

ESTUDO DO FENÔMENO DO COLAPSO E REATIVAÇÃO
EM ÁTOMOS DE TRÊS E QUATRO NÍVEIS INTERAGINDO
COM CAMPO DE RADIAÇÃO QUANTIZADO

Aluno: Manuel Almeida Andrade Neto

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Roversi

*Este exemplar corresponde a redação
final da Tese defendida pelo aluno
Manuel Almeida Andrade Neto e
aprovada pela comissão julgadora
01/10/93 J. Roversi*

dissertação submetida ao

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

para obtenção do Título de Mestre em Física

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Janeiro - 93

Agradecimentos.

Ao professor *Roversi*, não somente como orientador mas pelo grande ser humano e Físico que é, pela amizade e respeito desenvolvidos neste trabalho e pela sugestão do tema desta tese.

à professora *Kyoko* que acompanhou este trabalho, desde o Exame de Qualificação, pelas palavras de incentivo e pelas sugestões,

ao professor *Mohinder Paul Sharma* pelas suas discussões e sugestões que foram extremamente úteis à realização deste trabalho,

ao professor *José Inácio Cotrim Vasconcellos*, pelas observações,

aos meus amigos do grupo de Caos – Bajay, Sandra, Gian e Fausto – pelas discussões de trabalho (gerais e filosóficas também), ao pessoal super-jóia do Laboratório de Baixas Temperaturas, em especial João & Elis, Marcos Ávila (Marcão, o DM) e Xi, ao pessoal do centro de computação – Xikito, Antonella, Sidney, Ana, Sílvio (olha você ai, Sílvio), Epiovani (Super Eduardinho) – por aguentarem os meus programas que as vezes entupiam as estações; ao pessoal do corredor do bloco D – Boselli, Gonzallo, Marcos, Kazuo, Edilson, Bettega (o maior físico da Unicamp), Caluzi, etc..., ao Montanha e sua cultura Startrekiana, aos casais Ariel&Martha e Braulio&Emília pela ajuda nas horas certas (e incertas também), aos professores e funcionários do IFGW e da UNICAMP que de uma maneira ou outra contribuíram para este trabalho. Agradeço ainda (e fundamentalmente) à Sociedade como um todo que converte uma parte do seu árduo trabalho em Bolsas de Estudo e ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento - CNPq¹ (imprescindível) como Órgão gerenciador das Bolsas de Estudo, Fomentador de pesquisa e tecnologia, por ter me agraciado com uma Bolsa de

¹Este trabalho foi suportado financeiramente pelo CNPq

Mestrado,

finalmente, agradeço (e também ofereço) a minha esposa, *Cristiane Klein Andrade*, uma pessoa incrível e importante que aconteceu na minha vida...

Obrigado.

com muito carinho e gratidão,
a *Luiz Carlos e Vera Maria*,
meus pais.

**ESTUDO DO FENÔMENO DO COLAPSO E REATIVAÇÃO EM ÁTOMOS
DE TRÊS E QUATRO NÍVEIS INTERAGINDO COM CAMPO DE
RADIAÇÃO QUANTIZADO**

RESUMO

No presente trabalho é feito um estudo do fenômeno do colapso e reativação para átomos de três e quatro níveis. Foi utilizando para esta finalidade, a expansão do modelo tipo Jaynes-Cummings, que consiste da matematização da interação do campo de radiação com um átomo de dois níveis no interior de uma cavidade fechada, na aproximação de ondas rotantes a um modo.

Colapso e reativação é um fenômeno puramente quântico; sem análogo clássico, descrito portanto, por um Hamiltoniano de Interação puramente quântico.

São estudados efeitos causados na estrutura do colapso e reativação focalizando parâmetros definidos do sistema para quatro tipos distintos preparação inicial do sistema (distribuição de estados coerentes, distribuição de estados binomiais, distribuição de estados termocoerentes e distribuição de estados comprimidos). Os resultados obtidos mostram efeitos que vão desde a inibição total do fenômeno do colapso e reativação (poucos fótons intracavidade) até a manutenção prolongada à dezenas ou mesmo centenas de tempos de Rabi, conforme os parâmetros característicos, N_{max} e \bar{n} , são aumentados.

ABSTRACT

In this work we present a study of the collapse and revival phenomenon for atoms of three- and four-energy levels. For this, we use an expansion of Jaynes-Cummings model, which consists in a mathematical treatment of the interaction between the radiation field and a two-level atom inside a closed cavity, in the Rotating Wave Approximation (RWA). Collapse and revival is a purely quantum phenomenon, with no classical analogue and therefore described by a purely quantum interaction Hamiltonian.

We study the changes in the collapse and revival structure as function of the parameters of the system. We use, in this study, four distinct preparation of the initial state system: Coherent States distribution, Binomial States distribution, Thermocoherent States distribution and Squeezed States distribution.

It is observed that the phenomenon of collapse and revival has strong dependence on the number of levels the atom has. It is also observed that the collapse and revival phenomenon is very sensitive to the initial number of the photons present in the system, N_{max} , to the coupling constants, g_i , as well the detunings.

Conteúdo

1	Introdução	4
2	Modelo Hamiltoniano: sistema átomo-campo	10
2.1	Hamiltoniano	11
2.2	Aproximação de Dipolo Elétrico	15
2.3	\hat{H} no quadro da Segunda Quantização	19
2.4	Representação de Interação	22
2.4.1	Sistema atômico de dois níveis	23
3	Estatística de Fótons	26
3.1	Tratamento Mecânico Quântico	27
3.2	Estados Coerentes	28
3.3	Definição e Propriedades dos Estados Coerentes	30
3.3.1	Representação de $ \alpha\rangle$ no Plano das Amplitudes Complexas	33
4	Colapso-Reativação em 3 e 4 Níveis	36
4.1	Interação radiação-átomo no caso 4 níveis	36
4.1.1	Processos de dois fótons	40
4.1.2	Vetor de Estado do sistema Átomo-Campo	41
4.1.3	Dinâmica	42
4.2	Influência do número de níveis atômicos	45
4.3	Influência da distribuição inicial de fótons	48

4.4	Número Médio Inicial de Fótons, $\langle \bar{n} \rangle$	54
4.5	Dessintonia	55
4.6	Constantes de Acoplamento	60
4.7	Conclusões	61
5	Compressão de Flutuações	62
5.1	Introdução aos Estados Comprimidos	62
5.2	Estados Comprimidos: notação de Caves	67
5.2.1	Representação de $ \alpha, z\rangle$ no plano das amplitudes complexas	69
5.3	Estados Comprimidos: efeitos no colapso-reativação	71
5.3.1	Efeito do Parâmetro de Compressão	75
5.3.2	Influência de $ \alpha $	77
5.3.3	Dessintonia	78
6	Considerações Finais	80
A	Modelo Hamiltoniano: Equações de movimento e suas soluções	85
B	Cálculo da forma simplificada de $\langle n(t) \rangle$	93
	Bibliografia	97

Capítulo 1

Introdução

A maioria dos experimentos relacionados com geração e detecção de luz envolvem a interação de ondas eletromagnéticas com átomos. A partir daí, fica claro a necessidade de se desenvolverem métodos para tratar este tipo de interação. Um modelo largamente estudado na literatura é o modelo de Jaynes-Cummings [1], no qual um campo de radiação quantizado, monomodo, fechado numa cavidade, interage com um átomo de dois níveis, no quadro da Aproximação de Ondas Rotantes (RWA – Rotating Wave Aproximation). Embora simples, este modelo confere as propriedades essenciais para a interação radiação-matéria. É também freqüente encontrar na literatura, principalmente no caso de cavidades fechadas, a parte interativa do Hamiltoniano contendo um termo fenomenológico, descrevendo efeito de dessintonia como em H_I abaixo,

$$H_I = g_a a A_a^\dagger A_b e^{-i\delta_a t} + h.c.,$$

onde g_a é o acoplamento entre os níveis adjacentes (nesse caso dois níveis, $|a\rangle$ e $|b\rangle$, por exemplo), a é o operador de aniquilação para o campo de radiação (usual em mecânica quântica), $A_a^\dagger A_b$ é um operador que segue a estatística fermiônica (mas não é um operador fermiônico) e nesse caso significa aniquilar o átomo no estado $|b\rangle$ e cria-lo no estado $|a\rangle$, isto é, significa a

transição propriamente dita. O argumento da exponencial reflete a dessintonia. Este termo, que surge naturalmente nos cálculos na RWA, é da ordem de $\omega_0 - \omega_{ab} \approx 0$. A frequência $\omega_{ab} = \omega_a - \omega_b$, onde ω_a e ω_b são respectivamente as frequências dos estados $|a\rangle$ e $|b\rangle$. A frequência de ressonância é ω_{ab} e ω_0 é a frequência do campo de radiação na cavidade. A introdução de valores não nulos para a dessintonia, como escrito logo acima, é fenomenológica (podendo representar ajustes na cavidade, efeito stark, etc). O termo *h.c.* significa o hermitiano conjugado. A grande qualidade deste modelo é que ele é suficientemente simples permitindo a obtenção de resultados analíticos, ao mesmo tempo que retém as características quânticas da interação átomo-campo.

No modelo de JC, temos genericamente a contabilização das energias do átomo e do campo fechados na cavidade em questão mais a interação átomo-campo, desprezando qualquer outra forma de energia de interação. Isto permite sua apresentação em diferentes formas, dependendo do tipo de aplicação específica ou do grau de aproximação na interação átomo-campo que se desejar. O conhecimento da dinâmica de populações e suas variações com parâmetros do sistema são fundamentais para problemas atuais como ionização, dissociação, separação seletiva de isótopos em um estado excitado, estocagem (“population trapping”) ou espectroscopia de átomos ou íons isolados. Já na aproximação de dipolo (interação de primeira ordem) se pode analisar o fenômeno do colapso e reativação, que é o objetivo central deste trabalho, no que se refere a átomos de três e quatro níveis.

Colapsos [2, 3] e reativações [4, 5, 6] são fenômenos puramente quânticos, não possuindo análogo clássico, sendo que este fenômeno vêm sendo extensivamente estudado ao longo destes anos, tanto teórica quanto experimentalmente. O modelo foi estendido e generalizado de maneira a incluir multimodos [7], 3-níveis [8], amortecimento na cavidade [9], interação com diferentes estatísticas fotônicas tais como Poissoniana, caótica [10], “squeezed” (comprimida) [11], binomial [12, 13], lorentziana [14] e logarítmica [15], mais de um átomo [9, 16] e movimento atômico [17]. Uma revisão bastante abrangente do processo para dois e três níveis se encontra no artigo de Yoo e Eberly [18]. O fenômeno também têm sido estudado por grupos experimentais, utilizando um único átomo presente dentro de uma cavidade e campo monomodo [19] como utilizado experimentalmente por Rempe *et al* (1987) [20] na determinação da estatística de poucos fótons em uma cavidade supercondutora. Finalmente, a excitação de

sistemas multiníveis por lasers tem despertado grande interesse, pois acredita-se que existam transições multifotônicas degeneradas (átomos de Rydberg).

No presente trabalho é estudado o fenômeno do colapso e reativação para um átomo de quatro níveis, fazendo-se uma comparação entre os resultados para átomos de dois e três níveis, bem como para diferentes preparações do estado inicial. Escolheu-se quatro formas distintas de apresentar o estado inicial do sistema: superposição de Estados Coerentes, de Estados Binomiais, de Estados Termocoerentes e de Estados Comprimidos. Também é analisada a importância relativa de parâmetros do modelo, tais como número médio de fótons (\bar{n}), dessintonias, acoplamentos radiação-átomo, número de fótons térmicos (n_b , Estados Termocoerentes) e parâmetro de compressão (s , caso de Estados Comprimidos). Os resultados desta análise se encontram no capítulo 4 deste trabalho.

Para facilidade de leitura e melhor sistematização dos resultados, o presente trabalho foi dividido em capítulos. Assim, no segundo capítulo é apresentado o balanço energético que conduz ao Hamiltoniano básico $\hat{\mathcal{H}}$ (Hamiltoniano de acoplamento mínimo), completo, para uma forma mais particular – aproximação de dipolo + RWA – da interação átomo-campo. Obtêm-se uma forma analítica para $\hat{\mathcal{H}}$ e descreve-se, de maneira resumida, o caso de um sistema de dois níveis com campo de radiação monomodo.

No capítulo três é apresentado uma das classes mais importantes de base de estados ou representação do campo da radiação: os Estados Coerentes. O referido capítulo é base das discussões que são apresentadas nos dois capítulos sucessivos. Obtêm-se a distribuição de probabilidade inicial dos fótons intra-cavidade. A importância da forma da distribuição de probabilidades está estreitamente relacionada com a preparação (distribuição) dos estados iniciais dos fótons no interior da cavidade. É esta característica que será explorada nos capítulos quatro e cinco. Os estados coerentes, além de serem de fácil manipulação algébrica, são também estados de mínima incerteza. Talvez sejam a classe mais importante de estados utilizados devido à sua proximidade com o caso clássico. Pode-se dizer que os estados coerentes são análogos ao caso clássico com introdução de uma flutuação quântica (devido à incerteza de Heisenberg). A utilização de proximidades com a física clássica reside no fato de que a compreensão do fenômeno envolvido é bem mais fácil, ao passo que um processo puramente quântico muitas vezes atinge níveis de abstração que nos foge ao conhecimento. Sendo

assim, estes estados geralmente são o ponto de partida para estudos posteriores envolvendo qualquer tipo de radiação intracavidade.

O capítulo quatro é deixado aos cálculos analíticos de um sistema de quatro níveis na presença de campo de radiação monomodo. Neste caso, o Hamiltoniano de interação estudado é obtido diretamente da generalização do modelo para átomos de dois níveis, e têm a seguinte forma:

$$H_I = g_a a A_a^\dagger A_b e^{-i\delta_a t} + g_b a A_b^\dagger A_c e^{-i\delta_b t} + g_c a A_c^\dagger A_d e^{-i\delta_c t} + h.c.,$$

onde g_a , g_b e g_c são as constantes de acoplamento, a é o operador usual de aniquilação e $A_a^\dagger A_b$, $A_b^\dagger A_c$ e $A_c^\dagger A_d$ são os operadores que criam o átomo nos estados $|a\rangle$, $|b\rangle$ e $|c\rangle$ respectivamente, $h.c.$ é o hermitiano conjugado. O modelo contempla transições permitidas apenas entre níveis adjacentes, conforme estabelecido pelos operadores atômicos. As passagens analíticas mais importantes na determinação da evolução temporal do número médio de fótons presentes na cavidade são apresentadas no Apêndice A. Os resultados para átomos de três níveis e de dois níveis são obtidos daquele de quatro níveis, fazendo-se, respectivamente $g_c = 0$ e $g_c = g_b = 0$. Ainda neste capítulo são apresentados resultados numéricos no estudo dos parâmetros do sistema e seus efeitos na evolução temporal de $\langle n(t) \rangle$, como será detalhado mais adiante. A análise da dinâmica populacional em átomos de quatro níveis prende-se basicamente ao fato de vários tipos de laser's de estado sólido terem seu comportamento bem descrito por sistemas do tipo "átomo de quatro níveis" (CO_2 , Neodymium, etc.). Um sistema de n -níveis é estudado no artigo de Li *et al* [21]. Li trabalha com muitos níveis atômicos (só adequado para átomos de Rydberg) e pouquíssimos fótons intracavidade. Experimentalmente somente realizável em condições extremamente difíceis: $T \simeq 0$ K. Do ponto de vista teórico, embora simples, numericamente é muito trabalhoso (envolvendo matrizes de 2000 a 3000 $\times n$ fótons). Os níveis energéticos foram considerados igualmente espaçados com dessintonias iguais a zero e diferentes de zero, não sendo portanto o caso de um laser real. Nossos cálculos são realizados na condição de uma cavidade sem perdas (isolada), campo da radiação monomodo e dentre os vários átomos que possam nela existir estamos focalizando atenção a apenas um, como Li, porém agora num átomo de quatro níveis. A expansão do modelo utilizado para cinco (ou mais de cinco) níveis não é difícil, porém trabalhosa. A maior qualidade do modelo desenvolvido nesta tese é permitir utilizar um número relativamente elevado de fótons

intracavidade, o que propicia uma liberdade de estudos que vão desde átomos de Rydberg até laser internos, tal como o de CO_2 (alguns milhares de fótons dentro da cavidade). Também não estamos restritos à acoplamentos iguais e os cálculos computacionais envolvidos não são demorados. No entanto, nesta tese nos retivemos apenas no fenômeno do colapso e reativação. Os colapsos e reativações estão diretamente ligados à inversão de população entre os níveis, ponto chave do funcionamento de um laser e informações sobre sua evolução temporal, transiente, etc., são úteis aos experimentais. Apresentamos, nas seções que se segue no capítulo quatro, resultados numéricos para a evolução temporal do número médio de fótons presentes na cavidade, $\langle n(t) \rangle$, focalizando o efeito dos parâmetros do modelo: \bar{n} , número médio de fótons iniciais presentes na cavidade; N_{max} , número máximo de fótons possíveis dentro da cavidade; g_i , intensidade do acoplamento da interação radiação-matéria (constantes de acoplamento) e δ 's, efeito das dessintonias no comportamento do fenômeno do colapso e reativação. Também investigamos a diferença apresentados na forma de preparação do estado inicial: Estados Coerentes, Estados Binomiais e Estados Termocoerentes. No caso da distribuição dos Estados Termocoerentes é estudado o efeito do número de fótons térmicos (n_b) nesta distribuição. Os resultados são apresentados comparando-se os efeitos para átomos de dois, três e quatro níveis.

No quinto capítulo introduz-se a distribuição de Estados Comprimidos (“Squeezed States”). Estes estados, junto com os Estados Coerentes formam o sustentáculo de toda Óptica Quântica moderna e foram estudados inicialmente devido ao grande interesse em suas propriedades de estados generalizados de incerteza mínima. Sua importância ultrapassa as fronteiras da Óptica Quântica, onde sua obtenção e utilização está relacionada diretamente à redução de ruídos, medidas quânticas não destrutivas e otimização dos elementos e sistemas de comunicações ópticos [22]. Nessa linha são utilizados para melhorar giroscópios ópticos [23] e também melhorar a sensibilidade de detetores de ondas gravitacionais [24], onde são necessárias medições da ordem de 10^{-19} cm. Neste capítulo fazemos um estudo do efeito da preparação do estado inicial através de sua expansão numa base de Estados Comprimidos, de modo semelhante ao capítulo quatro, sobre $\langle n(t) \rangle$. Também fazemos um estudo do parâmetro de compressão, s , no fenômeno do colapso-reativação. Sendo estes estados gerados por processos de dois fótons, nos sistemas de três e quatro níveis (termos $A_a^\dagger A_b$, $A_b^\dagger A_c$ e $A_c^\dagger A_d$)

eles ocorrem naturalmente, enquanto que para sistemas de dois níveis é necessária a inclusão de um termo do tipo $g_a(a^\dagger)^2 A_a^\dagger A_b$, segundo Yuen [22], no Hamiltoniano de interação. Este é oriundo do termo $\frac{e^2}{2m} \hat{A}^2$, como pode ser visto nas eqs. (4.17), (4.18) e (4.19) do capítulo quatro.

Finalmente, o capítulo seis é deixado à conclusões gerais e perspectivas do modelo: introdução de perdas; acoplamento entre níveis não adjacentes; mais de um átomo; mais níveis; processos de dois fótons; etc.

Os cálculos analíticos de $\langle n(t) \rangle$ são deixados para Apêndice A e a obtenção das formas analíticas de $b_{n+1}(t)$, $c_{n+2}(t)$ e $d_{n+3}(t)$ são apresentadas no Apêndice B.

Capítulo 2

Modelo Hamiltoniano: sistema átomo-campo

Processos de transição atômicas podem ocorrer de várias maneiras, por exemplo, através de colisões. A radiação eletromagnética também promove processos de transição. Tais processos são conhecidos como absorção estimulada e emissão estimulada ou simplesmente absorção e emissão. Quando um átomo se encontra no estado excitado, ele pode fazer transições para estados de menor energia através da emissão de radiação eletromagnética. Entretanto, em contraste com a absorção, a emissão pode ocorrer de duas maneiras distintas:

- emissão espontânea, na qual o átomo excitado emite radiação mesmo na ausência de qualquer radiação incidente e
- emissão estimulada, na qual um sinal ou radiação incidente faz com que o átomo excitado emita radiação.

Neste capítulo vamos estudar um dos processos mais simples envolvendo transições estimuladas. Tomamos um modelo básico para a interação da radiação com o átomo ¹, levando em conta apenas a interação dipolar elétrica (isto é, negligenciou-se os efeitos de acoplamento spin-órbita, efeito de tamanho do núcleo, efeitos relativísticos, etc.). Esta aproximação é conhecida como aproximação de primeira ordem por levar em conta somente o primeiro termo

¹O desenvolvimento utilizado neste capítulo segue basicamente o capítulo 5 de Loudon e Knight [25]

na expansão da parte referente à interação. Nosso interesse nesta aproximação é o estudo do fenômeno do colapso-reativação [1] o qual é obtido evoluindo-se os estados do sistema sob interação. Sistemas desta natureza, que mostrem mais detalhadamente as interações átomo-radiação estão por trás de toda a física quântica microscópica atual, sendo importante seu conhecimento.

2.1 Hamiltoniano

O operador Hamiltoniano Quântico para interação da radiação-matéria é obtido pelo procedimento usual de quantização da função Hamiltoniana Clássica [26]. O Hamiltoniano completo no calibre de Coulomb ($\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_j) = 0$) é

$$\hat{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2m} \sum_j (\hat{\mathbf{p}}_j + e\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_j))^2 + \frac{1}{2} \int \sigma(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \hat{\mathbf{E}}_T^2 + \mu_0^{-1} \hat{\mathbf{B}}^2) d\mathbf{r}. \quad (2.1)$$

No primeiro termo à direita temos os momentos eletrônicos representados por

$$\frac{1}{2m} \sum_j \hat{\mathbf{p}}_j^2 \quad \text{onde} \quad \hat{\mathbf{p}}_j = \frac{\hbar}{i} \nabla_j \quad (2.2)$$

bem como o termo de interação entre o átomo e a radiação que envolvem o operador potencial vetor,

$$\hat{\mathcal{H}}_I = \frac{e}{2m} \sum_j \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_j) \cdot \hat{\mathbf{p}}_j + \frac{e^2}{2m} \sum_j \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_j)^2. \quad (2.3)$$

O calibre de Coulomb é utilizado com a finalidade de separar as equações de Maxwell em duas partes distintas: $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_T + \hat{\mathbf{E}}_L$, a parte longitudinal associada ao potencial ϕ e a parte transversal associada com o vetor potencial $\hat{\mathbf{A}}$. A forma (2.1) deve ser modificada pois ela está expressa em termos do vetor potencial, não sendo conveniente para efeitos de cálculo já que o vetor potencial assume diferentes valores para diferentes escolhas do calibre. O segundo termo da eq. (2.1) é a energia eletrostática das várias cargas que constituem o átomo. Podemos escrevê-las de diferentes maneiras [25],

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \sigma(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int \phi \nabla^2 \phi \, d\mathbf{r} = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\phi)^2 \, d\mathbf{r} = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_L)^2 \, d\mathbf{r} = \frac{1}{2\epsilon_0} \int (\mathbf{P}_L)^2 \, d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.4)$$

com $\sigma(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$. O campo elétrico é escrito como $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_T + \hat{\mathbf{E}}_L$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_T &= -\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t} \\ \hat{\mathbf{E}}_L &= -\nabla\phi \end{aligned} \quad (2.5)$$

satisfazendo à identidade $\nabla \cdot \mathbf{E}_T = \nabla \times \mathbf{E}_L \equiv 0$. O Hamiltoniano da forma (2.1) é conhecido como Hamiltoniano de acoplamento mínimo, não sendo levado em conta os efeitos relativísticos, acoplamentos spin-órbita, etc.

Como já escrito anteriormente, esta forma não é conveniente para cálculos pois está expressa em termos de $\hat{A}(\mathbf{r}_j)$. Uma forma adequada para o tratamento da eq. (2.1) é utilizar uma transformação unitária [25] através do operador unitário,

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int \mathbf{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}\right) \quad (2.6)$$

que é uma função das coordenadas \mathbf{r}_j de todos os elétrons e um funcional do vetor potencial.

Escrevendo \mathbf{P}_T na forma

$$\mathbf{P}_T(\mathbf{r}) = -e \sum_j \mathbf{r}_j \int_0^1 \delta(\mathbf{r} - \lambda \mathbf{r}_j) \, d\lambda, \quad (2.7)$$

e substituindo (2.7) em (2.6), tem-se

$$\int \mathbf{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = -e \sum_j \int_0^1 \mathbf{r}_j \cdot \hat{A}(\lambda \mathbf{r}_j) \, d\lambda, \quad (2.8)$$

já que, para quaisquer campos vetoriais $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{W}(\mathbf{r})$,

$$\int \mathbf{V}_T(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{W}_L(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = 0. \quad (2.9)$$

Substituindo-se as eqs. (2.7), (2.8) e (2.9) na eq. (2.6) obtêm-se

$$\hat{U} = \exp \left\{ -\frac{ie}{\hbar} \sum_j \int_0^1 \mathbf{r}_j \cdot \hat{A}(\lambda \mathbf{r}_j) d\lambda \right\}, \quad (2.10)$$

com o qual se obtêm o Hamiltoniano transformado $\hat{\mathcal{H}} = \hat{U}^{-1} \hat{\mathcal{H}}' \hat{U}$ pela aplicação termo-a-termo do Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}'$.

Transformação do Primeiro Termo – A transformação do primeiro termo é controlada pelas propriedades de comutação de \hat{U} com os operadores de momentos eletrônicos, representados por $\hat{\mathbf{p}}_j$,

$$\begin{aligned} \hat{U}^{-1} (\hat{\mathbf{p}}_j + e\hat{A}(\mathbf{r}_j)) \hat{U} &= \hat{U}^{-1} \hat{\mathbf{p}}_j \hat{U} + \hat{U}^{-1} e\hat{A}(\mathbf{r}_j) \hat{U} \\ &= \hat{\mathbf{p}}_j - e\nabla_j \int_0^1 \mathbf{r} \cdot \hat{A}(\lambda \mathbf{r}_j) d\lambda + e\hat{A}(\mathbf{r}_j), \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde no último termo acima usou-se a propriedade do operador unitário. Esta expressão pode ser simplificada escrevendo o vetor potencial como uma série de Taylor em torno da origem [27],

$$\hat{A}(\mathbf{r}_j) = \sum_j \int_0^1 \left\{ 1 + (\lambda \mathbf{r}_j \cdot \nabla_j) + \frac{1}{2!} (\lambda \mathbf{r}_j \cdot \nabla_j)^2 + \dots \right\} \hat{A}(\lambda \mathbf{r}_j) d\lambda, \quad (2.12)$$

retendo apenas os dois primeiros termos da expansão (termos de ordem mais alta em $\mathbf{r}_j \cdot \nabla$ na expansão das integrais em λ diminuem por fatores de ordem dois ou mais da constante de estrutura fina (α)),

$$\hat{A}(\mathbf{r}_j) = \int_0^1 (1 + \mathbf{r}_j \cdot \nabla_j) \hat{A}(\lambda \mathbf{r}_j) d\lambda. \quad (2.13)$$

A substituição de (2.13) no último termo de (2.11) conduz a,

$$\hat{U}^{-1} (\hat{\mathbf{p}}_j + e\hat{A}(\mathbf{r}_j)) \hat{U} = \hat{\mathbf{p}}_j - e \int_0^1 \left\{ \nabla_j (\mathbf{r}_j \cdot \hat{A}(\lambda \mathbf{r}_j)) - (1 + \mathbf{r}_j \cdot \nabla_j) \hat{A}(\lambda \mathbf{r}_j) \right\} d\lambda. \quad (2.14)$$

Utilizando a relação de campo magnético,

$$\nabla_j \times \hat{A}(\lambda \mathbf{r}_j) = \lambda \hat{B}(\lambda \mathbf{r}_j) \quad (2.15)$$

a integral de (2.14) pode ainda ser simplificada para

$$\hat{U}^{-1} (\hat{\mathbf{p}}_j + e \hat{A}(\mathbf{r}_j)) \hat{U} = \hat{\mathbf{p}}_j - e \int_0^1 \lambda \mathbf{r}_j \times \hat{B}(\lambda \mathbf{r}_j) d\lambda, \quad (2.16)$$

removendo-se o vetor potencial em favor do operador campo magnético.

Transformação do Segundo Termo – O segundo termo no Hamiltoniano (2.1) representa a energia de Coulomb das cargas, não sendo afetado pela transformação $\hat{\mathcal{H}} = \hat{U}^{-1} \hat{\mathcal{H}}' \hat{U}$. A mudança na contribuição elétrica é obtida de [25],

$$\begin{aligned} \hat{U}^{-1} \hat{E}_T(\mathbf{r}) &= \left(1 + \hat{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\hat{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}))^2 + \frac{1}{3!} (\hat{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}))^3 + \dots \right) \hat{E}_T(\mathbf{r}) \\ \hat{U}^{-1} \hat{E}_T(\mathbf{r}) &= \left(\hat{E}_T(\mathbf{r}) + \hat{E}_T(\mathbf{r}) \hat{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} \hat{E}_T(\mathbf{r}) (\hat{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}))^2 + [\hat{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}), \hat{E}_T(\mathbf{r})] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} ((\hat{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r})) [\hat{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}), \hat{E}_T(\mathbf{r})] + [\hat{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}), \hat{E}_T(\mathbf{r})] (\hat{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}))) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} \hat{E}_T(\mathbf{r}) (\hat{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{A}(\mathbf{r}))^3 + \dots \right) \\ \hat{U}^{-1} \hat{E}_T(\mathbf{r}) &= \left(\hat{E}_T(\mathbf{r}) + e \sum_j \mathbf{r}_j \int_0^1 \delta(\mathbf{r} - \lambda \mathbf{r}_j) d\lambda \right) \times \left(\exp \left\{ -\frac{ie}{\hbar} \sum_j \int_0^1 \mathbf{r}_j \cdot \hat{A}(\lambda \mathbf{r}_j) d\lambda \right\} \right) \\ \hat{U}^{-1} \hat{E}_T(\mathbf{r}) &= \left(\hat{E}_T(\mathbf{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}_T(\mathbf{r}) \right) \hat{U}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

assim

$$\hat{U}^{-1} \hat{E}_T(\mathbf{r}) \hat{U} = \hat{E}_T(\mathbf{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}_T(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

$$\left(\hat{E}_T(\mathbf{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}_T(\mathbf{r}) \right)^2 = \hat{E}_T^2(\mathbf{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \hat{E}_T(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}_T(\mathbf{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}_T(\mathbf{r}) \cdot \hat{E}_T(\mathbf{r}) + \frac{P_T^2(\mathbf{r})}{\epsilon_0^2}, \quad (2.19)$$

onde substituímos o operador campo elétrico do último termo do Hamiltoniano (2.1) pelo termo (2.19). A energia potencial do Átomo no campo elétrico transversal, $\hat{E}_T(\mathbf{r})$, é

$$V_E = - \int \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \hat{E}_T(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = e \sum_j \int_0^1 \mathbf{r}_j \cdot \hat{E}_T(\lambda \mathbf{r}_j) \, d\lambda, \quad (2.20)$$

onde foi utilizada também a relação (2.6). Portanto, o último termo do Hamiltoniano (2.1) é,

$$\begin{aligned} \hat{U}^{-1} \left(\frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \hat{E}_T^2 + \mu_0^{-1} \hat{B}^2) \, d\mathbf{r} \right) \hat{U} &= \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 (\hat{E}_T - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}_T)^2 + \mu_0^{-1} \hat{B}^2 \right) \, d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \hat{E}_T^2 + \mu_0^{-1} \hat{B}^2) \, d\mathbf{r} + e \sum_j \int_0^1 \mathbf{r}_j \cdot \hat{E}_T(\lambda \mathbf{r}_j) \, d\lambda + \frac{1}{2\epsilon_0} \int P_T^2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Segue que das eqs. (2.14), (2.15) e (2.19) o operador para $\hat{\mathcal{H}}$ pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2m} \sum_j \left\{ \hat{p}_j - e \int_0^1 \lambda \mathbf{r}_j \times \hat{B}(\lambda \mathbf{r}_j) \, d\lambda \right\}^2 + \frac{1}{2} \int \sigma(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} + \\ &+ \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \hat{E}_T^2 + \mu_0^{-1} \hat{B}^2) \, d\mathbf{r} + e \sum_j \int_0^1 \mathbf{r}_j \cdot \hat{E}_T(\lambda \mathbf{r}_j) \, d\lambda + \frac{1}{2\epsilon_0} \int P_T^2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

removendo-se o vetor potencial da forma anterior (2.1). A eq. (2.22) é a forma transformada da eq. (2.1). Nosso estudo tem em vista a interação da radiação com o átomo, sendo conveniente o desenvolvimento na forma multipolar de (2.22). Outras formas de transformações são encontradas em [28, 27].

