

Este exemplar corresponde à versão final da
tese de Doutorado defendida pelo Sr. Fausto de
Camargo Júnior e aprovada pela banca examinadora.

28/11/95

Kyoko Furuya

Universidade Estadual de Campinas

**Manifestações do Caos no Modelo
do Maser de Dicke**

Fausto de Camargo Júnior

Orientadora: Profa. Dra. Kyoko Furuya

Trabalho apresentado ao
Instituto de Física "Gleb Wataghin"
para a obtenção do Grau de Doutor em Ciências.

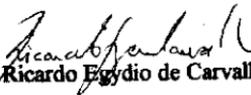
PARECER DE APROVAÇÃO
DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DE
FAUSTO DE CAMARGO JÚNIOR

DATA: 31 / 07 / 95

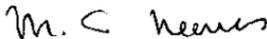
BANCA EXAMINADORA:



- Prof. Dra. Kyoko Furuya (Orientadora)



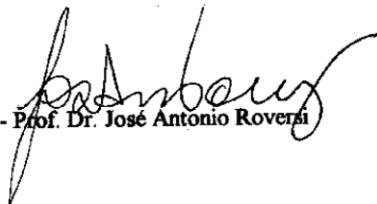
- Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho



- Prof. Dra. Maria Carolina Nemes



- Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar



- Prof. Dr. José Antonio Roverai

*Aos meus pais,
Fausto e Lenira.*

*"Na realidade, o que difere o Homem dos animais
é sua infinita capacidade de amar."*

C. Darwin.

Agradecimentos

Agradeço a FAPESP pela bolsa de doutorado, sem a qual esta tese não poderia ter sido realizada e a FAPESP que financiou nossos encontros com grupos da USP e da UFMG. Agradeço à Profa. Kyoko Furuya pela sua paciência e dedicação durante a orientação desse trabalho, a colaboração da Profa. M. Carolina Nemes (UFMG), a Giancarlo Q. Pellegrino, Marcelo Trindade dos Santos, Maisa de Oliveira Terra e a Sandra Denise Prado pelas discussões frutíferas; a Caio H. Lewenkopf por ter cedido algumas seções de Poincaré. Quero agradecer também todas as pessoas que direta ou indiretamente, tenham colaborado na realização deste trabalho.

Resumo

Estudamos os efeitos da não-integrabilidade no modelo do Maser de Dicke, através da observação nas alterações dos padrões de distribuições de valores esperados nos auto-estados de energia de alguns operadores relevantes ao sistema, graficados contra os autovalores de energia. A densidade de estados semiclássica e os valores médios de observáveis, do ponto de vista do ensemble microcanônico, são obtidos e comparados com o padrão de distribuição dos valores médios quânticos com uma boa concordância tanto no caso regular como no caso com caos. A análise das flutuações em torno dos valores médios semiclássicos são feitas através de seções de Poincaré clássicas e mostramos evidências de que existe uma conexão com o comportamento das órbitas periódicas clássicas e suas estabilidades.

Calculamos também, na aproximação de campo médio, grandezas termodinâmicas, como o calor específico para o modelo como função da temperatura. Esta função mostra uma descontinuidade com a temperatura de transição de fase superradiante T_c , para interações suficientemente forte, e também o fato de que este resultado não é sensível à presença do caos. A análise dos pontos fixos da dinâmica à temperatura finita é feita tanto para o caso regular como para o caso com caos, e a estabilidade das soluções são discutidas.

Abstract

We study the effects of nonintegrability in the Dicke Maser Model by observing the modifications in the patterns of distribution of expectation values in the energy eigenstates of some selected operators plotted against energy eigenvalues. The semiclassical density of states and the mean values of observables in the microcanonical ensemble are obtained and compared with the quantum plots with a very good agreement for both regular and chaotic case. Analysis of fluctuations around the semiclassical mean values are made by means of classical Poincaré sections, and evidences of its connections with the behaviour of the classical periodic orbits and their stabilities are shown.

We have also calculated, in the mean field approximation, the quantities like the specific heat of the model as a function of the temperature. Such a function displays a discontinuity at the superradiant transition temperature T_c for large enough interaction, and the fact that this result is not sensitive to the presence of chaos. The fixed point analysis of the dynamics at finite temperature is done for regular and chaotic cases and their stability conditions are discussed.

Conteúdo

1	Introdução	8
2	O Sistema de Interação Spin-bóson: Modelo de Maser	11
2.1	A função hamiltoniana clássica	12
2.2	Quantização do campo eletromagnético	15
2.3	Quantização do termo de interação	17
2.4	Características do modelo de interação spin-bóson	22
2.5	O Análogo Clássico para o modelo do Maser	26
3	Manifestação da não-integrabilidade quântica no Maser de Dicke	31
3.1	Os auto-estados do hamiltoniano do modelo do Maser	32
3.2	Média temporal de operadores como um invariante	34
3.3	O efeito do termo não-integrável na dispersão	40
4	O limite clássico	44
4.1	A densidade de estados	44
4.2	Valores médios de grandezas físicas	51

4.3	Termo oscilante da média de operadores	57
5	Termodinâmica do Sistema	73
5.1	O operador Densidade	74
5.2	A energia livre do modelo de Maser na aproximação de campo médio	77
5.3	A hamiltoniana clássica como função da temperatura	88
5.4	Análogo clássico para a superradiância com função da temper- atura	92
6	Conclusão	99
A	O cálculo da energia livre a partir de uma rotação em torno eixo-x	102
B	O cálculo dos traços	104

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é investigar diferentes manifestações do caos no modelo de maser de Dicke [1]. Resultados teóricos interessantes tem sido obtidos para este modelo simples de interação entre átomos e um campo no interior de uma cavidade idealizado para descrever fenômeno de emissão coletiva. Recentemente muitos trabalhos que estudam a dinâmica caótica clássica tem sido desenvolvidos desde os primeiros trabalhos publicados a este respeito [2] [3].

As manifestações quânticas deste caos foram primeiramente apresentadas por Kús [4], estudos a respeito da distribuição no espectro de energia foram apresentados por Graham e Höhnerbach [5] e sobre sinais de existência de cicatrizes de orbitas periódicas e localização de função de onda nas distribuições de Husimi [7] foram publicadas por Furuya et al [6] .

A prova rigorosa da existência de uma transição de fase de segunda ordem da fase normal para a superradiante no limite termodinâmico foi obtida

para o modelo na aproximação de onda girante (caso integrável) por Hepp e Lieb [8],[9] e K. Wang and F. T. Hioe [10]. Em seguida Hioe [11] calculou a temperatura crítica para o caso não-integrável no limite termodinâmico, porém nenhuma menção é feita a respeito do efeito do caos. A dinâmica à temperatura finita para o caso caótico, obtida através do cálculo variacional a partir da aproximação de campo médio, foi apresentada por Blin et al [12], onde se calcula uma expressão analítica para a temperatura crítica do sistema e para a energia livre e também é discutida pela primeira vez o efeito do caos sobre a transição de fase. Estes resultados nos estimularam a iniciar este estudo sobre as manifestações do caos clássico e quântico no modelo de maser de Dicke.

No segundo capítulo, mostraremos a obtenção do operador hamiltoniano para o maser na aproximação de dipolo elétrico, bem como suas propriedades e as condições de existência do regime superradiante. No terceiro capítulo iremos apresentar uma manifestação da não-integrabilidade no modelo do maser, discutindo a obtenção de um segundo invariante quântico do sistema, como proposto no trabalho apresentado por Peres [13]. Analisaremos também esse efeito no que diz respeito a dispersão dos valores esperados de operadores nos auto-estados de energia do sistema.

No quarto capítulo, prosseguiremos nosso estudo seguindo a linha de investigação de Feingold [14], onde se argumenta que para um sistema ergódico é possível se comparar, no limite semiclássico, o valor médio de grandezas físicas obtidas do ponto de vista do ensemble microcanônico, com a média dos valores esperados de observáveis associados a estas grandezas nos auto-estados de energia. Determinamos para isso, as expressões para a densidade

de estados e de valores médios de grandezas físicas relevantes ao sistema. Entretanto como o nosso sistema pode apresentar caos, mas não é um sistema ergódico, seguimos a partir daí um procedimento mais na linha do Gutzwiller [15]. Definimos então os valores médios oscilantes para esses observáveis e iremos efetuar uma análise comparativa entre a alteração das flutuações dessa média à estabilidade de órbitas periódicas visíveis nas seções de Poincaré correspondentes.

No quinto capítulo, estudaremos a termodinâmica do sistema, determinando a partir de resultados obtidos por Blin et al [12] e Providência e Fiolhais[16], uma expressão para o calor específico $C_v(T)$ e mostramos o efeito do caos na transição de fase, da normal para a superradiante. Posteriormente, seguindo a linha de estudo de Aguiar et al [17], sobre o estudo dos pontos fixos da dinâmica do sistema, efetuamos a análise destes pontos fixos agora no contexto da dinâmica à temperatura finita.

Finalmente no capítulo seis, delinearemos as conclusões obtidas ao longo dos capítulos precedentes.

No apêndice A discutimos o efeito da escolha da rotação em torno do eixo-x no cálculo variacional da energia livre, discutida no capítulo cinco. No apêndice B apresentamos um exemplo de como se efetua o cálculo dos traços utilizados para se obter a energia livre e valores médios à temperatura finita.

Capítulo 2

O Sistema de Interação

Spin-bóson: Modelo de Maser

Neste capítulo iremos descrever o sistema de interação de spin-bóson que propomos estudar. Primeiramente faremos um breve resumo sobre as equações do eletromagnetismo clássico e obter a função hamiltoniana clássica para o sistema, cuja quantização será apresentada.

O sistema de interação spin-bóson conhecido como Modelo de Maser de Dicke foi proposto por Dicke [1] nos idos de 1954. O sistema consiste de um feixe lento de átomos de dois níveis de energia não degenerados em uma cavidade de volume V . Para simplificarmos o problema consideramos em primeira aproximação os átomos em repouso, portanto os efeitos da agitação térmica serão desprezados, bem como os efeitos relativísticos. A distância entre os átomos é suficientemente grande para que não haja interação entre eles, a dimensão da cavidade é considerada grande em relação aos compri-

mentos de onda a fim de podermos desprezar os efeitos de borda. A única interação será então entre os átomos e o campo eletromagnético no interior da cavidade, entretanto o suficiente para promover comportamento coletivo entre os átomos no caso da interação ser adequada e suficientemente forte.

2.1 A função hamiltoniana clássica

O estudo clássico do problema tem como partida as equações de Maxwell, onde deixamos as funções potenciais arbitrárias para podermos resolver o sistema de equações diferenciais para casos gerais, sendo que a escolha dessas funções potenciais são arbitrárias desde que obedecem a condição de invariância sob transformações de calibre. Como o sistema em estudo não leva em conta efeitos relativísticos, a escolha mais apropriada dessas funções é feita obedecendo as condições do *calibre de Coulomb* [18], [19]. Pelo teorema de Helmholtz, onde se afirma que qualquer vetor que defina um campo pode ser expresso como a soma de duas componentes, uma com o divergente nulo e outra com o rotacional igual a zero, pode-se obter equações diferenciais para o sistema em termos das funções potenciais escalar $\phi(\vec{r}_j, t)$ e vetor $\vec{A}(\vec{r}_j, t)$:

$$-\nabla^2 \phi(\vec{r}_j, t) = \frac{\sigma(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$-\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}_j, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}_j, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}_T(\vec{r}, t) \quad (2.2)$$

onde σ é a densidade de carga, \vec{J}_T é a componente transversal do vetor densidade de corrente elétrica, \vec{r}_j o vetor posição do j -ésimo elétron do átomo.

Levando em conta que o núcleo de um i -ésimo átomo é considerado em repouso, centramos o mesmo na origem do sistema de coordenadas e denominamos por Z o número de prótons do núcleo do átomo, definimos então:

$$\sigma(\vec{r}, t) = - \sum_j e\delta(\vec{r} - \vec{r}_j) + Ze\delta(0) \quad (2.3)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = - \sum_j e\dot{\vec{r}}_j\delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (2.4)$$

Com estas informações, podemos escrever a função lagrangeana para o sistema como se segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \sum_j \left\{ \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_j^2 + \frac{1}{2} \int (\epsilon_0\vec{E}^2(\vec{r}, t) - \mu_0\vec{H}^2(\vec{r}, t)) dV - \int \sigma\phi(\vec{r}_j, t)dV + \right. \\ \left. + \int \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}_j, t)dV \right\} \quad (2.5) \end{aligned}$$

substituindo as equações (2.3),(2.4) em (2.5) obtemos a forma do momento conjugado de \vec{r}_j :

$$\vec{p}(\vec{r}_j, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_j} = m\dot{\vec{r}}_j - e\vec{A}(\vec{r}_j, t) \quad (2.6)$$

Podemos agora escrever a função hamiltoniana para o sistema, utilizando o momento conjugado descrito em (2.6):

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}, t) = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) - \mu_0 \vec{H}^2(\vec{r}, t)) dV + \frac{1}{2m} \sum_j (\vec{p}_j(\vec{r}_j, t) + e \vec{A}(\vec{r}_j, t))^2 - e \sum_j \phi(\vec{r}_j, t) + Ze\phi(0, t) \quad (2.7)$$

A função hamiltoniana pode ser expressa como a soma de três termos:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_R + \mathcal{H}_I + \mathcal{H}_A \quad (2.8)$$

onde \mathcal{H}_R representa a função hamiltoniana para o campo eletromagnético, \mathcal{H}_I a interação entre o átomo e o campo e \mathcal{H}_A o átomo.

Vamos agora considerar que apenas o elétron mais externo do átomo sofre interação com o campo, ou seja, que a carga efetiva do núcleo do átomo seja $+e$ (a carga dos demais prótons é blindada pela nuvem eletrônica) e um elétron de carga $-e$, e que o comprimento de onda do campo eletromagnético seja muito grande em relação ao raio da órbita desse elétron, portanto o comportamento desse átomo pode ser considerado como de um dipolo elétrico com massa m .

A aproximação de dipolo elétrico consiste em desprezar o termo $e^2 \vec{A}^2(\vec{r}_j, t)$ do momento conjugado (2.6), em relação ao termo de primeira ordem em $\vec{A}(\vec{r}, t)$, temos portanto:

$$\mathcal{H}_R = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) - \mu_0 \vec{H}^2(\vec{r}, t)) dV \quad (2.9)$$

$$\mathcal{H}_I = \frac{e}{m} \vec{p}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.10)$$

$$\mathcal{H}_A = \frac{1}{2m} \vec{p}^2(\vec{r}, t) - e\phi(\vec{r}, t) + Ze\phi(0, t) \quad (2.11)$$

2.2 Quantização do campo eletromagnético

Considerando apenas um modo de oscilação do campo eletromagnético no interior da cavidade com frequência ω e vetor de onda \vec{k} , o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e o campo magnético $\vec{H}(\vec{r}, t)$ podem ser escritos como função do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i\omega \left\{ \vec{A} \exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - \vec{A}^* \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}) \right\} \quad (2.12)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \left(\frac{i}{\mu} \right) \vec{k} \times \left\{ \vec{A} \exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - \vec{A}^* \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}) \right\} \quad (2.13)$$

substituindo (2.12) e (2.13) na função hamiltoniana que representa o campo eletromagnético (2.9), e resolvendo a integral em dv temos:

$$\mathcal{H}_R = 2\epsilon V \omega^2 \vec{A} \cdot \vec{A}^* \quad (2.14)$$

onde V é o volume da cavidade.

Escrevendo \vec{A} como função de coordenadas normais de posição q e momento p canônicos:

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon V \omega^2}} (\omega q + ip) \vec{\xi} \quad (2.15)$$

$$\vec{A}^* = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon V \omega^2}} (\omega q - ip) \vec{\xi}^* \quad (2.16)$$

onde as propriedades direcionais do potencial vetor \vec{A} estão contidas agora nos vetores de polarização $\vec{\xi}$. Considerando que a onda eletromagnética seja linearmente polarizada, ou seja, que $\xi = \xi^*$ ($|\xi|^2 = 1$) e ainda substituindo (2.15) e (2.16) em (2.9), podemos escrever:

$$\mathcal{H}_R = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (2.17)$$

A função hamiltoniana (2.17) que passa ser expressa em termos de p e q tornou-se idêntica a uma hamiltoniana de um oscilador harmônico simples unidimensional mecânico de massa unitária.

A quantização dessa hamiltoniana pode ser efetuada de maneira similar à do oscilador harmônico simples definindo operadores de criação e aniquilação. Esses operadores estão relacionados aos operadores de momento do campo P_c e posição do campo Q_c através de:

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega Q_c - iP_c) \quad (2.18)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega Q_c + iP_c) \quad (2.19)$$

inversamente, podemos obter P_c e Q_c em termos dos operadores a^+ e a :

$$P_c = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a + a^+) \quad (2.20)$$

$$Q_c = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (a - a^+) \quad (2.21)$$

Substituindo (2.20) e (2.21) em (2.17) obtemos o operador hamiltoniano para a radiação em termos dos operadores de criação e aniquilação dos fótons de frequência ω :

$$H_R = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.22)$$

Assim todas as propriedades quânticas do oscilador harmônico são, de maneira análoga, válidas para o campo de radiação quantizado.

Utilizando os resultados dessa quantização, podemos obter a partir da função potencial vetor:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left\{ A(\vec{t}) \exp(+i\vec{k}\cdot\vec{r}) + A(\vec{t})^* \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r}) \right\} \quad (2.23)$$

uma expressão para o operador \vec{A} em termos dos operadores de criação e aniquilação. Basta para isso, substituirmos as relações operacionais (2.20) e (2.21) nas expressões análogas a (2.15) e (2.16) vistas como relações entre operadores, e a partir delas podemos escrever (2.23), como função dos operadores de criação e aniquilação:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon^2 V \omega}} \{ a \exp(+i\vec{k}\cdot\vec{r}) \vec{\xi} + a^\dagger \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r}) \vec{\xi}^* \} \quad (2.24)$$

Substituindo (2.24) na hamiltoniana de interação, obtemos uma função para o operador hamiltoniano de interação

$$H_I(\vec{r}) = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon^2 V \omega}} \{ a P_a \exp(+i\vec{k}\cdot\vec{r}) + a^\dagger P_a \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r}) \} \quad (2.25)$$

onde P_a é o operador de momento do átomo.

2.3 Quantização do termo de interação

Vamos primeiramente definir um operador hamiltoniano atômico, sabendo que os átomos no interior da cavidade são considerados em níveis de energia não degenerados. Para exemplificarmos esta suposição podemos considerar a maser de amônia [20] [21], neste caso a molécula de amônia é considerada em primeira aproximação como um sistema de dois níveis.

Definimos para esse átomo, um espaço de estados de dimensão dois, sendo que um vetor genérico pode ser escrito em termos de uma base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$:

$$|\varphi\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle \quad (2.26)$$

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

onde $|1\rangle$ representa o átomo no nível de energia mais baixa e $|2\rangle$ representa o átomo no nível de energia mais alta e em termos matriciais:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Expressando as relações de ortonormalidade e completiza:

$$\langle 1|2\rangle = \langle 2|1\rangle = 0 \quad (2.29)$$

$$\langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = 1 \quad (2.30)$$

$$|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = I \quad (2.31)$$

onde I representa a matriz unitária (2×2).

Podemos definir um operador hamiltoniano atômico, tal que:

$$E_1 |1\rangle = H_A |1\rangle = -\frac{\hbar\omega_0}{2} |1\rangle \quad (2.32)$$

$$E_2 |2\rangle = H_A |2\rangle = +\frac{\hbar\omega_0}{2} |2\rangle \quad (2.33)$$

podemos escrever este operador em termos da base acima definida como:

$$H_A = \left(\frac{\hbar\omega_0}{2} |2\rangle\langle 2| - \frac{\hbar\omega_0}{2} |1\rangle\langle 1| \right) \quad (2.35)$$

na forma matricial

$$H_A = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

e em termos de matrizes de Pauli

$$H_A = \frac{\omega_0 \hbar}{2} \sigma_z. \quad (2.37)$$

Retornando ao estudo do hamiltoniano de interação (2.25) na aproximação de dipolo elétrico, justificado pelo fato de que o comprimento de onda do campo considerado é muito maior que a dimensão do átomo. Isto implica que $\vec{k} \cdot \vec{r} \simeq 0$, ou seja:

$$H_I = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0^2 V \omega}} \{a P_a + a^\dagger P_a\} \quad (2.38)$$

o operador hamiltoniano de interação, no espaço de estado acima definido pode ser escrito como:

$$\sum_j \sum_i |i\rangle \langle i| H_I |j\rangle \langle j|. \quad (2.39)$$

Substituindo (2.38) em (2.39) temos

$$\begin{aligned} H_I = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0^2 V \omega}} \{ & (a |2\rangle \langle 2|) (\langle 2| P_a |2\rangle) + \\ & + (a^\dagger |1\rangle \langle 1|) (\langle 1| P_a |1\rangle) + \\ & + a [|2\rangle \langle 1| \langle 2| P_a |1\rangle + |1\rangle \langle 2| \langle 1| P_a |2\rangle] + \\ & + a^\dagger [|2\rangle \langle 1| \langle 2| P_a |1\rangle + |1\rangle \langle 2| \langle 1| P_a |2\rangle] \} \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde o operador P_a é hermitiano e possui paridade ímpar, de forma que só os termos

$$\langle i| P_a |j\rangle, \quad i \neq j$$

não são nulos, e ainda

$$\langle i| P_a |j\rangle = \langle j| P_a |i\rangle.$$

Com estas propriedades podemos escrever (2.40) em termos matriciais, denominando $\langle j | P_a | i \rangle = C/2$:

$$H_I = \frac{eC}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0^2 V \omega}} \left\{ \frac{a}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] + \frac{a^\dagger}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right\}. \quad (2.41)$$

Escrevendo (2.41) na notação de matrizes de Pauli e reagrupando os termos, temos

$$H_I = \frac{eC}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0^2 V \omega}} \left[\frac{1}{2} (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) + \frac{1}{2} (a\sigma_- + a^\dagger\sigma_+) \right]. \quad (2.42)$$

Feito isto e através das equações (2.22), (2.37) e (2.42) todos os termos do hamiltoniano total estão na forma de operadores quânticos.

