

ESTUDO COSMOLÓGICO ATRAVÉS DA QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA
EM CAMPOS GRAVITACIONAIS E DA TEORIA DE BIFURCAÇÃO.

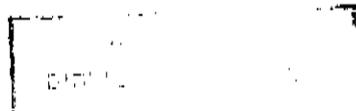
ALVARO FERNANDEZ GOMES

Orientador: Prof. Dr. JOSÉ INÁCIO COTRIM VASCONCELLOS

*Este exemplar
de tese corresponde à versão final
de Alvaro Fernandez Gomes e
aprovado pelo Conselho Julgador
27 de fevereiro de 1989
João Francisco P. Torres*

Tese apresentada no Instituto de Física "Gleb Wataghin" da UNICAMP
como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em
Física.

Fevereiro/89



CLASSIF.

AUTOR

V. EX.

TOMBO HCL 10417

I. FÍSICA - UNICAMP

n.º c. T/UNICAMP / M

n.º a. 67.585e

..... od. v. ex.

n.º tombo. TM 1741

19 05-89

CM 000 299993

Agradecimento

Ao orientador e amigo Prof. José Inácio Cotrim Vasconcellos por toda a ajuda, não só na orientação mas também nos momentos difíceis do estudo e da confecção deste trabalho.

A todos os "Amigos" que me ensinaram o caminho da vida e aos amigos que torcem pelo meu sucesso.

Ao CNPQ e a CAPES pelo apoio financeiro.

Quero também agradecer
e todas as funcionarias
da Biblioteca de Física
por toda a ajuda dispensada.
Gratos
Alvaro Vasconcellos

Dedicatoria

"Ver um Mundo num Grão de Areia
& um Céu numa Flor Silvestre,
Retêr o Infinito na palma de sua mão
& a Eternidade numa hora"

(William Blake)

dos meus Pais com muito
Carinho e um Eterno Amor.

Paz

Amor

Carinho

Dedicação

"E o Oleiro não gira sua Roda, o Trabalho não tem Simetria"

(Desconhecido)

"BROKEN SYMMETRIES ARE WIDELY USED IN MODERN GAUGE FIELDS. STUDY OF THE PHENOMENON IN GRAVITATIONAL FIELDS IS OF INTEREST SINCE ALL THE PROCESSES OF MICROPHYSICS TAKE PLACE IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF THE UNIVERSE. IT IS POSSIBLE THAT SUCH AN APPROACH WILL OPEN THE WAY TO THE UNIFICATION OF ALL FUNDAMENTAL INTERACTIONS"

V. N. MELNIKOV, V. M. NIKOLAENKO E S. V. ORLOV.

RESUMO

O trabalho consiste em um estudo introdutório sobre a Teoria de Bifurcação em Cosmologia, através do estudo da quebra espontânea de simetria (Q.E.S.) em campos gravitacionais.

Na Q.E.S. em campos gravitacionais este é introduzido na versão de Einstein, como um campo de gauge a fim de manter a invariância do sistema em questão sob uma transformação conforme. Com isso se fez necessário um estudo preliminar sobre a Teoria de Gauge e também sobre o processo de quebra de simetria (bósons de Goldstone e mecanismo de Higgs).

	<u>Página</u>
1. CAPITULO I – INTRODUÇÃO.....	(i)
2. CAPITULO II	01
2.1 – Fatos e Contribuições Históricas.....	01
2.2 – O Momentum Canônico e a Teoria de Gauge.....	05
2.3 – A Mecânica Quântica e a Teoria de Gauge.....	06
2.4 – O Eletromagnetismo Como Teoria de Gauge.....	09
2.5 – A Teoria de Gauge de Yang-mills.....	13
2.6 – O Campo Gravitacional Como um Campo de Gauge.....	26
3. CAPITULO III	33
3.1 – Noções de Quebra Espontânea de Simetria (Q.E.S.)..	33
3.2 – Bósons de Goldstone.....	37
3.3 – O Mecanismo de Higgs.....	43
4. CAPITULO IV	49
4.1 – Cosmologia.....	49
4.2 – Equação de Einstein e Possíveis Soluções – – Modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).....	51
4.3 – A Métrica de FRW.....	52
4.4 – Discussão Adicional da Métrica de FRW.....	54
4.5 – Deslocamento Para o Vermelho das Raias Espectrais.....	56
4.6 – Modelos Cosmológicos.....	59
4.7 – O Estado da Evolução do Universo "Atual".....	64
5. CAPITULO V	71
5.1 – Q.E.S. em Campos Gravitacionais.....	71
5.2 – Formulação.....	72

6. CAPITULO VI	80
6.1 - Teoria de Bifurcação.....	80
6.2 - Pontos de Equilíbrio, Estabilidades - - Diagramas de Fase.....	83
6.3 - Equação de Duffing.....	93
6.4 - Estudo das Formas de Equilíbrio Para a Equação de Duffing.....	94
6.5 - Bifurcação.....	97
6.6 - Análise Cosmológica.....	98
7. CAPITULO VII - CONCLUSÃO.....	103
APÊNDICES I	105
II	107
III	109
IV	111
V	114

NOTA: I) O leitor deve observar que a numeração das equações contidas neste trabalho estão relacionadas com a numeração da respectiva página ,isto é,por exemplo: a equação (63.1) é a primeira equação da página 63. A equação (78.3) é a terceira equação da página 78. E assim por diante.

II) $h = h$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$M_{\odot} / L_{\odot} = 0.51 \cdot 10^4 \text{ Kg J}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

INTRODUÇÃO

O assunto investigado na tese envolve a confluência de vários campos da física teórica e resulta, no melhor de nosso conhecimento da literatura, em um resultado original interessante. Neste capítulo e em alguns dos apêndices desta tese (apêndice V) procuramos dar uma idéia do desenvolvimento desses campos e um breve relato de como chegamos ao presente trabalho. Ao mesmo tempo faremos um apanhado da literatura mais representativa de importância dos campos mais diretamente relacionados ao trabalho, de modo a poder auxiliar aqueles que porventura se interessem por essa linha de pesquisa. Desse apanhado da literatura constará algumas listagens de referências bibliográficas.

O primeiro desses campos da física teórica utilizado no presente trabalho é o da teoria de gauge dos campos gravitacionais e o da quebra espontânea de simetria, bósons de Goldstone e mecanismo de Higgs. As origens das idéias sobre a teoria de gauge remontam ao trabalho de Hermann Weyl, em 1919 [1]. O Apêndice V (Teoria de Gauge e o Campo Gravitacional) dá uma idéia do encaminhamento das principais idéias em seu desenvolvimento até os nossos dias (1988) e apresenta um extensa listagem bibliográfica comentada de seus trabalhos mais representativos. Dessa forma, procuramos embasar nossa abordagem e aplicação da teoria de gauge ao assunto principal dessa tese, de modo a cobrir toda a literatura pertinente ao nosso assunto.

Outro campo da física teórica que é importante em nosso trabalho de tese é o da cosmologia relativista de Einstein. O

estudo dos modelos cosmológicos matemáticos foi o resultado da aplicação das equações de Einstein para o campo gravitacional de sua Teoria da Relatividade Geral ao Universo como um todo. O que nos interessa particularmente aqui é o estudo das soluções das equações cosmológicas de Einstein, através da análise qualitativa das mesmas (Collins [28], Novello [29], entre outros). Os estudos de estabelecimento e de estabilidade de movimento se devem principalmente aos esforços pioneiros de Poincaré e Liapounov [22] no final do século passado. Esses estudos foram uma continuação natural do trabalho de Clairaut (século XVIII), Euler, Jacobi, entre outros. Dessa forma, Poincaré criou a Teoria de Bifurcação para esclarecer as formas de movimento e sua correspondente estabilidade conforme eram variados determinados parâmetros do sistema em estudo, inaugurando assim uma linha de trabalho baseada principalmente na análise qualitativa e na obtenção de famílias de soluções de sistemas dinâmicos.

O estudo - que é o objetivo desse trabalho - foi o de realizar uma investigação introdutória mas original da aplicação da análise de bifurcação de Poincaré no contexto de um modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker e, verificar possível aparecimento de bifurcações e de quebra espontânea de simetria no contexto cosmológico.

Por outro lado, Moon and Holmes [26] colocaram a bem conhecida equação de Duffing na forma

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos \omega t ,$$

onde δ , β , α e γ são constantes reais. Esta equação tem sido

estudada através das Teorias de Bifurcação e Caos, sendo bem conhecidas suas soluções para os vários intervalos de variações dos parâmetros δ , β , α e γ da mesma. Em nossa investigação, estamos interessados em estudar a quebra espontânea de simetria, em analogia ao teorema de Goldstone e o mecanismo de Higgs, tendo um campo gravitacional como campo de fundo para os campos materiais. Nesse contexto, estamos estudando a interação desses campos materiais com o campo gravitacional de fundo e considerando a quebra espontânea de simetria envolvida nessa interação (ver capítulo V). Se esse campo gravitacional é o campo gravitacional cosmológico, a equação de movimento desses campos materiais com o campo gravitacional cosmológico de fundo é obtida através da postulação de uma lagrangeana apropriada. Se nos restringirmos a uma métrica de Friedmann-Robertson-Walker, podemos mostrar que a equação de movimento é redutível a uma equação de Duffing com o parâmetro γ igual a zero. A identificação das constantes com os parâmetros cosmológicos permitiu a verificação da validade e legitimidade da redução que obtivemos e, por outro lado, permitiu uma análise qualitativa da equação de movimento nos moldes de uma Análise de Bifurcação de Poincaré.

A relação entre cosmologia, equação de Duffing, Caos e Bifurcação é a principal contribuição original do presente trabalho.

Segue agora uma resenha de cada capítulo e item do mesmo, a fim de introduzir ao leitor como foram dispostos os assuntos mencionados acima.

O capítulo II consiste num estudo básico sobre a idéia de gauge (ou calibre), desenvolvida por Hermann Weyl (1919), onde

apresentamos as contribuições que levaram à teoria de gauge como um ponto chave nas idéias de unificação das interações, fraca, forte, eletromagnética e gravitacional. Com a finalidade de completar o estudo introdutório sobre o avanço da teoria de gauge acrescentamos, na forma de apêndice, uma listagem dos artigos mais recentes da teoria de gauge.

i) O Momentum Canônico e a Teoria de Gauge - Aqui o potencial vetor, que a princípio foi associado ao gauge proposto por Weyl, adquire um significado adicional, além de simples conexão, isto é, é tratado como se fosse uma coordenada generalizada.

ii) A Mecânica Quântica e a Teoria de Gauge - Neste, a contribuição é crucial, pois descobre-se que a conexão δS (eq. 04.4) não deve ser identificada com o potencial A_μ , como foi feito por Weyl, mas sim identificado com o fator $-(ie/\hbar c) A_\mu$. Com essa nova identificação tem-se que a transformação de escala, originalmente proposta por Weyl, é uma transformação de fase.

iii) O Eletromagnetismo como Teoria de Gauge - O potencial eletromagnético A_μ surge como uma conexão, com a finalidade de tornar as equações de movimento invariantes perante um grupo de transformação de gauge local.

iv) A Teoria de Gauge de Yang-Mills - Nesta tentativa de Yang e Mills (1954) em descrever a interação nuclear como uma teoria de campo análoga ao eletromagnetismo, a contribuição à teoria de gauge está não só na idéia em si proposta, mas também na utilização do grupo $SU(2)$ como um grupo de gauge local.

v) O Campo Gravitacional como um Campo de Gauge - Mostramos aqui, como o campo gravitacional desempenha um papel de conexão, como é o campo de gauge.

Através da noção de deslocamento paralelo verificamos que para uma situação geral (geometria não euclídeana) o papel da conexão é de extrema importância e em nosso caso essa conexão nada mais é que o símbolo de Christoffel, o qual vem a ser o campo de gauge gravitacional.

Após, por assim dizer, à introdução da idéia de gauge e seu avanço, entramos no Capítulo III, onde a noção de gauge está sempre presente, não só nesse capítulo mas como em quase todos os capítulos desse trabalho. O capítulo III consiste em:

i) Noções de Quebra Espontânea de Simetria (Q.E.S.) -

Introduzimos a noção de Q.E.S. primeiramente como a falta de invariância do sistema sob um dado conjunto de transformações de coordenadas (espaços-temporais e em espaços abstratos)

Apresentamos um exemplo simples caracterizando a Q.E.S.

ii) Bósons de Goldstone - Continuamos aqui com a Q.E.S., onde neste caso introduzimos a noção de Bósons de Goldstone.

Apresentamos dois modos de como surgem os Bósons de Goldstone; o primeiro é um exemplo simples onde consideramos somente dois campos escalares. O segundo, apresentamos um caso mais geral onde o campo considerado tem n-ésimas componentes.

Os Bósons Goldstone surgem por uma Q.E.S..

iii) O Mecanismo de Higgs - Ainda com a Q.E.S., o Mecanismo de Higgs desempenha um papel importante.

Esse mecanismo tem como finalidade fornecer uma estrutura de referência em que a orientação do spin-isotópico possa ser determinada. Com isso, veremos como o quanta de um campo "ganha" massa.

No capítulo IV, apresentamos:

i) Cosmologia - Damos uma introdução rápida da situação do estudo cosmológico, isto é, das considerações feitas sobre o Universo e das observações que possivelmente comprovam essas considerações.

ii) Equação de Einstein e Possíveis Soluções - Modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) - Apresentamos rapidamente a equação de Einstein e uma pequena introdução do Modelo Friedmann-Robertson-Walker e suas possíveis soluções.

iii) A Métrica de FRW - Apresentamos o desenvolvimento da métrica de FRW.

iv) Discussão Adicional da Métrica de FRW - Nesta discussão adicional verifica-se, através de um estudo geométrico, como a métrica de FRW nos dá as possíveis interpretações para o estado do Universo.

v) Deslocamento para o Vermelho da Raias Espectrais - Verifica-se aqui, que com a métrica FRW tem-se o que chamamos de: Deslocamento para o Vermelho das Raias espectrais (red shift).

vi) Os Modelos Cosmológicos - Apresentamos os possíveis modelos que surgem para o Universo, considerando, é claro, a métrica de FRW. Porém, os modelos a que me refiro são os casos que surgem, considerando propriamente o modelo não estático do Universo. O modelo estático não nos interessa para o desenvolvimento do nosso trabalho.

vii) O Estado da Evolução do Universo "Atual" - Consideramos, através de alguns parâmetros, como a constante de Hubble e o parâmetro desaceleração, o possível estado do Universo "Atual", isto é, se o Universo é aberto ou fechado.

Apresentamos também, as dificuldades de se verificar como se

encontra o Universo "Atual", através das medidas de densidade de massa e da luminosidade.

No Capítulo V temos:

i) Q.E.S. em Campos Gravitacionais - Esta é apresentada em analogia ao Teorema de Goldstone e ao Mecanismo de Higgs, com a diferença que aqui considera-se a interação gravitacional.

ii) Formulação - Apresentamos a Q.E.S. em campos gravitacionais, considerando passo por passo. Neste, o campo gravitacional é considerado na versão de Einstein e a métrica considerada é a de FRW, para o caso do Universo aberto.

Como um resultado da Q.E.S. em campos gravitacionais, temos a ausência de singularidade para os primórdios do Universo.

Capítulo VI.

Neste capítulo, apresentamos as idéias principais da Teoria de Bifurcação de Poincaré (1885), desenvolvendo um estudo do método de determinação dos pontos de equilíbrio e suas estabilidades, de equações diferenciais, através de diagramas de fase. Rapidamente, apresentamos a equação de Duffing (equação para um oscilador não linear com um termo de amortecimento cúbico) Estudamos as formas de equilíbrio e as estabilidades da equação de Duffing, encontrando uma Bifurcação para essa equação. Posteriormente, fazemos uma análise cosmológica através do estudo de Teoria de Bifurcação, usando como objeto de estudo a equação de movimento de um campo material em seu estado fundamental, tendo como campo de fundo o campo gravitacional, obtida no estudo de Q.E.S.. Essa equação se assemelha com a equação de Duffing, para não dizer, fazendo algumas modificações, que é a própria equação de Duffing.

Capítulo VII - Conclusão.

A conclusão é feita em cima dos dados obtidos no capítulo VI, que nos fornece tanto qualitativamente quanto, de certa forma, quantitativamente, resultados interessantes, ao nosso ver, pois nos permite prosseguir com esse estudo, que a princípio, é um estudo que nos dias de "hoje" muito pouco tem se feito, e usando Q.E.S. não encontramos nada do gênero (após um levantamento Bibliográfico).

II.1 - Fatos e Contribuições Históricas

Introdução - Teoria de Gauge de Weyl [1]

Com o brilhante sucesso da Teoria da Relatividade Geral, Weyl inspirou-se a propor a idéia de invariância de gauge (ou calibre). Um conceito fundamental tanto em mecânica newtoniana quanto nas teorias de relatividade especial e geral, é o da não existência de uma estrutura de coordenadas absolutas, isto é, o conceito de movimento é relativo, em outras palavras, a própria natureza do movimento é relativa. A conexão entre movimentos é dada em mecânica newtoniana pelas equações de transformação de Galileo; na teoria da relatividade especial, essa conexão é expressa pelas equações de transformação de Lorentz. A descrição do movimento relativo é mais complexa, quando estão envolvidas estruturas de coordenadas não inerciais, isto é, aceleradas. Isso ocorre na descrição do movimento a partir de referenciais acelerados ou não inerciais em mecânica newtoniana. A Teoria da Relatividade Geral de Einstein foi proposta como uma tentativa de descrever os movimentos na presença de campos gravitacionais, a partir de referenciais em estado arbitrário de movimento, de modo a manter as equações covariantes sob estruturas de coordenadas arbitrárias. Uma ilustração elementar deste último caso é dada pelo seguinte exemplo. Trata-se de descrever o movimento de uma partícula de prova na presença de um campo gravitacional. A descrição é feita por um observador que se encontra em um elevador em queda livre, em um campo gravitacional. A estrutura referencial de coordenadas

solidária ao elevador é não inercial, e é tomada como o referencial local do observador. Em relação a esse referencial, a partícula é descrita como estando em repouso e, portanto, tudo se passa com se não houvesse campo gravitacional algum atuando sobre a partícula. Em outras palavras, há uma equivalência local entre um referencial não inercial e um campo gravitacional. (Princípio de Equivalência).

Consideremos uma partícula movendo-se livremente sob a influência de forças puramente gravitacionais. De acordo com o Princípio de Equivalência, existe um sistema de coordenadas ζ^α (dito em queda livre) no qual a equação de movimento é a que conduz a uma equação horária de uma partícula movendo-se uniformemente em linha reta no espaço-tempo, isto é,

$$\frac{d^2 \zeta^\alpha}{d \zeta^2} = 0 \quad (02.1)$$

onde $d \zeta = - \eta_{\alpha\beta} d\zeta^\alpha d \zeta^\beta$ é o tempo próprio e $\eta_{\alpha\beta}$ o tensor métrico na ausência de gravitação (espaço-tempo sem curvatura).

Seja x_μ um sistema referencial de coordenadas arbitrário (curvilíneo, acelerado, em rotação etc).

Como as coordenadas ζ^α são funções das coordenadas x^μ , a equação (02.1) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$0 = \frac{d}{d \zeta} \left(\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d x^\mu}{d \zeta} \right)$$

ou ainda

$$\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d \zeta^2} + \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{d x^\mu}{d \zeta} \frac{d x^\nu}{d \zeta} = 0 \quad (02.2)$$

ou ainda

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d \zeta^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{d x^\mu}{d \zeta} \frac{d x^\nu}{d \zeta} = 0 \quad (03.1)$$

onde multiplicamos (02.2) por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha}$.

O termo $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$ denomina-se conexão afim

e se anula na ausência do campo gravitacional. Sua relação com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ pode ser expressa como:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right\} \quad (03.2)$$

como está demonstrado no apêndice I.

Weyl propõe que se investigue a possibilidade de estender a noção de conexão afim definida acima para a interação gravitacional, à outra interação conhecida em seu tempo (1919): a interação eletromagnética. Weyl parte da idéia de que o próprio módulo de um vetor que representa uma grandeza física, deve depender de sua localização no espaço-tempo. Desta forma, uma conexão é necessária para que possamos relacionar os comprimentos dos vetores em diferentes posições. Esta idéia torna-se conhecida como invariância de "gauge". É importante frisar que o significado da proposta de Weyl consiste na propriedade "local" de simetria de gauge e não na escolha particular de norma ou "gauge" como uma variável física.

Vamos agora formular matematicamente a invariância de gauge. Consideremos um vetor na posição x com norma dada por $f(x)$.

Agora, se deslocarmos o vetor para a posição $x + dx$, a norma torna-se $f(x + dx)$. Expandindo em primeira ordem em dx , obtemos:

$$f(x + dx) = f(x) + \partial_{\mu} f dx^{\mu} \quad (04.1)$$

Introduzindo a transformação de gauge através de um fator de escala multiplicativo $S(x)$, definido por conveniência igual a 1 na posição x e em $x + dx$ por:

$$S(x + dx) = 1 + \partial_{\mu} S dx^{\mu}, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (04.2)$$

Então a norma do vetor na posição $x + dx$ é dada por (1) x (2) (somente termos de primeira ordem em dx).

$$S f = f + f \partial_{\mu} S dx^{\mu} + \partial_{\mu} f dx^{\mu} \quad (04.3)$$

No caso especial de um vetor constante temos que a norma é mudada por um fator:

$$f \partial_{\mu} S dx^{\mu} \quad (04.4)$$

Temos assim que $\partial_{\mu} S$ representa a conexão associada com a de gauge.

Weyl identifica a conexão $\partial_{\mu} S$ com o potencial magnético A_{μ} . O motivo que o levou a essa identificação foi que a conexão transforma-se como um potencial. Se fizermos uma segunda mudança de gauge com um fator de escala Λ teremos:

$$\partial_{\mu} S + \partial_{\mu} S + \partial_{\mu} \Lambda \quad (04.5)$$

como podemos ver, a expressão (04.5) é a conhecida forma de invariância de gauge, associada ao potencial clássico eletromagnético.

As equações de Maxwell são invariantes por simetria de gauge. Essa simetria é, no entanto, considerada puramente acidental no eletromagnetismo. A interpretação usual refere-se apenas à questão bem conhecida das arbitrariedades nas definições dos potenciais escalar e vetorial, e não se refere a transformações nas grandezas físicas em questão.

As dificuldades associadas à aplicação das idéias de Weyl ao eletromagnetismo são discutidas por Einstein e outros autores [2], mas não nos deteremos nessas questões nesse trabalho.

II.2 - Momentum Canônico e a Teoria de Gauge

A contribuição do momentum canônico na teoria de gauge foi através da teoria de campo hamiltoniana clássica, onde trocamos $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$. Uma consequência dessa troca surge quando procuramos um único princípio físico que nos dê a equação de movimento para uma partícula carregada e as equações de Maxwell. Pois, através das equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t q_\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\mu} = 0, \text{ temos as duas equações}$$

desejadas. Sendo que a densidade lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} - \left[p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right]^2 - \frac{1}{4} \left[F_{\mu\nu} \right]^2; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

é o tensor do campo eletromagnético.

Assim temos as equações de Maxwell para $q_\mu \equiv A_\mu$ e as

equações de movimento quando q_μ é uma coordenada espacial. Portanto, o potencial vetor A_μ adquire um significado adicional, isto é, é tratado como se fosse uma coordenada generalizada nas equações de Euler-Lagrange. Isto representa um fato importante na redescoberta de invariância de gauge.

II.3 - A Mecânica Quântica e a Teoria de Gauge

Com o advento da mecânica quântica, Weyl (1929) e outros [3] descobrem um novo significado para a invariância de gauge.

A nova interpretação da fase de uma função de onda pela mecânica quântica como uma conveniente variável local para substituir a antiga norma (ou escala) e o novo papel do momentum como um operador diferencial quântico: $p_\mu = - i\hbar \partial_\mu$, contribuem para a teoria de gauge. Essa contribuição surge quando o momentum p_μ de uma partícula carregada, na lagrangeana, é trocado por $p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu$, na presença do campo eletromagnético; pois como em mecânica quântica o momentum é um operador diferencial, temos assim: $- i\hbar \left[\partial_\mu - (ie/\hbar c) A_\mu \right]$.

Então, comparando essa expressão com a expressão (04.4), concluímos que $\partial_\mu S$ não deve ser identificado com A_μ mas com o fator $-(ie/\hbar c) A_\mu$. Onde, a diferença fundamental é a introdução do fator imaginário, pois tem uma grande consequência na expressão (04.2),

$$1 + \partial_\mu S dx^\mu \quad (06.1)$$

$$1 - (ie/\hbar c) A_\mu dx^\mu = \exp \left[- (ie/\hbar c) A_\mu dx^\mu \right] \quad (06.2)$$

que é uma transformação de fase e não uma transformação de escala. Portanto, a invariância de fase local é a correta caracterização da mecânica quântica eletromagnética.

Podemos entender assim a transformação de gauge como uma transformação de fase da função de onda: $\Psi \rightarrow \Psi \exp\left(\frac{-ie}{c}\lambda\right)$ (07.1) Sendo que na ausência de campo eletromagnético a mudança de fase pode ser atribuída a um valor constante arbitrário, visto que esse não afetaria as quantidades observáveis. Agora, se tivermos em cada ponto do espaço uma fase diferente, podemos conciliar isso introduzindo o potencial A_μ , que agora é interpretado como uma conexão, relacionando fases em diferentes pontos. Temos assim que o parâmetro λ é uma função de x .

Vamos agora verificar através da equação de Schrödinger, para uma partícula carregada no campo eletromagnético, que a invariância de gauge (como a conhecemos hoje) realmente equivale a uma mudança de fase, como mostra a equação (07.1).

Primeiramente: Equação de Schrödinger na ausência do campo eletromagnético:

$$H \Psi = - \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (07.2)$$

onde

$$H = \left(\frac{p^2}{2m} \right) + V \quad \text{e} \quad \vec{P} = \left(\frac{\hbar}{i} \right) \vec{\nabla} \quad (07.3)$$

Na presença do campo eletromagnético, o momentum físico \vec{p} é substituído pelo momentum canônico $\vec{P} - (e/c) \vec{A}$ onde: \vec{A} é o potencial vetor e e é a carga da partícula. Logo o operador hamiltoniano para esse sistema é:

$$H = \frac{1}{2m} \left[(\hbar/i) \vec{\nabla} - (e/c) \vec{A} \right]^2 + e\phi + V \quad (08.1)$$

onde ϕ é o potencial escalar.

