade podem ser definidas como a transformada de Fourier da função característica

$$\hat{C}(\xi; s) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \exp \left(\xi \hat{a}^\dagger - \xi^* \hat{a} + s |\xi|^2 / 2 \right) \right], \quad (1.37)$$

onde parâmetro s está associado ao ordenamento dos operadores de criação e destruição. Se $s = -1$, a função característica corresponde ao ordenamento antinormal, $s = 0$ ao ordenamento simétrico e $s = 1$ está associado ao ordenamento normal. A expressão geral das FQP é dada por

$$P(\gamma, s) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 \xi \hat{C}(\xi; s) \exp(\gamma \xi^* - \gamma^* \xi). \quad (1.38)$$

Nesta seção, restringiremos a discussão à apresentação de duas funções relacionadas com a base de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ que usaremos neste trabalho: a função de Wigner do oscilador harmônico [16, 14], relacionada ao ordenamento simétrico dos operadores ($s = 0$), e a função de Husimi [15] associada ao ordenamento antinormal ($s = -1$). Quando $s = 1$, obtemos a definição da função $P(q, p)$ de Glauber-Sudarshan [33, 42] associada ao ordenamento antinormal, cujas propriedades não discutiremos aqui. Uma outra FQP, a função de Wigner atômica [36, 30], associada ao espaço da esfera de Bloch e aos operadores do momento angular, será definida na Seção 1.5, uma vez discutidas as propriedades do estado de Dicke e do estado coerente atômico.

1.3.1 A função de Distribuição de Husimi.

A função de Husimi está associada ao ordenamento antinormal e é encontrada ao tomar $s = -1$ na expressão (1.38)

$$Q(\gamma) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\xi \text{Tr} \left[\hat{\rho} \exp(\xi \hat{a}^\dagger) \exp(-\xi^* \hat{a}) \right] \exp(\gamma \xi^* - \gamma^* \xi).$$

Na representação de estados coerentes, onde usamos a definição do projetor na base super-completa dada na expressão (1.25), a equação anterior toma a forma

$$Q(\gamma) = \frac{1}{\pi} \langle \gamma | \hat{\rho}_k(t) | \gamma \rangle. \quad (1.39)$$

Aqui, $|\gamma\rangle$ é o estado coerente do oscilador harmônico ($\gamma = q + ip$) e $\rho_k(t)$ é o operador densidade. Esta função é positiva para todo ponto no espaço de fase clássico, sendo bastante similar às distribuições de probabilidade clássicas. Se o estado do sistema corresponde ao estado de Fock, $|n\rangle$, vemos que

$$Q_n(\gamma) = \frac{e^{-|\gamma|^2} |\gamma|^{2n}}{\pi n!}. \quad (1.40)$$

Quando $\hat{\rho} = |\alpha\rangle \langle \alpha|$ podemos encontrar a expressão para a função de Husimi associada ao estado coerente

$$Q_\alpha(\gamma) = \frac{e^{-|\gamma-\alpha|^2}}{\pi} \quad (1.41)$$

A vantagem desta FQP é a facilidade de cálculo quando o operador densidade de um determinado problema pode ser expandido como um produto antinormal. Mas um dos grandes problemas é que não é possível calcular as probabilidades marginais, $P(q)$ e $P(p)$, a partir da função de Husimi. Outra das limitações é o fato de não permitir distinguir uma mistura estatística de uma superposição de estados coerentes.

1.3.2 A função de Wigner.

A função de Wigner do campo eletromagnético está associada com o ordenamento simétrico ($s = 0$), sendo definida a partir da função característica como

$$W(\gamma, \gamma^*, t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\xi \text{Tr} \left[\hat{\rho}(t) \exp(\xi \hat{a}^\dagger + \xi^* \hat{a}) \right] \exp(\gamma \xi^* - \gamma^* \xi) \quad (1.42)$$

Esta definição é análoga à definição geral proposta por Wigner dada pela expressão

$$W(q, p, t) = \frac{1}{\hbar\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle q - y | \hat{\rho}(t) | q + y \rangle e^{2i\frac{py}{\hbar}} \quad (1.43)$$

A função de Wigner cumpre todas as propriedades enumeradas anteriormente mas, a diferença da função de Husimi, ela não é definida positiva. De fato, a existência de partes negativas indicam que o estado do sistema representado é não-clássico, já que a parte negativa está associada ao fenômeno de interferência [14]. Por esta razão, a função de Wigner pode ser usada no estudo da correspondência entre as duas descrições, clássica e quântica. A existência de valores negativos num estado de superposição, permite identificar franjas de interferência. Isto permite a visualização de processos de decoerência, partindo de um estado de superposição até atingir um estado de mistura estatística [19]. Outra diferença entre esta função e a função de Husimi tem a ver com o cálculo das probabilidades marginais: se na Eq.(1.43), calculamos a integral sobre a variável q , o resultado é a distribuição de probabilidade, $P(p)$.

Quando é calculada $W(\gamma)$ para o estado de número com $\hat{\rho} = |n\rangle \langle n|$ obtemos o resultado

$$W_n(\gamma, \gamma^*) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\gamma|^2} (-1)^n \frac{\mathcal{L}_n(4|\gamma|^2)}{n!} \quad (1.44)$$

onde $\mathcal{L}_n$ é o polinômio de Laguerre de ordem n e $\gamma = q + ip$. Se $\hat{\rho} = |\alpha\rangle \langle \alpha|$, obtemos a forma da função de Wigner para o estado coerente do oscilador harmônico

$$W_\alpha(\gamma, \gamma^*) = \frac{2}{\pi} \exp(-2|\gamma - \alpha|^2). \quad (1.45)$$

Finalmente, a forma da função de Wigner para a mistura estatística de dois estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ é dada por

$$W_{ME}(\gamma, \gamma^*) = \frac{1}{\pi} \left(\exp(-2|\gamma - \alpha|^2) + \exp(-2|\gamma + \alpha|^2) \right). \quad (1.46)$$

Na Fig.1.1 apresentamos a forma da função de Wigner para o estado fundamental do campo, $|0\rangle$, o estado de Fock $|1\rangle$, o estado coerente $|\alpha\rangle$ e a mistura estatística de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ onde $\alpha = (1, 1)$. Vemos como a função de Wigner do estado fundamental é uma gaussiana cujo centro coincide com a origem do plano (q, p) e não possui parte negativa. Já o estado de Fock, $|1\rangle$, a função tem simetria

axial ao redor da origem do espaço de fase. Vemos um anel onde a função é positiva com um raio correspondente a $\sqrt{n} = 1$. Além disso, a função tem parte negativa, indicando as propriedades não clássicas associadas ao estado de Fock. Pelo contrário a função de Wigner do estado coerente, Fig.1.1(c), é uma gaussiana, sempre positiva, centrada no ponto $q_0 = \text{Re}\alpha$ e $p_0 = \text{Im}\alpha$. A localização da função indica que o estado coerente tem fase e número médio de fótons bem definidos. A função não possui parte negativa e sua forma indica que é um estado de incerteza mínima, o que coincide com a definição do estado coerente como o mais “clássico” possível dos estados do oscilador harmônico. A função de Wigner de uma mistura estatística de estados coerentes é apresentada na Fig.1.1(d) onde vemos duas gaussianas correspondentes aos estados $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$, e a função não possui parte negativa nem termos de interferência, diferente dos estados de gato, como veremos no Capítulo 2, ao graficar as funções de Wigner durante o processo de decoerência e relaxação destes estados em contato com um reservatório.

1.4 O Oscilador Quártico Bidimensional.

O primeiro sistema bipartite sobre o qual discutiremos nesta tese pode ser descrito como dois modos bosônicos acoplados onde a interação contém um termo bilinear e um termo não-linear que corresponde ao quadrado do Hamiltoniano livre para dos osciladores. Nosso modelo pode ser visto como numa extensão do tratamento de Milburn [17], onde é estudado o caso do oscilador anarmônico unidimensional e são comparadas as dinâmicas nas descrições quântica e clássica com a vantagem de se poder observar o processo de emaranhamento. O termo de interação foi escolhido com tal intenção de forma que facilita-se o tratamento tanto no formalismo quântico quanto no clássico [18].

Esse Hamiltoniano clássico, integrável [18], que descreve dois modos bosônicos com um termo de interação bilinear é dado pela expressão

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{01} + \mathcal{H}_{02} + \omega_\lambda (q_1 q_2 + p_1 p_2) + \omega_g (\mathcal{H}_{01} + \mathcal{H}_{02})^2, \quad (1.47)$$

onde

$$\mathcal{H}_{0i} = \frac{1}{2}\omega_0 (q_i^2 + p_i^2)$$

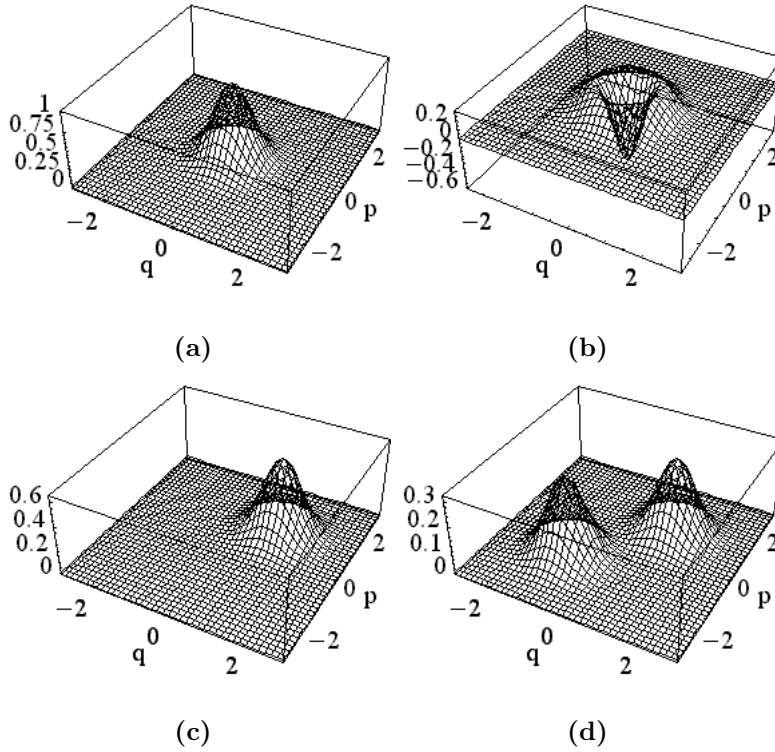


Figura 1.1: Funções de Wigner do campo eletromagnético no plano (q, p) . (a) Estado fundamental $|0\rangle$; (b) Estado de Fock $|1\rangle$; (c) Estado coerente com $\alpha = (1, 1)$ e (d) Mistura estatística dos estados $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$.

é o Hamiltoniano livre de um oscilador harmônico. Aqui, ω_0 é a frequência dos modos livres sendo esta igual para os dois subsistemas (ressonância), ω_λ é a frequência associada à interação bilinear e $\omega_g = \hbar g$ é a frequência associada ao termo quártico.

Ao realizar a quantização canônica, substituindo as variáveis clássicas q_i e p_i pelos operadores $\hat{q}_i$ e $\hat{p}_i$, obtemos

$$\hat{H} = \hat{H}_{01} + \hat{H}_{02} + \omega_\lambda (\hat{q}_1 \hat{q}_2 + \hat{p}_1 \hat{p}_2) + \omega_g (\hat{H}_{01} + \hat{H}_{02})^2. \quad (1.48)$$

onde o Hamiltoniano livre quantizado é dado por

$$\hat{H}_{0i} = \frac{1}{2} \omega_0 (\hat{q}_i^2 + \hat{p}_i^2)$$

Podemos reescrever a equação acima como função dos operadores de criação e aniquilação, $\hat{a}_i^\dagger$ e $\hat{a}_i$, os quais cumprem as regras de comutação dadas por $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$.

Desta forma, o Hamiltoniano toma a forma final

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \hbar\omega_0 \sum_{k=1}^2 \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_\lambda \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \\ & + \hbar^2 \omega_g \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1 \right)^2.\end{aligned}\quad (1.49)$$

Resulta interessante observar como o termo não linear coincide com aquele considerado no trabalho de Imoto e colaboradores [26], o qual descreve a propagação de dois campos num interferômetro. Neste trabalho, os autores calculam a energia associada à interação não linear de terceira ordem usando a expressão

$$H_{\chi^{(3)}} = \frac{3}{4} \int \int \int \sum \chi_{ijkl}^{(3)} E_i E_j E_k E_l dV \quad (1.50)$$

onde $\chi_{ijkl}^{(3)}$ é o tensor de quarta ordem da susceptibilidade elétrica e E_i é o campo elétrico quantizado associado a i -ésima frequência. Ao calcular a forma do Hamiltoniano associado aos campos interagentes, em termos dos operadores de criação e aniquilação, obtém-se que (ver Eq.(32) na referência [26])

$$\hat{H}_{\chi^{(3)}} = \frac{1}{4} \tilde{\chi}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{4} \tilde{\chi}_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \tilde{\chi}_{int} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \quad (1.51)$$

As potências $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ são denominadas termos de *auto-modulação* e o termo restante descreve a interação não-linear entre os dois campos, também denominado de interação Kerr dispersiva, já que conserva o número de fótons médio do sistema. As constantes $\tilde{\chi}_i$ dependem tanto das frequências dos dois campos interagentes quanto da não-linearidade χ^3 . Vemos como a Eq.(1.51) contém as mesmas potências dos operadores $\hat{a}_i$ e $\hat{a}_i^\dagger$ do termo não linear do nosso Hamiltoniano (1.49). Consequentemente, a nossa frequência ω_g está relacionada com $\chi^{(3)}$. Em geral, os termos associados ao efeito de auto-modulação não são considerados em trabalhos onde a motivação consiste em propor medidas de número de fótons usando QND (do inglês *Quantum non-demolition*). Nesses casos, esta aproximação é possível ao escolher um meio não-linear ressonante com a soma das frequências dos campos, $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$.

Deste ponto de vista, o nosso Hamiltoniano poderia ser visto como um caso mais “geral”, já que considera os efeitos de todos os termos da interação que podem aparecer, como vemos ao comparar com a Eq.(1.51). No entanto, o fato de considerar frequências equivalentes, $\omega_1 = \omega_2$, e constantes cujos valores permitem escrever o termo não-linear como uma potência do Hamiltoniano livre, trazem restrições fortes

para as constantes da expressão da Eq.(1.51). Como estas restrições permitem a solução analítica da equação de Schrödinger para qualquer superposição de estados de Fock, como veremos no Capítulo 3, os nossos resultados são um primeiro passo na compreensão da dinâmica completa deste tipo de sistema.

No contexto dos condensados de Bose-Einstein interagentes, os modos do condensado são aqueles cuja função de onda satisfaz um sistema de equações de Gross-Pitaevskii acopladas. Ao desprezar todos os modos, excetuando aqueles associados aos condensados de interesse, o Hamiltoniano toma a forma [27]

$$\begin{aligned} \hat{H}_{2BEC} = & \hbar\omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar\omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \frac{W_{11}}{2}(\hat{a}_1^{\dagger 2}\hat{a}_1^2) + \frac{W_{22}}{2}(\hat{a}_2^{\dagger 2}\hat{a}_2^2) + W_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 \\ & + \hbar\lambda(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Os dois primeiros termos descrevem a evolução dos átomos nos modos de condensado na ausência de interações. Os seguintes descrevem a interação entre as duas espécies devido às colisões elásticas. Para cada um deles o parâmetro de acoplamento, $W_{i,j}$, depende do comprimento de espalhamento associado a cada espécie, $a_{i,j}$. O último termo do Hamiltoniano descreve o acoplamento Josephson entre os dois condensados. A forma dos termos não lineares coincide com o Hamiltoniano tipo Kerr usado em Ótica Quântica como discutido acima. A interação Josephson é análoga ao acoplamento dipolo-dipolo na aproximação de onda girante [43].

Ao compararmos a Eq. (1.52) com a expressão (1.49) vemos como os dois Hamiltonianos contém os mesmos termos, potências dos operadores $\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger$. Ao escolher as constantes $W_{i,j}$ tal que $W_{11} = W_{22} = W_{12} = 2\omega_g$ e considerar que os dois modos estão em ressonância, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, vemos que esta última equação coincide com o Hamiltoniano (1.49). Esta escolha particular das constantes $W_{i,j}$ está associada a condensados de Bose-Einstein que possuam o mesmo comprimento de espalhamento de onda-s, isto é $a_{11} = a_{22} = a_{12}$ [43]. Embora a nossa escolha descreva uma condição muito particular no contexto dos condensados, existem experiências que medem a relação entre os comprimentos de espalhamento que mostraram a relação $a_{11} : a_{22} : a_{12} = 1.03 : 0.97 : 1$ [44].

1.5 Modelo de Jaynes-Cummings e o maser de Dicke.

Com respeito ao modelo de Jaynes-Cummings [34, 45], costuma-se dizer que este modelo permite uma descrição simples da interação entre matéria e campo eletromagnético, além de ser analiticamente solúvel. O sistema consiste de um átomo de dois níveis interagindo com um modo quantizado do campo eletromagnético próximo da ressonância ($\omega_o \approx \omega_a$, onde ω_o é a frequência do modo do campo e ω_a é a frequência de transição entre os dois níveis). A importância deste modelo é devida à possibilidade de ter uma evidência direta da natureza quântica do campo, já que a solução analítica do mesmo prediz o fenômeno de mortes e ressurgimentos [46] da inversão de população atômica. Entre muitas aplicações, permite sob certas condições iniciais a formação de estados de gato de Schrödinger [47, 48]. Extensões deste modelo podem ser encontrados na literatura, onde efeitos de dissipação e amortecimento [49, 50], sistemas de três ou mais níveis óticamente ativos [51] ou interações átomo-campo mais elaboradas são consideradas.

O modelo de Jaynes-Cummings permite descrever um micromaser, onde um feixe de átomos de Rydberg excitados atravessam uma cavidade superconductora. Esta cavidade é preparada de tal forma que um único modo de campo eletromagnético pode ser confinado. A velocidade dos átomos é ajustada de maneira que só é permitida a passagem de um átomo pela cavidade e as frequências tanto do campo quanto de transição entre os níveis do átomo são comparáveis. O avanço na construção de cavidades supercondutoras de alto fator de qualidade Q e a possibilidade de preparar átomos com níveis óticamente ativos altamente energéticos (átomos de Rydberg), além do controle das velocidades do feixe dos mesmos, permitiram a realização experimental do primeiro micromaser em 1985 por D. Merschede, H. Walther e G. Muller [52]. A primeira observação de mortes e ressurgimentos da inversão da população atômica previstos teoricamente, foi feita posteriormente [53, 54]. Um aspecto importante no desenvolvimento do que atualmente é conhecido como Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (ou CQED do inglês *Cavity Quantum Electrodynamics*) foi a realização experimental de uma superposição macroscópica de estados coerentes de campo eletromagnético e a posterior observação do processo de decoerência. Este experimento, conhecido como o experimento de Paris [55], redo-

brou recentemente o interesse no modelo Jaynes-Cummings e na geração de estados de gato de Schrödinger.

O átomo, que denotaremos com o índice j , é um sistema de dois níveis energéticos opticamente ativos $|1\rangle_j$ e $|2\rangle_j$ e uma diferença de energia entre os dois níveis igual a $\hbar\omega_a$. Qualquer operador atuando neste sistema pode ser expandido na base de operadores formado pelas matrizes de Pauli: σ_x^j , σ_y^j e σ_z^j junto com a identidade $I_{2\times 2}$. Para estes operadores, são validas as seguintes regras de comutação

$$[\sigma_z^j, \sigma_\pm^j] = \pm 2\sigma_\pm^j [\sigma_+^j, \sigma_-^j] = \pm 2\sigma_z^j \quad (1.53)$$

onde

$$\sigma_\pm^j = \frac{1}{2} (\sigma_x^j \pm i\sigma_y^j)$$

Os estados $|1\rangle_j$ e $|2\rangle_j$ são autoestados de σ_z^j . Podemos escrever o Hamiltoniano atômico livre como

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2}\hbar\omega_a\sigma_z^j \quad (1.54)$$

A interação de um átomo com um campo monocromático na aproximação onde o comprimento de onda do campo muito maior do que a dimensão do átomo, é descrita pela interação dipolar elétrica cujo Hamiltoniano tem a forma

$$\hat{H}_I = -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$$

onde $e\hat{\mathbf{r}}$ é o operador dipolar atômico e $\hat{\mathbf{E}}$ é o operador do campo elétrico quantizado. No caso de um modo do campo eletromagnético confinado dentro de uma cavidade e polarizado na direção x , o campo elétrico pode ser escrito como $\hat{\mathbf{E}} = (\mathcal{E}_0, 0, 0)$. Substituindo no Hamiltoniano $\hat{H}_I$, podemos escrever

$$\hat{H}_I = -e\mathcal{E}_0 \sin(kz) (\hat{a}\hat{x} + \hat{a}^\dagger\hat{x}) \quad (1.55)$$

onde $\hat{x}$ é o operador de posição na direção x . Se calculamos

$$\hat{H}_I = \sum_{l,m} |l\rangle \langle l| \hat{H}_I |m\rangle \langle m|$$

obtemos

$$\hat{H}_I = (g_{1,2}\sigma_{1,2} + g_{2,1}\sigma_{2,1}) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (1.56)$$

onde

$$g_{l,m} = -e\mathcal{E}_0 \sin(kz) \langle l|\hat{x}|m\rangle$$

e $\sigma_{l,m} = |l\rangle \langle m|$ é o operador de transição entre os níveis atômicos. Neste caso particular de um átomo de dois níveis $g_{1,2} = g_{2,1} = g/2$, $g_{1,1} = g_{2,2} = 0$ e $\sigma_{1,2} = \sigma_+$ e $\sigma_{2,1} = \sigma_-$. Substituindo estas quantidades na expressão para o Hamiltoniano, obtemos a forma final para o termo de interação átomo-campo

$$\hat{H}_I = \frac{g}{2} (\hat{\sigma}_+^j + \hat{\sigma}_-^j) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (1.57)$$

Ao incluir os termos associados aos Hamiltonianos de campo e átomo livres e expandir o termo de interação obtemos a forma conhecida para o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_a \hat{\sigma}_z^j + \frac{g}{2} (\hat{a} \hat{\sigma}_+^j + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^j + \hat{a} \hat{\sigma}_-^j + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+^j). \quad (1.58)$$

Os primeiros dois termos da interação correspondem a processos onde o número médio de excitação é conservado, distinto dos dois últimos. Estes termos geralmente não são considerados, e se diz que esta é a Aproximação de Onda Girante geralmente denotada como *RWA* (do inglês *Rotating Wave Approximation*). O Hamiltoniano efetivo nesta aproximação descreve apropriadamente a maioria dos problemas tratados pela ótica quântica. A forma final do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings nesta aproximação é dada por

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_a \hat{\sigma}_z + \frac{g}{2} (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (1.59)$$

De posse desta expressão, podemos abordar o problema de N átomos interagindo com o campo eletromagnético. Supomos que a distância interatômica é de uma ordem de grandeza tal que não há sobreposição das funções de onda atômica. Consideramos também que todos os átomos estão imersos no campo eletromagnético e, conseqüentemente, a aproximação dipolar continua sendo válida. Desta forma, o Hamiltoniano para os N átomos pode ser escrito como o somatório dos Hamiltonianos de cada átomo

$$\hat{H}_{\text{maser}} = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N \hbar\omega_a \hat{\sigma}_z^j + \frac{G}{2} \sum_{j=1}^N (\hat{\sigma}_+^j + \hat{\sigma}_-^j) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (1.60)$$

Usando os operadores coletivos de pseudo-spin $\hat{J}$ definidos como

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_j^z \quad \text{e} \quad \hat{J}_\pm = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_j^\pm, \quad (1.61)$$

escrevemos finalmente o Hamiltoniano de Dicke ($N = 2J$) como

$$\hat{H}_D = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_a\hat{J}_z + \frac{G}{\sqrt{2J}}(\hat{a}\hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{J}_-) + \frac{G'}{\sqrt{2J}}(\hat{a}^\dagger\hat{J}_+ + \hat{a}\hat{J}_-) \quad (1.62)$$

onde usamos nomes diferentes para os parâmetros que acompanham os termos de interação associados à aproximação de onda girante (G) e os termos contra-girantes (G'). Embora a origem de G e G' seja a mesma, justificamos o estabelecimento desta diferença devido ao nosso interesse em simular o comportamento do sistema quando a aproximação de onda girante deixa de ser válida, situação que pode acontecer ao considerar campos eletromagnéticos intensos.

1.5.1 Estados atômicos e a função de Wigner atômica.

Vemos que uma base apropriada para a descrição de autoestados do Hamiltoniano da Eq.(1.62) é a resultante do produto direto do espaço de Hilbert do oscilador harmônico, cujos autoestados são os *estados de Fock* $|n\rangle$ já definidos na Seção 1.2, e o espaço de Hilbert do pseudo-spin, associado à álgebra definida pelos operadores coletivos $\hat{J}_\pm$ e $\hat{J}_z$. Os elementos da base deste espaço são os estados de momento angular $|J, M\rangle$, também conhecidos como estados de Dicke. Podemos definir esta base usando uma definição geral a partir do estado fundamental $|J, -J\rangle$

$$|J, M\rangle = \frac{1}{(M+J)!} \left(\begin{matrix} 2J \\ M+J \end{matrix} \right)^{-1/2} \hat{J}_+^{|J, -J\rangle} \quad (1.63)$$

onde $M = -J, -J+1, \dots, J$ e $|J, -J\rangle$ é o estado fundamental. Este estado possui um valor de $\hat{J}_z$ bem definido, no entanto que $\hat{J}_x$ e $\hat{J}_y$ são indeterminados.

É possível definir um estado análogo ao estado coerente do oscilador harmônico no espaço de Hilbert das variáveis de momento angular. Lembremos que um estado coerente de oscilador harmônico $|\alpha\rangle$, com valor médio de fótons igual a $|\alpha|^2$, pode ser obtido a partir do estado fundamental $|0\rangle$ pela aplicação do operador de deslocamento $\hat{D}[\alpha]$. Arecchi *et al* [35] definiram *estados coerentes atômicos*, com propriedades completamente análogas às associadas aos estados coerentes de oscilador harmônico, definidos para uma coleção de N átomos, sendo um estado de incerteza mínima. Estes estados estão associados a operadores que descrevem a rotação sobre uma esfera, de maneira semelhante ao caso do oscilador harmônico onde o operador

de deslocamento descreve translações sobre o espaço de fase definido pelas variáveis canônicas q e p .

O estado coerente atômico [30] $|\tau\rangle$ é definido como

$$|\tau\rangle = \hat{R}[\tau] |J, -J\rangle = e^{\tau \hat{J}_+ - \tau^* \hat{J}_-} |J, -J\rangle \quad (1.64)$$

onde

$$\tau = \frac{1}{2} \beta e^{-i\gamma}$$

sendo β o ângulo polar definido com relação ao eixo z ($\beta \in [0, \pi]$), γ é o ângulo azimutal ($\gamma \in [-\pi, \pi]$) e o operador $\hat{R}[\tau]$ é um operador de rotação sobre a esfera de Bloch, análogo ao operador de deslocamento $\hat{D}[\alpha]$. Usando o análogo ao lema de Baker-Hausdorff, o teorema de separação para operadores de momento angular, podemos escrever o estado coerente atômico como

$$|\tau\rangle = (1 + |\tau|^2)^{-J} e^{\tau \hat{J}_+} |J, -J\rangle. \quad (1.65)$$

Estas características podem ser visualizadas com ajuda das funções de quase-probabilidade: da mesma forma que são construídas no plano (q, p) , são definidas funções de distribuição na esfera de Bloch. A função de Wigner para partículas com spin-1/2 foi discutida por Scully e colaboradores [56] mas estamos interessados na função de Wigner atômica para sistemas de momento angular arbitrário, definida por Agarwal [36]. A forma geral para esta função é dada por

$$W(\theta, \phi, t) = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sum_{K=0}^{2J} \sum_{Q=-K}^K \varrho_{KQ}(t) Y_{KQ}(\theta, \phi), \quad (1.66)$$

onde $\varrho_{K,Q}$ é a matriz característica associado ao operador densidade $\rho_a(t)$, análoga à função característica definida para a função de Wigner do campo sendo

$$\varrho_{K,Q}(t) = \text{Tr} [\rho_a(t) \hat{T}_{KQ}], \quad (1.67)$$

onde os operadores tensoriais esféricos $\hat{T}_{KQ}$ têm a forma [57]

$$\hat{T}_{KQ} = \sum_{M=-J}^J (-1)^{J-M} \sqrt{2K+1} \begin{pmatrix} J & K & J \\ -M & Q & M-Q \end{pmatrix} |J, M\rangle \langle J, M-Q|. \quad (1.68)$$

Aqui usamos o símbolo $3J$ de Wigner [57] e $Y_{KQ}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos, onde θ é o ângulo polar e $\theta = 0$ coincide com o polo norte da esfera de Bloch. O

ângulo ϕ é o ângulo azimutal e $\phi = 0$ coincide a direção negativa do eixo y . Esta função representa uma quase-probabilidade no espaço de fase clássico, que neste caso corresponde a esfera de Bloch com coordenadas θ e ϕ . A localização nas variáveis angulares permite visualizar e quantificar se os valores esperados do operador $\hat{J}_z$, associado à variável θ , e dos operadores $\hat{J}_x$ e $\hat{J}_y$, associados a ϕ , estão determinados ou não num estado atômico qualquer. As funções de Wigner atômicas são usadas para visualizar os efeitos da decoerência quando uma coleção de átomos interage com o ambiente [58, 59], mas este tratamento é pouco encontrado na literatura.

Ao calcular a função de Wigner atômica do operador densidade associado a um estado de Dicke dado por

$$\hat{\rho} = |J, M\rangle \langle J, M|$$

obtemos a seguinte expressão

$$W_{\text{Dicke}}(\theta, \phi, t) = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sum_{K=0}^N Y_{K0}(\theta, \phi) (-1)^{J-M} \sqrt{2K+1} \begin{pmatrix} J & K & J \\ -M & 0 & M \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

A forma da função de Wigner para o estado coerente é mais complexa e não a reproduzimos aqui [30]. Para ilustrar a forma da função de Wigner atômica, reproduzimos na Fig.1.2 os gráficos apresentados por Dowling e colaboradores da função $f(\theta, \phi) \equiv 1 + W_{\text{Dicke}}$ para o estado fundamental $|5, -5\rangle$ e o estado $|5, 0\rangle$. Nesta representação os valores que toma a função de Wigner podem ser vistos como variações na esfera de raio unitário. Vemos que o estado fundamental, Fig.1.2(a), não tem parte negativa e o seu valor máximo coincide com a direção negativa do eixo z , onde $\theta = 0$. A função de Wigner do estado de Dicke, Fig.1.2(b), mostra um valor máximo no equador da esfera com $z = 0$, devido a que a componente em z de um vetor na esfera de Bloch está relacionada com o valor esperado do operador $\hat{J}_z$. O máximo positivo da função de Wigner atômica dá informação sobre este observável. A função está localizada num anel, indicando que $\langle \hat{J}_x \rangle$ e $\langle \hat{J}_y \rangle$ são completamente indeterminados para o estado de Dicke. Finalmente, na Fig.1.2(c), mostramos a forma da função de Wigner para o estado coerente, onde vemos que esta é positiva e bem localizada tanto em θ quanto em ϕ .

Outra forma de apresentar a função de Wigner é usando a representação polar esférica onde

$$x = W(\theta, \phi, t) \sin(\theta) \cos(\phi)$$

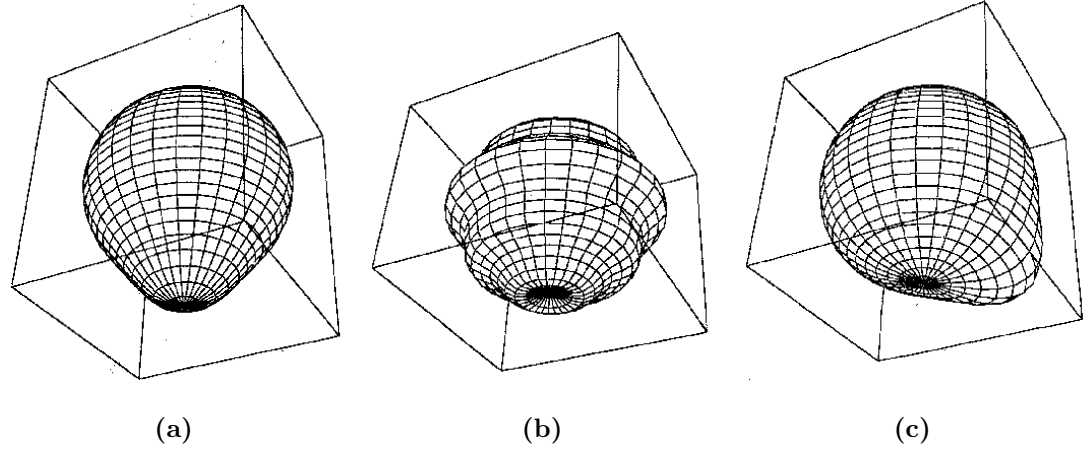


Figura 1.2: Representação esférica da função de Wigner sobre a esfera de Bloch. (a) Estado fundamental $|5, -5\rangle$; (b) Estado de Dicke $|5, 0\rangle$ e (c) estado coerente atômico com $\gamma = \beta = \pi/4$. Jonathan P. Dowling *et al.*, Phys. Rev. A **49**, 4101 (1994).

$$\begin{aligned} y &= W(\theta, \phi, t) \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z &= W(\theta, \phi, t) \cos(\theta). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Esta representação permite, em alguns casos, visualizar melhor a estrutura da função. Na Fig.1.3(a) reproduzimos a forma da função de Wigner atômica para o estado fundamental $|11, -11\rangle$, apresentado originalmente no trabalho de Benedict e Czirják, onde a localização do estado ao redor do polo sul da esfera de Bloch é evidente. Esta representação resulta ser conveniente para o estudo dos processos de emaranhamento e/ou decoerência conforme observamos a função para o “gato polar” apresentado na Fig.1.3(b), onde é representado o valor absoluto da função ao longo do raio na direção (θ, ϕ) . O operador densidade deste estado tem a forma

$$\hat{\rho}_{gp} = \frac{1}{2} (|J, J\rangle \langle J, J| + |J, -J\rangle \langle J, -J| + |J, -J\rangle \langle J, J| + |J, J\rangle \langle J, -J|) \quad (1.71)$$

A função de Wigner atômica possui dois lóbulos principais, associados ao estado fundamental $|J, -J\rangle$ e ao estado $|J, J\rangle$. A estrutura de interferência aparece claramente ao redor do equador, onde a parte negativa está indicada usando cor cinza e o número de lóbulos secundários coincide com o número de átomos (neste caso $N = 5$). Nos capítulos posteriores apresentaremos os nossos resultados usando esta representação.

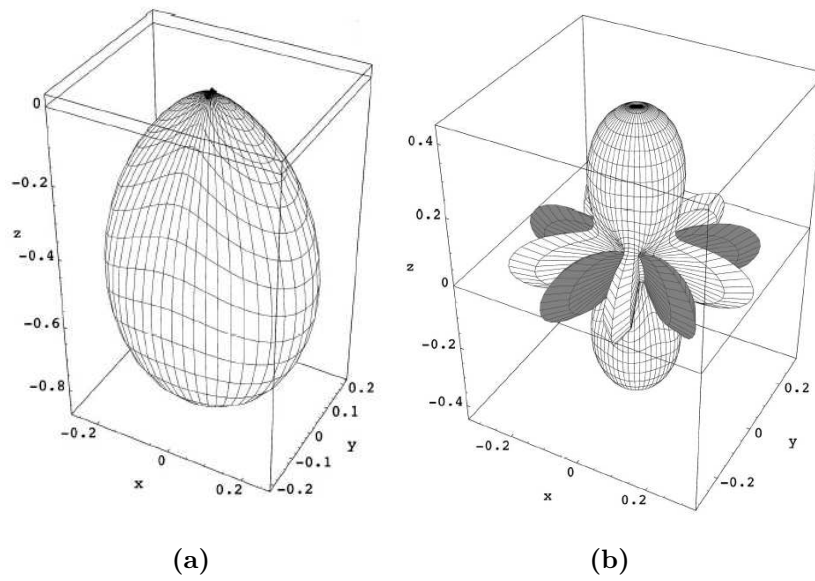


Figura 1.3: Representação polar esférica da função de Wigner atômica. (a) Estado fundamental $|5/2, -5/2\rangle$. (b) Superposição dos estados $|5/2, -5/2\rangle$ e $|5/2, 5/2\rangle$. M. G. Benedict and A. Czirják, Phys. Rev. A **60**, 4034 (1999).

Capítulo 2

Função de Wigner em dois modelos de sistemas abertos.

Neste capítulo, analisamos a evolução temporal da função de Wigner para dois problemas com reservatório onde a forma analítica do operador densidade é conhecida. Informações sobre o processo de decoerência, comportamentos assintóticos, e efeitos de dissipação na forma da função de Wigner podem ser obtidas usando esta abordagem. Nosso objetivo ao estudar esta função nos dois problemas propostos aqui, consiste em mostrar como o cálculo de funções de quase-distribuição permite visualizar o processo de decoerência quando o estado inicial é uma superposição, para posterior comparação com o caso bipartite onde o processo é de emaranhamento e não é considerada interação com o ambiente. O trabalho apresentado neste Capítulo foi realizado em colaboração com a Profa. Dra. Maria Carolina Nemes (ICEx-UFMG) e o Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria (DCET-UESC).

Os dois problemas abordados são os seguintes: no primeiro, estudamos a dinâmica de um modo de campo eletromagnético, descrito por um oscilador harmônico e acoplado a um reservatório à temperatura finita, preparado numa superposição de estados coerentes ou estado de gato de Schrödinger. Calculamos a forma geral da função de Wigner, Eq.(1.42), usando a solução geral da equação mestra de um oscilador em contato com um reservatório a temperatura finita obtida por J.G. Peixoto de Faria e M.C. Nemes [60]. Os resultados apresentados nesta parte são já esperados e encontrados na literatura [61, 19, 20], embora a forma apresentada aqui foi calculada a partir de um operador densidade que pode ser usado no cálculo da evolução de

um estado inicial qualquer, sempre e quando este seja expandido na base de estados de Fock.

No segundo problema consideramos um átomo, preparado num estado de superposição, interagindo com um campo eletromagnético dispersivamente, preparado num estado coerente, dentro de uma cavidade. O campo na cavidade está acoplado a um reservatório a $T = 0$. Calculamos a função de Wigner conjunta do sistema átomo-campo definida por Czirják e Benedict [62], usando a solução para o operador densidade global encontrada pelos mesmos pesquisadores [50], e mostramos o comportamento das funções de Wigner reduzidas dos subsistemas sendo os resultados para a função de Wigner atômica uma contribuição inédita [63]

2.1 Efeitos da temperatura sobre superposições de estados coerentes.

Nesta primeira parte, calculamos a expressão analítica da função de Wigner associada a um operador densidade o qual é solução da equação mestra na aproximação Born-Markov à temperatura finita. Inicialmente, revisaremos rapidamente o resultado para o operador densidade obtido por Peixoto de Faria e Nemes [60] para, posteriormente, discutir os nossos resultados para a função de Wigner dependente do tempo que dá conta dos efeitos de um banho de osciladores no estado térmico.

