

BIFURCAÇÃO EM  
MODELOS COSMOLÓGICOS HOMOGÊNEOS

ANDREAS KNEIP

ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ INÁCIO COTRIM VASCONCELLOS

*Este exemplar  
corresponde a redação final  
de Tese defendida pelo aluno  
Andreas Kneip e aprovada pelo  
Conselho Julgador pelo  
Corpo, 13- fevereiro- 1992  
José Inácio Cotrim Vasconcellos  
(Presidente do Banca de  
Orientador do Aluno)*

Tese apresentada no Instituto de Física "Gleb Wataghin" da  
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos  
requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em  
Física.

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATHAGIN" - UNICAMP  
CAMPINAS - FEVEREIRO DE 1992

UNIDADE

IF

N.º CHAMADA

1736

V. .... EX

TOMBO BO

15840

PROC.

215/92

C

D

PREÇO

R\$ 20.000,00

DATA

26/02/92

N.º CPD

IF 1736/11

Chovo 19926-3

**AOS AMIGOS.**

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, pelo apoio e paciência;

À minha irmã;

Ao CNPq, pela concessão de bolsa;

Ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da UNICAMP, onde a maior parte deste trabalho foi realizada;

Ao Departamento de Física, do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, pela compreensão;

Às secretárias do Departamento de Eletrônica Quântica do IFGW - UNICAMP, em especial Melita V. Martins, pela valiosa colaboração na preparação da versão final deste trabalho.

## RESUMO

É feita uma introdução elementar à Teoria de Bifurcação de Poincaré e aos Modelos Cosmológicos Homogêneos. São apresentados resultados que mostram que ocorrem pontos de bifurcação na origem, nos modelos isotrópicos, quando estes obedecem uma equação de estado característica dos modelos inflacionários.

## ABSTRACT

An elementary introduction to the Poincaré's Theory of Bifurcation and to the Homogeneous Cosmological Models is presented here. The results show that the origin is a bifurcation point in the isotropic models, when the models follow the characteristic state equation of inflationary cosmos.

# ÍNDICE

Agradecimentos .....	iii
Resumo .....	iv
Abstract .....	v
Lista de Figuras .....	viii
Lista de Tabelas .....	ix
Capítulo Zero - Introdução .....	1
Capítulo Um - Fundamentos .....	9
1.0 - Introdução .....	9
1.1 - Topologia .....	10
1.2 - Variedades .....	23
1.3 - Sistemas Dinâmicos .....	28
Capítulo Dois - Teoria de Bifurcação .....	33
2.1 - Ponto de Bifurcação .....	33
2.2 - Determinação dos Pontos de Bifurcação .....	35
2.3 - Bifurcação a um Simples Autovalor .....	41
2.4 - Método de Redução de Liapunov-Schmidt .....	44
2.5 - Caso de Dimensão Finita e $\dim \ker(L)=1$ .....	45

Capitulo Três	- Modelos Cosmológicos Homogêneos .....	50
3.1	- Cosmologia Relativista .....	50
3.2	- Isometrias .....	54
3.3	- Modelos Homogêneos .....	62
3.4	- As equações de Campo .....	70
3.5	- Modelos Homogêneos e Isotrópicos .....	76
Capitulo Quatro	- Bifurcação em Modelos Cosmológicos Homogêneos	.79
4.0	- Introdução .....	79
4.1	- Modelos de FRW .....	80
4.2	- Modelos de Bianchi .....	85
4.3	- Conclusões e perspectivas .....	93
Bibliografia	.....	95

# LISTA DE FIGURAS

Figura 0.1 .....	4
Figura 1.1 .....	24

# LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 .....	66
Tabela 3.2 .....	75

## CAPÍTULO ZERO - INTRODUÇÃO

A Mecânica como a conhecemos - das equações diferenciais, da análise e dos resultados quantitativos - é uma aquisição recente da humanidade, devida principalmente aos trabalhos de Newton, Euler, Lagrange, Laplace, Hamilton e Jacobi, entre outros. Antes disto, porém, houve uma longa tradição de investigação qualitativa, começando com os gregos clássicos e culminando com os trabalhos de Kepler e Galileo. Em ambos os períodos o problema da Mecânica Celestial teve um papel preponderante. Chamado durante o período quantitativo de problema dos  $n$  corpos, quase todas as figuras centrais da Física trabalharam nele. A questão da estabilidade do sistema solar foi um dos principais aspectos estudados, e a falha do método quantitativo em explicá-la determinou o aparecimento de um novo período qualitativo <sup>(1)</sup>. Esta nova análise qualitativa, gerada quase toda pelo gênio de Henri Poincaré, resultou, entre outras coisas, na moderna geometria diferencial e na topologia <sup>(2)</sup>. As equações da mecânica celeste podem ser escritas numa forma canônica:

$$\frac{dx_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i=1, \dots, n.$$

onde  $H$  é o hamiltoniano, e  $x_i$  e  $p_i$  são variáveis conjugadas.

O determinismo da ciência garante que dadas as posições e velocidades iniciais, existe, e é única, uma solução das equações do movimento, o que permite descrever a evolução do

sistema. Quando  $n=2$  estas equações podem ser integradas através de quadraturas, que fornecem todas as informações necessárias sobre o sistema. Porém, quando  $n \geq 3$ , se sabia desde o começo do século passado que as soluções do problema não poderiam ser descritas em termos de integrais de funções elementares, a não ser em casos muito particulares. Foi demonstrado não ser possível nem mesmo a obtenção de uma série absolutamente convergente para resolver o sistema, o que garantiria o determinismo do problema, pelo menos uma que convergisse rápido o suficiente para ter aplicações práticas, a não ser a computação de soluções particulares sobre intervalos finitos de tempo. Mas mesmo que este tipo de solução seja adequado para alguns objetivos, questões como da estabilidade do sistema exigem o conhecimento das soluções completas, ou seja, a determinação das propriedades da solução como um todo, sobre um intervalo de tempo arbitrário.

Um dos elementos do novo período qualitativo, a análise de bifurcação, surgiu da tentativa de explicar o surgimento da Lua a partir da fissão do corpo que compreendia o que hoje é a Terra e a Lua. A idéia de Poincaré era responder as seguintes questões :<sup>(3)</sup>

- (a) Encontrar as possíveis formas de equilíbrio de uma massa fluida homogênea, sujeita a gravidade, quando girando em torno de um eixo fixo com momentum angular constante  $\omega$ ;
- (b) Determinar a estabilidade ou instabilidade de cada forma.

Era sabido que:

- (i) se  $\omega = 0$ , a única forma estável possível é a de uma esfera;
- ii) se  $\omega$  for pequeno, uma família de elipsóides de revolução  $M_\omega$  (elipsóides de Maclaurin) existe e é estável;

(iii) para um certo valor de  $\omega$ , digamos  $\omega_0$ , esta família se torna instável e uma nova família de formas de equilíbrio  $J_\omega$  se torna estável (elipsóides de Jacobi, com três eixos desiguais).

Poincaré encontrou que esta família se tornava instável para um número crítico mais alto  $\omega_1$ , originando uma família de figuras em forma de pera  $P_\omega$ . Como esta nova família se mostrasse instável, após muita disputa este argumento de Poincaré, para a origem e estabilidade do sistema Terra-Lua, foi abandonado.<sup>[4]</sup>

Poincaré disse que  $J_\omega$  se bifurcava de  $M_\omega$  em  $\omega_0$  e que  $P_\omega$  se bifurcava de  $J_\omega$  em  $\omega_1$ . As famílias  $\{M_\omega\}$ ,  $\{J_\omega\}$ , e  $\{P_\omega\}$  foram chamadas de séries lineares ou ramos, e os pontos  $(M_{\omega_0}, \omega_0)$  e  $(J_{\omega_1}, \omega_1)$  foram chamados de pontos de bifurcação. A estabilidade foi determinada mostrando que a energia potencial da figura tinha um mínimo relativo. Poincaré denominou a transição da estabilidade de  $(M_{\omega_0}, \omega_0)$  para  $(J_{\omega_1}, \omega_1)$  de troca de estabilidade. Estes termos se tornaram tradicionais, e mais além daremos definições mais gerais.

Embora Poincaré seja considerado, com muita justiça, o pai da Teoria de Bifurcação, o fenômeno da ramificação das soluções das equações diferenciais já era conhecido há mais tempo. Euler o encontrou ao estudar a flambagem de uma coluna<sup>[5]</sup>, segundo um trabalho de 1774, "De curvis elasticis". Euler foi o primeiro a descrever o fenômeno, e qualquer criança que já brincou com uma vareta de madeira é capaz de reconhecê-lo. Este problema, que a tradição denominou de "elastica", é aquele da compressão axial de um cilindro (uma coluna ou uma vareta). Conforme a força aplicada vai de zero a um certo valor  $F_0$ , a posição de equilíbrio do objeto permanece sobre uma linha reta passando pelo eixo da

figura. Quando o valor  $F_0$  é alcançado o objeto salta para uma posição de equilíbrio curvada (fenômeno chamado de flambagem, ver figura 0.1). É fácil ver que o que existe de comum entre o problema de Euler e o de Poincaré é o efeito da variação de um parâmetro sobre o comportamento qualitativo do sistema dinâmico.

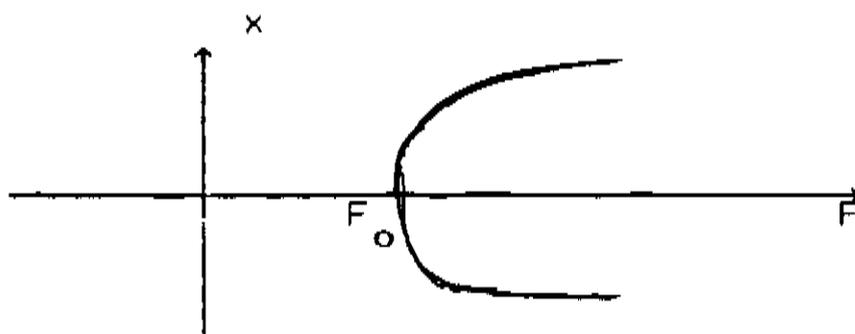


Figura 0.1: Esquema do comportamento das soluções do problema de Euler conforme o valor  $F$  da força varia.  $X$  indica a posição de equilíbrio do sistema.

A teoria qualitativa de Poincaré está baseada nas propriedades geométricas do diagrama de fase do sistema. Poincaré visualizou um sistema dinâmico como um campo vetorial no espaço de fase, no qual uma solução fosse uma curva suave tangente em cada um de seus pontos ao vetor localizado nestes pontos. Como, dependendo do problema, o espaço de fase podia ser muito mais complicado que o espaço euclidiano normalmente usado até então, toda a geometria associada a este espaço se tornou inadequada, levando Poincaré a noção de variedade diferenciável como o espaço por excelência dos problemas da dinâmica. Tal substituição determinou o abandono dos métodos analíticos tradicionais por métodos topológicos-diferenciais <sup>(2)</sup> no estudo dos diagramas de fase. A partir de tais métodos de ataque emergiu o aspecto da estabilidade estrutural, pela primeira vez colocado por Andronov, em 1937. Podemos resumí-lo da seguinte forma: se um sistema dinâmico  $X$ , com um diagrama de

fase conhecido  $P$ , for levemente perturbado para um sistema  $X'$ , como se manifestará seu novo diagrama de fase? Como os problemas da Física sempre dependem de alguns parâmetros, esta questão é de fundamental importância, porque uma pequena variação no valor de um parâmetro pode mudar radicalmente todo o sistema físico (instabilidade estrutural).

Nos próximos capítulos será dada uma introdução elementar à Topologia, às Variedades Diferenciais, aos Campos Vetoriais, além da definição de Ponto de Bifurcação. Como acontece frequentemente ao se passar da teoria à prática, definir um ponto de bifurcação é muito mais fácil que localizá-lo ou classificá-lo. A classificação foi feita, de modo geral, para uma e duas dimensões <sup>[6]</sup>, além de uma extensão para soluções periódicas em três dimensões <sup>[7]</sup>. A razão desta restrição é que um sistema em duas dimensões possui algumas características especiais (ver [2], por exemplo), que simplificam o estudo do seu diagrama de fase. Quanto às soluções periódicas, basta ver que a adição de um termo de força periódico  $f(t)=f(t+\tau)$  a um sistema não linear com um grau de liberdade:

$$x'' + g(x, x') = 0;$$

fornece o sistema tridimensional ( $x' = \frac{dx}{dt}$ ):

$$x' = y$$

$$y' = -g(x, y) + f(\theta)$$

$$\theta' = 1,$$

e pode introduzir fenômenos não encontrados nos casos uni- e bi-dimensionais. <sup>(2)161(7)</sup>

O estudo de sistemas dinâmicos não lineares é a chave para a compreensão dos mecanismos de ordenação da matéria, em situações que estão longe do equilíbrio. O tratamento quantitativo usual de solução de sistemas de equações diferenciais parciais costuma desprezar seus termos não lineares, desprezando assim efeitos de realimentação. É claro que tais termos são de fundamental importância quando é necessário estabelecer as condições para que o sistema dinâmico evolua em direção ao equilíbrio, estando numa situação de não equilíbrio. Por outro lado, os sistemas não linearizados costumam ser arredios ao tratamento quantitativo, fornecendo soluções numéricas apenas em alguns casos. Normalmente os termos não lineares são escritos com coeficientes constantes, de modo que desprezá-los significa dar o valor zero para estes coeficientes. O tratamento alternativo, proposto por Poincaré no século passado, privilegia o aspecto qualitativo da solução do sistema não linear, fazendo variar estes coeficientes (parâmetros), descrevendo as mudanças qualitativas que estas soluções sofrem no decorrer da evolução dos parâmetros. Tal análise se dá no espaço de fase do sistema dinâmico, e as propriedades topológicas das soluções sofrem uma modificação sempre que um determinado valor do parâmetro é cruzado.

A Teoria da Relatividade Geral é o pano de fundo necessário para o estudo do Universo, já que para o limite de grandes distâncias a Mecânica Clássica falha. A teoria prevê a equivalência entre as propriedades gravitacionais e geométricas do espaço, de modo que o efeito da geometria sobre as massas (e

vice-versa, pelo Princípio de Equivalência) é adequadamente descrito pelas Equações de Einstein. Estas equações são não lineares, o que encerra o fato que a geometria altera a distribuição de massas e é alterada por esta. Um modelo de Universo é um conjunto de pressupostos sobre as suas propriedades geométricas, mais a teoria que lhe dá sustentação, e mais os pressupostos sobre seu conteúdo. Dentro do limite imposto pelas imensas dificuldades de se tomar medidas de um objeto de estudo tão vasto, o estado atual do Universo é bem conhecido. Assim, o estudo de sua evolução temporal fica balizado pelo modelo que melhor o descreve agora. Porém, não é necessário que o estado presente do Universo tenha se estendido no tempo, desde sua criação até os dias atuais. Qualquer modelo que permita que o estado atual seja alcançado é teóricamente válido, e entre os vários modelos, aqueles que são homogêneos, isotrópicos ou anisotrópicos, são os mais estudados.

O estudo do Universo em instantes muito próximos do instante inicial deve levar em conta a predominância de efeitos quânticos na interação da matéria com ela mesma e com a radiação. Tais efeitos aparecem devido às altas energias envolvidas, e podem ser descritos fenomenologicamente por um termo de viscosidade no tensor energia-momento do Universo. Este tratamento evita o uso da Mecânica Quântica e simplifica enormemente a Matemática utilizada.

O objetivo do presente trabalho é estabelecer, através da Teoria de Bifurcação de Poincaré, as condições e a faixa de valores apropriada dos parâmetros, para os quais esta ocorre, nos modelos homogêneos de Universo. Ocorrendo bifurcação para determinado valor do parâmetro, as condições dinâmicas do Universo

são alteradas, e a presente situação pode ser alcançada a partir de condições iniciais muito diferentes.

O primeiro capítulo apresenta algumas noções básicas da topologia, e tem o objetivo de fixar definições e introduzir alguns conceitos, entre eles o de variedades, homeomorfismo, sistemas dinâmicos e campos vetoriais, largamente utilizados na Física.

O segundo capítulo apresenta a definição de ponto de bifurcação, e alguns métodos práticos para sua determinação.

A cosmologia é apresentada no terceiro capítulo, de um ponto de vista geométrico, e são deduzidas as métricas de Bianchi, que serão submetidas ao tratamento da teoria de bifurcação. Este é o assunto do quarto capítulo, onde são apresentados os cálculos e as conclusões.

## 1.0- INTRODUÇÃO:

São três os objetivos fundamentais deste capítulo:

1) o primeiro é o de introduzir o conceito de homeomorfismo. Este conceito é importante porque vai permitir colocar em termos matemáticos a idéia de estabilidade estrutural citada no capítulo introdutório.

Os homeomorfismos estabelecem relações entre espaços topológicos, que traduzem para a linguagem matemática a sensação que temos quando dizemos que determinadas alterações no problema físico produzem diagramas de fase 'parecidos'. Os espaços topológicos são mais gerais que os espaços métricos, no sentido em que estes são um caso particular daqueles. A topologia aparece da oportunidade de se poder definir a continuidade de um mapeamento apenas observando os efeitos deste mapeamento sobre os subconjuntos em que estão divididos os seus espaços de domínio e contradomínio, sem necessidade de se definir uma métrica sobre os espaços.<sup>(10)</sup>

Em outras palavras, se dado um mapeamento  $f$  entre dois espaços,  $M$  e  $N$ , para todo subconjunto aberto  $A$  de  $N$  tivermos que a imagem de  $A$  pelo mapeamento inverso  $f^{-1}$  for um aberto em  $M$ ,  $f$  será contínuo.

2) o segundo objetivo, também importante, é generalizar o conceito

de espaço a partir de suas propriedades, classificar os espaços de acordo com suas propriedades, e obter o espaço euclidiano como caso particular de espaços mais gerais.

3) o terceiro objetivo é definir os termos que serão relevantes para o estudo dos sistemas dinâmicos.

## 1.1- TOPOLOGIA:

Nesta secção introduziremos os conceitos fundamentais da topologia partindo dos conceitos gerais, supostos conhecidos, de conjunto, pertinência, mapeamento, etc. Para não nos alongarmos muito nos aspectos introdutórios à teoria de bifurcação, não nos preocuparemos com demonstrações de teoremas e proposições, neste capítulo, porque são gerais e por isso mesmo podem ser facilmente encontrados na literatura.<sup>[1][2][3][4][5][12]</sup> Usaremos os seguintes símbolos:

$A...Z$ , ou  $\{u,v,\dots\}$  denotam conjuntos;

$\in$  significa "pertence";

$\subset$  "contido em";

$\cup$  "união";

$\cap$  "intersecção";

$\emptyset$  "conjunto vazio";

$\Leftrightarrow$  "se e somente se";

$f:A \rightarrow B$

$a \mapsto f(a)$ , onde  $a \in A$  e  $f(a) \in B$ ,

é um mapeamento.

