

Este exemplar corresponde a redação final da
Tese de Mestrado defendida pelo aluno Newton
Luiz Pires Mansur e aprovada pela Comissão
Julgadora ~~12.3.86~~

EQUILÍBRIO MAGNETOHIDRODINÂMICO DE SISTEMAS
AXISSIMÉTRICOS COM ROTAÇÃO TOROIDAL

Por : Newton Luiz Pires Mansur

Orientador : Prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka

COMISSÃO JULGADORA

Membros Titulares

Prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka (presidente)

Departamento de Eletrônica Quântica - IFGW - UNICAMP

Prof. Dr. Marcos Antônio Mattos Santiago

Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. José Bushardo Neto

Departamento de Eletrônica Quântica - IFGW - UNICAMP

Membros Suplentes

Prof. Dr. King Hay Tsui

Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Munemasa Machida

Departamento de Eletrônica Quântica - IFGW - UNICAMP

Aos meus pais

A Susi

A Carol

por todo apoio

e carinho.

Agradecimentos:

Ao prof. Dr. Paulo H. Sakanaka, pela orientação, cuja liberdade me proporcionou o melhor aprendizado.

A Susana, pelo amor, carinho, amizade e apoio, que nas horas difíceis foram fundamentais.

Aos meus pais e irmãos, Sandra, Gracinha, Zeli e Ricardo, sem o apoio deles tudo isto seria impossível.

Aos amigos dispostos a tudo, Anette, Cláudio, Hugo, Fátima, Ricardão, Baixo, Magno, Careca e Zé Tomaselli, nunca serão esquecidos.

Aos meus colegas do grupo de plasma Magno, Hector, Braginski, Wladimir, Honda, Delton, pelas discussões regadas e pela torcida fantástica.

Aos meus colegas do futebol, suco de cevada e "caldo" de cana. Sem eles tudo seria muito menos "tragável".

Ao pessoal da Universidade Federal Fluminense e principalmente ao prof. Dr. Cândido Rapozo, cuja amizade foi e será sempre muito preciosa.

Ao prof. Dr. Elliot Kiel, pela sempre resposta imediata aos pedidos de socorro.

Ao Prof. Zago, cuja ajuda me foi fundamental.

Ao pessoal da APGF, APG-UNICAMP e ANPG, principalmente a Pedro, pela amizade, importantes discussões e aprendizado político.

Ao pessoal da sala 209, que tornaram esta "passagem" bem mais agradável.

Ao pessoal da secretaria do Plasma e da Eletrônica Quântica, que com seu apoio profissional tornaram este trabalho viável e principalmente a Val, cuja dedicação e amizade serão inesquecíveis.

Ao pessoal do Centro de Computação John Rogers, cuja paciência e dedicação deixaram este trabalho menos ardoroso.

A FINEP, CNEN, CAPES, FAPESP e CNPq pelo apoio financeiro.

A todos o meu muito obrigado

ÍNDICE

Resumo.....	1
I- INTRODUÇÃO.....	1
1.1- REATORES DE FUSÃO TERMONUCLEAR CONTROLADA E CRITÉRIO DE LAWSON.....	2
1.2- CONFINAMENTO DE PLASMA.....	6
1.3- ØPINCH.....	8
1.3.1- ØPINCH DE CAMPO REVERSO.....	9
1.3.2- TOROIDE COMPACTO.....	10
1.3.3- ESTABILIDADE DO TOROIDE COMPACTO.....	11
1.4- VANTAGENS DO ESTUDO DO TOROIDE COMPACTO.....	11
1.5- RESUMO DOS CAPÍTULOS.....	12
II- TEORIA.....	13
II.1- MAGNETOHIDRODINÂMICA.....	13
II.1.1- TEORIA DE VLASOV.....	13
II.1.2- EQUAÇÕES MHD IDEAL.....	16
II.1.2.1- EQUAÇÕES DE ESTADO.....	18
II.2- EQUILÍBRIO MHD.....	19
II.2.1- EQUILÍBRIO PARA SISTEMAS AXISSIMÉTRICOS.....	21
II.2.2- EQUILÍBRIO PARA SISTEMAS COM ROTAÇÃO PURA.....	27
II.2.2.1- ENTROPIA EM FUNÇÃO DO FLUXO.....	29
II.2.2.2- TEMPERATURA EM FUNÇÃO DO FLUXO.....	31
II.2.2.3- CASO SEM ROTAÇÃO.....	34
II.2.2.4- UNIFICAÇÃO DAS EXPRESSÕES.....	34
II.3- ESTABELECIMENTO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	35
II.4- DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES ARBITRÁRIAS.....	36

11.5- SIGNIFICADO FÍSICO DE α_0 E SEU RELACIONAMENTO COM A ROTAÇÃO.....	37
11.5.1- ENTROPIA COMO FUNÇÃO DO FLUXO.....	38
11.5.2- TEMPERATURA COMO FUNÇÃO DO FLUXO.....	39
III-METODO NUMÉRICO, APLICAÇÕES E CONCLUSÃO	
III.1- SUPERFÍCIE DE CONTORNO.....	41
III.2- FORMAÇÃO DOS PONTOS DE GRADE PARA O CÁLCULO NUMÉRICO.....	42
III.3- CÁLCULO NUMÉRICO.....	43
III.3.1- FORMAÇÃO DA MATRIZ DE CÁLCULO.....	44
III.3.2- APROXIMAÇÃO DO CONTORNO.....	46
III.4- APLICAÇÕES.....	47
III.4.1- DEPENDÊNCIA COM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS.....	48
III.4.2- COMPARAÇÃO A SISTEMAS TEÓRICOS.....	49
III.4.3- COMPARAÇÃO A SISTEMAS EXPERIMENTAIS.....	50
III.5- CONCLUSÃO.....	50
III.6- PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS.....	52
APÊNDICES:	
I- SIGNIFICADO FÍSICO DA FUNÇÃO DE FLUXO	53
II- SPHEROMAK IDEAL.....	56
REFERÊNCIAS.....	59
FIGURAS.....	60

RESUMO

Neste trabalho usamos o modelo desenvolvido por Machke e Perrin para o estudo do equilíbrio magnetohidrodinâmico de plasma confinado axissimetricamente com rotação puramente toroidal, chegando assim a uma extensão da equação de Grad-Shafranov. Modificamos a expressão usada para a pressão escalar e incluímos a influência do campo magnético toroidal, podendo assim estender a teoria a diferentes tipos de confinamento.

Descrevemos em primeiro lugar a equação para um movimento geral do plasma confinado axissimetricamente, particularizando depois à movimentos de rotação pura. Devido a estas aproximações perdemos informação sobre nossas grandezas termodinâmicas, sendo assim obrigados a reavê-las. Para isto comparamos dois casos diferentes, um supondo entropia como função do fluxo magnético poloidal (o que já acontece no caso de movimento geral) e o outro supondo temperatura como função do fluxo (levando em conta a alta condutividade térmica nas superfícies de fluxo constante). Estabelecemos as equações para os dois casos chegando a uma expressão simplificada através de outras aproximações.

Elaborada a teoria, comparamos esta ao modelo de Shibata, que usa densidade como função do fluxo, e ao modelo do Spheromak Ideal. Estudamos um conjunto de casos levando em conta dados experimentais. Chegamos a conclusão que para grandezas de movimento (velocidade, frequência e número de Mach), as eletrodinâmicas (fluxo magnético poloidal, campo magnético e densidade de corrente) e a pressão escalar, não importa qual o modelo usado, os re-

sultados seriam muito próximos até para alta rotação, a não ser para as outras grandezas termodinâmicas (densidade e temperatura), onde estas, através de medidas experimentais bem precisas, determinariam qual o modelo estaria mais próximo da realidade.

I- INTRODUÇÃO [49]

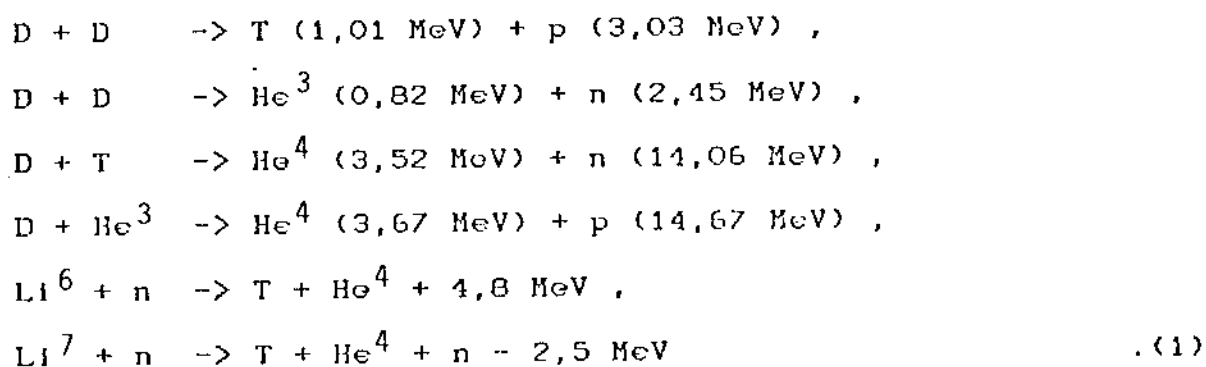
Desde a antiguidade a calma sensualidade do céu noturno límpido e a fogueira boieza do por do sol tem inspirado a curiosidade do homem sobre a fonte da luminosidade das estrelas. Logicamente eles só poderiam entendê-las como uma espécie de velas enormes.

No início do século XIX, duas descobertas provocaram uma crise científica, no que tange a fonte da energia das estrelas. A primeira foi a medida da distância à várias estrelas de nossa galáxia e a segunda foi o nascimento da geologia, com as primeiras estimativas da idade da terra (e portanto das estrelas), sendo estas da ordem de cem milhões de anos. As potências térmicas colossais eram inconcebíveis.

No início deste século, duas descobertas nortearam a pesquisa sobre a emissão estelar, a radioatividade e a teoria da relatividade ($E=mc^2$). Ficava assim claro que a fonte era conversão de massa em energia, mas ainda assim era arriscado formalizar qualquer modelo, este precisaria do desenvolvimento da mecânica quântica e da física nuclear.

Em 1939 a fissão nuclear espontânea foi identificada com a imediata concepção de reação em cadeia, porém, esta não poderia ser indicada como fonte da energia das estrelas, pois evidências astronômicas indicavam que nelas não existiam elementos pesados.

Nos anos quarenta surgiram os primeiros modelos de fusão nuclear, tendo desde aí desenvolvido vários tipos diferentes, sendo as principais [1] :



Também no projeto Manhattan (para desenvolvimento da bomba atômica), foi concebida a possibilidade de se fazer uma bomba de fusão termonuclear.

Em 1952, produziu-se a colossal explosão na ilha de Bikini e logo depois os russos explodiam a primeira bomba termonuclear de verdade. Nesta mesma época começaram a aparecer os primeiros reatores nucleares dedicados a produção de energia elétrica e propulsão naval. Era lógico começar a pensar na reação de fusão termonuclear controlada, área de pesquisa em que se investiriam vários bilhões de dólares.

1.1 - REATORES DE FUSÃO TERMONUCLEARES E CRITÉRIO DE LAWSON [1-3]

O cerne deste empreendimento imenso é o estudo de plasmas quentes (10^8 K ou ~ 10 KeV) e técnicas de confinamento nas densidades e tempo necessários para ignição da reação de fusão termonuclear.

Analisando os parâmetros necessários para a ignição, podemos começar mostrando a seção de choque das reações D-D, D-T e D-He³

nas figuras 1.1 [4-7].

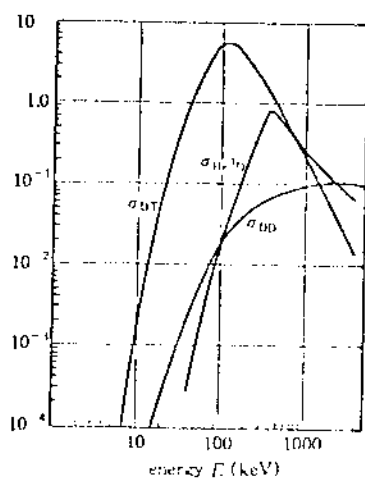


Figura 1.1- Seção de choque das reações D-D, D-T, D-He³ [2]

Estas mostram que a reação D-T possui a maior seção de choque tendo assim a maior potência liberada. Para um reator de D-T, uma camada de lítio envolve o plasma e retém os neutrons rápidos e moderados, convertendo sua energia cinética em calor, a camada de lítio libera trítio de acordo com as reações dadas em (1). A figura 1.2 mostra um gerador de energia elétrica baseado num reator de fusão termonuclear. O lítio cede calor a um líquido de potássio através de um trocador de calor e este, por meio de uma turbina, gera energia elétrica. O calor resultante deste processo aquece a água a alta temperatura, através de um segundo trocador de calor, que a transforma em vapor, movimentando uma segunda turbina, que gera energia elétrica.

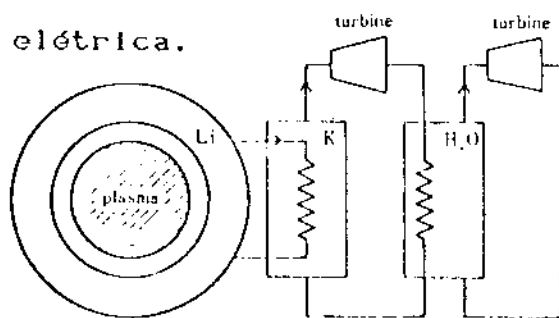


Figura 1.2- Protótipo de um reator de fusão termonuclear [2]

A tecnologia, tanto para os trocadores de calor, como para os geradores movidos a potássio e vapor, já são conhecidas nos reatores de fissão em uso. A reação entre lítio e neutron é em média endotérmica (-1,97 MeV), mas tendo a de D-T uma energia de 17,58 MeV o lítio possuirá uma energia final de 15,06 MeV. A reserva de lítio no mundo é estimada em 8 a 9×10^6 toneladas, sendo isto equivalente em energia total de uso, a 1700 Q (1Q = 10 BTU = 10 Joules). A reserva de urânio é estimada em 400 Q. Existe lítio no mar a uma razão de 0,17 g/m³ (tendo o urânio 0,03 g/m³), sendo assim possível extraí-lo deste. Mostra-se desta forma a viabilidade de se conseguir matéria prima quando estiver concluídas as pesquisas para os primeiros reatores a fusão termonuclear.

Numa temperatura superior a 10^5 K, a maioria dos elementos já se encontram ionizados, no entanto, para que dois núcleos colidam com energia suficiente para que vençam a repulsão coulombiana e se fundirem, a temperatura deve ser da ordem de 10^9 K, como por exemplo numa reação de D-T. Nestas condições, a preocupação básica da física de plasma, relacionada com a fusão termonuclear controlada, não é obter um plasma absolutamente estável, mas sim mantê-lo em situações próximas às de equilíbrio durante um tempo suficientemente longo (da ordem de um segundo), para que a energia produzida pelas reações de fusão seja maior que a energia gasta para criar e confinar o plasma. Em outras palavras, os requisitos físicos básicos para a viabilidade de um reator à fusão, podem ser resumidos como segue: plasma "suficientemente" denso a uma temperatura "suficientemente" alta confinado em um tempo "suficientemente" longo. A forma mais elementar destas con-

dições é expressa pelo critério de Lawson [8]:

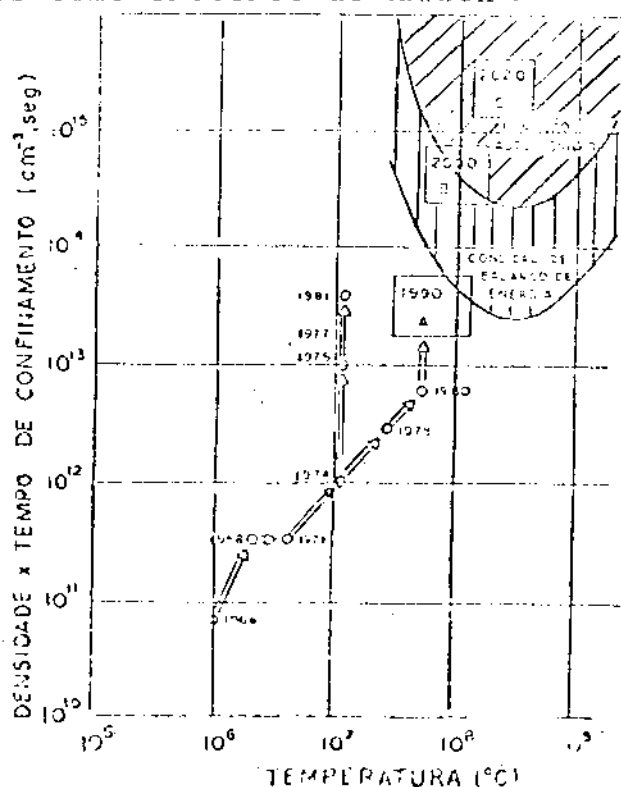
$$n \tau_c > f(T) \quad , \quad (1)$$

onde n é a densidade do plasma, T a temperatura e τ_c o tempo de confinamento de energia. Para uma temperatura otimizada (levando em conta as perdas do processo) de $T \sim 15$ KeV, devemos ter tipicamente $f(T) \sim 10^{14} \text{ cm}^{-3} \text{ seg}$.

Devido a sua alta temperatura, o confinamento destes plasmas só é possível através de fortes campos magnéticos, em geral criados por correntes externas. Deste modo, podemos dizer também que a física de plasma estuda fundamentalmente as interações entre forças inerciais, as de gradiente de pressão, e as de Lorentz, ocasionada pelas correntes e campos magnéticos no interior do plasma.

A figura 1.3 nos mostra a posição das várias experiências no decorrer dos anos e suas relações como critério de Lawson.

Figura 1.3 - Experiências e resultados obtidos no decorrer dos anos e suas posições com relação ao critério de Lawson.



1.2 - CONFINAMENTO DE PLASMA [1] .

O maior empenho da pesquisa na área de fusão termonuclear controlada está concentrado sobre o confinamento de plasmas quentes por meio de campos magnéticos. Os estudos mais ativos sobre confinamento magnético estão sobre os espelhos magnéticos lineares (fig.1-4) e as configurações toroidais (Fig.1-5).

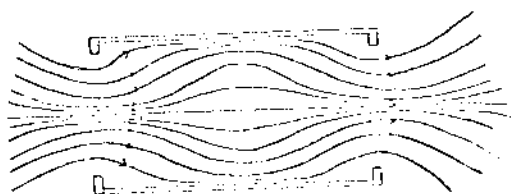


Figura 1.4-Máquina de confinamento de plasma de espelho linear

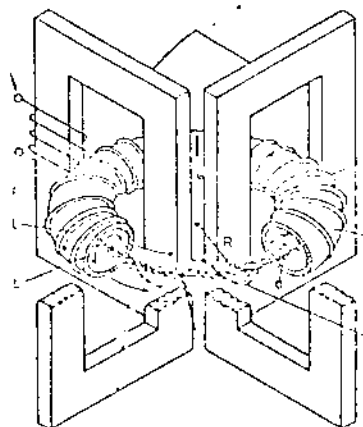


Figura 1.5-Máquina de confinamento de plasma com configuração toroidal

(1) O confinamento em espelho tem vantagem sobre o toroidal no que diz respeito a estabilidade e a difusão anômala sobre o campo magnético, mas possui a desvantagem da fuga de partículas no extremo do espelho. Esta fuga é devido a difusão no espaço de velo-

idades, tendo assim pequeno tempo de confinamento (da ordem do tempo de colisão dos íons). No entanto, o tempo de confinamento não pode ser aumentado por acréscimo na intensidade do campo magnético. É necessário, portanto, achar um jeito de suprimir as perdas de partículas nos extremos ou de aumentar a eficiência da conversão de energia cinética das partículas, que escapam, em energia elétrica.

