

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

Departamento de Eletrônica Quântica

Grupo de Óptica Quântica

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**DINÂMICA DO MODELO DE
JAYNES-CUMMINGS COM MEIO KERR E
DIFERENTES DESSINTONIAS**

Pablo Parmezani Munhoz

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco (orientador) – IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Reginaldo J. Napolitano – IFSC/USP

Prof. Dr. Marcelo A. Marchioli (suplente) – IFSC/USP

Prof. Dr. José Antonio Roversi – IFGW/UNICAMP

Profa. Dra. Kioko Furuya (suplente) – IFGW/UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto
de Física "Gleb Wataghin" para a
obtenção do título de Mestre em Física.

31 de Outubro de 2002

*Este exemplar corresponde à redação final de dissertação
de mestrado defendida pelo estudante Sr. Pablo Parmezani
Munhoz e aprovada pela comissão julgadora.
Campinas, 04 novembro de 2002*



**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

M925d

Munhoz, Pablo Parmezani
Dinâmica do Modelo de Jaynes-Cummings com meio
Kerr e diferentes dessintonias / Pablo Parmezani
Munhoz. -- Campinas, SP : [s.n.], 2002.

Orientador: Antonio Vidiella Barranco.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Ótica quântica. 2. Ressonância ótica.
3. Kerr, Efeito de. 4. Distribuição (Probabilidades).
5. Matriz de densidade. I. Vidiella Barranco, Antonio
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física
"Gleb Wataghin". III. Título.



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE PABLO PARMEZANI MUNHOZ – RA 001053 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 25/07/2002.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco (Orientador do Candidato)

DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano – IFSC/USP

Prof. Dr. José Antonio Roversi – DEQ/IFGW/UNICAMP

**“...Our lives may be easier..
...But, they will never be as full...”
Jane Hatchard (1971-1997)**

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco, meu orientador, pelas suas muitas sugestões e constante apoio durante esta pesquisa.

Agradeço também ao Prof. Dr. José Antonio Roversi pelas sugestões durante esse trabalho e participação no Exame de Qualificação de Mestrado, Seminário Pré-requisito de Dissertação de Mestrado e Defesa de Dissertação de Mestrado.

Minha gratidão ao Prof. Dr. Reginaldo J. Napolitano pelo comparecimento na defesa dessa dissertação e sugestões de correção e elogios.

Sou muito grato ao Prof. Dr. Marcelo A. Marchioli pela presença e elogios na defesa desse trabalho e a grande e influente contribuição para a versão final.

Agradeço à Profa. Dra. Kioko Furuya pelas sugestões no Seminário Pré-requisito de Dissertação de Mestrado.

Agradeço ao Prof. Dr. Guillermo G. Cabrera pelas sugestões no Exame de Qualificação de Mestrado.

Agradeço o INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, a mim conferido durante o período de 2000-2002, crucial para o completo sucesso na conclusão desta pesquisa.

Meu já tardio muito obrigado aos amigos do curso de Física-UNESP-Rio Claro: Joares L. Reis Jr., Tiago M. de Oliveira, Fábio L. Leite, Valdecir P. M. de Souza, Gilmar A. A. Marangoni, Huemerson Maceti (Lemão), Lidiomar Rodrigues, Antonio A. Soares (Tunico), Fábio R. Zanoni (Sarita), Roberto S. Mendes, Leandro S. Aguiar e muitos outros que, durante aqueles quatro inesquecíveis anos, propiciaram todas as oportunidades de “sentir” a vida.

Agradeço o apoio do CNPq e da FAPESP, duas grandes agências de fomento, tornando possí-

veis pesquisas como essa. Agradeço também ao CENAPAD-SP pelo suporte computacional.

Como não poderia deixar de ser, agradeço aos meus pais, José Carlos Munhoz (JCM) e Ludmila Parmezani Munhoz, e à minha irmã, Christine Parmezani Munhoz, pela paciência e *amor* ilimitados. Sem eles este trabalho nunca teria chegado até aqui (literalmente).

Meu sincero agradecimento ao Ricardo J. Missori (I'm Sorry...) pela amizade sempre presente nos bons e maus momentos, pelas discussões sobre o trabalho (nas cantinas do IEL, Bio e no PONTO 1) e pelo incentivo em continuar trabalhando na área.

Agradeço especialmente à Thalita Chiaramonte pelo amor e carinho demonstrados nos momentos mais difíceis deste trabalho. A sua presença tem feito toda a diferença! (Amigona!...o que é seu é meu! o que é meu é meu...);

Sou muito grato ao Fernando L. Semião pela amizade e presença marcante na discussão de dúvidas e suas valiosas e constantes sugestões, além da motivação em continuar progredindo na área; agradeço também à Camila Sanches pela amizade e dicas sobre o \LaTeX ;

Meu muito obrigado ao José Rildo Queiroz pela iniciativa de integração ao grupo de Óptica Quântica do IFGW, pelas discussões sobre o trabalho e conversas sobre o que fazer daqui em diante;

Agradeço ao Álvaro F. Gomes pela propaganda em prol do orientador e pelas primeiras dicas de \LaTeX e discussões sobre o trabalho ;

Meus agradecimentos ao Renato M. Angelo pela amizade, discussões sobre o trabalho e inúmeras e decisivas sugestões;

Agradeço também ao Carlos J. T. Peixoto (Carlão), Rogério V. Gelamo, Rodrigo A. Rubo, José L. B. Dias Polanco (Pepe), Eduardo A. C. Curvo, Ricardo Sato, Lázaro A. Macedo Jr., Klaus O. Vicaro...e muitos outros que não cabem aqui...agradeço a todos pelos companheirismo e pelos bons e maus momentos que tivemos juntos nesse período!

Em fim a todos aqueles que de um jeito ou de outro acabei conhecendo e que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho...e ao PDF \LaTeX (pelos efeitos especiais...).

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um estudo teórico da interação da radiação com a matéria. Investigamos a dinâmica do modelo de *Jaynes-Cummings* com um meio não-linear tipo *Kerr*, comparando a situação de grande dessintonia átomo-campo com a evolução correspondente obtida de um Hamiltoniano efetivo (aproximação dispersiva). Para isto, obtemos o operador evolução para o sistema átomo-campo, que facilita considerar diferentes situações iniciais para o átomo e o campo. Iniciamos nossa análise calculando os colapsos e *revivals* da inversão atômica, em conexão com a evolução da pureza do campo (dada pela entropia de *von Neumann*), que representa uma medida do emaranhamento átomo-campo. Em seguida calculamos os valores esperados de grandezas relativas ao operador energia (número de fótons) e os valores esperados de grandezas relativas à fase do campo, segundo o formalismo de *Pegg-Barnett*. Finalmente, como uma extensão natural de nosso trabalho, consideramos a evolução da função-Q, função de *Wigner* e fidelidade, o que nos proporcionou uma melhor compreensão do estado do campo da cavidade.

Abstract

In this work, we present a theoretical study of the radiation and matter interaction. We investigate the dynamics of the *Jaynes-Cummings* model with a nonlinear *Kerr*-like medium, comparing the situation at large atom-field detuning with the corresponding evolution arising from an effective Hamiltonian (dispersive approximation). For this, we obtain the evolution operator for the atom-field system, which makes easy to consider different initial situations for the atom and field. We start our analysis by calculating the collapses and revivals of the atomic inversion, in connection to the evolution of the field purity (given by the *von Neumann* entropy), which represents a measure of the atom-field entanglement. Afterwards, we calculate the expectation values of quantities relatives to the energy operator (photon number) and the expectation values relatives to the phase field, according to the *Pegg-Barnett* formalism. Finally, as a natural extension of our work, we consider the evolution of the *Q*-function, *Wigner* function and fidelity, which provided us a better understanding of the cavity field state.

Índice

Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
Lista de Figuras	xvii
1 Introdução	1
2 Conceitos Fundamentais	3
2.1 Formalismo Quântico	4
2.1.1 Postulados da Mecânica Quântica	4
2.1.2 Operador Densidade	5
2.2 Campo Eletromagnético	7
2.2.1 Eletrodinâmica Clássica	7
2.2.2 Eletrodinâmica Quântica	14
2.2.3 Álgebra dos Operadores Bosônicos	19
2.2.4 Propriedades do Campo Quantizado	22
3 Operador Fase do Campo	35
3.1 Fase Clássica	36
3.2 Fase Quântica	40

3.2.1	Formalismo de <i>Dirac</i>	42
3.2.2	Formalismo de <i>Susskind-Glogower</i>	45
3.2.3	Formalismo de <i>Pegg-Barnett</i>	48
4	Interação da Radiação com a Matéria	59
4.1	Átomo de Dois Níveis	60
4.1.1	Aproximação de Dipolo	63
4.2	Modelo de <i>Jaynes-Cummings</i>	64
4.2.1	Aproximação de Onda Girante (RWA)	65
4.2.2	Limite Dispersivo	69
4.3	Meio <i>Kerr</i>	70
4.4	Modelo de <i>Jaynes-Cummings</i> com Meio <i>Kerr</i>	73
4.4.1	Limite Dispersivo com Meio <i>Kerr</i>	75
4.5	Frequência de <i>Rabi</i> Linear	76
4.5.1	<i>Revivals</i> e <i>Super-revivals</i>	77
5	Dinâmica do JCM com Meio <i>Kerr</i>	79
5.1	Inversão Atômica	82
5.2	Distribuição de Número de Fótons	84
5.2.1	Número Médio de Fótons	85
5.2.2	Variância do Número de Fótons	86
5.3	Distribuição de Probabilidade de Fase	88
5.3.1	Valor Médio da Fase	93
5.3.2	Variância da Fase	96
5.4	Entropia de <i>von Neumann</i>	98
5.5	Distribuições de <i>Quasi-Probabilidades</i>	102
5.5.1	Função- <i>Q</i>	102
5.5.2	Função de <i>Wigner</i>	106
5.6	Fidelidade	110
6	Discussão e Conclusões	115

Apêndices	119
A Distribuições de <i>Quasi</i>-Probabilidades	119
A.1 Distribuição de <i>Glauber-Sudarshan</i>	120
A.2 Distribuição de <i>Wigner</i>	121
A.3 Distribuição de <i>Husimi</i>	122
B Distribuição de Probabilidade de Fase	125
B.1 Primeiro Momento da Fase	126
B.2 Segundo Momento da Fase	127
B.3 Variância da Fase	128
C Operador Densidade no JCMK	129
Referências	133

Lista de Figuras

2.1	Distribuição de número de fótons para o estado de número com $n = 25$	23
2.2	Distribuição de número de fótons para o estado coerente com $ \alpha ^2 = 25$	25
2.3	Distribuição de número de fótons para o estado de número deslocado com $ \alpha ^2 = 25$ e $n = 5$	26
2.4	Distribuição de número de fótons para o estado coerente comprimido com $ \alpha ^2 = 25$ e $\xi = 2$	28
2.5	Distribuição de número de fótons para o estado de vácuo comprimido com $\xi = 1.5$	29
2.6	Distribuição de número de fótons para o estado binomial com $p = 0.25$ e $M = 100$	30
2.7	Distribuição de número de fótons para o estado térmico com $\langle n \rangle = 25$	31
2.8	Distribuição de número de fótons para o estado de superposição coerente “par” com $ \alpha ^2 = 25$	34
3.1	Representação no espaço de fase do estado (a) de número e (b) coerente.	56
3.2	Variância da fase em função do número de fótons para o estado de número (curva tracejada) e para o estado coerente (curva sólida).	57
4.1	Processos da interação átomo-campo no modelo de <i>Jaynes-Cummings</i> : (a) $a^\dagger \sigma_-$, (b) $a \sigma_+$, (c) $a \sigma_-$ e (d) $a^\dagger \sigma_+$	65
4.2	(a) Esquema da montagem experimental da cavidade de microondas. (b) Esquema do modelo de <i>Jaynes-Cummings</i> com o campo em dessintonia com o átomo de dois níveis; o acoplamento átomo-campo é caracterizado pela frequência de <i>Rabi</i> Ω	67
4.3	Diagrama dos estados vestidos em ressonância exata ($\delta = 0$).	68

5.1	Inversão atômica em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = e\rangle\langle e $ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	82
5.2	Inversão atômica em função de t/t_r com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = e\rangle\langle e $ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	83
5.3	Inversão atômica em função de t/t_r com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = e\rangle\langle e $ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	83
5.4	Número médio de fótons em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = e\rangle\langle e $ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	85
5.5	Número médio de fótons em função de t/t_r com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = e\rangle\langle e $ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	86
5.6	Variância do número de fótons em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = e\rangle\langle e $ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	87
5.7	Variância do número de fótons em função de t/t_r com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = e\rangle\langle e $ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	87
5.8	Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = e\rangle\langle e $	88
5.9	Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	89
5.10	Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = e\rangle\langle e $	90
5.11	Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	91
5.12	Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = e\rangle\langle e $	92
5.13	Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r com $\delta = \delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = e\rangle\langle e $ ou $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	93
5.14	Valor médio da fase em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = e\rangle\langle e $ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	94
5.15	Valor médio da fase em função de t/t_r com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = e\rangle\langle e $ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e i\rangle\langle j $	94

- 5.16 Valor médio da fase em função de t/t_r com $\delta = 4.8 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 95
- 5.17 Valor médio da fase em função de t/t_r com $\delta = \delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ ou $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 95
- 5.18 Variância da fase em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 96
- 5.19 Variância da fase em função de t/t_r com $\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 97
- 5.20 Variância da fase em função de t/t_r com $\delta = 4.8 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 97
- 5.21 Variância da fase em função de t/t_r com $\delta = \delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ ou $\rho_a = \sum_{i,j=g}^e C_i C_j |i\rangle\langle j|$ 98
- 5.22 Entropia de *von Neumann* em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 99
- 5.23 Entropia de *von Neumann* em função de t/t_r com $\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 99
- 5.24 Entropia de *von Neumann* em função de t/t_r com $\delta = 4.8 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1 \Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 100
- 5.25 Entropia de *von Neumann* em função de t/t_r com $\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 100
- 5.26 Função- Q no espaço de fase em (I) $t = 0$, (II) $t = \frac{1}{2}t_r$, (III) $t = t_r$, com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 103
- 5.27 Função- Q no espaço fase em (I) $t = 0$, (II) $t = \frac{1}{2}t_r$, (III) $t = t_r$, com $\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$. 103
- 5.28 Função- Q no espaço de fase em (I) $t = \frac{1}{4}t_r$, (II) $t = \frac{1}{2}t_r$, (III) $t = \frac{3}{4}t_r$, (IV) $t = t_r$, com $\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.5 \Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ 104
- 5.29 Função- Q no espaço de fase em (I) $t = 0$, (II) $t = \frac{1}{4}t_r$, (III) $t = \frac{1}{2}t_r$, (IV) $\frac{3}{4}t_r$, (V) t_r , com $\delta = \delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ ou $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 105

- 5.30 Função de *Wigner* em $t = \frac{1}{2}t_r$, com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ 107
- 5.31 Função de *Wigner* em $t = \frac{1}{2}t_r$, com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ 107
- 5.32 Função de *Wigner* em $t = \frac{1}{2}t_r$, com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 108
- 5.33 Função de *Wigner* em $t = \frac{1}{2}t_r$, com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ ou $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 109
- 5.34 Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ em função de t/t_r , com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 110
- 5.35 Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ em função de t/t_r , com $\delta = \delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ ou $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$. 111
- 5.36 Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha; \vartheta\rangle\langle\alpha; \vartheta|$ em função de ϑ para $t = \frac{1}{2}t_r$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, com (I) $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ e (II) $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ 112
- 5.37 Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha; \vartheta\rangle\langle\alpha; \vartheta|$ em função de t/t_r para $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta \approx 1.53\pi$, com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ 112
- 5.38 Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha; \vartheta\rangle\langle\alpha; \vartheta|$ em função de t/t_r para $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = 0$ com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 113
- 5.39 Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha; \vartheta\rangle\langle\alpha; \vartheta|$ em função de t/t_r para $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta \approx 1.53\pi$ com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ 113

Introdução

O estudo da interação entre um átomo de dois níveis e um modo do campo de radiação tem se mostrado um dos mais importantes em mecânica quântica, residindo no coração de muitos problemas encontrados na física de *lasers* e óptica quântica [1,2].

Um modelo para o tratamento deste problema, o modelo de *Jaynes-Cummings* (**JCM**), foi formulado anos depois [3] e, desde então, tem sido extensivamente estudado [4]. Os recentes experimentos com átomos de *Rydberg* em cavidades de microondas de alto fator Q de qualidade [5], têm fornecido um tremendo avanço no estudo de novos estados do campo eletromagnético.

Uma vantagem deste modelo reside no fato de ser analiticamente solúvel sob a aproximação de onda girante (**RWA**). Devido à riqueza de diferentes e interessantes fenômenos, tais como, estatística sub-Poissoniana, anti-agrupamento, fenômeno de colapsos e *revivals* [6,7], compressão [8,9,10], estados aprisionados [11], etc, pode ser também considerado como um dos modelos não-triviais mais básicos.

Zaheer e Zubairy [11] mostraram que no modelo de *Jaynes-Cummings*, sob uma certa relação de fase entre o momento de dipolo atômico e o campo, a amplitude das oscilações na inversão atômica torna-se pequena quando o campo inicial é considerado no estado coerente, fato este, explicado em [12].

Neste trabalho, investigamos teoricamente a evolução temporal da inversão atômica, assim como diversas quantidades relacionadas ao campo, no modelo de *Jaynes-Cummings* com um meio

não-linear tipo *Kerr* numa cavidade sem perdas. Consideramos o campo inicialmente no estado coerente e o átomo em dois estados iniciais: excitado e superposição igualmente ponderada de seus níveis, considerada inicialmente em [11].

Procuramos analisar os efeitos provocados pela presença da dessintonia átomo-campo e da anarmonicidade do meio não-linear na dinâmica do sistema comparando os diferentes limites da interação (ressonante, pequena e grande dessintonia átomo-campo) e a evolução segundo os dois estados iniciais considerados para o átomo. Analisamos também os efeitos da combinação desses dois parâmetros na dinâmica da inversão atômica e de todas as quantidades consideradas para o campo da cavidade.

A idéia de gerar superposições de estados macroscopicamente distinguíveis através de meios não-lineares tem atraído muita atenção nos anos recentes [13]. Foi mostrado, por exemplo, que os efeitos de anarmonicidade no meio tipo *Kerr* [14, 15, 16, 17] podem produzir estados tipo "gato" de *Schrödinger*.

Enfatizamos a possibilidade de gerar estados tipo "gato" de *Schrödinger*, no modelo aqui considerado, mediante o ajuste da dessintonia átomo-campo e da anarmonicidade do meio *Kerr*.

Este trabalho é organizado como segue: No **Capítulo 2**, apresentamos conceitos fundamentais, como o formalismo de operador densidade, o procedimento padrão para a quantização do campo eletromagnético, assim como algumas de suas propriedades. No **Capítulo 3**, apresentamos um estudo da fase do campo do ponto de vista clássico e quântico. No **Capítulo 4**, apresentamos nosso estudo da interação da radiação com a matéria, descrevendo o procedimento para a obtenção do Hamiltoniano livre de cada subsistema (átomo, campo e meio *Kerr*) e respectivos Hamiltonianos de interação (átomo-campo e campo-meio *Kerr*). No **Capítulo 5**, apresentamos os resultados obtidos. As conclusões deste trabalho são discutidas no **Capítulo 6**.

Conceitos Fundamentais

A luz tem representado um papel especial nas tentativas de entender a natureza, tanto classicamente como quanticamente, derrubando fronteiras da física durante o século XX, como a catástrofe do ultra-violeta e o efeito foto-elétrico. De fato, o nascimento da mecânica quântica se deve a introdução de *Planck* do conceito de *quantum*, necessário para explicar o espectro da radiação do corpo-negro. A extensão dessas idéias levaram *Einstein* a entender o efeito foto-elétrico e introduzir o conceito de fóton.

Estas concepções levaram *Dirac* a combinar a natureza corpuscular-ondulatória da luz, com o conceito de campo de radiação, e explicar todos os fenômenos decorrentes dessa característica dual, assim como a absorção de um fóton do campo devido à excitação de um átomo.

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos fundamentais da teoria quântica para os estudos propostos adiante. Procuramos fazer uma revisão focalizada nas principais definições necessárias para o estudo proposto. Começamos com uma abordagem aos principais postulados de mecânica quântica, apresentando o conceito de estado de um sistema em mecânica quântica e sua representação mais geral, obtida do formalismo de operador densidade. Dedicamos boa parte deste capítulo ao campo eletromagnético, destacando o procedimento usual para a sua quantização, associando cada um de seus modos a um oscilador harmônico simples quantizado. Esta é a essência da teoria quântica da radiação. Conseqüências interessantes desta quantização são as flutuações associadas ao ponto “zero” de energia, denominadas flutuações de vácuo. Estas flutua-

ções não possuem análogo clássico e são responsáveis por muitos fenômenos interessantes em óptica quântica [18].

2.1 Formalismo Quântico

2.1.1 Postulados da Mecânica Quântica

Abordamos o conceito de estado de um sistema (com um número de graus de liberdade finito). Na teoria clássica, a evolução de um sistema é dada pela solução de equações de movimento e é completamente determinada pela condição inicial (um ponto do espaço de fase do sistema), assim como qualquer outra “observável clássica” (função no espaço de fase). Uma situação semelhante é encontrada na mecânica estatística clássica, onde podemos considerar uma noção mais geral de estado. Neste caso, o estado de um sistema é completamente descrito pela distribuição de probabilidade no espaço de fase. Se esta distribuição estiver confinada num único ponto deste espaço, o estado é denominado estado puro. Do ponto de vista de uma medida física de uma “observável”, o estado é considerado como um resultado da preparação do sistema.

Uma notação conveniente para os estados em mecânica quântica foi primeiramente introduzida por *Dirac* [19]. Na notação de *Dirac*, um estado é representado por um vetor de estado no espaço de *Hilbert* \mathbb{H} , denominado *ket* e denotado por $|\psi\rangle$. O (vetor de) estado correspondente, no espaço dual, é denominado *bra* e denotado por $\langle\psi|$. As observáveis de um sistema físico, por exemplo, q (posição) e p (momento), são representadas, no formalismo quântico, por operadores lineares do espaço de *Hilbert*, distinguidos aqui por caracteres em “negrito-italico”. Esses operadores atuam sobre *kets* (*bras*) pertencentes ao mesmo subespaço de *Hilbert*, e, geralmente, originam outros *kets* (*bras*):

$$\begin{aligned} \mathbf{O}|\psi\rangle &= |\phi\rangle, \\ \langle\psi|\mathbf{O} &= \langle\phi|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dentre os casos especiais, citamos aquele em que o operador altera apenas o “tamanho” do *ket* (*bra*):

$$\mathbf{O}|\psi_i\rangle = O_i|\psi_i\rangle, \tag{2.2}$$

em que os O_i 's são os autovalores do operador O e $|\psi_i\rangle$, seus auto-estados (autovetores). O conjunto de auto-estados $\{|\psi_i\rangle\}$ constitui o espectro (discreto) do operador O .

Como estamos tratando de vetores, podemos expressar o produto escalar entre dois vetores do espaço de Hilbert \mathbb{H} , de acordo com a definição

$$\langle \psi | \phi \rangle = c, \quad (2.3)$$

no qual c é um c -number (número complexo). Considerando uma base ortonormal no espaço vetor \mathbb{H} temos a relação de ortonormalidade

$$\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (2.4)$$

Uma vez que o conjunto de vetores $\{|\psi_i\rangle\}$ constitui uma base (espectro) no espaço \mathbb{H} , qualquer *ket* deste espaço em particular pode ser expandido como

$$|\psi\rangle = \sum_i C_i |\psi_i\rangle. \quad (2.5)$$

Tal expansão é tida como única.

2.1.2 Operador Densidade

Sabemos que um sistema quântico não é, necessariamente, preparado num estado puro. Ou ainda, mesmo a descrição mais completa possível de um sistema não permite, em geral, prever com exatidão o resultado das medidas que podem ser realizadas sobre ele. Nesses casos, apenas os possíveis resultados e a probabilidade de cada um deles ocorrerem são bem determinados. Desta propriedade resulta a essência probabilística da mecânica quântica.

Tipicamente, tratamos com sistemas que são preparados numa mistura estatística de estados puros. Um exemplo de tal sistema é dado por um reservatório em equilíbrio térmico à temperatura T . Assim, sabemos apenas que o sistema deve estar em um de seus auto-estados de energia $|E_i\rangle$, com probabilidade dada pela distribuição de Boltzmann

$$f_B = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}, \quad (2.6)$$

sendo $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

Assim, podemos dizer que se trata de uma situação análoga a encontrada na mecânica estatística clássica, onde temos total ignorância sobre o sistema, sendo que esta característica é, ainda, no caso quântico, acompanhada de incerteza na medida. Tais sistemas são descritos, em mecânica quântica, por um operador análogo a densidade de probabilidade usada na descrição dos *ensembles* estatísticos, denominado operador densidade [20,21] e dado por

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.7)$$

em que P_i é a probabilidade de encontrar o sistema num estado (puro) $|\psi\rangle$. Claramente, as probabilidades P_i satisfazem as condições

$$P_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_i P_i = 1. \quad (2.8)$$

Considerando os *kets* $|\psi_i\rangle$, com a relação de ortonormalidade (2.4), temos também a denominada relação de completeza

$$\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \mathbf{I}. \quad (2.9)$$

Assim, o operador densidade, como um operador no espaço de *Hilbert*, pode ser escrito na forma

$$\rho = \sum_{i,j} \langle\psi_i|\rho|\psi_j\rangle |\psi_i\rangle\langle\psi_j|, \quad (2.10)$$

nos quais $P_{i,j} = \langle\psi_i|\rho|\psi_j\rangle$ são os denominados elementos da matriz densidade. Esta notação pode ser usada para se expressar o valor esperado de um operador \mathbf{O} ,

$$\langle\mathbf{O}\rangle = \sum_{i,j} \langle\psi_i|\rho|\psi_j\rangle \langle\psi_j|\mathbf{O}|\psi_i\rangle = \text{Tr}(\rho\mathbf{O}). \quad (2.11)$$

Em particular, para o próprio operador densidade temos as relações

$$\text{Tr}(\rho) = 1 \quad \text{e} \quad \text{Tr}(\rho^2) \leq 1. \quad (2.12)$$

Ainda, mais duas propriedades de ρ são pertinentes: é positivo-definido, isto é, dado qualquer *ket* $|\psi\rangle$, temos

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0, \quad (2.13)$$

e é Hermitiano, ou seja

$$\rho = \rho^\dagger. \quad (2.14)$$

O sentido físico deste operador é, então, dado de maneira precisa pela definição de valor esperado (2.11).

É fácil perceber que este formalismo inclui como caso particular a situação na qual o estado do sistema é bem determinado. Vemos que neste caso a expansão em (2.7) se reduz a um único termo e ρ é dado simplesmente pelo operador projeção

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.15)$$

equivalente ao *ket* $|\psi\rangle$, ou seja, o estado puro. O estado oposto ao puro é denominado estado misto, de mistura, ou ainda estado de mistura estatística.

2.2 Campo Eletromagnético

A teoria clássica do eletromagnetismo é notável pela sua capacidade de se preservar diante dos mais diversos problemas, cada um com suas dimensões e peculiaridades. Contudo, na transição desta teoria para o formalismo quântico, denominada eletrodinâmica quântica (**QED**), devemos ser cautelosos pois as variáveis dinâmicas (observáveis) de um dado sistema físico, na mecânica quântica, são representadas por operadores e a teoria do eletromagnetismo de *Maxwell* é fundamentada nos já citados *c-numbers*. Apresentamos agora a denominada quantização canônica, que consiste em escrever as grandezas clássicas numa forma conveniente para, então, usar o princípio da correspondência, escrevendo o análogo quântico das grandezas consideradas.

2.2.1 Eletrodinâmica Clássica

Considerando inicialmente a teoria clássica do campo eletromagnético numa cavidade sem perdas e com possíveis interações do campo com fontes (por exemplo, distribuições de cargas e de correntes), as equações de *Maxwell* são dadas por [22, 23]:

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \end{aligned}$$

nos quais $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ são, respectivamente, os vetores campo elétrico e magnético usuais no ponto (\mathbf{r}, t) . Aqui, $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ são, respectivamente, as densidades de corrente e de carga também definidas no mesmo ponto.

É conveniente representar o campo eletromagnético, na ausência de fontes, pelo potencial transversal $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, que satisfaz a relação de divergência

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.16)$$

conhecida como a condição de transversalidade. Os campos elétricos e magnéticos deriváveis dos potenciais vetores que satisfazem (2.16) são denominados campos transversos ou campos de radiação [24].

Como o divergente de $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ é nulo, podemos expressar o campo magnético através da relação com o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ dada por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.17)$$

Observamos também que o rotacional do gradiente de um potencial escalar é nulo

$$\nabla \wedge \nabla \phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.18)$$

então podemos escrever

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla \phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.19)$$

Substituindo as equações para os campos elétrico (2.19) e magnético (2.17) nas equações de *Maxwell* e, usando a identidade

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por questão de simplicidade, sem perda de generalidade, serão impostas as seguintes condições sobre os potenciais $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $\phi(\mathbf{r}, t)$, denominadas transformações de calibre (ou *gauge*) de *Lorentz*:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = 0, \\ \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t). \end{cases}$$

Segundo o teorema de *Helmholtz*, qualquer campo vetorial \mathbf{C} pode ser escrito como

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_T + \mathbf{C}_L,$$

em que $\mathbf{C}_{T(L)}$ é a componente transversal (longitudinal) do campo vetorial tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{C}_T = 0,$$

$$\nabla \wedge \mathbf{C}_L = 0.$$

Assim, podemos escrever a densidade de corrente como

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_T(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t), \quad (2.21)$$

e, usando a relação de continuidade, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \implies \nabla \cdot \mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t). \quad (2.22)$$

Uma vez que $\nabla \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$, podemos escrever $\nabla \phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t)$. Da equação de *Poisson*, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \implies \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \nabla \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t),$$

e, sabendo que $\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t)$, temos as soluções

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Quando consideramos o campo eletromagnético no espaço vazio sem fontes, ou seja, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$ e $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$, temos

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) &= 0,\end{aligned}\tag{2.24}$$

onde, por praticidade, escolhemos as condições de contorno tal que $\phi(\mathbf{r}, t) = 0$. Usando o método de separação de variáveis

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \alpha(t) \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \alpha^*(t) \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r}),\tag{2.25}$$

temos a equação de *Helmholtz*

$$\nabla^2 \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mathbb{k}^2 \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0,\tag{2.26}$$

com $\mathbb{k} = \frac{\omega_{\mathbb{k}}}{c}$ e

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega_{\mathbb{k}}^2 \alpha(t) = 0 \implies \alpha(t) = \alpha(0) e^{-i\omega_{\mathbb{k}} t}.\tag{2.27}$$

A fim de obter as equações de movimento, é conveniente fazer uma decomposição de $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ com relação a variável espacial \mathbf{r} . Tal procedimento pode ser feito tanto na forma de integral de *Fourier* como na forma de série de *Fourier*. Inicialmente, trataremos o problema em termos da decomposição discreta de $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$. Considerando o campo eletromagnético contido numa cavidade cúbica de largura L e volume $V = L^3$, as soluções fisicamente válidas são decorrentes das condições de contorno periódicas impostas ao problema do campo de radiação na cavidade

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r} + L) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}).\tag{2.28}$$

De fato, a solução da equação de onda (2.26) tem um conjunto discreto e infinito de soluções ortogonais que descrevem os modos de amplitude e vibração na cavidade. Com isso, as amplitudes de cada modo podem ser utilizadas para descrever o campo eletromagnético no lugar do potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Estas condições de contorno periódicas asseguram que as paredes da cavidade são perfeitamente refletoras, ou seja, as componentes normais do vetor de *Pointing* $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ são nulas nas paredes da cavidade e, portanto, não ocorre emissão de radiação [25].

Escrevendo a expansão de *Fourier* tridimensional de $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ como sendo os modos de uma onda plana onde para cada modo temos

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi)},$$

uma possível função normalizada é dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_0(\mathbf{r}), \quad (2.29)$$

em que o vetor \mathbf{k} tem componentes $k_i = \frac{2\pi n_i}{L}$, $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $i = x, y, z$, formando um conjunto discreto, e a soma $\sum_{\mathbf{k}}$ implica

$$\sum_{\mathbf{k}} = \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{\infty} \sum_{k_z=-\infty}^{\infty},$$

englobando todos os valores possíveis de \mathbf{k} .

Da condição de transversalidade (2.16) $\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$, nos quais $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ são, respectivamente, o vetor unitário de polarização e direção de propagação da onda plana. Ainda, a natureza real de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ leva à condição $\alpha_{\mathbf{k}}(t) = \alpha_{\mathbf{k}}^*(t)$.

Uma vez que $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ satisfaz a equação de onda (2.23), imediatamente temos que

$$\left(\frac{1}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}} \left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \alpha_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi)} = 0,$$

$$\alpha_{\mathbf{k}}(t) = \alpha_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + \alpha_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}} t},$$

para todo \mathbf{r} (solução geral).

É vantajoso escrever $\alpha_{\mathbf{k}}$ em termos de duas componentes ortogonais escolhidas de maneira que a condição de transversalidade (2.16) seja válida automaticamente. Podemos fazer isso mais facilmente, selecionando um par de vetores ortonormais de base real $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1}$ e $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_2}$ que satisfazem as condições

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} &= 0 & (\lambda = 1, 2), \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda'} &= \delta_{\lambda,\lambda'} & (\lambda, \lambda' = 1, 2), \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k}_1} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k}_2} &= \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \equiv \hat{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

as quais representam, respectivamente, transversalidade, ortonormalidade e destricidade. Assim

$$\alpha_{\mathbf{k}} = \sum_{\lambda=1}^2 \alpha_{\mathbf{k},\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}. \quad (2.31)$$

É, às vezes, útil identificar um conjunto de vetores de base associados a um vetor de onda particular \mathbf{k} cujos ângulos polar e azimutal são θ e ϕ , ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_1} &= \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}}_1 + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}}_1 - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}_1, \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k}_2} &= \sin \phi \hat{\mathbf{x}}_1 + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}_1, \end{aligned}$$

os quais satisfazem as condições (2.30) e, portanto, representam duas polarizações lineares ortogonais associadas ao vetor de onda \mathbf{k} . Por outro lado, os vetores de base complexos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos \theta \cos \phi - i \sin \phi) \hat{\mathbf{x}}_1 + (\cos \theta \sin \phi + i \cos \phi) \hat{\mathbf{y}}_1 - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}_1], \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k}_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(i \cos \theta \cos \phi - \sin \phi) \hat{\mathbf{x}}_1 + (i \cos \theta \sin \phi + \cos \phi) \hat{\mathbf{y}}_1 - i \sin \theta \hat{\mathbf{z}}_1], \end{aligned}$$

representam, respectivamente, uma polarização circular a direita e a esquerda associados com o vetor de onda \mathbf{k} , e também satisfazem (2.30).

Estes vetores unitários ($\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}_2}, \hat{\mathbf{k}}$) formam uma base cartesiana ortonormal e destra. As componentes $(\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1})_i, (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_2})_i$ e $\hat{\mathbf{k}}_i$ são os três cossenos diretores do eixo x nesta base. Usando as propriedades dos cossenos diretores, podemos escrever as relações para o cosseno do ângulo entre os eixos x e y :

$$\sum_{\lambda} (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda})_j = \delta_{i,j} - \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j.$$

Assim, obtemos o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ em termos dos modos do campo de radiação

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} [\alpha_{\mathbf{k},\lambda}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi)} + \text{c.c.}]. \quad (2.32)$$

Logo, podemos escrever as expansões dos modos para os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ como segue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{i}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_{\mathbf{k}} [\alpha_{\mathbf{k},\lambda}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi)} - \text{c.c.}], \quad (2.33)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{i}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} [\alpha_{\mathbf{k},\lambda}(t) (\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi)} - \text{c.c.}], \quad (2.34)$$

em que usamos $\nabla \wedge (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) = \pm i(\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}) e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$.

Energia do Campo Clássico

A energia associada ao campo eletromagnético é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_V dV \left[\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (2.35)$$

Usando as relações

$$\begin{aligned} \int_V dV e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} &= V \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \\ (\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}^*) \cdot (\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda'}) &= |\mathbf{k}|^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}^* \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda'} = |\mathbf{k}|^2 \delta_{\lambda,\lambda'}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

obtemos uma forma compacta de \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = 2 \sum_{\mathbf{k},\lambda} \omega_{\mathbf{k}}^2 |\alpha_{\mathbf{k},\lambda}(t)|^2, \quad (2.37)$$

que relaciona a energia como sendo uma soma sobre todos os modos do campo eletromagnético.

Para o propósito da quantização do campo eletromagnético, é conveniente escrever \mathcal{H} em sua forma Hamiltoniana introduzindo um par de variáveis canônicas reais $q_{\mathbf{k},\lambda}(t)$ e $p_{\mathbf{k},\lambda}(t)$, definidas como

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{k},\lambda}(t) &= [\alpha_{\mathbf{k},\lambda}(t) + \alpha_{\mathbf{k},\lambda}^*(t)], \\ p_{\mathbf{k},\lambda}(t) &= -i\omega_{\mathbf{k}} [\alpha_{\mathbf{k},\lambda}(t) - \alpha_{\mathbf{k},\lambda}^*(t)]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Tanto $q_{\mathbf{k},\lambda}(t)$ como $p_{\mathbf{k},\lambda}(t)$ oscilam senoidalmente no tempo com frequência $\omega_{\mathbf{k}}$. Temos então as equações de movimento

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\mathbf{k},\lambda}(t) &= p_{\mathbf{k},\lambda}(t), \\ \dot{p}_{\mathbf{k},\lambda}(t) &= -\omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k},\lambda}(t). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Reescrevendo (2.37) em termos de $q_{\mathbf{k},\lambda}(t)$ e $p_{\mathbf{k},\lambda}(t)$, temos

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} [p_{\mathbf{k},\lambda}^2(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k},\lambda}^2(t)], \quad (2.40)$$

conhecida como a energia de um sistema de osciladores harmônicos independentes, para cada modo (\mathbf{k}, λ) .

Momento do Campo Clássico

O momento linear total $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ do campo eletromagnético é proporcional a integral de volume do vetor de *Pointing*,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_V dV \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (2.41)$$

Usando as relações em (2.36), obtemos uma forma compacta de $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, isto é,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = 2 \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_{\mathbf{k}} |\alpha_{\mathbf{k}, \lambda}(t)|^2 \mathbf{k}. \quad (2.42)$$

Reescrevendo em termos de $q_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$ e $p_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$, temos

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} [p_{\mathbf{k}, \lambda}^2(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}, \lambda}^2(t)] \mathbf{k}. \quad (2.43)$$

É interessante notar que $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ é uma constante de movimento

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) + \{\mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \mathcal{H}\} \implies \{\mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \mathcal{H}\} = 0,$$

o que implica que as variáveis $q_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$ e $p_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$ são *c-numbers*, obedecendo a relação

$$\{q_{\mathbf{k}, \lambda}(t), p_{\mathbf{k}', \lambda'}(t)\} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^3 \delta_{\lambda, \lambda'}. \quad (2.44)$$

2.2.2 Eletrodinâmica Quântica

Para descrever o campo eletromagnético no formalismo da mecânica quântica, temos que associar operadores do espaço de *Hilbert* com as variáveis dinâmicas, os quais, em geral, não comutam.

Quantização Canônica

De acordo com os postulados da mecânica quântica, cada par de operadores canonicamente conjugados tem o comutador igual a $i\hbar$. Podemos, portanto, escrever o seguinte conjunto de relações de comutação*:

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}_{\mathbf{k}, \lambda}(t), \mathbf{p}_{\mathbf{k}', \lambda'}(t)] &= i\hbar \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^3 \delta_{\lambda, \lambda'}, \\ [\mathbf{q}_{\mathbf{k}, \lambda}(t), \mathbf{q}_{\mathbf{k}', \lambda'}(t)] &= 0, \\ [\mathbf{p}_{\mathbf{k}, \lambda}(t), \mathbf{p}_{\mathbf{k}', \lambda'}(t)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

*Adotamos o procedimento primeiramente descrito por *Dirac* [19].

em que o estado do campo eletromagnético é agora descrito pelo vetor de estado (*ket*) $|\psi\rangle$ no espaço de *Hilbert*.

Como observáveis físicos estão sempre associados a operadores Hermitianos, os autovalores correspondentes são todos reais[†]. Assim, o Hamiltoniano do campo de radiação quantizado é dado por:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} [\mathbf{p}_{\mathbf{k}, \lambda}^2(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{q}_{\mathbf{k}, \lambda}^2(t)]. \quad (2.46)$$

Para muitos propósitos é conveniente trabalhar com um conjunto de operadores não Hermitianos definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) &= \left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} [\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{q}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) + i\mathbf{p}_{\mathbf{k}, \lambda}(t)], \\ \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger}(t) &= \left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} [\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{q}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) - i\mathbf{p}_{\mathbf{k}, \lambda}(t)], \end{aligned} \quad (2.47)$$

sendo o segundo o conjugado Hermitiano do primeiro. Essas equações podem ser invertidas imediatamente. Assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) &= \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) + \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger}(t)], \\ \mathbf{p}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) &= i \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) - \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger}(t)], \end{aligned} \quad (2.48)$$

e, de (2.45), obtemos as relações de comutação para $\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$ e $\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger}(t)$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t), \mathbf{a}_{\mathbf{k}', \lambda'}^{\dagger}(t)] &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^3 \delta_{\lambda, \lambda'}, \\ [\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t), \mathbf{a}_{\mathbf{k}', \lambda'}(t)] &= 0, \\ [\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger}(t), \mathbf{a}_{\mathbf{k}', \lambda'}^{\dagger}(t)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

A menos do fator $\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}$, os operadores $\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$ e $\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger}(t)$, evidentemente, correspondem às amplitudes complexas $\alpha_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$ e $\alpha_{\mathbf{k}, \lambda}^*(t)$.

[†]A associação de operadores do espaço de *Hilbert* com variáveis dinâmicas clássicas pode ser ambígua quando os operadores não comutam. Assim, pode não ser óbvio que a variável clássica “*qp*” possa ser associada com “*qp*”, ou “*pq*”, ou “(*qp* + *pq*)/2”, ou alguma outra forma. Contudo, tais ambigüidades não ocorrem aqui.

Podemos então escrever as expansões dos modos do campo quantizado como segue:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{\frac{1}{2}} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi)} + \text{h.c.}], \quad (2.50)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [i \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi)} + \text{h.c.}], \quad (2.51)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{\frac{1}{2}} [i \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) (\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi)} + \text{h.c.}]. \quad (2.52)$$

Energia do Campo Quantizado

Substituindo as equações (2.48) em (2.46), obtém-se

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t) + \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t)]. \quad (2.53)$$

Das relações de comutação (2.49) podemos expressar \mathbf{H} como

$$\mathbf{H} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) + \frac{1}{2} \right], \quad (2.54)$$

no qual a contribuição de energia $\frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}}$ de cada modo (\mathbf{k}, λ) do oscilador é a denominada contribuição de energia de ponto zero (tal energia reflete o fato de que um oscilador harmônico no formalismo da mecânica quântica nunca se encontra em repouso, mesmo estando em seu estado fundamental). Embora tenha sido prevista, a energia de ponto zero é uma conseqüência desafortunada para um ilimitado número de modos (\mathbf{k}, λ) , fornecendo uma contribuição infinita para a energia. Esta é uma dificuldade da **QED** que nunca foi resolvida satisfatoriamente [26].

Contudo, para o estudo proposto neste trabalho, consideramos o campo com um único modo encerrado numa cavidade óptica (ou de microondas). Assim, a energia de ponto zero, outrora infinita (para infinitos modos do campo), possui agora um valor finito e constante podendo ser subtraído sem perda de generalidade da equação acima. Desta maneira, podemos escrever o Hamiltoniano (2.54) como

$$\mathbf{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t). \quad (2.55)$$

De agora em diante usaremos essa expressão mais simples, livre dos problemas citados.

