

SOBRE O MECANISMO DE INFLAÇÃO EM
MODELOS COSMOLÓGICOS ANISOTRÓPICOS

ANTÔNIO CARLOS ROQUE DA SILVA FILHO

Orientador: Prof. Dr. JOSÉ INÁCIO COTRIM VASCONCELLOS

*Essa exemplar corrigido
- a redação final do. Teó
defendida pelo Aluno
Antonio Carlos Roque da Silva Filho
e aprovado pelo. Comiss. Examinadora*

*Jo. Inacio C. Vasconcellos
17/Julho/1987*

TESE DE MESTRADO

Instituto de Física "Gleb Wataghin" - UNICAMP

JULHO - 1987

Aos meus pais, Antônio Carlos e Cléa, e à minha avó Alice.

Agradecimentos:

Ao meu pai, pela paciência e dedicação com que datilografou esta tese.

Ao meu orientador, pelo constante apoio, compreensão e encorajamento.

Ao meu irmão, pelas estimulantes discussões e colaborações.

Aos meus colegas do Grupo de Espectroscopia, Astrofísica e Sistemas Dispersos, e a todos os meus amigos em geral, companheiros de todas as horas.

Ao amor.

RESUMO

Faz-se uma análise do comportamento dos modelos espacialmente homogêneos e anisotrópicos em presença da constante cosmológica, associada à densidade de energia do vácuo, responsável pelo processo inflacionário. Procura-se investigar se a inclusão da constante cosmológica nas equações de Einstein para os modelos anisotrópicos provoca alguma alteração substancial na evolução desses modelos durante os estágios primordiais do universo. Sabe-se que, para os modelos isotrópicos e homogêneos de FRW, a presença de uma constante cosmológica elevada provoca expansão exponencial de tipo de Sitter, denominada inflação. A constante cosmológica alcança um valor elevado devido à transição de fase associada à quebra de simetria da grande unificação, para $t \approx 10^{-35}$ seg. Os resultados obtidos permitem a conclusão de que, com a provável exceção dos modelos de tipo I de Bianchi e de Kantowski-Sachs, todos os modelos anisotrópicos e espacialmente homogêneos entram num período inflacionário em um tempo da mesma ordem de grandeza do da quebra de simetria. A anisotropia desses modelos decresce tanto durante esse período que as suas subseqüentes evoluções se tornam muito semelhantes às dos modelos de FRW. A apresentação destes resultados vem precedida por alguns capítulos introdutórios visando relacionar detalhadamente todos os fundamentos matemáticos e teóricos à sua compreensão.

ÍNDICE

I.	INTRODUÇÃO.....	1
II.	FERRAMENTAS MATEMÁTICAS DA RELATIVIDADE GERAL.....	5
II.1	Definições Preliminares.....	5
II.2	Variedades Diferenciáveis.....	9
II.3	Vetores e Formas.....	13
II.4	Tensores.....	16
II.5	Diferenciação Exterior e Derivada de Lie.....	23
II.6	Conexões e Derivada Covariante; O Tensor de Curvatura.....	28
II.7	A Métrica.....	35
II.8	Isometrias.....	41
II.9	O Elemento de Volume e o Teorema de Gauss....	43
III.	ELEMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL.....	46
III.1	Convenções e Notação.....	46
III.2	Sumário da Teoria da Relatividade Geral.....	46
III.3	Movimento Relativo de Partículas.....	52
III.4	Condições de Energia.....	58
III.5	Fluidodinâmica Relativista.....	59
IV.	COSMOLOGIA RELATIVISTA.....	64
IV.1	Generalidades.....	64
IV.2	Os Modelos Cosmológicos de Friedmann-Ro- bertson-Walker (FRW).....	67
IV.3	Modelos Cosmológicos Espacialmente Homo- gêneos.....	82
V.	OS MODELOS COSMOLÓGICOS INFLACIONÁRIOS.....	92

VI.	INFLAÇÃO EM MODELOS COSMOLÓGICOS ESPACIALMENTE	
	HOMOGÊNEOS.....	102
VI.1	Inflação em Modelos de Tipo I de Bianchi...	102
VI.2	Inflação em Modelos de Kantowski-Sachs.....	111
VI.3	Inflação em Modelos de Bianchi Vazios.....	117
VI.4	Conclusão.....	123
VII.	BIBLIOGRAFIA.....	126

0. INTRODUÇÃO

A teoria do universo inflacionário, proposta há pouco mais de seis anos por Guth (1), teve um grande efeito sobre todas as linhas de pesquisa em cosmologia, especialmente sobre aquelas relacionadas aos primeiros estágios de sua evolução. Grande parte do que se faz hoje, tanto em cosmologia como em teorias de unificação das partículas elementares, está relacionado com o fenômeno de inflação e com suas consequências, de maneira que pode-se dizer que esta teoria vive seu período de apogeu.

De fato, ela realmente foi proposta visando a tamanha glória, pois foi apresentada como solução para vários dos males insolúveis que afligiam o já clássico modelo padrão da cosmologia - também, por sua vez, um modelo vitorioso (2). Tais males são, em sua maioria, problemas de autoconsistência interna e a teoria inflacionária os resolve adicionando às propriedades da matéria primordial, ultra-condensada e ultra-quente, as novas descobertas ocorridas no campo da física das altíssimas energias durante a década passada (3).

Sendo assim, a teoria do universo inflacionário estabeleceu uma ponte definitiva entre o estudo do universo como um todo e as investigações sobre as interações entre as partículas elementares: as propriedades dessas interações teriam sido importantes para o universo enquanto ele estava muito comprimido e quente, e as características

da evolução do universo determinariam as condições perante as quais as partículas elementares interagiam.

O modelo resultante, que acopla a inflação ao modelo padrão, era, porém, imperfeito e precisou, assim como tem precisado, de correções, as quais geraram vários cenários possíveis: novo universo inflacionário (4), inflação caótica (5), inflação primordial (6), inflação por lei de potência (7), inflação por lagrangeanas quadráticas (8), etc.

Uma característica importante do fenômeno inflacionário é a de que, após a inflação, o universo praticamente "esquece" suas condições iniciais anteriores ao período de expansão inflacionária. Esta propriedade, que representa a grande virtude do modelo e uma das principais razões de seu sucesso, somente mais recentemente tem recebido atenção por parte dos pesquisadores da área, e é dela que trata esta tese.

O modelo padrão, apesar de seu extremo sucesso, não cegou e dominou completamente os cosmólogos - principalmente os matemáticos - que, desde a década de 50, têm procurado investigar soluções cosmológicas anisotrópicas e inhomogêneas das equações de Einstein (9). Os estudos sobre tais modelos se intensificaram consideravelmente no final da década de 60 (10), principalmente após a conjectura de Misner (11) de que poderia ter havido algum mecanismo físico (algum fenômeno de transporte, por exemplo) capaz de isotropizar o universo a partir de condições iniciais anisotrópicas.

Estudos sobre isotropização do universo persistiram por toda a década de 70 (12), quando também se intensificaram os trabalhos matemáticos sobre soluções inhomogêneas das equações de Einstein (13).

Estando o estudo dos modelos cosmológicos anisotrópicos em um estado maduro, nada mais natural do que tentar incorporar às suas equações as equações responsáveis pela inflação. Tal tentativa tem a finalidade de verificar se, realmente, as condições pós-inflação são insensíveis às condições pré-inflacionárias e, mais importante, se o mecanismo de inflação pode ocorrer em um universo anisotrópico. A relevância deste estudo está calcada no fato de que, em meio a tantas condições iniciais possíveis, é muito pouco provável que o universo tenha começado perfeitamente isotrópico e homogêneo (14).

O tema mais realista de inflação em modelos cosmológicos anisotrópicos já possui certa bibliografia (15), sendo que a maioria dos trabalhos apareceu durante a preparação desta tese, inclusive com um resultado específico: a inflação acontece em praticamente todos os casos.

O resultado mencionado parece, na realidade, ser um fato mais geral do que se supunha, estando relacionado ao chamado "teorema da calvície cósmica" (cosmic no-hair theorem) (16), segundo o qual, sob condições fisicamente razoáveis, qualquer modelo cosmológico em expansão passa, necessariamente, por um período de expansão exponencial.

A finalidade desta tese é apresentar, de ma-

neira simples, uma discussão sobre as possibilidades de realização de inflação em modelos cosmológicos anisotrópicos. Para tal, se faz toda uma descrição dos fundamentos necessários: as ferramentas matemáticas são apresentadas no capítulo II; a teoria da relatividade geral e algumas de suas propriedades está no capítulo III; no capítulo IV, procura-se fazer um apanhado dos elementos essenciais dos modelos cosmológicos, tanto do modelo padrão como dos modelos anisotrópicos; o capítulo V dá uma descrição qualitativa dos modelos inflacionários, apresentando, porém, suas principais equações. No capítulo VI, por fim, se concretiza o objetivo da tese.

II FERRAMENTAS MATEMÁTICAS DA RELATIVIDADE GERAL (17)

II.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES (18)

Assume-se que o leitor está familiarizado com as noções de conjunto de elementos e de aplicação, assim como com as notações usadas por essas duas teorias.

Seja X um conjunto qualquer e $\mathcal{O}$ uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo as condições:

- i) X e o conjunto vazio $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{O}$;
- ii) A união de uma família qualquer de subconjuntos de X pertencentes a $\mathcal{O}$ também pertence a $\mathcal{O}$;
- iii) A intersecção de uma família de subconjuntos de X pertencentes a $\mathcal{O}$ pertence a $\mathcal{O}$.

Diz-se que a coleção $\mathcal{O}$ define uma topologia em X , e os subconjuntos contidos em $\mathcal{O}$ são chamados de conjuntos abertos do espaço topológico $(X, \mathcal{O})$. Os conjuntos fechados de um espaço topológico são os elementos de uma coleção $\mathcal{F}$, definida por $\mathcal{F} = \{ A : A^c \in \mathcal{O} \}$, onde A^c denota o complemento.

Uma vizinhança de um ponto p em um espaço topológico é qualquer conjunto aberto contendo p .

Uma base β para uma topologia $\mathcal{O}$ é um subconjunto de $\mathcal{O}$ tal que todo elemento de $\mathcal{O}$ possa ser expresso como

uma união de elementos de β .

Seja $(X, \mathcal{O})$ um espaço topológico e $A \subset X$ um subconjunto de X . O fecho de A é definido como a intersecção de todos os conjuntos fechados contendo A . O interior de A é definido como a união de todos os conjuntos abertos contidos em A . A fronteira de A é definida pela intersecção do fecho de A com o fecho de $\complement A$ sendo, portanto, um subconjunto fechado.

Um espaço topológico $(X, \mathcal{O})$ é chamado de espaço de Hausdorff se quaisquer dois pontos distintos possuírem vizinhanças disjuntas.

Um sistema $\{U_i\}$ de subconjuntos abertos de X é chamado de cobertura se cada elemento de X pertencer a pelo menos um U_i , ou seja, se $\bigcup U_i = X$. Uma cobertura $\{V_i\}$ é dita um refinamento da cobertura $\{U_i\}$ se, para todo V_i , existir um U_j tal que $V_i \subset U_j$. Uma cobertura $\{U_i\}$ é chamada localmente finita se, para todo ponto $p \in X$, existir uma vizinhança de p que tenha intersecção não-nula com somente um número finito dos U_i . Um espaço de Hausdorff é dito paracompacto se toda cobertura tiver um refinamento localmente finito.

Seja f uma aplicação de X com valores reais. O suporte de f é definido como o fecho do conjunto de pontos onde f não se anula. Uma partição da unidade em X é uma família de funções contínuas $g_i : X \rightarrow [0, 1]$ tal que:

- i) A coleção dos suportes dos g_i é localmente finita;
- ii) $\sum_i g_i(p) = 1$, para todo $p \in X$.

Diz-se que uma partição da unidade $\{g_i\}$ é subordinada a uma cobertura $\{U_i\}$ de X se a coleção dos suportes dos g_i constituir um refinamento de $\{U_i\}$. Dados um espaço topológico paracompacto $(X, \mathcal{O})$ e uma cobertura aberta $\{U_i\}$, um teorema da topologia (19) prova que existe uma partição da unidade $\{g_i\}$ (com o mesmo conjunto de índices) subordinada a $\{U_i\}$.

Se um espaço topológico não puder ser representado pela união de dois conjuntos abertos não vazios disjuntos, ele será chamado de conexo. Se cada ponto de X tiver uma vizinhança conexa, X será dito localmente conexo.

Uma aplicação φ de um espaço topológico $(X, \mathcal{O})$ em um espaço topológico $(Y, \mathcal{U})$ será dita contínua em $p \in X$ se, dada qualquer vizinhança U de $\varphi(p)$, existir uma vizinhança O de p tal que $\varphi(O) \subset U$. φ será contínua em X se for contínua para todos os pontos de X .

Se a aplicação φ for bijetora (injetora e sobrejetora) e bicontínua, i.e., tanto φ como φ^{-1} são contínuas, ela será chamada de homeomorfismo de X sobre Y , e X e Y serão ditos homeomorfos.

Sejam $(X, \mathcal{O})$ e $(X', \mathcal{O}')$ dois espaços topológicos e β o conjunto de pares $\{(U, U') : U \in \mathcal{O} \text{ e } U' \in \mathcal{O}'\}$. Pode-se definir uma topologia no produto cartesiano $X \times X'$ dizendo-se que β forma uma base dessa topologia, a qual é chamada de topologia produto.

Um espaço métrico é um conjunto X provido de uma aplicação $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$i) d(p, q) \geq 0;$$

$$ii) d(p, q) = 0 \text{ se, e somente se } p = q;$$

$$iii) d(p, q) = d(q, p);$$

$$iv) d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r),$$

$d(p, q)$ é chamada de distância entre p e q .

Uma bola aberta $Ba(p_0)$ de raio a em torno de p_0 é o conjunto dos pontos $p \in X$ tais que $d(p, p_0) < a$. A família β de bolas $Ba(p)$, para todos os pontos $p \in X$ e todos os raios a , é uma base para uma topologia em X . Essa topologia, gerada por β , é chamada de topologia induzida pela métrica d . Todos os espaços métricos são espaços de Hausdorff para-compactos.

Seja G um conjunto arbitrário sobre o qual esteja definida uma operação $\cdot$, chamada de multiplicação, associando a cada par (a, b) de elementos de G o elemento $a \cdot b \in G$ (a operação $\cdot$ constitui uma aplicação $G \times G \rightarrow G$). Diz-se que a operação $\cdot$ define em G uma estrutura de grupo se os seguintes axiomas forem verificados:

$$i) \text{ se } a, b \text{ e } c \in G, \text{ então } (ab)c = a(bc)$$

$$ii) \text{ existe um elemento unitário } e \in G \text{ tal que, para todo } a \in G, ea = ae = a$$

$$iii) \text{ para cada elemento } a \in G \text{ existe um único inverso } a^{-1} \in G \text{ tal que } aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

Se, além dos axiomas acima, o grupo tiver a propriedade de comutabilidade para qualquer par de seus elementos, $ab = ba$, ele será dito abeliano.

Uma aplicação φ entre dois grupos G e H tal

que, se $a.b=c$ então $\varphi(a).\varphi(b)=\varphi(c)$, onde $a,b,c \in G, \varphi(a), \varphi(b), \varphi(c) \in H$, é chamada de homomorfismo. Um homomorfismo biunívoco é chamado de isomorfismo.

II.2 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Recorda-se-á, primeiro, alguns aspectos do cálculo diferencial. Seja R^n o espaço euclidiano n -dimensional, i.e., o conjunto de todas as ênuplas $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ $(-\infty < x < \infty)$ com a topologia induzida pela métrica euclidiana usual, e seja $1/2 R^n$ a metade inferior de R^n , i.e., a região de R^n para a qual $x^1 \leq 0$. Uma aplicação φ de um conjunto aberto $U \subset R^n$ em um conjunto aberto $U' \subset R^m$ (respectivamente, $1/2 R^n$ e $1/2 R^m$) é dita diferenciável em $x_0 \in U$ se existir uma transformação linear contínua $D\varphi|_{x_0}$ de R^n em R^m que aproxime φ numa vizinhança de x_0 da seguinte maneira:

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + D\varphi|_{x_0}.h + R(h),$$

onde $\lim_{|h| \rightarrow 0} |R(h)|/|h| = 0$ para todo $h \in R^n$ suficientemente pequeno. A aplicação $D\varphi|_{x_0}$, quando existe, é única e é chamada de derivada de φ em x_0 . Uma aplicação $\varphi: U \subset R^n \rightarrow U' \subset R^m$ é diferenciável em U se for diferenciável para cada ponto de U .

O teorema da regra da cadeia (20) determina a diferenciabilidade de uma aplicação composta: sejam as aplicações $\varphi: U \subset R^n \rightarrow R^m$ e $\gamma: V \subset R^m \rightarrow R^k$ tais que $\varphi(U) \subset V$. Se φ for diferenciável em U e γ for diferenciável em V , a aplica-

ção composta, definida por $\theta = \psi \circ \varphi$, será diferenciável em U e

$$D\theta|_{x_0} = D\psi|_{\varphi(x_0)} \cdot D\varphi|_{x_0}, \quad x_0 \in U.$$

Uma aplicação φ será dita de classe C^r em U se for r vezes continuamente diferenciável em U . Se uma aplicação for de classe C^r para todo $r > 0$ ela será de classe C^∞ . Uma aplicação de classe C^0 significa uma aplicação contínua. Uma aplicação de classe C^1 $\varphi: U \rightarrow U'$ é chamada de difeomorfismo C^1 se possuir inversa $\varphi^{-1}: U' \rightarrow U$ de classe C^1 . Em particular, um difeomorfismo é um homeomorfismo.

Pode-se, agora, generalizar os conceitos dados acima para aplicações definidas entre espaços topológicos localmente homeomorfos a $\mathbb{R}^n$.

Uma variedade n -dimensional diferenciável de classe C^1 é um conjunto X com uma coleção de cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, chamada de atlas, onde os U_α são subconjuntos abertos de X e os φ_α são homeomorfismos dos correspondentes U_α em conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ tais que:

- i) Os U_α cobrem X , i.e., $X = \bigcup U_\alpha$;
- ii) Se $U_\alpha \cap U_\beta$ é não vazio, então a aplicação composta $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é um difeomorfismo C^1 entre abertos de $\mathbb{R}^n$ (fig. 1)

Cada U_α é chamada de vizinhança coordenada e os números $x^i(p)$, definidos por $\varphi_\alpha(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, são chamados de coordenadas locais de p . Os difeomorfismos da condição (ii) são chamados de mudanças de coordenadas.

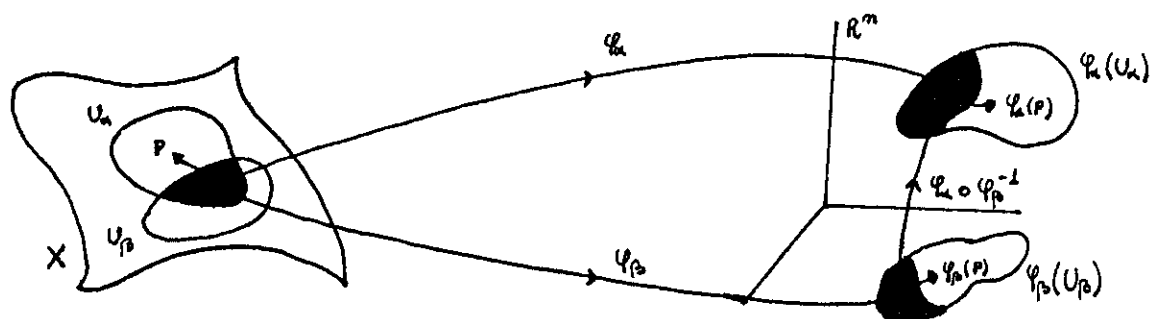


Figura 1. As coordenadas locais da intersecção entre duas vizinhanças coordenadas U_α e U_β estão relacionadas por um difeomorfismo $C^k \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$.

Dois atlas de classe C^k são ditos compatíveis se sua união for um atlas de classe C^k . O atlas consistindo de todos os possíveis atlas compatíveis entre si é chamado de atlas completo da variedade.

Uma variedade é dita orientável se existir um atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ no atlas completo tal que, em cada intersecção não vazia $U_\alpha \cap U_\beta$, o jacobiano $|\partial x^i / \partial x'^j|$ seja positivo, onde $(x^1, \dots, x^n)$ e $(x'^1, \dots, x'^n)$ são coordenadas em U_α e U_β , respectivamente.

O espaço euclidiano R^n é uma variedade diferenciável, com um atlas que se compõe de uma única carta: $U = R^n$ e φ é a aplicação identidade. Outro exemplo importante de variedade diferenciável é a esfera unitária S^2 , dada por $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Um exemplo de atlas é o que consta de duas cartas $(U_i, \varphi_i, i=1,2)$, definidas pelas projeções estereográficas da Figura 2:

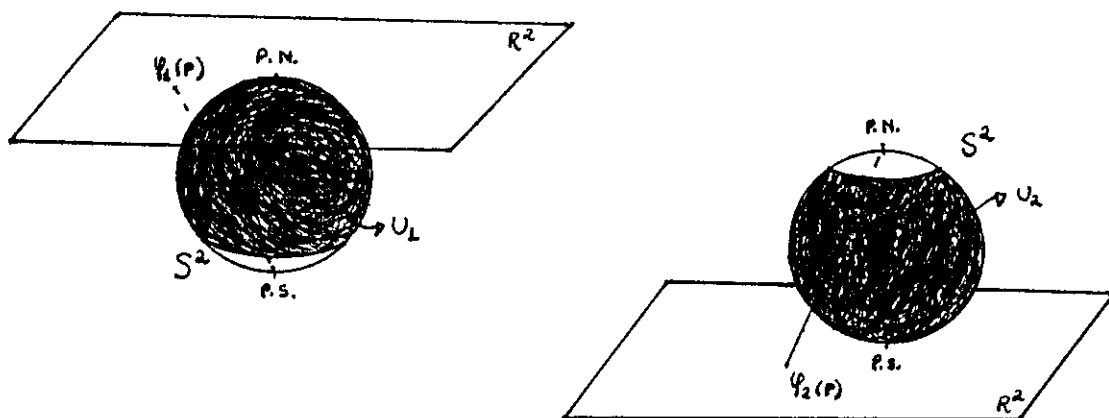


Figura 2. Esfera S^2 com um atlas constituído por (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) . A aplicação φ_1 leva um ponto p sobre a superfície da esfera ao ponto $\varphi_1(p)$, localizado na intersecção do plano R^2 com o prolongamento da reta que une o polo sul ao ponto p . A aplicação φ_2 é feita de maneira análoga, só que agora se consideram os segmentos de reta que unem o polo norte a p .

Uma variedade diferenciável com fronteira é definida como acima, substituindo-se R^m por $1/2 R^m$. A fronteira de X , denotada por ∂X , é definida como o conjunto de todos os pontos de X cuja imagem sob uma aplicação φ_α esteja sobre a fronteira de $1/2 R^m$ em R^m . ∂X é uma variedade $(n-1)$ -dimensional sem fronteira.

Uma função f em uma variedade X é uma aplicação de X em R . Ela será dita de classe C^k em $p \in X$ se existir uma carta local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ com $p \in U_\alpha$ tal que a aplicação com-

postas $f \circ \varphi_x^{-1}$ seja uma função C^r em $\varphi_x(U_x)$. Se f for de classe C^r para todo $p \in X$, então f será dita de classe C^r em X .

O produto cartesiano $X \times X'$ de duas variedades X e X' é uma variedade com a seguinte estrutura: dados pontos arbitrários $p \in X$ e $q \in X'$, existem vizinhanças coordenadas U e U' , contendo p e q respectivamente, de maneira que o ponto $(p, q) \in X \times X'$ esteja contido na vizinhança coordenada $U \times U'$ em $X \times X'$ que o caracteriza com as coordenadas (x^i, x'^j) , onde x^i são as coordenadas de p em U e x'^j são as coordenadas de q em U' .

Daqui por diante, a menos que se mencione algo em contrário, todas as variedades diferenciáveis serão de Hausdorff, paracompactas, conexas, sem fronteira e de classe C^∞ .

II.3 VETORES E FORMAS

Seja X uma variedade diferenciável e $\lambda(t)$ uma curva em X , definida por uma aplicação C^1 de um intervalo da reta real $\mathbb{R}$ em X . O vetor tangente à curva no ponto $\lambda(t_0)$ é definido como o operador $(\partial/\partial t)_\lambda|_{t_0}$ que leva cada função f em $\lambda(t_0)$ no número $(\partial f/\partial t)_\lambda|_{t_0}$; ele nada mais é do que a derivada direcional de f ao longo de $\lambda(t)$ no ponto $\lambda(t_0)$. Este operador, também chamado de vetor contravariante, tem as seguintes propriedades:

$$i) \quad V(f+g) = Vf + Vg \quad ; \quad V(cf) = c(Vf);$$

$$ii) \quad V(fg) = (Vf)g + f(Vg) \quad ,$$

onde V representa um vetor tangente e c um número real.

Se $(x^1, \dots, x^n)$ forem as coordenadas locais em uma vizinhança de $p \in X$, pode-se escrever:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\lambda \Big|_{t_0} = \sum_{j=1}^n \frac{dx^j(\lambda(t))}{dt} \Big|_{t_0} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_{\lambda(t_0)} = \frac{dx^j}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_{\lambda(t_0)} \quad (II.1)$$

onde se fez uso da convenção da somatória de Einstein, a ser adotada daqui por diante, segundo a qual um índice repetido implica uma somatória sobre todos os valores daquele índice. A expressão acima indica que todo vetor tangente no ponto p pode ser expresso como uma combinação linear das derivadas em relação às coordenadas locais $(\partial/\partial x^1)|_p, \dots, (\partial/\partial x^n)|_p$.

O espaço tangente a X em p , denotado por T_p , é o conjunto de todos os vetores tangentes em p . Ele tem a estrutura de um espaço vetorial n -dimensional sobre o corpo dos reais, gerado pela base das derivadas $(\partial/\partial x^i)|_p$ (ver Fig.3).

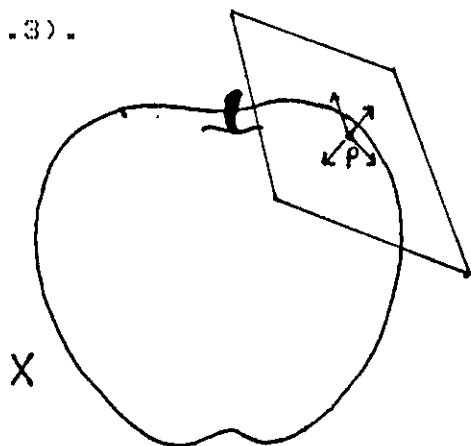


Figura 3. Espaço tangente ao ponto p na variedade X .

Se $(Ea) \quad (a=1, \dots, n)$ for qualquer conjunto de

n vetores linearmente independentes em p , qualquer vetor $V \in T_p$ pode ser escrito como $V = V^a E_a$ e os números (V^a) são as componentes de V na base (E_a) . Em particular, se for escolhida a base coordenada $(\partial/\partial x^i)|_p$, as componentes de V serão $V^i = (dx^i/dt)|_p$.

Uma 1-forma ω , também chamada de vetor covariante, em p é uma função linear de vetores de T_p em $\mathbb{R}$. Dado um vetor V em p o número no qual ω transforma V - chamado de contração de V e ω - é escrito como $\langle \omega, V \rangle$.

Dada uma base (E_a) de vetores em p , pode-se definir um único conjunto de n 1-formas (E^a) impondo-se a condição $\langle E^i, V \rangle = V^i$, onde V^i é a i -ésima componente de V na base (E_a) . Uma decorrência imediata dessa imposição é:

$$\langle E^i, E_j \rangle = \delta^i_j, \quad (II.2)$$

onde δ^i_j é o delta de Kronecker.