A configuração magnética toroidal não tem extremos abertos. Em configurações toroidais simples, íons e elétrons possuem movimentos opostos devido ao gradiente de campo magnético. Este gradiente, causando a separação das cargas induz um campo elétrico paralelo ao eixo de simetria do toróide (Figura 1-6). Com isto se cria um novo movimento (devido ao $\vec{E} \times \vec{B}$), que tende a levar as partículas para fora radialmente (Figura 1-7). Para reduzi-lo é preciso de linhas de campo, que quebre esta separação das cargas, tornando-se assim necessária uma componente poloidal do campo (plano sobre a seção reta do toróide).

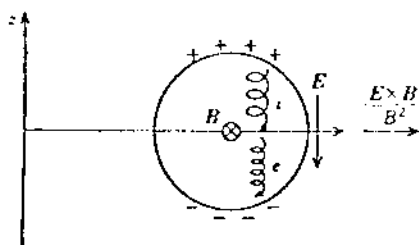


Figura 1.6- Movimento de separação das cargas

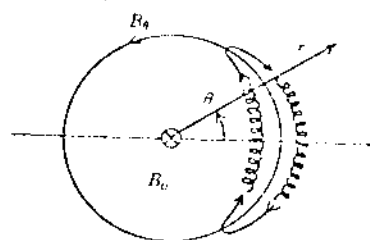


Figura 1.7- Movimento radial das cargas

A componente poloidal do campo magnético é essencial para o equilíbrio do plasma toroidal e as pesquisas em cima deste tipo de configuração são classificadas de acordo com o método utilizado para formar campo poloidal. O Tokamak e o Spheromak, usam a

corrente de plasma ao longo do eixo do toroide para formar o campo poloidal. O θ -pinch de campo reverso, usa a reversão de campo em suas bobinas lineares para formar as linhas de campo poloidais (este será descrito em detalhes oportunamente), enquanto o Stellarator tem condutores em forma de helicóide, fora do plasma, para produzi-lo.

1.3 - θ -PINCH [9]

Experiências em θ -Pinch são realizadas a mais de três décadas. O interesse neste desenvolvimento nasceu da necessidade de ter um processo que confina o plasma com relativa estabilidade, com alto β (razão entre a pressão escalar e a pressão total, que consiste na soma da pressão escalar e a magnética) e com alta temperatura (> 1 KeV), se tornando assim um excelente recurso para obter-se fusão termonuclear controlada.

Existem duas formas básicas de se operar com o θ -Pinch: o θ -Pinch Standard (θ PS) e o Toroide Compacto (TC). O primeiro consiste num conjunto de bobinas dispostas linearmente (Figura 1-8), passando-se uma corrente sobre elas, através de uma descarga de capacitores, criando assim um campo magnético, que confina o plasma numa região em torno do seu eixo de simetria, podendo este processo ter um campo estático para polarização e pré-ionização, no mesmo sentido que o da descarga principal. O TC consiste num sistema idêntico ao anterior, com a diferença que utiliza um campo de polarização em sentido inverso ao da descarga principal (junto com a descarga de pré-ionização do

plasma).

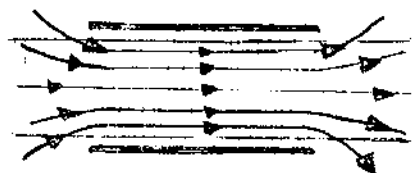


Figura 1.8- θ -Pinch Standard

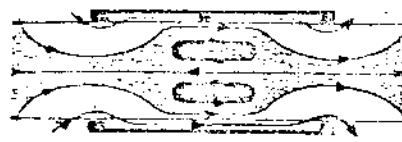


Figura 1.9- Toróide Compacto

1.3.1 - TOROIDE COMPACTO [10]

O TC: consiste num sistema axialmente simétrico com configuração fechada de campo magnético, sem espiras, ou qualquer outro tipo de matéria estranha ao plasma no contorno que o confina. Este pode ter ou não campo magnético toroidal e as partículas, que provocam corrente, podem ter pequeno ou grande raio de giro, comparado com as dimensões do sistema. Vamos usar estas características para classificar os três maiores tipos: Astron, Spheromak e θ -PCR Compacto. Os Astrons são caracterizados pelo raio de giro dos íons comparável às dimensões do plasma, podendo ter razão entre campo magnético poloidal (área perpendicular ao sentido toroidal) e toroidal arbitrária. Ambos, Spheromak e θ -PCR tem raio de giro dos íons pequeno. No entanto, o Spheromak tem campo magnético toroidal comparável ao poloidal, e o θ -PCR, tem campo toroidal desprezível.

Algumas técnicas alternativas de formação, aquecimento e confinamento do Θ -PCR tem dado como resultado variações dos três sistemas aqui mencionados.

1.3.2 - Θ -PINCH DE CAMPO REVERSO

Uma técnica utilizada para a criação do Θ -PCR é descrita na Figura 1-10. Um campo de polarização inicial é "congelado", produzindo uma pré-ionização, obtendo assim o plasma. A corrente das bobinas é rapidamente revertida, aplicando assim a descarga principal dos capacitores. O resultado do campo diretamente oposto é a reconecção das linhas de campo magnético e uma estrutura de linhas de campo fechadas, provocando assim um retorno das partículas pelo novo "caminho". O plasma se contrai axialmente até que o equilíbrio seja estabelecido.

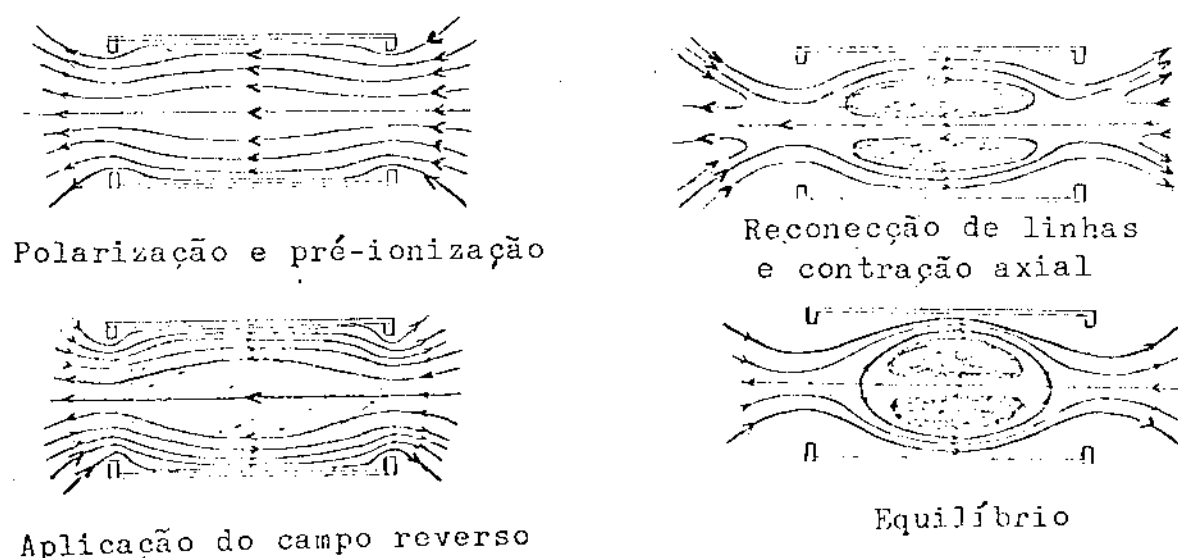


Figura 1.10- fases de confinamento num Θ PCR.

1.3.3 - ESTABILIDADE DO θ -PCR.

Durante a fase de pós-implosão, o plasma é confinado nos dois tipos de θ -Pinch de formas diferentes. O OPS é geralmente estável, mas é dominado pelo escape de partículas e energia ao longo das linhas de campo abertas. O θ PCR, por outro lado, confina muito bem o plasma, mas está sujeito a vários tipos de instabilidades. As mais importantes são a instabilidade "tearing", que se deve ao "alongamento" do plasma dentro das pequenas células de campo reverso [11], e a instabilidade devido a rotação. O fenômeno de rotação do plasma no toróide compacto é observado em muitas experiências [12-19]. Algumas teorias já tentaram explicá-lo [20-23], mas tanto a instabilidade rotacional quanto a própria causa da rotação ainda não são muito bem entendidas.

1.4 - VANTAGENS DO ESTUDO DO θ -PCR

O estudo de θ -PCR é motivado em parte pelas vantagens deste conceito para reatores de potência por fusão termonuclear controlada. A simples geometria cilíndrica das bobinas para produção do campo magnético, assim como a câmara de vácuo, requer menos complexidade na engenharia do que sistemas de configuração toroidal (como Tokamak). A ausência de campo toroidal (ou campo muito pequeno), provoca pouco stress nas bobinas. A região onde o toróide compacto é formado e aquecido, pode ser isolada, permitindo grande flexibilidade no desenho do reator. O valor da média volumétrica de β é considerado alto e está entre 0,5 e 1, para este ti-

po de configuração. Vários tipos de reatores assim tem sido propostos [24-26]

A escolha deste trabalho vem também do particular interesse do grupo de plasma da UNICAMP pela montagem de um toróide compacto, que está atualmente em estágio de testes.

1.5 - RESUMO DOS CAPÍTULOS

No Capítulo II é desenvolvida a teoria da Magnetohidrodinâmica para sistemas axissimétricos com rotação toroidal, iniciando pela teoria de Vlasov, deduzindo as equações MHD ideal e aplicando a sistemas axissimétricos. Particularizou-se então para sistemas com rotação pura, estabelecendo posteriormente a comparação e unificação entre dois tipos diferentes de sistemas, rotantes e sem rotação. Estabeleceu-se finalmente a equação a ser desenvolvida e suas condições de contorno.

No Capítulo III fez-se a aplicação do Capítulo II ao OPCR, estabelecendo as superfícies de contorno usadas e o cálculo numérico desenvolvido. A partir daí são arbitrados os parâmetros, mostramos os resultados, interpretando-os e descrevendo as conclusões.

II- TEORIA

II.1- MAGNETOHIDRODINAMICA

Considere um fluido de partículas carregadas estabelecendo todas as forças envolvidas neste. A solução do sistema de equações, neste caso, seria praticamente impossível de ser encontrada. Existe então a necessidade de se fazer algumas aproximações, que torne o problema resolvível e que seja o mais próximo possível da realidade.

Vamos supor agora que o fluido seja composto de um gás de elétrons e íons. Levando em conta que o livre caminho médio do gás é grande e que o tempo de observação dos eventos pode ser menor do que o tempo médio de colisão entre as partículas, poderá se fazer aproximações para sistemas não collisionais (se referindo, obviamente, a colisões binárias). Outra aproximação pode ser feita levando em conta que a dimensão do nosso sistema é muito maior do que o comprimento de Debye característico $\lambda_D = (\epsilon_0 kT/e^2 n_e)^{1/2}$, tendo assim a condição de um plasma quase neutro.

II.1.1- TEORIA DE VLASOV [27]

A função de distribuição dependente do tempo, para cada tipo de partícula, indicado pelo subíndice α , no espaço de fases de seis dimensões dada por $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$. O número de partículas no elemento de volume $d^3r d^3v$, centrado em $\vec{r}$ e $\vec{v}$, é dado por

$f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3r d^3v$. Esta função tem sua variação em tempo regida pela equação de Boltzmann,

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_v f_{\alpha} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} \quad (1)$$

Como o sistema é não colisional, a variação da função de distribuição com o tempo, em consequência das colisões binárias, é desprezível, anulando assim o segundo termo da equação (1), caindo na equação de Vlasov

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_v f_{\alpha} = 0 \quad (2)$$

Esta equação forma um sistema fechado, junto com as equações de Maxwell, que determinam $\vec{E}$ e $\vec{B}$, onde ρ_q e $\vec{J}$ são funcionais de f_{α} .

Para se determinar as densidades de carga e corrente existentes nas equações de Maxwell, utilizam-se os momentos da função de distribuição. O momento de ordem zero dá a densidade de partículas de um tipo num determinado ponto $\vec{r}$ e num tempo t

$$n_{\alpha}(\vec{r}, t) = \int f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (3)$$

O momento de ordem um dá, por definição, a média da distribuição de velocidade das partículas de um tipo em $\vec{r}$ e t

$$U_{\alpha}(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_{\alpha}(\vec{r}, t)} \int \vec{v} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (4)$$

Desta forma determinam-se as densidades de carga e corrente do sistema, dadas por:

$$\rho_{\alpha}(\vec{r}, t) = \sum q_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{r}, t) \quad , (5)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum q_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{r}, t) \vec{U}_{\alpha}(\vec{r}, t) \quad , (6)$$

Como todas as cargas e correntes do plasma são supostamente livres, os efeitos de polarização e magnetização são muito pequenos, tendo assim as equações de Maxwell dadas por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , (7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = - \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , (8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_q / \epsilon_0 \quad , (9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , (10)$$

onde $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$.

A teoria de Vlasov para plasmas, equações (2) a (10), constitui um sistema completo de equações para as variáveis $f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$. No entanto, como a distribuição é uma função de sete variáveis, esta apresenta grandes complicações na sua resolução. Tendo também o estudo de plasma, para a fusão termonuclear controlada, geometrias complicadas, é lógico que se façam algumas aproximações e alterações no decorrer de nossa análise.

11.1.2- EQUAÇÕES MHD IDEAL [28]

A primeira aproximação mais lógica, é a remoção da velocidade como variável independente, e isto pode ser feito através dos momentos da equação de Boltzmann, já descritos anteriormente, adicionando o momento de ordem dois, dado por:

$$\frac{3kT_{\alpha}(\vec{r}, t)}{m_{\alpha}} = \frac{1}{n_{\alpha}(\vec{r}, t)} \int (\vec{v} - \vec{U}_{\alpha})^2 f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (11)$$

Estes três momentos levam às equações de continuidade, momento e conservação de energia descritas por:

$$\frac{dn_{\alpha}}{dt} + n_{\alpha} \vec{v} \cdot \vec{U}_{\alpha} = 0 \quad (12)$$

$$n_{\alpha} m_{\alpha} \frac{dU_{\alpha}}{dt} + \vec{v} \cdot \vec{P}_{\alpha} - n_{\alpha} q_{\alpha} (\vec{E} + \vec{U}_{\alpha} \times \vec{B}) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{3}{2} n_{\alpha} \frac{dT_{\alpha}}{dt} + \vec{P}_{\alpha} : \vec{\nabla} U_{\alpha} + \vec{v} \cdot \vec{h}_{\alpha} = 0 \quad (14)$$

onde $\vec{P}_{\alpha}$ é o tensor pressão, $\vec{P}_{\alpha} = p_{\alpha} \vec{I} + \vec{\pi}_{\alpha}$ (p_{α} é a pressão escalar e $\vec{\pi}_{\alpha}$ a parte devido a anisotropia de f_{α}) e $\vec{h}_{\alpha} = \frac{1}{2} m_{\alpha} \int (\vec{v} - \vec{U}_{\alpha})^2 (\vec{v} - \vec{U}_{\alpha}) f_{\alpha} d^3v$ é o fluxo de calor devido a movimento randômico.

A partir destas equações analisou-se um sistema idealizado constituído de dois fluidos, íons e elétrons. Forma-se assim um sistema de seis equações mais as de Maxwell, tendo como variáveis $n_e, n_i, \vec{U}_e, \vec{U}_i, T_e, T_i, \vec{E}$ e $\vec{B}$.

A partir das equações de dois fluidos, sintetiza-se um sistema numa combinação de pares destes, formando assim as

equações de um fluido, tendo como novas variáveis, $\rho = n_e m_e + n_i m_i$, $\vec{v} = (n_e m_e \vec{u}_e + n_i m_i \vec{u}_i) / \rho$, $\rho q = Z n_i - e n_e$ e $\vec{J} = Z n_i \vec{u}_i - e n_e \vec{u}_e$, onde $p = p_i + p_e$ e $\pi_\alpha \equiv 0$ (obs-Voltou-se a nomenclatura $\vec{v}$ para a velocidade, só que agora não é mais uma variável independente, mas sim $\vec{v} \equiv \vec{v}(\vec{r}, t)$).

Junto com as aproximações descritas no início deste capítulo chegam-se às equações da magnetohidrodinâmica para um plasma ideal, que são dadas por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad , (15)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} p - \vec{J} \times \vec{B} = 0 \quad , (16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{v} p + \gamma p \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \quad , (17)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{E} = 0 \quad , (18)$$

$$\vec{v} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J} = 0 \quad , (19)$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad , (20)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{B} = 0 \quad , (21)$$

Tem-se com isto as equações da evolução temporal para as variáveis macroscópicas ρ , $\vec{v}$, p , $\vec{B}$ e $\vec{E}$. Nota-se que a equação (17) indica a conservação do $p\gamma$.

11.1.2.1- EQUAÇÕES DE ESTADO [29]

Das equações da termodinâmica tiram-se, dos seus potenciais, as relações:

$$du = Tds - pd(1/\rho) \quad , (22)$$

$$dp = \rho dh - \rho Tds \quad , (23)$$

onde u é a energia interna por unidade de massa, T a temperatura, ρ a densidade de massa, p a pressão, s a entropia por unidade de massa e h a entalpia por unidade de massa. Tendo suposto o plasma como um gás ideal:

$$p = \rho RT \quad , (24)$$

$$u = RT/(\gamma - 1) \quad , (25)$$

onde $R = k/m$ (k é a constante de Boltzmann e $m = m_i + m_e$), e γ a razão entre os calores específicos, sendo no caso igual a $5/3$.

Se à equação (22) juntam-se as equações (24) e (25), obtém-se uma relação de importância de agora em diante, que é :

$$p/\rho^\gamma = A \exp[(\gamma - 1)s/R] = A(s) \quad , (26)$$

Outra relação tirada das equações (22) e (23), que se utiliza na análise, é:

$$h = \gamma u \quad .(27)$$

Para completar as equações de estado e as relações das grandezas termodinâmicas a serem utilizadas, são analisadas as equações (15) e (17). A partir destas pode-se concluir que o plasma, da forma colocada até agora é um fluido adiabático, isto é,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad .(28)$$

Juntando este com a equação (26) obtém-se:

$$ds/dt = 0 \quad .(29)$$

11.2) EQUILÍBRIO MHD [30]

A partir das equações MHD, descritas por (15) a (21), estudamos o caso em que o sistema se encontra em estado de equilíbrio, isto é estado em que não há variação no tempo das grandezas. Desta forma as equações são:

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla}p - \vec{J} \times \vec{B} = 0 \quad .(30)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}p = 0 \quad .(31)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0 \quad , (32)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad , (33)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J} = 0 \quad , (34)$$

$$\vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad , (35)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , (36)$$

O estado de equilíbrio dá também a incompressibilidade do fluido, isto é, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Juntando às equações de estado obtém-se um sistema completo de equações.

Para começar nossa análise, junta-se a equação de Faraday (33) com a Lei de Ohm, obtendo assim:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \quad , (37)$$

Desta pode-se mostrar que existe uma função escalar $\theta(r, z)$, tal que esta obedeça a seguinte relação:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \theta \quad , (38)$$

A forma de θ pode ser analisada projetando $\vec{\nabla} \theta$ sobre $\vec{B}$ e $\vec{\nabla}$ e tirando as seguintes relações:

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\theta = 0 \quad , (39)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\theta = 0 \quad . (40)$$

Estas mostram que $\vec{v}$ e $\vec{B}$ são sempre tangenciais às superfícies onde $\theta = \text{constante}$.

