

**Instituto de Física ‘Gleb Wataghin’  
Universidade Estadual de Campinas**

**Cargas Superficiais e Propagação de  
Sinais em Condutores**

**Dissertação de Mestrado**

**Aluno: Júlio Akashi Hernandes**

**Orientador: Prof. Dr. André Koch Torres de Assis**

Dissertação submetida ao Instituto de Física ‘Gleb Wataghin’  
da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos  
requisitos para obtenção do grau de Mestre em Física

Fevereiro de 2001

# Sumário

<b>I</b>	<b>Cargas Superficiais</b>	<b>1</b>
1	Introdução	2
2	Casos Conhecidos na Literatura	6
2.1	Cargas Superficiais . . . . .	6
2.2	Resultados Experimentais . . . . .	8
2.3	Cabo Coaxial Longo . . . . .	9
2.4	Cabo Coaxial Finito . . . . .	12
2.5	Circuito Poloidal . . . . .	16
2.6	Fio Reto Longo de Seção Reta Circular . . . . .	20
2.7	Linha de Transmissão . . . . .	23
3	Casos Novos	28
3.1	Placa Retangular . . . . .	28
3.2	Duas Placas Paralelas . . . . .	33
3.3	Quatro Placas Paralelas . . . . .	36
3.3.1	Potenciais Opostos . . . . .	36
3.3.2	Placa Condutora Perfeita . . . . .	40
3.4	Anel Filiforme . . . . .	44
4	Discussão e Conclusão	52
<b>II</b>	<b>Propagação de Sinais</b>	<b>54</b>
5	Introdução	55
5.1	Cargas que Geram as Forças . . . . .	56
5.2	Força de Weber . . . . .	58

5.3	Cálculo das Forças . . . . .	58
5.4	Equação da Telegrafia . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Casos Conhecidos na Literatura</b>	<b>62</b>
6.1	Fio Reto Longo de Seção Reta Circular . . . . .	62
6.2	Cabo Coaxial Longo . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Casos Novos</b>	<b>65</b>
7.1	Placa Retangular . . . . .	65
7.2	Duas Placas Paralelas . . . . .	68
7.3	Linha de Transmissão . . . . .	70
7.4	Cabo Coaxial Resistivo . . . . .	72
7.4.1	Caso 1: $R_b = 0$ . . . . .	74
7.4.2	Caso 2: $R_a = 0$ . . . . .	74
7.4.3	Caso 3: $R_a \neq 0$ e $R_b \neq 0$ . . . . .	74
<b>8</b>	<b>Discussão e Conclusão</b>	<b>76</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo do Potencial Devido a uma Placa Carregada</b>	<b>79</b>
<b>B</b>	<b>Listagem de Programa</b>	<b>82</b>
<b>C</b>	<b>Explosão de Fios</b>	<b>85</b>
C.1	Introdução . . . . .	85
C.2	Efeito Hall Radial . . . . .	86
C.3	Repulsão Coulombiana . . . . .	87
C.4	Discussão e Conclusão . . . . .	89

# Lista de Figuras

1.1	Existe um campo elétrico fora de condutores resistivos estacionários com corrente constante? Se colocarmos uma carga parada fora deste condutor vai haver alguma força entre eles?	4
2.1	A bateria mantém a distribuição de cargas superficiais, que geram o campo elétrico dentro (e fora) dos condutores. . . . .	7
2.2	Resultados teóricos encontrados por Sommerfeld para o problema do cabo coaxial infinito. As linhas de campo elétrico são representadas pelas linhas tracejadas, e as equipotenciais são representadas pelas linhas contínuas. . . . .	10
2.3	Geometria de cabo coaxial finito considerada por Jackson. . .	13
2.4	Linhas equipotenciais do cabo coaxial finito quando o circuito está aberto, ou seja, sem o resistor. O resistor está localizado simetricamente no meio do condutor interno. Esta figura corresponde à região representada pela hachura na Figura 2.3 no canto superior esquerdo. . . . .	14
2.5	Linhas equipotenciais para a região superior esquerda da Figura 2.3 quando o circuito está fechado. . . . .	14
2.6	Cargas superficiais ao longo do condutor interno do cabo coaxial tratado por Jackson. Os pontos representam a distribuição de carga com o circuito aberto (sem o resistor). Os pontos na região onde não existe o resistor representam apenas a componente normal ao circuito do campo elétrico. A linha contínua representa a distribuição de carga com o circuito fechado. . . . .	15
2.7	Geometria do problema considerado por Heald. Há uma densidade de corrente superficial $K$ fluindo uniformemente na direção poloidal sobre a superfície do cilindro. . . . .	17

2.8	Resultado teórico obtido por Heald para as equipotenciais no circuito poloidal (corte transversal ou de seção reta do cilindro). O eixo $z$ é perpendicular à figura passando pelo centro do círculo. A linha de bateria é representada pela bola preta. . . . .	18
2.9	Resultado teórico encontrado por Heald para as linhas de campo elétrico no circuito poloidal. . . . .	19
2.10	Placa experimental de Jefimenko para as linhas de campo elétrico correspondente ao resultado encontrado por Heald. . . . .	19
2.11	Linhas equipotenciais encontradas por Assis, Rodrigues e Mania para o problema do fio reto longo. . . . .	21
2.12	Placa experimental de Jefimenko para um circuito oco em forma retangular, conduzindo corrente constante e uniforme em sua superfície. . . . .	21
2.13	Linhas de campo elétrico encontradas por Assis, Rodrigues e Mania no problema do fio reto longo. Podemos considerar a seção reta longitudinal como uma aproximação da figura experimental de Jefimenko. . . . .	22
2.14	Placa experimental de Jefimenko mostrando linhas de campo elétrico em circuito bidimensional com corrente constante. . . . .	22
2.15	Dois fios paralelos de raio $a$ , separados por uma distância $R$ . O fio de cima carrega uma corrente constante $I$ ao longo da direção positiva de $z$ , enquanto que o de baixo carrega uma corrente de retorno $I$ , ao longo da direção negativa de $z$ . . . . .	25
2.16	Linhas equipotenciais para o plano $y = 0$ no problema da linha de transmissão com corrente constante. . . . .	26
2.17	Linhas de campo elétrico no plano $y = 0$ no problema da linha de transmissão com corrente constante. . . . .	27
2.18	Placa experimental de Jefimenko mostrando linhas de campo elétrico nas duas placas grossas conduzindo correntes em direções opostas. . . . .	27
3.1	Esquema da placa condutora com corrente constante. . . . .	29
3.2	Linhas equipotenciais para uma placa condutora no plano longitudinal $x = 0$ . . . . .	32
3.3	Linhas de campo elétrico na placa condutora no plano longitudinal $x = 0$ . . . . .	32
3.4	Linhas equipotenciais no caso de duas placas conduzindo corrente na mesma direção. . . . .	34

3.5	Linhas de campo elétrico para duas placas paralelas conduzindo corrente na mesma direção – ou para um único condutor com espessura. . . . .	35
3.6	Linhas equipotenciais para quatro placas carregadas – ou dois condutores grossos conduzindo correntes em direções opostas. . . . .	38
3.7	Linhas de campo elétrico para duas placas com espessura conduzindo correntes em direções opostas. . . . .	39
3.8	Linhas equipotenciais para o caso em que o condutor grosso inferior é um condutor perfeito. . . . .	41
3.9	Linhas de campo elétrico para o caso em que o condutor inferior é um condutor perfeito. . . . .	43
3.10	Experimento de Jefimenko em que o condutor inferior é muito mais condutivo que o superior. . . . .	43
3.11	Um anel filiforme de raio $a$ com uma corrente constante $i$ . A bateria ideal está situada em $\theta = \pi$ , gerando uma diferença de potencial entre seus terminais de valor $\phi_0$ . . . . .	45
3.12	Potencial no anel, em função do ângulo em coordenadas cilíndricas. Acima temos o potencial ideal – uma reta descontínua em $\theta = \pi$ ou $\theta = -\pi$ . Abaixo, temos a representação da reta em uma expansão em série de Fourier com $N = 200$ termos. . . . .	48
3.13	Linhas equipotenciais no plano do anel, nas coordenadas cartesianas $x \times y$ . Note que a bateria está situada à esquerda, e não é representada pelo ponto do modelo original pois o método numérico que utilizamos não permitiu isso. . . . .	49
3.14	Linhas equipotenciais no plano do anel, nas coordenadas $\theta \times r$ . A bateria está localizada nos extremos $\theta = -\pi$ e $\theta = \pi$ . Podemos ver claramente que as equipotenciais saem obliquamente ao circuito. . . . .	50
3.15	Representação qualitativa do campo elétrico no plano do anel. . . . .	51
5.1	Esquema do problema de propagação de sinais tratado originalmente por Kirchhoff em 1857. . . . .	56
5.2	Esquema das fontes de carga interagindo com a carga-teste $q_1$ . . . . .	57
6.1	Esquema da propagação de um sinal em um fio reto. . . . .	63
6.2	Esquema da propagação de sinais em um cabo coaxial formado por duas cascas cilíndricas. . . . .	64

7.1	Esquema da propagação de sinais em uma placa retangular no plano $y = 0$ . A figura acima apresenta uma visão lateral deste plano. . . . .	66
7.2	Esquema da propagação de sinais em duas placas paralelas. . .	69
7.3	Esquema da propagação de sinais na linha de transmissão. . .	71
C.1	Repulsão coulombiana entre as partes $A$ e $B$ do fio, devido ao aparecimento de cargas no interior e na superfície do condutor.	88

## Resumo

Na primeira parte deste trabalho analisamos o campo elétrico fora de condutores resistivos estacionários conduzindo corrente constante. Exploramos aqui o ponto de vista das cargas superficiais. Apresentamos problemas resolvidos na literatura sobre este assunto, assim como resultados novos para condutores em forma de placas e também um anel filiforme (neste último caso calculamos numericamente o potencial), comparando os resultados teóricos com dados experimentais retirados da literatura.

Na segunda parte, tratamos da propagação de sinais em condutores compridos. Seguimos a abordagem de Kirchhoff para o problema, utilizando a força de Weber como modelo de interação entre cargas. Conseguimos derivar a equação da telegrafia para diversos casos, e mostramos que a abordagem maxwelliana (campos) não é necessariamente a única que conduz à equação da telegrafia.

O Apêndice A apresenta o cálculo das integrais envolvendo o potencial devido a uma placa retangular transportando uma corrente constante. O programa para calcular o potencial de um anel filiforme está listado no Apêndice B. No Apêndice C, consideramos o fenômeno da explosão de fios que acontece quando uma alta corrente elétrica flui em um condutor. Apresentamos o resultado da tensão coulombiana, gerada pelo aparecimento de carga no interior do fio devido ao efeito Hall radial. Concluimos que esta tensão é várias ordens de grandeza inferior àquela necessária para romper um fio metálico, ver [AH99b].

## Abstract

In the first part of this work we analyse the electric field created outside stationary resistive conductors, with a constant current. Here we explore the point of view of surface charges. We present solved problems in the literature, on this subject, and also new results for conductor plates and for a thin ring (in this last case we calculate the potential numerically), comparing our theoretical results with experimental data present in the literature.

In the second part, we treat the propagation of signals in long conductors. We follow Kirchhoff's approach to the problem, utilizing Weber's force equation as a model for charge interaction. We derive the telegraphy equation for several cases, and show that the Maxwell's approach (based on fields) is not necessarily the only one that leads to the telegraphy equation.

Appendix A presents the calculation of the integrals involved in the potential resolution for a rectangular plate transporting a constant current. The numerical program to calculate the potential of a thin ring is listed on Appendix B. On Appendix C we consider the phenomenon of wire explosions which happens when a high electric current flows in a conductor. We present the result of coulombian tension generated by the appearance of charges in the interior of the wire caused by the radial Hall effect. We conclude that this tension is several orders of magnitude smaller than the one necessary to break a metallic wire, see [AH99b].

**Parte I**  
**Cargas Superficiais**

# Capítulo 1

## Introdução

Consideremos um condutor parado (imaginemos um fio resistivo, por simplicidade), conduzindo uma corrente constante. Podemos entender que esta corrente está relacionada com um campo elétrico existente em seu interior. Adicionalmente, interpretamos que esta corrente gera em todo espaço um campo magnético. Mas fora do fio, existe um campo elétrico não nulo? Ou seja, se colocarmos uma carga parada fora do fio, será que ela vai sofrer a ação de alguma força?

Podemos entender que uma carga livre colocada próxima a um condutor induz neste uma distribuição de cargas em sua superfície. Este fenômeno é conhecido como indução eletrostática. O aparecimento destas cargas faz com que surja uma força entre a carga livre e o condutor. Esta força não depende da velocidade ou aceleração relativas entre a carga e o condutor, apenas de sua distância, do valor absoluto da carga e da geometria do condutor. Por este motivo este tipo de força é conhecido como de ordem zero em  $v/c$ , onde  $v$  é a velocidade relativa entre a carga e o condutor, e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Já o fenômeno que vamos apresentar aqui envolve forças de primeira ordem em  $v/c$ , ou seja, proporcionais à corrente  $i$ . É sobre este último fenômeno que vamos nos concentrar neste trabalho.

Muitos cientistas afirmaram erradamente, por muito tempo, que não existe um campo elétrico fora de condutores com correntes constantes. Idéias expressas por:

um condutor com corrente constante gera apenas um campo magnético em seu exterior,

e:

o fio é neutro em seu interior e na sua superfície,

presentes em artigos e livros-texto sobre eletromagnetismo, têm escondido o problema de estudantes e pesquisadores, confundindo-os, vide Figura 1.1. Muitos exemplos deste tipo podem ser encontrados em [ARM99], dos quais apresentamos alguns deles.

Um exemplo de um autor do século passado é Clausius. Em 1877 ele escreveu:

“Aceitamos como critério o resultado experimental de que uma corrente fechada constante em um condutor estacionário não exerce força em eletricidade estacionária”, [O’R65, pág. 589].

Apesar de afirmar claramente que este é um “resultado experimental”, ele não cita nenhuma experiência que comprovasse sua declaração. Sua eletrodinâmica predizia (entre colchetes vão nossas palavras):

“A lei formulada por mim leva ao resultado de que um circuito fechado estacionário [com corrente] constante não exerce força em uma carga estacionária”, [O’R65, pág. 589].

Veremos que este princípio está errado, pois mostraremos que existe uma força fora de um fio com corrente constante.

Maxwell, ao comentar sobre a teoria eletrodinâmica de Weber, deduz que, se tal teoria estivesse correta, um fio com corrente exerceria força em outro fio que estivesse carregado, mesmo sem corrente. Ele afirmou:

“Agora, nós sabemos que carregando o segundo fio condutor como um todo, podemos fazer  $e' + e'_1$  [carga total no fio sem corrente] tanto positivo como negativo. Tal fio carregado, mesmo sem corrente, de acordo com esta fórmula [baseada na eletrodinâmica de Weber], agiria no primeiro fio carregando uma corrente no qual  $v^2e + v_1^2e_1$  [soma das cargas positiva e negativa do fio com corrente multiplicados pelo quadrado de suas velocidades de deriva] tem um valor diferente de zero. Tal ação nunca foi observada”, [Max54, vol. 2, art. 848, pág. 482].

Ele não fez citações de experimentos que tentaram detectar esta força, qual o limite superior deste efeito, etc. O mesmo tipo de crítica é feito por Whittaker, afirmando que, se a teoria de Weber estivesse correta, correntes

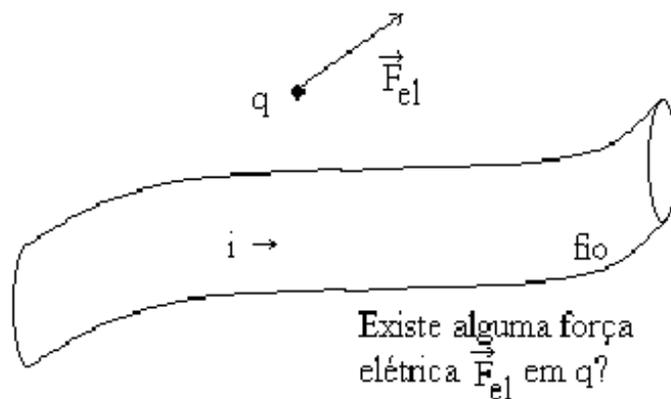


Figura 1.1: Existe um campo elétrico fora de condutores resistivos estacionários com corrente constante? Se colocarmos uma carga parada fora deste condutor vai haver alguma força entre eles?

elétricas exerceriam forças em cargas paradas, [Whi73, pág. 205]. A força de Weber prediz, adicionalmente aos efeitos de ordem zero e de primeira ordem em  $v/c$ , um termo extra de segunda ordem. É em relação a este último termo que esses autores se referem. Entretanto, não há considerações em relação aos termos de ordem zero nem aos de primeira ordem nos escritos desses autores.

Em livros-texto atuais encontramos declarações similares. Reitz, Milford e Christy parecem afirmar que não há cargas superficiais em fios resistivos conduzindo corrente, [RMC82, págs. 142–143]:

“Consideremos uma amostra condutora que obedece à lei de Ohm, na forma de um fio reto de seção reta uniforme cujas extremidades são mantidas a uma diferença de potencial constante  $\Delta\phi$ . Supõe-se que o fio seja homogêneo e caracterizado pela constante de condutividade  $g$ . Nestas condições, existirá um campo elétrico no fio, relacionado com  $\Delta\phi$  através da relação:

$$\Delta\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

É claro que não pode haver componente, em estado estacionário de campo elétrico, perpendicular ao eixo do fio já que, pela Eq. (7-

10) [ $\vec{J} = g\vec{E}$ ], isto produziria uma carga contínua da superfície do fio. Dessa forma, o campo elétrico é puramente longitudinal”.

Neste presente trabalho mostramos que não apenas estas cargas superficiais existem, mas também que são elas as responsáveis pelo aparecimento do campo elétrico no interior e fora dos fios. Mostramos também que o campo elétrico no interior de um fio com corrente constante não é puramente longitudinal (veja Apêndice C).

Similarmente, temos as declarações de Edwards, Kenyon e Lemon:

“Há muito se sabe que as forças de ordem zero e de primeira ordem em um objeto carregado, próximo a um condutor neutro com corrente constante, parado no laboratório, são nulas em magnitude”, [EKL76].

Existe também a idéia de que um fio com corrente não gera campo elétrico em seu exterior porque assumem que o magnetismo é um efeito relativístico. Um exemplo é o livro do Feynman, de onde podemos citar:

“Em um condutor normal, como cobre, as correntes elétricas vêm do movimento de alguns de seus elétrons negativos – chamados elétrons de condução – enquanto as cargas positivas nucleares e o resto dos elétrons ficam fixos no corpo do material. Denominamos a densidade dos elétrons de condução de  $\rho_-$  e sua velocidade em  $S$  [referencial do laboratório] de  $\vec{v}$ . A densidade de cargas paradas em  $S$  é  $\rho_+$ , que tem de ser igual ao negativo de  $\rho_-$ , já que estamos considerando um fio descarregado. Não há portanto campo elétrico fora do fio, e a força na partícula em movimento é somente  $\vec{F} = q\vec{v}_0 \times \vec{B}$ ”, [FLS64, vol. 2, pág. 13–7].

Neste ponto, podemos comentar que os autores acima não levaram em consideração a existência das cargas superficiais e sua ação na carga externa  $q$ .

Veremos que estas declarações de Reitz, Feynmann, e outros, estão erradas. Mesmo que desconsideremos o efeito de ordem zero (ou seja, a indução de cargas no condutor devido à proximidade de uma carga externa), ainda temos um efeito de primeira ordem em  $v/c$ . Este efeito deriva da presença de cargas na superfície dos condutores quando por estes flui uma corrente. Vamos calcular as cargas superficiais em condutores resistivos com corrente constante e o campo elétrico fora destes condutores. Vamos comparar nossos cálculos com resultados experimentais na literatura.

# Capítulo 2

## Casos Conhecidos na Literatura

Neste capítulo apresentamos alguns casos envolvendo cargas superficiais e campos em condutores, cujos tratamentos estão publicados na literatura. Em primeiro lugar, vamos apresentar a fonte das figuras experimentais, que serviram de base para nossas comparações com os diversos tratamentos teóricos, apresentados em seguida. Estas figuras experimentais serão apresentadas mais adiante quando comparadas com os cálculos teóricos.

### 2.1 Cargas Superficiais

Na primeira parte deste trabalho, todas as situações envolvem um condutor resistivo conduzindo uma corrente constante. É um resultado experimental que nestes casos a densidade de corrente é distribuída uniformemente na seção reta, [Whi73, pág. 90].

Vamos primeiramente dar uma visão qualitativa da relação das cargas localizadas na superfície dos condutores com a corrente constante que flui em seu interior. Uma fonte de corrente – por exemplo, uma bateria, – conectada ao condutor mantém, nas extremidades deste circuito, uma distribuição de cargas. Esta distribuição de cargas espalha-se ao longo da superfície do condutor, gera a corrente no interior do condutor, e também um campo elétrico fora do condutor. Esta situação está mostrada na Figura 2.1, à esquerda. À direita desta mesma figura temos uma ampliação de uma pequena seção do circuito, mostrando as cargas superficiais gerando o campo elétrico dentro do fio.

Consideramos o caso de circuitos com corrente do ponto de vista da dis-

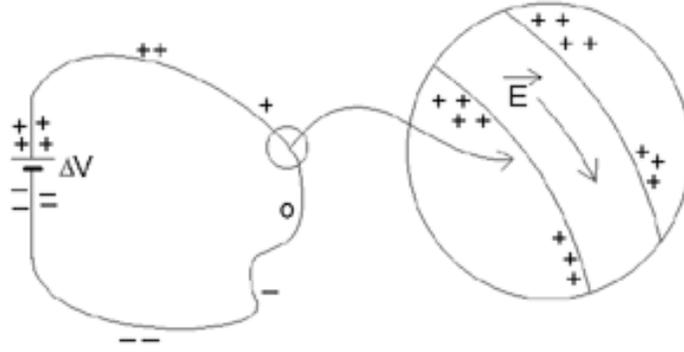


Figura 2.1: A bateria mantém a distribuição de cargas superficiais, que geram o campo elétrico dentro (e fora) dos condutores.

tribuição de cargas superficiais gerando os campos elétricos. A relação entre o campo elétrico e a densidade de carga pode ser dada pela lei de Gauss:

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad (2.1)$$

onde  $\epsilon$  é a permissividade elétrica do meio,  $\vec{E}$  é o campo elétrico e  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga. Resolvendo esta equação num cilindro com área de base arbitrária e altura infinitesimal envolvendo a interface na superfície do condutor, com o ar ou vácuo ao seu redor, obtemos:

$$\epsilon_1 \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 + \epsilon_2 \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 = \sigma, \quad (2.2)$$

onde  $\vec{E}_i$  é o campo elétrico,  $\hat{n}_i$  é o vetor unitário normal à superfície gaussiana, e  $\sigma$  é a densidade superficial de carga na interface entre os dois meios. O índice  $i = 1$  se refere ao meio condutor, e o índice  $i = 2$  se refere ao meio fora do condutor, o qual assumimos ao longo deste trabalho como sendo o vácuo.

Nesta tese utilizou-se esta relação para checar os cálculos. Inicialmente propôs-se uma distribuição de carga superficial conhecida e com ela calculou-se o potencial. A partir daí obteve-se o campo elétrico. Com a Eq. (2.2) obteve-se então uma nova densidade superficial de carga que foi comparada com a inicial para ver se coincidem.

Existem vários trabalhos na literatura discutindo estas cargas superficiais [Som64, pág. 125–133], [Hea84], [Gri89, pág. 336–337], [Jac96], [ARM99] e [AC00]. Aqui apresentamos uma visão geral destes casos conhecidos, e um estudo detalhado de casos novos.

## 2.2 Resultados Experimentais

As figuras demonstrando a existência de campos elétricos fora de condutores foram obtidas em [Jef62] e [Jef89]. Jefimenko usou sementes de grama como partículas-teste. Estas sementes, neutras no estado natural, polarizam-se na presença de um campo elétrico, alinhando-se ao longo das linhas de campo elétrico. Aqui podemos fazer uma analogia com uma situação bastante popular: as limalhas de ferro, na presença de um campo magnético, polarizam-se e se alinham ao longo das linhas de campo magnético. As figuras de Jefimenko são apresentadas neste trabalho como comparação com os resultados teóricos.

Em [Jef62] está bastante clara a maneira de confeccionar estas figuras. Em placas de vidro, com dimensões típicas de  $25\text{cm} \times 30\text{cm}$ , desenha-se um circuito, com dimensões aproximadas de  $12\text{cm} \times 15\text{cm}$ , com tinta condutora (nas figuras apresentadas aqui esta tinta têm um tom cinza-claro). Os terminais do circuito são pintados com tinta condutora (nas figuras esta tinta é representada pela cor preta). Aplicando-se tensões da ordem de  $10\text{kV}$  aos terminais do circuito, são espalhadas as sementes de grama por toda a superfície, que é então fotografada. Neste trabalho, não há estimativa das correntes que fluem nos condutores.

Jefimenko também mediu diretamente as curvas equipotenciais fora de condutores com corrente constante, [JBK62] e [Jef89, pág. 301]. Para isto utilizou uma fonte de radioatividade alfa para ionizar o ar no ponto onde o potencial seria medido. A fonte alfa adquiria o mesmo potencial que este ponto. O potencial era então medido em relação a um ponto de referência com um eletrômetro eletrônico conectado à fonte alfa.

Um exemplo desta medida que pode ser comparado com cálculos teóricos é o de uma corrente constante de  $0,4$  microampères fluindo na superfície de um condutor oco estacionário ao qual foi aplicado uma diferença de potencial de  $80$  volts. Foi medido o potencial dentro e fora do condutor [JBK62, Fig. 3a]. Esta figura experimental será comparada mais adiante com a figura teórica obtida por Assis, Rodrigues e Mania [ARM99, Fig. 5].

As comparações feitas na tese são qualitativas. Isto é, comparamos as formas das linhas de campo elétrico (ou das equipotenciais) calculadas teoricamente com as mesmas linhas obtidas experimentalmente por Jefimenko. Para se fazer uma comparação quantitativa seria necessário comparar o valor da força calculada entre o condutor com corrente constante e uma carga-teste parada externa ao condutor, com uma medida direta desta força. Mas a única experiência de que temos conhecimento que tentou medir diretamente esta

força é a de Sansbury, [San85]. Infelizmente, embora ele tenha concluído que existe uma força não nula utilizando uma balança de torção, sua experiência não chegou a dar resultados quantitativos precisos que permitissem esta comparação.

Passamos agora aos resultados teóricos conhecidos da literatura.

## 2.3 Cabo Coaxial Longo

O cálculo do campo elétrico e das cargas superficiais em um cabo coaxial longo com corrente constante  $i$  foi feito por Sommerfeld, Griffiths, Jefimenko, e Assis e Cisneros: [Som64, págs. 125–130], [Gri89, págs. 336–337], [Jef89, págs. 318 e 509–511] e [AC00].

