INSTITUTO DE FÍSICA
GLEB WATAGHIN

Espalhamento Brillouin em fibras fotônicas

por

Paulo C. Dainese Jr.

Orientação: Prof. Dr. Hugo L. Fragnito

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 15 de setembro de 2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

D144e

Dainese Júnior, Paulo Clóvis
Espalhamento Brillouin em fibras de cristal fotônico / Paulo Clóvis Dainese Júnior. -- Campinas, SP : [s.n.], 2006.

Orientador: Hugo Luis Fragnito.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Fibras óticas. 2. Espalhamento Brillouin. 3. Cristais fotônicos. 4. Acústica ótica I. Fragnito, Hugo Luis. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Brillouin scattering in photonic crystal fibers
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. Optical fibers
  2. Brillouin scattering
  3. Phononic crystals
  4. Acoustooptics
- **Área de concentração:** Física
- **Titulação:** Doutor em Ciências
- **Banca examinadora:**
  Prof. Hugo Luis Fragnito
  Prof. Hugo Enrique Hernandéz Figueroa
  Prof. Sérgio Carlos Zilio
  Prof. Antônio Rubens Brito de Castro
  Prof. Flávio Caldas da Cruz
- **Data da defesa:** 15.09.2006
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física

Banca Examinadora:

Dr. Hugo L. Fragnito (Orientador, Unicamp)

Dr. Flávio Caldas Cruz (IFGW, Unicamp)

Dr. Antonio Rubens Britto de Castro (IFGW, Unicamp e LNLS)

Dr. Sérgio Cabral Zílio (IF, USP São Carlos)

Dr. Hugo E. Hernández Figueroa (FEEC, Unicamp)

Dedicatória

Esta tese marcou uma época de muito esforço, trabalho e determinação. Não apenas a mim, mas a toda a minha família. Aproveito esta oportunidade para agradecer. À minha esposa Renata, pela força, e dedicação às nossas princesinhas Luisa e Lívia. Aos meus pais, pelo eterno e incansável apoio e dedicação. Ao meu irmão, pelo estímulo, pelo espelho e pela confiança. Às princesinhas, pelo amor.

Agradecimentos, aqui vai a famosa lista. Agradeço...

...primeiramente ao Professor Hugo L. Fragnito. Além de um mentor de minha carreira, contribuiu de forma única para o meu desenvolvimento, ensinando, exigindo e reconhecendo. A quem devo gratidão pelas diversas oportunidades, por acreditar veemente na minha capacidade e, finalmente, pela extrema confiança depositada;

...ao pessoal do laboratório pelas incansáveis (e memoráveis) disputas por um espaço na bancada: Waltinho, José, Diego, André, Luis, Gustavo e Andres;

...especialmente ao Andrés Rieznik e ao Gustavo Wiederhecker, pela amizade e intermináveis discussões sobre o "futuro";

...novamente ao Gustavo, pela grande colaboração e trabalho duro ao longo desta tese;

...ao Nicolas Joly pela colaboração e pelos memoráveis jantares na Inglaterra e na Alemanha;

...ao Prof. Dr. Philip Russell pela confiança e empolgação que muito me estimularam. Também aos Professores Dr. Jonathan Knight, Dr. Vincent Laude e Dr. Abdelkrim Kheilf pela colaboração e confiança depositada;

...à inesquecível galera 98, pelas longas horas (longas mesmo!) na biblioteca da Física: Odilon, Piccin, Bonato, Vado, Lázaro, Thiago, David, Rodrigão, André, Cris...;

...agradeço ao pessoal da pós pela constante colaboração, Maria Ignéz e Armando;

...agradeço a todo o pessoal do DEQ (Departamento de Eletrônica Quântica), que, apesar de a água gelada nem sempre ser tão gelada assim, sempre estiveram dispostos a colaborar: Simone, Martha, Thiago, Zé, João, Júlio, Maurício, Vagner...;

...às Instituições: Instituto de Física Gleb Wataghin (Unicamp), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp), Ericsson S.A., Padtec S.A., Pronex (Ministério da Ciência e Tecnologia), Fundo de Apoio ao Ensino e a Pesquisa (FAEP, Unicamp) e a Optical Society of America (OSA).

Resumo

Esta tese apresenta estudos experimentais e teóricos sobre o processo de espalhamento Brillouin em Fibras de Cristal Fotônico. Formadas por um núcleo sílica pura e uma casca micro-estruturada (sílica e ar), estas fibras permitem o confinamento óptico e acústico em regiões da ordem do comprimento de onda. Como resultado, a interação acústo-óptica apresenta características radicalmente diferentes daquelas observadas em meio *bulk* ou em fibras convencionais.

Investigamos experimentalmente ambos co- e retro-espalhamento Brillouin. Observamos que quando o diâmetro do núcleo é ~70 % do comprimento de onda óptico no vácuo, o espectro de retro-espalhamento espontâneo apresenta múltiplos picos, os quais atribuímos a famílias de modos acústicos guiados no núcleo da fibra. Além disso, o limiar de retro-esplhamento Brillouin estimulado aumenta por um fator ~5 quando o diâmetro do núcleo é diminuído de $8\ \mu m$ para $1.22\ \mu m$, resultado da natureza complexa dos modos acústicos no núcleo, contendo fortes componentes de deslocamento longitudinal e transversal. No caso de co-espalhamento, realizamos medidas de espalhamento espontâneo e de excitação impulsiva de ondas acústicas utilizando pulsos ópticos de alta intensidade, através do efeito de eletrostrição. Estes experimentos nos possibilitaram observar o confinamento transversal de ondas acústicas no núcleo da fibra fotônica.

Desenvolvemos um modelo analítico para a interação acústo-óptica, aproximando o núcleo da fibra como um cilindro de silica suspenso no vácuo, sem a presença da casca. Este modelo nos permitiu entender a física envolvida no processo e também explicar qualitativamente as observações experimentais. Modelos numéricos mais sofisticados foram utilizados para o cálculo dos modos acústicos e óptico suportados pela estrutura completa da fibra fotônica, os quais nos permitiram explicar mais precisamente as observações experimentais. Finalmente, realizamos cálculos numéricos da estrutura de bandas da região micro-estruturada, demonstrando a presença de bandas proibidas (ou *gaps* fonônicos) para as ondas acústicas.

Abstract

This thesis presents experimental and theorethical studies on Brillouin scattering in Photonic Crystal Fibers. With a pure silica core surrounded by a microstructed cladding (silica and air), these fibers allow the confinement of both acoustic and optical waves in sub-wavelength regions. The result is a radically different acousto-optic interaction from what has been observed in *bulk* media or conventional fibers.

We investigate experimentally both forward and backward Brillouin scattering. We observed that for core diameters of around 70% of the vacuum wavelength of the launched laser light, the spontaneous Brillouin signal develops an unusual multi-peaked spectrum, these peaks we attribute to several families of guided acoustic modes. At the same time the threshold power for stimulated Brillouin scattering increases five-fold when the core diameter is reduced from from $8\ \mu m$ to $1.22\ \mu m$, as a consequence of the complex nature of the acoustic modes, each with different proportions of longitudinal and shear strain, strongly localised to the core. In the case of forward scattering, we performed measurements of the spontaneous scattering and also of impulsive excitation of acoustic waves using high intensity optical pulses, through the effect of electrostriction. These experiments allowed us to observe the transverse confinment of acoustic waves in the core of the photonic crystal fiber.

An analitic model for the acousto-optic interaction was developed by approximating the core of the photonic fiber by a circular strand of glass in vaccum, initially neglecting the presence of the micro-structured cladding. This simple model allowed us to understand the physics involved in the scattering process and also to qualitatevely explain our experimental observations. Numerical models were then implemented to calculate the acoustic and optical modes of the actual photonic fiber structure, and we were able to explain more precisely our observations. Finnally, we performed numerical calculation of the band structure of the micro-structured region, demonstrating the presence of prohibited gaps for the acoustic wave (phononics band gaps).

Índice

Capítulo 1– Introdução

Ondas acústicas e luminosas são onipresentes em nossas vidas. A visão, a fala e a audição decorrem fundamentalmente da nossa capacidade de interagirmos com estas ondas, detectando-as ou gerando-as. Nos parece bastante intuitivo considerarmos que a luz e o som são entes completamentes distintos, e que não interagem entre si. Afinal, as ondas sonoras que emitimos ao falar não defletem os raios de luz com os quais nós enxergamos. De fato, são entes distintos, mas ao contrário de nossa intuição podem sim interagir. A humanidade busca o entendimento da natureza das ondas de matéria e das ondas luminosas por dezenas de séculos, leis de reflexão foram, por exemplo, descritas por Euclid (*Optica*, 300 BC). O entendimento de como estes entes interagem é relativamente recente. Leon Brillouin [1] previu em 1922 que ondas acústicas, as quais ele se referia por flutuações da densidade térmica, causariam o espalhamento de luz. Dez anos mais tarde, Debye e Sears [2], em 1932, observaram experimentalmente pela primeira vez a difração da luz causada por ondas supersônicas♦. A Figura 1 . 1, retirada do artigo original de Debye, mostra o padrão de difração projetado em um anteparo. Esta medida representa a primeira observação de difração da luz por ondas acústicas.

Mas a interação ocorre nas duas direções, não apenas ondas acústicas intensas podem defletir ou modular a luz, mas também lasers intensos podem gerar ondas acústicas, como discutiremos em detalhes mais tarde. Estas interações são em geral fracas, e são necessários técnicas e equipamentos ultrasensíveis para as detectarmos. Em fibras ópticas, a

♦ O artigo de P. Debye e F. W. Sears é um exemplo da riqueza da física fundamental na época. Discute avanços no entendimento básico do espalhamento de luz e dos raios-*x*, passando por argumentações de L. Brillouin e A. Einstein. No mesmo jornal, o artigo seguinte ao de Debye é um artigo de Linus Pauling.

luz viaja por longos comprimentos praticamente sem sofrer atenuação. A presença de ondas acústicas na fibra faz com que a interação se dê por todo o comprimento da fibra, aumentando o efeito por várias ordens de grandeza. Um exemplo é a observação de luz retro-espalhada devido à presença de ondas acústicas. Em fibras, um laser de apenas alguns miliwatts de potência é suficiente para observarmos o efeito, sem a necessidade de instrumentos muito sensíveis.

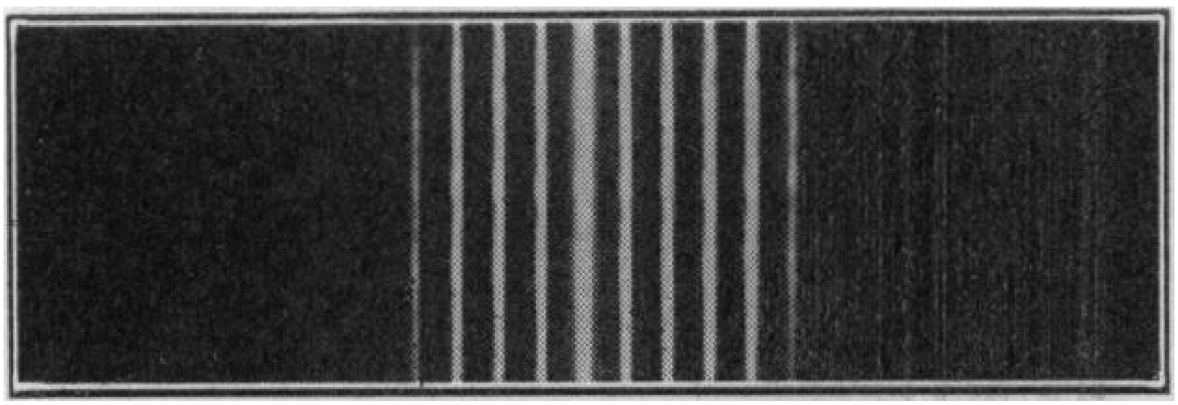


Figura 1 . 1: fotografia do padrão de difração em um anteparo observado por Debye e Sears [2]. Esta imagem representa a primeira observação experimental de difração da luz por ondas supersônicas.

Neste capítulo introdutório, apresentamos considerações gerais sobre o processo de espalhamento Brillouin e sobre as Fibras de Cristal Fotônico (*Photonic Crystal Fiber*, PCF). Desenhamos as motivações do presente trabalho de tese, considerando características gerais dos diversos processos de espalhamento de luz (Raman, Brillouin e Rayleigh) e discutindo propriedades relevantes das PCFs. Esta tese é focalizada na área de óptica, mas envolve diversos aspectos básicos da propagação de ondas elásticas. Achamos oportuno e até necessário do ponto de vista didático, apresentar um capítulo dedicado aos conceitos básicos de elastodinâmica e acusto-óptica. O capítulo 2, portanto, apresenta um estudo detalhado sobre a propagação de ondas elásticas, descreve como estas ondas causam uma perturbação na constante dielétrica do material através do efeito elasto-óptico e, finalmente, como resultado deste efeito, apresentamos a teoria do espalhamento Brillouin em um meio infinito. O material nesse capítulo é um apanhado de várias obras, mas apresentado de modo unificado, consistente com o foco da tese e ilustrado com medidas básicas feitas em nosso laboratório. Esse capítulo é útil para estabelecer as bases físicas que utilizaremos nos capítulos subseqüentes, tanto para interpretar os resultados experimentais quanto para desenvolver nossos modelos teóricos. No capítulo 3 apresentamos os resultados experimentais obtidos de interação da luz com ondas acústicas em PCFs. Ao final, nos capítulos 4 e 5, apresentamos os modelos teóricos desenvolvidos para entendermos as características do espalhamento Brillouin em fibras fotônicas. A idéia por trás da estrutura da tese é simples, mostramos primeiramente o básico, mostramos o que descobrimos de diferente e depois procuramos desenvolver modelos para explicar e entender as observações. No Capítulo 6, apresentamos nossas conclusões e perspectivas para próximos trabalhos.

1.1. Considerações gerais

O espalhamento de ondas eletromagnéticas pela matéria é um assunto amplo, extensivamente descrito em livros textos e artigos científicos. Fundamentalmente, diversos processos de interação entre o campo eletromagnético e a matéria dão origem a espalhamento. Dentre estes processos, destacamos o espalhamento devido às vibrações de rede em um sólido (fônons), que dá origem aos efeitos Raman e Brillouin [3]. O primeiro refere-se à interação da luz com fônons ópticos e o segundo com fônons acústicos. A importância destes fenômenos ultrapassa os limites da ciência fundamental, sendo também amplamente aplicado em diversas áreas tecnológicas. O espalhamento Raman, além de ser uma ferramenta de ciência básica como, por exemplo, no estudo das propriedades de materiais, é também o fenômeno físico em que se baseiam algumas tecnologias aplicadas nas redes ópticas de Telecomunicações. Um exemplo é o amplificador óptico Raman [3, 4], utilizado em redes de comunicações por fibras ópticas de longa distância. De fato, as redes ópticas submarinas instaladas ao longo da costa brasileira são exemplos que utilizam a tecnologia Raman. O espalhamento Brillouin também tem diversas aplicações práticas. Dispositivos como chaves e moduladores acusto-ópticos, lasers Brillouin e sensores de temperatura e pressão são alguns exemplos tecnológicos baseados neste efeito [5-12]. Por outro lado, o espalhamento Brillouin pode também representar um problema em determinadas situações. Um exemplo são as redes ópticas para transmissão de sinal analógico de TV a cabo. Estas redes têm, em muitos casos, grande ramificação e baixa sensitividade de modo que é necessário injetar na fibra óptica sinais de alta potência (tipicamente maiores que $1\ \mathrm{mW}$). Como veremos ao longo desta tese, potências acima do chamado “limiar de Brillouin”, resultam numa forte reflexão do sinal óptico, que portanto não alcança o destino. Pela mesma razão, o espalhamento Brillouin também é indesejado em dispositivos baseados em fibras ópticas que façam necessário a utilização de alta potência na fibra. Um exemplo são os dispositivos paramétricos [13-15], como amplificadores e conversores de comprimento de onda baseados em Mistura de Quatro Ondas (*Four-Wave Mixing*, FWM). Métodos para eliminar o efeito Brillouin devem, portanto, ser implementados nestes casos [16-18].

Em fibras ópticas, três processos básicos contribuem para o espalhamento de luz: os já citados efeitos Raman e Brillouin e também o espalhamento Rayleigh [3, 4]. Os efeitos Raman e Brillouin são processos de espalhamento inelásticos, ou seja, a energia (ou a freqüência) do fóton espalhado (Stokes ou anti-Stokes) é diferente da energia do fóton incidente. Esta diferença é, por conservação, exatamente igual à energia do fônon criado ou absorvido. Conservação de momento linear também é necessária para o processo ocorrer[1]. Como a propagação na fibra ocorre ao longo de uma única direção, a conservação de momento pode ser expressa por uma relação escalar. Matematicamente, escrevemos as relações de conservação de energia e momento como

$$\begin{aligned} \omega_S &= \omega_P \pm \Omega \\ k_S &= k_P \pm k \end{aligned}, \tag{1.1}$$

onde ω_S, ω_P e Ω são, respectivamente, as freqüências angulares dos fótons espalhado (*S* de *scattered*) e incidente (*P* de *pump*) e do fônon absorvido (sinal positivo) ou gerado (sinal negativo). Analogamente, k_S, k_P e k são, respectivamente, os vetores de ondas dos fótons espalhado e incidente e do fônon. Escrevemos a conservação de momento na forma escalar, já que em fibras, a propagação é unidirecional (mas vale comentar que os k's podem ser positivos ou negativos dependendo do sentido de propagação). As condições para que haja conservação de energia e momento são completamente diferentes para o caso dos fônons ópticos e acústicos, devido basicamente às diferentes relações de dispersão dos ramos óptico e acústico. Esta diferença faz com que os efeitos Raman e Brillouin sejam radicalmente diferentes. Explorarmos em detalhes estas diferenças é fundamental para a

[1] Nesta tese, conservação de momento ou casamento de fase (ou até o termo em inglês *phase-matching*) são termos usados sem distinção, embora o primeiro resgata uma interpretação quântica em termos fótons e fônons, e o último uma interpretação clássica em termos de ondas. No mesmo sentido, o argumento quântico de conservação de energia tem seu análogo clássico no desvio Doppler da freqüência da luz, devido ao espalhamento por vibrações da rede (fônons) que viajam ao longo da fibra.

clareza da motivação do presente trabalho de tese e, principalmente, para o entendimento dos resultados obtidos.

1.2. Efeitos Raman e Brillouin: uma visão geral, as diferenças e as motivações

É assunto de livros-texto de Física do Estado Sólido [19] o estudo dos modos vibracionais de uma cadeia diatômica linear, um exemplo simples e útil para entendermos a natureza dos fônons ópticos e acústicos que dão origem ao espalhamento Raman e Brillouin respectivamente. Gostaríamos de explicitar aqui que nosso objetivo não é estender o modelo de uma cadeia linear para o caso de um sólido amorfo como a sílica fundida (material vítreo usado na fabricação de fibras ópticas). Entretanto, no caso da cadeia linear resultados práticos podem ser obtidos a partir de leis fundamentais e de uma forma simples, o que não é o caso de vidros. Nosso objetivo é apenas usar os conceitos básicos e simples da cadeia linear para explicitar alguns aspectos particulares que são sim análogos ao caso do vidro. Um exemplo disso é o cálculo da relação de dispersão de ondas acústicas ao se propagarem ao longo da cadeia. Esta não é uma tarefa simples de ser feita em materiais vítreos, mas os resultados são para ambos similares dentro de algumas aproximações. Por exemplo, a relação de dispersão é linear para freqüências suficientemente baixas. Pode-se argumentar que este resultado também seria obtido se tratássemos o problema desde a perspectiva da mecânica dos meios contínuos, o que de fato é verdade. Entretanto, um outro resultado que sai naturalmente da cadeia diatômica linear e que não teria explicação na mecânica dos meios contínuos é a presença dos ramos óptico e acústico na relação de dispersão. Esperando ter convencido o leitor de que vale a pena dedicar algumas páginas discutindo o problema de uma cadeia diatômica linear e, mencionando que esta tese possivelmente terá como leitores estudantes de pós-graduação, o quê reforça o argumento didático, seguiremos em frente.

1.2.1. Relações de dispersão em uma cadeia diatômica linear

Não reproduzimos aqui as deduções básicas, mas restringimo-nos à re-interpretação dos resultados. Consideremos a cadeia linear com separação interatômica a, como ilustra a Figura 1 . 2(a), composta por átomos pequenos de massa m e átomos grandes de massa M. A célula unitária deste cristal unidimensional é formada por um átomo grande e um pequeno, e portanto o período da rede é $2a$ (a primeira zona de Brillouin no espaço recíproco tem comprimento $\pi / 2a$). Este problema é facilmente resolvido se considerarmos que a força restaurativa entre os átomos obedece a *Lei de Hooke*, ou seja, é proporcional à amplitude de deslocamento atômico da posição de equilíbrio (com constante de proporcionalidade μ). Por exemplo, para o átomo localizado na posição x_i, a força restaurativa é $f_i = -\mu u_i$, onde u_i é a amplitude do deslocamento, como ilustrado na Figura 1 . 2(b) para uma onda longitudinal (aquela em que o deslocamento ocorre na mesma direção de propagação).

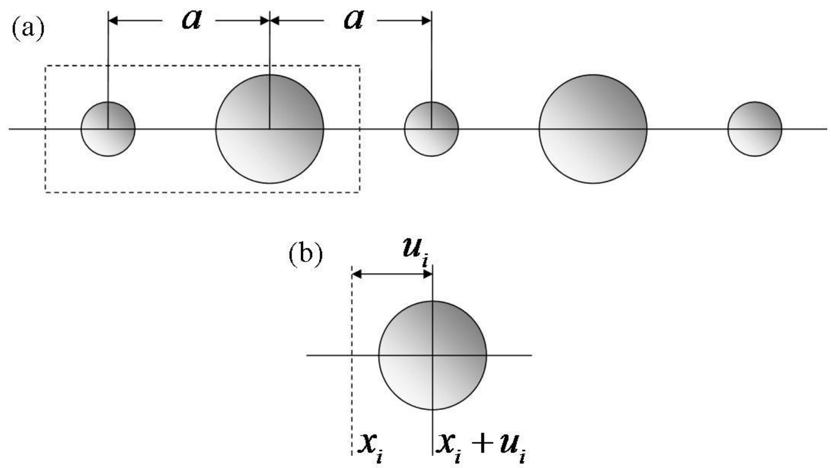


Figura 1 . 2: (a) cadeia diatômica linear, mostrando cinco átomos vizinhos com separação interatômica a, quando localizados em sua posição de equilíbrio. Os átomos menores têm massa m e os maiores M. (b) átomo deslocado de sua posição de equilíbrio. A força restaurativa é aproximada pela Lei de Hooke, e portanto proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio u_i, com constante de proporcionalidade é μ;

De maneira intuitiva, podemos ver que este sistema físico exibe dois tipos de movimentos característicos, um em que os átomos da célula unitária oscilam em fase (correspondente aos fônons acústicos) e outro em que os átomos dentro da célula unitária oscilam fora de fase (correspondente aos fônons ópticos). A figura Figura 1 . 3 ilustra o movimento dos átomos da célula unitária para uma onda transversal (aquela em que o deslocamento é perpendicular à direção de propagação).

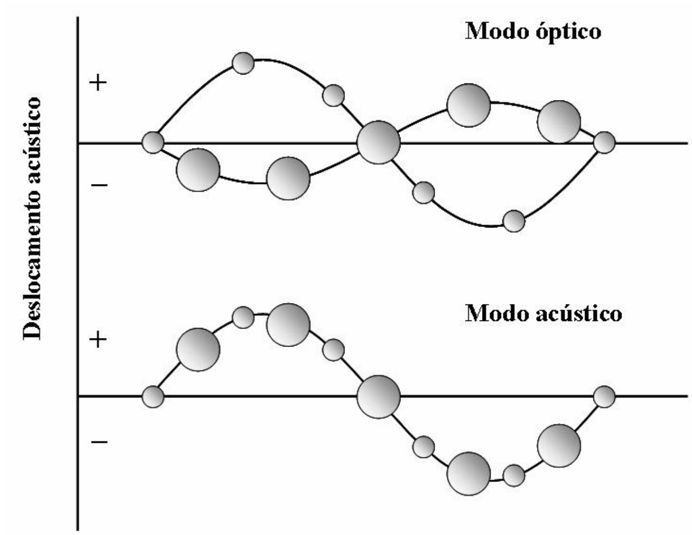


Figura 1 . 3: ilustração do deslocamento acústico dos átomos de uma cadeia linear mostrando os dois tipos característicos de movimento. No modo acústico, os átomos da célula unitária oscilam em fase (correspondente aos fônons acústicos) e no modo óptico os átomos dentro da célula unitária oscilam fora de fase (correspondente aos fônons ópticos);

A solução completa deste problema pode ser encontrada nas referências [19]. Nosso principal interesse aqui é analisarmos as diferentes relações de dispersão de cada ramo, óptico e acústico, e qual o papel desta diferença nos processos de espalhamento Raman e Brillouin. Explicitamente. As relações de dispersão são dadas por [19]

$$\Omega^2 = \mu\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm \mu\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2 ka}{mM}}, \tag{1.2}$$

onde o sinal $+$ corresponde ao ramo óptico e o sinal $-$ ao ramo acústico. Aqui, novamente Ω é a freqüência angular e k é o vetor de onda (ou momento do fônon). A Figura 1 . 4 mostra os gráficos das relações de dispersão, dentro da primeira zona de Brillouin, para o ramo óptico (curva superior) e para o ramo acústico (curva inferior).