Na discussão feita até aqui consideramos apenas a interação de um único átomo. Levando em conta agora N átomos na cavidade, temos de nos lembrar que a distância interatômica foi considerada grande. Vamos supor que continue válida a aproximação de que não há interação entre os átomos e vamos impor ainda que a densidade de átomos seja uma constante. Assim temos:

$$V = \frac{N}{\rho}, \quad (2.43)$$

onde V é o volume da cavidade, N o número de átomos e ρ a densidade constante. Substituindo (2.43) em (2.42) podemos obter a hamiltoniana quantizada, a menos da energia de ponto zero da radiação:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \sum_{j=1}^N \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_s^j + \frac{G}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \frac{\hbar}{2} (a\sigma_+^j + a^\dagger\sigma_-^j) +$$

$$+ \frac{G}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \frac{\hbar}{2} (a^+ \sigma_j^+ + a \sigma_j^-) \quad (2.44)$$

$$\text{onde } G = \sqrt{\frac{e^2 C^2 \rho}{2m^2 c_0^2 \omega \hbar}}$$

Definindo os operadores de pseudo-spin

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_j^x \quad (2.45)$$

$$J_{\pm} = \frac{\hbar}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_j^{\pm} \quad (2.46)$$

o hamiltoniano (2.44) torna-se:

$$H = \hbar \omega a^+ a + \omega_0 J_x + \frac{G}{\sqrt{N}} (a J_+ + a^+ J_-) + \frac{G}{\sqrt{N}} (a^+ J_+ + a J_-), \quad (2.47)$$

O hamiltoniano (2.47) difere do hamiltoniano conhecido na literatura como o Hamiltoniano de Dicke pelo termo conhecido como o termo "contra-onda girante" (Counter Rotating Wave). Esta nomenclatura tem sua origem nos trabalhos que descrevem um átomo de dois níveis na presença de um campo elétrico (ou magnético) oscilante em que Autler-Townes [22] leva em conta o termo que descreve um campo "girando" no sentido oposto ao do movimento de precessão da partícula. A sua contribuição para o sistema é muito pequena quando o campo aplicado é fraco e com frequência ω próxima a ω_0 (frequência de Bohr).

Notamos que no modelo de spin-bóson dado pela equação (2.47), a radiação é tratada como parte do sistema total conservativo, em contrapartida ao modelo Autler-Townes onde não é levada em consideração a reação da

interação partícula-campo no próprio campo, que poderia ocasionar perdas de energia do campo interagente.

A aproximação em que o termo "contra-onda girante" é desprezado e designada como "aproximação de onda girante (RWA)" e aplicada a equação (2.47), temos:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \omega_0 J_z + \frac{G}{\sqrt{N}} (a J_+ + a^\dagger J_-) \quad (2.48)$$

que é a forma conhecida na literatura como o Hamiltoniano de Dicke. Neste trabalho iremos utilizar o hamiltoniano em sua forma completa, e para fins de estudo, a constante de acoplamento do termo contra-onda girante será diferenciado do acoplamento na expressão (2.48). Além disso, consideraremos em nosso estudo que $\omega \cong \omega_0$ (caso ressonante), daqui em diante vamos ($\hbar = 1$) e definimos um valor de energia $\epsilon = \omega = \omega_0$; levando em conta estas considerações, a equação (2.47) passa a ser escrita como:

$$H = \epsilon a^\dagger a + \epsilon J_z + \frac{G}{\sqrt{N}} (a J_+ + a^\dagger J_-) + \frac{G'}{\sqrt{N}} (a^\dagger J_+ + a J_-) \quad (2.49)$$

2.4 Características do modelo de interação spin-bóson

O modelo de interação spin-bóson representado no hamiltoniano (2.49), descreve um sistema composto por um conjunto de átomos de dois níveis, cuja única interação ocorre entre o átomo e o campo no interior da cavidade, sendo

que a interação inter-átomos ocorre indiretamente via radiação e o estado do campo pode sofrer um efeito coletivo para interação suficientemente forte.

Iremos analisar a emissão de radiação do átomo apenas para o termo no hamiltoniano de interação que depende da constante G (aproximação de onda girante), mas os resultados obtidos são extensivos ao termo em G^2 (com o termo contra-girante).

A taxa de transição do estado inicial $|\psi_i\rangle$ para um estado final $|\psi_f\rangle$ é escrita como [1],[23]:

$$T = |\langle \psi_f | H_G | \psi_i \rangle|^2 = K |\langle \psi_f | (a^+ J_- + a J_+) | \psi_i \rangle|^2 \quad (2.50)$$

A taxa de transição depende portanto da definição do estado $|\psi_i\rangle$, que pode ser feita através do produto dos N estados dos átomos com o produto tensorial do estado que descreve o campo de radiação:

$$|\psi_i\rangle = \prod_{j=1}^N |\psi_j^{(i)}\rangle \otimes |n\rangle. \quad (2.51)$$

Expressando $|\psi_i\rangle$ na base de estados de dois níveis definida em (2.26):

$$|\psi_i\rangle = |\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_N\rangle \otimes |n\rangle, \quad (2.52)$$

onde ε_i pode tomar os valores 1 ou 2.

O estado $|\psi_1\rangle$ é um autoestado do hamiltoniano atômico

$$H_A |\psi_i\rangle = \varepsilon J_Z |\psi_i\rangle = \varepsilon m |\psi_i\rangle \quad (2.53)$$

$$\text{onde } m = \frac{1}{2} (N_2 - N_1), \quad (2.54)$$

e $N_{1,2}$ determinam o número de átomo que se encontram no nível 1 ou 2 respectivamente,

$$N = N_2 + N_1 \quad (2.55)$$

Podemos obter através de (2.50) a seguinte regra de seleção:

$$\Delta m = \pm 1, \quad \Delta n = \pm 1 \quad (2.56)$$

O autoestado de energia (2.53) depende somente de m e não de como os átomos estão distribuídos nos níveis 1 ou 2, portanto a energia $m\epsilon$ possui a degenerescência:

$$d_m = \frac{N!}{(N_1!)(N_2!)} = \frac{N!}{(N/2 + m)!(N/2 - m)!} \quad (2.57)$$

A fim de removermos esta degenerescência, podemos construir um novo conjunto de estados estacionários $|\psi\rangle$ de tal maneira que possamos conectar a transição (2.50) do estado de mais alta energia com o estado de mais baixa energia, e para isso definimos operadores pseudo-spin (2.45) e (2.46), tal que

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad (2.58)$$

onde $J_x = (J_+ + iJ_-)$, $J_y = (J_+ - iJ_-)$ e J_{\pm} .

O operador J^2 comuta com H_A , portanto podemos construir simultaneamente, o autoestado $|j, m\rangle$ para J^2 e H_A ($\hbar = 1$):

$$J^2 |j, m\rangle \otimes |n\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \otimes |n\rangle \quad (2.59)$$

$$\epsilon J_z |j, m\rangle \otimes |n\rangle = \epsilon m |j, m\rangle \otimes |n\rangle$$

j pode ser um número inteiro não negativo ou semi-inteiro positivo e m varia de $-j$ a $+j$. Através destas propriedades e das expressões (2.54) e (2.55):

$$|m| \leq j \leq \frac{N}{2} \quad (2.61)$$

O número quântico j foi denominado por Dicke [1] como *número de cooperação*, e a razão deste nome é que j caracteriza o montante de átomos

que se comportam de maneira coletiva (coerente) quando a interação com o campo no interior da cavidade for intensa o suficiente.

O conjunto completo de estados $|j, m\rangle$ pode ser construído exatamente como é feito para o momento angular, aplicando-se de maneira sucessiva o operador J_- a partir do estado não degenerado $|N/2, N/2\rangle$, obtendo assim estados com m variando de $N/2$ a $-N/2$, todos não degenerados.

De maneira geral, existe mais de um estado com o mesmo m , por exemplo com $m = N/2 - 1$, um deles é o estado $|N/2, N/2 - 1\rangle$, o outro com mesmo valor de m devido a (2.61) será $|N/2 - 1, N/2 - 1\rangle$. Mas como estamos interessados no caso de cooperação máxima $J = N/2$, extendemos as regras de seleção (2.56) para:

$$\Delta j = 0, \quad \Delta m = \pm 1 \quad \text{e} \quad \Delta n = \pm 1 \quad (2.62)$$

A taxa de emissão espontânea de dois estados $|\psi\rangle$ com valores de m vizinhos é proporcional a

$$|(j, m - 1 | J_- | j, m \rangle|^2 \cong (j + m)(j - m + 1). \quad (2.63)$$

Assim podemos escrever a partir de (2.63) a função

$$I(j, m) = (j + m)(j - m + 1)I_0,$$

onde $I_0 = I(1/2, 1/2)$ representa a taxa de transição para um único átomo. Se todos os N átomos estiverem inicialmente excitados $|\psi\rangle = |N/2, N/2\rangle \otimes |n\rangle$:

$$I(N/2, N/2) = NI_0 \quad (2.65)$$

Este resultado representa o valor esperado quando N átomos irradiam de maneira independente (incoerentemente). A função $I(j, m)$ atingirá um

máximo quando:

$$\frac{\partial I(j, m)}{\partial m} = -2m + 1 = 0 \quad (2.66)$$

Temos como solução para (2.66) $m = 1/2$, mas se impusermos que N seja par a solução de (2.66) será os números inteiros mais próximos de $1/2$, isto é, $m = 0$ ou $m = 1$. Se o valor de m for igual a zero significa que metade dos átomos estão excitados (2.54), temos então:

$$I(j, 0) = I(j, 1) = j(j + 1)I_0 \quad (2.67)$$

Se o campo de radiação no interior da cavidade for suficientemente grande e a interação suficientemente forte para que tenhamos o número de cooperação máximo, a taxa de transição para N átomos será:

$$I(N/2, 0) = \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) I_0 \quad (2.68)$$

para valores de N grande $I \cong (N^2/4)I_0$. Este regime só é possível se os átomos irradiarem em fase (coerentemente), fazendo com que a taxa de emissão se torne proporcional a N^2 ao invés de N , e este estado é denominado de *estado superradiante*, que é ativado quando temos número de cooperação grande e pequenos valores para $|m|$.

2.5 O Análogo Clássico para o modelo do Maser

Obteremos nesta seção o análogo clássico do operador hamiltoniano para o modelo do Maser via estados coerentes como foi feita no trabalho

[3]. Com a função hamiltoniana clássica associada para o sistema determinada, podemos estabelecer as equações de movimento e através de seções de Poincaré, analisar as mudanças no sistema do regime regular para o caótico influenciadas pelas constantes de acoplamento do sistema.

Definimos um estado coerente para o sistema de spin-bóson como:

$$|zw\rangle = |z\rangle \otimes |w\rangle, \quad (2.69)$$

onde o estado $|z\rangle$ é correspondente ao oscilador (bóson) e o estado $|w\rangle$ ao estado coerente de spin [24]. Estes estados escritos na base do oscilador e do spin possuem a seguinte forma:

$$|z\rangle = e^{zz^*/2} e^{z\alpha_0^+} |0\rangle \quad (2.70)$$

$$|w\rangle = \frac{1}{(1+w\bar{w})^J} e^{wJ_+} |J, -J\rangle, \quad (2.71)$$

sendo $|0\rangle$ e $|J, -J\rangle$ os estados de referência do oscilador e de spin respectivamente. A hamiltoniana clássica associada é definida como função das variáveis complexas z e w tem a estrutura hamiltoniana [25], mas a correspondência só poderá ser vista no limite $\hbar \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ ($N\hbar$ fixo).

$$H_{cl} = \langle zw | H | zw \rangle$$

onde

$$H = \epsilon a^+ a + \epsilon J_z + \frac{G}{\sqrt{N}} (a J_+ a^+ J_-) + \frac{G'}{\sqrt{N}} (a^+ J_+ + a J_-)$$

calculando o valor esperado de H nos estados coerentes, encontramos os seguintes resultados parciais

$$\langle z | a | z \rangle = z \quad (2.73)$$

$$\langle z | a^\dagger | z \rangle = \bar{z} \quad (2.74)$$

$$\langle w | J_- | w \rangle = \frac{2J\bar{w}}{1+w\bar{w}} \quad (2.75)$$

$$\langle w | J_+ | w \rangle = \frac{2Jw}{1+w\bar{w}} \quad (2.76)$$

$$\langle w | J_x | w \rangle = -J \left(\frac{1-w\bar{w}}{1+w\bar{w}} \right) \quad (2.77)$$

Utilizando estes resultados, obtemos para H_{cl} a expressão:

$$H_{cl} = \epsilon z \bar{z} - \epsilon J \left(\frac{1-w\bar{w}}{1+w\bar{w}} \right) + \left(\frac{\sqrt{2J}}{1+w\bar{w}} \right) [G(\bar{w}z + w\bar{z}) + G'(wz + \bar{w}\bar{z})] \quad (2.78)$$

Podemos expressar w e z em termos de variáveis de ângulo e ação através das equações

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{J+I_1}{J-I_1}} e^{i\theta_1} \\ z &= \sqrt{I_2} e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (2.79)$$

escrevendo (2.72) em termos dessas variáveis, obtemos:

$$H_{cl} = \epsilon I_1 + \epsilon I_2 + \left(2\sqrt{\frac{(J^2 - I_1^2)I_2}{2J}} \right) [G \cos(\theta_1 - \theta_2) + G' \cos(\theta_1 + \theta_2)], \quad (2.81)$$

onde I_1 representa a variável clássica associada à componente J_x , variando de $-J$ a J , I_2 representa a intensidade do campo de radiação. Definindo uma transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{2(J+I_1)} \sin \theta_1 \\ p_1 &= \sqrt{2(J+I_1)} \cos \theta_1 \\ q_2 &= \sqrt{2I_2} \sin \theta_2 \\ p_2 &= \sqrt{2I_2} \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2.82)$$

A hamiltoniana clássica escrita em função dessas novas coordenadas, possui seguinte forma

$$H_{cl} = \epsilon H_1 + \epsilon H_2 - \epsilon J + \left(\frac{2J - H_1}{2J} \right)^{\frac{1}{2}} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2) \quad (2.83)$$

onde

$$\begin{aligned} H_1 &= \left(\frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \right) \\ H_2 &= \left(\frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \right) \\ G_{\pm} &= G \pm G' \end{aligned}$$

A equação (2.83) representa a função hamiltoniana clássica associada ao modelo do Maser, escrita como função dos momentos e coordenadas canonicamente conjugadas dos graus de liberdade do oscilador (p_2, q_2) e de spin (p_1, q_1) [3]; a partir desta função obtemos as equações de movimento para o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\epsilon q_1 - \left(\sqrt{\frac{2J - H_1}{2J}} \right) G_- q_2 \\ &+ \frac{q_1}{2\sqrt{2J(2J - H_1)}} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2) \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -\epsilon p_1 - \left(\sqrt{\frac{2J - H_1}{2J}} \right) G_+ p_2 \\ &+ \frac{p_1}{2\sqrt{2J(2J - H_1)}} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2) \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\dot{p}_2 = \epsilon q_2 + \left(\sqrt{\frac{2J + H_1}{2J}} \right) G_- q_1 \quad (2.86)$$

$$\dot{q}_2 = -\epsilon p_2 - \left(\sqrt{\frac{2J + H_1}{2J}} \right) G_+ p_1 \quad (2.87)$$

Na função hamiltoniana, bem como nestas equações de movimento, a dependência do termo de interação com a raiz quadrada

$$\sqrt{\frac{2J - H_1}{2J}},$$

expressa o fato de que a energia no espaço de fase dos átomos (spin) é limitada; quando todos os N átomos estiverem excitados H_1 atinge seu valor máximo permitido, ou seja $H_1 = 2J$. A partir desse valor qualquer acréscimo de energia será efetivado no espaço de fase do oscilador (campo), isto determina características interessantes nas seções de Poincaré obtidas para o sistema.

Capítulo 3

Manifestação da não-integrabilidade quântica no Maser de Dicke

Discutiremos neste capítulo a integrabilidade e a não-integrabilidade para o Maser de Dicke, e mostraremos como isso afeta o comportamento dos valores esperados de operadores nos auto-estados do hamiltoniano.¹

Um sistema quântico genérico com N graus de liberdade tem $2N$ constantes de movimento se existirem N operadores globalmente definidos $I_m(P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_m)$ com $m = 1, \dots, N$, cujos comutadores mútuos sejam nulos,

$$[I_m, I_n] = 0, \quad (3.1)$$

para todo $m, n = 1, \dots, N$ [27], isto significa que é possível encontrar auto-

¹Os resultados apresentados neste capítulo encontram-se publicados na referência [26]

estados comuns aos operadores I_m .

O Maser de Dicke, descrito pelo operador hamiltoniano

$$H = \epsilon a^\dagger a + \epsilon J_z + \frac{G}{\sqrt{N}} (a J_+ + a^\dagger J_-) + \frac{G'}{\sqrt{N}} (a^\dagger J_+ + a J_-), \quad (3.2)$$

possui dois graus de liberdade, o grau de liberdade correspondente aos átomos (pseudo-spin), e o grau de liberdade correspondente as partículas (bósons). Para o valor de $G' = 0$., os operadores

$$P = (a^\dagger a + J_z) e \quad (3.3)$$

$$H_G = (a^\dagger J_- + a J_+), \quad (3.4)$$

comutam entre si e com o operador hamiltoniano (3.2). Portanto, quando $G' = 0$. o sistema é considerado integrável. Já para o caso onde $G' \neq 0$, os comutadores mútuos não são nulos, logo o sistema é não-integrável neste caso.

3.1 Os auto-estados do hamiltoniano do modelo do Maser

Na seção (2.4), apresentamos uma base de estados $\{|m, n\rangle\}$, onde

$$|m, n\rangle = |j, m\rangle \otimes |n\rangle, \quad (3.5)$$

onde

$$m = -j, -j + 1, \dots, j \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots$$

Utilizando o fato do operador P , definido em (3.3), ser uma constante de movimento no caso integrável, e ainda que a base de estados $\{|m, n\rangle\}$ é uma base de auto-estados de P com autovalores $P_{mn} = m + n$:

$$P|m, n\rangle = (J_x + a^\dagger a)|m, n\rangle = (m + n)|m, n\rangle,$$

podemos ordenar os elementos dessa base colocando em ordem crescente os autovalores de P .

A matriz que representa o operador P nesta base, é formada por matrizes bloco-diagonais com no máximo $2J+1$ linhas e colunas. Exemplificando para $J = 9/2$, temos:

(i) $P_{mn} = -4.5$ o único autovetor de P é $|m = -9/2, n = 0\rangle$

(ii) $P_{mn} = -3.5$, os autovetores de P são:

$$|m = -7/2, n = 0\rangle$$

$$|m = -9/2, n = 1\rangle$$

e assim por diante,

(iii) $P_{mn} = +4.5$, temos

$$\left. \begin{array}{l} |m = -9/2, n = 9\rangle \\ |m = -7/2, n = 8\rangle \\ |m = -5/2, n = 7\rangle \\ \vdots \\ |m = 9/2, n = 0\rangle \end{array} \right\} (2J + 1) \text{vetores}$$

$$(P) = \begin{pmatrix} -4.5 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -3.5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3.5 & \dots \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} |-9/2, 0\rangle \\ |-7/2, 0\rangle \\ |-9/2, 1\rangle \\ \vdots \end{matrix} \quad (3.6)$$

A base de estados $\{|m, n\rangle\}$ é infinita, pois n pode tomar infinitos valores, portanto para calcularmos os auto-estados do hamiltoniano temos que truncar a base para um valor de P_{mn} determinado. Como consequência desse truncamento, os auto-estados do hamiltoniano, determinados pela diagonalização de H , não são exatos, portanto sua convergência deve ser sempre verificada. No nosso caso, comparamos as auto-energias de matrizes (800x800) com as auto-energias de matrizes (1000x1000), onde podemos concluir que aproximadamente os 500 primeiros níveis estão com convergência aceitável; os parâmetros utilizados são $J = 9/2$, $\epsilon = 1.$, $G = .5$ e $G' = .2$. A estatística de níveis nos mostra que para estes valores de G e G' com nove átomos na cavidade ($J = 9/2$) é o suficiente para termos uma distribuição do tipo GOE.

3.2 Média temporal de operadores como um invariante

A partir dos operadores de número de fótons a^+a e número de átomos excitados J_z , é possível construirmos invariantes através dos valores das médias temporais desses operadores relevantes ao sistema seguindo o procedimento de Peres [13] e Feingold [14].