Esta situação consiste de um cabo coaxial infinito composto de um fio de seção reta circular de raio  $a$  com condutividade  $g_1$ , e uma casca cilíndrica de raios interno  $b$  e externo  $c$  ( $c > b > a$ ) com condutividade  $g_2$ . Sommerfeld e Griffiths obtiveram um campo elétrico não nulo apenas na região  $r < b$ , mas nulo para a região  $r > b$  por considerarem casos particulares desta situação: o caso de um raio externo infinito ( $c \rightarrow \infty$ ) foi tratado por Sommerfeld, e o caso de condutividade infinita da casca cilíndrica externa ( $g_2 \rightarrow \infty$ ) foi tratado por Griffiths. Na Figura 2.2 apresentamos as equipotenciais (linhas cheias) e linhas de campo elétrico (linhas pontilhadas) obtidas por Sommerfeld.

O caso com raio externo  $c$  finito e condutividade externa  $g_2$  finita foi tratado por Jefimenko e por Assis e Cisneros. Jefimenko concentrou-se apenas na região entre os cabos ( $a < r < b$ ) obtendo aí o potencial e o campo elétrico, assim como as densidades superficiais de carga nas superfícies  $r = a$  e  $r = b$ . Assis e Cisneros estenderam o tratamento dado por Jefimenko, e obtiveram também a densidade superficial de carga na superfície externa  $r = c$ , e um campo elétrico não nulo fora do condutor externo ( $r > c$ ).

Apresentamos em seguida o tratamento do problema dado por Sommerfeld, ou seja, o cabo coaxial com condutor de retorno com raio externo infinito. Vamos utilizar coordenadas cilíndricas, onde o eixo  $z$  coincide com o eixo do cilindro. Temos uma corrente  $i$  fluindo uniformemente no condutor interno ( $0 \leq r \leq a$ , com condutividade  $g_1$ ) e retornando pelo condutor externo ( $b \leq r \leq \infty$ , com condutividade  $g_2$ ). A densidade de corrente é dada por:

$$\vec{j} = \begin{cases} i\hat{z}/\pi a^2, & r < a, \\ 0, & b < r < \infty. \end{cases} \quad (2.3)$$

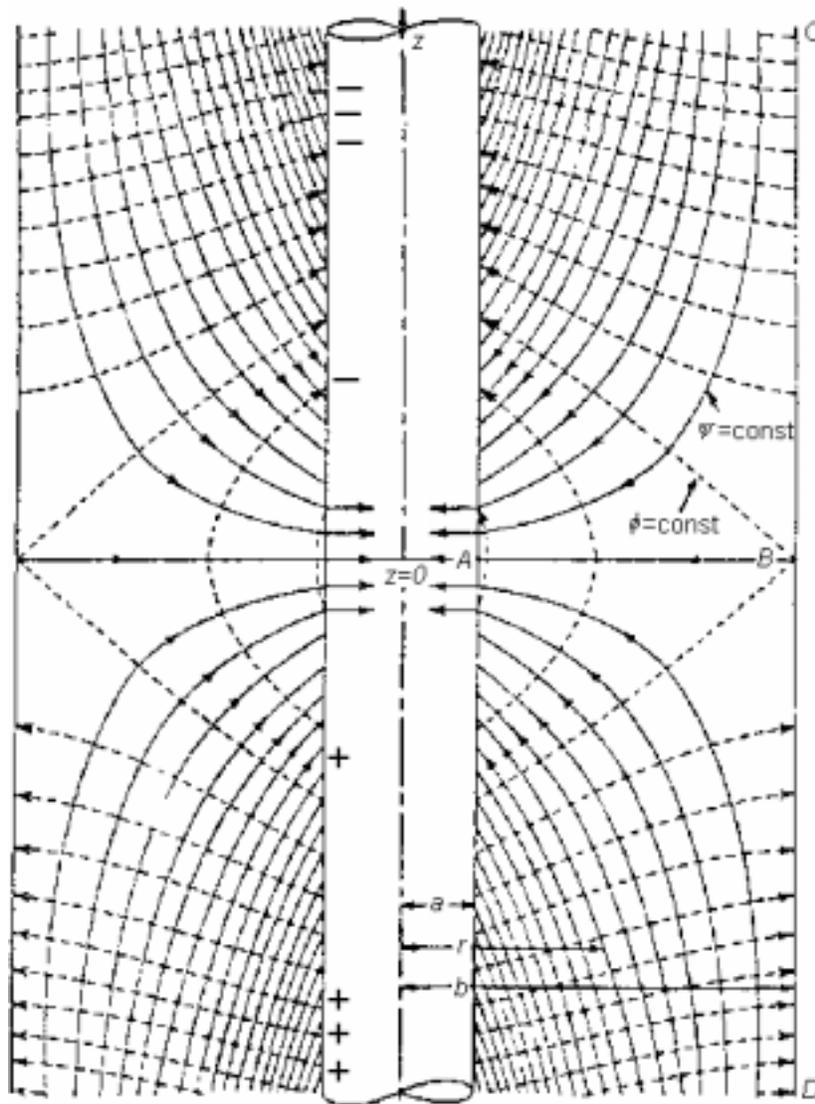


Figura 2.2: Resultados teóricos encontrados por Sommerfeld para o problema do cabo coaxial infinito. As linhas de campo elétrico são representadas pelas linhas tracejadas, e as equipotenciais são representadas pelas linhas contínuas.

Lembramos que o condutor de retorno tem área de seção reta infinita, de modo que uma quantidade finita de corrente está distribuída em uma área infinita, e é por isto que a densidade de corrente é nula na expressão acima. O campo elétrico  $\vec{E}$  dentro dos condutores pode ser encontrado pela lei de Ohm, e é dado por:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{j}/g_1 = i\hat{z}/\pi a^2 g_1, & r < a, \\ \vec{j}/g_2 = 0, & b < r < c. \end{cases} \quad (2.4)$$

Na região entre os condutores,  $a < r < b$ , onde supomos vácuo, vale a equação de Laplace para o potencial elétrico  $\phi$ :

$$\nabla^2 \phi = 0,$$

ou, expresso em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.5)$$

Neste problema temos simetria de rotação em torno do eixo  $z$ , ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.6)$$

Além disto, o potencial ao longo dos condutores é uma função linear em  $z$ , e devemos ter que o potencial é uma função linear em  $z$  na região entre os condutores [Rus68]. Com isto obtemos o potencial nesta região:

$$\phi(r, z) = \frac{iz}{\pi a^2 g_1 \ln(b/a)} \ln \frac{r}{b}, \quad a < r < b, \quad (2.7)$$

a partir do qual podemos encontrar o campo elétrico nesta mesma região:

$$\begin{aligned} E_r(r, z) &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{i}{\pi a^2 g_1 \ln(b/a)} \frac{z}{r}, & a < r < b, \\ E_z(r, z) &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{i}{\pi a^2 g_1 \ln(b/a)} \ln \frac{b}{r}, & a < r < b. \end{aligned} \quad (2.8)$$

As densidades superficiais de carga nas superfícies  $r = a$  e  $r = b$  podem ser facilmente encontradas com (2.2):

$$\sigma_a(z) = -\frac{\epsilon_0 i}{\pi a^3 g_1 \ln(b/a)} z, \quad r = a,$$

$$\sigma_b(z) = +\frac{\epsilon_0 i}{\pi a^2 b g_1 \ln(b/a)} z, \quad r = b, \quad (2.9)$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo.

São estas cargas superficiais, sustentadas pela bateria, as responsáveis pelo campo elétrico que mantém a corrente fluindo, e que geram o campo elétrico no condutor interno e na região entre os cabos,  $a < r < b$ . Isto pode ser demonstrado calculando-se, por integração direta, o potencial gerado por estas cargas superficiais, o que resulta exatamente (2.7) na região entre os condutores.

É a bateria também que vai definir onde a densidade de carga é nula. No caso da Figura 2.2 ou da Equação (2.9) a origem do eixo  $z$  foi escolhida para coincidir com  $\sigma = 0$ . Isto significa que a bateria que dá origem à corrente, não representada na Figura 2.2, deve estar simetricamente colocada em relação à origem  $z = 0$ . Isto devido ao fato de que a parte do condutor mais próxima do terminal positivo (negativo) da bateria fica carregada positivamente (negativamente), como representado qualitativamente na Figura 2.1.

Como curiosidade, podemos também calcular a carga por unidade de comprimento no eixo  $z$ :

$$\begin{aligned} \lambda_a(z) &= 2\pi a \sigma_a(z) = -\frac{2\epsilon_0 i}{a^2 g_1 \ln(b/a)} z, \quad r = a, \\ \lambda_b(z) &= 2\pi b \sigma_b(z) = +\frac{2\epsilon_0 i}{a^2 g_1 \ln(b/a)} z, \quad r = b, \end{aligned} \quad (2.10)$$

ou seja, o condutor se comporta como um capacitor, com  $\lambda_a(z) = -\lambda_b(z)$ .

Lembramos que esta não é uma situação real, apenas uma aproximação para o caso de um cabo coaxial comprido. Além disso, fazendo o raio externo infinito restringe ainda mais uma comparação deste caso com um real. Entretanto, vale ressaltar que estamos interessados primariamente no entendimento da relação entre as cargas superficiais, a corrente e o campo elétrico que existe na região *fora* do condutor.

A seguir, vem o caso menos restritivo de um cabo coaxial finito.

## 2.4 Cabo Coaxial Finito

Jackson [Jac96] apresentou a solução exata para o problema do cabo coaxial de comprimento finito, calculando os campos e as cargas superficiais na região

entre os condutores. Assim como Griffiths (veja Seção 2.3), ele considerou a condutividade do condutor de retorno (externo) como sendo infinita. A geometria deste caso pode ser vista na Figura 2.3.

Não entramos em detalhes na resolução deste problema. Essencialmente, ele calculou a função de Green para a equação de Laplace, usando como condições de contorno o potencial nas paredes dos condutores. Seu resultado mais interessante é a comparação das linhas equipotenciais entre circuitos abertos e fechados. Neste caso, o resistor é colocado simetricamente no condutor interno. A Figura 2.4 mostra a metade superior do circuito da Figura 2.3 sem o resistor, ou seja, o circuito está aberto. A Figura 2.5 mostra a mesma situação, exceto que agora o circuito está fechado. Esta última figura foi feita, segundo o autor, utilizando métodos numéricos.

Comparando as duas figuras, notamos que a diferença entre as equipotenciais é mínima. Conseqüentemente também é mínima a variação nas cargas superficiais, apresentadas na Figura 2.5 apenas de forma qualitativa, e na Figura 2.6 de forma quantitativa. Isto ilustra o quão importante são estas distribuições de cargas na superfície dos condutores para o fenômeno da condução de corrente, posto que uma variação pequena determina se existe ou não uma corrente.

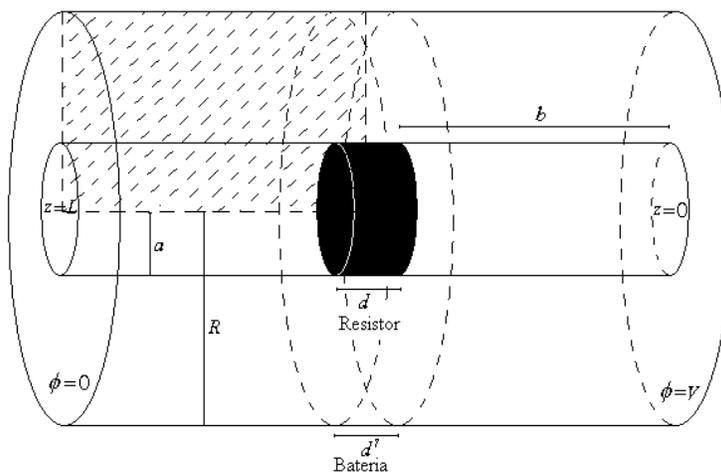


Figura 2.3: Geometria de cabo coaxial finito considerada por Jackson.

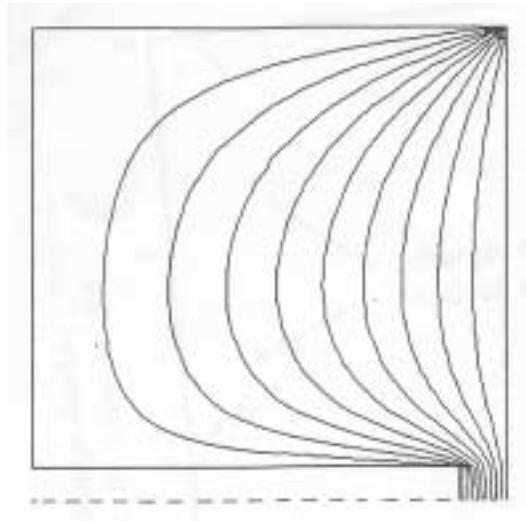


Figura 2.4: Linhas equipotenciais do cabo coaxial finito quando o circuito está aberto, ou seja, sem o resistor. O resistor está localizado simetricamente no meio do condutor interno. Esta figura corresponde à região representada pela hachura na Figura 2.3 no canto superior esquerdo.

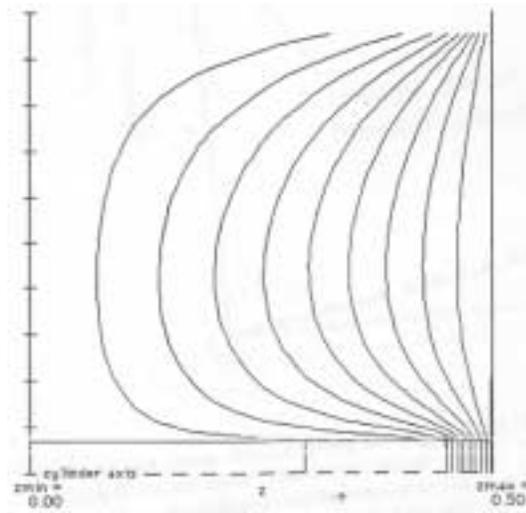


Figura 2.5: Linhas equipotenciais para a região superior esquerda da Figura 2.3 quando o circuito está fechado. .

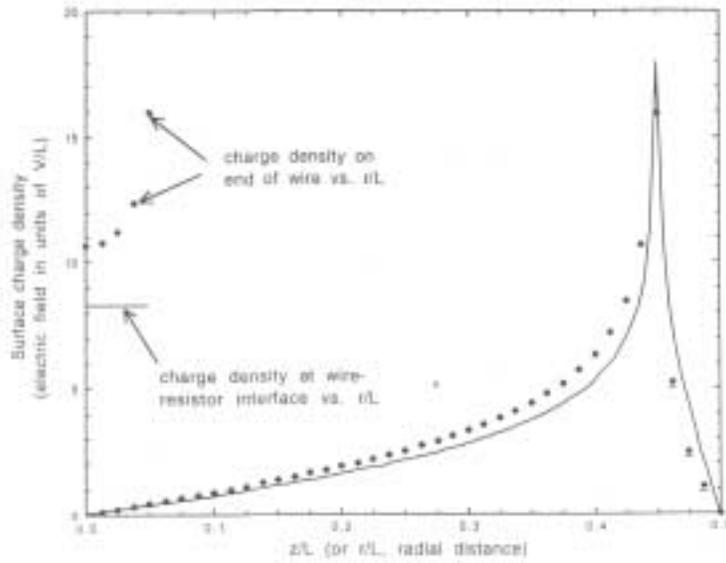


Figura 2.6: Cargas superficiais ao longo do condutor interno do cabo coaxial tratado por Jackson. Os pontos representam a distribuição de carga com o circuito aberto (sem o resistor). Os pontos na região onde não existe o resistor representam apenas a componente normal ao circuito do campo elétrico. A linha contínua representa a distribuição de carga com o circuito fechado.

## 2.5 Circuito Poloidal

Considere uma casca cilíndrica condutora uniformemente resistiva de comprimento infinito e de raio  $a$ , sem espessura, com uma corrente poloidal constante, veja a Figura 2.7. Este problema foi tratado por Heald [Hea84]. Heald assumiu que a bateria fosse uma linha paralela ao eixo do cilindro, alimentando o circuito com uma diferença de potencial  $\phi_0$ . A partir da equação de Laplace ( $\nabla^2\phi = 0$ ), ele calculou o potencial em todo o espaço (dentro e fora do cilindro), assim como o campo elétrico e as cargas superficiais.

O potencial não depende da coordenada  $z$  por simetria, sendo o eixo  $z$  o eixo de simetria do cilindro. Seu valor ao longo do circuito varia linearmente com a coordenada polar  $\varphi$ :

$$\phi(r = a, \varphi) = \frac{\phi_0}{2\pi}\varphi, \quad -\pi < \varphi < \pi. \quad (2.11)$$

Fazendo uma expansão em série de Fourier na variável  $\varphi$ , no intervalo especificado  $-\pi < \varphi < \pi$  para o potencial  $\phi$  temos:

$$\phi(r = a, \varphi) = -\frac{\phi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\varphi}{n}, \quad -\pi < \varphi < \pi. \quad (2.12)$$

Podemos resolver a equação de Laplace em coordenadas polares, usando a Equação (2.12) como condição de contorno. O resultado é:

$$\begin{aligned} \phi(r, \varphi) &= -\frac{\phi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{r}{a}\right)^n \frac{\sin(n\varphi)}{n} = \frac{\phi_0}{\pi} \arctan \frac{r \sin \varphi}{a + r \cos \varphi}, & r \leq a, \\ \phi(r, \varphi) &= -\frac{\phi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a}{r}\right)^n \frac{\sin(n\varphi)}{n} = \frac{\phi_0}{\pi} \arctan \frac{a \sin \varphi}{r + a \cos \varphi}, & r \geq a. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Repare que para este caso particular o autor conseguiu encontrar uma forma fechada para as expressões do potencial. As linhas equipotenciais no plano  $z = 0$  dadas por esta equação são dadas na Figura 2.8 (resultado obtido por Heald).

O campo elétrico, calculado a partir do potencial com  $\vec{E} = -\nabla\phi$ , é:

$$\vec{E}(r, \varphi) = -\frac{\phi_0[a \sin \varphi \hat{r} + (r + a \cos \varphi)\hat{\varphi}]}{\pi(a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi)}, \quad r < a,$$

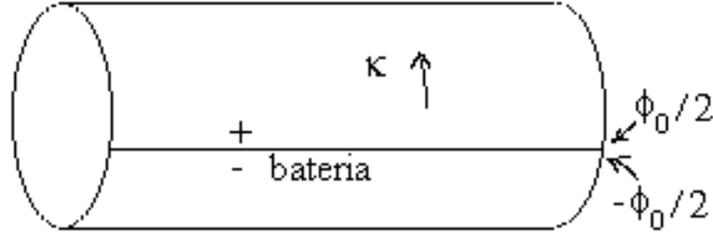


Figura 2.7: Geometria do problema considerado por Heald. Há uma densidade de corrente superficial  $K$  fluindo uniformemente na direção poloidal sobre a superfície do cilindro.

$$\vec{E}(r, \varphi) = -\frac{a\phi_0[-\sin \varphi \hat{r} + (a/r + \cos \varphi)\hat{\varphi}]}{\pi(a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi)}, \quad r > a. \quad (2.14)$$

Na expressão anterior para o campo elétrico podemos ver claramente as componentes radiais e tangenciais do campo elétrico com relação ao circuito. Com isto, podemos encontrar as cargas superficiais no circuito:

$$\sigma(\varphi) = \epsilon_0[E_r(r \rightarrow a+, \varphi) - E_r(r \rightarrow a-, \varphi)] = \frac{\epsilon_0\phi_0}{2\pi a} \tan \frac{\varphi}{2}. \quad (2.15)$$

Na Figura 2.9 apresentamos um corte transversal do cilindro, com as linhas de campo elétrico; as cargas superficiais são representadas qualitativamente pelos sinais positivo e negativo ao longo do circuito.

Na Figura 2.10, mostramos a figura equivalente encontrada experimentalmente por Jefimenko [Jef62]. Discutimos estas experiências na Seção 2.2. Note que as aproximações utilizadas por Heald, comparadas com o caso real de Jefimenko, continuam muito boas, e podemos observar a nítida semelhança entre estas duas figuras. Note que a placa experimental de Jefimenko é essencialmente uma figura bidimensional (a corrente está confinado em uma placa), enquanto que a figura das linhas de campo elétrico de Heald é uma seção transversal ao eixo  $z$  do circuito.

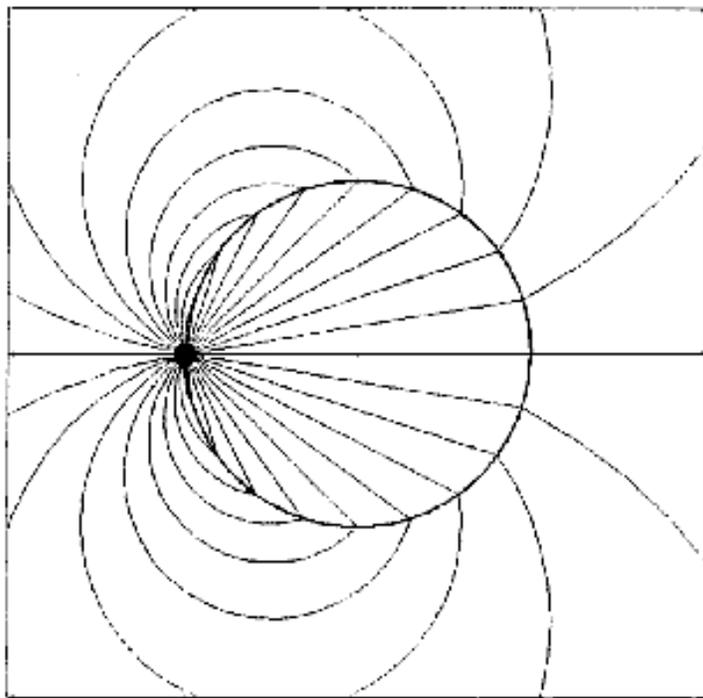


Figura 2.8: Resultado teórico obtido por Heald para as equipotenciais no circuito poloidal (corte transversal ou de seção reta do cilindro). O eixo  $z$  é perpendicular à figura passando pelo centro do círculo. A linha de bateria é representada pela bola preta.

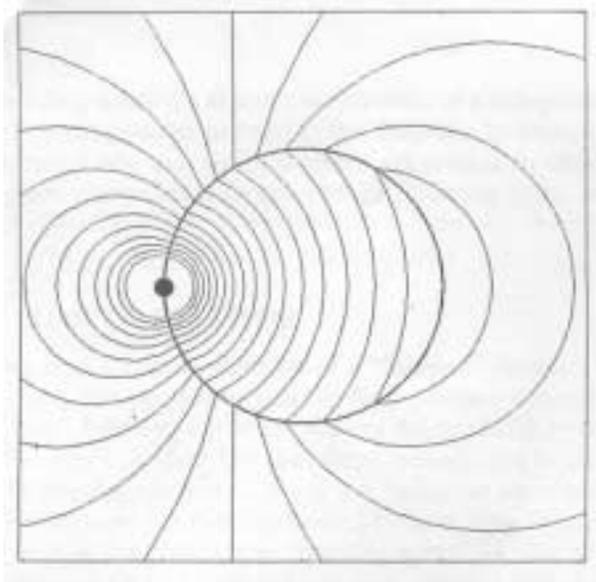


Figura 2.9: Resultado teórico encontrado por Heald para as linhas de campo elétrico no circuito poloidal.

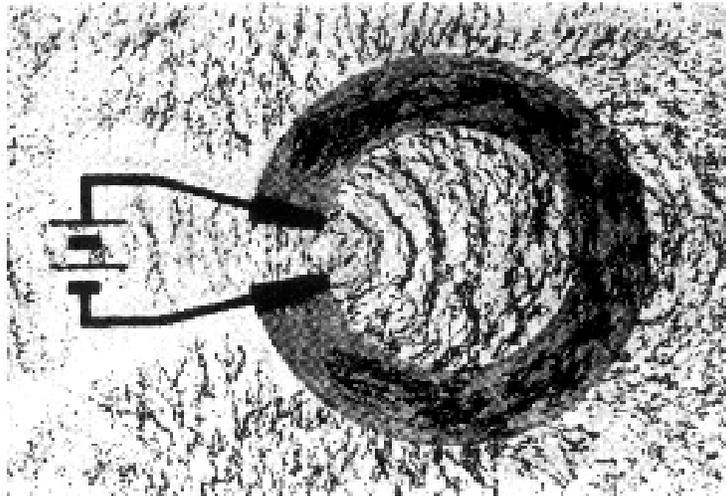


Figura 2.10: Placa experimental de Jefimenko para as linhas de campo elétrico correspondente ao resultado encontrado por Heald.

## 2.6 Fio Reto Longo de Seção Reta Circular

O caso do fio reto maciço e longo está detalhado em [ARM99]. Neste artigo também há uma extensa discussão a respeito dos motivos que levaram cientistas a ignorarem a abordagem de cargas superficiais que exploramos neste trabalho.

A geometria considerada neste problema é a de um fio de comprimento  $\ell$  e raio  $a$ , homogêneo e com condutividade constante. O fio transporta uma corrente  $i$  constante no tempo e na seção reta. Supõe-se uma densidade superficial de carga linear com o eixo do fio,  $\sigma_f = \sigma_A z/\ell + \sigma_B$ . Este resultado tem de valer neste caso, como foi provado por Russell, [Rus68]. O ponto onde  $\sigma_f = 0$  vai depender da posição da bateria. Com isto calcula-se o potencial dentro e fora do fio por integração direta das cargas superficiais:

$$\phi(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dz'(\sigma_A z'/\ell + \sigma_B)}{\sqrt{1 - 2(r/a)\cos\varphi' + r^2/a^2 + (z' - z)^2/a^2}}. \quad (2.16)$$

Na aproximação  $\ell \gg a$ , obtemos o potencial e o campo elétrico:

$$\phi(r, \varphi, z) = \begin{cases} a(\sigma_A z/\ell + \sigma_B) \ln(\ell/a)/\epsilon_0, & r < a, \\ a(\sigma_A z/\ell + \sigma_B) \ln(\ell/r)/\epsilon_0, & r > a, \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\vec{E}(r, \varphi, z) = \begin{cases} -a\sigma_A \ln(\ell/a) \hat{z}/\ell\epsilon_0, & r < a, \\ a(\sigma_A z/\ell + \sigma_B) \hat{r}/\epsilon_0 r - a\sigma_A \ln(\ell/r) \hat{z}/\ell\epsilon_0, & r > a. \end{cases} \quad (2.18)$$

Podemos ver as linhas equipotenciais nas Figuras 2.11 (resultado teórico encontrado por Assis, Rodrigues e Mania) e 2.12 (resultado experimental encontrado por Jefimenko).