2.2 Aproximação de Dipolo Elétrico

O Hamiltoniano multipolar, eq. (2.22) está dividido em três termos, um referente à parte atômica, um à radiação e o último devido à interação. Desenvolvendo o quadrado do primeiro termo de (2.22) têm-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \sum_j \left\{ \hat{p}_j^2 - e \int_0^1 \lambda \hat{p}_j \cdot \mathbf{r}_j \times \hat{B}(\lambda \mathbf{r}_j) \, d\lambda - e \int_0^1 \lambda \mathbf{r}_j \times \hat{B}(\lambda \mathbf{r}_j) \cdot \hat{p}_j \, d\lambda \right. \\ \left. + e^2 \int_0^1 \lambda^2 (\mathbf{r}_j \times \hat{B}(\lambda \mathbf{r}_j))^2 \, d\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A energia referente ao primeiro termo deste desenvolvimento somada com a do segundo de (2.22) representa a energia do átomo, o Hamiltoniano do átomo,

$$\hat{\mathcal{H}}_A = \sum_j \left(\frac{\hat{p}_j^2}{2m} \right) + \frac{1}{2} \int \sigma(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}. \quad (2.24)$$

A energia do campo eletromagnético é a parte referente à radiação, o terceiro termo de (2.22),

$$\hat{\mathcal{H}}_R = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \hat{E}_T^2 + \mu_0^{-1} \hat{B}^2 \right) \, d\mathbf{r}. \quad (2.25)$$

Observamos que o último termo de (2.22),

$$\frac{1}{2\epsilon_0} \int P_T^2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}, \quad (2.26)$$

é uma função das variáveis atômicas somente [25]; produz pequenas mudanças na energia atômica dos níveis mas não contribui para as interações do átomo-campo. Sua introdução na eq. (2.24) não altera ou altera muito pouco a energia atômica. Os quatro termos restantes são

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(-\frac{e}{2m} \int_0^1 \lambda \hat{p}_j \cdot \mathbf{r}_j \times \hat{B}(\lambda \mathbf{r}_j) \, d\lambda - \frac{e}{2m} \int \lambda \mathbf{r}_j \times \hat{B}(\lambda \mathbf{r}_j) \cdot \hat{p}_j \, d\lambda \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2m} \int_0^1 \lambda^2 \left(\mathbf{r}_j \times \hat{B}(\lambda \mathbf{r}_j) \right)^2 \, d\lambda + e \sum_j \int_0^1 \mathbf{r}_j \cdot \hat{E}_T(\lambda \mathbf{r}_j) \, d\lambda \right), \end{aligned} \quad (2.27)$$

sendo que o último termo desta equação pode ser expandido, como no caso do vetor potencial:

$$e \sum_j \int_0^1 \left\{ \mathbf{r}_j \cdot \hat{E}_T(\lambda \mathbf{r}_j) \right\} \, d\lambda = e \sum_j \int_0^1 \left\{ 1 + \lambda \mathbf{r}_j \cdot \nabla + \frac{1}{2!} (\lambda \mathbf{r}_j \cdot \nabla)^2 + \dots \right\} \mathbf{r}_j \cdot \hat{E}_T(0) \, d\lambda, \quad (2.28)$$

retendo-se somente os dois primeiros termos.

Assim, na eq. (2.27), retêm-se quatro termos: os dois primeiros somados fornecem um termo (interação dipolar magnética); o terceiro termo, referente à energia de processos de dois fótons (termo diamagnético, não linear) e os termos restantes são oriundos da retenção

dos dois primeiros termos da expansão da eq. (2.28), como citado anteriormente. Esta aproximação é procedente devido ao fato de que $|\mathbf{r}_j| \sim a_0$ e $|\mathbf{k}| \sim \nabla$, i. é, os termos sucessivos na expansão diminuem por fatores de $\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \dots$ tanto para \hat{B} quanto para \hat{E}_T , resultando no seguinte Hamiltoniano de interação:

$$-\frac{e}{2m} \sum_j \mathbf{r}_j \times \hat{B}(0) \cdot \hat{p}_j + \frac{e^2}{4m} \sum_j (\mathbf{r}_j \times \hat{B}(0))^2 + \frac{1}{2} e \sum_j \mathbf{r}_j \cdot \hat{E}_T(0) + \frac{1}{2} e \sum_j (\mathbf{r}_j \cdot \nabla) (\mathbf{r}_j \cdot \hat{E}_T(0)), \quad (2.29)$$

este sendo, portanto, o Hamiltoniano de interação $\hat{\mathcal{H}}_I$. Este Hamiltoniano contém quatro contribuições, descritas anteriormente, que são:

$$\hat{\mathcal{H}}_I = \hat{\mathcal{H}}_{DE} + \hat{\mathcal{H}}_{QE} + \hat{\mathcal{H}}_{DM} + \hat{\mathcal{H}}_{NL}, \quad (2.30)$$

onde:

$$\hat{\mathcal{H}}_{DE} = e \sum_j \mathbf{r}_j \cdot \hat{E}_T(0) = e \mathbf{D} \cdot \hat{E}_T(0) \quad (2.31)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{QE} = \frac{e}{2} \sum_j (\mathbf{r}_j \cdot \nabla) (\mathbf{r}_j \cdot \hat{E}_T(0)) = -\nabla \cdot \mathbf{Q} \hat{E}_T(0) \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{DM} &= -\frac{e}{4m} \sum_j (\hat{p}_j \cdot \mathbf{r}_j \times \hat{B}(0) + \mathbf{r}_j \times \hat{B}(0) \cdot \hat{p}_j) = -\frac{e}{2m} \sum_j \mathbf{r}_j \times \hat{B}(0) \cdot \hat{p}_j = \\ &= -\frac{e}{2m} \hat{M} \cdot \hat{B}(0) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{NL} = \frac{e}{4m} \sum_j (\mathbf{r}_j \times \hat{B}(0))^2 \quad (2.34)$$

O termo (2.31) é a interação de dipolo elétrico, onde \mathbf{D} é definido como sendo a soma dos raios vetores de todos os elétrons. e (2.32) a interação de quadrupolo elétrico e o termo (2.33) é a interação de dipolo magnético. Na obtenção das eqs. (2.31),...(2.34) utilizou-se a seguinte relação [25]:

$$\hat{p}_j \cdot \mathbf{r}_j \times \hat{B}(0) = \mathbf{r}_j \times \hat{B}(0) \cdot \hat{p}_j = \frac{e}{2m} \hat{M} \cdot \hat{B}(0) \quad (2.35)$$

com

$$\hat{M} = \sum_j \hat{I}_j = \sum_j \mathbf{r}_j \times \hat{\mathbf{p}}_j .$$

O termo (2.34) é chamado termo diamagnético, revela propriedades diamagnéticas da interação que aparecem sob forma quadrática (não linear). Este termo é originado do termo $\frac{e^2 \hat{\mathbf{A}}^2}{2m}$, que por sua vez está relacionado com processos de dois fótons, como veremos mais tarde. Ele é desprezível para processos radiativos não lineares, onde sua contribuição não é nula, (a menos que estejam envolvidas transições cujos processos envolvam dois fótons - caso de um átomo de dois níveis, estados comprimidos). Isto porque as energias atômicas para fótons de luz espalhada são da ordem de 10^{-18} joules enquanto que para o termo de dipolo elétrico é de 10^{-13} joules aproximadamente [25, 28]. Podemos ainda estabelecer a seguinte relação entre estes termos:

$$\hat{\mathcal{H}}_{QE} = -\nabla \cdot \mathbf{Q} \hat{E}_T(0) \sim \hat{E}_T(0) \frac{3c\hbar}{16mc} \quad (2.36)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{DM} = \frac{e}{2m} \hat{M} \cdot \hat{B}(0) \sim \hat{B}_T(0) \frac{e\hbar}{2m} \sim \hat{E}_T(0) \frac{e\hbar}{2mc} \quad (2.37)$$

enquanto que

$$\hat{\mathcal{H}}_{DE} = e\mathbf{D} \cdot \hat{E}_T(0) \sim \hat{E}_T(0) \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mc} \quad (2.38)$$

ou seja,

$$\frac{\hat{\mathcal{H}}_{QE}}{\hat{\mathcal{H}}_{DE}} \sim \frac{\hat{\mathcal{H}}_{DM}}{\hat{\mathcal{H}}_{DE}} \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} = \text{cte. de estrutura fina.}$$

significando que em ordem mais baixa, quando estiver presente a interação de dipolo, as outras aproximações são negligenciáveis. Outros termos de ordem mais alta na expansão das integrais em λ são menores ainda que estes (por um fator de ordem dois ou maior na constante de estrutura fina). As interações $\hat{\mathcal{H}}_{QE}$ e $\hat{\mathcal{H}}_{DM}$ tornam-se significantes quando $\langle \psi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{DE} | \psi_2 \rangle = 0$. Portanto, simplificamos o Hamiltoniano acima para $\hat{\mathcal{H}}_I = \hat{\mathcal{H}}_{DE}$, resultando em

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_R + \hat{H}_I$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_j \left(\frac{\hat{p}_j^2}{2m} \right) + \frac{1}{2} \int \sigma(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \hat{E}_T^2 + \mu_0^{-1} \hat{B}^2) \, d\mathbf{r} + \\
&+ e\mathbf{D} \cdot \hat{E}_T
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Este Hamiltoniano também é chamado de *aproximação de dipolo elétrico* (aproximação de primeira ordem [28]). Esta aproximação é válida para funções ϕ 's de elétrons localizados próximos ao núcleo, onde $\mathbf{r} \simeq a_0$, caso contrário a expansão dipolar deve incluir mais termos.

2.3 \hat{H} no quadro da Segunda Quantização

A forma (2.39) é o Hamiltoniano transformado dipolar, podendo ser convenientemente trabalhada para facilitar estudos mais detalhados de sistemas interagentes átomo-radiação. Isto é feito através da segunda quantização da forma (2.39). Consideremos a parte atômica do Hamiltoniano (2.39), e seja $|i\rangle$ um autoestado da energia com autovalor $\hbar\omega_i$,

$$\hat{H}_A |i\rangle = \hbar\omega_i |i\rangle, \tag{2.40}$$

onde utilizou-se a relação de completeza $\sum_i |i\rangle \langle i| = \mathbf{1}$, tomando-se todos os autoestados de \hat{H}_A . De forma análoga,

$$\hat{H}_A = \sum_i |i\rangle \langle i| \hat{H}_A \sum_j |j\rangle \langle j|, \tag{2.41}$$

mas

$$\langle i| \hat{H}_A |j\rangle = \hbar\omega_i \delta_{i,j} \tag{2.42}$$

a qual utilizando a relação de ortonormalidade, (2.41) reduz-se a

$$\hat{H}_A = \sum_i \hbar\omega_i |i\rangle \langle i|. \tag{2.43}$$

Esta transformação é conhecida como segunda quantização do Hamiltoniano atômico. A parte do Hamiltoniano referente à radiação é dada pela eq. (2.25). Assim, a transformação

de \hat{H}_R agora é feita lembrando que os operadores do modo \mathbf{k} dos campos elétrico e magnético são dados por:

$$\hat{E}_{\mathbf{k}} = i \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{e}_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{(-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{(i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right) \quad (2.44)$$

$$\hat{B}_{\mathbf{k}} = i \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{k} \times \hat{e}_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{(-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{(i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right), \quad (2.45)$$

com

$$\hat{E}_T = \sum_{\mathbf{k}} \hat{E}_{\mathbf{k}} \quad (2.46)$$

$$\hat{B} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_{\mathbf{k}}. \quad (2.47)$$

Apenas a componente transversa do operador campo elétrico participa no processo. O cálculo é direto e leva a

$$\hat{E}_T^2 = |\hat{E}_T|^2 = \hat{E}_T \cdot \hat{E}_T^* = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) \quad (2.48)$$

$$\hat{B}^2 = |\hat{B}|^2 = \hat{B} \cdot \hat{B}^* = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar k^2}{2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) \quad (2.49)$$

mas, como os operadores de criação e aniquilação de fótons tem a propriedade $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}] = 1$, têm-se que:

$$\hat{E}_T^2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{\epsilon_0 V} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.50)$$

$$\hat{B}^2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}} c^{-2}}{\epsilon_0 V} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.51)$$

com $k^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2/c^2$, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.

Substituindo as eqs. (2.51) na eq. (2.25), chega-se então, para o Hamiltoniano correspondente à radiação, à expressão:

$$\hat{H}_R = \sum_k \hbar\omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + 1/2). \quad (2.52)$$

Finalmente pode-se obter, seguindo metodologia semelhante, a parte de $\hat{\mathcal{H}}$ relacionada com o termo de interação, aqui expressando \hat{H}_I em termos dos operadores de criação e aniquilação eletrônicos.

De acordo com a eq. (2.39), têm-se

$$\hat{H}_I = e\mathbf{D} \cdot \hat{E}_T, \quad (2.53)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz, definindo a soma dos raios vetores de todos os elétrons, conforme citado anteriormente. O procedimento utilizado para o tratamento do Hamiltoniano de interação é análogo ao utilizado por [25, 28] para o tratamento da parte atômica, onde é feita uma segunda quantização, porém de uma forma mais geral. O uso da completeza para \mathbf{D} fornece,

$$\mathbf{D} = \sum_i |i\rangle \langle i| \mathbf{D} \sum_j |j\rangle \langle j|, \quad (2.54)$$

onde $D_{i,j} = \langle i| \mathbf{D} |j\rangle$. Esta expressão é mais geral que a obtida para o átomo, pois ela ocorre quando o operador não é diagonal nos autoestados da energia. O resto do cálculo é direto. Substituindo (2.54) em (2.53) e utilizando para \hat{E}_T a forma (2.43), obtém-se para \hat{H}_{DE} a expressão:

$$\hat{H}_{DE} = i\hbar \sum_k g_{k,ij} (\hat{a}_k e^{-i\omega_k t} - \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t}) |i\rangle \langle j|, \quad (2.55)$$

$$g_{k,ij} \equiv e \left(\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 \hbar \bar{V}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i,j} \vec{e}_k \cdot \mathbf{D}_{i,j}, \quad (2.56)$$

sendo que a parte espacial, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j$ foi transferida para \mathbf{D} .

O Hamiltoniano completo, em primeira ordem para a interação da radiação com o átomo, é escrito finalmente na forma:

$$\hat{H} = \sum_i \hbar\omega_i |i\rangle \langle i| + \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + 1/2 \right) + i \sum_k \hbar g_{k,ij} \left(\hat{a}_k e^{(-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})} - \hat{a}_k^\dagger e^{(i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})} \right) |i\rangle \langle j|. \quad (2.57)$$

A forma (2.57) também é conhecida como representação de Schrödinger ou Hamiltoniano de um sistema átomo-radiação escrito na notação de segunda quantização. O aparecimento do termo $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$ significa apenas que núcleo está em uma posição qualquer \mathbf{R} . Isto não foi citado anteriormente visto não ser relevante para o problema já que para fins práticos supõe-se o núcleo na origem, $\mathbf{R} = 0$.

2.4 Representação de Interação

Por uma questão de clareza e sem perda de generalidade, vamos escrever \hat{H}_I na representação de interação no caso de átomos de 2 níveis. Tomando o Hamiltoniano de (2.57), a função de onda que se refere ao sistema total consistindo de elétrons e luz deve obedecer a equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi\rangle = \hat{H} |\Phi\rangle. \quad (2.58)$$

Separando \hat{H} em $\hat{H}_0 = \hat{H}_A + \hat{H}_R$ e \hat{H}_I , consideramos o problema $\hat{H}_0 |\Phi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi\rangle$ como resolvido. Desta forma nos ocupamos apenas da parte da interação. A parte não perturbada e dependente do tempo da função $|\Phi\rangle$ é retirada através da seguinte transformação (representação de interação) [28]:

$$|\Phi\rangle = U |\Phi_I\rangle, \quad \text{com} \quad U = e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}. \quad (2.59)$$

Obviamente $|\Phi_I\rangle$ obedece à equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi_I\rangle = \tilde{H}_I |\Phi_I\rangle, \quad (2.60)$$

onde $\tilde{H}_I = U^\dagger \hat{H}_I U$.

No operador \hat{H}_0 , a parte referente à radiação segue as regras de comutação para bósons enquanto que a parte do átomo segue as regras de comutação para férmions, embora os operadores não sejam operadores fermiônicos legítimos, como veremos mais tarde. Tomando $\tilde{H}_I = U^\dagger \hat{H}_I U$ e utilizando as regras de comutação acima descritas, o Hamiltoniano de interação (2.55) fica

$$\tilde{H}_I = i \sum_k \hbar g_{k,ij} \left(\hat{a}_k e^{(-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})} - \hat{a}_k^\dagger e^{(i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})} \right) A_i^\dagger e^{i\omega_i t} A_j e^{-i\omega_j t}, \quad (2.61)$$

$$|i\rangle \equiv A_i^\dagger e^{i\omega_i t} \quad \text{e} \quad |j\rangle \equiv A_j e^{-i\omega_j t}. \quad (2.62)$$

Esta é a expressão de \tilde{H}_I na representação de interação. Como escrito anteriormente, para maior generalidade, tomou-se o núcleo atômico em uma posição \mathbf{R} . Nada nos impede de tomar a posição \mathbf{R} como sendo a origem, isto é, $\mathbf{R} = 0$ com fins de simplificação. Neste caso, \tilde{H}_I se arranja na forma:

$$\tilde{H}_I = i \sum_k \hbar g_{k,ij} \left(\hat{a}_k e^{-i\omega_k t} - \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t} \right) A_i^\dagger e^{i\omega_i t} A_j e^{-i\omega_j t} \quad (2.63)$$

2.4.1 Sistema atômico de dois níveis

Consideremos um sistema atômico de dois níveis [25], interagindo com campo monomodo. O respectivo Hamiltoniano de dipolo elétrico referindo-se a um par particular de estados atômicos $|a\rangle$ e $|b\rangle$, com energias $\hbar\omega_a$ e $\hbar\omega_b$ ($\hbar\omega_b < \hbar\omega_a$) é,

$$\tilde{H}_I = i\hbar \left(a e^{-i\omega_0 t} - a^\dagger e^{i\omega_0 t} \right) \sum_{ij} g_{ij} \left(A_i^\dagger A_j \right) \quad (2.64)$$

onde, para fins de simplificação define-se $A_a^\dagger A_b \equiv A_a^\dagger e^{i\omega_a t} A_b e^{-i\omega_b t}$, $A_b^\dagger A_a \equiv A_b^\dagger e^{i\omega_b t} A_a e^{-i\omega_a t}$, ω_0 é a frequência do campo amplificada pela cavidade monomodo. Para simplificar, usamos a notação abreviada dos operadores de aniquilação-criação:

$$\hat{a} \equiv a, \quad \hat{a}^\dagger \equiv a^\dagger.$$

Abrindo a somatória em i, j ,

$$\sum_{ij} g_{ij} \left(A_i^\dagger A_j \right) = g_{ab} A_a^\dagger A_b e^{i\omega_a t} + g_{ba} A_b^\dagger A_a e^{-i\omega_a t} \quad (2.65)$$

com $\omega_{ab} = \omega_a - \omega_b$, ω_a a frequência de $|a\rangle$ e ω_b a frequência de $|b\rangle$, e abrindo o produto da eq. (2.64), ficamos com

$$\tilde{H}_I = i\hbar \left(ae^{-i\omega_0 t} - a^\dagger e^{i\omega_0 t} \right) \left(g_{ab} A_a^\dagger A_b e^{i\omega_{ab} t} + g_{ba} A_b^\dagger A_a e^{-i\omega_{ab} t} \right). \quad (2.66)$$

Este procedimento conduz a um \tilde{H}_I com quatro termos dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_I = & i\hbar \left(g_{ab} a A_a^\dagger A_b e^{-i(\omega_0 - \omega_{ab})t} - g_{ab} a^\dagger A_a^\dagger A_b e^{i(\omega_0 + \omega_{ab})t} + g_{ba} a A_b^\dagger A_a e^{-i(\omega_0 + \omega_{ab})t} \right. \\ & \left. - g_{ba} a^\dagger A_b^\dagger A_a e^{i(\omega_0 - \omega_{ab})t} \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Tomamos o estado $|a\rangle$ mais energético que o $|b\rangle$. Até aqui nada falamos sobre os operadores de criação-aniquiação para estados atômicos. Em (2.67) o operador $A_a^\dagger A_b$, que significa “aniquilar” o átomo no estado $|b\rangle$ e criá-lo no estado $|a\rangle$, segue a estatística fermiônica (são operadores pseudo-fermiônicos [18]) enquanto $A_b^\dagger A_a$, que também segue a estatística fermiônica, é justamente o contrário, “aniquila” o átomo no estado $|a\rangle$ e o cria no estado $|b\rangle$. Os operadores a e a^\dagger são os operadores usuais de criação e aniquiação para fótons [18]. Para os operadores acima, valem as seguintes regras de comutação:

$$[A_i, A_j^\dagger]_+ = \delta_{ij}, \quad [A_i, A_j]_+ = [A_i^\dagger, A_j^\dagger]_+ = 0 \quad (2.68)$$

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [A_i, a] = 0, \text{ etc.} \quad (2.69)$$

Se observarmos o segundo e o terceiro termo do desenvolvimento, vemos que o segundo termo corresponde a emissão de fóton sem desexcitação – fig. 1c – e o terceiro à absorção de de fóton sem excitação do átomo – fig. 1b – não correspondendo à processos permitidos visto não ser possível para um estado final absorver ou emitir um fóton e permanecer com a mesma energia do estado inicial. Negligenciando estes termos, o que corresponde à utilizar RWA ², o Hamiltoniano anterior fica simplesmente,

$$\tilde{H}_I = i\hbar g_{ab} a A_a^\dagger A_b e^{-i(\omega_0 - \omega_{ab})t} - i\hbar g_{ba} a^\dagger A_b^\dagger A_a e^{i(\omega_0 - \omega_{ab})t}. \quad (2.70)$$

²Nos coeficientes da probabilidade de transição, $C_n(t)$, aparecem termos do tipo

$$\frac{V}{2} \left(\frac{1 - \exp(i(\omega_0 + \omega_{ab})t)}{\omega_0 + \omega_{ab}} + \frac{1 - \exp(i(\omega_0 - \omega_{ab})t)}{\omega_0 - \omega_{ab}} \right).$$

Vemos que o segundo termo na soma é muito maior que o primeiro, sempre que ω_0 for muito próximo de ω_{ab} . Neste caso, negligenciamos o primeiro termo. Esta é a aproximação de ondas rotantes.

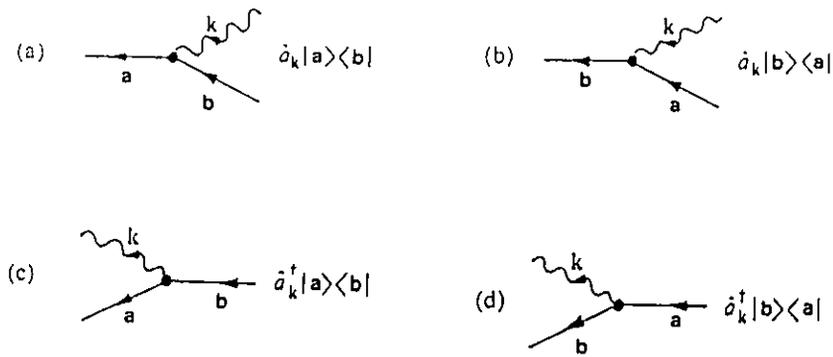


Figura 2.1: Diagrama dos quatro termos da forma (2.68). A direção para onde a seta aponta indica aniquilação (criação) na interação. $|a\rangle \langle b| \equiv A_a^\dagger A_b$, $|b\rangle \langle a| \equiv A_b^\dagger A_a$.

Observemos que o segundo termo de (2.70) nada mais é que o complexo conjugado do primeiro:

$$\left(g_a a A_a^\dagger A_b e^{-i\delta_a t}\right)^\dagger = g_a^* A_b^\dagger A_a a^\dagger e^{i\delta_a t} \quad (2.71)$$

e definindo $g_{ab} \equiv g_a$, $g_{ba} \equiv g_a^*$, $\hbar = 1$, $\delta_a \equiv \omega_0 - (\omega_a - \omega_b)$ obtêm-se (2.71) fazendo utilização das formas (2.68) e (2.69). A expressão (2.70) pode ser escrita numa forma mais compacta, de um átomo de dois níveis interagindo com campo de radiação, como segue:

$$\tilde{H}_I = g_a a A_a^\dagger A_b e^{-i\delta_a t} + h.c. \quad (2.72)$$

Esta é a representação do Hamiltoniano de interação de um átomo de dois níveis interagindo com campo de radiação monomodo na aproximação de Ondas Rotantes (RWA).

Capítulo 3

Estatística de Fótons

Embora as predições clássicas e quânticas da teoria da luz apresentem concordância para alguns fenômenos, existem diferenças fundamentais entre as duas abordagens.

As razões para as diferenças entre ambas as teorias pode ser obtida analisando-se o experimento de Twiss e Hanbury Brown¹, onde os fótons devem fazer uma “escolha” entre reflexão e transmissão no espelho. A aproximação clássica não é capaz de descrever processos simples como emissão espontânea. Atualmente, fenômenos tais como contagem de fótons, flutuações do campo, etc., exigem a utilização da Teoria Quântica da luz pois não possuem uma contrapartida clássica. Visto que a teoria clássica da luz não é suficiente para explicar os desenvolvimentos mais recentes da Óptica Quântica, tanto a nível experimental quanto teórico, faz-se necessário a utilização da teoria quântica para a descrição do campo de radiação, que está presente no modelo em consideração neste trabalho.

Neste capítulo, pretende-se uma rápida introdução à óptica fotônica. São utilizados alguns desenvolvimentos do capítulo anterior. Também será suposto que o campo seja quantizado. São introduzidos os estados coerentes do ponto de vista dado por Glauber [29]. Na verdade, seria mais interessante e mais didático fazer-se o desenvolvimento a partir de fontes de luz coerentes, envolvendo conceitos de coerência temporal e coerência espacial, cálculo dos graus de coerência de primeira e segunda ordem pelo menos, comparar o caso clássico

¹Twiss, R. Q., Little, A. G., and Hanbury Brown, R., *Nature*, **180**, 324, (1957).

com o quântico e a partir daí introduzir os Estados Coerentes [25]. Mas este tratamento, embora de compreensão mais simples, é bastante prolongado e se encontra com frequência nas referências [25, 28, 27]. Aqui vamos seguir o enfoque dado pelo artigo de Glauber.

3.1 Tratamento Mecânico Quântico

O comportamento dinâmico da amplitude do campo é descrito pelo Hamiltoniano referente ao campo eletromagnético, conforme a eq. (2.25),

$$\hat{H}_R = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \hat{E}_T^2 + \mu_0^{-1} \hat{B}^2) d\mathbf{r}, \quad (3.1)$$

o qual, escrito na segunda quantização, ou seja, em termos dos operadores a e a^\dagger toma a seguinte forma:

$$\hat{H}_R = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger). \quad (3.2)$$

A analogia da expressão acima com a do oscilador harmônico (OH) é imediata. Sendo assim, podemos escrever cada modo do campo associado à um autovetor $| \ \rangle_k$, no espaço de Hilbert apropriado àquele modo. Obviamente o campo inteiro é definido no espaço de Hilbert para todos os modos. Assim, a discussão dos estados individuais é toda feita com analogia ao tratamento de um único OH. Os autovalores para o Hamiltoniano da eq. (3.2) são $\hbar \omega_k (n_k + 1/2)$. $\hat{n}_k \equiv a_k^\dagger a_k$, um inteiro ($n_k = 0, 1, 2, \dots$). O autovetor para o estado de vácuo de OH é escrito como $|0\rangle_k$. Ele é definido pela condição

$$a_k |0\rangle_k = 0. \quad (3.3)$$

Os autovetores para os estados excitados do OH são obtidos pela sucessiva aplicação do operador de criação a_k^\dagger ao estado de vácuo. Estes estados, podemos escrevê-los de uma forma normalizada como

$$|n_k\rangle_k = \frac{(a_k^\dagger)^{n_k}}{(n_k!)^{1/2}} |0\rangle_k, \quad n_k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4)$$

e é claro, os operadores a_k e a_k^\dagger agem sobre estes estados através das relações usuais:

$$a_k |n_k\rangle_k = (n_k)^{\frac{1}{2}} |n_k - 1\rangle_k, \quad (3.5)$$

$$a_k^\dagger |n_k\rangle_k = (n_k + 1)^{\frac{1}{2}} |n_k + 1\rangle_k, \quad (3.6)$$

$$a_k^\dagger a_k |n_k\rangle_k = n_k |n_k\rangle_k. \quad (3.7)$$

Na próxima seção usaremos os resultados aqui descritos para discutir os Estados Coerentes na Teoria do Campo Eletromagnético e sua importância na Óptica Quântica.

3.2 Estados Coerentes

No capítulo 2, tínhamos escrito o campo Elétrico em termos dos operadores de criação e aniquilação. Este operador é hermitiano, e portanto podemos separá-lo em termos das frequências positivas e negativas, $\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$,

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = U^*(\mathbf{r}) a_k^\dagger e^{i\omega_k t}, \quad (3.8)$$

$$\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) a_k e^{-i\omega_k t}, \quad (3.9)$$

onde $U(\mathbf{r})$ é a distribuição espacial do modo do campo²,

$$U^*(\mathbf{r}) = \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_k \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.10)$$

$$U(\mathbf{r}) = \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.11)$$

onde \mathbf{e}_k é a polarização do modo \mathbf{k} do campo.