11.2.1- EQUILÍBRIO PARA SISTEMAS AXISSIMÉTRICOS [30]

Supõe-se agora que o nosso sistema seja axissimétrico, isto é, possui simetria com relação a um eixo. Tendo então o sistema de coordenadas descrito na figura 11.1,

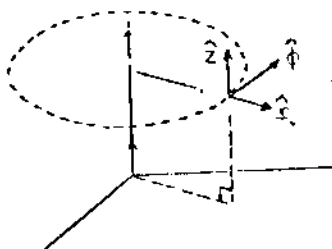


Figura 11.1 - Sistema de coordenadas utilizado.

onde o eixo de simetria é o eixo z . Sendo assim, todas as grandezas envolvidas no problema não dependem da coordenada ignorável ϕ , isto é, todas elas são constantes para cada ponto (r, z) fixo.

A primeira consequência desta simetria é com respeito ao campo magnético $\vec{B}$. Como nas equações de Maxwell, a divergente é nula, equação (36), existe uma função escalar $\Psi(r, z)$, que obedece a seguinte relação:

$$\vec{B} = \frac{1}{r} (\vec{\phi} \times \vec{\nabla} \psi) + B_{\phi} \vec{\phi} \quad .(41)$$

Partindo da equação (41), estudar-se-á todas as grandezas. Em primeiro lugar, é mostrado no apêndice I que ψ na realidade é proporcional ao fluxo magnético poloidal, entendendo por poloidal o plano perpendicular a $\vec{\phi}$, é chamado de direção toroidal.

Aplicando à equação (38) a relação (41), obtém-se:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\phi}}{r} \times \vec{\nabla} \psi + B_{\phi} \vec{\phi} \right) = \vec{\phi} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi) + B_{\phi} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\nabla \phi}{r} \vec{\nabla} \psi = \vec{\nabla} 0 \quad .(42)$$

Sabendo que nenhuma grandeza depende da coordenada ϕ , a componente $\vec{\phi}$ da equação (42) é nula, obtém-se então:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi = 0 \quad .(43)$$

Aplicando agora a relação (41) à equação (39):

$$\left(\frac{\vec{\phi}}{r} \times \vec{\nabla} \psi + B_{\phi} \vec{\phi} \right) \cdot \vec{\nabla} 0 = \frac{\vec{\phi}}{r} \cdot (\vec{\nabla} \psi \times \vec{\nabla} 0) = 0 \quad .(44)$$

Nesta equação nota-se que o termo $\vec{\nabla} \psi \times \vec{\nabla} 0$ só possui componente $\vec{\phi}$, assim, a única forma desta ser verdadeira é este termo ser nulo. Isto leva a concluir que 0 e ψ possuem as mesmas superfícies constantes, podendo assim escrever:

$$\vec{\nabla}\theta = \Omega(\psi)\vec{\nabla}\psi \quad .(45)$$

Da equação (39)

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\psi = 0 \quad .(46)$$

Como $\vec{\nabla}\psi$ é perpendicular a $\vec{\phi}$, conclui-se que $\vec{v}$, $\vec{B}$ e $\vec{\phi}$ estão num mesmo plano, desta forma escreve-se em primeiro lugar a componente poloidal da velocidade da seguinte forma:

$$\vec{v}_{pol} = \lambda(r, z)\vec{B}_{pol} \quad .(47)$$

Das equações (38) e (47) tira-se a relação:

$$(\lambda\vec{B}_{pol} + v_{\phi}\vec{\phi}) \times (\vec{B}_{pol} + B_{\phi}\vec{\phi}) = (v_{\phi} - \lambda B_{\phi})\vec{\phi} \times \vec{B}_{pol} = \vec{\nabla}\theta \quad (48)$$

Mas é sabido que a partir da relação (41) $\vec{\phi} \times \vec{B}_{pol} = 1/r\vec{\nabla}\psi$, obtendo assim:

$$v_{\phi} = \lambda B_{\phi} + \Omega r \quad .(49)$$

A velocidade do sistema é dada por:

$$\vec{v} = \lambda\vec{B} + \Omega r\vec{\phi} \quad .(50)$$

Da equação de continuidade (30) e considerando o fluido incompressível encontra-se:

$$\vec{\nabla}(\vec{v}_\rho) = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \rho \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} (\lambda \rho) = 0 \quad .(51)$$

A partir desta equação, que pode ser relacionado da forma $\lambda = \phi(\psi)/\rho$, pode-se descrever completamente a velocidade do sistema como:

$$\vec{v} = \frac{\phi(\psi)}{\rho} \vec{B} + \Omega(\psi) r \vec{\phi} \quad .(52)$$

Em (52) é descrita a velocidade de um plasma ideal, incompressível, quase neutro e de simetria axial e deste nota-se que só existem dois tipos de movimento do nosso fluido, um na direção do do campo magnético e outro como uma rotação rígida das superfícies de fluxo constantes.

Da equação (29), o fato do sistema ser adiabático no equilíbrio, leva a:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} S = 0 \quad .(53)$$

Juntando este à relação (52), obtém-se;

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} S = 0 \quad , (54)$$

sendo assim, a entropia é constante nas superfícies de fluxo, isto é, $s=s(\psi)$. Nota-se que esta dependência só existe, na realidade, se houver o movimento do fluido na direção do campo magnético. Caso este se manifeste somente como um rotor rígido das superfícies de fluxo, isto é, $\phi(\psi)=0$ para todo ψ , perde-se a de-

pendência e a informação sobre as grandezas termodinâmicas. Se é obrigado assim a estudar outro tipo de dependência, baseados em argumentos físicos e preencher este "buraco".

Analisadas algumas das grandezas principais, passa-se agora a estudar a equação de movimento do nosso fluido (31).

Em primeiro lugar toma-se sua componente toroidal, o termo $\vec{v} \cdot \nabla p$ não a possui, sendo assim esta será tomada pelo primeiro e terceiro termos de (31), levando a:

$$\frac{\Phi}{r} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \left[r \left(\frac{\Phi}{\rho} B_{\phi} + \Omega r \right) \right] - \frac{\vec{B}}{\mu_0 r} \cdot \vec{\nabla} (r B_{\phi}) = 0 \quad .(55)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas:

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \left\{ r \left[\frac{B_{\phi}}{\mu_0} - \Phi \left(\frac{\Phi}{\rho} B_{\phi} + \Omega r \right) \right] \right\} = 0 \quad .(56)$$

Desta equação pode-se ver que existe uma função escalar, que depende somente do fluxo magnético poloidal $I=I(\psi)$, tal que:

$$I(\psi) = r \left[\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{\Phi^2}{\rho} \right) B_{\phi} - \Phi \Omega r \right] \quad .(57)$$

o que implica em:

$$B_{\phi} = \frac{1}{1/\mu_0 - \Phi^2/\rho} \frac{I(\psi)}{r} + \Phi \Omega r \quad .(58)$$

Outra grandeza importante nesta análise é descrita através da componente da equação de movimento na direção do campo magnético. Pode-se encontrá-la fazendo o produto escalar de $\vec{B}$ pe-

la equação (31). O termo da força devido ao campo magnético, $\vec{J} \times \vec{B}$, não possui componente na direção de $\vec{B}$, sendo assim:

$$\vec{B} \cdot \left[(\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \right] + \frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \vec{v} p = 0 \quad (59)$$

Do primeiro termo da equação (59), com algumas manipulações algébricas obtém-se:

$$\vec{B} \cdot \left[(\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \right] = \vec{B} \cdot \vec{v} \left(\frac{\phi^2}{2\rho^2} B^2 - \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right) \quad (60)$$

e do segundo termo, a partir da relação (26):

$$\frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \vec{v} p = \vec{B} \cdot \vec{v} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} A \rho^{\gamma - 1} \right) = \vec{B} \cdot \vec{v} h \quad (61)$$

onde h é a entalpia por unidade de massa do sistema, já descrita na seção 11.1.2.1. Assim a componente da equação de movimento na direção de $\vec{B}$ dá:

$$\vec{B} \cdot \vec{v} \left(\frac{\phi^2}{2\rho^2} B^2 - \frac{r^2 \Omega^2}{2} + \lambda \right) = \vec{B} \cdot \vec{v} H(\psi) = 0 \quad (62)$$

É definida, com esta equação, mais uma função escalar do fluxo magnético poloidal. Esta descreve a relação de Bernoulli do sistema.

Através da componente da equação de movimento na direção de $\vec{v} \cdot \psi$ acha-se a equação que é objeto deste trabalho:

$$(\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{v} = \vec{v} \left(\frac{\phi^2}{2\rho^2} B^2 - \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right) - \frac{\vec{B}}{\rho} \times (\vec{v} \times \frac{\phi^2}{\rho} \vec{B}) + \left(\frac{\vec{v}}{\rho} \cdot \vec{B} \right) \vec{v}_\phi - \frac{\vec{B}}{\rho} \times (\vec{v} \times r\Omega\phi\hat{\phi}) + r \left(\frac{\phi}{\rho} B_\phi + r\Omega \right) \vec{v}_\Omega \quad (63)$$

$$\vec{v}_p = \rho \vec{v}_h - \frac{\rho \gamma}{\gamma - 1} \vec{v}_A \quad (64)$$

$$\vec{J} \times \vec{B} = \frac{(\vec{v} \times \vec{B})}{\mu_0} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{v} \cdot \left[\frac{1}{r^2} \vec{v}_\psi \right] \vec{v}_\psi + \frac{B_\phi}{r} \vec{I} \quad (65)$$

ficando assim com a equação

$$\vec{v}_\psi \vec{v} \cdot \left[\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{\phi^2}{\rho} \right) \frac{1}{r^2} \vec{v}_\psi \right] + \frac{B_\phi}{r} \vec{v}_I + \rho \vec{v}_H + (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{v}_\phi +$$

$$\rho r \left(\frac{\phi}{\rho} B_\phi + r\Omega \right) \vec{v}_\Omega - \frac{\rho \gamma}{\gamma - 1} \vec{v}_A = 0 \quad (66)$$

Quando há uma grandeza $G=G(\psi)$, pode-se dizer que $\vec{v}G = dG/d\psi \vec{v}_\psi$, sendo assim a equação final é dada por:

$$\vec{v} \cdot \left[\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{\phi^2}{\rho} \right) \frac{1}{r^2} \vec{v}_\psi \right] + \frac{B_\phi}{r} \frac{dI}{d\psi} + \rho \frac{dH}{d\psi} + \vec{v} \cdot \vec{B} \frac{d\phi}{d\psi} + \rho r \left(\frac{\phi}{\rho} B_\phi + r\Omega \right) \frac{d\Omega}{d\psi} - \frac{\rho \gamma}{\gamma - 1} \frac{dA}{d\psi} = 0 \quad (67)$$

A partir da equação (67) e das relações (26), (54), (58) e (62), forma-se um sistema completo para resolver o problema.

Juntando a condição de contorno e as funções $I(\psi)$, $\Omega(\psi)$, $\phi(\psi)$, $H(\psi)$ e $A(\psi)$. A expressão (67) foi desenvolvida e analisada por E. Hameiri [30].

11.2.2- EQUILÍBRIO PARA SISTEMAS COM ROTAÇÃO PURA [29]

O problema proposto se baseia no estudo de sistemas com rotação pura. Supõe-se então que a configuração estudada possui uma rotação rígida para cada superfície de fluxo magnético poloidal.

Para que isto aconteça, a expressão para a velocidade é dada por:

$$\vec{v} = \Omega(\psi) \, r \, \hat{\phi} \quad .(68)$$

Comparando a equação (68) com a (52), se vê que isto só é possível se $\phi(\psi) \neq 0$ para todo ψ . São descritas assim as equações (57) e (62) para este caso

$$I(\psi) = \frac{rB}{\mu_0} \phi \quad , (69)$$

$$H(\psi) = h - \frac{r^2 \Omega^2}{2} \quad .(70)$$

Nota-se que, neste tipo de sistema, não é mais possível ter a equação (54), perdendo assim a informação sobre as grandezas termodinâmicas.

Analisando o sistema físico, propõe-se então uma comparação entre duas situações diferentes de sistemas rotantes. Em primeiro lugar, supõe-se que a entropia continue sendo função somente do fluxo magnético poloidal, isto é $s=s(\psi)$, argumentando que o fato de ter limitado o movimento do fluido não altere a dependência da entropia. O segundo sistema a ser proposto é supondo a temperatura como função somente do fluxo magnético poloidal, $T=T(\psi)$. O argumento que leva a fazer esta suposição se baseia na forma das superfícies de fluxo. Como se vê na figura 11.2, as linhas de campo magnético contornam toda a superfície de fluxo. Tendo as partículas tendência a se mover na direção do campo magnético, é mais fácil o movimento sobre as superfícies de

fluxo do que entre elas. Desta forma, a condutividade térmica nas superfícies é mais alta do que entre elas, havendo assim uma tendência de se ter temperatura constante.

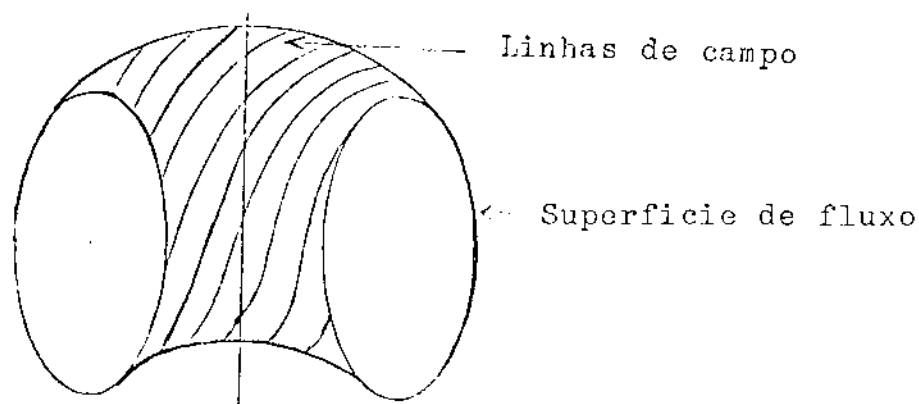


Figura 11.2- Superfície de fluxo magnético

11.2.2.1- ENTROPIA COMO FUNÇÃO DO FLUXO

Neste primeiro caso a ser estudado, as equações saem diretamente das análises feitas para o caso de velocidade geral do fluido, sendo assim, pegando a equação (67) obtém-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\mu_0 r^2} \vec{\nabla} \psi \right] + \frac{\mu_0 I}{r^2} \frac{dI}{d\psi} + \rho \frac{dH}{d\psi} + \rho r^2 \Omega \frac{d\Omega}{d\psi} - \frac{\rho \gamma}{\gamma - 1} \frac{dA}{d\psi} = 0 \quad (71)$$

e das relações (24-27) e (62):

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} A \rho^{\gamma - 1} = \eta A \rho^{\gamma - 1} \quad (72)$$

$$H(\psi) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} A \rho^{\gamma - 1} - \frac{r^2 \Omega^2}{2} = \eta A \rho^{\gamma - 1} - \frac{r^2 \Omega^2}{2} \quad (73)$$

$$p = \frac{h}{\eta} \rho \quad , (74)$$

onde $\eta = \gamma - 1$. Destas equações obtém-se:

$$\rho = \left[\frac{1}{\eta A} \left(H + \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right) \right]^{1/(\gamma - 1)} \quad , (75)$$

$$p = \left(\frac{H}{\eta} \right)^{\eta} A^{1 - \eta} \left(1 + \frac{\Omega^2}{H} \frac{r^2}{2} \right)^{\eta} \quad . (76)$$

É chamado, de agora em diante, o termo da pressão que depende somente de ψ , de $p_a(\psi) = (H(\psi)/\eta)^{\eta} A(\psi)^{1 - \eta}$.

Das expressões (73), (75) e (76) aplicadas a equação (71), obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0 r^2} \vec{\nabla} \psi \right) + \frac{\mu_0 I}{r^2} \frac{dI}{d\psi} + \left(1 + \frac{\Omega^2}{H} \frac{r^2}{2} \right)^{\eta - 1} \left[\frac{dp_s}{d\psi} + \right. \\ \left. + \frac{\eta p_s r^2 \Omega^2}{H} \left(\frac{d\Omega}{d\psi} + \frac{(1 - \eta)}{\eta} \frac{\Omega}{2A} \frac{dA}{d\psi} \right) \right] = 0 \quad . (77) \end{aligned}$$

A equação (77) descreve o equilíbrio para sistemas axissimétricos com rotação toroidal e entropia dependente somente do fluxo magnético poloidal.

A tentativa de solucionar a equação (77) leva a uma complexidade desnecessária de cálculo, onde pode-se fazer algumas aproximações, preservando o sistema e facilitando o trabalho. A tendência na simplificação da equação (77) seria no sentido de linearizá-la, isto é, torná-la uma equação linear em ψ . Desta forma, em primeiro lugar, é expandida a função $\Omega(\psi)^2/H(\psi)$ numa série de potências em ψ , obtendo:

$$\frac{\Omega^2(\psi)}{H(\psi)} = \frac{\alpha_0^2}{r_0^2} + \alpha_1 \psi + \alpha_2 \psi^2 + \dots \quad (78)$$

Aplicando esta expansão à equação (77), se chega a conclusão que o único termo desta, que poderia manter a equação linear seria o termo constante (α_0^2/r_0^2), desta forma pode-se considerar os outros termos desprezíveis dentro da equação, em relação a este e obtém-se a aproximação:

$$\frac{\Omega^2(\psi)}{H(\psi)} = \frac{\alpha_0^2}{r_0^2} \quad (79)$$

É estudado posteriormente o significado físico da constante α_0 e as implicações da aproximação (79) para o sistema.

Aplicando a relação (79) à equação (77) obtém-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0 r^2} \vec{\nabla} \psi \right) + \frac{\mu_0}{r^2} I \frac{dI}{d\psi} + \left[1 + \frac{\alpha_0^2}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^\eta \frac{dp_s}{d\psi} = 0 \quad (80)$$

são arbitradas as funções $I(\psi)$, $p_s(\psi)$ e $H(\psi)$ (ou $\Omega(\psi)$), fechando assim o problema com o estabelecimento das condições de contorno.

11.2.2.2- TEMPERATURA COMO FUNÇÃO DO FLUXO

Vamos agora fazer o desenvolvimento do nosso sistema baseado na segunda hipótese, já descrita e argumentada nas páginas 16 e 17, que seria $T=T(\psi)$.

Em primeiro lugar se estabelece a equação de Bernoulli para o nosso novo sistema, baseando-se no desenvolvimento da equação (61), que seria:

$$\frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} p = \frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} (\rho RT) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} (RT \ln \rho / \rho_0) \quad , (81)$$

onde ρ_0 é uma constante de referência para a densidade. Desta forma tem-se a nova equação de Bernoulli dada por:

$$H_T(\psi) = RT \ln \rho / \rho_0 - \frac{r^2 \Omega^2}{2} \quad . (82)$$

Note que $H_T(\psi)$ é uma função relacionada a equação de Bernoulli, tanto quanto a equação (73) para $s=s(\psi)$, mas deve-se observar que estas duas tem estruturas diferentes e não devem fisicamente significar a mesma coisa.

