

RELAÇÕES DE DISPERSÃO EM PLASMA LIMITADO, MORNO E MAGNETIZADO

André Koch Torres de Assis

Orientador: Prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida pelo aluno André Koch Torres de Assis e aprovada pela Comissão Julgadora

Campinas 8.12.87

Tese submetida ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Novembro de 1987.

À Koch Coruja, minha Mãe.

Ao Eletricista Sofredor, meu Pai.

À Simples Su, minha Esposa.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Paulo Hiroshi Sakanaka, pela sugestão do tema da tese e pelo exemplo pessoal de extrema dedicação ao seu trabalho.

A todos os colegas do grupo de plasmas, pelo companheirismo e amizade, e em especial ao Hector Ramon Torres Silva e ao Luiz Carvalho Braga, pelo grande número de discussões e trocas de idéias sobre física.

Aos Professores José Busnardo Neto, Ricardo Magnus Osório Galvão, Antônio Montes e Iberê Luiz Caldas pelas críticas construtivas e sugestões relativas ao trabalho.

Ao meu amigo Werner Martins Vieira, pelos desabaços que suportou e pelo apoio e estímulo que sempre me deu.

À Valquíria, ao Augusto, à Cristina e à Cora, pelo carinho e atenção com que sempre me acolheram.

À FAPESP e ao CNPq, pelo suporte financeiro durante toda a pós-graduação.

À UNICAMP e aos seus Professores em geral, pelo muito que me ensinaram.

E a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

índice

Título

Dedicatória

Agradecimentos

Índice

Resumo

Abstract

Capítulo I - Introdução	1
Capítulo II - As Equações Básicas	5
Capítulo III - Plasma Ilimitado	12
Capítulo IV - Equações para as Componentes dos Campos Elétri- co e Magnético	22
Capítulo V - O Tensor Dielétrico do Plasma e as Condições de Contorno	36
Capítulo VI - Relações de Dispersão (Plasma Preenchendo Com- pletamente a Guia)	46
VI.1 - Caso em que $T_0 = 0$ e $B_0 = 0$	48
VI.2 - Caso em que $T_0 = 0$ e $B_0 \rightarrow \infty$	51
VI.3 - Caso em que T_0 é qualquer e $B_0 \rightarrow \infty$	59
VI.4 - Caso em que T_0 é qualquer e $B_0 = 0$	68
VI.4.1 - Método Numérico	75
VI.5 - Caso em que $T_0 = 0$ e B_0 é qualquer	78
VI.6 - Caso em que T_0 é qualquer e B_0 é qualquer	93

Capítulo VII - Relações de Dispersão (Plasma Preenchendo Parcialmente a Guia)	109
VII.1 - Caso em que $T_0 = 0$ e $B_0 = 0$	112
VII.2 - Caso em que $T_0 = 0$ e $B_0 \rightarrow \infty$	116
VII.3 - Caso em que T_0 é qualquer e $B_0 \rightarrow \infty$	119
Capítulo VIII - Conclusão	122
Capítulo IX - Trabalhos Futuros	128
Apêndice A - Cálculo das Raízes de uma Equação Algébrica de Terceiro Grau	132
Apêndice B - Funções de Bessel	135
Apêndice C - Lista de Algumas das Definições mais Utilizadas neste Trabalho	144
Referências	146

Resumo

O objetivo da tese é aplicar a teoria de plasmas mornos, [1,2], ao problema de Trivelpiece e Gould, [3,4], sendo que agora, além de se incluir a temperatura eletrônica, não vai se restringir o estudo ao caso das ondas lentas. Se estuda então a propagação de uma onda eletromagnética em uma guia de onda preenchida por um plasma morno e onde se considera também a presença de um campo magnético externo e constante aplicado ao longo do eixo da guia. A guia de onda que limita o plasma é considerada como sendo um condutor perfeito de seção reta circular.

Além das equações gerais para o plasma e para a onda eletromagnética são apresentadas as condições de contorno adequadas, [2,5]. É obtido o tensor dielétrico para o plasma morno, que deixa de ser uma matriz comum como no caso de plasmas frios e fica agora formalmente como um operador, sendo então uma matriz cujos elementos são derivadas espaciais que vão atuar nas componentes do campo elétrico.

Com a aplicação das condições de contorno são obtidas as relações de dispersão em várias situações distintas que incluem: 1- plasma preenchendo completamente a guia e plasma preenchendo parcialmente a guia (caso em que há vácuo entre o plasma e a guia). 2- temperatura nula (plasma frio) ou temperatura finita qualquer. 3- campo magnético externo nulo, ou de intensidade tendendo a infinito ou de valor finito qualquer. 4- plasma limitado ou plasma ilimitado (raio da guia tendendo a infinito). 5- ondas rápidas e ondas lentas (limite em que $w/k \ll c$). Além disto as relações de dispersão incluem os casos em que a perturbação não apresenta simetria azimutal.

No caso de campo magnético infinito são obtidos os modos de propagação transverso elétrico (TE) e transverso magnético (TM). Quando o campo magnético é finito e não nulo, se obtém a rotação de Faraday e além disto se mostra que as ondas não mais podem ser separadas em ondas TE e TM, e que apenas os modos híbridos podem se propagar (no caso em que a perturbação é sem simetria azimutal).

Abstract

The aim of this thesis is to apply the warm plasma theory, [1,2], to the Trivelpiece and Gould problem, [3,4], but now, besides the inclusion of the electron temperature, the study will not be restricted to the slow wave cases. The propagation of an electromagnetic wave in a warm plasma-filled waveguide is studied and the presence of a constant external magnetic field applied along the guide axis is also considered. The waveguide that limits the plasma is considered to be a perfect conductor of circular cross-section.

Besides the plasma and electromagnetic wave equations, the suitable boundary conditions, [2,5], are presented. The warm plasma dielectric tensor is obtained, which is not the usual matrix as in the cold plasma case but it is an operator. This operator is a matrix whose elements are spatial derivatives that will operate on the electric field components.

With the application of the boundary conditions the dispersion relations are obtained in several distinct situations that include: 1- plasma filling completely the guide and plasma partially filling the guide (case in which there is vacuum between the plasma and the guide). 2- null temperature (cold plasma) and any finite temperature. 3- null external magnetic field, or with intensity tending to infinite or of any finite value. 4- bounded or unbounded plasma (guide radius tending to infinite). 5- fast waves and slow waves (limit in which $w/k \ll c$). Moreover the dispersion relations obtained include the cases in which the perturbation is not azimuthally symmetric.

In the case of infinite magnetic field the transverse electric (TE) and transverse magnetic (TM) modes of propagation are obtained. When the magnetic field is finite and not null, the Faraday rotation is obtained and it is shown that the waves can not be separated into TE and TM, and that only hybrid modes can propagate (in the case in which the perturbation has no azimuthal symmetry).

Capítulo I - Introdução

O estudo de propagação de ondas em plasmas é um assunto importante e extremamente rico. Muitos enfoques distintos podem ser dados a este tópico dependendo dos objetivos a que se visa alcançar. Um grande número de trabalhos já foi dedicado à compreensão da propagação de ondas em plasmas ilimitados, sejam homogêneos ou inhomogêneos, tanto através de uma análise por teoria de fluidos (ver, por exemplo, referência [6]) quanto por uma análise por teoria cinética ([7]). Também já foram desenvolvidos trabalhos de propagação de ondas em plasmas limitados, especialmente nas décadas de 50 e 60 quando então a construção de arranjos experimentais em laboratório para produção e diagnóstico de plasmas permitiu que se fizesse uma comparação mais detalhada entre teoria e experimento. Entre estes trabalhos cita-se os importantes trabalhos de Vandenplas, [8,9], e de Trivelpiece e Gould, [3,4]. O primeiro tratou do espalhamento de ondas planas por uma coluna de plasma e fez uma comparação detalhada entre a teoria de fluidos utilizada e os resultados experimentais, conseguindo uma boa concordância entre ambos. Mais detalhadamente, a situação estudada por Vandenplas foi a de uma coluna de plasma limitada por um tubo cilíndrico de vidro circundado pelo ar, e onde a onda plana incidente era caracterizada por ter \vec{E} e \vec{B} ($= \vec{E} \times \vec{H}$) perpendiculares ao tubo de plasma e ele analisava as ondas refletidas e transmitidas pela coluna de plasma. Com isto pôde detectar as ressonâncias da coluna de plasma e então medir com grande precisão as densidades médias do plasma.

Já os trabalhos de Trivelpiece e Gould trataram da excitação e propagação de uma onda dentro da coluna de plasma e também fizeram

uma comparação detalhada entre a teoria e os resultados experimentais. O trabalho desenvolvido nesta tese tem muitos pontos em comum com o que foi desenvolvido por estes autores e então ele servirá de base para comparação com alguns dos resultados obtidos aqui. De qualquer forma vale ressaltar que o estudo de Trivelpiece se restringiu a analisar os casos de plasma frio e quase sempre ele usou a aproximação eletrostática para o estudo das ondas ($\vec{H}_1 = 0$, $\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\phi_1$).

Além destes trabalhos cita-se também o de Allis, Buchsbaum e Bers, [10], onde é tratada a propagação de ondas em plasmas ilimitados e também em guias de onda. Neste livro são tratadas duas situações distintas quando da propagação de ondas em guias: campo magnético de equilíbrio paralelo e perpendicular ao eixo da guia. Apenas é bom frisar que nestas duas situações a análise é restrita ao estudo de plasmas frios (quando da obtenção das relações de dispersão etc). A denominação usada por estes autores para o termo "plasma frio" é "plasma temperado".

À medida em que as máquinas de plasma foram crescendo de tamanho o estudo da propagação das ondas de alta frequência via condições de contorno foi perdendo o interesse já que então um tratamento local do problema é mais do que suficiente, como é o caso em tokamaks grandes. Nestes casos tem-se usado a aproximação WKB com grande proveito. Um outro motivo para estes estudos terem parado num certo ponto de desenvolvimento foi que a cada dia se centrou mais atenção no aquecimento através das ressonâncias, o que impedia um tratamento pela teoria de fluidos. Por outro lado, quando se trata de estudar o aquecimento de íons através de ondas de baixa frequência em máquinas grandes ou então quando se estuda a propagação de ondas de alta frequência

em pequenos aparelhos de plasma, então um tratamento global do problema se torna necessário. Este trabalho vai tratar da propagação de ondas eletromagnéticas de alta frequência em plasmas limitados e vai-se usar como padrão para os cálculos os parâmetros da máquina linear LISA, [11,12], da Universidade Federal Fluminense, já que então o comprimento de onda da excitação é da ordem do diâmetro da máquina.

O objetivo geral deste trabalho é o de fazer um estudo analítico bem amplo das relações de dispersão ($\omega \times k$) no caso de se ter um plasma morno magnetizado limitado por uma guia de onda de seção reta circular. É analisada a propagação de uma onda eletromagnética de alta frequência como sendo uma perturbação do estado de equilíbrio do plasma. O movimento dos íons é desprezado em função da alta frequência das oscilações e a temperatura dos elétrons é introduzida desde o começo nas equações que regem o fenômeno. Este estudo não se restringe às ondas eletrostáticas e então a parte perturbada do campo magnético é considerada ao se resolver o problema.

No Capítulo II são apresentadas as equações básicas que descrevem a propagação de ondas em um plasma morno magnetizado e também como ficam estas equações quando é aplicado um processo de linearização (o caso sendo tratado aqui é de um plasma sem velocidade macroscópica de equilíbrio e na presença de um campo magnético de equilíbrio uniforme). Também são apresentadas as equações para a região de vácuo. No Capítulo III é apresentado um resumo dos principais resultados quando da propagação de ondas planas em plasmas homogêneos e ilimitados. No Capítulo IV são obtidas explicitamente as equações para as componentes dos vetores campo elétrico, campo magnético e vetor velocidade dos elétrons (usam-se coordenadas cilíndricas em função da geo-

metria do problema). Em especial são apresentadas as equações para as componentes longitudinais E_z e H_z nos casos de um campo magnético de equilíbrio nulo, finito ou infinito. No Capítulo V é obtido o tensor dielétrico de um plasma morno magnetizado quando se faz um tratamento global do problema e se mostra que os elementos deste tensor contêm derivadas espaciais que vão atuar nas componentes do vetor campo elétrico. Também são obtidas as condições de contorno nas interfaces plasma-condutor, plasma-vácuo e vácuo-condutor. No Capítulo VI são obtidas as relações de dispersão nos casos em que o plasma preenche completamente a guia. No caso de um campo magnético finito e não nulo se mostra que apenas os modos híbridos podem se propagar no caso de excitações azimutalmente assimétricas. Já no caso de um campo magnético infinito é sempre possível a excitação de modos transversos elétrico e transversos magnéticos. A rotação de Faraday é obtida tanto nos casos de um plasma morno na presença de um campo magnético finito quanto nos casos de um plasma frio magnetizado. Uma comparação com um resultado de Trivelpiece é apresentada. Também se compara o resultado geral obtido com aquele apresentado por Ghosh e Pal, [13], que trataram com um problema análogo a este. No Capítulo VII são obtidas as relações de dispersão em três casos em que o plasma preenche parcialmente a guia (havendo uma camada de vácuo entre o plasma e o condutor). No Capítulo VIII são apresentadas as conclusões deste trabalho e no Capítulo IX se mostram algumas possíveis linhas futuras de pesquisa em continuação ao que foi feito até aqui.

Cabe ainda ressaltar que partes desta tese já haviam aparecido em trabalhos anteriores ([14] a [17]).

Capítulo II - As Equações Básicas

O objetivo deste trabalho é estudar o problema de Trivelpiece e Gould, [3,4], introduzindo agora a temperatura dos elétrons e considerando desde o início a parte perturbada do campo magnético. Ou seja, o estudo não será restrito aos modos eletrostáticos.

Partindo desta finalidade, usou-se como modelo tratar o plasma como sendo um fluido adiabático no qual os íons estão em repouso. Esta aproximação é válida no regime de altas frequências, $\omega \gg \omega_{ci}$ e $\omega \gg \omega_{pi}$, quando então o movimento dos íons é totalmente desprezível. Se considera ainda que no equilíbrio o plasma é neutro eletricamente, ou seja, $n_{i0} = n_{e0}$. Como os íons vão ser considerados em repouso, só vão interessar aqui as equações relativas aos elétrons: Com isto as equações que descrevem o sistema ficam na forma (equação de continuidade, de transferência de momento, de Faraday, de Ampère-Maxwell e equação de estado, respectivamente):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{v}) = 0, \quad (1)$$

$$nm \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = - ne (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} p, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \quad (4)$$

$$p = nk_B T = an^\gamma , \quad (5)$$

onde n , \vec{v} , m , $-e$, \vec{E} , \vec{H} , μ_0 , ϵ_0 , p , \vec{J} , k_B , T , a e γ são, respectivamente, a densidade e a velocidade do fluido, a massa e a carga do elétron, os campos elétrico e magnético, a permeabilidade magnética e a constante dielétrica do vácuo, a pressão do plasma, a densidade de corrente de convecção, a constante de Boltzmann, a temperatura dos elétrons, uma constante de proporcionalidade e a razão dos calores específicos (em geral tem-se $\gamma = (2 + N)/N$, onde N é o número de graus de liberdade de uma molécula do gás). Em todo o trabalho vai ser usado o Sistema Internacional de Unidades MKSA.

Para resolver estas equações usa-se um processo de linearização, onde se supõe uma onda eletromagnética de baixa intensidade perturbando o estado de equilíbrio do plasma. Supõe-se uma perturbação com dependência temporal do tipo $e^{-i\omega t}$, onde ω é a frequência angular do campo eletromagnético que excita o plasma. Com isto todas as quantidades têm um valor médio de equilíbrio independente do tempo, mais uma pequena perturbação variando no tempo:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}_0(\vec{r}) + \vec{F}_1(\vec{r})e^{-i\omega t} , \quad (6)$$

onde: $\left| \vec{F}_1 \right| \ll \left| \vec{F}_0 \right| . \quad (7)$

Supondo que não haja campo elétrico de equilíbrio ($\vec{E}_0(\vec{r}) = 0$), que a situação de equilíbrio seja sem velocidade macroscópica ($\vec{v}_0(\vec{r}) = 0$), que haja a aplicação de um campo magnético externo uniforme ($\vec{B}_0(\vec{r}) = \vec{B}_0 = \text{constante qualquer que seja } \vec{r}$) e usando $\vec{J} = -ne\vec{v}$, então se chega ao seguinte resultado para os termos de ordem zero:

$$\vec{\nabla} p_0(\vec{r}) = 0 \quad ,$$

$$\vec{\nabla} n_0(\vec{r}) = 0 \quad , \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} T_0(\vec{r}) = 0 \quad ,$$

ou seja, todas estas grandezas de equilíbrio são constantes para qualquer \vec{r} (serão denominadas, de agora em diante, apenas por p_0 , n_0 e T_0).

Usando estes resultados obtêm-se as seguintes equações de primeira ordem (desprezando os termos de ordens superiores $n_1\vec{v}_1$, $\vec{v}_1 \times \vec{B}_1$ etc):

$$i\omega p_1 = n_0 m U^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 \quad , \quad (9)$$

$$i\omega n_0 m \vec{v}_1 = n_0 e (\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0) + \vec{\nabla} p_1 \quad , \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = i\omega \mu_0 \vec{H}_1 \quad , \quad (11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = -i\omega \epsilon_0 \vec{E}_1 - n_0 e \vec{v}_1 \quad , \quad (12)$$

onde:
$$U = \frac{(\gamma k_B T_0)^{1/2}}{m} , \quad (13)$$

é a velocidade térmica dos elétrons em um plasma adiabático (nos casos em que B_0 é finito ou nulo vai-se usar $\gamma = 5/3$, enquanto que nos casos em que $B_0 \rightarrow \infty$ vai-se usar $\gamma = 3$).

Com isto então vê-se que o conjunto de equações básicas se reduz a 10 equações com 10 incógnitas (\vec{B}_0 é dado externamente, e T_0 e n_0 são uma característica de cada experimento).

Duas situações são estudadas neste trabalho: plasma preenchendo completamente a guia de onda e plasma preenchendo parcialmente a guia. Nestas duas situações as equações que descrevem a interação da onda eletromagnética com o plasma vão ser as mesmas, (9) a (13), mas na segunda situação são necessárias as equações que descrevem as ondas eletromagnéticas na região de vácuo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_v = - \frac{\partial \vec{B}_v}{\partial t} = i\omega \mu_0 \vec{H}_v , \quad (14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_v = \frac{\partial \vec{D}_v}{\partial t} = - i\omega \epsilon_0 \vec{E}_v , \quad (15)$$

onde \vec{E}_v e \vec{H}_v são, respectivamente, os campos elétrico e magnético de primeira ordem na região de vácuo.

Com isto então já se obteve o conjunto completo de equações que descrevem todos os fenômenos possíveis neste modelo. Algumas observações se fazem necessárias sobre estas equações. A primeira é de-

vido ao fato de se estar usando um modelo de fluido, que é uma visão macroscópica da situação, em vez de algo mais sofisticado como a teoria cinética, que permite um tratamento microscópico do fenômeno. A justificativa para isto é que a maioria dos fenômenos podem ser explicados por modelos de fluidos [18]. Apesar disto este modelo não vale sempre e em especial ele deixa de ser válido nas regiões de ressonância, quando então o tratamento via teoria cinética é imprescindível. Numa frequência típica de ressonância o que ocorre de característico é que a velocidade de fase da onda tende a zero, o que implica que deixará de ser válida a relação $v_1 \ll \omega/k$. Ainda em termos da distinção entre os tratamentos por teoria cinética e por teoria de fluidos, vem que usualmente ao se considerar a temperatura de um plasma pela teoria cinética se usa a expressão "plasma quente", enquanto que se a temperatura é introduzida via modelo de fluido se usa o termo "plasma morno". Como o tratamento neste trabalho é por teoria de fluido, se optou por usar o termo plasma morno, para ficar mais de acordo com a terminologia usual.

Outra observação é que na equação (2) foi desprezada a força devido às colisões. Isto é justificável pelo fato de que em grande parte das situações experimentais os plasmas são, em boa aproximação, não colisionais. Uma aproximação razoável para a densidade de força devida às colisões é dada por ([19,20]):

$$\vec{f}_{col.} = - mn \gamma \vec{v} \quad , \quad (16)$$

onde:
$$\gamma(v) = \frac{e^4 n_0 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m^2 v^3} \quad , \quad (17)$$

é a frequência de colisão elétron-íon (nessa expressão $\ln \Lambda$ é o fator de Spitzer, que depende de n_0 e T_0 , embora varie pouco em relação a estas grandezas, e então tipicamente pode-se utilizar $\ln \Lambda = 10$ com boa aproximação). Aplicando-se esta expressão em (10) vê-se que os termos básicos a serem comparados para ver da necessidade de se incluir ou não o termo de colisão são w e ν . Para se ter uma ordem de grandeza destes termos são usados os parâmetros da máquina linear LISA, [11,12]. Em outros momentos deste trabalho também são usados estes parâmetros como comparação em função da grande semelhança do modelo desta tese com a LISA, já que esta máquina é caracterizada por um plasma morno, altamente ionizado, magnetizado, sem velocidade macroscópica de equilíbrio, limitado por uma guia de onda metálica de seção reta circular e excitado externamente por uma onda eletromagnética de alta frequência. Suas características principais são:

$$\begin{aligned}
 n_0 &= 8 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3} ; \quad \omega_p = 5,04 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} ; \\
 k_B T_0 &= 40 \text{ eV} ; \quad T_0 = 4,64 \cdot 10^5 \text{ K} ; \quad U = 3,42 \cdot 10^6 \text{ m/s} ; \\
 B_0 &= 0,089 \text{ T} ; \quad \omega_c = 1,57 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} ; \\
 R &= 0,085 \text{ m} ; \\
 f &= 2,45 \text{ GHz} ; \quad w = 1,54 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} ;
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

sendo R o raio da guia.

Substituindo em (17) v pela velocidade térmica dos elétrons e usando estes dados vem que

$$\nu \approx 5,5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} ; \quad \frac{\nu}{\omega} \approx 3 \cdot 10^{-7} , \quad (19)$$

mostrando então que é inteiramente justificável se desprezar a frequência de colisão nesta situação. Como a frequência de colisão cai como $T_e^{3/2}$, vê-se que se o plasma for mais aquecido as colisões serão menores e a aproximação melhor ainda (para uma mesma densidade).

Também não foi levado em conta nestas equações o efeito de interação do spin dos elétrons com o campo magnético externo uma vez que este efeito é completamente mascarado mesmo à temperatura ambiente (para $B_0 = 0,1 \text{ T}$ vem que $\Delta E_{\text{spin}}/k_B = 0,15 \text{ K}$).

Outra observação é que pode-se usar o mesmo conjunto de equações para tratar de plasmas isotérmicos, bastando para isto colocar $\gamma = 1$ em (5). O coeficiente γ depende então da lei de perturbação escolhida para a equação de estado (e esta escolha vai depender do problema físico que estiver sendo estudado).

Capítulo III - Plasma Ilimitado

Antes de entrar no estudo das equações (9) a (13) para tratar de plasmas limitados, é feito um breve resumo do estudo de plasmas ilimitados, estudo este que se encontra na maioria dos livros-texto desta área (ver, por exemplo, [21], [22] ou [23]).

Num plasma homogêneo e ilimitado, onde não entram considerações sobre as condições de contorno, podem se propagar ondas planas perturbando o meio homogêneo. Estas são caracterizadas por deixarem todas as quantidades perturbadas na forma

$$\vec{F}_1(\vec{r}, t) = \vec{F}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad , \quad (20)$$

o que faz com que o operador $\vec{\nabla}$ possa ser substituído por $i\vec{k}$.

Antes de dar os resultados, é feito um sumário da terminologia mais usada neste assunto de propagação de ondas ([18]):

- ondas paralelas: quando $\vec{k} // \vec{B}_0$,
- ondas perpendiculares: quando $\vec{k} \perp \vec{B}_0$,
- ondas longitudinais: quando $\vec{k} // \vec{E}_1$,
- ondas transversais: quando $\vec{k} \perp \vec{E}_1$,
- ondas eletromagnéticas: quando $\vec{B}_1 \neq 0$,
- ondas eletrostáticas: quando $\vec{B}_1 = 0$,
- ondas lentas: quando $\omega/k \ll c$,

onde c é a velocidade da luz no vácuo ($c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$). No caso das ondas planas é fácil ver, pelas equações de Maxwell, que as ondas lon-

gitudinais também são eletrostáticas e que as ondas transversais também são eletromagnéticas. Além disto vem que no caso das ondas eletrostáticas é possível derivar o campo elétrico de um potencial escalar na forma

$$\vec{E}_1 = - \vec{\nabla} \phi_1 \quad . \quad (22)$$

Para se obter o tensor dielétrico neste caso se substitui $\vec{\nabla}$ por $i\vec{k}$ nas equações (9) a (12) e então, à partir de (9) e (10), se obtém \vec{V}_1 em função de \vec{E}_1 . Escolhendo os eixos de tal forma que

$$\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z \quad , \quad (23)$$

$$\vec{k} = k_{\perp} \hat{e}_x + k_{//} \hat{e}_z \quad , \quad (24)$$

vem que pode-se escrever (12) na forma (depois de substituir a expressão obtida de \vec{V}_1 em função de \vec{E}_1 em (12)):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = - i\omega \hat{\epsilon} \cdot \vec{E}_1 \quad , \quad (25)$$

onde $\hat{\epsilon}$ é o tensor dielétrico de um plasma morno ilimitado dado por

$$\vec{E} = E_0 \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2 - k_{\perp}^2 U^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & \frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{-k_{//} k_{\perp} U^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \\ \frac{-i\omega_c(\omega_p^2 + k_{\perp}^2 U^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & \frac{-i\omega_c k_{//} k_{\perp} U^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \\ \frac{-k_{//} k_{\perp} U^2}{\omega^2} & 0 & \frac{\omega^2 - \omega_p^2 - k_{//}^2 U^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

onde: $\omega_p = \left(\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0} \right)^{1/2}$, $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$, $\quad (27)$

são, respectivamente, a frequência de plasma e a frequência de ciclotron dos elétrons. Esta expressão para o tensor dielétrico fica muito simplificada no caso de um plasma frio ($U = 0$), ou quando $k_{//}$ ou k_{\perp} se anulam.

A relação de dispersão é então facilmente obtida à partir de (25) e de (11):

$$-\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_1) = \omega^2 \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{E}_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{k} \cdot \vec{E}_1, \quad (28)$$

onde: $\vec{E} = E_0 \vec{k}$. $\quad (29)$

A equação (28) ainda pode ser escrita na forma

$$\vec{\omega} \cdot \vec{E}_1 = 0, \quad (30)$$

onde:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{i\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{k_{//} k_{\perp} [\omega^2 (c^2 - U^2) - \omega_c^2 c^2]}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} \\ \frac{-i\omega_c (\omega_p^2 + k_{\perp}^2 U^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & \epsilon_{22} & \frac{-i\omega_c k_{//} k_{\perp} U^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \\ \frac{k_{//} k_{\perp} (c^2 - U^2)}{\omega^2} & 0 & \frac{\omega^2 - \omega_p^2 - k_{//}^2 U^2 - k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

onde:

$$\epsilon_{11} = \frac{\omega^4 - (\omega_p^2 + \omega_c^2 + k_{//}^2 c^2 + k_{\perp}^2 U^2) \omega^2 + \omega_c^2 k_{//}^2 c^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} \quad (32)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\omega^4 - (\omega_p^2 + \omega_c^2 + k_{//}^2 c^2 + k_{\perp}^2 c^2) \omega^2 + \omega_c^2 (k_{//}^2 c^2 + k_{\perp}^2 c^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)}$$

Como não se quer a solução trivial $\vec{E}_{\perp} = 0$, obtém-se então a relação de dispersão dada por

$$\det(\vec{\epsilon}) = 0 \quad (33)$$

São dados aqui apenas os resultados dos casos limites em que $\vec{k} // \vec{B}_0$ e $\vec{k} \perp \vec{B}_0$. No primeiro destes casos há três modos que podem se propagar: o modo circularmente polarizado para a direita (CPD), o modo circularmente polarizado para a esquerda (CPE) e o modo de Bohm-

Gross, com as seguintes relações de dispersão, respectivamente:

$$\omega^3 + \omega_c \omega^2 - (\omega_p^2 + k_{//}^2/c^2)\omega - \omega_c k_{//}^2/c^2 = 0, \quad (34)$$

$$\omega^3 - \omega_c \omega^2 - (\omega_p^2 + k_{//}^2/c^2)\omega + \omega_c k_{//}^2/c^2 = 0, \quad (35)$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k_{//}^2/U^2. \quad (36)$$

As duas primeiras são ondas transversais que não são influenciadas pela temperatura, enquanto que a terceira é uma onda longitudinal que não é influenciada pelo campo magnético. O gráfico destas relações de dispersão ($\omega \times k_{//}$) e também o da velocidade de fase contra ω são mostrados a seguir (estas figuras e as seguintes foram tiradas do livro de Bittencourt, [23], com autorização do autor):

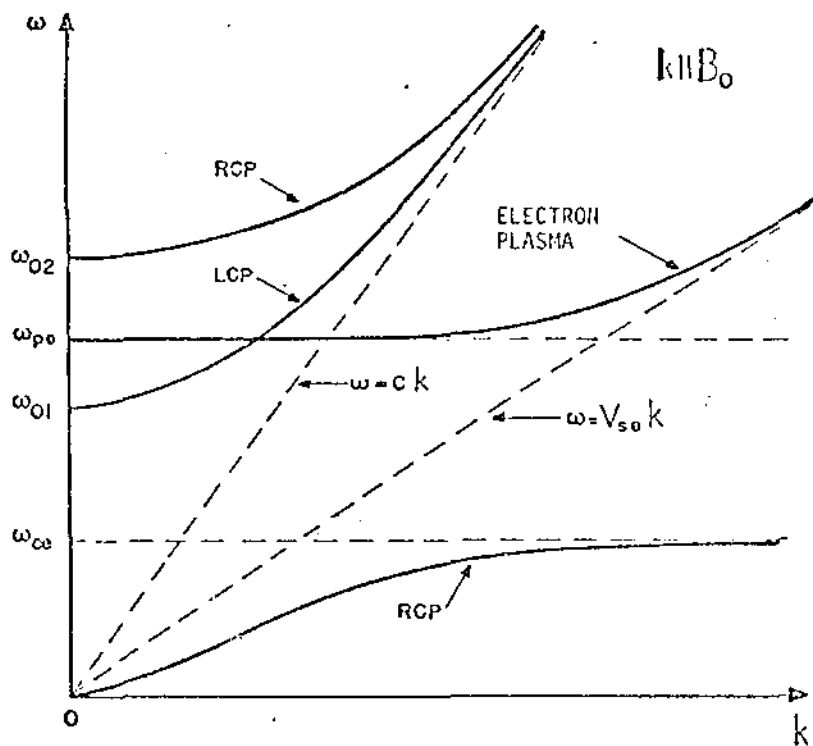


Figura 1: Relação de dispersão para ondas propagando paralelo a \vec{B}_0 em um plasma morno.