As linhas de campo elétrico, aqui apresentadas na Figura 2.13, encontradas teoricamente, podem ser comparadas com a figura experimental correspondente de Jefimenko, aqui apresentada na Figura 2.14. Há ótima concordância.

Note que este caso teve tratamento inverso aos casos apresentados até aqui. Ou seja, ao invés de resolver a equação de Laplace na região fora dos condutores e, a partir do potencial calcular o campo elétrico e as cargas superficiais, os autores propuseram que se considerasse a existência de uma distribuição linear de cargas na superfície do condutor. A partir desta distribuição de cargas calcula-se o potencial por integração direta, e a partir do potencial, o campo elétrico. Supondo a linearidade das cargas superficiais,

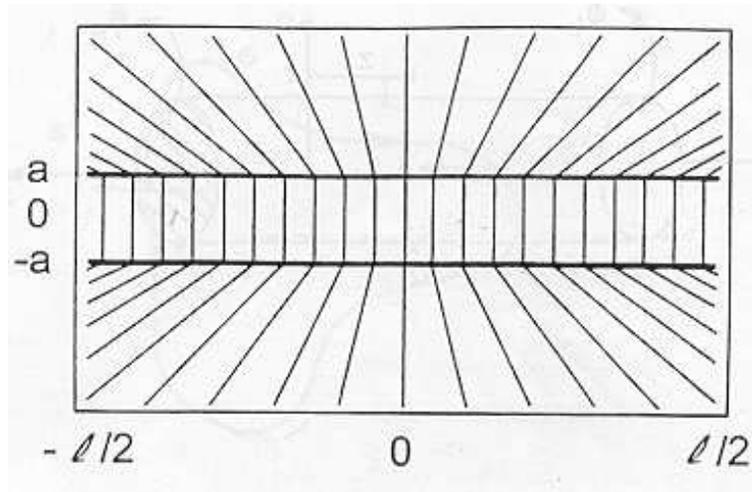


Figura 2.11: Linhas equipotenciais encontradas por Assis, Rodrigues e Mania para o problema do fio reto longo.

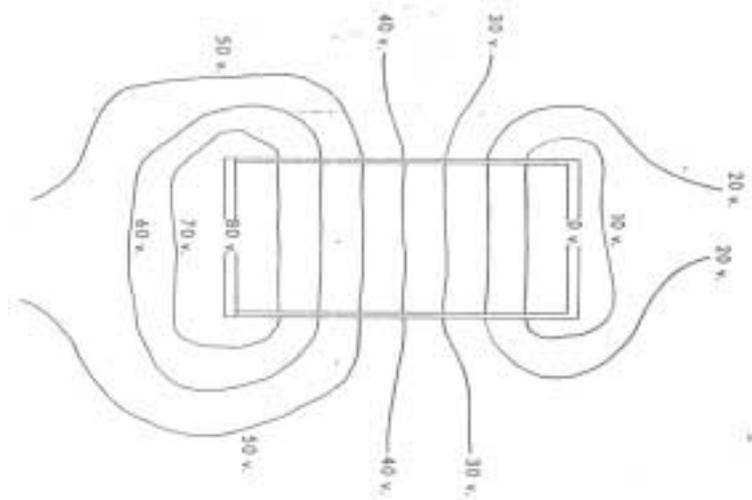


Figura 2.12: Placa experimental de Jefimenko para um circuito reto em forma retangular, conduzindo corrente constante e uniforme em sua superfície.

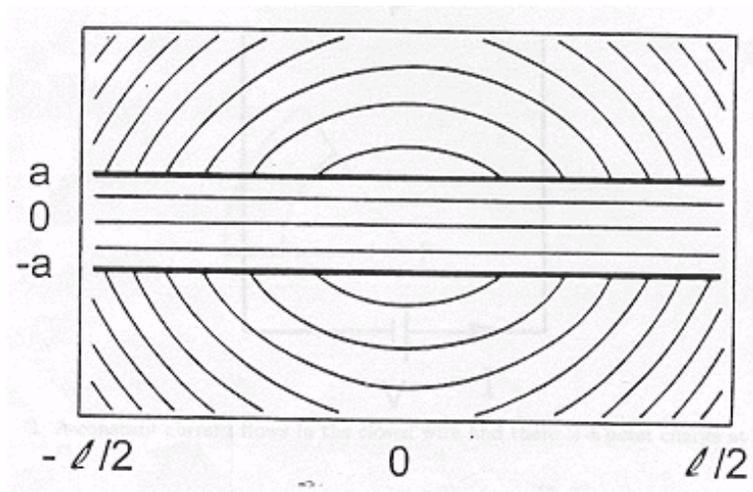


Figura 2.13: Linhas de campo elétrico encontradas por Assis, Rodrigues e Mania no problema do fio reto longo. Podemos considerar a seção reta longitudinal como uma aproximação da figura experimental de Jefimenko.

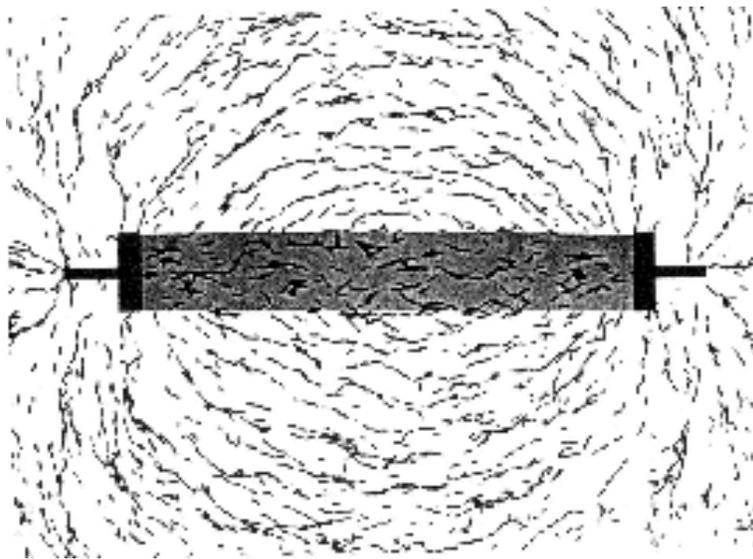


Figura 2.14: Placa experimental de Jefimenko mostrando linhas de campo elétrico em circuito bidimensional com corrente constante.

ficamos com o valor de seus coeficientes (linear e constante) indefinidos até impormos as condições de contorno: o potencial na superfície do condutor.

Uma maneira de testar a validade deste método é verificando sua coerência: a partir do campo elétrico, é possível calcular, com a lei de Gauss, as cargas superficiais. Estas cargas devem coincidir com aquelas cargas superficiais iniciais que deram origem ao potencial. Além disto, dentro do condutor deve existir um campo elétrico constante, compatível com a suposição de corrente constante. Todas estas exigências foram confirmadas neste problema, ver [ARM99].

## 2.7 Linha de Transmissão

O caso da linha de transmissão, constituída por dois fios resistivos condutores, foi tratado pela primeira vez em [Str41, pág. 262], e detalhado em [AM99].

A geometria do problema é dada na Figura 2.15. Temos dois fios retos de seção reta circular de raio  $a$  e comprimento  $\ell$ , imersos no ar. Seus eixos estão separados por uma distância  $R$  e estão paralelos ao eixo  $z$ . A condutividade constante e homogênea dos fios é  $g$ . Os terminais dos fios estão submetidos às diferenças de potencial  $\phi_A$  e  $\phi_B$ , à esquerda, e  $-\phi_A$  e  $-\phi_B$ , à direita, conforme mostra a Figura 2.15. O resultado final para o potencial em todo o espaço é:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & - \left( \frac{\phi_A - \phi_B}{\ell} z + \frac{\phi_A + \phi_B}{2} \right) \frac{1}{2 \ln \frac{R - \sqrt{R^2 - 4a^2}}{2a}} \\ & \times \ln \frac{(x - \sqrt{R^2 - 4a^2}/2)^2 + y^2}{(x + \sqrt{R^2 - 4a^2}/2)^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

O campo elétrico é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & - \left( \frac{\phi_A - \phi_B}{\ell} z + \frac{\phi_A + \phi_B}{2} \right) \frac{\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\ln \frac{R + \sqrt{R^2 - 4a^2}}{2a}} \\ & \frac{(x^2 - y^2 + a^2 - R^2/4)\hat{x} + 2xy\hat{y}}{a^4 + R^4/16 - R^2(x^2 - y^2)/2 + (x^2 + y^2)^2 - a^2(R^2 - 4x^2 + y^2)/2} \\ & + \frac{\phi_A - \phi_B}{\ell} \frac{1}{2 \ln \frac{R - \sqrt{R^2 - 4a^2}}{2a}} \ln \frac{(x - \sqrt{R^2 - 4a^2}/2)^2 + y^2}{(x + \sqrt{R^2 - 4a^2}/2)^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Podemos comparar estes resultados com aquele encontrado por Jefimenko. Apesar dele não fornecer as dimensões, podemos estimar a razão por  $R/2a \approx 10/3$  a partir de sua figura experimental. Juntamente com  $\phi_A = 0$  e  $\phi_B = 1V$ , obtemos a partir da Equação (2.19) as equipotenciais em  $y = 0$ , mostradas na Figura 2.16. As linhas de campo elétrico para esta mesma situação estão na Figura 2.17, enquanto que a placa experimental está apresentada na Figura 2.18.

Assim como no caso anterior, Seção 2.6, a comparação não é perfeita, visto que temos uma linha de transmissão composta por dois fios cilíndricos paralelos no caso teórico, enquanto que no caso experimental de Jefimenko temos um circuito bidimensional. Entretanto, os resultados coincidem bastante bem.

Iniciamos no próximo capítulo os casos novos que constituem o corpo deste trabalho.

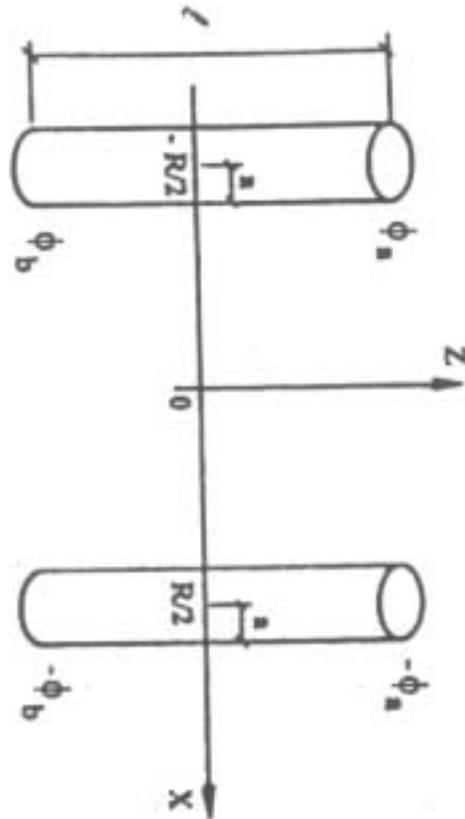


Figura 2.15: Dois fios paralelos de raio  $a$ , separados por uma distância  $R$ . O fio de cima carrega uma corrente constante  $I$  ao longo da direção positiva de  $z$ , enquanto que o de baixo carrega uma corrente de retorno  $I$ , ao longo da direção negativa de  $z$ .

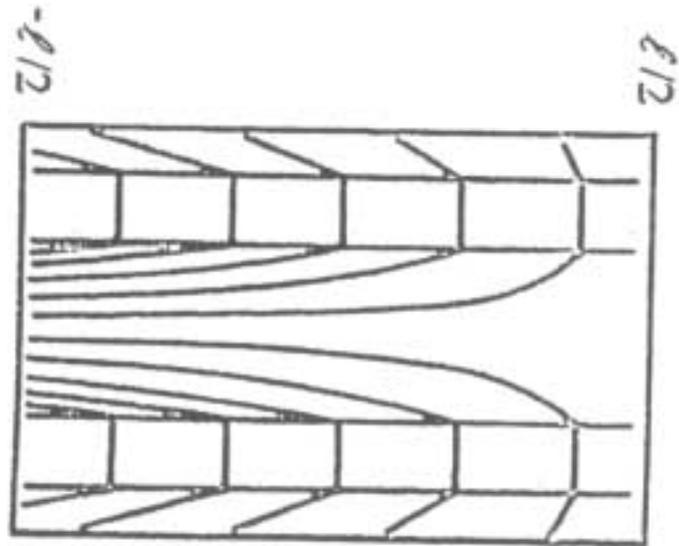


Figura 2.16: Linhas equipotenciais para o plano  $y = 0$  no problema da linha de transmissão com corrente constante.

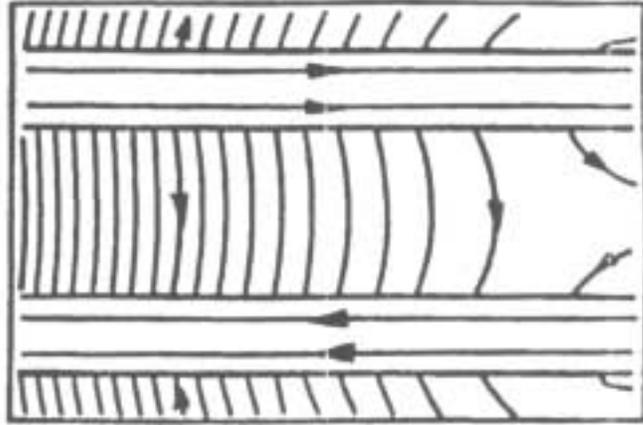


Figura 2.17: Linhas de campo elétrico no plano  $y = 0$  no problema da linha de transmissão com corrente constante.

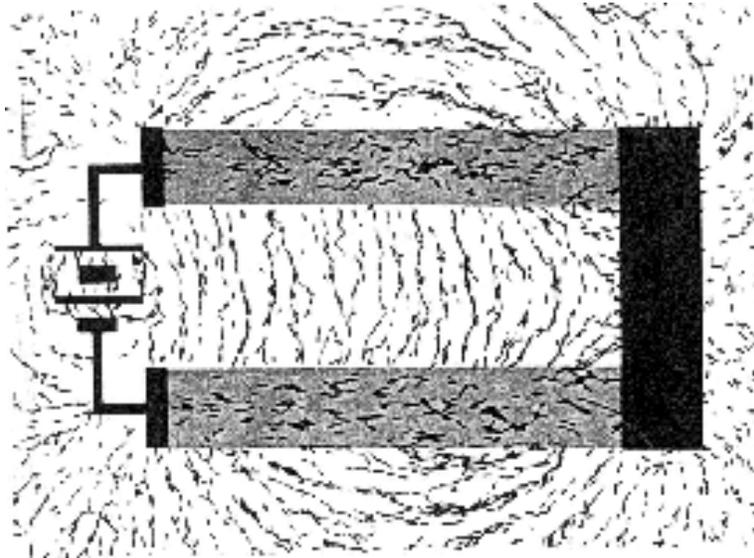


Figura 2.18: Placa experimental de Jefimenko mostrando linhas de campo elétrico nas duas placas grossas conduzindo correntes em direções opostas.

# Capítulo 3

## Casos Novos

Apresentamos neste Capítulo casos que ainda não foram tratados na literatura. Primeiramente apresentamos resultados dos campos em placas retangulares. Apesar de não haver trabalhos sobre esta geometria particular na literatura que seja de nosso conhecimento, escolhemos esta geometria porque ela é bastante simples. Aplicamos o resultado de uma placa para os casos de duas e quatro placas paralelas, sob diversas condições. Alguns destes resultados foram apresentados em [AH99a]. Ao final do capítulo, apresentamos a solução numérica para o potencial gerado por um anel filiforme conduzindo uma corrente constante.

### 3.1 Placa Retangular

A geometria que estamos considerando é a de uma placa retangular de comprimento  $\ell_x$  no eixo  $x$  e  $\ell_z$  no eixo  $z$ . Ela está situada no plano  $y = 0$ . O centro geométrico da placa está localizado na origem do sistema cartesiano de coordenadas. Assumimos que a corrente flui uniformemente de  $-\ell_z/2$  para  $\ell_z/2$ , veja a Figura 3.1.

A resolução deste problema a partir da equação de Laplace esbarra em dificuldades analíticas na imposição das condições de contorno. Por este motivo, tomamos o caminho inverso como no caso do fio reto (Seção 2.6), ou seja, a partir da distribuição de cargas superficiais calculamos o potencial elétrico.

Vamos tomar uma densidade superficial de carga  $\sigma$  que seja linear ao

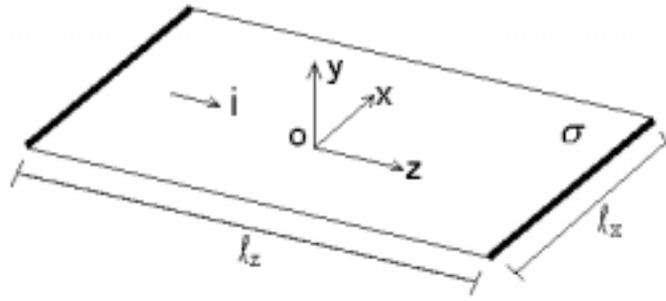


Figura 3.1: Esquema da placa condutora com corrente constante.

longo de  $z$ :

$$\sigma(z) = \alpha z + \beta. \quad (3.1)$$

O fato de que a densidade de cargas superficiais nos condutores varia linearmente com a distância ao longo da direção da corrente vai ser utilizada em todos os casos de condutores retilíneos longos tratados nesta tese. A justificativa para isto é um teorema provado por Russell em 1968, [Rus68]. Ele parte da equação de Laplace  $\nabla^2\phi = 0$  fora dos condutores e aplica a condição de contorno de que o potencial é linear ao longo da direção da corrente sobre o condutor. Aplica então a lei de Gauss, Equação (2.2), na interface condutor-vácuo e chega então em (3.1).

Note que  $\sigma$ , de maneira geral, é uma função de ambas as coordenadas,  $\sigma(x, z)$ , para o caso de  $l_x$  finito. Entretanto, a dependência em  $x$  introduz dificuldades analíticas para a resolução deste problema, dificuldades estas que estão além dos objetivos deste trabalho. Assumimos deste modo que a densidade superficial de carga seja dada simplesmente por (3.1), como aproximação no tratamento deste caso, válida para  $l_x \gg |\vec{r}'|$ , onde  $\vec{r}'$  é o ponto de observação (ver Equação (3.4)).

O potencial elétrico é prontamente dado pelas cargas superficiais  $\sigma$  acima por:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int_S \frac{\sigma(z)dA'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3.2)$$

onde  $dA'$  é um elemento de área, e  $S$  é a superfície onde existe a distribuição de carga  $\sigma(z)$ . Estamos interessados apenas no potencial no plano simétrico  $x = 0$ . Isto é feito para realizarmos comparações com as figuras experimentais

de Jefimenko, logo em seguida. Assim, o potencial neste plano é:

$$\phi(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l_z/2}^{l_z/2} dz' \int_{-l_x/2}^{l_x/2} dx' \frac{\alpha z' + \beta}{\sqrt{x'^2 + y^2 + (z - z')^2}}. \quad (3.3)$$

Resolvemos estas integrais utilizando três aproximações diferentes, (A), (B) e (C) (veja a resolução das integrais no Apêndice A), definidas por:

$$\begin{aligned} (A) \quad & l_x \gg l_z \gg \sqrt{z^2 + y^2}, \\ (B) \quad & l = l_z = l_x \gg \sqrt{z^2 + y^2}, \\ (C) \quad & l_z \gg l_x \gg \sqrt{z^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

O potencial, respectivamente para as aproximações (A), (B) e (C), é dado por:

$$\begin{aligned} \phi(0, y, z) = & \left[ (\alpha z + \beta) \left( \frac{l_z}{2\pi} - \frac{|y|}{2} \right) + \frac{\beta l_z}{2\pi} \ln \frac{2l_x}{l_z} - \frac{z^2}{\pi l_z} \left( \frac{2\alpha z}{3} + \beta \right) \right. \\ & \left. + \frac{y^2}{\pi l_z} (2\alpha z + \beta) \right] / \epsilon_0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \phi(0, y, z) = & \left[ (\alpha z + \beta) \left( \frac{l}{2\pi} \ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{|y|}{2} \right) + \frac{\beta l}{2\pi} \ln(\sqrt{2} + 1) \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{2}z^2}{2\pi l} \left( \frac{5\alpha z}{6} + \beta \right) + \frac{\sqrt{2}y^2}{\pi l} \left( \frac{3\alpha z}{2} + \beta \right) \right] / \epsilon_0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\phi(0, y, z) = \left[ (\alpha z + \beta) \left( \frac{l_x}{2\pi} \ln \frac{2l_z}{l_x} - \frac{y^2}{\pi l_x} \right) + \frac{\beta l_x}{2\pi} \right] / \epsilon_0. \quad (3.7)$$

Vamos também definir as constantes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , para cada aproximação:

$$\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \\ (A) & l_z/2\pi \quad \frac{l_z}{2\pi} \ln(2l_x/l_z) \\ (B) & \frac{l}{2\pi} \ln(\sqrt{2} + 1) \quad \frac{l}{2\pi} \ln(\sqrt{2} + 1) \\ (C) & \frac{l_x}{2\pi} \ln(2l_z/l_x) \quad l_x/2\pi \end{array} \quad (3.8)$$

As constantes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , têm dimensões de comprimento, da ordem da largura da placa, nas aproximações utilizadas, e muito maiores que os pontos de observação  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ .

Desprezando termos da ordem  $1/\ell_x$ ,  $1/\ell_z$  e  $1/\ell$ , obtemos o potencial elétrico para uma placa, dado por:

$$\phi(0, y, z) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ (\alpha z + \beta) \left( \lambda_1 - \frac{|y|}{2} \right) + \beta \lambda_2 \right]. \quad (3.9)$$

Podemos ver as equipotenciais na Figura 3.2, onde usamos a aproximação (A), com os valores  $\ell_x/\ell_z = 3$ , e potenciais  $\phi(0, -\ell_z/2) = \phi_0/2$ ,  $\phi(0, \ell_z/2) = -\phi_0/2$ . A relação entre as constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  e o potencial  $\phi_0$  para este caso particular é:

$$\alpha = -\frac{2\pi\epsilon_0\phi_0}{\ell_z^2}, \quad \beta = 0. \quad (3.10)$$

O campo elétrico é prontamente dado por  $\vec{E} = -\nabla\phi$ :

$$\vec{E}(0, y, z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[ \mp \frac{\alpha z + \beta}{2} \hat{y} + \alpha \left( \lambda_1 - \frac{|y|}{2} \right) \hat{z} \right], \quad (3.11)$$

onde o sinal superior vale para a região  $y > 0$ , e o inferior para  $y < 0$ . Note que podemos recuperar a distribuição superficial de carga original, Equação (3.1), a partir do campo elétrico. Sendo  $\hat{n}$  o versor normal à superfície, a densidade de carga é dada por (2.2):

$$\sigma(z) = \epsilon_0 [E_y(0, y \rightarrow 0+, z) - E_y(0, y \rightarrow 0-, z)] = \alpha z + \beta.$$

As linhas de campo elétrico podem ser obtidas pelo método descrito no livro do Sommerfeld, [Som64, pág. 128]. Suponha que uma função  $\psi(0, y, z)$  represente as linhas de campo elétrico. Em todos os pontos vale então que essas linhas são perpendiculares às equipotenciais. Em notação vetorial temos:

$$\nabla\psi \cdot \nabla\phi = 0. \quad (3.12)$$

Neste caso as linhas de campo elétrico são dadas por:

$$\psi(0, y, z) = \begin{cases} z^2 + 2\beta z/\alpha - y^2 + 4\lambda_1 y, & y > 0, \\ z^2 + 2\beta z/\alpha - y^2 - 4\lambda_1 y, & y < 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Esta função nos dá duas famílias de hipérbolas nas regiões acima ou abaixo da placa. Um exemplo desta função  $\psi$  pode ser visto na Figura 3.3, onde usamos a aproximação (A), com os mesmos valores que na Figura 3.2.

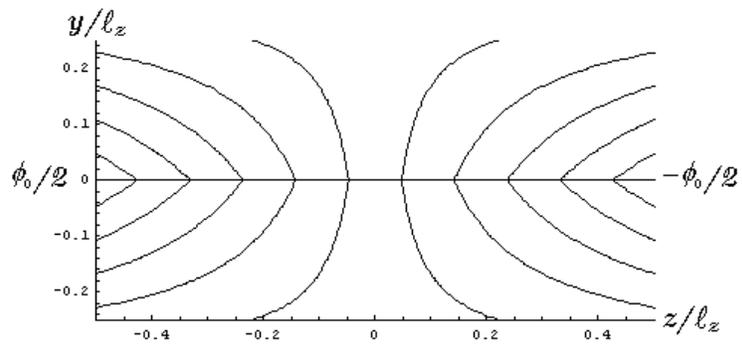


Figura 3.2: Linhas equipotenciais para uma placa condutora no plano longitudinal  $x = 0$ .

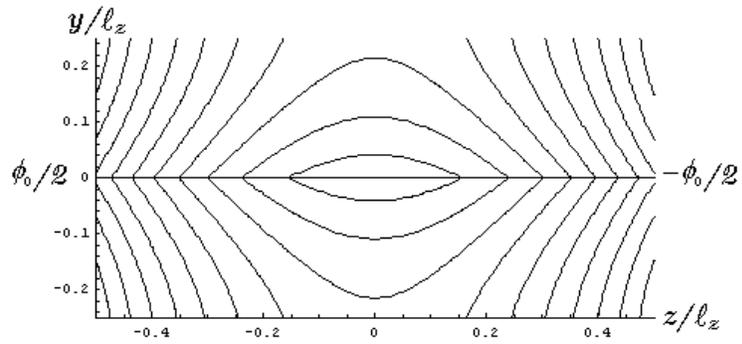


Figura 3.3: Linhas de campo elétrico na placa condutora no plano longitudinal  $x = 0$ .