Em desenvolvimento similar a equação (64),

$$\vec{\nabla} p = R\rho (1 - \ln \rho / \rho_0) \vec{\nabla} T + \rho \vec{\nabla} (RT \ln \rho / \rho_0) \quad . (83)$$

Aplicando as novas relações à equação de movimento (31), junto com os desenvolvimentos já feitos anteriormente, em (63) e (65):

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{\mu_0 r^2} \vec{\nabla} \psi \right) + \frac{\mu_0}{r^2} I \frac{dI}{d\psi} + \rho \frac{dH}{d\psi} + \rho r^2 \Omega \frac{d\Omega}{d\psi} + R\rho (1 - \ln \rho / \rho_0) \frac{dT}{d\psi} = 0 \quad . (84)$$

Tirou-se também a partir da nova hipótese, as relações:

$$\rho = \rho_0 \exp \left[\left(H + \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right) / RT \right] \quad , (85)$$

$$p = \rho_0 RT \exp \left[\frac{H}{RT} \right] \exp \left[\frac{r^2 \Omega^2}{2 RT} \right] = p_T(\psi) \exp \left[\frac{r^2 \Omega^2}{2 RT} \right] \quad , (86)$$

Aplicando (85) e (86) à equação (84) obtém-se:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{\mu_0 r^2} \vec{\nabla} \psi \right) + \frac{\mu_0}{r^2} I \frac{dI}{d\psi} + \left[\frac{dp}{d\psi} + p_T r^2 \frac{d}{d\psi} \left(\frac{\Omega^2}{2 RT} \right) \right] \exp \left[\frac{r^2 \Omega^2}{2 RT} \right] = 0 \quad , (87)$$

Desta vez se expande em série de potência de ψ a função $\Omega^2(\psi)/RT(\psi) = \alpha_0^2/r_0^2 + \alpha_1 \psi + \alpha_2 \psi^2 + \dots$. De novo é visto que, se for aplicado esta expansão à equação (87), só poderá ser linearizado se for mantido somente o termo constante, desprezando os outros, obtendo assim a relação

$$\frac{\Omega^2(\psi)}{RT(\psi)} = \frac{\gamma \alpha_0^2}{r_0^2} \quad , (88)$$

Aplicando (88) à (87) obtém-se:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{\mu_0 r^2} \vec{\nabla} \psi \right) + \frac{\mu_0}{r^2} I \frac{dI}{d\psi} + \frac{dp_T}{d\psi} \exp \left[\frac{\gamma \alpha_0^2}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] = 0 \quad , (89)$$

onde agora as grandezas a serem arbitradas serão $I(\psi)$, $p_\alpha(\psi)$ e $H(\psi)$ (ou $\Omega(\psi)$). Com o estabelecimento das condições de contorno tem-se o problema fechado.

11.2.2.3- CASO SEM ROTAÇÃO

Para este caso, além de $\phi=0$, há também $\Omega=0$, tendo assim uma ausência completa de movimento do fluido. É obtido em primeiro lugar a seguinte relação:

$$H(\psi) = \eta \frac{p}{\rho} = \eta A(\psi) \rho^\gamma \quad (90)$$

Nota-se a partir da relação (90) que $\rho=\rho(\psi)$ e $p=p(\psi)$, tendo então a partir destas $T=T(\psi)$. Usando a equação (77) ou a (87),

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0 r^2} \vec{\nabla} \psi \right) + \frac{\mu_0}{r^2} I \frac{dI}{d\psi} + \frac{dp}{d\psi} = 0 \quad (91)$$

completando esta com o estabelecimento das funções $i(\psi)$, $p(\psi)$ e $T(\psi)$, junto com as condições de contorno.

11.2.2.4- UNIFICAÇÃO DAS EXPRESSÕES

Nota-se, a partir de (80), (89) e (91), que as equações estabelecidas para as três hipóteses, a serem estudadas, e algumas das grandezas envolvidas, possuem expressões muito parecidas, podendo assim unificá-las obtendo:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0 r^2} \vec{\nabla} \psi \right) + \frac{\mu_0}{r^2} I \frac{dI}{d\psi} + F_\alpha(r^2) \frac{dp_\alpha}{d\psi} = 0 \quad (92)$$

onde o índice α indica em que hipótese se está trabalhando.

Há também, a partir da unificação, a relação:

$$p = p_{\alpha}(\psi) F_{\alpha}(r^2) \quad .(93)$$

A tabela 11.1 nos dá a função F_{α} a partir da hipótese gerada:

SEM ROTAÇÃO		$S = S(\psi)$	$T = T(\psi)$
$F_{\alpha}(r^2)$			
1		$[1 + \alpha_0^2/2 (r/r_0)^2]$	$\exp[\gamma \alpha_0^2/2 (r/r_0)^2]$

TABELA 11.1- Funções de acordo com as hipóteses a serem trabalhadas.

Unifica-se assim as equações, usando-se um único método de cálculo para os três casos.

11. 3- ESTABELECIMENTO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Se supõe agora que o plasma é completamente confinado durante o período de tempo, que se estabelece o equilíbrio. Se isto acontece a pressão no contorno será igual a zero. Partindo da relação (93) teremos:

$$p_{\alpha}(\psi)|_{\text{cont}} = 0 \quad .(94)$$

A relação (94) será verdadeira se $\psi = \text{cte}$ no contorno, que confina o plasma, a ser estabelecido. Tendo assim o próprio como superfície do fluxo.

Como o fluxo magnético é uma questão de referência de onde se começa a calculá-lo, pode-se ter o sistema de tal forma que este seja zero no contorno, isto é, poderá usa-lo, como referência para calcular o fluxo.

11.4- DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES ARBITRÁRIAS

Com o estabelecimento da condição de contorno a ser utilizada, tem-se agora o problema quase completamente fechado, restando apenas aplicar as funções a serem introduzidas na equação e estabelecer a superfície de contorno.

Como foi descrito nas seções 11.2.2.1, 2.2 e 2.3, há basicamente três funções a serem introduzidas em separado. As funções $p_\alpha(\psi)$ e $l(\psi)$ são naturais para os três sistemas. Escolhe-se para os casos com rotação a função $\Omega(\psi)$ a ser introduzida, pois desta forma pode-se comparar os dois sistemas. Para o caso sem rotação teremos que escolher outra, pois sabe-se que $\Omega = 0$. Esta será $T = T(\psi)$, pois desta forma poderá compará-lo com um dos sistemas com rotação ($T = T(\psi)$), impondo-lhe uma expressão de mesma forma.

A partir destas funções expande-se em séries de potência de ψ obtendo então:

$$I(\psi) = I_0 + I_1\psi + I_2\psi^2 + \dots \quad , (95)$$

$$P_{\alpha}(\psi) = p_0 + p_1\psi + p_2\psi^2 + \dots \quad , (96)$$

$$\Omega(\psi) = \Omega_0 + \Omega_1\psi + \Omega_2\psi^2 + \dots \quad , (97)$$

$$T_{SR}(\psi) = T_0 + T_1\psi + T_2\psi^2 + \dots \quad , (98)$$

Aplicando as séries (95-98) à equação de movimento (92), tem-se então termos lineares, quadráticos e de maior ordem com relação a ψ . Considerando assim que todos os termos maiores ou iguais a dois são desprezíveis em comparação aos termos lineares, em $I(\psi)$ e $p_{\alpha}(\psi)$ só restarão os termos de ordem menor ou igual a dois. Sabe-se também que $p_{\alpha} = 0$, pela condição de contorno ($p = 0$ quando $\psi = 0$). A equação de movimento passa a ser dada por:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{r^2} \vec{\nabla} \psi \right) + \frac{\mu_0^2}{r^2} (I_1^2 \psi + I_0 I_1 + 2 I_0 I_2 \psi) + \mu_0 F_{\alpha}(r^2) (P_1 + 2 P_2 \psi) = 0 \quad (99)$$

Com relação as outras duas funções $\Omega(\psi)$ e $T_{SR}(\psi)$, será desenvolvida tal forma que todos os termos de ordem maior ou igual a três sejam desprezíveis.

11.5- SIGNIFICADO FÍSICO DE α_0 E SEU RELACIONAMENTO COM A ROTAÇÃO

Pode-se definir o número de Mach como sendo:

$$\mu = \frac{|r\Omega|}{c_s} \quad , (100)$$

onde o termo em módulo corresponde a velocidade de rotação do fluido e c_s a velocidade térmica. c_s pode ser escrito como:

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S = \text{cte}} \quad .(101)$$

Utilizando as relações termodinâmicas (24-27) obtem-se :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S = \text{cte}} = \left. \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho RT) \right|_{S = \text{cte}} = \gamma RT \quad , (102)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S = \text{cte}} = \left. \frac{\partial}{\partial \rho} [A(S) \rho^\gamma] \right|_{S = \text{cte}} = (\gamma - 1)h \quad .(103)$$

Como $R = k/m$, onde k é a constante de Boltzmann, partindo de (102);

$$\mu = |r\Omega| / \sqrt{\frac{\gamma RT}{m_0}} \quad .(104)$$

11.5.1- ENTROPIA COMO FUNÇÃO DO FLUXO

Para este caso há a equação de Bernoulli (73) dada por:

$$H = h - \frac{r^2 \Omega^2}{2} = \frac{c_s^2}{\gamma - 1} - \frac{u^2 c_s^2}{2} = \frac{c_s^2}{\gamma - 1} \left[1 - \frac{\mu^2 (\gamma - 1)}{2} \right] \quad (105)$$

A partir da aproximação (79):

$$\frac{r^2 \Omega^2}{H} = \alpha_0^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 = \frac{(\gamma - 1) \mu^2}{\left[1 - \frac{\mu^2 (\gamma - 1)}{2} \right]} \quad .(106)$$

Da relação (106) para o ponto $r = r_0$:

$$\alpha_0^2 = (\gamma - 1) \mu'^2 / \left[1 - \mu'^2 \frac{(\gamma - 1)}{2} \right] \quad , (107)$$

onde μ' é o número de Mach para $r = r_0$.

A relação (107) é muito importante na análise, pois esta relaciona diretamente α_0 com a rotação do sistema, representada pelo número de Mach.

A primeira análise que é feita mostra uma limitação no movimento do fluido, pois tanto em (105) como em (107) só há significado físico se:

$$\mu < \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} \quad . (108)$$

A relação (108) diz que a aproximação que foi feita em (79) só é válida para movimentos limitados por esta, isto é, a velocidade do fluido não poderá ser maior que 1,7 vezes a velocidade térmica do mesmo.

11.5.2- TEMPERATURA COMO FUNÇÃO DO FLUXO

Partindo da aproximação usada neste caso (88), obtém-se;

$$\mu^2 = \frac{r^2 \Omega^2}{\gamma R T / m_i} = \alpha_0^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \quad . (109)$$

Para $r = r_0$:

$$\alpha_0 = \mu' \quad . (110)$$

Neste caso a aproximação não limitou o movimento do sistema e a constante α_0 possui significado físico bem definido, esta é o número de Mach para um ponto de referência r_0 .

III- MÉTODO NUMÉRICO, APLICAÇÕES E CONCLUSÃO

Será aplicado neste capítulo o desenvolvimento para o OPCR, descrito no capítulo I. Será descrito o contorno a ser usado, o cálculo numérico e a partir daí se fará algumas comparações e aplicações a sistemas teóricos e experimentais, seguindo assim com a conclusão deste trabalho.

III.1- SUPERFÍCIE DE CONTORNO

Partindo da definição do item 1.3.2 e da condição de contorno no item 11.3, se estabelece-se a superfície de contorno a ser utilizada no OPCR.

Considerando a hipótese que se tem o plasma completamente confinado no sistema em estudo, estabelece-se a superfície de contorno a partir deste confinamento, obedecendo assim a condição de contorno já determinada.

Vimos no capítulo I na figura 1.10 o formato das linhas de campo, que confinam o plasma. É utilizada uma aproximação desta superfície para o cálculo podendo, em outra ocasião, se estudar a influência desta nos dados reais do sistema.

Uma aproximação natural, pela sua simplicidade de cálculo, seria uma superfície toroidal de seção retangular, como é mostrada na figura III.1 .

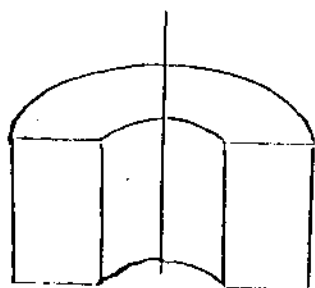


Figura III.1- Superfície toroidal de seção retangular

Nossa proposta é utilizar uma superfície um pouco mais aproximada da realidade e que não se leve a uma complexidade demasiada de cálculos. Escolhemos assim uma superfície toroidal de seção elíptica, como mostra a figura III.2

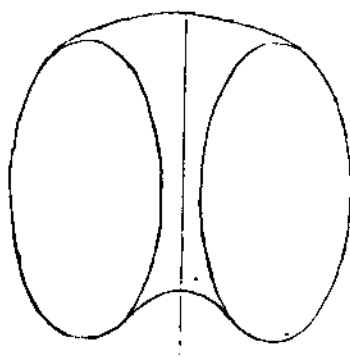


Figura III.2- Superfície toroidal de seção elíptica

III.2- FORMAÇÃO DOS PONTOS DE GRADE PARA O CÁLCULO NUMÉRICO

Pontos de grade consistem em pontos dentro da superfície estudada, que são utilizados na aproximação do cálculo da função e de suas derivadas e aplicadas a equação a ser calculada.

Como a equação não depende da variável angular ϕ , apresenta-se o cálculo somente na área da seção reta do toróide, que no caso é uma elipse deslocada do eixo. Para o estabelecimento da grade divide-se o contorno

em partes iguais, tanto no eixo de simetria z como no radial r , como mostra a figura III.3

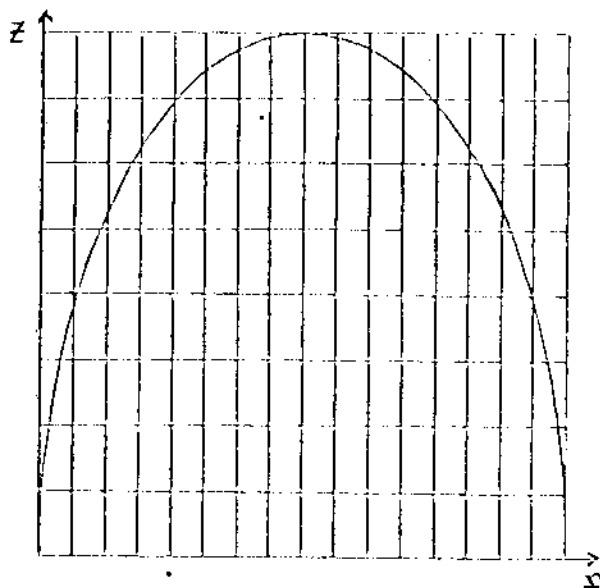


Figura III.3- Formação da grade de cálculo

Faz-se a partir dos pontos estabelecidos uma aproximação numérica das derivadas relativas a função calculada. Nota-se que os pontos não coincidem com o contorno, havendo a necessidade de se fazer aproximações descritas no item seguinte.

III.3 CALCULO NUMÉRICO

É descrito neste item o método numérico para o cálculo da equação utilizando os pontos de grade estabelecidos no item anterior.

III.3.1- FORMAÇÃO DA MATRIZ DE CÁLCULO

É destacado um ponto no interior do contorno e seus vizinhos, de tal forma que a área formada por eles não inclua o contorno.

Se dá a este um índice discreto i (figura III.4)

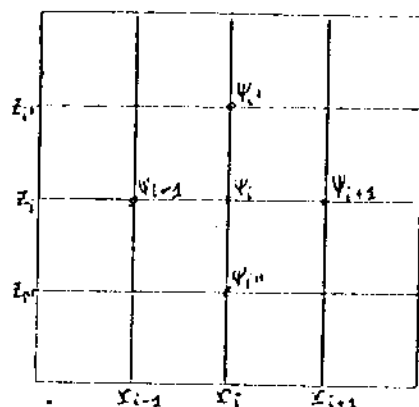


Figura III.4- Ponto no interior do contorno e seus vizinhos

Suas derivadas aproximadas serão dadas por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \sim \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta r} \quad , (1)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \sim r_i \left(\frac{1}{r_{i+1}} \right) \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\Delta r^2} - \frac{1}{r_i} \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta r^2} \quad , (2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \sim \frac{\psi_i - \psi_{i''}}{\Delta z} \quad , (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \sim \frac{\psi_{i'} + \psi_{i''} - 2\psi_i}{\Delta z^2} \quad , (4)$$

$$\text{onde } \bar{r}_i = \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \quad \bar{r}_{i+1} = \frac{r_{i+1} + r_i}{2}$$

Desta forma a equação é dada numericamente por:

$$\begin{aligned} & \frac{r_i}{\bar{r}_{i+1}} \frac{1}{\Delta r^2} \psi_{i+1} + \frac{r_i}{\bar{r}_i} \frac{1}{\Delta r^2} \psi_{i-1} + \frac{1}{\Delta Z^2} \psi_i' + \frac{1}{\Delta Z^2} \psi_i'' + \\ & + \left| \mu_0^2 I_1^2 + 2\mu_0 p_2 r_i^2 F_i - \frac{2}{\Delta Z^2} - \frac{r_i}{\Delta r^2} \left(\frac{1}{\bar{r}_{i+1}} + \frac{1}{\bar{r}_i} \right) \right| \psi_i = \\ & = -\mu_0 p_1 r_i^2 F_i \end{aligned} \quad (5)$$

A equação (5) dá um sistema linear do tipo

$$A_{ij} \psi_j = b_i \quad (6)$$

onde A_{ij} é uma matriz e b_j um vetor, cujos elementos são dados por:

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \mu_0 I_1^2 + 2\mu_0 p_2 r_i^2 F_i - \frac{2}{\Delta Z^2} - \frac{r_i}{\Delta r^2} \left(\frac{1}{\bar{r}_{i+1}} + \frac{1}{\bar{r}_i} \right) \\ A_{ii}' &= \frac{1}{\Delta Z^2} \\ A_{ii+1} &= \frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_i}{\bar{r}_{i+1}} \\ A_{ii} - 1 &= \frac{1}{\Delta r^2} \\ A_{ii}'' &= \frac{1}{\Delta Z^2} \\ b_i &= \mu_0 p_1 r_i^2 F_i \end{aligned} \quad (7)$$

Os elementos da matriz de cálculo descritos em (7) mostram em primeiro lugar que o índice j dá a influência dos pontos vizinhos sobre o que queremos calcular e segundo que A_{ij} é

uma matriz altamente esparsa, isto é, possui uma grande maioria de elementos nulos. Sendo assim, o cálculo de (6) é possível usando um número razoavelmente grande de pontos se for usado métodos de matriz esparsa para resolvê-lo.

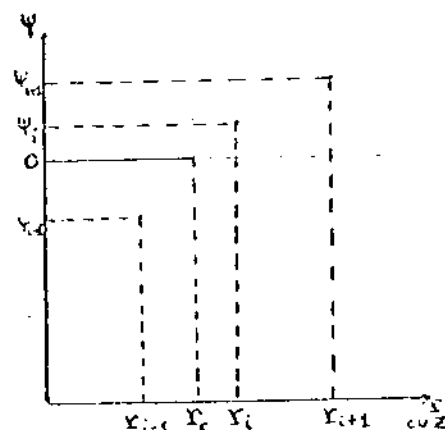
Para o cálculo de (6) foi usado o método de pivotamento de Gauss para matrizes esparsas [31]

III.3.2-APROXIMAÇÃO NO CONTORNO

Na escolha da grade de cálculo nota-se que os pontos desta não coincidem com o contorno. Existe então a necessidade de se fazer uma aproximação entre os pontos vizinhos a este para aplicá-lo a matriz.

Pode-se fazer esta aproximação como mostra a figura III.5.

Figura III.5 - Pontos vizinhos ao contorno $\Psi = 0$



Traçando uma parábola entre os pontos $(r_{cent}, 0)$, (r_i, Ψ_i) e (r_{i+1}, Ψ_{i+1}) , obrigando o ponto (r_{i-1}, Ψ_{i-1}) a coincidir com esta e os relacionando da forma:

$$\psi = \psi_{i-1} \frac{(r_{i-1} - r_c)(r_{i-1} - r_i)}{(r_{i+1} - r_c)(r_{i+1} - r_i)} - \psi_i \frac{(r_{i-1} - r_c)(r_{i-1} - r_{i+1})}{(r_i - r_c)(r_{i+1} - r_i)} \quad (8)$$

III.4 - APLICAÇÕES

Com a forma de cálculo de nosso problema completamente desenvolvida, pode ser aplicado a vários sistemas e compará-los a dados experimentais e teóricos.