²para uma descrição mais detalhada de U e U^* vide o próprio artigo de Glauber [29]

Existem estados mecânico quânticos que são autoestados das frequências negativa e positiva do operador campo eletromagnético, os quais obedecem as seguintes relações:

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \rangle = \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) | \rangle, \quad (3.12)$$

$$\langle | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}^*(\mathbf{r}, t) \langle |, \quad (3.13)$$

onde, neste caso, a função $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ é interpretada como sendo o autovalor complexo. Então é possível achar autoestados $| \rangle$ que correspondem a escolhas arbitrárias dos autoestados $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ [29]. Eles devem possuir uma expansão em modos normais similares à eq. (3.9). O que fazemos então é introduzir um conjunto de coeficientes de Fourier, α_k , que nos permitam escrever a função dos autovalores como

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \left(\frac{\hbar \omega_k}{2} \right) \alpha_k U_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}. \quad (3.14)$$

Da descrição acima segue que um autoestado $|\alpha\rangle$ do operador de destruição a_k associado a um modo do campo segue a infinita sucessão de relações

$$a_k |\alpha\rangle = \alpha_k |\alpha\rangle, \quad (3.15)$$

para todos os modos \mathbf{k} . Para achar os autoestados os quais satisfazem a estas relações, procura-se estados $|\alpha_k\rangle_k$ dos modos individuais que obedecem (individualmente) às relações $a_k |\alpha_k\rangle_k = \alpha_k |\alpha_k\rangle_k$. Estes são os estados coerentes do campo, que considerados como um todo, são produtos diretos dos estados individuais $|\alpha_k\rangle$,

$$|\alpha\rangle = \prod_k |\alpha_k\rangle_k. \quad (3.16)$$

Com isto, introduziu-se os estados coerentes. Na seção seguinte apresenta-se algumas quantidades de interesse referentes à essa classe de estados.

3.3 Definição e Propriedades dos Estados Coerentes

Esta seção é devotada a descrição de algumas propriedades dos estados coerentes. Um tratamento mais aprofundado pode ser feito através das referências, começando, por exemplo, por Cohen-Tannoudji, capítulo V, complemento G (enfoque matemático das propriedades do operador deslocamento, fazendo parte do Grupo do Oscilador Harmônico)[30] ou pelo próprio artigo de Glauber [29](1963).

As propriedades dos estados coerentes seguem basicamente do fato de eles serem uma combinação linear dos estados de número de ocupação $|n\rangle$,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle, \quad (3.17)$$

$\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, um número complexo. Os estados $|\alpha\rangle$ são normalizados,

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha^* \alpha)^n}{n!} = 1. \quad (3.18)$$

Entretanto, os estados coerentes não são ortogonais, pois para dois números complexos diferentes, α e β por exemplo, temos

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha^* \beta)^n}{n!} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha^* \beta}, \quad (3.19)$$

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}. \quad (3.20)$$

As eqs. (3.19) e (3.20) representam o produto escalar entre dois estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ quaisquer. Vemos que para valores de α e β suficientemente diferentes, os estados coerentes tornam-se aproximadamente ortogonais. Para $|\alpha - \beta|$ da ordem da unidade (não ortogonais) temos um “overlap”, ‘causado pela presença do deslocamento das flutuações de ponto zero’, conforme Glauber [29] e Schleich [31].

Vimos anteriormente que os estados $|\alpha\rangle$ podem ser escritos como uma combinação linear dos estados $|n\rangle$. Assim, os estados coerentes são caracterizados pelo parâmetro α de maneira que $|\alpha\rangle$ é um autovetor do operador a com autovalor α :

$$a | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle. \quad (3.21)$$

A determinação do ket $| \alpha \rangle$ como em (3.17) é obtida através da expansão dos estados $| n \rangle$:

$$| \alpha \rangle = \sum_n c_n(\alpha) | n \rangle, \quad (3.22)$$

$$a | \alpha \rangle = \sum_n c_n(\alpha) \sqrt{n} | n-1 \rangle, \quad (3.23)$$

substituindo estas duas em (3.21) temos:

$$c_n(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1}(\alpha) = \frac{(\alpha)^2}{\sqrt{n(n-1)}} c_{n-2}(\alpha) = \dots = \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} c_0(\alpha), \quad (3.24)$$

determinando-se dessa maneira todos os coeficientes $c_n(\alpha)$ em termos de $c_0(\alpha)$, escolhido de maneira que $\sum_n |c_n(\alpha)|^2 = 1$,

$$|c_0(\alpha)|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2} = 1, \quad (3.25)$$

$$c_0(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}, \quad (3.26)$$

resultando que $| \alpha \rangle$ é escrito de acordo com (3.17). A probabilidade associada a n no Estado Coerente $| \alpha \rangle$, i. é, a densidade de probabilidade $P_n \equiv | \langle n | \alpha \rangle |^2$, é dada por

$$| \langle n | \alpha \rangle |^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \quad (3.27)$$

com média (valor médio de \hat{n} no estado $| \alpha \rangle$):

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad (3.28)$$

ou seja, a ocupação de fótons no Estados Coerente é tal que segue uma distribuição de Poisson, eq. (3.27), cuja média está centrada em \bar{n} , eq. (3.28).

Portanto, os estados coerentes são uma combinação linear dos estados de número de ocupação com os coeficientes escolhidos de maneira que a distribuição de probabilidades da

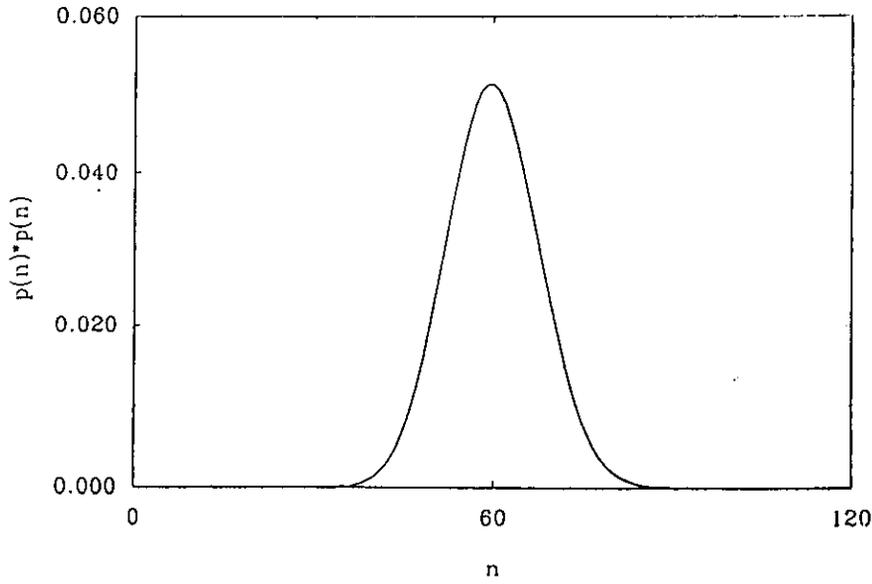


Figura 3.1: Distribuição de Poisson, $\bar{n} = 60$ e $N = 120$. Arecchi (1965)[32] mostrou experimentalmente que a distribuição dos fótons em um laser era poissoniana.

contagem de fótons seja Poissoniana. Esta é a distribuição de um laser ideal [32]. No que segue, vamos escrever os estados coerentes na notação de Glauber.

Observemos que

$$e^{-\alpha^* a} |0\rangle = \left(1 - \alpha^* a + \frac{(\alpha^*)^2}{2!} a^2 + \dots\right) |0\rangle = |0\rangle, \quad (3.29)$$

mas, por outro lado,

$$e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (3.30)$$

de modo que $|\alpha\rangle$ pode ser escrito como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} |0\rangle. \quad (3.31)$$

Utilizando-se a relação de Baker-Hausdorff em (3.31), obtém-se

$$e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \equiv D(\alpha), \quad (3.32)$$

$D(\alpha)$ é o operador de Glauber ou operador deslocamento. Assim, escrevo os estados $|\alpha\rangle$ em termos de $D(\alpha)$:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle. \quad (3.33)$$

Sendo um operador deslocamento, $D(\alpha)$ possui as seguintes propriedades:

$$D^{-1}(\beta)aD(\beta) = a + \beta, \quad (3.34)$$

$$D^{-1}(\beta)a^\dagger D(\beta) = a^\dagger + \beta^*, \quad (3.35)$$

$$aD^{-1}(\beta)|\alpha\rangle = (\alpha - \beta)D^{-1}(\beta)|\alpha\rangle. \quad (3.36)$$

Se, em particular, em (3.36) $\beta = \alpha$, então $aD^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle = 0$. A evolução temporal de um estado coerente de um oscilador harmônico é dada por (desprezando-se a energia de ponto zero)

$$\begin{aligned} |\alpha, t\rangle &= e^{-\frac{iH}{\hbar}t} |\alpha\rangle = e^{-i\omega t a^\dagger a} |\alpha\rangle = e^{-i\omega t a^\dagger a} e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha^* a} |0\rangle \\ |\alpha, t\rangle &= e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\omega t a^\dagger a} e^{\alpha a^\dagger} e^{i\omega t a^\dagger a} |0\rangle = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha e^{-i\omega t} a^\dagger} |0\rangle \\ |\alpha, t\rangle &= |\alpha e^{-i\omega t}\rangle, \end{aligned} \quad (3.37)$$

mostrando que o estado do sistema permanece coerente o tempo todo, daí a denominação de estados coerentes.

3.3.1 Representação de $|\alpha\rangle$ no Plano das Amplitudes Complexas

A amplitude complexa, $\alpha(t) = |\alpha| e^{i\omega t}$, descreve uma circunferência no plano complexo α . A representação de um estado coerente em seu plano complexo é melhor escrita tomando-se os operadores de criação e aniquilação em termos dos operadores de quadratura, na forma

$$a^\dagger = \dot{X}_1 - iX_2, \quad (3.38)$$

$$a = X_1 + iX_2, \quad (3.39)$$

X_1 e X_2 hermitianos, parte real e imaginária da amplitude complexa, representam a amplitude das duas componentes em quadratura de fase do campo eletromagnético, como escrito no começo deste capítulo. A relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$ implica na correspondente relação de comutação para X_1 e X_2 :

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 = \frac{i}{2}, \quad (3.40)$$

forneendo a seguinte relação de indeterminação:

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle = \langle \alpha | X_1^2 | \alpha \rangle - (\langle \alpha | X_1 | \alpha \rangle)^2 = \frac{1}{4} = \langle (\Delta X_2)^2 \rangle, \quad (3.41)$$

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = \frac{1}{2}; \quad \Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4}. \quad (3.42)$$

Assim, se o campo está em um estado coerente, os valores esperados e a variância de X_1 e X_2 e de $\hat{n} = a^\dagger a$ são

$$\langle X_1 + iX_2 \rangle = \langle a \rangle = \langle \alpha | a | \alpha \rangle = \alpha, \quad (3.43)$$

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = \frac{1}{2}; \quad \langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2; \quad (\Delta n)^2 = |\alpha|^2. \quad (3.44)$$

Portanto, um estado coerente $|\alpha\rangle$ é convenientemente representado no plano das amplitudes complexas por um círculo cujo centro é colocado em $\langle X_1 + iX_2 \rangle = \alpha$, e o raio é dado por $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1/2$, sendo que este raio descreve a indeterminação [33].

Analizamos neste capítulo propriedades fundamentais dos estados coerentes. Vimos que eles são estados de mínima incerteza³ [33], sendo que o produto das suas componentes do campo em quadratura de fase assume o mínimo valor possível, de acordo com o princípio de incerteza de Heisenberg. Em outras palavras, a flutuação quântica presente em um estado coerente atinge o limite quântico inferior para a redução de ruído em um sinal óptico. Podemos escrevê-lo como uma superposição dos estados de número, uma característica originada

³O produto da variância entre dois observáveis conjugados quaisquer $\langle (\Delta A) \rangle$ e $\langle (\Delta B) \rangle$ satisfaz à relação de incerteza: $\langle (\Delta A) \rangle \langle (\Delta B) \rangle \geq \frac{\hbar}{2}$. Sempre que valer a igualdade, i. é, $\langle (\Delta A) \rangle \langle (\Delta B) \rangle = \frac{\hbar}{2}$, então dizemos que o estado representado por A e B é um estado de mínima incerteza.

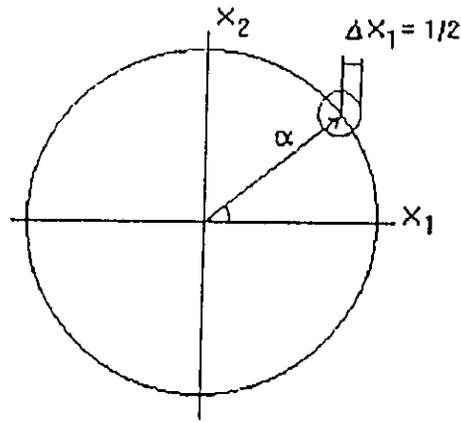


Figura 3.2: Representação de um estado $|\alpha\rangle$ no plano das amplitudes complexas. A circunferência grande descreve a evolução temporal do estado coerente $|\alpha\rangle$.

diretamente pelo fato dele ser autoestado do operador aniquilação a mas o que é mais importante para este trabalho, no caso dos estados coerentes, é o fato de que a distribuição de probabilidade da contagem de fótons é uma distribuição de Poisson, com média dada por $|\alpha|^2$. No livro de Nussenzveig [34] há uma discussão a respeito da validade da aproximação da distribuição de probabilidade, visto eles não serem estados ortogonais. Para a evolução temporal de $\langle n(t) \rangle$, nos interessa basicamente a preparação da luz dentro da cavidade, em que estados iniciais a luz se encontrava: estados coerentes, estados binomiais [35, 14], termocoerentes [36], comprimidos (“squeezed”) [33], etc., desde que possamos escrevê-los como uma combinação linear dos estados de número de maneira a poder separar a parte relativa à distribuição que rege o comportamento dos fótons dentro da cavidade da parte relativa à evolução temporal. Este assunto será explorado no próximo capítulo. Mais adiante utilizaremos este resultado com muita frequência.

Capítulo 4

Colapso-Reativação em 3 e 4 Níveis

Neste capítulo o Hamiltoniano da eq. (2.72) é escrito de forma a incluir sistemas atômicos de 4 níveis. O vetor de estado é escrito então para um átomo de 4-níveis e todos os cálculos são realizados na representação de Schrödinger. Isto posto têm-se H e $|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle$, e portanto qualquer quantidade dinâmica pode ser obtida para o modelo. Segue então, cálculos da evolução temporal de $\langle n(t) \rangle$.

4.1 Interação radiação-átomo no caso 4 níveis

Da eq. (2.70) obtivemos para o Hamiltoniano total na interação de dipolo:

$$\hat{H} = \hbar \sum_i \omega_i A_i^\dagger A_i + \hbar \sum_k \omega_k (a_k^\dagger a_k + 1/2) + i\hbar \sum_k g_{k,ij} (a_k e^{-i\omega_k t} - a_k^\dagger e^{i\omega_k t}) A_i^\dagger A_j. \quad (4.1)$$

Para um sistema de 4 níveis, campo monomodo, a eq. (4.1) simplifica-se para

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{i=a,b,c,d} \hbar \omega_i A_i^\dagger A_i + \hbar \omega_0 (a^\dagger a + 1/2) + i\hbar (a e^{-i\omega_0 t} - a^\dagger e^{i\omega_0 t}) (g_a A_a^\dagger A_b + \\ & + g_b A_b^\dagger A_c + g_c A_c^\dagger A_d + h.c.), \end{aligned} \quad (4.2)$$

a qual, na RWA e representação de interação se escreve como

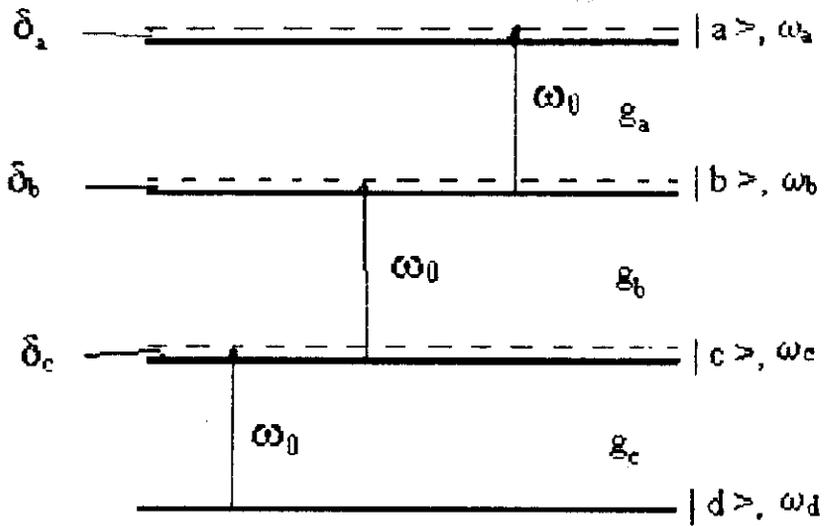


Figura 4.1: Representação esquemática de um átomo de 4 níveis mais um campo de radiação monomodo em configuração cascata, segundo Yoo e Eberly [18]

$$\hat{H} = \sum_{i=a,b,c,d} \hbar\omega_i A_i^\dagger A_i + \hbar\omega_0(a^\dagger a + 1/2) + (g_a a A_a^\dagger A_b e^{-i(\omega_0 - \omega_{ab})t} + g_b a A_b^\dagger A_c e^{-i(\omega_0 - \omega_{bc})t} + g_c a A_c^\dagger A_d e^{-i(\omega_0 - \omega_{cd})t} + h.c.). \quad (4.3)$$

O diagrama para átomos de dois, três e quatro níveis em configuração cascata (ou configuração Ξ , segundo Yoo and Eberly [18]), é mostrado na fig. (4.1), onde para 2 níveis $g_b = g_c = 0$, para 3 níveis apenas $g_c = 0$. Para 4 níveis todos os acoplamentos são não nulos. O correspondente modelo para este sistema atômico interagindo com um único modo da radiação de frequência ω_0 na aproximação de ondas rotantes (RWA) e aproximação de dipolo foi descrito logo acima. Para o presente cálculo, estamos interessados na parte de interação radiação- matéria. Sendo assim, escrevemos o Hamiltoniano total como

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_R + \hat{H}_I, \quad (4.4)$$

7 Si b... ca 37 e' minor termo de alta freq.

onde as partes livres, atômica e do campo, são

$$\hat{H}_A = \sum_{i=a,b,c,d} \hbar\omega_i A_i^\dagger A_i \quad (4.5)$$

para o átomo, e para a radiação

$$\hat{H}_R = \hbar\omega_0(a^\dagger a + 1/2), \quad (4.6)$$

ω_i é a frequência do i -ésimo nível ($i = a, b, c, d$), ω_0 a frequência da cavidade, A_j^\dagger e A_i são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, para os estados atômicos, enquanto que a^\dagger e a são os de criação e aniquilação para os fótons na cavidade. A_j^\dagger e A_i seguem as regras de comutação para férmions (embora não sejam operadores fermiônicos legítimos) ao passo que a^\dagger e a seguem as regras de comutação para bósons já descritas na seção anterior e as transições permitidas são entre dois níveis adjacentes, seguindo a idéia do modelo JC [1], ($|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle \leftrightarrow |c\rangle \leftrightarrow |d\rangle$). A parte do Hamiltoniano referente à interação é, na RWA e interação de dipolo, dado por

$$\hat{H}_I = g_a a A_a^\dagger A_b \exp(-i\delta_a t) + g_b a A_b^\dagger A_c \exp(-i\delta_b t) + g_c a A_c^\dagger A_d \exp(-i\delta_c t) + h.c., \quad (4.7)$$

onde $h.c.$ é são os hermitianos conjugados, g_a, g_b e g_c são as constantes de acoplamento da radiação com o campo e

$$\delta_a = \omega_0 - (\omega_a - \omega_b), \quad \delta_b = \omega_0 - (\omega_b - \omega_c), \quad \delta_c = \omega_0 - (\omega_c - \omega_d), \quad (4.8)$$

são as dessintonias (detuning's, segundo a literatura). Com relação aos acoplamentos, se faz necessário uma estimativa da faixa de valores a serem atribuídos a estes parâmetros que são diretamente proporcionais à frequência da radiação utilizada. Assim sendo, para efeito de comparação vamos supor um campo de radiação operando na região do infra-vermelho e/ou infra-vermelho longínquo (ω da ordem de 10^{13} a 10^{15} Hz):

$$g_{k,ij} \equiv e \left(\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 \hbar V} \right)^{1/2} \sum_{i,j} \vec{e}_k \cdot \mathbf{D}_{i,j}. \quad (4.9)$$

Utilizando ω na região do infra-vermelho e campo monomodo, os termos da eq. (4.9) simplificam-se:

$$\vec{\epsilon}_k \cdot \mathbf{D} = \mathbf{r}_{at} \cdot \mathbf{q}, \quad \text{onde } \mathbf{r}_{at} = a_0 \hat{\mathbf{r}} \quad (4.10)$$

$$a_0 \simeq 0.52 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (4.11)$$

$$\omega_0 \simeq 5 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad (4.12)$$

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (4.13)$$

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (4.14)$$

$$\epsilon_0 = 8.84 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}, \quad (4.15)$$

e g_0 resulta em

$$\begin{aligned} g_0 &= e \left(\frac{\omega_0}{2\epsilon_0 \hbar V} \right)^{1/2} a_0 \\ &= 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \left(\frac{5 \times 10^{14} \text{ Hz} \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2}{2.1 \times 8.84 \times 10^{-12} \times 10^{-34} \text{ C}^2 \cdot \text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^3} \right)^{1/2} \times 0.52 \times 10^{-10} \text{ m} \\ &= 8.3 \times 10^{-30} \left(\frac{5}{8.84 \times 2.1} \right)^{1/2} \times 10^{30} \times \text{s}^{-1} \\ g_0 &\simeq 4.3 \text{ s}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

no caso de $\omega_0 \simeq 10^{15} \text{ s}^{-1}$, $g_0 \simeq 8 \text{ s}^{-1}$. Devido ao fato da interação radiação-átomo dentro da cavidade não ser perfeita (ocorrem perdas no acoplamento), apenas uma fração dos valores acima estimados é eficaz na intensidade da interação. Assim, valores razoáveis do parâmetro g para utilização numérica estão em torno da unidade. Esse fator é pelo menos da ordem de 137 (α^{-1} , inverso da constante de estrutura fina) vezes maior que o termo de primeira ordem em \hat{A}^2 , este último responsável por processos de dois fótons, como veremos na subseção a seguir.

4.1.1 Processos de dois fótons

Fizemos um rápido comentário sobre processos de dois fótons. No quadro da segunda quantização estes processos estão relacionados, em primeira ordem, ao termo $e^2 \hat{A}^2 / 2m$ e em segunda ordem ao termo $\hat{A} \cdot \mathbf{p}$. O termo de segunda ordem é menor que o de primeira ordem (capítulo 2) e o seu cálculo envolve teoria de perturbação de segunda ordem [37]. Processos de dois fótons também são gerados pelos termos de interferência entre $\frac{e^2 \hat{A}^2}{2m}$ e $\hat{A} \cdot \mathbf{p}$, porém eles envolvem também a interação de três fótons com o átomo, dois sendo absorvidos e o terceiro espalhado, segundo Guccione *et al* [37]. Estamos interessados somente na primeira ordem: $\frac{e^2 \hat{A}^2}{2m}$. Segue que para o caso monomodo, o termo \hat{A} é dado por

$$\hat{A} = \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_0} \right)^{1/2} \vec{e} \left[a e^{-i\omega_0 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + a^\dagger e^{i\omega_0 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (4.17)$$

assim, \hat{A}^2 torna-se

$$\hat{A} \cdot \hat{A} = \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_0} \right) |\mathbf{e}|^2 \left[a e^{-i\omega_0 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + a^\dagger e^{i\omega_0 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] \cdot \left[a e^{-i\omega_0 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + a^\dagger e^{i\omega_0 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (4.18)$$

$$\hat{A} \cdot \hat{A} = \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_0} \right) \times \left[2(a^\dagger a + 1/2) + \left((a)^2 e^{-2i\omega_0 t} + (a^\dagger)^2 e^{2i\omega_0 t} \right) \right]. \quad (4.19)$$

O campo elétrico se relaciona com o vetor potencial através de uma derivada temporal, sendo assim, o termo a ser acrescentado ao Hamiltoniano de Interação, excetuando as constantes multiplicativas, é idêntico ao segundo termo do lado direito da eq. (4.19). No modelo Hamiltoniano em questão, em momento algum se explicitou termos que envolvam dois fótons. A própria transição entre níveis adjacentes, num sistema de 3 e 4 níveis envolvem processos globais (transições entre níveis adjacentes como explicado no início deste capítulo) de 2 ou mais fótons. Sendo a cascata de 2 ou três fótons relacionada à interação dipolar, a energia devido à contribuição do termo \hat{A}^2 é pequena comparada a energia oriunda do termo dipolar (entre os níveis atômicos [25, 37, 28]). Desta forma estaremos negligenciando o termo \hat{A}^2 no Hamiltoniano, inclusive no caso de estados comprimidos. Nosso objetivo neste capítulo é obter a evolução temporal de $\langle n(t) \rangle$, dada por $\langle \Psi_{AR}^I(t) | a^\dagger a | \Psi_{AR}^I(t) \rangle$. Para isto, é necessário

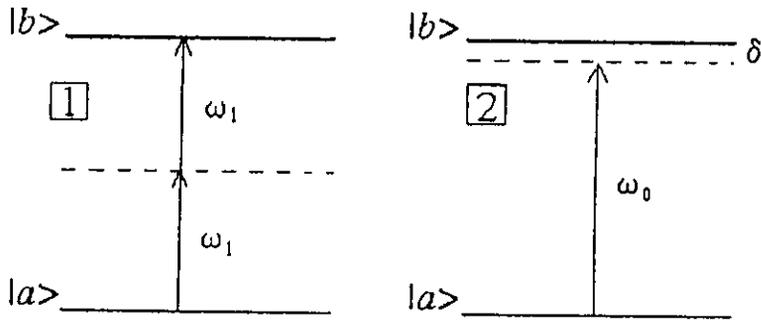


Figura 4.2: Em 1, processo de transição via dois fótons; presença do termo $(a)^2 A_b^+ A_a$ na interação. Em 2, processo usual, um fóton, termo $a A_b^+ A_a$ na interação.

ter $|\Psi_{AR}^I(t)\rangle$, isto é, o vetor estado do sistema átomo-campo.

4.1.2 Vetor de Estado do sistema Átomo-Campo

O vetor de estado do sistema átomo-campo pode ser escrito genericamente numa base de estados como $|c'_i, \alpha\rangle$:

$$|\Psi_{AR}^I(t)\rangle = \sum_i c'_{i\alpha}(t) |c'_i, \alpha\rangle. \quad (4.20)$$

Para um átomo de quatro níveis ($i = a, b, c, d$) e para estados coerentes, esta expansão do vetor de estado resulta em

$$|\Psi_{AR}^I(t)\rangle = [a_\alpha(t) |a, \alpha\rangle + b_\alpha(t) |b, \alpha\rangle + c_\alpha(t) |c, \alpha\rangle + d_\alpha(t) |d, \alpha\rangle], \quad (4.21)$$

onde, para fins de simplificação, definiu-se: $c'_{a\alpha} \equiv a_\alpha$, quando $i = a$ e assim sucessivamente para os outros índices.

Conforme já desenvolvido no capítulo 3, é comum escolher como base de vetores do sistema uma base de número de ocupação, com o espaço total do sistema escrito como uma combinação linear dos estados de número de ocupação, $|n\rangle$. Fazendo assim, têm-se:

$$a_\alpha(t) |a, \alpha\rangle = \sum_n p_n (a_n(t) |a, n\rangle) \quad (4.22)$$

$$b_\alpha(t) |b, \alpha\rangle = \sum_n p_n (b_{n+1}(t) |b, n+1\rangle) \quad (4.23)$$

$$c_\alpha(t) |c, \alpha\rangle = \sum_n p_n (c_{n+2}(t) |c, n+2\rangle) \quad (4.24)$$

$$d_\alpha(t) |d, \alpha\rangle = \sum_n p_n (d_{n+3}(t) |d, n+3\rangle), \quad (4.25)$$

sendo que o termo em comum, colocado em evidência, traz informação sobre a distribuição de fótons utilizada. No caso de estados coerentes, $p_n = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\sqrt{n!}} (|\alpha|)^n$. De acordo com as eqs. (4.25) o vetor de estado átomo-campo pode ser escrito então na forma

$$|\Psi_{AR}^I(t)\rangle = \sum_n p_n [a_n(t) |a, n\rangle + b_{n+1}(t) |b, n+1\rangle + c_{n+2}(t) |c, n+2\rangle + d_{n+3}(t) |d, n+3\rangle]. \quad (4.26)$$

Os kets $|a, n\rangle$, $|b, n+1\rangle$, $|c, n+2\rangle$ e $|d, n+3\rangle$ são autoestados de \hat{H}_0 , com $\hat{H}_0 = \hat{H}_A + \hat{H}_R$. Por exemplo [14],

$$\hat{H}_0 |b, n+1\rangle = [\omega_b + (n + \frac{3}{2})\omega_0] |b, n+1\rangle \quad (4.27)$$

e $a_n(t)$, $b_{n+1}(t)$, $c_{n+2}(t)$ e $d_{n+3}(t)$ são as amplitudes de probabilidade de achar o átomo no estado $|a\rangle$ com o campo fotônico no estado $|n\rangle$, (escrito como $|a, n\rangle$), achar o átomo no estado $|b\rangle$ e o campo no estado $|n+1\rangle$, achar o átomo no estado $|c\rangle$ e o campo no estado $|n+2\rangle$ e de achar o átomo no estado $|d\rangle$ e o campo no estado $|n+3\rangle$ respectivamente.

4.1.3 Dinâmica

O que fizemos até agora foi estender os cálculos (o modelo) para considerar sistemas atômicos de quatro níveis. Na literatura têm-se predominantemente trabalhos considerando apenas dois níveis, algumas vezes três. A utilização de átomos de três níveis se deve ao fato experimental surgido para a ocorrência da inversão de população, decaimento para um nível metaestável com tempo de vida superior à inversão de população e então decaimento com

emissão na frequência da diferença de energia. Essa emissão é conhecido como luz de laser [28]. Entretanto, existem laser's de estado sólido ($Y_3Al_5O_{12}$ - abreviados como YAG, CO_2 , Dye lasers, etc.) os quais são mais adequadamente descritos através da inclusão de níveis adicionais no átomo (quatro níveis para os exemplos citados acima). É nesse quadro que o modelo aqui desenvolvido obtêm uma aproximação com a teoria de laser's.

A fim de obter o número médio de fótons presentes na cavidade em função do tempo para o sistema átomo-campo, é necessário calcular a quantidade $\langle \Psi(\mathbf{r}, t) | \hat{n} | \Psi(\mathbf{r}, t) \rangle$, isto é

$$\langle n(t) \rangle = \langle \Psi_{AR}^I(t) | a^\dagger a | \Psi_{AR}^I(t) \rangle. \quad (4.28)$$

De acordo com a eq. (4.26) e as propriedades dos operadores de criação e aniquilação, temos

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= \sum |p_n|^2 \left[n |a_n(t)|^2 + (n+1) |b_{n+1}(t)|^2 + (n+2) |c_{n+2}|^2 + (n+3) |d_{n+3}|^2 \right] \\ \langle n(t) \rangle &= \sum |p_n|^2 \left[n(|a_n(t)|^2 + |b_{n+1}(t)|^2 + |c_{n+2}|^2 + |d_{n+3}|^2) + |b_{n+1}(t)|^2 + 2|c_{n+2}|^2 + 3|d_{n+3}|^2 \right] \\ \langle n(t) \rangle &= \sum |p_n|^2 \left[n + |b_{n+1}(t)|^2 + 2|c_{n+2}|^2 + 3|d_{n+3}|^2 \right] \\ \langle n(t) \rangle &= \bar{n} + \sum |p_n|^2 \left[|b_{n+1}(t)|^2 + 2|c_{n+2}|^2 + 3|d_{n+3}|^2 \right], \end{aligned} \quad (4.29)$$

com

$$|a_n(t)|^2 + |b_{n+1}(t)|^2 + |c_{n+2}(t)|^2 + |d_{n+3}(t)|^2 = 1, \quad (4.30)$$

A obtenção de $\langle n(t) \rangle$ agora fica restrita ao cálculo das amplitudes de probabilidades, $|a_n(t)|^2$, $|b_{n+1}(t)|^2$, $|c_{n+2}(t)|^2$ e $|d_{n+3}(t)|^2$.