O conjunto de todas as 1-formas em p constitui um espaço vetorial n -dimensional em p tendo o conjunto (E^a) como uma base, de maneira que uma 1-forma pode ser escrita como $\omega = \omega_i E^i$, onde $\omega_i = \langle \omega, E_i \rangle$. O espaço vetorial das 1-formas em p é chamado de espaço dual T_p^* ao espaço tangente T_p , ou de espaço cotangente; as bases (E_a) e (E^a) são chamadas de bases duais.

Dados $\omega \in T_p^*$ e $V \in T_p$, pode-se expressar $\langle \omega, V \rangle$ em termos das componentes ω_a e V^a de ω e V , respectivamente nas bases (E^a) e (E_a) , pela relação:

$$\langle \omega, V \rangle = \langle \omega_a E^a, V^b E_b \rangle = \omega_a V^b \delta^a_b = \omega_a V^a \quad . \quad (II.3)$$

Dada uma função f em X pode-se definir uma 1-forma df da seguinte maneira: para cada vetor V , $\langle df, V \rangle \equiv Vf$. A 1-forma df é chamada de diferencial de f . Se $(x^1, \dots, x^n)$ forem coordenadas locais, o conjunto de diferenciais $(dx_1, \dots, dx_n)$ em p forma a base de 1-formas dual à base coordenada $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ de vetores em p . Em termos dessa base pode-se escrever:

$$df = (\partial f / \partial x^i) dx^i \quad (II.4)$$

O subespaço de T_p formado por todos os vetores V tais que $\langle df, V \rangle = 0$ consiste de todos os vetores tangentes a curvas na superfície $f = \text{const.}$ através de p . Pode-se, então, visualizar df como normal à superfície $f = \text{const.}$ em p .

II.4 TENSORES

Um tensor T de tipo (r, s) em p é um elemento do espaço dos produtos tensoriais de r vetores e s 1-formas,

$$T_S^r(p) = \underbrace{T_p \otimes T_p \otimes \dots \otimes T_p}_r \otimes \underbrace{T_p^* \otimes T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^*}_s, \quad$$

que mapeia qualquer conjunto ordenado de r 1-formas e s vetores $(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s)$ em p em um número real. Em

particular, $T_0^1(p) = Tp$ e $T_1^0(p) = T^*p$.

A adição de dois tensores de tipo (r,s) e a multiplicação de um tensor por um escalar são definidas por:

$$(T+T')(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s) = T(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s) + \\ + T'(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s) \quad (II.5)$$

$$(aT)(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s) = aT(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s) \quad (II.6)$$

válidas para todo $\omega \in T^*p$, $V \in Tp$ e $a \in R$.

O espaço dos tensores de tipo (r,s) em p é um espaço vetorial de dimensão n^{r+s} sobre R .

O número em que o tensor $V_1 \otimes \dots \otimes V_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s$ leva o elemento $(\tau^1, \dots, \tau^r, W_1, \dots, W_s)$ é definido como o produto das contrações $\langle \tau^1, V_1 \rangle \langle \tau^2, V_2 \rangle \dots \langle \tau^r, V_r \rangle \langle \omega^1, W_1 \rangle \langle \omega^2, W_2 \rangle \dots \langle \omega^s, W_s \rangle$.

Se $R \in T_0^r(p)$ e $S \in T_q^s(p)$, denota-se por $R \otimes S$ o tensor de tipo $(r+p, s+q)$ que leva o elemento $(\tau^1, \dots, \tau^{r+p}, W_1, \dots, W_{s+q})$ no número $R(\tau^1, \dots, \tau^r, W_1, \dots, W_s)S(\tau^{r+1}, \dots, \tau^{r+p}, W_{s+1}, \dots, W_{s+q})$.

Em termos das bases duais $\{E_a\}$ e $\{E^a\}$, um tensor arbitrário de tipo (r,s) pode ser expresso como a soma dos produtos tensoriais:

$$T = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} E_{a_1} \otimes \dots \otimes E_{a_r} \otimes E^{b_1} \otimes \dots \otimes E^{b_s} \quad , (II.7)$$

onde todos os índices vão de 1 a n . Os coeficientes multiplicando os produtos tensoriais das bases duais em (II.7)

são as componentes de T nessas bases, dadas por

$$T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} = T(E^{a_1}, \dots, E^{a_r}, E_{b_1}, \dots, E_{b_s}) \quad . \quad (II.8)$$

Se (Ea') e $(E^{a'})$ for outro par de bases duais de T_p e T_p^* elas podem ser escritas em termos de (Ea) e (E^a) através das transformações lineares

$$E_{a'} = \Phi_{a'}^a E_a \quad , \quad E^{a'} = \Phi^{a'}_a E^a \quad , \quad (II.9)$$

onde $\Phi_{a'}^a$ e $\Phi^{a'}_a$ são matrizes $n \times n$ não singulares satisfazendo

$$\Phi_{a'}^a \Phi^{b'}_b = \delta^a_b \quad , \quad (II.10)$$

ou seja, são matrizes inversas. As componentes de um tensor T nas bases (Ea') e $(E^{a'})$ estão relacionadas às suas componentes nas bases (Ea) e (E^a) por

$$T^{a'_1 \dots a'_r}_{b'_1 \dots b'_s} = \Phi^{a'_1}_{a_1} \dots \Phi^{a'_r}_{a_r} \Phi^{b_1}_{b'_1} \dots \Phi^{b_s}_{b'_s} T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \quad . \quad (II.11)$$

A contração de um tensor de tipo (r,s) com componentes $T^{ab \dots d}_{c_f \dots g}$ nas bases (Ea) e (E^a) no primeiro índice contravariante e no primeiro índice covariante é definida como sendo o tensor $C_1^i(\tau)$, de tipo $(r-1, s-1)$, dado por

$$C_1^i(\tau) = T^{ab \dots d}_{af \dots g} E_b \otimes \dots \otimes E_d \otimes E^f \otimes \dots \otimes E^g \quad . \quad (II.12)$$

Esta contração pode ser estendida para qualquer par de índi-

ces contra e covariantes.

A parte simétrica de um tensor de tipo (r,s) em um dado conjunto de índices contra ou covariantes será denotada escrevendo-se os índices entre parênteses, e a parte anti-simétrica escrevendo-os entre colchetes. Assim, por exemplo:

$$T_{(a_1, a_2, a_3)}^{b, \dots, f} = \frac{1}{3!} \left\{ T_{a_1 a_2 a_3}^{b, \dots, f} + T_{a_2 a_3 a_1}^{b, \dots, f} + T_{a_3 a_1 a_2}^{b, \dots, f} + T_{a_1 a_3 a_2}^{b, \dots, f} + T_{a_2 a_1 a_3}^{b, \dots, f} + T_{a_3 a_2 a_1}^{b, \dots, f} \right\}$$

e

$$T_{[a_1, a_2, a_3]}^{b, \dots, f} = \frac{1}{3!} \left\{ T_{a_1 a_2 a_3}^{b, \dots, f} + T_{a_2 a_3 a_1}^{b, \dots, f} + T_{a_3 a_1 a_2}^{b, \dots, f} - T_{a_1 a_3 a_2}^{b, \dots, f} - T_{a_2 a_1 a_3}^{b, \dots, f} - T_{a_3 a_2 a_1}^{b, \dots, f} \right\}$$

Um tensor será dito simétrico, ou anti-simétrico, em um dado conjunto de índices contra ou covariantes se for igual à sua parte simétrica, ou anti-simétrica, nesses índices.

Os tensores de tipo $(0,q)$ anti-simétricos em todas as q posições são chamados de q -formas. Se A e B forem, respectivamente, uma p -forma e uma q -forma, define-se uma $(p+q)$ -forma $A \wedge B$ como o tensor de tipo $(0, p+q)$ com componentes dadas por

$$(A \wedge B)_{a b \dots c d \dots f} = A_{[a b \dots c} B_{d \dots f]} \quad , \quad (II.13)$$

onde todos os índices vão de 1 a n . Por exemplo, se A for uma 1-forma e B uma 2-forma, obtém-se

$$(A \wedge B)_{abc} = \frac{1}{3!} \left\{ A_a B_{bc} + A_b B_{ca} + A_c B_{ab} - A_a B_{cb} - A_b B_{ac} - A_c B_{ba} \right\} \quad .$$

A operação $\wedge$ é chamada de produto exterior. Ela é associativa e distributiva, porém não comutativa: se A for uma p -forma e B uma q -forma, tem-se

$$(A \wedge B) = (-1)^{pq} (B \wedge A) \quad . \quad (II.14)$$

Se (E^a) for uma base de 1-formas, as formas $E^{a_1} \wedge \dots \wedge E^{a_p}$ serão uma base de p -formas e cada p -forma poderá ser escrita como

$$A = A_{a_1 \dots a_p} E^{a_1} \wedge \dots \wedge E^{a_p} \quad , \quad (II.15)$$

onde $A_{a_1 \dots a_p} = A_{[a_1 \dots a_p]}$ e cada índice vai de 1 a n .

Seja φ uma aplicação C^1 entre duas variedades X e X' , de dimensões n e m respectivamente. Uma tal aplicação não é, em geral, biunívoca (se $n > m$ ela claramente não é) sendo, portanto, não invertível em geral. Mesmo se ela tiver inversa esta não será, em geral, de classe C^1 . Se f for uma função de X' em $\mathbb{R}$ a aplicação φ define a função $\varphi^* f$ em X como a função cujo valor em $p \in X$ é o valor de f em $\varphi(p)$:

$$\varphi^* f(p) = f(\varphi(p)) \quad . \quad (II.16)$$

A aplicação φ^* leva funções f definidas em X' para funções $\varphi^* f$ definidas em X .

Dada uma curva $\lambda(t)$ passando por p em X a sua curva imagem $\varphi(\lambda(t))$ em X' passa por $\varphi(p)$. Se $r > 1$, o vetor

tangente a essa curva em $\varphi(p)$ é definido por $\varphi_* (\partial/\partial t)|_p$, e pode ser interpretado como a imagem do vetor $(\partial/\partial t)|_p$ com relação à aplicação φ_* . Nada mais é do que uma aplicação linear de T_p em $T_{\varphi(p)}$. Ela é caracterizada pela seguinte relação, válida para cada função $C^1(r \geq 1)$ f em $\varphi(p)$ e para cada vetor V em p :

$$V(\varphi^* f)|_p = \varphi_* V(f)|_{\varphi(p)} \quad . \quad (II.17)$$

Analogamente, pode-se definir uma aplicação linear φ^* que leva 1-formas de $T^*\varphi(p)$ em T^*p através da condição de que as contrações entre 1-formas e vetores sejam preservadas sob as aplicações, de maneira que a 1-forma $\tau \in T^*_{\varphi(p)}$ seja transformada na 1-forma $\varphi^* \tau \in T^*p$ satisfazendo, para qualquer $V \in T_p$, a relação $\langle \varphi^* \tau, V \rangle|_p = \langle \tau, \varphi_* V \rangle|_{\varphi(p)}$. Uma consequência disso é

$$\varphi^*(df) = d(\varphi^* f) \quad . \quad (II.18)$$

As aplicações φ_* e φ^* podem ser generalizadas para aplicações que levem tensores contravariantes de X para X' e tensores covariantes de X' para X de acordo com as regras:

$$\varphi_* : T \in T^0_o(p) \rightarrow \varphi_* T \in T^0_o(\varphi(p)) \quad \text{onde, para qualquer}$$

$$\omega^i \in T^*_{\varphi(p)}, \quad T(\varphi^* \omega^1, \dots, \varphi^* \omega^r)|_p = \varphi_* T(\omega^1, \dots, \omega^r)|_{\varphi(p)}$$

$$\varphi^* : T \in T^0_s(\varphi(p)) \rightarrow \varphi^* T \in T^0_s(p) \quad \text{onde, para qualquer}$$

$$V_i \in T_p, \quad \varphi^* T(V_1, \dots, V_s)|_p = T(\varphi_* V_1, \dots, \varphi_* V_s)|_{\varphi(p)}.$$

Quando $r \geq 1$, a aplicação $C^r \varphi$ de X em X' é dita de grau s em p se a dimensão de $\varphi_* T_p$ for s . Ela será injetora em p se $s=n$, e sobrejetora se $s=m$. Ela será chamada de imersão se for injetora para cada ponto $p \in X$; neste caso a sua inversa também será uma aplicação C^r e, obrigatoriamente, $n \leq m$. A imagem $\varphi(X)$ será chamada de subvariedade n -dimensional imersa em X' .

Uma imersão φ de X em X' será chamada de mergulho se $\varphi: X \rightarrow \varphi(X) \subset X'$ for um homeomorfismo, quando se considera $\varphi(X)$ com a topologia induzida pela topologia de X' . Em particular, se φ for um mergulho então φ será uma imersão biunívoca, mas a recíproca não é verdadeira (ver Fig.4).

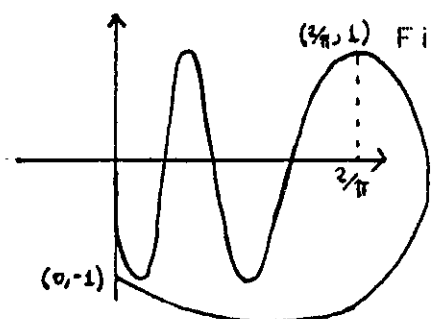


Figura 4. Exemplo de uma imersão que não é um mergulho. A imersão biunívoca $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^1$ em $\mathbb{R}^2$ é definida por: (se $0 < t < 2/\pi$, $\varphi(t) = (t, \sin 1/t)$); se

$1 < t < \infty$, $\varphi(t) = (0, t-2)$; se $2/\pi < t < 1$, $\varphi(t)$ é uma curva simples ligando os pontos $(2/\pi, 1)$ e $(0, -1)$ sem tocar nos outros pontos $(t, f(t))$ já definidos). Os espaços $(0, \infty)$ e $\varphi(0, \infty)$ não são homeomorfos, pois este último não é localmente conexo segundo a topologia de $\mathbb{R}^2$ (um ponto na parte vertical da curva não pode ser ligado por uma curva conexa inteiramente contida em uma sua vizinhança infinitesimal a um ponto infinitamente próximo dele, na outra extremidade da curva).

Quando φ for um difeomorfismo $C^r(r \geq 1)$, φ_* leva T_p em $T_{\varphi(p)}$ e $(\varphi^{-1})^*$ leva T^*_p em $T^*_{\varphi(p)}$. Naturalmente define-se, então, uma aplicação φ_* de $T^*_p(p)$ em $T^*_{\varphi(p)}$ por

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r, \nu_1, \dots, \nu_s)|_p = \varphi_* T((\varphi^{-1})^* \omega^1, \dots, (\varphi^{-1})^* \omega^r, \varphi_* \nu_1, \dots, \varphi_* \nu_s)|_{\varphi(p)} \quad , (II.19)$$

válida para qualquer $\nu_i \in T_p$ e $\omega^i \in T^*_p$. Essa aplicação de tensores de tipo (r, s) em X em tensores de tipo (r, s) em X' preserva todas as relações da álgebra tensorial.

II.5 DIFERENCIAÇÃO EXTERIOR E DERIVADA DE LIE

Na seção II.3 foi definida a diferencial df de uma função f através do operador d , que gera uma 1-forma df a partir de uma 0-forma f por $d: f \rightarrow df = (\partial f / \partial x^i) dx^i$. Generalizando essa operação para que ela se aplique a qualquer p -forma, define-se o operador de diferenciação exterior d , que leva p -formas em $(p+1)$ -formas e é completamente determinado pelos axiomas:

- i) $d(A+B) = dA + dB$, A e $B \in T$,
- ii) $d(A \wedge B) = dA \wedge B + (-1)^p A \wedge dB$, $A \in T^p_p$ e $B \in T^q_p$;
- iii) $d(dA) = 0$, para qualquer p -forma A .

A expressão indicando a derivada exterior de uma p -forma $A = A_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$ é

$$dA = dA_{ab} \dots d \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge \dots \wedge dx^d \quad , \quad (II.20)$$

que é independente das coordenadas (x^a) usadas em sua definição.

O operador d comuta com aplicações entre variedades. Se $\varphi: X \rightarrow X'$ for uma aplicação C^1 e A for uma p -forma em X' ,

$$d(\varphi^* A) = \varphi^*(dA) \quad . \quad (II.21)$$

Com o auxílio do operador d pode-se escrever a forma generalizada do teorema de Stokes. Antes, porém, deve-se definir integração de p -formas. Seja X uma variedade n -dimensional orientável paracompacta com fronteira ∂X e seja (g_α) uma partição da unidade subordinada a um atlas orientado finito $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$. Se A for um campo de n -formas em X , a integral de A sobre X é definida como

$$\int_X A = (n!)^{-1} \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)} g_\alpha A_{12 \dots n} dx^1 dx^2 \dots dx^n \quad , (II.22)$$

onde $A_{12 \dots n}$ são as componentes de A nas coordenadas da vizinhança coordenada $\mathcal{U}_\alpha$ e as integrais do lado direito são integrais múltiplas ordinárias sobre conjuntos abertos $\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \in \mathbb{R}^n$. A integral definida acima é independente do atlas e da partição da unidade escolhidos.

Se φ for um difeomorfismo C^1 ($r \geq 1$) entre duas variedades X e X' tem-se, também, a igualdade:

$$\int_X \Psi_* A = \int_X A \quad . \text{ (II.23)}$$

Dado um campo de $(n-1)$ -formas A em X , pode-se agora escrever a forma geral do teorema de Stokes como (21)

$$\int_{\partial X} A = \int_X dA \quad . \text{ (II.24)}$$

Para se calcular a integral da esquerda é preciso definir uma orientação em ∂X . A orientação induzida em ∂X é definida da seguinte maneira: se $\mathcal{U}_\alpha$ for uma vizinhança coordenada do atlas orientado de X tal que $\mathcal{U}_\alpha$ tenha intersecção não nula com ∂X , então $\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \partial X)$ se encontra no plano $x^1 = 0$ em $\mathbb{R}^n$ e $\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap X)$ se encontra na metade inferior $x^1 \leq 0$. As coordenadas $(x^2, \dots, x^n)$ ficam, portanto, orientadas na vizinhança $\mathcal{U}_\alpha \cap \partial X$, o que dá um atlas orientado em ∂X .

Para cada ponto $p \in X$ um campo vetorial V em X determina uma única curva $\lambda_p(t)$ passando por p tal que $\lambda_p(0) = p$ e cujo vetor tangente em $\lambda(t)$ seja $V|_{\lambda(t)}$. Esta curva é chamada de curva integral de V e, em coordenadas locais (x^i) , é dada por uma solução do conjunto de equações diferenciais

$$dx^i/dt = V^i(x^1(t), \dots, x^n(t)) \quad . \text{ (II.25)}$$

A família dessas curvas é chamada de congruência associada ao campo vetorial V (fig.5)

Se U e V forem campos vetoriais em X o seu comutador $[U, V]$ é um campo vetorial em X definido por

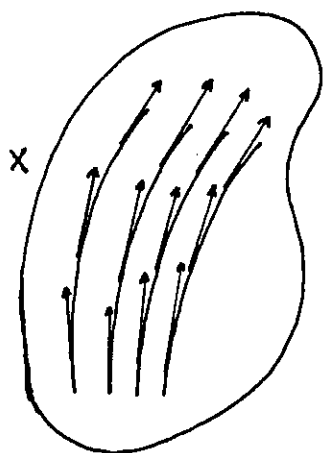


Figura 5. Uma congruência associada ao campo vetorial V (representado por setas).

$$[U, V] f \equiv U(Vf) - V(Uf) \quad , \quad (II.26)$$

onde f é uma função C^∞ em X . O comutador de U e V tem as seguintes propriedades:

- i) $[U, V](fg) = f[U, V]g + g[U, V]f$
- ii) $[U, V] = -[V, U] \quad ; \quad [U, U] = 0$
- iii) $[U_1 + U_2, V] = [U_1, V] + [U_2, V]$
- iv) $[U, [V, W]] + [V, [W, U]] + [W, [U, V]] = 0$

Seja V um campo vetorial em um conjunto aberto de X . O operador L_V , chamado de derivada de Lie com relação a V , é definido pelas propriedades (as fórmulas estão escritas tanto na linguagem abstrata como na das componentes coordenadas) :

- i) $L_V f = Vf = V^i \partial f / \partial x^i$
- ii) $L_V U = [V, U] = (V^j \partial U^i / \partial x^j - U^j \partial V^i / \partial x^j) \partial / \partial x^i$
- iii) $\langle L_V \omega, U \rangle = V \langle \omega, U \rangle - \langle \omega, [V, U] \rangle \Rightarrow$
 $\Rightarrow L_V \omega = (V^i \partial \omega_j / \partial x^i + \omega_i \partial V^i / \partial x^j) dx^j$

$$\begin{aligned}
 \text{iv)} \quad L_V [T(\omega_1, \dots, \omega_r, W^1, \dots, W^s)] &= (L_V T)(\omega_1, \dots, \omega_r, W^1, \dots, W^s) + \\
 &+ T(L_V \omega_1, \dots, \omega_r, W^1, \dots, W^s) + \dots + T(\omega_1, \dots, \omega_r, W^1, \dots, L_V W^s) = \\
 &= [V^i (\partial T^{ik\dots} / \partial x^i) - T^{ik\dots} \partial V^i / \partial x^i - T^{ik\dots} \partial V^k / \partial x^i - \\
 &- \dots + T^{ik\dots} \partial V^i / \partial x^k + T^{ik\dots} \partial V^i / \partial x^m + \dots] (\partial / \partial x^i) \otimes (\partial / \partial x^k) \otimes \dots \\
 &\dots \otimes dx^i \otimes dx^m \otimes \dots
 \end{aligned}$$

A expressão (ii) está dada em termos das bases coordenadas. Para uma base qualquer (E_a) , tem-se $U = U^a E_a$ e $V = V^b E_b$, de maneira que

$$[U, V] = (U^a E_a V^c - V^a E_a U^c + U^a V^b C_{ab}^c) E_c, \quad (\text{II.27})$$

onde os coeficientes de estrutura da base (E_a) são definidos por

$$[E_a, E_b] = C_{ab}^c E_c, \quad (\text{II.28})$$

e são nulos se a base for uma base coordenada.

A aplicação da derivada de Lie ao produto tensorial de tensores arbitrários R e S é

$$L_V(R \otimes S) = L_V R \otimes S + R \otimes L_V S. \quad (\text{II.29})$$

A derivada de Lie aplicada a formas comuta com a derivada exterior:

$$d(L_V A) = L_V (dA), \quad (\text{II.30})$$

para qualquer p -forma A .

Existe uma definição mais geométrica da derivada de Lie, a ser dada a seguir. Seja V um campo vetorial em X e, para cada $p \in X$ seja $\lambda_p(t)$ a curva integral de V passando por p com $\lambda_p(0)=p$. Existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de p , um número real $\varepsilon > 0$ e uma família de difeomorfismos $\varphi_t: \mathcal{U} \rightarrow X$ sempre que $|t| < \varepsilon$ tais que $\varphi_t(p) = \lambda_p(t)$, ou seja, φ_t leva cada ponto p em $\mathcal{U}$ a uma distância definida pelo parâmetro t ao longo da curva integral de V .

Em termos da aplicação φ_t pode-se definir a derivada de Lie como

$$L_V T|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T|_p - \varphi_t^* T|_p) \quad , \quad (II.31)$$

onde T e $\varphi_t^* T$ são tensores de tipo (r,s) em p .

Diz-se que um vetor arbitrário W é Lie-transportado ao longo de uma curva integral de V se $L_V W = 0$.

II.6 CONEXÕES E DERIVADA COVARIANTE;

O TENSOR DE CURVATURA.

Uma conexão afim em um ponto $p \in X$ é uma regra ∇ que associa a cada vetor V em p um operador diferencial linear ∇_V que leva um campo vetorial W no campo vetorial $\nabla_V W$ satisfazendo as seguintes condições:

$$i) \quad \nabla_{fV+gW} U = f \nabla_V U + g \nabla_W U$$

$$ii) \nabla_V (fW) = VfW + f \nabla_V W$$

para quaisquer funções C^∞ f e g e campos vetoriais U , V , W em X .

O operador ∇_V é chamado de derivada covariante na direção de V em p . Se não for especificada uma direção V , a derivada covariante gera um tensor de tipo $(r, s+1)$ a partir de um de tipo (r, s) . Em particular, para um vetor W , ∇W é o tensor de tipo $(1, 1)$ que, quando contraído em sua componente covariante com V , produz o vetor $\nabla_V W$. Dadas as bases duais $\{E_a\}$ e $\{E^a\}$ pode-se escrever

$$\nabla W = W^a_{;b} E_a \otimes E^b \quad , \quad (II.32)$$

onde $W^a_{;b}$ são definidas como as componentes de ∇W . Com esta expressão, tem-se

$$\nabla_V W = (W^a_{;b} V^b) E_a \quad . \quad (II.33)$$

A derivada covariante do vetor de base E_a na direção do vetor de base E_b é definida como:

$$\nabla_{E_b} E_a = \Gamma^c_{ab} E_c \quad , \quad \Gamma^c_{ab} = \langle E^c, \nabla_{E_b} E_a \rangle \quad . (II.34)$$

Com esta definição, e com a de ∇W , pode-se escrever

$$\nabla W = \nabla(W^c E_c) = dW^c \otimes E_c + W^c \Gamma^a_{bc} E_a \otimes E^b \quad , (II.35)$$

de maneira que as componentes de ∇W nas bases coordenadas são

$$W^a_{;b} = \partial W^a / \partial x^b + \Gamma^a_{bc} W^c \quad .(II.36)$$

A derivada covariante de uma base dual é definida por

$$\nabla_{E_b} E^a = - \Gamma^a_{cb} E^c \quad . (II.37)$$

Os coeficientes Γ^a_{bc} se transformam conforme a seguinte fórmula

$$\Gamma'^a_{b'c'} = \Phi'^a_{\alpha} \left(E_{b'}(\Phi^{\alpha}_{c'}) + \Phi^{\alpha}_{b'} \Phi^c_{c'} \Gamma^a_{bc} \right)$$

que não é uma expressão de transformação de componentes tensoriais.

A definição de derivada covariante pode ser estendida para qualquer campo tensorial C^A ($r,1$) pelas regras:

- i) se T for um campo tensorial C^A de tipo (q,s) , então ∇T é um campo tensorial C^{A+1} de tipo $(q,s+1)$
- ii) ∇ é linear e comuta com contrações
- iii) $\nabla f = df$, para qualquer função f

Uma propriedade importante da derivada covariante é a de que ela não satisfaz a regra de Leibniz (22): $\nabla(S \otimes T) \neq \nabla S \otimes T + S \otimes \nabla T$.

Para um tensor arbitrário de tipo (r,s) as componentes de ∇T são:

$$(\nabla_{\epsilon h} T)^{a \dots d}_{c \dots q} = T^{a \dots d}_{e f \dots g j h} = \partial T^{a \dots d}_{e f \dots g} / \partial x^h + \Gamma^a_{h f} T^{f b \dots d}_{e f \dots g} + \Gamma^b_{h f} T^{a f \dots d}_{e f \dots g} + \dots - \Gamma^f_{h e} T^{a b \dots d}_{f f \dots g} - \Gamma^f_{h f} T^{a b \dots d}_{e f \dots g} - \dots \quad .(II.38)$$

Se T for um campo tensorial ao longo de uma curva $C^\lambda(t)$ define-se $DT/\partial t$, a derivada covariante de T ao longo de $\lambda(t)$, como $\nabla_{\partial/\partial t} \bar{T}$ onde $\bar{T}$ é qualquer campo tensorial extendendo o campo T para uma vizinhança aberta de λ . Dessa forma, $DT/\partial t$ constitui um campo tensorial ao longo de $\lambda(t)$ independente da extensão T . Em termos de componentes, se V for o vetor tangente a $\lambda(t)$, tem-se

$$DT^{a \dots d}_{c \dots q} / \partial t = T^{a \dots d}_{e \dots g j h} V^h \quad .(II.39)$$

Em particular, para um campo vetorial V com componentes $V^a = dx^a/dt$:

$$DV^a/\partial t = \partial V^a/\partial t + \Gamma^a_{bc} V^c dx^b/dt \quad .(II.40)$$

Diz-se que o tensor T é transportado paralelamente ao longo de λ se $DT/\partial t = 0$. Dada uma curva $\lambda(t)$ com extremos nos pontos p e q e uma conexão ∇ , só se pode obter um único tensor em q transportado paralelamente a partir de p ao longo de λ . Isso garante que o transporte paralelo ao longo de λ é uma aplicação linear de $T^r_s(p)$ em $T^r_s(q)$ que preserva todos os produtos e contrações tensoriais.