## 3.2 Duas Placas Paralelas

Com o resultado para o potencial de uma placa podemos analisar os experimentos de Jefimenko. Primeiramente consideramos [Jef62, Fig. 1] ou [Jef89, Placa 6], aqui apresentadas na Figura 2.14. Nestes casos temos uma corrente constante fluindo uniformemente ao longo do eixo  $z$  do condutor de condutividade  $g$  em forma de paralelepípedo de dimensões  $\ell_x$ ,  $a$  e  $\ell_z$ . Correspondentemente, há cargas livres somente ao longo de suas superfícies externas, localizadas em  $y = a/2$  e  $y = -a/2$  (considerando o condutor de espessura  $a$  centrado na origem). Em ambas as superfícies as cargas livres são dadas aproximadamente pela Equação (3.1). Será mostrada adiante a validade desta suposição. A superposição das duas placas carregadas situadas em  $y = \pm a/2$ , utilizando a Equação (3.9) e substituindo a posição  $y = 0$  das placas por  $a/2$  ou  $-a/2$  convenientemente, resulta o potencial no plano  $x = 0$ , dado por:

$$\phi(0, y, z) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ (\alpha z + \beta) \left( 2\lambda_1 - \frac{|y - a/2| + |y + a/2|}{2} \right) + 2\beta\lambda_2 \right]. \quad (3.14)$$

Este potencial pode ser visto na Figura 3.4 na aproximação (A), com  $\ell_x/\ell_z = \ell_z/a = 6$ . Dadas as condições de contorno:

$$\phi(0, \pm a/2, -\ell_z/2) = \phi_0/2 \quad \text{e} \quad \phi(0, \pm a/2, \ell_z/2) = -\phi_0/2, \quad (3.15)$$

podemos obter uma relação entre  $\alpha$  e  $\beta$  com o potencial dado  $\phi_0$  para este caso particular, ou seja:

$$\alpha = -\frac{\phi_0 \epsilon_0}{\ell_z(4\lambda_1 - a)}, \quad \beta = 0. \quad (3.16)$$

O campo elétrico é dado por:

$$\vec{E}(0, y, z) = \begin{cases} -[\alpha(2\lambda_1 - y)\hat{z} - (\alpha z + \beta)\hat{y}]/\epsilon_0, & y > a/2, \\ -\alpha(2\lambda_1 - a/2)\hat{z}/\epsilon_0, & -a/2 < y < a/2, \\ -[\alpha(2\lambda_1 + y)\hat{z} + (\alpha z + \beta)\hat{y}]/\epsilon_0, & y < -a/2. \end{cases} \quad (3.17)$$

É interessante que, como deveria ser esperado, o campo elétrico na região entre as placas é constante. É exatamente este fato que nos permite comparar nossas duas placas paralelas com uma situação um pouco diferente, conforme descrita no início desta Seção: um paralelepípedo conduzindo uma corrente

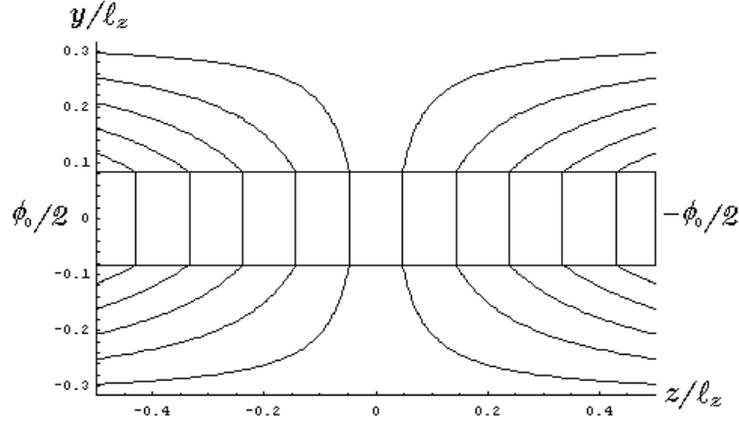


Figura 3.4: Linhas equipotenciais no caso de duas placas conduzindo corrente na mesma direção.

uniforme e constante na seção reta de dimensões  $\ell_x$  e  $a$ , ao longo de seu comprimento  $\ell_z$ . Estas placas carregadas paralelas seriam análogas, portanto, às superfícies superior e inferior do paralelepípedo. Com isto, justificamos a suposição de que as cargas na superfície do condutor seja linear com  $z$ , conforme indicamos no início desta Seção.

Note que, assim como no caso da placa única, também podemos recuperar a distribuição superficial de carga a partir da componente do campo elétrico perpendicular à placa. Calculando a função que dá as linhas de campo elétrico temos:

$$\psi(0, y, z) = \begin{cases} z^2 + 2\beta z/\alpha - y^2 + 4\lambda_1 y, & y > a/2, \\ -ay/2, & -a/2 < y < a/2, \\ z^2 + 2\beta z/\alpha - y^2 - 4\lambda_1 y, & y < -a/2. \end{cases} \quad (3.18)$$

Na Figura 3.5 fizemos o gráfico para esta função usando as mesmas condições que na Figura 3.4, de modo a ter dimensões similares às do experimento de Jefimenko, apresentado na Figura 2.14.

Neste ponto, vale lembrar que a comparação que fazemos aqui é qualitativa. Na Seção 2.5, comparamos as figuras obtidas a partir do circuito com corrente poloidal. As linhas de campo elétrico teóricas estão na Figura 2.9, enquanto que as linhas experimentais estão na Figura 2.10. A Figura 2.9 representa a seção reta de um condutor muito comprido no eixo  $z$ , no plano onde flui a corrente. Entretanto, a comparação com 2.10 é muito boa.

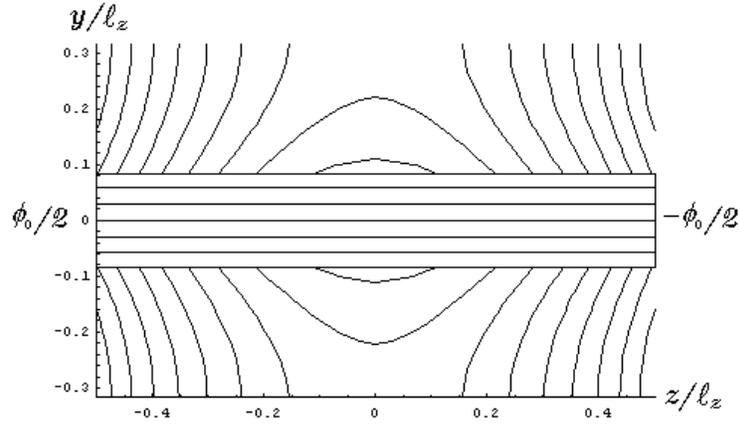


Figura 3.5: Linhas de campo elétrico para duas placas paralelas conduzindo corrente na mesma direção – ou para um único condutor com espessura.

Neste mesmo sentido, comparamos a nossa figura teórica 3.5 com seu análogo experimental apresentado na Figura 2.14. Ou seja, uma seção ao longo do plano onde flui a corrente (neste caso, o plano  $x = 0$ ) mostra linhas de campo elétrico muito parecidas com aquelas encontradas experimentalmente, numa situação estritamente bidimensional. As placas modelam as superfícies externas do condutor, que seriam representadas pelas linhas superior e inferior que limitam o condutor de Jefimenko. Ainda assim, dentro das regiões de aproximação, nossa comparação também é muito boa.

Para uma comparação quantitativa seria necessário comparar o cálculo da força entre o condutor com corrente e uma carga parada externa a ele, com uma medida direta desta força. Mas como discutimos na Seção 2.2 a única experiência de que temos conhecimentos em que foi feita esta medida, [San85], não forneceu dados quantitativos precisos.

### 3.3 Quatro Placas Paralelas

Agora desejamos modelar as Figuras 5 e 6 de [Jef62], ou o segundo resultado da Placa 6 de [Jef89].

Temos essencialmente uma linha de transmissão na qual a corrente flui uniformemente ao longo do eixo  $z$  de um paralelepípedo de condutividade  $g_1$  e espessura  $(b - a)/2$ , com  $b > a$ , retornando uniformemente ao longo do paralelepípedo paralelo, de mesma espessura mas de condutividade  $g_2$ . Os centros dos dois condutores estão separados por uma distância  $(b + a)/2$ . Neste caso há cargas livres nas quatro placas situadas em  $y = \pm b/2$  e  $y = \pm a/2$ .

Tratamos dois casos especiais: primeiro, quando os paralelepípedos paralelos têm potenciais opostos para cada valor de  $z$ . Segundo, quando um dos condutores é um condutor perfeito, ou seja, não há queda de potencial em seu interior.

#### 3.3.1 Potenciais Opostos

Neste caso os dois paralelepípedos condutores têm a mesma condutividade finita  $g_1 = g_2 = g$ . Assumimos que os potenciais são exatamente opostos nas duas placas espessas, para cada valor de  $z$ . As densidades superficiais de carga para as placas localizadas em  $y = b/2$ ,  $y = a/2$ ,  $y = -a/2$  e  $y = -b/2$  são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}\sigma_{b/2} &= \alpha_{b/2}z + \beta_{b/2}, \\ \sigma_{a/2} &= \alpha_{a/2}z + \beta_{a/2}, \\ \sigma_{-a/2} &= -\sigma_{a/2}, \\ \sigma_{-b/2} &= -\sigma_{b/2}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Podemos obter o potencial utilizando a Equação (3.5) com valores apropriados para a posição em  $y$  de cada uma das quatro placas. Definimos também as constantes  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  para cada uma das aproximações (3.4):

$$\begin{array}{cc} \kappa_1 & \kappa_2 \\ (A) & 1/(\pi\ell_z/4a - 1) \quad 1/(\pi\ell_z/2a - 1) \\ (B) & 1/(\pi\ell/3\sqrt{2}a - 1) \quad 1/(\pi\ell/2\sqrt{2}a - 1) \\ (C) & 1/(\pi\ell_x/2a - 1) \quad 1/(\pi\ell_x/2a - 1)\pi \end{array}\tag{3.20}$$

As constantes  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  não têm dimensão e vale que  $1 \gg \kappa_1$  e  $1 \gg \kappa_2$ .

Precisamos que o potencial não dependa de  $y$  nas regiões  $a/2 < y < b/2$  e  $-b/2 < y < -a/2$ , pois nestas regiões a corrente flui apenas ao longo da direção  $z$ . Disto resultam as relações (ver (3.20)):

$$\alpha_{b/2} = \alpha_{a/2}\kappa_1, \quad \beta_{b/2} = \beta_{a/2}\kappa_2, \quad (3.21)$$

com o que o potencial se torna, fazendo  $\alpha_{a/2} \rightarrow \alpha$  e  $\beta_{a/2} \rightarrow \beta$ :

$$\phi(0, y, z) = \begin{cases} [a(\alpha z + \beta) + (b - 2y)(\alpha z \kappa_1 + \beta \kappa_2)] / 2\epsilon_0, & y > b/2, \\ a(\alpha z + \beta) / 2\epsilon_0, & a/2 < y < b/2, \\ y(\alpha z + \beta) / \epsilon_0, & |y| < a/2, \\ -a(\alpha z + \beta) / 2\epsilon_0, & -b/2 < y < -a/2, \\ -[a(\alpha z + \beta) + (b + 2y)(\alpha z \kappa_1 + \beta \kappa_2)] / 2\epsilon_0, & y < -b/2, \end{cases} \quad (3.22)$$

como pode ser visto na Figura 3.6, na aproximação (A) com  $\ell_x/\ell_z = 2\ell_z/(b - a) = 6$ .

O campo elétrico é dado por:

$$\vec{E}(0, y, z) = \begin{cases} -\frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \frac{\alpha}{2} [a + \kappa_1(b - 2y)] \hat{z} - (\alpha z \kappa_1 + \beta \kappa_2) \hat{y} \right\}, & y > b/2, \\ -a\alpha \hat{z} / 2\epsilon_0, & a/2 < y < b/2, \\ -[y\alpha \hat{z} + (\alpha z + \beta) \hat{y}] / \epsilon_0, & |y| < a/2, \\ a\alpha \hat{z} / 2\epsilon_0, & -b/2 < y < -a/2, \\ \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \frac{\alpha}{2} [a + \kappa_1(b + 2y)] \hat{z} + (\alpha z \kappa_1 + \beta \kappa_2) \hat{y} \right\}, & y < -b/2. \end{cases} \quad (3.23)$$

As linhas de campo elétrico são dadas por:

$$\psi(0, y, z) = \begin{cases} z^2 + 2\beta z \kappa_2 / \alpha \kappa_1 - y^2 + y(b + a/\kappa_1), & y > b/2, \\ -ay/2, & a/2 < y < b/2, \\ z^2 + 2\beta z / \alpha - y^2, & |y| < a/2, \\ ay/2, & -b/2 < y < -a/2, \\ z^2 + 2\beta z \kappa_2 / \alpha \kappa_1 - y^2 - y(b + a/\kappa_1), & y < -b/2. \end{cases} \quad (3.24)$$

Na Figura 3.7 graficamos esta função nas mesmas condições que a Figura 3.6, de modo a termos dimensões similares às dos experimentos de Jefimenko, Figura 2.18. A placa superior ( $a/2 < y < b/2$ ) tem os potenciais em

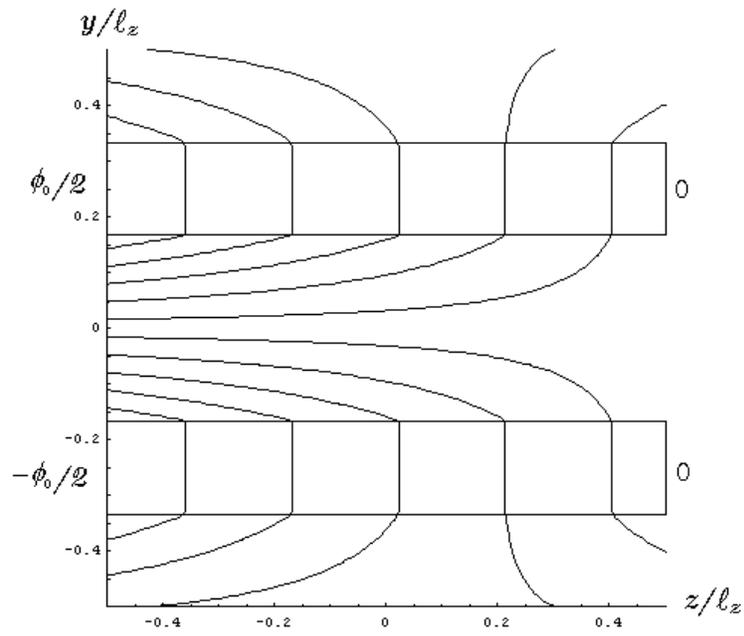


Figura 3.6: Linhas equipotenciais para quatro placas carregadas – ou dois condutores grossos conduzindo correntes em direções opostas.

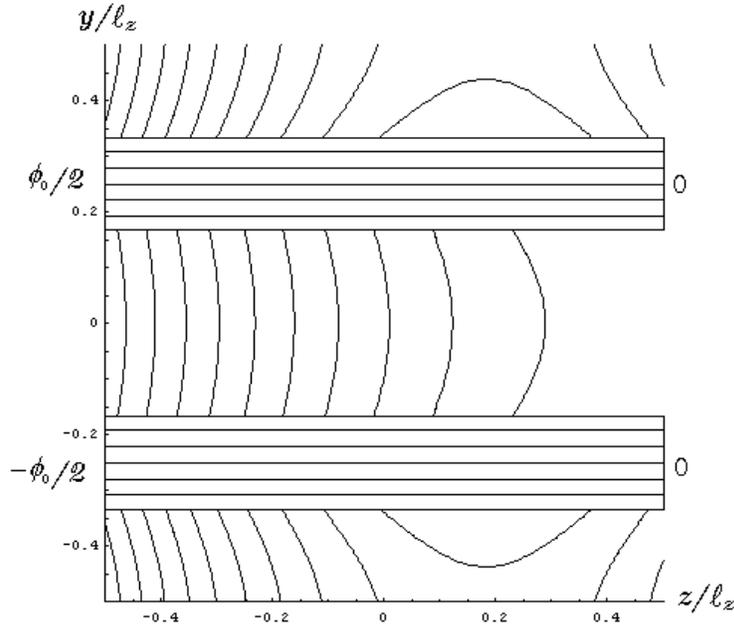


Figura 3.7: Linhas de campo elétrico para duas placas com espessura conduzindo correntes em direções opostas.

suas bordas dados por:

$$\begin{aligned}\phi(0, a/2 < y < b/2, -l_z/2) &= \phi_0/2, \\ \phi(0, a/2 < y < b/2, l_z/2) &= 0,\end{aligned}\tag{3.25}$$

enquanto que a placa inferior ( $-b/2 < y < -a/2$ ) tem os potenciais em suas bordas dados por:

$$\begin{aligned}\phi(0, -b/2 < y < -a/2, -l_z/2) &= -\phi_0/2, \\ \phi(0, -b/2 < y < -a/2, l_z/2) &= 0.\end{aligned}\tag{3.26}$$

A relação entre o potencial  $\phi_0$  e as cargas superficiais para este caso é dada por:

$$\alpha = -\frac{\epsilon_0 \phi_0}{al_z}, \quad \beta = \frac{\epsilon_0 \phi_0}{2a}.\tag{3.27}$$

### 3.3.2 Placa Condutora Perfeita

Suponha que a placa inferior seja um condutor perfeito. Ou seja, suponha que ela esteja submetida ao mesmo potencial constante  $\phi(0, -b/2 < y < -a/2, z) = \Phi$  em toda sua extensão no eixo  $z$ . Este resultado experimental é mostrado na Figura 6 de [Jef62] (ele usou  $g_1 \gg g_2$ ).

Supomos densidades superficiais de carga, respectivamente para  $y = b/2$ ,  $y = a/2$ ,  $y = -a/2$  e  $y = -b/2$  dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{b/2} &= \alpha_{b/2}z + \beta_{b/2}, \\ \sigma_{a/2} &= \alpha_{a/2}z + \beta_{a/2}, \\ \sigma_{-a/2} &= \alpha_{-a/2}z + \beta_{-a/2}, \\ \sigma_{-b/2} &= \alpha_{-b/2}z + \beta_{-b/2}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

O potencial será dado pela superposição da Equação (3.5) ou (3.9) para cada uma das placas. Para modelar este caso precisamos que o potencial não dependa de  $y$  na região  $a/2 < y < b/2$ , e que seja constante (não dependa de  $y$  nem de  $z$ ) em  $-b/2 < y < -a/2$ . Com isto encontramos as relações entre as cargas superficiais das placas:

$$\begin{aligned}\alpha_{a/2} &= \alpha_{b/2} \frac{4\lambda_1 - b}{a}, & \beta_{a/2} &= \frac{\beta_{b/2}(4\lambda_1 + 4\lambda_2 - b) - 2\Phi\epsilon_0}{a}, \\ \alpha_{-a/2} &= -\alpha_{a/2}, & \beta_{-a/2} &= -\beta_{a/2}, \\ \alpha_{-b/2} &= \alpha_{b/2}, & \beta_{-b/2} &= \beta_{b/2}.\end{aligned}\tag{3.29}$$

O potencial elétrico fica então na forma:

$$\phi(0, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} [(\alpha_{b/2}z + \beta_{b/2})(4\lambda_1 - \frac{b}{2} - y) + 4\lambda_2\beta_{b/2}] - \Phi, & y > b/2, \\ a(\alpha_{a/2}z + \beta_{a/2})/\epsilon_0 + \Phi, & a/2 < y < b/2, \\ (\alpha_{a/2}z + \beta_{a/2})(a/2 + y)/\epsilon_0 + \Phi, & |y| < a/2, \\ \Phi, & -b/2 < y < -a/2, \\ (\alpha_{b/2}z + \beta_{b/2})(b/2 + y)/\epsilon_0 + \Phi, & y < -b/2.\end{cases}\tag{3.30}$$

As equipotenciais são mostradas na Figura 3.8 nas mesmas condições que na Figura 3.6.

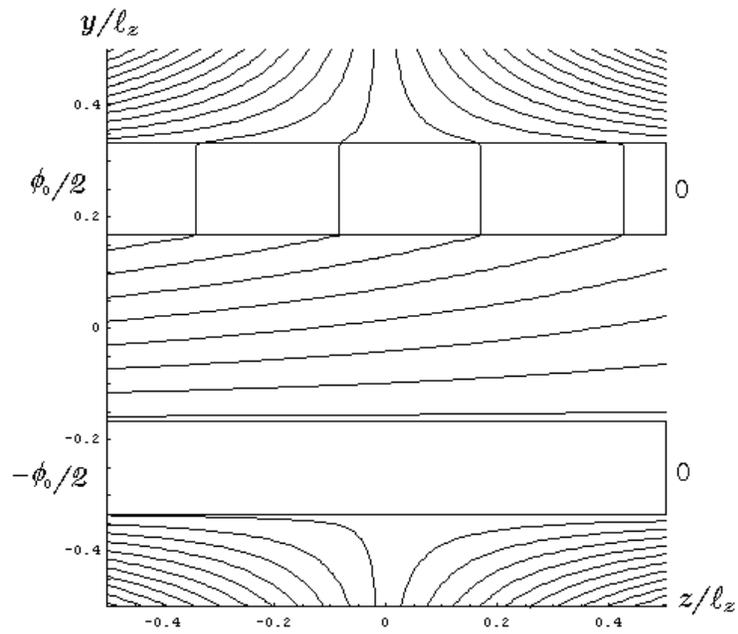


Figura 3.8: Linhas equipotenciais para o caso em que o condutor grosso inferior é um condutor perfeito.

O campo elétrico é prontamente dado por:

$$\vec{E}(0, y, z) = \begin{cases} -\frac{1}{\epsilon_0}[\alpha_{b/2}(4\lambda_1 - b/2 - y)\hat{z} \\ \quad -(\alpha_{b/2}z + \beta_{b/2})\hat{y}], & y > b/2, \\ -a\alpha_{a/2}\hat{z}/\epsilon_0, & a/2 < y < b/2, \\ -[\alpha_{a/2}(a/2 + y)\hat{z} + (\alpha_{a/2}z + \beta_{a/2})\hat{y}]/\epsilon_0, & |y| < a/2, \\ 0, & -b/2 < y < -a/2, \\ -[\alpha_{b/2}(b/2 + y)\hat{z} + (\alpha_{b/2}z + \beta_{b/2})\hat{y}]/\epsilon_0, & y < -b/2. \end{cases} \quad (3.31)$$

As linhas de campo elétrico são dadas por:

$$\psi(0, y, z) = \begin{cases} z^2 + 2\beta_{b/2}z/\alpha_{b/2} - y^2 + (8\lambda_1 - b)y, & y > b/2, \\ -ya/2, & a/2 < y < b/2, \\ z^2 + 2\beta_{a/2}z/\alpha_{a/2} - y^2 - ay, & |y| < a/2, \\ -a^2/4, & -b/2 < y < -a/2, \\ z^2 + 2\beta_{b/2}z/\alpha_{b/2} - y^2 - by, & y < -b/2. \end{cases} \quad (3.32)$$

As linhas de campo elétrico estão graficadas na Figura 3.9 nas mesmas condições que na Figura 3.6. O potencial constante na placa inferior é  $\Phi = -\phi_0/2$ . A figura equivalente encontrada experimentalmente por Jefimenko está apresentada na Figura 3.10.

A relação entre o potencial  $\phi_0$  e as cargas superficiais para este caso é dada por:

$$\alpha_b = -\frac{\epsilon_0\phi_0}{\ell_z(4\lambda_1 - b)}, \quad \beta_b = \frac{\epsilon_0\phi_0}{2(4\lambda_1 + 4\lambda_2 - b)}. \quad (3.33)$$

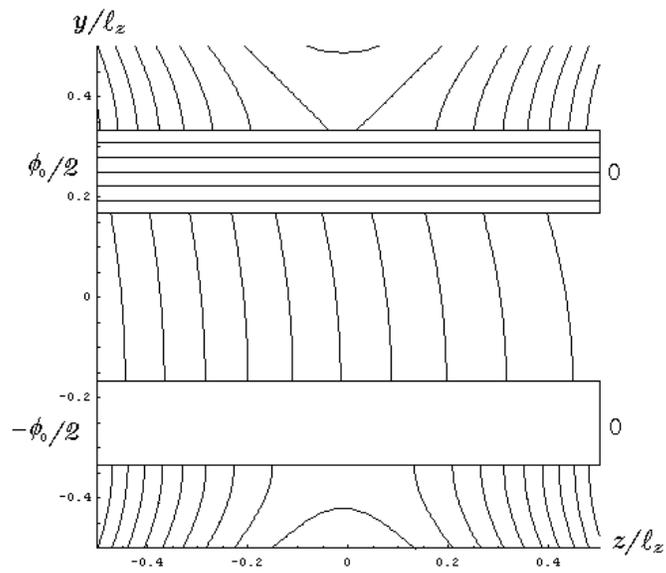


Figura 3.9: Linhas de campo elétrico para o caso em que o condutor inferior é um condutor perfeito.

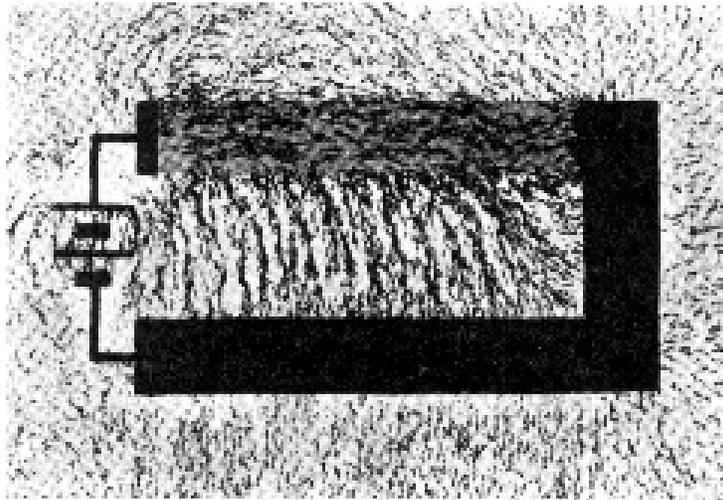


Figura 3.10: Experimento de Jefimenko em que o condutor inferior é muito mais condutivo que o superior.

### 3.4 Anel Filiforme

Nesta seção apresentamos o potencial no espaço gerado por um anel conduzindo corrente.

Nossa motivação para tratar este caso vem do fato de que todos os casos anteriores referem-se a casos pouco reais, com limitações práticas. Por exemplo, Sommerfeld, Griffiths, Jefimenko, e Assis e Cisneros (veja Seção 2.3) trataram um cabo coaxial infinito; Heald (veja Seção 2.5) tratou de um cilindro infinito com corrente poloidal; até mesmo Jackson (veja Seção 2.4), apesar de apresentar o resultado para um cabo coaxial de comprimento finito, faz com que a condutividade do condutor externo seja infinita (e assim não existe um campo elétrico não-nulo fora do sistema). Desse modo, pensamos em tratar um caso de dimensões finitas.

Uma primeira abordagem seria a resolução analítica da equação de Laplace para a corrente fluindo em um anel, por exemplo em coordenadas toroidais, [MS88, págs. 112–115]. Entretanto, a solução, envolvendo polinômios de Legendre toroidais, resulta expressões por demais complexas, que não aumentam nossa intuição por trás da física do problema. Por este motivo, não tratamos o problema com esta abordagem.

Utilizamos um método numérico para a resolução da equação de Laplace,  $\nabla^2\phi = 0$ . Supomos um anel filiforme (sem espessura), conduzindo uma corrente constante. A bateria que mantém esta corrente constante é puntual, ou seja, em um ponto do circuito existe uma descontinuidade do potencial (por exemplo, se a bateria provê uma diferença de potencial de  $\phi_0$ , existe um salto do potencial de  $-\phi_0/2$  para  $\phi_0/2$  no ponto onde se situa a bateria). A geometria utilizada encontra-se na Figura 3.11.