Na representação de interação, a equação de Schrödinger escreve-se como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Psi_{AR}^I(t) \rangle = \hat{H}_I^I | \Psi_{AR}^I(t) \rangle. \quad (4.31)$$

Utilizando as relações de ortonormalidade dos estados do sistema átomo-campo, com $\hbar = c = 1$ (unidades geometrizadas), obtem-se da eq. (4.31) as seguintes equações para as amplitudes de probabilidade:

$$\dot{a}_n(t) = -iV_a \exp(-i\delta_a t) b_{n+1}(t) \quad (4.32)$$

$$\dot{b}_{n+1}(t) = -iV_a^* \exp(i\delta_a t) a_n(t) + V_b \exp(-i\delta_b t) c_{n+2}(t) \quad (4.33)$$

$$\dot{c}_{n+2}(t) = -iV_b^* \exp(i\delta_b t) b_{n+1}(t) + V_c \exp(-i\delta_c t) d_{n+3}(t) \quad (4.34)$$

$$\dot{d}_{n+3}(t) = -iV_c^* \exp(i\delta_c t) c_{n+2}(t), \quad (4.35)$$

onde

$$V_a = g_a \sqrt{n+1}, \quad V_b = g_b \sqrt{n+2}, \quad V_c = g_c \sqrt{n+3}. \quad (4.36)$$

O sistema é resolvido utilizando-se o método das Transformadas de Laplace (ver Apêndice A). Após alguma álgebra obtêm-se os coeficientes $a_n(t)$, $b_{n+1}(t)$, $c_{n+2}(t)$ e $d_{n+3}(t)$. Foi assumido que no instante inicial o átomo estava no estado $|a\rangle$, isto é, $a_n(0) = 1$, $b_{n+1}(0) = c_{n+2}(0) = d_{n+3}(0) = 0$, obtendo-se dessa forma $\bar{n} = \sum_n n |p_n|^2$ que significa o número médio de fótons inicialmente ($t = 0$) presentes na cavidade. Tendo as expressões analíticas dos coeficientes no caso de quatro níveis, $\langle n(t) \rangle$ foi obtido numericamente. Detalhes deste cálculo se encontram nos Apêndices A e B. Os tempos envolvidos nestes cálculos são expressos em unidades de Rabi.

No caso de dessintonias nulas obtém-se, após alguma álgebra, uma expressão simplificada para $\langle n(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle = & \bar{n} + \sum_n |p_n|^2 \left(\frac{|V_a|^2}{(\lambda_+^2 - \lambda_-^2)^2} \right) \left\{ \left[\frac{(\lambda_-^2 - |V_c|^2)}{\lambda_-} \text{sen}(\lambda_- t) - \frac{(\lambda_+^2 - |V_c|^2)}{\lambda_+} \text{sen}(\lambda_+ t) \right]^2 \right. \\ & + 2 (|V_b|^2) [\cos(\lambda_- t) - \cos(\lambda_+ t)]^2 \\ & \left. + 3 (|V_b|^2 |V_c|^2) \left[\frac{\text{sen}(\lambda_- t)}{\lambda_-} - \frac{\text{sen}(\lambda_+ t)}{\lambda_+} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde λ_+ e λ_- são dados por:

$$\lambda_+ \equiv \left[\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad \text{e} \quad \lambda_- \equiv \left[\gamma - (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (4.38)$$

e γ e β são escritos em função de V_a , V_b e V_c através de (mais detalhes ver Apêndice A):

$$\gamma \equiv \frac{(|V_a|^2 + |V_b|^2 + |V_c|^2)}{2} \quad \text{e} \quad \beta \equiv |V_a|^2 |V_c|^2. \quad (4.39)$$

Se $g_c = 0$, então $|V_c| = 0$ e a expressão acima se reduz para

$$\langle n(t) \rangle = \bar{n} + \sum_n |p_n|^2 \left(\frac{|V_a|^2}{\lambda_+^4} \right) \left\{ \lambda_+^2 \text{sen}^2(\lambda_+ t) + 2 |V_b|^2 [1 - \cos(\lambda_+ t)]^2 \right\}, \quad (4.40)$$

que é análoga à expressão obtida por [38] ($\lambda_+ = \lambda, \lambda_- = 0, V_a = V_1$ e $V_b = V_2$) para o caso de três níveis. Claramente se $g_b = 0$, a expressão logo acima se reduz para o caso usual de dois níveis

$$\langle n(t) \rangle = \bar{n} + \frac{1}{2} \sum_n |p_n|^2 (1 - \cos(2\lambda_+ t)). \quad (4.41)$$

A seguir é apresentado o resultado de cálculos na situação onde são variados os parâmetros do modelo, que são \bar{n} , N_{max} , δ 's, número de níveis, etc.

4.2 Influência do número de níveis atômicos

Sistemas de dois e três níveis têm sido bastante estudados com diferentes tipos de distribuições de estados iniciais e em situações diversas (capítulo 1). Uma excelente revisão de sistemas de dois e três níveis em diferentes configurações e mutimodos se encontra em Yoo and Eberly [18]. Um Átomo de n -níveis cujos acoplamentos sejam iguais (análogo ao caso dois níveis) se encontra em Li *et al* [21].

Nos trabalhos de Cardimona *et al* [14], Goggin *et al* [38] e Li *et al* [21] observa-se um nítido aumento do tempo entre sucessivos colapsos e reativações, conforme aumenta-se o número de níveis. Para ilustração, apresentamos na fig. (4.3) um gráfico de $\tau \times \langle n(t) \rangle$ (escalado em unidades de Rabi) explicitando para valores fixados de \bar{n} , δ 's e g 's a influência do número de níveis atômicos no fenômeno do colapso-reativação. Observamos nesta figura que conforme aumentamos o número de níveis de 2 para 3 e de 3 para 4, fig. (4.3) (a), (b) e (c) respectivamente, há um aumento do tempo de colapso entre a primeira e a segunda reativação. Podemos notar ainda na fig. (4.3) que a introdução do quarto nível tende a desestabilizar o número de colapso, mostrando mais cedo ($\tau \approx 150$ neste caso) a duplicação da reativação. Em outras palavras, embora temos tempos de colapsos maiores em 4-níveis, a desestabilização se completa com um número menor de colapsos-reativações. Podemos compreender este comportamento olhando para a eqo (4.37) e comparando-a com a do caso de três níveis, eq. (4.40).

A comparação direta entre estas duas equações mostra o aumento de termos em senos

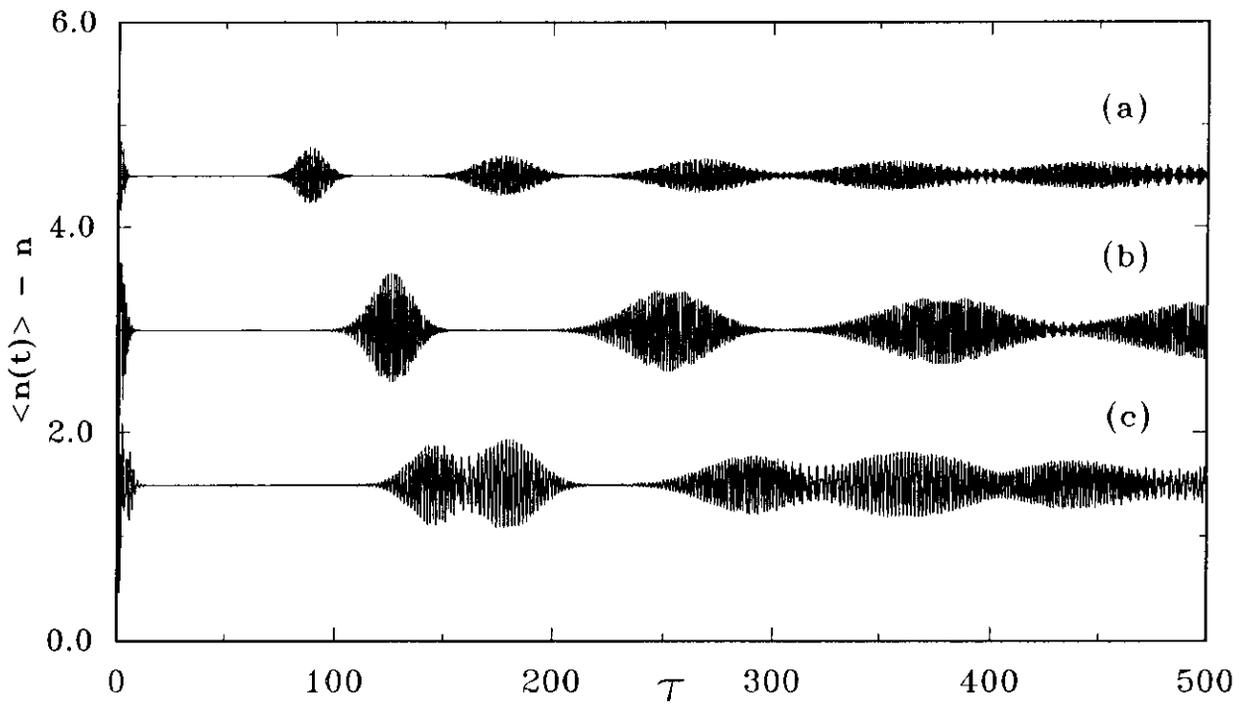


Figura 4.3: Efeito do número de níveis. Estados Coerentes - Distribuição de Poisson. (a) $g_a = 0.5$, $g_b = g_c = 0.0$ (b) $g_a = g_b = 0.5$, $g_c = 0.0$ (c) $g_a = g_b = g_c = 0.5$. $N_{max} = 200$, $\bar{n} = 50$, $p = 0.25$. $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$.

e cossenos (fatores de fase) no caso de quatro níveis, indicando que um tempo de relaxação maior é necessário para que este sistema chegue em uma situação de casamento de fase semelhante àquele apresentado no caso de três. Fisicamente o que acontece é que, como são permitidas transições somente entre níveis adjacentes, o sistema de quatro níveis possui uma quantidade maior de arranjos em relação à átomos de três níveis, para um mesmo intervalo de tempo.

Como característica diferenciada deste sistema (4-níveis), obtivemos modulações adicionais nos primeiros envelopes (reativações), fato não encontrado nos sistemas de dois e três níveis, figs. (4.4) e (4.5). Na fig. (4.4) utilizamos o conjunto de parâmetros fixados na legenda para uma evolução temporal longa ($\tau = 1000$) de modo a podermos acompanhar por um intervalo apreciável de tempo os colapsos e reativações. Notamos nesta figura que as reativações do quatro níveis são uma combinação linear de fases do próprio 4 níveis com os casos 2 e 3 níveis, visto através da forma geométrica das reativações sucessivas.

O que se espera então com o aumento do número de níveis, além do aumento do tempo

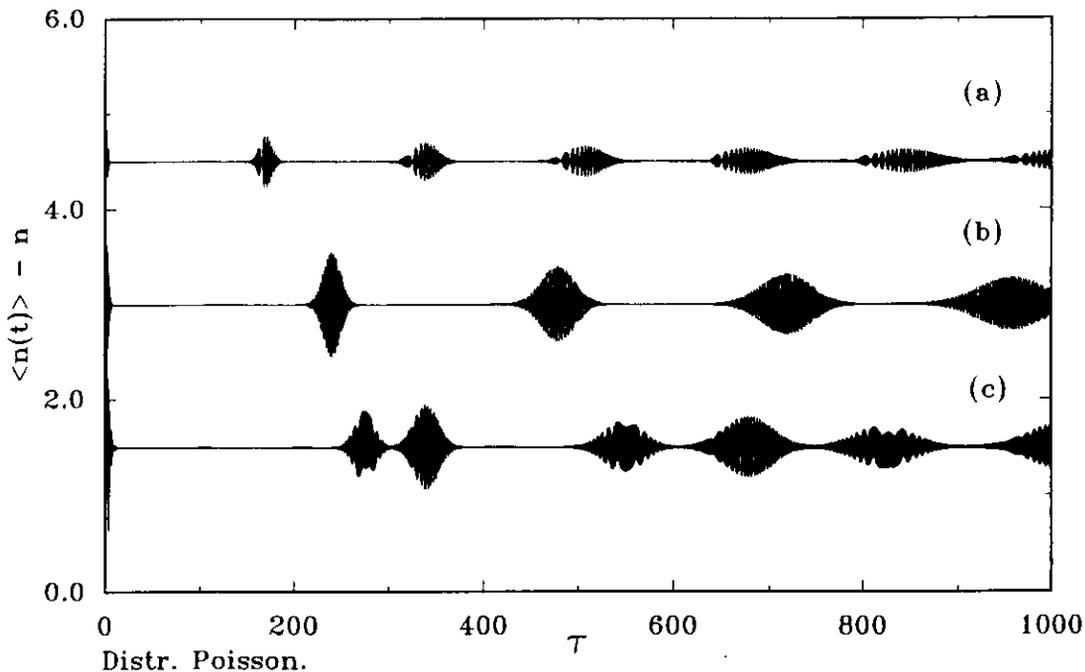


Figura 4.4: Efeito do número de níveis. $\bar{n} = 180$ e $N_{max} = 240$. $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$ (a) $g_a = 0.5$, $g_b = g_c = 0.0$, 2-níveis (b) $g_a = g_b = 0.5$, $g_c = 0$, 3-níveis (c) $g_a = g_b = g_c = 0.5$, 4-níveis.

entre sucessivos colapsos e reativações, é um aumento de modulações, contribuindo no sentido de desestabilizar mais rapidamente a estrutura dos colapsos e reativações, para este tipo de sistema. Na fig. (4.5) utilizamos o mesmo conjunto de valores da fig. (4.3): $N_{max} = 200$, $\bar{n} = 50$, $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$ e em (a) dois níveis, (b) três níveis e (c) quatro níveis, porém diminuimos τ e enquadrámos as reativações após o primeiro colapso. Nota-se a introdução da modulação “extra” no caso quatro níveis.

A adição de mais um ou dois níveis, embora um pouco trabalhosa, não requer nenhum cálculo diferente dos desenvolvidos no Apêndice A. Isto torna este sistema um interessante ponto de partida para estudar átomos de Rydberg¹, com a vantagem de podermos utilizar um número elevado de fótons dentro da cavidade.

¹Átomos de Rydberg são átomos que se encontram altamente excitados, quase ionizados, sendo que seu espaçamento energético é muito pequeno

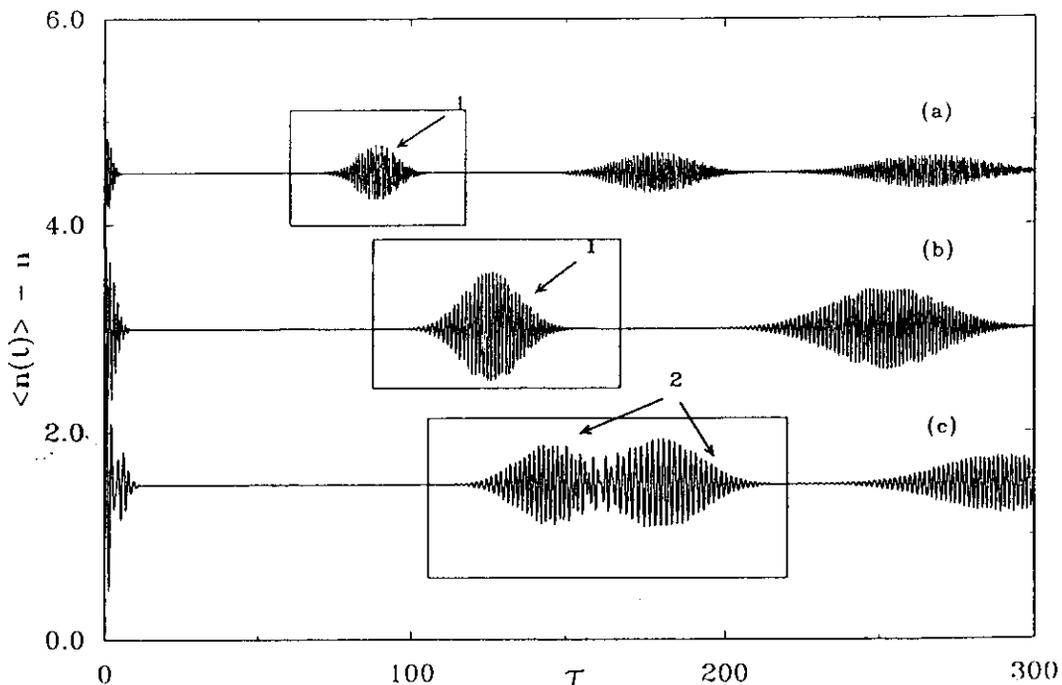


Figura 4.5: Efeito do número de níveis. Aumento dos termos ressonantes, aumento das modulações para o mesmo conjunto de valores da fig. (4.3).

4.3 Influência da distribuição inicial de fótons

Já que geralmente é possível escrever um estado qualquer como uma combinação linear dos estados de número de ocupação (é que a maioria dos estados utilizados são montados dessa maneira), o que interessa basicamente é conhecer qual a estatística que rege o comportamento dos fótons dentro da cavidade, isto é, a função distribuição de probabilidade inicial que determina o comportamento dos fótons. Para efeito de referência de literatura sobre tratamento quântico da radiação citamos o livro do Louisell [39]. Estados Binomiais do campo de radiação quantizados foram introduzidos por Stoler *et al*, 1985 [35]. Dattoli, Gallardo e Torre [40] apresentaram um modelo físico para a produção dos estado binomiais e estudos dessa distribuição em dois [14, 38] e três [14] níveis e seus efeitos nos colapsos e reativações foram analisados. Da mesma maneira que os estados coerentes, os estados binomiais são uma combinação linear do número de estados com os coeficientes escolhidos de maneira que a distribuição fotônica seja binomial. Estados Comprimidos (“Squeezed”) [11] e termo-coerente [36] também já foram estudados em dois e três níveis sendo que o artigo de Loudon

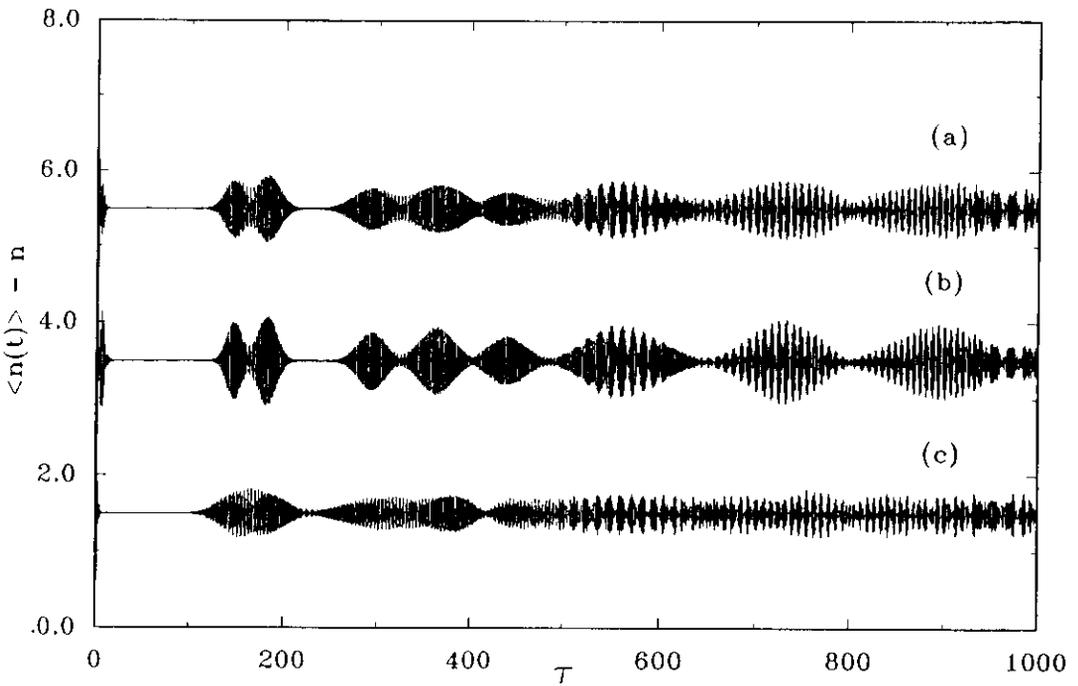


Figura 4.6: Em (a) Distr. Poisson, (b) Distr. Binomial (c) Distr. Termocoerente. 4-níveis ($g_a=g_b=g_c=0.5$, $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$. $N_{max} = 200$ e $\bar{n} = 50$).

& Knight [33] explora muito bem a “luz comprimida”. Recentemente uma nova classe de estados do campo quantizado possuindo distribuição de número de ocupação deslocado foram introduzidos [41].

Na presente seção, para ver efeitos de diferentes distribuições de fótons utilizamos: distribuição de Poisson (estados coerentes), com a intenção de manter perto o limite clássico [29], distribuição binomial, ela se reduz ao caso coerente em determinados limites [35] e distribuição termocoerente [36], a fim de analisar os efeitos de temperatura na dinâmica. Assim, $p_n \equiv |p_n|^2$ assume então três formas:

$$|p_n|^2 = \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^n}{n!} \quad (4.42)$$

para estados preparados em um estado coerente $p_n = |\langle n|\alpha \rangle|^2$, conforme descrito no capítulo 3 sendo \bar{n} é o número médio inicial de fótons inicialmente presentes na cavidade,

$$|p_n|^2 = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n} \quad (4.43)$$

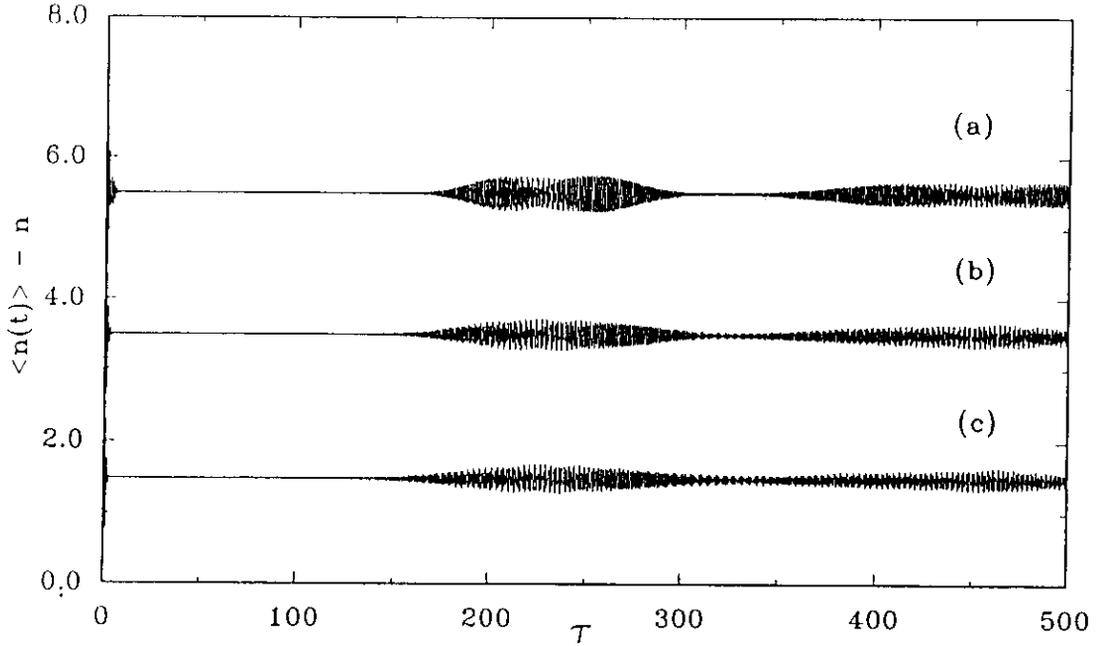


Figura 4.7: Efeito dos fótons térmicos. (a) $n_b = 1$ (b) $n_b = 3$ (c) $n_b = 5$. $N_{max} = 200$, $\bar{n} = 100$, $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$.

na preparação de estados binomiais, $p_n = |\langle n|M, \eta \rangle|^2$ [35] com $p = \frac{n}{N}$, $N \equiv N_{max}$ sendo o número máximo de fótons presentes na cavidade e

$$|p_n|^2 = \frac{1}{(1+n_b)} e^{\left(-\frac{\bar{n}}{(1+n_b)}\right)} \left(\frac{n_b}{(1+n_b)}\right)^n \sum_k \frac{1}{k!} C_n^k \left(\frac{\bar{n}}{n_b(1+n_b)}\right)^k, \quad (4.44)$$

onde C_n^k é dado por

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (4.45)$$

no caso da distribuição termocoerente, com a probabilidade associada a n igual a $p_n = |\langle n|\beta \rangle|^2$ [36]. O parâmetro n_b na equação (4.44) é o número médio de fótons térmicos em um estado estacionário sem interação [36]. O número máximo de fótons presentes na cavidade é $n = N_{max}$.

Na fig. (4.6) podemos observar que as três distribuições apresentam colapsos-reativações, sendo que nesta combinação particular de parâmetros há semelhança entre os casos (a) e (b) (estados iniciais coerentes e estados iniciais binomiais respectivamente), porém em (b) as reativações são um pouco mais pronunciadas (distribuição Binomial) devido a sua forma

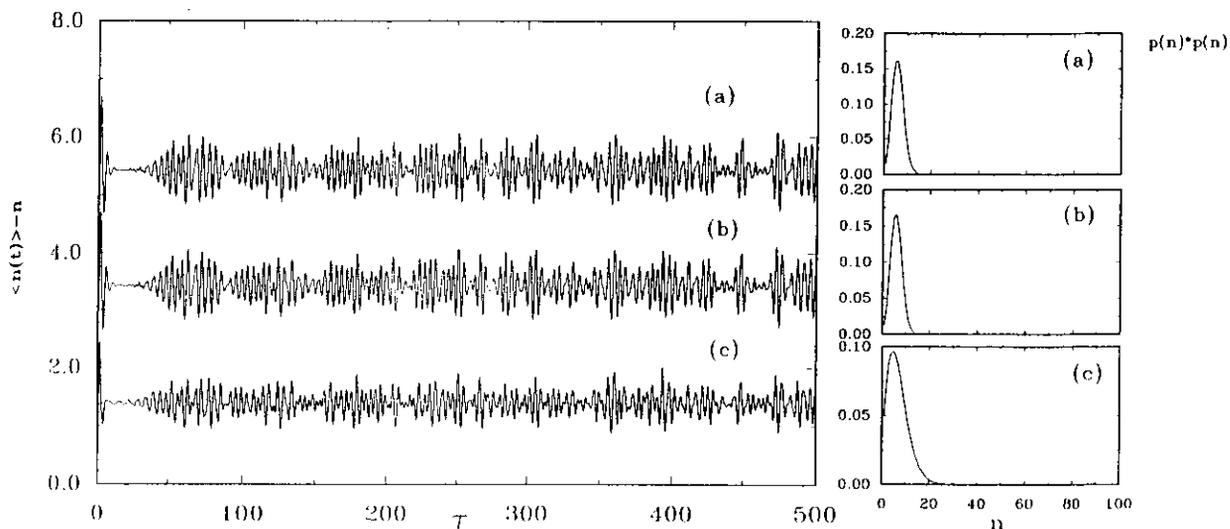


Figura 4.8: Preparação do estado inicial, \bar{n} pequeno. $g_a = g_b = g_c = 0.5$, $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$, $N_{max} = 100$ e $\bar{n} = 6$. Pouca influência do tipo de preparação (a) Distr. Poisson (estados coerentes) (b) Distr. Binomial (estados binomiais) (c) Distr. Termocoerente (estados termocoerentes) com $n_b = 1$.