Um caso importante é o do transporte paralelo do próprio vetor tangente a λ ao longo de λ . A curva $\lambda(t)$ será dita uma curva geodésica se $\nabla_V V = D/\partial t (\partial/\partial t)_\lambda$ for paralelo a $(\partial/\partial t)_\lambda$, i.e., se existir uma função f tal que $V^a_j V^b = f V^a$. Neste caso, pode-se encontrar um outro parâmetro para a curva λ que faça a função f se anular. Este parâmetro, chamado de parâmetro afim $\sigma(t)$, deixa a equação da geodésica como

$$D/\partial \sigma (\partial/\partial \sigma)_\lambda = 0 \quad .(II.41)$$

O vetor tangente associado $U = (\partial/\partial \sigma)_\lambda$ é paralelo a V , mas tem seu módulo determinado por $U(\sigma)=1$; ele obedece às equações

$$d^2 x^a / d\sigma^2 + \Gamma^a_{bc} dx^b / d\sigma dx^c / d\sigma = 0 \quad .(II.42)$$

Dado um ponto $p \in X$ e um vetor qualquer $V_p \in T_p$, existe uma única geodésica $\lambda_V(\sigma)$ em X tal que $\lambda_V(0) = p$ e $(\partial/\partial \sigma)_\lambda|_{\sigma=0} = V_p$. Se o parâmetro σ puder assumir todos os valores, $\lambda_V(\sigma)$ será dita uma geodésica completa, e se todas as geodésicas em X forem completas, X será dita uma variedade geodesicamente completa.

Define-se uma aplicação em X , chamada de aplicação exponencial pela seguinte lei: $\exp: V \in T_p \rightarrow \lambda_V(1)$, onde $\lambda_V(1)$ é o ponto de X que está a uma distância unitária, conforme o parâmetro σ , de p ao longo de λ_V . Existe uma vizinhança aberta N_0 da origem em T_p e uma vizinhança aberta N_p

de p em X tal que a aplicação $\exp$ constitui um difeomorfismo C^k de N_p em N_p . N_p é chamada de vizinhança normal de p . Pode-se escolher uma vizinhança normal de p que seja convexa, onde por convexa se quer dizer que quaisquer dois pontos q e r em N_p podem ser ligados por uma única geodésica com início em q e totalmente contida em N_p .

Em uma vizinhança convexa normal N as coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ são definidas tomando-se qualquer ponto $q \in N$ e uma base $\{E_a\}$ de T_q e atribuindo-se coordenadas ao ponto $r \in N$ pela relação $r = \exp(x^a E_a)$, i.é, as coordenadas de r são as componentes, na base $\{E_a\}$, do ponto $\exp^{-1}(r)$ em T_q . Coordenadas definidas dessa maneira são chamadas de coordenadas normais baseadas em q .

O tensor de torção T é um tensor de tipo $(1,2)$ definido pela relação

$$T(U, V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V] \quad , \quad (II.43)$$

para quaisquer vetores U e V . Em uma base coordenada, suas componentes são

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \quad . \quad (II.44)$$

Se as componentes coordenadas da conexão afim obedecerem a relação $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, de maneira que $T=0$, diz-se que a conexão é simétrica. Quando a torção se anula pode-se escrever as equações de definição da derivada exterior e da

derivada de Lie em termos da derivada covariante:

$$(L_V T)^{ab\dots d}_{ef\dots g} = T^{ab\dots d}_{ef\dots g;h} V^h - T^{ab\dots d}_{ef\dots g} V^a_{;f} - T^{ab\dots d}_{ef\dots g} V^b_{;f} - \dots + T^{ab\dots d}_{f\dots g} V^f_{;e} + T^{ab\dots d}_{ef\dots g} V^g_{;f} + \dots \quad , (II.45)$$

$$dA = A_{a\dots c; d} dx^d \wedge dx^a \wedge \dots \wedge dx^c \quad ; \quad (dA)_{a\dots d} = (-1)^p A_{[a\dots c; d]} \quad , (II.46)$$

onde T é um tensor de tipo (r,s) e A é uma p -forma. Daqui por diante só serão consideradas conexões com tensor de torção nulo.

O tensor de curvatura de Riemann R é um tensor de tipo $(1,3)$ definido por

$$R(U,V)W = \nabla_U(\nabla_V W) - \nabla_V(\nabla_U W) - \nabla_{[U,V]} W \quad , (II.47)$$

para quaisquer vetores U, V e W . Ele tem as propriedades

$$\begin{aligned} i) \quad R(U,V)W &= -R(V,U)W \\ ii) \quad R(fU, gV)hW &= fgh R(U,V)W \end{aligned} \quad ,$$

para todas as funções f, g e h .

Em termos das componentes coordenadas, R é definido como

$$R^a_{bcd} U^c V^d W^b = (W^a_{;dc} - W^a_{;cd}) U^c V^d \quad , (II.48)$$

onde $R^a_{bcd} = \langle E^a, R(E_c, E_d) E_b \rangle$. A expressão (II.48) implica na equação

$$V^a_{j;dc} - V^a_{j;cd} = R^a_{bcd} V^b \quad .(II.49)$$

Pode-se, portanto, interpretar R como uma medida da não comutatividade da derivada covariante segunda de um campo vetorial.

Em termos das componentes coordenadas da conexão, pode-se escrever

$$R^a_{bcd} = \partial \Gamma^a_{db} / \partial x^c - \partial \Gamma^a_{cb} / \partial x^d + \Gamma^a_{cf} \Gamma^f_{db} - \Gamma^a_{df} \Gamma^f_{cb} \quad .(II.50)$$

O tensor de curvatura tem, também, as seguintes propriedades:

- i) $R^a_{bcd} + R^a_{dbc} + R^a_{cdb} = 0$
- ii) $R^a_{bcd;j} + R^a_{bec;d} + R^a_{bde;c} = 0$ (identidade de Bianchi)

A contração do tensor de curvatura é um tensor de tipo $(0,2)$, chamado tensor de Ricci, com componentes

$$R_{bd} = R^a_{bad} \quad .(II.51)$$

II.7 A MÉTRICA

Um tensor métrico g em um ponto $p \in X$ é um tensor simétrico de tipo $(0,2)$ em p . Para cada vetor $V \in T_p$, a métrica associa o módulo $|g(V,V)|^{1/2}$ e, para cada par de vetores $U, V \in T_p$, ela associa o cosseno do ângulo entre eles

$g(u,v)/|g(u,v).g(v,v)|^{1/2}$, os vetores U e V são ditos ortogonais se $g(u,v) = 0$.

Na base (E_a) as componentes de g são $g_{ab} = g(E_a, E_b) = g(E_b, E_a)$, de maneira que em uma base coordenada

$$g = g_{ab} dx^a \otimes dx^b \quad .(II.52)$$

O comprimento da curva $\lambda(t)$ entre os pontos $p = \lambda(a)$ e $q = \lambda(b)$ com vetor tangente $\partial/\partial t$ tal que $g(\partial/\partial t, \partial/\partial t)$ tenha o mesmo sinal em todos os pontos é definido como

$L = \int_a^b |g(\partial/\partial t, \partial/\partial t)|^{1/2} dt$, e o comprimento do arco infinitesimal determinado pelo deslocamento $x^i \rightarrow x^i + dx^i$ é dado por:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad .(II.53)$$

Uma métrica é dita não degenerada em p se não existir qualquer vetor $V \in T_p$ tal que $g(V, W) = 0$ para todo $W \in T_p$. Em termos de componentes, uma métrica é não degenerada se a matriz de suas componentes g_{ab} for não singular, o que significa que pode-se definir um único tensor simétrico de tipo $(2,0)$, com componentes g^{ab} na base dual, tal que

$$g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c \quad .(II.54)$$

Assume-se, daqui por diante, que o tensor métrico é não degenerado.

Com o auxílio dos tensores g_{ab} e g^{ab} pode-se

levantar ou abaixar índices covariantes ou contravariantes. Se V^a forem as componentes de um vetor, então V_a são as componentes da única 1-forma a ele associada, tais que

$$V_a = g_{ab} V^b, \quad V^a = g^{ab} V_b, \quad (II.55)$$

da mesma forma, para um tensor de tipo $(0,2)$ T_{ab} pode-se associar unicamente os tensores $T^a_b = g^{ac} T_{cb}$, $T_a^b = g^{bc} T_{ac}$ e $T^{ab} = g^{ac} g^{bd} T_{cd}$. A generalização para tensores de ordem mais alta é imediata. Os tensores contra, covariantes e mistos relacionados entre si por um tensor métrico podem ser encarados como representações diferentes de um mesmo objeto geométrico.

A assinatura de g em p é definida como o número de autovalores positivos da matriz g_{ab} em p menos o número de autovalores negativos. Se g for não degenerada e contínua a assinatura será constante em X , e por uma escolha adequada da base (E_a) pode-se diagonalizar g_{ab} deixando-a na forma

$$g_{ab} = \text{DIAG} \left(\underbrace{+1, +1, \dots, +1}_{\frac{n+s}{2} \text{ TERMOS}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\frac{n-s}{2} \text{ TERMOS}} \right)$$

onde s é a assinatura de g e n é a dimensão de X . Neste caso os vetores de base (E_a) formam um conjunto ortonormal em p .

Uma métrica com assinatura n é chamada de positiva definida. Uma, cuja assinatura seja $(n-2)$ é chamada de métrica lorentziana, e sua forma canônica é

$$g_{ab} = \text{DIAG} \left(\underbrace{+1, \dots, +1}_{n-1 \text{ TERMOS}}, -1 \right)$$

Com uma métrica lorentziana em X , os vetores diferentes de zero em p podem ser divididos em três classes: um vetor $V \in T_p$ será dito tipo-tempo, nulo ou tipo-espaço se $g(V, V)$ for, respectivamente, negativo, nulo ou positivo. Os vetores nulos ficam em um cone duplo em T_p , que separa os vetores tipo-tempo dos tipo-espaço (fig.6)

Dada uma métrica g em X existe uma única conexão afim com torção nula em X , definida pela condição de que a derivada covariante de g seja nula, i.é., $g_{ab;c} = 0$. Com essa conexão, o transporte paralelo de vetores preserva os produtos escalares definidos por g , de maneira que os módulos dos vetores permanecem invariantes.

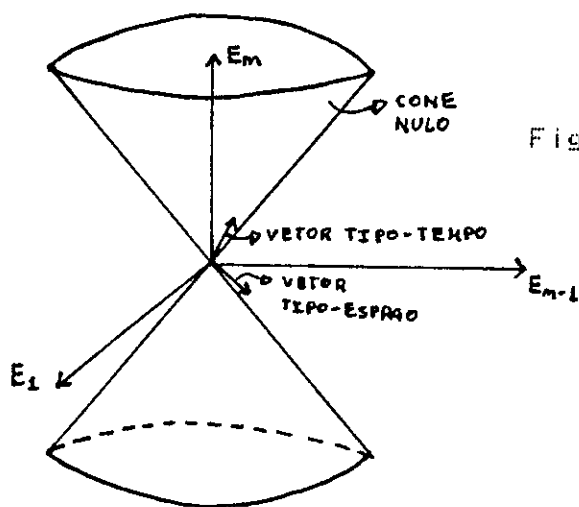


Figura 6. Os cones nulos definidos por uma métrica lorentziana.

A conexão afim está associada ao tensor métrico pela relação:

$$g(W, \nabla_U V) = \frac{1}{2} \left\{ -W(g(U, V)) + U(g(W, V)) + V(g(U, W)) + g(W, [U, V]) + g(V, [W, U]) - g(U, [V, W]) \right\} \quad .(II.56)$$

Escolhendo U, V e W como os vetores de base pode-se escrever as componentes da conexão afim como

$$\Gamma_{abc} = g(E_a, \nabla_b E_c) = g_{ad} \Gamma^d_{bc} \quad (\text{II.57})$$

Em particular, usando uma base coordenada obtém-se as relações de Christoffel :

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2} \left\{ \partial g_{ab} / \partial x^c + \partial g_{ac} / \partial x^b - \partial g_{bc} / \partial x^a \right\} \quad (\text{II.58})$$

Com esta única conexão afim com torção nula determinada por g pode-se definir coordenadas normais em uma vizinhança de um ponto q através de uma base ortonormal de vetores em q . Nesta base, as componentes g_{ab} de g em q são $\pm \delta^a_b$, e as componentes Γ^a_{bc} da conexão serão nulas em q .

O tensor de curvatura associado a essa conexão tem, além das simetrias usuais, as seguintes simetrias :

- i) $R_{abcd} = -R_{bacd}$
- ii) $R_{abcd} = R_{cdab}$
- iii) $R_{ab} = R_{ba}$

A curvatura escalar é definida como a contração do tensor de Ricci :

$$R = R^a_a = R^a_{bad} g^{bd} \quad .(\text{II.59})$$

Com estas simetrias, existem $\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1)$ componentes de R_{abcd} algebricamente independentes, onde n é a dimensão de X ; destas, $\frac{1}{2} n(n+1)$ são representadas por com-

ponentes do tensor de Ricci. As componentes restantes são representadas pelo tensor de Weyl, definido por

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{2}{n-2} \{g_a[c R_{d]}b + g_b[c R_{d]}a\} + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_a[c g_{d]}b. \quad (\text{II.60})$$

O tensor de Weyl tem as mesmas simetrias do tensor de Riemann e, ainda

$$C^a{}_{bad} = 0 \quad . \quad (\text{II.61})$$

Se Y for uma variedade $(n-1)$ -dimensional e $\varphi: Y \rightarrow X$ for um mergulho, a imagem $\varphi(Y)$ será chamada de uma hipersuperfície em X . Se $p \in Y$, a imagem de T_p em $T_{\varphi(p)}$ sob a aplicação φ_* será um plano $(n-1)$ -dimensional através da origem. Pode-se, então, definir uma única forma normal não nula $m \in T^*_{\varphi(p)}$ satisfazendo $\langle m, \varphi_* V \rangle = 0$ para cada vetor $V \in T_p$. Apenas o sinal e o módulo de m permanecem indeterminados.

Se g for uma métrica em X , a aplicação φ irá induzir uma métrica φ^*g em Y tal que se $U, W \in T_p$, $\varphi^*g(U, W)|_p = g(\varphi_* U, \varphi_* W)|_{\varphi(p)}$. Se g for lorentziana, φ^*g será :

- i) Lorentziana se $g^{ab} m_a m_b > 0$ (neste caso, $\varphi(Y)$ será chamada de hipersuperfície tipo-tempo)
- ii) Degenerada se $g^{ab} m_a m_b = 0$ ($\varphi(Y)$ será dita uma hipersuperfície nula)
- iii) Positiva definida se $g^{ab} m_a m_b < 0$ ($\varphi(Y)$ será chamada de hipersuperfície tipo-espaco).

II.8 ISOMETRIAS

Um grupo de Lie G é um grupo que também é uma variedade diferenciável, cuja estrutura é tal que a multiplicação $G \times G \rightarrow G$ e a inversão $G \rightarrow G: a \rightarrow a^{-1}$ são ambas aplicações C^∞ .

Uma transformação que deixe a métrica invariante é chamada de isometria. Se a família de difeomorfismos φ_t gerada por um campo vetorial K for uma família de isometrias, o campo K será chamado de campo vetorial de Killing e os vetores K serão os geradores das isometrias. A derivada de Lie da métrica com relação a um vetor de Killing satisfaz

$$L_K g = 0 \quad , \quad (II.62)$$

de onde se obtém as equações de Killing, que um campo de Killing deve necessariamente satisfazer (23),

$$K_{a;b} + K_{b;a} = 0 \quad , \quad (II.63)$$

ou, em termos das derivadas usuais:

$$g_{ab,c} K^c + g_{cb} K^c{}_{,a} + g_{ac} K^c{}_{,b} = 0 \quad . \quad (II.64)$$

O conjunto das isometrias de uma variedade X

tem a estrutura de um grupo de Lie, chamado de grupo de simetria de X . Se existirem r campos vetoriais de Killing linearmente independentes K_a ($a=1, \dots, r$) gerando o grupo de simetria, pode-se mostrar (24) que

$$[K_a, K_b] = C_{ab}^c K_c, \quad C_{ab}^c = -C_{ba}^c, \quad (II.65)$$

onde as C_{ab}^c são as constantes de estrutura do grupo. Essas relações definem a chamada álgebra de Lie associada ao grupo de Lie das simetrias da variedade. Pode-se mostrar que uma tal álgebra não pode ter dimensão maior que $1/2 \cdot n(n+1)$, onde n é a dimensão de variedade (25).

Um grupo de simetria G_r (r denota a dimensão) é dito transitivo em uma variedade X se, para quaisquer x e y em X , existir uma transformação T em G_r tal que $Tx=y$. Dado um ponto x , sua órbita é definida como o conjunto $\{Tx\}$ de todos os pontos para cada T em G_r , e seu grupo de isotropia é definido como o conjunto de todas as transformações T em G_r tais que $Tx=x$.

A órbita H de um ponto é um subconjunto de X . Esses subconjuntos preenchem X e dois subconjuntos distintos não tem pontos em comum. H é chamado de sub-espaco invariante ou homogêneo. Se a dimensão de H for a mesma de G_r o grupo é chamado de simplesmente transitivo em seus sub-espacos invariantes, e se ela for menor o grupo é chamado de múltiplemente transitivo em H .

No caso de um grupo de simetria G_r ser sim-

plesmente transitivo em seus sub-espacos invariantes pode-se definir, para cada sub-espaco, uma base invariante $\{B_a\}$ ($a=1, \dots, r$) com coeficientes de estrutura D_{ab}^c constantes em cada sub-espaco homogêneo (26). Uma base invariante é um conjunto de r campos vetoriais $\{B_a\}$ linearmente independentes satisfazendo :

$$[K_i, B_a] = 0, \quad (i=1, \dots, r; a=1, \dots, r) \quad (II.66)$$

Escrevendo $B_a = \gamma_a^b K_b$, obtém-se de (II.66) que

$$[B_a, B_b] = C_{ab}^c \gamma_a^d \gamma_b^e K_e, \quad (II.67)$$

e, se for escolhida a condição $B_a = K_a$, tem-se a igualdade $D_{ab}^c = -C_{ab}^c$. Os campos vetoriais B_a geram um grupo chamado de grupo recíproco do grupo Gr . Se as órbitas forem sub-variedades de X , pode-se estender as bases invariantes para bases $\{B_c\}$ ($c=1, \dots, n$) de todos os espacos tangentes em cada ponto, onde os vetores B_c obedecem (II.66).

II.9 ELEMENTOS DE VOLUME ; O TEOREMA DE GAUSS

Se $\{E_a\}$ for uma base de 1-formas em um sistema de coordenadas orientado, define-se a forma

$$\eta = n! \sqrt{-g} E^1 \wedge E^2 \wedge \dots \wedge E^n, \quad g \equiv \text{DET } g_{ab}, \quad (\text{II.68})$$

que é independente da base usada e é chamada de elemento de volume. Ela tem componentes

$$\eta_{ab\dots d} = n! \sqrt{-g} \delta^1_a \delta^2_b \dots \delta^n_d \quad (\text{II.69})$$

e suas derivadas covariantes com relação à conexão definida pela métrica se anulam :

$$\eta_{ab\dots d;j} = 0 \quad (\text{II.70})$$

Usando a n -forma η pode-se definir o volume de uma sub-variedade n -dimensional $\mathcal{U}$ como

$$\frac{1}{n!} \int_{\mathcal{U}} \eta$$

o que implica que η pode ser encarada como uma medida de volume positiva-definida em X , denotada por $d\sigma$. Se f for uma função em X , define-se a integral sobre $\mathcal{U}$ com respeito a essa medida de volume como

$$\int_{\mathcal{U}} f d\sigma = \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{U}} f \eta$$

a qual, em coordenadas locais (x^a) , é escrita como

$$\int_{\mathcal{U}} f \sqrt{-g} dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

que é invariante por uma mudança de coordenadas.

Se V for um campo vetorial em X , sua contração com η será um campo de $(n-1)$ -formas $V \cdot \eta$ tal que

$$(V \cdot \eta)_{b\dots d} = V^a \eta_{ab\dots d} \quad (\text{II.71})$$

A integral dessa $(n-1)$ -forma sobre qualquer sub-variedade $(n-1)$ -dimensional paracompacta orientável $\mathcal{T}$ será escrita como

$$\int_{\mathcal{T}} V^a d\tau_a = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathcal{T}} V \cdot \eta \quad , (II.72)$$

onde η define a forma $d\tau_a$ como uma medida de volume de $\mathcal{T}$.

Dada uma sub-variedade n -dimensional paracompacta com fronteira $\mathcal{U}$ de X tem-se, com o auxílio do teorema de Stokes, que :

$$\int_{\partial\mathcal{U}} V^a d\tau_a = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\partial\mathcal{U}} V \cdot \eta = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathcal{U}} d(V \cdot \eta) \quad . (II.73)$$

Um cálculo do integrando do lado esquerdo dá como resultado (27): $d(V \cdot \eta) = n^{-1} V^a_{;a} \eta$, que substituído em (II.73) resulta no teorema de Gauss :

$$\int_{\partial\mathcal{U}} V^a d\tau_a = \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{U}} V^a_{;a} \eta = \int_{\mathcal{U}} V^a_{;a} d\mathcal{V} \quad . (II.74)$$

III. ELEMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL E DA COSMOLOGIA.

III.1 CONVENÇÕES E NOTAÇÃO

Ao longo deste trabalho, as unidades adotadas serão tais que todas as quantidades físicas tornam-se adimensionais. Assume-se, portanto, o sistema em que $c = \hbar = K = 8\pi G = 1$, onde c é a velocidade da luz, $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π , K é a constante de Boltzmann e G é a constante gravitacional de Newton.

As derivadas parciais comuns serão denotadas por uma vírgula e as derivadas covariantes por ponto e vírgula.

Quando se escrever uma expressão usando-se a convenção da somatória, os índices latinos cobrirão os números de 1 a 4, enquanto que os gregos irão de 1 a 3. A componente temporal dos quadrivetores será a quarta, e as três primeiras serão as espaciais.

III.2 SUMÁRIO DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Além de ser uma teoria de gravitação, a rela-

tividade geral é, também, uma teoria sobre geometria. De acordo com ela, o campo gravitacional está relacionado à estrutura geométrica da coleção de todos os eventos físicos, chamada de espaço-tempo. Essa geometria pode ser conhecida estudando-se o comportamento dinâmico de partículas neutras e sem estrutura (partículas teste) colocadas livremente nos vários pontos do espaço-tempo.

A teoria assume que o espaço-tempo pode ser representado por uma variedade quadri-dimensional X, C^∞ , conexa e de Hausdorff, com uma métrica lorentziana g de assinatura +2. Essas imposições implicam que o espaço-tempo deve ser paracompacto.

Com a métrica g pode-se dividir os vetores diferentes de zero em um ponto p em três classes: um vetor diferente de zero $V \in T_p$ será dito de tipo-tempo, de tipo-espaço ou de tipo-luz se o valor de $g(V,V)$ for, respectivamente, negativo, positivo ou nulo. Em cada espaço tangente T_p o cone de luz, definido por $V: g(V,V) = 0$, consiste de duas metades cônicas separadas pelo vértice. Considerar-se-á que o espaço-tempo pode ser orientado temporalmente, i.é, que é possível selecionar continuamente, por todos os pontos, meios-cones de luz futuros. Um vetor que não seja de tipo-espaço será dito orientado para o futuro (ou para o passado) se estiver no interior ou na superfície de um meio-cone futuro (ou passado).

Um sistema de coordenadas (x^i) será dito ortogonal em p se, em p , $g_{ab} = \eta_{ab} = \text{diag}(1,1,1,-1)$. A existên-

cia de um tal sistema coordenado para cada ponto p é garantida pela assinatura de g .

Se um sistema de coordenadas for ortonormal e geodésico ($g_{ab}, c=0$) em um ponto p , ele será chamado de inercial em p . As hipóteses colocadas implicam que cada ponto do espaço-tempo admite um sistema de coordenadas inercial. Com isso, a relatividade especial passa a valer aproximadamente em uma vizinhança suficientemente pequena de cada evento p .

Podem existir vários campos no espaço-tempo, o eletromagnético, o mesônico, etc., que descrevem o comportamento do conteúdo material do universo. Esses campos devem obedecer relações que possam ser expressas como equações tensoriais, com todas as derivadas em relação à posição sendo derivadas covariantes com respeito à conexão simétrica definida pela métrica g .

As equações que governam o comportamento dos campos materiais também devem satisfazer o princípio de causalidade local: se $\mathcal{U}$ for uma vizinhança normal convexa e p e q forem pontos em $\mathcal{U}$, então um sinal pode propagar-se de p para q se, e somente se, p e q puderem ser ligados por uma curva diferenciável inteiramente contida em $\mathcal{U}$ com vetor tangente diferente de zero e, ou de tipo-tempo ou de tipo-luz. Se o sinal for material, a curva será de tipo-tempo e, se ele for luminoso, ela será de tipo-luz.

As equações que governam os campos materiais implicam na existência de um tensor simétrico T_{ab} , chamado de tensor energia-momento, que depende dos campos, de suas

derivadas covariantes e da métrica. Ele tem as seguintes propriedades:

- i) T_{ab} se anula em um conjunto aberto $\mathcal{U}$ se, e somente se, todos os campos materiais se anularem em $\mathcal{U}$;
- ii) $T^{ab}_{;b} = 0$. (III.1)

Se a métrica admitir um campo vetorial de Killing K , as equações (III.1) podem ser integradas para dar uma lei de conservação. Para mostrar isso, seja P^a um vetor cujas componentes são $P^a = T^{ab} K_b$. Então,

$$P^a_{;a} = T^{ab}_{;a} K_b + T^{ab} K_{b;a} = T^{ab}_{;a} K_b + T^{ba} K_{(a;b)} = 0,$$

pois T^{ab} é simétrico e K é um vetor de Killing. Se $\mathcal{U}$ for uma região paracompacta orientável com fronteira $\partial\mathcal{U}$, o teorema de Gauss mostra que

$$\int_{\partial\mathcal{U}} P^b d\sigma_b = \int_{\mathcal{U}} P^b_{;b} dV = 0, \quad \text{(III.2)}$$

cujas interpretação é a de que o fluxo total sobre uma superfície fechada da componente do tensor energia-momento na direção de K é zero.

As propriedades i) e ii) de um tensor energia-momento não são suficientes para que se possa, a partir de um dado conjunto de campos, construir uma expressão para T_{ab} . No caso em que as equações dos campos podem ser obtidas de uma Lagrangeana, no entanto, existe uma maneira única e definida de se obter o tensor energia-momento.

