

Como Presidente da Banca Examinadora declaro
que este exemplar corresponde à redação final
da tese tendo sido defendida pelo aluno e
aprovada pela Comissão julgadora.

João Fuca P. D. Azevedo
Campinas, 12 de janeiro de 1987.

MODELO DE UM GAS DE BURACOS NEGROS SUJEITO A UM CAMPO GRAVITACIONAL DE FUNDO PARA NÚCLEOS ATIVOS DE GALAXIAS COM APLICAÇÃO AO CÁLCULO DOS ESPECTROS CONTÍNUOS DE EMISSÃO DE PARTÍCULAS DE MASSA NULA (FÓTONS, NEUTRINOS E GRAVITONS).

ANTONIO PINTO NETO

Orientador: Prof^o Dr. José Inácio Cotrim Vasconcellos

Tese apresentada no Instituto de Física "Gleb Wataghin" da UNICAMP como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Janeiro/87

A minha tia

Nantilde dos Anjos

. Agradecimentos

Ao Prof^o Dr. José Inácio Cotrim Vasconcellos pela orientação e amizade a mim dedicadas durante este trabalho.

Aos amigos do Grupo de Espectroscopia óptica, Astrofísica e Sistemas Dispersos pelo apoio, amizade e clima de trabalho que muito contribuiu para que essa tese fosse levada a termo.

A Universidade Federal do Maranhão pela concessão de bolsa CAPES-PICD, e em especial aos professores do Departamento de Física pelo estímulo e apoio dispensados durante minha Graduação.

A CAPES pelo apoio financeiro.

INDICE

	pag
Resumo	01
Capítulo I	02
* Introdução Geral	
Capítulo II	06
* O Formalismo da Relatividade Geral e as Equações de Campo	
Capítulo III	23
* Colapso Gravitacional, Buracos Negros, Buracos negros primordiais e Termodinâmica de Buracos Negros	
- Introdução	23
- Colapso Gravitacional	23
- Colapso Gravitacional de uma Estrela	26
- Colapso Gravitacional de Objetos com pouca Massa	40
- Termodinâmica de Buracos Negros	42
Capítulo IV	52
* Em Direção a um Modelo de um Gás de Buracos Negros em Interação em um Campo Gravitacional de Fundo	
- Introdução	52
- Considerações Gerais	53

- Equações de Movimento de uma Partícula Monopolo	54
- Equações de uma Partícula Polo-dipolo	57
- Cenários	64
Capítulo V	68
* Buracos Negros e Modelos de Núcleos Ativos de Galáxias	
- Introdução e Fenomenologia	68
- Modelos para Núcleos Ativos de Galáxias	77
Capítulo VI	90
* Modelo de um Gás de Buracos Negros movendo-se contra um Campo Gravitacional de Fundo Aplicado a Núcleos Ativos de Galáxias	
- Introdução	90
- A Emissão de Partículas por um Buraco Negro	90
- O Espectro de Emissão de um Buraco Negro	92
- Modelo para Núcleos Ativos de Galáxias - O Espectro de um Gás de Buracos Negros	106
Capítulo VII	130
* Considerações Finais e Perspectivas Futuras	
Referências	Re-01
Apêndice A	Ap-01
* Relação entre J_{uv} e T_{uv}^{λ}	

Apêndice B

Ap-05

*** Análise Tensorial**

Apêndice C

Ap-15

*** Propriedades Algébricas do Tensor Curvatura de Riemann-Christoffel**

Apêndice D

Ap-19

*** O Limite Newtoniano**

Resumo

Apresentamos neste trabalho, um novo modelo teórico para Núcleos Ativos de Galáxias que descreve o espectro contínuo de partículas de massas de repouso nulas (fótons, neutrinos e grávitons) no intervalo de frequências desde o rádio até raios γ . O modelo consiste em um gás de buracos negros em interação com um campo gravitacional de fundo.

Os modelos anteriormente proposto para os Núcleos Ativos de Galáxias, sejam aqueles que admitem um buraco negro supermassivo no centro da galáxia (modelos de Lynden-Bell e Hills), seja o modelo de um gás ideal de buracos negros na ausência de campos gravitacionais de fundo (MGBN) proposto por Vasconcellos-Guerra são também expostos.

Toda a fundamentação teórica baseada na Teoria Geral da Relatividade de Einstein para a definição e estudo das propriedades das singularidades (buracos negros), sejam como um dos possíveis estados terminais da evolução estelar, sejam na forma de buracos negros primordiais são também apresentados.

Capítulo I

Introdução Geral

Um dos problemas mais importantes na Astrofísica atual está relacionado com os possíveis processos físicos de produção de enormes energias de radiação eletromagnética emitidas por certos objetos astronômicos, associados a Núcleos Ativos de Galáxias. Quasares, galáxias Seyfert e objetos Bl Lac inserem-se nesses problemas (01).

Qual (ou quais) seria o mecanismo de emissão eletromagnética mais eficaz para produzir energias da ordem de 10^{47} erg/seg, sete ordens de grandeza superiores a uma das maiores galáxias denominadas normais? Esse foi um problema desde a descoberta dos quasares em 1960, e a compreensão da natureza do espectro de linhas do objeto 3C 273 na região do visível em 1963, por M. Schmidt (02), que esteve sempre intrinsecamente ligado ao próprio problema da natureza desses objetos e da distância que os separa de nós. De fato, tal problema tem implicações cosmológicas importantes, visto que se admitirmos que o Universo efetivamente se expande e o deslocamento para o vermelho das linhas espectrais está de fato associado a tal expansão, os quasares não seriam apenas os objetos mais distantes de nós, como poderiam inclusive dar informações observacionais compatíveis com uma possível distinção (e portanto, escolha) entre diferentes modelos cosmológi-

cos.

O estudo de tais objetos tem consequências importantes para a dinâmica de galáxias e para o estudo de sua formação e evolução, se pensarmos nos mesmos como estágios mais primitivos das galáxias normais. O estudo observacional desses objetos tem sido enfaticamente intensificado nos últimos anos. Basta mencionar que o primeiro objeto foi identificado em 1960 (3C 48), em 1967 já a primeira listagem realizada por Burbidge e Burbidge já enumerava 148 objetos (03) e o último catálogo de tais objetos preparado por M-P Véron-Cetty e P. Veron que data de janeiro de 85 (04) aponta 2855 quasares e 739 galáxias ativas das quais 236 são Seyfert I, 73 são B1 Lac, e o restante são Seyfert II e Lyners. Em recente preprinte do European Southern Observatory (nº 381 - julho de 85), Barbieri e Cristiani, apresentam um apanhado no campo de S.A. 94 ($2^h 53^m + 0^\circ 20'$) com placas do telescópio Schmidt UK com objetiva prisma, selecionando 208 possíveis novos candidatos a quasares em 39 graus quadrados.

Com isto, podemos adquirir uma idéia do crescimento desse campo de pesquisa e da demanda de novas idéias para a interpretação teórica dos novos objetos e fenômenos estudados.

Esta tese trata de modelos teóricos para Núcleos Ativos de Galáxias que procuram descrever os espectros contínuos de emissão de radiação eletromagnética (fótons), de grávitons e de neutrinos, ou seja, os espectros contínuos de emissão dessas partículas de massa nula desde a região do rádio até as frequências de raio γ .

Apresentamos duas classes gerais de modelos:

a - O núcleo ativo da galáxia é constituído de apenas um buraco negro supermassivo; os modelos de Lynden-Bells (05) e Hills (06) são discutidos.

b - O núcleo ativo da galáxia é constituído de um gás de buracos negros; Vasconcellos-Guerra e uma nova versão deste, com um campo gravitacional de fundo.

O modelo de um gás de buracos negros (MGBN) foi proposto por Vasconcellos-Guerra (07) e consiste basicamente em substituir o buraco negro supermassivo dos modelos de Lynden-Bell e Hills por um gás de mini-buracos negros, sem interação entre si (aproximação de gás ideal). A radiação de Hawking é o mecanismo responsável pelo espectro contínuo de emissão de radiação eletromagnética (fótons). O gás de buracos negros apresenta uma distribuição de velocidades de Synge (08) e uma distribuição de massas deduzidas pelo modelo. Na presente tese, tal modelo é aperfeiçoado de modo a incluir a interação de cada buraco negro do gás com um campo gravitacional de fundo, e abre também a possibilidade de explorar modelos de gases não ideais de buracos negros (embora por questões de brevidade, isso seja apenas indicado).

Os buracos negros no modelo original de Vasconcellos-Guerra eram de Schwarzschild enquanto que na presente versão esses são considerados do tipo Kerr. O espectro de emissão contínua de grávitons e neutrinos também são calculados sem a presença do campo gravitacional de fundo e com a presença do campo gravitacional de fundo para fótons, grávitons e neutrinos. As diferenças entre os espectros de emissão com e sem campo gravitacional de fundo são também apresentados, a fim de evidenciar mais claramen-

te os efeitos do campo gravitacional externo nos espectros de emissão contínua.

No capítulo II, o formalismo da Relatividade Geral e o conceito de curvatura são discutidos, bem como as equações de campo de Einstein. No capítulo III, o fenômeno do colapso gravitacional à luz da Teoria de Gravitação de Einstein é apresentado. Parte-se da consideração do colapso gravitacional de uma estrela e discute-se também o colapso gravitacional de objetos com pouca massa (buracos negros primordiais). A Termodinâmica de Buracos Negros também é examinada nesse capítulo. O capítulo IV é dedicado à elaboração do modelo de interação de cada buraco negro com um campo gravitacional de fundo. No capítulo V, é exposta brevemente a fenomenologia dos Núcleos Ativos de Galáxias (em especial, do quasar 3C 273) e os modelos de Lynden-Bell e Hills. No capítulo VI, o modelo de um gás de buracos negros de Vasconcellos-Guerra, o modelo de emissão de partículas por um gás de buracos negros e o espectro de emissão de um buraco negro são apresentados inicialmente. Então, o estudo relativo ao espectro contínuo de emissão de partículas de massa nula na presença de um campo gravitacional de fundo aplicado ao núcleo ativo de uma galáxia é exposto em todos os seus detalhes. O capítulo VII apresenta nossas considerações finais e algumas perspectivas futuras. Nos apêndices A, B, C e D, tópicos de Relatividade Geral necessários para uma devida apresentação do texto são apresentados, destacando-se uma breve discussão de Análise Tensorial no apêndice B.

Capítulo II

O Formalismo da Relatividade Geral e as Equações de Campo.

Em seu livro 'Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica' (1686), Newton apresentou as Leis da Mecânica e da Gravitação (09).

Usando a 2ª Lei vemos que a força exercida sobre um corpo é proporcional a massa do corpo sobre o qual esta atua. Da Lei de Gravitação, esta força também é proporcional à massa que atua como fonte. Isto é, podemos definir a força de duas formas:

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \quad (\text{II-1})$$

e

$$\vec{F} = m_g \vec{g} \quad (\text{II-2})$$

onde:

m_i é a massa inercial

m_g é a massa gravitacional

\vec{a} é a aceleração do corpo

\vec{g} é a aceleração da gravidade

assim, a aceleração desse corpo é dada por:

$$\vec{a} = \left(\frac{m_g}{m_i} \right) \vec{g} \quad (\text{II-3})$$

Para detectar a diferença entre as massas inercial e gravitacional, Newton realizou uma série de experimentos com pêndulos de diferentes materiais. Entretanto por não encontrar qualquer diferença, concluiu que estas seriam iguais. Outros tipos de experimentos com o objetivo de detectar essa diferença são dados na referência (10). Essa igualdade numérica contribuiu mais tarde para que Einstein formulasse o Princípio de Equivalência, como veremos posteriormente.

Newton enuncia suas Leis em um sistema de referência denominado 'referencial inercial'. Essas Leis são invariantes por uma transformação do tipo:

$$X' = R \vec{X} + \vec{V}t + \vec{D}$$

$$t' = t + \tau$$

(II-4-a)

onde \vec{V} , \vec{D} e τ são constantes e R uma matriz real ortogonal. Isso é conhecido como Princípio de Relatividade de Galileu e Newton e a transformação como Transformação de Galileu.

Com o desenvolvimento da Eletrodinâmica Clássica por Maxwell (1864), foi demonstrado que a luz é uma radiação eletromagnética cuja velocidade de propagação no vácuo é uma constante c . O fato das equações do Eletromagnetismo não obedecerem ao Princípio de Galileu, levou Einstein a propor (1905) (11) que as Leis da Física sejam invariantes por uma transformação que mantenha as equações do Eletromagnetismo e a velocidade da luz invariantes, e a reformular a Mecânica Newtoniana, de modo que, também fique invariante por esta transformação. Esta transforma-

ção é conhecida como Transformação de Lorentz. O postulado que afirma que as Leis da Física são invariantes por uma Transformação de Lorentz é conhecido como Princípio de Relatividade Especial. A Transformação de Lorentz é uma transformação do tipo:

$$X'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} X^{\beta} + a^{\alpha} \quad (\text{II-4-b})$$

onde a^{α} e Λ_{β}^{α} são constantes que satisfazem as condições:

$$\Lambda_{\nu}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\nu\delta} \quad (\text{II-5-a})$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{SE } \alpha = \beta = 1, 2 \text{ ou } 3 \\ -1 & \text{SE } \alpha = \beta = 0 \\ 0 & \text{SE } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (\text{II-5-b})$$

A propriedade fundamental da Transformação de Lorentz é que esta deixa invariante o tempo próprio, definido por:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &\equiv dt^2 - dx^2 \\ &= -\eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = d\tau'^2 \end{aligned}$$

Seja uma partícula em repouso em relação a um observador O e com velocidade V constante em relação a outro observador O'. De (II-4-b),

$$dx'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} dx^{\beta}$$

então

$$dx'^i = \Lambda_0^i dt \quad (\text{II-7})$$

$$dt' = \Lambda^0 dt$$

(II-8)

diferenciando (II-7) por dt'

$$\frac{dx'^i}{dt'} = \Lambda^i_0 \frac{dt}{dt'}$$

$$v_i = \frac{\Lambda^i_0}{\Lambda^0_0}$$

$$\Lambda^i_0 = v_i \Lambda^0_0$$

(II-9)

de (II-5) com $\gamma = \delta = 0$, temos

$$\begin{aligned} -1 &= \Lambda^{\alpha}_0 \Lambda^{\beta}_0 \eta_{\alpha\beta} \\ &= \sum_i (\Lambda^i_0)^2 - (\Lambda^0_0)^2 \\ &= \left[\sum_i v_i^2 - 1 \right] (\Lambda^0_0)^2 \end{aligned}$$

e

$$\Lambda^0_0 = \frac{1}{[1 - v^2]}^{1/2} \equiv \gamma$$

de (II-9),

$$\Lambda^i_0 = v_i \gamma$$

Os outros Λ^{β}_{α} não são unicamente determinados porque se Λ^{β}_{α} leva uma partícula do repouso a uma velocidade V , então, $\Lambda^{\alpha}_{\gamma} R^{\gamma}_{\beta}$ também leva, onde R é uma rotação arbitrária. Uma escolha conveniente que satisfaz (II-4-b) é dada por:

$$\Lambda^i_{\gamma} = \delta_{i\gamma} + v_i v_{\gamma} \frac{(\gamma - 1)}{v^2}$$

$$\Lambda^0_{\gamma} = \gamma v_{\gamma}$$

Com o Princípio de Equivalência (1907) (12), Einstein

generalizou sua Teoria de modo a considerar também referenciais acelerados. Tal Princípio descreve o comportamento de um sistema físico arbitrário sobre a ação de um campo gravitacional externo e está baseado na igualdade entre as massas inercial e gravitacional. Como consequência desse fato, Einstein deduziu que nenhum campo gravitacional homogêneo e estático poderia ser detectado em um elevador em queda livre, pois, para os observadores, seus corpos de prova e o próprio elevador responderiam ao campo com a mesma aceleração.

O Princípio de Equivalência não se restringe a campos gravitacionais homogêneos e estáticos. Embora as forças inerciais não cancelem exatamente as forças gravitacionais inhomogêneas ou dependentes do tempo, podemos esperar um cancelamento aproximado se restringirmos nossa atenção a uma região tão pequena no espaço-tempo que a variação do campo seja desprezível.

Vale a pena observar a analogia entre o Princípio de Equivalência e o axioma que Gauss tomou como base na Geometria não-Euclidiana. O Princípio de Equivalência afirma que em qualquer ponto no espaço-tempo podemos construir um sistema de coordenadas localmente inercial em que a matéria satisfaz as Leis da Relatividade Especial. Em seu axioma, Gauss assumiu que em qualquer ponto em um espaço curvo, podemos construir um sistema de coordenadas cartesianas em que seja válido o Teorema de Pitágoras. Vemos daí, que deve haver uma estreita analogia entre as Leis da Gravitação e a Geometria não-Euclidiana (Geometria Riemanniana).

Conforme o Princípio de Equivalência, uma partícula mo-

vendo-se livremente sob a ação de forças de natureza puramente gravitacional, existe um sistema de referência ξ^α , em queda livre, em relação ao qual sua equação de movimento é uma reta:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (\text{II-11})$$

onde $d\tau$ é o tempo próprio

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (\text{II-12})$$

Consideremos agora, um outro sistema de coordenadas X^μ , que pode ser cartesiano, em repouso no laboratório, como também pode ser curvilíneo, acelerado, em rotação, ou em movimento arbitrário. Os sistemas de coordenadas ξ^α em queda livre são funções de X^μ . Assim, de (II-11), temos:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial X^\mu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \right) = 0 \quad \text{OU AINDA}$$

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial X^\mu} \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial X^\mu \partial X^\nu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} = 0$$

Multiplicando por $\partial X^\lambda / \partial \xi^\alpha$ e usando que

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial X^\mu} \frac{\partial X^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_{\mu}^{\lambda} \quad (\text{II-13})$$

obtemos que a equação de movimento é

$$\frac{d^2 X^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{II-14})$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ é a conexão afim, definida por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{\partial X^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial X^\mu \partial X^\nu} \quad (\text{II-15})$$

O tempo próprio, equação (II-12), em um sistema de coordenadas arbitário, é dado por

$$dT^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, definido como

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{II-16})$$

Os valores do tensor métrico e da conexão afim em um ponto X , em um sistema de coordenadas arbitário X^μ , fornecem informações suficientes para determinar o sistema de coordenadas localmente inercial $\xi^\alpha(x)$, nas vizinhanças de X .

De (II-15), temos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

multiplicando por $\partial \xi^\beta / \partial x^\lambda$ e utilizando a relação (II-13), obtemos

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}$$

cuja solução é dada por:

$$\xi^\alpha(x) = a^\alpha + b_\mu^\alpha (x^\mu - X^\mu) + \frac{1}{2} b_\lambda^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (x^\mu - X^\mu) \cdot (x^\nu - X^\nu) + \dots$$

onde

$$a^\alpha = \xi^\alpha(X) \quad \text{e} \quad b_\lambda^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}(X)$$

De (II-16), vemos que:

$$g_{\mu\nu}(X) = \eta_{\alpha\beta} b_{\mu}^{\alpha} b_{\nu}^{\beta}$$

assim, dados $\vec{T}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ em X , as coordenadas localmente inerciais são determinadas até a ordem de $(x - X)^2$, a menos na ambiguidade nas constantes a^{α} e b_{λ}^{α} . Esse comportamento reflete o fato de que se ξ^{α} são coordenadas localmente inerciais, também o serão $\Lambda_{\beta}^{\alpha} \xi^{\beta} + c^{\alpha}$. Isto é, $\vec{T}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ determinam as coordenadas localmente inerciais ξ^{α} a menos de uma Transformação de Lorentz inhomogênea. Como o campo gravitacional não pode produzir nenhum efeito no sistema de coordenadas localmente inercial, todos os efeitos gravitacionais estão contidos em $\vec{T}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$.

Até agora em nossa análise sobre partículas em queda livre, vimos que o campo que determina a força gravitacional é a conexão afim, enquanto o tensor métrico determina o intervalo de tempo próprio entre dois eventos. Mostramos no Apêndice A, que podemos determinar o campo $\vec{T}_{\mu\nu}$ em termos das derivadas do tensor métrico

$$\vec{T}_{\lambda\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right\}$$

Dessa equação, vemos que $g_{\mu\nu}$ é também o potencial gravitacional. Nesse mesmo Apêndice, mostra-se que uma partícula caindo livremente em um campo gravitacional descreve uma curva denominada geodésica.

Um outro modo de introduzirmos os efeitos da Gravitação em sistemas físicos é usando o Princípio de Covariância Geral, que consiste em uma versão alternativa do Princípio de Equivalência.

O Princípio de Covariância Geral afirma que uma equação

é válida em um campo gravitacional arbitrário se:

1ª-esta equação é válida na ausência da gravitação, isto é, concorda com as Leis da Relatividade Especial quando a métrica $g_{\mu\nu}$ é igual ao tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ e a conexão afim $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ se anula;

2ª-esta equação é covariante, isto é, preserva sua forma por uma transformação geral de coordenadas $x \rightarrow x'$.

No Apêndice B fazemos um sumário da Análise Tensorial necessária ao nosso desenvolvimento.

Nosso próximo passo é construir um tensor usando a métrica e suas derivadas. Ao tentarmos construir um tensor usando apenas a métrica e suas derivadas primeiras, nosso intento é frustrado pois em qualquer ponto podemos encontrar um sistema de coordenadas em que suas derivadas primeiras se anulam. Consequentemente, esse tensor será função apenas da métrica e isso será válido em todos os sistemas de coordenadas. Uma outra possibilidade é tentarmos construir esse tensor usando o tensor métrico e suas derivadas primeira e segunda. Da regra de transformação da conexão afim, Apêndice B, temos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

que pode ser escrito como:

$$\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}$$

Derivando parcialmente em relação a x^k , temos:

$$\frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^k \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \left[\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\eta}} \Gamma_{k\lambda}^{\eta} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^k} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \Gamma_{\rho\sigma}^{i\tau} \frac{\partial X^{i\rho}}{\partial X^\mu} \left[\frac{\partial X^{i\sigma}}{\partial X^\eta} \Gamma_{\kappa\nu}^\eta - \frac{\partial X^{i\eta}}{\partial X^\kappa} \frac{\partial X^{i\sigma}}{\partial X^\nu} \Gamma_{\eta\xi}^{i\sigma} \right] + \\
& - \Gamma_{\rho\sigma}^{i\tau} \frac{\partial X^{i\sigma}}{\partial X^\nu} \left[\frac{\partial X^{i\rho}}{\partial X^\eta} \Gamma_{\kappa\mu}^\eta - \frac{\partial X^{i\eta}}{\partial X^\kappa} \frac{\partial X^{i\sigma}}{\partial X^\mu} \Gamma_{\eta\xi}^{i\rho} \right] + \\
& + \frac{\partial X^{i\tau}}{\partial X^\lambda} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial X^\kappa} - \frac{\partial X^{i\rho}}{\partial X^\mu} \frac{\partial X^{i\sigma}}{\partial X^\nu} \frac{\partial X^{i\eta}}{\partial X^\kappa} \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{i\tau}}{\partial X^{i\eta}}
\end{aligned}$$

rearranjando os termos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 X^{i\tau}}{\partial X^\kappa \partial X^\mu \partial X^\nu} &= \frac{\partial X^{i\tau}}{\partial X^\lambda} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial X^\kappa} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda \right] + \\
& - \frac{\partial X^{i\rho}}{\partial X^\mu} \frac{\partial X^{i\sigma}}{\partial X^\nu} \frac{\partial X^{i\eta}}{\partial X^\kappa} \left[\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{i\tau}}{\partial X^{i\eta}} - \Gamma_{\rho\lambda}^{i\tau} \Gamma_{\eta\sigma}^\lambda - \Gamma_{\lambda\sigma}^{i\tau} \Gamma_{\eta\rho}^\lambda \right] + \\
& - \Gamma_{\rho\sigma}^{i\tau} \frac{\partial X^{i\sigma}}{\partial X^\lambda} \left[\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial X^{i\rho}}{\partial X^\kappa} + \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda \frac{\partial X^{i\rho}}{\partial X^\mu} + \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda \frac{\partial X^{i\rho}}{\partial X^\nu} \right]
\end{aligned}$$

tomando a equação acima com μ e κ permutados e subtraindo essas equações, encontramos que:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial X^{i\tau}}{\partial X^\lambda} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial X^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial X^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \right] + \\
& - \frac{\partial X^{i\rho}}{\partial X^\mu} \frac{\partial X^{i\sigma}}{\partial X^\nu} \frac{\partial X^{i\eta}}{\partial X^\kappa} \left[\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{i\tau}}{\partial X^{i\eta}} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\eta}^{i\tau}}{\partial X^{i\sigma}} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{i\tau} \Gamma_{\eta\rho}^\lambda + \Gamma_{\lambda\eta}^{i\tau} \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda \right]
\end{aligned}$$

que pode ser escrito da forma

$$R_{\rho\sigma\eta}^{i\tau} = \frac{\partial X^{i\tau}}{\partial X^\lambda} \frac{\partial X^\mu}{\partial X^{i\rho}} \frac{\partial X^\nu}{\partial X^{i\sigma}} \frac{\partial X^\kappa}{\partial X^{i\eta}} R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \quad (\text{II-17})$$

onde $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$, que é o tensor curvatura de Riemann-Christoffel, é definido como:

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial X^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial X^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \quad (\text{II-18})$$

Na ausência da gravitação,

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = 0$$

No Apêndice C descrevemos algumas propriedades do tensor $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$.

Deduziremos agora, as equações que governam os campos gravitacionais - as equações de Einstein. Devido ao fato do campo gravitacional atuar também como fonte, as equações de Einstein serão equações diferenciais parciais não lineares, onde essa não linearidade representa os efeitos da gravitação sobre si mesma.

Dado um ponto X do espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário, podemos definir um sistema de coordenadas localmente inercial, tal que:

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta}$$

$$\left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\nu}} \right]_{x=X} = 0$$

onde, para pontos x próximos de X , o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ difere de $\eta_{\alpha\beta}$ apenas por termos quadráticos em $(x - X)$. Nesse sistema, para pontos próximos de X , o campo gravitacional é fraco e as equações diferenciais parciais lineares. Uma vez determinadas as equações de campos fracos, fazemos o procedimento inverso, determinando assim as equações para campos gravitacionais fortes.

Seja ρ a densidade de matéria não relativista. A componente tempo-tempo do tensor métrico é dada por

$$g_{00} \cong -(1 + 2\Phi) \quad (\text{II-19})$$

(Apêndice D), onde Φ é o potencial newtoniano que é solução da equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (\text{II-20})$$

Entretanto, a densidade de energia para a matéria não relativista T_{00} é sua densidade de matéria ρ .

$$T_{00} \equiv \rho \quad (\text{II-21})$$

Substituindo (II-19) e (II-21) em (II-20), vemos que:

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00} \quad (\text{II-22})$$

essa equação leva-nos a admitir que para uma distribuição geral $T_{\alpha\beta}$ de momento e energia, seja:

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta} \quad (\text{II-23})$$

onde $G_{\alpha\beta}$ é uma combinação linear da métrica e suas derivadas primeira e segunda. Do Princípio de Equivalência, as equações para campos gravitacionais de intensidade arbitrária, tomam a forma:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (\text{II-24})$$

onde $G_{\mu\nu}$ é um tensor que se reduz a $G_{\alpha\beta}$ para campos fracos.

Para construirmos as equações de campo devemos observar que:

1º- por definição, $G_{\mu\nu}$ é um tensor;

2º- admitimos que $G_{\mu\nu}$ consiste apenas de termos que ou são quadráticos nas derivadas primeiras ou lineares nas derivadas segundas da métrica;

3º- como $T_{\mu\nu}$ é simétrico, $G_{\mu\nu}$ também é simétrico;

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$$

4º-como $T_{\mu\nu}$ é conservado (no sentido de diferenciação covariante) $G_{\mu\nu}$ também é conservado;

$$G^{\mu}_{\nu};_{\mu} = 0$$

5º-para campos gravitacionais fracos produzidos por matéria não relativista

$$G_{00} \cong \nabla^2 g_{00}$$

A maneira mais geral de construirmos um campo gravitacional que satisfaz as condições 1º e 2º é através da forma contraída do tensor curvatura $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$. Pela assimetria de $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$, decorre que existe somente dois tensores que podem ser formados pela contração de $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$: o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$$

e a curvatura escalar

$$R \equiv R^{\mu}_{\mu}$$

Assim, escrevemos $G_{\mu\nu}$ como

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \quad (\text{II-25})$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Da identidade de Bianchi, equação (C-14), Apêndice C,

$$G^{\mu}_{\nu};_{\mu} = \left[\frac{C_1}{2} + C_2 \right] R;_{\nu}$$

da 4ª condição temos que ou

$$C_2 = -\frac{C_1}{2} \quad (\text{II-26})$$

ou

$$R_{;\nu} = 0 \quad (\text{II-27})$$

em qualquer lugar. De (II-24) e (II-25), temos

$$\begin{aligned} G_{\mu}^{\mu} &= (C_1 + 4C_2)R \\ &= -8\pi G T_{\mu}^{\mu} \end{aligned}$$

Se

$$R_{;\nu} \equiv \frac{\partial R}{\partial x^{\nu}} = 0$$

então

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0$$

o que não seria verdade na presença de matéria inhomogênea não relativista. Sendo assim,

$$C_2 = -\frac{C_1}{2}$$

De (II-25)

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \quad (\text{II-28})$$

A 5ª condição determina C_1 . Para sistemas não relativistas:

$$|T_{ij}| \ll |T_{00}|$$

logo

$$|G_{ij}| \ll |G_{00}|$$

de (II-28)

$$R_{ij} = \frac{1}{2} g_{ij} R$$

Para campos fracos temos que:

$$g_{\alpha\beta} \cong \eta_{\alpha\beta}$$

e a curvatura escalar é dada por:

$$\begin{aligned} R &\cong R_{\kappa\kappa} - R_{00} \\ &\cong \frac{3}{2} R - R_{00} \cong 2 R_{00} \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em (II-28)

$$G_{00} \cong 2 C_1 R_{00} \quad (\text{II-29})$$

Para calcularmos R_{00} , consideremos a parte linear de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, equação (C-2), Apêndice C,

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g^{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g^{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g^{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right]$$

se o campo é estático

$$R_{0000} \cong 0 \quad \text{e} \quad R_{i0j0} \cong \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}$$

De (II-29),

$$G_{00} \cong 2 C_1 (R_{i0i0} - R_{0000}) \cong C_1 \nabla^2 g_{00}$$

logo

$$C_1 = 1$$

e (II-28) fica:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

assim,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\tilde{\pi}G T_{\mu\nu} \quad (\text{II-30})$$

que são as equações de campo de Einstein. Contraíndo (II-30) com

$g^{\mu\nu}$, temos:

$$R - 2R = -8\tilde{\pi}G T^{\mu}_{\mu}$$

$$R = 8\tilde{\pi}G T^{\mu}_{\mu}$$

Usando (II-30)

$$R_{\mu\nu} = -8\tilde{\pi}G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}_{\lambda} \right)$$

No vácuo $T_{\mu\nu} = 0$ e de (II-31) vemos que as equações no espaço vazio são dadas por

$$R_{\mu\nu} = 0$$

As equações de Einstein são fundamentais para a Teoria de Gravitação visto que permitem determinar o campo gravitacional, uma vez dada a distribuição de matéria-energia através do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$. Em particular a Cosmologia Relativista se utiliza dessas equações como sua peça fundamental. A cada distribuição $T_{\mu\nu}$, obtemos um modelo cosmológico que determina o surgimento e a evolução do Universo.