Assim a equação de Schrödinger torna-se:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi + V \right] \Psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (08.2)$$

Vamos agora fazer uma transformada de gauge:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi \quad (08.3)$$

$$\phi' = \phi - (1/c) \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Então, substituindo na equação acima teremos:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}' + \frac{e}{c} \vec{\nabla} \phi \right)^2 + e\phi' + \frac{e}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + V \right] \Psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (08.4)$$

Esta equação é equivalente a :

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}' \right)^2 + e\phi' + V \right] \Psi \exp [(ie/\hbar c) \phi] = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Psi \exp [(ie/\hbar c) \phi] \right] \quad (08.5)$$

Portanto, $\Psi \exp(ie/\hbar c \phi)$ é uma nova solução da equação de Schrödinger, depois da transformação de gauge ter sido feita.

Como: $|\Psi \exp(ie/\hbar c \phi)|^2 = |\Psi|^2$, isso significa que a transformação de gauge deixa invariante a densidade de probabilidade $|\Psi|^2$.

Conclui-se, então, que a invariância de gauge é uma invariância sob uma mudança na fase. Logo a "arbitrariedade" formalmente atribuída para o potencial seria agora entendida como a liberdade para escolher qualquer valor para a fase de uma função de onda, sem afetar a equação de movimento.

II.4 - Eletromagnetismo como Teoria de Gauge [4]

Em analogia com a teoria de gauge original de Weyl, podemos considerar a fase de uma função de onda de uma partícula como um novo grau de liberdade que depende da posição no espaço-tempo. Devemos ter então uma conexão entre os valores das fases em diferentes pontos, onde o potencial eletromagnético desempenha o papel da conexão. Usando a fase de uma função de onda como uma variável local em vez da norma de um vetor, o eletromagnetismo pode ser interpretado como uma teoria de gauge local.

Vamos agora estudar com mais detalhes o campo eletromagnético como um campo de gauge.

A primeira noção de campo de gauge surge quando temos uma lagrangeana que é invariante sob um grupo de gauge local, isto é, quando a fase de uma certa função de onda $\Psi(x)$ depende de cada ponto no espaço-tempo, e que os observáveis não dependam da escolha dessa fase. Definimos assim uma lagrangeana que nos dê as equações de Euler-Lagrange, de modo que possamos obter as equações de Maxwell. Uma condição importante é que essa lagrangeana seja invariante sob transformação de gauge global, pois as equações de Maxwell são invariantes sob essa transformação. Logo devemos ter uma lagrangeana escrita em termos de funções (campos) complexas Ψ^α e suas derivadas $\partial^\mu \Psi^\alpha(x)$, de modo a serem hermitianas, visto

que os observáveis derivados dessa lagrangeana, tal como o tensor momentum-energia, o hamiltoniano, etc, têm autovalores reais. Com essa condição podemos escrever:

$$\mathcal{L} \left[\Psi^\alpha(x), \Psi^{\alpha+}(x), \partial^\mu \Psi^\alpha(x), \partial^\mu \Psi^{\alpha+}(x) \right]$$

que é invariante sob o grupo de gauge global, isto é ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\Psi^{\alpha'}(x), \Psi^{\alpha'+}(x), \partial^\mu \Psi^{\alpha'}(x), \partial^\mu \Psi^{\alpha'+}(x) \right] &= \\ &= \mathcal{L} \left[\Psi^\alpha(x), \Psi^{\alpha+}(x), \partial^\mu \Psi^\alpha(x), \partial^\mu \Psi^{\alpha+}(x) \right] \end{aligned}$$

onde:

$$\Psi^\alpha(x) \rightarrow \Psi^{\alpha'}(x) = \exp(i\omega) \Psi^\alpha(x) \quad (10.1)$$

$$\Psi^{\alpha+}(x) \rightarrow \Psi^{\alpha'+}(x) = \exp(-i\omega) \Psi^{\alpha+}(x)$$

$\omega = \text{real e constante}$

Consideremos agora o grupo de gauge local, isto é, $\omega = \omega(x)$ e por conveniência, seja : $\omega(x) = e \Lambda(x)$, onde e é a carga elétrica elementar. Então sob a transformação :

$$\Psi^{\alpha'}(x) = U[\Lambda(x)] \Psi^\alpha(x) \quad (10.2)$$

$$\Psi^{\alpha'+}(x) = U^*[\Lambda(x)] \Psi^{\alpha+}(x)$$

$$U[\Lambda(x)] = \exp[ie\Lambda(x)]$$

a derivada de campo se transformará como:

$$\partial^\mu \Psi^{\alpha'}(x) = U[\Lambda(x)] \partial^\mu \Psi^\alpha(x) + (\partial^\mu U[\Lambda(x)]) \Psi^\alpha(x)$$

$$\partial^\mu \Psi^{\alpha+}(x) = U^*[\Lambda(x)] \partial^\mu \Psi^{\alpha+}(x) + \langle \partial^\mu U^*[\Lambda(x)] \Psi^{\alpha+}(x) \rangle$$

Em virtude da condição de hermiticidade da lagrangeana, bem como das variáveis dinâmicas, essa depende de campos complexos somente através de forma quadrática do tipo $\Psi^* \Psi$ - funções complexas conjugadas - e/ou de suas derivadas. Sendo assim, fica claro que nossa lagrangeana não é invariante sob transformação de gauge local, devido ao termo $\partial^\mu U(x)$, onde:

$$\begin{aligned} \partial^\mu U[\Lambda(x)] &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} U[\Lambda(x)] \\ &= ie \exp[ie \Lambda(x)] \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} \quad (11.1) \end{aligned}$$

Outro modo de verificarmos isso é lembrando que uma transformação de fase local pode ser considerada uma transformação infinitesimal e com isso chegarmos a mesma conclusão acima.

Para termos a invariância da lagrangeana sob o grupo de transformação local, devemos encontrar uma derivada generalizada de Ψ^α tal que:

$$(D^\mu \Psi^\alpha)^\dagger (D_\mu \Psi^\beta) = (D^\mu \Psi^\alpha) (D_\mu \Psi^\beta)$$

Isso significa que:

$$(D_\mu \Psi^\alpha(x))^\dagger = U[\Lambda(x)] (D_\mu \Psi^\alpha(x))$$

$$(D_\mu^\dagger \Psi^\alpha)^\dagger = U^*[\Lambda(x)] (D_\mu^\dagger \Psi^{\alpha+}(x)) \quad (11.2)$$

e conseqüentemente, $U^*(x) U(x) = 1$.

Precisamos agora definir a derivada D_μ , de modo que a derivada ∂_μ seja um caso particular da mesma. Para isso introduzimos um novo campo $A^\mu(x)$, que é um campo vetorial real tal que:

$$D^\mu \Psi^\alpha = (\partial^\mu + k A^\mu) \Psi^\alpha \quad (12.1)$$

$$(D^\mu \Psi^\alpha)^+ = (\partial^\mu + k A^\mu)^+ \Psi^{\alpha+}$$

Com essa definição é necessário determinarmos: k e A^μ , e suas respectivas transformações para o sistema "linha". Vamos determiná-las:

Temos: $D^{\mu'} \Psi^{\alpha'}(x')$

Onde: $\Psi^{\alpha'}(x') = U \Psi^\alpha(x)$

Queremos: $D^{\mu'} [U \Psi^\alpha(x)] = U(x) D^\mu \Psi^\alpha(x) \quad (12.2)$

Conforme a definição (12.1) temos: $D^\mu = \partial^\mu + k A^\mu \quad (12.3)$

logo: $D^{\mu'} = \partial^{\mu'} + k' A^{\mu'}$

Então, substituindo em (12.2):

$$(\partial^{\mu'} + k' A^{\mu'}) U \Psi^\alpha(x) = \partial^{\mu'} [U \Psi^\alpha(x)] + k' A^{\mu'} U \Psi^\alpha(x)$$

Sabemos que: $U = \exp(i e \Lambda)$, logo: $\partial^\mu U = i e \exp(i e \Lambda) \partial^\mu \Lambda$

Então: $D^{\mu'} [U \Psi^\alpha(x)] =$

$$= \exp(i e \Lambda) (i e \partial^{\mu'} \Lambda \Psi^\alpha + \partial^{\mu'} \Psi^\alpha + k' A^{\mu'} \Psi^\alpha)$$

$$= U (\partial^{\mu'} \Psi^\alpha + [k' A^{\mu'} + i e \partial^{\mu'} \Lambda] \Psi^\alpha)$$

Como podemos ver, se definirmos $k' = ie$ teremos:

$$= U \left(\partial^\mu \Psi^\alpha + ie \left[A^\mu + \partial^\mu \Lambda \right] \Psi^\alpha \right) \quad (13.4)$$

Portanto, conforme definimos em (12.3) e segundo (12.2), devemos ter:

$$\left(\partial^\mu + k' A^\mu \right) \left[U \Psi^\alpha(x) \right] = U(x) \left(\partial^\mu + k A^\mu \right) \Psi^\alpha(x)$$

Concluindo assim, em comparação com (13.4) que $k = k'$ e que:

$$A^\mu = A^{\mu'} + \partial^\mu \Lambda, \text{ ou melhor, } A^{\mu'} = A^\mu - \partial^\mu \Lambda.$$

II.5 - Teoria de Gauge de Yang-Mills

Em 1954, Yang e Mills [5] propõem que a interação nuclear seja descrita por uma teoria de campo análoga ao eletromagnetismo. Vimos no eletromagnetismo que uma transformação de gauge significa uma mudança no fator de fase na função do campo clássico Ψ ,

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp [i\omega] \Psi,$$

que não tem nenhum significado físico [6].

Os autores acima citados demonstram que o princípio de invariância sob rotação de spin isotópico só é consistente com o conceito de campos locais, se conferirmos a esse princípio de invariância um caráter local.

Historicamente, o conceito de spin isotópico é devido a Heisenberg [7], que em 1932 formulou a independência de carga da interação nuclear como um novo princípio de simetria. Em analogia com o estado de spin do elétron, que admite dois autovalores, foi

introduzido um spinor que representaria o próton e o nêutron, como estados diferentes de uma mesma partícula, o núcleon. Nessa formulação, despreza-se a diferença de massa entre próton e nêutron e não se leva em conta a interação eletromagnética entre os núcleons, pois esta é muito mais fraca que a interação nuclear. A independência de carga das forças nucleares é, então, formulada como um princípio de invariância sob rotação num espaço interno (abstrato), onde o operador de spin isotópico desempenha o papel de gerador de grupo de tais rotações, dito grupo $SU(2)$. Assim, formulou-se a independência de carga elétrica das interações nucleares como um princípio de invariância das mesmas sob o novo grupo de simetria $SU(2)$. Esse grupo de simetria é unitário e unimodular, e as constantes de estrutura da álgebra associada são as mesmas que as da álgebra de rotação no espaço ordinário $O(3)$.

Façamos um breve resumo formal do grupo $SU(2)$ [8] a fim de melhor apreciarmos a generalização do princípio acima mencionado.

Na formulação de $SU(2)$, admite-se que existe um conjunto de transformações unitárias U no espaço de Hilbert dos vetores de estado, tais que os estados Ψ de $U\Psi$ descrevem os mesmos fenômenos quando apenas as interações fortes são levadas em consideração. Os operadores de campo nucleônicos $\begin{pmatrix} \Psi_p(x) \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix}$, transformam-se segundo a lei:

$$U \begin{pmatrix} \Psi_p(x) \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_p(x) \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix} \equiv$$

$$\Psi \begin{pmatrix} \Psi_p(x) \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix} = \Psi'$$

A matriz 2×2 U é unitária e unimodular ($\det. = 1$), para que as relações de comutação sejam preservadas, e é caracterizada por quatro parâmetros; quando o fator de fase comum é omitido, ficamos com apenas três parâmetros. Assim a forma de U se torna:

$$U = \exp \left[(i/2) \vec{\alpha} \cdot \vec{\zeta} \right], \quad (15.1)$$

O operador $\vec{\zeta}$ é o operador de Pauli, esse pode ser representado por matrizes 2×2 , hermiteanas, com traço nulo e na base em que ζ_3 é diagonal. Podemos então escrever:

$$\zeta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O spinor $\begin{pmatrix} \psi_p(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} = \psi(x)$ é denominado isospinor. O operador $\vec{\zeta}$

é o gerador das rotações nesse espaço interno, e a independência de carga é interpretada como invariância sob rotações nesse espaço interno, conforme mencionado acima.

O operador $\vec{\zeta}$ é denominado operador de iso-spin e será denotado por \vec{T} .

Pode-se mostrar que a carga Q de um dado estado está relacionada à terceira componente do spin isotópico T_3 , através da relação

$$Q = \frac{1}{2} N_B + T_3, \quad (15.2)$$

onde N_B é o operador de número bariônico:

$$N_B = \int d^3x \left(\psi_p^\dagger(x) \psi_p(x) + \psi_n^\dagger(x) \psi_n(x) + \dots \right)$$

É interessante lembrar que:

$$Q = \int d^3x \Psi_p^\dagger(x) \Psi_p(x) = \int d^3x \Psi^\dagger(x) \frac{1 + \zeta_3}{2} \Psi(x)$$

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi^\dagger(x) \vec{\zeta} \Psi(x) \quad (18.1)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\Psi_p^\dagger(x) \Psi_p(x) - \Psi_n^\dagger(x) \Psi_n(x) \right]$$

É fácil mostrar que a álgebra a que obedece as componentes \vec{T} é idêntica à álgebra do momentum angular \vec{J} , isto é,

$$\left[T_i, T_j \right] = i\hbar \epsilon_{ijk} T_k \quad (18.2)$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor antissimétrico de Levi-Civita. É ainda interessante notar que para transformações infinitesimais $\left[T_i, \Psi(x) \right] = \frac{1}{2} \zeta_i \Psi(x)$ os T_i 's ($i=1,2$) não comutam com o operador de carga Q (ou seja. a carga elétrica viola o princípio de conservação do spin isotópico ou isospin).

Um produto de dois estados nucleônicos é ainda uma representação do grupo, mas não uma representação irredutível.

Para combinações caracterizadas por $T = 1$ temos os estados:

$$\begin{aligned} & \Psi_p^{(1)} \Psi_p^{(2)} \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_p^{(1)} \Psi_n^{(2)} + \Psi_n^{(1)} \Psi_p^{(2)} \right) \\ & \Psi_n^{(1)} \Psi_n^{(2)} \end{aligned} \quad (18.3)$$

e para as combinações com $T = 0$, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_p^{(1)} \Psi_n^{(2)} - \Psi_n^{(1)} \Psi_p^{(2)} \right) \quad , \quad (17.1)$$

em estrita analogia com os estados associados à combinações dos estados de spin $1/2$ de duas partículas.

A independência de carga elétrica das interações fortes envolvendo partículas com estranheza diferente de zero é expressa através de um princípio de invariância sob rotação num espaço abstrato, onde o spinor de estado sofre transformações sob o famoso grupo unitário unimodular a três dimensões, ou seja, $SU(3)$. Embora, uma discussão do grupo $SU(3)$ escape aos limites deste trabalho, gostaríamos de expressar que invariância sob transformação de rotação de spin isotópico das interações fortes segue o caminho do octeto de Gell-Mann [9], que representa uma generalização da invariância sob o grupo $SU(2)$ discutido brevemente acima.

Portanto, a independência de carga elétrica das interações fortes juntamente com a descoberta do alcance extremamente curto dessas interações, são, assim, dois importantes marcos nas idéias relativas as interações fundamentais da Natureza.

Yang-Mills postulam a existência de uma transformação de gauge associada ao spin isotópico em analogia com a teoria de gauge do eletromagnetismo, admitindo que a escolha do spin isotópico seria arbitrária para todo ponto do espaço-tempo. As interações fortes seriam, na ausência de interações eletromagnéticas ou quando estas puderem se totalmente desprezadas face aquelas, invariantes sob transformação de gauge isotópico.

Seja S o operador que efetua a rotação dos estados no espaço do spin isotópico. Para evitar que esse operador dependa

das coordenadas de espaço-tempo em cada ponto, introduz-se em analogia com o caso eletromagnético, um campo B_μ . Esse campo desempenharia o papel do quadrivetor potencial eletromagnético.

Procuremos formular matematicamente essas idéias.

A transformação de gauge isotópica será dada por:

$$\Psi = S \Psi' \quad (18.1)$$

onde S é o operador citado acima.

Em analogia com o eletromagnetismo define-se a derivada de Ψ como:

$$(\partial_\mu + i e B_\mu) \Psi \quad (18.2)$$

onde B_μ é uma matriz 2×2 , tal que, para $\mu = 1, 2, 3$ é hermiteana e B_4 é anti-hermiteana.

A invariância exigida para a derivada será:

$$S (\partial_\mu - i e B_\mu) \Psi' = (\partial_\mu - i e B_\mu) \Psi \quad (18.3)$$

Combinando (18.1) e (18.3) obtemos:

$$B'_\mu = S^{-1} B_\mu S + \frac{1}{e} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x_\mu} \quad (18.4)$$

que é a transformação de gauge isotópico de B_μ .

É interessante notar que fixando $S = \exp [i \Lambda(x_\mu)]$ obtemos:

$$B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{e} \frac{\partial \Lambda(x_\mu)}{\partial x_\mu} \quad (18.5)$$

Podemos notar que o último termo da expressão (18.5) é similar ao

gradiente na transformação de gauge do potencial eletromagnético.

Do eletromagnetismo, temos que:
$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu},$$

sendo que esse pode ser escrito na forma:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{e} \left[D_\mu, D_\nu \right]$$

onde D_μ é a derivada covariante do eletromagnetismo. Agora, se substituirmos essa derivada pela definida na teoria Yang-Mills, obteremos :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu} + i e \left(B_\mu B_\nu - B_\nu B_\mu \right) \quad (19.1)$$

O significado físico deste novo termo é que existem interações entre os campos, pois se o campo B_μ transporta "carga" interna como spin isotópico, poderá haver interações das próprias cargas em questão sem qualquer fonte externa.

Obtemos assim, novamente em analogia com o eletromagnetismo, a invariância de gauge da intensidade do campo, que é dada por:

$$F'_{\mu\nu} = S^{-1} F_{\mu\nu} S \quad (19.2)$$

sendo essa facilmente verificada com o auxílio da expressão (18.4) .

II.5a - Análise do Campo B_μ [10]

Vimos anteriormente que a conexão deve atuar como uma rotação no espaço do spin isotópico abstrato. Então, para entendermos melhor a atuação do campo, vamos fazer uma analogia de invariância

de gauge com a relatividade. Como ponto de partida enfatizaremos suas diferenças essenciais.

A relatividade trata do comportamento (externo) de uma partícula no espaço-tempo, enquanto a invariância de gauge trata com as propriedades internas tal como carga elétrica e spin isotópico. Imaginemos, agora, que a partícula elementar tem seu próprio "espaço interno", que é transportado quando essa se move através do espaço-tempo (em princípio podemos associar o espaço interno com o "espaço de parâmetros" abstrato, do grupo de simetria interna, mas com a finalidade de tornar mais clara a exposição trataremos o espaço interno com as coordenadas espaciais. "Essa interpretação tem sido recentemente usada em teoria de gauge").

Através dessa analogia constatamos que a invariância global é análoga à relatividade especial e a invariância local com a relatividade geral. Sendo essa última, como já vimos, o próprio ponto de partida de H. Weyl na proposta de uma nova teoria. Segundo o Princípio de Equivalência, sabemos que o movimento da partícula através de um campo gravitacional, pode ser descrito, em cada ponto do espaço-tempo, como se não existisse uma força gravitacional agindo na mesma através de uma estrutura de coordenadas não inerciais. O efeito do campo gravitacional sobre o movimento da partícula aparece somente por intermédio da conexão entre essas estruturas, em diferentes pontos.

Admitimos agora a existência de um princípio de equivalência associado a invariância de gauge. Consideremos o espaço interno de uma partícula elementar como uma espécie de estrutura "não inercial" local. Argumentamos então, que a interação com o campo

externo tal como o campo eletromagnético, pode ser entendido como uma conexão ou transformação que descreve como o espaço interno da partícula muda quando essa se move através do campo externo. Essas transformações são identificadas com a transformação de gauge usuais. Além do mais, associamos à transformação de simetria interna à "rotação" de spin isotópico. Assim temos que as transformações de gauge globais são transformações de simetria interna em um ponto fixado no espaço-tempo, enquanto a transformação de gauge local, descreve como a interação com o campo externo muda o espaço interno, em diferentes pontos do espaço-tempo.

Devemos verificar agora o efeito do campo externo na transformação de gauge, quando movemos a partícula carregada através do campo. Por conveniência separaremos a função campo $\Psi(x)$ em parte externa e parte interna. Temos assim :

$$\Psi(x) = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(x) u_{\alpha} \quad (21.1)$$

onde u_{α} vem a ser uma série de vetores de base no espaço interno. $\Psi_{\alpha}(x)$ é a componente de $\Psi(x)$ na base u_{α} , referente à parte externa.

Sob uma transformação de simetria interna, teremos:

$$\Psi_{\alpha}(x) = U_{\alpha\beta} \Psi_{\beta}(x) \quad (21.2)$$

sendo $U_{\alpha\beta}$ uma representação do grupo G que por conveniência tomaremos como o grupo $SU(2)$, que é o grupo de "rotação" associado ao spin isotópico, como vimos anteriormente. Assim cada partícula tem carga interna ou spin isotópico definidos. A

definição (21.2) é útil, porque nos permite interpretar o efeito do campo externo como uma precessão da base interna u_α .

Movendo agora a partícula de x para $x + dx$ através do campo externo, teremos que:

$$d\Psi = \Psi(x + dx) - \Psi(x) \quad (22.1)$$

Devemos lembrar que, em geral $d\Psi$ contém as mudanças tanto na parte externa $\Psi_\alpha(x)$ como na parte interna u_α . Podemos escrever a expressão (22.1) com a ajuda da expressão (21.1), como:

$$d\Psi = \sum_\alpha \left\{ \left(\partial_\mu \Psi_\alpha \right) dx^\mu u_\alpha + \Psi_\alpha du_\alpha \right\} \quad (22.2)$$

O último termo contém a mudança du_α no espaço de base interna, o qual será associado com o efeito do campo externo sobre o espaço interno.

Vamos agora calcular a mudança du_α na base interna. Em analogia à relatividade, descrevemos o efeito do campo interno com uma precessão ou rotação da base u_α . Logo a mudança du_α é o resultado de uma rotação infinitesimal interna $U(x)$ que está associado com a mudança externa dx . Além do mais, a rotação $U(x)$ é generalizada pelo grupo de simetria G (esta é a exposição matemática do princípio da equivalência de gauge). Calculemos a rotação infinitesimal $U(x)$. Em primeiro lugar, definimos transformação de gauge local, como sendo uma simples generalização da transformação de simetria interna ordinária:

$$U(x) = \exp \left\{ -i \left(\sum_k \theta^k F_k \right) \right\} \quad (22.3)$$

onde o índice k vai de 1 a n

, sendo n a dimensão do grupo G .

F_k é um operador, que satisfaz a relação de comutação :

$$\left[F_i, F_j \right] = i f_{ijk} F_k \quad (23.1)$$

f_{ijk} são constantes de estrutura do grupo G .

Notemos que uma diferença entre $U(x)$ e a rotação ordinária é que o parâmetro ou "ângulo de rotação" $\theta^k(x)$ são funções das coordenadas do espaço-tempo. Isto é permitido devido ao fato de não haver razões físicas que exijam θ^k constante, muito pelo contrário, essa dependência com x é necessária para provar a conexão entre as estruturas internas em diferentes pontos do espaço-tempo.

Portanto:

$$U(dx) = \exp \left\{ -i \sum_k \left(\partial_\mu \theta^k \right) dx^\mu F_k \right\} \quad (23.2)$$

roda a base interna u de uma quantidade du .

Logo:

$$u + du = U(dx) u \quad (23.3)$$

Os F_k são operadores matriciais atuando no vetor coluna u .

Então:

$$U(dx) u_\alpha = \exp \left\{ -i \sum_k \left(\partial_\mu \theta^k \right) dx^\mu \left(F_k \right)_{\alpha\beta} \right\} u_\beta \quad (23.4)$$

Expandindo $U(dx)$ em primeira ordem em dx , obtemos:

$$u_\alpha + du_\alpha = \left\{ \delta_{\alpha\beta} - i \sum_k \left(\partial_\mu \theta^k \right) dx^\mu \left(F_k \right)_{\alpha\beta} \right\} u_\beta \quad (23.5)$$

que nos dá:

$$du_{\alpha} = -i \sum_k \left(\partial_{\mu} \theta^k \right) dx^{\mu} \left(F_k \right)_{\alpha\beta} u_{\beta} \quad (24.1)$$

Introduzindo um novo operador $\left(A_{\mu} \right)_{\alpha\beta} = \sum_k \left(\partial_{\mu} \theta^k \right) \left(F_k \right)_{\alpha\beta}$

Obtemos então:

$$d\Psi = \sum_{\alpha} \left\{ \left(\partial_{\mu} \Psi_{\alpha} \right) \delta_{\alpha\beta} - i \left(A_{\mu} \right)_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha} \right\} u_{\beta} dx^{\mu} \quad (24.2)$$

Podemos ainda compactar $d\Psi$, fazendo:

$$\begin{aligned} d\Psi &= \sum_{\alpha} \left(d\Psi \right)_{\alpha} u_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \left(D_{\mu} \Psi_{\alpha} \right) dx^{\mu} u_{\alpha} \end{aligned} \quad (24.3)$$

sendo o operador D_{μ} uma forma generalizada de derivada covariante, que descreve a mudança em ambas as partes, externa e interna, de Ψ . Assim temos que:

$$D_{\mu} \Psi_{\alpha} = \sum_{\beta} \left\{ \partial_{\mu} \delta_{\alpha\beta} - i \left(A_{\mu} \right)_{\alpha\beta} \right\} \Psi_{\beta} \quad (24.4)$$

Para o caso unidimensional do grupo G , tem-se uma redução:

$$D_{\mu} \Psi = \left(\partial_{\mu} - i A_{\mu} \right) \Psi \quad (24.5)$$

Que nada mais é que o "acoplamento mínimo" do eletromagnetismo (se identificarmos o quadrivetor potencial A_{μ} com o operador $\left(A_{\mu} \right)_{\alpha\beta}$).

Temos portanto que o operador $\left(A_{\mu} \right)_{\alpha\beta}$ é o campo de gauge Yang-Mills B_{μ} ("acoplamento mínimo").

Concluimos, então, que, quando a partícula se move através do campo externo o campo atua como uma transformação do grupo de simetria no espaço interno da partícula, sendo esse efeito análogo a precessão de Thomas, do spin do elétron.

Apesar da novidade da idéia básica, a teoria de Yang-Mills não pôde ser considerada uma teoria dinâmica satisfatória das interações fortes.