Na tabela III.1 se têm vários dados experimentais deste tipo de sistemas ao longo dos anos.

ANO	REFER.	R	a	z	B	B _φ	n	T	TIPO
		cm	cm	cm	KG	KG	10 ¹⁴ cm ⁻³	eV	
1963	32,10	---	---	---	85	---	---	---	OPCR
1963	33,10	---	---	---	50	---	1200	300	OPCR
1963	34,10	---	---	---	27	---	---	---	OPCR
1964	35,10	---	---	35	93	---	400	850	OPCR
1966	36,10	0,7	---	---	88	---	---	900	OPCR
1971	11,10	1,4	0,2	---	14	---	440	56	OPCR
1975	37,10	5,0	---	---	4,5	---	2	100	OPCR
1978	38,10	11	4	32	10	---	10	100	OPCR
1981	10 *	3,3	1,2	17,5	6	---	26	170	OPCR
1982	39	26	15	---	1,2	1,2	---	---	SPH
1982	40	---	---	---	1	---	1	25	OPCR
1982	41 *	7	5	15	2,2	1,7	10	15	SPH
1982	41	12	8	16	2	1,5	2	40	SPH
1982	42	---	1,5	50	25	---	60	1000	OPCR
1982	42	---	5	50	5	---	30	200	OPCR

Tabela III.1 - Resultados de experimentos feitos em sistemas do tipo 0-PCR (R-Raio maior, a-raio menor)

Para dar uma idéia de como fica o conjunto de grandezas calculadas em cada conjunto de parâmetros estabelecido, mostra-se na figura III.6 estas, levando em conta o que poderia ser perfeitamente os dados de uma experiência em um toróide compacto.

Os parâmetros foram escolhidos arbitrariamente baseando-se no que seriam os dados de um θ PCR.

Nota-se nas figuras III.6 a separação das curvas quando se supõe um sistema em rotação com um número de Mach ~ 0.3 no centro do toróide.

III.4.1- DEPENDENCIA COM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS

Partindo dos dados já vistos na figura III.6 é agora analisada a dependência de algumas delas com relação aos parâmetros estabelecidos.

Em primeiro lugar é mostrada na figura III.7.1 as variações do fluxo magnético poloidal quando aumentam os parâmetros de rotação, um para um número de Mach ~ 0.4 , dado nas figuras III.6, e o outro ~ 0.6 . Nota-se um afastamento das curvas com rotação com relação a sem rotação, mas os dois sistemas, tanto com $S=S(\psi)$ como $T=T(\psi)$, quase se coincidem para um mesmo número de Mach.

Nas figuras III.7.2 e III.7.3 é mostrada a variação com relação aos parâmetros relacionados a pressão, isto é, p_1 e p_2 . Nota-se que não há influência de p_2 entre o seu valor zero e um valor intermediário dado pela figura III.6.5, mas a partir daí há um crescimento perceptível com pequena variação deste. A dependência de p_1 já é mais direta, o que já era de se esperar. Há quase uma relação proporcional quando este é variado.

Nas figuras III.7.4 vê-se a dependência do fluxo com relação ao parâmetro ligado ao campo toroidal, o I_1 . Nota-se uma relação muito parecida com a de p_1 , mas em menor escala por ser menos perceptível (pode-se compará-los com a figura III.6.4, notando melhor esta dependência).

Finalmente nas figuras III.7.5 vê-se o aparecimento do parâmetro I_0 , também ligado ao campo toroidal. Mas este só fará sentido físico quando houver algum agente externo no eixo de simetria do toróide criando o campo toroidal. É visto que apesar deste provocar campos magnéticos intensos não há muita influência com relação as outras grandezas do sistema.

III.4.2- COMPARAÇÃO A SISTEMAS TEÓRICOS

Vamos aqui pegar basicamente dois modelos já desenvolvidos e compará-los com o nosso.

Em primeiro lugar pegamos o modelo de Shibata [2], que considera uma terceira grandeza termodinâmica como função do fluxo, a densidade ($\rho = \rho(\psi)$). Há nas figuras III.8 a comparação das curvas de fluxo, pressão e densidade e temperatura. Nota-se que não há diferenças entre as curvas de equilíbrio estacionário (com rotação) para os três casos, nos quais são amarradas as grandezas termodinâmicas, a não ser com relação as curvas das próprias grandezas termodinâmicas (densidade e temperatura), que diferenciam os três modelos.

Outro modelo interessante a se comparar, principalmente pela sua simplicidade, seria o Spheromak Ideal. É desenvolvido no apêndice II a teoria deste e os vários modos de obtenção de Spheromaks. Nas figuras III.8 pôde ser comparado o modelo desenvolvido neste trabalho com o Spheromak ideal demonstrando a semelhança entre ambos.

III.4.3- COMPARAÇÃO A SISTEMAS EXPERIMENTAIS

Infelizmente sabe-se que não existe ainda nenhum tipo de medida em sistemas do tipo OPCR, que possa dar variações radiais destas grandezas analisadas. O que se pode fazer por enquanto é pegar valores médios ou máximos e ajustar os parâmetros e "simular" os tipos de variações diferentes. Como exemplo, são comparadas duas experiências já feitas, uma de um toróide compacto de Los Alamos [10] (1981) e outra de um Spheromak em Princeton [41] (1982). É visto nas figuras III.9 estas "simulações", feitas de acordo com os dados da tabela III.1, marcados com um *

III.5- CONCLUSÃO

Foi mostrado neste trabalho que as equações MHD para um plasma ideal, com simetria axial e velocidade de fluxo puramente toroidal, podem ser reduzidas a uma única equação diferencial para o fluxo magnético poloidal ψ , se a entropia ou a temperatura for função somente deste. Em ambos os casos se tem quatro funções de superfície arbitrárias, onde especificadas junto com a condição de contorno determina-se completamente o equilíbrio deste siste-

ma.

As equações diferenciais para ψ (capítulo II equações (80), (89) e (91)), podem ser unificadas numa expressão relativamente simples (capítulo II equação (92)), facilitando o cálculo.

Usou-se como contorno um toróide de seção elíptica, foram feitos os cálculos a partir de aproximações numéricas caindo numa equação linear de matriz esparsa, podendo ser calculada por métodos especiais com boa precisão com um número razoável de pontos dentro do contorno.

Este modelo foi comparado com outros teóricos, inclusive um que utiliza os mesmos princípios para conseguir suas equações, o de amarrar uma grandeza termodinâmica à dependência do fluxo (neste caso sendo a densidade [2]). A partir desta comparação pode-se notar que mesmo considerando um movimento de alta rotação do fluido ($\mu \sim 1$), a maioria das grandezas se põe com uma dependência em muito semelhante, podendo afirmar que, independente de qual modelo usar, chega-se as mesmas curvas com os mesmos resultados, com exceção das próprias grandezas termodinâmicas (densidade e temperatura). Estas determinarão frente aos dados experimentais, que puderem ser comparados, qual modelo se aproxima mais a realidade.

Mostrou-se por fim como, a partir de dados experimentais de valores médios ou máximos, este modelo pode ser aplicado chegando no futuro a poder dizer qual seria mais próximo a estes dados.

III.6 - PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS

Propomos como trabalho futuro, usando os mesmos métodos, utilizar condições de contorno mais próximas a realidade, como as linhas de campo abertas, podendo com isto determinar até a forma da separatriz. Pode-se usar também as próprias bobinas, que formam o OPCR como contorno, incluindo interações entre o campo formado pelo plasma e a corrente das bobinas.

Pode-se também usar métodos de resolução de equações não lineares para o cálculo do problema propondo velocidade geral do fluido, pois estaria mais próximo a realidade e evitaria o confronto entre diferentes modelos para estudar o equilíbrio do plasma.

APÊNDICE I

SIGNIFICADO FÍSICO DA FUNÇÃO DE FLUXO

Seja um toróide de seção arbitrária, mostrado na figura 1.1. Sendo $\hat{\phi}$ o versor normal às superfícies $\phi = \text{constante}$ (é o mesmo das coordenadas cilíndricas) e $\hat{\psi}$ o versor normal às superfícies $\psi = \text{constante}$ (superfícies de fluxo), vamos definir uma direção poloidal dada por:

$$\hat{\chi} \equiv \hat{\psi} \times \hat{\phi} \quad , (1)$$

como mostra a figura 1.2. Com isto o elemento de área da superfície poloidal, simultaneamente normal às superfícies de fluxo e às superfícies $\phi = \text{constante}$, já integrada em ϕ (devido à sua simetria axial), é:

$$d\vec{s}_p = 2\pi r d\vec{r}_\psi \hat{\chi} \quad , (2)$$

onde $d\vec{r}_\psi$ é o deslocamento ao longo da variação de ψ , ou seja,

$$d\vec{r}_\psi \equiv \frac{d\psi}{|\vec{\nabla}\psi|} \hat{\psi} \quad , (3)$$

onde:

$$d\vec{s}_p = \frac{2\pi r}{|\vec{\nabla}\psi|} d\psi (\hat{\psi} \times \hat{\phi}) = \frac{2\pi r}{|\vec{\nabla}\psi|} d\psi \hat{\chi} \quad . (4)$$

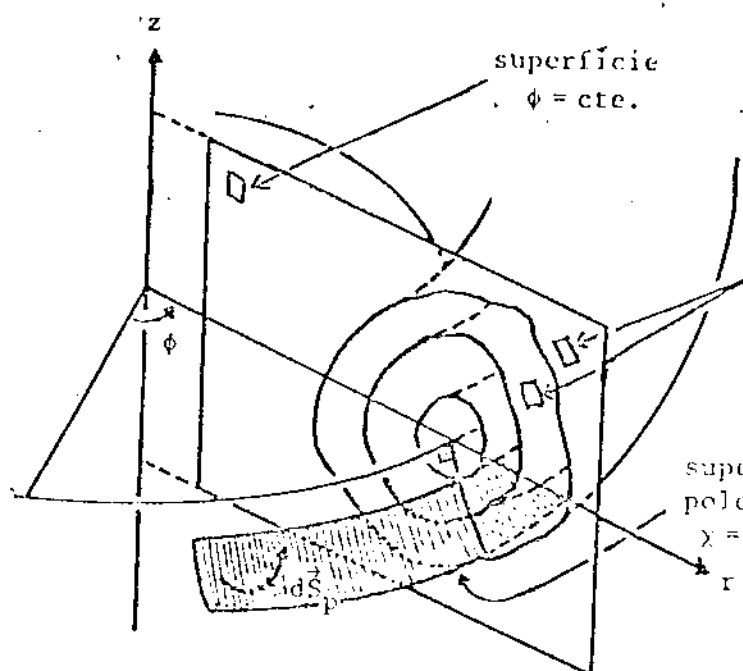


Figura 1.1- Sistema de coordenadas
toroidais (ψ, ϕ, χ)

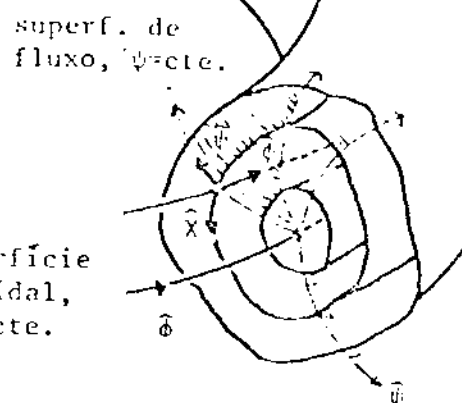


Figura 1.2- Vetores
ortonormais

Por outro lado, usando a relação (41) do capítulo II, teremos:

$$\vec{\nabla}\psi(r, z) \equiv \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{z} \equiv (-rB_z)\hat{r} + (rB_r)\hat{z} \quad , (5)$$

$$\vec{B}_p \equiv \vec{B} - B_\phi \hat{\phi} \equiv B_r \hat{r} + B_z \hat{z} \quad , (6)$$

onde:

$$|\vec{\nabla}\psi| = [r^2(B_r^2 + B_z^2)]^{1/2} = rB_p \quad , (7)$$

substituindo esta na equação (4), teremos:

$$d\vec{s}_p = \frac{2\pi d\psi}{B_p} \hat{\chi} \quad , (8)$$

multiplicando ambos os membros escalarmente por :

$$(\vec{B} \cdot \hat{\chi}) \cdot d\vec{s}_p = 2\pi d\psi , \quad (9)$$

onde:

$$\psi \equiv \int d\psi = \frac{1}{2\pi} \int \vec{B}_p \cdot d\vec{s}_p . \quad (10)$$

Ainda, como $(\hat{\psi}, \hat{\eta}, \hat{\chi})$ são mutuamente ortogonais, teremos, usando as equações (4) e (6) , que:

$$\vec{B}_p \cdot d\vec{s}_p = (\vec{B} - B_{\phi} \hat{\phi}) \cdot d\vec{s}_p \hat{\chi} \equiv \vec{B} \cdot d\vec{s}_p , \quad (11)$$

onde, finalmente,

$$\psi(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int B \cdot d\vec{s}_p \quad (12)$$

Temos como sendo então uma função proporcional ao fluxo magnético poloidal.

APÊNDICE 11

SPHEROMAK IDEAL [43]

O conceito de Spheromak dado por [44] e recentemente revisto por [45], levando em conta o confinamento para fusão termonuclear. Temos este por definição como sendo uma máquina, que confina o plasma através de uma configuração toroidal, onde o campo magnético toroidal possui a mesma ordem de grandeza que o poloidal.

Existe basicamente quatro formas de se obter o Spheromak atualmente, estas estão ilustradas na figura 11.1.

Figura 11.1.a

Método bolado por Alfvén e colaboradores [44,46]. Toróide formado por uma descarga coaxial, [47,48] num recipiente metálico chamado conservador de fluxo

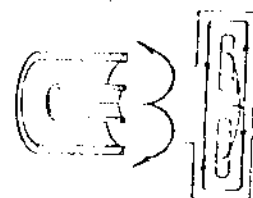
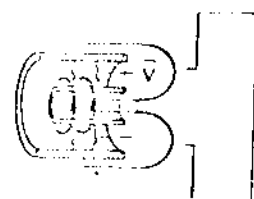
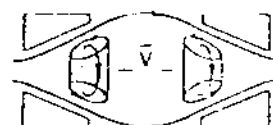


Figura 11.1.b

Pinch cônico
Método de reversão de descarga de corrente formando superfícies de fluxo fechadas e campo toroidal devido a corrente Hall resultante de um campo



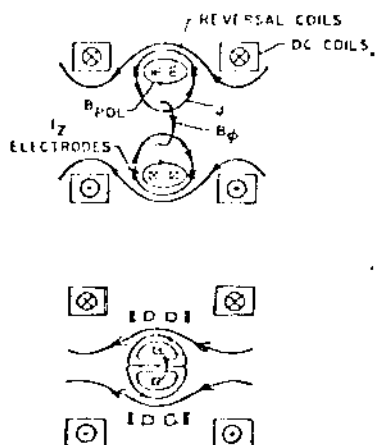


Figura II.1.c

Combinação de Descargas π -z

Forma-se o campo axial B_z e uma corrente axial passa entre os eletrodos em cada extremo produzindo o fluxo toroidal. O campo axial é revertido resultando em superfícies de fluxo fechadas.

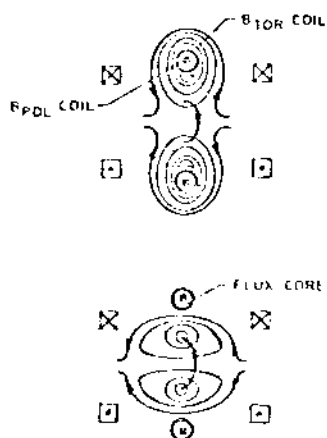


Figura II.1.d

Descarga indutiva

Descarga indutiva lenta provoca o campo toroidal combinando com as bobinas principais, que formam as curvas de fluxo fechadas.

Todos estes métodos nos levam a uma configuração axissimétrica, no qual não existe nenhum condutor de corrente no interior deste. Isto significa que existe uma superfície de fluxo ψ , onde a função do fluxo correspondente a corrente poloidal $I(\psi) = rB_\theta$, é igual a zero. Consequentemente, se o campo toroidal não é zero dentro de ψ , existe pelo menos dois raios, no plano perpendicular

ao eixo de simetria, onde $B_z = 0$. Se o gradiente de pressão é pequeno, teremos então a partir das equações de movimento e Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \kappa \vec{B} \quad , (1)$$

que nos dará a equação para um Spheromak ideal. Se levarmos em conta o contorno dado na figura 11.2, teremos então a equação para (1) dada por:

$$B_\phi = B_0 k J_1(k_r r) \cos(k_z z) \quad ,$$

$$B_z = B_0 k_r J_0(k_r r) \cos(k_z z) \quad ,$$

$$B_r = - B_0 k_z J_1(k_r r) \sin(k_z z) \quad , (2)$$

onde J_0 e J_1 são funções de Bessel de ordem zero e um, respectivamente e $k^2 = k_r^2 + k_z^2$. Estabelecendo o contorno teremos o campo definido por (2).