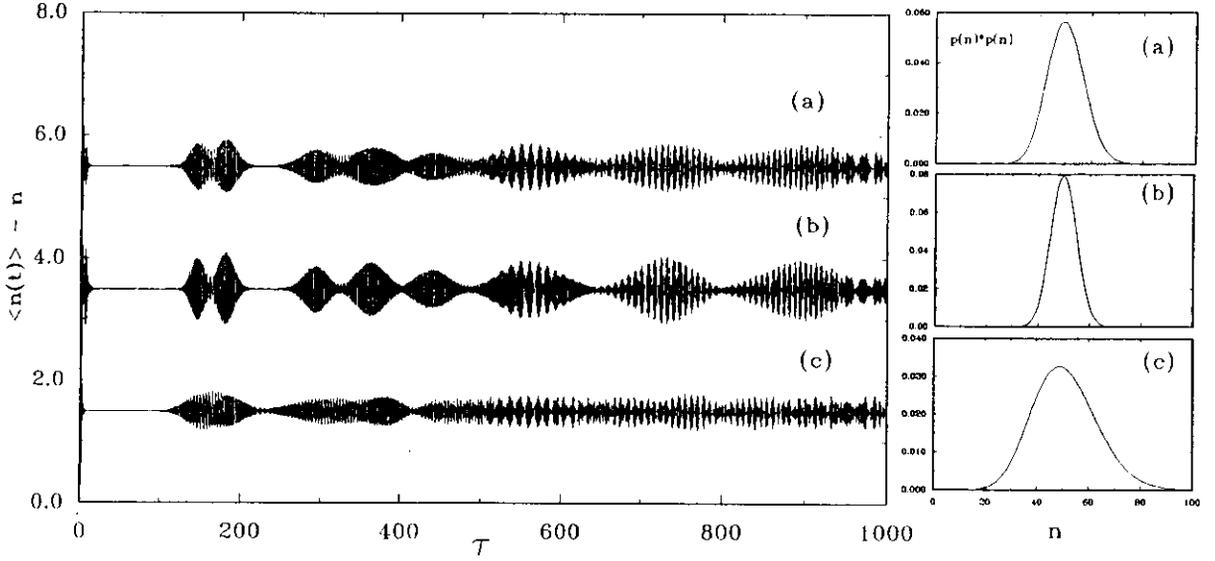


Figura 4.9: Evolução temporal de $\langle n(t) \rangle$ para \bar{n} intermediário. (a) Distr. Poisson, (b) Distr. Binomial (c) Distr. Termocoerente, $n_b = 1$. $g_a = g_b = g_c = 0.5$, quatro níveis. $N_{max} = 100$, $\bar{n} = 50$, $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$.

menos espalhada (“sharp”). O transiente é atingido mais rapidamente na distribuição Termocoerente, um efeito relacionado com os fótons térmicos. Na fig. (4.7) é feito um estudo da influência dos fótons térmicos, no caso da distribuição termocoerente. Tomamos valores fixos dos parâmetros indicados na legenda e aumentamos n_b , número de fótons térmicos, de acordo com (a), (b) e (c). Nota-se uma diminuição da amplitude da modulação, uma diminuição pequena do primeiro colapso sendo que para $n_b = 5$ o transiente é atingido após o primeiro colapso. Isto se deve ao alargamento (deslocalização) acentuada da distribuição conforme aumenta n_b . Este resultado está em acordo com Filipowicz [36] As figs. (4.8), (4.9) e (4.10) mostram a evolução temporal de $\langle n(t) \rangle$ para as três distribuições iniciais de fótons em três regiões diferentes. Para $N_{max} \gg \bar{n}$ (\bar{n} pequeno), fig. (4.8), vemos que a evolução temporal das três distribuições utilizadas são bastante parecidas. A grande coincidência entre a distribuição de Poisson e a Binomial indicam que neste regime não existe uma diferença significativa no tipo de preparação do estado inicial, seja ele coerente ou binomial ou mesmo termocoerente. O Transiente é atingido bem cedo para as três distribuições. Com relação à

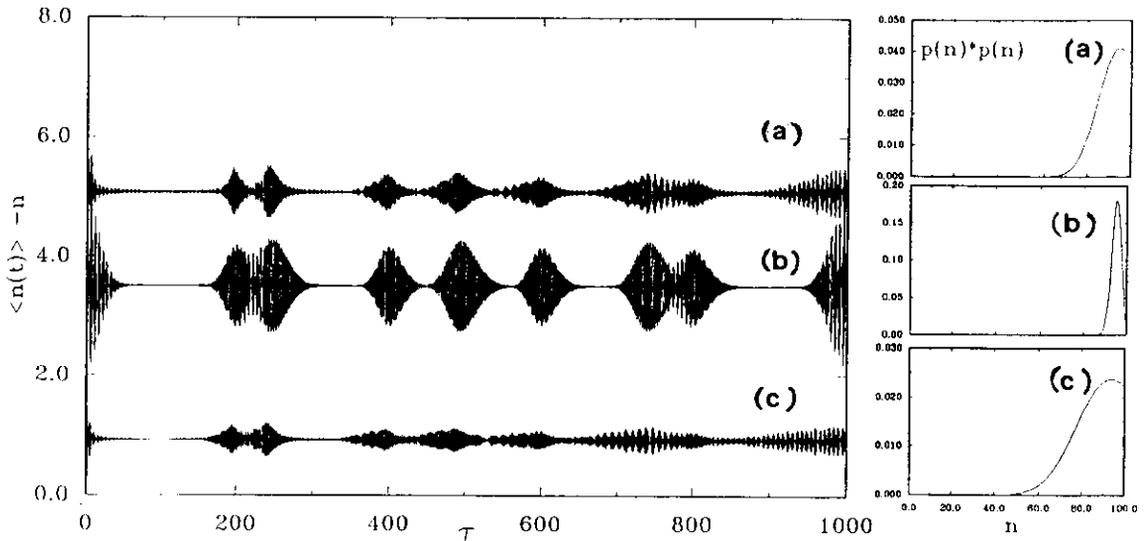


Figura 4.10: Evolução temporal de $\langle n(t) \rangle$ para \bar{n} próximo à N_{max} . (a) Distr. Poisson, (b) Distr. Binomial e (c) Distr. Termocoerente para o mesmo conjunto de valores que a fig. (4.8).

distribuição termocoerente, o efeitos dos fótons térmicos cedidos ao sistema, fig. (4.8)(c), é no sentido de desestabilizar mais rapidamente ainda o colapso ou de outra maneira, o fato de a distribuição termocoerente ser mais deslocalizada que as outras significa que ela promove uma contribuição maior dos termos oscilantes. Para a situação em que $\bar{n} \approx \frac{N_{max}}{2}$, N_{max} grande, o comportamento geral das três é também semelhante. Caso particular interessante é o aparecimento de modulações nos envelopes das distribuições binomial e termocoerente, e seus envelopes também estão bastante simétricos. Não conhecemos até a presente data nenhum resultado da literatura com características idêntica à apresentada na fig. (4.9).

No caso em que $\bar{n} \simeq N_{max} = 100$, fig. (4.10), a preparação binomial destoa fortemente das outras duas. Na fig. (4.10)(a) e (c) aparecem assimetrias para a distribuição de Poisson e a Termocoerente. Iste se deve ao truncamento dos termos próximos à N_{max} . Na distribuição Binomial há uma queda acentuada quando \bar{n} está próximo à N_{max} , de maneira a manter a simetria.

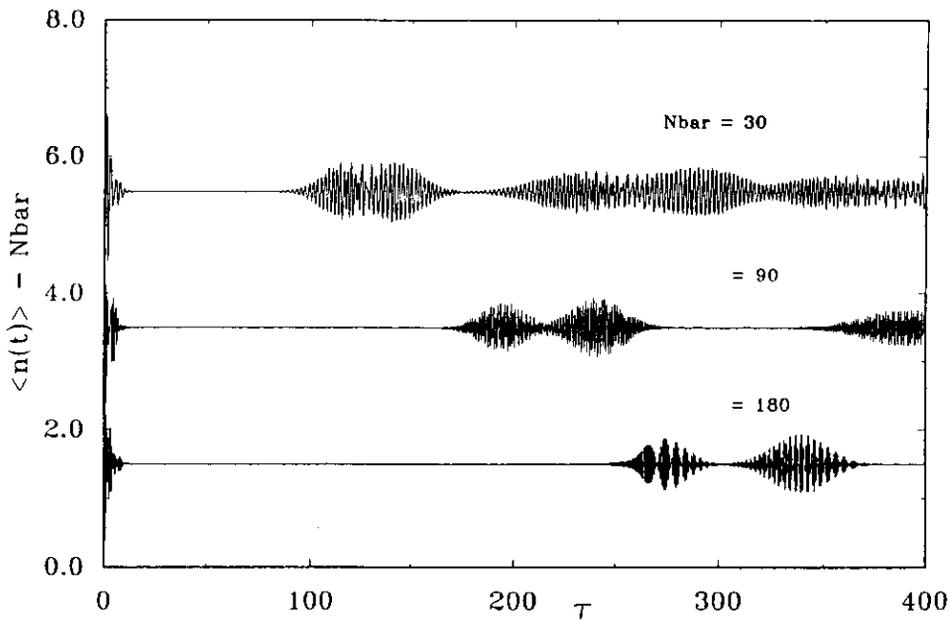


Figura 4.11: Efeito de \bar{n} . Distribuição de Poisson (estados iniciais coerentes). $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.0$
 $g_a = g_b = g_c = 0.5$, 4-níveis $N_{max} = 240$. (a) $\bar{n} = 30$ (b) $\bar{n} = 90$ (c) $\bar{n} = 180$

4.4 Número Médio Inicial de Fótons, (\bar{n})

O número inicial médio de fótons, \bar{n} , ou simplesmente intensidade[18] é um parâmetro cuja influência é determinante, na dinâmica do fenômeno do colapso e reativação.

A sua influência é análoga à do número de níveis sobre os colapsos e reativações: quanto maior \bar{n} , mais prolongados são os colapsos. Isto concorda com o obtido por Li e colaboradores [21] mesmo com os níveis igualmente espaçados (OH) e constantes de acoplamento iguais. A fig. (4.11) mostra, para o caso coerente, que conforme aumentamos \bar{n} , mantendo os outros parâmetros fixos, há um aumento pronunciado do tempo de colapso, sendo que este comportamento é semelhante nas distr. Binomial e distr. Termocoerente, figs. (4.12) e (4.13) respectivamente.

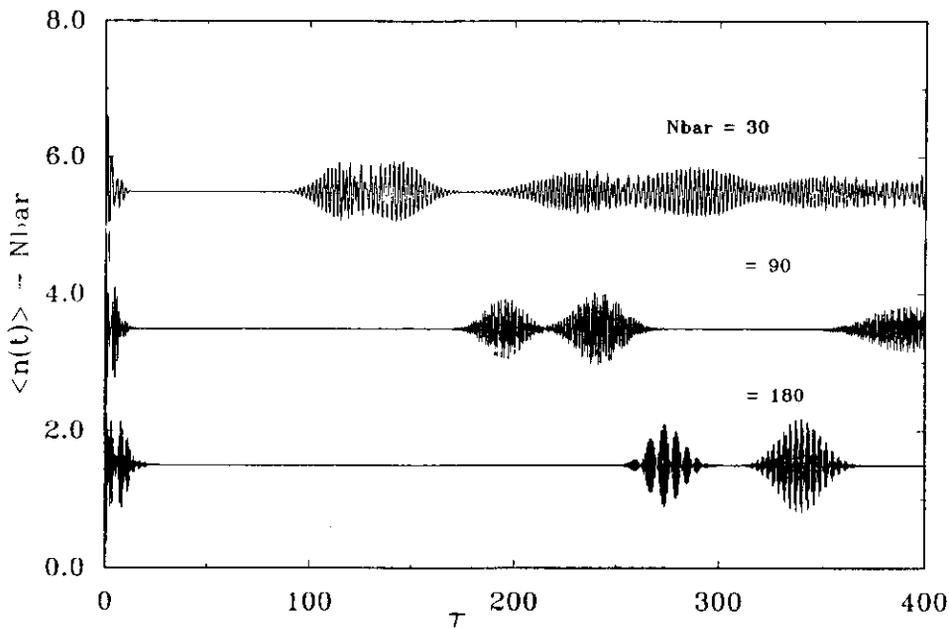


Figura 4.12: Distribuição Binomial para o mesmo conjunto de valores da fig. (4.11).

4.5 Dessintonia

No cálculo do Hamiltoniano de interação tínhamos obtido dessintonias nulas. Sua introdução é fenomenológica. Eles se encontram em termos cujos expoentes são complexos e portanto sua contribuição se traduz em fatores de fase, incidindo diretamente nos colapsos e reativações. Nas figs. (4.14), (4.15) vemos que a segunda modulação é afetada para a combinação de dessintonias de (a) Entre a 4^a e 5^a modulação novamente há alteração na forma da modulação, distinguindo-se no caso (c). Na fig. (4.15) a quarta modulação é bastante afetada pela combinação dada em (a). Os casos (b) e (c) mostram a evolução temporal para um mesmo conjunto de valores com os sinais dos dessintonias invertidas. Não há diferenças na evolução temporal, como não deveria mesmo, pois a alteração de sinal na fase não altera o valor da média de $\langle n(t) \rangle$. Para os casos Binomial e Termocoerente o efeito é semelhante, como pode ser observado nas figs. (4.16), (4.17) e (4.18). Dependendo da combinação utilizada de dessintonia pode-se até extinguir um envelope (uma reativação). Os resultados obtidos aqui para quatro níveis concordam com os de [18] para três níveis. Na distribuição termocoerente, cujo transiente é atingido mais rapidamente que as outras duas aqui analisadas, a

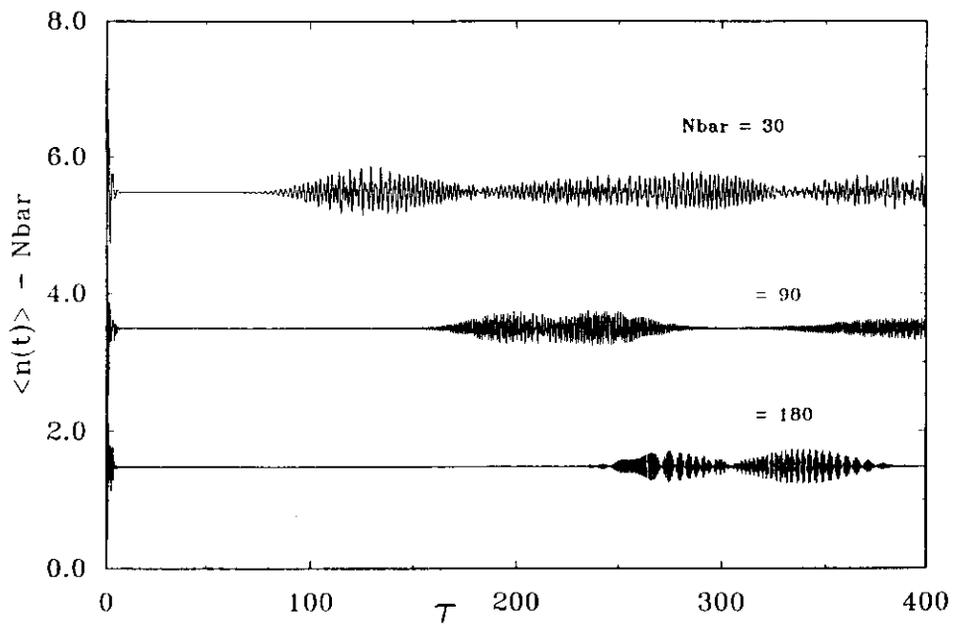


Figura 4.13: Distribuição Termocoerente para os mesmos parâmetros da fig. (4.11) com $n_b = 1$.

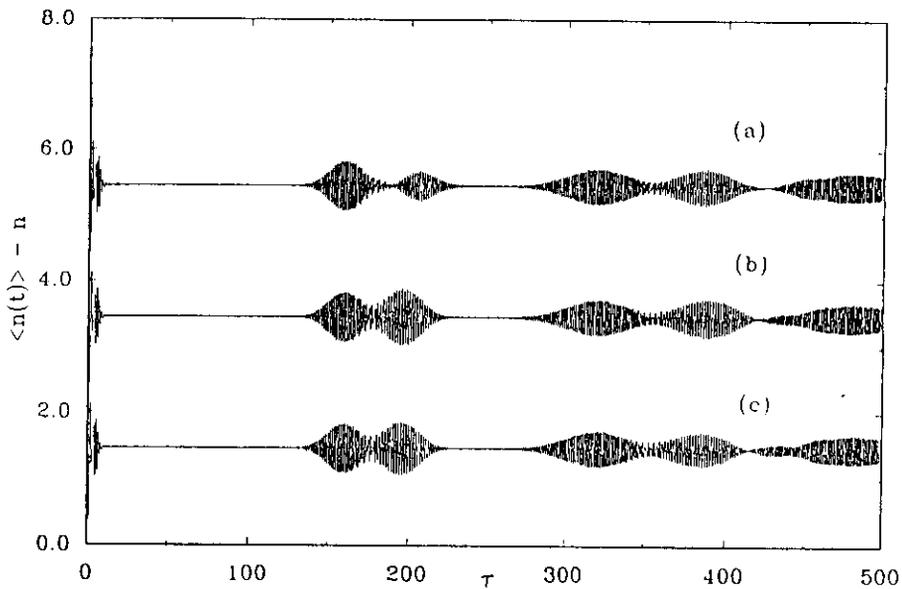


Figura 4.14: Efeito de dessintonia. Distribuição Poisson. (a) $\delta_a = 0.12, \delta_b = 0.06, \delta_c = -0.06$ (b) $\delta_a = 0.1, \delta_b = \delta_c = -0.05$ (c) $\delta_a = \delta_b = -0.05, \delta_c = 0.1$. $N_{\text{max}} = 75, \bar{n} = 60, g_a = g_b = g_c = 0.5$.

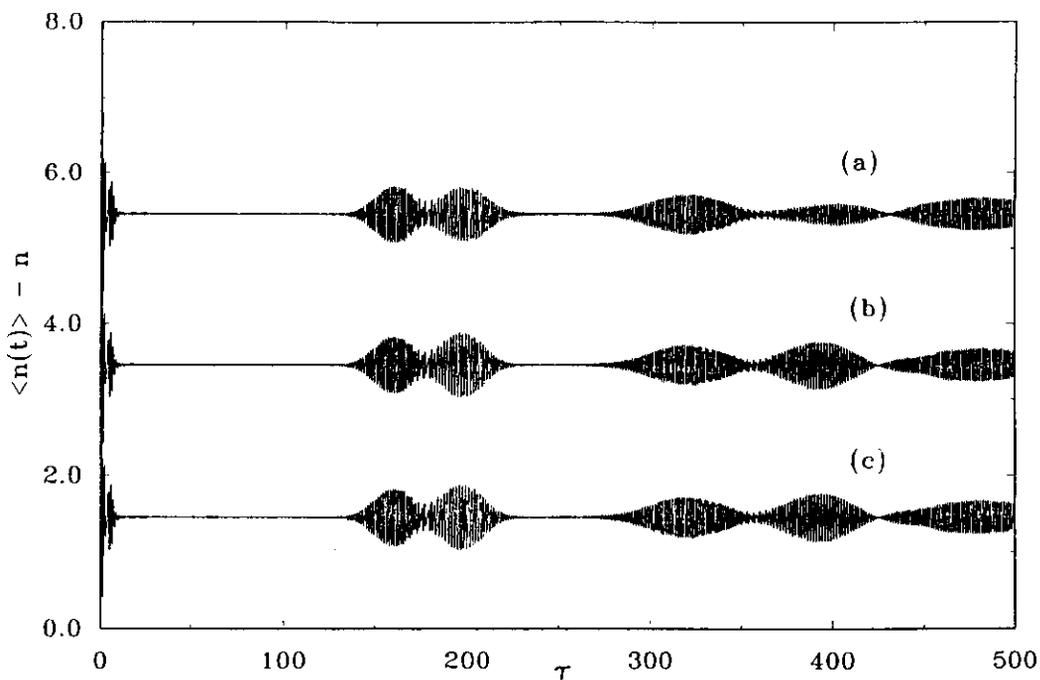


Figura 4.15: Efeito de dessintonia. Distribuição Poisson. (a) $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.1$ (b) $\delta_a = 0.15 = -\delta_b, \delta_c = 0.0$ (c) $\delta_a = -0.15 = -\delta_b, \delta_c = 0.0$. $N_{max} = 75, \bar{n} = 60, g_a = g_b = g_c = 0.5$.

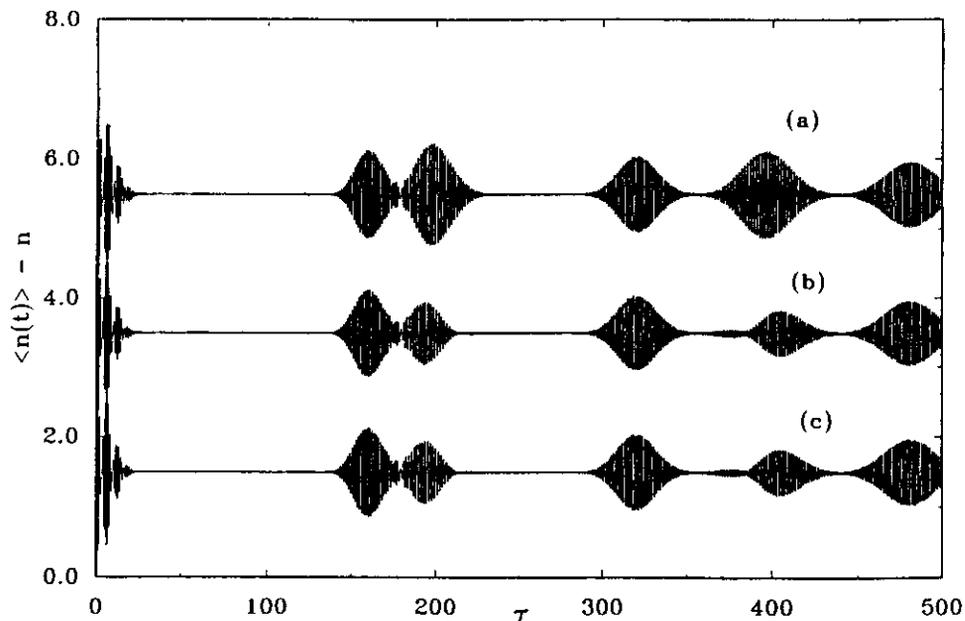


Figura 4.16: Efeito de dessintonia. Distribuição Binomial. (a) $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.0$ (b) $\delta_a = \delta_b = 0.15, \delta_c = 0.0$ (c) $\delta_a = \delta_b = -0.15, \delta_c = 0.0$. $N_{max} = 75, \bar{n} = 60, g_a = g_b = g_c = 0.5$.

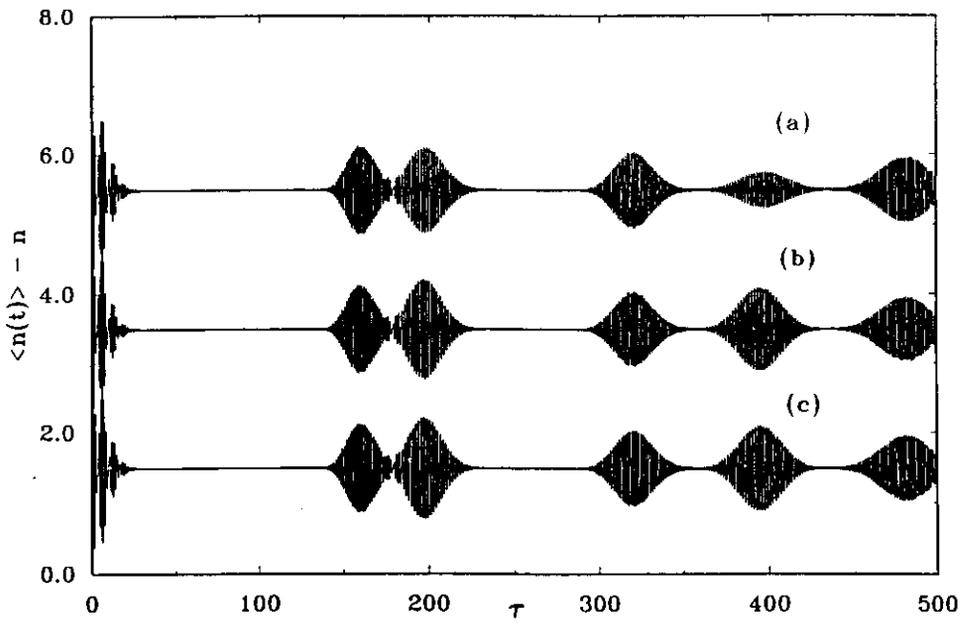


Figura 4.17: Efeito de dessintonia. Distribuição Binomial. (a) $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.1$ (b) $\delta_a = 0.15 = -\delta_b, \delta_c = 0.0$ (c) $\delta_a = -0.15 = -\delta_b, \delta_c = 0.0$. $N_{max} = 75, \bar{n} = 60, g_a = g_b = g_c = 0.5$.

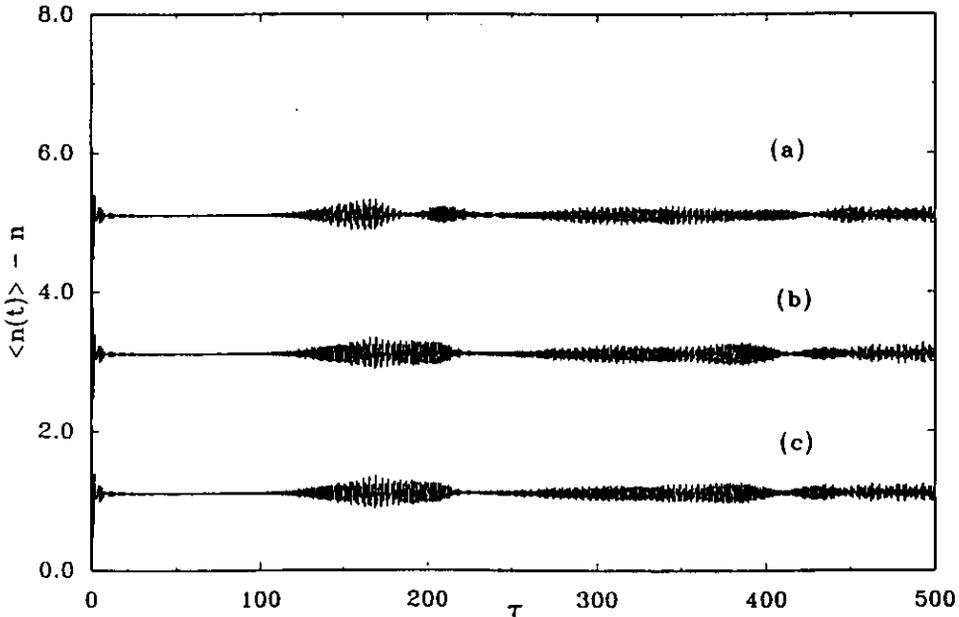


Figura 4.18: Efeito de dessintonia. Distribuição Termocoerente. (a) $\delta_a = 0.12, \delta_b = 0.06, \delta_c = -0.06$ (b) $\delta_a = 0.1, \delta_b = \delta_c = -0.05$ (c) $\delta_a = \delta_b = -0.05, \delta_c = 0.1$. $N_{max} = 75, \bar{n} = 60, g_a = g_b = g_c = 0.5$.

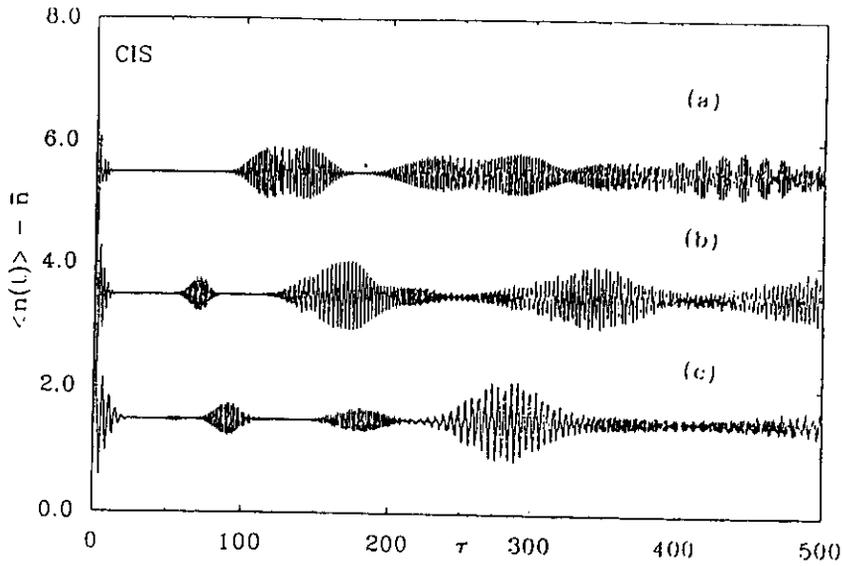


Figura 4.19: Efeito das constantes de acoplamento. Distr. Poisson. (a) $g_a = g_b = g_c = 0.5$ (b) $g_a = 0.5, g_b = 1.0, g_c = 0.5$ (c) $g_a = 0.5, g_b = 0.25, g_c = 0.5$. $N = 180, \bar{n} = 30, \delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.5$.

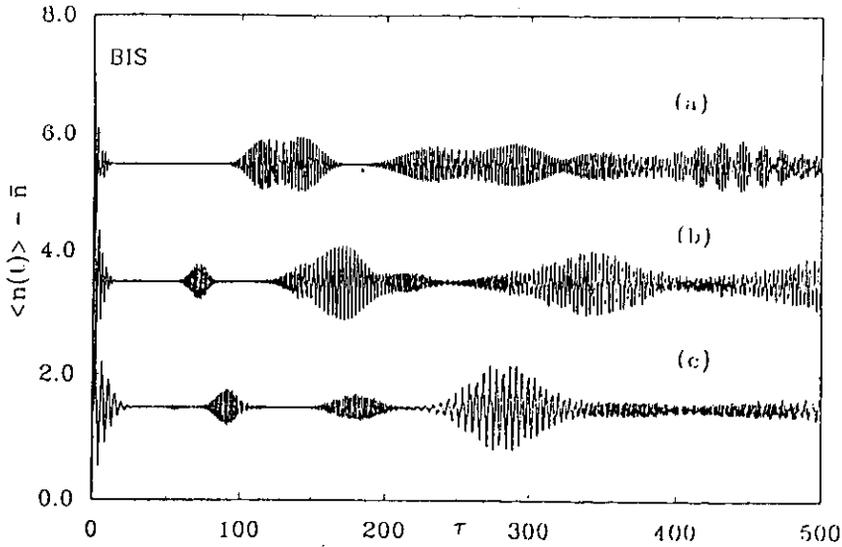


Figura 4.20: Efeito das constantes de acoplamento. Mesmos valores da fig. (4.19) para a distr. Binomial.

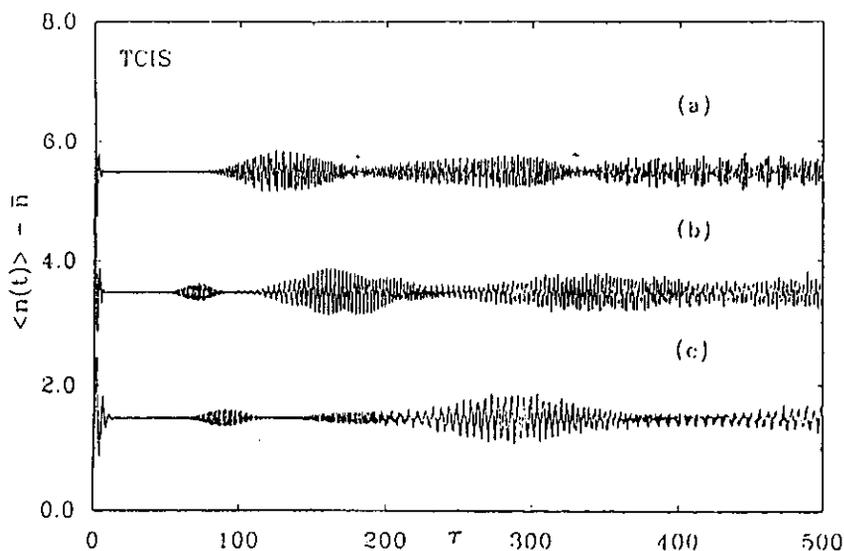


Figura 4.21: Efeito das constantes de acoplamento. Mesmos valores da fig. (4.19) para a distr. Termocoerente com $n_b = 1$.

dessintonia força o aparecimento de colapsos ou modulações em locais outrora inexistentes, fig. (4.18), sendo que a combinação de \bar{n} com os dessintonia pode prolongar por um tempo longo a estrutura de colapsos e reativações.

4.6 Constantes de Acoplamento

As constantes de acoplamento são os fatores que mais realçam a importância ou quantidade de níveis atômicos relevantes. Quando utilizamos acoplamentos iguais ($g_a = g_b = g_c$), a evolução temporal de $\langle n(t) \rangle$ é similar ao caso dois níveis, onde as probabilidades de transição são iguais. A alteração na razão dos acoplamentos faz com que o sistema se desloque na direção do ou dos acoplamentos que aumentaram. As contribuições dos níveis cujo acoplamento é mais forte é maior pois as probabilidades de transição para estes níveis aumenta devido ao fato de os acoplamentos estarem multiplicando termos oscilatórios. Isto altera a estrutura de colapsos e reativações.

Nas figs. (4.19), (4.20) e (4.21) vemos exatamente o que foi escrito acima. Tomando a fig (4.19), vemos em (a) o acoplamento padrão (g 's iguais e em torna da unidade). Em (b), alteramos a razão $g_b/g_c = 1.0$, acoplamentos entre os estados $|b\rangle$ e $|c\rangle$ mais forte, transições se deslocam nesta direção, conseqüentemente as contribuições destes termos aumentam. Na situação oposta, (c), tomamos a razão $g_b/g_c = 0.5$, diminuindo-se a força deste acoplamento. Outros modos tem maior contribuição. As figs. (4.20) e (4.21) apresentam o mesmo comportamento para os casos binomial e termocoerente, respectivamente. Em [18] são apresentados cálculos mais detalhados das razões dos acoplamentos para o caso três níveis. As figuras aqui obtidas estão em acordo com o obtido por [18] para o caso de três níveis, isto é, á alteração de $\langle n(t) \rangle$, porém aqui obtido para quatro níveis. Os cálculos não foram feitos dada a complexidade da expressão (4.37).