Para obter, a partir de um princípio variacional, as equações de movimento de Euler-Lagrange do campo vetorial B_μ associado ao campo de Yang-Mills na forma correta, a densidade de lagrangeana deve conter um termo da forma $m^2 (A_\mu)^2$, o que implicaria na não invariância por transformação de gauge dessas equações visto que esse termo não é invariante. Dessa forma, a teoria não descreve o caráter de curto alcance das interações fortes. Apesar disso, há consequências importantes na proposta de tal teoria, como a definição do grupo $SU(2)$ como grupo de gauge local, permitindo um novo ponto de vista e uma abordagem à questão das simetrias internas. De fato, é a idéia de invariância por transformações de gauge que tem norteado o desenvolvimento das idéias mais recentes da física das partículas elementares, destacando-se os esquemas propostos de unificação das interações eletromagnético, forte e fraca, e ainda dos esquemas de super-unificação incluindo a gravitação, e também as importantíssimas consequências no estudo dos modelos cosmológicos propostos para a abordagem do Universo super-primordial e do encadeamento do desacoplamento das interações fundamentais da Natureza ao longo de sua evolução.

Sendo assim, a idéia tornou-se tão frutífera que é apenas

considerada natural hoje em dia, a formulação das teorias para cada interação fundamental inclusive, como teorias de gauge. Consideraremos a seguir, de forma breve, a formulação de uma teoria da interação gravitacional como uma teoria de gauge.

II.6 - O Campo Gravitacional como um Campo de Gauge [11]

A noção de campo de gauge está associada a um grupo de transformação local, o que implica na necessidade de utilizar a derivada covariante das funções de campo em diferentes pontos do espaço-tempo. O conjunto dessas funções definidas em diferentes pontos do espaço-tempo, não forma um espaço linear sob um dado grupo de transformações lineares definidas por um dado operador linear $U(x)$:

$$\Psi(x) + \Psi(x)' = U(x) \Psi(x) \quad (26.1)$$

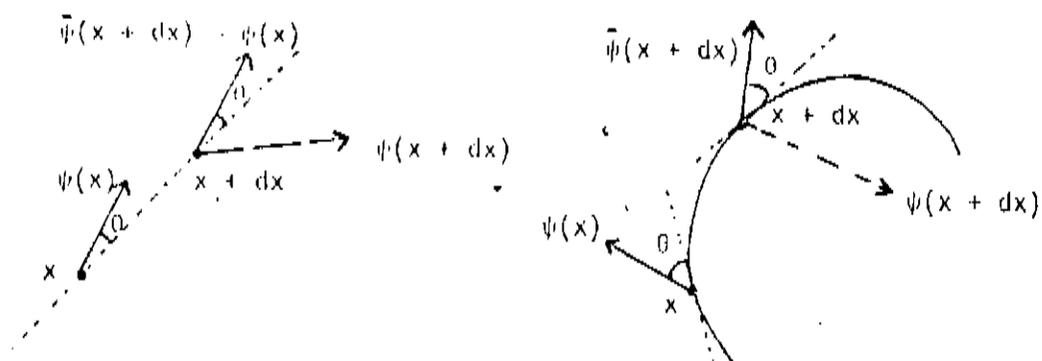
Assim, não transformamos uma combinação linear de campos definidos em diferentes pontos do espaço-tempo, numa combinação linear de transformada dos campos:

$$\begin{aligned} \alpha \Psi(x) + \beta \phi(y) + \alpha U(x) \Psi(x) + \beta U(y) \phi(y) &\neq \\ &\neq U(x) (\alpha \Psi(x) + \beta \phi(y)) \end{aligned} \quad (26.2)$$

A superposição linear só ocorre localmente, isto é, para campos definidos num mesmo ponto x do espaço-tempo. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha \Psi(x) + \beta \Psi(x) + \alpha U(x) \Psi(x) + \beta U(x) \phi(x) &= \\ &= U(x) (\alpha \Psi(x) + \beta \phi(x)) \end{aligned} \quad (26.3)$$

Portanto como a derivada envolve a comparação de valores dos campos em diferentes pontos vizinhos a derivada ordinária não é covariante. Essa, derivada ordinária, é determinada da seguinte maneira: deslocamos paralelamente o campo $\Psi(x)$ para a posição $(x + dx)$, o que nos dá um campo $\bar{\Psi}(x + dx)$, e subtraímos $\Psi(x + dx)$ de $\bar{\Psi}(x + dx)$. No caso de uma transformação global não há problema algum com esse procedimento, porém se estivermos tratando com transformações locais não poderemos proceder desse modo, conforme vimos em (24.2). Assim, a introdução de uma derivada covariante resulta da noção de deslocamento paralelo do campo (figura abaixo)



Portanto, a derivada covariante pode ser escrita:

$$D_{\mu} \Psi(x) = \partial_{\mu} \Psi(x) + ig A_{\mu, a} T_a \Psi(x) \quad (27.1)$$

onde T_a são os geradores do grupo, isto é, para

$$T_a = \frac{\zeta_a}{2}, \quad a = 1, 2, 3 \quad + \quad \text{SU}(2)$$

$$T_a = I, \quad + \quad \text{U}(1)$$

O campo $A_{\mu, a}(x)$ aparece aqui como a conexão afim, similar à conexão na geometria Riemanniana o que nos leva a considerar o campo gravitacional como um campo de gauge.

Relatividade Geral

Na relatividade geral, as equações são escritas na forma covariante, o que exige que as equações físicas sejam invariantes sob as transformações gerais da coordenadas:

$$x^{\mu'} = f^{\mu}(x) \quad (28.1)$$

onde $f^{\mu}(x)$ são quatro funções de x reais, independentes, com seu Jacobiano diferente de zero:

$$J \equiv \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \right| \neq 0 \quad (28.2)$$

Os diferenciais $dx^{\mu'}$ e dx^{ν} são relacionados pela equação:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \quad (28.3)$$

Um vetor contravariante é então definido como uma série de quatro funções que se transformam com as diferenciais acima:

$$F^{\mu'}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} F^{\nu}(x) \quad , \quad (28.4)$$

e para um vetor covariante $P(x)$, pela condição de invariância do produto escalar com qualquer vetor contravariante, temos:

$$F^{\mu'}(x') P_{\mu'}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} F^{\nu}(x) P_{\mu}(x) \quad (28.5)$$

que se transforma como:

$$P_{\mu}(x) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} P'_{\mu}(x) \quad (29.1)$$

$$P'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} P_{\nu}(x)$$

Como sabemos a métrica é agora uma função $g_{\mu\nu}(x)$ do ponto no espaço-tempo e o elemento de linha é:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (29.2)$$

Um tensor de ordem $m + n$, m vezes contravariante e n vezes covariante se transforma, então, como:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x') = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_m}}{\partial x^{\alpha_m}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n}(x) \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x^{\nu_n}} \quad (29.3)$$

O tensor métrico está associado ao co-fator de $g_{\mu\nu}(x)$, $\Delta^{\mu\nu}(x)$, tal que a quantidade

$$g^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}, \quad \text{onde } g = \det(g_{\mu\nu}) \quad (29.4)$$

é um tensor contravariante simétrico e, satisfaz a relação em cada ponto x :

$$g^{\mu\nu}(x) g_{\nu\rho}(x) = \delta^{\mu}_{\rho} \quad (29.5)$$

Portanto, como na equação (26.2), os vetores, neste espaço formam um espaço linear somente localmente:

$$a F^{\alpha}(x) + b P^{\alpha}(x) + \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} \left[a F^{\nu}(x) + b P^{\nu}(x) \right] \quad (29.6)$$

Esta superposição não pode ser feita para vetores em diferentes pontos do espaço-tempo. Assim, introduz-se a definição de conexão afim para a interação gravitacional neste trabalho do seguinte modo:

$$\bar{F}^\alpha(x + dx) = F^\alpha(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x) dx^\mu F^\nu(x) \quad (30.1)$$

A derivada covariante será então:

$$\nabla_\mu F^\alpha(x) dx^\mu = F^\alpha(x + dx) - \bar{F}^\alpha(x + dx) \quad (30.2)$$

o que nos dá:

$$\nabla_\mu F^\alpha(x) = \partial_\mu F^\alpha(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x) F^\nu(x) \quad (30.3)$$

A grandeza $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)$ (conexão afim ou símbolo de Christoffel) é o campo de gauge gravitacional. A exigência que (30.3) se transforme como um tensor

$$\nabla_\mu F^\alpha(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda} \nabla_\nu F^\lambda(x) \quad (30.4)$$

determina a lei de transformação para $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)$:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha'}(x') = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\xi\eta}^\lambda \frac{\partial x^\xi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^\xi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\xi \partial x^\eta} \quad (30.5)$$

Como todo campo de gauge visto anteriormente, este também não é covariante e não se transforma como um tensor.

Para obter a derivada covariante de tensores observamos a seguinte identidade:

$$\partial_{\mu} (F^{\alpha} F_{\alpha}) = \left(\nabla_{\mu} F^{\alpha} \right) F_{\alpha} + F^{\alpha} \left(\nabla_{\mu} F_{\alpha} \right) \quad (31.1)$$

Se a derivada covariante de um vetor covariante é:

$$\nabla_{\mu} F_{\alpha} = \partial_{\mu} F_{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} F_{\nu} \quad (31.2)$$

Podemos escrever:

$$\partial_{\mu} (F^{\alpha} F^{\beta}) = F^{\alpha} \nabla_{\mu} F^{\beta} + (\nabla_{\mu} F^{\alpha}) F^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} F^{\alpha} F^{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} F^{\nu} F^{\beta} \quad (31.3)$$

Portanto, a derivada covariante de um tensor de segunda espécie é:

$$\nabla_{\mu} T^{\alpha\beta} = \partial_{\mu} T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T^{\nu\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} T^{\alpha\nu} \quad (31.4)$$

Em geral, para um tensor de qualquer ordem

$$\begin{aligned} \nabla_{\eta} T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots} &= \partial_{\eta} T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots} + \Gamma_{\eta\lambda}^{\alpha} T^{\lambda\beta\dots}_{\mu\nu\dots} + \Gamma_{\eta\lambda}^{\beta} T^{\alpha\lambda\dots}_{\mu\nu\dots} + \dots \\ &\dots - \Gamma_{\eta\mu}^{\lambda} T^{\alpha\beta\dots}_{\lambda\nu\dots} - \Gamma_{\eta\nu}^{\lambda} T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\lambda\dots} - \dots \end{aligned} \quad (31.5)$$

A conexão afim é simétrica nos índices inferiores

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \quad (31.6)$$

Agora se definirmos a quantidade

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} \right) \quad (31.7)$$

sua lei de transformação para um novo sistema de coordenada (28.1)

será:

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\}' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\lambda} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \xi \eta \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^\xi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^\xi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\xi \partial x^\eta} \quad (32.1)$$

que é a mesma lei de (30.5). Portanto, a diferença entre (30.5) e (31.7) nos dá:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\}' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\lambda} \left[\Gamma_{\xi\eta}^\lambda - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \xi \eta \end{matrix} \right\} \right] \frac{\partial x^\xi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x^\nu} \quad (32.2)$$

que é a lei de transformação de um tensor.

Conforme o princípio de equivalência existe em todo ponto do espaço-tempo um sistema de coordenadas localmente inercial em que não há efeitos da gravitação. Portanto a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ se anula em tais sistemas, e ∇_μ é igual a ∂_μ , e ainda as derivadas primeiras de $g_{\mu\nu}$ se anulam. Logo, como a diferença acima é um tensor será nula em toda parte. Então:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \equiv \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\}' = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left[\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right] \quad (32.3)$$

O tensor $g_{\mu\nu}(x)$ é, portanto, o potencial gravitacional em termos dos quais o campo de gauge é expresso.

III.1 - Noções De Quebra Espontânea De Simetria [12]

Introdução:

Usualmente a noção de simetria está associada a alguma lei de conservação do sistema físico em questão. Por exemplo, a conservação do momento angular orbital em um movimento de uma partícula sob ação de uma força central está associada a noção de simetria do sistema sob rotação no espaço ordinário, a conservação do momentum linear de um sistema à simetria do mesmo por translações espaciais, etc. De um modo mais geral, essa simetria pode ser expressa como a invariância de um sistema de equações ou de uma grandeza física do sistema sob um dado conjunto de transformações espaço-temporais, ou ainda em algum espaço interno (como o espaço abstrato, no qual o operador de spin isotópico é o gerador das rotações nesse espaço).

Em sistemas que podem ser descritos por uma função lagrangeana \mathcal{L} , essas propriedades de invariância do sistema sob um dado conjunto de transformações de coordenadas (espaço-temporais ou internas) se refletem em propriedades de invariância da função \mathcal{L} (ou das equações que dela derivam através de um princípio variacional) ou em outras grandezas associadas ao sistema. Assim, uma quebra de simetria pode ser resultado de uma quebra de invariância da função lagrangeana sob um dado conjunto de transformações. Uma particular classe de quebras de simetrias, chamada quebra espontânea de simetrias é bastante importante no

contexto do presente trabalho.

As primeiras idéias de quebra espontânea de simetria surgiram em física do estado sólido, na descrição de materiais ferromagnéticos, onde a teoria descreve um ferromagneto, que apresenta a simetria geométrica de isotropia, isto é, não há nenhuma direção espacial preferencial ou com propriedades distintas das demais quando o mesmo se apresenta desmagnetizado. O processo de magnetização introduz uma anisotropia do sistema através do aparecimento de uma direção de magnetização.

Procuremos introduzir matematicamente a noção de quebra espontânea de simetria analisando um campo escalar real que possui uma interação do tipo $\lambda \phi^4$, onde λ é um parâmetro escalar e ϕ a função escalar de campo. A função lagrangeana \mathcal{L} do campo escalar ϕ é dada :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} b^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \quad (34.1)$$

onde o escalar b desempenha um papel de massa do campo.

A notação introduzida é a usual, isto é, $\partial^\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu}$;
 $\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu}$; onde x_μ é o quadrivetor posição.

A equação do campo para a lagrangeana acima é:

$$(g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu + b^2) \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 = 0 \quad (34.2)$$

e o hamiltoniano do sistema é:

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \Pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 \right\} + U(\phi) \quad (34.3)$$

$$\text{onde } U(\phi) = \frac{1}{2} b^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad \left[\Pi \equiv \partial^0 \phi(x) \equiv \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_0} \right].$$

Procuremos determinar o campo em seu estado de mais baixa energia, o que tem em correspondência um potencial $U(\phi)$ mínimo.

Se considerarmos um campo independente de x , ϕ_0 , esse será solução da equação (34.2) se

$$\phi_0 \left(b^2 + \frac{\lambda}{3!} \phi_0^2 \right) = 0 \quad (35.1)$$

Neste caso, $\Pi = 0$ e $\nabla \phi = 0$. Logo, a posição do mínimo da função ϕ dependerá somente do sinal de b^2 , uma vez que admitimos que $\lambda > 0$. Essa situação corresponde ao estado fundamental do campo - o vácuo da teoria de campo.

Assim, se : a) $b^2 > 0$. Temos como solução da equação (35.1)

$$\phi_0 = 0 \quad (35.2)$$

que corresponde ao estado fundamental

se : b) $b^2 < 0$. Temos como solução, além de (35.2)

$$\phi_{0(+)} = + \sqrt{-6b^2/\lambda} \quad (35.3a)$$

$$\phi_{0(-)} = - \sqrt{-6b^2/\lambda} \quad (35.3b)$$

Porém, as soluções (35.3) são as que nos interessam, pois corresponde ao estado fundamental do campo, ou, se considerarmos o campo como um campo quântico, corresponde ao valor esperado do operador de campo no estado fundamental, ou ainda ao valor esperado no vácuo.

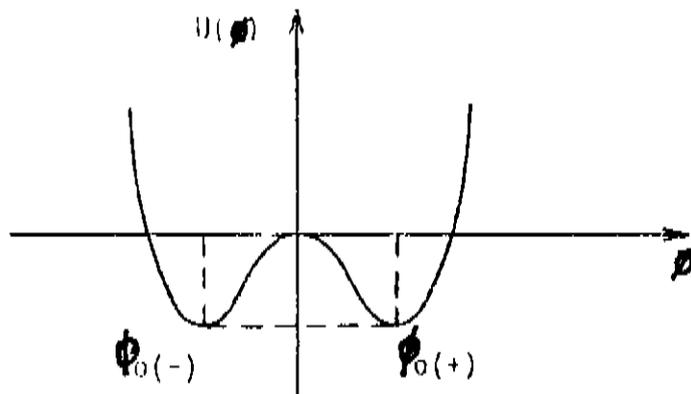
Temos assim:

$$U(\phi_0) = 0$$

(36.1)

$$U[\phi_{0(+)}] = U[\phi_{0(-)}] = \frac{3}{2} \frac{b^4}{\lambda}$$

A forma da curva para $U(\phi)$ será



Temos dois valores de ϕ , $\phi_{0(+)}$, $\phi_{0(-)}$, que dão o mínimo de $U(\phi)$.

Como a lagrangeana é invariante sob a transformação $\phi \rightarrow -\phi$ o estado fundamental é degenerado, e cada um desses estados transformam-se um no outro sob esta simetria. Logo, é indiferente o valor escolhido para ϕ_0 no estudo do desenvolvimento de $U(\phi)$, $H(\phi)$ e $\mathcal{L}(\phi)$ no estado fundamental escolhido. Uma vez feita a escolha, a simetria é espontaneamente quebrada.

Então para estudarmos o comportamento da lagrangeana no estado fundamental escolhido, definimos um novo campo, de tal modo que o $U(\phi)$ seja zero no estado fundamental [ou $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$].

Temos:

$$\phi'(x) = \phi(x) - v \quad (36.2)$$

Onde v é o estado de vácuo ($v = \phi_{0(+)}$).

Expressando a lagrangeana em termos de ϕ' (desprezando os termos constantes) vem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \right) - b^2 (\phi' + v)^2 \right\} - \frac{\lambda}{4!} (\phi' + v)^4 \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \right) - m^2 \phi'^2 \right\} - \frac{\lambda v}{3!} \phi'^3 - \frac{\lambda}{4!} \phi'^4
\end{aligned}
\tag{37.1}$$

onde $m^2 \equiv 2 | b^2 |$.

A transformação no campo, $\phi' = \phi - v$, tem a propriedade que exigimos de um campo físico: seu estado de vácuo (mínimo de energia do campo) corresponde a $\phi' = 0$ e sua massa é um número positivo $+\sqrt{2 | b^2 |}$ e além disso temos uma interação cúbica $\simeq \phi'^3$, além da quadrática. Devido a interação cúbica, a lagrangeana acima não é invariante sob a reflexão.

Devemos notar que se desejamos que a energia seja zero no estado fundamental é preciso adicionar a constante $+\frac{3}{2} \frac{b^4}{\lambda}$ em $U(\phi)$. Obtemos, então:

$$U_1(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \left(\phi^2 - v^2 \right)^2, \quad v = -\frac{6 b^2}{\lambda} > 0 \tag{37.2}$$

Conclusão: Através da quebra espontânea de simetria resolvemos a questão da massa negativa (correspondente a um imaginário) do nosso problema.

Consideremos a seguir o caso de dois campos escalares $\phi(x)$ e $\xi(x)$ que apresenta também quebra espontânea de simetria.

III.2 - Bósons De Goldstone [13]

Vamos analisar outro caso de quebra espontânea de simetria, sendo que nesse consideraremos dois campos escalares $\phi(x)$, $\xi(x)$.

A Lagrangeana é dada:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) + \left(\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi \right) - U \left(\phi^2 + \xi^2 \right) \quad (38.1)$$

Essa é invariante sob o grupo $SU(2)$ de rotação no plano (ϕ, ξ) .

As equações de transformação são:

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi \cos \alpha - \xi \sin \alpha \\ \xi' &= \phi \sin \alpha + \xi \cos \alpha \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \phi' \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \xi \end{bmatrix} \quad (38.2)$$

A energia potencial é:

$$U(\phi, \xi) = \frac{1}{2} b^2 \left(\phi^2 + \xi^2 \right) + \frac{\lambda}{4!} \left(\phi^2 + \xi^2 \right)^2 \quad (38.3)$$

O mínimo ocorre quando

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = \phi \left\{ b^2 + \frac{\lambda}{3!} \left(\phi^2 + \xi^2 \right) \right\} = 0 \quad (38.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \xi \left\{ b^2 + \frac{\lambda}{3!} \left(\phi^2 + \xi^2 \right) \right\} = 0$$

Considerando $b^2 < 0$ e $\lambda > 0$, temos que o mínimo ocorre quando:

$$\phi^2 + \xi^2 = v^2, \quad v^2 = -\frac{6 b^2}{\lambda} \quad (38.5)$$

Essa solução nos dá infinitos estados de vácuo, uma vez que $U(\phi, \xi)$ atinge seu menor valor para qualquer campo que satisfaça essa equação. Desse modo fixemos o eixo no plano ϕ, ξ de tal modo que:

$$\phi_{(+)} = v, \quad \xi_{(+)} = 0 \quad (38.6)$$

definam o estado fundamental. Em analogia ao exemplo anterior, a

simetria é quebrada espontaneamente. Definimos, como antes, um novo campo dado por :

$$\phi' = \phi - v, \quad \xi' = \xi \quad (39.1)$$

Assim, temos a nova lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left\{ \left(\partial^\mu \phi' \right)^2 - m^2 \phi'^2 \right\} + \frac{1}{2} \left(\partial^\mu \xi' \right)^2 \\ & - \frac{\lambda}{3!} v \left(\phi'^2 + \xi'^2 \right) \phi' - \frac{\lambda}{4!} \left(\phi'^2 + \xi'^2 \right) \end{aligned} \quad (39.2)$$

Notamos que o campo ϕ' adquire massa positiva:

$$m = \sqrt{2 |b^2|} = \sqrt{\lambda v^2 / 3!} \quad (39.3)$$

e o campo ξ' não possui massa. Este campo sem massa é chamado de Boson de Goldstone.

Consideremos agora um caso mais geral, onde ϕ é um campo real com n-componentes. A lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i \right) - \frac{1}{2} b^2 \phi^i \phi^i - \frac{1}{4!} \left(\phi^i \phi^i \right) \quad (39.4)$$

\mathcal{L} é, como podemos notar, invariante sob o grupo ortogonal em n dimensões, $O(n)$. De modo analogo, se $b^2 < 0$, o potencial tem

um mínimo em $v = \left[-\frac{b^2}{\lambda} \right]^{1/2}$, isto é, existe um mínimo

sempre que $\phi^i \phi^i = -\frac{b^2}{\lambda}$.

Vamos escolher a n-ésima componente de ϕ para desempenhar

um valor esperado do vácuo. Consideremos o campo ϕ como um vetor coluna com n-componentes:

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{bmatrix} \quad (40.1)$$

Um novo aspecto desse exemplo é a existência de um grupo não trivial que leva à invariância do vácuo. Este é o subgrupo de $O(n)$ [$O(n)$ tem $1/2 n (n - 1)$ geradores] que não perturba as n-ésimas componentes com as demais ; é $O(n - 1)$, com $1/2 (n - 1) (n - 2)$ geradores.

Seja L_{ij} as $1/2 n(n - 1)$ matrizes independentes geradoras de $O(n)$ e ; seja ainda, l_{ij} uma subsérie que forma uma conveniente simetria $O(n - 1)$ [$l_{ij} = L_{ij}$ para $i, j \neq n$] e K_i [$K_i = L_{in}$] os $(n - 1)$ intervalos independentes. Agora, em vez de uma simples subtração no valor esperado do vácuo do campo, como foi feito anteriormente para definir os novos campos, façamos o seguinte: Definimos η e ξ_i , $1 \leq i \leq (n - 1)$, por :

$$\phi = \exp \left[i \xi_i K_i / v \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v + \eta \end{bmatrix} \quad (40.2)$$

Em primeira ordem, esta definição é equivalente ao procedimento anterior.

Em termos dos novos campos ξ_i e η , a lagrangeana é :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \partial^\mu \xi_i \partial_\mu \xi_i \right] + \text{termos de ordem superior, com derivadas} - \frac{1}{2} b^2 (v + \eta)^2 - \frac{1}{4} \lambda (v + \eta)^4 \quad (40.3)$$

O campo η tem massa $-2b^2 [>0]$, e os $(n-1)$ campos ξ_i não possuem massa. Para cada gerador do grupo original que conduz a invariância do vácuo, corresponde a um Bóson de Goldstone sem massa.

O fato de se ter um número de bósons sem massa igual ao número de quebra de geradores (simetria) parece acidental, mas este é um fato geral. — Seja uma lagrangeana qualquer em termos dos n campos escalares reais ϕ ;

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi) \quad (41.1)$$

Naturalmente, a função \mathcal{L} pode conter outros campos que se ligam um com os outros, porém estes termos não são relevantes. O potencial $U(\phi)$ é um polinômio em ϕ que é invariante sob algum grupo G . Esse grupo tem n geradores T_α , e o campo se transforma conforme a representação n -dimensional L^α : $\delta \phi = -i \phi^\alpha L^\alpha \phi$. Como a representação é real, $i L^\alpha$ deve ser uma matriz real, logo L^α é uma matriz imaginária e deste modo hermitiana e antissimétrica. O potencial U é invariante sob o grupo G . Logo para o grupo de transformações infinitesimais tem-se:

$$0 = \delta U = \frac{\partial U}{\partial \phi_i} \delta \phi_i = -i \frac{\partial U}{\partial \phi_i} \phi^\alpha L_{ij}^\alpha \phi_j \quad (41.2)$$

Visto que ϕ^α são arbitrários, obtemos n equações

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_i} L_{ij}^\alpha \phi_j = 0 \quad (41.3)$$

para todo α . Diferenciando novamente temos:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi_i \partial \phi_k} L^\alpha_{ij} \phi_{ij} + \frac{\partial U}{\partial \phi_i} L^\alpha_{ik} = 0 \quad (42.1)$$

Expandindo em série a equação (42.1) em torno do valor do campo $\phi = v$, o valor de ϕ que minimiza U é dado por:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \phi_i} \right]_{\phi = v} = 0 \quad (42.2)$$

O resultado é:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi_i \partial \phi_k} L^\alpha_{ij} v_j = 0 \quad (42.3)$$

Se U é expandido em torno de v , não existirão termos lineares, e os termos constantes serão irrelevantes:

$$U = -\frac{1}{2} M^2_{ij} (\phi - v)_i (\phi - v)_j + \text{termos de ordem superior} \quad (42.4)$$

Portanto, $\frac{\partial^2 U}{\partial \phi_i \partial \phi_k}$ expandido em torno do valor $\phi = v$ é

exatamente $-M^2_{ij}$, onde M^2_{ij} é a matriz massa, e assim

$$(M^2)_{ij} L^\alpha_{ij} v_k = 0 \quad (42.5)$$

para cada α .