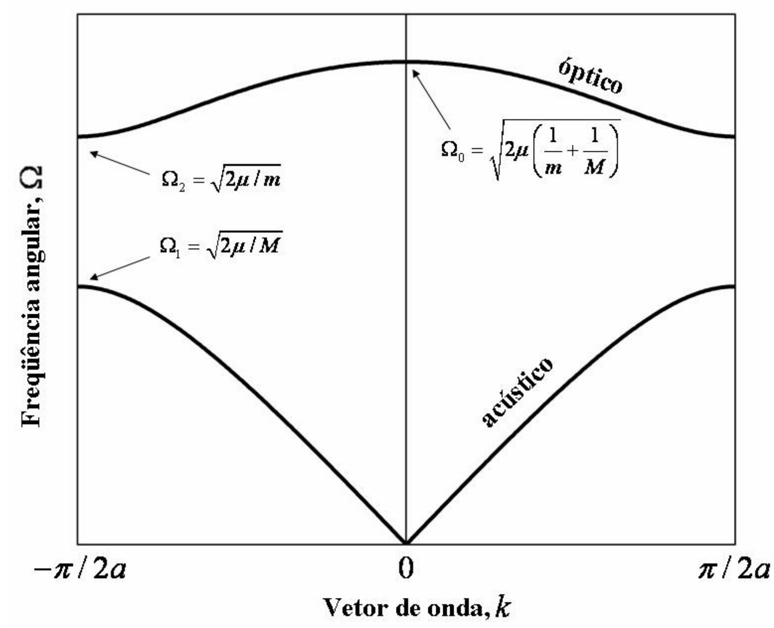


Figura 1 . 4: gráfico da relação de dispersão para a cadeia diatômica linear da Figura 1 . 2. A curva superior ilustra a relação de dispersão para o ramo óptico e a curva inferior a relação de dispersão para o ramo acústico. As freqüências características estão indicadas por Ω_0, Ω_1 e Ω_2. A freqüência de corte do ramo óptico Ω_0 caracteriza uma região tal que a velocidade de fase Ω / k tende a infinito quando $k \to 0$;

Vemos que no ramo acústico, a freqüência do fônon cresce quando k aumenta. Na região de comprimentos de onda longos comparados com a distância interatômica a, ou seja, na região de $ka = 1$, a relação de dispersão é aproximadamente linear, retomando o resultado de um material *bulk*. Nesta região, a aproximação para a relação de dispersão do ramo acústico até segunda ordem em k resulta em

$$\begin{aligned} \Omega^{ac} &= \sqrt{\frac{2\mu a^2}{m+M}}k, \\ V = k / \Omega^{ac} &= \sqrt{\frac{2\mu a^2}{m+M}}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde V é a velocidade de fase do fônon acústico. Vemos que a velocidade de fase é uma constante, e depende apenas das características intrínsecas da cadeia. Nos sólidos em geral, esta velocidade corresponde à velocidade das ondas acústicas longitudinal ou transversal, que é da ordem de $5 \cdot 10^3$ m/s [3, 4], e portanto muito menor que a velocidade da luz no meio (da ordem de 10^8 m/s, dependendo do valor do índice de refração). Usaremos estes valores adiante para estimarmos a freqüência da onda acústica envolvida no espalhamento Brillouin. Em contraste com o ramo acústico, no caso do ramo óptico, a relação de dispersão no limite de $ka = 1$ aproxima-se de uma constante, ou seja, a freqüência é aproximadamente independente do vetor de onda. Expandindo novamente a relação de dispersão do ramo óptico até a segunda ordem em k resulta que

$$\begin{aligned} \Omega^{op} &= \Omega_0 \left(1 - \frac{V^2 k^2}{2\Omega_0^2} \right), \\ \Omega_0 &= \sqrt{\frac{2\mu}{m_r}}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $m_r = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^{-1}$ é a massa reduzida da "partícula" da célula unitária composta pelos dois átomos, grande e pequeno. A freqüência de corte Ω_0 é a freqüência característica do fônon óptico exatamente no ponto em que $k = 0$. É fácil mostrar que a freqüência natural de vibração de um sistema de apenas duas partículas de massas m e M, ligadas por uma força elástica com constante de mola μ, é simplesmente $\Omega_{free} = \sqrt{\mu / m_r}$. Portanto, podemos ver que $\Omega_0 = \sqrt{2}\Omega_{free}$, e o fator $\sqrt{2}$ resulta do fato de que, no caso da cadeia linear, cada átomo está ligado a dois outros, e não a apenas um como no sistema de duas partículas. Deste modo, a força restaurativa é o dobro na cadeia do que no sistema de duas partículas. A freqüência de vibração dos fônons em sílica fundida é 13,2 THz [3, 4]. Outra característica interessante no caso dos fônons ópticos é que, como a freqüência é praticamente independente do vetor de onda, a velocidade de fase Ω / k tende à infinito quando k tende a zero, podendo facilmente atingir a velocidade da luz!

Tendo explorado as principais características da relação de dispersão dos fônons ópticos e acústicos, usamos agora as equações de conservação de momento e energia, equações (1.1), para determinarmos as freqüências dos fônons envolvidos nos processos de espalhamento Brillouin e Raman [3].

1.2.2. Condições de *phase-matching* I: co-espalhamento

Vejamos primeiro o caso em que tanto o fóton incidente quanto o fóton espalhado propagam-se na mesma direção e sentido na fibra óptica. Chamamos este caso de co-espalhamento. Mais adiante tratamos o caso em que o fóton é espalhado na mesma direção mas em sentido oposto (retro-espalhamento). As condições de conservação de energia e momento, equações (1.1), envolvem as relações de dispersão dos fônons, ópticos ou acústicos, e também dos fótons incidente e espalhado. Supomos que a relação de dispersão óptica, por simplicidade, seja linear

$$\omega_{P,S} = \frac{c}{n} k_{P,S}, \tag{1.5}$$

onde $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ é a velocidade da luz no vácuo, e n é o índice de refração do material, considerado independente da freqüência óptica (esta aproximação se justifica pelo fato de o desvio de freqüência ser pequeno se comparado com a freqüência óptica). Aplicando as relações de conservação de momento e energia, temos que a freqüência e o vetor de onda do fônon envolvido devem obedecer:

$$\frac{\Omega}{k} = \frac{c}{n}. \tag{1.6}$$

Notemos que as condições de conservação impõem que a velocidade de fase do fônon envolvido no processo de co-espalhamento seja igual à velocidade de fase da luz. Conforme discutimos anteriormente, a velocidade de fase das ondas acústicas é da ordem de $5 \cdot 10^3\, m/s$ e portanto não é possível satisfazer as condições de conservação de energia e momento. O resultado é que não existe co-espalhamento Brillouin em material *bulk*. E aqui temos a primeira motivação do presente estudo. Quando confinadas na região transversal de um guia de onda (como a fibra óptica), a relação de dispersão dos fônons acústicos adquire uma freqüência de corte quando $k \to 0$, e a curva de dispersão se aproxima daquela do ramo óptico, com uma região plana e de velocidade de fase infinita. Como conseqüência, em fibras ópticas, é possível observar co-espalhamento Brillouin (exploraremos em detalhes este tópico no capítulo 5).

No caso dos fônons ópticos, entretanto, e aqui temos a primeira diferença marcante entre Raman e Brillouin, mesmo em *bulk*, a velocidade de fase tende a infinito quando $k \to 0$, facilmente atingindo c/n. Assim, o co-espalhamento Raman é permitido por considerações de conservação de momento e energia. Podemos calcular a freqüência do fônon óptico envolvido usando as equações (1.4) e (1.6), o resultado é

$$\begin{aligned} \Omega^{op} &= \Omega_0 \left(\frac{c/n}{V}\right)^2 \left(\sqrt{1 + 2\left(\frac{V}{c/n}\right)^2} - 1\right) \\ &\cong \Omega_0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde usamos a aproximação de que $V = c/n$. Nota-se que a freqüência do fônon óptico envolvido no co-espalhamento Raman é igual à freqüência natural da rede, da ordem de 10 THz , e, principalmente, é independente do vetor de onda k. O efeito do confinamento dos fônons em um guia de onda altera o vetor de onda do fônon. Entretanto, como acabamos de ver, o co-espalhamento Raman é independente de k, e portanto independente das características do guia de onda (exceto se o confinamento ocorre em regiões de dimensões da ordem do espaçamento interatômico, como em cavidade nanométricas e nanofios). Resumimos as principais conclusões desta análise introdutória acerca de co-espalhamento:

1. Co-espalhamento Brillouin é proibido em bulk por questões de conservação de energia e momento, mas o confinamento transversal em um guia de onda pode quebrar esta proibição;
2. Em contraste, co-espalhamento Raman é permitido, devido principalmente à região de velocidade de fase muito grande, comparável à velocidade da luz, em torno da freqüência de corte Ω_0;
3. A freqüência Raman é independente das características do guia de onda;

1.2.3. Condições de *phase-matching* II: retro-espalhamento

Vejamos agora o caso de retro-espalhamento, ou seja, o caso em que o fóton espalhado propaga-se na mesma direção, mas em sentido oposto ao fóton incidente.

Assumindo positivo o sentido de propagação do fóton incidente, os vetores de onda são dados por

$$k_S = -\frac{n\omega_S}{c} \text{ e } k_P = \frac{n\omega_P}{c}. \tag{1.8}$$

Aplicando as relações de conservação de momento e energia (1.1), temos que a o vetor de onda do fônon envolvido devem obedecer

$$k = k_P + k_S \cong 2k_P = \frac{2n\omega_P}{c}. \tag{1.9}$$

Usando as relações de dispersão dadas pelas equações (1.3) e (1.4) para os ramos acústico e óptico, chegamos que as freqüências angulares dos fônons envolvidos no retro-espalhamento Brillouin (Ω_B) e Raman (Ω_R) são

$$\begin{aligned} \Omega_B &= 2k_P V = \frac{2nV}{c}\omega_P, \\ \Omega_R &= \Omega_0\left(1 - \frac{\Omega_B^2}{2\Omega_0^2}\right). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Usando os seguintes valores típicos: $1,55\ \mu\text{m}$ para o comprimento de onda do fóton incidente, $n = 1,44$ para o índice de refração da sílica fundida, $V = 5,97\ \text{km/s}$ para a velocidade de ondas acústicas longitudinais em sílica, obtemos a freqüência Brillouin $\Omega_B / 2\pi = 11,1\ \text{GHz}$. Lembrando que a freqüência de corte do ramo óptico em sílica fundida é $\Omega_0 / 2\pi = 13,2\ \text{THz}$, vemos que a correção para a freqüência Raman, dada pela equação (1.10), é de apenas $4\ \text{MHz}$ em $13,2\ \text{THz}$.

A primeira conclusão desta análise é que, ao contrário do co-espalhamento, o retro-espalhamento Brillouin é permitido por considerações de conservação de momento e energia. Vemos ainda que a freqüência do fônon acústico envolvido depende linearmente do vetor de onda do fóton e portanto, também depende linearmente da freqüência do fóton. Isto implica que o espalhamento Brillouin, ao contrário do Raman é alterado pelas características do guia de onda. No caso do Raman, características muito similares entre co- e retro-espalhamento, ambos são permitidos e em ambos a freqüência é independente de k, e portanto independente do guia. Resumimos agora as principais conclusões desta análise introdutória acerca de retro-espalhamento:

1. Retro-espalhamento Brillouin é permitido em *bulk* por questões de conservação de energia e momento;
2. A freqüência Brillouin dependente fortemente das características do guia de onda;
3. Retro-espalhamento Raman também é permitido;
4. Novamente, a freqüência Raman é independente das características do guia de onda;

Vale um comentário sobre o único processo que não exploramos até aqui, o espalhamento Rayleigh [3]. Diferentemente dos efeitos Raman e Brillouin, o Rayleigh origina-se de flutuações de densidade localizadas, ou seja, de perturbações que não se propagam ao longo da fibra. Dessa forma a luz espalhada não sofre desvio Doppler, e o espalhamento Rayleigh é chamado de quasi-elástico (o termo *quasi* deve-se ao fato de a luz espalhada apresentar um espectro alargado, apesar de centrado na mesma freqüência da onda incidente). Em líquidos e gases, há ainda o espalhamento Rayleigh Wing, que se deve a flutuações localizadas de orientação molecular. Estas flutuações têm freqüências mais altas que as flutuações de densidade (Rayleigh) e, portanto, uma largura maior (mas ainda centrado na freqüência incidente). O fato de originar-se de perturbações não-propagantes implica que o espalhamento Rayleigh não é alterado pelas características do guia de onda e, portanto, não há motivação para estudá-lo em fibras ópticas especiais, como as Fibras de

Cristal Fotônico utilizadas neste trabalho de tese e descritas detalhadamente nas seções a seguir.

1.2.4. Motivações do presente trabalho de tese

Temos agora os primeiros ingredientes para expressarmos as motivações do presente trabalho de tese. Discutimos as características principais dos processos de espalhamento Brillouin e Raman, e podemos concluir que apenas o primeiro, Brillouin, pode ser alterado pelas propriedades do guia de onda; e este processo é o objeto de estudo desta tese. Entretanto, espalhamento Brillouin em fibras ópticas não é um assunto novo. Na literatura, encontramos diversos trabalhos sobre espalhamento Brillouin em fibras ópticas, dentre os quais gostaríamos de destacar duas observações fundamentais. Primeiramente a observação de co-espalhamento Brillouin em fibras ópticas por R. M. Shelby, M. D. Levenson e P. W. Bayer [20], que como vimos é proibido em material *bulk* por conservação de energia e momento. Esta relaxação das relações de conservação resulta do confinamento transversal dos fônons acústicos. O segundo trabalho por E.P. Ippen e R. H. Stolen [21], referente ao retro-espalhamento Brillouin, reporta a observação de espalhamento *estimulado* em níveis de potência óptica ordens de grandeza menores que em *bulk*. Esta redução deve-se ao aumento da figura de mérito da interação acusto-óptica, que reflete basicamente o confinamento transversal óptico. Em fibras é possível manter alta intensidade óptica por longos comprimentos de interação (a luz é confinada no núcleo da fibra, com alguns mícrons de diâmetro por um comprimento de dezenas de quilômetros). Estes dois trabalhos reportam efeitos interessantes do ponto de vista fundamental que são “gerados” quando há confinamento acústico (Shelby) e óptico (Ippen). Estas observações, juntamente com as discussões prévias sobre as condições de conservação, tornam claro que o confinamento da luz e dos fônons acústicos altera fortemente a interação acusto-óptica [22-25]. Nesta tese, investigamos o efeito Brillouin num caso e que ambas ondas são confinadas fortemente ao limite de Fourier, em dimensões da ordem do comprimento de onda. A motivação completa se forma ao introduzirmos o guia de onda utilizado em nosso estudo, as Fibras de Cristal Fotônico. Estas fibras, como mostramos, permitem o confinamento de ambas as ondas, óptica e acústica, numa mesma região de dimensões sub-micrométricas e por comprimentos de interação de centenas de metros.

1.3. **Fibras de Cristal Fotônico:** novas possibilidades no estudo de espalhamento de luz

Nesta seção, introduzimos de forma bastante simplificada as Fibras de Cristal Fotônico e deixamos as referências para aqueles que querem detalhamento [26-29]. A primeira demonstração de uma fibra fotônica foi feita no ano de 1996 [28], e desde de então um número gigantesco de publicações tem aparecido na literatura [26, 27, 29], resultando num forte desenvolvimento da área, principalmente dentro do meio acadêmico. As fibras fotônicas estão agora encontrando diversas aplicações tecnológicas. Dentre as aplicações podemos citar dispositivos não lineares tais como geradores de super-contínuo e conversores de comprimento de onda; aplicações em lasers à fibra, incluindo-se lasers de alta potência, a própria transmissão de alta potência é uma aplicação natural das fibras fotônicas de núcleo de ar, sensores a gás, e até mesmo comunicações ópticas. Nesta última área, a possibilidade de transmissão de luz em um núcleo de ar, em princípio, ultrapassaria os limites impostos por atenuação nas fibras convencionais.

As fibras fotônicas são constituídas de um núcleo, por onde a luz viaja, circundado por uma região externa micro-estruturada, em geral de vidro e ar, como mostram os exemplos da Figura 1 . 5. Notemos na Figura 1 . 5(a) que algumas fibras têm o núcleo sólido, de vidro, e outras têm o núcleo oco, de ar. Estas duas possibilidades caracterizam duas classes de fibras fotônicas, as fibras de núcleo sólido, chamadas aqui simplesmente de fibras fotônicas, ou as fibras de núcleo oco, chamadas aqui de fibras de *bandgap*. Esta classificação decorre do fato de o mecanismo de guiamento ser diferente para cada tipo de fibra. As fibras de núcleo sólido guiam a luz por reflexão interna total modificada. De maneira simples, a região micro-estruturada da casca tem um índice de refração médio menor que o índice de núcleo de vidro, de modo que a reflexão interna total funciona. No caso das fibras de *bandgap*, o índice do núcleo é menor que o da casca e reflexão interna total não funciona. O guiamento ocorre através de efeitos de bandgap fotônico. Basicamente, múltiplas reflexões na microestrutura da casca criam interferência construtiva no núcleo para alguns comprimentos de onda. Dentro desta faixa de comprimentos de onda, a luz é guiada no núcleo de ar. Para o caso das fibras de núcleo sólido, argumentos similares podem ser colocados para o caso das ondas elásticas. Se pensarmos que a casca constituída de vidro e ar, as velocidades das ondas elásticas longitudinal e transversal são maiores no núcleo sólido do que na casca microestruturada. Isso significa que as fbras fotôncas são um anti-guia acústico e a única maneira de haver guiamento de modos no núcleo é através de um *bandgap* fonônico. Alguns artigos nas referências têm explorado esta possibilidade [6, 22-25, 30-33] e esta tese adiciona a esta linha de pesquisa explorando efeitos do confinamento acústico na interação acustoóptica em fibras fotônicas [24, 34, 35].

A Figura 1 . 5(b) ilustra o processo de fabricação das PCFs. Como em fibras convencionais, o processo se inicia pela fabricação da pré-forma. Primeiramente, tubos de vidro de alguns milímetros de diâmetro e dezenas de centímetros de comprimento são dispostos de maneira específica, formando a estrutura desejada. Esta estrutura é então colocada dentro de um tubo externo de vidro para fixação e também para que a fibra tenha um diâmetro externo grande (em geral $125\ \mu m$ de diâmetro) e seja manuseável. Esta pré-forma é levada ao forno, aquecida e derretida, como ilustra a Figura 1 . 5(b). O "fio" de vidro resultante constitui a fibra fotônica. Obviamente o processo foi descrito aqui de maneira muito simples, mas que na verdade tem diversas complicações e várias etapas dependendo do material utilizado, da estrutura buscada, da dimensão dos buracos de ar, dentre outros.

Nosso trabalho de tese, focalizamos o trabalho nas fibras de núcleo sólido, como aquela mostrada na Figura 1 . 5(c). Esta fibra tem o núcleo de vidro de $1,22\ \mu m$ de diâmetro. A casca da fibra é construída de uma região micro-estruturada, com seis anéis de buracos de ar e cada buraco tem aproximadamente o mesmo diâmetro que o núcleo.

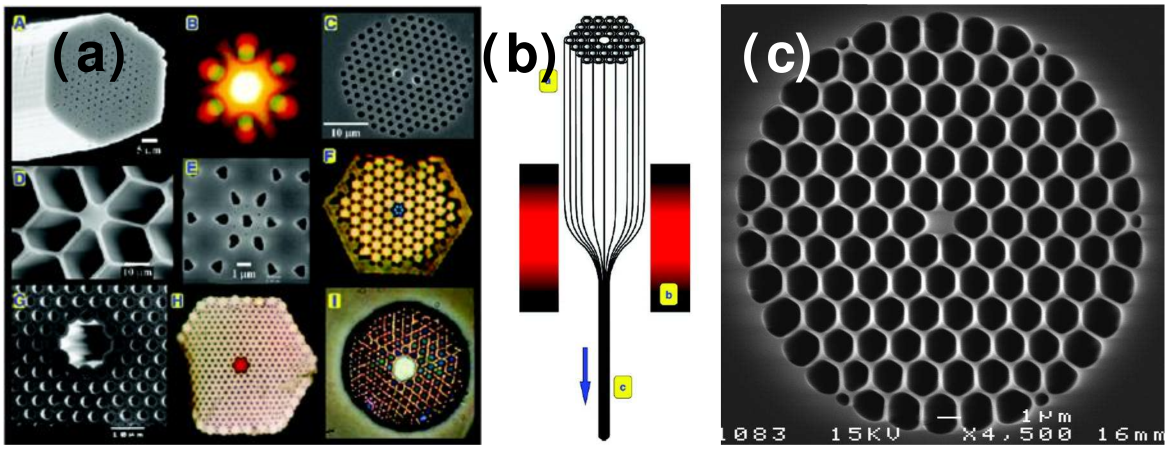


Figura 1 . 5: (a) exemplos de fibras micro-nano estruturadas [29] com núcleos cheios ou vazios. (b) ilustração do processo de fabricação: capilares de vidros são arranjados e puxados em uma torre de puxamento convencional até atingirem a dimensão desejada. (c) fibra com 1 mícron de diâmetro utilizada em nossos experimento (fabricadas pelo grupo do Prof. Philip Russell, na Universidade de Bath na Inglaterra);

Capítulo 2 – Ondas elásticas e Espalhamento Brillouin em *bulk*

Iniciamos este capítulo dando uma introdução geral sobre ondas acústicas em um meio elástico e infinito (*bulk*). Propriedades básicas são discutidas, tais como a definição dos tensores de *stress* (ou tensão) e *strain* (deformação), a solução das equações de propagação em um meio infinito e o surgimento de duas soluções independentes: as ondas longitudinais e transversais. Depois discutimos brevemente a atenuação das ondas acústicas por viscosidade e o fluxo de potência carregado por uma onda acústica. Familiarizados com os princípios básicos da elastodinâmica, passamos a analisar como as ondas acústicas afetam a propagação de ondas eletromagnéticas, através do efeito elasto-óptico. Finalmente, usando todo o desenvolvimento deste capítulo discutimos o espalhamento Brillouin em um meio infinito.

Este capítulo tem um caráter preparatório, para depois a apresentarmos os resultados obtidos acerca do espalhamento Brillouin em fibras fotônicas. Apresentar em detalhes as propriedades de ondas acústicas e do espalhamento Brillouin em *bulk* é, do ponto de vista didático, um modo de facilitar a explicação das nossas observações. Conhecer em detalhes as características básicas das ondas acústicas e do espalhamento Brillouin em *bulk* nos permite visualizar mais claramente os efeitos do confinamento em um guia como a PCF. O capítulo seguinte apresenta diretamente os resultados experimentais, indicando todos os pontos em que alguma característica interessante do espalhamento Brillouin é observada. Os capítulos 5 e 6 tratam teoricamente o espalhamento Brillouin em guias de onda, explicitando de fato os efeitos do confinamento. Especificamente, tratamos os modos acústicos de um cilindro de vidro no vácuo, apresentando as principais diferenças entre os modos envolvidos no co-espalhamento e no retro-espalhamento Brillouin. Depois de familiarizados com a natureza dos modos acústicos deste guia, analisamos o acoplamento acusto-óptico em detalhes, calculando características fundamentais como, por exemplo, o espectro da luz espalhada.

2.1. Meio elástico e infinito: propagação de ondas acústicas

As quantidades básicas para a descrição das ondas acústicas são o vetor deslocamento[♦] $\boldsymbol{u}$ da posição de equilíbrio de uma partícula do material[*], o tensor de deformações (ou *strain*) $\boldsymbol{S}$ e o tensor de tensões (ou *stress*) $\boldsymbol{T}$. Uma introdução básica sobre estas grandezas é encontrada em [36, 37]. Basicamente, o tensor de *strain* é definido de forma a representar as deformações do material, excluindo-se as translações e rotações rígidas. Para pequenos gradientes de deslocamento, a relação linearizada entre o *strain* e o deslocamento é dada por

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right), \tag{2.1}$$

onde r_i é igual a x, y ou z para $i = x, y$ ou z, respectivamente. Notemos que por construção, $\boldsymbol{S}$ é um tensor simétrico. O tensor de *stress*, por sua vez, representa a tensão interna (ou força por unidade de área) agindo entre planos adjacentes dentro do material.

[♦] Símbolos em negrito denotam quantidades vetoriais ou tensoriais.

[*] O termo *partícula* refere-se a uma região pequena do material, tal que o vetor deslocamento possa ser considerado constante dentro desta região, mas ainda contendo um número grande de átomos. Dentro de uma partícula, os átomos movem-se igualmente.

Por exemplo, a tensão entre planos normais à direção $\hat{\boldsymbol{n}}$ é dada por $\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$. É fácil demonstrar que a força interna por unidade de volume agindo em uma partícula do material devido à ação das partículas vizinhas é simplesmente

$$\boldsymbol{f} = \nabla\cdot\boldsymbol{T}. \tag{2.2}$$

Bem, sabendo disso e usando a *Segunda Lei de Newton*, é direto demonstrar que a equação de movimento que rege a dinâmica das ondas acústicas em um meio elástico é [36]

$$\nabla\cdot\boldsymbol{T} = \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \boldsymbol{F}, \tag{2.3}$$

onde ρ é a densidade do material e $\boldsymbol{F}$ representa as forças externas (por unidade de volume) agindo no material. Para pequenas deformações, é verificado empiricamente que o *strain* é proporcional ao *stress*, ou seja, para pequenas deformações o material obedece a *Lei de Hooke*, em analogia a um sistema massa-mola. Entretanto, de maneira geral, a "constante de mola" aqui é uma quantidade tensorial que relaciona $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{S}$, e cuja forma depende da simetria do cristal. Esta quantidade, denotada por $\boldsymbol{c}$, é chamada de tensor de dureza elástica (ou *elastic stiffness tensor*). Escrevemos, portanto, a seguinte relação constitutiva

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{S} + \boldsymbol{\eta} : \frac{\partial\boldsymbol{S}}{\partial t}. \tag{2.4}$$

A *Lei de Hooke* é expressa pelo primeiro termo à direita da equação (2.4). O segundo termo, introduzido sem considerações prévias, representa uma força de amortecimento, do tipo força viscosa [36]. O tensor $\boldsymbol{\eta}$ representa as constantes de viscosidade. Aqui trataremos apenas meios isotrópicos (como a sílica) e, neste caso, os tensores $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{\eta}$ são completamente descritos por apenas duas constantes independentes [36, 38]. Não apresentamos a dedução detalhada aqui, mas podemos usar a relação constitutiva

(2.4) entre $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{S}$, e a definição do *stress* (2.1) para reescrevermos a equação de onda (2.3) em termos apenas do vetor deslocamento em um meio isotrópico e linear, obtendo

$$\left[(\lambda+2\mu)+\eta_{11}\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})-\left[\mu+\eta_{44}\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}, \tag{2.5}$$

onde μ e λ* são as constantes de Lamè do material (que representam o tensor de dureza $\boldsymbol{c}$), η_{11} e η_{44} são as constantes de viscosidade (que representam o tensor de viscosidade $\boldsymbol{\eta}$). Pode-se mostrar que as constantes de Lamè se relacionam com os elementos do tensor de dureza da seguinte maneira [36]

$$\begin{gathered}\lambda+2\mu=c_{11},\\ \mu=c_{44}=(c_{11}-c_{12})/2.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Vale comentar que $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{\eta}$ são tensores de quarta ordem e portanto seus elementos são identificados por quatro subíndices como c_{ijkl}. Como ambos tensores são simétricos, estamos usando a notação contraída de Voigt [36, 38], na qual $xx\to 1$, $yy\to 2$, $zz\to 3$, $yz\to 4$, $xz\to 5$ e $xy\to 6$. Por exemplo, $c_{11}=c_{xxxx}$, $c_{12}=c_{xxyy}$ e $c_{44}=c_{yzyz}$.

Em um meio infinito, a equação de onda acústica (2.5) admite duas soluções independentes que, por motivos que ficarão claros mais tarde, são chamadas de ondas dilatacionais (ou longitudinais, *L*) e equivolumiais (ou transversais, *T*). Veremos no capítulo 4 que as ondas *L* e *T* são independentes apenas em um meio infinito, sem interfaces, mas que de fato se acoplam ao incidirem numa interface entre dois meios diferentes. Vejamos com mais detalhes estas ondas.