Momento do Campo Quantizado

Seguindo o mesmo procedimento usado para a obtenção do Hamiltoniano do campo quantizado e devido ao fato dos operadores $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ não serem Hermitianos, consideramos a seguinte expressão para o operador momento:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_V dV [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.56)$$

Substituindo as expansões (2.51) e (2.52), temos

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \mathbf{k} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) + \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t)]. \quad (2.57)$$

Usando a relação de comutação (2.49), obtemos a forma normalmente ordenada (operador criação sempre a esquerda do operador aniquilação, conforme abordamos na próxima subseção) para o operador momento

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \mathbf{k} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) + \frac{1}{2}]. \quad (2.58)$$

Vemos que a contribuição da energia de ponto zero para o momento se anula, pois existe um termo $-\frac{1}{2}\hbar \mathbf{k}$ para cada $\frac{1}{2}\hbar \mathbf{k}$ quando somamos sobre todos os modos tal que

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \mathbf{k} \mathbf{n}_{\mathbf{k}, \lambda}(t). \quad (2.59)$$

Assim, tanto $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ como \mathbf{H} podem ser escritos como função de $\mathbf{n}_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$. Logo, $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ e \mathbf{H} comutam. Ainda, os auto-estados de \mathbf{H} , $|n_{\mathbf{k}, \lambda}\rangle$, são também auto-estados do operador $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ tal que os autovalores de \mathbf{H} são degenerados. A relação $[\mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}] = 0$ implica que o momento do campo eletromagnético é uma constante do movimento.

A menos que nosso estudo concernisse à dependência temporal de $\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(\dagger)}(t)$ (resolvidos aqui para um mesmo tempo), iremos suprimir esta dependência daqui em diante.

Fótons

Considere o operador Hermitiano definido como

$$\mathbf{n}_{\mathbf{k}, \lambda} \equiv \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \lambda}, \quad (2.60)$$

com as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda}, \mathbf{n}_{\mathbb{k}',\lambda'}] &= \mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda} \delta_{\mathbb{k},\mathbb{k}'}^3 \delta_{\lambda,\lambda'} , \\ [\mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda}^\dagger, \mathbf{n}_{\mathbb{k}',\lambda'}] &= -\mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda}^\dagger \delta_{\mathbb{k},\mathbb{k}'}^3 \delta_{\lambda,\lambda'} , \\ [\mathbf{n}_{\mathbb{k},\lambda}, \mathbf{n}_{\mathbb{k}',\lambda'}] &= 0 . \end{aligned} \quad (2.61)$$

Juntos, todos os operadores $\mathbf{n}_{\mathbb{k},\lambda}$ formam um **C.C.O.C**[‡]. Uma vez que os operadores correspondentes a diferentes modos (\mathbb{k}, λ) operam sobre diferentes espaços de *Hilbert*, podemos construir um estado produto caracterizando totalmente o campo de radiação,

$$|\{n\}\rangle = \bigotimes_{\mathbb{k},\lambda}^{\infty} |n_{\mathbb{k},\lambda}\rangle , \quad (2.62)$$

conhecido como o estado de *Fock* (número) do campo de radiação e caracterizado pelo conjunto (infinito) de números de ocupação.

A Hermiticidade de $\mathbf{n}_{\mathbb{k},\lambda}$ permite considerar um vetor de estado normalizado denotado por $|n_{\mathbb{k},\lambda}\rangle$ tal que

$$\mathbf{n}_{\mathbb{k},\lambda} |n_{\mathbb{k},\lambda}\rangle = n_{\mathbb{k},\lambda} |n_{\mathbb{k},\lambda}\rangle , \quad (2.63)$$

no qual $n_{\mathbb{k},\lambda}$ é o autovalor de $\mathbf{n}_{\mathbb{k},\lambda}$. A atuação de $\mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda}^\dagger$ e $\mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda}$ em $|n_{\mathbb{k},\lambda}\rangle$ produz

$$\mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda}^\dagger |n_{\mathbb{k},\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\mathbb{k},\lambda} + 1} |n_{\mathbb{k},\lambda} + 1\rangle \quad (2.64)$$

e

$$\mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda} |n_{\mathbb{k},\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\mathbb{k},\lambda}} |n_{\mathbb{k},\lambda} - 1\rangle . \quad (2.65)$$

Portanto

$$n_{\mathbb{k},\lambda} = \langle n_{\mathbb{k},\lambda} | \mathbf{n}_{\mathbb{k},\lambda} | n_{\mathbb{k},\lambda} \rangle = \langle n_{\mathbb{k},\lambda} | \mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda}^\dagger \mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda} | n_{\mathbb{k},\lambda} \rangle \geq 0 , \quad (2.66)$$

uma vez que a norma $\mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda}$ deve ser positiva e $\mathbf{n}_{\mathbb{k},\lambda}$ deve ser inteiro. Este requerimento é satisfeito quando

$$\mathbf{a}_{\mathbb{k},\lambda} |n_{\mathbb{k},\lambda}\rangle = 0 , \quad (2.67)$$

[‡]Conjunto Completo de Observáveis Compatíveis.

sendo o espectro de $n_{\mathbf{k},\lambda}$ um conjunto de números inteiros positivos.

Representações matriciais de $\mathbf{a}_{\mathbf{k},\lambda}$, $\mathbf{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ e $n_{\mathbf{k},\lambda}$ consistentes com as relações de comutação (2.49) e (2.61), podem ser escritas como

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k},\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{n}_{\mathbf{k},\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

que atuam no vetor coluna

$$|n_{\mathbf{k},\lambda}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Todos esses operadores estabelecem uma completa analogia com o formalismo para o oscilador harmônico.

2.2.3 Álgebra dos Operadores Bosônicos

Como vimos, a quantização do campo de radiação pode ser realizada substituindo os coeficientes (complexos) da expansão dos modos pelos operadores criação e aniquilação de fótons bosônicos. Antes de considerar expressões matemáticas envolvendo esses operadores, revisamos algumas regras básicas da álgebra de operadores bosônicos [27].

Das relações de comutação (2.49), vemos que operadores pertencentes a modos diferentes ($\lambda \neq \lambda'$) comutam. Podemos, portanto, restringir nossa atenção a funções de operadores mono-modos $F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)$ onde, por simplicidade, omitiremos o índice do modo (\mathbf{k}, λ) .

Relações de Comutação

Apresentamos as relações de comutação entre os operadores \mathbf{a} e \mathbf{a}^\dagger com uma função desses operadores dada por $F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)] &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^\dagger} F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger), \\ [F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger), \mathbf{a}^\dagger] &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Operador Ordenamento Normal e Anti-normal

O ordenamento de operadores representa um importante papel em óptica quântica. Neste contexto é útil, em certos casos, construir funções de operadores com um ordenamento pré-determinado. Denotamos o operador ordenamento normal pelo símbolo \mathcal{N} ou pela notação $::$ que indica, por exemplo, que o ordenamento dos operadores \mathbf{a} e \mathbf{a}^\dagger deve ser tal que \mathbf{a}^\dagger esteja a esquerda de \mathbf{a} ,

$$\mathcal{N}F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger) = F^{(n)}(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger) = ::F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)::, \quad (2.71)$$

ou seja, o operador \mathcal{N} é cíclico.

Funções de operadores ordenados normalmente satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} ::[F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger) + G(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)]:: &= ::F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger):: + ::G(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)::, \\ ::cF(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger):: &= c ::F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)::, \\ ::F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)G(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger):: &= ::G(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)::, \end{aligned} \quad (2.72)$$

no qual “ c ”, como já dissemos, é um c -number. Podemos escrever uma relação entre $F^{(n)}(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)$ e $F(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)$ dada por

$$F^{(n)}(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger) = ::F\left(\mathbf{a} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^\dagger}, \mathbf{a}^\dagger\right):: . \quad (2.73)$$

Note que para o caso de operadores de ordenamento anti-normal, as relações são bastante semelhantes. Indicamos este tipo de ordenamento pelo símbolo \mathcal{A} ou pela notação $\dagger\dagger$ que indica,

por exemplo, que o ordenamento dos operadores a e a^\dagger deve ser tal que a^\dagger esteja a direita de a ,

$$\mathcal{A}F(a, a^\dagger) = F^{(a)}(a, a^\dagger) = \ddagger F(a, a^\dagger) \ddagger. \quad (2.74)$$

Assim como \mathcal{N} , o operador \mathcal{A} também é cíclico e satisfaz propriedades semelhantes a (2.72). Analogamente a (2.73), também teremos a relação

$$F^{(a)}(a, a^\dagger) = \ddagger F\left(a, a^\dagger - \frac{\partial}{\partial a}\right) \ddagger. \quad (2.75)$$

Relação de *Baker-Campbell-Hausdorff*

Apresentamos agora uma relação bastante útil na álgebra de operadores bosônicos. Considerando dois operadores A e B tal que

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0, \quad (2.76)$$

obtemos as expressões

$$\begin{aligned} e^{cA} B e^{-cA} &= B + c[A, B], \\ e^{c(A+B)} &= e^{cA} e^{cB} e^{-\frac{c^2}{2}[A, B]} = e^{cB} e^{cA} e^{\frac{c^2}{2}[A, B]}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

No caso geral quando

$$\begin{aligned} [A, B] &\neq 0, \\ [A, [A, B]] &= [B, [A, B]] \neq 0, \\ [A, [A, [A, B]]] &= [B, [B, [A, B]]] \neq 0, \end{aligned} \quad (2.78)$$

e assim por diante, podemos escrever a relação de *Baker-Campbell-Hausdorff* generalizada

$$e^{cA} B e^{-cA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [cA, \cdot]^n B = e^{[cA, \cdot]} B, \quad (2.79)$$

em que usamos a notação de super-operadores

$$\begin{aligned} [A, \cdot] B &= [A, B], \\ [A, \cdot]^2 B &= [A, \cdot]([A, \cdot] B) = [A, \cdot][A, B] = [A, [A, B]], \\ [A, \cdot]^0 B &= B. \end{aligned} \quad (2.80)$$

2.2.4 Propriedades do Campo Quantizado

Apresentamos algumas das inúmeras propriedades do campo de radiação que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Começamos com uma definição da distribuição de número de fótons, a qual pode ser usada para definir quaisquer estados do campo quantizado, assim como o número médio de fótons e respectiva variância. Em seguida fazemos uma breve discussão sobre correlação quântica, com o intuito de melhor caracterizar os estados do campo a serem apresentados em seguida. Selecionamos aqueles estados que representam um papel especial em óptica quântica: estado de Fock (número), estado coerente, estado coerente comprimido, estado de número deslocado, estado binomial, estado térmico, mistura estatística de dois estados coerentes e estado “gato” de *Schrödinger*.

Distribuição de Número de Fótons

Uma maneira de caracterizar um estado arbitrário do campo eletromagnético (a partir de seu operador densidade ρ_f), é obtida através da projeção do estado do campo na base de estado de número (Fock), já definida anteriormente:

$$P_n = \langle n | \rho_f | n \rangle. \quad (2.81)$$

Observamos que esta equação denota a probabilidade de se encontrar n fótons no campo (descrito por ρ_f), e é denominada de distribuição de número de fótons. Está claro, de (2.81), que P_n retém apenas certas informações a respeito do operador densidade do campo, visto que possui apenas elementos diagonais na base de estado de número. Contudo, é uma relação bastante usada para a representação do estado do campo de radiação.

Parâmetro Q de Mandel

A teoria quântica da coerência óptica, basicamente introduzida por *Glauber* [28], foi construída de modo a manter a semelhança ao seu análogo clássico. Uma maneira conveniente de descrever a coerência quântica (de segunda ordem) é dada pelo parâmetro Q de *Mandel*

$$Q \equiv \frac{\langle \Delta n^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}. \quad (2.82)$$

Vemos que, para $Q = 0$, $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle$, característico de uma distribuição Poissoniana. Para um estado cujo parâmetro de Mandel é maior que 0,[§] sua distribuição é denominada super-Poissoniana. Se $-1 \leq Q \leq 0$, a estatística de fótons do estado do campo é denominada sub-Poissoniana. O domínio no qual o estado do campo é sub-Poissoniano, é um domínio exclusivo de estados quânticos. Assim, um parâmetro Q negativo é um forte indicativo acerca da natureza quântica do estado do campo.

Estado de Número $|n\rangle$

Como já definido, o estado de número, denotado por $|n\rangle$, é um auto-estado do Hamiltoniano do campo de radiação obtido do estado de vácuo $|0\rangle$,

$$|n\rangle = \frac{\mathbf{a}^\dagger}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.83)$$

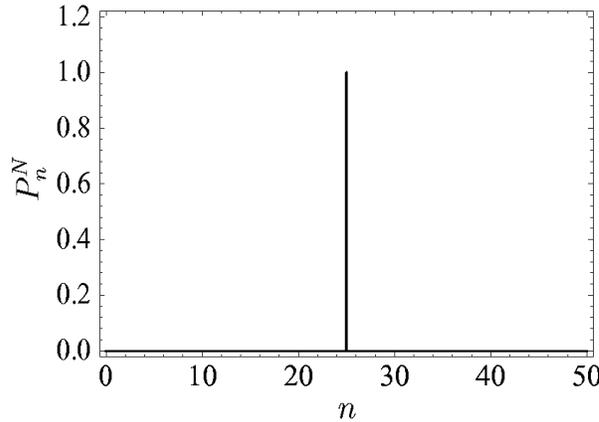


Figura 2.1: Distribuição de número de fótons para o estado de número com $n = 25$.

Os estados de número constituem uma base ortonormal no espaço de *Hilbert*, obedecendo as relações de ortogonalidade e completudeza:

$$\begin{aligned} \langle n|m \rangle &= \delta_{n,m}, \\ \sum_n |n\rangle \langle n| &= \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

O operador densidade para este estado é escrito como

$$\rho_N = |m\rangle \langle m|. \quad (2.85)$$

Usando a relação (2.81), o estado de número pode ser também representado pela distribuição de número de fótons

$$P_n^N = |\langle n|m \rangle|^2 = \delta_{n,m}, \quad (2.86)$$

[§]Variância no número de fótons maior que o número médio de fótons.

isto é, a distribuição é uma delta de *Kronecker* centrada em n . Portanto, o número médio de fótons não se altera e a variância é nula:

$$\begin{aligned}\langle n \rangle_N &= n, \\ \langle \Delta n^2 \rangle_N &= \langle n^2 \rangle_N - \langle n \rangle_N^2 = 0,\end{aligned}\tag{2.87}$$

Apesar do estado de número ser obtido naturalmente do formalismo quântico, não se pode relacioná-lo diretamente com a “luz clássica”. Isto faz com que o estado de número seja único, sendo fundamental na teoria quântica e, talvez, sem um análogo clássico (estado altamente não-clássico). O parâmetro Q de *Mandel* para o estado de número é $Q = -1$, ou seja, este é o estado mais sub-Poissonianos que se pode construir.

Estado Coerente $|\alpha\rangle$

Estados quânticos cujos valores esperados são quase idênticos aos obtidos no eletromagnetismo clássico existem. Tais estados são superposições lineares coerentes dos estados $|n\rangle$, denominados estados *quasi*-clássicos, primeiramente introduzidos por *Schrödinger* [29] no caso do oscilador harmônico. Após o trabalho de *Glauber* [28], o denominado estado coerente do campo eletromagnético passou a ser extensivamente utilizado em óptica quântica.

Os estados coerentes (com amplitude complexa) $|\alpha\rangle = ||\alpha|e^{i\phi}\rangle$, são auto-estados do operador aniquilação de fótons a com autovalor α , isto é,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.\tag{2.88}$$

Esta definição permite expandir o estado coerente na base de estado de número [20]:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.\tag{2.89}$$

Desta relação e de (2.83), podemos gerar o estado coerente através da aplicação do operador deslocamento de *Glauber* [28],

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle,\tag{2.90}$$

$$D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}.\tag{2.91}$$

Usando a expressão acima, podemos obter, por exemplo

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha^* \beta} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2 - \alpha \beta^*},\tag{2.92}$$

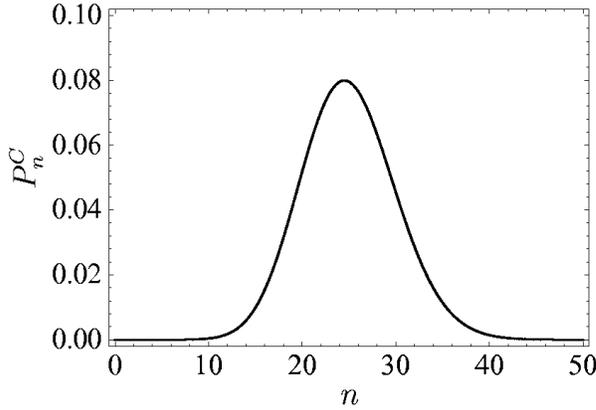


Figura 2.2: Distribuição de número de fótons para o estado coerente com $|\alpha|^2 = 25$.

que significa que os estados coerentes são normalizados, $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$, mas não ortogonais.

Contudo, se os valores de α e β são tais que $|\alpha - \beta| \gg 1$, podemos considerá-los como sendo aproximadamente ortogonais. Portanto, o operador identidade pode ser expresso em termos dos estados coerentes através da relação de completude

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbf{I}, \quad (2.93)$$

onde $d^2\alpha = d\Re(\alpha)d\Im(\alpha)$.

O operador densidade para o estado coerente é escrito como

$$\rho_C = |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (2.94)$$

Da relação (2.81), obtém-se a distribuição de número de fótons para o estado coerente

$$P_n^C = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (2.95)$$

que é exatamente uma distribuição de *Poisson*. Para o estado coerente, tanto o número médio de fótons como a sua variância são iguais a $|\alpha|^2$, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n} \rangle_C &= |\alpha|^2, \\ \langle \Delta \mathbf{n}^2 \rangle_C &= \langle \mathbf{n}^2 \rangle_C - \langle \mathbf{n} \rangle_C^2 = |\alpha|^2, \end{aligned} \quad (2.96)$$

o que significa que o estado coerente é o estado quântico com características mais próximas das encontradas para um estado clássico, com parâmetro de *Mandel* nulo ($Q = 0$).

Este estado quântico do campo eletromagnético é muito importante em óptica quântica e, de fato, um *laser* mono-modo operando acima do limiar, aproximadamente, produz um estado coerente [18].

Estado de Número Deslocado $|\alpha, m\rangle$

A idéia de estado de número deslocado foi inicialmente lançada nos trabalhos de *Cahill* e *Glauber* [30,31] em 1969. Contudo, não foi associado por eles a um estado de interesse intrínseco. Somente em 1990, as propriedades desse estado foram analisadas fisicamente [32].

O estado de número deslocado é obtido aplicando-se o operador deslocamento de *Glauber* no estado de número,

$$|\alpha, m\rangle = \mathbf{D}(\alpha)|m\rangle = e^{(\alpha\mathbf{a}^\dagger - \alpha^*\mathbf{a})}|m\rangle, \quad (2.97)$$

que, para $m = 0$, se reduz ao estado coerente e para $\alpha = 0$, se reduz ao estado de número, como esperado. Desta definição, podemos expandir o estado de número deslocado em termos dos estados de número,

$$|\alpha, m\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{m!}{n!}} \alpha^{n-m} \mathcal{L}_m^{(n-m)}(|\alpha|^2)|n\rangle, \quad (2.98)$$

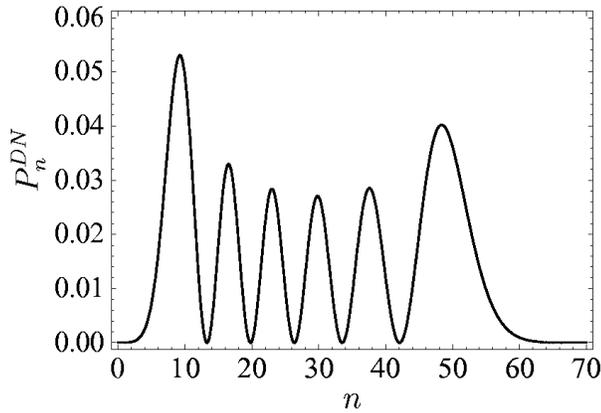


Figura 2.3: Distribuição de número de fótons para o estado de número deslocado com $|\alpha|^2 = 25$ e $n = 5$.

sendo $\mathcal{L}_m^{(n-m)}(|\alpha|^2)$ os polinômios de *Laguerre* associados de ordem m . Estes estados constituem uma base ortonormal no espaço de *Hilbert* e obedecem as seguintes relações de ortogonalidade e completeza:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, n | \alpha, m \rangle &= \delta_{n,m}, \\ \sum_n |\alpha, n\rangle \langle \alpha, n| &= \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

O operador densidade para este estado é dado por

$$\rho_{DN} = |\alpha, m\rangle \langle \alpha, m|. \quad (2.100)$$

Usando a relação (2.81), temos a distribuição de número de fótons do estado de número deslocado,

$$P_n^{DN} = |\langle n | \alpha, m \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(n-m)} \frac{m!}{n!} [\mathcal{L}_m^{(n-m)}(|\alpha|^2)]^2,$$

no qual utilizamos a relação [33]

$$\langle n | \mathbf{D}(\alpha) | m \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sqrt{\frac{m!}{n!}} \alpha^{n-m} \mathcal{L}_m^{(n-m)}(|\alpha|^2) \quad (2.101)$$

para $n \geq m$. Ao considerarmos o caso $n \leq m$, temos que

$$\langle n | \mathbf{D}(\alpha) | m \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sqrt{\frac{n!}{m!}} (-\alpha^*)^{m-n} \mathcal{L}_n^{(m-n)}(|\alpha|^2) \quad (2.102)$$

e a distribuição P_n^{DN} adquire o seguinte aspecto:

$$P_n^{DN} = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(m-n)} \frac{n!}{m!} [\mathcal{L}_n^{(m-n)}(|\alpha|^2)]^2.$$

Para o estado de número deslocado temos que o número médio de fótons e a respectiva variância são dados por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n} \rangle_{DN} &= n + |\alpha|^2, \\ \langle \Delta \mathbf{n}^2 \rangle_{DN} &= \langle \mathbf{n}^2 \rangle_{DN} - \langle \mathbf{n} \rangle_{DN}^2 = (2n + 1)|\alpha|^2, \end{aligned} \quad (2.103)$$

sendo sempre maiores que os correspondentes para os estados de número e coerente. Analisando o parâmetro Q de *Mandel*, podemos observar que o estado de número deslocado apresenta estatística de fótons sub-Poissoniana se $|\alpha|^2 < \frac{1}{2}$, ou seja, se a contribuição do estado coerente adiciona mais que a metade de um fóton ao número médio de fótons; o estado de número deslocado é super-Poissoniano ($Q > 0$), independente do número inicial de fótons.

Estado Coerente Comprimido $|\alpha, \xi\rangle$

Este estado foi introduzido primeiramente por *Takahashi* [34] e denominado de estado comprimido no trabalho de *Hollenhorst* [35] sendo, desde então, de grande importância em óptica quântica.

O estado coerente comprimido é obtido através da aplicação do operador compressão $S(\xi)$ seguida da aplicação do operador deslocamento de *Glauber* [36] $D(\alpha)$ no estado de vácuo $|0\rangle$,

$$|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle \quad (2.104)$$

em que

$$S(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi \mathbf{a}^{\dagger 2} - \xi^* \mathbf{a}^2)}. \quad (2.105)$$

Uma definição equivalente a esta foi introduzida por *Yuen* [37] e denominado de estado coerente de dois fótons $|\beta; \mu, \nu\rangle$, o qual é auto-estado do operador $\mathbf{b} = \mu \mathbf{a} + \nu \mathbf{a}^\dagger$ com auto-valor β :

$$(\mu \mathbf{a} + \nu \mathbf{a}^\dagger)|\beta; \mu, \nu\rangle = \beta|\beta; \mu, \nu\rangle, \quad (2.106)$$

sendo $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$.

O estado coerente de dois fótons difere do estado coerente comprimido na ordem de aplicação de $D(\beta)$ (primeiro) e $S(\xi)$ no estado de vácuo

$$|\beta; \mu, \nu\rangle = S(\xi)D(\beta)|0\rangle. \quad (2.107)$$

O número complexo arbitrário $\xi = re^{i\theta}$ é o denominado parâmetro de compressão. Os parâmetros nas duas notações acima estão relacionados por

$$\begin{aligned} \beta &= \mu\alpha + \nu\alpha^*, \\ \mu &= \cosh r, \\ \nu &= e^{i\theta} \sinh r, \end{aligned} \quad (2.108)$$

e o uso de uma ou de outra definição depende da conveniência para cada problema.

A expansão do estado coerente comprimido em termos dos estados de número é dada por

$$|\alpha, \xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (n!\mu)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\mu}(\mu|\alpha|^2 + \nu\alpha^2)} \mathcal{H}_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right) |n\rangle, \quad (2.109)$$

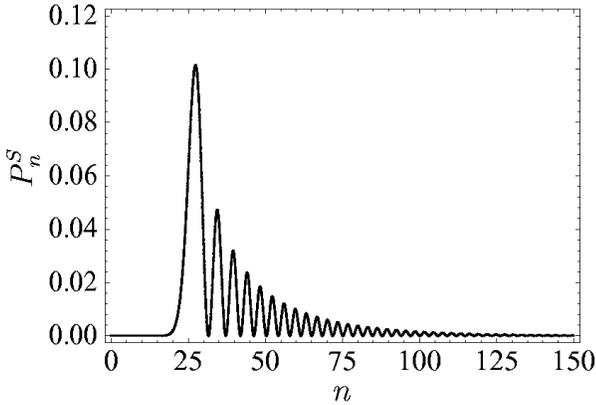


Figura 2.4: Distribuição de número de fótons para o estado coerente comprimido com $|\alpha|^2 = 25$ e $\xi = 2$.

sendo $\mathcal{H}_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right)$ os polinômios de *Hermite* de ordem n [38]. Estes estados constituem uma base ortonormal no espaço de *Hilbert* e obedecem as seguintes relações de ortogonalidade e completudeza:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \xi | \alpha, \xi \rangle &= 1, \\ \sum_n |\alpha, \xi\rangle \langle \alpha, \xi| &= \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

O operador densidade para este estado é dado por:

$$\rho_S = |\alpha, \xi\rangle \langle \alpha, \xi|. \quad (2.111)$$

Usando a relação (2.81), a distribuição de número de fótons do estado coerente comprimido pode ser escrita como

$$P_n^S = |\langle n | \alpha, \xi \rangle|^2 = (n!\mu)^{-1} \left(\frac{|\nu|}{2\mu}\right)^n e^{-|\alpha|^2 - \frac{1}{2\mu}(\nu^*\alpha^2 + \nu\alpha^{*2})} \left| \mathcal{H}_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right) \right|^2. \quad (2.112)$$

Um estado particularmente interessante é o estado de vácuo comprimido $|0, \xi\rangle$, ou seja, um estado comprimido com amplitude coerente nula. A distribuição de número de fótons em (2.112), então, torna-se

$$P_n^{SV} = \begin{cases} \frac{(2n)!}{(n!)^2 \mu} \left(\frac{|\nu|}{2\mu}\right)^{2n} & (n = 2m), \\ 0 & (n = 2m + 1). \end{cases} \quad (2.113)$$

Observamos então que o estado de vácuo comprimido apresenta apenas número de fótons pares.

Usando algumas das propriedades dos operadores deslocamento e compressão, podemos calcular o número médio de fótons e a variância no número médio de fótons para este estado, obtendo

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_S &= |\alpha|^2 + |\nu|^2, \\ \langle \Delta n^2 \rangle_S &= \langle n^2 \rangle_S - \langle n \rangle_S^2 = |\beta|^2 + 2|\nu|^2 \mu^2. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Pode se observar que mesmo para a amplitude coerente nula, tanto o número médio de fótons ($|\nu|^2$) como a variância no número médio de fótons ($2|\nu|^2 \mu^2$) são diferentes de zero.

O estado coerente comprimido apresenta complicadas correlações de segunda ordem, sendo super-Poissoniano ($Q > 0$), Poissoniano ($Q = 0$) e sub-Poissoniano ($1 \leq Q < 0$), dependendo dos valores de r e α . Além disso, possui ruído associado abaixo do limite de vácuo, sendo este o motivo de ser um estado particularmente atraente a aplicações em comunicações ópticas.

Estado Binomial $|p, M\rangle$

O estado binomial (mono-modo) do campo eletromagnético consiste numa combinação linear (finita) de estados de número $|n\rangle$ ponderados por uma distribuição binomial [39]. Este estado pode

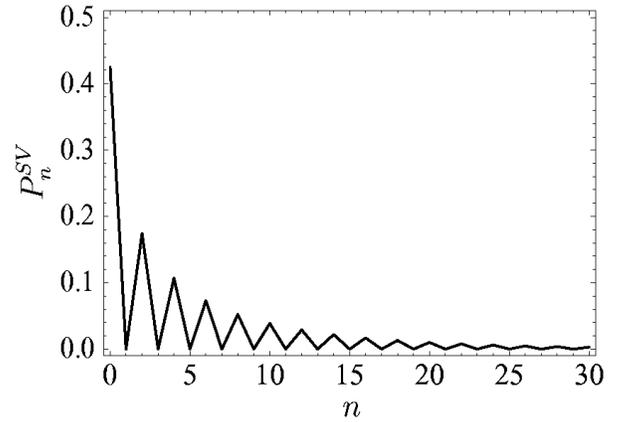


Figura 2.5: Distribuição de número de fótons para o estado de vácuo comprimido com $\xi = 1.5$.

ser expandido na base de *Fock* como segue [40, 41]:

$$|p, M\rangle = \sum_{n=0}^M \left[\frac{M!}{n!(M-n)!} p^n (1-p)^{M-n} \right]^{\frac{1}{2}} |n\rangle. \quad (2.115)$$

O estado binomial do campo quantizado é tal que existe um máximo de M fótons, sendo que cada um tem uma probabilidade de ocorrência característica p . Variando continuamente p e também M , é possível interpolar entre o estado coerente $|\alpha\rangle$ (α real), obtido no limite de $p \rightarrow 0$ e $M \rightarrow \infty$ (mantendo o produto $pM = \alpha^2$ constante), e o estado de número $|M\rangle$, obtido quando $p = 1$.

Podemos construir as relações de ortogonalidade e completeza para este estado da seguinte forma [40]:

$$\langle p, M | q, M \rangle = \sum_{n=0}^M \frac{M!}{n!(M-n)!} (pq)^{\frac{n}{2}} [p(1-p)]^{\frac{(M-n)}{2}} = \left[\sqrt{pq} + \sqrt{p(1-p)} \right]^M, \quad (2.116)$$

$$\sum_{n=0}^M |p, M\rangle \langle p, M| = \mathbf{I}.$$

Se $p = q$, temos que $\langle q, M | q, M \rangle = 1$, ou seja, os estados são normalizados. Para outros valores, p e q não serão normalizados.

O operador densidade para este estado é dado por

$$\rho_B = |p, M\rangle \langle p, M|. \quad (2.117)$$

Assim, podemos escrever a sua distribuição de número de fótons, usando (2.81), como

$$P_n^B = |\langle n | p, M \rangle|^2 = \frac{M!}{n!(M-n)!} p^n (1-p)^{M-n}, \quad (2.118)$$

que é a probabilidade de ocorrência de n fótons, cada um com probabilidade p , havendo M maneiras independentes de fazer isso. É interessante notar que existe um número máximo permitido para o número de fótons (M), ou seja, $P_n^B = 0$ para $n > M$. De (2.118), para um dado M (finito) e

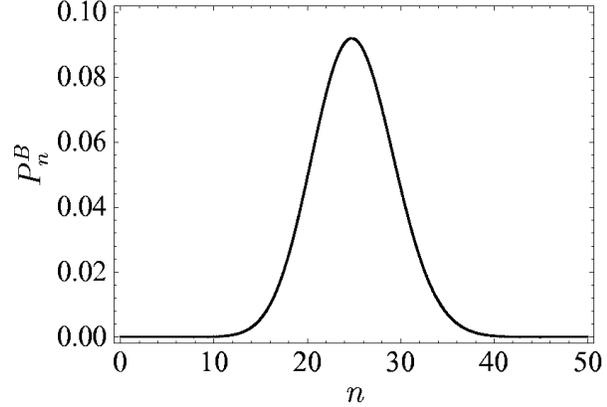


Figura 2.6: Distribuição de número de fótons para o estado binomial com $p = 0.25$ e $M = 100$.

$p = 0$, temos o estado de vácuo $|0\rangle$; por outro lado, se $p = 1$, recuperamos o estado de número $|M\rangle$. Ainda, no limite $p \rightarrow 0$ e $M \rightarrow \infty$, mas com $pM = \alpha^2$ constante (como já mencionado), teremos o estado coerente (real) $|\alpha\rangle$ [40].

Podemos imediatamente observar que o número médio de fótons e a variância para o estado binomial são dados por:

$$\begin{aligned}\langle n \rangle_B &= pM, \\ \langle \Delta n^2 \rangle_B &= \langle n^2 \rangle_B - \langle n \rangle_B^2 = pM(1-p).\end{aligned}\tag{2.119}$$

Analisando o parâmetro Q de Mandel para este estado, temos $Q = -p$. Assim, o estado binomial, é intrinsecamente sub-Poissonian para qualquer valor de p , exceto no limite do estado coerente (inclusive o estado de vácuo, $p = 0$), sendo independente de M . O caso extremo de caráter sub-Poissonian deste estado é o estado de número, para o qual $p = 1$ [40].

Estado Térmico ρ_T

Até agora, apresentamos estados quânticos puros do campo eletromagnético. Contudo temos bastante familiaridade com uma classe de campo de radiação proveniente de fontes como o Sol, lâmpadas, etc., denominado estado térmico ou caótico.

De fato, a teoria quântica foi fundamentada em problemas concernentes à luz térmica, sendo parcialmente resolvidos por Planck em 1900. A luz térmica foi o primeiro estado do campo de radiação eletromagnético a ser quantizado, originando a teoria quântica.

O estado térmico consiste de um estado de mistura estatística e, portanto, não pode ser descrito por um vetor de estado normalizado $|\psi\rangle$ requerindo, assim, o uso do formalismo do operador densidade ρ_T para sua representação. Para um campo mono-modo, o operador densidade para um campo térmico de uma cavidade mantida a uma temperatura T pode ser expresso

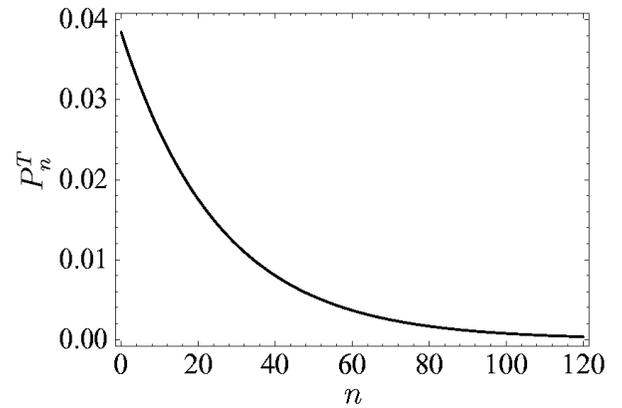


Figura 2.7: Distribuição de número de fótons para o estado térmico com $\langle n \rangle = 25$.

em termos dos estados de número como segue [42]:

$$\rho_T = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^T |n\rangle\langle n|, \quad (2.120)$$

sendo

$$P_n^T = \frac{\langle \mathbf{n} \rangle_T^n}{(1 + \langle \mathbf{n} \rangle_T)^{n+1}} \quad (2.121)$$

a distribuição de número de fótons para o estado térmico do campo, com

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n} \rangle_T &= \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}, \\ \langle \Delta \mathbf{n}^2 \rangle_T &= \langle \mathbf{n}^2 \rangle_T - \langle \mathbf{n} \rangle_T^2 = \langle \mathbf{n} \rangle_T (\langle \mathbf{n} \rangle_T + 1). \end{aligned} \quad (2.122)$$

A distribuição de número de fótons acima tem a mesma forma (a menos dos zeros) da distribuição obtida para o estado de vácuo comprimido (**Figura 2.5**). O parâmetro Q de *Mandel* para o estado térmico é sempre maior que zero, ou seja, este estado tem uma estatística de fótons super-Poissoniana [42].

Estado “Gato” de *Schrödinger* $|\alpha; \vartheta\rangle$

Do princípio da superposição da mecânica quântica [20], é de se esperar efeitos interessantes devido a interferência característica de superposições de estados quânticos quando comparadas ao correspondente clássico.

Particularmente interessantes são as superposições de estados coerentes [42], devido ao problema do “gato” de *Schrödinger*, isto é, a possibilidade de produzir superposições quânticas macroscopicamente distinguíveis, uma vez que tais estados são *quasi*-clássicos.

Podemos descrever uma classe de estados do tipo “gato” de *Schrödinger* (superposição de apenas dois estados coerentes), usando a notação compacta abaixo:

$$|\alpha; \vartheta\rangle = \mathcal{C}^{\frac{1}{2}} (|\alpha\rangle + e^{i\vartheta} |-\alpha\rangle), \quad (2.123)$$

no qual

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} (1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \vartheta)^{-1}. \quad (2.124)$$

A expansão deste estado na base de estado de número é dada por

$$|\alpha; \vartheta\rangle = \mathcal{C}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n e^{i\vartheta}] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.125)$$

Se $\vartheta = 0$, temos o denominado estado “gato” de *Schrödinger* “par”. Para $\vartheta = \pi$, temos o denominado estado “gato” de *Schrödinger* “ímpar”. Quando $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, teremos o denominado estado coerente de *Yurke-Stoler* [14].

Podemos notar que o estado na equação (2.123) é um auto-estado do quadrado do operador aniquilação de fótons,

$$\mathbf{a}^2 |\alpha; \vartheta\rangle = \alpha^2 |\alpha; \vartheta\rangle. \quad (2.126)$$

O estado $|\alpha; \vartheta\rangle$ é uma superposição de dois estados coerentes com a mesma intensidade $|\alpha|^2$, mas com uma diferença de fase igual a π ($\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ e $-\alpha = |\alpha|e^{i(\phi+\pi)}$).

Em contraste com a superposição quântica de estados coerentes, é possível obter misturas estatísticas (clássicas) de estados quânticos. Considerando que existe uma probabilidade p_+ de numa medida encontrar o estado $|\alpha\rangle$ e uma probabilidade p_- de encontrar o estado $|\alpha\rangle$, tal que $p_+ + p_- = 1$, podemos descrever o estado do sistema pelo seguinte operador densidade [42]:

$$\rho_{mix} = p_+ |\alpha\rangle\langle\alpha| + p_- |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (2.127)$$

O formalismo do operador densidade permite uma representação unificada dos estados de superposição quântica e de mistura estatística. O operador densidade para o estado “gato” de *Schrödinger* em (2.123) é dado por

$$\rho_{SC} = |\alpha; \vartheta\rangle\langle\alpha; \vartheta| = \mathcal{C} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha\rangle\langle\alpha| + e^{i\vartheta} |\alpha\rangle\langle\alpha| + e^{-i\vartheta} |\alpha\rangle\langle\alpha|), \quad (2.128)$$

no qual \mathcal{C} é a constante de normalização na equação (2.123).

Analisando o operador densidade da mistura estatística de estados coerentes (2.127), podemos facilmente observar que a distribuição de número de fótons é exatamente uma distribuição de *Poisson* $P_n^{mix} = e^{-\alpha^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!}$, conforme obtido para o estado coerente (**Figura 2.2**), mostrando a grande similaridade entre esses dois estados. Para o estado de superposição, entretanto, a situação é bastante diferente. A distribuição de número de fótons é facilmente calculada do operador densidade (2.128) e (2.81),

$$P_n^{SC} = |\langle n|\alpha; \vartheta\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!(1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \vartheta)}, \quad (2.129)$$

com o respectivo número médio de fótons

$$\langle n \rangle_{SC} = |\alpha|^2 \frac{1 - e^{-2|\alpha|^2} \cos \vartheta}{1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \vartheta}. \quad (2.130)$$

Fazendo $\vartheta = 0$, o estado “gato” de *Schrödinger* “par” apresenta uma probabilidade não nula de ter número par de fótons e nula de ter número ímpar de fótons; o contrário é observado quando $\vartheta = \pi$ (“gato” de *Schrödinger* “ímpar”). No entanto, para o estado coerente de *Yurke-Stoler*, que é um estado coerente transformado unitariamente, a distribuição de número de fótons permanece Poissoniana, sem qualquer oscilação [42].

O parâmetro Q de *Mandel* para a mistura estatística de estados coerentes é nulo, isto é, este estado exibe estatística Poissoniana. Para os estados “gato” de *Schrödinger* par e ímpar temos

$$Q_{\text{par(ímpar)}} = (-) \frac{4|\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2}}{1 - e^{-4|\alpha|^2}} > (<) 0, \quad (2.131)$$

ou seja, o estado de superposição par (ímpar) exibe estatística de fótons super(sub)-Poissoniana e o estado de *Yurke-Stoler*, estatística de fótons Poissoniana $Q = 0$.

A descrição estatística de um sistema microscópico é usualmente feita em termos do formalismo de operador densidade ρ . Contudo, a dificuldade de se ter uma descrição única da mecânica quântica no espaço de fase similar à mecânica clássica reside nas relações de comutação (2.45), ou seja, devido a estas grandezas serem operadores que não comutam.

Para um sistema físico, existe uma família de funções associadas aos *c-numbers*, devido a diferentes possibilidades de ordenamento de operadores na teoria quântica. Além disso, a interpretação de alguns estados quânticos através de uma distribuição de probabilidade positivo-definida não é possível, sendo necessário recorrer às denominadas funções de *quasi*-probabilidades, que são representações dos estados quânticos na base de estados coerentes $|\alpha\rangle$, conforme abordado no **Apêndice A**.

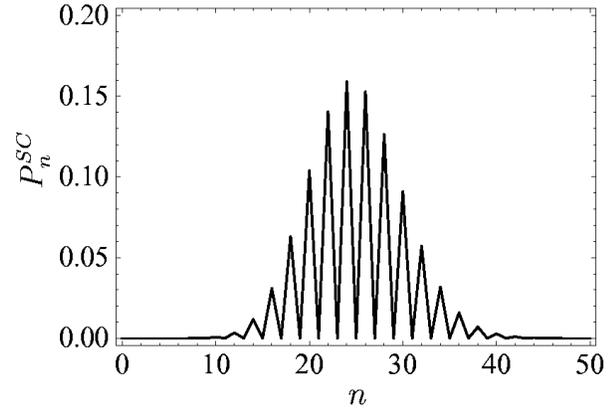


Figura 2.8: Distribuição de número de fótons para o estado de superposição coerente “par” com $|\alpha|^2 = 25$.

Operador Fase do Campo

A fase representa um importante papel em óptica clássica sendo crucial na explicação de fenômenos básicos, tais como interferência e difração. A fase é experimentalmente significativa em técnicas de formação de imagens, tais como ressonância magnética, holografia óptica e combinação de fase, além de interferometria *laser*. Portanto, métodos de medida e reconstrução da fase são direções importantes na óptica clássica. Os métodos mais eficientes de medida de fase são os de detecção homódina e heteródina [43].

A representação clássica da fase está baseada na consideração de fortes campos ópticos reproduzidos através de *lasers*, sendo drasticamente alterada quando se considera feixes ópticos de baixa intensidade. Neste caso, as propriedades estatísticas quânticas dos campos são essenciais para a sua completa descrição. Tal descrição pode ser representada convenientemente no espaço de fase.

A dificuldade com a definição da fase quântica de campos ópticos extremamente fracos está na multiplicidade de conceitos de fase quântica existentes. A fase quântica canônica consiste numa definição de distribuição de fase, porém persiste a não existência de um operador fase Hermitiano. Apenas o ordenamento anti-normal dos operadores do campo a e a^\dagger produz a distribuição de fase (conveniente) esperada.

Pode-se dizer que qualquer conceito de fase quântica está associado a um operador fase Hermitiano. *Pegg e Barnett* [44] demonstraram que um parâmetro pode ser introduzido a fim de se obter uma seqüência de operadores fase Hermitianos, recuperando a distribuição de fase canônica

após tender o parâmetro ao infinito. Cada um dos conceitos de fase quântica surgiu de uma análise de esquemas experimentais úteis para a medida da fase quântica.

Todos esses conceitos são úteis na interpretação de medidas dependentes da fase em mecânica quântica. Em particular, são apropriados para interferometria quântica, proporcionando novas informações experimentais e teóricas sobre as trajetórias de fótons e visibilidade de franjas de interferência, possibilidade de restauração (apagador óptico), fenômenos de interferência de dois fótons, comportamento dual de um único fóton, não-localidade de sistemas quânticos e correlações *Einstein-Podolsky-Rosen* e suas aplicações em criptografia quântica, comunicações quânticas e com-putação quântica.

