Fabio Stucchi Vannucchi

# Termodinâmica Estatística de Não-Equilíbrio da Condensação de Fröhlich-Bose-Einstein de Mágnons Excitados

Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Doutor em Ciências Naturais.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Luzzi
Co-orientadora: Profa. Dra. Áurea R. Vasconcellos

Campinas

2011

Este exemplar corresponde à redação final da Tese de Doutorado defendido pelo aluno Fabio S. Vannucchi e aprovada pela Comissão Julgadora

IFGW 21/10/2011

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR**
**VALKÍRIA SUCCI VICENTE – CRB8/5398 - BIBLIOTECA DO IFGW**
**UNICAMP**

| | |
|---|---|
| | Vannucchi, Fabio Stucchi, 1981- |
| V339t | Termodinâmica estatística de não-equilíbrio da condensação de Fröhlich-Bose-Einstein de mágnons excitados / Fabio Stucchi Vannucchi. -- Campinas, SP : [s.n.], 2011. |
| | Orientadores: Roberto Luzzi, Áurea R. Vasconcellos. |
| | Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”. |
| | 1. Termodinâmica de sistemas em não-equilíbrio. 2. Magnetismo. 3. Ondas de spin. 4. Mágnons. 5. Magnônica. 6. Fröhlich-Bose-Einstein, Condensação de. I. Luzzi, Roberto, 1936- II. Vasconcellos, Áurea Rosas, 1939- III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física “Gleb Wataghin”. IV. Título. |

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Non-equilibrium statistical thermodynamics of the Fröhlich-Bose-Einstein condensation of hot magnons
**Palavras-chave em inglês:**
Nonequilibrium thermodynamics
Magnetism
Spin waves
Magnons
Magnonics
Fröhlic-Bose-Einstein condensation
**Área de Concentração:** Física Estatística e Termodinâmica
**Titulação:** Doutor em Ciências
**Banca Examinadora:**
Roberto Luzzi [Orientador]
André Bohomoletz Henriques
Silvio Roberto de Azevedo Salinas
Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzún
José Galvão Pisapia Ramos
**Data da Defesa:** 14-08-2011
**Programa de Pós-Graduação em:** Física

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **FABIO STUCCHI VANNUCCHI – RA 066863,** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 14/09/2011.

**COMISSÃO JULGADORA:**

Prof. Dr. Roberto Luzzi – DFMC/IFGW/UNICAMP
(Orientador do Candidato)

Prof. Dr. José Galvão de Pisapia Ramos – DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzún – DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Silvio Roberto de Azevedo Salinas – IF/USP

Prof. Dr. André Bohomoletz Henriques – IF/USP

Para Ana, Isa e Rosa

# Agradecimentos

Agradeço aos meus orientadores Roberto Luzzi e Áurea R. Vasconcellos pela paciente e dedicada orientação. Agradeço também pelas prazerosas reuniões, verdadeiras aulas de física.

À Professora Vera B. Henriques, pelos frutíferos conselhos.

Ao professor Sergio M. Rezende, pelas diversas contribuições ao longo deste trabalho.

Aos colegas de pós-graduação, pelas alegrias e angústias compartilhadas.

Agradeço ainda à Isa, como não-especialista interessada, pelas preciosas opiniões e idéias. E, como companheira, por todo o apoio dedicado.

*O presente trabalho foi realizado com apoio institucional da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), do Instituto de Física "Gleb Wataghin" (IFGW) e do Departamento de Física da Matéria Condensada (DFMC), e foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).*

C. PORTINARI, *D. Quixote de cócoras com idéias delirantes*, 1956.

# Resumo

Este trabalho tem por objetivo desenvolver uma teoria sobre a termodinâmica de não-equilíbrio de mágnons excitados por fonte externa e em contato com um banho térmico. A teoria é aplicada ao recém observado acúmulo de mágnons nos estados de mínima freqüência em experimentos com filmes finos magnetizados de granada de ferro-ítrio afastados do equilíbrio via fonte de radiação de microondas. Seguindo um formalismo de ensembles estatísticos de não-equilíbrio, a partir do hamiltoniano do sistema magnético são obtidas as equações de evolução para as variáveis termodinâmicas. Entre estas equações, as que descrevem a evolução das populações médias de mágnons são estudadas em detalhe e atenção especial é dada às contribuições não-lineares. Mostra-se que, por um lado, o termo não-linear proveniente da interação do sistema magnético com a rede cristalina transfere energia das populações dos modos de alta freqüência para os de baixa, gerando um acúmulo nos modos de mínima freqüência - o *Efeito Fröhlich*. Por outro lado, a interação mágnon-mágnon origina uma contribuição à evolução das populações que tende a termalizar o sistema em termos de uma temperatura de não-equilíbrio. É ainda utilizada uma "modelagem de dois fluidos", em que as equações cinéticas das populações de mágnons associadas a todos os modos são contraídas em apenas duas, que representam os modos de mínima freqüência e aqueles alimentados. Esta modelagem permite estudar quantitativamente a evolução temporal do sistema via integração numérica. Constata-se que, para um determinado intervalo de taxas de alimentação, forma-se o condensado devido ao Efeito Fröhlich. Para valores mais altos da potência da fonte de alimentação, a contribuição devido à interação entre mágnons torna-se dominante e a formação do condensado é inibida. Por fim, os diversos processos de relaxação do condensado para o equilíbrio são investigados em função do valor da fonte externa do sistema.

Palavras-chave: Termodinâmica de não-equilíbrio; Magnetismo; Ondas de spin; Magnônica, Condensação de Fröhlich-Bose-Einstein.

# Abstract

The purpose of this work is to develop a nonequilibrium thermodynamic theory on magnons excited by an external pumping source embedded in a thermal bath. This theory is applied to the recently observed experiments with magnetic thin films of yttrium iron garnet driven out of equilibrium through microwave radiation pumping. Resorting to a Non-Equilibrium Statistical Ensemble Formalism, the evolution equations for the magnon populations are obtained and studied. The nonlinear contribution arising out of the spin-lattice interaction transfers the energy in excess of equilibrium from the pumped frequency modes to the lower frequency ones, and, in a cascade down process, occurs a large grow in the magnon populations of the lowest in frequency modes - a phenomenon we call *Fröhlich Effect*. In opposition to this contribution, there is another one, generated by the magnon-magnon interaction, that tends to lead the system to a state of internal nonequilibrium thermalization. We introduce a modeling consisting in a kind of "two-fluid model", in which the kinetic equations for the magnon populations are contracted in only two, representing the modes lowest in frequency and the ones that are pumped by the external source. A quantitative study is performed through numerical integration of the two related evolution equations. The emergence of the condensate, due to the Fröhlich Effect, is evidenced for a range of source power. For higher feeding taxes, the contribution originated by the magnon-magnon interaction becomes dominant and the emergence of the condensate is inhibited. Finally, the several relaxation processes in the condensate leading to equilibrium are analyzed in terms of the source power.

Key words: Nonequilibrium Thermodynamics; Magnetism; Spin waves and magnons; Magnonics, Fröhlich-Bose-Einstein Condensate.

# Sumário


**Introdução** **1**

**1 Sistemas Magnéticos e Mágnons** **5**

1.1 Caracterização Mecânica (microscópica) . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.1.1 Hamiltoniano de spins . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.1.2 Segunda quantização . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

1.1.2.1 Mágnons . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

1.1.2.2 Interação com a rede cristalina (fônons) . . . . . . . . 17

1.1.2.3 Interação com a radiação (fótons) . . . . . . . . . . . . 18

1.2 Caracterização Termodinâmica de Não-Equilíbrio . . . . . . . . . . . . 21

1.3 Resumo do Capítulo 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

**2 Equações Cinéticas** **31**

2.1 Equação de evolução para as amplitudes . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

2.2 Equação de evolução para os pares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

2.3 Equação de evolução para as populações . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

2.3.1 *Efeito Fröhlich* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

2.3.2 Interação mágnon-mágnon . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46

2.4 Resumo do Capítulo 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46

**3 Modelo de Dois Fluidos** **49**

3.1 Resumo do Capítulo 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55

**4 NEFBEC em filmes finos de YIG** **57**

4.1 Mágnons em filmes finos de YIG . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57

4.2 Condensação de Fröhlich-Bose-Einstein . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62

4.3 Modelo de dois fluidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64

4.3.1 Evolução temporal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66

4.3.2 Soluções estacionárias . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74

4.3.3 Relaxação para o equilíbrio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83

4.4 Resumo do Capítulo 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87

**Conclusão** **89**

**A *"Thermo-statistical theory of kinetic and relaxation processes"*** **93**

**B Valores médios dos operadores** **119**

B.1 Cálculo de $\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t \right\rangle$ e $\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t \right\rangle$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121

B.2 Cálculo de $\left\langle \hat{c}^{(\dagger)}_{\mathbf{q}_a} \hat{c}^{(\dagger)}_{\mathbf{q}_b}|t \right\rangle$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 122

B.3 Cálculo de $\left\langle \hat{c}^{(\dagger)}_{\mathbf{q}_a} \hat{c}^{(\dagger)}_{\mathbf{q}_b} \hat{c}^{(\dagger)}_{\mathbf{q}_c}|t \right\rangle$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123

**C Termos cinéticos** **127**

C.1 Amplitudes $(\hat{c}_{\mathbf{q}})$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 129

C.2 Correlações $(\hat{\sigma}_{\mathbf{q}} = \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}})$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 133

C.3 Populações $(\hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}} = \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}})$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 143

**D Modelagem de dois fluidos** **155**

D.1 Separação em regiões $R_1$ e $R_2$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 156

D.2 Teorema do valor médio e vínculos de equilíbrio . . . . . . . . . . . . . 159

**Referências Bibliográficas** **165**

# Introdução

O estudo de excitações coletivas de spin em materiais magneticamente ordenados (as ondas de spins e suas quasipartículas, os mágnons) tem uma longa história de mais de 80 anos [1–4]. Recentemente este estudo tem readquirido relevância, em parte por conta da observação da assim chamada Condensação de Bose-Einstein (BEC) de mágnons em filmes finos de granada de ferro-ítrio (YIG) afastados do equilíbrio [5–10]. Este fenômeno fundamenta a construção de fontes de microondas coerentes [11] e, desta forma, faz parte da recém criada *Magnônica*: disciplina - análoga à Eletrônica - associada aos dispositivos funcionais controlados por campos magnéticos em que os mágnons podem ser empregados como portadores de informação.

A dita condensação em condições de não-equilíbrio de mágnons foi primeiramente observada por Sergei O. Demokritov *et al.* em 2006 (Ref. 5), ao excitarem um filme fino de YIG, na presença de um campo magnético estático, com uma fonte de radiação de microondas. Utilizando técnicas de espectroscopia Brillouin, evidenciou-se a ocorrência de um surpreendente aumento da população de mágnons nos modos de mínima freqüência. Os experimentos detalham como os mágnons criados por conta da fonte externa em modos determinados pela freqüência da radiação bombeada se redistribuem pelo seu espectro de freqüências e acabam então por acumular-se em torno dos modos de mínima freqüência. Foram também investigadas a dependência do condensado com relação à potência da fonte externa e a forma como o sistema retorna ao equilíbrio ao desligar-se a fonte.

Várias propostas teóricas anteriores foram formuladas com o objetivo de abordar o fenômeno (ver, por exemplo, Refs. 12–14). Dentre elas temos a contribuição de I. S. Tupitsyn *et al.* [12] que, utilizando a teoria de superfluidez de N. N. Bogoliubov, concluem que a interação entre mágnons em um filme fino de YIG magnetizado na direção do plano deveria se contrapor à formação do condensado. Por outro lado, há o trabalho de S. M. Rezende [13], em que o surgimento do condensado é justificado ao se introduzir a ação de um banho térmico de "mágnons quentes", e aparentemente esta introdução mimetiza o efeito físico que aqui aparece como responsável pelo fenômeno. O trabalho de B. A. Maloumed *et al.* [14] apresenta o condensado em termos de funções de onda de mágnons e, segundo equações fenomenológicas, obtém padrões espaço-temporais compatíveis com experimentos envolvendo resolução espacial [15].

Neste trabalho é desenvolvida uma descrição dos processos de não-equilíbrio envolvidos no referido fenômeno. Para isso, consideramos os aspectos mecânicos (microscópicos) do sistema magnético em questão - um conjunto de spins localizados, sob campo magnético constante, afastados do equilíbrio pela ação de fonte externa e imersos em banho térmico - e utilizamos o formalismo de ensembles estatísticos de não-equilíbrio (que denominamos NESEF como acrônimo da expressão em inglês *Non-Equilibrium Statistical Ensemble Formalism* - ver Refs. 16–21) e sua teoria cinética associada para encontrarmos a evolução das correspondentes variáveis (macroscópicas) que caracterizam o espaço de estados termodinâmicos de não-equilíbrio.

São fundamentais para a emergência do citado fenômeno as não-linearidades presentes nas equações cinéticas obtidas. A interação entre os spins e o banho térmico (as vibrações da rede cristalina) dá origem a termos de interação mágnon-fônon, que levam a uma peculiar contribuição para as equações cinéticas das populações de mágnons. Esta contribuição não-linear promove a transferência de energia, mediada pela rede cristalina, dos modos alimentados pela fonte externa para aqueles de freqüências menores e é chamada de *termo de Fröhlich*, por conta de um termo análogo presente na pesquisa pioneira de Herbert Fröhlich sobre vibrações polares (fônons LO) em biopolímeros sob excitação escura (ver Refs. 22–25). As sucessivas transferências para os modos de menor freqüência fazem com que ocorra um acúmulo nos modos de mínima freqüência, o que pode ser chamado de *Efeito Fröhlich*, presente em vários sistemas de muitos bósons imersos em um banho térmico e sob ação de fonte externa que os afaste do equilíbrio [26–30], e levam à emergência do que chamamos de Condensação de Não-Equilíbrio de Fröhlich-Bose-Einstein (NEFBEC, de *Non-Equilibrium Fröhlich-Bose-Einstein Condensation*).

Outras contribuições não-lineares são também estudadas, como aquelas provenientes do decaimento dos mágnons em fótons e a da interação mágnon-mágnon. O comportamento das populações de mágnons é fruto do arranjo complexo entre as diversas contribuições. Mostramos aqui que o efeito Fröhlich é o responsável pela BEC de mágnons relatada anteriormente.

No primeiro capítulo descrevemos, em termos mecânicos e termodinâmicos, sistemas magnéticos sob a ação de fontes externas e interagindo com um banho térmico. Resumidamente, apresentamos o hamiltoniano associado aos subsistemas relevantes (descrição mecânica) e, para realizar a descrição termodinâmica de não-equilíbrio que permite caracterizar o fenômeno, recorremos ao uso do NESEF, cuja construção particularizada a este caso é detalhada.

No Capítulo 2, são obtidas as equações cinéticas das variáveis termodinâmicas de não-equilíbrio. Destas equações, analisamos em detalhe as equações de evolução das populações de mágnons associadas aos diversos modos, destacando o papel desempenhado pelas contribuições provenientes do termo de Fröhlich e da interação mágnon-mágnon, e evidenciando a origem da NEFBEC.

Baseados nos experimentos anteriormente mencionados, desenvolvemos no Capítulo 3 uma contração no sistema de equações diferenciais associadas às populações de mágnons de forma a separar o espaço recíproco em duas regiões, sendo uma associada aos modos de mais baixa freqüência, onde se dá o fenômeno da condensação, e a outra aos modos alimentados. Obtemos, portanto, um sistema de equações acopladas para apenas duas variáveis, as populações representativas do condensado e a alimentada. É o que chamamos de "Modelagem por Dois Fluidos" que, no Capítulo 4 é empregada de forma a possibilitar a comparação entre a teoria e os experimentos. Através da integração numérica das equações diferenciais não-lineares resultantes da modelagem são estudadas a evolução temporal destas populações relativas (a excitação devido à fonte externa e a posterior relaxação para o equilíbrio) e a dependência de seus valores estacionários com a intensidade da fonte externa.

Finalizando esta Introdução, enfatizamos que neste trabalho foi construída uma termodinâmica estatística de não-equilíbrio de sistemas magnéticos, utilizada para descrever o comportamento de mágnons sob ação de fonte externa e em contato com um banho térmico, e estudar a formação e desenvolvimento da NEFBEC.

# Capítulo 1

# Sistemas Magnéticos e Mágnons

Consideremos uma amostra de material magnético isolante afastado do equilíbrio pela ação de uma fonte externa e em contato com um reservatório térmico a temperatura $T_0$, descrito esquematicamente na Figura 1.1.

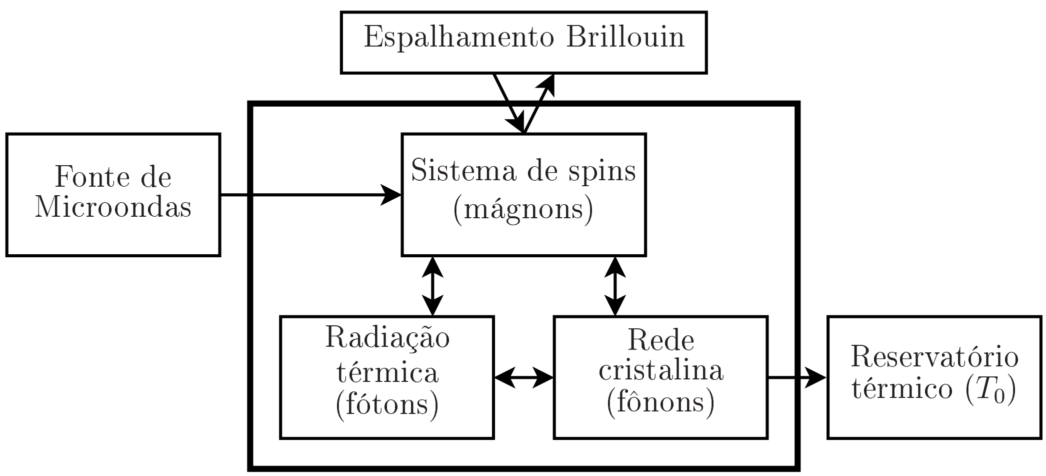



Figura 1.1: Diagrama ilustrativo do experimento mencionado na Introdução (de acordo com as Refs. 5–10). Os subsistemas da amostra relevantes neste trabalho são o sistema de spins, a rede cristalina e a radiação de corpo negro, que interagem entre si. A fonte de microondas, externa, introduz energia no sistema de spins. A relaxação do sistema de spins se dá através da interação entre rede cristalina e radiação de corpo negro com um reservatório térmico a temperatura $T_0$. Medidas experimentais sobre o sistema são feitas via espalhamento de luz tipo Brillouin.

Neste capítulo descrevemos os aspectos mecânico (microscópico) e termodinâmico (macroscópico) que compõem a termomecânica estatística associada ao sistema magnético em questão. Assim, na seção 1.1 é introduzido o hamiltoniano do sistema, e na seção 1.2 são apresentadas as variáveis termodinâmicas relevantes para o estudo do sistema.

## 1.1 Caracterização Mecânica (microscópica)

A partir da descrição da amostra e do experimento sobre ela realizado, nos concentraremos no estudo do comportamento do subsistema de spins, que a partir daqui chamaremos simplesmente de sistema. Para a descrição mecânica deste sistema é fundamental ter o operador hamiltoniano que, no caso de materiais magnéticos isolantes, é expresso em termos dos momentos magnéticos de dipolo associados aos íons magnéticos constituintes $\hat{\boldsymbol{\mu}}_i = \hat{\boldsymbol{\mu}}(\tilde{\mathbf{R}}_i)$, sendo $\tilde{\mathbf{R}}_i$ a posição do $i$-ésimo íon. Estes operadores estão associados ao que chamaremos de spins atômicos, designados pelo operador $\hat{\mathbf{S}}_i$, que interagem entre si, com o campo eletromagnético aplicado e com um banho térmico (ver as Refs. 3, 4, 31, 32). A relação entre os operadores atômicos de momento magnético e spin é

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_i = g\mu_{\mathrm{B}}\hat{\mathbf{S}}_i, \tag{1.1}$$

sendo $g$ o fator giromagnético e $\mu_{\mathrm{B}}$ é o magneton de Bohr.

### 1.1.1 Hamiltoniano de spins

O hamiltoniano do sistema que estamos considerando é formado por termos de interações entre spins atômicos, que envolvem indiretamente a interação com as vibrações da rede cristalina, e por interações entre estes spins com outros subsistemas, com campos aplicados e com a radiação de corpo negro. O termo do hamiltoniano associado a interação entre spins, $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}$, é formado por duas contribuições na forma

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}} = \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{dip}} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{troca}} \tag{1.2}$$

onde a primeira contribuição é o termo de interação entre dipolos magnéticos

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{dip}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{\mu}}_j}{\tilde{R}_{ij}^3} - \frac{3(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i\cdot\tilde{\mathbf{R}}_{ij})(\hat{\boldsymbol{\mu}}_j\cdot\tilde{\mathbf{R}}_{ij})}{\tilde{R}_{ij}^5}\right] = \frac{(g\mu_{\mathrm{B}})^2}{2}\sum_{i,j\neq i}\left[\frac{\hat{\mathbf{S}}_i\cdot\hat{\mathbf{S}}_j}{\tilde{R}_{ij}^3} - \frac{3(\hat{\mathbf{S}}_i\cdot\tilde{\mathbf{R}}_{ij})(\hat{\mathbf{S}}_j\cdot\tilde{\mathbf{R}}_{ij})}{\tilde{R}_{ij}^5}\right], \tag{1.3}$$

em que cada momento magnético $\hat{\boldsymbol{\mu}}_i = g\mu_{\mathrm{B}}\hat{\mathbf{S}}_i$ localiza-se na posição $\tilde{\mathbf{R}}_i$ associada ao $i$-ésimo íon magnético (e $\tilde{\mathbf{R}}_{ij} = \tilde{\mathbf{R}}_j - \tilde{\mathbf{R}}_i$). Também chamado de termo relativístico, este termo refere-se à energia associada ao momento magnético na posição $\tilde{\mathbf{R}}_i$ sob a presença de um campo magnético gerado pelo momento magnético na posição $\tilde{\mathbf{R}}_j$ [3, 4, 31].

A outra contribuição é o termo de troca (*exchange*). Válida para partículas fermiônicas carregadas, a interação de troca resulta do efeito combinado entre interação coulombiana e anti-simetria da função de onda global das partículas em questão [3, 31, 33]. Essa contribuição tem a forma

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{troca}} = -\sum_{i,j\neq i} J(\tilde{R}_{ij})\hat{\mathbf{S}}_i\cdot\hat{\mathbf{S}}_j, \tag{1.4}$$

sendo $J(\tilde{R}_{ij})$ o assim chamado parâmetro de troca e, novamente, $\hat{\mathbf{S}}_i$ o spin atômico na posição $\tilde{\mathbf{R}}_i$. Este parâmetro de troca depende basicamente da superposição das diferentes funções de onda individuais e é, portanto, negligenciável para pares de partículas distantes entre si - o que nos leva a afirmar que a interação de troca é de curto alcance, enquanto a interação de dipolo é de longo alcance. O ferromagnetismo e antiferromagnetismo são fases magnéticas de equilíbrio que têm sua origem em $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{troca}}$ em que o sinal de $J(\tilde{R}_{ij})$ (também conhecido por integral de superposição) determina a tendência ao alinhamento paralelo ($J(\tilde{R}_{ij}) > 0$) ou antiparalelo ($J(\tilde{R}_{ij}) < 0$) entre os momentos magnéticos $\hat{\boldsymbol{\mu}}_i$ e $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$ [31–33].

Das expressões (1.3) e (1.4) constata-se que o termo do hamiltoniano referente a interações entre spins depende da posição relativa $\tilde{\mathbf{R}}_{ij}$ entre os momentos magnéticos da rede cristalina, $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}} = \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}(\tilde{\mathbf{R}}_{ij})$. Mas as vibrações da rede cristalina levam a uma variação em $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}(\tilde{\mathbf{R}}_{ij})$ e este efeito pode ser tratado reescrevendo a posição de um spin atômico como

$$\tilde{\mathbf{R}}_i(t) = \tilde{\mathbf{r}}_i + \tilde{\mathbf{u}}_i(t), \tag{1.5}$$

sendo $\tilde{\mathbf{r}}_i$ as posições de equilíbrio mecânico dos íons magnéticos e $\tilde{\mathbf{u}}_i$ os deslocamentos com relação a estas. O termo de interação entre spins é então separado em duas contribuições,

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{ij}), \tag{1.6}$$

que será aqui simplesmente tratado como $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}$ e é a interação entre os spins nas posições de equilíbrio mecânico dos íons magnéticos, e o termo de acoplamento spin-rede $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SL}}$ que, para pequenos deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}_{ij}$, tem a seguinte forma [4]

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SL}} = \sum_{i,j\neq i} \left\{ \left[ \tilde{\mathbf{u}}_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{R}}_{ij}} \right] \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}) + \frac{1}{2} \left[ \tilde{\mathbf{u}}_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{R}}_{ij}} \right]^2 \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}) \right\}, \tag{1.7}$$

sendo as funções $\partial_{\tilde{\mathbf{R}}_{ij}} \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}(\tilde{\mathbf{R}}_{ij})$ calculadas em $\tilde{\mathbf{r}}_{ij}$, e onde $\tilde{\mathbf{u}}_{ij} = \tilde{\mathbf{u}}_j - \tilde{\mathbf{u}}_i$.

Finalmente, apresentamos o acoplamento dos momentos magnéticos com a radiação presente no material. A contribuição para o hamiltoniano associada a um momento magnético $\hat{\boldsymbol{\mu}}_i = \hat{\boldsymbol{\mu}}(\tilde{\mathbf{R}}_i)$ sob ação de um campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ é

$$-\int d^3r\, \hat{\boldsymbol{\mu}}(\tilde{\mathbf{R}}_i) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})\, \delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{R}}_i), \tag{1.8}$$

indicando a tendência de alinhamento do momento ao campo. As partes de $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ variáveis no tempo são separadas daquelas constantes no tempo, $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{\mathrm{R}}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ respectivamente, o que dá origem a dois termos distintos,

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{Z}} = -g\mu_{\mathrm{B}} \int d^3r \sum_i \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{r})\, \delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{R}}_i), \tag{1.9}$$

conhecido como o termo de Zeeman, e

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SR}} = -g\mu_{\mathrm{B}} \int d^3r \sum_i \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \mathbf{H}_{\mathrm{R}}(\mathbf{r})\, \delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{R}}_i), \tag{1.10}$$

que acopla os spins localizados nas posições $\tilde{\mathbf{R}}_i$ à radiação presente no material, proveniente da fonte externa e da radiação de corpo negro (dita radiação térmica).

Considerando ainda $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{L}}$ e $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{R}}$ as energias associadas às vibrações da rede cristalina e à radiação de corpo negro respectivamente, podemos então expressar o operador hamiltoniano de uma amostra de material magnético - omitindo graus de liberdade não descritos - por

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{Z}} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SR}} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{R}} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SL}} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{L}}, \tag{1.11}$$

sendo, lembremos, $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}$ a interação entre os spins nas posições de equilíbrio mecânico, $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{Z}}$ e $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SR}}$ representando respectivamente a interação dos spins com um campo magnético estático e com a radiação eletromagnética presente (externa e de corpo negro) e $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SL}}$ a interação entre os spins e as vibrações da rede cristalina.

### 1.1.2 Segunda quantização

Para o tratamento da dinâmica dos spins (assim como no caso de qualquer sistema quântico de muitos corpos) torna-se conveniente a utilização do formalismo da segunda quantização. Desta forma, apresentamos nesta seção a descrição do sistema de interesse em termos deste formalismo.

#### 1.1.2.1 Mágnons

A descrição de um sistema de spins através do formalismo de segunda quantização se dá em termos de excitações elementares a partir de um estado fundamental associado a $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}$. As excitações destes sistemas são formadas por combinações de pequenos desvios locais com relação ao estado fundamental. Bloch [1] representa estas excitações em termos de *ondas de spin*, e, considerando apenas a interação de troca, obtém o comportamento da magnetização em ferromagnetos a baixas temperaturas - a relação de $T^{\frac{3}{2}}$ de Bloch. Posteriormente, Holstein e Primakoff propõem uma teoria de ondas de spin que incorpora a interação dipolar e forma uma base para boa parte da pesquisa em excitações magnéticas.

Inicialmente, são introduzidos os operadores de desvio de spin local,

$$\hat{n}_j = S - \hat{S}_j^z, \tag{1.12}$$

sendo que consideramos o estado fundamental ferrimagnético, em que cada spin segue a direção do eixo $z$ (i.e. o autovalor de $\hat{S}_j^z$ é $S$ para todas as partículas). Claramente, o autovalor de $\hat{n}_j$ indica o número de desvios com relação a $S$, em unidades de $\hbar$, associado ao spin atômico na posição $\tilde{\mathbf{R}}_j$. Os operadores

$$\hat{S}_j^{\pm} = \hat{S}_j^x \pm i\hat{S}_j^y \tag{1.13}$$

criam ($\hat{S}_j^+$) e aniquilam ($\hat{S}_j^-$) "desvios de spin". Então, são introduzidos operadores de criação e aniquilação $\hat{a}_j^\dagger$ e $\hat{a}_j$ tais que

$$\hat{S}_j^- = \sqrt{2S}\hat{a}_j^\dagger\left(1-\frac{\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j}{2S}\right)^{1/2}, \quad \hat{S}_j^+ = \sqrt{2S}\left(1-\frac{\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j}{2S}\right)^{1/2}\hat{a}_j, \quad \hat{S}_j^z = S-\hat{n}_j = S-\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j. \tag{1.14}$$

Levando em conta ainda as relações de comutação entre as componentes do spin pode-se mostrar que representam quasipartículas bosônicas, pois obedecem as relações de comutação

$$\left[\hat{a}_j, \hat{a}_m^\dagger\right] = \delta_{l,m}; \quad [\hat{a}_j, \hat{a}_m] = 0; \quad \left[\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_m^\dagger\right] = 0. \tag{1.15}$$

Esta expressão de componentes de spin em termos dos operadores $\hat{a}_j^\dagger$ e $\hat{a}_j$, conhecida como transformação de Holstein-Primakoff (Ref. 2, referida como THP), é dada por

$$\begin{aligned}
\hat{S}_j^x &= \frac{\sqrt{2S}}{2}\left[\left(1-\frac{\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j}{2S}\right)^{1/2}\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger\left(1-\frac{\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j}{2S}\right)^{1/2}\right], \\
\hat{S}_j^y &= \frac{\sqrt{2S}}{2i}\left[\left(1-\frac{\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j}{2S}\right)^{1/2}\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger\left(1-\frac{\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j}{2S}\right)^{1/2}\right], \\
\hat{S}_j^z &= S-\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

É importante mencionar aqui que os novos operadores $\hat{a}_j^\dagger$ e $\hat{a}_j$ atuam em um espaço distinto do associado aos operadores de spin. Ao aplicar sucessivas vezes o operador $\hat{S}_j^-$ sobre o estado fundamental diminui-se a componente $z$ até o valor $-S$. Posteriores aplicações de $\hat{S}_j^-$ extinguiriam o referido autoestado, o que mostra que temos no máximo $2S$ "desvios de spin" para cada momento magnético na posição $\tilde{\mathbf{R}}_i$. Se por um lado o número de desvios de spin em uma dada posição é limitado, por outro lado, a princípio infinitas quasipartículas bosônicas podem ocupar um mesmo estado. Assim, a transformação de HP é efetivamente válida nos casos em que o autovalor de $\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j$ não ultrapassa $2S$.

Expandimos então o termo da raiz quadrada em potências de $S^{-1/2}$ e reescrevemos $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}$ utilizando a Eq. 1.16 para obtermos

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{H}}_{\text{troca}} &= -\sum_{i,j\neq i} J(\tilde{r}_{ij})(\hat{S}_i^x\hat{S}_j^x + \hat{S}_i^y\hat{S}_j^y + \hat{S}_i^z\hat{S}_j^z) = \\
&= -S^2\sum_{i,j\neq i} J(\tilde{r}_{ij}) + 2S\sum_i \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\sum_j J(\tilde{r}_{ij}) - 2S\sum_{i\neq j} J(\tilde{r}_{ij})\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j + \\
&\quad + \sum_{i,j\neq i} J(\tilde{r}_{ij})[\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j + \frac{1}{2}(\hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j + \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\hat{a}_j)] + S^2\mathcal{O}\left[(S^{-1/2})^6\right]; \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{H}}_{\text{dip}} =& \frac{(g\mu_B)^2}{2}\sum_{i,j\neq i}\left[\frac{\hat{S}_i^x\hat{S}_j^x + \hat{S}_i^y\hat{S}_j^y + \hat{S}_i^z\hat{S}_j^z}{\tilde{r}_{ij}^3} - \frac{3(\hat{S}_i^x\tilde{r}_{ij}^x + \hat{S}_i^y\tilde{r}_{ij}^y + \hat{S}_i^z\tilde{r}_{ij}^z)(\hat{S}_j^x\tilde{r}_{ij}^x + \hat{S}_j^y\tilde{r}_{ij}^y + \hat{S}_j^z\tilde{r}_{ij}^z)}{\tilde{r}_{ij}^5}\right] \\
=& \frac{(g\mu_B S)^2}{2}\sum_{i,j\neq i}\frac{1}{\tilde{r}_{ij}^3}\left(1 - \frac{3(\tilde{r}_{ij}^z)^2}{\tilde{r}_{ij}^2}\right) - \\
&- \frac{3(g\mu_B)^2(2S^3)^{1/2}}{4}\sum_{i,j\neq i}\frac{\tilde{r}_{ij}^z}{\tilde{r}_{ij}^5}\left[\tilde{r}_{ij}^-(\hat{a}_i + \hat{a}_j) + \tilde{r}_{ij}^+(\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_j^\dagger)\right] - \\
&- \frac{(g\mu_B)^2 S}{2}\sum_{i,j\neq i}\frac{1}{\tilde{r}_{ij}^3}\left\{\left(2 - \frac{6(\tilde{r}_{ij}^z)^2}{\tilde{r}_{ij}^2}\right)\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i - \left(2 - \frac{3(\tilde{r}_{ij}^+\tilde{r}_{ij}^-)}{\tilde{r}_{ij}^2}\right)\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j + \frac{3}{2\tilde{r}_{ij}^2}[(\tilde{r}_{ij}^+)^2\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j^\dagger + (\tilde{r}_{ij}^-)^2\hat{a}_i\hat{a}_j]\right\} + \\
&+ \frac{3(g\mu_B)^2(2S)^{1/2}}{2}\sum_{i,j\neq i}\frac{(\tilde{r}_{ij}^z)^2}{\tilde{r}_{ij}^5}\left\{2\tilde{r}_{ij}^+\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger + 2\tilde{r}_{ij}^-\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\hat{a}_j + \frac{1}{2}[\tilde{r}_{ij}^+\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\hat{a}_i^\dagger + \tilde{r}_{ij}^-\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\hat{a}_i]\right\} \\
&+ \frac{(g\mu_B)^2}{2}\sum_{i,j\neq i}\frac{1}{\tilde{r}_{ij}^3}\left\{\left(1 - \frac{3(\tilde{r}_{ij}^z)^2}{\tilde{r}_{ij}^2}\right)\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j - \left(\frac{1}{2} - \frac{3(\tilde{r}_{ij}^+\tilde{r}_{ij}^-)}{4r_{ij}^2}\right)(\hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j + \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\hat{a}_j) + \right. \\
&\left. + \frac{3}{8r_{ij}^2}(\tilde{r}_{ij}^+\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j + \tilde{r}_{ij}^-\hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\hat{a}_j)\right\} + S^2\mathcal{O}\left[(S^{-1/2})^5\right], \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

com $\mathcal{O}\left[(S^{-1/2})^n\right]$ representando termos com $n$ ou mais operadores de criação ou aniquilação e $\tilde{r}_{ij}^\pm = \tilde{r}_{ij}^x \pm i\tilde{r}_{ij}^y$. Ou seja, expressamos $\hat{\mathscr{H}}_{\text{S}}$ em termos de potências de $\hat{a}_j^\dagger$ e $\hat{a}_j$. Claramente, as parcelas constantes se referem ao estado fundamental de $\hat{\mathscr{H}}_{\text{S}}$ e, como nos interessaremos pela dinâmica do sistema, não nos deteremos sobre estes termos. Os termos lineares, presentes em $\hat{\mathscr{H}}_{\text{dip}}$, indicam que a escolha do estado fundamental está incorreta, o que pode ser corrigido através de uma rotação apropriada, que geralmente leva a correções de energia negligenciáveis (como descrito na página 189 da Ref. 31).

Considerando os termos quadráticos das Eqs. 1.17 e 1.18 e ainda aqueles provenientes do termo de Zeeman (com campo externo homogêneo na direção $z$),

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{Z}} = -g\mu_{\mathrm{B}}\mathbf{H}_0 \cdot \sum_i \hat{\mathbf{S}}_i = -g\mu_{\mathrm{B}}\mathrm{H}_0 NS + g\mu_{\mathrm{B}}\mathrm{H}_0 \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i, \tag{1.19}$$

em que $N$ é o número de íons magnéticos no material, podemos escrevê-los da forma

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}^{(2)} = \sum_{i,j\neq i} \left\{ \mathrm{A}_1(\tilde{\mathbf{r}}_{ij})\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \mathrm{A}_2(\tilde{\mathbf{r}}_{ij})\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{\mathrm{B}^*(\tilde{\mathbf{r}}_{ij})}{2}\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger + \frac{\mathrm{B}(\tilde{\mathbf{r}}_{ij})}{2}\hat{a}_i \hat{a}_j \right\}, \tag{1.20}$$

com

$$\mathrm{A}_1(\tilde{\mathbf{r}}_{ij}) = -2SJ(\tilde{r}_{ij}) - \frac{(g\mu_{\mathrm{B}})^2 S}{2\tilde{r}_{ij}^5}[2\tilde{r}_{ij}^2 - 3(\tilde{r}_{ij}^z)^2], \tag{1.21a}$$

$$\mathrm{A}_2(\tilde{\mathbf{r}}_{ij}) = 2SJ(\tilde{r}_{ij}) + \frac{g\mu_{\mathrm{B}}\mathrm{H}_0}{N} - \frac{(g\mu_{\mathrm{B}})^2 S}{\tilde{r}_{ij}^5}[\tilde{r}_{ij}^2 - 3(\tilde{r}_{ij}^z)^2], \tag{1.21b}$$

$$\mathrm{B}(\tilde{\mathbf{r}}_{ij}) = -\frac{3(g\mu_{\mathrm{B}})^2 S}{2}\frac{(\tilde{r}_{ij}^-)^2}{\tilde{r}_{ij}^5}. \tag{1.21c}$$

Seguindo a proposta de quantizar as ondas de spin, devemos descrever as excitações em termos coletivos. Para tal fim, primeiro consideraremos a situação em que o material é um cristal com mais de um íon magnético por célula unitária, sendo então conveniente especificar a posição do íon magnético $\tilde{\mathbf{r}}_i$ como composto pela posição do centro de massa dos íons magnéticos da célula unitária $\mathbf{r}_n$ e a sua posição relativa $\mathbf{d}_\mu$, isto é,

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_n + \mathbf{d}_\mu, \tag{1.22}$$

em que o índice $i$ estaria incorporando os índices $n$ e $\mu$, que determinam respectivamente a célula unitária e o íon interno (com $\mu = 1, 2, \ldots$ até o número de íons magnéticos presentes na célula).

Em continuação, reformulamos a descrição passando para o espaço recíproco através da expansão de Fourier

$$\hat{a}_j = \sum_{\mathbf{q},\mu} \frac{\mathrm{e}^{i(\mathbf{q}\cdot\tilde{\mathbf{r}}_j)}}{\sqrt{N_{\mathrm{c}}}}\hat{a}_{\mathbf{q},\mu}, \tag{1.23}$$

sendo $\mathbf{q}$ um vetor de onda definido na primeira zona de Brillouin e $N_{\mathrm{c}}$ o número de células unitárias no material. Substituindo a Eq. 1.23 na Eq. 1.20 e lembrando ainda que, sendo o material cristalino,

$$\sum_j \mathrm{e}^{i(\mathbf{q}\cdot\tilde{\mathbf{r}}_j)} = \sum_n \mathrm{e}^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n)} \sum_\mu \mathrm{e}^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{d}_\mu)} = N\,\delta_{\mathbf{q},0}, \tag{1.24}$$

obtém-se

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}^{(2)} = \sum_{\mathbf{q},\mu,\mu'} \left\{ \mathrm{A}'_{\mu\mu'}(\mathbf{q})\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{q},\mu}\hat{a}_{\mathbf{q},\mu'} + \frac{\mathrm{B}'^*_{\mu\mu'}(\mathbf{q})}{2}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{q},\mu}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{q},\mu'} + \frac{\mathrm{B}'_{\mu\mu'}(\mathbf{q})}{2}\hat{a}_{\mathbf{q},\mu}\hat{a}_{-\mathbf{q},\mu'} \right\}, \tag{1.25}$$

e os coeficientes são

$$\mathrm{A}'_{\mu\mu'}(\mathbf{q}) = \sum_{n,n'} \left[ \mathrm{A}_1(\mathbf{r}_{nn'} + \mathbf{d}_{\mu\mu'})\mathrm{e}^{i\left[\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_{nn'}+\mathbf{d}_{\mu\mu'})\right]} + \mathrm{A}_2(\mathbf{r}_{nn'} + \mathbf{d}_{\mu\mu'}) \right], \tag{1.26a}$$

$$\mathrm{B}'_{\mu\mu'}(\mathbf{q}) = \sum_{n,n'} \mathrm{B}(\mathbf{r}_{nn'} + \mathbf{d}_{\mu\mu'})\mathrm{e}^{i\left[\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_{nn'}+\mathbf{d}_{\mu\mu'})\right]}, \tag{1.26b}$$

sendo $\mathbf{r}_{nn'} = \mathbf{r}_{n'} - \mathbf{r}_n$, e com a restrição de que $(n, \mu) \neq (n', \mu')$.

Finalmente, procura-se a diagonalização do hamiltoniano $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}^{(2)}$ da Eq. 1.25, o que é realizado pela introdução de uma nova representação em termos de operadores de criação e aniquilação, $\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q},\gamma}$ e $\hat{c}_{\mathbf{q},\gamma}$, como combinações lineares dos $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{q},\mu}$ e $\hat{a}_{\mathbf{q},\mu}$ de modo que

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}^{(2)} = \sum_{\mathbf{q},\gamma} \hbar\omega_{\mathbf{q},\gamma}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q},\gamma}\hat{c}_{\mathbf{q},\gamma}. \tag{1.27}$$

Obtemos desta forma o análogo para ondas de spin ao que se tem para ondas eletromagnéticas cujo movimento é analisado em termos dos quanta distribuídos sobre os vários modos, com cada quantum recebendo o nome de fóton, e também no caso de ondas vibracionais, cujo movimento é analisado em termos de fônons. Aqui, os quanta são denominados mágnons, com energia $\hbar\omega_{\mathbf{q},\gamma}$ e velocidade de grupo $\nabla_{\mathbf{q}}\omega_{\mathbf{q},\gamma}$. Além disso, a diagonalização da Eq. 1.25 origina diversos ramos associados a estes mágnons, indicados pelo índice $\gamma$, caso a célula unitária tenha mais de um íon magnético, sendo estes ramos iguais em número aos íons magnéticos presentes (ver, para o caso da granada de ferro-ítrio - YIG, as Refs. 34, 35).

Neste trabalho nos concentramos em experimentos em filmes finos de YIG que excitam apenas mágnons de baixas freqüências ($\lesssim 10\,\mathrm{GHz}$), associados ao ramo de mais baixa energia, o chamado modo acústico. Consideraremos então apenas os mágnons acústicos: para readequarmos as expressões anteriores, deve-se considerar apenas um spin efetivo por sítio da rede cristalina, e o parâmetro de troca também é substituído por um parâmetro de troca efetivo. Os índices $\mu$ e $\gamma$ são omitidos e os operadores de criação e aniquilação de mágnons serão designados por $\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}$ e $\hat{c}_{\mathbf{q}}$. Então temos

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}^{(2)} = \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}}. \tag{1.28}$$

Apesar destas considerações, pode-se perceber que a Eq. 1.25, reinterpretada em termos dos mágnons acústicos, ainda não se diagonaliza, isto é, ainda não se expressa como a Eq. 1.28. A interação entre dipolos magnéticos leva a um acoplamento entre os modos $\mathbf{q}$ e $-\mathbf{q}$, através dos termos $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{q}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{q}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{q}}\hat{a}_{-\mathbf{q}}$ da Eq. 1.25. Para desacoplar estes modos, transformamos as variáveis $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{q}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{q}}$ nas variáveis $\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}$ e $\hat{c}_{\mathbf{q}}$ pela seguinte transformação, usualmente conhecida como transformação de Bogoliubov [3, 4],

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{q}} &= u_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} + v^*_{\mathbf{q}} c^\dagger_{-\mathbf{q}}, \\ a^\dagger_{-\mathbf{q}} &= u^*_{-\mathbf{q}} c^\dagger_{-\mathbf{q}} + v_{-\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \tag{1.29}$$

sendo $u_{\mathbf{q}}$ e $v_{\mathbf{q}}$ funções de $\mathbf{q}$. A conservação das regras de comutação da Eq. 1.15 impõe que $|u_{\mathbf{q}}|^2 - |v_{\mathbf{q}}|^2 = 1$ e, ajustando $u_{\mathbf{q}}$ e $v_{\mathbf{q}}$ de forma a anular os termos não diagonais obtém-se

$$u_{\mathbf{q}} = \sqrt{\frac{\mathrm{A}'(\mathbf{q}) + \hbar\omega_{\mathbf{q}}}{2\hbar\omega_{\mathbf{q}}}}, \qquad v_{\mathbf{q}} = \frac{\mathrm{B}'(\mathbf{q})}{|\mathrm{B}'(\mathbf{q})|}\sqrt{\frac{\mathrm{A}'(\mathbf{q}) - \hbar\omega_{\mathbf{q}}}{2\hbar\omega_{\mathbf{q}}}}, \tag{1.30}$$

e

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} = \sqrt{[\mathrm{A}'(\mathbf{q})]^2 - |\mathrm{B}'(\mathbf{q})|^2}, \tag{1.31}$$

onde fatores de fases arbitrárias foram considerados iguais a um. É importante mencionar que esta transformação tem relevância apenas na presença da interação dipolar, caso contrário $\mathrm{B}'(\mathbf{q}) = 0$ e a Eq. 1.29 é uma identidade.

Assim como foi feito para $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}^{(2)}$, aplicamos as transformações de HP e Bogoliubov a todos os termos de $\hat{\mathscr{H}}$ passando de uma descrição de spins para uma descrição de mágnons. Particularmente o hamiltoniano de interação entre spins torna-se

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}} = \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}^{(2)} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{MM}}, \tag{1.32}$$

com $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}^{(2)}$ expresso pela Eq. 1.28 e $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{MM}}$ contendo os termos expressos nas Eqs. 1.17 e 1.18 de ordem superior à quadrática, reescritos em termos de mágnons, que representam as interações entre estas quasipartículas. De todas estas contribuições às interações entre mágnons, nós reteremos apenas os termos de quarta ordem,

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{MM}} = \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1} \hat{c}_{\mathbf{q}_2} \hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2},$$

descrevendo o espalhamento de mágnons (ver Ref. 3, seção 68).

### Relação de dispersão para mágnons

A relação de dispersão, expressa pela Eq. 1.31, é obtida explicitamente ao se efetuar as somas em $\mathbf{r}_{ij}$ descritas nas Eqs. 1.26a e 1.26b. Nos casos em que a interação dipolar pode ser negligenciada, a relação de dispersão é dada por

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} = g\mu_{\mathrm{B}}\mathrm{H}_0 + \sum_{n,n'\neq n} 2SJ(r_{nn'}) \left[1 - \mathrm{e}^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_{nn'})}\right]. \tag{1.33}$$

Considerando ainda que se trata de um cristal cúbico com parâmetro de rede $a$ e que o parâmetro de troca tem relevância apenas entre os primeiros vizinhos, $J(r_{nn'}) = J\,\delta_{r_{nn'},a}$, obtemos

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} = g\mu_{\mathrm{B}}\mathrm{H}_0 + 6SJ - 2SJ\left[\cos(aq_x) + \cos(aq_y) + \cos(aq_z)\right], \tag{1.34}$$

expressão esta que, para mágnons com comprimentos de onda tais que $a\,|\mathbf{q}| \ll 1$, dá origem à conhecida relação de dispersão quadrática,

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} = g\mu_{\mathrm{B}}\mathrm{H}_0 + 2SJa^2q^2. \tag{1.35}$$

A inclusão das interações dipolares introduz consideráveis dificuldades para obtenção da relação de dispersão, devido às somas presentes nos termos 1.26a e 1.26b. Usualmente considera-se uma esfera no espaço definido por $r_{nn'}$ que englobe muitas células unitárias mas tenha um volume bem menor que o da amostra. As somas indicadas são então separadas em duas regiões: interna e externa à esfera. A primeira está associada aos altos valores de $q = |\mathbf{q}|$ e é fortemente dependente da estrutura cristalina; as somas externas à esfera são transformadas em integrais, dependem das condições de contorno da amostra e dão origem aos modos magnetostáticos (cf. Ref. 3, 4, 31).

Por fim, cabe ainda comentar a relação de dispersão de mágnons em filmes finos. Neste caso, não podemos supor invariância translacional discreta na direção associada à espessura fina - perpendicular ao filme -, impossibilitando uma expansão de Fourier como a 1.23. Assume-se então que os mágnons se propagam paralelamente ao filme com vetor de onda $\mathbf{q}_{\parallel}$, e as $N_{\perp}$ células unitárias na direção perpendicular levam à formação de modos transversais designados por $n$. Portanto, um mágnon de vetor de onda $\mathbf{q}_{\parallel}$ tem $N_{\perp}$ distintos valores de energia $\hbar\omega_{n,\mathbf{q}_{\parallel}}$, com $n = 0, \ldots, N_{\perp} - 1$. Diversos procedimentos são utilizados para o estudo do comportamento da relação de dispersão $\omega_{n,\mathbf{q}_{\parallel}}$, que basicamente se resumem a resoluções numéricas ou aproximações analíticas para o modo transversal mais baixo, $\omega_{0,\mathbf{q}_{\parallel}}$.

Recentemente, Rezende [13] e Kreisel *et al.* [36] compararam expressões analíticas para $\omega_{0,\mathbf{q}_{\parallel}}$ com resoluções numéricas através de distintas abordagens. A expressão analítica analisada da relação de dispersão para o modo fundamental, considerando o campo magnético constante aplicado paralelamente ao filme, é dada por

$$\omega_{0,\mathbf{q}_{\parallel}} = \gamma\sqrt{\left[\mathrm{H}_0 + D\left|\mathbf{q}_{\parallel}\right|^2 + 4\pi\mathrm{M}_0(1 - f_{\mathbf{q}_{\parallel}})\mathrm{sen}\theta_{\mathbf{q}_{\parallel}}\right]\left[\mathrm{H}_0 + D\left|\mathbf{q}_{\parallel}\right|^2 + 4\pi\mathrm{M}_0\, f_{\mathbf{q}_{\parallel}}\right]}, \quad (1.36)$$

sendo $\gamma = g\mu_{\mathrm{B}}/\hbar$ a razão giromagnética, $D = 2JSa^2/g\mu_{\mathrm{B}}$ a constante de rigidez (*stiffness constant*), $\mathrm{M}_0$ a magnetização de saturação do material e $\theta_{\mathbf{q}_{\parallel}}$ o ângulo entre $\mathbf{q}_{\parallel}$ e $\mathbf{H}_0$. $f_{\mathbf{q}_{\parallel}}$ é o assim chamado fator de forma, que depende da espessura do filme fino $d$ . A expressão específica deste fator de forma depende do tipo de aproximação empregada, mas pode ser aproximada por

$$f_{\mathbf{q}_{\parallel}} = 1 - c\left|\mathbf{q}_{\parallel}\right| d, \quad (1.37)$$

onde $c$ é uma constante com valores $c = {}^1\!/_2$ no caso da aproximação considerando um modo uniforme [13, 36] e $c = {}^4\!/_\pi$ para a aproximação de mais baixo autoestado [36].

Observando a Figura 1.2 evidencia-se a dependência da relação de dispersão com o ângulo de propagação com relação a $\mathbf{H}_0$, sendo que as mais baixas energias estão associadas aos mágnons que se propagam paralelamente ao campo magnético estático aplicado, $\theta_{\mathbf{q}_{\parallel}} = 0°$.

Além disso, de acordo com as referências 13 e 36, deve-se notar que a expressão 1.36

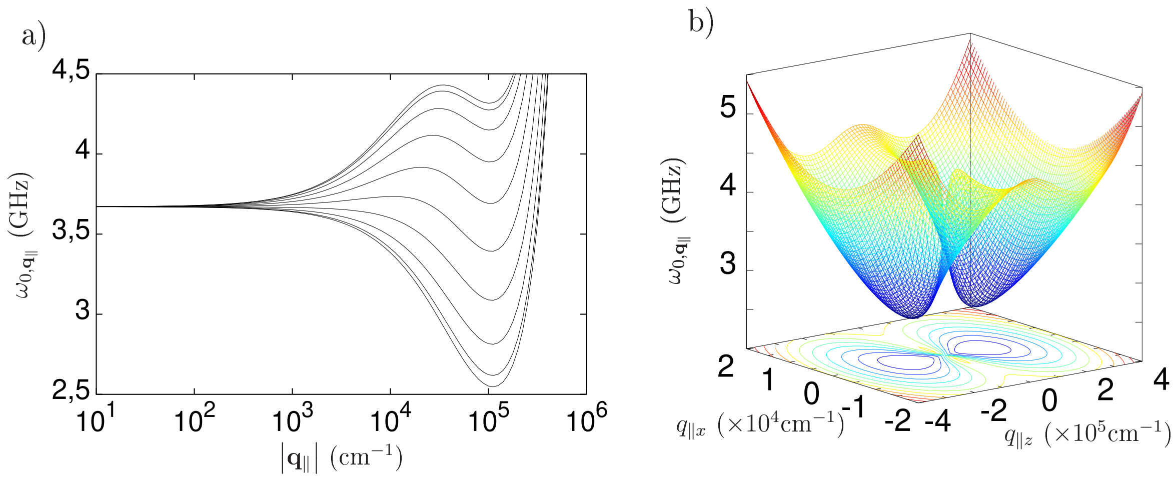



Figura 1.2: Relação de dispersão de mágnons em filmes finos segundo a Eq. 1.36. Os parâmetros utilizados foram $\gamma = 2,8\,\mathrm{GHz/kOe}$ , $\mathrm{H}_0 = 700\,\mathrm{Oe}$, $D = 5\times 10^{-9}\,\mathrm{Oe\,cm}^2$, $4\pi\mathrm{M}_0 = 1,75\,\mathrm{kG}$ e $d = 0,5\,\mu\mathrm{m}$. O fator de forma usado foi $f_{\mathbf{q}_\parallel} = 1 - |\mathbf{q}_\parallel|\, d/2$ (aproximação de modo uniforme). a) Freqüência angular $\omega$ em função de $|\mathbf{q}_\parallel|$, considerando distintos ângulos de propagação com relação ao campo magnético estático, $\theta_{\mathbf{q}_\parallel} = 0°, 10°, \ldots, 90°$ (da base para o topo). b) Freqüência angular $\omega$ em função das componentes do vetor de onda $q_{\parallel x}$ e $q_{\parallel z}$ e linhas de contorno com espaçamento de $0,3\,\mathrm{GHz}$ a partir do mínimo.