2.1.1 Solução da Equação Mestra.

Na aproximação de onda girante, a equação mestra que descreve o acoplamento de um oscilador com um reservatório, tem a forma (ver detalhes na Ref. [20] e referências inclusas)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{\rho}(t)] + \kappa(\bar{n} + 1) \left\{ [\hat{a}\hat{\rho}(t), \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}, \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger] \right\} \\ & + \kappa\bar{n} \left\{ [\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t), \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{\rho}(t)\hat{a}] \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right)$ é o Hamiltoniano para o oscilador livre, κ é a constante de amortecimento e $\bar{n}$ é o número médio de fótons térmicos que depende da temperatura seguindo a distribuição de Bose-Einstein definida na Eq.(1.36). Pode-se escrever a

solução da Eq.(2.1) usando o operador Lioviliano da forma

$$\hat{\rho}(t) = e^{\mathcal{L}t} \hat{\rho}_0. \quad (2.2)$$

É possível desacoplar o expoente $e^{\mathcal{L}t}$ em termos de várias exponenciais como se segue

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{L}t} &= e^{-x} \exp \left\{ \left(1 - e^{-x} \right) \mathcal{R} \right\} \exp \left\{ e^{-x} (e^y - 1) \mathcal{J} \right\} \\ &\times \exp \left\{ - (z + i\omega_0 t) \mathcal{M} \right\} \exp \left\{ - (z - i\omega_0 t) \mathcal{P} \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{M} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \odot$, $\mathcal{P} = \odot \hat{a}^\dagger \hat{a}$, $\mathcal{R} = \hat{a}^\dagger \odot \hat{a}$ e $\mathcal{J} = \hat{a} \odot \hat{a}^\dagger$. x, y e z são funções que dependem do tempo e contêm os efeitos tanto da constante de amortecimento, quanto da temperatura

$$\begin{aligned} x &= \ln \left[1 + \bar{n} \left(1 - e^{-2\kappa t} \right) \right], \\ y &= x + 2\kappa t, \\ z &= x + \kappa t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Usando a Eq.(2.3), Peixoto de Faria e Nemes encontram uma expressão geral para o operador densidade, independente do estado inicial do campo. O operador é função dos operadores de criação e destruição do oscilador harmônico $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ e dos estados de número $|n\rangle$ sendo a sua forma final dada por

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{r+l,r+j} \frac{e^{i\omega_0 t(j-l)} e^{-z(j+l)}}{l!j!} \frac{\sqrt{(r+l)!(r+j)!}}{r!(1-e^{-y})^{-r}} \\ &\times \left(\hat{a}^\dagger \right)^r \exp \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \ln \left(1 - e^{-x} \right) \right] (\hat{a})^j \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$p_{r+l,r+j} = \langle r+l | \hat{\rho}_0 | r+j \rangle.$$

Note-se que a forma geral deste operador permite calcular a evolução temporal de qualquer estado inicial no qual o campo eletromagnético possa ser preparado. Estamos interessados em calcular a evolução temporal da superposição de dois estados coerentes, ou estado de gato, já definido na Eq.(1.28). Para isso, nos interessa calcular a evolução do termo cruzado $\hat{\rho}_0 = |\alpha_1\rangle \langle \alpha_2|$ obtendo como resultado

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\alpha_1}^{\alpha_2}(t) &= e^{-x} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 \right) + \alpha_1 \alpha_2^* \left(1 - e^{-y} \right) \right] \hat{\Upsilon} [\alpha_1, \alpha_2] \\ &= e^{-x} \langle \alpha_2 | \alpha_1 \rangle \exp \left[-\alpha_1 \alpha_2^* e^{-y} \right] \hat{\Upsilon} [\alpha_1, \alpha_2], \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde definimos o operador $\hat{\Upsilon}[\alpha_1, \alpha_2]$ como

$$\hat{\Upsilon}[\alpha_1, \alpha_2] = e^{(\alpha_1 e^{-i\omega_0 t - z})\hat{a}^\dagger} \exp\left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \ln(1 - e^{-x})\right] e^{\alpha_2^* (e^{i\omega_0 t - z})\hat{a}}.$$

Usando esta forma final, calcularemos a forma analítica da função de Wigner dependente do tempo associada ao estado de gato de Schrödinger e analisamos os efeitos da decoerência sobre a função de Wigner do oscilador para o referido estado inicial.

2.1.2 Cálculo da função de Wigner.

A partir da Eq.(1.42) e depois de alguma álgebra, a função de Wigner tem a forma [32]

$$W(\gamma, \gamma^*, t) = \frac{2}{\pi^2} e^{2|\gamma|^2} \int \langle -\xi | \hat{\rho}(t) | \xi \rangle e^{-2\xi\gamma^* + 2\xi^*\gamma} d^2\xi, \quad (2.7)$$

onde γ e ξ são variáveis complexas e $|\pm\xi\rangle$ são estados coerentes. Usando o operador densidade definido na Eq.(2.6), calculando a quantidade $\langle -\xi | \hat{\rho}(t) | \xi \rangle$ é integrando na variável ξ , obtemos a forma final da função de Wigner do termo cruzado $|\alpha_1\rangle \langle \alpha_2|$

$$W_{\alpha_1}^{\alpha_2}(\gamma, \gamma^*, t) = \frac{2}{\pi} \Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t) \langle \alpha_2 | \alpha_1 \rangle \exp\{-2\Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t) [\gamma - \alpha_1(t)] [\gamma^* - \alpha_2^*(t)]\}, \quad (2.8)$$

onde $\alpha_i(t) = \alpha_i e^{-(i\omega_0 t + z)}$ e $\Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t)$ é uma função que depende tanto da temperatura e da constante de amortecimento quanto do tempo sendo

$$\Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t) = \frac{e^{-x}}{(2 - e^{-x})}. \quad (2.9)$$

Resulta ser interessante calcular o comportamento assintótico tomando o limite para tempos longos da expressão (2.8)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_{\alpha_1}^{\alpha_2}(\gamma, \gamma^*, t) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + 2\bar{n}} e^{-\frac{2}{1+2\bar{n}}|\gamma|^2} \quad (2.10)$$

onde $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t) = \frac{1}{1 + 2\bar{n}}$$

Esta expressão corresponde à função de Wigner do estado térmico [64], sendo uma função simétrica centrada na origem do espaço de fase com largura e altura dependentes do número médio de fótons do reservatório. Para $T = 0$ ($\bar{n} = 0$), a função é uma gaussiana centrada na origem, que corresponde à função de Wigner do estado fundamental (Confrontar com a Fig.1.1(a)). Para temperaturas crescentes, a largura da função aumenta e a altura diminui.

Esta solução permite calcular uma boa quantidade de casos particulares. Ao considerar o estado coerente, obtido da condição $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, a função de Wigner dependente do tempo, para qualquer temperatura e constante de amortecimento κ é da forma:

$$W_\alpha(\gamma, \gamma^*, t) = \frac{2}{\pi} \Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t) e^{-2\Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t)|\gamma-\alpha(t)|^2} \quad (2.11)$$

A temperatura nula ($\bar{n} = 0$), vemos que $\Gamma_{\bar{n}}^\kappa = 1$ e a função de Wigner tem a forma

$$W_\alpha(\gamma, \gamma^*, t)|_{T=0} = \frac{2}{\pi} e^{-2|\gamma-\alpha(t)|^2}. \quad (2.12)$$

Este resultado já é reportado na literatura [65, 19] quando é considerada a evolução de um oscilador preparado num estado coerente com intensidade $|\alpha|^2$, levando na conta só o termo dissipativo na equação mestra. Vemos que a função de Wigner é uma gaussiana centrada no ponto correspondente a $|\alpha(t)|^2 = |\alpha|^2 e^{-2\kappa t}$ e, consequentemente, o sistema tende ao estado fundamental já que $\alpha(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Da mesma forma, podemos calcular a expressão analítica da função de Wigner dependente do tempo associado a uma mistura estatística. Substituindo cada termo da forma $|\alpha_i\rangle \langle \alpha_i|$, presentes na função de Wigner geral, Eq.(2.8), obtemos:

$$\begin{aligned} W_{ME}(\gamma, \gamma^*, t) &= \frac{1}{2} [W_\alpha(\gamma, \gamma^*, t) + W_{-\alpha}(\gamma, \gamma^*, t)] \\ &= \frac{\Gamma_{\bar{n}}^\kappa}{\pi} \left[e^{-2\Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t)|\gamma-\alpha(t)|^2} + e^{-2\Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t)|\gamma+\alpha(t)|^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Finalmente, podemos escrever a expressão da função de Wigner dependente do tempo quando consideramos um estado de gato de Schrödinger. Usando a Eq. 1.33 e seguindo o mesmo procedimento do usado nos dois casos anteriores, obtemos a forma geral da função de Wigner para qualquer superposição dos estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$

$$\begin{aligned} W_G(\gamma, \gamma^*, t) &= \frac{2}{\pi} \mathcal{N}^2 \Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t) \left\{ 2e^{-2|\alpha|^2} e^{-2\Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t)[|\gamma|^2+|\alpha(t)|^2]} \cos[4\Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t) \text{Im}(\gamma\alpha^*(t)) - \phi] \right. \\ &\quad \left. + e^{-2\Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t)|\gamma-\alpha(t)|^2} + e^{-2\Gamma_{\bar{n}}^\kappa(t)|\gamma+\alpha(t)|^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Cabe comentar que para tempos suficiente longos, o estado coerente, a mistura estatística e os estados de superposição tendem até o estado térmico como podemos ver ao calcular os limites para tempos longos das Eq.(2.13) e da Eq.(2.14).

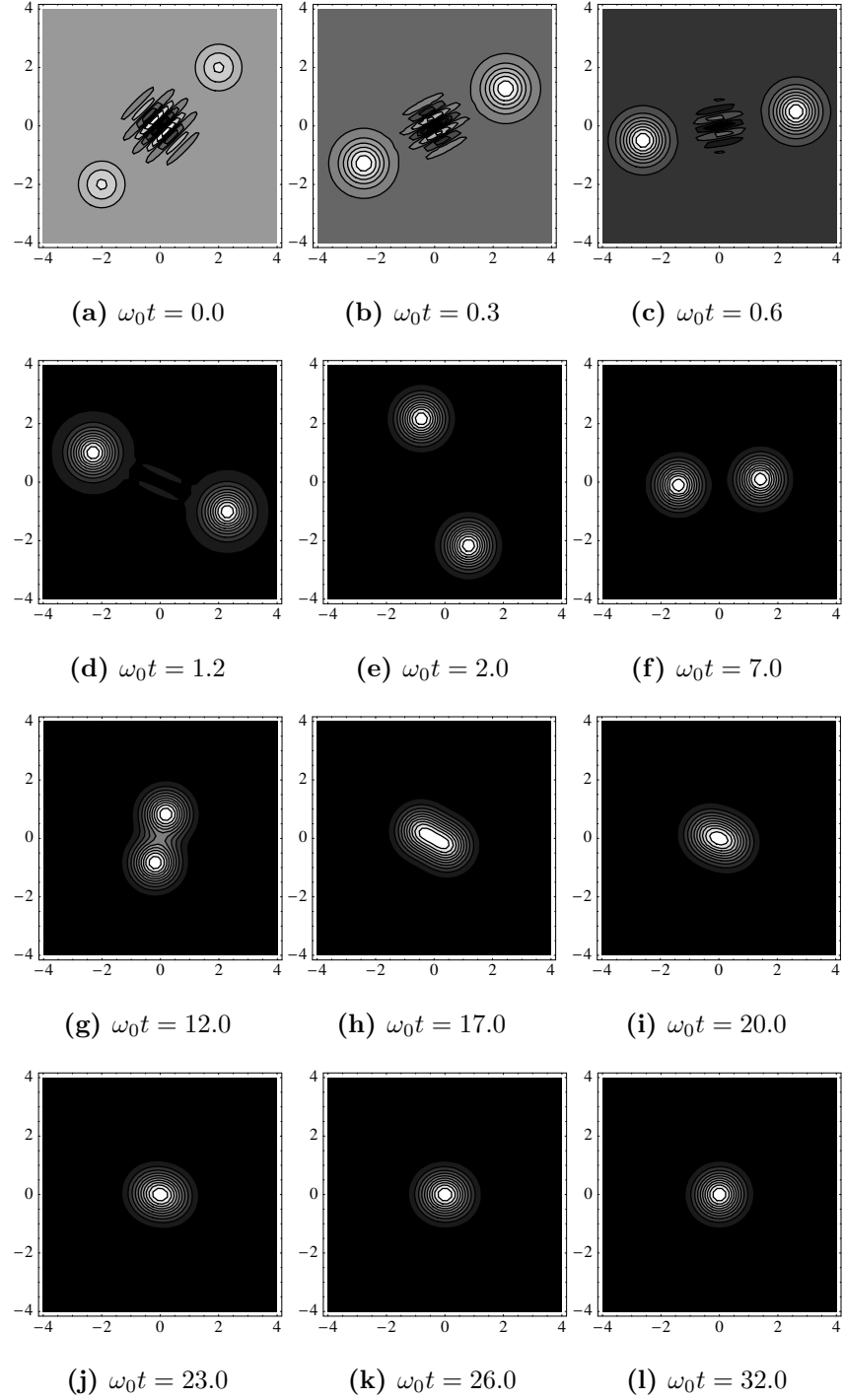


Figura 2.1: Curvas de nível da função de Wigner do gato par a $T = 0K$ para os tempos indicados e $\alpha = (2, 2)$, $\kappa/\omega_0 = 0.1$ e $\omega_0 = 1$.

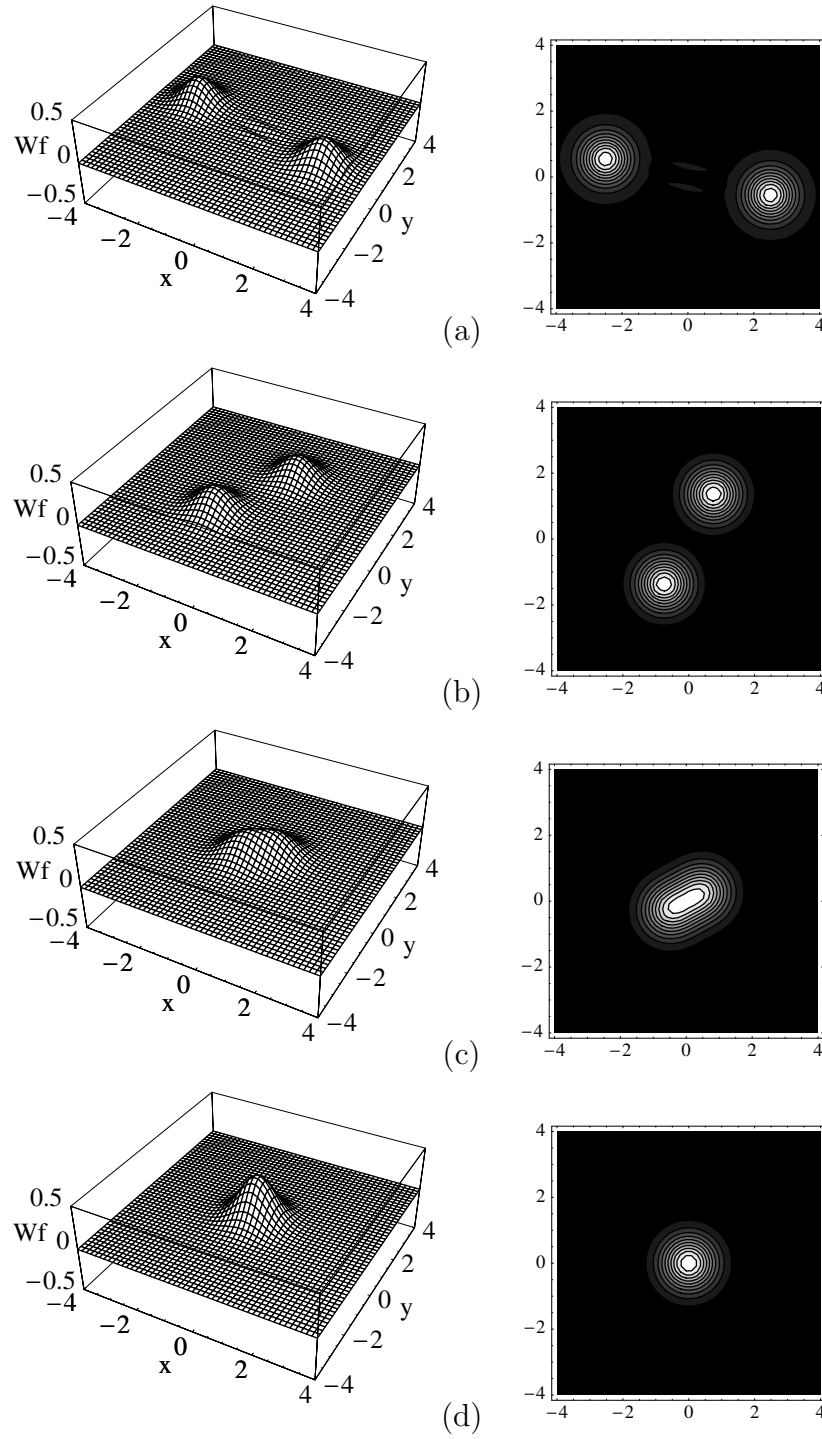


Figura 2.2: Evolução da função de Wigner do mesmo estado inicial para os tempos indicados e $T = 0.2K$, $\alpha = (2, 2)$, $\kappa/\omega_0 = 0.1$ e $\omega_0 = 1.0$. (a) $\omega_0 t = 1.0$; (b) $\omega_0 t = 6.0$; (c) $\omega_0 t = 16.0$; (d) $\omega_0 t = 200$.

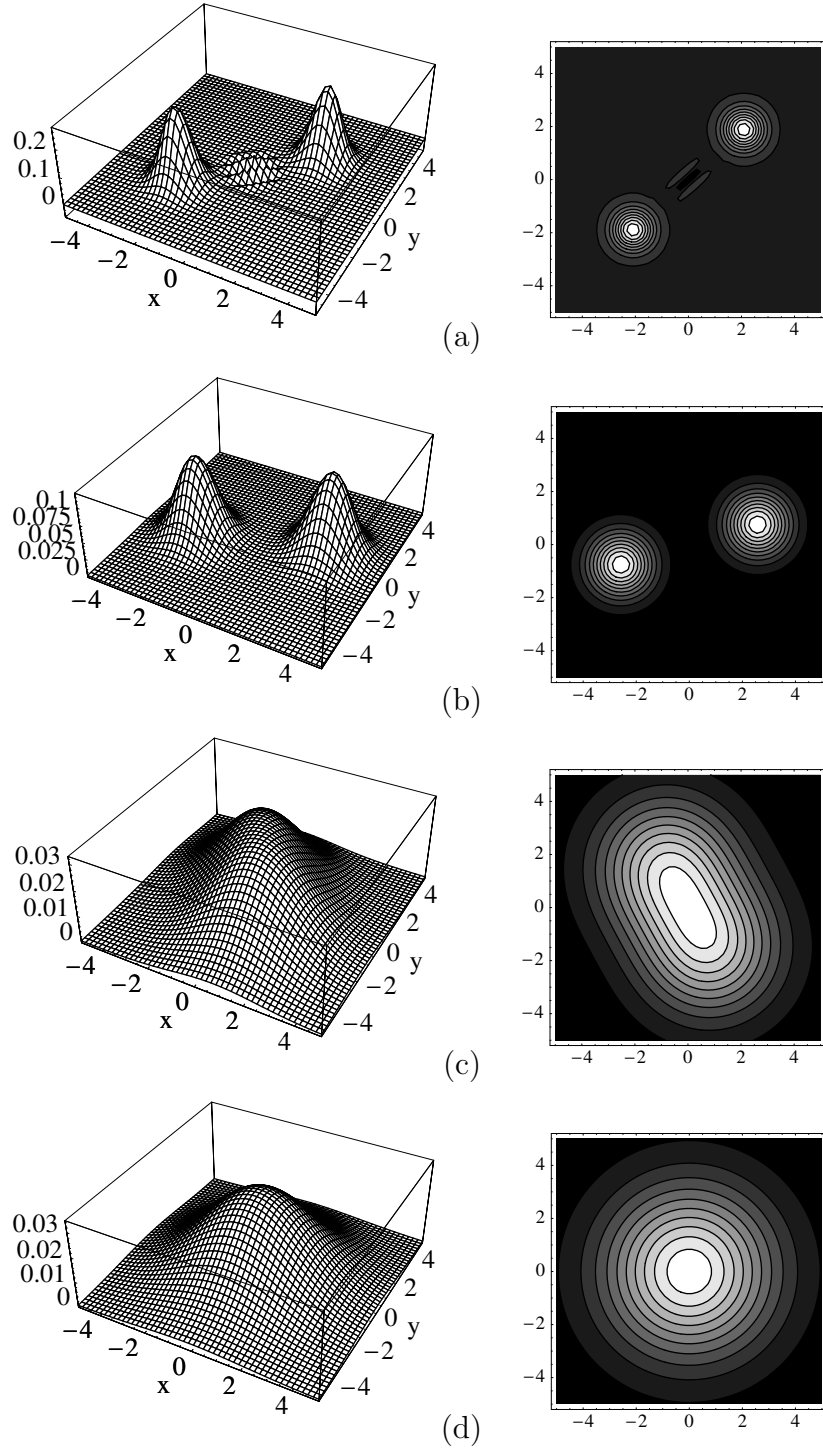


Figura 2.3: Evolução da função de Wigner do mesmo estado inicial para tempos indicados e $T = 4K$, $\alpha = (2, 2)$, $\kappa/\omega_0 = 0.1$ e $\omega_0 = 1.0$. (a) $\omega_0 t = 0.05$; (b) $\omega_0 t = 0.5$; (c) $\omega_0 t = 5.0$; (d) $\omega_0 t = 50.0$.

Com o objetivo de visualizar o efeito da dissipação ($\alpha = (2, 2)$, $\kappa/\omega_0 = 0.1$ e $T = 0$), a forma da função de Wigner para alguns tempos de interesse é mostrada na Fig. 2.1 considerando como estado inicial o estado de gato par, definido na Eq.(1.30). O estado inicial de superposição (gato par), ilustrado na Fig. 2.1(a), vai perdendo os termos de interferência e finalmente, quando $\omega_0\tau_d \approx 2.0$, o sistema é uma mistura estatística dos estados $|\alpha(\tau_d)\rangle$ e $|\alpha(\tau_d)\rangle$, como observamos das Figs. 2.1(b-e). Para tempos maiores, vemos como os dois pacotes que constituem a mistura estatística perdem intensidade devido à dissipação, Figs. 2.1(e-k), e finalmente o sistema atinge seu estado assintótico: o estado fundamental do oscilador harmônico, para o qual a função de Wigner consiste em uma gaussiana centrada na origem do espaço de fase, como vemos da Fig 2.1(l) para $\omega\tau_r \approx 25.0$. Portanto, temos duas escalas de tempo: a primeira é a chamada escala de decoerência, onde o estado puro inicial evolui até uma mistura estatística de dois estados coerentes e a escala de relaxação onde a mistura estatística evolui até o estado fundamental, um estado puro.

A situação muda quando consideramos temperaturas diferentes de zero. Nas Fig. 2.2 e Fig. 2.3 mostramos a evolução da função de Wigner quando consideramos como estado inicial o gato par, para o mesmo valor de α , $\kappa/\omega_0 = 0.1$ e dois valores diferentes de temperatura, $T = 0.2K$ e $T = 4K$. O número médio de fótons é calculado substituindo o valor da temperatura na estatística de Bose-Einstein, Eq. (1.36), onde o valor da frequência do modo corresponde àquela usada no experimento de Paris [55]. Além das curvas de nível, incluímos os gráficos tridimensionais para observar as mudanças na ordem de grandeza da função. Nos dois casos, o sistema mantém as duas escalas de tempo: a primeira para $t \sim \tau_d$ na qual o estado de superposição perde os termos de interferência, e a escala de relaxação onde $\tau_d < t \sim \tau_r$, na qual os dois pacotes que formam a mistura estatística perdem intensidade até atingir o estado térmico. Quando a temperatura é baixa (número médio de fótons térmicos pequeno), o tempo de decoerência mantém-se pequeno, como vemos ao comparar os tempos associados às funções de Wigner mostrada nas Figs. 2.2(a), 2.3(a). Vemos que $\omega_0\tau_d < 6.0$ se $T = 0.2$ e $\omega_0\tau_d < 0.5$ se $T = 4.0$. A medida que o tempo passa, a largura da função de Wigner aumenta e a amplitude diminui ao aumentar o número médio de fótons térmicos presente no sistema, como vemos ao comparar as Figs. 2.2(b-d) com a mesma sequência da Fig. 2.3. Podemos estabelecer duas diferenças fundamentais com relação ao caso de temperatura nula: a escala de de-

coerência, τ_d , é menor quando a temperatura aumenta e o estado final não é um estado puro e sim um estado misto. Como tínhamos visto ao analisar o limite da função de Wigner associada ao termo $|\alpha_1\rangle\langle\alpha_2|$ para tempos longos, o efeito que a temperatura tem sobre o sistema é levá-lo, não para o estado fundamental como no caso a $T = 0K$, e sim até o estado térmico.

2.2 Dissipação no sistema átomo-campo.

Nesta seção, apresentamos o cálculo da função de Wigner conjunta do sistema átomo-campo e as funções de Wigner reduzidas associadas ao micromaser onde são consideradas perdas na cavidade e o sistema está fora da ressonância [63]. Usaremos nesta seção o operador densidade solução da equação mestra na aproximação de Born-Markov para este problema, já calculado por J.G. Peixoto de Faria e M.C. Nemes [50]. As funções de Wigner reduzidas permitem analisar a dinâmica do sistema na representação do espaço de fase, da mesma forma que foi feito no caso do campo em contato com um reservatório discutido na Seção anterior. Usando a solução para o operador densidade global da Ref. [50], construímos a função de quase-distribuição de Wigner conjunta proposta por Czirják e Benedict [62] no espaço de fase completo definido pelo produto direto da esfera de Bloch e o espaço de fase do campo eletromagnético. De posse deste resultado, calculamos as funções de Wigner reduzidas dos subsistemas, ao integrar sobre as variáveis que não desejamos. Inicialmente, revisaremos os resultados para o operador densidade para depois apresentar os resultados do nosso cálculo da função de Wigner tanto do campo como do átomo. Estas funções permitem visualizar a dinâmica de interação e o emaranhamento dos subsistemas, ao considerar um estado inicial particular e dissipação nula, além de estudar os efeitos sobre o estado atômico quando o termo dissipativo é considerado.

2.2.1 Operador densidade para o modelo Jaynes-Cummings com dissipação.

Para descrever o sistema onde átomo e campo interagem dentro de uma cavidade de alto factor de qualidade Q , consideramos o modelo de Jaynes-Cummings que descreve a interação de um átomo de dois níveis interagindo com um campo eletro-

magnético monocromático dentro de uma cavidade dado pela expressão (1.59) que reproduzimos aqui

$$\hat{H} = \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_a\hat{\sigma}_z + \Omega(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \quad (2.15)$$

Aqui ω_c é a frequência do modo do campo, ω_a é a frequência da transição entre os níveis do átomo e $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ são os operadores de criação e destruição bosônicos com comutador $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Os estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ do átomo permitem definir os operadores $\hat{\sigma}_i$, ($i = 1, 2, 3$). Modificamos a notação de maneira que Ω é a frequência de Rabi que mede o acoplamento entre átomo e campo.

Fora da ressonância, no regime dispersivo $|\delta|/\Omega \gg \sqrt{n+1}$, sendo n o número de fótons e $\delta = \omega_a - \omega_c$ o parâmetro de dessintonia, o Hamiltoniano efetivo do sistema é dado por [66]:

$$\hat{H}_{JC}^{eff} = \hbar\omega_c\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\frac{\Omega^2}{\delta}[(\hat{a}\hat{a}^\dagger + 1)|e\rangle\langle e| - \hat{a}\hat{a}^\dagger|g\rangle\langle g|]. \quad (2.16)$$

O operador densidade global do sistema átomo-campo satisfaz a equação mestra

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_{JC}^{eff}, \hat{\rho}(t)] + \hat{\mathcal{D}}\hat{\rho}(t), \quad (2.17)$$

onde o operador $\hat{\mathcal{D}}$ descreve as perdas dentro da cavidade. Para o caso onde a temperatura é nula, este operador tem a forma

$$\hat{\mathcal{D}} = \kappa(2\hat{a} \odot \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} \odot - \odot \hat{a}^\dagger\hat{a}). \quad (2.18)$$

Aqui κ é a constante de dissipação e o símbolo $\odot$ indica o local onde o operador densidade deve ser substituído. J.G. Peixoto de Faria e M.C. Nemes [50, 67] resolveram a Eq.(2.17) usando o formalismo de super-operadores para o estado inicial do sistema dado por

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \otimes |\alpha\rangle, \quad (2.19)$$

sendo $|\alpha\rangle$ o estado coerente e $|g\rangle$ e $|e\rangle$ são os estados fundamental e excitado do átomo, respectivamente. A solução analítica para a evolução temporal do operador densidade é escrita como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \frac{1}{2}(|e, \alpha(t)e^{-i\omega_0 t}\rangle\langle e, \alpha(t)e^{-i\omega_0 t}| + |g, \alpha(t)e^{i\omega_0 t}\rangle\langle g, \alpha(t)e^{i\omega_0 t}| \\ & + e^{i\Theta(t)+\Gamma(t)}|e, \alpha(t)e^{-i\omega_0 t}\rangle\langle g, \alpha(t)e^{i\omega_0 t}| \\ & + e^{-i\Theta(t)+\Gamma(t)}|g, \alpha(t)e^{i\omega_0 t}\rangle\langle e, \alpha(t)e^{-i\omega_0 t}|), \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde $\alpha(t) = \alpha \exp(-\kappa t)$ e $\omega_0 = \Omega^2/\delta$, e as funções $\Gamma(t)$ e $\Theta(t)$ são definidas como se segue

$$\Theta(t) = -\omega_0 t + \frac{|\alpha|^2 \kappa}{\kappa^2 + \omega_0^2} [e^{-2\kappa t} (\kappa \sin 2\omega_0 t + \omega_0 \cos 2\omega_0 t) - \omega_0] \quad (2.21)$$

$$\Gamma(t) = -|\alpha|^2 (1 - e^{-2\kappa t}) - \frac{|\alpha|^2 \kappa}{\kappa^2 + \omega_0^2} [e^{-2\kappa t} (\kappa \cos 2\omega_0 t - \omega_0 \sin 2\omega_0 t) - \kappa]. \quad (2.22)$$

De posse deste resultado, os autores estudam a dinâmica da entropia linear de cada subsistema, definida na Eq.(1.8). Cabe levantar alguns pontos da discussão por eles realizada que serão de interesse ao analisar o comportamento da função de Wigner, que será calculada posteriormente:

1. Para tempos correspondentes a $\omega_0 t = m\pi$ e $\kappa \neq 0$, a entropia linear é nula e o estado do sistema é separável, que pode ser expresso como um produto direto de estados dos sub-espacos atômico e de campo. No entanto, o estado do campo é puro enquanto o átomo evolui até um estado misto. Isto quer dizer que o átomo carrega o grau de decoerência do sistema átomo-campo nos instantes onde o sistema não está emaranhado.
2. As propriedades do sistema átomo-campo são governadas pela presença do reservatório, onde tal efeito está completamente associado à função característica $\Gamma(t)$. Ao estudar a evolução do operador densidade global, vê-se que o processo de decoerência não é completo, já que o operador densidade global não evolui até uma mistura estatística dos próprios autoestados no limite de $t \rightarrow \infty$.
3. Embora o reservatório esteja acoplado ao campo na cavidade, a função $\Gamma(t)$ está presente só na expressão para a entropia linear do sistema atômico.
4. Com relação aos subsistemas, quando o campo atinge o estado fundamental do oscilador harmônico, o qual é o estado assintótico do subsistema a temperatura não nula, conforme vimos na Seção 2.1, não é possível para o sistema atômico perder coerência para tempos futuros. Isto é devido a que a decoerência é induzida pelo ambiente e esta só pode acontecer no sistema por meio da interação do campo com o reservatório. Portanto, a entropia linear atômica alcança valores menores àquele associado a uma perfeita mistura estatística dos níveis $|g\rangle$ e $|e\rangle$. Este valor final da entropia reduzida depende tanto da

intensidade do campo coerente preparado dentro da cavidade quanto do valor da constante de dissipação.

2.2.2 Evolução temporal das funções de Wigner reduzidas.

Usando a forma do operador de matriz densidade global podemos calcular a função de Wigner conjunta [62], sendo esta definida como

$$W(\beta, \beta^*, \theta, \phi, t) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi^5}} \sum_{K=0}^{2j} \sum_{Q=-K}^K Y_{KQ}(\theta, \phi) \int d^2\xi C_{KQ}(\xi, \xi^*, t) e^{\beta\xi^* - \beta^*\xi}, \quad (2.23)$$

onde a função característica $C_{KQ}(\xi, \xi^*, t)$ é dado por

$$C_{KQ}(\xi, \xi^*, t) = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{D}[\xi] \hat{T}_{KQ}^\dagger].$$

Aqui, $j = \frac{1}{2}$ é o valor do spin, $Y_{KQ}(\theta, \phi)$ são harmônicos esféricos, $\hat{T}_{KQ}^\dagger$ é o operador de multipolo que atua no sub-espço de momento angular do átomo e $\hat{D}[\xi] = e^{\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a}}$ é o operador de deslocamento no espaço de fase do campo, já definido no Capítulo 1.

Substituindo a forma analítica do operador densidade, Eq. (2.20), na definição Eq. (2.23) obtemos uma expressão analítica, exata, da função de Wigner conjunta do sistema átomo-campo dada por

$$\begin{aligned} W(\beta, \beta^*, \theta, \phi, t) = & \sqrt{\frac{2}{4\pi}} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [G_+(t)Y_{00}(\theta, \phi) + G_-(t)Y_{10}(\theta, \phi)] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [F_+(t)Y_{1-1}(\theta, \phi) - F_-(t)Y_{11}(\theta, \phi)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde definimos as funções $G_\pm(t)$ e $F_\pm(t)$ como:

$$\begin{aligned} G_\pm(t) &= (e^{-2|\alpha(t)e^{-i\omega_0 t} - \beta|^2} \pm e^{-2|\alpha(t)e^{i\omega_0 t} - \beta|^2}) \\ F_\pm(t) &= e^{\mp i\Theta(t) + \Gamma(t)} e^{|\alpha|^2(1 + e^{\pm 2i\omega_0 t} - 4\cos\omega_0 t e^{\pm i\omega_0 t})} e^{-|\beta|^2} e^{-2(\alpha^*(t)\beta - \alpha(t)\beta^*)e^{\pm i\omega_0 t}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

A função de Wigner do campo (átomo) pode ser calculada usando a expressão encontrada para a função conjunta de Wigner, Eq.(2.24), ao fazer o traço sobre as variáveis de átomo(campo). Desta forma podemos definir:

$$\begin{aligned} W_a(\theta, \phi, t) &= \int d^2\beta W(\beta, \beta^*, \theta, \phi, t) \\ W_c(\beta, \beta^*, t) &= \int \sin\theta d\theta d\phi W(\beta, \beta^*, \theta, \phi, t), \end{aligned}$$

onde os índices a e c indicam se nos referimos ao sistema atômico ou do campo. Desta forma, obtemos expressões analíticas para a função de Wigner de cada subsistema

$$\begin{aligned} W_a(\theta, \phi, t) &= \sqrt{\frac{2}{4\pi}} \left\{ \frac{Y_{00}(\theta, \phi)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} [f_+(t)Y_{1-1}(\theta, \phi) - f_-(t)Y_{11}(\theta, \phi)] \right\} \\ W_f(\beta, \beta^*, t) &= \frac{1}{\pi} (e^{-2|\beta-\alpha(t)e^{-i\omega_0 t}|^2} + e^{2|\beta-\alpha(t)e^{i\omega_0 t}|^2}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde

$$f_{\pm}(t) = e^{\mp i\Theta(t) + \Gamma(t)} e^{|\alpha(t)|^2(1 + 3e^{\pm 2i\omega_0 t} - 4\cos(\omega_0 t)e^{\pm i\omega_0 t})}. \quad (2.27)$$

Estes resultados mostram como a função de Wigner associada ao campo é sempre positiva. De fato, ela tem uma forma análoga à função de Wigner da mistura estatística de dois estados coerentes com amplitude igual a $\alpha(t)$ e diferença de fase igual a $2\omega_0 t$, se a comparamos com a Eq.(1.46). Por outro lado, a função de Wigner atômica tem valores negativos, devido ao fato de estar associada à evolução de um estado de superposição dos níveis $|g\rangle$ e $|e\rangle$. Vemos que ela depende da função $\Gamma(t)$, indicando que a sua dinâmica é afetada pelo reservatório.

Na Figura 2.4 apresentamos as funções reduzidas nos dois subespaços para o tempo inicial. A função de Wigner do campo no plano β (neste caso $\beta = x + iy$), Fig.2.4(a), corresponde a uma gaussiana centrada no ponto $\alpha = (2, 0)$. A função de Wigner atômica na representação polar esférica, Fig.2.4(b), corresponde a uma superposição dos níveis atômicos preparada no instante inicial e tem dois lóbulos localizados no equador da esfera de Bloch: um deles positivo na direção positiva do eixo x e outro na direção oposta, sombreado na figura, que corresponde à parte negativa. De novo, apresentamos o valor absoluto da função de Wigner atômica para facilitar a visualização. Esta parte negativa da função de Wigner é devido ao forte caráter não-clássico da superposição dos dois níveis atômicos na Eq.(2.19). De fato é o análogo das franjas de interferência dos estados de superposição dos estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ da Fig. 2.1(a). Notemos que só aparece um lóbulo negativo, indicando que o estado de superposição está associado a níveis de um átomo só (confrontar com o exemplo dado na Fig.1.3(b)).

Num primeiro exemplo, apresentamos a evolução das funções de Wigner quando as perdas não são consideradas ($\kappa = 0$) o que corresponde à situação descrita pelo modelo Jaynes-Cummings. Na Fig. 2.5(a-d) mostramos quatro instantes diferentes: vemos como o estado coerente inicial da Fig. 2.4(a) evolui até um estado de mistura

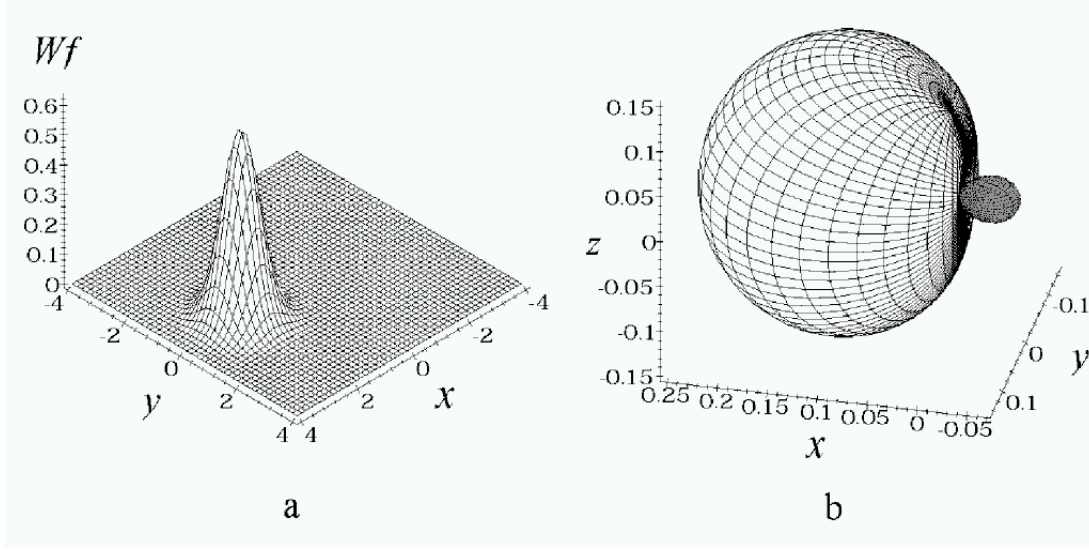


Figura 2.4: Funções de Wigner Reduzidas dos subsistemas (a) campo e (b) átomo no tempo inicial e $\alpha = (x, y) = (2, 0)$.

estatística de dois estados coerentes com $\alpha_1 = (0, 2)$ e $\alpha_2 = (0, -2)$, como é mostrado na Fig. 2.5(a). Neste contexto, o fato do estado do campo estar representado por uma mistura estatística, indica que os subsistemas estão maximamente emaranhados. Nos tempos correspondentes à $\omega_0 t = m\pi$, a função de Wigner corresponde àquela associada a um estado coerente. A diferença de fase entre este estado e o estado coerente inicial depende se m é par ou ímpar como podemos observar na Fig. 2.5(b,c). Quer dizer que num período igual à $T = \pi/\omega_0$, o estado do subsistema volta a ser puro. Denominaremos este tempo *período de recoerência* onde usamos este termo para referirmos a instantes onde os estados tanto no átomo quanto do campo são estados puros e o estado global é separável. Vemos que também pode ser definido um *período de recorrência*, denotado como τ , que corresponde ao tempo no qual o estado de subsistema volta ao estado original. Neste caso particular $\tau = 2\pi/\omega_0$, como vemos das Fig. 2.5(c,d).