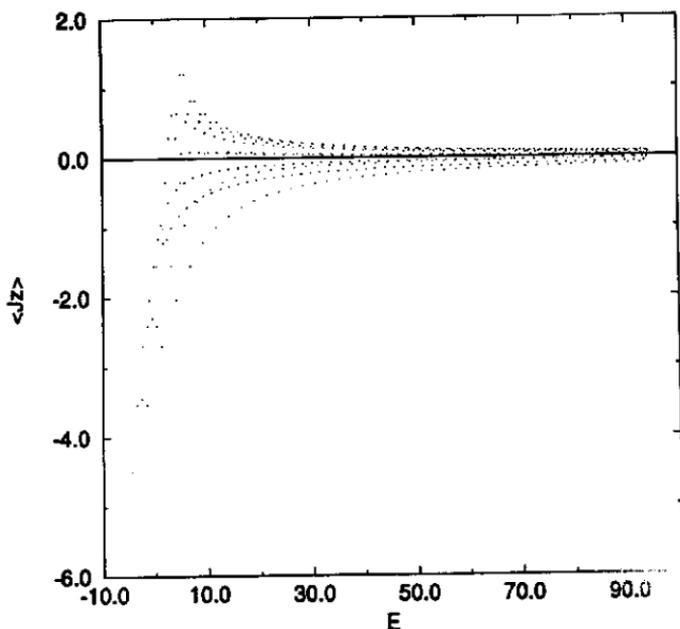


Figura 3.1: Valor esperado $\langle E_i | J_z | E_i \rangle$ como função de E_n para o caso integrável ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $J = 9/2$)

A média temporal \bar{A} de um operador $A(t)$ é uma constante de independente de movimento para hamiltonianos não degenerados. Podemos expressar o valor de \bar{A} utilizando a completude dos auto-estados do hamiltoniano como:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt A(t) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_j \sum_i \int_0^T dt \exp\left(\frac{i(E_i - E_j)t}{\hbar}\right) |E_i\rangle \langle E_i| A(0) |E_j\rangle \langle E_j| = \end{aligned}$$

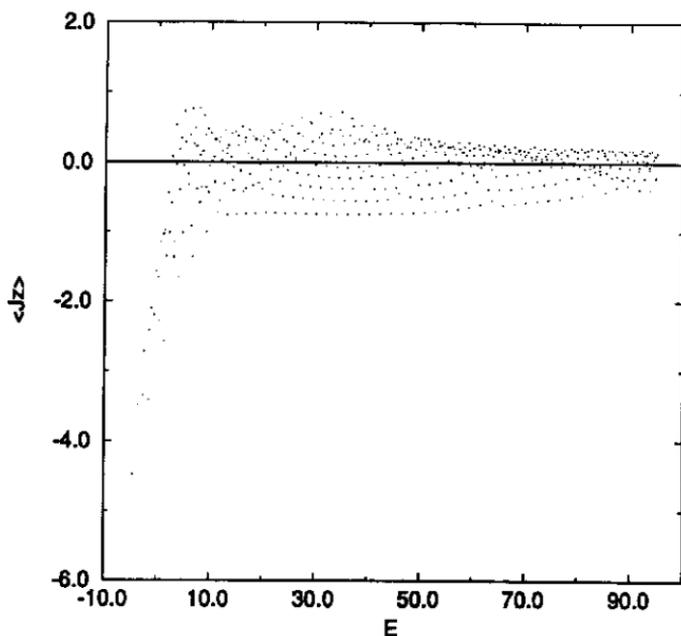


Figura 3.2: Valor esperado $\langle E_i | J_z | E_i \rangle$ como função de E_n para $G'=2$ ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $J = 9/2$)

$$= \sum_j \sum_i \delta_{ij} |E_i\rangle \langle E_i | A(0) | E_j \rangle \langle E_j | = \sum_i \langle E_i | A(0) | E_i \rangle |E_i\rangle \langle E_i| \quad (3.7)$$

onde $|E_i\rangle$ são os auto-estados do hamiltoniano do Maser e são escritos de uma maneira geral como

$$|E_i\rangle = \sum_{m=-J}^{m=+J} \sum_{n=0}^{\infty} C_{nm}^{(i)} |m, n\rangle. \quad (3.8)$$

Os valores esperados do operador J_z nos auto-estados do hamiltoniano contra os autovalores de energia no caso integrável, estão representados

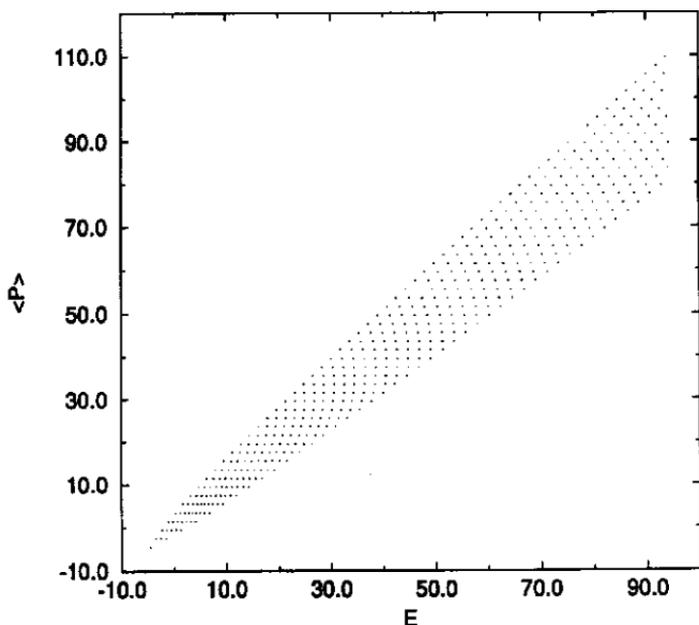


Figura 3.3: Valor esperado de P no caso integrável ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $J = 9/2$)

na figura (3.1), onde podemos notar um padrão regular na distribuição dos valores, onde cada ponto representa o valor esperado correspondente a um auto-estado do hamiltoniano com energia E_n . Os correspondentes valores esperados versus energia para o caso não-integrável estão representados na figura (3.2), onde podemos observar claramente a quebra parcial da regularidade na distribuição dos pontos. Notamos também, que as regiões de energia onde a regularidade é mais afetada, energias em torno de 8. e 40., correspondem a regiões de energia no espaço de fase clássico em que o efeito da existência da borda no espaço de fase de spin se faz sentir no compor-

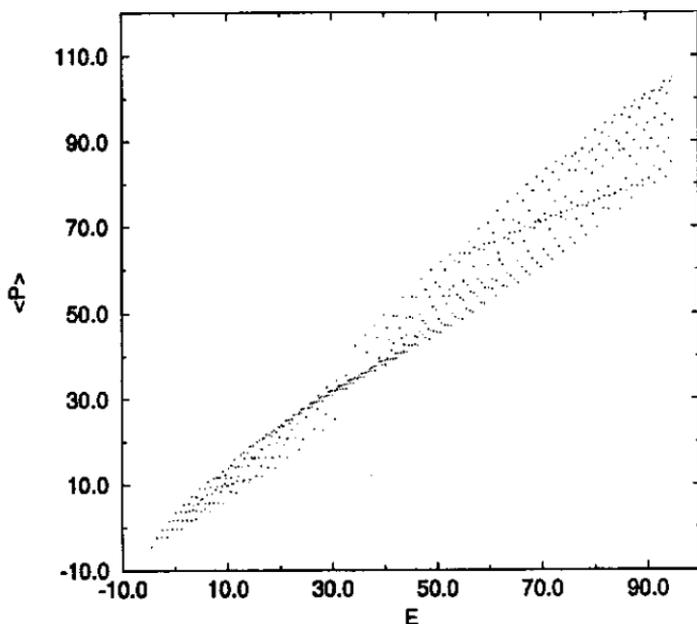


Figura 3.4: Valor esperado de P para $G=0.2$ ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $J = 9/2$)

tamento das órbitas periódicas em meio as órbitas instáveis (vide referência [3]). Voltaremos a discutir esta analogia na seção (4.3), onde apresentaremos seções de Poincaré para o modelo do Maser nesses e em outros valores de energia apropriados.

Os valores esperados do operador P (3.3) versus energia estão representados, para o caso integrável, na figura (3.3) e no caso não-integrável na figura (3.4), onde podemos observar ainda mais claramente a quebra da regularidade na distribuição dos pontos.

Quando P é constante de movimento ($G' = 0$), podemos observar na

figura (3.3) a influência da bloco-diagonalidade da matriz de P na base $\{|m, n\rangle\}$, através das linhas horizontais formadas pelos pontos que representam valores esperados de P constante.

De fato, podemos notar que o número máximo de pontos pertencentes a cada linha horizontal pode ser expresso como:

$$N_P = 2J + 1,$$

no caso da figura (3.3), $J=9/2$ portanto $N_P = 10$, que ocorre para valores de $\langle P \rangle > 9/2$.

A limitação do espaço de Hilbert para o operador de pseudo-spin J_z também pode ser observado no comportamento dos valores esperados de J_z nos auto-estados do hamiltoniano

$$\langle E_i | J_z | E_i \rangle \leq J,$$

já o mesmo não ocorre para os valores esperados de P , pois o espaço de Hilbert para os fótons é infinito.

Podemos notar ainda na figura (3.1) que para grandes valores de energia ($E > 50$), a tendência dos valores esperados de J_z é ir a zero, isto significa que todos os estados possíveis de pseudo-spins estão aproximadamente igualmente ocupados. Por outro lado com o aumento da energia total do sistema, a quantidade de energia correspondente ao grau de liberdade da partícula (fótons) torna-se dominante em $\langle P \rangle$.

A análise dessas figuras nos permitem ter uma noção do quanto de energia do sistema vai para cada grau de liberdade e como elas são afetadas pela não-integrabilidade do sistema. É importante notar que tal estudo é feito através de quantidades puramente quânticas.

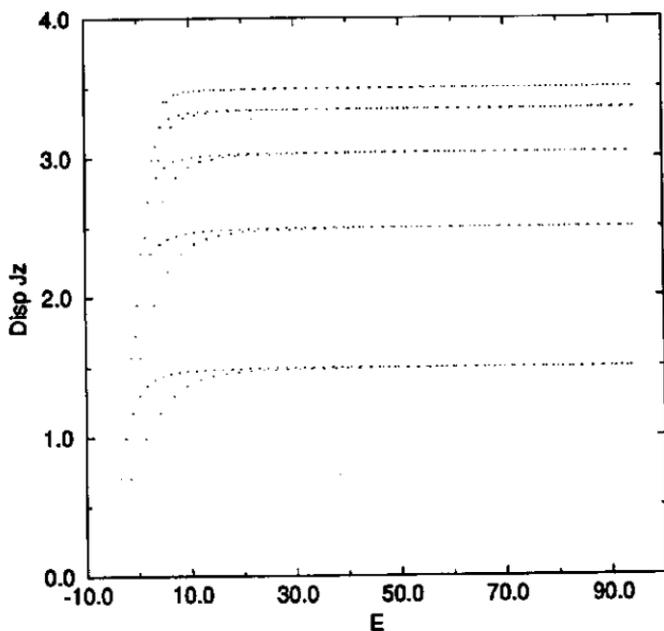


Figura 3.5: Dispersão de J_z para $G=5$ e $G'=0$. ($\epsilon = 1$, $J = 9/2$)

3.3 O efeito do termo não-integrável na dispersão

A dispersão dos valores esperados de um operador A é expressa como:

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}. \quad (3.9)$$

Encontramos na figura (3.5) a dispersão do valor esperado de J_z , nos auto-estados do hamiltoniano para o caso integrável e na figura (3.6), para o caso não-integrável.

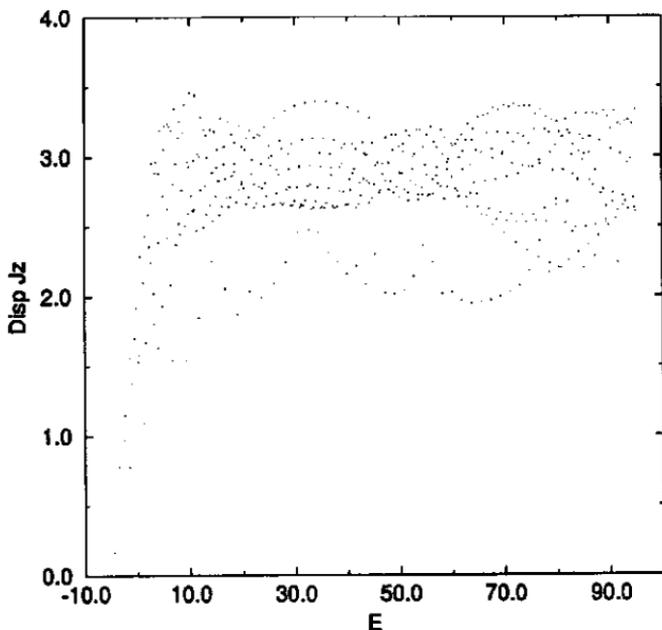


Figura 3.6: Dispersão de J_x para $G=0.5$ e $G'=0.2$ ($\epsilon = 1.$, $J = 9/2$)

Podemos notar, no caso integrável, uma regularidade na distribuição dos pontos, que caem sobre $(2J + 1)/2$ linhas horizontais uma vez que ΔJ_x é positiva. As figuras correspondentes para o operador número de fótons ΔN , é inteiramente análoga a ΔJ_x para ambos os casos, de modo que não apresentamos aqui.

A regularidade das dispersões como função da energia para $G' = 0$. caracteriza um comportamento que ocorre nos auto-estados do hamiltoniano para o caso integrável. Um auto-estado do hamiltoniano para modelo do

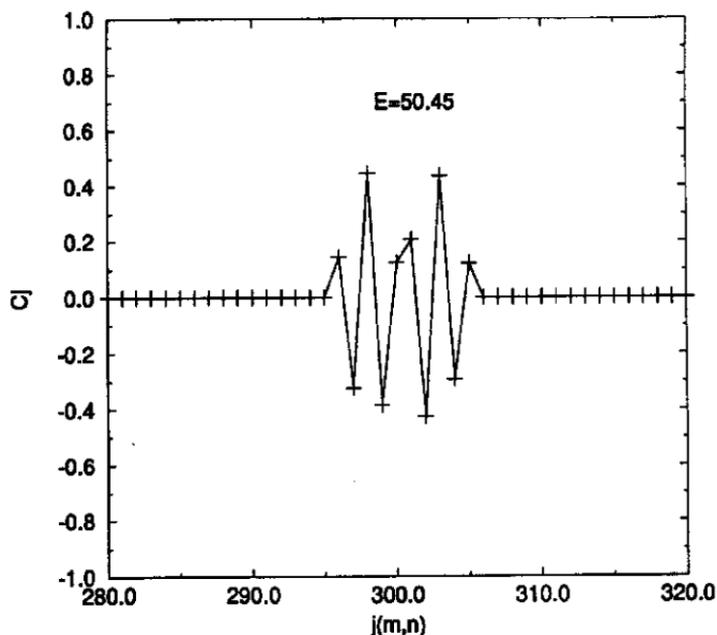


Figura 3.7: Coeficientes de um auto-estado do hamiltoniano para $G=5$ e $G'=0$. ($\epsilon = 1.$, $J = 9/2$), ordenados como indicado na equação (3.6)

Maser, é escrito em geral como:

$$|E_i\rangle = \sum_{m=-J}^{m=+J} \sum_{n=0}^{\infty} C_{nm}^{(i)} |m, n\rangle, \quad (3.10)$$

e quando encontramos o sistema no caso integrável, apenas $2J+1$ coeficientes $C_{nm}^{(i)}$ são não nulos, além de serem, nos estados convergidos, constantes e aproximadamente iguais dois a dois. Isto pode ser melhor compreendido na figura (3.7), onde estão representados os coeficientes de um auto-estado do hamiltoniano para o caso integrável.

Por questão de simplicidade, tomemos o caso da dispersão de J_x , o valor do termo $\langle J_x \rangle^2$ tende a zero rapidamente, predominando somente o termo $\langle J_x^2 \rangle$. Discutiremos um caso hipotético onde $J = 1/2$, portanto teremos dois valores de $C_{nm}^{(k)}$ não nulos e similares. Suponhamos que para um auto-estado do hamiltoniano $|E_k\rangle$ tenhamos, como visto em (3.5):

$$|E_k\rangle = a|-1/2, n\rangle + b|1/2, n-1\rangle \quad (3.11)$$

os demais termos do auto-estado do hamiltoniano são nulos ($C_{nm} = 0$), n é o número de fótons para este estado.

O valor do termo $\langle J_x^2 \rangle_k$ no auto-estado de E_k é dado por:

$$\langle J_x^2 \rangle_k = |a|^2(-1/2)^2 + |b|^2(1/2)^2, \quad (3.12)$$

mas se calcularmos o valor desse termo para o nível de energia seguinte E_{k+1} , teremos:

$$\langle J_x^2 \rangle_{k+1} = |a|^2(1/2)^2 + |b|^2(-1/2)^2. \quad (3.13)$$

Podemos notar que o valor de $\langle J_x^2 \rangle_k$ para o auto-estado E_{k+1} é o mesmo valor que o encontrado em E_k , já que $a \simeq b$.

Isto explica o fato de que para $J=1/2$, encontraremos apenas uma linha horizontal. Quando a integrabilidade do sistema é quebrada, esta característica dos coeficientes $C_{nm}^{(k)}$ desaparece e teremos então vários valores de $C_{nm}^{(k)}$ não nulos e distintos, distribuídos de maneira irregular entre os termos que compõem a base dos auto-estados do hamiltoniano.

Capítulo 4

O limite clássico

Estudaremos neste capítulo seguindo a linha de investigação de Feingold [14] a obtenção da função densidade de estados clássica para o Maser de Dicke bem como os valores médios de grandezas físicas do modelo no limite clássico. Calcularemos por outro lado os valores médios quânticos dos operadores quânticos associados e realizaremos a comparação com os valores clássicos. Tal comparação será feita tanto no caso regular quanto no caso com caos.

4.1 A densidade de estados

Para um sistema hamiltoniano do ponto de vista do ensemble microcanônico, a densidade de estados pode ser calculada no limite clássico contando quantos hipercubos de lado h de dimensionalidade igual à do espaço

de fase pode caber na superfície de energia:

$$\rho(E) = \frac{1}{(\hbar)^{\mathcal{N}}} \int \int \delta(H(\vec{p}, \vec{q}) - E) d\vec{p} d\vec{q}, \quad (4.1)$$

onde \mathcal{N} é o número de graus de liberdade desse sistema. Iremos calcular a função $\rho(E)$ para o modelo do Maser a partir da função hamiltoniana do sistema

$$H_{cl} = \epsilon H_1 + \epsilon H_2 - \epsilon J + \left(\frac{2J - H_1}{2J}\right)^{\frac{1}{2}} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2), \quad (4.2)$$

onde:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left(\frac{p_1^2 + q_1^2}{2}\right) \\ H_2 &= \left(\frac{p_2^2 + q_2^2}{2}\right) \\ G_{\pm} &= G \pm G'. \end{aligned}$$

Neste caso, existem 2 graus de liberdade, o do átomo e o de partícula (bósons), portanto $\mathcal{N} = 2$. Passamos agora à solução da integral (4.1)

A função hamiltoniana (4.2) pode ser expressa como uma função polinomial de segundo grau em p_2 , assim podemos utilizar a propriedade da função Delta

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \delta(x - x_0) \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0}^{-1}. \quad (4.3)$$

Esta propriedade aplicada a um polinômio de segundo grau ($ax^2 + bx + c$) resulta um

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0^{(1)})}{|\sqrt{\Delta}|} + \frac{\delta(x - x_0^{(2)})}{|-\sqrt{\Delta}|} \quad (4.4)$$

onde $x_0^{(n)}$ representam as raízes do polinômio e $\Delta = b^2 - 4ac$.

Escrevendo $(H - E)$ como um polinômio em p_2 :

$$\left(\frac{1}{2}\epsilon\right) p_2^2 + (RG_+ p_1) p_2 + \left(\frac{1}{2}\epsilon q_2^2 + \epsilon H_1 - \epsilon J + RG_- q_1 q_2 - E\right) = 0 \quad (4.5)$$

onde

$$R = \sqrt{\frac{2J - H_1}{2J}},$$

podemos calcular as raízes do polinômio.