Seja S um subgrupo m -dimensional de G que permite uma simetria do vácuo. Se L^α é um gerador de S , $L^\alpha v = 0$, e assim a equação (42.5) não contém nenhuma informação sobre M^2 . Para cada dos $(n - m)$ vetores $L^\alpha_{ij} v_k$ que são diferentes de zero, (42.5) informa que M^2 tem um autovalor zero. Se os vetores $L^\alpha v$ se estendem ao espaço $(n - m)$ dimensional, teremos demonstrado que

existirão $(n - m)$ bósons sem massa. Em outras palavras; se em uma teoria há quebra de simetria devido a um subgrupo de dimensão $(n - m)$ de um grupo simétrico G de dimensão n , existirão $(n - m)$ bósons sem massa (teorema de Goldstone). Outra forma de expressar esse teorema é a seguinte: Se tivermos uma lagrangeana em que o estado fundamental (vácuo) não é invariante perante um grupo contínuo de simetria, teremos estados fundamentais degenerados (isto implica em bósons sem massa) .

III.3 - O Mecanismo de Higgs [14]

A idéia fundamental do Mecanismo de Higgs é incluir na teoria um novo campo que não desapareça no vácuo (estado fundamental). Para maior parte dos campos esse estado é indicado quando o mesmo possui valor zero, isto é, quando o campo é "desligado". Por exemplo: o campo elétron tem energia mínima quando não existe elétron. Neste aspecto o Campo de Higgs difere, de modo que a energia do campo é reduzida quando o mesmo tem valor uniforme maior que zero.

O Campo de Higgs tem como finalidade fornecer uma estrutura de referência em que a orientação do spin-isotópico possa ser determinado. Podemos representar o Campo de Higgs por uma seta sobreposta a seta do spin-isotópico - indicador no espaço imaginário interno de um hádron.

O que distingue a seta do Campo de Higgs é que essa tem um comprimento fixo, estabelecido pelo valor do vácuo do campo. Portanto a orientação de outra seta, spin-isotópico, pode ser medida com respeito ao eixo definido pelo Campo de Higgs. Deste modo um próton pode ser distinguido de um nêutron.

Como o Mecanismo de Higgs concede massa ao quanta do campo Yang-Mills ? O processo é explicado da seguinte maneira: O Campo de Higgs é uma quantidade escalar, logo o quantum do campo deve ter um spin zero. Na teoria de Yang-Mills temos campos vetoriais, como no eletromagnetismo, e são representados por quanta de spin-1. Agora, sabemos que: partículas com spin-1 têm três estados de spin (orientados - paralelo, antiparalelo e transversal), mas como essas partículas do campo de Yang-Mills não têm massa e movem-se a velocidade da luz, essas são um caso especial, onde seu estado transversal desaparece. Então, se essas partículas fossem adquirindo massa, essas perderiam este status especial e todos os três estados de spin seriam observados. Dai a necessidade do Campo de Higgs, o qual fornece essa massa, em outras palavras uma partícula Higgs junta-se a cada quantum Yang-Mills de modo que esse quantum ganha massa e um estado de spin, ao passo que a partícula Higgs desaparece.

Consideremos agora a formulação do Mecanismo de Higgs.

Consideremos a lagrangeana (38.1) escrita em termos de um campo escalar complexo ϕ

$$\mathcal{L} = \left[\partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi \right] - b^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (44.1)$$

onde :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha(x) + i \pi(x)) \quad e$$

$$\phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma(x) - i \pi(x))$$

Esta lagrangeana é invariante sob o grupo U(1)

$$\phi \rightarrow \phi' = \exp(i\theta) \phi \quad (45.1)$$

O próximo passo é introduzir um campo de gauge A_μ e construir uma lagrangeana invariante sob transformação de gauge local. Seguindo os procedimentos estudados anteriormente obtemos:

$$\mathcal{L} = \left[\left(\partial_\mu + ie A_\mu \right) \phi^* \left(\partial^\mu - ie A^\mu \right) \phi - b^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (45.2)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Sob uma transformação de gauge local

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi(x)' = \exp(-i\theta(x)) \phi(x) \\ \phi^*(x) &\rightarrow \phi^*(x)' = \exp(i\theta(x)) \phi^*(x) \end{aligned} \quad (45.3)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x)$$

A lagrangeana \mathcal{L} é invariante sob a transformação (45.3).

Se $b^2 > 0$, a expressão (45.2) é exatamente a lagrangeana eletrodinâmica de um campo escalar carregado eletricamente.

Se $b^2 < 0$, devemos mudar os campos a fim de escrevermos \mathcal{L} em termos dos quais o valor esperado do vácuo se anule. Podemos assim admitir que:

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = v / \sqrt{2}$$

onde v é real.

Em vez de mudarmos a função de campo por um novo campo ϕ' , identicamente zero no estado fundamental, por subtração de $\langle 0 | \phi | 0 \rangle$, faremos uma parametrização exponencial de ϕ (análogo ao procedimento usado no teorema de Goldstone) com n -vetores reais. Os novos campos são ξ e η , definidos por:

$$\begin{aligned} \phi &= \exp(i \xi / v) (v + \eta) / \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta + i\xi + \text{termos de ordem superior}] \end{aligned} \quad (46.1)$$

O campo ξ está associado com a quebra espontânea de simetria $U(1)$. Na ausência do campo de gauge A_μ , podemos concluir que o campo ξ tem massa nula, pois quando escrevemos (45.2) em termos de ξ e η não existe nenhum termo quadrático em ξ . Podemos verificar isso substituindo (46.1) em (45.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi \\ &+ \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu - \sqrt{2} e v A_\mu \partial^\mu \xi + b^2 \eta^2 + \text{termos de} \\ &\text{ordem superior.} \end{aligned} \quad (46.2)$$

onde temos a relação $v^2 = -b^2 / \lambda$. O campo η tem massa $-2b^2$, enquanto os campos A_μ e ξ não possuem uma interpretação óbvia quanto à sua massa, pois o termo $-\sqrt{2} e v A_\mu \partial^\mu \xi$ em (46.2)

impede uma interpretação mais imediata. Se não existisse esse termo, concluiríamos que a massa do campo vetor seria $b^2 = e^2 v^2$ e o campo ξ teria massa nula. Para contornarmos esse problema seguiremos um procedimento mais simples (um procedimento mais rigoroso envolveria cálculos da matriz S , o que não é nosso objetivo principal, pois estamos interessados numa exposição dos conceitos que envolvem o mecanismo de Higgs). Voltando a lagrangeana (45.2), vimos que essa é invariante sob transformação de gauge local (45.3). Desse modo, escolhemos a função de gauge $\xi(x) / v$. Então,

$$\phi \rightarrow \phi' = \exp(-i \xi(x) / v) \phi = (v + \eta) / \sqrt{2} \quad (47.1)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi \quad (47.2)$$

Visto que \mathcal{L} é invariante sob essa transformação,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[\left(\partial_\mu + ie A'_\mu \right) (v + \eta) \right] \left[\left(\partial^\mu - ie A'^\mu \right) (v + \eta) \right] - \\ & \frac{1}{2} b^2 (v + \eta)^2 - \frac{1}{4} \lambda (v + \eta)^4 - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (47.3)$$

onde $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$. Podemos escrever (47.3) na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu \\ & + \frac{1}{2} e^2 A'_\mu A'^\mu \eta (2v + \eta) - \frac{1}{2} \eta^2 (3\lambda v^2 + b^2) - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 \end{aligned} \quad (47.4)$$

Através dessa lagrangeana é simples determinar a massa dos respectivos campos. Para o campo escalar η a massa é igual a

$3\lambda v^2 + b^2$, para o campo vetorial A_μ^a é $(e v)$ e para o campo ξ a massa é nula, e como podemos ver esse campo desaparece em (47.4)

Portanto, verificamos que através desse mecanismo os bósons de Goldstone desaparecem enquanto os campos vetoriais adquirem massa (isto se constitui no chamado Mecanismo de Higgs) .

IV.1 - Cosmologia [15]

Introdução

Desde as origens da civilização que o homem vem tentando desvendar o mistério do Cosmo, com todos seus instrumentos mecânicos e matemáticos. Mesmo assim o trabalho é lento e muito árduo.

A Cosmologia estuda o Universo como se esse fosse um fluido homogêneo e isotrópico, onde as partículas desse fluido são as galáxias, os aglomerados de galáxias etc. Desse modo, torna-se mais fácil a visão e o estudo do Universo.

A questão da homogeneidade e isotrópia do Universo é fundamental para que possamos ter um ponto de partida em nossa ferramenta matemática (Relatividade Geral). Assim se faz necessário definir homogeneidade e isotrópia, mesmo que seja breve e resumidamente.

Homogeneidade do Universo significa que, em cada evento no Universo passa uma "hipersuperfície de homogeneidade" tipo espaço. Em cada ponto sobre tal hipersuperfície a densidade de massa μ e a pressão p (e a curvatura do espaço-tempo) são as mesmas. Em poucas palavras; homogeneidade significa que o Universo é o mesmo em todos os pontos em um dado momento. A noção de hipersuperfície de homogeneidade surge exatamente pelo fato da coordenada tempo não ter a mesma conotação do tempo de Newton (tempo absoluto).

Isotrópia do Universo significa que em qualquer evento, o

observador que está em movimento com o fluido cosmológico, isto é, está na hipersuperfície de homogeneidade, não pode distinguir uma direção como sendo preferencial das demais.

Observações astronômicas revelam que o Universo é homogêneo e isotrópico em larga escala ($\approx 10^8$ anos-luz). As evidências são:

(i) A distribuição de galáxias no céu, a distribuições de sua magnitude aparente e o deslocamento para o vermelho (red shift.) das raias espectrais.

(ii) A isotropia da distribuição de fontes de rádio no céu.

(iii) A notável isotrópia da radiação cósmica de microondas (radiação cósmica de fundo).

Portanto do ponto de vista de larga escala podemos considerar as galáxias como "partículas de um gás" que preenchem todo o Universo. Estas partículas serão consideradas sem estruturas interna. Estamos na realidade idealizando o Universo como um fluido cosmológico perfeito, onde este é caracterizado por uma quadrivelocidade u_μ , por uma densidade μ e por uma pressão p .

Estamos aqui interessados no estudo do Universo através das equações de Einstein, mais propriamente nas soluções de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) para essas equações, conhecidas como Modelo Friedmann-Lemaitre.

Para esse modelo têm-se três situações possíveis de se encontrar o Universo, sendo que, essas dependem somente de um único parâmetro; a densidade de massa.

Nosso objetivo nesse Capítulo é abordar esses modelos e discuti-los brevemente, enfatizando a importância da determinação de μ como um fator chave na descrição da evolução do Universo.

Esse Capítulo se divide nos seguintes itens: Equação de Einstein e Modelo FRW, onde apresentamos rapidamente a equação de Einstein, introduzimos o modelo citado com um breve histórico das contribuições de H.P. Robertson e A.G. Walker; a apresentação da métrica de FRW; o deslocamento para o vermelho (red shift) através da métrica FRW; Os modelos cosmológicos previstos por essa métrica, e finalmente, discutimos o estado de evolução do Universo "hoje".

IV.2 - Equação de Einstein e Possíveis Soluções - Modelo FRW.

As equações do campo de gravitação ou equações de Einstein são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi\sigma}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (51.1)$$

onde

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$$

é o tensor de Ricci, R é sua forma contraída (curvatura escalar),

$T_{\mu\nu}$ é o tensor momentum-energia e σ a constante gravitacional.

Estamos interessados nas possíveis soluções dessa equação.

Entre 1929 e 1935, H.P. Robertson [16] e, independentemente, A.G.

Walker obtiveram o conjunto infinito de soluções relativistas, atualmente denominado de modelo de FRW ou modelo de Friedmann-Lemaitre. Descobriu-se, então, que as equações do campo de Einstein não admitiam soluções estáticas, verificando-se que as soluções de Einstein de 1917 eram instáveis e, portanto,

inaceitáveis. Assim, o modelo FRW só admite um Universo em expansão, sendo o tipo dessa determinada pela geometria do espaço-tempo, que é:

(i) Expansão finita, seguida por colapso gravitacional - associada a um Universo "fechado".

(ii) Expansão infinita - associada a um Universo "aberto".

(iii) Caso crítico intermediário (solução de Einstein - De Sitter) - O Universo possui a energia mínima necessária para vencer a influência da desaceleração da gravidade e expande-se para sempre até o infinito.

No conjunto de soluções o parâmetro densidade desempenha um papel fundamental na determinação dos possíveis estados (i,ii,iii) do Universo, como veremos.

IV.3 - A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Façamos algumas considerações como ponto de partida:

(a) Existe uma coordenada temporal global que serve como x^0 de um sistema de coordenada comovel.

(b) Os espaços tridimensionais pertencentes a diversos valores constantes desta coordenada temporal são localmente isotrópicos.

(c) Dois pontos quaisquer em um 3-espaço pertencentes a uma dado tempo fixo são equivalentes.

Uma isotrópia local implica que a coordenada espacial deva aparecer no elemento de linha ds^2 de uma forma simetricamente esférica dada em coordenadas esféricas por:

$$d\sigma^2 = (dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta d\phi)^2 \quad (53.1)$$

onde o elemento de linha é escrito como:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \exp [F (x^0, r)] d\sigma^2 \quad (53.2)$$

sendo F uma função que não pode depender de θ nem de ϕ , devido as condições de isotrópia do espaço em torno do ponto. Através do item (c), acima, podemos escrever o elemento de linha como:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \exp [f(x^0) + l(r)] d\sigma^2 \quad (53.3)$$

onde f e l são funções arbitrárias a serem determinadas pelas equações do campo. Ainda pela condição de isotrópia do espaço (local) temos que as componentes espaciais do tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$ são invariantes sob uma transformação de rotação; desse modo, todos seus autovalores devem ser iguais. Com essas considerações e as equações do campo (51.1) obtemos a métrica de FRW, dada por:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \frac{\exp [f (x^0)]}{\left[1 + \frac{k}{4} r^2 \right]^2} d\sigma^2 \quad (53.4)$$

sendo k uma constante a ser determinada.

Essa métrica tem desempenhado um papel muito importante no estudo de modelos cosmológicos, como veremos, pois as condições iniciais admitidas - isotrópia e homogeneidade - são fatos

observados.

IV.4 - Discussão Adicional da Métrica de FRW

Vamos colocar a métrica (53.4) em uma forma mais conveniente escrevendo: $\exp [f(x^0)] \equiv a^2(t)$ com $t = x^0 / c$ (c é a velocidade da luz no vácuo). Temos então:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{\left[1 + \frac{k}{4} r^2 \right]^2} d\sigma^2 \quad (54.1)$$

Chamamos $a(t)$ de "raio do Universo" (nos dá a evolução do Universo).

Com a finalidade de compreendermos melhor a equação (54.1), consideremos uma hiperesfera em um espaço 4-dimensional euclidiano arbitrário que é dada por:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = a^2 \quad (54.2)$$

então

$$x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 + x^4 dx^4 = 0 \quad (54.3)$$

O elemento de linha nesse espaço é:

$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \quad (54.4)$$

Agora, eliminando dx^4 de (54.4) com a ajuda de (54.3) obtemos:

$$d\ell^2 = \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 + \frac{\left[d \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \right]}{4 (x^4)^2} \quad (55.1)$$

Em coordenadas esféricas teremos:

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a}} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \quad (55.2)$$

Fazendo uma transformação dada por: $r = \frac{\sqrt{k} u a}{1 + \left(\frac{k}{4}\right) u^2}$

obtemos:

$$d\ell^2 = k a^2 \left[\frac{du^2 + u^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right)}{\left(1 + \frac{k}{4} u^2 \right)^2} \right] \quad (55.3)$$

Temos então que esse elemento de linha é de uma hiperesfera 3-dimensional de raio \underline{a} , que está imersa em um espaço euclidiano 4-dimensional arbitrário. Podemos ter, agora, uma visão mais clara sobre a interpretação da métrica de FRW. Para $k = 1$, (53.4) descreve uma hiperesfera 3-dimensional isotrópica e homogênea com curvatura escalar uniforme \underline{a} . Para $k = 0$, a curvatura é zero e a hipersuperfície se reduz ao subespaço euclidiano ordinário. Para $k = -1$, \underline{a} deve ser imaginário, que corresponde a uma hiperesfera com raio imaginário ("pseudo esfera"). Desse modo, através do estudo geométrico da métrica (53.4), podemos compreender melhor a importância da constante k no estudo cosmológico.

Através da métrica FRW, o elemento de distância é dado por:

$$d\ell = \frac{\left[dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \right]^{1/2}}{\left(1 + \frac{k}{4} r^2 \right)} \quad (56.1)$$

Consideremos duas nebulosas emitindo um sinal luminoso ($ds^2 = 0$) de uma para outra. Lembrando que o tempo universal usado na métrica de FRW nos diz que $t_o > t_e$ ($t_o \equiv$ tempo medido pelo observador, $t_e \equiv$ instante de tempo de emissão) podemos escrever

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{c dt}{a(t)} = \ell \quad (56.2)$$

Para a luz emitida pela nebulosa N_1 no instante $t_1 + \Delta t_1$ e recebida pela nebulosa N_2 no instante $t_2 + \Delta t_2$, podemos escrever

$$\int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} \frac{c dt}{a(t)} = \ell \quad (56.3)$$

sendo ℓ uma distância fixa no sistema de coordenadas comovel.

Seja Δt_1 um período muito pequeno em comparação com o tempo de viagem que a luz gasta para ir de N_1 a N_2 . O fenômeno periódico aparecerá para N_2 com um período Δt_2 , e como não houve acréscimo na distância ℓ , temos de (56.2) e (56.3) que:

$$\frac{\Delta t_2}{a(t_2)} - \frac{\Delta t_1}{a(t_1)} = 0 \quad (56.4)$$

ou em termos de frequência: $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{a_2}{a_1}$ (57.1)

o que nos permite notar que no presente a função $a(t)$ deve ser monotonicamente crescente com o tempo, visto que, o tempo de recepção t_2 é maior que o tempo de emissão t_1 .

Define-se ainda a variação relativa no comprimento de onda em relação ao comprimento de onda emitido, como:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{a_2}{a_1} - 1 \quad (57.2)$$

Existe uma relação linear entre a função z e a distância do emissor, de extrema importância, pois relaciona um parâmetro difícil de ser medido; distância do emissor, com um parâmetro de fácil observação. Veremos aqui, rapidamente, essa relação em primeira aproximação. Começaremos introduzindo uma série de potências em termos do tempo de viagem da luz. Observemos que $a(t) / c$ tem dimensões de tempo e pode ser interpretada como o tempo necessário para que um raio de luz alcance uma distância da magnitude do raio do Universo. Consideraremos também fenômenos físicos que exijam intervalos de tempo muito pequenos, ainda, usaremos expansões em série em termos de $[c(t_2 - t_1) / a]$, que é muito pequeno. Desse modo, de (56.2) notamos que z será menor que 1

Expandindo $1 / a(t)$, obtemos:

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_2} - \frac{\dot{a}_2}{a_0 c} \frac{(t - t_2) c}{a_2} + \frac{1}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}_2^2}{a_2} - \frac{\ddot{a}_2}{2} \right] x$$

$$x \left[\frac{(t - t_2) c}{az} \right] + o \left[\frac{(t - t_2) c}{az} \right] \quad (58.1)$$

Desenvolvendo agora, em série de potências (56.2) e (57.2), e fazendo $[(t_2 - t_1) c] / az = y$, para facilitar, obtemos:

$$l = y + \frac{1}{2} \frac{\dot{az}}{az} y^2 + O(y^3) \quad (58.2)$$

e

$$z = \frac{az}{a} - 1 = \frac{\dot{az}}{c} y + \frac{az}{c^2} \left[\frac{\dot{az}^2}{az} - \frac{\ddot{a}}{2} \right] y^2 + O(y^3) \quad (58.3)$$

Eliminando y entre as equações acima, obtemos:

$$c z = \dot{az} l + \frac{1}{2c} (\dot{az} - \ddot{a} a) y^2 \quad (58.4)$$

Esta expressão relaciona o deslocamento z com a distância l , tendo assim uma importância fundamental.

Vamos agora considerar somente os termos de baixa ordem em (58.4) e lembrando que a distância física que a astronomia mede é, em primeira aproximação, dada por $D \cong az l$. A expressão (58.4) torna-se:

$$c z \cong \frac{\dot{az}}{az} (az l) \cong \frac{\dot{az}}{az} D \quad (58.5)$$

Esta é a lei de Hubble para o deslocamento z , onde identificamos \dot{az} / az com a chamada constante de Hubble (H). Em conclusão podemos dizer que a métrica de FRW explica o deslocamento z e ainda nos permite identificar a constante de Hubble em primeira

aproximação.

IV.6 - Os Modelos Cosmológicos

Com as condições adotadas para o sistema de coordenadas e a métrica de FRW (53.4), podemos determinar o tensor momentum - energia: $T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$, onde u é a quadrivelocidade, que em nosso caso possui os valores $u^1 = 0$, $u^2 = 0$, $u^3 = 0$, $u^0 = 1$, ϵ é a densidade de energia e p é a pressão (quando nos referimos a densidade de massa ou a densidade de energia estamos nos referindo a mesma grandeza física, a menos de uma constante c - velocidade da luz no vácuo). Assim temos que :

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \quad (59.1)$$

e $T_{\mu}^{\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$.

As dimensões de ϵ e p podem ser estimadas com a ajuda da teoria cinética dos gases, que nos dá a relação:

$$\frac{p}{\epsilon} = \frac{\hat{v}^2}{3} \quad (59.2)$$

onde \hat{v}^2 é a velocidade quadrática média das moléculas (galáxias) do gás. Dessa equação podemos escrever: $\frac{p/c^2}{\epsilon} = \frac{1}{3} \hat{v}^2 / c^2$ e como a velocidade quadrática média das galáxias é, em geral, menor que c , podemos de certo modo desprezar a componente pressão do tensor T_{μ}^{ν} .

Definido os valores para o tensor T_{μ}^{ν} e feitos as

respectivas considerações podemos escrever através das equações de Einstein, as relações:

$$\frac{8 \pi a}{c^2} \left(\frac{p}{c^2} \right) = G^i_i = - \left[\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{2 \ddot{a}}{c^2 a} \right] \quad (60.1a)$$

$$\frac{8 \pi a}{c^2} \epsilon = G^0_0 = \left[\frac{3 \dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{3 k}{a^2} \right] \quad (60.1b)$$

onde G é o tensor de Einstein.

Combinando (60.1a) e (60.1b) obtemos:

$$\frac{4 \pi a}{c^4} (3p + \epsilon) = - \frac{3 \ddot{a}}{c^2 a} \quad (60.2)$$

$$\frac{4 \pi a}{c^4} (\epsilon + p) = \frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a} a}{c^2} \quad (60.3)$$

Através dessas equações podemos formular alguns modelos para o Universo, isto é, temos o modelo do Universo estático, o qual não discutiremos aqui, e o modelo não estático, que é o de interesse em nosso trabalho.

IV.6a - O Modelo Não Estático do Universo

Dã equação (60.2) podemos de imediato concluir que: $\ddot{a} < 0$, porque a soma de $\epsilon + 3p$ dever ser positiva (não consideramos o Universo inflacionário). Podemos, então, concluir, que nesse modelo o Universo deve desacelerar.

Estamos interessados em determinar o parâmetro \underline{a} , porém temos três casos a considerar: $k = -1, 0, 1$. Examinemos os três casos.

(i) Para $k = -1$ - O Universo é espacialmente "aberto", onde a métrica de FRW pode ser escrita na forma:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - dx^2 - \sinh^2 \kappa \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right] \quad (61.1)$$

onde o tempo t é substituído pelo parâmetro η definido pela relação $c dt = a d\eta$. Substituímos também a coordenada r pelo "ângulo" κ definido por $r = a \sinh \kappa$ (neste caso). Com essas mudanças, a equação (60.1b) fica :

$$\frac{8 \pi a}{c^4} \epsilon = \frac{3}{a^4} \left(a'^2 - a^2 \right) \quad (61.2)$$

onde obtemos:

$$\eta = \pm \int da a^{-1} \left[\frac{8 \pi a}{3 c^4} \epsilon a^2 + 1 \right]^{-1/2} \quad (61.3)$$

Estamos considerando o caso em que a pressão é desprezada face à energia. No que diz respeito à radiação que ocorre no espaço podemos dizer que ela é insignificante, logo sua energia e pressão também são desprezadas. Assim, com todas as considerações feitas até o momento, podemos escrever:

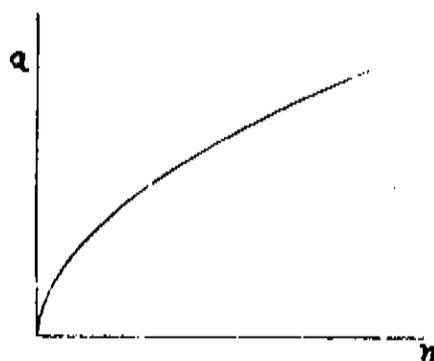
$$\epsilon = \mu c^2 \quad e \quad p = 0 \quad (61.4)$$

Substituindo (61.4) em (61.3) e calculando a integral obtemos:

$$a = k (\cosh \eta - 1) \quad , \quad t = \frac{k}{a} (\sinh \eta - \eta) \quad (61.5)$$

onde $k = 2GM / 3\pi c^2$ ($M = \mu V$ é a massa total no espaço de volume $V = 2\pi^2 a^3$).

De (61.5) temos que $a(\eta)$ cresce monotonicamente até o infinito (figura abaixo).



Quando $\eta = 0$, o fator de expansão $a(\eta)$ se anula e μ se torna infinito, então, na vizinhança de $\eta = 0$ a solução encontrada não é aplicável. Devemos assim, considerar o caso em que a pressão é máxima, e dada por :

$$p = \frac{\epsilon}{3} \text{ (apêndice II)}$$

Obtemos:

$$a = k \sinh \eta \quad , \quad t = \frac{k}{c} (\cosh \eta - 1) \quad (62.1)$$

Mesmo assim, temos ainda uma singularidade em $\eta = 0$.

Portanto, a métrica considerada nos leva a uma singularidade para o início do Universo.

(ii) Para $k = 1$ - Universo espacialmente "fechado". A métrica é dada por:

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[d\eta^2 - dx^2 - \sin^2 x \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right] \quad (62.2)$$

onde $r \equiv a \sin x$.

Dá equação (60.1b) temos:

$$\frac{8 \pi \rho}{c^4} \epsilon = \frac{3}{a^4} (a^2 + a'^2)$$

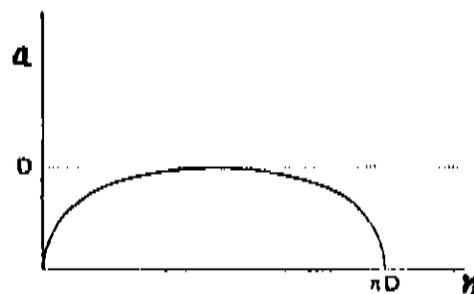
o que nos dá:

$$\eta = \pm \int da a^{-1} \left(\frac{8 \pi \rho}{3 c^4} \epsilon a^2 - 1 \right)^{-1/2} \quad (63.1)$$

Analogamente, obtemos:

$$a = k (1 - \cos \eta) \quad , \quad t = \frac{k}{c} (\eta - \text{sen} \eta) \quad (63.2)$$

Temos a equação de um cicloide para a (figura abaixo)



O Universo descrito por essa solução nos dá o que chamamos de "big - bang" (a grande explosão) - O Universo se expande até um máximo ($\eta = \pi/2$) e depois volta a contrair-se, caracterizando um Universo "fechado".