Um comportamento equivalente é observado para o subsistema atômico, ilustrado na Fig. 2.6(a-d). Podemos ver como a função de Wigner atômica roda ao redor do eixo z na direção definida pela regra da mão direita. No tempo correspondente a $\omega_0 t = \pi/2$, Fig. 2.6(a), o parte negativa da função de Wigner desaparece, assim como a assimetria e a forma da função é esférica. Esta forma corresponde a

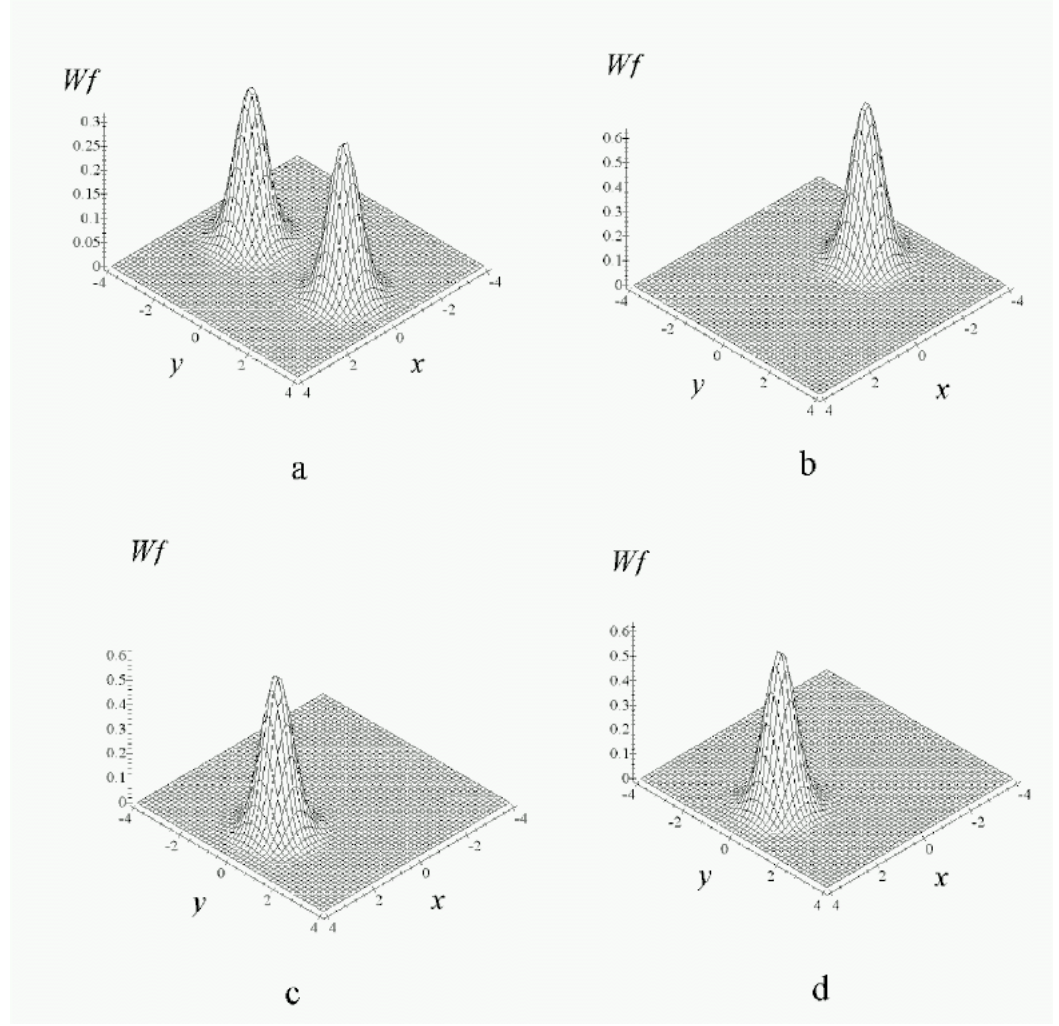


Figura 2.5: Função de Wigner reduzida do campo no plano β sem dissipação ($\alpha = 2$, $\kappa/\omega_0 = 0$ e $\omega_0 = 1$) para (a) $\omega_0 t = \pi/2$; (b) $\omega_0 t = \pi$; (c) $\omega_0 t = 2\pi$ e (d) $\omega_0 t = 4\pi$.

uma mistura estatística dos dois níveis atômicos, já que todos os possíveis estados $|J, M\rangle$, correspondentes a todos os valores do operador $\hat{J}_z$ têm igual probabilidade de estarem ocupados. Para tempos correspondentes aos múltiplos inteiros do período de recoerência, o subsistema atômico recobra a sua pureza e a fase relativa depende da paridade do múltiplo: Para m ímpar, o átomo evolui para uma superposição com fase relativa ao estado inicial de π como podemos ver na figura Fig. 2.6(b). Para m par, obtemos o estado original, Fig. 2.6(c,d).

Podemos dizer que o Hamiltoniano efetivo da interação dipolar na aproximação dispersiva entre átomo e campo provoca o emaranhamento dos dois subsistemas. Na

condição inicial estudada, os dois subsistemas são estados puros que evoluem até misturas estatísticas para tempos correspondentes a $\omega_0 t = m\pi/2$ sendo m ímpar. Por sua vez, estas misturas evoluem até um estado puro nos instantes correspondentes a múltiplos do período de recoerência $T = \pi/\omega_0$. Consequentemente, podemos afirmar que o processo de emaranhamento é *reversível*. O conceito de emaranhamento reversível será de importância na análise dos problemas que serão apresentados nos capítulos posteriores. Um outro aspecto que será tratado também consiste na “recoerência” ou capacidade de um sistema de voltar ao estado no qual foi originalmente preparado.

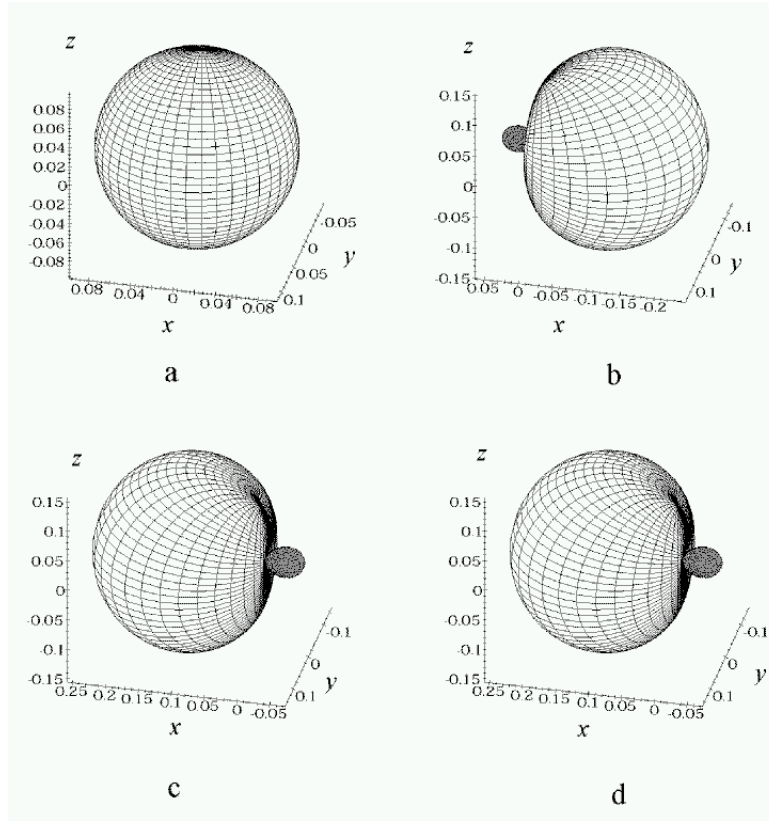


Figura 2.6: Função de Wigner atômica reduzida no caso não dissipativo usando os mesmos parâmetros da Fig. 2.5. (a) $\omega_0 t = \pi/2$, (b) $\omega_0 t = \pi$, (c) $\omega_0 t = 2\pi$ e (d) $\omega_0 t = 4\pi$.

O comportamento muda quando consideramos dissipação no sistema como vemos na Fig. 2.7(a-d), onde é mostrada a evolução da função de Wigner do campo para $|\alpha| = 1$, $\kappa/\omega_0 = 0.1$ e $\omega_0 = 1$. A dinâmica dos pacotes ao redor da origem do

espaço de fase é similar à associada ao caso não dissipativo: o campo continua evoluindo até o estado de mistura estatística quando $\omega_0 t = (2m - 1)\pi/2$, como vemos na Fig. 2.7(a), recobrando a sua pureza quando $\omega_0 t = m\pi$. De novo, o estado tem uma diferença de fase com relação ao estado original que depende de se m é par ou ímpar. A *intensidade* do estado coerente atingido pelo sistema é cada vez menor como podemos observar na Fig. 2.7(b,c). O efeito da dissipação consiste em fazer com que o estado do campo seja atraído ao estado fundamental do campo. Vemos que, para tempos suficientemente grandes, a função de Wigner tem a forma de uma gaussiana centrada na origem do estado de fase, Fig. 2.7 (d), que coincide com a forma da função de Wigner do estado fundamental (ver Fig.1.1(a)). O tempo que o sistema leva para relaxar até o estado fundamental depende tanto da constante de amortecimento, κ , quanto da intensidade inicial do estado coerente. O estado assintótico coincide com aquele encontrado na Seção anterior quando o modo do campo eletromagnético interage com o reservatório a $T = 0$, como vemos ao comparar as Fig. 2.7(d) e a Fig. 2.1(l).

Mais interessante resulta observar a forma da função de Wigner atômica para diferentes valores de intensidade do campo e constante de amortecimento, κ . Na Fig. 2.8(a-d) mostramos a evolução da função de Wigner atômica no caso de dissipação fraca ($\kappa/\omega_0 = 0.01$) e intensidade moderada de campo eletromagnético ($|\alpha| = 1$). Na Fig. 2.8(a) encontramos um comportamento similar àquele encontrado no caso não dissipativo: O sistema tende à uma mistura estatística para $\omega_0 t = \pi/2$. Para o primeiro tempo para o qual o estado é separável, $\omega_0 t = \pi$, indicado na Fig. 2.8(b), a parte negativa reaparece na função embora a sua intensidade decresce, se comparamos com o estado inicial. Este processo continua até a correspondente volta do estado de campo para o estado coerente $\omega_0 t = 2\pi$ (Fig. 2.8(c)), onde o lóbulo negativo volta para sua posição original mas sua intensidade é significativamente menor. O estado atômico não consegue voltar para o estado de superposição, sendo agora um estado misto, embora não evolua até uma mistura estatística perfeita (forma esférica), como vemos na Fig. 2.8(d) onde a função de Wigner atômica conserva uma deformação na região na qual aparece o lóbulo negativo no tempo inicial.

Consideremos a evolução das funções de Wigner atômicas quando aumentamos o valor da constante de amortecimento $\kappa/\omega_0 = 0.1$, nos mesmos instantes de tempo

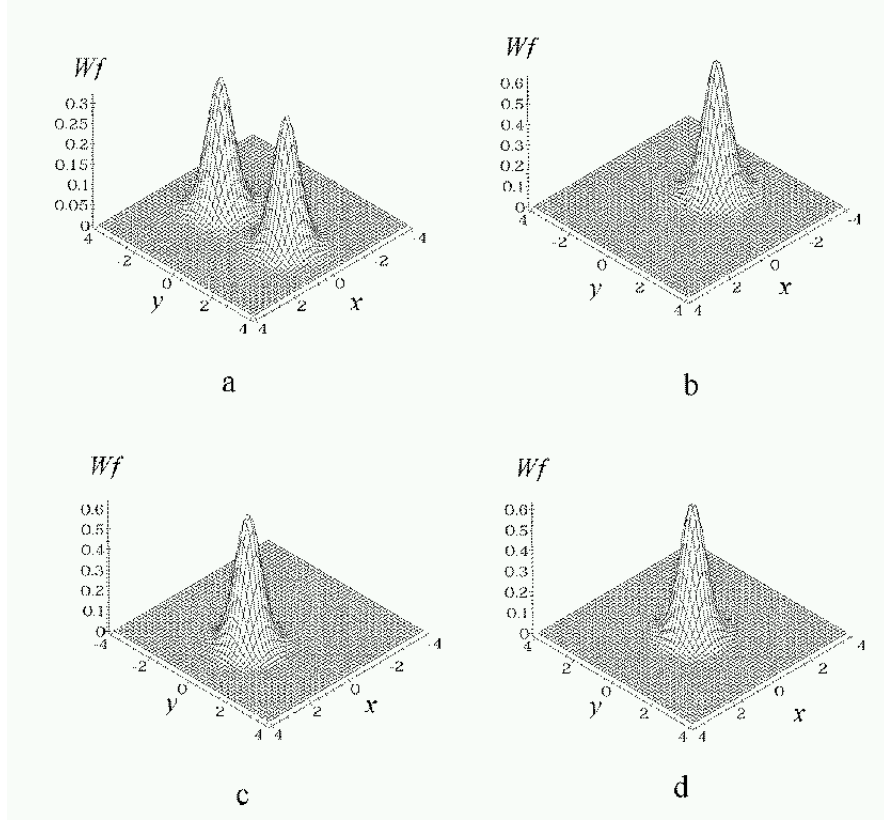


Figura 2.7: Função de Wigner reduzida para o campo no plano β para $\alpha = 2$, $\kappa/\omega_0 = 0.1$ e $\omega_0 = 1$. (a) $\omega_0 t = \pi/2$; (b) $\omega_0 t = \pi$; (c) $\omega_0 t = 2\pi$ e (d) $\omega_0 t = 100\pi$.

apresentados na Fig. 2.8, as quais são mostradas na Fig. 2.9(a-d). Quando $\omega_0 t = \pi/2$, a forma da função de Wigner é igual àquela obtida para dissipação fraca, onde o estado atômico atinge uma mistura estatística, devido ao emaranhamento com o campo eletromagnético. No tempo correspondente ao primeiro período de recorrência no caso não dissipativo, Fig. 2.9(b), o lóbulo negativo desaparece, embora a deformação da superfície na região onde este lóbulo apareceria ainda é observada. O lóbulo positivo, tanto para o caso de dissipação fraca quanto para o valor aqui considerado, não é afetado. Neste ponto é interessante observar o resultado para a entropia linear do sistema atômico obtido por Peixoto de Faria e Nemes neste tempo: enquanto a entropia linear do campo é nula, a entropia linear do subsistema atômico é diferente de zero, indicando seu caráter de estado misto. Os nossos resultados para a função de Wigner confirmam este resultado. No tempo correspondente ao primeiro período de recorrência do caso não dissipativo, mostrado na Fig. 2.9(c),

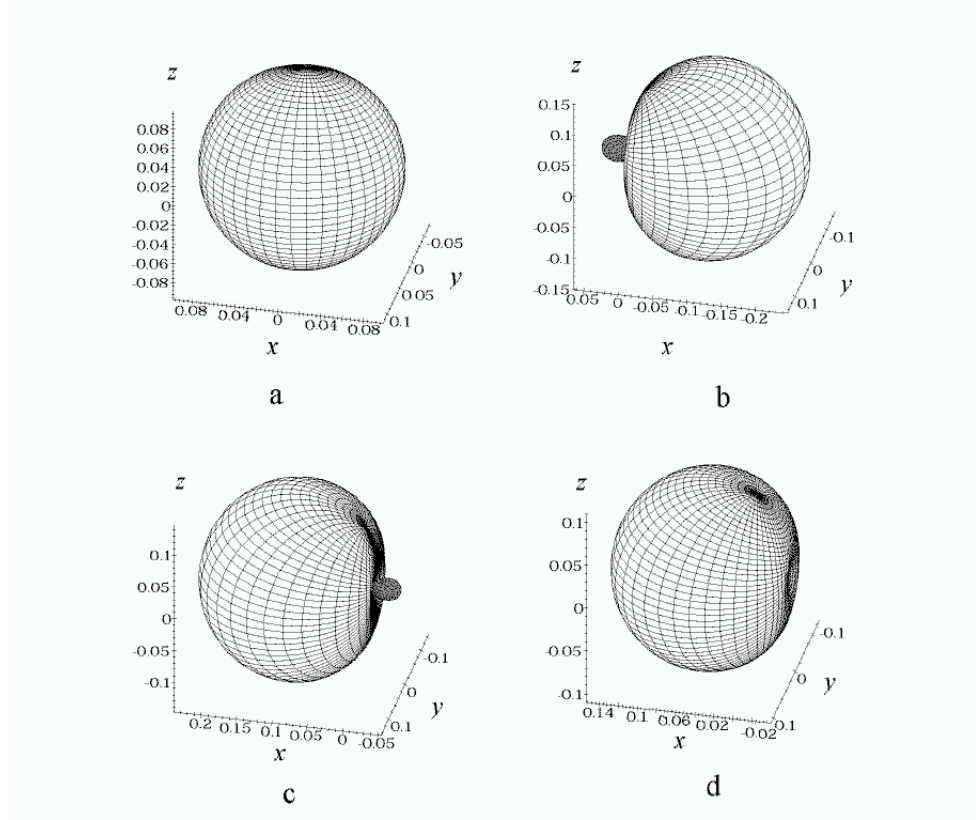


Figura 2.8: Parametrização esférica da função de Wigner reduzida atômica para $\alpha = 1$ e $\kappa/\omega_0 = 0.01$. (a) $\omega_0 t = \pi/2$; (b) $\omega_0 t = \pi$; (c) $\omega_0 t = 2\pi$ e (d) $\omega_0 t = 100\pi$.

a forma assintótica do estado foi praticamente atingida, como podemos concluir ao comparar com a Fig. 2.9(d). De fato, ao aumentar o valor da constante κ o campo atinge mais rapidamente o estado fundamental e o subsistema atômico, que interage com o reservatório via o emaranhamento com o campo, atinge o seu estado assintótico ao mesmo tempo.

Na sequência apresentada na Fig. 2.10(a-d) consideramos dissipação fraca, $\kappa/\omega_0 = 0.1$, e uma intensidade de campo maior, $|\alpha| = 2$. Comparando com o casos discutidos anteriormente, podemos ver como a função de Wigner atômica tem uma simetria mais similar à esférica, ainda para tempos correspondentes à múltiplos do período de recoerência. A forma da função está relacionada com o valor final da entropia linear do subsistema atômico e olhando para estes resultados, podemos chegar a algumas conclusões sobre o tipo de mistura que o subsistema atômico atinge. Se compararmos as Fig. 2.9(d) e Fig. 2.10(d), observamos que para o primeiro caso, a função de

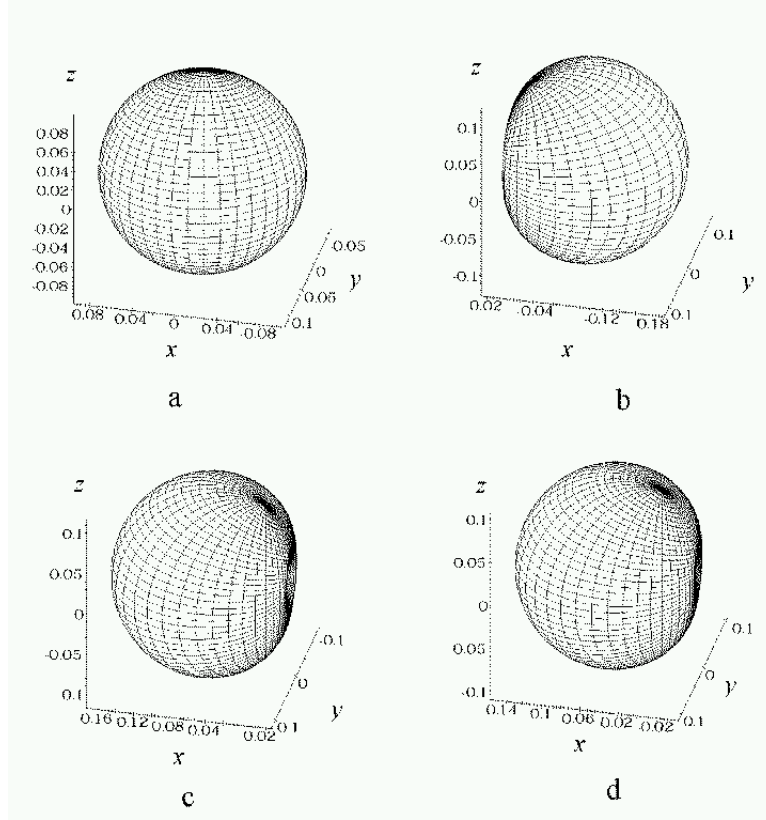


Figura 2.9: Parametrização esférica da função de Wigner reduzida atômica para $\alpha = 1$ e $\kappa/\omega_0 = 0.1$. (a) $\omega_0 t = \pi/2$, (b) $\omega_0 t = \pi$, (c) $\omega_0 t = 2\pi$ e (d) $\omega_0 t = 100\pi$.

Wigner mantém a assimetria e o estado não relaxa para uma mistura estatística. Pelo contrário, no caso de uma intensidade maior do campo, a função de Wigner do estado assintótico possui uma maior simetria esférica, indicando que o estado do sistema é mais próximo à mistura estatística. Além dos parâmetros considerados anteriormente, a forma específica da função de Wigner atômica depende também da relação entre o período de recoerência $\tau = \pi/\omega_0$ e o tempo quando o campo atinge o estado fundamental. Dependendo de se o tempo no qual o campo atinge o estado fundamental é próximo ou não de um múltiplo do período de recoerência, a forma final da função de Wigner atômica é menos ou mais parecida com uma esfera.

Estes resultados concordam com o comportamento das entropia lineares dos subsistemas para diferentes valores de $|\alpha|^2$ reportadas por Peixoto de Faria e Nemes. Podemos extrair estas informações da forma analítica para a função de Wigner atômica na Eq.(2.26). Vemos como o fator exponencial negativo ($\exp(-\Gamma(t))$), pre-

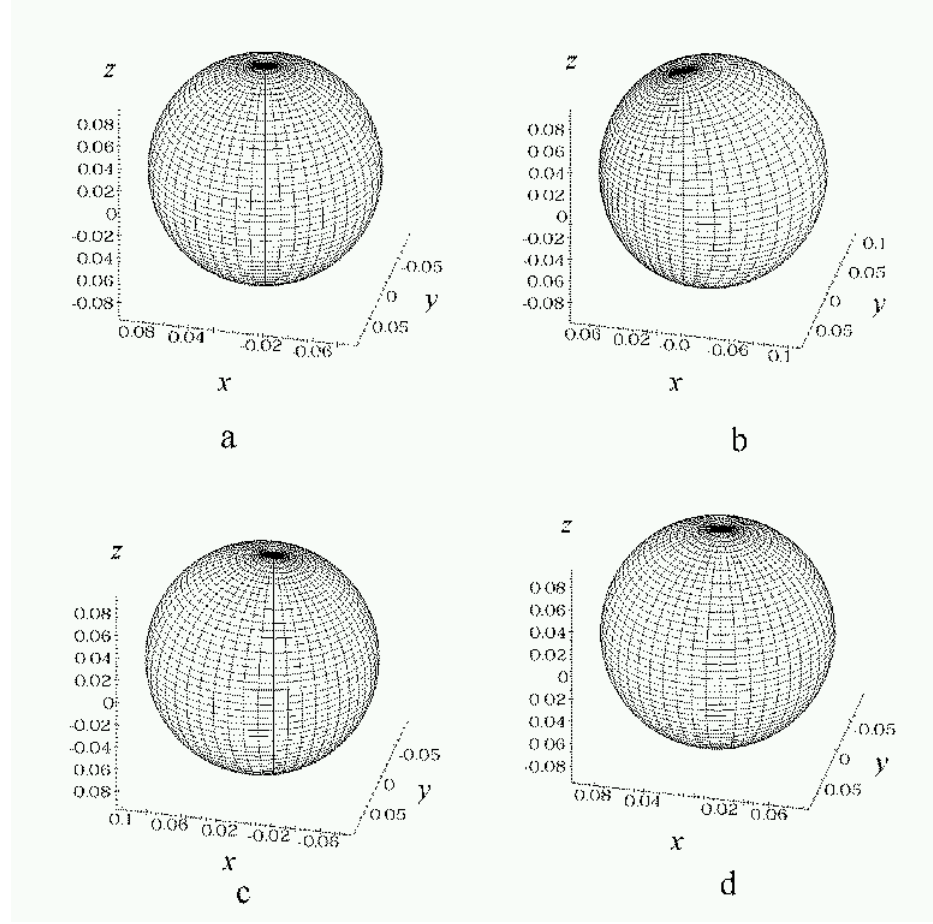


Figura 2.10: Parametrização esférica da função de Wigner reduzida atômica para $\alpha = 2$ e $\kappa/\omega_0 = 0.1$. (a) $\omega_0 t = \pi/2$, (b) $\omega_0 t = \pi$, (c) $\omega_0 t = 2\pi$ e (d) $\omega_0 t = 100\pi$.

sentes nas funções $f_{\pm}(t)$ que acompanham os harmônicos esféricos $Y_{1\pm 1}$, faz com que estas funções adquiram valores muito próximos de zero e só o harmônico de simetria esférica $Y_{00}(\theta, \phi)$ sobrevive para tempos longos. A forma da função de Wigner atômica para tempos suficientemente longos depende fortemente da intensidade do campo e do valor da constante de amortecimento. Da mesma maneira, podemos concluir que a forma das funções de Wigner reduzidas indicam que, embora o reservatório esteja acoplado ao campo eletromagnético, a dinâmica do subsistema atômico carrega os efeitos de dissipação. Incrementando a intensidade $|\alpha|$ do campo coerente considerado como estado inicial, vemos como o sistema atômico vai para um estado com simetria quase-esférica. Nestas situações, o estado assintótico do sistema atômico fica mais próximo de uma mistura estatística.

Capítulo 3

O oscilador quártico bidimensional.

A propagação lenta (velocidade de grupo igual a $17m/s$) de um pulso de luz [68], obtida em experimentos que envolvem tanto a Transparência Eletromagneticamente Induzida (TEI) quanto tecnologia de átomos frios com o objetivo de criar uma ressonância com largura de linha de transmissão muito menor ao naturalmente associado aos átomos, tem despertado um interesse recente no estudo de propagação de luz em meios não-lineares. Um pulso que se propaga neste tipo de meio experimental, além da diminuição da velocidade de grupo, o aumento da eficiência da não-linearidade Kerr [69] já comprovada experimentalmente [70]. Esta magnificação de intensidade sugere que propostas teóricas de aplicações usando interação não-linear tipo Kerr podem se tornar experimentalmente realizáveis. Algumas destas propostas estão relacionadas com a geração de superposições macroscópicas de estados coerentes de oscilador harmônico, chamadas de “gatos de Schrödinger”, problema que foi abordado por alguns autores [40, 71]. Também são discutidos na literatura fenômenos como colapsos e ressurgimentos [72], ressurgimentos fracionais [73] e geração de estados maximamente emaranhados [74]. Nestes trabalhos, o modelo usado considera dois pulsos de luz interagindo num meio não-linear, onde os campos são descritos como osciladores harmônicos e o termo de interação são potências quárticas dos operadores de criação e destruição. O modelo que melhor se ajusta a esta situação é o modelo quártico bidimensional.

Este modelo resulta importante na descrição da interação de dois condensados de Bose-Einstein [43]. A interação entre os dois condensados está associada às colisões de dois corpos [75, 76]. A geração tanto de estados emaranhados quanto estados de gato de Schrödinger têm sido discutidas usando um modelo simples de dois modos bosônicos onde cada um destes modos descreve um condensado com diferentes graus de liberdade [77, 78]. A forma do Hamiltoniano coincide com aquele que estudaremos a continuação. Neste capítulo estamos interessados na solução analítica da equação de Schrödinger associada ao Hamiltoniano que descreve a interação de dois osciladores quárticos acoplados via dois tipos de interação: bilinear e biquadrático. O primeiro deles corresponde ao associado à interação dipolar na aproximação de onda girante e o segundo, não-linear, é uma função da potência quadrática do Hamiltoniano que descreve o sistema de dois osciladores não interagentes. Uma vez calculada a solução global dependente do tempo podemos encontrar, tomando o traço parcial sobre as variáveis de um dos osciladores, os operadores densidade associados aos subsistemas. De posse deste operador, é possível analisar a dinâmica do emaranhamento ao estudar a evolução da entropia linear reduzida e determinar os efeitos de cada termo de interação na evolução do estado inicial escolhido. Analisaremos as condições necessárias para a obtenção de superposições de estados coerentes dependendo tanto do estado inicial quanto dos parâmetros físicos associados ao Hamiltoniano livre (ω_0) e aos termos de interação (ω_g e ω_λ). Posteriormente, estudaremos o comportamento do emaranhamento quando o estado inicial é um produto de estados coerentes no limite de $\hbar \rightarrow 0$ usando os nossos resultados para a entropia linear reduzida e a função de Husimi. A análise destes resultados permite estabelecer um tempo de ruptura que separa em dois regimes diferentes a dinâmica do sistema [79] e compararemos a dependência no valor da constante de Planck deste tempo de ruptura com o previsto para a escala de Ehrenfest [80, 81, 82]. Este trabalho foi realizado em conjunto com o Dr. Renato Moreira Angelo, na data aluno do IFGW e orientado da Prof. Dra. Kyoko Furuya. A análise do análogo clássico deste sistema e comparações entre o comportamento de distribuições estatísticas e algumas das soluções do problema mecânico quântico aqui apresentadas, podem ser encontradas na tese de doutorado do mesmo autor [18].

3.1 Solução da Equação de Schrödinger e dinâmica do emaranhamento.

Nosso sistema consiste em dois osciladores com a mesma frequência sendo um dos termos de interação de caráter bilinear, associado à interação dipolar na aproximação de onda girante, e considerando também uma interação não-linear, quártica. Hamiltoniano quantizado que descreve o sistema foi apresentado na Eq.(1.49) e que re-escrevemos a seguir

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_\lambda + \hat{V}_g, \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \hbar\omega_0 \sum_{k=1}^2 \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \\ \hat{V}_\lambda &= \hbar\omega_\lambda \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \\ \hat{V}_g &= \hbar\omega_g \hat{H}_0^2 = \hbar^2 g \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1 \right)^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

O Hamiltoniano $\hat{H}_0$ e os termos de interação formam um conjunto de operadores com álgebra definida pelas seguintes regras de comutação (Ver Apêndice A)

$$[\hat{H}_0, \hat{V}_\lambda] = [\hat{V}_g, \hat{V}_\lambda] = 0. \quad (3.3)$$

Como consequência desta propriedade, podemos usar a mesma base de autoestados do Hamiltoniano livre, a base de estados de Fock, para descrever o problema ao considerarmos as interações. Também é possível o estudo dos efeitos de cada interação separadamente, o que simplifica consideravelmente o cálculo da solução analítica do estado global do sistema. É de nosso interesse encontrar as soluções

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} |\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} |\psi_1(0)\rangle \otimes |\psi_2(0)\rangle \quad (3.4)$$

onde $\hat{H}$ é o Hamiltoniano definido na Eq.(3.1) e consideraremos três tipos diferentes de estados iniciais $|\psi(0)\rangle$. No primeiro deles, cada um dos osciladores é preparado num estado de Fock. O segundo estado inicial de interesse é o produto direto de estados coerentes de osciladores harmônicos e num terceiro estado consideramos um dos osciladores preparado no estado coerente sendo o outro um estado de Fock.

Uma vez calculado $|\psi(t)\rangle$, e lembrando que o nosso estado global é puro, podemos calcular a forma do operador densidade total usando a definição (1.3)

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|. \quad (3.5)$$

Os correspondentes operadores densidade reduzidos, $\hat{\rho}_k(t)$, podem ser calculados tomando o traço sobre as variáveis do subsistema que não nos interessa

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_k(t) &= \text{Tr}_j [|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|] \\ &= \sum_j \langle j | \hat{\rho}(t) | j \rangle ,\end{aligned}\tag{3.6}$$

sendo $|j\rangle$ um estado de Fock. Este operador é de extrema importância já que serão calculadas medidas de perda de pureza dos subsistemas através do mesmo. Já que o sistema é bipartite e os estados iniciais de cada subsistema são puros, usaremos a entropia linear reduzida, definida na Eq.(1.8) e a entropia de Von-Neumman

$$S_k = -\text{Tr}_k(\hat{\rho}_k \ln \hat{\rho}_k).\tag{3.7}$$

Uma outra quantidade que será usada tanto na determinação de condições de formação de superposições de estados coerentes quanto na análise do comportamento semiclássico do sistema é a função de Husimi, dada pela Eq.(1.39).

3.1.1 Solução analítica para um produto direto de estados de Fock

Nesta primeira parte, definiremos como estado inicial o produto direto de dois estados de Fock

$$|\psi(0)\rangle = |n_1\rangle_1 \otimes |n_2\rangle_2 \equiv |n_1, n_2\rangle.\tag{3.8}$$

Primeiro apresentaremos um resumo do cálculo da evolução temporal do estado inicial onde analisaremos a forma final do estado global extraindo algumas informações sobre a dinâmica do sistema. Numa segunda parte, serão apresentados os nossos resultados para a entropia linear reduzida seguido de uma breve análise sobre as condições de recuperação de separabilidade.

Com o objetivo de encontrar a evolução temporal deste estado, usamos uma nova base de operadores bosônicos [83] definidos como

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}{\sqrt{2}} \quad \hat{a}_2 = \frac{\hat{A}_1 - \hat{A}_2}{\sqrt{2}}.\tag{3.9}$$

Podemos conectar as duas diferentes bases de autoestados dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{A}$. Isto

é feito ao escrever um estado $|n_1, n_2\rangle$ na nova base, obtendo a relação (Apêndice A.1)

$$|n_1, n_2\rangle_{\mathbf{a}} = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} c_{i,j}(n_1, n_2) |\mathcal{N} - (i+j), (i+j)\rangle_{\mathbf{A}}, \quad (3.10)$$

onde

$$c_{i,j}(n_1, n_2) = (-1)^j \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{j} \sqrt{\frac{[\mathcal{N} - (i+j)]!(i+j)!}{2^{\mathcal{N}} n_1! n_2!}},$$

$$\mathcal{N} = \langle n_1, n_2 | \hat{N}_1 + \hat{N}_2 | n_1, n_2 \rangle = n_1 + n_2. \quad (3.11)$$

Aqui, $\mathcal{N}$ é o número de excitação e o subíndice $\mathbf{a}$ faz referência ao espaço dos operadores bosônicos originais e $\mathbf{A}$ denota estados associados aos novos operadores. A única imposição feita no cálculo consiste em que o estado fundamental seja descrito pelo mesmo vetor em qualquer das duas representações ($|0\rangle_{\mathbf{a}} \equiv |0\rangle_{\mathbf{A}}$).

O Hamiltoniano (3.1) pode ser escrito usando os novos operadores de número do k -ésimo oscilador, $\hat{N}_k = \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k$, pois é diagonal nesta representação

$$\hat{H} = \hbar(\omega_0 + \omega_\lambda) \left(\hat{N}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar(\omega_0 - \omega_\lambda) \left(\hat{N}_2 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_g (\hat{N}_1 + \hat{N}_2 + 1)^2. \quad (3.12)$$

Usando a última expressão, e considerando o estado inicial da Eq. (3.10), encontramos a forma para o estado evoluído $|\psi(t)\rangle$ assim

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\Phi} \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} c_{i,j}(n_1, n_2) e^{2i(i+j)\omega_\lambda t} |\mathcal{N} - (i+j), (i+j)\rangle_{\mathbf{A}}, \quad (3.13)$$

A quantidade $\Phi = \omega_0 t(\mathcal{N} + 1) + \omega_\lambda t\mathcal{N} + \omega_g t(\mathcal{N} + 1)^2$ é uma fase global que depende tanto de ω_λ , associada à interação bilinear, quanto de ω_g , relacionada com o termo quártico. Depois de realizar alguns cálculos algébricos (Apêndice A.1), podemos escrever este mesmo resultado como uma função dos operadores bosônicos originais chegando à seguinte forma final, onde a fase global não é inclusa

$$|\psi(t)\rangle = \frac{[\hat{a}_1^\dagger \cos(\omega_\lambda t) - i\hat{a}_2^\dagger \sin(\omega_\lambda t)]^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{[-i\hat{a}_1^\dagger \sin(\omega_\lambda t) + \hat{a}_2^\dagger \cos(\omega_\lambda t)]^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |0, 0\rangle. \quad (3.14)$$

O nosso resultado já nos permite entender alguns aspectos da dinâmica do emaranhamento. O primeiro é o fato da interação quártica não ter nenhum efeito sobre a evolução temporal nesta condição inicial particular, já que só contribui ao estado evoluído com uma fase global. O emaranhamento é devido somente à interação bilinear. Analisando o estado global, definido na expressão (3.14), podemos definir

dois tempos de interesse particular para os quais o estado do sistema volta a ser *separável*. Para $T_l = \frac{\pi}{\omega_\lambda}(l + \frac{1}{2})$ com l inteiro obtemos

$$\begin{aligned} |\psi(T_l)\rangle &= (-i)^{n_1+n_2} (-1)^{l(n_1+n_2)} |n_2, n_1\rangle \\ &= e^{-i\Phi(T_l)} |n_2\rangle \otimes |n_1\rangle, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $\Phi(T_l)$ é uma fase global. Este estado é separável mas diferente do estado original. De fato, nestes instantes, há uma troca dos índices correspondentes aos números de fótons entre os dois subsistemas, se compararmos com o instante inicial. Chamaremos a este tempo *período de recoerência* devido ao fato dos subsistemas recobram a pureza nestes tempos particulares.

Para tempos correspondentes a $\tau_l = l\frac{\pi}{\omega_\lambda}$, de novo com l inteiro, o estado do sistema pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |\psi(\tau_l)\rangle &= (-1)^{l(n_1+n_2)} |n_1, n_2\rangle \\ &= e^{-i\Phi(\tau_l)} |n_1\rangle_1 \otimes |n_2\rangle_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nestes tempos o sistema volta para o estado original. O tempo τ_1 será definido como o período de recorrência do sistema. Para tempos diferentes dos discutidos acima, os subsistemas estão emaranhados, não sendo possível escrever o estado global do sistema como um produto direto dos estados dos subsistemas separadamente.

Convém escrever o estado global, aplicando os operadores da Eq.(3.14), na representação de estados de número original. A forma final do estado é dada por

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i^{n_1} \sum_m^{n_2} C_{i,m}(t) |n_1 - i + m, n_2 - m + i\rangle, \quad (3.17)$$

onde os coeficientes $C_{i,m}(t)$ são definidos como

$$\begin{aligned} C_{i,m}(t) &= \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{m} \sqrt{\frac{(n_1 - i + m)!(n_2 - m + i)!}{n_1!n_2!}} \times \\ &\times (\cos \omega_\lambda t)^{n_1+n_2-(i+m)} (-i \sin \omega_\lambda t)^{i+m}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Na próxima seção usaremos a expressão anterior do estado global evoluído no cálculo da entropia linear reduzida, de maneira que seja possível estudar sistematicamente a dinâmica do emaranhamento.

Propriedades do emaranhamento para a condição inicial $|n_1\rangle_1 \otimes |n_2\rangle_1$.

Um primeiro passo no estudo das propriedades de emaranhamento consiste no cálculo da matriz densidade reduzida de um dos subsistemas. De posse deste resultado usaremos uma medida de entropia apropriada e assim estudaremos as propriedades do emaranhamento. Usando a Eq.(3.17) podemos calcular a matriz densidade reduzida do oscilador 1 e expressá-la em termos dos seus autovalores, obtendo como resultado:

$$\rho_1(t) = \sum_{l=0}^{n_1+n_2} \zeta_l(t) |l\rangle\langle l|, \quad (3.19)$$

onde os autovalores tem a forma

$$\zeta_l(t) = \sum_{i,i'=0}^{n_1} \sum_{m,m'=0}^{n_2} C_{i,m}(t) C_{i',m'}^*(t) \delta_{i-m,i'-m'} \delta_{n_1-l,i-m}. \quad (3.20)$$

Aqui usamos os coeficientes definidos na Eq.(3.18) e os autovalores satisfazem a condição do traço $\sum \zeta_l(t) = 1$. Uma expressão análoga é encontrada ao traçarmos as variáveis do primeiro oscilador e encontrarmos a matriz densidade reduzida do segundo subsistema. Vemos da Eq.(3.19), que estas matrizes são diagonais na base de estados de número, sendo possível calcular tanto a *entropia linear reduzida*, δ_k , quando a *entropia de Von Neumann*, S_k , devido ao fato de que estas quantidades podem ser expressas em termos dos autovalores da matriz densidade reduzida como se segue

$$\begin{aligned} S_k &= -Tr_k(\hat{\rho}_k \ln \hat{\rho}_k) = - \sum_{l=0}^{n_1+n_2} \zeta_l(t) \ln(\zeta_l(t)), \\ \delta_k &= 1 - Tr_k(\hat{\rho}_k^2) = 1 - \sum_{l=0}^{n_1+n_2} \zeta_l(t)^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

O período de recoerência $T_1 = \frac{\pi}{2\omega_\lambda}$ já determinado da análise da separabilidade da Eq.(3.14), é confirmado pela dependência temporal dos autovalores $\zeta_l(t)$ que está contida nas funções oscilatórias com período associado à frequência ω_λ . Podemos ver isto ao calcular alguns casos particulares com valores de n_k pequenos como mostramos a seguir:

- Para $|\psi(0)\rangle = |1, 0\rangle$ temos

$$\begin{aligned} S_k(t) &= -\cos^2 \omega_\lambda t \ln(\cos^2 \omega_\lambda t) - \sin^2 \omega_\lambda t \ln(\sin^2 \omega_\lambda t), \\ \delta_k(t) &= \frac{1}{2} \sin^2 2\omega_\lambda t. \end{aligned} \quad (3.22)$$

- Para $|\psi(0)\rangle = |1, 1\rangle$ temos

$$\begin{aligned} S_k(t) &= -\cos^2 2\omega_\lambda t \ln(\cos^2 2\omega_\lambda t) - \sin^2 2\omega_\lambda t \ln\left(\frac{\sin^2 2\omega_\lambda t}{2}\right), \\ \delta_k(t) &= \frac{\sin^2 2\omega_\lambda t}{4} (5 + 3 \cos 4\omega_\lambda t). \end{aligned} \quad (3.23)$$

- Para $|\psi(0)\rangle = |2, 0\rangle$ temos

$$\begin{aligned} S_k(t) &= -\cos^4 \omega_\lambda t \ln(\cos^4 \omega_\lambda t) - \sin^4 \omega_\lambda t \ln(\sin^4 \omega_\lambda t) - \\ &\quad - \frac{\sin^2 2\omega_\lambda t}{2} \ln\left(\frac{\sin^2 2\omega_\lambda t}{2}\right), \\ \delta_k(t) &= \frac{\sin^2 2\omega_\lambda t}{16} (13 + 3 \cos 4\omega_\lambda t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

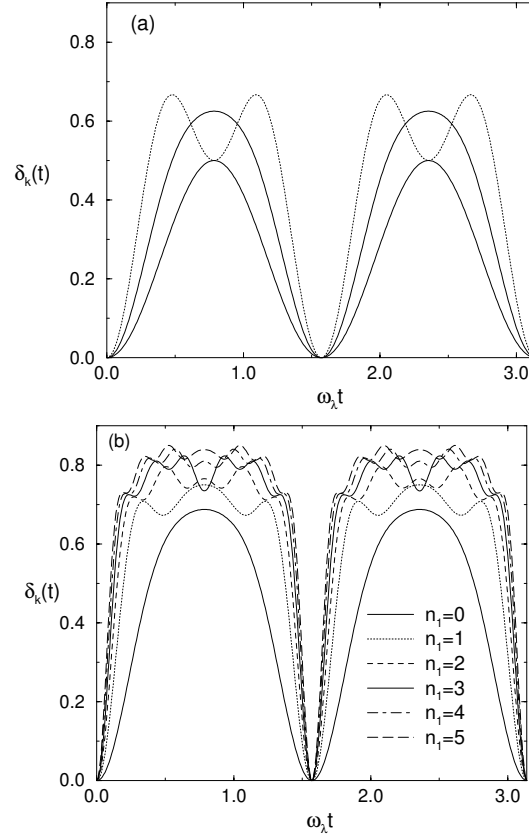


Figura 3.1: (a) Entropia linear reduzida para três estados iniciais: $|1, 0\rangle$ (linha contínua), $|1, 1\rangle$ (linha pontilhada) e $|2, 0\rangle$ (linha contínua mais espessa). (b) Entropia linear reduzida para o estado inicial $(|n_1, n_2\rangle)$, onde $n_2 = 3$ e os valores de n_1 estão especificados na legenda.