Seja L a Lagrangeana para os campos $\psi^{a-b}_{(i) \dots}$, onde

o índice i designa o tipo do campo. Ela é uma função escalar dos próprios campos, de suas derivadas covariantes primeiras e da métrica. As equações de movimento para os campos são obtidas impondo-se que a ação

$$I = \int_{\mathcal{U}} L d\sigma \quad ,$$

seja estacionária sob variações dos campos no interior de uma região paracompacta quadri-dimensional . Como é bem sabido (28), essa imposição conduz às equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_{(i) a \dots b}} - \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_{(i) a \dots b ; c}} \right]_{;c} = 0 \quad . \quad (\text{III.3})$$

Segundo este formalismo, o tensor energia-momento pode ser obtido por uma variação da lagrangeana com respeito à métrica (29):

$$T_{ab} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L}{\delta g^{ab}} \quad . \quad (\text{III.4})$$

Em particular, os tensores energia-momento para partículas de spin 0 (campo escalar), 1/2 (campo de Dirac) e 1 (campo vetorial) são (30):

$$T_{ab}(s=0) = \psi_{;a} \psi_{;b} - \frac{1}{2} g_{ab} (\psi_{;c} \psi_{;d} g^{cd} + m^2 \psi^2) \quad (\text{III.5})$$

$$T_{ab}(s=1/2) = \frac{1}{2} i \left[\bar{\psi} \gamma_{(a} \nabla_{b)} \psi - (\nabla_{(a} \bar{\psi}) \gamma_{b)} \psi \right] \quad (\text{III.6})$$

$$T_{ab}(s=1) = \frac{1}{4} \left(g^{cd} F_{ac} F_{bd} - \frac{1}{4} g_{ab} F_{ik} F_{kl} g^{ik} g^{jl} \right) \quad , \quad (\text{III.7})$$

onde F_{ab} é o tensor campo eletromagnético.

A experiência demonstra que o espaço-tempo deve ser curvo, ou seja, que a sua métrica não pode ser a métrica sem curvatura da relatividade especial. Além disso, o ponto de vista adotado pela teoria da relatividade geral é o de que o campo gravitacional é representado pela própria métrica do espaço-tempo. Logo, devem existir equações que relacionem a métrica à distribuição de matéria no espaço-tempo que se reduzam às equações Newtonianas da gravitação no limite de curvatura pequena com variação reduzida.

Estas equações são as equações de Einstein, onde a curvatura associada à métrica g está relacionada com a matéria por (31):

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} + \Lambda g_{ab} \quad , \quad (\text{III.8})$$

ou

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = T_{ab} \quad , \quad (\text{III.9})$$

que constituem um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas não-lineares para as dez componentes de g_{ab} . O termo Λ , chamado de constante cosmológica, é interpretado como a densidade de energia do vácuo (32), estando relacionado ao seu tensor energia-momento por

$$T_{ab}^{(\text{vác.})} = - \Lambda g_{ab} \quad . \quad (\text{III.10})$$

III.3 MOVIMENTO RELATIVO DE PARTÍCULAS

Seja uma congruência de curvas de tipo-tempo com vetor tangente unitário, ou quadri-velocidade, μ tal que $\mu^a \mu_a = -1$. Essas curvas podem representar as linhas de universo de um conjunto de partículas teste (geodésicas), ou as linhas de fluxo de um fluido.

Define-se

$$\dot{\mu}^a \equiv \mu^a_{;b} \mu^b \quad , \quad (\text{III.11})$$

como a aceleração das linhas de fluxo, e o tensor

$$h_{ab} \equiv g_{ab} + \mu_a \mu_b \quad , \quad (\text{III.12})$$

como o tensor de projeção num sub-espaco H_q de T_q ortogonal a μ (espaco de repouso de um observador em q movendo-se com quadri-velocidade μ). h_{ab} pode ser interpretado como a métrica de H_q .

A partir de uma curva qualquer $\lambda(t)$ pode-se construir uma família $\lambda(t,s)$ de curvas movendo-se cada ponto de $\lambda(t)$ de uma distância s ao longo das curvas integrais de μ . Se cada curva $\lambda(t,s)$ tiver vetor tangente $W = (\partial/\partial t)_{\lambda(t,s)}$ pode-se mostrar que μ e W comutam, ou:

$$D_{\partial/\partial s} W^a = \mu^a_{;b} W^b \quad . \quad (\text{III.13})$$

Pode-se interpretar W como a separação entre pontos a iguais distâncias de pontos iniciais arbitrários ao longo de duas curvas vizinhas (ver fig. 7)

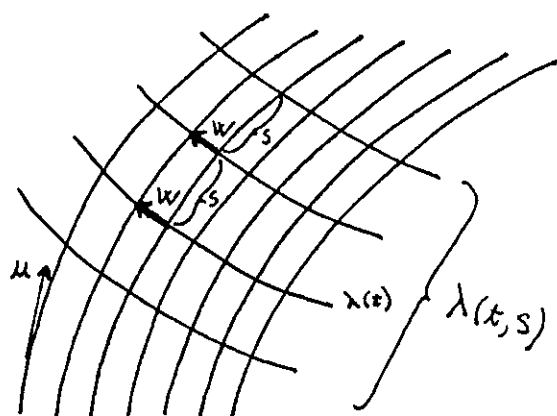


Figura 7. A figura mostra uma congruência de curvas com vetor tangente μ e uma família de curvas $\lambda(t, s)$ geradas por $\lambda(t)$. Ao longo de cada linha de universo, a distância entre curvas sucessivas é sempre s . O campo vetorial W

conecta as curvas da congruência em pontos com iguais parâmetros s .

Em geral um vetor de conexão como W não se encontra inteiramente no espaço H_q de vetores ortogonais a μ em Tq . A projeção de W em H_q será denotada por $\perp W^a = h^a_b W^b$ e, de acordo com (III.13),

$$\perp \frac{D}{\partial s} (\perp W^a) = \mu^a_{;b} \perp W^b \quad (\text{III.14})$$

dá a taxa de variação da separação entre duas curvas infinitesimalmente vizinhas medida em H_q . Operando novamente com $D/\partial s$ e projetando sobre H_q , encontra-se (33):

$$h^a_b \frac{D}{\partial s} (h^b_c \frac{D}{\partial s} \perp W^c) = -R^a_{bcd} \perp W^c \mu^b \mu^d + h^a_b \dot{\mu}^b_{;c} \perp W^c + \dot{\mu}^a \dot{\mu}_b \perp W^b \quad (\text{III.15})$$

Esta equação, conhecida como equação do desvio, dá a aceleração relativa de duas curvas infinitesimalmente próximas medida em H_q . Se as curvas forem geodésicas $\dot{\mu}_a = 0$, e se obtém a equação do desvio geodésico:

$$h^a_b \frac{D}{ds} \left(h^b_c \frac{D}{ds} \perp W^c \right) = - R^a_{bcd} \perp W^c \mu^b \mu^d \quad .(III.16)$$

Para se analisar as propriedades da equação de desvio, introduz-se a derivada de Fermi. Ela é definida, para um campo vetorial W ao longo de uma curva $\gamma(s)$, como:

$$\frac{D_F}{ds} W = \frac{D}{ds} W - g(W, D\mu/ds) \mu + g(W, \mu) \frac{D\mu}{ds} \quad .(III.17)$$

Ela tem as propriedades:

- i) $D_F/ds = D/ds$ se $\gamma(s)$ for uma geodésica;
- ii) $D_F \mu/ds = 0$;
- iii) se W e V forem campos vetoriais ao longo de $\gamma(s)$ tais que $D_F W/ds = D_F V/ds = 0$, então $g(W, V)$ é constante ao longo de $\gamma(s)$;
- iv) se W for um campo vetorial ao longo de $\gamma(s)$ ortogonal a μ , então $D_F W/ds = \perp(DW/ds)$.

Se uma base ortonormal $\{E_a\}$ de T_q em algum ponto q sobre $\gamma(s)$ com vetor tangente $\mu = E_4$ for propagada ao longo de $\gamma(s)$ de maneira que $D_F E_a/ds = 0$, a nova base continua ortonormal com $E_4 = \mu$.

Com o auxílio da derivada de Fermi pode-se reescrever as equações (III.14) e (III.15) em termos da base

ortonormal Fermi-propagada como (34)

$$dW^\alpha/ds = \mu^\alpha_{;\beta} W^\beta \quad (\text{III.18})$$

$$d^2W^\alpha/ds^2 = (-R^\alpha_{\gamma\beta\gamma} + \dot{\mu}^\alpha_{;\beta} + \dot{\mu}^\alpha \dot{\mu}_\beta) W^\beta \quad (\text{III.19})$$

onde as componentes se acham projetadas no espaço H_q ortogonal a μ gerado pela base (E_α) .

As componentes de W obedecem equações diferenciais ordinária lineares de primeira ordem e, portanto, podem ser escritas como

$$W^\alpha(s) = A_{\alpha\beta}(s) W^\beta|_q \quad (\text{III.20})$$

onde $A_{\alpha\beta}$ é uma matriz que se reduz à matriz unitária em q e satisfaz

$$\frac{d}{ds} A_{\alpha\beta}(s) = \mu_{\alpha;\gamma} A_{\gamma\beta}(s) \quad (\text{III.21})$$

No caso de um fluido a matriz $A_{\alpha\beta}$ representa a forma e a orientação de um pequeno elemento de fluido esfericamente simétrico em q . Em geral, se decompõe $A_{\alpha\beta}$ no produto de duas outras matrizes $O_{\alpha\beta}$ e $S_{\alpha\beta}$, onde $O_{\alpha\beta}$ representa a rotação de curvas vizinhas em relação à base (E_α) e $S_{\alpha\beta}$ representa a separação destas curvas em relação a $\chi(s)$.

Em q , onde $A_{\alpha\beta}$ é unitária, $dO_{\alpha\beta}/ds$ é anti-simétrica e $dS_{\alpha\beta}/ds$ é simétrica, fazendo com que a taxa de ro-

tação de curvas vizinhas seja dada por $\mu_{[\alpha;\beta]}$ e a taxa de desvio em relação a $\gamma(s)$ seja dada por $\mu_{(\alpha;\beta)}$. Define-se o tensor de vorticidade como

$$\omega_{ab} \equiv h_a^c h_b^d \mu_{[\alpha;\beta]} \quad , \quad (\text{III.22})$$

o tensor de expansão como

$$\theta_{ab} \equiv h_a^c h_b^d \mu_{(\alpha;\beta)} \quad , \quad (\text{III.23})$$

e a expansão volumétrica como

$$\theta \equiv \theta_{ab} h^{ab} = \mu_{a;b} h^{ab} = \mu^a_{;a} \quad . \quad (\text{III.24})$$

Define-se, ainda, o tensor de cisalhamento como a parte sem traço de θ_{ab} ,

$$\tau_{ab} \equiv \theta_{ab} - \frac{1}{3} h_{ab} \theta \quad , \quad (\text{III.25})$$

e o vetor de vorticidade como

$$\omega^a = \frac{1}{2} \eta^{abcd} \mu_b \omega_{cd} = \frac{1}{2} \eta^{abcd} \mu_b \mu_{c;d} \quad . \quad (\text{III.26})$$

Em termos destas quantidades, a derivada covariante de μ pode ser escrita como:

$$\mu_{a;b} = \omega_{ab} + \tau_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} - \dot{\mu}_a \mu_b \quad . \quad (\text{III.27})$$

Na base ortonormal Fermi-propagada os tensores de vorticidade e de expansão podem ser expressos em termos da matriz $A_{\alpha\beta}$ e da sua inversa $A_{\alpha\beta}^{-1}$:

$$\omega_{\alpha\beta} = -A^{-1}\gamma[\alpha \frac{d}{ds} A_{\beta}] \gamma \quad , \quad (III.28)$$

$$\theta_{\alpha\beta} = A^{-1}\gamma(\alpha \frac{d}{ds} A_{\beta}) \gamma \quad . \quad (III.29)$$

A partir da equação (III.19), tem-se que:

$$\frac{d^2}{ds^2} A_{\alpha\beta} = (-R_{\alpha\gamma\gamma} + \dot{\mu}_{\alpha;\gamma} + \dot{\mu}_{\alpha} \dot{\mu}_{\gamma}) A_{\gamma\beta} \quad . \quad (III.30)$$

Esta equação permite que se calcule a propagação da vorticidade, do cisalhamento e da expansão ao longo das curvas integrais de u . Multiplicando-a por $A_{\alpha\beta}^{-1}$ e tomando a parte antissimétrica, obtém-se

$$\frac{d}{ds} \omega_{\alpha\beta} = 2\omega_{\gamma}[\alpha \theta_{\beta}] \gamma + \dot{\mu}[\alpha_{\beta}] \quad , \quad (III.31)$$

e multiplicando-a por $A_{\beta\gamma}^{-1}$ e tomando a parte simétrica

$$\frac{d}{ds} \theta_{\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta\gamma} - \omega_{\alpha\gamma} \omega_{\gamma\beta} - \theta_{\alpha\gamma} \theta_{\gamma\beta} + \dot{\mu}(\alpha_{\beta}) + \dot{\mu}_{\alpha} \dot{\mu}_{\beta} \quad . \quad (III.32)$$

O traço de (III.32) é

$$\frac{d}{ds} \theta = -R_{ab} \mu^a \mu^b + 2\omega^2 - 2\sigma^2 - \frac{1}{3} \theta^2 + \dot{\mu}^a_{;a} \quad , \quad (III.33)$$

onde $2\omega^2 = \omega_{ab}\omega^{ab} \geq 0$, $2\tau^2 = \tau_{ab}\tau^{ab} \geq 0$. Esta equação é conhecida como equação de Raychaudhuri (35). Por ela, vê-se que vorticidade induz expansão, enquanto que cisalhamento induz contração.

III.4 CONDIÇÕES DE ENERGIA

Nas condições reais do universo, em que existem vários campos materiais presentes, é praticamente impossível escrever o tensor energia-momento exato, mesmo que se conheça a forma precisa da contribuição de cada campo. Existem, entretanto, certas desigualdades que representam condições fisicamente razoáveis para um tensor energia-momento.

A primeira dessas desigualdades é a condição de energia fraca: O tensor energia-momento, em cada ponto $p \in X$, obedece a desigualdade $T_{ab}U^aU^b \geq 0$, para qualquer vetor de tipo-tempo $U \in T_p$. Como para um observador cuja linha de universo em p tenha vetor tangente u a densidade de energia local é dada por $T_{ab}u^au^b$, esta condição pode ser interpretada como estabelecendo que a densidade de energia medida por qualquer observador é não-nula.

A próxima condição é a condição de energia dominante: Para qualquer vetor de tipo-tempo V , $T^{ab}V_aV_b \geq 0$, e $T^{ab}V_a$ não é um vetor de tipo-espaco. Ela pode ser encarada como dizendo que, para qualquer observador, a densidade de energia local aparece como não-nula e que o vetor fluxo de

energia local não é de tipo-tempo. Pode-se, equivalentemente, dizer que ela determina que, para qualquer base ortonormal, a energia domina sobre as outras componentes de T_{ab} : $T^{00} > |T^{ab}|$, para cada a, b .

A condição de energia dominante nada mais é do que a condição de energia fraca adicionada ao requerimento de que a pressão não exceda a densidade de energia.

Analisando a expressão (III.33), percebe-se que a expansão θ de uma congruência geodésica de tipo-tempo com vorticidade nula irá decrescer monotonicamente ao longo de uma geodésica se $R_{ab}V^aV^b > 0$ para qualquer vetor de tipo-tempo V . Esta desigualdade é chamada de condição de convergência de tipo-tempo. Pelas equações de Einstein, ela será satisfeita se o tensor energia-momento obedecer a desigualdade $T_{ab}V^aV^b > V^aV_a(1/2.T - \Lambda)$. Diz-se que o tensor energia-momento satisfaz a condição de energia forte se ele obedecer a esta desigualdade para $\Lambda = 0$.

III.5 FLUIDODINÂMICA RELATIVISTA

Considerar-se-á um observador movendo-se com quadrivelocidade u^a , $u^a u_a = -1$, ao longo do fluido. A densidade do número de partículas em seu referencial de repouso será denotada por m , de maneira que a densidade do fluxo de partículas fica dada por

$$N^a = n u^a$$

(III.34)

A densidade total de energia será denotada por μ e a densidade específica de energia interna por ε . Com isso, pode-se escrever

$$\mu = \rho (1 + \varepsilon)$$

(III.35)

onde ρ é a densidade de massa de repouso, $\rho = m m$, e m é a massa de repouso das partículas do fluido.

A densidade do fluxo de massa é definida por $m N^a = \rho u^a$. Como a massa é uma quantidade conservada, obtém-se a equação

$$(\rho u^a)_{;a} = 0$$

(III.36)

que expressa a conservação da matéria ao longo das linhas de fluxo.

Em relatividade geral, o tensor energia-momento da matéria pode ser decomposto univocamente em relação a um campo vetorial de tipo-tempo u^a para dar (36)

$$T^{ab} = (\mu + P) u^a u^b + P g^{ab} + 2 q^{(a} u^{b)} + \pi^{ab} \quad , (III.37)$$

onde P é a pressão isotrópica, q^a é o fluxo de energia com relação a u^a (que representa processos como difusão e condução de calor) e π^{ab} é o tensor de tensão sem traço (pres-

são anisotrópica). Usando esta decomposição e a decomposição de $\mu_{a;b}$ dada por (III.27), pode-se reescrever a equação de conservação de energia e momento $T^{ab}_{;b} = 0$ como:

$$\dot{\mu} + (\mu + P)\theta + \pi^{ab}\sigma_{ab} + q^a_{;a} + q^a\dot{\mu}_a = 0 \quad , \quad (III.38)$$

$$(\mu + P)\dot{\mu}_a + h^c_a(p_{;c} + \pi^b_{c;b} + \dot{q}_c) + (\omega_a^b + \sigma_a^b + \frac{1}{3}\theta h_a^b)q_b = 0. \quad (III.39)$$

Adotando-se uma equação de estado para o fluido do tipo $\mathcal{E} = \mathcal{E}(P, \vartheta)$, onde ϑ é o volume específico, $\vartheta \equiv 1/\rho$, pode-se definir a temperatura $T(P, \vartheta)$ e a entropia específica $S(P, \vartheta)$ por (37)

$$d\mathcal{E} + P d\vartheta = T dS \quad , \quad (III.40)$$

de onde se obtém a equação de conservação de energia térmica

$$\rho T S_{;a} \mu^a = - (\pi_{ab} \sigma^{ab} + q^a_{;a} + q^a \dot{\mu}_a) \quad . \quad (III.41)$$

Um fluido perfeito é caracterizado por viscosidade e condução de calor nulas. Seu tensor energia-momento reduz-se a

$$T^{ab} = (\mu + P)\mu^a\mu^b + P g^{ab} \quad , \quad (III.42)$$

e as equações de conservação de energia e momento tornam-se

$$\dot{\mu} + (\mu + P)\theta = 0 \quad , \quad (III.43)$$

$$(\mu + P) \dot{u}_a + h a^b P_{;b} = 0 \quad (III.44)$$

Assumindo a restrição $\mu + P > 0$, a equação (III.43) mostra que uma compressão do fluido aumenta a sua densidade de energia, e a equação (III.44) mostra que a aceleração do fluido está sempre dirigida de uma região de alta pressão para uma região de baixa pressão.

Para um fluido perfeito, a equação (III.41) se torna

$$S_{;a} u^a = 0 \quad (III.45)$$

o que implica que a entropia é constante ao longo das linhas de fluxo do fluido. Com este resultado, a equação (III.40) implica que só existe uma variável termodinâmica independente ao longo das linhas de fluxo. Em geral, assume-se para o fluido perfeito uma equação de estado do tipo

$$P = P(\mu) \quad (III.46)$$

com os seguintes casos particulares importantes:

- i) Vácuo : $P = \mu = 0$
- ii) Poeira : $P = 0$
- iii) Lei gama : $P = \gamma \mu$, $\gamma = \text{const.}$. Um gás de fótons é um caso especial desta lei com $\gamma = 1/3$
- iv) Politrópico : $P = k \mu^{(1+1/n)}$, $k = \text{const.}$; $n = \text{const.}$ (índice politrópico)

Até agora se considerou apenas fluidos neutros. Se cada partícula do fluido tiver uma carga conservada e define-se a densidade de corrente elétrica como

$$J^a = e N^a \quad (\text{III.47})$$

e o tensor energia-momento de um fluido perfeito carregado fica:

$$T^{ab} = (\mu + p) u^a u^b + p g^{ab} + \frac{1}{4\pi} \left(F_c^a F^{bc} - \frac{1}{4} g^{ab} F_{cd} F^{cd} \right) \quad (\text{III.48})$$

IV. COSMOLOGIA RELATIVISTA

IV.1 GENERALIDADES

O ponto de vista adotado em todos os modelos cosmológicos, sem o qual não se poderia sequer pensar em fazer cosmologia, é o de que as leis físicas locais, estabelecidas na superfície da terra e em suas vizinhanças imediatas, podem ser aplicadas à totalidade do universo e, em princípio, a todos os tempos.

Juntamente a essa hipótese se coloca o chamado Princípio de Copérnico, segundo o qual nós não ocupamos uma posição privilegiada no espaço-tempo, o que parece ser uma proposição bastante razoável.

Estes dois postulados norteiam a construção de todos os modelos cosmológicos relativistas. É importante lembrar, porém, que os modelos cosmológicos exercem, por sua vez, uma influência sobre as leis físicas locais, pois estabelecem as condições de contorno a que estão sujeitos os campos físicos.

As observações astronômicas indicam a existência de um vetor velocidade média da matéria tomada em larga escala, ou seja, da matéria do universo distribuída sobre grandes volumes espaço-temporais (38). Assumindo, portanto, a existência de um vetor velocidade média local, o Princípio

de Copérnico implica que isso deve ocorrer para todos os outros pontos, de maneira que se pode considerar que o universo atual está, quando visto em larga escala, se expandindo (39).

A velocidade média será representada por um campo vetorial normalizado u^a , tal que $u^a u_a = -1$. Este campo vetorial é determinado da seguinte maneira. Para alguma região arbitrariamente escolhida do universo, as partículas (aglomerados de galáxias) que representam o movimento médio recebem coordenadas (x^ν) , $\nu=1,2,3$. Em tempos posteriores, as mesmas partículas continuam com os mesmos valores coordenados, de maneira que as suas linhas de universo são constantes ($x^\nu = \text{const.}$). Medindo o tempo próprio ao longo das trajetórias, determina-se o intervalo s . As coordenadas assim obtidas, (x^ν, s) , são chamadas de coordenadas co-moventes normalizadas e, em termos delas, o vetor velocidade é expresso como $u^a = \delta^a_s$.

A existência dessa quadri-velocidade média da matéria no universo implica que as equações obtidas na seção III.5 passam a ser válidas para o universo na aproximação de fluido (válida em larga escala).

Dado o tensor energia-momento decomposto univocamente em relação a u^a (III.37), tem-se que $T = T^a_a = 3P - \mu$. Substituindo nas equações de Einstein, (III.8), pode-se decompor-las em:

$$R_{ab} u^a u^b = \frac{1}{2} (\mu + 3P) - \Lambda \quad (\text{IV.1})$$

$$R_{ab} u^a h^b_c = - \rho_c \quad (IV.2)$$

$$R_{ab} h^a_c h^b_d = \left\{ \frac{1}{2} (\mu + 3p) + \Lambda \right\} h_{cd} + \pi_{cd} \quad (IV.3)$$

Substituindo (IV.1) na equação de Raychaudhuri, obtém-se uma equação de propagação para a expansão θ :

$$\dot{\theta} - \dot{u}^a_{;a} + \frac{1}{3} \theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{1}{2} (\mu + 3p) - \Lambda = 0 \quad (IV.4)$$

Definindo-se um comprimento representativo R ao longo das linhas de universo das partículas por

$$H \equiv \dot{R}/R = \theta/3 \quad (IV.5)$$

onde H é chamado de parâmetro de Hubble, pode-se reescrever (IV.4) como:

$$3\ddot{R}/R = 2(\omega^2 - \sigma^2) + \dot{u}^a_{;a} - \frac{1}{2} (\mu + 3p) + \Lambda \quad (IV.6)$$

Esta equação mostra como a curvatura da curva $R(t)$ é determinada diretamente em cada ponto do espaço-tempo pela densidade de matéria no ponto, com o termo Λ ($\Lambda > 0$) atuando como uma força constante repulsiva.

Quando $\omega = 0$, a equação (III.26) mostra que $u_a u_{b;c} = 0$. Isto implica que u_a deve ser proporcional a um gradiente, ou seja, devem existir funções $f(x^a)$, $t(x^a)$ tais que, localmente, $u_a = -ft_{,a}$. Como $t_{,a}$ é um vetor normal às su-

perfícies ($t=\text{const.}$), essa equação expressa a condição de que u_a seja ortogonal a essas superfícies. Logo, os espaços de repouso definidos em cada ponto por h_{ab} se juntam, neste caso, para formarem hipersuperfícies de tipo-espaço, parametrizadas por t , ortogonais a u_a . A função t pode ser encarada como um tempo cósmico definido pelo fluxo do fluido. Se, além disso, $\dot{u}_a=0$, a função t medirá o tempo próprio ao longo de todas as linhas de universo e $u_a=-t_{,a}$.

IV.2 OS MODELOS COSMOLÓGICOS DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER (FRW) (40)

A hipótese básica sobre a qual os modelos FRW se sustentam é a de que o espaço-tempo é esfericamente simétrico em torno de cada ponto. Esta hipótese implica (41) que o espaço-tempo é espacialmente homogêneo e admite um grupo de isometria G_6 cujas superfícies de transitividade são hipersuperfícies tri-dimensionais de tipo-espaço de curvatura constante.

Para tais espaços-tempos, $\omega = \dot{u}_a = 0$, o que implica na existência de uma função t tal que $u_a = -t_{,a}$. Em coordenadas co-moventes, a métrica pode ser escrita na forma

$$ds^2 = R^2(t) d\tau^2 - dt^2, \quad (\text{IV.7})$$

onde $d\sigma^2$ é a métrica de um espaço tri-dimensional de curvatura constante e independe do tempo. A geometria desses espaços depende do sinal da curvatura ser positivo, negativo ou nulo. Por uma mudança de variáveis, a curvatura k pode ser normalizada para ter valores ± 1 ou 0 . A métrica $d\sigma^2$ é reescrita como

$$d\sigma^2 = dX^2 + f^2(X)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad , \quad (\text{IV.8})$$

onde

$$f(X) = \begin{cases} \sin X & \text{se } k=+1 \\ 0 & \text{se } k=0 \\ \sinh X & \text{se } k=-1 \end{cases}$$

Quando $k=0$ ou -1 , os espaços tri-dimensionais são difeomorfos a R^3 e são infinitos, mas quando $k=+1$ eles são difeomorfos à superfície de uma hiperesfera tridimensional e são compactos (ou finitos).

A simetria dos modelos FRW implica que o tensor energia-momento deve ter a forma de um fluido perfeito com densidade de energia μ e pressão P sendo funções somente da coordenada temporal, e cujas linhas de fluxo são as curvas (X, θ, ϕ) constantes.

As equações de Einstein, quando resolvidas, resultam nas equações

$$3\dot{R}^2 = (\mu R^3)/R + \Lambda R^2 - 3k \quad , \quad (\text{IV.9})$$

$$\dot{\mu} = -3(\mu+P)\dot{R}/R \quad . \quad (IV.10)$$

onde (IV.10) é, essencialmente, a equação de conservação de energia (III.43). Derivando-se (IV.9) em relação a t e usando-se (IV.10), obtém-se a equação de Raychaudhuri :

$$3\ddot{R}/R + \frac{1}{2}(\mu+3P) - \Lambda = 0 \quad . \quad (IV.11)$$

Assumindo que $\mu+3P > 0$ e que $\Lambda = 0$, a equação de Raychaudhuri mostra que $R(t)$ não pode ser constante; o espaço-tempo deve estar ou em contração ou em expansão, o que é condizente com as interpretações mais aceitas das observações. A equação (IV.11) mostra ainda que, se $\Lambda = 0$, R deve ter sido nulo em algum tempo finito t_0 no passado, dado por:

$$t_0 = H^{-1} \quad . \quad (IV.12)$$

De (IV.10) vê-se que a densidade decresce se o espaço-tempo se expande, ou seja, ela deve ter sido infinitamente grande no passado, quando $R \rightarrow 0$. Esta singularidade é a característica mais impressionante dos modelos FRW. Ela ocorre em todos os modelos em que $\mu+3P$ é positivo e $\Lambda \leq 0$ ou não muito maior que zero.