(iii) Para $k = 0$ - Neste caso o Universo é espacialmente chato (euclidiano) e seu elemento de linha ds^2 pode ser dado sob a forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (63.3)$$

(em coordenadas cartesianas). O fator $R(t)$ não altera de modo sensível o caráter euclidiano do espaço-tempo, pois, para um dado

t , esse fator é constante e pode ser transformado na unidade, por uma simples mudança das coordenadas.

IV.7 - O Estado da Evolução do Universo "Atual"

O maior problema da cosmologia nos dias de hoje é desvendar a questão da expansão do Universo, pois surge a dúvida se o mesmo um dia não irá se contrair. Esta questão só pode ser respondida observando o presente estágio do Universo e calculando sua evolução usando as equações de Einstein. Através das soluções obtidas anteriormente temos a correlação entre o presente estado e o futuro estado do Universo; que são dadas pelas condições:

(i) Expansão para sempre - Hipersuperfície de homogeneidade com curvatura espacial zero ou negativa, isto é, $k \leq 0$ (aberto ou chato).

(ii) Contração - Hipersuperfície de homogeneidade com curvatura espacial positiva, isto é, $k > 0$ (fechado).

Temos dois parâmetros exigidos para prever o futuro do Universo:

(a) O parâmetro de curvatura k e

(b) a densidade de massa nos dias de hoje para o Universo.

Portanto a tarefa em desvendar o futuro do Universo se resume em determinar os parâmetros k e μ (ou ϵ). Por motivos mais práticos esses parâmetros são substituídos por outros que são mais fáceis de serem observados. São esses:

(a) Taxa de expansão de Hubble hoje

$$H_0 \equiv \frac{\dot{a}_0}{a}$$

(b) Parâmetro desaceleração q_0 atual (adimensional).

Definido por:

$$q_0 \equiv - \frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H_0^2}$$

(c) Parâmetro densidade σ hoje (adimensional)

$$\sigma_0 \equiv \frac{4 \pi \epsilon}{3 c^2 H_0^2}$$

Vamos relacionar, através das equações de campo, os novos parâmetros com os anteriores. Das equações (60.1a) e (60.1b), obtemos:

$$\epsilon = \frac{3 c^2}{8 \pi \sigma} \left[\frac{c^2 k}{a^2} + H_0^2 \right] \quad (65.1)$$

$$p = - \frac{c^2}{8 \pi \sigma} \left[\frac{c^2 k}{a^2} + H_0^2 (1 + 2q_0) \right] \quad (65.2)$$

Portanto, da equação (65.2) temos que:

$$k = \left[\frac{8 \pi \sigma}{3 c^2} \epsilon - H_0^2 \right] \frac{a^2}{c^2} \quad (65.3)$$

Como notamos, o sinal da curvatura espacial depende do valor da densidade ϵ . Podemos obter desse modo um valor crítico para a densidade, dada por:

$$\epsilon_c = \frac{3 c^2 H_0^2}{8 \pi \sigma} \quad (65.4)$$

e ainda, como $\epsilon = \mu c^2$, onde μ é a densidade de massa podemos escrever:

$$\mu_c = \frac{3 H_0^2}{8 \pi a} \quad (66.1)$$

que é da ordem de: $\mu_c \cong 1,1 \cdot 10^{-29} \text{ g/cm}^3$ (densidade crítica).

Lembrando que estamos considerando a pressão desprezível, obtemos da equação (65.2)

$$\frac{c^2 k}{a^2} = (2q_0 - 1) H_0^2 \quad (66.2)$$

Substituindo essa em (65.1), temos:

$$\epsilon = \frac{3 c^2}{8 \pi k} 2 q_0 \quad (66.3)$$

A razão entre (66.3) e (66.1) nos dá:

$$\frac{\mu}{\mu_c} = 2 q_0 \quad (66.4)$$

o que nos permite concluir :

(i) Se $q_0 > 1/2$ - O Universo tem curvatura positiva, com $\mu > \mu_c$.

(ii) Se $q_0 < 1/2$ - Tem-se curvatura negativa, com $\mu < \mu_c$.

(iii) Se $q_0 = 1/2$ - curvatura nula, com $\mu = \mu_c$.

A princípio, o problema estaria resolvido, isto é, bastaria determinar a densidade de massa do Universo. Porém, para um leigo isso seria impossível, contudo para um cosmólogo isso não é

impossível, mas quase impossível, nos dia de hoje. Para se ter uma idéia da complexidade dessa determinação expomos aqui alguns modos de se calcular a massa de uma galáxia (lembrando-se que no Universo tem-se além de galáxias, quasares, nebulosas, supostamente buracos negros, etc.).

Tem-se três modos distintos de se obter a massa de uma galáxia, sendo que primeiramente devemos saber sua forma - Espiral ou Elíptica. A massa de uma galáxia espiral num raio de 15 Mpc pode ser determinada por uma análise dinâmica de sua velocidade de rotação como função da distância do centro da galáxia. A massa de uma galáxia elíptica pode ser calculada do teorema do virial, que dá uma massa

$$M = \frac{2 \langle v^2 \rangle}{\alpha \langle d^{-1} \rangle} \quad , \quad (67.1)$$

onde $\langle v^2 \rangle$ é a velocidade quadrática média relativa ao centro de massa e $\langle d^{-1} \rangle$ é a separação média entre estrelas. A massa total de pares de estrelas pode ser determinada estatisticamente de sua velocidade e separações relativa, sob a suposição que os pares são orientados aleatoriamente com respeito a linha de visão.

Em todo os três métodos acima, a massa da galáxia é dada pela fórmula:

$$M = \frac{\alpha V^2 D}{\alpha} \quad , \quad (67.2)$$

onde V é alguma velocidade interna característica, e D é alguma dimensão característica do objeto em estudo, e α é um número adimensional de ordem unitária, que depende do método usado

e do objeto estudado. A distância característica D é medida da correspondente dimensão angular δ e do deslocamento cosmológico z , usando

$$\delta = \frac{D}{a(t) r} \quad e$$

$$r = \frac{1}{a(t) H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right] ,$$

para $z \ll 1$ dá: $D = \frac{z \delta}{H} \quad (68.1)$

A velocidade interna V é medida diretamente da distribuição do deslocamento z em torno do valor médio z para a galáxia. É conveniente descrever a determinada massa em termos da razão massa-luminosidade absoluta L , sendo L dado em termos da luminosidade aparente l , por $l = \text{Potência} / \text{área} =$

$$= \frac{L a^2(t)}{4 \pi a^4(t) r^2} , \quad \text{onde obtemos: } L = 4 \pi l z^2 H_0^{-2} \quad (68.2)$$

Dê (67.2) e (68.1), segue que a razão M / L determinada pelos três métodos descritos acima é proporcional ao valor atribuído à constante de Hubble.

Tomando $H_0 \cong 75 \text{ Km/seg/Mpc}$, temos que a razão galáctica massa-luz M / L para galáxias elípticas é aproximadamente 50 vezes a razão solar M_\odot / L_\odot , ao passo que, para galáxias espirais estima-se que M / L alcance de 1 a 20 vezes M_\odot / L_\odot . Conforme estudos feitos [17] temos que a razão massa-luz total para todas as galáxias é de aproximadamente $21 M_\odot / L_\odot$. Como a

constante de Hubble pode bem ser diferente de 75 Km/seg/Mpc, este resultado é escrito na forma

$$\frac{M}{L} \cong 21 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} \left[\frac{H_0}{75 \text{ Km/seg/Mpc}} \right] \quad (69.1)$$

Tem-se também usado contagem de galáxias para estimar a densidade de luminosidade do Universo, a qual dá:

$$2.2 \cdot 10^{-10} L_{\odot} / \text{pc}$$

Deste modo considerando a constante de Hubble pode-se escrever

$$\mathfrak{L} \cong 2.2 \cdot 10^{-10} L_{\odot} / \text{pc} \left(H_0 / 75 \text{ Km/seg/Mpc} \right)$$

A densidade de massa galáctica do Universo pode agora ser obtida como:

$$\begin{aligned} \mu_g &= \left[\frac{\mathfrak{L}}{L_{\odot}} \right] \left[\frac{M/L}{M_{\odot}/L_{\odot}} \right] \\ &= 4.6 \cdot 10^{-9} M / \text{pc} \left[\frac{H_0}{75 \text{ Km/seg/Mpc}} \right]^2 \\ &= 3.1 \cdot 10^{-31} \text{ g} / \text{cm}^3 \left[\frac{H_0}{75 \text{ Km/seg/Mpc}} \right]^2 \end{aligned}$$

Como pode-se observar este valor é menor que a densidade crítica (66.1) por um fator

$$\frac{\mu_g}{\mu_c} \cong 0.028 \quad (69.2)$$

Consequentemente, obtém-se para o parâmetro desaceleração

$$q_0 \cong 0.014 \quad , \quad (70.1)$$

o que está em desacordo com o resultado obtido através do deslocamento z e da luminosidade ($q_0 \cong 1$) (Capêndice III).

Podemos, portanto, concluir, após esse estudo da cosmologia "hoje", que há uma dificuldade muito grande na determinação da densidade média de massa do Universo "hoje". Além, não há, no momento, nenhum modo de se estimar a matéria intergalática, buracos negros, estrelas mortas etc. O que torna imprecisa qualquer medida. O que hoje se faz de melhor é adicionar toda matéria luminosa contida nas galáxias e fixar um resultado mínimo para a densidade de massa. Mesmo assim esse método é difícil e de grande risco.

Apesar de todas as dificuldades, tem-se como "aceitável" os valores entre 10^{-27} e 10^{-31} g/cm³, para a densidade de massa. Portanto, nada podemos concluir sobre o Universo ser aberto ou fechado.

V.1 - Quebra Espontânea de Simetria em Campos

Gravitacionais [18]

Introdução.

Vimos que a quebra espontânea de simetria (Q.E.S.), através do teorema de Goldstone e do mecanismo de Higgs, tem desempenhado um papel importante nas interações entre os campos materiais (partículas). Nesses, a Q.E.S. surge devido ao termo de massa do campo, onde essa é considerada imaginária ao estudarmos a possibilidade dos campos, em questão, estarem no estado vácuo. No estudo, encontramos dois estados simétricos para o mínimo de energia dos campos, e, ao escolhermos um deles a simetria por reflexão das coordenadas do sistema é espontaneamente perdida ou quebrada. Como consequência, o termo de massa volta a ser real. Em outro caso, como já vimos (mecanismo de Higgs), os assim chamados bósons de Goldstone desaparecem e simultaneamente os campos vetoriais adquirem massa, com a Q.E.S. do sistema.

Em analogia ao teorema de Goldstone e o mecanismo de Higgs, estamos interessados em estudar a Q.E.S. tendo como um campo de fundo, para os campos materiais, o campo gravitacional. Isto é, queremos estudar a Q.E.S. quando os campos materiais interagem com o campo gravitacional. Como um resultado da Q.E.S. na presença de campo gravitacional (C.G.), obtemos que o Universo, para a métrica de FWR, não possui singularidade para $\eta = 0$.

V.2 - Formulação

Em primeiro lugar devemos construir uma lagrangeana que contenha um termo referente ao campo gravitacional, isto é, que contenha a interação gravitacional, sendo essa na versão de Einstein. Sabemos que a lagrangeana mais simples que nos dá a equação de Einstein para a gravitação é : $\mathcal{L} = \sqrt{-g} R$, onde R é o tensor contraído de Ricci - $R = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ (ou curvatura escalar). Portanto podemos concluir que o termo referente ao campo gravitacional em nossa lagrangeana deve ser proporcional a R . Sobre outro ponto de vista, vimos nos capítulos anteriores que as respectivas lagrangeanas continham somente os campos materiais, desse modo, referiam-se a um espaço chato (flat). Então, ao considerarmos agora um espaço curvo, isto é, na presença de um campo gravitacional, na versão de Einstein, devemos ter em nossa lagrangeana um termo referente a essa curvatura. - Construímos:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta} - \frac{R}{6} \Phi^* \Phi - \frac{\lambda}{6} (\Phi^* \Phi)^2 \right\} \quad (72.1)$$

(os campos Φ são considerados sem massa); onde $\Phi(x)$ são campos complexos, R é a curvatura escalar do espaço-tempo e λ é uma constante adimensional.

Notemos que essa lagrangeana é análoga a dos capítulos anteriores a menos do termo $R/6$. Nos capítulos anteriores, as respectivas lagrangeanas são invariantes perante um grupo de transformação de gauge. Em nosso caso, a lagrangeana (72.1) é

invariante sob transformação de gauge e também invariante sob o grupo conforme de transformação ($ds'^2 = \Lambda(x) ds^2$).

O termo $g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta}$ é uma soma de α, β indo de 0

até 3, onde, agora, $g^{\alpha\beta}$ é diferente de 1, para $\alpha = \beta$ (continua sendo zero para $\alpha \neq \beta$), pois estamos considerando a interação de um campo gravitacional.

O próximo passo a ser tomado é a definição da métrica que iremos trabalhar. Vimos no capítulo IV que no momento "atual" não se tem dados suficientes para concluirmos se o Universo é fechado ou aberto. Teoricamente, no estudo cosmológico, chegamos a resultados interessantes, pois através de dados observacionais — densidade de massa do Universo — poderíamos decidir se o Universo é fechado ou aberto, mas justamente são esses dados obtidos "atualmente" que não nos dão condições de decidir a natureza do Universo. Portanto, consideraremos o Universo como sendo aberto, isto é, para ser mais preciso — um modelo de Universo isotrópico, homogêneo do tipo aberto. A métrica a ser considerada será de FRW:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - dx^2 - \sinh^2 x \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi \right) \right] \quad (73.1)$$

onde $a(\eta)$ é um fator de escala do modelo e η é dado em termos do tempo próprio síncrono t por $c dt = a(\eta) d\eta$.

Da lagrangeana (72.1) obtemos, através da equação de Euler-lagrange, a equação de movimento do valor médio do campo Φ no estado vácuo.

$$\square \Phi(x) + \frac{R}{6} \Phi(x) + \frac{\lambda}{3} \Phi^*(x) \Phi^2(x) = 0 \quad (74.1)$$

onde: $\square \equiv (-g)^{-1/2} \partial_\mu \left[(-g)^{-1/2} g^{\mu\beta} \partial_\beta \right]$.

Sendo essa, uma equação invariante sob transformação conforme da métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \exp(-2\sigma) g_{\mu\nu}$ e simultaneamente sob transformação do campo $\Phi \rightarrow \Phi' = \exp(\sigma) \Phi$.

Os resultados obtidos dependem fortemente da presença do termo $(R/6)$ em (72.1) e (74.1).

Do capítulo III vimos que a Q.E.S. surge quando o sistema possui estados fundamentais degenerados e isto é caracterizado pelo valor esperado do campo no estado fundamental (vácuo) ser diferente de zero. Assim, devemos calcular o valor esperado do campo Φ no estado vácuo. Lembrando que estamos considerando o Universo homogêneo e isotrópico, podemos então escrever:

$$\langle 0 | \Phi(\eta, x) | 0 \rangle = \langle 0 | \Phi(\eta, 0) | 0 \rangle = f(\eta) = f^*(\eta) \quad (74.2)$$

o que significa invariância por translação espacial do estado vácuo. Tomando agora o valor esperado no vácuo da equação (74.1) termo a termo e usando a aproximação

$$\langle 0 | \Phi^*(x) \Phi^2(x) | 0 \rangle \cong \langle 0 | \Phi^*(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle^2, \quad (74.3)$$

que nos dá:

$$\langle 0 | \Phi^*(x) \Phi^2(x) | 0 \rangle = f^3(\eta) \quad (74.4)$$

(significa desprezar as flutuações de vácuo [19]). Obtemos:

$$f'' + 2 \frac{a'}{a} f' + \left(\frac{a''}{a} - 1 \right) f + \frac{\lambda a^2}{3} f^3 = 0 \quad (75.1)$$

onde consideramos $R = (-6/a^3)(a - a'')$. A vírgula denota derivada em relação a η .

Façamos agora uma troca de variável, onde:

$$f(\eta) = \sqrt{3/\lambda} \frac{w(\eta)}{a(\eta)} \quad (75.2)$$

Substituindo na equação (75.1) obtemos:

$$w'' - w + w^3 = 0 \quad (75.3)$$

que nada mais é que a equação de Duffing.

Sabemos que o vácuo é o estado de menor energia, logo, para conhecermos o valor esperado no vácuo do campo, devemos conhecer para qual das soluções de (75.3) teremos a menor energia. Como estamos considerando o espaço homogêneo basta conhecermos a menor densidade de energia.

O tensor momentum-energia correspondente à lagrangeana (72.1) é dado por [20]:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial \phi^*}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \phi^*}{\partial x^\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} - g_{\alpha\beta} \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} - \frac{1}{3} \left[R_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta - g_{\alpha\beta} \square \right] \phi^* \phi \quad (75.4)$$

onde ∇_α é a derivada covariante. Podemos através de (75.4) encontrar a densidade de energia e a pressão no estado vácuo. Usando, então, (74.4), (75.2) e (75.3), obtemos:

$$\epsilon(\eta) = \langle 0 | T^0_0 | 0 \rangle = \frac{3 w^2}{a^4 \lambda} \left[\frac{w'^2}{w^2} + \frac{w^2}{2} - 1 \right] \quad (76.1)$$

$$P(\eta) = \langle 0 | T^i_i | 0 \rangle = \frac{w^2}{\lambda a^4} \left[\frac{w'^2}{w^2} + \frac{w^2}{2} - 1 \right]$$

onde $i = 1, 2, 3$, não existe nenhuma soma em i .

Dá resolução da equação (75.3) (vide apêndice IV) temos que:

$$w'^2 + \frac{w^4}{2} - w^2 = -\frac{1}{2}, \text{ isto é, } w = \pm 1$$

Portanto:

$$\epsilon(\eta) = -\frac{3}{2 \lambda a^4}, \quad P(\eta) = -\frac{1}{2 \lambda a^4} \quad (76.2)$$

o que caracteriza uma quebra espontânea de simetria, pois a energia no estado de vácuo do campo Φ é diferente de zero.

Analisemos as consequências dessa quebra espontânea de simetria. Como vimos nos capítulos anteriores, alguns problemas foram contornados após a Q.E.S. -- sinal negativo da massa e partículas "ganham" massa.

Vimos que no estudo da evolução do Universo através das equações de Einstein (capítulo IV), obtivemos como resultado, para

a origem do Universo, uma singularidade, cuja interpretação física se torna difícil. O Problema de um estado singular em cosmologia se torna interessante quando estudamos efeitos quânticos nos estágios iniciais da formação do Universo. Efeitos como: polarização do vácuo, produção de partículas em campo gravitacional não estacionário e Q.E.S. de campos físicos preenchendo o Universo, nos levam a um estado inicial não singular para o Universo. Comprovemos a ausência de singularidade, no estágio inicial do Universo, através da Q.E.S. .Façamos antes algumas considerações. Primeiramente, em relatividade geral clássica, a fonte do campo gravitacional é dada pelo tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$ dos campos presentes no espaço-tempo. O campo gravitacional está relacionado ao $T_{\mu\nu}$ via equação de Einstein

$$G_{\mu\nu} = - \frac{8 \pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (77.1)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein. Em segundo, sabemos que em teoria quântica, os observáveis são descritos como operadores atuando sobre o espaço de Hilbert dos estados do sistema. Então, em teoria quântica, o tensor momentum-energia torna-se um operador. Desse modo, exigimos que o tensor de Einstein clássico seja fixado igual ao valor esperado do tensor momentum-energia no estado quântico

$$G_{\mu\nu} = - \frac{8 \pi G}{c^4} \langle T_{\mu\nu} \rangle \quad (77.2)$$

mais precisamente, a estrutura da teoria é a seguinte: Para cada

geometria clássica espaço-tempo, deve existir um operador momentum-energia para cada campo de interesse. Um espaço-tempo junto com um estado quântico do campo que satisfaz a equação (77.2) é considerado como sendo a solução desta teoria de Einstein semiclássica. Esta solução é aceitável somente se o raio de curvatura do espaço-tempo for muito maior que o comprimento de Planck ($\sim 10^{-33}$ cm) e se flutuações esperadas em $T_{\mu\nu}$ no respectivo estado forem desprezadas comparadas com $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. No limite onde o campo pode ser descrito classicamente, isto é, no caso em que se tem um grande número de partículas apropriadamente distribuídas e a criação de partículas é negligenciada, a teoria se reduziria à teoria da relatividade clássica.

Utilizando a equação (77.2) e o resultado (76.2) obtemos:

$$G^0_0 = 8 \pi \gamma \frac{3}{2 \lambda a^4} \quad (\gamma = a/c^4) \quad (78.1)$$

Dá equação (61.3) temos:

$$\eta = \pm \int da a^{-1} \left[\frac{8 \pi \gamma}{3} \epsilon a^2 + 1 \right]^{-1/2}$$

substituindo o valor obtido para ϵ (76.2) e efetuando a integral obtemos:

$$a = \vartheta \cosh \eta, \quad \text{onde } \vartheta = \left[\frac{8 \pi \gamma}{2 \lambda} \right] \quad (78.2)$$

Obtemos também $d\hat{e} c dt = a d\eta$

$$t = \frac{\vartheta}{c} \sinh \eta \quad (78.3)$$

Portanto, nesse caso, evitamos a singularidade, pois para $\eta = 0$ obtemos:

$$a = \left(\frac{8 \pi \gamma}{2 \lambda} \right) \quad (79.1)$$

e ainda, substituindo o valor de γ e assumindo $\lambda = 1$ obtemos:

$$a \cong 10^{-24} \text{ cm} \quad (79.2)$$

o que está de acordo com as considerações feitas anteriormente.

No próximo capítulo, faremos uma aplicação da teoria de bifurcação à cosmologia relativista, buscando analisar famílias de soluções da equação de Duffing em função de seus parâmetros em intervalos em que têm significado físico e observando os intervalos onde tais parâmetros são proibidos de assumir valores por serem os mesmos sem significado físico.

VI.1 - Teoria de Bifurcação [21]

Introdução.

Neste capítulo estudaremos a equação (75.1) através da teoria de bifurcação.

A teoria de bifurcação surgiu com Poincaré em 1885 [22], quando este estudava o equilíbrio de um fluido em movimento de rotação. Neste estudo duas questões foram consideradas por Poincaré: Quais as formas de equilíbrio? e Quais são as condições de estabilidade dessas formas de equilíbrio?

Poincaré considerou uma função dinâmica, de muitas variáveis, $F(x_1, \dots, x_n)$, de tal modo que o equilíbrio do sistema dependente dessa função dinâmica se dava quando a derivada primeira em cada variável fosse igual a zero, isto é:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \quad (80.1)$$

Essa equação (80.1) foi denominada; Equação de Equilíbrio, e suas origens (raízes) denominadas; Formas de Equilíbrio.

Considerando um sistema dependente de um parâmetro μ e as duas questões acima, Poincaré expressou as respectivas raízes como funções desse parâmetro, isto é:

$$x_1 = \Phi_{i1}(\mu), \quad x_2 = \Phi_{i2}(\mu), \quad \dots, \quad x_n = \Phi_{in}(\mu) \quad (80.2)$$

($i = 1, \dots, n$). Denominando (80.2) de Sequência Linear de raízes.

Para alguns valores de μ , duas ou mais raízes poderiam vir a serem iguais, isto é; $\Phi_{ij}(\mu) = \Phi_{kj}(\mu)$, $i \neq k$, $j = 1, \dots, n$, e como o hessiano (hs) é o determinante funcional das n derivadas $\frac{\partial F}{\partial x_n}$, Poincaré estabelece o teorema: (T.1) "A condição necessária e suficiente para duas ou mais raízes coincidirem é que o hessiano (hs) seja igual a zero "

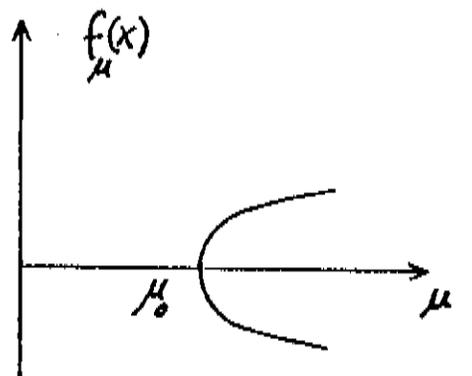
Assim de acordo com (80.2), uma raiz (forma de equilíbrio) pode ser obtida por duas ou mais sequências lineares, o que Poincaré convencionou a chamar de "Formas de Bifurcação" .

Em outras palavras, a bifurcação é a divisão das soluções de equilíbrio de uma família de equações diferenciais,

$$x' = f_{\mu}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \mu \in \mathbb{R}^k \quad (81.1)$$

dependentes de μ parâmetros k -dimensionais, onde essas soluções são determinadas resolvendo-se as equações $f_{\mu}(x) = 0$.

Quando μ varia, o teorema da função implícita [23] nos garante que as formas de equilíbrio são descritas por funções suaves de μ , longe dos respectivos pontos em que o Jacobiano de $f_{\mu}(x)$ com respeito a x tenha autovalores zero. Um gráfico de cada uma das funções nos daria um ramo das formas de equilíbrio como mostra a figura abaixo.



No ponto de equilíbrio (x_0, μ_0) onde $D_x f_\mu$ (Jacobiano) tenha autovalores nulos, vários ramos das formas de equilíbrio sairiam, caracterizando o ponto (x_0, μ_0) como um ponto de bifurcação (figura acima. Página 81)

Além da divisão das formas de equilíbrio através da variação de certos parâmetros, Poincaré, também considerou o caso em que duas formas de equilíbrio se unissem em uma só forma, e denominou a esse processo de forma limite. Desse modo, as formas de equilíbrio podem ser formas de bifurcação ou formas limites, somente quando o hessiano torna-se zero. As diferenças das duas formas vem quando as duas raízes da equação de equilíbrio tornam-se imaginárias, o que nos dá a forma limite.

Outra questão, no estudo de Poincaré, foi quanto a estabilidade, definida em termos de coeficientes de estabilidade; que são:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 F}{\partial x_m^2} \quad (82.1)$$

Para o hessiano se anular um ou mais termos deste, também devem se anular. Os termos que permanecem, se forem negativos, indicam estabilidade. Então, é necessário e suficiente que todos os termos sejam negativos para que haja estabilidade. Poincaré estabelece outro teorema: (T.2) "Para que uma forma de equilíbrio correspondente a uma sequência linear real seja uma forma de bifurcação, é necessário e suficiente não somente que o hessiano mude de sinal, mas também que alguns coeficientes de estabilidade mudem de sinal".