Há uma grande variedade de soluções dessas equações. Um excelente texto referente às soluções ditas 'exatas' são dadas na referência (13)

Examinaremos em capítulos subsequentes algumas das soluções ditas 'singulares', que descrevem os tipos de buracos negros que utilizaremos na discussão de alguns modelos de Núcleos Ativos de Galáxias. No próximo capítulo discutiremos em linhas gerais o colapso gravitacional, de forma a embasar, no contexto astrofísico, os buracos negros.

Capítulo III

Colapso Gravitacional, Buracos Negros, Buracos Negros Primordiais e Termodinâmica de Buracos Negros.

III - 1 - Introdução

Uma das consequências mais interessantes e importantes da Teoria de Gravitação de Einstein é o denominado colapso gravitacional. O resultado desse colapso gravitacional, os denominados buracos negros, aparecem quando uma quantidade de matéria é muito compactada num volume suficientemente pequeno. Neste capítulo, faremos inicialmente, uma caracterização geral do fenômeno do colapso gravitacional no contexto da Teoria de Gravitação de Einstein. Analisaremos brevemente algumas soluções singulares das equações de Einstein, tais como as métricas de Kerr-Newmann, Kerr, Reissner-Nordström e Schwarzschild. Em seguida, examinaremos as formas de ocorrência de buracos negros no contexto físico, com especial ênfase no conceito de buracos negros primordiais de Hawking. A Termodinâmica dos Buracos Negros é também considerada em detalhe nesse capítulo.

III - 2 - Colapso Gravitacional

Seja \vec{T} o tensor tensão-energia em uma região do espa

ço-tempo. O comportamento do campo gerado por esse tensor é governado pelas equações de campo de Einstein

$$\vec{G} = 8\pi \vec{T} \quad (\text{III-1-a})$$

que em termos de suas componentes é escrita como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (\text{III-1-b})$$

Essas equações mostram como o tensor tensão-energia curva o espaço-tempo em torno de uma determinada região. Em certos casos, devido a uma grande concentração de massa, esse efeito é tão forte que o espaço curva-se sobre si mesmo tornando inacessível à observadores externos, todo e qualquer tipo de informação contida no interior dessa região. O interior dessa região é o que denominamos de buraco negro, estado esse resultante do fenômeno ou processo que é conhecido como colapso gravitacional.

A solução mais geral das equações de campo que representa um buraco negro, é conhecida como solução de Kerr-Newmann (14) que descreve a geometria do espaço-tempo de um buraco negro resultante do colapso gravitacional de uma massa (M), com carga (Q) e momento angular (L). Quaisquer outros parâmetros ou informações da constituição da matéria colapsada são perdidos. Em coordenadas de Boyer-Lindquist, (t, r, θ, φ) (15) a métrica que descreve um buraco negro de Kerr-Newmann, tem a forma

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (\text{III-2})$$

onde:

$$\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2 + Q^2$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$$a \equiv L/m$$

A equação (III-2) deve obedecer a condição de vínculo

$$M^2 \geq Q^2 + a^2 \quad (\text{III-3})$$

Essa condição impede a formação de singularidades nuas. Qualquer buraco negro que não obedeça (III-3), terá seu colapso interrompido por forças centrífugas e/ou eletrostáticas.

Vejamos agora algumas definições de regiões da geometria de Kerr-Newmann:

1-limite estático - é a superfície descrita pela equação

$$\begin{aligned} r &= r_0(\theta) \\ &\equiv M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta} \end{aligned} \quad (\text{III-4})$$

Todos os observadores dentro e na superfície acima citada com r e θ fixos, devem orbitar o buraco negro na mesma direção que este roda, com uma velocidade angular dada por:

$$\Omega \equiv d\phi/dt$$

$$\Omega > \frac{a \sin \theta - \sqrt{\Delta}}{(r^2 + a^2) \sin \theta - \sqrt{\Delta}} \frac{a \sin^2 \theta}{a \sin^2 \theta} \quad (\text{III-5})$$

$$\Omega \geq 0 \text{ PARA } \begin{cases} a > 0 \\ r \leq r_0 \end{cases}$$

2-horizonte de eventos - é a superfície descrita pela relação

$$r = r_+ \equiv m + \sqrt{m^2 - Q^2 - a^2} \quad (\text{III-6})$$

3-ergosfera - é a região compreendida entre o limite estático e o horizonte de eventos.

Na figura (III-1), temos a representação qualitativa do limite estático, horizonte de eventos e ergosfera. Na tabela (I-II-1) mostramos as métricas dos diferentes tipos de buracos negros existentes.

III - 3 - a - Colapso Gravitacional de uma Estrela.

Consideremos uma estrela esférica de massa (M) e raio (R), sem carga e sem momento angular. Daremos aqui um tratamento relativista.

A métrica exterior à estrela é dada por:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{III-7})$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$$

$$\Phi = \Phi(r) \quad \text{e} \quad \Lambda = \Lambda(r)$$

são funções desconhecidas..

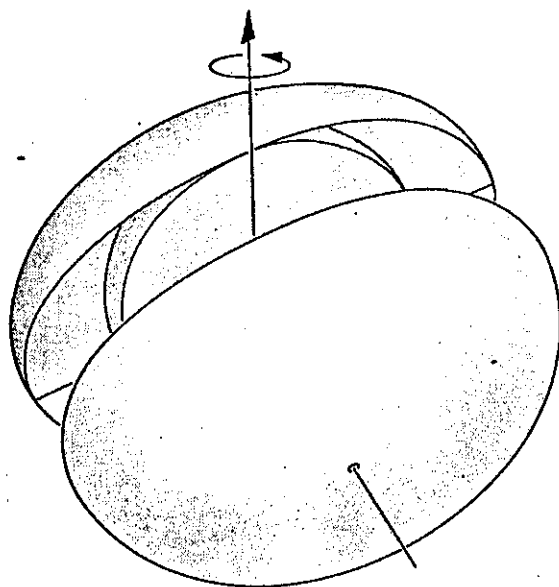


Figura (III-1)

Representação qualitativa do horizonte de eventos, ergosfera e limite estático.

Tabela (III-1)

Métricas dos diferentes tipos de buracos negros.

denominação	geometria
Schwarzschild $\vec{L} = 0, Q = 0$	$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r}\right] dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$ $r_g = 2M \quad A = 4\pi R_g^2$
Reissner-Nordstrom $\vec{L} = 0$	$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right] dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r + Q^2/r^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$ $r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2} \quad A = 4\pi r_+^2$
Kerr $Q = 0$	$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \text{sen}^2\theta d\phi)^2 + \frac{\text{sen}^2\theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2$ <p>ONDE</p> $a \equiv L/M$ $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \quad r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}$ $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta \quad A = 4\pi (r_+^2 + a^2)$
Kerr-Newmann	$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \text{sen}^2\theta d\phi)^2 + \frac{\text{sen}^2\theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2$ <p>ONDE</p> $a \equiv L/M$ $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2 - a^2}$ $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta \quad A = 4\pi (r_+^2 + a^2)$

Com boa precisão, podemos considerar que a matéria da estrela comporta-se como um fluido perfeito. Assim, para descrevermos esse fluido, precisamos dos seguintes parâmetros:

$$\rho(r) = \text{densidade de matéria-energia} \quad (\text{III-8})$$

$$p(r) = \text{pressão} \quad (\text{III-9})$$

$$n = \text{densidade de bárions} \quad (\text{III-10})$$

$$u^\mu(r) = \text{quadri-vetor velocidade} \quad (\text{III-11})$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} = \text{tensor tensão-energia.} \quad (\text{III-12})$$

Pela imposição de que a estrela seja estática

$$u^r = dr/d\tau = 0$$

$$u^\theta = d\theta/d\tau = 0 \quad (\text{III-13})$$

$$u^\phi = d\phi/d\tau = 0$$

Da normalização da quadri-velocidade, temos que:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= -1 \\ &= g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \\ &= g_{tt} u^t u^t = e^{2\Phi} u^t u^t \end{aligned}$$

assim,

$$u^t = dt/d\tau = e^{-\Phi}$$

$$u = e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{III-14})$$

De (III-7), (III-12), (III-13) e (III-14), determinamos as componentes do tensor tensão energia $T^{\mu\nu}$

Com boa precisão, podemos considerar que a matéria da estrela comporta-se como um fluido perfeito. Assim, para descrevermos esse fluido, precisamos dos seguintes parâmetros:

$$\rho(r) = \text{densidade de matéria-energia} \quad (\text{III-8})$$

$$p(r) = \text{pressão} \quad (\text{III-9})$$

$$n = \text{densidade de bárions} \quad (\text{III-10})$$

$$u^\mu(r) = \text{quadri-vetor velocidade} \quad (\text{III-11})$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} = \text{tensor tensão-energia.} \quad (\text{III-12})$$

Pela imposição de que a estrela seja estática

$$u^r = dr/d\tau = 0$$

$$u^\theta = d\theta/d\tau = 0 \quad (\text{III-13})$$

$$u^\phi = d\phi/d\tau = 0$$

Da normalização da quadri-velocidade, temos que:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$$

$$= g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$$

$$= g_{tt} u^t u^t = e^{2\Phi} u^t u^t$$

assim,

$$u^t = dt/d\tau = e^{-\Phi}$$

$$u = e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{III-14})$$

De (III-7), (III-12), (III-13) e (III-14), determinamos as componentes do tensor tensão energia $T^{\mu\nu}$

$$T^{t\phi} = \rho e^{-2\Phi} \quad T^{r\tau} = \rho e^{-2\Lambda} \quad T^{\theta\theta} = \rho r^{-2} \quad (\text{III-15})$$

$$T^{\phi\phi} = \rho r^{-2} \text{SE} \text{N}^{-2} \Theta \quad T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{SE} \quad \mu \neq \nu$$

No referencial do fluido, teremos:

$$\vec{e}_{\hat{t}} \equiv \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{e^{\Phi}} \frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{e}_{\hat{r}} = \frac{1}{e^{\Lambda}} \frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{III-16})$$

$$\vec{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \vec{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r \text{SE} \text{N} \Theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\vec{\omega}^{\hat{t}} = e^{\Phi} d\vec{t}$$

$$\vec{\omega}^{\hat{r}} = e^{\Lambda} d\vec{r}$$

$$\vec{\omega}^{\hat{\theta}} = r d\vec{\theta}$$

$$\vec{\omega}^{\hat{\phi}} = r \text{SE} \text{N} \Theta d\vec{\phi} \quad (\text{III-17})$$

Assim, as componentes de \vec{u} e \vec{T} , nesse sistema, são dadas por:

$$\vec{u} = \vec{e}^{\hat{t}} \quad u^{\hat{t}} = 1 \quad (\text{III-18})$$

$$u^{\hat{r}} = u^{\hat{\theta}} = u^{\hat{\phi}} = 0$$

$$T_{\hat{t}\hat{t}} \equiv T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \rho \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p \quad (\text{III-19})$$

Usando as equações de Einstein e a lei de conservação local de energia, $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, podemos encontrar o restante das equações que determinam a estrutura de uma estrela relativista.

Projetando $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ na direção de \vec{u} , teremos a equa-

ção de Euler' da hidrodinâmica relativista:

$$(\rho + p) \vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{u} = - [\vec{\nabla}_P + (\vec{\nabla}_{\vec{u}} P) \vec{u}] \quad (\text{III-20})$$

tomando a componente radial da equação acima, teremos:

$$\begin{aligned} (\rho + p) u_{r;\nu} u^\nu &= - (\rho + p) T_{r\nu}^\alpha u_\alpha u^\nu \\ &= - (\rho + p) T_{r0}^0 u_0 u^0 \\ &= (\rho + p) \Phi_{,r} = - P_{,r} \end{aligned} \quad (\text{III-21})$$

Da componente $\hat{o}\hat{o}$ das equações de campo,

$$G_{\hat{o}\hat{o}} = 8\pi T_{\hat{o}\hat{o}}$$

$$r^{-2} \left(\frac{d}{dr} \right) \left[r(1 - e^{-2\Lambda}) \right] = 8\pi \rho \quad (\text{III-22})$$

Definindo

$$2m(r) = r(1 - e^{-2\Lambda}) \quad (\text{III-23-a})$$

assim,

$$e^{2\Lambda} = (1 - 2m/r)^{-1} \quad (\text{III-23-b})$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln(1 - 2m/r) \quad (\text{III-23-c})$$

de (III-22)

$$\frac{2}{r^2} \frac{dm(r)}{dr} = 8\pi \rho \quad (\text{III-24})$$

$$m(r) = \int 4\pi r^2 \rho dr + m(0) \quad (\text{III-25})$$

essa equação com $m(0) = 0$ é interpretada como sendo a quantidade de massa energia dentro do raio r .

Da componente $\hat{r}\hat{r}$ das equações de campo,

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = 8\pi T_{\hat{r}\hat{r}}$$

$$-r^{-2} + r^{-2}e^{-2\Lambda} + 2r^{-1}e^{-2\Lambda} \frac{d\phi}{dr} = 8\pi p \quad (\text{III-26})$$

de (III-23-b)

$$e^{-2\Lambda} = (1 - 2m/r) \quad (\text{III-23-d})$$

substituindo em (III-26), teremos

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)} \quad (\text{III-27})$$

de (III-27) e de (III-21), obtemos que:

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)} \quad (\text{III-28})$$

Essa equação é conhecida como equação de equilíbrio hidrostático

de Oppenheimer-Volkoff. No limite clássico, temos a solução usual newtoniana

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{\rho m}{r^2} \quad (\text{III-29})$$

Fora da estrela, isto é, $r > R$, a pressão e a densidade se anulam e $m = m(r)$ é a massa da estrela (M). Integrando (I-11-27) com $p = 0$, $m = M$ e a condição de que $\Phi(r=\infty) = 0$

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2M/r) \quad (\text{III-30-a})$$

$$e^{2\Phi} = (1 - 2M/r) \quad (\text{III-30-b})$$

substituindo (III-30-b) e (III-23-b) em (III-7-a), teremos:

$$ds^2 = (1 - 2M/r) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - 2M/r)} + r^2(d\theta^2 + \text{SEN}^2\theta d\phi^2) \quad (\text{III-7-b})$$

essa métrica é a métrica de Schwarzschild e é uma solução das equações de campo que representa um buraco negro.

Das equações (III-8), (III-9), (III-25), (III-27) e (I-11-28), com as condições de que $\mathcal{P}(r=0) = \mathcal{P}_c$, $\Phi(r=0) = \Phi_0$, $m(r=0) = 0$ e que $\Phi(r=R) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2M/R)$, podemos construir modelos estelares cujas soluções são únicas.

A autogravidade da estrela provê altas temperaturas de

modo a possibilitar reações termonucleares. Os elementos são consumidos na seguinte ordem: hidrogênio, hélio, carbono, neônio, oxigênio e grupo do silício. A matéria final será constituída basicamente de elementos do grupo do ferro. Como a fusão de ferro e de elementos mais pesados não liberam energia por fusão, o processo de produção de energia por reações termonucleares para aí.

A autogravidade aumenta o processo de contração, havendo apenas três estados de configuração de equilíbrio: anã branca, estrela de neutrons e buracos negros.

Nas anãs brancas a autogravidade é contrabalançada pela pressão de elétrons degenerados, e o limite máximo de sua massa é estimado em $1,4 M_{\odot}$, se possuir baixa rotação e em $3 M_{\odot}$, se possuir alta rotação.

Caso esteja acima desse limite, os elétrons combinam-se com os prótons, transformando-se em neutrons. Temos aqui, uma estrela de neutrons. Sua autogravidade é contrabalançada por neutrons degenerados e sua massa não pode exceder o limite estimado entre $1,3$ e $2,5 M_{\odot}$.

Se a pressão dos neutrons degenerados não for suficiente para deter o processo de contração, a estrela colapsa em uma singularidade, no referencial em repouso na estrela. Para um observador distante, o raio da estrela se aproxima assintoticamente de seu raio gravitacional (R_g)

$$R_g = 2M$$

(III-31)

a luminosidade decai exponencialmente no tempo da forma

$$L \propto \text{EXP} \left[\frac{-2}{3\sqrt{3}} \frac{t}{2m} \right] \quad (\text{III-32})$$

e a frequência da luz emitida é deslocada para o vermelho, sofrendo um deslocamento infinito quando a sua superfície intercepta-se com seu raio gravitacional.

Vale ressaltar que o raio gravitacional atua como um horizonte de eventos. Toda informação contida no interior deste é inacessível para observadores externos.

Uma forma de entendermos melhor o colapso gravitacional é estudarmos o comportamento de partículas teste caindo livremente em um campo gravitacional descrito pela métrica de Schwarzschild.

Orientando o sistema de coordenadas de modo que a projeção radial da órbita coincida com $\Theta = \tilde{\pi}/2$, temos que:

$$P_{\Theta} = 0$$

$$P_r = \frac{1}{(1 - 2M/r)} \frac{dr}{d\lambda} \quad (\text{III-33})$$

$$P_t = -E$$

$$P_{\phi} = \pm L$$

Observando que a magnitude do quadri-vetor momento-energia é dado pela massa de repouso da partícula, temos:

$$g_{\alpha\beta} P^{\alpha} P^{\beta} + \mu^2 = g^{\alpha\beta} P_{\alpha} P_{\beta} + \mu^2 = 0 \quad (\text{III-34})$$

de (III-33), teremos:

$$\frac{-E^2}{(1-2M/r)} + \frac{1}{(1-2M/r)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} + \mu^2 = 0 \quad (\text{III-35})$$

Pelo fato de que pelo Princípio de Equivalência, partículas teste seguem a mesma linha de universo independentemente de sua massa, o que é apropriado na descrição do movimento não é nem sua energia nem seu momento angular, mas as razões

$$\tilde{E} \equiv E/\mu \quad \text{e} \quad \tilde{L} \equiv L/\mu \quad (\text{III-36})$$

Definindo λ como

$$\lambda \equiv \tau/\mu \quad (\text{III-37})$$

usando (III-36) e (III-37), a equação (III-35) toma a forma

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \tilde{E}^2 - \tilde{V}_{EF}(r) \quad (\text{III-38})$$

onde

$$V_{EF} = \left[(1-2M/r)(1 - \tilde{L}^2/r^2) \right]^{1/2} \quad (\text{III-39})$$

Na figura (III-2), mostramos o gráfico de $V_{EF}(r)$ por r/M , para vários valores de \tilde{L} . Analisando esse gráfico tiramos como principais conclusões que:

1-órbitas com periélio em $r \gg M$ têm a forma usual newtoniana,

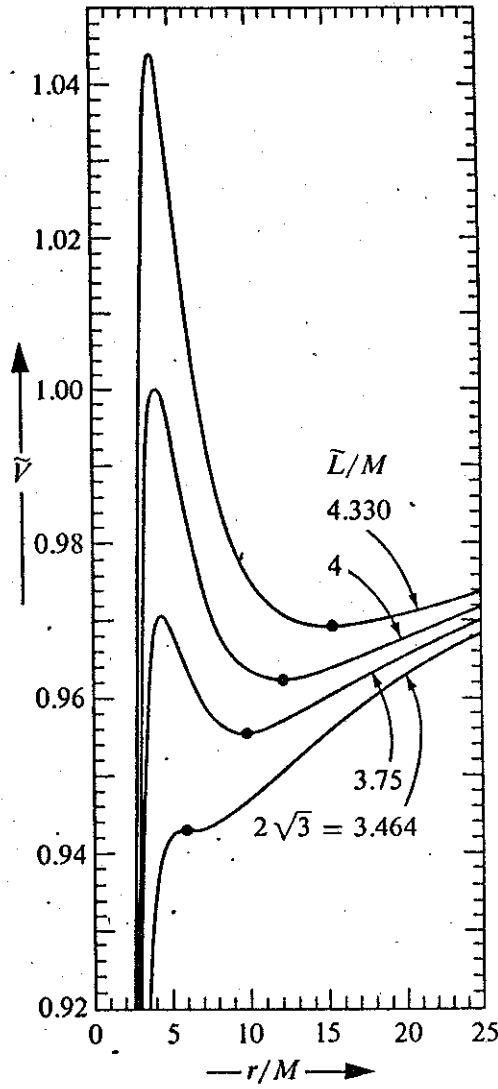


Figura (III-2)

Gráfico de $V_{EF}(\tau)$ por r/M para vários valores de L .

exceto pelo deslocamento do periélio .

2-órbitas com periélio em $r \leq 10M$ têm uma nítida diferença do comportamento usual newtoniano.

3-para $\tilde{L}/m \leq 2\sqrt{3}$, não há periélio; qualquer partícula que entra, é arrastada para $r = 2M$.

4-para $2\sqrt{3} < \tilde{L}/m < 4$, existem órbitas ligadas com periélio e afélio; mas qualquer partícula vinda de $r = \infty$ é arrastada para $r = 2M$

5-Para $L^* = \tilde{L}/m > 4$, existem órbitas ligadas; partículas vindas de $r = \infty$ com

$$E^2 < \tilde{V}_{\text{MAX}}^2 = (1 - 2\mu_m)(1 + L^{*2}\mu_m)$$

com

$$\mu_m = \frac{1 + \sqrt{1 - 12/L^{*2}}}{6}$$

atingem o periélio e retornam para $r = \infty$; mas, partículas vindas de $r = \infty$ com $E^2 > \tilde{V}_{\text{MAX}}^2$ serão arrastadas para $r = 2M$.

Observando (III-7-b)

$$ds^2 = \frac{dt^2}{(1 - 2M/r)} + (1 - 2M/r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{SEN}^2\theta d\phi^2)$$

vemos que quando $r \rightarrow 2M$, a métrica torna-se singular. Qual o sentido físico dessa singularidade em $r = 2M$?

Calculando as componentes do tensor de Riemann, vemos que as componentes não nulas desse tensor são proporcionais a $1/r^3$

(16), isto é, possuem valores finitos em $r = 2M$. Calculando a curvatura invariante, $I = R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} R^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = 48M^2/r^6$, vemos que esta, em $r = 0$ é infinita. Interpretamos esses resultados da seguinte forma: a geometria do espaço-tempo é bem comportada no raio gravitacional, e o comportamento singular da métrica em $r = 2M$ é consequência da patologia do sistema de coordenadas usado; em $r = 0$ temos uma singularidade física no espaço-tempo.

Devemos portanto, encontrar um sistema de coordenadas onde o comportamento singular em $r = 2M$ seja removido. Um sistema de coordenadas adequado a tal propósito é conhecido como sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres. Nesse sistema de coordenadas, a métrica de Schwarzschild é dada por

$$ds^2 = (32M^3/r) e^{-r/2M} (-dv^2 + du^2) + r^2 (d\theta^2 + \text{SEN}^2\theta d\phi^2) \quad (\text{III-40})$$

onde r é relacionado com u e v pela equação abaixo

$$(r/2M - 1) e^{r/2M} = u^2 - v^2 \quad (\text{III-41})$$

A coordenada radial sem dimensão u e a coordenada temporal sem dimensão v estão relacionadas com as coordenadas r e t de Schwarzschild por:

$$\left. \begin{aligned} u &= (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M) \\ v &= (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \text{senh}(t/4M) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{PARA} \\ r > 2M \end{array} \quad (\text{III-42})$$

$$\left. \begin{aligned} u &= (1 - \gamma/2M)^{1/2} e^{\gamma/4M} \sinh(t/4M) \\ v &= (1 - \gamma/2M)^{1/2} e^{\gamma/4M} \cosh(t/4M) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{PARA} \\ \gamma < 2M \end{array} \quad (\text{III-42})$$

III - 3 - b - Colapso Gravitacional de Objetos com pouca Massa.

Além dos buracos negros formados por evolução estelar, existe um outro tipo de buraco negro, denominado de buraco negro primordial. Tais buracos negros poderiam ter sido formados nos primeiros estágios de evolução do Universo (17), aqui considerado apreciavelmente inhomogêneo.

Caso a densidade de matéria em uma região fosse maior que a densidade média em sua vizinhança ou se a taxa de expansão fosse baixa, a força gravitacional poderia sobrepor a força da pressão e a energia cinética da matéria em expansão. Para sobrepor a força da pressão, a energia gravitacional, $-\Omega$, teria que ser maior que a energia interna, μ .

Quando a pressão (P) é $\mu/3$ e $U \sim \mu R^3$, a condição necessária para que ocorra o colapso é,

$$\mu R^2 > \sim 1 \quad (\text{III-43})$$

Quando $P = \mu_0 \log(\mu/\mu_0)$ e $U \sim \mu_0 R^3 \log(\mu/\mu_0)$ a condição para que ocorra o colapso é

$$\mu R^2 > \sim \frac{\mu_0}{\mu} \log \frac{\mu}{\mu_0} \quad (\text{III-44})$$

Considerando que a região colapsada não possa formar um Universo desconexo do nosso, temos que

$$\mu R^2 \sim 1$$

De (III-48) e das condições anteriores, (III-44) e (III-43), no momento do colapso

$$\mu R^2 \sim 1 \quad \text{PARA} \quad p = \mu/3$$

$$\frac{\mu_0}{\mu} \log \frac{\mu}{\mu_0} < \mu R^2 < \sim 1 \quad \text{PARA} \quad p \sim \mu_0 \log \frac{\mu}{\mu_0}$$

Como o colapso gravitacional é essencialmente um fenômeno clássico, é provável que o raio de um buraco negro primordial seja sempre maior que o comprimento de Planck (10^{-33} cm). Buracos negros com raio acima desse valor, teriam uma massa acima de $10^{-5} g$.

Depois de formados, esses buracos negros primordiais aumentariam sua massa por crescimento. O primeiro cálculo da taxa de crescimento feito por Zeldovich e Novikov (18), mostra que considerando o crescimento como um processo quasi-estacionário, essa taxa é dada por:

$$\frac{dM}{dt} \sim \mu R^2 g \sim \mu M^2 \quad (\text{III-49})$$

onde μ ($\mu \sim t^{-2}$) é a densidade de fundo do Universo de Friedmann. Assim,

$$M \sim \frac{t}{1 + \frac{t}{t_0} \left(\frac{t_0}{M_0} - 1 \right)} \quad (\text{III-50})$$

onde M_0 é a massa inicial do buraco negro e t_0 , o tempo de formação. Para M_0 pequeno comparado a t_0 , a diferença $M - M_0$ permaneceria pequena e o buraco negro cresceria pouco por acréscimo. Para M_0 da mesma ordem que t_0 os argumentos indicam que $M \sim t$, isto é, o acréscimo faria com que o buraco negro crescesse à mesma taxa que o horizonte de partículas, levando assim a uma inconsistência com as observações atuais, que mostram que o Universo é homogêneo em larga escala. Entretanto, podemos supor que os buracos negros cresceriam com a mesma taxa do horizonte de partículas apenas durante a época em que $P = \mu/3$. Nesse caso suas massas cresceriam de 10^{15} a $10^{17} M_0$.

Entretanto, Hawking e Carr (19), mostram que a hipótese do acréscimo como um processo quasi-estacionário não é uma boa hipótese e que o aumento de massa por acréscimo não é maior que uma ordem de grandeza de sua massa.

III - 4 - Termodinâmica de Buracos Negros.

A primeira conexão entre buracos negros e Termodinâmica, foi dado por Hawking, quando demonstrou que a área do horizonte de eventos não decresce em qualquer que seja o processo envolvido. No caso de haver uma coalescência de dois buracos negros de áreas A_1 e A_2 , a área final, A_3 , é maior ou igual a soma das áreas iniciais (20), conforme a figura (III-3)

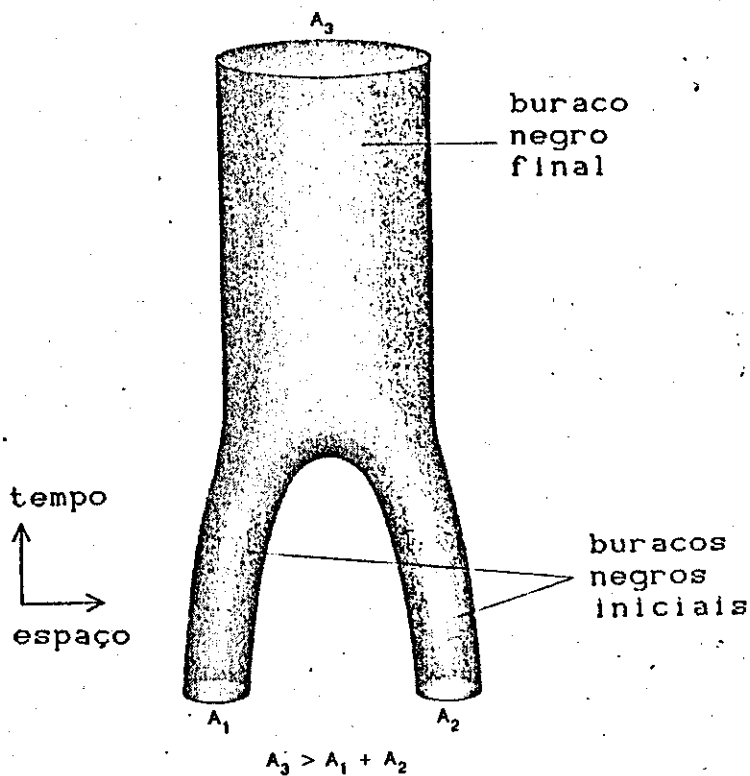


Figura (III-3)

Quando dois buracos negros com áreas A_1 e A_2 coalescem, o buraco negro resultante, com área A_3 , obedece a relação

$$A_3 \gg A_1 + A_2$$

$$A_3 \geq A_1 + A_2$$

Se o buraco negro aumenta sua massa, sua área também aumenta, conforme figura (III-4). A área do horizonte é análoga à entropia. No caso mais geral (buracos negros de Kerr-Newmann), a área do horizonte de eventos é dada por (21)

$$A = 4\pi \left[2m^2 - Q^2 + 2m^2 \left(1 - \frac{Q^2}{m^2} - \frac{L^2}{m^4} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{III-52})$$

onde

$$Q^2 < M^2 \quad \text{E} \quad L^2 < M^4$$

Uma importante consequência do teorema de Hawking, é a impossibilidade de decaimento ou quebra de um buraco negro (22).

Essa forte analogia entre a área do horizonte de eventos com a entropia, leva-nos a denominar o teorema de Hawking como Segunda Lei da Termodinâmica de Buracos Negros,

$$dA \geq 0 \quad (\text{III-53})$$

Diferenciando (III-52), temos a energia total do sistema

$$dm = \frac{k}{8\pi} dA + \Omega dL + \Phi dQ \quad (\text{III-54})$$

que corresponde a Primeira Lei da Termodinâmica de Buracos Negros, onde:

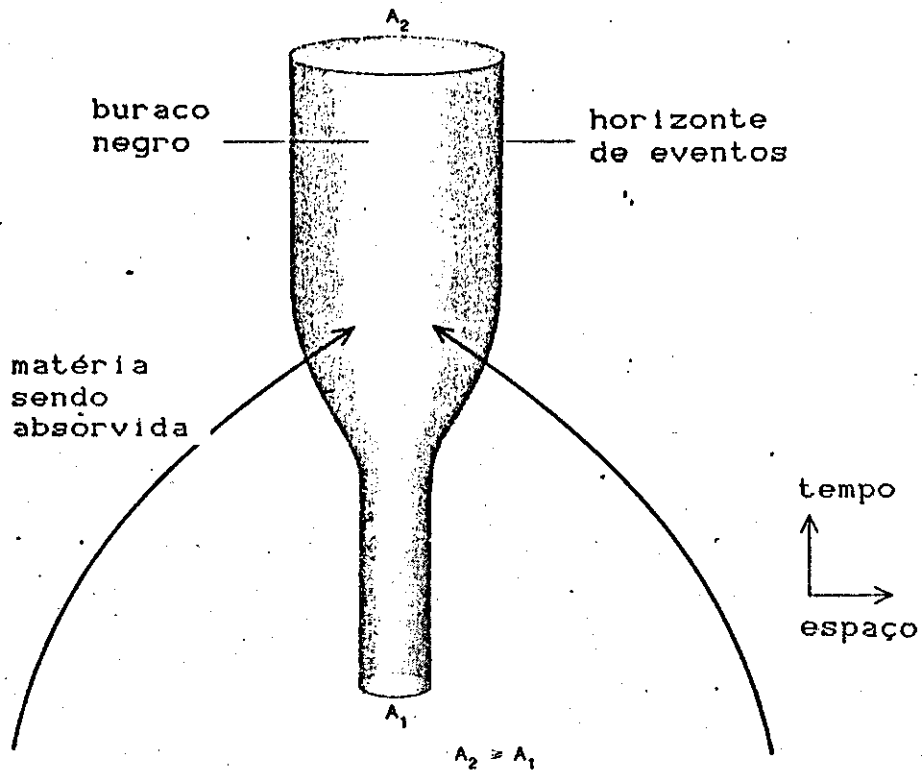


Figura (III-4)

Quando um buraco negro absorve matéria, sua área aumenta.

$$K = \frac{4\pi(r_+ - M)}{A} \quad (\text{III-55})$$

é a gravidade superficial,

$$\Omega = \frac{4\pi L}{MA} \quad (\text{III-56})$$

é a frequência angular de rotação, e

$$\Phi = \frac{4\pi Q r_+}{A} \quad (\text{III-57})$$

é o potencial elétrico no horizonte de eventos.