Def.: Um espaço topológico é um conjunto  $S$  junto com uma coleção  $\mathcal{O}$  de subconjuntos abertos de  $S$ , chamados conjuntos abertos (ou simplesmente abertos), tal que:

(T1)  $\emptyset \in \mathcal{O}$  e  $S \in \mathcal{O}$ ;

(T2) Se  $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ , então  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ ;

(T3) A união de qualquer coleção de abertos é aberta.

Para tal espaço topológico os conjuntos fechados são os elementos de

$$\Gamma = \{A \mid \mathcal{C}A \in \mathcal{O}\},$$

onde  $\mathcal{C}$  denota o complemento:

$$\mathcal{C}A = S \setminus A = \{s \in S \mid s \notin A\}.$$

Uma vizinhança aberta de um ponto  $u$  num espaço topológico  $S$  é um aberto  $U$  tal que  $u \in U$ . Similarmente, para um subconjunto  $A$  de  $S$ ,  $U$  é uma vizinhança aberta de  $A$  se  $U$  for aberto e  $A \subset U$ .

Uma vez que basta definir um sistema conveniente de subconjuntos de um espaço, para que este espaço seja topológico, podemos construir este sistema de várias formas. Uma delas, bastante conveniente, é dada abaixo.

Seja  $S$  um espaço topológico. Uma base para a topologia é uma coleção  $\mathcal{B}$  de abertos tal que todo subconjunto aberto de  $S$  é uma reunião de elementos de  $\mathcal{B}$  (é fácil ver que a base  $\mathcal{B}$  determina uma topologia sobre  $S$ , porque os elementos de  $\mathcal{O}$  são subconjuntos abertos de  $S$ ). A topologia é chamada primeiro contável

se para cada elemento  $u$  de  $S$  existir uma coleção contável  $\langle U_n \rangle$  de vizinhanças de  $u$  tal que para qualquer vizinhança  $U$  de  $u$ , exista um  $N$  tal que  $U_N \subset U$  onde  $N$  é um número natural. A topologia é chamada segundo contável se possuir uma base contável, sendo assim primeiro contável também. Por exemplo, uma base contável para o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  consiste de todos os conjuntos  $|x_i - a_i| < b_i$  onde  $a_i$  e  $b_i$  são racionais e  $b_i > 0$ .<sup>[9]</sup>

Podemos construir um espaço topológico a partir de dois (ou mais, pelo mesmo mecanismo) outros espaços topológicos, definindo algumas relações entre os abertos destes espaços.

Sejam  $S$  e  $T$  espaços topológicos. Definimos o produto dos espaços como  $S \times T = \{ (u, v) \mid u \in U \text{ e } v \in V \}$ . A topologia produto sobre  $S \times T$  consiste de todos subconjuntos da forma  $U \times V$ , onde  $U$  é aberto em  $S$  e  $V$  é aberto em  $T$ . Contruídos desta maneira, os retângulos abertos  $U \times V$  formam uma base para a topologia de  $S \times T$ .<sup>[10]</sup>

Podemos definir uma sequência convergente em um espaço topológico, sem necessidade de definir previamente distância.

Seja  $S$  um espaço topológico e  $\langle u_n \rangle$  uma sequência de pontos em  $S$ . Esta sequência converge se houver um ponto  $u \in S$  tal que para toda vizinhança  $U$  de  $u$ , há um  $N$  tal que  $n \geq N$  implica que  $u_n \in U$ . Dizemos que  $\langle u_n \rangle$  converge para  $u$  ou que  $u$  é um ponto limite de  $\langle u_n \rangle$ .

Podemos definir conjuntos fechados, abertos e uma fronteira para um espaço topológico.

Seja um espaço topológico  $S$ , e um subconjunto  $A$  de  $S$ . O fecho de  $A$ , representado por  $\text{cl}(A)$ , é a intersecção de todos os fechados que contenham  $A$ . O interior de  $A$ ,  $\text{in}(A)$ , é a união de

todos os abertos contidos em  $A$ . A fronteira de  $A$ ,  $\text{bd}(A)$ , é definida como:

$$\text{bd}(A) = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(\mathcal{C}A).$$

Portanto  $\text{bd}(A)$  é fechado e  $\text{bd}(A) = \text{bd}(\mathcal{C}A)$ . Além disto  $A$  é fechado se e somente se for igual ao seu fecho e  $A$  é aberto se e somente se for igual ao seu interior.

Num espaço topológico, um ponto  $u$  é chamado isolado se e somente se  $\{u\}$  for aberto. A única topologia na qual todos os pontos são isolados é a topologia discreta. A topologia na qual temos  $\mathcal{O} = \{\emptyset, S\}$  é chamada de topologia trivial ou caótica.

Um subconjunto  $A$  de  $S$  é chamado denso em  $S$  se e somente se o seu fecho for igual ao espaço todo, e é chamado de magro se o complementar de seu fecho for denso em  $S$ .

Suponha um espaço topológico  $X$  munido da topologia caótica  $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ . Dados quaisquer dois pontos de  $X$  nunca poderemos obter uma vizinhança de um dos pontos que não contenha o outro. Mas para espaços métricos isto sempre é possível. Portanto, definimos:

Um espaço topológico  $S$  é chamado de Hausdorff se e somente se cada dois pontos distintos de  $S$  possuírem vizinhanças disjuntas (isto é, com intersecção vazia). Similarmente,  $S$  é chamado de normal se e somente se cada dois subconjuntos fechados distintos tiverem vizinhanças disjuntas. Em particular, todo espaço métrico é de Hausdorff, ou, em outras palavras, um espaço topológico será metrizável se e somente se for de Hausdorff.

Uma métrica sobre o conjunto  $M$  é um mapeamento  $d$  que leva do produto  $M \times M$  na semireta positiva real com o ponto  $\{+\infty\}$  (aqui chamada  $\mathbb{R}^+$ ):

$$d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(m_1, m_2) \mapsto d(m_1, m_2),$$

com as seguintes propriedades:

$$(M1) \quad d(m_1, m_2) = 0 \text{ se e somente se } m_1 = m_2;$$

$$(M2) \quad d(m_1, m_2) = d(m_2, m_1);$$

$$(M3) \quad d(m_1, m_3) \leq d(m_1, m_2) + d(m_2, m_3);$$

para todo  $m_1, m_2, m_3$  em  $M$ .

A topologia sobre  $\mathbb{R}^+$  é gerada pelos intervalos abertos da forma  $(a, b)$  ou  $(a, +\infty)$ . O disco aberto  $\varepsilon$  em torno de  $m \in M$  é definido por:

$$D_\varepsilon(m) = \{ m' \in M \mid d(m', m) < \varepsilon \}.$$

A coleção de subconjuntos de  $M$  que são uniões destes discos é a topologia métrica, representada pelo par  $(M, d)$ , e o espaço  $M$  é chamado de espaço métrico. Todo espaço métrico é de Hausdorff e primeiro contável, e portanto é normal, e todo espaço métrico segundo contável é separável. Duas métricas sobre um conjunto  $M$  são chamadas equivalentes se elas induzem a mesma topologia métrica.

Uma pseudo-métrica sobre um conjunto  $M$  é uma função  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  que satisfaz M2 e M3, e também:

$$(PM1) \quad d(m, m) = 0 \text{ qualquer que seja } m.$$

Da mesma maneira que para a métrica, podemos definir uma topologia pseudo-métrica.

Seja um espaço métrico  $M$ , com métrica  $d$ , e  $(u)$  uma sequência em  $M$ . Então  $(u_n)$  é uma sequência de Cauchy se e somente se para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , houver um  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m \geq N$  implica  $d(u_n, u_m) \leq \varepsilon$ , isto é, se para  $n$  e  $m$  suficientemente grande a distância entre  $u_n$  e  $u_m$  for suficientemente pequena. Portanto uma sequência convergente é de Cauchy. O espaço  $M$  é chamado de completo se toda sequência de Cauchy converge, o que significa que se uma sequência de Cauchy num determinado espaço não convergir, isto é culpa do espaço e não da sequência. O  $\mathbb{R}^n$  é completo, por exemplo. Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.<sup>[9]</sup> (Basta pensar num ponto da fronteira.)

Sejam  $S$  e  $T$  espaços topológicos e  $\phi: S \rightarrow T$  um mapeamento. Dizemos que  $\phi$  é contínua em  $u \in S$  se para toda vizinhança  $V$  de  $\phi(u)$  houver uma vizinhança  $U$  de  $u$  tal que  $\phi(U) \subset V$ . Se, para todo aberto  $V$  de  $T$ ,  $\phi^{-1}(V) = \{ u \in S \mid \phi(u) \in V \}$  for aberto em  $S$ ,  $\phi$  é contínua. Se  $\phi: S \rightarrow T$  for uma bijeção (isto é, sobrejetora e injetora), e  $\phi$  e  $\phi^{-1}$  forem contínuas,  $\phi$  é chamado homeomorfismo e  $S$  e  $T$  são ditos homeomorfos. Se  $S$  for primeiro contável, então  $\phi$  é contínua se e somente se para toda sequência  $(u_n)$  convergindo para  $(u)$ ,  $(\phi(u_n))$  converge para  $\phi(u)$ , qualquer que seja  $u \in S$ .

O conceito de homeomorfismo, termo introduzido por Poincaré em 1895<sup>[2]</sup>, é o mais importante na topologia, do ponto de vista da Teoria de Bifurcação. A razão é que subespaços homeomorfos são indistinguíveis pela topologia, ou seja, são topologicamente equivalentes, desde que vistos com respeito aos espaços onde estão

inseridos (esta restrição se deve ao fato que pode haver subespaços homeomorfos e não topologicamente equivalentes, por não estarem dispostos da mesma maneira no espaço onde se inserem. O exemplo clássico <sup>(9)</sup> <sup>(12)</sup> é o homeomorfismo entre o conjunto formado por ponto, segmento, ponto, na reta real, e conjunto ponto, ponto, segmento, também na reta real, que não são equivalentes, mas que tomados no plano real são equivalentes). A relação de homeomorfismo, então, é uma relação de equivalência, reflexiva, simétrica e transitiva, e é impossível, através da topologia, distinguir entre espaços homeomorfos dispostos da mesma maneira nos seus ambientes.

O conjunto dos mapeamentos contínuos também forma um espaço métrico.

Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos com  $N$  completo. Então a coleção  $C(M,N)$  de todos os mapeamentos contínuos  $\phi: M \rightarrow N$  forma um espaço métrico completo com a métrica:

$$d^0(\phi, \psi) = \sup\{d(\phi(u), \psi(u)) \mid u \in M\},$$

onde  $\sup$  significa o menor dos números para os quais esta afirmação é verdadeira.

Um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  é chamado limitado se existir  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$  tal que  $d(x, y) \leq c$  quaisquer que sejam  $x, y \in X$ .

Seja  $S$  um espaço topológico.  $S$  é chamado de compacto se e somente se para toda cobertura de  $S$  por abertos  $U_\alpha$  (isto é,  $\bigcup_\alpha U_\alpha = S$ ), houver uma subcobertura finita. Um subconjunto  $A \subset S$  é compacto se e somente se ele for compacto na topologia

relativa. Um espaço é localmente compacto se cada ponto tiver uma vizinhança cujo fecho é compacto. Segue que um subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto, e que a imagem contínua de um espaço compacto é compacta. Por exemplo, os subconjuntos fechados limitados do  $\mathbb{R}^n$ . O próprio  $\mathbb{R}^n$ , assim como intervalos abertos da reta real não são compactos, mas são localmente compactos.<sup>(12)</sup>

Seja  $S$  um espaço de Hausdorff. Todo subconjunto compacto de  $S$  é fechado. Também todo espaço de Hausdorff compacto é normal. Se  $S$  é localmente homeomorfo a um espaço de Hausdorff localmente compacto (isto é, para cada  $u \in S$ , existe uma vizinhança de  $S$  homeomorfa, na topologia do subespaço, a um subconjunto aberto de um espaço de Hausdorff localmente compacto), então  $S$  é localmente compacto. Em particular, espaços de Hausdorff localmente homeomorfos ao  $\mathbb{R}^n$  são localmente compactos.

Seja  $S$  um espaço topológico. Uma cobertura  $(U_\alpha)$  de  $S$  é chamada um refinamento de um cobertura  $(V_i)$ , se e somente se para todo  $U_\alpha$  houver um  $V_i$  tal que  $U_\alpha \subset V_i$ . Uma cobertura  $(U_\alpha)$  de  $S$  é dita localmente finita se e somente se cada ponto  $u$  de  $S$  possuir um vizinhança  $U$  tal que  $U$  intersecciona somente um número finito dos  $U_\alpha$ . Um espaço é paracompacto se e somente se toda cobertura aberta de  $S$  possuir um refinamento localmente finito de abertos, e se  $S$  for de Hausdorff.

Dois teoremas <sup>(12)</sup> dizem:

- 1) Espaços de Hausdorff localmente compactos, segundo contáveis, são paracompactos.
- 2) Todo espaço paracompacto é normal.

Um espaço pode se constituir de uma única 'parte' ou de várias 'partes' separadas. É claro que algumas propriedades dependem deste fato. Se tiver uma só 'parte' é chamado de conexo, e neste caso:

Um espaço topológico  $S$  é conexo se  $\emptyset$  e  $S$  forem os únicos subconjuntos de  $S$  que são abertos e fechados concomitantemente. Um subconjunto de  $S$  é conexo se e somente se ele for conexo na topologia relativa. Uma componente  $A$  de  $S$  é um subconjunto conexo não vazio de  $S$  de maneira que o único subconjunto conexo de  $S$  que contém  $A$  é o próprio  $A$ ;  $S$  é chamado localmente conexo se e somente se cada um de seus pontos possuir uma vizinhança conexa. Assim, um espaço  $S$  é conexo se ele não puder ser representado pela união disjunta de dois conjuntos não vazios abertos (ou fechados), ou se não possuir um subconjunto próprio não vazio que seja aberto e fechado concomitantemente. Se  $f:S \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua, então  $f$  assume todos os valores entre quaisquer dois valores  $f(u)$  e  $f(v)$ , com  $u, v \in S$ .

As componentes de um espaço topológico são fechadas. Além disto,  $S$  é a união disjunta de suas componentes. Se  $S$  for localmente conexo, as suas componentes serão abertas e fechadas concomitantemente.

Seja  $S$  um espaço de Hausdorff compacto primeiro contável e  $(A_n)$  uma sequência de subconjuntos fechados conexos de  $S$  com  $A_n \subset A_{n-1}$ . Então  $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n$  é conexo.

Seja um espaço topológico  $S$  e  $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ . Um arco  $\phi$  em  $S$  é um mapeamento contínuo  $\phi:I \rightarrow S$ . Se  $\phi(0) = u$  e  $\phi(1) = v$ , dizemos que  $\phi$  une  $u$  e  $v$ .  $S$  é chamado conexo por caminhos se e somente se quaisquer dois pontos de  $S$  puderem se unidos por um arco

em  $S$ . Um espaço é chamado localmente conexo por caminhos se e somente se quaisquer dois pontos possuírem vizinhanças conexas por caminhos (na topologia relativa).

Todo espaço conexo por caminhos é conexo. Se o espaço for conexo e localmente conexo por caminhos, ele será conexo por caminhos. Em particular, um espaço localmente homeomorfo ao  $\mathbb{R}^n$  é conexo se e somente se ele for conexo por caminhos. Por exemplo, discos do  $\mathbb{R}^n$  são conexos por caminhos e, portanto, conexos.

Seja  $S$  um conjunto. Uma relação de equivalência  $\approx$  sobre  $S$  é uma relação binária tal que para todo  $u, v, w \in S$ , temos:

(i)  $u \approx u$ ;

(ii)  $u \approx v \Leftrightarrow v \approx u$ ;

(iii)  $u \approx v$  e  $v \approx w \Rightarrow u \approx w$ .

A classe de equivalência contendo  $u$ , denotada  $[u]$ , é definida por:

$$[u] = \{ v \in S \mid u \approx v \}.$$

O conjunto das classes de equivalência é representado por  $S/\approx$ , e o mapeamento

$$\begin{aligned} \pi: S &\rightarrow S/\approx \\ u &\mapsto [u] \end{aligned}$$

é chamado de projeção canônica. Segue que  $S$  é a união disjunta de suas classes de equivalência.

Seja  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Então  $A$  é chamado residual se e somente se  $A$  for a intersecção de uma família

contável de subconjuntos abertos densos em  $X$ . Um espaço  $X$  é chamado de espaço de Baire se e somente se todo conjunto residual for denso.

Todo subconjunto aberto de um espaço de Baire  $X$  é um espaço de Baire. Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire (Teorema de Baire). Este teorema implica em que todo espaço topológico homeomorfo a um espaço métrico é um espaço de Baire.<sup>(2)</sup>

Um espaço vetorial  $E$  é um conjunto onde estão definidas duas operações. A primeira é a adição:

$$A: E \times E \rightarrow E \\ (x, y) \mapsto x + y,$$

com as seguintes propriedades:

$$(M1) \quad x + y = y + x;$$

$$(M2) \quad (x + y) + z = x + (y + z);$$

$$(M3) \quad \exists \ 0 \in E \mid 0 + x = x;$$

$$(M4) \quad \exists \ -x \in E \mid x + (-x) = 0;$$

quaisquer que sejam  $x, y, z$  em  $E$ .

A segunda operação é a multiplicação:

$$M: \mathbb{R} \times E \rightarrow E \\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x,$$

com as seguintes propriedades:

$$(M5) \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$$

$$(M6) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;$$

$$(M7) (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x);$$

$$(M8) 1 \cdot x = x;$$

quaisquer que sejam  $x, y$  em  $E$ , e  $\alpha, \beta$  em  $\mathbb{R}$ .

Seja  $E$  um espaço vetorial sobre o campo dos números reais  $\mathbb{R}$ . Sejam:

$$A_{\vee} : E \times E \rightarrow E \\ (x, y) \mapsto x + y$$

e

$$M_{\circ} : \mathbb{R} \times E \rightarrow E \\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$$

as operações adição e multiplicação em  $E$ . Uma topologia  $\mathcal{T}$  em  $E$  é dita ser compatível com a estrutura linear de  $E$ , se  $A_{\vee}$  e  $M_{\circ}$  se mantiverem contínuas quando provemos  $E$  da topologia  $\mathcal{T}$ ,  $E \times E$  da topologia  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$  e  $\mathbb{R} \times E$  da topologia  $\mathcal{R} \times \mathcal{T}$ , onde  $\mathcal{R}$  é a topologia usual na reta real. Quando o provemos com uma topologia compatível com sua estrutura,  $E$  se torna um espaço vetorial topológico, representado pelo par  $(E, \mathcal{T})$ .

Um espaço de Fréchet é um espaço vetorial topológico com as seguintes propriedades:

(F1) é métrico (em particular, é um espaço de Hausdorff);

(F2) é completo (portanto, é um espaço de Baire);

(F3) é localmente conexo.