REFERÊNCIAS

- [1] - Miyamoto, K., Plasma Physics for nuclear fusion, MIT press (1980)
- [2] - Shibata, C. S., Tese de Mestrado, UNICAMP, (1983)
- [3] - Krall, N. A. and Trivelpiece, A. W., Principel of Plasma Physics, MacGraw-Hill,
- [4] - Arnold, W. R., Physics Review 93, 483 (1954)
- [5] - Tuck, J. L., Nuclear Fusion 1, 201 (1961)
- [6] - Wandel, C. F. et al, Nuclear Instr. and Methods 4, 249 (1959)
- [7] - Glastone, S. et al, Controlled Thermonuclear Reaction, Van Nostrand, Princeton, New Jersey (1980)
- [8] - Lawson, J. D., Proc. Physics Societs, London B70, 6 (1957)
- [9] - Steinhauer, L. C., Physics Fluids 24, 328 (1981)
- [10] - Armstrong, W. T. et al, Physics Fluids 24, 2068 (1981)
- [11] - Eberhagen, A. et al, Zeitung Physik 248, 130 (1971)
- [12] - Ware, A. A., Philos. Trans. Real Soc., London, A243, 197 (1951)
- [13] - Cousins, S. W. et al, Proc. Phys. Soc., London, B54, 159 (1951)
- [14] - Glastone S. et al, Controlled Thermonuclear Reaction, D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey (1960)
- [15] - Kruskal, M. et al, Proc. Real Soc., London, A223, 348 (1954)
- [16] - Butt, E. P. et al, Proc. 2^a Intern. Confer., Geneva, vol. 32 42 (1958)
- [17] - Thonemann, P. C. et al, Nature 181, 217 (1958)
- [18] - Thonemann, P. C. et al, Proc. 2^a Intern. Conference, Geneva, vol. 31, 34 (1958)

- [19] - Linford, K.C. et al, Inst. Atom. Energy Ag., Vienna, vol. 11
447 (1978)
- [20] - Steinhauer, L.C., Physics Fluids 24, 328 (1981)
- [21] - Freidberg, J.P. et al, Physics Fluids 21, 1207 (1978)
- [22] - Ekdahl, C.A. et al, Physics Fluids 23, (1980)
- [23] - Harned, D.S. et al, Nuclear Fusion 24, 201 (1984)
- [24] - Carlson, G. A. et al, Lawrence Livermore Laboratory Rep.
UCRL-52467 (1978)
- [25] - Turchi, P.J. et al, Proc. of sixth Simp. on Engin. Prob. in
Fusion Research (IEEE - Nuclear Plasma Science soc.,
San Diego), 983 (1975)
- [26] - Fleischmann, H.H. et al, Nuclear Fusion 15, 1143 (1975)
- [27] - Goedbloed, J.P., Lecture Notes on Ideal Magnetohydrodynamics
, Instituto de Física, UNICAMP, Campinas (1979)
- [28] - Sakanaka, P.H., International Atomic Energy Agency, Vienna,
(1981)
- [29] - Hachke, E.K. et al, Plasma Physics 22, 595 (1980)
- [30] - Hameiri, E., Physics Fluids 26, 230 (1983)
- [31] - Duff, I.S., A.E.R.E. Report R.8730 HMSO, London (1977)
Código usado pela biblioteca NAG
- [32] - Bodin, H.A. et al, Physics Fluids 6, 1338 (1963)
- [33] - Green, T.S., Physics Fluids 6, 864 (1963)
- [34] - Jahoda, F.C. et al, Jor. Appl. Physics 35, 2351 (1964)
- [35] - Kolb, A.C. et al, Plasma Physics and Controlled Nuclear
Fusion Research (Int. At. Energy Agency, Vienna, 1966)
vol. I, 261 (1966)

- [36] - Kaleck, A. et al, Plasma phys. and Cont. Therm. Fusion
(Transl. Div., Wright Pett. Air Force Base, Ohio, 1963)
vol. II, 581 (1963)
- [37] - Es'kov, A.GG. et al, sev. Eur. Conf. on Controll. Fusion
and Plasma Physics (Centre de Rescherches en Physique des
Plasma, Lousanne, 1975) vol. I, 55 (1975)
- [38] - Es'kov, A.G., Plasma Phys. and Cont. Nuclear Fusion Res.
(Intern. Atom. Energy Ag., Vienna, 1978) vol. II, 187 (1978)
- [39] - Uyama, T. et al, Proc. of fourth US-Japan Work. on Comp.
Torus (Faculty of Engin., Osaka Univ., Osaka ; Inst. of
Plasma Phys., Nagoya Univ., Nagoya), 1 (1982)
- [40] - Barnes, C.W. et al, Proc. of fourth US-Japan Work. on Comp.
Torus (Faculty of Engin., Osaka Univ., Osaka ; Inst. of
Plasma Phys., Nagoya Univ., Nagoya), 23 (1982)
- [41] - Janos, A. et al, Proc. of fourth US-Japan Work. on Comp.
Torus (Faculty of Engin., Osaka Univ., Osaka ; Inst. of
Plasma Phys., Nagoya Univ., Nagoya), 88 (1982)
- [42] - Goto, S. et al, Proc. of fourth US-Japan Work. on Comp.
Torus (Faculty of Engin., Osaka Univ., Osaka ; Inst. of
Plasma Phys., Nagoya Univ., Nagoya), 249 (1982)
- [43] - Goldenbaum, G.C., Physica Scripta T2/2, 359 (1982)
- [44] - Alfvén, H., Proc. of the sec. Intern. Conf. on Peacefull
uses of Atomic Energy 31, 145 (1958)
- [45] - Bussac, M.N. et al, Plasma Phys. and Cont. Nuclear Fusion
Research (IAEA, Vienna, 1979) 3, 249 (1989)
- [46] - Alfvén, H. et al, Journal of Nuclear Energy 1, 116 (1960)
- [47] - Turner, W.C. et al, Applied Physics 52, 175 (1981)

[48] - Wells, D.R. et al, Phys. Rev. Letters 41, 166 (1978)

[49] - Kiel, A., comunicação pessoal

Figuras III.6 - Curvas correspondentes ao conjunto de parâmetros

$$I_0 = 0$$

$$I_1 = 0,643 \times 10^6$$

$$I_2 = 0,325 \times 10^7$$

$$P_1 = 0,505 \times 10^8$$

$$P_2 = 0,225 \times 10^9$$

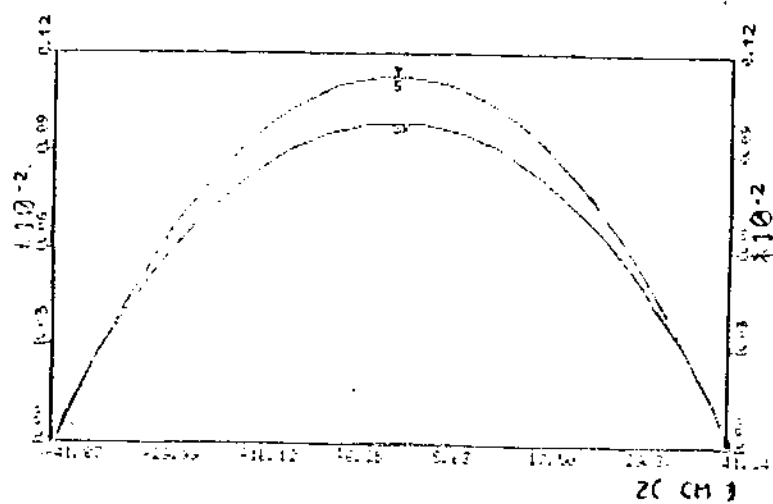
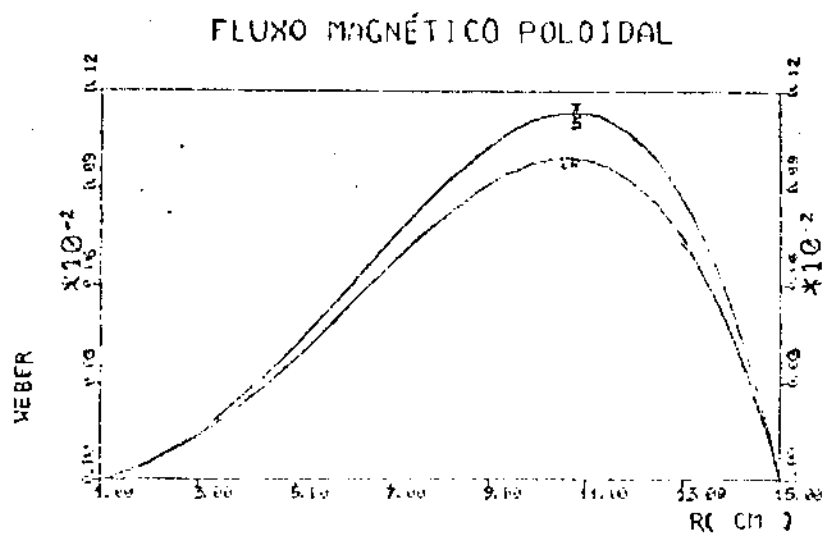
$$\alpha_{os} = 0,25$$

$$\alpha_{or} = 0,3$$

-Variação radial para $z=0$

-Variação azimutal para $r=r_m$ (eixo magnético)

- Os índices T , S e SR indicam os casos T (ψ), S (ψ) e sem rotação, respectivamente.



Figuras: III.6-1 e 2-

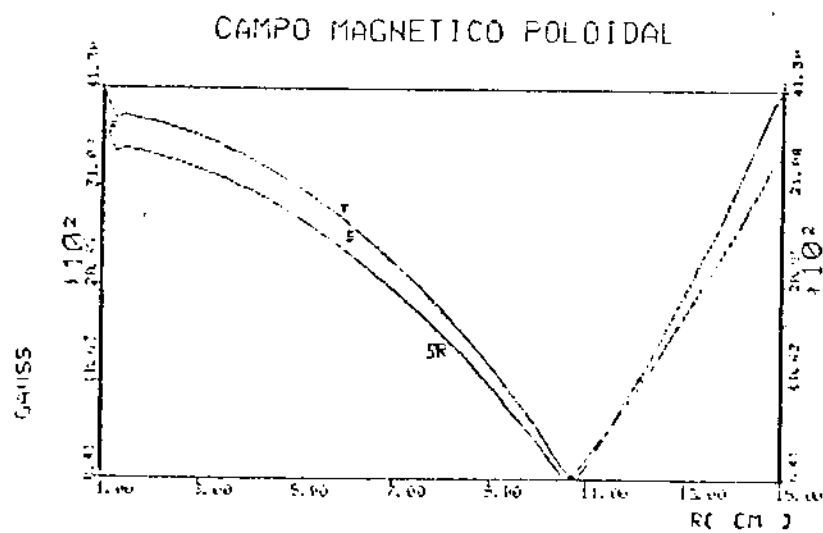


Figura III.6.3

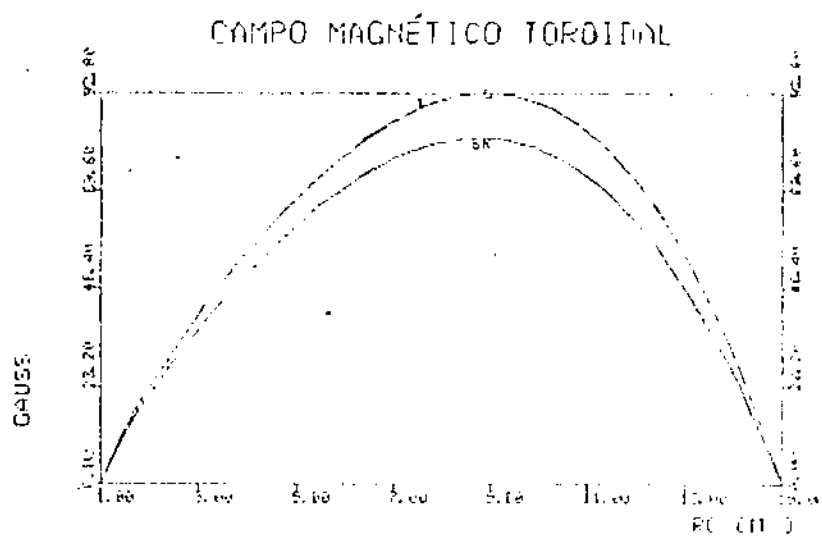


Figura III.6.4

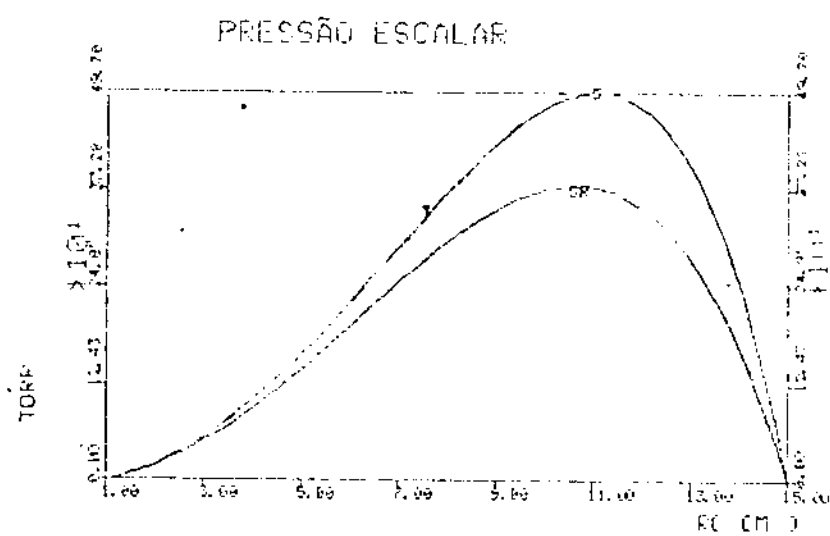


Figura III.6.5

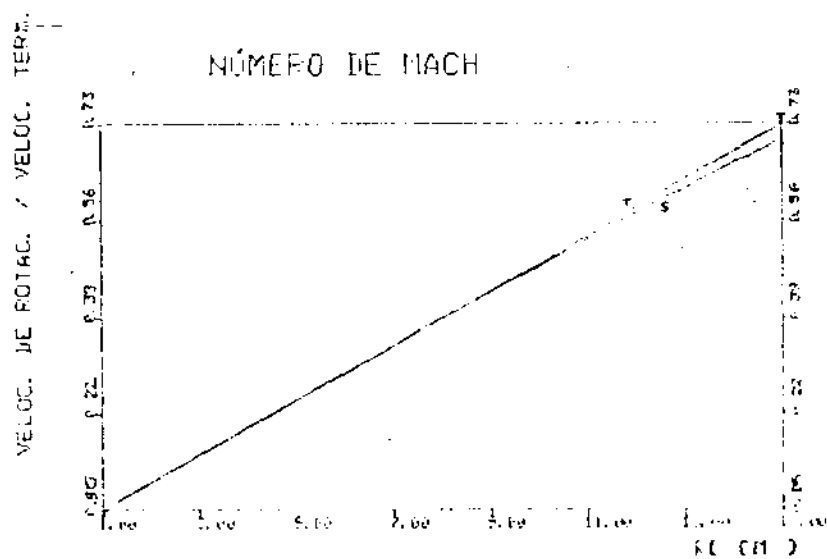


Figura III.6.6

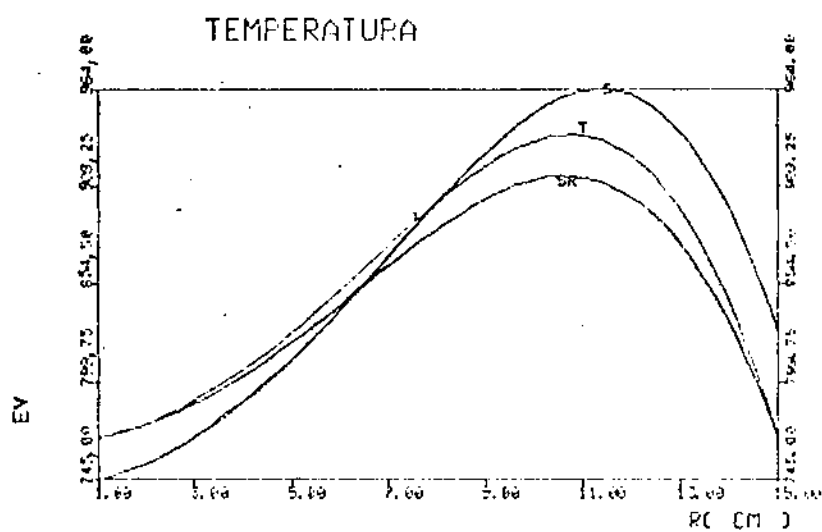


Figura III.6.7

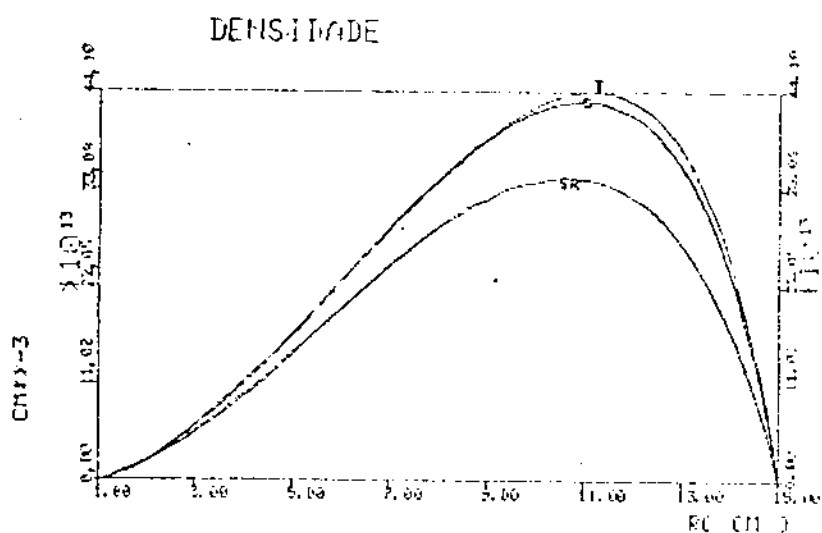


Figura III.6.8

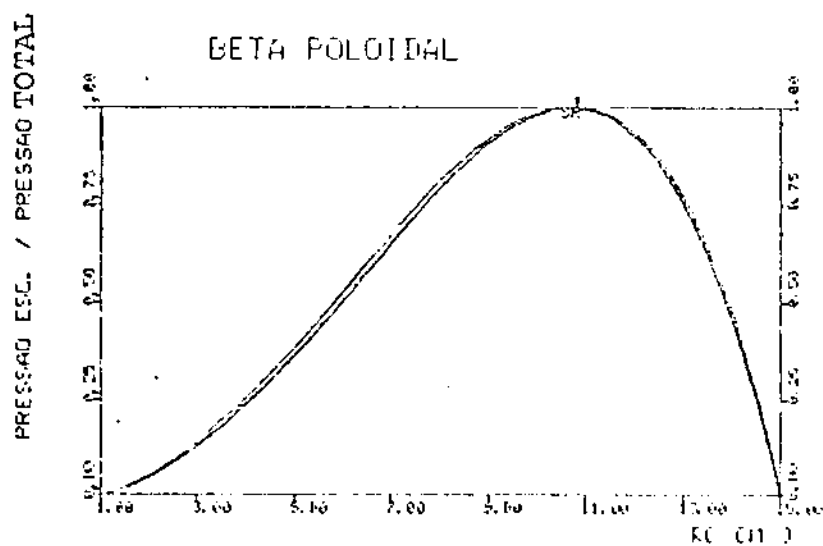
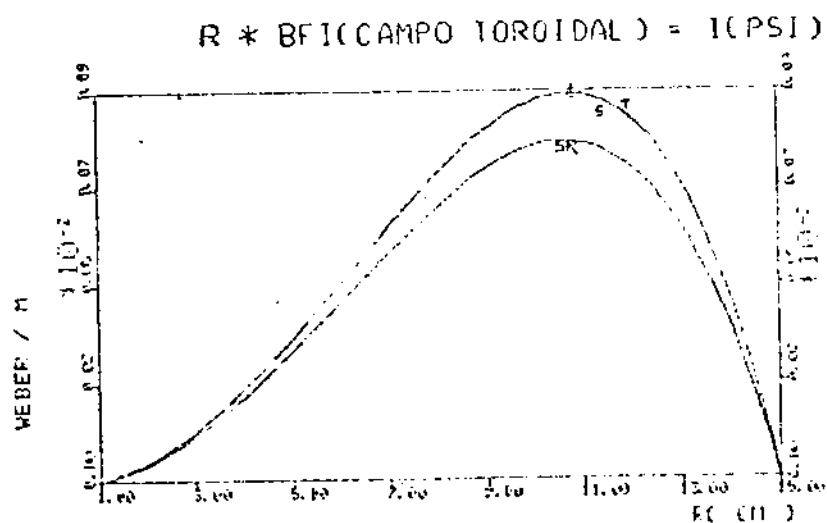
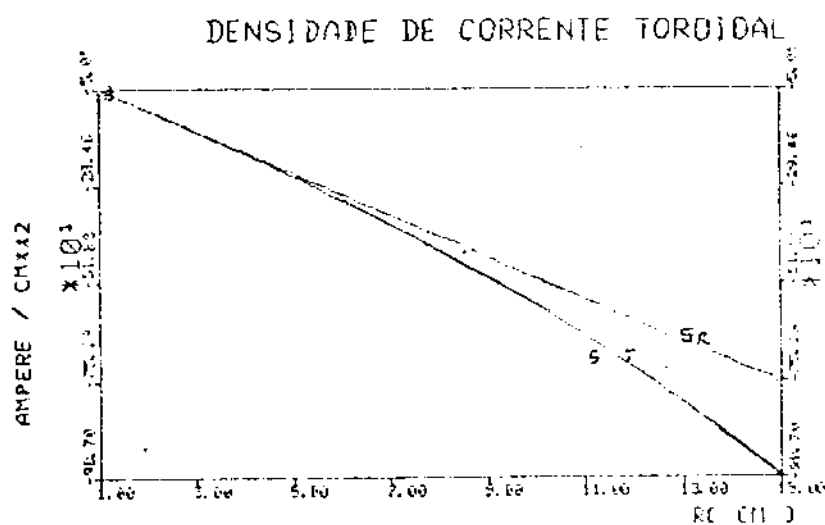
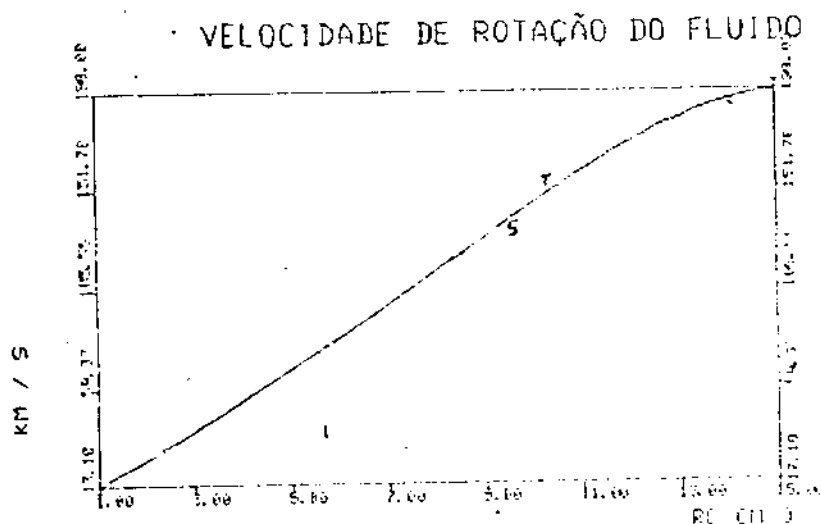
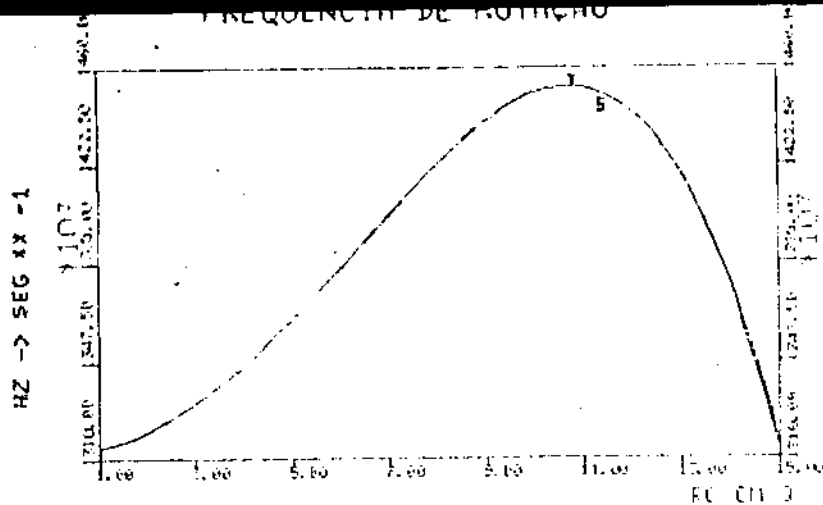