é efetivamente válida (i.e. compatível com resultados numéricos) apenas para os modos tais que $\theta_{\mathbf{q}_\parallel} \lesssim 45°$. Para estes modos, salienta-se, o balanço entre as interações de troca e dipolar leva a um mínimo de energia fora do centro da zona de Brillouin, como pode ser visto na Figura 1.2, para vetores de onda com $5\times 10^4\,\mathrm{cm}^{-1} \lesssim |\mathbf{q}_\parallel| \lesssim 2\times 10^5\,\mathrm{cm}^{-1}$.

#### 1.1.2.2 Interação com a rede cristalina (fônons)

O acoplamento dos spins com a rede cristalina pode ser tratado de forma análoga. Considerando $\mathbf{R}_n$ as posições dos centros de massa dos íons magnéticos das células unitárias e $\mathbf{u}_n$ os deslocamentos com relação às posições de equilíbrio $\mathbf{r}_n$, as vibrações da rede cristalina são quantizadas em termos de operadores de criação e aniquilação de fônons $\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}$ e $\hat{b}_{\mathbf{k}}$, quasipartículas de vetor de onda $\mathbf{k}$ tais que (cf. Ref. 4)

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{R}_n - \mathbf{r}_n = \left(\frac{\hbar}{2N}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{e}(\mathbf{k})}{\sqrt{\Omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{b}_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right), \tag{1.38}$$

onde omitimos por simplicidade a indicação de polarização (longitudinal e transversal) que fica implícita, $\Omega_{\mathbf{k}}$ é a relação de dispersão do fônon, $\mathbf{e}(\mathbf{k})$ seu versor de polarização e nos restringimos aos fônons acústicos. Desta forma o hamiltoniano associado às vibrações da rede cristalina é dada por

$$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{L}} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\Omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{b}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right). \tag{1.39}$$

Quanto ao acoplamento spin-rede, Eq. 1.7, faz-se a substituição

$$\mathbf{R}_{nn'} - \mathbf{r}_{nn'} = \left(\frac{\hbar}{2N}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{e}(\mathbf{k})}{\sqrt{\Omega_{\mathbf{k}}}} \left\{ \left( \hat{b}_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{n'}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{n'}} \right) - \left( \hat{b}_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{n}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{n}} \right) \right\}, \tag{1.40}$$

as derivadas são calculadas nas posições de equilíbrio mecânico e os termos de spin são reescritos em termos dos operadores de criação e aniquilação de desvios de spin. Passa-se então ao espaço recíproco com a transformação 1.23, as somas no índice $n$ são realizadas antes que as somas sobre os vetores de onda e, utilizando a transformação de Bogoliubov e certa manipulação algébrica, obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SL}} = & \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}\neq 0} (\hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}) \left\{ \mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\dagger} + \mathcal{L}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}^{*} \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \right\} + \\ & + \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}\neq 0} \left\{ \mathcal{R}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{R}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}^{+} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{\dagger} + \mathcal{R}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}^{+*} \hat{b}_{-\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \right\} (\hat{c}_{\mathbf{q}} + \hat{c}_{-\mathbf{q}}^{\dagger}), \end{aligned} \tag{1.41}$$

e $\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}$ e $\mathcal{R}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}^{(\pm)}$ são os coeficientes resultantes (que representam as intensidades de acoplamento nas interações).

#### 1.1.2.3 Interação com a radiação (fótons)

No que diz respeito à interação entre o campo eletromagnético e o sistema magnético, $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SR}}$, podemos também expressá-la em termos do formalismo de segunda quantização. Escrevemos o campo externo da seguinte forma

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha,\mathbf{p}} (\mathbf{H}_{\alpha,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\, \hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} + \mathbf{H}_{\alpha,\mathbf{p}}^{*}(\mathbf{r})\, \hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}}^{\dagger}), \tag{1.42}$$

com $\hat{d}_{\alpha,\mathbf{q}}$ ($\hat{d}^\dagger_{\alpha,\mathbf{q}}$) representando operadores de aniquilação (criação) de fótons e

$$\mathbf{H}_{\alpha,\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = i\mathbf{p} \times \mathbf{A}_{\alpha,\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{A}_{\alpha,\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2\pi}{\zeta_\mathbf{p}}}\mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{e}^{(\alpha)}, \tag{1.43}$$

com $\zeta_\mathbf{p}$ sendo a frequência angular do fóton, $\mathbf{p}$ seu momento linear e $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ um versor de polarização (e as diversas polarizações indicadas por $\alpha$).

Pela equação anterior vemos que $\mathbf{H}^*_{\alpha,\mathbf{p}} = \mathbf{H}_{\alpha,-\mathbf{p}}$ e rearranjando a Eq. 1.42 temos

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha,\mathbf{p}} \mathbf{H}_{\alpha,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\,(\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}}). \tag{1.44}$$

Lembrando que através da transformação de HP (Eq. 1.16) os operadores de spin expressam-se segundo os operadores de criação e aniquilação de desvios de spin,

$$\hat{S}^x_n \cong \sqrt{\frac{S}{2}}(\hat{a}^\dagger_n + \hat{a}_n), \qquad \hat{S}^y_n \cong i\sqrt{\frac{S}{2}}(\hat{a}^\dagger_n - \hat{a}_n) \quad \text{e} \quad \hat{S}^z_n = S - \hat{a}^\dagger_n\hat{a}_n, \tag{1.45}$$

a interação spin-radiação (Eq. 1.10) toma a forma

$$\begin{aligned}
\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SR}} &= -g\mu_B \sum_j \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{S}}_n \\
&= -g\mu_B \int d^3r \sum_{j,\alpha,\mathbf{p}} \Bigg\{ \mathrm{H}^x_{\alpha,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\,(\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}})\sqrt{\frac{S}{2}}(\hat{a}^\dagger_n + \hat{a}_n) + \\
&\qquad + \mathrm{H}^y_{\alpha,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\,(\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}})i\sqrt{\frac{S}{2}}(\hat{a}^\dagger_n - \hat{a}_n) + \\
&\qquad + \mathrm{H}^z_{\alpha,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\,(\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}})(S - \hat{a}^\dagger_n\hat{a}_n) \Bigg\} \delta(\mathbf{R}_n - \mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{1.46}$$

que, passando os operadores $\hat{a}^\dagger_n$ e $\hat{a}_n$ para o espaço recíproco (e desprezando os termos constantes), torna-se

$$\begin{aligned}
\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SR}} = &\sum_{\alpha,\mathbf{p}} (\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}}) \left\{ (\lambda^x_{\alpha,\mathbf{p}} + \lambda^y_{\alpha,\mathbf{p}})\hat{a}^\dagger_\mathbf{p} + (\lambda^x_{\alpha,\mathbf{p}} - \lambda^y_{\alpha,\mathbf{p}})\hat{a}_{-\mathbf{p}} \right\} + \\
&+ \sum_{\alpha,\mathbf{p},\mathbf{q}} \lambda^z_{\alpha,\mathbf{p}}(\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}})\hat{a}^\dagger_\mathbf{q}\hat{a}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}},
\end{aligned} \tag{1.47}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\lambda^x_{\alpha,\mathbf{p}} &= ig\mu_B\sqrt{\frac{\pi NS}{\zeta_{\mathbf{p}}}}(\mathbf{p}\times\mathbf{e}^{(\alpha)})_x,\\
\lambda^y_{\alpha,\mathbf{p}} &= g\mu_B\sqrt{\frac{\pi NS}{\zeta_{\mathbf{p}}}}(\mathbf{p}\times\mathbf{e}^{(\alpha)})_y,\\
\lambda^z_{\alpha,\mathbf{p}} &= ig\mu_B\sqrt{\frac{\pi S}{\zeta_{\mathbf{p}}}}(\mathbf{p}\times\mathbf{e}^{(\alpha)})_z.
\end{aligned} \tag{1.48}
$$

Finalmente introduzindo a transformação de Bogoliubov (Eq. 1.29), $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SR}}$ se expressa em termos dos operadores de mágnons $\hat{c}^\dagger$ e $\hat{c}$ na forma

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SR}} = & \sum_{\alpha,\mathbf{p}}(\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}}+\hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}})\left(\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{p}}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{p}}+\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,-\mathbf{p}}\hat{c}_{-\mathbf{p}}\right)+\\
&+\sum_{\alpha,\mathbf{p},\mathbf{q}}(\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}}+\hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}})\left\{\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}+\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}+\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}*}_{\alpha,-\mathbf{q},-\mathbf{p}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}+v_{\mathbf{q}}v^*_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\right\}.
\end{aligned} \tag{1.49}
$$

com

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{p}} &= \lambda^x_{\alpha,\mathbf{p}}(u^*_{\mathbf{p}}+v^*_{-\mathbf{p}})+\lambda^y_{\alpha,\mathbf{p}}(u^*_{\mathbf{p}}-v^*_{-\mathbf{p}}),\\
\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} &= \lambda^z_{\alpha,\mathbf{p}}(u^*_{\mathbf{q}}u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}+v^*_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}v_{\mathbf{q}})\\
\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} &= \lambda^z_{\alpha,\mathbf{p}}u^*_{\mathbf{q}}v^*_{\mathbf{q}-\mathbf{p}},
\end{aligned} \tag{1.50}
$$

Relembramos que o campo eletromagnético que interage com os spins tem duas origens distintas: a fonte externa e a radiação de corpo negro. Faz-se necessário, portanto, discriminar a origem dos operadores de aniquilação (e, implicitamente, de criação) de fótons, para o que escrevemos $\hat{d}^{\mathrm{S}}_{\alpha,\mathbf{q}}$ e $\hat{d}^{\mathrm{T}}_{\alpha,\mathbf{q}}$, sendo o primeiro associado à fonte externa e o segundo à radiação de corpo negro. Nesta linguagem de segunda quantização pode-se ainda mostrar (cf. Ref. 37) que o hamiltoniano associado à energia contida na radiação de corpo negro, $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{R}}$, é

$$
\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{R}} = \sum_{\alpha,\mathbf{p}}\hbar\zeta_{\mathbf{p}}\left(\hat{d}^{\mathrm{T}\dagger}_{\alpha,\mathbf{q}}\hat{d}^{\mathrm{T}}_{\alpha,\mathbf{q}}+\frac{1}{2}\right). \tag{1.51}
$$

Completamos desta forma a expressão do hamiltoniano do sistema em termos de operadores de mágnons, fônons e fótons.

## 1.2 Caracterização Termodinâmica de Não-Equilíbrio

Para descrever o estado termodinâmico de não equilíbrio do sistema recorremos ao Formalismo Estatístico de Ensembles de Não-Equilíbrio (NESEF, o acrônimo do termo em inglês) que será aqui apresentado de forma heurística, assim como na referência 38, reproduzida no Apêndice A. As referências 16–21 oferecem apresentações aprofundadas e alternativas sobre o assunto.

Os valores das variáveis macroscópicas são obtidos através da média sobre o ensemble estatístico de não-equilíbrio das variáveis microscópicas ponderadas pelo operador estatístico adequado. Este operador estatístico de não-equilíbrio, $\hat{\mathscr{R}}_\varepsilon(t)$, deve satisfazer duas condições:

(i) por um lado, deve, a princípio, depender de todas as variáveis dinâmicas do sistema (observáveis) de forma que os valores médios sobre o ensemble de não-equilíbrio correspondam de fato às variáveis termodinâmicas de não-equilíbrio que caracterizam o macroestado de não-equilíbrio do sistema e que seja assegurada sua normalização;

(ii) por outro, sua evolução deve ser descrita em termos da dinâmica microscópica do sistema e deve incluir adequadamente a irreversibilidade macroscópica.

Quanto ao primeiro requisito, o operador estatístico de não-equilíbrio, a princípio, deveria ser uma função de todas as variáveis dinâmicas do sistema. No entanto, a depender da escala de tempo observada, pode-se adotar uma *descrição reduzida*[1], na qual apenas parte das variáveis dinâmicas é suficiente para a descrição do sistema e, portanto, para a definição do operador estatístico. Estas variáveis dinâmicas são então chamadas de *variáveis dinâmicas de base* (ou *relevantes*) e a escolha apropriada desse conjunto deve

[1]Esta redução descritiva mencionada se relaciona de forma direta à *hierarquia de tempos de Bogoliubov* [16, 18, 39], que associa escalas de tempo distintas a cada um dos diversos processos dissipativos presentes em fenômenos macroscópicos. A hierarquia de escalas temporais assim obtida permite a análise destes fenômenos em termos de estágios correspondentes, sendo que a cada novo estágio atingido correlações internas são perdidas e reduções sucessivas no conjunto de variáveis descritivas tornam-se possíveis. Assim, e sempre de acordo com as particularidades do experimento sob estudo, são definidos os diversos estágios (ou descrições): cinético, hidrodinâmico e próximo ao equilíbrio.

ser realizada em consonância aos experimentos a descrever ou às expectativas em torno destes experimentos.

Em nosso caso, experimentos com materiais magnéticos lidam, direta ou indiretamente, com a magnetização da amostra. Assim, além da energia do banho térmico do sistema $E_{\mathrm{B}}$, e a energia $E_{\mathrm{S}}$ associada à $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}^{(2)}$, o vetor magnetização dependente da posição e do tempo neste caso de não-equilíbrio $\mathscr{M}(\mathbf{r},t)$ é a variável macroscópica relevante. Em termos do operador estatístico de não-equilíbrio, que indicamos por $\hat{\mathscr{R}}_{\varepsilon}(t)$, temos que

$$\mathscr{M}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r})\,\hat{\mathscr{R}}_{\varepsilon}(t)\right\}, \tag{1.52}$$

onde

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) = g\mu_{\mathrm{B}}\sum_{n}\hat{\mathbf{S}}_{n}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}_{n}) \tag{1.53}$$

é o operador de densidade de momento magnético. Este operador $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r})$, conjuntamente ao operador $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{S}}^{(2)}$, relativo ao gás de mágnons independentes, são então escolhidos como as variáveis dinâmicas de base consideradas como relevantes para caracterizar o sistema de spins no estudo da questão proposta na Introdução. Usando a THP na forma da Eq. 1.16, em que foi feita uma aproximação linear para as componentes $x$ e $y$, e aplicando a transformação de Bogoliubov às componentes do operador $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r})$ obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{M}}_{x}(\mathbf{r}) &= g\mu_{\mathrm{B}}\sqrt{\frac{2S}{N}}\sum_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\left(v_{-\mathbf{q}}+u_{\mathbf{q}}\right)\left(\hat{c}_{-\mathbf{q}}^{\dagger}+\hat{c}_{\mathbf{q}}\right), \\
\hat{\mathrm{M}}_{y}(\mathbf{r}) &= ig\mu_{\mathrm{B}}\sqrt{\frac{2S}{N}}\sum_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\left(v_{-\mathbf{q}}-u_{\mathbf{q}}\right)\left(\hat{c}_{-\mathbf{q}}^{\dagger}-\hat{c}_{\mathbf{q}}\right), \\
\hat{\mathrm{M}}_{z}(\mathbf{r}) &= \mathrm{M}_{0}-\frac{g\mu_{\mathrm{B}}}{N}\sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}\mathrm{e}^{i(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}\times \\
&\quad\times\left\{\left(u_{\mathbf{q}}^{*}u_{\mathbf{q}'}+v_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}'}^{*}\right)c_{\mathbf{q}}^{\dagger}c_{\mathbf{q}'}+v_{\mathbf{q}}u_{\mathbf{q}'}c_{-\mathbf{q}}c_{\mathbf{q}'}+u_{\mathbf{q}}^{*}v_{\mathbf{q}'}^{*}c_{\mathbf{q}}^{\dagger}c_{-\mathbf{q}'}^{\dagger}+v_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}'}^{*}\delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}\right\},
\end{aligned} \tag{1.54}$$

o que nos permite refinar então o conjunto das variáveis dinâmicas de base do sistema magnético como sendo constituído pelos operadores

$$\left\{\left\{\hat{\mathscr{N}}_{\mathbf{q}}\right\};\ \left\{\hat{\mathscr{N}}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}\right\};\ \left\{\hat{c}_{\mathbf{q}}^{\dagger}\right\};\ \left\{\hat{c}_{\mathbf{q}}\right\};\ \left\{\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}^{\dagger}\right\};\ \left\{\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}\right\};\ \left\{\hat{\sigma}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}^{\dagger}\right\};\ \left\{\hat{\sigma}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}\right\}\right\}, \tag{1.55}$$

com $\mathbf{Q} \neq 0$, e

$$\hat{\mathscr{N}}_{\mathbf{q}} = \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}, \qquad \hat{\mathscr{N}}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} = \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}}, \tag{1.56}$$

$$\hat{\sigma}^{\dagger}_{\mathbf{q}} = \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}, \qquad \hat{\sigma}^{\dagger}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} = \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}}. \tag{1.57}$$

Os operadores $\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}$ e $\hat{c}_{\mathbf{q}}$ são, lembremos, os operadores de criação e destruição de mágnons, e estão associados a autoestados coerentes; o operador $\hat{\mathscr{N}}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}$, com $\mathbf{Q} \neq 0$, é o operador de partícula individual que descreve inomogeneidades no sistema; $\hat{\mathscr{N}}_{\mathbf{q}}$ é o operador número de ocupação; por fim, temos os operadores de pares homogêneos ($\hat{\sigma}^{\dagger}_{\mathbf{q}}$ e $\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}$) e inomogêneos ($\hat{\sigma}^{\dagger}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}$ e $\hat{\sigma}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}$). O operador $\hat{\mathscr{H}}_0$ não aparece explicitamente no conjunto das variáveis dinâmicas de base pois é formalmente escrito em termos dos operadores de população de mágnons.

De acordo com o formalismo, separamos $\hat{\mathscr{H}}$ em duas partes

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{\mathscr{H}}', \tag{1.58}$$

com

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{H}}_0 &= \hat{\mathscr{H}}^{(2)}_{\mathrm{S}} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{L}} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{R}} = \\ &= \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\Omega_{\mathbf{k}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}} + \sum_{\alpha,\mathbf{p}} \hbar\zeta_{\mathbf{p}}\hat{d}^{\dagger}_{\alpha,\mathbf{q}}\hat{d}_{\alpha,\mathbf{q}}, \end{aligned} \tag{1.59}$$

e[2]

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{H}}' = &\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{MM}} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SL}} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SR}} + \\
= &\sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1} \hat{c}_{\mathbf{q}_2} \hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} + \\
&+ \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}\neq 0} (\hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}}) \left\{ \mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{L}^*_{\mathbf{q},-\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \right\} + \\
&+ \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}\neq 0} \left\{ \mathcal{R}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \mathcal{R}^{+*}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \right\} (\hat{c}_{\mathbf{q}} + \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{q}}) + \\
&+ \sum_{\alpha,\mathbf{p}} (\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}}) \left( \mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{p}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{p}} + \mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,-\mathbf{p}} \hat{c}_{-\mathbf{p}} \right) + \\
&+ \sum_{\alpha,\mathbf{p},\mathbf{q}} (\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}}) \left\{ \mathcal{S}^{\parallel \mathrm{a}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \mathcal{S}^{\parallel \mathrm{b}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} + \mathcal{S}^{\parallel \mathrm{b}*}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \right\},
\end{aligned}
\tag{1.60}
$$

sendo que $\hat{\mathscr{H}}_0$ contém os termos de mágnons, fônons e fótons independentes, ao passo que $\hat{\mathscr{H}}'$ contém as interações entre estas quasipartículas. Ao fazer o comutador de $\hat{\mathscr{H}}_0$ com qualquer uma das variáveis dinâmicas de base,

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{\mathscr{H}}_0,\, \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] &= \hbar\omega_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}, \\
\left[\hat{\mathscr{H}}_0,\, \hat{c}_{\mathbf{q}}\right] &= -\hbar\omega_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}}, \\
\left[\hat{\mathscr{H}}_0,\, \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}\right] &= \left(\hbar\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}}\right) \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}, \\
\left[\hat{\mathscr{H}}_0,\, \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}\right] &= 0, \\
\left[\hat{\mathscr{H}}_0,\, \hat{\sigma}^\dagger_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}\right] &= \left(\hbar\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}} + \hbar\omega_{-\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}}\right) \hat{\sigma}^\dagger_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}, \\
\left[\hat{\mathscr{H}}_0,\, \hat{\sigma}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}\right] &= -\left(\hbar\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}} + \hbar\omega_{-\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}}\right) \hat{\sigma}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}},
\end{aligned}
\tag{1.61}
$$

percebe-se que o resultado é sempre a própria variável (ou nulo, no caso das populações de mágnons). Esta característica corresponde à *regra de seleção de Mori-Zubarev-Peletminskii* [16] que indica a completeza das variáveis dinâmicas escolhidas.

Escolhidas as variáveis dinâmicas de base, devemos então encontrar o operador estatístico de não-equilíbrio $\hat{\mathscr{R}}_\varepsilon(t)$. Consideramos o banho térmico, em contato com um

[2]Dado que $\hat{\mathscr{H}}^\dagger = \hat{\mathscr{H}}$, obtemos alguns vínculos para os elementos de matriz: $\mathcal{V}^*_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} = \mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3),\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{F}^*_{\mathbf{q},\mathbf{k}} = \mathcal{F}_{\mathbf{q}-\mathbf{k},-\mathbf{k}}$, $\mathcal{R}^*_{\mathbf{q},\mathbf{k}} = \mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{q}}$, $\mathcal{S}^{\parallel a*}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} = \mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q}-\mathbf{p},-\mathbf{p}}$. Por outro lado, por conta das regras de comutação de bósons, mostra-se que $\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} = \mathcal{V}_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3} = \mathcal{V}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}} = \mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}$, $\mathcal{R}^+_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{k}} = \mathcal{R}^+_{\mathbf{q},\mathbf{k}}$ e $\mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} = \mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,\mathbf{p}-\mathbf{q},\mathbf{p}}$.

reservatório térmico, em um estado estacionário representado por um operador estatístico canônico $\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ com a temperatura $T_0$ do reservatório térmico. Com isso separamos as contribuições do banho e do sistema magnético e reescrevemos

$$\hat{\mathscr{R}}_{\varepsilon}(t) = \hat{\rho}_{\varepsilon}(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}}, \tag{1.62}$$

sendo $\hat{\rho}_{\varepsilon}(t)$ o operador estatístico de não-equilíbrio referente ao sistema magnético.

Lembramos que operador estatístico $\hat{\rho}_{\varepsilon}(t)$ deve obedecer às condições (i) e (ii) mencionadas anteriormente (página 21). Retomando a condição (i), $\hat{\rho}_{\varepsilon}(t)$ deve depender das variáveis dinâmicas de base no conjunto 2.1, ser normalizado e além disso fornecer os valores médios destas variáveis, que constituem o espaço de variáveis termodinâmicas, isto é,

$$\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\, \hat{\rho}_{\varepsilon}(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}}\right\}, \qquad \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{c}_{\mathbf{q}}\, \hat{\rho}_{\varepsilon}(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}}\right\}, \tag{1.63}$$

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}\, \hat{\rho}_{\varepsilon}(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}}\right\}, \qquad \mathcal{N}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}\, \hat{\rho}_{\varepsilon}(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}}\right\}, \tag{1.64}$$

$$\sigma^{*}_{\mathbf{q}}(t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\sigma}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\, \hat{\rho}_{\varepsilon}(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}}\right\}, \qquad \sigma_{\mathbf{q}}(t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}\, \hat{\rho}_{\varepsilon}(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}}\right\}, \tag{1.65}$$

$$\sigma^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\sigma}^{\dagger}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}\, \hat{\rho}_{\varepsilon}(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}}\right\}, \qquad \sigma_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\sigma}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}\, \hat{\rho}_{\varepsilon}(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}}\right\}, \tag{1.66}$$

sendo $\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle$ e $\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle$ chamados de amplitudes, $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)$ de população e $\sigma^{*}_{\mathbf{q}}(t)$ e $\sigma_{\mathbf{q}}(t)$ de pares.

Os referidos valores médios não definem unicamente o operador estatístico, isto é, é possível escolher diversas distribuições distintas que levam aos mesmos valores médios. Para obtenção de $\hat{\rho}_{\varepsilon}(t)$, é conveniente introduzir o *operador estatístico auxiliar* $\hat{\bar{\varrho}}(t)$ que tem como principal característica verificar as Eqs. 1.63-1.66, além da condição de normalização,

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{\bar{\varrho}}(t)\right\} = 1. \tag{1.67}$$

Adotamos uma expressão para $\hat{\bar{\varrho}}(t)$, seguindo então o espírito heurístico proposto[3], semelhante ao operador canônico de equilíbrio, ou seja, uma exponencial, devidamente normalizada, de uma combinação linear das variáveis dinâmicas de base,

$$\hat{\bar{\varrho}}(t) = \frac{1}{Z(t)} \exp\left\{ -\sum_{\mathbf{q}} \left[ F_{\mathbf{q}}(t)\, \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}} + \phi_{\mathbf{q}}(t)\, \hat{c}_{\mathbf{q}} + \phi^{*}_{\mathbf{q}}(t)\, \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}} + \varphi_{\mathbf{q}}(t)\, \hat{\sigma}_{\mathbf{q}} + \varphi^{*}_{\mathbf{q}}(t)\, \hat{\sigma}^{\dagger}_{\mathbf{q}} \right] - \right.$$

$$\left. -\sum_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} \left[ F_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t)\, \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} + \varphi_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t)\, \hat{\sigma}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} + \varphi^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t)\, \hat{\sigma}^{\dagger}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} \right] \right\}, \tag{1.68}$$

e a normalização faz com que definamos a função de partição de não-equilíbrio

$$Z(t) \equiv \mathrm{Tr}\left\{ \exp\left\{ -\sum_{\mathbf{q}} \left[ F_{\mathbf{q}}(t)\, \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}} + \phi_{\mathbf{q}}(t)\, \hat{c}_{\mathbf{q}} + \phi^{*}_{\mathbf{q}}(t)\, \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}} + \varphi_{\mathbf{q}}(t)\, \hat{\sigma}_{\mathbf{q}} + \varphi^{*}_{\mathbf{q}}(t)\, \hat{\sigma}^{\dagger}_{\mathbf{q}} \right] - \right.\right. \tag{1.69}$$

$$\left.\left. -\sum_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} \left[ F_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t)\, \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} + \varphi_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t)\, \hat{\sigma}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} + \varphi^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t)\, \hat{\sigma}^{\dagger}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} \right] \right\} \right\}, \tag{1.70}$$

Os coeficientes presentes na combinação linear das variáveis dinâmicas são as *variáveis termodinâmicas de não-equilíbrio associadas* e são determinados de forma a assegurar que $\hat{\bar{\varrho}}(t)$ satisfaça as Eqs. 1.63-1.66. Ou então, igualmente, satisfazer as equações de estado de não-equilíbrio

$$-\frac{\delta \ln Z(t)}{\delta \phi_{\mathbf{q}}(t)} = \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle, \quad -\frac{\delta \ln Z(t)}{\delta F_{\mathbf{q}}(t)} = \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t), \quad -\frac{\delta \ln Z(t)}{\delta \varphi_{\mathbf{q}}(t)} = \sigma_{\mathbf{q}}(t), \tag{1.71}$$

$$-\frac{\delta \ln Z(t)}{\delta F_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t)} = \mathcal{N}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t), \quad -\frac{\delta \ln Z(t)}{\delta \varphi_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t)} = \sigma_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t), \tag{1.72}$$

realizando assim uma correspondência com o caso de equilíbrio.

[3]Pode-se obter a mesma expressão para $\hat{\bar{\varrho}}(t)$ utilizando métodos variacionais em que a entropia de informação de Gibbs-Jaynes-Shannon do sistema é maximizada a cada instante de tempo $t$ e sujeita às Eqs. 1.63-1.66. Maiores detalhes podem ser obtidos nas referências 16, 18.

É interessante ainda mencionar que é possível expressar os valores médios das variáveis dinâmicas em termos das variáveis termodinâmicas associadas e então fazer a descrição termodinâmica do sistema em termos destas últimas. A título de exemplo, considerando o caso em que a única variável dinâmica de base é $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$, pode-se mostrar por cálculo direto (ver Eq. B.20 no Apêndice B) que

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^{F_{\mathbf{q}}(t)} - 1}, \tag{1.73}$$

e somos então levados a redefinir a variável termodinâmica associada

$$F_{\mathbf{q}}(t) = \frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{k_{\mathrm{B}} T^*_{\mathbf{q}}(t)}, \tag{1.74}$$

sendo $k_{\mathrm{B}}$ a constante de Boltzmann e $T^*_{\mathbf{q}}(t)$ a temperatura de não-equilíbrio de um dado modo $\mathbf{q}$. Esta temperatura de não-equilíbrio (Refs. 40–42), amplamente empregada em estudos de física de semicondutores (ver, por exemplo, Refs. 43, 44), identifica-se com a temperatura usual apenas nos casos em que o sistema se encontra em equilíbrio.

No entanto, lembremos que, além da condição (i), o operador estatístico de não-equilíbrio deve ser descrito em termos da dinâmica microscópica do sistema e deve incluir adequadamente a irreversibilidade macroscópica, de acordo com a condição (ii). O acordo com a dinâmica microscópica pode ser tecnicamente implementado fazendo com que $\hat{\varrho}_{\varepsilon}(t)$ obedeça a equação de Liouville-Dirac

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varrho}_{\varepsilon}(t) + \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\varrho}_{\varepsilon}(t), \hat{\mathscr{H}}\right] = 0. \tag{1.75}$$

O operador estatístico auxiliar $\hat{\bar{\varrho}}(t)$ não satisfaz a equação de Liouville e, desta forma, não pode representar o operador estatístico de não-equilíbrio $\hat{\varrho}_{\varepsilon}(t)$ almejado. Mas podemos utilizar o operador auxiliar para construir $\hat{\varrho}_{\varepsilon}(t)$ se considerarmos que em um instante inicial $t_0$ vale a condição

$$\hat{\varrho}_{\varepsilon}(t_0) = \hat{\bar{\varrho}}(t_0), \tag{1.76}$$

e que a evolução deste operador se dá de acordo com a Eq. 1.75,

$$\hat{\varrho}_{\varepsilon}(t) = \mathrm{e}^{\frac{(t-t_0)}{i\hbar}\hat{\mathscr{H}}}\,\hat{\bar{\varrho}}(t_0)\mathrm{e}^{-\frac{(t-t_0)}{i\hbar}\hat{\mathscr{H}}}. \tag{1.77}$$

Apesar de a solução obtida satisfazer a equação de Liouville e estar, portanto, de acordo com a dinâmica microscópica ela não incorpora a irreversibilidade macroscópica. E, segundo R. Peierls,

> "Em qualquer tratamento teórico de problemas de transporte, é importante compreender em que ponto foi incorporada a irreversibilidade. Se não foi incorporada, o tratamento está equivocado. Uma descrição de tal situação que preserve reversibilidade temporal está fadada a dar valores nulos ou infinitos para todas as condutividades. Se nós não vemos claramente onde a irreversibilidade é introduzida, não entendemos claramente o que está sendo feito."[4]

A introdução de irreversibilidade pode ser feita quebrando-se a simetria temporal da equação de Liouville da seguinte forma [39, 45]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varrho}_\varepsilon(t) + \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\varrho}_\varepsilon(t), \hat{\mathscr{H}}\right] = -\varepsilon\left\{\hat{\varrho}_\varepsilon(t) - \hat{\bar{\varrho}}(t)\right\}, \tag{1.78}$$

com $\varepsilon \to 0$, sendo este limite tomado *após* o cálculo dos valores médios. Esta modificação faz com que sejam selecionadas apenas as soluções retardadas da Eq. 1.75. Podemos entender o lado direito da equação como uma fonte infinitesimal (cf. Ref. 16, 18) que a todo instante leva $\hat{\varrho}_\varepsilon(t)$ à se aproximar de $\hat{\bar{\varrho}}(t)$ e este artifício é uma possível forma de se introduzir o procedimento de suavização temporal de Kirkwood (cf. Ref. 46).

Por fim obtemos uma expressão final para o operador estatístico, na forma

$$\hat{\varrho}_\varepsilon(t) = \hat{\bar{\varrho}}(t) - \lim_{\varepsilon\to 0}\exp\int_{t_0}^{t} dt' e^{-\varepsilon(t-t')} e^{\frac{(t-t')}{i\hbar}\hat{\mathscr{H}}}\left(\frac{\partial\hat{\bar{\varrho}}(t')}{\partial t'} + \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\bar{\varrho}}(t'), \hat{\mathscr{H}}\right]\right) e^{-\frac{(t-t')}{i\hbar}\hat{\mathscr{H}}}, \tag{1.79}$$

que satisfaz a Eq. 1.78, incluindo, portanto, irreversibilidade e se adequando à dinâmica microscópica do sistema, dada a condição inicial da Eq. 1.76.

[4] Tradução livre de "In any theoretical treatment of transport problems, it is important to realize at what point the irreversibility has been incorporated. If it has not been incorporated, the treatment is wrong. A description of the situation that preserves the reversibility in time is bound to give the answer zero or infinity for any conductivity. If we do not see clearly where the irreversibility is introduced, we do not clearly understand what we are doing." citado na Ref. 38.

## 1.3 Resumo do Capítulo 1

Apresentamos neste capítulo as descrições mecânica e termodinâmica do sistema de interesse: um conjunto de íons magnéticos, em arranjo cristalino e sob ação de um campo magnético constante, que é alimentado por uma fonte de microondas externa e está em contato com um banho térmico. Quanto à mecânica do sistema:

- O hamiltoniano do sistema é apresentado em termos dos operadores de spin atômicos (Eq. 1.11). São consideradas as interações entre spins (interações de troca e dipolar), a relação com o banho térmico e com a fonte externa aplicada;

- Através do formalismo de segunda quantização, são então introduzidas as quasi-partículas mágnons, fônons e fótons, em termos das quais é reescrito o hamiltoniano (Eqs. 1.58-1.60). Quanto aos mágnons, é considerado apenas o ramo acústico e a correspondente relação de dispersão é analisada.

No que diz respeito à termodinâmica de não-equilíbrio:

- Com base nos experimentos em magnetismo, são escolhidas as variáveis dinâmicas de base adequadas para a descrição de não-equilíbrio do sistema (Eq. 1.55);

- No contexto do formalismo de ensembles estatísticos de não equilíbrio (NESEF), é construído o operador estatístico de não-equilíbrio. O espaço de variáveis termodinâmicas de não-equilíbrio (que inclui as populações de mágnons, as amplitudes e os pares) é então formado pelos valores médios das variáveis dinâmicas ponderadas pelo referido operador estatístico;

- São ainda introduzidas as variáveis termodinâmicas de não-equilíbrio associadas que possibilitam uma descrição termodinâmica alternativa. No caso das populações de mágnons, por exemplo, pode-se equivalentemente representar o estado termodinâmico em termos da temperatura de não-equilíbrio.

# Capítulo 2

# Equações Cinéticas

Após apresentarmos, no capítulo anterior, as variáveis dinâmicas de base e o operador estatístico relevantes para o sistema magnético de interesse, derivamos aqui as equações cinéticas correspondentes. Para obtenção destas equações nos utilizamos da teoria cinética mecânico-quântica baseada no NESEF [17, 21, 47].

Em nosso caso, desejamos encontrar as equações de evolução temporal das macrovariáveis das Eqs. 1.63-1.66,

$$\left\{\left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)\right\};\left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t)\right\};\left\{\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t\rangle\right\};\left\{\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle\right\};\left\{\sigma^{*}_{\mathbf{q}}(t)\right\};\left\{\sigma_{\mathbf{q}}(t)\right\};\left\{\sigma^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t)\right\};\left\{\sigma_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}(t)\right\}\right\} \tag{2.1}$$

que caracterizam o estado termodinâmico de não equilíbrio do sistema (deve ser lembrado que $\mathbf{Q} \neq 0$). Para isso, retomemos inicialmente o hamiltoniano total do sistema expresso pela Eq. 1.58,

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{\mathscr{H}}', \tag{2.2}$$

com

$$\hat{\mathscr{H}}_0 = \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\Omega_{\mathbf{k}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}} + \sum_{\alpha,\mathbf{p}} \hbar\zeta_{\mathbf{p}}\hat{d}^{\dagger}_{\alpha,\mathbf{q}}\hat{d}_{\alpha,\mathbf{q}}, \tag{2.3}$$

e

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{H}}' = & \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1} \hat{c}_{\mathbf{q}_2} \hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} + \\
& + \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}\neq 0} (\hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}}) \left\{ \mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{L}^*_{\mathbf{q},-\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \right\} + \\
& + \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}\neq 0} \left\{ \mathcal{R}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \mathcal{R}^{+*}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \right\} (\hat{c}_{\mathbf{q}} + \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{q}}) + \\
& + \sum_{\alpha,\mathbf{p}} (\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}}) \left( \mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{p}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{p}} + \mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,-\mathbf{p}} \hat{c}_{-\mathbf{p}} \right) + \\
& + \sum_{\alpha,\mathbf{p},\mathbf{q}} (\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}}) \left\{ \mathcal{S}^{\parallel \mathrm{a}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \mathcal{S}^{\parallel \mathrm{b}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} + \mathcal{S}^{\parallel \mathrm{b}*}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

A evolução de um operador é dada pela equação de Heisenberg, e, portanto, a evolução da macrovariável associada é a média da equação de Heisenberg ponderada pelo operador estatístico de não-equilíbrio $\hat{\mathscr{R}}_\varepsilon(t)$. As equações de evolução das populações médias de mágnons $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)$ servem como exemplo deste procedimento:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) &= \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}\, \hat{\mathscr{R}}_\varepsilon(t) \right\} = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}\, \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathscr{R}}_\varepsilon(t) \right\} = \\
&= \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}\, \frac{1}{i\hbar} \left[ \hat{\mathscr{H}}, \hat{\mathscr{R}}_\varepsilon(t) \right] \right\} = \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{ \left[ \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}, \hat{\mathscr{H}} \right] \hat{\mathscr{R}}_\varepsilon(t) \right\} = \\
&= \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{ \left[ \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}, \hat{\mathscr{H}} \right] \hat{\rho}_\varepsilon(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}} \right\},
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

onde reintroduzimos a separação entre os operadores estatísticos do sistema de spins e do banho térmico.

Utilizando a Eq. 2.2 obtém-se

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) &= \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{ \left[ \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}, \hat{\mathscr{H}} \right] \hat{\rho}_\varepsilon(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}} \right\} = \\
&= \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{ \left[ \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}, \hat{\mathscr{H}}_0 \right] \hat{\rho}_\varepsilon(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}} \right\} + \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{ \left[ \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}, \hat{\mathscr{H}}' \right] \hat{\rho}_\varepsilon(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

O primeiro termo à direita da Eq. 2.6 pode ser alternativamente escrito como

$$
\frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{ \left[ \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}, \hat{\mathscr{H}}_0 \right] \hat{\rho}_\varepsilon(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}} \right\} = \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{ \left[ \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}, \hat{\mathscr{H}}_0 \right] \hat{\bar{\varrho}}(t) \times \hat{\rho}_{\mathrm{B}} \right\} \equiv J^{(0)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t), \tag{2.7}
$$

pois, devido à regra de completeza (Eq. 1.61), os comutadores das variáveis dinâmicas de base com $\hat{\mathscr{H}}_0$ dão como resultado funções lineares das próprias variáveis. Além disso, o traço de uma variável dinâmica pode ser igualmente ponderado por $\hat{\rho}_\varepsilon(t)$ ou $\hat{\bar{\varrho}}(t)$, dada a definição do operador estatístico auxiliar (ver Eqs. 1.63-1.66). O termo obtido, $J^{(0)}_{\mathcal{N}_\mathbf{q}}(t)$, pode ser interpretado como termo de precessão no formalismo de Mori [48].

Resta, para a obtenção das equações cinéticas, o segundo termo à direita da Eq. 2.6 que pode ser escrito como

$$\frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{\left[\hat{\mathcal{N}}_\mathbf{q}, \hat{\mathscr{H}}'\right]\ \hat{\rho}_\varepsilon(t) \times \hat{\rho}_\mathrm{B}\right\} = J^{(1)}_{\mathcal{N}_\mathbf{q}}(t) + \mathscr{J}^{(2)}_{\mathcal{N}_\mathbf{q}}(t), \tag{2.8}$$

com

$$J^{(1)}_{\mathcal{N}_\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{\left[\hat{\mathcal{N}}_\mathbf{q}, \hat{\mathscr{H}}'\right]\ \hat{\bar{\varrho}}(t) \times \hat{\rho}_\mathrm{B}\right\} \tag{2.9}$$

em que $\mathscr{J}^{(2)}_{\mathcal{N}_\mathbf{q}}(t)$ é reformulado segundo uma soma de termos de colisão envolvendo expansões em crescentes ordens de interação $\hat{\mathscr{H}}'$. Estes termos de colisão, dados em função de $\hat{\bar{\varrho}}(t)$, são responsáveis pelos efeitos dissipativos, e incluem os efeitos de memória (ver Apêndice A) e contribuições não-lineares à evolução do sistema. Detalhes aprofundados sobre estes termos de colisão são apresentados nas referências 16, 47, 49, e, nesse desenvolvimento, retendo contribuições até segunda ordem nas intensidades das interações, obtém-se a chamada aproximação de Markov,

$$\begin{aligned}\mathscr{J}^{(2)}_{\mathcal{N}_\mathbf{q}}(t) \approx J^{(2)}_{\mathcal{N}_\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{-\infty}^{t} dt'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\ \mathrm{Tr}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(t'-t)_0, [\hat{\mathscr{H}}', \hat{\mathcal{N}}_\mathbf{q}]\right]\ \hat{\bar{\varrho}}(t) \times \hat{\rho}_\mathrm{B}\right\} + \\ + \frac{1}{i\hbar}\sum_\ell \int_{-\infty}^{t} dt'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\mathrm{Tr}\left\{[\hat{\mathscr{H}}'(t'-t)_0, \hat{P}_\ell]\, \hat{\bar{\varrho}}(t) \times \hat{\rho}_\mathrm{B}\right\} \frac{\delta J^{(1)}_{\mathcal{N}_\mathbf{q}}(t)}{\delta Q_\ell(t)},\end{aligned} \tag{2.10}$$

lembrando que $\varepsilon \to 0$ (após a integração), $\hat{\mathscr{H}}'(t'-t)_0 = \mathrm{e}^{\frac{(t-t')}{i\hbar}\hat{\mathscr{H}}_0}\hat{\mathscr{H}}'\mathrm{e}^{-\frac{(t-t')}{i\hbar}\hat{\mathscr{H}}_0}$, $Q_\ell(t)$ é cada uma das macrovariáveis do conjunto 2.1 associadas às microvariáveis dinâmicas de base $\hat{P}_\ell$ do conjunto 2.1 e $\dfrac{\delta}{\delta Q_\ell(t)}$ representa a derivada funcional (cf. Ref. 50) com relação à $Q_\ell(t)$. Temos, finalmente,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{N}_\mathbf{q}(t) = J^{(0)}_{\mathcal{N}_\mathbf{q}}(t) + J^{(1)}_{\mathcal{N}_\mathbf{q}}(t) + J^{(2)}_{\mathcal{N}_\mathbf{q}}(t), \tag{2.11}$$

sendo os termos do lado direito dados pelas Eqs. 2.7, 2.9 e 2.10. Assim como a equação 2.11 governa a evolução das populações, de forma análoga podem ser obtidas as equações de evolução correspondentes para as outras macrovariáveis de interesse (Eq. 2.1). Tendo em mente experimentos sem resolução espacial, reduzimos o conjunto de variáveis relevantes de forma a descrever um sistema homogêneo, restando apenas as macrovariáveis

$$\left\{\left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)\right\};\ \left\{\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t\rangle\right\};\ \left\{\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle\right\};\ \left\{\sigma^{*}_{\mathbf{q}}(t)\right\};\ \left\{\sigma_{\mathbf{q}}(t)\right\}\right\}, \tag{2.12}$$

ou seja, as populações, amplitudes e pares associados aos mágnons.

Deve ser ainda mencionado que os operadores de criação e aniquilação de fônons e fótons associados ao banho térmico descritos nas seções 1.1.2.2 e 1.1.2.3 estão presentes nos comutadores das Eqs. 2.7, 2.9 e 2.10. Como comutam com $\hat{\varrho}(t)$, seus valores médios são dados em termos do operador estatístico do banho, que apresenta a forma canônica

$$\hat{\rho}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{Z_0}\exp\left\{-\beta_0\left(\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{L}} + \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{R}}\right)\right\}, \tag{2.13}$$

sendo $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{L}}$ e $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{R}}$ dados pelas Eqs. 1.39 e 1.51, $\beta_0 = k_{\mathrm{B}}T_0$, $T_0$ a temperatura do reservatório térmico e $Z_0$ a função de partição associada. Desta forma obtemos o valor médio das populações de fônons,

$$\nu_{\mathbf{k}} \equiv \mathrm{Tr}\left\{\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}}\,\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\right\} = \left(\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\Omega_{\mathbf{k}}} - 1\right)^{-1}. \tag{2.14}$$

No caso dos fótons, deve-se separar as contribuições provenientes da fonte externa, de valor $f^{\mathrm{S}}_{\mathbf{p}}$ - e, portanto, proporcional à intensidade -, daquelas oriundas da radiação de corpo negro, cujo valor médio é

$$f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{p}} \equiv \mathrm{Tr}\left\{\hat{d}^{\mathrm{T}\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{d}^{\mathrm{T}}_{\mathbf{p}}\,\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\right\} = \left(\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\zeta_{\mathbf{p}}} - 1\right)^{-1}, \tag{2.15}$$

com $\zeta_{\mathbf{p}} = \tilde{c}p$, sendo $\tilde{c}$ a velocidade da luz no meio.

Assim, nas seções seguintes, apresentamos as equações cinéticas para amplitudes, pares e populações de mágnons, segundo as expressões 2.7, 2.9 e 2.10, de acordo com a aproximação de Markov. A dificuldade destes cálculos reside basicamente em dois pontos: os comutadores e os valores médios de operadores de criação e aniquilação segundo $\hat{\bar{\varrho}}(t)$. O primeiro passo, portanto, é calcular os comutadores das variáveis dinâmicas de base com $\hat{\mathscr{H}}_0$ e $\hat{\mathscr{H}}'$, e então os comutadores duplos, como por exemplo $\left[\hat{\mathscr{H}}'(t'-t)_0, [\hat{\mathscr{H}}', \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}]\right]$, obtendo diversas combinações de operadores de criação e aniquilação de mágnons, fônons e fótons. O segundo passo consiste no cálculo do traço destas combinações de operadores ponderadas pelo operador auxiliar $\hat{\bar{\varrho}}(t)$. Apresentamos tais procedimentos, assim como a integração em $t'$ dos termos $J^{(2)}(t)$ no Apêndice C.

## 2.1 Equação de evolução para as amplitudes $\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle$ e $\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle$

A equação de evolução das amplitudes, como descrito anteriormente, obedece à equação de Heisenberg ponderada pelo operador estatístico de não equilíbrio,

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle = \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{\left[\hat{c}_{\mathbf{q}}, \hat{\mathscr{H}}\right]\ \hat{\varrho}_{\varepsilon}(t)\times\hat{\varrho}_{\mathrm{B}}\right\}, \tag{2.16}$$

que, na aproximação de Markov, se reduz a

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle = J^{(0)}_{c_{\mathbf{q}}}(t) + J^{(1)}_{c_{\mathbf{q}}}(t) + J^{(2)}_{c_{\mathbf{q}}}(t), \tag{2.17}$$

sendo $J^{(0)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)$, $J^{(1)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)$ e $J^{(2)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)$ expressões análogas às 2.7, 2.9 e 2.10 (ver o Apêndice C, Eqs. C.11-C.17). Retendo somente os termos lineares em $\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle$, cujos coeficientes dependam das populações de mágnons, escrevemos a equação de evolução das amplitudes da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle = -i\tilde{\omega}^{\mathrm{c}}_{\mathbf{q}}(t)\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle - \Gamma_{\mathbf{q}}(t)\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle, \tag{2.18}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle = i\tilde{\omega}^{\mathrm{c}}_{\mathbf{q}}(t)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle - \Gamma_{\mathbf{q}}(t)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle, \tag{2.19}$$

em que

$$\tilde{\omega}^{\mathrm{c}}_{\mathbf{q}}(t) = \omega_{\mathbf{q}} + W^{\mathrm{c}}_{\mathbf{q}}(t), \tag{2.20}$$

$W^{\mathrm{c}}_{\mathbf{q}}(t)$ é a chamada correção de auto-energia da freqüência de precessão das amplitudes, e $\Gamma_{\mathbf{q}}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathbf{q}}(t) = 8\pi\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} & \left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2 \left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} + 1\right) \mathcal{N}_{\mathbf{q}_1} \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}_1} - \omega_{\mathbf{q}_2} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}) - \\
& - 8\pi\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} \left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2 \mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}_1} - \omega_{\mathbf{q}_2} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}) + \\
& + \pi\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2 \left[\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \nu_{\mathbf{k}} + 1\right) \delta(\Omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}}) - \left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \nu_{-\mathbf{k}}\right) \delta(\Omega_{-\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}})\right] + \\
& + 4\pi\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2 \left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \nu_{\mathbf{k}}\right) \delta(\Omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + \\
& + \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2 \left(\nu_{\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right) \delta(\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \Omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}}) + \\
& + 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2 \left(\nu_{-\mathbf{k}} + \nu_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} + 1\right) \delta(\Omega_{-\mathbf{k}} + \Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}}) + \\
& + \pi\hbar^{-2} \sum_{\alpha} \left|\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 \delta(\zeta_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}) + \\
& + \pi\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0} \left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^2 \left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + f_{\mathbf{p}} + 1\right) \delta(\zeta_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}}) - \\
& - \pi\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0} \left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^2 \left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - f_{-\mathbf{p}}\right) \delta(\zeta_{-\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}}) + \\
& + 4\pi\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0} \left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^2 \left(\mathcal{N}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{p}}\right) \delta(\zeta_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}),
\end{aligned} \tag{2.21}$$

sendo que a indicação da dependência temporal foi omitida do lado direito para simplificar a notação. Nos casos em que $\Gamma_{\mathbf{q}}(t)$ é positivo, pode ser interpretado como a taxa de decaimento das amplitudes, ou o inverso do tempo de meia-vida.

Considerando o sistema inicialmente em equilíbrio, as condições iniciais das equações 2.18 e 2.19 são nulas, e, como não possuem termos independentes, $\left.\frac{d}{dt}\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle\right|_{t=t_0} = 0$ e as amplitudes devem permanecer nulas. Pode-se também observar este resultado expressando a equação diferencial 2.18 (linearizada em $\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle$), com a condição inicial $\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|0\rangle$, na forma da equação integral

$$\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle = \langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|0\rangle \exp\left\{\int_0^t dt' \left[-i\tilde{\omega}^{\mathrm{c}}_{\mathbf{q}}(t') - \Gamma_{\mathbf{q}}(t')\right]\right\}, \tag{2.22}$$

que claramente é nula para condição inicial nula.

Assim, no que segue, o valor médio das amplitudes será negligenciado se comparado ao valor das outras macrovariáveis.

## 2.2 Equação de evolução para os pares $\sigma_{\mathbf{q}}(t)$ e $\sigma^*_{\mathbf{q}}(t)$

Como na seção anterior, a evolução dos pares segue a equação

$$\frac{d}{dt}\sigma_{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{\left[\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}, \hat{\mathscr{H}}\right]\ \hat{\varrho}_{\varepsilon}(t) \times \hat{\varrho}_{\mathrm{B}}\right\}. \tag{2.23}$$

Utilizando a aproximação de Markov,

$$\frac{d}{dt}\sigma_{\mathbf{q}}(t) = J^{(0)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t) + J^{(1)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t) + J^{(2)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t), \tag{2.24}$$

sendo os termos $J^{(0)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)$, $J^{(1)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)$ e $J^{(2)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)$ expressos no Apêndice C, Eqs. C.18-C.24. Rearranjando estes termos chega-se a

$$\frac{d}{dt}\sigma_{\mathbf{q}}(t) = -i\tilde{\omega}^{\sigma}_{\mathbf{q}}\,\sigma_{\mathbf{q}} - \Gamma_{\mathbf{q}}(t)\,\sigma_{\mathbf{q}} + \left.\frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{dt}\right|_{SL} + \left.\frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{dt}\right|_{SR} + \sum_{\mathbf{q}'} A_{\mathbf{q}'}(t) + \sum_{\mathbf{q}'} B_{\mathbf{q}'}(t). \tag{2.25}$$

O primeiro termo é a freqüência de precessão renormalizada dos pares,

$$\tilde{\omega}^{\sigma}_{\mathbf{q}}(t) = 2\omega_{\mathbf{q}} + W^{\sigma}_{\mathbf{q}}(t), \tag{2.26}$$

e $W^{\sigma}_{\mathbf{q}}(t)$ é a correspondente correção de auto-energia. O segundo é um decaimento caracterizado pela mesma função $\Gamma_{\mathbf{q}}(t)$ (Eq. 2.21) que controla o decaimento das amplitudes; os seguintes, $\left.\frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{dt}\right|_{SL}$ e $\left.\frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{dt}\right|_{SR}$ (expressões C.25 e C.26 no Apêndice C), são termos que dependem das populações de mágnons, independentes dos pares, portanto, e se originam das interações spin-rede e spin-radiação respectivamente; $A_{\mathbf{q}'}(t)$ são combinações não-lineares de diversos $\sigma_{\mathbf{q}'}$ e populações de mágnons; o último termo representa as contribuições das amplitudes à evolução dos pares.