Aplicações importantes são obtidas em medidas de não-demolição quântica (QND), uma vez que o ruído quântico que surge na medida está relacionado a observável conjugada. Assim, um tipo de engenharia de ruído quântico pode ser capaz de manipulá-lo. Diferentes maneiras interessantes de se medir a fase quântica são obtidas usando processos ópticos não-lineares.

Mas a fase quântica é, de fato, uma quantidade observável? Podemos medir a fase? Certamente, todas as medidas de interferência e padrões de interferência dependem da fase do sinal (em relação a uma certa referência). Na óptica clássica, a fase ϕ é apenas o argumento da amplitude de onda complexa α , tal que $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$. Contudo, na óptica quântica, tanto a fase “ ϕ ” como a amplitude “ $|\alpha|$ ” flutuam, e, desafortunadamente, não podemos separar claramente a fase e o ruído da intensidade. Apenas uma grande amplitude faz com que o ruído na intensidade torne-se desprezível comparado com a própria intensidade e, então, poderemos medir a fase precisamente. De nossa intuição a respeito da natureza quântica da fase, podemos esperar que seja complementar ao número de fótons. Conseqüentemente, medidas de fase não podem ser realizadas com perfeita exatidão.

Muitos desses resultados têm sido abordados em livros recentes [21, 26, 45, 46, 47] e em artigos de revisão [43, 44, 48, 49].

3.1 Fase Clássica

Em suas engenhosas investigações, *Planck* e *Einstein* consideraram a hipótese de níveis discretos de energia de acordo com a condição de quantização de *Bohr-Sommerfeld*. Como essa “antiga”

teoria se apoiou no conceito clássico do espaço de fase, abordaremos os pontos que se relacionam com o problema da fase na mecânica quântica.

Um sistema mecânico de um único grau de liberdade é completamente especificado em qualquer tempo t pelas coordenadas generalizadas q e p . Assim, o estado do sistema é dado por um ponto (q, p) no espaço de fase. A mecânica clássica responde como este ponto se move no espaço de fase. As equações de *Hamilton* canônicas descrevem este movimento e as duas variáveis q e p são denominadas variáveis canônicas,

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(q, p, t)$ é uma dada Hamiltoniana. Uma expressão importante é o parênteses de *Poisson* $\{A, B\}$ das variáveis dinâmicas $A(q, p)$ e $B(q, p)$ dado por

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}. \quad (3.2)$$

De acordo com o princípio da correspondência de *Bohr* podemos introduzir o comutador clássico

$$[A, B] = i\hbar\{A, B\} \quad (3.3)$$

no qual \hbar não pertence propriamente a mecânica clássica. Como um caso particular, mencionamos o parênteses $\{q, p\} = 1$. Nesta notação, as equações canônicas de *Hamilton* podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \{q, \mathcal{H}\} \\ \dot{p} &= \{p, \mathcal{H}\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

e de uma forma mais geral, $\dot{V} = \{V, \mathcal{H}\}$, ou seja, a variável V não tem dependência explícita de t .

Ilustraremos o conceito particularmente útil das denominadas variável ação e variável ângulo. A variável ação J é definida sobre cada contorno de nível de energia

$$J = \oint dq p, \quad (3.5)$$

calculada sobre um ciclo completo de variação de q . Para facilitar o entendimento, definimos a variável ângulo como $\varphi = \frac{1}{2\pi}\omega t$, em que ω é a frequência do movimento sobre o contorno de nível

de energia no espaço de fase, tal que φ e J estão relacionadas a q e p pela transformação canônica $\{\varphi, J\} = 1$.

A Hamiltoniana de um oscilador harmônico simples unidimensional de massa unitária, pode ser obtida da relação (2.40) para um único modo do campo,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2). \quad (3.6)$$

Como a Hamiltoniana é uma constante do movimento, escolhemos seu valor de acordo com as condições $q(t)|_{t=0} > 0$ e a partícula em repouso, ou seja,

$$q(t)|_{t=0} = \frac{\sqrt{2\mathcal{H}}}{\omega} \quad \text{e} \quad p(t)|_{t=0} = 0. \quad (3.7)$$

Da relação (3.5) obtemos, então, a ação do oscilador harmônico:

$$\begin{aligned} J &= \int_{q=\frac{\sqrt{2\mathcal{H}}}{\omega}, p \leq 0}^{-\frac{\sqrt{2\mathcal{H}}}{\omega}} dq p + \int_{q=-\frac{\sqrt{2\mathcal{H}}}{\omega}, p \geq 0}^{\frac{\sqrt{2\mathcal{H}}}{\omega}} dq p \\ &= 2 \int_{-\frac{\sqrt{2\mathcal{H}}}{\omega}}^{\frac{\sqrt{2\mathcal{H}}}{\omega}} dq \sqrt{2\mathcal{H} - \omega^2 q^2} \\ &= 2\pi \frac{\mathcal{H}}{\omega}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

O movimento, inicialmente obedecendo a (3.7), agora é descrito por

$$q \equiv q(t) = \sqrt{2\mathcal{H}} \cos \omega t. \quad (3.9)$$

Usando a relação da variável ângulo $\varphi = \frac{1}{2\pi}\omega t$, podemos eliminar a dependência temporal explícita, obtendo $q = \sqrt{2\mathcal{H}} \cos \varphi = \sqrt{\frac{J}{\pi\omega}} \cos \varphi$. Reescrevendo a variável ação em termos de q e p ,

$$J = \frac{\pi}{\omega} (p^2 + \omega^2 q^2), \quad (3.10)$$

e também a variável ângulo [50]

$$\varphi = \arctan \frac{p}{\omega q}, \quad (3.11)$$

o que permite obter a variável canônica p dada por:

$$p = -\sqrt{\frac{J\omega}{\pi}} \sin \varphi. \quad (3.12)$$

Notamos que, para $\mathcal{H} = 0$, é impossível definir a variável ângulo φ .

Estas são transformações úteis que levam a uma expressão bastante simples para as variáveis ação e ângulo. Com o propósito de obter uma normalização mais conveniente que a obtida em (2.37), introduzimos a amplitude complexa

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q + ip) , \quad (3.13)$$

no qual observamos, de (3.3), que $[\alpha, \alpha^*] = 1$. Considerando a relação inversa para (3.13), obtemos a Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \hbar\omega|\alpha|^2 \quad (3.14)$$

e

$$J = 2\pi\hbar|\alpha|^2 . \quad (3.15)$$

Usando as relações (3.9) e (3.12), reescrevemos a amplitude complexa do oscilador

$$\alpha = \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} e^{-i\varphi} = |\alpha| e^{i\phi} . \quad (3.16)$$

sendo $\varphi = -\phi$.

Temos então que, classicamente, a decomposição polar é simples e não apresenta problemas. Para descrever o comportamento de um *ensemble* de osciladores de diferentes fases usamos a função de probabilidade de fase $P(\varphi)$, onde $P(\varphi) d\varphi$ é a probabilidade de encontrar a fase de um oscilador particular no domínio de φ_0 até $\varphi_0 + d\varphi$. A distribuição é normalizada num determinado intervalo 2π (arbitrário), isto é,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} d\varphi P(\varphi) = 1 . \quad (3.17)$$

Casos Extremos

Consideramos os dois casos extremos de distribuição de probabilidade. Primeiramente, uma distribuição de fase bem definida dada por $P(\varphi) = \delta(\varphi - \varphi_0)$, temos o valor médio da fase dado por

$$\langle \varphi \rangle = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} d\varphi \varphi P(\varphi) = \varphi_0 , \quad (3.18)$$

o que nos leva a obter uma variância igual a

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = \langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 = 0. \quad (3.19)$$

O caso extremo a este possui uma distribuição de fase uniforme dada por $P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$, tal que

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle &= \varphi_0 + \pi, \\ \langle \Delta\varphi^2 \rangle &= \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.2 Fase Quântica

No começo da “antiga” teoria quântica, cujos princípios foram apresentados por *Planck* e *Einstein*, a discretização dos níveis de energia foi de fundamental importância para a explicação dos novos fenômenos (não-clássicos) observados e que levaram *Heisenberg* e seus contemporâneos às suas representações da mecânica clássica e da “moderna” teoria quântica.

O princípio, um tanto filosófico, da complementaridade de *Bohr* [51] foi formalizado em termos das variáveis canonicamente conjugadas. Logo tornou-se evidente que algumas propriedades físicas existentes não podiam ser derivadas através da quantização da mecânica clássica, por exemplo, o *spin* semi-inteiro. Contudo a quantização canônica tem sido o procedimento mais relevante, embora existam procedimentos de quantização alternativos disponíveis.

Considerando que os operadores posição q e momento p são canonicamente conjugados e resultam do procedimento de quantização canônica, podemos esperar que o mesmo procedimento produza os operadores ação e ângulo. Contudo, *London* [52, 53] mostrou que isto não poderia ser obtido completamente e providenciou uma solução condescendente. Com a óptica quântica em mente, reescrevemos agora o parênteses de *Poisson* $\{\phi, J\} = 1$ na forma do comutador clássico

$$[|\alpha|^2, \phi] = i. \quad (3.21)$$

Faremos agora uma prova indireta de que a validade de (3.21) está relacionada à natureza de “múltiplo-valor” da fase. A variável fase dependente do tempo apresenta esta propriedade quando fica tão contínua quanto possível, ao contrário do tratamento estatístico e probabilístico, que requer que a fase tenha um único valor. Considerando que ϕ ostenta um único valor e fazendo $\theta = \arg \alpha$, (3.21) torna-se

$$[|\alpha|^2, \phi] = i \frac{\partial \phi}{\partial \theta}. \quad (3.22)$$

Restringindo ϕ ao intervalo $-2\pi \leq \phi < \theta_0 + 2\pi$, integramos a equação (3.21) encontrando $0 = \pm 2\pi i$, o que representa uma contradição. De fato, os vários valores permitidos para a fase aumentam ou diminuem de 2π , dependendo do sentido horário ou anti-horário da integração.

Uma escolha comum de θ_0 pode ser 0 ou $-\pi$, porém preservamos aqui o caso geral arbitrário θ_0 . Denotamos essa escolha de domínio adicionando o subscrito θ a ϕ . Assim ϕ_θ assume apenas um único valor desde $\theta_0 + 2\pi$ até θ_0 no sentido anti-horário e desde θ_0 até $\theta_0 + 2\pi$ no sentido horário. Quando a fase é restringida desta maneira, passa a ter o seguinte comutador clássico

$$[|\alpha|^2, \phi_\theta] = i[1 - 2\pi\delta(\phi - \theta_0)]. \quad (3.23)$$

A complexidade que o comutador apresenta indica que as propriedades dinâmicas da fase também serão complicadas. A fase ϕ_θ é uma função “dente-de-serra” periódica e descreve o movimento do oscilador harmônico. Considerando a Hamiltoniana da forma $\mathcal{H} = \mp \hbar \phi$, temos as equações de movimento dadas por

$$\frac{d}{dt}|\alpha|^2 = \mp 1. \quad (3.24)$$

Apesar da escolha do sinal “mais” em (3.24) não levar nenhuma dificuldade, a escolha do sinal “menos” leva à violação da condição $|\alpha|^2 \geq 0$. Esta situação encontra um análogo quântico, em que usualmente está relacionado ao limite inferior do espectro. A “dinâmica” apropriada é discreta no tempo e não-unitária e, no âmbito clássico, temos um exemplo de transformação não-canônica. Usualmente, no âmbito quântico, está enfatizado que o comutador (3.23) pode ser evitado usando funções de fase 2π -periódicas, especialmente $\sin \phi$ e $\cos \phi$, etc.

Podemos obter de (2.46) o Hamiltoniano do oscilador harmônico quantizado

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{p}^2 + \omega^2 \mathbf{q}^2), \quad (3.25)$$

nos quais \mathbf{q} e \mathbf{p} são os operadores posição e momento canonicamente conjugados, obedecendo $[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = i\hbar$.

Considerando os auto-estados de \mathbf{q} e \mathbf{p} ,

$$\mathbf{q}|q\rangle = q|q\rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{p}|p\rangle = p|p\rangle, \quad (3.26)$$

vemos que estes satisfazem as relações de ortogonalidade e produto escalar

$$\begin{aligned} \langle q|q'\rangle &= \delta(q - q'), \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p'), \\ \langle q|p\rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}qp}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

O fato do oscilador harmônico unidimensional exibir níveis de energia igualmente espaçados, motivou a definição dos operadores de aniquilação e criação no despertar da teoria quântica. Da relação (2.47), temos o operador de aniquilação de fótons

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\mathbf{q} + i\mathbf{p}), \quad (3.28)$$

o qual satisfaz a relação de comutação $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$. Podemos então reescrever o Hamiltoniano em termos de \mathbf{a} e \mathbf{a}^\dagger , o que resulta em

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.29)$$

e considerar o operador número de fótons para o oscilador $\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$.

3.2.1 Formalismo de Dirac

O famoso problema da fase persiste desde Dirac [54], que definiu o operador fase implicitamente através da relação*

$$\mathbf{a} = e^{i\phi} \mathbf{n}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.30)$$

Ao definir o operador fase explicitamente como

$$\phi = -i \ln \mathbf{R}, \quad (3.31)$$

tal que

$$\mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{n}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.32)$$

teremos a decomposição do operador \mathbf{a} desejada. Porém, encontramos sérios problemas. Estes problemas foram considerados nas primeiras críticas a esta definição [52, 27, 55].

Fontes dos Problemas

Abordamos agora alguns dos principais problemas que aparecem nas tentativas de se obter um operador fase Hermitiano. Primeiramente, o operador $\mathbf{R} = e^{i\phi}$ não é unitário visto que

$$\mathbf{R} \mathbf{n} \mathbf{R}^\dagger = \mathbf{n} + 1. \quad (3.33)$$

*Em seu trabalho original, Dirac considera $e^{-i\phi}$ em (3.30). Contudo, devido à maioria dos trabalhos posteriores, escolhemos $e^{i\phi}$.

Logo, não é definido unicamente por (3.32), pois não pode ser dividido em ambos os lados por $n^{\frac{1}{2}}$ em (3.32). Uma análise mostra que esta ambigüidade afeta apenas os elementos de matriz $\langle n|\mathbf{R}|n\rangle$. Usualmente considera-se que $\langle n|\mathbf{R}|n\rangle = 0$, para n inteiro positivo, então

$$\mathbf{R} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|. \quad (3.34)$$

Desprezando esta dificuldade, de fato, derivamos uma relação de comutação correta [56]

$$[e^{i\phi}, \mathbf{n}] = e^{i\phi}, \quad (3.35)$$

que pode ser obedecida por uma grande classe de operadores. Expandindo $e^{i\phi}$, usando (2.79) em ambos os lados de (3.35) e igualando os termos de mesma ordem, deduzimos, particularmente para os termos de ordens menores, que \mathbf{n} e ϕ são variáveis canonicamente conjugadas [43]:

$$[\mathbf{n}, \phi] = i. \quad (3.36)$$

Esta equação, na melhor das hipóteses, imprecisa, leva à relação de incerteza

$$\langle \Delta \mathbf{n}^2 \rangle \langle \Delta \phi^2 \rangle \geq \frac{1}{4}. \quad (3.37)$$

O operador fase teria, então, um domínio de $-\infty$ até ∞ . Concentrando nossa atenção apenas sobre a validade da equação (3.36), consideramos os elementos de matriz de ambos os lados dessa equação na base de Fock $|n\rangle$ [27],

$$\begin{aligned} \langle n|[\mathbf{n}, \phi]|n'\rangle &= i\langle n|n'\rangle \\ (n - n')\langle n|\phi|n'\rangle &= i\delta_{n,n'}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Os elementos de matriz diagonais têm propriedades contraditórias, isto é, $0 = i$ para $n = n'$, devido a $|\langle n|[\mathbf{n}, \phi]|n\rangle|$ ser uma variável ângulo e, portanto, limitada. Isto implica que $[\mathbf{n}, \phi] \neq i$. Logo, apenas operadores sem limite no domínio poderiam satisfazer as relações de comutação canônicas.

Podemos apreciar melhor esta dificuldade comparando o tratamento dos operadores \mathbf{n} e ϕ a um outro bastante similar: a componente L_z do momento angular e seu operador ângulo conjugado [57, 58, 59]. Nesta analogia, L_z corresponde ao operador \mathbf{n} . Considerando L_z e o operador ângulo associado θ canonicamente conjugados, tal que satisfaçam o comutador

$$[L_z, \theta] = i, \quad (3.39)$$

e escolhendo, arbitrariamente, o intervalo periódico $-\pi$ a π , a relação entre θ e ϕ apresentará descontinuidades produzindo uma função- δ na relação de comutação para L_z e ϕ ,

$$[L_z, \phi] = i[1 - 2\pi\delta(\phi - \pi)]. \quad (3.40)$$

O mesmo argumento também vale para $[n, \phi]$, visto que é isomórfico a $[L_z, \phi]$, porém, o espectro de n deve ser artificialmente estendido a $-\infty$.

O fato do espectro de n (ao contrário do espectro de L_z) ser limitado inferiormente é outro impedimento na construção de um operador fase Hermitiano. Portanto, uma relação como (3.40) não se aplica para n e ϕ .

Por exemplo, ao considerarmos a base de estado de fase $|\phi\rangle$, tal que $\phi|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle$, os elementos de matriz de uma relação como (3.40) para $[n, \phi]$ (considerando $-\pi < \phi \leq \pi$), seriam

$$\langle\phi|[n, \phi]|\phi'\rangle = (\phi' - \phi)\langle\phi|n|\phi'\rangle = i\delta(\phi - \phi'), \quad (3.41)$$

o que implica em

$$\langle\phi|n|\phi'\rangle = -i\frac{\delta(\phi - \phi')}{\phi - \phi'} = i\frac{d}{d\phi}\delta(\phi - \phi'). \quad (3.42)$$

Definindo um estado $|\psi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi\psi(\phi)|\phi\rangle$ na base de estado de fase e $\psi(\phi)$ sendo uma função complexa, encontramos

$$\langle\psi|n|\psi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\pi}^{\pi} d\phi' \psi^*(\phi)\psi(\phi')\langle\phi|n|\phi'\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \psi^*(\phi)i\frac{d}{d\phi}\psi(\phi). \quad (3.43)$$

Assim, para o estado $\psi(\phi) = \frac{1}{2\pi}e^{-in\phi}$, temos que $\langle\psi|n|\psi\rangle = n$, mas para $\psi(\phi) = \frac{1}{2\pi}e^{in\phi}$, temos $\langle\psi|n|\psi\rangle = -n$, de onde vemos que uma relação como (3.40) não pode ser válida para o comutador $[n, \phi]$, pois n é limitado inferiormente.

Voltando à análise da relação de comutação $[J_z, \phi]$, usando a base de estado de número, teremos a relação para os elementos de matriz de $[n, \phi]$,

$$\langle n|[n, \phi]|n'\rangle = i[1 - 2\pi\langle n|\delta(\phi - \pi)|n'\rangle]. \quad (3.44)$$

Analogamente a (3.27), podemos obter uma relação de ortogonalidade para n e ϕ tal que $\langle\phi|n\rangle \propto e^{in\phi}$. Logo,

$$(n - n')\langle n|\phi|n'\rangle = i[1 - e^{i(n-n')\pi}], \quad (3.45)$$

que, ao contrário de (3.36), é uma relação de comutação matematicamente consistente.

Todas as dificuldades na definição de um operador Hermitiano para a fase estão relacionadas ao fato do operador R não ser unitário [52], isto é, $R^\dagger R \neq I$, embora

$$RR^\dagger = I. \quad (3.46)$$

3.2.2 Formalismo de Susskind-Glogower

Para evitar problemas com o domínio do operador ϕ , *Louisell* [27] sugeriu trabalhar com funções periódicas desse operador. *Susskind* e *Glogower* [55] seguiram esta idéia e a implementaram examinando funções tais como $\cos \phi$, $\sin \phi$ e $e^{i\phi}$. Uma boa definição do operador R , é dada pela relação modificada de (3.32) abaixo,

$$a = (n+1)^{\frac{1}{2}} R, \quad (3.47)$$

de onde obtemos o *ansatz* de *Susskind-Glogower*:

$$R \equiv (n+1)^{-\frac{1}{2}} a \quad \text{e} \quad R^\dagger \equiv a^\dagger (n+1)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.48)$$

Observamos que R e R^\dagger são os análogos de $e^{\pm i\phi}$, definidos em (3.34). Similarmente, os operadores

$$C \equiv \frac{1}{2}(R + R^\dagger) \quad \text{e} \quad S \equiv \frac{1}{2i}(R - R^\dagger), \quad (3.49)$$

são os análogos de $\cos \phi$ e $\sin \phi$, respectivamente.

Da expansão de $n^{\frac{1}{2}}$, a e a^\dagger na base de *Fock*,

$$n^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n+1|, \quad (3.50)$$

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n\rangle \langle n+1|, \quad (3.51)$$

$$a^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n|, \quad (3.52)$$

obtemos a expansão de R nesta mesma base $|n\rangle$:

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+1|. \quad (3.53)$$

É fácil mostrar que R continua com a isometria em relação à unitariedade, isto é, embora $RR^\dagger = I$, temos

$$R^\dagger R = I - |0\rangle\langle 0|, \quad (3.54)$$

assim como a relação de comutação

$$[R, R^\dagger] = |0\rangle\langle 0|. \quad (3.55)$$

Logo, R não pode ser considerado como um operador fase exponencial de um operador fase Hermitiano. O projetor do estado de vácuo $|0\rangle\langle 0|$ nas equações acima, “arruina” a unitariedade e a comutatividade de R e R^\dagger . Contudo, pode se observar que a não-unitariedade e a não-comutatividade do operador R é relevante apenas para estados do campo $|\psi\rangle$ que tenham uma sobreposição significativa com o estado de vácuo, ou seja, para estados do campo com grande número médio de fótons ($\langle n \rangle \gg 1$):

$$\langle \psi | [R, R^\dagger] | \psi \rangle = |\langle 0 | \psi \rangle|^2. \quad (3.56)$$

Assim, podemos desprezar a componente do estado de vácuo em (3.54) e considerar R aproximadamente unitário.

Agora, utilizando as definições (3.48) e (3.49), obtemos as relações

$$\begin{aligned} [C, n] &= iS, \\ [S, n] &= -iC, \\ [C, S] &= \frac{i}{2}|0\rangle\langle 0|, \\ C^2 + S^2 &= I - \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Nas duas últimas equações, novamente, encontramos o projetor do estado de vácuo “arruinando” a comutatividade de C e S e a identidade trigonométrica desses operadores.

Auto-Estados do Operador R

Consideramos agora o problema de autovalores para R . Postulando a equação de autovalores

$$R|\phi\rangle = e^{i\phi}|\phi\rangle \quad (3.58)$$

e expandindo $|\phi\rangle$ na base de Fock,

$$|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (3.59)$$

facilmente obtemos a relação de recorrência

$$c_{n+1} = e^{i\phi} c_n, \quad (3.60)$$

que pode ser satisfeita fazendo $c_n = c_0 e^{in\phi}$. Assim, os auto-estados de \mathbf{R} expandidos na base $|n\rangle$ são

$$|\phi\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi} |n\rangle. \quad (3.61)$$

Se o campo de radiação é um campo livre, com operador evolução temporal unitário $\mathbf{U}(t) = e^{-i\omega n t}$, facilmente deduzimos que

$$|\phi(t)\rangle = \mathbf{U}(t)|\phi\rangle = |\phi - \omega t\rangle. \quad (3.62)$$

Além disso, os estados de fase satisfazem as condições de periodicidade $|\phi\rangle = |\phi + 2\pi\rangle$ e identidade

$$\frac{1}{|c_0 \sqrt{2\pi}|^2} \int_0^{2\pi} d\phi |\phi\rangle \langle \phi| = \sum_{n,m=0}^{\infty} |n\rangle \langle m| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi} = \sum_{n,m=0}^{\infty} |n\rangle \langle m| \delta_{n,m} = \mathbf{I}. \quad (3.63)$$

Tendo em mente uma representação clássica da fase, os estados

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi} |n\rangle \quad (3.64)$$

podem ser considerados como estados de fase quânticos [52]. Em particular, a equação (3.62) implica que um estado de fase deve permanecer um estado de fase para qualquer tempo. Desafortunadamente, os estados $|\phi\rangle$ não são ortogonais e, portanto, não podem ser normalizados de uma maneira adequada. De fato, deduzimos de (3.64) que[†]

$$\langle \phi | \phi' \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in(\phi - \phi')} = \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \delta(\phi - \phi') - \frac{i}{4\pi} \cot \left[\frac{1}{2}(\phi - \phi') \right], \quad (3.65)$$

[†]As relações $2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\phi) = \cot(\frac{\phi}{2})$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\phi) - \frac{1}{2} = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\phi - 2n\pi)$ são válidas, sendo a última resultante da identidade $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\phi - 2n\pi)$.

para $0 \leq |\phi - \phi'| < 2\pi$. Claramente, os estados $|\phi\rangle$ não são auto-estados de \mathbf{R}^\dagger , o que é significativo para a análise de estados do campo que substancialmente se sobrepõem com o estado de vácuo. Combinando as equações (3.53) e (3.64), obtemos

$$\mathbf{R}^\dagger |\phi\rangle = e^{-i\phi} \left(|\phi\rangle - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |0\rangle \right). \quad (3.66)$$

Não obstante, os estados $|\phi\rangle$ podem ser úteis, pois determinam a identidade (3.63). Logo, qualquer estado físico $|\Psi\rangle$ pode ser expresso em termos desses estados de fase:

$$|\Psi\rangle = \int_0^{2\pi} d\phi |\phi\rangle \langle \phi | \Psi \rangle. \quad (3.67)$$

Similarmente, os operadores são também expressos em termos de $|\phi\rangle$. Deste ponto de vista mais geral, pode ser de menor importância que os estados de fase não permitam uma interpretação de $P(\phi) = |\langle \phi | \Psi \rangle|^2$ como uma distribuição de probabilidade de fase característica.

O formalismo de *Susskind* e *Glogower* fornece uma teoria completa e razoavelmente consistente para o operador fase. Devido a isso, se tornou, por algum tempo, o formalismo padrão para a discussão de problemas relativos a fase, bem como um ponto de referência para a asserção do sucesso de novas teorias [43].

3.2.3 Formalismo de Pegg-Barnett

Para preservar o conceito de operador fase exponencial e evitar as dificuldades pertinentes da não unitariedade de \mathbf{R} , a partir de 1986, *Pegg* e *Barnett* [44,50,60,61] lançaram uma série de artigos com o intuito de retomar o problema da fase na mecânica quântica, introduzindo um operador fase exponencial \mathfrak{R} , iniciando do operador \mathbf{R} e formalmente estendendo o espaço de *Hilbert* a estados de número negativos. Claramente, este conceito está em desacordo com os fundamentos da mecânica quântica. Adotando tal extensão do espaço \mathbb{H} , os operadores \mathfrak{R} e \mathfrak{R}^\dagger podem ser definidos como

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\rangle \langle n+1|, \\ \mathfrak{R}^\dagger &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle \langle n|. \end{aligned} \quad (3.68)$$

No espaço de *Hilbert* estendido, a relação de completeza toma a forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\rangle\langle n| = I \quad (3.69)$$

e, portanto

$$\mathfrak{R}\mathfrak{R}^\dagger = \mathfrak{R}^\dagger\mathfrak{R} = I. \quad (3.70)$$

Além disso, ao invés de (3.64), teremos

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} |n\rangle, \quad (3.71)$$

tal que

$$\langle\phi|\phi'\rangle = \delta(\phi - \phi'). \quad (3.72)$$

Lembramos que as dificuldades de interpretar fisicamente o operador fase exponencial R e o estado de fase $|\phi\rangle$, resultam do fato dos estados de número $|n\rangle$ estarem restritos apenas a valores positivos de n .

A extensão do espaço de *Hilbert* e a introdução do operador \mathfrak{R} não produz efeitos não físicos, pois o conjunto de estados de número positivos e negativos estão desacoplados. Claramente, isso é verdade apenas se a sobreposição do estado do campo $|\Psi\rangle$ com o estado de vácuo $|0\rangle$ puder ser desconsiderada.

Espaço de *Hilbert* Restrito

Não é tão simples contestar a existência de um operador fase apropriado. A suspeita de que os estados de fase de *Susskind-Glogower*

$$|\phi\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} |\phi, s\rangle \quad (3.73)$$

tenham os vetores não-normalizados

$$|\phi, s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^s e^{in\phi} |n\rangle, \quad (3.74)$$

se deve ao fato de que o limite não existe no espaço de *Hilbert* infinito, devendo ser definido em um espaço mais geral [62]. Desafortunadamente, nenhuma solução pode ser obtida simplesmente normalizando os vetores $|\phi, s\rangle$.

Uma outra proposição considerada por *Pegg* e *Barnett* para “remover” a não-ortogonalidade dos estados $|\phi, s\rangle$ consiste em restringir a dimensão do espaço de *Hilbert*. O limite [63]

$$|\theta\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} |\theta, s\rangle, \quad (3.75)$$

admite um estado de fase

$$|\theta, s\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta} |n\rangle, \quad (3.76)$$

onde $|n\rangle$ são os primeiros $(s+1)$ estados de número expandidos num espaço $(s+1)$ -dimensional \mathbb{H}_s , que coincide com o espaço de *Hilbert* usual quando $s \rightarrow \infty$. Neste espaço \mathbb{H}_s , *Pegg* e *Barnett* consideraram o operador criação de fótons truncado \mathbf{a}_s^\dagger definido pela propriedade

$$\mathbf{a}_s^\dagger |n\rangle = \begin{cases} \sqrt{n+1} |n+1\rangle & \text{para } n < s, \\ 0 & \text{para } n \geq s, \end{cases} \quad (3.77)$$

no qual s é o número máximo de fótons. Analogamente, o operador aniquilação de fótons truncado obedece a relação $\mathbf{a}_s = (\mathbf{a}_s^\dagger)^\dagger$.

A versão “truncada” da decomposição de *Dirac* (3.32) é dada por

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{n}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.78)$$

em que \mathbf{R}_s é um operador unitário a ser determinado. O operador \mathbf{R}_s está caracterizado pela propriedade

$$\mathbf{R}_s |n\rangle = \begin{cases} |n-1\rangle & \text{para } n = 1, \dots, s, \\ R_{s,0} & \text{para } n = 0, \end{cases} \quad (3.79)$$

sendo $R_{s,0}$ uma unidade complexa. Da propriedade cíclica acima, está claro que a inversa do operador \mathbf{R}_s existe e obedece a

$$\mathbf{R}_s^{-1} |n\rangle = \begin{cases} |n+1\rangle & \text{para } n = 0, \dots, s-1, \\ R_{s,0}^* & \text{para } n = s. \end{cases} \quad (3.80)$$

Desta propriedade e de acordo com a relação $R_s R_s^\dagger = I$, obtemos a unitariedade do operador fase exponencial

$$R_s^\dagger = R_s^{-1}. \quad (3.81)$$

Pegg e Barnett introduziram os estados de fase no espaço \mathbb{H}_s como sendo a transformada de Fourier inversa dos estados de Fock [50],

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (3.82)$$

em que

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1}, \quad (m = 0, \dots, s.) \quad (3.83)$$

são os $(s+1)$ -valores possíveis de θ igualmente espaçados no intervalo $\theta_0 \leq \theta_m < \theta_0 + 2\pi$, sendo θ_0 uma fase arbitrária de referência. Com esta definição do estado de fase, podemos obter de imediato [25] as relações de ortogonalidade

$$\langle \theta_m | \theta_{m'} \rangle = \frac{1}{s+1} \sum_{n=0}^s e^{in(\theta_{m'} - \theta_m)} = \frac{1}{s+1} \sum_{n=0}^s e^{\frac{2\pi m}{s+1} in(m' - m)} = \delta_{m, m'} \quad (3.84)$$

e completa

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m| &= \sum_{n, n'=0}^s e^{i\theta_0(n-n')} \left[\frac{1}{s+1} \sum_{m=0}^s e^{\frac{2\pi m}{s+1} i(n-n')} \right] |n\rangle \langle n'| \\ &= \sum_{n, n'=0}^s e^{i\theta_0(n-n')} \delta_{n, n'} |n\rangle \langle n'| = \sum_{n=0}^s |n\rangle \langle n| = I, \end{aligned} \quad (3.85)$$

sendo a relação acima obtida mediante a consideração de que a soma sobre os $(s+1)$ projetores dos estados de Fock converge para o operador identidade, necessitando de uma demonstração matemática rigorosa.

Outra relação importante obtida da definição dos estados $|\theta_m\rangle$ é a sua relação com o estado $|\theta_0\rangle$, cujo efeito é deslocar a fase arbitrária θ_0 de uma quantidade igual a $\frac{2\pi m}{s+1}$, isto é,

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{\frac{2\pi m}{s+1} in} e^{in\theta_0} |n\rangle = \frac{e^{\frac{2\pi m}{s+1} in}}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_0} |n\rangle = e^{\frac{2\pi m}{s+1} in} |\theta_0\rangle. \quad (3.86)$$

Como os estados $|\theta_m\rangle$ e $|n\rangle$ estão relacionados por uma transformada de *Fourier* num espaço dimensionalmente finito, restrições na base de estado de fase $\{|\theta_m\rangle\}$ implicam necessariamente em restrições na base complementar $\{|n\rangle\}$. Ambas as bases apresentam um carácter cíclico, ou seja,

$$\begin{aligned} \{|\theta_{m+(s+1)}\rangle\} &= \{|\theta_m\rangle\} & (m = 0, 1, \dots, s), \\ \{|n + (s + 1)\rangle\} &= e^{-i(s+1)\theta_0} \{|n\rangle\} & (n = 0, 1, \dots, s), \end{aligned} \quad (3.87)$$

no qual constatamos que no caso dos estados de *Fock* temos uma fase adicional que representa um importante papel na teoria de *Pegg e Barnett* [25].

O operador fase Hermitiano é definido por [61]

$$\phi_\theta \equiv \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m| = \theta_0 + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{m=0}^s m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (3.88)$$

de forma que obedeça a relação de autovalores

$$\phi_\theta |\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle. \quad (3.89)$$

Da definição de estado de fase (3.82), podemos expressar o projetor $|\theta_m\rangle \langle \theta_m|$ na base de estados de *Fock*

$$|\theta_m\rangle \langle \theta_m| = \frac{1}{s+1} \sum_{n,n'=0}^s e^{i(n-n')\theta_m} |n\rangle \langle n'|. \quad (3.90)$$

Substituindo a expressão acima em (3.88) e realizando uma soma em m , temos

$$\phi_\theta = \theta_0 + \frac{\pi s}{s+1} + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{n \neq n'}^s \frac{e^{i(n-n')\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n-n')} - 1} |n\rangle \langle n'|. \quad (3.91)$$

Podemos, analogamente, expressar o operador número na base de estados de fase

$$\mathbf{n} \equiv \sum_{n=0}^s n |n\rangle \langle n| = \frac{s}{2} + \sum_{m \neq m'}^s \frac{1}{e^{-\frac{2\pi}{s+1}i(m-m')} - 1} |\theta_m\rangle \langle \theta_{m'}|, \quad (3.92)$$

em que usamos a expansão do estado de número na base $\{|\theta_m\rangle\}$.

Relação de Comutação para \mathbf{n} e ϕ_θ

Estamos agora aptos para calcular a relação de comutação para \mathbf{n} e ϕ_θ . Para obtê-la em termos dos estados de número, podemos usar as equações (3.91) e (3.92), o que nos leva a

$$[\mathbf{n}, \phi_\theta] = \frac{2\pi}{s+1} \sum_{n \neq n'}^s \frac{(n - n') e^{i(n-n')\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n-n')} - 1} |n\rangle \langle n'|. \quad (3.93)$$

Enquanto que para obter a mesma relação, em termos dos estados de fase, podemos usar as equações (3.88) e (3.92), resultando em

$$[\mathbf{n}, \phi_\theta] = \frac{2\pi}{s+1} \sum_{m \neq m'}^s \frac{m' - m}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(m'-m)} - 1} |\theta_m\rangle \langle \theta_{m'}|. \quad (3.94)$$

Observamos que, ao contrário das relações obtidas por *Dirac*, não são observadas inconsistências matemáticas para essas relações de comutação obtidas por *Pegg e Barnett*,

$$\begin{aligned} \langle \theta_m | [\mathbf{n}, \phi_\theta] | \theta_{m'} \rangle &= \frac{2\pi}{s+1} \sum_{m \neq m'}^s \frac{m' - m}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(m'-m)} - 1} (1 - \delta_{m,m'}), \\ \langle n | [\mathbf{n}, \phi_\theta] | n' \rangle &= \frac{2\pi}{s+1} \sum_{n \neq n'}^s \frac{(n - n') e^{i(n-n')\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n-n')} - 1} (1 - \delta_{n,n'}). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Tais elementos de matriz são de importância fundamental, quando calculados numa base de estados fisicamente acessíveis [50, 61].

Distribuição de Probabilidade de Fase $P(\theta)$

Considerando um estado genérico truncado para o campo eletromagnético

$$\rho_f = \sum_{n, n'=0}^s \rho_{n, n'} |n\rangle \langle n'|, \quad (3.96)$$

no qual $\rho_{n, n'} = \langle n | \rho_f | n' \rangle$ são os elementos de matriz de ρ_f , tal que para $n = n' \rightarrow \rho_{n, n'} = P_n$.

Podemos usar a relação (2.11) para obter o valor esperado de qualquer grandeza relacionada à fase do campo

$$\langle \mathbf{O} \rangle = \text{Tr}_f [\rho_f \mathbf{O}]. \quad (3.97)$$

Importantes vínculos associados ao operador ρ_f são os momentos de energia, definidos por

$$\langle \mathbf{n}^k \rangle = \text{Tr} [\rho_f \mathbf{n}^k] = \sum_{n=0}^s P_n n^k, \quad (3.98)$$

sendo k um número inteiro positivo e finito. Portanto, ρ descreve um estado fisicamente acessível (factível) se a série na equação acima convergir no limite $s \rightarrow \infty$ para todo k . De fato, esses estados têm como motivação física a descrição a partir do estado de vácuo através do acoplamento

do modo do campo a uma fonte de energia finita e tempo de interação também finito [50]. Como exemplos de estados fisicamente acessíveis, citamos todos aqueles considerados no capítulo precedente. É importante ressaltar que os estados de fase não são estados fisicamente acessíveis [25].

A distribuição de probabilidade de fase $P(\theta_m)$ é, então, definida por

$$P(\theta_m) = \langle \theta_m | \rho_f | \theta_m \rangle = \frac{1}{s+1} \sum_{n,n'=0}^s \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)\theta_m}. \quad (3.99)$$

Os valores esperados relativos à fase do campo dependem da escolha de θ_0 . Consideramos então

$$\theta_0 = \phi - \frac{\pi s}{s+1}, \quad (3.100)$$

de onde

$$\theta_m = \phi + \frac{2\pi\mu}{s+1} \quad (3.101)$$

com $\mu = m - \frac{s}{2}$ variando em passos inteiros de $-\frac{s}{2}$ até $\frac{s}{2}$ (simétrico em μ). Reescrevendo (3.99) em termos de μ , temos

$$P(\theta_m) = \frac{1}{s+1} \sum_{\mu=-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sum_{n,n'=0}^s \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)\phi} e^{\frac{2\pi\mu}{s+1}i(n'-n)}. \quad (3.102)$$

Considerando a condição de normalização para $P(\theta_m)$ e fazendo as substituições acima, temos

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^s P(\theta_m) &= \sum_{\mu=-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} P(\theta_m) = \frac{1}{s+1} \sum_{\mu=-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sum_{n,n'=0}^s \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)\phi} e^{\frac{2\pi\mu}{s+1}i(n'-n)} \\ &= \frac{1}{s+1} \left[1 + \sum_{\mu=-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)\phi} e^{\frac{2\pi\mu}{s+1}i(n'-n)} \right], \end{aligned} \quad (3.103)$$

no qual usamos a informação de que $\sum_{m=0}^s P_n = 1$. A soma acima é mais facilmente realizada fazendo $\theta = \frac{2\pi\mu}{s+1}$, transformando-se assim numa integral de $-\pi$ a π no limite $s \rightarrow \infty$. Obtemos, então, $P(\theta)$ no espaço \mathbb{H} :

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{n \neq n'}^{\infty} \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)(\theta+\phi)} \right]. \quad (3.104)$$

Valor Médio da Fase $\langle \phi_\theta \rangle$

Usando a relação (3.97), podemos obter a expressão para o valor médio da fase

$$\langle \phi_\theta \rangle = \text{Tr}_f [\rho_f \phi_\theta] = \sum_{m=0}^s \theta_m P(\theta_m). \quad (3.105)$$

Substituindo (3.99) na equação acima, temos

$$\langle \phi_\theta \rangle = \theta_0 + \frac{\pi s}{s+1} + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} \frac{e^{i(n'-n)\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1}. \quad (3.106)$$

Agora, realizando a substituição do passo m pelo passo μ , obtém-se a expressão no limite $s \rightarrow \infty$,

$$\langle \phi_\theta \rangle = \phi - i \sum_{n \neq n'}^{\infty} \rho_{n,n'} \frac{e^{i(n'-n)\phi} (-1)^{n'-n}}{n' - n}. \quad (3.107)$$

Variância da Fase $\langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle$

A variância da fase do campo é definida como

$$\langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle = \langle \phi_\theta^2 \rangle - \langle \phi_\theta \rangle^2. \quad (3.108)$$

Procedendo de maneira análoga para a obtenção de $\langle \phi_\theta \rangle$, temos

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle &= \frac{\pi^2 s(s+2)}{3(s+1)^2} - \frac{4\pi^2}{(s+1)^2} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)\theta_0} \frac{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} + 1}{[e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1]^2} \\ &\quad - \frac{4\pi^2}{(s+1)^2} \left[\sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} \frac{e^{i(n'-n)\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1} \right]^2, \end{aligned} \quad (3.109)$$

do qual, no limite $s \rightarrow \infty$ e fazendo a substituição de variáveis considerada acima, temos a expressão da variância da fase no espaço \mathbb{H} infinito,

$$\langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n \neq n'}^{\infty} \rho_{n,n'} \frac{(-1)^{n'-n}}{(n' - n)^2} + \left[\sum_{n \neq n'}^{\infty} \rho_{n,n'} \frac{(-1)^{n'-n}}{n' - n} \right]^2. \quad (3.110)$$

O cálculo para $P(\theta)$, $\langle \phi_\theta \rangle$ e $\langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle$ no espaço restrito é encontrado no **Apêndice B**.

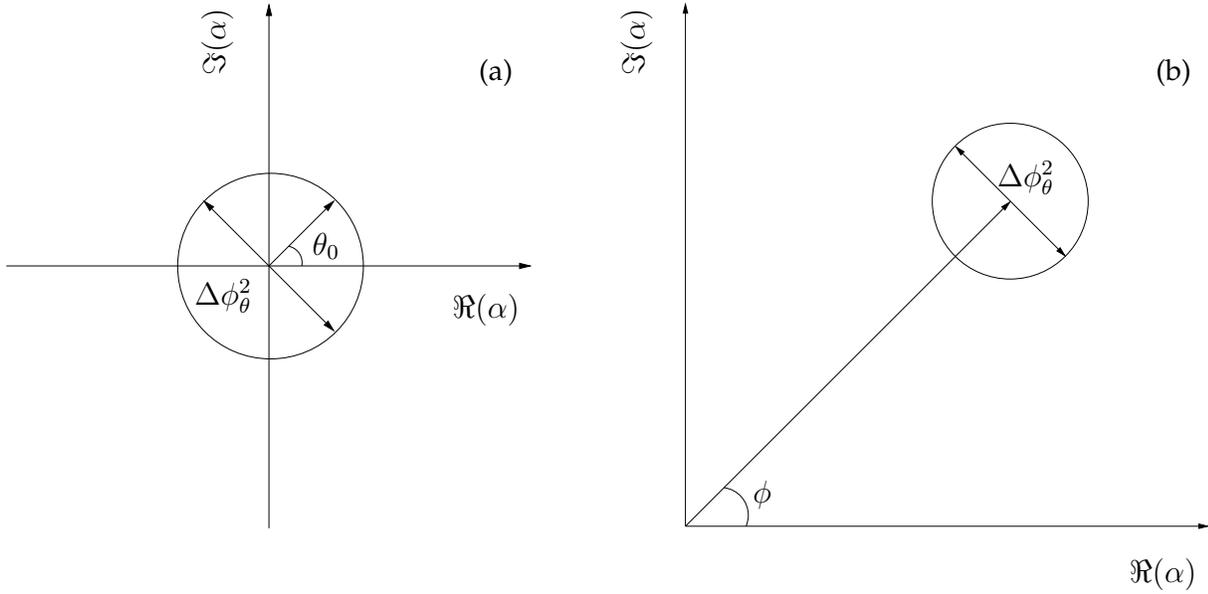


Figura 3.1: Representação no espaço de fase do estado (a) de número e (b) coerente.