Comparando (III-54) com a Primeira Lei da Termodinâmica

$$dU = TdS - PdV \quad (\text{III-58})$$

onde:

U é a energia interna

S é a entropia

P é a pressão

V é o volume

vemos que se a área (A) corresponde à entropia (S), a gravidade superficial (K) corresponde à temperatura (T). Os outros termos correspondem ao trabalho feito (energia extraída) referentes a mudanças do momento angular e carga elétrica.

Pode-se mostrar que a gravidade superficial é constante no horizonte de eventos (23). Essa é a Lei Zero da Termodinâmica de Buracos Negros.

A igualdade de (III-3)

$$M^2 = Q^2 + a^2 \quad (\text{III-59})$$

leva a uma gravidade superficial nula, com área do horizonte de eventos dada por:

$$A = 4\pi [M^2 + a^2] \quad (\text{III-60})$$

Um buraco negro dessa forma é conhecido como buraco negro extremo de Kerr-Newmann. Se

$$M^2 < Q^2 + a^2 \quad (\text{III-61})$$

o horizonte de eventos desapareceria, e teríamos uma singularidade nua, isto é, a singularidade poderia ser observada. A não existência de singularidades nuas no Universo é denominada de Hipótese de Censura Cósmica. A censura cósmica implica na inatingibilidade do zero absoluto, $K = 0$, que corresponde a Terceira Lei da Termodinâmica de Buracos Negros.

Na tabela (III-2), mostramos um quadro comparativo entre a Termodinâmica usual e a de Buracos Negros.

Consideremos um buraco negro de Schwarzschild, teremos:

$$A = 16\pi M^2 \quad (\text{III-62})$$

$$K = 8\pi \frac{\partial M}{\partial A} \quad (\text{III-63})$$

Para um buraco negro com energia finita, temperatura zero implicaria entropia infinita. Sabendo que

Tabela (III-2)

Quadro comparativo entre a Termodinâmica usual e a de Buracos Negros.

Termodinâmica	Termodinâmica de Buracos Negros
<p>Lei Zero: Se dois sistemas ou duas partes do mesmo sistema estão em equilíbrio termodinâmico, então eles estão a mesma temperatura.</p>	<p>Lei Zero: Para qualquer buraco negro em equilíbrio, a gravidade superficial K é constante sobre toda a superfície.</p>
<p>1ª Lei: Em um sistema isolado, a energia total desse sistema é conservada.</p> $dU = TdS - PdV$	<p>1ª Lei: Em um sistema isolado, incluindo buracos negros, a energia total do sistema é conservada.</p> $dM = \kappa/8\pi + \Omega dL + \Phi dQ$
<p>2ª Lei: Durante qualquer processo a entropia de um sistema isolado aumenta ou permanece a mesma.</p> $dS \geq 0$	<p>2ª Lei: A área da superfície de um buraco negro, sempre permanece a mesma ou aumenta, durante qualquer processo.</p> $dA \geq 0$
<p>3ª Lei: É impossível reduzir a temperatura de um sistema a zero, por um número finito de processos.</p>	<p>3ª Lei: É impossível reduzir a gravidade superficial K de um buraco negro por um número finito de processos.</p>

energia = 2 entropia x temperatura

(III-64)

de (III-62) e (III-63)

$$M = \frac{A K}{4\pi}$$

(III-65)

Observamos que o lado direito dessa equação é o produto de duas quantidades finitas.

O entendimento desse problema é clarificado quando relacionamos

informação \longleftrightarrow entropia negativa

Como estimar a quantidade de informação com o tamanho do buraco negro? Hawking sugeriu que cada partícula contribuiria com um 'bit' de informação. Assim, teríamos que calcular a quantidade de partículas para formar um buraco negro de massa M . De acordo com a Física Clássica, esse número seria infinito, pois poderíamos escolher partículas com massas arbitrariamente pequenas, o que nos levaria a uma entropia infinita.

Usando a Teoria Quântica, esse problema é contornado. Não podemos escolher como constituintes dos buracos negros, massas arbitrariamente pequenas, pelo fato de que a energia das partículas está relacionada com o comprimento de onda por:

$$E = h/\lambda$$

(III-66)

e no mínimo, o comprimento de onda associado a cada partícula deve ser menor que o tamanho do buraco negro. Escolhendo $\lambda \sim 2M$, a energia mínima das partículas é da ordem de h/M . O número máximo de tais partículas em um buraco negro de massa M , é em torno de M^2/h . Assim; podemos estimar sua entropia como:

$$S = \xi k M^2/h \quad (\text{III-67})$$

onde k é constante de Boltzmann e ξ é uma constante a ser determinada. Usando (III-62) encontramos que:

$$S = \left(\frac{\xi k}{16\pi h} \right) A \quad (\text{III-68})$$

De (III-64), temos que a temperatura é

$$\begin{aligned} T &= M/2S \\ &= \left(\frac{h}{2\xi k} \right) \frac{1}{M} \end{aligned} \quad (\text{III-69-a})$$

Usando (III-63) em (III-69-a),

$$T = \left(\frac{2h}{\xi k} \right) K \quad (\text{III-69-b})$$

Os resultados expressos em (III-68) e (III-69-a) são exatamente o que esperávamos das Leis da Termodinâmica de Buracos Negros.

O que aconteceria se atrássemos um corpo com determinada entropia em um buraco negro? A entropia do Universo diminuiria, seria a resposta. Como um observador externo não poderia verificar se a entropia do Universo diminuiu, a Segunda Lei da Termodinâmica de Buracos Negros torna-se um tanto abstrata. Para contornar esse problema Bekenstein (24) generalizou a Segunda Lei: 'A entropia comum (S_c) mais a entropia do buraco negro (S_b) nunca diminui',

$$S = S_c + S_b \geq 0 \quad (\text{III-70})$$

Uma grande dificuldade com a Termodinâmica de Buracos Negros surgia quando imaginávamos um buraco negro com uma temperatura T_b , imerso em uma caixa onde havia radiação a uma temperatura T_c . Da Primeira Lei, a temperatura do sistema deveria entrar em equilíbrio térmico a uma temperatura T_e , situada entre T_b e T_c . Entretanto, como o horizonte de eventos funciona como uma membrana assimétrica que só permite a passagem em um sentido (para dentro), a radiação da caixa seria totalmente absorvida pelo buraco negro. Nessa situação, o buraco negro estaria a uma temperatura de zero absoluto. Esse problema foi resolvido por Hawking e será abordado no capítulo VI.

Capítulo IV

Em Direção a um Modelo de um Gás de Buracos Negros em Interação em um Campo Gravitacional de Fundo.

IV - 1 - Introdução

Um dos objetivos principais desta tese é elaborar um modelo de um gás de buracos negros em interação com um campo gravitacional de fundo. O gás de buracos negros pode ser ideal ou constituído por buracos negros que interagem entre si. A motivação para tal estudo tem um duplo carácter: 1-investigar o fenómeno do ponto de vista da Teoria de Gravitação de Einstein, encarado como um problema de Relatividade Geral relativo às propriedades dos buracos negros, suas interações mútuas e com campos gravitacionais; 2-elaborar um modelo teórico para os Núcleos Ativos de Galáxias mais completo que o modelo desenvolvido anteriormente por Vasconcellos e Guerra (07) para tais objetos. Dessa forma, o problema é tanto encarado como de interesse intrínseco em Teoria de Gravitação como de interesse de aplicação à Astrofísica dos Núcleos Ativos de Galáxias.

Com esse objetivo em vista, procuraremos primeiramente responder à questão: Qual seria o movimento de um corpo com spin em um campo gravitacional externo?

Para tempos de ordem muito pequena, a interação seria

predominantemente newtoniana. Mas considerando o problema em sua generalidade, devemos fazer correções relativistas ao movimento newtoniano, que seria modificado pela interação spin-órbita e spin-spin do buraco negro com o campo externo. Trataremos esse problema usando o método proposto por Fock e desenvolvido por Papapetrou (25). Mostraremos que em particular, quando o corpo é considerado uma partícula monopolo (single-pole), o resultado encontrado concorda com o de Infeld e Schild, que trataram o problema acima citado utilizando o método EIH (Einstein-Infeld-Hoffmann) (26). A seguir damos o resultado da interação do corpo com spin com o campo de fundo.

IV - 2 - Considerações Gerais.

Assumimos que a dimensão da partícula teste é muito pequena comparada com o comprimento característico do campo de fundo. Assim, a partícula irá descrever um 'tubo estreito' no espaço-tempo. Escolhemos uma linha L nesse tubo, cujas coordenadas X^α representarão o movimento da partícula e X^α é função de $t = X^4$ ou do tempo próprio s . Para caracterizar a partícula, assumiremos que $T^{\mu\nu}$ será nulo para todo t fora da esfera centrada em X^i e tendo um pequeno raio R . Para termos um resultado rigoroso, teríamos que fazer $R \rightarrow 0$. Seja $\delta x^\alpha = x^\alpha - X^\alpha$, e consideremos as integrais feitas no espaço tri-dimensional com t constante,

$$\int T^{\mu\nu} dv, \quad \int \delta x^\alpha T^{\mu\nu} dv, \quad \int \delta x^\alpha \delta x^\beta T^{\mu\nu} dv, \dots$$

Uma partícula monopolo é definida como sendo uma partícula que

tem no mínimo uma das integrais

$$\int T^{\mu\nu} dv$$

diferente de zero e todas as outras iguais a zero. Para uma partícula polo-dipolo, no mínimo algumas das integrais

$$\int T^{\mu\nu} dv \quad \text{e} \quad \int \delta x^\alpha T^{\mu\nu} dv$$

são diferentes de zero, e todas as outras são iguais a zero.

Com as considerações acima, nas seções posteriores, determinaremos as equações de movimento das partículas monopolo e polo-dipolo.

IV - 3 - a - Equações de Movimento de uma Partícula Monopolo.

Temos da 'equação dinâmica' que

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + T^{\mu\alpha}_{;\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{IV-1})$$

Tomando a expressão para $\frac{\partial (x^\alpha T^{\mu\nu})}{\partial x^\alpha}$ e usando (IV-1), temos que

$$\frac{\partial (x^\alpha T^{\mu\nu})}{\partial x^\alpha} = T^{\beta\alpha} - x^\alpha T^{\mu\nu}_{;\mu} T^{\mu\nu} \quad (\text{IV-2-a})$$

Integrando (IV-1) e (IV-2-a) no espaço tri-dimensional com t constante,

$$\frac{d}{dt} \int T^{\alpha 4} dV = - \int \bar{\nabla}_{\mu\nu}^{\alpha} dV \quad (IV-3-a)$$

$$\frac{d}{dt} \int x^{\alpha} T^{\beta 4} dV = \int T^{\alpha\beta} - \int x^{\alpha} \bar{\nabla}_{\mu\nu}^{\beta} T^{\mu\nu} dV \quad (IV-4-a)$$

No interior da partícula, podemos desenvolver a conexão afim em série de potência (o índice o significa o valor no ponto X^{α})

$$\bar{\nabla}_{\mu\nu}^{\alpha} = o \bar{\nabla}_{\mu\nu}^{\alpha} + o \bar{\nabla}_{\mu\nu}^{\alpha} + o \delta x^{\sigma} + \dots$$

Substituindo (IV-5) em (IV-3-a), considerando a partícula como monopolo e omitindo o índice o ,

$$\frac{d}{dt} \int T^{\alpha 4} dV + \bar{\nabla}_{\mu\nu}^{\alpha} \int T^{\mu\nu} dV = 0 \quad (IV-3-b)$$

Fazendo esse mesmo procedimento com (IV-4-a) e considerando (IV-3-b), temos:

$$\int T^{\alpha\beta} dV = \frac{dx^{\alpha}}{dt} \int T^{\beta 4} dV \quad (IV-4-b)$$

Definindo

$$M^{\alpha\beta} = m^4 \int T^{\alpha\beta} dV \quad (IV-6)$$

onde

$$u^4 = \frac{dX^4}{ds}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$$

as equações (IV-3-a) e (IV-4-b) são dadas por

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{M^{\alpha 4}}{u^4} \right) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha M^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{IV-3-c})$$

$$M^{\alpha\beta} = u^\alpha \frac{M^{\beta 4}}{u^4} \quad (\text{IV-4-c})$$

Tomando $\beta = 4$ em (IV-4-c),

$$M^{\alpha 4} = u^\alpha \frac{M^{44}}{u^4}$$

Introduzindo o resultado acima em (IV-4-c) e chamando $m = M^{44}/(u^4)^2$ então

$$M^{\alpha\beta} = m u^\alpha u^\beta$$

Colocando esse resultado em (IV-3-c), teremos:

$$\frac{d}{ds} (m u^\alpha) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha m u^\mu u^\nu = 0 \quad (\text{IV-3-d})$$

que contém tanto a equação de movimento quanto a equação para m . Multiplicando (IV-3-d) por u_α , podemos separar essas equações.

Assim,

$$u_\alpha \frac{d(u^\alpha)}{ds} + T_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0$$

$$\frac{dm}{ds} = 0$$

Das equações acima, (IV-3-d) fica

$$\frac{du^\alpha}{ds} + T_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0$$

que são geodésicas do campo $g_{\mu\nu}$ e é o mesmo resultado encontrado por Infeld e Schild.

A seguir, trataremos o movimento de uma partícula polo-dipolo.

IV - 3 - b - Equações de uma Partícula Polo-dipolo.

Tomando a expressão $\frac{\partial}{\partial x^\delta} (X^\alpha X^\beta T^{\delta\epsilon})$ e usando (IV-1), temos

$$\frac{\partial}{\partial x^\delta} (X^\alpha X^\beta T^{\delta\epsilon}) = X^\beta T^{\delta\alpha} + X^\alpha T^{\delta\beta} - X^\alpha X^\beta \overline{T}_{\mu\nu}^\delta T^{\mu\nu} \quad (\text{IV-6})$$

Integrando a equação (IV-1) no espaço tri-dimensional com t constante, usando a expansão em série da conexão afim (equação (IV-5)), omitindo o índice 0 e considerando ainda que a partícula seja polo-dipolo

$$\frac{d}{dt} \int T^{\alpha 4} dv = \frac{dX^\alpha}{dt} \int T^{\beta 4} dv + \frac{d}{dt} \int \delta x^\alpha T^{\beta 4} dv + \int T^{\beta \gamma} \delta x^\alpha T^{\mu \nu} dv \quad (\text{IV-7-a})$$

Repetindo novamente o procedimento acima e usando (IV-7), (IV-8-a), temos de (IV-5)

$$\frac{dX^\alpha}{dt} \int \delta x^\beta T^{\gamma 4} dv + \frac{dX^\beta}{dt} \int \delta x^\alpha T^{\gamma 4} dv = \int \delta x^\alpha T^{\beta \gamma} dv + \int \delta x^\beta T^{\alpha \gamma} dv \quad (\text{IV-9})$$

A partir de (IV-7-a), (IV-8-a) e (IV-9), podemos determinar as equações de movimento. Mostraremos agora como encontrá-las.

Definindo as quantidades

$$M^{\lambda \mu \nu} = -u^4 \int \delta x^\lambda T^{\mu \nu} dv \quad (\text{IV-10})$$

$$S^{\alpha \beta} = \int \delta x^\alpha T^{\beta 4} dv - \int \delta x^\beta T^{\alpha 4} dv \quad (\text{IV-11})$$

(a equação (IV-11) é a definição de momento angular). De (IV-10) e (IV-11), (IV-9) pode ser escrita como:

$$u^4 (M^{\alpha \beta \gamma} + M^{\beta \alpha \gamma}) = u^\alpha M^{\beta \gamma 4} + u^\beta M^{\alpha \gamma 4} \quad (\text{IV-12})$$

Tomando permutações cíclicas de $\alpha\beta\gamma$ em (IV-12), somando as duas primeiras e subtraindo da última,

$$2\mu^4 M^{\alpha\beta\gamma} = \mu^\alpha [M^{\beta\gamma 4} + M^{\gamma\beta 4}] + \mu^\beta [M^{\alpha\gamma 4} - M^{\gamma\alpha 4}] + \mu^\gamma [M^{\alpha\beta 4} - M^{\beta\alpha 4}] \quad (\text{IV-13-a})$$

Tomando (IV-12) com $\gamma = 4$

$$\mu^4 (M^{\alpha\beta 4} + M^{\beta\alpha 4}) = \mu^\alpha M^{\beta 44} + \mu^\beta M^{\alpha 44}$$

e usando (IV-10) e (IV-11), teremos:

$$2M^{\alpha\beta\gamma} = (S^{\alpha\beta}\mu^\gamma + S^{\alpha\gamma}\mu^\beta) - \frac{\mu^\alpha}{\mu^4} (S^{\beta\gamma}\mu^\gamma + S^{\gamma\beta}\mu^\beta) \quad (\text{IV-13-b})$$

Usando (IV-6) e (IV-10), podemos escrever (IV-8-a) da forma:

$$M^{\alpha\beta} = \mu^\alpha \frac{M^{\beta 44}}{\mu^4} - \frac{d}{ds} \left(\frac{M^{\alpha 44}}{\mu^4} \right) - \overline{T}_{\mu\nu}^{\beta} M^{\alpha\mu\nu} \quad (\text{IV-8-b})$$

tomando $\beta = 4$

$$M^{\alpha 4} = \mu^\alpha \frac{M^{44}}{\mu^4} - \frac{d}{ds} \left(\frac{M^{\alpha 44}}{\mu^4} \right) - \overline{T}_{\mu\nu}^{4} M^{\alpha\mu\nu} \quad (\text{IV-8-c})$$

substituindo em (IV-8-b)

$$M^{\alpha\beta} = \frac{\mu^\alpha}{\mu^4} \left[\frac{\mu^\beta}{\mu^4} M^{44} - \frac{d}{ds} \left(\frac{M^{\beta 44}}{\mu^4} \right) - \overline{T}_{\mu\nu}^{4} M^{\beta\mu\nu} \right] +$$

Tomando permutações cíclicas de $\alpha\beta\gamma$ em (IV-12), somando as duas primeiras e subtraindo da última,

$$2\mu^4 M^{\alpha\beta\gamma} = \mu^\alpha [m^{\beta\gamma 4} + m^{\gamma\beta 4}] + \mu^\beta [m^{\alpha\gamma 4} - m^{\gamma\alpha 4}] + \mu^\gamma [m^{\alpha\beta 4} - m^{\beta\alpha 4}] \quad (\text{IV-13-a})$$

Tomando (IV-12) com $\gamma = 4$

$$\mu^4 (M^{\alpha\beta 4} + M^{\beta\alpha 4}) = \mu^\alpha M^{\beta 44} + \mu^\beta M^{\alpha 44}$$

e usando (IV-10) e (IV-11), teremos:

$$2M^{\alpha\beta\gamma} = (S^{\alpha\beta}\mu^\gamma + S^{\alpha\gamma}\mu^\beta) - \frac{\mu^\alpha}{\mu^4} (S^{\beta\gamma}\mu^\gamma + S^{\gamma\gamma}\mu^\beta) \quad (\text{IV-13-b})$$

Usando (IV-6) e (IV-10), podemos escrever (IV-8-a) da forma:

$$M^{\alpha\beta} = \mu^\alpha \frac{M^{\beta 44}}{\mu^4} - \frac{d}{ds} \left(\frac{M^{\alpha 44}}{\mu^4} \right) - \overline{T}_{\mu\nu}^{\beta} M^{\alpha\mu\nu} \quad (\text{IV-8-b})$$

tomando $\beta = 4$

$$M^{\alpha 4} = \mu^\alpha \frac{M^{44}}{\mu^4} - \frac{d}{ds} \left(\frac{M^{\alpha 44}}{\mu^4} \right) - \overline{T}_{\mu\nu}^{4} M^{\alpha\mu\nu} \quad (\text{IV-8-c})$$

substituindo em (IV-8-b)

$$M^{\alpha\beta} = \frac{\mu^\alpha}{\mu^4} \left[\frac{\mu^\beta}{\mu^4} M^{44} - \frac{d}{ds} \left(\frac{M^{\beta 44}}{\mu^4} \right) - \overline{T}_{\mu\nu}^{4} M^{\beta\mu\nu} \right] +$$

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{M^{\alpha\beta 4}}{u^4}\right) - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} M^{\alpha\mu\nu} \quad (\text{IV-8-d})$$

Outra relação importante é obtida de (IV-8-b), observando (IV-6). Vemos que $M^{\alpha\beta} = M^{\beta\alpha}$. Assim,

$$\frac{u^{\alpha}}{u^4} M^{\beta 4} - \frac{u^{\beta}}{u^4} M^{\alpha 4} + \frac{dS^{\alpha\beta}}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} M^{\beta\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} M^{\alpha\mu\nu} \quad (\text{IV-14-a})$$

Tomando as equações (IV-11) e (IV-8-c), a equação acima fica:

$$\begin{aligned} & \frac{dS^{\alpha\beta}}{ds} + \frac{u^{\alpha}}{u^4} \frac{dS^{\beta 4}}{ds} - \frac{u^{\beta}}{u^4} \frac{dS^{\alpha 4}}{ds} + \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \frac{u^{\alpha}}{u^4} \Gamma_{\mu\nu}^4 \right) M^{\beta\mu\nu} \\ & - \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \frac{u^{\beta}}{u^4} \Gamma_{\mu\nu}^4 \right) M^{\alpha\mu\nu} = 0 \quad (\text{IV-14-b}) \end{aligned}$$

Essa equação nos dá a equação de movimento do spin.

Substituindo (IV-6) e (IV-10) em (IV-7-a),

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{M^{\alpha 4}}{u^4}\right) + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} M^{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\alpha} M^{\sigma\mu\nu} = 0 \quad (\text{IV-7-b})$$

onde $M^{\mu\nu}$ e $M^{\sigma\mu\nu}$ são dados pelas equações (IV-8-c) e (IV-8-d). (IV-7-b) é a equação ordinária da partícula no espaço.

Colocaremos agora as equações (IV-14-b) e (IV-7-b) na forma covariante. Temos que a derivada covariante de $S^{\alpha\beta}$ é dada por $\frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds}$, onde:

$$\frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds} = \frac{dS^{\alpha\beta}}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} S^{\mu\nu} u^{\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} S^{\alpha\mu} u^{\nu} \quad (\text{IV-15})$$

Substituindo o valor de $M^{\alpha\beta}$ dado em (IV-3-b) e usando (IV-15), a equação (IV-14-b) pode ser escrita como:

$$\frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds} + u^\alpha u^\beta \frac{DS^{\beta\rho}}{Ds} - u^\beta u_\rho \frac{DS^{\alpha\rho}}{Ds} = 0 \quad (\text{IV-14-c})$$

Usando agora as equações (IV-8-c), (IV-8-d) e (IV-15), podemos colocar (IV-7-b) na forma covariante

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (m u^\alpha + u_\beta \frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds}) + T_{\mu\nu}^{\alpha} u^\nu (m u^\mu + u_\beta \frac{DS^{\mu\beta}}{Ds}) + \\ + S^{\mu\nu} u^\sigma (T_{\mu\sigma,\mu}^\alpha + T_{\mu\rho}^\alpha T_{\nu\sigma}^\rho) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-7-c})$$

onde

$$m = \frac{1}{(u^4)^2} (M^{44} + T_{\mu\nu}^4 S^{\mu\nu} u^\nu) + \frac{1}{u^4} u_\rho \frac{DS^{\rho 4}}{Ds} \quad (\text{IV-16})$$

Observando a definição do tensor de Riemann-Christoffel em (IV-7-c), teremos a equação de movimento de um corpo com spin em um campo gravitacional de fundo

$$\frac{D}{Ds} (m u^\alpha + u_\beta \frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds}) + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} u^\sigma R_{\mu\sigma\mu}^\alpha = 0 \quad (\text{IV-7-d})$$

Notamos que a equação acima se reduz a (IV-3-d) quando $S^{\alpha\beta} = 0$

= 0 e que pelo fato da partícula possuir um spin não nulo, sua órbita não será mais uma geodésica.

Podemos representar a métrica de um campo gravitacional sem carga para r grande por (16)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{2m^2}{r^2} \right) dt^2 - 4 \epsilon_{ijk} \frac{J^i}{r^3} x^k dt dx^j + \left(1 + \frac{2m}{r} + \frac{3m^2}{r^2} \right) \delta_{jk} dx^j dx^k \quad (\text{IV-17})$$

os parâmetros m e $J = (J_1, J_2, J_3)$ são respectivamente massa e momento angular do espaço-tempo.

Considerando um campo dessa forma, podemos agora encontrar a equação de movimento de uma partícula com spin usando o formalismo desenvolvido nas seções precedentes e mostrar que (27), (28),

$$\frac{dS}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{S} \quad (\text{IV-18})$$

onde

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{s-s} + \vec{\Omega}_{s-0} \quad (\text{IV-19})$$

$$\vec{\Omega}_{s-s} = \left[\frac{\vec{J} + 3\hat{r}(\vec{J} \cdot \hat{r})}{r^3} \right] \quad (\text{IV-20})$$

$$\vec{\Omega}_{s-0} = \frac{3m}{2r^3} (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (\text{IV-21})$$

Podemos interpretar a equação (IV-18) da seguinte forma: a frequência angular de precessão $\Omega = \Omega_{S-S} + \Omega_{S-O}$ é resultante da interação spin-spin e spin-órbita da partícula com o campo externo.

Resultado idêntico ao dado acima é encontrado por O'Connell (29) usando interação gravitacional de Breit.

Concluimos analisando esses resultados que o efeito do campo, até a ordem de grandeza considerada em nossas aproximações, seria o de induzir uma velocidade angular de precessão à partícula, dada pela equação (IV-19).

Consideremos, em seguida, um modelo que vamos propor para um gás de buracos negros em interação com um campo gravitacional de fundo. É evidente que não consideraremos o problema em toda a sua generalidade. O que procuraremos estudar neste trabalho é um sistema constituído por um gás ideal de buracos negros em um campo gravitacional de fundo, cujo efeito sobre cada buraco negro é adicionar a este uma frequência angular de rotação à frequência característica do buraco negro em questão. Evidentemente, seria uma extensão não excessivamente complicada, em princípio, considerar algum modelo de interação entre os buracos negros que constituem o gás em estudo. Mas estamos preocupados inicialmente no efeito do campo gravitacional externo no comportamento do gás. Do ponto de vista do modelo astrofísico para os núcleos ativos de galáxias, tal campo de fundo poderia, por exemplo, ser produzido pelo anel de crescimento. A simetria de nosso problema, no entanto, não teria necessariamente uma simetria cilíndrica como seria de se esperar no problema astrofísico em consideração. Um

comportamento de um gás de buracos negros sujeito a campos gravitacionais externos com simetrias determinadas (esférica, cilíndrica, etc.) está sendo estudado presentemente pelo autor, mas não é parte desse trabalho.

Neste trabalho, a partícula de Fock-Papapetrou-Schiff (FPS) é associada ao buraco negro de nosso modelo. Dessa forma o buraco negro de nosso modelo, que é um buraco negro de Kerr, interage com um campo gravitacional de fundo nos termos do modelo de FPS.

Assim, como poderíamos considerar uma evolução de nosso modelo de gás de buracos negros com ou sem interação entre si e com ou sem interação com um campo gravitacional de fundo? Consideramos esta questão em termos de uma abordagem de cenários de complexidade crescente. Em capítulo posterior examinaremos a questão do espectro de emissão contínua de partículas de massa de repouso nula (fótons, grávitons e neutrinos) pelo gás de buracos negros de nosso modelo e sua aplicação ao espectro contínuo de emissão de partículas de massa zero por um núcleo ativo de galáxia típico, no nosso caso, o quasar 3C 273.

IV - 4 - Cenários.

Nessa seção trataremos dos vários cenários que nos levaria ao modelo de um gás de buracos negros em um campo gravitacional de fundo $(g_{\mu\nu})_f$ (aqui assumido como dado por (IV-17)), considerando suas interações mútuas. A análise será feita na seguinte ordem:

1º caso - um buraco negro com $(g_{\mu\nu})_f = 0$

- 2º caso - um buraco negro com $(g_{\mu\nu})_f \neq 0$
- 3º caso - 2 buracos negros sem interação entre si e com $(g_{\mu\nu})_f = 0$
- 4º caso - 2 buracos negros com interação entre si e com $(g_{\mu\nu})_f = 0$
- 5º caso - 2 buracos negros sem interação entre si e com $(g_{\mu\nu})_f \neq 0$
- 6º caso - 2 buracos negros com interação entre si e com $(g_{\mu\nu})_f \neq 0$
- 7º caso - um gás de buracos negros sem interação e com $(g_{\mu\nu})_f = 0$
- 8º caso - um gás de buracos negros com interação e com $(g_{\mu\nu})_f = 0$
- 9º caso - um gás de buracos negros sem interação e com $(g_{\mu\nu})_f \neq 0$
- 10º caso - um gás de buracos negros com interação e com $(g_{\mu\nu})_f \neq 0$

No 1º caso, temos o problema já anteriormente discutido no capítulo III.

Para o 2º, temos que o efeito de $(g_{\mu\nu})_f$ sobre o buraco negro é dado na conclusão da seção anterior: induzir uma frequência de precessão a este.

Vale ressaltar que esse problema foi discutido por D' Eath (30) no contexto das equações de campo de Einstein, usando a técnica conhecida como 'casamento assintótico'. Essa técnica consiste na seguinte análise: perto do buraco negro, a geometria do espaço tempo é descrita pela métrica deste; na região distan-

te, pela métrica do campo gravitacional de fundo e na região intermediária, faz-se um 'casamento' dessas duas soluções. Nesse artigo ele: analisa o movimento e as distorções na estrutura interna do buraco negro, provocadas pelo campo gravitacional de fundo; mostra que o buraco negro move-se ao longo de uma geodésica tipo-tempo no campo gravitacional de fundo e que seu momento angular é aproximadamente transportado paralelamente ao longo da geodésica da métrica de fundo.

Para o 3º, cada buraco negro move-se independentemente, e para determinarmos o comportamento do conjunto precisaríamos de uma função distribuição de velocidades no regime considerado (clássico, relativista e ultrarelativista).