Com estes resultados podemos expressar $\rho(E)$ como a integral ($\hbar = 1$):

$$\rho(E) = \int \int \int \int \frac{\delta(p_2 - p_0^{(1)})}{4\pi^2 |\sqrt{\Delta_1}|} dp_2 dp_1 dq_2 dq_1 + \int \int \int \int \frac{\delta(p_2 - p_0^{(2)})}{4\pi^2 |-\sqrt{\Delta_1}|} dp_2 dp_1 dq_2 dq_1 \quad (4.6)$$

onde $p_0^{(n)}$ são as raízes de $H - E$ como polinômio em p_2 (4.5). Resolvendo a integral em dp_2 obtemos:

$$\rho(E) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int \int \frac{2}{\sqrt{\Delta_1}} dq_2 dp_1 dq_1 \quad (4.7)$$

onde

$$\Delta_1 = -\epsilon q_2^2 - (2\epsilon RG_- q_1) q_2 + (R^2 G_+^2 p_1^2 - \epsilon^2 H_1 + 2\epsilon^2 J + 2\epsilon E). \quad (4.8)$$

O intervalo de integração de (4.7) em dq_2 possui a seguinte restrição:

$$\Delta_1 \geq 0$$

mas Δ_1 também pode ser visto como um polinômio de segundo grau em q_2 , portanto basta resolvermos a inequação acima. Esta é satisfeita para $q_0^{(1)} \leq q_2 \leq q_0^{(2)}$, onde

$$q_0^{(1)} = \frac{2\epsilon RG_- q_1 + \sqrt{\Delta_2}}{-2\epsilon^2} \quad (4.9)$$

$$q_0^{(2)} = \frac{2\epsilon RG_- q_1 - \sqrt{\Delta_2}}{-2\epsilon^2}. \quad (4.10)$$

onde

$$\Delta_2 = 4\epsilon^2 R^2 G_+^2 p_1^2 + 4\epsilon^2 R^2 G_-^2 q_1^2 + 8\epsilon^4 J - 8\epsilon^4 H_1 + 8\epsilon^3 E \quad (4.11)$$

Por sua vez, as raízes (4.9) e (4.10) só serão reais se

$$\Delta_2 \geq 0.$$

Novamente temos que resolver a inequação acima, que depende de (p_1, q_1) .

a) Caso regular ($G'=0$):

No caso regular ($G' = 0$) a solução se simplifica, pois conseguimos escrever (4.11) como um polinômio de segundo grau em H_1 :

$$-\frac{\epsilon^2 G^2}{2J} H_1^2 + \epsilon^2 (G^2 - \epsilon^2) H_1 + \epsilon^4 J + \epsilon^3 E \geq 0. \quad (4.12)$$

A inequação (4.12) é um polinômio com o termo quadrático negativo ou seja, o polinômio será positivo ou nulo para $H_{1(0)}^{(1)} \leq H_1 \leq H_{1(0)}^{(2)}$, onde

$$H_{1(0)}^{(1)} = \frac{\epsilon^2 (G^2 - \epsilon^2) - \sqrt{\Delta_3}}{\frac{\epsilon^2 G^2}{J}} \quad (4.13)$$

$$H_{1(0)}^{(2)} = \frac{\epsilon^2 (G^2 - \epsilon^2) + \sqrt{\Delta_3}}{\frac{\epsilon^2 G^2}{J}} \quad (4.14)$$

e

$$\Delta_3 = (\epsilon^2 (G^2 - \epsilon^2))^2 + \frac{2\epsilon^2 G^2}{J} (\epsilon^4 J + \epsilon^3 E). \quad (4.15)$$

$\sqrt{2H_1}$ tem o papel de raio de um círculo no espaço de fase em (p_1, q_1) , que de acordo com a função hamiltoniana (4.2) é limitado por um valor máximo

de $\sqrt{4J}$, portanto

$$0 \leq H_1 \leq 2J .$$

A raiz $H_{1(0)}^{(2)}$ é sempre positiva ($|\sqrt{\Delta_3}| \geq \epsilon^2(G^2 - \epsilon^2)$ para $E \geq -\epsilon J$) e deve ter seu valor máximo $2J$ e isso ocorre quando

$$E \leq \epsilon J ,$$

para valores de energia maiores que ϵJ fixamos $H_1 = 2J$, com isso determinamos um intervalo de integração para dp_1 e dq_1 , a outra solução é descartada.

Resolvendo a integral (4.1) em q_2 , entre os valores de $q_0^{(1)}$ e $q_0^{(2)}$ descritos em (4.9) e (4.10) respectivamente, obtemos:

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{-\sqrt{2J(E)}}^{\sqrt{2J(E)}} \int_{-\sqrt{2J(E)-q_1^2}}^{\sqrt{2J(E)-q_1^2}} dp_1 dq_1 \quad (4.16)$$

Completando a integração em dp_1 e dq_1 , obtemos para a densidade de energia a expressão:

$$\rho(E) = \frac{\tilde{J}(E)}{\epsilon} \quad (4.17)$$

onde

$$\tilde{J}(E) = \begin{cases} H_{1(0)}^{(2)}, & E \leq \epsilon J, \\ 2J, & E \geq \epsilon J \end{cases} \quad (4.18)$$

e a função $H_{1(0)}^{(2)}$ é definida na equação (4.14).

b) Caso não-integrável ($G \neq 0$):

A solução da integral (4.7) para o caso em que $G' \neq 0$ terá que ser feita numericamente. Escrevendo (4.11) em termos de um polinômio de quarto grau em q_1 :

$$-\frac{\epsilon^2 G_-^2}{4J} q_1^4 + \left[(\epsilon^2 G_-^2 - \epsilon^4) - \frac{p_1^2 \epsilon^2 (G_+^2 + G_-^2)}{4J} \right] q_1^2 - \frac{\epsilon^2 G_+^2 p_1^4}{4J} + \epsilon^2 (G_+ - \epsilon^2) p_1^2 + 2\epsilon^3 (J + \epsilon E) \geq 0, \quad (4.19)$$

resolvendo esta inequação, encontramos como limite de integração os valores

$$q_1^{(1)} = -\sqrt{\Delta_4} \quad (4.20)$$

$$q_1^{(2)} = \sqrt{\Delta_4}, \quad (4.21)$$

onde

$$\Delta_4 = \frac{-\epsilon^2 (G_+^2 + G_-^2) p_1^2 + 4J \epsilon^2 (G_-^2 - \epsilon^2) + 4J \sqrt{\Delta_5}}{2\epsilon^2 G_-^2}. \quad (4.22)$$

com

$$\Delta_5 = \left[(\epsilon^2 G_-^2 - \epsilon^4) - \frac{p_1^2 \epsilon^2 (G_+^2 + G_-^2)}{4J} \right]^2 - 4 \left(-\frac{\epsilon^2 G_-^2}{4J} \right) \left(-\frac{\epsilon^2 G_+^2 p_1^4}{4J} + \epsilon^2 (G_+ - \epsilon^2) p_1^2 + 2\epsilon^3 (J + \epsilon E) \right)$$

Δ_4 é necessariamente positivo, portanto o numerador da equação (4.22) tem que ser positivo, ou seja:

$$p_1^2 \leq \frac{4J [\sqrt{\Delta_5} + \epsilon^2 (G_-^2 - \epsilon^2)]}{\epsilon^2 (G_+^2 + G_-^2)}. \quad (4.23)$$

A inequação (4.23) é transcendental, já que Δ_5 também depende de p_1 . Resumindo, no caso caótico os limites de integração para dp_1 e dq_1 serão:

i) Se $(p_1^2 + q_1^2)/2 < 2J$, então

$$\rho(E) = \int_{-\sqrt{\Delta_4}}^{\sqrt{\Delta_4}} \int_{-p(E)}^{p(E)} dp_1 dq_1 \quad (4.24)$$

ii) Se $(p_1^2 + q_1^2)/2 \geq 2J$ então:

$$\rho(E) = \int_{-\sqrt{4J-q_1^2}}^{\sqrt{4J-q_1^2}} \int_{-\sqrt{4J}}^{\sqrt{4J}} dp_1 dq_1 \quad (4.25)$$

A solução da integral (4.24) é expressa como uma integral definida em dp_1

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{-p(E)}^{p(E)} \left(\frac{-c^2 (G_+^2 + G_-^2) p_1^2 + 4J\epsilon^2 (G_-^2 - c^2) + 4J\sqrt{\Delta_5}}{2\pi\epsilon^2 G_-^2} \right)^{\frac{1}{2}} dp_1 \quad (4.26)$$

onde $p(E)$ são soluções numéricas de (4.23). Obtemos o valor da integral (4.26) numericamente.

A função $\rho(E)$ para o caso regular ($G' = 0$) e caótico ($G' = .35$) estão apresentados na figura (4.1). Podemos notar que para valores de energia intermediários, o caso regular atinge a borda do espaço de fase dos átomos em um valor de energia menor que para o caso caótico, visto que, de acordo com (4.17) ao atingir a borda $\rho(E)$ passa a ser uma constante igual a $2J$. Isso já era esperado pois o termo que quebra a regularidade do sistema contribui negativamente para a energia total. O fato da densidade se tornar uma constante após atingir a borda do espaço de fase relacionado aos átomos também é fisicamente razoável para ambos os casos, já que quando todos os átomos estiverem excitados, todo acréscimo de energia ao sistema só poderá ser adicionado ao espaço de fase do oscilador (p_2, q_2) (e é bem conhecido o fato de que a densidade de estados do oscilador harmônico é constante).

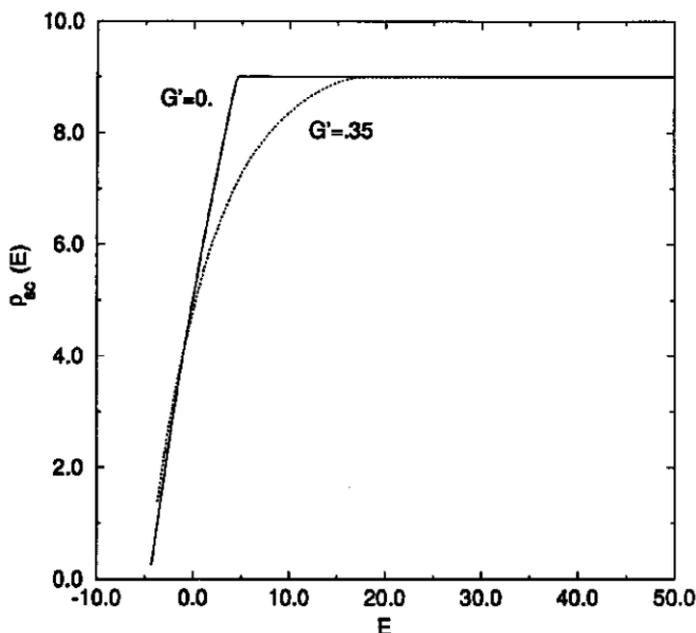


Figura 4.1: A densidade de estados do modelo do Maser ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $J = 9/2$)

4.2 Valores médios de grandezas físicas

O valor médio de uma grandeza física clássica $A(\vec{p}, \vec{q})$ para um ensemble micro-canônico, pode ser expresso em termos da integral:

$$\{A\} = \frac{\int \int A(\vec{p}, \vec{q}) \delta(H(\vec{p}, \vec{q}) - E) d\vec{p} d\vec{q}}{\int \int \delta(H(\vec{p}, \vec{q}) - E) d\vec{p} d\vec{q}} \quad (4.27)$$

onde o denominador é o "volume" no espaço de fase compatível com a energia E já obtido na seção anterior para o cálculo de $\rho(E)$.

O interesse em calcular médias clássicas de grandezas físicas associadas ao sistema é que desejamos compará-las com os valores esperados quânticos desses observáveis nos auto-estados de energia, como apresentamos na seção (3.2).

Discutiremos de início os valores médios do termo H_1 associados à componente de spin J_z (a menos de uma constante aditiva) da função hamiltoniana (4.2) nos casos regular e irregular, ou seja, iremos calcular o valor da integral:

$$[H_1] = \iint H_1(p_1, q_1) \delta(H(\vec{p}, \vec{q}) - E) d\vec{p} d\vec{q}, \quad (4.28)$$

toda a discussão a respeito dos intervalos de integração analisados na seção anterior são válidos aqui.

a) Caso regular

Como H_1 é função apenas de p_1 e q_1 , a integração em p_2 e q_2 resulta para o caso regular (4.16):

$$[H_1] = \int_{-\sqrt{4J(E)}}^{\sqrt{4J(E)}} \int_{-\sqrt{4J(E)-q_1^2}}^{\sqrt{4J(E)-q_1^2}} (p_1^2 + q_1^2) dp_1 dq_1. \quad (4.29)$$

Integrando (4.29) em dp_1 e dq_1 , obtemos

$$[H_1] = \frac{2\pi^2 \bar{J}^2(E)}{\epsilon}. \quad (4.30)$$

Dividindo $[H_1]$ pelo volume do espaço de fase $4\pi^2 \rho(E)$, obtemos o valor médio de H_1 com função da energia

$$\{H_1(E)\} = \frac{\bar{J}(E)}{2} \quad (4.31)$$

onde

$$\tilde{J}(E) = \begin{cases} H_{1(0)}^{(2)}, & E \leq \epsilon J \\ 2J, & E \geq \epsilon J \end{cases}, \quad (4.32)$$

e $H_{1(0)}^{(2)}$ é definida na equação (4.14).

b) Caso com caos:

Para o caso caótico o valor de $\{H_1\}$ é obtido numericamente através da integral:

$$\{H_1\} = \int_{-p(E)}^{p(E)} \left(\frac{-\epsilon^2 (G_+^2 + G_-^2) p_1^2 + 4J\epsilon^2 (G_-^2 - \epsilon^2) + 4J\sqrt{\Delta_E}}{2\pi\epsilon^2 G_-^2} \right)^{\frac{3}{2}} dp_1 \quad (4.33)$$

onde $p(E)$ são soluções de (4.23). $\{H_1(E)\}$ para este caso é obtido pela divisão do resultado de (4.33) pelo resultado numérico obtido para (4.26).

Lembrando a forma do operador hamiltoniano para o sistema:

$$H = \epsilon a^+ a + \epsilon J_x + \frac{G}{\sqrt{N}} (a J_+ + a^+ J_-) + \frac{G'}{\sqrt{N}} (a^+ J_+ + a J_-), \quad (4.34)$$

podemos expressar o análogo clássico para o valor esperado do operador J_x como

$$\{J_x(E)\} = \{H_1(E)\} - J \quad (4.35)$$

Os resultados para o caso regular do valor esperado do operador J_x e da função $\{J_x(E)\}$ estão apresentados na figura (4.2), e para o caso caótico encontram-se na figura (4.3). Para ambos os casos, a comparação entre os valores esperados e das médias são satisfatórias, mesmo para o caso regular, e mesmo para $N=2J=9$ onde o limite clássico ($N \gg 1$) ainda poderia ser considerado não totalmente alcançado.

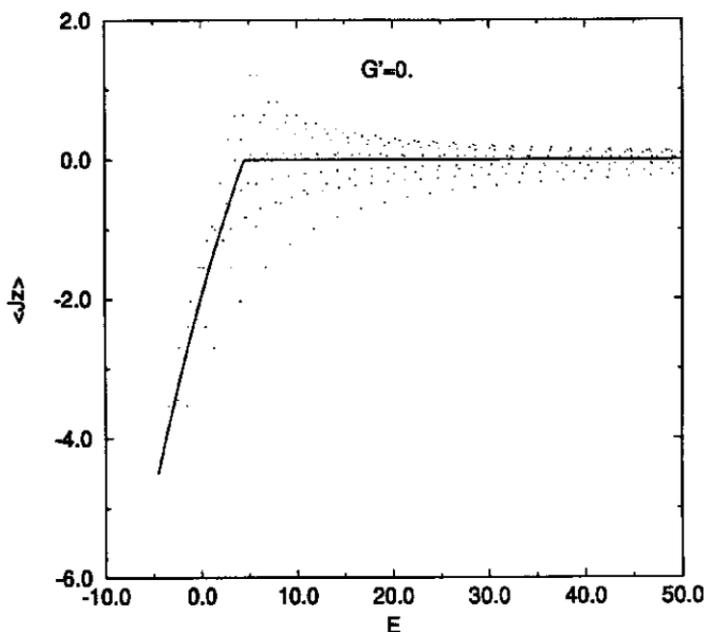


Figura 4.2: O valor esperado quântico $\langle E_i | J_x | E_i \rangle$ versus energia E_i . $\{J_x(E)\}$ é dado pela curva contínua, ambos no caso regular ($J = 9/2$, $\epsilon = 1.$, $G = .5$).

Vamos calcular agora o valor médio de H_2 , que é a grandeza física clássica associada à intensidade do campo na cavidade cuja contrapartida quântica é o número de fótons $N = a^+ a$. Os estudos dos intervalos de integração discutidos para o cálculo da densidade de energia continuam válidos. Primeiramente, de maneira análoga ao valor médio de H_1 , iremos efetuar a seguinte integração:

$$[H_2] = \int \int \int \int H_2 \delta(H - E) dp_2 dq_2 dp_1 dq_1 \quad (4.36)$$

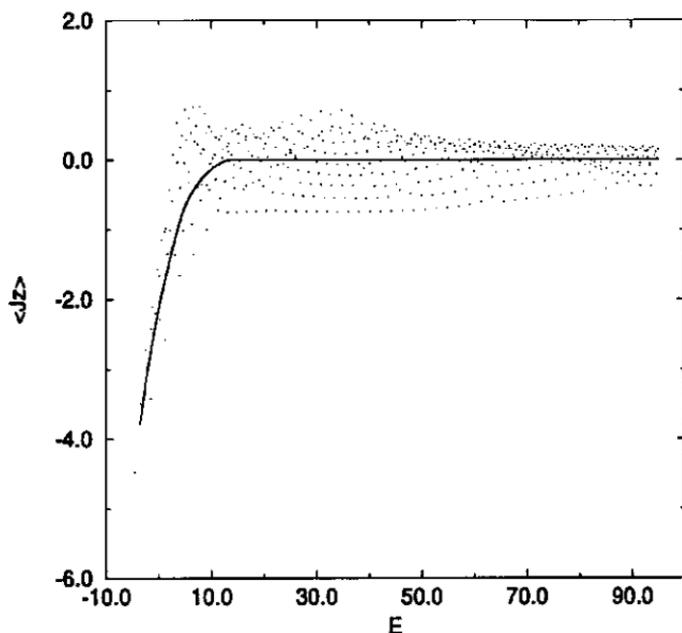


Figura 4.3: O valor esperado quântico $\langle E_i | J_z | E_i \rangle$ versus energia E_i . $\{J_z(E)\}$ é dado pela curva contínua, ambas no caso caótico ($J = 9/2$, $\epsilon = 1.$, $G = .5$, $G' = .2$)

$$H_2 = \left(\frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \right).$$

Integrando em p_2 obtemos

$$|H_2| = \iiint \left(\frac{R^2 G_+^2 p_1^2}{\epsilon^2 \sqrt{\Delta_1}} + \frac{\Delta_1}{\epsilon^2 \sqrt{\Delta_1}} + \frac{q_2^2}{\sqrt{\Delta_1}} \right) dq_2 dp_1 dq_1, \quad (4.37)$$

onde Δ_1 é dado pela equação (4.8) efetuando a integração em q_2 , nos inter-

valos já definidos, encontramos

$$[H_2] = 2\pi \iint \left(R^2 G_-^2 q_1^2 + R^2 G_+^2 p_1^2 - \frac{H_1}{\epsilon} + \frac{J}{\epsilon} + \frac{E}{\epsilon^2} \right) dp_1 dq_1. \quad (4.38)$$

a) Caso regular:

A integração em p_1 e q_1 , como nos demais casos, para o caso regular é efetuada de maneira analítica e encontramos como resultado

$$[H_2] = 2\pi^2 \left(\frac{G^2}{\epsilon^3} \left[\frac{12J(\tilde{J}(E))^2 - 14(\tilde{J}(E))^2}{3J} \right] + \frac{2J\tilde{J}(E)}{\epsilon} - \frac{(\tilde{J}(E))^2}{\epsilon} + \frac{2\tilde{J}(E)E}{\epsilon^3} \right) \quad (4.39)$$

Para encontrarmos a função $\{H_2(E)\}$, dividiremos (4.39) pelo volume $4\pi^2 \rho(E)$. O valor da função $\{H_2(E)\}$ será portanto

$$\{H_2(E)\} = \frac{G^2}{\epsilon^3} \left[\frac{12J\tilde{J}(E) - 14(\tilde{J}(E))^2}{6J} \right] + \frac{J}{\epsilon} - \frac{\tilde{J}(E)}{2\epsilon} + \frac{E}{\epsilon^3} \quad (4.40)$$

com

$$\tilde{J}(E) = \begin{cases} H_{1(0)}^{(2)} & E \leq \epsilon J \text{ (vide equação (4.14))} \\ 2J & E \geq \epsilon J \end{cases}$$

Na figura (4.4), apresentamos os valores esperados do operador número de fótons a^+a nos autoestados de energia e o valor da função $\{H_2(E)\}$.

b) Caso não-integrável:

Aqui novamente a integração é feita numericamente e o resultado da integração numérica da expressão (4.38) para $G' = .2$, dividido pelo valor da densidade de energia estão apresentados na figura (4.5) onde encontramos também os valores esperados do operador número de fótons a^+a para o caso em que $G' = .2$.

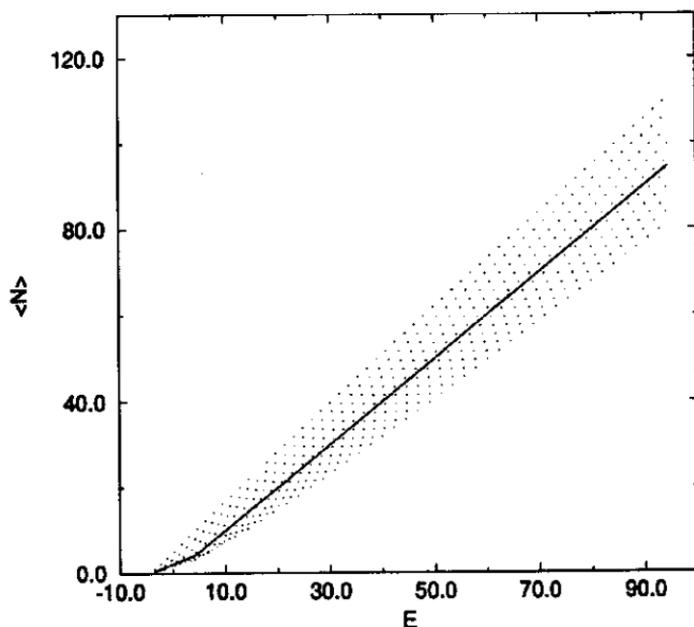


Figura 4.4: O valor esperado de $\langle E_i | a^\dagger a | E_i \rangle$ versus E , e a média clássica correspondente $\{H_2(E)\}$ para o caso regular ($J = 9/2$, $G = .5$, $G' = 0.$, $\epsilon = 1.$)

4.3 Termo oscilante da média de operadores

Como podemos observar nas figuras apresentadas na seção anterior, o valor médio clássico representa o valor médio dos valores esperados dos operadores nos vários auto-estados de energia, como encontramos exemplificado na figura (4.6), onde apresentamos o valor médio tomado a cada grupo de dez valores esperados do operador N , para o caso $G' = .2$, estes valores estão

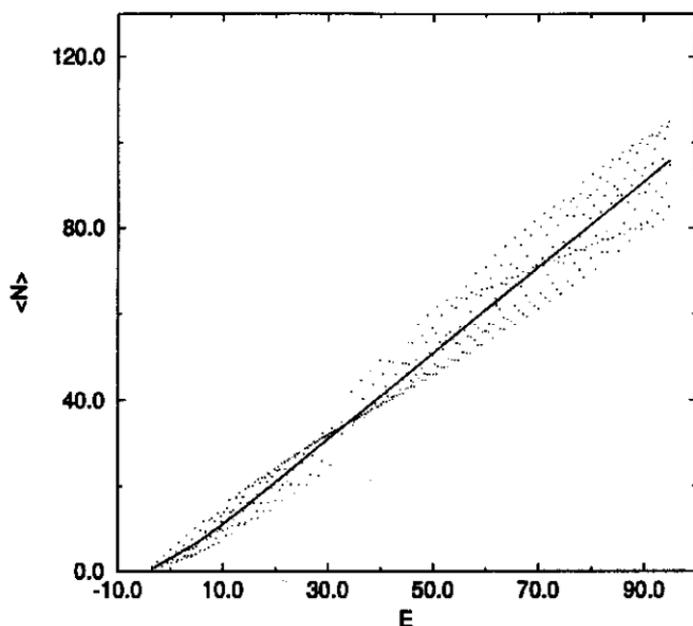


Figura 4.5: O valor esperado de $\langle E_i | a^+ a | E_i \rangle$ versus E_i e a média clássica correspondente $\{H_2(E)\}$ para o caso com caos ($J = 9/2$, $G = .5$, $G' = .2$, $\epsilon = 1$.)

representados pelo sinal "+", a curva contínua representa a média clássica (para melhor clareza da figura estão representados apenas um a cada vinte valores médios).