Poincaré, em seu trabalho [22], continua com o estudo da estabilidade, que nada mais é que um estudo da equação característica do sistema em questão, fixando os pontos de equilíbrio e suas estabilidades.

No próximo item faremos um estudo dos pontos de equilíbrio e suas estabilidades de uma equação diferencial, através de diagramas de fase.

VI.2 - Pontos de Equilíbrio, Estabilidades - Diagramas de fase [24].

Uma forma de estudar os pontos de equilíbrio da equação diferencial de 2.^a ordem

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \quad (83.1)$$

é através da aproximação linear. Este consiste primeiramente em reduzir a equação (83.1) em um sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, y) \\ \dot{y} &= Y(x, y) \end{aligned} \quad (83.2)$$

Em seguida, move-se o ponto de equilíbrio, a ser estudado para a origem, por uma translação do eixo, se for necessário é claro, de tal modo que:

$$X(0,0) = Y(0,0) = 0 \quad (83.3)$$

Apartir disso expande-se em série de Taylor as funções

$X(x,y)$ e $Y(x,y)$, isto é:

$$\begin{aligned} X(x,y) &= ax + by + P(x,y) \\ Y(x,y) &= cx + dy + Q(x,y) \end{aligned} \quad (84.1)$$

onde $P(x,y) = O(r^2)$ e $Q(x,y) = O(r^2)$, quando $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial X(0,0)}{\partial x}, & b &= \frac{\partial X(0,0)}{\partial y} \\ c &= \frac{\partial Y(0,0)}{\partial x}, & d &= \frac{\partial Y(0,0)}{\partial y} \end{aligned} \quad (84.2)$$

Assim, a aproximação linear para (83.2) nas vizinhanças da origem é definida como o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \quad (84.3)$$

A solução não trivial de (84.3) é escrita na forma

$$\begin{aligned} x &= r \exp(mt) \\ y &= s \exp(mt) \end{aligned} \quad (84.4)$$

onde, r , s , e m são constantes a serem determinadas (podem ser complexas). Substituindo (84.4) em (84.3) obtém-se:

$$\begin{aligned} (a - m)r + bs &= 0 \\ cr + (d - m)s &= 0 \end{aligned} \quad (84.5)$$

cuja solução não trivial existe se e somente se

$$\begin{vmatrix} a - m & b \\ c & d - m \end{vmatrix} = 0, \quad \text{isto é,}$$

$$m^2 - (a + d)m + (ad - bc) = 0$$

Essa equação é chamada Equação Característica e pode ser escrita na forma:

$$m^2 - pm + q = 0 \quad (85.1)$$

onde $p = a + d$ e $q = ad - bc$. Desse modo, obtém-se dois valores para m , resolvendo-se a equação (85.1). Tem-se:

$$m_1 = \frac{1}{2} \left\{ p + \sqrt{\Delta} \right\}$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \left\{ p - \sqrt{\Delta} \right\} \quad (85.2)$$

$$\text{onde } \Delta = p^2 - 4q. \quad (85.3)$$

Para o caso em que $\Delta \neq 0$ e $m_1 \neq m_2$, encontram-se possíveis soluções para r, s através da equação (84.5), de tal modo que pode-se escrever a solução geral na forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 r_1 \exp(m_1 t) + C_2 \overset{r_2}{s_2} \exp(m_2 t) \\ y(t) &= C_1 \overset{s_1}{r_1} \exp(m_1 t) + C_2 s_2 \exp(m_2 t) \end{aligned} \quad (85.4)$$

onde os C 's são constantes arbitrárias. Então, através da equação

(85.4) tem-se a relação:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{m_1 C_1 s_1 \exp(m_1 t) + m_2 C_2 s_2 \exp(m_2 t)}{m_1 C_1 r_1 \exp(m_1 t) + m_2 C_2 r_2 \exp(m_2 t)} \quad (86.1)$$

que nos permite estudar os pontos de equilíbrio no plano de fase x, y . Portanto, façamos esse estudo.

1.º Caso: $m_1, m_2 \rightarrow$ reais; $m_1 \neq m_2$ e de mesmo sinais.

Seja $m_2 < m_1 < 0$. De (86.1) temos:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{m_1 C_1 s_1 + m_2 C_2 s_2 \exp(-m_1 + m_2)t}{m_1 C_1 r_1 + m_2 C_2 r_2 \exp(-m_1 + m_2)t} \quad (86.2)$$

Para $C_1 = 0$, as soluções se aproximam da origem quando $t \rightarrow$ infinito, ao longo da linha

$$\frac{y}{x} = \frac{s_2}{r_2} \quad (\text{constante}) \quad (86.3)$$

Notemos também que a aproximação à origem se dá em duas direções opostas, isto é, existe não um caminho à origem, mas dois.

Analogamente para $C_2 = 0$, temos:

$$\frac{y}{x} = \frac{s_1}{r_1} \quad (\text{constante}) \quad (86.4)$$

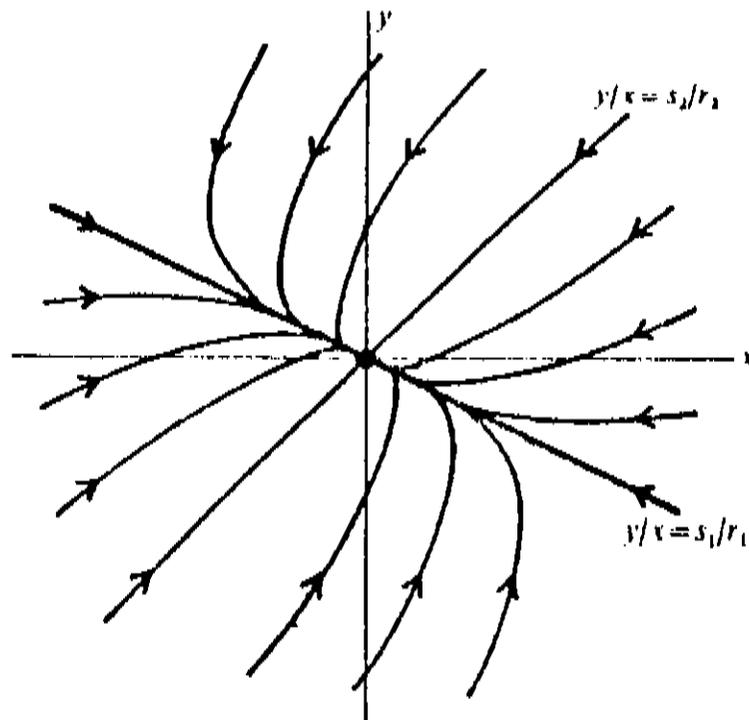
Para C_1 e $C_2 \neq 0$ os caminhos têm declives tais que, da equação (86.2) obtemos:

$$\frac{d y}{d x} \rightarrow \frac{s_2}{r_2}, \quad \text{quando } t \rightarrow \text{menos infinito}$$

e quando $t \rightarrow \text{infinito}$, x e $y \rightarrow 0$, em direções tais que:

$$\frac{d y}{d x} \rightarrow \frac{s_1}{r_1} \quad (87.1)$$

Portanto, para $t \rightarrow \text{menos infinito}$ as soluções são paralelas a linha (86.3) e para $t \rightarrow \text{infinito}$ são tangenciais a (86.4). O ponto de equilíbrio em $x = y = 0$ é chamado Nó (figura abaixo). Este ponto é estável para o caso em questão, isto é, m_2 e m_1 negativos, e instável se forem positivos, sendo que a figura é a mesma, mudando somente o sentido dos caminhos.



Este caso ocorre quando:

$$\Delta > 0 \quad , \quad q > 0$$

e

$$p < 0 \quad \rightarrow \quad \text{nó estável}$$

$$p > 0 \quad \rightarrow \quad \text{nó instável}$$

(87.2)

Para o caso em que um dos m 's é zero, obteríamos $dy / dx = \text{constante}$ para toda solução, o que nos daria uma

família de linhas retas.

2.º Caso: m_1 , m_2 reais, com sinais diferentes.

Seja: $m_1 > 0$ e $m_2 < 0$.

De (85.4), temos que, somente a solução para $C_1 = 0$ se aproxima da origem quando $t \rightarrow$ infinito, ao longo da linha

$$\frac{y}{x} = \frac{s_2}{r_2}, \text{ (constante)} \quad (88.1)$$

Para $C_2 = 0$ temos: $\frac{y}{x} = \frac{s_1}{r_1}$, (constante) (88.2)

onde os pontos se afastam da origem para o infinito quando

$t \rightarrow$ infinito. Agora, da equação (86.2) temos:

$$\frac{d y}{d x} \rightarrow \frac{s_1}{r_1}, \text{ quando } t \rightarrow \text{ infinito, isto é,}$$

aproxima-se da linha reta (88.2), e

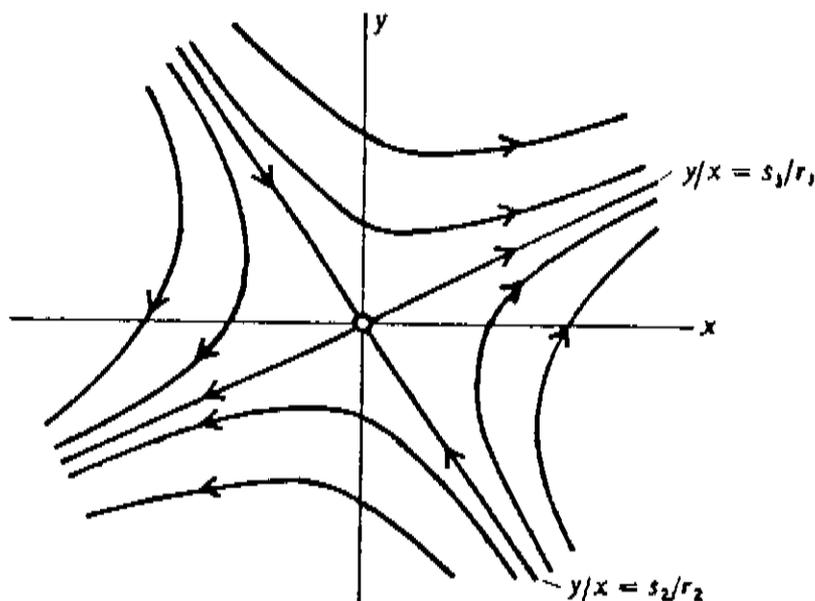
$$\frac{d y}{d x} \rightarrow \frac{s_2}{r_2}, \text{ quando } t \rightarrow \text{ menos infinito,}$$

isto é, afasta-se da linha reta (88.1).

As retas (88.1) e (88.2) são assintóticas para as outras soluções e são chamadas separatrizes. O ponto de equilíbrio é um ponto de Cela, que é sempre instável (figura abaixo. Página 89).

A condição para esse caso é:

$$\Delta > 0, \quad q < 0 \quad (88.3)$$



3.º Caso: m_1 , m_2 complexos, com as partes reais diferentes de zero.

Seja: $m_1 = m_2^*$, $r_1 = r_2^*$, $s_1 = s_2^*$ e $C_1 = C_2^*$, de modo que (85.4) nos dê soluções reais. Façamos também $m_1 = m_2^* = \alpha + i\beta$ onde α e β são reais. Temos, assim:

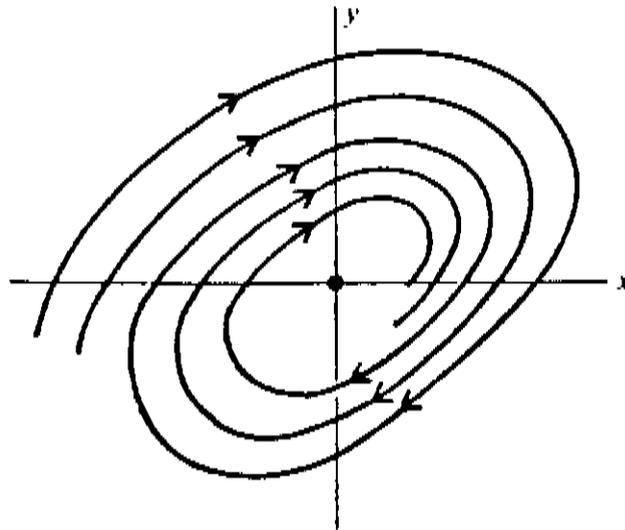
$$x = C \exp(\alpha t) \cos(\beta t + \gamma)$$

$$y = C k \exp(\alpha t) \cos(\beta t + \gamma + \kappa) \quad (89.1)$$

onde C e γ são constantes arbitrárias e k e κ são constantes dependendo somente sobre os coeficientes do sistema. Como o parâmetro $\beta t + \gamma$ representa uma translação da origem da coordenada tempo, a família de curvas sobre o plano de fase é essencialmente uni-paramétrico. Assim sendo, o diagrama de fase consiste em espirais se contraindo na vizinhança da origem de modo a se aproximarem da origem quando $\alpha < 0$ e expandirem quando

$\alpha > 0$.

Portanto, o ponto de equilíbrio é chamado de Espiral (figura abaixo) e é estável se $\text{Re}(m_1) < 0$ e instável se $\text{Re}(m_1) > 0$



As condições sobre p, q , e Δ para ser espiral são:

$$\Delta < 0$$

$$p < 0 \rightarrow \text{estável}$$

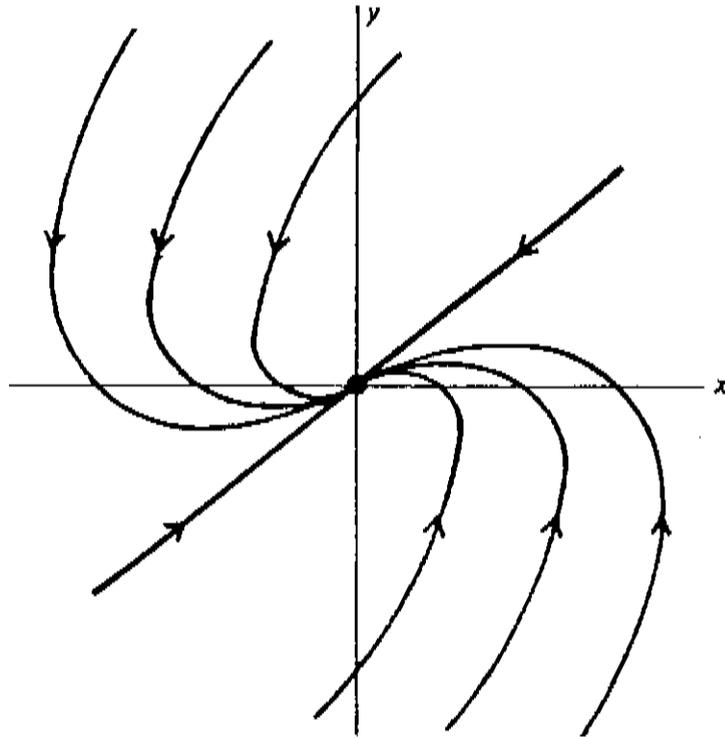
$$p > 0 \rightarrow \text{instável} \quad (90.1)$$

4.º Caso: $m_1 = m_2$ reais.

Seja $m_1 = m_2 < 0$.

Este caso, de certa forma, é análogo ao caso 1.º, porque, quando m_1 é muito próximo de m_2 as soluções r_1, s_1 e r_2, s_2 respectivamente obtida de (84.5), são aproximadamente as mesmas. Assim, na análise do ponto de equilíbrio nó do 1.º caso vimos que todos os caminhos são tangenciais a linha $y / x = s_1 / r_1$ na

origem e paralelas a linha $y/x = s_2/r_2$ no infinito, o que nos permite, desse modo, determinar no presente caso o ponto de equilíbrio, isto é, neste caso as linhas $y/x = s_1/r_1$ e $y/x = s_2/r_2$ tornam-se coíncidentes (figura abaixo).



Este ponto de equilíbrio é chamado Nó Torcido e as condições para que esse tipo de ponto ocorra são:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ p < 0 & \rightarrow \text{estável} \\ p > 0 & \rightarrow \text{instável} \end{aligned} \quad (91.1)$$

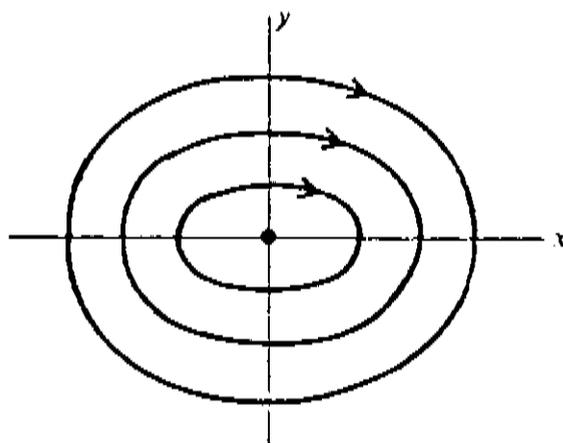
5.º Caso: m_1 e m_2 imaginários puros.

Seja: $m_1 = i\beta$, $m_2 = -i\beta$, sendo β real.

Como no caso do ponto de equilíbrio espiral, encontramos neste caso

$$\begin{aligned} x &= C \cos(\beta t + \gamma) \\ y &= C k \cos(\beta t + \gamma + \pi) \end{aligned} \quad (91.2)$$

onde C e γ são arbitrários. Estes representam curvas fechadas em torno da origem. O ponto de equilíbrio é um Centro e os caminhos são elipses (figura abaixo).



As condições são:

$$p = 0$$

$$q > 0 .$$

(92.1)

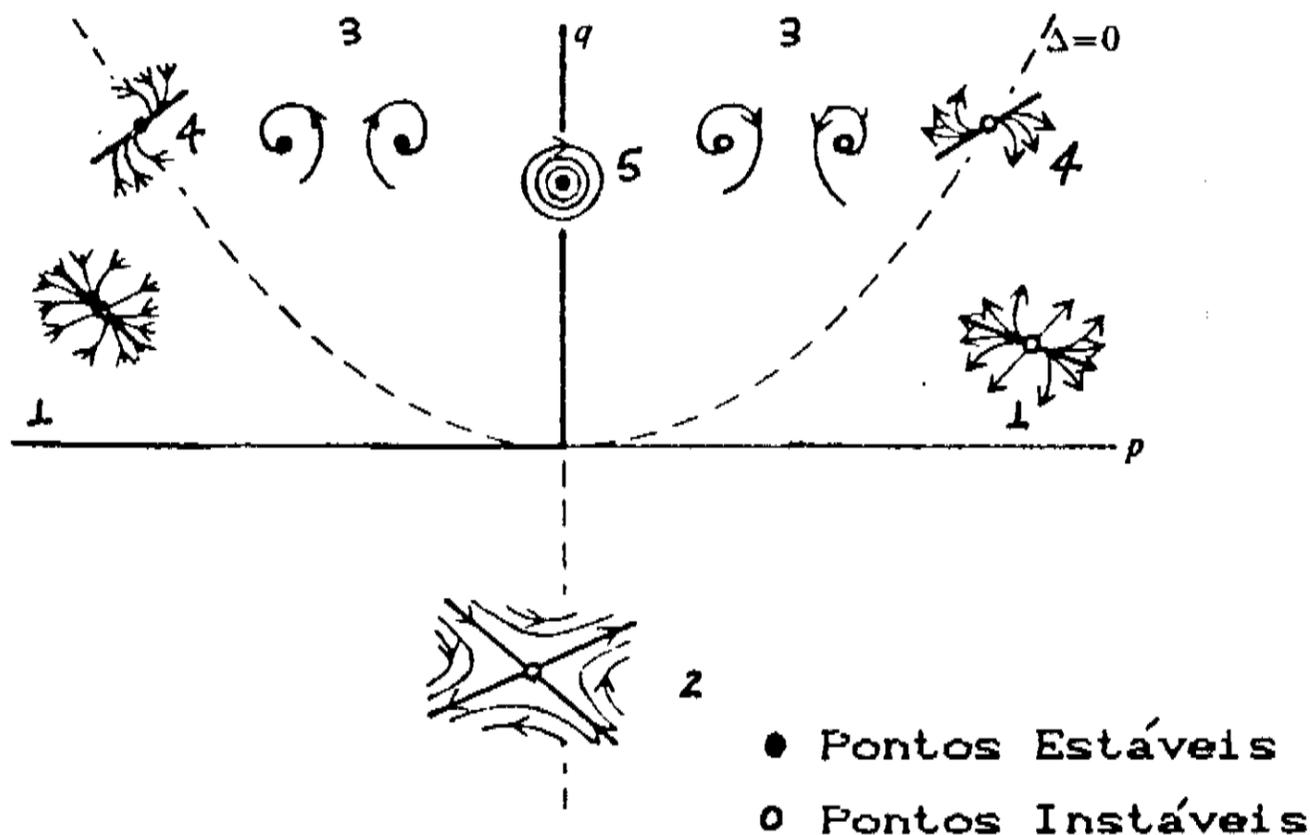
Resumo do Estudo feito Acima.

<u>Condições</u>	<u>Ponto de Equilíbrio</u>
1.º) m_1, m_2 reais, diferentes e de mesmo sinal. Com $\Delta > 0$ e $q > 0$	Nó
2.º) m_1, m_2 reais, sinais diferentes. Com $\Delta > 0$ e $q < 0$	Cela
3.º) m_1, m_2 complexos com partes reais diferentes de zero. Com $\Delta < 0$ e $p \neq 0$	Espiral
4.º) $m_1 = m_2$, reais, com $b \neq 0$, $c \neq 0$ e ainda com $\Delta = 0$, $p \neq 0$	Nó Torcido

5.º) m_1, m_2 imaginários puros.

Com $q > 0$ e $p = 0$

Centro



Observação: Ao classificarmos os pontos de equilíbrio através da linearização das equações, tomamos que os caminhos de fase da equação original e da equação linearizada, próximo ao ponto de equilíbrio, são do mesmo carácter. Em geral isto é verdade para pontos espirais, nós e celas, mas não para centros. Porém, num estudo posterior veremos que esse tipo de ponto de equilíbrio, centro, devido as suas condições, não nos interessa.

Para um estudo mais detalhado sobre pontos de equilíbrio e sua estabilidade sugerimos a referência [25].

VI.3 - Equação de Duffing [26]

Estamos particularmente interessados nesta equação, porque nada mais é que a equação (75.1), com termos próprios.

Duffing, em 1918, introduziu um oscilador não linear com um

termo de amortecimento cúbico para descrever os efeitos de saltos do amortecimento, observados em muitos sistemas mecânicos. A equação para esse oscilador pode ser escrita na forma:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - \beta x + \alpha x^3 = 0,$$

sem um termo forçado e com o termo linear de rigidez negativo. Os parâmetros δ , β , α , são, no momento, somente parâmetros constantes.

VI.4 - Estudo das Formas de Equilíbrio para a Equação de Duffing .

Utilizamos, na determinação dessas formas de equilíbrio, o procedimento apresentado na seção VI.2 .

Apresentamos esse estudo de uma forma esquemática.

(i) Equação de Duffing - $f'' + \delta f' - \beta f + \alpha f^3 = 0$ (94.1)

(ii) Sistema de Equação diferenciais -

$$\begin{cases} f' = y \\ y' = \beta f - \alpha f^3 - \delta y \end{cases} \quad (94.2)$$

(iii) Formas de Equilíbrio -

$$\begin{cases} y = 0 \\ \beta f - \alpha f^3 - \delta y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad (94.3)$$

$$\rightarrow \beta f - \alpha f^3 = 0, \text{ para qualquer } \delta .$$

Temos, então: $(f, y) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} (0, 0) \\ (\sqrt{\beta/\alpha}, 0) \\ (-\sqrt{\beta/\alpha}, 0) \end{cases} \quad (94.4)$$

(iv) Hessiano -

$$hs = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ (\beta - 3\alpha f^2) & -\delta \end{vmatrix}$$

$$hs = 3\alpha f^2 - \beta - \delta \quad (95.1)$$

(v) Estabilidade. As equações (94.3) linearizadas em (0,0) são:

$$\begin{cases} f' = y \\ y' = \beta f - \delta y \end{cases} \quad (95.2)$$

Equação Característica:

$$\begin{vmatrix} -m & 1 \\ \beta & -\delta - m \end{vmatrix} = 0 \quad +$$
$$\rightarrow m^2 + m\delta - \beta = 0 \quad (95.3)$$

Solução:

$$m_1 = \frac{1}{2} \left\{ -\delta + \sqrt{\Delta_1} \right\}$$
$$m_2 = \frac{1}{2} \left\{ -\delta - \sqrt{\Delta_1} \right\} \quad (95.4)$$

$$\text{Com } \Delta_1 = \delta^2 + 4\beta \quad (95.5)$$

a) Análise das possíveis estabilidades que o ponto (0,0) pode tomar.

1.º Caso: m_1, m_2 diferentes, reais e de mesmos sinais.

Se $\Delta_1 > 0$ e $\beta < 0$	→	Nó
Com: $\delta > 0$	→	estável
$\delta < 0$	→	instável

2.º Caso: m_1, m_2 , reais com sinais diferentes.

$$(m_1 > 0 \text{ e } m_2 < 0)$$

$$\text{Se } \Delta_1 > 0 \text{ e } \beta > 0 \quad \rightarrow \quad \text{Cela}$$

Sempre instável.

3.º Caso: m_1, m_2 , complexos.

Se $\Delta_1 < 0$		→	Espiral
Com:	$\delta > 0$	→	estável
	$\delta < 0$	→	instável

4.º Caso: $m_1 = m_2$ reais.

Se $\Delta_1 = 0$		→	Nó Curvado
Com:	$\delta > 0$	→	estável
	$\delta < 0$	→	instável

5.º Caso: m_1, m_2 imaginários puros.

Se $\delta = 0$ e $\beta < 0$ → Centro

Sempre estável.

b) Estabilidade que o ponto $(\sqrt{\beta/\alpha}, 0)$ pode tomar

As equações linearizadas nesse caso são:

$$\begin{cases} n' = y \\ y' = -2\beta n - \delta y \end{cases} \quad (96.1)$$

onde $n = f - \sqrt{\beta/\alpha}$. (96.2)

Equação característica: $m^2 + m\delta + 2\beta = 0$ (96.3)

Solução:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} \left\{ -\delta + \sqrt{\Delta_2} \right\} \\ m_2 &= \frac{1}{2} \left\{ -\delta - \sqrt{\Delta_2} \right\} \end{aligned} \quad (96.4)$$

Com $\Delta_2 = \delta^2 - 8\beta$ (96.5)

1.º Caso: m_1, m_2 diferentes, reais e de mesmos sinais.

Se $\Delta_2 > 0$ e $\beta > 0$		→	Nó
Com:	$\delta > 0$	→	estável
	$\delta < 0$	→	instável

2.º Caso: m_1, m_2 reais com sinais diferentes

Se $\Delta_2 > 0$ e $\beta < 0$ → Cela

Sempre instável.