4.7 Conclusões

Em resumo podemos dizer:

- Expandimos o modelo de 2-níveis (do tipo JC) obtido no capítulo 2 de modo a abranger 3 e 4-níveis.
- Escrevemos o vetor de estado do sistema átomo-campo. Nosso interesse era estudar a parte referente à interação.
- Com estas duas quantidades calculamos o número médio de fótons no tempo.
- Todo o trabalho desenvolvido até aqui foi para analisar o efeito do aumento do número de níveis em modelos do tipo JC, utilizando-se preparações distintas da radiação intracavidade (Estados Coerentes, Estados Binomiais e Estados Termocoerentes).

Vimos que o aumento do número de níveis por um lado aumenta o tempo entre sucessivos colapsos e reativações, notadamente entre a primeira e segunda modulações, mas por outro introduz justamente modulações entre as já existentes. No capítulo que segue vamos ver como a distribuição de luz comprimida atua no fenômeno.

Capítulo 5

Compressão de Flutuações

No capítulo 3 foram enfocados aspectos principais dos estados coerentes. Neste capítulo faremos o mesmo para os estados comprimidos da radiação com a vantagem de associar ao capítulo 3 alguns cálculos já realizados. Já escrevemos que se o produto das duas componentes em quadratura de fase do campo eletromagnético assume o mínimo valor possível (de acordo com o princípio de incerteza), então estes estados são estados de mínima incerteza. No caso dos estados coerentes, vimos também que as duas componentes em quadratura de fase do campo são caracterizadas por igual indeterminação.

Existe, entretanto, estados do campo que também são estados de mínima incerteza (seu produto respeita a indeterminação de Heisenberg), porém é possível alterar as componentes em quadratura de fase do campo, em outras palavras, variar as componentes da flutuação do campo. Estes estados são conhecidos por estados comprimidos (“squeezed states”) do campo de radiação.

5.1 Introdução aos Estados Comprimidos

Embora os estados coerentes tenham adquirido um status ímpar em óptica quântica desde os trabalhos de Glauber [29], eles são um caso particular, isto é, não são estados genera-

lizados de mínima incerteza. A busca por estados generalizados de mínima incerteza conduziu ao que se convencionou chamar de Estados Comprimidos (Squeezed States)[33], sendo que na literatura encontramos trabalhos usando diferentes terminologias. Encontram-se denominações do tipo: estados de “pacotes de onda pulsante” [42], “novos estados coerentes” [43, 44], “estados coerentes de dois fótons” [22] e “estados comprimidos ideais” [45]. A primeira realização experimental de luz comprimida foi feita por Slusher e colaboradores (1985) [46] onde reduziu-se a flutuação do campo em uma das componentes por cerca de 7 a 10% . Wu e Colaboradores [47] obtiveram o mais alto fator de compressão (“squeezing”) até hoje já registrado, cerca de 63% de redução numa das componentes. Sendo assim, estes estados são muito importantes e aplicações já se verificam em alguns campos da Física, tais como detetores de ondas gravitacionais ¹ [24, 45], melhora de sensibilidade em giroscópios ópticos [23] e, é claro, redução de ruído em sistemas de comunicações ópticos [22]. Mas as aplicações mais recentes dos estados comprimidos são com relação à MQD (Medidas Quânticas não-Destrutivas) ou QNM (Quantum Nondemolition Measurements).

Neste capítulo não pretendemos fazer um estudo completo dos estados comprimidos, mas aplicar as idéias gerais obtidas destes estudos para o caso de um átomo de quatro níveis. O objetivo deste capítulo é estudar o efeito da distribuição de estados comprimidos sobre a evolução temporal de $\langle n(t) \rangle$. Também estudamos o efeito do parâmetro de compressão [11, 31](em uma direção, $\theta = 0$) e tendo este afetado a distribuição, analisamos seus efeitos na evolução temporal de $\langle n(t) \rangle$, isto é, sobre os colapsos e reativações.

Loudon & Knight [33] introduzem de uma maneira simples e eficaz os estados comprimidos como sendo uma transformação das coordenadas de quadratura vistas no capítulo 3,

$$X_{1s} \longrightarrow X_1 e^{-r} \quad (5.1)$$

$$X_{2s} \longrightarrow X_2 e^r, \quad (5.2)$$

¹Um detector de ondas gravitacionais é um sistema macroscópico – geralmente um grande cilindro de Alumínio – sobre o qual o efeito de uma onda gravitacional é muito pequeno, mas muito pequeno mesmo, visto o espaçamento previsto pelo sistema mecânico ser da ordem de 10^{-19} cm, e portanto a indeterminação quântica deste sistema é dessa ordem de grandeza.

e as variâncias são convenientemente modificadas de acordo com

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} \quad (5.3)$$

$$\langle (\Delta X_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r}. \quad (5.4)$$

O resto dos cálculos, excetuando-se alguns, é direto. O método proposto por Yuen [22] é bem mais rigoroso e logo de início define uma transformação canônica nos operadores a e a^\dagger , em particular define-se o operador b como

$$b \equiv \mu a + \nu a^\dagger, \quad (5.5)$$

onde μ e ν são tais que

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1, \quad (5.6)$$

seguinte

$$[b, b^\dagger] = 1, \quad (5.7)$$

sendo que o teorema de Von Neumann assegura que uma transformação canônica pode ser representada como uma transformação unitária como

$$b(a, a^\dagger) = U_L a U_L^\dagger, \quad (5.8)$$

onde $U_L = U_L(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$ é um operador unitário. Estes são os estados chamados “Estados Coerentes de Dois Fótons” (TCS – Two Photon Coherent State). Como no caso coerente, defino um autovalor β de b , de modo que

$$b|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle, \quad (5.9)$$

e o restante são cálculos, projeções, médias, etc.

É usual na introdução de estados comprimidos usar o operador unitário $S(z)$, definido como

$$S(z) = e^{\left(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2\right)}, \quad (5.10)$$

onde $z = re^{i\theta}$, é um número complexo. Verifica-se que o operador de compressão é unitário, isto é:

$$S^+(z) = e^{\left(\frac{z^*}{2}(a)^2 - \frac{z}{2}(a^\dagger)^2\right)} = S^{-1}(z) = S(-z), \quad (5.11)$$

resultando naturalmente em $S(z)S^+(z) = 1$. Como nos outros tratamentos, o operador de compressão induz uma transformação canônica nos operadores a e a^\dagger :

$$b^\dagger(z) = S(z)^\dagger a^\dagger S(z) = \cosh r a^\dagger + e^{i\theta} a \operatorname{senh} r \quad (5.12)$$

$$b(z) = S(z) a S(z) = \cosh r a + e^{-i\theta} a^\dagger \operatorname{senh} r, \quad (5.13)$$

e $[b, b^\dagger] = [a, a^\dagger] = 1$. A verificação analítica de (5.12) e (5.13) é simples. Tomemos o caso de (5.12):

$$\begin{aligned} a^\dagger S(z) &= a^\dagger e^{\left(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2\right)} \\ &= a^\dagger \left(1 + \left(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2\right)^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

da relação entre operadores

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (5.15)$$

definindo as seguintes relações:

$$\left(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2\right) = -A \quad (5.16)$$

$$\left(\frac{z^*}{2}(a)^2 - \frac{z}{2}(a^\dagger)^2\right) = A \quad (5.17)$$

$$a^\dagger = B, \quad (5.18)$$

e aplicando a igualdade da eq.(5.15), têm-se

$$S^+(z)a^\dagger S(z) = a^\dagger + [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), a^\dagger] + \frac{1}{2!} [(-\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 + \frac{z^*}{2}(a)^2), [(-\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 + \frac{z^*}{2}(a)^2), a^\dagger]] + \dots \quad (5.19)$$

Este procedimento, embora não seja difícil, é trabalhoso. Tomando a eq. (5.19) termo a termo, têm-se para o primeiro termo:

$$[(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), a^\dagger] = [(-\frac{z}{2}(a^\dagger)^2), a^\dagger] + [\frac{z}{2}(a)^2), a^\dagger], \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), a^\dagger] &= \frac{z}{2}(aaa^\dagger - a^\dagger aa) = \frac{z}{2}(a + aa^\dagger a - aa^\dagger a + a) \\ [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), a^\dagger] &= za, \end{aligned} \quad (5.21)$$

e para o segundo termo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), a^\dagger]] &= \frac{1}{2!} [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), -z^*a] \\ \frac{1}{2!} [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), a^\dagger]] &= \frac{1}{2!} (-\frac{zz^*}{2} [(a^\dagger)^2, a] + \frac{z^*z^*}{2} [(a)^2, a]) \\ \frac{1}{2!} [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), a^\dagger]] &= \frac{1}{2!} (-\frac{zz^*}{2} (-2(a^\dagger))) \\ \frac{1}{2!} [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), a^\dagger]] &= \frac{1}{2!} zz^* a^\dagger, \end{aligned} \quad (5.22)$$

e para o terceiro termo (que não aparece na eq. (5.19), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} [(-\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 + \frac{z^*}{2}(a)^2), [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), a^\dagger]]] &= \\ \frac{1}{3!} [-\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 + \frac{z^*}{2}(a)^2), [(\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2), -za]] &= \\ \frac{1}{3!} [-\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 + \frac{z^*}{2}(a)^2), z^*za^\dagger] &= \frac{1}{3!} zz^* za. \end{aligned} \quad (5.23)$$

O quarto termo fornece $\frac{1}{4!}(z^*z)^2a^\dagger$, o quinto $\frac{1}{5!}(zz^*zz^*z)a$, e assim sucessivamente, de maneira que

$$S^+(z)a^\dagger S(z) = a^\dagger + za + \frac{1}{2!}zz^*a^\dagger + \frac{1}{3!}zz^*za + \frac{1}{4!}(zz^*)^2a^\dagger + \frac{1}{5!}zz^*zz^*za + \frac{1}{6!}(zz^*)^3a^\dagger + \dots \quad (5.24)$$

Utilizando o fato de que $z = re^{i\theta}$, segue que

$$S^+(z)a^\dagger S(z) = \left(1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \frac{r^6}{6!} + \dots\right) a^\dagger + \left(r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots\right) e^{i\theta} a, \quad (5.25)$$

onde a primeira soma entre parênteses identificamos como sendo a série geradora do $\cosh r$, e a segunda soma, a geradora do $\sinh r$. Portanto, chega-se finalmente a:

$$S^+(z)a^\dagger S(z) = \cosh r a^\dagger + e^{i\theta} \sinh r a, \quad (5.26)$$

que é a forma (5.12). No caso coerente este tipo de transformação fornecia um deslocamento, de acordo com a eq. (3.36). Aqui, o operador de compressão transforma os operadores de aniquilação e criação de acordo com a forma (5.26), isto é, além de um deslocamento há um fator de fase e os eixos são alterados por termos em \sinh e \cosh . Este é o resultado da transformação canônica nas componentes do campo. A esta altura, já se pode, com analogia ao caso coerente, definir um estado comprimido como sendo um estado deslocado do estado de vácuo, cujas componentes em quadratura de fase sejam transformadas de acordo com a eq. (5.2).

5.2 Estados Comprimidos: notação de Caves

Foi Caves [45] quem primeiro definiu os estados comprimidos como “Ideal Squeezed States” (estados comprimidos ideais), através da relação:

$$|\alpha, z\rangle = D(\alpha)S(z)|0\rangle. \quad (5.27)$$

Um estado comprimido é gerado então pela ação do operador $S(z)$ ao estado de vácuo seguido sucessivamente da ação do operador deslocamento, $D(\alpha)$. Assim, o que precisamos

saber para calcular quantidades de interesse são as formas (3.36) e (5.26). Algumas grandezas são independentes do parâmetro de compressão,

$$\langle z, \alpha | a | \alpha, z \rangle = \alpha, \quad \langle z, \alpha | a^\dagger | \alpha, z \rangle = \alpha^*, \quad (5.28)$$

obviamente, $\langle z, \alpha | \alpha, z \rangle = 1$, normalizado. O número médio de fótons é dado por ($\hat{n} \equiv a^\dagger a$)

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle z, \alpha | \hat{n} | \alpha, z \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r, \quad (5.29)$$

a contribuição da primeira parte à direita associada com a amplitude coerente α , enquanto que a segunda contribuição é originada da compressão do vácuo. Uma forma semelhante surge quando calculamos o valor médio de aa , i. é

$$\langle aa \rangle = \alpha^2 - e^{i\theta} \sinh r \cosh r. \quad (5.30)$$

Os dois resultados acima entram no cálculo das médias e variâncias dos operadores de quadratura. Como em (5.29), a variância no número médio de fótons é obtida diretamente, por um cálculo similar, obtendo-se:

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = |\alpha|^2 \left[e^{-2r} \cos^2\left(\phi - \frac{\theta}{2}\right) + e^{2r} \sin^2\left(\phi - \frac{\theta}{2}\right) \right] + 2 \sinh^2 r \cosh^2 r, \quad (5.31)$$

e sua variável conjugada, a fase é

$$(\Delta \phi)^2 = \frac{\left[e^{-2r} \sin^2\left(\phi - \frac{\theta}{2}\right) + e^{2r} \cos^2\left(\phi - \frac{\theta}{2}\right) \right]}{4|\alpha|^2} \quad (5.32)$$

Finalmente, o mais importante para este capítulo, a distribuição de Probabilidade que rege o comportamento dos fótons é obtida do módulo ao quadrado da projeção ($p_n = |\langle n | \alpha, z \rangle|^2$):

$$\langle n | \alpha, z \rangle = (n! \cosh r)^{-1/2} \left[e^{i\theta} \tanh r \right]^{n/2} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + \alpha^* e^{i\theta} \tanh r)} H_n \left[\frac{\alpha + \alpha^* e^{i\theta} \tanh r}{(2e^{i\theta} \tanh r)^{1/2}} \right]. \quad (5.33)$$

Nota-se aqui que $\langle n | \alpha, z \rangle$ possui analiticamente uma feição bastante diferente da distribuição de Poisson obtida no capítulo 3. A diferença fundamental surge devido à presença de H_n

(polinômio de Hermite de grau n) que produz uma oscilação na parte lateral superior (valores de $n > \bar{n}$), da distribuição. Fato este que produzirá “ecoos” na reativação como será visto nas figuras. O cálculo da expressão (5.33) foi primeiramente obtido por Yuen [22]. É bastante exaustivo e o seu desenvolvimento detalhado não será apresentado aqui. Obviamente, fazendo-se $r = 0$ ($z = 0$) obtêm-se os estados coerentes e todo o conjunto de valores que o caracteriza, como era de se esperar. Antes de prosseguirmos no tratamento da distribuição dos estados comprimidos, vamos ver como eles são representados no plano das Amplitudes complexas.

5.2.1 Representação de $|\alpha, z\rangle$ no plano das amplitudes complexas

A representação no plano complexo no caso dos estados comprimidos pode ser melhor entendida comparando-se com o caso coerente. O deslocamento α , é igual ao caso coerente, porém rodado de um ângulo:

$$X_1 + iX_2 = (X_{1s} + iX_{2s}) e^{i\theta}, \quad (5.34)$$

e para um estado comprimido temos então

$$\langle X_1 + iX_2 \rangle = \langle X_{1s} + iX_{2s} \rangle e^{i\theta} = \alpha, \quad (5.35)$$

como já vimos nas eqs. (5.28) e (5.29).

$$\Delta X_{1s} = \frac{1}{2} e^r, \quad \Delta X_{2s} = \frac{1}{2} e^{-r}, \quad (5.36)$$

resultado que Loudon & Knight [33] começam a discussão dos estados comprimidos.

No plano das amplitudes complexas, o círculo representativo de um estado coerente se deforma em uma elipse de mesma área (transformação canônica) cujos eixos principais são paralelos à X_{1s} e X_{2s} e são dados por ΔX_{1s} e ΔX_{2s} . Antes de aostrar o esquema, como no cap 3, vamos escrever a evolução temporal dos estados comprimidos. O operador de compressão, $S(z)$, evolui no tempo segundo

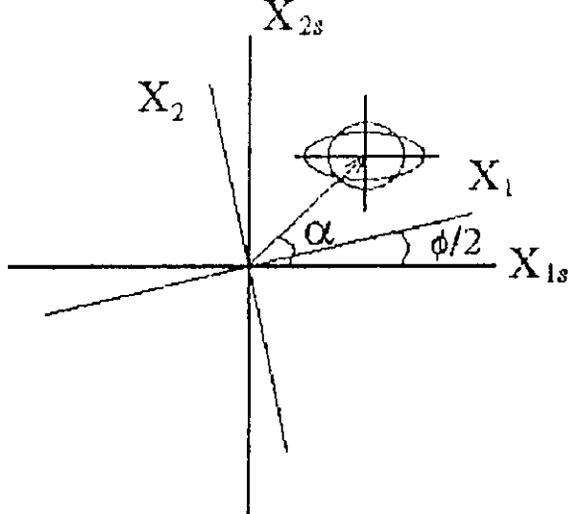


Figura 5.1: Representação dos estados $|\alpha, z\rangle$ no plano das amplitudes complexas. Comparação com os estados coerentes. Os estados de vácuo na origem são transladados por α , rodados de $\frac{\theta}{2}$ e o círculo que representava a incerteza é alterado para uma elipse, mantendo a área original (transformação canônica no espaço de fase de duas dimensões).

$$e^{-(i\omega t)a^\dagger a} e^{\frac{z}{2}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}(a)^2} e^{(i\omega t)a^\dagger a} = e^{\frac{z}{2}e^{-2i\omega t}(a^\dagger)^2 - \frac{z^*}{2}e^{2i\omega t}(a)^2} = S(z e^{-2i\omega t}), \quad (5.37)$$

seguinto portanto que um estado comprimido evolui no tempo de acordo com

$$e^{-(i\omega t)a^\dagger a} |\alpha, z\rangle = D(\alpha e^{-i\omega t}) S(z) (z e^{-2i\omega t}), \quad (5.38)$$

uma evolução no plano complexo com uma frequência duas vezes maior que a da amplitude complexa.

Os estados comprimidos são importantes não somente pelo seu interesse teórico como estados de mínima incerteza generalizados, mas também pela sua obtenção em experimentos de geração paramétrica e “four-wave” mixing (mistura de quatro-ondas) [33].

A aproximação seguida acima é oriunda da utilizada por Caves [45] em seus estados comprimidos ideais. Na verdade qualquer aproximação utilizada para estados comprimidos e coerentes fazem parte de um grupo de transformações chamadas “Transformações Canônicas

Lineares em Mecânica Quântica”, que no fundo são transformações consistindo de produtos de compressão, rotações e translações. Devido a este fato, o mais importante é saber como os operadores de aniquilação e criação se transformam.

Já tendo visto algumas propriedades dos estados comprimidos, vamos na seção seguinte estudar o efeito da distribuição destes estados no fenômeno do colapso-reativação.

5.3 Estados Comprimidos: efeitos no colapso-reativação

Excetuando o efeito do parâmetro de compressão, o efeito da distribuição de estados comprimidos é muito parecido com o das outras distribuições. O único fato a salientar é que a distribuição dos estados comprimidos oscila, uma característica relacionada ao polinômio de Hermite. Simplificando a expressão (5.33), isto é, tomando-se a compressão máxima - eixo menor da elipse alinhado com X_{1s} , $\theta = 0$, obtêm-se

$$p_n = |\langle n|\alpha, z\rangle|_{\theta=0}^2 = \frac{1}{\mu n!} \left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^n H_n \left[\frac{\beta}{(2\mu)^{1/2}} \right] e^{-\beta^2(1-\frac{\nu}{\mu})}, \quad (5.39)$$

onde $\mu = \cosh r$, $\nu = \sinh r$ e $\beta = |\alpha|(\mu + \nu)$. Obviamente, se $\theta = 0$, $z = \pm|r|$. Para estudo do efeito do parâmetro de compressão na distribuição e consequentemente no colapso-reativação, tomamos uma parametrização alternativa, comum na literatura [31, 11, 48]:

$$\mu = \frac{s+1}{2\sqrt{s}}; \quad \nu = \frac{s-1}{2\sqrt{s}}, \quad (5.40)$$

vê-se que

$$\mu^2 - \nu^2 = \cosh^2 r - \sinh^2 r = 1. \quad (5.41)$$

Assim, p_n resulta em

$$p_n = \frac{2\sqrt{s}}{s+1} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^n H_n^2 \left[\frac{\sqrt{2}|\alpha|s}{(s^2-1)^{1/2}} \right] e^{-\frac{2|\alpha|^2 s}{s+1}}, \quad (5.42)$$

que é a expressão utilizada para $|p_n|^2$ em $\langle n(t) \rangle$. No caso limite em que $r \rightarrow 0$ ($s = 1$) a forma (5.42) recai na distribuição de Poisson:

$$\lim_{r \rightarrow 0} p_n = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{n! \cosh r} \left(\frac{\tanh r}{n} \right)^2 H_n^2 \left[\frac{|\alpha| e^r}{\sqrt{2} \cosh r \operatorname{senhr}} \right] e^{-|\alpha|^2 e^{2r} (1 - \tanh r)}, \quad (5.43)$$

para as funções hiperbólicas, o cálculo é simples:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{senhr} = \lim_{r \rightarrow 0} \tanh r = r, \quad (5.44)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \cosh r = 1, \quad (5.45)$$

a exponencial também é trivial:

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^{nr} = 1. \quad (5.46)$$

De acordo com a representação em série de potência dos polinômios de Hermite (Arfken [49]), temos:

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{2n!}{(n-2)!2!} (2x)^{n-2} + \frac{4n!}{(n-4)!4!} (2x)^{n-4} \cdot 3 + \dots, \quad (5.47)$$

assim, vamos tomar o termo dominante da série, $(2x)^n$. Substituindo em p_n ,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} p_n &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{r}{2} \right)^n \left(\frac{2|\alpha| e^r}{\sqrt{2r}} \right)^{2n} e^{-|\alpha|^2 e^{2r} (1-r)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{r}{2} \frac{2|\alpha|^2 e^r}{r} \right)^n e^{-|\alpha|^2 e^{2r} (1-r)}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

resultando finalmente em

$$\lim_{r \rightarrow 0} p_n = \frac{1}{n!} (|\alpha|^2)^n e^{-|\alpha|^2}, \quad |\alpha|^2 = \bar{n}. \quad (5.49)$$

A fig. (5.2) mostra o aspecto da distribuição dos estados comprimidos com $N_{max} = 100$, $|\alpha|^2 = 49$ e o parâmetro de compressão $s = 51$. O fato “novo” introduzido nesta distribuição em relação às demais é o comportamento oscilatório, ocorrido devido ao “overlap” no espaço de fase entre a elipse comprimida, fig. (5.1), representando o estado comprimido, e a banda

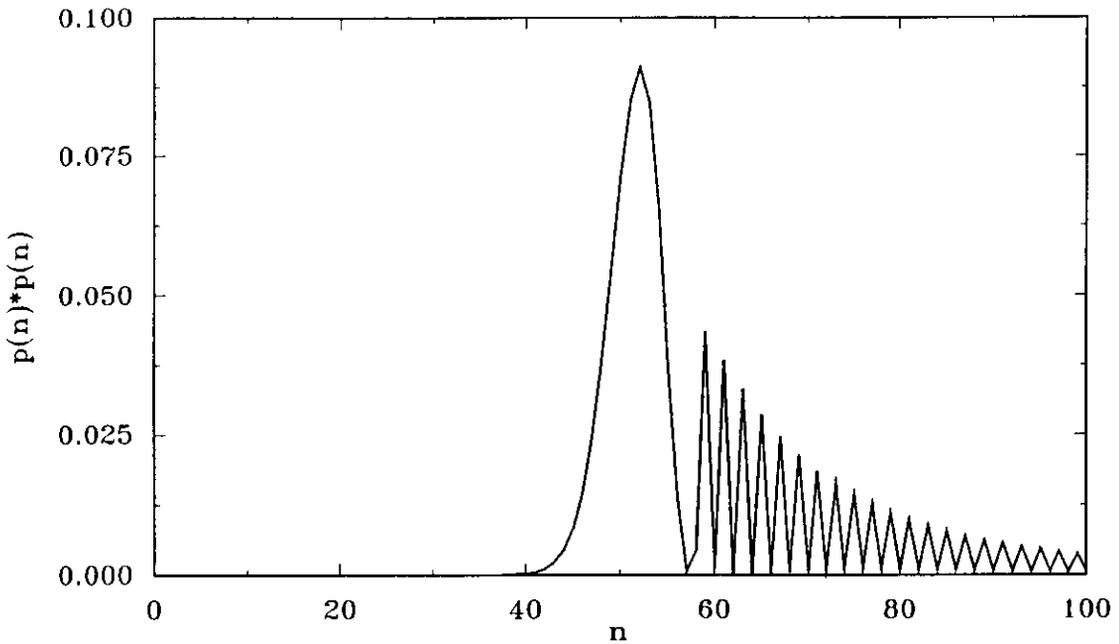


Figura 5.2: Distribuição de Probabilidade de número de ocupação para um Estado Inicial Comprimido. $N_{max} = 100$, $|\alpha| = 7$, $s = 51$ (parâmetro de compressão).

circular de n -ésima ordem descrevendo o n -ésimo número de estado', segundo Schleich [31]. Na expressão (5.39) este comportamento se revela na "competição entre o termo referente ao polinômio de Hermite *versus* o termo exponencial, como veremos no estudo do efeito do parâmetro s sobre os colapsos- reativações. Ainda com relação à fig. (5.2), podemos observar que a distribuição de estados iniciais comprimidos se assemelha com a distribuição de estados termocoerentes, porém o alargamento se dá apenas em um dos lados (para $n > \bar{n}$, assimétrica) e na forma de picos, enquanto que no caso termocoerente o alargamento é de ambos os lados (simétrica) e de forma contínua.

Nas figs. (5.3) e (5.4) temos a comparação dos casos Estados Iniciais Coerentes (5.3) com Estados Iniciais Comprimidos (5.4), para os mesmos valores de N_{max} , $|\alpha|^2$, δ 's e g 's. Em (b) e (c) temos 3 e 4 níveis, respectivamente. Nota-se que o efeito do número de níveis é de aumentar o tempo entre sucessivos colapsos reativações, como observado anteriormente para as outras distribuições, só que a introdução de "ecos" (modulações) é maior, um efeito da distribuição comprimida. Para o caso de dois níveis, ilustramos a fig. (5.4) (a), sem levar em conta o termo $\hat{A} \cdot \hat{A}$ no Hamiltoniano [11, 48, 33].

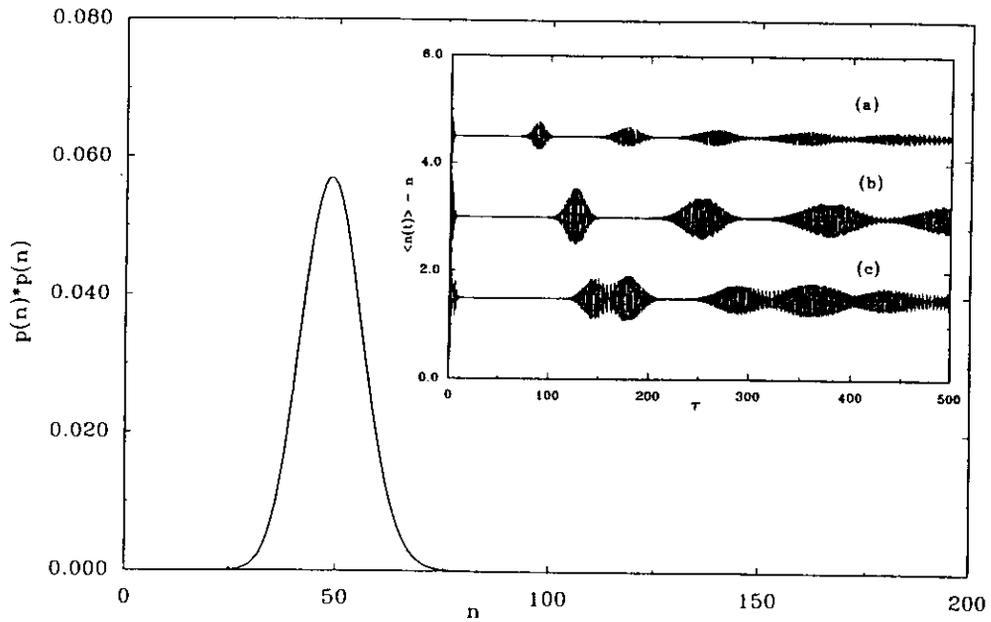


Figura 5.3: $N_{max} = 200$, $s = 1$ (Poisson), $|\alpha|^2 = \bar{n} = 49$, $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.0$, (a) $g_a = 0.5$, $g_b = g_c = 0.0$, 2-níveis (b) $g_a = g_b = 0.5$, $g_c = 0$, 3-níveis (c) $g_a = g_b = g_c = 0.5$, 4-níveis.

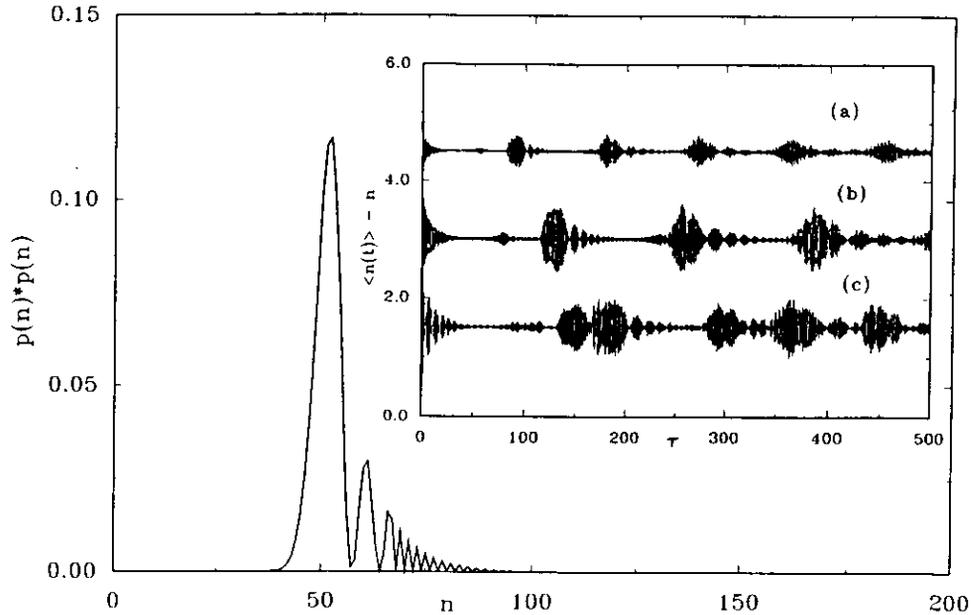


Figura 5.4: Distribuição de Estados Comprimidos. Mesmo conjunto de valores da fig. (5.3) com o parâmetro de compressão $s = 21$.