Para o 4º, teremos algo aproximadamente ao 2º caso, pois o campo de fundo ($g_{\mu\nu}$)_f pode ser considerado uma aproximação para r grande de um buraco negro de Kerr. A diferença agora é que esse efeito seria menor, pois agora o campo de cada buraco negro teria a mesma grandeza e nosso resultado já não seria tão exato.

Esse problema é discutido por O'Connell (29) usando interação gravitacional de Breit. Nesse artigo, O'Connell dá o potencial de interação entre dois buracos negros, válido para baixas velocidades. Fazendo a massa de um maior que a do outro, teríamos, como caso particular o 2º caso.

D'Eath (31) também trata deste cenário, considerando que cada buraco negro move-se no campo distante do outro, e que a velocidade relativa entre eles é muito menor que a velocidade da luz. Usando o método de 'casamento assintótico', juntamente com o método EIH, ele chega a resultados que são compatíveis com o

nosso.

Para o 5º, cada buraco negro interage com o campo de forma independente do outro e para conhecermos o comportamento do conjunto, precisaríamos de uma função distribuição de velocidades no regime considerado.

Para o 6º, trataríamos a solução considerando a interação de cada buraco negro com o fundo e depois a interação entre os dois

Para o 7º, esse problema foi considerado em (07) no qual supõe-se que o gás considerado obedece a distribuição de velocidades de Synge.

Para o 8º, podemos resolver de forma análoga e considerando ainda a interação par a par (para simplificar o problema, pois rigorosamente teríamos que resolver o problema de n corpos)

Para o 9º, o tratamento é análogo ao 5º. E finalmente, para o 10º, trataríamos a interação de cada buraco negro com o fundo, e depois a interação par a par usando ainda a função distribuição considerada.

Capítulo V

Buracos Negros e Modelos de Núcleos Ativos de Galáxias.

V - 1 - Introdução e Fenomenologia

O campo de Núcleos Ativos de Galáxias começou quando Seyfert, em 1943, observou que determinadas galáxias espirais eram constituídas por núcleos muito luminosos e que as linhas de emissão de hidrogênio desses objetos eram bem mais largas que as linhas em espirais normais. Admitindo que o alargamento Doppler seria o responsável por tais larguras de linhas, velocidades de vários milhares de km/seg eram observadas, velocidades essas muito maiores que as maiores até então observadas (32).

Com o advento da Rádio Astronomia na década de 50, descobriu-se muitas fontes de rádio extragaláticas, e que várias delas emitiam enormes quantidades de energia. Algumas Galáxias Seyfert apresentavam-se como fortes fontes de rádio, e possuindo estrutura dupla, com lóbulos de rádio de cada lado da fonte óptica. Burbidge, em 1958, sugere que tais lóbulos são energizados pela região central da galáxia, e que tais núcleos são, tipicamente, mais fortes emissores que as próprias fontes de rádio. Em 1960, T. Matthews e A. Sandage descobriram um objeto estelar (3C 48) de 16ª magnitude com comprimentos de linhas de emissão alargadas de forma não peculiar às estrelas.

A técnica de ocultações lunares, desenvolvida por Ha-

zard, Mackay e Shimmers (33), permitiu informações sobre a estrutura e posição de rádio-fontes na escala de 1", o que conduziu à descoberta que a poderosa rádio-fonte, o quasar 3C 273, teria duas componentes separadas por uma distância angular de 20", e que uma dessas componentes era muito compacta e apresentava um espectro de rádio na forma de um patamar (flat radio spectrum). Observou-se ainda que a componente visível do 3C 273 parecia com uma estrela de 13^a magnitude com um fraco jato emergindo da mesma, conforme a figura (V-1). O espectro do objeto mostrava linhas de emissão largas para as quais não havia nenhuma identificação. Coube a M. Schmidt, em 1963 (02), descobrir que tal espectro de linhas poderia ser identificado com a série de Balmer do hidrogênio mais uma linha de Mg II, mas todas deslocadas para o vermelho de cerca de 16% ($Z = \lambda_{\text{obs}} / \lambda_{\text{em}} - 1$, onde λ_{obs} é o comprimento de onda observado e λ_{em} o comprimento de onda emitido. Para o objeto 3C 273, $Z = 0,158$). Com tal deslocamento para o vermelho, supostamente cosmológico, a energia emitida era de 2×10^{46} erg/seg. O objeto 3C 273 estaria muito distante, e suas dimensões lineares seriam menores que 1 Kpc (uma vez que as imagens de rádio ou óptica não eram resolvidas, e que a resolução, como vimos acima, seria da ordem de 1"). Tais objetos também apresentavam fortes excessos no azul e/ou no violeta, característica que tem em comum com as denominadas Galáxias Markarianas.

Muitos outros objetos emissores no rádio, com deslocamento para o vermelho similares, pequenos tamanhos e luminosidades extremamente elevadas (centenas de vezes mais brilhantes que as galáxias normais mais brilhantes) foram descobertos em curto

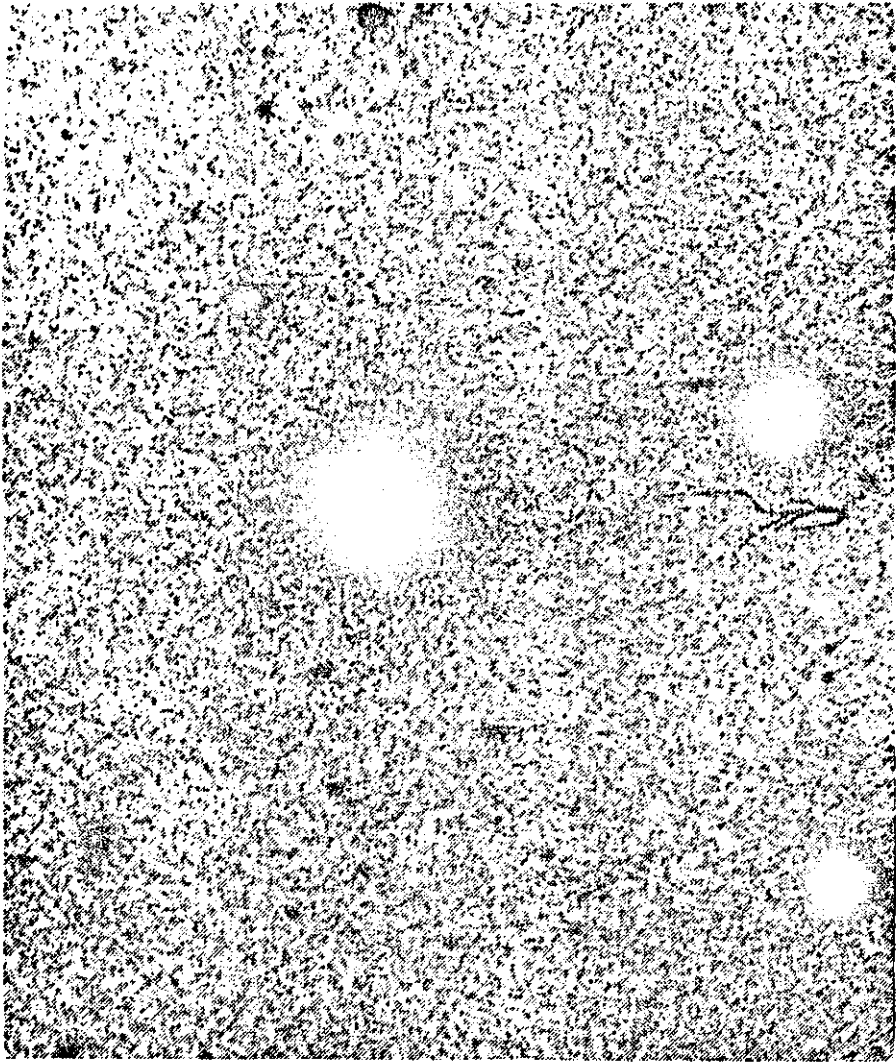


Figura (V-1)

Porção ampliada de uma foto do 3C 273.

espaço de tempo. Tais objetos foram denominados Quasares (ou Objetos Quasi-Estelares ou QSO's). Muitos objetos similares foram também descobertos que não apresentavam emissão no rádio. Tais objetos, de fato, constituem a maioria, conforme reporta Sandage, em 1965 (34). Os objetos com emissão no rádio, passaram a se chamar de QSR's (para fontes de rádio quasi-estelares).

Hoje costuma-se considerar vários tipos de Núcleos Ativos de Galáxias (NAG's), embora haja evidência que todos os NAG's são fundamentalmente similares (35). Os principais tipos de NAG's são os seguintes:

- a - Quasares (ou QSO's);
- b - Galáxias Seyfert;
- c - Objetos BI Lacertae (BI Lac);
- d - Rádio-Galáxias;
- e - Galáxias N;
- f - Quasares Violentamente Variáveis (OVV's);
- g - Galáxias Markarianas;
- h - Galáxias de Linhas de Emissão Estreitas (NELG's);
- i - Liners.

Descrevemos abaixo, apenas os tipos principais (para uma referência geral de todos os tipos, consultar a referência (36)).

a - Quasares

Os Quasares, conforme já foi mencionado anteriormente, apresentam uma imagem estelar mesmo para os maiores telescópios ópticos. A pesquisa espectroscópica mostra que a característica notável de seu espectro de linhas de emissão é seu grande deslo-

camento para o vermelho (há valores de Z desde menores que 1 até superiores a 3, como é o caso do PQS 2000-330 com $Z = 3,78$). Menos de 10% desses objetos são detectáveis como fontes de rádio e apresentam forte excesso no ultravioleta. Seus espectros de linhas de emissão apresentam alto nível de excitação dos átomos, que podem ser até 5 vezes ionizados. Os espectros contínuos apresentam, em geral, para os objetos mais extensivamente estudados (3C 273, por exemplo) emissões desde a região do rádio até a região de raios γ . Um dos objetivos desse trabalho é estudar teoricamente os mecanismos de emissão de luz que forneçam uma descrição desses espectros contínuos. Recentemente o Observatório Einstein tem permitido obter os espectros de raios X de um número crescente de objetos. Para ilustrar os estudos dos espectros eletromagnéticos dos Quasares, consideramos como exemplo o 3C 273.

Além das características anteriormente citadas, acrescentamos abaixo, alguns dados referentes ao 3C 273. Sua luminosidade varia por um fator de 1,5 ou menos em um ano (35), o que limita a região emissora do fluxo variável em um ano-luz. Dificuldades em explicar essa grande quantidade de energia em um volume tão pequeno, levou à hipótese de que o deslocamento para o vermelho não fosse de origem cosmológica, e que o 3C 273 poderia estar muito mais perto de nós, e portanto, sua luminosidade seria menor. Entretanto, isso acarretaria certas dificuldades nas propriedades físicas e estatísticas dos Quasares, além de não resolver a situação similar nas Galáxias Seyfert e Rádio-Galáxias. Essa questão é discutida na referência (35).

Apesar deste problema não ser uma questão fechada, a

maioria dos astrônomos admitem a hipótese cosmológica. A prova disso, consiste em detectarmos nebulosidades associadas aos Quasares, medirmos o deslocamento para o vermelho dessas nebulosidades e compararmos com o deslocamento para o vermelho do Quasar associado a essa nebulosidade. Atualmente tem-se feito esforços para a explicação dessa questão (35).

A luminosidade total do 3C 273 é 25×10^{46} erg/seg. Sua distribuição de energia é mostrada na figura (V-2).

Na região do rádio, seu espectro pode ser aproximado por uma lei de potência $f_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ com $\alpha = 0,5$. Na região do infravermelho perto de $10\mu\text{m}$ e na região de raios X e raios γ o melhor valor para a lei de potência é $\alpha \approx -1$.

O espectro mostra três características interessantes:

- a - Há um excesso de radiação acima da lei de potência entre 6000 \AA e 1000 \AA ;
- b - A ausência de uma inversão a baixas energias de raio X indica que a coluna de densidade na linha de visada à fonte de raio X é menor que 10^{22} cm^{-2} (35);
- c - Há uma definida escarpacidade (steepening) do espectro entre 50 KeV e 500 MeV.

No espectro do 3C 273 foram detectadas variações de intensidades em todas as energias, exceto nos raios γ onde poucas medidas foram feitas. O período das variações fornece-nos uma estimativa do tamanho da região emissora, enquanto a simultaneidade ou não das variações nas diversas frequências colocam vínculos nos modelos para os mecanismos de emissão.

Na região óptica, observações nos últimos anos mostram

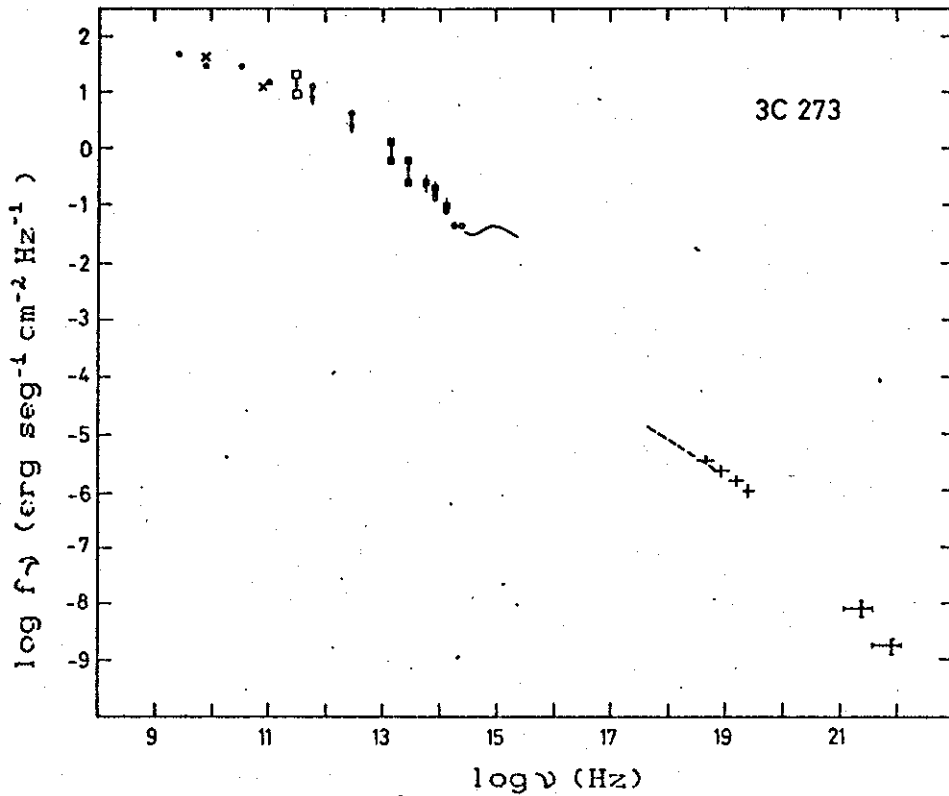


Figura (V-2)

Espectro eletromagnético do 3C 273 (35).

que o 3C 373 apresentou variações por um fator de 2 em um período de poucos meses a poucos anos.

Na região do rádio, as variações são usualmente irregulares.

Observações com VLBI (Very Long Baseline Interferometry), mostram que sua estrutura na escala de miliares de segundos é complexa. Para comprimentos de onda da ordem de centímetros, a fonte tem uma estrutura tripla, conforme mostra a figura (V-3).

b - Objetos B1 Lac

Os objetos B1 Lac são muito similares aos QSO's mas não apresentam espectro de linhas de emissão, o que tornou desconhecidos seus deslocamentos para o vermelho (ver referência (37)).

c - Galáxias Seyfert

São galáxias espirais com núcleos mais luminosos que as galáxias espirais normais. Seus núcleos são pequenos, muito brilhantes, têm espectro óptico com linhas de emissão largas, indicando a presença de elementos ionizados e de gases com altas temperaturas movendo-se a altas velocidades.

As Galáxias Seyfert são de dois tipos: 1 - núcleos de Seyfert do tipo I (Sy-I), que emitem espectros contínuos no azul descrito por leis de potências, indicando uma origem não térmica da radiação. Esse contínuo não térmico estende-se provavelmente à parte infravermelha do espectro, que contém uma fração significativa da luminosidade total; 2 - núcleos de Seyfert do tipo II (Sy-II), para os quais acredita-se que a radiação infravermelha provenha de grãos de poeira aquecidos.

Os espectros das Sy I, especialmente as linhas de Balmer

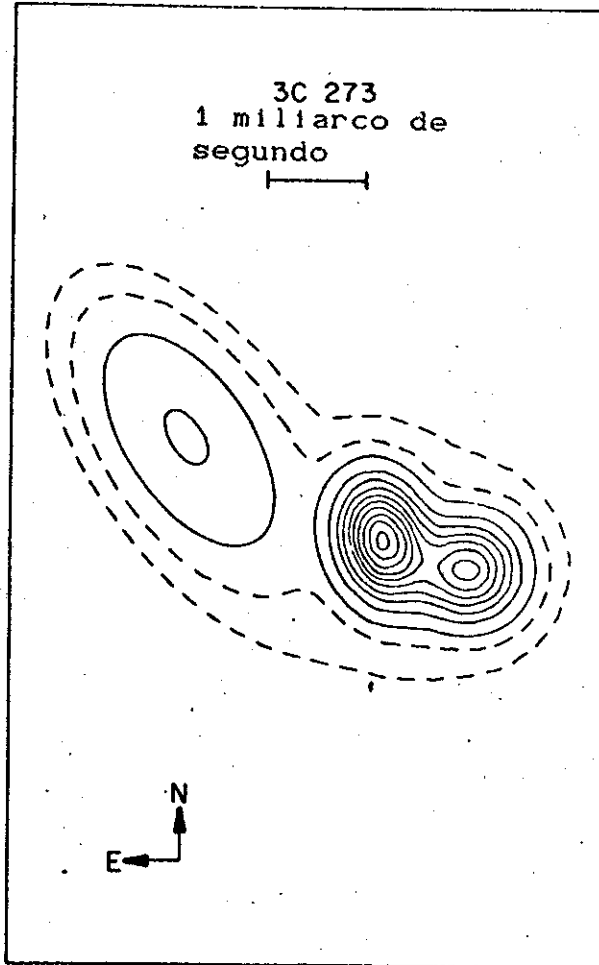


Figura (V-3)

Estrutura do 3C 273 com comprimento de onda de centímetro, obtida por VLBI (35).

apresentam linhas permitidas constituídas de uma parte central (core) tão largas quanto linhas proibidas, mas com 'asas' muito largas. Tais 'asas' são produzidas pelo alargamento Doppler por velocidades de 1000 a 5000 km/seg. As Sy II diferem das Sy I no fato de que as linhas permitidas em seu espectro não apresentam 'asas' longas. São as galáxias de ambos os tipos fortes e variáveis fontes de raio X.

V - 2 - Modelos para Núcleos Ativos de Galáxias.

O modelo básico para NAG's é mostrado na figura (V-4).

Suas principais características são:

a - uma fonte central muito compacta (aproximadamente 1 pc) que pode liberar grande quantidade de energia na forma de radiação contínua e partículas de alta energia;

b - um 'envelope' de gás ionizado com um raio de 0,3 a 300 pc (apenas 10^{-3} a 10^{-5} desse volume é ocupado pelas nuvens).

As evidências mais diretas da existência dessa fonte compacta são:

a - a intensa radiação contínua que é observada, varia em uma escala de tempo de meses e semanas, o que restringe as dimensões da região emissora. Pela causalidade, o volume dessa região deve ser $r \leq ct$, onde t é a escala de tempo da variabilidade;

b - o espectro de radiação no visível e na região do rádio, não é estelar nem de corpo negro e é frequentemente ajustado por uma lei de potência. A temperatura da rádio-emissão, é da ordem de 10^4 a 10^{12} eK, o que evidencia a presença de elétrons ultrarelativistas na região compacta. Associamos a esses elétrons ultrarelativistas

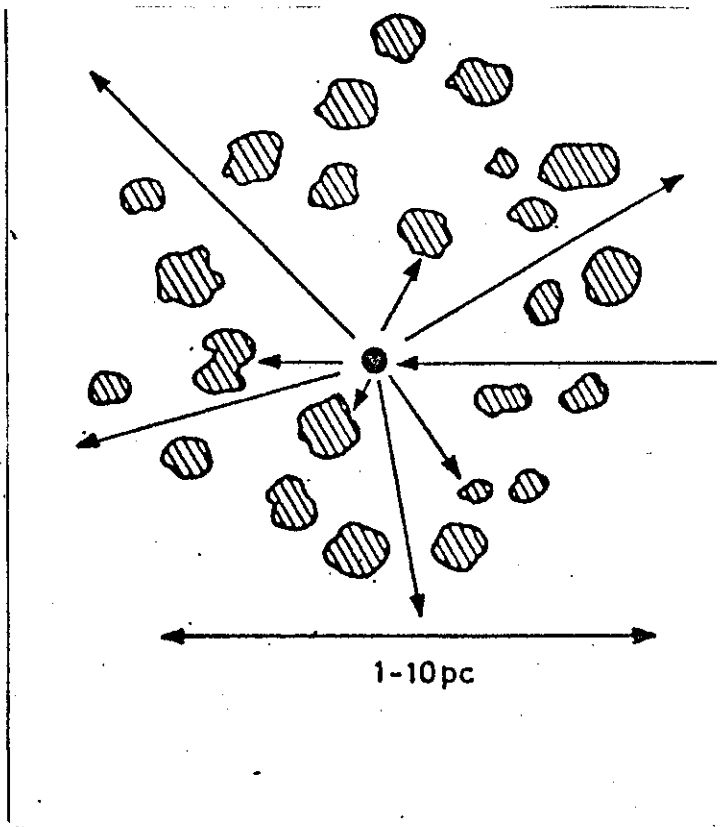


Figura (V-4)

Modelo esquemático de um NAG. A fonte compacta de intensa radiação contínua e raios cósmicos é circundada por nuvens de gás que são aquecidas e excitadas pelo fluxo emitido da fonte compacta.

vistas, a variação da emissão contínua (provavelmente radiação de síncrotron).

A intensa fonte de emissão contínua e partículas de altas energias são consideradas como responsáveis pelos fenômenos de alta energia observados no núcleo:

a - as nuvens de gás são aquecidas nas proximidades do núcleo, ionizadas e excitadas pela intensa radiação ultravioleta e, possivelmente, em alguns casos, por partículas relativistas. Essas nuvens emitem intensa radiação de linha similar às regiões de hidrogênio ionizado em jovens estrelas quentes. Se a nuvem de gás emissor dessas linhas fosse uniforme, a espessura óptica para o espalhamento de elétrons seria tão grande que a variabilidade no visível da fonte central seria apagada e as linhas de emissão poderiam ser excessivamente alargadas. Essas dificuldades são contornadas assumindo-se que a região emissora ocupa somente uma pequena fração do volume do núcleo e estão localizadas a uma distância razoável da fonte central de energia. O tamanho típico das regiões de emissão de linhas são de 1 a 100 pc com fatores de ocupação da ordem de 10^{-3} a 10^{-5} .

b - há evidência de movimento do gás a altas velocidades no núcleo, pelo alargamento das linhas de emissão e de suas estruturas finas.

c - uma intensa radiação infravermelha é observada. Isso pode ser devido a radiação contínua absorvida pela poeira nas proximidades do núcleo, que aquecida reemite essa energia no infravermelho.

Duas classes gerais de modelos de Núcleos Ativos de Galáxias são abordados:

a - O núcleo ativo da galáxia é constituído de apenas um buraco negro supermassivo. Discutiremos os modelos de Lynden-Bell (05) e o de Hills (06);

b - O núcleo ativo da galáxia é constituído de um gás de buracos negros, Vasconcellos-Guerra (07).

a - Modelos com um Buraco Negro Supermassivo.

Nesses modelos, temos um buraco negro supermassivo no centro de um disco de gás e poeira. A principal fonte de energia desses modelos é a energia gravitacional perdida pelo gás quando decai de órbita em relação ao buraco negro. A diferença fundamental entre os modelos é a origem do gás. Para Lynden-Bell, o gás é originado da evolução estelar normal. Para Hills, o gás é formado de pedaços ou mesmo de estrelas inteiras que se 'desmancham' ao passarem perto do buraco negro pelo efeito de maré. Para Gunn (01), esse gás é de origem estelar, e é capturado devido ao movimento do buraco negro.

O Modelo de Lynden-Bell

As energias envolvidas na rádio emissão de um Quasar são da ordem de 10^{61} ergs/seg (10^{61} ergs/seg = 10^{40} g = $10^7 M_{\odot}$) em um volume aproximadamente igual ao sistema solar.

Considerando que essa energia seja gerada pela cadeia próton-próton (a energia liberada nesse processo é 3/400 da massa de hidrogênio), a massa necessária para a emissão de $10^7 M_{\odot}$ como energia será dada por:

$$(400/3) 10^7 M_{\odot} \cong 10^9 M_{\odot}$$

A energia de ligação gravitacional

$$E = \frac{Gm^2}{r}$$

(V-1)

para $10^9 M_{\odot}$, em um volume de 10^{15} cm, essa energia é igual a 10^{62} ergs. Isso mostra que a energia gravitacional, nesse caso, é o processo dominante como fonte de energia.

Um objeto com uma massa entre 10^7 a $10^9 M_{\odot}$ gasta todo o seu combustível nuclear em aproximadamente 10^{10} anos. Após esse período, não há mais equilíbrio, e esse objeto colapsa no raio de Schwarzschild. Parece razoável supor, que esses objetos ocupam o centro da galáxia.

Orbitando esse buraco negro, temos um disco de gás e poeira. Provavelmente originário de estrelas, que compõem a galáxia, em suas evoluções.

Uma partícula em órbita circular em torno de um buraco negro de Schwarzschild de massa M , terá sua última órbita circular estável dada por:

$$r = 6 \frac{GM}{c^2} = 6m \quad (V-2)$$

onde

$$m = \frac{GM}{c^2}$$

Nas proximidades do raio de Schwarzschild sua velocidade circular é

$$V_c = \frac{GM}{r - 2m} \quad (V-3)$$

e a energia de ligação gravitacional da massa m em órbita circular é dada por:

$$m^* \epsilon = m^* c^2 \left\{ 1 - \frac{(r-2m)}{[r(r-3m)]^{1/2}} \right\} \quad (V-4)$$

A perda de massa de todas as estrelas em uma galáxia é de aproximadamente $1 M_{\odot}$. Uma fração dessa massa é capturada pelo núcleo galáctico. As partículas decrescem de órbita até a última órbita estável, através da transferência de momento angular devido a fricção magnética. A partir dessa órbita, essas partículas darão origem a fortes campos magnéticos, que por sua vez possibilitarão a emissão de raios cósmicos e radiação de síncrotron. Pela ação do campo, o disco é dividido em nuvens, que se comportam como pequenos magnetos.

Considerando que a taxa de absorção seja de $10^{-3} M_{\odot}$ por ano, e que a partir da última órbita estável haja conservação de energia, a potência de emissão (P), será igual a

$$\begin{aligned} P &= 0,057 F c^2 \\ &= 3,5 \cdot 10^{42} \text{ ERG/SEG} \cong 10^9 L_{\odot} \end{aligned}$$

Isso poderia justificar o brilho do núcleo e se uma fração fosse emitida no rádio, poderia ser uma rádio-fonte. Com um fluxo de $1 M_{\odot}$ /ano e uma eficiência de conversão em luz de 10%, o brilho do núcleo seria comparável ao de todas as estrelas da galáxia.

A potência $2\pi r \rho(r) \delta r$ liberada em calor ou raios cósmicos na região entre r e $r + dr$ é $-F d\epsilon/dr$. De (V-4), vemos que:

$$P(r) = \frac{F c^2}{4\pi r} \frac{m(r-6m)}{[r(r-3m)]^{3/2}} \quad \text{PARA } r \geq 6m \quad (V-6)$$

$$P(r) = \frac{F G m}{4\pi r^2} \quad \text{PARA } r \gg m \quad (V-7)$$

Seja T_1 , a temperatura que o disco teria se emitisse como um corpo negro,

$$T_1(r) = \left[\frac{P(r)}{2\sigma} \right]^{1/2} \quad (V-8)$$

onde σ é a constante de Stefan, e o dois é pelo fato que o disco irradia pelo dois lados. E $T_2(r)$, a temperatura ambiente de um corpo negro a uma distância r da fonte

$$T_2(r) = \left[\frac{P}{16\pi\sigma r^2} \right] \quad (V-9)$$

usando (V-6) em (V-8)

$$T_1(r) = \left[\frac{c^2}{8\pi\sigma} \right]^{1/4} \left\{ \frac{F m (r - 6m)}{r [r(r - 3m)]^{3/2}} \right\}^{1/4} \quad (V-10)$$

usando (V-5) em (V-9)

$$T_2(r) = \left[\frac{0,057c^2}{16\pi\sigma} \right]^{1/4} \left[\frac{F}{r^2} \right]^{1/4} \quad (V-11)$$

definindo as seguintes variáveis:

M_7 = massa colapsada em unidades de $10^7 M_\odot$

F_{-3} = fluxo de massa em unidades de $10^{-3} M_\odot / \text{ano}$

m_0 = distância em unidades de GM/c^2

teremos:

$$T_1(r) = 3,7 \cdot 10^5 m_0^{-3/4} \left[\frac{1 - 6m_0^{-1}}{(1 - 3m_0^{-1})^{3/2}} \right]^{1/4} F_{-3}^{1/4} M_7^{-1/2}$$

e

$$T_2(r) = 1,5 \cdot 10^5 m_0^{-1/2} F_{-3}^{1/4} M_7^{-1/2}$$

essas expressões podem se reduzir a forma

$$T = A r^{-2/a} \quad (V-12)$$

onde A é uma constante independente de r e a é igual a $8/3$ para T_1 e 4 para T_2 .

A emissão total na frequência ν , é dada por:

$$\begin{aligned} S_\nu &= \int_0^\infty \frac{c}{4} \mu_\nu T(r) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{8\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 r^2 dr}{\text{EXP}(h\nu/KT) - 1} \end{aligned} \quad (V-13)$$

onde h é a constante de Planck, K a de Boltzmann, e μ_ν é a distribuição de Planck. Fazendo uma mudança de variável do tipo

$$X = \left(\frac{h\nu}{KT} \right)$$

encontramos

$$\begin{aligned} S_\nu &= \frac{4\pi h}{c^2} \left(\frac{KA}{h} \right)^a \int_0^\infty \frac{a X^{a-1} \nu^{3-a} dx}{\text{EXP}(X) - 1} \\ &= \frac{4\pi h}{c^3} \left(\frac{KA}{h} \right)^a \nu^{3-a} a \Gamma(a) \zeta(a) \end{aligned}$$

onde $\Gamma(a)$ é a função gama e $\zeta(a)$ a função zeta de Riemann.

Para $a = 8/3$ vemos que:

$$S_\nu \propto \nu^{1/2}$$

Para $a = 4$ vemos que:

$$S_{\nu} \propto \nu^{-1}$$

Para $a < 1$, a principal contribuição é aquela onde $h\nu \cong \kappa T$. Podemos então deduzir que nesse modelo, $S_{\nu} \propto \nu^1$ quando $100^{\circ}\text{K} < h\nu/k < 3000^{\circ}\text{K}$ e que para $S_{\nu} \propto \nu^{1/3}$, $3 \cdot 10^4$ $^{\circ}\text{K} < h\nu/k < 10^5$ $^{\circ}\text{K}$.

O Modelo de Hills

No modelo de Hills, temos um buraco negro supermassivo no centro do disco galáctico. O gás que forma o disco, é proveniente de estrelas que se fragmentam pelo efeito da força de maré.