Observando o lado esquerdo da equação de onda, vemos um termo dependente do

---

* Seguindo a notação quase universal da Teoria da Elasticidade, usamos o símbolo λ para designar a constante de Lamè. Este mesmo símbolo também é utilzado para designar com comprimento de onda óptico. Entretanto, isto não deve gerar ambigüidade, pois é claro no contexto quando o símbolo representa uma ou outra quantidade.

divergente de $\boldsymbol{u}$, $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$, e outro termo dependente do rotacional de $\boldsymbol{u}$, $\nabla\times\boldsymbol{u}$. As soluções para as ondas dilatacionais são obtidas requerendo que $\nabla\times\boldsymbol{u}=0$, e neste caso podemos escrever o vetor deslocamento como o gradiente de uma função, ou seja, $\boldsymbol{u_L}=\nabla\varphi$. Substituindo na equação de onda (2.5) obtemos

$$\begin{gathered}\left[\rho c_L^2+\eta_{11}\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla^2\varphi=\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\\ \boldsymbol{u_L}=\nabla\varphi,\\ c_L=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\end{gathered}\tag{2.7}$$

onde c_L é a velocidade de propagação da onda dilatacional que, para a sílica, vale $5970.7\,\mathrm{m/s}$ [39]. Todas as constantes utilizadas nesta tese estão na tabela do Apêndice II. Analogamente, as ondas equivolumiais são obtidas requerendo agora que $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ e, neste caso, escrevemos o vetor deslocamento como $\boldsymbol{u_T}=\nabla\times\boldsymbol{\psi}$. A equação de onda resulta neste caso que

$$\begin{gathered}\left[\rho c_T^2+\eta_{44}\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla^2\boldsymbol{\psi}=\frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2},\\ \boldsymbol{u_T}=\nabla\times\boldsymbol{\psi},\\ c_T=\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}},\end{gathered}\tag{2.8}$$

onde usamos a identidade vetorial $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}=\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)-\nabla^2\boldsymbol{u}$. Aqui, c_T é a velocidade de propagação da onda equivolumial e vale 3764.8 m/s em sílica. Note que a onda transversal viaja mais lentamente onda longitudinal. Através dos valores das velocidades longitudinal e transversal, c_L e c_T , podemos calcular as constantes de Lamè para a sílica. Utilizando as equações (2.7) e (2.8), e usando que a densidade da sílica é $\rho=2200\ \mathrm{kg/m^3}$, temos que $\lambda=47,2$ GPa/m e $\mu=15,6$ GPa/m. Podemos entender claramente neste ponto por quê a onda transversal é também chamada de equivolumial. O fluxo do vetor deslocamento através de uma superfície fechada S', representa a variação do volume V' englobado por esta superfície. Usando o teorema do divergente, podemos facilmente mostrar que $\int_{S'} \boldsymbol{u_T} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS = \int_{V'} \nabla \cdot \boldsymbol{u_T} dV = 0$, já que por construção $\nabla \cdot \boldsymbol{u_T} = 0$, de modo que não há variação do volume V'. Já no caso de ondas longitudinais há sim uma mudança de volume, por isso são chamadas de ondas dilatacionais. Usando o teorema de Stokes, podemos mostrar que a integral de linha de $\boldsymbol{u_L}$ ao longo de uma curva fechada C é nula, ou seja, $\int_{C'} \boldsymbol{u_L} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{S'} \nabla \times \boldsymbol{u_L} dS = 0$.

Vejamos um simples exemplo de ondas planas *L* e *T* propagando-se na direção do eixo z. São soluções das equações (2.7) e (2.8) as seguintes funções

$$\varphi = Ae^{i(\Omega t - \kappa_L z)},$$
$$\kappa_L^2 = \frac{\Omega^2}{c_L^2 + i\dfrac{\eta_{11}\Omega}{\rho}}, \tag{2.9}$$

para a onda longitudinal e

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{B}e^{i(\Omega t - \kappa_T z)},$$
$$\kappa_T^2 = \frac{\Omega^2}{c_T^2 + i\dfrac{\eta_{44}\Omega}{\rho}}, \tag{2.10}$$

onde A e $\boldsymbol{B}$ são constantes (A escalar e $\boldsymbol{B}$ vetorial), e $\kappa_{L,T}$ são os vetores de onda complexos para as ondas longitudinal e transversal. Notemos que a força viscosa introduz uma parte imaginária na constante de propagação, representando uma atenuação da onda acústica ao propagar-se no material. Notemos ainda que a introdução de um mecanismo de perda altera também a relação de dispersão das ondas acústicas. Como as perdas são pequenas, esta mudança representa uma pequena alteração na relação de dispersão linear, que em geral pode ser desprezada. Usando as definições (2.7) e (2.8), e o resultado obtido em (2.9) e (2.10), os vetores deslocamento para as ondas longitudinal e transversal em um meio infinito (elástico e isotrópico) são

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_L &= -i\kappa_L \varphi \hat{z}, \\ \boldsymbol{u}_T &= -i\kappa_T \left(\hat{z} \times \boldsymbol{\psi}\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Vemos diretamente das expressões para $\boldsymbol{u}_L$ e $\boldsymbol{u}_T$, que o deslocamento acústico aponta na direção de propagação no caso de ondas longitudinais, enquanto que no caso das ondas transversais, o deslocamento acústico é perpendicular à direção de propagação. Podemos escolher as constantes A e $\boldsymbol{B}$ de forma a expressarmos o deslocamento simplesmente como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_L &= u_L e^{-\alpha_L z} \cos\left(\Omega t - k_L z\right) \hat{\boldsymbol{z}}, \\ \boldsymbol{u}_T &= u_T e^{-\alpha_T z} \cos\left(\Omega t - k_T z\right) \hat{\boldsymbol{x}}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde tomamos a parte real do deslocamento como representação física. A amplitude da onda acústica decai com a propagação ao longo de z com coeficiente de atenuação $\alpha_{L,T}$. Aqui, separamos a parte real e a parte imaginária do vetor de onda da seguinte forma

$$\begin{aligned} \kappa_{L,T} &= k_{L,T} + i\alpha_{L,T}, \\ k_{L,T} &\approx \Omega / c_{L,T}, \\ \alpha_{L,T} &\approx \frac{\eta_{11,44}\Omega^2}{2\rho c_{L,T}^3}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde as expressões aproximadas de (2.13) valem se $\eta_{11,44}\Omega / \rho c_{L,T}^3 = 1$, resultando em uma dependência quadrática da atenuação com a freqüência acústica. Na referência [40], o comportamento quadrático é confirmado em sílica fundida tanto para os coeficientes de perda da onda longitudinal quanto da transversal. As medidas foram feitas até freqüências acústicas de $1\ \text{GHz}$. Usando os valores encontrados em [40], obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_L}{\nu^2} &= B_L = 118\ \text{m}^{-1}\ \text{GHz}^{-2}, \\ \frac{\alpha_T}{\nu^2} &= B_T = 187\ \text{m}^{-1}\ \text{GHz}^{-2}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $\nu = \Omega / 2\pi$ é a freqüência da onda acústica. Por exemplo, para a freqüência $\nu = 10\ \text{GHz}$, uma onda longitudinal tem comprimento de propagação efetivo $\alpha_L^{-1} = 85\,\mu\text{m}$ e uma onda transversal $\alpha_T^{-1} = 53\,\mu\text{m}$. Para freqüências menores, digamos $\nu = 10\ \text{MHz}$, o comprimentos efetivos são $\alpha_L^{-1} = 85\,\text{m}$ e $\alpha_T^{-1} = 53\,\text{m}$. Usando as equações (2.13) e os resultados em (2.14) chegamos aos seguintes valores para as constantes de viscosidade

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{L,T}}{\nu^2} &= B_{L,T} = \frac{\eta_{11,44} 4\pi^2}{2\rho c_{L,T}^3}, \\ \eta_{11} &= \frac{2\rho c_L^3 B_L}{4\pi^2} = 2,8 \cdot 10^{-3}\ \frac{kg}{s^5 m}, \\ \eta_{44} &= \frac{2\rho c_T^3 B_T}{4\pi^2} = 1,1 \cdot 10^{-3}\ \frac{kg}{s^5 m}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Outra característica interessante é que para a faixa de freqüência que estamos interessados (no máximo algumas dezenas de GHz), as constantes de atenuação são muito menores que as constantes de propagação, ou seja, $\alpha_{L,T} = k_{L,T}$. Por exemplo, para $10\ \text{GHz}$, $k_L = 2\pi\nu / c_L = 10,5\ \mu\text{m}^{-1}$ e $\alpha_L = B_L \nu^2 = 0,012\ \mu\text{m}^{-1}$.

Como veremos adiante, a perturbação no índice de refração causada por uma onda acústica é calculada através de tensor de *strain* $\boldsymbol{S}$, definido em (2.1). Calculemos então o *strain* para o caso das ondas puramente longitudinal e puramente transversal em um meio infinito para ilustração. Usando o resultado das equações (2.12) para o deslocamento acústico, e o fato de que $\alpha_{L,T} = k_{L,T}$, podemos ver que, para a onda longitudinal, apenas o elemento S_{zz}^{L} é não nulo e vale

$$S_{zz}^{L} = u_L k_L e^{-\alpha_L z} \sin\left(\Omega t - k_L z\right). \tag{2.16}$$

Analogamente para o caso da onda puramente transversal, apenas os elementos S_{xz}^{T} e S_{zx}^{T} são não nulos

$$S_{xz}^{T} = S_{zx}^{T} = \frac{1}{2} u_T k_T e^{-\alpha_T z} \sin\left(\Omega t - k_T z\right). \tag{2.17}$$

Na análise que segue, usaremos o *strain* causado pelas ondas L e T para estudarmos o efeito das ondas acústicas na propagação das luz em meios infinitos.

Intensidade e potência acústica

Antes de prosseguirmos com a análise de perturbação, apenas como ilustração, calculemos a intensidade e a potência acústica. A dedução completa pode ser encontrada nas referências, e aqui apenas introduzimos os conceitos de maneira intuitiva. Lembramos que o tensor de *stress* representa a tensão interna (ou força por unidade de área) agindo em um plano devido ao plano adjacente dentro do material.

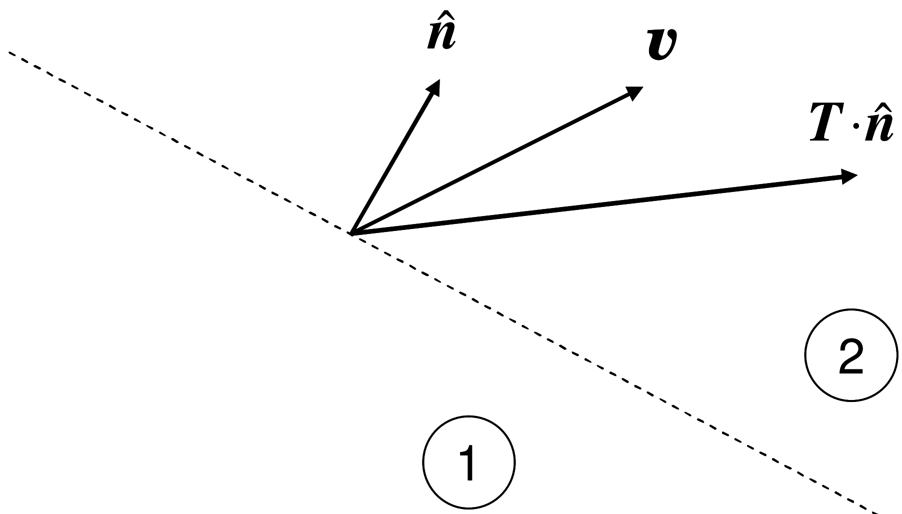


Figura 2. 1: ilustração da força por unidade de área ($\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$) agindo entre dois planos adjacentes do material (planos 1 e 2). O vetor $\hat{\boldsymbol{n}}$ representa a normal ao plano 1 e representa o vetor $\boldsymbol{v}$ velocidade da onda acústica;

Por exemplo, a tensão agindo sob o plano 1 devido à ação do plano 2 na Figura 2. 1 é $\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$, onde $\hat{\boldsymbol{n}}$ é a direção normal ao plano que sofre a ação da força. Obviamente a tensão agindo sob o plano 2 devido à ação do plano 1 é $-\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$. Portanto a força em um elemento de área dA no plano 2 é simplesmente $-\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dA$. De considerações elementares de mecânica, o fluxo de potência por unidade de área transmitida pelo plano 1 ao plano 2 é simplesmente a velocidade $\boldsymbol{v}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$ multiplicada pela tensão $-\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$. Deste modo podemos definir um *vetor de Poynting* acústico como

$$\boldsymbol{S}_{ac}=-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}. \tag{2.18}$$

De maneira direta, a potência instantânea transmitida por uma área A é simplesmente

$$P_{ac}=\int_A \boldsymbol{S}_{ac}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dA=-\int_A \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dA. \tag{2.19}$$

Vejamos um exemplo específico para o caso de uma onda longitudinal propagando-se ao longo do eixo z, como aquela dada pela equação (2.12). Queremos calcular o fluxo de potência por unidade de área que atravessam os planos normais à direção de propagação ($\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{z}$). Usando a definição do tensor de *stress* (2.4) e o *strain* calculado para uma onda *L*, equação (2.16), temos que

$$\boldsymbol{T} = S_{zz}^{L} \begin{pmatrix} c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} \end{pmatrix},$$

onde desprezamos as perdas acústicas nesta seção. A velocidade instantânea da partícula é

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{u_L}}{\partial t} = -u_L \Omega \sin\left(\Omega t - k_L z\right) \hat{\boldsymbol{z}},$$

e portanto

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} &= u_L \Omega \sin\left(\Omega t - k_L z\right) c_{11} S_{zz}^{L} \\ &= u_L^2 \Omega c_{11} k_L \sin^2\left(\Omega t - k_L z\right) \\ &= \rho c_L u_L^2 \Omega^2 \sin^2\left(\Omega t - k_L z\right). \end{aligned}$$

Aqui usamos que $c_{11} = \rho c_L^2$ e $k_L = \dfrac{\Omega}{c_L}$. Assim, usando a equação (2.19), a potência instantânea transmitida por uma área A é igual a

$$\begin{aligned} P_{ac} &= -\int_A \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dA \\ &= \rho c_L u_L^2 \Omega^2 \sin^2\left(\Omega t - k_L z\right) \int_A dA \\ &= \rho c_L u_L^2 \Omega^2 A \sin^2\left(\Omega t - k_L z\right). \end{aligned}$$

Tomando a média temporal temos que a potência média por unidade de área, ou a *intensidade acústica*, é

$$I_{ac} = \frac{\left\langle P_{ac} \right\rangle}{A} = \frac{\rho c_L u_L^2 \Omega^2}{2}. \tag{2.20}$$

Vejamos um exemplo numérico: suponhamos uma onda acústica de freqüência $\Omega / 2\pi = 1$ GHz e intensidade de 1 W/cm^2. Usando os valores de densidade e velocidade em sílica fundida ($\rho = 2200\ \text{kg/m}^3$ e $c_L = 5970,7$ m/s) temos que a amplitude do deslocamento acústico vale

$$u_L = \sqrt{\frac{2I_{ac}}{\rho c_L \Omega^2}} = 6 \text{ pm.}$$

É interessante notarmos que o deslocamento acústico é menor que o próprio raio da molécula de sílica, da ordem de alguns $\mathring{\mathrm{A}}$. Podemos também calcular a amplitude do *strain* usando a equação (2.16) e o resultado é

$$S_{zz}^L = \sqrt{\frac{2I_{ac}}{\rho c_L^3}} = 6 \cdot 10^{-6}.$$

2.2. Efeito elasto-óptico: perturbação na constante dielétrica

Vimos que as ondas L e T propagam-se de forma independente em um meio infinito e elástico. Veremos agora, qual o efeito das ondas acústicas na propagação das ondas eletromagnéticas ainda em meio infinito, *bulk*. Como mencionado na introdução, esta análise é importante para entendermos posteriormente a interação acusto-óptica em guias de onda, ou seja, numa região confinada e não mais infinita. A equação de onda no domínio da freqüência para o campo elétrico $\boldsymbol{E}$ é escrita de maneira geral como [3, 41, 42]

$$\begin{aligned} &\left[\nabla^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right]\boldsymbol{E}(\omega) = \mu_0 \omega^2 \boldsymbol{P}(\omega) \\ \Rightarrow &\left[\nabla^2 - \frac{n^2\omega^2}{c^2}\right]\boldsymbol{E}(\omega) = \mu_0 \omega^2 \Delta\boldsymbol{P}(\omega) \end{aligned} \qquad (2.21)$$

onde novamente c é a velocidade da luz no vácuo, μ_0 é a permissividade magnética do vácuo e $\boldsymbol{P}(\omega)$ é a polarização do material na freqüência ω. Escrevemos a polarização do meio como a soma de dois termos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(\omega) &= \boldsymbol{P_0}(\omega) + \Delta\boldsymbol{P}(\omega),\\ \boldsymbol{P_0}(\omega) &= \varepsilon_0\left(n^2-1\right)\boldsymbol{E}(\omega),\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde o primeiro termo $\boldsymbol{P_0}$ representa a polarização do meio em equilíbrio (não-deformado pela onda acústica) e $\Delta\boldsymbol{P}$ representa a correção na polarização devido à perturbação da constante dielétrica causada pela onda acústica. A polarização $\Delta\boldsymbol{P}(\omega)$ na freqüência ω é escrita como de maneira geral como [3, 41, 42]

$$\Delta\boldsymbol{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\omega_1)\cdot\boldsymbol{E}(\omega_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\,d\omega_1 d\omega_2. \tag{2.23}$$

Notemos que, apesar de a constante dielétrica do material $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$ ser uma quantidade escalar, já que estamos tratando de meios isotrópicos, a perturbação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ é uma quantidade tensorial (de dimensão 3×3, também representada por um símbolo em negrito). Esta representação nos permite descrever uma possível anisotropia induzida pelas ondas acústicas, como ocorre em alguns casos. A perturbação causada na constante dielétrica pelas ondas acústicas dá origem ao efeito conhecido como efeito *elasto-óptico*. Em primeira ordem, este efeito é descrito através de uma relação linear entre $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ e o *strain* $\boldsymbol{S}$ [39]. Matematicamente, a relação se dá através de um tensor de quarta ordem $(\boldsymbol{p})$ chamado de tensor *elasto-óptico*, de modo que,

$$\Delta\varepsilon_{ij} = -\frac{\varepsilon_i\varepsilon_j}{\varepsilon_0}\,p_{ijkl}S_{kl}. \tag{2.24}$$

Em um meio isotrópico, por considerações de simetria, é possível mostrar que o tensor $\boldsymbol{p}$ é descrito por apenas duas constantes independentes p_{11} e p_{12}. Neste caso, podemos escrever explicitamente os elementos do tensor de perturbação utilizando uma notação contraída da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \\ \Delta\varepsilon_{yy} \\ \Delta\varepsilon_{zz} \\ \Delta\varepsilon_{yz} \\ \Delta\varepsilon_{xz} \\ \Delta\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = -\varepsilon_0 n^4 \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \\ S_{xy} \end{pmatrix},$$

onde o elemento $p_{44} = \left(p_{11} - p_{12}\right)/2$ e para um meio isotrópico $\varepsilon_i = \varepsilon_0 n^2$ para todo i. Explicitamente temos

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx} &= -\varepsilon_0 n^4 \left(p_{11}S_{xx} + p_{12}S_{xx} + p_{12}S_{zz}\right), \\ \Delta\varepsilon_{yy} &= -\varepsilon_0 n^4 \left(p_{12}S_{xx} + p_{11}S_{xx} + p_{12}S_{zz}\right), \\ \Delta\varepsilon_{zz} &= -\varepsilon_0 n^4 \left(p_{12}S_{xx} + p_{12}S_{xx} + p_{11}S_{zz}\right), \\ \Delta\varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_0 n^4 2 p_{44} S_{xy}, \\ \Delta\varepsilon_{xz} &= -\varepsilon_0 n^4 2 p_{44} S_{xz}, \\ \Delta\varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_0 n^4 2 p_{44} S_{yz}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

Calculemos o tensor $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ para o caso das ondas L e T em um meio infinito. Usando o *strain* calculado em (2.16) para uma onda longitudinal temos que a perturbação na constante dielétrica é

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^L = -\varepsilon_0 n^4 S_{zz}^L \begin{pmatrix} p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12} & 0 \\ 0 & 0 & p_{11} \end{pmatrix},$$

usando a expressão para o *strain* obtemos

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^L = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^L e^{-\alpha_L z}\sin\left(\Omega t - k_L z\right),$$
$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^L = -\varepsilon_0 n^4 u_L k_L \begin{pmatrix} p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12} & 0 \\ 0 & 0 & p_{11} \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

O fato de a perturbação ser diagonal implica que as polarizações do campo eletromagnético não são acopladas. Podemos ver por simples substituição que se o campo elétrico é polarizado na direção $\hat{\boldsymbol{x}}$ por exemplo, ou seja, $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{x}}$, temos que

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^L \cdot \boldsymbol{E} = -\varepsilon_0 n^4 u_L k_L p_{12} E\hat{\boldsymbol{x}}. \tag{2.27}$$

Usaremos este resultado quando calcularmos o espectro da luz espalhada em um meio *bulk.* Analogamente, a perturbação causada por uma onda transversal é calculada usando o *strain* dado pela equação (2.17), resultando em

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^T = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^T e^{-\alpha_T z}\sin\left(\Omega t - k_T z\right),$$
$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^T = -\varepsilon_0 n^4 u_T k_T e^{-\alpha_T z} \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{44} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{44} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

Em um meio infinito, o campo elétrico de uma onda eletromagnética propagando-se na direção z é transversal, ou seja, tem componentes ao longo dos eixos $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$, mas não tem componente ao longo de $\hat{\boldsymbol{z}}$. Podemos ver então que $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^T$ aplicado a um campo elétrico transversal dá um resultado nulo. O acoplamento acusto-óptico envolvendo ondas transversais pode ocorrer em um meio infinito quando as ondas ópticas e acústicas propagam-se em direções diferentes, e este não é o caso tratado aqui. Podemos concluir, que no caso de espalhamento unidirecional, as ondas transversais não espalham a luz.

2.3. Espectro de espalhamento espontâneo em um meio infinito

Nesta seção, nosso objetivo é explorarmos as características do espectro de espalhamento espontâneo em um meio infinito. O termo *espontâneo* refere-se ao espalhamento devido a flutuações estatísticas das propriedades do meio a uma temperatura finita T. Fisicamente, decorrentes do fato de as posições e orientações das moléculas ou átomos que compõem o material estarem mudando de momento a momento, estas flutuações podem ser decompostas em termos dos modos normais excitados randomicamente (modos acústicos, vibracionais e rotacionais). O cálculo detalhado está desenvolvido no Apêndice I e nos restringimos aqui a reproduzir o resultado final. Como já discutimos no capítulo 1, apenas o retro-espalhamento Brillouin é permitido em *bulk* devido às considerações de conservação de energia e momento. O espectro de potência da luz retro-espalhada é

$$\frac{I_S(\omega)}{I}=\frac{2\pi^2 p_{12}^2 n^8 kT}{\lambda^4 \rho V_L^2} L\left[\frac{\Gamma_B/2\pi}{\Gamma_B^2+\left(\omega-\omega_P-\Omega_B\right)^2}+\frac{\Gamma_B/2\pi}{\Gamma_B^2+\left(\omega-\omega_P+\Omega_B\right)^2}\right], \qquad (2.29)$$

onde I_S e I são as intensidades espalhada e incidente. É importante comentarmos que I_S tem unidade de intensidade espalhada por unidade de freqüência angular $d\omega$ (para comparar o valor teórico com medidas experimentais devemos multiplicar o resultado (2.29) por $2\pi\times\text{resolução}$, onde nos referimos à resolução em freqüência do instrumento de medida). Γ_B e Ω_B são respectivamente a largura de linha e a freqüência Brillouin e podem ser calculadas usando a equação 1.34 do Apêndice I e a equação (2.15) e o resultado é

$$\Gamma_B/2\pi = \frac{B_L c_L^3}{2\pi}\left(\frac{2n}{\lambda}\right)^2 = 13{,}8 \text{ MHz},$$
$$\Omega_B/2\pi = \frac{2nc_L}{\lambda_P} = 11{,}09 \text{ GHz}.$$

Usando valores típicos dados na tabela do Apêndice II, graficamos o espectro espalhado em função do desvio de freqüência $(\omega-\omega_P)/2\pi$, mostrado na Figura 2. 2. A resolução utilizada no gráfico é 1 MHz e os comprimentos são $L=1\text{ cm}$ e $L=10\text{ km}$. Podemos notar que o espectro de espalhamento espontâneo como função de $(\omega-\omega_P)/2\pi$ é simétrico com relação à origem, sendo constituído de duas curvas *Lorentzianas* representando as linhas Stokes e anti-Stokes. Para o caso de $L=10\text{ km}$ o pico de espalhamento está aproximadamente 46 dB abaixo da potência do laser incidente. Notemos ainda que os picos de espalhamento estão centrados na freqüência Brillouin $\Omega_B/2\pi = 11{,}09\text{ GHz}$, e são originados da interação entre a luz incidente e as ondas longitudinais presentes no material. Vale comentar ainda que as ondas transversais resultariam numa freqüência $\Omega_B/2\pi = 7{,}0\text{ GHz}$, mas estas não participam do retro-espalhamento Brillouin em *bulk*, pois não acoplam com a luz, como mostrado no Apêndice I. Usando a aproximação linear da relação de dispersão, é interessante calcularmos o comprimento de onda das ondas *L* e o resultado é $\lambda_L = \lambda_P/2n = 0{,}54\ \mu\text{m}$, ou seja, metade do comprimento de onda óptico no meio.

Podemos integrar o resultado (2.29) em todo o espectro obtendo a intensidade total retro-espalhada e o resultado é

$$\frac{S}{IL} = \frac{\pi^2 p_{12}^2 n^8 kT}{\lambda^4 \rho c_L^2} = 1{,}2\cdot 10^{-7} m^{-1}, \tag{2.30}$$

onde o resultado numérico foi obtido usando valores típicos para sílica fundida e temperatura ambiente $T = 300\ \mathrm{K}$. Para uma amostra com $L = 1\ \mathrm{cm}$ a intensidade espalhada é apenas $1{,}2 \cdot 10^{-9}$ da intensidade incidente, ou seja, $90\ \mathrm{dB}$ abaixo. Para $1\ \mathrm{W}$ de potência incidente, apenas $1\ \mathrm{nW}$ é retro-espalhado. Já para uma fibra óptica de $L = 1\ \mathrm{km}$ de comprimento, a potência total espalhada está $40\ \mathrm{dB}$ abaixo da potência incidente.