Na Figura 3.1(a) apresentamos os resultados obtidos para a entropia linear reduzida nos casos particulares correspondentes às Eqs.(3.22-3.24). Notamos que, além das oscilações associadas ao período de recoerência, aparecem oscilações secundárias para certos valores de n_k . De fato, na Fig.3.1(b) observamos que as oscilações aumentam à medida que aumentamos o valor do número médio inicial de fótons de um dos osciladores, conservando fixo o número médio de fótons do segundo oscilador. Isto pode ser entendido da Eq.(3.19) onde os termos do somatório, que correspondem ao número de estados acessíveis, aumenta quando n_2 aumenta e o subsistema pode passar através de um número maior de estados acessíveis, o que significa um aumento no valor máximo da entropia linear reduzida.

Podemos terminar a nossa análise dizendo que a dinâmica do sistema de dois osciladores acoplados via os termos de interação bilinear e quártico quando o estado inicial do sistema é um produto direto de estados de Fock está governada pelo termo bilinear, sendo o efeito da interação não linear apenas uma contribuição à fase global do estado do sistema. O sistema apresenta emaranhamento reversível com período de recoerência que depende da frequência ω_λ . É possível também definir um período de recorrência do sistema, τ_1 , sendo este o tempo no qual o sistema volta ao estado inicial. Este tempo corresponde ao dobro do período de recoerência, com a exceção do caso onde o número médio de fótons dos osciladores é o mesmo no instante inicial onde se cumpre que $\tau_1 = T_1$. Na próxima seção usaremos os resultados encontrados aqui para encontrar a solução da equação de Schrödinger quando o estado inicial é considerado como um produto direto de estados coerentes do oscilador harmônico.

3.1.2 Evolução temporal do produto de estados coerentes.

Neste caso particular, o nosso estado inicial tem a forma dada por

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha_1\rangle_1 \otimes |\alpha_2\rangle_2 = e^{\frac{-|\alpha_1|^2}{2}} e^{\frac{-|\alpha_2|^2}{2}} \sum_{n,m} \frac{\alpha_1^n}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha_2^m}{\sqrt{m!}} |n, m\rangle, \quad (3.25)$$

onde definimos

$$\alpha_k = \frac{q_{0k} + ip_{0k}}{\sqrt{2\hbar}}. \quad (3.26)$$

Para encontrar a solução para o estado evoluído, usaremos tanto o resultado encontrado para a evolução temporal da condição inicial de produtos de estado de número, Eq.(3.14), quanto as relações de comutação, Eq.(3.3). De novo, apresentaremos primeiro a solução geral seguida pelo cálculo do operador densidade e da

entropia linear reduzida. De posse desta quantidade, analisaremos a dinâmica do emaranhamento.

Usando a Eq.(3.14) e as regras de comutação definidas na Eq.(3.3), podemos re-escrever a equação para a evolução do estado inicial como

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\alpha_1, \alpha_2\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}_g t} e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_0 + \hat{V}_\lambda)t} |\alpha_1, \alpha_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aplicando primeiro o Hamiltoniano livre e a interação bilinear obtemos

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}_g t} e^{\frac{-|\alpha_1|^2}{2}} e^{\frac{-|\alpha_2|^2}{2}} \sum_n \frac{[\alpha_1 e^{-i\omega_0 t} \cos(\omega_\lambda t) \hat{a}_1^\dagger - i\alpha_1 e^{-i\omega_0 t} \sin(\omega_\lambda t) \hat{a}_2^\dagger]^n}{n!} \times \\ &\quad \sum_m \frac{[-i\alpha_2 e^{-i\omega_0 t} \sin(\omega_\lambda t) \hat{a}_1^\dagger + \alpha_2 e^{-i\omega_0 t} \cos(\omega_\lambda t) \hat{a}_2^\dagger]^m}{m!} |0, 0\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}_g t} \hat{D}_1[\beta_1(t)] \hat{D}_2[\beta_2(t)] |0, 0\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}_g t} |\beta_1(t), \beta_2(t)\rangle, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde definimos a quantidade $\beta_k(t)$ ($k = 1, 2$) como

$$\beta_k(t) = e^{-i\omega_0 t} (\alpha_k \cos \omega_\lambda t - i\alpha_j \sin \omega_\lambda t), \quad (3.29)$$

sendo j diferente de k e $\hat{D}_i[\beta_i(t)]$ é o operador de deslocamento. Este resultado preliminar mostra como a interação bilinear não emaranha um produto de estados coerentes, sendo o estado global separável para todo tempo. O efeito do termo bilinear consiste numa mudança da amplitude ($\alpha_i \rightarrow \beta_i$), que depende tanto da frequência ω_λ quanto do valor de α_k dos estados iniciais.

Ao aplicar o termo não linear sobre o resultado anterior, obtemos a forma final do estado evoluído

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{\Lambda}{4\hbar}} \sum_{n,m} e^{-i\hbar g t(n+m)^2} \frac{[\beta_1(t) e^{-i2g\hbar t}]^n}{\sqrt{n!}} \frac{[\beta_2(t) e^{-i2g\hbar t}]^m}{\sqrt{m!}} |n, m\rangle. \quad (3.30)$$

onde definimos

$$\Lambda = 2\hbar [|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2] = q_{01}^2 + p_{01}^2 + q_{02}^2 + p_{02}^2. \quad (3.31)$$

Esta quantidade será chamada de *ação característica do sistema*, e a comparação dela com relação ao valor da constante de Planck será importante quando fizermos

a análise do comportamento semiclássico do sistema. Embora a análise direta desta expressão nos permita em princípio encontrar as condições de separabilidade e recorrência, vamos voltar a esta questão uma vez encontrada a expressão analítica para a entropia linear reduzida. Contrastando com a condição inicial anterior, é conveniente extrair as informações necessárias para o estudo da dinâmica do emaranhamento em termos do comportamento da entropia linear para depois voltar a nossa atenção para o estado do sistema dado pela Eq.(3.30). Cabe anotar que, ao calcular o valor esperado das quadraturas do campo, $\hat{Q}_k$ e $\hat{P}_k$ usando a expressão (3.30), eles apresentam colapsos e ressurgimentos. Excluímos estes resultados da discussão geral, e o cálculo analítico destas quantidades está contido no Apêndice A.

Propriedades do emaranhamento para a condição inicial $|\alpha_1\rangle_1 \otimes |\alpha_2\rangle_2$.

Neste caso particular, usaremos a entropia linear reduzida como uma medida do emaranhamento entre os subsistemas. Usando a solução para o estado evoluído, dada pela Eq.(3.30), e lembrando que $\omega_g = \hbar g$ escrevemos o operador densidade como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| &= e^{-\frac{\Lambda}{2\hbar}} \sum_{n,m} \sum_{n',m'} e^{-i\omega_g t[(n+m+1)^2 - (n'+m'+1)^2]} \\ &\times \frac{\beta_1^n \beta_1^{*n'} \beta_2^m \beta_2^{*m'}}{\sqrt{n!n'!m!m'!}} |n, m\rangle \langle n', m'|, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde denotamos $\beta_k(t)$ simplesmente como β_k . Usando esta última expressão, podemos calcular o operador densidade reduzido ao traçar sobre as variáveis do subsistema que não nos interessa. Para o k -ésimo oscilador a matriz densidade reduzida é dada por

$$\hat{\rho}_k(t) = e^{-\frac{\Lambda}{2\hbar}} \sum_{n,m} \frac{\beta_k^n}{\sqrt{n!}} \frac{\beta_k^{*m}}{\sqrt{m!}} e^{|\beta_j|^2 e^{-2i\omega_g t(n-m)}} e^{-i\omega_g t[n^2 - m^2 + 2(n-m)]} |n\rangle \langle m|, \quad (3.33)$$

onde $k \neq j$. Lembrando a definição para a entropia linear reduzida, Eq.(1.8), vemos que é preciso calcular o traço do quadrado da matriz densidade reduzida definida pela Eq.(3.33), sendo o resultado final dado por

$$\delta_k(t) = 1 - e^{-2|\beta_k(t)|^2} \sum_{n,m} \frac{|\beta_k(t)|^{2n}}{n!} \frac{|\beta_k(t)|^{2m}}{m!} e^{-4|\beta_j(t)|^2 \sin^2[\omega_g t(n-m)]}. \quad (3.34)$$

Através desta expressão, podemos obter as condições nas quais os subsistemas não estão emaranhados. Para isto, é suficiente cumprir a igualdade

$$\begin{aligned} Tr_k[\hat{\rho}_k^2(t)] &= e^{-2|\beta_k(t)|^2} \sum_{n,m} \frac{|\beta_k(t)|^{2n}}{n!} \frac{|\beta_k(t)|^{2m}}{m!} e^{-4|\beta_j(t)|^2 \sin^2[\omega_g t(n-m)]} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Podemos identificar duas condições diferentes, a saber:

1. **Condição dependente do parâmetro da interação.** Independentemente dos parâmetros associados aos estados coerentes no tempo inicial, podemos definir tempos onde o estado global é separável, os quais dependem da constante g presente no termo quártico do Hamiltoniano da Eq.(3.1). Para os tempos T_l onde

$$T_l = \frac{l\pi}{\omega_g} = \frac{l\pi}{\hbar g},$$

temos

$$\theta_l = \omega_g T_l (n - m) = \pi l (n - m),$$

onde θ_l é o argumento da função sinusoidal presente na exponencial dentro da soma do lado esquerdo da Eq.(3.35). Como, para estes tempos, $\sin^2(\theta_l) = 0$ então

$$\begin{aligned} Tr_k[\hat{\rho}_k^2(T_l)] &= e^{-2|\beta_k(T_l)|^2} \sum_{n,m} \frac{|\beta_k(T_l)|^{2n}}{n!} \frac{|\beta_k(T_l)|^{2m}}{m!} \\ &= e^{-2|\beta_k(T_l)|^2} e^{2|\beta_k(T_l)|^2} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (3.36)$$

como queríamos demonstrar. Desta forma, podemos definir um período T_1 que depende da frequência ω_g associada à interação não-linear onde os estados dos subsistemas voltam a ser puros, sendo o estado global separável. Ao substituir estes tempos na Eq.(3.30), obtemos a seguinte forma para o estado global:

$$\begin{aligned} |\psi(T_l)\rangle &= e^{-\frac{\Lambda}{4\hbar}} \sum_{n,m} \frac{[\beta_1(T_l)(-1)^l]^n}{\sqrt{n!}} \frac{[\beta_2(T_l)(-1)^l]^m}{\sqrt{m!}} |n, m\rangle \\ &= |(-1)^l \beta_1(T_l)\rangle \otimes |(-1)^l \beta_2(T_l)\rangle. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Nestes tempos, os estados dos subsistemas são estados coerentes com intensidade dependente do valor de β_k , e a suas fases que mudam ou não dependendo

se o valor do parâmetro l é ímpar ou par. Cabe dizer que esta condição permite que o estado volte ao estado original (recorrência) só se as razões ω_0/ω_g e ω_λ/ω_g são números racionais, como podemos corroborar facilmente olhando as quantidades $\beta_k(t)$ na Eq.(3.29).

2. **Condição dependente dos parâmetros dos estados iniciais.** Uma outra condição em que a igualdade da Eq.(3.35) é cumprida, está relacionada com as quantidades β_k que dependem dos valores de α_k , ou seja, dos parâmetros dos estados coerentes iniciais. Vemos que, para $\beta_k = 0$ e $\beta_j \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} Tr_k[\hat{\rho}_k^2(t)] &= e^{-2(0)} 1 \times 1 \times e^{-|\beta_j(t)|^2 \times 0} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Da mesma forma, se $\beta_k \neq 0$ e $\beta_j = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} Tr_k[\hat{\rho}_k^2(t)] &= e^{-2|\beta_k(t)|^2} \sum_{n,m} \frac{|\beta_k(t)|^{2n}}{n!} \frac{|\beta_k(t)|^{2m}}{m!} e^{-4(0) \sin^2[\omega_g t(n-m)]} \\ &= e^{-2|\beta_k(t)|^2} \sum_{n,m} \frac{|\beta_k(t)|^{2n}}{n!} \frac{|\beta_k(t)|^{2m}}{m!} \\ &= e^{-2|\beta_k(t)|^2} e^{2|\beta_k(t)|^2} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Se consideramos o caso em que $\beta_2 = 0$ e $\beta_1 \neq 0$, o nosso estado evoluído toma a seguinte forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{|\beta_1|^2}{2}} \sum_n e^{-i\omega_g t n^2} \frac{[\beta_1 e^{-i2\omega_g t}]^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_1 \otimes |0\rangle_2. \quad (3.40)$$

Uma expressão análoga é obtida quando $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 \neq 0$. Vemos que o estado de um dos osciladores corresponde ao estado fundamental enquanto o outro oscilador está num estado de superposição de estados de Fock. Para que a quantidade β_k seja nula, deve se cumprir simultaneamente

$$\text{Re}(\alpha_k) \cos \omega_\lambda t + \text{Im}(\alpha_j) \sin \omega_\lambda t = 0$$

e

$$\text{Im}(\alpha_k) \cos \omega_\lambda t - \text{Re}(\alpha_j) \sin \omega_\lambda t = 0.$$

Podemos reescrever as condições anteriores de uma forma mais apropriada. Se é cumprida a igualdade

$$\operatorname{Re}(\alpha_k) \operatorname{Re}(\alpha_j) + \operatorname{Im}(\alpha_k) \operatorname{Im}(\alpha_j) = 0, \quad (3.41)$$

é possível encontrar tempos que satisfaçam as seguintes equações

$$\omega_\lambda t_k^1 = \arctan \left[-\frac{\operatorname{Re}(\alpha_k)}{\operatorname{Im}(\alpha_j)} \right] \quad \text{e} \quad \omega_\lambda t_k^2 = \arctan \left[\frac{\operatorname{Im}(\alpha_k)}{\operatorname{Re}(\alpha_j)} \right]. \quad (3.42)$$

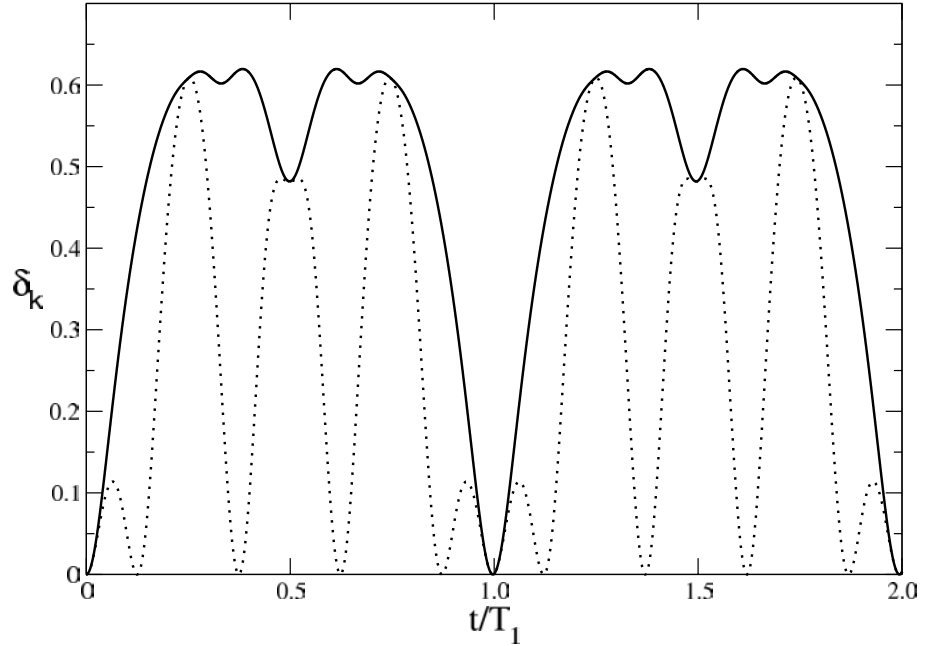


Figura 3.2: Evolução temporal da entropia linear reduzida de um oscilador harmônico para um estado inicial produto de estados coerentes com $\hbar = 1.0$, $\omega_g = 0.1$, $\omega_\lambda = 0.2$ e $\omega_0 = 1.0$. Linha contínua: $q_{01} = p_{01} = q_{02} = p_{02} = 1.0$. Linha pontilhada: $q_{01} = 1.0$, $p_{01} = 1.0$, $q_{02} = -p_{01}$ e $p_{02} = q_{01}$, onde é satisfeita a Eq.(3.41)

Para ilustrar melhor a dinâmica do emaranhamento, apresentamos na Fig. 3.2 os nossos resultados para a entropia linear reduzida como função do tempo, considerando duas condições iniciais. Numa primeira escolha (linha contínua) a entropia linear reduzida possui valores nulos só para tempos correspondentes à condição (1)

onde $T_l = l\pi/\omega_g$. Isto ocorre porque os valores escolhidos para α_1 e α_2 não cumprem a condição definida na Eq.(3.41) e os tempos de recoerência sempre correspondem a múltiplos do período de recoerência T_1 . Para instantes diferentes dos tempos T_l , o valor da entropia linear reduzida é diferente de zero indicando que o estado do subsistema não está num estado puro e o estado global não é separável. A situação muda quando os parâmetros que definem as intensidades dos campos coerentes iniciais são escolhidos tal que a condição dada pela Eq.(3.41) é cumprida (linha pontilhada). Desta forma, obtemos tempos diferentes do período T_l para os quais a entropia linear reduzida é nula. Para a escolha de parâmetros mostrada na Fig.3.2, onde $\omega_\lambda t_k^j = \pm 1$, podemos definir um novo período de recoerência, T_1 tal que os novos T_l estão definidos como

$$T_l = l \frac{\pi}{4\omega_\lambda}, \quad (3.43)$$

onde l é um inteiro ímpar. Dado que um dos osciladores evolui até uma superposição de estados de Fock, a possibilidade de obter estados de gato de Schrödinger nestes instantes será discutida numa seção posterior.

3.1.3 Evolução Temporal do estado inicial $|n_1\rangle_1 \otimes |\alpha_2\rangle_2$.

Nesta seção, calculamos a evolução temporal do estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = |n_1\rangle_1 \otimes |\alpha_2\rangle_2, \quad (3.44)$$

onde usaremos novamente a parametrização $\alpha_2 = \frac{q_{02} + ip_{02}}{\sqrt{2\hbar}}$. Já que conhecemos as propriedades da álgebra definidas pelos operadores que estão contidos na Eq.(3.3), convém encontrar o estado calculando primeiro o efeito do termo não-linear do Hamiltoniano, obtendo

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_0 + \hat{V}_{\omega_\lambda})t} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}_g t} |n_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha_{2,n_1}|^2}{2}} \sum_m \frac{[\alpha_{2,n_1}]^m}{\sqrt{m!}} e^{-i\omega_g t m^2} e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_0 + \hat{V}_{\omega_\lambda})t} |n_1, m\rangle, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde denotamos $\alpha_{2,n_1} = \alpha_2 e^{-i\omega_g t(2n_1+1)}$, tirando a dependência explícita no tempo. Lembrando que a Eq.(3.14) pode ser interpretada como um resultado para a evolução temporal do produto de estados de número quando $\omega_g = 0$, usamos este resultado na Eq.(3.45) obtendo a expressão final

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha_{2,n_1}|^2}{2}} \sum_m \frac{[\alpha_{2,n_1} e^{-i\omega_g t}]^m}{\sqrt{m!}} e^{-i\omega_g t m^2} \frac{(\hat{a}_1^\dagger \cos \omega_\lambda t - i \hat{a}_2^\dagger \sin \omega_\lambda t)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \times$$

$$\times \frac{\left(\hat{a}_2^\dagger \cos \omega_\lambda t - i \hat{a}_1^\dagger \sin \omega_\lambda t\right)^m}{\sqrt{m!}} |0, 0\rangle. \quad (3.46)$$

Observando a forma anterior para o estado evoluído, Eq.(3.46), podemos definir um período de recoerência da mesma maneira que foi definido para o caso da evolução temporal do produto de estados de número e estados coerentes. O período T_l depende da frequência associada à interação bilinear

$$T_l = \frac{l}{2} \frac{\pi}{\omega_\lambda}, \quad (3.47)$$

onde l é um número inteiro. Se l é par ou ímpar, obtemos formas diferentes para o estado evoluído, como veremos a seguir:

1. Caso l par: Neste caso, o nosso período de recoerência pode ser redefinido como $T_{2j} = j\pi/\omega_\lambda$ ($j = 1, 2, \dots$). Lembrando que $\cos j\pi = (-1)^j$ e $\sin j\pi = 0$ podemos reescrever o estado global dado pela Eq.(3.46) como

$$\begin{aligned} |\psi(T_{2j})\rangle &= |n_1\rangle_1 \otimes e^{-\frac{|\beta_2|^2}{2}} \sum_m e^{-im^2 \frac{\omega_g}{2\omega_\lambda} 2j\pi} \frac{\beta_2^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle_2 \\ &\equiv |n_1\rangle_1 \otimes |\phi(T_{2j})\rangle_2, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde $\beta_2 = \alpha_2 e^{-i\pi j} e^{-iT_{2j}[(2n_1+1)\omega_g + \omega_0]}$.

2. Caso l ímpar: Se definimos o período de recoerência como $T_{2j-1} = \frac{(2j-1)\pi}{2\omega_\lambda}$, o estado evoluído pode ser reescrito da forma

$$\begin{aligned} |\psi(T_{2j-1})\rangle &= e^{-\frac{|\beta_2|^2}{2}} \sum_m e^{-i \frac{\omega_g}{2\omega_\lambda} (2j-1)\pi m^2} \frac{\beta_2^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle_1 \otimes |n_1\rangle_2 \\ &\equiv |\phi(T_{2j-1})\rangle_1 \otimes |n_1\rangle_2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde $\beta_2 = \alpha_2 e^{-i\pi(\frac{2j-1}{2})} e^{-iT_{2j-1}[(2n_1+1)\omega_g + \omega_0]}$

Para cada caso, os índices (1, 2) indicam o oscilador ao qual pertence o estado e $|\phi(T_l)\rangle$ é uma superposição de estados de Fock. Nestes instantes, os subsistemas não estão emaranhados e, independentemente de qualquer outra condição, eles são o produto direto do estado de número preparado no instante inicial e o estado $|\phi(T_l)\rangle$. A possibilidade de obter nestes instantes superposições de estados coerentes será discutida posteriormente. Se consideramos, para este novo estado inicial, a condição $\beta_k = 0$, associada ao segundo caso de recoerência quando o estado inicial é um

produto de estados coerentes, simplesmente obtemos o caso particular da evolução de produto dos estados de número $|n_1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$.

De novo, convém apresentar a expressão geral para o estado evoluído, Eq.(3.46), expandido em estados de Fock

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{\frac{-|\alpha_{2,n_1}|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\alpha_{2,n_1} e^{-i\omega_0 t}]^m}{\sqrt{m!}} e^{-i\omega_g t m^2} \times \\ &\times \sum_i^{n_1} \sum_j^m C_{i,j}(t) |n_1 - i + j, m + i - j\rangle \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde $C_{i,m}(t)$ é o coeficiente definido na Eq.(3.18) e foi usado o resultado da evolução temporal do produtos de estados de Fock, Eq.(3.17).

Propriedades do emaranhamento para a condição inicial $|n_1\rangle_1 \otimes |\alpha_2\rangle_2$.

Usando a Eq.(3.50) e traçando sobre as variáveis do oscilador “1”, encontramos o operador densidade do segundo subsistema dado da forma

$$\begin{aligned} \rho_2(t) &= e^{-|\alpha_{2,n_1}|^2} \sum_{m,m'=0}^{\infty} \frac{[\alpha_{2,n_1}]^m}{\sqrt{m!}} \frac{[\alpha_{2,n_1}^*]^{m'}}{\sqrt{m'!}} e^{-i\omega_0 t(m-m')} e^{-i\omega_g t(m^2-m'^2)} \times \\ &\times \sum_{i,i'}^{n_1} \sum_{j,j'}^m C_{i,j}(t) C_{i',j'}^*(t) \delta_{i-j,i'-j'} |m+i-j\rangle \langle m'+i'-j'|. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Em contraste com o resultado encontrado para o produto de estados de Fock, a forma deste operador não é diagonal na base dos estados de número de fótons. É por isto que calculamos numericamente a entropia linear usando a definição dependente do traço do quadrado do operador densidade, Eq.(1.8). Na Figura 3.3, são apresentados os resultados usando uma escolha fixa de parâmetros associados ao Hamiltoniano indicada na figura e $q_{20} = p_{20} = 1.0$, onde variamos o valor do número de fótons do estado $|n_1\rangle$. Vemos como o período de recoerência está associado à interação bilinear, sendo $\pi/2\omega_\lambda$, confirmando os nossos resultados ao analisar a forma analítica para o estado global do sistema. O valor máximo da entropia depende do número médio de fótons do estado inicial do oscilador preparado num estado de Fock, como vemos ao comparar as curvas obtidas para $n_1 = 2, 5, 7, 10, 20$. Este comportamento está associado aos somatórios sobre os índices i e i' , presentes na Eq.(3.51), cujos limites superiores dependem do valor de n_1 . Da mesma forma

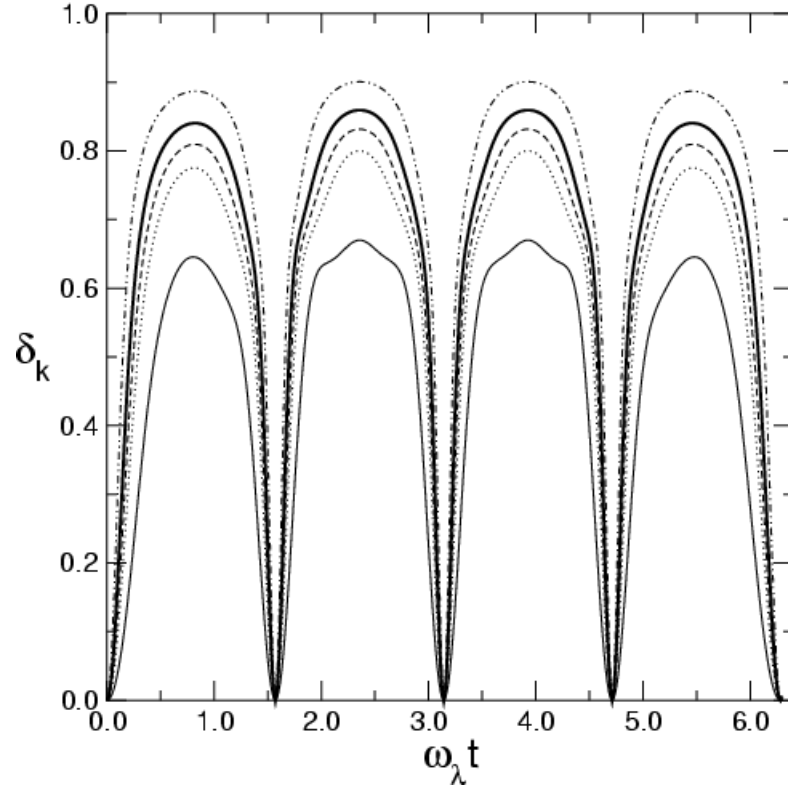


Figura 3.3: Entropia linear reduzida dependente do tempo para $q_{20} = p_{20} = 1.0$ e $\omega_0 = 1.0$, $\omega_\lambda = 0.2$ e $\omega_g = 0.1$. As diferentes curvas correspondem a $n_1 = 2$ (linha contínua), $n_1 = 5$ (linha pontilhada), $n_1 = 7$ (linha tracejada), $n_1 = 10$ (linha contínua espessa) e $n_1 = 20$ (linha pontilhada e tracejada).

que para o caso do produto de estados de Fock, o número de estados acessíveis do subsistema aumenta quando n_1 aumenta.

Outra questão tem a ver com a relação entre as frequências ω_λ e ω_g e o efeito da razão entre elas sobre a dinâmica do emaranhamento. Se $\frac{\omega_g}{\omega_\lambda} = \frac{r}{s}$ (r e s inteiros) e o instante corresponde a um múltiplo do período de recoerência tal que $l = s$ podemos resolver o somatório no índice m e escrever o estado $|\phi(T_l)\rangle$ como

$$|\phi(T_s)\rangle = |(-1)^r \beta_s\rangle, \quad (3.52)$$

onde a forma da quantidade β_s depende se s é par ou ímpar. Isto implica que os estados definidos pelas Eqs.(3.48,3.49) podem ser reescritos como produtos de um estado de número e um estado coerente. Em particular, note-se que o estado inicial pode ser recobrado para o caso de s par e uma escolha tanto das frequências ω_0 e

ω_λ quanto o valor médio de fótons do estado de número, n_1 , tal que:

$$e^{-i\pi\frac{s}{2}}e^{-iT_s[(2n_1+1)\omega_g+\omega_0]} = 1,$$

sendo esta a condição de recorrência neste caso particular.

É interessante observar como a estrutura da entropia linear ganha complexidade dependendo da relação entre as frequências. Na Figura 3.4 apresentamos os nossos resultados para a entropia linear reduzida quando $q_{20} = p_{20} = 2.0$ e $n_1 = 2$ considerando três escolhas diferentes dos parâmetros ω_g e ω_λ . No primeiro caso, indicado pela linha contínua, o período associado à interação quártica coincide com o período de recoerência do sistema ($\omega_\lambda = 2\omega_g$ e $T_g = \pi/(2\omega_\lambda)$) e a estrutura não apresenta oscilações secundárias associadas com a interação não-linear. Já na segunda escolha (linha tracejada) onde $\omega_\lambda = \frac{2}{5}\omega_g$, vemos como a entropia apresenta uma estrutura mais complexa, com oscilações que dependem de múltiplos e sub-múltiplos do período T_g . Esta situação repete-se na terceira escolha (linha pontilhada) onde a relação entre as frequências é $\omega_\lambda = \frac{1}{6}\omega_g$, aparecendo uma estrutura com um número maior de oscilações do que nos casos anteriores.

3.2 Formação de Gatos de Schrödinger.

A possibilidade de criação de estados de gatos de Schrödinger, via uma transformação unitária usando Hamiltonianos que contenham interação não linear, foi proposta no trabalho de Yurke e Stoler [40] e tem sido discutida por vários autores [74, 71, 84, 73]. Em geral é usado o termo de interação Kerr dispersivo

$$\hat{V}_{Kerr} = \hbar K \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$$

onde a constante $\hbar K$ é proporcional à susceptibilidade ótica não linear, $\chi^{(3)}$ do meio. Vemos que a constante K está relacionada com a nossa frequência ω_g , que por sua vez está associada ao termo $\chi^{(3)}$, como já foi discutido no Capítulo 1. Devido a que estamos incluindo dois novos termos na interação não linear e também consideramos no nosso modelo a interação bilinear, nosso interesse é determinar os efeitos da nova forma da interação entre os modos sobre a formação de estados de gato num dos osciladores.

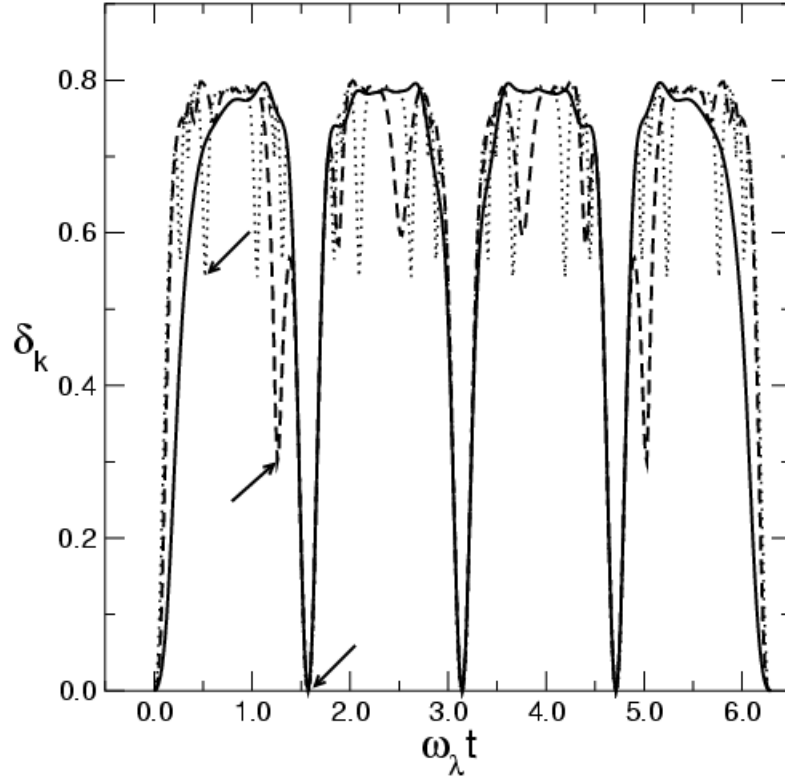


Figura 3.4: Entropia linear reduzida dependente do tempo para $n_1 = 2$, $q_{20} = p_{20} = 2.0$ e $\omega_0 = 1.0$. As diferentes curvas correspondem a escolhas diferentes para os valores ω_g e ω_λ . Linha contínua: $\omega_\lambda = 2\omega_g$; Linha tracejada $\omega_\lambda = \frac{2}{5}\omega_g$; Linha pontilhada: $\omega_\lambda = \frac{1}{6}\omega_g$. A seta indica o valor de $\omega_\lambda T_g$ correspondente a cada caso.

No trabalho de Banerji [85] é analisada a propagação de um campo eletromagnético monocromático através de um meio Kerr de perdas baixas, sendo o Hamiltoniano de interação o termo de auto-modulação Kerr. Os resultados deste trabalho mostram como o estado global, preparado inicialmente no estado coerente, evolui para uma superposição de estados de Fock. Este estado só toma a forma de um estado coerente $|\alpha\rangle$ para tempos correspondentes a múltiplos de π/χ e forma superposições de estados $|\alpha_i\rangle$ para tempos correspondentes a *sub-múltiplos* do período de “recoerência” definido acima.

No caso bidimensional, ao considerar estados iniciais como sendo produtos de estados coerentes que cumprem só a condição de separabilidade associada ao período definido pela frequência ω_g , o operador densidade reduzido corresponde a um estado de mistura e não ao associado a um estado de gato de Schrödinger. No entanto,

podemos encontrar novas condições para a formação de estados de superposição em duas situações onde sabemos que o estado global é separável e um dos estados tem a forma de uma superposição de estados de Fock: quando o caso do produto de estados coerentes cumpre a condição de recoerência sobre os parâmetro iniciais, Eq.(3.41), e no caso onde o estado inicial é um produto de um estado de número e estado coerente.

Reescrevendo de maneira geral os estados de superposição obtidos na Eq.(3.40), no primeiro caso, e nas Eqs.(3.48,3.49), para o caso do produto de estado de número e estado coerente, como se segue:

$$|G(T_n)\rangle = e^{-\frac{|\beta'(T_n)|^2}{2}} \sum_m e^{-\omega_g T_n m^2} \frac{[\beta'(T_n)]^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \quad (3.53)$$

onde os valores tanto de T_n , que denota o período de recoerência, quanto do rótulo $\beta'(T_n)$, dependem do caso particular de interesse. Em particular, β' corresponde à quantidade $\beta_1 e^{-i2\omega_g t}$ no caso do produto de estados coerentes e β_2 (associado as Eqs.(3.48,3.49)) para o caso do produto $|n_1\rangle_1 \otimes |\alpha_2\rangle_2$, lembrando que este último depende se l é par ou ímpar.

Para obter estados de gato, que chamaremos de *generalizados* já que são formados por dois ou mais estados coerentes, nestes instante é necessário cumprir a condição

$$\omega_g T_n = \frac{r}{s}. \quad (3.54)$$

Desta maneira podemos escrever a função exponencial que contém n^2 usando a transformada de Fourier discreta [85] definida como

$$\exp\left(-i\pi \frac{r}{s} m^2\right) = \sum_{p=0}^{l-1} a_p^{(r,s)} \exp\left(-2i\pi \frac{p}{l} m\right), \quad (3.55)$$

onde

$$l = \begin{cases} s & \text{se } r \text{ e } s \text{ são ímpares.} \\ 2s & \text{se } r \text{ é par e } s \text{ ímpar ou vice-versa,} \end{cases}$$

e os coeficientes $a_p^{(r,s)}$ cumprem a propriedade $\sum_p a_p^{(r,s)} = 1$ e tem a forma:

$$a_p^{(r,s)} = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} \exp\left(-i\pi \frac{r}{s} k^2 + 2\pi i \frac{p}{l} k\right). \quad (3.56)$$

Usando a transformada e depois de alguma álgebra, podemos escrever o estado $|G(T_n)\rangle$ como

$$|G(T_n)\rangle = \sum_{p=0}^{l-1} a_p^{(r,s)} \left| \beta'(T_n) e^{-2\pi i \frac{p}{l}} \right\rangle. \quad (3.57)$$

Vemos como este estado corresponde a uma superposição de estados coerentes com mesmo número médio de fótons dado por $|\beta'(T_n)|^2$ e fase relativa definida pela exponencial $e^{-2\pi i \frac{p}{l}}$. *O número de estados coerentes envolvidos na superposição depende do valor do parâmetro l , o qual depende dos valores de r e s .* A condição geral para a formação de gatos, definida na Eq.(3.54), depende basicamente da relação entre as frequências ω_g e ω_λ e de um fator inteiro associado ao período de recoerência que depende do tipo de estado inicial elegido.

Se consideramos como estado inicial o produto de estados coerentes, retornando à condição (2) onde existe um novo período de recoerência dado pela Eq.(3.43) sendo $T_l = \frac{l\pi}{4\omega_\lambda}$, obtemos a condição

$$\frac{\omega_g}{4\omega_\lambda} = \frac{r}{s}. \quad (3.58)$$

Similarmente para o caso do produto $|n\rangle \otimes |\alpha\rangle$ obtemos

$$\frac{\omega_g}{2\omega_\lambda} = \frac{r}{s}. \quad (3.59)$$

Para ilustrar melhor a forma dos estados de gato de Schrödinger apresentamos dois exemplos onde consideramos um produto de estados coerentes como estado inicial e escolhemos $|\alpha_k\rangle$ tal que a condição dada pela Eq.(3.41) é cumprida. Se os valores das frequências ω_g e ω_λ são tais que, devido à condição definida na Eq.(3.58), a razão $r/s = 1/4$, vemos que o oscilador inicialmente preparado no estado $|\alpha_1\rangle$ evolui para uma superposição de quatro estados coerentes como se segue (neste caso $\beta' = \beta_1$)

$$|G_1(T_1)\rangle = \frac{1}{4} \left[2e^{-\frac{i\pi}{4}} |\beta_1\rangle + 2e^{\frac{3i\pi}{4}} |-\beta_1\rangle + \mathcal{C}_1 \left(\left| e^{\frac{i\pi}{2}} \beta_1 \right\rangle + \left| e^{\frac{3i\pi}{2}} \beta_1 \right\rangle \right) \right],$$

onde β_1 é a quantidade definida na Eq.(3.29), e o coeficiente $\mathcal{C}_1$ está definido como

$$\mathcal{C}_1 = 2 + e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{-\frac{3i\pi}{4}}.$$

Por outro lado, se a razão entre as frequências é tal que $r/s = 1/3$ obtemos uma superposição de seis estados coerentes dada por:

$$\begin{aligned} |G_2(T_1)\rangle = & \frac{1}{6} \left[\mathcal{C}_1 |\beta_1\rangle + \mathcal{C}_2 |-\beta_1\rangle + \mathcal{C}_3 \left(\left| e^{\frac{1}{3}i\pi} \beta_1 \right\rangle + \left| -e^{\frac{2}{3}i\pi} \beta_1 \right\rangle \right) + \right. \\ & \left. \mathcal{C}_4 \left(\left| e^{\frac{2}{3}i\pi} \beta_1 \right\rangle + \left| -e^{\frac{1}{3}i\pi} \beta_1 \right\rangle \right) \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= 2e^{-\frac{i\pi}{3}} + 2e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\mathcal{C}_2 &= 2 + 4e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\mathcal{C}_3 &= 4 + 2e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\
\mathcal{C}_4 &= e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{-\frac{2i\pi}{3}}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Podemos obter um resultado similar se o estado inicial corresponde ao produto do estado coerente e o estado de número ao considerar as relações $r/s = 1/2$ e $r/s = 2/3$, respectivamente, e trocando β_1 pela quantidade β_2 definida pela Eq.(3.48) se l par ou pela Eq.(3.49) se l é ímpar. Dos exemplos apresentados podemos confirmar que, independentemente do caso particular de estado inicial considerado, a forma da superposição obtida é muito sensível à dessintonia entre as frequências associadas aos termos de interação entre os osciladores (ω_λ e ω_g).