Observamos na seção anterior que a existência do caos afeta a flutuação dos valores esperados em torno da estrutura clássica, definimos então o termo médio oscilante de um operador retirando-se o valor médio clássico do valor

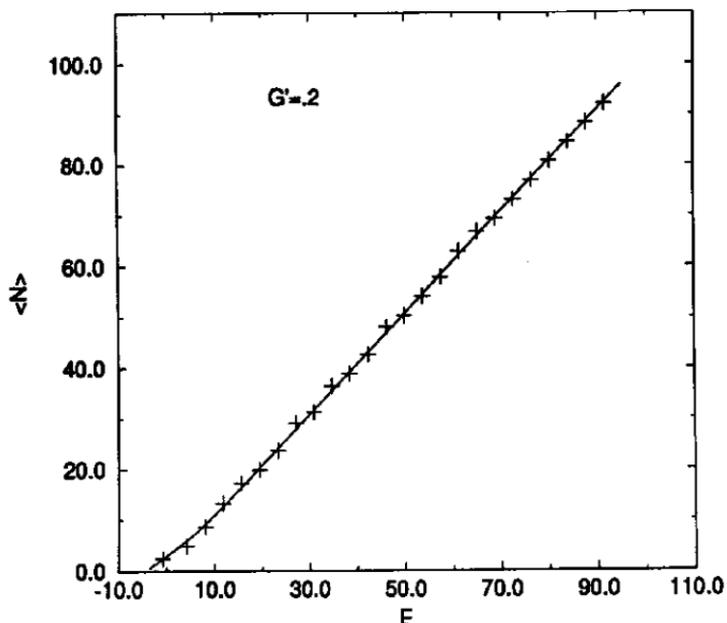


Figura 4.6: Valores médios do valor esperado de N (número de fótons), a curva contínua representa a média clássica microcanônica. ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $J = 9/2$)

esperado desse operador nos auto-estados de energia do sistema,

$$\langle A \rangle_{osc} = \langle A \rangle_E - \{A(E)\}_{cl} \quad (4.41)$$

Nas figuras (4.7) e (4.8) apresentamos os valores médios oscilantes para o operador J_x no caso regular e com caos respectivamente. Observando as figuras, podemos notar a alteração na distribuição dos valores causada pelo caos, a amplitude da oscilação é maior para o caso $G' = .2$ do que para o

caso regular, esta é uma característica do operador J_z . Em algumas regiões de energia esta amplitude diminui, como em torno de $E = 15.$, ou se amplia como em torno de $E = 30.$.

Se o sistema fosse ergódico, o que se esperaria é que as oscilações em torno do zero praticamente desaparecessem, então é razoável pensarmos que as ilhas de estabilidade em torno das órbitas periódicas se tornam maiores ou menores para certos valores de energia, já que estamos num regime misto onde há caos e toros regulares. Esta hipótese pode ser verificada se observarmos as figuras (4.9), (4.10) e (4.11), onde são apresentadas uma seqüência de seções de Poincaré, para diversos valores de energia ($G' = .2$), associada às variáveis (p_1, q_1) correspondentes ao operador J_z .

Estas seções foram obtidas para $q_2 = 0.$ e $p_2 > 0.$, a correlação entre estas seções e os autovalores de J_z são as seguintes:

(i) Quando o autovalor de J_z for $-J$, o valor correspondente na seção é a origem.

(ii) Quando o autovalor de J_z for $0.$, o valor correspondente será um círculo de raio $R = \sqrt{2J}$ ($R = 3$ no caso de $J = 9/2$).

(iii) Quando o autovalor de J_z for $+J$, o valor correspondente será a borda do espaço de fase, que é um círculo de raio $R = \sqrt{4J}$ ($R = \sqrt{18} \sim 4.2426$ no caso $J = 9/2$).

Analisando as seções, podemos observar que para certos valores de energia, como $E = 8.5$, existe uma grande região regular imersa no caos; seguindo a seqüência das seções, para $E = 15.$ ocorre uma redução significativa da região regular, que coincide com a redução da amplitude de oscilação nesta energia para a média oscilante correspondente, já nas energias seguintes,

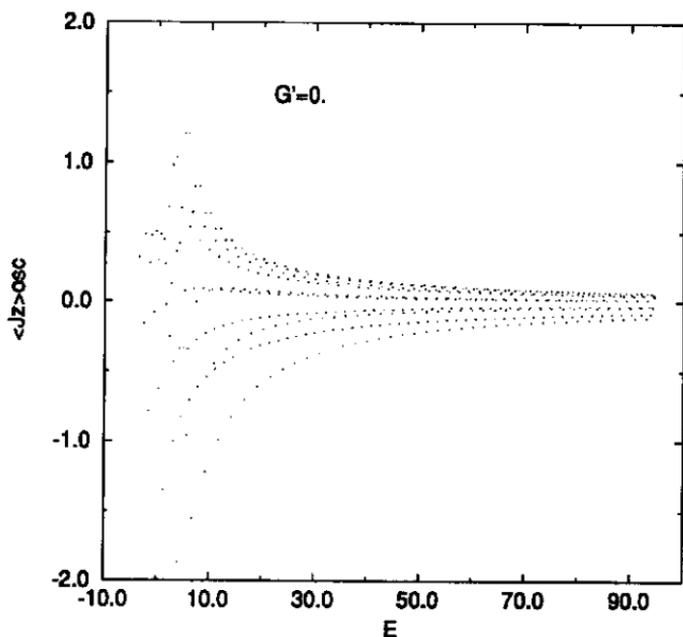


Figura 4.7: Termo médio oscilante de J , no caso regular. ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $J = 9/2$)

surtem novamente regiões regulares e para $E = 30.$, figura (4.10), as regiões regulares são bem significativas em relação as regiões caóticas que as circundam. Podemos ainda acompanhar a existência de regiões regulares coexistindo com o caos até $E = 50.$, sendo que não só o tamanho das ilhas mas também o fato de haver mudança de localização (isto é, diferentes famílias de órbitas periódicas mudam de estabilidade) parecem afetar a amplitude das médias oscilantes. Isto está em espírito de acordo com a fórmula do traço de Gutzwiller [15] onde as órbitas periódicas ditam o comportamento da parte

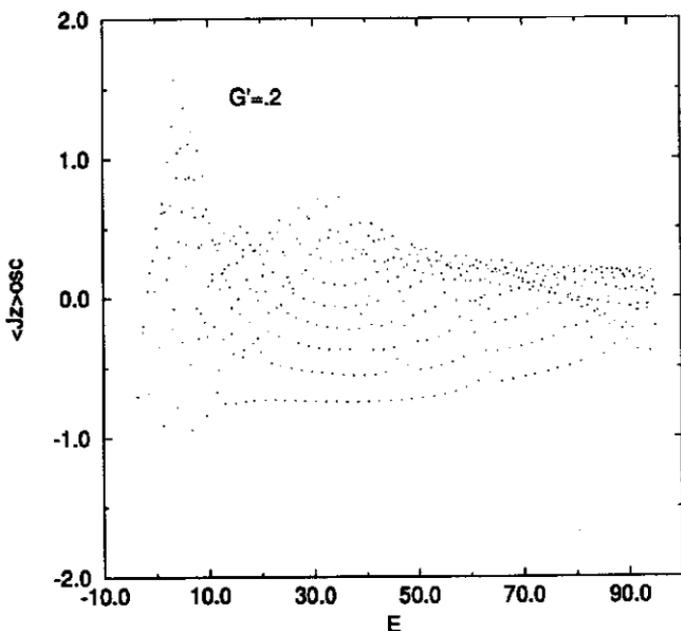


Figura 4.8: Termo médio oscilante de J_z , no caso com caos. ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $G' = .2$, $J = 9/2$)

oscilante densidade de estados.

Encontramos nas figuras (4.12) e (4.13) as médias oscilantes para o operador N no caso regular e caótico respectivamente. De uma maneira geral, podemos notar que além da variação no padrão de distribuição dos valores médios, a amplitude das oscilações é menor para $G' = .2$. Notamos também uma súbita redução da amplitude em torno de $E \approx 35.$, esta redução, ou uma espécie de "torção" tem seu início em $E = 15.$. As seções de Poincaré correspondentes são apresentadas nas figuras (4.14) e (4.15) para $G' = .2$.

Estas seções foram calculadas para $q_1 = 0.$ e $p_1 > 0.,$ e formam uma região anular que aumentam de raio médio e tornam-se relativamente mais estreitas com o aumento da energia. Note que a escala é alterada nas seções a partir de $E = 30.$

Na seção $E = 8.5,$ existe uma região regular significativa imersa no caos, região esta que desaparece para $E = 15.,$ onde encontramos duas pequenas regiões regulares em regiões distintas da anterior. Em $E = 30.,$ volta a existir uma região regular na parte superior da seção na posição correspondente à seção de $E = 8.5$ mas esta retorna bastante reduzida para $E = 35.,$ que coincide com a redução de amplitude encontrada na média oscilante de $N.$ Para $E = 50.$ na figura (4.15), identificamos duas regiões regulares na parte superior da seção imersas no caos. O que observamos também para o caso do valor médio oscilante do operador $N,$ é a coexistência de regiões regulares e caóticas nos diversos valores de energia.

Como caráter ilustrativo de observável incluindo ambos os graus de liberdade (spin e bóson), mostramos os valores médios oscilantes de P nas figuras (4.16) e (4.17) para o caso regular e caótico respectivamente. Como P é uma constante de movimento para $G' = 0.,$ podemos observar que neste caso a distribuição dos valores é bem regular, o que difere do operador N principalmente nos primeiros valores. Já para valores de energia bem acima de $10.,$ o termo N do operador $P,$ domina a distribuição, como podemos observar comparando as figuras (4.12) e (4.16)

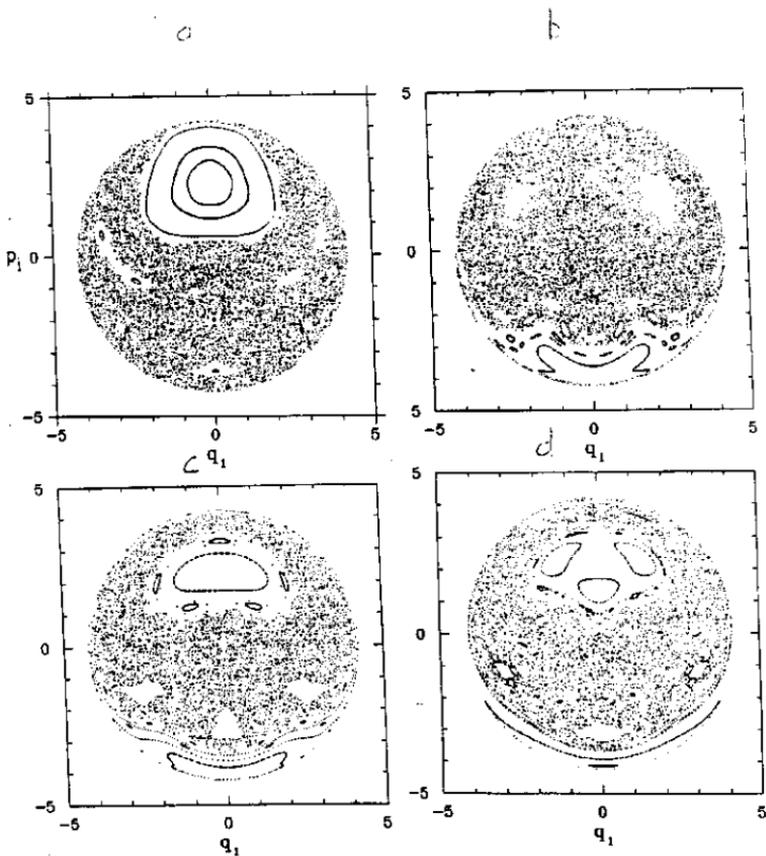


Figura 4.9: Seções de Poincaré com $q_2 = 0$ no plano (p_1, q_1) , correspondente às variáveis clássicas associadas ao grau de liberdade dos átomos para $\epsilon = 1.$, $G = .5$, $G' = .2$, e $J = 9/2$ e energias a) 8.5, b) 15.0, c) 20.0, d) 25.0.

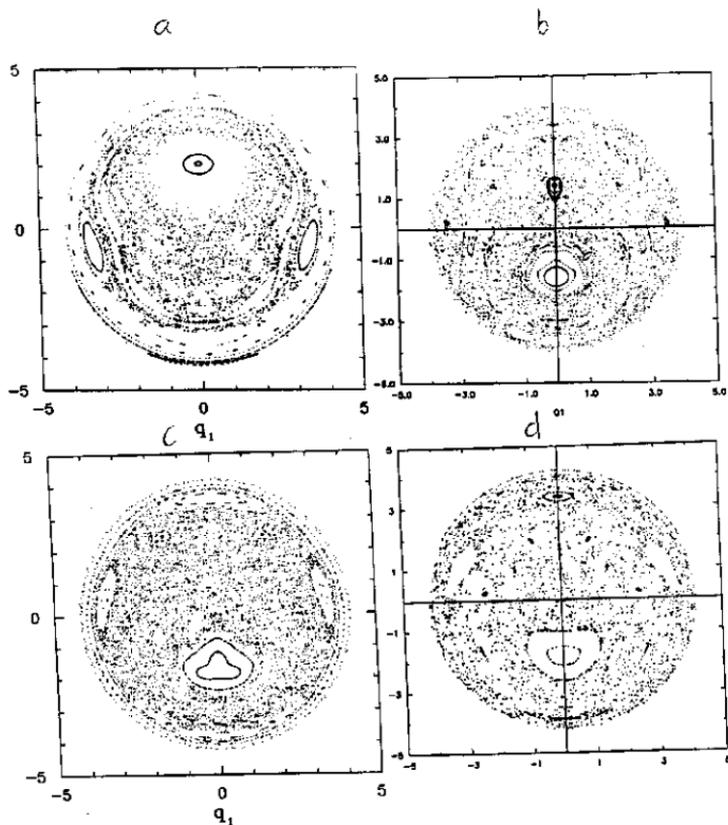


Figura 4.10: Seções de Poincaré com $q_2 = 0$ no plano (p_1, q_1) , correspondente às variáveis clássicas associadas ao grau de liberdade dos átomos para $\epsilon = 1.$, $G = .5$, $G' = .2$, e $J = 9/2$ e energias a) 30.0, b) 35.0, c)38.5, d) 43..

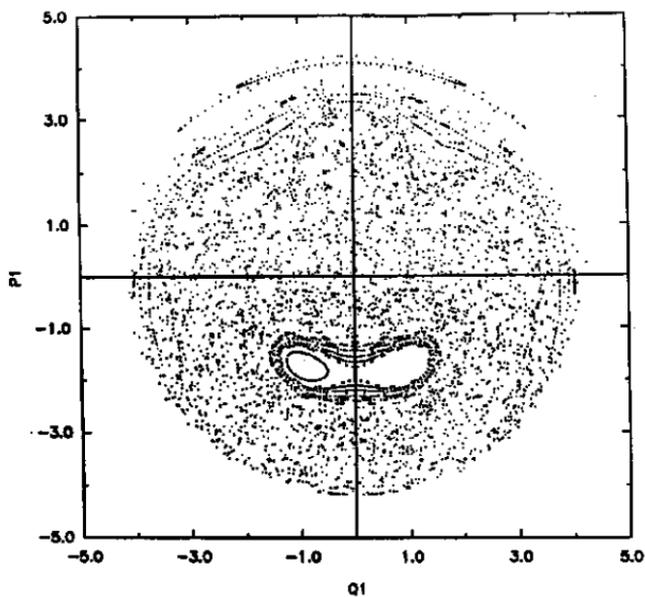


Figura 4.11: Seções de Poincaré com $q_2 = 0$ no plano (p_1, q_1) , correspondente às variáveis clássicas associadas ao grau de liberdade dos átomos para $\epsilon = 1.$, $G = .5$, $G' = .2$, e $J = 9/2$ e energia 50.0.

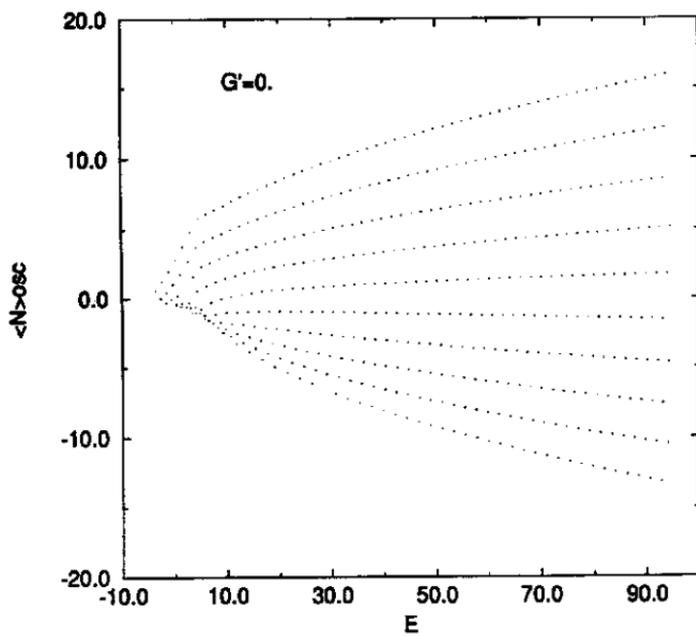


Figura 4.12: Termo médio oscilante de N (número de fótons) no caso regular ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $J = 9/2$).

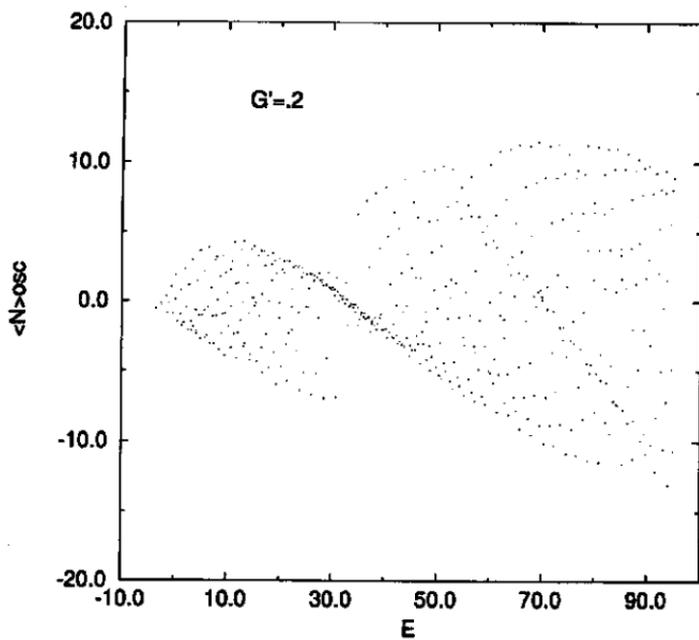


Figura 4.13: Termo média oscilante de N (número de fótons) no caso caótico ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $G' = .2$, $J = 9/2$).

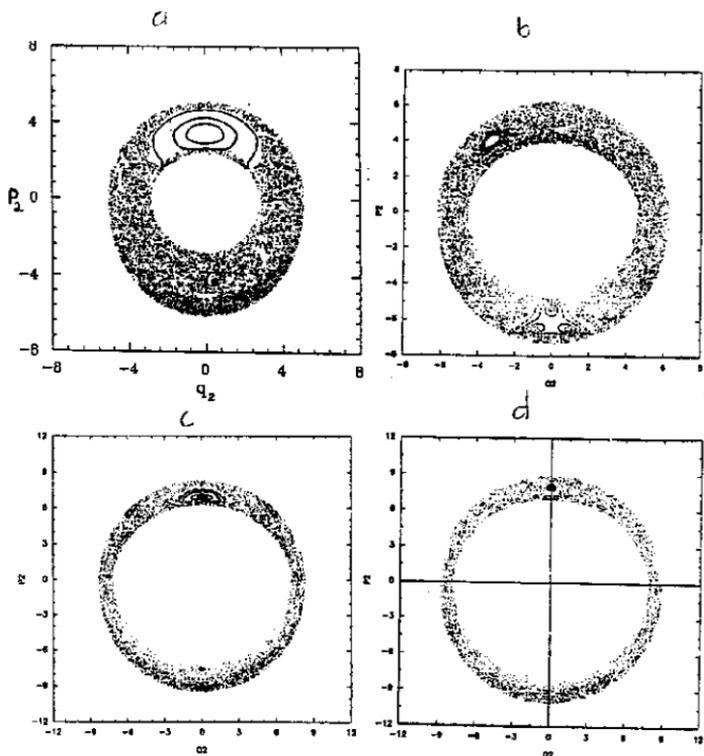


Figura 4.14: Seções de Poincaré com $q_1 = 0$ no plano (p_2, q_2) correspondentes às variáveis clássicas associadas ao grau de liberdade do campo, para $\epsilon = 1.$, $G = .5$, $G' = .2$, $eJ = 9/2$ e energias a) 8.5, b) 15.0, c) 30.0, d)35.