3.º Caso: m_1, m_2 complexos.

Se $\Delta_2 < 0$ → Espiral

Com: $\delta > 0$ → estável

$\delta < 0$ → instável

4.º Caso: m_1, m_2 reais.

Se $\Delta_2 = 0$ → Nó Curvado

$\delta > 0$ → estável

$\delta < 0$ → instável

5.º Caso: m_1, m_2 imaginários puros

Se $\delta = 0$ e $\beta > 0$ → Centro

Sempre Estável.

VI.5 - Bifurcação

De acordo com o que vimos anteriormente, a bifurcação de um sistema ocorre quando o hessiano (hs) se anula e o número de raízes varia. Assim, as formas de equilíbrio (94.4) serão formas bifurcadas se:

$$hs = 0 \quad e \quad \beta > 0 \quad , \quad (97.1)$$

o que é fácil de verificar, pois $hs = 0$ nada mais é que o teorema 1 e $\beta > 0$ nos dá a condição para que o número de raízes varie (estamos considerando somente raízes reais, pois tratamos com um sistema físico). Resumindo, temos:

Para $\beta < 0$ + somente um ponto de equilíbrio - (0,0)

Para $\beta > 0$ + três pontos de equilíbrio - (94.4).

VI.6 - Análise Cosmológica

Primeiramente, fazemos um paralelo da equação (94.1) com a equação (75.1). Temos:

$$f'' + \delta f' - \beta f + \alpha f^3 = 0, \text{ equação (94.1).}$$

$$f'' + \left[2 \frac{a'}{a} \right] f' + \left[\frac{a''}{a} \right] f + \left[\frac{\lambda a^2}{3} \right] f^3 = 0,$$

equação (75.1). Portanto, utilizando também as definições do capítulo IV, podemos escrever:

$$\delta = 2 \frac{a'}{a} = 2 \frac{a_0}{c^2} H_0$$

$$\beta = \left[1 - \frac{a''}{a} \right] = \left[1 + q_0 \frac{H_0^2 a_0^2}{c^2} \right] \quad (98.1)$$

$$\alpha = \frac{\lambda a^2}{3}$$

Através das condições para se determinar os pontos de equilíbrio, suas estabilidades e as formas bifurcadas, e ainda, as relações (98.1), verificaremos os aspectos cosmológicos intrínsecos à nossa análise, numa tentativa de se obter resultados não só que comprovem o método de se estudar campos escalares num campo gravitacional, como obter resultados sobre a evolução do Universo.

Novamente, em forma esquemática apresentamos nossa análise. Antes de apresentarmos a análise fazemos algumas considerações:

1.º Das equações (60.2) e (60.3) obtemos:

$$H_0^2 = \frac{8 \pi a}{3} \mu - k - \frac{c^2}{a_0^2} \quad (99.1)$$

2.º Da definição do parâmetro desaceleração (pag.65) e das equações (60.2) e (99.1) obtemos:

$$q_0 = \frac{\frac{4 \pi a}{3} \mu}{\frac{8 \pi a}{3} \mu - k - \frac{c^2}{a_0^2}} \quad (99.2)$$

Podemos dessa equação isolar o parâmetro k , como função de q_0 , que é a forma que nos interessa. Assim, temos:

$$k = \frac{4 \pi a}{3} \mu \frac{a_0^2}{c^2} \left[2 - \frac{1}{q_0} \right] \quad (99.3)$$

Façamos, agora nossa análise.

(I) - Para o ponto (0,0) (pag.95).

$$1.º \text{ Caso: } \Delta_1 = \delta^2 + 4\beta > 0 \quad \rightarrow \quad q_0 > - \frac{c^2 H_0^{-2}}{a_0^2}$$

$$e \quad \beta < 0 \quad \rightarrow \quad q_0 < - \frac{c^2 H_0^{-2}}{a_0^2}$$

Como podemos ver essas condições são incompatíveis, logo não iremos considerá-las.

Para facilitar faremos $\frac{c H^{-1}}{a_0} = \psi$.

$$2.º \text{ Caso:} \quad \rightarrow \quad q_0 > - \psi^2$$

Neste caso podemos ter, através da equação (99.3), k negativo, zero ou positivo, pois q_0 pode assumir de acordo com esse caso valores positivos, negativos e ser igual a meio. Porém, devemos

lembrar que uma das condições assumidas e que nos leva a equação (75.1), é que o Universo seja aberto, isto é, $k < 0$. Portanto, a condição acima para q_0 está dentro das condições assumidas anteriormente.

$$3^{\circ} \text{ Caso:} \quad \rightarrow \quad q_0 < -\psi^2$$

Não está de acordo com as condições assumidas anteriormente, quanto ao Universo.

$$4^{\circ} \text{ Caso:} \quad \rightarrow \quad q_0 = -\psi^2$$

Antes de analisarmos esse ponto faremos, mais adiante, uma análise das dimensões de ψ^2 .

$$5^{\circ} \text{ Caso:} \quad \begin{aligned} \rightarrow \quad \delta &= 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad H_0 &= 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad q_0 &< -\psi^2 \end{aligned}$$

Idem ao terceiro caso.

(II) - Para o ponto $(\sqrt{\beta/\alpha}, 0)$ (pag. 96).

$$1^{\circ} \text{ Caso:} \quad \begin{aligned} \rightarrow \quad q_0 &< -2\psi^2 \\ \rightarrow \quad q_0 &> -\psi^2 \end{aligned}$$

Incompatíveis.

$$2^{\circ} \text{ Caso:} \quad \begin{aligned} \rightarrow \quad q_0 &< -2\psi^2 \\ \rightarrow \quad q_0 &< -\psi^2 \end{aligned}$$

Não está de acordo com as condições assumidas para o Universo.

$$3^{\circ} \text{ Caso:} \quad \rightarrow \quad q_0 > -2\psi^2$$

Está de acordo com o nosso problema - Universo aberto -, pois, podemos considerar os valores para os quais nos dê $k < 0$.

$$4.^{\circ} \text{ Caso:} \quad \rightarrow \quad q_0 = -2\psi^2$$

Antes de analisarmos esse ponto faremos, mais adiante, uma análise das dimensões de ψ^2 .

$$5.^{\circ} \text{ Caso:} \quad \rightarrow \quad H_0 = 0 \quad e$$

$$\rightarrow \quad q_0 > -\psi^2$$

Idem ao segundo caso.

Feito o estudo cosmológico dos pontos de equilíbrio, vejamos agora as condições de Bifurcação: $hs = 0$ e $\beta > 0$.

$$-\beta - \delta = 0 \quad \rightarrow \quad q_0 = -\psi^2$$

$$e \quad \beta > 0 \quad \rightarrow \quad q_0 > -\psi^2$$

Antes de qualquer conclusão devemos determinar a dimensão desse fator ψ^2 . Primeiramente consideremos:

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$H_0^{-1} = 18 \times 10^9 \text{ anos} \cong 10^{17} \text{ s}$$

$$a_0 \cong 10^{41} \text{ anos-luz} \cong 10^{26} \text{ m} \quad [27]$$

Temos, então: $\psi^2 \cong 0,03$ (adimensional).

Como podemos ver esse fator é bem próximo de zero. Se levarmos em conta somente as condições que nos dão $q_0 > -0,03$ (pois são as únicas que estão de acordo com as condições assumidas para o Universo) e que o parâmetro q_0 não pode ser zero e, a princípio, negativo, isso nos leva a considerar, de acordo com o nosso problema, um parâmetro q_0 entre 0 e $1/2$.

Esse intervalo vai até meio pelas condições assumidas na

determinação da equação (75.1), isto é, um Universo Aberto.

Chegamos assim, de certa forma, aos resultados previstos pela cosmologia, lembrando que esses resultados devem ser vistos com certo cuidado, pois mesmos com as técnicas mais avançadas nos dias de hoje as ordens de grandezas de certos parâmetros, esses que nos permitem determinar q_0 , como distância, luminosidade, densidade de matéria, constante de Hubble e deslocamento espectral, são cercados de muitas dificuldades e imprecisões. Com isso, dentro dessas imprecisões, podemos concluir para o ponto $(0,0)$, de acordo com as condições cosmológicas, que esse vem a ser um ponto de equilíbrio denominado cela (2.º Caso), lembrando que esse é sempre instável (de acordo com as dimensões de ψ^2 abandonamos o 4.º Caso). Para o ponto $(\sqrt{\beta/\alpha}, 0)$ temos somente a considerar o 3.º Caso, que nos dá um ponto de equilíbrio denominado espiral e a condição de estabilidade é que $H_0 > 0$, o que está de acordo.

Para as condições de bifurcação, essas se apresentam em concordância, isto é, dentro das condições, do estado do Universo, assumidas em nosso problema.

CONCLUSÃO

Conforme ilustrado neste trabalho, a teoria de bifurcação, de certo modo, é válida não só para fornecer uma análise qualitativa dos resultados, mas também, dentro de certos critérios, nos fornecer resultados quantitativos.

Em nosso caso os parâmetros, que a princípio pela teoria de bifurcação seriam constantes, podem ser encarados como sujeitos a variações. Essas variações podem ser entendidas de dois modos: Primeiro, os valores obtidos para os parâmetros em questão (constante de Hubble e parâmetro desaceleração), através de dados observacionais, não são precisos, e, como visto no capítulo IV, mesmo os valores limites também não são muito bem determinados. Ainda, pela teoria temos alguns valores limites para o parâmetro desaceleração, os quais foram usados na interpretação de um dos pontos de equilíbrio. Em segundo, podemos entender essa variação como a variação que esses parâmetros sofrem no transcorrer do tempo, porém essa é lenta e não é a considerada por nós.

Outro aspecto importante do trabalho é o fato do mecanismo de Q.E.S., de grande importância em física de partículas elementares, ser usado levando em conta a interação gravitacional, o que nos permitiu estudar a evolução do Universo.

Os dados obtidos em nosso estudo através da teoria de bifurcação, são bastante interessantes ao nosso ver. Em termos qualitativos, os resultados estão de acordo com as suposições

feitas no estudo de Q.E.S. em campos gravitacionais - Universo em expansão. Em termos quantitativos, pode-se, de certa forma, considerar os resultados dentro dos limites impostos pela própria teoria (capítulo IV), isto é, o parâmetro desaceleração está dentro do limite de: $0 < q < 1/2$, para o caso do Universo em expansão.

Concluimos também que os resultados para $w = \pm 1$ (p.76) no estudo de Q.E.S. em C.G., são frutos de uma bifurcação, o que nos permite questionar a possibilidade desse resultado ser outro, se considerarmos outra situação para o Universo. Além disso, para esse resultado, $w = \pm 1$, obtivemos uma energia para o campo escalar Φ no estado fundamental, diferente de zero, o que caracteriza uma Q.E.S.. Porém, pela teoria de bifurcação, como vimos, esse resultado é válido somente quando o parâmetro β é positivo, o que nos leva a questionar a possibilidade dele ser negativo, em termos cosmológicos. Essa possibilidade acarretaria em uma energia para o campo Φ igual a zero, no estado fundamental, e com isso não teríamos uma Q.E.S.. No entanto, para isso ocorrer, o parâmetro desaceleração q_0 deve ser negativo, o que caracteriza um Universo em contração. Este resultado deve ser visto com certa cautela, pois todo nosso desenvolvimento foi feito para um Universo em expansão.

A análise feita aqui pode ser estendida a outros modelos cosmológicos correspondentes a outras métricas e mesmo a aplicações ao Universo super-primordial no qual podemos estudar a transições de fase de um modelo de Brans-Dike a um modelo de FRW.

Relação entre os Símbolos de Christoffel e o Tensor

Métrico.

Primeiramente mostremos que a derivada covariante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é nula.

Pelo cálculo tensorial podemos escrever:

$$\nabla_{\lambda} A_{\mu} = g_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} A^{\nu} \quad e \quad (105.1)$$

ainda: $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$. Assim temos:

$$\nabla_{\lambda} A_{\mu} = \nabla_{\lambda} \left[g_{\mu\nu} A^{\nu} \right] = g_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} A^{\nu} + A^{\nu} \nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} \quad (105.2)$$

Comparando com a expressão acima e sabendo que o vetor A^{μ} é arbitrário, temos, finalmente:

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0 \quad (105.3)$$

Vimos que a derivada covariante de um tensor de segunda ordem é:

$$\nabla_{\lambda} A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} A_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} A_{\mu\sigma} \quad (105.4)$$

Logo temos para o tensor métrico $g_{\mu\nu}$:

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma_{\nu,\mu\lambda} - \Gamma_{\mu,\nu\lambda} = 0 \quad (105.5)$$

O que nos permite escrever as derivadas dos $g_{\mu\nu}$ por meios dos símbolos de Christoffel. Escrevamos essas derivadas, permutando os índices μ, ν, λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \Gamma_{\nu,\mu\lambda} + \Gamma_{\mu,\nu\lambda} \\ \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} &= \Gamma_{\mu,\nu\lambda} + \Gamma_{\lambda,\mu\nu} \\ \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} &= \Gamma_{\lambda,\nu\mu} + \Gamma_{\nu,\lambda\mu} \end{aligned} \quad (106.1)$$

Somando essas equações, obtemos, finalmente:

$$\Gamma_{\mu,\nu\lambda} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \right] \quad (106.2)$$

Pressão Máxima: $p = \epsilon / 3$

O tensor momentum-energia de um sistema de partículas que não interagem é:

$$T_{\mu}^{\nu} = m c \frac{d x_{\mu}}{d s} \frac{d x^{\nu}}{d t} = m c u_{\mu} u^{\nu} \frac{d s}{d t} \quad (107.1)$$

Como o sistema possui várias partículas é conveniente descrever a distribuição das massa no espaço por meio da "densidade de massa", do mesmo modo como se descreve a distribuição de cargas pontuais por meio de sua densidade. Temos:

$$m = \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (107.2)$$

onde \vec{r}_i é o raio vetor da partícula correspondente e a soma é estendida a todas as partículas do sistema. Assim T_{μ}^{ν} fica:

$$T_{\mu}^{\nu} = \sum_i m_i c \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) u_{\mu} u^{\nu} \frac{d s}{d t} \quad (107.3)$$

Sabendo-se que a soma dos termos diagonais do tensor momentum-energia do campo eletromagnético é igual a zero, a soma T_{μ}^{μ} para todo sistema de partículas que se interagem se reduz ao traço do tensor momentum-energia que corresponde exclusivamente às partículas. Segue-se, então, que para todo sistema

$$T_{\mu}^{\mu} \leq 0 \quad (107.4)$$

pois:

$$T_{\mu}^{\mu} = - \sum_i m_i c^2 \left(1 - v_i^2 / c^2 \right)^{1/2} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) .$$

A igualdade só ocorre para um campo eletromagnético sem carga.

Dá expressão para o tensor momentum-energia dada na página 59

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu}$$

o qual pode escrito na forma:

$$T_{\mu}^{\nu} = (\epsilon + p) u_{\mu} u^{\nu} + p \delta_{\mu}^{\nu} \quad (108.1)$$

temos que:

$$T_{\mu}^{\mu} = -\epsilon + 3p \quad (108.2)$$

O que nos permite concluir, com a ajuda de 107.3) , que para a pressão e a densidade de um campo macroscópico, temos a desigualdade:

$$p < \frac{\epsilon}{3} \quad (108.3)$$

Permitindo-nos, assim, considerar a pressão máxima como: $p = \frac{\epsilon}{3}$.

Parâmetro Desaceleração, q_0 , Obtido por Deslocamento z
versus Luminosidade.

O melhor modo de se obter informações sobre o parâmetro desaceleração q_0 é comparando a magnitude aparente das galáxias com seu red shift (deslocamento para o vermelho).

Em astronomia define-se magnitude aparente, m , e magnitude absoluta, M , de um objeto, pelas fórmulas, respectivamente:

$$m_2 - m_1 = 2.5 \log (l_1 / l_2)$$

$$m - M = 5 \log (D / 10) \quad (109.1)$$

onde l é a luminosidade aparente e D é a distância do objeto ao ponto de observação.

A Luminosidade aparente é dada pela expressão:

$$l = \frac{L}{4 \pi c (t_0 - t_*)} \left[1 - \frac{3 \dot{a}(t_0)}{a(t_0)} (t_0 - t_*) + \dots \right] \quad (109.2)$$

onde L é a luminosidade absoluta.

Considerando a equação (58.3), escrita em termos da constante de Hubble e o parâmetro desaceleração, podemos escrever a equação (109.2) na forma:

$$l = \frac{L^2 H_0}{4 \pi c^2 z^2} [1 + (q_0 - 1) z + \dots] \quad (109.3)$$

Relacionando, assim, duas grandezas observáveis, luminosidade e red shift. (deslocamento para o vermelho).

Portanto o procedimento para se determinar o parâmetro q_0 , pela expressão (109.3) é o seguinte: Primeiramente escolhe-se uma galáxia próxima, de modo a se conhecer sua luminosidade absoluta L , com uma certa precisão. Conhecido L , para galáxias próximas o bastante a nos permitir desprezar o termo $(q_0 - 1)z$, podemos encontrar H_0 . Então, assumindo que todas as galáxias têm a mesma luminosidade absoluta, L , podemos estender o método para grandes distâncias, e assim obter o parâmetro desaceleração q_0 . Desse modo, chega-se ao resultado: $q_0 = 1 \pm 1$.

Resolução da Equação: $w'' - w + w^3 = 0$ (Equação de Duffing).

$$\text{Façamos, primeiramente, } w' = \frac{d w}{d \eta} = F. \quad (111.1)$$

$$\text{Então: } \frac{d F}{d \eta} = w - w^3 \quad (111.2)$$

$$\text{Dê (111.1) e (111.2) obtemos: } \frac{d F}{d w} = \frac{w - w^3}{F} \quad (111.3)$$

Efetuada a integração obtemos:

$$F^2 + \frac{1}{2} w^4 - w^2 = C \quad (111.4)$$

onde C é a constante arbitrária de integração. Podemos ainda escrever:

$$w'^2 + \frac{1}{2} w^4 - w^2 = C \quad (111.5)$$

Dá equação (111.5) podemos verificar que a solução será uma família de caminhos fechados, onde a constante de integração C representa o nível de "energia" para uma dada trajetória.

Valendo-nos do resultado obtido do valor esperado no vácuo do tensor momentum-energia:

$$\epsilon(\eta) = \langle 0 | T_0^0 | 0 \rangle = \frac{3}{\lambda a^4} \left[-w^2 + \frac{w^4}{2} + w'^2 \right]$$

e ainda, escrevendo esse resultado, utilizando a equação (111.5), na forma:

$$\epsilon(\eta) = \frac{3C}{\lambda a^4}$$

podemos, portanto, determinar o valor de C . Lembrando que estamos interessados no menor valor de $\epsilon(\eta)$, o que significa encontrar o valor de C , para o qual a equação (111.5) nos dê um caminho fechado mais próximo à origem. Desse modo, devemos resolver a equação (111.5) para o caso em que $F^2 = 0$ e daí determinar o menor valor possível para C . Temos então:

$$\frac{w^4}{2} - w^2 - C = 0 \quad (112.1)$$

Fazendo $w^2 = \eta$ e extraíndo as respectivas raízes, obtemos:

$$\begin{aligned} w_1 &= \pm \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2C}} \\ w_2 &= \pm \sqrt{1 - \sqrt{1 + 2C}} \end{aligned} \quad (112.2)$$

O menor valor para C é determinado analisando-se as quatro raízes, isto é, o valor possível (real) que elas podem tomar.

Façamos:

$$\begin{aligned} w_1 &= \pm \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2C}} & + & 1 + 2C \geq 0 & \Rightarrow & C \geq -1/2 \\ w_2 &= \pm \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2C}} & + & 1 + 2C \geq 0 & \Rightarrow & C \geq -1/2 \\ w_2 &= \pm \sqrt{1 - \sqrt{1 + 2C}} & + & \begin{cases} 1 + 2C \geq 0 \\ \sqrt{1 + 2C} \leq 1 \end{cases} & , & \text{dessas, obtemos} \end{aligned} \quad (112.3)$$

$$I) \quad C \geq -1/2$$

$$II) \quad 1 + 2C \leq 1 \quad \Rightarrow \quad C \leq 0$$

Podemos assim concluir, que o menor valor possível (para raízes reais) para C é $-1/2$.

Outro modo, mais rigoroso, de se resolver a equação de Duffing é através das funções elípticas. Temos que:

$$\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{sn} x = 2K^2 \operatorname{sn}^3 x - (1 - K^2) \operatorname{sn} x \quad (113.1)$$

Façamos agora: $\operatorname{sn} x = w$ e $x = n\lambda$. Substituindo em (08.4) temos:

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 w^2}{d\eta} = 2K^2 w^3 - (1 + K^2) w \quad (113.2)$$

Comparando com:

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} + w - w^3, \text{ obtemos}$$

$$\begin{cases} -(1 + K^2) \lambda^2 = 1 & (113.2a) \\ 2K^2 \lambda^2 = -1 & (113.2b) \end{cases}$$

O que nos dá: $\lambda^2 = -1/2$

Substituindo em (113.2a) obtemos: $K = \pm 1$

Portanto a solução será:

$$w = C \operatorname{sn} (i\sqrt{2} \eta, \pm 1),$$

sendo C uma constante arbitrária a determinar.

Teoria de Gauge e o Campo Gravitacional

Neste apêndice procuramos indicar o desenvolvimento histórico da idéia de simetria de gauge e sua aplicação aos campos gravitacionais. A teoria de gauge tem jogado um papel fundamental na tentativa de unificar as interações fortes, fracas e eletromagnéticas. De fato, a teoria de unificação das interações fraca e eletromagnética (interação eletrofraca) em termos de uma teoria de gauge proposta por Weinberg, Salam e Glashow [4] lhes valeu o Prêmio Nobel de Física em 1979. Esse esquema de simetria de gauge tem também desempenhado uma função muito importante nas teorias de super-unificação das interações fundamentais da Natureza. No entanto, neste texto, apenas nos concentraremos nos esforços que culminaram com a formulação da teoria da interação gravitacional como teoria de gauge, e algumas consequências da quebra espontânea de simetria, bósons de Goldstone e mecanismo de Higgs associados, além de dar uma primeira idéia de alguns de seus desenvolvimento mais recentes. Em particular, como voltamos a frizar, excluiremos qualquer referência explícita a trabalhos de super-unificação. A bibliografia comentada não é exaustiva mas representativa do desenvolvimento do campo e suas aplicações.

Como vimos no texto da tese (capítulo II), a idéia de simetria de gauge foi inicialmente proposta por Hermann Weyl em 1919 [1], no sentido de procurar estender ao eletromagnetismo a descrição até então dada aos efeitos dos campos gravitacionais, em

termos de uma conexão entre as relativas orientações de referenciais locais no espaço-tempo. A tentativa de Yang-Mills em estender a idéia de invariância de gauge às interações fortes conduziu ao desenvolvimento dos grupos de simetria unitária às interações fortes e, posteriormente, às interações fracas. O ápice desses desenvolvimentos foi, conforme já mencionamos, a tentativa de criar as teorias de unificação e superunificação das interações fundamentais da Natureza.

O passo pioneiro em retomar a formulação de interação gravitacional como uma teoria de gauge foi dado por Utiyama, em 1956 [11]. Segundo suas próprias palavras tiradas de seu trabalho fundamental "Invariant Theoretical Interpretation of Interaction" — "Alguns sistemas de campos foram considerados que são invariantes sob um certo grupo de transformações dependendo de n parâmetros. Uma regra geral é obtida para introduzir um novo campo de uma maneira definida com um tipo definido de interação com os campos originais, postulando a invariância desses sistemas sob um grupo mais amplo, derivado pela substituição do grupo original por um conjunto arbitrário de funções. O caráter de transformação deste novo campo sob o grupo mais amplo é determinado a partir de um postulado de invariância. Os tipos possíveis de equações dos novos campos são também deduzidos, dando origem a uma determinada lei de conservação devida à invariância. Como exemplos, os campos eletromagnéticos, de Yang-Mills e gravitacionais são reconsiderados seguindo essa linha de tratamento". Assim, como resultado desse trabalho, o campo gravitacional surge como um campo de gauge".

Posteriormente a esse trabalho encontramos o artigo de

Kibble, "Lorentz Invariance and the gravitational Field", 1961 [11], que menciona em sua bibliografia o trabalho de Utiyama. Este trabalho nada mais é que uma retomada do trabalho de Utiyama, sendo as componentes h_k^μ , bem como a "conexão afim local" A_μ^{ij} referidas no trabalho de Utiyama introduzidas aqui como novas variáveis de campo, análogas a A_μ (Potencial Eletromagnético), por considerar como grupo de transformação o grupo completo inhomogêneo de Lorentz com 10 parâmetros, em vez do grupo de seis parâmetros considerado por Utiyama. Isto implicou em considerar as transformações de coordenadas bem como as transformações das variáveis de campo, as quais necessitaram mudanças no argumento, porém isso também significou a necessidade de somente um sistema de coordenadas, o que dispensou a necessidade de se introduzir a priori a métrica de Riemann.

Pode-se considerar esses trabalhos como os pioneiros em introduzir o campo gravitacional no contexto da Teoria Geral de Relatividade de Einstein, como um campo de gauge.

Faremos, em seguida, um breve retrospecto dos principais trabalhos na área, década por década, começando em 1960.

Década de 60 (principais trabalhos)

Esta década se caracteriza principalmente pelo desenvolvimento das idéias de Teoria de Gauge aplicadas às interações eletromagnéticas, forte e fraca, isto é, à física das partículas elementares da época. Alguns desses desenvolvimentos são importantes para a teoria de gauge em geral e para a teoria de gauge dos campos gravitacionais em particular, as quais serão brevemente mencionadas. Além dos trabalhos de Utiyama e Kibble mencionados anteriormente, aparecem também apenas dois trabalhos

que consideramos importantes para a teoria de gauge dos campos gravitacionais não quantizados. Um deles é o trabalho de L. Motz, de 1960, denominado "Gauge Invariance and the Lorentz Ponderomotive" (Phys. Rev., 119, 1102), que consiste em uma modificação da teoria original de Weyl a fim de poder deduzir a força de Lorentz. Esse trabalho tem um caráter mais restrito e seu tratamento tem um alcance mais curto que os trabalhos de Utiyama e Kibble. O outro artigo é devido a Peter G. Bergmann denominado "Gauge-Invariance Variables In General Relativity" (Phys. Rev., 1961, 124, 274), o qual se reveste de importância mais geral. Neste analisa-se certos grupos teóricos a fim de se verificar a possibilidade de construir um teoria de campo Lorentz-Covariante. Esta idéia vem do fato que certos campos métricos têm sua curvatura tendendo assintoticamente a zero em um espaço infinito. Assim procura-se dividir os efeitos das transformações de coordenadas curvelíneas dentro da correspondente transformação de Lorentz e em efeitos "tipo-gauge". Isto significa em construir uma teoria linear para a gravitação, onde os efeitos das coordenadas curvelíneas serão explicados pela invariância de gauge da equações.