Reescrevendo a Eq. 2.25 em forma integral,

$$\sigma_{\mathbf{q}}(t) = \sigma_{\mathbf{q}}(0) \exp\left\{ \int_0^t dt' \, \left[ -i\tilde{\omega}^{\sigma}_{\mathbf{q}}(t) - \Gamma_{\mathbf{q}}(t') \right] \right\} +$$
$$+ \exp\left\{ \int_0^t dt' \, \left[ -i\tilde{\omega}^{\sigma}_{\mathbf{q}}(t) - \Gamma_{\mathbf{q}}(t') \right] \right\} \times \int_0^t dt' \, \Lambda_{\mathbf{q}}(t') \exp\left\{ \int_0^{t'} dt'' \, \left[ i\tilde{\omega}^{\sigma}_{\mathbf{q}}(t) + \Gamma_{\mathbf{q}}(t'') \right] \right\}, \tag{2.27}$$

com $\Lambda_{\mathbf{q}}(t') = \left.\dfrac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{dt}\right|_{SL} + \left.\dfrac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{dt}\right|_{SR} + \sum_{\mathbf{q}'} A_{\mathbf{q}'}(t) + \sum_{\mathbf{q}'} B_{\mathbf{q}'}(t)$, e, considerando o sistema inicialmente em equilíbrio, apenas o termo da segunda linha à direita da Eq. 2.27 não é nulo.

## 2.3 Equação de evolução para as populações $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)$

De acordo com o exposto no início deste capítulo, as equações cinéticas para as populações de mágnons são descritas pela equação 2.11, sendo os termos cinéticos expressamente calculados no Apêndice C, Eqs. C.27-C.32. Após trabalhar estes termos obtém-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) = \\
&= \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 f^{\mathrm{S}}_{\mathbf{q}}\,\delta(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}}) - && [\mathfrak{S}^{\perp}_{\mathbf{q}}(t)]\\
&- \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 (\mathcal{N}_{\mathbf{q}}-f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{q}})\,\delta(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}}) + && [\mathfrak{R}^{\perp}_{\mathbf{q}}(t)]\\
&+\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(f_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}+1)-(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}}f_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + \\
&+\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|S^{\|\mathrm{a}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}f_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(f_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}) + && [\mathfrak{R}^{\|a}_{\mathbf{q}}(t)]\\
&+\frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(1+\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{N}_{\mathbf{q}'})f^{\mathrm{S}}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}) + && [\mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t)]\\
&+\frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}) - && [\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)]\\
&-\frac{1}{\tau_{\mathbf{q}}}\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}}-\mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}\right] + && [L_{\mathbf{q}}(t)]\\
&+\frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\nu_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\nu_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}) + && [\mathfrak{L}_{\mathbf{q}}(t)]\\
&+\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}+1)-(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + \\
&+\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}) + && [\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t)]\\
&+\frac{16\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\begin{array}{c}\left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times\\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}\end{array}. && [\mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t)]\\
&+\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}} C_{\mathbf{q}'}\left(\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}'}|t\right\rangle,\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}|t\right\rangle,\sigma_{\mathbf{q}'},\sigma^{*}_{\mathbf{q}'},t\right). && (2.28)
\end{aligned}
$$

Na Eq. 2.28 os termos $\mathfrak{S}^{\perp}_{\mathbf{q}}(t)$ e $\mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t)$ são as taxas de crescimento da população do modo $\mathbf{q}$ produzidas pela fonte externa, radiação eletromagnética aplicada à amostra, respectivamente perpendicular ou paralela ao campo estático aplicado $\mathbf{H}_0$:

- $\mathfrak{S}^{\perp}_{\mathbf{q}}(t)$ é um termo de alimentação direta (usualmente conhecido, em inglês, como *perpendicular pumping*) e, pela conservação de energia imposta pela delta, o modo alimentado é tal que $\omega_{\mathbf{q}} = \zeta_{\mathbf{q}}$, o que possibilita associá-lo à ressonância ferromagnética [4, 31];

- $\mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t)$, o chamado bombeamento paralelo (*parallel pumping*), é composto por duas contribuições, a direta e a retroalimentação, sendo que a última é proporcional à população de mágnons e é ausente no caso do *perpendicular pumping*. Cumpre indicar que a fonte externa, ao produzir fótons de freqüência $\zeta$, alimenta apenas as populações de mágnons tais que $2\omega_{\mathbf{q}} = \zeta$, devido à delta de conservação $\delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}'} - \zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'})$.

Assim como o sistema magnético se acopla à radiação da fonte, também se acopla à radiação térmica, originando desta forma os termos $\mathfrak{R}^{\perp}_{\mathbf{q}}(t)$, $\mathfrak{R}^{\|a}_{\mathbf{q}}(t)$ e $\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)$.

- $\mathfrak{R}^{\perp}_{\mathbf{q}}(t)$ se associa às componentes de radiação térmica perpendiculares ao campo $\mathbf{H}_0$. Devido à delta de conservação de energia temos que $f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{p}} = \mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}$ e claramente o termo representa uma relaxação linear dos mágnons via emissão (ou absorção) de fótons;

- Os termos seguintes, $\mathfrak{R}^{\|a}_{\mathbf{q}}(t)$ e $\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)$, são as taxas de variação da população de mágnons devido à parte da radiação eletromagnética de corpo negro paralela ao campo $\mathbf{H}_0$. Cada um dos termos refere-se a distintos processos: $\mathfrak{R}^{\|a}_{\mathbf{q}}(t)$ representa o processo de absorção (e emissão) de um fóton por um mágnon, enquanto $\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)$ ao decaimento de dois mágnons em um fóton (e vice-versa). A conservação concomitante de energia e momento nestes processos (indicada na Eq. 2.28) proíbe $\mathfrak{R}^{\|a}_{\mathbf{q}}(t)$. Por outro lado, o processo $\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)$ satisfaz a delta e representa um importante mecanismo de relaxação não-linear de mágnons excitados.

$L_{\mathbf{q}}$, $\mathfrak{L}_{\mathbf{q}}$ e $\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}$ são as contribuições para a evolução das populações oriundas do acoplamento com a rede cristalina:

- $L_{\mathbf{q}}(t)$ é o termo de relaxação linear para a rede com tempo de relaxação $\tau_{\mathbf{q}}$;

- $\mathfrak{L}_{\mathbf{q}}(t)$ é um termo envolvendo relaxação não-linear para a rede que aqui designamos por termo de Livshits [51];

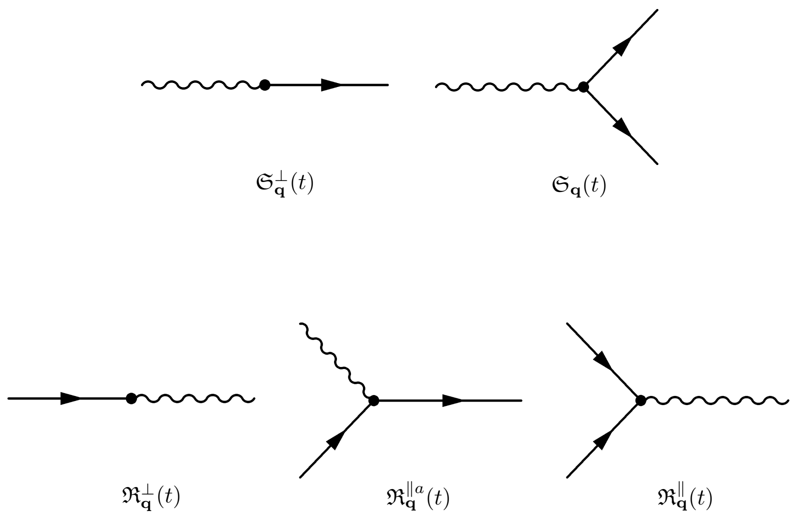



Figura 2.1: Diagramas de colisão associados à interação spin-radiação. Linhas sólidas representam mágnons e onduladas representam fótons. No que diz respeito a interação entre mágnons e fótons térmicos (termos $\mathfrak{R}^{\perp}_{\mathbf{q}}(t)$, $\mathfrak{R}^{\|a}_{\mathbf{q}}(t)$ e $\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)$), devem também ser considerados os diagramas inversos.

- $\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t)$ é uma contribuição não-linear, que chamamos de termo de Fröhlich [23],

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) = \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}+1)-(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}})+\\ +\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}),\end{aligned} \tag{2.29}$$

  que será estudada em detalhe na próxima seção, sendo ela a responsável pela emergência da Condensação de Não-Equilíbrio de Fröhlich-Bose-Einstein (NEF-BEC, de *Non-Equilibrium Fröhlich-Bose-Einstein Condensation*).

Temos ainda o termo

- $\mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t)$, que é a taxa de variação de mágnons gerada pela interação mágnon-mágnon.

Por fim, $C_{\mathbf{q}'}\left(\langle\hat{c}_{\mathbf{q}'}|t\rangle, \left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}|t\right\rangle, \sigma_{\mathbf{q}'}, \sigma^{*}_{\mathbf{q}'}, t\right)$ contém todas as contribuições à equação de evolução das populações relativas ao acoplamento com as amplitudes e pares. De acordo com o discutido na seção 2.1, as contribuições das amplitudes podem ser negligenciadas no que segue.

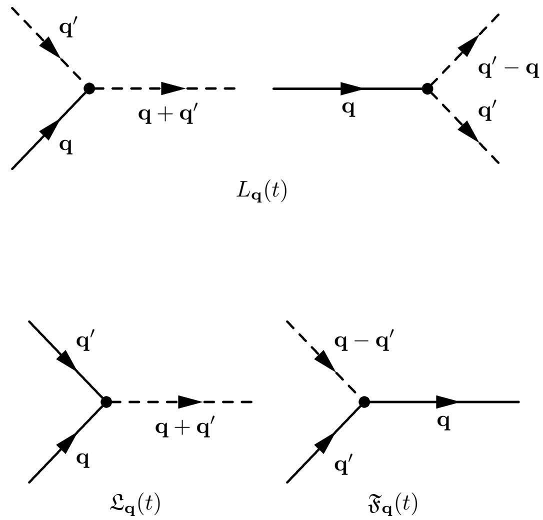



Figura 2.2: Diagramas de colisão spin-rede. Linhas sólidas representam mágnons e tracejadas representam fônons. Devem também ser considerados os diagramas inversos.

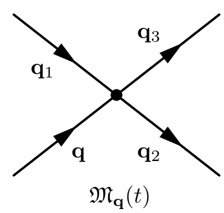



Figura 2.3: Diagrama de colisão (espalhamento) de mágnons segundo a interação mágnon-mágnon.

Trata-se de um sistema de equações diferenciais ordinárias não-linear que, lembremos, tem sua origem na média da equação de Heisenberg, ponderada pelo operador estatístico de não-equilíbrio (Eq. 2.5) e não inclui efeitos de memória, dada a aproximação de Markov utilizada.

Em equilíbrio verifica-se que os valores médios dos pares e das amplitudes são nulos, enquanto as populações médias são dadas por

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{eq}} \equiv \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} = \left(\mathrm{e}^{\beta_0 \hbar \omega_{\mathbf{q}}} - 1\right)^{-1},$$

e $\dfrac{d}{dt}\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = 0$. De fato, se considerarmos ainda a fonte externa desligada, $f_{\mathbf{p}}^{\mathrm{S}} = 0$, mostra-se por substituição direta que a distribuição de Planck acima satisfaz a condição de equilíbrio (i.e. o lado direito da Eq. 2.28 torna-se nulo). Mais que isso, pois este resultado será utilizado posteriormente, é importante enfatizar cada uma das diversas contribuições à Eq. 2.28 se anula em equilíbrio de forma independente.

Para a análise da contribuição dos pares para a evolução das populações é conveniente reescrever a Eq. 2.28 da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) = -\Gamma_{\mathbf{q}}(t)\,\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) + \Theta_{\mathbf{q}}(t), \tag{2.30}$$

sendo $\Gamma_{\mathbf{q}}(t)$ dado pela Eq. 2.21 e

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathbf{q}}(t) = {} & \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2\left(f^{\mathrm{S}}_{\mathbf{q}} + f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{q}}\right)\,\delta(\omega_{\mathbf{q}} - \zeta_{\mathbf{q}}) + \\
& + \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(f_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}+1)\,\delta(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}} - \zeta_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}f_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\,\delta(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}} + \zeta_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\right\} + \\
& + \frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2(1+\mathcal{N}_{\mathbf{q}'})\left(f^{\mathrm{S}}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} + f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}\right)\,\delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}'} - \zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}) + \\
& + \frac{1}{\tau_{\mathbf{q}}}\mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}} + \\
& + \frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\nu_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}'} - \Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}) + \\
& + \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}+1)\,\delta(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}} - \Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\,\delta(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\right\} + \\
& + \frac{16\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}\,\delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}_1} - \omega_{\mathbf{q}_2} - \omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}\ . \\
& + \sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}} C_{\mathbf{q}'}\left(\left\langle c_{\mathbf{q}'}|t\right\rangle, \left\langle c^{\dagger}_{\mathbf{q}'}|t\right\rangle, \sigma_{\mathbf{q}'}, \sigma^{*}_{\mathbf{q}'}, t\right).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Ao expressarmos ainda a Eq. 2.30 sob forma integral,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) = {} & \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(0)\exp\left\{-\int_0^t dt'\,\Gamma_{\mathbf{q}}(t')\right\} + \\
& + \exp\left\{-\int_0^t dt'\,\Gamma_{\mathbf{q}}(t')\right\} \times \int_0^t dt'\,\Theta_{\mathbf{q}}(t')\exp\left\{\int_0^{t'} dt''\,\Gamma_{\mathbf{q}}(t'')\right\},
\end{aligned} \tag{2.32}$$

podemos compará-la à Eq. 2.27. Considerando o sistema em equilíbrio no instante inicial $t = 0$ temos que, diferentemente da Eq. 2.27, o primeiro termo do lado direito da Eq. 2.32 é relevante, dado que $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(0) \neq 0$. Além disso, pode-se estimar que $\Theta_{\mathbf{q}}(t)$ (Eq. 2.31) é maior que o termo análogo $\Lambda_{\mathbf{q}}(t)$ associado à Eq. 2.27. Assim, de acordo com a condição inicial de equilíbrio adotada e com as especificidades do problema em questão, as contribuições para a equação de evolução das populações - Eq. 2.28 - referentes aos pares e às amplitudes são inexpressivas com relação às outras contribuições (que dependem exclusivamente das populações). Desta forma o termo

$$\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}} C_{\mathbf{q}'}\left(\langle\hat{c}_{\mathbf{q}'}|t\rangle\,,\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}|t\right\rangle,\sigma_{\mathbf{q}'},\sigma^{*}_{\mathbf{q}'},t\right)$$

será negligenciado nas subsequentes análises do comportamento das populações de mágnons, desacoplando então a evolução de $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)$ das amplitudes e dos pares.

### 2.3.1 *Efeito Fröhlich*

Lembrando que as populações de fônons do banho térmico, em contato com um reservatório térmico a temperatura $T_0$, obedecem a distribuição

$$\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}} = \left[\exp\left(\beta_0\hbar\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\right)-1\right]^{-1}, \tag{2.33}$$

com $\beta_0^{-1} = k_B T_0$ e $k_B$ sendo a constante de Boltzmann, a Eq. 2.29 pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) = \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\,\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\,\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}}\right\}\times\\ \times\,\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\,\mathrm{e}^{-\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}})+\\ +\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\,\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\,\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}}\right\}\times\\ \times\,\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\,\mathrm{e}^{-\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}),\end{aligned} \tag{2.34}$$

e, com o auxílio da definição

$$\chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} = \frac{2\pi}{\hbar^2}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left\{\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\,\mathrm{e}^{-\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})+\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\,\mathrm{e}^{-\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\right\}, \tag{2.35}$$

torna-se

$$\boxed{\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) = \sum_{\mathbf{q}'}\chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}\left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\,\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}}-(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\,\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}}\right\},} \tag{2.36}$$

que permite analisar o caráter peculiar e fundamental desta interação. Se considerarmos as populações de mágnons suficientemente altas ($\mathcal{N}_{\mathbf{q}}, \mathcal{N}_{\mathbf{q}'} \gg 1$)

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) = \sum_{\mathbf{q}'} \chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \mathcal{N}_{\mathbf{q}'} \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \left\{ \mathrm{e}^{\beta_0 \hbar \omega_{\mathbf{q}'}} - \mathrm{e}^{\beta_0 \hbar \omega_{\mathbf{q}}} \right\}, \tag{2.37}$$

e, dado que $\chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} > 0$, temos dois possíveis comportamentos:

1. Os modos caracterizados por $\mathbf{q}'$ que têm energia mais alta do que a do modo $\mathbf{q}$ (freqüência angular $\omega_{\mathbf{q}'}$ tal que $\omega_{\mathbf{q}'} > \omega_{\mathbf{q}}$), levam, por conta do fator $\left\{ \mathrm{e}^{\beta_0 \hbar \omega_{\mathbf{q}'}} - \mathrm{e}^{\beta_0 \hbar \omega_{\mathbf{q}}} \right\} > 0$, a contribuições positivas ao termo $\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t)$, indicando um crescimento na população $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ - uma alimentação;

2. Por outro lado, aqueles modos em que $\omega_{\mathbf{q}'} < \omega_{\mathbf{q}}$ contribuem negativamente com $\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t)$ e levam a uma relaxação.

Assim, o termo de Fröhlich faz com que a população de mágnons associada a um dado modo aumente por conta das contribuições provenientes dos modos de mais alta energia, ao passo que diminua devido à transferência aos modos de mais baixa energia. Claramente, a energia é transferida em cascata dos modos de alta energia para os modos de baixa energia, gerando um acúmulo nos modos de mínima freqüência.

Como manifestado na Introdução, este processo não-linear, aqui chamado de *Efeito Fröhlich*, está presente em uma série de sistemas de muitos bósons imersos em um banho térmico e sob ação de fonte externa que os afaste do equilíbrio. Inicialmente este efeito foi evidenciado por H. Fröhlich nos casos de vibrações polares (fônons LO) em biopolímeros sob excitação escura (cf. Ref. 22–25). Desde então o fenômeno tem sido encontrado em diversos sistemas fora do equilíbrio: em vibrações acústicas (fônons AC) em fluidos biológicos que envolvem interações anarmônicas e estão sob a presença de bombeamento de energia via ondas sonoras [26, 27]; em éxcitons (pares elétron-buraco em semicondutores) interagindo com as vibrações da rede cristalina e sob ação de campos eletromagnéticos de rádio freqüência [28, 29]. Em todos os casos citados, frisa-se, o comportamento complexo - acúmulo de bósons nas energias mínimas, independentemente da freqüência da fonte externa - emerge da não linearidade da interação do sistema de bósons com a rede cristalina.

No caso dos mágnons é usual (ver, por exemplo, Refs. 3, 4) considerar apenas interações lineares entre estes e a rede cristalina (semelhantes ao termo $L_{\mathbf{q}}(t)$ da Eq. 2.28).

No entanto, a formação do condensado de mágnons excitados relatado nos experimentos das Refs. 5, 6, 9, 10, descritos na Introdução, evidencia a ocorrência do efeito Fröhlich, chama a atenção para a relevância das não linearidades nestes processos cinéticos e nos permite classificar tal acúmulo como uma NEFBEC de mágnons excitados.

### 2.3.2 Interação mágnon-mágnon

Analisemos em detalhe o termo cinético proveniente da interação mágnon-mágnon

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t) = \frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} \begin{array}{c} |\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}|^2 \{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\} \times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} \end{array} . \tag{2.38}$$

Observando este termo e a representação diagramática do processo (Fig. 2.3) percebe-se que se trata de um processo análogo ao associado à interação coulombiana entre elétrons (foto-injetados ou em semicondutores dopados) fora de equilíbrio. A cinética da interação coulombiana foi objeto de diversos estudos [52–54] em que foi concluído que o papel desta interação é o de levar os elétrons a uma única temperatura interna de não-equilíbrio, a chamada termalização interna de não equilíbrio.

De fato, ao introduzirmos na Eq. 2.38 a distribuição de mágnons

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{SM}} = \left(\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{q}}} - 1\right)^{-1} \tag{2.39}$$

com $\beta^{-1} = k_B T^*$, sendo $T^* \neq T_0$ uma temperatura de não-equilíbrio[1] única de mágnons, obtém-se $\mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t) = 0$, indicando que tal solução é estacionária e corroborando a idéia de que a interação mágnon-mágnon tende a levar à termalização interna dos mágnons.

## 2.4 Resumo do Capítulo 2

Neste capítulo discutimos a evolução temporal do sistema magnético descrito no capítulo anterior. Restringindo-nos apenas a sistemas homogêneos, descrevemos as equações cinéticas para as amplitudes, os pares e as populações de mágnons (os valores médios dos operadores $\hat{c}_{\mathbf{q}}$ , $\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}$, $\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}$, $\hat{\sigma}^{\dagger}_{\mathbf{q}}$ e $\hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}$). Dado o hamiltoniano apresentado no

[1] Lembramos que o conceito de temperatura de não-equilíbrio foi mencionado no Capítulo 1 (ver Refs. 40–42).

Capítulo 1, as equações cinéticas foram obtidas pela média da equação de evolução de Heisenberg ponderada pelo operador estatístico de não-equilíbrio Foi considerada a aproximação de Markov, em que efeitos de memória são negligenciados.

- Quanto às amplitudes $\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle$ e $\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle$, se levarmos em conta apenas os mecanismos de alimentação descritos pelo hamiltoniano $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{SR}}$, mostrou-se que a equação de evolução não possui termos independentes e, numa aproximação linear, é a composição entre uma precessão dada por $\tilde{\omega}^{c}_{\mathbf{q}}(t)$ e um decaimento dado $\Gamma_{\mathbf{q}}$. Temos, portanto, que se a condição inicial for nula - o que ocorre efetivamente se a condição inicial for a de equilíbrio -, $\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle = \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle = 0$, isto é, as amplitudes permanecerão nulas.

- A equação cinética dos pares é também determinada. Além dos termos lineares de precessão e decaimento, são discutidas as contribuição não-lineares nos pares. Em particular, é apontado o termo que depende exclusivamente das populações de mágnons, que atua como fonte caso os pares e amplitudes sejam nulos.

Foi apresentada por fim a equação cinética das populações de mágnons. Diversas contribuições foram analisadas:

- As provenientes da fonte externa de microondas, com componentes perpendicular e paralela ao campo magnético estático. O “bombeamento paralelo” se associa à criação de dois mágnons pela aniquilação de um fóton e apresenta um termo de retroalimentação, proporcional à população de mágnons;

- Aquelas oriundas das interações do sistema magnético com o banho térmico - a radiação de corpo negro e a rede cristalina. Especial atenção foi dada ao termo associado ao acoplamento não-linear entre sistema magnético e rede cristalina. Conhecido por “termo de Fröhlich” (seção 2.3.1), esta contribuição transfere a energia em excesso ao equilíbrio das populações de mágnons dos modos de alta freqüência para os de baixa, promovendo um acúmulo de mágnons nos modos de mínima energia, o assim chamado condensado de Fröhlich-Bose-Einstein;

- O termo relativo à interação mágnon-mágnon, que redistribui a energia entre as populações de mágnons, que faz o sistema tender a uma termalização interna determinada por uma temperatura de não-equilíbrio.

- As contribuições das amplitudes e dos pares foram negligenciadas, pois, dada uma condição inicial de equilíbrio, percebe-se que as amplitudes permanecem nulas e os pares não alcançam valores relevantes para a dinâmica das populações.

# Capítulo 3

# Modelo de Dois Fluidos

O sistema de equações diferenciais 2.28, que governa a evolução temporal das populações de mágnons associados ao hamiltoniano expresso pelas Eqs. 1.58, 1.59 e 1.60, teve suas diversas contribuições analisadas de forma qualitativa no capítulo anterior. Resta, no entanto, realizar uma análise quantitativa que nos permita avaliar como as diferentes contribuições se compõem e determinam efetivamente a evolução das populações.

Lembremos, porém, que o sistema 2.28 é constituído por distintas equações para cada modo $\mathbf{q}$ na primeira zona de Brillouin e, desta forma, o número de equações integro-diferenciais não-lineares acopladas é da ordem do número de células unitárias da amostra em questão, tornando na maioria das vezes praticamente inviável obter sua solução.

Para obtermos resultados quantitativos, introduzimos uma modelagem satisfatória que denominamos "Modelo de Dois Fluidos", descrita a seguir. Baseando-se nos experimentos de Demokritov *et al.* relatados na Introdução, pode-se afirmar que basicamente dois grupos de mágnons, caracterizados por suas energias, têm relevância no fenômeno de condensação de mágnons. Observando a figura 3.1 constata-se que são suficientes para descrever o experimento apenas os modos alimentados (em torno de 4GHz) e os de mínima freqüência ($\sim$ 2GHz), onde ocorre o acúmulo, sendo que os outros modos, apesar de também serem excitados, rapidamente saturam e espera-se uma contribuição muito pequena no processo.

Desta forma consideramos, entre todas as populações de mágnons $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ descritas pela Eq. 2.28, somente aquelas associadas aos modos de energia próxima do mínimo

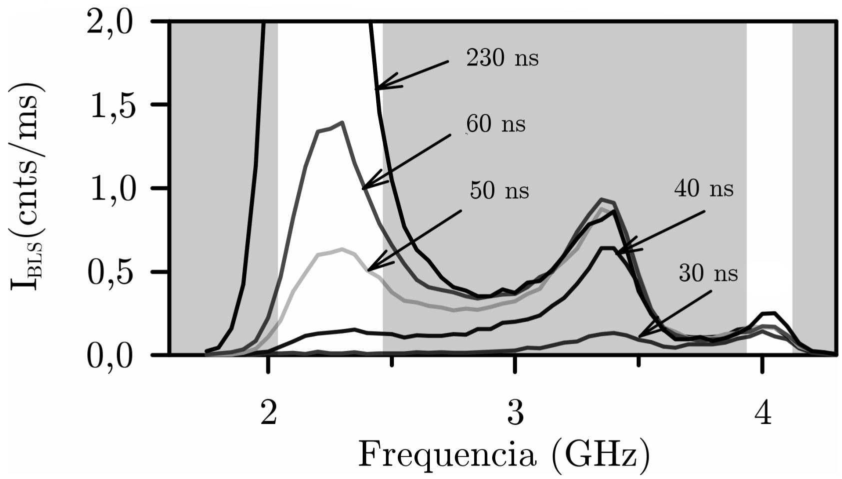



Figura 3.1: Evolução temporal do espectro do espalhamento Brillouin após o acionamento da fonte externa. Tempos indicados têm por referência o momento de acionamento da fonte. Adaptada da Ref. 6, figura 2.

e em torno da energia de alimentação. Separamos então o sistema nestas regiões, procedimento semelhante ao utilizado por Aguiar e Rezende na Ref. 55 (ver também Ref. 56) e em estudos de superfluidez (cf. Ref. 57):

$$\begin{array}{c} \mathcal{N}_1(t) \text{ (região associada aos modos de mínima freqüência -}R_1\text{)} \\ \mathcal{N}_2(t) \text{ (região associada aos modos alimentados -}R_2\text{)} \end{array},$$

em que $\mathcal{N}_1(t)$ e $\mathcal{N}_2(t)$ são, respectivamente, populações representativas destes modos definidas por

$$\mathcal{N}_{1,2}(t) = \frac{\sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)}{\sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}} 1} = \frac{\sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)}{n_{1,2}}, \tag{3.1}$$

sendo $n_{1,2}$ o número de modos presentes em cada uma das duas regiões.

As populações representativas $\mathcal{N}_{1,2}(t)$ têm suas evoluções descritas em termos da evolução dos $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)$ ,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{1,2}(t) = \frac{1}{n_{1,2}}\frac{d}{dt}\sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{n_{1,2}}\sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}} \frac{d\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)}{dt}. \tag{3.2}$$

Retomando a equação 2.28 (negligenciando os termos de Livshits e a interação com a radiação perpendicular - ver seção 4.2), obtemos finalmente

$$\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{1,2}(t) = \frac{1}{n_{1,2}} \sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}} \left\{ \mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t) + \mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t) + L_{\mathbf{q}}(t) + \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) + \mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t) \right\}, \tag{3.3}$$

ou seja, para encontrarmos a evolução das populações representativas, $\mathcal{N}_{1,2}(t)$ da Eq. 3.3, devemos somar todas as distintas contribuições para a evolução de $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)$, sobre as regiões $R_1$ e $R_2$. Mas a equação encontrada ainda mantém acoplada a evolução de $\mathcal{N}_{1,2}(t)$ às diferentes populações $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)$, posto que as diversas contribuições do lado direito da Eq. 3.3 são funções das populações, como pode ser observado no termo de Fröhlich, reproduzido abaixo de acordo com a Eq. 2.36,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}} \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) &= \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_{1,2}\\ \mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\,\chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \left\{ e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}} \right\} + \\ &\quad + \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_{1,2}\\ \mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}} \chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \left\{ \mathcal{N}_{\mathbf{q}'} e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\, e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}} \right\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

sendo $\chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$ determinado pela Eq. 2.35.

É possível, porém, obter um sistema de equações fechado nas populações representativas, $\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{1,2}(t) = G_{1,2}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, t)$, com $G_1$ e $G_2$ sendo funções de $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$. Para alcançar este objetivo deve-se inicialmente atentar que, excetuando o termo linear $L_{\mathbf{q}}(t)$, todas as contribuições do lado direito da Eq. 3.3 contém somas, na primeira zona de Brillouin, de produtos de populações de mágnons por diversos elementos de matriz e populações de fônons e fótons em equilíbrio. Separamos então cada uma destas somas nas regiões $R_1$ e $R_2$, que no caso do termo de Fröhlich leva a

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{q}\in R_1} \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) &= \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_1}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\,\chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \left\{ e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}} \right\} + \\ &\quad + \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\,\chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \left\{ e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}} \right\} + \\ &\quad + \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_1}} \chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \left\{ \mathcal{N}_{\mathbf{q}'} e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\, e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}} \right\} + \\ &\quad + \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \left\{ \mathcal{N}_{\mathbf{q}'} e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\, e^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}} \right\}. \end{aligned}$$

Os termos em que $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in R_1$ são nulos. Então

$$\sum_{\mathbf{q}\in R_1} \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) = \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\,\chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}\left\{\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - \mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}}\right\} + \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}\left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\,\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}}\right\}.$$

Neste ponto recorre-se ao teorema do valor médio em cálculo integral, que nos permite afirmar que existem vetores de onda específicos $\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{q}}_4 \in R_1$ e $\tilde{\mathbf{q}}_2, \tilde{\mathbf{q}}_3 \in R_2$ tais que

$$\sum_{\mathbf{q}\in R_1} \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) = \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}_1}\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}_2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}\left\{\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - \mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}}\right\} + \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}_3} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}\,\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}_4} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}\,\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}},$$

retirando as populações do interior das somas. Por fim, supõe-se que estas populações específicas são proporcionais às populações representativas, encerrando, desta maneira, o sistema de equações diferenciais em $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$. Acompanhando ainda tal desenvolvimento no termo de Fröhlich,

$$\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}_1} = \lambda_1\mathcal{N}_1;\; \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}_2} = \lambda_2\mathcal{N}_2;\; \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}_3} = \lambda_3\mathcal{N}_2;\; \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}_4} = \lambda_4\mathcal{N}_1;$$

e

$$\sum_{\mathbf{q}\in R_1} \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) = \mathcal{N}_1\mathcal{N}_2\,\lambda_1\lambda_2 \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}\left\{\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - \mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}}\right\} + \mathcal{N}_2\,\lambda_3 \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}\,\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}'}} - \mathcal{N}_1\,\lambda_4 \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \chi_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}\,\mathrm{e}^{\beta_0\hbar\omega_{\mathbf{q}}}.$$

Este procedimento pode ser aplicado a todas as contribuições à Eq. 3.3, cujos detalhes se encontram no Apêndice D. Analisando cuidadosamente as deltas de conservação (cf. Eq. 2.28) e impondo que em equilíbrio as diversas contribuições são obrigatoriamente nulas, obtém-se finalmente o sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares para $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dado por

$$f_1 \frac{d}{d\bar{t}} \mathcal{N}_1(\bar{t}) = -\mathrm{D}_1 \mathcal{N}_1(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_1^{(0)}) - f_1 \left[\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_1^{(0)}\right] + \tag{3.5a}$$

$$+ \mathrm{F} \left\{\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 + (\bar{\nu} + 1) \mathcal{N}_2 - \bar{\nu} \mathcal{N}_1\right\} - \tag{3.5b}$$

$$- \left\{\mathrm{M}_1 \mathcal{N}_1 \left(\mathcal{N}_1 + 1\right) + \mathrm{M}_2 \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}_2 + 1\right)\right\} \left(\mathcal{N}_1 \frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}} - \mathcal{N}_2\right), \tag{3.5c}$$

e

$$f_2 \frac{d}{d\bar{t}} \mathcal{N}_2(\bar{t}) = \mathrm{I} \left(1 + 2\mathcal{N}_2\right) - \tag{3.6a}$$

$$- \mathrm{D}_2 \mathcal{N}_2(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2^{(0)}) - f_2 \left[\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2^{(0)}\right] - \tag{3.6b}$$

$$- \mathrm{F} \left\{\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 + (\bar{\nu} + 1) \mathcal{N}_2 - \bar{\nu} \mathcal{N}_1\right\} + \tag{3.6c}$$

$$+ \left\{\mathrm{M}_1 \mathcal{N}_1 \left(\mathcal{N}_1 + 1\right) + \mathrm{M}_2 \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}_2 + 1\right)\right\} \left(\mathcal{N}_1 \frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}} - \mathcal{N}_2\right). \tag{3.6d}$$

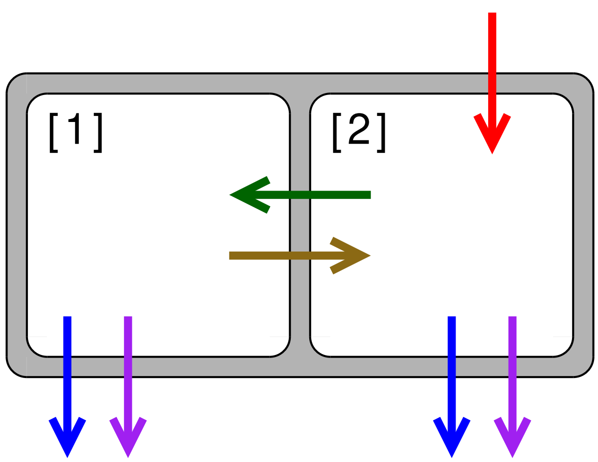



Figura 3.2: Diagrama ilustrativo das diferentes contribuições para a evolução de $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$, segundo as Eqs. 3.5 e 3.6. O sistema recebe energia através da fonte e relaxa linearmente com a rede e via emissão de fótons. Os termos de Fröhlich e mágnon-mágnon redistribuem a energia internamente, o que pode ser entendido, de forma pictórica, como uma transferência conservativa de mágnons.

Nestas equações o tempo de relaxação linear para a rede foi considerado o mesmo para todos os diversos modos, $\tau_{\mathbf{q}} \approx \tau$, e o tempo foi reescalado em termos de $\tau$, $\bar{t} = {}^{t}/_{\tau}$. Já $f_{1,2}$ são as frações de modos contidos nas regiões $R_{1,2}$, com relação ao total de modos na amostra,

$$f_{1,2} = \frac{n_{1,2}}{\sum_{\mathbf{q}} 1}.$$

$\mathcal{N}_{1,2}^{(0)}$ são as populações representativas de equilíbrio e $\bar{\nu}$ é um parâmetro relativo ao termo de Fröhlich que, devido a imposição de que o sistema deve ser estacionário no equilíbrio, é dado por

$$\bar{\nu} = \frac{(\mathcal{N}_1^{(0)} + 1)\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)} - \mathcal{N}_2^{(0)}}$$

e está associado à população média de fônons (ver Eqs. D.7 e D.8 no Apêndice D). Os coeficientes $\mathrm{M}_{1,2}$ e F são, respectivamente, as constantes de acoplamento associadas à interação mágnon-mágnon e ao termo de Fröhlich (e consideraremos daqui em diante $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2 = \mathrm{M}$); $\mathrm{D}_{1,2}$ está associado ao decaimento não-linear de mágnons com emissão de fótons, o termo $\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)$ da Eq. 2.28; I representa taxa de alimentação direta proveniente da fonte externa efetivamente absorvida pelo sistema magnético. Todos estes coeficientes são adimensionais, pois foram multiplicados por $\tau$, e têm suas expressões descritas no Apêndice D.

A figura 3.2 ilustra os diversos processos expressos nas Eqs. 3.5 e 3.6, coloridos de forma a identificá-los. A fonte bombeia energia para $\mathcal{N}_2$ (população representativa associada às altas freqüências), e o termo 3.6a exprime a alimentação direta e a retroalimentação discutida na seção 2.3. Os termos de Fröhlich e mágnon-mágnon são responsáveis pela troca de energia entre os dois modos e se contrapõem, de acordo com o discutido nas seções 2.3.1 e 2.3.2. Para altas populações $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \gg \bar{\nu}$ , o termo de Fröhlich (termos 3.5b e 3.6c, que neste caso se resumem a $\pm\mathrm{F}\,\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2$) basicamente transfere energia dos modos alimentados $\mathcal{N}_2$ para aqueles de menor freqüência $\mathcal{N}_1$; já o termo de mágnon-mágnon induz a termalização, posto que leva a populações representativas $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ tais que

$$\frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_2} = \frac{\mathcal{N}_1^{(0)}}{\mathcal{N}_2^{(0)}}.$$

A relaxação do sistema se dá em ambas as regiões, de forma linear com relação à rede cristalina e não linear quanto ao decaimento de mágnons via emissão de fótons (termos 3.5a e 3.6b).

Vemos, portanto, que o modelo de dois fluidos preserva o comportamento da evolução geral das populações descrito pela Eq. 2.28, sendo que os diversos termos do sistema de equações 3.5 e 3.6 refletem de modo fiel as contribuições discutidas na seção 2.3. Além desta correspondência, a modelagem de dois fluidos permite uma análise mais clara e simples e possibilita inclusive uma resolução numérica, discutida no próximo capítulo, dadas as condições iniciais do sistema e os valores específicos dos parâmetros nas Eqs. 3.5 e 3.6.

## 3.1 Resumo do Capítulo 3

Propusemos aqui uma modelagem da equação cinética das populações de mágnons que possibilita o estudo quantitativo da evolução do sistema. Separamos as populações de mágnons em duas regiões, sendo uma associada aos modos de freqüência próxima à mínima e a outra aos modos alimentados. Foram então obtidas as equações de evolução para as populações representativas de cada região, $\mathcal{N}_1(t)$ e $\mathcal{N}_2(t)$. Mostramos que estas equações, que podem ser integradas numericamente, preservam os principais mecanismos presentes na equação cinética das populações de mágnons.

# Capítulo 4

# Condensação de Fröhlich-Bose-Einstein em filmes finos de YIG

Apresentamos neste capítulo a aplicação do formalismo desenvolvido anteriormente à análise dos experimentos descritos na Introdução. Utilizamos a aproximação de dois fluidos das equações cinéticas das populações de mágnons para estudar - via análise qualitativa e resolução numérica - recentes experimentos de filmes magnéticos finos sob ação de uma fonte de microondas e em contato com um banho térmico. Particular atenção é dada à formação do acúmulo de mágnons criados pela fonte externa nos modos de menor energia e à relaxação deste sistema para o equilíbrio.

## 4.1 Mágnons em filmes finos de YIG

Recentemente, S. O. Demokritov e colaboradores realizaram uma série de estudos experimentais [5, 6, 9, 10] sobre mágnons em filmes finos de granada de ferro-ítrio (o composto $Y_3Fe_2(FeO_4)_3$ ou YIG, do inglês *yttrium iron garnet*) sob ação de uma fonte externa. Verificaram, via espectroscopia de espalhamento Brillouin de luz, que, sob certas condições, os mágnons criados por conta da interação com a fonte externa se acumulam nos modos de mínima energia e tal acúmulo foi então por eles associado a uma condensação de Bose-Einstein fora de equilíbrio.

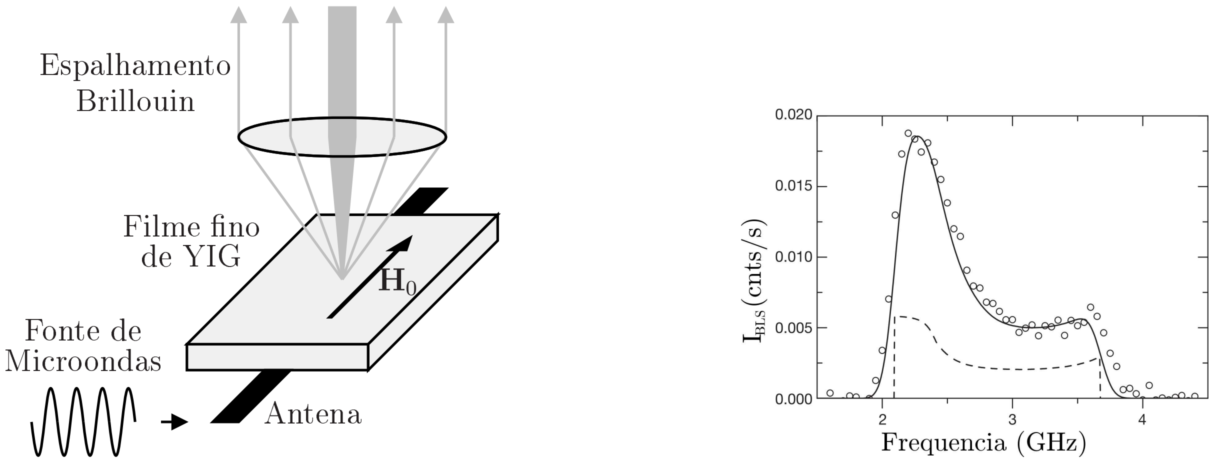



Figura 4.1: À esquerda temos a disposição experimental (segundo Refs. 5, 8). O filme fino de YIG, sob campo $\mathbf{H}_0$, é alimentado pela fonte de microondas via antena anexa. As populações de mágnons são medidas via espalhamento de luz. À direita, a densidade reduzida de estados (linha tracejada) é obtida através da razão entre a intensidade BLS medida (círculos) e a distribuição de Planck. A linha sólida apresenta o ajuste. Figura adaptada da Ref. 5, figura 2.

Nestes experimentos, filmes finos de YIG foram escolhidos como material investigado por uma série de motivos. Além de ser um material amplamente estudado e ricamente documentado (a Ref. 58 foi utilizada no que diz respeito aos dados experimentais do YIG, enquanto a Ref. 35 apresenta um panorama sobre sua relação de dispersão e seus mecanismos de relaxação), o YIG tem baixas perdas magnéticas - possibilitando aos mágnons longa vida média ($\tau_{\mathrm{YIG}} \sim 1\,\mu$s) - e apresenta efetiva absorção de energia via bombeamento paralelo.

Foram utilizados filmes finos de YIG epitaxial, com espessura de $2-10\,\mu$m e dimensões laterais de $2-20\,$mm sob a ação de um campo magnético estático, paralelo ao filme, $\mathrm{H}_0 \sim 1\,$kOe. A relação de dispersão destes filmes apresenta uma freqüência mínima $f_{\min} \sim 2,10\,$GHz para vetores de onda paralelos ao campo magnético estático e de módulo $q \sim 5 \times 10^4\,\mathrm{cm}^{-1}$. Os experimentos foram realizados a temperatura ambiente, sendo a temperatura de Curie do YIG $T_{\mathrm{c}} = 559\,$K.

A fonte externa monocromática de microondas ($6-9\,$GHz) alimentou o sistema através de uma antena cilíndrica de $25\,\mu$m de diâmetro anexada ao filme fino em sua região central, com pulsos de curta ($30\,$ns) ou longa duração ($1-100\,\mu$s) e potência variando entre $0,1-6\,$W, sendo a radiação basicamente[1] paralela ao campo magnético

[1]Aqui, devido à configuração geométrica das antenas, tanto as componentes paralelas como per-

estático. À esquerda da Figura 4.1 apresentamos um diagrama ilustrativo da disposição experimental.

Para obtenção da evolução das populações dos mágnons, foi utilizada a técnica de espectroscopia de Brillouin de espalhamento de luz com resolução temporal[2] de 10 ns, cujos detalhes podem ser obtidos na referência 60. Utilizando uma geometria de espalhamento em que a luz recolhida se propaga em direção praticamente oposta à direção da luz incidente (*quasi-backward geometry*), contribuem para o espalhamento apenas os mágnons com vetores de onda tais que $|\mathbf{q}| < 2 \times 10^5\,\mathrm{cm}^{-1}$ e a resolução experimental típica era de 250 MHz (podendo eventualmente chegar a 50 MHz, às custas da diminuição da sensibilidade do experimento). Deve-se notar que a intensidade do espalhamento medido (ou intensidade BLS do inglês *Brillouin Light Scattering*) para uma dada freqüência é proporcional ao produto da população de mágnons $\mathcal{N}(\omega)$ pela densidade de estados $g(\omega)$ (cf. Ref. 61),

$$\mathrm{I}_{\mathrm{BLS}}(\omega) \propto \mathcal{N}(\omega)\, g(\omega). \tag{4.1}$$

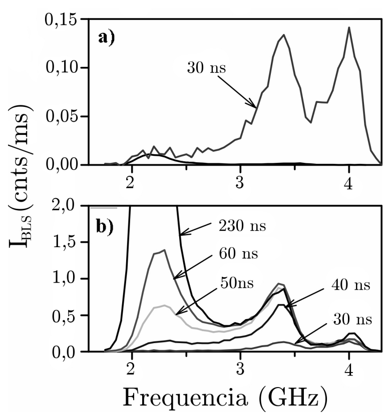



Figura 4.2: Intensidade do espalhamento Brillouin em filme fino de YIG (a) 30 ns após ativação da fonte (b) em sucessivos instantes. Adaptada da Ref. 6, figura 2.

Assim, a intensidade BLS nos fornece a população de mágnons numa certa região de freqüências se conhecermos o produto da constante de proporcionalidade pela densidade de estados. Este pode ser obtido, para cada freqüência, dividindo-se a intensidade BLS em equilíbrio pela distribuição de Planck para os mágnons (ver lado direito da Figura 4.1).

De forma simplificada, os experimentos de Demokritov *et al.* nos mostram que, partindo do equilíbrio (Figura 4.1), ao ser acionada a fonte externa ocorre um forte aumento na população dos mágnons

pendiculares da radiação de microondas estariam presentes alimentando o sistema. Pode-se mostrar, no entanto, que neste caso terá relevância apenas a componente paralela (ver Ref. 15).

[2]Alguns experimentos posteriores do mesmo grupo dispuseram, além da resolução temporal, de resolução no espaço de fases (quasimomentos) [59] ou de resolução no espaço direto [15].

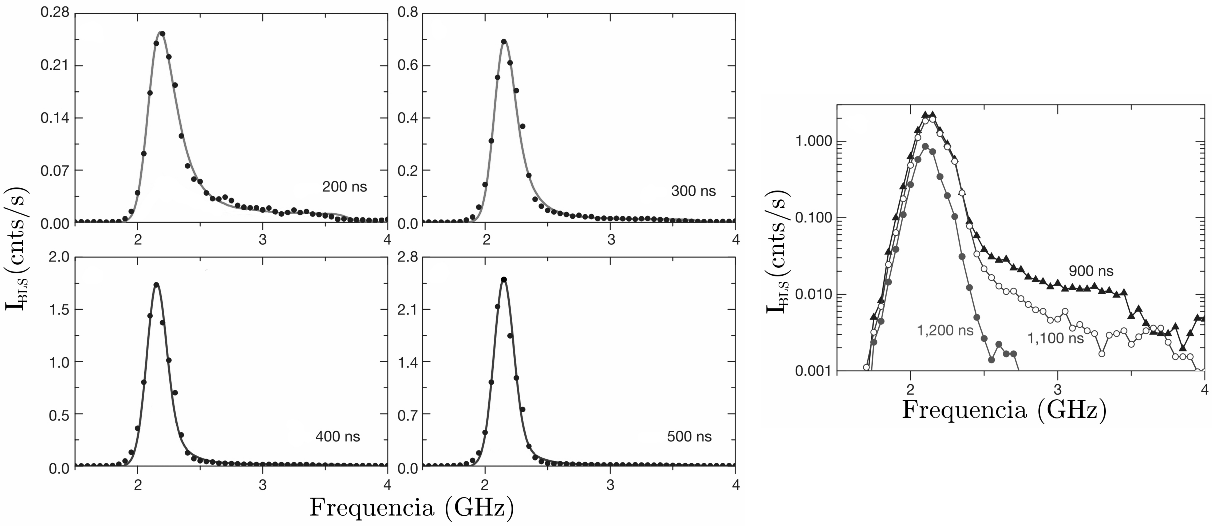



Figura 4.3: Intensidade do espalhamento Brillouin para tempos distintos. À esquerda, com a fonte externa acionada, vê-se que após $\sim 200\,\mathrm{ns}$ apenas as populações de mágnons dos modos próximos ao mínimo de energia seguem crescendo, e as outras estão praticamente saturadas. À direita vemos o desenvolvimento do sistema após ser desligada a fonte. Adaptada da Ref. 5, figuras 3 e 4.

cuja freqüência equivale a metade da freqüência da radiação da fonte (Figura 4.2a). Estes assim chamados mágnons primários se distribuem rapidamente pelo espectro, populando inicialmente os modos de energia próxima a da fonte e então, sucessivamente, alcançando os modos de mais baixa energia. Em um dado momento praticamente todas as populações de mágnons ficam inalteradas, sendo que toda a energia bombeada é canalizada de forma que apenas as populações de mágnons associadas ao mínimo de energia continuem aumentando (Figura 4.2b), eventualmente atingindo o sistema um estado estacionário. Após ser desligada a fonte externa, os mágnons relaxam para o equilíbrio (ver lado direito da Figura 4.3).

Cabe aqui ressaltar dois aspectos importantes do fenômeno:

a. O processo de redistribuição dos mágnons primários sobre o espectro depende fortemente da potência da fonte externa aplicada. Nos experimentos discutidos nas Refs. 5, 6, 9, em que a fonte de microondas é aplicada durante $1\,\mu\mathrm{s}$, percebe-se que para potências extremamente baixas ($\sim 0,1\,\mathrm{W}$) os poucos mágnons primários criados praticamente não se espalham pelo espectro - a criação destes mágnons é balanceada pelos diversos processos de relaxação. Aumentando-se a potência de bombeamento de energia

($\gtrsim 0,7\,\mathrm{W}$), a dinâmica dos mágnons se dá em duas etapas: inicialmente ocorre a redistribuição das populações de mágnons até que as populações de mágnons não associadas ao mínimo de energia saturem, sendo que o tempo de duração ($\sim 50-250\,\mathrm{ns}$) desta etapa diminui com o aumento da potência empregada (ver Figura 4.4a); conforme a energia continua a ser bombeada as populações seguem crescendo até atingirem uma distribuição estacionária. Acima de certa potência ($\sim 5\,\mathrm{W}$) as mesmas etapas são observadas mas, a

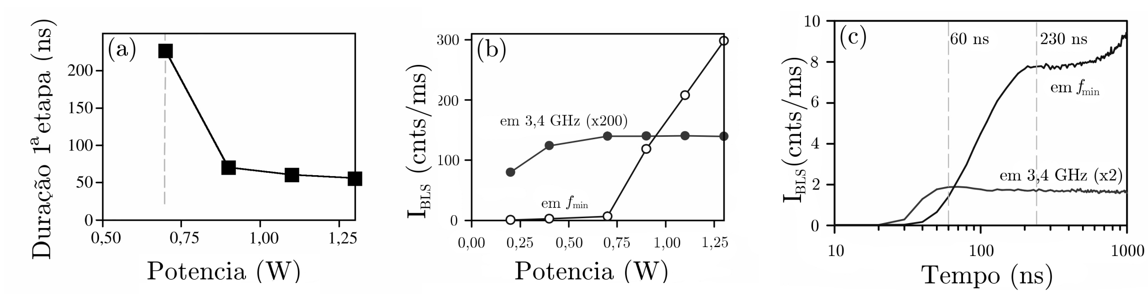



Figura 4.4: (a) Tempo decorrido, após acionamento da fonte externa, para distribuição dos mágnons primários. (b) Intensidade Brillouin associadas às populações estacionárias dos modos de freqüência mínima e de $3,4\,\mathrm{GHz}$ em função da potência da fonte. (c) Desenvolvimento no tempo das populações referentes aos mesmos modos anteriores. Adaptada da Ref. 6, figuras 4 e 5.

partir de um dado instante, as população de mágnons associadas aos modos de energia superior à mínima saturam e sucessiva alimentação gera um adicional acúmulo preferencialmente nas populações no mínimo de energia, o que caracterizaria, segundo os autores dos experimentos, a formação de um condensado de Bose-Einstein (cf. Figuras 4.4b e 4.4c).

b. Alimentando o sistema com a fonte de microondas durante curtos intervalos de tempo ($30\,\mathrm{ns}$) foi observada a relaxação do sistema para o equilíbrio [9, 10]. Além de constatar-se novamente que o tempo de redistribuição inicial dos mágnons diminui com o aumento da potência da fonte externa, foi identificado um comportamento peculiar no decaimento exponencial do sistema. A taxa com que o sistema decai apresenta um salto em função do número de mágnons injetado no sistema e, portanto, com a potência da fonte. Como pode ser visto na Figura 4.5, o tempo característico de decaimento praticamente cai pela metade ao aplicar-se potências suficientes para criação do dito condensado de Bose-Einstein .