Consideramos a resistência espalhada uniformemente por todo o fio. Isto significa que a componente tangencial do campo elétrico é constante ao longo de todo o fio. Logo o potencial elétrico  $\phi(r, \theta, z)$  ao longo do fio é uma função linear do ângulo polar  $\theta$ . Para o caso da Figura 3.11 temos então (com  $r = a$  e  $z = 0$ ):

$$\phi(a, \theta, 0) = \frac{\phi_0}{2\pi}\theta, \quad \text{com } -\pi < \theta < \pi. \quad (3.34)$$

Basicamente, o método consiste em resolver a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, onde o eixo  $z$  é o eixo de simetria do anel. Fazemos uma expansão em série de Fourier tanto do potencial linear no anel quanto da solução, e tomamos um número finito de termos nesta expansão.

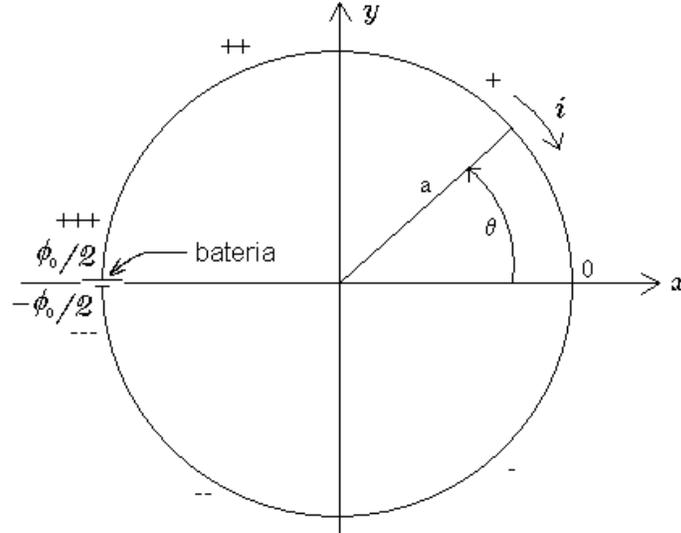


Figura 3.11: Um anel filiforme de raio  $a$  com uma corrente constante  $i$ . A bateria ideal está situada em  $\theta = \pi$ , gerando uma diferença de potencial entre seus terminais de valor  $\phi_0$ .

A equação de Laplace em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.35)$$

Uma expansão em série de Fourier de uma função  $f$  é do tipo:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (3.36)$$

onde:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta. \quad (3.37)$$

O potencial dado em (3.34) pode ser expandido em série de Fourier por:

$$\phi(a, \theta, 0) = -\frac{\phi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\theta}{n}, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (3.38)$$

Note que este é exatamente o mesmo resultado da expansão do potencial do caso tratado por Heald, Seção 2.5, do cilindro com corrente poloidal.

Tomamos um número finito  $N = 200$  destes termos. Com isto, nos resta uma equação de Laplace de duas dimensões,  $r$  e  $z$ . Dividindo este espaço numa malha de  $J \times K$  pontos, cada um destes pontos obedece à equação de Laplace discreta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_j} \frac{1}{dr} \left( r_{j+1/2} \frac{\phi_{j+1,k} - \phi_{j,k}}{dr} - r_{j-1/2} \frac{\phi_{j,k} - \phi_{j-1,k}}{dr} \right) \\ + \frac{\phi_{j,k+1} - 2\phi_{j,k} + \phi_{j,k-1}}{dz^2} - n^2 \phi_{j,k} = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde o valor das coordenadas é representada pelas variáveis  $r_j$  e  $k_j$ , com intervalos de  $dr$  e  $dz$ , nos eixos  $r$  e  $z$  respectivamente. O potencial em cada ponto é  $\phi_{j,k}$ , e  $n$  é o número do termo da série de Fourier. Assim, para cada valor de  $n$  (1 a  $N$ ) temos um sistema de equações com as incógnitas  $\phi_{j,k}$  e com a condição de contorno (3.38). O resultado final dá o potencial para os pontos pertencentes à malha inicial, de modo que realizamos uma interpolação para os pontos intermediários.

O potencial no anel está representado na Figura 3.12, com  $\phi_0 = 1V$ . Note que nas extremidades, onde existe a descontinuidade da função em  $\theta = \pi$ , ou  $\theta = -\pi$ , existe uma alteração da forma da função na forma de um serrilhado. Este serrilhado desapareceria utilizando-se mais termos, ou seja,  $N \gg 200$ . Entretanto, também é visível um sobrevalor nas extremidades:  $\phi(r = a, \theta = -\pi) < -\phi_0/2$  e  $\phi(r = a, \theta = \pi) > \phi_0/2$ . Este fenômeno é chamado de fenômeno de Gibbs [AW95, pág. 836–839], e é característico de determinadas expansões em autofunções (como é o caso da série de Fourier).

Apresentamos na Figura 3.13 linhas equipotenciais no plano do anel. Notamos aqui que as equipotenciais ao longo do circuito estão muito próximas ao próprio circuito. Assim, graficamos adicionalmente valores extremamente baixos do potencial ( $|\phi| \approx 10^{-3}V$ , por exemplo) para facilitar a visualização das equipotenciais longe do circuito. Por este mesmo motivo, não podemos perceber nesta figura que as linhas equipotenciais saem obliquamente ao circuito (e não paralelas ou perpendiculares ao circuito). Assim, mostramos na Figura 3.14 as equipotenciais no plano  $\theta \times r$ , no plano do anel. Aqui podemos ver claramente a forma das equipotenciais, espaçadas uniformemente ao longo no circuito.

A representação qualitativa do campo elétrico no plano do anel está representada na Figura 3.15. Este resultado é similar ao do experimento de Jefimenko, Figura 2.10. Nossa representação teórica do campo elétrico é qualitativa no sentido de que a direção dos vetores está correta, calculada com

base na função potencial. Entretanto, todos os vetores têm o mesmo módulo para facilitar sua visualização.

A Figura 2.10 não é totalmente similar à Figura 3.15, principalmente na metade direita no interior do círculo. Provavelmente isto se deve a que o cálculo teórico foi feito com um anel filiforme enquanto que na experiência de Jefimenko a corrente flui por uma faixa circular de espessura finita.

A listagem do programa, feito usando o software *Mathematica*, está apresentada no Apêndice B.

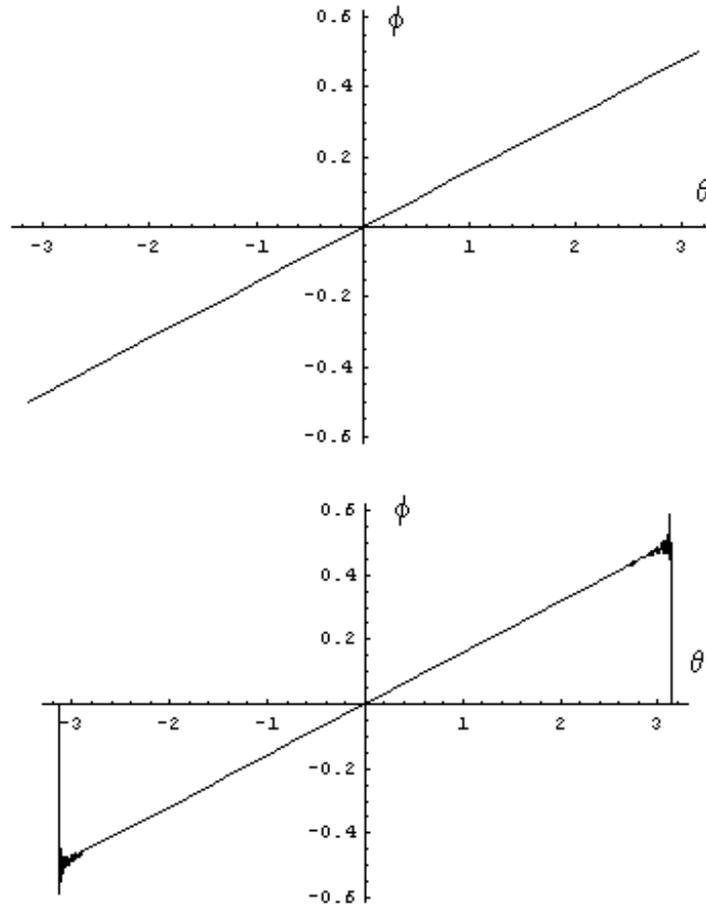


Figura 3.12: Potencial no anel, em função do ângulo em coordenadas cilíndricas. Acima temos o potencial ideal – uma reta descontínua em  $\theta = \pi$  ou  $\theta = -\pi$ . Abaixo, temos a representação da reta em uma expansão em série de Fourier com  $N = 200$  termos.

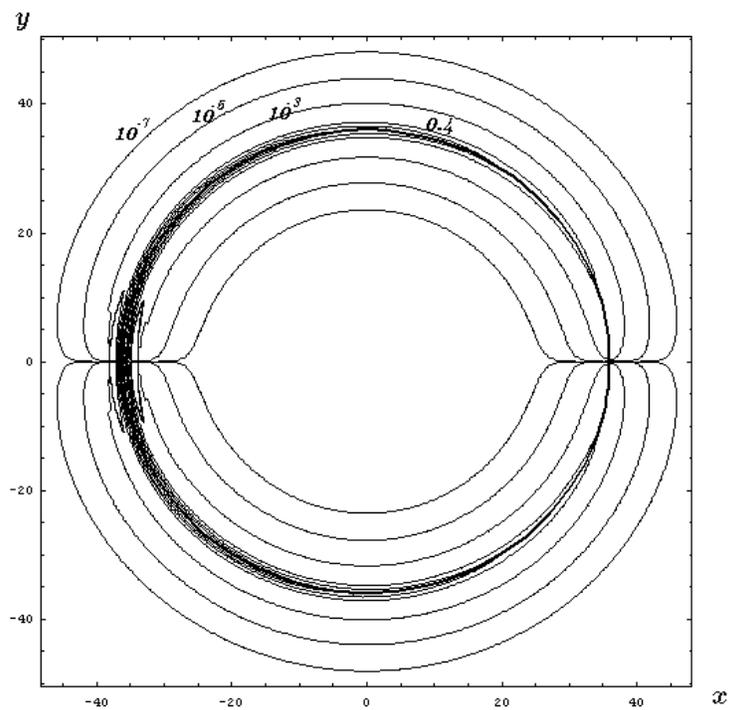


Figura 3.13: Linhas equipotenciais no plano do anel, nas coordenadas cartesianas  $x \times y$ . Note que a bateria está situada à esquerda, e não é representada pelo ponto do modelo original pois o método numérico que utilizamos não permitiu isso.

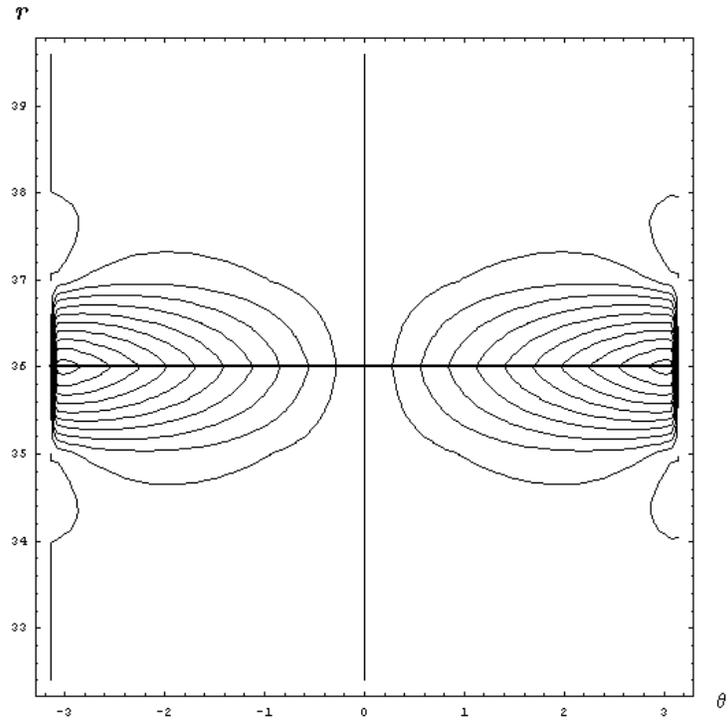


Figura 3.14: Linhas equipotenciais no plano do anel, nas coordenadas  $\theta \times r$ . A bateria está localizada nos extremos  $\theta = -\pi$  e  $\theta = \pi$ . Podemos ver claramente que as equipotenciais saem obliquamente ao circuito.

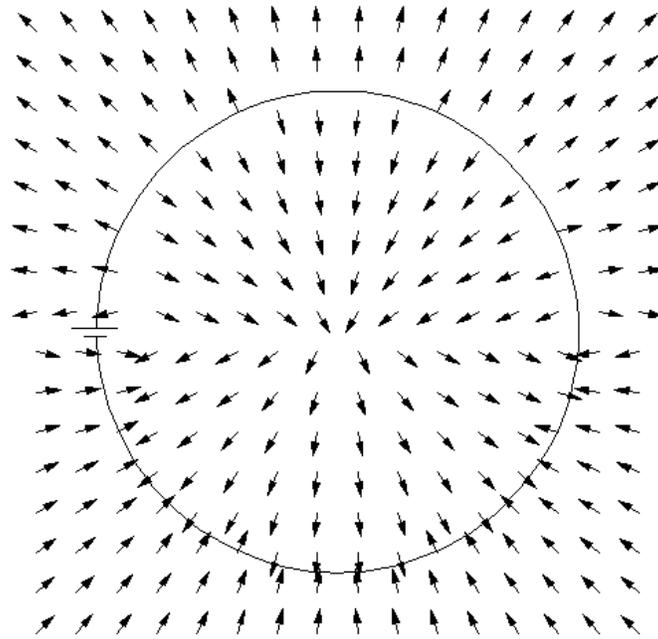


Figura 3.15: Representação qualitativa do campo elétrico no plano do anel.

# Capítulo 4

## Discussão e Conclusão

Apesar da opinião geral de que condutores resistivos estacionários com correntes constantes não exercem forças em cargas paradas externas a eles, certamente há uma componente da força elétrica devida às cargas superficiais no condutor. Comprovamos isto através de resultados teóricos nossos e de outros autores, e com os experimentos de Jefimenko. A abordagem que utilizamos envolve o conceito de cargas superficiais, que é pouco discutida em problemas que tratam de eletromagnetismo clássico.

Os resultados teóricos apresentados neste trabalho, para os casos de placas condutoras, nunca haviam sido obtidos. O único cálculo que existia na literatura para essas geometrias é o da Equação (3.22), e mesmo assim apenas para a região entre as placas [Jef89, págs. 303–304]. Jefimenko também obteve as cargas livres mas somente nas superfícies internas  $y = \pm a/2$ . Ele não analisou as cargas livres nas superfícies externas,  $y = \pm b/2$ , nem o potencial e o campo elétricos fora das placas ( $|y| > |b + a|/2$ ). Seu resultado [Jef89, pág. 304]:

$$\varphi = \frac{\phi_0}{\ell d} xy, \quad (4.1)$$

coincide com o nosso, Equação (3.22) na região  $|y| < a/2$ , juntamente com (3.27), fazendo  $z \rightarrow x - \ell_z/2$ ,  $\ell_z \rightarrow \ell$  e  $a \rightarrow d$ .

As figuras teóricas apresentadas aqui estão em concordância excelente com os experimentos de Jefimenko. Os cálculos apresentados neste trabalho podem ser considerados como um complemento de seu brilhante trabalho. O fato mais importante a enfatizar aqui é a existência de um campo elétrico fora de condutores estacionários resistivos, conduzindo correntes constantes.

Para dar uma idéia da ordem de grandeza deste campo elétrico vamos

supor um fio de cobre (condutividade de  $5,7 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ ) com o comprimento  $\ell = 1m$  e diâmetro  $2a = 1mm$ , sendo  $a$  seu raio. A resistência deste fio é  $R = 0,02\Omega$  e se há uma diferença de potencial entre suas extremidades de  $1V$  então ele vai transportar uma corrente  $i = 45A$ , com velocidade de *drifting* dos elétrons de condução da ordem de  $v_d = 4mm/s$ . A componente longitudinal do campo elétrico fora do fio, mas bem próximo de sua superfície, é dada por (ver [ARM99])  $E \approx Ri/\ell \approx 0,9V/m$ . Este campo elétrico, devido às cargas superficiais, é proporcional à corrente no fio. Também o campo magnético no exterior do fio é proporcional à corrente e é dado por  $B = \mu_0 i/2\pi r$ . Podemos comparar o módulo da força elétrica com o da força magnética supondo uma carga teste  $q$  movendo-se com velocidade  $v$  próximo ao fio (para simplificar vamos supor que move-se em direção normal ao campo magnético). Temos então:

$$\frac{|q\vec{E}|}{|q\vec{v} \times \vec{B}|} \approx \frac{R 2\pi a}{\ell v \mu_0} \approx \frac{10^{-5}}{2 \times 10^{-7} v} = \frac{50}{v}, \quad (4.2)$$

onde  $v$  tem unidade de  $m/s$ . Os módulos das duas forças se equiparam para cargas-teste movendo-se com velocidades da ordem de  $50m/s$ . Para velocidades menores domina a força elétrica enquanto que para velocidades maiores domina a força magnética. Este resultado aproximado vale apenas próximo de um fio longo e é apresentado aqui apenas para dar uma idéia das ordens de grandeza envolvidas neste problema.

# Parte II

## Propagação de Sinais

# Capítulo 5

## Introdução

Até aqui tratamos do caso de correntes constantes. Nesta segunda parte consideramos correntes que dependem da posição no condutor e do tempo, e tratamos a propagação de sinais elétricos em condutores. Veremos adiante que as cargas superficiais têm um papel importante neste fenômeno.

Kirchhoff e Weber, de maneira independente em 1857, foram os primeiros a derivar a equação da telegrafia levando em conta a capacitância, a auto-indutância e a resistência totais de um fio, [Whi73, págs. 230-232], [JM86, págs. 146 e 296-297]. Kirchhoff mostrou que um sinal elétrico em um fio com resistência desprezível se propaga à velocidade da luz no vácuo, [Kir57] e [GA94]. O trabalho de Weber atrasou-se na publicação até 1864, [Web64].

A forma clássica de se chegar à equação da telegrafia utiliza a teoria eletromagnética desenvolvida por Maxwell, envolvendo a resistência  $R$ , a capacitância  $C$  e a auto-indutância  $L$  totais do sistema. Ela foi, nessa forma, primeiramente obtida por Heaviside em 1876, [Whi73, págs. 228–229], [LLP84, pág. 318], e é dada por:

$$\frac{\partial^2 j}{\partial z^2} - \frac{LC}{\ell^2} \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = \frac{RC}{\ell^2} \frac{\partial j}{\partial t}, \quad (5.1)$$

onde  $j$  é a densidade de corrente.

Ambos, Kirchhoff e Weber, consideraram a propagação de um sinal elétrico em fios condutores longos (de comprimento  $\ell$ ), de seção reta circular (de raio  $a$ ), com pequena curvatura em toda sua extensão. Supuseram ainda  $\ell \gg a$ . A Figura 5.1 ilustra um esquema geral do problema.

Também ambos utilizaram a teoria eletrodinâmica de Weber como modelo de interação entre cargas, e chegaram à equação que rege o comportamento

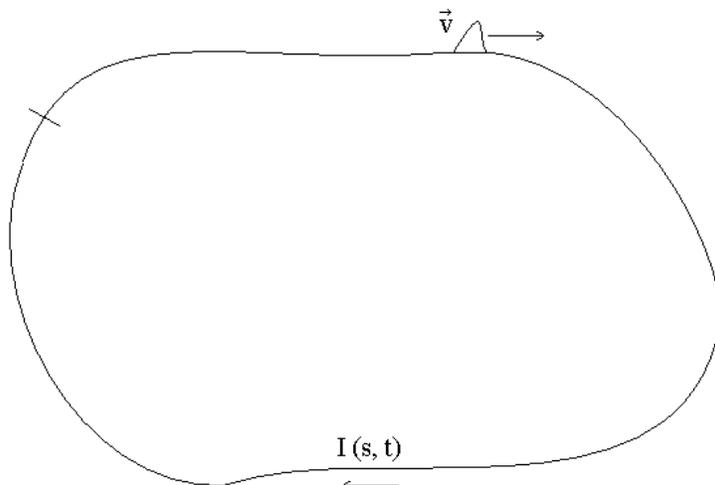


Figura 5.1: Esquema do problema de propagação de sinais tratado originalmente por Kirchhoff em 1857.

das cargas na propagação de um sinal elétrico. Esta dita equação ficou conhecida como equação da telegrafia.

Embora o tratamento de Heaviside tenha sido posterior aos de Kirchhoff e de Weber, é o mais conhecido e desenvolvido hoje em dia, sendo aplicado a diversas configurações diferentes. O nosso objetivo nesta parte do trabalho é o de retomar os tratamentos de Kirchhoff e Weber, aplicá-los para geometrias nas quais ainda não foram utilizados, e comparar os resultados obtidos aqui com os já conhecidos pelo eletromagnetismo clássico.

## 5.1 Cargas que Geram as Forças

As fontes de carga que exercem força em uma carga-teste  $q_1$  podem ser divididas em três: cargas superficiais livres  $\sigma_f(z, t)$  no fio, responsáveis pelo aparecimento do campo elétrico dentro e fora do fio, e que são mantidas pela fonte elétrica; cargas negativas em movimento  $dq_{2-}$  (dadas por uma densidade volumétrica  $\rho_{2-}$  ou superficial  $\sigma_{2-}$ , conforme a situação) que constituem a corrente de condução; e cargas positivas paradas  $dq_{2+}$  (dadas por uma densidade volumétrica  $\rho_{2+}$  ou superficial  $\sigma_{2+}$ ) que constituem o corpo do condutor. A Figura 5.2 mostra esquematicamente as cargas envolvidas

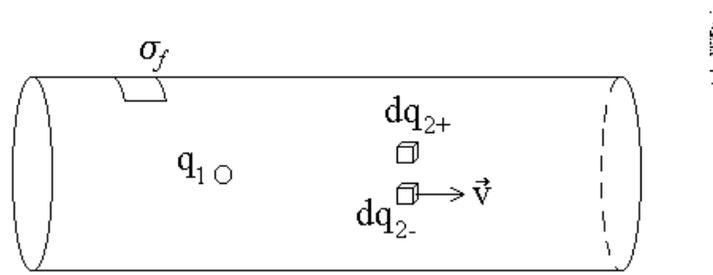


Figura 5.2: Esquema das fontes de carga interagindo com a carga-teste  $q_1$ .

no problema.

Destacamos aqui a importância das cargas superficiais na condução de sinais. Vimos na primeira parte deste trabalho que elas são fundamentais na condução de corrente: sustentadas pela bateria, espalham-se ao longo da superfície de todo o condutor e mantêm a corrente constante fluindo. Nos casos tratados nesta segunda parte do trabalho, existe uma corrente fluindo no condutor, e uma perturbação caminha em sua extensão. Como será mostrado ao final das derivações, este sinal caminha devido às mesmas cargas superficiais e às cargas de condução.

Consideramos como primeira aproximação que as densidades positivas e negativas de carga  $dq_{2+}$  e  $dq_{2-}$ , que constituem o corpo do condutor, se anulam quando somadas, nas formas:

$$\rho_{2-} = -\rho_{2+}, \quad \text{ou} \quad \sigma_{2-} = -\sigma_{2+}. \quad (5.2)$$

Além disso, podemos considerá-las essencialmente constantes ao longo do condutor, de tal modo que não dependem nem do tempo  $t$  nem da posição  $\vec{r}$ .

Vamos tratar aqui apenas de condutores retilíneos longos nos quais as densidades de carga, velocidades e acelerações dependem apenas da componente longitudinal  $z$  e do tempo  $t$ .

## 5.2 Força de Weber

Consideramos as forças atuantes segundo a expressão dada pela teoria eletrodinâmica de Weber, [Ass94]. Por esta teoria, a força que um elemento de carga  $dq_2$  (de posição  $\vec{r}_2$ , velocidade  $\vec{v}_2$  e aceleração  $\vec{a}_2$  em relação a um referencial  $S$ ) exerce na carga-teste  $q_1$  (de posição  $\vec{r}_1$ , velocidade  $\vec{v}_1$  e aceleração  $\vec{a}_1$  em relação ao mesmo referencial  $S$ ) é dada por:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{q_1 dq_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[ \vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} \right] \right\}. \quad (5.3)$$

Aqui temos que  $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$ ,  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo,  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo, e estão envolvidas as grandezas relativas  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ,  $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  e  $\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ .

Historicamente, Weber derivou sua lei de força a partir da força de Ampère (que relaciona elementos de corrente interagindo entre si) e da lei de indução de Faraday, [Ass94].

Esta expressão de força representa uma interação direta entre as cargas, na forma forte da terceira lei de Newton (ação e reação ao longo da linha que une as cargas interagentes), e depende somente de grandezas relativas: distância entre as cargas, suas velocidades e acelerações relativas. Assim, esta força não depende do observador nem do referencial. Ou seja, o observador pode ter uma velocidade e/ou aceleração em relação a estas cargas, entretanto obterá a mesma força que outro observador em um outro sistema de referência de acordo com esta expressão. Ela também representa, em sua forma original, uma interação à distância e instantânea, não existindo aí os conceitos de campos e potenciais retardados (embora estes conceitos possam ser introduzidos na teoria, [MS54], [Wes90a], [Wes90b] e [Wes91]).

Assim, por exemplo, o conceito de potencial elétrico, e seu campo elétrico associado, é perfeitamente compatível com a força de Weber. Isto foi feito adiante para simplificar as contas.

## 5.3 Cálculo das Forças

Primeiro, vamos apresentar o efeito devido às cargas superficiais. Mostraremos mais para a frente que a magnitude das cargas superficiais é muito menor que a das cargas que constituem o condutor ou que as das cargas de

condução. Por este motivo desprezamos os efeitos devidos ao movimento das cargas superficiais.

O potencial devido às cargas superficiais livres  $\sigma_f$  e a força eletrostática na carga-teste  $q_1$  são dadas respectivamente por:

$$\phi(\vec{r}_1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int_{S_2} \frac{\sigma_f(z_2, t)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dA_2, \quad (5.4)$$

$$\vec{F}_\phi(\vec{r}_1, t) = -q_1 \nabla_1 \phi, \quad (5.5)$$

onde  $S_2$  é a superfície do condutor e  $dA_2$  é um elemento de área.