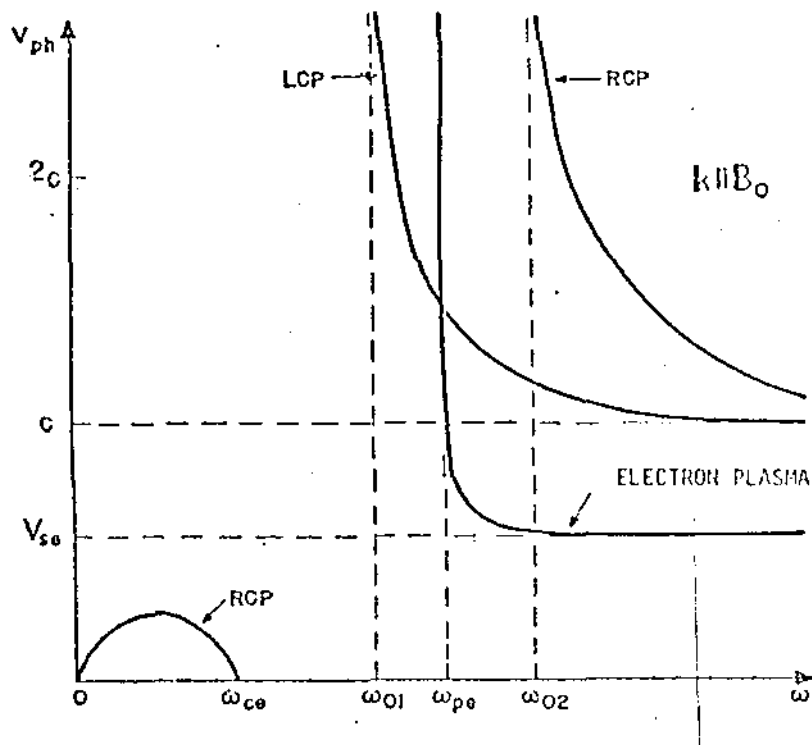


Figura 2: Velocidade de fase como uma função da frequência para ondas propagando na direção de \vec{B}_0 em um plasma quente.

Já no caso de propagação perpendicular ao campo magnético também existem três modos que podem se propagar: o modo transversal ordinário (que não é influenciado pela temperatura nem pelo campo magnético), o modo transversal extraordinário (influenciado pela temperatura e pelo campo magnético), e o modo parcialmente transversal (onda eletromagnética extraordinária no limite de alta velocidade de fase) e parcialmente longitudinal (onda de elétron-plasma no limite de baixa velocidade de fase). Estes modos apresentam as seguintes relações de dispersão, respectivamente:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k_{\perp}^2 c^2, \quad (37)$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_a^2 + (\omega_a^4 - 4\omega_b^4)^{1/2}}{2}, \quad (38)$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_a^2 - (\omega_a^4 - 4\omega_b^4)^{1/2}}{2}, \quad (39)$$

onde

$$\omega_a^2 = (2\omega_p^2 + \omega_c^2 + k_{\perp}^2 c^2 + k_{\perp}^2 U^2)^{1/2}, \quad (40)$$

$$\omega_b^2 = (\omega_p^4 + \omega_p^2 k_{\perp}^2 c^2 + \omega_p^2 k_{\perp}^2 U^2 + k_{\perp}^4 c^2 U^2 + \omega_c^2 k_{\perp}^2 c^2)^{1/4}.$$

O gráfico destas curvas é mostrado à seguir:

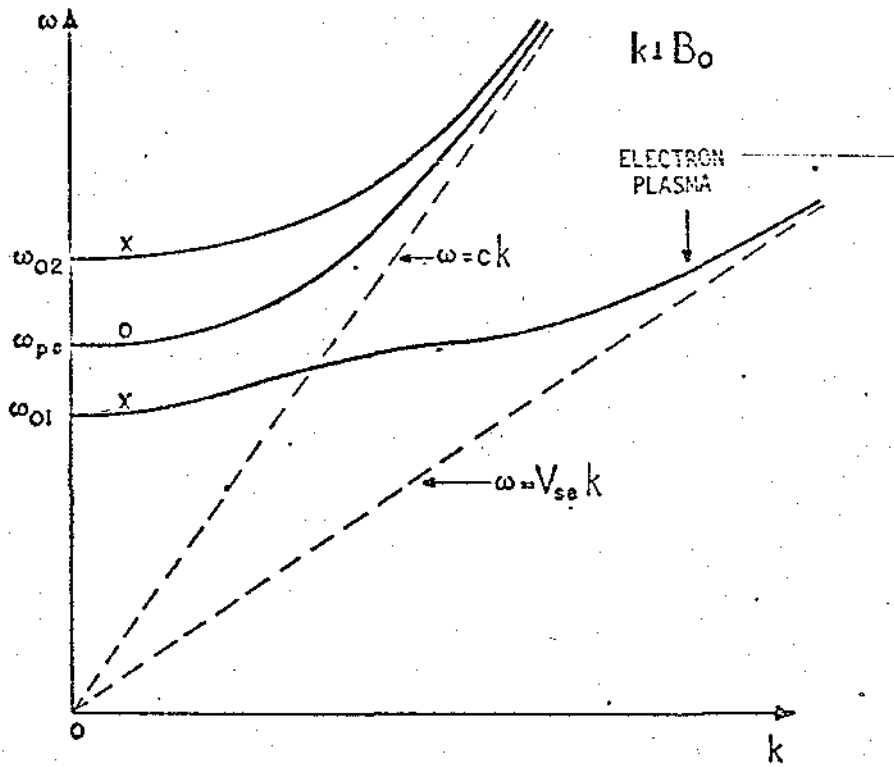


Figura 3: Relação de dispersão para ondas propagando perpendicular a \vec{B}_0 em um plasma morno.

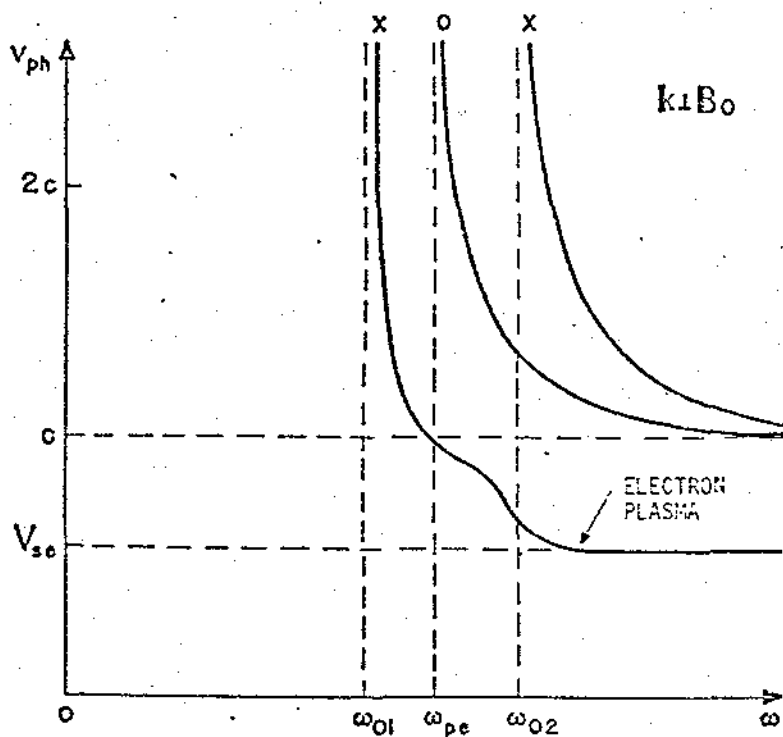


Figura 4: Velocidade de fase como uma função da frequência para ondas propagando perpendicular a \vec{B}_0 em um plasma morno.

Em física de plasmas a terminologia onda ordinária se refere às ondas que não são afetadas pelo campo magnético, enquanto que as ondas afetadas por este campo são chamadas de extraordinárias (no caso de propagação perpendicular a \vec{B}_0). Esta terminologia é oposta à usada em ótica de cristais.

Com isto se encerra o breve resumo para plasmas ilimitados.

Capítulo IV - Equações para as Componentes dos Campos Elétrico e Magnético

Neste trabalho os casos estudados são aqueles em que o plasma é limitado por uma guia cilíndrica de seção reta circular, e com um campo magnético uniforme paralelo ao eixo da guia. Escolhendo então o sistema de coordenadas cilíndricas, com eixo Z coincidindo com o eixo da guia, vem (ver também equação (23)):

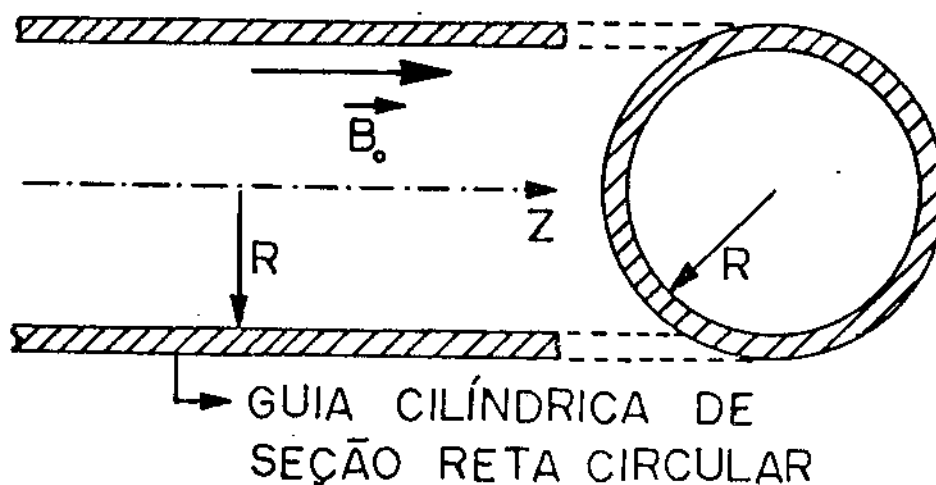


Figura 5: Geometria do sistema.

Supõe-se que todas as quantidades envolvidas no problema têm uma dependência espacial na forma

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = (\vec{F}_\perp(r) + F_z(r)\hat{e}_z) e^{i(K_z z - m\theta)} \quad (41)$$

sendo: $\vec{F}_\perp(r) = F_r(r)\hat{e}_r + F_\theta(r)\hat{e}_\theta$. (42)

Como o sistema tem de ser periódico em θ , com período 2π , n tem de ser inteiro, ou seja,

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (43)$$

A discretização do número de onda paralelo ao campo magnético, $k_{//}$, também deve ser considerada em máquinas finitas. Caso a guia que limita o plasma seja infinita em comprimento e sem condições de contorno ao longo do eixo Z, então $k_{//}$ pode assumir qualquer valor. Se em vez disto se supor um modelo de toróide linear, ou seja, um cilindro de comprimento infinito mas com periodicidade $2\pi R_0$ (R_0 sendo o raio maior do toróide), então tem-se que

$$k_{//}2\pi R_0 = 2\pi m, \quad \text{ou} \quad k_{//} = \frac{m}{R_0}, \quad (44)$$

onde m é um inteiro positivo. Uma outra quantização ocorre se tivermos uma guia cilíndrica de comprimento L , limitada longitudinalmente por duas placas metálicas perfeitamente condutoras. Neste caso as condições de contorno em $z = 0$ e em $z = L$ impoem que ([24]):

$$k_{//}L = m\pi, \quad (45)$$

indicando que ao longo do eixo da guia há um número inteiro de meios comprimento de onda.

Após estas considerações parte-se agora para a obtenção das equações para as componentes dos vetores velocidade, campo elétrico e campo magnético.

Separando (11) em partes paralela e perpendicular ao eixo Z vem:

$$\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{E}_{\perp} = i\omega \mu_0 H_z \hat{e}_z \quad (46)$$

$$\vec{\nabla}_{\perp} \times (E_z \hat{e}_z) + ik_{//} (\hat{e}_z \times \vec{E}_{\perp}) = i\omega \mu_0 \vec{H}_{\perp} \quad (47)$$

onde:

$$\vec{\nabla}_{\perp} = \hat{e}_r \frac{d}{dr} - \frac{in\hat{e}_{\theta}}{r} \quad (48)$$

Tirando o divergente de (12) e aplicando em (9) e então aplicando o resultado em (10) se obtém (separando já o resultado final em partes paralela e perpendicular ao eixo Z), usando novamente (12).

$$\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{H}_{\perp} = - \frac{i\omega \epsilon_0 \omega^2 - \omega_p^2 E_z \hat{e}_z}{\omega^2} + \frac{\epsilon_0 k_{//} U^2}{\omega} (\vec{\nabla}_{\perp} \cdot \vec{E}_{\perp} + ik_{//} E_z) \hat{e}_z \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{\perp} \times (H_z \hat{e}_z) + ik_{//} \hat{e}_z \times \vec{H}_{\perp} + \frac{i\omega_c}{\omega} (ik_{//} \vec{H}_{\perp} - \vec{\nabla}_{\perp} H_z) = \\ = - \frac{i\omega \epsilon_0 \omega^2 - \omega_p^2 \vec{E}_{\perp}}{\omega^2} + \epsilon_0 \omega_c \vec{E}_{\perp} \times \hat{e}_z - \frac{i\epsilon_0 U^2}{\omega} \vec{\nabla}_{\perp} (\vec{\nabla}_{\perp} \cdot \vec{E}_{\perp} + \end{aligned}$$

$$+ ik_{//} E_z) \quad (50)$$

Multiplicando vetorialmente ambos os lados de (47) por \hat{e}_z e aplicando o resultado em (49) e (50) se obtém:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_c k_f^2 \vec{H}_\perp}{\omega} - ik_e^2 (\hat{e}_z \times \vec{H}_\perp) &= k_{//} (\hat{e}_z \times \vec{\nabla}_\perp H_z) - \frac{\omega \epsilon_0 \omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_\perp E_z - \\ &- \frac{\epsilon_0 c^2 U^2}{\omega(c^2 - U^2)} \vec{\nabla}_\perp (\vec{\nabla}_\perp^2 + k_e^2) E_z + i \epsilon_0 \omega c (\hat{e}_z \times \vec{\nabla}_\perp E_z) + \\ &+ ik_{//} \frac{\vec{\nabla}_\perp H_z}{\omega} \quad (51) \end{aligned}$$

$$\text{onde: } k_f = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_{//}^2 \right)^{1/2}, \quad k_e = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \omega_p^2 - k_{//}^2 \right)^{1/2} \quad (52)$$

Aplicando (47) em (50) e tirando o gradiente do divergente de ambos os membros da equação (47), já multiplicada vetorialmente por \hat{e}_z , e colocando todos estes resultados em (49) se obtém

$$\begin{aligned} k_e^2 \vec{E}_\perp - \frac{i \omega_c k_f^2}{\omega} (\hat{e}_z \times \vec{E}_\perp) &= ik_{//} \vec{\nabla}_\perp E_z - i \omega \mu_0 (\hat{e}_z \times \vec{\nabla}_\perp H_z) + \\ &+ \frac{i U^2}{k_{//} (c^2 - U^2)} \vec{\nabla}_\perp (\vec{\nabla}_\perp^2 + k_e^2) E_z + k_{//} \frac{\vec{\nabla}_\perp E_z}{\omega} + \end{aligned}$$

$$+ \mathcal{M}_0 w_c \vec{\nabla}_\perp H_z \quad (53)$$

Separando (51) e (53) em componentes se obtém:

$$GE_r = nA_1 E_z + nB_1 H_z + C_1 \frac{dE_z}{dr} + D_1 \frac{dH_z}{dr} \quad (54)$$

$$iGE_\theta = \frac{nC_1 E_z}{r} + \frac{nD_1 H_z}{r} + rA_1 \frac{dE_z}{dr} + rB_1 \frac{dH_z}{dr} \quad (55)$$

$$GH_r = nA_2 E_z + nB_2 H_z + C_2 \frac{dE_z}{dr} + D_2 \frac{dH_z}{dr} \quad (56)$$

$$iGH_\theta = \frac{nC_2 E_z}{r} + \frac{nD_2 H_z}{r} + rA_2 \frac{dE_z}{dr} + rB_2 \frac{dH_z}{dr} \quad (57)$$

sendo

$$G = k_e^4 - \frac{w_c^2 k_f^4}{w^2} \quad (58)$$

e onde

$$A_1 = - \frac{ik // w_c}{rc^2 w} \left(w_p^2 + \frac{c^2 U^2}{c^2 - U^2} \frac{k_f^2}{k //} (\vec{\nabla}_\perp^2 + k_e^2) \right)$$

$$B_1 = \frac{\omega \mu_0}{r} \left(k_e^2 - \frac{\omega_c^2 k_f^2}{\omega^2} \right)$$

(59)

$$C_1 = ik // \left(k_e^2 - \frac{\omega_c^2 k_f^2}{\omega^2} + \frac{U^2 k_e^2}{k // (c^2 - U^2)} (\nabla_{\perp}^2 + k_e^2) \right)$$

$$D_1 = - \frac{\mu_0 \omega_c \omega_p^2}{c^2}$$

Ainda:

$$A_2 = - \frac{\epsilon_0 (\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega r} \left(k_e^2 - \frac{\omega_c^2 k_f^2}{\omega^2 - \omega_p^2} + \frac{k_e^2 c^2 U^2 (\nabla_{\perp}^2 + k_e^2)}{(\omega^2 - \omega_p^2)(c^2 - U^2)} \right)$$

$$B_2 = - \frac{ik // \omega_c \omega_p^2}{r \omega c^2}$$

(60)

$$C_2 = - \epsilon_0 \omega_c \left(k_e^2 - \frac{k_f^2 \omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{k_f^2 c^2 U^2 (\nabla_{\perp}^2 + k_e^2)}{\omega^2 (c^2 - U^2)} \right)$$

$$D_2 = ik // \left(k_e^2 - \frac{\omega_c^2 k_f^2}{\omega^2} \right)$$

Tirando o divergente de (12) e aplicando o resultado em (9) e aplicando tudo isto em (10) fornece, após usar também (47) e (48):

$$\frac{\omega^2 - \omega_c^2 v_r}{\omega^2} = - \frac{ie}{m\omega} (E_r - i\omega_c E_\theta - \frac{i\omega_c n c^2 U^2 (\nabla_\perp^2 + k_e^2) E_z}{\omega r k // \omega_p^2 (c^2 - U^2)} +$$

$$+ \frac{i c^2 U^2 (\nabla_\perp^2 + k_e^2) dE_z}{k // \omega_p^2 (c^2 - U^2) dr}) \quad , \quad (61)$$

$$\frac{\omega^2 - \omega_c^2 v_\theta}{\omega^2} = - \frac{ie}{m\omega} (i\omega_c E_r + E_\theta + \frac{n c^2 U^2 (\nabla_\perp^2 + k_e^2) E_z}{r k // \omega_p^2 (c^2 - U^2)} -$$

$$- \frac{\omega_c c^2 U^2 (\nabla_\perp^2 + k_e^2) dE_z}{\omega k // \omega_p^2 (c^2 - U^2) dr}) \quad , \quad (62)$$

$$v_z = - \frac{ie}{m\omega} (1 - \frac{c^2 U^2 (\nabla_\perp^2 + k_e^2)}{\omega^2 (c^2 - U^2)}) E_z \quad . \quad (63)$$

De (61) e (62) se observa que ω_c é uma frequência de ressonância para os elétrons pois quando $\omega \rightarrow \omega_c$ vem que $v_\theta \rightarrow \infty$ e $v_r \rightarrow \infty$. Isto indica que toda a energia da onda é transferida aos elétrons e a temperatura do plasma sobe quando isto ocorre. Numa pequena região em torno da frequência de cíclotron a teoria de fluidos deixa de ser válida e a condição de linearização é violada pois v_\perp passa a ser muito maior do que a velocidade de fase da onda.

Com (54) a (63) vê-se que as componentes transversais dos campos elétrico e magnético, assim como todas as componentes do vetor velocidade e também a pressão (através de (9)), são obtidas apenas em termos das componentes longitudinais E_z e H_z . Isto reduz todo o problema da resolução das equações (9) a (12) à obtenção de $E_z(r)$ e de

$H_z(r)$.

Para se obter as equações satisfeitas por estas duas componentes tira-se o rotacional de ambos os membros de (50) e se usa então (46) para obter

$$\epsilon_0 \omega_c (\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{E}_\perp) - \frac{\omega_c k_{//}}{w} \vec{\nabla}_\perp \times \vec{H}_\perp = (\vec{\nabla}_\perp^2 + k_e^2) H_z \quad (64)$$

Usando então que o divergente do campo magnético é nulo juntamente com a equação (49) e o resultado do rotacional de ambos os membros de (46) se obtém, ao usar isto na equação (64):

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}_\perp^2 + k_e^2) H_z = & -i \frac{\epsilon_0 c^2 \omega_c}{k_{//} (c^2 - U^2)} \left(\frac{\omega^2 - k_{//}^2 U^2}{w^2} (\vec{\nabla}_\perp^2 + k_e^2) + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_p^2 k_{//}^2}{w^2} \frac{c^2 - U^2}{c^2} \right) E_z \quad (65) \end{aligned}$$

Aplicando o rotacional em ambos os membros de (47) e juntando este resultado com o divergente de ambos os membros da equação (50) vem:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}_\perp^2 + k_f^2) H_z = & - \frac{i}{\mu_0 \omega_c} \left[\frac{k_{//} c^2 - U^2 \vec{\nabla}_\perp^2}{c^2} + \frac{c^2}{k_{//} (c^2 - U^2)} \frac{U^2 \vec{\nabla}_\perp^2}{c^2} + \right. \\ & \left. + k_e^2 \right] \left(\vec{\nabla}_\perp^2 + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} - \frac{k_{//}^2 U^2}{c^2} \right) E_z \quad (66) \end{aligned}$$

De (65) pode-se obter a equação para H_z quando $B_\theta = 0$ e também a equação para E_z quando $B_\theta \rightarrow \infty$:

$$\text{quando } B_\theta = 0: \quad (\nabla_{\perp}^2 + k_e^2) H_z = 0 \quad , \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \text{quando } B_\theta \rightarrow \infty: \quad & \left[(w^2 - k_{//}^2/U^2) \nabla_{\perp}^2 + \left(\frac{w^2}{c^2} - k_{//}^2 \right) (w^2 - k_{//}^2/U^2 - \right. \\ & \left. - w_p^2) \right] E_z = 0 \quad , \quad (68) \end{aligned}$$

que quando $w \neq k_{//}U$ pode ser escrita como

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_m^2) E_z = 0 \quad , \quad (69)$$

$$\text{onde: } k_m = \left[\frac{(w^2 - k_{//}^2/c^2)(w^2 - k_{//}^2/U^2 - w_p^2)}{c^2(w^2 - k_{//}^2/U^2)} \right]^{1/2} \quad . \quad (70)$$

De (66) pode-se obter a equação para H_z quando $B_\theta \rightarrow \infty$ e também a equação para E_z quando $B_\theta = 0$:

$$\text{quando } B_\theta \rightarrow \infty: \quad (\nabla_{\perp}^2 + k_f^2) H_z = 0 \quad , \quad (71)$$

$$\text{quando } B_\theta = 0: \quad (\nabla_{\perp}^2 + k_e^2)(\nabla_{\perp}^2 + k_s^2) E_z = 0 \quad , \quad (72)$$

$$\text{onde: } k_s = \left(\frac{w^2 - w_p^2}{U^2} - k_{//}^2 \right)^{1/2} \quad . \quad (73)$$

No caso de B_0 finito e não nulo pode-se juntar (65) e (66) para obter

$$H_z = - \frac{ic^2 U^2}{\mu_0 k // w_c w_p^2 (c^2 - U^2)} (\vec{\nabla}_1^2 + k_+^2) (\vec{\nabla}_1^2 + k_-^2) E_z, \quad (74)$$

onde

$$k_{\pm}^2 = \frac{x \pm (x^2 - 4y)^{1/2}}{2},$$

$$x = k_e^2 + k_s^2 - \frac{w_c^2 w^2 - k // U^2}{w^2 U^2}, \quad (75)$$

$$y = k_e^2 k_s^2 - \frac{w_c^2}{w^2} \left(\frac{k_e^2 w^2 - k // U^2}{U^2} + \frac{k // w_p^2 c^2 - U^2}{c^2 U^2} \right).$$

A equação (74) é importante por mostrar que H_z e E_z estão acoplados no caso de um campo magnético finito e não nulo.

Aplicando o operador $(\vec{\nabla}_1^2 + k_e^2)$ em ambos os membros de (74) e utilizando (65) se obtém uma equação de sexta ordem para a componente longitudinal do campo elétrico

$$(\vec{\nabla}_1^6 + b_1 \vec{\nabla}_1^4 + b_2 \vec{\nabla}_1^2 + b_3) E_z = 0, \quad (76)$$

onde

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 2k_e^2 + k_s^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - k_{//}^2 U^2}{U^2} , \\
 b_2 &= k_e^4 + 2k_e^2 k_s^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \left[(k_e^2 + k_f^2) \frac{\omega^2 - k_{//}^2 U^2}{U^2} + k_{//}^2 \frac{\omega_p^2 c^2 - U^2}{c^2 U^2} \right] , \\
 b_3 &= k_e^4 k_s^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} k_f^2 \left(\frac{k_e^2 \omega^2 - k_{//}^2 U^2}{U^2} + k_{//}^2 \frac{\omega_p^2 c^2 - U^2}{c^2 U^2} \right) .
 \end{aligned}
 \tag{77}$$

Este resultado é mais geral do que o obtido por Ghosh e Pal, [13], já que o resultado que eles obtiveram, partindo exatamente das mesmas equações iniciais deste trabalho, foi apenas uma equação de quarta ordem, a saber:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_e^2 + a)(\nabla_{\perp}^2 + k_s^2 + b)E_z = 0 ,
 \tag{78}$$

$$\text{onde: } a = - \frac{\omega_c^2 k_s^2}{\omega^2 - \omega_p^2} , \quad b = - \frac{\omega_c^2 \omega_e^2 k_{//}^2}{\omega^2 - \omega_p^2} .
 \tag{79}$$

Para chegarem a este resultado partiram do conjunto de equações (9) a (12) e em seguida fizeram algumas simplificações no meio do caminho (simplificações estas não especificadas) para então chegarem a (78). Acontece que sem usar nenhuma simplificação se chega à equação de sexta ordem (76), o que é muito natural em vista do fato de que nesta situação há a presença de um campo magnético e de uma temperatu-

ra finitos e não nulos (mesmo para um plasma frio e magnetizado já se chega a uma equação de quarta ordem).

Em vista da diferença entre estes resultados resolveu-se aprofundar um pouco mais a análise. Usando a fórmula de Cardan (ver Apêndice A e referência [25]) pode-se obter algebricamente as raízes de uma equação cúbica e com isto pode-se colocar (76) na forma

$$(\vec{\nabla}_1^2 + k_1^2)(\vec{\nabla}_1^2 + k_2^2)(\vec{\nabla}_1^2 + k_3^2)E_z = 0 \quad , \quad (80)$$

onde k_1 , k_2 e k_3 são obtidos em função dos coeficientes b_1 , b_2 e b_3 de (76). Pode-se além disto mostrar que não existe nenhum conjunto de k_i 's do tipo

$$k_i^2 = x_i + y_i w_c + z_i w_c^2 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad (81)$$

sendo x_i , y_i e z_i funções quaisquer de w , w_p , $k_{//}$ e U (mas independentes de w_c) que satisfaça à equação (76). Para se chegar neste resultado basta substituir esta expressão para os k_i 's em (80) e então abrir os parênteses e ver que não é possível se reobter o resultado (76) com exatamente aqueles coeficientes. Disto se conclui que os k_i 's de (76) têm uma forma mais complicada do que (81), sendo sua forma exata obtida da fórmula de Cardan. Com isto se vê que a disparidade em relação aos resultados de Ghosh e Pal é grande visto que a solução que obtêm apresenta k_i 's do tipo (81), em especial com $y_i = 0$, além de ser apenas de quarta ordem. Com isto a própria relação de dispersão obtida neste trabalho, neste caso de temperatura e campo magnético finitos, vai ser mais geral que a que eles obtiveram, em função de se partir de

uma equação diferente para a componente longitudinal do campo elétrico.