Seja  $F$  um espaço de Fréchet. Então qualquer subespaço fechado de  $F$  é um espaço de Fréchet. Qualquer produto de

dois espaços de Fréchet é um espaço de Fréchet.<sup>[11]</sup> Ainda, segundo um teorema na ref. [11], todo espaço métrico separável é homeomorfo a algum subconjunto de um espaço de Fréchet. Por exemplo, o espaço dos mapeamentos de classe  $C^k$ , com  $0 \leq k \leq +\infty$ , sobre um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ , assim como o espaço das séries de potência com coeficientes complexos, são espaços de Fréchet.

Uma norma sobre um espaço vetorial  $E$  é um mapeamento nos números reais:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned} \quad ,$$

tal que:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0, \text{ com } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(N2) \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|;$$

$$(N3) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

quaisquer que sejam  $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Se  $\|\cdot\|$  é uma norma em  $E$ ,  $E$  se torna um espaço métrico. Chamamos tal espaço de espaço de Banach.

Se  $E$  for um espaço vetorial real de dimensão finita, então existe uma norma em  $E$ , todas as normas em  $E$  são equivalentes, e todas as normas em  $E$  são completas.

O  $\mathbb{R}^n$  é um espaço de Banach, por exemplo, para qualquer  $n < \infty$ . Todo espaço de Banach é um espaço de Fréchet, porém a inversa não é verdadeira.

Um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um espaço de Hilbert. Todo espaço de Hilbert é um espaço de

Banach, com a norma definida pelo produto interno. O  $\mathbb{R}^n$  munido do produto interno usual:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i;$$

é um espaço de Hilbert.

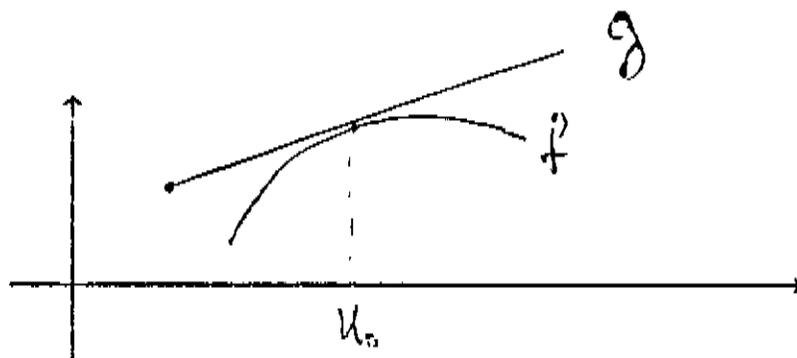
## 1.2- VARIEDADES:

A vantagem de se trabalhar com variedades é que elas são objetos locais que suportam processos de diferenciação. Antes de definir variedades vamos rever alguns conceitos de cálculo diferencial local que nos serão úteis. Estes conceitos serão necessários porque a abordagem usual do cálculo elementar não é a indicada para uma generalização para variedades. No cálculo elementar a derivada em  $u_0 \in U$  de uma função diferenciável  $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é normalmente interpretada como a inclinação da tangente ao gráfico da função naquele ponto. Para generalizar esta idéia interpretamos  $Df(u_0) = f'(u_0)$  como o mapeamento linear atuando sobre o vetor  $(u - u_0)$ . Podemos então dizer que  $Df(u_0)$  é o único mapeamento linear de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  tal que o mapeamento:

$$g: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto g(u) = f(u_0) + Df(u_0) \cdot (u - u_0)$$

figura 1.1



é tangente a  $f$  em  $u_0$  (ver figura 1.1). Isto motiva a seguinte definição:

Sejam  $E, F$  dois espaços vetoriais reais de dimensões finitas, com mapeamentos  $f, g : U \subset E \rightarrow F$ , onde  $U$  é aberto em  $E$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  são tangentes em  $u_0 \in U$  se e somente se:

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\| f(u) - g(u) \|}{\| u - u_0 \|} = 0 .$$

Esta definição leva ao seguinte teorema:<sup>(12)</sup>

Para  $f : U \subset E \rightarrow F$  e  $u_0 \in U$  há no máximo um  $L \in L(E, F)$ , onde  $L(E, F)$  denota o conjunto de todos os mapeamentos lineares de  $E$  em  $F$  junto com a estrutura natural do espaço vetorial real (da mesma maneira  $L^k(E, F)$  denota o espaço dos mapeamentos multilineares de  $E \times E \times E \times \dots \times E$  ( $k$  cópias) em  $F$ ), tal que o mapeamento  $g_L : U \subset E \rightarrow F$  dado por  $g_L(u) = f(u_0) + L \cdot (u - u_0)$  é tangente a  $f$  em  $u_0$ .

Se houver tal  $L \in L(E, F)$ , diremos que  $f$  é diferenciável em  $u_0$ , e definimos como a derivada de  $f$  em  $u_0$  ao mapeamento  $Df(u_0) = L$ . Se  $f$  for diferenciável para todo  $u \in U$ , dizemos que

$$\begin{aligned} Df: U \subseteq E &\rightarrow L(E, F) \\ u &\mapsto Df(u) \end{aligned}$$

é a derivada de  $f$ . Se  $Df$  for um mapeamento contínuo dizemos que  $f$  é de classe  $C^1$  (continuamente diferenciável). Dizemos que um mapeamento  $f$  é de classe  $C^r$  se a sua derivada de ordem  $r$  for contínua. Um mapeamento  $f: U \subseteq E \rightarrow V \subseteq F$  ( $U, V$  abertos) é um difeomorfismo se e somente se  $f$  for de classe  $C^r$ , for uma bijecção, e  $f^{-1}$  for também de classe  $C^r$ .

Suponha que  $f: U \rightarrow E$  seja de classe  $C^1$ . Definimos como a tangente de  $f$  ao mapeamento:

$$\begin{aligned} Tf: U \times E &\rightarrow F \times F \\ (u, e) &\mapsto (f(u), Df(u).e); \end{aligned}$$

onde  $Df(u).e$  é  $Df(u)$  aplicado a  $e \in E$  como um mapeamento linear.

Uma variedade é um conjunto de pontos. De modo a poder estabelecer uma relação entre os pontos deste conjunto e os pontos de um outro conjunto é necessário determinar referências, assim como criamos paralelos e meridianos num mapa. A analogia é tão grande com a geografia que muitos dos termos são os mesmos.

Seja  $S$  um conjunto. Uma carta local (ou vizinhança coordenada) sobre  $S$  é uma bijecção  $\phi$  de um subconjunto  $U$  de  $S$  para um subconjunto aberto de algum espaço vetorial real de dimensão finita  $F$ , representada aqui pelo par  $(U, \phi)$ . A motivação é definir um sistema de coordenadas sobre uma parte do conjunto, e deve ser uma bijecção para que cada ponto seja representado univocamente (um mapa geográfico que determina as mesmas coordenadas para dois pontos distintos da Terra pode criar sérios embarços). Um atlas sobre  $S$  é uma família  $\mathcal{A}$  de cartas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  com  $i \in I$ , tal que:

(MA1)  $S$  é coberto pela família  $(S = \bigcup_i U_i)$ ;

(MA2) Se o domínio de duas cartas se sobrepuerem  $((U_i \cap U_j) \neq \emptyset)$  existirá um difeomorfismo de classe  $C^\infty$   $\phi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} | \phi_i(U_i \cap U_j)$  (onde  $A|B$  significa a restrição de  $A$  ao subconjunto  $B \subset A$ ) que levará da imagem de  $\phi_j$  ao domínio de  $\phi_i$ , e  $\phi_{ij}$  aberto em  $F_i$ .

Dois atlas são equivalentes se e somente se  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  for um atlas também. Uma estrutura diferenciável  $\mathcal{J}$  (gerada por  $\mathcal{A}$ ) sobre  $S$  é uma classe de equivalência de atlas sobre  $S$ . A união dos atlas em  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{A}_g = \bigcup (\mathcal{A} | \mathcal{A} \in \mathcal{J})$ , é o atlas máximo de  $\mathcal{J}$ , e a carta  $(U, \phi) \in \mathcal{A}_g$  é chamada de carta local admissível. Uma variedade diferenciável  $M$  é um par  $(S, \mathcal{J})$ , onde  $S$  é um conjunto e  $\mathcal{J}$  é uma estrutura diferenciável sobre  $S$ . A construção garante que  $M$  é completamente coberta por  $\mathcal{J}$ .

Como para espaços em geral, podemos construir uma topologia sobre  $M$  usando as propriedades da estrutura diferenciável sobre  $M$ :

Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Um subconjunto  $A \subset M$  é aberto se para cada  $a \in A$  houver uma carta local admissível  $(U, \phi)$  tal que  $a \in U$  e  $U \subset A$ , tornando desta maneira  $M$  um espaço topológico. Uma variedade diferenciável é uma variedade  $n$ -dimensional se e somente se para todo ponto  $a \in M$  existir uma carta local admissível  $(U, \phi)$  com  $a \in U$  e  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Uma variedade será sempre de Hausdorff, segundo contável e diferenciável. Uma variedade  $n$ -dimensional é localmente homeomorfa a um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Toda variedade topológica  $n$ -dimensional é localmente compacta e localmente conexa por caminhos. Podemos também definir

difeomorfismos em variedades, da mesma forma como para espaços.

Com esta definição podemos eleger definitivamente as variedades como o espaço por excelência da Dinâmica. Devemos agora explicitar o espaço dos mapeamentos sobre uma variedade  $M$ . O objetivo é que, pela sua estrutura de espaço vetorial topológico, possamos descrever este espaço de uma maneira geral.

Para definir campos vetoriais sobre uma variedade  $M$  devemos estender a idéia de que um vetor tangente a uma superfície representa o vetor velocidade de uma curva nesta superfície. Seja  $m \in M$ ,  $M$  uma variedade. Uma curva em  $m$  é um mapeamento  $C^1$ ,  $c: I \rightarrow M$ , de um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  em  $M$ , com  $0 \in I$  e  $c(0) = m$ . Seja  $c_1$  e  $c_2$  curvas em  $m$ , e  $(U, \phi)$  uma carta admissível, com  $m \in U$ . Dizemos que  $c_1$  e  $c_2$  são tangentes em  $m$  com respeito a  $\phi$  se e somente se  $\phi \cdot c_1$  e  $\phi \cdot c_2$  forem tangentes em  $0$ . Pode-se provar que a tangência destas curvas é independente da carta escolhida, de maneira que dizemos que  $c_1$  e  $c_2$  são tangentes em  $m \in M$  se forem tangentes em  $m$  com respeito a qualquer carta local que cubra  $m$ . Esta tangência é uma relação de equivalência entre curvas em  $m$ . Uma classe de equivalência de tais curvas é representada por  $[c]_m$ , onde  $c$  é um representante da classe. O espaço tangente de  $M$  em  $m$  é o conjunto das classes de equivalência das curvas em  $m$ :

$$T_m(M) = \{ [c]_m \mid c \text{ é uma curva em } m \}.$$

Chamamos o conjunto  $TM = \bigcup_{m \in M} T_m(M)$  de pacote tangente de  $M$ .

Um campo vetorial  $X(M)$  sobre uma variedade  $M$  é um elemento do pacote tangente sobre a variedade, junto com sua

estrutura de espaço vetorial real de dimensão infinita. Isto é, um campo vetorial sobre uma variedade é um mapeamento  $C^\infty$  de  $M$  no espaço tangente  $TM$ , que assinala a cada ponto  $m$  em  $M$  um vetor em  $T_m(M)$ . Podemos, alternativamente, e isso motiva a próxima secção, defini-lo como o lado direito de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem no sistema dinâmico.

### 1.3- SISTEMAS DINÂMICOS:

Considere um sistema físico que é capaz de assumir vários estados descritos por pontos de um conjunto  $S$ . Conforme o tempo passa o estado do sistema muda. Se o estado é  $s_1$  em  $t_1$  e passa para  $s_2$  em  $t_2$ , fazemos:

$$F_{t_2, t_1}(s_1) = s_2$$

e chamamos  $F_{t_2, t_1}$  de operador de evolução. Ele mapeia um estado no instante  $t_1$  naquele estado no qual o sistema estaria quando tivesse transcorrido o intervalo de tempo  $t_2 - t_1$ . O determinismo da teoria é expresso pela lei:<sup>(2)</sup>

$$F_{t_3, t_2} \circ F_{t_2, t_1} = F_{t_3, t_1}, \quad F_{t, t} = \text{identidade}$$

Chamamos  $F_t$  um fluxo, e  $F_{t_2, t_1}$  um fluxo dependente do tempo, ou um operador de evolução. Se o sistema for irreversível, isto é, definido apenas para  $t_2 > t_1$ , dizemos que  $F_t$  é

um semi-fluxo.

Em Física, normalmente, são dadas as leis de movimento e não os operadores de evolução, isto é, são dadas equações diferenciais, que devem ser resolvidas para encontrarmos o fluxo. Estas equações são da forma:

$$\frac{ds}{dt} = X(s), \quad s(0) = s_0$$

onde  $X$  é um campo vetorial sobre  $S$  (possivelmente dependente do tempo). Tendo em vista a última afirmação da secção anterior, podemos definir:

Seja  $M$  uma variedade e  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Uma curva integral de  $X$  em  $m \in M$  é uma curva  $c$  tal que  $c'(\lambda) = X(c(\lambda))$  para cada  $\lambda \in I$  ( $I$  é um intervalo aberto em  $\mathbb{R}$ ,  $c'(\lambda)$  é o vetor tangente a curva  $c(\lambda)$ , e  $c(0) = m$ ).

Existem vários teoremas que garantem a existência e unicidade das soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias, todos disponíveis na literatura (ver, por exemplo, [2]), de maneira que vamos aqui simplesmente enunciar o que mais se adapta ao nosso estudo.

Seja  $x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$ . Para cada  $x_0 \in U$ , há uma curva  $c: I \rightarrow U$  em  $x_0$  tal que  $c'(\lambda) = X(c(\lambda))$  para todo  $\lambda \in I$ . Quaisquer duas curvas são iguais na intersecção de seus domínios. Além disto, existem: uma vizinhança  $U_0$  de  $x_0 \in U$ , um número real  $a > 0$ , e um mapeamento  $C^\infty$  definido por  $F: U_0 \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $I = (-a, a)$ ; tal que  $c_u(\lambda): I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cujo efeito é  $c_u(\lambda) = F(u, \lambda)$ , é uma curva em  $u \in \mathbb{R}^n$  satisfazendo as equações diferenciais  $c_u'(\lambda) = X(c_u(\lambda))$  para todo  $\lambda \in I$ .

Seja  $X$  um campo vetorial sobre uma variedade  $M$ . Uma solução completa de  $X$  é uma tripla  $(V, b, \Psi)$ , onde  $V \subset M$  é um aberto,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$  ou  $b = +\infty$ ,  $I_b = (-b, b)$ ,  $n = \dim(M)$ , e  $\Psi : V \times I_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que se  $\psi(u_0, 0) = c$ , então o conjunto

$$\{ u \in V \mid \Psi(u, t) = c \}$$

é uma curva integral de  $X$  em  $x_0$ . As funções componentes de uma solução completa  $\Psi(u, t) = (\psi_1(u, t), \dots, \psi_n(u, t))$  são conhecidas como sistema completo de integrais de  $X$  no domínio  $V$ .

Note que as curvas integrais de  $X$  são definidas por  $n$  equações

$$\psi_i(u, t) = c_i, \quad i = 1, \dots, n$$

e se  $M$  for uma variedade local,  $M \subset \mathbb{R}^n$ , podemos escrever:

$$\psi_i(u_1, \dots, u_n) = c_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

que é a forma clássica das soluções.

Dada uma variedade  $M$  e um campo vetorial  $X$  sobre  $M$ , seja  $\mathcal{D}_x \subset M \times \mathbb{R}$  o conjunto dos  $(m, \lambda) \in M \times \mathbb{R}$  tal que existe uma curva integral  $c: I \rightarrow M$  de  $X$  em  $m$  com  $\lambda \in I$ . O campo  $X$  é chamado de completo se  $\mathcal{D}_x = M \times \mathbb{R}$ . Também, um ponto  $m \in M$  é chamado  $\sigma$ -completo, onde  $\sigma = +, -,$  ou  $\pm$ , se  $\mathcal{D}_x \cap (\{m\} \times \mathbb{R})$  contiver todos  $(m, t)$  para  $t > 0$ ,  $t < 0$ , ou  $t \in \mathbb{R}$ , respectivamente. Portanto,  $X$  é completo se e somente se cada curva integral puder ser estendida de modo a seu domínio se tornar

$(-\infty, +\infty)$ .

Seja  $X$  um campo vetorial  $C^1$  sobre uma variedade  $M$ . Um ponto  $m_0$  é chamado um ponto crítico (ou singular, ou de equilíbrio) de  $X$  se  $X(m_0)=0$ . A linearização de  $X$  num ponto crítico  $m_0$  é o mapeamento linear

$$X'(m_0): T_{m_0} \rightarrow T_{m_0}$$

definido por

$$X'(m_0) \cdot v = \frac{d}{d\lambda} (TF_\lambda(m_0) \cdot v) |_{\lambda=0},$$

onde  $F$  é o fluxo de  $X$ .

Seja  $m_0$  um ponto crítico de  $X$  e seja  $(U, \phi)$  uma carta sobre  $M$ , com  $\phi(m_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n)$  as coordenadas do  $\mathbb{R}^n$  e  $X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, X_2(x_1, \dots, x_n)$  as componentes do representante local de  $X$ . Então a matriz de  $X'(m_0)$  nestas coordenadas é:

$$\left[ \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right]_{x=x_0}.$$

Os autovalores de  $X'(m_0)$  são chamados os expoentes característicos de  $X$  em  $m_0$ . Nesta definição,  $F_\lambda$  deixa  $m_0$  fixo, já que  $c(\lambda) = m_0$  é a única curva integral sobre  $m_0$ . Inversamente, é óbvio que se  $F_\lambda(m_0) = m_0$  para todo  $\lambda$ , então  $m_0$  é um ponto crítico.

Seja  $m_0$  um ponto crítico de  $X$ . Então:

(i)  $m_0$  é estável (ou estável segundo Liapunov) se para toda vizinhança  $U$  de  $m_0$ , houver uma vizinhança  $V$  de  $m_0$ , tal que se  $m \in V$ ,

então  $m$  é  $\pm$ completo e  $F_\lambda(m) \in U$  para todo  $\lambda \geq 0$ ;

(ii)  $m_0$  é assintoticamente estável se houver uma vizinhança  $V$  de  $m_0$  tal que se  $m \in V$ , então  $m$  é  $\pm$ completo,  $F_t(V) \subset F_s(V)$  se  $t > s$  e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_t(V) = \{m_0\}$$

(isto é, para qualquer vizinhança  $U$  de  $m_0$ , existe um  $T$  tal que  $F_t(V) \subset U$  se  $t \geq T$ ). É óbvio que estabilidade assintótica implica em estabilidade. O seguinte teorema, devido a Liapunov, é básico para o estudo da estabilidade:<sup>(2)</sup>

Suponha que  $X$  é  $C^1$  e que  $m_0$  seja um ponto crítico de  $X$ . Assuma que os expoentes característicos de  $m_0$  têm parte real estritamente negativa. Então  $m_0$  é assintoticamente estável (de uma maneira similar, se tiverem parte real maior que zero,  $m_0$  é assintoticamente instável, isto é, assintoticamente estável com  $t \rightarrow -\infty$ ).