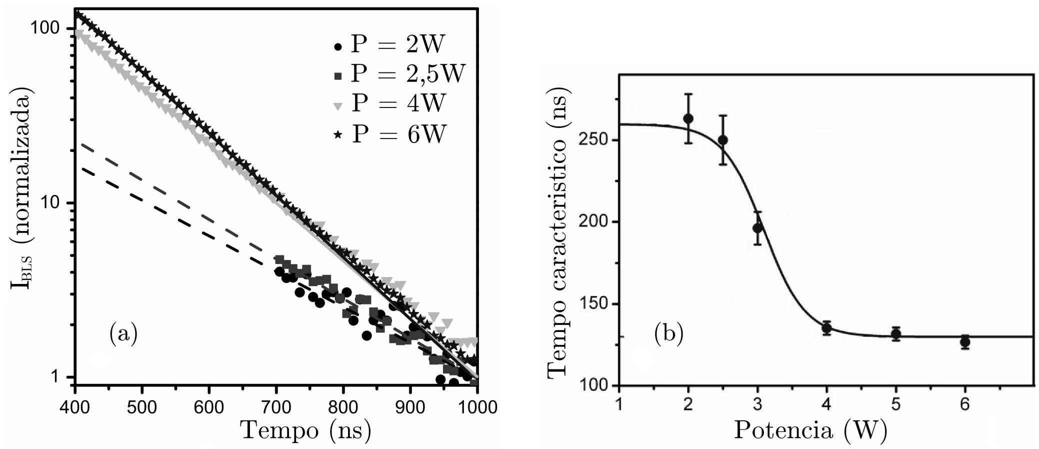



Figura 4.5: (a) Decaimento da intensidade Brillouin associada aos modos de mínima freqüência após interrupção da fonte externa para diversos valores de potência da fonte. (b) Tempo característico de decaimento do condensado em função da potência da fonte externa. Adaptada da Ref. 9, figuras 9 e 10.

## 4.2 Condensação de Fröhlich-Bose-Einstein

Em filmes finos de YIG são relevantes, entre os spins, tanto as interações de troca como as interações dipolares. É razoável admitir que a evolução das populações de mágnons dos experimentos realizados por Demokritov *et al.* mencionados na seção anterior sejam adequadamente descritos pela equação de evolução 2.28, discutida em detalhes na seção 2.3. Reproduzimos aqui esta expressão, retendo apenas os termos relevantes para a interpretação teórica do experimento,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) = \\
= &\frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2\left\{(1+\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{N}_{\mathbf{q}'})f^{\mathrm{S}}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'})+ && [\mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t)]\\
&+\frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'})- && [\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)]\\
&-\frac{1}{\tau_{\mathbf{q}}}\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}}-\mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}\right]+ && [L_{\mathbf{q}}(t)]\\
&+\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}+1)-(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}})+ \\
&+\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})+ && [\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t)]\\
&+\frac{16\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\begin{array}{c}|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times\\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}\end{array}. && [\mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t)]
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Basicamente três contribuições contidas na Eq. 2.28 podem, considerando a adequação aos experimentos realizados, ser negligenciadas:

1. Dada a configuração da fonte de microondas externa mencionada anteriormente, pode-se negligenciar a interação do sistema com a componente perpendicular da radiação da fonte, o termo $\mathfrak{S}^{\perp}_{\mathbf{q}}(t)$ na Eq. 2.28;

2. O termo de Livshits - $\mathfrak{L}_{\mathbf{q}}(t)$ na Eq. 2.28 - corresponde a um decaimento, cujas partes linear e não-linear podem ser devidamente incorporadas nos termos $L_{\mathbf{q}}(t)$ e $\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)$ respectivamente;

3. As contribuições oriundas das amplitudes e pares, de acordo com a discussão realizada no capítulo 2.

Considerando ainda que a relaxação linear por fótons associada ao termo $\mathfrak{R}^{\perp}_{\mathbf{q}}(t)$ pode ser formalmente unida à relaxação linear e então expressa em termos de $L_{\mathbf{q}}(t)$, sob correta reformulação de $\tau_{\mathbf{q}}$, é possível afirmar que os principais processos presentes nos experimentos realizados são descritos pela Eq. 4.2. A alimentação do sistema, o bombeamento paralelo, é descrita pelo termo $\mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t)$, os termos $L_{\mathbf{q}}(t)$ e $\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)$ são os principais processos de relaxação, a distribuição interna de mágnons se dá pelos termos de Fröhlich e mágnon-mágnon, $\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t)$ e $\mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t)$ respectivamente.

Um importante aspecto deve ser ressaltado neste ponto. Como descrito anteriormente, o experimento mostra que existe, enquanto o sistema está alimentado, uma redistribuição interna das populações de mágnons, que acaba originando o acúmulo de mágnons produzidos pela interação com a fonte externa em torno do mínimo de energia. De acordo com o discutido nas seções 2.3.1 e 2.3.2, a interação mágnon-mágnon tende à termalização interna do sistema, opondo-se à formação do acúmulo. Por outro lado, o termo de Fröhlich leva ao acúmulo e, portanto, é o responsável pelo fenômeno.

Além da formação do condensado, pode-se analisar qualitativamente também a relaxação do sistema pelas equações cinéticas 4.2. Percebe-se que a relevância de cada um dos diversos processos de relaxação e distribuição interna depende das populações de mágnons envolvidas, o que nos permite afirmar que a dominância de determinado processo deve depender dos valores das populações de mágnons. Assim, por exemplo, se compararmos os termos de relaxação linear para a rede $L_{\mathbf{q}}(t)$ e a interação com a radiação de corpo negro $\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)$, constata-se que o primeiro, por ser linear, deve ser dominante próximo ao equilíbrio (i.e., com $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} \approx \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}$), ao passo que a não linearidade $\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ contida em $\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)$ sugere sua dominância como processo dissipativo nos regimes em que temos altas populações de mágnons.

Temos então uma análise qualitativa dos experimentos citados através da inspeção das equações cinéticas 4.2 e recorremos ao modelo de dois fluidos descrito no capítulo 3 com o objetivo de realizar um estudo quantitativo do sistema.

## 4.3 Modelo de dois fluidos

Prosseguimos então à adequação do modelo de dois fluidos, exposto no capítulo anterior, aos experimentos com filmes finos de YIG discutidos anteriormente. Com isto torna-se possível ilustrar os principais resultados experimentais - a evolução das populações de mágnons levando ao condensado e o peculiar decaimento para o equilíbrio, ambos descritos na seção 4.1 - e corroborar a análise anterior.

Devemos inicialmente delimitar as regiões do espaço recíproco associadas aos modos de mínima energia e aos alimentados pela fonte externa, $R_1$ e $R_2$ respectivamente neste modelo de dois fluidos. Como descrito no Capítulo 3, o experimento discutido permite efetivar esta divisão, posto que basicamente os mágnons com freqüências próximas ao mínimo ($\simeq 2,1\,\mathrm{GHz}$) e aqueles alimentados ($\simeq 4\,\mathrm{GHz}$) desempenham um papel relevante (cf. Figura 3.1). Além disso, consideraremos a resolução do experimento - $0,25\,\mathrm{GHz}$ - como critério de demarcação das regiões: a região $R_1$ inclui mágnons com freqüências entre $2,1\,\mathrm{GHz}$ e $2,35\,\mathrm{GHz}$, e a região $R_2$ se associa aos mágnons com freqüências entre $3,75\,\mathrm{GHz}$ e $4,25\,\mathrm{GHz}$.

Definidas então as regiões $R_1$ e $R_2$ (ver lado direito da Figura 4.6), utilizamos os dados experimentais (contidos na Ref. 5) referentes à intensidade Brillouin próxima ao mínimo de energia para encontrar a evolução observada das populações representativas $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$. Como as populações de mágnons, para uma dada freqüência, são proporcionais à intensidade BLS, pode-se utilizar os valores em equilíbrio para obter a constante de proporcionalidade.

Consideramos que em equilíbrio as populações representativas de mágnons $\mathcal{N}_1^{(0)}$ e $\mathcal{N}_2^{(0)}$ obedecem a distribuição

$$\mathcal{N}_{1,2}^{(0)} = \left(\mathrm{e}^{\beta_0 \hbar \omega_{1,2}} - 1\right)^{-1}, \tag{4.3}$$

e, levando em conta a temperatura $T_0 = 300\,\mathrm{K}$, o mínimo da relação de dispersão $\omega_{\mathrm{min}} \simeq 13\,\mathrm{GHz}$ (que caracteriza $\mathcal{N}_1^{(0)}$) e a freqüência angular dos mágnons alimentados pela fonte $\omega_{\mathrm{S}} \simeq 25\,\mathrm{GHz}$ (associado a $\mathcal{N}_2^{(0)}$), temos, substituindo tais valores na Eq. 4.3,

$$\mathcal{N}_1^{(0)} \simeq 3 \times 10^3 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{N}_2^{(0)} \simeq 2 \times 10^3.$$

O valor da intensidade BLS, medido em equilíbrio, em torno do mínimo é de aproximadamente $0,18$ contagens/s, o que nos permite, acompanhando a intensidade BLS próxima à freqüência mínima no tempo, obter a evolução de $\mathcal{N}_1$, expressa na tabela 4.1.

Quanto à obtenção da evolução da população representativa $\mathcal{N}_2$ de acordo com o experimento, não podemos empregar um procedimento análogo, posto que não se dispõe, na realização específica tratada na Ref. 5, da intensidade BLS dos mágnons alimentados[3]. No entanto, é razoável admitir que $\mathcal{N}_2$ atinja um valor estacionário (máximo) $\mathcal{N}_2^{\mathrm{S}} \approx 10^4$, baseando-se na evolução das populações adjacentes e em experimentos

[3]Neste caso, o espectro BLS apresenta uma freqüência de corte em $3,7\,\mathrm{GHz}$ devido ao intervalo de números de onda disponíveis no experimento.

| Tempo ($\mu$s) | Intensidade BLS (contagens/s) | População representativa $\mathcal{N}_1$ |
|---|---|---|
| 0 (equilíbrio) | $0,18$ | $3 \times 10^3$ |
| $0,2$ | $2,5$ | $4,2 \times 10^4$ |
| $0,3$ | $7,0$ | $1,2 \times 10^5$ |
| $0,4$ | $17,5$ | $2,9 \times 10^5$ |
| $0,5$ | $25$ | $4,2 \times 10^5$ |
| $0,9$ | $27$ | $4,5 \times 10^5$ |
| $1,1$ | $21,5$ | $3,6 \times 10^5$ |
| $1,2$ | $8,5$ | $1,4 \times 10^5$ |

Tabela 4.1: Intensidade do espalhamento Brillouin na freqüência mínima em função do tempo, segundo Figuras 2, 3 e 4 da Ref. 5. População representativa dos modos de baixa freqüência associada ao experimento. Lembramos que após $1\,\mu$s a fonte foi desligada.

posteriores [6, 9].

Dadas então, segundo o experimento, as regiões representativas e a evolução das populações correlatas deve-se comparar tais dados com os resultados provenientes da modelagem por dois fluidos.

### 4.3.1 Evolução temporal

Para encontrar a evolução das populações de mágnons segundo o modelo de dois fluidos deve-se ter em conta as equações de evolução das populações representativas associadas aos modos alimentados $\mathcal{N}_2$ e às freqüência em torno do mínimo $\mathcal{N}_1$, Eqs. 3.5 e 3.6, obtidas no capítulo 3 e reproduzidas aqui para comodidade de leitura,

$$f_1 \frac{d}{d\bar{t}} \mathcal{N}_1(\bar{t}) = -\,\mathrm{D}_1\,\mathcal{N}_1(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_1^{(0)}) - f_1 \left[\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_1^{(0)}\right] + \tag{4.4a}$$

$$+\,\mathrm{F}\left\{\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 + (\bar{\nu}+1)\,\mathcal{N}_2 - \bar{\nu}\mathcal{N}_1\right\} - \tag{4.4b}$$

$$-\left\{\mathrm{M}_1\mathcal{N}_1\left(\mathcal{N}_1+1\right) + \mathrm{M}_2\mathcal{N}_2\left(\mathcal{N}_2+1\right)\right\}(\mathcal{N}_1\frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}} - \mathcal{N}_2), \tag{4.4c}$$

e

$$f_2 \frac{d}{d\bar{t}} \mathcal{N}_2(\bar{t}) = \mathrm{I}\,(1 + 2\mathcal{N}_2) - \tag{4.5a}$$

$$- \mathrm{D}_2\, \mathcal{N}_2(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2^{(0)}) - f_2 \left[\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2^{(0)}\right] - \tag{4.5b}$$

$$- \mathrm{F}\, \{\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 + (\bar{\nu} + 1)\, \mathcal{N}_2 - \bar{\nu} \mathcal{N}_1\} + \tag{4.5c}$$

$$+ \{\mathrm{M}_1 \mathcal{N}_1\, (\mathcal{N}_1 + 1) + \mathrm{M}_2 \mathcal{N}_2\, (\mathcal{N}_2 + 1)\}\, (\mathcal{N}_1 \frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}} - \mathcal{N}_2). \tag{4.5d}$$

Este sistema de equações diferenciais é não-linear e deve ser resolvido numericamente. Para isso, faz-se necessário fornecer os valores dos parâmetros em abertos contidos nestas equações, que são aqui estimados.

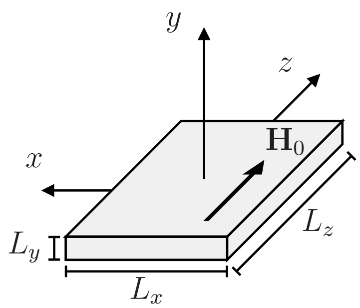
Iniciamos pela estimativa dos parâmetros $f_1$ e $f_2$ que, lembremos, são as frações do volume ocupado por estes modos no espaço recíproco com relação ao volume total da zona de Brillouin. No lado esquerdo da Figura 4.6 apresentamos uma ilustração do filme fino. A direção $y$ é aquela perpendicular ao filme, e a direção $z$ é paralela ao campo magnético estático $\mathbf{H}_0$. As dimensões do filme fino associadas ao experimento em questão, descrito na Ref. 5 são $L_x = 0,2\,\mathrm{cm}$, $L_y = 5\,\mu\mathrm{m}$ e $L_z = 2\,\mathrm{cm}$. Conforme discutido na seção 1.1.2.1, a baixa espessura do filme leva a uma relevante separação dos modos transversais, o que nos autoriza a considerar excitado na direção $y$ apenas o modo fundamental (ver também Refs. 13, 36). Temos então que os mágnons possuem vetores de onda $\mathbf{q}_{\|}$ paralelos ao filme - com componentes $q_{\|x}$ e $q_{\|z}$ - e são os modos associados a este vetor de onda que compõe $R_1$ e $R_2$.

Apresentamos, à direita da Figura 4.6, as regiões $R_1$ e $R_2$ no espaço recíproco, obtidas segundo a Eq. 1.36, cujas áreas, obtidas numericamente, são

$$\#R_1 = 1,6 \times 10^{10}\,\mathrm{cm}^{-2} \qquad \text{e} \qquad \#R_2 = 1,0 \times 10^{11}\,\mathrm{cm}^{-2}. \tag{4.6}$$

Dada a área total da zona de Brillouin

$$\#R = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 = 2,5 \times 10^{15}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{4.7}$$



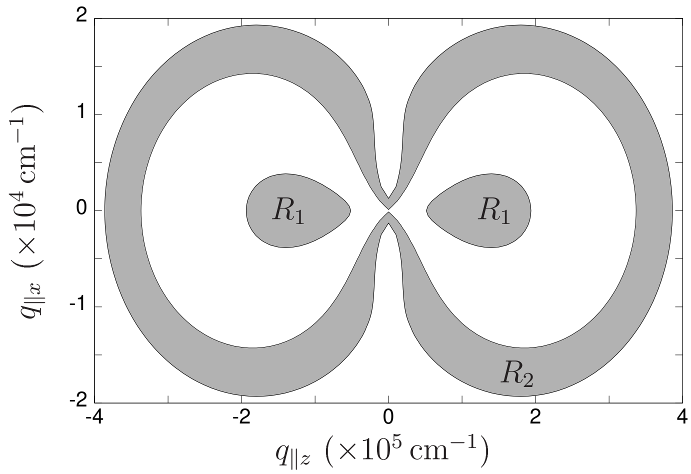




Figura 4.6: À esquerda é apresentado o filme fino, no que diz respeito à sua geometria. À direita, as regiões $R_1 = \left\{\mathbf{q}_\parallel | \, 2,1 \le \omega_{\mathbf{q}_\parallel} \le 2,35\right\}$ e $R_2 = \left\{\mathbf{q}_\parallel | \, 3,75 \le \omega_{\mathbf{q}_\parallel} \le 4,25\right\}$ no espaço dos vetores de onda paralelos ao filme fino, de acordo com a relação de dispersão para mágnons em filmes finos (Eq. 1.36) discutida na seção 1.1.2.1.

sendo $a$ o parâmetro de rede (que, para o YIG é $a = 12,465\,\text{Å}$ ) obtemos então

$$f_1 = \frac{\#R_1}{\#R} = 6,4 \times 10^{-6} \qquad \text{e} \qquad f_2 = \frac{\#R_2}{\#R} = 4 \times 10^{-5}. \tag{4.8}$$

Estimados então $f_1$ e $f_2$ passamos aos outros parâmetros. Apesar de apresentarmos, por conveniência, as Eqs. 4.4 e 4.5 em forma adimensional - todos os termos estão multiplicados pelo tempo de relaxação linear para a rede $\tau$, devidamente incorporados nos coeficientes - e o tempo ser, então, escalado em termos de $\tau$, torna-se importante definir a escala de tempo para realizar a comparação adequada com os experimentos. Então, adotamos $\tau = 1\,\mu$s, dado que, segundo a literatura sobre o assunto [5], o tempo de relaxação linear para a rede é da ordem de microsegundos. A fonte de microondas que atua no sistema está associada, como vimos, ao termo 4.5a da equação de evolução para $\mathcal{N}_2(t)$ e o parâmetro I se refere à taxa de alimentação devido à fonte externa. Claramente, a potência absorvida pelo sistema, segundo o modelo de dois fluidos, é

$$P_{\text{abs}} = n_2\,\hbar\omega_{\text{S}}\,\frac{d\mathcal{N}_2}{dt}\bigg|_{\text{fonte}} = n_2\,\hbar\omega_{\text{S}}\frac{2\text{I}\mathcal{N}_2}{\tau f_2} = n\,\hbar\omega_{\text{S}}\frac{2\text{I}\mathcal{N}_2}{\tau}, \tag{4.9}$$

sendo $n_2$ o número de modos em $R_2$ e $n$ o número total de modos relativo às direções

$x$ e $z$,

$$n = n_x\, n_z = \frac{L_x}{a}\,\frac{L_z}{a} = 3,2 \times 10^{14}. \tag{4.10}$$

Se levarmos em conta a população representativa alimentada com valores próximos a $\mathcal{N}_2 \sim 10^4$ e a potência absorvida pelo sistema como uma pequena fração da potência efetiva, $P_{\rm abs} \sim 10^{-2}\,$W, obtemos

$$\mathrm{I} = \frac{\tau P_{\rm abs}}{2\mathcal{N}_2\, n\, \hbar\omega_{\rm S}} \sim \frac{10^{-6}10^{-2}}{2\,10^4\, 3,2\,10^{14}\, 10^{-34}\, 25\, 10^9} = 6,25 \times 10^{-4}. \tag{4.11}$$

Os parâmetros associados ao decaimento dos mágnons via emissão de fótons, $\mathrm{D}_1$ e $\mathrm{D}_2$, serão considerados iguais, $\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_2 = \mathrm{D}$ e podem ser estimados tendo como base o estado estacionário que o sistema atinge após $0,5\,\mu$s. Neste estado estacionário, o lado direito das Eqs. 4.4 e 4.5 é nulo e, ao somarmos estas equações, obtemos

$$\mathrm{I}\,(1+2\mathcal{N}_2^{\rm S}) = \mathrm{D}\,\mathcal{N}_1^{\rm S}(\mathcal{N}_1^{\rm S}-\mathcal{N}_1^{(0)}) + f_1\left[\mathcal{N}_1^{\rm S} - \mathcal{N}_1^{(0)}\right] + \mathrm{D}\,\mathcal{N}_2^{\rm S}(\mathcal{N}_2^{\rm S}-\mathcal{N}_2^{(0)}) + f_2\left[\mathcal{N}_2^{\rm S} - \mathcal{N}_2^{(0)}\right].$$

Considerando então os valores estacionários referentes ao experimento (cf. tabela 4.1) $\mathcal{N}_1^{\rm S} \simeq 4,5 \times 10^5$ e $\mathcal{N}_2^{\rm S} \simeq 10^4$ vemos que

$$\mathrm{I}\,(1+2\mathcal{N}_2^{\rm S}) \cong \mathrm{D}\,\mathcal{N}_1^{\rm S}(\mathcal{N}_1^{\rm S}-\mathcal{N}_1^{(0)})$$

e

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{I}\,(1+2\mathcal{N}_2^{\rm S})}{\mathcal{N}_1^{\rm S}(\mathcal{N}_1^{\rm S}-\mathcal{N}_1^{(0)})} \sim \frac{10^{-4}\, 2\, 10^4}{2\, 10^{11}} = 10^{-11}.$$

Quanto aos parâmetros associados à interação mágnon-mágnon, consideraremos, a exemplo da estimativa anterior, $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2 = \mathrm{M}$. Pode-se encontrar um limite superior para M, a partir do tempo de termalização linear de mágnons $\tau_{\rm M} = 0,2\,\mu$s citado na literatura [5]. É importante notar que M caracteriza processos não-lineares, enquanto o tempo de termalização linear $\tau_{\rm M}$ é essencialmente válido apenas em situações ligeiramente afastadas do equilíbrio. Porém, pode-se linearizar em torno do equilíbrio os termos 4.4c e 4.5d das Eqs. 4.4 e 4.5,

$$\mathfrak{M}_1(\bar{t}) \equiv -\mathrm{M}\left\{\mathcal{N}_1\,(\mathcal{N}_1+1) + \mathcal{N}_2\,(\mathcal{N}_2+1)\right\}(\mathcal{N}_1\frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}} - \mathcal{N}_2), \tag{4.12}$$

com

$$\mathfrak{M}_2 = -\mathfrak{M}_1,$$

e então comparar com $\tau_{\mathrm{M}}$. Para isso, é importante notar que a população de mágnons é conservada se considerarmos estes termos atuando isoladamente[4], isto é,

$$f_1 \frac{d}{d\bar{t}} \mathcal{N}_1(\bar{t}) + f_2 \frac{d}{d\bar{t}} \mathcal{N}_2(\bar{t}) = 0 \qquad \rightarrow \qquad f_1 \mathcal{N}_1(\bar{t}) + f_2 \mathcal{N}_2(\bar{t}) = \text{cte.} = f_1 \mathcal{N}_1^{(0)} + f_2 \mathcal{N}_2^{(0)} \tag{4.13}$$

se

$$\mathfrak{M}_{1,2}(\bar{t}) = f_{1,2} \frac{d}{d\bar{t}} \mathcal{N}_{1,2}(\bar{t}).$$

Assim, definindo $\Delta\mathcal{N}_{1,2}(\bar{t}) = \mathcal{N}_{1,2}(\bar{t}) - \mathcal{N}_{1,2}^{(0)}$ e utilizando a Eq. 4.13, temos

$$\Delta\mathcal{N}_2(\bar{t}) = \mathcal{N}_2(\bar{t}) - \mathcal{N}_2^{(0)} = -\frac{f_1}{f_2} \Delta\mathcal{N}_1(\bar{t})$$

e podemos então linearizar

$$\mathfrak{M}_1(\bar{t}) \simeq -\mathrm{M} \left\{ \mathcal{N}_1^{(0)} \left( \mathcal{N}_1^{(0)} + 1 \right) + \mathcal{N}_2^{(0)} \left( \mathcal{N}_2^{(0)} + 1 \right) \right\} \left( \frac{f_1}{f_2} + \frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}} \right) \Delta\mathcal{N}_1(\bar{t}).$$

Assim temos

$$\begin{aligned} f_1 \frac{d}{d\bar{t}} \mathcal{N}_1(\bar{t}) &= \tau f_1 \frac{d}{dt} \mathcal{N}_1(\bar{t}) = \tau f_1 \frac{d}{dt} \Delta\mathcal{N}_1(t) = \\ &= -\mathrm{M} \left\{ \mathcal{N}_1^{(0)} \left( \mathcal{N}_1^{(0)} + 1 \right) + \mathcal{N}_2^{(0)} \left( \mathcal{N}_2^{(0)} + 1 \right) \right\} \left( \frac{f_1}{f_2} + \frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}} \right) \Delta\mathcal{N}_1(t) \end{aligned}$$

Então $\Delta\mathcal{N}_1(t) = \Delta\mathcal{N}_1(t=0) \exp\left\{ -\frac{t}{\tau_{\mathrm{M}}} \right\}$, o que nos permite escreverr

$$\frac{1}{\tau_{\mathrm{M}}} = \frac{\mathrm{M}}{\tau f_1} \left\{ \mathcal{N}_1^{(0)} \left( \mathcal{N}_1^{(0)} + 1 \right) + \mathcal{N}_2^{(0)} \left( \mathcal{N}_2^{(0)} + 1 \right) \right\} \left( \frac{f_1}{f_2} + \frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}} \right).$$

Desta forma podemos, conhecendo os valores de $\tau$, $\tau_{\mathrm{M}}$, $f_1$, $f_2$, $\mathcal{N}_1^{(0)}$ e $\mathcal{N}_2^{(0)}$, estimar o valor de M. Deve-se notar, no entanto, que este valor é estimado em torno do equilíbrio

[4]Essa conservação dos modos representativos de mágnons $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$, caso consideremos apenas os termos de Fröhlich ou mágnon-mágnon, decorre de $\sum_{\mathbf{q}} \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) = 0$ e $\sum_{\mathbf{q}} \mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t) = 0$.

e a medida de $\tau_{\mathrm{M}}$ ocorre em sistemas ligeiramente afastados do equilíbrio. Portanto, esta relação estabelece o limite superior para o parâmetro M,

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &\leq \frac{\tau f_1}{\tau_{\mathrm{M}}} \left\{ \left\{ \mathcal{N}_1^{(0)} \left( \mathcal{N}_1^{(0)} + 1 \right) + \mathcal{N}_2^{(0)} \left( \mathcal{N}_2^{(0)} + 1 \right) \right\} \left( \frac{f_1}{f_2} + \frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}} \right) \right\}^{-1} \\ &\leq 5 f_1 \left\{ 13 \times 10^6 \left( \frac{f_1}{f_2} + 0,6 \right) \right\}^{-1} \approx 10^{-12}. \end{aligned}$$

Prosseguimos então à integração numérica, tendo como base os valores dos parâmetros discutidos anteriormente e restando como parâmetro de ajuste apenas F, relacionado ao termo de Fröhlich. A figura 4.7 apresenta a comparação entre os dados experimentais apresentados na tabela 4.1 e a integração numérica das Eqs. 4.4 e 4.5 - considerando como condição inicial o equilíbrio ($\mathcal{N}_{1,2}(t=0) = \mathcal{N}_{1,2}^{(0)}$) e a fonte ligada durante $1\,\mu$s. Além do acordo apresentado entre teoria e experimento, é importante ressaltar o papel fundamental desempenhado pelo termo de Fröhlich, que de fato leva ao acúmulo de mágnons em $\mathcal{N}_1$, com populações substancialmente maiores que $\mathcal{N}_2$. A titulo de comparação apresentamos, na mesma figura 4.7, a integração numérica do mesmo sistema de dois fluidos, sob as mesmas condições, mas com o termo de Fröhlich ausente (i.e. fazendo F = 0). Neste caso, percebe-se a inexistência do acúmulo e o sistema evolui, após 0, 6 unidades de tempo, de forma que $\dfrac{\mathcal{N}_1(t)}{\mathcal{N}_2(t)} = \dfrac{\mathcal{N}_1^{(0)}}{\mathcal{N}_2^{(0)}}$.

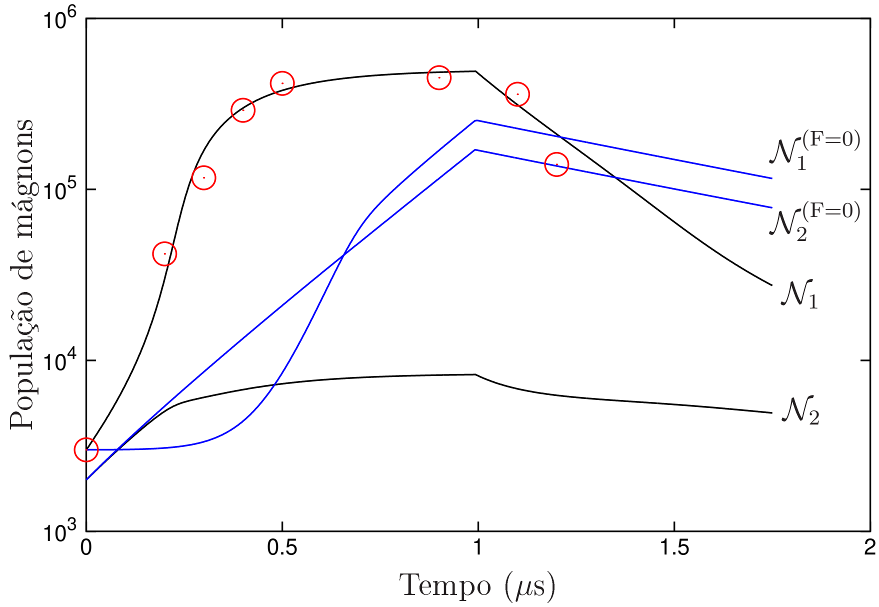



Figura 4.7: Integração numérica do modelo de dois fluidos com comparação com experimento e análise do efeito Fröhlich. Os círculos (vermelho) apresentam os dados de Demokritov e colegas expostos na tabela 4.1. As linhas sólidas apresentam as populações de mágnons de baixa ($\mathcal{N}_1$) e alta ($\mathcal{N}_2$) energia obtidas pela integração numérica das Eqs. 4.4 e 4.5 com os seguintes parâmetros: $\mathcal{N}_1^{(0)} = 3 \times 10^3$, $\mathcal{N}_2^{(0)} = 2 \times 10^3$, $f_1 = 3 \times 10^{-6}$, $f_2 = 3 \times 10^{-4}$, $\tau = 1\mu$s, $\mathrm{F} = 2 \times 10^{-6}$, $\mathrm{M} = 3 \times 10^{-14}$, $\mathrm{D} = 4 \times 10^{-11}$ e $\mathrm{I} = 8 \times 10^{-4}$ ($\simeq 0,5\,\mathrm{W}$ absorvidos pelos spins). As linhas tracejadas (em azul) representam as populações de mágnons obtidas negligenciando o termo de Fröhlich, notando-se termalização interna a partir de $\sim 0,75\,\mu$s.

Tal resultado corrobora a discussão apresentada na seção 4.2, de que a interação mágnon-mágnon levaria, como será discutido na próxima seção, a uma termalização com uma temperatura de não-equilíbrio única, enquanto o termo de Fröhlich leva ao acúmulo nos estados de mínima freqüência, sendo responsável pela formação do condensado.

É interessante ainda analisar como os diferentes processos contribuem para a evolução das populações representativas $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ exposta na Figura 4.7. Na figura 4.8 apresentamos as taxas de crescimento e decaimento presentes nas Eqs. 4.4 e 4.5, e cada um dos processos é indicado pelo parâmetro associado: por I designamos a alimentação externa via fonte de microondas (termo 4.5a); D representa o decaimento não-linear via emissão de fótons (primeira parcela dos termos 4.4a e 4.5a); a relaxação linear para a rede é expressa por L (segunda parcela dos termos 4.4a e 4.5a); F + M é, por fim, o balanço entre os termos de Fröhlich e da interação mágnon-mágnon (termos 4.4b e 4.4c respectivamente).

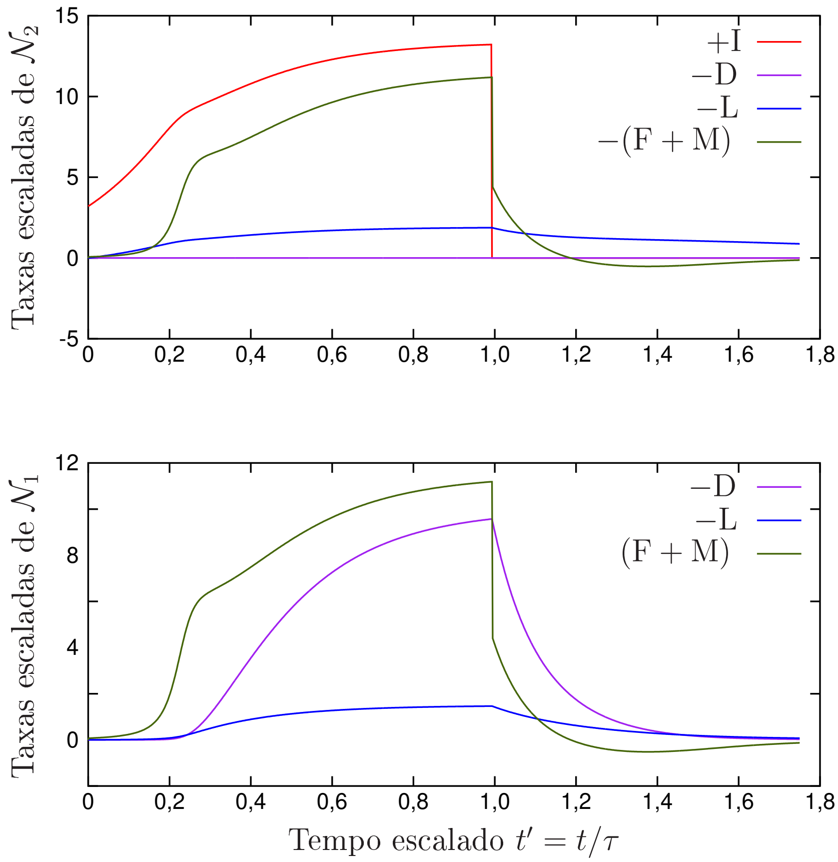



Figura 4.8: Contribuição dos distintos processos para a evolução das populações representativas $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$. Com os mesmos parâmetros utilizados para construção da Figura 4.7, foram traçadas as curvas correspondentes aos termos 4.5a - 4.5d, referentes à $\mathcal{N}_2$ (topo da figura) e os termos 4.4a - 4.4c, referentes à $\mathcal{N}_1$ (base). Percebe-se a alimentação via fonte em $\mathcal{N}_2$ que, através do balanço entre os termos de Fröhlich e mágnon-mágnon, transfere energia para $\mathcal{N}_1$. A energia é dissipada majoritariamente por decaimento de mágnons na região $\mathcal{N}_1$ via emissão de fótons.

Considerando então apenas o período em que a fonte está ligada, percebe-se, analisando a Figura 4.8a, que são criados aproximadamente $3 \times 10^4$ mágnons do tipo $\mathcal{N}_2$ por unidade de tempo escalado (ou, lembrando que adotamos $\tau = 1\,\mu$s, $3 \times 10^{10}$ mágnons por segundo, o que corresponderia a $0,5\,$W absorvidos pelo sistema) e a relaxação para a rede é de $\sim 5 \times 10^9$ mágnons por segundo (e a relaxação via emissão de fótons pode ser negligenciada, pois tem uma taxa menor que $3 \times 10^6\,\mathrm{s}^{-1}$). A interação entre os mágnons excitados e aqueles de mínima energia se dá pelas contribuições de Fröhlich (que leva ao acúmulo em $\mathcal{N}_1$) e da interação mágnon-mágnon (que tende a termalização interna) e, em balanço, leva a uma taxa de decaimento em $\mathcal{N}_2$ de $\sim 2,5 \times 10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}$. Esta interação é, portanto, a principal fonte de relaxação de $\mathcal{N}_2$ e é também a origem dos mágnons em $\mathcal{N}_1$, alimentados a uma taxa de $\sim 2,5 \times 10^{12}\,\mathrm{s}^{-1}$, como pode ser visto na Figura 4.8b. Vemos ainda que as taxas de decaimento dos mágnons em $\mathcal{N}_1$ via emissão de fótons e pela relaxação linear com a rede são respectivamente de $\sim 2 \times 10^{12}\,\mathrm{s}^{-1}$ e $\sim 5 \times 10^{11}\,\mathrm{s}^{-1}$.

### 4.3.2 Soluções estacionárias

Utilizando os mesmos valores para os referidos parâmetros, mas considerando agora o bombeamento de energia constantemente aplicado, podem ser estudadas as populações estacionárias $\mathcal{N}_1^{\mathrm{S}}$ e $\mathcal{N}_2^{\mathrm{S}}$ como função de I, a taxa de alimentação pela fonte externa. Assim, obtendo numericamente as raízes das Eqs. 4.4 e 4.5 para $\frac{d}{dt}\mathcal{N}_1 = \frac{d}{dt}\mathcal{N}_2 = 0$, foi construída a Figura 4.9.

De imediato, pode-se notar a existência de três regimes distintos. Para baixas taxas de alimentação percebe-se um ligeiro incremento com relação aos valores de equilíbrio, o que nos permite dizer que se trata de um regime linear. A partir de um certo valor para a alimentação constata-se a emergência do condensado, com um pronunciado acúmulo de mágnons em $\mathcal{N}_1$. Percebe-se ainda um segundo valor limite para a taxa de alimentação e deste em diante o condensado é desfeito e, como será exposto posteriormente, atinge-se um estado termalizado com uma temperatura de não-equilíbrio única.

Para melhor compreensão do papel desempenhado pelas contribuições de Fröhlich e da interação mágnon-mágnon é conveniente separar os dois efeitos. Desta forma, desconsiderando inicialmente o termo de Fröhlich (i.e. fazendo F = 0), o comportamento das populações estacionárias - considerando como processo interno apenas o termo proveniente da interação mágnon-mágnon - está representado nas curvas da Figura 4.10.

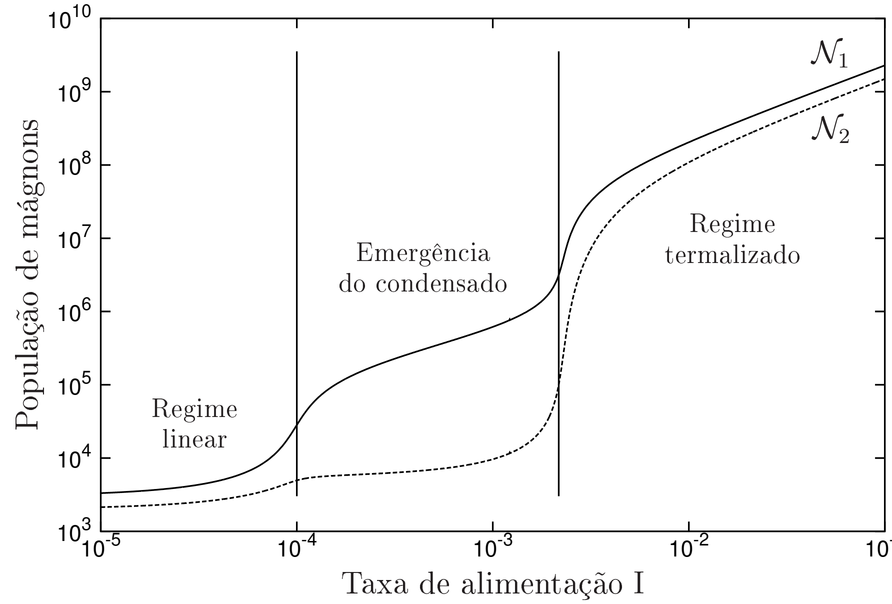



Figura 4.9: Soluções estacionárias para as populações de mágnons na modelagem de dois fluidos obtidas numericamente, sendo a população representativa $\mathcal{N}_1$ representada por linha contínua e $\mathcal{N}_2$ por linha tracejada. Parâmetros utilizados: $\mathcal{N}_1^{(0)} = 3 \times 10^3$, $\mathcal{N}_2^{(0)} = 2 \times 10^3$, $f_1 = 3 \times 10^{-6}$, $f_2 = 3 \times 10^{-4}$, $\mathrm{F} = 2 \times 10^{-6}$, $\mathrm{M} = 3 \times 10^{-14}$ e $\mathrm{D} = 4 \times 10^{-11}$.

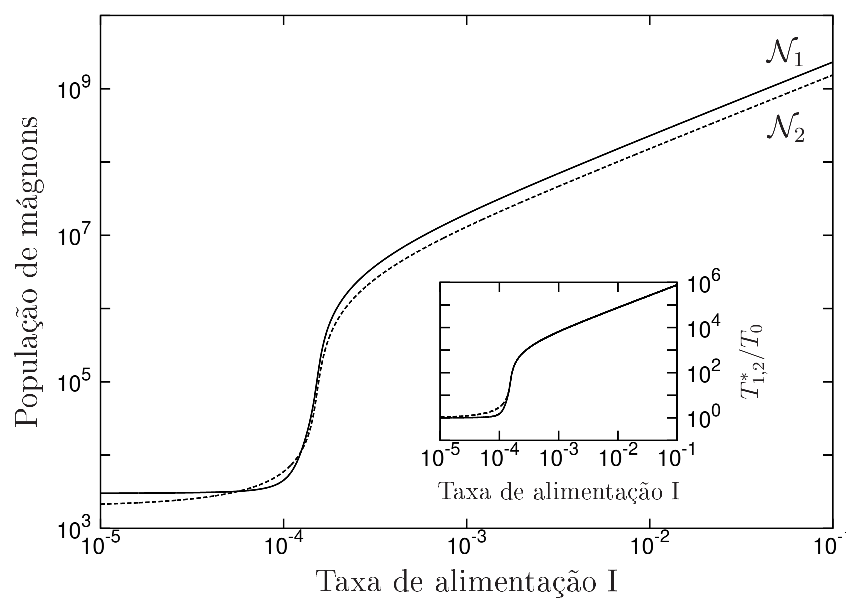



Figura 4.10: Soluções estacionárias para as populações de mágnons na modelagem de dois fluidos obtidas numericamente na ausência do termo de Fröhlich ($\mathrm{F} = 0$). Parâmetros utilizados: $\mathcal{N}_1^{(0)} = 3 \times 10^3$, $\mathcal{N}_2^{(0)} = 2 \times 10^3$, $f_1 = 3 \times 10^{-6}$, $f_2 = 3 \times 10^{-4}$, $\mathrm{M} = 3 \times 10^{-14}$ e $\mathrm{D} = 4 \times 10^{-11}$. No detalhe estão apresentadas as temperaturas de não-equilíbrio associadas às populações representativas $\mathcal{N}_1$ (linha contínua) e $\mathcal{N}_2$ (tracejada), cf. Eq. 4.14 e Tabela 4.2.

É interessante fazer aqui a análise em termos das variáveis termodinâmicas associadas discutidas na seção 1.2. Como as únicas variáveis dinâmicas de base relevantes são as populações de mágnons, podemos retomar as Eqs. 1.73 e 1.74 e reescrever as populações representativas $\mathcal{N}_{1,2}$ em termos das variáveis termodinâmicas associadas $F_{1,2}$ ou das temperaturas de não-equilíbrio $T^*_{1,2}$:

$$\mathcal{N}^{\mathrm{T}}_{1,2} = \frac{1}{\mathrm{e}^{F_{1,2}} - 1}, \qquad \text{com} \qquad F_{1,2} = \frac{\hbar\omega_{1,2}}{k_{\mathrm{B}} T^*_{1,2}}. \tag{4.14}$$

A termalização interna (de não-equilíbrio) ocorre, portanto, quando as populações $\mathcal{N}_{1,2}$ são tais que suas temperaturas de não-equilíbrio coincidem, $T^*_1 = T^*_2$.

Analisando então o caso em que a interação mágnon-mágnon é a única interação interna presente (F = 0) à luz das temperaturas de não-equilíbrio, pode-se afirmar, conforme o detalhe da Figura 4.10, que existem apenas dois regimes: o linear, para baixas taxas de alimentação pela fonte externa, em que as populações representativas têm valores próximos aos de equilíbrio, e o regime termalizado, para valores suficientemente altos de I, em que as populações representativas obedecem à distribuição 4.14 com temperatura de não-equilíbrio única. Como nesta situação a interação mágnon-mágnon atua exclusivamente, o modelo de dois fluidos corrobora, portanto, o resultado da o mostrado na seção 2.3.2, de que esta contribuição leva à termalização interna do sistema .

Mantendo agora apenas o termo de Fröhlich (adotando M = 0) percebe-se, segundo a Figura 4.11, também dois regimes, mas agora ocorre o acúmulo dos mágnons criados pela fonte externa nos modos associados à mínima freqüência a partir de um certo limiar na taxa de alimentação.

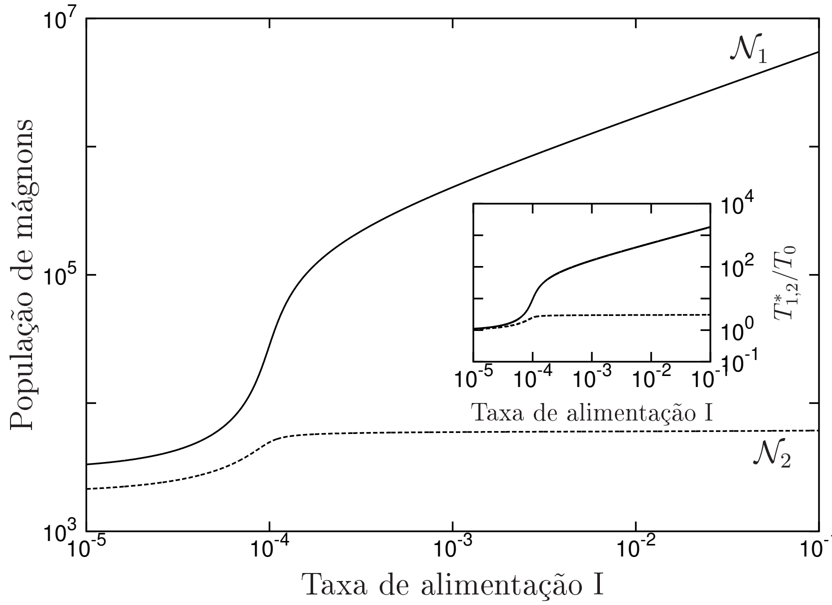



Figura 4.11: Soluções estacionárias para as populações de mágnons na modelagem de dois fluidos obtidas numericamente na ausência do termo de mágnon-mágnon (M = 0). Parâmetros utilizados: $\mathcal{N}_1^{(0)} = 3 \times 10^3$, $\mathcal{N}_2^{(0)} = 2 \times 10^3$, $f_1 = 3 \times 10^{-6}$, $f_2 = 3 \times 10^{-4}$, F $= 2 \times 10^{-6}$ e D $= 4 \times 10^{-11}$. No detalhe estão apresentadas as temperaturas de não-equilíbrio associadas às populações representativas $\mathcal{N}_1$ (linha contínua) e $\mathcal{N}_2$ (tracejada), cf. Eq. 4.14 e Tabela 4.3.

As tabelas 4.2 e 4.3 apresentam os valores de $T^*_{1,2}$ obtidos pela expressão 4.14 das populações estacionárias em função da taxa de alimentação devido à fonte externa isolando-se ora o termo de Fröhlich, ora a interação mágnon-mágnon.

| I | $T_1^*/T_0$ | $T_2^*/T_0$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| $1,0000 \times 10^{-5}$ | $1,0058$ | $1,0713$ |
| $3,1623 \times 10^{-5}$ | $1,0246$ | $1,2665$ |
| $1,0000 \times 10^{-4}$ | $1,5127$ | $2,9709$ |
| $3,1623 \times 10^{-4}$ | $1,2633 \times 10^{3}$ | $1,2636 \times 10^{3}$ |
| $1,0000 \times 10^{-3}$ | $6,5214 \times 10^{3}$ | $6,5214 \times 10^{3}$ |
| $3,1623 \times 10^{-3}$ | $2,3152 \times 10^{4}$ | $2,3150 \times 10^{4}$ |
| $1,0000 \times 10^{-2}$ | $7,5895 \times 10^{4}$ | $7,5889 \times 10^{4}$ |
| $3,1623 \times 10^{-2}$ | $2,4254 \times 10^{5}$ | $2,4252 \times 10^{5}$ |
| $1,0000 \times 10^{-1}$ | $7,6596 \times 10^{5}$ | $7,6590 \times 10^{5}$ |

Tabela 4.2: Valores de $T_{1,2}^*$ em função da taxa de alimentação do sistema pela fonte externa I obtidos das populações estacionárias na ausência do termo de Fröhlich (F = 0, Figura 4.10) através da Eq. 4.14. Notar que para valores de I suficientemente altos obtemos $T_1^* \cong T_2^*$, indicando a termalização do sistema.

| I | $T_1^*/T_0$ | $T_2^*/T_0$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| $1,0000 \times 10^{-5}$ | $1,1081$ | $1,0696$ |
| $3,1623 \times 10^{-5}$ | $1,4442$ | $1,2581$ |
| $1,0000 \times 10^{-4}$ | $9,4181$ | $2,4756$ |
| $3,1623 \times 10^{-4}$ | $7,3042 \times 10^{1}$ | $2,9233$ |
| $1,0000 \times 10^{-3}$ | $1,6083 \times 10^{2}$ | $2,9691$ |
| $3,1623 \times 10^{-3}$ | $3,0726 \times 10^{2}$ | $2,9910$ |
| $1,0000 \times 10^{-2}$ | $5,6328 \times 10^{2}$ | $3,0074$ |
| $3,1623 \times 10^{-2}$ | $1,0174 \times 10^{3}$ | $3,0258$ |
| $1,0000 \times 10^{-1}$ | $1,8244 \times 10^{3}$ | $3,0526$ |

Tabela 4.3: Valores de $T_{1,2}^*$ em função da taxa de alimentação I obtidos das populações estacionárias na ausência do termo de interação mágnon-mágnon (M = 0, Figura 4.11) através da Eq. 4.14. Neste caso percebe-se que o sistema não termaliza.

Retornando agora à analise do sistema completo (incluindo os termos de Fröhlich e mágnon-mágnon), pode-se utilizar a Eq. 4.14 para melhor qualificar os regimes definidos anteriormente. Assim, tendo como base as populações representativas estacionárias expostas na Figura 4.9, calculamos as temperaturas de não-equilíbrio associadas e as apresentamos na Figura 4.12.

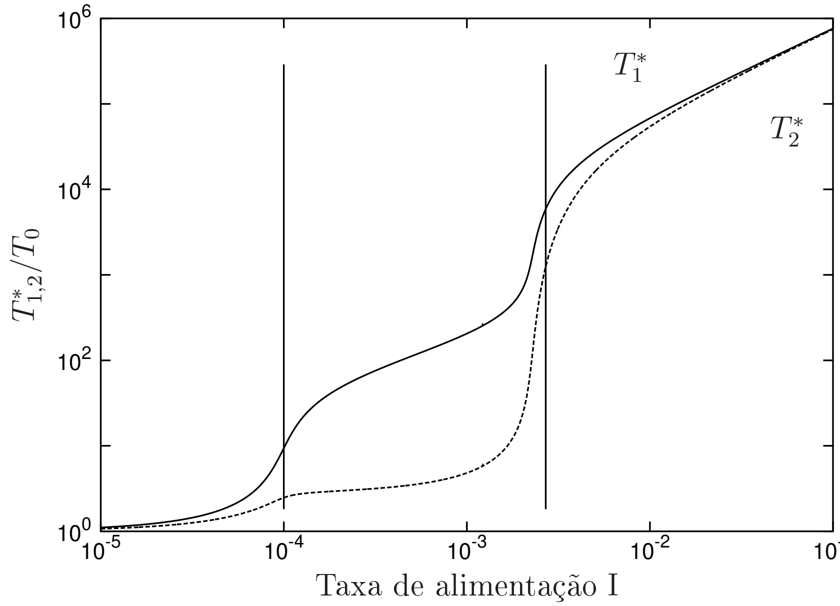



Figura 4.12: Valores de $T^*_{1,2}$ em função da taxa de alimentação I obtidos das populações estacionárias (Figura 4.9), de acordo com a expressão 4.14.

Observa-se que no regime linear os valores de $T^*_{1,2}$ obtidos são próximos aos de equilíbrio ($T^*_{1,2} \simeq T_0$). Na região associada ao condensado percebe-se que os distintos modos apresentam temperaturas de não-equilíbrio substancialmente diferentes e o sistema não apresenta termalização interna. Para crescentes valores de I o condensado é destruído e é atingido um estado termalizado, isto é, caracterizado por uma temperatura de não-equilíbrio interna única.

Os resultados obtidos reafirmam a análise anterior. Os termos não-lineares de Fröhlich e da interação mágnon-mágnon regem, cada um à sua maneira, a interação entre as populações de mágnons. O primeiro leva à formação do condensado e o último induz o sistema à termalização interna. O comportamento das populações estacionárias resultante deste balanço entre as duas contribuições, é determinado pelo valor de I. Assim, para a formação do condensado, a taxa de alimentação pela fonte externa deve ter um determinado valor que possibilite alimentar satisfatoriamente o sistema, porém não permita que a interação mágnon-mágnon torne-se dominante com relação ao termo de Fröhlich e ocorra a termalização interna. Assim, o condensado ocorre em um certo intervalo de valores da intensidade da fonte.

Consideremos agora o papel das diversas contribuições (termos 4.4a-4.4c e 4.5a-

| I | $T_1/T_0$ | $T_2/T_0$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| $1,0000 \times 10^{-5}$ | $1,1081$ | $1,0696$ |
| $3,1623 \times 10^{-5}$ | $1,4442$ | $1,2581$ |
| $1,0000 \times 10^{-4}$ | $9,3979$ | $2,4771$ |
| $3,1623 \times 10^{-4}$ | $7,5641 \times 10^{1}$ | $3,1666$ |
| $1,0000 \times 10^{-3}$ | $2,0554 \times 10^{2}$ | $4,8177$ |
| $3,1623 \times 10^{-3}$ | $1,0659 \times 10^{4}$ | $3,5721 \times 10^{3}$ |
| $1,0000 \times 10^{-2}$ | $6,7989 \times 10^{4}$ | $5,4177 \times 10^{4}$ |
| $3,1623 \times 10^{-2}$ | $2,3558 \times 10^{5}$ | $2,2059 \times 10^{5}$ |
| $1,0000 \times 10^{-1}$ | $7,5831 \times 10^{5}$ | $7,4299 \times 10^{5}$ |

Tabela 4.4: Valores de $T^*_{1,2}$ em função da taxa de alimentação I obtidos das populações estacionárias (Figura 4.9) através das Eq. 4.14. Em destaque, apresentamos os valores de I correspondentes à região do condensado ($10^{-4} \lesssim \mathrm{I} \lesssim 10^{-2}$). A termalização se efetiva para $\mathrm{I} \gtrsim 10^{-2}$.