O mesmo procedimento usado para se obter a equação para as componentes dos campos elétrico e magnético na região de plasma pode ser utilizado para se obter a equação para estas componentes na região de vácuo. Partindo então de (14) e (15) se chega a (ver também [51]).

$$\frac{\omega^2 - k_{//}^2/c^2}{c^2} E_{rV} = ik_{//} \frac{dE_{zV}}{dr} + \frac{n\omega \mu_0}{r} H_{zV} \quad (82)$$

$$\frac{\omega^2 - k_{//}^2/c^2}{c^2} E_{\theta V} = \frac{nk_{//}}{r} E_{zV} - i\omega \mu_0 \frac{dH_{zV}}{dr} \quad (83)$$

$$\frac{\omega^2 - k_{//}^2/c^2}{c^2} H_{rV} = -\frac{n\omega \epsilon_0}{r} E_{zV} + ik_{//} \frac{dH_{zV}}{dr} \quad (84)$$

$$\frac{\omega^2 - k_{//}^2/c^2}{c^2} H_{\theta V} = i\omega \epsilon_0 \frac{dE_{zV}}{dr} + \frac{nk_{//}}{r} H_{zV} \quad (85)$$

Novamente se observa que as componentes transversais dos vetores campo elétrico e magnético são obtidas à partir das componentes longitudinais E_{zV} e H_{zV} . As equações satisfeitas por estas duas componentes são:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2) E_{zV} = 0 \quad (86)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2) H_{zV} = 0$$

Com isto se completa então a obtenção de todas as equações para as componentes de todos os vetores de quantidades físicas que interessam ao problema que está sendo abordado.

Contorno

No Capítulo III foi apresentado o tensor dielétrico de um plasma morno e magnetizado, obtido fazendo-se a suposição de uma perturbação do tipo de ondas planas. Quando o plasma é limitado por uma guia cilíndrica de seção reta circular essa suposição já não é mais válida, já que esta onda não satisfaz às condições de contorno, e apenas pode ser usada como uma aproximação nos casos em que o comprimento de onda é muito menor do que as dimensões características da máquina. Este não é o caso da máquina linear LISA e então um tratamento global do problema se torna necessário e foi por isto então que se desenvolveu todo este tratamento via equações diferenciais no capítulo anterior. Para se ter uma ordem de grandeza, para uma excitação de 2,45 GHz (caso da LISA) tem-se um comprimento de onda da ordem de 12 cm, o que faz com que $D/\lambda \approx 1,4$, onde D é o diâmetro da LISA. Por aí se vê que apenas um tratamento global pode ser usado nesta situação, ao contrário do que ocorre em tokamaks grandes onde um tratamento local é usualmente utilizado e com um grande proveito.

Com isto em mente apresenta-se aqui o tensor dielétrico de um plasma morno e magnetizado, limitado externamente por uma guia de geometria cilíndrica. Este tensor pode ser obtido aplicando-se diretamente o resultado (61) a (63) em (12), mas segue-se um caminho um pouco menos direto aqui para deixar claro alguns pontos. A velocidade é obtida em função do campo elétrico tirando-se o divergente de ambos os membros de (12) e aplicando o resultado em (9), após o que se tira o gradiente de ambos os membros desta última equação, sendo o resultado

aplicado em (10), com o que se obtém

$$\vec{\nabla}_1 + \frac{ie\vec{\nabla}_1 \times \vec{B}_0}{m\omega} = - \frac{ieE_0}{m\omega} \vec{E}_1 - \frac{U^2}{\omega_p^2} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1) \quad (87)$$

Usando (23) pode-se escrever (87) em forma matricial e então aplicando este resultado em (12) vem que, após algumas manipulações:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = - i\omega (\vec{E}_F \cdot \vec{E}_1 + \frac{\epsilon_0 U^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1)) \quad (88)$$

onde

$$\vec{E}_F = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & \frac{i\omega_p^2 \omega_c}{(\omega^2 - \omega_c^2)\omega} & 0 \\ -i\omega_p^2 \omega_c / ((\omega^2 - \omega_c^2)\omega) & \frac{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{i\omega_c}{\omega} & 0 \\ \frac{i\omega_c}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2} \end{bmatrix}, \quad (90)$$

sendo $\hat{\epsilon}_f$ o tensor dielétrico de um plasma frio.

Formalmente (88) ainda pode ser escrito na forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = -i\omega \hat{\epsilon}_t \cdot \vec{E}_1, \quad (91)$$

onde $\hat{\epsilon}_t$ é o tensor dielétrico de um plasma quente, magnetizado e limitado. Usando o fato da guia ter geometria cilíndrica de seção reta circular pode-se expressar o operador $\vec{\nabla}$ no sistema de coordenadas cilíndricas e então os elementos de $\hat{\epsilon}_t$ ficam dados por:

$$(\hat{\epsilon}_t)_{11} = \frac{\epsilon_0}{\omega^2 - \omega_c^2} \left[\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2 + U^2 \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{n\omega_c}{\omega} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) \right] \right],$$

$$(\hat{\epsilon}_t)_{12} = \frac{i\epsilon_0}{\omega^2 - \omega_c^2} \left[\frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega} - nU^2 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \frac{n\omega_c}{r^2 \omega} \right) \right],$$

$$(\hat{E}_t)_{13} = \frac{i \epsilon_0 k // U^2}{w^2 - w_c^2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{nw_c}{rw} \right) ,$$

$$(\hat{E}_t)_{21} = - \frac{i \epsilon_0}{w^2 - w_c^2} \left(\frac{w_p^2 w_c}{w} - U^2 \left[\frac{w_c}{w} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - n \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) \right] \right) ,$$

(92)

$$(\hat{E}_t)_{22} = \frac{\epsilon_0}{w^2 - w_c^2} \left(w^2 - w_p^2 - w_c^2 + nU^2 \left[\frac{w_c}{w} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{n}{r^2} \right] \right) ,$$

$$(\hat{E}_t)_{23} = - \frac{\epsilon_0 k // U^2}{w^2 - w_c^2} \left(\frac{w_c d}{w dr} - \frac{n}{r} \right) ,$$

$$(\hat{E}_t)_{31} = \frac{i \epsilon_0 k // U^2}{rw^2} \left(rd + 1 \right) ,$$

$$(\hat{E}_t)_{32} = \frac{n \epsilon_0 k // U^2}{rw^2} ,$$

$$(\hat{E}_t)_{33} = \frac{\epsilon_0 (w^2 - w_p^2 - k^2 // U^2)}{w^2} .$$

De (88) é fácil ver que quando a temperatura vai a zero que então este tensor retorna a ser o tensor usual de plasmas frios. A diferença principal de (92) em relação a (26) é que agora nos elementos do tensor dielétrico surgem derivadas espaciais que vão atuar nas componentes do campo elétrico. Este fato se deve ao tratamento global que está sendo dado ao problema. Além disto pode-se notar que como $(\vec{E}_t)_{13}$, $(\vec{E}_t)_{23}$, $(\vec{E}_t)_{31}$ e $(\vec{E}_t)_{32}$ não são nulos em geral, que então há um acoplamento entre as componentes de \vec{E}_1 paralelas e perpendiculares a \vec{B}_0 , sendo isto devido a que uma perturbação do tipo (41) ocorre com propagação tanto ao longo do eixo da guia como também radialmente. Algo do mesmo tipo ocorre em (26) quando $k_{//}$ e k_{\perp} não são nulos.

Uma outra observação sobre (91) e (92): Pode-se obter o tensor dielétrico para um plasma homogêneo e ilimitado fazendo-se em (92) que $1/r \rightarrow 0$ e $d/dr \rightarrow ik_{\perp}$. Com isto se reobterá (26) exatamente, como era de se esperar.

Antes de iniciar a resolução das equações diferenciais e a obtenção das relações de dispersão, é necessário especificar as condições de contorno. Na primeira situação a ser tratada o plasma preenche completamente a guia:

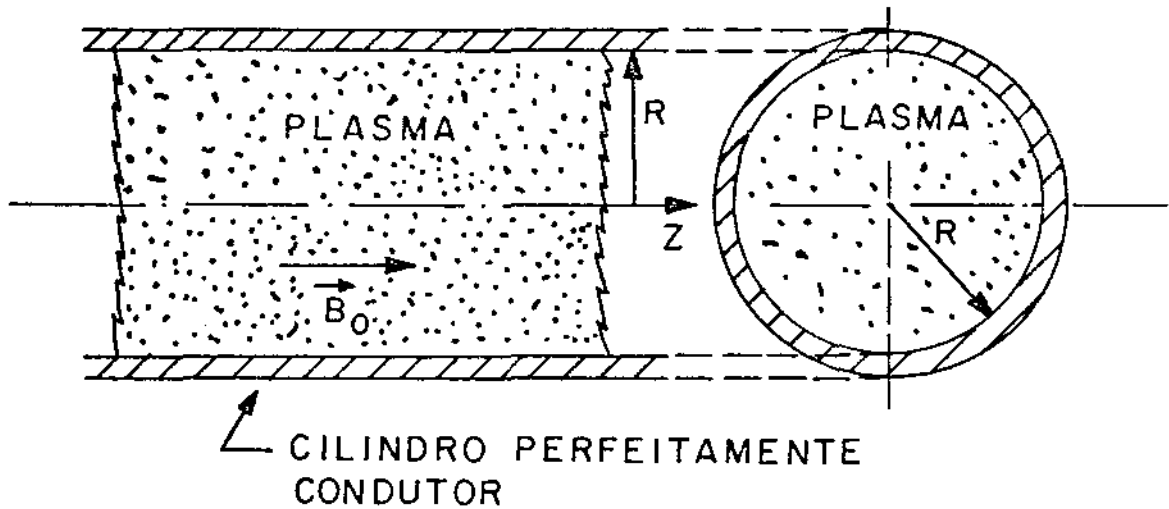


Figura 6: Plasma preenchendo completamente a guia.

Como a guia é considerada como sendo um condutor perfeito (resistividade nula), as condições de contorno na interface plasma-condutor indicam que as componentes do campo elétrico tangenciais à guia são nulas na interface, o mesmo ocorrendo com a componente do campo magnético normal à superfície do condutor (ver [5]). Além disto, como há um condutor metálico limitando o plasma tem-se que a componente do vetor velocidade do fluido normal à superfície do condutor também é nula. Chamando de R ao raio da guia tem-se então que:

$$E_z(R) = 0, \quad (93)$$

$$E_\theta(R) = 0, \quad (94)$$

$$H_p(R) = 0, \quad (95)$$

$$v_p(R) = 0. \quad (96)$$

Isto então completa as condições de contorno necessárias quando o plasma preenche completamente a guia.

A outra situação a ser analisada é aquela em que o plasma preenche parcialmente a guia (ver figura 7).

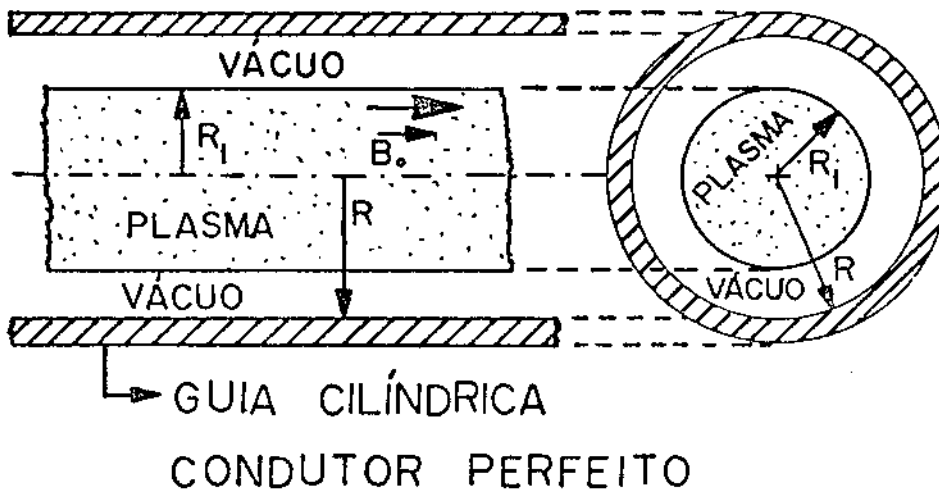


Figura 7: Plasma preenchendo parcialmente a guia.

Na interface vácuo-condutor perfeito, as condições de contorno são as mesmas que no caso plasma-condutor:

$$E_{zV}(R) = 0 , \quad (97)$$

$$E_{\theta V}(R) = 0 , \quad (98)$$

$$H_{rV}(R) = 0 , \quad (99)$$

Já na interface plasma-vácuo as condições de contorno são a continuidade das componentes tangenciais do campo elétrico e da componente normal do campo magnético, e também a continuidade da componente normal do vetor deslocamento elétrico (usando aqui o tratamento desenvolvido por Trivelpiece, [4], de tratar o plasma como um dielétrico dispersivo sem cargas livres):

$$E_z(R_1) = E_{zV}(R_1) , \quad (100)$$

$$E_{\theta}(R_1) = E_{\theta V}(R_1) , \quad (101)$$

$$H_r(R_1) = H_{rV}(R_1) , \quad (102)$$

$$(\vec{\epsilon}_t \cdot \vec{E}_1)_r(R_1) = \epsilon_0 E_{rV}(R_1) , \quad (103)$$

onde R_1 é o raio da interface plasma-vácuo.

Além de (100) a (103) vai ser necessária mais uma condição de contorno independente na interface plasma-vácuo para se obter as relações de dispersão quando o plasma preenche parcialmente a guia. A outra condição de contorno a ser usada é a da igualdade de pressões (Krahl e Trivelpiece, [2]):

$$p(R_1) + \frac{\vec{B}^{\perp}(R_1)}{2\mu_0} = \frac{\vec{B}_V(R_1)}{2\mu_0} \quad (104)$$

Como todas as condições de contorno analisadas até agora foram de primeira ordem, (104) também deve ser linearizada. Lembrando que os casos que estão sendo estudados são aqueles em que no plasma há um campo magnético uniforme conhecido, $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$, e usando (102) vem que, em ordem zero

$$\left[\frac{2p_0}{\mu_0} \right]^{1/2} = H_{\theta V}(R_1) \quad (105)$$

Com isto a condição de contorno em primeira ordem para a igualdade de pressões fica (usando novamente (102) e (23)):

$$- \epsilon_0 \gamma k_B T_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right](R_1) + e B_0 H_z(R_1) = e (2n_0 k_B T_0 / \mu_0)^{1/2} H_{\theta V}(R_1) + e B_0 H_{zV}(R_1) \quad (106)$$

Nos casos em que a temperatura é nula e o campo magnético é qualquer, ou quando a temperatura tem um valor finito qualquer e $B_0 \rightarrow \infty$, então esta condição de contorno se reduz a

$$H_z(R_1) = H_{zV}(R_1) \quad (107)$$

Com isto completam-se as condições de contorno necessárias para analisar o caso em que há uma camada de vácuo entre o plasma e a guia.

Capítulo VI - Relações de Dispersão (Plasma Preenchendo Completamente a Guia)

Neste Capítulo vão ser obtidas as relações de dispersão em diversas situações limite, por ordem de grau crescente de complexidade matemática. Em todos os casos analisados o plasma preenche totalmente a guia. As equações para E_z ou para H_z são do tipo de equações de Bessel (ver Apêndice B):

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_1^2)F_1 = 0 \quad , \quad (108)$$

onde:

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \quad . \quad (109)$$

A solução geral desta equação de segunda ordem é

$$F_1(r) = A_n J_n(rk_1) + B_n Y_n(rk_1) \quad , \quad \text{se } k_1^2 > 0 \quad , \quad (110)$$

$$F_1(r) = A_n r^m + B_n r^{-m} \quad , \quad \text{se } k_1 = 0 \quad , \quad (111)$$

$$F_1(r) = A_n I_n(r(-k_1^2)^{1/2}) + B_n K_n(r(-k_1^2)^{1/2}) \quad , \quad \text{se } k_1^2 < 0 \quad . \quad (112)$$

Caso k_1^2 seja complexo então a solução é, de forma geral, (110), só que agora os argumentos das funções de Bessel serão também complexos. Nos problemas tratados neste Capítulo e no seguinte o plasma está também no eixo da guia, ou seja, há plasma em $r = 0$. Como $Y_n(r)$, r^{-m} e $K_n(r)$ divergem para $r \rightarrow 0$ vem que as únicas soluções fisicamente plausíveis

na região de plasma são aquelas em que $B_n = 0$. De forma geral então vem que cada equação do tipo (168) vai ter soluções dependendo apenas de uma constante arbitrária (na região de plasma). Outras equações que vão aparecer são do tipo

$$(\vec{\nabla}_1^2 + k_1^2)(\vec{\nabla}_1^2 + k_2^2)F_1 = 0 \quad , \quad (113)$$

$$(\vec{\nabla}_1^2 + k_1^2)(\vec{\nabla}_1^2 + k_2^2)(\vec{\nabla}_1^2 + k_3^2)F_1 = 0 \quad . \quad (114)$$

Suas soluções gerais são, respectivamente, do tipo (aceitando argumentos complexos)

$$F_1(r) = A_n J_n(rk_1) + B_n Y_n(rk_1) + C_n J_n(rk_2) + D_n Y_n(rk_2) \quad , \quad (115)$$

$$F_1(r) = A_n J_n(rk_1) + B_n Y_n(rk_1) + C_n J_n(rk_2) + D_n Y_n(rk_2) + \\ + E_n J_n(rk_3) + F_n Y_n(rk_3) \quad . \quad (116)$$

Pelo mesmo argumento físico anterior vem que na região de plasma:

$$B_n = D_n = F_n = 0 \quad . \quad (117)$$

é em cima destas idéias que o trabalho é desenvolvido.

VI.1 - Caso em que $T_0 = 0$ e $B_0 = 0$

De (67) e de (72) vem que, no limite em que $T_0 \rightarrow 0$

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_e^2)H_z = 0 \quad , \quad (118)$$

$$(w^2 - w_p^2)(\nabla_{\perp}^2 + k_e^2)E_z = 0 \quad . \quad (119)$$

Quando $w = w_p$ a solução destas equações é:

$$H_z = C_n I_n(rk_{//}) \quad , \quad (120)$$

$$E_z(r) \text{ é qualquer.} \quad (121)$$

A aplicação de (93), (94) e (96) leva a que (ver também (55) e (61))

$$E_z(R) = 0 \quad \text{e} \quad C_n = 0 \quad , \quad (122)$$

ou seja, uma onda TM com a relação de dispersão

$$w = w_p \quad , \quad (123)$$

pode existir numa guia preenchida com plasma frio não magnetizado. O importante a observar neste modo de excitação é que ele não implica em propagação de energia visto que sua velocidade de grupo é nula.

Fora do caso específico $w = w_p$, vem que há duas regiões distintas no plano $k_{//} - w$:

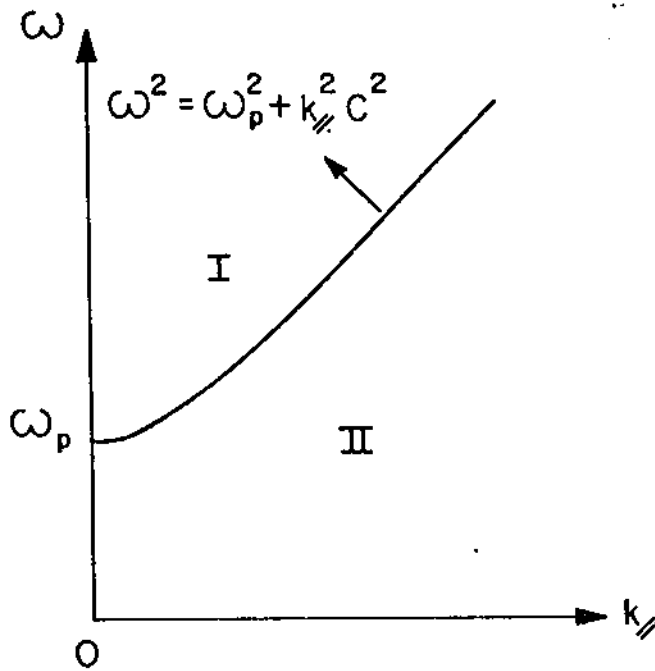


Figura 8: Regiões no plano $k_{//} - \omega$.

As soluções de (118) e (119) nestas regiões são:

$$\text{Região I: } E_z = A_{1n} J_n(rk_e) , H_z = C_{1n} J_n(rk_e) , \quad (124)$$

$$\text{Região II: } E_z = A_{2n} I_n(rk_{eII}) , H_z = C_{2n} I_n(rk_{eII}) , \quad (125)$$

$$\text{onde: } k_{eII} = \left(k_{//}^2 - \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \right)^{1/2} . \quad (126)$$

A aplicação das condições de contorno (93), (94) e (96) implica em que não pode haver excitação em nenhuma destas regiões já que as únicas soluções possíveis são

$$A_{1n} = 0 \text{ e } C_{1n} = 0 \quad , \quad (127)$$

na região I; enquanto que na região II as únicas soluções possíveis são:

$$A_{2n} = 0 \text{ e } C_{2n} = 0 \quad , \quad (128)$$

o que faz com que todas as componentes dos campos elétrico e magnético sejam nulas em ambas as regiões (ver também (54) a (63)).

Com isto se vê que o único modo possível é uma onda TM com relação de dispersão (123).

Uma última observação a ser feita em relação a este caso é que não foi usada a condição de contorno (95) sendo isto devido a que ela não acrescenta nada de novo em relação às condições (93), (94) e (96). Isto também vai ocorrer nos próximos casos e então este fato não será mais citado.

VI.2 - Caso em que $T_0 = 0$ e $B_0 \rightarrow \infty$

De (69) e (71) vem que, no limite em que $T_0 \rightarrow 0$:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2)H_z = 0 \quad , \quad (129)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2)E_z = 0 \quad , \quad (130)$$

onde:
$$k_{\perp}^2 = \left[\frac{(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - k_{\parallel}^2/c^2)}{\omega^2 c^2} \right]^{1/2} \quad . \quad (131)$$

Obtem-se a relação de dispersão detalhadamente neste caso para dar uma idéia do procedimento geral que vai ser usado em todo o trabalho.

Há quatro regiões distintas no plano $k_{\parallel} - \omega$:

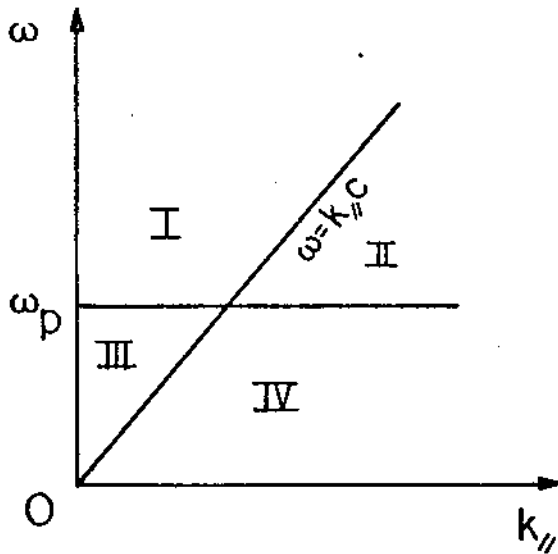


Figura 9: Regiões distintas no plano $k_{\parallel} - \omega$.

Região I: $k_p^2 > 0$ e $k_i^2 > 0$,

Região II: $k_p^2 < 0$ e $k_i^2 < 0$,

Região III: $k_p^2 > 0$ e $k_i^2 < 0$,

Região IV: $k_p^2 < 0$ e $k_i^2 > 0$.

(132)

A solução de (129) e (130) depende da região:

Região I: $E_z = A_{1n} J_n(rk_i)$, $H_z = C_{1n} J_n(rk_p)$,

Região II: $E_z = A_{2n} I_n(rk_{iII})$, $H_z = C_{2n} I_n(rk_{pII})$,

Região III: $E_z = A_{3n} I_n(rk_{iIII})$, $H_z = C_{3n} J_n(rk_p)$,

Região IV: $E_z = A_{4n} J_n(rk_i)$, $H_z = C_{4n} I_n(rk_{pII})$,

(133)

onde

$$k_{iIII} = \frac{(\omega_p^2 - \omega^2)(\omega^2 - k_{//}^2/c^2)^{1/2}}{\omega^2 c^2} , \quad (134)$$

$$k_{pII} = \left(k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2} . \quad (135)$$

(ver também (52)).

Na região I a condição de contorno (93) leva a que

$$A_{in} J_n(Rk_i) = 0 \quad . \quad (136)$$

Já (94) leva a que:

$$\frac{nk_{//} A_{in} J_n(Rk_i)}{R} - i\omega \mu_0 k_f C_{in} J_n'(Rk_f) = 0 \quad . \quad (137)$$

Já (96) não leva a nada visto que um campo magnético infinito somente permite o movimento unidimensional das cargas ao longo do eixo Z, já que o raio de Larmor tende a zero neste caso.

(136) em (137) leva a que.

$$C_{in} J_n'(Rk_f) = 0 \quad . \quad (138)$$

visto que ω , R , μ_0 e k_f são todos positivos.

Há apenas duas maneiras de haver propagação (se há propagação então $A_{in} \cdot C_{in} \neq 0$) e que satisfazem simultaneamente a (136) e (138): O modo transversal elétrico ($A_{in} = 0$) com relação de dispersão

$$J_n'(Rk_f) = 0 \quad , \quad (139)$$

e o modo transversal magnético ($C_{in} = 0$) com relação de dispersão

$$J_n(Rk_i) = 0 \quad . \quad (140)$$

Um estudo semelhante mostra que na região II não há propagação visto que a única solução possível que vai satisfazer a todas as condições de contorno é:

$$A_{2n} = 0 \text{ e } C_{2n} = 0 \quad \text{para todo } n \quad . \quad (141)$$

Na região III se encontra que só é possível o modo TE, com relação de dispersão (139), enquanto que na região IV só é possível o modo TM, com relação de dispersão (140). Já a curva $\omega = \omega_p$ (ou seja, $k_z = 0$) só tem propagação nos pontos em que esta curva cruza as curvas que satisfazem a $J'_n(Rk_r) = 0$.

Com isto então se chega ao resultado final de que há dois grandes modos de propagação neste caso: o modo transverso elétrico com relação de dispersão

$$\omega^2 = k_{//}^2 c^2 + \frac{P_{ny}^2 c^2}{R^2} \quad , \quad (142)$$

e o modo transverso magnético com relação de dispersão

$$\omega_+ = \left[\frac{b^2 + (b^2 - 4k_{//}^2 c^2 \omega_p^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2} \quad , \quad (143)$$

$$\omega_- = \left[\frac{b^2 - (b^2 - 4k_{//}^2 c^2 \omega_p^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2} \quad , \quad (144)$$

onde:
$$b = k^2/c^2 + \omega_p^2 + \frac{p_{ny}^2 c^2}{R^2} \quad (145)$$

sendo p_{ny} a y -ésima raiz da função de Bessel de n -ésima ordem, e p_{ny}^1 a y -ésima raiz da equação

$$J_n^1(x) = 0 \quad (146)$$

O gráfico destas relações de dispersão é mostrado nas figuras 10 e 11 com os parâmetros relativos a este caso da máquina linear LISA, (18):

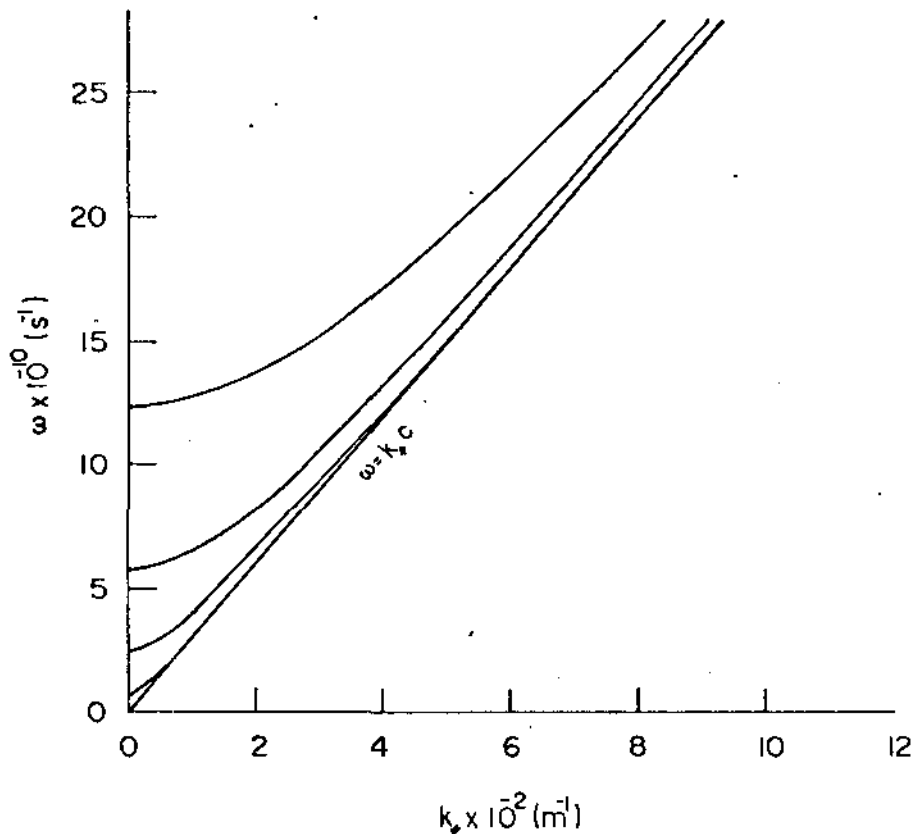


Figura 10: Relação de dispersão quando $T_0 = 0$ e $B_0 \rightarrow \infty$. $R = 0,085$ m; modos $P_{1,1}^1$, $P_{0,3}^1$, $P_{2,5}^1$ e $P_{4,10}^1$. É mostrada também a assíntota $\omega = kc$. Modos TE.