É fácil entender a razão do critério de estabilidade de Liapunov: uma solução com a parte real do expoente característico negativa decresce com o tempo na forma de  $e^{-t}$ , enquanto que se a parte real do expoente característico for positiva a solução crescerá indefinidamente com  $e^t$ , para  $t > 0$ .

## 2.1- PONTO DE BIFURCAÇÃO:

Estivemos até agora construindo a ferramenta que vamos utilizar. Com este tipo de construção estamos garantindo que certos aspectos apreendidos a partir do diagrama de fase do sistema dinâmico não são apenas acidentes causados pelo tipo de ataque ao problema (em suma, apenas numerologia), mas sim que são extremamente gerais, profundamente vinculados ao próprio sistema dinâmico. O ponto de partida da Topologia são os conceitos de teoria de conjunto e as relações que estes conceitos criam ao se passar de um espaço a outro através de mapeamentos. Ao estabelecermos cartas sobre um conjunto (espaço) estamos apenas determinando uma descrição da conformação deste conjunto (espaço). A única exigência que fizemos sobre elas é que no seu atlas descrevam todo o conjunto (espaço) inequivocamente. Um ponto crítico, desta maneira, é um ponto crítico do sistema dinâmico, descrito pelas cartas que forem definidas sobre a vizinhança que o contém. Este arrazoado busca garantir uma efetiva independência para o diagrama de fase do sistema dinâmico, por um motivo pelo menos: o problema físico é independente do tipo de tratamento que damos ao modelo matemático que o descreve.

Suponha que  $X$  é um campo vetorial completo sobre uma variedade  $M$ , e que  $F$  é um fluxo. Uma órbita de  $X$  é a imagem em  $M$  de uma curva integral máxima de  $X$ . O diagrama de fase de  $X$  é a realização da idéia de decompor  $M$  em órbitas (talvez orientadas).

Um subconjunto  $S$  de  $M$  é chamado de positivamente invariante se e somente se  $F_t(S) \subset S$  para todo  $t \geq 0$ , e de negativamente invariante se e somente se  $F_t(S) \subset S$  para todo  $t < 0$  (de invariante se for simultaneamente positiva e negativamente invariante). Um ponto de equilíbrio (ou crítico ou singular) de  $X$  é um ponto  $m \in M$  tal que  $F_t(m) = m$  par todo  $t \in \mathbb{R}$ . Um ponto periódico de  $X$  é um ponto  $m \in M$  tal que para algum  $\tau > 0$ ,  $F_{t+\tau}(m) = F_t(m)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e o período de  $m$  é o menor  $\tau$  que satisfaz esta condição. Uma órbita fechada é a órbita de um ponto periódico (um ponto periódico não é um ponto de equilíbrio), e como todos os pontos têm o mesmo período, falamos do período da órbita fechada, no lugar de período do ponto. Um elemento crítico de  $X$  é ou um conjunto  $\{m\}$  onde  $m$  é um ponto de equilíbrio, ou uma órbita fechada. Chamamos  $\Gamma_X$  ao conjunto de todos os elementos críticos de  $X$ .

Se  $U \subset E$  for um subespaço aberto de um espaço vetorial e  $F$  for um espaço vetorial, o conjunto dos mapeamentos de classe  $C^r$  que levam de  $U$  para  $F$  ( $r < \infty$ ) é um espaço vetorial  $\mathcal{B}^r(U, F)$  com a métrica já definida anteriormente. Como o campo vetorial sobre  $M$  é um espaço vetorial podemos definir sobre ele uma topologia. Para construir esta topologia devemos escolher conjuntos abertos em  $\mathcal{X}(M)$  usando a estrutura diferenciável de  $M$ . Seja  $\mathcal{X}^r(M)$  o conjunto dos campos vetoriais de classe  $C^r$  em  $M$ . Seja  $(U, \phi)$  uma carta sobre  $M$ , tal que  $\phi(U) = U' \subset E$  limitado. Existe um teorema (2) que garante que  $(TU, T\phi)$  é uma carta em  $TM$  (chamada carta natural). Para  $X \in \mathcal{X}(M)$ , teremos um representante local  $X_{\phi_i} \in \mathcal{B}^r(U', E)$ . Portanto existe um atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$  sobre  $M$  tal que  $X_{\phi_i} \in \mathcal{B}^r(U_i', E_i)$  para todo  $i$ , e existe uma topologia  $\mathcal{A}^r$ , chamada topologia uniforme, que é a menor topologia sobre  $\mathcal{X}(M)$  que mantém os mapeamentos  $X \rightarrow X_{\phi_i}$

contínuos para todo  $i$ . Se  $M$  for compacta, a topologia obtida é independente de  $\mathcal{A}$  e é chamada de topologia  $C^r$ . Se  $M$  for não compacta, tomamos a união de todas as topologias  $\mathcal{A}^r$  para todos os atlas admissíveis  $\mathcal{A}$  sobre  $M$ , tendo a propriedade de que  $U^r$  é limitado, que chamamos de topologia  $C^r$  de Whitney sobre  $\mathcal{X}^r(M)$ .

Dizemos que  $X$  é  $C^r$  estruturalmente estável se houver uma vizinhança  $\mathcal{O}$  de  $X \in \mathcal{X}(M)$  na topologia  $C^r$  de Whitney, tal que  $Y \in \mathcal{O}$  implica em que  $X$  e  $Y$  são topologicamente conjugados. Isto é, têm diagramas de fase equivalentes: existe um mapeamento, que é um homeomorfismo,  $h: M \rightarrow M$  levando órbitas orientadas de  $X$  em órbitas orientadas de  $Y$ .

A análise de bifurcação trata com instabilidades dentro de famílias parametrizadas de campos vetoriais. Suponha que  $M$  seja paracompacta, que  $\mathcal{X}(M)$  seja um espaço de Fréchet, e que  $C$  seja uma variedade de dimensão finita. Um campo vetorial  $C^r$  controlado é um mapeamento de classe  $C^r$ ,  $\mu: C \rightarrow \mathcal{X}(M)$ . O espaço de controle de  $\mu$  é  $C$  e  $M$  é chamado de espaço de fase. No caso em que  $C$  é um disco aberto em torno de  $0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  é chamado de família  $n$ -dimensional de campos vetoriais, ou uma perturbação  $n$ -paramétrica de  $X_0 = \mu(0)$ , chamado de o foco de  $\mu$ . Um ponto  $c \in C$  é um ponto robusto de  $\mu$  se houver um vizinhança aberta  $U$  de  $c \in C$  tal que para todo  $u \in U$ ,  $\mu(u)$  e  $\mu(c)$  são topologicamente conjugados. Um ponto  $c \in C$  é um ponto de bifurcação de  $\mu$  se não for um ponto robusto.

## 2.2- DETERMINAÇÃO DOS PONTOS DE BIFURCAÇÃO:

Depois de estabelecida por Poincaré em 1885 [3], a teoria de bifurcação passou por um meio século de esquecimento, só

quebrado por Liapunov, que publicou em 1892 <sup>[2]</sup> seu trabalho sobre a estabilidade das soluções críticas do sistema de equações diferenciais, tema relacionado e voltado também para o aspecto qualitativo. Em 1937 Andronov e Pontriagin <sup>[2]</sup> publicaram seu artigo sobre o que chamavam de sistemas grosseiros, onde é elaborado o conceito de estabilidade (ou instabilidade) estrutural de Poincaré. A substituição do termo proposto por Andronov e Pontriagin para sistemas estruturalmente estáveis foi proposta por Lefschetz <sup>[2]</sup>, que traduziu o trabalho do russo para o inglês. Em 1942, Hopf <sup>[2]</sup> publicou um trabalho sobre a bifurcação de círculos limite a partir de pontos singulares, o que ficou conhecido como a bifurcação de Hopf. Estes três trabalhos, retomando e desenvolvendo os trabalhos originais de Poincaré e de Liapunov, foram os responsáveis pelo presente interesse nesta teoria, que assumiu sua moderna forma a partir dos trabalhos de J. Sotomayor. <sup>[13]</sup>

Podemos abordar a Teoria de Bifurcação de duas maneiras diferentes <sup>[2]</sup>. Pelo lado da teoria (ver por exemplo, [14], [15]), procuramos as condições gerais que determinam e descrevem os vários tipos de bifurcações que ocorrem nos vários tipos de sistemas dinâmicos, ou, em outras palavras, dado um campo vetorial  $X(M)$  sobre uma variedade  $M$ , quais as propriedades do conjunto dos pontos de bifurcação que são gerais, levando em consideração as simetrias e dimensão do problema. Este objetivo foi alcançado para arcos (dimensão de  $M$  igual a 1) e para sistemas no plano ( $\dim M=2$ ). O fato de não existir uma teoria completa não impede que esta seja usada para casos onde  $\dim M \geq 3$ , porém os diagramas de bifurcação se tornam extremamente complicados. É claro que, dependendo do número de variáveis do problema, este não poderá ser representado

integralmente em um único diagrama de fase, residindo aí a principal dificuldade de se tratar com sistemas com  $\dim M \geq 3$ , uma vez que o conjunto de pontos de bifurcação pode formar espaços desconexos nos vários pares conjugados.

Pelo lado da dinâmica aplicada, é claro que os sistemas, via de regra, envolvem mais que duas dimensões e vários parâmetros, que podem ou não ser significativos do ponto de vista da teoria de bifurcação. A solução neste caso é resolver numericamente as órbitas do sistema dinâmico para um dado valor de um dos parâmetros, e então resolver de novo para um pequeno incremento neste valor, e assim por diante para todos os parâmetros. Desta maneira, podem ser identificados os atratores do sistema, e a partir daí podem ser inferidas mudanças nas propriedades topológicas dos diagramas de fase.

A determinação dos pontos de bifurcação faz uso do teorema da função implícita. Este teorema diz que se determinadas circunstâncias forem obedecidas é sempre possível considerar as variáveis do sistema dinâmico como função dos parâmetros envolvidos. Os pontos que não obedecem a estas circunstâncias são aqueles em que não é possível determinar univocamente o comportamento das soluções como função dos parâmetros, ou seja, são sempre pontos de instabilidade estrutural e podem ser pontos de bifurcação. Existem várias versões do teorema da função implícita, a escolha dependendo do tipo e dimensão do problema a ser estudado. A versão apresentada aqui busca ser geral o suficiente para os propósitos em vista, quando o problema tiver dimensão finita. Suponha um sistema de equações da forma:

$$f_i(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

dependente de  $k$  parâmetros  $\alpha_j$ . Escrevendo na forma vetorial, supondo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^k$ , e  $f \in \mathbb{R}^n$ :

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \alpha) \mapsto f(x, \alpha)$$

Seja  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, \alpha) \right)_{i,j=1, \dots, n}$  a matriz jacobiana

$n \times n$  numa vizinhança  $(x, \alpha)$  de  $(x_0, \alpha_0)$ , denotada  $(df)_{x, \alpha}$ .

TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA : Suponhamos que  $(df)_{x, \alpha}$  definido acima é tal que:

$$\det(df)_{x, \alpha} \neq 0;$$

então existe vizinhanças  $U$  de  $x_0$  no  $\mathbb{R}^n$  e  $V$  de  $\alpha_0$  no  $\mathbb{R}^k$  e uma função  $X: V \rightarrow U$  tal que, para todo  $\alpha \in V$ , o sistema tem uma única solução  $x = X(\alpha)$  em  $U$ . Além disto, se  $f$  for de classe  $C^s$ ,  $X$  também o será.

Simbolicamente:

$$\det(df)_{x, \alpha} \neq 0 \rightarrow \exists X \mid f(X(\alpha), \alpha) = 0 \text{ e } X(\alpha_0) = x_0$$

Prova: Ver, por exemplo, [16].

Temos então que se  $(df)_{x, \alpha}$  for não singular  $(x_0, \alpha_0)$  não será um ponto de bifurcação. Se  $(df)_{x, \alpha}$  for singular, então  $(x_0, \alpha_0)$  pode ou não ser um ponto de bifurcação, mas o sistema será sempre estruturalmente instável, segundo [6].

A importância fundamental do Teorema da Função

Implícita decorre da impossibilidade de determinar uma única solução do sistema de equações, se o determinante da matriz jacobiana for nulo. Esta impossibilidade significa que, em determinadas situações, pode haver mais de uma solução para o sistema, para aqueles valores específicos dos parâmetros. É claro que nem sempre as duas (ou mais!) soluções serão estáveis (geralmente não são), de modo que pode acontecer de uma solução estável se tornar instável quando o ponto de bifurcação é cruzado. A este fato foi dado o nome de 'troca de estabilidade'.

Como um exemplo, consideremos  $U(x, \alpha)$  analítica real, com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , e as soluções de  $F = \nabla U(x, \alpha) = 0$  próximo de  $(x_0, \alpha_0)$ . Se  $\det(dF) = 0$  então haverá sempre uma segunda curva passando por  $(x_0, \alpha_0)$ , possivelmente complexa, satisfazendo  $\nabla U(x, \alpha) = 0$ . Entretanto, como as soluções complexas não possuem significado físico, o problema de dizer se o ponto  $(x_0, \alpha_0)$  é um ponto de bifurcação vai requerer maior conhecimento sobre o sistema.

Vamos considerar o caso em que só existe um parâmetro de bifurcação, isto é, os outros parâmetros, não sendo significativos do ponto de vista da bifurcação, podem ser ignorados. Seja  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\frac{du}{dt} = F(u, \lambda),$$

com  $F(0, \lambda_0) = 0$ . Pelo teorema da função implícita, se  $\det F_u(0, \lambda_0) \neq 0$ , então  $(0, \lambda_0)$  não é um ponto de bifurcação. Vamos expressar  $F(0, \lambda)$  por uma série de Taylor em torno de  $(0, \lambda_0)$  e vamos supor que  $\det F_u(0, \lambda_0) = 0$ , então:

$$F(u, \lambda) = L_0 \cdot u + (\lambda - \lambda_0) L_1 \cdot u + p(u, \lambda),$$

onde  $L_0 = F_u(0, \lambda_0)$ ,  $L_1 = F_{u, \lambda}(0, \lambda_0)$  são matrizes  $n \times n$ , e  $p(u, \lambda) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  satisfaz  $p(0, \lambda_0) = p_u(0, \lambda_0) = p_{u, \lambda}(0, \lambda_0) = 0$ , isto é, é a parte da série de Taylor de segunda ordem ou de ordem superior na variável  $u$ . Temos então que:

$$\det F_u(0, \lambda_0) = \det(L_0 + (\lambda - \lambda_0)L_1) = 0.$$

**TEOREMA 1:** o teorema 1.3 de [5] afirma que: se o  $\det(L_0 + (\lambda - \lambda_0)L_1)$  muda de sinal conforme o valor  $\lambda_0$  for cruzado, de  $\lambda_0 - \epsilon$  a  $\lambda_0 + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  pequeno, então  $(0, \lambda_0)$  é um ponto de bifurcação.

Este teorema se baseia na invariância do grau topológico de Brower, onde o grau é um inteiro (positivo, negativo ou nulo) que mede o número de soluções de um mapeamento continuamente diferenciável  $f(x) = p$  num domínio limitado  $D \subset \mathbb{R}^n$ , desde que  $f(x) \neq p$  em  $\partial D$  (fronteira de  $D$ ), contando soluções não degeneradas com um + ou um -, dependendo se a orientação de  $f$  é preservada ou revertida na solução (não degenerada significa que  $\det(df)_p$  é não singular).

Na verdade, este teorema não nos dá muitas informações sobre o ramo de soluções que se bifurcam, e é provado por absurdo. Resultados mais úteis serão dados nas próximas seções.

Seguindo à discussão da singularidade do determinante do jacobiano, Poincaré, no seu trabalho de 1885<sup>(8)</sup>, introduz o conceito de coeficiente de estabilidade<sup>(17)</sup>. Estes são as derivadas segunda da função das forças, e na nossa nomenclatura são

indicadas por  $F_{x_i}(\theta, \lambda_0)$ . Supondo a matriz  $F_u(\theta, \lambda_0)$  diagonal, para que seu determinante se anule é necessário que um ou mais destes coeficientes se anule. Se o determinante mudar de sinal conforme o valor  $\lambda_0$  for cruzado, então um número ímpar destes coeficientes também mudou de sinal. Um teorema, então, estabelece <sup>(2)</sup>: uma condição suficiente para que ocorra bifurcação é que pelo menos um destes coeficientes mude de sinal, indicando que ocorreu uma troca de estabilidade.

### 2.3- BIFURCAÇÃO A UM SIMPLES AUTOVALOR:

Quando o autovalor  $\lambda_0$  for de multiplicidade um, a situação se simplifica enormemente. Este caso, chamado de bifurcação a um simples autovalor, é tratado em muitos livros de análise. Um teorema (teorema 1.4 de [5], ver também [10]), estabelece a estrutura local do ramo que se bifurca. Será necessário, no entanto, rever primeiro alguns conceitos de álgebra linear: Seja  $L$  uma transformação linear,  $L:U \rightarrow V$ , que associa a todo  $x \in U$  um  $L.x \in V$ . O núcleo da transformação,  $\ker(L)$ , é o conjunto dos vetores  $x_0$  de  $U$  cuja imagem é o vetor  $0 \in V$ . O núcleo contém o elemento  $(0)$  e é um subespaço de  $U$ . A imagem de  $L$ ,  $R(L)$ , é o conjunto dos  $y \in V \mid L.x = y, x \in U$ , e é um subespaço de  $V$ . O complemento ortogonal de um subespaço  $N \subset M$  é o conjunto dos  $m \in M \mid \langle n, m \rangle = 0$  (onde  $\langle . \rangle$  denota o produto interno), e é um subespaço de  $M$ . Por uma questão de notação chamamos o complemento ortogonal de  $R(L)$  de o  $\text{coker}(L)$ . Podemos estender estes conceitos para transformações não lineares  $T$  desde que  $T(0) = 0$ . Vejamos agora o teorema com a mesma notação do teorema 1 (ver [5]):



TEOREMA 4: Sejam  $\Lambda$ ,  $U$ ,  $V$  espaços de Banach. Consideremos um mapeamento  $F: C^2(\Lambda \times U, V)$  tal que:

$$F(\lambda, u) = L.u + B(\lambda - \lambda_0, u) + p(\lambda, u),$$

com  $L \in \mathcal{B}(U, V)$  (espaço dos operadores lineares limitados),  $B(\lambda, u)$  bilinear e limitado,  $p(\lambda, 0) \equiv 0$ ,  $p_u(\lambda_0, 0) = 0$ , e  $p_{\lambda u}(\lambda_0, 0) = 0$ . Suponhamos que existe  $u_0 \neq 0 \in \ker(L)$  e um subespaço fechado  $Z \subset U$  tal que o mapeamento  $\Lambda \times Z \rightarrow V$ , dado por:

$$(\hat{\lambda}, \hat{z}) \mapsto L\hat{z} + B(\hat{\lambda}, u_0),$$

seja um isomorfismo. Então os zeros de  $F$  numa vizinhança de  $(\lambda_0, 0)$  em  $\Lambda \times \mathbb{R}\{u_0\} \times Z$  consistem exatamente da solução trivial e de uma curva  $s \mapsto (\lambda(s), s \cdot (u_0 + \psi(s)))$ , onde:

$$(\lambda, \psi): (-\delta, \delta) \rightarrow \Lambda \times Z \text{ e } (\lambda(0), \psi(0)) = (\lambda_0, 0).$$

A prova é basicamente a mesma do teorema 2, porém  $\lambda_0$  não é mais necessariamente um autovalor de  $L$  geometricamente simples. A condição essencial é que o mapeamento que leve de  $\Lambda \times \mathbb{R} \rightarrow V$  seja um isomorfismo, portanto  $\dim(Z \times \Lambda) = \dim V$ , de modo que quanto maior for a dimensão de  $\Lambda$  menor será a dimensão de  $Z$ , ou seja, a dimensão de  $\ker(L)$  deve crescer proporcionalmente à dimensão de  $\Lambda$ .<sup>[5]</sup>

## 2.4- MÉTODO DE REDUÇÃO DE LIAPUNOV-SCHMIDT:

O complicado tratamento da teoria de bifurcação com várias variáveis e vários parâmetros pode ser muito simplificado via o método de redução de Liapunov-Schmidt. Este método foi usado por Liapunov para tratar o problema levantado por Poincaré (3) sobre as posições de equilíbrio de uma massa fluida em rotação. E. Schmidt usou também este método em 1908 para tratar de equações integrais. O procedimento, basicamente, parte de considerações sobre o teorema da função implícita. A idéia é que mesmo que o determinante do jacobiano seja nulo,  $\det(F_u(\lambda_0, u_0))=0$ , é possível dividir o espaço de domínio do mapeamento em núcleo e complemento do núcleo, de maneira que a ação do sistema sobre o complemento do núcleo é não singular e pode ser resolvida pelo teorema da função implícita, enquanto que a outra parte, de dimensão finita (ou menor, se o problema já tiver dimensão finita), pode ser atacada por outros métodos, tais como os descritos no capítulo anterior.