4.5d) que, ao se anular mutuamente, formam o estado estacionário. Utilizando a mesma notação empregada na Figura 4.8 apresentamos na Figura 4.13 estas contribuições.

De início, cabe notar a presença dos mesmos três regimes apresentados anteriormente (Figura 4.9). Mas, além disso, a Figura 4.13 nos auxilia a compreender as transições entre estes regimes. Mostra-se aqui que no regime linear o principal mecanismo de dissipação é a relaxação linear para rede. Para taxas de alimentação maiores que $\mathrm{I} \sim 10^{-4}$, que propiciam a formação do condensado, mecanismos não-lineares de relaxação tornam-se dominantes: em $\mathcal{N}_2$ a criação de mágnons por conta da fonte externa é contrabalanceada pelo decaimento não-linear devido à composição do termo de Fröhlich com o termo associado à interação mágnon-mágnon (sendo o primeiro dominante); esta composição por sua vez bombeia energia em $\mathcal{N}_1$ que relaxa via emissão de fótons. Desconsiderando as interações internas temos, portanto, que, como um todo, mágnons são criados por conta da fonte externa e relaxam pelo decaimento dos mágnons de baixa energia em fótons. Uma termalização aproximada é atingida para valores $\mathrm{I} \gtrsim 2 \times 10^{-2}$, para os quais há um expressivo crescimento nos valores de $\mathcal{N}_2^{\mathrm{S}}$ e a taxa de decaimento destes mágnons alimentados em fótons também ganha relevância.

Finalmente, de acordo com o discutido na seção 2.3, lembramos que a equação de evolução das populações de mágnons pode ser reescrita segundo a expressão 2.30, sendo $\Gamma_{\mathbf{q}}$ o mesmo parâmetro que rege as evoluções das amplitudes (ver Eq. 2.21). Segundo

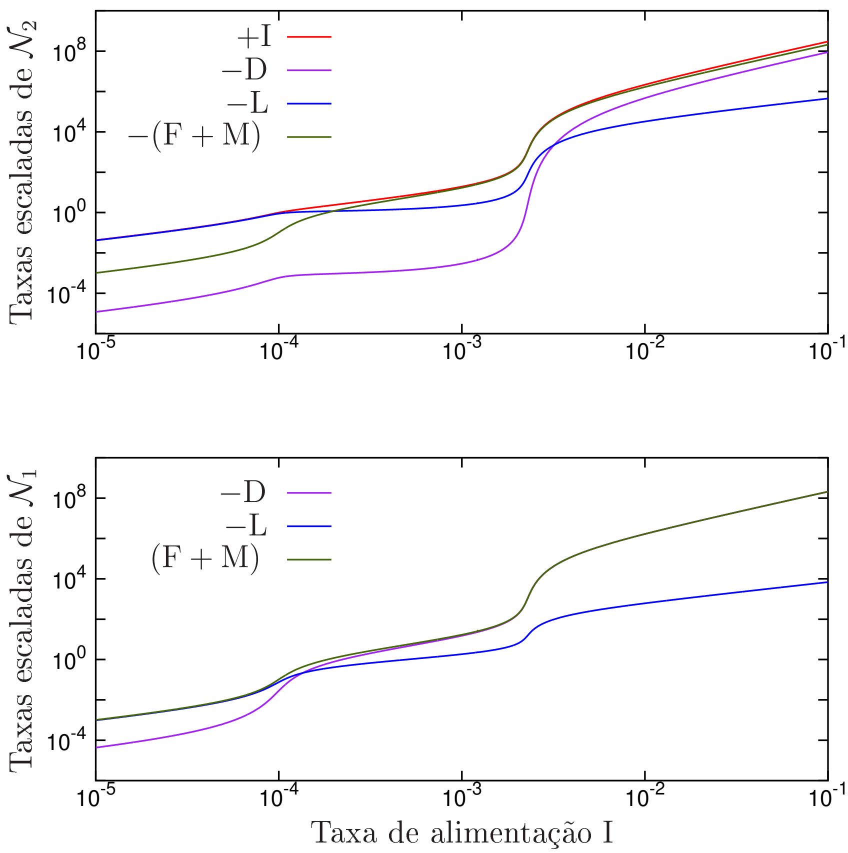



Figura 4.13: O papel das distintas contribuições no caso das populações estacionárias.

o modelo de dois fluidos teríamos

$$\frac{d}{d\bar{t}}\mathcal{N}_{1,2} = -\Gamma_{1,2}(\bar{t})\,\mathcal{N}_{1,2} + \Theta_{1,2}(\bar{t}),$$

com

$$\begin{aligned}\Gamma_1(\bar{t}) \ =& \mathrm{D}\left(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_1^{(0)}\right) + f_1 - \mathrm{F}\left(\mathcal{N}_2 - \bar{\nu}\right) + \\ &+ \mathrm{M}\left\{\frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}}\left[\mathcal{N}_1\left(\mathcal{N}_1+1\right) + \mathcal{N}_2\left(\mathcal{N}_2+1\right)\right] - \left(\mathcal{N}_1+1\right)\mathcal{N}_2\right\},\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\Theta_1(\bar{t}) = f_1\,\mathcal{N}_1^{(0)} + \mathrm{F}\ \left(\bar{\nu}+1\right)\mathcal{N}_2 + \mathrm{M}_2\mathcal{N}_2^2\left(\mathcal{N}_2+1\right), \tag{4.16}$$

$$\Gamma_2(\bar{t}) = -2\mathrm{I} + \mathrm{D}\left(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2^{(0)}\right) + f_2 + \mathrm{F}\left(\mathcal{N}_1 + \bar{\nu} + 1\right) + \\ + \mathrm{M}\left\{\mathcal{N}\left(\mathcal{N}_1 + 1\right) + \mathcal{N}_2\left(\mathcal{N}_2 + 1\right) - \frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}}\mathcal{N}_1\left(\mathcal{N}_2 + 1\right)\right\}, \tag{4.17}$$

e

$$\Theta_2(\bar{t}) = \mathrm{I} + f_2\mathcal{N}_2^{(0)} + \mathrm{F}\bar{\nu}\mathcal{N}_1 + \mathrm{M}\frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}}\mathcal{N}_1^2\left(\mathcal{N}_1 + 1\right). \tag{4.18}$$

Na Figura 4.14 apresentamos os valores de $\Gamma_{1,2}$ obtidos, escalados em termos de $\tau$.

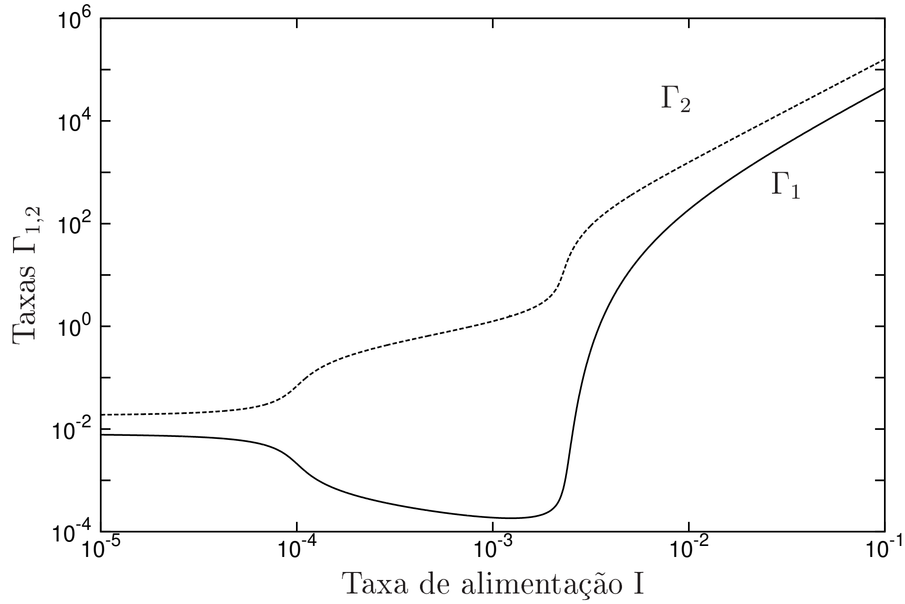



Figura 4.14: Valores estacionários de $\Gamma_{1,2}$ (cf. Eqs. 4.15 e 4.17) associados às populações estacionárias (Figura 4.9).

Conforme discutido na seção 2.1, vemos que $\Gamma_{\mathbf{q}}$ é a taxa de decaimento linear das amplitudes, que, recordemos, são os valores médios dos operadores de criação e aniquilação, $\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}^{\dagger} | t \right\rangle$ e $\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle$. Os valores de $\Gamma_{1,2}$ obtidos são positivos, conforme pode ser visto na Figura 4.14, indicando que as amplitudes decaem - seriam amplificadas se tivéssemos $\Gamma_{1,2} < 0$ - corroborando assim a proposta de negligenciar as contribuições das amplitudes para a evolução das populações. No entanto, é interessante notar que, no intervalo de taxas de alimentação associado ao condensado, $10^{-4} \lesssim \mathrm{I} \lesssim 2 \times 10^{-3}$, $\Gamma_1$ é consideravelmente menor que $\Gamma_2$, indicando que a condensação possibilitaria uma longa vida-média aos estados coerentes associados aos modos de mínima freqüência, como acontece com os casos de NEFBEC de outros tipos de bósons.

### 4.3.3 Relaxação para o equilíbrio

Conforme descrito na seção 4.1, Demidov e colaboradores [9, 10] analisaram a relaxação do condensado para o equilíbrio após desligada a fonte de microondas. Foi constatada a existência de um decaimento tipo exponencial e que a taxa de decaimento depende da taxa de alimentação do sistema pela fonte anteriormente ministrada. Percebe-se que o tempo característico de decaimento apresenta uma queda abrupta em função do aumento do número de mágnons injetados no sistema e, portanto, da potência da fonte, conforme pode ser visto na Figura 4.5 .

Com o intuito de elucidar o fenômeno recorremos novamente ao modelo de dois fluidos e integramos numericamente as Eqs. 4.4 e 4.5 - com os mesmos valores de parâmetros utilizados anteriormente - para diversos valores de I, obtendo as curvas expressas na Figura 4.15.

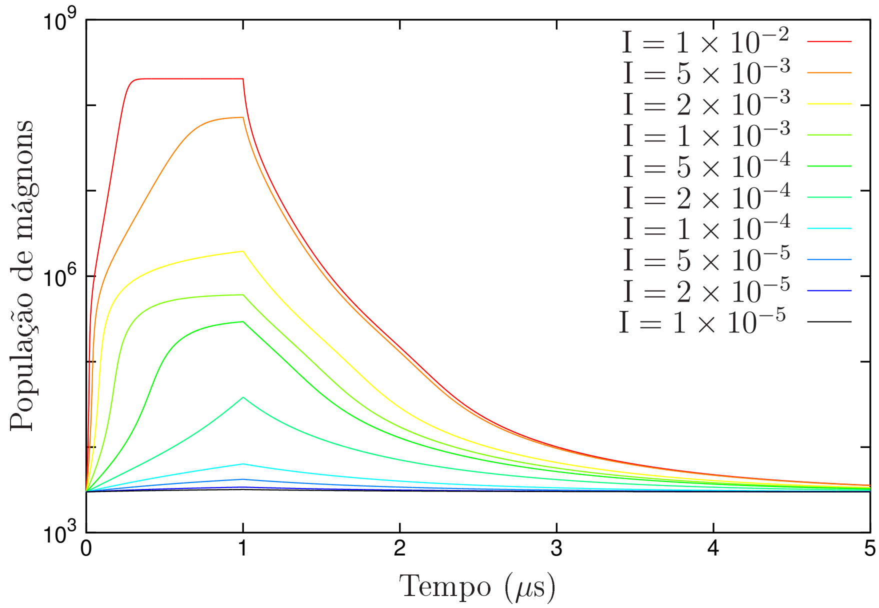



Figura 4.15: Evolução temporal do condensado para diversos valores de I.

Para baixas taxas de alimentação ($\mathrm{I} \lesssim 5 \times 10^{-5}$) o decaimento é exponencial, e é determinado pela relaxação linear para a rede (caracterizado por $\tau$). Aumentando-se a alimentação proveniente da fonte, chegando-se ao intervalo $5 \times 10^{-5} \lesssim \mathrm{I} \lesssim 2 \times 10^{-3}$, a relaxação da população do condensado pode ser dividida em três fases distintas: um primeiro momento, imediatamente após a fonte ser desligada, caracterizado por uma rápida queda na população de mágnons; um momento intermediário; e, por fim, a fase final, em que o condensado relaxa lentamente para o equilíbrio. Estas curvas podem ser aproximadamente ajustadas pela expressão

$$\mathcal{N}_1(t) - \mathcal{N}_1^{(0)} = A \exp\left(-{}^{t}\!/\!_{\tau_\mathrm{A}}\right) + B \exp\left(-{}^{t}\!/\!_{\tau}\right), \tag{4.19}$$

sendo que as exponenciais representam respectivamente a primeira e a última fase acima descritas. $A$, $B$ e $\tau_\mathrm{A}$ são os coeficientes de ajuste, cujos valores se encontram na tabela 4.5. Para valores superiores, $\mathrm{I} \gtrsim 2 \times 10^{-3}$, não é mais razoavel ajustar a evolução do condensado pela expressão 4.19.

| I | $\tau_\mathrm{A}$ ($\mu$s) | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|
| $5 \times 10^{-5}$ | $0,47670$ | $140,10$ | $1064,48$ |
| $6 \times 10^{-5}$ | $0,46853$ | $217,96$ | $1316,59$ |
| $8 \times 10^{-5}$ | $0,45151$ | $458,56$ | $1869,11$ |
| $10 \times 10^{-5}$ | $0,4326$ | $863,2$ | $2496,7$ |
| $13 \times 10^{-5}$ | $0,3990$ | $2006,9$ | $3618,7$ |
| $16 \times 10^{-5}$ | $0,3568$ | $4460$ | $5048$ |
| $20 \times 10^{-5}$ | $0,2849$ | $1,3603 \times 10^4$ | $7786$ |
| $25 \times 10^{-5}$ | $0,2131$ | $5,890 \times 10^4$ | $1,278 \times 10^4$ |
| $32 \times 10^{-5}$ | $0,21706$ | $1,5904 \times 10^5$ | $1,523 \times 10^4$ |
| $40 \times 10^{-5}$ | $0,22634$ | $2,3599 \times 10^5$ | $1,524 \times 10^4$ |
| $50 \times 10^{-5}$ | $0,23113$ | $3,0488 \times 10^5$ | $1,517 \times 10^4$ |
| $63 \times 10^{-5}$ | $0,23310$ | $3,7937 \times 10^5$ | $1,544 \times 10^4$ |
| $79 \times 10^{-5}$ | $0,23263$ | $4,6423 \times 10^5$ | $1,636 \times 10^4$ |
| $100 \times 10^{-5}$ | $0,22948$ | $5,765 \times 10^5$ | $1,852 \times 10^4$ |
| $126 \times 10^{-5}$ | $0,22314$ | $7,315 \times 10^5$ | $2,29 \times 10^4$ |
| $158 \times 10^{-5}$ | $0,2124$ | $9,765 \times 10^5$ | $3,17 \times 10^4$ |

Tabela 4.5: Valores dos coeficientes $A$, $B$ e $\tau_A$ do ajuste da Eq. 4.19 aos dados referentes às curvas em destaque da Figura 4.15, caracterizadas pela taxa de alimentação I.

Com relação às curvas de evolução do condensado que se ajustam à Eq. 4.19, apresentamos, na Figura 4.16, o tempo característico de decaimento $\tau_A$ relativo a primeira fase da relaxação como função da taxa de alimentação escalada I.

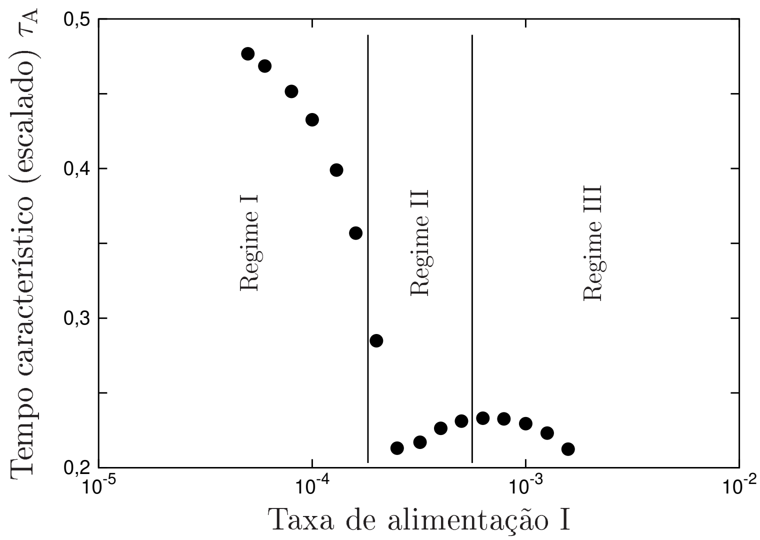



Figura 4.16: Tempo característico $\tau_A$ associado ao decaimento do condensado em função da taxa de alimentação I.

De imediato pode ser notado o acordo qualitativo com o experimento (Figura 4.5), com exceção aos pontos associados ao vale central, região em que não dispomos de dados experimentais. Além disso, evidentemente, a variação em $\tau_A$ depende basicamente dos processos de relaxação dominantes, e assim procedemos à análise dos diferentes processos de relaxação envolvidos que produzem este resultado. De acordo com o mencionado anteriormente, o condensado (mágnons em $\mathcal{N}_1$) tem três mecanismos possíveis de relaxação:

1. A relaxação linear para a rede (indicado por L);

2. O decaimento via emissão de fótons (D);

3. O balanço entre os termos de Fröhlich e da interação mágnon-mágnon (F + M).

A baixas potências, como dito anteriormente, o decaimento se deve basicamente ao processo L e se encontra no assim chamado Regime I. Porém, ao entrarmos no intervalo $2 \times 10^{-4} \lesssim \mathrm{I} \lesssim 5 \times 10^{-4}$ associado à Eq. 4.19 e à Figura 4.16, percebe-se a crescente relevância do processo F + M, como pode ser visto na Figura 4.17a (Regime II). O balanço entre os termos de Fröhlich e da interação mágnon-mágnon transfere, com a fonte acionada, energia dos mágnons alimentados ($\mathcal{N}_2$) para aqueles do condensado ($\mathcal{N}_1$), mas ao desligar- a fonte seu papel papel é invertido, tornando-se mais um mecanismo de relaxação, somando-se ao processo L e diminuindo desta forma $\tau_A$. Sucessivos aumentos na potência (e, assim, dos mágnons injetados no sistema) pronunciam este efeito, como pode ser visto na Figura 4.16. Um valor mínimo de $\tau_A$ é atingido para $\mathrm{I} \simeq 2,5 \times 10^{-4}$ e então, para taxas de alimentação mais altas, o processo F + M , até então dominante, diminui, ao passo que aumenta o processo D - ver Figura 4.16b. Então, o tempo característico de relaxação $\tau_A$ aumenta até o processo D tornar-se dominante (Figura 4.16c) e, a partir deste ponto, em que o sistema passa para o Regime III, $\tau_A$ volta a diminuir. Por fim, para valores de I superiores a $2 \times 10^{-3}$, a relaxação do condensado não mais obedece a Eq. 4.19.

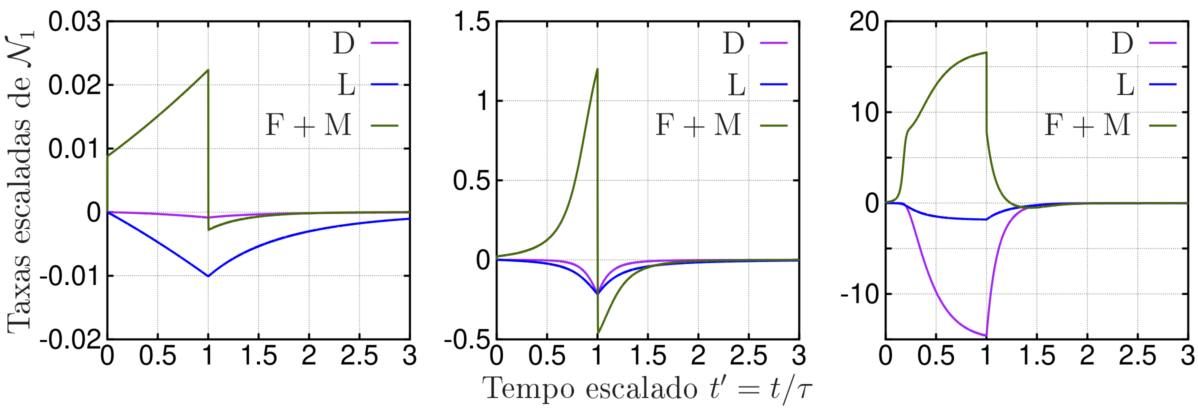



Figura 4.17: Contribuição dos distintos processos para a evolução da população representativa $\mathcal{N}_1$ para distintos valores da taxa de alimentação direta. À esquerda, $\mathrm{I} = 10^{-4}$, o principal mecanismo de relaxação é o linear (L) e o sistema está no Regime I. A figura central exemplifica o Regime II, $\mathrm{I} = 2,5 \times 10^{-4}$ e o sistema relaxa pela associação entre interações de Fröhlich e mágnon-mágnon. À direita temos uma figura representativa do Regime III, $\mathrm{I} = 10^{-3}$ e a relaxação se dá principalmente via decaimento de mágnons via emissão de fótons.

Concluímos, portanto, que dependendo do valor das populações representativas $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ imediatamente após desligar a fonte externa, distintas combinações dos três mecanismos de relaxação indicados determinam a evolução do condensado. Em linhas gerais, pode-se afirmar que ao se aumentar a taxa de alimentação do sistema devido à fonte externa constata-se uma transição no processo de relaxação dominante que obedece a ordem

$$\mathrm{L} \rightarrow \mathrm{F} + \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{D},$$

explicando assim o comportamento de $\mathcal{N}_1$ em seu retorno para o equilíbrio, como se vê nas figuras 4.5 e 4.16.

## 4.4 Resumo do Capítulo 4

Neste último capítulo estudamos a aplicação da teoria apresentada nos capítulos anteriores a filmes finos de granada de ferro-ítrio (YIG).

- Os experimentos realizados nestes filmes, sob a ação de campo magnético constante e bombeamento paralelo via fonte de microondas, demonstraram a redistribuição dos mágnons gerados pela fonte externa, em que os modos de mais baixa energia são progressivamente populados. A partir de certa intensidade da fonte externa, essa redistribuição leva à formação de um apreciável acúmulo de mágnons nos modos de mínima energia. Além disso, foi mostrado como a taxa com que o sistema retorna ao equilíbrio ao desligar-se da fonte externa depende da intensidade desta.

- Argumentou-se que o sistema de equações diferenciais para a evolução dos mágnons apresentado no Capítulo 2 é adequado para descrever o referido experimento. A análise destas equações permite afirmar, de forma qualitativa, que o efeito Fröhlich é o responsável pelo acúmulo observado, e que a interação mágnon-mágnon tende a destruí-lo, induzindo o sistema a uma termalização interna de não-equilíbrio.

Utilizando a modelagem por dois fluidos proposta no Capítulo 3 foi realizada uma análise quantitativa do experimento.

- A evolução temporal das populações de mágnons representativas dos modos próximos ao mínimo de freqüência e aos alimentados foi obtida numericamente, de forma a obter um bom acordo com os dados experimentais disponíveis.

- Considerando a fonte permanentemente ligada, foram obtidos numericamente os valores estacionários das populações representativas em função da taxa de alimentação direta. Evidenciou-se a formação de três regimes distintos: para baixas taxas de alimentação as populações são próximas das de equilíbrio; o condensado é formado para taxas de alimentação intermediárias, com taxas acima de um certo limiar, o sistema termaliza internamente, adquirindo uma temperatura de não-equilíbrio única. As taxas associadas aos diferentes processos que compõem os regimes estacionários foram analisadas de forma a elucidar a transição entre estes regimes.

- Ainda seguindo a modelagem por dois fluidos, foi estudada a relaxação para o equilíbrio do condensado e verificou-se que, em função da taxa de alimentação, diferentes processos são responsáveis pelo decaimento do condensado, explicando-se a dependência experimental da taxa de relaxação com a intensidade da fonte externa.

# Conclusão

Estudamos neste trabalho a termodinâmica de não-equilíbrio de sistemas magnéticos sob ação de excitação por radiação de microondas e em contato com banho térmico. Os subsistemas relevantes para este estudo tiveram sua descrição mecânica apresentada em termos de um hamiltoniano de spins, que foi convenientemente reescrito em termos de mágnons acústicos, fônons e fótons. A termodinâmica de não-equilíbrio foi construída visando descrever os experimentos em magnetismo, e, portanto, fornecer a evolução da energia e da magnetização do sistema. No caso de sistemas homogêneos, estas quantidades macroscópicas podem ser descritas segundo populações, amplitudes e pares de mágnons (conjunto 2.12).

Recorremos então ao formalismo de ensembles estatísticos de não-equilíbrio para obter o operador estatístico apropriado e, utilizando-nos da teoria cinética associada, obtivemos a equação de evolução das amplitudes, pares e populações de mágnons. As equações obtidas contêm contribuições até segunda ordem nas intensidades das interações e não incluem efeitos de memória (aproximação de Markov).

A análise destas equações nos levou a concluir que as amplitudes são negligenciáveis, para os mecanismos de alimentação propostos, e a evolução dos pares leva a pequenas contribuições à evolução das populações de mágnons. Assim, ao longo do texto enfatizamos a análise das equações de evolução das populações de mágnons, que, como dito, praticamente não é influenciada pelas amplitudes e pares.

Estas equações cinéticas das populações de mágnons são compostas por variadas contribuições que têm origem nas diversas interações presentes no hamiltoniano e estão associadas a processos lineares e não-lineares de alimentação, relaxação e distribuição interna de energia. Quanto à alimentação do sistema, identificamos os termos associados à fonte externa e mostramos o efeito de retroalimentação presente no "bombeamento paralelo" (campo magnético da fonte paralelo ao campo magnético estático aplicado sobre o material). A relaxação do sistema inclui processos lineares, como a relaxação linear para a rede cristalina, e não-lineares, como o decaimento de mágnons via emissão de fótons.

Verificamos ainda que a redistribuição interna de energia entre os diversos modos de mágnons ocorre basicamente de duas formas (ver seções 2.3.1 e 2.3.2):

- Pela transferência da energia injetada nos modos alimentados para os modos de baixa freqüência mediada pelo acoplamento do sistema magnético com a rede cristalina. Este processo, que tem origem na interação não-linear entre mágnons e fônons, e que denominamos Efeito Fröhlich, está presente de maneira determinante em uma série de sistemas de muitos corpos, conforme discutido na Introdução.

- Pelo processo interno associado ao espalhamento de mágnons, gerado pelas interações de troca e dipolar, que leva à termalização de não-equilíbrio do sistema, isto é, as populações de mágnons seguem uma distribuição de Planck caracterizada por uma única temperatura de não-equilíbrio.

Estes dois processos apresentam-se em desacordo, pois enquanto o Efeito Fröhlich gera uma cascata de transferência de energia dos modos alimentados para aqueles de baixa freqüência levando a formação de um apreciável acúmulo de mágnons nas populações dos modos de mínima freqüência, o espalhamento de mágnons tende a destruir este acúmulo, redistribuindo a energia de forma a termalizar o sistema. Constatamos, como afirmado na Introdução, que o acúmulo de mágnons observado trata-se de mais um exemplo de Condensação de Não-Equilíbrio de Fröhlich-Bose-Einstein (NEFBEC).

Para precisar a forma como estes dois processos se compõem e se opõem e também estudar outras características do sistema, propusemos uma contração das equações cinéticas das populações de mágnons (conjunto de equações íntegro-diferenciais não-lineares acopladas que em número correspondem à quantidade de modos disponíveis) em apenas duas equações diferenciais acopladas, associadas à evolução de populações representativas dos modos de freqüência próxima à mínima e dos modos alimentados - o "modelo de dois fluidos". Estas equações preservam as principais características do sistema completo de equações cinéticas e podem ser integradas numericamente, desde que fornecidos os parâmetros associados.

A teoria desenvolvida foi então aplicada a experimentos recentes com filmes finos de granada de ferro-ítrio sob campo magnético estático excitados por uma fonte de radiação de microondas. Durante a aplicação da fonte de microondas com intensidades suficientemente altas, foi observada, via espalhamento de luz tipo Brillouin, a progressiva transferência de energia dos modos de mágnons alimentados para aqueles de mais baixa energia, levando a um acúmulo substancial nos modos de mínima freqüência. Ao desligar-se a fonte, observa-se o decaimento do condensado de mágnons em termos da intensidade da fonte externa.

Considerando que as energias envolvidas nos experimentos são capazes de excitar apenas os mágnons acústicos deste material ferrimagnético e levando em conta a relação de dispersão destes mágnons em filmes finos, é possível afirmar que este sistema é bem descrito pela teoria desenvolvida. Assim, através de dados experimentais para as intensidades Brillouin no tempo, obtivemos a evolução das populações representativas de mágnons segundo o experimento e, utilizando o modelo de dois fluidos, pudemos realizar uma comparação entre experimento e teoria.

Pela análise das populações representativas estacionárias em função da taxa de alimentação direta do sistema, percebemos que a emergência do condensado de Fröhlich-Bose-Einstein ocorre apenas para um determinado intervalo de valores de taxa de alimentação, abaixo do qual se está próximo do equilíbrio (e o comportamento complexo é inviabilizado) e acima do qual o condensado é destruído pela contribuição oriunda do espalhamento de mágnons, como pode ser visto na Fig. 4.9.

Ainda através de simulações numéricas, mostramos como os diversos processos de relaxação se compõem em função dos valores das populações representativas e, portanto, das taxas de alimentação do sistema. Torna-se claro como o processo de relaxação dominante do condensado depende destas taxas: para baixa alimentação o decaimento é basicamente via interação linear com a rede cristalina; para taxas intermediárias, o condensado decai principalmente pelas interações internas; o decaimento via emissão de fótons torna-se dominante para altas taxas de alimentação. Mais uma vez, os resultados experimentais (Fig. 4.5b) e teóricos (Fig. 4.16) apresentaram um acordo qualitativo, corroborando a explicação do fenômeno.

Finalmente, concluímos este trabalho ressaltando seu principal resultado, a saber, a elucidação da condensação de mágnons afastados do equilíbrio observada em filmes finos de YIG, que demonstramos ocorrer por conta do Efeito Fröhlich e apesar da tendência à termalização imposta pela interação entre mágnons. Embora tenhamos analisado em detalhe a emergência da NEFBEC de mágnons através da análise das equações de evolução das populações, cumpre dizer que uma série de questões não discutidas neste trabalho permanecem em aberto. Ainda analisando as equações cinéticas das populações de mágnons, poder-se-ia estudar o decaimento dos mágnons do condensado em fótons, relacionando esta emissão com a radiância observada nos experimentos descritos da Ref. 11. Além disso, a exemplo da Ref. 25, torna-se relevante realizar uma caracterização termodinâmica aprofundada da NEFBEC.

Outros exemplos poderiam ser citados, como a propagação de sinais na forma de ondas solitárias (sólitons) no condensado ou mesmo a formulação de uma hidrodinâmica do fluido de mágnons na NEFBEC [15]. Exemplos que, apesar de não esgotarem a diversidade de possíveis extensões deste trabalho, demonstram o quão frutífero, em termos de comportamento complexo, é o sistema magnético analisado.

# Apêndice A

# *“Thermo-statistical theory of kinetic and relaxation processes”*

International Journal of Modern Physics B
Vol. 23, No. 27 (2009) 5283–5305


# THERMO-STATISTICAL THEORY OF KINETIC AND RELAXATION PROCESSES

FABIO S. VANNUCCHI[†], AUREA R. VASCONCELLOS and ROBERTO LUZZI[*]

*Condensed Matter Physics Department,*
*Institute of Physics "Gleb Wataghin",*
*University of Campinas — Unicamp,*
*13083-970, Campinas, SP, Brazil*
*www.ifi.unicamp.br/∼aurea*
[†]*fabiosv@ifi.unicamp.br*

Received 5 August 2009

We describe, in a short overview, the construction of a Nonequilibrium Statistical Mechanics Ensemble Formalism, providing a thermo-statistical theory of kinetic and relaxation processes. Such construction has been approached along the recently past 20th century by a pleiad of distinguished scientists, a work that can be subsumed in a large systematization in the form of a physically sound, general and useful, theoretical framework. We briefly comment on the main questions associated to that construction. Among them are the relevant ones of choice of the basic variables, and of historicity and irreversibility. The derivation of a nonequilibrium grand-canonical statistical operator and a brief description of the all-important accompanying Nonlinear Quantum Kinetic Theory of relaxation processes are presented. The aspect of validation of the theory (comparison of theory and experiment) is reviewed in compact form, and its use is illustrated in a study of a nonequilibrium system of quantum oscillators embedded in a thermal bath and under the action of an external force, showing how a far-reaching generalization of Mori–Langevin equations arises.

*Keywords*: Relaxation processes; nonequilibrium ensembles; irreversible thermodynamics; higher-order hydrodynamics.

"Chance is a cause, but it is inscrutable to the human mind."
Democritus (460–370 B.C.), cited by Aristoteles in Physics II, chapter 4.

## 1. Introduction

Statistical Mechanics is a grandiose theoretical construction whose founding fathers include the great names of James C. Maxwell, Ludwig Boltzmann, and J. Willard Gibbs.[1–5] It is fundamental for the study of condensed matter which could be said to be statistical mechanics by antonomasia. Therefore, statistical mechanics can be considered the mother science of present day advanced technology, which is the basis of our sophisticated contemporary society.

Its application to the case of systems in equilibrium proceeded rapidly and with exceptional success. On the other hand, for systems arbitrarily deviated from equilibrium and governed by nonlinear kinetic laws, the derivation of an ensemble-like formalism proceeded at a slower pace than in the case of equilibrium, and somewhat cautiously. A long list of highly distinguished scientists contributed to such development, and among them we can mention Nicolai Bogoliubov, John Kirkwood, Nicolai Krylov, Melvin Green, Robert Zwanzig, Hazime Mori, Peter Landsberg, Ilya Prigogine, and Dimitri Zubarev. It must be added the name of Edwin Jaynes, who systematized, or better to say codified the matter on the basis of a variational principle in the context of what is referred to as Predictive Statistical Mechanics,[6] which is based on a framework provided by Information Theory.

In the study of the macroscopic state of nonequilibrium systems, we face greater difficulties than those in the theory of equilibrium systems. This is mainly due to the fact that a more detailed analysis is necessary to determine the temporal dependence of measurable properties, and to calculate transport coefficients which are time-dependent (that is, depending on the evolution in time of the nonequilibrium macro-state of the system where dissipative processes are unfolding), and which are also space-dependent. That dependence is nonlocal in space and noninstantaneous in time, as it encompasses space and time correlations. Robert Zwanzig[7] summarized the basic goals of nonequilibrium statistical mechanics as consisting of:

(1) to derive transport equations and to grasp their structure;
(2) to understand how the approach to equilibrium occurs in natural systems;
(3) to study the properties of steady states; and
(4) to calculate the instantaneous values and the temporal evolution of the physical quantities which specify the macroscopic state of the system.

Also according to Zwanzig,[7] for the purpose of facing these questions, there exist several approaches which can be classified as:

(a) intuitive techniques;
(b) techniques based on the generalization of the theory of gases;
(c) techniques based on the theory of stochastic processes;
(d) expansions from an initial equilibrium ensemble;
(e) generalizations of Gibbs' ensemble formalism;

and we should add a sixth one, namely,

(f) computer simulations.

The last two, (e) and (f), appear nowadays as the most appropriate to deal with far-from-equilibrium systems. As already noticed, such type of studies are of fundamental relevance for providing the scientific background to the advanced modern technologies in the quest for improving performance and efficiency, and therefore competitiveness, in multiple cases (electronics and optoelectronics, food engineering, cosmetic industry, petroleum technologies, and so on and so forth).

Both approaches provide similar results for diverse problems (i.e., a good numerical agreement in the calculations, and in the comparison with experimental results, of properties of systems far-from equilibrium).

In the present article, we describe the construction of a Nonequilibrium Statistical Ensemble Formalism (NESEF). Several questions associated to such construction are very briefly described. Finally, in an illustration, the formalism is applied to the study of a nonequilibrium system of quantum oscillators embedded in a thermal bath and subjected to an external time-dependent force, in what can be referred-to as many-oscillators Brownian motion.[8]

## 2. A Nonequilibrium Statistical Ensemble Formalism

Construction of nonequilibrium statistical ensembles, that is, a Nonequilibrium Statistical Ensemble Formalism, NESEF for short, consisting in, basically, the derivation of a nonequilibrium statistical operator (probability distribution in the classical case) has been attempted along several lines. For example, using projection-operator techniques or through heuristic arguments, but it follows that the different constructions can be unified under a unique variational principle. This is done within a framework provided by Information Theory, and can be referred-to as Predictive Statistical Mechanics[6,9] (and see also Refs. 10 and 11). Here we introduce NESEF within a heuristic approach, and, first, it needs to be noticed that for systems away from equilibrium, several important points need to be carefully taken into account in each case under consideration:

(1) *The choice of the basic variables* (a wholly different choice than in equilibrium when it suffices to take a set of those which are constants of motion), which is to be based on an analysis of what sort of macroscopic measurements and processes are actually possible, and, moreover, one is to focus attention not only on what can be observed but also on the character and expectative concerning the equations of evolution for these variables (e.g., Refs. 7, 10 and 11). We also notice that even though at the initial stage we would need to introduce all the observables of the system, and eventually variances, as time elapses more and more contracted descriptions can be used as it enters into play Bogoliubov's principle of correlation weakening and the accompanying hierarchy of relaxation times.[12]
(2) *The question of irreversibility* (or Eddington's arrow of time) on what Rudolf Peierls stated that: "In any theoretical treatment of transport problems, it is important to realize at what point the irreversibility has been incorporated. If it has not been incorporated, the treatment is wrong. A description of the situation that preserves the reversibility in time is bound to give the answer zero or infinity for any conductivity. If we do not see clearly where the irreversibility is introduced, we do not clearly understand what we are doing".[13]
(3) *Historicity needs be introduced*, that is, the idea that it must be incorporated all the past dynamics of the system (or historicity effects), all along the time

interval going from a starting description of the macro-state of the sample in the given experiment, say at $t_0$, up to the time $t$ when a measurement is performed. This is quite important point in the case of dissipative systems as emphasized among others by John Kirkwood and Hazime Mori. It implies in that the history of the system is not merely the series of events in which the system has been involved, but it is the series of transformations along time by which the system progressively comes into being at time $t$ (when a measurement is performed), through the evolution governed by the laws of mechanics.[14,15]

Concerning the question of the choice of the basic variables, differently to the case in equilibrium, immediately after the open system of $N$ particles, in contact with external sources and reservoirs, has been driven out of equilibrium, it would be necessary to describe its state in terms of all its observables and, eventually, introducing direct and cross-correlations among them. But this is equivalent to having access to the so-called one-particle (or single-particle), $\hat{n}_1$, and two-particle, $\hat{n}_2$, dynamical operators. This is so because, we recall, all observable quantities and their variances can be expressed, at the microscopic mechanical level, in terms of these dynamical operators. For a description of mechanical states by means of these reduced density operators, we refer the reader to the already classical paper by Ugo Fano.[16]

For the sake of completeness, we notice that in classical mechanics the one-particle and two-particle operators, $\hat{n}_1$ and $\hat{n}_2$, are given, respectively, by

$$\hat{n}_1(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_j)\,, \tag{1}$$

$$\hat{n}_2(\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{r}',\mathbf{p}') = \sum_{j\neq k=1}^{N} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_j)\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_k)\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}_k)\,, \tag{2}$$

where $\mathbf{r}_j$ and $\mathbf{p}_j$ are the coordinate and linear momentum of the $j$th particle in phase space and $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}'$, and $\mathbf{p}'$ the continuous values of position and momentum, which are sometimes called field variables (for simplicity we take the case of a single class of particles; otherwise we must write dynamical operators for each kind of particle). In quantum mechanics the one- and two-particle density operators are ($\sigma$ is the spin index)

$$\hat{n}_1(\mathbf{r},\sigma,\mathbf{r}',\sigma') = \Psi^\dagger_\sigma(\mathbf{r})\Psi_{\sigma'}(\mathbf{r}')\,, \tag{3}$$

$$\hat{n}_2(\mathbf{r}_1,\sigma_1,\mathbf{r}_2,\sigma_2,\mathbf{r}'_1,\sigma'_1,\mathbf{r}'_2,\sigma') = \Psi^\dagger_{\sigma_1}(\mathbf{r}_1)\Psi^\dagger_{\sigma_2}(\mathbf{r}_2)\Psi_{\sigma'_2}(\mathbf{r}'_2)\Psi_{\sigma'_1}(\mathbf{r}'_1)\,, \tag{4}$$

where $\Psi(\Psi^\dagger)$ are single-particle field operators in second quantization (an excellent didactical description of them is available in the article by $B$. Robertson of Ref. 17). Hence, on the one hand, the nonequilibrium statistical operator $R_\varepsilon(t)$ [in Eq. (8)] is dependent on these quantities, and, on the other hand, the macro-variables for describing the nonequilibrium thermodynamic state of the system are the average value of the same quantities over the nonequilibrium ensemble, i.e.,

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) = \mathrm{Tr}\{\hat{n}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) R_\varepsilon(t)\}\,, \tag{5}$$

$$f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2; t) = \mathrm{Tr}\{\hat{n}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) R_\varepsilon(t)\}\,, \tag{6}$$

where the trace operator, Tr, stands in classical mechanics for integration in phase space. Moreover, we call the attention to the fact that $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ is a Boltzmann distribution function in the framework of NESEF.[18]

On the question of irreversibility, Nicolai S. Krylov[19] considered that there always exists a physical interaction between the system under study and the external world that is constantly "jolting" the system out of its exact microstate. Thus, the instability of trajectories and the unavoidable finite interaction with the outside world would guarantee the working of a "crudely prepared" macroscopic description. In the absence of a proper way to introduce such effect, one needs to resort to the *interventionist's approach*,[5] which is grounded on the basis of such ineluctable process of randomization leading to the asymmetric evolution of the macro-state.

The "intervention" consists into introducing in the Liouville equation of the statistical operator a particular source accounting for *Krylov's "jolting" effect*, in the form (written for the logarithm of the statistical operator)

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln R_\varepsilon(t) + \frac{1}{i\hbar}[\ln R_\varepsilon(t), \hat{H}] = -\varepsilon[\ln R_\varepsilon(t) - \ln \bar{R}(t, 0)]\,, \tag{7}$$

where $\varepsilon$ (kind of reciprocal of a relaxation time) is taken to go to $+0$ after the calculation of traces in obtaining average values is performed. Such mathematically inhomogeneous term, in the otherwise normal Liouville equation, implies in a continuous tendency of relaxation of the statistical operator towards a *referential distribution*, $\bar{R}$, which, as discussed below, represents an instantaneous quasi-equilibrium condition.

We can see that Eq. (7) consists of a regular Liouville equation but with an infinitesimal source, which introduces Bogoliubov's symmetry breaking of time reversal and is responsible for disregarding the advanced solutions.[10–12,20] This is described by a Poisson distribution and the result at time $t$ is obtained by averaging over all $t'$ in the interval $(t_0, t)$, once the solution of Eq. (7) is

$$R_\varepsilon(t) = \exp\left[-\hat{\mathcal{S}}(t, 0) + \int_{t_0}^{t} dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \frac{d}{dt'} \hat{\mathcal{S}}(t', t'-t)\right], \tag{8}$$

where

$$\hat{\mathcal{S}}(t, 0) = -\ln \bar{R}(t, 0)\,, \tag{9}$$

$$\hat{\mathcal{S}}(t', t'-t) = \exp\left[-\frac{(t'-t)\hat{H}}{i\hbar}\right] \hat{\mathcal{S}}(t', 0) \exp\left[\frac{(t'-t)\hat{H}}{i\hbar}\right], \tag{10}$$

and the initial-time condition at time $t_0$, when the formalism begins to be applied, is

$$R_\varepsilon(t_0) = \bar{R}(t_0, 0) \,. \tag{11}$$

In $\bar{R}$ and $\hat{\mathcal{S}}$, the first time variable in the argument refers to the evolution of the nonequilibrium thermodynamic variables and the second to the time evolution of the dynamical variables, both of which have an effect on the operator.

This time $t_0$, of initiation of the statistical description, is usually taken in the remote past ($t_0 \to -\infty$), introducing an adiabatic switching-on of the relaxation processes, and where the integration in time in the interval $(t_0, t)$ is weighted by the kernel $\exp\{\varepsilon(t' - t)\}$. The presence of this kernel introduces a kind of *evanescent history* as the system macro-state evolves toward the future from the boundary condition of Eq. (11) at time $t_0(\to -\infty)$, a fact evidenced in the resulting kinetic theory[10,21] which clearly indicates that it has been introduced a fading memory of the dynamical processes. It can be noticed that the statistical operator can be written in the form

$$R_\varepsilon(t) = \bar{R}(t, 0) + R'_\varepsilon(t) \,, \tag{12}$$

involving the auxiliary probability distribution $\bar{R}(t, 0)$, plus $R'_\varepsilon(t)$ which contains the historicity and irreversibility effects. Moreover, in most cases we can consider the system as composed of the system of interest (on which we are performing an experiment) in contact with ideal reservoirs. Thus, we can write,

$$\bar{R}(t, 0) = \bar{\rho}(t, 0) \times \rho_R \tag{13}$$

and

$$R_\varepsilon(t) = \rho_\varepsilon(t) \times \rho_R \,, \tag{14}$$

where $\rho_\varepsilon(t)$ is the statistical operator of the nonequilibrium system, $\bar{\rho}$ the auxiliary one, and $\rho_R$ the stationary one of the ideal reservoirs, with $\rho_\varepsilon(t)$ given then by

$$\rho_\varepsilon(t) = \exp\left[-\hat{\mathcal{S}}(t, 0) + \int_{-\infty}^{t} dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \frac{d}{dt'} \hat{\mathcal{S}}(t', t' - t)\right] , \tag{15}$$

having the initial value $\bar{\rho}(t_0, 0)$ $(t_0 \to -\infty)$, and where

$$\hat{\mathcal{S}}(t, 0) = -\ln \bar{\rho}(t, 0) \,. \tag{16}$$

Finally, it needs to be provided with the auxiliary statistical operator $\bar{\rho}(t, 0)$. It defines an instantaneous distribution at time $t$, which describes a "frozen" equilibrium by providing at such given time the macroscopic state of the system, and for that reason is sometimes dubbed as the *quasi-equilibrium statistical operator*. On the basis of this (or, alternatively, *via* the extremum principle procedure[10,20,22]), and considering the description of the nonequilibrium state of the system in terms of the single- and two-particle density operators, the reference or instantaneous quasi-equilibrium statistical operator is taken as a canonical-like one given by

$$\bar{\rho}(t,0) = \exp\Big[ -\phi(t) - \int d^3r \int d^3p F_1(\mathbf{r},\mathbf{p};t)\hat{n}_1(\mathbf{r},\mathbf{p}) - \int d^3r \int d^3p \int d^3r' \int d^3p' F_2(\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{r}',\mathbf{p}';t)\hat{n}_2(\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{r}',\mathbf{p}')\Big], \tag{17}$$

in the classical case, with $\phi(t)$ ensuring the normalization of $\bar{\rho}$ and playing the role of a kind of a logarithm of a nonequilibrium partition function, say, $\phi(t) = \ln \bar{Z}(t)$. Moreover, in this Eq. (17), $F_1$ and $F_2$, are the nonequilibrium thermodynamic variables associated to each kind of basic dynamical variables, $\hat{n}_1$ and $\hat{n}_2$, respectively (Lagrange multipliers in the extremum principle approach).

An alternative equivalent and complete description consists in the construction of a generalized nonequilibrium grand-canonical distribution. Considering for simplicity the case of retaining only $\hat{n}_1$ as basic dynamical variable, such alternative description follows by redefining the nonequilibrium thermodynamic variable $F_1$ in the form

$$F_1(\mathbf{r},\mathbf{p};t) = F_n^{[0]}(\mathbf{r},t) + \mathbf{F}_n(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\mathbf{p}}{m} + F_h^{[0]}(\mathbf{r},t)\frac{p^2}{2m} + \mathbf{F}_h(\mathbf{r},t)\cdot\frac{p^2}{2m}\frac{\mathbf{p}}{m} + \sum_{r\geq 2}\left[F_h^{[r]}(\mathbf{r},t)\otimes\frac{p^2}{2m}u^{[r]}(\mathbf{p}) + F_n^{[r]}(\mathbf{r},t)\otimes u^{[r]}(\mathbf{p})\right], \tag{18}$$

where

$$u^{[r]}(\mathbf{p}) = \left[\frac{\mathbf{p}}{m}\cdots(r\text{-times})\cdots\frac{\mathbf{p}}{m}\right], \tag{19}$$

is an $r$-rank tensor consisting of the tensorial product of $r$-times the velocity $\mathbf{p}/m$; $\otimes$ stands for fully contracted product of tensors. When Eq. (18) is introduced in the statistical operator of Eq. (17) (with $F_2 = 0$) $\bar{\rho}$ takes the form

$$\bar{\rho}(t,0) = \exp\Big\{ -\phi(t) - \int d^3r \Big[F_h^{[0]}(\mathbf{r},t)\hat{h}(\mathbf{r}) + F_n^{[0]}(\mathbf{r},t)\hat{n}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_h(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{I}}_h^{[r]}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_n(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{I}}_n^{[r]}(\mathbf{r}) + \sum_{r\geq 2}[F_h^{[r]}(\mathbf{r},t)\otimes\hat{I}_h^{[r]}(\mathbf{r}) + F_n^{[r]}(\mathbf{r},t)\otimes\hat{I}_n^{[r]}(\mathbf{r})]\Big]\Big\}, \tag{20}$$

where

$$\hat{h}(\mathbf{r}) = \int d^3p\,\frac{p^2}{2m}\hat{n}_1(\mathbf{r},\mathbf{p})\,; \quad \hat{n}(\mathbf{r}) = \int d^3p\hat{n}_1(\mathbf{r},\mathbf{p})\,; \tag{21}$$

$$\hat{\mathbf{I}}_h(\mathbf{r}) = \int d^3p\,\frac{p^2}{2m}\frac{\mathbf{p}}{m}\hat{n}_1(\mathbf{r},\mathbf{p})\,; \quad \hat{\mathbf{I}}_n(\mathbf{r}) = \int d^3p\,\frac{\mathbf{p}}{m}\hat{n}_1(\mathbf{r},\mathbf{p})\,; \tag{22}$$

$$\hat{I}_h^{[r]}(\mathbf{r}) = \int d^3p \, \frac{p^2}{2m} u^{[r]}(\mathbf{p}) \hat{n}_1(\mathbf{r},\mathbf{p}) \, ; \quad \hat{I}_n^{[r]}(\mathbf{r}) = \int d^3p u^{[r]}(\mathbf{p}) \hat{n}_1(\mathbf{r},\mathbf{p}) \, ; \tag{23}$$

which are the densities of kinetic energy, $\hat{h}$, and particles, $\hat{n}$, and their fluxes of all orders (the vectorial ones and the tensorial ones with $r \geq 2$). They have as conjugated nonequilibrium thermodynamic variables the set

$$\left\{F_h^{[0]}(\mathbf{r},t), F_n^{[0]}(\mathbf{r},t), \mathbf{F}_h(\mathbf{r},t), \mathbf{F}_n(\mathbf{r},t), \{F_h^{[r]}(\mathbf{r},t)\}, \{F_n^{[r]}(\mathbf{r},t)\}\right\}, \tag{24}$$

and it can be noticed that, alternatively, this set of variables completely describe the nonequilibrium thermodynamic state of the system (thermodynamics of nonequilibrium systems, or irreversible thermodynamics, is fully described in Refs. 23 and 24). They are related to the basic set of macro-variables by the relations (which are the equivalent of equations of state in arbitrary nonequilibrium conditions[10,11,24])

$$I_h^{[r]}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Tr}\{\hat{I}_h^{[r]}(\mathbf{r})\bar{\rho}(t,0)\} = -\frac{\delta\phi(t)}{\delta F_h^{[r]}(\mathbf{r},t)} = -\frac{\delta \ln \bar{Z}}{\delta F_h^{[r]}(\mathbf{r},t)}\,, \tag{25}$$

$$I_n^{[r]}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Tr}\{\hat{I}_n^{[r]}(\mathbf{r})\bar{\rho}(t,0)\} = -\frac{\delta\phi(t)}{\delta F_n^{[r]}(\mathbf{r},t)} = -\frac{\delta \ln \bar{Z}}{\delta F_n^{[r]}(\mathbf{r},t)}\,, \tag{26}$$

where $r = 0$ for the densities, $r = 1$ for the vector (first order) fluxes, and $r \geq 2$ for the higher-order tensor fluxes, we have used that $\rho_\varepsilon$ and $\bar{\rho}$, at each time $t$, define the same average values for the basic variables and *only* the basic variables,[10,11] and $\delta$ stands for functional differential.[25]

## 3. NESEF-based Kinetic Theory

Nonlinear transport phenomena in far-from-equilibrium systems is a subject of great importance in many areas besides the physics of condensed matter, like in physical-chemistry, biology, engineering, and others. One type of nonlinear transport theory is connected with the handling of higher-order approximations of the solutions of the Boltzmann equation via the Hilbert–Chapman–Enskog method.[26] For arbitrarily far-from-equilibrium systems several methods, based on different approaches, are used to derive nonlinear transport equations.[7,27] Some of them are built upon the generalization of ideas originated in the theory of the Brownian motion,[28] and others on the extension of Gibbs' algorithm to nonequilibrium situations based either on intuitive approaches or complemented with projection operator techniques.[15,27,29–33] The transport equations that are obtained following the latter approach are considered a far-reaching generalization of the Hilbert–Chapman–Enskog point of view.[20]

The equations of evolution for the basic macro-variables of Eqs. (25) and (26), are the averages over the nonequilibrium ensemble of the equations of classical or quantum mechanics for the corresponding basic dynamical operators, those in Eqs. (21)– (23), i.e., in the quantum case

$$\frac{\partial}{\partial t} I_p^{[r]}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{I}_p^{[r]}(\mathbf{r}), \hat{H}\right]\rho_\varepsilon(t) \times \rho_R\right\}, \tag{27}$$

where $r = 0, 1, 2, \ldots$, and $p = h$ or $n$.