Estamos interessados apenas na componente longitudinal (que denominamos de eixo  $z$ ) das forças, para tratar a propagação de sinais. Kirchhoff introduziu uma aproximação neste ponto, [Kir57]. A idéia principal é que, na integral acima para o potencial, o denominador  $u = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  se torna da ordem de comprimento do condutor,  $\ell$ , quando  $z_2$  está longe de  $z_1$  ( $|z_1 - z_2| \gg a$ ). Já quando  $z_2 \approx z_1$ , o denominador é da ordem do raio  $a$ . Supondo  $\ell \gg a$ , o integrando se torna muito pequeno, exceto para  $\vec{r}_2 \approx \vec{r}_1$ . Isto nos permite remover  $\sigma_f(z_2, t)$  do integrando, tomando seu valor em  $z_2 = z_1$ :

$$\phi(z_1, t) = \frac{\sigma_f(z_1, t)}{4\pi\epsilon_0} \int \int_{S_2} \frac{dA_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (5.6)$$

De uma forma alternativa, podemos fazer uma expansão em série de Taylor da Equação (5.4) em torno do ponto de observação  $r_1$ . Tomando o primeiro termo desta série, que é o mais relevante, obtemos exatamente (5.6).

Agora, vamos tratar a força devida às cargas que constituem o corpo do condutor e devidas às cargas de condução. De acordo com nossa suposição da neutralidade no interior do condutor, a parte coulombiana das forças devidas a  $\rho_{2+}$  e  $\rho_{2-}$  se anulam. A componente longitudinal da soma das forças exercidas pelas cargas que constituem o condutor devido à aceleração dos elétrons de condução resulta, a partir da Eq. (5.3):

$$F_{W,z}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0 q_1 \rho_{2-}}{4\pi} \int \int \int_{V_2} \frac{\hat{r}_{12} \cdot \hat{z}}{r_{12}} \hat{r}_{12} \cdot \vec{a}_{2-}(z_2, t) dV_2, \quad (5.7)$$

onde  $dV_2$  é um elemento de volume.

Utilizamos novamente a aproximação de Kirchhoff para tirar  $\vec{a}_{2-} = a_{2-} \hat{z}$  do integrando vem:

$$F_{W,z}(\vec{r}_1, t) \approx \frac{\mu_0 q_1 \rho_{2-}}{4\pi} a_{2-}(z_1, t) \int \int \int_{V_2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot \hat{z})^2}{r_{12}} dV_2. \quad (5.8)$$

Note que aqui também podemos fazer uma expansão em série de Taylor de (5.7) e tomar o primeiro termo para, analogamente, chegar exatamente à (5.8).

Podemos desprezar os termos de velocidade em (5.3), da ordem de  $v^2/c^2$ , pois as velocidades típicas de condução dos elétrons em metais são da ordem de milímetros por segundo. Isto significa que  $v^2/c^2 \approx 10^{-22} \ll 1$ .

## 5.4 Equação da Telegrafia

Fazemos com que a carga-teste seja um dos elétrons de condução no interior do condutor,  $q_1 = -e = -1,6 \times 10^{-19}C$ . Devemos incluir também uma força de atrito ôhmica:

$$\vec{F}_R = -b\vec{v}_1, \quad (5.9)$$

onde  $b$  é uma constante que depende da constituição do condutor. Para um condutor de comprimento  $\ell$  e área de seção reta uniforme  $A$ , com condutividade  $g$ , o valor de  $b$  compatível com a lei de Ohm é dado por ([Ass97]):

$$b = \left| \frac{e\rho}{g} \right|, \quad (5.10)$$

onde  $\rho$  é a densidade de carga da rede cristalina do condutor ( $\rho = 1,4 \times 10^{10}C/m^3$  para o cobre). Como a resistência é dada por  $R = \ell/gA$  pode-se escrever  $b$  como:

$$b = \frac{e\rho A}{\ell}R. \quad (5.11)$$

No caso em que a corrente flui pela superfície de um condutor com comprimento  $\ell$ , densidade de carga  $\sigma$  e perímetro  $d$  (no caso de uma casca cilíndrica de raio  $a$  temos  $d = 2\pi a$ , no caso de uma placa retangular de comprimento  $\ell$  e lado  $s$  temos  $d = s$ ) vem:

$$b = \frac{e\sigma d}{\ell}R. \quad (5.12)$$

Neste ponto consideramos uma estimativa do efeito gerado pela movimentação da carga superficial sobre a carga-teste. Podemos imaginar que ela se move junto com os elétrons de condução. Neste caso, obteríamos essencialmente a Equação (5.8) ao invés de (5.6), substituindo a integral de volume por uma de superfície. O resultado final é essencialmente o mesmo

com  $\sigma_f$  no lugar de  $a\rho_{c-}/2$ , onde  $a$  aqui é o raio do fio. A densidade de carga dos elétrons de condução em um metal é tipicamente  $|\rho_c| = 10^{10}C/m^3$ . Podemos estimar  $\sigma_f$  considerando ser esta uma função linear da coordenada longitudinal, ver [Hea84]. Podemos tomar como exemplo um cabo coaxial de raio interno  $a$  e externo  $b$ , de condutividade  $g$ . A densidade de carga na superfície interior,  $\sigma_f^a$ , quando flui uma corrente  $i$ , é dada por ([Som64, págs. 125–130]):  $\sigma_f^a = -\epsilon_0 iz/\pi ga^3 \ln(b/a)$ . Para um fio de cobre com raio interno  $1mm$ , raio externo  $2mm$ , conduzindo uma corrente de  $100A$ , a densidade de carga a uma distância de  $100m$  é  $\sigma_f^a = 10^{-7}C/m^2$ . Temos então que  $\sigma_f^a = 10^{-7}C/m^2 \ll a\rho_{c-}/2 = 10^7C/m^2$ . Isto justifica que desprezemos o efeito do movimento das cargas superficiais nas interações para a propagação de sinais.

Aplicamos a segunda lei de Newton para o elétron na componente longitudinal (que nos interessa aqui):

$$F_{\phi,z} + F_{W,z} + F_R = m_e a_{2-}, \quad (5.13)$$

onde  $m_e$  é a massa do elétron. Desprezamos o termo que envolve a massa no lado direito de (5.13) comparado com o termo  $F_{W,z}$  de (5.8), ver [Ass97]. Por exemplo, no caso de um fio de cobre de comprimento  $\ell$  com seção reta circular de diâmetro  $d$ , a integração de (5.8) fornece:

$$F_{W,z} = - \left( \frac{\mu_0 e \rho d^2}{8} \ln \frac{2\ell}{d} \right) a_{2-}. \quad (5.14)$$

O termo entre parênteses tem dimensão de massa, vamos chamá-lo de  $m_W$ . Para um fio de cobre ( $\rho \approx 10^{10}C/m^3$ ) com 1 metro de comprimento e diâmetro de  $1mm$  vem, com  $e = 1,6 \times 10^{-19}C$ :  $m_W \approx 10^{-20}kg$ . Como  $m_e = 9 \times 10^{-31}kg$ , obtemos  $m_W \gg m_e$ . Isto permite desprezar o termo do lado direito de (5.13). O mesmo vai acontecer nas outras geometrias consideradas aqui. Disto resultam duas incógnitas na equação acima:  $\sigma_f$  e  $v_{2-}$  (ou  $a_{2-} = \partial v_{2-}/\partial t$ ). Para relacioná-las, utilizamos a equação de conservação de cargas:  $\nabla \cdot \vec{j} = -\partial \rho_f / \partial t$ , nas formas:

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -2\pi a \frac{\partial \sigma_f}{\partial t}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_f}{\partial t}. \quad (5.15)$$

Aqui  $i$  é a corrente elétrica total e  $k$  a densidade de corrente superficial. Como temos duas equações e duas incógnitas podemos obter então a equação de propagação de sinais que nos interessa aqui. A equação da telegrafia obtida depende da geometria do problema.

# Capítulo 6

## Casos Conhecidos na Literatura

Apresentamos neste capítulo as equações de propagação de sinais eletromagnéticos obtidas com a eletrodinâmica de Weber nas geometrias já publicadas na literatura.

### 6.1 Fio Reto Longo de Seção Reta Circular

Tomemos o caso de um fio reto, de comprimento  $\ell$  e raio  $a$  (de tal modo que vale  $\ell \gg a$ ), por onde transita uma corrente  $i(z, t)$ , uniforme na seção reta. Este problema foi tratado em [Kir57], [Web64] e [Ass00], veja a Figura 6.1. Temos dois casos distintos: quando o fio é oco (casca cilíndrica) e quando ele é maciço. Em ambos os casos, obtemos para a Eq. (5.6), em coordenadas cilíndricas:

$$\phi(r, z, t) = \begin{cases} a\sigma_f(z, t) \ln(\ell/a)/\epsilon_0, & r \leq a, \\ a\sigma_f(z, t) \ln(\ell/r)/\epsilon_0, & r \geq a. \end{cases} \quad (6.1)$$

Para a Equação (5.8) obtemos para o fio oco e para o fio maciço, respectivamente:

$$F_{W,z}(r, z, t) = \begin{cases} -q_1\mu_0 a\sigma_{2-a_2-}(z, t) \ln(\ell/a), & r \leq a, \\ -q_1\mu_0 a\sigma_{2-a_2-}(z, t) \ln(\ell/r), & r \geq a, \end{cases} \quad (6.2)$$

$$F_{W,z}(r, z, t) = \begin{cases} -q_1\mu_0 a^2 \rho_{2-a_2-}(z, t) \ln(\ell/a)/2, & r \leq a, \\ -q_1\mu_0 a^2 \rho_{2-a_2-}(z, t) \ln(\ell/r)/2, & r \geq a. \end{cases} \quad (6.3)$$

A Equação (5.13) fica, respectivamente, para os fios oco e maciço:

$$\frac{ea}{\epsilon_0} \frac{\partial \sigma_f}{\partial z} \ln \frac{\ell}{a} + ea\mu_0 \sigma_{2-a_2-} \ln \frac{\ell}{a} + \frac{2\pi ea R \sigma_{2-a_2-}}{\ell} v_{2-} = m_e a_{2-}, \quad (6.4)$$

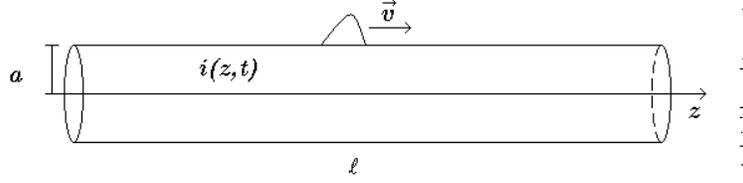


Figura 6.1: Esquema da propagação de um sinal em um fio reto.

$$\frac{ea}{\epsilon_0} \frac{\partial \sigma_f}{\partial z} \ln \frac{\ell}{a} + \frac{e\mu_0 a^2 \rho_{2-}}{2} a_{2-} \ln \frac{\ell}{a} + \frac{e\pi a^2 R \rho_{2-}}{\ell} v_{2-} = m_e a_{2-}. \quad (6.5)$$

Derivando as equações acima em relação a  $z$ , desprezando os termos de massa do lado direito, e utilizando a equação de conservação de carga, obtemos para ambos os casos:

$$\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial t^2} = \frac{2\pi\epsilon_0 R}{\ell \ln(\ell/a)} \frac{\partial \sigma_f}{\partial t}. \quad (6.6)$$

Esta mesma equação vale para  $j$ ,  $i$  e  $\phi$ .

A auto-indutância e a capacitância para esta geometria são:

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{\ell}{a}, \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\ln(\ell/a)}. \quad (6.7)$$

Estes valores, substituídos em (5.1) resultam exatamente na equação encontrada acima, (6.6). Ou seja, existe uma total concordância entre os resultados clássico e weberiano.

## 6.2 Cabo Coaxial Longo

Suponha a existência de um cabo coaxial, composto de duas cascas cilíndricas de raio interno  $a$  e externo  $b$ , e comprimento  $\ell$ , tal que vale a aproximação  $\ell \gg b > a$ . Assumimos que o condutor externo tenha resistência nula. Neste caso existem densidades superficiais de corrente,  $K_a(z, t)$  e  $K_b(z, t)$ , e de carga,  $\sigma_{f,a}(z, t)$  e  $\sigma_{f,b}(z, t)$ , nos condutores interno e externo (veja a Figura 6.2). Este caso foi tratado pela primeira vez em [Ass00]. Supomos que um sinal elétrico caminha pelas cascas cilíndricas na mesma direção longitudinal  $z$ , sob as condições:

$$2\pi a \sigma_{f,a}(z, t) = -2\pi b \sigma_{f,b}(z, t), \quad (6.8)$$

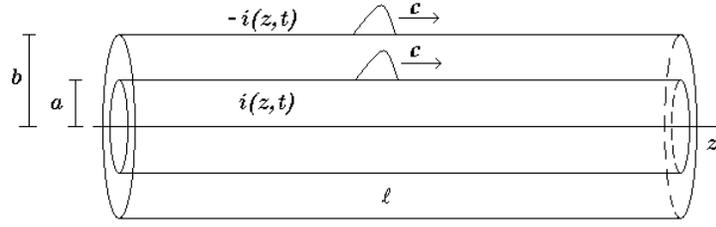


Figura 6.2: Esquema da propagação de sinais em um cabo coaxial formado por duas cascas cilíndricas.

$$2\pi a K_a(z, t) = -2\pi b K_b(z, t). \quad (6.9)$$

O potencial elétrico e a componente longitudinal da força de Weber, Equações (5.6) e (5.8), são dados por:

$$\phi(r, z, t) = \begin{cases} a\sigma_{f,a}(z, t) \ln(b/a)/\epsilon_0, & r \leq a, \\ a\sigma_{f,a}(z, t) \ln(b/r)/\epsilon_0, & a \leq r \leq b, \\ 0, & r \geq b, \end{cases} \quad (6.10)$$

$$F_{W,z}(r, z, t) = \begin{cases} -q_1 \mu_0 a \ln(b/a) \partial K_a / \partial t, & r \leq a, \\ -q_1 \mu_0 a \ln(b/r) \partial K_a / \partial t, & a \leq r \leq b, \\ 0, & r \geq b. \end{cases} \quad (6.11)$$

A equação da telegrafia neste caso resulta:

$$\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial t^2} = \frac{2\pi \epsilon_0 R_a}{\ell \ln(b/a)} \frac{\partial \sigma_f}{\partial t}, \quad (6.12)$$

onde  $R_a$  é a resistência da casca cilíndrica interna (já que a resistência da casca cilíndrica externa é nula) e  $\sigma_f$  se refere tanto a  $\sigma_{f,a}$  quanto a  $\sigma_{f,b}$ .

Em [BA98a, Equação (2.18)] temos a indutância de um cabo coaxial:  $L = \mu_0 \ell \ln(b/a)/2\pi$ . A capacitância de um cabo coaxial é:  $C = 2\pi \epsilon_0 \ell / \ln(b/a)$ . Substituindo na Equação (5.1), novamente obtemos a mesma equação da telegrafia seguindo o método de Kirchhoff.

Apresentamos no próximo capítulo casos novos, utilizando este mesmo tratamento para outras geometrias.

# Capítulo 7

## Casos Novos

Apresentamos neste capítulo as equações de propagação de sinais eletromagnéticos obtidas com a eletrodinâmica de Weber em geometrias novas. Alguns destes resultados foram apresentados em [AH00].

### 7.1 Placa Retangular

Seja agora uma placa retangular, de dimensões  $\ell_x$  e  $\ell_z$  nos eixos  $x$  e  $z$ , respectivamente. Supomos a placa localizada no plano  $y = 0$  com centro em  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Esta placa não tem espessura, e transporta uma densidade de corrente  $K(z, t)$  e um sinal elétrico ao longo do eixo  $z$ . Utilizamos a aproximação  $\ell_z \gg \ell_x \gg |\vec{r}|$ , onde  $\vec{r}$  é a posição de observação. Também supomos a existência de uma distribuição de carga na superfície da placa dada por  $\sigma_f(z, t)$ . Desprezamos também a variação destas grandezas com a largura no eixo  $x$  da placa. Veja o esquema na Figura 7.1

Neste caso, o potencial elétrico (5.6) devido à uma distribuição superficial de carga  $\sigma_f(z, t)$  é dado por:

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell_x/2}^{\ell_x/2} dx' \int_{-\ell_z/2}^{\ell_z/2} \frac{dz' \sigma_f(z', t)}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2}} \\ &= \frac{\sigma_f(z, t)}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell_x/2}^{\ell_x/2} dx' \int_{-\ell_z/2}^{\ell_z/2} \frac{dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2}}.\end{aligned}\quad (7.1)$$

Na segunda igualdade utilizamos a aproximação de Kirchhoff para tirar  $\sigma_f(z', t)$  do integrando, calculado em  $z' = z$ . Dentro de nossas aproximações,

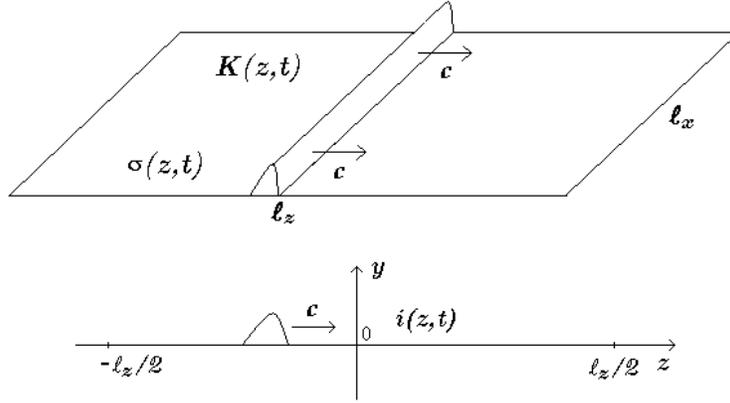


Figura 7.1: Esquema da propagação de sinais em uma placa retangular no plano  $y = 0$ . A figura acima apresenta uma visão lateral deste plano.

o resultado final é:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{\sigma_f(z, t)}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ell_x \left( \ln \frac{\ell_z}{\ell_x} + \ln 2 + 1 \right) - \pi|y| \right], \quad (7.2)$$

A componente longitudinal da força elétrica devida às cargas superficiais, atuando em uma carga-teste  $q_1$ , é:

$$F_z^\phi(x, y, z, t) = -q_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial \sigma_f}{\partial z} \left[ \ell_x \left( \ln \frac{\ell_z}{\ell_x} + \ln 2 + 1 \right) - \pi|y| \right]. \quad (7.3)$$

A componente longitudinal da força de Weber (5.8) que envolve a aceleração dos elétrons de condução em uma carga-teste  $q_1$  é dada por:

$$\begin{aligned} F_z^W(x, y, z, t) &= -\frac{\mu_0 q_1 \sigma_c}{4\pi} \int_{-\ell_x/2}^{\ell_x/2} dx' \int_{-\ell_z/2}^{\ell_z/2} dz' \frac{\hat{r}_{1c} \cdot \hat{z}}{r_{1c}} \hat{r}_{1c} \cdot \vec{a}_c(z', t) \\ &= -\frac{\mu_0 q_1 \sigma_c a_c(z, t)}{4\pi} \int_{-\ell_x/2}^{\ell_x/2} dx' \int_{-\ell_z/2}^{\ell_z/2} dz' \frac{(\hat{r}_{1c} \cdot \hat{z})^2}{r_{1c}} \\ &= -\frac{\mu_0 q_1}{2\pi} \frac{\partial K}{\partial t} \left[ \ell_x \left( \ln \frac{\ell_z}{\ell_x} + \ln 2 \right) - \pi|y| \right]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Para a segunda passagem da equação acima utilizamos novamente a aproximação de Kirchhoff para retirar  $\vec{a}_c(z', t)$  do integrando, calculado em  $z' = z$ .

Aplicando a segunda lei de Newton em um dos elétrons de condução ( $q_1 = -e$ ), com uma força resistiva do tipo ôhmica ( $-bv_c$ , onde  $b = q_1\sigma_c R\ell_x/\ell_z$  e  $R$  é a resistência da placa) e substituindo  $K = \sigma_c v_c$ , obtemos como equação do movimento:

$$\frac{e\ell_x}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\ell_z}{\ell_x} \frac{\partial\sigma_f}{\partial z} + \frac{e\mu_0\ell_x}{2\pi} \ln \frac{\ell_z}{\ell_x} \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{eR}{\ell_z/\ell_x} K = m_e a_c. \quad (7.5)$$

Podemos desprezar o termo que envolve a massa do elétron, derivar a equação acima em relação a  $z$  e substituir a equação de conservação de carga, na forma bidimensional  $\partial K/\partial z = -\partial\sigma_f/\partial t$  para obtermos a equação da telegrafia para este caso:

$$\frac{\partial^2\sigma_f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\sigma_f}{\partial t^2} = \frac{2\pi\epsilon_0 R}{\ell_z \ln(\ell_z/\ell_x)} \frac{\partial\sigma_f}{\partial t}. \quad (7.6)$$

Podemos calcular a auto-indutância pelo método descrito em [BA98a, Equação (2.1)]:

$$d^4 M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{w_i w_j} \left[ \frac{1+k}{2} \frac{\hat{\ell}_i \cdot \hat{\ell}_j}{r_{ij}} + \frac{1-k}{2} \frac{(\hat{r}_{ij} \cdot \hat{\ell}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot \hat{\ell}_j)}{r_{ij}} \right] da_i da_j, \quad (7.7)$$

onde  $w_i$  e  $w_j$  são as larguras por onde passam as correntes superficiais  $K(z, t)$ ,  $\hat{\ell}_i$  e  $\hat{\ell}_j$  são vetores unitários que representam as direções das correntes,  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  é o vetor que une os elementos de corrente interagentes, e  $da_i$  e  $da_j$  são elementos diferenciais de área. A constante  $k$  é um número (adimensional) da ordem da unidade, cujo valor depende da expressão para a auto-indutância que estivermos usando [BA98a, Seção 1.7]: para  $k = 1$  vem a expressão de Neumann,  $k = 0$  a de Maxwell,  $k = -1$  a de Weber e  $k = -5$  a de Graneau. Em [BA98a] foi provado que a integração da Eq. (7.7) para um circuito fechado de forma arbitrária não depende da constante  $k$ . Ou seja,  $M_{ij}$  tem o mesmo valor para todo  $k$ .

No caso da placa, usamos (7.7) com:

$$\begin{aligned} w_i = w_j = \ell_x, \quad \hat{\ell}_i = \hat{\ell}_j = \hat{z}, \quad da_i = dx_i dz_i, \quad da_j = dx_j dz_j, \\ \vec{r}_{ij} = (x_i - x_j)\hat{x} + (z_i - z_j)\hat{z}, \\ \hat{\ell}_i \cdot \hat{\ell}_j = 1, \quad (\hat{r}_{ij} \cdot \hat{\ell}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot \hat{\ell}_j) = \frac{(z_i - z_j)^2}{r_{ij}^2}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Integramos então (7.7) com  $x_i$  e  $x_j$  indo de  $-\ell_x/2$  até  $\ell_x/2$ , e com  $z_i$  e  $z_j$  indo de  $-\ell_z/2$  até  $\ell_z/2$ . Isto resulta na seguinte expressão para a auto-indutância:

$$L = \frac{\mu_0 \ell_z}{2\pi} \ln \frac{\ell_z}{\ell_x}. \quad (7.9)$$

Neste caso específico, para encontrar a capacitância  $C$  utilizamos a relação:

$$\frac{LC}{\ell^2} = \frac{1}{c^2}, \quad (7.10)$$

válida para condutores retilíneos compridos de seção reta arbitrária [Jac75, pág. 262]. Com isso, obtemos:  $C = 2\pi\epsilon_0\ell_z/\ln(\ell_z/\ell_x)$ . Substituindo esses valores na equação clássica (5.1), obtemos novamente a equação da telegrafia encontrada pela eletrodinâmica de Weber, Equação (7.6).

## 7.2 Duas Placas Paralelas

Sejam duas placas paralelas, de dimensões  $\ell_x$  e  $\ell_z$ , nos eixos  $x$  e  $z$ , sem espessura, separadas no eixo  $y$  por uma distância  $a$ . Supomos as placas situadas nos planos  $y = \pm a/2$ . Existem corrente iguais e de sentidos opostos nas placas, com direção no eixo  $z$ , e um sinal elétrico caminhando também no eixo  $z$ , veja a Figura 7.2. Vale a aproximação  $\ell_z \gg \ell_x \gg a$ . Supomos que as densidades de carga nas placas são opostas:  $\sigma_{f,a}(z, t) = -\sigma_{f,-a}(z, t) = \sigma_f(z, t)$ .

O potencial elétrico devido às densidades superficiais de carga é dado pela superposição dos potenciais devido a cada uma das placas, e estamos interessados apenas na componente longitudinal da força eletrostática aplicada na carga-teste  $q_1$ :

$$\phi(x, y, z, t) = \begin{cases} a\sigma_f(1 - 4y/\pi\ell_x)/2\epsilon_0, & y > a/2, \\ y\sigma_f(1 - 2a/\pi\ell_x)/\epsilon_0, & -a/2 < y < a/2, \\ -a\sigma_f(1 + 4y/\pi\ell_x)/2\epsilon_0, & y < -a/2, \end{cases} \quad (7.11)$$

$$F_z^\phi(x, y, z, t) = \begin{cases} -q_1a(1 - 4y/\pi\ell_x)\partial\sigma_f/\partial z/2\epsilon_0, & y > a/2, \\ -q_1y(1 - 2a/\pi\ell_x)\partial\sigma_f/\partial z/\epsilon_0, & -a/2 < y < a/2, \\ q_1a(1 + 4y/\pi\ell_x)\partial\sigma_f/\partial z/2\epsilon_0, & y < -a/2. \end{cases} \quad (7.12)$$

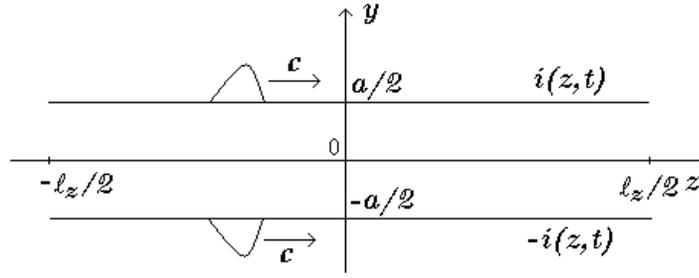


Figura 7.2: Esquema da propagação de sinais em duas placas paralelas.