Para o caso em que a dimensão do problema é finita e a multiplicidade do autovalor é um, existe uma versão do método muito simples, que não envolve outros conceitos além daqueles já vistos anteriormente, e que será vista na próxima secção.

## 2.5- CASO DE DIMENSÃO FINITA E $\dim \ker(L)=1$ :

O método de redução de Liapunov-Schmidt busca reduzir o sistema de  $n$  equações:

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (y, \alpha) &\mapsto \Phi(y, \alpha) = 0, \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

quando  $R(d\Phi)_{0,0} = n-1$ , para uma única equação:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \alpha) &\mapsto g(x, \alpha) = 0. \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

O primeiro passo é dividir os espaços de ambiente em duas componentes, relacionadas à transformação (2.5.1). Chamamos  $(d\Phi)_{0,0} = L$  e fazemos:

$$\begin{aligned} (a) \mathbb{R}^n &= \ker(L) + M, \\ (b) \mathbb{R}^n &= N + R(L). \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Onde, da maneira como foi feita a separação, temos que  $\dim M = n-1$  e  $\dim N = 1$ ,  $N$  sendo o coker( $L$ ). Seja  $E$  a projeção do  $\mathbb{R}^n$  sobre o  $R(L)$ , com  $\ker(E) = N$ . A projeção complementar  $I-E$  possui  $R(I-E) = N$  e  $\ker(I-E) = R(L)$ . Seja  $u \in \mathbb{R}^n$ , então:

$$u=0 \iff Eu=0 \text{ e } (I-E)u=0,$$

porque 0 é o único elemento comum ao  $R(L)$  e ao coker( $L$ ). Portanto,

o sistema de equações (2.5.1) pode ser dividido em:

$$(a) E\Phi(y, \alpha) = 0,$$

$$(b) (I-E)\Phi(y, \alpha) = 0. \quad (2.5.4)$$

Por conta da separação (2.5.3a), podemos escrever  $y=v+w$ , onde  $v \in \ker(L)$  e  $w \in M$ . A equação (2.5.4a) pode ser reescrita como:

$$E\Phi(v+w, \alpha) = 0.$$

Esta equação nada mais é que a definição de um mapeamento

$$F : \ker(L) \times M \times \mathbb{R}^k \rightarrow R(L) \\ (v+w, \alpha) \mapsto F(v, w, \alpha) = E\Phi(v+w, \alpha) = 0.$$

A derivada de  $F$  em relação a  $w$ , na origem, é dada por:

$$(dF)_{0,0} = E(d\Phi)_{0,0} = EL = L.$$

Como aqui o mapeamento linear  $L: M \rightarrow R(L)$  é não singular, e portanto inversível, podemos aplicar o teorema da função implícita para obter uma função  $w=W(v, \alpha)$ , definida como:

$$W: \ker(L) \times \mathbb{R}^k \rightarrow M,$$

que satisfaz:

$$E\Phi(v+W(v, \alpha), \alpha) \equiv 0, \quad W(0, 0) = 0.$$

Substituímos agora  $W$  em (2.5.4b) para obter o

mapeamento reduzido

$$\phi: \ker(L) \times \mathbb{R}^k \rightarrow N,$$

onde  $\phi(v, \alpha) = (I-E)\Phi(v+W(v, \alpha), \alpha)$ .

Esta equação é frequentemente chamada de equação de bifurcação, ou equação reduzida, porque os zeros de  $\phi(v, \alpha)$  estão relacionados um a um com os zeros de  $\Phi(y, \alpha)$ , porém tem a desvantagem de ser um mapeamento entre subespaços unidimensionais do  $\mathbb{R}^n$ . É recomendável, portanto, que sejam escolhidas bases para o  $\ker(L)$  e para  $N$ , de modo a se obter um equação reduzida  $g(x, \alpha): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ . É claro que isto introduz uma arbitrariedade adicional no método, além daquela relacionada à escolha dos complementos  $M$  e  $N$ , porém, um teorema em [14] estabelece que as equações reduzidas oriundas de escolhas diversas para vetores da base de  $\ker(L)$  e  $N$ , e/ou de complementos espaciais de  $\ker(L)$  e  $R(L)$  são equivalentes, a menos de um sinal que deve ser inserido explicitamente. Para se obter  $g$  deve-se projetar  $\phi$  sobre  $v_0^* \in N$ ; qualquer vetor  $v \in \ker(L)$  pode ser escrito como  $xv_0$ , onde  $x \in \mathbb{R}$ . Definimos então  $g$  como:

$$g(x, \alpha) = \langle v_0^*, \phi(xv_0, \alpha) \rangle.$$

Como  $\phi(xv_0, \alpha) \in N$ , este produto interno será nulo se e somente se  $\phi(xv_0, \alpha) = 0$ , e então os zeros de  $g(x, \alpha)$  estão relacionados um a um com os zeros de  $\phi(v, \alpha)$ .

O processo todo pode ser sumarizado no seguinte esquema composto por cinco passos:

- (1) Decompor os espaços de domínio e contra-domínio em subespaços relacionados a  $L$ , conforme (2.5.3);
- (2) Transferir esta decomposição para o sistema de equações, conforme (2.5.4);
- (3) Mostrar que (2.5.4a) pode ser resolvida para  $n-1$  variáveis via o teorema da função implícita;
- (4) Substituir a solução obtida no passo 3 em (2.5.4b), de modo a conseguir  $\phi$ ;
- (5) Escolher coordenadas para o  $\ker(L)$  e para o  $\text{coker}(L)$ , de modo a se obter  $g$ .

O passo fundamental é o terceiro, por mostrar que o teorema da função implícita pode ser aplicado em situações que a primeira vista não permitiriam a sua aplicação. Os passos 1 e 5 envolvem uma escolha de modo que devemos nos garantir que escolhas diferentes levem a resultados equivalentes.

Um teorema em [14] garante esta equivalência:

Escolhemos complementos  $M_1$  e  $M_2$  para o  $\ker(L)$  e  $N_1$  e  $N_2$  para o  $R(L)$ . Sejam  $v_1$  e  $v_2$  no  $\ker(L)$  e  $v_1^*$  e  $v_2^*$  no  $\text{coker}(L)$ . Sejam  $g_1(x, \alpha)$  e  $g_2(x, \alpha)$  as equações reduzidas obtidas usando as escolhas com índice 1 e com índice 2, respectivamente. Sejam  $\varepsilon = \text{sinal}\langle v_1, v_2 \rangle$  e  $\delta = \text{sinal}\langle v_1^*, v_2^* \rangle$ . Então  $g_2(x, \alpha)$  é equivalente a  $\delta g_1(\varepsilon x, \alpha)$ .

A prova deste teorema está em [14].

Aqui, por equivalência, queremos dizer que existe  $S$  não nula e positiva e  $(X, \Lambda)$  um difeomorfismo local que preserva a orientação de  $x$  e  $\alpha$ , tal que a seguinte relação vale para duas

equações de bifurcação  $g_1(x, \alpha)$  e  $g_2(x, \alpha)$ :

$$S(x, \alpha)g_1(X(x, \alpha), \Lambda(\alpha)) = g_2(x, \alpha).$$

## 3.1- COSMOLOGIA RELATIVISTA:

Das quatro interações básicas da Natureza, a gravitacional é a mais fraca. Para o estudo do Universo, porém, devido ao alcance curto das interações nucleares, e à neutralidade elétrica dos aglomerados de galáxias, é a única relevante. Devido às imensas distâncias envolvidas e magnitudes das massas cósmicas, a descrição do efeito gravitacional se faz com o uso da Teoria da Relatividade Geral. A Teoria estabelece a equivalência entre efeitos gravitacionais e inerciais como princípio fundamental, o Princípio de Equivalência, e tem a característica de ser descrita em termos da geometria da variedade espaço-temporal. Estudando o comportamento de partículas teste, a geometria da variedade pode ser determinada. Esta variedade é quadri-dimensional e paracompacta <sup>[19]</sup>, com assinatura +2.

Suponha um ponto material sob a ação de um campo gravitacional arbitrário. O Princípio de Equivalência garante que é possível encontrar uma classe de referenciais em relação aos quais este ponto estará em repouso ou movimento retilíneo uniforme. Nestes referenciais, localmente inerciais, valem as leis da Teoria da Relatividade Restrita. Em qualquer outro conjunto de referenciais, o movimento do ponto material pode ser interpretado como sujeito a um campo gravitacional externo, de modo que o efeito deste campo externo será descrito pelos coeficientes da métrica,

que fazem, então, o papel de "potenciais gravitacionais".

Obtemos as equações de campo da teoria obrigando os coeficientes da métrica a obedecerem um princípio de mínima ação, e fazendo com que na aproximação de campo fraco, a Teoria da Relatividade Geral seja reduzida à teoria de gravitação newtoniana. As equações de Einstein, assim obtidas, são: <sup>(20x21)</sup>

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R \cdot g_{\mu\nu} + \Lambda \cdot g_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4) T_{\mu\nu} \quad (3.1.1)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci, obtido do tensor de Riemann-Cristoffel ( $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ ),  $R$  é o escalar de curvatura ( $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ),  $\Lambda$  é a constante cosmológica, introduzida inicialmente por Einstein com o objetivo de evitar o efeito de expansão do Universo, e que atualmente serve para descrever a energia do vácuo, e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momentum dos campos materiais presentes no modelo.

O papel do tensor energia-momentum é agir como fonte para a curvatura da variedade, e ordinariamente é assumido representar um fluido isentrópico perfeito. Tal fluido é composto por aglomerados de aglomerados de galáxias, supostos estarem distribuídos uniformemente no espaço, de modo a tornarem homogênea a densidade de fluido cósmico. Para a descrição das propriedades deste fluido relevamos as irregularidades locais (planetas, estrelas, galáxias, etc.) e nos preocupamos apenas com as propriedades macroscópicas do fluido, tais como pressão, densidade, etc. O Universo deve, então, obedecer a uma equação de estado, do tipo  $p(\rho)$ , que relacione estas grandezas, onde  $p$  é a pressão isotrópica e  $\rho$  é a densidade de matéria.

O tensor energia-momentum, simétrico em seus dois índices, deve também, por razões físicas, obedecer a uma lei de conservação (ponto e vírgula significa derivada covariante):

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 . \quad (3.1.2)$$

A equação de Einstein (3.1.1) e a equação (3.1.2) podem ser resolvidas para seis coeficientes da métrica, ficando os outros quatro coeficientes livres para transformações arbitrárias de coordenadas.

No estudo da Cosmologia assumimos que as leis da Física são válidas para todo o Universo, em qualquer instante de sua evolução, com a possível exceção dos instantes muito próximos da singularidade, nos modelos em que esta ocorre. Associado a esta hipótese, assumimos também o chamado Princípio de Copérnico, que estabelece que a Terra não ocupa um lugar privilegiado no espaço. A consequência deste princípio é que o Universo é homogêneo, porque é visto assim da Terra. Para alguns autores <sup>(21)</sup>, este princípio também determina sua isotropia, pelo mesmo motivo, mas aqui assumimos que embora pareça isotrópico agora, nada impede que o Universo tenha sido anisotrópico no passado, tendo alcançado o presente estado durante sua evolução. É claro que neste caso poderia ter sido inhomogêneo no passado também, porém não trataremos com este tipo de modelo neste trabalho.

Notem que a adoção do Princípio de Copérnico, arbitrário e muito simplificador, é feita para o aqui e agora, ou seja, para assumir como homogêneo o estado atual do Universo. Neste

sentido é uma premissa válida, já que não podemos nos deslocar para ocupar uma posição muito diferente da posição atual do nosso grupo local, na escala de tempo das observações astronômicas humanas, para verificar a homogeneidade do Universo.

Os observadores fundamentais do espaço são aqueles que se movem com um elemento de volume infinitesimal do fluido cosmológico. Tais observadores determinam um sistema de coordenadas onde as linhas de fluxo do fluido são de tipo tempo, que não se interceptam. Este sistema de coordenadas é chamado de co-movente, porque é arrastado pelas partículas do fluido cosmológico. Neste caso, em qualquer ponto do espaço o vetor quadri-velocidade do fluido é:

$$u^{\mu}(x) = \delta^{\mu}_0 . \quad (3.1.3)$$

A 1-forma associada a este vetor, então é:

$$u_{\mu} = g_{\mu\nu} u^{\nu} = g_{\mu 0} \quad (3.1.4)$$

o que, junto com a condição de normalização  $u^{\mu} u_{\mu} = -1$ , obriga que

$$g_{00} = -1 . \quad (3.1.5)$$

Quando apresentou seu trabalho sobre cosmologia em 1916, Einstein introduziu *ad hoc* uma constante para evitar o aparecimento de uma pressão negativa, para a qual não havia uma justificativa física aceitável <sup>(22)</sup>. A introdução desta constante,

apesar de quebrar a simplicidade da teoria, provavelmente evitou sua rejeição na época, pelo inusitado de prever um Universo que possuísse densidade média de matéria nula<sup>[23]</sup>. Em 1922 Friedman<sup>[24]</sup> encontrou que era possível obter uma densidade finita, sem introduzir qualquer constante, mas com o surpreendente resultado que o Universo se expandia, resultado confirmado por Hubble em 1929 ao anunciar uma relação linear entre distância e velocidade de recessão para algumas galáxias distantes. A constante cosmológica passou a ser uma redundância, até ser recuperada pelos cosmólogos inflacionistas, para expressar o termo de energia do vácuo em cenários de quebra espontânea de simetria.<sup>[25]</sup>

### 3.2- ISOMETRIAS:

As equações da Relatividade Geral formam um complicado conjunto de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. Por este motivo, é comum, em Cosmologia, simplificar estas equações através da imposição de simetrias na solução.

Modelo Simétrico (ou Homogêneo) é aquele que possui sua métrica invariante sob um dado conjunto de transformações (chamadas isometrias ou movimentos, porque preservam todas as medidas de comprimento). Tal modelo é uma variedade  $M$ , e cada operação de simetria é um mapeamento de  $M$  sobre si mesma. O efeito desta transformação é levar um ponto  $P$  de  $M$  para outro ponto de  $M$ , por exemplo,  $Q$ , aonde a métrica é a mesma que em  $P$ . Para descrever a invariância da métrica sob um grupo (grupo de Lie) de isometrias,

determinamos as transformações infinitesimais (álgebra de Lie) do grupo.

Considere uma vizinhança  $U$  de um ponto  $P$ , onde são usadas coordenadas  $x^\mu$ . Uma transformação infinitesimal leva pontos de uma vizinhança  $U' \subset U$  em outros pontos de  $U$ . Sejam  $x'^\mu(x^\nu_P)$  as transformações que levam do ponto  $P$  ao ponto  $P' \in U$ :

$$x'^\mu(x^\nu_P) = x'^\mu(P) = x^\mu_{P'} , \quad (3.2.1)$$

onde  $x^\mu_{P'}$  são as coordenadas do ponto  $P'$ .

A transformação  $x'^\mu$  tem a forma:

$$x'^\mu(P) = x^\mu(P) + \epsilon X^\mu(P) , \quad (3.2.2)$$

com  $\epsilon$  muito pequeno. Portanto  $X = X^\mu \partial_\mu$  é um campo vetorial que descreve a magnitude e a direção da transformação

Sob esta mudança de coordenadas, um campo vetorial  $Y = Y^\mu \partial_\mu$  se transforma como:

$$Y'^\rho(P') = J^\rho_\mu Y^\mu(P) . \quad (3.2.3)$$

A matriz jacobiana desta transformação é:

$$J^\rho_\mu(P) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}(P) = \left( \delta^\rho_\mu + \epsilon \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} \right)(P) = \left( \delta^\rho_\mu + \epsilon X^\rho_{,\mu} \right)(P) \quad (3.2.4)$$

portanto:

$$Y'^{\rho}(P') = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}(P) Y^{\mu}(P) , \quad (3.2.5)$$

onde  $Y'^{\rho}(P')$  são as componentes de  $Y^{\rho}(P)$  calculadas em  $P'$ , no novo sistema de coordenadas.

Ainda sob esta mudança de coordenadas, as componentes do vetor  $Y$  se transformam como:

$$Y^{\rho}(P') = Y^{\rho}(x^{\mu} + \epsilon x^{\mu}) . \quad (3.2.6)$$

Definimos a diferença de Lie como

$$\delta Y^{\rho} = Y^{\rho}(P') - Y'^{\rho}(P') , \quad (3.2.7)$$

que dá a diferença entre o campo definido originalmente em  $P'$ , e o campo calculado em  $P'$  segundo a transformação de coordenadas para o sistema com linha.

Define-se a derivada de Lie do campo vetorial  $Y$  com respeito ao campo vetorial  $X$ , como sendo o campo vetorial:

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Y(x') - Y'(x')}{\epsilon} , \quad (3.2.8)$$

As componentes deste campo são:

$$(\mathcal{L}_X Y)^{\rho} = Y^{\rho}_{,\mu} X^{\mu} - X^{\rho}_{,\mu} Y^{\mu} ; \quad (3.2.9)$$

onde a vírgula significa diferenciação simples.