Seja ρ , a densidade média de uma estrela. A menor distância que esta pode se aproximar de um buraco negro de massa M sem ser fragmentada pelo efeito de maré é dada pelo limite de Roche (R_R) (06),

$$R_R = \left[\frac{6M}{\pi\rho} \right]$$

Na tabela (V-1), mostramos a relação entre o limite de Roche (R_R) e o raio gravitacional (R_g), para diferentes massas M . Para $M < M_c$ (onde M_c é a massa crítica, $M_c = 3,2 \times 10^6 M_{\odot}$), vemos que o limite de Roche é maior que o raio gravitacional, e estrelas que passam a uma distância menor que o limite de Roche, serão desmanchadas em gás que irá formar o disco de crescimento. Quando o buraco negro atingir a massa crítica, este já terá produzido várias vezes sua própria massa em seu disco.

A energia gasta na fragmentação de uma estrela de massa m e raio R é

Tabela (V-1)

Relação entre o limite de Roche e o raio gravitacional para buracos negros com diferentes massas. Aqui, T_e , é o tempo que o buraco negro gasta para atingir o limite de Eddington.

M/M _o	R _r /R _o	R _r /R _g	Le/Lo (limite de Eddington)	T _e (em anos)
10	4,31	$1,02 \times 10^5$	$3,2 \times 10^5$	$1,6 \times 10^9$
10^2	9,28	$2,19 \times 10^4$	$3,2 \times 10^6$	$1,4 \times 10^9$
10^3	20,0	$4,72 \times 10^3$	$3,2 \times 10^7$	$1,2 \times 10^9$
10^4	43,1	$1,02 \times 10^3$	$3,2 \times 10^8$	$9,4 \times 10^8$
10^5	92,8	$2,19 \times 10^2$	$3,2 \times 10^9$	$7,3 \times 10^8$
10^6	200,0	$4,72 \times 10$	$3,2 \times 10^{10}$	$5,2 \times 10^8$
10^7	431,0	$1,02 \times 10$	$3,2 \times 10^{11}$	$3,2 \times 10^8$
10^8	928,0	2,19	$3,2 \times 10^{12}$	$1,1 \times 10^8$
$3,2 \times 10^8$	1374,0	1,00	$1,0 \times 10^{13}$	0

$$E_t = \frac{3}{4} (G m^2 / R) \quad (V-18)$$

e a energia total (E_t) do gás formado pela estrela fragmentada é

$$E_T = \frac{1}{2} m \langle V^2 \rangle - \frac{3}{4R} G m^2 \quad (V-19)$$

onde $\langle V^2 \rangle$ é a velocidade quadrática média da estrela antes de seu encontro com o buraco negro. Para que o gás seja capturado em órbita ligada, devemos ter $E_t < 0$,

$$V < \left[\frac{3}{2} \frac{Gm}{R} \right]^{1/2} \quad (V-20)$$

esse gás é capturado em órbita elíptica com semi-eixo maior igual a

$$a = \frac{GMm}{2|E_t|} \quad (V-21)$$

de (V-19),

$$a = \frac{2}{3} \frac{RM}{m} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{R}{Gm} \langle V^2 \rangle \right]^{-1} \quad (V-22)$$

A poeira das nuvens que formam o disco absorvem fortemente a radiação ultravioleta produzida pelo gás, emitindo no infravermelho. Isso pode ser o mecanismo responsável pela emissão de radiação infravermelha observada em Seyfert e QSO's. A radiação ultravioleta ioniza as nuvens de gás em torno do buraco negro, que produz as linhas proibidas e o centro das linhas permitidas. O alargamento Doppler, é resultante da rotação do disco. As altas velocidades de densas nuvens de gases colidindo perto do buraco negro, podem ser responsáveis pelas grandes larguras das linhas de emissão permitidas, em Seyfert e QSO's.

Para buracos negros com massas menores que M_c , a maioria

da massa desses buracos negros é adquirida mais por crescimento de gases do que por absorção de estrelas inteiras.

A energia liberada pelo disco de crescimento é dada por:

$$E = \alpha M c^2 \quad (V-23)$$

onde α é a eficiência, que depende do momento angular. Para buracos negros de Schwarzschild $\alpha = 0,057$ e para buracos negros de Kerr-Newmann $\alpha = 0,43$. Assumiremos aqui $\alpha = 0,2$.

A energia total liberada pelo buraco negro até atingir a massa crítica é

$$\begin{aligned} E &= 0,2 M_c c^2 \\ &= 1,1 \cdot 10^{62} \text{ erg} = 9 \cdot 10^{20} L_{\odot} \cdot \text{ANOS} \end{aligned}$$

e a luminosidade máxima produzida é dada pelo limite de Eddington L_E (07), onde

$$L_E = 3,2 \cdot 10^4 L_{\odot} (M/M_{\odot}) \quad (V-24)$$

Assim, a luminosidade máxima é igual a $L = 10^{13} L_{\odot}$, que ocorre quando $M = M_c$, que é da ordem da luminosidade observada em certos QSO's, e a energia liberada pode suprir um QSO durante aproximadamente 9×10^7 anos.

Se a densidade de estrelas no núcleo da galáxia não for suficientemente grande para atingir o limite de Eddington, o crescimento da luminosidade será governado pela densidade estelar.

O Modelo de um Gás de Buracos Negros.

Neste modelo, temos um gás de buracos negros primordiais sem interação no centro da galáxia emitindo radiação de Hawking. Faremos uma descrição mais detalhada desse modelo no capítulo seguinte.

Capítulo VI

Modelo de um Gás de Buracos Negros movendo-se contra um Campo Gravitacional de fundo aplicado a Núcleos Ativos de Galáxias.

VI - 1 - Introdução.

Neste capítulo, expomos um modelo de um gás de buracos negros em interação com um campo gravitacional de fundo por nós elaborado nesta tese. Fazemos a aplicação deste modelo aos Núcleos Ativos de Galáxias, calculando os espectros de emissão de partículas de massa nula (espectros de fótons, neutrinos e grávitons) emitidas por esse gás quando em presença de um campo gravitacional de fundo com o qual cada buraco negro está em interação.

Antes, faremos um resumo de como surgiu o problema de emissão de partículas de massa nula. Após isto, descreveremos o modelo de um gás de buracos negros sem interação para Núcleos Ativos de Galáxias proposto por Vasconcellos-Guerra e introduziremos nesse modelo, as modificações descritas no parágrafo precedente.

VI - 2 - A Emissão de Partículas por um Buraco Negro.

No final do capítulo III nos referimos ao problema de equilíbrio térmico de um buraco negro com uma temperatura T_b em uma caixa contendo radiação a uma temperatura T_c , e chegamos a conclusão de que este, após absorver toda a radiação, estaria a

uma temperatura de zero absoluto.

Aplicando a Teoria Quântica aos buracos negros, Hawking (38) mostrou que estes poderiam emitir partículas a uma temperatura T_b , dada por (III-69-a) ou (III-69-b). Seu cálculo fixa a constante ξ em 8π . O número esperado de partículas da j -ésima espécie com carga Q , emitindo em um modo de onda determinado pela frequência ω , harmônico esférico l , momento angular m e polarização p é dado por:

$$\langle N_{j\omega l m p} \rangle = \frac{\mathcal{P}_{j\omega l m p}}{\exp[2\pi k^{-1}(\omega - m\Omega - a\Phi)] \pm 1} \quad (\text{VI-1})$$

O sinal positivo se refere a férmions e o negativo a bósons. $\mathcal{P}_{j\omega l m p}$ é a probabilidade e absorção para a onda incidente no respectivo modo.

Uma forma de entendermos o processo de emissão é o seguinte: o campo gravitacional induz uma tensão no vácuo, fazendo com que haja produção de pares de 'partículas virtuais'. Esses pares virtuais estão sendo materializados e aniquilados constantemente. Consideremos agora que uma das partículas virtuais caia no buraco negro, deixando a outra sem par para haver aniquilamento. Essa partícula (ou anti-partícula) será espalhada pelo campo gravitacional e vista como radiação emitida pelo buraco negro.

Com a emissão de partículas teremos uma violação no teorema de Hawking e também a possibilidade de decaimento de um buraco negro.

Com a solução deste problema, a Termodinâmica de Buracos Negros tornou-se mais coerente, pois agora poderíamos tratar os

buracos negros como corpos que poderiam estar em equilíbrio térmico com outros corpos a uma temperatura finita e diferente de zero, e estes, emitiriam partículas como se fossem corpos quaisquer.

VI - 3 - O Espectro de Emissão de um Buraco Negro

Como vimos anteriormente, o número esperado de partículas emitidas por um buraco negro de Kerr-Newmann, é dado por:

$$\langle N_{swemp} \rangle = \frac{\mathcal{P}_{swemp}}{\exp[2\pi k^{-1}(\omega - m\Omega - q\Phi)] \pm 1} \quad (\text{VI-1})$$

A potência total emitida na frequência ω é igual a

$$-\frac{dM}{dt} = \sum_{s_{emp}} \frac{dN}{dt} \omega \quad (\text{VI-2-A})$$

A taxa média de emissão por intervalo de frequência em função da frequência angular ω , é dada por:

$$\frac{dN}{dt d\omega} = \frac{\langle N \rangle}{2\pi} \quad (\text{VI-3})$$

Assim, de (VI-1), (VI-2) e (VI-3), a potência será dada por:

$$-\frac{dM}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{s_{emp}} \int \frac{\mathcal{P}_{s_{emp}} \omega d\omega}{\exp[2\pi k^{-1}(\omega - m\Omega - q\Phi)] \pm 1} \quad (\text{VI-2-B})$$

A dificuldade em encontrarmos a potência total emitida, reside na determinação da constante de absorção \mathcal{P}_{swemp} . Uma aproximação para \mathcal{P}_{swemp} válida para $m\Omega \ll 1$ foi obtida por

Starobinsky e Churilov (39) para bósons e por Page (40) para férmions. Para campos sem massa e com spin s , espalhados em um buraco negro sem carga, a constante de absorção é dada por

$$P_{swemp} = \left[\frac{(l-s)!(l+s)!}{(2l)!(2l+1)!!} \right]^2 \prod_{n=1}^{2l} \left\{ 1 + \left[\frac{\omega - m\Omega}{nk} \right]^2 \right\} \cdot 2 \left[\frac{\omega - m\Omega}{k} \right] \left[\frac{Akw}{2\tilde{\Pi}} \right]^{2l+1} \quad (\text{VI-4-A})$$

para bósons, e por

$$P_{swemp} = \left[\frac{(l-s)!(l+s)!}{(2l)!(2l+1)!!} \right]^2 \prod_{n=1}^{2l+1/2} \left\{ 1 + \left[\frac{\omega - m\Omega}{(n-1/2)k} \right]^2 \right\} \cdot \left[\frac{Akw}{2\tilde{\Pi}} \right]^{2l+1} \quad (\text{VI-5-A})$$

para férmions.

Faremos agora, mais algumas aproximações. Para um buraco negro com rotação desprezível ($\Omega \sim 0$), fazendo aproximações válidas para baixas frequências, (VI-4-a) e (VI-5-a) são dadas por:

$$P_{swemp} = \left[\frac{(l-s)!(l+s)!}{(2l)!(2l+1)!!} \right]^2 \frac{2\omega}{k} (2M\omega)^{2l+1} \quad (\text{VI-4-B})$$

para bósons, e por

$$P_{swemp} = \left[\frac{(l-s)!(l+s)!}{(2l)!(2l+1)!!} \right]^2 (2M\omega)^{2l+1} \quad (\text{VI-5-B})$$

para férmions. Fazendo também aproximações para o fator térmico, podemos escrever em uma única fórmula, a potência

$$-\frac{dM}{dt} = \frac{\beta}{4\tilde{\pi}^2} \sum_{s \leq \ell} \left[\frac{(\ell-s)!(\ell+s)!}{(2\ell)!(2\ell+1)!!} \right]^2 \int (2M\omega)^{2\ell+1} \omega d\omega \quad (\text{VI-6})$$

onde

$$\beta = \begin{cases} 2 & \text{para bósons} \\ \tilde{\pi} & \text{para férmions} \end{cases}$$

Entretanto, a equação acima é válida apenas para baixas frequências, perdendo sua validade antes que o espectro atinja seu máximo.

Utilizando métodos numéricos, Page calculou a probabilidade de emissão nos três casos:

- a - partículas sem massa emitidas por um buraco negro sem rotação (40);
- b - partículas sem massa emitidas por um buraco negro com rotação (41);
- c - léptons carregados emitidos por um buraco negro sem rotação (42).

Na verdade, os trabalhos de Page podem ser considerados como continuação e consequência dos trabalhos de Teukolsky (43), Press e Teukolsky (44) e Teukolsky e Press (45). Faremos a seguir, uma revisão suscinta desses trabalhos.

O passo inicial foi dado quando Teukolsky mostra que usando o formalismo de Newmann-Penrose (46) e a téttrada de Kin-

nersley, cujas componentes (t, r, θ, φ) são dadas por:

$$e^\mu = [(\tau^2 + a^2)\Delta, 1, 0, a/\Delta]$$

$$m^\mu = [(\tau^2 + a^2), -\Delta, 0, a]/2\varepsilon \quad (\text{VI-7})$$

$$m^\mu = [ia \operatorname{sen} \theta, 0, 1, i \operatorname{sen} \theta]/[2^{1/2}(\tau + ia \cos \theta)]$$

as componentes que descrevem o comportamento dinâmico da métrica de Kerr são estáveis sobre pequenas perturbações externas e em coordenadas de Boyer-Lindquist essas equações são dadas por:

$$\left[\frac{(\tau^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{4mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \varphi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2}$$

$$- \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left[\Delta^{s+1} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] - \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] - 2s \left[\frac{a(\tau - M)}{\Delta} + \right.$$

$$\left. + \frac{i \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} - 2s \left[\frac{M(\tau^2 - a^2)}{\Delta} - \tau - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \varphi}{\partial t} +$$

$$+ (s^2 \cot^2 \theta - s) \varphi = \psi \tilde{\mu} \varepsilon T \quad (\text{VI-8})$$

onde s dá a forma da perturbação. Para perturbações escalares, $s = 0$; para neutrinos, $s = \pm 1/2$, para fótons, $s = \pm 1$ e para grávitons $s = \pm 2$. Analisaremos aqui apenas as perturbações sem fonte ($T = 0$).

Além das coordenadas de Boyer-Lindquist, podemos representar a equação de Teukolsky em outros sistemas de coordenadas. Dois sistemas muito úteis são os sistemas de coordenadas de 'entrada' de Kerr (Kerr 'ingoing' coordinate system) $(v, r, \theta, \tilde{\varphi})$ e o de 'saída' (Kerr 'outgoing' coordinate system) $(u, r, \theta, \tilde{\varphi})$. Esses sistemas de coordenadas são regulares no horizonte futuro e no horizonte passado, respectivamente.

O sistema de coordenadas de entrada de Kerr, está relacionado às coordenadas de Boyer-Lindquist por:

$$\begin{aligned} dv &= dt + (r^2 + a^2) dr / \Delta \\ d\tilde{\varphi} &= d\varphi + a dr / \Delta \end{aligned} \tag{VI-9}$$

O sistema de coordenadas de saída de Kerr está relacionado às coordenadas de Boyer-Lindquist por:

$$\begin{aligned} du &= dt - (r^2 + a^2) dr / \Delta \\ d\tilde{\varphi} &= d\varphi - a dr / \Delta \end{aligned} \tag{VI-10}$$

A tétrada de Kinnersley é regular no horizonte passado. Uma tétrada que é regular no horizonte futuro é relacionada à tétrada (VI-7) através da transformação $t \rightarrow -t$ e $\varphi \rightarrow -\varphi$, tal que

$$\begin{aligned} \ell^+ &= -(2\varepsilon/\Delta)n \\ n^+ &= -(\Delta/2\varepsilon)\ell \end{aligned}$$

$$m^{\dagger} = \left[\frac{r - ia \cos \theta}{r + ia \cos \theta} \right] m^* \quad (\text{VI-11})$$

Correspondendo a cada valor de s , temos uma solução Ψ_s , que vai depender do sistema de coordenadas usado. Além disso, há uma outra solução Ω_s equivalente a Ψ_s , que é encontrada quando em vez da tetrada (VI-7), usamos a tetrada (VI-11), e estão relacionadas por:

$$\Omega_s = (2/\Delta)^s \Psi_{-s} \quad (\text{VI-12})$$

Admitindo a separação de variáveis em quaisquer sistemas de coordenadas descritos acima, tal que

$$\Psi_s \text{ ou } \Omega_s = \int d\omega e^{-i\omega t} \sum_{\ell, m} s S_{\ell m}(\theta) s R_{\ell m}(r) \quad (\text{VI-13})$$

$$= \int d\omega e^{-i\omega v} \sum_{\ell, m} s S_{\ell m}(\theta) s R_{\ell m}(r) \quad (\text{VI-14})$$

$$= \int d\omega e^{-i\omega u} \sum_{\ell, m} s S_{\ell m}(\theta) s R_{\ell m}(r) \quad (\text{VI-15})$$

A função angular $s S_{\ell m}(\theta)$ que é regular no intervalo $[0, \pi]$, satisfaz a equação

$$\frac{1}{\text{SEN} \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\text{SEN} \theta \frac{dS}{d\theta} \right] + \left(a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\text{SEN}^2 \theta} - 2a\omega s \cos \theta \right.$$

$$\left. - \frac{2m s \cos \theta}{\text{SEN}^2 \theta} - s^2 (\cot^2 \theta + E - s^2) \right) S = 0 \quad (\text{VI-16})$$

com autovalor dado por ${}_s E_{\ell m}$ e é normalizada

$$\int_0^{\pi} {}_s S_{\ell m}(\theta) \text{SEN} \theta d\theta = 1 \quad (\text{VI-17})$$

Vejamos agora, a equação radial ${}_s R_{\omega \ell m}$ que satisfaz a equação de Teukolsky, $\mathcal{L}R = 0$. Considerando a equação (VI-13), teremos:

$$\mathcal{L} = \Delta \frac{d^2}{dr^2} + 2(s+1)(r-M) \frac{d}{dr} + \frac{k^2 \mp 2is(r-M)k}{\Delta} + 4i\omega r s - \lambda \quad (\text{VI-18})$$

onde

$$k \equiv (r^2 + a^2)\omega - am \quad (\text{VI-19})$$

$$\lambda \equiv E - 2am\omega + a^2\omega^2 - s(s+1) \quad (\text{VI-20})$$

O sinal superior refere-se a \mathcal{Y}_s e o inferior a \mathcal{N}_s . Considerando as equações (VI-14) e (VI-15), teremos:

$$\mathcal{L} = \Delta \frac{d^2}{dr^2} + 2[(s+1)(r-M) \mp ik] \frac{d}{dr} \mp \frac{4is(r-M)k}{\Delta} \mp 2(2s+1)i\omega r - \lambda \quad (\text{VI-21})$$

onde o sinal superior refere-se a \mathcal{Y}_s na equação (VI-14) e o inferior a \mathcal{N}_s na equação (VI-15), ou

$$\mathcal{L} = \Delta \frac{d^2}{dr^2} + 2[(s+1)(r-M) \pm ik] \frac{d}{dr} \pm (2s+1)i\omega r - \lambda \quad (\text{VI-22})$$

onde o sinal superior refere-se a Ψ_s na equação (VI-15) e o inferior a Ω_s na equação (VI-14).

Essas equações têm as mesmas informações sobre o sistema, mas diferentes soluções assintóticas no infinito e no horizonte de eventos. Na tabela (VI-1) damos essas soluções assintóticas.

Descreveremos agora, as soluções assintóticas quando $r \rightarrow \infty$:

a - para o caso escalar, $s = 0$, temos que

$$\Psi_0 \cong \exp[i\omega t + im\varphi] S_{lm}(\theta) \left[r_{IN} \frac{e^{-i\omega r^*}}{r} + r_{OUT} \frac{e^{i\omega r^*}}{r} \right] \quad (VI-23)$$

Aqui,

$$k \equiv \omega - m\omega_+ \quad (VI-24)$$

$$\omega_+ \equiv a / (2Mr_+) \quad (VI-25)$$

$$\frac{dr^*}{dr} \equiv (r^2 + a^2) / \Delta \quad (VI-26)$$

Calculando o fluxo de energia por ângulo sólido, temos que:

$$\frac{d^2 E_{OUT}}{dt d\Omega} = \frac{S_{lm}^2(\theta)}{2\pi} \frac{\omega^2}{2} |r_{OUT}|^2 \quad (VI-27)$$

$$\frac{d^2 E_{IN}}{dt d\Omega} = \frac{S_{lm}^2(\theta)}{2\pi} \frac{\omega^2}{2} |r_{IN}|^2 \quad (VI-28)$$

para ondas saindo e entrando, respectivamente.

Tabela (VI-1)

Soluções assintóticas da função radial.

	$r \rightarrow \infty$		$r \rightarrow r_+$	
	ondas de 'entrada'	ondas de 'saída'	ondas de 'entrada'	ondas de 'saída'
equações para ψ				
(t, φ)	$\frac{e^{i\omega\eta^*}}{\eta^{2s+1}}$	$\frac{e^{-i\omega\eta^*}}{\eta}$	$e^{ik\eta^*}$	$\frac{e^{ik\eta^*}}{\Delta^s}$
$(\mu, \tilde{\varphi})$	$\eta^{-(2s+1)}$	$\frac{e^{-2i\omega\eta^*}}{\eta}$	1	$\frac{e^{-2ik\eta^*}}{\Delta^s}$
$(\nu, \tilde{\varphi})$	$\frac{e^{2i\omega\eta^*}}{\eta^{2s+1}}$	$\frac{1}{\eta}$	$e^{2ik\eta^*}$	$\frac{1}{\Delta^s}$
equações para Ω				
(t, φ)	$\frac{e^{i\omega\eta^*}}{\eta}$	$\frac{e^{-i\omega\eta^*}}{\eta^{2s+1}}$	$\frac{e^{ik\eta^*}}{\Delta^s}$	$e^{-ik\eta^*}$
$(\mu, \tilde{\varphi})$	$\frac{1}{\eta}$	$\frac{e^{-2i\omega\eta^*}}{\eta^{2s+1}}$	$\frac{1}{\Delta^s}$	$e^{-2ik\eta^*}$
$(\nu, \tilde{\varphi})$	$\frac{e^{2i\omega\eta^*}}{\eta}$	$\eta^{-(2s+1)}$	$\frac{e^{2ik\eta^*}}{\Delta^s}$	1

b - para o caso eletromagnético, $\epsilon = \pm 1$, as soluções assintóticas são dadas por:

$$\psi_i \cong \exp[-i\omega t + im\varphi]_{\pm} S_{em}(\theta) \left[Y_{IN} \frac{e^{-i\omega r^*}}{r} + Y_{OUT} \frac{e^{i\omega r^*}}{r^3} \right] \quad (\text{VI-29})$$

$$\psi_{\pm} \cong \exp[-i\omega t + im\varphi]_{\pm} S_{em}(\theta) \left[z_{IN} \frac{e^{-i\omega r^*}}{r} + z_{OUT} r e^{i\omega r^*} \right] \quad (\text{VI-30})$$

e as amplitudes estão relacionadas por:

$$B Y_{IN} = -8\omega^2 z_{IN} \quad (\text{VI-31})$$

$$-2\omega^2 Y_{OUT} = B z_{OUT} \quad (\text{VI-32})$$

onde

$$B = [(E + a^2\omega^2 - 2a\omega m)^2 + 4ma\omega - 4a^2\omega^2]^{1/2} \quad (\text{VI-33})$$

O fluxo de energia por ângulo sólido para ondas entrando e saindo são dados por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{OUT}}{dt d\Omega} &= \frac{-1 S_{em}^2(\theta)}{2\tilde{\pi}} |z_{OUT}|^2 \\ &= \frac{-1 S_{em}^2(\theta)}{2\tilde{\pi}} \frac{4\omega^4}{B^2} |Y_{OUT}|^2 \end{aligned} \quad (\text{VI-34})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{IN}}{dt d\Omega} &= \frac{1 S_{em}^2(\theta)}{2\tilde{\pi}} \frac{1}{4} |Y_{IN}|^2 \\ &= \frac{1 S_{em}^2(\theta)}{2\tilde{\pi}} \frac{16\omega^4}{B^2} |z_{IN}|^2 \end{aligned} \quad (\text{VI-35})$$

c - para o caso gravitacional, $s = \pm 2$, equações análogas são encontradas:

$$\psi_2 \cong \exp[-i\omega t + im\varphi] {}_2S_{em}(\theta) \left[Y_{in} \frac{e^{-i\omega r^*}}{r} + z_{out} \frac{e^{i\omega r^*}}{r^5} \right] \quad (\text{VI-36})$$

$$\psi_{-2} \cong \exp[-i\omega t + im\varphi] {}_{-2}S_{em}(\theta) \left[z_{in} \frac{e^{-i\omega r^*}}{r} + z_{out} r^3 e^{i\omega r^*} \right] \quad (\text{VI-37})$$

$$C Y_{in} = 64 \omega^4 z_{in} \quad (\text{VI-38})$$

$$4 \omega^4 Y_{out} = C^* z_{out} \quad (\text{VI-39})$$

onde

$$\begin{aligned} |C|^2 = & (a^2 + 4a\omega m - 4a^2\omega^2) [(a-2)^2 + 36a\omega m + \\ & - 36a^2\omega^2 + (2a-1)(96a^2\omega^2 - 48a\omega m) + \\ & + 144\omega^2(M-a^2) \end{aligned} \quad (\text{VI-40})$$

e

$$\text{Im } C = 12 M \omega \quad (\text{VI-41})$$

assim

$$\text{Re } C = + [|C|^2 - (\text{Im } C)^2]^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{out}}{dt d\Omega} &= \frac{-2 S_{em}^2(\theta)}{2\pi} \frac{1}{2\omega^2} |z_{out}|^2 \\ &= \frac{-2 S_{em}^2(\theta)}{2\pi} \frac{8\omega^6 |Y_{out}|^2}{|C|^2} \end{aligned} \quad (\text{VI-42})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{out}}{dt d\Omega} &= \frac{2 S_{em}^2(\theta)}{2\pi} \frac{1}{32\omega^2} |Y_{11}|^2 \\ &= \frac{2 S_{em}^2(\theta)}{2\pi} \frac{128\omega^6}{|c|^2} |\tau_{11}|^2 \end{aligned} \quad (VI-43)$$

Note que integrando as equações (VI-27), (VI-28), (VI-34), (VI-35), (VI-42) e (VI-43), podemos encontrar o fluxo total de energia. Para abordarmos as soluções assintóticas no horizonte de eventos e mudança de energia em um buraco negro, precisamos usar um sistema de coordenadas e uma tetrada que sejam bem comportados no horizonte de eventos. O sistema de coordenadas adequado é o de entrada de Kerr (V, r, θ, φ) e a tetrada, a de Hawking e Hartle (47), cujas componentes são dadas por:

$$e^\mu = [1, \Delta/2(r^2+a^2), 0, a/(r^2+a^2)]$$

$$n^\mu = [0, -(r^2+a^2)/E, 0, 0] \quad (VI-44)$$

$$m^\mu = [iasen\theta, 0, 1, isen\theta] / [2^{1/2}(r+ia\cos\theta)]$$

As soluções estão relacionadas por

$$\begin{aligned} \psi_s^{HH} &= [\Delta/2(r^2+a^2)]^s \psi_s \\ &= (r^2+a^2)^{-s} \Omega_{-s} \end{aligned}$$

Quando $r \rightarrow r_+$, isto é, no horizonte de eventos, teremos soluções do tipo:

a - para o caso escalar

$$\psi_0 \cong \exp[-i\omega t + im\varphi] S_{em}(\theta) z_{HOLE} e^{-ikr^*} \quad (VI-47)$$

O fluxo de energia do buraco negro por ângulo sólido é dado por:

$$\frac{d^2 E_{HOLE}}{dt d\Omega} = M r_+ \omega k \frac{S_{em}^2(\theta)}{2\pi} |z_{HOLE}|^2 \quad (VI-48)$$

b - para o caso eletromagnético, temos:

$$\psi_1 \cong \exp[-i\omega t + im\varphi] {}_{+1}S_{em}(\theta) Y_{HOLE} \Delta^{-1} e^{ikr^*} \quad (VI-49)$$

$$\psi_2 \cong \exp[-i\omega t + im\varphi] {}_{-1}S_{em}(\theta) z_{HOLE} \Delta e^{-ikr^*} \quad (VI-50)$$

e as amplitudes estão relacionadas por:

$$B Y_{HOLE} = -32 i k M^2 r_+^2 (ik + 2\epsilon) z_{HOLE} \quad (VI-51)$$

onde

$$\epsilon = \frac{(m^2 - a^2)^{1/2}}{4M r_+} \quad (VI-52)$$

Assim,

$$\psi_1^{HH} = \Delta \psi_2 / 2(r^2 + a^2) \quad (VI-53)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{HOLE}}{dt d\Omega} &= \frac{{}_{+1}S_{em}^2(\theta)}{2\pi} \frac{\omega}{8M r_+ k} |Y_{HOLE}|^2 \\ &= \frac{{}_{+1}S_{em}^2(\theta)}{2\pi} \frac{128 \omega k M^3 r_+^3 + (k^2 + 4\epsilon^2) |z_{HOLE}|^2}{B^2} \end{aligned} \quad (VI-54)$$

c - para o caso gravitacional, equações análogas são encontradas

$$\psi_2 \cong \text{EXP}[-i\omega t + im\varphi] {}_2S_{em}(\theta) Y_{\text{HOLE}} \Delta^{-2} e^{-ikr^*} \quad (\text{VI-55})$$

$$\psi_{-2} \cong \text{EXP}[-i\omega t + im\varphi] {}_{-2}S_{em}(\theta) z_{\text{OUT}} \Delta^{-2} e^{-ikr^*} \quad (\text{VI-56})$$

$$C Y_{\text{HOLE}} = 64(2M r_+)^4 ik(k^2 + 4\epsilon^2)(-ik + 4\epsilon) z_{\text{HOLE}} \quad (\text{VI-57})$$

$$Y_2^{\text{HH}} = \Delta^2 \psi_2 / 4(r^2 + a^2)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{\text{HOLE}}}{dt d\Omega} &= \frac{{}_2S_{em}^2(\theta)}{2\tilde{\pi}} \frac{\omega}{32k(k^2 + 4\epsilon^2)(2Mr_+)^3} |Y_{\text{HOLE}}|^2 \\ &= \frac{{}_2S_{em}^2(\theta)}{2\tilde{\pi}} \frac{128\omega k(k^2 + 4\epsilon^2)(k^2 + 16\epsilon^2)}{|C|^2} \\ &\cdot (2Mr_+)^5 |z_{\text{HOLE}}|^2 \quad (\text{VI-58}) \end{aligned}$$

Observe que das equações (VI-48), (VI-54) e (VI-58), flui energia para fora do buraco negro se k/ω é negativo. Esse efeito é chamado de espalhamento super-radiante.

A constante de absorção $\hat{\Gamma}_{\text{swemp}}$, que nos referimos anteriormente, é nos artigos de Teukolsky denominada de Z e é definida como:

$$\begin{aligned} z &\equiv \frac{dE_{\text{OUT}}/dt}{dE_{\text{IN}}/dt} - 1 \\ &= \frac{dE_{\text{HOLE}}/dt}{dE_{\text{IN}}/dt} \quad (\text{VI-59}) \end{aligned}$$

Na figura (VI-1), temos o espectro de emissão de partículas sem massa e na tabela (VI-2), a potência total integrada sobre as frequências para os principais modos.