A componente longitudinal da força de Weber devida à aceleração dos elétrons de condução na carga-teste é dada por:

$$F_z^W(x, y, z, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}q_1\mu_0a(1 - 4y/\pi\ell_x)\partial K/\partial t, & y > a/2, \\ -q_1\mu_0y(1 - 2a/\pi\ell_x)\partial K/\partial t, & -a/2 < y < a/2 \\ \frac{1}{2}q_1\mu_0a(1 + 4y/\pi\ell_x)\partial K/\partial t, & y < -a/2. \end{cases} \quad (7.13)$$

Seguindo o procedimento apresentado anteriormente, fazendo as substituições  $b = q_1\sigma_c R_1 \ell_x / \ell_z$  e  $q_1 = -e$ , obtemos a seguinte equação do movimento:

$$\frac{ea}{2\epsilon_0} \frac{\partial \sigma_f}{\partial z} + \frac{\mu_0 ea}{2} \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{eR_1}{\ell_z/\ell_x} K = m_e a_c, \quad (7.14)$$

onde  $R_1$  é a resistência de uma das placas (a resistência total é  $R = 2R_1$ ). Derivando a equação anterior em relação a  $z$ , desprezando o termo  $m_e a_c$  do lado direito e utilizando a equação de conservação de carga  $\partial K/\partial z = -\partial \sigma_f/\partial t$ , obtemos a equação da telegrafia:

$$\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial t^2} = \frac{\epsilon_0 R}{a\ell_z/\ell_x} \frac{\partial \sigma_f}{\partial t}. \quad (7.15)$$

Para comparar com a equação clássica (5.1) precisamos da auto-indutância e capacitância do sistema. Usando (7.7) com:

$$w_i = w_j = \ell_x, \quad \hat{\ell}_i = -\hat{\ell}_j = \hat{z}, \quad da_i = dx_i dz_i, \quad da_j = dx_j dz_j,$$

$$\vec{r}_{ij} = (x_i - x_j)\hat{x} + a\hat{y} + (z_i - z_j)\hat{z},$$

$$\hat{\ell}_i \cdot \hat{\ell}_j = -1, \quad (\hat{r}_{ij} \cdot \ell_i)(\hat{r}_{ij} \cdot \ell_j) = -\frac{(z_i - z_j)^2}{r_{ij}^2}, \quad (7.16)$$

obtemos a indutância mútua entre as duas placas:

$$M = -\frac{\mu_0 \ell_z}{4\pi \ell_x} \left( 2\ell_x \ln \frac{2\ell_z}{\ell_x} - 2\pi a + k\ell_x \right). \quad (7.17)$$

A auto-indutância total do sistema fica:

$$L = 2L_1 + 2M = \mu_0 \frac{a\ell_z}{\ell_x}, \quad (7.18)$$

onde  $L_1$  é a auto-indutância de uma placa, dada por (7.9). Juntamente com a capacitância deste sistema de duas placas, dada por:

$$C = \epsilon_0 \frac{\ell_x \ell_z}{a}, \quad (7.19)$$

podemos recuperar a equação da telegrafia (7.15) substituindo  $L$  e  $C$  em (5.1).

### 7.3 Linha de Transmissão

Apresentamos em seguida o resultado da derivação da equação da telegrafia para o problema de dois fios ocios cilíndricos, de comprimento  $\ell$  e de raio  $a$ , separados por uma distância  $d$  entre seus eixos, de tal modo que vale a aproximação  $\ell \gg d \gg a$ . Veja a Figura 7.3. Esta situação é conhecida como linha de transmissão.

Sejam os fios com os eixos em  $y = d/2$  e  $y = -d/2$  denominados fios  $A$  e  $B$ , respectivamente. Para uma carga-teste  $q_1$  situada em  $A$ , temos que o potencial no qual ela está é dado pela soma dos potenciais de cada um dos fios:

$$\phi = \phi_A + \phi_B, \quad (7.20)$$

onde  $\phi_A$  é dado por (6.1), deslocando-se apropriadamente a origem, e  $\phi_B$  é dado por:

$$\phi_B = -\frac{a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dz' \sigma_f(\theta', z', t)}{\sqrt{b^2 + (z - z')^2}} \approx -\frac{a\sigma_f(z, t)}{4\pi\epsilon_0} I, \quad (7.21)$$

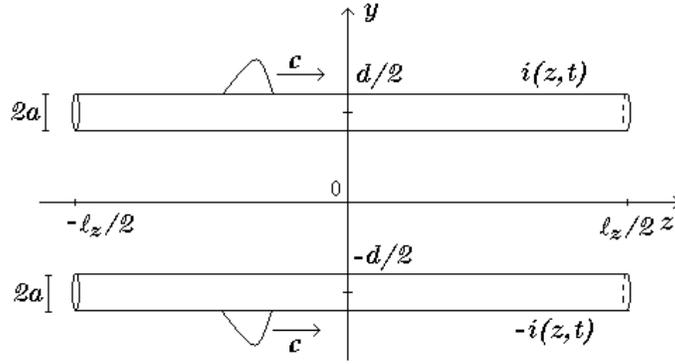


Figura 7.3: Esquema da propagação de sinais na linha de transmissão.

onde  $b^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = (d + a \cos \theta - a \cos \theta')^2 + a^2 (\sin \theta - \sin \theta')^2 \approx d^2 + 2da(\cos \theta - \cos \theta') + 2a^2 - 2a^2 \cos(\theta - \theta') \approx d^2$ . Na última passagem utilizamos novamente a aproximação de Kirchhoff e, devido à aproximação  $d \gg a$ , também desprezamos a dependência em  $\theta$  de  $\sigma_f$ . A integral  $I$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\theta' \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dz'}{\sqrt{d^2 + (z - z')^2}} \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta' \ln \frac{\ell/2 - z + \sqrt{d^2 + (\ell/2 - z)^2}}{-(\ell/2 + z) + \sqrt{d^2 + (\ell/2 + z)^2}} \\
 &\approx \int_0^{2\pi} d\theta' \ln \frac{\ell^2}{d^2} = 4\pi \ln \frac{\ell}{d}.
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Com isto o potencial resulta:

$$\phi(z, t) = \frac{a\sigma_f(z, t)}{\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}. \tag{7.23}$$

O cálculo da componente longitudinal da força de Weber que envolve a aceleração dos elétrons de condução também pode ser feito do mesmo modo. A força será dada pela soma dos termos devidos a cada um dos fios,  $A$  e  $B$ , sendo  $F_{z,A}^W$  dado por (6.2), e  $F_{z,B}^W$  dado por:

$$F_{z,B}^W = \frac{aq_1\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz' \sigma_c \frac{\hat{r}_{1c} \cdot \hat{z}}{r_{1c}} \hat{r}_{1c} \cdot \vec{a}_c(z', t)$$

$$\approx \frac{aq_1\mu_0\sigma_c a_c(z,t)}{4\pi} I', \quad (7.24)$$

onde a integral  $I'$  é dada por:

$$I' = \int_0^{2\pi} d\theta' \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dz'(z-z')^2}{[b^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \approx I - 4\pi \approx I. \quad (7.25)$$

Assim, esta força se torna:

$$F_z^W(z,t) = -aq_1\mu_0\sigma_c a_c(z,t) \ln \frac{d}{a}. \quad (7.26)$$

Assumindo que a carga-teste  $q_1$  seja um dos elétrons de condução do fio  $A$ , a força resistiva que ele sofre é dada por  $F_R = -bv_c$ , onde  $b = 2\pi a q_1 R_1 \sigma_c / \ell$  e  $R_1$  é a resistência de um dos fios. Aplicando a segunda lei de Newton neste elétron de condução, desprezando o termo que envolve a massa do elétron, derivando em relação a  $z$  e usando a equação da conservação de carga, obtemos:

$$\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial t^2} = \frac{\pi \epsilon_0 R}{\ell(d/a)} \frac{\partial \sigma_f}{\partial t}, \quad (7.27)$$

onde  $R = 2R_1$ . Esta equação também concorda com (5.1), substituída dos respectivos valores de auto-indutância e capacitância:

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \frac{d}{a}, \quad C = \frac{\pi \epsilon_0 \ell}{\ln(d/a)}. \quad (7.28)$$

## 7.4 Cabo Coaxial Resistivo

O problema do cabo coaxial apresentado na Seção 6.2 utiliza a simplificação de que o cilindro condutor externo não tem resistência. Tratamos aqui o caso em que ambos os cilindros constituintes do cabo coaxial apresentam resistência. Também não impomos as condições (6.8) e (6.9).

Nosso problema consiste de duas cascas cilíndricas concêntricas, de raios  $a$  e  $b$  e de comprimento  $\ell$  ( $\ell \gg b > a$ ), ver Figura 6.2. Em cada uma delas flui uma corrente superficial  $K_a(z,t)$  e  $K_b(z,t)$ , com densidades superficiais de carga livre  $\sigma_{f,a}(z,t)$  e  $\sigma_{f,b}(z,t)$ . As resistências dos dois fios são  $R_a$  e  $R_b$ , respectivamente. Usando os resultados conhecidos para uma casca cilíndrica,

(6.1) e (6.2), temos neste caso, para o potencial gerado pelas cargas superficiais livres e para a componente longitudinal da força de Weber que envolve a aceleração dos elétrons de condução:

$$\phi(r, z, t) = \begin{cases} [a\sigma_{f,a} \ln(\ell/a) + b\sigma_{f,b} \ln(\ell/b)] / \epsilon_0, & r < a, \\ [a\sigma_{f,a} \ln(\ell/r) + b\sigma_{f,b} \ln(\ell/b)] / \epsilon_0, & a < r < b, \\ (a\sigma_{f,a} + b\sigma_{f,b}) \ln(\ell/r) / \epsilon_0, & r > b, \end{cases} \quad (7.29)$$

$$F_z^W(r, z, t) = \begin{cases} -q_1\mu_0 \partial [aK_a \ln(\ell/a) + bK_b \ln(\ell/b)] / \partial t, & r < a, \\ -q_1\mu_0 \partial [aK_a \ln(\ell/r) + bK_b \ln(\ell/b)] / \partial t, & a < r < b, \\ -q_1\mu_0 \partial (aK_a + bK_b) / \partial t \ln(\ell/r), & r > b. \end{cases} \quad (7.30)$$

As forças resistivas para a carga-teste  $q_1$ , situada nos fios de raio  $a$  e  $b$  são, respectivamente:

$$F_{R,a} = -\frac{2\pi a q_1 R_a}{\ell} K_a, \quad (7.31)$$

$$F_{R,b} = -\frac{2\pi b q_1 R_b}{\ell} K_b. \quad (7.32)$$

Usando a segunda lei de Newton para um elétron de condução ( $q_1 = -e$ ) situado no fio de raio  $a$  e outro situado no fio de raio  $b$ , desprezando seus termos de massa, diferenciando em relação a  $z$  e substituindo as equações de conservação de carga, respectivamente dadas por:

$$\frac{\partial K_a}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{f,a}}{\partial t}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial K_b}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{f,b}}{\partial t}, \quad (7.33)$$

obtemos as equações:

$$a \ln \frac{\ell}{a} \square \sigma_{f,a} + b \ln \frac{\ell}{b} \square \sigma_{f,b} = \frac{2\pi a \epsilon_0 R_a}{\ell} \frac{\partial \sigma_{f,a}}{\partial t}, \quad (7.34)$$

$$a \square \sigma_{f,a} + b \square \sigma_{f,b} = \frac{2\pi b \epsilon_0 R_b}{\ell \ln(\ell/b)} \frac{\partial \sigma_{f,b}}{\partial t}, \quad (7.35)$$

onde definimos o operador  $\square$  por:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (7.36)$$

Analisamos separadamente três casos especiais, a saber: quando  $R_b$  é nulo, quando  $R_a$  é nulo, e quando nenhuma das duas resistências é nula.

### 7.4.1 Caso 1: $R_b = 0$

Da Equação (7.35) podemos isolar o termo  $b\Box\sigma_{f,b}$ :

$$b\Box\sigma_{f,b} = -a\Box\sigma_{f,a}, \quad (7.37)$$

que, substituído em (7.34) resulta:

$$\Box\sigma_{f,a} = \frac{2\pi\epsilon_0 R_a}{\ell \ln(b/a)} \frac{\partial\sigma_{f,a}}{\partial t}. \quad (7.38)$$

Estas duas últimas equações também valem substituindo simultaneamente  $\sigma_{f,a} \rightarrow K_a$  e  $\sigma_{f,b} \rightarrow K_b$ . A solução para estas relações, de maneira geral, é:

$$\Box(a\sigma_{f,a} + b\sigma_{f,b}) = 0 \quad \Rightarrow \quad a\sigma_{f,a} + b\sigma_{f,b} = \psi, \quad (7.39)$$

onde  $\psi$  é a solução da equação de onda sem amortecimento,  $\Box\psi = 0$ . Um caso particular é o obtido anteriormente:  $\sigma_{f,b} = -a\sigma_{f,a}/b$  com a Equação (7.38) válida tanto para  $\sigma_{f,a}$  quanto para  $\sigma_{f,b}$ .

### 7.4.2 Caso 2: $R_a = 0$

Neste caso temos, a partir das Equações (7.34) e (7.35):

$$\Box\sigma_{f,a} = -\frac{b \ln(\ell/b)}{a \ln(\ell/a)} \Box\sigma_{f,b}, \quad (7.40)$$

$$\Box\sigma_{f,b} = \frac{2\pi b\epsilon_0 R_b}{\ell \ln(b/a)} \frac{\ln(\ell/a)}{\ln(\ell/b)} \frac{\partial\sigma_{f,b}}{\partial t}. \quad (7.41)$$

Novamente, estas equações também valem quando substituirmos simultaneamente  $\sigma_{f,a} \rightarrow K_a$  e  $\sigma_{f,b} \rightarrow K_b$ . Como estamos supondo  $\ell \gg b > a$ , vem que  $(\ln \ell/a)/(\ln \ell/b) \approx 1$ . Ou seja, obtemos equações do mesmo tipo que a anterior. Um caso particular é quando  $\sigma_{f,b} = -a\sigma_{f,a}/b$  e  $K_b = -aK_a/b$ .

### 7.4.3 Caso 3: $R_a \neq 0$ e $R_b \neq 0$

Podemos aplicar o operador  $\Box$  em (7.35) e isolar o termo  $b\Box\sigma_{f,b}$  de (7.34), resultando respectivamente:

$$a\Box^2\sigma_{f,a} + b\Box^2\sigma_{f,b} = \frac{2\pi b\epsilon_0 R_b}{\ell \ln(\ell/b)} \frac{\partial}{\partial t} \Box\sigma_{f,b}, \quad (7.42)$$

$$b\Box\sigma_{f,b} = \frac{2\pi a\epsilon_0 R_a}{\ell \ln(\ell/b)} \frac{\partial\sigma_{f,a}}{\partial t} - a \frac{\ln(\ell/a)}{\ln(\ell/b)} \Box\sigma_{f,a}. \quad (7.43)$$

Substituindo a Equação (7.43) em (7.42) resulta em:

$$\Box^2\sigma_{f,a} - \frac{2\pi\epsilon_0}{\ell \ln(b/a)} \frac{R_a \ln(\ell/b) + R_b \ln(\ell/a)}{\ln(\ell/b)} \frac{\partial}{\partial t} \Box\sigma_{f,a} + \frac{4\pi^2\epsilon_0^2 R_a R_b}{\ell^2 \ln(b/a)} \frac{\partial^2\sigma_{f,a}}{\partial t^2} = 0. \quad (7.44)$$

Utilizando a aproximação  $\ell \gg b > a$ , vem que podemos desprezar o terceiro termo de (7.44) pois ele tem  $\ell^2$  no denominador. Já a segunda fração do termo do meio simplifica-se para  $R_a + R_b$ , pois  $\ln(\ell/a) \approx \ln(\ell/b)$  com  $\ell \gg b > a$ . Isto resulta na seguinte equação diferencial de quarta ordem:

$$\Box \left[ \Box\sigma_{f,a} - \frac{2\pi\epsilon_0(R_a + R_b)}{\ell \ln(b/a)} \frac{\partial\sigma_{f,a}}{\partial t} \right] = 0. \quad (7.45)$$

Definindo  $\psi(z, t)$  como sendo a solução da equação de onda sem amortecimento  $\Box\psi = 0$ , temos:

$$\Box\sigma_{f,a} - \frac{2\pi\epsilon_0(R_a + R_b)}{\ell \ln(b/a)} \frac{\partial\sigma_{f,a}}{\partial t} = \psi. \quad (7.46)$$

Note que esta equação vale também para  $\sigma_{f,a} \rightarrow \sigma_{f,b}$ . Uma solução particular é  $\psi = 0$ , com o que obtemos a forma clássica para a equação da telegrafia. Ou seja, obtemos a Equação (5.1) pois neste caso:

$$L = \frac{\mu_0\ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln(b/a)}, \quad R = R_a + R_b. \quad (7.47)$$

# Capítulo 8

## Discussão e Conclusão

Na primeira parte deste trabalho analisamos condutores resistivos estacionários com corrente constante. Apresentamos casos conhecidos na literatura e também casos novos. Mostramos que em todos os casos ocorre uma distribuição de cargas ao longo das superfícies dos condutores, cargas estas mantidas pela bateria. Estas cargas superficiais geram não apenas o campo elétrico no interior dos condutores mas também um campo elétrico no espaço externo aos condutores. Calculamos os potenciais e campos elétricos fora dos condutores para diversas geometrias, graficando também as equipotenciais e linhas de campo elétrico. Finalmente comparamos estas figuras com os resultados experimentais de Jefimenko, quando havia analogias ou semelhanças geométricas que permitissem esta comparação.

Este trabalho abre as portas para alguns desenvolvimentos futuros. Exemplos de generalizações possíveis: pode-se estudar a corrente constante propagando-se em uma longa fita retangular bidimensional com lado de tamanho finito. Em vez de (3.1) teríamos agora  $\sigma_f(x, z)$  que teria de ser determinada (ou seja, teríamos de levar em conta a variação lateral da densidade de carga). Pode-se também estudar o caso do anel (seção 3.4) mas levando em conta sua espessura não nula (ou seja, ele deixaria de ser tratado como filiforme). Pode-se também tentar lidar com uma bateria de tamanho finito e não mais puntual. Embora o tratamento destes casos esteja além dos objetivos deste trabalho de mestrado, achamos importante alinhar estas perspectivas futuras.

Na segunda parte deste trabalho tratamos de correntes variáveis levando em conta o papel preponderante das cargas superficiais (agora as densidades de carga passam a depender também do tempo). Tivemos como objetivo

analisar a propagação de sinais eletromagnéticos utilizando a eletrodinâmica de Weber, para podermos compará-la com os casos mais conhecidos que utilizam o eletromagnetismo clássico. Apresentamos então com o formalismo weberiano os casos já conhecidos na literatura e depois casos novos ainda não publicados.

A abordagem utilizada por Kirchhoff e Weber leva corretamente à equação da telegrafia em todos os casos analisados. Esta abordagem utiliza, como modelo de interação entre as cargas, a força de Weber. Juntamente com uma força resistiva, aplicando a segunda lei de Newton e com a equação de conservação de cargas, obtemos a mesma equação conhecida no eletromagnetismo clássico, Equação (5.1).

Notamos aqui que não é necessária a noção de campos retardados para chegar à equação que rege a propagação de um sinal elétrico com uma velocidade finita. A velocidade finita vem diretamente da própria expressão da força de Weber. Podemos, como exemplo, fazer uma analogia com a propagação de sons em meios materiais, derivada com a mecânica newtoniana. A interação entre os primeiros vizinhos, apesar de também ser instantânea, resulta numa equação de onda com velocidade de propagação finita. Note entretanto que a analogia não é perfeita: no caso do som, a interação envolve os primeiros vizinhos, enquanto que no caso do sinal elétrico, a interação envolve todas as cargas existentes no condutor!

Uma das motivações que nos levaram a estudar todos estes casos era a possibilidade de que pudéssemos encontrar um caso em que o resultado fosse diferente do clássico. Isto permitiria com que pudéssemos propor experimentos que talvez pudessem distinguir qual teoria descreve melhor a natureza. Infelizmente, encontramos que todos os casos analisados coincidem com o previsto pela teoria eletromagnética clássica (e parece-nos também que todos os condutores retos compridos levarão ao mesmo resultado).

Existem também casos que não foram analisados em que resultados inesperados podem aparecer. Por exemplo, na aproximação de Kirchhoff (ou nas séries de Taylor correspondentes) das Equações (5.4) e (5.7) poderíamos tomar não apenas o termo dominante, mas alguns dos termos seguintes. Ou então um circuito cilíndrico (como descrito na Seção 2.5) conduzindo uma corrente variável na direção  $\hat{\varphi}$ , ou seja, conduzindo um sinal no sentido poloidal. Como é a equação que rege a propagação deste sinal? Qual sua velocidade? Como fica sua comparação com o eletromagnetismo clássico? Diversas outras geometrias sugerem dúvidas semelhantes. Estas são apenas algumas das possibilidades de desenvolvimento deste trabalho que podem ser

seguidas no futuro.

Finalmente, a propagação de sinais fora de meios condutores, por exemplo no vácuo, também não foi discutida neste trabalho. Entretanto, parece-nos um assunto fascinante se tratado adequadamente com Weber, e uma comparação com o eletromagnetismo clássico poderia sugerir muitas respostas. Qual a natureza dos campos? Existe um limite superior para a propagação de um sinal? É necessário introduzir a noção de campos retardados e avançados no eletromagnetismo?

Todas estas são questões em aberto para as quais ainda não temos respostas completas. De qualquer forma, em todos os casos concretos estudados neste trabalho obteve-se, com a eletrodinâmica de Weber, equações de propagação de sinais eletromagnéticos idênticos à equação da telegrafia do eletromagnetismo clássico, Eq. (5.1). Ou seja, a eletrodinâmica de Weber também mostra que, para condutores com resistência desprezível, as perturbações elétricas se propagam à velocidade da luz, como confirmado experimentalmente.

# Apêndice A

## Cálculo do Potencial Devido a uma Placa Carregada

Neste apêndice apresentamos o cálculo das integrais envolvidas no potencial elétrico devido a uma placa, de dimensões  $\ell_x$  e  $\ell_z$  nos eixos  $x$  e  $z$ , respectivamente, sem espessura. A placa está localizada no plano  $y = y_0$  e queremos saber o potencial no plano simétrico  $x = 0$ . Esta placa contém uma densidade superficial de carga dada pela Equação (3.1). O potencial será dado pela Equação (3.3), ou seja:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell_z/2}^{\ell_z/2} dz' \int_{-\ell_x/2}^{\ell_x/2} dx' \frac{\alpha z' + \beta}{\sqrt{x'^2 + (y - y_0)^2 + (z - z')^2}} = \frac{\alpha I' + \beta I}{4\pi\epsilon_0}.$$

Nesta expressão as integrais  $I$  e  $I'$  são dadas por:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\ell_z/2}^{\ell_z/2} dz' \int_{-\ell_x/2}^{\ell_x/2} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + (y - y_0)^2 + (z - z')^2}} \\ &= \int_{-\ell_z/2}^{\ell_z/2} dz' \ln \frac{\ell_x/2 + \sqrt{\ell_x^2/4 + (y - y_0)^2 + (z - z')^2}}{-\ell_x/2 + \sqrt{\ell_x^2/4 + (y - y_0)^2 + (z - z')^2}} \\ &= (\ell_z/2 - z) \ln \frac{\ell_x/2 + \sqrt{(\ell_z/2 - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}}{-\ell_x/2 + \sqrt{(\ell_z/2 - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}} \\ &\quad + (\ell_z/2 + z) \ln \frac{\ell_x/2 + \sqrt{(\ell_z/2 + z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}}{-\ell_x/2 + \sqrt{(\ell_z/2 + z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2|y - y_0| \left[ \arctan \frac{\ell_x(\ell_z/2 - z)}{2|y - y_0|\sqrt{(\ell_z/2 - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}} \right. \\
& \quad \left. + \arctan \frac{\ell_x(\ell_z/2 + z)}{2|y - y_0|\sqrt{(\ell_z/2 + z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}} \right] \\
& + \ell_x \ln \frac{\ell_z/2 - z + \sqrt{(\ell_z/2 - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}}{-(\ell_z/2 + z) + \sqrt{(\ell_z/2 + z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}}, \quad (\text{A.1}) \\
I' &= \int_{-\ell_z/2}^{\ell_z/2} z' dz' \int_{-\ell_x/2}^{\ell_x/2} \frac{dx'}{\sqrt{(z - z')^2 + (y - y_0)^2 + x'^2}} \\
&= \int_{-\ell_z/2}^{\ell_z/2} z' dz' \ln \frac{\ell_x/2 + \sqrt{(z' - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}}{-\ell_x/2 + \sqrt{(z' - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}} \\
&= \frac{\ell_x}{2} \left[ \sqrt{(\ell_z/2 - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4} - \sqrt{(\ell_z - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4} \right] \\
& + \frac{\ell_z^2/4 - z^2 + (y - y_0)^2}{2} \left[ \ln \frac{\ell_x/2 + \sqrt{(\ell_z/2 - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}}{-\ell_x/2 + \sqrt{(\ell_z/2 - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}} \right. \\
& \quad \left. - \ln \frac{\ell_x/2 + \sqrt{(\ell_z/2 + z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}}{-\ell_x/2 + \sqrt{(\ell_z/2 + z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}} \right] \\
& - 2z|y - y_0| \left[ \arctan \frac{\ell_x(\ell_z/2 - x)}{2|y - y_0|\sqrt{(\ell_z/2 - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}} \right. \\
& \quad \left. + \arctan \frac{\ell_x(\ell_z/2 + z)}{2|y - y_0|\sqrt{(\ell_z/2 + z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}} \right] \\
& + z\ell_x \ln \frac{\ell_z/2 - z + \sqrt{(\ell_z/2 - z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}}{-(\ell_z/2 + z) + \sqrt{(\ell_z/2 + z)^2 + (y - y_0)^2 + \ell_x^2/4}}. \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

A partir deste ponto, fazemos as aproximações dadas na Equação (3.4). Os resultados das integrais são, respectivamente para as aproximações (A),

(B) e (C):

$$I = \begin{cases} 2\ell_z \left( \ln \frac{2\ell_x}{\ell_z} + 1 \right) - 2\pi|y - y_0| - 4 \frac{z^2 - (y - y_0)^2}{\ell_z}, \\ 4\ell \ln(\sqrt{2} + 1) - 2\pi|y - y_0| - 2\sqrt{2} \frac{z^2 - 2(y - y_0)^2}{\ell}, \\ 2\ell_x \left( \ln \frac{2\ell_z}{\ell_x} + 1 \right) - 2\pi|y - y_0| + 4 \frac{(y - y_0)^2}{\ell_x}, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$I' = \begin{cases} 2z\ell_z - 2\pi z|y - y_0| + 8z \frac{(y - y_0)^2}{\ell_z} - \frac{8z^3}{3\ell_z}, \\ 2z\ell \ln(\sqrt{2} + 1) - 2\pi z|y - y_0| + 6\sqrt{2}z \frac{(y - y_0)^2}{\ell} - 10\sqrt{2} \frac{z^3}{3\ell}, \\ 2z\ell_x \ln \frac{2\ell_z}{\ell_x} - 2\pi z|y - y_0| + 4z \frac{(y - y_0)^2}{\ell_x}. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Com isto podemos obter o potencial na forma da Equação (3.9) usando as definições (3.8).