Aplicações

Estado de Número. Em particular, quando consideramos o estado de número (**Figura 3.1-a**) em (3.96), as expressões para $\langle \phi_\theta \rangle$ e $\langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle$ simplificam-se consideravelmente

$$\begin{aligned} \langle \phi_\theta \rangle &= \theta_0 + \frac{\pi s}{s+1}, \\ \langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle &= \frac{\pi^2 s(s+2)}{3(s+1)^2}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

No limite $s \rightarrow \infty$, os valores de $\langle \phi_\theta \rangle$ e $\langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle$ são os mesmos obtidos para a fase clássica (3.20). Em particular, qualquer estado de mistura do campo que possua apenas elementos diagonais na matriz densidade também apresentará esse comportamento para a fase.

Estado Coerente. O estado coerente (**Figura 3.1-b**) é um caso intermediário entre o estado de máxima definição na fase (estado de fase) e o estado de fase aleatória (estado de número, térmico, etc). Substituindo (2.95) em (3.107) e (3.110), temos $\langle \phi_\theta \rangle = \phi$ e

$$\langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle = \frac{\pi^2}{3} + 4e^{-|\alpha|^2} \sum_{n \neq n'} \frac{\alpha^n (\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n!n'}} \frac{(-1)^{n'-n}}{(n'-n)^2}. \quad (3.112)$$

Observa-se que com um aumento na intensidade do campo, as características da fase de um estado coerente ficam cada vez mais próximas daquelas observadas para um estado de fase (**Figura 3.2**).

Os operadores ϕ_θ e n , bem como o caráter cíclico de seus respectivos auto-estados $|\theta_m\rangle$ e $|n\rangle$, representam os aspectos fundamentais da teoria desenvolvida por *Pegg e Barnett*. Esta teoria é obtida de um formalismo mais geral para operadores unitários, proposta por *Schwinger* [64, 65, 66].

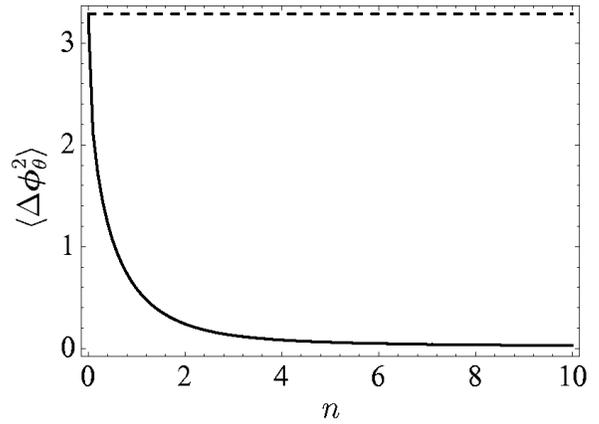


Figura 3.2: Variância da fase em função do número de fótons para o estado de número (curva tracejada) e para o estado coerente (curva sólida).

4

Interação da Radiação com a Matéria

Um dos problemas mais simples e ao mesmo tempo não-trivial envolvendo a interação átomo-campo é o acoplamento de um átomo de dois níveis com um único modo do campo eletromagnético. Com o advento do *laser*, ocorreram consideráveis progressos no entendimento da interação da luz com a matéria.

A descrição de um átomo de dois níveis é válida se os níveis atômicos envolvidos estão em ressonância ou aproximadamente em ressonância com o campo eletromagnético, enquanto que os outros níveis se encontram bastante fora dessa ressonância. Sabemos que os átomos têm um número infinito de estados ligados [20]. Ao contrário do oscilador harmônico, os níveis de energia dos átomos não são igualmente espaçados. Se é possível emitir uma luz monocromática de frequência ω_0 tal que se aproxime da frequência de transição atômica ω , esta será mais importante que as demais.

O grande trunfo deste modelo de interação de um modo do campo eletromagnético com um átomo de dois níveis dentro de uma cavidade óptica (ou de microondas) é que pode ser estudado sem a necessidade de usar a teoria de perturbação, permitindo assim que se considere acoplamentos fortes entre o átomo e o campo.

A teoria semiclássica considera um átomo como um sistema quântico de dois níveis interagindo com um único modo do campo, este tratado classicamente. Contudo, muitas vezes, tal teoria falha ao tentar explicar resultados observados experimentalmente, e uma descrição completamente

quântica se faz necessária (por exemplo, na emissão espontânea de um átomo). Mesmo no modelo envolvendo a interação de um campo de radiação mono-modo com um simples átomo de dois níveis, as predições para a dinâmica do átomo nas duas teorias são bastante diferentes.

Discutimos a interação do campo de radiação quantizado com um átomo de dois níveis, descrito por um Hamiltoniano nas aproximações de dipolo e de onda-girante. Este é um sistema interessante em óptica quântica por vários motivos: pode ser resolvido analiticamente; exibe efeitos puramente quânticos, tais como os colapsos e *revivals*, na sua dinâmica; permite o entendimento dos efeitos de vários tipos de estatísticas do campo em sistemas mais complicados, tais como o *micromaser* e o *laser*; é possível de ser realizado experimentalmente devido ao grande avanço no desenvolvimento de cavidades com alto fator Q de qualidade [18].

A resolução deste modelo foi obtida pela primeira vez, em sua forma mais simples, por *Jaynes* e *Cummings* [3] e é, desde então, conhecido como o modelo de *Jaynes-Cummings*.

4.1 Átomo de Dois Níveis

Um átomo de dois níveis é formalmente análogo a um sistema de $spin-\frac{1}{2}$, com apenas dois estados acessíveis. Na aproximação de dipolo, quando o comprimento de onda do campo é muito maior que o tamanho do átomo, o problema da interação átomo-campo é matematicamente equivalente ao de uma partícula de $spin-\frac{1}{2}$ com um campo magnético dependente do tempo. Assim, se considerarmos um elétron de carga e e massa m_e , o momento magnético associado ao momento angular orbital do elétron será dado por:

$$\mathbf{M}_L = \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \quad (4.1)$$

onde $\mu_b = \frac{e\hbar}{2m_e}$ é o magnéton de *Bohr* [27].

Observações experimentais (por exemplo, o experimento de *Stern-Gerlach*), comprovaram a existência de um momento angular (semi-inteiro), intrínseco ao elétron, que não podia ser explicado sem hipóteses suplementares, surgindo, então, o conceito de *spin* do elétron. Considerando o momento magnético associado ao momento angular de *spin*

$$\mathbf{M}_s = 2 \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{S}, \quad (4.2)$$

notamos que a razão giro-magnética de *spin* é duas vezes maior que a razão giro-magnética orbital. *Pauli* [67] estudou mais a fundo essa hipótese criando uma descrição quântica para o *spin* válida no limite relativístico, partindo da equação de *Dirac* relativística*. Por conveniência, introduzimos o operador

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.3)$$

tal que $M_s = \mu_B \boldsymbol{\sigma}$. A necessidade de $M_s = M_L$ justifica-se de medidas experimentais da energia envolvida. Como o momento angular de *spin* não possui análogo clássico, devemos definir M_s de acordo com os resultados experimentais. As relações de comutação para as três componentes de *spin* são:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\sigma}_i] &= 0 \\ [\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j] &= 2i\boldsymbol{\sigma}_k \quad (i, j, k = x, y, z), \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que i, j, k formam uma permutação par de x, y, z . Estes postulados fazem dos autovalores de $\boldsymbol{\sigma}_z$ múltiplos inteiros ou semi-inteiros de \hbar . Restringindo esses autovalores a $\pm \frac{1}{2}\hbar$, temos as relações de anti-comutação

$$\{\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j\} = 2\delta_{i,j}. \quad (4.5)$$

No **Capítulo 2** analisamos o campo eletromagnético em termos de seus operadores criação e aniquilação de fótons a^\dagger e a . É conveniente, então, introduzir uma notação equivalente para o átomo, uma vez que iremos estudar a interação entre eles. Assim, definimos os operadores não-Hermitianos

$$\boldsymbol{\sigma}_\pm = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_x \pm i\boldsymbol{\sigma}_y) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_+ = \boldsymbol{\sigma}_-^\dagger, \quad (4.6)$$

com as relações de comutação e anti-comutação

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma}_\pm, \boldsymbol{\sigma}_x] &= \pm\boldsymbol{\sigma}_z, & \{\boldsymbol{\sigma}_\pm, \boldsymbol{\sigma}_x\} &= \mathbf{I}, \\ [\boldsymbol{\sigma}_\pm, \boldsymbol{\sigma}_y] &= i\boldsymbol{\sigma}_z, & \{\boldsymbol{\sigma}_\pm, \boldsymbol{\sigma}_y\} &= \pm i, \\ [\boldsymbol{\sigma}_\pm, \boldsymbol{\sigma}_z] &= \mp 2\boldsymbol{\sigma}_\pm, & \{\boldsymbol{\sigma}_\pm, \boldsymbol{\sigma}_z\} &= 0, \\ [\boldsymbol{\sigma}_+, \boldsymbol{\sigma}_-] &= \boldsymbol{\sigma}_z, & \{\boldsymbol{\sigma}_+, \boldsymbol{\sigma}_-\} &= \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

*A teoria de *Pauli* pode ser obtida como um caso limite da teoria de *Dirac*, quando a velocidade do elétron é pequena comparada com a velocidade da luz.

Como uma notação alternativa, por estarmos lidando com um sistema de dois níveis, podemos usar a representação matricial para os operadores de *spin*

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Uma vez que $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 3$, não se faz necessário especificar σ^2 . As matrizes σ_x , σ_y e σ_z são as denominadas matrizes de *Pauli* na representação em que σ_z é diagonal, de acordo com a álgebra de férmions [24].

Consideramos um dos níveis do átomo no estado fundamental $|g\rangle$ e o outro no estado excitado $|e\rangle$ formando então uma base no espaço de *Hilbert*. Esses estados satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\langle i|j\rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j = e, g)\tag{4.9}$$

e a relação de completeza

$$\sum_{i=g}^e |i\rangle\langle i| = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = \mathbf{I}.\tag{4.10}$$

Assim, podemos averiguar a atuação dos operadores de *spin* nesses estados:

$$\begin{aligned}\sigma_x|e\rangle &= |g\rangle, & \sigma_x|g\rangle &= |e\rangle, \\ \sigma_y|e\rangle &= i|g\rangle, & \sigma_y|g\rangle &= -i|e\rangle, \\ \sigma_z|e\rangle &= |e\rangle, & \sigma_z|g\rangle &= -|g\rangle, \\ \sigma_+|e\rangle &= 0, & \sigma_+|g\rangle &= |e\rangle, \\ \sigma_-|e\rangle &= |g\rangle, & \sigma_-|g\rangle &= 0,\end{aligned}\tag{4.11}$$

no qual verifica-se que

$$\begin{aligned}\sigma_x &= |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|, & \sigma_y &= i|g\rangle\langle e| - i|e\rangle\langle g|, & \sigma_z &= |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \\ \sigma_+ &= |e\rangle\langle g|, & \sigma_- &= |g\rangle\langle e|.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Energia do Átomo

Considerando o átomo num potencial escalar $\phi(\mathbf{r})$, podemos expressar sua energia como

$$\mathbf{H}_a = \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m_e} + e\phi(\mathbf{r}). \quad (4.13)$$

Assim como fizemos para o campo eletromagnético, consideramos o *gauge* de *Coulomb* tal que $\phi(\mathbf{r}) = 0$ e

$$\mathbf{p}_e = m_e\mathbf{v} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (4.14)$$

Escrevendo em termos dos operadores de *spin*, temos

$$E_e\boldsymbol{\sigma}_{ee} + E_g\boldsymbol{\sigma}_{gg} = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}(\boldsymbol{\sigma}_{ee} - \boldsymbol{\sigma}_{gg}) + \frac{1}{2}(E_e + E_g), \quad (4.15)$$

no qual usamos $(E_e - E_g) = \hbar\omega_{eg}$ e a relação de completeza $\boldsymbol{\sigma}_{ee} + \boldsymbol{\sigma}_{gg} = \mathbf{I}$. O termo de energia constante pode ser ignorado. Usando as relações em (4.12), temos

$$\mathbf{H}_a = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\boldsymbol{\sigma}_z. \quad (4.16)$$

4.1.1 Aproximação de Dipolo

A interação de um átomo de dois níveis com um campo de radiação pode ser descrita pelo Hamiltoniano de mínimo acoplamento de um elétron de carga e e massa m_e interagindo com um campo eletromagnético externo,

$$\mathbf{H}_{af} = \frac{1}{2m_e}[\mathbf{p}_e - e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2 + e\phi(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_f, \quad (4.17)$$

sendo \mathbf{H}_f o Hamiltoniano do campo eletromagnético livre (2.40).

O Hamiltoniano acima pode ser reduzido a uma forma bastante simplificada usando a denominada aproximação de dipolo, quando o campo é considerado uniforme mediante as dimensões atômicas $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$, ou seja,

$$\mathbf{H}_{int} = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (4.18)$$

no qual $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ é o operador campo elétrico, resolvido em relação à posição do átomo (no centro da cavidade). De (2.51) e através de uma escolha conveniente da fase do campo, temos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} i(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger) \quad (4.19)$$

para $\varphi = 0$, e

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger) \quad (4.20)$$

para $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, em que $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}$. Por simplicidade, consideramos a polarização linear com vetores de polarização reais.

Assim como fizemos para os Hamiltonianos do átomo e do campo, podemos escrever o Hamiltoniano de interação (4.18) em termos dos operadores \mathbf{a} , \mathbf{a}^\dagger e de *spin*,

$$\mathbf{H}_{int} = \sum_{i,j} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\Omega_{\mathbf{k}}^{ij} \boldsymbol{\sigma}_{ij} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger), \quad (4.21)$$

com $\Omega_{\mathbf{k}}^{ij} = -\frac{1}{\hbar} \mu_{ij} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ e $\mu_{ij} = e \langle i | \mathbf{r} | j \rangle$. Considerando μ_{ij} real, os termos μ_{ee} e μ_{gg} se cancelam por razões de paridade [27] e os termos cruzados são equivalentes, ou seja, $\mu_{eg} = \mu_{ge}$. Assim, temos também que $\Omega_{\mathbf{k}} = \Omega_{\mathbf{k}}^{eg} = \Omega_{\mathbf{k}}^{ge}$ o que nos leva a escrever o Hamiltoniano total da interação átomo-campo como

$$\mathbf{H}_{af} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \hbar\omega_{eg} \boldsymbol{\sigma}_z + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\Omega_{\mathbf{k}} (\boldsymbol{\sigma}_+ + \boldsymbol{\sigma}_-) (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger). \quad (4.22)$$

Ao considerarmos apenas um modo do campo da cavidade, obtém-se

$$\mathbf{H}_{JC} = \hbar\omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega_{eg} \boldsymbol{\sigma}_z + \hbar\Omega (\boldsymbol{\sigma}_+ + \boldsymbol{\sigma}_-) (\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger), \quad (4.23)$$

o qual é conhecido como o Hamiltoniano de *Jaynes-Cummings*.

4.2 Modelo de *Jaynes-Cummings*

Podemos reescrever o Hamiltoniano (4.23) como

$$\mathbf{H}_{JC} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{int}, \quad (4.24)$$

nos quais

$$\mathbf{H}_0 = \hbar\omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega_{eg} \boldsymbol{\sigma}_z, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{H}_{int} = \hbar\Omega (\mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_+ + \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_- + \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_- + \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_+). \quad (4.26)$$

A energia de interação na equação (4.26) consiste de quatro termos. O termo $a^\dagger\sigma_-$ descreve o processo no qual o átomo decai do estado excitado $|e\rangle$ para o estado fundamental $|g\rangle$ e simultaneamente um fóton é criado (Figura 4.1-a). O termo $a\sigma_+$ descreve o processo inverso (Figura 4.1-b). O termo $a\sigma_-$ descreve o processo no qual o átomo decai do estado excitado $|e\rangle$ para o estado fundamental $|g\rangle$ e simultaneamente um fóton é aniquilado (Figura 4.1-c). O termo $a^\dagger\sigma_+$ descreve o processo contrário (Figura 4.1-d).

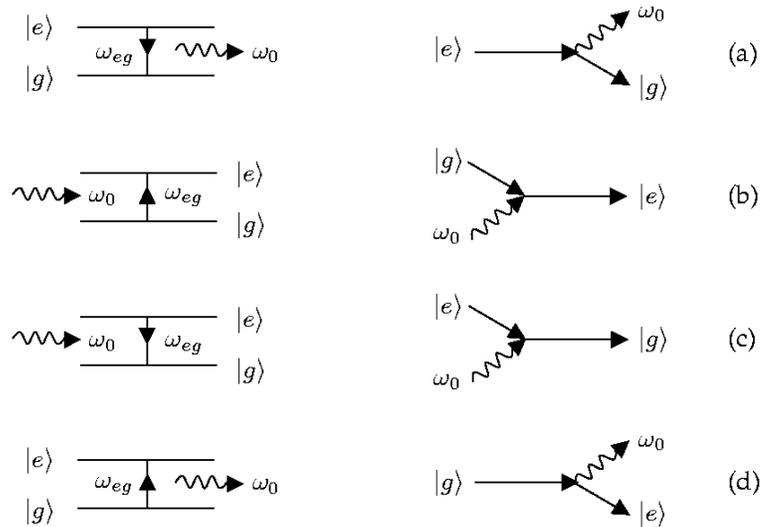


Figura 4.1: Processos da interação átomo-campo no modelo de *Jaynes-Cummings*: (a) $a^\dagger\sigma_-$, (b) $a\sigma_+$, (c) $a\sigma_-$ e (d) $a^\dagger\sigma_+$.

4.2.1 Aproximação de Onda Girante (RWA)

Considerando o modo do campo e a transição atômica próximos da ressonância, ou seja, $\omega_0 \approx \omega_{eg}$, os dois primeiros termos, denominados termos girantes, ligam estados que são *quasi-degenerados* no Hamiltoniano não-perturbado H_0 ,

$$\begin{aligned} H_0|e, n\rangle &= \hbar(\omega_0 n + \frac{1}{2}\omega_{eg})|e, n\rangle, \\ H_0|g, n\rangle &= \hbar(\omega_0 n - \frac{1}{2}\omega_{eg})|g, n\rangle. \end{aligned} \quad (4.27)$$

O mesmo não ocorre com os dois últimos termos, denominados termos contra-girantes, que ligam estados no Hamiltoniano H_0 com diferenças de energia $\hbar(\omega_{eg} + \omega_0) \gg \hbar(\omega_{eg} - \omega_0)$.

É conveniente trabalhar na representação de interação, a qual é obtida mediante a seguinte transformação unitária:

$$\mathbf{H}_I = U_0^\dagger \mathbf{H}_{JC} U_0, \quad (4.28)$$

em que $U_0 = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{H}_0 t}$. Usando a relação (2.79), obtemos

$$\begin{aligned} e^{i\omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} t} \mathbf{a} e^{-i\omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} t} &= \mathbf{a} e^{-i\omega_0 t}, \\ e^{i\omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} t} \mathbf{a}^\dagger e^{-i\omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} t} &= \mathbf{a}^\dagger e^{i\omega_0 t}, \\ e^{\frac{i}{2} \omega_{eg} \sigma_z t} \sigma_+ e^{-\frac{i}{2} \omega_{eg} \sigma_z t} &= \sigma_+ e^{i\omega_{eg} t}, \\ e^{\frac{i}{2} \omega_{eg} \sigma_z t} \sigma_- e^{-\frac{i}{2} \omega_{eg} \sigma_z t} &= \sigma_- e^{-i\omega_{eg} t}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Logo, a relação (4.28) torna-se

$$\mathbf{H}_I = \hbar\Omega (\mathbf{a}\sigma_+ e^{i\delta t} + \mathbf{a}^\dagger \sigma_- e^{-i\delta t} + \mathbf{a}\sigma_- e^{-i\Delta t} + \mathbf{a}^\dagger \sigma_+ e^{i\Delta t}), \quad (4.30)$$

sendo $\delta = \omega_{eg} - \omega_0$ a dessintonia átomo-campo e $\Delta = \omega_{eg} + \omega_0$.

Agora, usando a denominada aproximação de onda girante (**RWA**), ou seja, quando temos $\hbar(\omega_{eg} + \omega_0) \gg \hbar(\omega_{eg} - \omega_0)$ podemos desprezar os termos contra-girantes, uma vez que os termos girantes oscilam lentamente com frequência $\omega_{eg} - \omega_0 \simeq 0$, enquanto que os termos contra-girantes oscilam muito mais rapidamente com frequência $\omega_{eg} + \omega_0 \neq 0$. Assim, podemos esperar que os efeitos dos termos contra-girantes, em média, interfiram destrutivamente, não contribuindo significativamente na evolução do sistema. Na ausência dos termos contra-girantes, o modelo conserva a energia não só no Hamiltoniano \mathbf{H}_{JC} , como também no Hamiltoniano não-perturbado \mathbf{H}_0 , ao contrário do que se observa na presença dos quatro termos da interação.

O Hamiltoniano resultante, na representação de *Schrödinger* é descrito por

$$\mathbf{H}_{JC} = \hbar\omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega_{eg} \sigma_z + \hbar\Omega (\mathbf{a}^\dagger \sigma_- + \mathbf{a}\sigma_+). \quad (4.31)$$

Esta forma do Hamiltoniano de *Jaynes-Cummings* é solúvel analiticamente, sendo o ponto de partida de muitos cálculos em óptica quântica.

Na situação mais simplificada do modelo, o átomo está no estado excitado $|e\rangle$ e o modo do campo da cavidade se encontra no estado de vácuo $|0\rangle$. Como observado para o fenômeno da emissão espontânea no espaço livre, o fóton não escapa com a velocidade da luz, permanecendo aprisionado na cavidade pronto para ser (re)absorvido pelo átomo. Apesar do decaimento irreversível da energia atômica, podemos observar uma oscilação entre os dois estados quânticos: $|e, 0\rangle \rightarrow$ átomo excitado numa cavidade vazia e $|g, 1\rangle \rightarrow$ átomo no estado fundamental com um fóton na cavidade. Esta oscilação é denominada frequência de *Rabi* $\Omega = \frac{1}{\hbar}er_0\mathcal{E}$ sendo $\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0V}}$ a amplitude do campo na cavidade e V seu volume efetivo, de cerca de 0.7 cm^3 .

Na **Figura 4.2-a**[†] mostramos o esquema da montagem experimental. Os átomos (de Rubídio) são emitidos do forno **O** e selecionados em determinada velocidade, um de cada vez, no estado excitado $|e\rangle$ (número quântico principal 51) na caixa **B**. O átomo então atravessa a cavidade supercondutora **C**, que mantém um campo mono-modo, este, injetado pela fonte **S**, que permite ajustar o número de fótons do modo do campo. Inicialmente o campo está no estado coerente (*laser*) e seu modo está em ressonância com a transição entre $|e\rangle$ e $|g\rangle$ (número quântico principal 50) com uma frequência $\Omega = 51.1\text{ kHz}$. Tal ajuste pode ser feito, por exemplo, mudando a distância dos espelhos da cavidade. O estado final do átomo é, então, analisado pelo detector **D**. Salientamos que estes valores somente se aplicam para um átomo passando pelo centro da cavidade em r_0 , tal como requerido na aproximação de dipolo.

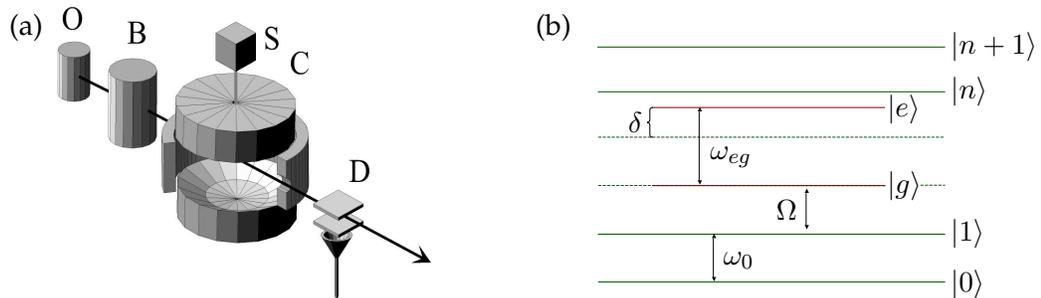


Figura 4.2: (a) Esquema da montagem experimental da cavidade de microondas. (b) Esquema do modelo de *Jaynes-Cummings* com o campo em dessintonia com o átomo de dois níveis; o acoplamento átomo-campo é caracterizado pela frequência de *Rabi* Ω .

[†]Figura extraída de [68].

Representação de Estados Vestidos

Uma “interrupção” da interação num tempo correspondente a um pulso- π para a emissão espontânea, resulta na transformação

$$\begin{aligned} |e, 0\rangle &\rightarrow |g, 1\rangle, \\ |g, 1\rangle &\rightarrow |e, 0\rangle. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Enquanto que uma rotação $\frac{\pi}{2}$ corresponde a

$$\begin{aligned} |e, 0\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle + |g, 1\rangle), \\ |g, 1\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, 1\rangle - |e, 0\rangle), \end{aligned} \quad (4.33)$$

resultando no denominado emaranhamento do sistema átomo-campo. Este aspecto da dinâmica do sistema faz com que o vetor de estado

$$|n, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, n\rangle + |g, n+1\rangle) \quad (4.34)$$

não seja fatorável. Esse emaranhamento “sobrevive” na cavidade num tempo estimado de $100 \mu\text{s}$, enquanto que o “tempo de vida” do fóton na cavidade é aproximadamente 0.2s [68]. Os auto-estados do modelo são bem conhecidos e denominados estados “vestidos”

Na **Figura 4.3**, os estados estão esquematizados em ressonância exata ($\delta = 0$). A degenerescência dos estados não-acoplados $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$ é dissipada pelo acoplamento. A separação entre os estados vestidos do n -ésimo nível ($\delta = 0$) é $2\Omega\sqrt{n+1}$. Bastante fora da ressonância, os estados não-acoplados e os estados vestidos praticamente coincidem.

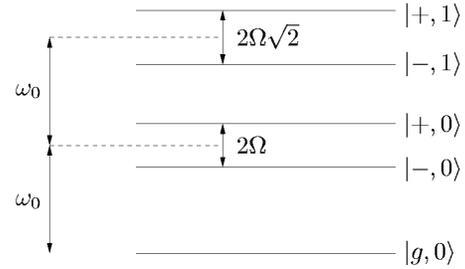


Figura 4.3: Diagrama dos estados vestidos em ressonância exata ($\delta = 0$).

Como vimos anteriormente, o Hamiltoniano não perturbado satisfaz a relação de autovalores (4.27). Uma vez que vale a relação de comutação $[\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_{JC}] = 0$, podemos supor que os auto-estados de \mathbf{H}_{JC} sejam uma superposição dos auto-estados *quasi-degenerados* de \mathbf{H}_0 . A equação de autovalores é então dada por:

$$\mathbf{H}_{JC}|\pm, n\rangle = E_{\pm, n}|\pm, n\rangle, \quad (4.35)$$

em que

$$|\pm, n\rangle = \alpha_{\pm}|e, n\rangle + \beta_{\pm}|g, n+1\rangle. \quad (4.36)$$

Substituindo (4.36) em (4.31), encontramos os auto-estados do modelo

$$\begin{aligned} |+, n\rangle &= \sin \theta_{n+1}|e, n\rangle + \cos \theta_{n+1}|g, n+1\rangle, \\ |-, n\rangle &= -\cos \theta_{n+1}|e, n\rangle + \sin \theta_{n+1}|g, n+1\rangle, \end{aligned} \quad (4.37)$$

cujos coeficientes $\sin \theta_{n+1}$ e $\cos \theta_{n+1}$ são, respectivamente, dados por:

$$\sin \theta_{n+1} = \frac{\omega_{n+1}}{\sqrt{(\Omega_{n+1} - \delta)^2 + \omega_{n+1}^2}}, \quad (4.38)$$

$$\cos \theta_{n+1} = \frac{(\Omega_{n+1} - \omega_{n+1})}{\sqrt{(\Omega_{n+1} - \delta)^2 + \omega_{n+1}^2}}, \quad (4.39)$$

sendo $\Omega_{n+1} = \sqrt{\delta^2 + \omega_{n+1}^2}$ ($\omega_{n+1} = 2\Omega\sqrt{n+1}$) a frequência de Rabi generalizada. Os autovalores de H_{JC} são agora determinados através de

$$E_{\pm, n} = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{1}{2}\hbar\Omega_{n+1}. \quad (4.40)$$

4.2.2 Limite Dispersivo

O limite dispersivo é obtido quando podemos considerar o Hamiltoniano de interação em (4.31) como uma pequena perturbação, tal que

$$|\delta| \gg \omega_{n+1} \quad (4.41)$$

para qualquer n relevante[‡] [69]. Assim, reescrevendo Ω_{n+1} como

$$\Omega_{n+1} = |\delta| \sqrt{1 + \frac{\omega_{n+1}^2}{\delta^2}} \quad (4.42)$$

e fazendo uma expansão em séries de Taylor, temos

$$\Omega_{n+1} = |\delta| \left(1 + \frac{\omega_{n+1}^2}{2\delta^2} - \frac{\omega_{n+1}^4}{8\delta^4} + \dots \right) \approx |\delta| + \frac{|\delta| \omega_{n+1}^2}{2\delta} + \frac{|\delta|}{\delta} \omega_{n+1} O\left(\frac{\omega_{n+1}^3}{\delta^3}\right). \quad (4.43)$$

[‡]Consideramos relevantes os estados $|n\rangle$ com probabilidade $P_n = \langle n|\rho|n\rangle$ significativa de estarem populados pelo campo considerado.

Considerando os termos até segunda ordem apenas, obtemos a aproximação para os autovalores de energia

$$E_{\pm,n} \approx \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2}) \pm \frac{1}{2}\hbar|\delta| \pm \frac{\hbar\Omega^2}{|\delta|}(n + 1), \quad (4.44)$$

e para os auto-estados ficamos com

$$\begin{aligned} \cos \theta_{n+1} &\approx \frac{\omega_{n+1}}{4\delta^2} \left[1 + O\left(\frac{\omega_{n+1}^2}{\delta^2}\right) \right] \longrightarrow 0, \\ \sin \theta_{n+1} &\approx 1 - O\left(\frac{\omega_{n+1}^2}{\delta^2}\right) \longrightarrow 1. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Assim, nesta aproximação, os auto-estados do modelo tornam-se

$$|+, n\rangle \approx |e, n\rangle \quad \text{e} \quad |-, n\rangle \approx -|g, n + 1\rangle \quad (4.46)$$

se $\delta > 0$, ou

$$|+, n\rangle \approx |g, n + 1\rangle \quad \text{e} \quad |-, n\rangle \approx |e, n + 1\rangle \quad (4.47)$$

se $\delta < 0$, ou seja, tornam-se estados fatoráveis.

Se a condição (4.41) for satisfeita para todos os valores de n , o que representa um papel significativo no problema [69], podemos trabalhar com o Hamiltoniano efetivo

$$\mathbf{H}_{JC}^{eff} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{int}^{eff}, \quad (4.48)$$

sendo

$$\mathbf{H}_{int}^{eff} = \frac{\hbar\Omega^2}{\delta} (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \sigma_z + \sigma_+ \sigma_-), \quad (4.49)$$

uma vez que satisfaz a relação (4.35) com $E_{\pm,n}$ dado por (4.44).

Ao contrário do limite ressonante, no limite dispersivo não ocorrem, efetivamente, trocas de energia entre o átomo e o campo.

4.3 Meio Kerr

O índice de refração de um meio, em geral, depende do arranjo dos átomos e da distribuição dos elétrons. O campo eletromagnético (com velocidade $v = c/n_0$) redireciona as cargas (elétrons),

gerando um campo proporcional ao campo incidente e resultando num deslocamento de fase no campo transmitido, que equivale a uma alteração na velocidade de propagação do campo. Se a intensidade do campo for muito menor que a intensidade do campo intra-atômico, podemos considerar o deslocamento de fase (ou seja, o índice de refração do meio) independente da intensidade do campo. Este é o regime da óptica linear.

Quando a intensidade do campo incidente é comparável ao campo elétrico intra-atômico, a distribuição dos elétrons no meio pode ser alterada, levando a diferentes índices de refração e a propagação através do meio dependerá da intensidade do campo incidente. Este é o regime da óptica não-linear.

Na teoria eletromagnética, a resposta do meio material à ação do campo de radiação pode ser obtida expandindo a polarização do meio até terceira ordem na amplitude do campo elétrico:

$$\mathfrak{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E}^3(\mathbf{r}) + \dots, \quad (4.50)$$

sendo ϵ_0 a constante dielétrica do vácuo, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ o vetor campo elétrico clássico e $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$, respectivamente, as susceptibilidades de primeira, segunda e terceira ordem do meio não-linear [70]. A óptica linear é descrita por $\chi^{(1)}$ e relacionada ao índice de refração linear do meio por $n_0^2 = 1 + \chi^{(1)}$. A resposta não-linear do meio é caracterizada por $\chi^{(2)}$ e $\chi^{(3)}$. Se houver uma ausência de combinação de fases, podemos desprezar $\chi^{(2)}$ [70].

Classicamente, pode-se modelar o meio não-linear como um oscilador anarmônico de frequência ω . A Hamiltoniana deste sistema é dada por [71]:

$$\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_f + \frac{\mu}{\omega} \left(\frac{\mathcal{H}_f^2}{\omega} - \mathcal{H}_f \right), \quad (4.51)$$

no qual \mathcal{H}_f é a Hamiltoniana do oscilador harmônico clássico (2.40) para um modo do campo apenas e μ é o parâmetro (positivo) de anarmonicidade do meio não-linear. Tal descrição do meio *Kerr* é feita no âmbito do eletromagnetismo clássico. Contudo, optamos por descrevê-lo segundo a **QED**. Então, analogamente ao procedimento da quantização do campo eletromagnético, devemos associar operadores com variáveis clássicas. Do princípio da correspondência de *Bohr*, temos o operador Hamiltoniano do sistema

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_f + \frac{\mu}{\omega} \left(\frac{\mathbf{H}_f^2}{\hbar\omega} - \mathbf{H}_f \right). \quad (4.52)$$

Logo, escrevendo (4.52) em termos dos operadores criação e aniquilação de excitações do meio não-linear \mathbf{b}^\dagger e \mathbf{b} , obtemos

$$\mathbf{H}_k = \hbar\omega\mathbf{b}^\dagger\mathbf{b} + \hbar\mu\mathbf{b}^{\dagger 2}\mathbf{b}^2. \quad (4.53)$$

Limite Adiabático

Consideramos agora a interação do meio não-linear com o campo eletromagnético livre. Sendo \mathbf{a}^\dagger e \mathbf{a} os operadores do campo de frequência ϖ_0 e \mathbf{b}^\dagger e \mathbf{b} os operadores não-linear de frequência ω , temos o Hamiltoniano do modelo [72]

$$\mathbf{H}_{fk} = \hbar\varpi_0\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \hbar\omega\mathbf{b}^\dagger\mathbf{b} + \hbar\mu\mathbf{b}^{\dagger 2}\mathbf{b}^2 + \hbar g(\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger), \quad (4.54)$$

no qual g é o acoplamento do meio não-linear com o campo.

Analogamente ao modelo de *Jaynes-Cummings*, utilizaremos a **RWA** quando $\varpi_0 \approx \omega$. Neste caso, o Hamiltoniano de interação (na representação de interação) torna-se

$$\mathbf{H}_I = \hbar g(\mathbf{a}\mathbf{b}^\dagger e^{i\delta t} + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{b}e^{-i\delta t} + \mathbf{a}\mathbf{b}e^{-i\Delta t} + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{b}^\dagger e^{i\Delta t}), \quad (4.55)$$

em que $\delta = \omega - \varpi_0$ é a dessintonia entre o campo e o meio não-linear, com $\Delta = \omega + \varpi_0$.

Observamos que na **RWA**, ou seja, quando $\hbar\Delta \gg \hbar\delta$, podemos desprezar os termos contra-girantes uma vez que seus efeitos, em média, devem interferir destrutivamente, não contribuindo efetivamente na evolução do sistema. Assim, o Hamiltoniano (4.54) torna-se

$$\mathbf{H}_{fk} = \hbar\varpi_0\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \hbar\omega\mathbf{b}^\dagger\mathbf{b} + \hbar\mu\mathbf{b}^{\dagger 2}\mathbf{b}^2 + \hbar g(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\dagger). \quad (4.56)$$

Este Hamiltoniano é exatamente solúvel nos casos limites de $g = 0, \mu \neq 0$ e $g \neq 0, \mu = 0$. Em particular, para $\mu = 0$ há uma troca de energia periódica entre os dois osciladores determinada pelo parâmetro de acoplamento g . Se ambos os parâmetros μ e g forem diferentes de zero, uma solução fechada pode ainda ser obtida no limite adiabático, isto é, quando as frequências ϖ_0 e ω estão em grande dessintonia. Esta aproximação é usada largamente em óptica não-linear, pois permite a introdução da susceptibilidade não-linear de terceira ordem, tornando o sistema solúvel analiticamente e o Hamiltoniano efetivo é escrito em termos dos operadores do campo mono-modo apenas,

$$\mathbf{H}_{fk}^{eff} = \hbar\omega_0\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \hbar\kappa\mathbf{a}^{\dagger 2}\mathbf{a}^2, \quad (4.57)$$

nos quais a nova frequência ω_0 e o novo parâmetro de anarmonicidade κ estão relacionados a μ e g por [72]

$$\kappa = \frac{\mu g^4}{\delta^4}, \quad (4.58)$$

$$\omega_0 = \varpi_0 - \frac{g^2}{\delta}. \quad (4.59)$$

O termo de interação fóton-fóton κ é real e proporcional à susceptibilidade de terceira ordem ou ao índice de refração não-linear n_2 do meio Kerr [73,74]

$$\kappa = \frac{3\hbar\omega_0^2\chi^{(3)}}{2\epsilon V} = \frac{\hbar\omega_0^2 n_2}{2c\epsilon V}, \quad (4.60)$$

sendo $\epsilon = \epsilon_0 n_0^2$ a constante dielétrica do meio Kerr. Na interação com um átomo de dois níveis, conforme descrito a seguir, para valores típicos das grandezas envolvidas, o acoplamento κ é da ordem de 0.1Ω , com uma frequência de acoplamento átomo-campo (Ω) da ordem de 10^4 Hz [73].

4.4 Modelo de Jaynes-Cummings com Meio Kerr

O Hamiltoniano de um átomo de dois níveis interagindo com um campo mono-modo de uma cavidade sob a influência de um meio Kerr (não-linear) e na RWA, é dado por [75,76,77,78]:

$$\mathbf{H}_{JCK} = \hbar\omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega_{eg} \sigma_z + \hbar\Omega (\mathbf{a}^\dagger \sigma_- + \mathbf{a} \sigma_+) + \hbar\chi^{(3)} \mathbf{a}^{\dagger 2} \mathbf{a}^2, \quad (4.61)$$

no qual indicamos κ por $\chi^{(3)}$, ficando subentendida a relação entre as duas de (4.60).

Usando o método de *Stenholm* [79], reescrevemos \mathbf{H}_{JCK} como

$$\mathbf{H}_{JCK} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{int}, \quad (4.62)$$

em que

$$\mathbf{H}_0 = \hbar\omega_0 \left(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \sigma_z \right), \quad (4.63)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{int} = & \hbar\chi^{(3)} \left[(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a})^2 + \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \sigma_z \right] - \hbar\chi^{(3)} \left(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \sigma_z \right) \\ & + \hbar \left[\frac{\delta}{2} - \chi^{(3)} \left(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \sigma_z + \hbar\Omega (\mathbf{a}^\dagger \sigma_- + \mathbf{a} \sigma_+). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Observamos então que $[\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_{int}] = 0$. Logo, podemos escrever o operador evolução do modelo (na representação de *Schrödinger*) como

$$U_S(t) = U_0(t)U_{int}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_{int} t}. \quad (4.65)$$

É conveniente trabalhar na representação de interação, uma vez que o operador evolução temporal do sistema é obtido através da relação

$$U_I(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_{int} t}. \quad (4.66)$$

Dividindo este operador em duas partes

$$U_I(t) = U_1(t)U_2(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_1 t} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_2 t}, \quad (4.67)$$

isto é, reescrevendo \mathbf{H}_{int} como $\mathbf{H}_{int} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$, sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \frac{1}{2}\hbar\chi^{(3)} + \hbar\chi^{(3)}[(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a})^2 + \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \sigma_z] - \hbar\chi^{(3)}(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2}\sigma_z), \\ \mathbf{H}_2 &= \hbar[\frac{\delta}{2} - \chi^{(3)}(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} - \frac{1}{2})]\sigma_z - \frac{1}{2}\hbar\chi^{(3)} + \hbar\Omega(\mathbf{a}^\dagger \sigma_- + \mathbf{a} \sigma_+), \end{aligned}$$

tal que $[\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2] = 0$, teremos o operador $U_2^\dagger(t)$ na base atômica

$$U_2^\dagger(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} - \chi^{(3)}(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\chi^{(3)} & \Omega \mathbf{a} \\ \Omega \mathbf{a}^\dagger & -\frac{\delta}{2} + \chi^{(3)}(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\chi^{(3)} \end{pmatrix}^k. \quad (4.68)$$

Usando as identidades

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{n+1} & \Omega \mathbf{a} \\ \Omega \mathbf{a}^\dagger & -\frac{1}{2}\gamma_n \end{pmatrix}^{2k} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Omega_{n+1}^{2k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\Omega_n^{2k} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{n+1} & \Omega \mathbf{a} \\ \Omega \mathbf{a}^\dagger & -\frac{1}{2}\gamma_n \end{pmatrix}^{2k+1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{n+1}(\frac{1}{2}\Omega_{n+1})^{2k} & \Omega(\frac{1}{2}\Omega_{n+1})^{2k} \mathbf{a} \\ \Omega(\frac{1}{2}\Omega_n)^{2k} \mathbf{a}^\dagger & -\frac{1}{2}\gamma_n(\frac{1}{2}\Omega_n)^{2k} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

nos quais

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \delta - 2\chi^{(3)}n, \\ \Omega_{n+1} &= \sqrt{\gamma_{n+1}^2 + 4\Omega^2(n+1)}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

obtemos

$$U_I(t) = e^{-\frac{i}{2}\chi^{(3)}t} e^{-i\chi^{(3)}(n^2-n)t} \begin{pmatrix} e^{-i\chi^{(3)}(n-\frac{1}{2})t} & 0 \\ 0 & e^{i\chi^{(3)}(n-\frac{1}{2})t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\Omega_{n+1}t) - i\gamma_{n+1} \frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega_{n+1}t)}{\Omega_{n+1}} & -2i\Omega\mathbf{a} \frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega_n t)}{\Omega_n} \\ -2i\Omega\mathbf{a}^\dagger \frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega_{n+1}t)}{\Omega_{n+1}} & \cos(\frac{1}{2}\Omega_n t) + i\gamma_n \frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega_n t)}{\Omega_n} \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Uma vez que (4.70) satisfaz a equação de autovalores $f(\mathbf{n})|n\rangle = f(n)|n\rangle$, temos

$$\gamma_{n+1} = \delta - 2\chi^{(3)}n, \quad (4.72)$$

$$\Omega_{n+1} = \sqrt{\gamma_{n+1}^2 + 4\Omega^2(n+1)}. \quad (4.73)$$

4.4.1 Limite Dispersivo com Meio Kerr

Com a inclusão do meio não-linear, as condições para a obtenção do Hamiltoniano dispersivo tornam-se

$$|\delta| \gg \omega_{n+1} \quad \text{e} \quad |\delta| \gg \chi^{(3)}. \quad (4.74)$$

Assim, reescrevendo Ω_{n+1} em (4.73) como

$$\Omega_{n+1} = |\delta| \sqrt{1 + \frac{\varpi_{n+1}^2}{\delta^2}}, \quad (4.75)$$

no qual $\varpi_{n+1}^2 = \omega_{n+1}^2 - 4\chi^{(3)}\delta n + 4\chi^{(3)2}n^2$ e fazendo uma expansão em séries de Taylor, temos

$$\Omega_{n+1} \approx |\delta| + \frac{|\delta|}{\delta} \frac{\varpi_{n+1}^2}{2\delta} + \frac{|\delta|}{\delta} \varpi_{n+1} O\left(\frac{\varpi_{n+1}^3}{\delta^3}\right). \quad (4.76)$$

Agora, considerando os termos até segunda ordem apenas, obtemos os autovalores de energia

$$E_{\pm,n} \approx \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2}) \pm \frac{1}{2}\hbar|\delta| + \hbar\chi^{(3)}n(n \mp 1) \pm \frac{\hbar\Omega^2}{|\delta|}(n+1). \quad (4.77)$$

Dessa forma, se as condições em (4.74) forem satisfeitas para todo n , podemos trabalhar com o Hamiltoniano efetivo

$$\mathbf{H}_{JCK}^{eff} = \hbar\omega_0\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z + \hbar\chi^{(3)}\mathbf{a}^\dagger{}^2\mathbf{a}^2 + \frac{\hbar\Omega^2}{\delta}(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\sigma_z + \sigma_+\sigma_-), \quad (4.78)$$

uma vez que satisfaz a relação (4.35) com $E_{\pm,n}$ dado por (4.77).