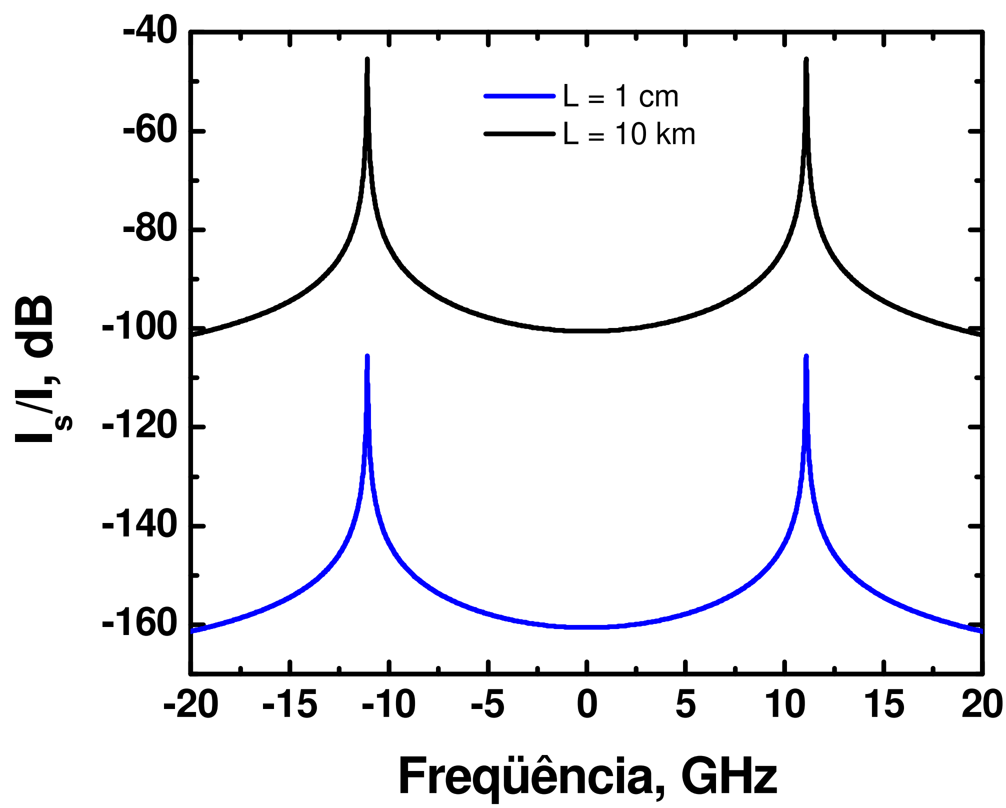


Figura 2. 2: gráfico do espectro de espalhamento Brillouin espontâneo para dois comprimentos de interação $L = 1\ \mathrm{cm}$ (curva azul) e $L = 1\ \mathrm{km}$ (curva preta). O eixo vertical está em escala relativa de decibel. A resolução utilizada foi de $1\ \mathrm{MHz}$;

A Figura 2. 3 mostra um espectro Brillouin medido em nosso laboratório para uma fibra convencional de núcleo de sílica pura, utilizando um laser em $1550\ \mathrm{nm}$. Vemos que o espectro é muito similar à curva obtida teoricamente para o caso *bulk*. A forma da curva é muito bem aproximada por uma curva *Lorentziana*, centrada na freqüência $11{,}13\ \text{GHz}$ e com largura de linha de $20\ \text{MHz}$. Isto é justificado pelo fato de a fibra convencional de núcleo de sílica apesar de não ser um meio infinito, constitui na verdade um *anti-guia* acústico. Mais ainda, os materiais do núcleo e da casca têm características acústicas muito próximas e o contraste acústico é, portanto, muito pequeno, de modo que o acoplamento longitudinal-transversal é pequeno. Além disso, as fibras convencionais têm núcleos com $10\ \mu\text{m}$ de diâmetro, aproximadamente 20 vezes maior que o comprimento de onda acústico. Portanto, podemos afirmar que o confinamento acústico não é forte. Quanto maior o contraste entre os materiais, ou seja, quanto maior a diferença entre os parâmetros acústicos de um meio para outro, maior o acoplamento *L-T*. Apesar de ter uma interface acústica (superfície entre o núcleo e a casca), uma fibra convencional apresenta características de espalhamento Brillouin muito parecidas com a de um meio infinito. Desta forma o espalhamento Brillouin em fibras convencionais é muito similar ao observado em um meio infinito. Não há uma manifestação forte do guia de onda no processo de espalhamento. Ao longo desta tese, a fibra convencional de núcleo de sílica pura é nossa base de referência, a qual chamamos apenas de fibra convencional (núcleo e casca de vidro). Vale comentar, entretanto, que algumas fibras especiais, também de núcleo e casca de vidro, mas com perfis de índice mais complexos, apresentam diferentes apectos do espalhamento Brillouin [17, 43-46], e possivelmente guiamento das ondas acústicas por diferença de índice, mas não por posíveis efeitos de *bandgap* fonônico.

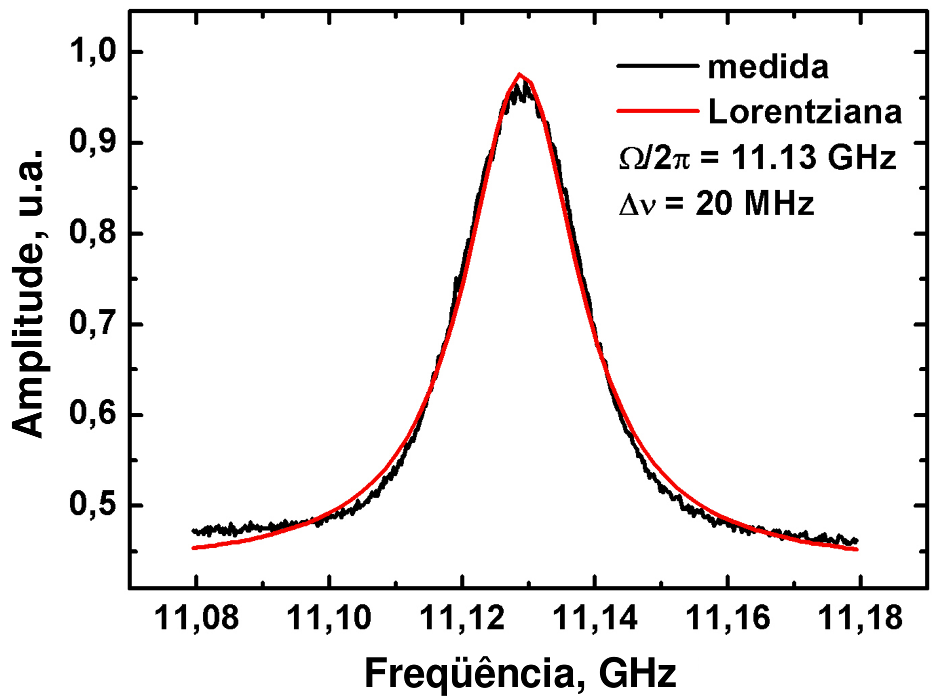


Figura 2. 3: espectro Brillouin medido em uma fibra convencional de sílica pura. As características como o desvio de freqüência, largura de linha e forma Lorentziana são as mesmas das observadas em um material do tipo "*bulk*";

2.4. Espalhamento estimulado

Até agora discutimos propriedades do espalhamento Brillouin espontâneo, quando o espalhamento é devido a fônons térmicos. O efeito físico envolvido é o efeito *elásto-óptico*, como já discutimos. Neste regime, a intensidade óptica incidente é baixa o suficiente para não alterar significativamente as propriedades das ondas acústicas excitadas termicamente. Entretanto, o cenário muda quando a potência incidente é suficientemente grande, e um segundo efeito passa a ser importante: o efeito de *eletrostrição* [36, 38, 39, 47-49]. Esta potência incidente necessária para passarmos do regime espontâneo para o estimulado é chamada de Limiar de Brillouin (SBS *threshold*) [4, 50], e a definiremos mais precisamente adiante. Também nos capítulos adiante, daremos uma descrição detalhada da eletrostrição, e aqui nos restringimos a uma descrição qualitativa.

O efeito elasto-óptico é um efeito linear, as ondas acústicas térmicas estão presentes no meio e causam uma perturbação no índice, espalhando a luz. Já a *eletrostrição* é um efeito não linear, através do qual a luz excita ondas acústicas. Nos capítulos 4 e 5, descrevemos o efeito de eletrostrição formalmente. Aqui, nos restringimos a uma descrição qualitativa e simplificada. Basicamente, por este efeito, um campo elétrico causa uma tensão no material, ou *stress*, cuja amplitude é proporcional ao quadrado do campo [36, 38], ou seja,

$$T \propto E^2.$$

Este efeito é, na verdade, uma correção ao efeito de primeira ordem no campo elétrico, conhecido como *piezoeletricidade*. Materiais com simetria de inversão, como a sílica fundida, não exibem piezoeletricidade e o principal efeito de acoplamento não-linear acusto-óptico é a eletrostrição. Usando a equação (2.2), que nos diz que a força por unidade de volume agindo no material é proporcional ao gradiente do *stress*, temos que a força de eletrostrição tem a forma [3]

$$\boldsymbol{f}_{el} \propto \nabla E^2. \tag{2.31}$$

Vemos que a força de eletrostrição é proporcional ao gradiente da intensidade do campo. A Figura 2. 4 ilustra a força de eletrostrição causada por uma ditribuição gaussiana de intensidade óptica. Vemos que o efeito de eletroestrição pode ser entendido como a tendência do material de se comprimir na região de maior intensidade óptica, criando desta forma uma perturbação acústica.

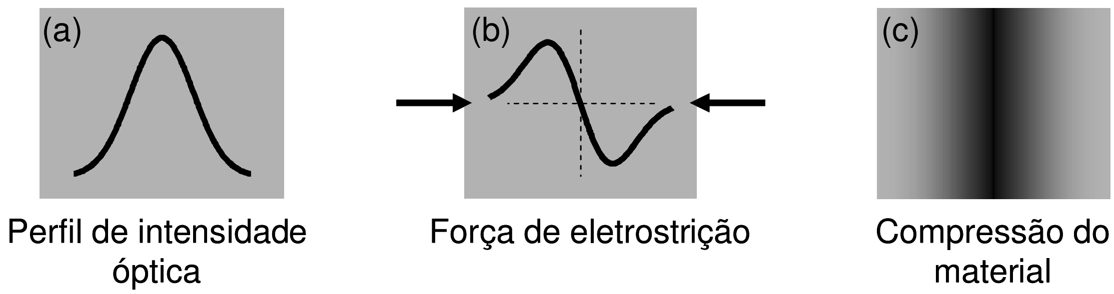


Figura 2. 4: o efeito de eletroestrição faz com que o material se comprima na região de maior gradiente de intensidade óptica, criando uma perturbação acústica. Um perfil de intensidade óptica (a) causa uma força pelo efeito de eletrostrição (b). O material tende a se comprimir, a região escura da figura (c) representando um aumento na densidade do material;

A conexão deste efeito com o retro-espalhamento Brillouin estimulado está ilustrada na Figura 2. 5. Inicialmente, um laser contínuo é lançado na fibra óptica. Sendo contínuo, a intensidade óptica é uniforme ao longo do comprimento da fibra (gradiente nulo) e portanto o efeito de eletroestrição é nulo. Entretanto o efeito elasto-óptico está presente e o laser de bombeio é espalhado simplesmente pela grade de Bragg formada pelas ondas acústicas excitadas termicamente – espalhamento espontâneo. Ao ser retro-espalhado, passam a existir no meio dois feixes ópticos propagando-se em direções opostas, mas na mesma região do espaço. Cria-se então um padrão de interferência com período espacial exatamente igual ao comprimento de onda da onda acústica. Devido ao padrão de interferência, a intensidade óptica deixa de ser uniforme, mas segue o padrão de intensidade da figura de interferência. A partir deste ponto, o efeito de eletrostrição passa a ser atuar e o meio tende a se comprimir na região de máxima intensidade. O resultado é que a onda acústica é amplificada, gerando assim um mecanismo de realimentação.

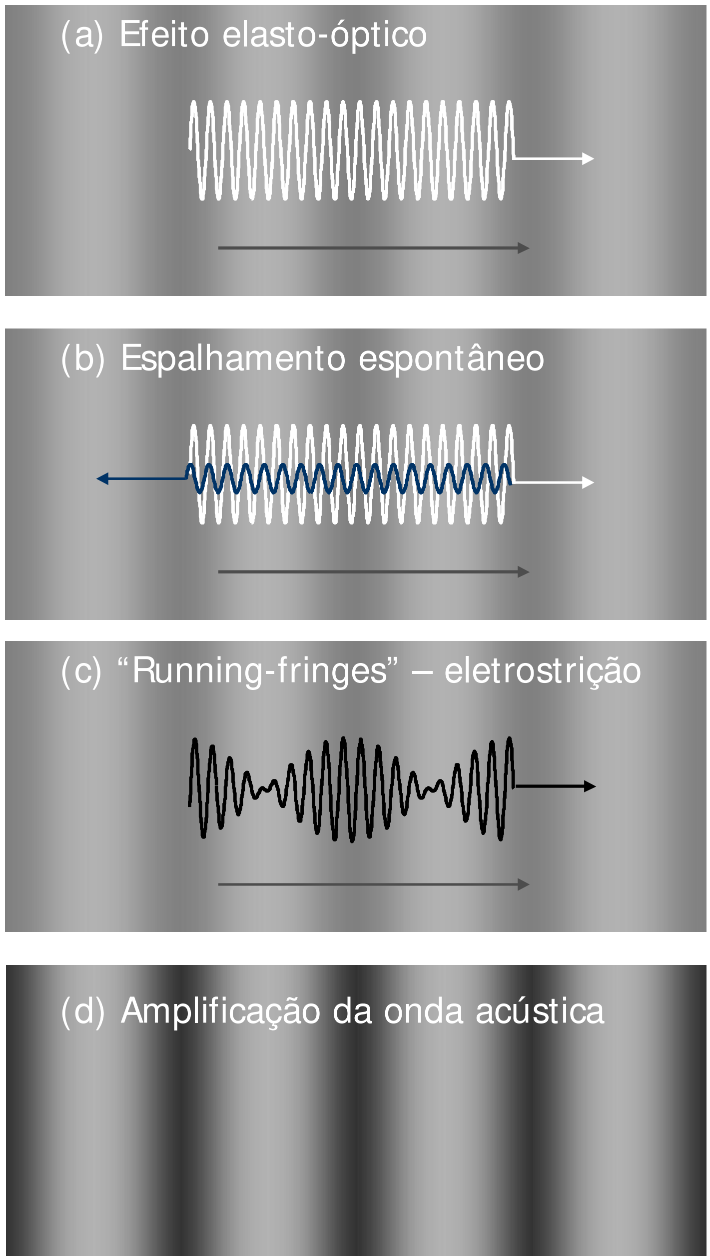


Figura 2. 5: realimentação do processo de espalhamento. O efeito de eletroestrição cria um mecanismo de amplificação das ondas acústicas no meio e o espalhamento Brillouin passa do regime espontâneo para o estimulado. O processo inicia-se com o espalhamento

espontâneo, devido às ondas acústicas termicamente excitadas no meio. Para alta intensidade óptica incidente, a soma da onda incidente e da retro-espalhada cria um padrão de interferência que viaja com a velocidade de fase das ondas acústicas ("running-fringes"). O padrão de interferência cria um gradiente da intensidade óptica e o efeito de eletrostrição amplifica as ondas acústicas;

Para baixa intensidade, o efeito de eletrostrição é muito pequeno e o espalhamento é linear, causado pelas ondas térmicas. A potência espalhada é portanto proporcional à potência incidente e conseqüentemente potência transmitida (complementar à potência retro-espalhada) também aumenta linearmente com a potência incidente. Conforme aumenta a potência incidente, o efeito de eletrostrição vai tornando-se significativo, até que o mecanismo de realimentação se construa. A potência espalhada passa então a depender exponencialmente da potência incidente (analogamente a potência transmitida também perde a dependência linear). A Figura 2. 6 mostra uma curva típica da potência transmitida em função da potência inserida em uma fibra óptica. Vemos claramente que, acima de um limiar indicado, há uma saturação na transmissão (toda a potência acima deste ponto é retro-espalhada). Este ponto representa o limiar de Brillouin, onde o processo é fortemente estimulado.

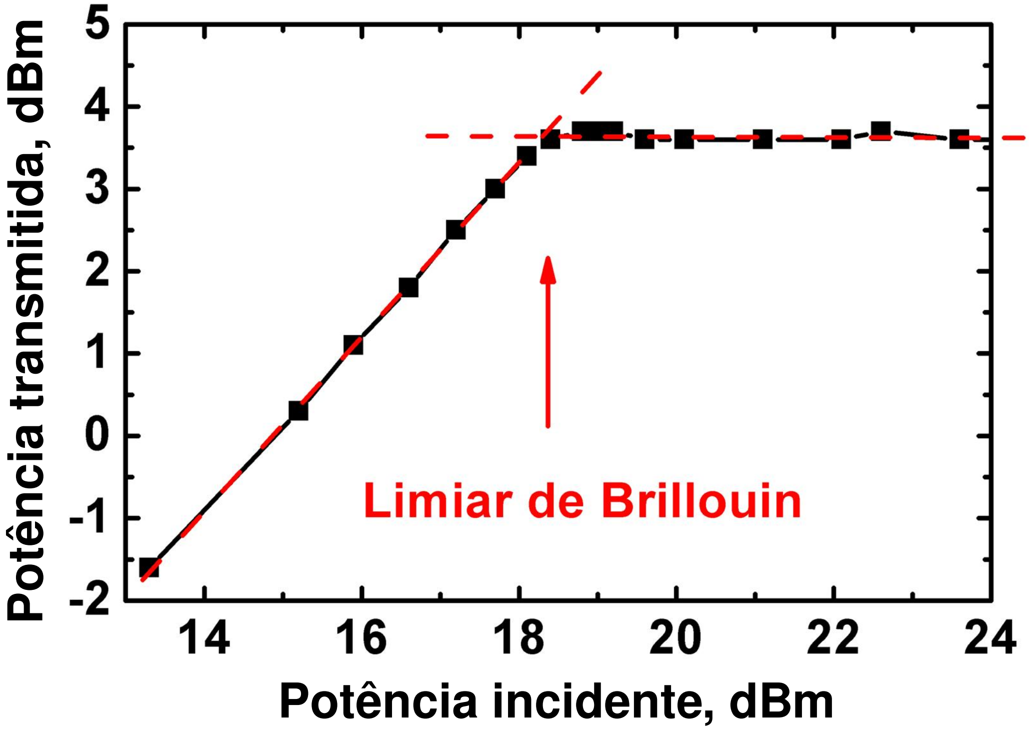


Figura 2. 6: exemplo de medição do limiar de Brillouin. A potência transmitida sofre uma saturação quando o processo de espalhamento é estimulado. A potência incidente acima da qual a potência transmitida está no regime saturado (como indicado na figura) é o limiar de Brillouin;

Para fibras convencionais, o Limiar de Brillouin pode ser estimado usando a fórmula de Smith [50] que diz:

$$I_{th}L_{eff} = 21/g = 0.7\,\mathrm{Wm}/\mu\mathrm{m}^2, \tag{2.32}$$

onde $I_{th} = P_{th}/A_{eff}$ é a intensidade óptica de limiar, P_{th} é a potência de limiar e A_{eff} é a área efetiva do modo óptico, $L_{eff} = \dfrac{1-e^{-\alpha L}}{\alpha}$ é o comprimento efetivo da fibra (α é o coeficiente de atenuação da fibra) e g é o coeficiente de ganho Brillouin [3, 4, 21, 50]. O coeficiente de ganho é dado pela seguinte expressão

$$g = \frac{2\pi n^7 p_{12}^2}{c\lambda^2 \rho c_L \Delta\nu}. \tag{2.33}$$

Usando valores típicos: $n = 1,444$, $p_{12} = 0,271$, $\lambda = 1,55\ \mu\text{m}$, $\rho = 2.200\ \text{kg/m}^3$, $c_L = 5,97\ \text{km/s}$ e $\Delta\nu = 20\ \text{MHz}$, obtemos o resultado numérico da equação (2.32). Vemos que o resultado é independente das características do guia, área do modo e comprimento da fibra [21]. Basicamente, a fórmula de Smith leva em consideração o confinamento óptico através da intensidade ou da área do modo, mas não considera nenhum efeito de confinamento acústico. Veremos no capítulo seguinte que quando o confinamento acústico está presente, esta fórmula não vale mais, e este é o caso das fibras fotônicas.

Capítulo 3 – Resultados experimentais

No primeiro capítulo desta tese apresentamos considerações gerais sobre a relação entre o espalhamento Brillouin e o confinamento óptico e acústico. No segundo capítulo introduzimos os conceitos básicos de propagação de ondas elásticas em meios infinitos, sem confinamento, e depois detalhamos os aspectos do espalhamento Brillouin em meios infinitos. Mostramos também que o processo de retro-espalhamento Brillouin em fibras convencionais se assemelha em diversos aspectos ao observado em *bulk*. A estrutura da tese tem como objetivo deixar explícito os novos aspectos do espalhamento Brillouin observados em fibras fotônicas. Para isso, este capítulo 3 começa diretamente mostrando os resultados experimentais, objetivando demonstrar com clareza as diferenças com o processo de espalhamento descrito até aqui. Deixamos para os capítulos 4 e 5 os modelos teóricos e numéricos desenvolvidos para explicar as novas propriedades. Pela razão simplesmente de seguir a ordem cronológica dos fatos, iniciamos este capítulo descrevendo a série de experimentos acerca do retro-espalhamento Brillouin. Depois, na seqüência apresentamos os resultados experimentais no caso de co-espalhamento Brillouin.

3.1. Retro-espalhamento Brillouin: resultados experimentais

A fibra fotônica guia a luz em um núcleo de vidro envolto por uma estrutura periódica de vidro-ar com dimensões micro-nanométricas. A Figura 3. 1 mostra imagens de microscopia eletrônica (SEM, *Scanning Electron Microscope*) da seção transversal de três das fibras utilizadas em nossos experimentos, fabricadas pela Universidade de Bath na Inglaterra. A parte cinza representa a estrutura de sílica pura enquanto as regiões de cor preta são buracos de ar que percorrem todo o comprimento da fibra. A fibra número 1, por exemplo, tem um núcleo de $1,22\ \mu\text{m}$ de diâmetro, circundado por buracos de ar de mesma dimensão aproximadamente, e membranas de vidro com $:\ 100\ \text{nm}$ de espessura. Notemos que o comprimento de onda da luz dentro do material é $\lambda = \lambda_0/n = 1,55\,\mu\text{m}/1.44 = 1,08\ \mu\text{m}$ e portanto o diâmetro desta fibra força o confinamento óptico ao limite de Fourier. A fibra número 2 tem o núcleo um pouco maior (de $2,36\ \mu\text{m}$ de diâmetro), e paredes de vidro mais grossas que a número 1. Finalmente a fibra número 3 tem o maior diâmetro dentre todas as fibras que utilizamos, $9,27\ \mu\text{m}$, e buracos de ar consideravelmente menores que o diâmetro do núcleo. Estudamos várias outras fibras com diâmetros intermediários. Vale notar que a área do núcleo (e veremos mais adiante que também a área do modo óptico) varia desde $1,17\ \mu\text{m}^2$ até $67,5\ \mu\text{m}^2$. Todas as fibras utilizadas são mono-modo na região de comprimentos de onda em que estamos trabalhando ($1,55\ \mu\text{m}$).

Durante este trabalho de tese, utilizamos diversas montagens experimentais, cada uma com objetivo de explorar alguma característica do processo de espalhamento Brillouin. Procuramos descrever em detalhes cada montagem experimental utilizada, indicando também quando simples modificações em montagens já descritas possibilitam uma nova medida.

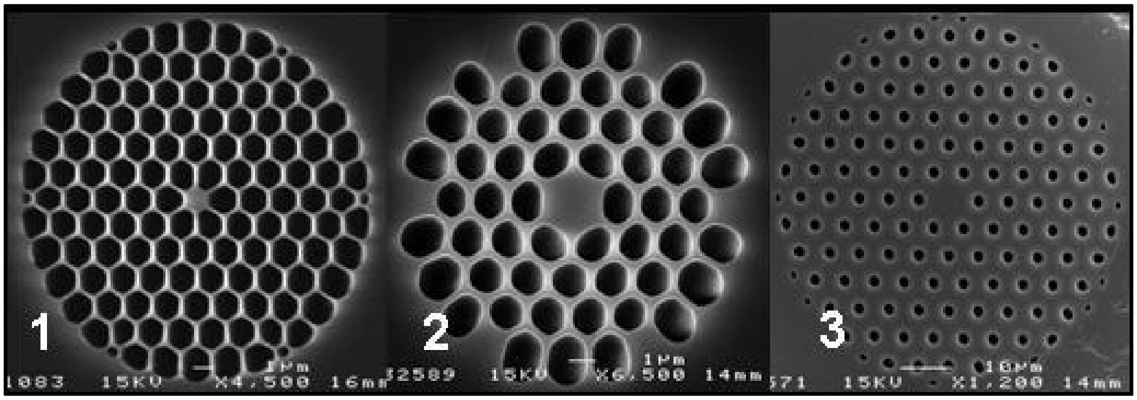


Figura 3. 1: imagens de microscopia eletrônica (SEM, *Scanning Electron Microscope*) de exemplos de fibras de cristal fotônico fabricadas pelo Grupo de Fotônica e Materiais Fotônicos (Photonics and Photonic Materials) da Univerdidade de Bath na Inglaterra. Todas as fibras têm núcleos de vidros circundados por uma micro-nanoestrutura de vidro e ar. Na figura, a regia de cor cinzenta representa a sílica pura e a região de cor preta representa o ar. As fibras numeradas de 1 a 3 têm núcleos com diâmetros de 1.22, 2.36 e 9.27 mícrons, respectivamente;

3.1.1. Aumento do Limiar de Brillouin

Fibras ópticas em geral têm a habilidade de manter a luz confinada no núcleo, com alta intensidade óptica, ao longo de quilômetros de distância. Este efeito geométrico permite observar efeitos não-lineares em níveis de potência muito menores que em *bulk*, como é o caso dos efeitos não-lineares em geral dentre eles os espalhamentos Brillouin e Raman no regime estimulado [21]. Podemos dizer com absoluta certeza que quanto maior o comprimento de interação menor o limiar de potência para se observar efeitos não-lineares. É natural portanto que um estudo acerca de espalhamento Brillouin em fibras, desta vez fotônicas, comece por estudar o limiar de Brillouin. Como descrevemos no capítulo 2, a fórmula de Smith (2.32) nos diz a potência necessária para se atingir o limiar de Brillouin em fibras convencionais, ou seja, para se atingir o regime estimulado. Também descrita naquele capítulo está uma maneira de definirmos o limiar de Brillouin através da curva de potência transmitida em função da potência inserida na fibra. Aqui mantemos essa definição.

3.1.2. Montagem experimental para medida do limiar de Brillouin

A montagem experimental utilizada para medirmos o limiar de Brillouin nas fibras fotônicas está mostrada na Figura 3. 2. Um laser contínuo operando em $1550\,\mathrm{nm}$, de cavidade externa e com largura de linha de aproximadamente $100\,\mathrm{kHz}$, é amplificado utilizando um amplificador óptico a fibra dopada com érbio, EDFA (*Erbium Doped Fiber Amplifier*), chegando a potências de até $1,5\,\mathrm{W}$. Depois de amplificado, o laser é injetado na fibra fotônica utilizando um par de lentes de microscópio, de distâncias focais (magnificação) e aberturas numéricas escolhidas para melhorar o acoplamento no núcleo da PCF. Por exemplo, para acoplarmos na fibra de menor diâmetro, utilizávamos uma lente de $10\times$ para colimar o feixe e outra lente subseqüente de $60\times$ para focalizar o feixe no núcleo da PCF. As lentes foram compradas com camadas anti-refletivas para diminuirmos as reflexões em $1550\,\mathrm{nm}$. Um acoplador óptico divide a potência do laser de bombeio, e 5% da potência é utilizada como referência para calibração da potência de entrada na fibra. Utilizamos um *powermeter* (ou *Optical Powermeter*, medidor de potência óptica) para medirmos tanto a potência de referência quanto a potência na saída da fibra fotônica. Após levantarmos a curva de potência transmitida *versus* potência de referência, medimos a potência de fato acoplada no núcleo da fibra tilizando um método de *cut-back* e cuidadosamente calibrada com a medida de referência. Finalmente podíamos construir a curva de *potência incidente vs potência transmitida*.