Para buracos negros com $M \gg 10^{17}$ g, a composição dos tipos de partículas emitidas é

81,4% de neutrinos e anti-neutrinos

16,7% de fótons

1,9% de grávitons

Para buracos negros com massas menores que 10^{17} g, a taxa de emissão de partículas massivas tornam-se predominante. Para buracos negros com $5 \times 10^{14} \ll M \ll 10^{17}$ g, teremos:

45% de elétrons

45% de neutrinos e anti-neutrinos

9% de grávitons

1% de fótons

A medida que diminuimos a massa, a emissão de partículas mais massivas tornam-se mais importantes.

VI - 4 - Modelo para Núcleos Ativos de Galáxias - O Espectro de um Gás de Buracos Negros

Vasconcellos-Guerra (07) propuseram um modelo de um gás de buracos negros primordiais (mini-buracos negros) no centro da galáxia emitindo radiação de Hawking, para representar um núcleo ativo de galáxia. Tal modelo admite que os buracos negros não interagem entre si e não há nenhum campo gravitacional de fundo atuando sobre os mesmos. Faremos uma exposição do modelo e

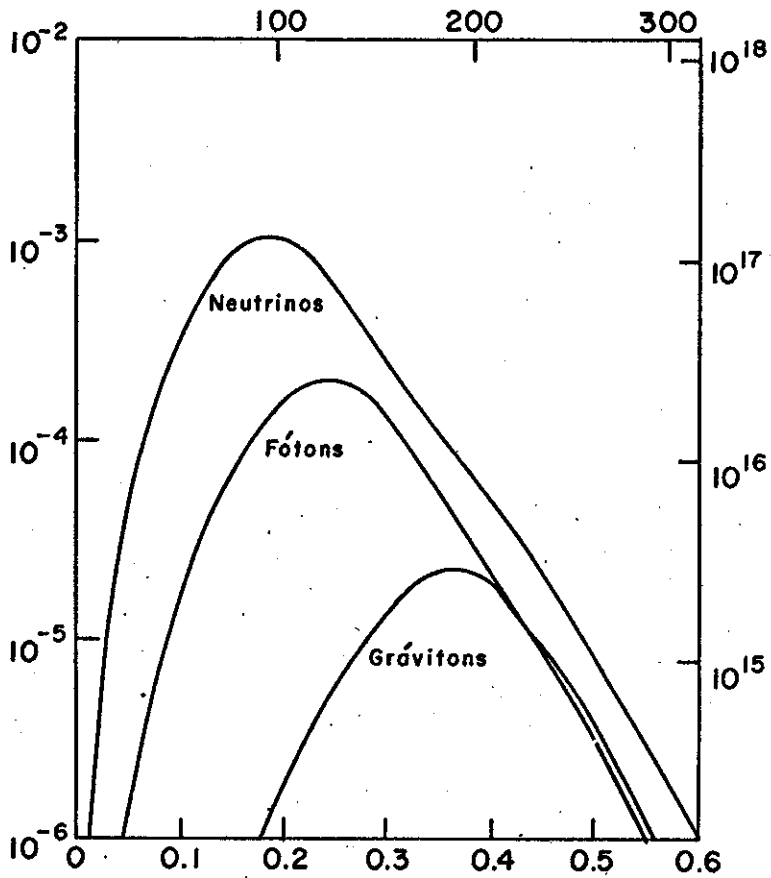


Figura (VI-1)

Espectro de emissão de partículas sem massa.

Tabela (VI-2)

Taxa e potência emitidos nos modos angulares dominantes.

	2s	2l	erro	potência*
	1	1	10^{-8}	$1,575 \times 10^{-4}$
neutrinos	1	3	10^{-8}	$0,060 \times 10^{-4}$
	1	5	10^{-9}	$0,001 \times 10^{-4}$
	2	2	10^{-8}	$0,330 \times 10^{-4}$
fótons	2	4	10^{-8}	$0,007 \times 10^{-4}$
	2	6	$10^{-9,4}$	$0,0001 \times 10^{-4}$
	4	4	10^{-8}	$0,038 \times 10^{-4}$
grávitons	4	6	$10^{-9,4}$	$0,0004 \times 10^{-4}$
Potência total para todos os modos = $2,011 \times 10^{-4}$				

*A potência é dada em unidades de $\hbar c^6 G^{-2} M^{-2} = 1,719 \times 10^{50} (M/g)^{-1} s^{-1}$

seus principais resultados, apresentando também os espectros de neutrinos e de grávitons, que não foram considerados anteriormente.

No modelo considerado, temos um gás formado de mini-buracos negros com baixa densidade (as colisões entre esses mini-buracos negros são desprezíveis). Admitiremos que estes tenham a mesma massa. Os parâmetros que determinam esse gás são:

V , o volume do gás

N_0 , a densidade (partículas/volume)

m , a massa das partículas

T_g , a temperatura do gás

Colocaremos nosso referencial no centro do volume ocupado pelo gás. Para um observador localizado no eixo-z, figura (VI-2), a uma distância bem maior que as dimensões do gás, se os buracos negros estivessem parados, ou movendo-se com velocidades perpendiculares ao eixo-z, o espectro seria o de um buraco negro vezes o número de buracos negros existentes. Entretanto, sabemos que um gás de partículas tem uma distribuição de velocidades. Synge (08), dá uma distribuição de velocidades válida em casos gerais. Considerando essa distribuição, o número de partículas com vetores velocidade com módulo entre $(u, u + du)$ e posições angulares entre $(\phi, \phi + d\phi)$ e $(\theta, \theta + d\theta)$ é dado por:

$$n du d\theta d\phi = \frac{N_0 V}{4\pi} \frac{m^3}{K_2(m\beta)} \beta^5 \exp[-m\beta] \cdot u^2 \sin\theta du d\theta d\phi \quad (\text{VI-60})$$

onde

N_0 é a densidade do gás;

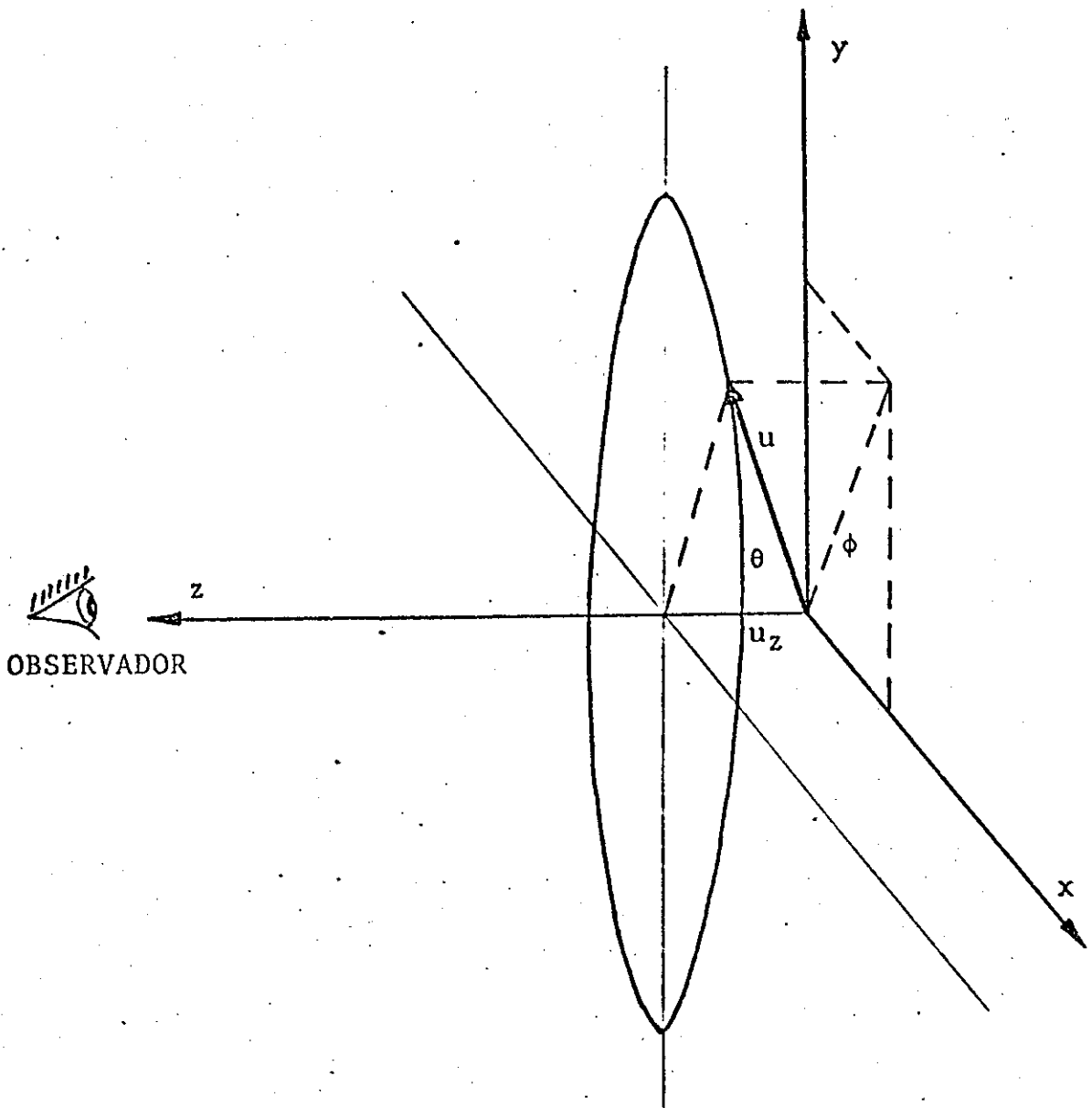


Figura (VI-2)

Sistema de coordenadas localizado no centro do gás de buracos negros. Somente a componente u_z da velocidade de cada buraco negro será responsável pelo desvio Doppler sofrido pela radiação emitida por ele.

V é o volume ocupado pelo gás;

m é a massa da partícula;

$\xi \equiv C^2/KTg$, pode ser visto como o recíproco da temperatura pois em unidades de Planck, $\xi \equiv 1/Tg$ é a temperatura do gás. Observe que $1/\xi$ tem dimensões de massa;

$$\gamma \equiv (1 - u^2/c^2)^{-1/2}, \text{ ou em unidades de Planck } \gamma \equiv (1 - u^2)^{-1/2};$$

$K_2(X)$, é a função modificada de Bessel de segunda espécie, com argumento X .

Para Θ e ϕ fixos, vemos que (VI-60) é proporcional a $\gamma^5 u^2 \exp(-m\xi\gamma)$. Na figura (VI-3), mostramos as curvas que representam esse fator em função da velocidade, para determinados valores de $m\xi$. Vemos que conforme diminuímos $m\xi$, as velocidades das partículas tornam-se cada vez maiores. Para $m\xi = 100$, temos uma distribuição maxwelliana; para $m\xi = 10$, temos o caso relativista e para $m\xi = 1$, temos o caso ultrarelativista. A velocidade mais provável (u_p), é encontrada fazendo

$$\frac{d}{du} [\gamma^5 u^2 \exp(-m\xi\gamma)] = 0 \quad (\text{VI-61})$$

Colocando toda a expressão acima em função de γ ,

$$\frac{d}{d\gamma} [(\gamma^5 - \gamma^3) \exp(-m\xi\gamma)] = 0 \quad (\text{VI-62})$$

assim;

$$m\xi = \frac{5\gamma^2 - 3}{\gamma(\gamma^2 - 1)} \quad (\text{VI-63})$$

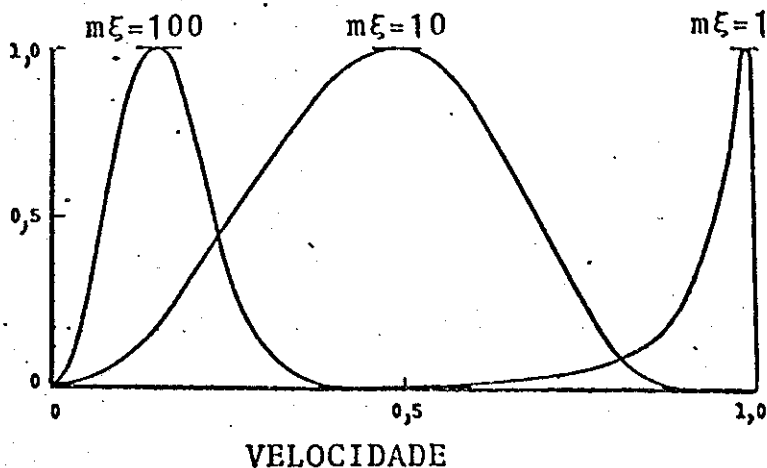


Figura (VI-3)

Distribuição de velocidades para um gás simples, composto de partículas materiais. Na abscissa está representada a velocidade ($c = 1$) e a ordenada é proporcional a $\gamma^5 u^2 \exp(-m\xi \gamma)$, e portanto é proporcional ao número de partículas com velocidades no intervalo $[u, u + du]$ para du fixo. Os gráficos estão desenhados para $m\xi = 100, 10$ e 1 , e estão normalizados fazendo-se o máximo igual a unidade em cada caso.

para um dado valor de $m \xi$, podemos encontrar a velocidade mais provável. Assim, para

$$m \xi = 100, \quad u_p = 0,143$$

$$m \xi = 10, \quad u_p = 0,487$$

$$m \xi = 1, \quad u_p = 0,980$$

Buracos negros com mesmas coordenadas u e θ no espaço de velocidades, terão a mesma projeção u_z sobre o eixo z . Integrando (VI-60) em ϕ ,

$$n du d\theta = \frac{N_0 V}{2} \frac{m \xi}{k_2(m \xi)} \frac{u^2 \sin \theta}{(1-u^2)^{5/2}} \cdot \exp\left[\frac{-m \xi}{(1-u^2)^{1/2}}\right] du d\theta \quad (\text{VI-64})$$

que nos dá o número de partículas com velocidades nos intervalos $(\theta, \theta + d\theta)$ e $(u, u + du)$.

Um fóton emitido com uma frequência ω_e , por um buraco negro em movimento, será visto por um observador no eixo- z , com uma frequência ω_o , onde

$$\omega_o = \left[\frac{1 + u_z}{1 - u_z} \right]^{1/2} \omega_e \quad (\text{VI-65})$$

$$e \quad u_z = u \cos \theta$$

Seja $P(M, \omega) d\omega$, a potência de radiação eletromagnética emitida por um buraco negro de massa M , com frequência no intervalo $(\omega, \omega + d\omega)$. A potência total será a soma em todos os buracos negros, isto é

$$P d\omega = \sum_{\text{TODOS OS BURACOS NEGROS}} P_e(M, \omega_o) d\omega \quad (\text{VI-66})$$

de (VI-64), podemos substituir a somatória por integrais em u e θ ,

$$P d\omega = \int n P_e(M, \omega_0) du d\theta d\omega \quad (\text{VI-68})$$

A curva para fótons da figura (VI-1), nos dá o produto $MP_e(M, \omega)$. Como não temos uma função analítica para essa curva, aproximaremos por um polinômio interpolador. O resultado mais conveniente, é dado por um polinômio do 7º grau,

$$F(M\omega) = \sum_{r=0}^7 a_r (M\omega)^r \quad (\text{VI-69})$$

onde

$$a_0 = - 8,043380$$

$$a_1 = 67,00417$$

$$a_2 = - 661,2407$$

$$a_3 = 4004,753$$

$$a_4 = - 15778,1$$

$$a_5 = 34088,17$$

$$a_6 = - 37294,38$$

$$a_7 = 16152,54$$

Na figura (VI-4) mostramos o polinômio interpolador. Este pode ser escrito como:

$$\log_{10} (MP_e) = F(M\omega) \quad (\text{VI-70})$$

ou

$$P_e(M\omega) = \frac{10^{F(M\omega)}}{M} \quad (\text{VI-71})$$

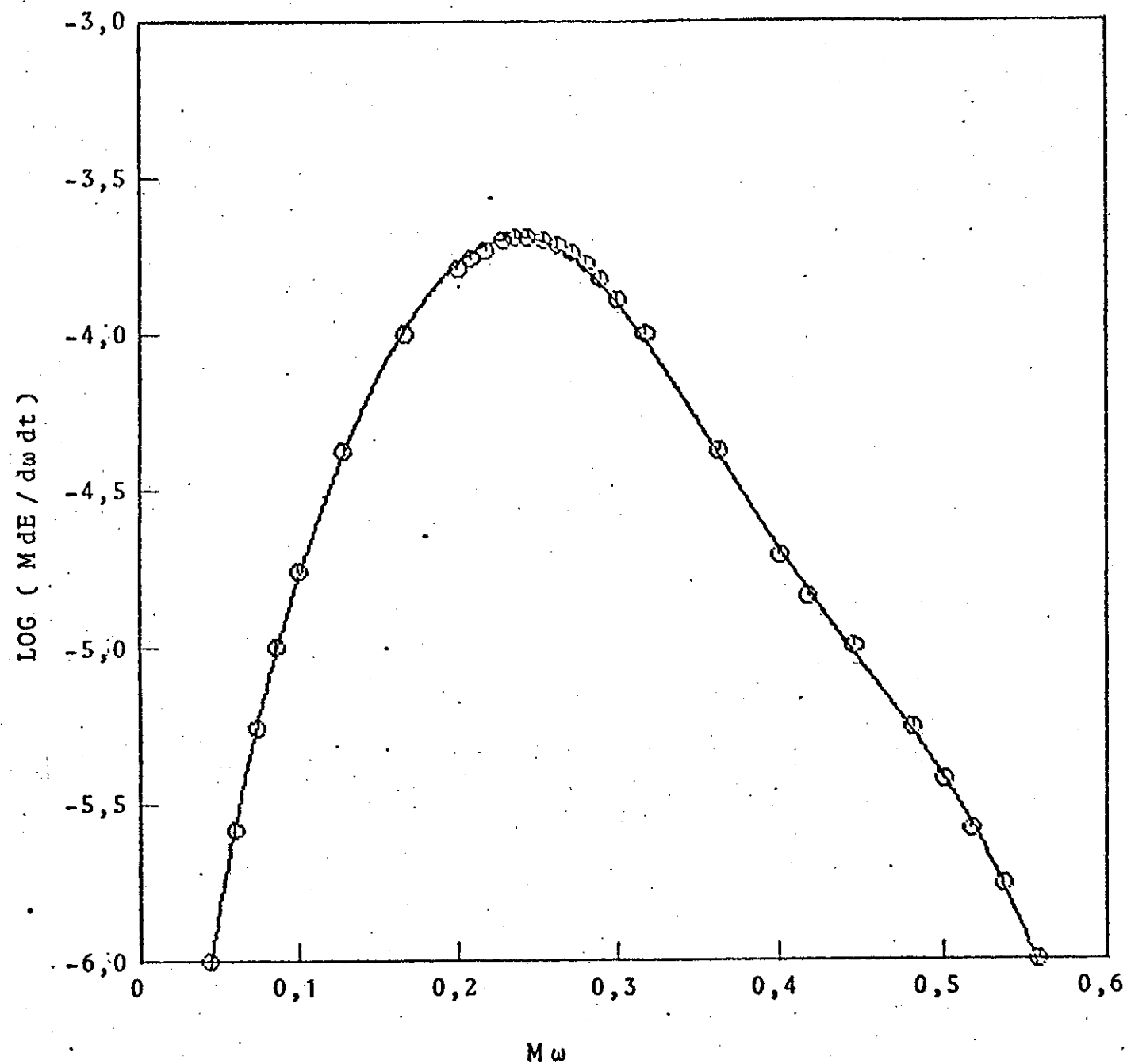


Figura (VI-4)

Polinômio de grau 7 utilizado para interpolar o espectro eletromagnético de um buraco negro. Os pontos assinalados com círculos representam os valores retirados da curva original que está representada na figura (VI-1).

Assim, de (VI-71), (VI-64) e (VI-68),

$$Pdw = \frac{N_0 V}{2} \frac{\xi}{K_2(M\xi)} \int_0^{\tilde{\pi}} \int_0^1 \frac{\mu^2 \text{SENO}}{(1-\mu^2)^{5/2}} \text{EXP} \left[\frac{-M\xi}{(1-\mu^2)^{1/2}} \right] \cdot 10^{F(Mw_0)} d\mu d\theta dw \quad (\text{VI-72})$$

Como $N_0 V$ representa o número total de buracos negros do gás, podemos tomar a potência por partícula (P_p), como

$$Pdw = \frac{P}{N_0 V} dw = \frac{\xi}{2 K_2(M\xi)} \int_0^{\tilde{\pi}} \int_0^1 \frac{\mu^2 \text{SENO}}{(1-\mu^2)^{5/2}} \text{EXP} \left[\frac{-M\xi}{(1-\mu^2)^{1/2}} \right] \cdot 10^{F(Mw_0)} d\mu d\theta dw \quad (\text{VI-73})$$

A hipótese de que todos os buracos negros tivessem a mesma massa foi inicialmente utilizada, por sua simplicidade. No entanto, o espectro contínuo de emissão de fótons assim obtido apresentava uma forma totalmente diferente da obtida observacionalmente. A partir daí, concluímos que deveria haver uma distribuição não trivial nas massas dos buracos negros. Assim, consideremos que eles tenham um espectro de massa dado por $G(M)$. Seja N_p , o número total de buracos negros. $N_p G(M) dM$, dá o número de buracos negros com massas no intervalo $(M, M + dM)$. A relação (VI-73), ficará

$$P_p dw = \int_0^{\tilde{\pi}} \int_0^1 \frac{\xi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\mu^2 \text{SENO}}{K_2(M\xi)} \text{EXP} \left[\frac{-M\xi}{(1-\mu^2)^{1/2}} \right] \cdot \frac{g(M)}{(1-\mu^2)^{5/2}} dM d\mu d\theta dw$$

$$10^{F(M_{\omega_0})} d\omega d\theta dM d\omega$$

(VI-74)

Conhecendo a distribuição de massa, a expressão acima dá a distribuição espectral da radiação de Hawking emitida pelo sistema.

Como vimos anteriormente, o espectro do 3C 273 pode ser aproximado por uma lei de potência $f_\nu \propto \nu^{-1}$. Quando diminuímos a frequência de uma ordem de grandeza, a potência deve aumentar de uma ordem de grandeza. Quando a massa aumenta de uma ordem de grandeza, a potência e a frequência diminuem de uma ordem de grandeza. Assim, para termos um espectro proporcional a ν^{-1} , o espectro de massa deve ser do tipo

$$G(M) \propto M^2$$

O intervalo de massa é tomado inicialmente como

$$10^{15} \text{ g} \leq M \leq 10^{29} \text{ g}$$

Os limites superior e inferior nos dariam, a emissão na região do rádio e de raios γ , respectivamente. O resultado é mostrado na figura (VI-5)

O número de partículas é encontrado, ajustando-se o modelo à potência observada do 3C 273. Considerando-se que a potência seja $2,5 \times 10^{47}$ ergs/seg e a distância de 900 Mpc, o número de partículas é da ordem de 10^{56} .

O volume ocupado por tais partículas, seria

$$V = 10^{56} \frac{4}{3} \pi R_g^3$$

Para $M = 10^{29}$ g, esse volume é da ordem de 10^{60} cm³. Esse volume é

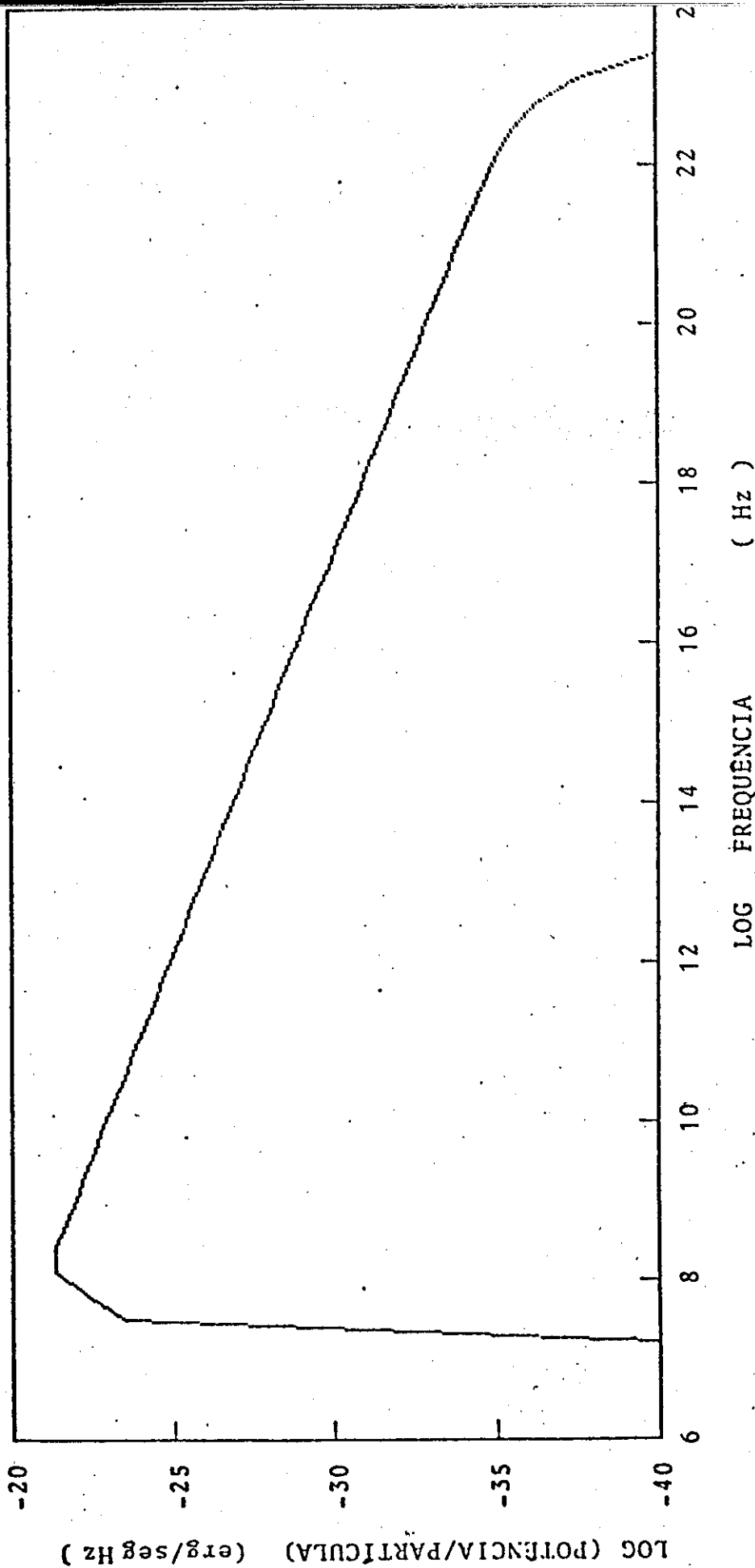


Figura (VI-5)
 O espectro de um gás de buracos negros emitindo radiação de Hawking. Os buracos negros que formam o gás possuem uma distribuição de massa proporcional ao quadrado de sua massa, possuindo o limite inferior de 10^{15} gramas e o superior de 10^{29} gramas.

aproximadamente 10^5 vezes maior que o volume inferido ao 3C 273.

Diminuiremos o limite superior para 10^{25} g, que nos dará a emissão no infravermelho longínquo. A curva é mostrada na figura (VI-6). Ajustando a potência ao 3C 273, encontramos que o número de partículas é da ordem de 10^{51} , ocupando um volume de aproximadamente 10^{43} cm^3 . Como o volume do 3C 273 é da ordem de $1 \text{ pc} \approx 10^{55}$ cm^3 , o gás de buracos negros ocuparia apenas um volume de 10^{-12} do volume estimado para esse quasar, e o gás pode ser considerado como um gás rarefeito como admitimos no começo.

Esse modelo reproduz de forma geral o espectro eletromagnético contínuo do 3C 273, embora não explique a potência em radio-frequência nem o excesso de radiação acima da lei de potência. Contudo, podemos utilizar o mecanismo tradicional para a rádio emissão - a radiação de síncrotron.

Um modelo mais realístico seria formado por um gás de buracos negros primordiais no centro de um disco galáctico. Esse disco, seria o responsável pelas linhas de emissão e absorção e possivelmente também pela componente térmica no espectro contínuo.