Analogamente aos procedimentos anteriores, passamos para a representação de interação, obtendo o operador evolução do sistema

$$U_I^{eff}(t) = e^{-i\chi^{(3)}(n^2-n)t} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Omega^2}{\delta}(n+1)t} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Omega^2}{\delta}nt} \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

Experimentalmente o meio *Kerr* pode ser produzido considerando duas diferentes espécies de átomos de *Rydberg* na cavidade. Uma delas se comportando como o átomo de dois níveis submetido à transição de dois fótons e a outra se comportando como um oscilador anarmônico no campo [80]. Outra possibilidade seria acoplar a cada um dos espelhos da cavidade, um material que responda não-linearmente à ação do campo eletromagnético da cavidade, como por exemplo, a fibra óptica ou uma fibra óptica especial que permite a passagem entre seus sulcos, denominada "Hole-Fiber" [81].

4.5 Freqüência de *Rabi* Linear

Apresentamos agora o procedimento usado para se obter a expressão que torna a freqüência de *Rabi* linear em n . As oscilações de *Rabi* apresentam colapsos e *revivals* após um tempo que depende da intensidade do campo inicial [7]. Uma explicação para esse comportamento é obtida fazendo a expansão de (4.73) em torno de \bar{n} , isto é,

$$\Omega_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k \Omega_{n+1}}{\partial n^k} \right|_{n=\bar{n}} (n - \bar{n})^k, \quad (4.80)$$

no qual o primeiro termo desta expansão é responsável pelas rápidas oscilações na dinâmica do modelo enquanto que os termos restantes são responsáveis pelos envelopes (*revivals* e *superrevivals*) [82]. Em seguida, vamos derivar os dois primeiros termos da expansão em (4.80) de modo a obter

$$\left. \frac{\partial \Omega_{n+1}}{\partial n} \right|_{n=\bar{n}} = \frac{2\Delta_{\bar{n}+1}}{\Omega_{\bar{n}+1}}, \quad (4.81)$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega_{n+1}}{\partial n^2} \right|_{n=\bar{n}} = \frac{4(\chi^{(3)2}\Omega_{\bar{n}+1}^2 - \Delta_{\bar{n}+1}^2)}{\Omega_{\bar{n}+1}^3}, \quad (4.82)$$

sendo $\Delta_{\bar{n}+1} = \Omega^2 - \chi^{(3)}\gamma_{\bar{n}+1}$.

4.5.1 *Revivals e Super-revivals*

O tempo de *revival* é caracterizado pelo instante em que ocorre a máxima recominação das oscilações da frequência de *Rabi* provocadas pelo primeiro termo da expansão (4.80), sendo obtido considerando[§] que dois termos vizinhos da frequência de *Rabi* diferem por 2π . Assim, de (4.81), temos a expressão do tempo de *revival*

$$t_r = \frac{2\pi}{|(\partial\Omega_{n+1}/\partial n)_{n=\bar{n}}|} = \pi \left| \frac{\Omega_{\bar{n}+1}}{\Delta_{\bar{n}+1}} \right|. \quad (4.83)$$

Analogamente, o tempo de *super-revival* é caracterizado pelo instante em que ocorre a máxima recominação[¶] das oscilações de *Rabi* provocadas pelo segundo termo da expansão em (4.80). Assim, de (4.82), temos a expressão para o tempo de *super-revival*

$$t_s = \frac{2\pi}{|(\frac{1}{2}\partial^2\Omega_{n+1}/\partial n^2)_{n=\bar{n}}|} = \pi \left| \frac{\Omega_{\bar{n}+1}^3}{\chi^{(3)2}\Omega_{\bar{n}+1}^2 - \Delta_{\bar{n}+1}^2} \right|. \quad (4.84)$$

Para $\Delta_{n+1} = \chi^{(3)}\Omega_{n+1}$, temos que $\ddot{\Omega}_{n+1} = 0$. Logo, o tempo de *super-revival* torna-se fisicamente divergente. Assim, sempre teremos uma situação, denotada por δ_c , que faz t_s tender a infinito para qualquer \bar{n} , dada por:

$$\delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}. \quad (4.85)$$

Substituindo (4.85) em (4.73), temos

$$\Omega_{n+1} = \delta_c + 2\chi^{(3)}(n+2), \quad (4.86)$$

ou seja, a frequência de *Rabi* torna-se linear em n , determinando o caráter periódico dos *revivals* na dinâmica do modelo, analisada no **Capítulo 5**.

Comentamos agora sobre os valores de δ considerados neste trabalho quanto à sua validade na **RWA**. Da análise experimental [5], temos $\Omega \sim 10^4$ Hz e a frequência de microondas $\omega_0 \sim 10^{10}$ Hz. Consideramos $\delta \sim 10^2 \Omega$ Hz, tal que $\delta \sim 10^{-4} \omega_0 \ll \omega_0$, que é bastante satisfatório para a aplicação da **RWA**.

[§]Válido apenas para distribuição de número de fótons “suave” em torno do número médio de fótons [83].

[¶]No entanto, as oscilações para o tempo de *super-revival* não são aparentes nos modelos mais simples como, por exemplo, o modelo de *Jaynes-Cummings* padrão.

5

Dinâmica do JCM com Meio *Kerr*

A dinâmica do modelo descrito no capítulo precedente pode ser resolvida por vários métodos (por exemplo, amplitude de probabilidade, operador de *Heisenberg* e operador evolução). Optamos pelo último, pois permite o uso do formalismo de operador densidade. Assim, para o operador densidade do sistema inicialmente dado por

$$\rho = \rho_a \otimes \rho_f, \quad (5.1)$$

podemos obter a evolução deste estado para cada operador evolução calculado no capítulo precedente, através da relação

$$\rho(t) = U_I(t)\rho U_I^\dagger(t) = \begin{pmatrix} \rho_{ee}(t) & \rho_{eg}(t) \\ \rho_{eg}^*(t) & \rho_{gg}(t) \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

nos quais

$$\begin{aligned} \rho_{ee}(t) &= \langle e|\rho(t)|e\rangle, \\ \rho_{eg}(t) &= \langle e|\rho(t)|g\rangle, \\ \rho_{gg}(t) &= \langle g|\rho(t)|g\rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

O operador densidade reduzido do átomo e do campo podem agora ser obtidos das relações

de traço parcial. Assim

$$\rho_a(t) = \text{Tr}_f[\rho(t)] = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12}^* & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\rho_f(t) = \text{Tr}_a[\rho(t)] = \rho_{ee}(t) + \rho_{gg}(t),$$

em que

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \text{Tr}_f[\langle e|\rho(t)|e\rangle] = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\rho_{ee}(t)|n\rangle, \\ \lambda_{12} &= \text{Tr}_f[\langle e|\rho(t)|g\rangle] = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\rho_{eg}(t)|n\rangle, \\ \lambda_{22} &= \text{Tr}_f[\langle g|\rho(t)|g\rangle] = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\rho_{gg}(t)|n\rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Desse formalismo geral, podemos considerar qualquer estado inicial para o campo através de

$$\rho_f = \sum_{n,m} \rho_{n,m} |n\rangle\langle m|, \quad (5.6)$$

no qual $\rho_{n,m} = \langle n|\rho_f|m\rangle$ são os elementos da matriz densidade do campo e qualquer estado inicial para o átomo através de

$$\rho_a = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (5.7)$$

sendo $|\psi\rangle = e^{i\varphi}C_e|e\rangle + C_g|g\rangle$ e $C_e^2 + C_g^2 = 1$ a condição de normalização.

Neste trabalho, consideramos a dinâmica deste modelo para o campo inicialmente no estado coerente $|\alpha\rangle$ (2.89), com $\alpha = 5$ e $\phi = 0$, e o estado inicial do átomo em duas situações particulares: no estado excitado $|e\rangle$ e no estado de superposição atômica $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$, sendo $C_e = C_g = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\varphi = 0$. Destas condições iniciais, analisamos a dinâmica do modelo para diferentes combinações da dessintonia δ e da susceptibilidade do meio não-linear $\chi^{(3)}$. Além da dinâmica padrão, isto é, quando δ e $\chi^{(3)}$ nulos, escolhemos convenientemente valores para $\chi^{(3)}$ e, usando a relação (4.85), determinamos os valores correspondentes para δ , dos quais apresentamos os seguintes:

- Dessintonia nula: $\delta = 0$ com $\chi^{(3)} = 0$;
- Pequena dessintonia átomo-campo: $\delta = 4.8 \Omega$ com $\chi^{(3)} = 0.1 \Omega$;
- Grande dessintonia átomo-campo: $\delta = 99.99 \Omega$ com $\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$.

Nesta última situação, analisamos também a concordância dos resultados com a evolução no limite dispersivo do modelo quando, efetivamente, átomo e campo não trocam energia entre si.

Em todos os casos parametrizamos os resultados com o tempo de *revival* t_r . Na **Tabela 5.1**, mostramos os valores de δ e $\chi^{(3)}$ com os respectivos tempos de *revival*.

Em algumas grandezas consideradas adiante, será possível perceber uma distinção na evolução entre os dois estados iniciais considerados para o átomo: as amplitudes das oscilações de *Rabi* são bastante diferentes nas duas situações. Isso se deve ao termo de “interferência” presente na superposição atômica.

Fazendo uma manipulação algébrica, facilmente pode-se mostrar que o termo de “interferência” é modulado por $\sin(\phi - \varphi)$. Em outras palavras, a amplitude deste depende de $\sin(\phi - \varphi)$ (como mostrado na equação (9) em [11]). No caso do átomo inicialmente excitado, o termo de “interferência” desaparece. Contudo, para o átomo na superposição considerada aqui, temos $\phi - \varphi = 0$. Se considerarmos o extremo oposto, ou seja, $\phi - \varphi = \frac{\pi}{2}$, a dinâmica é essencialmente a mesma que a obtida para o átomo inicialmente excitado [11].

Uma explicação para esta característica é dada pela constatação de que a dinâmica da população atômica é governada não pela distribuição inicial de fótons do campo, mas sim por uma distribuição *weighted dressedness*, que depende essencialmente do peso relativo de cada auto-estado vestido do estado átomo-campo inicial [12].

δ	0	4.8Ω	4.8Ω	4.8Ω	4.8Ω	99.99Ω	99.99Ω	99.99Ω	99.99Ω
$\chi^{(3)}$	0	0	0.005Ω	0.1Ω	0.5Ω	0	0.005Ω	0.1Ω	0.5Ω
Ωt_r	32.0381	35.4095	35.8990	31.4159	6.40441	315.757	628.319	35.3141	6.51477

Tabela 5.1: Valores da dessintonia δ e susceptibilidade $\chi^{(3)}$ com os respectivos tempos de *revival*.

5.1 Inversão Atômica

O modelo de *Jaynes-Cummings* permite a investigação de uma maneira não perturbativa da dinâmica atômica. Uma forma conveniente de caracterizar a resposta ao campo é dada pela inversão de população ou inversão atômica. Esta quantidade é definida como a probabilidade de encontrar o átomo em seu estado excitado menos a probabilidade de encontrá-lo em seu estado fundamental, ou seja,

$$\mathcal{W}(t) = \langle \sigma_z \rangle_t = \text{Tr}_a [\sigma_z \rho_a(t)] = \lambda_{11} - \lambda_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho_{ee}(t) | n \rangle - \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho_{gg}(t) | n \rangle. \quad (5.8)$$

Notamos que a inversão atômica é altamente sensível a P_n . Se o campo é preparado inicialmente num estado de número $|n\rangle$, com distribuição de número de fótons dada por (2.86), a expressão acima exhibe um átomo saindo de seu estado inicial (excitado, por exemplo) e retornando ao mesmo de uma maneira periódica, comportamento este conhecido como oscilações de *Rabi*. Contudo, se o campo é preparado num estado coerente $|\alpha\rangle$ com a P_n dada por (2.95), a inversão de população exhibe características não-triviais: as oscilações de *Rabi* colapsam e ressurgem após tempos que dependem da intensidade do campo inicial [7], denominados tempos de colapso e de *revival*, como verificamos em (4.83).

Apresentamos a inversão atômica para o campo da cavidade inicialmente num estado coerente

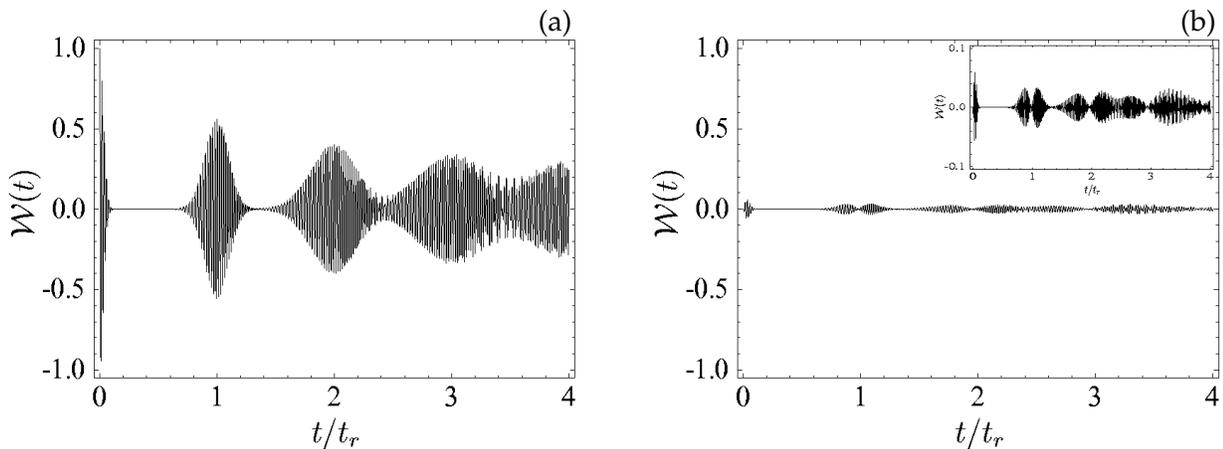


Figura 5.1: Inversão atômica em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

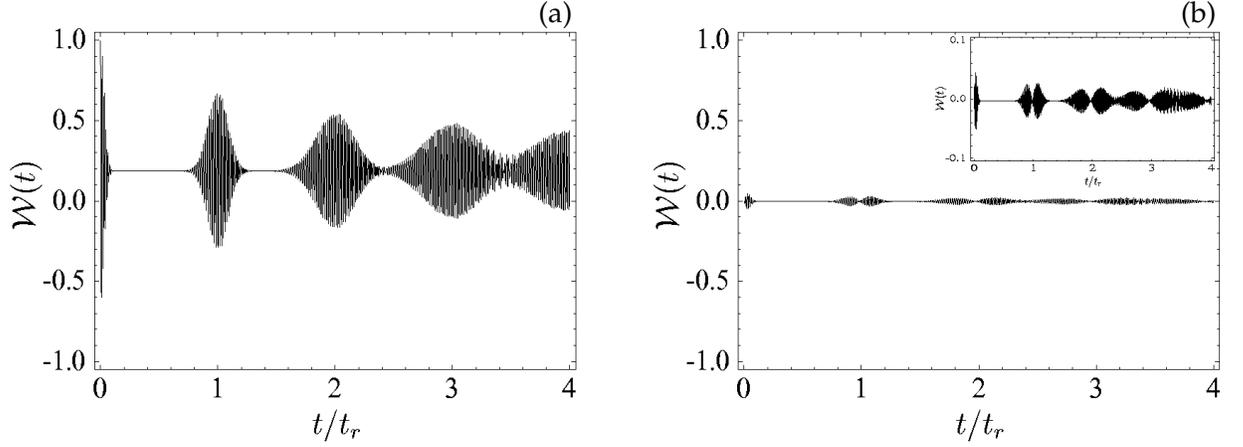


Figura 5.2: Inversão atômica em função de t/t_r com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

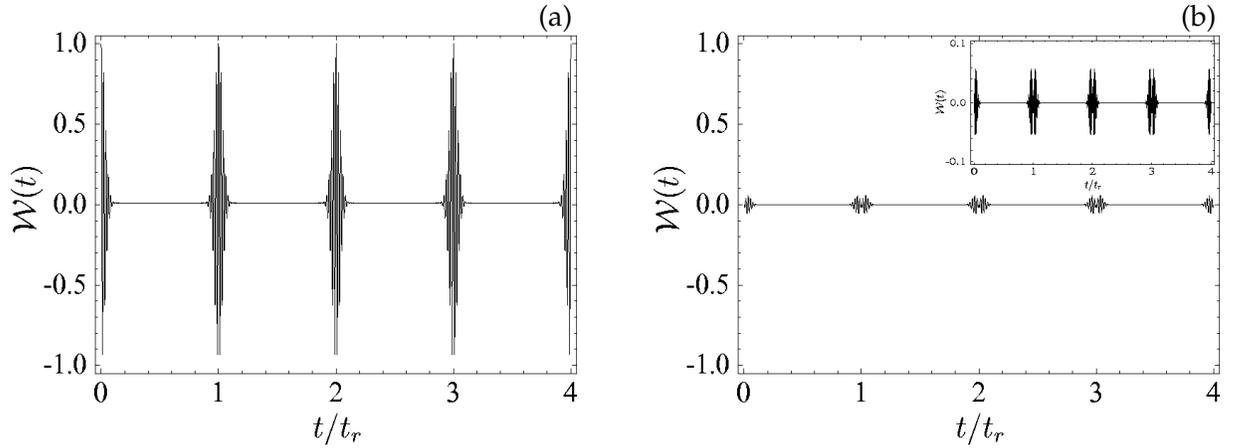


Figura 5.3: Inversão atômica em função de t/t_r com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

com $\alpha = 5$ ($\phi = 0$). Quando átomo e campo estão em ressonância exata sem a presença do meio Kerr, para o átomo inicialmente excitado (**Figura 5.1-a**), verificamos os resultados bem conhecidos obtidos em [7]. Para o átomo inicialmente numa superposição coerente de seus níveis, verificamos o aprisionamento na inversão de população (**Figura 5.1-b**), como inicialmente observado em [11].

No limite de pequena dessintonia ($\delta = 4.8\Omega$) e na ausência do meio não-linear, começamos a observar um deslocamento na linha da região de colapso para o átomo inicialmente excitado

(Figura 5.2-a). Para o caso no qual a influência do meio *Kerr* é pequena ($\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$), a dinâmica do átomo pouco muda em relação à Figura 5.2-a. Para o átomo inicialmente na superposição coerente de seus níveis, quase não se percebe diferenças entre as dinâmicas na ressonância e no limite de pequena dessintonia na presença (ou não) do meio não-linear (Figuras 5.1-b e 5.2-b).

No limite de pequena dessintonia átomo-campo, para δ e $\chi^{(3)}$ tais que a frequência de Rabi é linear, observamos claramente a periodicidade provocada no caso em que o átomo está inicialmente excitado (Figura 5.3-a). Para a superposição dos níveis atômicos, o caráter periódico também é observado, porém, este é minimizado devido ao aprisionamento das oscilações (Figura 5.3-b). Nos detalhes, evidenciamos estes efeitos minimizados, explicados em [12].

No limite de grande dessintonia átomo-campo, observa-se a tendência de não mais ocorrer inversão de população em relação ao estado considerado inicialmente tal como previsto no capítulo anterior. Ainda, observa-se também que uma susceptibilidade do meio não-linear cada vez maior produz o mesmo efeito. Contudo, observamos que uma combinação de ambos os parâmetros pode também produzir um efeito contrário ao observado, por exemplo, ao compararmos a linha da região de colapso nas Figuras 5.2-a e 5.3-a.

5.2 Distribuição de Número de Fótons

Uma maneira de caracterizar o campo da cavidade durante a interação com o átomo é dada pela sua distribuição de número de fótons, definida como

$$P_n(t) = \langle n | \rho_f(t) | n \rangle, \quad (5.9)$$

no qual $\rho_f(t)$ é o operador densidade do campo. Se considerarmos este operador dado por (5.4), a distribuição de número de fótons pode ser reescrita como

$$P_n(t) = \langle n | \rho_{ee}(t) | n \rangle + \langle n | \rho_{gg}(t) | n \rangle. \quad (5.10)$$

Assim, podemos encontrar a evolução temporal da estatística de fótons do campo para qualquer situação inicial do modelo.

5.2.1 Número Médio de Fótons

Com o uso da relação (5.10) obtém-se a expressão para a evolução temporal do número médio de fótons do campo

$$\langle n \rangle_t = \text{Tr}_f [\mathbf{n} \rho_f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) n. \quad (5.11)$$

Analisando a relação acima, verificamos que o número médio de fótons está relacionado com a inversão atômica através da relação

$$\langle n \rangle_t = \alpha^2 + \frac{1}{2} [1 - \mathcal{W}(t)], \quad (5.12)$$

que é uma consequência direta do fato da interação átomo-campo conservar o número de excitação [84]. Desta última relação, podemos concluir que $\langle n \rangle_t$ e $\mathcal{W}(t)$ produzem as mesmas curvas, porém, refletidas e transladadas entre si.

Na **Figura 5.4** apresentamos o número médio de fótons para o sistema átomo-campo ressonante na ausência de não-linearidade. Observamos, para o átomo inicialmente excitado, um aumento no número médio de fótons do campo, não retornando mais para o valor inicial (**Figura 5.4-a**). Para o átomo na superposição de seus níveis, o número médio de fótons quase não oscila devido ao aprisionamento permanecendo próximo do valor inicial (**Figura 5.4-b**). Estas características do limite ressonante praticamente não se alteram no limite próximo da ressonância e na presença (ou não)

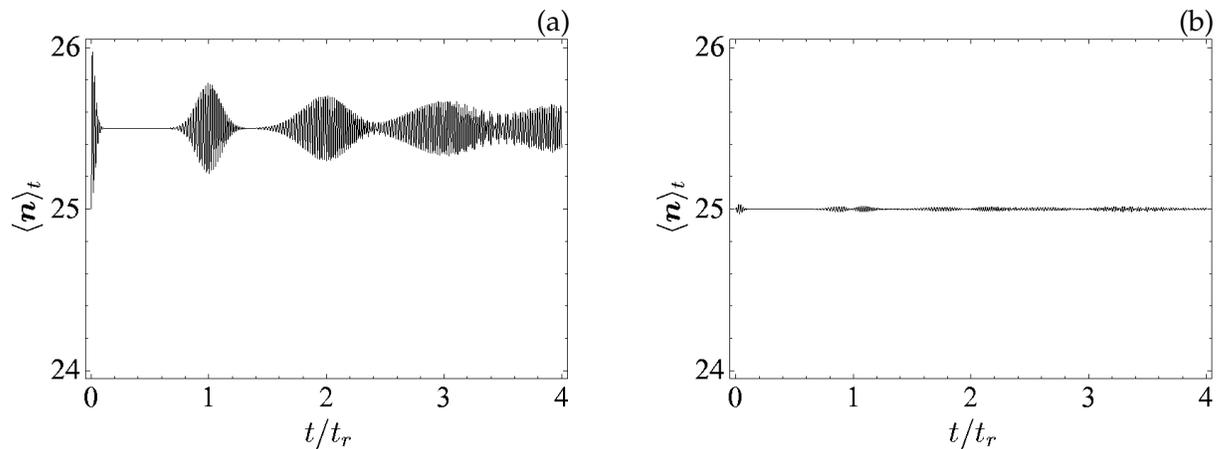


Figura 5.4: Número médio de fótons em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

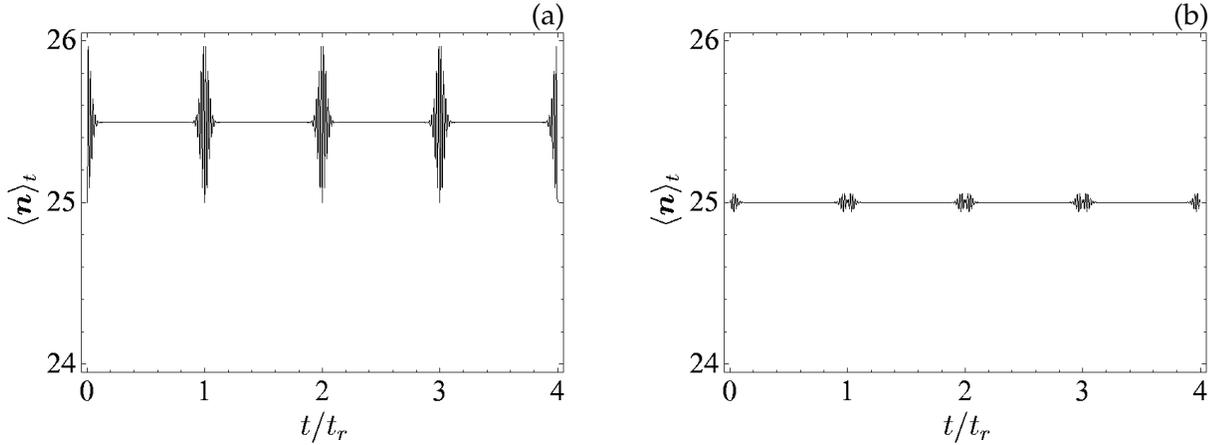


Figura 5.5: Número médio de fótons em função de t/t_r com $\delta = 4.8 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1 \Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

de uma fraca ação perturbativa do meio não-linear ($\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$). Para uma susceptibilidade $\chi^{(3)} = 0.5 \Omega$, observa-se a tendência de não mais haver troca de energia átomo-campo. Contudo para a combinação $\delta = 4.8 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1 \Omega$, observamos a periodicidade, verificando o retorno para o número médio de fótons inicial (**Figura 5.5**).

No limite de grande dessintonia, como já observado para a inversão atômica, também não ocorrem, efetivamente, trocas de energia átomo-campo, mesmo na presença do meio não-linear.

5.2.2 Variância do Número de Fótons

Da relação (5.11) e de um cálculo análogo para se obter $\langle n^2 \rangle_t$, podemos escrever a relação para a evolução temporal da variância do número de fótons do campo como

$$\langle \Delta n^2 \rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) n^2 - \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) n \right]^2. \quad (5.13)$$

Na **Figura 5.6** apresentamos a evolução da variância do número de fótons em função de t/t_r para o átomo inicialmente excitado (a) e inicialmente na superposição (b).

Para o limite de pequena dessintonia ($\delta = 4.8 \Omega$) e na ausência ($\chi^{(3)} = 0$) ou presença ($\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$) de uma fraca perturbação não-linear temos, de maneira análoga ao observado para $\langle n \rangle_t$, evoluções bastante semelhantes a situação de ressonância também para $\langle \Delta n^2 \rangle_t$.

No limite de grande dessintonia, analogamente à inversão atômica e ao número médio de

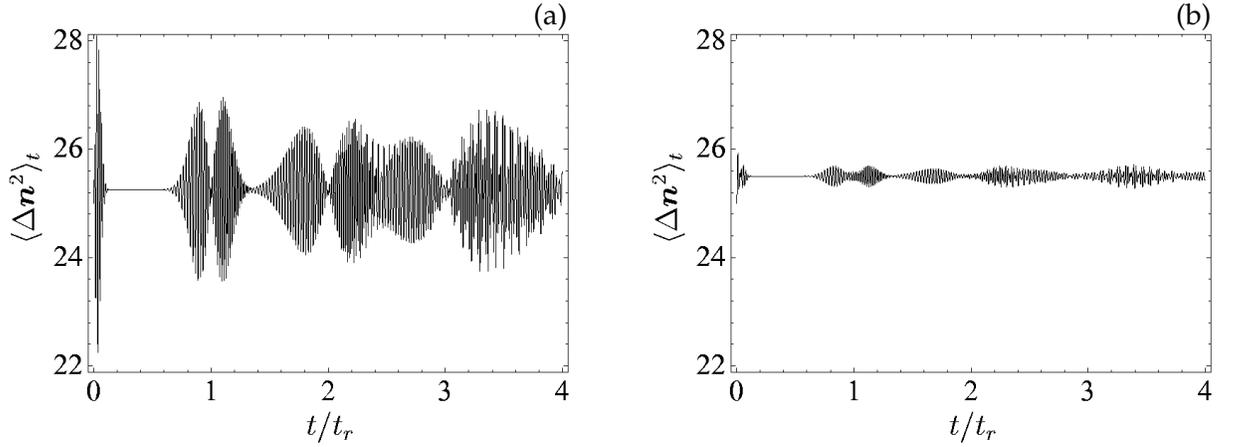


Figura 5.6: Variância do número de fótons em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

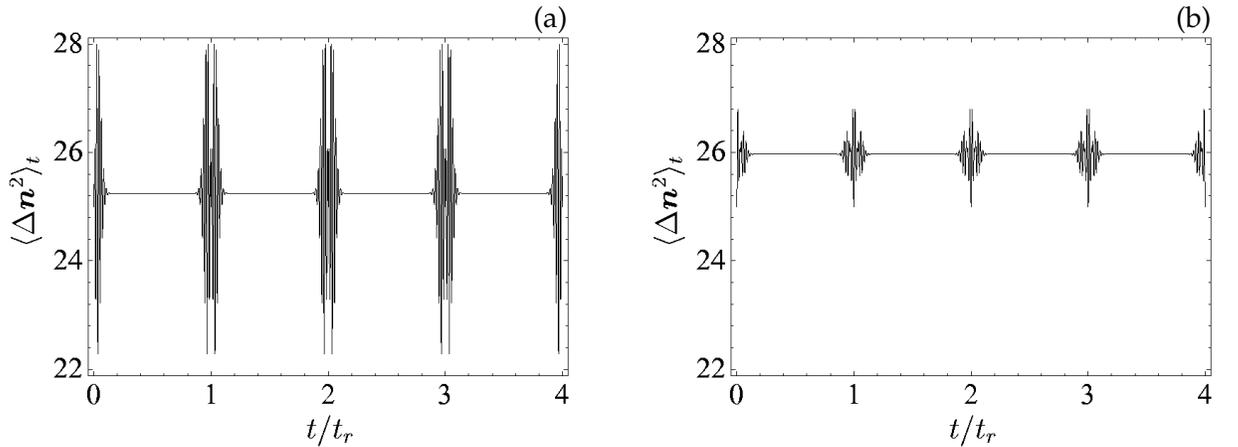


Figura 5.7: Variância do número de fótons em função de t/t_r com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

fótons, a variância no número médio de fótons do campo praticamente não desvia do valor inicialmente encontrado. O mesmo efeito é obtido considerando o sistema em ressonância ou próximo desta com uma forte interação do campo com o meio Kerr ($\chi^{(3)} = 0.5\Omega$).

Quando consideramos apenas a combinação que lineariza a frequência de Rabi em n , observamos a característica periodicidade. No limite de pequena dessintonia átomo-campo com o átomo inicialmente excitado temos, além do caráter periódico das oscilações, a maior variância no número de fótons observada a cada tempo de *revival* (Figura 5.7-a). Ao considerarmos a superposição inicial, temos um efeito particularmente interessante: uma variância de aproximadamente um fóton

no número médio de fótons do campo, retornando ao valor inicial a cada tempo de *revival* (Figura 5.7-b).

5.3 Distribuição de Probabilidade de Fase

Usando as relações obtidas para as propriedades da fase quântica do campo, segundo o formalismo de *Pegg e Barnett* no **Capítulo 3**, podemos agora analisar a dinâmica dessas propriedades. A distribuição de fase no modelo de *Jaynes-Cummings* na presença do meio não-linear é obtida de (3.104) e dada por

$$P(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{n \neq m}^{\infty} \rho_{n,m}(t) e^{i(m-n)(\theta+\phi)} \right], \quad (5.14)$$

em que $\rho_{n,m}(t) = \langle n | \rho(t) | m \rangle$ são os elementos de matriz para o operador densidade do campo.

Gráficos da evolução temporal da distribuição de probabilidade de fase $P(\theta, t)$ (5.14) mostram (Figuras 5.8 a 5.13) que, quando $t = 0$, a distribuição de fase $P(\theta)$ apresenta uma estrutura se-

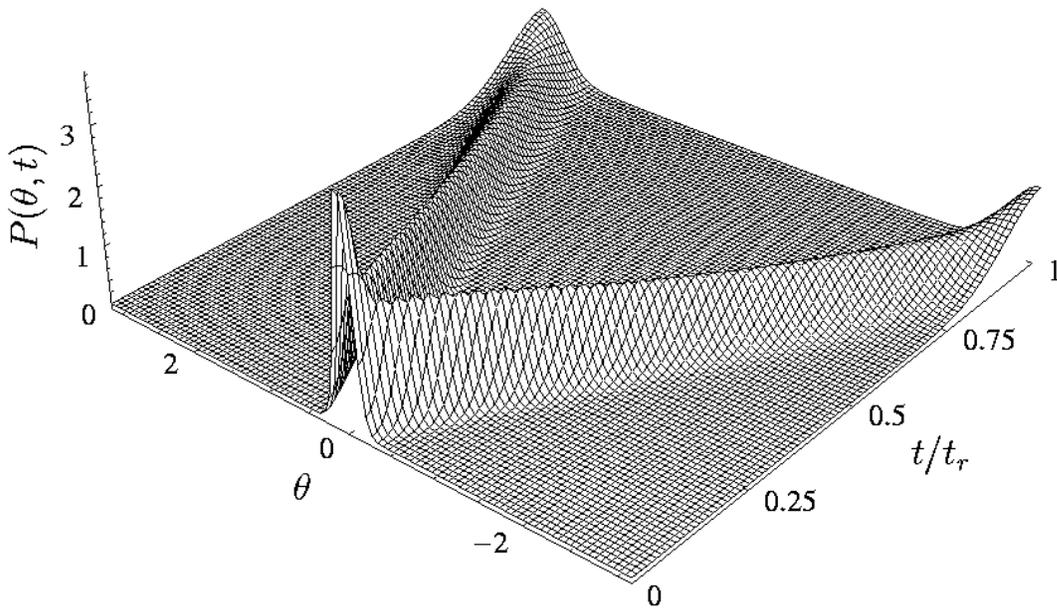


Figura 5.8: Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r , com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$.

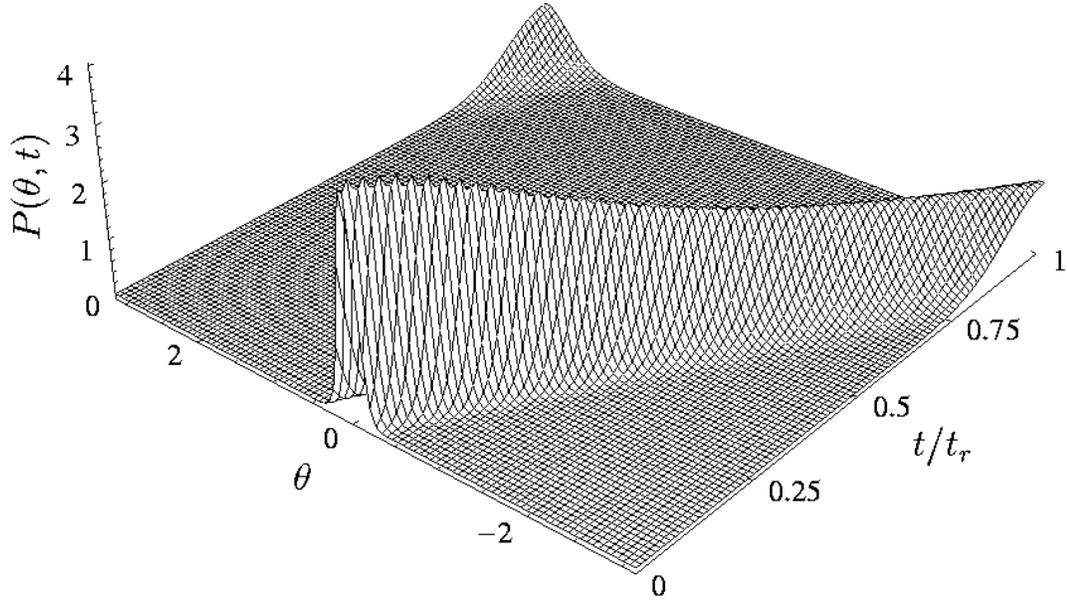


Figura 5.9: Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

melhante a uma Gaussiana, correspondente ao estado coerente inicial do campo. À medida que aumentamos a amplitude coerente do campo, a distribuição de probabilidade de fase tende cada vez mais para a distribuição bem definida dos estados de fase coerentes, que são auto-estados do operador fase de *Susskind-Glogower* (3.58).

Como sabemos do modelo de *Jaynes-Cummings* padrão [85], isto é, o átomo inicialmente excitado e em ressonância com o modo do campo na ausência do meio não linear, caso o campo da cavidade esteja inicialmente no estado coerente, então, durante a evolução do sistema, a distribuição de probabilidade de fase $P(\theta, t)$ divide-se em dois picos que se distanciam gradualmente (**Figura 5.8**). Os picos são simétricos em relação ao ângulo $\theta = 0$, tal que o valor médio da fase permanece sempre igual a zero (**Figura 5.14-a**).

Portanto, a evolução temporal da distribuição de probabilidade de fase guarda alguma informação a respeito dos colapsos e *revivals* das oscilações de *Rabi* [85]. Quando os picos estão com máxima separação entre si, observamos o primeiro *revival* nas oscilações de *Rabi*. Quando os picos se reencontram (esse *overlap* dos picos não está mostrado na **Figura 5.8**), há a incidência do segundo *revival* e assim por diante até a completa dispersão, isto é, tendência para a distribuição

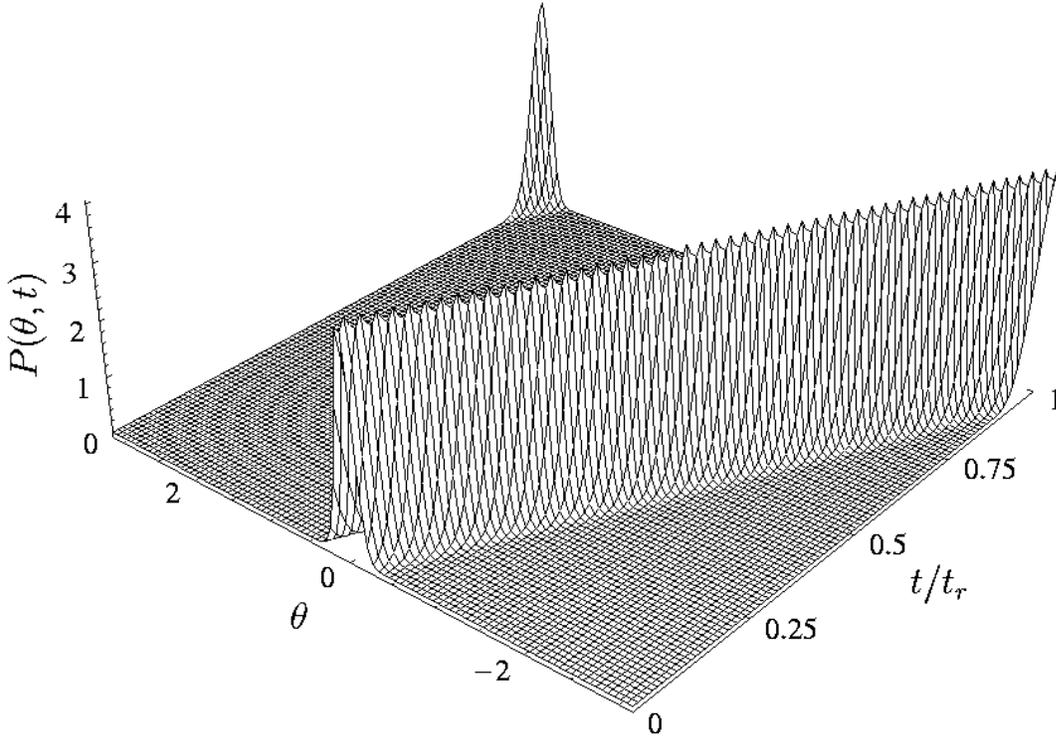


Figura 5.10: Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r com $\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$.

aleatória de fase $P(\theta, t) = \frac{1}{2\pi}$.

Para a situação na qual o átomo se encontra inicialmente numa superposição igualmente ponderada entre seus níveis, a dinâmica da distribuição de probabilidade de fase é bastante diferente. Em primeira instância, não mais é observada qualquer divisão do pico inicial em dois picos adjacentes (**Figura 5.9**). Essa distribuição de probabilidade de fase reflete o aparecimento de oscilações no valor médio da fase (**Figura 5.14-b**) em contraste com a interação do campo com o átomo inicialmente excitado, conforme abordaremos na próxima subseção.

No limite de pequena dessintonia átomo-campo e sem o meio *Kerr*, a evolução da distribuição de probabilidade de fase ainda é bastante semelhante aos casos ressonantes. Para o átomo inicialmente excitado, observa-se a distribuição de probabilidade de fase simétrica entre dois picos adjacentes sendo remanejada à medida que se aumenta a dessintonia até que um dos picos desaparece (**Figura 5.10**). Para o átomo inicialmente na superposição observa-se um efeito inverso,

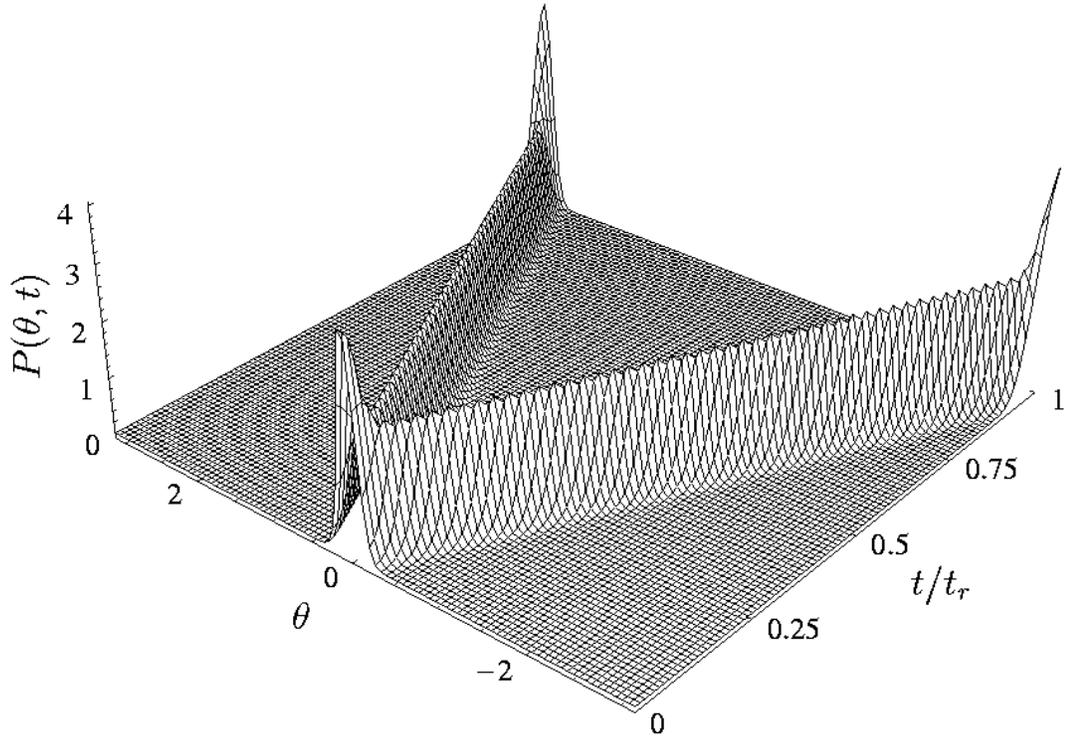


Figura 5.11: Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r com $\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

ou seja, a medida que a dessintonia aumenta, o pico (inicialmente único) é remanejado entre dois picos adjacentes (**Figura 5.11**).