Figura III.6.9



Figuras III.7- Curvas correspondentes ao mesmo conjunto de parâmetros, que as figuras III.6, com exceção dos indicados em cada uma delas.

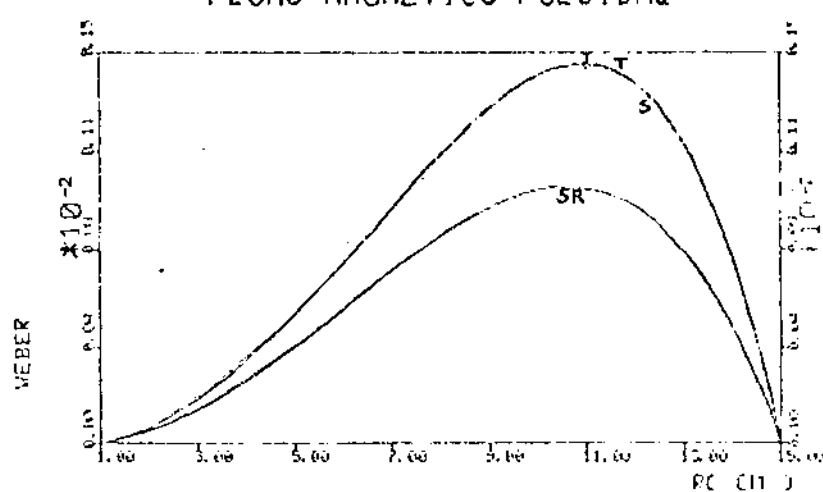


Figura
III.7.1a

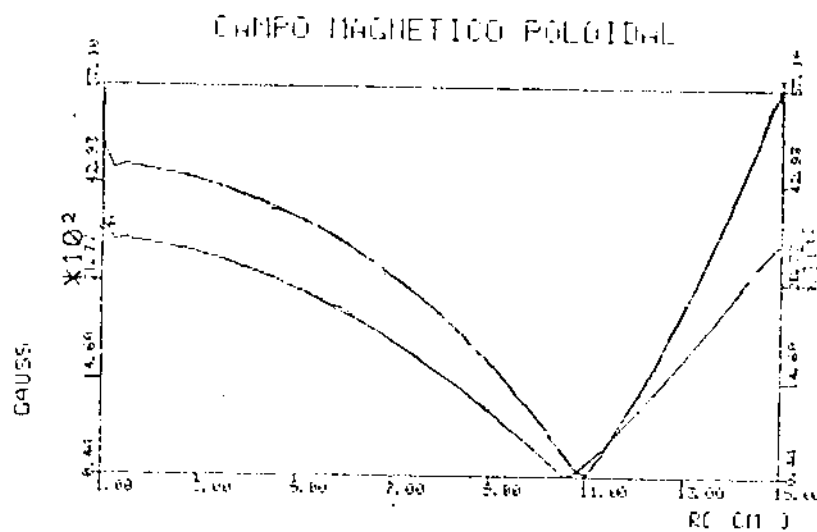


Figura
III.7.1b

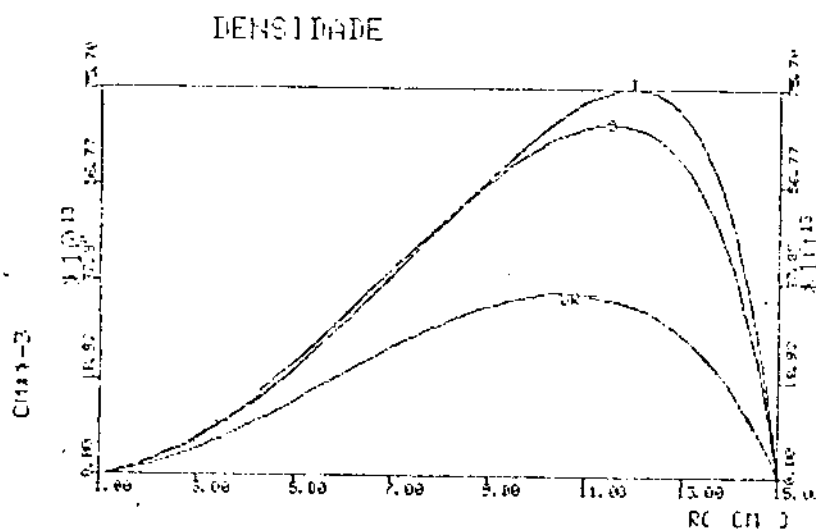


Figura
III.7.1c

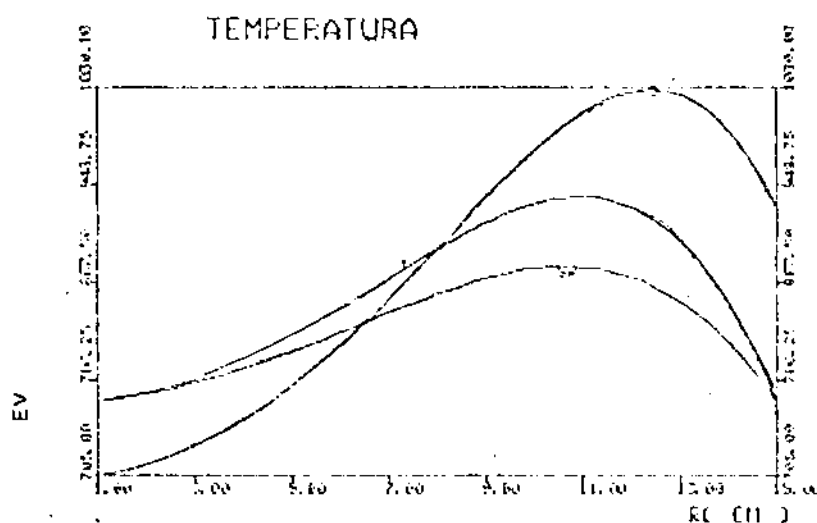


Figura
III.7.1d

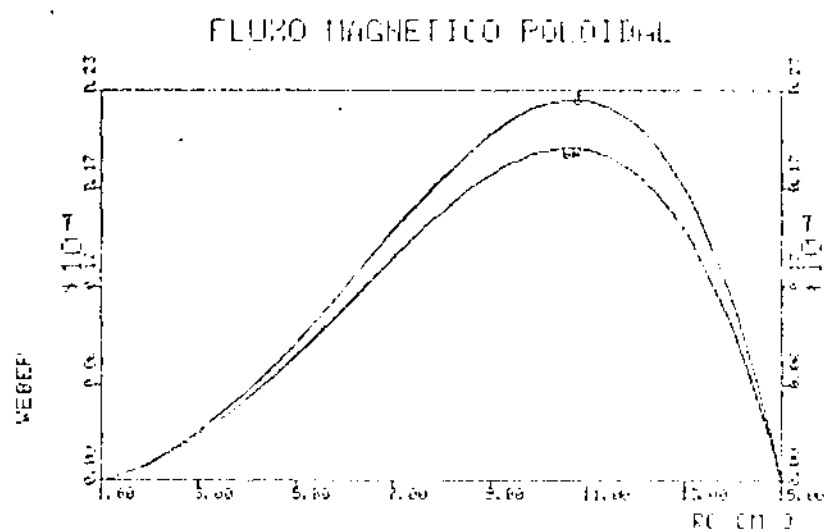


Figura III.7.2.a.- $p_1 = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \text{ weber}$

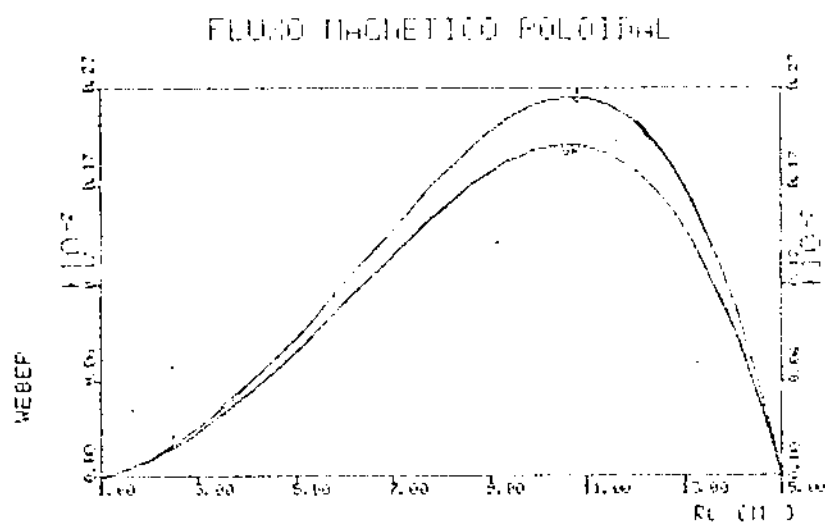


Figura III.7.2.b.- $p_1 = 1 \times 10^8 \text{ N/m}^2 \text{ weber}$

Figuras II.7.2.- Variação de p_1

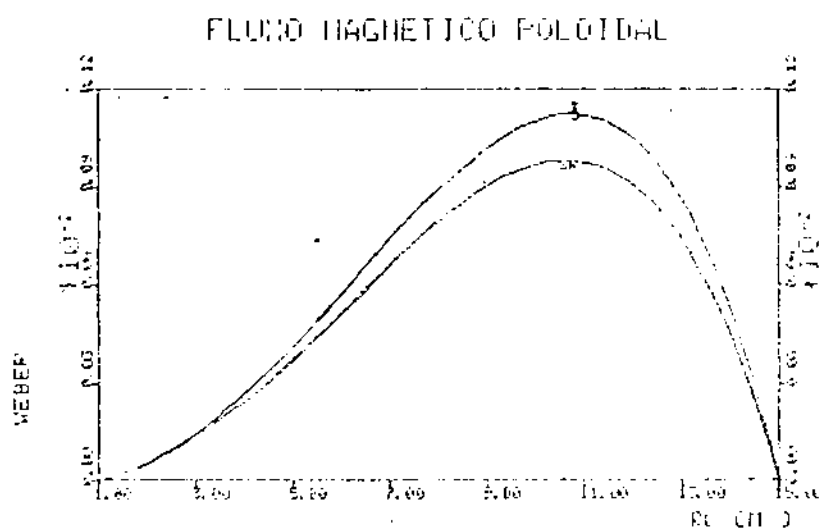


Figura III.7.3.a-, $p_2=0$

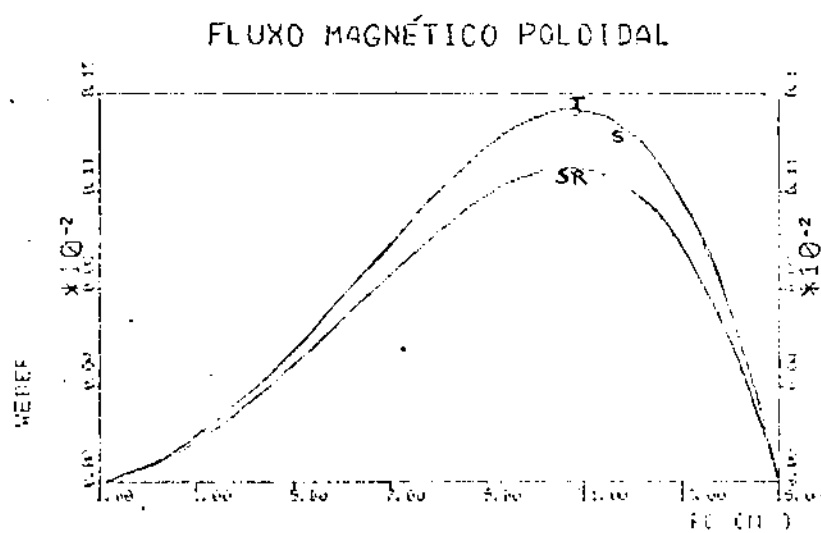


Figura III.7.3.b - $p_2=6 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ weber²

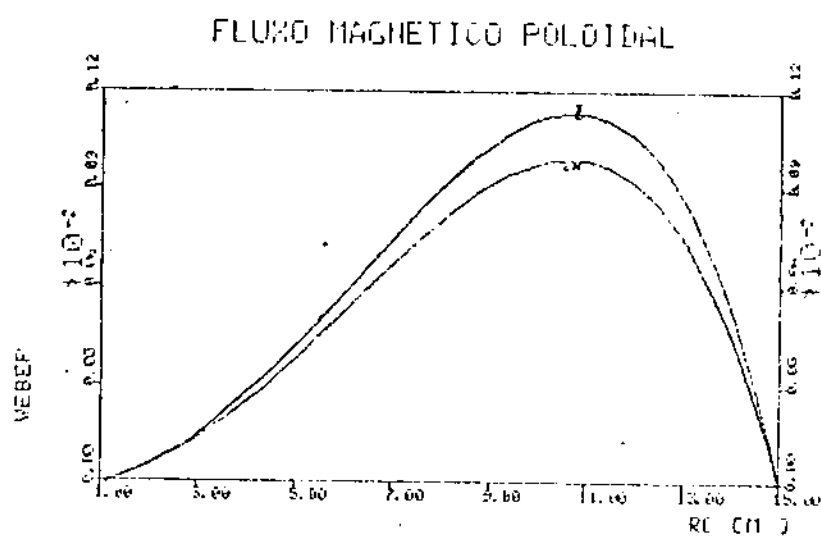


Figura III.7.4.a- $I_1=0$

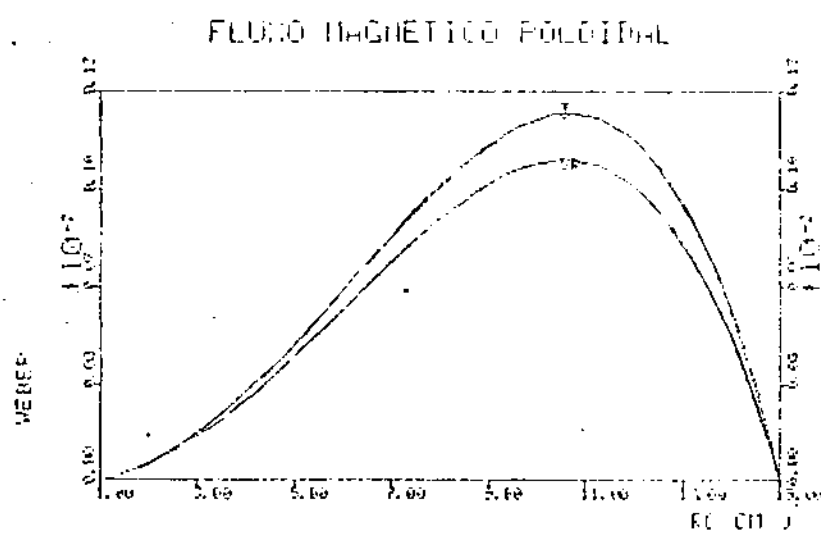


Figura III.7.4.b- $I_1=6 \times 10^{-6}$ Amper/Weber²

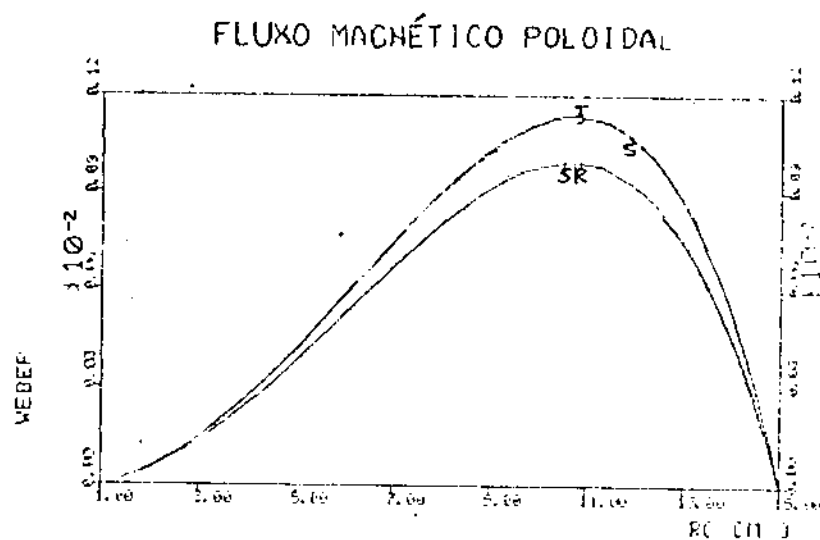


Figura III.7.5.a

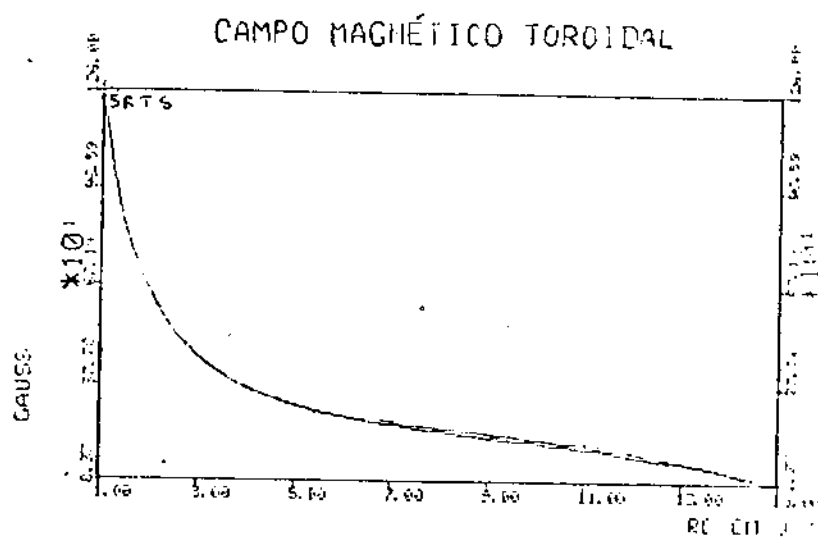


Figura III.7.5.b

Figuras III.7.5- $I_0 = 1 \times 10^3$ Amp.