This constitutes a coupled set of complicated equations, but it admits to be dealt with in a practical NESEF-based Kinetic Theory.[10,11,21] In short, separating the Hamiltonian in the form

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' \,, \tag{28}$$

where $\hat{H}_0$ is the kinetic energy operator and $\hat{H}'$ contains the energy operator for the interactions in the system, say $\hat{H}_1$, and for the system and reservoir, say $\hat{W}$, that is $\hat{H}' = \hat{H}_1 + \hat{W}$, and using Eqs. (12) and (14), according to which $\rho_\varepsilon = \bar{\rho} + \rho'_\varepsilon$, once $\rho_R$ is the stationary equilibrium probability distribution of the reservoirs, there follows that

$$\frac{\partial}{\partial t} I_p^{[r]}(\mathbf{r},t) = J_p^{[r](0)}(\mathbf{r},t) + J_p^{[r](1)}(\mathbf{r},t) + \sum_{m\geq 2} \Omega_p^{[r](m)}(\mathbf{r},t) \,, \tag{29}$$

where

$$J_p^{[r](0)}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Tr}\left\{ \frac{1}{i\hbar} \big[ \hat{I}_p^{[r]}(\mathbf{r}), \hat{H}_0 \big] \bar{\rho}(t,0) \times \rho_R \right\} , \tag{30}$$

$$J_p^{[r](1)}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Tr}\left\{ \frac{1}{i\hbar} \big[ \hat{I}_p^{[r]}(\mathbf{r}), \hat{H}' \big] \bar{\rho}(t,0) \times \rho_R \right\} , \tag{31}$$

and, in particular, for $m = 2$,

$$\begin{aligned} \Omega_p^{[r](2)}(\mathbf{r},t) = {} & \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{t} dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \mathrm{Tr}\{[\hat{H}'(t'-t)_0, [\hat{H}', \hat{I}_p^{[r]}(\mathbf{r})]] \bar{\rho}(t', t'-t)_0 \times \rho_R\} \\ & + \frac{1}{i\hbar} \sum_{r'\geq 0} \sum_{p'} \int_{-\infty}^{t} dt' e^{\varepsilon(t'-t)} J_{p'}^{[r'](1)}(\mathbf{r},t) \frac{\delta}{\delta I_{p'}^{[r'](1)}(\mathbf{r},t)} \\ & \times \mathrm{Tr}\{[\hat{H}', \hat{I}_p^{[r]}(\mathbf{r})] \bar{\rho}(t', t'-t)_0 \times \rho_R\} \,, \end{aligned} \tag{32}$$

with all the other collision integrals, $m \geq 3$, and full details of the kinetic theory, given in Refs. 10, 11 and 21. Lower index nought indicates interaction representation, i.e., evolution of the mechanical quantities under $\hat{H}_0$. It can be noticed that the right-hand side of Eq. (29) is composed of a series of partial collision integrals involving increasing orders in the interaction strengths ($m = 2, 3, \ldots$), containing memory effects and vertex renormalizations.[34] We recall that in the classical-mechanical level Tr stands for integration in phase space, and the commutator divided by $i\hbar$ is to be replaced by the Poisson bracket.

The so-called Markovian approximation consists into keeping only the contribution $m = 2$ and in it neglecting memory effects.[10,21,35] Hence, the NESEF-based Markovian equations of evolution are

$$\frac{\partial}{\partial t} I_p^{[r]}(\mathbf{r},t) = J_p^{[r](0)}(\mathbf{r},t) + J_p^{[r](1)}(\mathbf{r},t) + J_p^{[r](2)}(\mathbf{r},t) \,, \tag{33}$$

with

$$J_p^{[r](2)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \mathrm{Tr}\{[\hat{H}'(t'-t)_0, [\hat{H}', \hat{I}_p^{[r]}(\mathbf{r})]]\bar{\rho}(t,0) \times \rho_R\}$$
$$+ \frac{1}{i\hbar}\sum_{r'\geq 0}\sum_{p'}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\varepsilon(t'-t)}$$
$$\times \frac{\delta J_{p'}^{[r'](1)}(\mathbf{r},t)}{\delta \hat{I}_{p'}^{[r']}(\mathbf{r})} \mathrm{Tr}\{[\hat{H}', \hat{I}_{p'}^{[r']}(\mathbf{r})]\bar{\rho}(t,0) \times \rho_R\}\,. \tag{34}$$

The Markovian limit of the kinetic theory is of particular relevance as a result that, for a large class of problems, the interactions in $\hat{H}'$ are weak, and the use of the lowest order in the equations of motion constitutes an excellent approximation of good practical value. In Chap. 6 in the book of Ref. 10 we describe several examples of its application for which there follows an excellent agreement between the calculation and the experimental data. By means of a different approach, E. B. Davies[36] has shown that in fact the Markovian approximation can be validated in the weak coupling (in the interactions) limit (retaining only quadratic contributions). It may be noticed that in a large number of cases, the contribution $J^{(1)}$ is null for reasons of symmetry, and then it is not present on the right-hand side of Eq. (29) and the second contribution to $J^{(2)}$ in Eq. (34) disappears. The remaining contribution to $J^{(2)}$, the first term on the right of Eq. (34), takes in general the form of the Golden Rule of Quantum Mechanics averaged over the nonequilibrium ensemble.

## 4. Validation and an Illustration

Here, we make contact with the fundamental point in the scientific method of corroborating theory by comparison with experiment.[37] It is worth mentioning S. J. Gould's observation that "a detail, by itself, is blind; a concept without a concrete illustration is empty [...] Darwin, who had such keen understanding of fruitful procedure in science, knew in his guts that theory and observation are Siamese twins, inextricably intertwined and continually interacting".[38] In particular, in the present question of statistical thermodynamics, we restate the call of Ryogo Kubo, who expressed that "statistical mechanics has been considered a theoretical endeavor. However, statistical mechanics exists for the sake of the real world, not for fictions. Further progress can only be hoped by close cooperation with experiment".[39]

Three areas of particular interest where the formalism has full and quite useful application are those that study ultrafast dissipative processes in polymers, biological systems, and in highly excited semiconductor systems. A vast amount of very successful experimental studies of these systems is available in the scientific literature on the subject, being centered mainly on measurement of ultrafast transport and optical properties (see for example Refs. 40–45).

A number of diverse applications of the formalism, including a report on earlier ones, are described in the review article of Ref. 20. The case of semiconductors under high levels of excitation is described in Chap. 6 of Ref. 10 involving in-depth studies of relaxation processes in such systems, related to experiments in ultrafast-laser spectroscopy, and optical and transport properties in conditions of application of intermediate to high electric fields. These studies of transport in intense fields (which can be produced by application of a low voltage but on nanometer distances, as it is the case in semiconductor devices), together with the study of optical properties, are of large relevance and interest in technology and industry because semiconductors at high levels of excitation are at work in emitting lasers and diodes and other semiconductor devices on which is quite dependent our contemporary society.

It can be noticed that, as a general rule, in the study of transport phenomena, analytical-type methods have been based on Boltzmann-like transport equations, which, however, have limitations when nonlinear effects acquire relevance, as in the cases mentioned above. Thus, improved analytical methods, that is, nonlinear quantum kinetic theories for studying physical phenomena in systems arbitrarily away from equilibrium, are desirable. Computer modeling as in Monte Carlo approaches have also been used, which give in general good agreement with experimental data. However, the method of analysis based on the ensemble formalism, described in the present paper, has the advantage that it provides analytic equations (which constitute a set of coupled nonlinear integro-differential equations computationally tractable nowadays), permitting to have a very good physical insight of the phenomena involved and the influence of the different characteristics of the system, a better interpretation of the results, and the comparison with the experimental data for any kind of experimental protocols. Also comparison with computer modeling calculations, which are of the kind of nonequilibrium molecular dynamics (NMD),[46,47] have been done, resulting in a very good agreement (for example, see Ref. 48).

As already noticed, the study — and with it the physical understanding and interpretation — of transport and optical properties in semiconductors is of large, and fundamental relevance in R&D (research and development) associated to the nowadays advanced technologies and processing of electronic and optoelectronic devices. Such situations involving ultrafast responses and functioning under far-from-equilibrium conditions pose new interesting and quite engaging challenges in the physics of condensed matter. Moreover, these systems become an extremely useful testing ground for theoretical ideas in the domain of nonequilibrium statistical thermodynamics of many-body systems.

We consider here, to explicitly present an application of the theory, the case of a system in a uniform state, that is, with no space dependence on the basic variables, and, to complement the classical presentation of the previous sections, a quantum description of a nonequilibrium system comprised of $N$ quantum oscillators. They are embedded in a thermal bath consisting of $N'$ oscillators, and under the action of a time-dependent external force that drives them out of equilibrium with the bath. The case of the Brownian motion of an oscillator coupled to a number of other oscillators, playing the role of a thermal bath, has been treated by several authors in different opportunities, e.g., by C. George,[49] Bashkirov and Zubarev,[50] and others. The non-Markovian irreversible behavior of an oscillator coupled to a scalar field (a bath) in a soluble model was used to describe its Brownian motion.[51,52] R. Zwanzig considered in detail the Brownian motion of a Duffing-oscillator within an advanced nonlinear transport theory.[8,27,53] In the decade of the 1960s of past century, H. Mori devised a theory to formulate transport, collective motion, and Brownian motion from a unified statistical-mechanical point of view,[28,54] and the NESEF-based derivation we present here leads to a generalization of Mori's approach. The excited oscillators relax their energy in excess of equilibrium to the oscillators in the bath (which are assumed to remain constantly in equilibrium with an external reservoir at temperature $T_0$), through the presence of a bilinear interaction between the two systems. The case of two systems of oscillators (representing quantum excitations as phonons, plasmons, excitons, etc., in solid state matter) interacting through a bilinear interaction are present in condensed matter. They give rise to so-called hybrid excitations (since the interaction is bilinear the Hamiltonian can be diagonalized by a unitary transformation), for example, polaritons[55] (hybridization of transverse optical phonons and the photons of the accompanying black-body radiation: their nonequilibrium thermostatistics is discussed in Ref. 56), hybridization of plasmons and longitudinal optical phonons, and other cases.

We deal with this question in the framework of the NESEF-based nonlinear quantum kinetic theory described in Sec. 3. This is done in a truncate version in which we retain only the second-order collision integral, $\Omega^{(2)}$, of Eq. (32), and the treatment is non-Markovian.

The system Hamiltonian in the normal coordinates description (e.g., Refs. 57 and 58) is

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} \left( a^\dagger_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\zeta_{\mathbf{k}} \left( b^\dagger_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{qk}} \left[ C_{\mathbf{qk}} a^\dagger_{\mathbf{q}} (b_{\mathbf{k}} + b^\dagger_{-\mathbf{k}}) + C^*_{\mathbf{qk}} a_{\mathbf{q}} (b^\dagger_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}) \right] + \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}(t) (a^\dagger_{\mathbf{q}} + a_{\mathbf{q}}) \,, \end{aligned} \tag{35}$$

where $\omega_{\mathbf{q}}$ and $\zeta_{\mathbf{k}}$ are the frequencies of the normal modes propagating with wavevectors $\mathbf{q}$ and $\mathbf{k}$, and $a_{\mathbf{q}}(a^\dagger_{\mathbf{q}})$ and $b_{\mathbf{k}}(b^\dagger_{\mathbf{k}})$ are the amplitude operators of vibrations in the system and the bath, respectively. Moreover, for oscillators in the system, the expression for the normal coordinate displacement is

$$\hat{x}_{\mathbf{q}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{\mathbf{q}}}} (a^\dagger_{\mathbf{q}} + a_{\mathbf{q}}) \,, \tag{36}$$

and for its conjugated linear momentum is

$$\hat{p}_{\mathbf{q}} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{2}} (a^\dagger_{\mathbf{q}} - a_{\mathbf{q}}) \,, \tag{37}$$

with $m$ being the mass of each oscillator. In the case when the theory is applied to massless quasi-particles as, e.g., phonons and photons, $m$ is absent in Eqs. (36) and (37) (see Refs. 57–59). In the Hamiltonian of Eq. (35) the first and the second terms on the right are the energies of the free oscillators of the system and of the bath, respectively; the third term is the bilinear interaction between them, with $C_{\mathbf{qk}}$ being the coupling strength; the last term accounts for the coupling of the oscillators with an applied perturbing potential characterized by $U_{\mathbf{q}}$ and depending on time.

For the nonequilibrium thermo-statistical description we are looking for, according to Sec. 3, we do need to choose the basic set of dynamical variables. Considering the expression of the Hamiltonian and the condition of equilibrium of the thermal bath, we take the sets $\{a_{\mathbf{q}}\}$ and $\{a_{\mathbf{q}}^\dagger\}$, or, equivalently, $\{\hat{x}_{\mathbf{q}}\}$ and $\{\hat{p}_{\mathbf{q}}\}$, and the energy operator of the thermal bath $\hat{H}_B$ [the second term on the right of Eq. (35)]. To these we add the populations $\{\hat{\nu}_{\mathbf{q}}\} = \{a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}\}$, in terms of which it can be written all physical observables of the system, particularly the energy and linear momentum [see Eq. (55)].

The basic set of dynamical variables is then

$$\{\{a_{\mathbf{q}}\}, \{a_{\mathbf{q}}^\dagger\}, \{\hat{\nu}_{\mathbf{q}}\}, \hat{H}_B\}\,, \tag{38}$$

and the auxiliary ("instantaneously frozen") statistical operator is

$$\bar{\rho}(t,0) = \exp\left\{ -\phi(t) - \beta_0 \hat{H}_B - \sum_{\mathbf{q}} [\varphi_{\mathbf{q}}(t)\, a_{\mathbf{q}} + \varphi_{\mathbf{q}}^*(t)\, a_{\mathbf{q}}^\dagger + \beta_{\mathbf{q}}(t)\hbar\omega_{\mathbf{q}}\, \hat{\nu}_{\mathbf{q}}] \right\}, \tag{39}$$

where it is present the set of nonequilibrium thermodynamic variables associated to the basic dynamical ones, namely

$$\{\{\varphi_{\mathbf{q}}(t)\}, \{\varphi_{\mathbf{q}}^*(t)\}, \{\beta_{\mathbf{q}}(t)\hbar\omega_{\mathbf{q}}\}, \beta_0\}\,, \tag{40}$$

with $\beta_0^{-1} = k_B T_0$, and we write $\beta_{\mathbf{q}}(t)^{-1} = k_B T_{\mathbf{q}}$, introducing the oscillator quasi-temperature per mode.

The average values of the dynamical variables over the nonequilibrium ensemble, that is,

$$\langle a_{\mathbf{q}}|t\rangle = \mathrm{Tr}\{a_{\mathbf{q}}\rho_\varepsilon(t)\} = \mathrm{Tr}\{a_{\mathbf{q}}\bar{\rho}(t,0)\}\,, \tag{41}$$

$$\langle a_{\mathbf{q}}^\dagger|t\rangle = \mathrm{Tr}\{a_{\mathbf{q}}^\dagger\rho_\varepsilon(t)\} = \mathrm{Tr}\{a_{\mathbf{q}}^\dagger\bar{\rho}(t,0)\}\,, \tag{42}$$

$$\nu_{\mathbf{q}}(t) = \mathrm{Tr}\{\hat{\nu}_{\mathbf{q}}\rho_\varepsilon(t)\} = \mathrm{Tr}\{\hat{\nu}_{\mathbf{q}}\bar{\rho}(t,0)\}\,, \tag{43}$$

$$E_B = \mathrm{Tr}\{\hat{H}_B\bar{\rho}(t,0)\}\,, \tag{44}$$

are the nonequilibrium equations of state that in this case relate the nonequilibrium thermodynamics variables of the set (40) to the nonequilibrium thermodynamic macro-variables

$$\{\{\langle a_{\mathbf{q}}|t\rangle\}, \{\langle a_{\mathbf{q}}^\dagger|t\rangle\}, \{\langle \nu_{\mathbf{q}}|t\rangle\}, E_B\}\,. \tag{45}$$

We recall that for the basic dynamical variables and *only* for them, the average value with the statistical operator, $\rho_\varepsilon(t)$, coincides with the one taken with the auxiliary one, $\bar{\rho}(t,0)$. Moreover, introducing the nonequilibrium partition function $\bar{Z}(t)$, writing $\phi(t) = \ln \bar{Z}(t)$, we do have the analog of the equilibrium case, once

$$\langle a_{\mathbf{q}}|t\rangle = -\frac{\delta \ln \bar{Z}(t)}{\delta \varphi_{\mathbf{q}}(t)}\,, \tag{46}$$

and similarly for the other variables in set (45), that is, the nonequilibrium thermodynamic macro-variables are given by minus the functional derivative of the logarithm of the nonequilibrium partition function $\bar{Z}(t)$ with respect to the nonequilibrium thermodynamic variables in set (40) associated to the basic dynamical variables in set (38).[10,24]

According to the NESEF-kinetic theory of the previous section, the equations of evolution for the basic nonequilibrium macro-variables, in the approximation of keeping only "binary collisions" but retaining the non-Markovian character, are [cf. Eq. (29)]

$$\frac{d}{dt}\langle a_{\mathbf{q}}|t\rangle = J^{(0)}_{a_{\mathbf{q}}} + J^{(1)}_{a_{\mathbf{q}}} + \Omega^{(2)}_{a_{\mathbf{q}}}\,, \tag{47}$$

and similarly for $\langle a^\dagger_{\mathbf{q}}|t\rangle$ and $\nu_{\mathbf{q}}(t)$; $E_B$ is constant in time (bath in equilibrium with the external reservoir at the fixed temperature $T_0$). The three contributions on the right are [cf. Eqs. (30)–(32)]

$$J^{(0)}_{a_{\mathbf{q}}}(t) = \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{i\hbar}\left[a_{\mathbf{q}}, \sum_{\mathbf{q}'} \hbar\omega_{\mathbf{q}'} a^\dagger_{\mathbf{q}'} a_{\mathbf{q}'}\right]\bar{\rho}(t,0)\right\}, \tag{48}$$

$$J^{(1)}_{a_{\mathbf{q}}}(t) = \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{i\hbar}[a_{\mathbf{q}}, \hat{W} + \hat{H}_{\mathrm{ext}}]\bar{\rho}(t,0)\right\}, \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &\Omega^{(2)}_{a_{\mathbf{q}}}(t) \\ &\quad = \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{-\infty}^{t} dt' \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)} \mathrm{Tr}\{[\hat{W}(t'-t)_0 + \hat{H}_{\mathrm{ext}}(t'-t)_0, [\hat{W} + \hat{H}_{\mathrm{ext}}, a_{\mathbf{q}}]]\bar{\rho}(t', t'-t)_0\} \\ &\qquad + \frac{1}{i\hbar}\sum_{\ell}\int_{-\infty}^{t} dt' \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)} J^{(1)}_{\ell}(t') \frac{\delta}{\delta Q_\ell(t')} \mathrm{Tr}\{[\hat{W} + \hat{H}_{\mathrm{ext}}, a_{\mathbf{q}}]\bar{\rho}(t', t'-t)_0\}\,, \end{aligned} \tag{50}$$

and similarly for the other macro-variables. In Eqs. (49) and (50) $\hat{W}$ consists of the interaction Hamiltonian with the thermal bath [the third term in Eq. (35)] and $\hat{H}_{\mathrm{ext}}$ is the energy operator for the interaction with the perturbing external source [the fourth term in Eq. (35)]. We have written in compact form $Q_\ell$ for the macro-variables of the set (45) and index $\ell$ runs over this set.

Performing the calculations, which are briefly described in Appendix A, there follow the evolution equations

$$\frac{d}{dt}\langle a_{\mathbf{q}}|t\rangle = -i\omega_{\mathbf{q}}\langle a_{\mathbf{q}}|t\rangle - \frac{i}{\hbar}U_{\mathbf{q}}(t) - \frac{2i}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\mathbf{k}} C_{\mathbf{qk}}C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}} \times \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{\varepsilon(t'-t)} \sin[\zeta_{\mathbf{k}}(t'-t)](\langle a^\dagger_{\mathbf{q}'}|t'\rangle + \langle a_{\mathbf{q}'}|t'\rangle)\,, \tag{51}$$

$$\frac{d}{dt}\langle a^\dagger_{\mathbf{q}}|t\rangle = i\omega_{\mathbf{q}}\langle a^\dagger_{\mathbf{q}}|t\rangle + \frac{i}{\hbar}U_{\mathbf{q}}(t) + \frac{2i}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\mathbf{k}} C_{\mathbf{qk}}C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}} \times \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{\varepsilon(t'-t)} \sin[\zeta_{\mathbf{k}}(t'-t)](\langle a^\dagger_{\mathbf{q}'}|t'\rangle + \langle a_{\mathbf{q}'}|t'\rangle)\,, \tag{52}$$

for the amplitudes, and for the populations we do have that

$$\begin{aligned}\frac{d\nu_{\mathbf{q}}(t)}{dt} &= \frac{iU_{\mathbf{q}}}{\hbar}(\langle a_{\mathbf{q}}|t\rangle - \langle a^\dagger_{\mathbf{q}}|t\rangle) \\ &\quad - \frac{4}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{k}} |C_{\mathbf{qk}}|^2 \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{\varepsilon(t'-t)}\{\sin[\zeta_{\mathbf{k}}(t'-t)]\sin[\omega_{\mathbf{q}}(t'-t)]\nu_{\mathbf{q}}(t'-t)\} \\ &\quad + \dot{\mathcal{R}}_{\mathbf{q}}(t) + \frac{2}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{k}} |C_{\mathbf{qk}}|^2 \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{\varepsilon(t'-t)}\{\cos[(\omega_{\mathbf{q}} - \zeta_{\mathbf{k}})(t'-t)]\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\} \\ &\quad + \frac{2}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{k}} |C_{\mathbf{qk}}|^2 \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{\varepsilon(t'-t)}\{\cos[(\omega_{\mathbf{q}} + \zeta_{\mathbf{k}})(t'-t)](1+\mathcal{N}_{-\mathbf{k}})\}\,,\end{aligned} \tag{53}$$

where $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ is the population in equilibrium at temperature $T_0$ of the phonons of the bath system, and

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{R}}_{\mathbf{q}}(t) &= \frac{2i}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q},\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{\varepsilon(t'-t)} \sin[\zeta_{\mathbf{k}}(t'-t)] \\ &\quad \times \{C_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}C^*_{\mathbf{qk}} e^{i\omega_{\mathbf{q}}(t'-t)}\langle a^\dagger_{\mathbf{q}'}a_{\mathbf{q}}|t'-t\rangle - C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}C_{\mathbf{qk}} e^{-i\omega_{\mathbf{q}}(t'-t)}\langle a^\dagger_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{q}'}|t'-t\rangle)\} \\ &\quad + \frac{2i}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{\varepsilon(t'-t)} \sin[\zeta_{\mathbf{k}}(t'-t)] \\ &\quad \times \{C_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}C^*_{\mathbf{qk}} e^{i\omega_{\mathbf{q}}(t'-t)}\langle a_{\mathbf{q}'}a_{\mathbf{q}}|t'-t\rangle - C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}C_{\mathbf{qk}} e^{-i\omega_{\mathbf{q}}(t'-t)}\langle a^\dagger_{\mathbf{q}}a^\dagger_{\mathbf{q}'}|t'-t\rangle)\}\,,\end{aligned} \tag{54}$$

is a term containing the products of pairs of amplitudes, namely, $\langle a_{\mathbf{q}'}a_{\mathbf{q}}|t'-t\rangle$ and $\langle a^\dagger_{\mathbf{q}}a^\dagger_{\mathbf{q}'}|t'-t\rangle$ for any $\mathbf{q}$ and $\mathbf{q}'$, and $\langle a^\dagger_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{q}'}|t'-t\rangle$ for any $\mathbf{q}\neq\mathbf{q}'$, which couples the evolution equation for the population with those for the amplitudes.

The evolution equation for the energy is

$$\frac{d}{dt}E(t)=\sum_{\mathbf{q}}\hbar\omega_{\mathbf{q}}\frac{d\nu_{\mathbf{q}}}{dt}\,, \tag{55}$$

with $d\nu_{\mathbf{q}}/dt$ given in Eq. (53) and then we can see that it is composed of several contributions consisting of the power pumped by external forces [first term on the right of Eq. (53)], and those accounting for the rate of energy relaxation to the thermal bath. Equation (55), as noticed above, is coupled to those for the amplitudes.

Furthermore, using Eqs. (51) and (52) for the variables $\hat{x}_{\mathbf{q}}$ and $\hat{p}_{\mathbf{q}}$ of Eqs. (36) and (37) we obtain that

$$m\frac{d}{dt}\langle\hat{x}_{\mathbf{q}}|t\rangle=\langle\hat{p}_{\mathbf{q}}|t\rangle\,, \tag{56}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\hat{p}_{\mathbf{q}}|t\rangle=&-\sqrt{\frac{2m\omega_{\mathbf{q}}}{\hbar}}U_{\mathbf{q}}(t)-m\omega^2_{\mathbf{q}}\langle\hat{x}_{\mathbf{q}}|t\rangle\\&-\frac{4m}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\sqrt{\omega_{\mathbf{q}'}\omega_{\mathbf{q}}}C_{\mathbf{qk}}C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}\\&\times\int_{-\infty}^{t}dt'\,\mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\sin[\zeta_{\mathbf{k}}(t'-t)]\langle\hat{x}_{\mathbf{q}'}|t'\rangle\,,\end{aligned} \tag{57}$$

or, alternatively, integrating by parts in time the last contribution in Eq. (57) it becomes

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\hat{p}_{\mathbf{q}}|t\rangle&=m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{x}_{\mathbf{q}}|t\rangle\\&=-\sqrt{\frac{2m\omega_{\mathbf{q}}}{\hbar}}U_{\mathbf{q}}(t)-m\omega^2_{\mathbf{q}}\langle\hat{x}_{\mathbf{q}}|t\rangle+\frac{4m}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\sqrt{\omega_{\mathbf{q}'}\omega_{\mathbf{q}}}C_{\mathbf{qk}}C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}\frac{\langle\hat{x}_{\mathbf{q}'}|t\rangle}{\zeta_{\mathbf{k}}}\\&\quad-\sum_{\mathbf{q}'}\int_{-\infty}^{t}dt'\,\mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\Gamma_{\mathbf{qq}'}(t'-t)\frac{d}{dt'}\langle\hat{x}_{\mathbf{q}'}|t'\rangle\,,\end{aligned} \tag{58}$$

where

$$\Gamma_{\mathbf{qq}'}(t'-t)=\frac{4m}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{k}}\sqrt{\omega_{\mathbf{q}'}\omega_{\mathbf{q}}}C_{\mathbf{qk}}C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}\frac{\cos[\zeta_{\mathbf{k}}(t'-t)]}{\zeta_{\mathbf{k}}}\,, \tag{59}$$

plays the role of Mori's memory function.[28,54,60] In fact, it can be noticed that Eq. (58) has the form of a Mori–Heisenberg–Langevin equation for the oscillators. But, two important points can be stressed: On the one hand, the memory is evanescent (the presence of the kernel $\exp\{\varepsilon(t'-t)\}$) making the evolution irreversible in time (we recall, cf. Sec. 3, that is a result of having introduced irreversibility in the description *via* Krylov's "jolting" assumption); on the other hand, the equation followed in the approximation of taking only the first collision integral, $\Omega^{(2)}$, in the series of collision integrals in the last term in Eq. (29). Including the remaining terms, which introduce nonlinearities, produce a far-reaching generalization of Mori's approach, with irreversibility introduced from the onset.

## 5. Comments and Concluding Remarks

During the last decades, there has been remarkable progress in the area of nonequilibrium Statistical Mechanics and Thermodynamics consisting in that we have been offered with an excellent development of ideas, concepts, and formalisms. We have given here a very brief overview concerning some aspects of the status of them, particularized to the case of systems presenting ultrafast relaxation processes when under any condition of departure from equilibrium.

In the preceding sections, we have described a theory that attempts a particular answer to the long-standing sought-after question about the existence of a Gibbs-style statistical ensemble formalism for nonequilibrium systems. What has been presented can be considered a systematization and some extension of the work developed, from roughly the 1940s, by several outstanding scientists among whom we can mention Bogoliubov, Kirkwood, Krylov, Green, Mori, Zwanzig, Landsberg, Zubarev, and we apologize for certainly overlooking other relevant names.

The construction of the nonequilibrium ensemble formalism so far presented was done on a heuristic approach, and it is worth emphasizing that such formalism, providing microscopic (mechanical-statistical) basis for the study of dissipative processes, heavily rests on the fundamental ideas and concepts devised by Gibbs and Boltzmann. As it has already been noticed it can also be encompassed in the framework of an extremum principle.

In the construction of NESEF, a point of contention is the long-standing question about *macroscopic irreversibility in nature*. As discussed in Refs. 10 and 11 it is introduced in the formalism Kirkwood's time-smoothing procedure after a specific initial condition, implying in that a kind of generalized Stosszahlansatz has been defined. This is a working proposal that goes in the direction that was essentially suggested by Boltzmann, as quoted in Ref. 61: "Since in the differential equations of mechanics themselves there is absolutely nothing analogous to the second law of thermodynamics, the latter can be mechanically represented only by means of assumptions regarding initial conditions." Or, in other words, that the laws of physics are always of the form: given some initial conditions, here is the result after some time, but they never tell us how the world is or evolves. In order to account for that, one always needs to assume something, first on the initial conditions and, second, on the distinction of the description being macroscopic and the system never isolated (damping of correlations). In this vein, Stephen Hawking[62] has manifested that "It is normally assumed that a system in a pure quantum state evolves in a unitary way through a succession of [such] states. But if there is loss of information [...], there cannot be a unitary evolution. Instead, the [...] final state [...] will be what is called a mixed quantum state. This can be regarded as an ensemble of different pure quantum states, each with its own probability."

Needless to say that this question of Eddington's time-arrow problem has produced a very extensive literature, and lively controversies. We do not attempt here to add any considerations to this difficult and, as said, controversial subject (see for example Refs. 62 and 63). We restate that, as commented by Sklar,[5] Nicolai S. Krylov (the Russian scientist unfortunately prematurely deceased) was developing an extremely insightful and careful foundational study of nonequilibrium statistical mechanics.[19] Krylov believed that he could show that in a certain sense, neither classical nor quantum mechanics provide an adequate foundation for statistical mechanics. Krylov's most important critical contribution is precisely his emphasis on the importance of initial ensembles. Also that we may be utterly unable to demonstrate that the correct statistical description of the evolution of the system will provide an appropriate exact evolution, unless our statistical approach includes an appropriate constraint on the initial ensemble with which we choose to represent the initial nonequilibrium condition of the system in question.[19] Moreover, it is thought that the interaction with the system from the outside at the single moment of preparation, rather than the interventionists on-going action, is what grounds the asymmetric evolution of many-body systems. It is the ineluctable interfering perturbation of the system by the mechanism that sets it up in the first place that guarantees that the appropriate statistical description of the system will be a collection of initial states sufficiently large, sufficiently simple in shape, and with a uniform probability distribution over it. Clearly, a question immediately arises, namely: Exactly how does this initial interference lead to an initial ensemble of just the kind we need?[5] On this, we have seen in Sec. 3 how NESEF, mainly in Krylov–Bogoliubov–Green–Kirkwood–Zubarev's approach, tries to heuristically address the question.

It is worth noticing that boson systems that are, differently to the present case, governed by nonlinear kinetic equations may display complex behavior,[64] consisting in a kind of nonequilibrium Bose–Einstein condensation and propagation of long-life Schrödinger–Davydov solitons.[65] It can be mentioned the cases of polar vibrations in biopolymers[66–68]; of excitons (the "excitoner" or "exciton-laser")[69]; of longitudinal optical phonons in strongly polar, large gap semiconductors,[70] of acoustic phonons in semiconductors with strong piezoeletric interaction (the "saser" or "phonon laser" in the THz region)[71]; of magnons in heterostructures.[72–74]

Finally, we call the attention to the question of heterotypical statistics, noticing that even though the ensemble formalism has been extremely successful in the handling of the grandiose theoretical scheme of Statistical Mechanics and Thermodynamics initiated by Maxwell, Boltzmann, and Gibbs, which has been given concrete and consistent foundations to the study of the many situations present in condensed matter physics, its use is hampered when dealing with certain complex phenomena. In this situation, the researcher may not have access to the information on all the constraints relevant to the problem in hands (so-called *hidden constraints*), what leads to poor predictions. In an attempt to improve predictions have been introduced, beginning in the past 1950s, and pioneered by P. Lvy in the 1930s (see for example, Ref. 75) auxiliary approaches which attempt to assuage the difficulty, but at the price of not being fully consistent and depending on free parameters.[76] This is done in the framework of the variational (extremum principle) approach in Statistical Mechanics founded on Information Theory. In it, the general and well-established Boltzmann–Gibbs canonical scheme follows from maximization with given constraints of Gibbs–Boltzmann–Shannon information-theoretic entropy (better called measure of uncertainty of information): It is considered to be the only consistent probability measure of information. The other (say noncanonical or heterotypical) auxiliary approaches are based on replacing GBS information-theoretic entropy by others, which are used to derive nonconventional probability distributions for nonequilibrium systems. A complete description, together with illustrative applications, is given in Ref. 76.

**Acknowledgments**

The authors would like to acknowledge financial support received from the So Paulo State Research Foundation (FAPESP), and the Brazilian National Research Council (CNPq): ARV and RL are CNPq Research Fellows, and FSV is a CNPq pre-doctoral fellow.

## Appendix A. Calculation of the collision integral $\Omega^{(2)}$ in Eq. (50)

We can write Eq. (50) in the form $\Omega^{(2)}_{a_{\mathbf{q}}} = \Omega^{(2)}_{a_{\mathbf{q}}1} + \Omega^{(2)}_{a_{\mathbf{q}}2}$, where

$$\Omega^{(2)}_{a_{\mathbf{q}}1}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\varepsilon(t'-t)}\mathrm{Tr}\{[\hat{W}(t'-t)_0 + \hat{H}_{\mathrm{ext}}(t'-t)_0, [\hat{W} + \hat{H}_{\mathrm{ext}}, a_{\mathbf{q}}]] \times \bar{\rho}(t', t'-t)_0\, \rho_B\}\,. \tag{A.1}$$

In the interaction representation

$$\hat{A}(\tau)_0 = \exp\left(\frac{i\hat{H}_0\tau}{\hbar}\right)\hat{A}\exp\left(-\frac{i\hat{H}_0\tau}{\hbar}\right), \tag{A.2}$$

being $\hat{A}$ one of the operators above included and $\tau = t' - t$. Taking into account the cyclic property of the trace it follows that

$$\mathrm{Tr}\{[\hat{W}(\tau)_0 + \hat{H}_{\mathrm{ext}}(\tau)_0, [\hat{W} + \hat{H}_{\mathrm{ext}}, a_{\mathbf{q}}]]\bar{\rho}(\tau + t, \tau)_0\rho_B\}$$
$$= \mathrm{Tr}\left\{\exp\left(-\frac{iH_0\tau}{\hbar}\right)[\hat{W}(\tau)_0 + \hat{H}_{\mathrm{ext}}(\tau)_0, [\hat{W} + \hat{H}_{\mathrm{ext}}, a_{\mathbf{q}}]]\right.$$

$$\times \exp\left(\frac{i\hat{H}_0\tau}{\hbar}\right)\bar{\rho}(\tau+t,0)\rho_B\Bigg\}$$

$$= \mathrm{Tr}\{[\hat{W}+\hat{H}_{\mathrm{ext}},[\hat{W}(-\tau)_0+\hat{H}_{\mathrm{ext}}(-\tau)_0,a_{\mathbf{q}}(-\tau)_0]]\bar{\rho}(\tau+t,0)\rho_B\}\,. \quad \text{(A.3)}$$

Using that $[\hat{W}(-\tau)_0+\hat{H}_{\mathrm{ext}}(-\tau)_0,a_{\mathbf{q}}(-\tau)_0] = -U_{\mathbf{q}}(t) - \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{qk}}[b_{\mathbf{k}}(-\tau)_0 + b^{\dagger}_{-\mathbf{k}}(-\tau)_0]$ and $b_{\mathbf{k}}(-\tau)_0 = \exp(i\zeta_{\mathbf{k}}\tau)\,b_{\mathbf{k}}$ the double commutator in Eq. (A.1) becomes

$$\begin{aligned}
&[\hat{W}(\tau)_0+\hat{H}_{\mathrm{ext}}(\tau)_0,[\hat{W}+\hat{H}_{\mathrm{ext}},a_{\mathbf{q}}]]\\
&\quad= \sum_{\mathbf{q}'\mathbf{k}} C_{\mathbf{qk}}\{(C_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}a^{\dagger}_{\mathbf{q}'}+C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}a_{\mathbf{q}'})\mathrm{e}^{-i\zeta_{-\mathbf{k}}\tau} - (C_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}a^{\dagger}_{\mathbf{q}'}+C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}a_{\mathbf{q}'})\mathrm{e}^{i\zeta_{\mathbf{k}}\tau}\}\\
&\quad= \sum_{\mathbf{q}'\mathbf{k}} C_{\mathbf{qk}}C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}2i\sin(\zeta_{\mathbf{k}}\tau)(a^{\dagger}_{\mathbf{q}'}+a_{\mathbf{q}'})\,, \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

after taking into account that $C_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}} = C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}$ and $\zeta_{-\mathbf{k}} = \zeta_{\mathbf{k}}$. On the other hand, since $J^{(1)}_{a_{\mathbf{q}}}(t) = 0$, then $\Omega^{(2)}_{a_{\mathbf{q}}2}(t) = 0$ [second contribution in Eq. (50)] it follows that

$$\begin{aligned}
\Omega^{(2)}_{a_{\mathbf{q}}}(t) &= \Omega^{(2)}_{a_{\mathbf{q}}1}(t)\\
&= -\frac{2i}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\mathbf{k}} C_{\mathbf{qk}}C^*_{\mathbf{q}'\mathbf{k}}\\
&\quad\times\int_{-\infty}^{t} dt'\mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\sin[\zeta_{\mathbf{k}}(t'-t)]\mathrm{Tr}\{(a^{\dagger}_{\mathbf{q}'}+a_{\mathbf{q}'})\bar{\rho}(t',0)\rho_B\}\,, \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

which is the last right-hand term of Eq. (51).

## References


1. L. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie* (Barth, Leipzig, Germany, 1896 and 1898); [English translation by S. G. Brush, University California Press, Berkeley, USA, 1964].
2. J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (Yale University Press, New Haven, USA, 1902). [Reprinted by Dover, New York, USA, 1960].
3. J. C. Maxwell, *The Collected Papers of J. C. Maxwell* (Dover, New York, USA, 1965).
4. R. Jancel, *Foundations of Classical and Quantum Statistical Mechanics* (Pergamon, Oxford, UK, 1969).
5. L. Sklar, *Physics and Chance: Philosophical Issues in the Foundations of Statistical Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993).
6. E. T. Jaynes, Predictive statistical mechanics, in *Frontiers of Nonequilibrium Statistical Physics*, eds. G. T. Moore and M. O. Scully (Plenum, New York, USA, 1986), pp. 33–55.
7. R. Zwanzig, Where do we go from here?, in *Perspectives in Statistical Physics*, ed. H. J. Ravechè (North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1981), pp. 123–124.
8. M. Bixon and R. Zwanzig, *J. Stat. Phys.* **3**, 245 (1971).

9. J. P. Dougherty, Approaches to nonequilibrium statistical mechanics, in *Maximum Entropy and Bayesian Method*, ed. J. Skilling (Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 1989), pp. 131–136.
10. R. Luzzi, A. R. Vasconcellos and J. G. Ramos, *Predictive Statistical Mechanics: A Nonequilibrium Ensemble Formalism* (Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 2002).
11. R. Luzzi, A. R. Vasconcellos and J. G. Ramos, *Rivista Nuovo Cimento* **29**, 1 (2006).
12. N. N. Bogoliubov, Problems of a dynamical theory in statistical physics, in *Studies in Statistical Mechanics I*, eds. J. de Boer and G. E. Uhlenbeck (North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1962).
13. R. Peierls, Some simple remarks on the basis of transport theory, in *Transport Phenomena. Lecture Notes in Physics*, eds. J. Ehlers, K. Hepp and H. A. Weidenmüller (Springer, Berlin, Germany, 1974).
14. J. G. Kirkwood, *J. Chem. Phys.* **14**, 180 (1946).
15. H. Mori, I. Oppenheim and J. Ross, Some topics in quantum statistics, in *Studies in Statistical Mechanics I*, eds. J. de Boer and G. E. Uhlenbeck (North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1962), pp. 217–298.
16. U. Fano, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 74 (1957).
17. B. Robertson, *Am. J. Phys.* **41**, 678 (1973).
18. C. A. Bomfim, A. R. Vasconcellos, J. G. Ramos and R. Luzzi, future publication.
19. N. S. Krylov, *Works on the Foundations of Statistical Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, USA, 1979), with an introduction by A. B. Migdal and V. A. Fock.
20. R. Luzzi, A. R. Vasconcellos and J. G. Ramos, *Int. J. Mod. Phys. B* **14**, 3189 (2000).
21. L. Lauck, A. R. Vasconcellos and R. Luzzi, *Physica A* **168**, 789 (1990).
22. D. N. Zubarev, V. Morozov and G. Röpke, *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes* (Akademie Verlag-Wiley VCH, Berlin, Germany, 1996 and 1997, respectively).
23. G. Lebon, D. Jou and J. Casas-Vazquez, *Understanding Nonequilibrium Thermodynamics: Foundations, Applications, Frontiers* (Springer, Berlin, Germany, 2007).
24. R. Luzzi, A. R. Vasconcellos and J. G. Ramos, *Statistical Foundations of Irreversible Thermodynamics* (Teubner-Bertelsmann Springer, Stuttgart, Germany, 2000). An extended summary is presented in *Rivista Nuovo Cimento* **34**(3), 1–70 (2001).
25. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Wiley-Interscience, New York, USA, 1953).
26. J. L. Lebowitz, *Phys. Today* **46**, 32 (1993).
27. R. Zwanzig, *Prog. Theor. Phys.* **64**, 74 (1978).
28. H. Mori, *Progr. Theor. Phys. (Japan)* **33**, 423 (1965).
29. H. Grabert, *Projection Operator Techniques in Nonequilibrium Statistics* (Springer, Berlin, Germany, 1981).
30. J. A. McLennan, Statistical theory of transport processes, in *Advances in Chemical Physics* (Academic, New York, USA, 1963), pp. 261–317.
31. S. V. Peletminskii and A. A. Yatsenko, *J. Exp. Theor, Phys.* **26**, 773 (1968).
32. B. Robertson, *Phys. Rev.* **144**, 151 (1966).
33. B. Robertson, Application of maximum entropy to nonequilibrium statistical mechanics, in *The Maximum Entropy Formalism*, eds. M. Tribus and R. D. Levine (MIT Press, Massachusetts, USA, 1978), pp. 289–320.
34. D. N. Zubarev, *Nonequilibrium Statistical Thermodynamics* (Consultants Bureau, New York, USA, 1974). [Neravovesnaia Statisticheskaia Termodinamika Izd. Nauka, Moscow, 1971].

35. J. R. Madureira, A. R. Vasconcellos, R. Luzzi and L. Lauck, *Phys. Rev. E* **57**, 3637 (1998).
36. E. B. Davies, *Commun. Math. Phys.* **39**, 91 (1994).
37. L. Sklar, *Theory and Truth: Philosophical Critique within Foundational Science* (Oxford University Press, Oxford, UK, 2000).
38. S. J. Gould, *Dinosaur in a Haystack* (Random House, New York, USA, 1995).
39. R. Kubo, *Prog. Theor.Phys. (Japan)* **64**, 1 (1978).
40. R. R. Alfano (ed.), *Biological Events Probed by Ultrafast Laser Spectroscopy* (Academic, New York, USA, 1982).
41. R. R. Alfano (ed.), *Semiconductors Probed by Ultrafast Laser Spectroscopy* (Academic, New York, USA, 1984 and 1985, respectively).
42. R. R. Alfano, Frontiers of femtosecond and picosecond optical measuring techniques, in *New Techniques and Ideas in Quantum Measurement Theory*, ed. D. M. Greenberger, NYAS Annals, Vol. 480 (New York Academy of Science, New York, USA, 1986), pp. 118–126.
43. J. S. Driels and W. Rudolph, *Ultrafast Laser Pulse Phenomena* (Academic, New York, USA, 1996).
44. C. B. Harris, E. P. Ippen, G. A. Mourou and A. H. Zenwail, *Ultrafast Phenomena* (Springer, Berlin, Germany, 1989).
45. J. M. Hopkings and W. Sibbet, *Sci. Am.* **283**, 54 (2000).
46. B. J. Adler and D. J. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids* (Oxford University Press, Oxford, UK, 1987).
47. M. H. Kalos and P. A. Whitlock, *Monte Carlo Methods* (Wiley-Interscience, New York, USA, 2007).
48. C. G. Rodrigues, A. R. Vasconcellos and R. Luzzi, *Transp. Theor. Stat. Phys.* **29**, 733 (2000).
49. C. George, *Physica* **26**, 453 (1960).
50. A. G. Bashkirov and D. N. Zubarev, *Theor. Math. Phys.* **1**, 311 (1969).
51. A. Lopez, *Zeit. Phys.* **192**, 63 (1966).
52. A. Lopez, *Phys. Rev. A* **2**, 525 (1970).
53. R. Zwanzig, Problems in nonlinear transport theory, in *Lecture Notes in Physics: Systems Far from Equilibrium*, ed. L. Garrido (Springer, Berlin, Germany, 1980), pp. 198–225.
54. H. Mori, *Progr. Theor. Phys. (Japan)* **34**, 399 (1966).
55. R. Loudon, Polarons, Raman scattering, electro-optic effect, and parametric amplification, in *Light Scattering Spectra of Solids I*, ed. G. B. Wright (Springer, New York, USA, 1969), pp. 25–42.
56. A. R. Vasconcellos, J. Fort, D. Jou and R. Luzzi, *Physica A* **300**, 386 (2001).
57. D. Pines, *Elementary Excitations* (Benjamin, New York, USA, 1964).
58. J. M. Ziman, *Electrons and Phonons* (Oxford University Press, London, UK, 1960).
59. W. H. Louisell, *Radiation and Noise in Quantum Electronics* (McGraw-Hill, New York, USA, 1964).
60. D. Forster, *Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry, and Correlation Functions* (Benjamin, Readings, USA, 1975).
61. J. Bricmont, Science of chaos or chaos in science?, in *The Flight from Science and Reason*, eds. P. Gross, N. Levitt and M. Lewis, NYAS Annals, Vol. 775 (New York Academy of Sciences, New York, USA, 1996), pp. 131–175.
62. S. Hawkins, The arrow of time, in *Yearbook of Science and the Future* (Encyclopaedia Britannica, Chicago, USA, 1989).
63. O. Penrose, The direction of time, in *Chance in Physics: Foundations and Perspec-*

*tives*, eds. J. Bricmont, D. Dürr, M. C. Galavotti, G. Ghirardi, F. Petruccione and N. Zanghi (Springer, Berlin, Germany, 2001), pp. 61–82.
64. D. Snoke, *Nature* **443**, 403 (2006).
65. A. F. Fonseca, M. V. Mesquita, A. R. Vasconcellos and R. Luzzi, *J. Chem. Phys.* **112**, 3967 (2000).
66. H. Fröhlich, Quantum mechanical concepts in biology, in *From Theoretical Physics to Biology*, ed. M. Marois (North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1969), pp. 13–22.
67. M. V. Mesquita, A. R. Vasconcellos and R. Luzzi, *Phys. Rev. E* **58**, 7913 (1998).
68. A. R. Vasconcellos, M. V. Mesquita and R. Luzzi, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2008 (1998).
69. A. R. Vasconcellos, M. V. Mesquita and R. Luzzi, *Europhys. Lett.* **49**, 637 (2000).
70. C. G. Rodrigues, A. R. Vasconcellos and R. Luzzi, *J. Appl. Phys.* (2009), future publication.
71. S. M. Komirenko, K. W. Kim, A. A. Demidenko, V. A. Kochelapand and M. A. Stroscio, *Appl. Phys. Lett.* **76**, 1869 (2000).
72. S. O. Demokritov, V. E. Demidov, O. Dzyapko, G. A. Melkov, A. A. Serga, B. Hillebrands and A. N. Slavin, *Nature* **443**, 430 (2006).
73. S. M. Rezende, *Phys. Rev. B (Condens. Matter Mater. Phys.)* **79**, 174411 (2009).
74. F. S. Vannucchi, A. R. Vasconcellos and R. Luzzi, *Appl. Phys. Lett.* (2009), future publication.
75. M. F. Schlesinger, G. M. Zaslavski and U. Frisch, *Lèvy Flights and Related Topics in Physics* (Springer, Berlin, Germany, 1985).
76. R. Luzzi, A. R. Vasconcellos and J. G. Ramos, *Rivista Nuovo CimentoRivista Nuovo Cimento* **30**(3), 95 (2007).

# Apêndice B

# Valores médios dos operadores

Para calcularmos os valores médios de composições de operadores de criação e aniquilação de mágnons ponderados pelo operador estatístico auxiliar

$$\bar{\varrho}(t,0) = \frac{\exp\left\{-\sum_{\mathbf{q}}\left[F_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}} + \phi_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}_{\mathbf{q}} + \phi^{*}_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}} + \varphi_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}} + \varphi^{*}_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\right]\right\}}{\mathrm{Tr}\exp\left\{-\sum_{\mathbf{q}}\left[F_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}} + \phi_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}_{\mathbf{q}} + \phi^{*}_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}} + \varphi_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}} + \varphi^{*}_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\right]\right\}}, \tag{B.1}$$

podemos diagonalizá-lo com o auxílio da seguinte transformação

$$\begin{aligned} \hat{c}_{\mathbf{q}} &= \iota_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}} + \kappa_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}} + \lambda_{\mathbf{q}}, \\ \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}} &= \iota_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}} + \kappa_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}} + \lambda_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \tag{B.2}$$

com $\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}}$ e $\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}}$ sendo operadores que obedecem regras de comutação de bósons e $\lambda_{\mathbf{q}}$, $\iota_{\mathbf{q}}$ e $\kappa_{\mathbf{q}}$ sendo números complexos tais que

$$\begin{aligned} 1 &= \left[\hat{c}_{\mathbf{q}}, \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\right] = \\ &= \left[\iota_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}} + \kappa_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}, \iota^{*}_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}} + \kappa^{*}_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}}\right] = \\ &= |\iota_{\mathbf{q}}|^{2}\left[\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}}, \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\right] + |\kappa_{\mathbf{q}}|^{2}\left[\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}, \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}}\right] = |\iota_{\mathbf{q}}|^{2} - |\kappa_{\mathbf{q}}|^{2}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Definindo

$$\hat{\mathscr{S}} = \sum_{\mathbf{q}} \left[ F_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}} + \phi_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}_{\mathbf{q}} + \phi^{*}_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}} + \varphi_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}} + \varphi^{*}_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}} \right], \tag{B.4}$$

temos que, após a diagonalização,

$$\hat{\mathscr{S}} = \sum_{\mathbf{q}} F'_{\mathbf{q}}(t)\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}}, \tag{B.5}$$

e resta-nos encontrar $F'_{\mathbf{q}}(t)$.

Calculando o comutador entre $S$ e $\hat{c}_{\mathbf{q}}$, obtém-se, por um lado,

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\mathscr{S}}, \hat{c}_{\mathbf{q}}\right] &= -F_{\mathbf{q}}(t)\hat{c}_{\mathbf{q}} - \phi^{*}_{\mathbf{q}}(t) - \left[\varphi^{*}_{\mathbf{q}}(t) + \varphi^{*}_{-\mathbf{q}}(t)\right]\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}} = \\
&= -\left\{F_{\mathbf{q}}(t)\iota_{\mathbf{q}} + \left[\varphi^{*}_{\mathbf{q}}(t) + \varphi^{*}_{-\mathbf{q}}(t)\right]\kappa_{\mathbf{q}}\right\}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}} - \\
&\quad - \left\{F_{\mathbf{q}}(t)\kappa_{\mathbf{q}} + \left[\varphi^{*}_{\mathbf{q}}(t) + \varphi^{*}_{-\mathbf{q}}(t)\right]\iota_{\mathbf{q}}\right\}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}} - \qquad (B.6) \\
&\quad - \phi^{*}_{\mathbf{q}}(t) - \left\{F_{\mathbf{q}}(t) + \left[\varphi^{*}_{\mathbf{q}}(t) + \varphi^{*}_{-\mathbf{q}}(t)\right]\right\}\lambda_{\mathbf{q}}, \qquad (B.7)
\end{aligned}$$

e, por outro,

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\mathscr{S}}, \hat{c}_{\mathbf{q}}\right] &= \left[\sum_{\mathbf{q}'} F'_{\mathbf{q}'}(t)\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}'}, \iota_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}} + \kappa_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}} + \lambda_{\mathbf{q}}\right] = \\
&= -F'_{\mathbf{q}}(t)\iota_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}} + F'_{-\mathbf{q}}(t)\kappa_{\mathbf{q}}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}, \qquad (B.8)
\end{aligned}$$

e, equacionando as expressões B.6 e B.8,

$$\lambda_{\mathbf{q}} = -\frac{\phi^{*}_{\mathbf{q}}(t)}{F_{\mathbf{q}}(t) + \left[\varphi^{*}_{\mathbf{q}}(t) + \varphi^{*}_{-\mathbf{q}}(t)\right]}, \tag{B.9}$$

$$\iota_{\mathbf{q}} = \sqrt{\frac{F_{\mathbf{q}}(t) + F'_{\mathbf{q}}(t)}{2F'_{\mathbf{q}}(t)}}, \qquad \kappa_{\mathbf{q}} = \sqrt{\frac{F_{\mathbf{q}}(t) - F'_{\mathbf{q}}(t)}{2F'_{\mathbf{q}}(t)}}, \tag{B.10}$$

e

$$\left|F'_{\mathbf{q}}(t)\right| = \sqrt{F^{2}_{\mathbf{q}}(t) - \left|\varphi_{\mathbf{q}}(t) + \varphi_{-\mathbf{q}}(t)\right|^{2}}. \tag{B.11}$$

De posse das Eqs. B.9-B.11 os valores médios são calculados e expressos em termos das variáveis termodinâmicas de não-equilíbrio associadas,

$$\left\{ \left\{ F_{\mathbf{q}}(t) \right\};\ \left\{ \phi_{\mathbf{q}}(t) \right\};\ \left\{ \phi^{*}_{\mathbf{q}}(t) \right\};\ \left\{ \varphi_{\mathbf{q}}(t) \right\};\ \left\{ \varphi^{*}_{\mathbf{q}}(t) \right\} \right\}, \tag{B.12}$$

ou então reescritos em termos das variáveis termodinâmicas

$$\left\{ \left\{ \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) \right\};\ \left\{ \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t \right\rangle \right\};\ \left\{ \langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t \rangle \right\};\ \left\{ \sigma^{*}_{\mathbf{q}}(t) \right\};\ \left\{ \sigma_{\mathbf{q}}(t) \right\} \right\}. \tag{B.13}$$

Apresentamos, no que se segue, o cálculo de valores médios de composições que incluem até três operadores de criação/aniquilação, e composições com mais operadores são calculados de forma análoga.