Em seguida consideramos, no modelo delineado no capítulo IV, o efeito desse campo gravitacional de fundo nos espectros contínuos de emissão de fótons, grávitons e neutrinos. Observamos que a forma geral do espectro não varia com a adição de campos gravitacionais de fundo de intensidades crescentes, mas apenas o valor da potência emitida em cada frequência. Isso nos mostra que o espectro de emissão calculado tem a mesma forma que o espectro

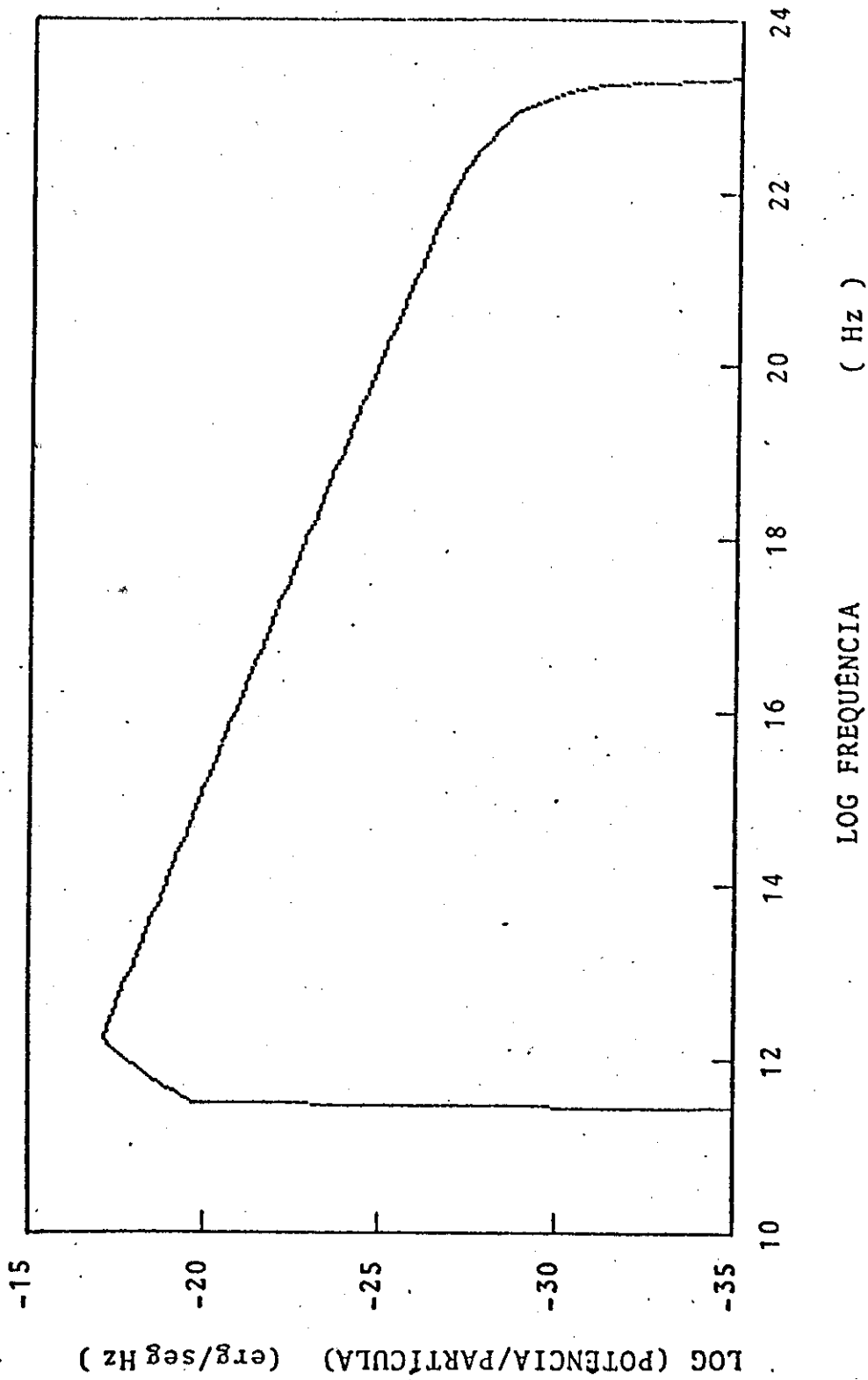
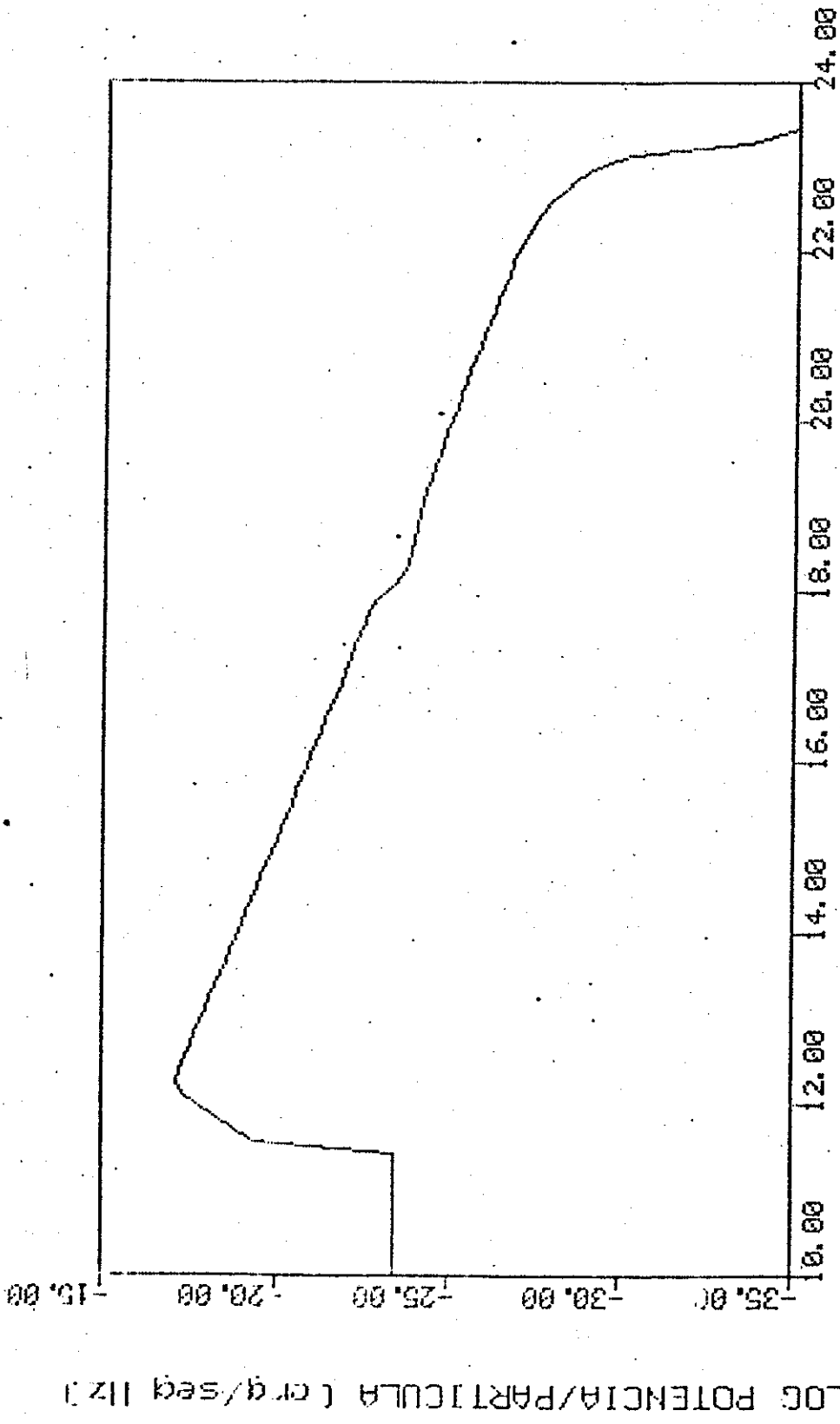


Figura (VI-6)

O espectro de um gás de buracos negros emitindo radiação de Hawking. Os buracos negros que formam o gás possuem uma distribuição de massa proporcional ao quadrado de sua massa, possuindo o limite inferior de 10^{15} gramas e o superior de 10^{25} gramas.

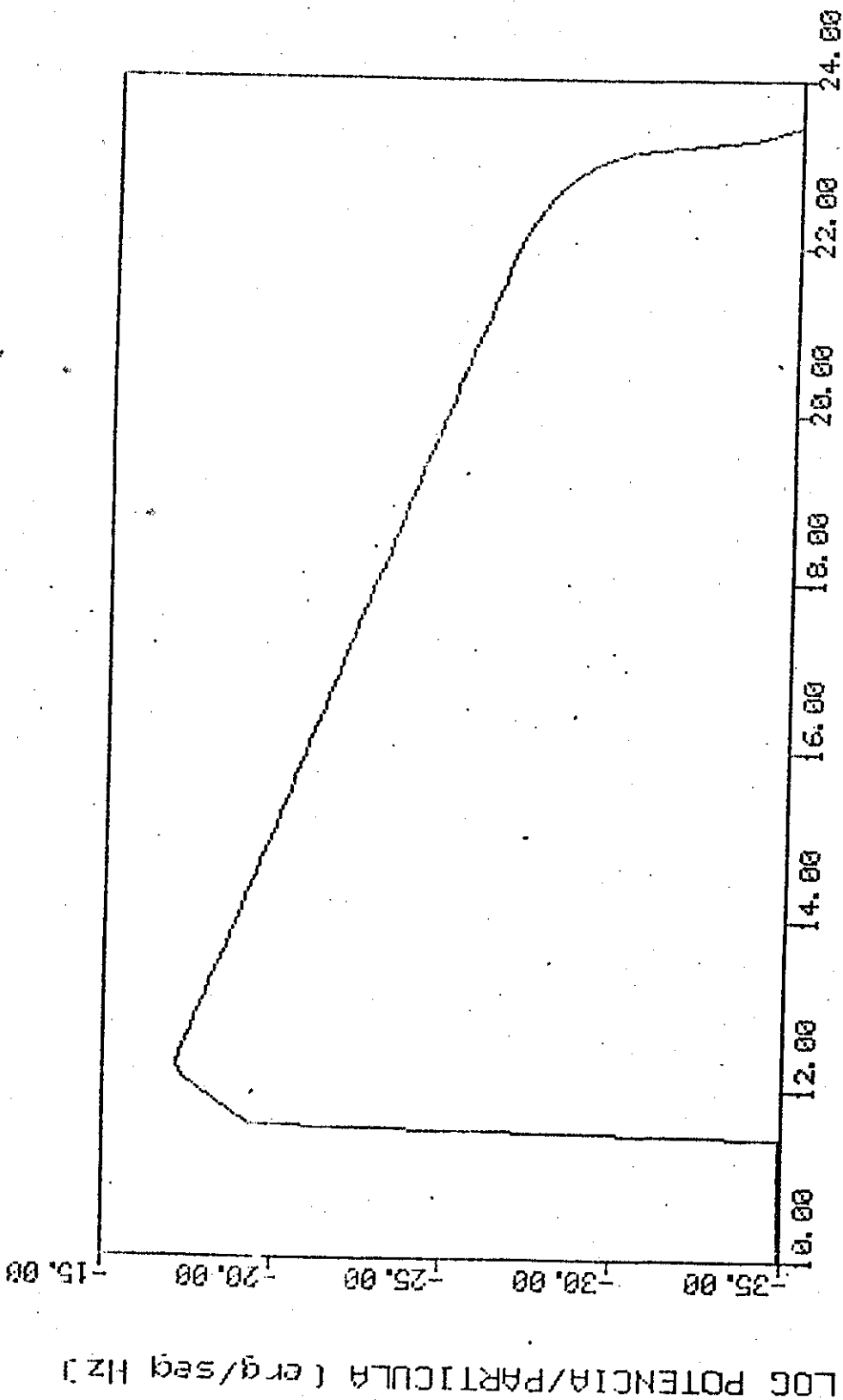
medido observacionalmente. O efeito que na realidade é causado pelo campo gravitacional de fundo é do tipo discutido nesse trabalho. Dessa forma, obtemos o efeito do campo gravitacional de fundo nos espectros contínuos de emissão de partículas de massa nula, o que está representado nas figuras (VI-7-a), (VI-7-b), (VI-7-c), (VI-7-d), (VI-8-a), (VI-8-b), (VI-9-a) e (VI-9-b).



LOG FREQUENCIA (HZ)

Figura (VI-7-a)

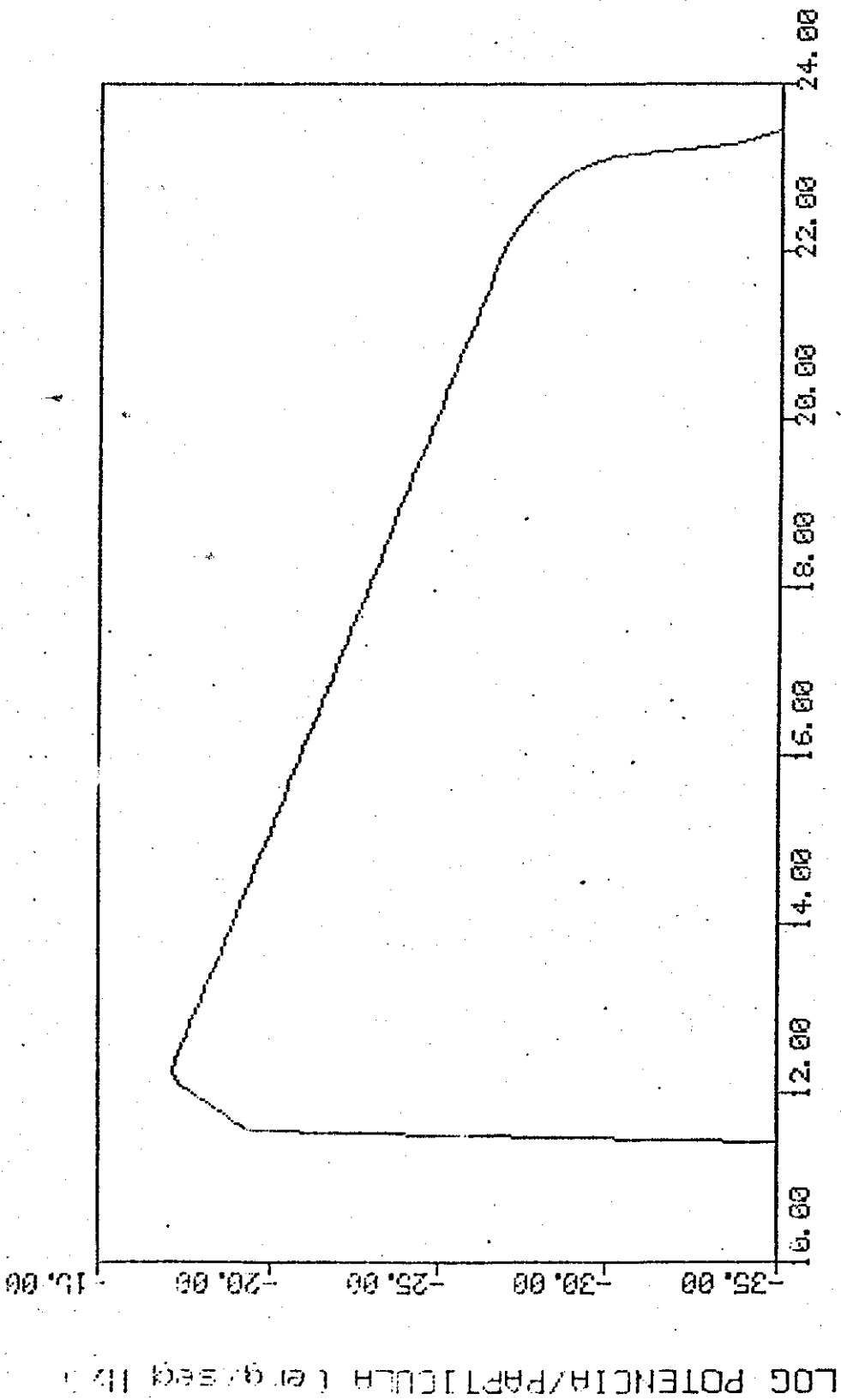
O espectro de um gas de buracos negros emitindo radiao de Hawking. Os buracos negros que formam o gas possuem uma distribucao de massa proporcional ao quadrado de sua massa, possuindo o limite inferior de 10^{15} gramas e o superior de 10^{28} gramas, usando uma frequencia de campo de fundo de 10^{22} (photons).



LOG FREQUENCIA (HZ)

Figura (VI-7-6)

O espectro de um gás de buracos negros emitindo radiação de Hawking. Os buracos negros que formam o gás possuem uma distribuição de massa proporcional ao quadrado de sua massa, possuindo o limite inferior de 10^{15} gramas e o superior de 10^{25} gramas, usando uma frequência de campo de fundo de 10^{-14} (fótons).



LOG POTENCIA/PARTICULA (erg/seg Hz)

LOG FREQUENCIA (HZ)

Figura (VI-7-c)

O espectro de um gás de buracos negros emitindo radiação de Hawking. Os buracos negros que formam o gás possuem uma distribuição de massa proporcional ao quadrado de sua massa, possuindo o limite inferior de 10^{15} gramas e o superior de 10^{25} gramas, usando uma frequência de campo de fundo de 10^{26} (fótons).

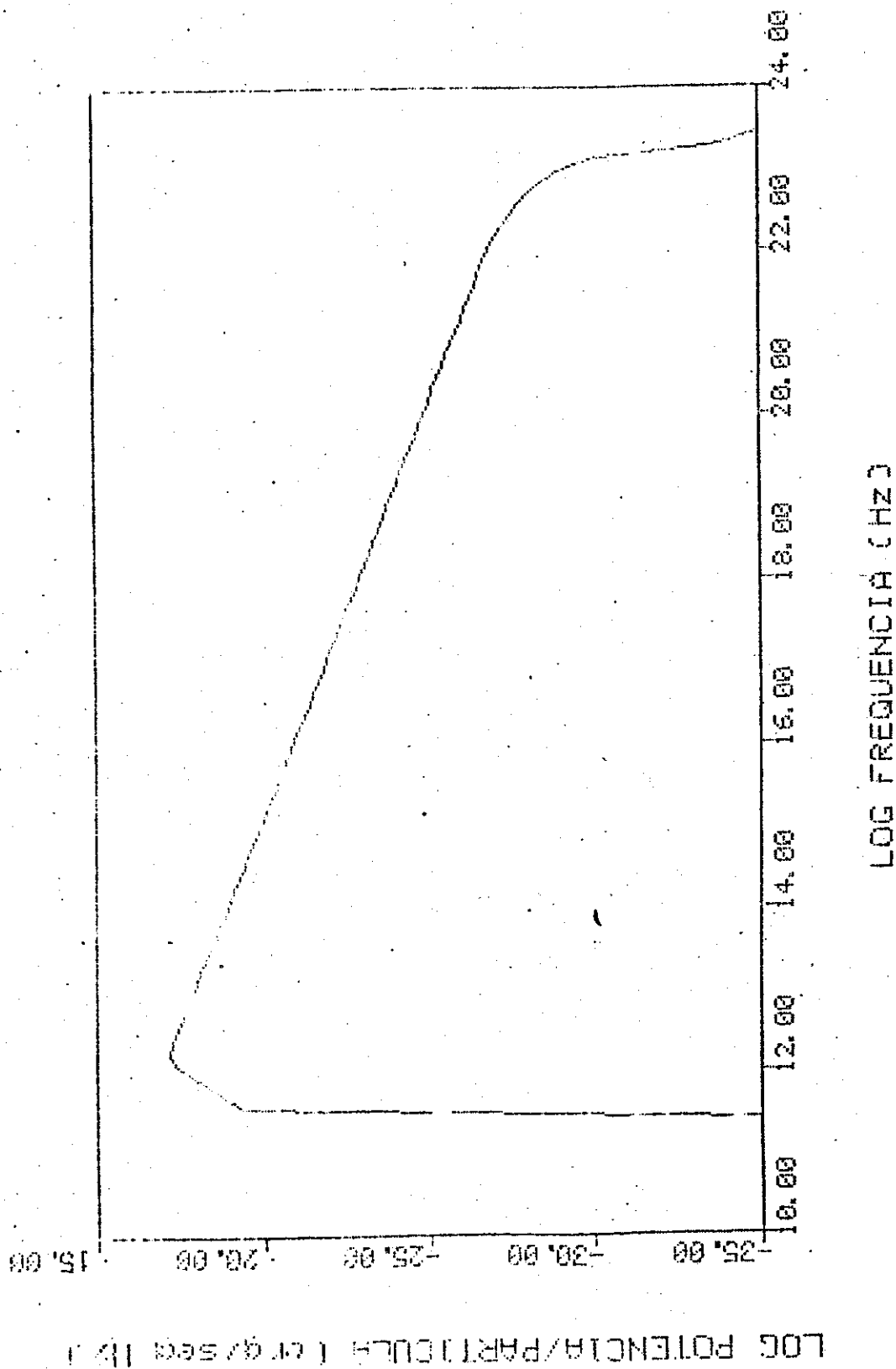
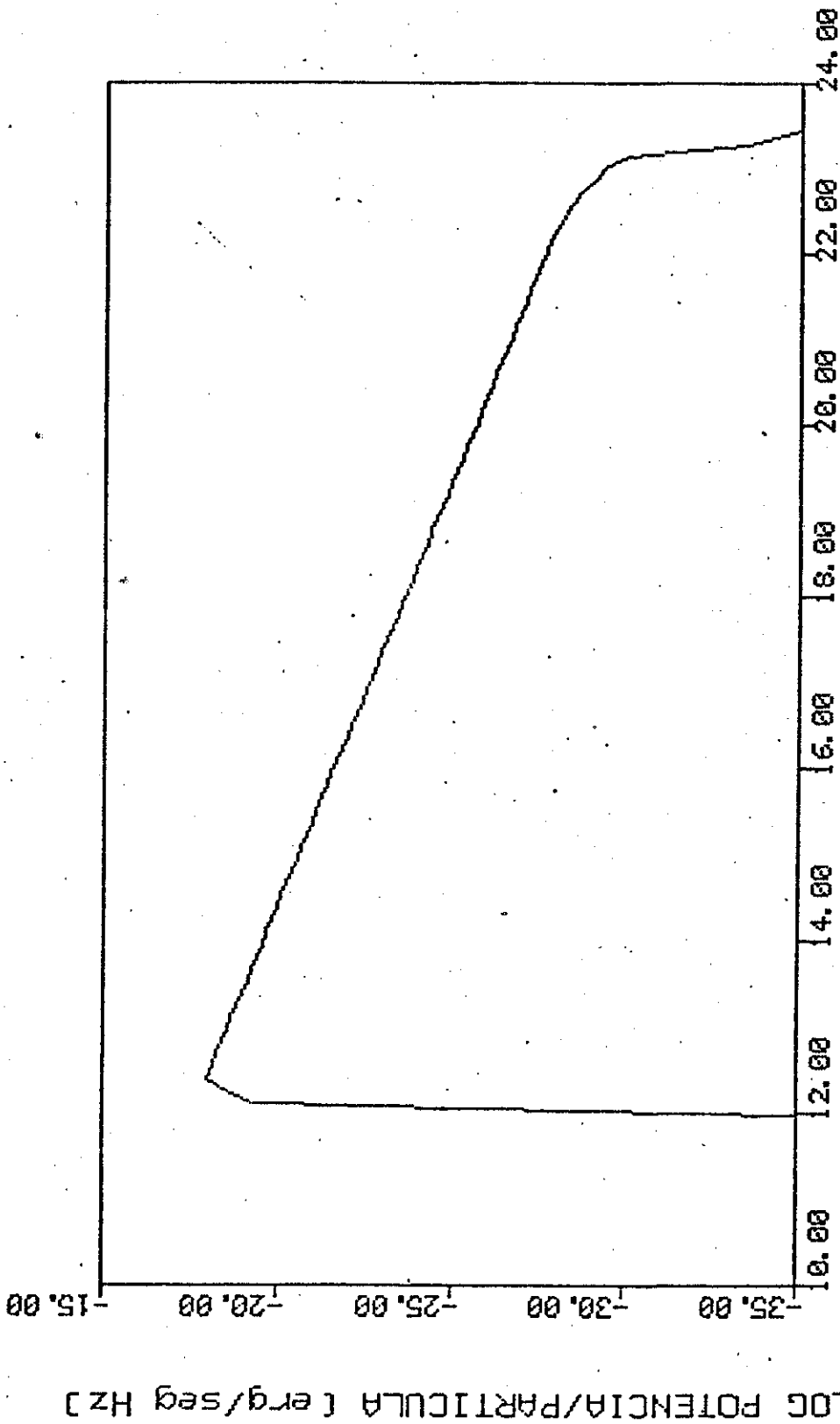


Figura (VI-7-d)

O espectro de um gás de buracos negros emitindo radiação de Hawking. Os buracos negros que formam o gás possuem uma distribuição de massa proporcional ao quadrado de sua massa, possuindo o limite inferior de 10^{15} gramas e o superior de 10^{25} gramas, usando uma frequência de campo de fundo de 10^{-18} (fótons).



LOG FREQUENCIA (HZ)

Figura (VI-8-a)

O espectro de um gás de buracos negros emitindo radiação de Hawking. Os buracos negros que formam o gás possuem uma distribuição de massa proporcional ao quadrado de sua massa, possuindo o limite inferior de 10^{15} gramas e o superior de 10^{25} gramas (gravitons).

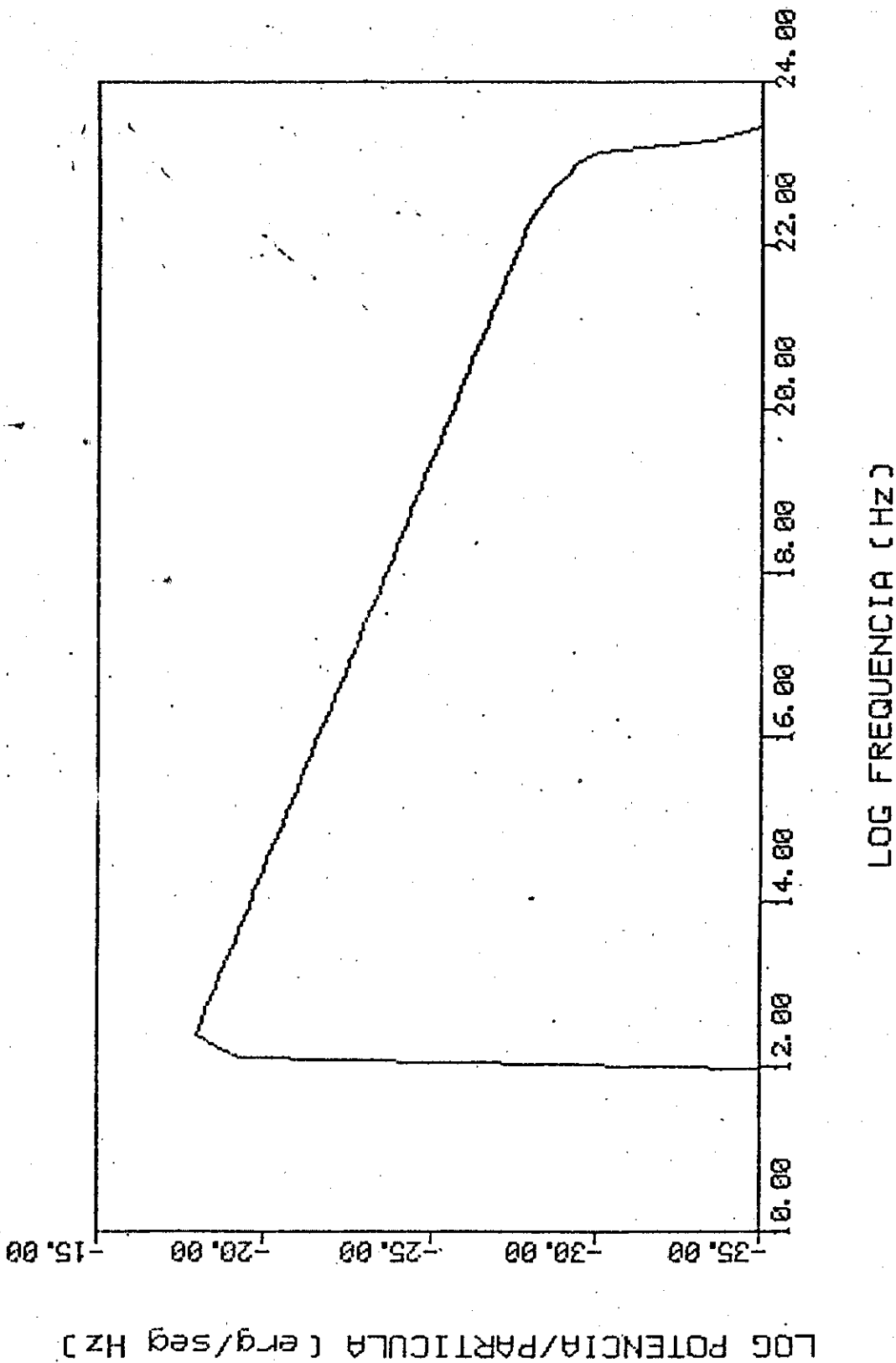


Figura (VI-9-b)

O espectro de um gás de buracos negros emitindo radiação de Hawking. Os buracos negros que formam o gás possuem uma distribuição de massa proporcional ao quadrado de sua massa, possuindo o limite inferior de 10^{15} gramas e o superior de 10^{25} gramas, usando uma frequência de campo de fundo de $10^{-\frac{1}{2}}$ (gravitons).

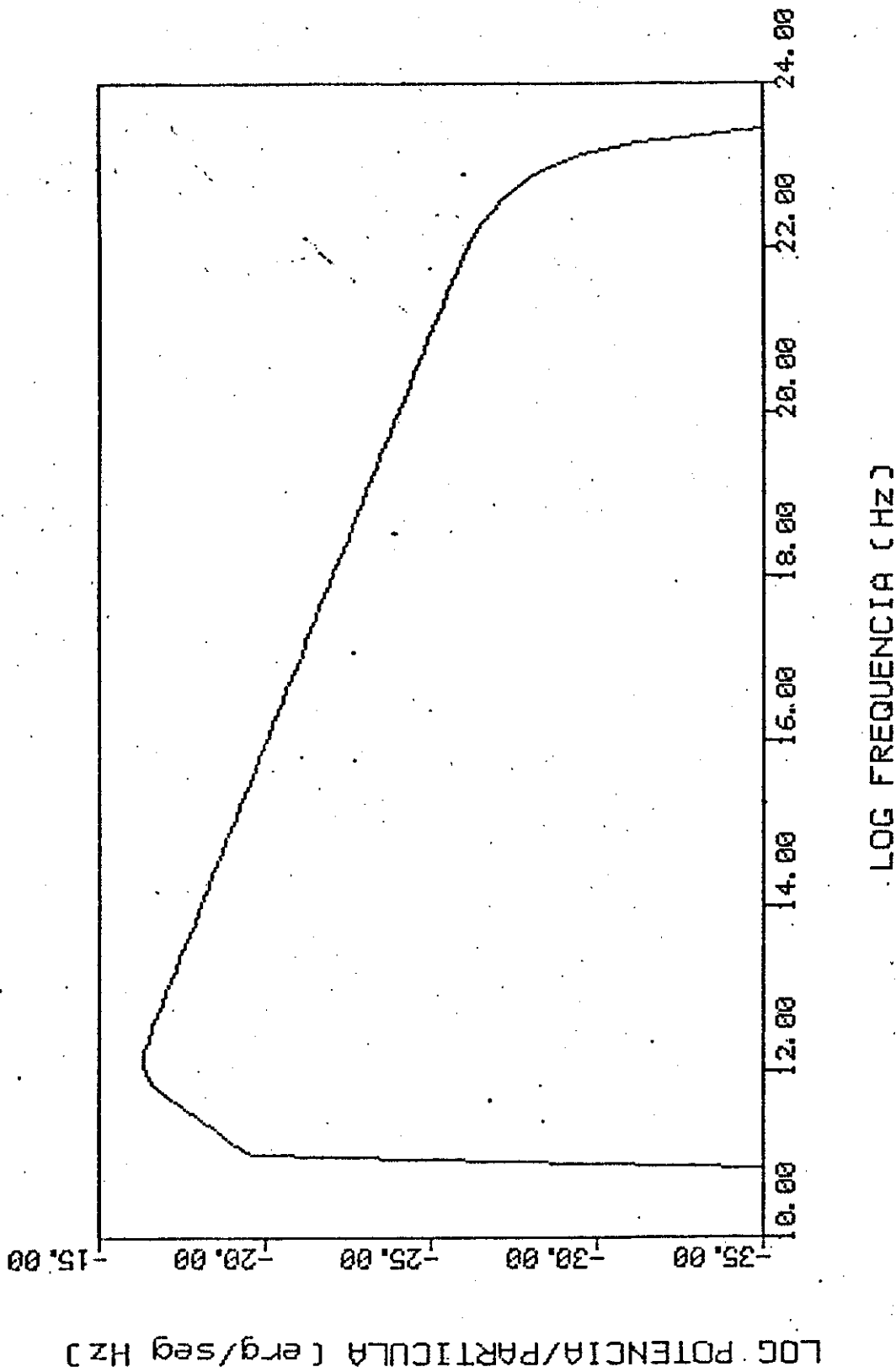
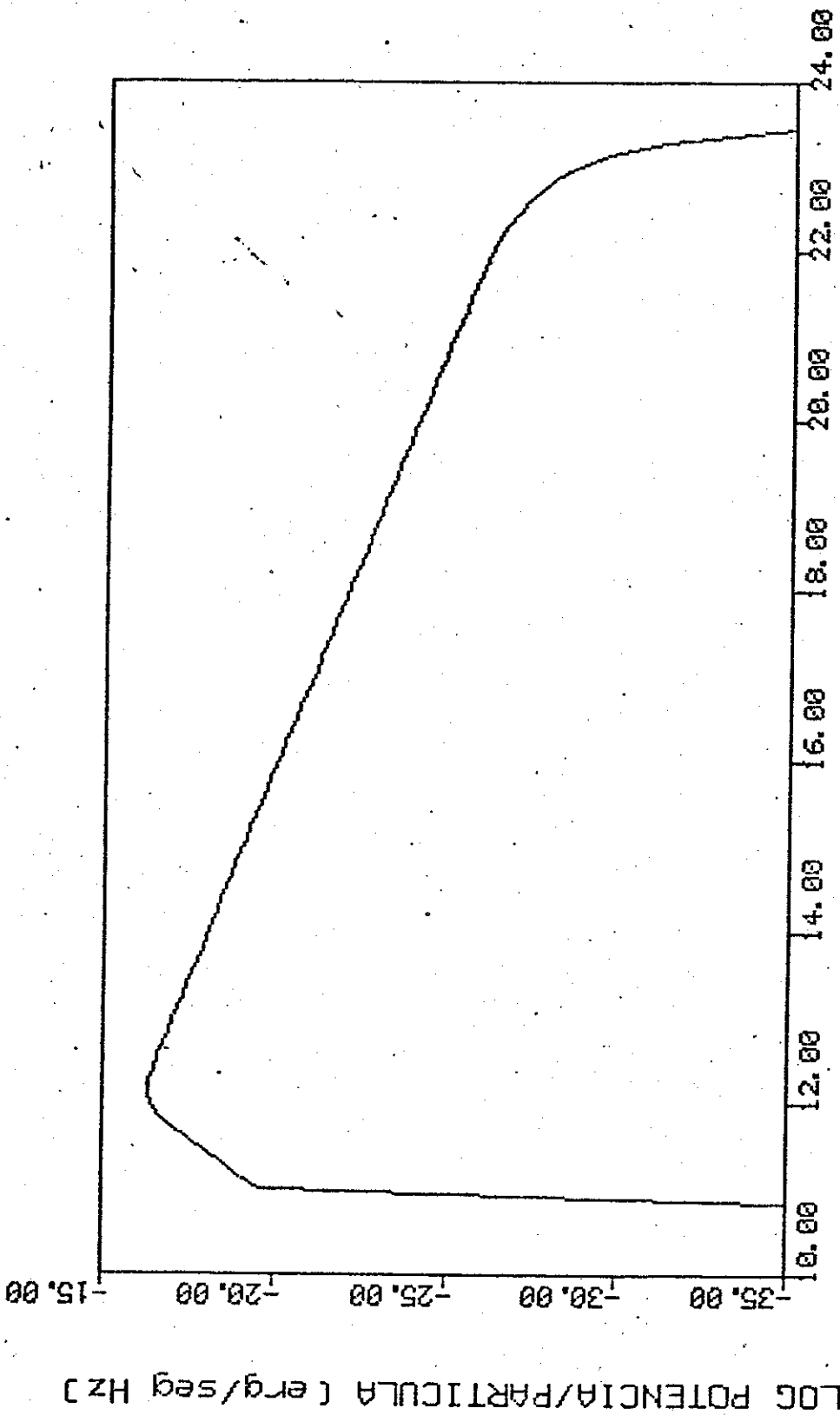


Figura (VI-9-a)

O espectro de um gás de buracos negros emitindo radiação de Hawking. Os buracos negros que formam o gás possuem uma distribuição de massa proporcional ao quadrado de sua massa, possuindo o limite inferior de 10^{25} gramas e o superior de 10^{25} gramas (neutrinos)



LOG FREQUENCIA (HZ)

Figura (VI-9-b)

O espectro de um gás de buracos negros emitindo radiação de Hawking. Os buracos negros que formam o gás possuem uma distribuição de massa proporcional ao quadrado de sua massa, possuindo o limite inferior de 10^{15} gramas e o superior de 10^{25} gramas, usando uma frequência de campo de fundo de 10^{26} (neutrinos).