Portanto,

$$\mathcal{L}_X Y = (Y^\rho{}_{,\mu} X^\mu - X^\rho{}_{,\mu} Y^\mu) \partial_\rho . \quad (3.2.10)$$

A expressão entre parenteses é conhecida como comutador de X e Y, portanto:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] . \quad (3.2.11)$$

A derivada de Lie de um tensor T arbitrário é:

$$(\mathcal{L}_X T)^{\rho\sigma\dots}{}_{\mu\nu\dots} = T^{\rho\sigma\dots}{}_{\mu\nu\dots,\lambda} X^\lambda - T^{\lambda\sigma\dots}{}_{\mu\nu\dots} X^\rho{}_{,\lambda} + T^{\rho\sigma\dots}{}_{\lambda\nu\dots} X^\lambda{}_{,\rho} + \dots \quad (3.2.12)$$

Para o tensor métrico, temos:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu,\lambda} X^\lambda + g_{\lambda\nu} X^\lambda{}_{,\mu} + g_{\mu\lambda} X^\lambda{}_{,\nu} \\ &= X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} - 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda \\ &= X_{\mu;\nu} + X_{\nu;\mu} , \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

onde o ponto e vírgula denota diferenciação covariante.

Uma transformação infinitesimal é chamada isometria se ela deixa a métrica invariante. A transformação  $x \rightarrow x'$ , descrita por um campo vetorial X, deixará a métrica invariante, portanto, se e somente se satisfizer a equação (3.2.13), conhecida como condição de Killing, com o campo vetorial X, então, chamado campo vetorial

de Killing.

Usando a equação (3.2.11), podemos facilmente demonstrar as seguintes propriedades da derivada de Lie:

$$1- [X, Y] = -[Y, X]; \quad (3.2.14)$$

$$2- [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]; \quad (3.2.15)$$

$$3- [fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y + gY(f)X ; \quad (3.2.16)$$

4- Identidade de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0; \quad (3.2.17)$$

onde X, Y e Z são campos vetoriais, a e b são números reais, e f e g são funções.

Deve-se notar que uma transformação de coordenadas deixa a métrica invariante se preservar todas as medidas de comprimento ao longo da transformação. Chamando  $\delta(ds^2)$  a variação do elemento de linha devido à transformação, temos:

$$\begin{aligned} \delta(ds^2) &= \delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) \\ &= d(g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu} dx^\mu \delta(dx^\nu)). \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Como  $x'^\mu = x^\mu + \epsilon X^\mu$ , temos:

$$\delta(g_{\mu\nu}(x)) = g_{\mu\nu}(x') - g_{\mu\nu}(x) = \epsilon g_{\mu\nu, \lambda} X^\lambda \quad (3.2.19)$$

$$e \quad \delta(dx^\nu) = d(\delta x^\nu) = d(x'^\nu - dx^\nu) = d(\epsilon X^\nu) = \epsilon X^\nu_{, \lambda} dx^\lambda. \quad (3.2.20)$$

Então 
$$\delta(ds^2) = \varepsilon g_{\mu\nu, \lambda} x^\lambda dx^\mu dx^\nu + 2\varepsilon g_{\mu\nu} x^\nu{}_{, \lambda} dx^\mu dx^\lambda$$

$$= (g_{\mu\nu, \lambda} x^\lambda + g_{\mu\lambda} x^\lambda{}_{, \nu} + g_{\lambda\nu} x^\lambda{}_{, \mu}) \varepsilon dx^\mu dx^\nu, \quad (3.2.21)$$

o que, segundo (3.2.13), implica:

$$\delta(ds^2) = 0 \iff X_{\mu; \nu} + X_{\nu; \mu} = 0. \quad (3.2.22)$$

O problema de determinar as isometrias infinitesimais da métrica, então, se reduz ao problema de encontrar todos os vetores de Killing da métrica. As propriedades principais dos vetores de Killing são:

- 1- Qualquer combinação de vetores de Killing, com coeficientes constantes, é um vetor de Killing, de modo que o conjunto das soluções da equação de Killing possui a estrutura de um espaço vetorial linear;
- 2- O comutador de dois vetores de Killing é também um vetor de Killing;
- 3- O conjunto de vetores de Killing, geradores de isometrias infinitesimais, possui a estrutura de grupo contínuo de Lie.

Alguns dos principais resultados da Teoria dos Grupos de Lie, são:

- 1- Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável;
- 2- Associada a cada grupo de Lie existe uma única álgebra de Lie. A

dimensão da álgebra é a mesma da variedade grupo:

3- Cada álgebra de Lie define um único grupo simplesmente conexo, chamado grupo de cobertura universal.

A solução das equações de Killing forma um espaço vetorial com a estrutura de álgebra, sob a operação de comutação:

$$[X_{\mu}, X_{\nu}] = C^{\kappa}_{\mu\nu} X_{\kappa} . \quad (3.2.23)$$

Os  $C^{\kappa}_{\mu\nu}$  são chamados de constantes de estrutura da álgebra, e satisfazem, de acordo com (3.2.14) e (3.2.17):

$$C^{\kappa}_{\mu\nu} = -C^{\kappa}_{\nu\mu} , \quad (3.2.24)$$

$$e \quad C^{\kappa}_{\mu\nu} C^{\lambda}_{\kappa\iota} + C^{\kappa}_{\nu\iota} C^{\lambda}_{\kappa\mu} + C^{\kappa}_{\iota\mu} C^{\lambda}_{\kappa\nu} = 0 \quad (3.2.25)$$

O problema, então, de encontrar as isometrias da métrica de uma variedade espaço-temporal se resume a encontrar as constantes de estrutura da álgebra de Lie, associada ao grupo de Lie das simetrias da métrica.

O número de campos vetoriais de Killing linearmente independentes determina a dimensão do grupo G de Lie de isometrias da métrica. Numa variedade n-dimensional podem existir no máximo  $n(n+1)/2$  vetores de Killing linearmente independentes [26], e este valor máximo corresponde a máxima simetria da métrica. Deste modo, numa variedade espaço-temporal 4-dimensional, não podem existir mais que dez vetores de Killing linearmente independentes, e se

considerarmos as seções espaciais 3-dimensionais, este número cai para seis. Como um exemplo simples, consideremos um espaço 4-dimensional plano (euclidiano ou minkowskiano): este espaço é maximamente simétrico, e seus dez vetores de Killing correspondem às simetrias de translação (4) e de rotação ou transformação de Lorentz (6).

Dado um ponto  $P$  em uma variedade  $M$ , o conjunto dos pontos que são equivalentes a  $P$  pelas transformações do grupo  $G$  de isometrias é chamado de órbita de  $P$ . A órbita é uma subvariedade  $H$  de  $M$ . Um grupo  $G$  atua transitivamente sobre uma variedade  $M$  quando a dimensão de  $H$  for igual à dimensão de  $M$ . Dados dois pontos quaisquer  $P$  e  $Q$  de  $M$ , se a transformação de  $G$  que une  $P$  a  $Q$  for única, então o grupo é chamado de simplesmente transitivo, em caso contrário é chamado de multiplamente transitivo.

Uma variedade  $M$  é dita homogênea se houver isometrias infinitesimais que levem um ponto  $P$  qualquer de  $M$  em algum ponto de sua vizinhança imediata. Em outras palavras, se a métrica admitir vetores de Killing que em  $P$  assumem qualquer valor.

Uma variedade  $M$  é chamada isotrópica em torno de um ponto  $P$  se existir isometrias que deixem o ponto  $P$  fixo, isto é, se  $X(P)=0$ . O conjunto de todas as transformações infinitesimais que deixam  $P$  fixo é chamado de grupo de isotropia, e é um subgrupo do grupo de simetria. Qualquer variedade que for isotrópica em torno de todos seus pontos é homogênea. Qualquer variedade homogênea que for isotrópica em torno de algum de seus pontos possui necessariamente o número máximo de vetores de Killing. Inversamente, qualquer variedade que possuir o número máximo de

vetores de Killing é homogênea e isotrópica.<sup>[21]</sup>

Os dois tipos de homogeneidade mais usados na construção de modelos cosmológicos são:

#### 1- Homogeneidade no espaço-tempo:

A métrica é a mesma para todos os pontos da variedade. Nestes modelos a órbita do grupo de isometrias é o espaço-tempo todo, e as equações de Einstein são puramente algébricas.

Exemplo de tais espaços são o universo de Einstein<sup>[27]</sup> e o universo de Gödel<sup>[28]</sup>. Embora não sejam realistas, porque não permitem expansão, estes modelos possuem um notável interesse teórico.<sup>[29]</sup>

#### 2- Homogeneidade no espaço:

A variedade é invariante sob um grupo de Lie tri-dimensional simplesmente transitivo. Este grupo gera hipersuperfícies homogêneas tri-dimensionais  $H$ , dependentes de um parâmetro. Esta família de hipersuperfícies preenchem a variedade, que pode ser, então, considerada como o produto  $H \times \mathbb{R}$ . A métrica da variedade é independente da posição em cada hipersuperfície, e depende apenas do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ . Deste modo, as equações de Einstein, escritas num sistema de coordenadas conveniente, se tornam equações diferenciais ordinárias na variável  $t$ .<sup>[29][29]</sup>

### 3.3- MODELOS HOMOGÊNEOS:

Um grupo  $G_9$  de movimentos simplesmente transitivo sobre hipersuperfícies tri-dimensionais pode ser classificado

dentro de um dos nove tipos distintos descritos por L. Bianchi<sup>[30]</sup>. Esta classificação permite determinar as diferentes geometrias associadas a cada classe de variedades espaço-temporais, e através de um método proposto por Behr<sup>[31]</sup>, as propriedades do tensor métrico em cada um dos casos.

O tipo de Bianchi se conserva ao longo da evolução do Universo (a não ser que um estado singular ocorra)<sup>[32]</sup>, portanto pode caracterizar as superfícies de transitividade do grupo.

O método de Behr consiste em obter todos os conjuntos de constantes de estrutura da álgebra dos vetores de Killing que não são equivalentes. Se  $X^i$  ( $i=1\dots 3$ ) são os três vetores de Killing linearmente independentes de uma variedade tri-dimensional, a condição de álgebra implica em que as constantes de estrutura possuem apenas nove componentes independentes. A matriz

$$M^{ij} = \epsilon^{ikl} C_{kl}^j, \quad (3.3.1)$$

onde  $\epsilon^{ikl}$  é totalmente antissimétrico, tem o mesmo número de componentes independentes. Como

$$\epsilon_{jni} \epsilon^{ikl} = \frac{1}{2} (\delta_j^k \delta_n^l - \delta_n^l \delta_j^k), \quad (3.3.2)$$

a relação inversa a (3.3.1) é:

$$C_{kl}^j = \epsilon_{kli} M^{ij}. \quad (3.3.3)$$

A matriz  $M^{ij}$  pode ser decomposta em duas partes, uma simétrica  $S^{ij}$ , com seis componentes independentes, e outra antissimétrica  $A^{ij}$ , com três componentes independentes. Estas últimas podem ser representadas pela 1-forma:

$$a_j = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} A^{ik} . \quad (3.3.4)$$

Invertendo esta relação, temos:

$$A^{ij} = 2 \epsilon^{ijk} a_k . \quad (3.3.5)$$

Substituindo estas equações na expressão (3.3.3), temos, para as constantes de estrutura da base de vetores da métrica:

$$C^k_{ij} = \epsilon_{ijl} S^{kl} + (\delta^k_i a_j - \delta^k_j a_i) . \quad (3.3.6)$$

A identidade de Jacobi, com o auxílio do tensor  $\epsilon^{ijk}$ , pode ser escrita:

$$\epsilon^{ijk} C^l_{ij} C^i_{kn} = 0 . \quad (3.3.7)$$

Usando as relações (3.3.2) e (3.3.3), esta equação fica:

$$M^{ij} C^k_{ij} = 0 , \quad (3.3.8)$$

o que implica que

$$S^{ij}a_i = 0 . \quad (3.3.9)$$

Podemos, sem perda de generalidade, realizar transformações lineares na base, de modo a diagonalizar a matriz simétrica  $S^{ij}$ . Seus valores principais podem ser escritos, então, como  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ . Podemos também fazer a 1-forma  $a_k = (a, 0, 0)$ , e então a equação (3.3.9) pode ser escrita:

$$an_1 = 0 . \quad (3.3.10)$$

Os comutadores das 1-formas associadas aos vetores da base são:

$$\left. \begin{aligned} [X_1, X_2] &= -aX_2 + n_3X_3 \\ [X_2, X_3] &= n_1X_1 \\ [X_3, X_1] &= n_2X_2 - aX_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.11)$$

As três direções escolhidas são únicas a menos que alguns dos autovalores sejam iguais, caso em que temos uma liberdade de rotação adicional. Temos também a liberdade de inverter a direção e alterar a escala dos vetores da base. Usando esta liberdade podemos escolher que  $a$  seja positivo se não for nulo, e trocar simultaneamente o sinal dos  $n_i$ .

Duas condições permitem satisfazer a equação (3.3.10):

$$a = 0 ; \quad (3.3.12)$$

ou

$$n_1 = 0 .$$

(3.3.13)

Podemos subclassificar as métricas de Bianchi segundo estas duas condições, de acordo com a tabela 3.1.

A diferença entre o grupo VI e o grupo III ainda deve ser esclarecida. Seja o operador:

$$P = p_1 X_1 + p_2 X_2 + p_3 X_3 , \quad (3.3.14)$$

Tabela 3.1- Classificação dos grupos  $G_3$  segundo Behr (31). A direita temos a classificação de Bianchi.

CLASSE	TIPO	a	$n_1$	$n_2$	$n_3$	TIPO DE BIANCHI
A	I	0	0	0	0	I
	II	0	+	0	0	II
	VII <sub>o</sub>	0	+	+	0	VII
	VI <sub>o</sub>	0	+	-	0	VI
	IX	0	+	+	+	IX
	VIII	0	+	+	-	VIII
B	V	+	0	0	0	V
	IV	+	0	0	+	IV
	VII <sub>h</sub>	+	0	+	+	VII
	VI <sub>h</sub>	+	0	+	-	VI (III se $h=-1$ )

onde os  $p_i$  são constantes. Este operador será gerador de um subgrupo abeliano  $G_1$  do grupo  $G_3$  se for invariante pelas transformações do grupo, ou seja, desde que as derivadas de Lie

deste vetor com relação aos vetores de Killing sejam nulas:

$$[X_1, P] = [X_2, P] = [X_3, P] = 0 \quad (3.3.15)$$

Estas condições produzem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} ap_2 + n_2 p_3 &= 0 \\ -n_3 p_2 + ap_3 &= 0 \\ p_1 &= 0 \end{aligned}$$

que pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a & n_2 \\ -n_3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.3.16)$$

Este sistema terá solução não trivial se o determinante da matriz for nulo, ou seja:

$$a^2 + n_2 n_3 = 0. \quad (3.3.17)$$

Portanto, existirá um subgrupo  $G_1$  abeliano do grupo  $G_3$  se tivermos  $h = a^2/n_2 n_3 = -1$ . Os valores de  $h$  (que não dependem do tempo) rotulam famílias uniparamétricas de grupos [99], e se convencionou chamar o grupo, quando  $h = -1$ , de Bianchi III.

Destes grupos, três merecem algum comentário particular:

- 1- Um modelo de FRW plano ( $k=0$ ) é do tipo I de Bianchi, homogêneo;
- 2- O grupo de Tipo V é um subgrupo simplesmente transitivo de um modelo de FRW aberto;
- 3- O grupo de Tipo IX é isomorfo ao grupo das matrizes ortogonais, com coeficientes reais e determinante unitário (isomorfo ao grupo de rotação tri-dimensional). Um modelo de FRW fechado é do tipo IX, homogêneo.

A descrição de uma variedade  $M$  com um grupo de isometrias  $G$  fica mais simples se uma base invariante for usada. Esta base é formada por campos vetoriais que são invariantes pelo grupo  $G$ , isto é, cuja derivada de Lie com respeito aos campos vetoriais de Killing são nulas. Nesta base, cada componente do tensor métrico é invariante pelo grupo:

Sejam  $\xi_a^j$  os campos vetoriais da base invariante, onde o índice  $a$  identifica os três vetores da base. Se  $X_a^i$  forem os campos vetoriais de Killing do grupo, então:

$$[X_a^i, \xi_i^a] = 0. \quad (3.3.18)$$

Como a derivada de Lie de  $g(\xi_i^a, \xi_j^b)$  em relação aos  $X_i$  é nula, segue que as componentes da métrica são invariantes pelo grupo.

Em relação à uma base coordenada, os vetores da base invariantes podem ser descritos como:

$$\xi_a = D_a^i \partial_i \quad (3.3.19)$$

onde  $\partial_i$  é a base natural de coordenadas ( $dx^i$  é a de 1-formas), com

$$\det(D_a^i) \neq 0 \quad \text{e} \quad D_a^i D_j^a = \delta_j^i .$$

$D_a^i$  são as triadas associadas a base invariante, e em relação a esta base as componentes do tensor métrico são dadas por:

$$g_{ab} = D_a^i D_b^j g_{ij} \quad (3.3.20)$$

Pode ser facilmente demonstrado que a matriz métrica  $g_{ab}$  é constante <sup>[94]</sup> dentro de cada hipersuperfície tridimensional, dependendo possivelmente do tempo, e invertendo a equação (3.3.20), obtemos:

$$g_{ij} = D_i^a D_j^b g_{ab}(t) \quad (3.3.21)$$

Com estas escolhas para a base, o elemento de linha dos modelos ficam:

$$ds^2 = g_{ij}(t) dx^i dx^j - dt^2 \quad (3.3.22)$$

onde  $g_{ij}(t)$  é a métrica da secção espacial, que só depende da variável  $t$ , ou, equivalentemente:

$$ds^2 = g_{ab} D_i^a D_j^b dx^i dx^j - dt^2 \quad (3.3.23)$$

As matrizes  $D_a^i$  foram calculadas por Taub <sup>[95]</sup> para

os nove tipos de Bianchi, determinando a forma geral das métricas homogêneas das variedades tri-dimensionais.

### 3.4- AS EQUAÇÕES DE CAMPO:

A obtenção das equações de campo é um trabalho algo longo para ser apresentado aqui, de modo que o método será apenas esboçado nesta secção [39][38][39]. Na notação utilizada representamos os índices tetrádicos por letras gregas do começo do alfabeto ( $\alpha, \beta, \text{etc.}$ ), enquanto que as letras gregas do meio do alfabeto ( $\kappa, \lambda, \mu, \text{etc.}$ ) são índices quadri-vetoriais. No que segue, um conjunto de índices aparecendo entre colchetes indica antissimetrização. Índices latinos do começo do alfabeto ( $a, b, \text{etc.}$ ) e do meio ( $k, l, m, \text{etc.}$ ) representam índices triádicos e espaciais, respectivamente.