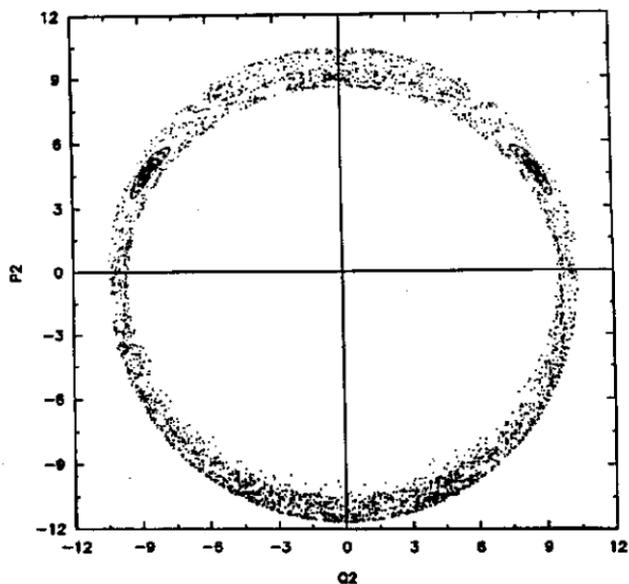


Figura 4.15: Seções de Poincaré com $q_1 = 0$ no plano (p_2, q_2) correspondentes às variáveis clássicas associadas ao grau de liberdade do campo, para $\epsilon = 1.$, $G = .5$, $G' = .2$, $eJ = 9/2$ e energia 50.0.

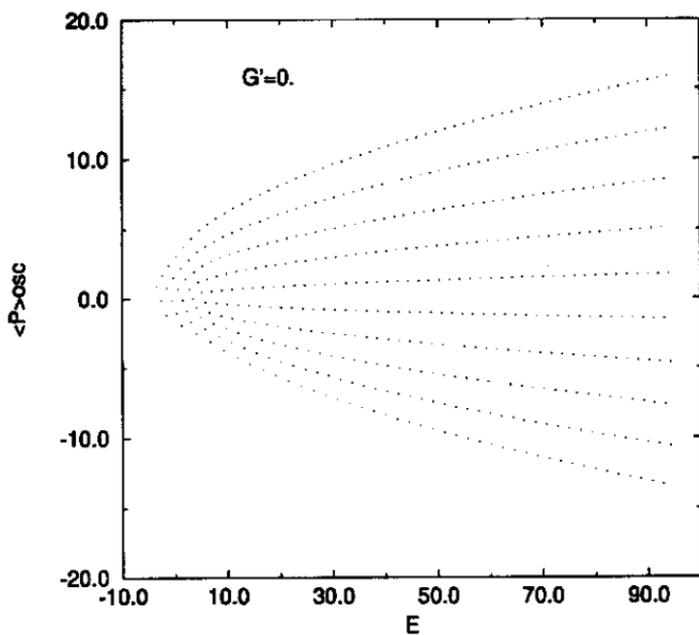


Figura 4.16: Termo médio oscilante de P no caso regular ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $J = 9/2$).

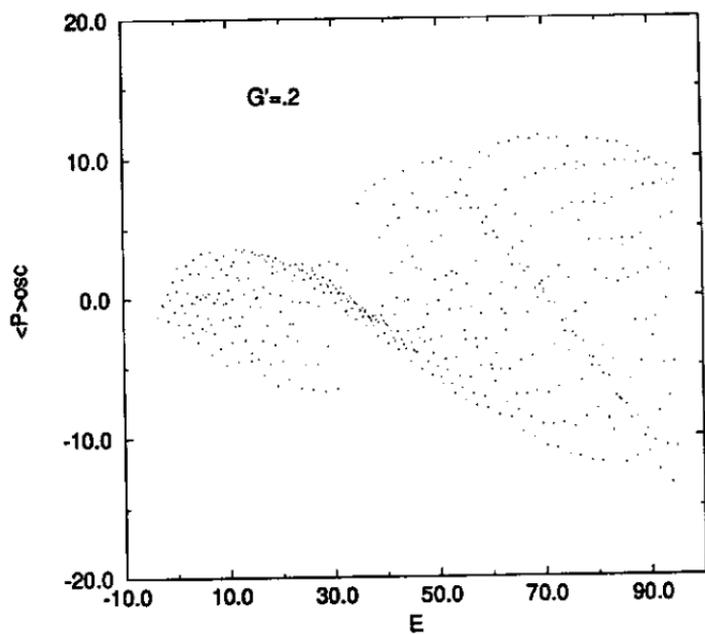


Figura 4.17: Termo médio oscilante de P no caso caótico ($\epsilon = 1.$, $G = .5$, $G' = .2$, $J = 9/2$).

Capítulo 5

Termodinâmica do Sistema

Discutiremos neste capítulo a termodinâmica do sistema para o caso caótico. Resultados encontrados na literatura estudam as propriedades do sistema tanto no caso integrável [8] [9], como alguns resultados no caso não-integrável [11] [12].

Pode-se obter, através de cálculos que envolvem a matriz densidade do sistema na aproximação de campo médio, uma expressão para a energia livre [12], de forma que, a partir da energia interna calculamos o calor específico do sistema e analisamos o seu comportamento quando a transição de fase de segunda ordem [8] ocorre quando o sistema passa da fase superradiante para a fase normal ao aumentarmos a temperatura.

Também estudamos o análogo clássico para a transição superradiante obtida através do estudo de pontos fixos da função hamiltoniana dependente da temperatura. Para isso, mostramos a obtenção da função lagrangeana dependente da temperatura também a partir da matriz densidade na aprox-

imação de campo médio [12].

5.1 O operador Densidade

Iniciaremos nossa discussão recordando algumas propriedades da matriz densidade para um sistema genérico. Seja $\{\phi_n\}$ uma base ortonormal de estados de um sistema, considerando uma mistura estatística desses estados com um peso estatístico W_n tal que

$$W_n \geq 0$$

$$\sum_n W_n = 1,$$

podemos expressar a matriz densidade ou operador densidade para esta mistura como [28], [29]:

$$\rho = \sum_n W_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \quad (5.1)$$

ρ é também denominado de operador estatístico. Analisando (5.1) podemos observar que o operador ρ é hermitiano e que a probabilidade de encontrar o sistema em um dos estados puros $|\phi_m\rangle$ é dada pelo elemento diagonal

$$\langle \phi_m | \rho | \phi_m \rangle = \sum_n W_n |\langle \phi_m | \phi_n \rangle|^2 = \sum_n W_n \delta_{mn} = W_m \quad (5.2)$$

e para um estado $|\psi(t)\rangle$ qualquer, temos:

$$\langle \psi(t) | \rho | \psi(t) \rangle = \sum_n W_n |\langle \psi(t) | \phi_n \rangle|^2 = \sum_n W_n |a_n(t)|^2 \quad (5.3)$$

O traço de ρ é uma constante independente da base em que estiver representada. Através da ortonormalidade de uma base $\{|\psi_m\rangle\}$, obtemos a

condição de normalização para o traço de ρ nesta base:

$$\begin{aligned} \text{tr}\rho &= \sum \rho_{ii} = \sum_i \langle \psi_i | \rho | \psi_i \rangle = \sum_j W_j \left(\sum_i |\langle \psi_i | \phi_j \rangle|^2 \right) = \\ &= \sum_j W_j \langle \phi_j | \phi_j \rangle = 1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Podemos obter o valor esperado de qualquer operador Q através do traço do produto deste operador pelo operador densidade:

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \sum_n \langle \phi_n | Q | \phi_n \rangle \\ &= \sum_{mm'} \sum_n W_n a_{mn} a_{m'n}^* \langle \psi_m | Q | \psi_{m'} \rangle \\ &= \sum_{mm'} \langle \psi_{m'} | \rho | \psi_m \rangle \langle \psi_m | Q | \psi_{m'} \rangle \\ &= \text{tr}(\rho Q) \end{aligned} \quad (5.5)$$

de uma maneira mais genérica,

$$\langle Q \rangle = \frac{\text{tr}(\rho Q)}{\text{tr}(\rho)} \quad (5.6)$$

O operador densidade contém toda informação possível de se obter de um sistema, mesmo que o conhecimento sobre o sistema seja parcial.

Podemos descrever a probabilidade de se encontrar um sistema hamiltoniano em equilíbrio térmico com um reservatório com temperatura β ($\beta = 1/k_b T$, onde k_b é a constante de Boltzmann), com volume e número de partículas constante, portanto do ponto de vista do ensemble canônico. Para isto, consideramos o hamiltoniano H , com autovalores E_n e autoestados $|\psi_n\rangle$. A probabilidade W_i no estado $|\psi_i\rangle$ é dado pelo peso estatístico de Boltzmann [30]:

$$W_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}. \quad (5.7)$$

Assim, expressando o operador densidade para este sistema:

$$\rho = \sum_n W_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (5.8)$$

$$\text{onde } W_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n},$$

como $|\psi_n\rangle$ são autoestados de H , temos

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta H} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (5.9)$$

Entretanto, para normalizarmos o sistema temos que ter a condição:

$$\sum_n W_n = 1 \quad (5.10)$$

portanto,

$$Z = \sum_n e^{-\beta H} = \text{tr}(e^{-\beta H}) \quad (5.11)$$

Z é denominada de função partição do sistema. Substituindo então (5.11) em (5.9) obtemos a matriz densidade como função de H :

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\text{tr}(e^{-\beta H})} \quad (5.12)$$

A energia média do sistema, ou a energia interna U pode ser expressa então através da matriz densidade do sistema:

$$U = \text{tr}(\rho H) \quad (5.13)$$

A entropia S de um sistema é em geral definida em termos dos pesos estatísticos como

$$S = - \sum_i W_i \ln W_i,$$

e também pode ser definida em termos da matriz densidade:

$$S = -\text{tr}(\rho \ln \rho) \quad (5.14)$$

Uma vez determinada a entropia e a energia interna do sistema, podemos determinar a energia livre:

$$\beta F = \beta U - S \quad (5.15)$$

$$\beta F = \beta \text{tr}(\rho H) + \text{tr}(\rho \ln \rho) \quad (5.16)$$

5.2 A energia livre do modelo de Maser na aproximação de campo médio

A energia livre aproximada no modelo de Maser é obtida através do cálculo variacional, utilizando o hamiltoniano na aproximação de campo médio [12]. A forma geral da matriz densidade na aproximação de campo médio é dada por:

$$D_0 = \mathcal{K} \exp(\beta h_{CM}) \quad (5.17)$$

$$\text{onde } \beta h_{CM} = \alpha_1 J_z + \alpha_2 J_+ + \alpha_2^* J_- + \beta_1 a^\dagger a + \beta_2 a^\dagger + \beta_2^* a$$

é a forma mais geral do hamiltoniano de campo médio que envolve operadores de "um corpo", e \mathcal{K} é uma constante de normalização, α_1 e β_1 são reais e α_2 e β_2 complexos. O conjunto $\{\alpha_i, \beta_i\}$ são parâmetros variacionais a serem determinados.

A energia livre do sistema, como foi visto na seção (5.1) é escrita como:

$$\beta F = \beta \text{tr}(D_0 H) + \text{tr}(D_0 \ln D_0) \quad (5.18)$$

com $\beta = 1/k_b T$ ($k_b = 1$).

A fim de podermos diagonalizar D_0 , definimos de maneira genérica um operador unitário U , que depende dos operadores não diagonais:

$$U = \exp [i(\eta J_+ + \eta^* J_-) + \xi a^\dagger + \xi^* a] \quad (5.19)$$

onde η e ξ são números complexos. Aplicando o operador unitário acima em D_0 :

$$D = U D_0 U^\dagger \quad (5.20)$$

queremos que D represente o operador densidade de campo médio em sua forma diagonal. Assim a forma de D é escolhida neste cálculo variacional utilizando os termos diagonais do operador hamiltoniano na aproximação de campo médio multiplicados por parâmetros variacionais a serem determinados pela minimização da energia livre (5.18). Para o caso do modelo de Maser, a forma diagonal de D é dada por:

$$D = k \exp (\gamma J_x + \gamma' a^\dagger a) \quad (5.21)$$

A energia livre (5.18) pode ser escrita agora como função de D :

$$\beta F = \beta \text{tr}(U^\dagger D U H) + \text{tr}(D \ln D) \quad (5.22)$$

utilizando a propriedade cíclica do traço:

$$\beta F = \beta \text{tr}(D U H U^\dagger) + \text{tr}(D \ln D). \quad (5.23)$$

A energia livre (5.23) está expressa em termos da temperatura e dos parâmetros variacionais γ , γ' , η , ξ .

Para tornar mais clara a forma do operador unitário U , vamos expressá-lo como um produto de dois operadores unitários:

$$U = U_1 U_2 \quad (5.24)$$

onde:

$$U_1 = \exp[i(\eta J_+ + \eta^* J_-)] \quad (5.25)$$

$$U_2 = \exp(\xi a^\dagger + \xi^* a) \quad (5.26)$$

expressando o operador unitário U_1 em termos de operadores de pseudo-spin J_x e J_y :

$$U_1 = \exp\{i[J_x(\eta + \eta^*) + iJ_y(\eta - \eta^*)]\} \quad (5.27)$$

nesta forma fica mais claro a maneira na qual se deve escolher a princípio o valor de η , se quisermos que U_1 represente uma rotação de θ em torno do eixo y , escolhemos η na forma:

$$\eta = \frac{\theta}{2i} \quad (5.28)$$

Substituindo (5.28) em (5.27), temos

$$U_1 = e^{-iJ_y \theta}, \quad (5.29)$$

e caso estejamos interessados que U_1 represente uma rotação de θ em torno do eixo x escolhemos:

$$\eta = \frac{\theta}{2}, \quad (5.30)$$

e novamente, substituindo (5.30) em (5.27), temos:

$$U_1 = e^{-iJ_x \theta}. \quad (5.31)$$

A discussão sobre a escolha de ξ será feita posteriormente.

Os autores do trabalho onde se apresenta o cálculo da energia livre [12] discutem o resultado obtido apenas considerando uma rotação em torno do eixo y (o que é suficiente para encontrarmos D). Posteriormente mostraremos no Apêndice A a solução obtida para a rotação em torno do eixo x (e a parametrização adequada).

Aplicando o operador (5.29) na expressão (5.22) obtemos para a energia livre a expressão:

$$\beta F = \beta \left[\epsilon \frac{N}{2} \cos(\theta) \tanh\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\epsilon e^{\gamma'}}{1 - e^{\gamma'}} + \epsilon \xi \xi^* + \frac{N}{2} (\xi + \xi^*) \frac{G_+}{\sqrt{N}} \sin(\theta) \tanh\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right] \\ + \frac{N}{2} \gamma \tanh\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \gamma' \frac{e^{\gamma'}}{1 - e^{\gamma'}} + \ln(1 - e^{\gamma'}) - N \ln(2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right)). \quad (5.32)$$

lembrando que $G_{\pm} = (G_+ \pm G_-)$. A energia livre tem que ser um número real, isso nos obriga a impor:

$$\xi = \xi^*, \quad (5.33)$$

assim reescrevemos (5.32):

$$\beta F = \beta \left[\epsilon \frac{N}{2} \cos(\theta) \tanh\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\epsilon e^{\gamma'}}{1 - e^{\gamma'}} + \epsilon \xi^2 + N \xi \frac{G_+}{\sqrt{N}} \sin(\theta) \tanh\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right] \\ + \frac{N}{2} \gamma \tanh\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \gamma' \frac{e^{\gamma'}}{1 - e^{\gamma'}} + \ln(1 - e^{\gamma'}) - N \ln(2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right)). \quad (5.34)$$

Para determinarmos os parametros variacionais γ , γ' , θ , e ξ , minimizamos a energia livre do sistema com respeito a estas variáveis. Vamos analisar primeiro os pontos críticos da função com relação a θ e ξ :

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0 = 2\epsilon \xi + \sqrt{N} G_+ \sin \theta \tanh(\gamma/2) \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 = -\frac{\epsilon N}{2} \sin \theta \tanh(\gamma/2) - \frac{G_+ \sqrt{N}}{\epsilon} \xi \cos \theta \tanh(\gamma/2) \quad (5.36)$$

Este sistema de equações possui duas soluções:

$$\theta = 0 \text{ e } \xi = 0 \quad (5.37)$$

$$\cos \theta = -\frac{\epsilon^2}{G_+^2} \frac{1}{\tanh(\gamma/2)} \quad (5.38)$$

$$\xi = -\frac{\sqrt{N} G_+}{2 \epsilon} \sin \theta \tanh(\gamma/2) \quad (5.39)$$

Resultados publicados sobre o análogo clássico da superradiância sem temperatura [17], nos mostram que a fase superradiante somente existe se $G_+^2 > \epsilon^2$. Levando este fato em conta, e o fato de que a solução (5.38) também vale somente para valores $G_+^2 > \epsilon^2$, podemos afirmar que o conjunto de soluções (5.37) pertence a fase normal e as soluções (5.38) e (5.39) a fase superradiante.

De forma similar, encontramos o ponto crítico da função (5.34) para

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta F}{\partial \gamma} = 0 = & \beta \epsilon \frac{N}{4} \cos \theta \operatorname{sech}^2(\gamma/2) + \beta \frac{\sqrt{N}}{2} \xi G_+ \sin \theta \operatorname{sech}^2(\gamma/2) \\ & + \gamma \frac{N}{4} \operatorname{sech}^2(\gamma/2), \end{aligned} \quad (5.40)$$

substituindo (5.37) em (5.40), obtemos para a fase normal:

$$\gamma = -\beta \epsilon, \quad (5.41)$$

e para a fase superradiante utilizamos (5.38) e (5.39)

$$\gamma = \frac{\beta \epsilon}{\cos \theta}. \quad (5.42)$$

Derivando a função com relação a γ' , obtemos uma única solução, que vale para ambas as fases:

$$\gamma' = -\beta \epsilon \quad (5.43)$$

A ligação entre γ e β é evidente nas equações (5.41) e (5.42) e o parâmetro γ funciona como uma escala térmica para o Maser, portanto deve ser contínuo como função de β . Igualando (5.41) a (5.42), obtemos uma expressão para a temperatura crítica para o Maser:

$$\frac{\epsilon^2}{G_+^2} = -\tanh(-\epsilon\beta_c/2) \quad (5.44)$$

A equação (5.44) obtida é equivalente ao resultado encontrado na literatura [8] [9] para o caso em que $G' = 0$. Substituindo (5.38) em (5.42) obtemos a relação entre β e γ para a fase superradiante:

$$\gamma = \frac{\beta G_+^2}{\epsilon} \tanh(\gamma/2) \quad (5.45)$$

O parâmetro γ está portanto ligado à temperatura β por uma equação transcendental, que podemos resolver numericamente e encontrar $\gamma(\beta)$. Na figura (5.1) encontram-se plotados valores de β versus $|\gamma|$ obtidos para valores fixos de $\epsilon = 1$, e vários valores de G_+ : $G_+ = 0.7, 1.1$ e 1.5 . Para $G_+ = 0.7$, não ocorre a transição de fase, portanto como vemos na figura, a solução é contínua e com derivada contínua. Para $G_+ = 1.1$ e 1.5 a transição para a fase superadiante ocorre em $\beta = 2.3534$ e 0.9555 respectivamente, onde na figura pode-se observar uma descontinuidade na derivada. A descontinuidade observada na função para $G_+ = 1.5$ ocorre devido a limitações na convergência numérica no cálculo das soluções da equação (5.45).

Com todos os parâmetros variacionais determinados, podemos calcular algumas grandezas físicas do sistema, como por exemplo, a densidade média de fótons e a densidade média de átomos excitados. A densidade média de

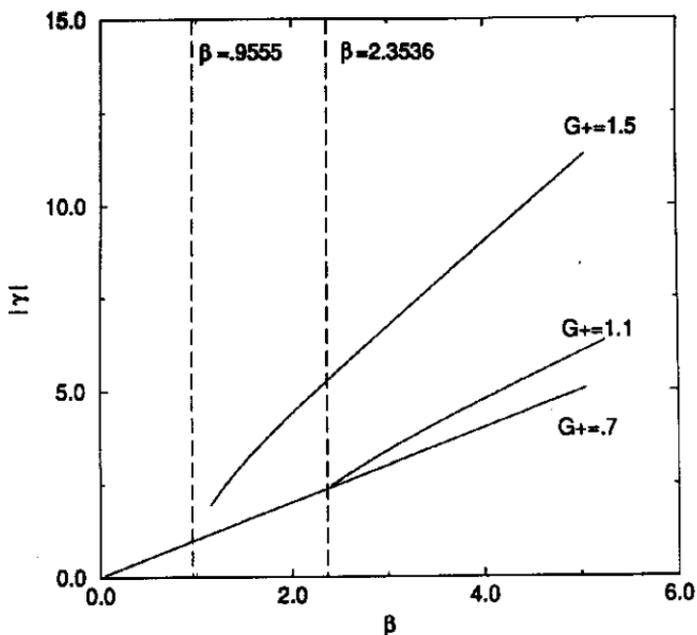


Figura 5.1: A escala térmica para o Maser

fótons é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\langle a^+ a \rangle}{N} &= \frac{1}{N} \text{tr}(D_0 a^+ a) = \frac{1}{N} \text{tr}(DU a^+ a U^+) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{(fase normal)} \\ G_+ / (\epsilon \sin \theta \tanh(\gamma/2)) & \text{(fase super.)} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.46)$$

O que mostra uma das características importantes de fase superradiante.