## B.1 Cálculo de $\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t \right\rangle$ e $\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t \right\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t \rangle &= \mathrm{Tr}\left\{ \hat{c}_{\mathbf{q}}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \mathrm{Tr}\left\{ \left( \iota_{\mathbf{q}} \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}} + \kappa_{\mathbf{q}} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}} + \lambda_{\mathbf{q}} \right) \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \\ &= \iota_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \kappa_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \lambda_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \lambda_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|t \right\rangle &= \mathrm{Tr}\left\{ \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \mathrm{Tr}\left\{ \left( \iota^{*}_{\mathbf{q}} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}} + \kappa^{*}_{\mathbf{q}} \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}} + \lambda^{*}_{\mathbf{q}} \right) \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \\ &= \iota^{*}_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \kappa^{*}_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \lambda^{*}_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \lambda^{*}_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \tag{B.15}$$

onde usamos o fato de que $\mathrm{Tr}\left\{ \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = 1$.

## B.2 Cálculo de $\left\langle \hat{c}^{(\dagger)}_{\mathbf{q}_a} \hat{c}^{(\dagger)}_{\mathbf{q}_b} | t \right\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{c}_{\mathbf{q}_a} \hat{c}_{\mathbf{q}_b} | t \rangle &= \mathrm{Tr}\left\{ \hat{c}_{\mathbf{q}_a} \hat{c}_{\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \mathrm{Tr}\left\{ \left( \iota_{\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_a} + \kappa_{\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_a} + \lambda_{\mathbf{q}_a} \right) \left( \iota_{\mathbf{q}_b} \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b} + \kappa_{\mathbf{q}_b} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_b} + \lambda_{\mathbf{q}_b} \right) \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \\
&= \iota_{\mathbf{q}_a} \iota_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \iota_{\mathbf{q}_a} \kappa_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \iota_{\mathbf{q}_a} \lambda_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_a}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \\
&\quad + \kappa_{\mathbf{q}_a} \iota_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \kappa_{\mathbf{q}_a} \kappa_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \kappa_{\mathbf{q}_a} \lambda_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_a}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \\
&\quad + \lambda_{\mathbf{q}_a} \iota_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \lambda_{\mathbf{q}_a} \kappa_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \lambda_{\mathbf{q}_a} \lambda_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \\
&= \iota_{\mathbf{q}_a} \kappa_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \kappa_{\mathbf{q}_a} \iota_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \lambda_{\mathbf{q}_a} \lambda_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \\
&= \left\{ \frac{\iota_{\mathbf{q}_a} \kappa_{\mathbf{q}_b}}{1 - \mathrm{e}^{-F'_{\mathbf{q}_a}}} + \frac{\kappa_{\mathbf{q}_a} \iota_{\mathbf{q}_b}}{\mathrm{e}^{F'_{\mathbf{q}_b}} - 1} \right\} \delta_{\mathbf{q}_a, -\mathbf{q}_b} + \langle \hat{c}_{\mathbf{q}_a} | t \rangle \langle \hat{c}_{\mathbf{q}_b} | t \rangle ,
\end{aligned} \tag{B.16}$$

sendo que na última linha usamos os resultados das Eqs. B.14 e B.15. Para $\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_b$ temos que

$$\sigma_{\mathbf{q}}(t) = \langle \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} | t \rangle = \frac{\iota_{\mathbf{q}} \kappa_{-\mathbf{q}}}{1 - \mathrm{e}^{-F'_{\mathbf{q}}}} + \frac{\kappa_{\mathbf{q}} \iota_{-\mathbf{q}}}{\mathrm{e}^{F'_{-\mathbf{q}}} - 1} + \langle \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \rangle \langle \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \rangle . \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b} | t \right\rangle &= \mathrm{Tr}\left\{ \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \mathrm{Tr}\left\{ \left( \iota^{*}_{\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a} + \kappa^{*}_{\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a} + \lambda^{*}_{\mathbf{q}_a} \right) \left( \iota^{*}_{\mathbf{q}_b} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b} + \kappa^{*}_{\mathbf{q}_b} \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_b} + \lambda^{*}_{\mathbf{q}_b} \right) \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \\
&= \iota^{*}_{\mathbf{q}_a} \iota^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \iota^{*}_{\mathbf{q}_a} \kappa^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \iota^{*}_{\mathbf{q}_a} \lambda^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \\
&\quad + \kappa^{*}_{\mathbf{q}_a} \iota^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \kappa^{*}_{\mathbf{q}_a} \kappa^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \kappa^{*}_{\mathbf{q}_a} \lambda^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \\
&\quad + \lambda^{*}_{\mathbf{q}_a} \iota^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \lambda^{*}_{\mathbf{q}_a} \kappa^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \lambda^{*}_{\mathbf{q}_a} \lambda^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \\
&= \iota^{*}_{\mathbf{q}_a} \kappa^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \kappa^{*}_{\mathbf{q}_a} \iota^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a} \hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\, \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} + \lambda^{*}_{\mathbf{q}_a} \lambda^{*}_{\mathbf{q}_b} \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\bar{\varrho}}(t,0) \right\} = \\
&= \left\{ \frac{\iota^{*}_{\mathbf{q}_a} \kappa^{*}_{\mathbf{q}_b}}{\mathrm{e}^{F'_{\mathbf{q}_a}} - 1} + \frac{\kappa^{*}_{\mathbf{q}_a} \iota^{*}_{\mathbf{q}_b}}{1 - \mathrm{e}^{-F'_{\mathbf{q}_b}}} \right\} \delta_{\mathbf{q}_a, -\mathbf{q}_b} + \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a} | t \right\rangle \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b} | t \right\rangle ,
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_a}\hat{c}_{\mathbf{q}_b}|t\right\rangle &= \mathrm{Tr}\left\{\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_a}\hat{c}_{\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \mathrm{Tr}\left\{\left(\iota^*_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{\mathbf{q}_a}+\kappa^*_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}+\lambda^*_{\mathbf{q}_a}\right)\left(\iota_{\mathbf{q}_b}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}+\kappa_{\mathbf{q}_b}\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{-\mathbf{q}_b}+\lambda_{\mathbf{q}_b}\right)\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \\
&= \iota^*_{\mathbf{q}_a}\iota_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+\iota^*_{\mathbf{q}_a}\kappa_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{-\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+\iota^*_{\mathbf{q}_a}\lambda_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{\mathbf{q}_a}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+ \\
&\quad+\kappa^*_{\mathbf{q}_a}\iota_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+\kappa^*_{\mathbf{q}_a}\kappa_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{-\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+\kappa^*_{\mathbf{q}_a}\lambda_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+ \\
&\quad+\lambda^*_{\mathbf{q}_a}\iota_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+\lambda^*_{\mathbf{q}_a}\kappa_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{-\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+\lambda^*_{\mathbf{q}_a}\lambda_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \\
&= \iota^*_{\mathbf{q}_a}\iota_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+\kappa^*_{\mathbf{q}_a}\kappa_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{-\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+\lambda^*_{\mathbf{q}_a}\lambda_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \\
&= \left\{\frac{\left|\iota_{\mathbf{q}_a}\right|^2}{\mathrm{e}^{F'_{\mathbf{q}_a}}-1}+\frac{\left|\kappa_{-\mathbf{q}_a}\right|^2}{1-\mathrm{e}^{-F'_{-\mathbf{q}_a}}}\right\}\delta_{\mathbf{q}_a,\mathbf{q}_b}+\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_a}|t\right\rangle\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}_b}|t\right\rangle, 
\end{aligned}\tag{B.19}$$

e, caso $\mathbf{q}_a=\mathbf{q}_b$,

$$\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle = \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) = \frac{\left|\iota_{\mathbf{q}}\right|^2}{\mathrm{e}^{F'_{\mathbf{q}}}-1}+\frac{\left|\kappa_{-\mathbf{q}}\right|^2}{1-\mathrm{e}^{-F'_{-\mathbf{q}}}}+\left|\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle\right|^2. \tag{B.20}$$

## B.3 Cálculo de $\left\langle \hat{c}^{(\dagger)}_{\mathbf{q}_a}\hat{c}^{(\dagger)}_{\mathbf{q}_b}\hat{c}^{(\dagger)}_{\mathbf{q}_c}|t\right\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{c}_{\mathbf{q}_a}\hat{c}_{\mathbf{q}_b}\hat{c}_{\mathbf{q}_c}|t\rangle &= \mathrm{Tr}\left\{\hat{c}_{\mathbf{q}_a}\hat{c}_{\mathbf{q}_b}\hat{c}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \\
&= \left\{\iota_{\mathbf{q}_a}\kappa_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{-\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+\kappa_{\mathbf{q}_a}\iota_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{-\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda_{\mathbf{q}_c}+ \\
&\quad+\left\{\iota_{\mathbf{q}_a}\kappa_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{-\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+\kappa_{\mathbf{q}_a}\iota_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{-\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda_{\mathbf{q}_b}+ \\
&\quad+\left\{\iota_{\mathbf{q}_b}\kappa_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{-\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}+\kappa_{\mathbf{q}_b}\iota_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^\dagger_{-\mathbf{q}_b}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda_{\mathbf{q}_a}+ \\
&\quad+\lambda_{\mathbf{q}_a}\lambda_{\mathbf{q}_b}\lambda_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \\
&= \left[\sigma_{\mathbf{q}_a}(t)-\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_a}|t\rangle\langle\hat{c}_{-\mathbf{q}_a}|t\rangle\right]\delta_{\mathbf{q}_a,-\mathbf{q}_b}\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_c}|t\rangle+\left[\sigma_{\mathbf{q}_a}(t)-\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_a}|t\rangle\langle\hat{c}_{-\mathbf{q}_a}|t\rangle\right]\delta_{\mathbf{q}_a,-\mathbf{q}_c}\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_b}|t\rangle+ \\
&\quad+\left[\sigma_{\mathbf{q}_b}(t)-\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_b}|t\rangle\langle\hat{c}_{-\mathbf{q}_b}|t\rangle\right]\delta_{\mathbf{q}_b,-\mathbf{q}_c}\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_a}|t\rangle+\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_a}|t\rangle\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_b}|t\rangle\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_c}|t\rangle,
\end{aligned}\tag{B.21}$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{c}_{\mathbf{q}_b}\hat{c}_{\mathbf{q}_c}|t\right\rangle &= \mathrm{Tr}\left\{\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{c}_{\mathbf{q}_b}\hat{c}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \\
&= \left\{\iota^*_{\mathbf{q}_a}\iota_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} + \kappa^*_{\mathbf{q}_a}\kappa_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda_{\mathbf{q}_c} + \\
&\quad + \left\{\iota^*_{\mathbf{q}_a}\iota_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} + \kappa^*_{\mathbf{q}_a}\kappa_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda_{\mathbf{q}_b} + \\
&\quad + \left\{\iota_{\mathbf{q}_b}\kappa_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_b}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} + \kappa_{\mathbf{q}_b}\iota_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_b}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda^*_{\mathbf{q}_a} + \\
&\quad + \lambda^*_{\mathbf{q}_a}\lambda_{\mathbf{q}_b}\lambda_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \\
&= \left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}_a}(t) - |\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_a}|t\rangle|^2\right]\left(\delta_{\mathbf{q}_a,\mathbf{q}_b}\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_c}|t\rangle + \delta_{\mathbf{q}_a,\mathbf{q}_c}\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_b}|t\rangle\right) + \\
&\quad + \left[\sigma_{\mathbf{q}_b}(t) - \langle\hat{c}_{\mathbf{q}_b}|t\rangle\langle\hat{c}_{-\mathbf{q}_b}|t\rangle\right]\delta_{\mathbf{q}_b,-\mathbf{q}_c}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}|t\right\rangle + \left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}|t\right\rangle\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_b}|t\rangle\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_c}|t\rangle\,,
\end{aligned} \tag{B.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\hat{c}_{\mathbf{q}_c}|t\right\rangle &= \mathrm{Tr}\left\{\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\hat{c}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \\
&= \left\{\iota^*_{\mathbf{q}_a}\iota_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} + \kappa^*_{\mathbf{q}_a}\kappa_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda^*_{\mathbf{q}_b} + \\
&\quad + \left\{\iota^*_{\mathbf{q}_b}\iota_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\hat{\mathscr{C}}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} + \kappa^*_{\mathbf{q}_b}\kappa_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_b}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda^*_{\mathbf{q}_a} + \\
&\quad + \left\{\iota^*_{\mathbf{q}_a}\kappa^*_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} + \kappa^*_{\mathbf{q}_a}\iota^*_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda_{\mathbf{q}_c} + \\
&\quad + \lambda^*_{\mathbf{q}_a}\lambda^*_{\mathbf{q}_b}\lambda_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \\
&= \left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}_c}(t) - |\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_c}|t\rangle|^2\right]\left(\delta_{\mathbf{q}_c,\mathbf{q}_a}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}|t\right\rangle + \delta_{\mathbf{q}_c,\mathbf{q}_b}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}|t\right\rangle\right) + \\
&\quad + \left[\sigma^*_{\mathbf{q}_a}(t) - \left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_a}|t\right\rangle\right]\delta_{\mathbf{q}_a,-\mathbf{q}_b}\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_c}|t\rangle + \left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}|t\right\rangle\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_c}|t\rangle\,,
\end{aligned} \tag{B.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_c}|t\right\rangle &= \mathrm{Tr}\left\{\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \\
&= \left\{\iota^*_{\mathbf{q}_a}\kappa^*_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} + \kappa^*_{\mathbf{q}_a}\iota^*_{\mathbf{q}_b}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda^*_{\mathbf{q}_c} + \\
&\quad + \left\{\iota^*_{\mathbf{q}_a}\kappa^*_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} + \kappa^*_{\mathbf{q}_a}\iota^*_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_a}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda^*_{\mathbf{q}_b} + \\
&\quad + \left\{\iota^*_{\mathbf{q}_b}\kappa^*_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} + \kappa^*_{\mathbf{q}_b}\iota^*_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathscr{C}}_{-\mathbf{q}_b}\hat{\mathscr{C}}^{\dagger}_{\mathbf{q}_c}\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\right\}\lambda^*_{\mathbf{q}_a} + \\
&\quad + \lambda^*_{\mathbf{q}_a}\lambda^*_{\mathbf{q}_b}\lambda^*_{\mathbf{q}_c}\mathrm{Tr}\left\{\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\} = \\
&= \left[\sigma^*_{\mathbf{q}_a}(t) - \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}|t\right\rangle\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_a}|t\right\rangle\right]\delta_{\mathbf{q}_a,-\mathbf{q}_b}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_c}|t\right\rangle + \\
&\quad + \left[\sigma^*_{\mathbf{q}_a}(t) - \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}|t\right\rangle\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_a}|t\right\rangle\right]\delta_{\mathbf{q}_a,-\mathbf{q}_c}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}|t\right\rangle + \\
&\quad + \left[\sigma^*_{\mathbf{q}_b}(t) - \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}|t\right\rangle\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_b}|t\right\rangle\right]\delta_{\mathbf{q}_b,-\mathbf{q}_c}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}|t\right\rangle + \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_a}|t\right\rangle\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_b}|t\right\rangle\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_c}|t\right\rangle .
\end{aligned} \tag{B.24}
$$

# Apêndice C

# Termos cinéticos

Adotando a aproximação de Markov, as macrovariáveis $Q_j(t)$ associadas às variáveis dinâmicas de base $\hat{P}_j$ evoluem segundo o sistema de equações cinéticas

$$\frac{d}{dt}Q_j(t) = J^{(0)}_{Q_j}(t) + J^{(1)}_{Q_j}(t) + J^{(2)}_{Q_j}(t) \tag{C.1}$$

$$J^{(0)}_{Q_j}(t) = \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{\left[\hat{P}_j, \hat{\mathscr{H}}_0\right]\, \hat{\bar{\varrho}}(t) \times \hat{\rho}_B\right\}, \tag{C.2}$$

$$J^{(1)}_{Q_j}(t) = \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\left\{\left[\hat{P}_j, \hat{\mathscr{H}}'\right]\, \hat{\bar{\varrho}}(t) \times \hat{\rho}_B\right\}, \tag{C.3}$$

$$J^{(2)}_{Q_j}(t) = J^{(2)}_{Q_j}(t)_{\mathrm{I}} + J^{(2)}_{Q_j}(t)_{\mathrm{II}}, \tag{C.4}$$

$$J^{(2)}_{Q_j}(t)_{\mathrm{I}} = \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{-\infty}^{0} d\tau\; \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\; \mathrm{Tr}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0, [\hat{\mathscr{H}}', \hat{P}_j]\right]\, \hat{\bar{\varrho}}(t)\right\}, \tag{C.5}$$

$$J^{(2)}_{Q_j}(t)_{\mathrm{II}} = \frac{1}{i\hbar}\sum_{\ell}\int_{-\infty}^{0} d\tau\; \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\mathrm{Tr}\left\{[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0, \hat{P}_j]\, \hat{\bar{\varrho}}(t)\right\} \frac{\delta J^{(1)}_{Q_j}(t)}{\delta Q_\ell(t)}, \tag{C.6}$$

sendo que introduzimos a variável de integração $\tau = t' - t$, nos termos de $J^{(2)}_{Q_j}(t)$. Tipicamente, os comutadores com $\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0$ dão origem a fatores como $\mathrm{e}^{i\chi_{\mathbf{k}}\tau}$, sendo $\chi_{\mathbf{k}}$ números reais associados às energias de mágnons, fônons e fótons, pois

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0 = &\sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \mathrm{e}^{i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2})\tau} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1} \hat{c}_{\mathbf{q}_2} \hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} + \\
&+ \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}\neq 0} \left(\hat{b}_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{-i\Omega_{\mathbf{k}}\tau} + \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i\Omega_{-\mathbf{k}}\tau}\right) \times \\
&\times \left\{ \mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})\tau} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})\tau} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{L}^*_{\mathbf{q},-\mathbf{k}} \mathrm{e}^{-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}})\tau} \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \right\} + \\
&+ \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}\neq 0} \left\{ \mathcal{R}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i(\Omega_{\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})\tau} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{R}^+_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i(\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})\tau} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \mathcal{R}^{+*}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}} \mathrm{e}^{-i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})\tau} \hat{b}_{-\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \right\} \times \\
&\times (\mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{q}}\tau} \hat{c}_{\mathbf{q}} + \mathrm{e}^{i\omega_{-\mathbf{q}}\tau} \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{q}}) + \\
&+ \sum_{\alpha,\mathbf{p}} \left(\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-i\zeta_{\mathbf{p}}\tau} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}} \mathrm{e}^{i\zeta_{-\mathbf{p}}\tau}\right) \left(\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{p}} \mathrm{e}^{i\omega_{\mathbf{p}}\tau} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{p}} + \mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,-\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-i\omega_{-\mathbf{p}}\tau} \hat{c}_{-\mathbf{p}}\right) + \\
&+ \sum_{\alpha,\mathbf{p},\mathbf{q}} \left(\hat{d}_{\alpha,\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-i\zeta_{\mathbf{p}}\tau} + \hat{d}^\dagger_{\alpha,-\mathbf{p}} \mathrm{e}^{i\zeta_{-\mathbf{p}}\tau}\right) \times \\
&\times \left\{ \mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathrm{e}^{i(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}})\tau} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathrm{e}^{i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}})\tau} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} + \mathcal{S}^{\parallel b*}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}})\tau} \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}} \right\}.
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

As integrais em $\tau$ podem então ser resolvidas:

$$
\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(\varepsilon+i\chi_{\mathbf{k}})\tau} d\tau = \left[\frac{\mathrm{e}^{(\varepsilon+i\chi_{\mathbf{k}})\tau}}{\varepsilon+i\chi_{\mathbf{k}}}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{\varepsilon+i\chi_{\mathbf{k}}},
\tag{C.8}
$$

mas, dado que $\dfrac{1}{\varepsilon+i\chi_{\mathbf{k}}}$ usualmente faz parte de termos de uma somatória em $\mathbf{k}$ (ou integral, no limite termodinâmico), $\varepsilon \to 0$, e $\chi_{\mathbf{k}} = 0$ pode eventualmente levar a indeterminações. Assim, pode-se representar a integral da seguinte forma:

$$
\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(\varepsilon+i\chi)\tau} d\tau = \mathrm{PV}\frac{1}{i\chi} + \pi\delta(\chi),
\tag{C.9}
$$

com "PV" indicando a integração em $\mathbf{k}$ em valores que excluem $\chi = 0$ (o valor principal).

No que segue são calculados os termos cinéticos para amplitudes, pares e populações de mágnons. Os valores médio dos operadores de mágnons e as integrais em $\tau$ são apresentados implicitamente. Cabe ainda notar que, dada a evolução de uma macrovariável $Q_j(t)$,

$$
\frac{d}{dt} Q^*_j(t) = \left[\frac{d}{dt} Q_j(t)\right]^*,
\tag{C.10}
$$

e desta maneira torna-se desnecessário realizar todos os cálculos para obtenção das equações cinéticas de $\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}} | t \right\rangle$ e $\sigma^*_{\mathbf{q}}(t)$ se já temos as expressões de $\dfrac{d}{dt}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle$ e $\dfrac{d}{dt}\sigma_{\mathbf{q}}(t)$.

## C.1 Amplitudes ($\hat{c}_{\mathbf{q}}$)

Apresentamos aqui as expressões de $J^{(0)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)$, $J^{(1)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)$ e $J^{(2)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)$ (de acordo com as expressões C.2-C.4). Deve ser notado que os valores médios dos operadores de mágnons incluem basicamente um número ímpar de operadores e, de acordo com o Apêndice B exposto anteriormente, são portanto sempre proporcionais às amplitudes. Assim, conforme reportado na seção 2.1, a equação cinética para as amplitudes não contém termos independentes.

$$J^{(0)}_{c_{\mathbf{q}}}(t) = -i\omega_{\mathbf{q}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle , \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}
J^{(1)}_{c_{\mathbf{q}}}(t) &= \frac{2}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle = \\
&= \frac{2}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}_2}|t\right\rangle \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle + \\
&\quad + \frac{4}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1} \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1} \left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(t) - |\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle|^2\right] \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle + \\
&\quad + \frac{4}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1} \mathcal{V}_{\mathbf{q},-\mathbf{q},\mathbf{q}_1} \left[\sigma_{\mathbf{q}_1}(t) - \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle \left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}_1}|t\right\rangle\right] \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle ,
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$J^{(2)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)_{\mathrm{I}} = J^{(2)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{MM}}_{\mathrm{I}} + J^{(2)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SL}}_{\mathrm{I}} + J^{(2)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{I}}, \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
&J^{(2)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{MM}}_{\mathrm{I}} = \\
&= -8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4} \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_4} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4})\right]\tau} + \\
&\quad + 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4} \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4,\mathbf{q}_1} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_1})\right]\tau} - \\
&\quad - 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3})\right]\tau},
\end{aligned} \tag{C.14}$$

$$
\begin{aligned}
&J^{(2)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SL}}_{\mathrm{I}} = \\
&= \hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}+\mathbf{k},\mathbf{k}}\left(\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}|t\right\rangle-\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{k}}\nu^{b}_{\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}})\right]\tau}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left(\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}}\nu^{b}_{-\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}})\right]\tau}-\\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left(\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\left(\nu^{b}_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'})\right]\tau}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left(\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle-\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{k}-\mathbf{q}}\left(\nu^{b}_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'})\right]\tau}+\\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}+\mathbf{k},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}|t\right\rangle-(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{k}}+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}})\nu^{b}_{\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}-\\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle+(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}})\left(\nu^{b}_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}+\\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}+\mathbf{k},\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}-\\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}})\right]\tau}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}})\right]\tau}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle+(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}})\nu^{b}_{-\mathbf{k}}\left\langle c_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle-(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}})\left(\nu^{b}_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}-\\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}\left(\nu^{b}_{\mathbf{k}}-\nu^{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right)\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}})\right]\tau}+\\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}\left(\nu^{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\nu^{b}_{\mathbf{k}}\right)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\omega_{-\mathbf{q}})\right]\tau}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}\left(\nu^{b}_{-\mathbf{k}}+\nu^{b}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}})\right]\tau}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}\left(\nu^{b}_{-\mathbf{k}}+\nu^{b}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}+\omega_{-\mathbf{q}})\right]\tau}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}\left(\nu^{b}_{\mathbf{k}}+\nu^{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+1\right)\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}})\right]\tau}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}\left(\nu^{b}_{\mathbf{k}}+\nu^{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+1\right)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\omega_{-\mathbf{q}})\right]\tau},
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&J_{c_{\mathbf{q}}}^{(2)}(t)_{\mathrm{I}}^{\mathrm{SR}} = \\
&= \hbar^{-2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 \langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \left\{ \mathrm{e}^{[\varepsilon - i(\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]} - \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}})\tau]} \right\} + \\
&\quad + \hbar^{-2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \left\{ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{-\mathbf{q}}-\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]} - \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{-\mathbf{q}}+\zeta_{\mathbf{q}})\tau]} \right\} + \\
&\quad + \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}'}\mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{q}}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(-\zeta_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'})\tau\right]} - \\
&\quad - \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}'}\mathcal{S}^{\parallel a *}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{q}}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}'})\tau\right]} + \\
&\quad + \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}'}\mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{q}}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}-\mathbf{q}'}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \left\{ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(-\zeta_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\tau\right]} - \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\tau\right]} \right\} + \\
&\quad + \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}'}\mathcal{S}^{\parallel b *}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{q}}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}} \langle \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'}|t\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \left\{ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(-\zeta_{-\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\tau\right]} - \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\tau\right]} \right\} - \\
&\quad - \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \langle \hat{c}_{\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{p}})\tau]} - \\
&\quad - \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{-\mathbf{p}})\tau]} + \\
&\quad + \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a *}_{\alpha,\mathbf{q}+\mathbf{p},\mathbf{p}} \langle \hat{c}_{-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}|t\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon - i(\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{-\mathbf{p}})\tau]} + \\
&\quad + \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a *}_{\alpha,\mathbf{q}+\mathbf{p},\mathbf{p}} \langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}|t\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon - i(\zeta_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{p}})\tau]} + \\
&\quad + 2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{p}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \left\{ \mathrm{e}^{[\varepsilon - i(\zeta_{-\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{p}})\tau]} - \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{p}})\tau]} \right\} + \\
&\quad + 2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \left\{ \mathrm{e}^{[\varepsilon - i(\zeta_{-\mathbf{p}}-\omega_{-\mathbf{p}})\tau]} - \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{-\mathbf{p}})\tau]} \right\} + \\
&\quad + \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a *}_{\alpha,\mathbf{q}+\mathbf{p},\mathbf{p}} \left( \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}|t\right\rangle - \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{p}} f_{\alpha,\mathbf{p}} \langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle \right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(-\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}})\tau\right]} + \\
&\quad + 2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \left( \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle + \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}} f_{\alpha,-\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(-\zeta_{-\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}})\tau\right]} - \\
&\quad - \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\parallel a *}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \left( \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle + \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} \left(f_{\alpha,\mathbf{p}}+1\right) \langle \hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle \right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'})\tau\right]} - \\
&\quad - 2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\parallel a *}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \left( \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle - \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{q}} \left(f_{\alpha,\mathbf{p}}+1\right) \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'})\tau\right]} + \\
&\quad + \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a *}_{\alpha,\mathbf{q}+\mathbf{p},\mathbf{p}} \left[ \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}|t\right\rangle - (\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{p}}+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}}) f_{\alpha,\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \right] \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(-\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\tau\right]} - \\
&\quad - \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \left[ \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle + (\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}-\mathbf{p}}+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}}) \left(f_{\alpha,\mathbf{p}}+1\right) \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \right] \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\tau\right]} + \\
&\quad + \hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\parallel b *}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a *}_{\alpha,\mathbf{q}+\mathbf{p},\mathbf{p}} \langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}|t\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(-\zeta_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\tau\right]} -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\zeta_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\tau\right]}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\zeta_{-\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}})\tau\right]}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\left[\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle+(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}})f_{\alpha,-\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\zeta_{-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\left[\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle-(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}})\left(f_{\alpha,\mathbf{p}}+1\right)\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\zeta_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\tau\right]},
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&J^{(2)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)_{\mathrm{II}} = \\
&= \frac{1}{i\hbar}\sum_{\ell}\int_{-\infty}^{0} d\tau\; \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\mathrm{Tr}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0, \hat{P}_\ell\right]\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\frac{\delta J^{(1)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)}{\delta Q_\ell(t)} = \\
&= \frac{1}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0} d\tau\; \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\mathrm{Tr}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0, \hat{c}_{\mathbf{q}_1}\right]\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\frac{\delta J^{(1)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)}{\delta\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle} + \\
&\quad + \frac{1}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0} d\tau\; \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0, \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\right]\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\frac{\delta J^{(1)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)}{\delta\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle} + \\
&\quad + \frac{1}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0} d\tau\; \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0, \hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}_1}\right]\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\frac{\delta J^{(1)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)}{\delta\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(t)} + \\
&\quad + \frac{1}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0} d\tau\; \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0, \hat{\sigma}_{\mathbf{q}_1}\right]\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\frac{\delta J^{(1)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)}{\delta\sigma_{\mathbf{q}_1}(t)} + \\
&\quad + \frac{1}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0} d\tau\; \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0, \hat{\sigma}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\right]\,\hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\frac{\delta J^{(1)}_{c_{\mathbf{q}}}(t)}{\delta\sigma^*_{\mathbf{q}_1}(t)} = \\
&= 8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\left(1-\delta_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1}-2\delta_{\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}}\right)\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_4}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1}|t\right\rangle\times \\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{0} d\tau\;\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_4})\right]\tau} + \\
&\quad + 8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_4}|t\right\rangle\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}(t)-\left|\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\right|^2\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\;\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_4})\right]\tau} - \\
&\quad - 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\left(1-2\delta_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1}-2\delta_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}}\right)\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}^*_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_4}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\times \\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{0} d\tau\;\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_4}+\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1})\right]\tau} - \\
&\quad - 8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1}\mathcal{V}^*_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0} d\tau\;\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\right]\tau} + \\
&\quad + 8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0} d\tau\;\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\right]\tau} + \\
&\quad + 16\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},-\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}\hat{c}_{-\mathbf{q}_1}\right\rangle\left\langle\hat{c}^\dagger_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0} d\tau\;\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\right]\tau} + \\
&\quad + 8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q},-\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{-\mathbf{q}_2}\right\rangle\left\langle\hat{c}^\dagger_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0} d\tau\;\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{-\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{-\mathbf{q}_2})\right]\tau}.
\end{aligned}
\tag{C.17}
$$

## C.2 Correlações ($\hat{\sigma}_{\mathbf{q}} = \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}$)

Nesta seção são apresentados $J^{(0)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)$, $J^{(1)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)$ e $J^{(2)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)$. Cabe dizer que, como analisado na seção 2.1, em vários casos de interesse a contribuição para a evolução dos pares proveniente das amplitudes pode ser negligenciada. Nas equações seguintes, portanto, são omitidos os termos que contém valores médios de um número ímpar de operadores de mágnons, que invariavelmente serão proporcionais às amplitudes.

$$J^{(0)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t) = -2i\omega_{\mathbf{q}} \langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\rangle = -2i\omega_{\mathbf{q}}\sigma_{\mathbf{q}}(t), \tag{C.18}$$

$$\begin{aligned}
J^{(1)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t) = & \frac{2}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle + \\
& + \frac{2}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{-\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle + \\
& + \frac{2}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\langle \hat{c}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{-\mathbf{q}_1}|t\rangle = \\
= & \frac{4}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(t)\,\sigma_{\mathbf{q}}(t) + \frac{2}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)\,\sigma_{\mathbf{q}_1}(t) + \\
& \frac{4}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(t)\,\sigma_{-\mathbf{q}}(t) + \frac{2}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},-\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{N}_{-\mathbf{q}}(t)\,\sigma_{\mathbf{q}_1}(t) + \\
& + \frac{2}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\sigma_{\mathbf{q}_1}(t),
\end{aligned} \tag{C.19}$$

$$J^{(2)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)_{\mathrm{I}} = J^{(2)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{MM}}_{\mathrm{I}} + J^{(2)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SL}}_{\mathrm{I}} + J^{(2)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{I}}, \tag{C.20}$$

$$\begin{aligned}
& J^{(2)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{MM}}_{\mathrm{I}} = \\
& = 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4,\mathbf{q}_1}\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_1}\hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\rangle \int_{-\infty}^0 d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_1})\tau\right]} + \\
& + 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4,\mathbf{q}_1}\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{-\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\rangle \int_{-\infty}^0 d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_1})\tau\right]} - \\
& - 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,-\mathbf{q},\mathbf{q}_4}\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q}-\mathbf{q}_4}|t\rangle \int_{-\infty}^0 d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{-\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q}-\mathbf{q}_4})\tau\right]} - \\
& - 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q},\mathbf{q}_4}\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}-\mathbf{q}_4}|t\rangle \int_{-\infty}^0 d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}-\mathbf{q}_4})\tau\right]} - \\
& - 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_4}\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4}|t\rangle \int_{-\infty}^0 d\tau\, \mathrm{e}^{\left[i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4})\tau\right]} - \\
& - 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_4}\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4}|t\rangle \int_{-\infty}^0 d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4})\tau\right]} -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_4}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_4}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4})\tau\right]}-\\
&-4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_4}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_4}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[i(\omega_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{-\mathbf{q}+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{-\mathbf{q}+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_2,-\mathbf{q},\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_2}+\omega_{-\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_2+\mathbf{q}-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_2+\mathbf{q}-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_4,\mathbf{q}_5}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_5}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_5}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_5}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_5})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}|t+\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_2}+\omega_{-\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{-\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{-\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{-\mathbf{q}_2})\tau\right]}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{V}_{-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{-\mathbf{q}_2})\tau\right]},
\end{aligned}
\tag{C.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&J_{\sigma_{\mathbf{q}}}^{(2)}(t)_{\mathrm{I}}^{\mathrm{SL}} = \\
&= -\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}}+\left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}-\mathbf{k}}\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle-\left\langle \hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle-\left\langle \hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}- \\
&-4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle+\left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}- \\
&-4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle+\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}- \\
&-4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left\langle \hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{\dagger}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}- \\
&-4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left\langle \hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{c}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\dagger}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q}'-,\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}- \\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}-\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}^{*}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}^{*}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}+\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}^{*}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}+\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau}+
\end{aligned}
$$

$$+ \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon - i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}+\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau} +$$

$$+ 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon - i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}+\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau} +$$

$$+ 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon - i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}+\Omega_{-\mathbf{k}})\right]\tau} -$$

$$- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}'}\nu_{\mathbf{k}} \left(\langle \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\rangle\, \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}} + \langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle\, \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}-\mathbf{k}}\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau} -$$

$$- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}} \left(\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle\, \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \langle \hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\rangle\, \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau} +$$

$$+ 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}} \left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle - \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{-\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}})]\tau} +$$

$$+ 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}} \left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle - \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}|t\right\rangle\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}})]\tau} -$$

$$- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}'} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau} -$$

$$- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau} -$$

$$- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau} -$$

$$- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau} -$$

$$- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}} \left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle + \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}})]\tau} -$$

$$- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}} \left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle + \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}})]\tau} -$$

$$- 4\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}})]\tau} -$$

$$- 4\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}})]\tau} -$$

$$- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}+\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau} -$$

$$- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}+\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau} +$$

$$+ 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}+\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau} -$$

$$- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0} \mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}+\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau} +$$

$$+\,4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}^*_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\left(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{k}-\mathbf{q}}\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}+$$

$$+\,4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}^*_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\left(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{k}+\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}}\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}-$$

$$-\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}^*_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}-\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau}-$$

$$-\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}^*_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}-\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau}-$$

$$-\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}^*_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}-\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau}-$$

$$-\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}^*_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}-\Omega_{\mathbf{k}})\right]\tau}$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\nu_{\mathbf{k}}\right)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}})\tau]}+$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\nu_{\mathbf{k}}\right)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}})\tau]}-$$

$$-\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}+1\right)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}+\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})\tau]}-$$

$$-\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+1\right)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})\tau]}+$$

$$+\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}}-\Omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}})\tau]}+$$

$$+\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})\tau]}+$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\nu_{\mathbf{k}}\right)\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}})\tau]}+$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\nu_{\mathbf{k}}\right)\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}})\tau]}-$$

$$-\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}+1\right)\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{-\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})\tau]}-$$

$$-\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+1\right)\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}-\Omega_{-\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})\tau]}+$$

$$+\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}})\tau]}+$$

$$+\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{-\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})\tau]}-$$

$$
\begin{aligned}
&- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2 \left(\nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}+1\right)\nu_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}})\tau]} - \\
&- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left|\mathcal{R}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2 \left(\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+1\right)\nu_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}})\tau]} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}\right|^2 \hat{b}_{-\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}+\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})\tau]} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\right|^2 \hat{b}_{-\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})\tau]} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2 \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}}-\Omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}})\tau]} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2 \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})\tau]},
\end{aligned}
\tag{C.22}
$$

$$
\begin{aligned}
&J^{(2)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{I}} = \\
&= \hbar^{-2} \sum_{\alpha} \mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,-\mathbf{q}} \left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle - f_{-\mathbf{q}}\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}-\zeta_{-\mathbf{q}})]\tau} - \\
&\quad - \hbar^{-2} \sum_{\alpha} \mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,-\mathbf{q}} \left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle + f_{\mathbf{q}} + 1\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}+\zeta_{\mathbf{q}})]\tau} + \\
&\quad + \hbar^{-2} \sum_{\alpha} \mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,-\mathbf{q}}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}} \left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle - f_{\mathbf{q}}\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}})]\tau} - \\
&\quad - \hbar^{-2} \sum_{\alpha} \mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,-\mathbf{q}}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}} \left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle + f_{-\mathbf{q}} + 1\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{q}})]\tau} + \\
&\quad + \hbar^{-2} \sum_{\alpha} \left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]} - \\
&\quad - \hbar^{-2} \sum_{\alpha} \left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}})\tau]} + \\
&\quad + \hbar^{-2} \sum_{\alpha} \left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,-\mathbf{q}}\right|^2 \left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{-\mathbf{q}}+\zeta_{\mathbf{q}})\tau]} - \\
&\quad - \hbar^{-2} \sum_{\alpha} \left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,-\mathbf{q}}\right|^2 \left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{-\mathbf{q}}-\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]} - \\
&\quad - \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}} \left(f_{-\mathbf{p}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}} + \left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}-\mathbf{p}}\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}-\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau} - \\
&\quad - \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}} \left(f_{-\mathbf{p}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}-\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau} + \\
&\quad + 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,-\mathbf{q},-\mathbf{p}} \left(f_{-\mathbf{p}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle - \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}-\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau} + \\
&\quad + 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\parallel b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\parallel a}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}} \left(f_{-\mathbf{p}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle - \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}|t\right\rangle\right) \int_{-\infty}^{0} d\tau \; \mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}-\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau} +
\end{aligned}
$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}-\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}+$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}-\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}+$$

$$+\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}-\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}+$$

$$+\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}-\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}-$$

$$-\,4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},-\mathbf{p}}\left(f_{-\mathbf{p}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle+\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}-$$

$$-\,4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}}\left(f_{-\mathbf{p}}+1\right)\left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle+\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}}-\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}-$$

$$-\,4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},-\mathbf{p}}\left(f_{-\mathbf{p}}+1\right)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}-$$

$$-\,4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}}\left(f_{-\mathbf{p}}+1\right)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}}-\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}+$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q}'-,\mathbf{p}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}-\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}+$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}-\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}-$$

$$-\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}-\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}+$$

$$+\,2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}|t\right\rangle \int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}-\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}+$$

$$+\,4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\left(f_{-\mathbf{p}}+1\right)\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}+$$

$$+\,4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\left(f_{-\mathbf{p}}+1\right)\langle \hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}+$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}+\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}+$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}+\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}+$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}2\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}+\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}+$$

$$+\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}2\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}+\zeta_{-\mathbf{p}})\right]\tau}-$$

$$-\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}'}f_{\mathbf{p}}\left(\langle \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\rangle\,\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}}+\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle\,\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}-\mathbf{p}}\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}+\zeta_{\mathbf{p}})\right]\tau}-$$

$$-\,\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}}f_{\mathbf{p}}\left(\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\rangle\,\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}-\mathbf{p}}+\langle \hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}\hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\rangle\,\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}+\zeta_{\mathbf{p}})\right]\tau}+$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,-\mathbf{q},-\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \left( \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} | t \right\rangle - \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} | t \right\rangle \right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} + \\
&+ 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \left( \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle - \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} | t \right\rangle \right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}'} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} 2\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},-\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \left( \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} | t \right\rangle + \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} | t \right\rangle \right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{-\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \left( \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}} | t \right\rangle + \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle \right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- 4\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},-\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{-\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- 4\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} + \\
&+ 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} 2\mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q}',-\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'} + \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} + \\
&+ 4\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} | t \right\rangle \left( \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} + \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{q}} \right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon - i(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} - \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} + \\
&+ 4\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} | t \right\rangle \left( \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}} \right) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon - i(\omega_{-\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon - i(\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} - \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- \hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon - i(\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} - \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}_{-\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon - i(\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} - \zeta_{\mathbf{p}})]\tau} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{[\varepsilon - i(\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} - \zeta_{\mathbf{p}})]\tau},
\end{aligned}
\tag{C.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&J^{(2)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)_{\mathrm{II}} = \\
&= \frac{1}{i\hbar}\sum_{\ell}\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\,\mathrm{Tr}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0,\hat{P}_\ell\right]\ \hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\frac{\delta J^{(1)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)}{\delta Q_\ell(t)} = \\
&= \frac{1}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0,\hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}_1}\right]\ \hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\frac{\delta J^{(1)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)}{\delta \mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(t)} + \\
&\quad + \frac{1}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0,\hat{\sigma}_{\mathbf{q}_1}\right]\ \hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\frac{\delta J^{(1)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)}{\delta \sigma_{\mathbf{q}_1}(t)} + \\
&\quad + \frac{1}{i\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\left\{\left[\hat{\mathscr{H}}'(\tau)_0,\hat{\sigma}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\right]\ \hat{\bar{\varrho}}(t,0)\right\}\frac{\delta J^{(1)}_{\sigma_{\mathbf{q}}}(t)}{\delta \sigma^*_{\mathbf{q}_1}(t)} = \\
&= -8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}^*_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}+\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}}\right)\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle\sigma_{\mathbf{q}}\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]} + \\
&\quad + 8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}+\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}}\right)\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\sigma_{\mathbf{q}}\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]} - \\
&\quad - 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}^*_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left(\delta_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}+\delta_{\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},-\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right)\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle\sigma_{\mathbf{q}}\times \\
&\qquad \times\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]} + \\
&\quad + 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left(\delta_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}+\delta_{\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},-\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right)\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\sigma_{\mathbf{q}}\times \\
&\qquad \times\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]} + \\
&\quad + 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{V}_{-\mathbf{q},-\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{N}_{-\mathbf{q}}+\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right)\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}\hat{c}_{-\mathbf{q}_1}|t\right\rangle\times \\
&\qquad \times\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]} + \\
&\quad + 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{V}_{-\mathbf{q},-\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{N}_{-\mathbf{q}}+\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right)\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle\times \\
&\qquad \times\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]} + \\
&\quad + 4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{V}_{-\mathbf{q},-\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\mathcal{N}_{-\mathbf{q}}+\mathcal{V}_{-\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right)\sigma_{\mathbf{q}_2}\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{-\mathbf{q}_2})\tau\right]} + \\
&\quad + 8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left(\delta_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},-\mathbf{q},-\mathbf{q}}\mathcal{N}_{-\mathbf{q}}\right)\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}\hat{c}_{-\mathbf{q}_1}|t\right\rangle\times \\
&\qquad \times\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]} + \\
&\quad + 8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left(\delta_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},-\mathbf{q},-\mathbf{q}}\mathcal{N}_{-\mathbf{q}}\right)\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle\times \\
&\qquad \times\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3})\tau\right]} + \\
&\quad + 8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left(\delta_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}}\mathcal{V}_{-\mathbf{q},-\mathbf{q},-\mathbf{q}}\mathcal{N}_{-\mathbf{q}}\right)\sigma_{\mathbf{q}_2}\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}_1}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{-\mathbf{q}_2})\tau\right]}.
\end{aligned}
\tag{C.24}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{dt}\right|_{\mathrm{SL}} = \\
&= \hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left(\left|\mathcal{R}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2 + \left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\right|^2\right)\left(\nu^b_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \nu^b_{\mathbf{k}}\right)\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}} - \mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \Omega_{\mathbf{k}})\tau]} + \\
&\quad + 2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left(\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2 + \left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\right|^2\right)\left(\hat{\nu}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \nu_{\mathbf{k}} + 1\right)\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}} - \mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} - \Omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})\tau]} - \\
&\quad - 2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left(\mathcal{L}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}} + \mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{-\mathbf{q},-\mathbf{k}}\right)\left[\nu_{\mathbf{k}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \nu_{\mathbf{k}} + 1\right)\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \Omega_{-\mathbf{k}})\tau]} - \\
&\quad - 2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left(\mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}} + \mathcal{L}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}\mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right)\left[\left(\nu_{\mathbf{k}} + 1\right)\mathcal{N}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{k}}\right)\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{k}})\tau]} - \\
&\quad - 2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left(\mathcal{F}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}} + \mathcal{F}_{\mathbf{q},-\mathbf{k}}\mathcal{L}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right)\left[\nu_{-\mathbf{k}}\left(\mathcal{N}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}} + 1\right) + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\nu_{-\mathbf{k}} - \mathcal{N}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}\right)\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \Omega_{-\mathbf{k}})\tau]},
\end{aligned}
\tag{C.25}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{dt}\right|_{\mathrm{SR}} = \\
&= 2\hbar^{-2}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,-\mathbf{q}}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}} - f_{\mathbf{q}}\right)\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} - \zeta_{\mathbf{q}})\tau]} - \\
&\quad - 2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0}\left(\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\alpha,-\mathbf{q},-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\alpha,\mathbf{q},\mathbf{p}} + \mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\alpha,-\mathbf{q},-\mathbf{p}}\right)\left[f_{\mathbf{p}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + f_{\mathbf{p}} + 1\right)\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - \zeta_{\mathbf{p}})\tau]} - \\
&\quad - 2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0}\left(\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}} + \mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\right)\left[\left(f_{\mathbf{p}} + 1\right)\mathcal{N}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} - f_{\mathbf{p}}\right)\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} + \zeta_{\mathbf{p}})\tau]} - \\
&\quad - 2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0}\left(\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}} + \mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\alpha,\mathbf{q},-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\alpha,-\mathbf{q},\mathbf{p}}\right)\left[f_{-\mathbf{p}}\left(\mathcal{N}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}} + 1\right) + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(f_{-\mathbf{p}} - \mathcal{N}_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}}\right)\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\ \mathrm{e}^{[\varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{-\mathbf{q}-\mathbf{p}} - \zeta_{-\mathbf{p}})\tau]},
\end{aligned}
\tag{C.26}
$$

## C.3 Populações ($\hat{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}} = \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}$)

Por fim apresentamos o cálculo dos termos cinéticos $J^{(0)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)$, $J^{(1)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)$ e $J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)$ e, como discutido no início da seção anterior, as contribuições oriundas das amplitudes foram negligenciadas o que implica em admitir apenas os valores médios de combinações de um número par de operadores de mágnons (criação e aniquilação). Com isso obtém-se

$$J^{(0)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t) = 0, \tag{C.27}$$

$$
\begin{aligned}
&J^{(1)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t) = \\
&= \frac{2i}{\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left\{\mathcal{V}^*_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle - \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\right\} = \\
&= \frac{2i}{\hbar}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left\{\mathcal{V}^*_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle - \mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\right\} = 0,
\end{aligned}
\tag{C.28}
$$

$$
J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)_{\mathrm{I}} = J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{MM}}_{\mathrm{I}} + J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SL}}_{\mathrm{I}} + J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{I}},
\tag{C.29}
$$

$$
\begin{aligned}
&J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{MM}}_{\mathrm{I}} = \\
&= -8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_4}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4})\right]\tau}+ \\
&\quad +4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4,\mathbf{q}_1}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_1})\right]\tau}- \\
&\quad -4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3})\right]\tau}- \\
&\quad -8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}^*_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}^*_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_4}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_4}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4})\right]\tau}+ \\
&\quad +4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}^*_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}^*_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4,\mathbf{q}_1}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_1}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}_1})\right]\tau}- \\
&\quad -4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}^*_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}^*_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\, \mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3})\right]\tau}+ \\
&\quad +4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}_1}\hat{c}_{\mathbf{q}_4}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_4}|t\right\rangle\times \\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2})\right]\tau}+\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_4})\right]\tau}\right\}+ \\
&\quad +4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\left\langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_2}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}\hat{c}_{\mathbf{q}_3}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}|t\right\rangle\times \\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2})\right]\tau}+\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3})\right]\tau}\right\},
\end{aligned}
\tag{C.30}
$$

$$
\begin{aligned}
&J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SL}}_{\mathrm{I}} = \\
&= \hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}+\mathbf{k},\mathbf{k}}\left(\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}|t\right\rangle - \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}|t\right\rangle + \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}})\right]\tau}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left(\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle + \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\left(\nu_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'})\right]\tau}- \\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}|t\right\rangle - \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{k}-\mathbf{q}}\nu_{\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}+\mathbf{k},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}|t\right\rangle - (\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{k}}+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}})\nu_{\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle + (\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}})\left(\nu_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}+\mathbf{k},\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}})\right]\tau}- \\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}|t\right\rangle + (\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}})\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}c_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\Omega_{-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}- \\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}|t\right\rangle - (\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}})\nu_{\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}+\mathbf{k},\mathbf{k}}\left(\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle - \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(-\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle + \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(-\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{k}})\right]\tau}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left(\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle + \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\left(\nu_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'})\right]\tau}- \\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle - \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{k}-\mathbf{q}}\nu_{\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}+\mathbf{k},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle - (\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{k}}+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}})\nu_{\mathbf{k}}\left\langle\hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(-\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle + (\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}})\left(\nu_{\mathbf{k}}+1\right)\left\langle\hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',-\mathbf{k}}\mathcal{F}_{\mathbf{q}+\mathbf{k},\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\tau\right]}-\\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(-\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}})\right]\tau}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{k}})\right]\tau}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle+(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}})\,(\nu_{-\mathbf{k}}+1)\left\langle c^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(-\Omega_{-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}',\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q}',\mathbf{k}}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\left[\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle-(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}})\nu_{\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'})\right]\tau}+\\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}\nu_{\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}\right\}+\\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}(\nu_{-\mathbf{k}}+1)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\Omega_{-\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\Omega_{-\mathbf{k}})]\tau}\right\}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})]\tau}\right\}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{F}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}(\nu_{-\mathbf{k}}+1)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})]\tau}\right\}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})]\tau}\right\}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\mathcal{L}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}(\nu_{-\mathbf{k}}+1)\left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})]\tau}\right\}+\\
&+4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}\nu_{\mathbf{k}}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})]\tau}\right\}+\\
&+4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}(\nu_{-\mathbf{k}}+1)\left(\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}|t\right\rangle+1\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})]\tau}\right\}-\\
&-\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}\left[(\nu_{\mathbf{k}}-\nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle-\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})\tau]}+\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})]\tau}\right\}+\\
&+\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}(\nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\nu_{\mathbf{k}})\left\{\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})]\tau}+\left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})]\tau}\right\}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}\left[(\nu_{-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}+1)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle-\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}})]\tau}\right\}-\\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}(\nu_{-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}+1)\left\{\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}+\omega_{-\mathbf{q}})]\tau}+\left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}+\omega_{-\mathbf{q}})]\tau}\right\}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}\left[(\nu_{\mathbf{k}}+\nu_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+1)\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle-\hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}})]\tau}\right\}+\\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^{2}(\nu_{\mathbf{k}}+\nu_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+1)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\omega_{-\mathbf{q}})]\tau}\left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle+\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\omega_{-\mathbf{q}})]\tau}\left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right\},
\end{aligned}
\tag{C.31}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{I}} = \\
&= \hbar^{-2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 f_{\mathbf{q}}\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}})\tau]}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}})\tau]}\right\}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 (f_{-\mathbf{q}}+1)\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]}\right\}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 \left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}\right\rangle\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}})\tau]}-\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}})\tau]}-\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]}\right\}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,-\mathbf{q}}\left\langle\hat{c}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{-\mathbf{q}}\right\rangle\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{-\mathbf{p}}+\zeta_{\mathbf{q}})\tau]}-\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{-\mathbf{p}}-\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]}\right\}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,\mathbf{q}}\mathcal{S}^{\perp *}_{\alpha,-\mathbf{q}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\right\rangle\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{p}}+\zeta_{\mathbf{q}})\tau]}-\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{-\mathbf{p}}-\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]}\right\}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q}+\mathbf{p},\mathbf{p}}\left(\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}|t\right\rangle-\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{p}}f_{\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}|t\right\rangle+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}}(f_{-\mathbf{p}}+1)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\zeta_{-\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}})\right]\tau}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left(\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}(f_{\mathbf{p}}+1)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'})\right]\tau}- \\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}|t\right\rangle-\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{q}}f_{\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q}+\mathbf{p},\mathbf{p}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}|t\right\rangle-(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{p}}+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}})f_{\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\right]\tau}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle+(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}-\mathbf{p}}+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}})(f_{\mathbf{p}}+1)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q}+\mathbf{p},\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\zeta_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\right]\tau}- \\
&-\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\zeta_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\zeta_{-\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}})\right]\tau}- \\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}|t\right\rangle\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}+\omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}|t\right\rangle+(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}})(f_{-\mathbf{p}}+1)\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}c_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(-\zeta_{-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\right]\tau}- \\
&-2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}|t\right\rangle-(\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{q}}+\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}})f_{\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\zeta_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'})\right]\tau}+ \\
&+\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q}+\mathbf{p},\mathbf{p}}\left(\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}}\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle-\delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{p}}f_{\mathbf{p}}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right)\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(-\zeta_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}})\right]\tau}+ \\
&+2\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0}\mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q}',-\mathbf{p}}\mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left[\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle+\delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}}(f_{-\mathbf{p}}+1)\left\langle\hat{c}_{-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}|t\right\rangle\right]\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(-\zeta_{-\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}})\right]\tau}-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \left( \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle + \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} \left( f_{\mathbf{p}} + 1 \right) \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle \right) \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}'}) \right] \tau} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \left[ \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle - \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{q}} f_{\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle \right] \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}'}) \right] \tau} + \\
&+ \hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q}+\mathbf{p},\mathbf{p}} \left[ \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle - \left( \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}+\mathbf{p}} + \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}} \right) f_{\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle \right] \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(-\zeta_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}) \right] \tau} - \\
&- \hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q}',-\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \left[ \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle + \left( \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \delta_{\mathbf{q}',-\mathbf{q}} \right) \left( f_{\mathbf{p}} + 1 \right) \left\langle \hat{c}_{-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle \right] \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}) \right] \tau} + \\
&+ \hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q}',-\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q}+\mathbf{p},\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}'}) \tau \right]} - \\
&- \hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}) \right] \tau} + \\
&+ 2\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(-\zeta_{-\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}}) \right] \tau} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}'} \hat{c}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{-\mathbf{q}'-\mathbf{p}}) \right] \tau} + \\
&+ 2\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \left[ \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle + \left( \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{q}} + \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} \right) \left( f_{-\mathbf{p}} + 1 \right) \left\langle c^{\dagger}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle \right] \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(-\zeta_{-\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}) \right] \tau} - \\
&- 2\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{q}',\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \left[ \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}'} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle - \left( \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{q}} + \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} \right) f_{\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{q}} | t \right\rangle \right] \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}) \right] \tau} + \\
&+ \hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0} \left| \mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \right|^2 f_{\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \left\{ \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - \zeta_{\mathbf{p}}) \right] \tau} + \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - \zeta_{\mathbf{p}}) \right] \tau} \right\} + \\
&+ \hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0} \left| \mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \right|^2 \left( f_{-\mathbf{p}} + 1 \right) \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \left\{ \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon + i(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \zeta_{-\mathbf{p}}) \right] \tau} + \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \zeta_{-\mathbf{p}}) \right] \tau} \right\} + \\
&+ 2\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \left\{ \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}) \right] \tau} + \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}) \right] \tau} \right\} + \\
&+ 2\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|a*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \left( f_{-\mathbf{p}} + 1 \right) \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \left\{ \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon + i(\zeta_{-\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}) \right] \tau} + \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{-\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}) \right] \tau} \right\} + \\
&+ 2\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \left\{ \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}) \right] \tau} + \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}) \right] \tau} \right\} + \\
&+ 2\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0} \mathcal{S}^{\|a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \mathcal{S}^{\|b*}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \left( f_{-\mathbf{p}} + 1 \right) \left\langle \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \left\{ \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon + i(\zeta_{-\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}) \right] \tau} + \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{-\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}) \right] \tau} \right\} + \\
&+ 4\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0} \left| \mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \right|^2 f_{\mathbf{p}} \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} | t \right\rangle \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \left\{ \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}) \right] \tau} + \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon + i(\zeta_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}) \right] \tau} \right\} + \\
&+ 4\hbar^{-2} \sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq 0} \left| \mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \right|^2 \left( f_{-\mathbf{p}} + 1 \right) \left( \left\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \hat{c}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} | t \right\rangle + 1 \right) \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \left\{ \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon + i(\zeta_{-\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}) \right] \tau} + \mathrm{e}^{\left[ \varepsilon - i(\zeta_{-\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}) \right] \tau} \right\} .
\end{aligned}
\tag{C.32}
$$