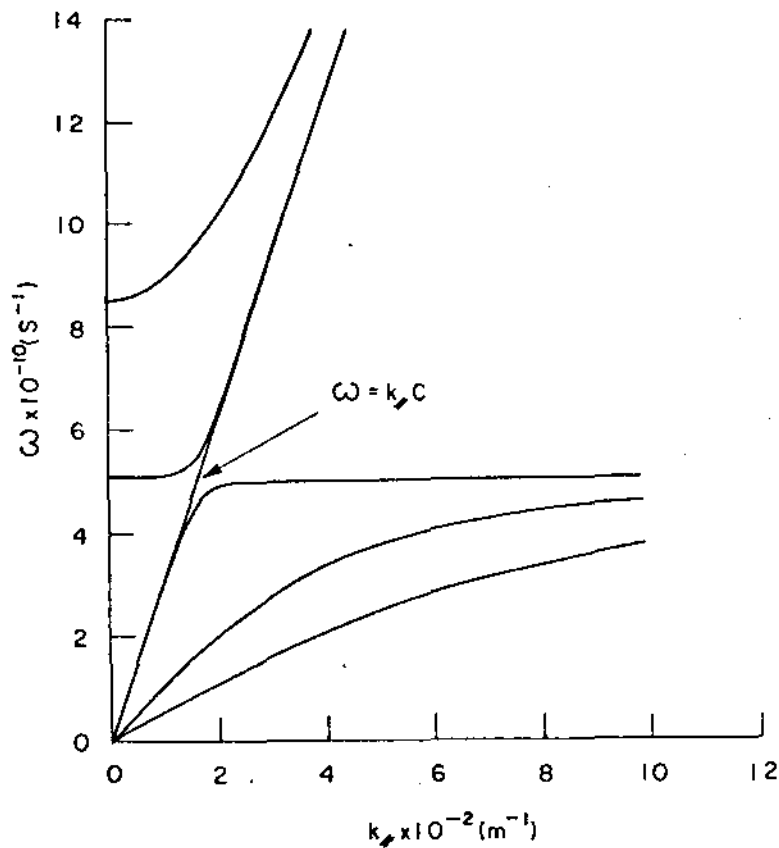


Figura 11: Relação de dispersão quando $T_0 = 0$ e $B_0 \rightarrow \infty$. $n_0 = 8 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$, $R = 0,085 \text{ m}$. Na região $\omega > \omega_p$ são mostradas as curvas correspondentes aos modos $P_{0,1}$ e $P_{3,5}$. Na parte $\omega < \omega_p$ são mostradas as curvas correspondentes aos modos $P_{0,1}$, $P_{4,10}$ e $P_{8,20}$. É mostrada também a assíntota $\omega = k_{||} c$. Modos TM.

Alguns outros aspectos dos modos TE: Não há ondas no limite de ondas lentas enquanto que no limite de plasma ilimitado a relação de dispersão se reduz a $\omega = k_{||} c$. Ainda:

$$\lim_{K_{//} \rightarrow 0} \frac{dw}{dk_{//}} = 0, \quad (147)$$

$$\lim_{K_{//} \rightarrow \infty} \frac{dw}{dk_{//}} = c, \quad (148)$$

indicando que em ambos os limites as dimensões e a geometria da guia (representadas por R) não influenciam na propagação das ondas.

Alguns outros aspectos dos modos TM: No limite de ondas lentas a relação de dispersão se reduz à região IV, com relação de dispersão

$$Rk_{//} \left(\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega^2} \right)^{1/2} = p_{ny}. \quad (149)$$

No limite de plasma ilimitado as relações de dispersão se reduzem a

$$\omega = \omega_p, \quad (150)$$

$$\text{e: } \omega = k_{//}c. \quad (151)$$

Combinando com o resultado dos modos TE vê-se que no limite de plasma ilimitado é possível de se excitar uma onda TEM com relação de dispersão $\omega = k_{//}c$ (modo de luz), ou então se pode excitar a onda longitudinal com relação de dispersão $\omega = \omega_p$ (modo de Langmuir).

Ainda nos modos TM tem-se que as velocidades de grupo das ondas nos limites de pequeno e grande número de onda são dadas por:

$$\lim_{K_{//} \rightarrow 0} \frac{dw_+}{dk_{//}} = 0 \quad ; \quad \lim_{K_{//} \rightarrow 0} \frac{dw_-}{dk_{//}} = \frac{cw_p}{(w_p^2 + c^2 p_{ny}^2 / R^2)^{1/2}} \quad , \quad (152)$$

$$\lim_{K_{//} \rightarrow \infty} \frac{dw_+}{dk_{//}} = c \quad ; \quad \lim_{K_{//} \rightarrow \infty} \frac{dw_-}{dk_{//}} = 0 \quad . \quad (153)$$

Vê-se então que os modos TM apresentam a característica de propagarem a energia com velocidade dependente das dimensões da guia no limite de $k_{//} \rightarrow 0$.

Com isto se encerra o estudo do caso $T_0 = 0$ e $B_0 \rightarrow \infty$.

VI.3 - Caso em que T_0 é qualquer e $B_0 \rightarrow \infty$

O caso a ser analisado agora se caracteriza por uma temperatura finita qualquer. As equações para este caso são

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2)H_z = 0, \quad (154)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 + K_m^2)E_z = 0. \quad (155)$$

(É possível de verificar que o caso $w = k_{\parallel}U$ não satisfaz ao conjunto das condições de contorno e então ele não mais vai ser considerado daqui para a frente).

Agora há cinco regiões no plano $k_{\parallel} - w$:

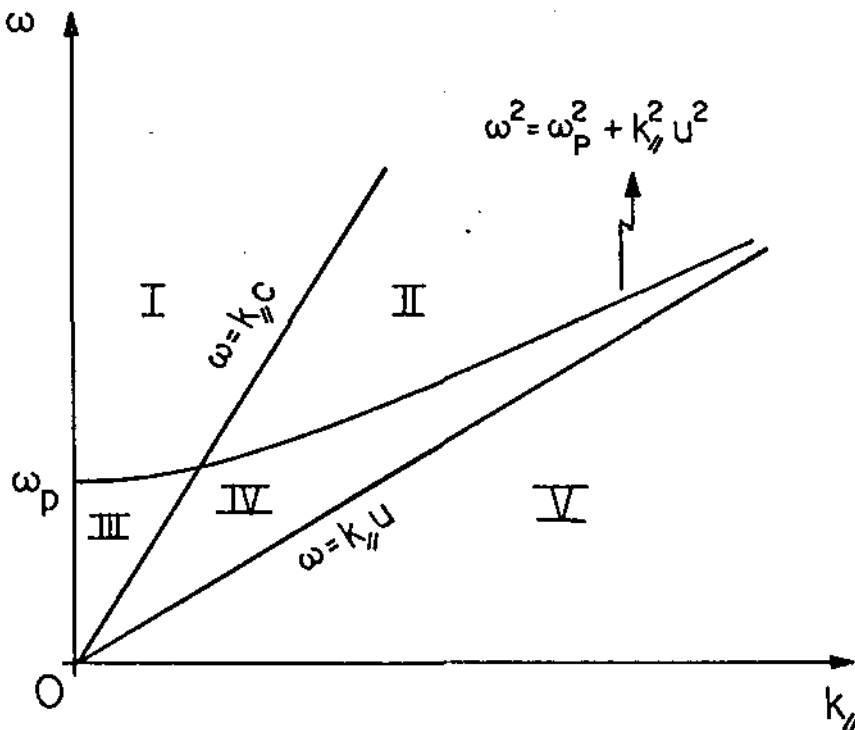


Figura 12: Regiões no plano $k_{\parallel} - w$.

Região I: $k_m^2 > 0$ e $k_f^2 > 0$,

Regiões II e V: $k_m^2 < 0$ e $k_f^2 < 0$,

(156)

Região III: $k_m^2 < 0$ e $k_f^2 > 0$,

Região IV: $k_m^2 > 0$ e $k_f^2 < 0$.

As soluções por regiões das equações (154) e (155) são:

Região I: $E_z = A_{1n} J_n(rk_m)$, $H_z = C_{1n} J_n(rk_f)$,

Regiões II e V: $E_z = A_{2n} I_n(rk_{mII})$, $H_z = C_{2n} I_n(rk_{fII})$,

(157)

Região III: $E_z = A_{3n} I_n(rk_{mII})$, $H_z = C_{3n} J_n(rk_f)$,

Região IV: $E_z = A_{4n} J_n(rk_m)$, $H_z = C_{4n} I_n(rk_{fII})$,

onde

$$k_{mII} = \left[\frac{(k_{//}^2/c^2 - w^2)(w^2 - w_p^2 - k_{//}^2/U^2)}{(w^2 - k_{//}^2/U^2)c^2} \right]^{1/2}. \quad (158)$$

(ver também (52), (70) e (135)).

A condição de contorno (93) diz que $E_z(R) = 0$. A condição de contorno (96) não leva a nada já que não há velocidade radial neste caso, e a condição (94) leva a que, juntamente com (93):

$$\left. \frac{dH_z}{dr} \right|_{r=R} = 0 \quad (159)$$

Como no caso anterior pode-se ver que a aplicação destas condições leva a dois conjuntos distintos de modos: O de modos TE, com relação de dispersão

$$J_n'(Rk_f) = 0 \quad (160)$$

que é o mesmo que (142), e o de modos TM com relação de dispersão

$$J_n(Rk_m) = 0 \quad (161)$$

que é o mesmo que

$$w_+ = \frac{c}{2} \left[b + (b^2 - 4k_{//}^2 c^2 (k_{//}^2 U^2 + w_p^2 + p_{ny}^2 U^2 / R^2))^{1/2} \right]^{1/2} \quad (162)$$

$$w_- = \frac{c}{2} \left[b - (b^2 - 4k_{//}^2 c^2 (k_{//}^2 U^2 + w_p^2 + p_{ny}^2 U^2 / R^2))^{1/2} \right]^{1/2} \quad (163)$$

onde

$$b = k_{//}^2 c^2 + k_{//}^2 U^2 + w_p^2 + \frac{p_{ny}^2 c^2}{R^2} \quad (164)$$

e onde os modos w_+ estão localizados na região I e os modos w_- estão inteiramente localizados na região IV.

É fácil ver que esta relação de dispersão se reduz ao caso anterior quando se faz o limite de $T_0 \rightarrow 0$.

Os gráficos destas relações de dispersão são mostrados nas figuras 13 e 14 com os parâmetros da LISA:

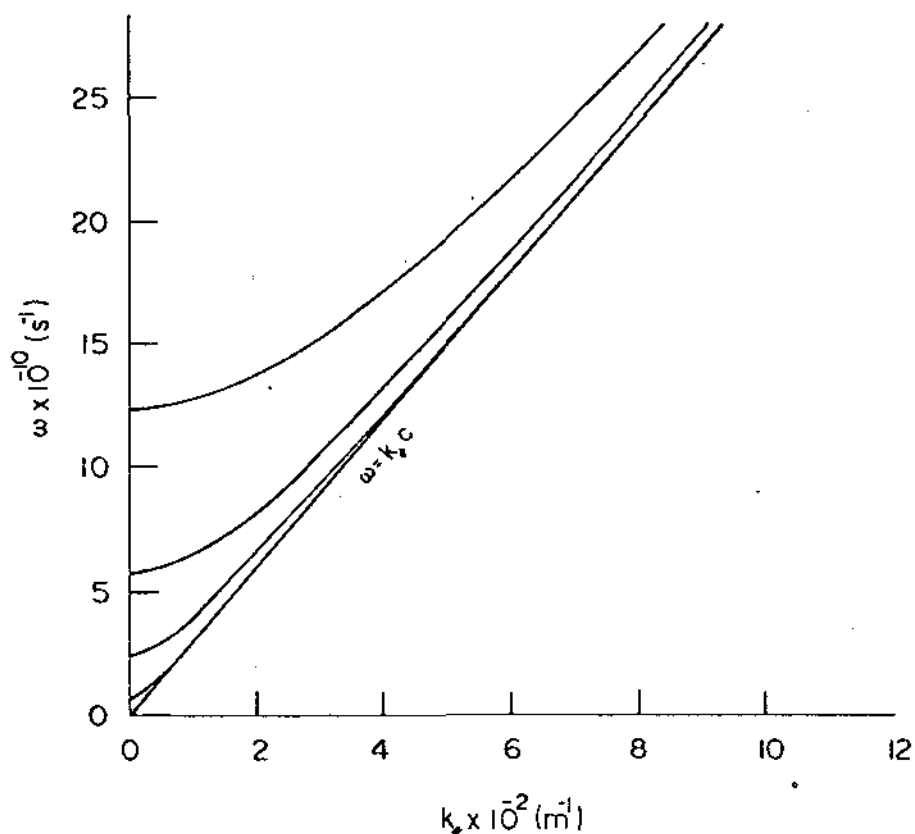


Figura 13. Relação de dispersão quando $k_B T_0 = 40$ eV e $\beta_0 \rightarrow \infty$. $R = 0,085$ m, modos $P_{1,1}^I$, $P_{0,3}^I$, $P_{2,5}^I$ e $P_{4,10}^I$. É mostrada também a assíntota inferior $\omega = k_x c$. Modos TE.

Como a temperatura da LISA é relativamente baixa, o gráfico da figura 14 não apresenta muitas diferenças em relação à situação an-

terior (plasma frio). Para se enfatizar que estes modos dependem da temperatura e para conseguir visualizar estes efeitos foi feito o gráfico da figura 15, onde se manteve tudo do mesmo jeito e apenas se aumentou a temperatura para 1000 eV.

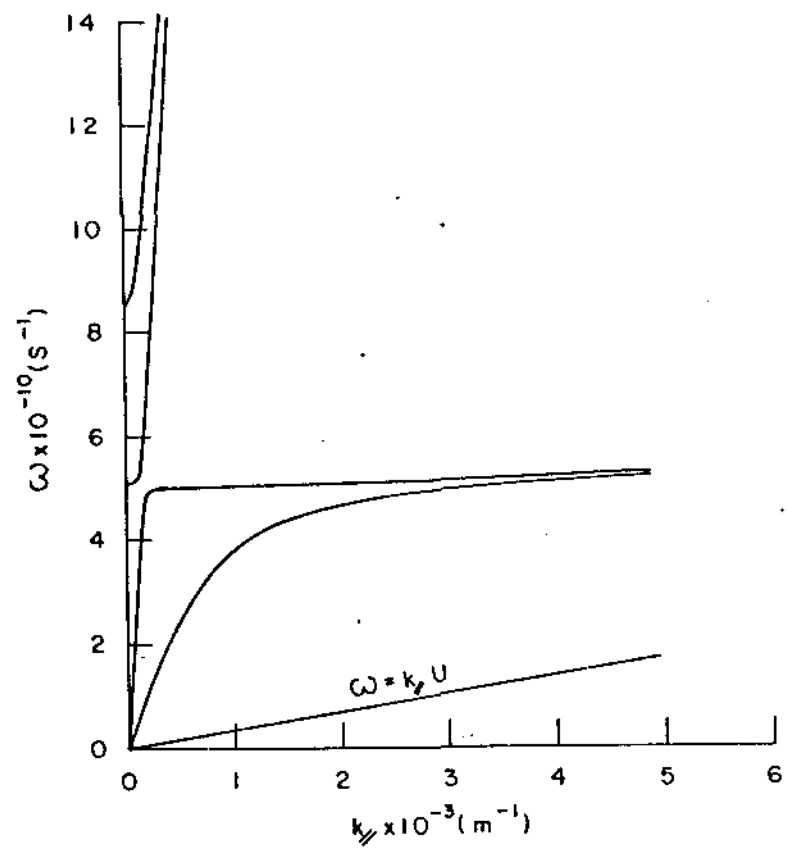


Figura 14: Relação de dispersão quando $k_B T_0 = 40$ eV, $B_0 \rightarrow \infty$. $n_0 = 8 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$, $R = 0,085$ m. Nas curvas superiores são mostrados os modos $P_{0,1}$ e $P_{3,5}$, enquanto que nas inferiores aparecem os modos $P_{0,1}$ e $P_{8,20}$. Se indica também a assintota inferior $\omega = k_{||} U$. Modos Tn .

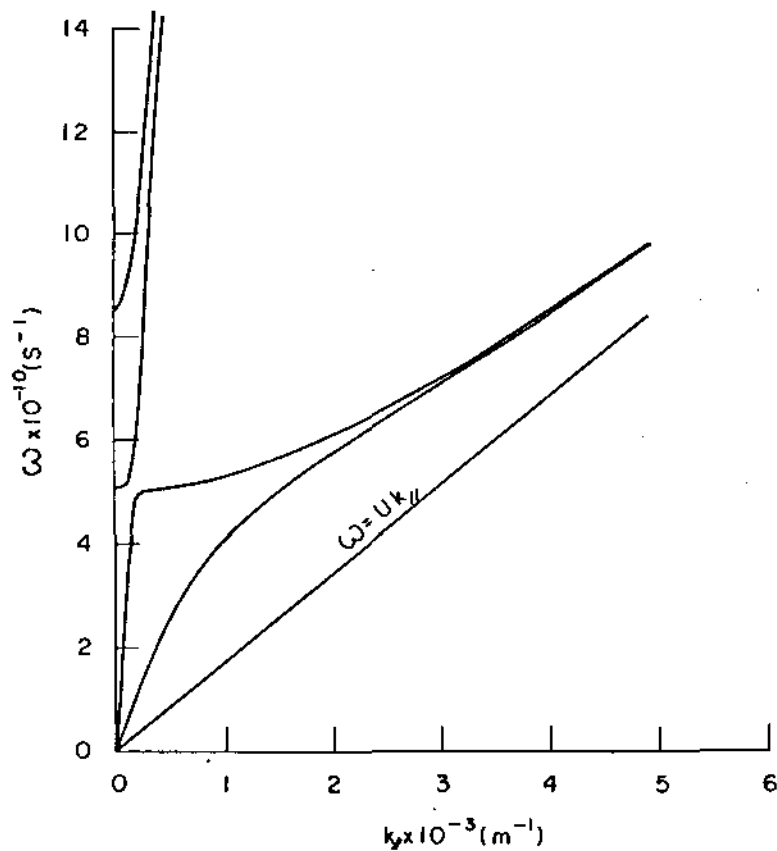


Figura 15: Relação de dispersão quando $k_B T_0 = 1000$ eV, $B_0 \rightarrow \infty$, $n_0 = 8 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$, $R = 0,085$ m. Modos superiores $P_{0,1}$ e $P_{3,5}$. Modos inferiores $P_{0,1}$ e $P_{3,20}$. Modos TM.

Como os modos TE são os mesmos que no caso de plasmas frios, ainda valem (147) e (148) nestes modos. Também os outros comentários continuam válidos.

Já para os modos TM tem-se que no limite de ondas lentas a relação de dispersão se reduz à região IV, com relação de dispersão

$$Rk_{//} \left(\frac{\omega_p^2 + k_{//}^2 U^2 - \omega^2}{\omega^2 - k_{//}^2 U^2} \right)^{1/2} = p_{ng} \quad (165)$$

No limite de plasma ilimitado as relações de dispersão se reduzem a

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k_{//}^2 U^2 \quad (166)$$

$$\omega = k_{//} c \quad (167)$$

Combinando com o resultado dos modos TE vê-se que no limite de plasma ilimitado é possível de se excitar uma onda TEM com relação de dispersão $\omega = k_{//} c$ (modo de luz), ou então se pode excitar a onda longitudinal com relação de dispersão (166); que é o modo de Bohm-Gross, [26].

Já as velocidades de grupo das ondas TM nos limites de pequeno e grande número de onda são dadas por

$$\lim_{K_{//} \rightarrow 0} \frac{d\omega_+}{dk_{//}} = 0 \quad , \quad \lim_{K_{//} \rightarrow \infty} \frac{d\omega_+}{dk_{//}} = c \quad (168)$$

$$\lim_{K_{//} \rightarrow \infty} \frac{d\omega_-}{dk_{//}} = U \quad (169)$$

$$\lim_{K_{//} \rightarrow 0} \frac{d\omega_-}{dk_{//}} = \left(\frac{c^2 \omega_p^2 + c^2 U^2 p_{ng}^2 / R^2}{\omega_p^2 + c^2 p_{ng}^2 / R^2} \right)^{1/2} \quad (170)$$

É fácil de ver que neste último resultado

$$c > \left(\frac{c^2 \omega_p^2 + c^2 U_{pNY}^2 / R^2}{\omega_p^2 + c^2 p_{NY}^2 / R^2} \right)^{1/2} > U \quad , \quad (171)$$

como era de se esperar pois os modos w_- estão todos na região IV.

é fácil ver que todas estas equações, assim como os gráficos 14 e 15 se reduzem ao caso anterior quando se faz $T_0 \rightarrow 0$.

Uma observação a mais a ser feita neste caso se refere aos modos TE, pois foi visto em (160) que estes modos não são influenciados pela temperatura dos elétrons. Olhando em mais detalhes vê-se que estes modos não são influenciados nem mesmo pela presença ou não do plasma, já que não dependem de T_0 e nem de ω_p , e só dependem das dimensões da guia. Uma explicação física para este fato vem ao se lembrar que o caso que está sendo analisado é aquele em que $B_0 \rightarrow \infty$. Quando o campo magnético é infinito as partículas ficam restritas a um movimento unidimensional ao longo da direção do campo magnético, visto que então o raio de Larmor ($r_L = mv_{\perp} / eB_0$) é nulo. Isto implica que

$$v_r(r) = v_{\theta}(r) = 0 \text{ para todo } r. \quad (172)$$

Como o modo TE se caracteriza por $E_z(r) = 0$ para todo r , vem que também a componente longitudinal da velocidade é nula para todo r . Isto implica então que nem os elétrons se movem com a passagem desta onda, sendo isto devido a não haver forças longitudinais neste caso. Com isto vê-se que a presença ou não do plasma é indiferente para esta onda, que se comportaria da mesma maneira caso houvesse vácuo em vez do plasma.

Como última observação vem que não há ondas que satisfazem simultaneamente a todas as condições de contorno quando $w = k_{//}U$ e nem quando $w^2 = w_p^2 + k_{//}^2 U^2$, não havendo portanto propagação com estas relações de dispersão (o último modo só podendo ser excitado num plasma ilimitado).

VI.4 - Caso em que T_0 é qualquer e $B_0 = 0$

O caso a ser visto agora é o de um plasma morno sem campo magnético. As equações que descrevem esta situação são a (67) e a (72). Agora há três regiões no plano $k_{//} - \omega$.

Região I: $k_s^2 > 0$ e $k_e^2 > 0$,

Região II: $k_s^2 > 0$ e $k_e^2 < 0$, (179)

Região III: $k_s^2 < 0$ e $k_e^2 < 0$.

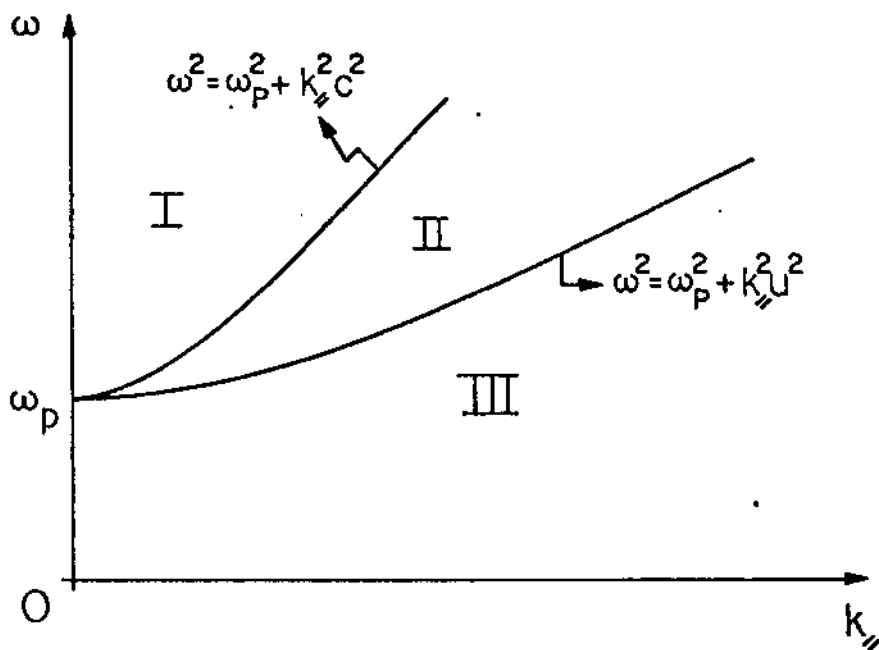


Figura 16. Regiões do plano $k_{//} - \omega$.

As soluções por regiões das equações (67) e (72) são.

Região I: $E_z = A_{1n} J_n(rk_e) + B_{1n} J_n(rk_s)$, (174)

$$H_z = C_{1n} J_n(rk_e) .$$

Região II: $E_z = A_{2n} I_n(rk_{eII}) + B_{2n} J_n(rk_s)$, (175)

$$H_z = C_{2n} I_n(rk_{eII}) .$$

Região III: $E_z = A_{3n} I_n(rk_{eII}) + B_{3n} I_n(rk_{sII})$, (176)

$$H_z = C_{3n} I_n(rk_{eII}) .$$

onde $k_{sII} = \left(k_{//}^2 - \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{U^2} \right)^{1/2}$. (177)

(ver também (52), (73) e (126)).

Inicialmente é obtida a relação de dispersão na região I. A aplicação de (93) fornece

$$A_{1n} J_n(Rk_e) + B_{1n} J_n(Rk_s) = 0 . \quad (178)$$

Aplicando (96) e (94) vem que (usando também (54), (55), (61) e (174)):

$$C_{1n} J_n'(Rk_e) = - \frac{ink_{//}}{\omega M_0 Rk_e} E [B_{1n} J_n(Rk_s) + A_{1n} J_n(Rk_e) +$$

$$+ \frac{U^2 (k_e^2 - k_s^2) B_{1n} J_n(Rk_s)}{k // (c^2 - U^2)} J_n(Rk_s) \quad (179)$$

e também

$$nC_{1n} J_n(Rk_e) = - \frac{iR}{k_0 w} \left(\frac{B_{1n} c^2 U^2 (k_e^2 - k_s^2) k_e^2 k_s J_n'(Rk_s)}{k // w_p^2 (c^2 - U^2)} + \right. \\ \left. + \frac{k // c}{B_{1n} k_s} J_n'(Rk_s) + \frac{A_{1n} k_e}{J_n'(Rk_e)} + \frac{U^2 (k_e^2 - k_s^2) B_{1n} k_s}{k // (c^2 - U^2)} \right. \\ \left. - J_n'(Rk_s) \right) \quad (180)$$

Combinando estas três últimas equações obtém-se finalmente a relação de dispersão

$$\frac{\omega^2 J_n'(Rk_s) J_n'(Rk_e)}{J_n(Rk_s) J_n(Rk_e)} + \frac{k // w_p^2 J_n^{12}(Rk_e)}{k_s k_e J_n^2(Rk_e)} - \frac{n^2 (\omega^2 - w_p^2) w_p^2}{k_s k_e^3 c^2 R^2} = 0 \quad (181)$$

Seguindo um procedimento análogo obtém-se a seguinte relação de dispersão na região II:

$$\frac{\omega^2 J_n'(Rk_s) I_n'(Rk_{eII})}{J_n(Rk_s) I_n(Rk_{eII})} - \frac{k // w_p^2 I_n^{12}(Rk_{eII})}{k_s k_{eII} I_n^2(Rk_{eII})} + \frac{n^2 (\omega^2 - w_p^2) w_p^2}{k_s k_{eII}^3 c^2 R^2} = 0 \quad (182)$$

Já na região III a relação de dispersão fica na forma

$$\frac{\omega^2 I_n'(Rk_{sII}) I_n'(Rk_{eII})}{I_n(Rk_{sII}) I_n(Rk_{eII})} - \frac{k_{sII}^2 \omega_p^2 I_n'(Rk_{eII})}{k_{sII} k_{eII} I_n^2(Rk_{eII})} + \frac{n^2 (\omega^2 - \omega_p^2) \omega_p^2}{k_{sII} k_{eII}^3 c^2 k^2} = 0 \quad (183)$$

onde $I_n'(x)$ significa derivada em relação ao argumento.

Observa-se que como estas relações de dispersão apresentam apenas termos quadráticos em n , que então não se prevê rotação de Faraday no caso em que um plasma morno não magnetizado preenche completamente a guia. Uma outra observação importante é que estas relações de dispersão quando $n \neq 0$ são para ondas híbridas, já que nestas condições nem o modo TE nem o modo TM podem satisfazer simultaneamente às condições de contorno (93), (94) e (96), exceção feita à curva $\omega = \omega_p$.

Este caso de um plasma morno e não magnetizado foi estudado também por Azakami, Narita e Aye Ihein, [27], que mostraram que no caso axialmente simétrico as ondas podem ser separadas em modos TE e TM. Vale ainda ressaltar que a relação de dispersão final obtida por Azakami em seu trabalho contém dois erros de sinal.

Os gráficos das relações de dispersão (181) a (183) são mostrados nas figuras 17 e 18, onde foram usados novamente os parâmetros da LISA:

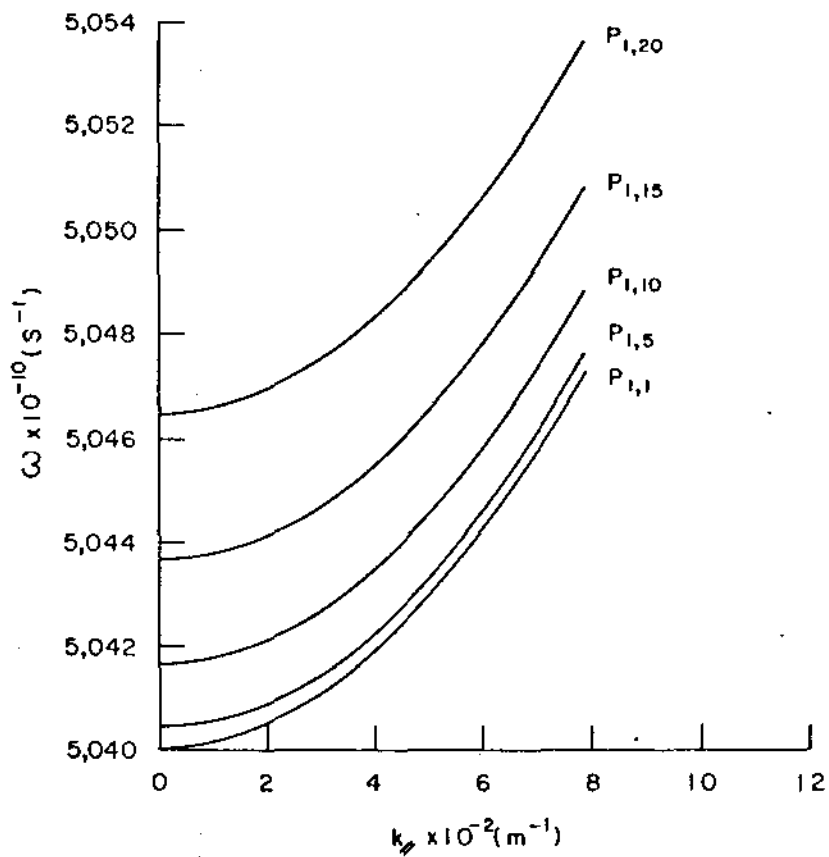


Figura 17: Relação de dispersão quando $k_B T_e = 40 \text{ eV}$, $B_0 = 0$, $n_0 = 8 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$, $R = 0,085 \text{ m}$, $n = 0$. Curvas da região $\omega > \omega_p$. São mostrados os modos $P_{1,1}$, $P_{1,5}$, $P_{1,10}$, $P_{1,15}$ e $P_{1,20}$.