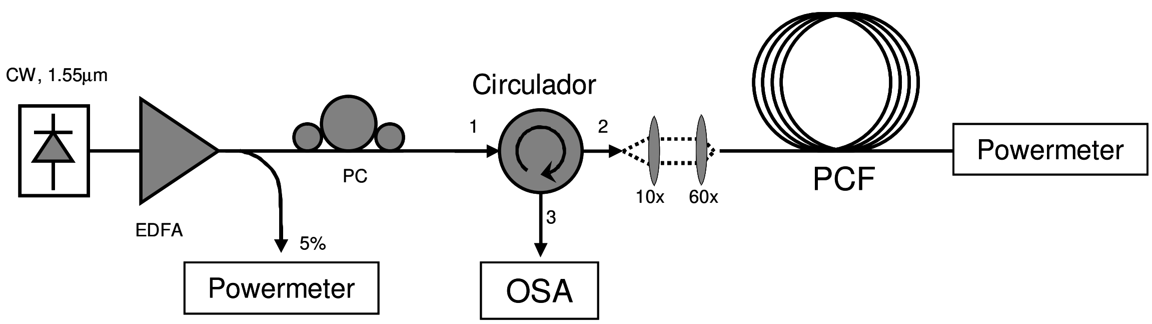


Figura 3. 2: montagem experimental utilizada para as medidas do limiar de Brillouin em fibras fotônicas. Todas as abreviaturas estão definidas no texto;

3.1.3. O método de *cut-back*

O método de *cut-back* consiste em cortar a fibra em aproximadamente 1 m além da face de entrada e medirmos a potência transmitida após este 1 m de fibra. Como a perda óptica deste pequeno pedaço é desprezível, e como este comprimento é suficiente para eliminarmos possíveis modos de casca excitados no lançamento, a potência medida é de fato a potência acoplada no núcleo da PCF. Sabendo que os modos de casca são bastante sensíveis às perdas de curvatura (*bending*), é simples verificar se há ou não potência em modos de casca simplesmente curvando a fibra o suficiente. Se a potência transmitida varia é porque ainda há luz na casca. A medida do limiar foi realizada 3 vezes para cada fibra e em cada uma delas a medida de *cut-back* foi realizada também mais 3 vezes. Desta forma, pudemos estimar nossa incerteza na medida da potência de acoplamento, chegando a um valor representativo de $\pm 10\%$ de erro;

3.1.4. Sinal retro-espalhado: pico Brillouin

Utilizamos um circulador óptico para coletar a luz retro-espalhada e monitorarmos o sinal em um analisador de espectro óptico (OSA, *Optical Spectrum Analyzer*). A figura Figura 3. 3 mostra espectros de retro-espalhamento medidos para diferentes potências de entrada. Vemos um pico central em $1550\,\mathrm{nm}$, que consiste na reflexão linear do laser incidente. O pico adjacente, que cresce com a potência incidente, é o pico de espalhamento Brillouin, deslocado de aproximadamente $11\,\mathrm{GHz}$ para comprimentos de onda maiores. Verificamos em algumas situações que o pico de espalhamento Brillouin era fortemente dependente da polarização do laser incidente. Voltaremos a este ponto mais adiante, mas aqui tomamos a seguinte estratégia. Inserimos um controlador de polarização antes da entrada da PCF, e o ajustamos de modo a maximizar a potência do sinal de Brillouin retro-espalhado.

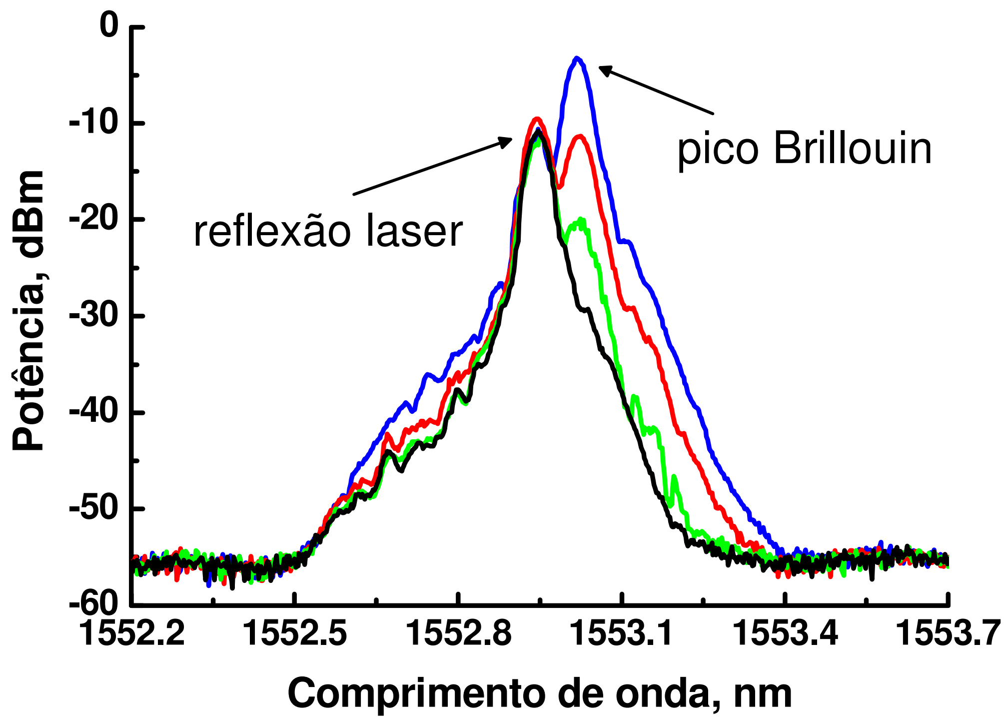


Figura 3. 3: espectro da luz retro-espalhada medido com um analisador de espectro óptico, na saída do circulador montagem mostrada na Figura 3. 2; A curva de menor potência incidente (de cor preta) apresenta apenas um pico central no comprimento de onda do laser incidente, originado de refelxões lineares em interfaces vidro-ar. Ao aumentarmos a potência incidente, um segundo pico deslocado para comprimentos de onda maiores aparece e cresce com a potência. As curvas verde, vermelha e azul têm nesta odem maior potência que a anterior. A curva azul, por exemplo, mostra uma situação em que o retro-espalhamento é mais intenso que a reflexão linear do laser incidente.

3.1.5. Curva de transmissão, resultados e discussão

Por uma questão de didática e de simplificação da vida do leitor, re-inserimos a Figura 3. 4, já colocada no capítulo 2, que ilustra a medida da potência transmitida em função da potência inserida. Esta medida foi obtida para uma fibra com $3{,}4\ \mu m$ de diâmetro. Tomamos o ponto de saturação indicado como a potência de limiar, neste caso sendo $18{,}4\ dBm$.

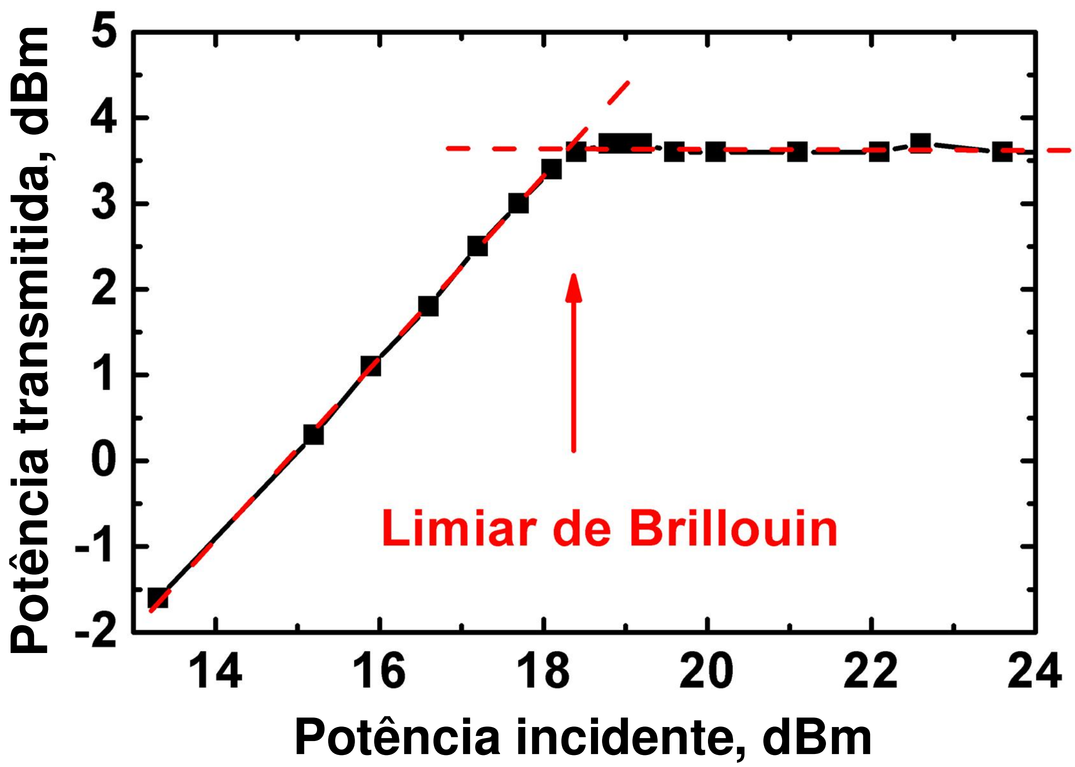


Figura 3. 4: exemplo de medição do limiar de Brillouin. A potência transmitida sofre uma saturação quando o processo de espalhamento é estimulado;

Realizamos estas medidas em diversas fibras e a Tabela 3. 1 sumariza os resultados experimentais assim como contém também todas as características relevantes de cada fibra, tais como diâmetro do núcleo, comprimento, perda linear e também a área efetiva. Vale comentar que os valores de área efetiva para o modo óptico foram calculados pelo grupo de Bath baseados na seguinte referência [51], e confirmados experimentalmente para algumas fibras através da medida da abertura numérica. É importante notarmos que o diâmetro do modo, mesmo para as fibras de núcleo pequeno, é muito próximo do diâmetro do núcleo, mostrando o confinamento óptico eficiente.

Tabela 3. 1: dados de todas as fibras fotôncas utilizadas em nossos experimentos e os valores medidos para o limiar de Brillouin em cada uma dela. O produto I_{th} L_{eff} representa uma figura de mérito, apropriada para comparação de fibras de diferentes diâmetros e comprimentos;

Core diameter (μm)	**1.22**	**1.25**	**2.23**	**2.36**	**3.4**	**4.8**	**8.2**	**9.3**
Actual/effective core area	1.20	1.15	0.76	0.80	2.33	0.92	1.61	0.76
Attenuation (dB/km)	33	30	17	6	0.2	4.3	0.2	5.8
Fiber length (km)	0.110	0.130	0.100	0.075	0.430	0.207	25	0.245
Effective fiber length (km)	0.075	0.086	0.083	0.071	0.426	0.187	14.8	0.209
SBS threshold power (mW)	79.4	61.7	67.6	88.1	69.2	95.5	4.8	224
I_{th} L_{eff} (W.m/μm^2)	4.25	3.76	1.90	1.79	1.39	1.07	0.84	0.91

Como cada fibra tem comprimento e área do modo (portanto intensidade óptica) diferente, a potência de limiar diretamente não é um bom parâmetro de comparação. Duas fibras idênticas com comprimentos diferentes têm limiares diferentes. O mesmo argumento vale para o diâmetro. Normalizamos então a potência de limiar (P_{th}) pela área efetiva do modo (A_{eff}), obtendo a intensidade de limiar $I_{th} = P_{th}/A_{eff}$. Como cada PCF tem comprimento diferente, um fator geral para comparação é o produto *intensidade x* *comprimento de interação*, $I_{th}L_{eff}$, onde o comprimento de interação ou comprimento efetivo da fibra é $L_{eff} = (1 - e^{-\alpha L})/\alpha$, α é o coeficiente de atenuação e L o comprimento da fibra. Notemos que este produto é basicamente o mesmo encontrado na fórmula de Smith e à principio é independente do diâmetro e do comprimento da fibra. A última linha da Tabela 3. 1 contém os valores calculados para $I_{th}L_{eff}$ a partir das medidas da potência de limiar, e a Figura 3. 5 mostra o gráfico de $I_{th}L_{eff}$ em função do diâmetro do núcleo. Cada fibra representa um ponto no gráfico da Figura 3. 5, para cada diâmetro de núcleo e as barras de erro representam nossa incerteza na medida da potência acoplada na fibra. Vemos que para diâmetros maiores que $8\ \mu\mathrm{m}$, o limiar é praticamente independente do diâmetro e vale aproximadamente $0.8\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}/\mu\mathrm{m}^2$ (veremos adiante que este é o valor esperado para fibras convencionais de sílica pura). Conforme o diâmetro da fibra é diminuído, o produto $I_{th}L_{eff}$ aumenta, o que significa que para um dado comprimento, fibras de núcleo pequenos requerem mais intensidade para atingir o limiar de Brillouin estimulado. Para a menor fibra de todas por exemplo, com $1.22\ \mu\mathrm{m}$ de diâmetro, há um aumento de um fator de 5 vezes em comparação com as fibras de núcleo grande (chamamos de núcleo grande aquelas fibras com diâmetro $> 8\ \mu\mathrm{m}$). Este fator representa um aumento de 7.3 dB na potência inserida com relação ao valor esperado pela fórmula de Smith antes que o limiar de Brillouin seja alcançado.

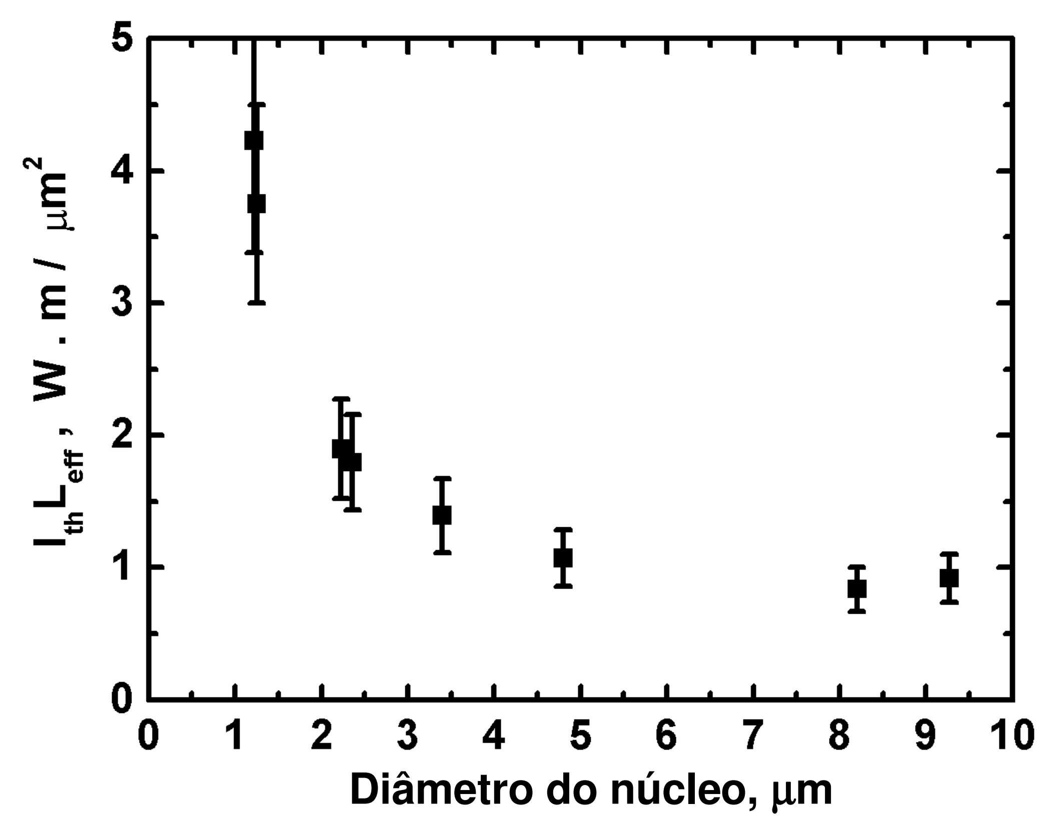


Figura 3. 5: limiar de Brillouin medido em função do diâmetro do núcleo da PCF. Um aumento significativo é observado conforme o diâmetro pe diminuído. Por exemplo, um aumento de 7.3 dB é observado para a fibra de 1.22 mm de diâmetro se comparado com os resultados obtidos para fibras de núcleo grande (> 8 mm);

O aumento do limiar é a primeira observação relevante e está em amplo contraste com o comportamento em fibras convencionais. Nestas fibras, o limiar de Brillouin é praticamente independente do diâmetro do núcleo [21, 50]. Retornando à fórmula de Smith, podemos ver que [9,10]:

$$I_{th}L_{eff} = 21/g = 0.7\,\mathrm{Wm}/\mu\mathrm{m}^2\,, \tag{3.1}$$

onde g é o coeficiente de ganho Brillouin [1,2], e o valor numérico da equação (3.1) foi obtido utilizando valores típicos para a sílica fundida. Notemos que este valor é muito próximo daquele obtido para PCFs de núcleo grande. O desacordo para PCFs de núcleo pequeno com o resultado observado fibras convencionais reflete, como pudemos concluir ao longo deste trabalho de tese e como mostramos explicitamente no capítulo 4, uma das manifestações do confinamento acústico que ocorre nas PCF, e não é levado em consideração na fórmula de Smith. No capítulo 4 apresentamos modelos para explicar tal divergência, levando em conta a natureza dos modos acústicos confinados no núcleo da PCF. Um fato intrigante na curva da Figura 3. 5 é que o limiar parece depender apenas do diâmetro do núcleo da PCF, e não da estrutura específica o envolvendo, sugerindo um modelamento usando um cilindro de vidro envolto de ar, o qual apresentamos também no capítulo 4.

3.1.6. Espectro de retro-espalhamento espontâneo

A segunda característica importante do processo de retro-espalhamento Brillouin é o espectro da luz espalhada. De nosso estudo introdutório do capítulo 2, concluímos que em um meio infnito ou *bulk* a luz interage apenas com ondas longitudinais e não com ondas transversais e, mais ainda, ondas longitudinais e transversais propagam-se de forma independente, sem acoplarem-se. Deste modo, o espectro da luz retro-espalhada consiste de um único pico centrado na freqüência de $11{,}1\ \mathrm{GHz}$ (para sílica fundida e laser incidente em $1550\ \mathrm{nm}$), proveniente da interação com ondas longitudinais apenas. Vimos também que as medidas que apresentamos para fibras convencionais de núcleo de sílica pura, o espectro é pratcamente idêntico ao caso *bulk*. Nesta seção, apresentamos as medidas do espectro de retro-espalhamento em fibras fotônicas, e para a nossa surpresa o espectro novamente apresenta propriedades bem diferentes do usual.

3.1.7. Montagem experimental para medida do espectro de retro-espalhamento Brillouin

A montagem experimental utilizada está mostrada na Figura 3. 6. Basicamente temos um esquema próximo da montagem utilizada para a medida do limiar, mas com algumas adaptações, otimizando a montagem para a medida do sinal retro-espalhado. Nosso objetivo é medir o espectro da luz espalhada no regime espontâneo (baixa intensidade incidente). Para isso, utilizamos a técnica de *self-heterodyne detection*, que consiste basicamente em detectar o sinal de batimento entre a luz espalhada e uma referência do laser incidente (ou bombeio) [1]. Este sinal é detectado em um fotodetector rápido ($20\ \mathrm{GHz}$ de banda), amplificado com um pré-amplificador de rádio-freqüência (RF) de baixo ruído e então medido em um analisador de espectro elétrico. Como no regime espontâneo o sinal óptico espalhado é de baixa potência, antes de fazer o batimento, o sinal retro-espalhado é amplificado utilizando um pré-amplificador óptico (pré-EDFA). Também filtramos o sinal amplificado usando um filtro óptico passa-banda para eliminar o ruído de emissão espontânea do amplificador (ASE, *Amplified Spontaneous Emission*). O filtro utilizado tem $0{,}5\ \mathrm{nm}$ de largura de banda. Controladores de polarização são utilizados tanto no braço da referência quanto no braço do sinal retro-espalhado para maximizar o sinal de batimento. Medimos o sinal no analisador de espectro elétrico com $1\ \mathrm{MHz}$ de resolução.

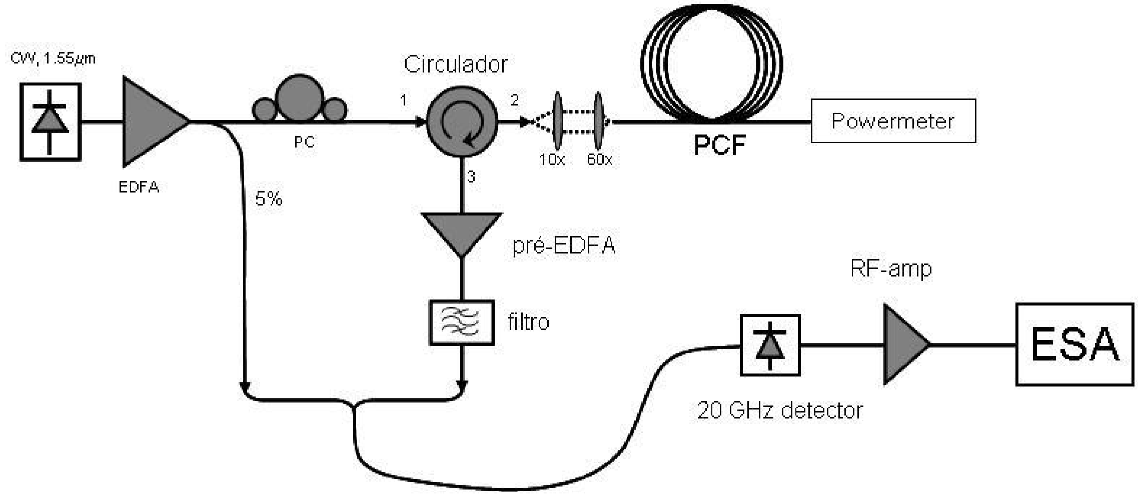


Figura 3. 6: montagem experimental utilizada para as medidas do espectro de retro-espalhamento espontâneo em fibras fotônicas. Todas as abreviaturas estão definidas no texto;

3.1.8. Resultados: espectro de retro-espalhamento Brillouin

Medimos o espectro de retro-espalhamento Brillouin para as PCFs de diâmetros de $1,22\ \mu\text{m}$ e $9,27\ \mu\text{m}$, respectivamente o menor e o maior núcleo (Estas medidas foram realizadas no Brasil e estas fibras e também a fibra de $1,25\ \mu\text{m}$ eram as únicas que estavam disponíveis em nosso laboratório para medidas). O resultado obtido está mostrado na Figura 3. 7. A fibra com núcleo grande apresenta um único pico de espalhamento centrado em $11,12\ \text{GHz}$ com largura de $31\ \text{MHz}$, resultado esperado em *bulk*. A freqüência e largura foram obtidas ajustando ao resultado uma curva Lorentziana. Em contraste, na fibra de núcleo pequeno três picos de espalhamento são observados nas frequencias $9,76\ \text{GHz}$, $9,95\ \text{GHz}$ e $10,22\ \text{GHz}$. As larguras FWHM são respectivamente $24, 38$ e $25\ \text{MHz}$, para uma fibra de $84\ \mathrm{m}$ de comprimento. Além de apresentar múltiplos picos, vemos que todo o espectro em PCFs de núcleo pequeno está deslocado para freqüências menores, consistente com o efeito do confinamento óptico, já que o índice efetivo do modo óptico diminui para diâmetros menores. A presença de múltiplos picos do espectro de espalhamento é o resultado de que vários modos acústicos estão sendo guiados pela fibra micro-estruturada. É interessante notarmos que a "casca micro-estruturada" representa um anti-guia acústico de maneira que o guiamento sugere a presença de gaps fonônicos. Exploraremos este fato no capítulo 4, onde desenvolvemos nossos modelos. As larguras de linha observadas são todas um pouco maiores que o predito no capítulo 2, que é $13{,}8\ \mathrm{MHz}$. Este valor considera que a largura de linha intrínseca depende do coeficiente de atenuação das ondas acústicas na sílica, supondo que processo de atenuação é dominado por perdas de viscosidade. Possíveis razões para a discrepância seriam flutuações da estrutura da fibra ao longo do seu comprimento. Outra possibilidade seria algum mecanismo diferente de atenuação das ondas acústicas como, por exemplo, uma perda de guiamento, devido à perdas de confinamento (modos vazantes, ou *leaky modes*).

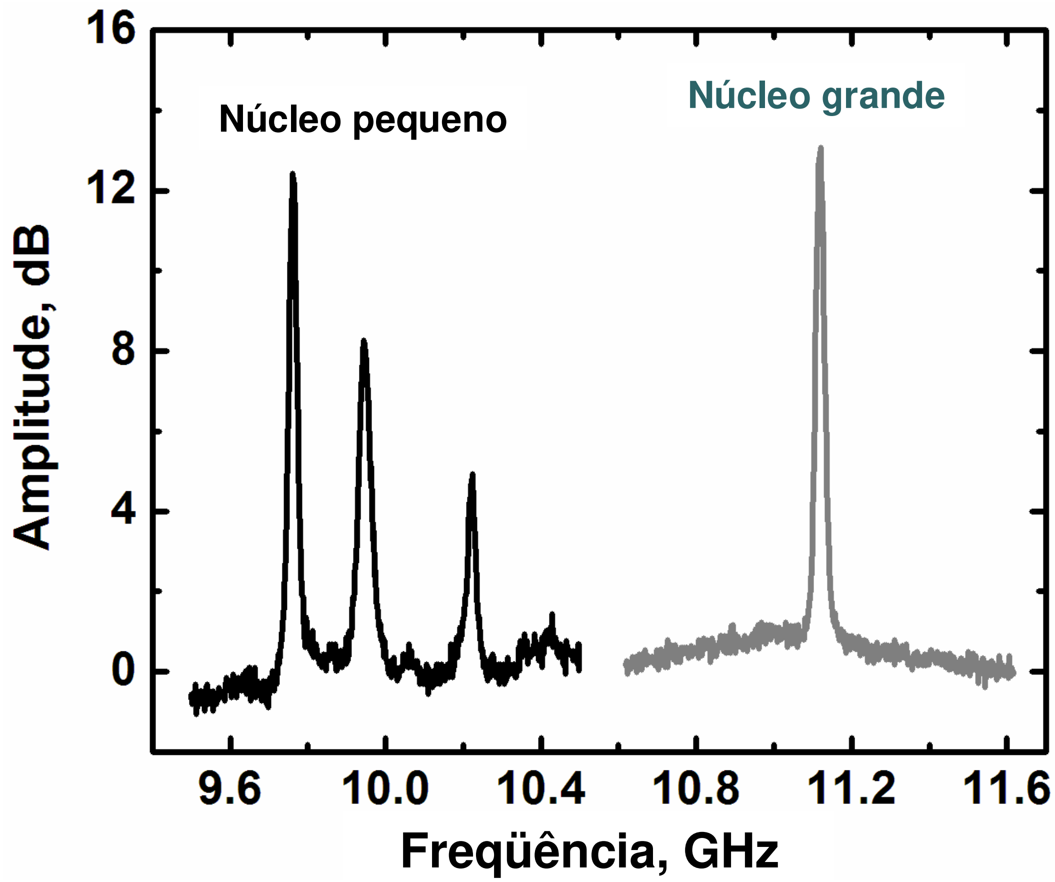


Figura 3. 7: espectro de retro-espalhamento Brillouin espontâneo em PCFs, medido utilizando a técnica de auto-heterodinagem. A escala vertical está em unidades logarítmicas e o nível de base refere-se ao nível de ruído *shot* $(-66\ \text{dBm})$ para uma potência incidente no fotodiodo de $1\ \text{mW}$. Os diâmetros das fibras são (a) $1,22\ \mu\text{m}$ e (b) $9,27\ \mu\text{m}$.