Um outro aspecto a ser levado em consideração é a distinguibilidade efetiva dos diferentes estados coerentes no estado de superposição, entendendo distinguibilidade como o fato de obter superposições de estados coerentes que estejam suficientemente separados no espaço de fase. Esta separação dos estados coerentes que formam o estado de gato depende tanto do valor do número médio de fótons $\langle n_f \rangle = |\beta'(T_n)|^2$ quanto da fase relativa entre cada um deles. Da Eq.(3.57), vemos que a separação espacial está condicionada tanto à escolha do estado coerente inicial, que define o número médio de fótons associado aos estados coerentes que formam a superposição, quanto à razão entre as frequências ω_g e ω_λ , as quais determinam o *número* de estados coerentes envolvidos na superposição.

Para ilustrar melhor estas observações, apresentamos na Fig. 3.5 a função de quase-distribuição de Husimi no plano complexo definido pela variável γ_1 quando o estado inicial é um produto de estados coerentes e o tempo corresponde ao primeiro período de recoerência $T_1 = \frac{\pi}{4\omega_\lambda}$. Para uma escolha particular de frequências tal que $r/s = 1/4$, mostradas nas Figs. 3.5(a-c), obtemos estados de superposição formados por pacotes distinguíveis só para a escolha de um estado inicial com número médio de fótons do estado inicial igual à $\langle n_f \rangle = 9$. Mantendo este mesmo número médio de fótons no estado inicial mas variando as frequências tal que $r/s = 1/8$ o nosso estado de superposição novamente não tem pacotes distinguíveis já que a superposição descrita pela Eq.(3.57) envolve um número maior (8 neste caso) de estados coerentes.

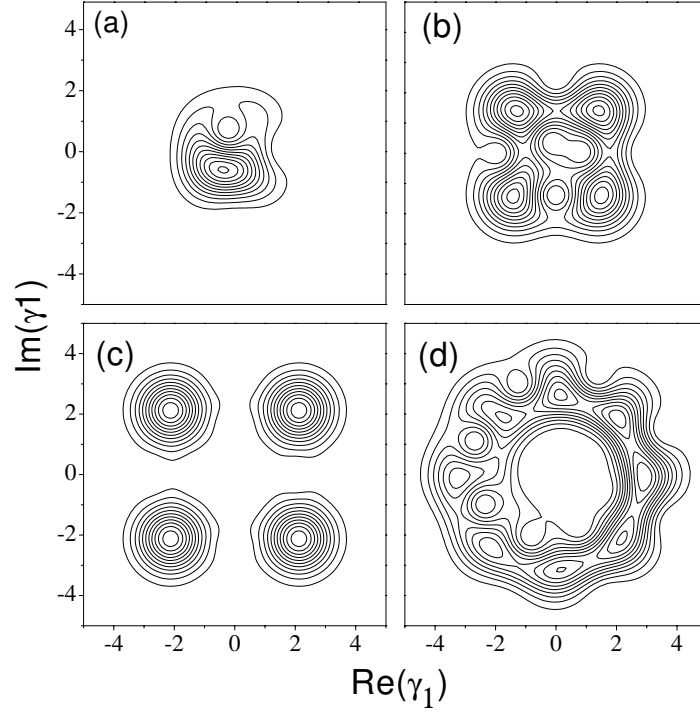


Figura 3.5: Curvas de nível da função- Q no plano complexo γ_1 associada aos estados de gato de Schrödinger no primeiro tempo de recoerência definido pela Eq.(3.43). Para todos os casos $\omega_0 = 8\omega_\lambda$ e $|\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2 = |\alpha_0|^2$. (a) $\frac{\omega_g}{\omega_\lambda} = 1$ e $|\alpha_0|^2 = 1.0$. (b) $\frac{\omega_g}{\omega_\lambda} = 1$ e $|\alpha_0|^2 = 4.0$. (c) $\frac{\omega_g}{\omega_\lambda} = 1$ e $|\alpha_0|^2 = 9.0$. (d) $\frac{\omega_g}{\omega_\lambda} = \frac{1}{2}$ e $|\alpha_0|^2 = 9.0$.

3.3 Limite semiclássico da dinâmica do produto de estados coerentes.

Antes de discutir a questão do limite semiclássico lembremos brevemente os resultados obtidos para a evolução temporal do produto de estados coerentes. Neste caso, a interação quártica governa a dinâmica do emaranhamento já que o termo bilinear não emaranha os dois subsistemas, levando o estado inicialmente preparado em $|\alpha_1, \alpha_2\rangle$ até um novo produto de estados coerentes com número médio de fótons $|\beta_k|^2$ ($k = 1, 2$) que depende tanto das amplitudes dos estados coerentes iniciais quanto da frequência ω_λ . Sabemos que os estados coerentes estão diretamente relacionados com o campo de luz clássico, e que é possível encontrar um análogo clássico

do Hamiltoniano definido na Eq.(3.1) usando a prescrição

$$\mathcal{H} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{H} | \alpha_1, \alpha_2 \rangle, \quad (3.62)$$

sendo $\alpha_k = \frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2\hbar}}$ o estado coerente do k -ésimo oscilador harmônico. Assim, é interessante analisar o comportamento semiclássico da solução para o estado global definido pela Eq.(3.30) que descreve a evolução do produto de estados coerentes. Para quantificar a “classicalidade” do sistema em estudo, ao fazer uma determinada escolha de parâmetros e condições iniciais quaisquer, usamos a quantidade $\mathcal{R}$ definida como segue

$$\mathcal{R} = \frac{\hbar}{\Lambda}$$

onde Λ é a ação clássica definida na Eq.(3.31). O limite semiclássico está definido como $\mathcal{R} \ll 1$ e adotaremos a convenção de fazer $\hbar \rightarrow 0$ deixando Λ fixo.

Este limite tem sentido se os dois subsistemas tem um número médio de fótons diferente de zero para qualquer instante de tempo, já que o estado de vácuo $|0\rangle$ não tem análogo clássico. Consequentemente, como precisamos impor que $\beta_k \neq 0$ para todo tempo, a segunda condição de recoerência apresentada na Seção 3.1.2 não deve ser satisfeita e o período de recoerência só dependerá da frequência ω_g conforme a condição 1 da mesma Seção. Uma outra imposição que faremos nesta análise tem a ver com o número médio de fótons do sistema no tempo inicial: A nossa condição inicial será tal que $|\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2$ de tal forma que $\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle$ e a troca de energia, em média, entre os dois subsistemas seja nula e a interação entre os dois subsistemas só faz com que o emaranhamento esteja associado à perda de fase.

Apresentamos na Fig. 3.6 os nossos resultados para a entropia linear reduzida (ELR) como função do tempo para diferentes escolhas de $\mathcal{R}$. O comportamento geral da entropia linear pode ser descrita brevemente como segue: para tempos curtos, a ELR cresce monotonamente e podemos definir um intervalo de tempo dentro do qual todas as curvas coincidem, independentemente do valor de $\mathcal{R}$ associado.

Depois deste tempo, à medida que o parâmetro $\mathcal{R}$ diminui, a ELR consegue aumentar seu valor por mais tempo até que, num certo instante que denominaremos *tempo de ruptura*, a ELR atinge o seu valor máximo (patamar) e começa a oscilar durante um certo intervalo. Finalmente, a ELR decresce monotonamente e volta a ser nula no período de recoerência, $\pi/\hbar g$ e este comportamento se repete periodicamente.

Cabe observar alguns aspectos interessantes. Primeiro, vemos como o valor do patamar depende do parâmetro $\mathcal{R}$ já que o valor máximo da entropia aumenta quando $\mathcal{R}$ diminui, o que está relacionado com o aumento do número médio de fótons no sistema ($|\alpha_k|^2 = \frac{q_{k0}^2 + p_{k0}^2}{2\hbar}$). O significado físico deste comportamento pode-se entender, semiclassicamente, ao se pensar na perda de informação como consequência do aumento do número de estados acessíveis, relacionado com o número médio de fótons, já que o espectro do sistema fica mais denso à medida que diminuimos o valor de $\hbar$. Um segundo aspecto envolve o parâmetro de não linearidade $\hbar g$. Devido que ele depende do valor da constante de Planck, vemos como o tempo no qual o estado do sistema não é separável cresce proporcionalmente ao diminuir o valor de $\mathcal{R}$. Além disso, ocorre aumento do número de mínimos locais nos instantes correspondentes a submúltiplos do período de recoerência ($t = \frac{\pi}{N\omega_g}$).

Deste comportamento, podemos extrapolar como seria a evolução temporal da entropia linear reduzida no limite de valores muito pequenos do parâmetro $\mathcal{R}$: a entropia linear reduzida demoraria cada vez mais para voltar a ser nula, o que significa que o emaranhamento se tornaria praticamente irreversível. Por outro lado, as oscilações se suavizariam, sendo apenas flutuações ao redor de um patamar cujo valor tenderia até aquele associado a uma mistura estatística. Claramente distinguem-se dois regimes temporais. O primeiro, anterior ao tempo de ruptura, que corresponde a um regime de tempos curtos, onde a entropia tem um comportamento monotonamente crescente, e um segundo regime de tempos longos, onde as oscilações de ELR associadas a múltiplos e submúltiplos do período de recoerência aparecem. O tempo de ruptura é dependente do valor de $\hbar$ já que a medida que diminuimos o parâmetro $\mathcal{R}$, as oscilações começam a tempos cada vez mais longos. Nas próximas duas seções analisaremos as diferenças entre estes dois regimes com ajuda da função de Husimi, que nos permite uma visão da dinâmica do estado no espaço de fase clássico. Além disso, exploraremos a dependência do tempo de ruptura com relação à constante de Planck e sua relação com a escala de Ehrenfest [86], a qual define um limite onde a descrição clássica dos estados quase-clássicos deixa de ser boa.

3.3.1 Regime de tempos curtos e a escala de Ehrenfest.

Na Fig. 3.7 apresentamos uma sequência de gráficos onde observamos a evolução temporal da função de Husimi, ou função- Q , neste primeiro regime, que corresponde

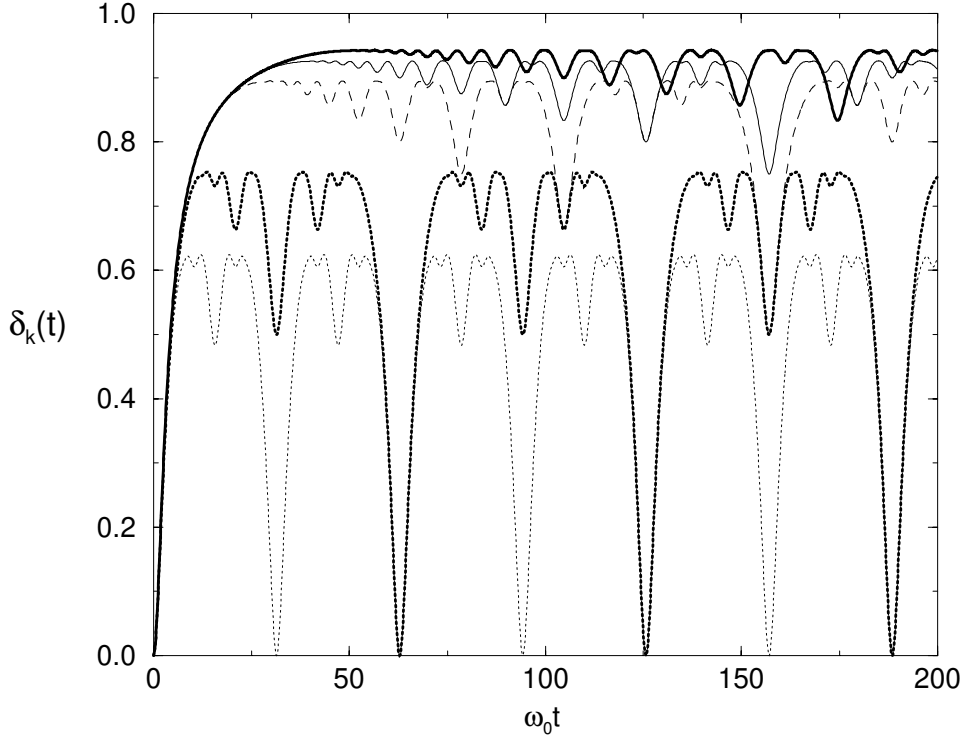


Figura 3.6: Entropia linear reduzida δ_k como função de $\omega_0 t$ para $\frac{\omega_\lambda}{\omega_0} = 0.2$, $\frac{\hbar g}{\omega_0} = 0.1$, $q_{k0} = p_{k0} = 1.0$, $\Lambda = 4$ e valores diferentes de $\mathcal{R} = \frac{\hbar}{\Lambda}$: Linha pontilhada $\mathcal{R} = \frac{1}{4}$; Linha pontilhada espessa $\mathcal{R} = \frac{1}{8}$; Linha tracejada $\mathcal{R} = \frac{1}{40}$; $\mathcal{R} = \frac{1}{80}$ Linha contínua e $\mathcal{R} = \frac{3}{400}$ Linha contínua espessa.

a tempos curtos, associada a um dos subsistemas no espaço definido pelo rótulo complexo γ_1 . No instante inicial, correspondente ao gráfico da esquina superior esquerda, vemos que a função de Husimi do estado coerente inicial, com número médio de fótons e fase bem definidos, corresponde a uma função gaussiana centrada em $\text{Re}[\gamma_1] = q_{10}/\sqrt{2\hbar}$ e $\text{Im}[\gamma_1] = p_{10}/\sqrt{2\hbar}$. Para instantes posteriores, o pacote descreve uma trajetória circular ao redor da origem do espaço de fase, além de se delocalizar continuamente na direção angular embora conserve a sua localização na direção radial bem definida. Este comportamento indica que o estado do sistema adquire a cada instante uma maior incerteza na fase, embora conserve o seu número médio de fótons bem localizado. Por causa disto denominaremos a este intervalo de tempo como *regime de delocalização de fase*.

Observemos que para um $t \approx t_r$, a função- Q mostra como a “cabeça” do pacote encontra-se com a sua própria “cauda”. O denominado *tempo de ruptura*, t_r , corresponde a um tempo onde o estado do oscilador está completamente delocalizado em fase, como vemos no último gráfico da sequência da Fig. 3.7, onde a função- Q tem a forma de um “anel” no espaço de fase. Se consideramos valores de $\hbar$ cada vez menores com Λ fixo, vemos como o valor do raio sobre o qual o pacote se deloca aumenta, e o encontro entre a cauda e a frente do pacote leva mais tempo para acontecer. Como consequência, o tempo de ruptura é mais longo para valores pequenos do parâmetro $\mathcal{R}$. Poder-se-ia pensar que o tempo de ruptura teria a mesma dependência do valor da constante de Planck associada ao período de recoerência, $T_l \propto \hbar^{-1}$, mas isto não acontece. Na Fig. 3.8 mostramos os nossos resultados para t_r como função da constante de Planck. Estes foram obtidos estudando o comportamento da função da entropia linear reduzida definida pela Eq.(3.33) e *determinando o tempo onde as oscilações da entropia começam*. De posse dos dados, e depois de um processo de regressão linear, obtemos a relação entre as variáveis t_r e $\hbar$ dada por

$$t_r = 5.95\hbar^{-0.5}. \quad (3.63)$$

A nossa conjectura sobre o tempo de ruptura estar relacionado com o tempo de Ehrenfest é baseada nos seguintes fatos: o primeiro está relacionado com o comportamento da função de Husimi, onde o comportamento de delocalização de fase é similar à dinâmica de um ensemble de condições iniciais clássicas cuja distribuição inicial coincide com a distribuição gaussiana, como podemos ver no caso do oscilador quártico unidimensional [17], pelos resultados encontrados em outros trabalhos realizados no grupo de pesquisa [18] e no trabalho de Oliveira, Fonseca-Romero e Nemes [82]. Outra evidência da relação entre as duas escalas de tempo consiste em observar que a potência de $\hbar$ coincide com a potência de $\hbar$ da forma obtida por Berman *et al.* [80] ao estudar a validade da aproximação clássica usada por eles na solução das equações de movimento de Heisenberg para um Hamiltoniano com um grau de liberdade e termo de interação quártica onde define-se a escala de validade da aproximação clássica como

$$t \ll t_0 = \frac{1}{I_0\mu} \sqrt{\frac{I_0}{\hbar}} \quad (3.64)$$

onde μ é o análogo ao parâmetro de não-linearidade g no nosso modelo e I_0 é o

análogo ao nossa constante Λ . Podemos reescrever a nossa relação numérica como

$$t_r \approx 2^{1/4} \frac{1}{\Lambda g} \sqrt{\frac{\Lambda}{\hbar}} \quad (3.65)$$

ficando desta forma mais evidente a sua semelhança com a expressão encontrada para o tempo t_0 . Finalmente, a relação (3.65) tem a mesma forma que a obtida na Ref. [81] no caso particular de $N = 2, k = 2$ da expressão geral para o tempo de Ehrenfest dada por

$$t_E \cong \frac{1}{k(k-1)} \left[\frac{1}{g\Lambda^{k-1}} \left(\frac{2\Lambda}{\hbar} \right)^{0.5} \right] \left(1 - \frac{\hbar k^2}{8\Lambda} \right). \quad (3.66)$$

Esta expressão foi calculada analiticamente sendo válida para um sistema integrável de N osciladores cujo termo de interação é uma função que depende da k -ésima potência do Hamiltoniano livre do oscilador harmônico [81] quanto $\Lambda \gg \hbar$

3.3.2 Dinâmica a tempos longos e irreversibilidade.

Na Figura 3.9 apresentamos os nossos resultados da função de Husimi para tempos posteriores ao tempo de ruptura. Para tempos correspondentes a sub-múltiplos inteiros do período de recoerência $t_n = T_1/n$, Fig. 3.9(a-g), a função Q possui máximos ao longo da região anular cujo número coincide com o valor n . Sendo que a forma da função de Husimi apresenta o mesmo comportamento observado no sistema unidimensional [85], podemos afirmar que a origem da estrutura da função- Q é a auto-interferência do pacote devido à delocalização em fase que permite o encontro da “cauda” do pacote com a “cabeça” dele mesmo. Baseamos-nos nesta argumentação para chamar *regime de auto-interferência* ao intervalo temporal que abrange tempos posteriores ao tempo de ruptura. A forma das funções de Husimi são similares às obtidas quando foram analisadas as condições para a formação de gatos de Schrödinger mas, já que o estado global não é separável para estes instantes e o subsistema não está num estado puro, as funções de Husimi correspondem a misturas de estados de superposição. A demonstração deste fato pode ser vista no Apêndice A.

Para tempos correspondentes ao período de recoerência, Fig. 3.9(h), o estado do oscilador corresponde a uma função gaussiana centrada em $\gamma_1 = -(\text{Re}[\alpha_1], \text{Im}[\alpha_1])$, associada ao estado coerente $|- \alpha_1\rangle$. Já para o dobro do período de recoerência o sistema volta para o estado inicial (recorrência) e a função de Husimi é de novo uma gaussiana centrada no ponto definido por α_1 , como vemos na Fig. 3.9(i).

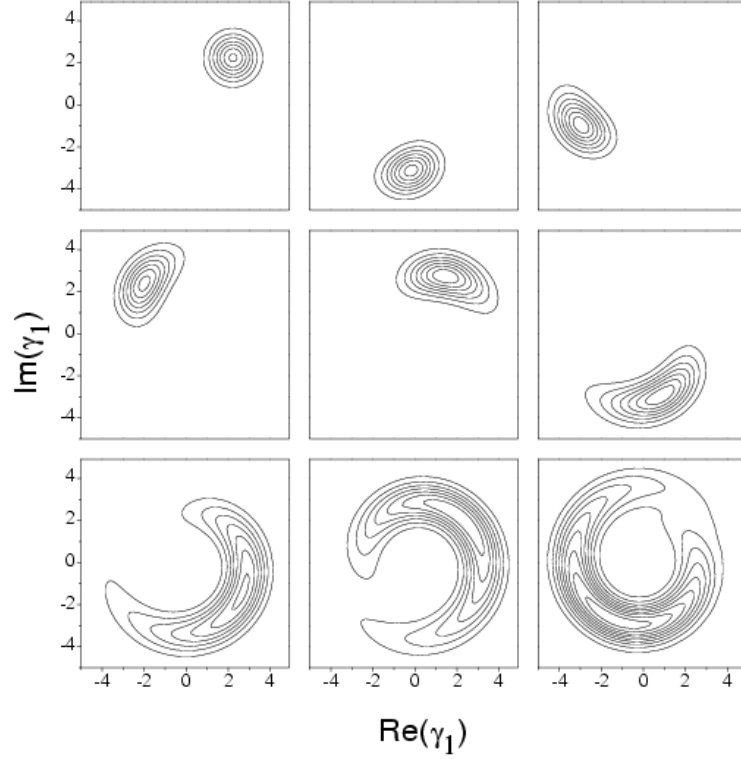


Figura 3.7: Curvas de nível da função- Q de um dos osciladores no plano complexo definido por γ_1 onde $\gamma_1 = (q_1 + ip_1)/\sqrt{2\hbar}$ para instantes pertencentes ao regime de delocalização de fase ($0 < t \leq t_r$) correspondentes ao caso definido por $q_{10} = p_{10} = q_{20} = p_{20} = 1.0$, $\omega_0 = 1$, $\omega_\lambda = 0.2$, $g = 0.1$ e $\mathcal{R} = 0.025$. O primeiro gráfico corresponde ao tempo inicial (esquina superior esquerda).

Depois da discussão da dinâmica das funções de Husimi podemos intuir o que acontece à medida que o parâmetro $\mathcal{R}$ diminui: O número médio de fótons aumenta e $\hbar g$ diminui e assim o pacote, inicialmente localizado no estado coerente, demorará um tempo cada vez mais longo em percorrer a circunferência associada ao número médio de fótons. Quando finalmente a cabeça e a cauda do pacote se encontrarem, a função de Husimi apresenta máximos correspondentes à fração inteira do período de recoerência, os quais são mais numerosos à medida que $\hbar$ diminui. Para o limite de $\hbar \rightarrow 0$, tanto o tempo de ruptura quanto o período de recoerência é infinito e o sistema não consegue auto-interferir de tal forma que o emaranhamento é irreversível.

Com estes resultados concluímos que a análise da evolução temporal da entropia linear reduzida e da dinâmica da função de quase-distribuição de Husimi quando

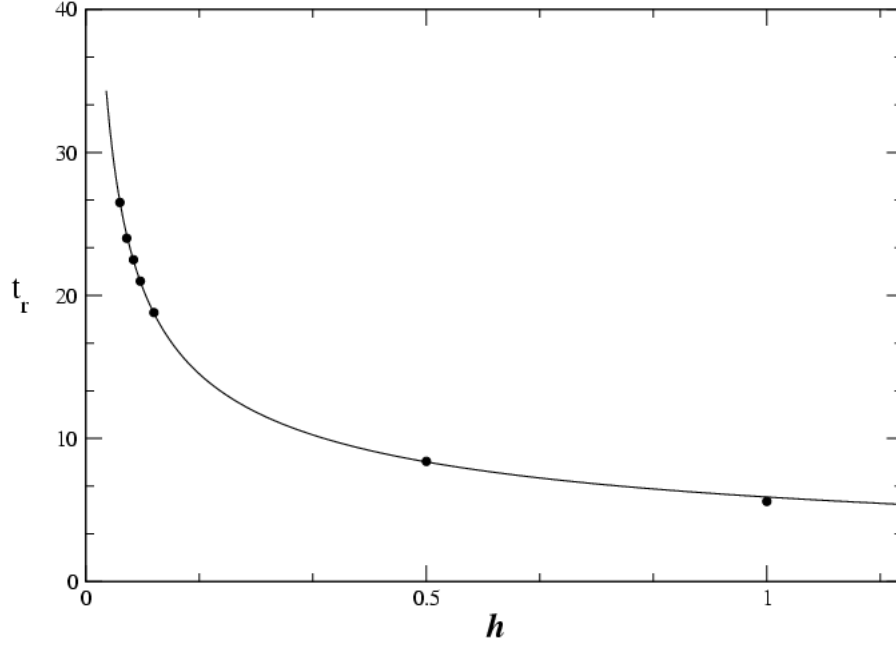


Figura 3.8: Tempo de ruptura T_r como função de $\hbar$ para $\omega_0 = 1.0$, $\Lambda = 4$, $g = 0.1$ e $\omega_\lambda = 0.2$. Os pontos indicam os valores encontrados para cada valor de $\hbar$ e a linha contínua segue a relação dada na Eq.(3.65)

variarmos o parâmetro de classicalidade $\mathcal{R}$ nos permite separar a dinâmica de dois osciladores acoplados via os termos de interação definidos no Hamiltoniano 3.3 em dois regimes: o primeiro denominado de regime de delocalização de fase, que coincide com o aumento monótono da entropia linear reduzida, onde o valor de ELR para valores diferentes do parâmetro $\mathcal{R}$ coincide a tempos curtos e a função de Husimi se comporta de maneira semelhante a um ensemble de condições iniciais clássicas [18, 17]. O segundo regime, denominado regime de auto-interferência, que corresponde ao intervalo onde a entropia linear reduzida apresenta oscilações, possuindo mínimos locais para sub-múltiplos do período de decoerência e onde a função de Husimi apresenta uma estrutura de pacotes que guardam semelhança com estados de superposição de estados coerentes, sendo na verdade estados mistos. O tempo de ruptura, t_r , que separa os dois regimes apresenta uma dependência com o valor da constante de Planck que guarda semelhança com definições da escala de Ehrenfest, já que depois deste tempo são claros os efeitos da auto-interferência, de origem puramente quântica.

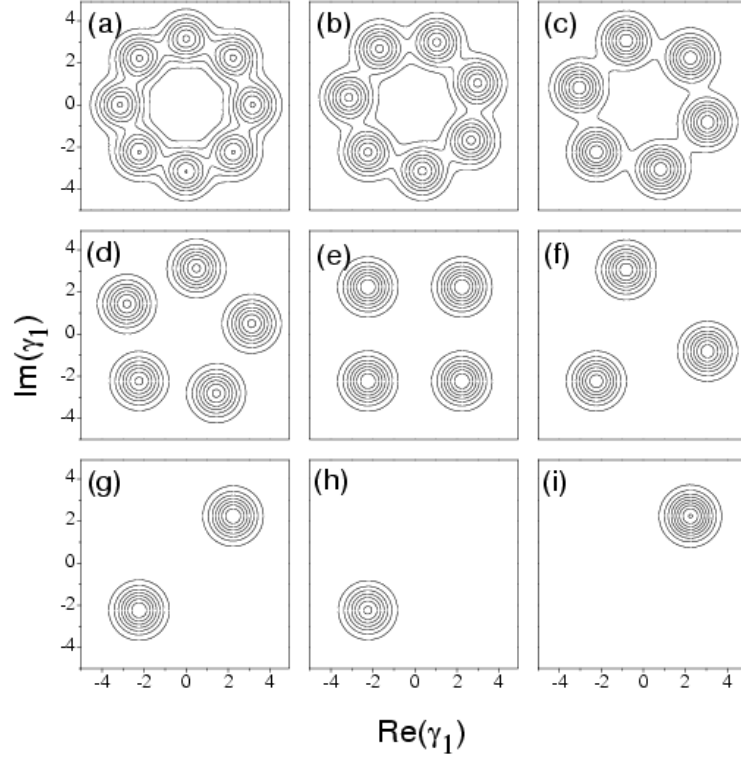


Figura 3.9: Curvas de nível da função- Q evoluída no tempo no plano complexo γ_1 no regime de auto-interferência para $\mathcal{R} = 1/40$. Os parâmetros são os mesmos da Fig. 3.7. (a) $t = T_1/8$, (b) $t = T_1/7$, (c) $t = T_1/6$, (d) $t = T_1/5$, (e) $t = T_1/4$, (f) $t = T_1/3$, (g) $t = T_1/2$, (h) $t = T_1$ (recoerência) , (i) $t = 2T_1 = \tau_1$ (recorrência).

Capítulo 4

Funções de Wigner atômicas e o Maser de Dicke.

Uma extensão do modelo Jaynes-Cummings consiste em considerar N átomos independentes entre si e interagindo com um modo do campo dentro de uma cavidade. Embora a solução deste sistema na condição de ressonância foi apresentada por Tavis e Cummings [87] em 1968, este problema foi abordado inicialmente por Dicke em 1954 [28], ao analisar o processo de superradiância de N moléculas de gas interagindo com um campo de radiação. Por esta razão nos referiremos ao modelo de Jaynes-Cummings para N átomos como modelo de Dicke. Experimentalmente, foram observadas oscilações de Rabi quando um grande número de átomos interagem com o campo dentro da cavidade de fator de qualidade médio [88]. Outros estudos teóricos usando o modelo de Dicke tem a ver com a possibilidade de construir estados sub-radiantes [89], robustos aos processos de descoerência [90]. Recentemente está sendo explorada a geração de emaranhamento de sistemas multipartites ao incluir o efeito de um campo clássico forçado [91]. Embora na maioria desses trabalhos é considerada a interação dipolo-dipolo na aproximação de onda girante, Tavis e Cummings notaram que esta aproximação não descreve adequadamente o regime de campos eletromagnéticos fortes. Trabalhos posteriores, onde os termos contragirantes da interação dipolar são considerados, mostram que o sistema no limite semiclássico apresenta caos [92]. Manifestações do caos na descrição quântica do sistema foram encontradas por Graham and Höhnerback [93] e Kús [94] analisando o espaçamento entre níveis no espectro de energia.

Neste capítulo, estamos interessados na dinâmica do emaranhamento neste sistema bipartite. Pretendemos explorar exclusivamente o processo de emaranhamento entre os dois subsistemas no limite de muitos átomos e a condição inicial dada por um produto de estados coerentes [95]. O modelo de Dicke possui um análogo clássico que pode ser obtido através do mesmo procedimento usado na Seção 3.3, onde calculamos o valor esperado do Hamiltoniano do oscilador anarmônico bidimensional usando estados coerentes. Neste caso, precisamos usar tanto o estado coerente de oscilador harmônico quanto o estado coerente atômico [35], já definido no Capítulo 1, associado ao subsistema atômico. Esta conexão entre as descrições clássica e quântica só é possível quando o número de átomos é suficientemente grande ($N \geq 3$) [96].

Duas situações podem ser identificadas ao analisar o análogo clássico do modelo de Dicke: se a interação entre átomo e campo é descrita pelo termo dipolar na aproximação de onda girante, o análogo clássico deste sistema é integrável. Se, além do termo girante, o termo contra-girante começa a ser importante, o análogo clássico é não integrável e apresenta caos [95]. Nosso procedimento envolve estudar o comportamento da entropia linear reduzida do sub-sistema atômico, uma vez que esta quantidade é uma boa medida de emaranhamento em sistemas bipartites, analisando a sensibilidade que esta apresenta às mudanças de condições iniciais sendo estas escolhidas usando a descrição clássica [11]. Esta abordagem já foi seguida em outros trabalhos do nosso grupo de pesquisa [12, 13], analisando o comportamento da entropia linear e encontrando na estrutura do espaço de fase clássico, explicações para determinados comportamentos.

Nossa solução do problema mecânico-quântico é numérica, sendo o resultado central do cálculo os elementos de matriz do operador densidade global do sistema e os correspondentes operadores densidade reduzidos. De posse deste operador é possível calcular tanto a entropia linear atômica quanto uma outra ferramenta que será de grande importância neste capítulo: a função de Wigner atômica. Da mesma maneira que usamos a função de Husimi no estudo dos efeitos do emaranhamento no sistema de osciladores harmônicos acoplados sobre o estado do sistema, usaremos tanto a função de Wigner atômica, $W(\theta, \phi)$, quanto as representações reduzidas da mesma para estudar a relação entre o comportamento da entropia linear reduzida e a localização e delocalização do estado atômico. Cálculos da função de Wigner

atômica são pouco encontrados na literatura [58, 59, 97], porém veremos que são úteis no contexto deste estudo da correspondência entre as descrições clássica e quântica.

4.1 Hamiltoniano de Dicke e resultados preliminares.

No Capítulo 1, enumeramos os passos e as aproximações necessárias para encontrar o Hamiltoniano de Dicke, que descreve a interação de uma coleção de N átomos numa cavidade onde um modo de campo eletromagnético está confinado. Reproduzimos aqui a expressão já apresentada na Eq.(1.62)

$$\hat{H}_D = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_a\hat{J}_z + \frac{G}{\sqrt{2J}}\left(\hat{a}\hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{J}_-\right) + \frac{G'}{\sqrt{2J}}\left(\hat{a}^\dagger\hat{J}_+ + \hat{a}\hat{J}_-\right). \quad (4.1)$$

O análogo clássico [98, 99, 95] deste Hamiltoniano efetivo pode ser encontrado sem ambigüidades calculando o valor esperado da Eq.(4.1) usando o produto de estados coerentes associados tanto ao oscilador harmônico [33], quanto aos átomos [35] dados pelas expressões (confrontar com as Eq.(1.27) e Eq.(1.65))

$$\begin{aligned} |\nu\rangle &= \hat{D}(\nu)|0\rangle = e^{-\frac{|\nu|^2}{2}} e^{\nu\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\ |w\rangle &= \left(1 + |w|^2\right)^{-J} e^{w\hat{J}_+}|J, -J\rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Os rótulos w e ν estão relacionados com as variáveis clássicas associadas ao respectivo espaço de fase, assim

$$\begin{aligned} w &= \frac{p_a + iq_a}{\sqrt{4J - (p_a^2 + q_a^2)}} \\ \nu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_c + iq_c) \end{aligned} \quad (4.3)$$

O resultado final tem a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q_a, p_a, q_c, p_c) &= \frac{\omega_0}{2}(p_c^2 + q_c^2) + \frac{\omega_a}{2}(p_a^2 + q_a^2) - \omega_a J + \\ &+ \frac{\sqrt{4J - (p_c^2 + q_c^2)}}{4J}(G_+ p_a p_c + G_- q_a q_c), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $G_\pm = G \pm G'$. Este Hamiltoniano é integrável em duas situações: quando $G \neq 0$ e $G' = 0$ e vice-versa. Se as duas constantes de acoplamento são diferentes

de zero, o análogo clássico do sistema apresenta caos, como pode ser corroborado de forma simples ao analisar a forma das seções de Poincaré. Neste trabalho estudaremos a estrutura do espaço de fase clássico usando a seção de Poincaré, já que ela torna possível visualizar regiões regulares ou caóticas no espaço de fase e permite a identificação rápida de toros ou separatrizes de movimento. Isto será suficiente para realizar a nossa escolha de condições iniciais, onde procura-se eleger pontos pertencentes a uma região particular do mesmo. Para tanto, usaremos estes pontos como centros tanto do estado coerente de spin, $|w\rangle$, quanto do estado coerente de oscilador harmônico, $|\nu\rangle$. Desta forma foi estabelecida uma conexão entre a dinâmica clássica e o comportamento do emaranhamento [11]. Daqui para frente exploraremos esta conexão de modo que, ao falarmos de “condição inicial” queremos dizer que falamos do produto de estados coerentes centrado nos pontos escolhidos nos espaços de fase clássicos atômico e de oscilador. O estado inicial é assim dado por

$$|\psi(0)\rangle = |\nu\rangle \otimes |w\rangle. \quad (4.5)$$

Os resultados para a evolução temporal do estado inicial foram obtidos numericamente mediante o processo de diagonalização total do Hamiltoniano (4.1) e a posterior evolução temporal da condição inicial usando a base de autovalores e autovetores encontrados. Desta forma, podemos construir a matriz densidade global do sistema, sendo o seguinte passo a sua redução ao traçar as variáveis do campo e achar os elementos da matriz densidade reduzida do subsistema atômico, $\hat{\rho}_a$. Ao obter este resultado, calculamos a Entropia Linear Reduzida Atômica (ELRA) somando os elementos da diagonal da matriz ao quadrado, $\hat{\rho}_a^2$.

Usando o procedimento já descrito, foi realizada uma série de trabalhos no grupo de pesquisa [11, 12, 13] onde se estudou sistematicamente a sensibilidade da ELRA às condições iniciais. Outro aspecto que é explorado nestes trabalhos são as consequências do espaço de Hilbert do subsistema atômico ser finito, o que define uma “borda” no espaço de fase clássico associado ao subsistema atômico que coincide com o estado $|J, J\rangle$ do espaço de Hilbert de spin. Podemos resumir os resultados mais importantes desta série de trabalhos nos seguintes itens:

1. No caso não integrável com $G = 0.5$ e $G' = 0.2$, a ELRA apresenta comportamentos diferentes dependendo se a condição inicial pertence a uma região caótica ou regular. Condições iniciais pertencentes às regiões regulares apre-

sentam oscilações periódicas e a ELRA aumenta numa taxa menor que no caso da condição inicial caótica. Também é observada uma transição entre caos e regularidade que não é abrupta, ao estudar a evolução temporal do ELRA escolhendo condições iniciais pertencentes aos dois tipos de regiões.

2. Mesmo no caso integrável, a ELRA aumenta rapidamente quando a condição inicial é preparada perto da separatriz de forma que o pacote de onda associado ao sistema atômico consegue evoluir até regiões perto da borda do espaço de fase clássico. De fato, a projeção da função de quase-probabilidade de Husimi no espaço de fase mostra como máximos e mínimos da ELRA estão associados a localização e delocalização desta função no espaço de fase, quando o pacote aproxima-se ou afasta-se da borda.
3. Ao estudar o comportamento da ELRA escolhendo condições iniciais nas regiões regulares, existe uma relação entre a taxa de emaranhamento e o tipo de órbita à qual pertence a condição inicial. Quando o estado coerente é preparado sobre um ponto que pertence à órbita periódica de menor período, a projeção da trajetória no espaço de fase clássico é um circunferência ao redor da origem (caso $G' = 0$) e a entropia linear reduzida cresce numa taxa menor que para qualquer um dos outros casos possíveis, não apresentando oscilações.

O aspecto novo que será apresentado aqui consiste no mapeamento dos efeitos do emaranhamento sobre a localização ou delocalização do estado atômico na representação polar esférica, já discutida na Seção 1.5. A função de Wigner atômica está definida diretamente como função do ângulo polar (θ) e azimutal (ϕ) da esfera de Bloch, sendo a melhor opção na análise da localização e delocalização do estado quântico. Tanto para a interação dipolar na aproximação de onda girante (caso integrável) quanto para o caso onde o termo contra-girante é considerado (não integrável), a nossa análise será dividida em duas partes: a primeira consiste na apresentação e discussão dos resultados encontrados para a entropia linear reduzida atômica (ELRA), associados às condições iniciais escolhidas, onde nos concentraremos na identificação de características gerais da dinâmica do emaranhamento. Na segunda parte, apresentaremos os nossos resultados da função de Wigner atômica usando na discussão tanto a representação polar esférica da mesma, quanto as funções de Wigner reduzidas, W_θ e W_ϕ onde poderemos visualizar o grau de lo-

calização do estado atômico nas variáveis θ e ϕ e como isto está relacionado com o grau de emaranhamento entre os subsistemas.

4.2 Emaranhamento no caso integrável.

Nesta primeira parte estamos interessados no caso onde a interação dipolar pode ser descrita pela aproximação de onda girante. Como consequência, o Hamiltoniano clássico dado pela expressão (4.4) é integrável. Além disso, consideraremos o sistema na ressonância sendo $\omega_0 = \omega_a$. Daqui para frente, escolhemos $G' = 0$, $G = 0.5$ e $\omega_0 = \omega_a = 1.0$ no Hamiltoniano dado pela Eq.(4.1). O valor da constante de Planck será fixado em $\hbar = 1.0$ ao longo deste capítulo. Seguindo o mesmo processo dos trabalhos precedentes [13, 12, 11], o primeiro passo na nossa análise consiste em estudar a seção de Poincaré no subespaço (q_a, p_a) , apresentada na Fig. 4.1, onde o número de átomos corresponde a $N = 21$ ($J = 10.5$) e a energia média total do sistema, E onde $E/N = 1$. Lembremos que a representação no plano definido pelas coordenadas (q_a, p_a) é a projeção estereográfica da esfera de Bloch com raio igual a $\sqrt{4J}$.