Dando-se uma equação de estado $P = P(\mu)$, (IV.10) pode ser integrada para dar μ como função de R . Se o espaço-tempo for vazio, $\mu=P=0$, as equações de Einstein se

reduzem a

$$\ddot{R}/R = \Lambda R/3, \quad 3\dot{R}^2 = \Lambda R^3 - 3K \quad , (IV.13)$$

cujas soluções são:

$$\left. \begin{aligned} K=+1 : R &= \frac{1}{B} \cosh Bt \\ K=-1 : R &= \frac{1}{B} \sinh Bt \\ K=0 : R &= A e^{Bt} \end{aligned} \right\} , \Lambda = 3B^2 \quad (IV.14)$$

As soluções acima são conhecidas como modelos de de Sitter.

No caso em que $\Lambda=0$ e o universo está preenchido por radiação, $P=\mu/3$, as equações (IV.10) e (IV.9) se tornam

$$\mu = M/R^4, \quad 3\dot{R}^2 = M/R^2 - 3K \quad , (IV.15)$$

onde M é uma constante. Introduzindo a variável $y=R^2$, pode-se escrever a equação para R como

$$\dot{y}^2/4 = M/3R^2 - K \quad , (IV.16)$$

Escolhendo a constante de integração de maneira que $y(t_0)=0$, obtém-se:

$$\left. \begin{aligned}
 k=0: \quad R^2 &= 2 \sqrt{\frac{M}{3}} (t-t_0) \\
 k=-1: \quad R^2 &= (t-t_0)^2 + 2 \sqrt{\frac{M}{3}} (t-t_0) \\
 k=+1: \quad R^2 &= -(t-t_0)^2 + 2 \sqrt{\frac{M}{3}} (t-t_0)
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.17})$$

Supondo que o universo tem uma equação de estado de poeira, $P=0$, encontra-se:

$$\mu = M/R^3, \quad 3\dot{R}^2 - M/R = -3k \quad , \quad (\text{IV.18})$$

onde $M=\text{const.}$. Introduzindo o parâmetro adimensional ζ por $d\zeta = dt/R$, reescreve-se a segunda equação como

$$(\downarrow R / \downarrow \zeta)^2 = MR/3 - kR^2, \quad (\text{IV.19})$$

cujas soluções são (ver fig.8):

$$\left. \begin{aligned}
 k=0: \quad R &= M\zeta^2/12, \quad t = M\zeta^3/36 \\
 k=-1: \quad R &= \frac{M}{6}(\cosh \zeta - 1), \quad t = \frac{M}{6}(\sinh \zeta - \zeta) \\
 k=+1: \quad R &= \frac{M}{6}(1 - \cos \zeta), \quad t = \frac{M}{6}(\zeta - \sin \zeta)
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.20})$$

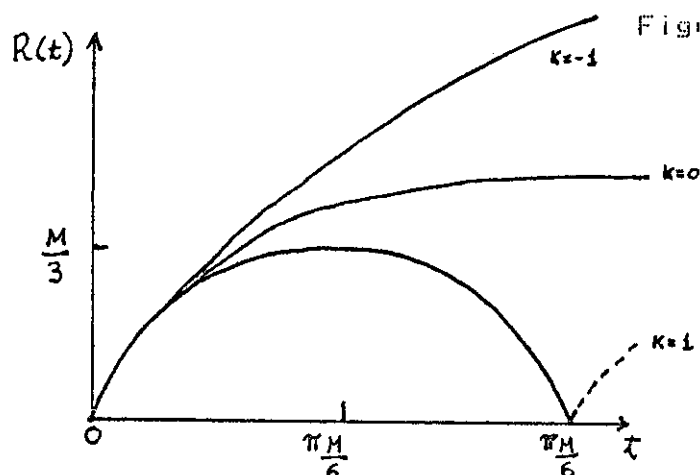


Figura 8. O fator de escala do universo R como função do tempo para os três modelos de FRW para poeira.

Nas vizinhanças da singularidade ($t \rightarrow 0$), todos os três tipos apresentam o mesmo comportamento temporal, dado por

$$R(t) \approx (3M/4)^{1/3} t^{2/3} \quad (IV.21)$$

Em geral, assume-se que a expansão do universo ocorre através de uma sucessão de estados de equilíbrio. Isso implica que a entropia se conserva durante a expansão. Se a densidade de entropia for denotada por $\mathcal{T}$, tem-se que

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{T} R^3) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\mathcal{T}}}{\mathcal{T}} = 3 \frac{\dot{R}}{R} \quad (IV.22)$$

Admitindo que a matéria no universo pode ser representada por um gás de radiação em equilíbrio, as funções termodinâmicas são dadas por (42):

$$\mu = 3P = \frac{\pi^2}{15} T^4 \quad (IV.23)$$

$$\sigma = \frac{4\pi^2}{45} T^3, \quad (\text{IV.24})$$

$$m = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3, \quad (\text{IV.25})$$

onde $\zeta(3)=1,20206\dots$ é a função zeta de Riemann.

A evolução térmica do universo pode, então, ser encontrada reescrevendo-se (IV.15) em função da temperatura apenas:

$$\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2 = \frac{\pi^2}{45} T^4 - \epsilon(T) T^2, \quad (\text{IV.26})$$

onde

$$\epsilon(T) = \frac{k}{R^2 T^2} = k \left[\frac{\sigma}{S T^3} \right]^{2/3} = k \left[\frac{4\pi^2}{45 S} \right]^{2/3}, \quad (\text{IV.27})$$

e S é a entropia total.

Do ponto de vista observacional, a principal evidência em favor da expansão do universo vem do desvio espectral para o vermelho (red-shift) observado na luz emitida por galáxias distantes. Se um fóton for emitido com uma frequência ν em um tempo t e recebido em um tempo muito posterior t_0 , pode-se mostrar (43) que ele será observado com uma frequência

$$\nu_0 = \nu R(t_0) / R(t), \quad (\text{IV.28})$$

desde que, tanto o emissor quanto o receptor, se movam ao

longo de linhas de universo determinadas pela métrica de FRW.

Define-se o red-shift z como

$$z = (\lambda_0 - \lambda) / \lambda \quad , \quad (IV.29)$$

onde λ é o comprimento de onda. A equação (IV.28) implica, então, que:

$$1 + z = R(t_0) / R(t) \quad . \quad (IV.30)$$

Se, na Terra e no tempo presente t_0 , se examinar a luz emitida por uma galáxia no tempo t , então, se $R(t)$ não variar muito rapidamente e se o tempo $t_0 - t$ não for tão grande, pode-se expandir $R(t)$ em série de Taylor em torno de t_0 :

$$R(t) \approx R(t_0) \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right] \quad , \quad (IV.31)$$

onde H_0 é o valor atual do parâmetro de Hubble e q_0 é definido como o valor presente do parâmetro de desaceleração

$$q_0 = - \ddot{R}(t_0) R(t_0) / \dot{R}^2(t_0) \quad . \quad (IV.32)$$

Substituindo-se a série (IV.31) em (IV.30), obtém-se a relação

$$z = H_0(t_0 - t) + (1 + q_0/2) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \dots \quad . \quad (IV.33)$$

Um fóton emitido pela galáxia descreve, na ausência de forças, um movimento puramente radial ($\theta = \text{const.}$, $\phi = \text{const.}$, $\chi = \chi(t)$). Logo, como para um fóton $ds=0$, o elemento de linha de FRW dá $R(t)d\chi = -dt$ (o sinal menos ocorre porque o fóton se propaga em direção à Terra, colocada em $\chi_0=0$). Consequentemente, a linha de universo do fóton satisfaz:

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \quad . \quad (\text{IV.34})$$

A distância, para o tempo presente t_0 , entre a galáxia e a Terra é dada, no sistema de coordenadas em que a Terra é caracterizada por $(0, \theta, \phi, t_0)$, por

$$D = R(t_0) \chi \quad . \quad (\text{IV.35})$$

Usando a expressão (IV.34), encontra-se:

$$D = R(t_0) \int_t^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \quad . \quad (\text{IV.36})$$

Com a expansão (IV.31) para $R(t)$ a expressão acima fica, após a integração, $D = t_0 - t + 1/2 \cdot H_0 (t_0 - t)^2 + \dots$ ou, equivalentemente,

$$t_0 - t = D - \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t)^2 \quad . \quad (\text{IV.37})$$

Combinando (IV.37) com a expansão de z em termos de $(t_0 - t)$, (IV.33), obtém-se

$$Z = H_0 D + \frac{1}{2} (1+q_0) (H_0 D)^2 + \dots \quad (\text{IV.38})$$

Esta é a relação red-shift-distância para os modelos cosmológicos de FRW. A partir dela pode-se determinar o valor de H_0 que, presentemente, é dado com uma incerteza de um fator 2 (44):

$$H_0 = 100 h \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (\text{IV.39})$$

com $1/2 < h < 1$.

De acordo com (IV.9), se $k=0$ e $\Lambda=0$, a densidade de energia do universo será:

$$\mu_{cr.} = 3H^2, \quad (\text{IV.40})$$

que é chamada de densidade crítica. Obviamente, k pode ser diferente de zero e a verdadeira densidade de energia ser diferente de $\mu_{cr.}$. A razão

$$\Omega = \mu / \mu_{cr.} \quad (\text{IV.41})$$

é chamada de parâmetro de densidade. Em geral, Ω é função de t mas, se $k=\Lambda=0$, Ω será sempre igual a um. Existe uma relação direta entre Ω e o parâmetro de desaceleração q , dada por

$$q = \frac{\Omega}{2} (1+3\gamma) \quad (\Lambda=0) \quad , \quad (IV.42)$$

onde $\gamma = P/\mu$. Na época atual, $P \ll \mu$, de maneira que

$$q_0 = \Omega_0/2 \quad . \quad (IV.43)$$

O intervalo observacional para o parâmetro de desaceleração q_0 está entre 0,01 e 2,3 (45), o que implica que $0,02 < \Omega_0 < 4,5$.

Analisando a equação (IV.9), escrita como

$$\Omega = 1 + \frac{k}{R^2 H^2} \quad , \quad (IV.44)$$

e supondo que, para os primeiros tempos do universo, $R(t) \propto t^m$ ($m < 1$) (o que condiz com as soluções para radiação e poeira estudadas, com $k=0$), tem-se que

$$\Omega - 1 = \frac{k}{m^2} t^{2-2m} \quad . \quad (IV.45)$$

Esta equação indica que, se no início do universo Ω diferia da unidade por um pouco, ele deve diferir grandemente da unidade nos tempos atuais. Isso está em desacordo com o valor medido de Ω_0 , que se encontra razoavelmente próximo de um, e constitui o chamado problema da densidade crítica (flatness problem): a densidade de energia do universo primordial deve ter sido enormemente próxima da densidade crítica para estar condizente com os valores atualmente obser-

vados.

Para se fazer uma estimativa de quão próxima a densidade de energia devia estar da densidade crítica por volta do tempo de Planck, definido como $t_p = (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5,391 \times 10^{-44}$ seg, vai-se usar o seguinte procedimento: tomando-se $\mu < 5\mu_{cr.}$, atualmente, tem-se que ($\Lambda=0$)

$$\left| \frac{3k}{R_0^2} \right| < 4\mu_{cr.} = 12 H^2 \quad . \quad (IV.46)$$

Supondo que $k=1$, a equação acima implica que $R_0 > 1/2.H_0^{-1} \sim 9 \times 10^9$ anos. Admitindo que o universo é composto, entre outras coisas, por um gás de radiação cuja atual temperatura é da ordem de 2,7K, e que a entropia se conservou desde a era de Planck até os dias atuais:

$$S > S_{RRD.} = \pi R_0^3 = \frac{4\pi^2}{45} T_0^3 R_0^3 = 3,1 \times 10^{85} \quad , \quad (IV.47)$$

e

$$|\epsilon| < 4 \times 10^{-57} \quad . \quad (IV.48)$$

Logo, usando (IV.23), (IV.26) e (IV.40),

$$\left| \frac{\mu - \mu_{cr.}}{\mu} \right| = \frac{45}{\pi^2} \frac{|\epsilon(T)|}{T^2} < \frac{1,8 \times 10^{-56}}{T^2} \quad . \quad (IV.49)$$

Definindo a massa de Planck como

$$M_P = (\hbar c / G)^{1/2} = 2,177 \times 10^{-8} \text{ kg} \quad , \quad (\text{IV.50})$$

pode-se reescrever (IV.49), no sistema de unidades adotado, como:

$$\left| \frac{\mu - \mu_{cr.}}{\mu} \right| < 1,8 \times 10^{-56} \frac{M_P^2}{8\pi T^2} = 7 \times 10^{-58} \left(\frac{M_P}{T} \right)^2 \quad . \quad (\text{IV.51})$$

Para o tempo de Planck, $T = M_P$, de maneira que, segundo (IV.51), $|\Omega - 1|/\Omega < 7 \times 10^{-58}$.

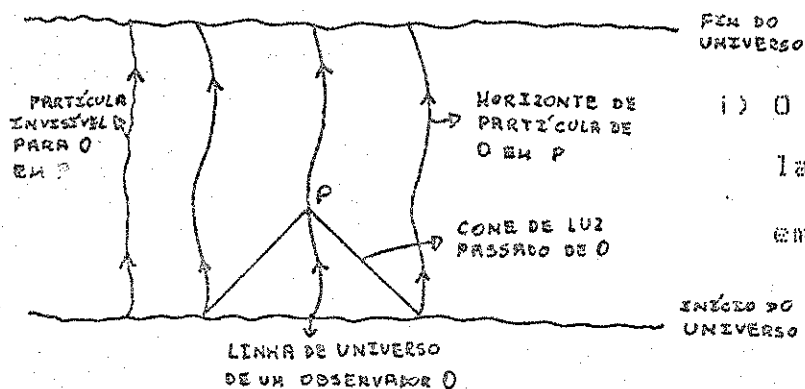
Toda essa análise pode estar errada, desde que o valor de Λ tenha sido consideravelmente grande no passado. Os limites observacionais para o atual valor de Λ , obtidos a partir de medidas de q_0 , são $\Lambda < 3 \times 10^{-29} \text{ g.cm}^{-3}$ (46). Para os estágios atuais de evolução do universo pode-se, portanto, assumir que $\Lambda \sim 0$.

O principal agente pelo qual se pode obter informação sobre o universo é a luz. Em um espaço plano pode-se, em princípio, ver todo sinal luminoso - por mais distante que esteja a sua origem - desde que se espere um tempo suficientemente longo, por causa da velocidade finita da luz. Num espaço curvo, entretanto, a situação é mais complicada.

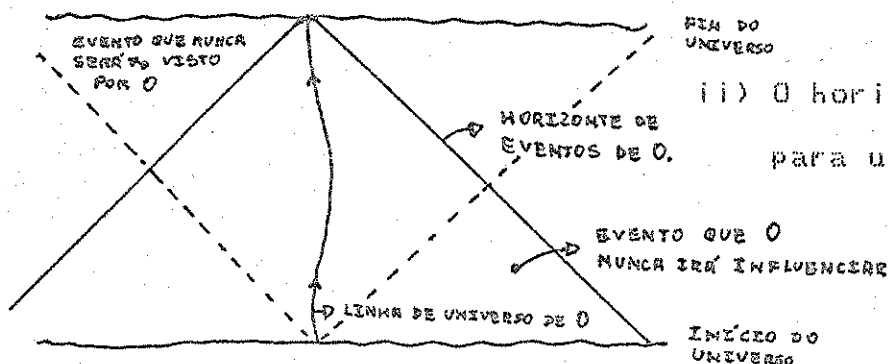
Chama-se de horizonte ao raio da região do espaço-tempo que, em um tempo t , está causalmente conexa a um dado ponto p . Existem dois tipos de horizonte: i) pode existir um volume máximo de cujos pontos sinais podem atingir o ponto p (horizonte de partícula); ii) pode existir um volume

máximo cujos pontos poderão ser atingidos, em algum tempo, por um sinal emitido por p (horizonte de eventos). Os dois conceitos se encontram ilustrados, qualitativamente, na figura 9.

Figura 9. Horizontes



i) O horizonte de partícula de um observador O em p .



ii) O horizonte de eventos para um observador O .

Dos dois tipos, o que mais interessa é o horizonte de partícula. Um pulso luminoso emitido em $t=0$ atinge, no tempo t , a distância

$$D = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} \quad , \quad (IV.52)$$

que dá o horizonte de partícula em função de t . Supondo, no-

vamente, que $R(t) \propto t^m$ obtém-se

$$D = t / (1-m) \quad (m < 1) \quad . \quad (IV.53)$$

A expressão acima indica que, num tempo t , o universo era causalmente separado em regiões de raio D .

As observações revelam a existência de uma radiação cósmica de fundo na região de microondas cuja temperatura, em torno de 2,7K, é bastante isotrópica ($\Delta T/T < 10^{-4}$ sobre distâncias angulares da ordem de $\theta \sim 1^\circ$) (47). Essa radiação de fundo é interpretada como remanescente de um período em que os fótons, até então em equilíbrio térmico com a matéria, se desacoplaram e passaram a se propagar livremente. Devido à isotropia observada nessa radiação infere-se que o universo, antes da época do desacoplamento, devia ser praticamente isotrópico. Segundo o modelo de FRW mais aceito, o equilíbrio térmico entre matéria e radiação começou por volta de $t \approx 2$ seg quando $T \approx 10^{10}$ K (48).

Admitindo que, durante o período de interação térmica entre matéria e radiação, a equação de estado para o universo era do tipo $P = \mu/3$, o fator n em (IV.53) passa a valer $1/2$ e o raio do horizonte fica sendo dado por

$$D = 2t \quad . \quad (IV.54)$$

Este horizonte de partícula deve ser comparado com o raio da região do universo à época do equilíbrio entre matéria e ra-

dição que irá evoluir para se transformar no universo presente observado. Usando conservação da entropia, tem-se

$$L^3(t) T(t) = L_0^3 T_0 \quad , \quad (IV.55)$$

onde L denota o raio em questão e o índice "o" indica valor atual. Assumindo que $L_0 \approx 4 \times 10^{41} \text{ Gev}^{-1}$ e que $T_0 \approx 2 \times 10^{12} \text{ Gev}$, a razão entre os volumes com raios D e L(t) é:

$$\frac{D^3}{L(t)^3} = 8 \left(\frac{t T}{L_0 T_0} \right)^3 \approx 2,5 \times 10^{-22} \quad . \quad (IV.56)$$

O resultado acima implica que o universo, antes da época do desacoplamento, consistia de pelo menos 10^{22} regiões separadas que não tiveram tempo suficiente para se comunicar umas com as outras. Isso torna difícil a explicação da isotropia do universo àquele período, e constitui o chamado problema do horizonte.

IV.3 MODELOS COSMOLÓGICOS

ESPACIALMENTE HOMOGÊNEOS

O conceito matemático de homogeneidade de um espaço é o de que todos os seus pontos são equivalentes. Claramente, este conceito é válido para espaços de qualquer dimensão, podendo ser aplicável tanto para o espaço-tempo

como um todo quanto para subconjuntos de três, duas ou uma dimensão.

O tipo mais importante de espaço-tempo com sub-espacos homogêneos ocorre quando todo ponto se encontra em uma seção tri-dimensional homogênea de tipo-espaço, i.é, em que o vetor tangente a qualquer curva na seção homogênea é de tipo-espaço em todos os pontos. Um espaço-tempo com essa propriedade é chamado de espacialmente homogêneo. Nada impede um universo espacialmente homogêneo de estar em evolução temporal.

Além do conceito de homogeneidade, outro conceito importante para se classificar espaços-tempos de um ponto de vista geométrico é o de isotropia, ou seja, o de equivalência de direções.

Se existir uma direção de tipo-tempo em um ponto tal que todas as direções espaciais perpendiculares a ela são equivalentes, o espaço-tempo será dito esfericamente simétrico em torno do ponto. Se, para uma dada direção temporal em um ponto, existir uma direção espacial tal que quaisquer direções na superfície bi-dimensional perpendicular às duas direções sejam equivalentes, o espaço-tempo será dito rotacionalmente simétrico. Obviamente, espaços-tempos esfericamente simétricos são rotacionalmente simétrico em torno de qualquer direção espacial. Um espaço que for ou esfericamente ou rotacionalmente simétrico em todo ponto será chamado de localmente rotacionalmente simétrico (LRS).

Alguns dos mais importantes tipos de simetria

do espaço-tempo são os seguintes: Se existir um vetor de Killing de tipo-tempo em todos os pontos, o espaço-tempo exibe uma independência temporal, e é dito estacionário; se, além disso, o vetor de Killing for ortogonal a hipersuperfícies (em todos os pontos), o espaço-tempo será chamado de estático. Se existir um grupo G_r de movimentos deixando um ponto p fixo, G_r será chamado de grupo de isotropia. O maior grupo de isotropia que um espaço-tempo pode ter em um ponto é um G_6 (O grupo das transformações de Lorentz) (49). Um grupo de isotropia em p induz um grupo de transformações lineares do espaço dos vetores tangentes a p , T_p , que é um grupo de isotropia linear. Se esse grupo de isotropia linear deixar um vetor de tipo-tempo fixo, o grupo de isotropia terá órbitas de tipo-espaço, assim como um grupo de rotações no espaço. Um G_1 de isotropia em um ponto p deixando fixo um vetor de tipo-tempo implica em simetria rotacional em p . Um G_3 , por sua vez, implica em simetria esférica.

A homogeneidade se caracteriza por um grupo atuando transitivamente sobre todo o espaço-tempo. A homogeneidade espacial ocorre quando um grupo atua transitivamente sobre seções espaciais (as órbitas são sub-variedades tridimensionais de tipo-espaço). Para que se tenha homogeneidade espacial, portanto, é preciso que se tenha um grupo G_r ($r \geq 3$) atuando sobre aquelas seções. Sabe-se que, para $n=3$, $r \leq 1/2 \cdot n(n+1) = 6$. Logo, os modelos espacialmente homogêneos devem ter $r=3, 4, 5$ ou 6 .

Se $r=3$, existe um grupo simplesmente transiti-

vo. Se $r=4$, pode-se mostrar que existe um subgrupo de três dimensões (50), o qual pode atuar transitivamente em órbitas de 3 ou 2 dimensões. Se ele atuar sobre órbitas de 3 dimensões, tem-se de volta o caso $r=3$. Na realidade, existe apenas uma possibilidade de que um grupo G_4 não possua um subgrupo G_3 simplesmente transitivo; nesse caso, cada ponto das órbitas tem um G_4 de isotropia e o espaço é LRS. Um G_5 é impossível (51). Todos os casos em que $r=6$ admitem um G_3 simplesmente transitivo em que cada ponto da órbita tem um G_3 de isotropia e é localmente esfericamente simétrico (modelos de FRW).

Tem-se, portanto, que um critério satisfatório de homogeneidade espacial, que exclui apenas o caso G_4 mencionado acima, é o de que deve existir um G_3 de movimentos atuando de maneira simplesmente transitiva em órbitas de tipo-espaço. Todos os casos de homogeneidade espacial possíveis podem, portanto, ser encontrados por uma classificação de todos os G_3 possíveis. Isso foi feito pela primeira vez por Bianchi (52).

Como visto na seção II.8, os vetores de Killing de um grupo de simetria satisfazem uma álgebra de Lie dada por

$$[K_\alpha, K_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} K_\gamma \quad . \quad (IV.57)$$

Para classificar os G_3 vai-se usar o seguinte procedimento (53), que difere do originalmente proposto por Bianchi. U-

sando $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$, o pseudo-tensor completamente anti-simétrico normalizado ($\varepsilon^{123}=1$), pode-se escrever

$$\frac{1}{2} C_{\alpha\beta}^{\gamma} \varepsilon^{\alpha\beta\delta} = N^{(\gamma\delta)} + \varepsilon^{\gamma\delta\alpha} A_{\alpha} \quad , \quad (IV.58)$$

onde $N^{\gamma\delta}$ é um tensor tri-dimensional de segunda ordem e A_{α} é um vetor tri-dimensional. As propriedades do comutador implicam que

$$N^{\alpha\beta} A_{\beta} = 0 \quad . \quad (IV.59)$$

Por uma mudança de base, pode-se reduzir $N^{\alpha\beta}$ e A_{α} às formas $N_{\alpha\beta} = \text{diag}(N_1, N_2, N_3)$, $A_{\alpha} = (A, 0, 0)$, onde cada N_{α} vale ± 1 ou 0 ; isto implica que

$$N_1 A = 0 \quad . \quad (IV.60)$$

Dessa maneira, pode-se reduzir a álgebra de Lie tri-dimensional dos espaços-tempos espacialmente homogêneos a um dos nove tipos listados na tabela 1.

As álgebras de Lie tri-dimensionais e os modelos cosmológicos associados são naturalmente divididos em duas classes, correspondendo às duas partes da tabela 1: classe A ($A=0$) e classe B ($A \neq 0, N_1=0$). Os modelos pertencentes a cada uma destas classes possuem importantes propriedades em comum.

Para todos os modelos espacialmente homogêneos

a normal unitária às órbitas do grupo é um vetor geodésico invariante sob o grupo. Pode-se escolhê-la de maneira que $n_a = -t, \alpha$, com as órbitas sendo superfícies com $t = \text{const.}$, e a métrica se torna (54)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta - dt^2, \quad (\text{IV.61})$$

onde as ω^α são três 1-formas nas órbitas.

Tabela 1. Classificação das álgebras de Lie tri-dimensionais para os modelos cosmológicos espacialmente homogêneos. O parâmetro h , definido por $h = A^2 / N_2 N_3$, é constante em todos os espaços-tempos.

Classe	Tipo	A	N ₁	N ₂	N ₃	Tipo de Bianchi
A	I	0	0	0	0	I
	II	0	1	0	0	II
	VII ₀	0	0	1	1	VII
	VI ₀	0	0	1	-1	VI
	IX	0	1	1	1	IX
	VIII	0	1	1	-1	VIII
B	V	1	0	0	0	V
	IV	1	0	0	1	IV
	VII _h ($h > 0$)	$\sqrt{h}$	0	1	1	VII
	VI _h ($h < 0$)	$\sqrt{-h}$	0	1	-1	VI (III se $h = -1$)

No caso dos tipos de Bianchi, onde o grupo de simetria é um G_3 simplesmente transitivo sob as hipersuperfícies de homogeneidade, pode-se encontrar uma base invariante (B_α) satisfazendo (II.66) em cada órbita. A métrica (IV.61) fica, então

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} B^\alpha B^\beta - dt^2 \quad , \quad (IV.62)$$

onde os (B^α) são duais aos (B_α) e $g_{\alpha\beta}$ é uma função somente de t .