# Apêndice B

## Listagem de Programa

Neste apêndice apresentamos a listagem do programa utilizado para calcular o potencial de um anel filiforme. Usamos um método numérico para resolver a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, e a linguagem segue o software *Mathematica*. Os textos entre (\*...\*) são comentários.

```
Clear[r,z,g,f, $\phi$ ,n, $\theta$ ]
J=K=71;(*Tamanho da rede: J x K pontos no plano RZ*)
Nterm=200;(*Numero de termos na expansao de Fourier*)
Jh=Quotient[J,2]+1;(*Aqui temos o raio do anel no plano XY*)
Kh=Quotient[K,2]+1;(*Este e' o raio do anel, ou seja, sua
posicao no eixo Z*)
raio=(Kh-1)J+Jh;(*Este e' a posicao do potencial do anel na
lista de variaveis: fica no meio da rede J x K*)
dr=dz=1.;(*Este e' o valor do diferencial entre os pontos da
malha*)
rj=Table[r,{r,1,J,dr}];(*Esta lista guarda o valor dos pontos
em R*)
zk=Table[z,{z,1,K,dz}];(*Esta lista guarda o valor dos pontos
em Z*)
drh=dr/2;
ran=rj-drh;(*Esta lista guarda as posicoes R subtraidas da
metade do diferencial*)
rap=rj+drh;(*Esta lista guarda as posicoes R adicionadas da
metade do diferencial*)
v=1.;(*Este e' o valor da diferenca de potencial fornecida pela
```

```

bateria*)
v0=- (v/π)Table[(-1)^n/n,{n,1,Nterm}];(*Esta lista guarda os
coeficientes da expansao do potencial linear em θ na bateria
em serie de Fourier*)
cc1=Table[{0,z,0},{z,1,K}];
cc2=Table[{r,0,0},{r,0,J+1}];
cc3=Table[{r,K+1,0},{r,0,J+1}];
cc4=Table[{J+1,z,0},{z,1,K}];
cc=Flatten[{cc1,cc2,cc3,cc4},1];(*Uma gaiola de Faraday
aterrada envolve o anel; esta gaiola tem a forma cilindrica*)
φ[r_,θ_,z_]=0;(*Esta funcao vai guardar o resultado
final do potencial*)
Timing[Do[(*Esta funcao Timing da' o tempo total de
processamento*)
M=Table[0,{J Kh},{J Kh}];(*Esta matriz vai guardar os
coeficientes dos potenciais φ_ij. Aqui temos uma otimizacao:
os pontos de z acima do anel sao simetricos aos pontos abaixo
do anel, portanto precisamos calcular apenas a metade dos
pontos*)
Clear[j,k,i];
Do[
i=(k-1)J+j;(*Vamos transformar o indice duplo (i,j) em um
unico: (i-1)J+j*)
M[[i,i]]=-2(1/dr^2+1/dz^2)-n^2;
If[i-1>=1,M[[i,i-1]]=ran[[j]]/(rj[[j]]dr^2)];
If[j<J,M[[i,i+1]]=rap[[j]]/(rj[[j]]dr^2)];
If[k<Kh,M[[i,i+J]]=1/dz^2,M[[i,i-J]]=1/dz^2];
If[k>1,M[[i,i-J]]=1/dz^2];
,{k,1,Kh},{j,1,J}];(*Este loop coloca os coeficientes nas
posicoes corretas da matriz*)
M=Transpose[M];
b=-v0[[n]]Delete[M[[raio]],raio];(*A variavel b contem os
termos constantes do sistema de equacoes*)
M=Delete[Transpose[Delete[M,raio]],raio];(*Apos isto,
eliminamos a coluna e a linha correspondentes ao ponto sobre
o anel, onde sabemos o valor do potencial*)
ans=Insert[LinearSolve[M,b],v0[[n]],raio];(*Calculamos a
resposta do sistema de equacoes lineares, cujos coeficientes

```

```

sao os potenciais  $\phi_{ij}$  que queremos, e adicionamos o
potencial sobre o anel*)
Do[AppendTo[ans,ans[[{(K-k)J+j}]],{k,Kh+1,K},{j,1,J}]];
(*Copiamos o valor dos pontos abaixo do anel para seus
lugares acima (veja nota sobre a otimizacao acima)*)
ans3d=Table[{r,z,ans[[{(z-1)J+r}]],{r,1,J},{z,1,K}]];
ans=Flatten[ans3d,1];(*Montamos entao uma lista composta de
conjuntos de tres termos: {posicao r, posicao z, potencial}*)
ans=Flatten[{ans,cc},1];(*Adicionamos as condicoes de
contorno: o anel esta' dentro de um cilindro aterrado -
gaiola de Faraday*)
Clear[f,g];
f[r_,z_]=Interpolation[ans][r,z];(*Fazemos uma interpolacao
dos pontos para uma funcao continua*)
g[r_, $\theta$ _,z_]= $\phi[r,\theta,z]$ +f[r,z]Sin[n  $\theta$ ];(*Adicionamos 'a funcao
total este termo, multplicado por sin(n $\theta$ )*
Clear[ $\phi$ ];
 $\phi[r_,\theta_,z_]=g[r,\theta,z]$ ;
,{n,1,Nterm}];
]

```

# Apêndice C

## Explosão de Fios

### C.1 Introdução

Há diversos experimentos que comprovam a existência de forças longitudinais em circuitos fechados de corrente. Podemos citar como exemplo: a propulsão a jato em líquidos, os aceleradores de projéteis (*railgun accelerators*), a explosão de fios e as explosões eletrodinâmicas em líquidos.

Neste trabalho, vamos abordar especificamente o fenômeno da explosão de fios, [Gra83], [Gra84], [Gra85b], [Gra87], [Nas85] e [Asp87]. Numa experiência típica descarrega-se um banco de capacitor com alta voltagem ( $70kV$ ) de  $8\mu F$  através de um indutor gerando pulsos de corrente oscilatória que decai exponencialmente no circuito, com amplitude de até  $10kA$  e com uma frequência de  $2kHz$ , durante um período de 5 a  $10ms$ , [Gra83] e [Gra84]. A descarga passa através de um fio de alumínio com diâmetro de 1,2mm que se rompe em 30 a 50 pedaços.

Há diversas opiniões sobre o assunto. A explicação mais comumente utilizada é a força longitudinal de Ampère [Gra85a]. Entretanto, foi obtido recentemente que um circuito fechado com corrente não exerce força resultante longitudinal ao longo do circuito, de acordo com as forças de Ampère e de Grassmann, [AB96], [BA97a], [BA97b], [BA98a] e [BA98b]. Diante disto analisamos agora uma outra possibilidade.

Consideramos aqui a repulsão coulombiana ao longo de um fio cilíndrico, devido ao aparecimento de cargas livres no interior do condutor e na sua superfície. O aparecimento destas cargas é consequência do efeito Hall radial, [AH99b]. Mostramos aqui a relevância deste efeito na explosão de fios.

## C.2 Efeito Hall Radial

A corrente elétrica constante no interior de um fio condutor produz um campo magnético poloidal fora e dentro do fio. Este mesmo campo exerce uma força magnética nos elétrons de condução, fazendo com que eles se movam em direção ao eixo do fio. Para que a corrente seja uniforme na seção reta (como é o caso de correntes estacionárias no tempo), deve existir uma força elétrica (ou seja, de origem coulombiana) que anule a força resultante na direção radial na situação de equilíbrio em que há apenas corrente longitudinal.

Uma forma de obtermos a densidade de cargas no interior do fio é escrevermos a lei de Ohm generalizada  $\vec{J} = g(\vec{E} + \vec{v}_d \times \vec{B})$ , onde  $g$  é a condutividade do material,  $\vec{J}$  é a densidade de corrente,  $\vec{B}$  é o campo magnético na posição da densidade de corrente e  $\vec{v}_d$  é a velocidade de arraste ou de *drifting* dos elétrons que constituem a corrente.  $\vec{E}$  é o campo elétrico total na posição da densidade de corrente, com componentes longitudinal (que gera a corrente) e radial (que anula o efeito do campo magnético).

O problema consiste em um fio cilíndrico maciço uniforme, com o eixo  $z$  no eixo de simetria do cilindro. O fio tem raio  $a$  e comprimento  $\ell$ . Usamos a seguinte aproximação, onde  $r$  é a posição radial de observação da força ( $r \leq a$ ):

$$\ell \gg a \geq r. \quad (\text{C.1})$$

Supomos a corrente  $i$  uniforme na seção reta, [Whi73, pág. 90] e estacionária no tempo. O campo magnético dentro do fio é dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i r \hat{\varphi}}{2\pi a^2}, \quad (\text{C.2})$$

onde  $\hat{\varphi}$  é o versor na direção poloidal e  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ F/m}$  é a permeabilidade magnética do vácuo. Neste caso, a força magnética atuando num elétron de condução com carga  $q = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  é:

$$\vec{F}_B(r \leq a) = q\vec{v}_d \times \vec{B} = -\mu_0 |ev_d i| r \hat{r} / 2\pi a^2. \quad (\text{C.3})$$

Esta força cria uma concentração de cargas negativas no fio. No equilíbrio, temos um campo elétrico radial  $\vec{E}_r = -\mu_0 |v_d i| r \hat{r} / 2\pi a^2$ , que exerce uma força elétrica  $\vec{F}_{E_r} = -e\vec{E}_r$  ( $e > 0$ ) que anula a força resultante radial nos elétrons. Ou seja,  $q\vec{v}_d \times \vec{B} + q\vec{E}_r = 0$ . A solução para a distribuição de carga volumétrica  $\rho_-$ , a partir de lei de Gauss  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ , é:

$$\rho_- = -\frac{|iv_d|}{\pi a^2 c^2}. \quad (\text{C.4})$$

A densidade volumétrica de carga  $\rho_-$  é constante em todos os pontos no interior do longo fio reto (na aproximação considerada aqui). Por conservação de cargas vem que este acúmulo de carga negativa no interior do fio com corrente constante é compensado por uma carga positiva na superfície do fio. Numa espessura  $dz$  a carga negativa no interior do fio de raio  $a$  é  $dQ_- = \rho_- \pi a^2 dz = -|iv_d| dz / c^2$ . Igualando isto ao negativo da carga positiva na superfície do fio ( $dQ_+ = \sigma_+ 2\pi a dz$ , onde  $\sigma_+$  é a densidade superficial de carga) vem:

$$\sigma_+ = \frac{|iv_d|}{2\pi a c^2}. \quad (\text{C.5})$$

Esta densidade superficial de carga é constante ao longo do fio reto. Deve-se observar que ela é diferente da densidade de cargas livres que gera o campo elétrico longitudinal no interior do fio, dada por  $\sigma_f = \alpha z + \beta$ .

Aqui queremos analisar as forças longitudinais de atração e repulsão entre duas partes de um fio reto devidas às densidades de carga  $\rho_-$  e  $\sigma_+$ , para ver se é possível explicar a explosão de fios com elas.

### C.3 Repulsão Coulombiana

Apresentamos nesta parte a tensão exercida por estas cargas ao longo do fio, e comparamos com valores experimentais. Para isto consideramos o fio dividido em duas partes na posição  $z_0$  do eixo  $z$ : parte  $A$  ( $-\ell/2 < z < z_0$ ) e parte  $B$  ( $z_0 < z < \ell/2$ ), veja a Figura C.1. A tensão no fio (força longitudinal que a parte  $B$  exerce na parte  $A$ ) é devida às densidades de carga  $\rho_-$  e  $\sigma_+$ . Para calculá-la vamos usar a aproximação (C.1) e a aproximação:

$$z_0 \gg a \geq r, \quad \ell/2 - z_0 \gg a \geq r, \quad (\text{C.6})$$

onde  $z$  é a coordenada longitudinal de um ponto na parte  $A$  ou na parte  $B$ .

A força que a parte  $B$  do fio exerce na parte  $A$  devida às densidades volumétricas de carga é:

$$\vec{F}_{\rho_B \rho_A} = \frac{\rho_A \rho_B}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell/2}^{z_0} dz_A \int_0^{2\pi} d\theta_A \int_0^a r_A dr_A \int_{z_0}^{\ell/2} dz_B \int_0^{2\pi} d\theta_B \int_0^a r_B dr_B \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}^3}, \quad (\text{C.7})$$

onde  $\vec{r}_{AB} = (r_A \cos \theta_A - r_B \cos \theta_B) \hat{x} + (r_A \sin \theta_A - r_B \sin \theta_B) \hat{y} + (z_A - z_B) \hat{z}$  e  $r_{AB} = |\vec{r}_{AB}| = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\theta_A - \theta_B) + (z_A - z_B)^2}$ . Esta equação pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{\rho_B \rho_A} = \frac{\rho_A \rho_B}{4\pi\epsilon_0} \vec{J}_{\rho_A \rho_B}. \quad (\text{C.8})$$

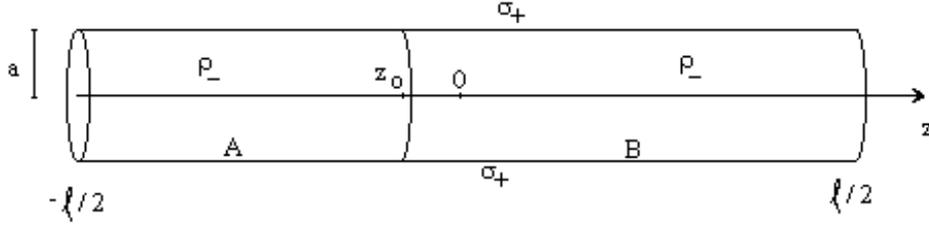


Figura C.1: Repulsão coulombiana entre as partes  $A$  e  $B$  do fio, devido ao aparecimento de cargas no interior e na superfície do condutor.

Definindo  $u = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\theta_A - \theta_B)}$  podemos resolver a integral na aproximação (C.6):

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\rho_B \rho_A} &= \int_0^a r_A dr_A \int_0^{2\pi} d\theta_A \int_0^a r_B dr_B \int_0^{2\pi} d\theta_B \int_{-\ell/2}^{z_0} dz_A \int_{z_0}^{\ell/2} dz_B \\ &\times \frac{(r_A \cos \theta_A - r_B \cos \theta_B)\hat{x} + (r_A \sin \theta_A - r_B \sin \theta_B)\hat{y} + (z_A - z_B)\hat{z}}{[u^2 + (z_A - z_B)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Estamos interessados apenas na componente longitudinal ( $z$ ) da integral  $\vec{J}_{\rho_B \rho_A}$ . Integrando em  $z_A$  e  $z_B$  temos:

$$\begin{aligned} J_{\rho_B \rho_A}^z &= - \int_0^a r_A dr_A \int_0^{2\pi} d\theta_A \int_0^a r_B dr_B \int_0^{2\pi} d\theta_B \\ &\times \ln \frac{u(-\ell + \sqrt{u^2 + \ell^2})}{[-(\ell/2 + z_0) + \sqrt{u^2 + (\ell/2 + z_0)^2}][-(\ell/2 - z_0) + \sqrt{u^2 + (\ell/2 - z_0)^2}]} \\ &\approx - \int_0^a r_A dr_A \int_0^{2\pi} d\theta_A \int_0^a r_B dr_B \int_0^{2\pi} d\theta_B \ln \frac{\ell^2 - 4z_0^2}{2\ell u}, \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

onde na última passagem utilizamos as aproximações (C.6). Calculando as integrais restantes acima:

$$\begin{aligned} J_{\rho_B \rho_A}^z &= -\pi a^2 \int_0^a r_A dr_A \int_0^{2\pi} d\theta_A \left( \ln \frac{\ell^2 - 4z_0^2}{2\ell a} + \frac{1}{2} \right) \\ &= -\pi^2 a^4 \left( \ln \frac{\ell^2 - 4z_0^2}{2\ell a} + \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Usando  $\rho_A = \rho_B = \rho_-$ , resulta uma força de repulsão da parte  $B$  na parte  $A$  dada por:

$$\vec{F}_{\rho_B \rho_A} = -\frac{\rho_-^2 \pi a^4}{4\epsilon_0} \left[ \ln \frac{\ell^2 - 4z_0^2}{2la} + \frac{1}{4} \right] \hat{z}. \quad (\text{C.12})$$

Executando cálculos semelhantes para a interação entre  $\rho_A$  e  $\sigma_B$  temos (com  $\rho_A = \rho_B = \rho_-$  e  $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_+$ ):

$$\vec{F}_{\sigma_B \rho_A} = \frac{2\sigma_+ a}{4\pi\epsilon_0} J_{\sigma_B \rho_A}^z \hat{z}. \quad (\text{C.13})$$

Aqui  $J_{\sigma_B \rho_A}^z$  é dado pela integral:

$$\begin{aligned} J_{\sigma_B \rho_A}^z &= \int_0^a r_A dr_A \int_0^{2\pi} d\theta_A \int_0^{2\pi} d\theta_B \ln \frac{\ell^2 - 4z_0^2}{2lu'} \\ &= 2\pi \int_0^a r_A dr_A \int_0^{2\pi} d\theta_A \ln \frac{\ell^2 - 4z_0^2}{2la} = 2\pi^2 a^2 \ln \frac{\ell^2 - 4z_0^2}{2la}. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Esta integral dá o mesmo resultado da integral necessária para calcular  $F_{\rho_B \sigma_A}$  e, na aproximação que estamos usando, também dá o mesmo resultado para  $F_{\sigma_B \sigma_A}$ .

$$\vec{F}_{\sigma_B \rho_A} = \vec{F}_{\rho_B \sigma_A} = \frac{2\sigma_+}{a\rho_-} \vec{F}_{\sigma_B \sigma_A} = -\frac{\rho_- \sigma_+ \pi a^3}{2\epsilon_0} \ln \frac{\ell^2 - 4z_0^2}{2la} \hat{z}. \quad (\text{C.15})$$

A força total que a parte  $B$  exerce em  $A$ , ou a soma vetorial das forças (C.12) e (C.15), é repulsiva. Com (C.4) e (C.5) vem que é dada por:

$$\vec{F}_{BA} = -\frac{\rho_-^2 \pi a^4}{16\epsilon_0} \hat{z} = -\frac{i^2 \mu_0 v_d^2}{16\pi c^2} \hat{z}. \quad (\text{C.16})$$

## C.4 Discussão e Conclusão

Concluimos que existe uma tensão longitudinal repulsiva ao longo do fio, simplesmente devido ao fato de existir uma corrente uniforme no fio. Para ilustrar a magnitude das cargas (C.4) e (C.5) e da força (C.16) consideramos um fio de alumínio (densidade de elétrons  $n \approx 6 \times 10^{19}/\text{mm}^3$ ) de raio  $a = 0,6\text{mm}$ , comprimento  $l = 1\text{m}$  e uma corrente da ordem de  $i = 6 \times 10^3\text{A}$  (ou seja, com velocidade de *drifting*  $v_d \approx 0,55\text{m/s}$ ). Isto resulta em densidades de carga da ordem de  $\rho_- \approx -3,2 \times 10^{-8}\text{C/m}^3$  e  $\sigma_+ \approx 9,7 \times 10^{-12}\text{C/m}^2$ ,

numa força da ordem de  $F_{BA} \approx 3 \times 10^{-18} N$ , e uma tensão da ordem de  $T \approx 2,7 \times 10^{-18} N/mm^2$ .

Devido ao fato de que, para romper um fio de alumínio, são necessárias tensões da ordem de 50 a  $500 N/mm^2$  [Gra63, página 48], concluímos que a repulsão coulombiana (C.16) não explica a explosão de fios.

# Referências Bibliográficas

- [AB96] A. K. T. Assis e M. A. Bueno. Equivalence between Ampere and Grassmann's forces. *IEEE Transactions on Magnetics* **32**, 431–436 (1996).
- [AC00] A. K. T. Assis e J. I. Cisneros. Surface charges and fields in a resistive coaxial cable carrying a constant current. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I* **47**, 63–66 (2000).
- [AH99a] A. K. T. Assis e J. A. Hernandez. Cargas superficiais em placas condutoras com correntes constantes. Trabalho apresentado no *XX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*. São Lourenço, MG (25–29 de outubro de 1999).
- [AH99b] A. K. T. Assis e J. A. Hernandez. A repulsão coulombiana não explica o fenômeno da explosão de fios. *Acta Scientiarum* **21**, 837–839 (1999).
- [AH00] A. K. T. Assis e J. A. Hernandez. Propagação de sinais em condutores com a eletrodinâmica de Weber e comparação com o eletromagnetismo clássico. Trabalho apresentado no *XXI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*. São Lourenço, MG (23–27 de outubro de 2000).
- [AM99] A. K. T. Assis e A. J. Mania. Surface charges and electric field in a two-wire resistive transmission line. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **21**, 469–475 (1999).
- [ARM99] A. K. T. Assis, W. A. Rodrigues Jr. e A. J. Mania. The electric field outside a stationary resistive wire carrying a constant current. *Foundations of Physics* **29**, 729–753 (1999).

- [Asp87] H. Aspden. The exploding wire phenomenon as an inductive effect. *Physics Letters A* **120**, 80–82 (1987).
- [Ass94] A. K. T. Assis. *Weber's Electrodynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994).
- [Ass97] A. K. T. Assis. Circuit theory in Weber electrodynamics. *European Journal of Physics* **18**, 241–246 (1997).
- [Ass00] A. K. T. Assis. On the propagation of electromagnetic signals in wires and coaxial cables according to Weber's electrodynamics. *Foundations of Physics* **30**, 1107–1121 (2000).
- [AW95] G. B. Arfken e H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, San Diego, 4ª Edição (1995).
- [BA97a] M. A. Bueno e A. K. T. Assis. Proof of the identity between Ampere and Grassmann's forces. *Physica Scripta* **56**, 554–559 (1997).
- [BA97b] M. A. Bueno e A. K. T. Assis. Self-inductance of solenoids, bi-dimensional rings and coaxial cables. *Helvetica Physica Acta* **70**, 813–821 (1997).
- [BA98a] M. A. Bueno e A. K. T. Assis. *Cálculo de Indutância e de Força em Circuitos Elétricos*. Editora da UFSC/Editora da UEM, Florianópolis/Maringá (1998).
- [BA98b] M. A. Bueno e A. K. T. Assis. Deriving force from inductance. *IEEE Transactions on Magnetics* **34**, 317–319 (1998).
- [EKL76] W. F. Edwards, C. S. Kenyon e D. K. Lemon. Continuing investigation into possible electric fields arising from steady conduction currents. *Physical Review D* **14**, 922–938 (1976).
- [FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison–Wesley, Reading (1964).
- [GA94] P. Graneau e A. K. T. Assis. Kirchhoff on the motion of electricity in conductors. *Apeiron* **19**, 19–25 (1994).

- [Gra63] D. E. Gray. *American Institute of Physics Handbook*. McGraw-Hill, New York (1963).
- [Gra83] P. Graneau. First indication of Ampere tension in solid electric conductors. *Physics Letters A* **97**, 253–255 (1983).
- [Gra84] P. Graneau. Longitudinal magnetic forces. *Journal of Applied Physics* **55**, 2598–2600 (1984).
- [Gra85a] P. Graneau. *Ampere-Neumann Electrodynamics of Metals*. Hadronic Press, Nonantum (1985).
- [Gra85b] P. Graneau. Comments on ‘Equivalence of the Lorentz and Ampere force laws in electrodynamics’ [*Journal of Applied Physics* **57**, 1743 (1985)]. *Journal of Applied Physics* **58**, 3638 (1985).
- [Gra87] P. Graneau. Wire explosions. *Physics Letters A* **120**, 77–79 (1987).
- [Gri89] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2<sup>a</sup> Edição (1989).
- [Hea84] M. A. Heald. Electric fields and charges in elementary circuits. *American Journal of Physics* **52**, 522–526 (1984).
- [Jac75] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, New York, 2<sup>a</sup> Edição (1975).
- [Jac96] J. D. Jackson. Surface charges on circuit wires and resistors play three roles. *American Journal of Physics* **64**, 855–870 (1996).
- [JBK62] O. D. Jefimenko, T. L. Barnett e W. H. Kelly. Confinement and shaping of electric fields by current-carrying conductors. *Proceedings of the West Virginia Academy of Science* **34**, 163–167 (1962).
- [Jef62] O. D. Jefimenko. Demonstration of the electric fields of current-carrying conductors. *American Journal of Physics* **30**, 19–21 (1962).
- [Jef89] O. D. Jefimenko. *Electricity and Magnetism*. Electret Scientific Company, Star City, 2<sup>a</sup> Edição (1989).

- [JM86] C. Jungnickel e R. McCormach. *Intellectual Mastery of Nature*, Volume 1. University of Chicago Press, Chicago (1986).
- [Kir57] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in wires. *Philosophical Magazine* **13**, 393–412 (1857).
- [LLP84] L. D. Landau, E. M. Lifshitz e L. P. Pitaevskii. *Electrodynamics of Continuous Media*. Butterworth-Heinemann, Great Britain, 2<sup>a</sup> Edição (1984).
- [Max54] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover, New York (1954).
- [MS54] P. Moon e D. E. Spencer. A new electrostatics. *Journal of the Franklin Institute* **257**, 369–382 (1954).
- [MS88] P. Moon e D. E. Spencer. *Field Theory Handbook*. Springer-Verlag, Berlin, 2<sup>a</sup> Edição (1988).
- [Nas85] J. Nasilowski. A note on longitudinal Ampere forces in gaseous conductors. *Physics Letters A* **111**, 315–316 (1985).
- [O’R65] A. O’Rahilly. *Electromagnetic Theory — A Critical Examination of Fundamentals*. Dover, New York (1965).
- [RMC82] J. R. Reitz, F. J. Milford e R. W. Christy. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 3<sup>a</sup> Edição (1982).
- [Rus68] B. R. Russell. Surface charges on conductors carrying steady currents. *American Journal of Physics* **36**, 527–529 (1968).
- [San85] R. Sansbury. Detection of a force between a charged metal foil and a current-carrying conductor. *Review of Scientific Instruments* **56**, 415–417 (1985).
- [Som64] A. Sommerfeld. *Electrodynamics*. Academic Press, New York (1964).
- [Str41] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, New York (1941).

- [Web64] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über elektrische Schwingungen. *Abh. sächs. Ges. Wiss.* **6**, 105–241 (1864).
- [Wes90a] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part I. General theory, steady current effects. *Foundations of Physics Letters* **3**, 443–469 (1990).
- [Wes90b] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part II. Unipolar induction, Z-antenna. *Foundations of Physics Letters* **3**, 581–605 (1990).
- [Wes91] J. P. Wesley. *Selected Topics in Advanced Fundamental Physics*. Benjamin Wesley Publisher, Blumberg (1991).
- [Whi73] E. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, Volume 1: The Classical Theories. Humanities Press, New York (1973).