Tal processo converge para a situação apresentada no limite de grande dessintonia átomo-campo, ocorrendo uma “inversão de papéis”. Neste limite, a interação do campo com átomo inicialmente excitado passa a responder com a permanência do pico centrado num único ponto evoluindo quase periodicamente, isto é, quase sem dispersão (**Figura 5.10**). Na interação do campo com a superposição atômica, neste limite, observa-se a divisão do pico inicial em dois picos adjacentes e simétricos (**Figura 5.11**) também quase sem dispersão, como verificaremos adiante na análise do valor médio e da variância da fase do campo.

Adicionando o meio *Kerr* no sistema, a evolução da distribuição de probabilidade de fase se altera completamente. Conforme mostrado na **Figura 5.12**, uma fraca presença perturbativa do meio não-linear ($\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$) com uma pequena dessintonia ($\delta = 4.8 \Omega$), provoca não só um deslo-

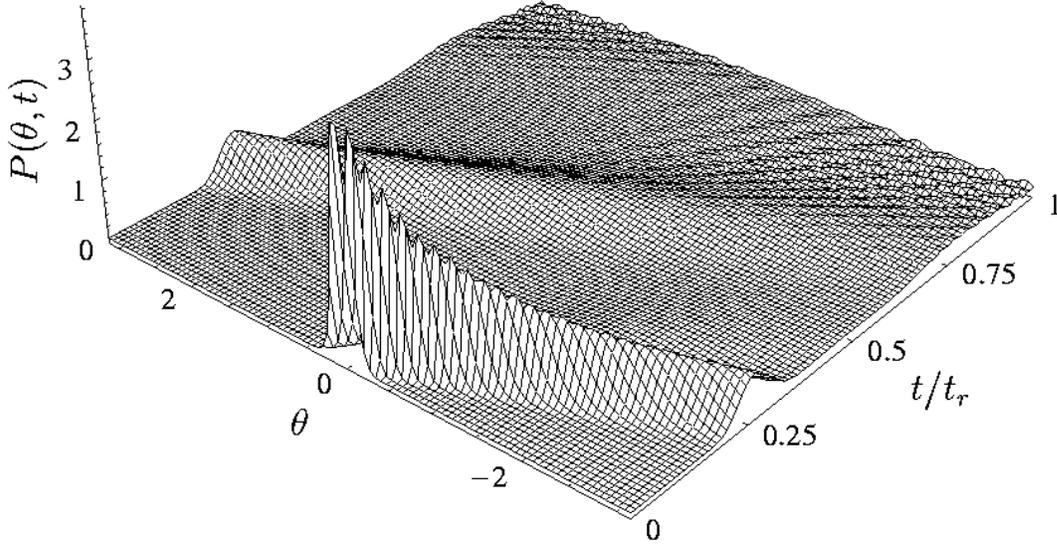


Figura 5.12: Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$.

camento na distribuição de probabilidade fase como também contribui para uma maior dispersão da fase do campo durante a interação do campo com o átomo.

Para o caso particular de δ_c em (4.85), quando Ω_{n+1} torna-se linear em n , observamos o caráter periódico na evolução da distribuição de probabilidade de fase. Mais ainda, independentemente do estado inicial do átomo considerado (excitado ou superposição), assim como o limite considerado (ressonante, pequena ou grande dessintonia) a evolução da distribuição de probabilidade de fase é a mesma, onde observamos que a cada tempo de *revival*, a fase do campo retorna à sua distribuição de probabilidade inicial (**Figura 5.13**).

Para as combinações não nulas de δ e $\chi^{(3)}$ consideradas, a evolução da distribuição de fase se processa de maneira semelhante à observada na **Figura 5.13**. Contudo, não se recupera novamente a distribuição de probabilidade de fase inicial, ao menos não num tempo igual ao tempo de *revival*. Quanto maior a não-linearidade do meio *Kerr* maior a taxa de dispersão em relação a distribuição de probabilidade de fase inicial. A relação entre o comportamento dos picos e os colapsos e *revivals* das oscilações de *Rabi* aparentemente é quebrada.

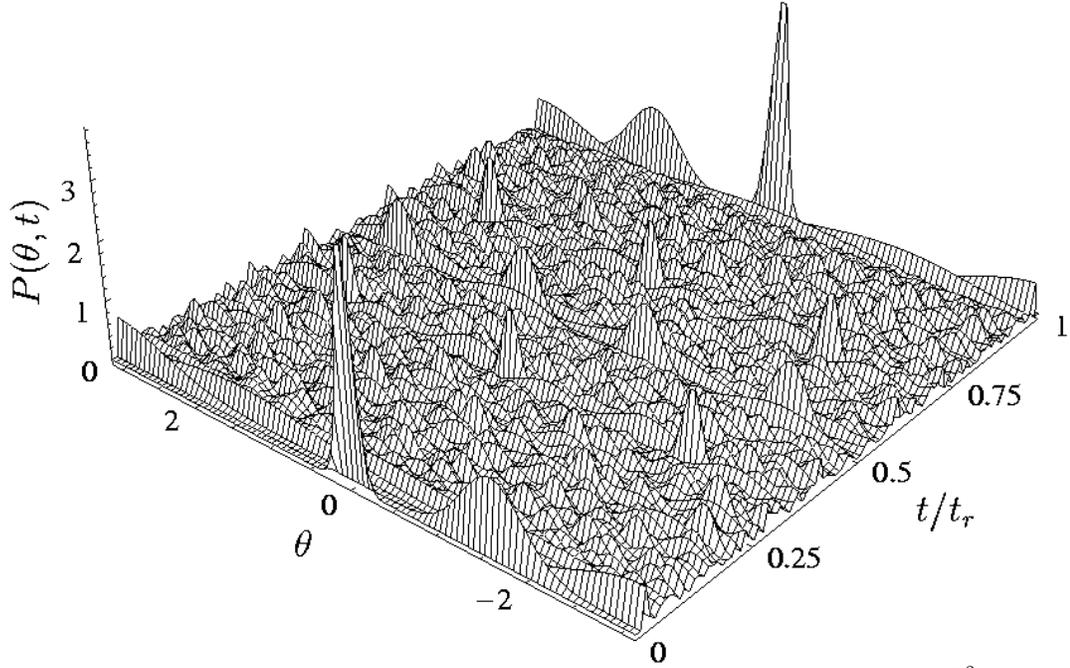


Figura 5.13: Distribuição de probabilidade de fase em função de θ e t/t_r com $\delta = \delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ ou $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g} |i\rangle\langle j|$.

5.3.1 Valor Médio da Fase

Da relação (5.14) podemos escrever o valor esperado para a fase do campo, segundo a dinâmica do modelo de *Jaynes-Cummings* com meio *Kerr*, como

$$\langle \phi_\theta \rangle_t = \phi - i \sum_{n \neq m}^{\infty} \rho_{n,m}(t) \frac{e^{i(m-n)\phi} (-1)^{m-n}}{m-n}. \quad (5.15)$$

Na **Figura 5.14-a**, pode se observar que o valor médio da fase do campo permanece constante durante a interação com o átomo inicialmente no estado excitado e em ressonância com o campo na ausência do meio não-linear. Este efeito pode ser explicado pela simetria existente na distribuição de probabilidade de fase, conforme analisado anteriormente (**Figura 5.8**). Uma outra maneira de explicar esse efeito pode ser obtida analisando a evolução temporal do estado do campo no espaço de fase usando, por exemplo, a função-*Q*, conforme mostraremos adiante.

Da mesma forma, as oscilações no valor médio da fase do campo quando este interage com o átomo inicialmente no estado de superposição (**Figura 5.14-b**), estão de acordo com distribuição de probabilidade apresentada, a qual não é simétrica (**Figura 5.9**). Tal efeito também pode ser

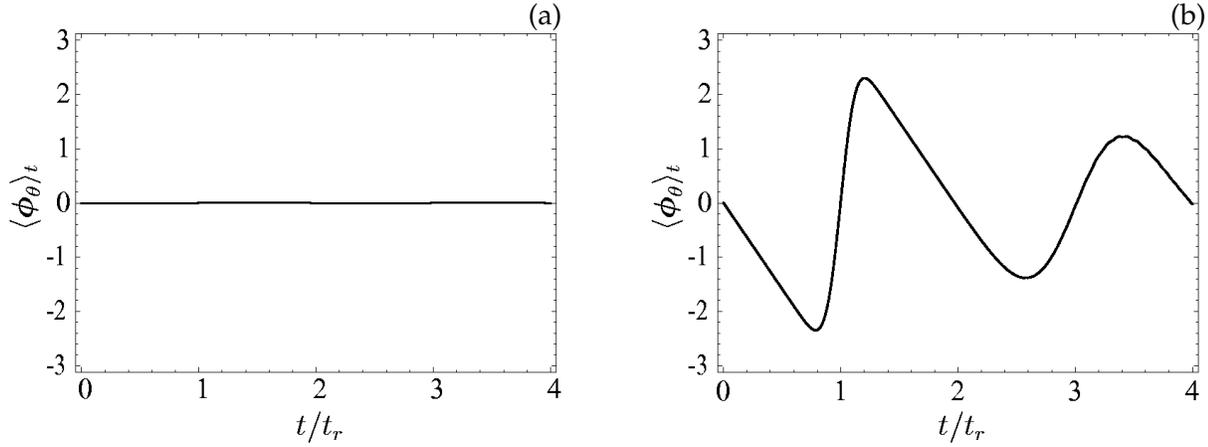


Figura 5.14: Valor médio da fase em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

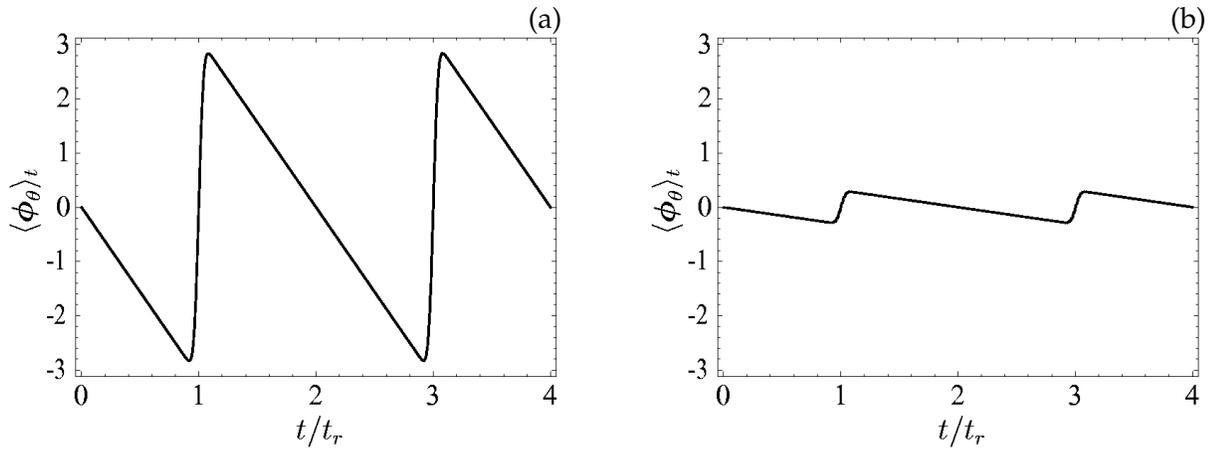


Figura 5.15: Valor médio da fase em função de t/t_r com $\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

observado analisando a evolução do estado do campo no espaço de fase, conforme análise da função- Q adiante. Neste caso, o valor médio da fase oscila em torno do valor inicial, convergindo novamente para este após um tempo suficientemente longo devido a dispersão.

No limite de grande dessintonia, a evolução do valor médio da fase do campo se inverte de acordo com o estado inicial considerado para o átomo: se estiver inicialmente no estado excitado, são observadas oscilações, de acordo com a **Figura 5.15-a**, quase não apresentando tendência em

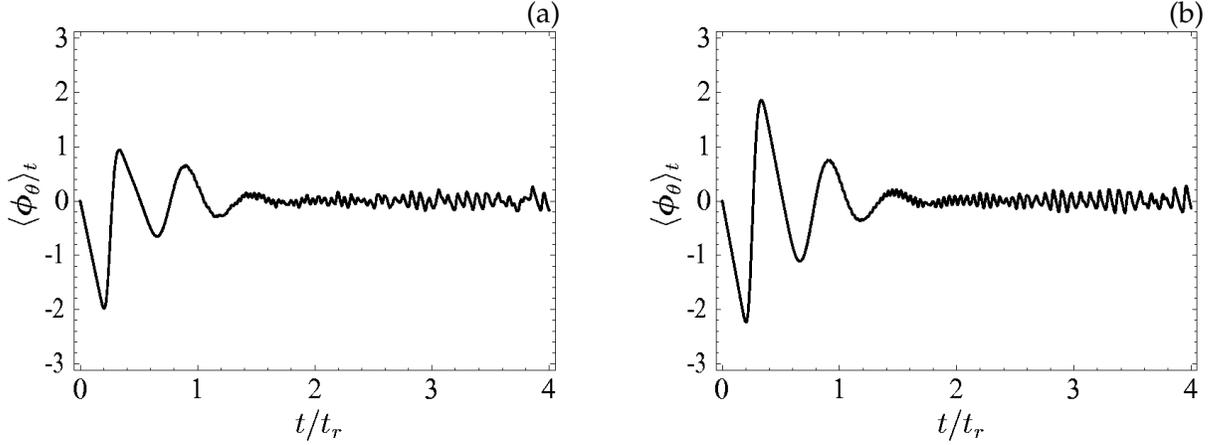


Figura 5.16: Valor médio da fase em função de t/t_r com $\delta = 4.8 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

voltar para o valor inicial da fase durante a interação*; se estiver no estado de superposição, evolui de forma semelhante à observada na situação de ressonância com o átomo excitado (Figura 5.14-a), ou seja, quase não apresenta variação em relação ao valor inicial, conforme observado na Figura 5.15-b.

Na presença fracamente perturbativa ($\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$) do meio *Kerr*, temos curvas semelhantes para as oscilações da fase do campo interagindo com o átomo inicialmente no estado excitado (Figura 5.16-a) e inicialmente no estado de superposição (Figura 5.16-b). A taxa de dispersão, como já verificamos para $P(\theta, t)$, deve aumentar com o aumento da susceptibilidade do meio não-linear. Pode ocorrer retorno para o valor inicial em determinados tempos da interação, porém, não em tempos iguais aos tempos de *revival* [86].

Para os valores de δ e $\chi^{(3)}$ que linearizam a frequência de *Rabi* em n , temos uma evolução para o valor médio da fase que é a mesma para todas as situações iniciais (Figura 5.17) indepen-

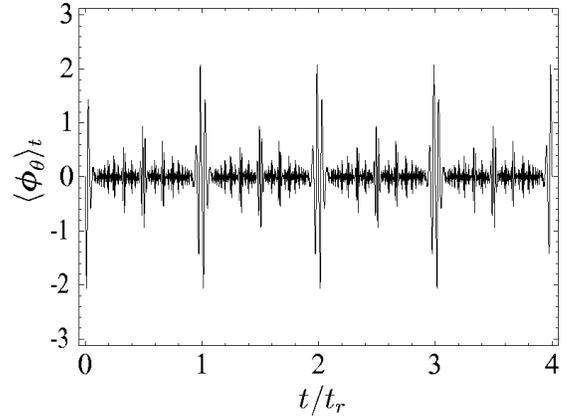


Figura 5.17: Valor médio da fase em função de t/t_r com $\delta = \delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ ou $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

*A tendência ocorre para um tempo bem maior que o considerado neste trabalho.

dentemente do estado inicial do átomo (excitado ou de superposição) ou do limite considerado (ressonante, pequena e grande dessintonia), desde que satisfaçam a relação (4.85). Tais valores têm uma relação direta com o tempo de *revival*. A cada tempo de *revival* observamos retorno para o valor inicial da fase do campo.

5.3.2 Variância da Fase

Da relação (5.14) e de maneira análoga ao cálculo de $\langle \phi_\theta \rangle_t$, a evolução temporal da variância da fase do campo é dada por

$$\langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle_t = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n \neq m}^{\infty} \rho_{n,m} \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)^2} + \left[\sum_{n \neq m}^{\infty} \rho_{n,m} \frac{(-1)^{m-n}}{m-n} \right]^2. \quad (5.16)$$

Na **Figura 5.18-a**, apresentamos a variância da fase do campo para a situação de ressonância átomo-campo e ausência do meio não-linear. Observamos que evolução da variância do campo no estado coerente inicial interagindo com o átomo inicialmente no estado excitado se processa oscilando em torno do valor $\frac{\pi^2}{3}$ (fase aleatória), convergindo para este valor durante a interação. De forma semelhante, temos a dinâmica da variância do estado coerente inicial do campo interagindo com o átomo inicialmente no estado de superposição (**Figura 5.18-b**).

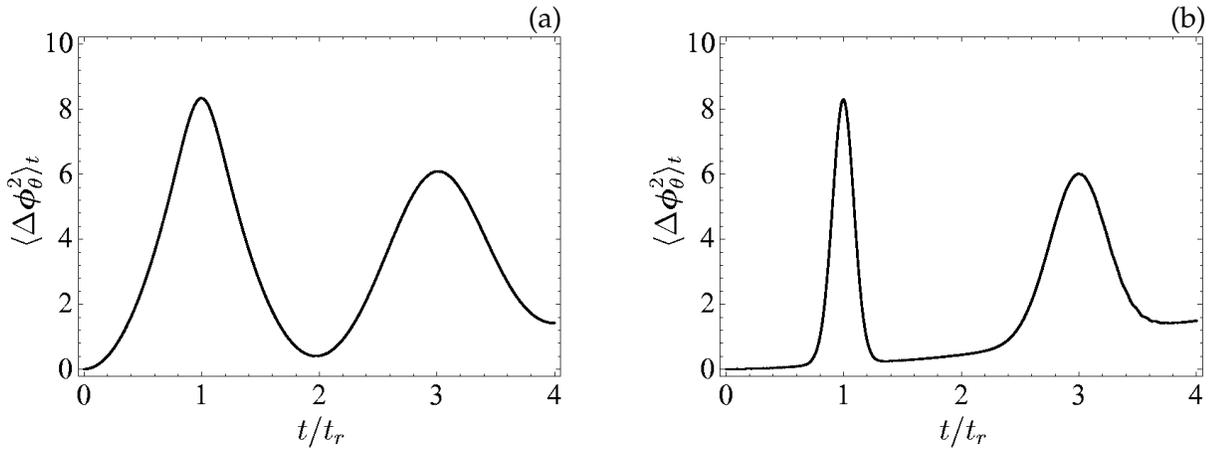


Figura 5.18: Variância da fase em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

Quando consideramos uma fraca perturbação ($\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$) do meio não-linear, observamos que a variância do estado do campo oscila mais rapidamente devido a taxa de dispersão do estado

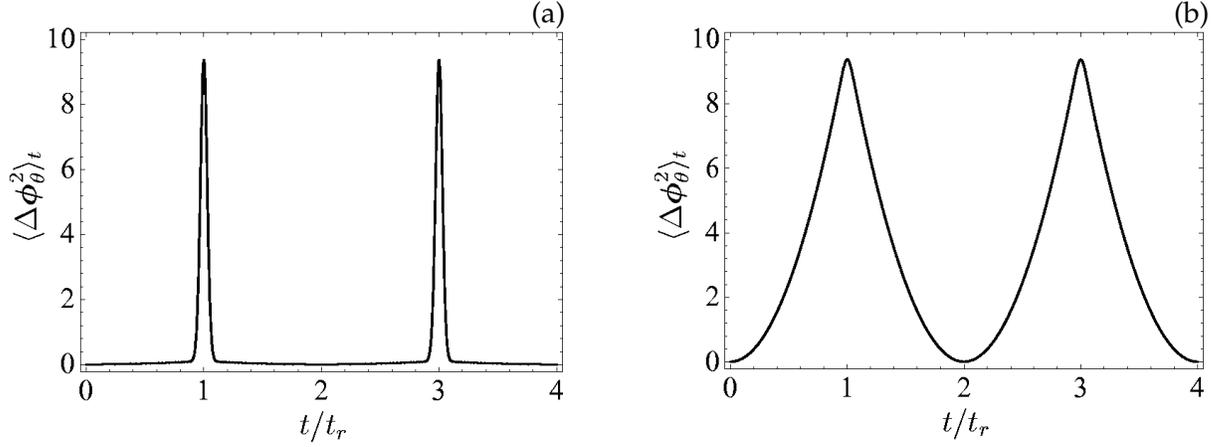


Figura 5.19: Variância da fase em função de t/t_r com $\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

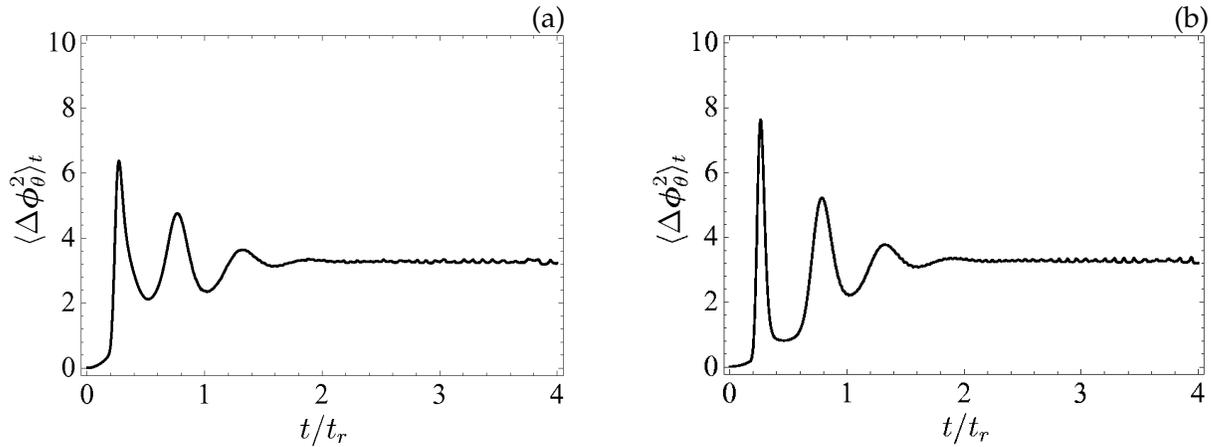


Figura 5.20: Variância da fase em função de t/t_r com $\delta = 4.8 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

ser cada vez maior com o aumento da susceptibilidade do meio não-linear. Os efeitos são semelhantes para os dois estados iniciais do átomo: inicialmente no estado excitado (**Figura 5.20-a**) e inicialmente na superposição (**Figura 5.20-b**).

No limite de grande dessintonia átomo-campo temos o caráter quase periódico na variância da fase. A variância para o estado coerente inicial do campo interagindo com o átomo inicialmente excitado (**Figura 5.19-a**) apresenta rápidas alterações entre máximos e mínimos. Para o átomo inicialmente no estado de superposição ocorre um efeito semelhante, porém, de maneira “suave” (**Figura 5.19-b**). Nas duas situações, o efeito de dispersão não é observado facilmente, começando

a ocorrer após um tempo maior que o considerado neste trabalho.

Quanto as combinações de δ e $\chi^{(3)}$ não apresentadas e que não satisfazem (4.85), a evolução se processa de maneira semelhante à mostrada na **Figura 5.21**. Porém, a variância não retorna ao valor inicial encontrado, ao menos não em tempos iguais ao tempo de *revival*, característica sempre observada quando consideramos os parâmetros δ e $\chi^{(3)}$ que satisfazem a condição de linearização da frequência de *Rabi* (4.85).

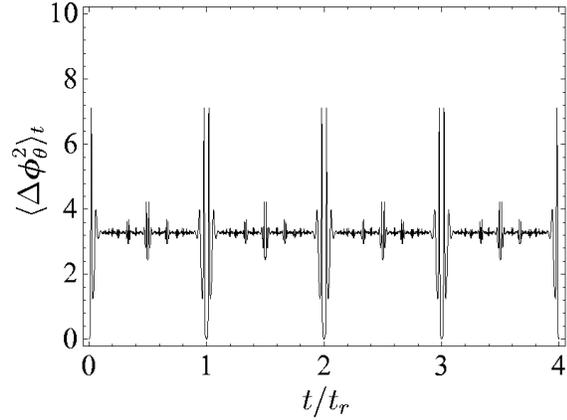


Figura 5.21: Variância da fase em função de t/t_r com $\delta = \delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ ou $\rho_a = \sum_{i,j=g}^e C_i C_j |i\rangle\langle j|$.

5.4 Entropia de von Neumann

Estamos considerando tanto o átomo como o campo inicialmente num estado puro, tal que a entropia total inicial é nula. De acordo com o teorema de Araki-Lieb [87], uma vez que a entropia total é nula (num sistema fechado), as entropias dos subsistemas serão iguais. Assim, átomo e campo podem ser tratados como subsistemas separados, tal como em (5.4).

Uma quantidade que representa um papel importante em nossa análise é a entropia de von Neumann [88]. A entropia proporciona a mais completa informação a respeito da pureza do campo na cavidade [84] e é definida como

$$\mathcal{S}_{f(a)}(t) \equiv -\text{Tr}_{f(a)} \{ \rho_{f(a)}(t) \ln [\rho_{f(a)}(t)] \}, \quad (5.17)$$

de onde, por conveniência, calculamos a entropia do átomo para então obter a entropia do campo. Assim, a entropia do campo pode ser calculada através da expressão [10, 41]

$$\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_c = -\eta_+ \ln \eta_+ - \eta_- \ln \eta_-, \quad (5.18)$$

no qual

$$\eta_{\pm} = \frac{1}{2} \{ 1 \pm [(\lambda_{11} - \lambda_{22})^2 + 4 |\lambda_{12}|^2]^{1/2} \}. \quad (5.19)$$

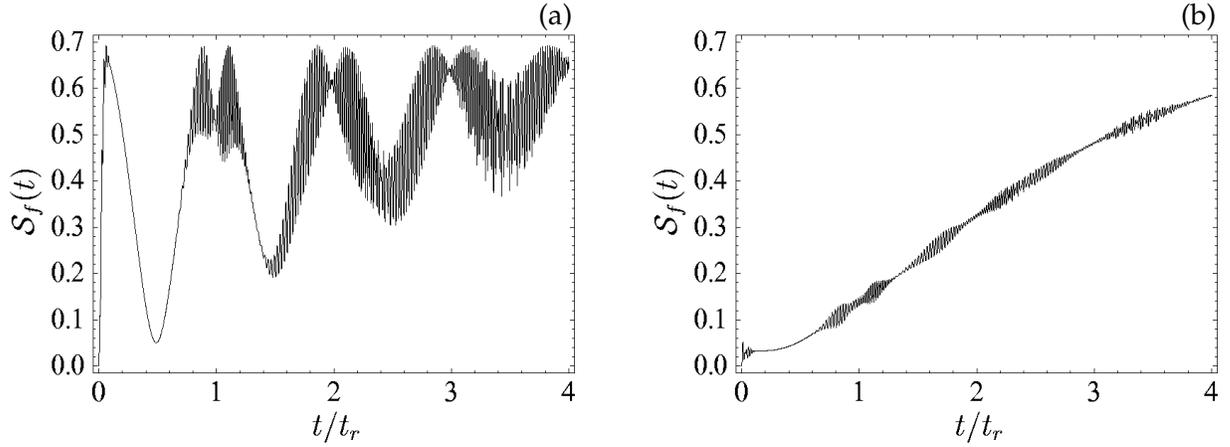


Figura 5.22: Entropia de von Neumann em função de t/t_r com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

Apresentamos inicialmente a situação em que tanto a dessintonia átomo-campo como a susceptibilidade do meio Kerr são nulas. Na interação do campo com o átomo inicialmente excitado, observamos que o campo é aproximadamente purificado num tempo aproximadamente igual ao tempo de colapso (**Figura 5.22-a**). O mesmo não ocorre quando o campo interage com o átomo inicialmente na superposição de seus níveis (**Figura 5.22-b**). Um comportamento semelhante é observado no limite de pequena dessintonia e sem a ação do meio não-linear ($\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$) ou na presença de uma fraca perturbação do meio Kerr ($\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$). Contudo, na

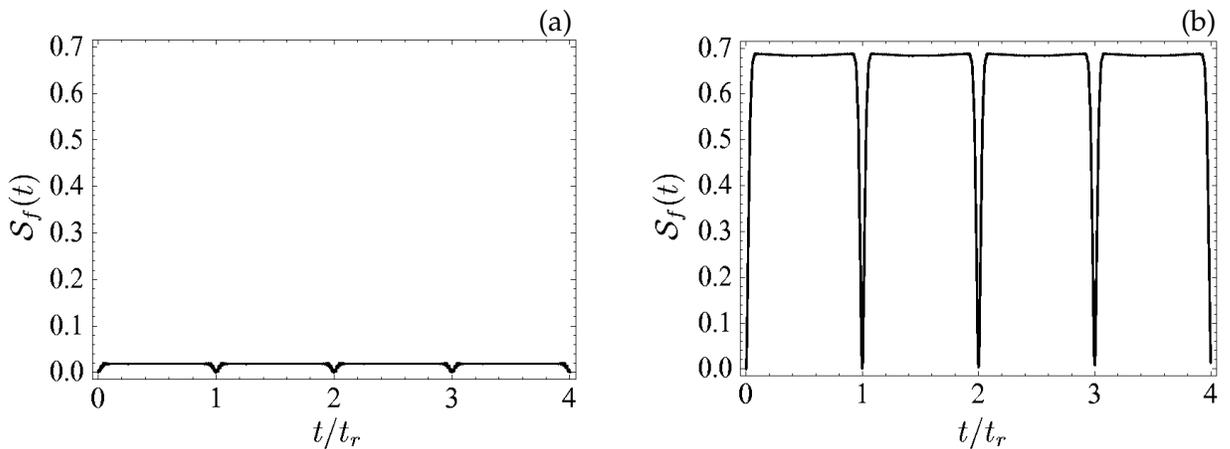


Figura 5.23: Entropia de von Neumann em função de t/t_r com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

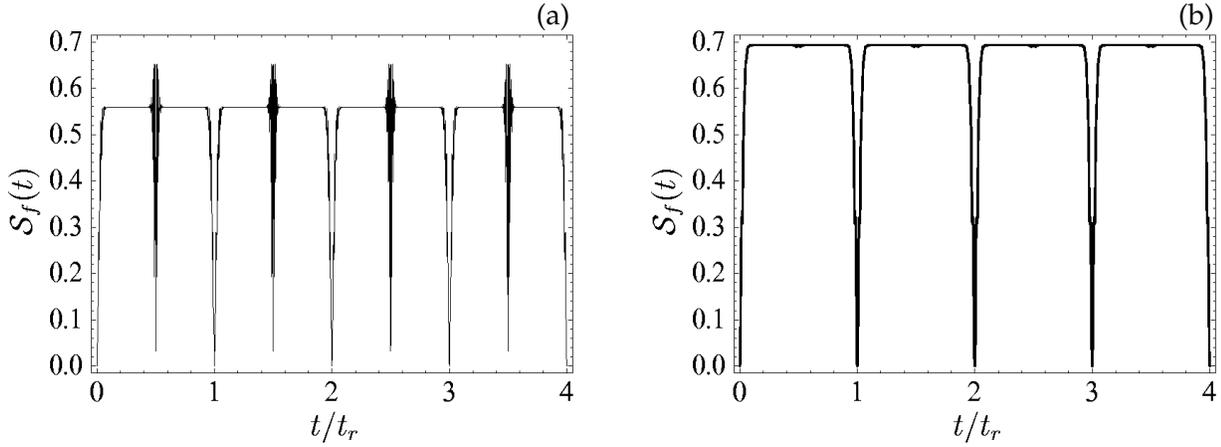


Figura 5.24: Entropia de von Neumann em função de t/t_r com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

interação com o átomo inicialmente excitado, o campo não mais retorna a um estado puro para o tempo de colapso (metade do tempo de *revival*).

No limite de grande dessintonia átomo-campo, ainda sem a presença perturbativa do meio *Kerr*, observamos que a pureza do campo é bastante sensível ao estado inicial do átomo: na interação com o átomo inicialmente excitado, temos que o campo praticamente retorna a um estado puro durante a interação (**Figura 5.23-a**). Na interação com o átomo inicialmente na superposição, a entropia apresenta duas características bastante diferentes em relação a interação com o átomo

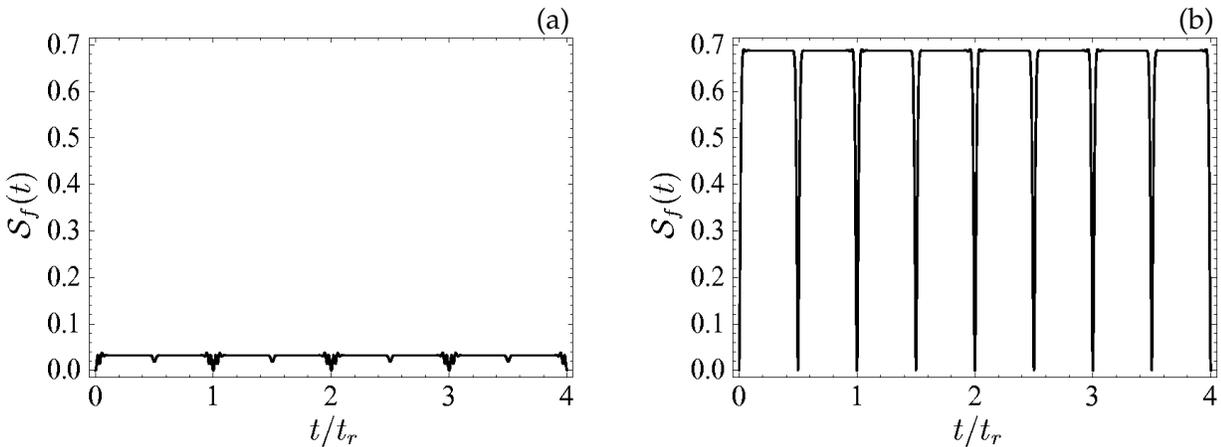


Figura 5.25: Entropia de von Neumann em função de t/t_r com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

inicialmente excitado: o campo evolui rapidamente para um estado de mistura retornando para um estado puro a cada tempo de *revival* (**Figura 5.23-b**).

Para $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.5\Omega$ não se observa tendência alguma do campo em voltar a um estado puro (na interação com o átomo inicialmente excitado). Um comportamento semelhante é observado na interação com o átomo na superposição de seus níveis. Se $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ ou 0.5Ω e o átomo estiver inicialmente excitado, a entropia tende a não se afastar do valor inicial. Porém, para a superposição entre os níveis atômicos inicial, continua a rápida ascensão do campo para um estado de mistura, porém, sem retorno para um estado puro.

A combinação dos parâmetros δ e $\chi^{(3)}$ que linearizam a frequência de *Rabi* em n apresentam efeitos observados que são ainda mais interessantes.

No limite de grande dessintonia, na interação do campo com o átomo inicialmente excitado, temos o caráter periódico na evolução da entropia (**Figura 5.25-a**), contudo, sem diferenças aparentes em relação aos casos anteriores (**Figura 5.23-a**). Já para a interação do campo com o átomo inicialmente na superposição, além do caráter periódico obtido devido a linearização de Ω_{n+1} e da rápida ascensão a um estado de mistura, observamos que o retorno do campo para um estado puro ocorre mais frequentemente (**Figura 5.25-b**) em tempos iguais aos tempos de colapso e em tempos iguais aos tempos de *revival*.

Para a combinação de δ e $\chi^{(3)}$ tal que Ω_{n+1} torna-se linear em n , no limite de pequena dessintonia átomo-campo, a evolução da entropia se processa de maneiras bem distintas para as duas situações iniciais para o átomo: na interação do campo com o átomo inicialmente excitado (**Figura 5.24-a**), observamos uma situação semelhante à encontrada para o limite de grande dessintonia com o átomo numa superposição (**Figura 5.25-b**), ou seja, o campo retorna para um estado puro a cada tempo de colapso e a cada tempo de *revival* das oscilações de *Rabi*; na interação do campo com a superposição atômica inicial (**Figura 5.24-b**), porém, a evolução da entropia é semelhante à observada para o limite de grande dessintonia na ausência do meio não-linear para este mesmo estado inicial do átomo (**Figura 5.23-b**), e o campo evolui aproximadamente para um estado de mistura estatística a cada tempo de colapso alternando com uma evolução para um estado puro a cada tempo de *revival*.

5.5 Distribuições de *Quasi-Probabilidades*

Nesta seção apresentamos as distribuições de *quasi-probabilidades* mais difundidas em óptica quântica: a função- Q e a função de *Wigner*. Consideramos essas funções especiais, visando obter uma melhor informação a respeito dos estados do campo que estão sendo gerados na interação com o átomo de dois níveis.

5.5.1 Função- Q

A função- Q é a distribuição de *quasi-probabilidade* associada ao ordenamento anti-normal de produtos dos operadores criação e aniquilação de fótons do campo a^\dagger e a , podendo ser escrita de uma maneira conveniente dada por

$$Q(\beta, t) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \rho_f(t) | \beta \rangle, \quad (5.20)$$

sendo $|\beta\rangle$ um estado coerente com amplitude $\beta = x + iy$ e $\rho_f(t)$ o operador densidade reduzido para o campo, conforme a relação (5.4). A evolução, de acordo com o modelo de *Jaynes-Cummings* na presença de um meio não-linear tipo *Kerr*, é dada por:

$$Q(\beta, t) = \frac{1}{\pi} e^{-|\beta|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m}(t) \frac{\beta^n \beta^{*m}}{\sqrt{n!m!}}. \quad (5.21)$$

A função- Q é sempre positivo-definida, sendo usada, neste trabalho, para a visualização do estado do campo através de “curvas de níveis” no espaço de fase [89].

Na **Figura 5.26-a** temos a representação do estado do campo interagindo com o átomo inicialmente no estado excitado. No tempo em que as oscilações de *Rabi*, por exemplo, da inversão atômica colapsam, o estado do campo divide-se em dois ramos, até que no tempo $t = \frac{1}{2}t_r$ atingem o máximo afastamento entre si, como visto na **Figura 5.26-a**. De fato, o campo evolui aproximadamente para uma superposição de estados coerentes [90,91,92]. Este é o único momento na evolução do sistema átomo-campo ressonante e na ausência do meio *Kerr* que o campo se aproxima de um estado puro [84]. Exatamente no tempo de *revival* $t = t_r$, a função- Q apresenta uma recombinação dos ramos do estado do campo evoluído (**Figura 5.26-a**); contudo, seu contorno apresenta-se deformado em comparação com o contorno do estado coerente inicial. Assim, temos que o campo evolui para um estado de mistura [84], conforme análise da entropia (**Figura 5.22**).

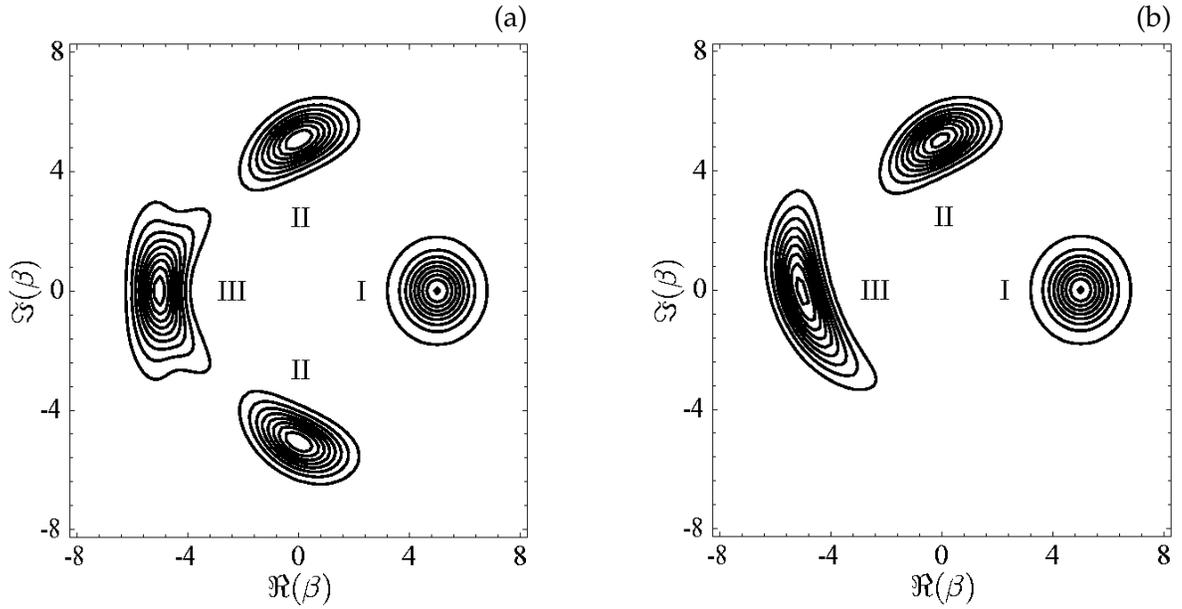


Figura 5.26: Função- Q no espaço de fase em (I) $t = 0$, (II) $t = \frac{1}{2}t_r$, (III) $t = t_r$, com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

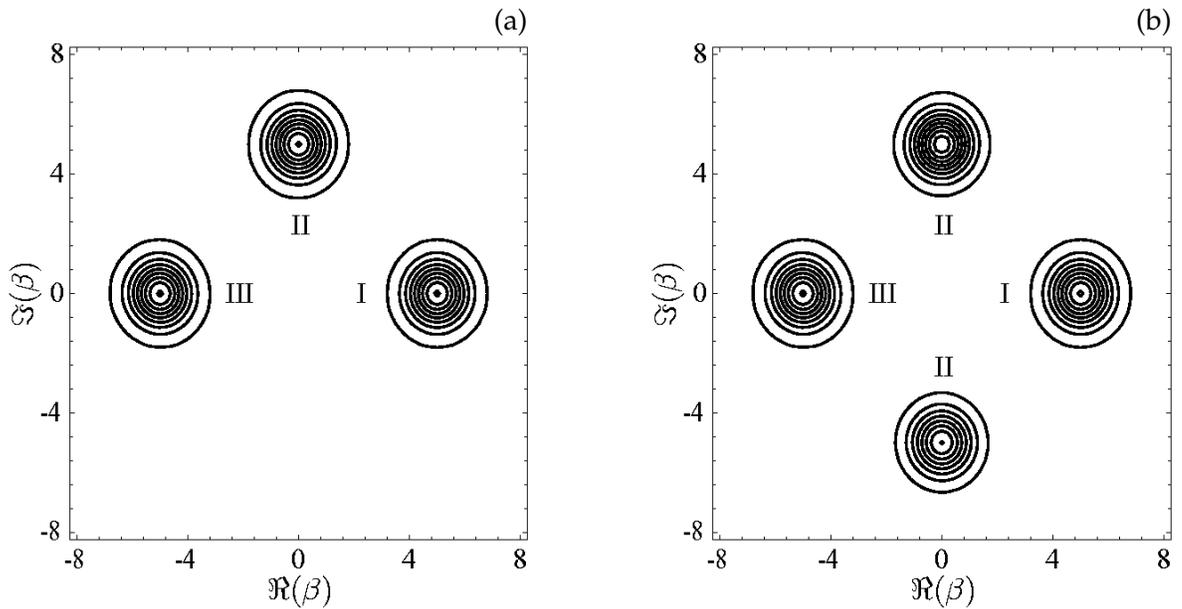


Figura 5.27: Função- Q no espaço de fase em (I) $t = 0$, (II) $t = \frac{1}{2}t_r$, (III) $t = t_r$, com $\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

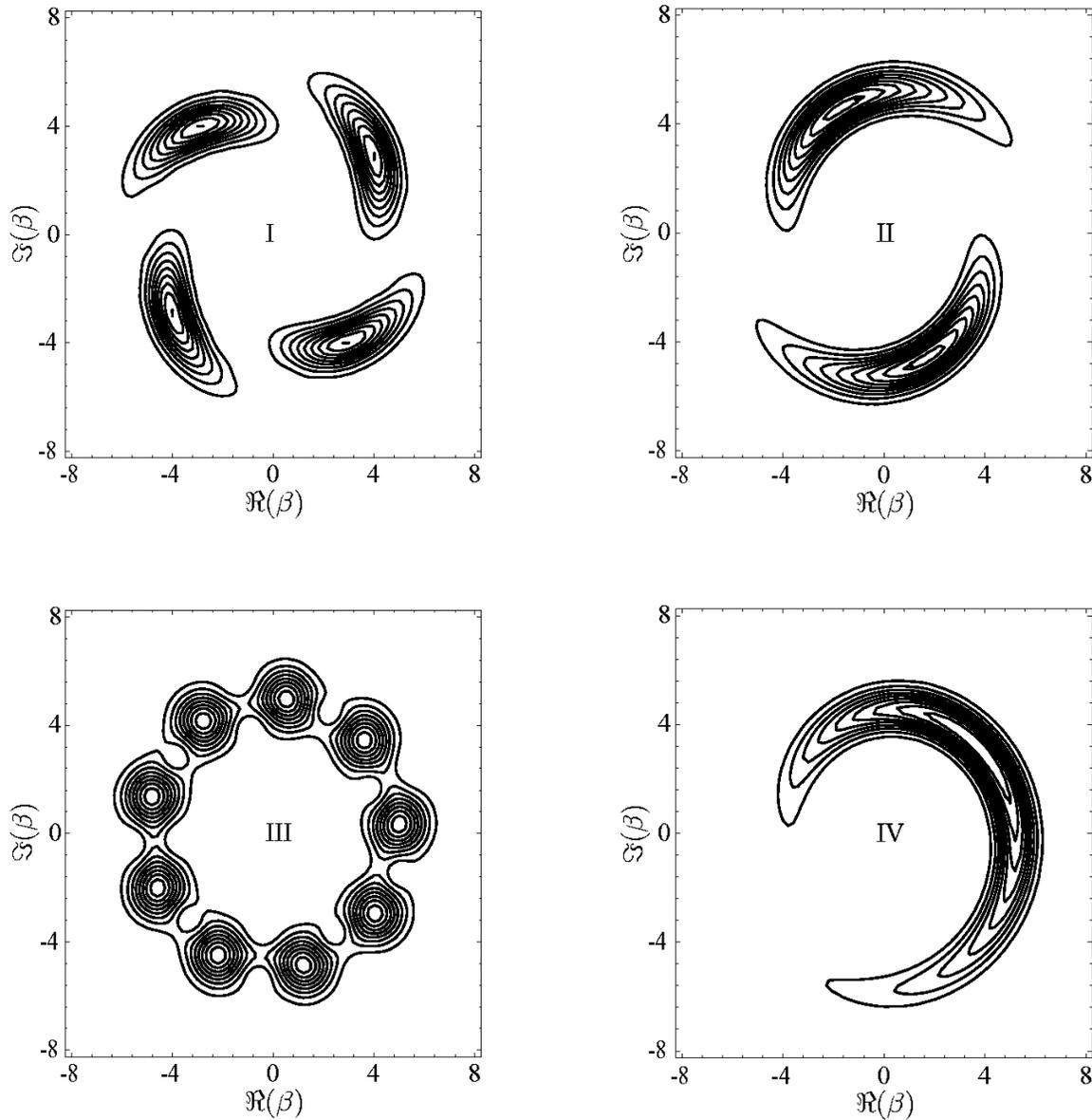


Figura 5.28: Função- Q no espaço de fase em (I) $t = \frac{1}{4}t_r$, (II) $t = \frac{1}{2}t_r$, (III) $t = \frac{3}{4}t_r$, (IV) $t = t_r$, com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.5\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$.