Elegemos em um ponto P qualquer da variedade espaço temporal uma téttrada de vetores ortonormais  $e_\alpha$ . Como primeira especialização desta téttrada, escolhemos o vetor de tipo tempo  $e_0$  ortogonal às superfícies de transitividade do grupo:

$$e_0^\mu = u^\mu, \quad (3.4.1)$$

onde  $u^\mu$  é o vetor de fluxo do fluido cosmológico. Pela nossa notação, temos:

$$e_\alpha = e_\alpha^\mu \partial_\mu, \quad \text{com } \det(e_\alpha^\mu) \neq 0;$$

onde  $\partial_\mu$  é uma base coordenada. Com esta escolha, os  $e_\alpha^\mu$  geram uma hipersuperfície do tipo espaço, tangente à superfície de transitividade do grupo no ponto P.

A métrica, com o uso desta tetrada, é:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu = \text{diagonal}(-1, +1, +1, +1) \quad . \quad (3.4.2)$$

O comutador dos vetores da tetrada é:

$$[e_\alpha, e_\beta] = \gamma_{\alpha\beta}^\delta e_\delta \quad , \quad \gamma_{\alpha\beta}^\delta = \gamma_{[\alpha\beta]}^\delta \quad . \quad (3.4.3)$$

Definimos os coeficientes de Ricci como:

$$\Gamma_{\alpha\beta\delta} = e_\alpha^\mu e_{\delta\mu;\nu} e_\beta^\nu \quad ; \quad (3.4.4)$$

como os  $g_{\alpha\beta}$  são constantes, temos de (3.4.2):

$$g_{\alpha\beta;\kappa} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\nu;\kappa} (e_\alpha^\mu e_\beta^\nu) + (e_\alpha^\mu e_{\beta\nu;\kappa} + e_\beta^\mu e_{\alpha\nu;\kappa}) = 0 \quad ,$$

o que implica que:

$$g_{\mu\nu;\kappa} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_{\alpha\beta\delta} + \Gamma_{\delta\beta\alpha} = 0 \quad . \quad (3.4.5)$$

Com (3.4.3), temos:

$$\gamma_{\alpha\beta}^\delta = \Gamma_{\alpha\beta}^\delta - \Gamma_{\beta\alpha}^\delta \quad . \quad (3.4.6)$$

E com (3.4.5), temos:

$$\Gamma_{\alpha\beta\delta} = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta\delta} + \gamma_{\delta\alpha\beta} - \gamma_{\beta\delta\alpha}) \quad . \quad (3.4.7)$$

Onde (3.4.6) é a relação inversa à (3.4.7). Estas equações determinam os componentes da métrica, de modo que agora devemos relacionar as constantes de estrutura da álgebra dos vetores da tetrada com as constantes de estrutura da álgebra dos vetores de Killing. Para isso, obrigamos a triada  $e_a$  a permanecer sobre a superfície de transitividade do grupo de movimentos, em cada ponto, e fazemos a restrição de que ela comute com os vetores de Killing  $X_b$  da métrica:

$$[e_a, X_b] = 0 \quad . \quad (3.4.8)$$

Os vetores de Killing preservam o produto escalar, de modo que podemos arrastar a triada pela superfície com o uso destes vetores, e ela ainda assim permanecerá ortonormal. Pela definição do vetor de fluxo  $u$ , temos que  $[X_a, u] = 0$ , e então:

$$[X_a, e_\alpha] = 0 \quad . \quad (3.4.9)$$

Com o uso da identidade de Jacobi (eq.3.2.17), vemos que os  $\gamma_{\alpha\beta}^\delta$  são constantes dentro de cada superfície de transitividade do grupo, ou seja:

$$\gamma_{\alpha\beta}^\delta = \gamma_{\alpha\beta}^\delta(t) \quad , \quad (3.4.10)$$

e a triada gera um grupo simplesmente transitivo em cada superfície  $t = \text{const}$ , chamado grupo recíproco ao grupo de movimentos. Com uma escolha conveniente para os vetores da triada e para os vetores de Killing em um dado ponto, podemos fazer com que o grupo de movimentos e seu grupo recíproco sejam equivalentes dentro de cada superfície de transitividade:

$$\gamma_{bc}^a = C_{bc}^a \quad . \quad (3.4.11)$$

As condições (3.4.6) e (3.4.9) implicam que:

$$\gamma_{00}^0 = \gamma_{0\alpha}^0 = \gamma_{\mu\nu}^0 = \gamma_{\nu\nu}^\mu = 0 \quad , \quad (3.4.12)$$

o que permite determinar todas as componentes da métrica e do símbolo de Christoffel, e deste modo o tensor de Riemann.

Consideraremos as soluções das equações de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - 1/2R.g_{\mu\nu} + \Lambda.g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (3.4.13)$$

na qual o tensor energia-momentum toma a forma de um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \quad , \quad (3.4.14)$$

com  $u^\mu u_\mu = -1$ , onde  $u^\mu$  é o vetor quadri-velocidade normalizado,  $\rho$  a

densidade e  $p$  a pressão do fluido.

Para modelos de classe A as equações dinâmicas são: <sup>(33)</sup>

$$\Lambda + 1/2(\rho - p) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{XY}}{XY} + \frac{\ddot{XZ}}{XZ} + \frac{1}{2} \left( \frac{N_1 X}{YZ} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{N_2 Y}{XZ} - \frac{N_3 Z}{XY} \right)^2 \\ &= \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\ddot{YX}}{YX} + \frac{\ddot{YZ}}{YZ} + \frac{1}{2} \left( \frac{N_2 Y}{XZ} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{N_3 Z}{XY} - \frac{N_1 X}{YZ} \right)^2 \\ &= \frac{\ddot{Z}}{Z} + \frac{\ddot{ZX}}{ZX} + \frac{\ddot{ZY}}{ZY} + \frac{1}{2} \left( \frac{N_3 Z}{XY} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{N_1 X}{YZ} - \frac{N_2 Y}{XZ} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

$$\begin{aligned} \rho + \Lambda &= \frac{\ddot{XY}}{XY} + \frac{\ddot{YZ}}{YZ} + \frac{\ddot{ZX}}{ZX} + \frac{1}{2} \left( \frac{N_2 N_3}{X^2} + \frac{N_1 N_3}{Y^2} + \frac{N_2 N_1}{Z^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{N_3 Z}{XY} \right)^2 + \left( \frac{N_1 X}{YZ} \right)^2 + \left( \frac{N_2 Y}{ZX} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

E a equação de conservação é:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} = -(\log XYZ) \dot{\quad} \quad (3.4.17)$$

onde o ponto indica derivação em relação a coordenada temporal, com  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  constantes relacionadas com os valores principais da matriz simétrica  $S^{ij}$ , e onde  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  fazem o papel de fatores de escala para cada um dos eixos. <sup>(36)</sup>

Podemos fazer uma segunda escolha para a matriz simétrica  $S^{ij}$ , quando o seu traço for nulo (tipos I e V, e casos

especiais dos grupos  $VI_o$ ,  $VI_h$  e VIII). Para isso, escolhemos uma triada de vetores ortonormais  $\{e_a\}$  tal que:

$$S^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & r & r \\ r & 0 & q \\ r & q & 0 \end{pmatrix}; \quad a_j = (a, 0, 0); \quad ar = 0. \quad (3.4.18)$$

Calculando o comutador dos vetores da triada temos:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= re_1 + (q + a)e_2; \\ [e_2, e_3] &= re_2 + re_3; \\ [e_3, e_1] &= re_1 + (q - a)e_3. \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Esta escolha permite uma classificação alternativa, dada na tabela 3.2:

Tabela 3.2- Classificação alternativa dos grupos  $G_3$ , segundo Ellis and MacCallum [33].

Classe	Tipo	a	r	q
A	I	0	0	0
	$VI_o$	0	0	+
	VIII	0	+	+
B	V	+	0	0
	$VI_h$	+	0	+

Um teorema em [33] garante que para grupos com  $S^i_i = 0$  as equações

de campo são:

$$\Lambda + 1/2(\rho - p) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{XY}}{XY} + \frac{\ddot{XZ}}{XZ} - \frac{2(a_0^2 + q_0^2)}{X^2} + \frac{2b^2}{Y^4 Z^2} ; \\
 &= \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\ddot{YX}}{YX} + \frac{\ddot{YZ}}{YZ} - \frac{2(a_0^2 + a_0 q_0)}{X^2} - \frac{2b^2}{Y^4 Z^2} ; \\
 &= \frac{\ddot{Z}}{Z} + \frac{\ddot{ZX}}{ZX} + \frac{\ddot{ZY}}{ZY} - \frac{2(a_0^2 - a_0 q_0)}{X^2} ;
 \end{aligned}
 \tag{3.4.20}$$

$$\rho + \Lambda + \frac{(3a_0^2 + q_0^2)}{X^2} = \frac{\ddot{XY}}{XY} + \frac{\ddot{YZ}}{YZ} + \frac{\ddot{ZX}}{ZX} + \frac{2b^2}{Y^4 Z^2} ;
 \tag{3.4.21}$$

e a equação de conservação é:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} = -(\log XYZ)' .
 \tag{3.4.22}$$

Com  $b$ ,  $a_0 = aX$  e  $q_0 = qX$  constantes.

### 3.5- MODELOS HOMOGÊNEOS E ISOTRÓPICOS:

Os modelos de Friedmann-Robertson-Walker são possivelmente os modelos de Universo mais estudados pelos cosmólogos. Estes modelos possuem a característica de serem homogêneos e isotrópicos, e não são considerados muito realistas para descrever o Universo nos momentos muito próximos do instante inicial, porém são os que melhor descrevem sua situação atual (com

o conteúdo do Universo, no presente, descrito como poeira).

Nestes modelos, o elemento de linha tem a forma:

$$ds^2 = -dt^2 + R(t)(dr^2 + \chi(r)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)) , \quad (3.5.1)$$

com

$$\begin{cases} \chi(r) = \text{senh}(r) & \text{se } k = -1 ; \\ \chi(r) = r & \text{se } k = 0 ; \\ \chi(r) = \text{sen}(r) & \text{se } k = 1 . \end{cases} \quad (3.5.2)$$

onde os modelos com  $k = -1$  são fechados e aqueles com  $k = 0$  ou  $k = 1$  são abertos.

Para estes modelos o tensor Energia-Momentum tem a forma de um fluido perfeito, eq. (3.4.2), com o Universo satisfazendo uma equação de estado do tipo  $p(\rho)$ .

As equações de Einstein, através de uma conveniente manipulação <sup>[29]</sup>, fornecem:

$$\dot{\theta} + 1/3\theta^2 = -4\pi G(\rho+3p) + \Lambda . \quad (3.5.3)$$

onde  $\theta$ , chamado fator de expansão isotrópico, é dado por:

$$\theta = \frac{\dot{R}}{R} . \quad (3.5.4)$$

A equação (3.5.3), conhecida como equação de Raichaudhuri <sup>[37]</sup>, com rotação e distorção nulas, governa a expansão do Universo isotrópico.

Energia-Momentum fornece:

$$\dot{\rho} = -(\rho + p)\theta \quad . \quad (3.5.5)$$

As equações (3.5.3), (3.5.4) e (3.5.5) formam um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, e sobre elas aplicaremos a Teoria de Bifurcação, no próximo capítulo.

## 4.0- INTRODUÇÃO:

A aplicação de métodos qualitativos na análise de modelos cosmológicos não é nova. O próprio trabalho inaugural de Poincaré (ref. [3]), apesar de ser essencialmente cosmogônico, poderia lançar luz no problema cosmológico de então, uma vez que permitiria explicar a formação de irregularidades locais (leia-se planetas, estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias), a partir de um parâmetro interno da nebulosa primordial. Mais recentemente, métodos qualitativos tem sido introduzidos para investigar aspectos fundamentais de modelos de Universo, preenchidos com um fluido viscoso, na tentativa de explicar a isotropização de modelos homogêneos inicialmente anisotrópicos [40][41][42][43][44]. Tais métodos permitem visualizar a evolução do Universo através de diagramas de fase (sempre bi-dimensionais), o que, de outro modo, seria muito complicado, mostrando os pontos de instabilidade estrutural, mas não determinam os pontos de bifurcação das equações de evolução dos modelos.

Para sistemas com mais do que duas equações, de qualquer modo, isto seria extremamente complicado, de modo que neste capítulo serão determinados analiticamente os pontos de bifurcação, ficando a confecção dos, provavelmente, belos diagramas de fase, para um trabalho posterior. Na próxima secção será mostrado que modelos de FRW com expansão dependente da constante

cosmológica, e densidade qualquer, sofrem uma bifurcação quando a equação de estado usada é aquela de um modelo inflacionário, e que este modelo se torna estável para valores clássicos de pressão ( $p > 0$ ). Na última secção, a Teoria de Bifurcação será aplicada para os modelos mais simples de Bianchi (Tipo I), e será mostrado que os modelos isotrópicos de Bianchi Tipo I são estruturalmente instáveis.

#### 4.1- MODELOS DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER (FRW):

Devemos aplicar a Teoria de Bifurcação ao conjunto de equações (3.5.3), (3.5.4) e (3.5.5), que descrevem a evolução de um Universo que segue o modelo FRW. Estas equações, escritas de uma forma conveniente, são:

$$\dot{R} = \theta R \quad , \quad (4.1.1)$$

$$\dot{\theta} = -4\pi G(\rho+3p) + \Lambda - 1/3\theta^2 \quad , \quad (4.1.2)$$

$$\text{e } \dot{\rho} = -(\rho+p)\theta \quad . \quad (4.1.3)$$

Assumindo uma equação de estado do tipo:

$$p = (\delta-1)\rho \quad , \quad (4.1.4)$$

as equações (4.1.2) e (4.1.3) ficam:

$$\dot{\theta} = -4\pi G(3\delta-2)\rho + \Lambda - 1/3\theta^2 \quad , \quad (4.1.5)$$

$$e \quad \dot{\rho} = -\delta\rho\theta \quad . \quad (4.1.6)$$

Os pontos de equilíbrio (no espaço de fase) são aqueles onde a taxa de variação no tempo das grandezas dinâmicas se anula:

$$\dot{R} = 0 \quad , \quad \dot{\theta} = 0 \quad e \quad \dot{\rho} = 0.$$

O conjunto de equações que definem estes pontos, então, é:

$$\theta R = 0 \quad , \quad (4.1.7)$$

$$-4\pi G(3\delta-2)\rho + \Lambda - 1/3\theta^2 = 0 \quad , \quad (4.1.8)$$

$$-\delta\rho\theta = 0 \quad . \quad (4.1.9)$$

Estas equações fornecem dois pontos de equilíbrio:

$$\text{ponto } P_1: \left\{ \begin{array}{l} R \text{ qualquer ;} \\ \theta = 0 ; \\ \rho = \frac{\Lambda}{-4\pi G(3\delta-2)} . \end{array} \right. \quad e \quad \text{ponto } P_2: \left\{ \begin{array}{l} R = 0 ; \\ \theta = \sqrt{3\Lambda} ; \\ \rho = 0 . \end{array} \right.$$

A matriz jacobiana para o conjunto de equações

(4.1.1), (4.1.5) e (4.1.6) é:

$$M = \begin{pmatrix} \theta & R & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\theta & -4\pi G(3\delta-2) \\ 0 & -\delta\rho & -\delta\theta \end{pmatrix}. \quad (4.1.10)$$

Para o ponto  $P_1$ , o determinante desta matriz é identicamente nulo. Este ponto no espaço de fase corresponde a um Universo com expansão nula e densidade constante. Conforme o valor de  $\delta$  se aproxima de  $-2/3$ , a densidade se torna infinita. Para este valor de  $\delta$ , a equação de estado fica:

$$p = -\frac{4}{3} \rho. \quad (4.1.11)$$

Um fluido perfeito não suporta grandes pressões negativas, de modo que este modelo não serve para descrever o Universo atual, mas ainda assim poderia descrever o Universo primordial. Calculando o determinante da matriz linearizada  $M_1$ , obtemos que ( $M_1$  indica a matriz linearizada calculada para o ponto  $P_1$ ):

$$\det \begin{pmatrix} -s & R & 0 \\ 0 & -s & -4\pi G(3\delta-2) \\ 0 & \frac{-\delta\Lambda}{-4\pi G(3\delta-2)} & -s \end{pmatrix} = 0; \quad (4.1.12)$$

ou seja:

$$s^2 = -\Lambda\delta \quad . \quad (4.1.13)$$

Esta equação indica que o ponto  $P_1$  é um ponto de instabilidade estrutural, embora possa não ser um ponto de bifurcação (basicamente, autovalores imaginários estão relacionados com soluções periódicas).

Para o ponto  $P_2$ , o determinante de  $M_2$  fornece:

$$\det(M) = 2\delta(3\Lambda^3)^{1/2} \quad (4.1.14)$$

e se anula quando  $\delta = 0$ . O ponto  $P_2$  pode ser um ponto de bifurcação, e o parâmetro  $\delta$  um parâmetro de bifurcação, se algum dos coeficientes de estabilidade mudar de sinal. Para ver isto, devemos calcular os autovalores da matriz jacobiana linearizada, no ponto  $P_2$ , e estudar seu comportamento quando  $\delta$  cruza o valor zero:

$$\det \begin{pmatrix} \sqrt{3\Lambda} - s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{3\Lambda} - s & -4\pi G(3\delta-2) \\ 0 & 0 & -\delta\sqrt{3\Lambda} - s \end{pmatrix} = 0 \quad . \quad (4.1.15)$$

o que implica que:

$$s = -\delta\sqrt{3\Lambda} \quad (4.1.16)$$

muda de sinal quando  $\delta$  cruza o valor zero. O ponto  $P_2$ , portanto, é um ponto de bifurcação, e  $\delta$  um parâmetro de bifurcação. É interessante notar que  $\delta = 0$  corresponde a uma equação de estado:

$$p = -\rho \quad ,$$

(4.1.17)

que corresponde à equação de estado de um modelo inflacionário de Universo.

De acordo com a teoria de bifurcação, em  $\delta = 0$  existe uma solução de equilíbrio diversa daquela determinada pelo ponto  $P_2$ . É fácil notar que nesta solução a densidade  $\rho$  pode ser não nula, e então:

$$\theta = \sqrt{3\Lambda + 24\pi G\rho} \quad ; \quad (4.1.18)$$

Uma equação de estado deste tipo, eq. (4.1.17), implica que este modelo possui expansão exponencial (modelo inflacionário).<sup>[25][36]</sup>

Pode ser visto ainda, que conforme o valor de  $\delta$  se torna positivo, o equilíbrio passa a ser estável, o que implica em que a pressão aumenta até atingir valores clássicos.