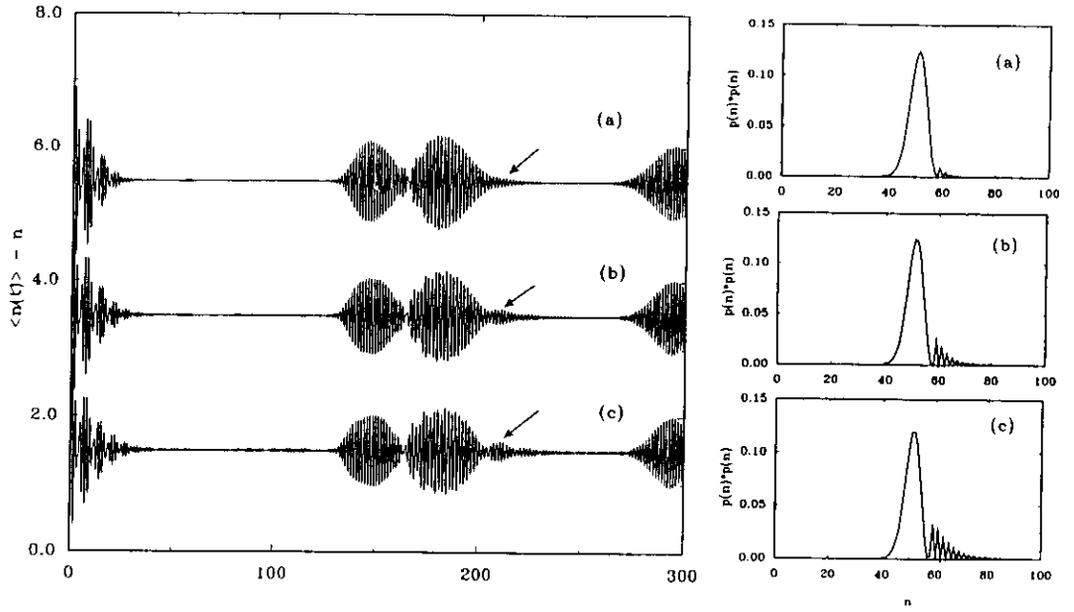


Figura 5.5: $N_{max} = 100$, $|\alpha| = 7$, $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.0$, $g_a = g_b = g_c = 0.5$. (a) $s = 8$ (b) $s = 13$ (c) $s = 18$

5.3.1 Efeito do Parâmetro de Compressão

O efeito do parâmetro de compressão, s , pode ser melhor compreendido olhando-se as figs. (5.5), (5.6), (5.7) e analisando-se a eq. (5.39). Na eq. (5.39) o termo que causa o decaimento exponencial é diretamente afetado por s . Quando $s \rightarrow \infty$, $\frac{\nu}{\mu} = \frac{s-1}{s+1} \rightarrow 1$ e $e^{-\beta^2(1-\nu/\mu)} \rightarrow 1$, resultando no predomínio do comportamento ondulatório do polinômio de Hermite na função de distribuição. Isto significa informação exata da componente comprimida e perda total na outra componente.

A ilustração deste fato pode ser observada na fig. (5.5). Tomando um conjunto fixo de valores de N_{max} , $|\alpha|$ ($\bar{n} = |\alpha|^2 + (s-1)^2/4s$), g 's e δ 's, variamos o parâmetro de acordo com (a), (b) e (c). Em (a) $s = 8$, pouca compressão, a evolução temporal se assemelha ao caso coerente. Em (b), o aumento do parâmetro começa a evidenciar o aparecimento de modulações secundárias (chamadas de “echoes” (ecos) na literatura), sendo que em (c) sua influência é mais notada.

Na fig. (5.6) tomamos $N_{max} = 200$, $|\alpha| = 8$, $g_a = g_b = g_c = 0.5$ e dessintonias nulas (δ 's = 0). Os valores de s são (a) 4, (b) 21 e (c) 51 com τ (em unidades de Rabi) indo

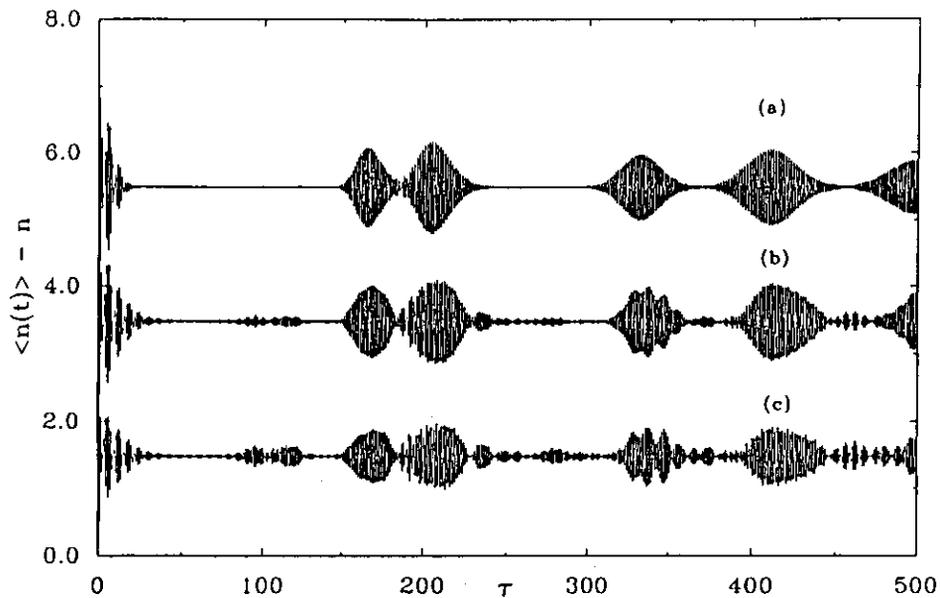


Figura 5.6: $N_{max} = 200$, $g_a = g_b = g_c = 0.5$, $|\alpha| = 8$, $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.0$, (a) $s = 4$ (b) $s = 21$ (c) $s = 51$

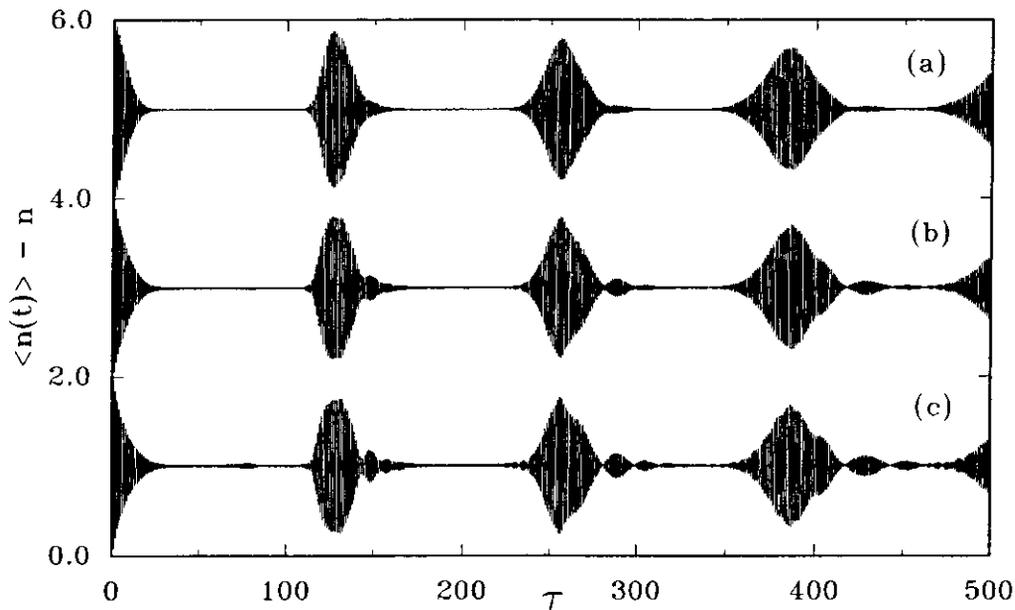


Figura 5.7: $N_{max} = 100$, $g_a = g_b = 0.5$, $g_c = 0$, três níveis. $|\alpha| = 7$, $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.0$, (a) $s = 8$ (b) $s = 13$ (c) $s = 18$

até 500. Em (a) não há influência de s e a distribuição recai no caso coerente. Em (b) $s = 21$, a influência é significativa, ocorrendo perda de simetria das modulações. Em (c) temos o mesmo quadro apresentado em (b) porém intensificado, apresentando modulações generalizadas. Os colapsos delimitam as regiões onde há um cancelamento efetivo de fases (superposição em senos e cossenos muito próximos de zero).

A fig. (5.7) é o caso de 3 níveis ($g_c = 0$) com o mesmo conjunto de valores da fig (5.5) e τ indo até 500. A informação relevante nesta figura é o “superamortecimento” do primeiro colapso, conforme s aumenta. Esta queda acentuada do primeiro colapso é explicada pelos picos da distribuição comprimida. Os picos fazem com que fatores de fase muito próximos alternem sua contribuição repentinamente. Dessa forma temos o decaimento da fig (5.7)(c).

5.3.2 Influência de $|\alpha|$

O número médio de fótons, \bar{n} se relaciona com $|\alpha|$ via

$$\bar{n} = |\alpha|^2 + \operatorname{senh}^2 r = |\alpha|^2 + \frac{(s-1)^2}{4s}, \quad (5.50)$$

isto é, \bar{n} depende de $|\alpha|$ e de s . A contribuição da parte referente à compressão, segundo termo no lado direito da igualdade (5.50), vai desde uns poucos fótons (pequena compressão) até um número da ordem do próprio $|\alpha|^2$ (alta compressão). Sendo assim, \bar{n} não é o parâmetro indicado para utilização no estudo do número de fótons, mesmo porque não aparece na expressão para p_n , eq. (5.39). Assim, concluímos que o estudo sobre o número médio de fótons é consistente quando realizado sobre a contribuição coerente da eq. (5.50), ou seja, $|\alpha|$.

Em relação à $\langle n(t) \rangle$, a fig. (5.8) mostra para os valores dos parâmetros indicados o efeito de $|\alpha|$ sobre os colapsos-reativações para regimes em que $N_{max} \gg |\alpha|$, $|\alpha|$ pequeno. Este comportamento é análogo ao das outras distribuições para o mesmo regime, não havendo importância do tipo de preparação também neste caso.

Conforme aumentamos $|\alpha|$, os ecos (colapsos-reativações) tornam-se evidentes, distintos, de acordo com as figs. (5.8)(b) e (5.8)(c). Os três pequenos quadros, (a), (b) e (c), mos-

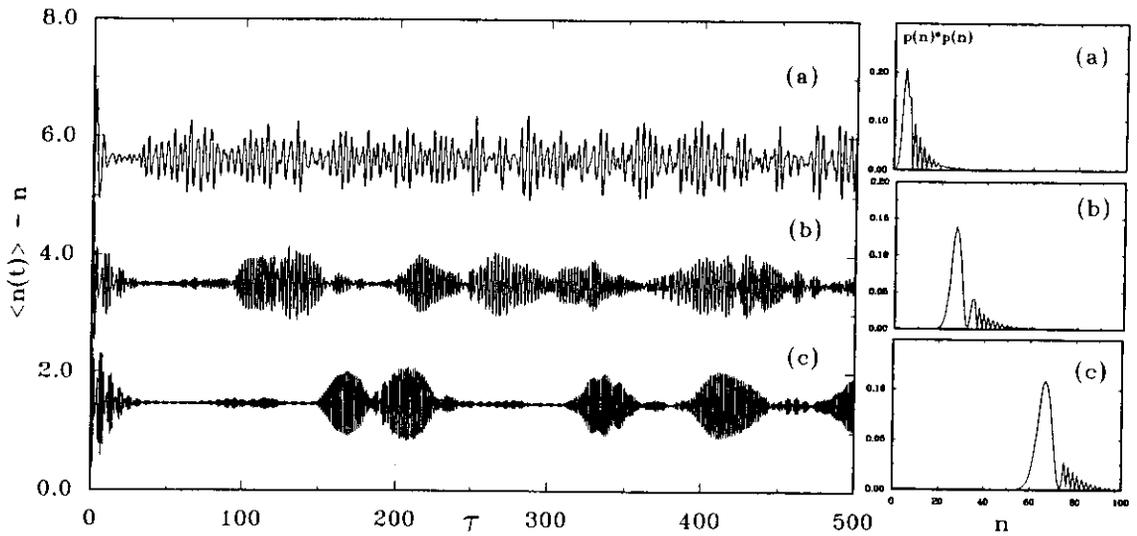


Figura 5.8: $N_{max} = 100$, $s = 21$, efeito de $|\alpha|$. $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.0$, $g_a = g_b = g_c = 0.5$ (a) $|\alpha| = 2$ (b) $|\alpha| = 5$ (c) $|\alpha| = 8$

tram que a intensidade relativa das oscilações (pequenos picos) diminui à medida em que $|\alpha|$ aumenta. É que o “peso” do termo referente à compressão na expressão (5.50) diminui relativamente à $|\alpha|^2$.

5.3.3 Dessintonia

Como vemos na comparação das figs. (5.9) e (5.10), a dessintonia afeta o colapso reativação, mais distintamente no caso 4-níveis, (5.9)(c) e (5.10)(c).

O cancelamento de fases em $\tau \simeq 350$ a 400 se sobrepõe aos ecos. Um resultado semelhante às outras distribuições, como era de se esperar.

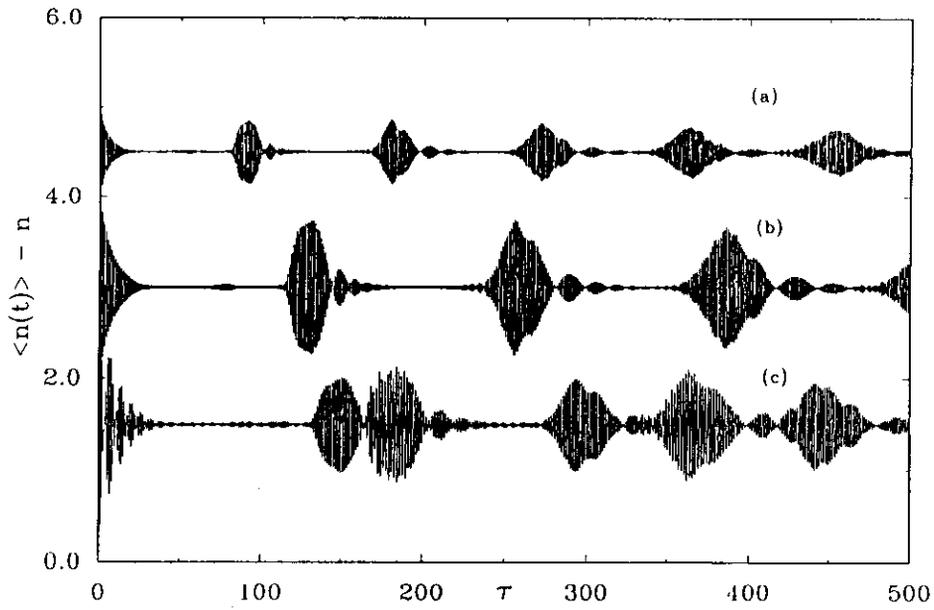


Figura 5.9: Efeito de dessintonia. $N_{max} = 200$, $s = 21$, $|\alpha| = 7$, $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.0$, (a) $g_a = 0.5$, $g_b = g_c = 0.0$, 2-níveis (b) $g_a = g_b = 0.5$, $g_c = 0$, 3-níveis (c) $g_a = g_b = g_c = 0.5$, 4-níveis.

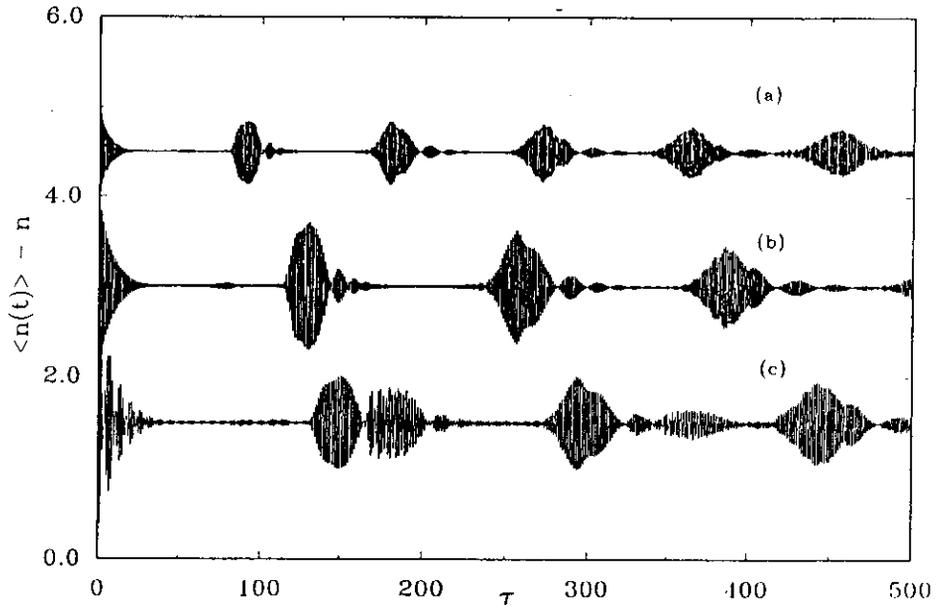


Figura 5.10: Efeito de dessintonia. $N_{max} = 200$, $s = 21$, $|\alpha| = 7$, (a) $\delta_a = 0.15$, 2-níveis (b) $\delta_a = \delta_b = 0.15$, 3-níveis (c) $\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0.15$, 4-níveis.

Capítulo 6

Considerações Finais

Nesta Tese abordamos o problema do Colapso e Reativação, focalizando principalmente a sua importância realtiva, no caso do campo de radiação intracavidade estar interagindo com um átomo de três níveis e/ou de quatro níveis. É também estudado o efeito da preparação inicial. Neste sentido, utilizamos quatro tipos distintos de preparações, a saber: Distribuição de Probabilidades de Estados Iniciais *Coerentes*, *Termocoerentes*, *Binomiais* e *Comprimidos*. Fizemos um estudo sistemático baseado em três possíveis configurações de estados atômicos: átomos de dois, três e quatro níveis. Para cada um destes tipos de átomos foi analisado o efeito do número máximo de fótons (N_{max}) no interior da cavidade; o número médio de fótons iniciais (\bar{n}) em $\tau = 0$; a importância relativa da razão \bar{n}/N_{max} mesmo para o caso das distribuições Coerentes e Termocoerentes onde não temos explicitamente a quantidade N_{max} . Foi Também realizado cálculos, buscando extrair a importância da intensidade dos acoplamentos, g_i 's, uma vez que para acoplamentos fortes o processo multifotônico está automaticamente colocado no modelo. Neste caso, o modelo difere do caso de átomos de dois níveis, onde a obtenção de dois fótons somente é possível levando-se em conta o termo quadrático de primeira ordem no Hamiltoniano, obtido através da inclusão de termos de ordem quadrática nos operadores do campo, a e a^\dagger . Não foi deixado de lado o estudo do efeito da dessintonia. A comparação entre os resultados obtidos para átomos de quatro níveis e aqueles de três e dois níveis é feito em cada uma das figuras apresentadas na seção correspondente. Esta comparação somente não é efetuada no caso dos estados comprimidos, uma

vez que a colocação de $g_c = g_b = 0$ resultando no caso de átomos de dois níveis, elimina do modelo em questão os termos responsáveis por um processo de dois ou mais fótons, necessários na descrição da dinâmica fotônica em questão, embora em alguns casos da literatura [48, 11] seja utilizada a distribuição de Estados Comprimidos em átomos de dois níveis para explicar características de uma distribuição caótica de fótons intracavidade [48] ou mesmo o fenômeno do casamento de fases das oscilações de Rabi [11], sem a presença do termo quadrático gerador de dois fótons.

Em relação aos resultados obtidos, em linhas gerais podemos dizer:

1. A solução analítica dada ao problema teve a grande vantagem de permitir a realização de cálculos fora da ressonância e de utilizar valores arbitrários para as intensidades dos acoplamentos radiação-matéria. Também tivemos a liberdade de cálculo com N_{max} , número máximo de fótons no interior da cavidade, livre. Em outras palavras, em nossos resultados numéricos podemos entrar com N_{max} qualquer para as máquinas existentes aqui no nosso Instituto. Tal resultado, para efeito de comparação, só pode ser obtido no modelo de Li [21] para $N_{max} = 10$. Valores superiores a este tornam os cálculos, com nossas matrizes, proibitivos, no que diz respeito a tempo de CPU bem como em memória utilizada.
2. Os resultados analíticos são realizados de forma simples e de fácil utilização, conforme se pode ver nos capítulos quatro e apêndices A e B. Os resultados são de fácil extensão para átomos de 5 ou mais níveis.
3. O aumento do número de níveis energéticos atômicos participantes do processo de interação campo de radiação-matéria tende a aumentar o tempo do primeiro colapso, como figura referência podemos citar a figura (4.5).
4. Tanto N_{max} quanto \bar{n}/N_{max} têm um papel importante na existência e amplitude dos tempos de colapsos, bem como no número de colapsos. O número de colapsos tende a aumentar com \bar{n}/N_{max} . Para $\bar{n}/N_{max} \ll 1$ a tendência é desaparecer qualquer indício do fenômeno do colapso e reativação; tornando-se cada vez mais pronunciado a medida que aumentamos a razão \bar{n}/N_{max} . O aumento de \bar{n} tende a evidenciar cada vez mais a existência de colapsos.

5. As constantes de acoplamentos, g_i 's, são fatores multiplicativos de termos envolvendo senos e cossenos dos fatores de fase. Assim sendo afetam diretamente o “peso” (probabilidade de transição) destas contribuições, ou seja, afetam fortemente as quantidades $|a_n(t)|^2$, $|b_{n+1}(t)|^2$, $|c_{n+2}(t)|^2$ e $|d_{n+3}(t)|^2$. Um fato que não podemos deixar de mencionar é que são os g_i 's que estão fornecendo informações sobre o número de níveis atômicos efetivamente participantes do processo. Nos nossos cálculos, por exemplo, fazer $g_c = 0$ implica em estar trabalhando com um átomo de três níveis.
6. As dessintonias (“detunings”), que atuam diretamente sobre os fatores de fase, têm grande importância no alinhamento geral de fase, necessário ao fenômeno de colapso e reativação. Sua introdução embora fenomenológica (ajustes na cavidade, efeito Stark, colisões, etc.), têm sua importância aumentada enormemente mesmo para valores relativamente pequenos. Em outras palavras, dessintonias nulas significa ressonância e dessintonias não nulas significa fora da ressonância e tendendo a um processo multifotônico. Vimos que dessintonias não nulas alteram significativamente a estrutura dos colapsos e reativações e principalmente os “ecos”, no caso de Estados Comprimidos, conforme observamos nas figuras (4.14), a (4.18) do capítulo quatro e nas figuras (5.9) e (5.10) do capítulo cinco. Pequenas alterações nos valores das dessintonias podem levar ao cancelamento completo de um eco e/ou modulação.

Para caracterizar melhor a natureza estritamente quântica do fenômeno do colapso e reativação, nossos cálculos foram ampliados para incluir quatro tipos diferentes de preparação do estado inicial do sistema: utilizamos de uma distribuição característica de uma base de estados coerentes (Distribuição Poissoniana), uma das primeiras a ser calculada e utilizada em Óptica Quântica, sendo portanto bem conhecida aos teóricos e experimentais que trabalham nesta área. Também utilizamos uma outra distribuição a ela associada, que vem de uma base de estados termocoerentes (Distribuição Termocoerente), buscando aqui pesquisar o efeito da radiação de corpo negro existente na cavidade devido ao fato de estarmos trabalhando com temperaturas diferentes de zero Kelvin. A terceira distribuição utilizada

foi a de estados binomiais (Distribuição Binomial). Usamos esta base de estados pelo fato dela interpolar estados que vão do coerente aos estados do número de ocupação. Em outras palavras, dependendo da escolha de \bar{n}/N_{max} podemos ir desde uma preparação coerente até uma preparação de estado inicial caótico. Finalmente para podermos reduzir a perda de informação, i. é, para termos menor flutuação numa das variáveis conjugadas, por exemplo, a variação do número médio de fótons ou variação da fase (variável conjugada à $\langle(\Delta n)^2\rangle$), fizemos uso de uma série e Estados Comprimidos (“Squeezed States”), conforme Yuen [22].

Em relação aos diferentes tipos de distribuições iniciais, podemos dizer:

1. Para $\bar{n}/N_{max} \ll 1$, as três primeiras apresentam o mesmo resultado, enquanto que na quarta, a de estados comprimidos, nada podemos afirmar, já que seu maior efeito é a existência de ecos, neste caso impossível de se observar.
2. Para $\bar{n}/N_{max} \simeq 0.5$ todas elas apresentam comportamentos semelhantes, com exceção dos ecos observados na preparação inicial com estados comprimidos.
3. No caso da distribuição termocoerente, os resultados concordam com a expectativa. Isto quer dizer, os fótons térmicos tendem a aumentar as flutuações, eliminando o casamento de fases e conseqüentemente os colapsos, conforme a fig. (4.7).
4. O parâmetro de compressão (s) introduz oscilações na distribuição de estados comprimidos, que amplifica certos coeficientes da função de onda do sistema em detrimento de outros, com o conseqüente surgimento de ecos depois de cada reativação. O número e a intensidade dos ecos aumentam com o aumento de s .
5. $s = 1$ significando compressão nula, facilmente reproduzido, conduzindo aos resultados da distribuição de estados coerentes.

Com relação às perspectivas, pode-se introduzir um absorvedor saturável na cavidade, perdas (representadas por um termo do tipo $e^{-\gamma t}$) e para aproximar mais o sistema em questão de um laser pode-se acoplar outros níveis entre si, não ficando restrito à interação n , $n + 1$, ficando os níveis intermediários como metaestáveis..

Os processos que envolvem mais de um átomo não são difíceis, mas requerem muita álgebra. Por exemplo: 1 átomo de dois níveis na aproximação JC fornece um sistema de 2×2 equações. A mesma situação para dois átomos fornece 4×4 equações a serem resolvidas. Se tomarmos um átomo de 3 níveis, teremos 3×3 equações. Já para 2 átomos de 3 níveis (trabalho em andamento) são necessárias 9×9 equações. Se o átomo envolvido for de 4-níveis, como o representado aqui, teremos 4×4 equações. Para dois átomos de 4 níveis teremos uma matriz de 16×16 em mãos a resolver. Seguindo nesta linha, trabalhar com alguns átomos dentro de uma cavidade, mesmo que de apenas dois níveis resulta em um sistema de diversas equações para ser resolvido, chegando rapidamente a ser analiticamente inviável. Os cálculos envolvem operações com matrizes que facilmente ultrapassam as nossas possibilidades computacionais (por exemplo, 8 átomos de 4 níveis geram uma matriz de $4^8 \times 4^8 = 4.2 \times 10^9$ e poucos computadores hoje em dia possuem memória suficiente para poder resolver uma matriz desta ordem) atuais, sem levar em conta tempo de CPU. Podemos concluir, com relação ao número de átomos, que a inclusão de mais um ou dois átomos, tanto para o caso de 3 quanto para o de 4 níveis embora factível, requer trabalho excessivo e resultados preliminares não estão dando aparência de um ganho apreciável. Aqui requer mais investigação.

Processos envolvendo dois fótons requerem a introdução de um termo do tipo

$$g_i(a)^2 A_i^\dagger A_j + h.c$$

no Hamiltoniano de interação para sistema de dois níveis. [22, 37]. Embora não seja recente sua inclusão no Hamiltoniano de interação [37], estudos detalhados desta interação estão começando a se intensificar somente agora. Alterações algébricas devido à esta inclusão não são difíceis, porém a nível computacional é necessário uma sofisticação maior. Processos de dois fótons são responsáveis, por exemplo, pela geração dos estados comprimidos, ressonância e fluorescência [33, 9] e experimentos de misturas de quatro modos (“four wave mixing”) [33]. Sistemas atômicos em configuração λ (lambda) [18] têm sido sugeridos como fontes naturais de “squeeze” [33]. Talvez a direção mais interessante de expansão do sistema estudado seja a inclusão do termo referente à processos de dois fótons.

Apêndice A

Modelo Hamiltoniano: Equações de movimento e suas soluções

No capítulo 4 é apresentado o seguinte modelo Hamiltoniano para interação de um átomo de quatro níveis com campo monomodo ($\hbar = c = 1$):

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_R = \sum_{i=a,b,c,d} \omega_i A_i^\dagger A_i + \omega_0(a^\dagger a + 1). \quad (\text{A.1})$$

A parte de interação era dada por:

$$H_I = g_a a A_a^\dagger A_b \exp^{-i\delta_a t} + g_b a A_b^\dagger A_c \exp^{-i\delta_b t} + g_d a A_c^\dagger A_d \exp^{-i\delta_c t} + h.c. \quad (\text{A.2})$$

com $\delta_a = \omega_0 - (\omega_a - \omega_b)$, $\delta_b = \omega_0 - (\omega_b - \omega_c)$ e $\delta_c = \omega_0 - (\omega_c - \omega_d)$ e c.c. sendo o complexo conjugado da expressão acima.