Existem várias escolhas possíveis para a base (B_α) . Usualmente se impõe que as coordenadas sejam comoventes com respeito a um conjunto particular de curvas de tipo-tempo. Estas podem ser as curvas integrais da normal n ou, se houver matéria presente com quadrivelocidade u^n (modelos com "tilt"), de u . Para a base (B_α, n) , todas as componentes do tensor de Riemann podem ser expressas em termos das componentes da métrica $g_{\alpha\beta}$, de suas derivadas primeira e segunda, e das constantes de estrutura $C_{\alpha\beta}^\gamma$. As componentes do tensor de Ricci têm a seguinte forma (55):

$$\left. \begin{aligned} R_4^4 &= -\frac{1}{2} \dot{S}_\alpha^\alpha - \frac{1}{4} S_\alpha^\beta S_\beta^\alpha \\ R_\alpha^\alpha &= -\frac{1}{2} S_\beta^\beta (C_{\alpha\beta}^\beta - S_\alpha^\beta C_{\beta\alpha}^\beta) = \frac{1}{2} (S_{\alpha;\beta}^\beta - S_{\beta;\alpha}^\beta) \\ R_\beta^\alpha &= -P_\beta^\alpha - \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{|g|} S_\beta^\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (IV.63)$$

onde $S_{\beta}^{\alpha} = g_{\beta\gamma} g^{\gamma\alpha}$ e $P_{\alpha\beta}$ é o tensor de Ricci tridimensional, dado por

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} C_{\gamma\delta}^{\gamma} \left[C_{\gamma\beta}^{\mu} g_{\alpha\mu} + g_{\beta\mu} C_{\gamma\alpha}^{\mu} \right] g^{\delta\nu} - \\ - \frac{1}{2} C_{\delta\alpha}^{\gamma} \left[C_{\gamma\beta}^{\delta} + g_{\gamma\lambda} g^{\delta\nu} C_{\gamma\beta}^{\lambda} \right] + \frac{1}{4} C_{\gamma\delta}^{\lambda} C_{\gamma\delta}^{\mu} g_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu} g^{\delta\nu} g^{\gamma\sigma} \quad (IV.64)$$

A resolução das equações de Einstein para os modelos de Bianchi iria aumentar em demasia esta seção. Uma vez que elas são bastante conhecidas (56), limitar-se-á apenas a apresentá-las, supondo que a matéria pode ser descrita por um tensor energia-momento de fluido perfeito com constante cosmológica não nula. Elas são mais facilmente obtidas para os modelos de classe A, para os quais tem a seguinte forma :

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{X}/X + \dot{X}\dot{Y}/XY + \dot{X}\dot{Z}/XZ + \frac{1}{2} \left(\frac{N_1 X}{Y Z} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{N_2 Y}{X Z} - \frac{N_3 Z}{X Y} \right)^2 &= \frac{1}{2} (\mu - P) + \Lambda \\ \ddot{Y}/Y + \dot{Y}\dot{X}/YX + \dot{Y}\dot{Z}/YZ + \frac{1}{2} \left(\frac{N_2 Y}{X Z} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{N_3 Z}{X Y} - \frac{N_1 X}{Y Z} \right)^2 &= \frac{1}{2} (\mu - P) + \Lambda \\ \ddot{Z}/Z + \dot{Z}\dot{X}/ZX + \dot{Z}\dot{Y}/ZY + \frac{1}{2} \left(\frac{N_3 Z}{X Y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{N_1 X}{Y Z} - \frac{N_2 Y}{X Z} \right)^2 &= \frac{1}{2} (\mu - P) + \Lambda \quad (IV.65) \\ \dot{X}\dot{Y}/XY + \dot{Y}\dot{Z}/YZ + \dot{Z}\dot{X}/ZX + \frac{1}{2} \left(\frac{N_2 N_3}{X^2} + \frac{N_1 N_3}{Y^2} + \frac{N_2 N_1}{Z^2} \right) - \\ - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{N_3 Z}{X Y} \right)^2 + \left(\frac{N_1 X}{Y Z} \right)^2 + \left(\frac{N_2 Y}{X Z} \right)^2 \right] &= \mu + \Lambda \end{aligned} \right.$$

onde as funções X, Y e Z podem ser encaradas como fatores de

escala nas três direções espaciais. Os modelos de classe B introduzem algumas complicações adicionais. No entanto, para os tipos V e VIh ainda tem-se

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{X}/X + \dot{X}\dot{Y}/XY + \dot{X}\dot{Z}/XZ - 2(a_0^2 + q_0^2)/X^2 + 2b^2/Y^4Z^2 &= \frac{1}{2}(\mu - P) + \Lambda \\ \ddot{Y}/Y + \dot{Y}\dot{X}/YX + \dot{Y}\dot{Z}/YZ - 2(a_0^2 + a_0q_0)/X^2 - 2b^2/Y^4Z^2 &= \frac{1}{2}(\mu - P) + \Lambda \\ \ddot{Z}/Z + \dot{Z}\dot{X}/ZX + \dot{Z}\dot{Y}/ZY - 2(a_0^2 - a_0q_0)/X^2 &= \frac{1}{2}(\mu - P) + \Lambda \quad (\text{IV.66}) \\ \dot{X}\dot{Y}/XY + \dot{X}\dot{Z}/XZ + \dot{Z}\dot{Y}/YZ + 2b^2/Y^4Z^2 - (3a_0^2 + q_0^2)/X^2 &= \\ &= \mu + \Lambda \end{aligned} \right.$$

onde a_0 , q_0 e b são constantes. Se $q_0 = b = 0$, tem-se o tipo V, e se q_0 e b forem não nulas, tem-se o tipo VIh. Para os modelos restantes, de tipo IV e VIIh, as equações não serão dadas aqui, recomendando-se a leitura das referências (57) e (58), respectivamente.

O único modelo de Bianchi representando um universo fechado com curvatura positiva ($P > 0$) é o de tipo IX, generalizando os modelos de FRW fechados. Os modelos abertos com curvatura negativa ($P < 0$) são os de tipo V e VIIh, e os modelos sem curvatura ($P = 0$) são os de tipo I e VIIo.

Resta, apenas, estudar o caso dos modelos em que $r=4$. Já foi visto que todo G_4 contém um subgrupo G_3 ;

se este for simplesmente transitivo, os casos com $r=4$ são casos especiais dos tipos de Bianchi já discutidos. Sobram, apenas os casos em que o G_3 é multiplamente transitivo e, portanto, age sobre superfícies bi-dimensionais de curvatura constante k (positiva, negativa, ou nula). Os modelos deste tipo são conhecidos na literatura como modelos de Kantowski-Sachs (59).

As métricas dos modelos de Kantowski-Sachs devem ser proporcionais a $d\theta^2 + f^2(\theta) d\phi^2$, onde $f(\theta) = \sin\theta$ ($k > 0$), θ ($k = 0$) ou $\sinh\theta$ ($k < 0$). As métricas (IV.61) transformam-se, neste caso, em

$$ds^2 = X^2(t) dx^2 + Y^2(t) (d\theta^2 + f^2(\theta) d\phi^2) - dt^2, \quad (\text{IV.67})$$

e as equações de Einstein, para um tensor energia-momento tipo fluido perfeito, podem ser escritas como (60):

$$\left. \begin{aligned} 2\ddot{Y}/Y + \dot{Y}^2/Y^2 + K/Y^2 - \Lambda &= -P \\ \ddot{X}/X + \ddot{Y}/Y + \dot{X}\dot{Y}/XY - \Lambda &= -P \\ 2\dot{X}\dot{Y}/XY + \dot{Y}^2/Y^2 + K/Y^2 - \Lambda &= \mu \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.68})$$

onde $K = +1, 0, -1$.

V.OS MODELOS COSMOLÓGICOS INFLACIONÁRIOS (61)

Como visto na seção IV.2, os modelos FRW, apesar de fornecerem uma descrição razoável do universo observável, apresentam alguns problemas, como o da densidade crítica e o do horizonte.

Todos esses problemas estão relacionados, de uma forma ou de outra, às condições iniciais do universo. Acredita-se que, durante os primeiros estágios da evolução do universo, ele era constituído basicamente por partículas elementares, de maneira que uma descrição completa do universo primordial só pode ser feita com o auxílio da teoria da física das partículas elementares.

Um dos grandes avanços nesta teoria, ocorrido na metade da década de 70, foi a proposição das teorias de grande unificação (TGU) (62). A idéia básica das TGU é a de que as interações forte, fraca e eletromagnética estão relacionadas por uma simetria que se encontra quebrada (ou escondida) no universo atual. Essa quebra de simetria teria ocorrido espontaneamente, à medida que a temperatura do universo diminuía (63). A figura 10 dá as temperaturas aproximadas em que teriam ocorrido as quebras de simetria.

A incorporação das idéias das TGU à cosmologia pode trazer um pouco de luz sobre os problemas cosmológicos existentes. Em particular, uma teoria que se revelou bastante satisfatória para a resolução destes problemas é a teoria

do universo inflacionário.

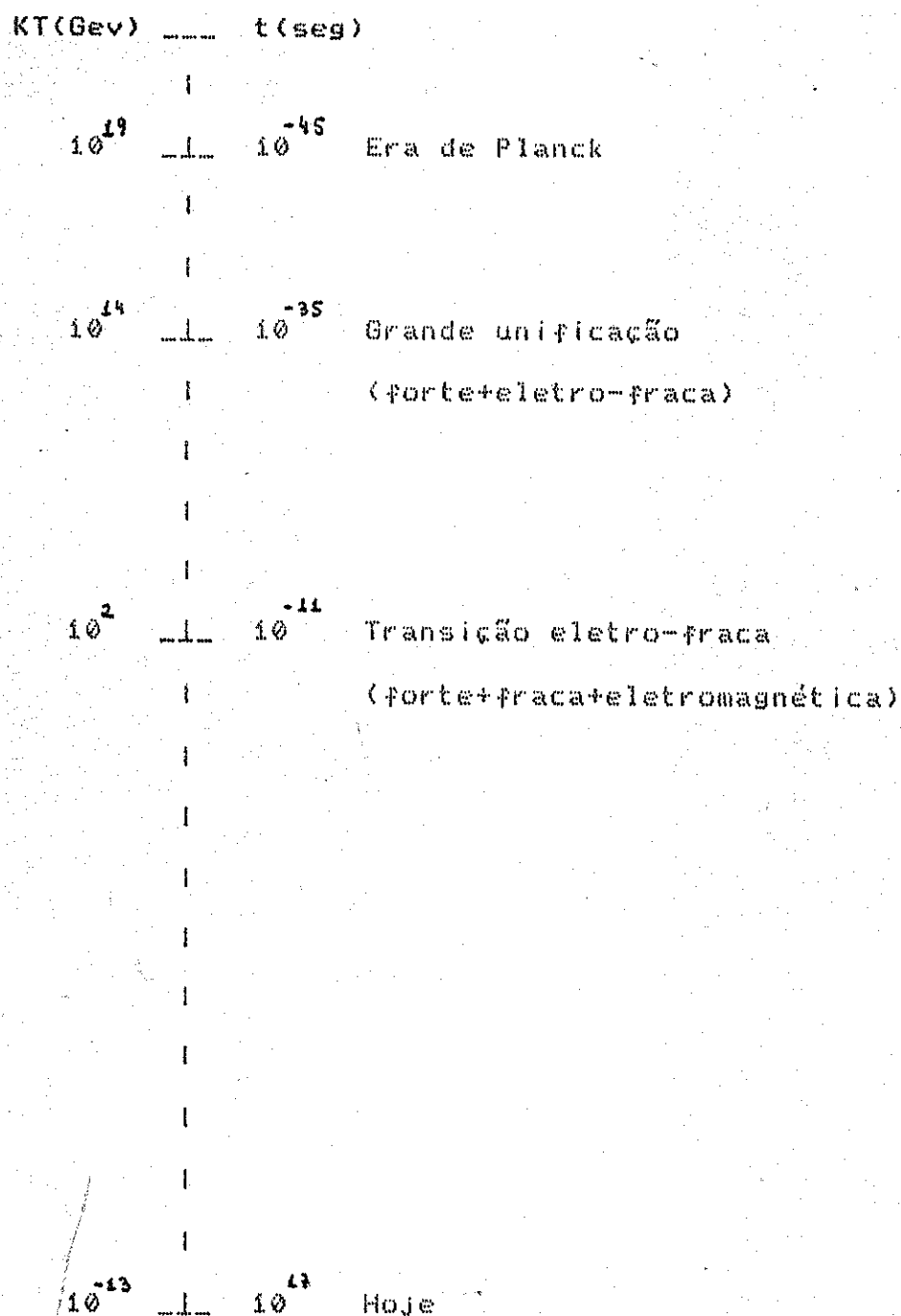


Figura 10. Esquema simplificado das transições de fase que o universo teria sofrido.

Os modelos do universo inflacionário assumem que o universo passou por uma transição de fase de primeira ordem em seu estágio primordial, associada à quebra de simetria da grande unificação. O comportamento da simetria nestes modelos é descrito por um campo escalar ϕ , chamado de campo de Higgs (64), que desempenha o papel de um parâmetro de ordem para a transição de fase: um valor esperado nulo, $\langle \phi \rangle = 0$, corresponde a uma fase simétrica e $\langle \phi \rangle \neq 0$ corresponde a uma fase com quebra de simetria.

A altas temperaturas (universo primordial), o estado simétrico (falso vácuo) é energeticamente favorecido. À medida em que a temperatura decresce para zero (vácuo verdadeiro), uma fase de simetria quebrada se torna o estado mais favorável, mas uma barreira de energia (ver fig.11) separa as duas fases.

À medida que a temperatura do universo decrescia em direção a $T \approx 0$, a barreira de energia mantinha o universo aprisionado no estado simétrico, mesmo com o estado com simetria quebrada sendo mais favorável energeticamente. Este fenômeno é chamado de super-resfriamento, e é típico de qualquer transição de fase de 1ª. ordem. No estado simétrico metaestável a densidade de energia μ não é constituída apenas por termos devidos à matéria, mas também por uma densidade constante de energia de vácuo, $\Lambda = \mu_0 \approx Tc^4$. Para $T \rightarrow 0$, a densidade de energia do vácuo passa a dominar sobre as demais, de maneira que $\mu \approx \mu_0 = \text{const.}$ e o tensor energia-momento do universo pode ser escrito como

$$T_{ab} = \mu_0 g_{ab}$$

. (V.1)

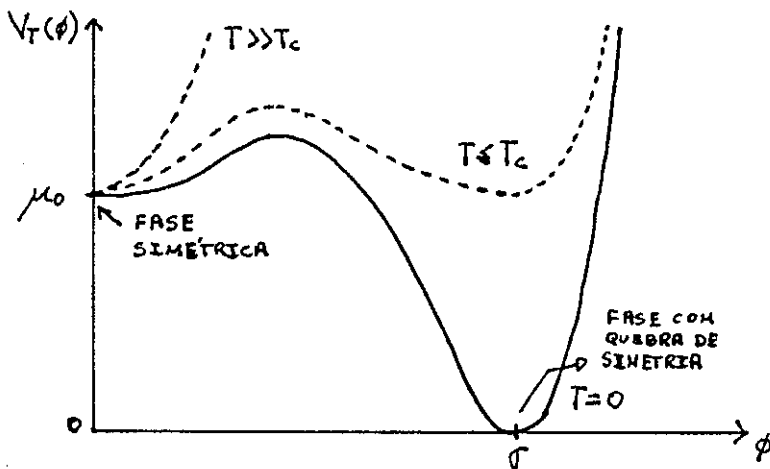


Figura 11. Comportamento genérico de $V_T(\phi)$ contra ϕ para várias temperaturas em uma típica transição de fase de 1a. ordem. Um estado com $\phi=0$ corresponde a uma fase simétrica, e $\phi=\sigma$ corresponde a uma fase com quebra de simetria. Para altas temperaturas ($T \gg T_c$), $\phi=0$ corresponde a um mínimo de $V_T(\phi)$. Para $T=T_c$, a temperatura crítica da transição, as duas fases possuem valores iguais de $V_T(\phi)$. Para $T < T_c$, o estado com simetria quebrada $\phi=\sigma$ se torna favorecido (mínimo de V). Entretanto, uma barreira de energia mantém a fase simétrica metaestável. $V_0(\sigma)$ é feito igual a zero porque, atualmente, vivemos em uma fase de simetria quebrada com T próxima de zero e o valor medido da constante cosmológica é quase zero.

Todas as propriedades descritas por um tensor energia-momento do tipo acima são Lorentz-invariantes (65). Como as propriedades dos sistemas materiais e da radiação não são Lorentz-invariantes, esta propriedade confirma que o tensor em (V.1) descreve o vácuo.

Zel'dovich (66) mostrou, por argumentos físicos quantitativos, que a polarização do vácuo (criação de pares de partículas virtuais) produz energia e tensão descritas por um tensor energia-momento da forma (V.1). Se este gás de partículas virtuais tiver a forma de um fluido perfeito (III.42), a equação (V.1) implica na seguinte equação de estado:

$$P = -\mu_0 \quad . \quad (V.2)$$

A pressão do vácuo é, portanto, negativa.

Um universo preenchido por um tal vácuo tem sua evolução, de acordo com (IV.11), dada por

$$R(t) \propto e^{Bt} \quad \left(B = \left(\frac{\mu_0}{3} \right)^{1/2} \right) \quad , \quad (V.3)$$

que é do tipo da solução de Sitter para $k=0$. Este crescimento exponencial de $R(t)$ representa uma verdadeira "inflação", se comparado ao crescimento usual dos modelos de FRW, que vai com t^n , $n < 1$.

Uma época de expansão inflacionária pode resolver alguns dos problemas cosmológicos, mas, antes, é pre-

ciso encontrar algum mecanismo para por fim à inflação e completar a transição para a fase com quebra de simetria. O modelo originalmente proposto não possuía um mecanismo adequado para finalizar a inflação (67), e foi preciso construir uma versão melhorada, conhecida como novo universo inflacionário (68).

Segundo o modelo original, o fim da transição ocorreria porque flutuações quânticas levariam pequenas regiões do estado metaestável de falso vácuo a tunelar através da barreira de energia, produzindo pequenas bolhas da fase energeticamente favorecida. O mecanismo é semelhante ao que ocorre em transições de fase de 1a. ordem em física da matéria condensada: mais e mais bolhas seriam nucleadas com o tempo, cresceriam e iriam coalescendo para preencher o espaço. No caso da inflação, no entanto, o mecanismo é problemático pois a expansão exponencial do estado metaestável separa as bolhas, proibindo-as de coalescerem. O universo resultante seria altamente inhomogêneo, incompatível com o observado.

A proposta do novo universo inflacionário para resolver este problema é que a transição de fase deve ser de um tipo muito especial, conhecido como rolamento lento "slow rollover". Em uma transição de rolamento lento, o comportamento de $V_T(\phi)$ contra ϕ tem a forma da fig.12 quando $T \rightarrow 0$. A barreira de energia essencialmente desaparece quando $T \rightarrow 0$ e o estado simétrico, anteriormente metaestável, torna-se instável.

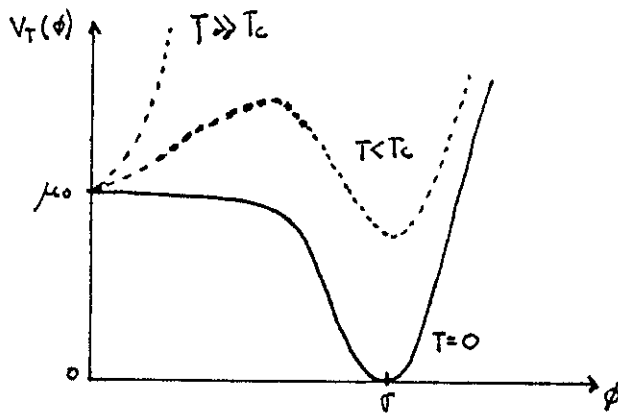


Figura 12. Comportamento de $V_T(\phi)$ contra ϕ para uma transição de rolamento lento. A barreira de energia separando a fase simétrica da com simetria quebrada desaparece com $T \rightarrow 0$, propiciando um lento rolamento para $\phi = \sigma$.

Uma transição de fase desse tipo é conhecida como quebra de simetria tipo Coleman-Weinberg (69), pois o modelo proposto por eles foi dos primeiros a usar a noção de rolamento lento.

O universo é levado do estado instável com $\phi = 0$ para o estável com $\phi = \sigma$ por flutuações quânticas. Em geral, durante essa transição a densidade de energia do universo é (70)

$$\mu = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V_0(\phi) + \mu_{M-R} \quad , \quad (V.4)$$

onde o termo $\dot{\phi}^2/2$ representa a energia cinética dos quanta do campo e μ_{M-R} descreve a densidade de energia de todas as espécies de matéria e radiação presentes. As pressões cor-

respondendo aos três termos em (V.4) são (71): $P_\phi = \dot{\phi}^2/2$, $P_V = -V_0(\phi)$ e $P_{H-R} = \mu_{H-R}/3$ (gás de radiação). A equação de conservação de energia-momento (IV.10) dá, então

$$\dot{\mu}_{H-R} + 4H\mu_{H-R} = -\dot{\phi} \left[\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_0'(\phi) \right] \quad , \quad (V.5)$$

onde $H = \dot{R}/R$. Esta equação pode ser separada em

$$\mu_{H-R} + 4H\mu_{H-R} = \Gamma \dot{\phi}^2 \quad , \quad (V.6)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma \dot{\phi} + V_0'(\phi) = 0 \quad , \quad (V.7)$$

onde o termo $\Gamma \dot{\phi}^2$ representa um decréscimo "friccional" da energia de ϕ , devido à criação de matéria-energia. Da mesma maneira, o termo $3H\dot{\phi}$ tem o efeito de um termo de atrito, relacionado ao decréscimo da densidade de energia de ϕ .

Se $V_0(\phi)$ for suficientemente plano próximo de $\phi=0$, o rolamento de ϕ é muito vagaroso, de maneira que $V_0(\phi)$ permanece boa parte do tempo próximo ao seu valor inicial para $\phi=0$ ($V_0(\phi) \approx \mu_0$). Logo, até que $V_0(\phi)$ passe além da parte plana do potencial, as condições se mantêm próximas daquelas reinantes durante a fase simétrica metaestável, o termo de energia do falso vácuo domina sobre os demais, e o universo sofre inflação.

Se o período de rolamento lento durar por um tempo t_r o universo, ao final deste tempo, terá inflacionado por um fator $R(t) = e^{8\pi t_r}$. Quanto maior t_r , maior a inflação.

Após este tempo, os termos $\ddot{\phi}$ e $\Gamma\dot{\phi}$ em (V.7) passam a ter grande importância. O potencial $V_0(\phi)$ oscila rapidamente em torno do mínimo $\phi=\sigma$, o que propicia a transformação da energia do campo de Higgs ϕ para energia de matéria e radiação μ_{M-R} . Isto implica em um reaquecimento do universo até uma temperatura $T_r \approx T_c$, após o qual a evolução do universo volta a ser dada por um modelo de FRW.

Ao término do período inflacionário, o horizonte de partícula do universo deve crescer, de acordo com (IV.52) e (V.3), até um valor

$$D_{IN} = H^{-1} [e^{Ht_L} - 1] \approx H^{-1} e^{Ht_L} \quad . \quad (V.8)$$

Para que o novo universo inflacionário explique o problema do horizonte, D_{IN} deve ser maior que $L(tr)$, que é o raio da região que, começando em $t=tr$, evolui para o universo observado atualmente. Usando um argumento similar ao da seção IV.3 tem-se, portanto, que a inflação será "boa" se:

$$H^{-1} e^{Ht_L} > (T_0/T_L) L_0 \quad . \quad (V.9)$$

Assumindo que $H^2 = \mu_0/3 \approx T_c^4/3 = 8\pi/3 \cdot T_c^4/M_P^2$, e adotando-se os valores já usados para L_0 e T_0 , obtém-se

$$Ht_L > \ln \left[\sqrt{\frac{8\pi}{3}} T_0 L_0 \frac{T_c}{M_P} \right] = 56 \quad . \quad (V.10)$$

Uma vez que a condição (V.10) seja satisfeita,

o problema do horizonte fica resolvido pelo novo universo inflacionário. A inflação é capaz de fazer com que uma pequena região, com raio bem menor que o do horizonte antes da transição, venha a evoluir e se transformar em todo o universo observável.

Com relação ao problema da densidade crítica, ele é resolvido porque, durante a inflação, $R^2 H^2 = e^{2Ht} \cdot H^2$ e o segundo termo do lado direito em (IV.44) pode ser desprezado. Sendo assim, independentemente de Ω ser muito maior ou muito menor que um antes da transição, ele tende exponencialmente à unidade no período de inflação e a expansão tipo FRW posterior não é suficiente para afastá-lo consideravelmente de um.

O mecanismo de inflação, portanto, é bastante eficiente na resolução destes e de outros problemas cosmológicos não discutidos aqui (72). Como a inflação termina bem antes do primeiro segundo do universo, dando lugar a uma expansão de acordo com os modelos de FRW, todos os sucessos do modelo padrão da cosmologia são, também, obtidos.

Apesar dos sucessos, o novo universo inflacionário também possui alguns problemas, o que tem levado à proposição de cenários alternativos, como a inflação primordial, a inflação caótica, etc. (73). Qualquer consideração sobre estes cenários está, no entanto, além do escopo deste trabalho.

VI. INFLAÇÃO EM MODELOS COSMOLÓGICOS ESPACIALMENTE HOMOGÊNEOS

VI.1 INFLAÇÃO EM MODELOS DE TIPO I DE BIANCHI

Como visto na seção IV.3, os modelos de tipo I de Bianchi são espacialmente homogêneos mas anisotrópicos, com as hipersuperfícies tri-dimensionais de tipo-espaço sem curvatura; eles podem ser considerados como extensões dos modelos de FRW com $k=0$.

A sua métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = X^2(t) dx^2 + Y^2(t) dy^2 + Z^2(t) dz^2 - dt^2 \quad , \quad (VI.1)$$

e as equações de Einstein com constante cosmológica para um fluido perfeito são:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\dot{X}\dot{Y}}{XY} + \frac{\dot{X}\dot{Z}}{XZ} &= \frac{1}{2}(\mu - p) + \Lambda \\ \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\dot{Y}\dot{X}}{YX} + \frac{\dot{Y}\dot{Z}}{YZ} &= \frac{1}{2}(\mu - p) + \Lambda \\ \frac{\ddot{Z}}{Z} + \frac{\dot{Z}\dot{X}}{ZX} + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{ZY} &= \frac{1}{2}(\mu - p) + \Lambda \\ \frac{\dot{X}\dot{Y}}{XY} + \frac{\dot{Y}\dot{Z}}{YZ} + \frac{\dot{Z}\dot{X}}{ZX} &= \mu + \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (VI.2)$$

Define-se, usualmente, os seguintes elementos

(74): O fator de escala médio

$$R = (xyz)^{1/3} \quad , \quad (VI.3)$$

os parâmetros de Hubble direcionais

$$H_x = \dot{X}/X \quad ; \quad H_y = \dot{Y}/Y \quad ; \quad H_z = \dot{Z}/Z \quad , \quad (VI.4)$$

o parâmetro de Hubble médio

$$H = \frac{1}{3} (H_x + H_y + H_z) \quad , \quad (VI.5)$$

e a anisotropia média da expansão

$$A = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{H_i - H}{H} \right)^2 \quad , \quad (VI.6)$$

A definição de R implica que

$$\frac{3\dot{R}}{R} = \frac{\dot{X}}{X} + \frac{\dot{Y}}{Y} + \frac{\dot{Z}}{Z} = 3H \quad , \quad (VI.7)$$

Em termos do parâmetro R, pode-se reescrever as três primeiras equações de (VI.2) como

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{X}}{X} - \frac{\dot{X}}{X} + \frac{3\dot{R}}{R} &= \alpha \frac{X}{\dot{X}} \\ \frac{\ddot{Y}}{Y} - \frac{\dot{Y}}{Y} + \frac{3\dot{R}}{R} &= \alpha \frac{Y}{\dot{Y}} \\ \frac{\ddot{Z}}{Z} - \frac{\dot{Z}}{Z} + \frac{3\dot{R}}{R} &= \alpha \frac{Z}{\dot{Z}} \end{aligned} \right\} \quad (VI.8)$$

onde $\alpha = 1/2.(\mu - p) + \Lambda$. Somando-se as três equações acima, e usando (VI.7), tem-se

$$\frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\ddot{Z}}{Z} + 6\frac{\dot{R}}{R} = \alpha \left(\frac{X}{\dot{X}} + \frac{Y}{\dot{Y}} + \frac{Z}{\dot{Z}} \right) \quad . \quad (VI.9)$$

Usando novamente (VI.8) obtém-se, finalmente:

$$\frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{Z}}{Z} - \frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad , \quad (VI.10)$$

que tem como solução possível as igualdades

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{X}}{X} &= \frac{\dot{R}}{R} + \frac{a}{R^3} \\ \frac{\dot{Y}}{Y} &= \frac{\dot{R}}{R} + \frac{b}{R^3} \\ \frac{\dot{Z}}{Z} &= \frac{\dot{R}}{R} + \frac{c}{R^3} \end{aligned} \right\} \quad (VI.11)$$

onde a, b e c são três constantes, satisfazendo $a+b+c=0$. Substituindo (VI.11) na quarta equação de (VI.2), chega-se a

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{\mu + \Lambda}{3} + \frac{\sum^2}{2R^6} \quad , \quad (VI.12)$$

onde $\sum^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/3$.