Com isso tem-se presumido que com a imposição de uma condição de contorno apropriada sobre as respectivas soluções das equações em questão (equação da teoria da relatividade geral) pode-se levar a teoria proposta de tal modo a que as transformações de coordenadas sejam separadas em transformações de Lorentz inhomogêneas e transformações "tipo-gauge".

Alguns trabalhos utilizando teorias quantizadas do campo gravitacional relacionados à teoria de gauge foram propostos no final de 1965 até o final da década. Embora eles fujam ao assunto

principal desta tese vale apenas mencioná-los a título de informação geral. São eles:

- * "The Gauge Dependence of the Graviton Propagator", K. Just e K. Rossberg (Nuovo Cimento, 1965, 40, 1089).
- * "Is The Graviton A Goldstone Boson ?", P.R. Phillips (Phys. Rev., 1964, 146, 1156).
- * "Gauge Problem In Quantum Field Theory", F. Strocchi (Phys. Rev., 1968, 166, 1302).
- * "Gauge Conditions In Gravitational Interactions". B.M. Barker (Phys. Rev., 1969, 182, 1387).

Vale ainda mencionar os trabalhos fundamentais e gerais sobre teoria de gauge publicados na década , a saber:

- ** "Field Theories With Superconductor Solutions", J. Goldstone (Nuovo Cimento, 1961, 19, 154).
- ** "On A Gauge Theory Of Elementary Interactions", A. Salam e J.C. Ward (Nuovo Cimento, 1961, 19, 165).
- * "Gauge Invariance and Mass", J. Schwinger (Phys. Rev., 1962, 125, 397).
- * "Connection Between Gauge Invariance and Mass", D.G. Boulware e W. Gilbert (Phys. Rev., 1962, 126, 1563).
- ** "Broken Symmetries", J. Goldstone, A. Salam e S. Weinberg (Phys. Rev., 1962, 127, 965).
- * "Geometric Definition Of Gauge Invariance", E. Lubkin (Annals Of Phys., 1963, 23, 233).
- * "The Scale Transformation In Physics", D.M. Greenberg (Annals Of Phys., 1963, 23, 290).
- * "Broken Symmetries And Massless Particles", S.A. Bludman e A Klein (Phys. Rev., 1963, 131, 2364).

* "Plasmos, Gauge Invariance And Mass", P.W. Anderson (Phys. Rev., 1963, 130, 439).

** "Broken Symmetries And Masses Of Gauge Bosons", P.W. Higgs (Phys. Rev., 1964, 13, 508).

* "Global Conservation Laws And Massless Particles", G.S. Guralnik, C.R. Hagen e T.W.B. Kibble (Phys. Rev. Let., 1964, 13, 585).

* "Broken Symmetries And The Mass Of Gauge Vector Mesons", F. Englert e R. Brout (Phys. Rev. Let., 1964, 13, 321).

Dentre esses trabalhos gostaríamos de destacar os com dois asterísticos, por sua importância histórica.

Década de 70

É na década de 70 que se observa um estudo mais intenso da aplicação da Teoria de Gauge aos campos Gravitacionais. O primeiro trabalho fundamental na área é devido a R.P. Treat, intitulado "Local Gauge Field In General Relativity" (J. Math. Phys., 1970, 11, 2176).

Girardello e Wyss, em um trabalho intitulado: "Representations of the Gauge Group of Electrodynamics and General Relativity" (Helvetica Physica Acta, 1972, 45, 197) determinam o produto dos grupos de gauge da Eletrodinâmica e da Relatividade Geral, formando os geradores dos grupos de gauge uma álgebra de Lie. Eles partem da idéia que a Eletrodinâmica e a Relatividade Geral são teorias com campos vetoriais e tensoriais associados a partículas de massa de repouso zero (fótons e grávitons, respectivamente).

É na década de 70, através dos trabalhos de Carmeli, que é introduzido o grupo de simetria $SL(2,c)$ como o grupo de simetria

das variáveis dinâmicas do campo gravitacional (J. Math. Phys., 1970, vol.11, 9, 2728 e Lett. Nuovo Cimento, 1970, vol.04, 1, 40) e Borner estabelece o teorema de Goldstone em um espaço-tempo curvo (Progr. Theor. Phys., 1970, vol.43, 1, 244), embora tenha havido anteriormente uma tentativa do próprio Carmeli de aplicar técnicas de $SU(2)$ à relatividade geral (J. Math. Phys., 1969, 10, 569). Em 1973, Durr (Gen. Rel. & Grav., 1973, vol.4, 1, 29) propõe uma teoria spinorial invariante por gauge de Poincaré ao campo gravitacional, similar à tentativa de Hayasi e Bregman no mesmo mês e ano (Ann. Phys., 1973, vol.75, 2, 562). É em 1974, que Carmeli apresenta suas idéias mais elaboradas concernentes à simetria de $SL(2,c)$ do campo gravitacional da conferência da NATO (NATO Advanced Study Institute on Math. Phys.: Group Theory In Non-Linear Problems, Istambul Turkey, 7-18 Aug., p.59) e prepara a edição de seu livro sobre o assunto (Carmeli, M., "Group Theory And General Relativity" - 1977 - McGraw-Hill International Book Company). Minkevich e Rudin apresentam também um artigo interessante intitulado: " The Gauge Fields and the Lorentz Group", ainda em 1973 (Acta Phys. Pol. B, 1974, vol.85, 3, 335). Numa série de três trabalhos sucessivos, Burghardt apresenta seus estudos sobre os campos de Yang-Mills em teoria de gravitação (Acta Phys. Austriaca, 1973, vol.38, 4, 327 ; 1974, vol.39, 1, 31 ; 1974, vol.39, 2, 127). É interessante notar, que na mesma conferência da NATO acima citada, Penrose apresenta um estudo sobre "Relativistic Symmetry Groups" (NATO Advanced Study Institute On Math. Phys.: Group Theory In Non-Linear Problems, Istambul, Turkey, 7-18 Aug., p.1).

Em 1974, Carmeli apresenta em interessante trabalho intitulado "General Relativity and Gauge Theories", propondo com Kaye no ano seguinte um modelo de campo de gauge unificado com gravitação e Eletromagnetismo (Gen. Rel. & Grav., 1974, vol.5, 3, 287) Em analogia ao modelo de unificação das interações fracas e eletromagnéticas de Salam e Weinberg, onde considera-se o produto dos grupos $SU_2 \times U_1$ como um grupo de gauge fundamental, Carmeli e Kaye consideram o grupo de gauge fundamental de unificação das interações gravitacional e eletromagnética, o produto $SL(2, c) \times U_1$. Farichild (Phys. Rev. D, 1976, vol.14, 2, 384) propõe em 1976 uma teoria de gauge da gravitação, Tabensky publica um trabalho intitulado "Unification of Gauge and Gravitation Theories" (J. Math. N.Y., 1976, vol.17, 1, 1) e Friedman ainda em 1975 publica um estudo da invariância de gauge da teoria gravitacional (Phys. Rev. D, 1975, vol.12, 8, 2528). Agnese e Calvini discutem num conjunto de dois trabalhos, os campos de gauge que surgem da consideração de simetrias espaço-temporais e teorias de gravitação (Phys. Rev. D, 1975, vol.12, 12, 3800), e Cohn (Gen. Rel. & Grav., 1975, vol.6, 2, 143) volta a discutir os gauges em relatividade geral. Outros trabalhos são listados na bibliografia abaixo.

- * "Classical Yang-Mills Fields In A RW Universe", Cervero e Jacobs (Phys. Let., 1978, vol.78b, 4, 427).
- * "General Relativity AS Gauge Field Theory In Curved Twistor Space" M.J. Hayashi (Phys. Rev. D, 1978, vol.18, 10, 3523)
- * "Broken-Symmetric Theory Of Gravity", A. Zee (Phys. Rev. Lett., 1979, vol.42, 7, 417).

- * "Conformal Gravity As A Gauge Theory", F. Mansouri (Phys. Rev. Lett., 1979, vol.42, 16, 1021).
- * "On The Sitter-Gauge Theory For Gravitation", H. Hang-Ying (Kexue Tongbao, 1979, vol.24, 5, 202).

Observa-se ao examinar a literatura desta década o grande impulso dado as teorias de superunificação e supergravidade e sua formulação em termos de teorias de gauge.

Década de 80

A década de 80 apresenta uma verdadeira avalanche de trabalhos em teorias de gauge associados à gravitação, e principalmente, a esquemas de unificação e gran-unificação, destacando-se também o esforço desenvolvido em teorias quânticas da gravitação. Procuraremos, no entanto, nos restringirmos aos trabalhos mais diretamente relacionados ao presente trabalho.

Em 1980, podemos citar os seguintes trabalhos.

- * "Towards A Unified Gauge Theory Of Gravitational And Strong Interactions ?", F.W. Hehl e D. Sijacki (Gen. Relativ. & Gravitation, 1980, vol.12, 1, 83).
- * "Comment On A Broken-Symmetric Theory Of Gravity", H. Fleming (Phys. Rev., 1980, vol.21, 6, 1690).
- * "Spontaneously Broken De Sitter-Symmetry And The Gravitational Holonomy Group", K. S. Stelle (Phys. Rev. D, vol.21, 6, 1466).
- * "A New Unified Field Theory Based On The Sitter Gauge Invariance", P.K. Smuz (Acta Phys. Pol., 1979, B10, 12, 1025).

Em 1981 podemos citar:

- * "Higgs Mesons In Gauge Gravitation", V.M. Nikolaenko
(Theor. & Math. Phys., 1980, vol.42, 2, 128).
- * "De Sitter Gauge Theory Of Gravitation II", T. Kwai e H.
Yosida (Prog. Theor. Phys., 1980, vol.64, 5, 1596).
- * "Spontaneous Breakdown Of The Vacuum In The Gauge-covariant
Theory Of Gravitation", J. Cervero e P.G. Estevez (Lett.
Nuovo cimento, 1981, vol.30, 11, 323).
- * "General Relativity Is A Gauge Type Theory", M. Ferraris e
J. Kijowski (Lett. Math. Phys., 1981, vol.5, 2, 127).
- * "Tetrad Fields And Metric Tensor In The gauge Theory Of
Gravitation", R. Giachetti (Lett. Math. Phys., 1981,
vol.5, 2, 85).
- * "Poincaré Gauge Theory Of Gravitation And Its Hamiltonian
Formulation", M. Blagojevic (Nuovo Cimento B, 1981,
vol.62B, 2, 257).
- * "Gauge Theory Of Gravity II. Reciprocity And Confinement",
T. Fukuyama (Z. Phys. C, 1981, Vol.10, 1, 9).

Em 1982, citemos:

- * "Gauge Theory Of Gravitation", W. Thirring (Proceeding Of
The Einstein Centesimal Symposium On Fundamental Physics,
Bogota, Colombia, 30 July - 5 Aug. 1979, p.189).
- * "Cosmology And Broken Scale Invariance", F. Cooper e G.
Venturi (Phys. Rev. D, 1981, vol.24, 12, 338).
- * "Gauge Formulation Of Gravitation Theory I And II", E.A.
Ivanov e J. Niederle (Phys Rev. D, 1982, vol.25, 4, 976).
- * "A Spontaneously Broken Conformal Gauge Theory Of
Gravitation", H.T. Nieh (Phys. Lett. A, 1982, vol.88A, 8,
388).

- * "Broken Symmetry Theories Of Gravity And Implications For Cosmology", R. Critchley e P.C.W. Davies (Phys. Lett. B, 1982, vol.112B, 4,5; 331).
- * "A Unified Approach To Conservation Laws In General Relativity, Gauge Theories And Elementary Particle Physics", A.E. Fischer (Gen. Relativ. & Gravit., 1982, vol.14, 7, 683).

Podemos notar que começa aparecer trabalhos relacionados à cosmologia no contexto das teorias de gauge e quebras espontâneas de simetria nesse ano.

Em 1983, podemos mencionar:

- * "A Unified Gauge And Gravity Theory With Only Matter Field", G. Veneziano e D. Amati (Nucl. Phys. B. Part. Phys, 1982, vol.B204, 3, 451).
- * "Hamiltonian Formulation Of The Gauge Theory Of Gravitation", T. Fukuyama (Nuovo Cimento B, 1983, vol.74B, 1, 93).
- * "The Gauge Treatment Of Gravity", D. Ivanenko, G. Sardanashvily (Phys. Rep., 1983, vol.94, 1, 1).
- * "Spontaneous Symmetry Breaking In Kaluza-Klein Theory", A. Karlhede e T. Tomaras (Phys. Lett. B, 1983, vol.125B, 1, 49).
- * "Gauge Theory Of Gravity", H.R. Pagels (Phys. Rev. D, 1983, vol.27, 10, 2299).

Neste ano, aparece a primeira menção à teoria de Kaluza-Klein no contexto do assunto principal dessa tese e também a referência à formulação hamiltoniana da cosmologia.

Para o ano de 1984, mencionaremos os seguintes trabalhos:

- * "Hamiltonian Dynamics Of Poincaré Gauge Theory General Structure In The Time Gauge", M. Blagojevic (Phys. Rev. D, 1983, vol.28, 10, 2455).
- * "The Coupled Einstein-Weyl Field Equations With Cosmological Constant And Role Of Two Higgs Phenomena In Weyl's Gauge Model Coupled To A Higgs Field", M. Nishioka (Nuovo Cimento A, 1983, vol.78A, 4, 462)
- * "Conservation Laws In The $SL(2,c)$ Gauge Theory Of Gravitation", N. Nissani (Nuovo Cimento A, 1983, Vol.78A, 3,378).
- * "Functional Evaluation Of spontaneous Symmetry Breaking In An Open Universe", R.L. Garcia (Nuovo Cimento B, 1983, vol.78B, 2, 178).
- * "Unified Gauge Theory For Electromagnetism And Gravitation Based On Twistor Bundles", C.P. Luerh e M. Rosenbaum (J. Math. Phys., 1984, vol.25, 2, 380).
- * "Conserved Currentes In The $Sl(2,c)$ Gauge Theory", N. Nissani (Lett. Nuovo Cimento, 1984, vol.39, 13, 289).
- * "Gravitational Gauge Fields And The Cosmological constant", H.R. Pagels (Phys.Rev. D, 1984, vol.29, 8, 1690).
- * " $SL(2,c)$ Gauge Theory Of Gravitation: Conservation Law", N. Nissani (Phys. Rep., 1984, vol.109, 2, 95).

Para 1985:

- * "Induced Gravitational And Gauge Field Actions From Quantized Matter Fields In Non-Abelian Kaluza-Klein Theory", M.A. Awada (Nucl. Phys. B, Part. Phys., 1984, vol.B245, 1, 161).

- * "Gauge Theory Of Weak And Strong Gravity", K.P. sinha (Pramana, 1984, vol.23, 2, 205).
- * "Poincaré Gauge Theory, Gravitation And Transformation Of Matter Field", W. Drechsler (Fortschr. Phys., 1984, vol.32, 8, 449).
- * "Gauge Fields, Space-time Geometry And Gravity", T. Dass (Pramana, 1984, vol.23, 4, 433).
- * "Gauge Theory In Relativistic Hamiltonian Classical Mechanics: Tentative Unification Of Electromagnetic And Gravitational Fields", B. Boisseau (J. Math. Phys., 1985, vol.26, 3, 482).
- * "Kaluza-Klein Unification In The Poincaré Gauge Theory Of Gravitation", Rue-Ron Hsu e Wai-Bong Yeung (Phys. Lett. B, 1985, vol.155B, 3, 143).
- * "Spontaneous Breaking Of C-Invariance In A Friedmann Universe With Matter", F.S. Zaripov (Sov. Phys. J., 1984, vol.27, 7,22).
- * "Einstein Gravitation As A Gauge Theory Of The Lorentz Group", X. Fustero (Phys. Rev. D, 1985, vol.31, 12, 3144).

Cumpre notar que neste ano foi publicado um excelente e importante trabalho intitulado "Spontaneously Broken Symmetries In Gravitational Fields" de V.M. Melnikov, V.M. Nikolaenko e S.M. Orlov (Gen. Rel. & Grav., 1985, 17, 63), no qual os autores apresentam um estudo de modelos de campos materiais e gravitacionais unificados de forma auto-consistente. Nesses modelos, os campos (ou o campo gravitacional) são tratados classicamente e os campos materiais podem ser quânticos. O

mecanismo de quebra espontânea de simetria é devido a uma generalização conforme dos campos de Higgs no espaço-tempo curvo. A gravitação é considerada como um campo de gauge e também na versão einsteiniana usual. Esse trabalho é o ponto alto de uma sucessão de trabalhos de Nikolaenko no assunto, a saber:

* Acta Phys. Pol., 1976, B7, 681.

* Acta Phys. Pol., 1977, B8, 911.

* Theor. Math. Phys., 1978, 34, 334.

* Theor. Math. Phys., 1980, 42, 195.

* J. Phys. A: & Math. Gen., 1981, 14, 1685.

* Nikolaenko, G.N. Shikin e K.P. Staniukovicz, Gen. Rel. & Grav., 1982, 14, 379.

E finalmente, mencionaremos alguns trabalhos representativos ao assunto desta tese, publicados no triênio 1986-1987 e 1988. O principal fator que se observa em teorias de gauge da gravitação é sua aplicação à cosmologia, no que se refere ao interesse de nosso trabalho. Como já mencionamos várias vezes, esquemas de unificação, gran-unificação e gravitação quântica têm também um lugar de destaque na literatura desses três últimos anos, embora não sejam incluídos em nossas listagens bibliográficas.

Triênio 86-87-88.

* "Magnetic Monopole Solutions Of Non-Abelian Gauge Theory In The Expanding Universe", V.K. Shohigolev (Sov. Phys. J., 1984, vol.27, 8, 684).

* "Gravity As Yang-Mills Gauge Theory", H. Dhenen e F. Ghaboussi (Nucl. Phys. B, Part. Phys., 1985, vol.B262, 1, 144).

- * "Gauge Theories, Geometry And Cosmology", C.A. Lucey (Phys. Rev. D, 1986, vol.33, 2, 346).
- * "Gauge Theories Of Gravitation", Duan Yi-shi (Commun. Ther. Phys., 1985, vol.4, 5, 661).
- * "On The Gauge Theory Of Gravitation", F. Okten (Doga Bilim Dergisi Ser. (Turkey), 1985, vol.9, 3, 223).
- * "Gauge-Invariant Perturbations In A Universe With A Collisionless Gas And A Fluid", M.Kasai e K. Tomita (Phys. Rev. D, 1986, vol.33, 6, 1576).
- * "On Broken Symmetries And Gravity", T. Regge (Phys. Rep., 1986, vol.30, 2, 247).
- * "Gauge Field Theory Of Gravity", H. Dehnen, F. Glaboussi (Phys. Rev. D, 1986, vol.33, 8, 225).
- * "A Poincaré Gauge Theory Of Gravity", T. Kawai (Gen. Rel & Grav., 1986, vol.18, 10, 995).
- * "Primordial Inflation With A Broken Symmetry Theory Of Gravity", M.D. Pollock Nucl. Phys. B, Part. Phys., 1986, vol.B277, 3,4; 513).
- * "Geometrical Gauge Approach For Electromagnetism And Gravitation", E. Stedile (Phys. Lett. A, 1986, vol.118, 9, 439).
- * "New Weyl Theory: Geometrization Of Electromagnetism And Gravitation: Motivations And Classical Results", J. Pullin e O. Bressan Gen. Rel. & Grav., 1987, vol.19, 6, 601).

- * "Pre-Inflationary Stages As Driver By Yang-Mills-Higgs Gauge Field", R.P. Mondain e P.C. Nascimento (Proceeding Of The 26th Liege International Astrophysical Colloquim, Liege, Begium, 1-4 July 1986, p.219).
- * "Constraint Algebra In Poincaré Gauge Theory", M. Blagojevic (Phys. Rev. D, Part. Fields, 1987, vol.36, 6, 1987).
- * "The Canonical Formalism Of A Lorentz Gauge Theory Of Gravitation", Liu Yao-Yang, Yuan Ka-Jia e Zhang Yuan-Zhong (Chin. Phys., 1987, vol.7, 2, 364).
- * "On The Cohomological Struture Of Gauge Theories", L. Baulieu (USMG, NATO ASI, 1985, vol.2, 999).
- * "Kaluza-Klein Theory From The Point Of View Of Gauge Theory Of Gravity", T. Fukuyama (Gen Rel. & Grav., 1988, vol.20, 1, 89).
- * "Gravity From Symmetry Breakdown Of A Gauge Affine Theory" D. Sijacki (Phys. Lett. B, 1988, Vol.200, 4, 489).

BIBLIOGRAFIA

- [1] WEYL, H., (1919), Annln. Phy., 59, 101
- [2] BERGMAN, P.G., (1979), Phsics Today, March, 44
- [3] WEYL, H., (1929), Z. Phy., 56, 303
FOCHK, V., (1927), Z. Phy., 39, 226
- [4] LOPES, J.L., (1981), "Gauge Field Theory - An Introduction"
(Pergman Press)
- [5] YANG, C.N. and MILLS, R.L., (1954), Phys. Rev., 96, 191
KIBBLE, T.W.B., (1967), Phys. Rev., 5, 1554
- [6] AHARONOV, Y. and BOHM, D., (1959), Phys. Rev., 115, 485
ERLICHSON, H., (1970), Am. J. of Phys., 2, February
CHAMBERS, R.G., (1960), Phys. Rev. Let., 1, July
DIRAC, P.A.M., (1931), Proc. R. Soc. A., 133, 60
TONOMURA, A., et al, (1982), Phys. Rev. Let., 48, 1443
- Recomendo a leitura dos artigos, pois, segundo esses, o potencial vetor e escalar não são meras ferramentas matemáticas mas podem ter um significado físico.
- [7] HEISENBERG, W., (1936), Z. Phys., 101, 533
- [8] GASIOROWICZ, S., (1966) "Elementary Particle Physics" (John Wiley & Sons, Inc., New York /London/ Sydney
- [9] ASHKIN, A., et al, (1965), 1964 International School of Physics "Ettore Majorana", a CERN-MPI-NATO Advanced Study Institute - "Symmetries in Elementary Particle Physics (Editor: A. Zichichi)
- [10] MORIYASU, K., (1978), Am. J. Phys., 46, March, 274
- [11] UTIYAMA, R., (1956), Phys. Rev., 101, 1597
KIBBLE, T.W.B., (1960), J. Math. Phys., 2, 212

- [12] GELL-MANN, M. and GLASHOW, S., (1961), Ann. Phys., 15, 437
- KIRZHNITS, D.A. and LINDLE, A.D., (1976), Annals of Phys., 101, 195
- V BRASILIAN SYMPOSIUM ON THEOREETICAL PHYS., (1974), January (R.J.), vol. I, 163, (Ed. Erasmo Ferreira)*
- BOGOLIUBOV, N.N. and SHIRKOV, O.V. - "Introduction to the Theory of Quantized Field", vol.3 (R.E. Marshak)
- FEYNMAN, LEIGHTON and SANDS, - " The Feynman Lectures on Physics", vol. I, 52
- WEINBERG, S., (1973), Phys. Rev. D, vol.7, 4, 1068
- [13] HIGGS, P.W., (1966), Phys. Rev., vol.145 , 4, 1156
- LEE, B.W. and ABERS, E.S., (1973), Phys.Reports, 9, 1
- KIBBLE, T. W. B., HAGEN, C.R. and GURALMIK, G.S., (1964). Phys. Rev. Let., vol. 13, 20, 585
- [14] HIGGS, P.W., (1964), Phys. Rev., vol.13, 16, 508
- ENGLERT, F. and BROUT, R., (1964), Phys. Rev. Let., vol.13, 9, 321
- [15] MISNER, C.W., THORNE, K. and WHEELER, J.A., (1973) - - "Gravitation" (W.H. Freeman and Company)
- LANDAU, L. e LIFCHITZ, E., (1980) - "Teoria de Campo" (tradução para o português. editra MIR)
- BERRY, M., "Principles of Cosmology and Gravitation" (Cambridge University press)(1976)
- ADLER, R., BAZIN, M. and SCHIFFER, M., (1965) - "Introduction of General Relativity" (McGraw-Hill Book Company)
- [16] ROBERTSON, H.P., (1935), Astrophy, J., 82, 248
- Idem, (1936), Astropht, J., 83, 187
- WALKER, A.G., (1936), Proc. London Math. Soc., 42, 90

- [17] ORT, J.H. (1958), "Distribution of Galaxies and the Density of the Universe", in Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et L'Évolution de L'Univers, Editions Stoops. Brussels, Belgium.
- [18] MELNIKOV, V.N., NIKOLAENKO, V.M. and ORLOV, S.V., (1985), General Relativity and Gravitation, vol.17, 1, 63
GRIB, A.A., MOSTEPANENKO, V.M. and FROLOV, V.M., (1977), Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika, vol.33, 1, 42
ORLOV, S.V., (1981), J. Phys. A: Math. Gen., 14, 3039
- [19] LEE, T.D., (1974), Phys. Rep., 9C, 145
- [20] CHERNIKOV, N.A. and TAGIROV, E.A., (1968), Ann. Inst. Henri Poincaré, 9A, 109
- [21] GOLUBITSKY, M. and SCHAEFFER, D.G., - "Singularities and Group in Bifurcation theory", vol.1, (Springer-Verlag, N.Y.).
- [22] GUREL, O. and ROSSLER, O.E., "Bifurcation Theory And Applications In Scientific Disciplines", ed. N.Y., The New York Academy Of Sciences (1979).
- [23] TAYLOR, A.E. and MANN, W.R., - "Advanced Calculus" (Wiley, N.Y.).
- [24] JORDAN, D.W. and SMITH, P., - "Nonlinear Ordinary differential Equations" (Oxford University Press).
- [25] ANDRONOV, A.A., LEONTOVICH, E.A., GORDON, I.I. and MAIER, A.G - "Qualitative theory of Second-Order Dynamic Systems" (Wiley, N.Y.).
- [26] ANDRONOV, A.A., LEONTOVICH, E.A., GORDON, I.I. and MAIER, A.G "Theory Of Bifurcations Of Dynamic Systems On A Plane" (1971) (Israel Program for Scientific Translations Ltda.).

GUREL, O. and ROSSLER, O.E., "Bifurcation Theory and Applications In Scientific Disciplines" (The New York Academy Of Sciences).

[27] BERRY, M.V., "Principles Of Cosmology And Gravitation" (1978) (Cambridge University Press)

[28] COLLINS, C.B. and STEWART, Mon. Not. R. Astron. Soc., 153, 419 (1971)

COLLINS, C.B., Commun. Math. Phys., 23, 137 (1971)

[29] NOVELLO, M. and ARAUJO, R.A., Phys. Rev. D, 22, 260 (1980)