Figuras III.8- Gráficos comparativos com outros modelos teóricos.

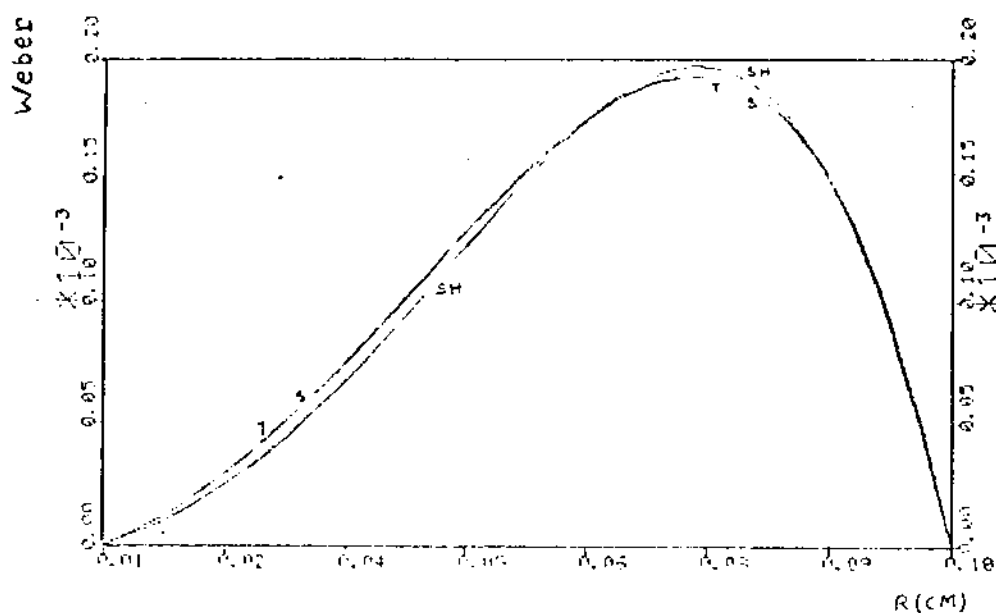


Fig. III.8.1a- Fluxo Magnético Poloidal-

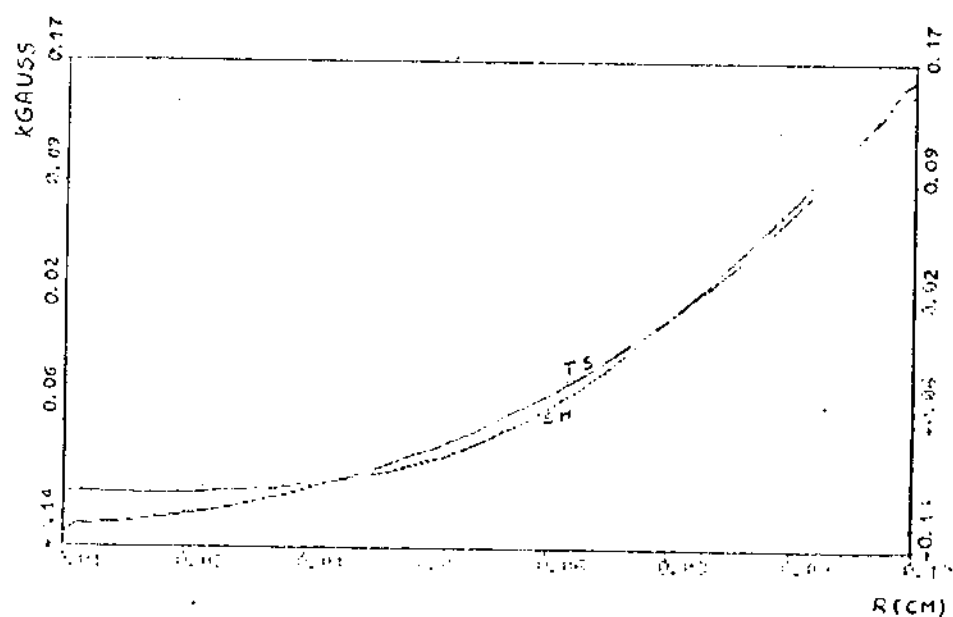


Figura III.8.1b

Figuras III.8.1- Gráficos comparativos com o trabalho de Shibata 2 .Variação radial em $z=0$. Os índices SH, T e S indicam os casos Shibata, $T(\psi)$ e $S(\psi)$ respectivamente.

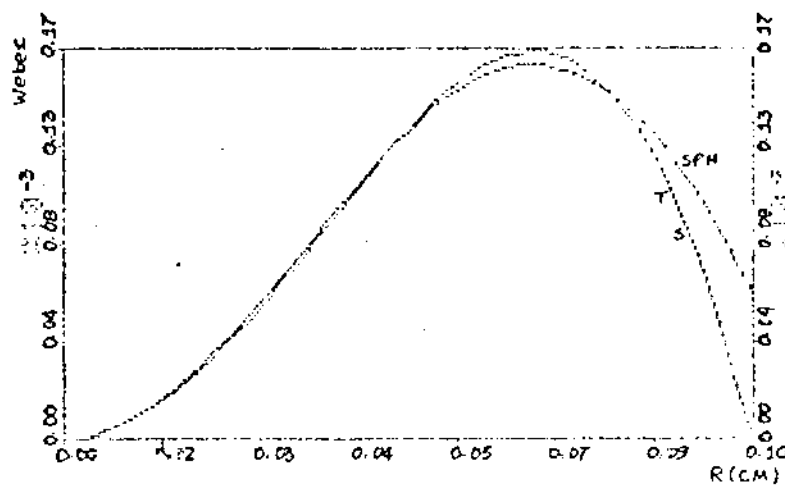


Figura III.8.2a. Fluxo magnético poloidal

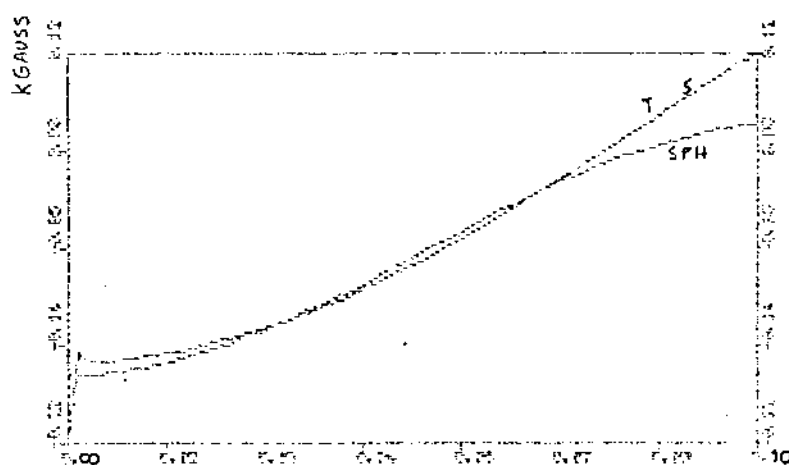


Figura III.8.2b. Campo magnético azimutal (B_z)

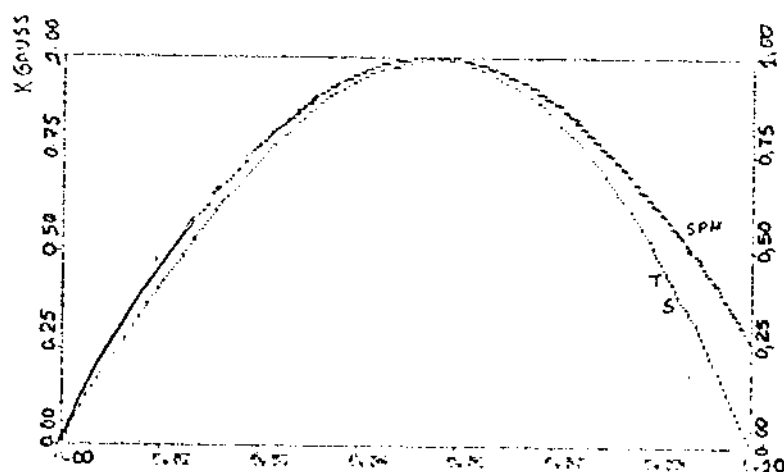


Figura III.8.2c. Campo Magnético Toroidal

Figuras III.8.2.- Gráficos comparativos com o Spheromak ideal. Variação radial em $z=0$. Os índices SPH, S e T indicam Spheromak ideal, $T(\psi)$ e $S(\psi)$ respectivamente.

Figuras III.9- Simulação de dados experimentais.

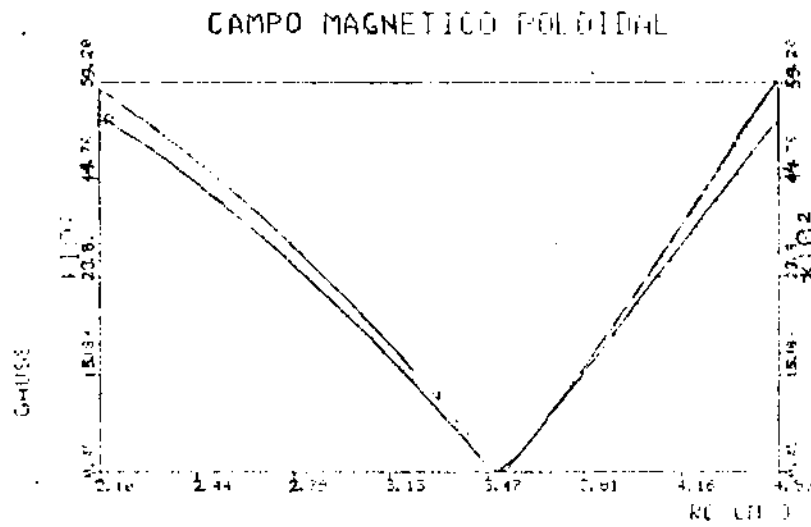


Figura
III.9.1a

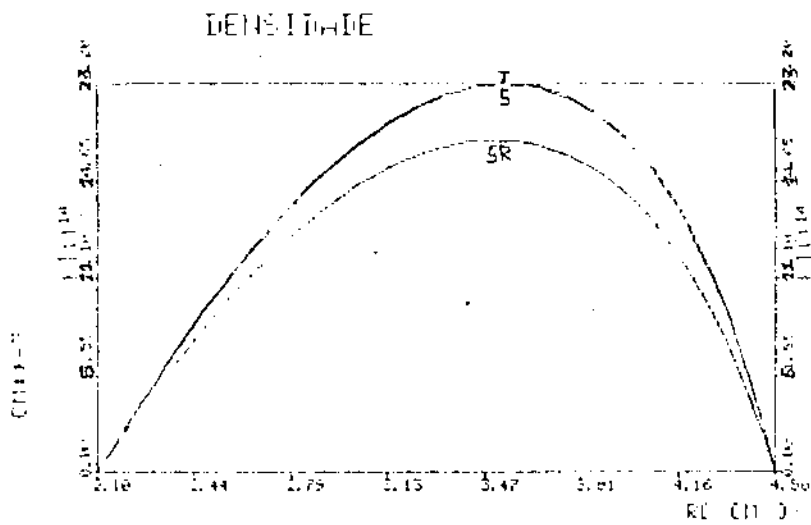


Figura
III.9.1b

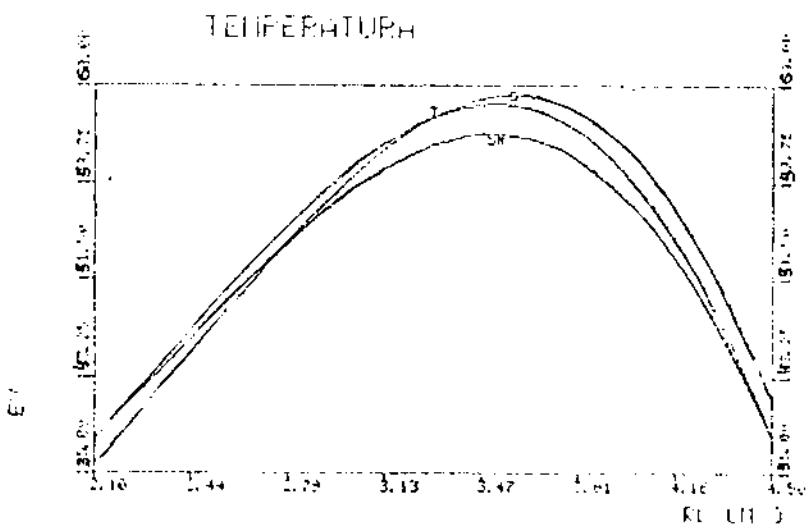


Figura
III.9.1c

Figuras III.9.1- Simulação de dados experimentais,
do Toroide Compacto da Universidade de Los Alamos-
1981-[10]

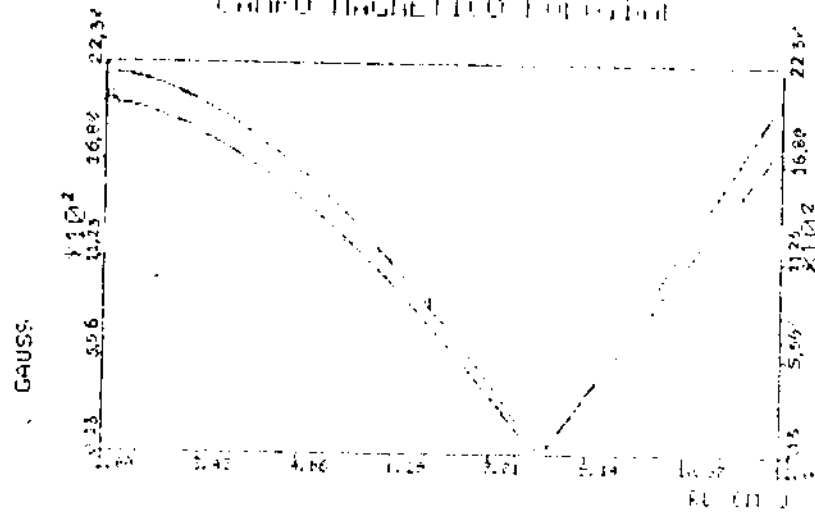


Figura
III.9.2a

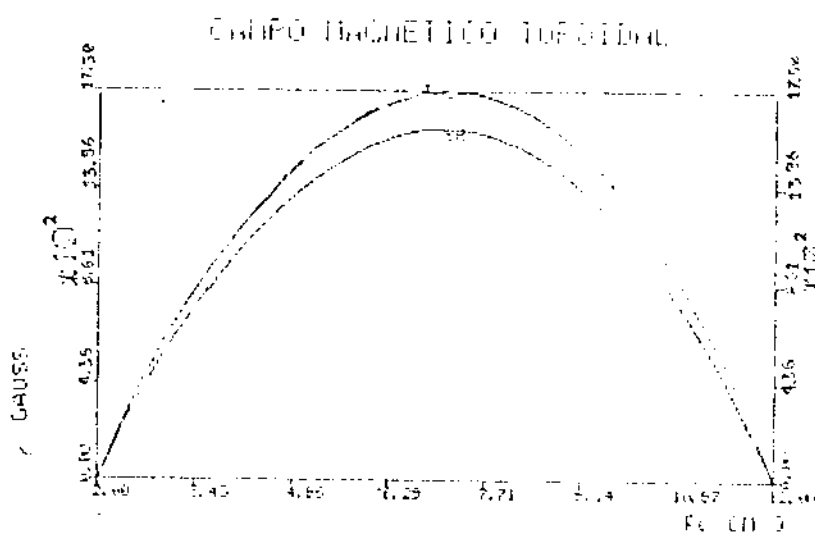


Figura
III.9.2b

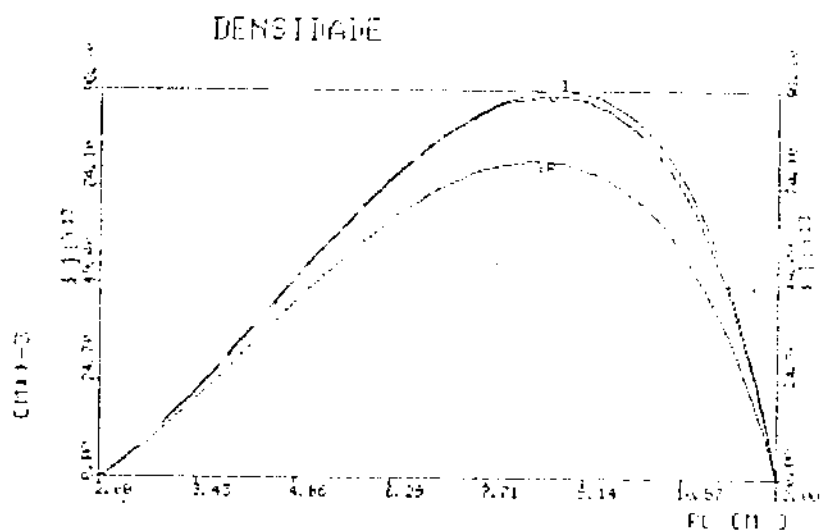


Figura
III.9.2c

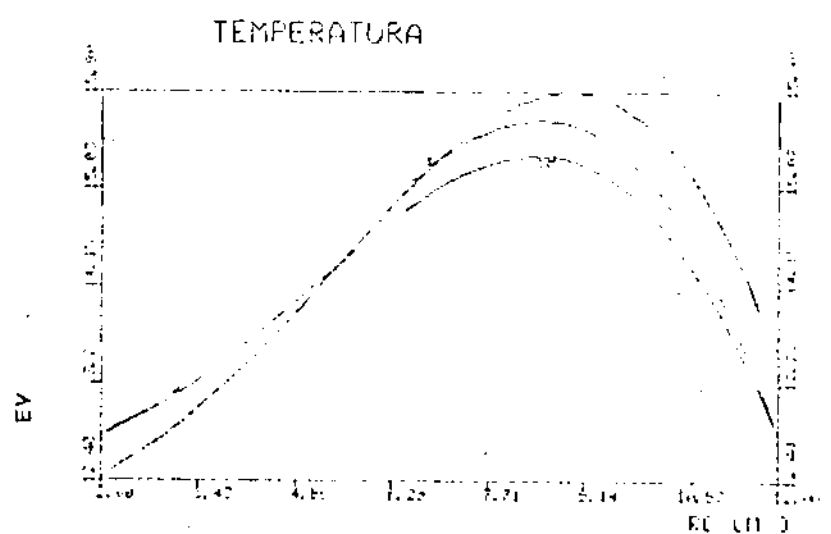


Figura
III.9.2d