A densidade média de átomos excitados é dada por:

$$\frac{\langle J_z \rangle}{N} = \frac{1}{N} \text{tr}(D_0 J_z) = \text{tr}(DU J_z U_+)$$

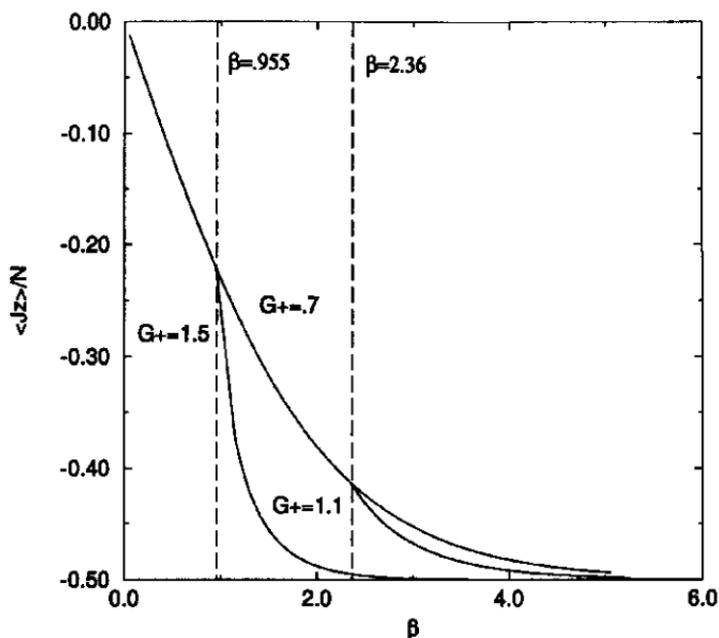


Figura 5.2: A densidade média de átomos excitados

$$= -\frac{1}{2} \tanh(\gamma/2) \quad (5.47)$$

Esta quantidade física como função de β está plotada na figura (5.2), onde podemos notar claramente a ocorrência da transição de fase, mostrando uma mudança no comportamento em β_c para cada valor de G_+ .

É possível calcularmos agora o calor específico C_v para o Maser. inicialmente iremos expressar a energia interna do sistema como uma função de β . intensiva, consideraremos então o limite termodinâmico onde ($N \rightarrow \infty$ e N/V constante):

$$U_{fs} = -\frac{\epsilon^3}{4G_+^2} - \epsilon \frac{e^{\gamma'}}{1 - e^{\gamma'}} \frac{G_+^2}{4\epsilon} \tanh(\gamma/2) \quad (5.48)$$

$$U_{fn} = \frac{\epsilon}{2} \tanh(\gamma/2) + \frac{e^{\gamma'}}{1 - e^{\gamma'}} \quad (5.49)$$

onde U_{fs} representa a energia interna para a fase superradiante e U_{fn} a energia interna para a fase normal.

O calor específico C_v é dado por:

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial \gamma} \right) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \right) \quad (5.50)$$

substituindo (5.48) e (5.49) em (5.50):

$$C_v(\beta) = \begin{cases} \left[\frac{\epsilon^2}{4} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\gamma(\beta)}{2}\right) + \frac{\epsilon^2}{(1 - e^{-\beta\epsilon})^2} \right] \beta^2. & (\text{normal}) \\ \left\{ \left(\frac{\epsilon^2 e^{-\beta\epsilon}}{(1 - e^{-\beta\epsilon})^2} \right) + \left[\left(\frac{G_+^2}{8} \tanh\left(\frac{\gamma(\beta)}{2}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\gamma(\beta)}{2}\right) \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{2\epsilon \tanh\left(\frac{\gamma(\beta)}{2}\right) - \gamma(\beta)\epsilon \operatorname{sech}^2\left(\frac{\gamma(\beta)}{2}\right)}{2G_+^2 \tanh^2\left(\frac{\gamma(\beta)}{2}\right)} \right) \right] \right\} \beta^2. & (\text{superr.}) \end{cases} \quad (5.51)$$

Na figura (5.3) mostramos o calor específico C_v para $\epsilon = 1$, $G_+ = .7$ e para efeito de comparação mostramos também o calor específico para um oscilador harmonico simples como função da temperatura T . Neste regime não ocorre a transição para a fase superradiante. Podemos observar que para valores de T pequeno há um aumento nos valores de C_v relativo aos oscilador, e com o aumento de T a curva tende para a do oscilador. Este comportamento é devido a limitação do espaço de fase de spin, a partir de uma certa temperatura crítica todos os átomos estão excitados, somente o

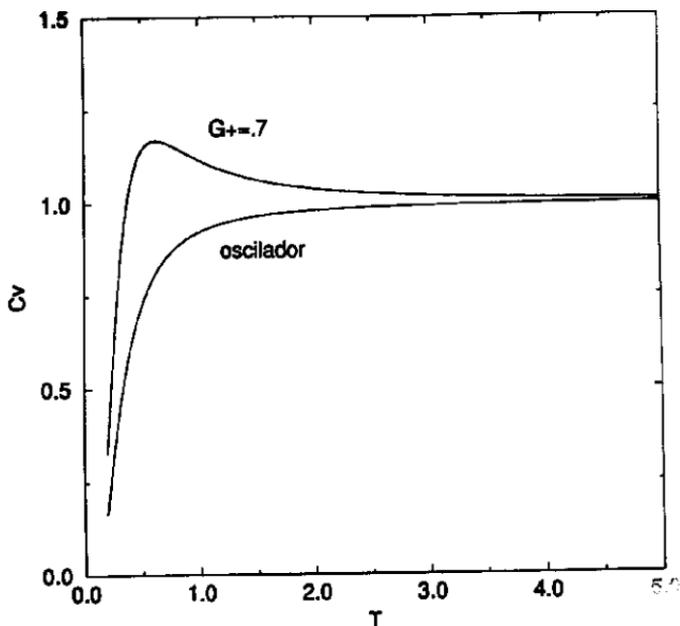


Figura 5.3: O calor específico para fase normal

grau de liberdade de partícula (bóson) do sistema pode absorver energia, por isso no limite de T grande a curva coincide com o C_v só do oscilador. Já nas figuras (5.4) e (5.5), $G_+ = 1.1$ e $G_+ = 1.5$ ocorre a transição para a fase superradiante na temperatura crítica $T_c = .42$ e $T_c = 1.05$ respectivamente, onde a solução da fase sofre uma descontinuidade.

Uma observação importante é o fato de que a ocorrência do caos no sistema não altera os resultados termodinâmicos, já que a dependência dos resultados só envolvem termos em G_+ , basta considerarmos $G' = 0$. e G_+ torna-se apenas G que é a constante de acoplamento do termo integrável

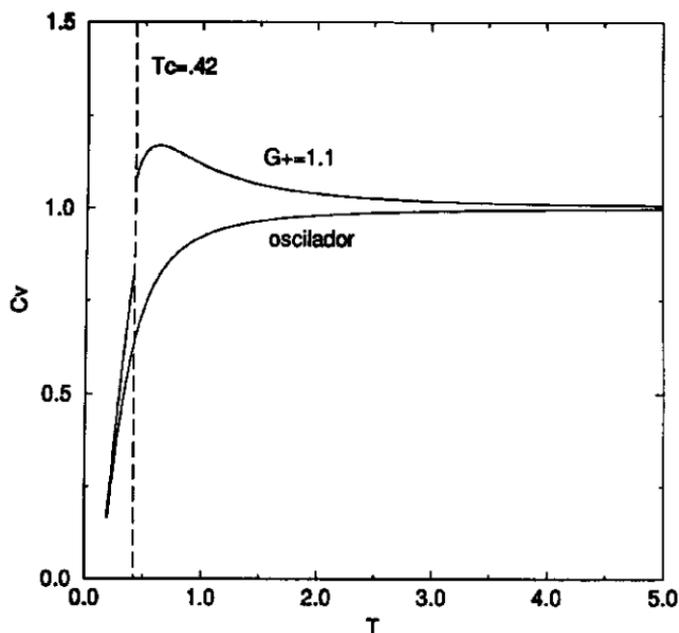


Figura 5.4: O calor específico com $G_+ = 1.1$

na equação (2.49). Portanto os resultados termodinâmicos obtidos servem tanto para o caso caótico como para o caso regular, isto ocorre devido ao fato de estarmos utilizando a aproximação de campo médio para obtermos as propriedades do sistema.

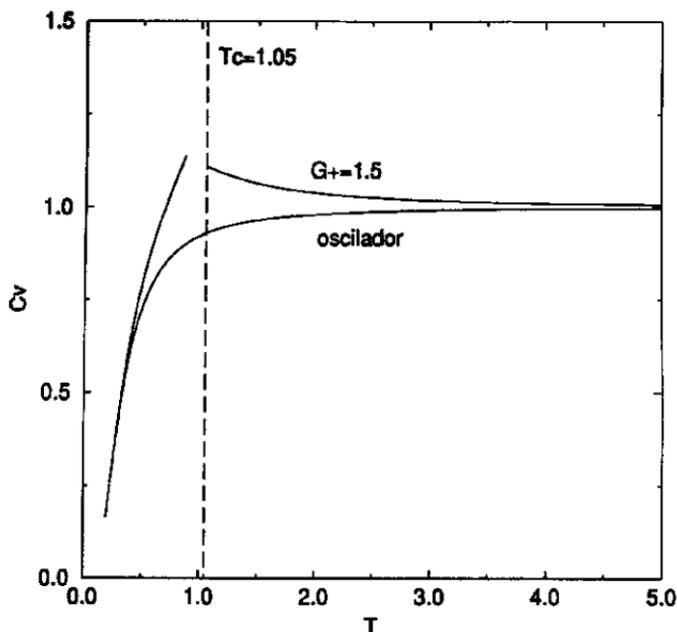


Figura 5.5: O calor específico com $G_+ = 1.5$

5.3 A hamiltoniana clássica como função da temperatura

A função hamiltoniana clássica associada como função da temperatura foi obtida na referência [12] e isto pode ser feito a partir da função lagrangeana média escrita em termos da matriz densidade e da transformação unitária já descritas na seção anterior como se segue:

$$\mathcal{L} = \text{tr}(\rho\dot{L}) = i\text{tr}(DU\dot{U}^+) - \text{tr}(DUHU^+) \quad (5.52)$$

onde

$$L = i \frac{\partial}{\partial t} - H$$

obtemos então

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2} (\dot{\xi} \xi^* - \dot{\xi}^* \xi) + i \left[-\bar{J}_x (\eta \dot{\eta}^* - \dot{\eta} \eta^*) \sin^2 (\sqrt{\eta \eta^*}) \right] - \\ & - \epsilon \bar{J}_x \cos (\sqrt{2 \eta \eta^*}) + \epsilon \xi \xi^* + \\ & + \frac{G}{\sqrt{N} \sqrt{\eta \eta^*}} (i \eta^* \xi 2 \bar{J}_x \sin \sqrt{\eta \eta^*} - i \eta \xi^* 2 \bar{J}_x \sin \sqrt{\eta \eta^*}) + \\ & + \frac{G'}{\sqrt{N} \sqrt{\eta \eta^*}} (i \eta^* \xi^* 2 \bar{J}_x \sin \sqrt{\eta \eta^*} - i \eta \xi 2 \bar{J}_x \sin \sqrt{\eta \eta^*}), \end{aligned} \quad (5.53)$$

onde as variáveis η e η^* não são canonicamente conjugadas, mas é possível encontrar um par de variáveis canonicamente conjugadas através da transformação:

$$\delta = \eta (-2 \bar{J}_x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\eta \eta^*}} \sin \sqrt{\eta \eta^*} \quad (5.54)$$

$$\delta^* = \eta^* (-2 \bar{J}_x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\eta \eta^*}} \sin \sqrt{\eta \eta^*} \quad (5.55)$$

onde

$$\bar{J}_x = -J \tanh(\gamma(\beta/2)), \quad (5.56)$$

contém a dependência na temperatura, substituindo (5.54) e (5.55) em (5.53), temos a lagrangeana como função das variáveis δ , δ^* , ξ e ξ^* :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2} (\delta \dot{\delta}^* - \dot{\delta} \delta^*) + \frac{i}{2} (\dot{\xi} \xi^* - \dot{\xi}^* \xi) - \epsilon \xi^* \xi + \epsilon \delta \delta^* + \epsilon. \\ & + \frac{G}{N^{\frac{1}{2}}} (\xi \delta^* \xi^* \delta) (-i) \sqrt{-2 \bar{J}_x} \sqrt{1 - \frac{\delta \delta^*}{-2 \bar{J}_x}} \\ & + \frac{G'}{N^{\frac{1}{2}}} (\xi^* \delta^* - \xi \delta) (-i) \sqrt{-2 \bar{J}_x} \sqrt{1 - \frac{\delta \delta^*}{-2 \bar{J}_x}} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Definindo novas variáveis reais p_1, q_1, p_2, q_2 através de:

$$i\eta = \left(\frac{p_1 + q_1}{\sqrt{2}} \right) \quad (5.58)$$

$$\xi = \left(\frac{p_2 + q_2}{\sqrt{2}} \right) \quad (5.59)$$

obtemos a forma final da função lagrangeana clássica associada, dependente da temperatura através da equação (5.57) para o modelo do Maser:

$$\mathcal{L} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - \epsilon H_1 - \epsilon H_2 - \epsilon \bar{J}_z - \left(\frac{-2\bar{J}_z - H_1}{2J} \right)^{\frac{1}{2}} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2). \quad (5.60)$$

Efetuada as devidas transformações de Legendre, a hamiltoniana fica escrita como:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \epsilon H_1 + \epsilon H_2 + \epsilon \bar{J}_z + \left(\frac{-2\bar{J}_z - H_1}{2J} \right)^{\frac{1}{2}} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2) \quad (5.61)$$

$$\text{onde: } H_1 = \frac{1}{2} (p_1^2 + q_1^2), \quad H_2 = \frac{1}{2} (p_2^2 + q_2^2)$$

e \bar{J}_z dada pela equação (5.56). É fácil verificar que tomando o limite de $T \rightarrow 0$ a equação (5.61) torna-se a hamiltoniana clássica associada (2.83) obtida via estados coerentes [17] [3] que discutimos na seção (2.5).

Uma vez determinada a hamiltoniana podemos expressar o conjunto de equações de movimento que determinam a dinâmica do sistema com temper-

atura:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = & \epsilon p_1 + G_+ [(-2\bar{J}_x - H_1)/2J]^{\frac{1}{2}} p_2 \\ & - p_1 \left\{ [(-2\bar{J}_x - H_1)2J]^{-\frac{1}{2}} \right\} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2) \quad (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 = & \epsilon q_1 + G_- [(-2\bar{J}_x - H_1)/2J]^{\frac{1}{2}} q_2 \\ & - q_1 \left\{ [(-2\bar{J}_x - H_1)2J]^{-\frac{1}{2}} \right\} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2) \quad (b) \quad (5.62) \end{aligned}$$

$$\dot{q}_2 = \epsilon p_2 + G_+ [(-2\bar{J}_x - H_1)/2J]^{\frac{1}{2}} p_1 \quad (c)$$

$$\dot{p}_2 = -\epsilon q_2 - G_- [(-2\bar{J}_x - H_1)/2J]^{\frac{1}{2}} q_1 \quad (d)$$

A única diferença significativa da função hamiltoniana comparada ao caso $T = 0$ é encontrada no termo \bar{J}_x . Conseqüentemente, devido ao termo que envolve a raiz quadrada, como já foi discutido na seção (2.5), a fase nas variáveis (p_1, q_1) associado ao spin é limitado por uma circunferência de raio R_1 dado por $R_1^2 = p_1^2 + q_1^2 = 2N$ para $T = 0$. Tal raio limite corresponde ao estado onde todos os N átomos do sistema estão excitados. Com a dependencia térmica este raio passa a ser $R_1^2 = -4\bar{J}_x > 0$ para $\gamma > 0$, isso significa um efeito de "scaling", em que por exemplo o efeito da borda que atua como limite no espaço de fase de (p_1, q_1) passa a influenciar o comportamento das órbitas clássicas num valor de energia bem menor que para o caso onde $T = 0$. [12]. Quando $T = 0$, tomando por simplicidade a fase normal, todos os átomos estão no estado de menor energia, com o acréscimo da temperatura os átomos passam a ficar excitados, com isso a energia que este grau de liberdade pode dispor torna-se menor à medida que a temperatura

aumenta.

5.4 Análogo clássico para a superradiância com função da temperatura

O análogo clássico para a superradiância pode ser interpretado e analisado da mesma maneira que foi discutido na referência [3]. Para isso, calculamos os pontos fixos do modelo e estudamos sua estabilidade, ou seja, tomamos conjunto de equações de movimento do sistema e as igualamos a zero, a fim de determinarmos os pontos fixos da função hamiltoniana¹:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = 0 = & \epsilon p_1 + G_+ [(-2\bar{J}_z - H_1)/2J]^{\frac{1}{2}} p_2 \\ & - p_1 \left\{ [(-2\bar{J}_z - H_1)2J]^{-\frac{1}{2}} \right\} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2) \quad (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 = 0 = & \epsilon q_1 + G_- [(-2\bar{J}_z - H_1)/2J]^{\frac{1}{2}} q_2 \\ & - q_1 \left\{ [(-2\bar{J}_z - H_1)2J]^{-\frac{1}{2}} \right\} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2) \quad (b) \quad (5.63) \end{aligned}$$

$$\dot{q}_2 = 0 = \epsilon p_2 + G_+ [(-2\bar{J}_z - H_1)/2J]^{\frac{1}{2}} p_1 \quad (c)$$

$$\dot{p}_2 = 0 = -\epsilon q_2 - G_- [(-2\bar{J}_z - H_1)/2J]^{\frac{1}{2}} q_1 \quad (d)$$

Resolvendo as equações (5.63c) e (5.63d) para p_2 e q_2 e substituindo respectivamente nas equações (5.63a) e (5.63b) obtemos o seguinte sistema de equações:

¹Os resultados obtidos nesta seção serão publicados na referência [31].

$$\begin{aligned}
 p_1 \{4J [\epsilon^2 - G_+^2 (-\bar{J}_z)] + (G_+^2 + G_-^2)q_1^2 + 2G_+^2 p_1^2\} &= 0 \quad (a) \\
 q_1 \{4J [\epsilon^2 - G_-^2 (-\bar{J}_z)] + (G_+^2 + G_-^2)p_1^2 + 2G_-^2 q_1^2\} &= 0 \quad (b)
 \end{aligned}
 \tag{5.64}$$

Este sistema de equações possui as seguintes soluções:

i) Para o caso em que $\tilde{G}_+^2 < \epsilon^2$, onde

$$\tilde{G}_\pm^2 = G_\pm^2 \left(\frac{-\bar{J}_z}{J} \right),$$

temos:

$$q_1 = p_1 = q_2 = p_2 = 0 \tag{5.65}$$

ii) No caso em que $\tilde{G}_+^2 > \epsilon^2$, mas $\tilde{G}_-^2 < \epsilon^2$, temos duas soluções, a origem e uma outra que designaremos de raízes-p:

$$\text{(raízes-p)} \left\{ \begin{array}{ll} q_1 = 0 & (a) \\ q_2 = 0 & (b) \\ p_1 = \pm [2J(G_+^2(-\bar{J}_z/J) - \epsilon^2)/G_+^2]^{\frac{1}{2}} & (c) \\ p_2 = \mp [J(G_+^4(-\bar{J}_z/J)^2 - \epsilon^4)/G_+^4 \epsilon^2]^{\frac{1}{2}} & (d) \end{array} \right. \tag{5.66}$$

iii) Finalmente para o caso em que $\tilde{G}_+^2 > \epsilon^2$ e $\tilde{G}_-^2 > \epsilon^2$, temos três soluções, a origem, as raízes-p e a que será designada como raízes-q:

$$\text{(ra'izes-}q) \left\{ \begin{array}{ll} p_1 = 0 & (a) \\ p_2 = 0 & (b) \\ q_1 = \pm [2J(G_-^2(-\bar{J}_x/J) - \epsilon^2)/G_-^2]^{\frac{1}{2}} & (c) \\ q_2 = \mp [J(G_-^4(-\bar{J}_x/J)^2 - \epsilon^4)/G_-^4\epsilon^2]^{\frac{1}{2}} & (d) \end{array} \right. \quad (5.67)$$

Analisaremos a estabilidade dessas soluções através do estudo dos autovalores da matriz das derivadas segundas de $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$:

$$H_{ij}{}^n = \partial^2 H / \partial x_i \partial x_j$$

onde os índices $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (q_1, q_2, p_1, p_2)$.

i) Para a origem $(q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0)$:

$$(H^n)_0 = \begin{pmatrix} \epsilon & \tilde{G}_- & 0 & 0 \\ \tilde{G}_- & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & \tilde{G}_+ \\ 0 & 0 & \tilde{G}_+ & \epsilon \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

onde $\tilde{G}_{\pm} = G_{\pm} [\tanh(-\gamma(\beta)/2)]^{\frac{1}{2}}$

ii) Para as raízes-p:

$$(H^n)_p = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon^2 + G_+^2}{2\epsilon^2} & \frac{G_-}{G_+} \left(\frac{\epsilon^2 + G_+^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ \frac{G_-}{G_+} \left(\frac{\epsilon^2 + G_+^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2G_+^2}{(\epsilon^2 + G_+^2)\epsilon} & \epsilon^2 \left(\frac{2}{\epsilon^2 + G_+^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & \epsilon^2 \left(\frac{2}{\epsilon^2 + G_+^2}\right)^{\frac{1}{2}} & \epsilon \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

iii) Para as raízes- q :

$$(H^p)_q = \begin{pmatrix} \frac{2\tilde{G}_+^2}{(\epsilon^2 + \tilde{G}_+^2)\epsilon} & \epsilon^2 \left(\frac{2}{\epsilon^2 + \tilde{G}_+^2}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ \epsilon^2 \left(\frac{2}{\epsilon^2 + \tilde{G}_-^2}\right)^{\frac{1}{2}} & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon^2 + \tilde{G}_-^2}{2\epsilon^2} & \frac{\tilde{G}_+}{\tilde{G}_-} \left(\frac{\epsilon^2 + \tilde{G}_-^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{G}_+}{\tilde{G}_-} \left(\frac{\epsilon^2 + \tilde{G}_-^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & \epsilon \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

Os autovalores correspondentes às soluções da origem são:

$$\lambda_{\pm} = \epsilon^2 \pm G_{\pm}^2 \tanh(\gamma/2) \quad (5.71)$$

Para as demais soluções, os autovalores são as raízes das equações:

$$\lambda^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{3\epsilon^2 + \tilde{G}_{\pm}^2}{\epsilon} \right) \lambda - \frac{(\epsilon^2 + \tilde{G}_{\pm}^2)(\tilde{G}_{\pm}^2 - \tilde{G}_{\mp}^2)}{2\tilde{G}_{\pm}^2} = 0 \quad (5.72)$$

$$\lambda^2 \mp \left(\frac{\epsilon^4 + \epsilon^2 \tilde{G}_{\pm}^2 + 2\tilde{G}_{\pm}^4}{\epsilon(\epsilon^2 + \tilde{G}_{\pm}^2)} \right) + 2(\tilde{G}_{\pm}^2 - \epsilon^2) = 0 \quad (5.73)$$

Estes resultados nos mostram uma completa analogia com o caso da temperatura nula [3]:

- i) Se $\tilde{G}_+^2 < \epsilon^2$, a origem representa um ponto de mínimo, nas demais situações, a origem torna-se um ponto de sela.
- ii) Se $\tilde{G}_+^2 > \epsilon^2$, as soluções raízes- p formam um novo ponto de mínimo.
- iii) As soluções raízes- q , quando existem, comportam-se como um ponto de sela.