## 4.2- MODELOS DE BIANCHI:

Para modelos de classe A as equações dinâmicas são:

$$\begin{aligned}
 \Lambda + 1/2(\rho-p) &= \\
 &= \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{XY}}{XY} + \frac{\ddot{XZ}}{XZ} + \frac{1}{2} \left( \frac{N_1 X}{Y Z} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{N_2 Y}{X Z} - \frac{N_3 Z}{X Y} \right)^2 ; \\
 &= \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\ddot{YX}}{YX} + \frac{\ddot{YZ}}{YZ} + \frac{1}{2} \left( \frac{N_2 Y}{X Z} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{N_3 Z}{X Y} - \frac{N_1 X}{Y Z} \right)^2 ; \\
 &= \frac{\ddot{Z}}{Z} + \frac{\ddot{ZX}}{ZX} + \frac{\ddot{ZY}}{ZY} + \frac{1}{2} \left( \frac{N_3 Z}{X Y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{N_1 X}{Y Z} - \frac{N_2 Y}{X Z} \right)^2 .
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

A equação de vínculo é:

$$\begin{aligned}
 \rho + \Lambda &= \frac{\ddot{XY}}{XY} + \frac{\ddot{YZ}}{YZ} + \frac{\ddot{ZX}}{ZX} + \frac{1}{2} \left( \frac{N_2 N_3}{X^2} + \frac{N_1 N_3}{Y^2} + \frac{N_2 N_1}{Z^2} \right) + \\
 &+ \frac{1}{4} \left( \left( \frac{N_3 Z}{X Y} \right)^2 + \left( \frac{N_1 X}{Y Z} \right)^2 + \left( \frac{N_2 Y}{Z X} \right)^2 \right) .
 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

E a equação de conservação é:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} = - \left( \frac{\dot{X}}{X} + \frac{\dot{Y}}{Y} + \frac{\dot{Z}}{Z} \right) . \tag{4.2.3}$$

Aqui devem ser feitas algumas transformações de variáveis, de modo a deixar o sistema na forma de um sistema de equações de primeira ordem. Deste modo, temos:

$$\alpha = \dot{X}/X \quad ; \quad (4.2.4)$$

$$\beta = \dot{Y}/Y \quad ; \quad (4.2.5)$$

$$e \quad \gamma = \dot{Z}/Z \quad . \quad (4.2.6)$$

Além de:

$$\mu = \frac{N_1 X}{YZ} \quad , \quad \nu = \frac{N_2 Y}{XZ} \quad e \quad \lambda = \frac{N_3 Z}{XY} \quad . \quad (4.2.7)$$

Para os modelos de Bianchi tipo I, uma vez que  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  são nulos, ficamos com um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, formado pelas equações (4.2.1), (4.2.3) até as equações (4.2.6), onde fizemos uso de uma equação de estado do tipo  $p = (1 - 2\delta)\rho$ :

$$\dot{X} = \alpha X \quad ;$$

$$\dot{Y} = \beta Y \quad ;$$

$$\dot{Z} = \gamma Z \quad ;$$

$$\dot{\alpha} = -\alpha^2 + \Lambda + \delta\rho - \alpha\beta - \alpha\gamma \quad ; \quad (4.2.8)$$

$$\dot{\beta} = -\beta^2 + \Lambda + \delta\rho - \alpha\beta - \beta\gamma \quad ;$$

$$\dot{\gamma} = -\gamma^2 + \Lambda + \delta\rho - \beta\gamma - \alpha\gamma \quad ;$$

$$\dot{\rho} = -2(1 - \delta)\rho(\alpha + \beta + \gamma) \quad .$$

Os pontos de equilíbrio serão os pontos:

$$\text{Ponto } B_1: \begin{cases} X, Y, Z \text{ quaisquer;} \\ \alpha = \beta = \gamma = 0; \\ \rho = -\Lambda/\delta. \end{cases}$$

$$\text{Ponto } B_2: \begin{cases} X = Y = Z = 0; \\ \alpha = \beta = \gamma = \sqrt{3\Lambda}; \\ \rho = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ponto } B_3: \begin{cases} X = Y = Z = 0; \\ \alpha \neq 0 \text{ e/ou } \beta \neq 0 \text{ e/ou } \gamma \neq 0, (\alpha + \beta + \gamma) = 0; \\ \rho = -\Lambda/\delta. \end{cases}$$

Para os pontos  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$ , o determinante da matriz jacobiana é identicamente nulo. A matriz geral linearizada, que permite calcular os autovalores é:

$$\det M = \det \begin{pmatrix} \alpha-s & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-s & 0 & 0 & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma-s & 0 & 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha-s & -\alpha & -\alpha & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -2\beta & -\beta-s & -\beta & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -2\gamma & -\gamma & -\gamma-s & \delta \\ 0 & 0 & 0 & b\rho & b\rho & b\rho & bH-s \end{pmatrix} = 0 \quad ; \quad (4.2.9)$$

onde  $b = -2(1 - \delta)$  e  $H = \alpha + \beta + \gamma$ .

Para o ponto  $B_1$ , os autovalores da matriz linearizada são dados por uma equação do tipo:

$$s^5(s^2 - 6\Lambda(1 - \delta)) = 0 ;$$

o que corresponde a mesma situação do ponto  $P_1$  dos modelos de FRW.

Para o ponto  $B_2$ , obtemos uma equação :

$$s^2(s - \sqrt{3\Lambda})^3(s + 4\sqrt{3\Lambda})(s + 6\sqrt{3\Lambda}(1 - \delta)) = 0 ;$$

portanto o ponto  $B_2$  é um ponto de bifurcação, com  $\delta = 1$ . Este valor de  $\delta$  corresponde a uma equação de estado:

$$p = -\rho ;$$

e então o ponto  $B_2$  corresponde ao ponto  $P_2$  de FRW. É interessante notar que para este ponto, os fatores de expansão,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , possuem a mesma dependência com a constante cosmológica, o que indica uma expansão isotrópica.

Para o ponto  $B_3$  (os demais termos em  $s$  não são relevantes aqui, como pode ser visto na equação para  $s$  do ponto  $B_1$ ), temos:

$$s^2 = 6\Lambda(1 - \delta);$$

o que mostra que o ponto B<sub>3</sub> é equivalente ao ponto B<sub>1</sub>.

Em termos das grandezas médias, as equações de Einstein para o modelo de Bianchi I podem ser escritas na forma da equação de Raychaudhuri, com um termo a mais descrevendo a anisotropia. Para ver isto, definimos as seguintes grandezas:

$$\text{Fator de escala médio: } R = (XYZ)^{1/3} ; \quad (4.2.10)$$

$$\text{Fator de expansão médio: } H = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) ; \quad (4.2.11)$$

com  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  definidas nas equações (4.2.4) até (4.2.6);

$$\text{Anisotropia média: } A = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{H_i - H}{H} \right)^2 . \quad (4.2.12)$$

Da definição de H, temos:

$$\rightarrow \dot{V} \quad 3 \frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{Z}}{Z} = 0 , \quad (4.2.13)$$

e uma solução possível para esta equação é, considerando apenas termos de ordem ímpar até a terceira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{X}/X &= \dot{R}/R + a/R^3 ; \\ \dot{Y}/Y &= \dot{R}/R + b/R^3 ; \\ \dot{Z}/Z &= \dot{R}/R + c/R^3 ; \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

com a, b e c constantes tais que  $(a + b + c) = 0$ , para satisfazer a equação (4.2.13).

Com a ajuda da equação (4.2.14), a eq. (4.2.2)

fica:

$$\rho + \Lambda = 3 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)/R^6 . \quad (4.2.15)$$

Derivando esta equação em relação ao tempo, e usando a equação de conservação (eq.(4.2.3)), temos:

$$3\dot{H} = - \frac{(\rho + 3p)}{2} - \sigma^2 + \Lambda - 3H^2 ; \quad (4.2.16)$$

que é a equação de Raychaudhuri, com o termo de cisalhamento dado por:

$$\sigma^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/R^6 . \quad (4.2.17)$$

Este termo está relacionado com a anisotropia do modelo, como pode ser visto pela definição de A (eq.(4.2.12)).

Derivando esta última equação com respeito ao tempo, obtemos:

$$\dot{\sigma} = -3\sigma H . \quad (4.2.18)$$

Utilizando uma equação de estado do tipo  $p = (\delta - 1)\rho$ , as equações (4.2.16), (4.2.3) e (4.2.18) formam um conjunto de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, onde podemos aplicar a teoria de bifurcação:

$$\dot{3H} = - \frac{(3\delta - 2)}{2} \rho - \sigma^2 + \Lambda - 3H^2 ;$$

$$\dot{\rho} = -\delta\rho H ; \tag{4.2.19}$$

$$\dot{\sigma} = -3\sigma H .$$

Os pontos de equilíbrio são:

$$\text{Ponto } Q_1 : \begin{cases} H = \sqrt{\Lambda/3} ; \\ \rho = 0 ; \\ \sigma = 0 . \end{cases}$$

$$\text{Ponto } Q_2 : \begin{cases} H = 0 ; \\ \rho = \frac{2\Lambda}{\delta - 2} ; \\ \sigma = \left( \frac{2\delta\Lambda}{2 - \delta} \right)^{1/2} . \end{cases}$$

A matriz Jacobiana para o ponto  $Q_1$  é:

$$M = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\Lambda/3} & \frac{-3\delta + 2}{6} & 0 \\ 0 & -\delta\sqrt{\Lambda/3} & 0 \\ 0 & 0 & -3\sqrt{\Lambda/3} \end{pmatrix} ,$$

e se anula quando  $\delta$  se anular. O determinante da matriz linearizada fornece a equação:

$$s = -\delta\sqrt{\Lambda/3} ,$$

o que mostra que o ponto  $Q_1$  é um ponto de bifurcação. Este modelo corresponde a um Universo isotrópico ( $\sigma = 0$ ), com expansão exponencial (a equação de estado é  $p = -\rho$ ), e é, formalmente, o

mesmo ponto B<sub>2</sub>.

Para o ponto Q<sub>2</sub>, a matriz jacobiana é:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-3\delta + 2}{6} & -\frac{2}{3} \left( \frac{2\delta\Lambda}{2 - \delta} \right)^{1/2} \\ \frac{-2\delta\Lambda}{\delta - 2} & 0 & 0 \\ -3 \left( \frac{2\delta\Lambda}{2 - \delta} \right)^{1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que é identicamente nula. A equação de autovalores da matriz linearizada é:

$$s \left[ s^2 - \frac{\delta\Lambda}{3} \left( 3 - \frac{8}{\delta - 2} \right) \right] = 0 ,$$

o que ocorre para  $s_1 = 0$  ou para  $s_2^2 = \frac{\delta\Lambda}{3} \left( 3 - \frac{8}{\delta - 2} \right)$ . Vemos que  $s_2$  passa de real para imaginário quando temos aproximadamente  $\delta$  na faixa menor que  $1/6$  ou maior que  $25/6$ , o que implica em uma pressão menor que  $-5/6\rho$  ou maior que  $19/6\rho$ . Um modelo inflacionário, com  $p = -\rho$ , implicaria que a solução de equilíbrio para o Universo seria essencialmente periódica, enquanto que para modelos não inflacionários, o ponto Q<sub>2</sub> é ponto de equilíbrio (uma pressão tão grande,  $p > 3\rho$ , não é possível fisicamente).

### 4.3- CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS:

Podemos notar, a partir dos resultados da aplicação da Teoria de Bifurcação nos modelos cosmológicos homogêneos, que a origem ( $X = Y = Z = 0$ ) corresponderá sempre a um ponto de bifurcação, quando os modelos possuírem expansão isotrópica e forem inflacionários. É de se notar que tais pontos são os pontos  $B_2$  e  $Q_1$  em Bianchi I, porque nestes modelos  $\alpha = \beta = \gamma$  ou  $\sigma = 0$  significa que a expansão é isotrópica (ou que a distorção é nula, o que vem ser a mesma coisa). Os demais pontos, embora não sejam pontos de bifurcação, mostram que ocorre uma mudança qualitativa no comportamento das soluções das equações de campo, quando consideramos modelos estáticos (expansão nula), densidade não nula, e com equação de estado típica de modelos inflacionários ( $P_1$ ,  $B_1$  e, de certa forma,  $B_3$  e  $Q_2$ ).

É igualmente importante notar que para obter modelos inflacionários obrigamos a constante cosmológica a ser não nula, e assim ela não poderia ser um parâmetro de bifurcação. Se relaxarmos esta condição, porém, observamos que para cada modelo analisado, as soluções se reduziram a uma, indicando uma mudança no número de soluções, o que é característico de uma bifurcação. Este resultado, embora pareça trivial, mostra que modelos homogêneos preenchidos com um fluido perfeito carregam uma certa instabilidade estrutural.

O próximo passo adiante na aplicação da Teoria de Bifurcação na Cosmologia deve ser dado na busca de analisar os modelos de Bianchi IX. Tais modelos despertam o interesse, por

serem uma generalização dos modelos fechados de FRW, e, também, pela busca de um condição geral que permita a evolução do Universo a partir de uma situação inicial arbitrária.

## BIBLIOGRAFIA

- [1]- Andronov, A. A., *et al.* - Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems - Wiley, New York (1973).
- [2]- Abraham, R. and Marsden, J. E. - Foundations of Mechanics, 2nd ed. - Benjamin/Cummings, Reading (1978).
- [3]- Poincaré, H. - Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation - *Oeuvres* Z, p.140 - Gauthier-Villars (1952).
- [4]- Berger, M.S. - Nonlinearity and Functional Analysis - Academic Press, New York (1977).
- [5]- Crandall, M.G. and Rabinowitz, P.H. - Mathematical Theory of Bifurcation - *in* Bifurcation Phenomena in Mathematical Physics and Related Topics, ed. C. Bardos and D. Bessis - D. Reidel, Dordrecht (1979).
- [6]- Andronov, A. A. *et al.* - Theory of Bifurcation of Dynamical Systems in the Plane - Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem (1971).

- [7]- Guckenheimer, J. and Holmes, P. - Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields - Springer-Verlag, New York (1983).
- [8]- Kuelkamp, N. - Introdução à Topologia Geral - Editora da UFSC, Florianópolis, 1988.
- [9]- Lima, E. L. - Espaços Métricos - Impa, Rio de Janeiro (1983).
- [10]- Lima, E. L. - Elementos de Topologia Geral - Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro (1970).
- [11]-Pervin, W. - Foundations of General Topology - Academic Press, New York (1964).
- [12]-Kuratowsky, K. - Topology, vol 1 - Academic Press, New York (1966).
- [13]-Sotomayor, J. - Structural Stability and Bifurcation Theory e Generic Bifurcation of Dynamical Systems - ambos in Dynamical Systems, ed. M. Peixoto - Academic Press, New York (1973).
- [14]-Golubitsky, M. and Schaeffer, D. G. - Singularities and Groups in Bifurcation Theory, vol 1 - Springer-Verlag, New York (1985).

- [15]-Iooss, G. and Joseph, D. D. - Elementary Stability and Bifurcation Theory - Springer-Verlag, New York (1981).
- [16]-Taylor, A. E. and Mann, W. R. - Advanced Calculus - Wiley, New York (1983).
- [17]-Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines - (ed.) O. Gurel and O. E. Rössler - Annals of the NY Academy of Sciences, vol 316 (1973).
- [18]-Crandall, M. G. and Rabinowitz, P. H. - Bifurcation from simple eigenvalue - J. Func. Analysis 8, p321, (1971).
- [19]-Hawking, S.W. and Ellis, G.F.R. - The Large Scale Structure of Space-Time - Cmbridge University Press, Cambridge, 1973 (páginas 189 e 190).
- [20]-Misner, C.W., Thorne, K.S. and Wheeler, J.A. - Gravitation - Freeman, San Francisco, 1973.
- [21]-Weimberg, S. - Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Gravitation - John Wiley, New York, 1972.
- [22]-Einstein, A. - The Meaning of Relativity - Princeton University Press, Princeton, 1955 - 5<sup>a</sup> ed.

- [23]-Ryan jr, M.P. and Shepley, L.C. - Homogeneous Relativistic Cosmologies - Princeton University Press, Princeton, 1975.
- [24]-Friedmann, A. - Über die Krümmung des Raumes - Z.Phys., 10, 377 (1922).
- [25]-Guth, A.H. - Inflationary Universe: A possible solution to the horizon and flatness problems - Phys.Rev.D, 23, 347 (1981).
- [26]-Eisenhart, L.P. - Continuous Groups of Transformations - Dover, New York, 1961.
- [27]-Einstein, A. - Cosmological Considerations on the General Theory of Relativity - *in* The Principle of Relativity - Dover, New York, 1923.
- [28]-Gödel, K. - An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation - Rev. Mod. Phys., 21, 447 (1949).
- [29]-Misner, C. - The Isotropy of the Universe - Astrophys.J., 151, 431 (1968).
- [30]-Bianchi, L. - Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti trasformazioni - Spoerri, Pisa, 1918.

- [31]-Behr, C.C. - Generalization of the Friedmann World Model with Positive Space Curvature - Z.Astrophys., 54, 268 (1962).
- [32]-Estabrook, F.B., Wahlquist, H.D. and Behr, C.G. - Dyadic Analysis of Spatially Homogeneous World Models - J.Math.Phys., 9, 497 (1968).
- [33]-Ellis, G.F.R. and MacCallum, M.A.H. - A Class of Homogeneous Cosmological Models - Commun.Math.Phys., 12, 108 (1969).
- [34]-Lima, J.A.S. - Uma Generalização dos Modelos Cosmológicos Inomogêneos de Szekeres - Tese de Mestrado, CBPF, Rio de Janeiro, 1982.
- [35]-Taub, A.H. - Empty Space-Times Admitting a Three Parameter Group of Motions - Ann.Math., 53, 472 (1951).
- [36]-Silva Filho, A.C.R. - Sobre o Mecanismo de Inflação em Modelos Cosmológicos Anisotrópicos - Tese de Mestrado, IFGW, Campinas, 1987.
- [37]-Raychaudhuri, A. - Relativistic Cosmology I - Phys.Rev., 98, 1123 (1955).
- [38]-Ellis, G.F.R. - Dynamics of Pressure-Free Matter in General Relativity - J.Math.Phys., 8, 1171 (1967).

- [39]-Stewart, J.M. and Ellis, G.F.R. - Solutions of Einstein's Equations for a Fluid With Exhibit Local Rotational Symmetry - J.Math.Phys., 9, 1072 (1968).
- [40]-Belinskii, V.A. and Khalatnikov, I.M. - Influence of Viscosity on the Character of Cosmological Evolution - Sov.Phys.JETP, 42, 205 (1976).
- [41]-Matzner, R.A. and Misner, C.W. - Dissipative Effects in the Expansion of the Universe I - Astrophys.J., 171, 415 (1972).
- [42]-Shikin, I.S. - An Investigation of Gravitational Fields in an Anisotropic Model With Matter and Neutrinos - Sov.Phys.JETP, 36, 811 (1973).
- [43]-Novello, M. and Araújo, R.A. - Qualitative analysis of Homogeneous Universes - Phys.Rev.D, 22, 260 (1980).
- [44]-Novello, M. and Rodrigues, L.M.C.S. - Bifurcation in the Early Cosmos - Proceedings of the Third Marcel Grossmann Meeting on General Relativity - Hu Ning (ed.), Science Press and North-Holland Publishing Company, 1983.