3.1.9. Comparação fibra curta *vs* fibra longa

Para verificar o efeito de variações ao longo do comprimento, cortamos um trecho de apenas $2\ \text{m}$ de comprimento da fibra de menor diâmetro e medimos novamente o espectro de retro-espalhamento. O resultado está mostrado na Figura 3. 8, onde podemos claramente notar um estreitamento da linha. Os valores do pico mais forte para o pico mais fraco são

$19, 25$ e 17 MHz. Se compararmos com o resultado para a fibra longa (84 m), vemos um alargamento de $5, 13$ e 8 MHz. A freqüência de *phase-matching* é proporcional ao índice de refração efetivo do modo óptico. E o índice efetivo por sua vez, para variações muito pequenas, pode ser considerado proporcional ao diâmetro da fibra. Supondo que o alargamento deve-se a uma variação aleatório da freqüência do pico central, ou seja, que o alargamento representa a variação pico-a-pico da freqüência de *phase-matching*, dividindo a largura de linha pela freqüência do pico Brillouin obtemos $0,005/9,76 = 0,05\%$. Este é um cálculo simplificado, mas com algum significado físico que é a seguinte. A variação de $0,05\%$ se traduziria simplificadamente na variação do diâmetro da fibra ao longo do comprimento, indicando que as fibras utilizadas neste estudo são extremamente uniformes. Podemos notar ainda na Figura 3. 8, que há um pequeno *shift* para freqüências menores na medida da fibra curta. Entretanto esta diferença decorre de as medidas terem sido feitas em diferentes comprimentos de onda do laser incidente.

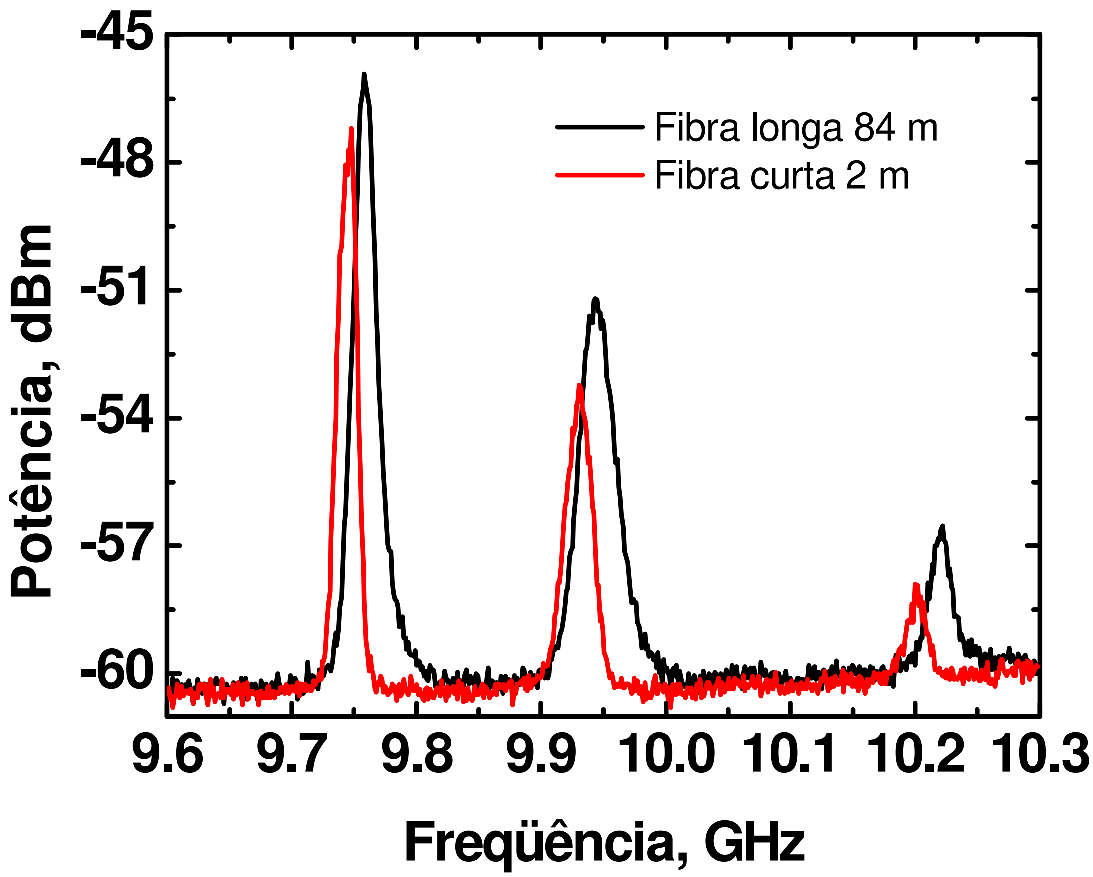


Figura 3. 8: comparação do espectro de retro-espalhamento Brillouin para fibras de diferentes comprimentos, uma curta de apenas 2 m e outra longa de 84 m. O pequeno *shift* de freqüências de um para outro é um artefato experimental;

3.1.10. Espectro de outras fibras

Para comparação, medimos também o espectro de retro-espalhamento da outra fbra de núcleo pequeno que tínhamos disponível, com $1,25\ \mu m$ de diâmetro, e comparamos com o resultado da outra fibra menor ($1,22\ \mu m$). A figura Figura 3. 9 mostra esta comparação. Vemos que ambas as fibras apresentam vários picos de espalhamento, mas a amplitude relativa de cada pico varia de uma fibra para outra. Além disso, consistentemente, a freqüência do pico principal é maior para fibra de maior diâmetro, fato esperado pelo mesmo argumento anterior relativo à condição de *phase-matching*. A diferença relativa entre as freqüências dos picos principais é de $\frac{9.933-9.762}{(9.933+9.762)/2}=1,7\%$ e a diferença entre os diâmetros é um pouco menor $\frac{1,25-1,22}{(1,25+1,22)/2}=2,4\%$, em boa concordância. Obviamente, o resultado exato somente pode ser obtido calculando exatamente as relações de dispersão óptica e acústica para ambos os diâmetros.

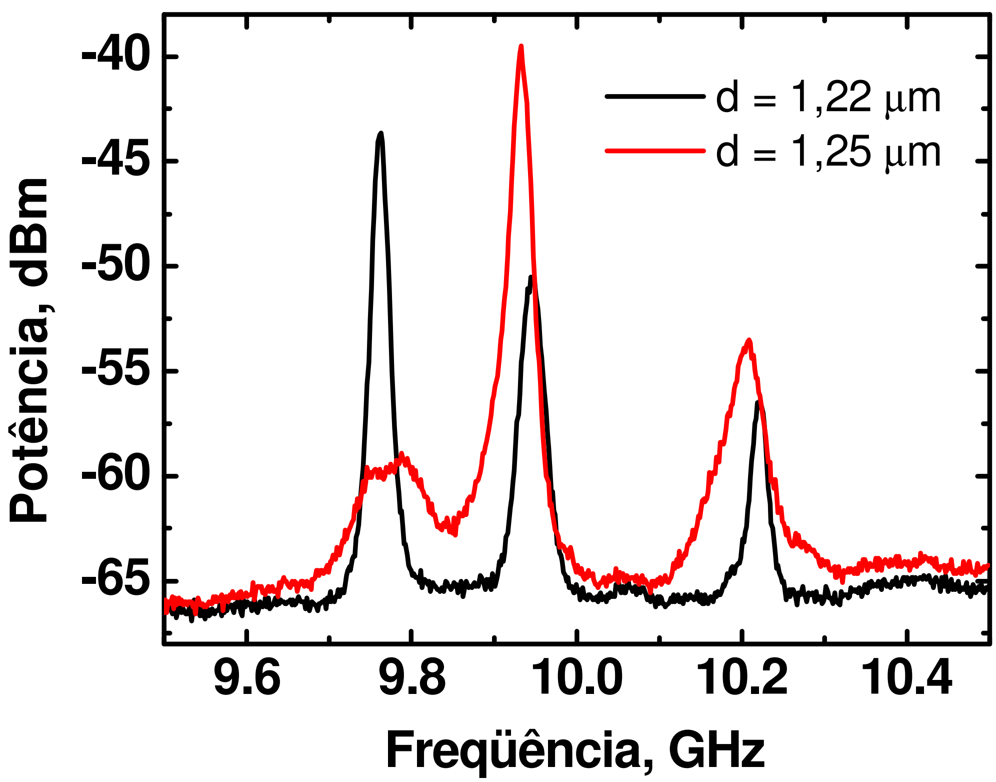


Figura 3. 9: comparação do espectro de retro-espalhamento Brillouin para fibras de diferentes diâmetros. A curva vermelha refere-se a uma fibra com $1,22\ \mu m$ de diâmetro e a curva preta a uma fibra com $1,25\ \mu m$ de diâmetro;

3.1.11. Evolução do espectro com a potência

Voltando à fibra de menor diâmetro, investigamos também a evolução do espectro de retro-espalhamento em função da potência do laser incidente, e o resultado está mostrado na Figura 3. 10. Vemos que no regime espontâneo, apenas o três picos de espalhamento descritos anteriormente estão presentes. Aumentando a potência, entretanto, acima de $30\,\mathrm{mW}$ começamos a observar novas freqüências no espectro de retro-espalhamento. Por exemplo, quando a potência incidente é $50\,\mathrm{mW}$, observamos picos nas seguintes freqüências

$$\begin{bmatrix} 9,58 \\ 9,76 \\ 9,95 \\ 10,13 \\ 10,22 \\ 10,32 \\ 10,41 \end{bmatrix} \mathrm{GHz}$$

A origem física destes novos picos no espectro de retro-espalhamento Brillouin ainda não é clara até o presente momento da escrita desta tese. Acreditamos que a origem seja um efeito não linear de mistura de freqüências, entretanto não temos dados suficientes para afirmarmos se o efeito não linear envolve apenas ondas ópticas ou possivelmente acústicas. Na referência [52], não-linearidades acústicas são reportadas em níveis de energia comparável ao que obtemos em nosso experimento (discutiremos adiante este ponto). No caso de não-linearidade óptica, nosso aparato experimental não era suficientemente preciso para afirmar com certeza se o nível de potência óptica das linhas Brillouin era alto para gerar não-linearidades. Podemos especular que a mistura não-linear de terceira ordem (através de *Four-Wave-Mixing*, FWM) dos dois picos mais fortes de espalhamento poderia gerar picos adjacentes nas freqüências

$$2\times 9,76 - 9,95 = 9,57$$
$$2\times 9,95 - 9,76 = 10,14$$

próximos dos valores observados experimentalmente. Entretanto, uma não-linearidade acústica poderia em princípio também dar os mesmos resultados.

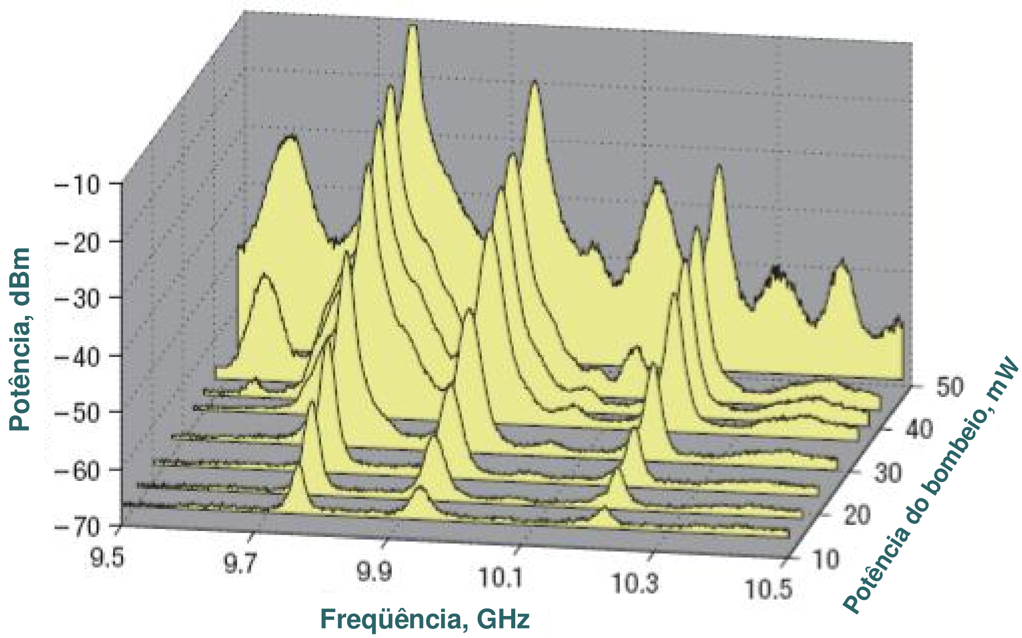


Figura 3. 10: evolução do espectro de retro-espalhamento Brillouin em função da potência do laser incidente. Conforme a potência aumenta, picos adjacentes aparecem no espectro;

3.1.12. Dependência com a polarização

Esta seção é inteiramente dedicada à caracterização da polarização e à investigação de como a birrefringência afeta o espalhamento Brillouin. Mencionamos na seção 3.1.4

(medida do limiar de Brillouin) que o espectro de retro-espalhamento Brillouin em fibras fotônicas de núcleo pequeno apresenta uma forte dependência com o estado de polarização do laser incidente (SOP, *State of Polarization*). Mais detalhadamente, observávamos que para um determinado estado de polarização, digamos SOP α, o retro-espalhamento Brillouin é minimizado e para outro estado, SOP β, o espalhamento é maximizado. A Figura 3. 11 mostra o espectro da luz retro-espalhada, medido com um Analisador de Espectro Óptico com $0,01\ \text{nm}$ de resolução (portanto não podemos resolver os 3 picos de espalhamento). O pico central em $\lambda = 1549,90\ \text{nm}$ corresponde à reflexão linear do próprio laser de bombeio em interfaces vidro-ar, enquanto o pico deslocado para comprimentos de onda maiores ($\lambda \approx 1550,00\ \text{nm}$) é o pico de retro-espalhamento Brillouin, desviado em freqüência de aproximadamente $10\ \text{GHz}$. Vemos que se o bombeio é lançado na fibra no estado α, o pico de espalhamento é cerca de 21 dB mais intenso que aquele obtido quando o bombeio é lançado no SOP β.

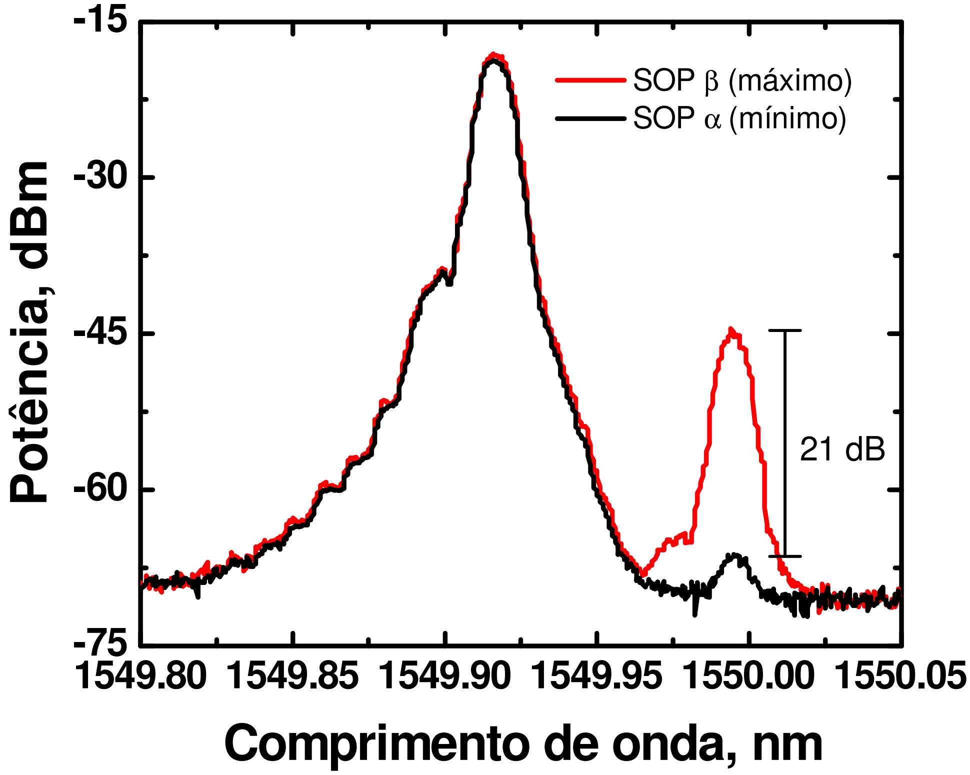


Figura 3. 11: espectros de retro-espalhado medido com um analisador de espectro óptico com $0,01\ \text{nm}$ de resolução para diferentes estados de polarização do laser incidente. A curva vermelha corresponde ao caso em que o laser de bombeio é lançado na fibra na polarização que maximiza o pico Brillouin. Já a curva preta corresponde ao caso em que o laser de bombeio é lançado na fibra na polarização que minimiza o pico de espalhamento;

O objetivo nesta etapa é caracterizar os estados α e β que respectivamente maximizam e minimizam o espalhamento Brillouin em $10\ \text{GHz}$, e relacioná-los com a estrutura da fibra fotônica. O entendimento desta observação requereu primeiramente que caracterizássemos a birrefringência da fibra e a correlacionássemos com a estrutura da fibra fotônica. Portanto seguimos a seguinte estratégia:

- **Passo 1**: medida da birrefringência da fibra e caracterização dos eixos principais. Relacionar a orientação dos eixos principais com a estrutura da fibra fotônica;

- **Passo 2**: caracterização dos estados de polarização SOPs α e β que maximizam ou minimizam o retro-espalhamento Brillouin em $10\ \text{GHz}$. Finalmente, comparação com eixos principais da PCF;

3.1.13.: Montagem experimental para a caracterização da birrefringência

Antes de estudar os estados de polarização que caracterizavam o espalhamento Brillouin, procuramos investigar se a fibra exibia alguma birrefringência. Para isto utilizamos o esquema experimental mostrado na Figura 3. 12. A fonte utilizada foi um laser contínuo de cavidade externa, largura de linha de $100\ \text{kHz}$ e potência de $10\ \text{mW}$. O laser foi modulado em amplitude usando um modulador eletro-óptico de Niobato de Lítio, gerando pulsos de $100\ \text{ps}$ de largura (*Full Width at Half Maximum*, FWHM) a uma taxa de repetição de $2{,}5\ \text{GHz}$. Depois de modulado, o laser foi amplificado com um Amplificador Óptico a Fibra Dopada com Érbio (*Erbuim Doped Fiber Amplifier*, EDFA). Usamos um amplificador óptico apenas para ter potência suficiente para compensar as perdas devido ao acoplamento da luz na PCF e à perda de transmissão na fibra. Utilizávamos um controlador de polarização à fibra óptica (*Polarization Controller*, PC) para alterar a polarização dos pulsos na entrada na PCF. O feixe que sai da fibra convencional foi acoplado na fibra fotônica usando um par de lentes de microscópio, da mesma maneira que descrevemos nas medidas de limiar de Brillouin. A perda de acoplamento neste sistema varia em torno de $7-10\ \text{dB}$ e a perda linear da fibra é de aproximadamente $3\ \text{dB}$.

O sistema de detecção dos pulsos de saída e o sistema usado para caracterizar a polarização estão localizados na saída da fibra. Uma lente de 60x de aumento é usada para colimar o feixe de saída da fibra fotônica e este feixe era enviado ora no fotodetector para medirmos a forma temporal dos pulsos de saída e ora em um Polarímetro alinhado com a base horizontal do experimento. Para medirmos os pulsos de saída, utilizamos um fotodetector rápido ($20\ \text{GHz}$ de largura de banda e $15\ \text{ps}$ de tempo de subida) e o sinal detectado foi analisado em um osciloscópio de $50\ \text{GHz}$ (CSA 803, da Tektronix). A entrada do fotodetector é uma fibra óptica convencional, a qual leva os pulsos até o fotodiodo localizado internamente ao detector. Isto significa que o feixe colimado na saída da PCF tinha que ser focalizado na fibra de entrada do fotodetector. Para isso usamos outro estágio *x-y-z* e uma lente de $10\times$ de aumento para focalizar o feixe na fibra convencional. Um espelho em uma base giratória foi utilizado para desviar a direção do feixe de 90^{o} em direção ao fotodetector, como ilustrado na Figura 3. 12. Para medirmos o estado de polarização do laser de bombeio utilizamos um Polarímetro Thorlabs, calibrado para $1550\ \text{nm}$. Optamos por manter o Polarímetro diretamente na direção do feixe de saída para evitar erros de orientação na polarização ao desviar o feixe com espelhos. Em resumo, sem desviar o feixe medíamos o estado de polarização e quando giramos o espelho, medimos os pulso de saída.

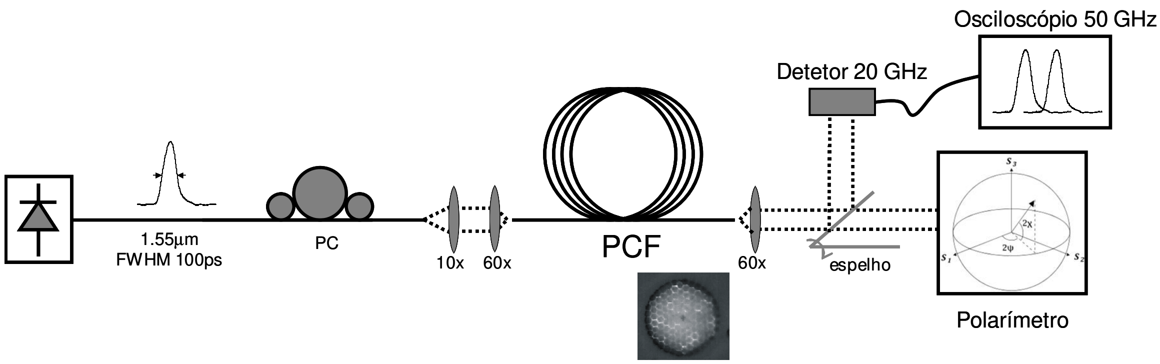


Figura 3. 12: montagem experimental usado para medir a birrefringência da fibra e caracterizar os estados principais de polarização. A linha descontínua (pontilhada) representa caminhos ópticos no ar-livre e linha contínua representa fibra óptica. A foto da PCF (*inset*) mostra a orientação da estrutura, tendo como base horizontal a mesa do laboratório;

Cabe aqui um parêntese para esclarecer a razão de escolhermos medir a polarização na *saída* e não na *entrada* da PCF. De fato, iniciamos o experimento medindo a polarização na entrada da PCF. Simplesmente separamos espacialmente a lente colimadora na entrada da PCF ($10\times$) e a lente de focalização ($60\times$) e inseríamos o Polarímetro entre elas. Ao retirarmos o Polarímetro da direção do feixe, este era transmitido através da PCF e podíamos então medir os pulsos de saída. O fato é que o processo de *pôr e tirar* o Polarímetro não era repetitivo, e sempre havia uma diferença na orientação da polarização medida (provavelmente porque a orientação do próprio Polarímetro variava com o reposicionamento). Uma segunda tentativa foi colocarmos uma lâmina de microscópio entre a lente colimadora ($10\times$) e a lente de focalização ($60\times$). A lâmina refletia de volta uma pequena fração da potência do feixe quase na mesma direção incidente, mas com um pequeno desvio angular ($<5^{\circ}$), desviando o feixe na direção do Polarímetro, que desta vez ficava imóvel. Entretanto, ainda verificamos que as medidas não eram repetitivas, e havia a incerteza de algum desvio da polarização devido à reflexão na lâmina. Outro ponto importante é que observávamos freqüentemente que a face de entrada da PCF queimava, ficando bastante deformada. Como a potência acoplada na fibra é em torno de 10 vezes menor que a potência incidente, em geral a intensidade na interface é alta (lembremos que o feixe é focalizado em uma área de aproximadamente $1\,\mu m^2$, ou seja que tinha : $10\,MW/cm^2$). Esta distorção na face de entrada possivelmente alterava o estado de polarização do laser e, portanto, a polarização exatamente antes da interface podia ser diferente daquela de fato acoplada na PCF. Decidimos finalmente medir a polarização do laser na saída da fibra, já que a potência na face de saída é bem menor que na entrada e a face de saída raramente queimava.

Quando a birrefringência da fibra é pequena, qualquer perturbação externa pode causar a reorientação dos eixos principais da fibra, e a polarização de saída pode ser bastante diferente da polarização de entrada, mesmo se o laser de bombeio for lançado em um dos eixos principais na entrada da fibra, tornando a medida na saída da fibra não conclusiva. Isto não ocorre para fibras altamente birrefringentes, onde a orientação dos eixos principais de polarização praticamente não varia com perturbações externas. Nestas fibras, a luz lançada em um dos eixos propaga-se até a saída neste mesmo eixo. Este resultou ser o nosso caso, como veremos adiante.

3.1.14. Resultados obtidos: birrefringência e estados principais de polarização

Vamos às medidas de fato. Variando o controlador de polarização medimos o pulso de saída no osciloscópio. Medidas preliminares com pulsos mais longos nos indicaram que o atraso entre o eixo rápido e o eixo lento é da ordem de $100\ \text{ps}$ e portanto pulsos desta mesma largura (facilmente disponíveis em nossa instrumentação) eram suficientemente curtos para uma medida de boa precisão. A Figura 3. 13 mostra três medidas para diferentes estados de polarização. Primeiramente, vemos que o tempo de propagação na fibra é alterado quando variamos a polarização do laser, o que deixa explícita a presença de birrefringência. Para as polarizações correspondentes às curvas preta (*Fast axis*) e vermelha (*Slow axis*), um único pulso é detectado em cada curva, o que significa que o laser foi lançado exatamente em um dos eixos principais da fibra. A diferença no tempo de chegada medida é de $\Delta t = 113{,}8\ \text{ps}$. Vemos ainda que, para qualquer polarização de entrada (nos eixos principais ou não), os pulsos chegam sempre nos tempos t_f e t_s, que correspondem aos eixos rápido (*fast*) e lento (*slow*), e nunca em um tempo intermediário, mostrando que não existe acoplamento entre os eixos principais de polarização. O traço vermelho, por exemplo, mostra a situação em que o laser é lançado em uma polarização intermediária aos eixos principais da fibra. Parte da energia do pulso propaga-se no eixo rápido da fibra (e chega no tempo t_f) e parte propaga-se no eixo lento (e chega no tempo t_s). Podemos calcular a diferença no índice de refração entre os eixos rápido e lento da seguinte forma:

$$\Delta n = \frac{c\Delta t}{L} = 4 \cdot 10^{-4},$$

onde $c = 2.99792 \cdot 10^8$ m/s é a velocidade da luz no vácuo e L = 86 m é o comprimento da fibra.