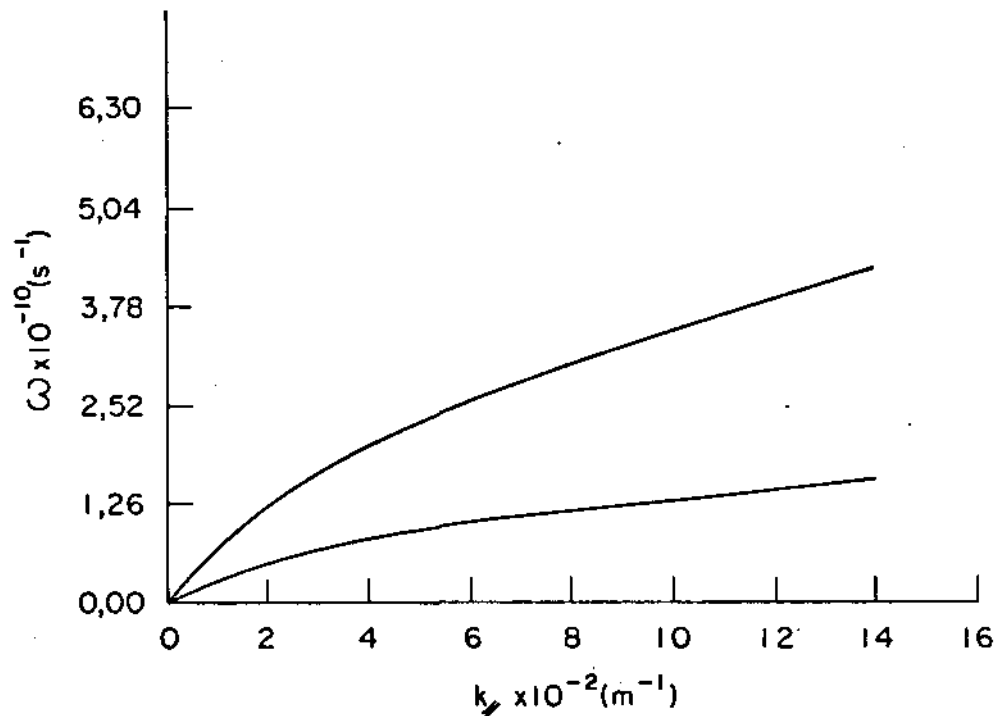


Figura 18: Relação de dispersão quando $B_0 = 0$, $n_0 = 8 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$, $R = 0,085 \text{ m}$, $n = 0$, região III de (173). A curva inferior é para a temperatura da LISA, 40 eV ($U = 3,42 \cdot 10^6 \text{ m/s}$), enquanto que a curva superior é para uma temperatura de 1,37 KeV ($U = 2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$). Destas curvas, pode-se perceber que a frequência tende à frequência de plasma para altos $k_{//}$'s.

Nas regiões I e II existem infinitas curvas que satisfazem às relações de dispersão (181) e (182), enquanto que na região III há apenas uma curva que satisfaz a (183). Esta curva tende à frequência de plasma quando $k_{//} \rightarrow \infty$ e no limite de baixo $k_{//}$ sua velocidade de grupo é dada por (caso $n = 0$):

$$\lim_{K_{//} \rightarrow 0} \frac{dw}{dk_{//}} = \left[\frac{cU I_0(Rw_p/U) I_1(Rw_p/c)}{I_0(Rw_p/c) I_1(Rw_p/U)} \right]^{1/2}, \quad (184)$$

enquanto que

$$\lim_{K_{//} \rightarrow \infty} \frac{dw}{dk_{//}} = 0. \quad (185)$$

Já as curvas das regiões I e II vão ser tratadas em mais detalhes na secção VI.4.1.

É fácil ver de (183) que $w = w_p$ também é uma solução no caso de um plasma morno não magnetizado, qualquer que seja n , e então esta solução ($w = w_p$) tem de continuar sendo válida no limite em que $l_0 \rightarrow 0$, confirmando o resultado (123).

No limite de ondas lentas apenas há propagação nas regiões II e III (na região I só se propagam ondas rápidas) com as relações de dispersão dadas por:

$$\text{Região II: } w^2 k_{sI} I_n(Rk_{//}) J_n'(Rk_s) - w_p^2 k_{//} J_n(Rk_s) I_n'(Rk_{//}) = 0, \quad (186)$$

$$\text{Região III: } w^2 k_{sII} I_n(Rk_{//}) I_n'(Rk_{sII}) - w_p^2 k_{//} I_n(Rk_{sII}) I_n'(Rk_{//}) = 0. \quad (187)$$

O limite de um plasma ilimitado ($R \rightarrow \infty$) para este caso e os seguintes vai ser analisado em mais detalhes na secção VI.6.

VI.4.1 - Método Numérico

As curvas $w = w(k_{//})$ que satisfazem às relações de dispersão (181) a (183) são mais complexas e difíceis de obter do que as curvas dos casos anteriores. Isto devido à complexidade das relações de dispersão deste caso, já que agora w e $k_{//}$ aparecem não só como parte dos coeficientes que multiplicam as funções de Bessel, mas também como parte dos argumentos destas funções de Bessel.

Para se obter o gráfico $w = w(k_{//})$ destas curvas se utilizou o seguinte método numérico: Sendo w_p , R , c e U dados, então a relação de dispersão pode ser escrita na forma $F(w, k_{//}) = 0$, onde F é conhecida analiticamente e se procuram os w 's e $k_{//}$'s que satisfazem a esta equação. Os pontos iniciais são facilmente obtidos colocando-se $k_{//} = 0$ em (181), o que dá (para as curvas que se iniciam na região I; caso $n = 0$):

$$J_0'(Rk_s) = -J_1(Rk_s) = 0 \quad , \quad (188)$$

$$\text{ou: } w_y = \left(w_p^2 + \frac{p_{1y}^2 U^2}{R^2} \right)^{1/2} \quad , \quad (189)$$

onde p_{1y} é a y -ésima raiz da equação

$$J_1(x) = 0 \quad . \quad (190)$$

Para os w 's e $k_{//}$'s que satisfazem a

$$F(w, k_{//}) = 0 \quad , \quad (191)$$

vem que

$$\Delta F \approx \frac{\partial F}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial F}{\partial k_{//}} \Delta k_{//} = 0 \quad . \quad (192)$$

Como $(\partial F / \partial w)$ e $(\partial F / \partial k_{//})$ são conhecidos analiticamente, podese dar externamente o passo $\Delta k_{//}$ e então se obtém a recorrência

$$w_{i+1,y} = w_{i,y} - \frac{(\partial F / \partial k_{//})_i \Delta k_{//}}{(\partial F / \partial w)_i} \quad , \quad (193)$$

e com isto então se obtém todos os pontos das curvas que se quer. Lembrar ainda que

$$\Delta k_{// \ i+1} = k_{// \ i} + \Delta k_{//} \quad . \quad (194)$$

O mesmo procedimento pode ser utilizado nos outros casos e nas outras regiões.

A dificuldade maior que se encontra ao graficar estas curvas é que elas cruzam a curva $k_E = 0$ ($w = (w_p^2 + k_{//}^2 c^2)^{1/2}$), e então passam da região I para a região II. O programa tem então de ser feito de tal forma que quando isto ocorre se passa automaticamente a utilizar a relação de dispersão (192) em vez de (181). Com isto se evitam problemas numéricos (como por exemplo raízes quadradas de números negativos) e se obtém curvas bem comportadas. O importante a observar é que não há

nenhum impedimento físico para as curvas passarem de uma região a outra do gráfico e que é apenas aparente a distinção entre as relações de dispersão (181) e (182). Isto pode ser visto claramente da Figura 17, onde percebe-se que as curvas que satisfazem a estas relações de dispersão são contínuas e bem comportadas até mesmo sobre o local de separação entre as duas regiões.

Um resultado analítico ainda é possível de ser obtido em (181) e em (182) para estas curvas:

$$\text{em (181): } \lim_{k_{//} \rightarrow 0} \frac{dw}{dk_{//}} = 0, \quad (195)$$

$$\text{em (182): } \lim_{k_{//} \rightarrow \infty} \frac{dw}{dk_{//}} = U, \quad (196)$$

mostrando o comportamento da velocidade de grupo destas ondas nos limites de baixo e grande número de onda.

VI.5 - Caso em que $\Gamma_0 = 0$ e B_0 é qualquer

O caso a ser analisado agora é o de um plasma frio e no qual há a presença de um campo magnético axial finito. As equações para este caso são então a (74) e a (76) no limite em que $\Gamma_0 \rightarrow 0$:

$$H_z = \frac{-i}{M_0 k // w_c w_p^2} \left[(w^2 - w_p^2 - w_c^2) \nabla_{\perp}^2 + \frac{w^2 - w_p^2 (w^2 k_e^2 - w_c^2 k_f^2)}{w^2} \right] E_z, \quad (197)$$

$$\begin{aligned} & \left[(w^2 - w_p^2 - w_c^2) \nabla_{\perp}^4 + \left[2(w^2 - w_p^2) k_e^2 - \frac{w_c^2 k_f^2 (2w^2 - w_p^2)}{w^2} \right] \nabla_{\perp}^2 + \right. \\ & \left. + \left[(w^2 - w_p^2) k_e^4 - w_c^2 \frac{w^2 - w_p^2}{w^2} \left(\frac{w^2 - k^2 // c^2}{c^2} \right)^2 \right] \right] E_z = 0. \quad (198) \end{aligned}$$

No caso em que $w^2 \neq w_p^2 + w_c^2$ pode-se manipular algebricamente essa última equação para colocá-la na forma

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_a^2)(\nabla_{\perp}^2 + k_b^2) E_z = 0, \quad (199)$$

onde

$$k_a = \left[\frac{A - (\Delta)^{1/2}}{D} \right]^{1/2}, \quad (200)$$

$$k_b = \frac{[A + (\Delta)^{1/2}]^{1/2}}{D}, \quad (201)$$

sendo

$$A = -w_c^2 w_p^2 (w^2 + k_{//}^2/c^2) + 2w^2 (w^2 - w_p^2 - k_{//}^2/c^2) (w^2 - w_p^2 - w_c^2),$$

$$\Delta = w_p^4 w_c^2 [w_c^2 (w^2 - k_{//}^2/c^2)^2 + 4w^2 k_{//}^2/c^2 (w^2 - w_p^2)] \quad (202)$$

$$D = 2c^2 w^2 (w^2 - w_p^2 - w_c^2)$$

O que ocorre de novo neste caso é que vai ocorrer uma região no plano $k_{//} - w$ onde k_a^2 e k_b^2 são necessariamente complexos, apesar de se ter w e $k_{//}$ reais. Isto vai levar a que nesta região os argumentos das funções de Bessel simples ou modificada que solucionam (199) sejam obrigatoriamente complexos. A região onde isto ocorre, ou seja, onde $\Delta < 0$, é mostrada na figura 19, onde se vê que esta região é na forma de uma gota, localizada na região $w < w_p$.

Os pontos limite marcados na figura têm as seguintes coordenadas:

$$P_1 = (0, 0),$$

$$P_2 = \left(\frac{w_p}{c}, w_p \right),$$

(203)

$$P_3 = \left(\frac{w_p}{c} \left(\frac{w_p^2 + w_c^2}{w_c^2} \right)^{1/2}, w_p \left(\frac{2w_p^4 + 3w_p^2 w_c^2 + w_c^4}{4w_p^4 + 4w_p^2 w_c^2 + w_c^4} \right)^{1/2} \right)$$

$$P_4 = \left(\frac{w_p}{c}, \frac{w_p w_c}{(4w_p^2 + w_c^2)^{1/2}} \right)$$

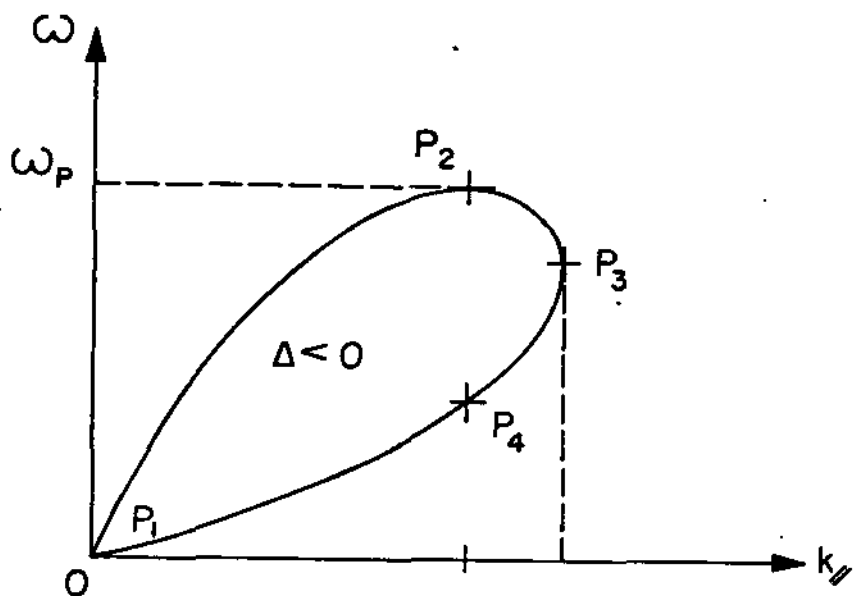


Figura 19: Região em que $\Delta < 0$.

No caso em que a frequência de excitação é a frequência híbrida superior, ou seja, quando $w^2 = w_p^2 + w_c^2 = w_{HS}^2$, então as soluções de (197) e (198) não vão satisfazer ao conjunto das relações de dispersão (93), (94) e (96). Daqui para a frente analisam-se apenas os casos em que $w^2 \neq w_p^2 + w_c^2$.

Para se obter a relação de dispersão nestes casos usa-se um procedimento semelhante ao dos casos anteriores. Aceitando-se argumentos complexos vem que a solução de (199) é, em forma geral (ver Apêndice B).

$$E_z = A_n J_n(rk_a) + B_n J_n(rk_b) \quad (204)$$

A aplicação das condições de contorno (93), (94) e (96) leva então à seguinte relação de dispersão (ver o procedimento na seção anterior e também as equações (54), (55) e (61) no limite em que $T_0 \rightarrow 0$).

$$\frac{w w_p^2 w_c k^2 / c^2 \text{RE}}{J_n(rk_a)} \left[\frac{k_a J_n'(rk_a)}{J_n(rk_a)} - \frac{k_b J_n'(rk_b)}{J_n(rk_b)} \right] - n(\Delta)^{1/2} = 0 \quad (205)$$

Como fica esta relação de dispersão em algumas regiões específicas: nas regiões onde $k_a^2 > 0$ e $k_b^2 < 0$, basta substituir k_b por k_{bII} , $J_n(rk_b)$ por $I_n(rk_{bII})$ e $J_n'(rk_b)$ por $I_n'(rk_{bII})$ em (205), nas regiões onde $k_a^2 < 0$ e $k_b^2 > 0$ basta substituir k_a por k_{aII} , $J_n(rk_a)$ por $I_n(rk_{aII})$ e $J_n'(rk_a)$ por $I_n'(rk_{aII})$ em (205); nas regiões onde $k_a^2 < 0$ e $k_b^2 < 0$ faz-se estas duas substituições simultaneamente em (205), onde tem-se as seguintes definições.

$$k_{aII} = \left[\frac{(\Delta)^{1/2} - A}{D} \right]^{1/2} \quad (206)$$

$$k_{bII} = \left[\frac{-A + (\Delta)^{1/2}}{D} \right]^{1/2}$$

Já na região onde $\Delta < 0$ tem-se k_a^2 e k_b^2 complexos, e então (205) fica na forma

$$2k_a^2 / c^2 \omega w_c w_p^2 R (\alpha_1 \alpha_4 \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_3 \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5) + n(-\Delta)^{1/2} (\alpha_3^2 + \alpha_4^2) = 0 \quad (207)$$

onde:

$$k_a = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad ,$$

$$J_n(Rk_a) = \alpha_3 + i\alpha_4 \quad , \quad (208)$$

$$J_n^I(Rk_a) = \alpha_5 + i\alpha_6 \quad ,$$

onde os α_j ($j = 1, \dots, 6$) são todos reais e onde se usou que

$$k_b = \overline{k_a} \quad , \quad (209)$$

$$J_n(\overline{z}) = \overline{J_n(z)} \quad .$$

Desta forma se vê que é sempre possível obter relações de dispersão reais na situação sem temperatura, mesmo nos casos em que os argumentos das funções de Bessel são complexos.

No limite em que $B_0 \rightarrow 0$ vem de (205) que

$$(\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2} J_n^2(Rk_e) = 0 \quad , \quad (210)$$

enquanto que no limite em que $B_0 \rightarrow \infty$ vem de (205) que

$$J_n(Rk_i) J_n(Rk_f) = 0 \quad . \quad (211)$$

Ou seja, se consegue reobter as relações de dispersão para os modos TM de ambas as situações já analisadas ($\omega = \omega_p$ e $J_n(Rk_i) = 0$), além de surgirem algumas raízes espúrias. Já as relações de dispersão para os modos TE no limite em que $B_0 \rightarrow \infty$ não podem ser obtidas à partir de (205). Isto porque como agora os modos são acoplados (o caso que está sendo analisado é o de um campo magnético finito, ver (197)), foi suposto que $E_z(r)$ não era nulo para todo r . Com isto se observa que (205) não se refere aos modos transversos elétricos.

A relação de dispersão (205) se refere a um modo híbrido, ou seja, $E_z(r)$ não é nulo para todo r e $H_z(r)$ também não é nulo para todo r . Pode-se mostrar ainda que o modo transversal magnético não pode ser excitado (ou seja, não satisfaz ao conjunto das condições de contorno) no caso de B_0 ser finito e não nulo (lembrar que esta análise se refere ao caso de um plasma frio).

Um outro aspecto importante a ser observado de (205) é que a relação de dispersão apresenta n elevado a um número ímpar, 1. Isto indica que se prevê a rotação de Faraday no caso de um plasma frio magnetizado preenchendo completamente a guia, desde que esse plasma seja excitado por uma onda eletromagnética. Esse fenômeno de rotação do plano de polarização da onda vai ocorrer quando a onda for composta por uma superposição dos modos $n = +N$ e $n = -N$, sendo N um inteiro

específico qualquer. Como as velocidades de fase destas ondas são diferentes (ver (205)), vem que a direção de polarização da onda composta vai ir girando à medida em que a onda se propaga ao longo da guia. A medida da rotação de Faraday é uma importante técnica de diagnóstico usada nas máquinas de plasma (o fenômeno de rotação de Faraday é bem conhecido e estudado. Para uma análise deste fenômeno em guias de onda cilíndricas de seção reta circular ver, por exemplo, [28]). Trivelpiece, [4], chegou à conclusão de que em uma guia completamente preenchida com um plasma frio magnetizado não há rotação de Faraday, só que deve ser ressaltado que seus resultados se restringem (ao menos no caso em que B_0 é finito e não nulo) à excitação por ondas eletrostáticas (não analisou para este caso uma excitação por ondas eletromagnéticas).

Embora não se pretenda graficar (205) de forma geral, pode-se observar que uma das soluções desta relação de dispersão é $w = w_p$ para todo $n \neq 0$.

O limite de plasma ilimitado será visto de forma geral na próxima seção. Já no limite de ondas lentas a relação de dispersão fica na forma (aplicando o limite de ondas lentas em (200), (201) e (205)):

$$nw_c - R\omega \left[\frac{J_n'(R\tau)}{J_n(R\tau)} - k_{//} \frac{I_n'(Rk_{//})}{I_n(Rk_{//})} \right] = 0, \quad (212)$$

quando $I_n^2 > 0$ (ver figuras 20 e 21); e na forma

$$n\omega_c - R\omega E T_{II} \frac{I_n'(R\Gamma_{II})}{I_n(R\Gamma_{II})} - k_{//} \frac{I_n'(Rk_{//})}{I_n(Rk_{//})}] = 0, \quad (213)$$

quando $T^2 < 0$, onde:

$$\Gamma = \left[\frac{k_{//}^2 (\omega^2 - \omega_p^2) (\omega_c^2 - \omega^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)} \right]^{1/2}, \quad (214)$$

$$T_{II} = \left[\frac{k_{//}^2 (\omega^2 - \omega_p^2) (\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)} \right]^{1/2}.$$

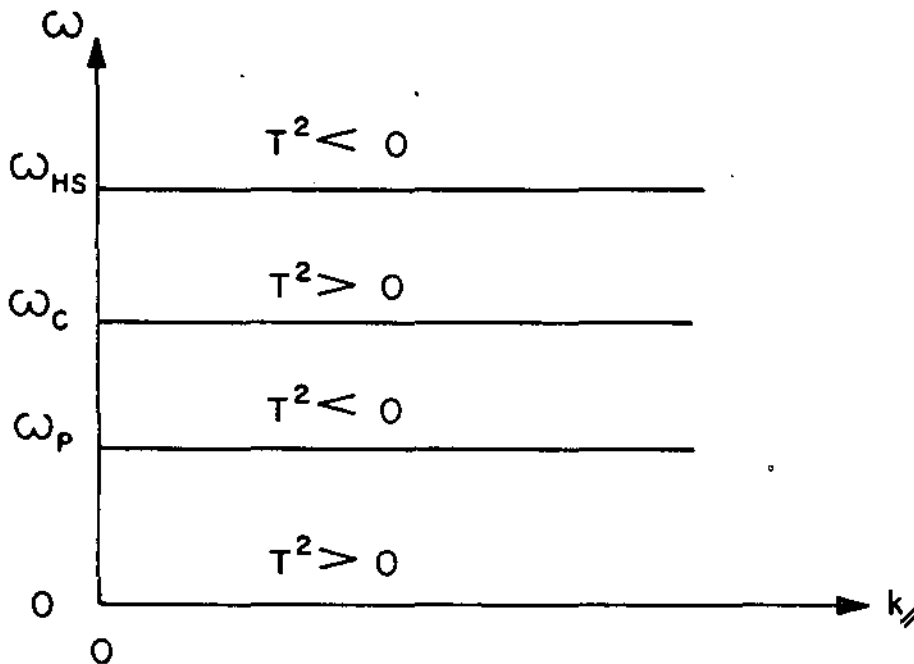


Figura 20: Regiões onde T^2 é positivo ou negativo. Caso em que $\omega_c > \omega_p$.

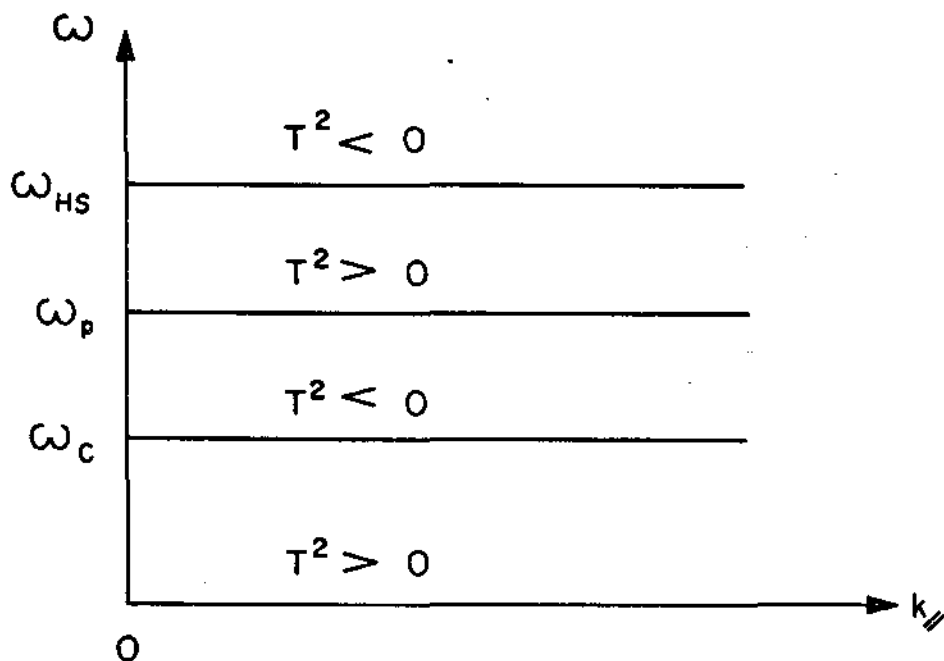


Figura 21: Regiões onde T^2 é positivo ou negativo. Caso em que $\omega_c < \omega_p$.

O resultado (212) é diferente do obtido por Trivelpiece e Gould, a saber:

$$J_n(RT) = 0, \text{ ou seja, } RT = p_{ny} \quad (215)$$

Acontece que se formos analisar em detalhes o trabalho do Trivelpiece, observa-se as seguintes equações (ver equações (III.23) a (III.26) e (III.6) da referência [4]):

$$\phi_1(r) = A_n J_n(rT) ,$$

$$E_r(r) = - A_n J_n'(rT) ,$$

$$E_\theta(r) = - i A_n n \frac{J_n(rT)}{r} ,$$

(216)

$$E_z(r) = - i A_n k_z J_n(rT) ,$$

$$v_r(r) = - \frac{e (i\omega E_r(r) + \omega_c E_\theta(r))}{m (\omega^2 - \omega_c^2)} ,$$

onde deve-se lembrar que Trivepiece analisa apenas os casos eletrostáticos, quando então pode-se derivar o campo elétrico de um potencial escalar: $E = - \vec{\nabla} \phi_1$.

A relação de dispersão (215) foi obtida aplicando-se a condição de contorno $\phi_1(R) = 0$, e de (216) pode-se ver que (215) implica nas seguintes condições de contorno:

$$E_z(R) = 0 ,$$

(217)

$$E_\theta(R) = 0 ,$$

mas que não implica (a não ser para os casos bem particulares em que $T = 0$, ou seja, $\omega = \omega_p$ ou $\omega = \omega_c$) na condição de contorno

$$v_r(R) = 0 .$$

(218)

Ou seja, a relação de dispersão apresentada por Trivelpiece, (215), é fisicamente incorreta já que como há uma guia metálica circundando o plasma não pode haver velocidade radial do fluido em sua superfície. A única solução que satisfaz simultaneamente a todas estas condições de contorno (fora os casos $w = w_p$ ou $w = w_c$) é: $A_n = 0$, ou seja, isto implica que não pode haver propagação de uma onda eletrostática lenta no caso de uma guia cilíndrica preenchida completamente por um plasma frio, homogêneo e magnetizado. Talvez as ondas eletrostáticas possam surgir em um modelo de plasma inhomogêneo. Pode-se, por exemplo, utilizar uma variação radial parabólica para a densidade de carga do tipo

$$n_0(r) = n_e \left[1 - \alpha \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (219)$$

onde n_e é a densidade de carga no eixo da guia e α é um parâmetro entre zero e um. De qualquer forma esta é apenas uma idéia e não se quer enfatizá-la muito pois não é objetivo deste trabalho analisar os casos de plasmas inhomogêneos (para um tratamento de plasmas frios, inhomogêneos e limitados ver, por exemplo, as referências [29] e [30]). O que vale à pena ressaltar é que quando um plasma frio, homogêneo e magnetizado preenche completamente a guia então não podem ser propagadas ondas eletrostáticas lentas.

Por outro lado é possível a propagação de ondas eletromagnéticas lentas com relação de dispersão dada por (212) ou por (213). O gráfico qualitativo desta relação de dispersão para os modos azimutalmente simétricos é mostrado na figura 22 (para o caso em que $w_c < w_p$),

onde se pode perceber que apenas é possível a propagação de ondas nas regiões onde $T^2 > 0$.

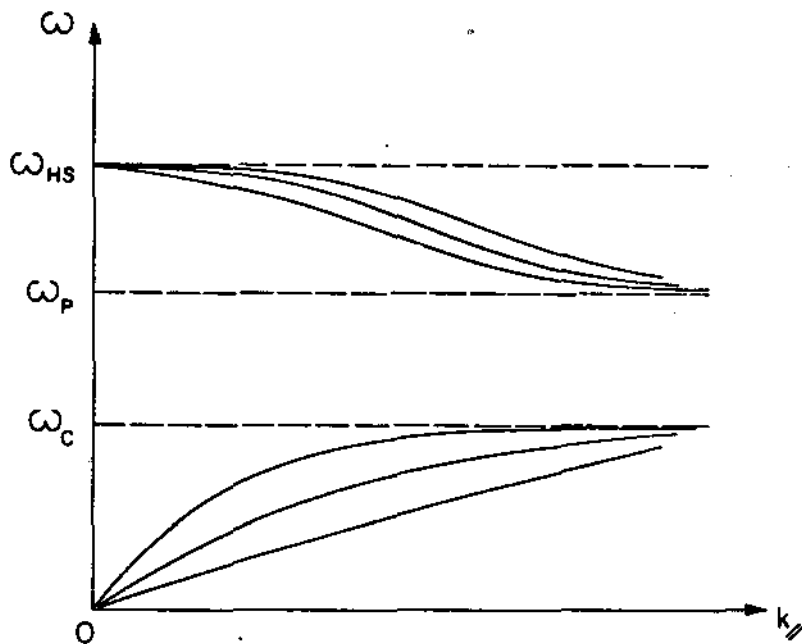


Figura 22: Relação de dispersão quando $T_0 = 0$, B_0 finito, $n = 0$, $\omega_p > \omega_c$.