Notamos a presença de uma separatriz de movimento definida para $q_a = 0$ que divide o espaço de fase atômico em duas regiões: a primeira corresponde à região onde $p_a > 0$ e na segunda região $p_a < 0$. Em cada uma destas regiões, observamos a presença de toros racionais e irracionais os quais estão localizados ao redor das duas órbitas periódicas centrais de menor período. Classicamente, ao evoluir uma Condição Inicial (C.I.) localizada numa das duas regiões do subespaço, via equações de Hamilton, o estado do subsistema em tempos futuros permanece na mesma região. Afim de comparar adequadamente os nossos resultados, todas as C.I. estão localizadas na região de valores positivos da variável p_a onde elas são indicadas usando diferentes símbolos na Fig. 4.1. Os valores das variáveis q_a e p_a como função do pseudo-spin total do subsistema atômico J associadas a cada C.I. são apresentadas na Tabela 4.2 sendo elas escolhidas de tal forma que uma delas está localizada sobre um toro muito próximo à órbita periódica de menor período na região de valores positivos de p_a (triângulo), a segunda C.I. está localizada sobre um toro perto da separatriz de movimento no espaço de fase (quadrado) e a terceira num outro toro externo cuja posição está localizado perto da borda do subespaço

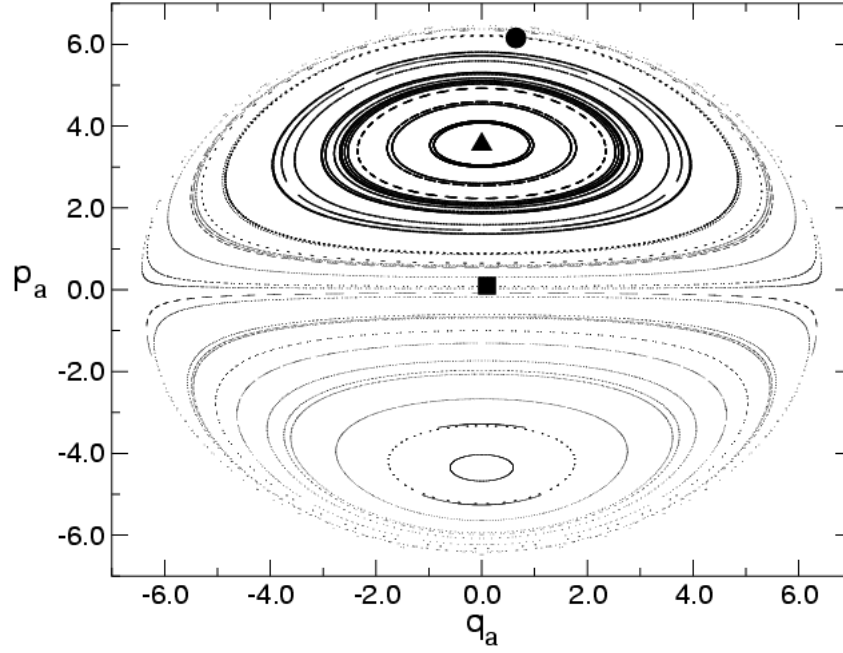


Figura 4.1: Seção de Poincaré do sub-sistema atômico considerando o modelo de Dicke na aproximação de onda girante. Aqui $J = 10.5$ e energia média do sistema cumpre $E/N = 1.0$. Aqui $G = 0.5$, $G' = 0.0$ e $\hbar = 1.0$. Os pontos indicam as condições iniciais da Tabela 4.2.

atômico(círculo). Com o objetivo de simplificar a discussão, chamaremos a estas três C.I. como *toro interno*, *separatriz* e *borda* respectivamente. Para todos os casos, a condição inicial para o campo é escolhida tal que $q_{c0} = 0.0$ e o valor do correspondente p_{c0} é calculada de forma que satisfaz a condição que a energia média total do sistema satisfaz $E/N = 1.0$.

Condição Inicial	Símbolo	q_{a0}	p_{a0}
Toro interno	triângulo	0.0	$0.548\sqrt{4J}$
Separatriz	quadrado	0.01	0.01
Borda	círculo	$0.1\sqrt{4J}$	$0.95\sqrt{4J}$

Tabela 4.1: Condições iniciais escolhidas no caso do sistema integrável. J é o spin total do sub-sistema atômico.

Os estados do subsistema atômico construídos centrando o pacote nestes pontos

correspondem a um estado coerente com $\langle \hat{J}_z \rangle \approx -0.4J$ (toro interno), um segundo estado coerente com $\langle \hat{J}_z \rangle \approx -J$ (separatriz) e por último um estado coerente com $\langle \hat{J}_z \rangle \approx 0.83J$ (borda), como pode ser corroborado dos valores numéricos obtidos para o valor médio de cada condição apresentados na Tabela 4.2.

Condição Inicial	J		
	10.5	7.0	5.0
Separatriz	-10.4999	-6.9999	-4.9999
Toro interno	-4.1987	-2.7950	-1.9987
Borda	8.6827	5.7904	4.1426

Tabela 4.2: Resultados do cálculo numérico de $\langle \hat{J}_z \rangle$ para o instante inicial e as condições iniciais escolhidas e diferentes valores de J .

A evolução da Entropia Linear Reduzida Atômica (ELRA) como função do tempo depende fortemente da condição inicial do sistema, como podemos ver na Fig. 4.2, onde são mostrados os nossos resultados considerando $J = 10.5$ e as condições iniciais da Tabela 4.2. Lembrando as propriedades do traço parcial, a entropia linear do subsistema atômico pode ser escrita como

$$\delta_a(t) = 1 - \text{Tr}_a [\hat{\rho}_a^2(t)],$$

onde $\hat{\rho}_a = \text{Tr}_c [\hat{\rho}(t)]$ sendo $\hat{\rho}(t)$ o operador densidade do estado global. Os instantes para os quais o valor da ELRA é nulo, correspondem a tempos onde o estado global é separável e os dois subsistemas, em separado, estão num estado puro. Para todas as condições iniciais, vemos que só no tempo inicial o valor da ELRA é nulo e o estado global é separável. Desta forma, o subsistema atômico está emaranhado com o campo para qualquer instante futuro. independentemente da condição inicial escolhida. Esta situação é oposta ao caso analisado no Capítulo 2, onde $N = 1$ e o átomo era preparado num estado de superposição, onde o processo de emaranhamento é reversível, como podemos ver da evolução das funções de Wigner do campo, Fig. 2.5, e a função de Wigner atômica, Fig. 2.6.

Para tempos “longos” ($30 < \omega_0 t < 70$) a ELRA, apresentada no inset da Fig. 4.2, tem um comportamento assintótico até um valor máximo (patamar). O valor da entropia linear reduzida depende fortemente do número máximo de estados acessíveis

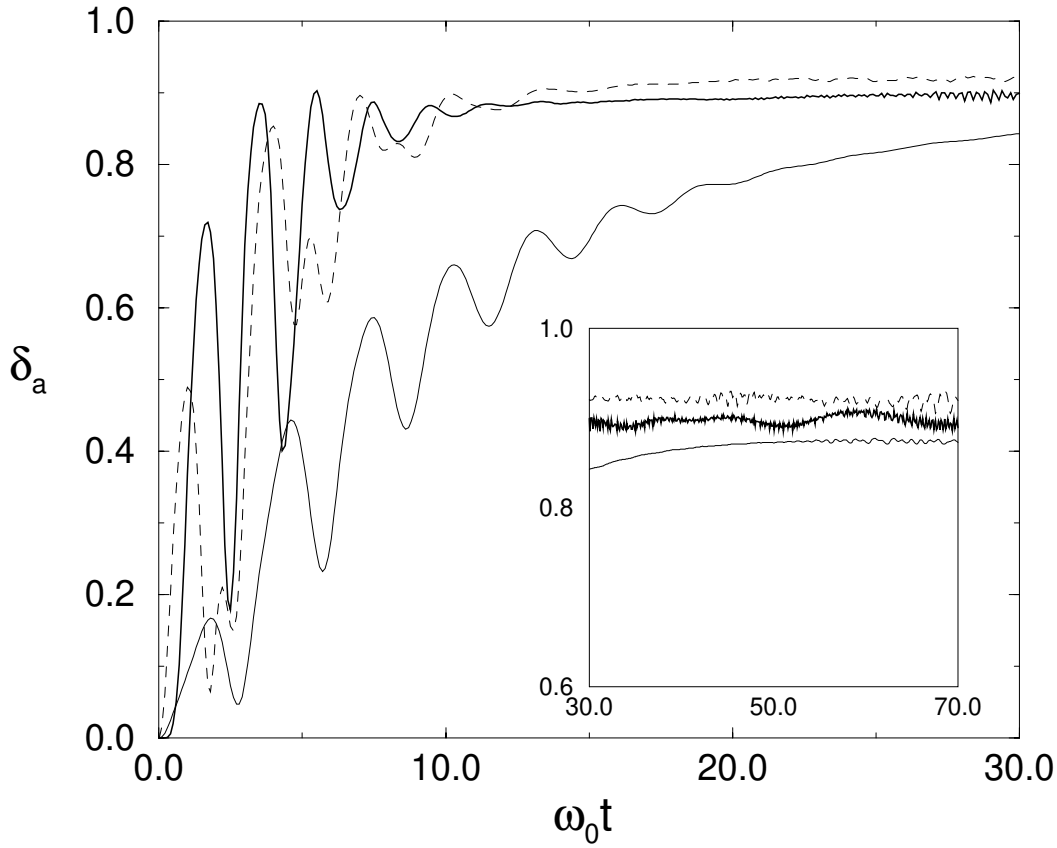


Figura 4.2: Entropia linear como função do tempo para $J = 10.5$ e as condições iniciais da tabela 4.2: Separatriz (linha contínua grossa), Borda (linha tracejada) e Toro Interno (linha contínua). No “inset”: comportamento no patamar ($0 < \omega_0 t < 70$).

associados ao sistema atômico, o qual depende basicamente do número de átomos. Vemos que existem pequenas diferenças no valor da entropia no patamar ao comparar diferentes condições iniciais, sendo fixo o número de átomos do sistema. Obteremos informações tanto sobre estas pequenas diferenças entre os valores do patamar do ELRA para as três condições iniciais, quanto à questão da distribuição sobre os níveis acessíveis, ao analisar a função de Wigner atômica e suas distribuições reduzidas W_θ e W_ϕ .

Da comparação das curvas de ELRA para as diferentes C.I.s antes de atingir o patamar, vemos como o aumento da mesma é mais rápido para as C.I. denotadas como *separatriz* e *borda* do que para aquela definida sobre o toro interno. Como já

foi mostrado na Ref. [12], se o estado coerente é preparado de modo que o centro do mesmo coincide com a C.I. localizada sobre um toro interno da seção de Poincaré, a ELRA apresenta um número maior de oscilações, e a taxa de aumento da entropia é menor do que para as outras condições iniciais. Embora o valor final da ELRA é menor do que nos outros casos, toma mais tempo para o sistema atômico atingir o estado com maior grau de emaranhamento. Em contraste, para as C.I.s perto da separatriz e perto da borda, o tempo para o qual a ELRA atinge o patamar é aproximadamente o mesmo.

Se analisamos a forma das projeções das trajetórias clássicas associadas a cada condição inicial vemos como o emaranhamento aumenta significativamente mais rápido para as C.I.s que, classicamente, tem uma trajetória menos confinada numa determinada região do espaço de fase. Lembremos que estas trajetórias são encontradas evoluindo os pontos escolhidos no espaço clássico usando as equações de Hamilton e projetamos as trajetórias no espaço de fase do subsistema atômico (Fig. 4.3). As oscilações na ELRA estão relacionadas com separações e aproximações sucessivas com relação à borda do espaço de fase, como foram discutidas por Angelo *et al.* [13] e pelo mesmo autor na tese de doutorado [18]. Vemos como, para este caso particular, as trajetórias menos regulares correspondem justamente à condição inicial perto da borda e aquela escolhida perto da separatriz. Podemos afirmar que condições iniciais do problema mecânico-quântico associadas a órbitas clássicas estáveis podem estar associados a estados quânticos onde o processo de emaranhamento é inibido, dentro do contexto definido neste trabalho (N grande e estados coerentes como estados iniciais).

Resta compararmos as mudanças no comportamento da ELRA ao preparar o nosso estado atômico inicial com um número de átomos diferentes. Na Figura 4.4 apresentamos os resultados obtidos para a entropia linear como função do tempo para diferentes valores de N , considerando condições iniciais equivalentes àquela sobre o toro interno. O primeiro fato a ser observado é a diminuição do valor do patamar na medida que o número de átomos diminui. Como foi discutido anteriormente, isto está associado ao número de estado acessíveis que aumenta quando N aumenta, o que está relacionado com o fato do sistema tentar evoluir para um estado misto com contribuição dos $2J + 1$ estados acessíveis. Nesse contexto de sistemas ideais globalmente puros, não há como distinguir uma mistura estatística do

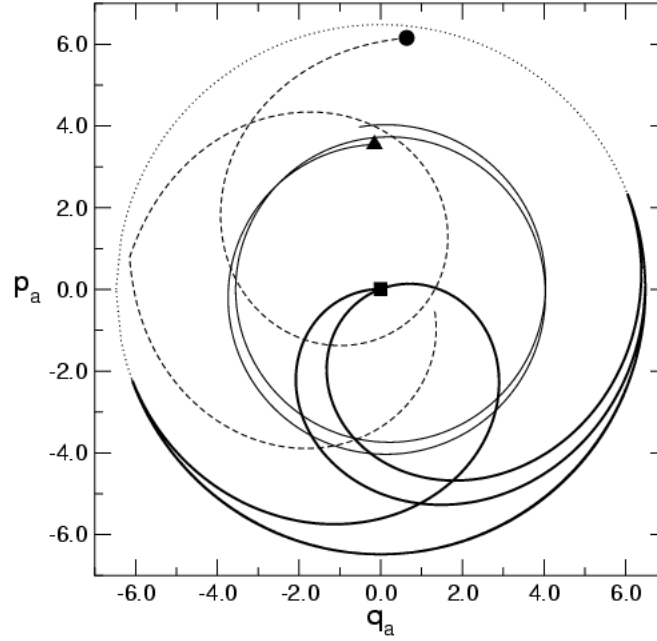


Figura 4.3: Projeção da trajetória clássica para cada uma das condições iniciais da tabela 4.2: Separatriz (linha contínua grossa), Borda (linha tracejada) e toro interno (linha contínua). Os parâmetros associados ao Hamiltoniano $\mathcal{H}$ são os mesmos da Fig. 4.1 e $J = 10.5$.

ponto de vista dos subsistemas e o estado global maximamente emaranhado. Isto significa que o valor da ELRA deste estado misto, cujo valor assintótico corresponde a $\delta_a \sim 1 - (N)^{-1}$, aumenta quando N aumenta. Uma outra diferença na ELRA entre os casos correspondentes a um número diferente de átomos consiste em que a ELRA consegue atingir um valor menor quando N aumenta e a entropia atinge o mínimo a cada oscilação, embora os tempos nos quais aparecem estes mínimos não dependem do número de átomos presentes. Para as outras duas condições iniciais, o comportamento da ELRA pode ser descrita da mesma maneira.

Na próxima seção discutiremos os resultados obtidos para a evolução da função de Wigner atômica associada a cada uma das condições iniciais discutidas até o momento. Em particular, estamos interessados em analisar quais são as diferenças que apresenta esta função para tempos correspondentes aos primeiros máximos e mínimos do valor da ELRA, e usaremos também as Funções de Wigner Reduzidas Atômicas (FWRA), W_θ e W_ϕ . Analisando o comportamento destas funções é possível estabelecer que existe alguma correlação entre a localização e delocalização

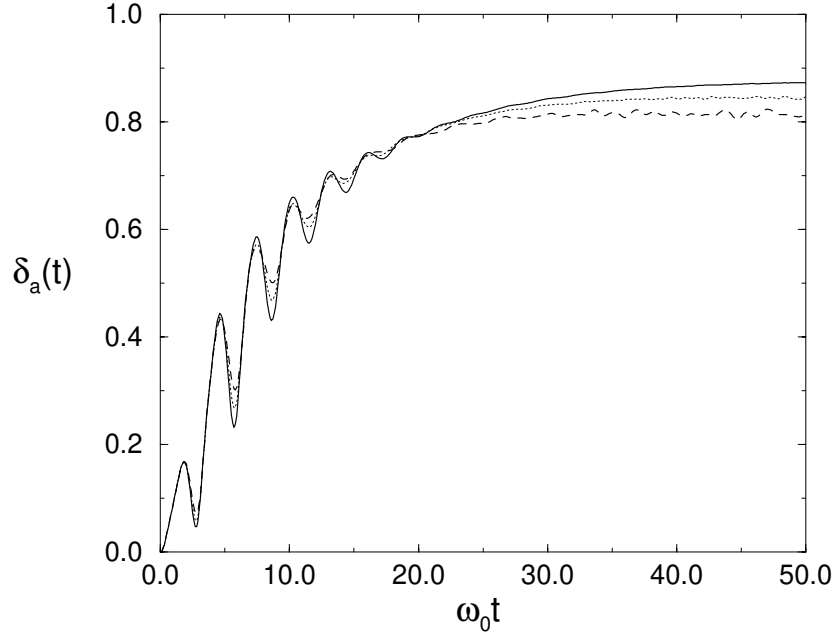


Figura 4.4: Entropia linear como função do tempo considerando a condição inicial sobre um toro interno perto uma das órbitas de menor período e para diferentes valores de J : $J = 10.5$ (Linha contínua grossa); $J = 7.0$ (Linha pontilhada) e $J = 5.0$ (Linha tracejada).

do estado e os máximos e mínimos da ELRA. Embora a função de Husimi apresentada na Ref. [13] já permite visualizar a delocalização gradual no espaço de fase atômico, a função de Wigner permite obter informações mais detalhada sobre o processo. Usando as FWRA estaremos em condições de determinar se o emaranhamento para determinada C.I. esta relacionado a delocalização no espectro de valores de $\hat{J}_z$ (associado a θ) ou se $\hat{J}_x$ e $\hat{J}_y$ (relacionados com ϕ) são indeterminados.

4.2.1 Dinâmica da função de Wigner do subsistema atômico.

Devido ao fato de que a função de Wigner é uma representação no espaço de fase clássico do operador densidade, ela é uma ferramenta poderosa no estudo da dinâmica de um determinado sistema, como já foi corroborado no Capítulo 2. Neste caso particular, a FWA permite uma representação do estado atômico no subespaço de fase para qualquer tempo, calculada a partir dos resultados numéricos obtidos para os elementos da matriz densidade reduzida atômica. Desta forma, podemos

usar as Funções de Wigner Reduzidas Atômicas (FWRA) no estudo da localização e delocalização do estado nas variáveis θ e ϕ e discutir as diferenças entre a dinâmica do emaranhamento dependendo do estado inicial escolhido.

A partir da Função de Wigner atômica, já definida na Eq.(1.66), podemos calcular a FWRA associada ao ângulo polar $\theta \in [0, \pi]$

$$W_{\theta}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} W(\theta, \phi, t) d\phi$$

e também aquela associada ao ângulo azimutal $\phi \in [-\pi, \pi)$

$$W_{\phi}(t) = \int_0^{\pi} W(\theta, \phi, t) \sin \theta d\theta$$

Estas funções permitem uma melhor visualização do comportamento da função de quase-distribuição, em particular sobre a localização e a delocalização do estado atômico nas variáveis θ e ϕ . No espaço de Hilbert do momento angular, θ e ϕ estão relacionadas, respectivamente, com $\hat{J}_z$ e a fase do estado do sistema [30]. Cumpre-se a relação

$$\sqrt{J(J+1)} \cos \theta = M \quad (4.6)$$

sendo o valor M o autovalor associado ao operador $\hat{J}_z$ e J é o pseudo-spin total. Além das FWRA, que denotaremos como W_{θ} e W_{ϕ} omitindo a menção à dependência temporal, também apresentaremos a representação polar esférica da FWA, já discutida no Capítulo 1.

Apresentamos a função de Wigner atômica na representação polar esférica para os estados coerentes atômicos no tempo inicial, Fig. 4.5, construídos usando as condições apresentadas na Tabela 4.2. No tempo inicial, os nossos resultados numéricos da FWA não apresentam valores negativos, como era de esperar ao definir como estado inicial um estado coerente atômico. Vemos como para o estado coerente centrado ao redor da C.I. localizada perto da **separatriz** de movimento, a representação polar esférica da FWA, possui um máximo positivo em $z \approx -1$ quase no polo Sul da esfera de Bloch (eixo de valores negativos de z com $\theta = \pi$). Lembrando que a localização da variável θ está associada ao valor esperado do operador $\hat{J}_z$ e dado que o polo sul da esfera de Bloch corresponde aproximadamente a $\langle \hat{J}_z \rangle = -J$, vemos como a forma da FWA reflete a nossa escolha inicial (confrontar com a Tabela 4.2). Nesta representação, a FWA do estado coerente coincide com aquela

associada ao estado fundamental $|J, -J\rangle$ do sistema atômico, como podemos ver ao comparar com a Fig. 1.3(a).

A forma da FWA para a condição definida sobre o **toro interno**, está bem localizada nas direções determinadas pelos ângulos polar e azimutal: ela possui um valor máximo localizado no valor de $\theta = 1.98$ que corresponde a $\langle \hat{J}_z \rangle \approx -0.42J$ ($z \approx -0.4$). Quanto a ϕ , vemos que ela está bem localizada ao redor de $\phi \approx \pm\pi$ que corresponde, segundo a nossa definição, à direção do eixo negativo de y . No caso da condição perto da **borda**, a função de Wigner atômica apresenta as mesmas características das anteriores mas o máximo principal da mesma está localizado em $\theta = 0.60$ que corresponde a $\langle \hat{J}_z \rangle \approx 0.86J$. As diferenças entre os valores de $\langle \hat{J}_z \rangle$, estimados com base na forma da função de Wigner atômica, e aquele apresentado na Tabela 4.2 são consequência do erro numérico introduzido no cálculo: o valor da Tabela foi calculado diretamente dos coeficientes associados a cada estado na base $|J, M\rangle$ definidos pela expressão (4.2) e o segundo foi obtido depois de realizadas todas as operações necessárias no cálculo da função de Wigner atômica (diagonalização, evolução temporal e construção do operador densidade global, redução das variáveis do campo e somatórios sobre os índices K , Q e M no cálculo específico da FWA).

Nas próximas seções, nos concentraremos na discussão da localização e delocalização das probabilidades reduzidas W_θ e W_ϕ . A forma destas funções tanto para o instante inicial quanto para tempos longos será apresentado em todos os gráficos a seguir, facilitando a comparação. Os instantes escolhidos correspondem aos tempos onde a ELRA apresenta máximos e mínimos, uma vez que queremos estabelecer uma relação entre o grau de emaranhamento e a localização e delocalização da FWA. Os tempos para os quais foram feitos os cálculos numéricos são apresentados na Tabela 4.3. As convenções usadas nos gráficos serão escolhidas de acordo com a ordem em que os máximos e mínimos aparecem no gráfico da entropia. Apresentamos estas convenções na Tabela 4.4 para facilitar a leitura e compreensão dos resultados.

Dinâmica da FWA: condição inicial sobre o toro.

Apresentamos os resultados para as funções de Wigner reduzidas W_θ , Fig. 4.6(a), e W_ϕ , Fig. 4.6(b) nos tempos correspondentes a máximos (Esquerda) e mínimos (Direita) da ELRA. Nos gráficos da distribuição W_θ indicamos, usando linhas tracejadas, os valores do ângulo polar correspondentes tanto ao equador ($M = 0$) quanto

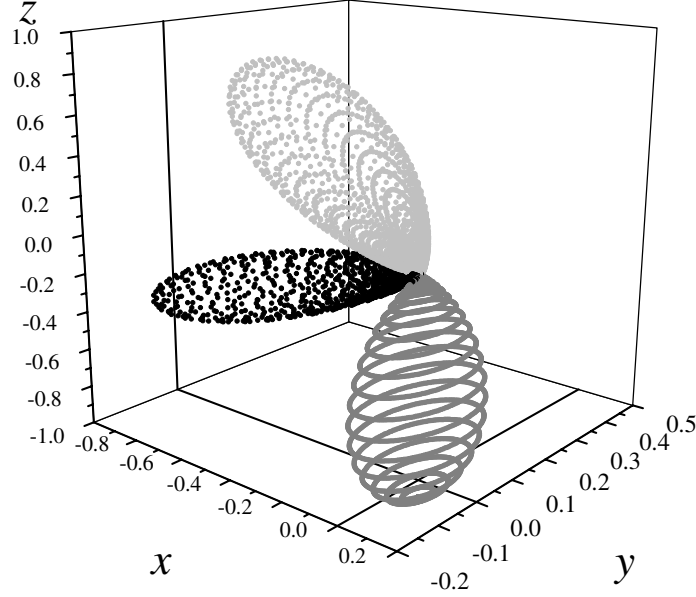


Figura 4.5: Funções de Wigner atômicas na representação polar esférica para $J = 10.5$, no instante inicial. Preto: Toro interno; Cinza escuro: Separatriz; Cinza claro: borda.

a alguns autoestados da base $|J, M\rangle$ onde o valor de M para cada estado da base está indicado na legenda acima da linha vertical ($J = 10.5$). No caso de W_ϕ , as linhas tracejadas separam os valores da variável em quatro intervalos: aquele correspondente ao quadrante **I**, que corresponde na representação polar esférica a valores $x > 0$ e $y < 0$, **II** onde as variáveis x e y são positivas, **III** associado a $x < 0$ e $y > 0$ e finalmente **IV** onde tanto x quanto y são negativos.

No instante inicial, tempo representado usando uma linha contínua, vemos como a forma das distribuições reduzidas nos permite extrair informações sobre as características do estado inicial: W_θ está centrada no valor de $\theta \approx 0.64\pi$ que corresponde a um valor médio do operador $\langle \hat{J}_z \rangle \approx -0.43J$. A distribuição W_ϕ tem um máximo para os valores $\phi \approx \pm\pi$, que corresponde a posição do eixo Y na direção negativa,

Tempo	Toro	Separatriz	Borda
1 máximo	1.80	1.70	1.60
1 mínimo	2.80	2.50	2.40
2 máximo	4.40	3.50	3.30
2 mínimo	5.70	4.40	4.30
3 máximo	7.40	5.50	5.20
3 mínimo	8.60	6.30	—
4 máximo	10.2	7.40	—
Patamar	70.0	40	40

Tabela 4.3: Tempos correspondentes a máximos e mínimos da entropia linear associados as três condições iniciais escolhidas.

Tempos	Estilo da linha	Símbolo
0	Contínua	—
1 máximo	Tracejada	—
2 máximo	Tracejada grossa	—
3 máximo	Contínua	Círculo.
4 máximo	Contínua grossa	—
Patamar	Contínua	Círculo cheio.

Tabela 4.4: Convenções usadas nos gráficos das FWRA, W_θ e W_ϕ . Os tempos correspondentes aos mínimos da entropia tem a mesma convenção que o máximo com igual número de ordenamento.

sendo não nula só num pequeno intervalo ao redor deste valor. Se olharmos a FWA reduzidas para um tempo no qual a ELRA tem atingido o seu valor máximo ou patamar (indicado pelos círculos cheios na figura) vemos como o emaranhamento leva o subsistema a perder localização na variável ϕ , se compararmos as distribuições iniciais. Apesar de W_θ apresentar um máximo para $\theta \approx 0.58\pi$ ($M = -0.26J \approx -J+8$) e ainda estar localizada num intervalo relativamente pequeno do espectro de valores de $\hat{J}_z$, observamos que na variável ϕ a delocalização é maior, pois W_ϕ toma valores diferentes de zero para todos os valores de ϕ .

Nos tempos intermediários entre estes dois instantes, podemos descrever a dinâmica da função de Wigner reduzida W_θ , dizendo que o valor mais provável da mesma

oscila entre 0.50π e 0.64π ao redor de um valor de θ o qual é finalmente atingido quando a ELRA atinge o patamar. Nos tempos correspondentes aos mínimos da ELRA, Fig. 4.6(a) à direita, o máximo da função tenta voltar até a mesma posição do instante inicial. Além disso, a largura da distribuição W_θ é ligeiramente menor do que àquela associada aos instantes correspondentes aos máximos da ELRA, mostrados na mesma figura, à esquerda. Por sua vez, nestes tempos (máximos das oscilações do ELRA), o valor máximo de W_θ desloca-se para valores de θ mais próximos de $\theta = 0.5\pi$, associado ao valor $M = 0$.

A evolução da função W_ϕ é bastante diferente, como podemos observar na Fig. 4.6(b), onde vemos que a delocalização da FWRA é gradual no ângulo azimutal. Um fato interessante consiste na aparição de picos secundários, diferentes do máximo principal presente no tempo inicial, e a dinâmica dos mesmos no decorrer no tempo. Vemos como, no tempo correspondente ao primeiro máximo (linha tracejada fina na Fig. 4.6(b) à esquerda) W_ϕ adquiriu valores diferentes de zero para todos os valores de ϕ correspondentes ao primeiro e quarto quadrante, aparecendo picos secundários. Isto implica que o estado do subsistema atômico está mais deslocalizado em ϕ se compararmos com o instante inicial. No entanto, no tempo correspondente ao primeiro mínimo (gráfico à direita e mesmo estilo de linha) vemos que os picos secundários deslocam-se até o segundo e terceiro quadrante, com posições simétricas relativas ao eixo Y (aproximadamente a ± 68.4 graus), sendo o valor da FWRA nula para valores de ϕ intermediários entre os três picos existentes. No tempo correspondente ao segundo máximo (linha tracejada espessa, à esquerda), W_ϕ só possui o pico principal com largura maior se comparamos com o instante inicial. No segundo mínimo (mesma convenção, à esquerda), vemos de novo os picos secundários nos primeiros e quarto quadrante, em posições simétricas com respeito a direção negativa do eixo Y e ligeiramente deslocados dos eixo $x = 0$, mais um terceiro no valor de $\phi/\pi = 0.0$. Eles não estão separados um do outro já que W_ϕ é diferente de zero para valores de ϕ intermediários. Veremos que o terceiro pico está relacionado com a parte negativa da função de Wigner atômica, que só é possível enxergar na representação polar esférica. Para tempos posteriores esta estrutura de picos secundários vai sendo gradualmente apagada pela delocalização geral do estado atômico em fase, como vemos dos resultados nos tempos associados aos terceiro máximo e o correspondente mínimo, indicados pelos círculos na Fig. 4.6(b).

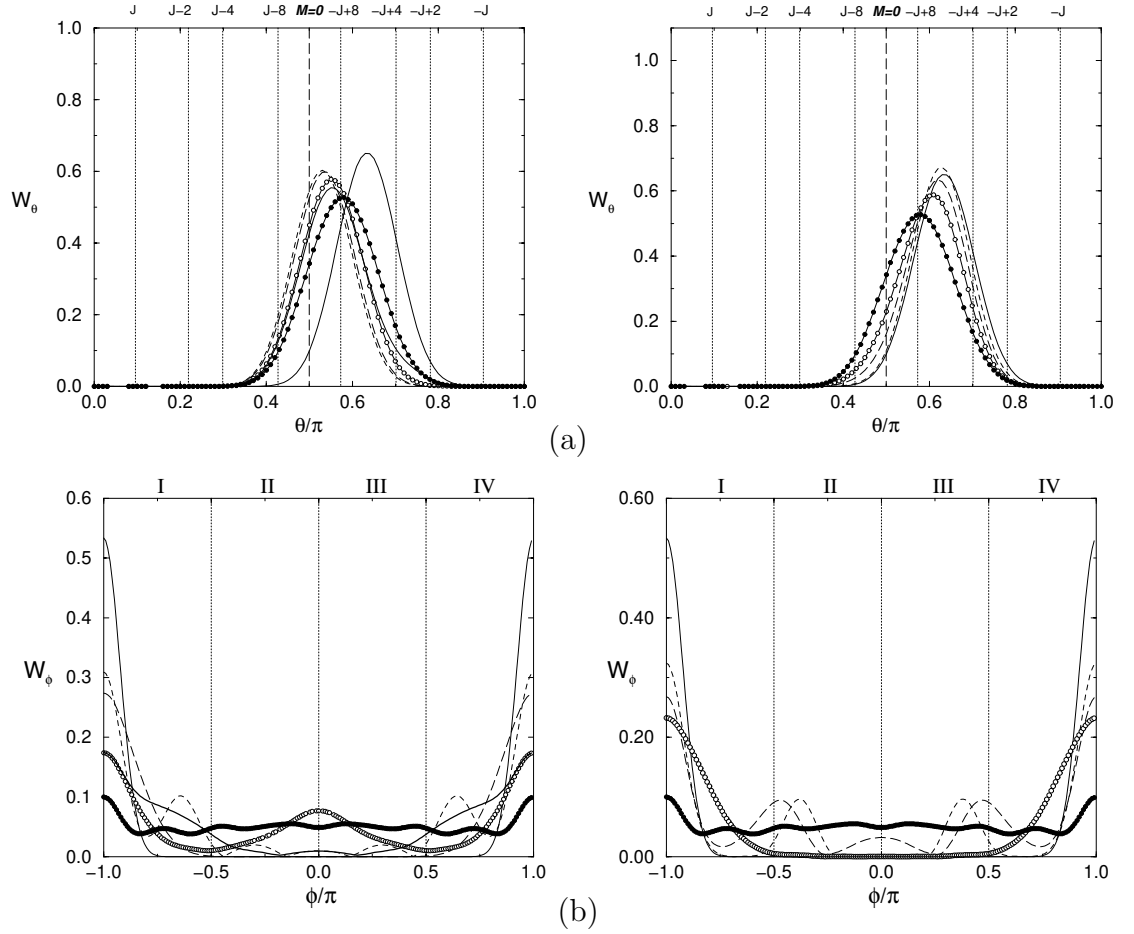
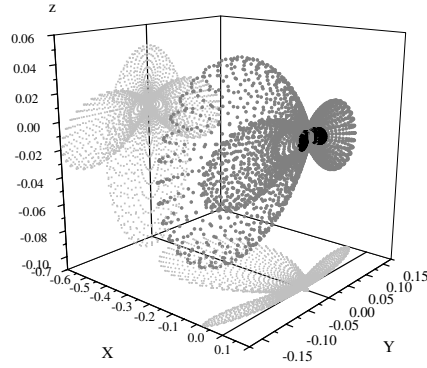


Figura 4.6: Funções de Wigner reduzidas atômicas para $J = 10.5$ considerando a condição inicial localizada sobre um toro próximo à órbita de menor período no espaço de fase clássico e tempos correspondentes a máximos (Esq.) e mínimos (Dir.) da ELRA. (a) W_θ ; (b) W_ϕ .

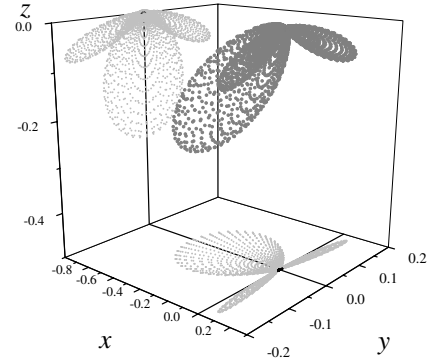
A forma da FWA na representação polar esférica é apresentada na Fig. 4.7, onde a parte positiva está indicada usando cinza e a negativa usando cor preta. As escalas em z variam para melhorar a visualização do comportamento da FWA. No instante associado ao primeiro máximo da entropia linear reduzida atômica, Fig. 4.7(a), vemos uma estrutura de três lóbulos distinguíveis: o primeiro na direção correspondente a valores negativos do eixo x com um valor máximo em $z \approx -0.1$ e dois secundários simétricos com relação ao eixo x nos quadrantes **I** e **IV** e na mesma posição em z que o máximo principal. Já no tempo do primeiro mínimo da entropia,

Fig. 4.7(b), temos o mesmo tipo de estrutura que para o tempo anterior, embora os lóbulos estão mais localizados e os lóbulos secundários aparecem nos quadrantes **II** e **III** com valores máximos em $z \approx -0.1$, associados aos picos secundários já discutidos ao apresentar os resultados obtidos para W_ϕ . Tanto neste tempo quanto para o tempo correspondente ao segundo mínimo da entropia, Fig. 4.7(d), podemos distinguir três lóbulos positivos na função de Wigner do estado atômico onde a posição em z do máximo principal varia, devido às oscilações em θ do valor máximo de W_θ , já discutida anteriormente. No tempo correspondente ao segundo máximo, Fig. 4.7(c), a estrutura muda: a função de Wigner perde os lóbulos secundários e conserva o lóbulo principal. A ordem de grandeza da parte negativa é desprezível se comparada com a parte positiva. Esta forma é similar as FWA nos instantes correspondentes ao terceiro mínimo da entropia, Fig. 4.7(e), e no patamar, Fig. 4.7(f). Nestes três instantes, a FWA tem valores diferentes de zero para valores de θ no hemisfério norte da esfera de Bloch, $z > 0$, embora a FWA não possua valores de z superiores a 0.05. Nesse sentido, podemos dizer que para qualquer instante de tempo, embora tenha uma delocalização gradual, a dinâmica da FWA atômica está “confinada” praticamente no hemisfério sul. Para todos estes tempos, a FWA possui parte negativa, cuja ordem de grandeza pode ser comparável ou não com a parte positiva. No contexto do nosso trabalho ela é uma sinal de que o emaranhamento leva o estado atômico a estados que não são estados coerentes e sim estados de mistura, como é representado um estado emaranhado no espaço do subsistema. Por outro lado, a presença de valores negativos na função de Wigner nos diz que o sistema atômico não evoluiu até uma mistura estatística completa dos estados da base $|J, M\rangle$ já que valores negativos em $W_{\theta,\phi}$ indicam que elementos diferentes da diagonal no operador densidade reduzido atômico são diferentes de zero.

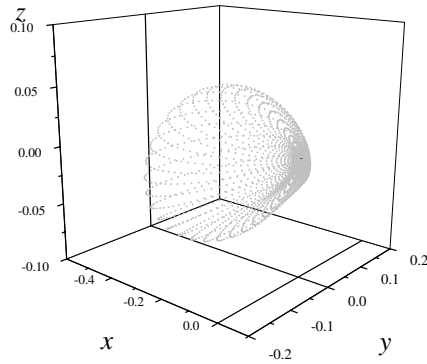
Do comportamento das funções de Wigner reduzidas W_θ e W_ϕ mostrado na Fig. 4.6 e da FWA na representação polar esférica, podemos concluir que, embora a interação átomo-campo favoreça a formação de lóbulos secundários distinguíveis, o emaranhamento dos subsistemas tem como efeito líquido levar o sistema a se deslocalizar e quando a ELRA atinge o patamar, o estado atômico está num estado de mistura onde poucos auto-estados de $\hat{J}_z$ participam, e por tanto com relativa localização em $\hat{J}_z$, com total indeterminação dos valores esperados dos operadores $\hat{J}_x$ e $\hat{J}_y$, associados à variável ϕ . O patamar está relacionado com uma distribuição



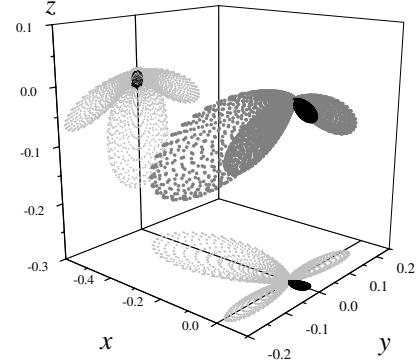
(a) 1º máximo



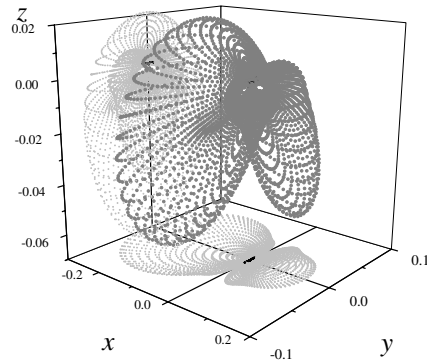
(b) 1º mínimo



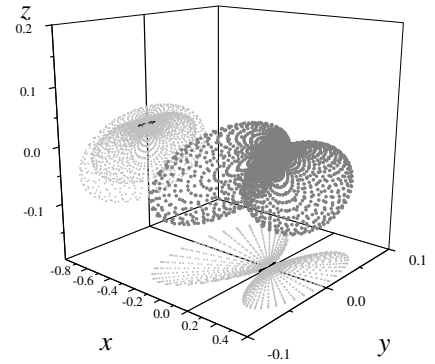
(c) 2º máximo



(d) 2º mínimo



(e) 3º mínimo



(f) Patamar

Figura 4.7: Evolução temporal da função de Wigner atômica na representação polar esférica. C.I. sobre um toro interno.

do estado num número grande de estados acessíveis e em princípio podemos supor que o estado se distribui uniformemente nestes estados. A função de Wigner atômica nos mostra que esta idéia não é correta, o aumento da entropia linear reduzida pode estar associada a delocalização do estado em uma ou outra variável, θ ou ϕ , ou nas duas.

Nos instantes correspondentes aos mínimos da ELRA (em particular, no instante correspondente ao primeiro mínimo da ELRA), o subsistema atômico tem associadas funções de Wigner atômicas, bastante similares aos estados de gato atômicos apresentados por Benedict e Czirják [58]. Da mesma forma que no caso do oscilador quártico bidimensional do Capítulo 3, poderíamos estar diante da formação de gatos ou misturas estatísticas de estados de gato. Entretanto, neste caso a demonstração formal é bem mais complicada e deixamos esta questão em aberto.

Evolução da função de Wigner: Separatriz e borda.

Da mesma forma que foi analisada a dinâmica da FWA no caso da C.I. sobre o toro interno, estudamos o comportamento da mesma função quando as C.I. estão localizadas perto da separatriz de movimento e da borda do espaço de fase clássico.