A anisotropia média da expansão está relacionada a $\sum^2$ por

$$\sum^2 = AH^2R^6 \quad . \quad (VI.13)$$

A equação de conservação de energia-momento, $T_{ab;b}=0$, para um fluido perfeito pode ser escrita como

$$\dot{\mu} = -(\mu+p)\theta = -3(\mu+p)H \quad . \quad (VI.14)$$

Derivando-se (VI.12) em relação a t e usando (VI.13), obtém-se a equação de Raychaudhuri:

$$\frac{3\ddot{R}}{R} = -\frac{(\mu+3p)}{2} + \Lambda - \frac{3\Sigma^2}{R^6} \quad . \quad (VI.15)$$

Comparando a equação acima com (IV.6), para o caso em que $\omega = \dot{u} = 0$, tem-se que

$$\sigma^2 = \frac{3}{2} \frac{\Sigma^2}{R^6} \quad , \quad (VI.16)$$

ou seja, a anisotropia é proporcional ao cisalhamento.

Dada uma equação de estado $P=P(\mu)$, pode-se resolver o sistema de equações (VI.12) e (VI.14). Seja, por exemplo, uma equação do tipo $P=\gamma\mu$. Neste caso, (VI.14) dá

$$\mu = M/R^{3(\gamma+1)} \quad , \quad (VI.17)$$

onde M é uma constante. A equação (VI.18) fica, então

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{M}{3R^{3(\gamma+1)}} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{\Sigma^2}{2R^6} \quad . \quad (VI.18)$$

Como se está interessado na inflação, que te-

ria ocorrido no universo primordial, um bom valor para γ é o correspondente a um gás de radiação: $1/3$. Assumindo tal valor, a equação (VI.18) se transforma em

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{M}{3R^4} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{\Sigma^2}{2R^6} \quad , \quad (VI.19)$$

Para as condições iniciais do universo ($R \rightarrow 0$), o primeiro termo do lado direito da equação acima pode ser desprezado em relação ao terceiro, o termo com a constante cosmológica não é desprezível, pois Λ pode ter sido suficientemente grande para equilibrar o termo de anisotropia. De fato, para que haja inflação, deve haver um momento no universo primordial em que $\Lambda/3 > \Sigma^2/2R^6$.

A equação resultante,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{\Sigma^2}{2R^6} \quad , \quad (VI.20)$$

possui solução analítica (75), dada por:

$$R = \Sigma^{1/3} \left(\frac{3}{2\Lambda}\right)^{1/6} \text{SENH}^{1/3}(\sqrt{3\Lambda}t) \quad , \quad (VI.21)$$

$$H = \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} \text{COTGH}(\sqrt{3\Lambda}t) \quad , \quad (VI.22)$$

de onde se obtém que

$$\begin{aligned} \frac{\dot{X}}{X} &= \Lambda \frac{\sqrt{3}}{3} \text{COTGH}(\sqrt{3\Lambda}t) + \frac{a\sqrt{3}\sqrt{2\Lambda}}{3\Sigma} \text{COSSECH}(\sqrt{3\Lambda}t) \Rightarrow \\ \Rightarrow X &= X_0 \text{SENH}^{\frac{\sqrt{3}\Lambda - a\sqrt{2}}{3\Sigma}}(\sqrt{3\Lambda}t) \cdot [\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1]^{a\sqrt{3}/3\Sigma} \quad , \quad (VI.23) \end{aligned}$$

com fórmulas similares para Y e Z.

A razão entre o termo de anisotropia e o de inflação (densidade de energia do vácuo) é:

$$\beta \equiv \frac{3\Sigma^2}{2\Lambda R^6} = \frac{1}{\text{SEnh}^2(\sqrt{3\Lambda}t)} \quad . \quad (\text{VI.24})$$

Quando $\beta \approx 1$, o universo se torna dominado pelo vácuo. Isso ocorre para o tempo

$$t_{\text{vac.}} = 0,51 / \sqrt{\Lambda} \quad . \quad (\text{VI.25})$$

Como $\Lambda \approx 8\pi T_c^4/\text{Mp}^2$, a equação acima fornece um tempo da ordem de:

$$t_{\text{vac.}} \approx 8 \times 10^{-35} \text{ seg} \quad , \quad (\text{VI.26})$$

que é da mesma ordem de grandeza que o tempo previsto pelas TGU para a quebra de simetria associada à grande unificação.

Para $t < t_{\text{vac.}}$, o universo é dominado pela anisotropia e sua evolução é determinada por

$$R \propto t^{1/3} \quad , \quad (\text{VI.27})$$

$$H = 1/3t \quad , \quad (\text{VI.28})$$

para $t > t_{\text{vac.}}$, o universo é dominado pelo vácuo e sua expansão é inflacionária,

$$R \propto \exp(H_v t) \quad , \quad (VI.29)$$

$$H = H_v = (\Lambda/3)^{1/2} \quad . \quad (VI.30)$$

A anisotropia média da expansão, de acordo com (VI.13), (VI.21) e (VI.22) é dada por

$$A = \frac{2}{\cosh^2(\sqrt{3}\Lambda t)} \quad , \quad (VI.31)$$

de onde se percebe, claramente, o seu decréscimo com o tempo.

A equação (VI.20), portanto, descreve um universo que evolui de um estado com anisotropia arbitrária para um estado inflacionário tipo de Sitter com anisotropia reduzida. Durante o período de tempo que vai de $t_{vac.}$ até t_r ($H_v t_r \approx 56$), a anisotropia média decresce por um fator de

$$\frac{A(t_r)}{A(t_{vac.})} = 10^{-145} \quad . \quad (VI.32)$$

Resta, agora, analisar a evolução do potencial de Higgs com anisotropia. A inclusão da anisotropia aumenta o valor de H , o que faz com que aumente a escala de tempo de evolução do universo em comparação com a escala de tempo de evolução de ϕ que, como será visto, permanece praticamente a mesma. Isso propicia uma expansão maior durante o período de rolamento lento, ou seja, a anisotropia acaba ajudando a inflação.

Quando $\phi \ll \sqrt{\Lambda}$ (início do platô), o potencial $V_0(\phi)$ pode ser aproximado por

$$V_0(\phi) \approx \Lambda - \lambda \phi^4/4 \quad . \quad (VI.33)$$

Como, nessa região, a variação de ϕ é pequena, o termo $\ddot{\phi}$ pode ser desprezado em (V.7); também o termo $\rho \dot{\phi}$ pode ser ignorado, pois a criação de matéria-energia é praticamente nula. A evolução de ϕ é dada, então, por:

$$3H\dot{\phi} - \lambda \phi^3 = 0 \quad , \quad (VI.34)$$

que tem como solução

$$\phi^{-2}(t) = \phi^{-2}(t_i) - \frac{2\lambda}{3} \int_{t_i}^t \frac{dt}{H} \quad . \quad (VI.35)$$

Durante uma inflação com anisotropia nula, descrita por uma solução de de Sitter com $k=0$, $H=H_V = \sqrt{\Lambda/3}$ e a equação acima é resolvida dando

$$\phi^{-2}(t) = \phi^{-2}(t_i) - \frac{2\lambda}{3H_V^2} H_V(t-t_i) \quad . \quad (VI.36)$$

O tempo necessário para que ϕ evolua até $\mathcal{O}(\tau)$ é obtido por:

$$\tau^{-2} = \phi^{-2}(t_i) - \frac{2\lambda}{3H_V^2} H_V \Delta t \quad . \quad (VI.37)$$

Supondo que $\sigma^{-2} \ll \phi^{-2}(t_i)$,

$$H_V \Delta t = 3H_V^2 / 2\lambda \phi^2(t_i) \quad , \quad (VI.38)$$

o que implica que a inflação será tanto mais favorecida quanto maior for a desigualdade abaixo:

$$\lambda / H_V^2 \ll \phi^{-2}(t_i) \quad . \quad (VI.39)$$

Introduzindo a anisotropia, substitui-se em (VI.35) o valor de H dado por (VI.22); obtém-se:

$$\phi^{-2}(t) = \phi^{-2}(t_i) - \frac{2\lambda}{3H_V^2} \left[\ln \cosh(\sqrt{3\lambda} t) \right]_{t_i}^t \quad . \quad (VI.40)$$

Supondo que a evolução de ϕ começa quando o universo ainda é dominado por anisotropia, pode-se aproximar H em (VI.35) por $1/3t$, o que implica que

$$\phi^{-2}(t) \approx \phi^{-2}(t_i) - \lambda t^2 \quad . \quad (VI.41)$$

A evolução de ϕ irá proceder conforme a expressão acima até que $t=t_{\text{vac.}}$, quando $\cosh(\sqrt{3\lambda} t_{\text{vac.}}) = \sqrt{2}$, e

$$\phi^{-2}(t_{\text{vac.}}) \approx \phi^{-2}(t_i) - \frac{\lambda}{3H_V^2} \ln 2 \quad . \quad (VI.42)$$

Como $\lambda / H_V^2 \ll \phi^{-2}(t_i)$, a equação acima implica que, quando o universo se torna dominado pelo vácuo,

$$\phi^{-2}(t_{vac}) \approx \phi^{-2}(t_i)$$

(VI.43)

o que implica que o valor de ϕ não varia sensivelmente durante o período dominado pela anisotropia. Como, daí por diante, a evolução de ϕ é dada por (VI.36), o tempo total de evolução de ϕ continua dado por (VI.38).

Decorre da análise feita que, para um modelo de tipo I de Bianchi, a anisotropia em nada atrapalha o processo de inflação e, pelo contrário, até a torna mais eficaz. O fato de existir uma maior ou menor anisotropia antes do início da inflação altera muito pouco o desenvolvimento do potencial de Higgs e tudo se passa como no cenário original tipo FRW.

VI.2 INFLAÇÃO EM MODELOS DE KANTOWSKI-SACHS

As equações de Einstein com constante cosmológica para os modelos de Kantowski-Sachs são obtidas fazendo-se $k=1$ nas equações (IV.68). Vai-se considerar, por simplicidade, o caso particular em que o universo tem equação de estado para poeira, $P=0$. As equações de Einstein ficam:

$$\left. \begin{aligned} 2\frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\dot{Y}^2}{Y^2} + \frac{1}{Y^2} - \Lambda &= 0 \\ \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\dot{X}\dot{Y}}{XY} - \Lambda &= 0 \\ 2\frac{\dot{X}\dot{Y}}{XY} + \frac{\dot{Y}^2}{Y^2} + \frac{1}{Y^2} - \Lambda &= \mu \end{aligned} \right\} \quad (VI.44)$$

Para se resolver a primeira das equações acima, vai-se usar uma função de Y cuja derivada temporal se iguale ao lado esquerdo da equação, a menos de um fator multiplicativo. Tal função é

$$\mu = Y\dot{Y}^2 - \frac{\Lambda}{3} Y^3 + Y, \quad (\text{VI.45})$$

e, como sua derivada primeira é zero, ela deve ser igualada a uma constante B . Nada impede que $B=0$ e, assumindo este caso particular, tem-se o resultado:

$$\dot{Y}^2 - \frac{\Lambda}{3} Y^2 + 1 = 0 \quad (\text{VI.46})$$

Integrando-se essa equação, obtém-se a solução

$$Y = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \quad (\text{VI.47})$$

Sabe-se que, para poeira, a equação de conservação de energia-momento conduz à equação $\mu = M/R^3$, onde M é uma constante positiva. Definindo o fator de escala médio por

$$R^3 = XY^2, \quad (\text{VI.48})$$

reescreve-se μ como:

$$\mu = \frac{\Lambda M}{3X \cosh^4 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} \quad (\text{VI.49})$$

Substituindo (VI.47) e (VI.49) nas duas últimas equações de (VI.44), obtém-se:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} - \frac{2\Lambda}{3} X + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \frac{\text{SEnh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}{\cosh \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} \dot{X} &= 0 \\ 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \frac{\text{SEnh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}{\cosh \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} \dot{X} - \frac{2\Lambda}{3} X - \frac{\Lambda M}{3 \cosh^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (VI.50)$$

Subtraindo a segunda da primeira das equações acima encontra-se a seguinte equação diferencial inhomogênea de segunda ordem

$$\ddot{X} - \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \frac{\text{SEnh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}{\cosh \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} \dot{X} = - \frac{\Lambda M}{3 \cosh^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} \quad (VI.51)$$

A equação homogênea tem, como solução,

$$X_1 = C \text{SEnh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \quad (VI.52)$$

de maneira que o método de variação dos parâmetros fornece a solução geral

$$X = C \text{SEnh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t + \frac{3M}{\Lambda} \text{SEnh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \left\{ k - \frac{\Lambda}{6} \left[\text{ARCTG}(\text{SEnh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t) + \text{COSSECH} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right] \right\} \quad (VI.53)$$

As quantidades de interesse na análise da evolução desses modelos são a expansão volumétrica θ e o cisalhamento σ . Elas são definidas como (76):

$$\theta = \dot{X}/X + 2\dot{Y}/Y = 3\dot{R}/R \quad (VI.54)$$

e

$$\sigma = 1/\sqrt{3} \left(\dot{X}/X - \dot{Y}/Y \right) \quad . \quad (VI.55)$$

Em termos destas quantidades, as equações de Einstein podem ser reescritas como:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} + \frac{1}{3} \theta^2 + 2\sigma^2 + \frac{\mu}{2} - \Lambda &= 0 \\ \dot{\sigma} + \sigma\theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{Y^2} &= 0 \\ \frac{1}{3} \theta^2 - \sigma^2 + \frac{1}{Y^2} - \Lambda &= \mu \end{aligned} \right\} \quad (VI.56)$$

onde a primeira equação é a equação de Raychaudhuri, a qual, em termos de R, é:

$$3\ddot{R}/R + 2\sigma^2 + \mu/2R^3 - \Lambda = 0 \quad . \quad (VI.57)$$

Para simplificar as contas, far-se-ão as constantes C e K, em (VI.53) iguais a zero. Sendo assim, tem-se que:

$$\theta = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \left[\frac{3 \operatorname{senh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}{\cosh \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} + \frac{\operatorname{ARCTG} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}{\cosh \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \left(1 + \operatorname{ARCTG} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right)} \right] \quad (VI.58)$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\Lambda}}{3} \frac{\operatorname{ARCTG} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}{\cosh \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \left(1 + \operatorname{ARCTG} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right)} \quad . \quad (VI.59)$$

Vê-se que, para tempos grandes, a expansão volumétrica tende

a um valor constante $3\sqrt{\Lambda/3}=3H_V$, e o cisalhamento decai exponencialmente em direção a zero. Essas são as propriedades requeridas para que haja inflação, conduzindo a um universo isotrópico após o período de reaquecimento.

Para verificar se o tempo para o qual as condições são propícias para a realização da inflação é da ordem de 10^{-35} seg, deve-se calcular a razão entre $(2\sigma^2 + M/2R^3)$ e Λ . Usando (VI.59) e (VI.48) obtém-se:

$$\frac{1}{\Lambda} \left(2\sigma^2 - \frac{M}{2R^3} \right) = \frac{1}{3} \left[\frac{(\text{ARCTG} \sinh \sqrt{\Lambda/3} t)^2}{3 \cosh^2 \sqrt{\Lambda/3} t (1 + \text{ARCTG} \sinh \sqrt{\Lambda/3} t)} + \frac{1}{\sinh \sqrt{\Lambda/3} t \cosh^2 \sqrt{\Lambda/3} t (\text{ARCTG} \sinh \sqrt{\Lambda/3} t + \text{COSSECH} \sqrt{\Lambda/3} t)} \right] \quad \text{(VI.60)}$$

Adotando o mesmo valor de Λ utilizado anteriormente tem-se que $\sqrt{\Lambda/3} \cdot t_c \approx 10^{-2}$. Substituindo este valor em (VI.60), chega-se ao resultado:

$$\frac{1}{\Lambda} \left(2\sigma^2 - \frac{M}{2R^3} \right) = 0,35 \quad \text{(VI.61)}$$

O resultado acima implica que, à época da transição de fase da grande unificação, a constante cosmológica já dominava sobre os termos de anisotropia e de matéria-energia, possibilitando todas as condições necessárias ao processo inflacionário. De fato, para o caso em questão, mesmo para tempos tão pequenos que $\sqrt{\Lambda/3} \cdot t \approx 10^{-10}$, a razão em (VI.61) continua sendo da ordem de $1/3$, de maneira que os termos de anisotropia e de densidade de energia de poeira são desprezíveis por toda a história do universo.

Tal efeito talvez decorra do fato de se ter feito a constante C igual a zero em (VI.53). Para se isolar o efeito da solução homogênea (VI.52), considerar-se-á que o espaço-tempo é vazio e, portanto, $\mu = p = 0$. As soluções para Y e X são dadas, respectivamente, por (VI.47) e (VI.52) e

$$\theta = \sqrt{\frac{A}{3}} \left(\coth \sqrt{\frac{A}{3}} t + 2 \tanh \sqrt{\frac{A}{3}} t \right) \quad , \quad (VI.62)$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} 2 \sqrt{\frac{A}{3}} \operatorname{cosech} \left(2 \sqrt{\frac{A}{3}} t \right) \quad . \quad (VI.63)$$

Com o novo valor de σ , dado por (VI.63), a razão entre o termo de anisotropia e o de vácuo é

$$2\sigma^2/\Lambda = 8/9 \cdot \operatorname{cosech}^2 \left(2 \sqrt{\frac{A}{3}} t \right) \quad , \quad (VI.64)$$

a qual é igual a 1 para $t = 1,2 \times 10^{-34}$ seg, uma ordem de grandeza acima de t_c . Isso mostra que o termo advindo da equação homogênea ($\mu = 0$) é bastante importante em X , e não pode ser desprezado.

Embora não se tenha estudado o caso em que a equação de estado do universo é do tipo de radiação, pode-se imaginar que o seu comportamento qualitativo é semelhante ao de um universo dominado por poeira. Sendo assim, mostrou-se que os modelos de Kantowski-Sachs permitem a ocorrência de inflação, descrevendo universos anisotrópicos que evoluem rapidamente para universo isotrópicos do tipo de de Sitter.

VI.3 INFLAÇÃO EM MODELOS DE BIANCHI VAZIOS

Dos modelos anisotrópicos de Bianchi se estudou, até agora, apenas o de tipo I, que é o mais simples. Quando se passa aos outros modelos, a dificuldade na obtenção de soluções exatas aumenta consideravelmente, fazendo com que suas respectivas análises se tornem muito complexas.

O estudo detalhado do comportamento da inflação em tais modelos iria requerer, portanto, um tipo de tratamento que foge ao espírito desta tese. No entanto, uma análise simplificada pode ser feita, a qual é suficiente para que se possa ter uma idéia a respeito da possibilidade de ocorrência de inflação num universo primordial anisotrópico.

De acordo com esse espírito simplificador, vai-se desprezar todos os termos relacionados à matéria-energia nas equações de Einstein, o que equivale a dizer que, para o universo primordial, a matéria era dinamicamente desprezível. Com esta hipótese, poder-se-ão estudar, comparativamente, os termos relacionados à anisotropia e à densidade de energia do vácuo nos primeiros estágios da evolução do universo.

Das equações (IV.65) e (IV.66), vê-se que todos os modelos de Bianchi, à exceção dos de tipo IV e VIIh, tem as equações de Einstein para o vácuo escritas na forma

geral

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\dot{X}\dot{Y}}{XY} + \frac{\dot{X}\dot{Z}}{XZ} &= F_x(x, y, z) + \Lambda \\ \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\dot{Y}\dot{X}}{YX} + \frac{\dot{Y}\dot{Z}}{YZ} &= F_y(x, y, z) + \Lambda \\ \frac{\ddot{Z}}{Z} + \frac{\dot{Z}\dot{X}}{ZX} + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{ZY} &= F_z(x, y, z) + \Lambda \\ \frac{\dot{X}\dot{Y}}{XY} + \frac{\dot{Y}\dot{Z}}{YZ} + \frac{\dot{Z}\dot{X}}{ZX} &= G(x, y, z) + \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (VI.64)$$

onde, para os modelos de classe A,

$$F_i(x, y, z) = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{N_i R_i}{R_j R_k} \right)^2 - \left(\frac{N_2 R_i}{R_i R_k} - \frac{N_3 R_k}{R_i R_j} \right)^2 \right] \quad (VI.65)$$

e

$$G(x, y, z) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{N_2 N_3}{x^2} + \frac{N_1 N_3}{y^2} + \frac{N_2 N_1}{z^2} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{N_3 z}{xy} \right)^2 + \left(\frac{N_1 x}{yz} \right)^2 + \left(\frac{N_2 y}{zx} \right)^2 \right] \right\} \quad (VI.66)$$

onde os R_i representam X, Y, Z e, para os modelos de classe B,

$$F_i(x, y, z) = \frac{f_i(a_0, q_0)}{x^2} + \frac{q_i(b)}{y^4 z^2} \quad (VI.67)$$

$$G(x, y, z) = \frac{(3a_0^2 + q_0^2)}{x^2} - \frac{2b^2}{y^4 z^2} \quad (VI.68)$$

Através do fator de escala médio, $R^3 = XYZ$, pode-se reescrever as três primeiras equações de (VI.64) como

$$\dot{H}_i + 3H_i H = F_i + \Lambda \quad , \quad (VI.69)$$

onde os H_i e H são dados, respectivamente, por (VI.4) e (VI.5). Somando as três primeiras equações de (VI.64) e usando o fator de escala volumétrico, definido como $V=R^3$, chega-se à equação:

$$\ddot{V}/V = F_x + F_y + F_z + 3\Lambda \quad , \quad (VI.70)$$

A quarta equação de (VI.64) não terá utilidade na análise a ser feita nesta seção, e foi incluída apenas para tornar completo o conjunto das equações de Einstein.

As funções F_i para os modelos de classe A podem ser postas na forma

$$F_i = \frac{1}{2R^6} \left[(R_j^2 - R_k^2)^2 - (R_i^2)^2 \right] \quad , \quad (VI.71)$$

de onde se percebe que o modo mais vagaroso pelo qual elas decrescem vai com R^{-2} ($V^{-2/3}$). O mesmo ocorre para as F_i dos modelos de classe B, de maneira que, daqui por diante, aproximar-se-ão todas as F_i por $\propto R^{-2}$. Sendo assim, as equações (VI.69) e (VI.70) são reescritas como

$$\dot{H}_i + 3H_i H = A_i / 2R^2 + \Lambda \quad , \quad (VI.72)$$

$$\ddot{V}/V = \sum \frac{1}{2V^{2/3}} + 3\Lambda \quad , \quad (VI.73)$$

onde $\Sigma = A_x + A_y + A_z$, e os A_i são constantes.

Por estas equações percebe-se claramente a competição existente entre dois termos: um, que pode ser chamado de densidade de energia efetiva de anisotropia, e outro que é a densidade de energia de vácuo. No caso em que a densidade de energia de anisotropia domina, o universo evolui segundo as leis

$$R = (\Sigma/12)^{1/2} t \quad , \quad (VI.74)$$

$$H = 1/t \quad (VI.75)$$

e

$$H_i = 3A_i / \Sigma t \quad , \quad (VI.76)$$

Já no caso em que a densidade de energia de vácuo prepondera, ocorre a expansão inflacionária:

$$R \propto \exp(\sqrt{\Lambda/3} t) \quad , \quad (VI.77)$$

$$H = (\Lambda/3)^{1/2} = H_v \quad (VI.78)$$

e

$$H_i = \sqrt{\Lambda/3} + \alpha e^{-3\sqrt{\Lambda/3} t} \quad , \quad (VI.79)$$

onde, à medida em que o universo expande, todos os três parâmetros de Hubble tendem exponencialmente para o mesmo valor, $\sqrt{\Lambda/3}$, resultando em isotropização.

Para resolver exatamente a equação (VI.73), utilizar-se-á um método semelhante ao usado na seção anterior para solucionar a primeira equação de (VI.44). A equação (VI.73) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{V}^2 - \frac{3\Sigma}{4} V^{4/3} - 3\Lambda V^2 \right) = 0 \quad , \quad (VI.80)$$

de maneira que o termo entre parênteses deve ser igual a uma constante. Fazendo essa constante igual a zero, obtém-se uma equação diferencial homogênea de primeira ordem, cuja solução é:

$$V^{1/3} = \left(\Sigma/4\Lambda \right)^{1/2} \text{SENH} \sqrt{\Lambda/3} t \quad , \quad (VI.81)$$

o que implica no seguinte parâmetro de Hubble médio:

$$H = 3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \coth \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \quad , \quad (VI.82)$$

Para avaliar quantitativamente a relação entre a anisotropia e a inflação, vai-se tomar a razão entre os respectivos termos da equação (VI.73):

$$\left(\frac{\Sigma}{6\Lambda V^{4/3}} \right) = \frac{2}{3} \frac{1}{\text{SENH}^2 \sqrt{\Lambda/3} t} \quad , \quad (VI.83)$$

a implicar que o universo passa a ser dominado pela densidade de energia do vácuo em um tempo

$$t_{vac.} = 2 \times 10^{-34} \text{ seg} \quad , \quad (VI.84)$$

que é uma ordem de grandeza posterior ao tempo imposto pelas TGU.

O fato do universo se tornar dominado pelo vácuo um pouco tardiamente não afeta, porém, o mecanismo de inflação. Conforme a equação (VI.35), a diferença entre o potencial de Higgs em $t_{vac.}$ e no início do rolamento é dada por

$$\phi^{-2}(t_{vac.}) - \phi^{-2}(t_i) = -\frac{2\lambda}{9H_v^2} \left[\ln(\cosh \sqrt{\lambda/3} t) \right]_{t_i}^{t_{vac.}} \quad . (VI.85)$$

Supondo que $t_i = 10^{-35}$ seg, a equação acima dá o resultado:

$$\phi^{-2}(t_{vac.}) - \phi^{-2}(t_i) = -0,05 \frac{\lambda}{H_v^2} \quad , \quad (VI.86)$$

e, como $\lambda/H_v^2 \ll \phi^{-2}(t_i)$, pode-se considerar que o rolamento começa a partir de $t_{vac.}$. Desse ponto em diante a anisotropia decai exponencialmente, não afetando o processo de inflação. Como já dito, a anisotropia torna a inflação até mais eficiente, pois aumenta o coeficiente de fricção - proporcional a H - na equação que dá a evolução de ϕ .

Conclui-se, da análise feita nesta seção e nas outras duas precedentes, que todos os modelos cosmológicos

anisotrópicos e espacialmente homogêneos permitem a ocorrência de inflação nos estágios primordiais do universo. A única exceção que deve ser levantada diz respeito aos modelos de tipo IX e de Kantowski-Sachs. Como eles possuem curvatura espacial positiva e são, portanto, fechados, existe a possibilidade de que eles re-colapsem antes do período inflacionário. Isso, no entanto, iria requerer uma enorme curvatura espacial, capaz de fazer com que a escala de tempo para o re-colapso seja menor que a escala de tempo para inflação. Como o cálculo da escala de tempo para o re-colapso dependeria fortemente das condições iniciais do universo, as quais são praticamente inacessíveis, não seria adequado tratar deste problema aqui.

VI.4 CONCLUSÃO

Mostrou-se, com este trabalho, que o processo inflacionário pode ser desencadeado em praticamente todos os modelos cosmológicos espacialmente homogêneos e anisotrópicos, com a possível exceção dos modelos de tipo IX de Bianchi e de Kantowski-Sachs. O efeito da anisotropia acaba ajudando a inflação, pois torna mais demorada a evolução do campo escalar, em comparação com a expansão do universo.

Não se procurou investigar a evolução da anisotropia após o período inflacionário. Foi mostrado, porém

(77), que, embora alguns modelos possam se tornar novamente bastante anisotrópicos, a inflação adia este fato para um tempo exponencialmente distante no futuro, e os modelos que sofrem inflação suficiente para resolver os problemas do horizonte e da densidade crítica mantém elevado grau de isotropia até o tempo presente.