Há um número infinito de curvas tanto para a região $\omega < \omega_c$ quanto para a região $\omega_{HS} < \omega < \omega_p$, sendo que na região inferior todas se iniciam em $\omega = 0$ e tendem assintoticamente à frequência de ciclotron quando $k_{//} \rightarrow \infty$. Na região superior todas as curvas se iniciam em $\omega = \omega_{HS}$ e tendem assintoticamente à frequência de plasma quando $k_{//} \rightarrow \infty$. Dessas curvas se verifica claramente que a frequência de ciclotron é uma frequência de ressonância, que é caracterizada pelo fato de toda a energia da onda ser absorvida pelo plasma. Isto também pode ser visto por (61) e (62), que indicam que à medida em que a frequência de exci-

tação vai se aproximando de w_c , mais vai crescendo a velocidade perpendicular dos elétrons, e portanto sua energia cinética.

Nas figuras 23 e 24 são mostradas estas relações de dispersão com os parâmetros da LISA.

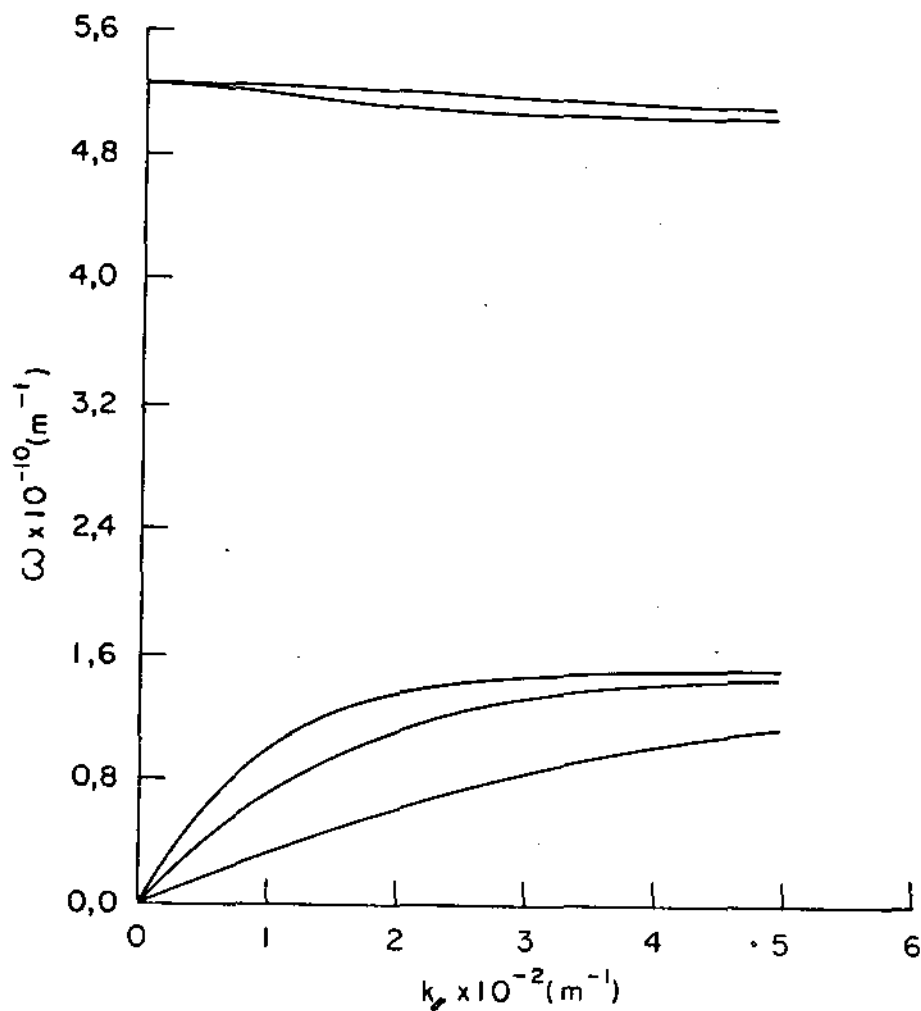


Figura 23. Relação de dispersão para $T_0 = 0$, $B_0 = 0,009 \text{ T}$, $n_0 = 8 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$, $R = 0,005 \text{ m}$, $n = 0$. São mostradas três curvas na região inferior e duas na região superior.

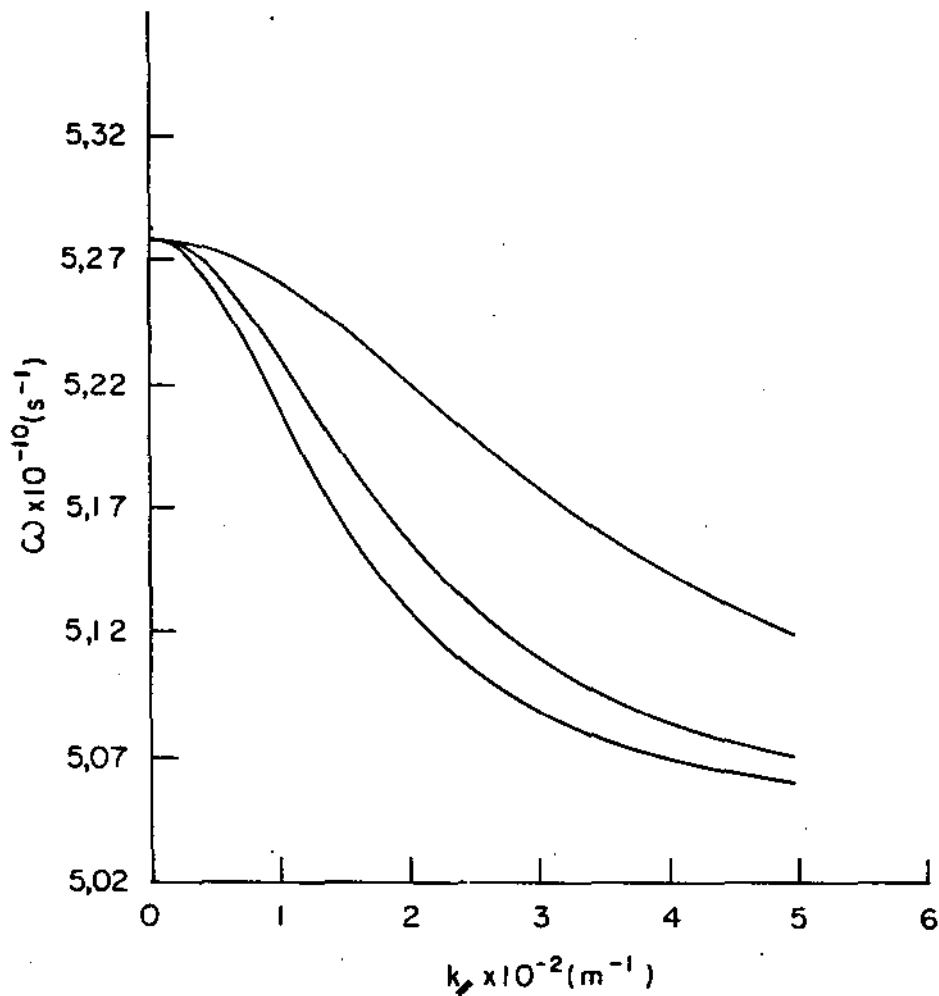


Figura 24: Relação de dispersão para $T_0 = 0$, $B_0 = 0,087$ T, $n_0 = 8 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$, $\bar{r} = 0,085$ m, $n = 0$. São mostradas três curvas na região $\omega_{HS} > \omega > \omega_p$.

Mais algumas observações são necessárias sobre estas curvas. Em primeiro lugar se observa que elas apresentam a estrutura de ondas "backward" na região $\omega_{HS} > \omega > \omega_p$, ou seja, nesta região a velocidade de grupo tem sentido oposto à velocidade de fase. Ondas do tipo "backward" neste intervalo de frequência foram detectadas experimentalmente por Trivelpiece e Gould, [3], e por eles interpretadas como sendo ondas eletrostáticas que satisfariam à condição de contorno (215), que

também apresenta o mesmo comportamento global para as ondas. Aqui se sugere que estas ondas talvez sejam ondas eletromagnéticas lentas que satisfaçam a (212). É importante ressaltar aqui novamente que as ondas que correspondem a (212) satisfazem não só a (217) como também a (218), sendo então fisicamente mais plausíveis do que as que correspondem a (215).

Uma última observação é que se prevê a rotação de Faraday mesmo para as ondas lentas quando o plasma é excitado por modos híbridos eletromagnéticos, como se pode observar de (212), sendo esta uma outra diferença importante em relação aos modos de Trivelpiece e Gould.

VI.6 - Caso em que T_0 é qualquer e B_0 é qualquer

Finalmente é analisado o caso de um plasma morno limitado por um condutor cilíndrico e na presença de um campo magnético axial finito. As equações para este caso são a (74) e a (76), que também pode ser escrita na forma (80). A solução geral para $E_z(r)$ é na forma (aceitando argumentos complexos):

$$E_z = A_n J_n(rk_1) + B_n J_n(rk_2) + C_n J_n(rk_3) \quad (220)$$

De (74) vem então que H_z é dado por

$$H_z = \frac{-ic^2 U^2}{M_0 k // w_c w_p^2 (c^2 - U^2)} [A_n (k_+^2 - k_1^2)(k_-^2 - k_1^2) J_n(rk_1) + B_n (k_+^2 - k_2^2)(k_-^2 - k_2^2) J_n(rk_2) + C_n (k_+^2 - k_3^2)(k_-^2 - k_3^2) J_n(rk_3)] \quad (221)$$

onde k_+ e k_- são dados por (75).

Utilizando-se um procedimento semelhante ao dos casos anteriores, apenas mais complicado devido à complexidade algébrica, se chega à seguinte relação de dispersão com a aplicação das condições de contorno (93), (94) e (96):

$$n^2 [F_1(L_2 - L_3) + F_2(L_3 - L_1) + F_3(L_1 - L_2)] + n [P_1(F_3 -$$

$$\begin{aligned}
& - F_2) - Q_1(L_3 - L_2) \frac{J_n^1(Rk_1)}{J_n(Rk_1)} + nE P_2(F_1 - F_3) - Q_2(L_1 - \\
& - L_3) \frac{J_n^1(Rk_2)}{J_n(Rk_2)} + nE P_3(F_2 - F_1) - Q_3(L_2 - L_1) \frac{J_n^1(Rk_3)}{J_n(Rk_3)} + \\
& + (Q_1 P_2 - P_1 Q_2) \frac{J_n^1(Rk_1) J_n^1(Rk_2)}{J_n(Rk_1) J_n(Rk_2)} + (Q_2 P_3 - P_2 Q_3) \frac{J_n^1(Rk_2) J_n^1(Rk_3)}{J_n(Rk_2) J_n(Rk_3)} + \\
& + (Q_3 P_1 - P_3 Q_1) \frac{J_n^1(Rk_3) J_n^1(Rk_1)}{J_n(Rk_3) J_n(Rk_1)} = 0 \quad , \quad (222)
\end{aligned}$$

onde se tem as seguintes definições

$$\begin{aligned}
F_j &= \frac{U^2 [k_e^2(k_e^2 - k_j^2) + (k_+^2 - k_j^2)(k_-^2 - k_j^2)]}{Rk // (c^2 - U^2)} \quad , \\
P_j &= \frac{-k_j}{k // w^2 w_p^2 G(c^2 - U^2)} [w^2 U^2 (k_e^2 - k_j^2)(c^2 G + k_e^2 w_p^2) + \\
& + k // w_p^2 (c^2 - U^2)(w^2 k_e^2 - w_c^2 k_f^2) + U^2 w^2 w_p^2 (k_+^2 - k_j^2)(k_-^2 - k_j^2)] \quad , \\
L_j &= \frac{U^2}{Rk // w w_c w_p^2 G(c^2 - U^2)} [w_c^2 (k_e^2 - k_j^2)(c^2 G + k_f^2 w_p^2) + \\
& + c^2 (w^2 k_e^2 - w_c^2 k_f^2)(k_+^2 - k_j^2)(k_-^2 - k_j^2)] \quad , \quad (223)
\end{aligned}$$

$$Q_j = \frac{-k_j}{c^2(c^2 - U^2)w_p^2 k // w w_c} [k_j^2 // w_c^2 w_p^4 (c^2 - U^2) + w_c^2 k_j^2 U^2 w_p^4 c^2 \cdot \\ \cdot (k_e^2 - k_j^2) + c^4 U^2 (w^2 k_e^2 - v_c^2 k_f^2) (k_+^2 - k_j^2) (k_-^2 - k_j^2)]$$

e onde $j = 1, 2, 3$.

Algumas observações são necessárias sobre esta relação de dispersão. Em primeiro lugar se observa mais uma vez, como era esperado, o fenômeno da rotação de Faraday devido aos termos que multiplicam n em (222). Outro dado a observar é que (222) se refere aos modos híbridos. Como neste caso ocorre novamente de H_z estar acoplada a E_z , então vem que o modo transverso elétrico não pode existir no caso de um plasma limitado na presença de um campo magnético finito e não nulo. Já o modo transverso magnético pode ser excitado com as ondas que satisfazem simultaneamente às seguintes equações, obtidas à partir da equação para E_z no modo TM (equação (74) com $H_z(r) = 0$ para todo r) e das condições de contorno (93), (94) e (96):

$$nA_{+-} + R w_c B_{-k_-} \frac{J_n^1(Rk_-)}{J_n(Rk_-)} - R w_c B_{+k_+} \frac{J_n^1(Rk_+)}{J_n(Rk_+)} = 0 \quad , \quad (224)$$

$$nC_+ + R D_{-k_-} \frac{J_n^1(Rk_-)}{J_n(Rk_-)} - R D_{+k_+} \frac{J_n^1(Rk_+)}{J_n(Rk_+)} = 0 \quad ,$$

onde

$$A_{+-} = U^2 k_e^2 w_c^2 (k_-^2 - k_+^2)$$

$$B_{\pm} = k_{\pm}^2 / (c^2 - U^2) w_p^2 + k_{\pm}^2 c^2 U^2 (k_e^2 - k_{\pm}^2)$$

(225)

$$C_{+-} = w w_c U^2 (k_f^2 w_p^2 + c^2 G) (k_-^2 - k_+^2)$$

$$D_{\pm} = k_{\pm}^2 / w_p^2 (c^2 - U^2) (w^2 k_e^2 - w_c^2 k_f^2) + w^2 U^2 (k_e^2 w_p^2 + c^2 G) (k_e^2 - k_{\pm}^2)$$

Voltando agora à relação de dispersão (222). No limite em que

$T_0 \rightarrow 0$ vem de (76), de (80) e da fórmula de Cardan (ver Apêndice A) que:

$$k_1^2 = \frac{w^2 - w_p^2 - w_c^2}{U^2} + \mathcal{O}(U^0)$$

$$k_2^2 = k_a^2 + \mathcal{O}(U^2)$$

(226)

$$k_3^2 = k_b^2 + \mathcal{O}(U^2)$$

ou seja, k_2 e k_3 tendem às soluções do caso anterior e k_1 diverge com a potência U^{-1} . Dividindo então (222) por $U^2 k_1^5$ e fazendo o limite em que $T_0 \rightarrow 0$ se obtém (ver também (223)):

$$\frac{J_n'(Rk_1) c^4 (w^2 k_e^2 - w_c^2 k_f^2)^2 - w^2 w_c^2 w_p^4 c - n(\Delta)^{1/2}}{J_n(Rk_1) G R k_{\pm}^2 / c^6 w^4 w_p^4 w_c^4}$$

$$+ Rk_{//}^2/c^2 \omega \omega_c \omega_p^2 \left[k_a \frac{J_n^1(Rk_a)}{J_n(Rk_a)} - k_b \frac{J_n^1(Rk_b)}{J_n(Rk_b)} \right] = 0 \quad (227)$$

que é exatamente a relação de dispersão anterior.

O resultado (222) não vale nos casos em que $B_0 \rightarrow 0$ ou em que $B_0 \rightarrow \infty$, já que então apenas se obtém de (222) a identidade $0 = 0$. O motivo para isto é que se usou (221), que deixa de ser válida nestes limites. De qualquer forma pode-se obter de (222), por exemplo, a relação de dispersão de um plasma morno na presença de um fraco campo magnético de equilíbrio. De (76) vem que

$$b_1 = \beta_1 + \omega_c^2 \gamma_1 = (2k_e^2 + k_s^2) + \omega_c^2 \left(\frac{k_{//}^2/U^2 - \omega^2}{\omega^2 U^2} \right) ,$$

$$b_2 = \beta_2 + \omega_c^2 \gamma_2 = (2k_e^2 k_s^2 + k_e^4) + \omega_c^2 \left[\frac{k_{//}^2/U^2 - \omega^2 (k_e^2 + k_s^2)}{\omega^2 U^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{k_{//}^2/\omega_p^2}{\omega^2} \frac{c^2 - U^2}{c^2 U^2} \right] \quad (228)$$

$$b_3 = \beta_3 + \omega_c^2 \gamma_3 = (k_e^4 k_s^2) + \omega_c^2 \left(\frac{k_{//}^2/U^2 - \omega^2 k_e^2 k_s^2}{\omega^2 U^2} - \frac{k_{//}^2/k_s^2 \omega_p^2}{\omega^2} \right.$$

$$\left. \frac{c^2 - U^2}{c^2 U^2} \right) ,$$

ou seja, se escreve os b_i 's de tal forma que os β_i 's e γ_i 's ficam independentes de w_c . Com isto então se pode obter da fórmula de Cardan as seguintes expressões, válidas para B_0 pequeno e $T_0 \neq 0$:

$$k_1^2 = k_s^2 + \mathcal{O}(w_c^2),$$

$$k_2^2 = k_e^2 - \frac{w_c (X/2)^{1/2}}{(k_e^2 - k_s^2)^{1/2}} + \mathcal{O}(w_c^2), \quad (229)$$

$$k_3^2 = k_e^2 + \frac{w_c (X/2)^{1/2}}{(k_e^2 - k_s^2)^{1/2}} + \mathcal{O}(w_c^2),$$

onde

$$\begin{aligned} X = & 8\beta_1^5\gamma_1 - 12\beta_1^4\gamma_2 - 18\beta_1^3\gamma_3 - 81\beta_1^2\beta_3\gamma_1 + 81\beta_1^2\beta_2\gamma_2 + 81\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_3 + \\ & + 81\beta_1\beta_3\gamma_2 + 81\beta_1\beta_2^2\gamma_1 - 243\beta_3\gamma_3 + 81\beta_2\beta_3\gamma_1 - 162\beta_2^2\gamma_2. \quad (230) \end{aligned}$$

Multiplicando então (222) por w_c^2 e fazendo o limite de B_0 pequeno vem que (ver também (223)):

$$\begin{aligned} n \left[G_1 H_{32} \frac{J_n^1(Rk_1)}{J_n(Rk_1)} + G_2 H_{13} \frac{J_n^1(Rk_2)}{J_n(Rk_2)} + G_3 H_{21} \frac{J_n^1(Rk_3)}{J_n(Rk_3)} \right] + \\ + w_c \left[n^2 (I_1 H_{23} + I_2 H_{31} + I_3 H_{12}) + (G_2 N_1 - G_1 N_2) \frac{J_n^1(Rk_1)}{J_n(Rk_1)} \right]. \end{aligned}$$

$$\frac{-J_n'(Rk_2)}{J_n(Rk_2)} + (G_3 N_2 - G_2 N_3) \frac{J_n'(Rk_2) J_n'(Rk_3)}{J_n(Rk_2) J_n(Rk_3)} + (G_1 N_3 - G_3 N_1) \frac{J_n'(Rk_3)}{J_n(Rk_3)}$$

$$\frac{-J_n'(Rk_3) J_n'(Rk_1)}{J_n(Rk_3) J_n(Rk_1)} \quad] = 0 \quad , \quad (231)$$

onde

$$G_i = \frac{w c^2 U^2 k_e^2 k_i [k_i^4 - (k_e^2 + k_s^2) k_i^2 + k_\theta^4]}{k // w_p^2 (c^2 - U^2)} \quad ,$$

$$H_{ij} = \frac{w c^2 U^2 [(k_i^4 - k_j^4) - (k_e^2 + k_s^2)(k_i^2 - k_j^2)]}{Rk // k_e^2 w_p^2 (c^2 - U^2)} \quad ,$$

$$I_i = \frac{U^2 [k_i^4 + k_e^4 - (2k_e^2 + k_s^2) k_i^2 + k_\theta^4]}{Rk // (c^2 - U^2)} \quad ,$$

(232)

$$N_i = \frac{-k_i}{w_p^2 k // k_e^4 (c^2 - U^2)} [k_e^2 U^2 (k_e^2 - k_i^2) (c^2 k_e^2 + w_p^2) +$$

$$+ U^2 w_p^2 (k_i^4 - (k_e^2 + k_s^2) k_i^2 + k_\theta^4) + w_p^2 k // k_e^4 (c^2 - U^2)] \quad ,$$

$$k_\theta^4 = \frac{w^2 - w_p^2}{c^2} \frac{w^2 - k // U^2}{U^2} - k // k_s^2 - \frac{w_p^2 (w^2 - w_p^2)}{c^2 U^2} \quad ,$$

sendo que em (231) e (232) os k_i 's são dados por (229), onde pode-se desprezar os termos da ordem de w_c^2 e menores.

Tanto este resultado quanto o resultado geral (222) são bem mais amplos do que o resultado geral de Ghosh e Pal, a saber (lembrar que estes autores só trabalharam com o caso $n = 0$):

$$\frac{J'_0(R(b + k_s^2)^{1/2})}{J_0(R(b + k_s^2)^{1/2})} + \frac{(a + k_e^2)^{1/2}}{b + k_s^2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{J'_0(R(a + k_e^2)^{1/2})}{J_0(R(a + k_e^2)^{1/2})} = 0, \quad (233)$$

sendo a e b dados por (79) e onde

$$\rho_1 = M_1 N_2 + N_1 M_2 + \frac{ic^2 U^2 N_1 G(k_e^2 - k_s^2 - b)}{k // w_p^2 (c^2 - U^2)},$$

$$\rho_2 = L_1 N_2 - L_2 N_1 + \frac{iac^2 U^2 G N_1}{k // w_p^2 (c^2 - U^2)},$$

$$M_1 = k // \frac{w_c}{w} \left[\frac{-U^2 k_p^2}{k // (c^2 - U^2)} \left(b + \frac{(w^2 - w_p^2)(c^2 - U^2)}{c^2 U^2} \right) + \frac{w_p^2}{c^2} \right],$$

$$N_2 = \frac{M_0 w_c w_p^2}{c^2},$$

(234)

$$N_1 = -iw M_0 \left[\frac{w_c^2 k_f^2}{w^2} - k_e^2 \right],$$

$$M_2 = - ik_{//} \left[\frac{w_c^2 k_f^2}{w^2} + \frac{U^2 k_e^2}{k_{//}^2 (c^2 - U^2)} \right] \left[b + \frac{(w^2 - w_p^2)(c^2 - U^2)}{c^2 U^2} \right] -$$

$$- k_e^2 \quad ,$$

$$L_1 = k_{//} w_c \left(\frac{a k_f^2 U^2}{w k_{//}^2 (c^2 - U^2)} - \frac{w_p^2}{c^2} \right) ,$$

$$L_2 = - ik_{//} \left[\frac{w_c^2 k_f^2}{w^2} + \frac{a U^2 k_e^2}{k_{//}^2 (c^2 - U^2)} - k_e^2 \right] .$$

O motivo para esta generalidade maior de (222) em comparação com (232) é que, como já foi afirmado anteriormente, não foram feitas simplificações para se chegar a (222), sendo que se partiu das mesmas equações iniciais de Ghosh e Pal (que no decorrer do trabalho fizeram algumas simplificações não especificadas).

Como fica (222) em algumas regiões específicas: Nas regiões onde $k_1^2 < 0$ deve-se substituir k_1 por k_{1II} , $J_n(Rk_1)$ por $I_n^1(Rk_{1II})$ e $J_n^1(Rk_1)$ por $I_n^1(Rk_{1II})$; nas regiões onde $k_2^2 < 0$ deve-se substituir k_2 por k_{2II} , $J_n(Rk_2)$ por $I_n(Rk_{2II})$ e $J_n^1(Rk_2)$ por $I_n^1(Rk_{2II})$; nas regiões onde $k_3^2 < 0$ deve-se substituir k_3 por k_{3II} , $J_n(Rk_3)$ por $I_n(Rk_{3II})$ e $J_n^1(Rk_3)$ por $I_n^1(Rk_{3II})$; onde:

$$k_{1II} = ik_1 ,$$

$$k_{2II} = ik_2 , \quad (235)$$

$$k_{311} = ik_3 \quad .$$

Fora destes casos e onde k_1^2 , ou k_2^2 ou k_3^2 forem complexos a expressão geral a ser usada é mesmo (222).

No limite de ondas lentas tem-se que

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp}^2 + b_{11}\nabla_{\perp}^4 + b_{21}\nabla_{\perp}^6 + b_{31})E_z = (\nabla_{\perp}^2 + k_{11}^2)(\nabla_{\perp}^2 + k_{21}^2)(\nabla_{\perp}^2 + k_{31}^2)E_z = 0 \quad , \end{aligned} \quad (236)$$

sendo os k_{ij} 's obtidos através da fórmula de Cardan e onde

$$\begin{aligned} b_{11} &= -3k_{//}^2 + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{U^2} - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - k_{//}^2 U^2}{U^2} \quad , \\ b_{21} &= k_{//}^4 - 3k_{//}^2 + 2 \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{U^2} + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \left(\frac{2\omega^2 - \omega_p^2 - 2k_{//}^2 U^2}{U^2} \right) \quad , \quad (237) \\ b_{31} &= k_{//}^6 \left(-k_{//}^2 + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{U^2} - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2 - k_{//}^2 U^2}{U^2} \right) \quad . \end{aligned}$$

Com estes k_{ij} 's se obtém de (222), no limite de ondas lentas

$$nE = Q_{11}(L_{21} - L_{31}) \frac{J_n^1(Rk_{11})}{J_n(Rk_{11})} + Q_{21}(L_{31} - L_{11}) \frac{J_n^1(Rk_{21})}{J_n(Rk_{21})} +$$

$$\begin{aligned}
& + Q_{31}(L_{11} - L_{21}) \frac{J'_n(Rk_{31})}{J_n(Rk_{31})} \quad] + (Q_{11}P_{21} - P_{11}Q_{21}) \frac{J'_n(Rk_{11})}{J_n(Rk_{11})} \\
& - \frac{J'_n(Rk_{21})}{J_n(Rk_{21})} + (Q_{21}P_{31} - P_{21}Q_{31}) \frac{J'_n(Rk_{21})J'_n(Rk_{31})}{J_n(Rk_{21})J_n(Rk_{31})} + (Q_{31}P_{11} - \\
& - P_{31}Q_{11}) \frac{J'_n(Rk_{31})J'_n(Rk_{11})}{J_n(Rk_{31})J_n(Rk_{11})} = 0 \quad , \quad (238)
\end{aligned}$$

onde

$$(L_{11} - L_{j1}) = \frac{U^2}{Rk_{//} w w_c w_p^2} [w_c^2 k_{//}^2 (k_{j1}^2 - k_{11}^2) - w^2 (k_{11}^4 - k_{j1}^4) +$$

$$+ \alpha_1 k_{j1}^2 - \alpha_1 k_{11}^2) \quad] \quad ,$$

$$P_{11} = \frac{k_{11} w_p^2 + k_{//} U^2 + k_{11} U^2}{k_{//} w_p^2} \quad ,$$

$$Q_{11} = \frac{k_{//} k_{11} U^2 (w^2 - w_c^2) (k_{11}^4 - \alpha_1 k_{11}^2 + y_1)}{w w_c w_p^2} \quad ,$$

(239)

$$\alpha_1 = k_s^2 - k_{//}^2 - \frac{w_c^2}{w^2} \frac{w^2 - k_{//}^2 U^2}{U^2} \quad ,$$

$$y_1 = - \frac{k_{//}^2}{w^2 U^2} [w^4 - (w_p^2 + w_c^2 + k_{//}^2 U^2) w^2 + (w_p^2 w_c^2 + w_c^2 k_{//}^2 U^2)] \quad .$$

Já o modo transverso magnético fica com a seguinte relação de dispersão no limite de ondas lentas.

$$nA_{+-1} + R w_c B_{-1} k_{-1} \frac{J_n^1(Rk_{-1})}{J_n(Rk_{-1})} - R w_c B_{+1} k_{+1} \frac{J_n^1(Rk_{+1})}{J_n(Rk_{+1})} = 0 \quad (240)$$

onde

$$A_{+-1} = wU^2 (k_{+1}^2 - k_{-1}^2) \quad ,$$

$$B_{\pm 1} = w_p^2 + U^2 (k_{//}^2 + k_{\pm 1}^2) \quad , \quad (241)$$

$$k_{\pm 1}^2 = \frac{x_1 \pm (x_1^2 - 4y_1)^{1/2}}{2} \quad ,$$

e onde x_1 e y_1 são dados por (239).