Separatriz: A evolução do estado inicial preparado usando como centro o ponto que corresponde a uma condição inicial clássica localizada perto da separatriz de movimento é estudada usando tanto a função de Wigner reduzida W_θ , Fig. 4.8(a), quanto a função associada ao ângulo azimutal W_ϕ , Fig. 4.8(b), nos instantes correspondentes à máximos (Esq.) e mínimos (Dir.) da entropia linear reduzida atômica, ELRA. Para todos os gráficos, é apresentada simultaneamente a forma da função correspondente tanto para o instante inicial quanto para um instante onde a ELRA atingiu o patamar.

Vemos que para o instante inicial, W_θ apresenta um pico bem localizado ao redor do valor de $M \approx -J$ e a forma de W_ϕ indica que o estado inicial está distribuído para todos os valores de ϕ , o que corresponde com a situação do estado coerente localizado no estado fundamental $|J, -J\rangle$ (linha contínua). No patamar, a situação é diferente da encontrada no caso da condição inicial sobre o toro: tanto W_θ quanto W_ϕ estão deslocalizadas, embora a primeira ainda conserve o pico principal bem localizado no valor de $\theta = 0$ (círculo cheio). Se comparadas com a forma final das funções de Wigner reduzidas do caso anterior, vemos que elas estão significativamente mais

deslocalizadas, sendo esta a razão pela qual o valor da ELRA no patamar é maior neste caso (mais estados $|J, M\rangle$ participando). Para tempos intermediários, as diferenças no comportamento das FWRA entre os tempos de máximos e mínimos da ELRA podem ser resumidas assim: o valor máximo de W_θ oscila da mesma maneira do que no caso anterior, embora as oscilações não estão restritas uma determinada região, podendo tomar qualquer valor de θ . Embora a delocalização de W_θ seja gradual, podemos ver como os mínimos e máximos da ELRA estão ligados a localização da função W_ϕ . Isto é visto da Fig. 4.8(b), onde nos tempos correspondentes aos mínimos da ELRA aparece a estrutura de picos secundários associada a lóbulos distinguíveis na representação polar esférica da FWA, sendo eles bem definidos até o tempo correspondente ao terceiro mínimo (indicado com círculos), como podemos observar na Fig. 4.8(b) à direita.

Borda: Apresentamos as funções de Wigner reduzidas W_θ e W_ϕ , Fig. 4.9, quando o pacote coerente é construído sobre uma condição nas vizinhanças da *borda* no espaço de fase clássico. Para o tempo inicial a função W_θ , Fig 4.9(a), tem um pico principal localizado em $\theta = 0.18\pi$ ($M = 0.88J$) o que coincide com a nossa escolha original, e W_ϕ tem o pico localizado em $\pm\pi$. No patamar vemos que tanto W_θ quanto W_ϕ deslocalizam-se mais rapidamente nesta escolha, se comparamos com qualquer um dos casos anteriores. Nos tempos intermediários, o pico principal de W_θ oscila no intervalo definido pelo valor inicial ($\pi/2 - \theta_0 < \theta < \pi/2 + \theta_0$, onde $\theta_0 = 0.18\pi$). A estrutura de picos secundários em W_ϕ , não aparece neste caso, nem mesmo no tempo correspondente ao primeiro mínimo da ELRA. O comportamento de W_θ para tempos correspondentes a máximos e mínimos da ELRA é bastante similar às duas escolhas anteriores sendo duas as diferenças fundamentais: a primeira é o fato do intervalo de valores de θ onde o máximo da função oscila é *menor* do que o associado para a condição inicial perto da *separatriz* e *maior* do que para a condição inicial no *toro interno*. A segunda é que a *delocalização em θ* acontece *mais rapidamente* do que para qualquer dos casos anteriores.

A evolução da função de Wigner atômica na representação polar esférica para estas duas C.I.s é apresentada na Fig. 4.10 para tempos indicados na mesma. Vemos como no tempo correspondente ao primeiro máximo da ELRA, as funções associadas às duas C.I.s não apresentam os lóbulos secundários bem definidos encontrados para a C.I. localizada no toro interno, sendo a forma das mesmas parecidas excetuando

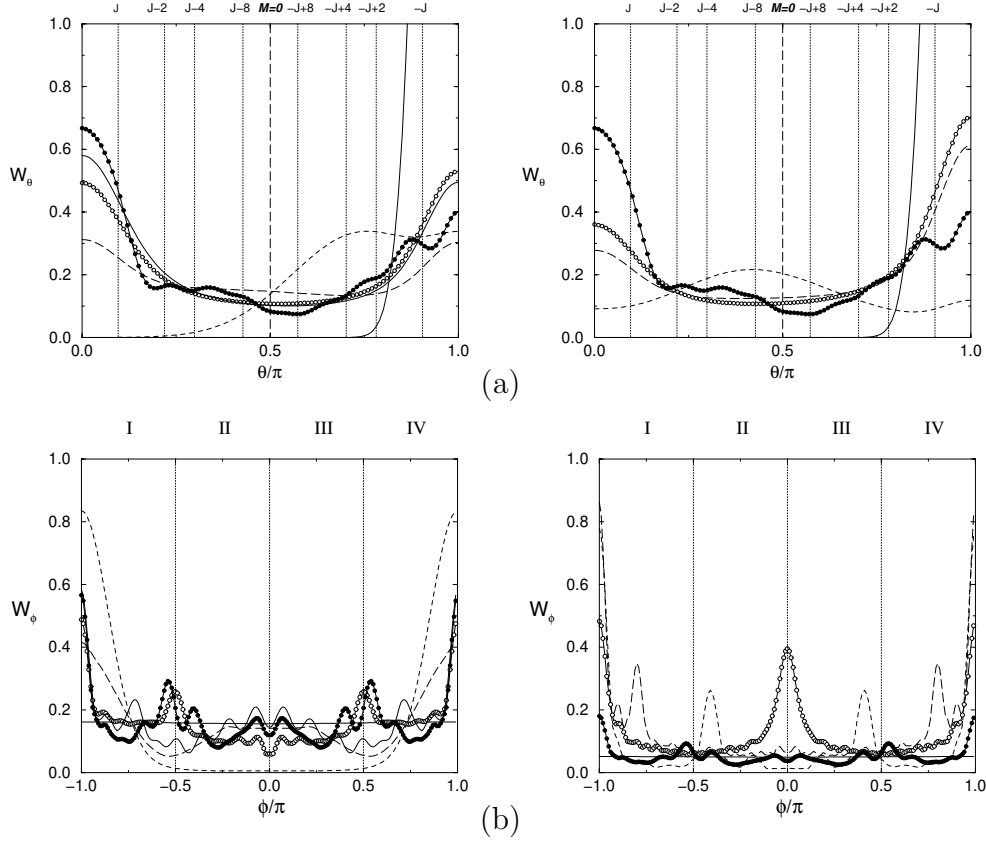


Figura 4.8: Funções de Wigner reduzidas quando $N = 21$ ($J = 10.5$), considerando a C.I. perto da separatriz e tempos correspondentes a máximos (Esq.) e mínimos (Dir.) da entropia linear reduzida atômica: (a) $W(\theta)$ e (b) $W(\phi)$.

o fato da FWA para a condição perto da separatriz possuir uma forma mais arredondada, o que significa que a FWA tem valores diferentes de zero para um número maior de “direções” na esfera de Bloch do que para a outra condição. Se compararmos os valores da ELRA nos dois casos, $\delta_a = 0.48$ para a condição inicial sobre a borda e $\delta_a = 0.72$ para a condição inicial perto da separatriz, podemos comprovar de novo a relação entre o grau de emaranhamento e localização do estado atômico. A mesma situação é observada ao comparar as FWA nos outros instantes: no primeiro mínimo da entropia linear, a forma da FWA para a condição na borda está mais localizada, apresentando até a estrutura de lóbulos secundários, se comparamos com a outra condição (aqui $\delta_a = 0.06$ para a C.I. perto da borda e $\delta_a = 0.17$ perto da separatriz).

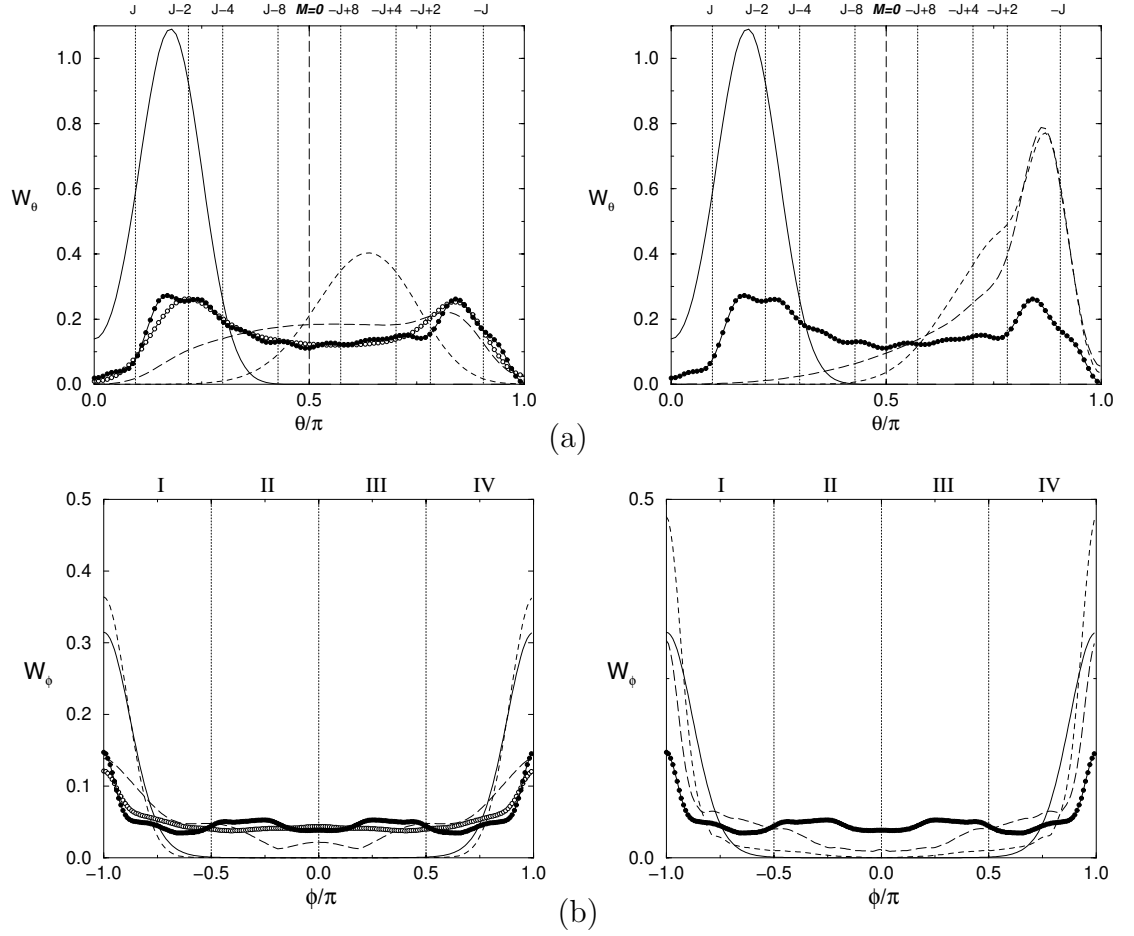


Figura 4.9: $W(\theta)$ e $W(\phi)$ para $J = 10.5$ considerando a condição inicial localizada na borda do espaço de fase clássico e alguns tempos de interesse.

No segundo máximo, as FWA diferem muito pouco, e notamos que $\delta_a = 0.85$ (borda) e $\delta_a = 0.89$ (separatriz). A situação muda para o tempo correspondente no segundo máximo e a FWA é mais localizada para a condição inicial perto da borda do que aquela associada à separatriz, ao mesmo tempo que o valor do segundo mínimo da entropia sobre a C.I. perto da separatriz ($\delta_a = 0.40$) é menor que aquele encontrado na borda ($\delta_a = 0.57$) e de fato a FWA está mais localizada para esta C.I.. No terceiro máximo resulta difícil determinar qual entre os dois casos está mais localizada. Olhando para os resultados da ELRA, vemos que neste caso os valores da entropia são aproximadamente iguais. Finalmente, para $\omega_0 t = 40$, a ELRA nos dois casos já atingiram seus patamares e as funções de Wigner atômicas mostram

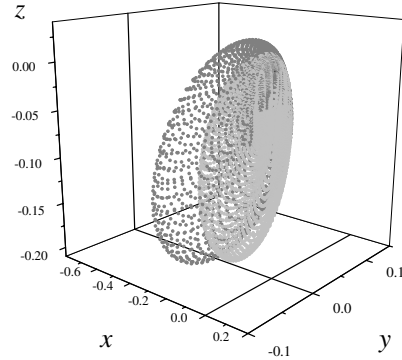
como para o caso correspondente à condição inicial sobre a borda, a função é mais deslocalizada do que para a C.I. perto da separatriz. Isto já era visível nos resultados para as funções W_θ e W_ϕ , estando este resultado em correspondência com a diferença entre os valores da entropia linear no patamar dos dois casos ($\delta_a \approx 0.92$ para a C.I. perto da borda e $\delta_a \approx 0.89$, perto da separatriz). Da mesma forma que para a C.I. sobre o toro interno, existe uma parte negativa em todos os instantes representados no gráfico, embora ela seja muito pequena se comparada com a parte positiva. De novo, interpretamos que neste contexto, o aparecimento da parte negativa é indicar que o estado atômico não é ainda um estado de mistura estatística completa (ou um estado maximamente emaranhado do ponto de vista global).

Resumindo, podemos dizer que a função W_θ se deslocaliza a medida que o tempo passa, o seu valor máximo oscilando entre valores da variável θ correspondentes ao intervalo $-\langle \hat{J}_z(0) \rangle < M < \langle \hat{J}_z(0) \rangle$, com exceção da C.I. sobre o toro interno no qual o máximo de W_θ varia entre valores entre $M = 0$ e o valor inicial de $\langle \hat{J}_z \rangle$. Isto tem relação direta com a estrutura do espaço de fase clássico: no caso da órbita periódica, os toros mais próximos desta órbita que permanecem, no espaço de fase, numa faixa estreita de θ . A Função de Wigner atômica de certa forma acompanha esta evolução.

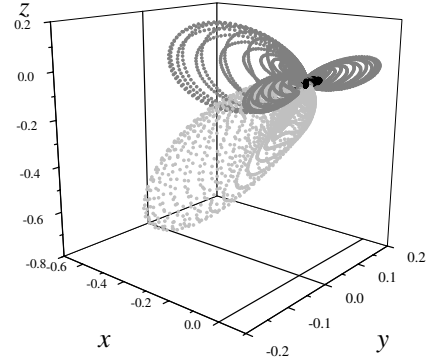
4.3 Emaranhamento no caso não integrável.

A seguir, analisaremos a dinâmica do emaranhamento entre os subsistemas (átomo e campo) ao considerar os efeitos do termo contra-girante escolhendo $G' = 0.2$, $G = 0.5$ no Hamiltoniano de Dicke, Eq.(4.1). Nesta seção, reproduzimos parte do processo seguido por Angelo *et al.* [13] e pelo mesmo autor na tese de doutorado [18] para depois calcular a função de Wigner atômica e analisar o processo de deslocalização gradual nas variáveis angulares.

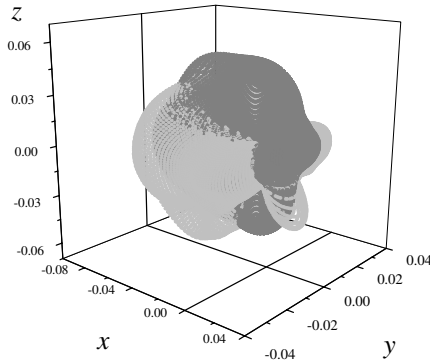
Da mesma maneira do que no caso integrável, consideramos o sistema na ressonância, $\hbar = 1.0$ e a energia média total do sistema é tal que $E/N = 1$. Para esta escolha de parâmetros, o análogo clássico do sistema apresenta caos, como é verificado ao observar a seção de Poincaré do subsistema atômico para a nossa escolha de parâmetros, reproduzida na Fig. 4.11. A forma da seção depende tanto da relação entre os valores dos parâmetros G e G' , quanto da energia média do



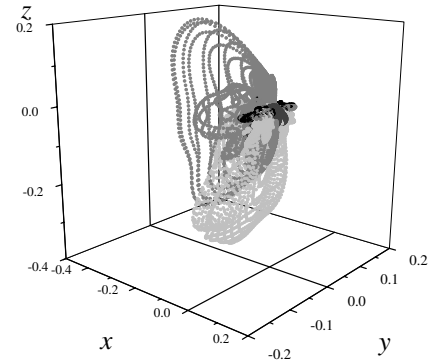
(a) 1º máximo



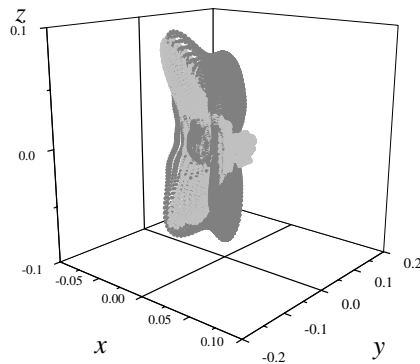
(b) 1º mínimo



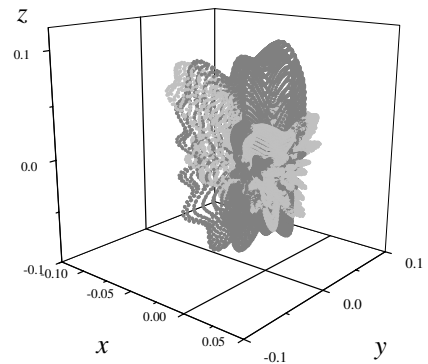
(c) 2º máximo



(d) 2º mínimo



(e) 3º mínimo



(f) Patamar

Figura 4.10: Evolução temporal da função de Wigner atômica na representação polar esférica. C.I. separatriz (cinza escuro) e borda (cinza claro).

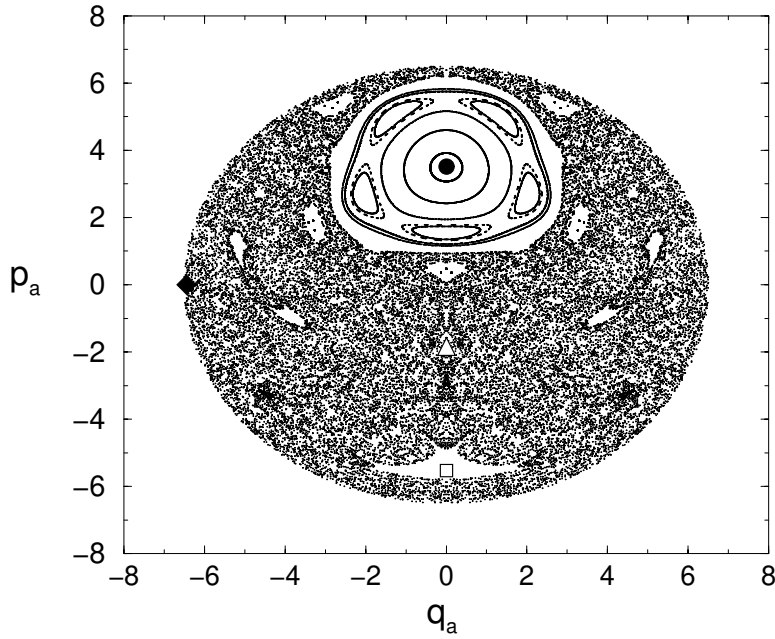


Figura 4.11: Seção de Poincaré do subsistema atômico onde $J = 10.5$, $\omega_0 = 1.0$, $\hbar = 1.0$ e energia média do sistema $E/N = 1$. Aqui $G = 0.5$ e $G' = 0.2$ e os pontos indicam as condições iniciais da escolhidas.

sistema [95]. Vemos da Fig. 4.11 que no nosso caso particular a seção de Poincaré apresenta regiões caóticas e duas regiões estáveis, sendo a maior delas definida para valores positivos da variável p_a , dentro das quais aparecem um conjunto de toros ao redor das órbitas periódicas de menor período.

Da mesma forma do que para o caso integrável, escolhemos quatro condições iniciais que serão o centro do estado coerente à ser construído, sendo duas delas caóticas e duas escolhidas dentro das ilhas estáveis. A C.I. que denotaremos como C1, indicada por um diamante (cheio) na Fig.4.11, está localizada perto da borda do espaço de fase. A segunda C.I. caótica está localizada numa região mais interna da seção de Poincaré, e esta indicada por um triângulo, e será denominada C2. Quanto às condições iniciais periódicas, uma delas está localizada num toro interno perto da órbita periódica de menor período, indicada com círculo (cheio) na Fig.4.11 e que será denominada P1, e a outra coincide com a órbita periódica de menor período da ilha estável menor, que chamaremos P2 e está indicada por um quadrado. Tanto os valores das coordenadas clássicas q_a e p_a quanto o valor médio da projeção no eixo z

Tipo de condição	q_a	p_a	$\langle \hat{J}_z \rangle$
C1: interna	0.0	$-0.28\sqrt{4J}$	$-0.84J$
C2: borda	$-0.99\sqrt{4J}$	0.0	$0.96J$
P1: Toro interno na ilha maior	0.0	$0.54\sqrt{4J}$	$-0.47J$
P2: Órbita de menor período da ilha menor	0.0	$-0.85\sqrt{4J}$	$0.44J$

do pseudo-spin total para cada condição quando $J = 10.5$ são dados na Tabela 4.3. A diferença fundamental entre as trajetórias associadas a regiões regulares e caóticas descritas pela mecânica clássica consiste em que as primeiras estão bem localizadas no espaço de fase clássico enquanto as outras não (Ver Apêndice B para ver as projeções). Da mesma forma que para o caso integrável, isto afeta a dinâmica do emaranhamento e deve se refletir no comportamento da função de Wigner.

Sabemos da Ref. [11, 13] que o processo de emaranhamento para as condições caóticas é mais rápido para as condições com trajetórias mais complexas devido à correspondente delocalização do estado, de maneira similar aos resultados encontrados para o caso integrável. Isto é confirmado ao calcular a entropia linear reduzida atômica (ELRA). Apresentamos os nossos resultados para a ELRA (essencialmente os mesmos da Ref. [13]) para as condições iniciais localizadas nas ilhas estáveis, Fig. 4.12(a), e para as duas condições na região caótica, Fig. 4.12(b) para tempos onde o valor da ELRA cresce e há oscilações. Comparando os dois gráficos, confirmamos como o processo de emaranhamento é mais rápido para as C.I.s definidas na região caótica do que para o caso onde escolhemos pontos dentro das ilhas estáveis [11, 13]. Dois fatos interessantes são observados e explicados na tese de Renato M. Angelo [18] e repetimos aqui para as várias condições iniciais. Nas ilhas estáveis, para tempos curtos, vemos que o sistema atômico recobra pureza com maior eficiência quando o pacote é centrado na ilha menor. Esta “eficiência” é entendida como o fato do δ_a adquirir valores pequenos, perto de zero, nos instantes onde a curva apresenta mínimos. No caso das condições localizadas na região caótica, vemos que para $\omega_0 t < 1.0$ a taxa de emaranhamento é maior quando o estado inicial é construído sobre um ponto perto da *borda* do espaço de fase atômico. No entanto, durante as primeiras oscilações do ELRA, esta quantidade atinge valores maiores nos máximos para a condição inicial no interior da região caótica, situação

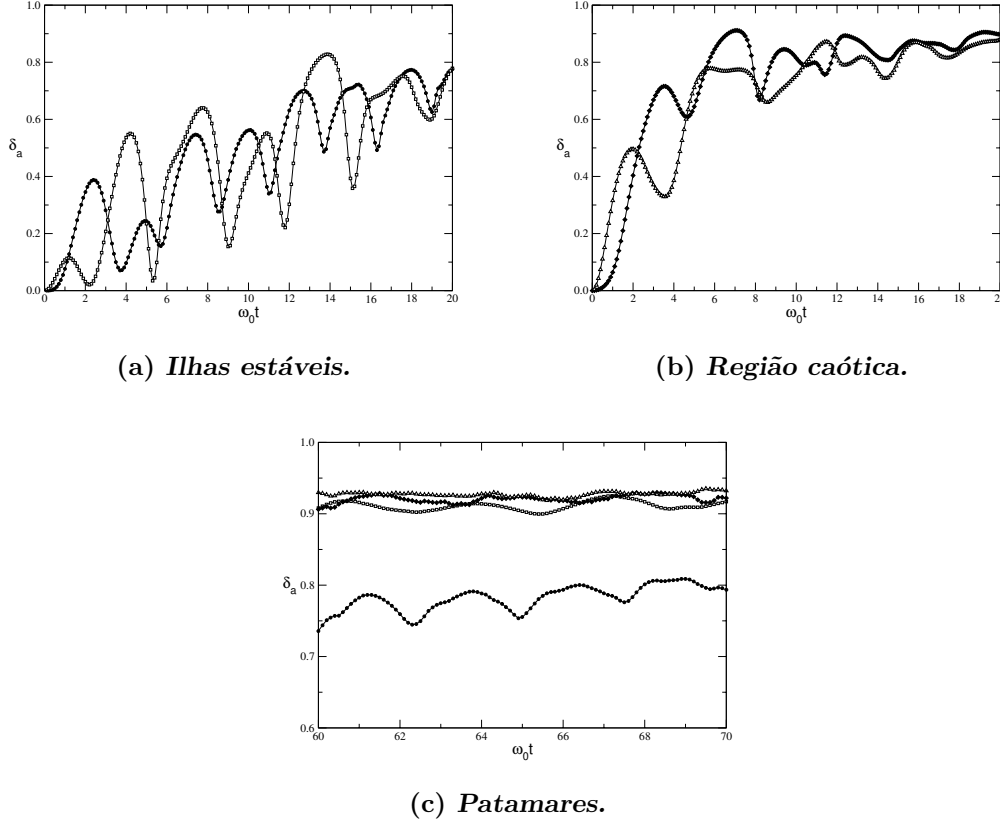


Figura 4.12: Evolução da ERLA para as C.I.s escolhidas centradas sobre os pontos da seção da Fig. 4.11. (a) Ilhas regulares e (b) Região caótica e tempos no intervalo $0 < \omega_0 t < 20$ e (c) Patamar ($60 < \omega_0 t < 70$). Círculo cheio: P1; quadrado: P2; Triângulo: C1 e Diamante cheio: C2.

que muda para $\omega_0 t > 15$ onde as duas curvas tem um comportamento oscilatório similar, crescendo continuamente.

Também confirmamos que comparando os valores nos patamares para os quatro casos, apresentados na Fig. 4.12(c), o valor da ELRA para a condição inicial P1 é mais baixo do que para a condição inicial P2. O valor da entropia no patamar para a segunda condição é comparável ao encontrado para as C.I.s na região caótica, o que é interpretado na Ref. [13] como a influência das regiões caóticas na vizinhança desta C.I. Na próxima seção usaremos as funções de Wigner reduzidas atômicas, W_θ e W_ϕ , com o objetivo de encontrar uma correlação entre a tendência à delocalização tanto em θ quanto em ϕ nos máximos da ELRA e localização nos mínimos para

cada uma das condições iniciais.

4.3.1 Dinâmica da Função de Wigner.

Nesta seção tentaremos explicar as diferenças para o caso caótico e regular do comportamento do emaranhamento usando a função de Wigner atômica no análise do processo de delocalização do estado atômico. Faremos isto comparando a evolução das funções de Wigner reduzidas atômicas, W_θ e W_ϕ , das condições iniciais nas ilhas regulares e na região caótica separadamente. Lembremos que P1 é o nome para a C.I. localizada sobre o toro interno na ilha maior, P2 se refere à C.I. na ilha menor, C1 à C.I. na parte interna da região caótica e C2 à C.I. na mesma região caótica mas perto da borda do espaço de fase.

Na Figura 4.13 mostramos os nossos resultados para as FWRA para as duas condições iniciais escolhidas sobre órbitas periódicas. No tempo inicial, ao considerar P1, vemos que W_θ tem um máximo localizado no valor 0.64π . Para P2, a posição do máximo corresponde a $\theta = 0.35\pi$. Lembrando da relação entre o ângulo θ e o valor médio do operador $\hat{J}_z$ dado pela Eq. 4.6, vemos que $\langle \hat{J}_z \rangle \approx -4.67J$ no primeiro caso e $\langle \hat{J}_z \rangle \approx 4.98J$ para a c.i. sobre a órbita periódica na ilha menor. As diferenças entre estes valores e aqueles encontrados ao calcular $\langle \hat{J}_z \rangle$ diretamente do estado inicial é de novo devido ao acúmulo de erro numérico. Este erro é maior neste caso devido à inclusão do termo contra-girante, de forma que é necessário aumentar a base usada no processo de diagonalização do Hamiltoniano 4.1. Nos dois casos, vemos que W_ϕ tem o seu máximo no valor de $\phi \pm \pi$, associado ao fato das condições iniciais serem tais que o estado coerente atômico tem uma fase bem localizada ao redor da direção negativa do eixo x , se pensarmos na representação polar esférica da FWA, a qual será omitida nessa análise.

No instante onde a ELRA atinge o patamar, vemos que existe uma diferença fundamental entre os resultados para as duas C.I., indicadas na Fig. 4.13 usando círculos cheios. Vemos que para a condição inicial P1, a função W_θ está mais localizada, conservando um máximo distinguível para um valor de $\theta = 0.55\pi$ o que corresponde a $\langle \hat{J}_z \rangle \approx -1.89J$, embora a forma da função indique que o estado adquiriu probabilidades diferentes de zero para todos os valores de θ . Já no caso da condição P2, vemos que a situação é outra: a função não possui um máximo distinguível, e o estado tem aproximadamente a mesma probabilidade de ocupar todos

os estados do espectro de autoestados $|J, M\rangle$.

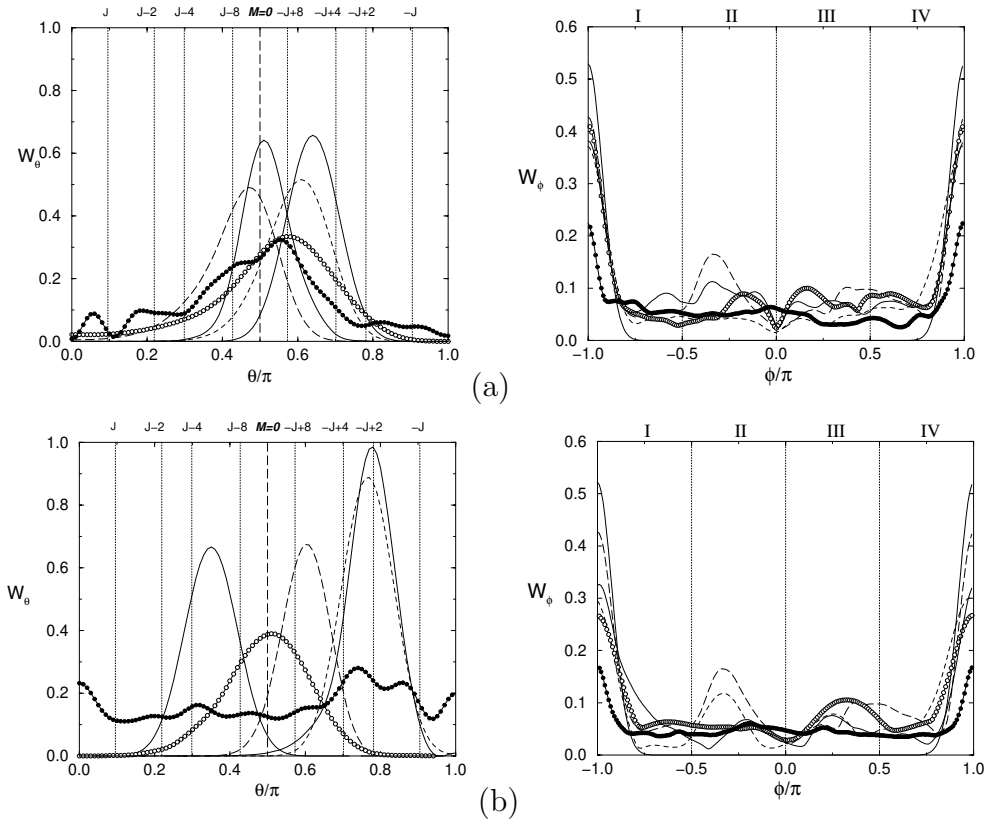


Figura 4.13: Funções atômicas reduzidas para $J = 10.5$ e considerando as condições iniciais localizadas em regiões regulares: (a)P1; (b)P2. Os instantes apresentados são: tempo inicial (linha contínua); tempo associado ao primeiro máximo da entropia (linha tracejada); primeiro mínimo da entropia (linha tracejada grossa); segundo máximo (círculos); segundo mínimo (linha contínua grossa) e patamar (círculo cheio).

Uma vez que a evolução de W_ϕ para as duas condições iniciais apresentam o mesmo comportamento, Fig. 4.13(a-b) à direita, concluímos que a diferença entre os valores máximos atingidos pela ELRA no patamar é devida ao fato da delocalização maior na variável θ do estado atômico da FWA associada à condição inicial P2. Isto é porque neste caso a mistura estatística dos $2J+1$ estados é melhor atingida do que no caso P1 (ou, em termos do sistema global, se aproxima mais do estado maximamente emaranhado). Nos tempos intermediários, a evolução de W_θ e W_ϕ mostra como a

delocalização ou localização relativa das FWRA está relacionadas com o processo de emaranhamento. No instante correspondente ao primeiro máximo da ELRA (linha tracejada), a delocalização de W_θ não é apreciável quanto a delocalização na variável ϕ . Já para o primeiro mínimo (linha tracejada grossa), embora seja notável algum alargamento de W_θ , vemos que W_ϕ tem um máximo no quadrante **II**, e a função é mais localizada se comparada com o instante analisado anteriormente. No segundo máximo (círculos), ocorre tanto o alargamento de W_θ quanto uma delocalização maior na variável ϕ associado ao aumento do emaranhamento, se comparamos com o instante anterior. Finalmente, no segundo mínimo (linha contínua grossa), enquanto W_θ ganha localização, W_ϕ perde e a ERLA diminui. Porém, embora o estreitamento no intervalo de valores de θ é maior do que o encontrado para o primeiro mínimo, a delocalização em ϕ aumenta com o consequente aumento do grau de emaranhamento.

Lembrando os nossos resultados para a C.I. no toro interno no caso integrável, podemos concluir que a dinâmica da FWA indica que o sistema atômico é sensível à presença de *caos* no análogo clássico. Vemos como condições iniciais “protegidas” dos efeitos do caos, ao estarem localizadas no interior de ilhas regulares, mostram FWA que se deslocalizam numa taxa menor do que outras localizadas em ilhas menores e/ou sobre C.I. perto da fronteira entre as ilhas regulares e as regiões caóticas.

As funções W_θ e W_ϕ para as condições iniciais dentro da região caótica são apresentadas na Fig. 4.14. No instante inicial, a função W_θ tanto para a condição inicial C1, Fig. 4.14(a), quanto para a condição inicial C2, Fig. 4.14(b), apresenta máximos para os valores de θ associados a $\langle \hat{J}_z \rangle \approx -0.90J$ e $\langle \hat{J}_z \rangle = J$ respectivamente que coincidem aproximadamente com os valores usados para preparar o estado inicial. Para a condição no interior da região caótica C1, W_ϕ possui um valor máximo para $\phi \approx \pm\pi$. No caso da condição inicial C2, W_ϕ possui valores diferentes de zero para todo o intervalo de valores de ϕ , devido ao fato da função estar localizada praticamente sobre o polo norte da esfera de Bloch. Podemos observar o mesmo tipo de correlação localização vs. delocalização nos instantes correspondentes a mínimos e máximos da ELRA, estando principalmente a localização na variável ϕ associada as tentativas do sistema de diminuir o grau de emaranhamento. A diferença mais importante no comportamento entre as duas condições iniciais escolhidas tem a ver com o fato da condição inicial C2 *favorecer uma delocalização muito rápida da função* W_θ . Em outras palavras, se o subsistema atômico é preparado num estado coerente

tal que o valor médio do operador $\hat{J}_z$ seja aproximadamente igual a J e o campo é de tal intensidade que os termos contra-girantes do Hamiltoniano de interação dipolar se torne importante, o processo de emaranhamento entre os dois subsistemas é muito mais rápido que qualquer outro dos casos anteriores.

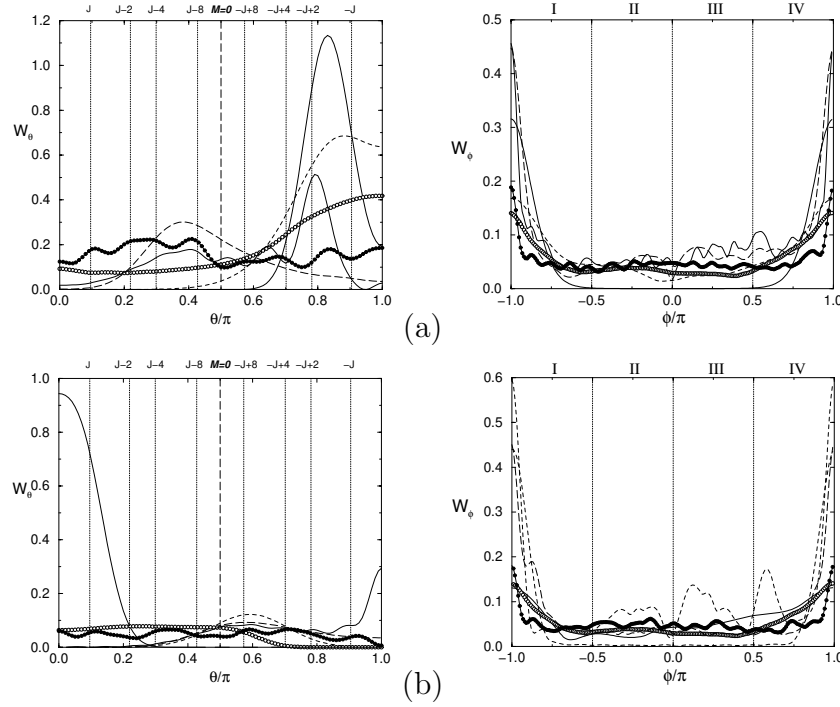


Figura 4.14: Funções atômicas reduzidas para $J = 10.5$ e considerando as condições iniciais localizadas na região caótica: (a)C1 e (b)C2 nos instantes t_0 (linha contínua), t_{1mx} (linha tracejada), t_{1mn} (linha tracejada grossa), t_{3mx} (círculos), t_{3mn} (linha contínua grossa) e patamar (círculo cheio).

Capítulo 5

Conclusões.

Neste trabalho, estudamos a dinâmica do emaranhamento de dois sistemas bipartites, fechados, onde os estados iniciais do sistema global corresponde a um estado puro. São usadas a função de Husimi e a função de Wigner na análise da dinâmica dos subsistemas e a entropia linear reduzida como medida de emaranhamento. No primeiro sistema dois osciladores estão acoplados via uma interação bilinear, corresponde à interação dipolo-dipolo na aproximação de onda girante, e uma interação não linear, relacionada à propagação de dois modos de campo eletromagnético num meio tipo Kerr. Encontramos as soluções exatas para o estado global evoluído ao considerar três tipos diferentes de estado inicial, e determinamos os efeitos de cada termo de interação sobre a dinâmica do emaranhamento. Quando cada oscilador é preparado inicialmente num estado de Fock, a dinâmica do emaranhamento está governada pelo termo bilinear, sendo o efeito da interação não linear apenas uma contribuição à fase global do estado do sistema, como é visto na Eq.(3.14). O sistema apresenta emaranhamento reversível com período de recoerência que depende da frequência ω_λ . É possível também definir um período de recorrência do sistema, τ_1 , sendo este o tempo no qual o sistema volta ao estado inicial e que corresponde ao dobro do tempo de recoerência definido antes.

De posse desta solução, calculamos a evolução temporal do produto de estados coerentes. Encontramos que o termo bilinear leva o sistema a novos estados coerentes, e o sistema continua sendo separável e não há emaranhamento. O efeito do termo biquadrático é justamente emaranhar os estados, e são encontradas duas condições de separabilidade do sistema: a primeira que depende somente do parâmetro asso-

ciado a interação não-linear, onde o período de recoerência é dado por $T_1 = \pi/\omega_g$ e o estado do sistema é dado pela Eq.(3.37), e uma segunda condição, Eq.(3.41), que depende dos parâmetros dos estados coerentes iniciais. Esta segunda condição está associada à interação bilinear já que define outros instantes onde o estado é separável que dependem da frequência ω_λ . Nestes tempos, um dos osciladores evolui até o estado de vácuo enquanto o estado do segundo oscilador é uma superposição de estados de Fock, Eq.(3.40). Recorrências podem ser obtidas só se as razões ω_0/ω_g e ω_λ/ω_g forem números racionais e para tempos correspondentes a múltiplos de T_1 .

No caso da condição inicial dada pelo produto de um estado de Fock e o estado coerente, vemos que o período de recoerência está associado à interação bilinear, sendo este dado por $\pi/2\omega_\lambda$. Nestes tempos, o sistema evolui até um produto direto de um estado de número e uma superposição geral de estados de Fock. Demonstramos que as superposições de estados de Fock encontradas como estado de um dos osciladores no caso do produto $|n_1\rangle \otimes |\alpha\rangle$ e para a segunda condição de separabilidade do produto de estados coerentes, podem ser escritas como superposições de estados coerentes com o mesmo número médio de fótons, que chamaremos de estados de gato de Schrödinger generalizados. O número de estados coerentes envolvidos na superposição depende do valor do parâmetro l , o qual depende do valor das frequências ω_g e ω_λ , Eqs.(3.58,3.59). A condição geral para a formação destes estados, depende basicamente da relação entre as frequências ω_g e ω_λ .