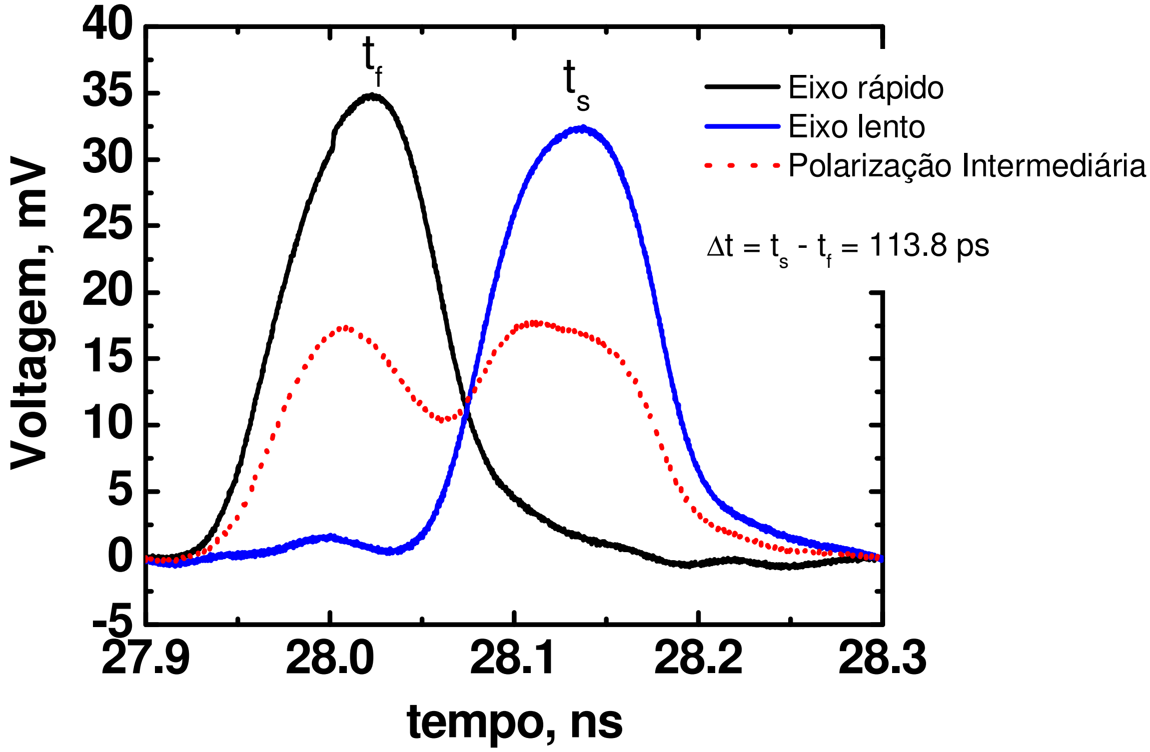


Figura 3. 13: pulsos de saída para diferentes polarizações de entrada na fibra, mostrando diferentes tempos de chegada para os eixos rápido (*fast*, traço preto) e lento (*slow*, traço azul) da PCF. O traço vermelho corresponde a um estado de polarização intermediário – parte da energia é acoplada no eixo rápido e parte no eixo lento;

Após medirmos a birrefringência, passamos a caracterizar os estados de polarização S_f e S_s que correspondem aos eixos rápido e lento da fibra. Observando o pulso de saída no osciloscópio, ajustamos a polarização de entrada para que o pulso seja acoplado em apenas um dos eixos principais da PCF. Giramos então o espelho para deixar o feixe passar diretamente em direção ao Polarímetro. O Polarímetro tem a base horizontal alinhada com a base da bancada do experimento e foi previamente calibrado. Confirmamos as medidas do Polarímetro usando um polarizador na entrada e medindo polarizações linear horizontal e linear vertical. Caracterizamos então os estados de polarização dos eixos rápido e lento da fibra. O modo óptico rápido tem os seguintes parâmetros de Stokes (no referencial do laboratório) $S_f = (0.87,-0.29,-0.22)$, que corresponde a uma elipse orientada a -9.1^o com relação à base horizontal do Polarímetro e com uma pequena elipticidade de -0.12. O modo óptico lento tem parâmetros de Stokes $S_s = (-0.86, 0.15, 0.36)$, que corresponde a uma elipse orientada a 85^o e com elipticidade 0.18. A diferença angular entre as orientações das elipses dos modos é $85 - (-9.1) = 94^o$, confirmando que, dentro do erro experimental, os modos são ortogonais entre si. Obviamente os parâmetros de Stokes medidos e também a orientação dos estados de polarização dependem da posição da fibra no *V-groove* da base *x-y-z*. Cada vez que retiramos e fibra para clivá-la e a recolocamos no *V-groove*, as orientações medidas mudavam (já que a fibra pode ter sido colocada girada com relação à medida anterior), mas sempre se verificava a ortogonalidade dos modos, já a *elipticidade* variava pouco. Acreditamos que a pequena elipticidade seja decorrente de erros experimentais.

3.1.15. Orientação dos estados principais de polarização com a estrutura da PCF

Na segunda etapa destas medidas, relacionamos os estados de polarização dos eixos principais com a orientação da estrutura da fibra fotônica. Seguimos o seguinte procedimento: a ponta de saída da PCF é presa em um *V-groove*, cuja base horizontal está no plano do estágio *x-y-z*, ou seja, no plano horizontal do experimento. Sem retirar o pedaço de fibra do *V-groove*, cortamos o trecho final da fibra, aproximadamente 5 cm antes da face. Retiramos então o *V-groove* da base *x-y-z*, sem movimentar a fibra e o levamos até um microscópio óptico. A Figura 3. 14 mostra as imagens obtidas no microscópio. A Figura 3. 14 (a) mostra o *V-groove* e a fibra fora de foco, a Figura 3. 14 (b) mostra a base horizontal do V-*groove*, que é usada como referência e, por fim, a Figura 3. 14 (c) mostra a imagem da face da fibra.

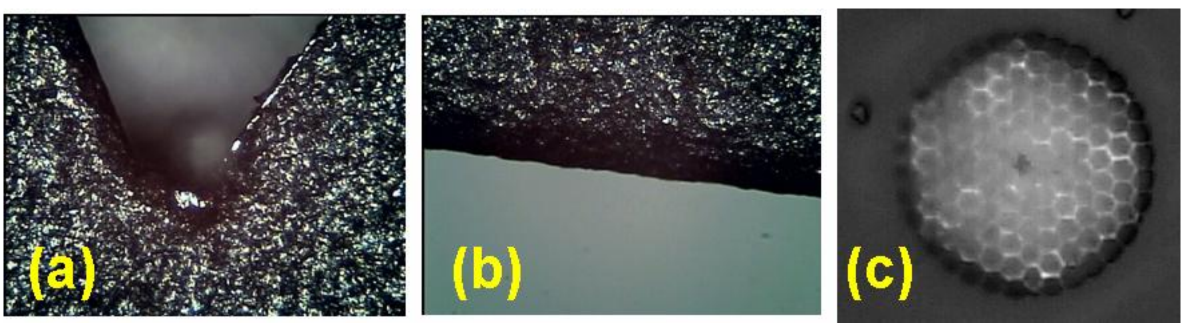


Figura 3. 14: Imagens obtidas com um microscópio óptico de reflexão: (a) V-groove no qual a fibra fotônica é presa (fora de foco nesta imagem), (b) base horizontal do V-groove, usado como referência para a orientação da fibra, e (c) imagem da PCF;

Usando o software *CorelDraw*, medimos o ângulo de rotação da fibra com relação à base horizontal. Aplicando a mesma rotação nas medidas de polarização, pudemos orientá-las com a estrutura de PCF. O resultado está mostrado na Figura 3. 15. Nesta figura, optamos por usar uma imagem de melhor resolução da mesma fibra fotônica (imagem SEM do núcleo da PCF), ao invés da imagem obtida com o microscópio óptico. Obviamente, a orientação das figuras do SEM e do microscópio é a mesma. O gráfico polar sobreposto à figura mostra o resultado das medidas dos eixos rápido e lento. Vemos claramente que o eixo lento (*Slow axis*) está alinhado com a interface vidro-ar da PCF, enquanto o eixo rápido está alinhado com uma das pontes de vidro que ligam o núcleo com a estrutura externa. Estimamos um erro de ± 5º na orientação dos eixos de polarização com a estrutura, erro este que é acumulado tanto na própria medida dos estados de polarização (alinhamento do Polarímetro) quanto no procedimento de reorientação da estrutura. Repetimos estas 3 vezes para confirmação, e o erro estimado na dispersão dos resultados .

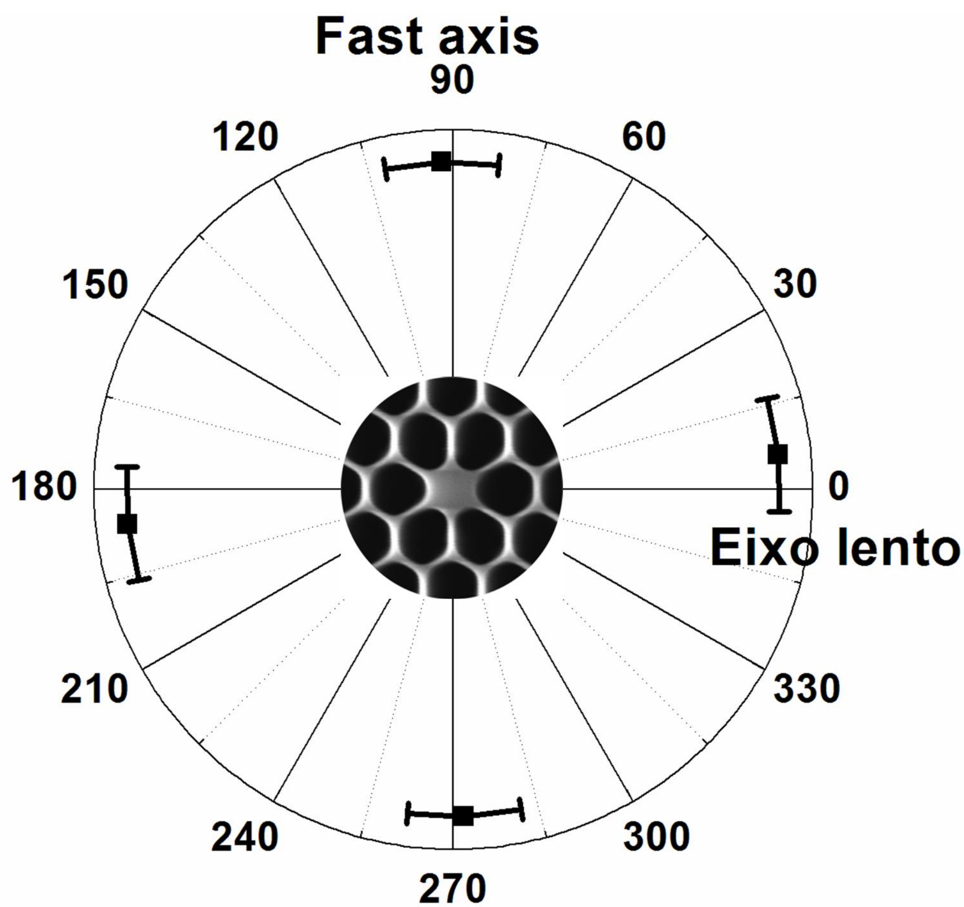


Figura 3. 15: Identificação dos eixos rápido (*Fast axis*) e lento (*Slow axis*) da PCF. Os pontos correspondem às medidas dos estados de polarização da PCF;

3.1.16. Correlação entre a birrefringência e o espalha-mento Brillouin

Depois de caracterizados a birrefringência e os eixos principais da fibra, passamos a caracterizar a dependência do espalhamento Brillouin com a polarização. A montagem experimental usada está mostrada na Figura 3. 16, e é muito similar à montagem da etapa anterior. Inserimos agora um circulador óptico (*Circulator*) para medirmos o espectro da luz retro-espalhada usando um analisador de espectro óptico (*Optical Spectrum Analyzer*, OSA) ou um analisador de espectro elétrico (*Electrical Spectrum Analyzer*, ESA). Para a medida com o ESA, em princípio é necessário fazer o batimento de sinal retro-espalhado com uma referência óptica. Em nosso caso, entretanto, a própria reflexão linear do laser de bombeio (interface vidro-ar) já é suficiente para fazer o batimento – vale lembrar que o retro-espalhamento tem a mesma polarização do laser de bombeio. Na saída da PCF, medimos o estado de polarização do laser de bombeio usando um Polarímetro, como na etapa anterior.

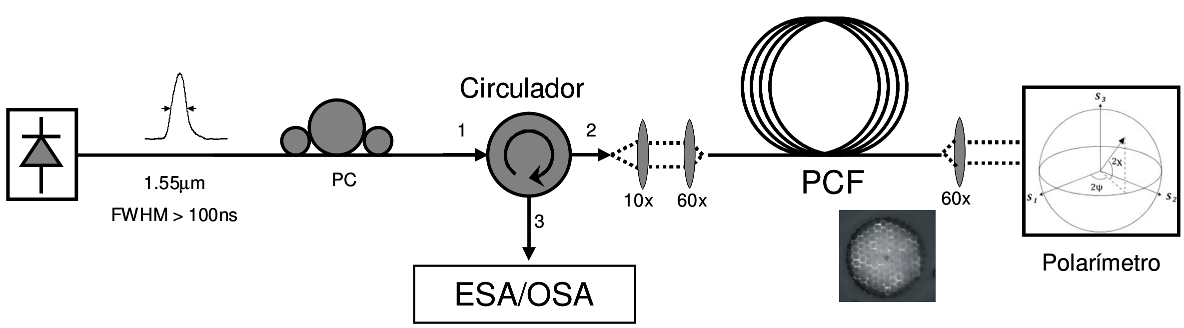


Figura 3. 16: montagem experimental usado para medir a dependência do espectro Brillouin com a polarização do laser de bombeio e caracterizar os estados de polarização de

máximo e mínimo com a estrutura da fibra;

Aumentamos a largura dos pulsos ópticos para mais de $100\,\mathrm{ns}$ para podermos observar o espalhamento Brillouin (lembremos que o tempo de vida dos fônos acústicos em sílica fundida é da ordem de $10\,\mathrm{ns}$). Usamos pulsos quadrados, com tempo de subida de $10\,\mathrm{ns}$ e largura de $100-500\,\mathrm{ns}$. A taxa de repetição usada variava desde $0{,}10-10\,\mathrm{MHz}$. Monitorando o espectro óptico no OSA, variamos a polarização do laser de bombeio maximizando ou minimizando o pico de espalhamento Brillouin, como mostrado anteriormente na Figura 3. 11. Medimos então os estados de polarização S_{max} e S_{min}, que correspondem respectivamente ao máximo e mínimo do pico de espalhamento. Comparamos S_{max} e S_{min} com os estados S_f e S_s correspondentes aos eixos rápido e lento da PCF. O resultado está mostrado na Figura 3. 17, onde repetimos várias vezes as medidas de S_{max} e S_{min}. Vemos claramente que o espalhamento é máximo quando o laser incide linearmente polarizado na direção de um dos eixos principais da fibra fotônica, e o espalhamento é mínimo quando o laser está linearmente polarizado a 45º em relação aos eixos principais.

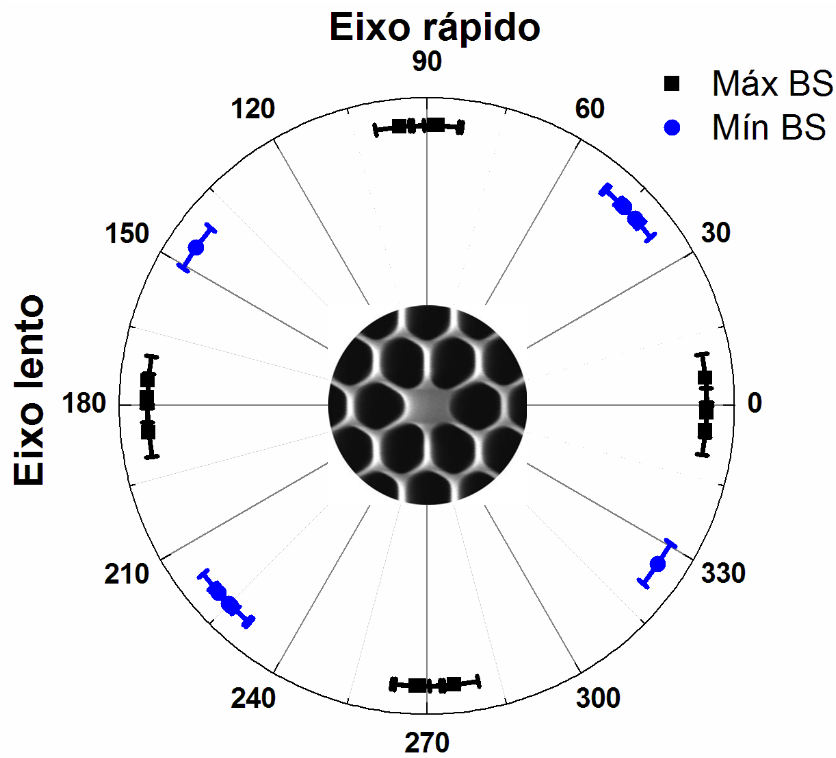


Figura 3. 17: Comparação das polarizações que maximizam (quadrados pretos) e minimizam (círculos azuis) o retro-espalhamento Brillouin com os eixos principais da PCF. Os eixos rápido (*Fast*) e lento (*Slow*) estão orientados de acordo com a Figura 6;

É conhecido na literatura [53, 54] que em fibras altamente birrefringentes, o retro-espalhamento Brillouin depende da polarização do laser de bombeio. Se o bombeio está orientado a 45º com relação aos eixos principais da fibra, o coeficiente de ganho g (ganho $G \propto e^{gL}$, onde L é o comprimento da fibra) é metade daquele obtido no caso em que o bombeio está alinhado com os eixos principais. Em unidades logarítmicas (dB), o ganho quando o laser está a 45º dos eixos é metade daquele obtido quando o laser está alinhado com um dos eixos principais da fibra. Isto explica a forte dependência do espectro Brillouin com a polarização observada em nossos experimentos, dado que um fator ½ em g

corresponde a um ganho $\sqrt{G}$ (no caso da figura 2, por exemplo, $21\,\text{dB} = 10\log\left(G/\sqrt{G}\right) \Rightarrow G \cong 10^4$ explica o observado).

Outro parâmetro que deve depender da polarização do bombeio é o desvio de freqüência da linha Brillouin. Como os eixos principais da fibra têm índices de refração efetivos diferentes (modos com constantes de propagação diferentes), a condição de casamento de fase (*phase-matching*) resulta em uma diferença nos desvios de freqüências. Usando a birrefringência medida estimamos uma diferença de freqüência de:

$$\Delta f = \frac{2V_L}{\lambda}\Delta n = 3{,}1\ \text{MHz},$$

onde V_L é a velocidade das ondas acústicas longitudinais, $\lambda = 1550\ \text{nm}$ é o comprimento de onda no vácuo do laser de bombeio, e $\Delta n = 4 \cdot 10^{-4}$ é a diferença entre os índices de refração dos eixos rápido e lento.

Medimos então os desvios de freqüência para cada polarização, usando o mesmo esquema experimental da Figura 3. 16. A luz retro-espalhado na saída da porta 3 do circulador contém uma componente espectral na freqüência do laser de bombeio, devido à reflexões lineares, e outra componente cuja freqüência é desviada daquela do bombeio pela freqüência de Brillouin, devido ao retro-espalhamento. A potência do laser de bombeio refletida linearmente é alta o suficiente para detectarmos o sinal de batimento entre a portadora e a componente Brillouin e analisarmos em um analisador de espectro elétrico. A Figura 3. 18 mostra alguns espectros medidos para diferentes polarizações do laser de bombeio (lembremos que o espectro de espalhamento consiste de três picos mas aqui estamos nos concentrando apenas no pico mais intenso). As curvas azul e preta (linhas contínuas) correspondem ao espectro Brillouin para os casos em que o bombeio está alinhado com os eixos lento e rápido da fibra fotônica, respectivamente. Vemos claramente uma diferença entre a freqüência central destes espectros. Medimos esta diferença obtendo $\Delta f = 3.5\,\text{MHz}$, em concordância com o valor calculado a partir da birrefringência da fibra. A curva vermelha corresponde ao caso em que o bombeio está alinhado a 45º dos eixos principais, orientação que minimiza o espalhamento, e a freqüência Brillouin neste ponto é aproximadamente a média das freqüências dos casos de máximo espalhamento (alinhamento do bombeio com os eixos principais).

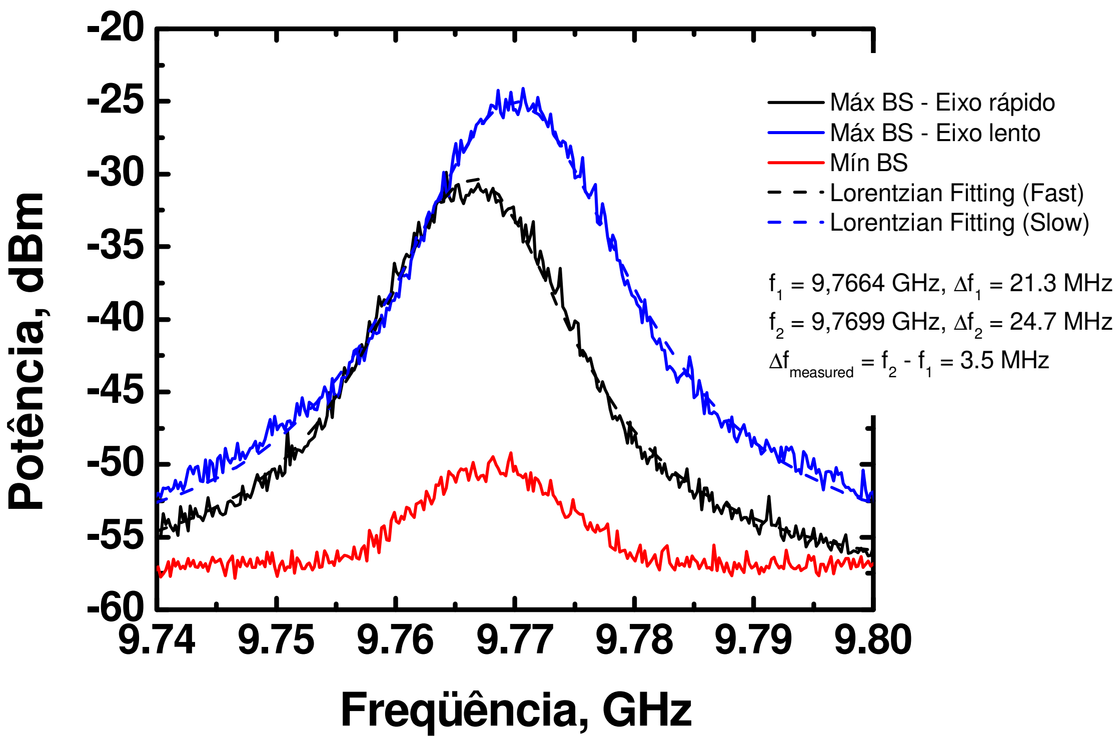


Figura 3. 18: desvio de freqüência do pico de espalhamento Brillouin BS quando o laser incidente está polarizado no eixo rápido (curva preta) ou lento (curva azul); A curva vermelha mostra uma polarização intermediária;

3.2. Co-espalhamento Brillouin: resultados experimentais

Descrevermos primeiramente os experimentos sobre retro-espalhamento Brillouin foi uma escolha baseada simplesmente na ordem cronológica do trabalho. O prosseguimento natural do trabalho seria, de fato, investigarmos também o processo de co-espalhamento Brillouin (CO). Entretanto, uma estranha observação experimental foi o quê na verdade nos levou a tal linha de investigação. Quando medíamos o espectro de retro-espalhamento Brillouin, além dos picos de espalhamento em torno de $10\ \mathrm{GHz}$, em algumas situações em geral de alta potência incidente, observávamos também picos de espalhamento em freqüências bem mais baixas, em torno de $2\ \mathrm{GHz}$. A princípio, investigamos diversas possíveis origens para um pico de retro-espalhamento Brillouin nesta freqüência tão baixa. Fizemos modelos numéricos dos modos acústicos da fibra fotônica para entendermos se era possível existir algum modo acústico oscilando a $2\ \mathrm{GHz}$ que satisfizesse as condições de conservação de momento e energia, fato este não observado em fibras convencionais. O que complicou a trajetória de nossa pesquisa foi que sim, de fato existiam modos *phase-matched* a $2\ \mathrm{GHz}$. Estes modos originavam-se da vibração das membranas de vidro da estrutura da casca, com aproximadamente $100\ \mathrm{nm}$ de espessura de $1\ \mu\mathrm{m}$ de comprimento. Como as membranas estavam ligadas ao núcleo, é natural esperarmos que alguma perturbação na região do modo óptico poderia existir, mas nossos cálculos resultavam em uma eficiência de espalhamento muito pequena, não sendo coerente com nossas observações experimentais. Passamos então a considerar a possibilidade de co-espalhamento Brillouin, imaginando que na verdade o sinal de retro-espalhamento observado poderia ser reflexão linear da luz co-espalhada (basicamente, por reflexões na face final da fibra). Medimos então o espalhamento Brillouin na direção co-propagante ao laser de bombeio e também observamos o pico de $2\ \text{GHz}$, neste caso pelo menos $20\ \text{dB}$ mais intenso que no caso de retro-espalhamento, para uma mesma potência de bombeio, como mostra a Figura 3. 19. Observamos ainda outros picos adjacentes de espalhamento, que não apareciam quando a medida era feita com o sinal retro-espalhado. Claramente vemos isto na Figura 3. 19. As freqüências medidas destes picos são: $1,78\ \text{GHz}$, $1,91\ \text{GHz}$, $2,00\ \text{GHz}$, $2,02\ \text{GHz}$ e $2,06\ \text{GHz}$. Começamos então a investigar o co-espalhamento Brillouin.

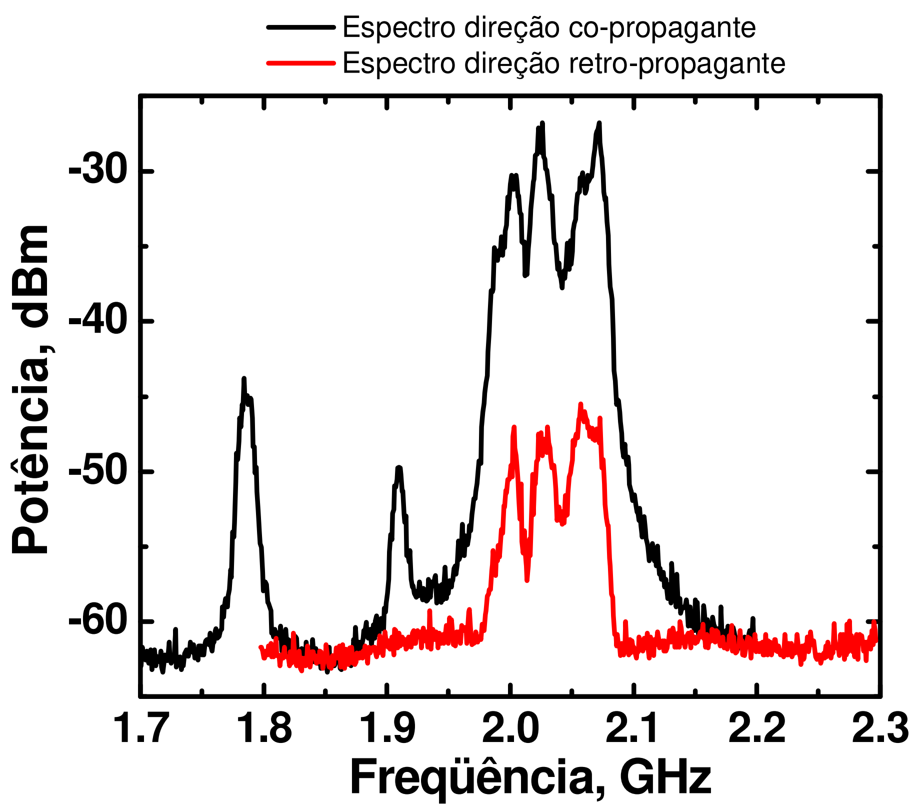


Figura 3. 19: Espectro de espalhamento Brillouin na região de 2 GHz medidos na direção Forward (curva preta) e Backward (curva vermelha);

Nos capítulos introdutórios, vimos que o co-espalhamento Brillouin é proibido em *bulk* por considerações de conservação de energia e momento. Mencionamos no capítulo 1, e exploramos este fato com mais detalhes no capítulo 5, que quando as ondas acústicas estão confinadas transversalmente, como no caso de um guia de onda acústico, as relações de dispersão são fortemente alteradas na região do *cut-off*, permitindo o co-espalhamento. Esta característica dá origem a um processo de espalhamento muito similar ao espalhamento Raman, mesmo sendo originado por fônons acústicos. Uma conseqüência direta é que podemos realizar medidas de bombeio e prova (*pump and probe*), sem equivalentes no caso anterior de retro-espalhamento. Lembremos que naquele caso, a onda acústica excitada pelo bombeio tinha o vetor de onda e a freqüência exatos para o que as condições de casamento de fase e conservação de energia fossem satisfeitas. Um segundo laser de prova, em outro comprimento de onda, não satisfaz as mesmas condições de conservação de energia e momento e, portanto, não é espalhado pela onda acústica gerada pelo bombeio. Aqui a situação é diferente. Como na região de *cut-off*, a relação de dispersão dos fônons acústicos é praticamente plana (freqüência praticamente independente da constante de propagação), lasers de diferentes comprimentos de onda são casados em fase (*phase-matched*) com a mesma onda acústica.