Quando o átomo está inicialmente no estado de superposição, a separação da função- Q em dois ramos não é observada (Figura 5.26-b), conforme já comentado anteriormente para a distribuição de probabilidade de fase (Figura 5.9).

No limite de grande dessintonia, observamos que as dinâmicas (no limite ressonante ou de

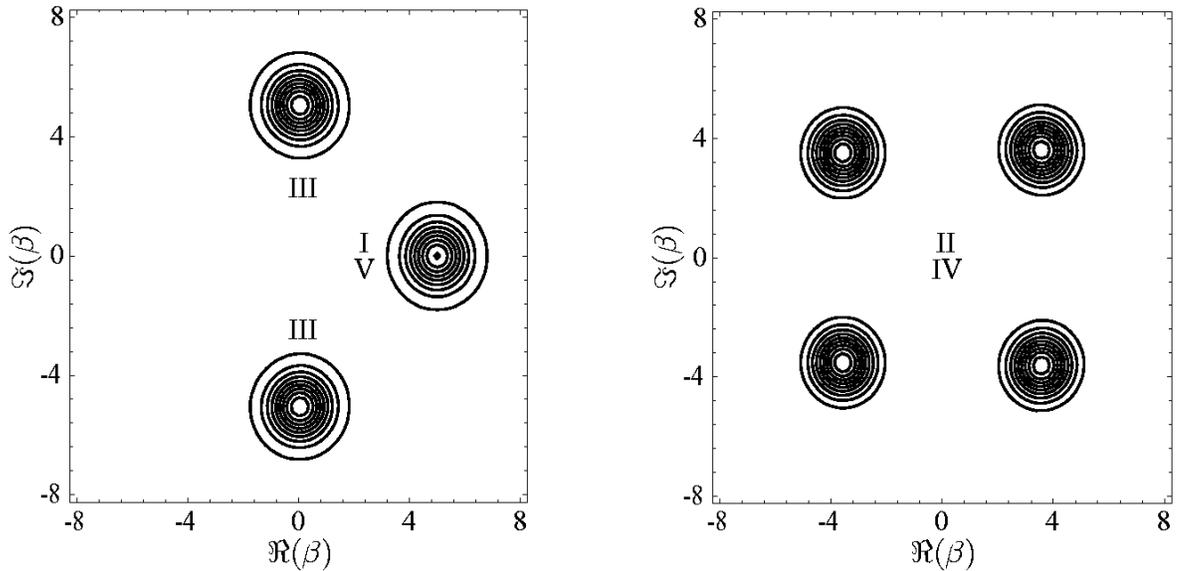


Figura 5.29: Função- Q no espaço de fase em (I) $t = 0$, (II) $t = \frac{1}{4}t_r$, (III) $t = \frac{1}{2}t_r$, (IV) $\frac{3}{4}t_r$, (V) t_r , com $\delta = \delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ ou $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

pequena dessintonia átomo-campo) das interações do campo com cada uma das duas situações iniciais consideradas para o átomo (excitado e superposição de seus níveis) se invertem, isto é, a função- Q para o campo interagindo com o átomo inicialmente excitado leva a uma ramificação do campo na metade do tempo de *revival* (**Figura 5.26-a**) para o limite ressonante (ou pequena dessintonia átomo-campo) enquanto que, no limite dispersivo (**Figura 5.27-a**), esta ramificação passa a ser observada quando o estado inicial do átomo é a superposição de seus níveis (**Figura 5.27-b**). Esta inversão de papéis ocorre gradativamente conforme aumentamos a dessintonia átomo-campo. Lembramos que este mesmo comportamento foi observado também na dinâmica da distribuição de probabilidade de fase do campo (**Figuras 5.8 a 5.10**).

Adicionando o meio *Kerr* na cavidade e numa situação geral em que a combinação de δ e $\chi^{(3)}$ não lineariza a frequência de *Rabi* em n , a dinâmica da função- Q não apresenta relações com os tempos de *revival*, ao menos não em tempos iguais ao tempo de *revival*. Nos tempos considerados, $1/4$, $1/2$, $3/4$ do tempo de *revival* e o tempo de *revival*, os estados do campo apresentam características que se alternam entre grande deformação (em relação ao estado coerente inicial) do contorno (**Figura 5.28-II,IV**) e ramificação do estado campo em dois ou mais ramos (**Figura 5.28-**

I,III). Podemos dizer que neste tempos, o estado do campo é um estado de mistura, mediante uma análise, por exemplo, da entropia de *von Neumann* para estes tempos.

Quando os valores de δ e $\chi^{(3)}$ linearizam a frequência de *Rabi* em n , temos um resultado bastante interessante: na interação do campo com qualquer dos dois estados iniciais considerados para o átomo e qualquer combinação dos valores de δ e $\chi^{(3)}$, desde que (4.85) seja válida, temos a evolução da função- Q como mostrado na **Figura 5.29**. Para $t = \frac{1}{4}t_r$, o estado do campo se divide em quatro ramos (**Figura 5.29-II**); em seguida, para $t = \frac{1}{2}t_r$, esses quatro ramos se agrupam em dois outros ramos (**Figura 5.29-III**) e retornam novamente aos quatro ramos em $t = \frac{3}{4}t_r$ (**Figura 5.29-IV**); a cada tempo de *revival* observa-se o retorno para o estado inicialmente considerado (**Figura 5.29-V**).

5.5.2 Função de Wigner

A função de *Wigner* está relacionada com o ordenamento simétrico dos operadores criação e aniquilação de fótons do campo, sendo definida como

$$W(\beta, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \langle \alpha, n | \rho_f(t) | \alpha, n \rangle = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \langle n | \mathbf{D}^\dagger(\alpha) \rho(t) \mathbf{D}(\alpha) | n \rangle, \quad (5.22)$$

no qual $\mathbf{D}(\alpha)$ é o operador deslocamento de *Glauber* definido em (2.91) e $\rho_f(t)$ é o operador densidade do campo segundo a dinâmica da interação átomo-campo na presença do meio não-linear tipo *Kerr*. Assim, podemos escrever (5.22) na forma [33, 47]

$$W(\beta, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^n \rho_{n,m}(t) \langle m | \mathbf{D}(2\beta) | n \rangle, \quad (5.23)$$

sendo $\rho_{n,m}(t) = \langle n | \rho_f(t) | m \rangle$ a matriz densidade do campo e, para $m \geq n$,

$$\langle m | \mathbf{D}(2\beta) | n \rangle = e^{-2|\beta|^2} \sqrt{\frac{n!}{m!}} (2\beta)^{m-n} \mathcal{L}_n^{(m-n)}(4|\beta|^2), \quad (5.24)$$

enquanto que, para $m \leq n$

$$\langle m | \mathbf{D}(2\beta) | n \rangle = e^{-2|\beta|^2} \sqrt{\frac{m!}{n!}} (-2\beta^*)^{n-m} \mathcal{L}_m^{(n-m)}(4|\beta|^2). \quad (5.25)$$

Estamos considerando a função de *Wigner* para obter maiores informações a respeito do estado do campo na cavidade, uma vez que a função- Q , por ser uma distribuição de *quasi*-probabilidade

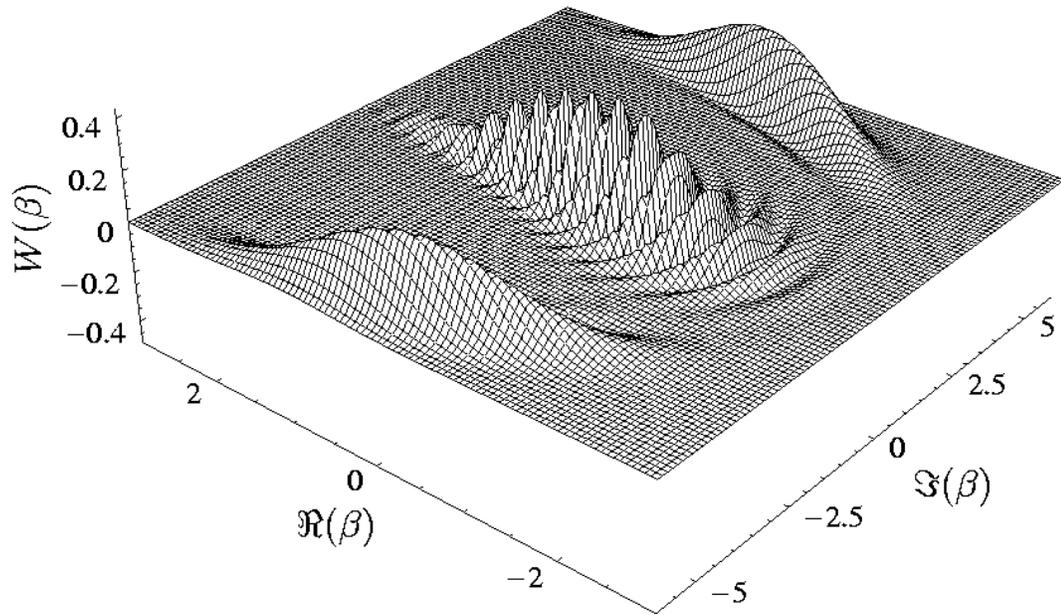


Figura 5.30: Função de Wigner em $t = \frac{1}{2}t_r$, com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$.

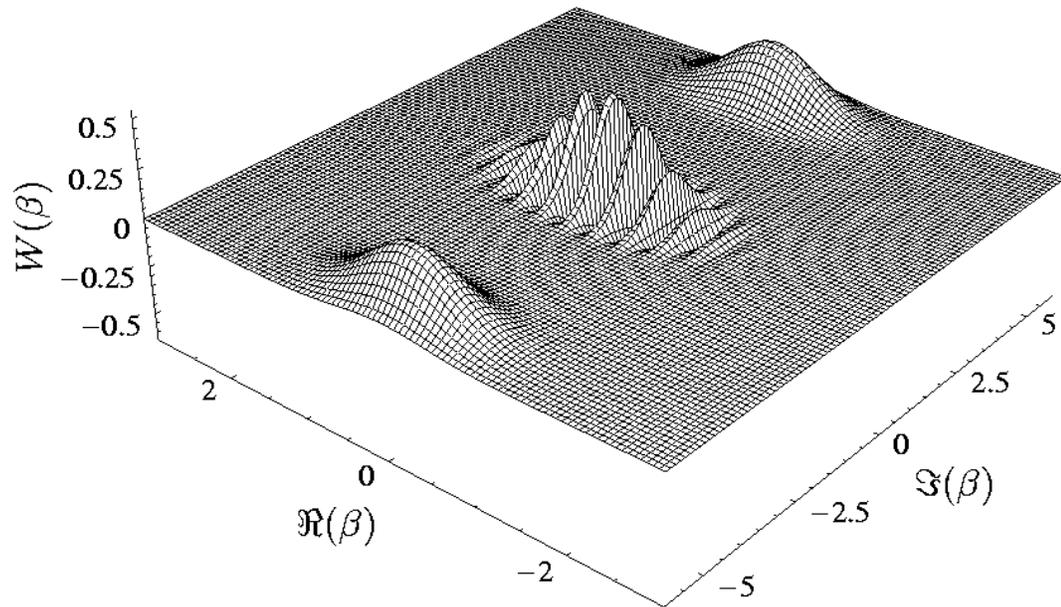


Figura 5.31: Função de Wigner em $t = \frac{1}{2}t_r$, com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$.

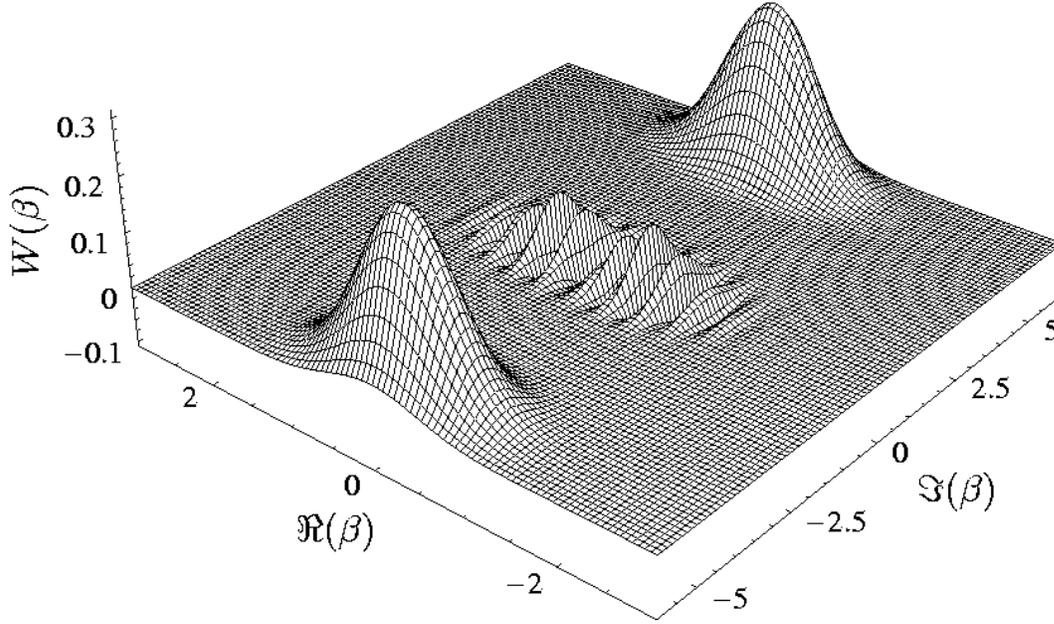


Figura 5.32: Função de Wigner em $t = \frac{1}{2}t_r$, com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

positivo-definida, às vezes não fornece uma descrição precisa suficiente. Assim, para o tempo $t = \frac{1}{2}t_r$ (tempo de colapso), conforme já estudado na literatura [90,91,92], suspeitamos da ocorrência de um estado tipo “gato” de *Schrödinger*.

Na **Figura 5.30** apresentamos o gráfico da função de Wigner para o campo inicialmente coerente interagindo com o átomo inicialmente no estado excitado, em ressonância com o campo e sem a ação perturbativa do meio não-linear. O estado do campo observado para o tempo $t = \frac{1}{2}t_r$ é aproximadamente uma superposição de dois estados coerentes, como já verificado na literatura [90,91,92]. Tal estado, sob estas condições iniciais de interação, jamais será obtido novamente [90,91,92]. Ainda, a semelhança com o estado “gato” de *Schrödinger* não é evidente conforme a **Figura 5.30**. A interação do campo com o átomo inicialmente no estado de superposição para $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ não é apresentada uma vez que já observamos, por exemplo, na análise da função- Q , a não ocorrência da ramificação do estado do campo para o tempo de colapso ($\frac{1}{2}t_r$).

Um resultado interessante é obtido com os valores de δ e $\chi^{(3)}$ que linearizam a frequência de Rabi em n . Na interação do campo coerente com o átomo inicialmente no estado excitado, com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$, o estado do campo no tempo de colapso $t = \frac{1}{2}t_r$ se assemelha bem mais a

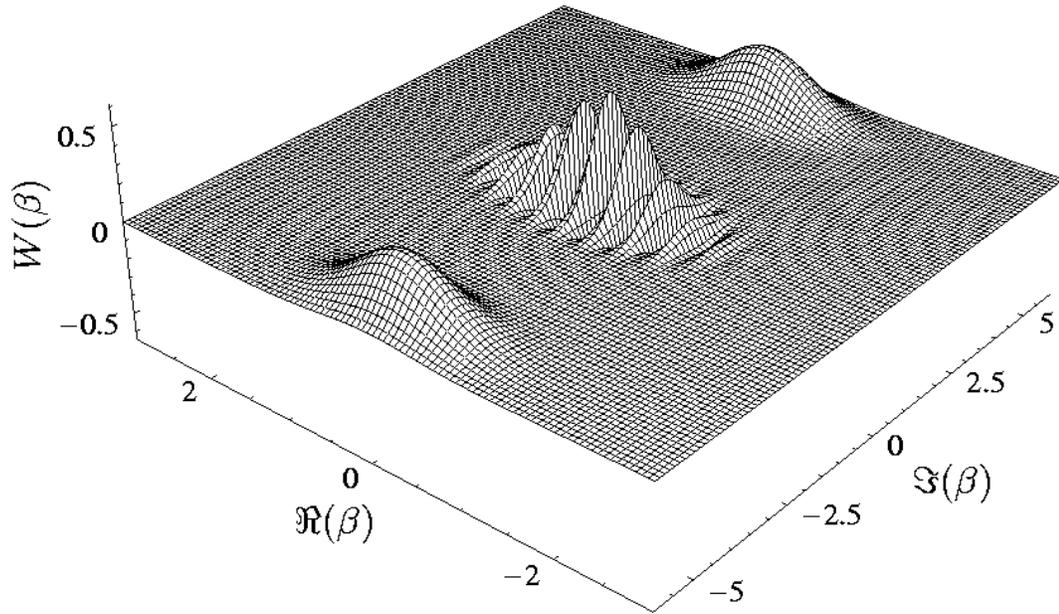


Figura 5.33: Função de Wigner em $t = \frac{1}{2}t_r$, com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ ou $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

um estado tipo “gato” de Schrödinger (Figura 5.31) que aquele observado na ressonância e sem o meio não-linear (Figura 5.30).

Apesar da função- Q acusar semelhanças na evolução dos estados do campo (Figura 5.29) quando δ e $\chi^{(3)}$ são tais que satisfazem (4.85), independentemente do estado inicial considerado para o átomo, pudemos observar que a semelhança é apenas aparente. O estado do campo no tempo de colapso $t = \frac{1}{2}t_r$ interagindo com átomo inicialmente na superposição de seus níveis, para $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$, não apresenta os mesmos traços evidentes do caso anterior de um estado tipo “gato” de Schrödinger (Figura 5.31), aproximando-se assim de uma mistura estatística de dois estados coerentes (Figura 5.32) tal como definida em (2.127).

Contudo, no limite dispersivo essa diferença na função de Wigner dependente do estado inicial considerado para o átomo não é observada tal como no limite de pequena dessintonia. Tanto na interação do campo com o átomo inicialmente no estado excitado como inicialmente no estado de superposição de seus níveis, observamos a semelhança do estado do campo no tempo de colapso $t = \frac{1}{2}t_r$ com um estado tipo “gato” de Schrödinger (Figura 5.33).

5.6 Fidelidade

A fidelidade do campo é considerada para avaliar a semelhança dos estados do campo durante a evolução em relação ao estado desejado. Neste trabalho, procuramos saber se o campo, de fato, retorna para seu estado inicial a cada tempo de *revival* quando δ e $\chi^{(3)}$ linearizam a frequência de Rabi em n . A fidelidade é definida como

$$\mathcal{F}_f(t) = \text{Tr}_f[\rho_f(t)\rho_f] = \mathcal{F}_{ee}(t) + \mathcal{F}_{gg}(t), \quad (5.26)$$

no qual

$$\mathcal{F}_{ee}(t) = \text{Tr}_f[\rho_{ee}(t)\rho_f] = \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{m,n} \langle n|\rho_{ee}(t)|m\rangle, \quad (5.27)$$

$$\mathcal{F}_{gg}(t) = \text{Tr}_f[\rho_{gg}(t)\rho_f] = \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{m,n} \langle n|\rho_{gg}(t)|m\rangle, \quad (5.28)$$

sendo $\rho_{m,n} = \langle n|\rho_f|m\rangle^\dagger$ a matriz densidade do campo inicial, $\rho_f(t)$ o operador densidade que descreve o estado do campo em qualquer tempo e ρ_f o operador densidade que descreve um

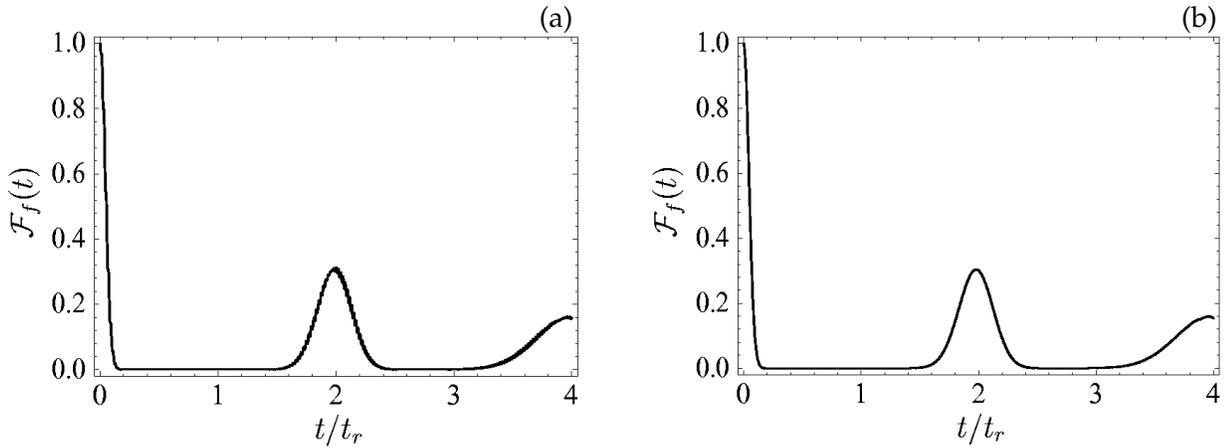


Figura 5.34: Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ em função de t/t_r , com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

estado particular do campo num determinado tempo, inclusive o estado inicial. Assim, vemos que os estados descritos por $\rho_f(t)$ e ρ_f podem ser considerados iguais se a condição abaixo é válida:

$$\text{Tr}_f[\rho_f(t)\rho_f] = 1. \quad (5.29)$$

No modelo de *Jaynes-Cummings* padrão, isto é, em ressonância e na ausência do meio *Kerr*, o estado do campo coerente inicial não mais é recuperado na interação com o átomo (**Figura 5.34**).

Quando consideramos os valores de δ e $\chi^{(3)}$ que satisfazem a relação (4.85), o campo retorna para o estado inicial a cada tempo de *revival*, como mostrado na **Figura 5.35**. Esse resultado independe do estado inicial do átomo, bem como do limite considerado (ressonante, pequena e grande dessintonia).

Como observado nos resultados da função de *Wigner* no tempo de colapso $t = \frac{1}{2}t_r$, suspeita-se que o estado puro gerado neste tempo é uma superposição de dois estados coerentes do tipo

$$|\alpha; \vartheta\rangle = \mathcal{C}^{\frac{1}{2}} (|\alpha\rangle + e^{i\vartheta} |-\alpha\rangle), \quad (5.30)$$

sendo

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} (1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \vartheta)^{-1} \quad (5.31)$$

a constante de normalização, no qual $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, ou seja, com uma fase ϕ , permitindo considerar este estado geral com qualquer orientação no espaço de fase. Analisando a **Figura 5.29** para o tempo de colapso $t = \frac{1}{2}t_r$ vemos que a fase relativa entre os estados coerentes dessa superposição é $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Suspeitando que o estado gerado fosse o “gato” de *Schrödinger* “par”, fizemos $\vartheta = 0$ e calculamos a fidelidade em função do tempo. Contudo, o resultado foi positivo apenas para o limite de pequena dessintonia (átomo excitado) com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$; para o limite de grande dessintonia (átomo excitado ou na superposição) com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$, constatamos não se tratar do mesmo estado obtido para o limite anterior (pequena dessintonia). Fizemos, então, o cálculo da fidelidade em relação aos estados “gato” de *Schrödinger* “ímpar” ($\vartheta = \pi$) e “gato” de *Schrödinger* de *Yurke-Stoler* ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$) [14]. Porém, o resultado foi negativo

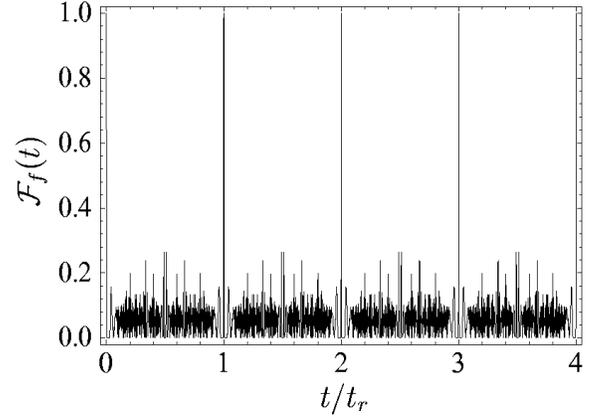


Figura 5.35: Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ em função de t/t_r , com $\delta = \delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ ou $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

também para esses estados.

Para determinar o valor de ϑ para o “gato” de *Schrödinger* obtido no limite de grande dessintonia (com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$), calculamos a fidelidade do campo em função dessa fase relativa para o tempo de colapso $t = \frac{1}{2}t_r$. Consideramos o caso em que o campo coerente inicial está interagindo com o átomo inicialmente no estado de superposição, uma vez que foi a situação (que lineariza a frequência de *Rabi*) que apresentou maior purificação do estado do campo no tempo de colapso, conforme observado no cálculo da entropia de *von Neumann* na **Figura 5.25-b**. Assim, encontramos $\mathcal{F}_f(\vartheta) \approx 1$ para $\vartheta \approx 1.53\pi$ (**Figura 5.36-I**). Repetimos esse cálculo para a interação do campo com o átomo inicialmente excitado, obtendo aproximadamente a mesma fase ϑ do caso anterior.

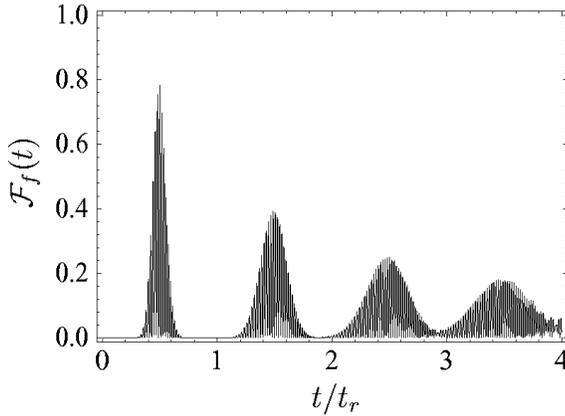


Figura 5.37: Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha; \vartheta\rangle\langle\alpha; \vartheta|$ em função de t/t_r para $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta \approx 1.53\pi$, com $\delta = 0$ e $\chi^{(3)} = 0$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$.

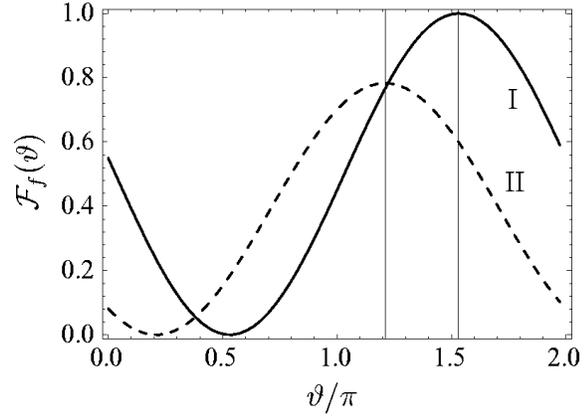


Figura 5.36: Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha; \vartheta\rangle\langle\alpha; \vartheta|$ em função de ϑ para $t = \frac{1}{2}t_r$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, com (I) $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = \frac{1}{2}\sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$ e (II) $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$ para o átomo inicialmente no estado $\rho_a = |e\rangle\langle e|$.

Consideramos agora o JCM ressonante na ausência do meio não-linear. Apesar do cálculo da fidelidade em função da fase relativa ϑ da superposição obtida em $t = \frac{1}{2}t_r$ apontar o valor $\vartheta \approx 1.21\pi$ (**Figura 5.36-II**), não é possível afirmar com certeza se o “gato” de *Schrödinger* gerado é exatamente esse, pois o cálculo da fidelidade em função do tempo mostrou-se praticamente idêntico[†] também (valores próximos de $\mathcal{F}_f(\frac{1}{2}t_r) = 0.8$) para, por exemplo, $\vartheta = 0$ (“gato” de *Schrödinger* “par”) e $\vartheta \approx 1.53\pi$, conforme **Figura 5.37**.

[†]Evoluções semelhantes, porém, com valores diferentes (por exemplo) no tempo $t = \frac{1}{2}t_r$, conforme **Figura 5.36-II**.

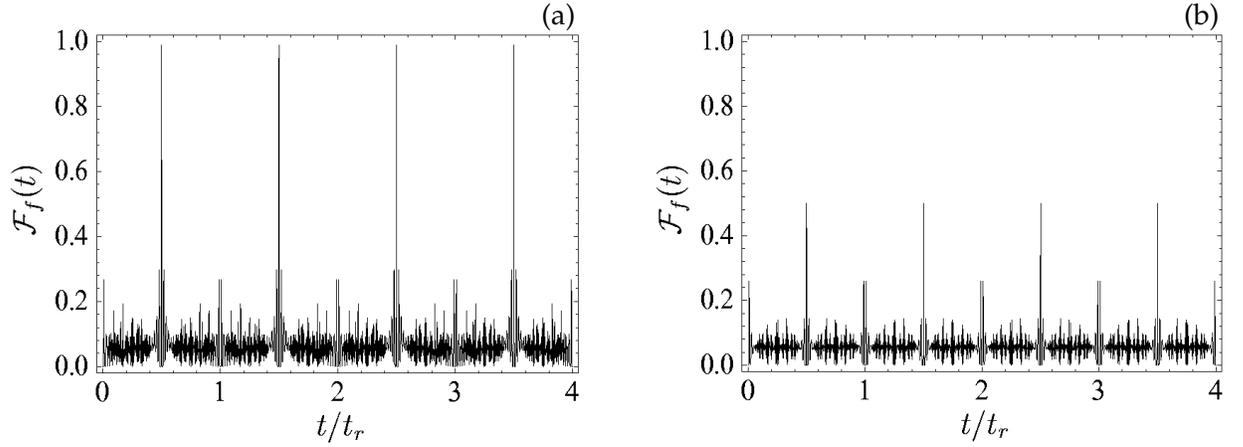


Figura 5.38: Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha; \vartheta\rangle\langle\alpha; \vartheta|$ em função de t/t_r para $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = 0$ com $\delta = 4.8\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1\Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

Como já comentamos antes, a interação do campo com o átomo inicial na superposição não apresenta ramificação na função- Q (Figura 5.26-b) e, portanto, não tem sentido considerar a fidelidade para esse caso (Figura 5.38-b).

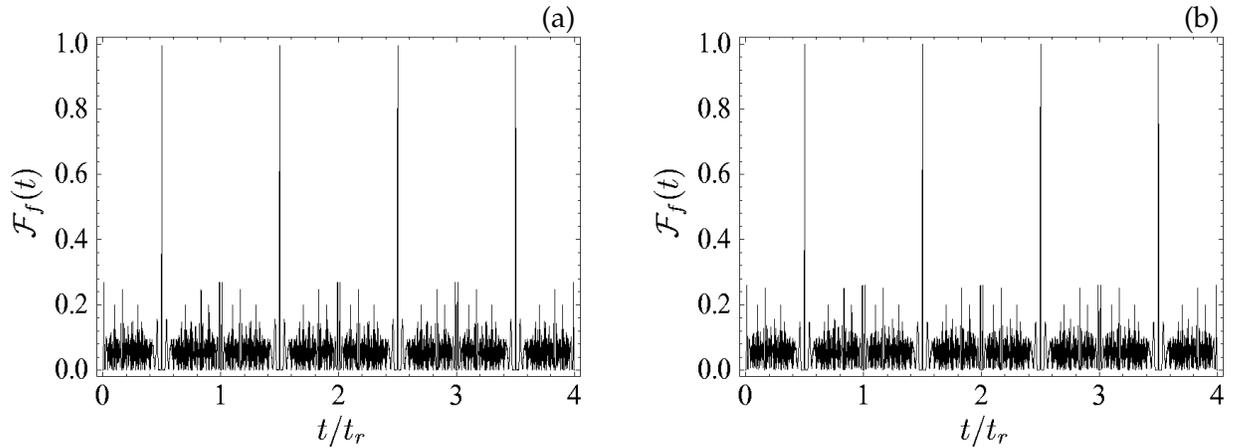


Figura 5.39: Fidelidade em relação ao estado $\rho_f = |\alpha; \vartheta\rangle\langle\alpha; \vartheta|$ em função de t/t_r para $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta \approx 1.53\pi$ com $\delta = 99.99\Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005\Omega$ para o átomo inicialmente no estado (a) $\rho_a = |e\rangle\langle e|$ e (b) $\rho_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle j|$.

Para as combinações de δ e $\chi^{(3)}$ que satisfazem a relação (4.85), observamos que os "gatos" de Schrödinger gerados ocorrem a cada tempo de colapso tanto no limite de pequena dessintonia (Figura 5.38-a) como no limite de grande dessintonia (Figura 5.39).

Discussão e Conclusões

Neste trabalho, estudamos a interação da radiação com a matéria. Mais especificamente, de um modo do campo no estado coerente interagindo com um átomo de dois níveis, na presença de um meio perturbativo não-linear tipo *Kerr*, dentro de uma cavidade óptica (ou de microondas) sem perdas.

Para analisar o sistema, empregamos o denominado modelo de *Jaynes-Cummings* [3] e, usando o formalismo de operador densidade, obtivemos o operador evolução exato (dentro da **RWA**) para o sistema, assim como o respectivo operador evolução para a aproximação dispersiva.

Com o operador evolução em mãos, pudemos analisar comparativamente a dinâmica do sistema para dois estados iniciais do átomo: excitado e superposição entre seus dois níveis igualmente ponderada com fase relativa ($\varphi = 0$) [11]. Além disso, pudemos também analisar os três principais limites da interação: ressonante, pequena e grande dessintonia átomo-campo, comparando (este último) com a evolução segundo a aproximação dispersiva [69].

Os efeitos produzidos pelo aumento gradativo da dessintonia átomo-campo (δ) ou da susceptibilidade do meio *Kerr* ($\chi^{(3)}$) são semelhantes, ou seja, a troca de energia no sistema átomo-campo tende a diminuir com o aumento desses parâmetros. A combinação destes parâmetros introduz novos e interessantes comportamentos na dinâmica do sistema.

Analicamente deduzimos que determinados valores da dessintonia e susceptibilidade, precisamente relacionados através de (4.85), determinam a linearidade da frequência de *Rabi* em n

(4.86). Tal resultado ocasiona um caráter periódico em todas as quantidades estudadas. Além disso, nessa combinação particular dos parâmetros δ e $\chi^{(3)}$, a periodicidade ocorre sempre a cada tempo de *revival* e verificamos, por exemplo, que na dinâmica atômica o átomo retorna para o estado inicial considerado (**Figura 5.2**).

Os autores de [82] consideram esses efeitos da combinação de δ e $\chi^{(3)}$, porém, para um campo inicial no estado comprimido, analisando apenas a inversão atômica e fazendo uma aproximação de campo forte, isto é, $\bar{n}^2 \gg \bar{n}$. Em nosso estudo, apresentamos um progresso ao considerar diversas quantidades pertinentes ao modelo sem o uso de tal aproximação. Na referência [93], o autor considera o mesmo modelo que o nosso sem a aproximação de campo efetivo de [82], porém, estuda apenas o campo térmico inicialmente, também analisando apenas a dinâmica atômica. Nosso estudo para diferentes quantidades da interação do campo coerente com o átomo na superposição de seus níveis (ou excitado) representa um estudo pioneiro para esse modelo.

O número médio de fótons está relacionado com a inversão atômica (5.12), produzindo as mesmas curvas, porém refletidas e transladadas entre si. Da mesma forma, portanto, a periodicidade é observada para os valores de δ e $\chi^{(3)}$ que satisfazem (4.85). A variância do número de fótons apresentou um aspecto individual interessante na interação do campo com a superposição atômica: observamos que na região de colapso, o campo permanece excitado com um fóton e a cada tempo de *revival*, retorna para o número médio de fótons inicial (**Figura 5.7-b**).

Com o intuito de obter uma completa descrição do campo da cavidade, analisamos as quantidades relativas à fase do campo. O estudo da fase do campo, para o sistema estudado neste trabalho, tem sido considerado em vários artigos [94,95,96,97,98]. Contudo, os efeitos periódicos provocados na fase do campo, pela combinação de δ e $\chi^{(3)}$, nunca foram analisados antes do nosso trabalho.

Concluimos que, para os valores de δ e $\chi^{(3)}$ que linearizam a frequência de *Rabi* em n , as evoluções da distribuição de probabilidade de fase, do valor médio e da variância da fase ocorrem da mesma maneira para todas as condições iniciais consideradas (**Figuras 5.13, 5.17 e 5.21**). O caráter periódico na evolução evidencia o retorno para o valor inicial considerado para essas quantidades.

Consideramos a entropia de *von Neumann* [88] visando obter informações da pureza do campo. Os resultados para $\delta = \delta_c = \frac{\Omega^2}{2\chi^{(3)}} - 2\chi^{(3)}$ apresentam dinâmicas diferentes, dependendo do estado

inicial do átomo e limites considerados:

- No limite de pequena dessintonia ($\delta = 4.8 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1 \Omega$), observamos, a cada tempo de colapso, a evolução do estado do campo praticamente para um estado tipo “gato” de *Schrödinger* quando interage com o átomo inicialmente excitado (**Figura 5.24-a**), e praticamente evolui para uma mistura estatística quando interage com a superposição atômica inicial (**Figura 5.24-b**). Essa primeira análise da entropia é confirmada através da representação pictórica do estado do campo no primeiro tempo de colapso $t = \frac{1}{2}t_r$ obtida para a função de *Wigner* (**Figuras 5.31 e 5.32**).

- No limite de grande dessintonia ($\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$), concluímos que a fraca presença perturbativa do meio não-linear é suficiente para provocar a periodicidade na evolução de todas as quantidades consideradas. Particularmente para a entropia, obtivemos, a cada tempo de colapso, a evolução do campo para um estado “gato” de *Schrödinger* independente do estado inicial do átomo considerado (**Figura 5.33**).

Independentemente do limite (ressonante, pequena e grande dessintonia átomo-campo) e do estado inicial do átomo considerados, o estado do campo evolui exatamente para o estado puro (coerente) considerado inicialmente a cada tempo de *revival* (**Figura 5.24**). Essa constatação é realçada através, por exemplo, da análise conjunta da função-*Q* (**Figura 5.29**) e da fidelidade do campo em relação ao estado inicial $\rho_f = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ (**Figura 5.35**).

Uma vez comprovada a evolução do estado coerente inicial para um “gato” de *Schrödinger* a cada tempo de colapso através, por exemplo, do cálculo da fidelidade, para as condições iniciais que linearizam a frequência de *Rabi*, observamos que a fase relativa ϑ da superposição coerente geral (5.30) depende dos valores de δ e $\chi^{(3)}$ que satisfazem a relação (4.85). Enfatizamos que não são todas as combinações de δ e $\chi^{(3)}$ que geram um “gato” de *Schrödinger* a cada tempo de colapso na dinâmica do modelo. Como exemplos dessas combinações que geram “gatos” de *Schrödinger* a cada tempo de colapso, citamos aquelas consideradas neste trabalho.

Obtivemos no limite de pequena dessintonia ($\delta = 4.8 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.1 \Omega$) a geração quase exata do “gato” de *Schrödinger* “par” (**Figuras 5.31 e 5.38-a**), sendo recuperado a cada tempo de colapso. Já no limite de grande dessintonia ($\delta = 99.99 \Omega$ e $\chi^{(3)} = 0.005 \Omega$) obtivemos o estado “gato” de *Schrödinger* com uma fase relativa $\vartheta \approx 1.53\pi$, sendo também recuperado a cada tempo de colapso **Figuras 5.33 e 5.39**.

Reproduzimos o resultado já conhecido da geração de “gato” de *Schrödinger* [92] no modelo

de *Jaynes-Cummings* ressonante sem meio *Kerr*. O cálculo da fidelidade para essas condições iniciais (átomo excitado) em relação a ϑ (**Figura 5.36-II**), indica uma fase relativa $\vartheta \approx 1.21\pi$ entre os estados coerentes da superposição obtida em $t = \frac{1}{2}t_r$. Entretanto, outros valores considerados para essa fase também mostraram-se igualmente válidos para representar o estado gerado no tempo de colapso nesta evolução. Portanto, não é possível afirmar com certeza qual estado, de fato, está sendo gerado, devido à baixa fidelidade apresentada **Figura 5.37**.