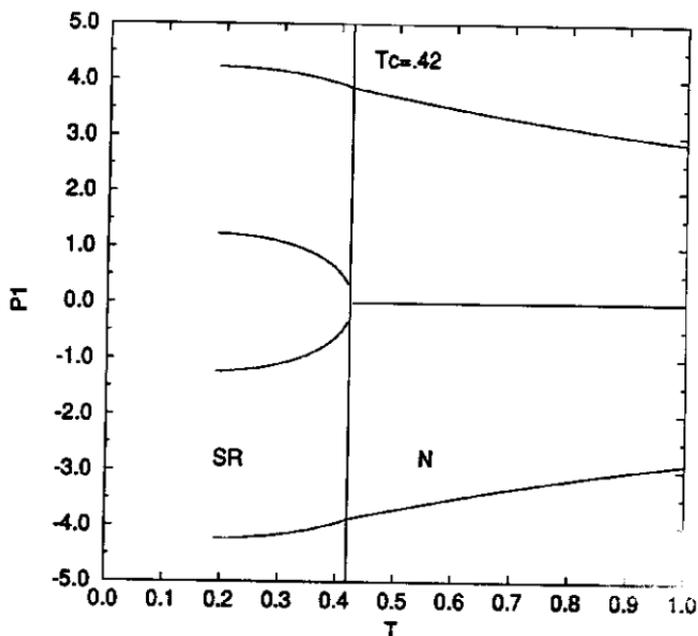


Figura 5.6: Evolução dos pontos de mínimo e do valor da "borda" para a variável associada aos átomos com a temperatura, no caso $G_+ = 1.1 > \epsilon = 1$.

Na figura (5.6) encontramos graficadas as soluções dos mínimos da funções hamiltoniana versus a temperatura, para valores de $G_+ = 1.1$ e $\epsilon = 1$. Para as temperaturas abaixo de T_c , o sistema encontra-se na fase superradiante com as raízes- p como pontos de mínimo, na temperatura crítica ($T_c = .43$), as raízes- p colapsam para a origem, indicando que para a fase normal a origem é o único ponto de mínimo.

Os resultados para o caso regular ($G' = 0$) que deve ser analisada separadamente, também possui completa analogia com o caso da temperatura:

nula. Neste caso o sistema de equações (5.64) torna-se:

$$\left\{ 4J \left[\epsilon^2 - G^2 \left(\frac{-\bar{J}_x}{J} \right) \right] + 2G^2(q_1^2 + p_1^2) \right\} = 0 \quad (5.74)$$

Além da solução trivial, para o caso em que $\tilde{G}^2 > \epsilon^2$ este sistema possui como solução um círculo no espaço de fase de spins, cujo raio é dado por:

$$R_1^2 \equiv q_1^2 + p_1^2 = 2\bar{J}_x \left(\frac{\epsilon^2}{\tilde{G}^2} - 1 \right) \quad (5.75)$$

e um círculo no espaço de fase do oscilador, que é obtido substituindo estes resultados nas equações (5.63c) e (5.63d):

$$R_2^2 \equiv p_2^2 + q_2^2 = 2\bar{J}_x \left(\frac{\epsilon^4}{\tilde{G}^4} - 1 \right) \quad (5.76)$$

O raio R_2 está associado com a ação I_2 do oscilador clássico associado, cujo valor representa a densidade média de fótons no sistema. Da mesma forma o raio R_1 está associado ao valor $J + 2I_1$, que representa a densidade média de átomos excitados no sistemas, valores agora com a dependência térmica definidas.

A figura (5.7) estão representados os valores de R_1 e R_2 contra a temperatura T , nela podemos observar que na temperatura crítica os raios colapsão para a origem, que representa o ponto de mínimo para a fase normal.

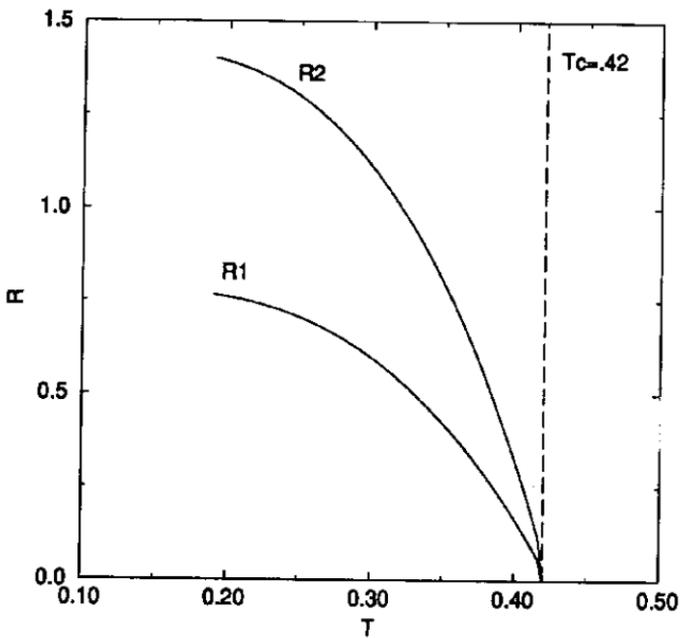


Figura 5.7: Raios dos círculos de mínimos para o caso regular

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho abordamos vários aspectos das manifestações do caos clássico no modelo do maser de Dicke. A primeira consiste no estudo do comportamento dos invariantes quânticos na representação de energia quando passamos do caso integrável para o não-integrável, ao acionarmos um acoplamento que classicamente sabemos ser responsável pelo aparecimento do caos. O efeito da quebra de constantes de movimento pode ser visualizado no padrão de distribuição dos valores esperados de operadores nos auto-estados de energia plotados contra os autovalores de energia para os operadores associados ao número de átomos excitados e o operador número de fótons. Este estudo nos permitiu também observar como em média a energia do sistema é distribuída nos dois graus de liberdade do sistema (de spin e de bóson) e como ela é afetada pela não integrabilidade. É importante ressaltar que tal análise é feita com ingredientes puramente quânticos.

O próximo passo consiste em calcular as grandezas médias clássicas

como função da energia correspondentes aos mesmos observáveis analisados quânticamente. Para tanto, primeiro obtivemos uma expressão analítica para a densidade de estados do sistema no caso regular e uma solução numérica para o caso caótico. Encontramos as funções clássicas que representam os valores médios da densidade de átomos excitados e da densidade de fótons como função da energia: analiticamente no caso regular e numericamente para o caso caótico. Ao compararmos esses valores médios com o comportamento médio dos valores esperados de observáveis quânticos correspondentes, a concordância é bastante boa já para número de átomos $N=9$. Por meio desta comparação foi possível concluirmos que o resultado de tal procedimento para este sistema, é muito bom, mesmo para o caso regular e ainda notar que a existência do caos afeta a flutuação em torno da média clássica da distribuição dos valores esperados desses observáveis.

Definimos então as médias oscilantes como função da energia desses observáveis e realizamos no caso com caos um estudo clássico sobre o tamanho relativo das ilhas regulares nas seções de Poincaré associadas aos graus de liberdade de spin e bóson respectivamente para vários valores de energia. Este estudo nos mostrou que o padrão de oscilação como função da energia para o caso com caos deste sistema é o resultado da oscilação das ilhas regulares imersas em regiões caóticas nas seções como função da energia. Neste sistema estas ilhas regulares não diminuem gradualmente com a energia como em geral ocorre para sistemas que não envolvem espaço de fase finito num dos graus de liberdade.

A segunda parte deste trabalho é relativo à manifestação do caos em relação à termodinâmica a temperatura finita neste sistema. Utilizando o

princípio variacional e a aproximação de campo médio, obtivemos as expressões para o calor específico $C_v(T)$, mostramos que a descontinuidade que ocorre em $C_v(T)$ com a transição da fase normal para a superradiante somente acontece para acoplamentos fortes ($\tilde{G}_+(\beta) > \epsilon$). Mostramos ainda que a existência do caos não afeta o comportamento de C_v , na aproximação de campo médio.

Fizemos também uma análise dos pontos fixos da dinâmica do sistema com temperatura o que nos possibilitou acompanhar o efeito da transição de fase (para acoplamentos fortes $\tilde{G}_+(\beta) > \epsilon$) no que diz respeito aos pontos de mínimos de energia no espaço de fase. Para o caso com caos, ao passarmos da fase normal para a superradiante ($\tilde{G}_+(\beta) > \epsilon$), o ponto de mínimo, que era a origem no espaço de fase, se bifurca em duas soluções, designadas de raiz-p (eq. 5.66). Para o caso regular ($\tilde{G}(\beta) > \epsilon$, $G' = 0$), o ponto de mínimo também representado pela origem na fase normal, passa a ser uma região esférica no espaço de fase na fase superradiante. Isto corresponde a um círculo no espaço de fase dos átomos e outro no espaço de fase das partículas (fótons), cujas áreas são proporcionais respectivamente a densidade média de átomos e a densidade média de fótons, não nulos para o estado de mínima energia na fase superradiante.

Apêndice A

O cálculo da energia livre a partir de uma rotação em torno eixo-x

Os resultados que obtivemos na seção (5.2), basearam-se em uma expressão para a energia livre obtida através da rotação do operador hamiltoniano (4.34) de θ em torno eixo-y. Mas se efetuarmos uma rotação em torno do eixo-x (5.30), obtemos uma expressão para a energia livre diferente da equação (5.32)

$$\beta F = \beta \left[\epsilon \frac{N}{2} \cos(\theta) \tanh\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\epsilon e^{\gamma'}}{1 - e^{\gamma'}} - \epsilon \xi \xi^* - \frac{N}{2} (\xi - \xi^*) \frac{iG_-}{\sqrt{N}} \sin(\theta) \tanh\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right] + \frac{N}{2} \gamma \tanh\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \gamma' \frac{e^{\gamma'}}{1 - e^{\gamma'}} + \ln(1 - e^{\gamma'}) - N \ln(2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right)). \quad (\text{A.1})$$

A energia livre é uma grandeza física, portanto é um número real, logo

$$\xi = -\xi^*.$$

Os resultados discutidos na seção (5.2) no que diz respeito a minimização são totalmente análogos para esta nova expressão, trocando-se apenas G_+ por G_- . Temos então para esta energia livre uma temperatura crítica ($G_- > \epsilon$)

$$\frac{\epsilon^2}{G_-^2} = -\tanh\left(\frac{\epsilon\beta_c}{2}\right), \quad (\text{A.2})$$

que está associada a solução raiz-q (5.67), apresentada na seção anterior, ou seja, esta é a temperatura na qual a solução raiz-q deixa de ser válida. Portanto a equação (A.1) não está associada a um mínimo e sim a um ponto de sela, logo não pode representar a energia livre do sistema. Podemos notar ainda que para $G' = 0$., as expressões (5.32) e (A.1) tornam-se idênticas, havendo portanto uma única expressão para a energia livre, independentemente da escolha do eixo sobre o qual se efetue a rotação.

Apêndice B

O cálculo dos traços

Neste apêndice vamos mostrar em caráter ilustrativo a técnica utilizada para o cálculo dos traços utilizados na seção (5.2) para a obtenção da expressão da energia livre (5.18). Iremos então calcular a expressão para \bar{J}_z ,

$$\bar{J}_z = \frac{\text{tr}(DJ_z)}{\text{tr}(D)}, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$D = \exp(\gamma J_z + \gamma' a^\dagger a).$$

Primeiramente vamos calcular o $\text{tr}(D)$ na parte que se refere ao grau de liberdade dos átomos, ou seja, calculamos o valor do $\text{tr}(e^{\gamma J_z})$. Isto é feito escrevendo J_z em termos de matrizes de Pauli,

$$J_z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sigma_k^z. \quad (\text{B.2})$$

Podemos então obter o $\text{tr}(\exp(\gamma J_z))$ desenvolvendo as somas como pro-

dutorias de somas

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(e^{\gamma J_z}) &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \dots \sum_{m_N} \langle m_1, m_2, \dots, m_N | e^{\frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^z} | m_1, m_2, \dots, m_N \rangle \\
 &= \sum_{m_1} \langle m_1 | e^{\frac{\gamma}{2} \sigma_1^z} | m_1 \rangle \sum_{m_2} \langle m_2 | e^{\frac{\gamma}{2} \sigma_2^z} | m_2 \rangle \dots \\
 &\quad \dots \sum_{m_N} \langle m_N | e^{\frac{\gamma}{2} \sigma_N^z} | m_N \rangle \\
 &= \left[\langle + | e^{\frac{\gamma}{2}} | + \rangle + \langle - | e^{-\frac{\gamma}{2}} | - \rangle \right]^N \\
 &= \left[e^{\frac{\gamma}{2}} + e^{-\frac{\gamma}{2}} \right]^N \\
 &= \left[2 \cosh \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right]^N \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

O cálculo de $\text{tr}(D J_z)$ pode ser feita através da derivada de (B.3),

$$\begin{aligned}
 \text{tr} \left(J_z e^{\gamma J_z} \right) &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[2^N \cosh^N \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right] \\
 &= 2^N \frac{N}{2} \cosh^{N-1} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \sinh \left(\frac{\gamma}{2} \right) \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

Efetivando a divisão da equação (B.4) pela (B.3), obtemos a expressão de \bar{J}_z ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{tr}(D J_z)}{\text{tr} D} &= \frac{2^N \frac{N}{2} \cosh^{N-1} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \sinh \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{2^N \left[\cosh \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right]^N} \\
 &= \frac{N \sinh(\gamma/2)}{2 \cosh(\gamma/2)} = \frac{N}{2} \tanh(\gamma/2) \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

Todos os demais traços utilizados no cálculo da energia livre são obtidos de maneira similar.

Bibliografia

- [1] R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **93**, 99(1954); *see also*: M. Tavis and F. W. Cummings, *Phys. Rev.*, **170**, 379(1968); F. T. Arecchi and E. Copurtens, *Phys. Rev. A*, **2**, 1730(1970); F. T. Arecchi and E. O. Schulz-Dubois, *Laser Handbook*, North Holland Publ. Co., Amsterdam (1972).
- [2] P. I. Belobrov, G. M. Zaslavskii, and G. Th. Tartakovskii, *Sov. Phys. JETP*, **44**, 945 (1976); P. W. Milonni, J. R. Ackerhalt, and H. W. Galbraith, *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 966 (1983); **51**, 1108 (1983)
- [3] M. A. M. de Aguiar, K. Furuya, C. H. Lewenkopf and M. C. Nemes, *Ann. Phys.*, **216**(2), 291(1992).
- [4] M. Kuś, *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1343 (1985); R. Graham and M. Höhnerbach, *Phys. Lett.*, **A101**, 61 (1984)
- [5] R. Graham and M. Höhnerbach, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1378(1991); C. H. Lewenkopf et al, *Phys. Lett.*, **A155**, 113(1991)

- [6] K. Furuya, M. A. M de Aguiar, C. H. Lewenkopf, and M. C. Nemes, *Ann. Phys.*, **216**(2), 313(1992); M. A. M. de Aguiar, K. Furuya, C.H. Lewenkopf, and M. C. Nemes, *Europhys. Lett.*, **15**(2), 125(1991).
- [7] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, **22**, 264(1940); K. Takahashi, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **55**, 762(1986), *Prof. Theor. Phys. Suppl.*, **98**, 109(1989); P. Leuboeuf and M. Saraceno, *J. Phys.*, **A23**, 1745(1990); *Phys. Rev.*, **A41**, 4614(1990).
- [8] K. Hepp and E. H. Lieb, *Ann. Phys.*, **76**, 360(1973).
- [9] K. Hepp and E. H. Lieb, *Lect. Notes in Phys.*, **38**, 178(1975); B. M. Cibils, Y. Cuche, W. F. Wreżinski, J-P. Amiet and H. Beck, *J. Phys A*, **23**, 545 (1990).
- [10] Y. K. Wang and F. T. Hioe, *Phys. Rev. A*, **7**, 831(1973)
- [11] F. T. Hioe, *Phys. Rev. A*, **8**, 1440(1973).
- [12] A. H. Blin, B. Hiller, M. C. Nemes and J. da Providência, *J. Phys. A*, **23**, 2243(1992).
- [13] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 1711(1984); *ibid Phys. Rev.*, **A30**, 504(1984); M. Feingold, N. Moiseyev, and A. Peres, *Phys. Rev.*, **A30**, 509(1984).
- [14] M. Feingold and A. Peres *Phys. Rev.*, **A34**, 591(1986); M. Feingold, "Chaos, Noise and Fractals", ed. E. R. Pike and L. A. Lugiato, Cadam Hilger, Bristol, 1987

- [15] M. C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.*, **12**, 243(1971).
- [16] J. da Providência and C. Fiolhais, *Nucl. Phys.A*, **435**, 190(1985).
- [17] M. A. M. de Aguiar, K. Furuya and M. C. Nemes, *Quantum Optics*, **3**, 305(1991).
- [18] J. D. Jackson, "*Eletrodinâmica Clássica*", Ed. Guanabara Dois (1983), Capítulos 6 e 9.
- [19] R. Loudon, "*The quantum theory of the light*", Clarendon Press-Oxford (1973), capítulo 8.
- [20] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, "*Quantum Mechanics*", John Wiley & Sons. (1977), volume I, complemento GIV, página 455,
- [21] M. Sargent III, M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr., "*Laser Physics*", Addison-Wesley Publishing Company (1974), capítulo 5.
- [22] S. H. Autler and C. H. Townes, *Phys. Rev.*, **100**, 703(1955)
- [23] H. M. Nussenzveig, "*Introduction to Quantum Optics*", Gordon and Breach Science Publishers (1973), capítulo 8.
- [24] J. R. Klauder and Bo-Sture Skagerstam, "*Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*", World Scientific, New York (1985).
- [25] P. Kramer and M. Saraceno, *Lectures Notes in Phys.*, **140**, Springer-Verlag, New York(1981)

- [26] F. Camargo, K. Furuya e M. C. Nemes, *Physica A*, **212**, 299(1994)
- [27] L. E. Reichl. "*The Transition to Chaos, in Conservative Classical System: Quantum Manifestations*". Chap. V, Springer-Velag, Inst. for Nonlinear Science,1992; N. Srivastava et al., *Z. Phys.*, **B70**,251(1988); N. Srivastava et al., *J. Applied Phys.*, **67**, 5627(1990); N. Srivastava and G. Müller, *Z. Phys.*, **B80**, 137(1990).
- [28] U. Fano, *Review of Modern Physics*, **29**, 74(1957)
- [29] Karl Blun "*Density Matrix Theory and Applications*", Plenum Press (1981), capítulos 1 e 2.
- [30] R. P. Feynman, "*Statistical Mechanics, A Set of Lectures*", W. A. Benjamin, Inc. (1972), capítulo 2.
- [31] F. Camargo, K. Furuya and M. C. Nemes, *Journal of European Optics Society: Semiclassical and Quantum Optics*, to be published.