De acordo com o discutido na seção 2.3, pode-se, em alguns casos, negligenciar as contribuições originária dos pares. Considerando, desta forma, apenas as populações, as diversas parcelas da integral de colisão

$$
J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)_{\mathrm{I}} = J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{MM}}_{\mathrm{I}} + J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SL}}_{\mathrm{I}} + J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{I}}
$$

tornam-se

$$
\begin{aligned}
&J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{MM}}_{\mathrm{I}} = \\
= &-16\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\right|^2\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_1})\right]\tau}+\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}-\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_1})\right]\tau}\right\}- \\
&-32\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q},\mathbf{q}_3}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}- \\
&-32\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}+ \\
&+8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\left|\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4,\mathbf{q}}\right|^2\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_4}\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}})\right]\tau}+\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}_3}+\omega_{\mathbf{q}_4}-\omega_{\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4-\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}})\right]\tau}\right\}+ \\
&+32\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_3,\mathbf{q}}\mathcal{V}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4,\mathbf{q}_3}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_4}\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}- \\
&-8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_1})\right]\tau}+\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}_2}+\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_1})\right]\tau}\right\}+ \\
&+8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2})\right]\tau}+\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2})\right]\tau}\right\}+ \\
&+32\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_3,\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}+ \\
&+8\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{\left[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2})\right]\tau}+\mathrm{e}^{\left[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2})\right]\tau}\right\},
\end{aligned}
\tag{C.33}
$$

sendo que claramente os valores principais das integrais em $\tau$ são nulos, o que nos possibilita reescrever

$$
J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{MM}}_{\mathrm{I}} = \frac{16\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\begin{matrix}\left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}\end{matrix}\;; \tag{C.34}
$$

$$
\begin{aligned}
&J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SL}}_{\mathrm{I}} = \\
&= \hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\nu_{-\mathbf{k}}\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{-\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{-\mathbf{k}})]\tau}\right\}+ \\
&\quad -\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{k}}+1\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}\right\}- \\
&\quad +\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}}\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}\right\}+ \\
&\quad +\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{-\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{-\mathbf{k}})]\tau}\right\}+ \\
&\quad +4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\Omega_{-\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\Omega_{-\mathbf{k}})]\tau}\right\}- \\
&\quad -4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\nu_{\mathbf{k}}\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}\right\}+ \\
&\quad +4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+1\right)\nu_{\mathbf{k}}\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{k}})]\tau}\right\}+ \\
&\quad +4\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+1\right)\left(\nu_{-\mathbf{k}}+1\right)\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\Omega_{-\mathbf{k}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-+\Omega_{-\mathbf{k}})]\tau}\right\}- \\
&\quad -\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left[\left(\nu_{\mathbf{k}}-\nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right)\mathcal{N}_{\mathbf{q}}-\left(\nu_{\mathbf{k}}+1\right)\nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})\tau]}+\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{k}}-\Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})]\tau}\right\}+ \\
&\quad -2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left[\left(\nu_{-\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}+1\right)\mathcal{N}_{\mathbf{q}}-\nu_{\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{-\mathbf{k}}+\Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q}})]\tau}\right\}- \\
&\quad +2\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left[\left(\nu_{\mathbf{k}}+\nu_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+1\right)\mathcal{N}_{\mathbf{q}}-\left(\nu_{\mathbf{k}}+1\right)\left(\nu_{-\mathbf{q}-\mathbf{k}}+1\right)\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\Omega_{\mathbf{k}}+\Omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}})]\tau}\right\},
\end{aligned}
\tag{C.35}
$$

que também tem os valores principais nulos e se reescreve como

$$
\begin{aligned}
&J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SL}}_{\mathrm{I}} = \\
&= 2\pi\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \nu_{-\mathbf{k}}\right) + \mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\left(\nu_{-\mathbf{k}} + 1\right)\right]\delta(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}} - \Omega_{-\mathbf{k}}) + \\
&\quad + 2\pi\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \nu_{\mathbf{k}} + 1\right)\right]\delta(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{k}}) + \\
&\quad + 8\pi\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left[\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + 1\right)\nu_{\mathbf{k}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \nu_{\mathbf{k}}\right)\right]\delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \Omega_{\mathbf{k}}) + \\
&\quad - 2\pi\hbar^{-2}\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}} - \mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}\right]\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right)\delta(\omega_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) - \\
&\quad - 4\pi\hbar^{-2}\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}} - \mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}\right]\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{-\mathbf{k}} + \nu_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} + 1\right)\delta(\Omega_{-\mathbf{k}} + \Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}}) = \\
&= 2\pi\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}'\neq 0}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'} - \nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\right) + \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\left(\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}} + 1\right)\right]\delta(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}} - \Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + \\
&\quad + 2\pi\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}'\neq 0}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'} + \nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} + 1\right)\right]\delta(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}) + \\
&\quad + 8\pi\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{q}'\neq 0}\left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2\left[\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'} + 1\right)\nu_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'} - \nu_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right)\right]\delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}'} - \Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}) + \\
&\quad - \frac{1}{\tau_{\mathbf{q}}}\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}} - \mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}\right],
\end{aligned}
\tag{C.36}
$$

com

$$
\tau^{-1}_{\mathbf{q}} = 2\pi\hbar^{-2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left\{\left|\mathcal{R}_{-\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right)\delta(\omega_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) + 2\left|\mathcal{R}^{+}_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\right|^2\left(\nu_{-\mathbf{k}} + \nu_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} + 1\right)\delta(\Omega_{-\mathbf{k}} + \Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}})\right\} > 0,
\tag{C.37}
$$

notando que

$$
\begin{aligned}
&\text{se}\quad \omega_{\mathbf{q}} = \Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \Omega_{\mathbf{k}} &&\text{então}\quad \left(\nu_{\mathbf{k}} + 1\right)\nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} = \left(\nu_{\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right)\mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}} \\
&\text{se}\quad \omega_{\mathbf{q}} = \Omega_{-\mathbf{k}} + \Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} &&\text{então}\quad \nu_{\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} = \left(\nu_{-\mathbf{k}} + \nu_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} + 1\right)\mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}.
\end{aligned}
$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
& J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{I}} = \\
&= \hbar^{-2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^{2}(f_{\mathbf{q}}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}})\int_{-\infty}^{0}d\tau\;\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}})\tau]}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}})\tau]}\right\}+ \\
&\quad+\hbar^{-2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^{2}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+f_{-\mathbf{q}}+1)\int_{-\infty}^{0}d\tau\;\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]}\right\}- \\
&\quad-\hbar^{-2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^{2}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{q}}\right\rangle\int_{-\infty}^{0}d\tau\;\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}})\tau]}-\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}})\tau]}-\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{q}})\tau]}\right\}+ \\
&\quad+\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq0}\left|\mathcal{S}^{\parallel a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^{2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-f_{-\mathbf{p}})\int_{-\infty}^{0}d\tau\;\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}\right\}+ \\
&\quad-\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq0}\left|\mathcal{S}^{\parallel a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^{2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}+f_{\mathbf{p}}+1)\int_{-\infty}^{0}d\tau\;\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{\mathbf{p}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{\mathbf{p}})]\tau}\right\}- \\
&\quad+\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq0}\left|\mathcal{S}^{\parallel a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^{2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}f_{\mathbf{p}}\int_{-\infty}^{0}d\tau\;\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{\mathbf{p}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{\mathbf{p}})]\tau}\right\}+ \\
&\quad+\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq0}\left|\mathcal{S}^{\parallel a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^{2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}(f_{-\mathbf{p}}+1)\int_{-\infty}^{0}d\tau\;\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}\right\}+ \\
&\quad+4\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq0}\left|\mathcal{S}^{\parallel b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^{2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}+f_{-\mathbf{p}}+1)\int_{-\infty}^{0}d\tau\;\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}\right\}- \\
&\quad-4\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq0}\left|\mathcal{S}^{\parallel b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^{2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}-f_{\mathbf{p}})\int_{-\infty}^{0}d\tau\;\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{p}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{p}})]\tau}\right\}+ \\
&\quad+4\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq0}\left|\mathcal{S}^{\parallel b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^{2}(\mathcal{N}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}+1)f_{\mathbf{p}}\int_{-\infty}^{0}d\tau\;\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{p}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{p}})]\tau}\right\}+ \\
&\quad+4\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq0}\left|\mathcal{S}^{\parallel b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^{2}(\mathcal{N}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}+1)(f_{-\mathbf{p}}+1)\int_{-\infty}^{0}d\tau\;\left\{\mathrm{e}^{[\varepsilon+i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}+\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}+\mathrm{e}^{[\varepsilon-i(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}-+\zeta_{-\mathbf{p}})]\tau}\right\},
\end{aligned}
\tag{C.38}
$$

$$
\begin{aligned}
& J^{(2)}_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(t)^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{I}} = \\
&= 2\pi\hbar^{-2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^{2}(f_{\mathbf{q}}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}})\,\delta(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}})+ \\
&\quad+2\pi\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq0}\left|\mathcal{S}^{\parallel a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^{2}\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-f_{-\mathbf{p}})+\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}(f_{-\mathbf{p}}+1)\right]\delta(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{-\mathbf{p}})+ \\
&\quad+2\pi\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq0}\left|\mathcal{S}^{\parallel a}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^{2}\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}f_{\mathbf{p}}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}+f_{\mathbf{p}}+1)\right]\delta(\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{\mathbf{p}})+ \\
&\quad+8\pi\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\mathbf{p}\neq0}\left|\mathcal{S}^{\parallel b}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|^{2}\left[(\mathcal{N}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}+1)f_{\mathbf{p}}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}-f_{\mathbf{p}})\right]\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{p}}).
\end{aligned}
\tag{C.39}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) = \\
&= \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 f^{\mathrm{S}}_{\mathbf{q}}\,\delta(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}}) - && [\mathfrak{S}^{\perp}_{\mathbf{q}}(t)] \\
&\quad - \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\alpha}\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\alpha,\mathbf{q}}\right|^2 (\mathcal{N}_{\mathbf{q}} - f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{q}})\,\delta(\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}}) + && [\mathfrak{R}^{\perp}_{\mathbf{q}}(t)] \\
&\quad + \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{a}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(f_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}+1) - (\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\zeta_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + && \\
&\quad + \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|S^{\|\mathrm{a}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}'} f_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(f_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\zeta_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}) + && [\mathfrak{R}^{\|a}_{\mathbf{q}}(t)] \\
&\quad + \frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(1+\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}) f^{\mathrm{S}}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}) + && [\mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t)] \\
&\quad + \frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\|\mathrm{b}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1) f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(f^{\mathrm{T}}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}) - && [\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)] \\
&\quad - \frac{1}{\tau_{\mathbf{q}}}\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}} - \mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}\right] + && [L_{\mathbf{q}}(t)] \\
&\quad + \frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{L}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\nu_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\nu_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}) + && [\mathfrak{L}_{\mathbf{q}}(t)] \\
&\quad + \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}+1) - (\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + && \\
&\quad + \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}) + && [\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t)] \\
&\quad + \frac{16\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} \begin{array}{c} \left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} \end{array} . && [\mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t)] \\
&\quad + \sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}} C_{\mathbf{q}'}\left(\langle c_{\mathbf{q}'}|t\rangle, \left\langle c^{\dagger}_{\mathbf{q}'}|t\right\rangle, \sigma_{\mathbf{q}'}, \sigma^{*}_{\mathbf{q}'}, t\right), && \text{(C.40)}
\end{aligned}
$$

# Apêndice D

# Modelagem de dois fluidos

De acordo com o NESEF, foi obtida no capítulo 2 a equação 2.28, que governa a evolução das populações de mágnons. Desconsiderando-se a interação com a radiação eletromagnética perpendicular ao campo magnético constante aplicado ao material magnético, o termo de Livshits (parte da interação não-linear com a rede cristalina) e o acoplamento com as amplitudes e pares, esta equação tem a forma

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) = {} & \frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\parallel b}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2\left\{(1+\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{N}_{\mathbf{q}'})f^{S}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'})+ && [\mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t)]\\
& +\frac{8\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq-\mathbf{q}}\left|\mathcal{S}^{\parallel b}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)f^{T}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(f^{T}_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'})- && [\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)]\\
& -\frac{1}{\tau_{\mathbf{q}}}\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}}-\mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}\right]+ && [L_{\mathbf{q}}(t)]\\
& +\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}+1)-(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}})+ && \\
& +\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{q}}\left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)(\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}+1)\right\}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})+ && [\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t)]\\
& +\frac{16\pi}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\begin{array}{c}\left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times\\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}\end{array}\quad. && [\mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t)]
\end{aligned}
$$

Seguindo a proposta descrita no capítulo 3, dividimos o sistemas em mágnons de energia baixa $\hbar\omega_{\mathbf{q}} < E$ e alta $\hbar\omega_{\mathbf{q}} > E$, definindo com isso as regiões de vetores de onda $\mathbf{q} \in R_1$ (baixa energia) e $\mathbf{q} \in R_2$ (alta energia), e acompanhamos a evolução das populações representativas dos modos de baixa e alta energia,

$$
\mathcal{N}_{1,2}(t) = \frac{\sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)}{\sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}}1} = \frac{\sum_{\mathbf{q}\in R_1}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)}{n_{1,2}}
$$

e

$$\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{1,2}(t) = \frac{1}{n_{1,2}} \sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}} \left\{\mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t) + \mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t) + L_{\mathbf{q}}(t) + \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) + \mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t)\right\}.$$

## D.1 Separação em regiões $R_1$ e $R_2$

Iniciando a análise por $\mathcal{N}_1(t)$, separamos então as somas em $\mathbf{q}'$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ e $\mathbf{q}_3$, contidas nas contribuições à Eq. 2.28, nas regiões $R_1$ e $R_2$. As contribuições associadas à fonte e à radiação térmica ficam, respectivamente,

$$\sum_{\mathbf{q}\in R_1} \mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t) = \frac{8\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'\in R_1} \left|\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(1+\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{N}_{\mathbf{q}'})f^S_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}\right\} \delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'})+ \tag{D.1a}$$

$$+\frac{8\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \left|\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(1+\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{N}_{\mathbf{q}'})f^S_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}\right\} \delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}), \tag{D.1b}$$

e, rearranjando $\mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)$,

$$\sum_{\mathbf{q}\in R_1} \mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t) = \frac{8\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'\in R_1} \left|\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(1+\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{N}_{\mathbf{q}'})f^T_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\right\} \delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'})+ \tag{D.2a}$$

$$+\frac{8\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \left|\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(1+\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{N}_{\mathbf{q}'})f^T_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\right\} \delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}). \tag{D.2b}$$

Ambas possuem deltas de conservação de energia do tipo $\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'})$ que, de acordo com a análise feita na seção 2.3, são apenas satisfeitas quando $\mathbf{q}\approx-\mathbf{q}'$. Portanto $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ são vinculados à mesma região e então os termos D.1b e D.2b são nulos. Lembrando ainda que $f^S_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}$ é a população de fótons da fonte, que é nula para baixas energias, $\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'} < 2E$, obtemos que o termo D.1a também é nulo[1] e assim

$$\sum_{\mathbf{q}\in R_1} \left[\mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t) + \mathfrak{R}_{\mathbf{q}}(t)\right] = \frac{8\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'\in R_1} \left|\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(1+\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{N}_{\mathbf{q}'})f^T_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\right\} \delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}).$$

[1]O resultado de que $\sum_{\mathbf{q}\in R_1} \mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t) = 0$ é razoável, pois indica que a fonte não entra diretamente na equação de evolução de $\mathcal{N}_1(t)$.

Quanto à interação com a rede cristalina, o termo de relaxação linear é

$$\sum_{\mathbf{q}\in R_1} L_{\mathbf{q}}(t) = -\sum_{\mathbf{q}\in R_1} \frac{1}{\tau_{\mathbf{q}}}\left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}\right], \tag{D.3}$$

e o termo de Fröhlich

$$\sum_{\mathbf{q}\in R_1} \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}(t) = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'\in R_1} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\}+ \tag{D.4a}$$

$$+\frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \{\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}+1)\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\}+ \tag{D.4b}$$

$$+\frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'\in R_1} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 (\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}})\{\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + \nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\}+ \tag{D.4c}$$

$$+\frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1\\ \mathbf{q}'\in R_2}} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 (\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}-\mathcal{N}_{\mathbf{q}})\{\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + \nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\}, \tag{D.4d}$$

sendo D.4a e D.4c nulos pela simetria entre $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$.

Analisando por fim o termo proveniente da interação mágnon-mágnon,

$$\sum_{\mathbf{q}\in R_1} \mathfrak{M}_{\mathbf{q}}(t) = \frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\in R_1} \begin{array}{c} |\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} \end{array} + \tag{D.5a}$$

$$+\frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q},\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\in R_1 \\ \mathbf{q}_1\in R_2}} \begin{array}{c} |\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} \end{array} + \tag{D.5b}$$

$$+\frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3\in R_1 \\ \mathbf{q}_2\in R_2}} \begin{array}{c} |\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} \end{array} + \tag{D.5c}$$

$$+\frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\in R_1 \\ \mathbf{q}_3\in R_2}} \begin{array}{c} |\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}+ \end{array} + \tag{D.5d}$$

$$+\frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q},\mathbf{q}_1\in R_1 \\ \mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\in R_2}} \begin{array}{c} |\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} \end{array} + \tag{D.5e}$$

$$+\frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q},\mathbf{q}_2\in R_1 \\ \mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3\in R_2}} \begin{array}{c} |\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} \end{array} + \tag{D.5f}$$

$$+\frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q},\mathbf{q}_3\in R_1 \\ \mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\in R_2}} \begin{array}{c} |\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} \end{array} + \tag{D.5g}$$

$$+\frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1 \\ \mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\in R_2}} \begin{array}{c} |\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\}\times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} \end{array} , \tag{D.5h}$$

vemos que os termos D.5a, D.5f e D.5g são nulos pois os índices das somas que pertencem às mesmas regiões são intercambiáveis e, pelo mesmo motivo, os termos D.5b e D.5c se anulam mutuamente. Temos, finalmente, que a delta de conservação de energia não é satisfeita no termo D.5e (pois $\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}_1} < 2E$ e $\omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3} > 2E$). Desta maneira a equação de evolução para $\mathcal{N}_1(t)$ fica

$$\begin{aligned}
n_1 \frac{d}{dt}\mathcal{N}_1(t) = & \frac{8\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'\in R_1} \left|\mathcal{S}^{\|b}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{(1+\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+\mathcal{N}_{\mathbf{q}'}) f^T_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}}\right\} \delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}-\zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}) - \\
& - \sum_{\mathbf{q}\in R_1} \frac{1}{\tau_{\mathbf{q}}} \left[\mathcal{N}_{\mathbf{q}} - \mathcal{N}^{(0)}_{\mathbf{q}}\right] + \\
& + \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1 \\ \mathbf{q}'\in R_2}} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \mathcal{N}_{\mathbf{q}'}\mathcal{N}_{\mathbf{q}} \left\{\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) - \delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\right\} + \\
& + \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1 \\ \mathbf{q}'\in R_2}} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \mathcal{N}_{\mathbf{q}'} \left\{(\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}+1)\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + \nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\right\} - \\
& - \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1 \\ \mathbf{q}'\in R_2}} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \left\{\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + (\nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}+1)\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\right\} + \\
& + \frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\in R_1 \\ \mathbf{q}_3\in R_2}} \begin{array}{c} \left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\} \times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} + \end{array} + \\
& + \frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_1 \\ \mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\in R_2}} \begin{array}{c} \left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2 \left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}+1)\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3} - \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}+1)(\mathcal{N}_{\mathbf{q}_3}+1)\right\} \times \\ \times\delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}-\omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} \end{array} .
\end{aligned} \tag{D.6}$$

## D.2 Teorema do valor médio e vínculos de equilíbrio

Relacionamos agora as somatórias múltiplas com os valores médios $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ através do teorema do valor médio. Exemplificando o método com parte do termo de Fröhlich, pode-se afirmar que existe um $\tilde{\mathbf{q}} \in R_1$ tal que

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'\in R_1} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) \left\{\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + \nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\right\} = \\
& = \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'\in R_1} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \left\{\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}-\Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + \nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\delta(\omega_{\mathbf{q}'}-\omega_{\mathbf{q}}+\Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\right\}.
\end{aligned}$$

Podemos ainda definir um $\lambda_1^{\mathrm{F}}$ de modo que $\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathcal{N}_1\lambda_1^{\mathrm{F}}$ e então eliminar a dependência nos $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$. Cumpre enfatizar que, dado a dependência das populações de mágnons com o tempo, o vetor de onda $\tilde{\mathbf{q}}$ que assegura a igualdade descrita anteriormente é distinto a cada instante e, assim, $\lambda_1^{\mathrm{F}} = \lambda_1^{\mathrm{F}}(t)$. Mas consideraremos, dentro das regiões em questão, que as populações de mágnons têm a mesma dependência temporal e são, portanto, proporcionais à população representativa associada. Esta consideração implica que $\lambda_1^{\mathrm{F}}$ (e os parâmetros $\lambda_{1,2}$ análogos) é uma constante no tempo. Utilizando tal procedimento para todos os termos da Eq. D.6 chega-se a

$$
\begin{aligned}
n_1 \frac{d}{dt}\mathcal{N}_1(t) = {} & (1 + 2\mathcal{N}_1\, \lambda_1^{\mathrm{S}_{11}^T})\mathrm{S}_{11}^T - (\mathcal{N}_1)^2\, \lambda_1^{\mathrm{S}_{11}} \lambda_1^{\mathrm{S}_{11}} \mathrm{S}_{11} - \\
& - \frac{n_1}{\tau}\left[\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_1^{(0)}\right] + \\
& + \mathcal{N}_1\mathcal{N}_2\, \lambda_1^{\mathrm{F}_{12}^a} \lambda_2^{\mathrm{F}_{12}^a} \mathrm{F}_{12}^a + \mathcal{N}_2\, \lambda_2^{\mathrm{F}_{12}^b}\mathrm{F}_{12}^b - \mathcal{N}_1\, (\lambda_1^{\mathrm{F}_{12}^b}\mathrm{F}_{12}^b - \lambda_1^{\mathrm{F}_{12}^a}\mathrm{F}_{12}^a) + \\
& + \left\{\mathcal{N}_1\lambda_1^{\mathrm{M}_{1112}}(\mathcal{N}_1\lambda_1^{\mathrm{M}_{1112}} + 1)\right\}(\mathcal{N}_2\lambda_2^{\mathrm{M}_{1112}} - \mathcal{N}_1\lambda_1^{\mathrm{M}_{1112}})\mathrm{M}_{1112} + \\
& + \left\{\mathcal{N}_2\lambda_2^{\mathrm{M}_{1222}}(\mathcal{N}_2\lambda_2^{\mathrm{M}_{1222}} + 1)\right\}(\mathcal{N}_2\lambda_2^{\mathrm{M}_{1222}} - \mathcal{N}_1\lambda_1^{\mathrm{M}_{1222}})\mathrm{M}_{1222},
\end{aligned}
$$

sendo o tempo de relaxação linear para a rede considerado como independente de $\mathbf{q}$, $\tau_{\mathbf{q}} = \tau$, as populações representativas de equilíbrio são dadas por

$$
\mathcal{N}_{1,2}^{(0)} = \frac{\sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}{\sum_{\mathbf{q}\in R_{1,2}} 1},
$$

e

$$
\mathrm{S}_{ij}^T = \frac{8\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_i \\ \mathbf{q}'\in R_j}} \left|\mathcal{S}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}^{\|b}\right|^2 f_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}^T \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}'} - \zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}),
$$

$$
\mathrm{S}_{ij} = \frac{8\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_i \\ \mathbf{q}'\in R_j}} \left|\mathcal{S}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}^{\|b}\right|^2 \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}'} - \zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}),
$$

$$
\mathrm{F}_{ij} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_i \\ \mathbf{q}'\in R_j}} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \{\delta(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}} - \Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) - \delta(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\},
$$

$$
\mathrm{F}_{ij}^b = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_i \\ \mathbf{q}'\in R_j}} \left|\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\right|^2 \{(\nu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} + 1)\delta(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}} - \Omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) + \nu_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\delta(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\},
$$

$$
\mathrm{M}_{ijkl} = \frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}\in R_i \\ \mathbf{q}_1\in R_j \\ \mathbf{q}_2\in R_k \\ \mathbf{q}_3\in R_l}} \left|\mathcal{V}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\right|^2 \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}_1} - \omega_{\mathbf{q}_2} - \omega_{\mathbf{q}_3})\delta_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2},
$$

e as constantes $\lambda_i^X$ estão associadas às somatórias $X$ e populações oriundas das regiões $R_i$.

Para $\mathcal{N}_2(t)$ temos, de forma análoga,

$$
\begin{aligned}
n_2 \frac{d}{dt}\mathcal{N}_2(t) = (1 + 2\mathcal{N}_2\, \lambda_2^{\mathrm{S}_{22}^S})\mathrm{S}_{22}^S + \\
&+ (1 + 2\mathcal{N}_2\, \lambda_1^{\mathrm{S}_{22}^T})\mathrm{S}_{22}^T - (\mathcal{N}_2)^2\, \lambda_2^{\mathrm{S}_{22}} \lambda_2^{\mathrm{S}_{22}} \mathrm{S}_{22} - \\
&- \frac{n_2}{\tau}\left[\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2^{(0)}\right] + \\
&+ \mathcal{N}_1\mathcal{N}_2\, \lambda_1^{\mathrm{F}_{21}^a} \lambda_2^{\mathrm{F}_{21}^a} \mathrm{F}_{21}^a + \mathcal{N}_1\, \lambda_1^{\mathrm{F}_{21}^b} \mathrm{F}_{21}^b - \mathcal{N}_2\, (\lambda_2^{\mathrm{F}_{21}^b} \mathrm{F}_{21}^b - \lambda_2^{\mathrm{F}_{21}^a} \mathrm{F}_{21}^a) + \\
&+ \left\{\mathcal{N}_2 \lambda_2^{\mathrm{M}_{2221}} (\mathcal{N}_2 \lambda_2^{\mathrm{M}_{2221}} + 1)\right\} (\mathcal{N}_1 \lambda_1^{\mathrm{M}_{2221}} - \mathcal{N}_2 \lambda_2^{\mathrm{M}_{2221}}) \mathrm{M}_{2221} + \\
&+ \left\{\mathcal{N}_1 \lambda_1^{\mathrm{M}_{2111}} (\mathcal{N}_1 \lambda_1^{\mathrm{M}_{2111}} + 1)\right\} (\mathcal{N}_1 \lambda_1^{\mathrm{M}_{2111}} - \mathcal{N}_2 \lambda_2^{\mathrm{M}_{2111}}) \mathrm{M}_{2111},
\end{aligned}
$$

sendo que neste caso o termo da fonte, $\sum_{\mathbf{q}\in R_2} \mathfrak{S}_{\mathbf{q}}(t)$ não se anula e

$$
\mathrm{S}_{22}^S = \frac{8\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'\in R_2} \left| \mathcal{S}_{\mathbf{q},\mathbf{q}+\mathbf{q}'}^{\|b} \right|^2 f_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}^S \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}'} - \zeta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}).
$$

Temos então um sistema de duas equações diferenciais em $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ com o tempo representando a variável independente. Analisando os coeficientes indicados podemos estabelecer as seguintes relações:

$$
\mathrm{M}_{1222} = \mathrm{M}_{2221}, \qquad \mathrm{M}_{1112} = \mathrm{M}_{2111},
$$

$$
\mathrm{F}_{12} = -\mathrm{F}_{21}, \qquad \mathrm{F}_{12}^b - \mathrm{F}_{12} = \mathrm{F}_{21}^b,
$$

$$
\lambda_i^{\mathrm{M}_{1112}} = \lambda_i^{\mathrm{M}_{1222}} = \lambda_i^{\mathrm{M}_{2111}} = \lambda_i^{\mathrm{M}_{2221}} \equiv \lambda_i^{\mathrm{M}},
$$

e, multiplicando ambos lados por $\dfrac{\tau}{n}$, com $n = \sum_{\mathbf{q}} 1$ representando o número total de modos, o sistema pode ser reescrito da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
f_1 \frac{d}{d\bar{t}} \mathcal{N}_1(\bar{t}) = {} & \mathrm{D}_1' \left( \frac{1}{2\lambda_1^{\mathrm{S}_{11}^T}} + \mathcal{N}_1 \right) - \mathrm{D}_1 (\mathcal{N}_1)^2 - \\
& - f_1 \left[ \mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_1^{(0)} \right] + \\
& + \mathrm{F} \left\{ \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 + \left( \frac{\lambda_2^{\mathrm{F}_{21}^b}}{\lambda_1^{\mathrm{F}_{21}^b}} \bar{\nu} + \frac{1}{\lambda_1^{\mathrm{F}_{12}}} \right) \mathcal{N}_2 - \bar{\nu} \mathcal{N}_1 \right\} + \\
& + \left\{ \mathrm{M}_1 \mathcal{N}_1 \left( \mathcal{N}_1 + \frac{1}{\lambda_1^{\mathrm{M}}} \right) + \mathrm{M}_2 \mathcal{N}_2 \left( \mathcal{N}_2 + \frac{1}{\lambda_2^{\mathrm{M}}} \right) \right\} (\mathcal{N}_2 \lambda_2^{\mathrm{M}} - \mathcal{N}_1 \lambda_1^{\mathrm{M}}),
\end{aligned} \tag{D.7}
$$

e

$$
\begin{aligned}
f_2 \frac{d}{d\bar{t}} \mathcal{N}_2(\bar{t}) = {} & \mathrm{I} \,(1 + 2\mathcal{N}_2 \, \lambda_2^{\mathrm{S}_{22}^S}) + \\
& + \mathrm{D}_2' \left( \frac{1}{2\lambda_2^{\mathrm{S}_{22}^T}} + \mathcal{N}_2 \right) - \mathrm{D}_2 (\mathcal{N}_2)^2 - \\
& - f_2 \left[ \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2^{(0)} \right] - \\
& - \mathrm{F} \left\{ \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 + \left( \frac{\lambda_2^{\mathrm{F}_{21}^b}}{\lambda_1^{\mathrm{F}_{21}^b}} \bar{\nu} + \frac{1}{\lambda_1^{\mathrm{F}_{12}}} \right) \mathcal{N}_2 - \bar{\nu} \mathcal{N}_1 \right\} - \\
& - \left\{ \mathrm{M}_1 \mathcal{N}_1 \left( \mathcal{N}_1 + \frac{1}{\lambda_1^{\mathrm{M}}} \right) + \mathrm{M}_2 \mathcal{N}_2 \left( \mathcal{N}_2 + \frac{1}{\lambda_2^{\mathrm{M}}} \right) \right\} (\mathcal{N}_2 \lambda_2^{\mathrm{M}} - \mathcal{N}_1 \lambda_1^{\mathrm{M}}),
\end{aligned} \tag{D.8}
$$

em que $f_{1,2} = \dfrac{n_{1,2}}{n}$, $\mathrm{D}_1' = \dfrac{\tau}{n} 2\lambda_1^{\mathrm{S}_{11}^T} \mathrm{S}_{11}^T$, $\mathrm{D}_1 = \dfrac{\tau}{n} \left( \lambda_1^{\mathrm{S}_{11}} \right)^2 \mathrm{S}_{11}$, $\mathrm{D}_2' = \dfrac{\tau}{n} 2\lambda_2^{\mathrm{S}_{22}^T} \mathrm{S}_{22}^T$, $\mathrm{D}_2 = \dfrac{\tau}{n} \left( \lambda_2^{\mathrm{S}_2} \right)^2 \mathrm{S}_{22}$, $\mathrm{F} = \dfrac{\tau}{n} \lambda_1^{\mathrm{F}_{12}} \lambda_2^{\mathrm{F}_{12}} \mathrm{F}_{12}$, $\bar{\nu} = \dfrac{\lambda_1^{\mathrm{F}_{21}^b} \mathrm{F}_{21}^b}{\lambda_1^{\mathrm{F}_{12}} \lambda_2^{\mathrm{F}_{12}} \mathrm{F}_{12}}$, $\mathrm{M}_1 = \dfrac{\tau}{n} (\lambda_1^{\mathrm{M}})^2 \mathrm{M}_{1112}$ e $\mathrm{M}_2 = \dfrac{\tau}{n} (\lambda_2^{\mathrm{M}})^2 \mathrm{M}_{2221}$ . A constante $\mathrm{I} = \dfrac{\tau}{n} \lambda_2^{\mathrm{S}_{22}^S} \mathrm{S}_{22}^S$ está relacionada com a intensidade da fonte externa.

É possível ainda encontrar alguns vínculos entre os coeficientes se levarmos em conta que, quando em equilíbrio, o sistema não evolui no tempo. Se atentarmos à equação 2.28, percebemos (como indicado no capítulo 2) que os termos provenientes da interação com a radiação térmica, termo de Fröhlich e mágnon-mágnon são identicamente nulos ao substituir-se $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) \to \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}$. Ora, ao substituirmos $\mathcal{N}_1(t) \to \mathcal{N}_1^{(0)}$ e $\mathcal{N}_2(t) \to \mathcal{N}_2^{(0)}$ nas equações 4.4c e 4.5d, estes termos devem se anular:

$$
\mathrm{D}_1' \left( \frac{1}{2\lambda_1^{\mathrm{S}_{11}^T}} + \mathcal{N}_1^{(0)} \right) - \mathrm{D}_1 (\mathcal{N}_1^{(0)})^2 = 0,
$$

$$\mathrm{D}_2'\left(\frac{1}{2\lambda_2^{\mathrm{S}_{22}^T}}+\mathcal{N}_2^{(0)}\right)-\mathrm{D}_2(\mathcal{N}_2^{(0)})^2=0,$$

$$\mathrm{F}\left\{\mathcal{N}_1^{(0)}\mathcal{N}_2^{(0)}+\left(\frac{\lambda_2^{\mathrm{F}_{21}^b}}{\lambda_1^{\mathrm{F}_{21}^b}}\bar{\nu}+\frac{1}{\lambda_1^{\mathrm{F}_{12}}}\right)\mathcal{N}_2^{(0)}-\bar{\nu}\mathcal{N}_1^{(0)}\right\}=0,$$

$$\left\{\mathrm{M}_1\mathcal{N}_1^{(0)}\left(\mathcal{N}_1^{(0)}+\frac{1}{\lambda_1^{\mathrm{M}}}\right)+\mathrm{M}_2\mathcal{N}_2^{(0)}\left(\mathcal{N}_2^{(0)}+\frac{1}{\lambda_2^{\mathrm{M}}}\right)\right\}(\mathcal{N}_2^{(0)}\lambda_2^{\mathrm{M}}-\mathcal{N}_1^{(0)}\lambda_1^{\mathrm{M}})=0,$$

que nos levam a

$$\mathrm{D}_1'=\mathrm{D}_1\frac{(\mathcal{N}_1^{(0)})^2}{\left(\frac{1}{2\lambda_1^{\mathrm{S}_{11}^T}}+\mathcal{N}_1^{(0)}\right)}\simeq\mathrm{D}_1\mathcal{N}_1^{(0)},$$

$$\mathrm{D}_2'=\mathrm{D}_2\frac{(\mathcal{N}_2^{(0)})^2}{\left(\frac{1}{2\lambda_2^{\mathrm{S}_{22}^T}}+\mathcal{N}_2^{(0)}\right)}\simeq\mathrm{D}_2\mathcal{N}_2^{(0)},$$

$$\bar{\nu}=\frac{(\mathcal{N}_1^{(0)}+\frac{1}{\lambda_1^{\mathrm{F}_{12}}})\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}-\frac{\lambda_2^{\mathrm{F}_{21}^b}}{\lambda_1^{\mathrm{F}_{21}^b}}\mathcal{N}_2^{(0)}},$$

$$\frac{\lambda_1^{\mathrm{M}}}{\lambda_2^{\mathrm{M}}}=\frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}}.$$

Admitindo finalmente $\lambda_1^{\mathrm{M}}\sim\lambda_2^{\mathrm{M}}\sim\lambda_1^{\mathrm{F}_{12}}\sim\lambda_2^{\mathrm{S}_{22}^T}\sim\lambda_2^{\mathrm{S}_{22}^S}\sim 1$ e $\lambda_1^{\mathrm{F}_{21}^b}\sim\lambda_2^{\mathrm{F}_{21}^b}$ obtemos

$$\begin{aligned}f_1\frac{d}{d\bar{t}}\mathcal{N}_1(\bar{t})=&-\mathrm{D}_1\,\mathcal{N}_1(\mathcal{N}_1-\mathcal{N}_1^{(0)})-\\&-f_1\left[\mathcal{N}_1-\mathcal{N}_1^{(0)}\right]+\\&+\mathrm{F}\left\{\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2+(\bar{\nu}+1)\,\mathcal{N}_2-\bar{\nu}\mathcal{N}_1\right\}+\\&+\left\{\mathrm{M}_1\mathcal{N}_1\,(\mathcal{N}_1+1)+\mathrm{M}_2\mathcal{N}_2\,(\mathcal{N}_2+1)\right\}(\mathcal{N}_2-\mathcal{N}_1\frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}}),\end{aligned}\tag{D.9}$$

e

$$
\begin{aligned}
f_2 \frac{d}{d\bar{t}} \mathcal{N}_2(\bar{t}) = \mathrm{I}\,(1 + 2\mathcal{N}_2) + \\
&- \mathrm{D}_2\, \mathcal{N}_2 (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2^{(0)}) - \\
&- f_2 \left[ \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2^{(0)} \right] - \\
&- \mathrm{F} \left\{ \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 + (\bar{\nu} + 1)\, \mathcal{N}_2 - \bar{\nu} \mathcal{N}_1 \right\} - \\
&- \left\{ \mathrm{M}_1 \mathcal{N}_1 \left( \mathcal{N}_1 + 1 \right) + \mathrm{M}_2 \mathcal{N}_2 \left( \mathcal{N}_2 + 1 \right) \right\} (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1 \frac{\mathcal{N}_2^{(0)}}{\mathcal{N}_1^{(0)}}).
\end{aligned}
\tag{D.10}
$$

# Referências Bibliográficas


1 BLOCH, F. Zur theorie des ferromagnetismus. *Z. Physik*, v. 61, p. 206, 1930.

2 HOLSTEIN, T.; PRIMAKOFF, H. Field dependence on the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet. *Phys. Rev.*, v. 58, p. 869–880, 1940.

3 KEFFER, F. Spin waves. In: FLÜGGE, S. (Ed.). *Handbuch der Physik*. Berlin: Springer-Verlag, 1966. XVIII/2, Ferromagnetismus, p. 1–268.

4 AKHIEZER, A. I.; BAR'YAKHTAR, V. G.; PELETMINSKII, S. V. *Spin Waves*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1968. (North-Holland Series in Low Temperature Physics, v. 1).

5 DEMOKRITOV, S. O. et al. Bose-Einstein condensation of quasi-equilibrium magnons at room temperature under pumping. *Nature*, v. 443, p. 430–433, 2006.

6 DEMIDOV, V. E. et al. Thermalization of a parametrically driven magnon gas leading to Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 99, p. 037205, 2007.

7 DZYAPKO, O. et al. Quasiequilibrium gas of magnons with a nonzero chemical potential: A way to Bose-Einstein condensation. *J. Appl. Phys.*, v. 101, p. 09C103, 2007.

8 DZYAPKO, O. et al. Direct observation of Bose-Einstein condensation in a parametrically driven gas of magnons. *New J. Phys.*, v. 9, p. 64, 2007.

9 DEMOKRITOV, S. O. et al. Quantum coherence due to Bose-Einstein condensation of parametrically driven magnons. *New J. Phys.*, v. 10, p. 045029, 2008.

10 DEMIDOV, V. E. et al. Observation of spontaneous coherence in Bose-Einstein condensate of magnons. *Phys. Rev. Lett.*, v. 100, n. 4, p. 047205, 2008.

11 DZYAPKO, O. et al. Monochromatic microwave radiation from the system of strongly excited magnons. *Appl. Phys. Lett.*, v. 92, n. 19, p. 162510, 2008.

12 TUPITSYN, I. S.; STAMP, P. C. E.; BURIN, A. L. Stability of Bose-Einstein condensates of hot magnons in yttrium iron garnet films. *Phys. Rev. Lett.*, v. 100, p. 257202, 2008.

13 REZENDE, S. M. Theory of coherence in Bose-Einstein condensation phenomena in a microwave-driven interacting magnon gas. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, v. 79, n. 17, p. 174411, 2009.

14 MALOMED, B. A. et al. Ginzburg-Landau model of Bose-Einstein condensation of magnons. *Phys. Rev. B*, v. 81, n. 2, p. 024418, 2010.

15 DZYAPKO, O. et al. Excitation of two spatially separated Bose-Einstein condensates of magnons. *Phys. Rev. B*, v. 80, n. 6, p. 060401, 2009.

16 LUZZI, R.; VASCONCELLOS, A. R.; RAMOS, J. G. *Predictive Statistical Mechanics: A Non-equilibrium Ensemble Formalism*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, 2002. (Fundamental Theories of Physics, v. 122).

17 LUZZI, R.; VASCONCELLOS, A. R.; RAMOS, J. G. The theory of irreversible processes: Foundations of a non-equilibrium statistical ensemble formalism. *Rivista Nuovo Cimento*, v. 29, n. 2, p. 1–82, 2006.

18 ZUBAREV, D. N.; MOROZOV, V.; RÖPKE, G. *Statistical Mechanics of Non-equilibrium Processes*: Volume 1: Basic concepts, kinetic theory. Berlin, Germany: Akademie Verlag-Wiley VCH, 1996.

19 ZUBAREV, D. N.; MOROZOV, V.; RÖPKE, G. *Statistical Mechanics of Non-equilibrium Processes*: Volume 2: Relaxation and hydrodynamic processes. Berlin, Germany: Akademie Verlag-Wiley VCH, 1997.

20 AKHIEZER, A. I.; PELETMINSKII, S. V. *Methods of Statistical Physics*. Oxford, UK: Pergamon, 1981.

21 MCLENNAN, J. A. Statistical theory of transport processes. In: *Advances in Chemical Physics*. New York, USA: Academic, 1963. v. 5, p. 261–317.

22 FRÖHLICH, H. Long range coherence and the action of enzymes. *Nature*, v. 228, p. 1093–1093, 1970.

23 FRÖHLICH, H. The biological effects of microwaves and related questions. *Adv. Electronics Electron Phys.*, v. 53, p. 88–192, 1980.

24 MESQUITA, M. V.; VASCONCELLOS, A. R.; LUZZI, R. Selective amplification of coherent polar vibrations in biopolymers. *Phys. Rev. E*, v. 48, p. 4049–4059, 1993.

25 FONSECA, A. F. et al. Informational-statistical thermodynamics of a complex system. *J. Chem. Phys.*, v. 112, p. 3967–3979, 2000.

26 LU, J.; HEHONG, Z.; GREENLEAF, J. Biomedical ultrasound beam forming. *Ultrasound Med. Biol.*, v. 20, p. 403–428, 1994.

27 MESQUITA, M. V.; VASCONCELLOS, A. R.; LUZZI, R. Solitons in highly excited matter: Dissipative-thermodynamic and supersonic effects. *Phys. Rev. E*, v. 58, p. 7913–7923, 1998.

28 MYSYROWICS, A.; BENSOM, E.; FORTIN, E. Directed beams of excitons produced by stimulated scattering. *Phys. Rev. Lett.*, v. 77, p. 896–899, 1996.

29 MESQUITA, M. V.; VASCONCELLOS, A. R.; LUZZI, R. "Excitoner": Stimulated amplification and propagation of excitons beams. *Europhys. Lett.*, v. 49, p. 637–643, 2000.

30 KENT, A. J. et al. Acoustic phonon emission from a weakly coupled superlattice. *Phys. Rev. Lett.*, v. 96, p. 215504, 2006.

31 WHITE, R. M. *Quantum Theory of Magnetism*. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1983. (Springer Series in Solid-State Sciences, v. 32).

32 CASPERS, W. J. *Spin Systems*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1989.

33 MATTIS, D. C. *The Theory of Magnetism*. New York: Harper and Row, 1965.

34 HARRIS, A. B. Spin-wave spectra of yttrium and gadolinium iron garnet. *Phys. Rev.*, v. 132, n. 6, p. 2398–2409, 1963.

35 CHEREPANOV, V.; KOLOKOLOV, I.; L'VOV, V. The saga of YIG: Spectra, thermodynamics, interaction and relaxation of magnons in a complex magnet. *Physics Reports*, v. 229, n. 3, p. 81 – 144, 1993.

36 KREISEL, A. et al. Microscopic spin-wave theory for yttrium-iron garnet films. *Eur. Phys. J. B*, v. 71, p. 59–68, 2009.

37 BERESTETSKII, V. B.; LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. *Quantum Eletrodynamics*. 2. ed. Oxford: Butterworth Heinemann, 1982. (Course of Theoretical Physics, v. 4).

38 VANNUCCHI, F. S.; VASCONCELLOS, A. R.; LUZZI, R. Thermo-statistical theory of kinetic and relaxation processes. *Int. J. Mod. Phys B*, v. 23, n. 27, p. 5283–5305, 2009.

39 BOGOLIUBOV, N. N. Problems of a dynamical theory in statistical physics. In: BOER, J. de; UHLENBECK, G. E. (Ed.). *Studies in Statistical Mechanics I*. Amsterdam, The Netherlands: North Holland, 1962.

40 LUZZI, R. et al. Characterization and measurement of a nonequilibrium temperature-like variable in irreversible thermodynamics. *Physica A*, v. 234, n. 3-4, p. 699–714, 1997.

41 LUZZI, R. et al. Thermodynamic variables in the context of a nonequilibrium ensemble formalism. *J. Chem. Phys*, v. 107, p. 7383–7396, 1997.

42 LUZZI, R. et al. On the selection of the state space in nonequilibrium thermodynamics. *Physica A*, v. 248, p. 111–137, 1998.

43 KIM, D.; YU, P. Y. Phonon temperature overshoot in GaAs excited by subpicosecond laser pulses. *Phys. Rev. Lett.*, v. 64, p. 946–949, 1990.

44 ALGARTE, A.; VASCONCELLOS, A.; LUZZI, R. Kinetics of hot elementary excitations in photoexcited polar semiconductors. *Phys. Stat. Sol. (b)*, v. 173, p. 487–514, 1992.

45 KRYLOV, N. S. *Works on the Foundations of Statistical Mechanics*. Princeton, USA: Princeton Univ. Press, 1979. With an Introduction by A. B. Migdal and V. A. Fock.

46 KIRKWOOD, J. G. The statistical mechanical theory of transport processes. *J. Chem. Phys.*, v. 14, p. 180–201, 1946.

47 MADUREIRA, J. R. et al. Markovian kinetic equations in a nonequilibrium statistical ensemble formalism. *Phys. Rev. E*, v. 57, p. 3637–40, 1998.

48 MORI, H. Transport, collective motion, and Brownian motion. *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, v. 33, p. 423–45, 1965.

49 LAUCK, L.; VASCONCELLOS, A. R.; LUZZI, R. A non-linear quantum transport theory. *Physica A*, v. 168, p. 789–819, 1990.

50 COURANT, R.; HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics*. New York. USA: Wiley-Interscience, 1953.

51 LIVSHITS, A. M. Participation of coherent phonons in biological processes. *Biofisika*, v. 17, n. 4, p. 694–695, 1972.

52 ELCI, A. et al. Ultrafast transient response of solid-state plasmas. I. Germanium, theory, and experiment. *Phys. Rev. B*, v. 16, n. 1, p. 191–221, 1977.

53 COLLET, J.; AMAND, T.; PUGNET, M. Numerical approach to non-equilibrium carrier relaxation in picosecond and subpicosecond physics. *Physics Letters A*, v. 96, n. 7, p. 368 – 374, 1983.

54 AMAND, T.; COLLET, J. Plasma dynamics in GaAs under strong picosecond surface excitation. *J. Phys. Chem. Sol.*, v. 46, n. 9, p. 1053 – 1059, 1985.

55 AGUIAR, F. M. de; REZENDE, S. M. Observation of subharmonic routes to chaos in parallel-pumped spin waves in yttrium iron garnet. *Phys. Rev. Lett.*, v. 56, n. 10, p. 1070–1073, 1986.

56 ZHANG, X. Y.; SUHL, H. Theory of auto-oscillations in high-power ferromagnetic resonance. *Phys. Rev. B*, v. 38, n. 7, p. 4893–4905, 1988.

57 LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. *Statistical Physics. Part 2: Theory of the condensed state*. 1. ed. Oxford: Butterworth Heinemann, 2004. (Course of Theoretical Physics, v. 9).

58 HUBER, D. L. Yttrium and rare earth iron garnets. In: HELLWEGE, K. H.; HELLWEGE, A. M. (Ed.). *Landolt-Börnstein - Group III Condensed Matter*. Berlin : Heidelberg, Germany: Springer, 1970, (LANDOLT-BÖRNSTEIN: numerical data and functional relationships in science and technology: new series, v. 4a). p. 315–359.

59 DEMIDOV, V. E. et al. Magnon kinetics and Bose-Einstein condensation studied in phase space. *Phys. Rev. Lett.*, v. 101, n. 25, p. 257201, 2008.

60 DEMOKRITOV, S. O.; HILLEBRANDS, B.; SLAVIN, A. N. Brillouin light scattering studies of confined spin waves: linear and nonlinear confinement. *Phys. Rep.*, v. 348, p. 441–489, 2001.

61 COTTAM, M.; LOCKWOOD, D. *Light Scattering in Magnetic Solids*. New York, USA: Wiley, 1986.