Capítulo VII

VII - 1 - Considerações finais e perspectivas futuras

O novo modelo proposto representa um refinamento mais realista do modelo de gás ideal de buracos negros sem campo gravitacional de fundo, e abre novas possibilidades de desenvolvimento. Em primeiro lugar, pode-se desenvolver trabalhos sobre o espectro de emissão de partículas de massa nula no contínuo, com campos gravitacionais externos de simetria bem definida (simetrias esférica, cilíndrica, etc.) de modo a possibilitar o modelamento do campo devido ao anel de crescimento de forma mais realística. O cálculo pode ser estendido a emissão de partículas de massas de repouso não nulas (elétrons, pósitrons, múons, etc.).

Também como um problema de Teoria de Gravitação, o estudo do presente modelo abre interessantes perspectivas, principalmente no que se refere a modelos de interação de buracos negros entre si (gás não ideal de buracos negros) e da interação de buracos negros com campos gravitacionais de fundo. Em particular, um estudo mais detalhado da evolução de cenários e suas possíveis alternativas, como indicado no capítulo IV, também apresenta considerável interesse. E finalmente, o tratamento do gás de buracos negros quantizado em interação com um campo gravitacional de fundo também quantizado, superposto a um espaço-tempo curvo, e o estudo da mecânica estatística do gás de buracos negros incluindo

possíveis hipóteses aos estados internos das partículas do gás, representam desafios no campo da Gravitação Quântica que apresentam considerável importância para o estudo da Gravitação, e suas aplicações astrofísicas.

REFERÊNCIAS

- 01 - Hazard, C. e S. Mitton, (1979), "Active Galactic Nuclei", Cambridge, Cambridge University Press.
- 02 - Schmidt, M., (1963), "3C 273: A Star-like Object with Large Red-shift", Nature, 197, 1040.
- 03 - Burbidge, G. e M. Burbidge, (1967), "Quasi-stellar Objects", San Francisco, W. H. Freeman and Company.
- 04 - Verom-Cetty, M-P. e P. Veron, (1985), "A Catalogue of Quasars and Active Nuclei", Second Edition, ESO Scientific Report.
- 05 - Lynden-Bell, D. (1969), "Galactic Nuclei as Collapsed Old Quasars", Nature, 223, 295.
- 06 - Hills, J. G., (1975), "Possible Power Source of Seyfert Galaxies and QSO's", Nature, 254, 295.
- 07 - Guerra, R., (1984), Tese de Mestrado na UNICAMP, Campinas.
- 08 - Synge, J. L., (1957), "The Relativistic Gas", New York, Interscience Publishers Inc.
- 09 - Newton, I., (1686), "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", publicado em inglês como "Principia", University California Press, 1962.
- 10 - Will, C. M., (1981), "Theory and Experiment in Gravitational Physics", Cambridge, Cambridge University Press.
- 11 - Einstein, A., (1905), "On the Electrodynamics of moving bodies", Ann. D. Phys., 17, 891.

12 - Einstein, A., (1907), "Über das Relativitätsprinzip und die aus Demselben Gerogenen Folgerungen", Jarb. Radioakt., 4, 411. Este artigo é comentado por H. M. Schwartz nos três artigos abaixo:

- Schwartz, H. M., (1977), "Einstein's comprehensive 1907 essay on Relativity, Part I", Am. J. Phys. 45, 512.

- Schwartz, H. M., (1977), "Einstein's comprehensive 1907 essay on relativity, Part II", Am. J. Phys. 45, 811.

- Schwartz, H. M., (1977), "Einstein's comprehensive 1907 essay on Relativity, Part III", Am. J. Phys, 45, 899.

13 - Kramer, D., H. Stephani, M. MacCallum, E. E. Herlt, (1980), "Exact Solutions of Einstein's Field Equation", Cambridge, Cambridge University Press.

14 - Newmann, E. T., E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash e R. Torrence, (1965), "Metric of a Rotating Charged Mass", J. Math. Phys., 6, 918.

15 - Boyer, R. H. e Lindquist, R. W., (19d67), "Maximal Analytic Extension of Kerr Metric", J. Math. Phys., 8, 265.

16 - Misner, C. W., K. S. Thorne e J. A. Wheeler, (1973), "Gravitation", San Francisco, W. H. Freeman and Company.

17 - Hawking, S. W., (1971), "Gravitationally Collapsed Objects of Very Low Mass", Mon. Not. R.A.S., 152, 75.

18 - Zeldovich, Y. B., e I. D. Novikov, (1967), Sov. Astr. Aj., 10, 602.

19 - Carr, B. J., e S. W. Hawking, (1974), "Black Holes in the Early University", Mon. Not. R.A.S., 168, 399.

20 - Hawking, S. W., (1972), "Black Holes in General Re-

lativity", Commun. Math. Phys., 25, 152.

21 - Smarr, L., (1973), "Mass Formula for Kerr Black Holes", Phys. Rev. Lett., 30, 71.

22 - Frolov, V. P., (1976), "Black Holes and Quantum Process in Them", Sov. Phys. USP, 19, 244.

23 - Bardeen, J. M., B. Carter e S. W. Hawking, (1973), "The Four Laws of Black Hole Mechanics", Commun. Math. Phys., 31, 161.

24 - Bekenstein, J. D., (1973), "Black Holes and Entropy", Phys. Rev. D, 7, 2333.

25 - Papapetrou, A., (1951), "Spinning test-particles in General Relativity I", Proc. R. Soc. London, A209, 248.

26 - Einstein, A., L. Infeld e B. Hoffmann, (1938), Ann. Math., 39, 65.

27 - Schiff, L. I., (1960), "Motion of a Gyroscope According to Einstein's Theory of Gravitation", Proc. Natl. Acad. Sci. (U.S.), 46, 871.

28 - Mashhoon, B., (1971), "Particles with Spin in a Gravitational Field", 12, 1075.

29 - O'Connell, R. F., (1974), "Spin, Rotation and C,P and T effects in Gravitational Interaction and Related Experiments" em "Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course LVI", Varena on Lake Como, Italy, July 1972.

30 - D'Eath, P. D., (1975), "Dynamics of a Small Black Hole in a Background Universe", Phys. Rev. D, 11, 1387.

31 - D'Eath, P. D., (1975), "Interaction of two Black Holes in the Slow-motion limit", Phys. Rev. D, 12, 2183.

- 32 - Seyfert, C. K., (1943), "Nuclear Emission in Spiral Nebulae", *Astrophys. J.*, 97, 28.
- 33 - Hazard, T. M., M. B. Mackay e A. J. Shinnars, (1963), "Investigation of the Radio Source 3C 273 by the Method of Lunar Ocultations", *Nature*, 197, 1037.
- 34 - Sandage, A. R., (1965), "The Existence of Major New Constituent of the Universe: The Quasi-stellar Galaxies" , *Astrophys. J.*, 141, 1560.
- 35 - Ulrich, M-H., (1981), "3C 273: A Review of Recent Results", *Space Science Reviews*, 28, 89.
- 36 - Wiita, J. P., (1985), "Active Galactic Nuclei I. Observation and Fundamental Interpretations", *Phys. Rep.* 123, 119.
- 37 - Sérsic, J. L., (1982), "Extragalactic Astronomy", Holland, D. Reidel Publishing Company.
- 38 - Hawking, S. W., (1975), "Particle Creation by Black Holes", *Commun. Math. Phys.* 43, 199.
- 39 - Starobinsky, A. A., e S. M. Churilov, (1973), "Amplification of Eletromagnetic and Gravitational Waves Scattered by a Rotating Black Hole", *Sov. Phys. - JETP*, 38, 1.
- 40 - Page, D. M., (1976), "Particle Emission Rates from a Black Hole: Massless Particles from an Uncharged, Nonrotating Hole", *Phys. Rev. D*, 13, 198.
- 41 - Page, D. M., (1977), "Particle Emission Rates from a Black Hole II. Massless Particles from Rotating Hole", *Phys. Rev. D*, 14, 3260.
- 42 - Page, D. M., (1977), "Particle Emission Rates from

a Black Hole III. Charged Leptons from a Nonrotating Hole", 16, 2402.

43 - Teukolsky, S. A., (1973), "Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-Field Perturbations", *Astrophys. J.*, 185, 635.

44 - Press, W. H., e S. A. Teukolsky, (1973), "Perturbations of a Rotating Black Hole.II. Dynamical Stability of the Kerr Metric", 185, 649.

45 - Teukolsky, S. A., e W. H. Press, (1974), "Perturbations of a Rotating Black Hole.III. Interaction of the Hole with Gravitational and Eletromagnetic Radiation", 193, 443.

46 - Newman, E., e R. Penrose, (1962), " An Approach to Gravitational Radiation by a method of Spin Coeficients", 3, 566.

47 - Hawking, S. W. , e J. B. Hartle, (1972), "Energy and Angular Momentum Flow into a Black Hole", *Commun. Math. Phys.*, 27, 283.

. Apêndice A

Relação entre $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$.

Neste Apêndice, mostramos a relação entre a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Usando o Princípio Variacional, mostra-se também que a curva descrita por uma partícula em um campo gravitacional é uma geodésica.

Da definição do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, equação (II-16), temos que:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{II-16})$$

Derivando em relação a x^{λ} , teremos:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}$$

mas, de (II-15)

$$\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} = \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \quad (\text{II-15})$$

logo

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\rho}} \eta_{\alpha\beta}$$

Usando novamente (II-16), ficamos com

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} g_{\rho\mu} \quad (\text{A-1})$$

Considerando as expressões análogas a (A-1), a saber

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = g_{\kappa\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \quad (\text{A-2})$$

e

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\kappa + g_{\kappa\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa \quad (\text{A-3})$$

Somando (A-1) com (A-2) e subtraindo (A-3), vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + g_{\kappa\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa + g_{\kappa\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa \\ &+ g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\kappa - g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\kappa - g_{\kappa\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa \\ &= 2 g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

onde usamos a simetria da conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ pela troca dos índices μ e ν .

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (\text{A-5})$$

e

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (\text{A-5}')$$

Definindo $g^{\nu\sigma}$ como a matriz inversa de $g_{\nu\sigma}$, isto é

$$g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} = \delta_\kappa^\sigma \quad (\text{A-6})$$

e multiplicando (A-4) por $g^{\nu\sigma}$ obtemos de (A-4) que

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right\} \quad (\text{A-7})$$

que é a relação entre o tensor métrico e a conexão afim. Geralmente identificamos o lado direito da equação como o símbolo de Christoffel, definido como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \lambda \mu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right\}$$

$$= \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \quad (A-7)'$$

Uma consequência da equação (A-4), é que esta nos possibilita a formular a lei de movimento dos corpos que caem livremente através do Princípio Variacional.

Seja p um parâmetro arbitrário que descreve a trajetória de um corpo. O intervalo de tempo próprio que a partícula gasta para cair de um ponto a para um ponto b é

$$T_{ba} = \int_a^b \frac{d\tau}{dp}$$

$$= \int_a^b \left\{ -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\} dp$$

Variando a trajetória de $x^\mu(p)$ para $x^\mu(p) + \delta x^\mu(p)$, mantendo os pontos extremos fixos

$$\delta x^\mu(0) = 0 \quad \text{e} \quad \delta x^\mu(b) = 0 \quad (A-8)$$

a variação de T_{ba} é

$$\delta T_{ba} = \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}^{-1/2} \left\{ -\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} + \right.$$

$$\left. -2g_{\mu\nu} \frac{d}{dp} (\delta x^\mu) \frac{dx^\nu}{dp} \right\} dp$$

$$= - \int_a^b \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} (\delta x^\nu) \frac{dx^\mu}{d\tau} \right\} d\tau$$

Integrando por partes e tendo em vista (A-8)

$$\delta T_{ba} = - \int_a^b \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \right.$$

$$- g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \} \delta x^\lambda d\tau$$

Usando (A-4) e (A-5)

$$\delta T_{ba} = - \int_a^b \left\{ \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right\} g_{\lambda\nu} dx^\lambda d\tau$$

de (II-14)

$$\delta T_{ba} = 0$$

Podemos dar uma interpretação geométrica a essa equação do seguinte modo: a menor (ou maior) curva descrita por uma partícula em queda livre em um campo gravitacional arbitrário é dada por:

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (A-9)$$

Essa equação denomina-se a equação das geodésicas, e suas soluções, trajetórias geodésicas ou simplesmente geodésicas.

Apêndice B

Análise Tensorial.

Neste Apêndice, discutiremos algumas noções básicas de Análise Tensorial importantes para o formalismo geral da relatividade aplicado a construção de equações invariantes sob uma transformação geral de coordenadas (TGC).

Escalares são quantidades que não mudam por uma TGC, como por exemplo, a carga elétrica.

Vetores Contravariantes são entidades que, sob a ação de uma transformação de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, obedecem a seguinte regra de transformação:

$$V'^\mu = V^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (\text{B-1})$$

Exemplo: a diferenciação parcial

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Analogamente, definimos **Vetores Covariantes**, como entidades que através de uma transformação de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, comportam-se da seguinte forma:

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu \quad (\text{B-2})$$

Exemplo: o gradiente

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}$$

onde ϕ é um campo escalar.

Definimos **Tensores** como resultado do produto de vetores covariantes, de vetores contravariantes ou de ambos. No primeiro caso, dizemos que este tensor é **Covariante**. No segundo, chamamos de **Tensor Contravariante** e no terceiro de **Tensor Misto**. O número de índices do tensor dá a sua ordem. Por exemplo, o tensor

$$T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_n}}{\partial x^{\beta_n}} \frac{\partial x^{\sigma_m}}{\partial x'^{\beta_m}}$$

$$T^{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m} \quad (B-3)$$

é um tensor de ordem $m + n$ (covariante de ordem m e contravariante de ordem n).

De acordo com a discussão acima, podemos dizer que escalares são tensores de ordem zero, e que vetores são tensores de ordem 1.

O interesse fundamental em nossa discussão sobre tensores reside no fato de que qualquer equação será invariante por uma TGC se estabelecer a igualdade de dois tensores com os mesmos índices superiores e inferiores. Por exemplo, se em x^{μ} ,

$$A^{\mu \lambda}_{\nu} = B^{\mu \lambda}_{\nu}$$

então em x'^{μ} , essa equação é da forma

$$A'^{\mu \lambda}_{\nu} = B'^{\mu \lambda}_{\nu}$$

As principais propriedades de Álgebra Tensorial são as seguintes:

a - Combinação Linear

Uma combinação linear de tensores com os mesmos índices superiores e inferiores é um tensor com esses índices. Por exemplo: seja A_{ν}^{μ} e B_{ν}^{μ} dois tensores mistos, então

$$T_{\nu}^{\mu} = a A_{\nu}^{\mu} + b B_{\nu}^{\mu}$$

também é um tensor (a e b são constantes)

b - Produto Direto

O produto de componentes de dois tensores é um tensor cujos índices superiores e inferiores são todos os índices superiores e inferiores dos dois tensores que lhe deram origem. Por exemplo, se A_{ν}^{μ} e B^{ρ} são tensores, então

$$T_{\nu}^{\mu\rho} \equiv A_{\nu}^{\mu} B^{\rho}$$

c - Contração

Se alguns dos índices superiores de um tensor são repetidos como índices inferiores, esse tensor é igual a um novo tensor sem os índices repetidos. Por exemplo, se $T_{\nu}^{\mu\rho\sigma}$ é um tensor, então

$$T^{\mu\rho} \equiv T_{\nu}^{\mu\rho\nu}$$

também é um tensor.

Existe determinadas entidades que se transformam como tensores, exceto pela presença extra do determinante jacobiano. Essas entidades são chamadas de tensores densidades, e o número de fatores do determinante dá o seu peso (W).

Podemos generalizar as propriedades algébricas dos tensores de modo a incorporar também os tensores densidades.

a - A combinação linear de dois tensores de mesmo peso W é um tensor densidade de peso W .

b - O produto direto de dois tensores densidades de pesos W_1 e W_2 , é um tensor densidade de peso $W_1 + W_2$.

c - O resultado da contração de um tensor densidade de peso W também é um tensor de peso W .

Da determinação da conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, equação (II-15), vemos que esta não é um tensor. Vejamos como esta se comporta através de uma TGC. Da definição temos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (\text{II-15})$$

onde $\xi^\alpha(x)$ é um sistema de coordenadas localmente inercial. Fazendo uma transformação $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, teremos:

$$\begin{aligned} \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

Dessa equação temos que o primeiro termo é um tensor, enquanto que o segundo não é.

Via Análise Tensorial, estabelecemos mais facilmente a relação entre a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Te-

mos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^k} &= \frac{\partial}{\partial x'^k} \left(g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^k} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^k \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} + \\ &+ g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^k \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \end{aligned} \quad (B-5)$$

assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^k} &= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^k} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} \right. \\ &\left. - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} \right) + 2g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^k} \end{aligned} \quad (B-6)$$

logo

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \tau \sigma \end{matrix} \right\} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \quad (B-7)$$

onde

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) \quad (B-8)$$

Nota-se que

$$\left[T_{\mu\nu}^\lambda - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} \right] = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left[T_{\tau\sigma}^\rho - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \tau \sigma \end{matrix} \right\} \right] \quad (B-9)$$

é um tensor. O Princípio de Equivalência afirma que existe um sistema especial de coordenadas $\{x\}$ no qual, em um dado ponto X , os efeitos da Gravitação estão ausentes. Nesse sistema, não pode haver deslocamento para o vermelho entre pontos separados infinitesimalmente, visto que a derivada do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, se anula. Como

$$\Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \tau \sigma \end{matrix} \right\} \quad (\text{B-10})$$

é um tensor que se anula em um sistema de coordenadas localmente inercial, então este deve se anular em todos os sistemas de coordenadas e

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} \quad (\text{B-11})$$

Consideremos o termo inhomogêneo da regra de transformação da conexão afim, a saber,

$$\Lambda = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}$$

Diferenciando a identidade

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\lambda} \quad (\text{B-12})$$

com relação a x'^{μ}

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \quad (\text{B-13})$$

substituindo (B-13) em (B-12)

$$\Lambda = - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}$$

e a regra de transformação da conexão afim ficará

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \quad (\text{B-14})$$

Mostramos que uma partícula em queda livre obedece a equação de movimento

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} = 0$$

onde

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Na ausência da Gravitação,

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = 0 \quad \text{E} \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

logo

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad \text{E} \quad d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

são as equações corretas de uma partícula livre em Relatividade Especial. É fácil ver que elas são invariantes por uma TGC

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \end{aligned}$$

Somando com (B-14), teremos:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^k} \left(\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\rho}^k \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \right) \quad (\text{B-15})$$

A diferenciação de um tensor não é um tensor. Por exemplo:

$$V^{\prime\mu} = \frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (\text{B-16})$$

então

$$\frac{\partial V^{\prime\mu}}{\partial x^{\prime\lambda}} = \frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\lambda}} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\lambda}} V^\nu \quad (\text{B-17})$$

vemos que o segundo termo não é um tensor. Consideremos agora

$$\Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V'^{\kappa} = \left[\frac{\partial X'^{\mu}}{\partial X^{\nu}} \frac{\partial X^{\rho}}{\partial X'^{\lambda}} \frac{\partial X^{\sigma}}{\partial X'^{\kappa}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} - \frac{\partial^2 X'^{\mu}}{\partial X^{\rho} \partial X^{\sigma}} \frac{\partial X^{\rho}}{\partial X'^{\lambda}} \frac{\partial X^{\sigma}}{\partial X'^{\kappa}} \right] \cdot \frac{\partial X^{\kappa}}{\partial X^{\eta}} V^{\eta}$$

$$= \frac{\partial X'^{\mu}}{\partial X^{\nu}} \frac{\partial X^{\rho}}{\partial X'^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} V^{\sigma} - \frac{\partial^2 X'^{\mu}}{\partial X^{\rho} \partial X^{\sigma}} \frac{\partial X^{\rho}}{\partial X'^{\lambda}} V^{\sigma} \quad (B-18)$$

logo

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial X'^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V'^{\kappa} = \frac{\partial X'^{\mu}}{\partial X^{\nu}} \frac{\partial X^{\rho}}{\partial X'^{\lambda}} \left(\frac{\partial X^{\nu}}{\partial X^{\rho}} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} V^{\sigma} \right) \quad (B-19)$$

Definimos Derivada Covariante de um tensor covariante $V^{\mu}_{;\lambda}$ como

$$V^{\mu}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V^{\mu}}{\partial X^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V^{\kappa} \quad (B-20)$$

que é um tensor.

Seja o vetor contravariante

$$V'_{\mu} = \frac{\partial X^{\rho}}{\partial X'^{\mu}} V_{\rho} \quad (B-21)$$

então

$$\frac{\partial V'_{\mu}}{\partial X'^{\nu}} = \frac{\partial X^{\rho}}{\partial X'^{\mu}} \frac{\partial X^{\sigma}}{\partial X'^{\nu}} \frac{\partial V_{\rho}}{\partial X^{\sigma}} + \frac{\partial^2 X^{\rho}}{\partial X'^{\mu} \partial X'^{\nu}} V_{\rho} \quad (B-22)$$

não é um tensor. Mas

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} V'_{\lambda} = \left[\frac{\partial X'^{\lambda}}{\partial X^{\tau}} \frac{\partial X^{\rho}}{\partial X'^{\mu}} \frac{\partial X^{\sigma}}{\partial X'^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} + \frac{\partial X'^{\lambda}}{\partial X^{\tau}} \frac{\partial^2 X^{\tau}}{\partial X'^{\mu} \partial X'^{\nu}} \right] \cdot \frac{\partial X^{\kappa}}{\partial X'^{\lambda}} V_{\kappa} \quad (B-23)$$

logo

$$\frac{\partial V'_{\mu}}{\partial X'^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} V'_{\lambda} = \frac{\partial X^{\rho}}{\partial X'^{\mu}} \frac{\partial X^{\sigma}}{\partial X'^{\nu}} \left(\frac{\partial V_{\rho}}{\partial X^{\sigma}} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\kappa} V_{\kappa} \right) \quad (B-24)$$

Definimos Derivada Covariante de um tensor contravariante

como

$$V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial X^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} V_{\lambda} \quad (B-25)$$

que é um tensor.

Usando a diferenciação covariante e as propriedades algébricas dos tensores, vemos que:

a - A derivada covariante da combinação linear de tensores é a mesma combinação linear das derivadas covariantes. Por exemplo:

$$(\alpha A_{\nu}^{\mu} + \beta B_{\nu}^{\mu});_{\lambda} = \alpha A_{\nu}^{\mu};_{\lambda} + \beta B_{\nu}^{\mu};_{\lambda}$$

onde α e β são constantes.

b - A derivada covariante de um produto direto de tensores obedece a regra de Leibnitz. Por exemplo:

$$(A_{\nu}^{\mu} B^{\lambda});_{\rho} = A_{\nu}^{\mu};_{\rho} B^{\lambda} + A_{\nu}^{\mu} B^{\lambda};_{\rho}$$

c - A derivada covariante de um tensor contraído é a contração da derivada covariante. Por exemplo:

$$\Gamma_{\lambda;\rho}^{\mu\sigma} = \frac{\partial}{\partial X^{\rho}} T^{\mu\sigma}_{\lambda} + \Gamma_{\rho\nu}^{\mu} T^{\nu\sigma}_{\lambda} + \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} T^{\mu\nu}_{\lambda} - \Gamma_{\lambda\rho}^k T^{\mu\sigma}_k$$

Fazendo $\sigma = \lambda$, vemos que:

$$T^{\mu\lambda}_{\lambda};_{\rho} = \frac{\partial}{\partial X^{\rho}} T^{\mu\lambda}_{\lambda} + \Gamma_{\rho\nu}^{\mu} T^{\nu\lambda}_{\lambda}$$

É de grande importância a diferenciação covariante pois esta converte tensores em tensores e na ausência da Gravitação, reduz-se à diferenciação ordinária. Isso sugere que para intro-

duzirmos os efeitos gravitacionais nos sistemas físicos devemos:

- a - Escrever as equações válidas na Relatividade Especial;
- b - Substituir $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ e a derivada ordinária pela derivada covariante.

Usando a linguagem tensorial podemos expressar mais simplesmente alguns operadores. Por exemplo:

- a - Gradiente

$$S_{; \mu} = \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}$$

- b - Rotacional

$$V_{\mu; \nu} - V_{\nu; \mu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial V_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

- c - Divergência covariante de um vetor contravariante

$$V^{\mu}_{; \mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \sqrt{g} V^{\mu}$$

onde

$$g = \text{DET}(g_{\rho\mu})$$

Apêndice C

Propriedades Algébricas do Tensor Curvatura de Riemann-Christoffel.

As propriedades algébricas do tensor curvatura são vistas mais facilmente quando este é colocado na forma totalmente covariante.

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R^{\sigma}_{\mu\nu\kappa}$$

Substituindo (11-18) e (A-6) em (C-1), teremos:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = & \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g^{\sigma\rho} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right\} + \\ & + \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g^{\sigma\rho} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\rho\kappa}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\rho}} \right\} + \\ & - g_{\lambda\sigma} \left\{ \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\sigma} \right\} \end{aligned}$$

Usando a relação

$$\begin{aligned} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g^{\sigma\rho} &= -g^{\sigma\rho} \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\kappa}} \\ &= -g^{\sigma\rho} (\Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta} g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\kappa\sigma}^{\eta} g_{\eta\lambda}) \end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right) + \\ & - (\Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta} g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\kappa\sigma}^{\eta} g_{\eta\lambda}) \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + (\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\eta} g_{\eta\lambda}) \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Gamma_{\nu\sigma}^{\eta} g_{\eta\lambda} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} + g_{\lambda\sigma} (\Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\sigma}) \\
 = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right) + \\
 & \cdot g_{\eta\sigma} (\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) \quad (C-2)
 \end{aligned}$$

Dessa equação vemos melhor as propriedades do tensor curvatura:

a - Simetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \quad (C-3)$$

b - Antisimetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu} \quad (C-4)$$

c - Ciclicidade

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0 \quad (C-5)$$

Contraíndo $R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda}$, temos:

$$R_{\mu\kappa} \equiv R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda} \quad (C-6)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, que por sua vez contraído com o tensor métrico, dá a curvatura escalar R

$$R \equiv g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (C-7)$$

Podemos também escrever o tensor de Ricci da forma:

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (C-8)$$

Da propriedade a vemos que o tensor de Ricci é simétrico

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (C-9)$$

O tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e a curvatura escalar R são muito importantes na Relatividade Geral pois aparecem explicitamente nas equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - 8\pi G T_{\mu\nu}$$

onde: G é a constante gravitacional = $6,670 \times 10^{-8}$ (cgs)

c é a velocidade da luz no vácuo

$T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia.

Considerando um sistema de coordenadas localmente inercial, em que $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ se anula em X (mas não suas derivadas), encontramos uma importante identidade diferencial para o tensor curvatura, a identidade de Bianchi. Derivando (C-1) com relação a x^{η}

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right) \quad (C-10)$$

Permutando ν , κ e η ciclicamente, obtemos:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (C-11)$$

Observando que a derivada covariante de $g^{\lambda\nu}$ se anula e contraindo λ com ν , encontramos que:

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R_{\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (C-12)$$

Contraindo novamente,

$$R_{;\eta} - R^{\mu}_{\eta;\mu} - R^{\nu}_{\eta;\nu} = 0 \quad (C-13)$$

ou

$$(R^{\mu}_{\eta} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\eta} R)_{;\mu} = 0$$

(C-14)

cujá forma mais usual é

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)_{;\mu} = 0$$

(C-15)

Apêndice D

O Limite Newtoniano.

Para estabelecermos conexão da Teoria da Relatividade Geral com a Teoria de Gravitação de Newton, faremos aproximações na equação de movimento, equação (II-14)

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{II-14})$$

Considerando que uma partícula move-se lentamente em um campo gravitacional fraco e estacionário, podemos negligenciar $d\vec{x}/d\tau$ com respeito a $dt/d\tau$. Assim

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (\text{D-1})$$

onde conforme a equação (A-4),

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial x^0} \quad (\text{D-2})$$

visto que todas as derivadas temporais se anulam. Como o campo é fraco, podemos tomar um sistema de coordenadas cartesiano em que

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (\text{D-3})$$

onde

$$|h_{\alpha\beta}| \ll 1$$

De (D-2) e (D-3) e tomando apenas termos de primeira ordem em $h_{\alpha\beta}$

$$T_{00}^{\alpha} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\beta}}$$

Substituindo esse resultado em (D-1), teremos:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00}$$

Da primeira equação vemos que $dt/d\tau$ é constante. Da segunda, quando dividida por $(dt/d\tau)^2$,

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad (D-4)$$

O resultado newtoniano é dado por:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \phi \quad (D-5)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional, dado por:

$$\phi = -\frac{GM}{r}$$

comparando (D-4) com (D-5) vemos que

$$h_{00} = -2\phi + \text{CONST}$$

como para $r \rightarrow \infty$, h_{00} terá que se anular, a constante é nula e de (D-3),

$$g_{00} = -(1 + 2\phi)$$

Vemos assim, que a Teoria Newtoniana da Gravitação é o limite da Teoria de Gravitação de Einstein para campos fracos.