O vetor de estado do sistema átomo campo era descrito por:

$$|\Psi_{AC}^I(t)\rangle = \sum_n [a_n(t) |a, n\rangle + b_{n+1}(t) |b_{n+1}, n+1\rangle + c_{n+2}(t) |c_{n+2}, n+2\rangle + d_{n+3}(t) |d_{n+3}, n+3\rangle]. \quad (\text{A.3})$$

Na representação de interação, a equação de Schrödinger é

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_{AC}^I(t)\rangle = H_I |\Psi_{AC}^I(t)\rangle. \quad (\text{A.4})$$

Tomemos como um exemplo, a aplicação do elemento $g_a a A_a^\dagger A_b \exp^{-i\delta_a t}$ sobre $|\Psi_{AC}^I(t)\rangle$. Eles atuam apenas sobre os ket's,

$$g_a a A_a^\dagger A_b \exp^{-i\delta_a t} (a_n(t) |a, n\rangle) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$g_a a A_a^\dagger A_b \exp^{-i\delta_a t} (b_{n+1}(t) |b, n+1\rangle) = g_a \sqrt{n+1} \exp^{-i\delta_a t} b_{n+1}(t) |a, n\rangle \quad (\text{A.6})$$

$$g_a a A_a^\dagger A_b \exp^{-i\delta_a t} (c_{n+2}(t) |c, n+2\rangle) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$g_a a A_a^\dagger A_b \exp^{-i\delta_a t} (d_{n+3}(t) |d, n+3\rangle) = 0 \quad (\text{A.8})$$

enquanto que do lado esquerdo só temos a derivada temporal,

$$\sum_n [\dot{a}_n(t) |a, n\rangle + \dot{b}_{n+1}(t) |b_{n+1}, n+1\rangle + \dot{c}_{n+2}(t) |c_{n+2}, n+2\rangle + \dot{d}_{n+3}(t) |d_{n+3}, n+3\rangle]. \quad (\text{A.9})$$

Vemos, imediatamente, que o único elemento que sobra do lado direito é o $|a, n\rangle$. No lado esquerdo, só temos um elemento que forma par com ele: $\dot{a}_n(t) |a, n\rangle$. Fazemos assim sucessivamente, e obteremos o seguinte conjunto de equações para os coeficientes:

$$\dot{a}_n(t) = -iV_a \exp(-i\delta_a t) b_{n+1}(t) \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{b}_{n+1}(t) = -iV_a^* \exp(i\delta_a t) a_n(t) - iV_b \exp(-i\delta_b t) c_{n+2}(t) \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{c}_{n+2}(t) = -iV_b^* \exp(i\delta_b t) b_{n+1}(t) - iV_c \exp(-i\delta_c t) d_{n+3}(t) \quad (\text{A.12})$$

$$\dot{d}_{n+3}(t) = -iV_c^* \exp(i\delta_c t) c_{n+2}(t) \quad (\text{A.13})$$

onde,

$$V_a = g_a \sqrt{n+1}, \quad V_b = g_b \sqrt{n+2}, \quad V_c = g_c \sqrt{n+3}. \quad (\text{A.14})$$

Resolvido-se com o método das Transformadas de Laplace a equação (A10), tem-se

$$\mathcal{L}[\dot{a}_n(t)] = \mathcal{L}[V_a e^{-i\delta_a t} b_{n+1}(t)]$$

$$\begin{aligned}
i\mathcal{L}[\dot{a}_n(t)] &= V_a\mathcal{L}[e^{-i\delta_a t}b_{n+1}(t)] \\
i\int_0^\infty e^{-st}\frac{d a_n(t)}{dt} dt &= V_a\int_0^\infty e^{-st}e^{-i\delta_a t} b_{n+1}(t) dt,
\end{aligned} \tag{A.15}$$

integrando por partes, ficamos com

$$i(s\tilde{a}_n(s) - \tilde{a}_n(0)) = V_a\tilde{b}_{n+1}(s + i\delta_a). \tag{A.16}$$

O mesmo processo é aplicado em $b_{n+1}(t)$, $c_{n+2}(t)$ e $d_{n+3}(t)$, obtendo dessa maneira os demais coeficientes. Considerando que no instante inicial apenas o estado a_n está populado, os outros nulos, as equações resultam em

$$\begin{aligned}
i(s\tilde{a}_n(s) - 1) &= V_a\tilde{b}_{n+1}(s + i\delta_a) \\
i(s\tilde{b}_{n+1}(s)) &= V_a^*\tilde{a}_n(s - i\delta_a) + V_b\tilde{c}_{n+2}(s + i\delta_b) \\
i(s\tilde{c}_{n+2}(s)) &= V_b^*\tilde{b}_{n+1}(s - i\delta_b) + V_c\tilde{d}_{n+3}(s + i\delta_c) \\
i(s\tilde{d}_{n+3}(s)) &= V_c^*\tilde{c}_{n+2}(s - i\delta_c),
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$a_n(0) = 1$, $b_{n+1}(t) = c_{n+2}(t) = d_{n+3}(t) = 0$. Aqui trocamos s por $s - i\delta_c$ na terceira equação, s por $s - i\delta_b - i\delta_c$ na segunda e s por $s - i\delta_a - i\delta_b - i\delta_c$ na primeira. Isolamos os termos em a_n , b_{n+1} , c_{n+2} e d_{n+3} e após algumas manipulações obtem-se

$$\begin{cases}
(s - i\delta_a - i\delta_b - i\delta_c)\tilde{a}_n(s - i\delta_a - i\delta_b - i\delta_c) + iV_a\tilde{b}_{n+1}(s - i\delta_b - i\delta_c) &= 1 \\
(s - i\delta_b - i\delta_c)\tilde{b}_{n+1}(s - i\delta_b - i\delta_c) + iV_a^*\tilde{a}_n(s - i\delta_a - i\delta_b - i\delta_c) + iV_b\tilde{c}_{n+2}(s - i\delta_c) &= 0 \\
(s - i\delta_c)\tilde{c}_{n+2}(s - i\delta_c) + iV_b^*\tilde{b}_{n+1}(s - i\delta_b - i\delta_c) + iV_c\tilde{d}_{n+3}(s) &= 0 \\
s\tilde{d}_{n+3}(s) + iV_c^*\tilde{c}_{n+2}(s - i\delta_c) &= 0.
\end{cases}$$

Para facilitar os cálculos, fez-se as seguintes substituições:

$$\Omega_a = \delta_a + \delta_b + \delta_c \tag{A.18}$$

$$\Omega_b = \delta_b + \delta_c \tag{A.19}$$

$$\Omega_c = \delta_c. \tag{A.20}$$

Substituímos as formas acima nas equações para os coeficientes e reescrevemos tudo na

forma matricial:

$$\begin{pmatrix} s - i\Omega_a & iV_a & 0 & 0 \\ iV_a^* & s - i\Omega_b & iV_b & 0 \\ 0 & iV_b^* & s - i\Omega_c & iV_c \\ 0 & 0 & iV_c^* & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a}_n(s - i\Omega_a) \\ \tilde{b}_{n+1}(s - i\Omega_b) \\ \tilde{c}_{n+2}(s - i\Omega_c) \\ \tilde{d}_{n+3}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

O sistema acima é resolvido utilizando-se regra de Cramers. O determinante da primeira matriz é

$$\begin{aligned} \det = F(s) = & s^4 - is^3(\Omega_a + \Omega_b + \Omega_c) - s^2(\Omega_a\Omega_b + \Omega_b\Omega_c + \Omega_c\Omega_a - |V_a|^2 - |V_b|^2 - |V_c|^2) \\ & + is(\Omega_a\Omega_b\Omega_c - \Omega_b|V_c|^2 - \Omega_a|V_c|^2 - \Omega_a|V_b|^2 - \Omega_c|V_a|^2) + |V_a|^2|V_c|^2 - \Omega_a\Omega_b|V_c|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Para $\tilde{a}_n(s - i\Omega_a)$ temos:

$$a_n(s - \Omega_a) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & iV_a & 0 & 0 \\ 0 & s - i\Omega_b & iV_b & 0 \\ 0 & iV_b^* & s - i\Omega_c & iV_c \\ 0 & 0 & iV_c^* & s \end{vmatrix}}{F(s)}. \quad (\text{A.23})$$

Simplifica-se o numerador, obtendo-se

$$f_a(s) = s^3 - is^2(\Omega_b + \Omega_c) + s(|V_c|^2 + |V_b|^2 - \Omega_b\Omega_c) - i\Omega_b|V_c|^2. \quad (\text{A.24})$$

Assim temos para o primeiro coeficiente,

$$\tilde{a}_n(s - \Omega_a) = \frac{s^3 - is^2(\Omega_b + \Omega_c) + s(|V_c|^2 + |V_b|^2 - \Omega_b\Omega_c) - i\Omega_b|V_c|^2}{F(s)}. \quad (\text{A.25})$$

O processo é repetido para os outros coeficientes, resultando em

$$\tilde{b}_{n+1}(s - i\Omega_b) = \frac{-iV_a^*(s^2 - is\Omega_c + |V_c|^2)}{F(s)} \quad (\text{A.26})$$

$$\tilde{c}_{n+2}(s - i\Omega_c) = \frac{-sV_a^*V_b^*}{F(s)} \quad (\text{A.27})$$

$$\tilde{d}_{n+3}(s) = \frac{iV_a^*V_b^*V_c^*}{F(s)}. \quad (\text{A.28})$$

Para evoluir $\langle n(t) \rangle$ no tempo é necessário $a_n(t)$, $b_{n+1}(t)$, $c_{n+2}(t)$ e $d_{n+3}(t)$, i. é, necessitamos calcular a inversa das transformadas de Laplace obtidas. Mas antes são feitos certos ajustes nos coeficientes. Faremos o cálculo para $a_n(t)$. $F(s)$ pode ser escrita como $F(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)$, s_1 , s_2 , s_3 e s_4 as raízes para $F(s) = 0$. Desta forma, o primeiro coeficiente é

$$\begin{aligned}\tilde{a}_n(s - \Omega_a) &= \frac{f_a(s)}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)} \\ &= \frac{A_a}{(s - s_1)} + \frac{B_a}{(s - s_2)} + \frac{C_a}{(s - s_3)} + \frac{D_a}{(s - s_4)}.\end{aligned}\quad (\text{A.29})$$

Fazendo $s = s_1$:

$$A_a = \frac{f_a(s_1)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)}.\quad (\text{A.30})$$

Fazendo $s = s_2$:

$$B_a = \frac{f_a(s_2)}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)}.\quad (\text{A.31})$$

Fazendo $s = s_3$:

$$C_a = \frac{f_a(s_3)}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_4)}.\quad (\text{A.32})$$

Fazendo $s = s_4$:

$$D_a = \frac{f_a(s_4)}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)(s_4 - s_3)}.\quad (\text{A.33})$$

Introduzindo $Q = (s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)$, reescrevemos as formas acima,

$$A_a = \frac{(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)}{Q} f_a(s_1)\quad (\text{A.34})$$

$$B_a = -\frac{(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)(s_3 - s_4)}{Q} f_a(s_2)\quad (\text{A.35})$$

$$C_a = \frac{(s_1 - s_2)(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)}{Q} f_a(s_3)\quad (\text{A.36})$$

$$D_a = -\frac{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)}{Q} f_a(s_4).\quad (\text{A.37})$$

Já de posse dos coeficientes, calculo $\tilde{a}_n(s)$,

$$\tilde{a}_n(s - i\Omega_a) = \frac{A_a}{s - s_1} + \frac{B_a}{s - s_2} + \frac{C_a}{s - s_3} + \frac{D_a}{s - s_4}, \quad (\text{A.38})$$

Faço $s \rightarrow s + i\Omega_a$,

$$\tilde{a}_n(s) = \frac{A_a}{s - (s_1 - i\Omega_a)} + \frac{B_a}{s - (s_2 - i\Omega_a)} + \frac{C_a}{s - (s_3 - i\Omega_a)} + \frac{D_a}{s - (s_4 - i\Omega_a)}. \quad (\text{A.39})$$

Obtenho $a_n(t)$ tomando a transformada inversa de Laplace da equação acima,

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \tilde{a}_n(s) \} = a_n(t) = A_a e^{(s_1 - i\Omega_a)t} + B_a e^{(s_2 - i\Omega_a)t} + C_a e^{(s_3 - i\Omega_a)t} + D_a e^{(s_4 - i\Omega_a)t}. \quad (\text{A.40})$$

O processo é repetido para os outros coeficientes, chegando-se ao seguinte conjunto de equações:

$$a_n(t) = A_a e^{(s_1 - i\Omega_a)t} + B_a e^{(s_2 - i\Omega_a)t} + C_a e^{(s_3 - i\Omega_a)t} + D_a e^{(s_4 - i\Omega_a)t} \quad (\text{A.41})$$

$$b_{n+1}(t) = A_b e^{(s_1 - i\Omega_b)t} + B_b e^{(s_2 - i\Omega_b)t} + C_b e^{(s_3 - i\Omega_b)t} + D_b e^{(s_4 - i\Omega_b)t} \quad (\text{A.42})$$

$$c_{n+2}(t) = A_c e^{(s_1 - i\Omega_c)t} + B_c e^{(s_2 - i\Omega_c)t} + C_c e^{(s_3 - i\Omega_c)t} + D_c e^{(s_4 - i\Omega_c)t} \quad (\text{A.43})$$

$$d_{n+3}(t) = A_d e^{s_1 t} + B_d e^{s_2 t} + C_d e^{s_3 t} + D_d e^{s_4 t}, \quad (\text{A.44})$$

onde

$$A_\alpha = \frac{(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)}{Q} f_\alpha(s_1) \quad (\text{A.45})$$

$$B_\alpha = -\frac{(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)(s_3 - s_4)}{Q} f_\alpha(s_2) \quad (\text{A.46})$$

$$C_\alpha = \frac{(s_1 - s_2)(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)}{Q} f_\alpha(s_3) \quad (\text{A.47})$$

$$D_\alpha = -\frac{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)}{Q} f_\alpha(s_4), \quad (\text{A.48})$$

com $\alpha = a, b, c, d$.

As funções $f_a(s)$, $f_b(s)$, $f_c(s)$ e $f_d(s)$, com $f_a(s)$ já tendo sido calculada anteriormente para o primeiro coeficiente, são dadas por

$$f_a(s) = s^3 - i s^2 (\Omega_b + \Omega_c) + s (|V_c|^2 + |V_b|^2 - \Omega_b \Omega_c) - i \Omega_b |V_c|^2 \quad (\text{A.49})$$

$$f_b(s) = -iV_a^*(s^2 - is\Omega_c + |V_c|^2) \quad (\text{A.50})$$

$$f_c(s) = -sV_a^*V_b^* \quad (\text{A.51})$$

$$f_d(s) = iV_a^*V_b^*V_c^*. \quad (\text{A.52})$$

A fim de obter o número médio de fótons presentes na cavidade em função do tempo sob interação átomo-campo, é necessário calcular $\langle n(t) \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= \langle \Psi_{AR}^I(t) | a^\dagger a | \Psi_{AR}^I(t) \rangle \\ \langle n(t) \rangle &= \sum |p_n|^2 \left[n |a_n(t)|^2 + (n+1) |b_{n+1}(t)|^2 + (n+2) |c_{n+2}|^2 + (n+3) |d_{n+3}|^2 \right] \\ \langle n(t) \rangle &= \sum |p_n|^2 \left[n(|a_n(t)|^2 + |b_{n+1}(t)|^2 + |c_{n+2}|^2 + |d_{n+3}|^2) + |b_{n+1}(t)|^2 + 2|c_{n+2}|^2 + 3|d_{n+3}|^2 \right] \\ \langle n(t) \rangle &= \sum |p_n|^2 \left[n + |b_{n+1}(t)|^2 + 2|c_{n+2}|^2 + 3|d_{n+3}|^2 \right] \\ \langle n(t) \rangle &= \bar{n} + \sum |p_n|^2 \left[|b_{n+1}(t)|^2 + 2|c_{n+2}|^2 + 3|d_{n+3}|^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

No caso em que as dessintonias são nulas, obtêm-se uma expressão analítica para $\langle n(t) \rangle$. O polinômio em $F(s)$ se reduz a

$$s^4 + s^2(|V_a|^2 + |V_b|^2 + |V_c|^2) + |V_a|^2 |V_c|^2 = 0 \quad (\text{A.54})$$

cujas raízes são

$$s_1 = \left[-\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (\text{A.55})$$

$$s_2 = - \left[-\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (\text{A.56})$$

$$s_3 = i \left[\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (\text{A.57})$$

$$s_4 = -i \left[\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (\text{A.58})$$

onde γ e β estão relacionados com V_a , V_b e V_c pelas seguintes relações:

$$\gamma \equiv \frac{(|V_a|^2 + |V_b|^2 + |V_c|^2)}{2} \quad \text{e} \quad \beta \equiv |V_a|^2 |V_c|^2. \quad (\text{A.59})$$

Para fins de simplificação de notação e contas, definimos ainda duas novas relações:

$$\lambda_+ \equiv \left[\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad \text{e} \quad \lambda_- \equiv \left[\gamma - (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (\text{A.60})$$

Desta forma, as equações (A.58) ficam

$$s_1 = \left[-\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2} = i\lambda_- \quad (\text{A.61})$$

$$s_2 = -i\lambda_- \quad (\text{A.62})$$

$$s_3 = i\lambda_+ \quad (\text{A.63})$$

$$s_4 = -i\lambda_+. \quad (\text{A.64})$$

Substituímos estas raízes em $a_n(t)$, $b_{n+1}(t)$, $c_{n+2}(t)$ e $d_{n+3}(t)$, resolvemos em $\langle n(t) \rangle$ e obtivemos

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle = & \bar{n} + \sum_n |p_n|^2 \left(\frac{|V_a|^2}{(\lambda_+^2 - \lambda_-^2)^2} \right) \left\{ \left[\frac{(\lambda_-^2 - |V_c|^2)}{\lambda_-} \text{sen}(\lambda_- t) - \frac{(\lambda_+^2 - |V_c|^2)}{\lambda_+} \text{sen}(\lambda_+ t) \right]^2 \right. \\ & + 2 (|V_b|^2) [\cos(\lambda_- t) - \cos(\lambda_+ t)]^2 \\ & \left. + 3 (|V_b|^2 |V_c|^2) \left[\frac{\text{sen}(\lambda_- t)}{\lambda_-} - \frac{\text{sen}(\lambda_+ t)}{\lambda_+} \right]^2 \right\} \quad (\text{A.65}) \end{aligned}$$

Se $g_c = 0$, então $|V_c| = 0$ e as raízes do polinômio (A.54) se reduzem a $(0, \pm\sqrt{|V_a|^2 + |V_b|^2})$, com a raiz nula duplamente degenerada. Neste caso a expressão acima se reduz a:

$$\langle n(t) \rangle = \bar{n} + \sum_n |p_n|^2 \left(\frac{|V_a|^2}{\lambda_+^4} \right) \left\{ \lambda_+^2 \text{sen}^2(\lambda_+ t) + 2|V_b|^2 [1 - \cos(\lambda_+ t)]^2 \right\}, \quad (\text{A.66})$$

que é análoga à expressão obtida por [38] no caso particular de três níveis, onde V_c é considerado nulo, e $(\lambda_+ = \lambda, V_a = V_1$ e $V_b = V_2)$. No caso de $g_b = 0$, a expressão para $\langle n(t) \rangle$, acima reproduz os resultados usuais de um sistema de dois níveis na forma,

$$\langle n(t) \rangle = \bar{n} + \frac{1}{2} \sum_n |p_n|^2 (1 - \cos(2\lambda_+ t)) \quad (\text{A.67})$$

Apêndice B

Cálculo da forma simplificada de $\langle n(t) \rangle$

No apêndice A havíamos obtido as expressões para os coeficientes:

$$a_n(t) = A_a e^{(s_1 - i\Omega_a)t} + B_a e^{(s_2 - i\Omega_a)t} + C_a e^{(s_3 - i\Omega_a)t} + D_a e^{(s_4 - i\Omega_a)t} \quad (\text{B.1})$$

$$b_{n+1}(t) = A_b e^{(s_1 - i\Omega_b)t} + B_b e^{(s_2 - i\Omega_b)t} + C_b e^{(s_3 - i\Omega_b)t} + D_b e^{(s_4 - i\Omega_b)t} \quad (\text{B.2})$$

$$c_{n+2}(t) = A_c e^{(s_1 - i\Omega_c)t} + B_c e^{(s_2 - i\Omega_c)t} + C_c e^{(s_3 - i\Omega_c)t} + D_c e^{(s_4 - i\Omega_c)t} \quad (\text{B.3})$$

$$d_{n+3}(t) = A_d e^{s_1 t} + B_d e^{s_2 t} + C_d e^{s_3 t} + D_d e^{s_4 t}, \quad (\text{B.4})$$

e

$$A_\alpha = \frac{(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)}{Q} f_\alpha(s_1) \quad (\text{B.5})$$

$$B_\alpha = -\frac{(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)(s_3 - s_4)}{Q} f_\alpha(s_2) \quad (\text{B.6})$$

$$C_\alpha = \frac{(s_1 - s_2)(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)}{Q} f_\alpha(s_3) \quad (\text{B.7})$$

$$D_\alpha = -\frac{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)}{Q} f_\alpha(s_4), \quad (\text{B.8})$$

aonde $\alpha = a, b, c, d$.

As funções $f_a(s)$, $f_b(s)$, $f_c(s)$ e $f_d(s)$, com $f_a(s)$ já tendo sido calculada anteriormente para

o primeiro coeficiente, são dadas por

$$f_a(s) = s^3 - is^2(\Omega_b + \Omega_c) + s(|V_c|^2 + |V_b|^2 - \Omega_b\Omega_c) - i\Omega_b|V_c|^2 \quad (\text{B.9})$$

$$f_b(s) = -iV_a^*(s^2 - is\Omega_c + |V_c|^2) \quad (\text{B.10})$$

$$f_c(s) = -sV_a^*V_b^* \quad (\text{B.11})$$

$$f_d(s) = iV_a^*V_b^*V_c^*. \quad (\text{B.12})$$

Substituindo estas equações acima em (B.4):

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{f_a}{Q} \left[(s_1 - s_3)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)e^{(s_1 - i\Omega_a)t} - (s_1 - s_3)(s_1 - s_4)(s_3 - s_4)e^{(s_2 - i\Omega_a)t} + \right. \\ &\quad \left. + (s_1 - s_2)(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)e^{(s_3 - i\Omega_a)t} - (s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)e^{(s_4 - i\Omega_a)t} \right] \\ b_{n+1}(t) &= \frac{f_b}{Q} \left[(s_1 - s_3)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)e^{(s_1 - i\Omega_b)t} - (s_1 - s_3)(s_1 - s_4)(s_3 - s_4)e^{(s_2 - i\Omega_b)t} + \right. \\ &\quad \left. + (s_1 - s_2)(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)e^{(s_3 - i\Omega_b)t} + (s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)e^{(s_4 - i\Omega_b)t} \right] \\ c_{n+2}(t) &= \frac{f_c}{Q} \left[(s_1 - s_3)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)e^{(s_1 - i\Omega_c)t} - (s_1 - s_3)(s_1 - s_4)(s_3 - s_4)e^{(s_2 - i\Omega_c)t} + \right. \\ &\quad \left. + (s_1 - s_2)(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)e^{(s_3 - i\Omega_c)t} + (s_1 - s_3)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)e^{(s_4 - i\Omega_c)t} \right] \\ d_{n+3}(t) &= \frac{f_d}{Q} \left[(s_1 - s_3)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)e^{s_1 t} - (s_1 - s_3)(s_1 - s_4)(s_3 - s_4)e^{s_2 t} + \right. \\ &\quad \left. + (s_1 - s_2)(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)e^{s_3 t} - (s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)e^{s_4 t} \right]. \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

Utilizando-se dessintonias nulas, substituindo-se na equação acima e utilizando as relações do Apêndice A para V_a , V_b , V_c ficamos com:

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{s_1^3 + s_1(|V_a|^2 + |V_b|^2)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_4)(s_2 - s_3)} e^{s_1 t} - \frac{s_2^3 + s_2(|V_a|^2 + |V_b|^2)}{(s_1 - s_2)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)} e^{s_2 t} \\ &\quad + \frac{s_3^3 + s_3(|V_a|^2 + |V_b|^2)}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)(s_3 - s_4)} e^{s_3 t} - \frac{s_4^3 + s_4(|V_a|^2 + |V_b|^2)}{(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)} e^{s_4 t} \quad (\text{B.14}) \\ b_{n+1}(t) &= -\frac{iV_a^*(s_1^2 + |V_c|^2)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_4)(s_2 - s_3)} e^{s_1 t} + \frac{iV_a^*(s_2^2 + |V_c|^2)}{(s_1 - s_2)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)} e^{s_2 t} \end{aligned}$$

$$-\frac{iV_a^*(s_3^2 + |V_c|^2)}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)(s_3 - s_4)} e^{s_3 t} + \frac{iV_a^*(s_4^2 + |V_c|^2)}{(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)} e^{s_4 t} \quad (\text{B.15})$$

$$c_{n+2}(t) = -\frac{s_1 V_a^* V_b^*}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_4)(s_2 - s_3)} e^{s_1 t} + \frac{s_2 V_a^* V_b^*}{(s_1 - s_2)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)} e^{s_2 t} \\ - \frac{s_3 V_a^* V_b^*}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)(s_3 - s_4)} e^{s_3 t} + \frac{s_4 V_a^* V_b^*}{(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)} e^{s_4 t} \quad (\text{B.16})$$

$$d_{n+3}(t) = iV_a^* V_b^* V_c^* \left[\frac{e^{s_1 t}}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_4)(s_2 - s_3)} - \frac{e^{s_2 t}}{(s_1 - s_2)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)} + \right. \\ \left. + \frac{e^{s_3 t}}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)(s_3 - s_4)} - \frac{e^{s_4 t}}{(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)} e^{s_4 t} \right], \quad (\text{B.17})$$

onde as raízes são dadas por

$$s_1 = \left[-\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (\text{B.18})$$

$$s_2 = - \left[-\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (\text{B.19})$$

$$s_3 = i \left[\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (\text{B.20})$$

$$s_4 = -i \left[\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (\text{B.21})$$

cujo polinômio é o mesmo do Apêndice A,

$$s^4 + s^2(|V_a|^2 + |V_b|^2 + |V_c|^2) + |V_a|^2 |V_c|^2 = 0. \quad (\text{B.22})$$

e γ e β estão relacionados com V_a , V_b e V_c pelas seguintes relações:

$$\gamma \equiv \frac{(|V_a|^2 + |V_b|^2 + |V_c|^2)}{2} \quad \text{e} \quad \beta \equiv |V_a|^2 |V_c|^2. \quad (\text{B.23})$$

Como anteriormente utilizamos

$$\lambda_+ \equiv \left[\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad \text{e} \quad \lambda_- \equiv \left[\gamma - (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (\text{B.24})$$

Desta forma, as equações (B.21) ficam

$$s_1 = \left[-\gamma + (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} \right]^{1/2} = i\lambda_- \quad (\text{B.25})$$

$$s_2 = -i\lambda_- \quad (\text{B.26})$$

$$s_3 = i\lambda_+ \quad (\text{B.27})$$

$$s_4 = -i\lambda_+. \quad (\text{B.28})$$

Com os coeficientes das equações (B.15), (B.16) e (B.17) e seus respectivos complexos conjugados obtêm-se:

$$|b_{n+1}(t)|^2 = \frac{|V_a|^2}{(\lambda_+^2 - \lambda_-^2)^2} \left[\frac{(\lambda_-^2 - |V_c|^2)}{\lambda_-} \text{sen}(\lambda_- t) \right]^2 \quad (\text{B.29})$$

$$|c_{n+2}(t)|^2 = \frac{|V_a|^2 |V_b|^2}{(\lambda_+^2 - \lambda_-^2)^2} [\cos(\lambda_- t) - \cos(\lambda_+ t)]^2 \quad (\text{B.30})$$

$$|d_{n+3}(t)|^2 = \frac{|V_a|^2 |V_b|^2 |V_c|^2}{(\lambda_+^2 - \lambda_-^2)^2} \left[\frac{\text{sen}(\lambda_- t)}{\lambda_-} - \frac{\text{sen}(\lambda_+ t)}{\lambda_+} \right]^2, \quad (\text{B.31})$$

os quais substituindos em $\langle n(t) \rangle$, isto é:

$$\langle n(t) \rangle = \bar{n} + \sum_n |p_n|^2 (|b_{n+1}(t)|^2 + 2|c_{n+2}(t)|^2 + 3|d_{n+3}(t)|^2)$$

resultam em:

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= \bar{n} + \sum_n |p_n|^2 \left(\frac{|V_a|^2}{(\lambda_+^2 - \lambda_-^2)^2} \right) \left\{ \left[\frac{(\lambda_-^2 - |V_c|^2)}{\lambda_-} \text{sen}(\lambda_- t) - \frac{(\lambda_+^2 - |V_c|^2)}{\lambda_+} \text{sen}(\lambda_+ t) \right]^2 \right. \\ &\quad + 2 (|V_b|^2) [\cos(\lambda_- t) - \cos(\lambda_+ t)]^2 \\ &\quad \left. + 3 (|V_b|^2 |V_c|^2) \left[\frac{\text{sen}(\lambda_- t)}{\lambda_-} - \frac{\text{sen}(\lambda_+ t)}{\lambda_+} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Bibliografia

- [1] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. *Proc. IEEE*, **51**:89, (1963).
- [2] F. W. Cummings. *Phys. Rev.*, **140**:A1051, (1965).
- [3] P. L. Knight and P. W. Milonni. *Phys. Rep. C*, **66**:21, (1980).
- [4] J. H. Eberly N. B. Narozhny and J. J. Sanchez-Mondragon. *Phys. Rev. Lett.*, **44**:1323, (1980).
- [5] N. B. Narozhny J. J. Sanchez-Mondragon and J. H. Eberly. *Phys. Rev. A*, **23**:236, (1981).
- [6] H. I. Yoo J. J. Sanchez-Mondragon and J. H. Eberly. *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **14**:1383, (1981).
- [7] C. V. Sukumar and B. Buck. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **17**:885, (1984).
- [8] K. Wodkiewicz P. L. Knight S. J. Buckle and S. M. Barnett. *Phys. Rev. A*, **35**:2567, (1987).
- [9] S. M. Barnett and P. L. Knight. *Optica Acta*, **31**:1203, (1984).
- [10] P. L. Knight and P. M. Radmore. *Phys. Lett. A*, **90**:342, (1982).
- [11] M. V. Satyanarayana R. Rice R. Veetas and H. J. Charmorichael. *J. Opt. Soc. Am. B*, **6**:228, (1989).

- [12] A. Joshi and R. R. Puri. *J. Mod. Opt.*, **34**:1421, (1987).
- [13] M. P. Sharma D. A. Cardinoma and A. Gavrieliddes. *Opt. Commun.*, **72**:291–295, (1989).
- [14] D. A. Cardimona M. P. Sharma and M. A. Ortega. *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **22**:4029, (1989).
- [15] A.-S. F. Obada and A. M. Abdel-Hafez. *Opt. Comm.*, **91**:99-103, (1992).
- [16] M. P. Sharma D. A. Cardimona and A. Gavrielides. *J. Opt. Soc. Am. B*, **6**:1942–1945, (1989).
- [17] R. R. Schlicher. *Opt. Commun.*, **70**:97, (1989).
- [18] H. I. Yoo and J. H. Eberly. *Phys. Rep.*, **118**:239–337, (1985).
- [19] S. Haroche and J. M. Raimond. *Advances in Atomic and Molecular Physics*. Academic Press, New York, (1985).
- [20] G. Rempe H. Walther and N. Klein. *Phys. Rev. Lett.*, **58**:353, (1987).
- [21] F. li Li D. L. Lin T. F. George X.-shen Li. *Phys. Rev. A*, **40**:1394, (1989).
- [22] H. P. Yuen. *Phys. Rev. A*, **13**:2226, (1976).
- [23] W. W. Chow J. Gea-Banaloche L. M. Pedrotti V. E. Sanders W. Schleich and M. O. Scully. *Rev. Mod. Phys.*, **57**:61–104, (1985).
- [24] J. N. Hollenhorst. *Phys. Rev. D*, **19**:1669–1679, (1979).
- [25] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. University Press, Oxford, (1973).
- [26] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Willey & Sons, Inc., New York, (1975).
- [27] W. Hetler. *The Quantum Theory of Radiation*. Claredom Press, Oxford, (1954).

- [28] H. Haken. *Synergetics - VOL 1*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, (1983).
- [29] R. J. Glauber. *Phys. Rev.*, **130**:2529–2539, (1963).
- [30] Claude Cohen-Tannoudji Bernard Diu Franck Laloë. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, (1977).
- [31] W. Schleich and J. A. Wheeler. *J. Opt. Soc. Am. B*, **4**:1715–1722, (1987).
- [32] F. T. Arecchi. *Phys. Rev. Lett.*, **15**:912–916, (1965).
- [33] R. Loudon and P. L. Knight. *J. Mod. Opt.*, **34**:709–759, (1987).
- [34] H. M. Nussenzveig. *Introduction to Quantum Optics*. (1977).
- [35] D. Stoler B. E. A. Saleh M. C. Teich. *Optica Acta*, **32**:345–353, (1985).
- [36] P. Filipowicz. *J. Phys. A: Math Gen.*, **19**:3785, (1986).
- [37] R. Guccione-Gush H. P. Gush and J Van Kranendonk. *Can. J. Phys.*, **45**:2513–2524, (1967).
- [38] M. E. Goggin M. P. Sharma and A. Gavrielides. *J. Mod. Opt.*, **37**:99, (1990).
- [39] W. H. Louisell. *Quantum Statistical Properties of Radiation*. John Willey & Sons, Inc., New York, (1973).
- [40] G. Dattoli J. Gallardo and A. Torre. *J. Opt. Soc. Am. B*, **2**:185, (1987).
- [41] F. A. M. de Oliveira M. S. Kim and P. L. Knight. *Phys. Rev. A*, **41**:2645–2652, (1990).
- [42] H. Takahasi. *Adv. Commun. Syst.*, **1**:227, (1965).
- [43] C. Y. E. Lu. *Lett. Nuovo Cim.*, **2**:1241, (1970).
- [44] C. Y. E. Lu. *Lett. Nuovo Cim.*, **3**:585, (1971).
- [45] C. M. Caves. *Phys. Rev. D*, **23**:1693, (1981).

- [46] R. E. Slusher L. W. Hollberg B. Yurke J. C. Mertz and J. F. Valley. *Phys. Rev. Lett.*, **55**:2409, (1985).
- [47] L.-A. Wu H. J. Kimble J. L. Hall and H. Wu. *Phys. Rev. Lett.*, **57**:2520, (1986).
- [48] G. J. Milburn. *Optica Acta*, **31**:671-679, (1984).
- [49] G Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, New York, (1985).