A combinação de δ e $\chi^{(3)}$ resulta em modulações na frequência de *Rabi* tornando a evolução do estado do campo controlada. Essa asserção têm sido levantada em alguns trabalhos anteriores [99, 100]; contudo, antes do nosso trabalho, não havia sido analisada com tanto detalhe.

A análise dos diferentes limites da interação (ressonante, pequena e grande dessintonia) com a parametrização do tempo com o tempo de *revival* representa também um novo estudo do modelo. Concluímos que o modelo de *Jaynes-Cummings* com meio *Kerr* para grande dessintonia apresenta evoluções semelhantes às obtidas para a aproximação dispersiva. Contudo, as pequenas oscilações ainda observadas a cada tempo de *revival* não são reproduzidas quando se considera a mesma dinâmica na aproximação dispersiva (efetiva). No entanto, consiste de boa aproximação e, dependendo do propósito, é de grande utilidade, uma vez que suas expressões são bem mais simples quando comparadas com as obtidas no modelo de *Jaynes-Cummings* com meio *Kerr* (veja **Apêndice C**).

Como conclusão final, a geração de estados tipo “gato” de *Schrödinger* no **JCM** com meio *Kerr* mostrou-se possível e passível de controle mediante o ajuste dos parâmetros δ e $\chi^{(3)}$ que satisfazem (4.85). A fase relativa ϑ dos estados coerentes que compõem essa superposição depende da combinação desses valores de δ e $\chi^{(3)}$ resultando em diferentes estados tipo “gato” de *Schrödinger*, ou seja, dependendo do limite considerado (ressonante, pequena e grande dessintonia átomo-campo). Este resultado, até o presente, não foi encontrado na literatura, sendo um dos principais obtidos nessa pesquisa.

A

Distribuições de *Quasi-Probabilidades*

Apresentamos neste apêndice uma noção geral das distribuições de *quasi-probabilidades* e suas propriedades. Uma ferramenta bastante conveniente na teoria de probabilidade é a denominada função característica, que é a transformada de *Fourier* (no plano complexo) da distribuição de probabilidade $P(\beta)$:

$$C_c(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\beta P(\beta) e^{\xi\beta^* - \xi^*\beta} = \langle e^{\xi\beta^* - \xi^*\beta} \rangle, \quad (\text{A.1})$$

no qual $\beta = x + iy$. Como exemplo de aplicação da função característica, podemos calcular os momentos das variáveis do espaço de fase simplesmente usando a relação abaixo:

$$\langle \beta^* \beta \rangle = \left. \frac{\partial^{m+n}}{\partial \xi^m \partial (-\xi^*)^n} C_c(\xi) \right|_{\xi=0}. \quad (\text{A.2})$$

A função característica é útil também para definir as distribuições de *quasi-probabilidades*. Contudo, na mecânica quântica, devido à não comutatividade dos operadores q e p , não é imediata a definição de uma distribuição de probabilidade como na mecânica clássica simplesmente usando o princípio da correspondência.

Uma melhor definição é obtida pela função característica quântica $C_q(\xi)$ em analogia à função característica clássica (A.1):

$$C_q(\xi) = \text{Tr}[\rho e^{\xi a^\dagger - \xi^* a}] = \text{Tr}[\rho D(\xi)]. \quad (\text{A.3})$$

Contudo, a analogia não é completa pois os operadores criação e aniquilação de fótons não comutam, $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$, e como conseqüência disso, devemos usar a relação de *Baker-Campbell-Hausdorff* (2.77) se quisermos manipular a exponencial em (A.3). Podemos escrever a função característica quântica de uma forma mais geral através da relação abaixo:

$$\begin{aligned} C_q(\xi, s) &= \text{Tr}[\rho e^{\xi \mathbf{a}^\dagger - \xi^* \mathbf{a} + \frac{s}{2} |\xi|^2}] = \text{Tr}[\rho \mathbf{D}(\xi) e^{\frac{s}{2} |\xi|^2}] \\ &= \text{Tr} \left[\rho \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\xi^n (-\xi^*)^m}{n!m!} \{(\mathbf{a}^\dagger)^n \mathbf{a}^m\}_s \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

O parâmetro $s \in [0, 1]$ indica o ordenamento dos operadores \mathbf{a}^\dagger e \mathbf{a} na exponencial acima. Podemos observar que temos um número infinito de funções características para cada valor de s , sendo que três deles levam aos ordenamentos conhecidos: ordenamento normal ($s = 1$), ordenamento simétrico ($s = 0$) e ordenamento anti-normal ($s = -1$).

Assim, as distribuições de *quasi*-probabilidades podem ser definidas como a transformada de *Fourier* das funções características quânticas parametrizadas por s ,

$$P_q(\beta, s) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\xi C_q(\xi, s) e^{\beta\xi^* - \beta^*\xi}, \quad (\text{A.5})$$

em analogia ao caso clássico.

As distribuições de *quasi*-probabilidades são também unicamente definidas pelo operador densidade ρ e, portanto, podem ser usadas para caracterizar o estado do sistema quântico.

A.1 Distribuição de Glauber-Sudarshan

A introdução da função- P na óptica quântica se deve a *Glauber* [28] e *Sudarshan* [101]. Esta é a distribuição de *quasi*-probabilidade associada ao ordenamento normal ($s = 1$) dos operadores \mathbf{a}^\dagger e \mathbf{a} na função característica (A.4). Podemos escrevê-la como [102]

$$P(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\xi \text{Tr}[\rho e^{\xi \mathbf{a}^\dagger - \xi^* \mathbf{a}}] e^{\beta\xi^* - \beta^*\xi} \quad (\text{A.6})$$

para um dado sistema descrito por ρ , que pode ser expresso facilmente em termos de $P(\beta)$ como uma expansão sobre os projetores $|\beta\rangle\langle\beta|$, isto é,

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\beta P(\beta) |\beta\rangle\langle\beta|, \quad (\text{A.7})$$

do qual vemos que, por exemplo, para o estado coerente $|\alpha\rangle$, a função- P é uma função- δ , $P(\beta) = \delta^2(\alpha - \beta)$. Este exemplo deixa claro o cuidado que devemos ter ao interpretar estas distribuições de *quasi*-probabilidades como distribuições de probabilidades no espaço de fase, visto que podem apresentar valores negativos e singularidades. Contudo, em princípio, esta distribuição de *quasi*-probabilidade pode ser usada para calcular valores esperados de produtos normalmente ordenados dos operadores a^\dagger e a ,

$$\langle \{a^\dagger{}^m a^n\}_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\beta P(\beta) \beta^{*m} \beta^n. \quad (\text{A.8})$$

sendo $\{a^\dagger{}^m a^n\}_1 = a^\dagger{}^m a^n$.

A.2 Distribuição de Wigner

A primeira das distribuições de *quasi*-probabilidades foi introduzida por *Wigner* [103] e está associada ao ordenamento simétrico ($s = 0$) dos operadores em (A.4), sendo denominada função de *Wigner*. Para um sistema representado por ρ , podemos escrever $W(\beta)$ como

$$W(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\xi \text{Tr}[\rho e^{\xi a^\dagger - \xi^* a}] e^{\beta \xi^* - \beta^* \xi}. \quad (\text{A.9})$$

Dentre inúmeras propriedades, a função de *Wigner* existe para todos os operadores densidade ρ , sendo sempre real ($W(\beta) = W^*(\beta)$) e normalizada ($\int d^2\beta W(\beta) = \text{Tr}\rho = 1$) [102]. Assim como a função- P , a função de *Wigner* não pode ser, dependendo do sistema ρ , interpretada como uma distribuição de probabilidade, pois podem existir valores negativos em alguns pontos do espaço de fase. Além disso, esta característica é também um indicativo da natureza quântica do estado considerado.

A função de *Wigner* pode ser usada para calcular valores esperados de produtos simetricamente ordenados dos operadores a^\dagger e a de uma maneira simples

$$\langle \{a^\dagger{}^m a^n\}_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\beta W(\beta) \beta^{*m} \beta^n, \quad (\text{A.10})$$

em que $\{a^\dagger{}^m a^n\}_0$ indica, por exemplo, $\{a^\dagger a\}_0 = \frac{1}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a)$.

Podemos também escrever a função de *Wigner* como

$$W(\beta) = \langle \mathbf{T}(\beta - \mathbf{a}) \rangle = \text{Tr}[\rho \mathbf{T}(\beta - \mathbf{a})], \quad (\text{A.11})$$

sendo $T(\beta - \mathbf{a})$ dado por

$$T(\beta - \mathbf{a}) = \frac{2}{\pi} \mathbf{D}(\beta) (-1)^{\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}} \mathbf{D}^\dagger(\beta), \quad (\text{A.12})$$

no qual o operador $(-1)^{\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}} = e^{i\pi \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}}$ é um operador de reflexão tal que

$$e^{i\pi \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}} \mathbf{D}(\beta) e^{-i\pi \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}} = \mathbf{D}^\dagger(\beta), \quad (\text{A.13})$$

o que nos permite reescrever $W(\beta)$ como

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} \text{Tr}[\boldsymbol{\rho} \mathbf{D}(2\beta) e^{i\pi \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}}] = \frac{2}{\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^n \rho_{n,m} \langle m | \mathbf{D}(2\beta) | n \rangle, \quad (\text{A.14})$$

sendo $\rho_{n,m} = \langle n | \boldsymbol{\rho} | m \rangle$ a matriz densidade do sistema considerado. Para $m \geq n$, temos que [33]

$$\langle m | \mathbf{D}(2\beta) | n \rangle = e^{-2|\beta|^2} \sqrt{\frac{n!}{m!}} (2\beta)^{m-n} \mathcal{L}_n^{(m-n)}(4|\beta|^2), \quad (\text{A.15})$$

enquanto que, para $m \leq n$

$$\langle m | \mathbf{D}(2\beta) | n \rangle = e^{-2|\beta|^2} \sqrt{\frac{m!}{n!}} (-2\beta^*)^{n-m} \mathcal{L}_m^{(n-m)}(4|\beta|^2). \quad (\text{A.16})$$

A.3 Distribuição de Husimi

Nas duas seções precedentes, consideramos distribuições de *quasi*-probabilidades, os quais são úteis, por exemplo, para o cálculo de valores esperados dos operadores \mathbf{a}^\dagger e \mathbf{a} ordenados normalmente (distribuição de *Glauber-Sudarshan*) e simetricamente (distribuição de *Wigner*). A distribuição de *Husimi* (ou função- Q), é associada ao ordenamento anti-normal ($s = -1$) dos operadores \mathbf{a}^\dagger e \mathbf{a} na função característica quântica (A.4).

A função- Q de um dado sistema com um operador densidade $\boldsymbol{\rho}$ é dada por

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\xi \text{Tr}[\boldsymbol{\rho} e^{\xi \mathbf{a}} e^{-\xi^* \mathbf{a}^\dagger}] e^{\beta \xi^* - \beta^* \xi}, \quad (\text{A.17})$$

em que $\beta = x + iy$. A função- Q , ao contrário das duas funções anteriores, não apresenta singularidades e existe para qualquer operador densidade sendo positiva em qualquer ponto do espaço de fase.

Usando a relação de completeza para o estado coerente (2.93), facilmente demonstra-se que a função- Q pode ser escrita na seguinte forma compacta [102]

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \rho | \beta \rangle. \quad (\text{A.18})$$

Pode se dizer que, das distribuições de *quasi*-probabilidades, a função- Q que é a única que remete as reais distribuições de probabilidades, correspondendo a operadores densidade físicos.

A função- Q também pode ser usada para calcular valores esperados de produtos dos operadores \mathbf{a}^\dagger e \mathbf{a} ordenados anti-normalmente,

$$\langle \{\mathbf{a}^m \mathbf{a}^{\dagger n}\}_{-1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\beta Q(\beta) \beta^{*m} \beta^n. \quad (\text{A.19})$$

Esta função, assim como a função de *Wigner*, foi utilizada no estudo da interação de um campo numa cavidade interagindo com um átomo de dois níveis (**JCM**) na presença de um meio não-linear tipo *Kerr*, como visto no **Capítulo 5**. Esta descrição do estado do campo foi introduzida por *Eiselt* e *Risken* [89], fornecendo uma nova visão para o estudo das propriedades fundamentais da interação da radiação com a matéria.

B

Distribuição de Probabilidade de Fase

Neste apêndice apresentamos os passos mais importantes para o cálculo das grandezas relativas à fase do campo. Considerando o estado genérico para o campo

$$\rho_f = \sum_{n,n'=0}^s \rho_{n,n'} |n\rangle \langle n'|, \quad (\text{B.1})$$

detalhamos o cálculo obtido em (3.99) como segue:

$$P(\theta_m) = \langle \theta_m | \rho_f | \theta_m \rangle = \sum_{n,n'=0}^s \rho_{n,n'} \langle \theta_m | n \rangle \langle n' | \theta_m \rangle = \frac{1}{s+1} \sum_{n,n'=0}^s \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)\theta_m}, \quad (\text{B.2})$$

em que $\rho_{n,n'} = \langle n | \rho_f | n' \rangle$ são os elementos de matriz do operador densidade do campo ρ .

B.1 Primeiro Momento da Fase

Usando a relação (B.2), resolvemos o primeiro momento da fase do campo:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_\theta \rangle &= \sum_{m=0}^s \theta_m P(\theta_m) = \sum_{m=0}^s \theta_0 P(\theta_m) + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{m=0}^s m P(\theta_m) \\
&= \frac{1}{s+1} \sum_{n,n'=0}^s \rho_{n,n'} \theta_0 e^{i(n'-n)\theta_m} + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_{n,n'=0}^s \rho_{n,n'} m e^{i(n'-n)\theta_m} \\
&= \frac{1}{s+1} \sum_{n=0}^s P_n \left(\sum_{m=0}^s \theta_0 \right) + \frac{1}{s+1} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} \theta_0 e^{i(n'-n)\theta_0} \left(\sum_{m=0}^s e^{\frac{2\pi m}{s+1} i(n'-n)} \right) \\
&\quad + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_{n=0}^s P_n \left(\sum_{m=0}^s m \right) + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)\theta_0} \left(\sum_{m=0}^s m e^{\frac{2\pi m}{s+1} i(n'-n)} \right),
\end{aligned} \tag{B.3}$$

onde fizemos $\rho_{n,n} = \langle n | \rho_f | n \rangle = P_n$. Estudando a convergência das séries entre parênteses no desenvolvimento acima, temos que:

$$\sum_{m=0}^s \theta_0 = (s+1)\theta_0, \tag{B.4}$$

$$\sum_{m=0}^s m = \frac{s(s+1)}{2}, \tag{B.5}$$

$$\sum_{m=0}^s e^{\frac{2\pi m}{s+1} i(n'-n)} = (s+1)\delta_{n',n} = \begin{cases} 1 & \text{para } n' = n \\ 0 & \text{para } n' \neq n \end{cases} \tag{B.6}$$

$$\sum_{m=0}^s m e^{\frac{2\pi m}{s+1} i(n'-n)} = \frac{(s+1)}{e^{\frac{2\pi}{s+1} i(n'-n)} - 1}, \quad (n' \neq n) \tag{B.7}$$

onde a penúltima relação é obtida da relação de ortogonalidade dos estados de fase de Pegg-Barnett (3.84).

Assim, temos o valor médio da fase, no espaço de *Hilbert* restrito, dado por

$$\langle \phi_\theta \rangle = \theta_0 + \frac{\pi s}{s+1} + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} \frac{e^{i(n'-n)\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1} i(n'-n)} - 1}, \tag{B.8}$$

tal que o valor médio ao quadrado é escrito como

$$\begin{aligned} \langle \phi_\theta \rangle^2 &= \theta_0^2 + \frac{2\pi s \theta_0}{s+1} + \frac{\pi^2 s^2}{(s+1)^2} + \frac{4\pi \theta_0}{s+1} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} \frac{e^{i(n'-n)\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1} \\ &+ \frac{4\pi^2 s}{(s+1)^2} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} \frac{e^{i(n'-n)\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1} + \frac{4\pi^2}{(s+1)^2} \left[\sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} \frac{e^{i(n'-n)\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1} \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

B.2 Segundo Momento da Fase

De maneira análoga, podemos desenvolver o segundo momento da fase como segue:

$$\begin{aligned} \langle \phi_\theta^2 \rangle &= \sum_{m=0}^s \theta_m^2 P(\theta_m) = \sum_{m=0}^s \theta_0^2 P(\theta_m) + \frac{4\pi \theta_0}{s+1} \sum_{m=0}^s m P(\theta_m) + \frac{4\pi^2}{(s+1)^2} \sum_{m=0}^s m^2 P(\theta_m) \\ &= \frac{1}{s+1} \sum_{n,n'=0}^s \sum_{m=0}^s \rho_{n,n'} \theta_0^2 e^{i(n'-n)\theta_m} + \frac{4\pi \theta_0}{(s+1)^2} \sum_{n,n'=0}^s \sum_{m=0}^s \rho_{n,n'} m e^{i(n'-n)\theta_m} \\ &+ \frac{4\pi^2}{(s+1)^3} \sum_{n,n'=0}^s \sum_{m=0}^s \rho_{n,n'} m^2 e^{i(n'-n)\theta_m} \\ &= \frac{1}{s+1} \sum_{n=0}^s P_n \left(\sum_{m=0}^s \theta_0^2 \right) + \frac{1}{s+1} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} \theta_0^2 e^{i(n'-n)\theta_0} \left(\sum_{m=0}^s e^{\frac{2\pi m}{s+1}i(n'-n)} \right) \\ &+ \frac{4\pi \theta_0}{(s+1)^2} \sum_{n=0}^s P_n \left(\sum_{m=0}^s m \right) + \frac{4\pi \theta_0}{(s+1)^2} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)\theta_0} \left(\sum_{m=0}^s m e^{\frac{2\pi m}{s+1}i(n'-n)} \right) \\ &+ \frac{4\pi^2}{(s+1)^3} \sum_{n=0}^s P_n \left(\sum_{m=0}^s m^2 \right) + \frac{4\pi^2}{(s+1)^3} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)\theta_0} \left(\sum_{m=0}^s m^2 e^{\frac{2\pi m}{s+1}i(n'-n)} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde, além das séries obtidas anteriormente para o cálculo do primeiro momento da fase, temos

$$\sum_{m=0}^s \theta_0^2 = (s+1)\theta_0^2, \quad (\text{B.11})$$

$$\sum_{m=0}^s m^2 = \frac{s(s+1)(2s+1)}{6}, \quad (\text{B.12})$$

$$\sum_{m=0}^s m^2 e^{\frac{2\pi m}{s+1}i(n'-n)} = \frac{(s^2-1)e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - (s+1)^2}{\left[e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1 \right]^2}, \quad (n' \neq n). \quad (\text{B.13})$$

Então, o segundo momento da fase do campo, no espaço restrito, é dado por

$$\begin{aligned} \langle \phi_\theta^2 \rangle = & \theta_0^2 + \frac{2\pi s \theta_0}{s+1} + \frac{2\pi^2 s(2s+1)}{3(s+1)^2} + \frac{4\pi \theta_0}{s+1} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} \frac{e^{i(n'-n)\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1} \\ & + \frac{4\pi^2 s}{(s+1)^2} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} \frac{e^{i(n'-n)\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1} - \frac{4\pi^2}{(s+1)^2} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)\theta_0} \frac{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} + 1}{[e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1]^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

B.3 Variância da Fase

A variância da fase do campo é definida como:

$$\langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle \equiv \langle \phi_\theta^2 \rangle - \langle \phi_\theta \rangle^2. \quad (\text{B.15})$$

Assim, substituindo (B.9) e (B.14) na equação acima, temos a relação para a variância no espaço restrito de *Hilbert*

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle = & \frac{\pi^2 s(s+2)}{3(s+1)^2} - \frac{4\pi^2}{(s+1)^2} \sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} e^{i(n'-n)\theta_0} \frac{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} + 1}{[e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1]^2} \\ & - \frac{4\pi^2}{(s+1)^2} \left[\sum_{n \neq n'}^s \rho_{n,n'} \frac{e^{i(n'-n)\theta_0}}{e^{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)} - 1} \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

C

Operador Densidade no JCMK

Apresentamos agora o cálculo do operador densidade para o modelo de *Jaynes-Cummings* com meio *Kerr*. Considerando o operador evolução do sistema dado por

$$U_I(t) = e^{-\frac{i}{2}\chi^{(3)}t} e^{-i\chi^{(3)}(\mathbf{n}^2 - \mathbf{n})t} \begin{pmatrix} e^{-i\chi^{(3)}(\mathbf{n} - \frac{1}{2})t} & 0 \\ 0 & e^{i\chi^{(3)}(\mathbf{n} - \frac{1}{2})t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\Omega_{n+1}t) - i\gamma_{n+1} \frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega_{n+1}t)}{\Omega_{n+1}} & -2i\Omega\mathbf{a} \frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega_n t)}{\Omega_n} \\ -2i\Omega\mathbf{a}^\dagger \frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega_{n+1}t)}{\Omega_{n+1}} & \cos(\frac{1}{2}\Omega_n t) + i\gamma_n \frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega_n t)}{\Omega_n} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

podemos, com o intuito de compactar a notação, fazer as seguintes definições

$$\mathbf{D}_n \equiv e^{-i\chi^{(3)}(\mathbf{n}^2 - \mathbf{n})t}, \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{E}_n \equiv e^{-i\chi^{(3)}(\mathbf{n} - \frac{1}{2})t}, \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{C}_n \equiv \cos(\frac{1}{2}\Omega_n t), \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{S}_n \equiv \frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega_n t)}{\Omega_n}, \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{F}_n \equiv \mathbf{C}_n - i\gamma_n \mathbf{S}_n, \quad (\text{C.6})$$

tal que (C.1) seja reescrito da seguinte maneira

$$U_I(t) = e^{-\frac{i}{2}\chi^{(3)}t} \mathbf{D}_n \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_n^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{n+1} & -2i\Omega \mathbf{a} \mathbf{S}_n \\ -2i\Omega \mathbf{a}^\dagger \mathbf{S}_{n+1} & \mathbf{F}_n^\dagger \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Assim, para o operador densidade do sistema inicialmente dado por

$$\rho = \rho_a \otimes \rho_f, \quad (\text{C.8})$$

podemos obter a evolução deste estado para cada operador evolução calculados no **Capítulo 5** precedente, através da relação

$$\rho(t) = U_I(t) \rho U_I^\dagger(t) = \begin{pmatrix} \rho_{ee}(t) & \rho_{eg}(t) \\ \rho_{ge}(t) & \rho_{gg}(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

nos quais

$$\begin{aligned} \rho_{ee}(t) = & \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} C_e^2 D_n D_m^* E_n E_m^* F_{n+1} F_{m+1}^* |n\rangle \langle m| \\ & + 2i\Omega \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} e^{i\varphi} C_e C_g D_n D_{m-1}^* E_n E_{m-1}^* F_{n+1} S_m \sqrt{m} |n\rangle \langle m-1| \\ & - 2i\Omega \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} e^{-i\varphi} C_g C_e D_{n-1} D_m^* E_{n-1} E_m^* S_n F_{m+1}^* \sqrt{n} |n-1\rangle \langle m| \\ & + 4\Omega^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} C_g^2 D_{n-1} D_{m-1}^* E_{n-1} E_{m-1}^* S_n S_m \sqrt{nm} |n-1\rangle \langle m-1|, \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \rho_{eg}(t) = & 2i\Omega \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} C_e^2 D_n D_{m+1}^* E_n E_{m+1} F_{n+1} S_{m+1} \sqrt{m+1} |n\rangle \langle m+1| \\ & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} e^{i\varphi} C_e C_g D_n D_m^* E_n E_m F_{n+1} F_m |n\rangle \langle m| \\ & + 4\Omega^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} e^{-i\varphi} C_g C_e D_{n-1} D_{m+1}^* E_{n-1} E_{m+1} S_n S_{m+1} \sqrt{n(m+1)} |n-1\rangle \langle m+1| \\ & - 2i\Omega \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} C_g^2 D_{n-1} D_m^* E_{n-1} E_m S_n F_m \sqrt{n} |n-1\rangle \langle m|, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned}
\rho_{ge}(t) = & -2i\Omega \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} C_e^2 D_{n+1} D_m^* E_{n+1}^* E_m^* S_{n+1} F_{m+1}^* \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle m| \\
& + 4\Omega^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} e^{i\varphi} C_e C_g D_{n+1} D_{m-1}^* E_{n+1}^* E_{m-1}^* S_{n+1} S_m \sqrt{(n+1)m} |n+1\rangle \langle m-1| \\
& + \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} e^{-i\varphi} C_g C_e D_n D_m^* E_n^* E_m^* F_n^* F_{m+1}^* |n\rangle \langle m| \\
& + 2i\Omega \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} C_g^2 D_n D_{m-1}^* E_n^* E_{m-1}^* F_n^* S_m \sqrt{m} |n\rangle \langle m-1|,
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{gg}(t) = & 4\Omega^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} C_e^2 D_{n+1} D_{m+1}^* E_{n+1}^* E_{m+1}^* S_{n+1} S_{m+1} \sqrt{(n+1)(m+1)} |n+1\rangle \langle m+1| \\
& - 2i\Omega \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} e^{i\varphi} C_e C_g D_{n+1} D_m^* E_{n+1}^* E_m^* S_{n+1} F_m \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle m| \\
& + 2i\Omega \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} e^{-i\varphi} C_g C_e D_n D_{m+1}^* E_n^* E_{m+1}^* F_n^* S_{m+1} \sqrt{m+1} |n\rangle \langle m+1| \\
& + \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} C_g^2 D_n D_m^* E_n^* E_m^* F_n^* F_m |n\rangle \langle m|.
\end{aligned} \tag{C.13}$$

De modo análogo, podemos reescrever o operador evolução para este mesmo modelo no limite dispersivo (4.79),

$$U_I^{eff}(t) = e^{-i\chi^{(3)}(n^2-n)t} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Omega^2}{\delta}(n+1)t} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Omega^2}{\delta}nt} \end{pmatrix}, \tag{C.14}$$

como abaixo

$$U_I^{eff}(t) = D_n \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 \\ 0 & E_n^\dagger \end{pmatrix}, \tag{C.15}$$

sendo E_n definido agora como

$$E_n \equiv e^{-i\frac{\Omega^2}{\delta}nt}. \tag{C.16}$$

Então, usando a relação (C.9), podemos encontrar o operador densidade evoluído. Os elementos de matriz na base atômica são dados por:

$$\rho_{ee}(t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} C_e^2 D_n D_m^* E_{n+1} E_{m+1}^* |n\rangle \langle m|, \quad (\text{C.17})$$

$$\rho_{eg}(t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} e^{i\varphi} C_e C_g D_n D_m^* E_{n+1} E_m |n\rangle \langle m|, \quad (\text{C.18})$$

$$\rho_{ge}(t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} e^{-i\varphi} C_g C_e D_n D_m^* E_n^* E_{m+1}^* |n\rangle \langle m|, \quad (\text{C.19})$$

$$\rho_{gg}(t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m} C_g^2 D_n D_m^* E_n^* E_m |n\rangle \langle m|. \quad (\text{C.20})$$

Constatamos que as expressões se simplificam consideravelmente para a aproximação dispersiva.

Referências

- [1] M. SARGENT III, M. O. SCULLY e W. E. LAMB, *Laser Physics*, (Addison-Wesley, Reading Mass), 1974.
- [2] L. ALLEN e J. H. EBERLY, *Optical Resonance and the Two Level Atom*, (Wiley & Sons, New York), 1975.
- [3] E. T. JAYNES e F. W. CUMMINGS, *Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theory with Application to the Beam Maser*, IEEE **51**, 89 (1963).
- [4] B. W. SHORE e P. L. KNIGHT, *The Jaynes-Cummings Model*, J. Mod. Opt. **40**, 1195 (1993).
- [5] G. REMPE, H. WALTHER e N. KLEIN, *Observation of Quantum Collapse and Revival in a One-Atom Maser*, Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
- [6] J. H. EBERLY, N. B. NAROZHNY e J. J. SÁNCHEZ-MONDRAGÓN, *Periodic Spontaneous Collapse and Revival in a Simple Quantum Model*, Phys. Rev. Lett. **44**, 1323 (1980).
- [7] N. B. NAROZHNY, J. J. SÁNCHEZ-MONDRAGÓN e J. H. EBERLY, *Coherence versus Incoherence: Collapse and Revival in a Simple Quantum Model*, Phys. Rev. A **23**, 236 (1981).
- [8] P. MEYSTRE e M. S. ZUBAIRY, *Squeezed States in the Jaynes-Cummings Model*, Phys. Lett. A **89**, 390 (1982).
- [9] J. R. KUKLINSKI e J. L. MADAJCZYK, *Strong Squeezing in the Jaynes-Cummings Model*, Phys. Rev. A **37**, 3175 (1988).

- [10] H. MOYA-CESSA e A. VIDIELLA-BARRANCO, *Interaction of Squeezed Light with Two-Level Atoms*, J. Mod. Opt. **39**, 2481 (1992).
- [11] K. ZAHEER e M. S. ZUBAIRY, *Phase Sensitivity in Atom-Field Interaction via Coherent Superposition*, Phys. Rev. A **39**, 2000 (1989).
- [12] D. JONATHAN, K. FURUYA e A. VIDIELLA-BARRANCO, *Dressed-State Approach to Population Trapping in the Jaynes-Cummings Model*, J. Mod. Opt. **46**, 1697 (1999).
- [13] D. MOGILEVTSEVY, N. KOROLKOVAV e J. PEŘINA, *Entangled Superpositions of Distinguishable States via Nonlinear Wave Mixing*, Quantum Semiclass. Opt. **8**, 1169 (1996).
- [14] B. YURKE e D. STOLER, *Generating Quantum Mechanical Superpositions of Macroscopically Distinguishable States via Amplitude Dispersion*, Phys. Rev. Lett. **57**, 13 (1986).
- [15] B. YURKE e D. STOLER, *The Dynamic Generation of Schrödinger Cats and their Detection*, Physica B & C **151**, 298 (1988).
- [16] TS. GANTSOG e R. TANASÍ, *Discrete Superpositions of Coherent States and Phase Properties of Elliptically Polarized-Light Propagating in a Kerr Medium*, Quantum. Opt. **3**, 33 (1991).
- [17] K. TARA, G. S. AGARWAL e S. CHATURVEDI, *Production of Schrödinger Macroscopic Quantum-Superposition States in a Kerr Medium*, Phys. Rev. A **47**, 5024 (1993).
- [18] M. O. SCULLY e M. S. ZUBAIRY, *Quantum Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge), 1997.
- [19] P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics*, (Oxford University Press, Oxford), 4^a ed., 1958.
- [20] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU e F. LAOË, *Quantum Mechanics*, (Wiley & Sons, New York and Hermann, Paris), 2^a ed., 1977.
- [21] W. VOGEL e D-G. WELSCH, *Lectures on Quantum Optics*, (Academic Verlag GmbH, VCH Publishers, Berlin), 1^a ed., 1994.
- [22] J. J. JACKSON, *Eletrodynamics*, (Ed. Harvard), 1^a ed., 1962.

- [23] J. R. REITZ, F. J. MILFORD e R. W. CHRISTY, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, (Ed. Campus), 3^a ed., 1982.
- [24] J. J. SAKURAI, *Advanced Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley), 1^a ed., 1967.
- [25] M. A. MARCHIOLLI, *Interação da Radiação com a Matéria*, Monografia de Doutorado, Universidade Federal de São Carlos, 1995.
- [26] L. MANDEL e E. WOLF, *Optical Coherence and Quantum Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge), 1995.
- [27] W. H. LOUISELL, *Amplitude and Phase Uncertainty Relations*, Phys. Lett. **7**, 60 (1963).
- [28] R. J. GLAUBER, *The Quantum Theory of Optical Coherence*, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
- [29] E. SCHRÖDINGER, *Der Stetige Übergang von der Mikro zur Makromechanik*, Die Naturwissenschaften **14**, 664 (1926).
- [30] K. E. CAHILL e R. J. GLAUBER, *Ordered Expansions in Boson Amplitude Operators*, Phys. Rev. **177**, 1857 (1969).
- [31] K. E. CAHILL e R. J. GLAUBER, *Density Operators and Quasiprobability Distributions*, Phys. Rev. **177**, 1882 (1969).
- [32] F. A. M. DE OLIVEIRA, M. S. KIM et al, *Properties of Displaced Number States*, Phys. Rev. A **41**, 2645 (1990).
- [33] A. PERELOMOV, *Generalized Coherent States and Their Applications*, (Springer-Verlag, Berlin), 1986, p. 35.
- [34] H. TAKAHASHI, em *Advances in Communications Systems*, v. 1, (Academic, New York), 1965, p. 227.
- [35] J. N. HOLLENHORST, *Quantum Limits on Resonant-Mass Gravitational-Radiation Detectors*, Phys. Rev. D **19**, 1669 (1979).
- [36] D. STOLER, *Equivalence Classes of Minimum Uncertainty Packets*, Phys. Rev. D **1**, 3217 (1970).

- [37] H. P. YUEN, *Two-Photon Coherent States of the Radiation Field*, Phys.Rev. A **13**, 2226 (1976).
- [38] I. S. GRADSHTEYN e I. M. RYZHIK, *Table of Integrals, Series and Products*, (Wiley, New York), 4^a ed., 1965.
- [39] D. STOLER, B. E. A. SALEH e M. C. TEICH, *Binomial States of the Quantized Radiation Field*, Opt. Acta **32**, 345 (1985).
- [40] A. VIDIELLA-BARRANCO e J. A. ROVERSI, *Statistical and Phase Properties of the Binomial States of the Electromagnetic Field*, Phys. Rev. A **50**, 5233 (1994).
- [41] A. VIDIELLA-BARRANCO e J. A. ROVERSI, *Quantum Superpositions os Binomial States of Light*, J. Mod. Opt. **42**, 2475 (1995).
- [42] A. VIDIELLA-BARRANCO, *Quantum Superpositions of Coherent States of Light*, Tese de Doutorado, University of London, 1992.
- [43] R. LYNCH, *The Quantum Phase Problem: a Critical Review*, Phys. Rep. **256**, 367 (1995).
- [44] S. M. BARNETT e D. T. PEGG, *Phase in Quantum Optics*, J. Phys. A **19**, 3849 (1986).
- [45] V. PEŘINOVÁ, A. LUKŠ e J. PEŘINA, *Phase in Optics*, (World Scientific, Palacký University, Olomouc, República Tcheca), 1997.
- [46] D. F. WALLS e G. J. MILBURN, *Quantum Optics*, (Springer, Berlin), 1994.
- [47] U. LEONHARDT, *Measuring the Quantum State of Light*, (Cambridge University Press, Cambridge), 1997.
- [48] R. TANAŠ e TS. GANTSOG, *Phase Properties of Fields Generated in a Multiphoton Down-Converter*, Phys. Rev. A **45**, 5031 (1992).
- [49] P. CARRUTHERS e M. M. NIETO, *Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **40**, 411 (1968).
- [50] D. T. PEGG e S. M. BARNETT, *Unitary Phase Operator in Quantum Mechanics*, Europhys. Lett. **6**, 483 (1988).

- [51] N. BOHR, *Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics*, em *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, Open Court, La Salle/IL, (P. A. Schilpp, The Library of Living Philosophers, Evanston, Ill.), 1949, pp. 200–41.
- [52] F. LONDON, *Über die Jacobischen Transformation der Quantenmechanik*, Z. Phys. **37**, 915 (1926).
- [53] F. LONDON, *Winkelvariable und Kanonische Transformationen in der Undulationsmechanik*, Z. Phys. **40**, 193 (1927).
- [54] P. A. M. DIRAC, *The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation*, Proc. Roy. Soc. A **114**, 243 (1927).
- [55] L. SUSSKIND e J. GLOGOWER, *Quantum Mechanical Phase and Time Operator*, Physics **1**, 49 (1964).
- [56] W. HEITLER, *The Quantum Theory of Radiation*, (Clarendon Press, Oxford), 1954.
- [57] D. JUDGE, *On the Uncertainty Relation for L_z and φ* , Phys. Lett. **5**, 189 (1963).
- [58] D. JUDGE e J. T. LEWIS, *On the Commutator $[L_z, \varphi]$* , Phys. Lett. **5**, 190 (1963).
- [59] D. JUDGE, *On the Uncertainty Relation for Angle Variables*, Nuovo Cimento **31**, 332 (1964).
- [60] S. M. BARNETT e D. T. PEGG, *On the Hermitian Optical Phase Operator*, J. Mod. Opt. **36**, 7 (1989).
- [61] D. T. PEGG e S. M. BARNETT, *Phase Properties of the Quantized Single-Mode Electromagnetic Field*, Phys. Rev. A **39**, 1665 (1989).
- [62] A. BÖHM, *The Rigged Hilbert Space and Quantum Mechanics*, em *Lecture Notes in Physics*, v. 78, (Springer, Berlin), 1978.
- [63] R. LOUDON, *The Quantum Theory of Light*, (Clarendon Press, Oxford), 1^a ed., 1973.
- [64] J. SCHWINGER, *Unitary Operator Bases*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **46**, 570 (1960).
- [65] J. SCHWINGER, *The Special Canonical Group*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **46**, 1401 (1960).

- [66] J. SCHWINGER, *Quantum Variables and Action Principle*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **47**, 1075 (1961).
- [67] W. PAULI, *General Principles of Quantum Mechanics*, (Springer-Verlag, Berlin), 1980.
- [68] P. BERTET, S. OSNAGHI et al, *Generating and Probing a Two-Photon Fock State with a Single Atom in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **88**, 143601 (2002).
- [69] J. G. PEIXOTO e M. C. NEMES, *Dissipative Dynamics of the Jaynes-Cummings Model in the Dispersive Approximation: Analytical Results*, Phys. Rev. A **59**, 3918 (1999).
- [70] P. D. DRUMMOND e D. F. WALLS, *Quantum Theory of Optical Bistability. I: Nonlinear Polarizability Model*, J. Phys. A **13**, 725 (1980).
- [71] G. J. MILBURN, *Quantum and Classical Liouville dynamics of the Anharmonic Oscillator*, Phys. Rev. A **33**, 674 (1986).
- [72] G. S. AGARWAL e R. R. PURI, *Collapse and Revival Phenomenon in the Evolution of a Resonant Field in a Kerr-Like Medium*, Phys. Rev. A **39**, 2969 (1989).
- [73] A. IMAMOĞLU, H. SCHMIDT et al, *Strongly Interacting Photons in a Nonlinear Cavity*, Phys. Rev. Lett. **79**, 1467 (1997).
- [74] M. KITAGAWA e Y. YAMAMOTO, *Number-Phase Minimum-Uncertainty State with Reduced Number Uncertainty in a Kerr Nonlinear Interferometer*, Phys. Rev. A **34**, 3974 (1986).
- [75] A. BANDYOPADHYAY e G. GANGOPADHYAY, *Population Trapping in the Jaynes-Cummings Model with a Kerr Nonlinear Medium*, J. Mod. Opt. **43**, 487 (1996).
- [76] R. H. XIE, G. O. XU e D. H. LIU, *Study of Squeezing Properties in a Two-Level System*, Aust. J. Phys. **48**, 907 (1995).
- [77] R. H. XIE, *On Atomic Squeezing in a Generalized Multiphoton Jaynes-Cummings Model*, Can. J. Phys. **74**, 305 (1996).
- [78] R. H. XIE, Q. RAO et al, *The Squeezing Properties in the Jaynes-Cummings Model with Arbitrary Intensity-Dependent Coupling*, Nuovo Cimento D **18**, 405 (1996).

- [79] S. STENHOLM, *Quantum Theory of Electromagnetic Fields Interacting with Atoms and Molecules*, Phys. Rep. C **6**, 1 (1973).
- [80] A. JOSHI e R. R. PURI, *Dynamical Evolution of the Two-Photon Jaynes-Cummings Model in a Kerr-Like Medium*, Phys. Rev. A **45**, 5056 (1992).
- [81] H. M. XIE, P. DABKIEWICZ et al, *Side-Hole Fiber for Fiber-Optic Pressure Sensing*, Opt. Lett. **11**, 333 (1986).
- [82] S. D. DU, S. Q. GONG et al, *Unusual Rabi Oscillations in the Squeezed Jaynes-Cummings Model: Effects of the Detuning and the Kerr Nonlinearity*, Quantum Semiclass. Opt. **9**, 941 (1997).
- [83] D. JONATHAN, *Estados Pré-Correlacionados e Análise de Colapsos e Ressurgimentos no Modelo de Jaynes-Cummings*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1998.
- [84] S. J. D. PHOENIX e P. L. KNIGHT, *Fluctuations and Entropy in Models of Quantum Optical Resonance*, Ann. Phys. **186**, 381 (1988).
- [85] H. T. DUNG, R. TANAŚ e A. S. SHUMOVSKY, *Collapses, Revivals, and Phase Properties of the Field in Jaynes-Cummings Type Models*, Opt. Comm. **79**, 462 (1990).
- [86] TS. GANTSOG, A. JOSHI e R. TANAŚ, *Phase Properties of One- and Two-Photon Jaynes-Cummings Models with a Kerr Medium*, Quantum Semiclass. Opt. **8**, 445 (1996).
- [87] M. ARAKI e E. LIEB, *Entropy Inequalities*, Commun. Math. Phys. **18**, 160 (1970).
- [88] J. VON NEUMANN, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton, Princeton University Press), 1995.
- [89] J. EISELT e H. RISKEN, *Quasiprobability Distributions for the Jaynes-Cummings Model with Cavity Damping*, Phys. Rev. A **43**, 346 (1991).
- [90] J. GEA-BANACLOCHE, *Collapse and Revival of the State Vector in the Jaynes-Cummings Model: an Example of State Preparation by a Quantum Apparatus*, Phys. Rev. Lett. **65**, 3385 (1990).
- [91] J. GEA-BANACLOCHE, *Atom- and Field-State Evolution in the Jaynes-Cummings Model for Large Initial Fields*, Phys. Rev. A **44**, 5913 (1991).

- [92] V. BUŽEK, H. MOYA-CESSA et al, *Schrödinger-Cat States in the Resonant Jaynes-Cummings Model: Collapse and Revival of Oscillations of the Photon-Number Distribution*, Phys. Rev. A **45**, 8190 (1992).
- [93] M. KOZIEROWSKI, *Thermal and Squeezed Vacuum Jaynes-Cummings Models with a Kerr Medium*, J. Mod. Opt. **48**, 773 (2001).
- [94] M. ABDEL-ATY, *Influence of a Kerr-Like Medium on the Evolution of Field Entropy and Entanglement in a Three-Level Atom*, J. Phys. B **33**, 2665 (2000).
- [95] G. M. ABD AL-KADER e M. M. A. AHAMD, *On the Interaction of Two-Level Atoms with Squeezed Coherent State Superpositions*, Chin. J. Phys. **39**, 50 (2001).
- [96] G. M. A. AL-KADER, A. S. F. OBADA et al, *Phase Properties of a Jaynes-Cummings Model with Stark Shift and Kerr Medium*, Eur. Phys. J. D **3**, 289 (1998).
- [97] A. F. FAN, *Phase Properties of a Field in the Jaynes-Cummings Model for Nonresonant Behavior*, Opt. Commun. **98**, 340 (1993).
- [98] A. F. FAN e Z. W. WANG, *Phase, Coherence Properties, and the Numerical-Analysis of the Field in the Nonresonant Jaynes-Cummings Model*, Phys. Rev. A **49**, 1509 (1994).
- [99] G. C. GUO, S. B. ZHENG e C. SAAVEDRA, *Generation of Schrödinger Cat states via the Jaynes-Cummings Model with Large Detuning*, Phys. Lett. A **223**, 332 (1996).
- [100] S. M. CHUMAKOV, A. B. KLIMOV e C. SAAVEDRA, *Competing Interactions and Quantum Nonspreading Wave Packets*, Phys. Rev. A **52**, 3153 (1995).
- [101] E. C. G. SUDARSHAN, *Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams*, Phys. Rev.Lett. **10**, 277 (1963).
- [102] M. HILLERY, *Amplitude-Squared Squeezing of the Electromagnetic Field*, Phys. Rev. A **36**, 3796 (1987).
- [103] E. P. WIGNER, *On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).