Agora são apresentados alguns comentários gerais sobre o limite em que o raio da guia tende a infinito, ou seja, sobre o caso de um plasma ilimitado. Neste limite não mais interessam as condições de contorno e então pode-se usar a aproximação WKB, ou seja, uma propagação de ondas na forma de ondas planas, (20). Com isto vem que (ver também (24))

$$\vec{\nabla}_{\perp}^2 = -k_{\perp}^2 \quad . \quad (242)$$

Substituindo este operador em (76) se chega a que, após uma manipulação algébrica:

$$(-k_{\perp}^6 + b_1 k_{\perp}^4 - b_2 k_{\perp}^2 + b_3) E_z = 0, \quad (243)$$

onde agora E_z é constante para todo r e onde

$$b_1 = \frac{1}{w^2 c^2 U^2} \left[(c^2 + 2U^2) w^4 - (2U^2 w_p^2 + 3k_{//}^2 c^2 U^2 + c^2 w_p^2 + c^2 w_c^2) w^2 + (k_{//}^2 c^2 U^2 w_c^2) \right],$$

$$b_2 = \frac{1}{w^2 c^4 U^2} \left[(2c^2 + U^2) w^6 - (2U^2 w_p^2 + 4k_{//}^2 c^2 U^2 + 4c^2 w_p^2 + 2k_{//}^2 c^4 + 2c^2 w_c^2) w^4 + (U^2 w_p^4 + 4k_{//}^2 c^2 U^2 w_p^2 + 3k_{//}^4 c^4 U^2 + 2c^2 w_p^4 + 2k_{//}^2 c^4 w_p^2 + c^2 w_p^2 w_c^2 + 2k_{//}^2 c^4 w_c^2 + 2k_{//}^2 c^2 U^2 w_c^2) w^2 - (2k_{//}^4 c^4 U^2 w_c^2 + k_{//}^2 c^4 w_p^2 w_c^2) \right], \quad (244)$$

$$b_3 = \frac{1}{w^2 c^4 U^2} \left[w^8 - (3w_p^2 + w_c^2 + 2k_{//}^2 c^2 + k_{//}^2 U^2) w^6 + (3w_p^4 + 4k_{//}^2 c^2 w_p^2 + k_{//}^4 c^4 + 2k_{//}^2 U^2 w_p^2 + 2k_{//}^4 c^2 U^2 + w_p^2 w_c^2 + 2k_{//}^2 c^2 w_c^2 + k_{//}^2 U^2 w_c^2) w^4 - (w_p^6 + 2k_{//}^2 c^2 w_p^4 + k_{//}^4 c^4 w_p^2 + k_{//}^2 U^2 w_p^4 + \right.$$

$$+ 2k_{\perp}^4/c^2 U w_p^2 + k_{\perp}^6/c^4 U^2 + 2k_{\perp}^2/c^2 w_p^2 w_c^2 + k_{\perp}^4/c^4 w_c^2 + 2k_{\perp}^4/c^2 U w_c^2) \cdot \\ \cdot w^2 + (k_{\perp}^6/c^4 U w_c^2 + k_{\perp}^4/c^4 w_p^2 w_c^2)]$$

Acontece que o polinômio que está entre parêntesis em (243) é exatamente igual a

$$- k_{\perp}^6 + b_1 k_{\perp}^4 - b_2 k_{\perp}^2 + b_3 = \frac{w^4 (w^2 - w_c^2) \det(\vec{\epsilon})}{c^4 U^2}, \quad (245)$$

sendo $\vec{\epsilon}$ dado por (31). Com isto se vê que podemos reobter todas as relações de dispersão de um plasma ilimitado à partir de (76), que além disto fornece as relações de dispersão também no caso limitado. Obviamente pode-se utilizar o mesmo procedimento para se obter as relações de dispersão para um plasma ilimitado nos casos anteriores mais simples (seções VI.4 e VI.5).

Ainda um outro exemplo com a utilização da mesma técnica. No caso em que não há necessidade de se preocupar com as condições de contorno (limite em que o raio da guia tende a infinito) vem de (54) a (57) que a única possibilidade de se ter uma solução não trivial para uma excitação transverso eletromagnética, TEM, é que

$$G = 0, \quad (246)$$

onde G é dado por (58). Acontece que a solução (246) é exatamente a relação de dispersão para os dois modos circularmente polarizados (ver

(34) e (35)):

$$G = \frac{CPD.CPE}{\omega^2 c^4} \quad , \quad (247)$$

ou seja, mais uma vez reobtemos os casos possíveis de um plasma limitado.

Antes de passar ao estudo dos casos em que o plasma preenche parcialmente a guia é importante se ressaltar mais um ponto. Neste trabalho utiliza-se uma teoria de fluidos com compressão adiabática, e este modelo só é válido se os elétrons da distribuição térmica não se moverem mais do que um comprimento de onda durante um período de oscilação, [21], ou seja, se

$$k_{//} \lambda_D \ll 1 \quad , \quad (248)$$

onde

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_0}{e^2 n_0} \right)^{1/2} \quad . \quad (249)$$

λ_D é conhecido como o comprimento de Debye e mede aproximadamente a esfera de influência de uma carga de prova num plasma. Caso $k_{//} \lambda_D \gg \gg 1$ então a compressão deixará de ser adiabática e apenas um tratamento microscópico (via teoria cinética) poderá ser utilizado para estudar os fenômenos nesta situação. Foi por isto então que se tomou o cuidado de apenas mostrar gráficos onde os valores numéricos de $k_{//}$

satisfizessem a (248). (Para um plasma como o da Lisa tem-se $\lambda_D = 5 \cdot 10^{-5}$ m, logo a teoria de fluidos é válida até k_{\parallel} da ordem de $2 \cdot 10^4$ m⁻¹).

Capítulo VII - Relações de Dispersão (Plasma Preenchendo Parcialmente a Guia)

Neste capítulo são obtidas as relações de dispersão em alguns casos limite no caso em que o plasma preenche parcialmente a guia e onde se supõe que há uma camada de vácuo entre o plasma e a guia metálica. A motivação para se analisar estes casos vem do fato de que em todos os tokamaks há a presença de uma camada de vácuo entre o plasma e o toróide, sendo que o campo magnético é o responsável por manter o plasma separado da parede (situação conhecida como garrafa magnética). Esta característica é importante já que quando o plasma toca a parede ocorre uma recombinação iônica que tende a esfriar o plasma, o que é algo não desejável.

Outro motivo para se fazer este estudo é que mesmo quando o plasma está em contato direto com uma superfície metálica, então se forma uma pequena camada (sheath) caracterizada por uma baixa densidade de elétrons, com a espessura da ordem de um comprimento de Debye, e que pode ser aproximada por uma camada de vácuo com uma constante dielétrica ϵ_0 , [8]. Neste capítulo vai-se analisar como esta camada de vácuo altera as relações de dispersão em relação aos casos em que o plasma preenche completamente a guia.

Os casos a serem estudados agora são aqueles representados pela figura 7.

As equações para as componentes dos campos na região de plasma já foram obtidas no capítulo anterior e aqui vão as soluções de (86) para a região de vácuo:

$$E_{zv} = A_{inv} J_n(rk_f) + B_{inv} Y_n(rk_f) , \text{ se } w > k//c , \quad (250)$$

$$H_{zv} = C_{inv} J_n(rk_f) + D_{inv} Y_n(rk_f) , \text{ se } w > k//c , \quad (251)$$

$$E_{zv} = A_{2nv} I_n(rk_{fII}) + B_{2nv} K_n(rk_{fII}) , \text{ se } w < k//c , \quad (252)$$

$$H_{zv} = C_{2nv} I_n(rk_{fII}) + D_{2nv} K_n(rk_{fII}) , \text{ se } w < k//c . \quad (253)$$

(ver ainda (52) e (135)). Lembra-se que agora B_{inv} , D_{inv} , B_{2nv} e D_{2nv} não são nulos já que como a camada de vácuo está na região $0 < R_1 < r < R$, vem que não há o perigo destas soluções divergiarem e então pode-se ter estes coeficientes não nulos que as soluções vão ser fisicamente aceitáveis. A aplicação das condições de contorno (97) e (98) leva a que (novamente a condição de contorno (99) não leva a nada de novo):

$$E_{zv} = \frac{A_{inv} Y_n(Rk_f) J_n(rk_f) - J_n(Rk_f) Y_n(rk_f)}{Y_n(Rk_f)} , \quad (254)$$

$$H_{zv} = \frac{C_{inv} Y_n^I(Rk_f) J_n(rk_f) - J_n^I(Rk_f) Y_n(rk_f)}{Y_n^I(Rk_f)} ,$$

quando $w > k//c$, enquanto que na região onde $w < k//c$ se chega a

$$E_{zv} = \frac{A_{2nv} K_n(Rk_{fII}) I_n(rk_{fII}) - I_n(Rk_{fII}) K_n(rk_{fII})}{K_n(Rk_{fII})} \quad (255)$$

$$H_{zv} = C_{2nv} \frac{K_n^I(Rk_{III}) I_n(rk_{fII}) - I_n^I(Rk_{fII}) K_n(rk_{fII})}{K_n^I(Rk_{fII})}$$

onde foram usados (83) e (84). Obtidas estas soluções pode-se partir para a obtenção das relações de dispersão em alguns casos limite.

VII.1 - Caso em que $T_0 = 0$ e $B_0 = 0$

Neste caso há três regiões distintas no plano $k_{//} - \omega$.

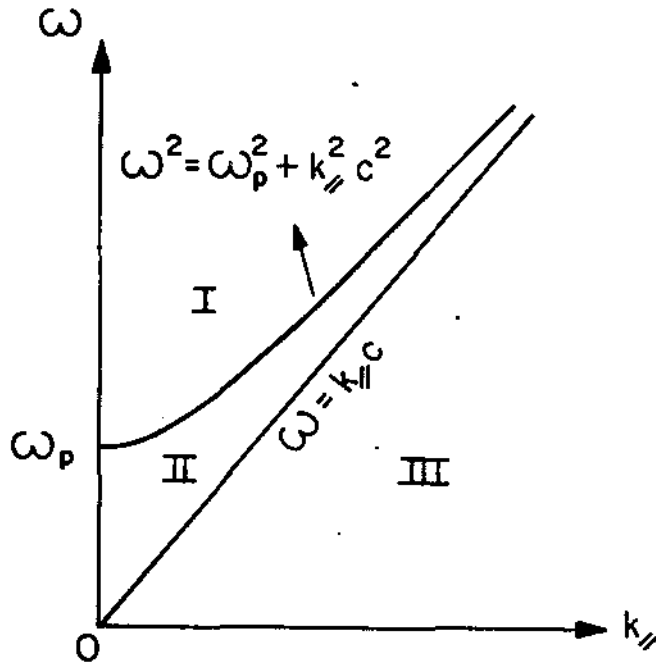


Figura 25. Regiões no plano $k_{//} - \omega$.

Região I: $k_e^2 > 0$ e $k_f^2 > 0$,

Região II: $k_e^2 < 0$ e $k_f^2 > 0$, (256)

Região III: $k_e^2 < 0$ e $k_f^2 < 0$.

As soluções para o plasma na região I são dadas por (124). Já nas regiões II e III as soluções na região de plasma são dadas por (125). Com estas soluções e a aplicação das condições de contorno

(100), (101), (103) e (107) se chega à seguinte relação de dispersão na região I (a condição de contorno (102) também não leva a nada de novo em relação a estas outras condições de contorno e então este fato não será mais enfatizado).

$$R_1^2 \psi_1 \psi_2 + n^2 w^2 w_p^2 (w^2 - w_p^2 - k^2/c^2) \zeta_1 \zeta_3 J_n^2(R_1 k_e) = 0, \quad (257)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_1 &= w^2 (w^2 - w_p^2 - k^2/c^2) k_f \zeta_2 J_n(R_1 k_e) - (w^2 - w_p^2) (w^2 - k^2/c^2) \\ &\quad \cdot k_e \zeta_1 J_n'(R_1 k_e), \end{aligned} \quad (258)$$

$$\psi_2 = (w^2 - w_p^2 - k^2/c^2) k_f \zeta_4 J_n(R_1 k_e) - (w^2 - k^2/c^2) k_e \zeta_3 J_n'(R_1 k_e)$$

sendo

$$\zeta_1 = J_n(R_1 k_f) Y_n(R k_f) - Y_n(R_1 k_f) J_n(R k_f),$$

$$\zeta_2 = J_n'(R_1 k_f) Y_n(R k_f) - Y_n'(R_1 k_f) J_n(R k_f),$$

(259)

$$\zeta_3 = J_n(R_1 k_f) Y_n'(R k_f) - Y_n(R_1 k_f) J_n'(R k_f),$$

$$\zeta_4 = J_n'(R_1 k_f) Y_n'(R k_f) - Y_n'(R_1 k_f) J_n'(R k_f).$$

Nas regiões onde $k_e^2 < 0$ se substitui em (257) e (258) k_e por k_{eII} , $J_n(R_1 k_e)$ por $I_n(R_1 k_{eII})$ e $J_n'(R_1 k_e)$ por $I_n'(R_1 k_{eII})$. Na região on-

de $k_f^2 < 0$ se substitui em (257) a (259) k_f por k_{fII} , $J_n(R_i k_f)$ por $I_n(R_i k_{fII})$, $J'_n(R_i k_f)$ por $I'_n(R_i k_{fII})$, $Y_n(R_i k_f)$ por $K_n(R_i k_{fII})$ e $Y'_n(R_i k_f)$ por $K'_n(R_i k_{fII})$, onde $R_i = R$ ou R_1 . Ver também (126) e (135).

Algumas observações sobre (257): Em primeiro lugar observa-se que não há rotação de Faraday para este caso, como era de se esperar, já que não há nenhum campo magnético de equilíbrio influenciando as ondas. Observa-se também que (257) é uma relação de dispersão para ondas híbridas quando $n \neq 0$, sendo que apenas no caso azimutalmente simétrico se pode separar as ondas em transversas elétricas e transversas magnéticas. O resultado para $n = 0$, modo TM, já havia sido obtido anteriormente por Trivelpiece e Gould, [3], que obtiveram o seguinte resultado no caso em que $w/k_{//} < c$ (ver também [2]):

$$\frac{w^2 - w_p^2}{w^2} \frac{I'_0(R_1 k_{eII})}{I_0(R_1 k_{eII})} = \frac{k_{eII}}{k_{fII}} \left[I'_0(R_1 k_{fII}) K_0(R k_{fII}) - K'_0(R_1 k_{fII}) \right]$$

$$- I_0(R k_{fII})] / \left[I_0(R_1 k_{fII}) K_0(R k_{fII}) - K_0(R_1 k_{fII}) I_0(R k_{fII}) \right] \quad (260)$$

sendo que este resultado também vem de (257) pois é justamente $\psi_1(n=0) = 0$, na região onde $k_e^2 < 0$ e $k_f^2 < 0$.

No limite em que $R_1 \rightarrow R$ vem de (259) e (258) que (257) fica na forma

$$\bar{\epsilon}_{2R}^2 J_n(R k_e) J'_n(R k_e) = 0 \quad , \quad (261)$$

onde $\bar{\epsilon}_{2R}$ é $\bar{\epsilon}_2$ quando $R_1 = R$. As soluções de (261) podem ser devidas a ondas superficiais no plasma.

No limite de ondas lentas se obtém de (257) a seguinte relação de dispersão na região $k_e^2 < 0$ e $k_f^2 < 0$:

$$\Psi_{11}\Psi_{21} = 0 \quad , \quad (262)$$

onde

$$\Psi_{11} = \omega^2 \zeta_{21} I_n(R_1 k_{//}) - (\omega^2 - \omega_p^2) \zeta_{11} I_n'(R_1 k_{//}) \quad , \quad (263)$$

$$\Psi_{21} = \zeta_{41} I_n(R_1 k_{//}) - \zeta_{31} I_n'(R_1 k_{//}) \quad ,$$

sendo

$$\zeta_{11} = I_n(R_1 k_{//}) K_n(R k_{//}) - K_n(R_1 k_{//}) I_n(R k_{//}) \quad ,$$

$$\zeta_{21} = I_n'(R_1 k_{//}) K_n(R k_{//}) - K_n'(R_1 k_{//}) I_n(R k_{//}) \quad ,$$

(264)

$$\zeta_{31} = I_n(R_1 k_{//}) K_n'(R k_{//}) - K_n(R_1 k_{//}) I_n'(R k_{//}) \quad ,$$

$$\zeta_{41} = I_n'(R_1 k_{//}) K_n'(R k_{//}) - K_n'(R_1 k_{//}) I_n'(R k_{//}) \quad .$$

VII.2 - Caso em que $T_0 = 0$ e $B_0 \rightarrow \infty$

Neste caso as regiões distintas no plano $k_{//} - w$ são dadas por (132) e pela figura 9, enquanto que as soluções para a região de plasma são dadas por (133). Para se obter as relações de dispersão usam-se as condições de contorno (100), (101), (103) e (107). Com isto e com as soluções (133), (250) e (251); e as equações para as componentes (54) a (56) e (82) a (84) vem a seguinte relação de dispersão na região I.

$$\eta_1 \eta_2 = 0 \quad , \quad (265)$$

onde

$$\eta_1 = k_f \zeta_2 J_n(R_1 k_i) - k_i \zeta_1 J_n'(R_1 k_i) \quad , \quad (266)$$

$$\eta_2 = \zeta_4 J_n(R_1 k_f) - \zeta_3 J_n'(R_1 k_f) \quad .$$

(ver ainda (131) e (259)).

Nas regiões onde $k_i^2 < 0$ substitui-se em (265) e (266) k_i por k_{iIII} , $J_n(R_1 k_i)$ por $I_n(R_1 k_{iIII})$ e $J_n'(R_1 k_i)$ por $I_n'(R_1 k_{iIII})$. Nas regiões onde $k_f^2 < 0$ substitui-se em (265), (266) e (259) k_f por k_{fII} , $J_n(R_1 k_f)$ por $I_n(R_1 k_{fII})$, $J_n'(R_1 k_f)$ por $I_n'(R_1 k_{fII})$, $Y_n(R_1 k_f)$ por $K_n(R_1 k_{fII})$ e $Y_n'(R_1 k_f)$ por $K_n'(R_1 k_{fII})$, onde $R_i = R_1$ ou R . (ver ainda (134) e (135)).

É fácil ver que a solução $\eta_1 = 0$ corresponde ao modo TM e a solução $\eta_2 = 0$ corresponde ao modo TE. Novamente se observa que o modo TE é independente da presença do plasma, sendo isto devido às mes-

mas razões explicitadas anteriormente.

No limite em que $R_1 \rightarrow R$ vem que esta relação de dispersão fica na forma

$$\epsilon_{2R}^2 J_n(Rk_1) J_n'(Rk_f) = 0 \quad . \quad (267)$$

Ou seja, reobtemos os modos transversos elétrico e transversos magnéticos do caso em que o plasma preenche completamente a guia (ver equações (139) e (140)).

Já no limite de ondas lentas obtém-se a seguinte relação de dispersão à partir de (265), na região IV da figura 9:

$$\eta_{11} \eta_{21} = 0 \quad . \quad (268)$$

onde

$$\eta_{11} = \epsilon_{21} k_{//} I_n(x) - \epsilon_{11} k_{//} \left(\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega^2} \right)^{1/2} I_n'(x) \quad , \quad (269)$$

$$\eta_{21} = \epsilon_{41} I_n(R_1 k_{//}) - \epsilon_{31} I_n'(R_1 k_{//}) \quad ,$$

sendo

$$x = R_1 k_{//} \left(\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \quad . \quad (270)$$

Vale ressaltar que uma das raízes de (268) é exatamente a solução de Trivelpiece neste limite em que $B_0 \rightarrow \infty$, ou seja, $\eta_{b11} = 0$. Vê-se então que (265) é uma generalização dos resultados de Trivelpiece já que é válida para uma excitação de ondas eletromagnéticas em geral, e não apenas para ondas eletrostáticas. Além disto (265) vale para qualquer velocidade de fase e em especial pode-se reobter o resultado de Trivelpiece no caso de um campo magnético infinito quando se reduz (265) à sua forma simplificada para ondas lentas, (268). O caso de um campo magnético finito (mas não nulo) ou infinito, e quando o plasma preenche parcialmente a guia, foi tratado por Trivelpiece apenas na situação de ondas lentas (ver [4]), sendo portanto (265) uma expansão de seus resultados, válida agora para qualquer velocidade de fase da onda.

VII.3 - Caso em que T_0 é qualquer e $B_0 \rightarrow \infty$

As regiões distintas para este caso já foram mostradas na figura 12, com especificações dadas por (156) e com as soluções na região de plasma dadas por (157). k_m e k_{mII} são dados por (70) e (158), respectivamente. Aplicando novamente as condições de contorno (100), (101), (103) e (107) pode-se obter a seguinte relação de dispersão na região I

$$\mathcal{V}_2 \mathcal{V}_3 = 0 \quad (271)$$

onde \mathcal{V}_2 é dado por (266) e onde

$$\mathcal{V}_3 = k_f \mathcal{V}_2 J_n(R_1 k_m) - k_m \mathcal{V}_1 J_n'(R_1 k_m) \quad (272)$$

Nas regiões onde $k_m \neq 0$ substitui-se em (271) e (272) k_m por k_{mII} , $J_n(R_1 k_m)$ por $I_n(R_1 k_{mII})$ e $J_n'(R_1 k_m)$ por $I_n'(R_1 k_{mII})$. Nas regiões onde $k_f \neq 0$ substitui-se em (271), (272) e (259) k_f por k_{fII} , $J_n(R_1 k_f)$ por $I_n(R_1 k_{fII})$, $J_n'(R_1 k_f)$ por $I_n'(R_1 k_{fII})$, $Y_n(R_1 k_f)$ por $K_n(R_1 k_{fII})$ e $Y_n'(R_1 k_f)$ por $K_n'(R_1 k_{fII})$, onde $R_1 = R_1$ ou R .

É fácil de perceber que $\mathcal{V}_2 = 0$ corresponde ao modo T_0 enquanto que $\mathcal{V}_3 = 0$ corresponde ao modo T_1 .

No limite em que $T_0 \rightarrow 0$ vem que $k_m \rightarrow k_f$ e então se cai exatamente no caso anterior.

Quando a camada de vácuo tende a zero (limite em que $R_1 \rightarrow R$) obtém-se a seguinte relação de dispersão à partir de (271)

$$\tau_{2R}^2 J_n(Rk_m) J_n'(Rk_f) = 0 \quad . \quad (273)$$

Ou seja, reobtemos os modos transversos elétrico e transversos magnéticos do caso em que o plasma preenche completamente a guia (ver as equações (160), (161) e os gráficos 13 a 15).

Tomando o limite de ondas lentas para as relações de dispersão nas regiões IV e V da figura 12, obtêm-se as seguintes relações de dispersão, respectivamente:

$$\eta_{21} \eta_{31} = 0 \quad , \quad (274)$$

$$\eta_{21} \eta_{3III} = 0 \quad ,$$

onde η_{21} é dada por (269) e onde

$$\eta_{31} = \tau_{21k//} J_n(y) - \frac{\tau_{11y}}{R_1} \quad , \quad (275)$$

$$\eta_{3III} = \tau_{21k//} I_n(y_{III}) - \frac{\tau_{11y_{III}}}{R_1}$$

sendo

$$y = R_1 k_{//} \left(\frac{\omega_p^2 + k_{//}^2 U^2 - \omega^2}{\omega^2 - k_{//}^2 U^2} \right)^{1/2} \quad ,$$

(276)

$$\eta_{III} = R_{ik} // \left(\frac{\omega^2 - \omega_p^2 - k_{//}^2 U^2}{\omega^2 - k_{//}^2 U^2} \right)^{1/2} .$$

As relações de dispersão $\eta_{3I} = 0$ ou $\eta_{3III} = 0$, dependendo da região, são então uma nova expansão dos resultados de Trivepiece neste caso de campo magnético infinito e plasma preenchendo parcialmente a guia, já que agora se inclui também a temperatura dos elétrons na relação de dispersão para os modos lentos. Mesmo assim vale lembrar que estas ainda são soluções bem particulares do resultado mais geral (271), já que se referem apenas ao caso das ondas lentas. O resultado (271) é então uma generalização em dois aspectos principais dos resultados de Trivepiece, [4]: inclui a temperatura dos elétrons e é válido para qualquer velocidade de fase da onda.

Com isto se encerram os estudos dos casos em que o plasma preenche parcialmente a guia.

Capítulo VIII - Conclusão

Este trabalho visou estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em guias de onda cilíndricas preenchidas totalmente ou parcialmente por plasma morno magnetizado. Partindo deste objetivo utilizou-se um modelo de fluido adiabático para o plasma no qual o movimento dos íons foi desprezado. Com isto vê-se que o modelo é válido na região de altas frequências, ou seja, quando $\omega \gg \omega_{pi}$ e $\omega \gg \omega_{ce}$ (num plasma como o da LISA, que é constituído de hélio ionizado, e onde $\omega = 1,54 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$, $\omega_{pi} = 5,90 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$, $\omega_{ce} = 2,14 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ estas condições são claramente satisfeitas). A temperatura dos elétrons foi introduzida desde o início através da força devido ao gradiente de pressão. Se supoz que não há um campo elétrico de equilíbrio mas foi considerado a presença de um campo magnético uniforme aplicado externamente. Também foi desprezada a frequência de colisões frente à frequência da onda excitadora e se mostrou que esta hipótese é bastante razoável.

Para resolver-se o problema supoz-se a excitação como sendo uma perturbação senoidal do estado de equilíbrio e então se utilizou um processo de linearização. Com a hipótese de que o plasma fosse sem velocidade macroscópica no estado de equilíbrio se chegou que o plasma é homogêneo e isotérmico no que diz respeito às grandezas de equilíbrio. Com isto foram obtidas as equações de primeira ordem na região de plasma e também na região de vácuo.

Em seguida foi mostrado em linhas gerais como é feito o estudo de propagação de ondas em plasmas mornos, magnetizados e ilimitados através da aproximação WKB. Foi então mostrado o tensor dielétrico do plasma e também a forma como se obtém a relação de dispersão à partir

desse tensor dielétrico. Em seguida se mostrou as relações de dispersão no caso de ondas paralelas e perpendiculares a \vec{B}_0 .

No capítulo seguinte se escreveu as equações vetoriais em termos das componentes, onde se usou um sistema de coordenadas cilíndricas em função de que a guia de onda que limita o plasma é cilíndrica com seção reta circular. Com isto se obteve todas as componentes transversais dos campos elétrico e magnético, assim como todas as componentes do vetor velocidade e a pressão do plasma apenas em função de E_z e de H_z . Também foram obtidas as equações para estas duas componentes e se chegou a uma equação de sexta ordem para E_z . O mesmo procedimento foi usado em relação à região de vácuo.

Depois disto foi obtido o tensor dielétrico de um plasma morno magnetizado quando se faz um tratamento global do problema, ou seja, sem usar a aproximação WKB. Este tratamento é necessário quando o comprimento de onda é da ordem das dimensões da máquina, como é o caso da LISA. Mostrou-se então que os elementos desse tensor dielétrico têm derivadas espaciais que atuam nas componentes do vetor campo elétrico e que além disso ele retorna a ser o tensor dielétrico usual de plasmas frios quando se faz $T_0 \rightarrow 0$.

Supoz-se que a guia que limita o plasma é um condutor perfeito de seção reta circular e com isto se obtiveram as condições de contorno nas interfaces plasma-condutor e também vácuo-condutor e em seguida foram obtidas as condições de contorno na interface plasma-vácuo. Em especial se utilizou nesta interface a condição de contorno linearizada para o balanceamento de pressões.

Iniciou-se depois o processo de obtenção das relações de dispersão através da resolução das equações para E_z e H_z e com a utiliza-

ção das condições de contorno. Inicialmente foi tratado o caso em que o plasma preenche completamente a guia e o primeiro caso tratado foi o de um plasma frio não magnetizado, onde se mostrou que a única solução possível é a onda de Langmuir, que não implica em propagação de energia.

Depois foi tratado o caso de um plasma frio na presença de um campo magnético infinito e se mostrou que há a possibilidade de propagação de um modo transversal elétrico e de um transversal magnético. Quando se introduziu a temperatura dos elétrons nesta situação de um campo magnético infinito se mostrou que o modo transversal elétrico era independente da temperatura. Já o modo TM dependia da temperatura, como era de se esperar. Foram mostrados então os gráficos para estas relações de dispersão.

O caso seguinte a ser tratado foi o de um plasma morno não magnetizado e se mostrou que para as excitações não axialmente simétricas que somente os modos híbridos podem se propagar. Foi apresentado também o método numérico que se utilizou para a obtenção dos gráficos desta relação de dispersão.

Foi tratado em seguida o caso de um plasma frio magnetizado e que é a primeira situação onde aparece o fenômeno da rotação de Faraday. Foi obtido o limite para ondas lentas eletromagnéticas, ondas estas que satisfazem a todas as condições de contorno, inclusive $v_p(R) \neq 0$. A relação de dispersão satisfeita por estas ondas é dada por (212) e (214), ou seja:

$$n\omega_c - R\omega_c \frac{T J_n^1(RT)}{J_n(RT)} - k_{//} \frac{I_n^1(Rk_{//})}{I_n(Rk_{//})} = 0 \quad ,$$

$$T = \left[\frac{k_{//}^2 (\omega^2 - \omega_p^2) (\omega_c^2 - \omega^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)} \right]^{1/2} .$$

Em seguida se mostrou que a solução obtida por Trivelpiece, [4], para esta situação de um plasma frio magnetizado não é fisicamente aceitável. O estudo de Trivelpiece foi de ondas eletrostáticas lentas e sua solução implica em uma velocidade radial para os elétrons na superfície da guia, sendo então uma solução inválida com o modelo por ele utilizado. Se mostrou ainda que os modos lentos eletromagnéticos apresentam as ondas "backward" e se sugeriu que podem ter sido estas as ondas detectadas experimentalmente por Trivelpiece e Gould.

Finalmente se tratou do caso geral de um plasma morno na presença de um campo magnético de equilíbrio finito e não nulo e a relação de dispersão obteve novamente o fenômeno da rotação de Faraday. Se mostrou que esta relação de dispersão é bem mais geral que a obtida por Ghosh e Pal, [13]. Além disto se mostrou que ela cai no caso anterior quando se faz $T_0 \rightarrow 0$. Se obteve também esta relação de dispersão no limite de ondas lentas e no limite de um plasma fracamente magnetizado (no caso da LISA tem-se $\omega_c \approx \omega_p/3$, e então pode-se considerá-lo nesta situação). Se mostrou também a relação de dispersão geral para as ondas TM e como ficava esta solução no limite de ondas lentas. Por último se mostrou como é possível de se reobter todas as soluções do caso de um plasma ilimitado à partir das equações para o caso limitado.