Finalmente, o comportamento do processo de emaranhamento foi estudado analisando o comportamento da entropia linear reduzida e da função de Husimi quando $\hbar \rightarrow 0$. Os nossos resultados nos permitem separar a dinâmica dos osciladores quárticos em dois regimes: o primeiro denominado de regime de delocalização de fase, que coincide com o aumento monótono da entropia linear reduzida e a função de Husimi se comporta de maneira semelhante a um ensemble de condições iniciais clássicas [18]. O segundo regime, denominado regime de auto-interferência, que corresponde ao intervalo onde a entropia linear reduzida apresenta oscilações, possuindo mínimos locais para sub-múltiplos do período de decoerência e onde a função de Husimi apresenta uma estrutura de pacotes que guardam semelhança com estados de superposição de estados coerentes, sendo na verdade estados mistos dos mesmos. O tempo de ruptura, t_r , que separa os dois regimes, apresenta uma dependência com o valor da constante de Planck que guarda semelhança com definições da escala de

Ehrenfest, já que depois deste tempo são claros os efeitos da auto-interferência, de origem puramente quântico.

Estudamos a dinâmica do emaranhamento num segundo sistema bipartite, o maser de Dicke no Capítulo 4. Aqui, nos limitamos a estudar o caso de muitos átomos ($N \geq 3$), explorando a conexão clássico-quântica no espaço de fase. A Função de Wigner Atômica (FWA), a qual nos permitiu visualizar a dinâmica do subsistema atômico nas coordenadas angulares θ e ϕ . Ao considerar a interação dipolar na aproximação de onda girante, os nossos resultados para a FWA e para as funções de Wigner Atômicas Reduzidas (FWAR) mostram que estados coerentes atômicos centrados num ponto localizado numa órbita cuja trajetória clássica é muito localizada no espaço de fase do subsistema atômico inibe o processo de emaranhamento entre campo e átomo. A estrutura de toros restringe a região disponível no espaço de fase, especialmente em θ , o que contribui para que o subsistema mantenha uma certa coerência. Quando escolhidas órbitas menos regulares associadas a trajetórias menos localizadas, como as C.I.s perto da borda ou da separatriz de movimento, o processo de emaranhamento é mais rápido já que favorecem a delocalização do pacote quântico. Explicamos, usando as FWAR, as diferenças entre os valores da ELRA para cada C.I. escolhida dizendo que este valor está diretamente relacionado com a delocalização, tanto nos valores esperados dos operadores $\hat{J}_x$ e $\hat{J}_y$, associados ao ângulo azimutal ϕ , quanto sobre o espectro de energia definido pela base $|J, M\rangle$, associado ao ângulo polar θ . Nos máximos de ELRA, há sempre uma tendência à delocalização da função de Wigner enquanto que, nos mínimos, ocorrem tentativas de localização. Diferenças entre os valores da ELRA quando atinge o patamar podem ser associados a uma maior ou menor delocalização da FWA, associadas a mais ou menos estados $|J, M\rangle$ participantes. Resultados similares, onde o efeito é mais acentuado, são encontrados para a FWA no caso quando os termos contra-girantes da interação dipolar são incluídos e o análogo clássico do sistema apresenta caos.

Podemos concluir que o processo de análise do estado atômico usando as funções reduzidas W_θ e W_ϕ demonstrou ser eficiente na hora de explorar aspectos da dinâmica do subsistema, além de facilitar a visualização dos processos de localização e delocalização. Já que este tipo de estudo usando uma função de quase-distribuição para representar a dinâmica do sistema no espaço de fase, não é encontrado na literatura e podemos dizer que o cálculo da função de Wigner atômica é a nossa contribuição

no estudo da conexão clássica-quântica no modelo de Dicke.

Em futuros trabalhos, será interessante estudar os efeitos do contato dos sistemas bipartites estudados com um reservatório, de maneira que possamos analisar o processo de decoerência. Os resultados para a função de Wigner apresentados no Capítulo 2, calculados usando soluções conhecidas da equação mestra clássica, mostram como a evolução das funções de quase-probabilidade podem ajudar em estudos deste tipo. Com relação ao modelo de oscilador quártico, está sendo realizado um estudo de uma extensão mas “realista” do mesmo em que os parâmetros da interação quártica sejam livres e possam ser ajustadas a esquemas experimentais propostos na literatura.

Apêndice A

Detalhes na análise do Oscilador quártico bidimensional.

Neste apêndice apresentaremos em maior detalhe alguns cálculos cujos resultados foram usados no decorrer da análise da dinâmica do emaranhamento de dois osciladores harmônicos interagindo via uma interação bilinear além de um termo quártico.

Regras de Comutação

Para determinar as propriedades do Hamiltoniano, nos interessa calcular o comutador dos operadores $\hat{H}_0$ e $\hat{V}_\lambda$. Desta forma, calculamos

$$\begin{aligned} [\hat{H}_0, \hat{V}_\lambda] &= \hbar^2 \omega_0 \omega_\lambda [\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger] \\ &= \hbar^2 \omega_0 \omega_\lambda \left\{ \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] + \hat{a}_2^\dagger [\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1] \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger [\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2] \hat{a}_2 + \right. \\ &\quad \left. \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] \right\} \\ &= \hbar^2 \omega_0 \omega_\lambda \left\{ \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

A.1 Evolução do produto de estados de número

Mudança de Base: Nosso problema consiste em relacionar os estados associados à base de operadores $\hat{a}_k$ com os estados da base dos operadores $\hat{A}$. Podemos relacionar

as bases através do seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}
|n_1, n_2\rangle_a &= \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |0, 0\rangle_a = \frac{(\hat{A}_1^\dagger + \hat{A}_2^\dagger)^{n_1} (\hat{A}_1^\dagger - \hat{A}_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{2^{(n_1+n_2)} n_1! n_2!}} |0, 0\rangle_A \\
&= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{\binom{n_1}{i} \binom{n_2}{j}}{\sqrt{2^{(n_1+n_2)} n_1! n_2!}} (\hat{A}_1^\dagger)^{n_1-i} (\hat{A}_2^\dagger)^i (\hat{A}_1^\dagger)^{n_2-j} (-\hat{A}_2^\dagger)^j |0, 0\rangle_A \\
&= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{(-1)^j \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{j}}{\sqrt{2^{(n_1+n_2)} n_1! n_2!}} (\hat{A}_1^\dagger)^{n_1+n_2-(i+j)} (\hat{A}_2^\dagger)^{i+j} |0, 0\rangle_A \\
&= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} (-1)^j \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{j} \sqrt{\frac{[n_1+n_2-(i+j)]! (i+j)!}{2^{(n_1+n_2)} n_1! n_2!}} \times \\
&\quad \times |n_1+n_2-(i+j), (i+j)\rangle_A.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Então, de forma mais compacta, podemos reescrever a relação entre as bases como:

$$\left\{ \begin{array}{l} |n_1, n_2\rangle_a = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} c_{i,j} (n_1, n_2) |n_1+n_2-(i+j), (i+j)\rangle_A, \\ c_{i,j} (n_1, n_2) = (-1)^j \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{j} \sqrt{\frac{[n_1+n_2-(i+j)]! (i+j)!}{2^{(n_1+n_2)} n_1! n_2!}}. \end{array} \right. \tag{A.3}$$

Solução da equação de Schrödinger.

Evoluímos explicitamente o estado inicial, Eq.(A.2), encontrando:

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar}t} |\psi(0)\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} c_{i,j} (n_1, n_2) e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} |n_1+n_2-(i+j), (i+j)\rangle_A \\
&= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} c_{i,j} (n_1, n_2) e^{-i[(\omega_0-\omega_\lambda)t(n_1+n_2-i-j+\frac{1}{2})]} \times \\
&\quad e^{-i[(\omega_0+\omega_\lambda)t(i+j+\frac{1}{2})]} e^{-i\omega_g t(n_1+n_2+1)^2} |n_1+n_2-(i+j), (i+j)\rangle_A \\
&= e^{-i[\omega_0 t(n_1+n_2+1) + \omega_\lambda t(n_1+n_2) + \omega_g t(n_1+n_2+1)^2]} \times
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} c_{i,j} (n_1, n_2) e^{2i(i+j)\omega_\lambda t} |n_1 + n_2 - (i+j), (i+j)\rangle_A. \quad (\text{A.4})$$

Reescrevendo o estado evoluído omitindo a fase global, obtemos simplesmente:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} c_{i,j} (n_1, n_2) e^{2i(i+j)\omega_\lambda t} |n_1 + n_2 - (i+j), (i+j)\rangle_A, \quad (\text{A.5})$$

Podemos re-transformar o estado evoluído da representação dos operadores “ $\hat{A}$ ” para “ $\hat{a}$ ” obtendo o seguinte resultado:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} c_{i,j} (n_1, n_2) e^{2i(i+j)\omega_\lambda t} \frac{(\hat{A}_1^\dagger)^{n_1+n_2-(i+j)}}{\sqrt{[n_1 + n_2 - (i+j)]!}} \frac{(\hat{A}_2^\dagger)^{i+j}}{\sqrt{(i+j)!}} |0,0\rangle_A. \quad (\text{A.6})$$

Escrevendo explicitamente o fator $c_{i,j} (n_1, n_2)$ e cancelando e juntando alguns termos temos:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} (-1)^j \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{j} \frac{(\hat{A}_2^\dagger e^{2\omega_\lambda t})^{i+j} (\hat{A}_1^\dagger)^{n_1+n_2-(i+j)}}{\sqrt{2^{n_1+n_2} n_1! n_2!}} \cdot |0,0\rangle_A \quad (\text{A.7})$$

Se fazemos as somas sobre os índices i, j temos o seguinte resultado:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{(\hat{A}_1^\dagger + \hat{A}_2^\dagger e^{2\omega_\lambda t})^{n_1}}{\sqrt{2^{n_1} n_1!}} \frac{(\hat{A}_1^\dagger - \hat{A}_2^\dagger e^{2\omega_\lambda t})^{n_2}}{\sqrt{2^{n_2} n_2!}} |0,0\rangle_A. \quad (\text{A.8})$$

Multiplicando por uma fase global, ou melhor, incluindo a fase global que depende da constante de interação, ω_g temos:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} \left(\frac{\hat{A}_1^\dagger e^{-\omega_\lambda t} - \hat{A}_2^\dagger e^{\omega_\lambda t}}{\sqrt{2}} \right)^{n_1} \frac{1}{\sqrt{n_2!}} \left(\frac{\hat{A}_1^\dagger e^{-\omega_\lambda t} - \hat{A}_2^\dagger e^{\omega_\lambda t}}{\sqrt{2}} \right)^{n_2} |0,0\rangle_A, \quad (\text{A.9})$$

lembrando que

$$\hat{A}_1^\dagger = \frac{\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger}{\sqrt{2}} \quad \hat{A}_2^\dagger = \frac{\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_2^\dagger}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.10})$$

O nosso estado de número evoluído vai ter a seguinte forma:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{[\hat{a}_1^\dagger \cos(\omega_\lambda t) - i\hat{a}_2^\dagger \sin(\omega_\lambda t)]^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{[-i\hat{a}_1^\dagger \sin(\omega_\lambda t) + \hat{a}_2^\dagger \cos(\omega_\lambda t)]^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |0,0\rangle_A. \quad (\text{A.11})$$

A.2 Evolução do produto de estados coerentes

Cálculo do traço do quadrado da matriz densidade: A seguir, apresentamos o cálculo detalhado do traço do quadrado do operador densidade reduzido.

$$\begin{aligned} Tr_1 [\hat{\rho}_k^2] &= e^{-|\beta_1(t)|^2 - |\beta_2(t)|^2} \sum_{n,n'} \sum_{k,k'} \sum_{m,l} \frac{|\beta_2(t)|^{2m}}{m!} \frac{|\beta_2(t)|^{2l}}{l!} \frac{\beta_1(t)^{n+k'}}{\sqrt{k'!n!}} \frac{\beta_1^*(t)^{n'+k}}{\sqrt{n'!k!}} \times \\ &\quad e^{-i\omega_g t [2(n+1+m)^2 + (n'+m+1)^2]} e^{-i\omega_g t [2(k+1+m)^2 + (k'+m+1)^2]} \delta_{n,k'} \delta_{n',k} \\ &= e^{-|\beta_1(t)|^2 - |\beta_2(t)|^2} \sum_{n,k} \sum_{l,m} \frac{[|\beta_2(t)|^2 e^{-2i\omega_g t(n-k)}]^m}{m!} \frac{[|\beta_2(t)|^2 e^{2i\omega_g t(n-k)}]^l}{l!} \times \\ &\quad \frac{|\beta_1(t)|^{2n}}{n!} \frac{|\beta_1(t)|^{2k}}{k!} \\ &= e^{-|\beta_1(t)|^2 - |\beta_2(t)|^2} \sum_{n,k} \frac{|\beta_1(t)|^{2n}}{n!} \frac{|\beta_1(t)|^{2k}}{k!} e^{|\beta_2(t)|^2 [e^{2i\omega_g t(n-k)} + e^{-2i\omega_g t(n-k)}]} \\ &= e^{-|\beta_1(t)|^2 - |\beta_2(t)|^2} \sum_{n,k} \frac{|\beta_1(t)|^{2n}}{n!} \frac{|\beta_1(t)|^{2k}}{k!} e^{2|\beta_2(t)|^2 \cos[2\omega_g t(n-k)]} \\ &= e^{-|\beta_1(t)|^2} \sum_{n,k} \frac{|\beta_1(t)|^{2n}}{n!} \frac{|\beta_1(t)|^{2k}}{k!} e^{|\beta_2(t)|^2 \{1 - 4 \sin^2[\omega_g t(n-k)]\}}. \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

Evolução temporal dos valores médios: Nesta escolha particular do estado inicial, estamos interessados no cálculo dos operadores de quadraturas do campo, os quais estão definidos como segue

$$\begin{aligned} \hat{Q}_k &= \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) \\ \hat{P}_k &= \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left(\frac{\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger}{i} \right). \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Usando a Eq.(3.33) e a Eq.(A.13) podemos calcular expressões analíticas para os valores médios. Podemos escrever os valores esperados das quadraturas como

$$\langle \hat{Q}_k \rangle(t) = Tr_k [\hat{Q}_k \hat{\rho}_k(t)] \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2\hbar} \operatorname{Re} \left[\beta_k(t) e^{-3i\omega_g t} e^{-\frac{\Lambda}{2\hbar} (1 - e^{-2i\omega_g t})} \right], \\
\langle \hat{P}_k \rangle(t) &= \operatorname{Tr}_k [\hat{P}_k \hat{\rho}_k(t)] \\
&= \sqrt{2\hbar} \operatorname{Im} \left[\beta_k(t) e^{-3i\omega_g t} e^{-\frac{\Lambda}{2\hbar} (1 - e^{-2i\omega_g t})} \right],
\end{aligned} \tag{A.15}$$

onde definimos a frequência associada ao termo não linear como $\omega_g = \hbar g$. As expressões contêm termos oscilatórios que produzem o fenômeno de colapsos e ressurgimentos, similares às encontradas nas referências [72, 73] para tempos correspondentes a múltiplos do período de recoerência.

Podemos re-escrever os valores esperados das quadraturas do campo numa notação mais compacta considerando cada valor esperado como uma componente do vetor quadridimensional. Definindo este vetor da forma

$$\langle \hat{\mathbf{R}} \rangle = (\langle \hat{Q}_1 \rangle, \langle \hat{P}_1 \rangle, \langle \hat{Q}_2 \rangle, \langle \hat{P}_2 \rangle)$$

e usando as matrizes 4×4 , $\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}^{\omega_\lambda}$, definidas como

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}[\tau] &= \begin{bmatrix} M[\tau] & 0 \\ 0 & M[\tau] \end{bmatrix}, \\
\mathbf{M}^{\omega_\lambda} &= \begin{bmatrix} \cos(\omega_\lambda t) M[0] & \sin(\omega_\lambda t) M[\pi/2] \\ \sin(\omega_\lambda t) M[\pi/2] & \cos(\omega_\lambda t) M[0] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

onde

$$M[\tau] = \begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix}, \tag{A.16}$$

e finalmente chegamos à expressão geral que tem a forma a seguir:

$$\langle \hat{\mathbf{R}}(t) \rangle = \mathbf{A}(t) \mathbf{M}[\tau] \mathbf{M}^{\omega_\lambda}[\omega_\lambda t] \mathbf{R}_0, \tag{A.17}$$

onde são definidas as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{\Lambda}{2\hbar} \sin(2\omega_g t) + (\omega_0 + 3\omega_g) t, \\
\mathbf{R}_0 &= (q_{10}, p_{10}, q_{20}, p_{20}), \\
\mathbf{A}(t) &= e^{-\frac{\Lambda}{2\hbar} \sin^2(\omega_g t)}.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Finalmente, na Fig. A.1 mostramos os resultados encontrados para o valor esperado da quadratura $\hat{Q}_k$. O comportamento do valor esperado do operador $\hat{P}_k$ é análogo à quadratura $\hat{Q}_k$, sendo a diferença entre eles dada apenas pela fase relativa das oscilações. Excetuando isto, as duas quantidades apresentam o fenômeno de colapsos e ressurgimentos com período igual a T_1 .

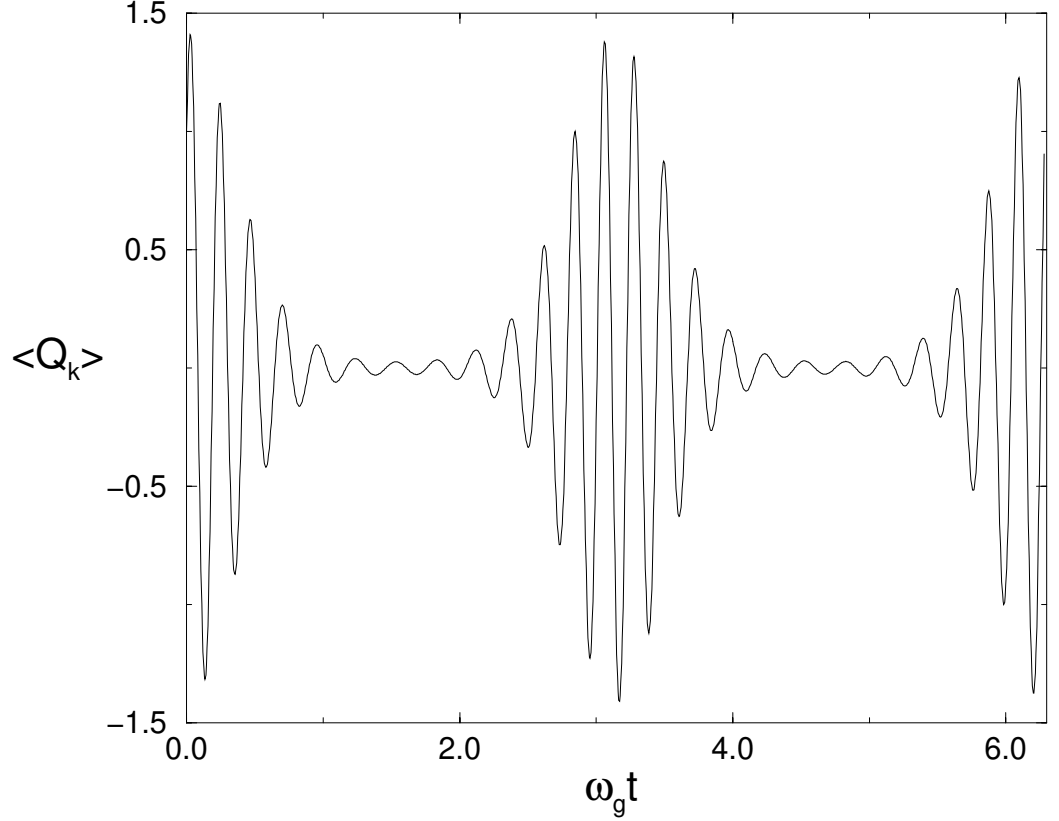


Figura A.1: Colapsos e ressurgimentos na evolução do valor esperado do operador $\hat{Q}_k$ para $\frac{\omega_0}{\omega_g} = 20$, $\frac{\omega_\lambda}{\omega_g} = 2$, $q_{k0} = p_{k0} = 1.0$, $\Lambda = 4.0$ e $\hbar = 1$.

Misturas estatísticas de gatos de Schrödinger.

A continuação, reproduzimos a demonstração da evolução do estado separável dos osciladores acoplados, preparados em estados coerentes, até uma mistura estatística de estados de gato de Schrödinger, apresentada num apêndice da Ref. [79]. Este cálculo foi realizado em sua totalidade por Renato Moreira Angelo, quem permitiu a inclusão do resultado nesta tese por razões de completeza.

Reescrevemos a Eq. (3.30) numa notação mais compacta

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n,m} c_n(\gamma_1) c_m(\gamma_2) e^{-ig\hbar t(n+m)^2} |n, m\rangle \quad (\text{A.19})$$

$$c_n(\gamma) = e^{-\frac{|\gamma|^2}{2}} \frac{\gamma^n}{\sqrt{n!}} \quad (\text{A.20})$$

onde $\gamma_k = \beta_k e^{-i2\omega_g t}$ e β_k são funções que dependem do tempo. Estamos interessados na forma do estado global nos instantes

$$t_{r,s} = \frac{\pi}{\omega_g} \frac{r}{s} = T_1 \frac{r}{s},$$

onde r e s formam uma fração racional com $r < s$. Usando a transformada discreta de Fourier definida na Eq.(3.55)

$$e^{-i\pi n^2 \frac{r}{s}} = \sum_{q=0}^{l-1} a_q^{(r,s)} e^{-i2\pi n \frac{q}{l}} \quad (\text{A.21})$$

onde

$$a_q^{(r,s)} = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} e^{-i\pi k(k \frac{r}{s} - 2 \frac{q}{l})}, \quad (\text{A.22})$$

Podemos reescrever a Eq.(A.19) nos instantes correspondentes aos submúltiplos do período de recoerência assim

$$\begin{aligned} |\psi(t_{r,s})\rangle &= \sum_{n,m} c_n(\gamma_1) c_m(\gamma_2) e^{-i\pi \frac{r}{s}(n+m)^2} |n, m\rangle \\ &= \sum_{q,p=0}^{l-1} a_q a_p \sum_{n,m} c_n \left(\eta_{1q} e^{-i2\pi m \frac{r}{s}} \right) c_m(\eta_{2p}) |n, m\rangle \\ &= \sum_{q,p=0}^{l-1} a_q a_p \sum_m \left| \eta_{1q} e^{-i2\pi m \frac{r}{s}} \right\rangle \otimes c_m(\eta_{2p}) |m\rangle \\ &= \sum_m |\mathcal{C}_m\rangle \otimes \sum_{p=0}^{l-1} a_p c_m(\eta_{2p}) |m\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Aqui $\eta_{kq} = \gamma_k e^{-i2\pi \frac{q}{l}} = \beta_k e^{-i2\pi(\frac{q}{l} + \frac{r}{s})}$, e definimos o estado $|\mathcal{C}_m\rangle$ para o oscilador-1 como

$$|\mathcal{C}_m\rangle = \sum_{q=0}^{l-1} a_q \left| \eta_{1q} e^{-i2\pi m \frac{r}{s}} \right\rangle. \quad (\text{A.24})$$

Construindo o operador densidade global e traçando sobre as variáveis associadas ao segundo oscilador encontramos o seguinte estado de mistura de estados de superposição, ou mistura de estados de gato

$$\rho_1(t_{r,s}) = \sum_m \xi_m |\mathcal{C}_m\rangle \langle \mathcal{C}_m| \quad (\text{A.25})$$

onde os pesos associados a cada estado está definido como

$$\xi_m = \sum_{p,p'=0}^{l-1} a_p a_{p'}^* c_m(\eta_{2p}) c_m^*(\eta_{2p'}). \quad (\text{A.26})$$

Apêndice B

Projeções da trajetória clássica no subespaço atômico.

Apresentamos as projeções das trajetórias sobre o espaço de fase para as condições iniciais usadas na Seção 4.3 e apresentados na Tabela. 4.3. São evidentes as diferenças, já que as condições iniciais nas ilhas estão associadas a órbitas estáveis, Fig. B.1(a), se comparadas com as condições iniciais na região caótica, Fig. B.1(b) e as trajetórias estão mais localizadas no primeiro caso.

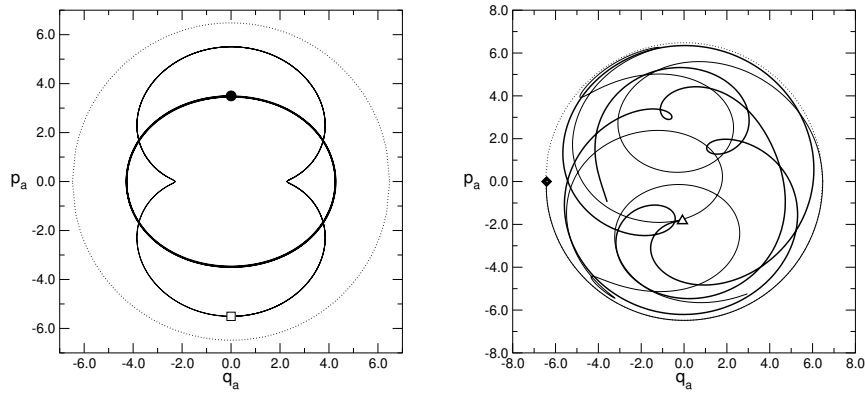


Figura B.1: Projeção das órbitas clássicas no espaço de Spin nas condições iniciais pertencentes as ilhas principais (a) e a região caótica (b). Linha contínua: toro interno.; Linha contínua fina: órbita periódica na ilha menor. Para (b) Linha contínua: c.i. no interior da região caótica; Linha contínua fina: c.i. perto da borda.

Bibliografia

- [1] *Physics World*, 11(3), 1998. Número especial sobre Informação Quântica.
- [2] P. W. Shor. Proceedings of the 35th Annual Symposium of Computer Science, IEEE Press, Los Alamitos, C.A, 1994.
- [3] J. I. Cirac and P. Zoller. Quantum computations with cold trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 74:4091–4094, 1995.
- [4] Anders Sørensen and Klaus Mølmer. Entanglement and quantum computation with ions in thermal motion. *Phys. Rev. A*, 62:022311, 2000.
- [5] L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche. Quantum switches and nonlocal microwave fields. *Phys. Rev. Lett.*, 71:2360–2363, 1993.
- [6] Daniel Loss and David P. DiVincenzo. Quantum computation with quantum dots. *Phys. Rev. A*, 57:120–126, 1997.
- [7] Lu-Ming Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller. Physical implementation for entanglement purification of gaussian continuous-variable quantum states. *Phys. Rev. A*, 62:32304, 2000.
- [8] Roland Omnès. *Understanding Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1999. Capítulo 18.
- [9] A.O. Caldeira and A.J. Leggett. *Physica A*, 121:587, 1983.
- [10] Wojciech H. Zurek, Salman Habib, and Juan Pablo Paz. Coherent states via decoherence. *Phys. Rev. Lett.*, pages 1187–1190, 1993.

- [11] K. Furuya, M. C. Nemes, and G. Q. Pellegrino. Quantum dynamical manifestation of chaotic behavior in the process of entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 80:5524–5527, 1998.
- [12] R. M. Angelo, K. Furuya, M. C. Nemes, and G. Q. Pellegrino. Rapid decoherence in integrable systems: A border effect. *Phys. Rev. A*, 60:5407–5411, 1999.
- [13] R. M. Angelo, K. Furuya, M. C. Nemes, and G. Q. Pellegrino. Recoherence in the entanglement dynamics and classical orbits in the n-atom Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. A*, 64:43801, 2001.
- [14] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner. Distribution functions in physics: Fundamentals. *Phys. Rep.*, 106:121–167, 1984.
- [15] K. Husimi. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 22:264, 1940.
- [16] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40:749, 1932.
- [17] G. J. Milburn. Quantum and classical Liouville dynamics of the anharmonic oscillator. *Phys. Rev. A*, 33:674, 1986.
- [18] Renato Moreira Angelo. *Aspectos Quânticos e Clássicos da Dinâmica de Emaranhamento em Sistemas Hamiltonianos*. Tese de doutoramento, IFGW-UNICAMP, 2003.
- [19] V. Bužek, A. Vidiella-Barranco, and P.L. Knight. Superpositions of coherent states: Squeezing and dissipation. *pra*, 45(9):6570, May 1992.
- [20] M. S. Kim and V. Bužek. Schrödinger-cat states at finite temperature: Influence of a finite-temperature heat bath on quantum interferences. *Phys. Rev. A*, 46:4239–4251, 1992.
- [21] K. M. Fonseca Romero, M. C. Nemes, J. G. Peixoto de Faria, A. N. Salgueiro, and A. F. R. de Toledo Piza. Decoherence of mesoscopic states of cavity fields. *Phys. Rev. A*, 58:3205, 1998.

-
- [22] L G Lutterbach and L Davidovich. Method for direct measurment of the Wigner function in cavity QED and ion traps. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2547–2550, 1997.
- [23] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, P. Bertet, M.Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, L. G. Lutterbach, and L. Davidovich. Measurement of a negative value for the Wigner function of radiation. *Phys. Rev. A*, 62:54101, 2000.
- [24] P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, S. Osnaghi, T. Meunierand M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche. Direct measurement of the wigner function of a one-photon fock state in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 89:200402, 2002.
- [25] C.J. Villas-Bôas, G. A. Prata, and M. H. Y. Moussa. Direct measurement of the wigner distribution of a traveling field. *Phys. Rev. A*, 64:065801, 2001.
- [26] N. Imoto, H.A. Haus, and Y. Yamamoto. Quantum nondemolition measurement of the photon number via the optical Kerr effect. *Phys. Rev. A*, 32:2287, 1985.
- [27] D. Gordon and C.M. Savage. Creating macroscopic quantum superpositions with Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 59:4623, 1999.
- [28] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93:99–110, 1954.
- [29] Ana Luzia de Souza Silva. *Efeitos de reservatórios sobre a descoerência e relaxação de sistemas quânticos*. Tese de doutoramento, Centro de Ciências Exactas e Tecnologia Universidade Federal de São Carlos, 2002.
- [30] Jonathan P. Dowling, G. S. Agarwal, and Wolfgang P. Schleich. Wigner distribution of a general angular-momentum state: Applications to a collection of two-level atoms. *Phys. Rev. A*, 49:4101–4109, 1994.
- [31] U. Fano. Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques. *Reviews of Modern Physics*, 29:74–93, 1957.
- [32] M. O. Scully and M. Suhail Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Capítulo 7.

- [33] Roy J Glauber. Coherent and incoherent state of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131:2766–2788, 1963.
- [34] E.T. Jaynes and F.W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, 51:89, 1963.
- [35] F. T. Arecchi, Eric Courtens, Robert Gilmore, and Harry Thomas. Atomic coherent states in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 6:2211–2237, 1972.
- [36] G. S. Agarwal. Relation between atomic coherent-state representation, state multipoles and generalized phase-space distributions. *Phys. Rev. A*, 24:2889–2896, 1981.
- [37] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, third edition, 1999.
- [38] E. Schrödinger. *Naturwissenschaften*, 23, 1935.
- [39] C. C. Gerry and P.L. Knight. Quantum superpositions and Schrödinger cat states in quantum optics. *Am. J. Phys.*, 65:964–974, 1997.
- [40] B. Yurke and D. Stoler. Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion. *Phys. Rev. Lett.*, 57:13, 1986.
- [41] R. L. Stratonovich. On distributions in representation space. *Sov. Phys. JETP*, 4:891–898, 1957.
- [42] E.C.G. Sudarshan. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, 10:277–279, 1963.
- [43] A. J. Leggett. Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. *Reviews of Modern Physics*, 73:307, 2001.
- [44] D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Measurements of relative phase in two-component Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1543–1546, 1998.

- [45] Bruce W. Shore and Peter L. Knight. Topical review: The Jaynes-Cummings model. *J. Mod. Optics*, 40:1195–1238, 1993.
- [46] J. H. Eberly, N. B. Narozhny, and J. J. Sanchez-Mondragon. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model. *Phys. Rev. Lett.*, 44:1323–1326, 1980.
- [47] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich, and N. Zagury. Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of “Schrödinger Cat” states. *Phys. Rev. A*, 45:5193, 1992.
- [48] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche. Mesoscopic quantum coherences in cavity QED: Preparation and decoherence monitoring schemes. *Phys. Rev. A*, pages 1295–1309, 1996.
- [49] S. M. Barnett and P. L. Knight. Dissipation in a fundamental model of quantum optical resonance. *Phys. Rev. A*, 33:2444–2448, 1986.
- [50] J G Peixoto de Faria and M C Nemes. Dissipative dynamics of the Jaynes-Cummings model in the dispersive approximation: Analytical results. *Phys. Rev. A*, 59:3918–3925, 1999.
- [51] H.I. Yoo and J.H. Eberly. Dynamical theory of an atom with two or three levels interacting with quantized cavity fields. *Phys. Rep.*, 118, 1985.
- [52] D. Merschede, H. Walther, and G. Müller. One-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 54:551, 1985.
- [53] G. Rempe, H. Walther, and N. Klein. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 58:353, 1987.
- [54] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche. Quantum Rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1800–1803, 1996.
- [55] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche. Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement. *Phys. Rev. Lett.*, 77:4887–4890, 1996.

- [56] Leon Cohen and Marlan O. Scully. Joint Wigner distribution for spin- $\frac{1}{2}$ particles. *Found. Phys.*, 16:295–310, 1986.
- [57] Richard N. Zare. *Angular Momentum*. Baker lecture series. John Wiley & Sons, 1988. Capítulos 2 e 5.
- [58] M. G. Benedict and A. Czirják. Wigner functions, squeezing properties and slow decoherence of a mesoscopic superposition of two-level atoms. *Phys. Rev. A*, 60:4034–4044, 1999.
- [59] Péter Földi, Attila Czirják, and Mihály G. Benedict. Rapid and slow decoherence in conjunction with dissipation in a system of two-level atoms. *Phys. Rev. A*, 63:033807, 2001.
- [60] José Geraldo Peixoto de Faria e Maria Carolina Nemes. Comunicação Privada.
- [61] D.F. Walls and G.J. Milburn. Effect of dissipation on quantum coherence. *Phys. Rev. A*, 31(4):2403, 1985.
- [62] A Czirják and M G Benedict. Joint Wigner function for atom-field interactions. *Quantum Semiclass. Opt.*, 8:975–981, 1996.
- [63] L. Sanz and K. Furuya. A joint Wigner function of an atom-field system with dissipation. *J. Opt. B:Quantum Semiclass. Opt.*, 4:S184–S190, 2002.
- [64] Hiroki Saito and Hiroyuki Hyuga. Relaxation of Schrödinger cat states and displaced thermal states in a density operator representation. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 65(6):1648–1654, 1996.
- [65] Antonio Vidiella Barranco. *Quantum superpositions of coherent states of light*. PhD thesis, University of London, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1992.
- [66] Pierre Meystre. Theoretical developments in cavity quantum optics: A brief review. *Phys. Rep.*, 219:243–262, 1992.
- [67] José Geraldo Peixoto de Faria. *Aspectos do entrelaçamento em sistemas quânticos abertos*. Tese de doutoramento, ICEX-UFMG, 2001.

-
- [68] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C.H. Behroozi. Light speed reduction to 17 meters per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, 397:594, 1999.
- [69] S.E. Harris and Lene Vestergaard Hau. Nonlinear optics at low light levels. *Phys. Rev. Lett.*, 82:4611, 1999.
- [70] Hai Wang, David Goorskey, and Min Xiao. Enhanced Kerr nonlinearity via atomic coherence in a three-level atomic system. *Phys. Rev. Lett.*, 87:073601, 2001.
- [71] Christopher C. Gerry. Generation of optical macroscopic quantum superposition states via state reduction with a Mach-Zehnder interferometer containing a Kerr medium. *Phys. Rev. A*, 59:4095–4098, 1999.
- [72] G.S Agarwal and R.R. Puri. Collapse and revival phenomenon in the evolution of a resonant field in a Kerr-like medium. *Phys. Rev. A*, 39:2969, 1989. e referências.
- [73] G. S. Agarwal and J. Banerji. Fractional revivals in systems with two time scales. *Phys. Rev. A*, 57:3880, 1998.
- [74] Christopher C. Gerry, Adil Benmoussa, and R.A. Campos. Nonlinear interferometer as a resource for maximally entangled photonic states: Application to interferometry. *Phys. Rev. A*, 66:13804, 2002.
- [75] G.J. Milburn, J. Corney, and E.M. Wright. Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential. *Phys. Rev. A*, 55:4318–4324, 1997.
- [76] A. Sørensen, L. M. Duan, and J.I. Cirac. Many-particle entanglement with Bose-Einstein condensates. *Nature*, 409:63, 2001.
- [77] A. Micheli, D. Jaksch, J.I. Cirac, and P. Zoller. Many-particle entanglement in two-component Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 67:013607, 2003.
- [78] Ross H. McKensie Andrew P. Hines and Gerald J. Milburn. Entanglement of two-mode Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 67:013609, 2003.
-

- [79] L. Sanz, R.M. Angelo, and K.Furuya. Entanglement dynamics in a two-mode nonlinear bosonic hamiltonian. Aceito no Journal of Physics A, e-print: quant-ph/0210162.
- [80] G. P. Berman, A.M. Iomin, and G.M. Zaslavsky. Method of classical approximation for c-number projection in coherent states basis. *Physica D*, 4:113, 1981.
- [81] R. M. Angelo, L. Sanz, and K. Furuya. Ordered quantization and the Ehrenfest time scale. *Phys. Rev. E*, 68:016206, 2003.
- [82] Adelcio C. Oliveira, K. M. Fonseca Romero, and M.C. Nemes. Quantum time scales and the classical limit: Analytic results for some simple systems. Aceito na *Phys. Rev. E*.
- [83] H. Zoubi, M. Orenstein, and A. Ron. Coupled microcavities with dissipation. *Phys. Rev. A*, 62:33801, 2000.
- [84] G S Agarwal, R R Puri, and R P Singh. Atomic Schrödinger cat states. *Phys. Rev. A*, 56:2249–2254, 1997.
- [85] J. Banerji. Non-linear wave packet dynamics of coherent states. *PRAMANA-J. Phys.*, 56:267, 2001.
- [86] P. Ehrenfest. *Z. Phys.*, 45:455, 1927.
- [87] Michael Tavis and Frederick W. Cummings. Exact solution for an N-molecule-radiation-field hamiltonian. *Phys. Rev.*, 170:170, 1968.
- [88] Y. Kaluzny, P. Goy, M. Gross, J. M. Raimond, and S. Haroche. Observation of self-induced Rabi oscillations in two-level atoms excited inside a resonant cavity: The ringing regime of superradiance. *Phys. Rev. Lett.*, 51:1175, 1983.
- [89] D. Pavolini, A. Crubellier, P. Pillet, L. Cabaret, and S. Liberman. Experimental evidence for subradiance. *Phys. Rev. Lett.*, 54:1917–1920, 1985.
- [90] Péter Foldi, Attila Czirják, and Mihály G Benedict. Rapid and slow decoherence in conjunction with dissipation in a system of two-level atoms. *Phys. Rev. A*, 63:33807–33815, 2001.

- [91] E. Solano, G.S. Agarwal, and H. Walther. Strong-driving-assisted multipartite entanglement in cavity QED. *Phys. Rev. Lett.*, 90:27903, 2003.
- [92] P. W. Milonni, J. R. Ackerhalt, and H. W. Galbraith. Chaos in the semiclassical N-atom Jaynes-Cummings model: Failure of the Rotating-Wave Approximation. *Phys. Rev. Lett.*, 50:966–969, 1983.
- [93] R. Graham and M. Höhnerbach. Two-state system coupled to a boson mode: Quantum dynamics and classical approximations. *Z. Phys. B - Condensed Matter*, 57:233, 1984.
- [94] Marek Kús. Statistical properties of the spectrum of the two-level system. *Phys. Rev. Lett.*, 54:1343, 1985.
- [95] M. A. M. de Aguiar, K. Furuya, C. H. Lewenkopf, and M. C. Nemes. Chaos in a Spin-Boson system: Classical analysis. *Ann. Phys.*, 216:291–312, 1992.
- [96] C.H. Lewenkopf, M.C. Nemes, V. Marsulle, M. Pato, and W. F. Wreszinski. Level statistics transitions in the spin-boson model. *Physics Letters A*, 155:113–116, 1991.
- [97] Sergey M. Chumakov, Alejandro Frank, and Kurt Bernardo Wolf. Finite Kerr medium: Macroscopic quantum superposition states and Wigner functions on the sphere. *Phys. Rev. A*, 60:1817, 1999.
- [98] M. A. M. Aguiar, K. Furuya, C.H. Lewenkopf, and M.C. Nemes. Particle-spin coupling in a chaotic system: Localization-delocalization in the Husimi distributions. *Europhysics Letters*, 15:125, 1991.
- [99] M. A. M. de Aguiar, K. Furuya, and M. C. Nemes. The classical analogue of the super-radiant phase transition in the Dicke model. *Quantum Opt.*, 3:305–314, 1991.