O que foi mostrado, provavelmente, pode ser englobado em um princípio muito mais geral, formulado há alguns anos, e que, grosseiramente, estabelece que todos os modelos cosmológicos em expansão com constante cosmológica se aproximam assintoticamente no tempo da solução de de Sitter. Este princípio foi denominado de princípio da calvície cósmica ("cosmic no-hair principle"). Várias tentativas de se provar tal princípio foram feitas (78), e uma prova geral para os modelos de Bianchi foi obtida (79). Esta prova, no entanto, aplica-se apenas a modelos em que o tensor energia-momento satisfaz as condições de energia dominante e forte, o que, segundo alguns (80), é uma condição muito restritiva e não realística, impossibilitando até a ocorrência de inflação. A questão ainda permanece controversa e merece mais estudos.

Mais estudos, também, merecem os problemas da anisotropia em outros cenários inflacionários (os citados na introdução) e da relação entre a anisotropia e o potencial $V_T(\phi)$ associado ao campo de Higgs (81). Tais questões levam, porém, ao real problema colocado pela cosmologia à Física: o da formulação de uma teoria quântica da gravitação (82), ca-

paz de permitir o entendimento das condições do universo na situação mais extrema que a mente humana foi, até hoje, capaz de imaginá-lo.

VII. BIBLIOGRAFIA

- (1) GUTH,A.H.,Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems,Phys. Rev.D,23,347(1981).
- (2) A exposição clássica do modelo padrão da cosmologia, que apesar de já ter quinze anos continua sendo citada nos trabalhos mais recentes, constitui o capítulo 15 do livro de WEINBERG,S.,Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity,John Wiley,New York,1972. Outra excelente referência sobre o modelo padrão, inclusive com detalhes históricos, é o livro de PEEBLES,P.J.E.,Physical Cosmology,Princeton University Press,Princeton,1971.
- (3) Uma lista enorme de referências-contendo artigos e livros-poderia ser citada aqui. A lista a seguir nada mais é, portanto, que uma sucinta relação de alguns dos trabalhos consultados pelo autor durante a preparação da tese: ABERS,E.S. and LEE,B.W., Gauge Theories,Phys.Rep.,9,1(1973); LANGACKER,P., Grand Unified Theories and Proton Decay,Phys.Rep., 72,185(1981); LINDE,A.D.,Phase Transitions in Gauge Theories and Cosmology, Rep.Prog.Phys.,42,389

(1979); LEITE LOPES, J., Gauge Field Theories: An Introduction, Pergamon Press, Oxford, 1981; LEADER, E. and PREDAZZI, E., An Introduction to Gauge Theories and the New Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

- (4) LINDE, A.D., A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution to the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems, Phys.Lett., **108B**, 389(1982); HAWKING, S.W. and MOSS, I.G., Supercooled Phase Transitions in the Very Early Universe, Phys.Lett., **110B**, 35(1982); ALBRECHT, A. and STEINHARDT, P.J., Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking, Phys.Rev.Lett., **48**, 1220(1982).
- (5) LINDE, A.D., Chaotic Inflating Universe, JETP Lett., **38**, 176(1983); LINDE, A.D., Chaotic Inflation, Phys.Lett., **129B**, 177(1983).
- (6) ELLIS, J., NANOPOULOS, D.V., OLIVE, K.A. and TAMVAKIS, K., Primordial Supersymmetric Inflation, Nucl. Phys.B, **221**, 524(1983); NANOPOULOS, D.V., OLIVE, K.A., SREDNICKI, M. and TAMVAKIS, K., Primordial Inflation in Simple Supergravity, Phys.Lett., **123B**, 41(1983); NANOPOULOS, D.V., OLIVE, K.A. and SREDNICKI, M., After Primordial Inflation, Phys.Lett., **127B**, 30(1983).

- (7) ABBOTT,L.F. and WISE,M.B.,Constraints on Generalized Inflationary Cosmologies, Nucl.Phys.B,244,541 (1984); LUCCHIN,F. and MATARRESE,S.,Power-Law Inflation,Phys.Rev.D,32,1316((1985); LUCCHIN,F. and MATARRESE,S.,Kinematical Properties of Generalized Inflation,Phys.Lett.,164B,282(1985).

- (8) BARROW,J.D. and OTTEWILL,A.,The Stability of General Relativistic Cosmological Theory, J.Phys.A,16, 2757(1983); HAWKING,S.W. and LUTTRELL,J.C., Higher Derivatives in Quantum Cosmology (I).The Isotropic Case,Nucl.Phys.B,247,250(1984).

- (9) TAUB,A.H.,Empty Space-Times Admitting a Three Parameter Group of Motions,Ann.Math.,53,472(1951); RAYCHAUDHURI,A.,An Anisotropic Cosmological Solution in General Relativity, Proc.Phys.Soc.,72,263 (1958); HECKMANN,O. and SHÜCKING,E., Relativistic Cosmology,in Gravitation-An Introduction to Current Research,Witten,L.(Ed.),John Wiley,New York, 1962.

- (10) Para se ter uma noção do estado em que se encontrava o estudo dos modelos cosmológicos anisotrópicos no final da década de 60, pode-se conferir a seguinte sequência de artigos: ELLIS,G.F.R.,Dynamics of Pressure-Free Matter in General Relativity, J.

Math.Phys.,**8**,1171(1967); STEWART,J.M. and ELLIS,G.F.R.,Solutions of Einstein's Equations for a Fluid which Exhibit Local Rotational Symmetry, J.Math.Phys.,**9**,1072(1968); ELLIS,G.F.R. and MacCALLUM,M.A.H.,A Class of Homogeneous Cosmological Models, Commun.Math.Phys.,**12**,108(1969).

- (11) MISNER,C.W.,The Isotropy of the Universe, Astrophys.J.,**151**,431(1968). A proposta de Misner provocou muita polêmica. A esse respeito ver, por exemplo: DOROSHKEVICH,A.G.,ZEL'DOVICH,Ya,B. and NOVIKOV,I.D.,Weakly Interacting Particles in an Anisotropic Cosmological Model,JETP Lett.,**26**,408(1968); MATZNER,R.A. and MISNER,C.W.,Dissipative Effects in the Expansion of the Universe,Astrophys.J.,**171**,415(1972); COLLINS,C.B. and HAWKING,S.W., Why is the Universe Isotropic?, Astrophys.J.,**180**,317(1973).

- (12) Tais estudos foram desenvolvidos principalmente por dois grupos, um na Itália e outro na União Soviética. Alguns dos artigos mais importantes são: DOROSHKEVICH,A.G., LUKASH,V.N. and NOVIKOV,I.D., The Isotropization of Homogeneous Cosmological Models,Sov.Phys.JETP,**37**,739(1973); CADERNI,N. and FABBRI,R.,Production of Entropy and Viscous Damping of Anisotropy in Homogeneous Cosmological Mo-

dels: Bianchi Type-I Spaces, Nuovo Cimento, 44B, 228 (1978); CADERNI, N. and FABBRI, R., Neutrino Viscosity in Bianchi Type-V Universes, Phys. Lett., 68A, 144 (1978); CADERNI, N. and FABBRI, R., Neutrino Viscosity and Isotropization of Anisotropic-Curvature Cosmological Models, Phys. Rev. D, 20, 1251 (1979).

- (13) Os seguintes artigos dão uma idéia bastante representativa do que foi feito na década de 70 e princípios da de 80 em termos de modelos cosmológicos inhomogêneos: EARDLEY, D., LIANG, E. and SACHS, R., Velocity-Dominated Singularities in Irrotational Dust Cosmologies, J. Math. Phys., 13, 99 (1972); TABENSKY, R. and TAUB, A. H., Plane Symmetric Self-Gravitating Fluids with Pressure Equal to Energy Density, Commun. Math. Phys., 29, 61 (1973); GOWDY, R. H., Vacuum Spacetimes with Two-Parameter Sacelike Isometry Groups and Compact Invariant Hypersurfaces: Topologies and Boundary Conditions, Ann. Phys. (New York), 83, 203 (1974); SZEKERES, P. A., A Class of Inhomogeneous Cosmological Models, Commun. Math. Phys., 41, 55 (1975); SZAFRON, D. A., Inhomogeneous Cosmologies: New Exact Solutions and Their Evolution, J. Math. Phys., 18, 1673 (1977); SZAFRON, D. A. and WAINWRIGHT, J., A Class of Inhomogeneous Perfect Fluid Cosmologies, J. Math. Phys., 18, 1668 (1977); COLLINS, C. B. and SZAFRON, D. A., A New Approach to Inhomoge-

neous Cosmologies: Intrinsic Symmetries, J. Math. Phys., **20**, 2347 (1979); WAINWRIGHT, J. and GOODE, S.W., Some Exact Inhomogeneous Cosmologies with Equation of State $p = \frac{1}{3}\mu$, Phys. Rev. D, **22**, 1906 (1980); WAINWRIGHT, J., Exact Spatially Inhomogeneous Cosmologies, J. Phys. A, **14**, 1131 (1981).

- (14) Parece realmente bastante restritiva a hipótese de que as condições iniciais do universo tenham sido tão especiais quanto as dos modelos de FRW. É com base nessa visão que se desenvolveu o programa da "cosmologia caótica", cuja idéia principal é mostrar que o estágio atual do universo-homogêneo e isotrópico-pode ser obtido a partir de condições primordiais mais gerais que se modificariam durante o processo de expansão. Ver, a esse respeito: MISNER, C.W., op.cit.; MISNER, C.W., THORNE, K.S. and WHEELER, J.A., Gravitation, W.H. Freeman, San Francisco, 1973, cap. 30; CARMELI, M. CHARACH, Ch. and MALIN, S., Survey of Cosmological Models with Gravitational, Scalar and Electromagnetic Waves, Phys. Rep., **76**, 79 (1981). A última referência, em particular, contém uma boa revisão sobre modelos cosmológicos anisotrópicos e inhomogêneos.

- (15) BARROW, J.D. and TURNER, M.S., Inflation in the Universe, Nature, **292**, 35 (1981); STEIGMAN, G. and TURNER,

M.S., Inflation in a Shear- or Curvature-Dominated Universe, *Phys.Lett.*, **128B**, 295 (1983); FUTAMASE, T., Coleman-Weinberg Symmetry Breaking in an Anisotropic Spacetime, *Phys.Rev.D*, **29**, 2783 (1984); ZARDECKI, A., Inflation and Reheating in Bianchi Type-IX Cosmology, *Phys.Rev.D*, **31**, 718 (1985); GRØN, Ø., Isotropization and Homogenization of an Anisotropic and Inhomogeneous Cosmological Model During the Inflationary Era, *Phys.Rev.D*, **32**, 1586 (1985); ROTHMAN, T., and MADSEN, M.S., Bianchi I Inflation: Assumptions and Inconsistencies, *Phys.Lett.*, **159B**, 256 (1985); GRØN, Ø., Expansion Isotropization During the Inflationary Era, *Phys.Rev.D*, **32**, 2522 (1985); MARTINEZ-GONZALES, E. and JONES, B.J.T., Primordial Shear and the Question of Inflation, *Phys.Lett.*, **167B**, 37 (1985); GRØN, Ø., Transition of a Rotating Bianchi Type-IX Cosmological Model into an Inflationary Era, *Phys.Rev.D*, **33**, 1204 (1986); GRØN, Ø., Transition of a Kantowski-Sachs Cosmological Model into an Inflationary Era, *J.Math.Phys.*, **27**, 1490 (1986).

- (16) GIBBONS, G.W. and HAWKING, S.W., Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation, *Phys.Rev.D*, **15**, 2738 (1977); HAWKING, S.W. and MOSS, I. G., op.cit.; BOUCHER, W. and GIBBONS, G.W., Cosmic Baldness, in *The Very Early Universe*, Gibbons, G.W., Hawking, S.W. and Siklos, S.T.C. (Ed.s.), Cambridge

University Press, Cambridge, 1983; WALD, R.M., Asymptotic Behavior of Homogeneous Cosmological Models in the Presence of a Positive Cosmological Constant, Phys.Rev.D, 28, 2118 (1983); JENSEN, L.G. and STEIN-SCHABES, J.A., Effect of Inflation on Anisotropic Cosmologies, Phys.Rev.D, 34, 931 (1986), MOSS, I.G. and SAHNI, V., Anisotropy in the Chaotic Inflationary Universe, Phys.Lett., 178B, 2237 (1986); TURNER, M.S. and WIDROW, L.M., Homogeneous Cosmological Models and New Inflation, Phys.Rev.Lett., 57, 2237 (1986); BARROW, J.D., Deflationary Universes with Quadratic Lagrangians, Phys.Lett., 183B, 285 (1987); JENSEN, L.G. and STEIN-SCHABES, J.A., Is Inflation Natural?, Phys.Rev.D, 35, 111146 (1987).

- (17) O capítulo II está baseado no capítulo 2 do livro de HAWKING, S.W. and ELLIS, G.F.R., The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, Cambridge, 1973. Outras referências gerais para o capítulo são, de um lado mais matemático, HICKS, N., Notes on Differential Geometry, Van Nostrand, Princeton, 1965, SPIVAK, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol.1, Publish or Perish, Boston, 1970 e BOOTHBY, W.M., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 1975, e de um lado mais físico, TRAUTMAN, A., Foundations and

Current Problems of General Relativity, in Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, vol.1-Lectures on General Relativity, Deser, S. and Ford, K.W. (ed.s), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.

- (18) O item II.1 é, apenas, uma breve descrição de alguns conceitos básicos. Uma referência mais geral sobre topologia é KELLEY, J.L., *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, 1955; e uma mais acessível, que contém praticamente todos os conceitos fundamentais usados no texto, é o livro de LIMA, Elon Lages, *Elementos de Topologia Geral*, 2a.ed.revista, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1976.
- (19) KELLEY, J., *op.cit.*; pg.171.
- (20) Ver, por exemplo, LIMA, E.L., *Curso de Análise*, vol.2, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981, pg.s 257 e 258.
- (21) SPIVAK, M., *op.cit.*; pg. 8-18 e seguintes.
- (22) CHOQUET-BRUHAT, Y., DeWITT-MORETTE, C. and DILLARD-BLEICK, M., *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland, Amsterdam, 1982; pg.305.

- (23) WEINBERG, S., op.cit., pg.376.
- (24) STEPHANI, H., General Relativity, Cambridge University Press, Cambridge, 1982; pg.s 190 e 191.
- (25) Para maiores detalhes sobre grupos e álgebras de Lie, consultar: COHN, P.M., Lie Groups, Cambridge University Press, Cambridge, 1957 e JACOBSON, N., Lie Algebras, John Wiley, New York, 1962.
- (26) RYAN Jr., M.P. and SHEPLEY, L.C., Homogeneous Relativistic Cosmologies, Princeton University Press, Princeton, 1975; pg.103.
- (27) HAWKING, S. and ELLIS, G.F.R., op.cit., pg.49.
- (28) HAWKING, S.W. and ELLIS, G.F.R., op.cit., pg.65.
- (29) MISNER, C.W., THORNE, K.S. and WHEELER, J.A., op.cit., pg.504.
- (30) BIRRELL, N.D. and DAVIES, P.C.W., Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, pgs.87 e 88.
- (31) HAWKING, S.W. and ELLIS, G.F.R., op.cit., pg.74.

- (32) ZEL'DOVICH, Ya.B., Cosmological Constant and Elementary Particles, JETP Lett., 6, 316 (1967).
- (33) HAWKING, S. and ELLIS, G.F.R., op.cit., pg. 80.
- (34) HAWKING, S. and ELLIS, G.F.R., op.cit., pg. 82.
- (35) RAYCHAUDHURI, A., Relativistic Cosmology, Phys. Rev., 98, 1123 (1955).
- (36) ELLIS, G.F.R., Relativistic Cosmology, in Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi Course XLVII, op.cit., pg. 116.
- (37) ELLIS, G.F.R., op.cit., pg. 118.
- (38) Quando se fala em propriedades do universo em larga escala, pensa-se em médias tomadas sobre regiões de dimensões maiores ou iguais a 10^8 anos-luz. Para maiores detalhes, ver: MISNER, C.W., THORNE, K.S. and WHEELER, J.A., op.cit., pg. 703.
- (39) Na realidade, não se pode dizer que as observações conduzem univocamente à hipótese de expansão. Esta hipótese é apenas uma das interpretações possíveis (a mais comumente aceita) e existem outras que não podem ser desconsideradas. Ver, a respeito desse assunto: MISNER, C.W., THORNE, K.S. and WHEELER, J.

A., op.cit., pgs.775 e 776; FIELD, G.B., ARP, H. and BAHCALL, J.N., *The Redshift Controversy*, W.A.Benjamin Reading, 1973; LaVIOLETTE, P.A., *Is the Universe Really Expanding?*, *Astrophys.J.*, 301, 544 (1986).

- (40) Os modelos são assim chamados em honra àqueles que os obtiveram; Friedmann foi o primeiro a construir modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos evolutivos e Robertson e Walker, independentemente, demonstraram que o elemento de linha obtido por Friedmann é o mais geral compatível com as condições de homogeneidade e isotropia. As referências são: FRIEDMANN, A., *Über die Krümmung des Raumes*, *Z.Phys.*, 10, 377 (1922); ROBERTSON, H.P., *Kinematics and World Structure*, *Astrophys.J.*, 82, 284 (1935); WALKER, A.G., *On Riemannian Spaces with Spherical Symetry About a Line and the Conditions for Isotropy in General Relativity*, *Quart.J.Math.Oxford Ser.*, 6, 81 (1935).

- (41) KRAMER, D., STEPHANI, H., HERLT, E. and MacCALLUM, M., *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980; sec.s 8.5 e 10.2.

- (42) LANDAU, L.D., and LIFSHITZ, E.M., *Statistical Physics Part I*, Third Edition, Pergamon Press, Oxford, 1980;

§63.

- (43) STEPHANI, H., *op.cit.*, pgs. 242 e 243.
- (44) De VAUCOULEURS, G., The Cosmological Distance Scale: A Comparison of Two Approaches to the Hubble Constant, *Ann.N.Y.Acad.Sci.*, **375**, 90 (1981); SANDAGE, A. and TAMMANN, G.A., Steps Toward the Hubble Constant. VIII. The Global Value, *Astrophys.J.*, **256**, 339 (1982).
- (45) FANG, L.Z., KIANG, T., CHENG, F.H. and HU, F.X., Determinations of the Deceleration Parameter q_0 , *Q.J.R.Astr.Soc.*, **23**, 363 (1982); La VIOLETTE, P.A., *op.cit.*
- (46) TINSLEY, B.M., The Cosmological Constant and Cosmological Change, *Phys.Today*, **30**(6), 32 (1977); HICKSON, P. and ADAMS, P.J., Evidence for Cluster Evolution From the θ -Z Relation, *Astrophys.J.*, **234**, L91 (1979).
- (47) Para uma revisão recente, ver BARROW, J.D., General Relativistic Cosmological Models and the Cosmic Microwave Background, *Can.J.Phys.*, **64**, 152 (1986).
- (48) WEINBERG, S.W., *op.cit.*, pg. 529.
- (49) MacCALLUM, M.A.H., Cosmological Models from a Geometric Point of View, in *Cargèse Lectures in Physics*,

vol.6,Schatzman,E.(Ed.),Gordon and Breach,New York,1973;pg.94.

- (50) MacCALLUM,M.A.H.,Anisotropic and Inhomogeneous Relativistic Cosmologies, in General Relativity:An Einstein Centenary Survey,Hawking,S.W. and Israel,W.,(Ed.s),Cambridge University Press,Cambridge, 1979;pg.540
- (51) MacCALLUM,M.A.H.,(1973),op.cit.,pg.95.
- (52) BIANCHI,L.Sugli Spazii a Tre Dimensioni che Ammettono un Gruppo Continuo di Movimenti,Mem.di Mat. Soc.Ital.Sci.11,267(1897).
- (53) ESTABROOK,F.B.,WAHLQUIST,H.D.and BEHR,C.G.,Dyadic Analysis of Spatially Homogeneous World Models,J. Math.Phys., 9,497(1968);ELLIS,G.F.R.and MacCALLUM,M.A.H.,op.cit.
- (54) MacCALLUM,M.A.H.,(1979),op.cit.,pg.543.
- (55) LANDAU,L.D.and LIFSHITZ,E.M.,The Classical Theory of Fields,Fourth Revised Edition,Pergamon Press, Oxford(1983);pg.386.
- (56) ELLIS,G.F.R.and MacCALLUM,M.A.H.,op.cit.,

- (57) HARVEY, A. and TSUBELIS, D., Exact Bianchi IV Cosmological Model, *Phys. Rev. D*, **15**, 2734 (1977).
- (58) LUKASH, V. N., Gravitational Waves that Conserve The Homogeneity of Space, *Sov. Phys. JETP*, **40**, 792 (1974);
BORZESZKOWSKI, H. H. v. and MULLER, V., Power Asymptotes of Homogeneous Cosmological Models in Einstein's Theory of Gravitation, *Ann. Phys. (Leipzig)*, **7**, 361 (1978).
- (59) MacCALLUM, M. A. H., (1979); *op. cit.*; pg. 545.
- (60) KANTOWSKI, R. and SACHS, R. K., Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models, *J. Math. Phys.*, **7**, 443 (1966). Apesar do modelo receber o nome de Kantowski-Sachs, ele foi primeiramente estudado na literatura por KOMPANEETS, A. S. and CHERNOV, A. S., Solution of the Gravitation Equations for a Homogeneous Anisotropic Model, *Sov. Phys. JETP*, **20**, 1303 (1965).
- (61) A descrição dada neste capítulo é bastante simplificada e qualitativa, restringindo-se ao estritamente necessário para os cálculos da tese. Revisões mais detalhadas sobre o assunto podem ser en-

contradas em: GIBBONS,G.W.,HAWKING,S.W.and SIKLOS,
S.T.C.,The Very Early Universe,op.cit.;LINDE,A.D.,
The Inflationary Universe,Rep.Prog.Phys.,47,925
(1984);BRANDENBERGER,R.H.,Quantum Field Theory
Methods and Inflationary Universe Models,Rev.Mod.
Phys.,57,1(1985);TURNER,M.S.,The Inflationary Pa-
radigm,in Proceedings of The Cargèse School on
Fundamental Physics and Cosmology,Audouze,J.and
TrEn Thanh Van,J.(ed.s),Editions Frontieres,Gif-
sur-Yvette,1985;BONOMETTO,S.A.and MASTERO,A.,Phase
Transitions in the Early Universe,Riv.del Nuovo
Cimento,9(5),1986.

(62) GEORGI,H. and GLASHOW,S.L.,Unity of All Elementa-
ry-Particle Forces, Phys.Rev.Lett.,32,438(1974);
GEORGI,H.,QUINN,H.R. and WEINBERG,S.,Hierarchy of
Interactions in Unified Gauge Theories, Phys.Rev.
Lett.,33,451(1974); ELLIS,J.,Grand Unified Theo-
ries,Lectures Presented at the 21st Scottish Uni-
versities Summer School in Physics,CERN Preprint
Ref.Th.2942,1980.

(63) Para maiores detalhes sobre o mecanismo de quebra
de simetria em teoria de campos, consultar: NAMBU,
Y. and JONA-LASINIO,G.,Dynamical Model of Elemen-
tary Particles Based on an Analogy with Supercon-
ductivity.I.,Phs.Rev.,122,345(1961); GOLDSTONE,J.,

Field Theories with "Superconductor" Solutions, *Nuovo Cimento*, **19**, 154 (1961); ENGLERT, F. and BROUT, R., Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 321 (1964); KIBBLE, T.W.B., Symmetry Breakdown in Non-Abelian Gauge Theories, *Phys. Rev.*, **155**, 1554 (1967).

- (64) HIGGS, P.W., Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields, *Phys. Lett.*, **12**, 132 (1964); HIGGS, P.W., Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons, *Phys. Rev.*, **145**, 1156 (1966).
- (65) GLINER, E.B., Algebraic Properties of the Energy-Momentum Tensor and Vacuum-Like States of Matter, *Sov. Phys. JETP*, **22**, 378 (1966).
- (66) ZEL'DOVICH, Ya.B., The Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles, *Sov. Phys. Usp.*, **11**, 381 (1968); ZEL'DOVICH, Ya.B., Vacuum Theory: A Possible Solution to the Singularity Problem of Cosmology, *Sov. Phys. Usp.*, **24**, 216 (1981).
- (67) GUTH, A.H., p.cit.; HAWKING, S.W., MOSS, I.G. and STEWART, J.M., Bubble Collisions in the Very Early Universe, *Phys. Rev. D*, **26**, 268 (1981); GUTH, A.H. and WEINBERG, E., Could the Universe have Recovered from a Slow First-Order Phase Transition, *Nucl. Phys. B*,

212,321(1983).

- (68) Ver os artigos da referência (4). Uma versão resumida dos principais fatos que levaram ao novo universo inflacionário pode ser encontrada em BARROW, J.D. and TURNER, M.S., The Inflationary Universe- Birth, Death and Transfiguration, Nature, 298, 801 (1982).
- (69) COLEMAN, S. and WEINBERG, E., Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking, Phys.Rev.D, 7, 1888(1973).
- (70) BONOMETTO, S.A. and MASIERO, A., op.cit.:pg.61.
- (71) BONOMETTO, S.A. and MASIERO, A., op.cit.:pg.61
- (72) Ver, em particular, as revisões contidas em (59).
- (73) Consultar os artigos contidos em (5), (6), (7) e (8), bem como os de (59).
- (74) SAUNDERS, P.T., Observations in Some Simple Cosmological Models with Shear, Mont.Not.R.Astr.Soc., 142, 213(1969); CADERNI, N. and FABBRI, R., Nuovo Cimento, op.cit.
- (75) Soluções desse tipo já são conhecidas na literatu-

ra. Ver, por exemplo, SAUNDERS,P.T.,op.cit. e KRAMER,D.,STEPHANI,H.,HERLT,E. and MacCALLUM,M.A.H., op.cit.;pg.135.

- (76) COLLINS,C.B.,Global Structure of the "Kantowski-Sachs" Cosmological Models,J.Math.Phys.,18,2116 (1977).
- (77) JENSEN,L.G. and STEIN-SCHABES,J.A.,(1986),op.cit.; TURNER,M.S. and WIDROW,L.M.,op.cit.
- (78) GIBBONS,G. and HAWKING,S.W.,op.cit.;HAWKING,S.W. and MOSS,I.G.,op.cit.;BARROW,J.D.,Perturbations of a de Sitter Universe, in The Very Early Universe, Gibbons,G. and Hawking,S.W.(Ed.s.),op.cit.;pg.267; BOUCHER,W. and GIBBONS,G.,op.cit.
- (79) WALD,R.M.,op.cit.;MOSS,I.G. and SAHNI,V.,op.cit.; JENSEN,L.G. and STEIN-SCHABES,J.A.,(1987),op.cit.
- (80) BARROW,J.D.,(1987),op.cit.
- (81) FUTAMASE,T.,op.cit.; ZARDECKI,A.,op.cit. Com relação ao problema dos campos quânticos em espaços-tempos curvos, ver o livro de BIRREL,N.D. and DAVIES,P.C.W.,op.cit.
- (82) Para se ter uma idéia dos problemas enfrentados

pela teoria quântica da gravitação, pode-se consultar o artigo clássico de FEYNMAN,R.P., Quantum Theory of Gravitation, Acta Phys. Pol., 24, 697 (1963), as revisões de DeWITT, B.S., Quantum Gravity: The New Synthesis, HAWKING, S.W., The Path Integral Approach to Quantum Gravity, e WEINBERG, S., Ultraviolet Divergences in Quantum Theories of Gravitation, no livro comemorativo General Relativity: An Einstein Centenary Survey, Hawking, S.W. and Israel, W. (Ed.s.), op.cit., e o artigo de divulgação de DeWITT, B.S., Quantum Gravity, Sci. Am., 249(6), 104 (1983).