Em seguida se tratou dos casos em que há uma camada de vácuo entre o plasma e a guia. O primeiro caso tratado foi o de um plasma frio não magnetizado e a relação de dispersão foi obtida de forma geral e depois no limite de ondas lentas. Em sua forma geral este resultado é uma generalização do resultado anterior de Trivelpiece e Gould, já que é válido também para os modos azimutalmente assimétricos.

O caso seguinte foi o de um plasma frio na presença de um campo magnético infinito e se mostrou que a relação de dispersão obtida reproduz os casos anteriores no limite em que a camada de vácuo tende a zero. Também se pôde reobter a solução do Trivelpiece quando se fez o limite de ondas lentas.

Por último foi tratado o caso de um plasma morno na presença de um campo magnético infinito e a relação de dispersão obtida mostrava os modos TE e TM. Ela também reproduzia novamente os casos anteriores no limite em que a camada de vácuo tendia a zero. No caso em que a temperatura tendia a zero se caía no caso anterior. Além disto foi obtido a relação de dispersão no limite de ondas lentas e se mostrou que uma das soluções deste caso era uma outra generalização dos resultados de Trivelpiece já que incluía agora a temperatura dos elétrons. O caso geral é uma generalização maior ainda já que além de incluir a temperatura dos elétrons é válido para qualquer velocidade de fase das ondas.

Com isto se vê que foi feita uma análise bem completa da propagação de ondas eletromagnéticas em guias de onda preenchidas por plasma morno magnetizado. Este trabalho é importante no estudo de casos em que o comprimento de onda é da ordem das dimensões da máquina de plasma e generaliza muitos dos resultados de Trivelpiece e Gould,

[3,4], já que estes autores trataram quase que exclusivamente da propagação de ondas eletrostáticas lentas em guias de onda preenchidas por plasma frio.

Ao se introduzir o campo magnético se expandiu os resultados de Azakami, Narita e Aye Thein, [27], já que estes autores trataram de um problema exatamente análogo para o caso de um plasma morno não magnetizado preenchendo completamente a guia. O resultado geral obtido neste trabalho é também mais completo do que o derivado por Ghosh e Pal, [13], pois estes autores fizeram simplificações adicionais em relação às simplificações deste trabalho. A crítica a uma conhecida solução de Trivelpiece e a ampliação de seus trabalhos para incluir o estudo da propagação de ondas com qualquer velocidade de fase (isto também foi feito nos casos em que há uma camada de vácuo entre o plasma e a guia) também são dados bem relevantes.

Capítulo IX - Trabalhos Futuros

A partir dos resultados deste trabalho muitos campos se abrem para futuras linhas de pesquisa. O primeiro aspecto a ser ressaltado é a complementação deste trabalho em duas frentes: 1º) A obtenção dos gráficos das relações de dispersão obtidas analiticamente, até se chegar a graficar e comparar com os experimentos o resultado geral (222); e 2º) seguir na mesma linha com o estudo dos casos em que o plasma preenche parcialmente a guia até se completar os três casos seguintes (plasma morno não magnetizado, plasma frio magnetizado e então plasma morno magnetizado).

Outras linhas de pesquisa menos diretas são obtidas quando se passa a utilizar alguns aspectos que foram restringidos neste trabalho. Por exemplo, no caso em que um plasma é excitado por ondas de baixa frequência o movimento dos íons passa a ser importante já que eles podem oscilar junto com a onda e mesmo chegar a entrar em ressonância com ela. Nestes casos deve-se então incluir o movimento dos íons nas equações e vão então surgir termos do tipo

$$1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2}, \quad (277)$$

ou então do tipo

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \quad \text{etc.} \quad (278)$$

Um exemplo onde há a necessidade de um tratamento deste tipo é na própria máquina linear LISA, que conta atualmente com uma antena que gera frequências de 30 MHz, sendo que esta frequência é ressonante com a frequência híbrida inferior ($\omega_{HI} = (\omega_c \omega_{ci})^{1/2}$).

Outra possibilidade futura, sugestão esta dada pelo Prof. Ricardo M. D. Galvão, é se trabalhar com um campo magnético que se aproxime mais do que ocorre nos tokamaks do que um campo magnético uniforme. A idéia é então trabalhar com um campo magnético do tipo

$$\vec{B}_\theta(r, \theta) = B_\theta(r, \theta) \hat{e}_z = \frac{B_\theta \hat{e}_z}{1 + (r \cos \theta / R_\theta)} \approx B_\theta \left(1 - \frac{r \cos \theta}{R_\theta} \right) \hat{e}_z, \quad (279)$$

onde R_θ é o raio maior do toróide. Um campo magnético deste tipo, deve levar a um acoplamento entre os modos n , $n-1$ e $n+1$ e então alguns efeitos novos vão surgir.

Este trabalho tratou apenas com plasmas homogêneos no equilíbrio e um caminho importante a ser seguido daqui para a frente é a introdução de inhomogeneidades no plasma, como por exemplo $n_0 = n_0(r)$, para com isto se aproximar mais dos plasmas reais de laboratório e também para se estudar fenômenos importantes como o aquecimento do plasma devido à conversão de modos, [31] a [33]. Este estudo de plasmas inhomogêneos é interessante também por mostrar até que razão uma onda caminha num plasma (neste caso teremos $k = k(r)$) antes de ser re-

fletida (o lugar de reflexão é onde a velocidade de fase tende a infinito, ou seja, onde o número de onda tende a zero) e em que lugar ela é absorvida (a absorção ocorre nas ressonâncias, onde então o número de onda tende a infinito e a velocidade de fase tende a zero). Mais uma vez é importante ressaltar que os fenômenos de ressonância não podem ser estudados por teoria de fluidos, sendo então necessário que se faça um tratamento cinético do problema (ver [34], por exemplo, para o tratamento de plasmas quentes magnetizados em guias de onda cilíndricas). Como neste trabalho não foi feito um tratamento via teoria cinética alguns efeitos não puderam ser obtidos como por exemplo o decaimento de Landau ou as ressonâncias harmônico-ciclotrônicas ($\omega = N\omega_c$), sendo que estes efeitos são verificados experimentalmente. Isto mostra as limitações da teoria de fluidos.

Também a absorção colisional não foi estudada neste trabalho por não se ter incluído a frequência de colisão nas equações. A inclusão de uma frequência de colisão fenomenológica também é uma possibilidade futura de trabalho.

Um outro aspecto interessante é obter os perfis das componentes dos campos elétrico e magnético em função de r , já que estas quantidades são medidas experimentalmente e então isto forneceria bons testes para a teoria.

Outra possibilidade é tratar a pressão do plasma como um tensor e não como um escalar, assim como foi desenvolvido pela teoria duplamente adiabática de Chew, Goldberger e Low, [35]. Este caminho é interessante caso se queira estudar plasmas altamente magnetizados (não é o caso da LISA) e com poucas colisões, já que então o plasma deixará de ser isotrópico.

Um cálculo que também pode ser feito é a obtenção do fluxo de potência em todos os casos estudados neste trabalho:

$$\overline{P_z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{\sigma} \quad , \quad (280)$$

onde Σ é a área da guia e $d\vec{\sigma}$ um elemento de área. Este cálculo também seria interessante de ser feito quando da inclusão da frequência de colisão pois então poderia ser obtida a potência absorvida colisionalmente pelo plasma. Sobre o estudo do fluxo de potência em guias de onda preenchidas com plasma ver também a referência [10].

Uma importante linha de pesquisa experimental que surge a partir dos resultados desta tese se refere à medida da rotação de Faraday para ondas lentas propagando-se em plasmas frios magnetizados preenchendo completamente a guia. Tanto os modos eletrostáticos obtidos por Trivelpiece e Gould, (215), quanto os modos eletromagnéticos obtidos neste trabalho, (212), apresentam a estrutura de ondas do tipo "backward" no mesmo intervalo de frequências. Por outro lado se prevê rotação de Faraday para os modos eletromagnéticos enquanto que para os modos eletrostáticos não é prevista nenhuma rotação do plano de polarização da onda. A medida da rotação de Faraday permitiria então decidir quais foram as ondas com estrutura do tipo "backward" detectadas experimentalmente por Trivelpiece e Gould (que não citam nenhuma medida sobre a existência ou não de rotação de Faraday para estas ondas).

Estas são apenas algumas das possibilidades futuras de trabalho, sendo que esta enumeração não pretende ser completa mas apenas dar uma idéia de alguns caminhos de pesquisa daqui para a frente.

terceiro Grau

Resumindo aqui os resultados de Smirnov, [25], vem que uma equação de terceiro grau do tipo

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0 \quad , \quad (281)$$

pode ser posta na forma

$$f(x) = x^3 + px + q = 0 \quad , \quad (282)$$

onde

$$y = x + \frac{a_1}{3} \quad ,$$

$$p = -\frac{a_1^2}{3} + a_2 \quad , \quad (283)$$

$$q = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3 \quad .$$

Com isto vem que se:

$x^2/4 + p^3/27 > 0$, então há uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas,

* $q^2/4 + p^3/27 = 0$, então há três raízes reais entre as quais uma delas é múltipla,

* $q^2/4 + p^3/27 < 0$, então há três raízes reais diferentes.

A fórmula que dá as raízes de (282) é conhecida como fórmula de Cardan e é dada por

$$x = (R_1)^{1/3} + (R_2)^{1/3}, \quad (284)$$

onde

$$R_1 = -\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{1/2}, \quad (285)$$

$$R_2 = -\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{1/2}.$$

Como cada raiz cúbica possui em geral três valores distintos, só vão interessar os valores destas raízes que satisfazem a

$$(R_1)^{1/3} (R_2)^{1/3} = -\frac{p}{3}. \quad (286)$$

Sejam $(R_1)^{1/3}$ e $(R_2)^{1/3}$ dois valores quaisquer das raízes que verificam a (286), e sendo ϵ um dos valores da raiz cúbica de 1:

$$\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i(3)^{1/2}}{2}, \quad (287)$$

vem que as três raízes de (282) são dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= (R_1)^{1/3} + (R_2)^{1/3}, \\ x_2 &= \epsilon (R_1)^{1/3} + \epsilon^2 (R_2)^{1/3}, \\ x_3 &= \epsilon^2 (R_1)^{1/3} + \epsilon (R_2)^{1/3}. \end{aligned} \quad (288)$$

Logo, as três raízes de (281) ficam sendo:

$$\begin{aligned} y_1 &= (R_1)^{1/3} + (R_2)^{1/3} - \frac{a_1}{3}, \\ y_2 &= \epsilon (R_1)^{1/3} + \epsilon^2 (R_2)^{1/3} - \frac{a_1}{3}, \\ y_3 &= \epsilon^2 (R_1)^{1/3} + \epsilon (R_2)^{1/3} - \frac{a_1}{3}. \end{aligned} \quad (289)$$

Apêndice B - Funções de Bessel

Neste apêndice são dadas as principais propriedades, no que se refere a este trabalho, das funções de Bessel de ordem inteira. Este material se encontra em muitos livros, como por exemplo no Abramowitz, [36], ou no Spiegel, [37].

A equação diferencial

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - n^2)w = 0, \quad (290)$$

onde

$$z = x + iy \quad ; \quad (291)$$

tem como soluções linearmente independentes as funções de Bessel do primeiro tipo, $J_n(z)$, e do segundo tipo, $Y_n(z)$. Já a equação diferencial

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + n^2)w = 0, \quad (292)$$

tem como soluções linearmente independentes as funções de Bessel modificadas do primeiro tipo, $I_n(z)$, e do segundo tipo, $K_n(z)$.

Relações de recorrência

$$L_{n-1}(z) + L_{n+1}(z) = \frac{2nL_n(z)}{z} \quad ,$$

$$L_{n-1}(z) - L_{n+1}(z) = 2L'_n(z) \quad ,$$

$$L'_n(z) = L_{n-1}(z) - \frac{nL_n(z)}{z} \quad , \quad (293)$$

$$L'_n(z) = -L_{n+1}(z) + \frac{nL_n(z)}{z} \quad ,$$

$$L'_0(z) = -L_1(z) \quad ,$$

onde L denota J ou Y.

$$M_{n-1}(z) - M_{n+1}(z) = \frac{2nM_n(z)}{z} \quad ,$$

$$M_{n-1}(z) + M_{n+1}(z) = 2M'_n(z) \quad ,$$

$$M'_n(z) = M_{n-1}(z) - \frac{nM_n(z)}{z} \quad , \quad (294)$$

$$M'_n(z) = M_{n+1}(z) + \frac{nM_n(z)}{z} \quad ,$$

$$M'_0(z) = M_1(z) \quad ,$$

onde M_n denota I_n ou $e^{im\pi} K_n$.

No caso de argumentos reais temos os seguintes gráficos para algumas destas funções, [36].

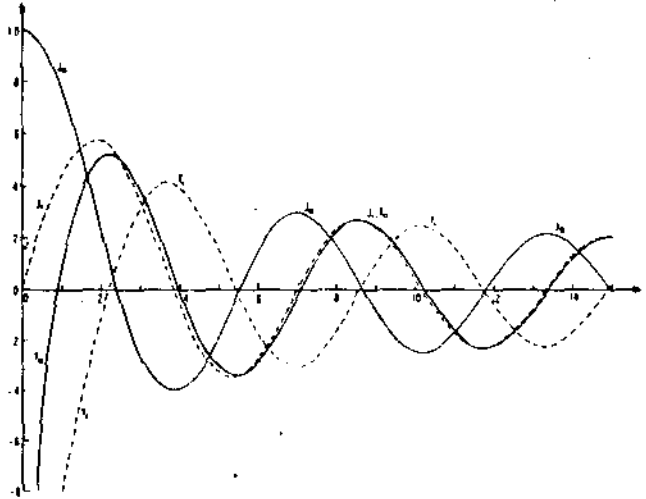


Figura 26: $J_0(x)$, $Y_0(x)$, $J_1(x)$ e $Y_1(x)$.

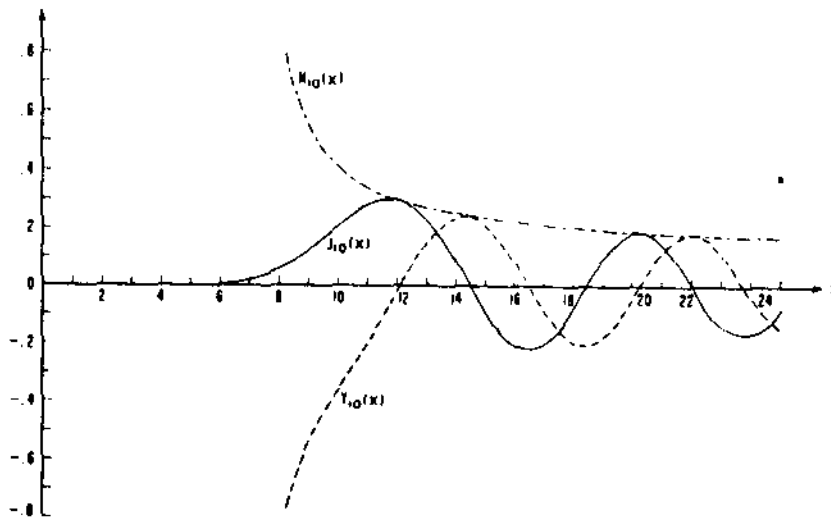


Figura 27: $J_{10}(x)$, $Y_{10}(x)$, e $M_{10}(x) = [J_{10}^2(x) + Y_{10}^2(x)]^{1/2}$.

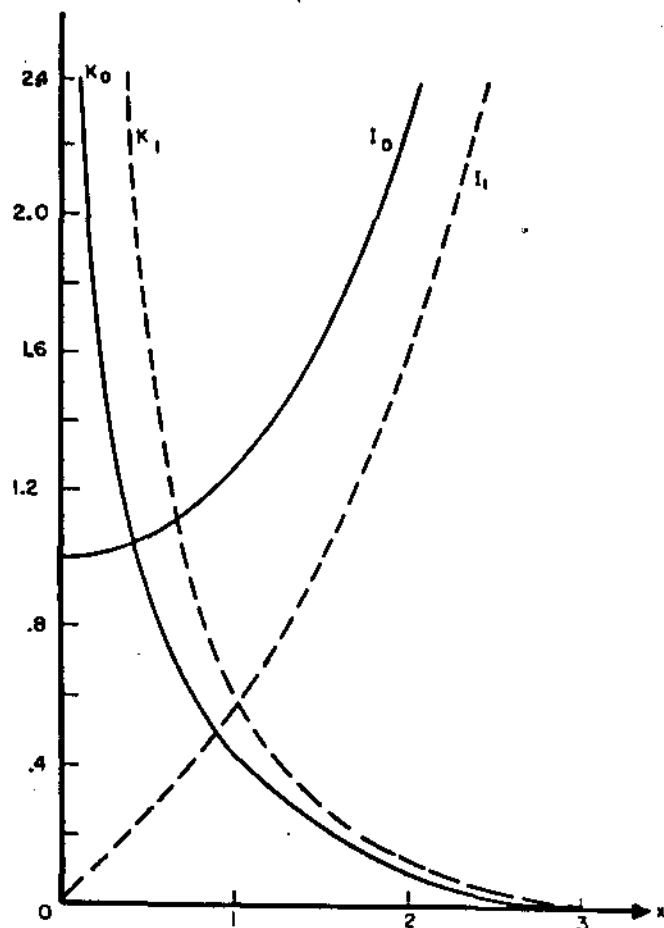


Figura 28: $I_0(x)$, $K_0(x)$, $I_1(x)$ e $K_1(x)$.

Além disto tem-se as seguintes propriedades.

$$J_n(-x) = (-1)^m J_n(x) ,$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^m J_n(x) ,$$

$$J_{-n}(-x) = J_n(x) ,$$

$$Y_{-n}(x) = (-1)^m Y_n(x) .$$

(295)

Ainda:

$$I_n(-x) = (-1)^m I_n(x) ,$$

$$I_{-n}(x) = I_n(x) ,$$

$$I_{-n}(-x) = (-1)^m I_n(x) ,$$

(296)

$$K_{-n}(x) = K_n(x) ,$$

$$I_n(x) > 0 \text{ para } x > 0 ,$$

$$I_n^1(x) > 0 \text{ para } x > 0 .$$

Ainda:

$$J_0(0) = 1 ,$$

$$J_n(0) = 0 \text{ para } n > 0 ,$$

$$J_0^1(0) = 0 ,$$

$$J_1^1(0) = \frac{1}{2} ,$$

(297)

$$J_n^1(0) = 0 \text{ para } n > 1 ,$$

$$Y_n(x) \rightarrow -\infty \quad \text{se } x \rightarrow 0^+$$

$$Y_n'(x) \rightarrow +\infty \quad \text{se } x \rightarrow 0^+$$

Ainda:

$$I_0(0) = 1$$

$$I_n(0) = 0 \quad \text{para } n > 0$$

$$I_0'(0) = 0$$

$$I_1'(0) = \frac{1}{2}$$

(298)

$$I_n'(0) = 0 \quad \text{para } n > 1$$

$$K_n(x) \rightarrow +\infty \quad \text{se } x \rightarrow 0^+$$

$$K_n'(x) \rightarrow -\infty \quad \text{se } x \rightarrow 0^+$$

No limite de pequenos valores do argumento tem-se

$$J_n(x) = \frac{(x/2)^m}{n!}, \quad (n \neq -1, -2, -3, \dots) ;$$

$$Y_n(x) = - \frac{(n-1)!}{\Gamma(x/2)^m}, \quad (n > 0) ;$$

$$Y_0(x) = \frac{2 \ln x}{\Gamma} ;$$

(299)

$$I_n(x) = \frac{(x/2)^m}{n!}, \quad (n \neq -1, -2, -3, \dots) ;$$

$$K_n(x) = \frac{(n-1)!}{2(x/2)^m}, \quad (n > 0) ;$$

$$K_0(x) = - \ln x .$$

Já no limite de grandes valores do argumento tem-se

$$J_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \left[\cos Q + \mathcal{O} \left(\frac{1}{x} \right) \right] ,$$

$$J_n'(x) = - \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \left[\sin Q + \mathcal{O} \left(\frac{1}{x} \right) \right] ,$$

(300)

$$Y_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \left[\sin Q + \mathcal{O} \left(\frac{1}{x} \right) \right] ,$$

$$Y_n'(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \left[\cos Q + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

onde

$$Q = x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}. \quad (301)$$

Ainda:

$$I_n(x) = \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

$$I_n'(x) = \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

(302)

$$K_n(x) = e^{-x} \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

$$K_n'(x) = -e^{-x} \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

Com tudo isto vem:

$$J_n(+\infty) = J_n'(+\infty) = Y_n(+\infty) = Y_n'(+\infty) = 0,$$

$$I_n(+\infty) = I_n^1(+\infty) = +\infty \quad (303)$$

$$K_n(+\infty) = K_n^1(+\infty) = 0$$

Vai a seguir uma tabela com os valores para zeros aproximados das funções de Bessel, [37]:

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$J_n(x) = 0$	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715	9,9361
	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386	13,5893
	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002	17,0038
	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801	20,3208
	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178	23,5861
	18,0711	19,6159	21,1170	22,5827	24,0190	25,4303	26,8202
$Y_n(x) = 0$	0,8936	2,1971	3,3842	4,5270	5,6452	6,7472	7,8377
	3,9577	5,4297	6,7938	8,0976	9,3616	10,5972	11,8110
	7,0861	8,5960	10,0235	11,3965	12,7301	14,0338	15,3136
	10,2223	11,7492	13,2100	14,6231	15,9996	17,3471	18,6707
	13,3611	14,8974	16,3790	17,8185	19,2244	20,6029	21,9583
	16,5009	18,0434	19,5390	20,9973	22,4248	23,8265	25,2062
$J_n'(x) = 0$	0,0000	1,8412	3,0542	4,2012	5,3176	6,4156	7,5013
	3,8317	5,3314	6,7061	8,0152	9,2824	10,5199	11,7349
	7,0156	8,5363	9,9695	11,3459	12,6819	13,9872	15,2687
	10,1735	11,7060	13,1704	14,5859	15,9641	17,3128	18,6374
	13,3237	14,8636	16,3475	17,7888	19,1960	20,5755	21,9317
	16,4706	18,0155	19,5129	20,9725	22,4010	23,8036	25,1839
$Y_n'(x) = 0$	2,1971	3,6830	5,0026	6,2536	7,4649	8,6496	9,8148
	5,4297	6,9415	8,3507	9,6988	11,0052	12,2809	13,5328
	8,5960	10,1234	11,5742	12,9724	14,3317	15,6608	16,9655
	11,7492	13,2858	14,7609	16,1905	17,5844	18,9497	20,2913
	14,8974	16,4401	17,9313	19,3824	20,8011	22,1928	23,5619
	18,0434	19,5902	21,0929	22,5598	23,9970	25,4091	26,7995

Tabela 1. Valores para zeros aproximados das funções de Bessel.

Apêndice C - Lista de Algumas das Definições mais Utilizadas

neste Trabalho

$$U = \left(\frac{\gamma k_B T_0}{m} \right)^{1/2} ,$$

$$\omega_p = \left(\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0} \right)^{1/2} ,$$

$$\omega_c = \frac{e B_0}{m} ,$$

$$k_e = \left(\frac{\omega^2 - \omega_p^2 - k_{//}^2}{c^2} \right)^{1/2} , \quad k_{eII} = i k_e ,$$

$$k_f = \left(\frac{\omega^2 - k_{//}^2}{c^2} \right)^{1/2} , \quad k_{fII} = i k_f ,$$

$$G = k_e^4 - \frac{\omega_c^2 k_f^4}{\omega^2} ,$$

$$k_m = \left[\frac{(\omega^2 - k_{//}^2/c^2)(\omega^2 - k_{//}^2/U^2 - \omega_p^2)}{c^2(\omega^2 - k_{//}^2/U^2)} \right]^{1/2} , \quad k_{mII} = i k_m ,$$

$$k_s = \left(\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{U^2} - k_{//}^2 \right)^{1/2}, \quad k_{sII} = ik_s,$$

$$k_{\perp}^2 = \frac{x \pm (x^2 - 4y)^{1/2}}{2}, \quad \text{onde:}$$

$$x = k_e^2 + k_s^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - k_{//}^2 U^2}{U^2},$$

$$y = k_e^2 k_s^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \left(\frac{k_e^2 \omega^2 - k_{//}^2 U^2}{U^2} + \frac{k_{//}^2 \omega_p^2 c^2 - U^2}{c^2 U^2} \right),$$

$$k_i = \left[\frac{(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - k_{//}^2 c^2)}{\omega^2 c^2} \right]^{1/2}, \quad k_{iII} = ik_i,$$

$$T = \left[\frac{k_{//}^2 (\omega^2 - \omega_p^2)(\omega_c^2 - \omega^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)} \right]^{1/2}, \quad T_{II} = iT.$$

Referências

- [1] Wait, J. R. Electromagnetics and Plasmas. New York; Holt, Rinehart e Winston, 1968.
- [2] Krall, N. A. e Trivelpiece, A. W. Principles of Plasma Physics. New York, Plenum Press, 1974.
- [3] Trivelpiece, A. W. e Gould, R. W. - J. Appl. Phys. 30, 1784 (1959).
- [4] Trivelpiece, A. W. Slow-Wave Propagation in Plasma Waveguides. San Francisco, San Francisco Press, 1967.
- [5] Jackson, J. D. Classical Electrodynamics. 2ª ed. New York, John Wiley e Sons, 1975.
- [6] Denisse, J. F. e Delcroix, J. L. Plasma Waves. New York, Interscience Publishers, 1963.
- [7] Montgomery, D. C. e Tidman, D. A. Plasma Kinetic Theory. New York, McGraw-Hill, 1964.
- [8] Vandenplas, P. E. Electron Waves and Resonances in Bounded Plasmas. London, Interscience Publishers, 1968.

- [9] Vandenplas, P. E., Messiaen, A. M., Monfort, J.-L. e Papier, J. J. - Plasma Phys. 12, 391 (1970).
- [10] Allis, W. P., Buchsbaum, S. J. e Bers, A. Waves in Anisotropic Plasmas. M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1963.
- [11] Rapozo, Cândido da C. Aquecimento do Plasma por Rádio-Frequência na Máquina Linear LISA. Tese de Doutorado, UNICAMP, maio de 1985.
- [12] Rapozo, C. da C., Sakanaka, P. H. e Torres, H. Rev. Bras. Fís. 17, 222 (1987).
- [13] Ghosh, S. K. e Pai, S. P. - J. Pl. Phys. 29, 383 (1983).
- [14] Assis, A. K. T. de e Sakanaka, P. H. Anais do II Simpósio Brasileiro de Microondas, São José dos Campos, SP. C. 54 a D. 61 (1986).
- [15] Assis, A. K. T. de e Sakanaka, P. H. Dispersion Relation of a Bounded, Magnetized and Warm Plasma. Enviado para publicação nos Proceedings do II Taller Latinoamericano de Física del Plasma y de la Fusión Termonuclear Controlada (Medellin, Colômbia, 1987).

- [16] Assis, A. K. T. de e Sakanaka, P. H. Dispersion Relation of Warm Magnetized Plasma Bounded by a Cylindrical Waveguide. Enviado para publicação nos Proceedings do Energy Independence Conference - Fusion Energy and Plasma Physics (Rio de Janeiro, Brasil, 1987)
- [17] Assis, A. K. T. de e Sakanaka, P. H. Propagation of Electromagnetic Waves in a Warm and Magnetized Plasma Bounded by a Cylindrical Waveguide. Submetido para publicação no Journal of Plasma Physics.
- [18] Chen, F. F. Introduction to Plasma Physics. New York, Plenum Press, 1974.
- [19] Muschietti, L. Interaction Ondes-Particules: Electrons "Runaway" et Ondes HF dans un Plasma Magnetise. Thèse n° 455 (1982). EPFL, Lausanne.
- [20] Miyamoto, K. Plasma Physics for nuclear Fusion. Cambridge, The MIT Press, 1980.
- [21] Stix, T. H. Theory of Plasma Waves. New York, McGraw-Hill, 1962.
- [22] Schmidt, H. Physics of High Temperature Plasmas. 2ª ed. New York, Academic Press, 1979.
- [23] Bittencourt, J. A. Fundamentals of Plasma Physics, 1979.

- [24] Gore, R. A. e Lashinsky, H. *Phys. Fluids* 22 (11), 2178 (1979).
- [25] Smirnov, V. *Cours de Mathématiques Supérieures. Vol. 1.* Moscou, Editora Mir, 1969.
- [26] Bohm, D. e Gross, E. P. *Phys. Rev.* 75, 1851 (1949).
- [27] Azakami, T., Narita, H. e Aye Thein, U. *Bull. Nagoya Inst. Tech.* 24, 201 (1972).
- [28] Gamo, H. - *J. Phys. Soc. Japan* 8, 176 (1953).
- [29] Cap, F. F. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-32, 1336 (1984).
- [30] Cap, F. F. *Phys. Fluids* 28, 1766 (1985).
- [31] Stix, T. H. e Swanson, D. G. *Propagation and Mode-Conversion for Waves in Nonuniform Plasmas*, em *Handbook of Plasma Physics*, Vol. 1 (Editores: Rosenbluth, M. N. e Sagdeev, R. Z.). Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1983.
- [32] Cairns, R. A. e Lashmore-Davies, C. N. *Phys. Fluids* 26, 1268 (1983).
- [33] Cairns, R. A. e Lashmore-Davies, C. N. *Phys. Fluids* 29, 3639 (1986).

- [34] Swanson, D. G. Phys. Fluids 10, 428 (1967).
- [35] Chew, G. F., Goldberger, M. L. e Low, F. E. Proc. Roy. Soc. (London), A236, 112 (1956).
- [36] Abramowitz, M. e Stegun, I. A. Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover, 1972.
- [37] Spiegel, M. R. Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas. São Paulo, McGraw-Hill, 1973.