Em fibras ópticas convencionais, as ondas acústicas não estão confinadas no núcleo e sim distribuídas em toda a seção transversal da casca da fibra. Entretanto, a casca também é finita, de modo que podemos dizer que há algum confinamento transverso, possibilitando o co-espalhamento Brillouin. A primeira medida de co-espalhamento Brillouin foi realizada por Shelby et al [20, 55] e reporta o espectro de espalhamento espontâneo causado por modos acústicos excitados termicamente em uma fibra óptica de 125 μm de diâmetro da casca. Shelby et al apresentaram também um modelo simples de um cilindro de vidro, com o diâmetro igual ao diâmetro da casca da fibra. Este modelo é muito eficiente para a descrição das observações experimentais. Basicamente, o espectro de espalhamento Brillouin em fibras convencionais apresenta dezenas de picos de espalhamento com freqüências que vão de alguns MHz até algumas centenas de MHz. Esta faixa de freqüências é determinada basicamente pelo diâmetro da casca da fibra convencional.

Uma outra série de experimentos mais recentes acerca do co-espalhamento Brillouin envolve a excitação impulsiva de modos acústicos e o seu impacto em sistemas de comunicações ópticos [56-65]. Neste caso, os modos acústicos envolvidos não são mais aqueles excitados termicamente, mas sim excitados por um pulso óptico de alta intensidade, através do efeito de eletrostrição. Discutiremos com detalhes este efeito adiante e também no capítulo 4. Neste momento, é suficiente mencionarmos apenas que um pulso óptico excita um pulso acústico no núcleo da fibra convencional. Vários experimentos reportados na literatura mostram que o pulso acústico não fica *preso* no núcleo, ou seja, não fica confinado na mesma região que a luz. Este pulso, ao invés, propaga-se na direção transversal da fibra (lembremos que estamos no *cut-off*), saindo do núcleo em direção da casca. Ao chegar na borda externa da casca, o pulso acústico é refletido de volta em direção ao núcleo e assim por diante. O resultado é que a interação acusto-óptica ocorre apenas nos pequenos intervalos de tempo em que o pulso acústico atravessa o núcleo, se repetindo a cada $21\ \text{ns}$, que é o tempo de viagem das ondas acústicas (com velocidade c_L) do núcleo para a casca de $125\ \mu\text{m}$ e de volta ao núcleo ($33\ \text{ns}$ para o caso das ondas transversais, com velocidade c_T). A figura Figura 3. 20 mostra a modulação de freqüência óptica causada por um pulso acústico excitado por eletrostrição reportado por Mouza et al, e o comportamento típico é uma série de *spikes* a cada 21 ns ou 33 ns.

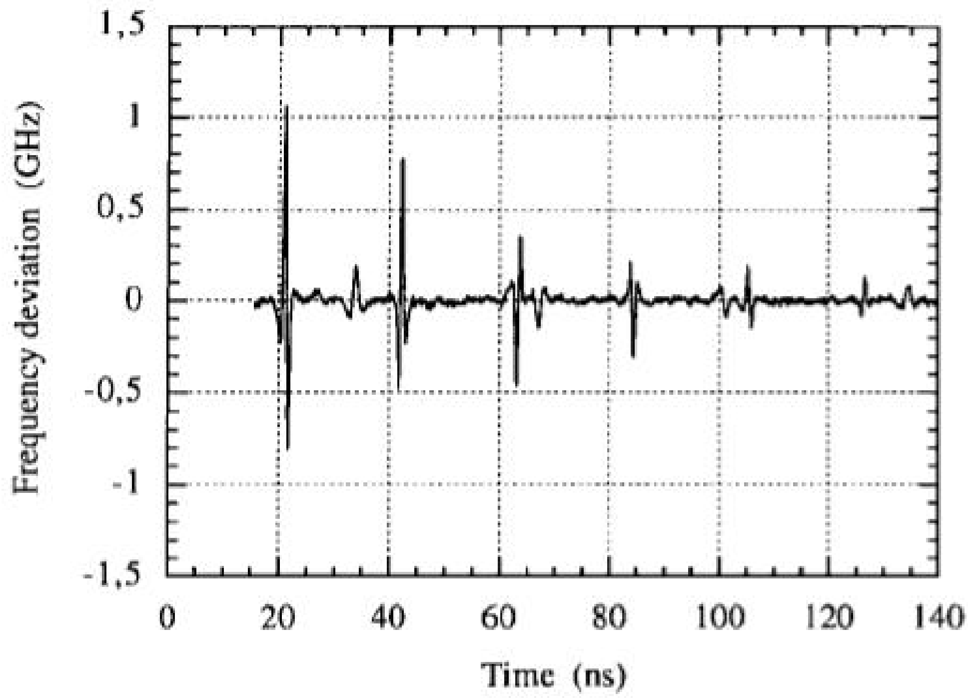


Figura 3. 20: resposta impulsiva obtida em uma fibra convencional reportada por Mouza et al [62], mostrando a modulação da freqüência óptica (através da modulação do índice de refração) devido ao um pulso acústico excitado no núcleo da fibra. A resposta típica é uma série de *spikes* separados por 21 ns para o caso das ondas longitudinais ou 33 ns para as transversais. Estes intervalos de tempo correspondem aos tempos necessários paras que as ondas acústicas (longitudinais ou transversais) se propaguem do núcleo para a casca e de volta para o núcleo. O não-confinamento acústico no núcleo é explícito.

Basicamente, estes experimentos em fibras convencionais comprovam o não confinamento acústico. Uma conseqüência disto é que a utilização da interação acusto-óptica em dispositivos a fibra fica bastante limitada, como moduladores ópticos por exemplo. Nosso trabalho mostra que em fibras fotônicas, as ondas acústicas estão sim confinadas no núcleo. No restante deste capítulo mostramos nossas observações experimentais e nos capítulos 4 e 5 desenvolvemos modelos para explicar o confinamento. Antes de prosseguirmos com os experimentos, um comentário intrigante cabe ser feito. A velocidade das ondas acústicas no ar é muito menor que no vidro, aproximadamente 10 vezes menor. Se pensarmos (de maneira simplista) que a velocidade do som na casca micro-estruturada está num valor intermediário entre o vidro e o ar, concluímos que a velocidade na casca é menor que no núcleo. Portanto a fibra fotônica constituiria um anti-guia acústico. Como é possível haver confinamento em um anti-guia? Exploramos esta pergunta nos capítulos 4 e 5, mas basicamente consideramos efeitos de *gap* fonônico como uma possível explicação; ou mesmo a possibilidade de que as ondas acústicas ficam no núcleo devido à *dura* interface acústica vidro-ar, formando forte refletor para o pulso acústico. Neste caso o modo não seria confinado e sim um modo *leaky*, mas a perda por reflexão seria pequena o bastante para manter por algum tempo a onda acústica no núcleo.

Antes de iniciarmos com as medidas de excitação impulsiva, descrevemos primeiramente algumas caracterizações e medidas de espalhamento espontâneo. Novamente, como os modos acústicos envolvidos no co-espalhamento são modos no *cut-off*, ou seja, com constante de propagação nula, a perturbação causada por estes modos no índice de refração é *não-propagante*. Basicamente, causando uma modulação de fase (ou na freqüência óptica instantânea) no laser incidente. Esta perturbação pode ser isotrópica ou anisotrópica dependendo da estrutura do modo acústico. Por exemplo, em um guia cilíndrico com seção transversa circular, modos acústicos radialmente simétricos (ou com simetria azimutal) causam perturbações isotrópicas no índice, e o resultado é uma modulação de fase pura qualquer que seja a polarização incidente. Já se o modo acústico não é isotrópico, com dependência no ângulo azimutal (e isto obviamente depende da estrutura do guia e do material), a perturbação pode causar uma anisotropia no índice de refração. Mais ainda, esta anisotropia ou mais simplesmente esta birrefringência é oscilante no tempo, com a freqüência de oscilação igual à do modo acústico envolvido. Sabemos que nossas fibras são altamente birrefringentes, e a birrefringência é causada pela estrutura. Fisicamente, é natural esperarmos também que os modos acústicos sigam esta estrutura e causem uma perturbação anisotrópica. Mais ainda, é também natural esperarmos que os eixos principais da perturbação sigam a mesma orientação dos eixos ópticos. Notemos que esta afirmação não é completamente geral e depende, por exemplo, se o meio acústico é isotrópico e elástico. No nosso caso, entretanto mostramos que é válida. Reforcemos um pouco este ponto. A fibra é birrefringente, como já demonstramos experimentalmente. O que estamos dizendo aqui é que os modos acústicos vão causar uma *birrefringência extra*, não mais estática, mas sim oscilante no tempo. Cada componente do campo óptico (ao longo dos eixos principais) sofre diferentes perturbações no índice de refração, mas claro com a mesma freqüência, já que são originadas do mesmo modo acústico. Na prática, o resultado é que o estado de polarização passa a oscilar no tempo. A idéia da montagem experimental mostrada na Figura 3. 21 é justamente transformar esta modulação de polarização em modulação de amplitude para podermos detectá-la com um fotodiodo. Vejamos com detalhes.

3.2.1. Montagem experimental para a medida do espectro de co-espalhamento Brillouin

Basicamente temos um esquema que nos permite ajustar a polarização do laser incidente com relação à orientação dos eixos principais. O laser contínuo (CW, *continuous-wave*) passa por uma montagem auxiliar de modulação que está mostrada no *inset* da figura. Quando ligamos a modulação, geramos pulsos curtos que podem ser detectados na saída da fibra com um osciloscópio rápido. Como na seção anterior, ajustamos o controlador de polarização e caracterizamos a orientação dos eixos principais com o Polarímetro. Notemos que temos que fazer isso todas as vezes que realinhamos o sistema (de um dia para o outro ou quando clivamos a fibra). Usando o Polarímetro medimos a orientação dos eixos principais e, uma vez caracterizados os eixos de birrefringência, desligamos o sistema de modulação voltando ao regime de operação contínuo. Nosso objetivo novamente é medir o espectro da luz espalhada no regime espontâneo (baixa intensidade incidente).

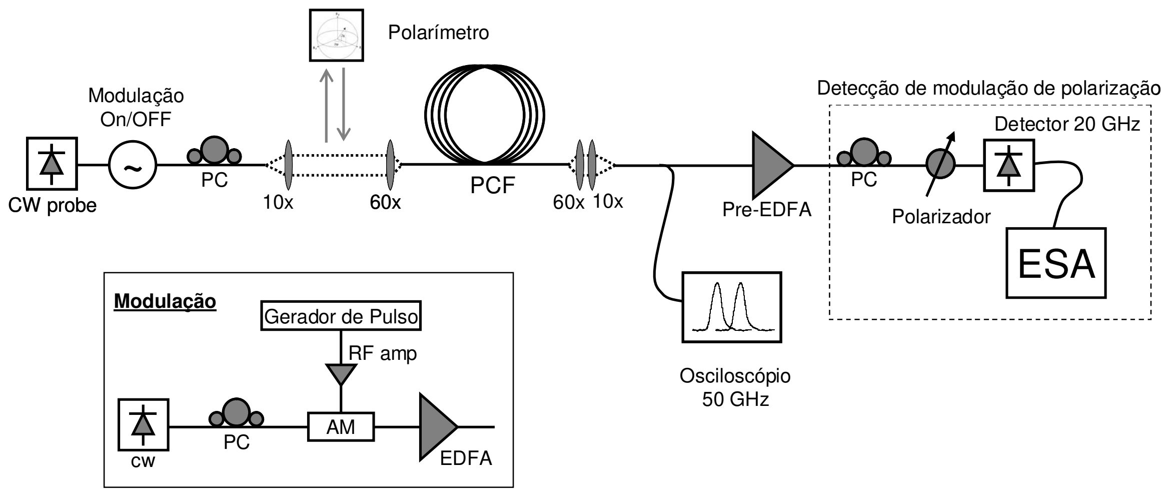


Figura 3. 21: montagem experimental para a medida do espectro de espalhamento espontâneo em fibras fotônicas. O sistema de detecção transforma a modulação de polarização em modulação de amplitude, podendo ser detectado em um fotodiodo;

Diferentemente do caso de retro-espalhamento, agora não precisamos mais de uma referência externa, já que o laser incidente propaga-se na mesma direção da luz espalhada e pode ser usado diretamente como referência para a medida de auto-heterodinagem (*self-heterodyne*). O quê fizemos aqui foi alterar o sistema detecção de modo a detectarmos modulação de birrefringência ou polarização [20]. Ajustando a polarização do laser incidente de modo a excitarmos ambos os eixos principais, a *birrefringência extra* induzida pelos modos acústicos faz com que o estado de polarização oscile temporalmente. Por exemplo, se o laser está linearmente polarizado a 45º dos eixos principais, a perturbação fará a polarização oscilar do estado linear para estados elípticos, como ilustra a Figura 3. 22. Neste exemplo, consideramos que a birrefringência e o comprimento de interação são grandes o suficiente para a polarização não somente sair de linear para elíptica, mas também chegar até o estado circular.

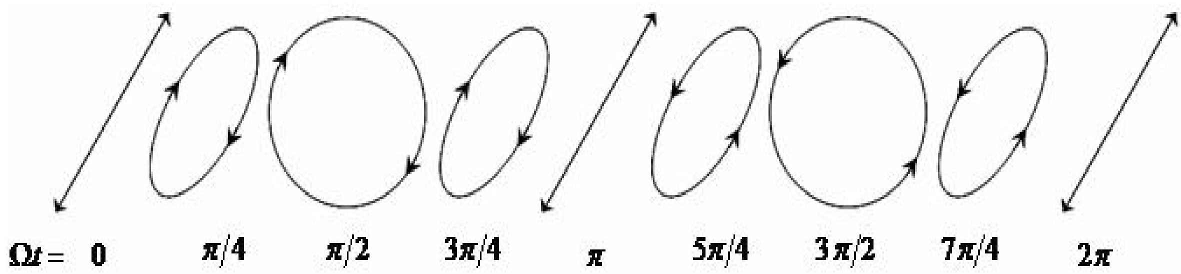


Figura 3. 22: evolução temporal da polarização devido à birrefringência induzida pelas ondas acústicas. O exemplo desta figura foi gerado para uma birrefringência oscilando com o tempo;

Como é óbvio da Figura 3. 22, o resultado é que uma componente ortogonal à polarização incidente é gerada. Se inserirmos um polarizador, quase ortogonal ao laser incidente, uma pequena fração da potência incidente é transmitida e serve como referência para o batimento com o sinal ortogonal gerado pela perturbação. A otimização do sinal de batimento é feita utilizando controladores de polarização na entrada da PCF e também o outro na saída, antes do polarizador. Para pequenas perturbações é possível mostrar que o sinal de batimento é proporcional à modulação no índice de refração. Detectamos o sinal de batimento em um fotodetector rápido ($20\ \mathrm{GHz}$ de banda), amplificando-o com um pré-amplificador de rádio-frequencia (RF) de baixo ruído, e então medido o sinal resultante em um analisador de espectro elétrico com 1 MHz de resolução.

3.2.2. Resultados: espectro de co-espalhamento espontâneo

O espectro de espalhamento espontâneo para a fibra com $1,22\ \mu m$ de diâmetro está mostrado na Figura 3. 23(a). Vemos que as freqüências dos picos de espalhamento estão em torno de $2\ GHz$ e que apenas alguns picos estão presentes, em oposição ao caso de fibras convencionais onde dezenas de modos acústicos com freqüências aprecem no espectro. Vemos que o pico mais intenso em $2\ GHz$ é na verdade composto de 3 freqüências: $2,00\ GHz$, $2,02\ GHz$ e $2,06\ GHz$. Picos adjacentes de menores intensidades aparecem nas freqüências de $1,55\ GHz$, $1,79\ GHz$, $1,91\ GHz$, $2,47\ GHz$, $3,31\ GHz$ e $3,67\ GHz$. Fora da janela de 1 a $4\ GHz$ mostrada na figura, não pudemos observar nenhum outro pico de espalhamento. Medimos também o espectro de espalhamento da fibra de $1,25\ \mu m$ e a Figura 3. 23(b) mostra uma comparação entre o resultado para as duas fibras. Vemos que nesta segunda fibra de diâmetro maior, o pico principal também está centrado em $1,97\ GHz$. A freqüência um pouco menor que o pico principal em $2\ GHz$ do caso anterior está de acordo com o diâmetro um maior desta fibra. Entretanto, não observamos outros picos de espalhamento como no caso da fibra menor de $1,22\ \mu m$. Possíveis explicações para estas diferenças observadas são discutidas no capítulo 4.

São duas as principais diferenças entre as medidas aqui reportadas e as observações feitas em fibras convencionais. A primeira é a quantidade muito pequena de modos acústicos envolvidos, resultado numa pureza espectral maior. A segunda é a freqüência bem mais alta, indicando o forte confinamento transversal dos modos acústicos. Além disso, a natureza do espectro de espalhamento de fibras convencionais é bem explicada modelando a fibra como um cilindro de vidro, mas, aqui a complexidade da estrutura requer uma análise numérica. Mostramos no capítulo 4 que uma análise simplificada de um cilindro é suficiente apenas para estimarmos a ordem de grandeza da freqüência de espalhamento, mas não suficiente para explicarmos a estrutura complexa do espectro de espalhamento. Outro importante aspecto é que não apenas a luz encontra uma estrutura periódica na casca, mas também as ondas acústicas. Possíveis efeitos desta microestrutura como, por exemplo, efeitos de *gap* fonônico são também considerados no capítulo 5.

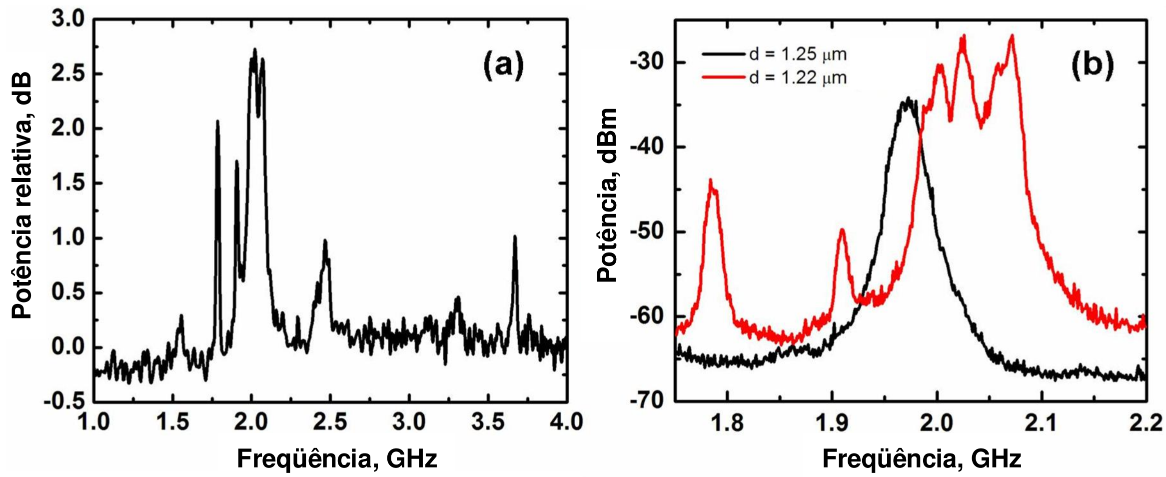


Figura 3. 23: (a) espectro de co-espalhamento Brillouin espontâneo para a fibra fotônica de $1,22\ \mu m$ e (b) comparação dos espectros de espalhamento para as duas PCFs de diâmetros pequenos: curva vermelha correspondente à medida para a fibra de $1,22\ \mu m$ e a curva preta correspondente à medida para a fibra de $1,25\ \mu m$ de diâmetro.

3.2.3. Montagem experimental para os experimentos de Excitação impulsiva – *Raman-like scattering*

Passamos agora à descrição dos experimentos de excitação impulsiva, os quais revelam com muito mais clareza o confinamento acústico. Como mencionamos, experimentos de excitação impulsiva têm sido realizados em fibras convencionais e reportados na literatura. Retomemos a idéia central. Utilizamos um laser pulsado e intenso (bombeio) para excitar um pulso acústico no núcleo e um outro laser contínuo (prova) para medirmos a dinâmica do pulso acústico ao se propagar transversalmente na fibra. O esquema experimental da Figura 3. 24 foi utilizado para a medida de excitação impulsiva utilizando a técnica bombeio e prova. O laser de bombeio é modulado usando um modulador de amplitude de Niobato de Lítio e um gerador elétrico de pulsos curtos de $100\ \mathrm{ps}$ de duração de taxa de repetição de $15\ \mathrm{MHz}$. A taxa de repetição deve ser baixa o suficiente para que a separação temporal entre os pulsos seja maior que o tempo de vôo dos pulsos acústicos do núcleo para a casca e de volta para o núcleo (veja discussão a seguir). Usamos um amplificador óptico (EDFA) para aumentar a potência de pico do laser de bombeio. A potência nominal do amplificador é $2\ \mathrm{W}$ mas não conseguíamos extrair mais que $1\ \mathrm{W}$ aproximadamente. Conseguíamos potências de pico aproximadamente 100 vezes maiores que a potência média do amplificador, ou seja, $100\ \mathrm{W}$. Entretanto este nível de potência era mais que o suficiente para nossas medições. Levando em consideração uma perda de 50% no acoplador, perdas dos componentes ópticos e perdas de acoplamento na PCF de aproximadamente $10\ \mathrm{dB}$, a energia do pulso óptico acoplada no núcleo da fibra pode chegar a algumas centenas de pJ. O laser de bombeio tem comprimento de onda de

$1561\,\text{nm}$ e o laser de prova $1530\,\text{nm}$. Quanto menor a separação entre o bombeio e a prova, mais eficientemente satisfazemos as condições de *phase-matching* simultâneas. Mais ainda, menor é a dispersão temporal entre os lasers ao se propagarem pela fibra. Entretanto, devemos lembrar que a potência do bombeio é alta e efeitos não-lineares como mistura de quatro ondas, instabilidade modulacional e amplificação paramétrica podem ocorrer. Verificamos que para a separação escolhida não havia nenhuma interação não-linear observada que pudesse degradar as medições (para distâncias menores sim, observávamos amplificação paramétrica e mistura de quatro ondas, de algum modo distorcendo o sinal detectado). Efeitos de modulação de fase cruzada acontecem independentemente da separação espectral dos lasers de bombeio e prova. Portanto, devido a este efeito, a rotação da polarização do laser de prova nos primeiros $100-200\,\text{ps}$ após a excitação das ondas acústicas causa interferência na medida.

O sistema de detecção (Figura 3. 24) é basicamente o mesmo da medida do espectro espontâneo com exceção de que agora temos que inserir um filtro óptico na saída da fibra para eliminarmos o laser de bombeio. Notemos também que o sinal detectado com o fotodiodo é agora analisado em um osciloscópio já que estamos interessados na resposta dinâmica da fibra. Um Polarímetro é utilizado para alinhar as polarizações de entrada tanto do laser de bombeio quanto do laser de prova, assim como fizemos na seção anterior de retro-espalhamento. O laser de bombeio é polarizado ao longo de um dos eixos principais da fibra e variamos a polarização do laser de prova.

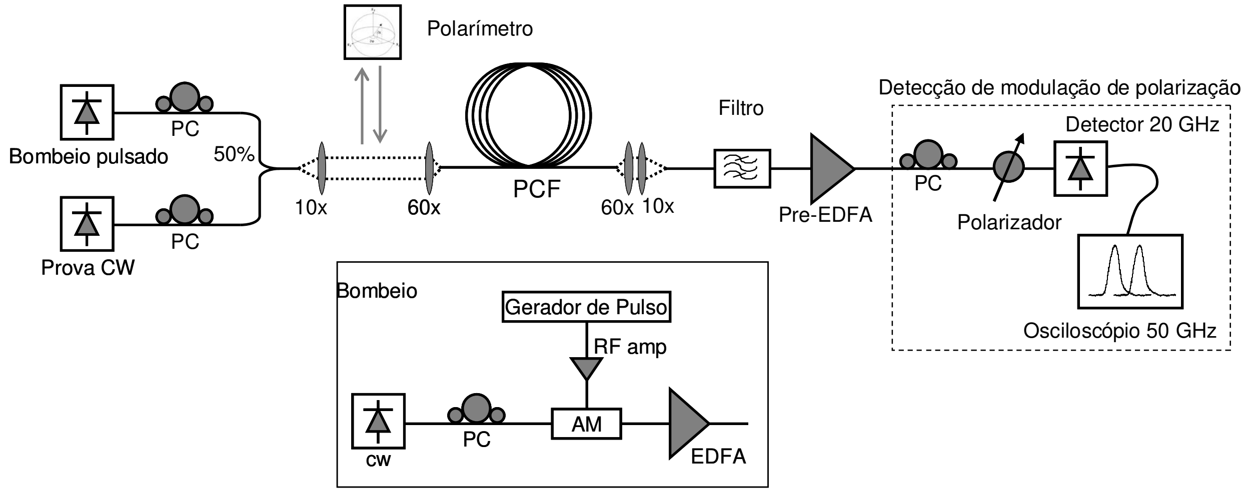


Figura 3. 24: montagem experimental utilizada nos experimentos de bombeio e prova. Um laser pulsado excita impulsivamente modo acústicos no núcleo da PCF e um laser contínuo prova o efeito das ondas acústicas. O *inset* mostra o esquema utilizado para a geração de pulsos ópticos;

3.2.4. Resposta impulsiva: resultados

A Figura 3. 25 mostra o sinal detectado com um fotodiodo rápido para o caso da fibra fotônica de $1,22\ \mu\text{m}$ de diâmetro. O eixo vertical é diretamente o sinal detectado em mV e, como veremos adiante, este sinal é proporcional à perturbação do índice de refração. Notemos que, ao invés de uma série de spikes separados a cada $21\ \text{ns}$ ou $33\ \text{ns}$, a resposta obtida é um sinal *quasi-senoidal*, que representa uma interação contínua entre a onda acústica excitada e o laser de prova. Este resultado mostra claramente que a onda acústica fica de fato confinada no núcleo da PCF e interage com a luz por um longo período de tempo ($>50\ \text{ns}$). O tempo de decaimento observado é aproximadamente $10\ \text{ns}$. O *inset* mostra a resposta no intervalo de $1\ \text{ns}$ a $6\ \text{ns}$, e vemos mais claramente a característica quasi-senoidal, ou seja, ma oscilação de alta freqüência modulada por uma envoltória, indicando que mais de uma freqüência compõem o sinal.

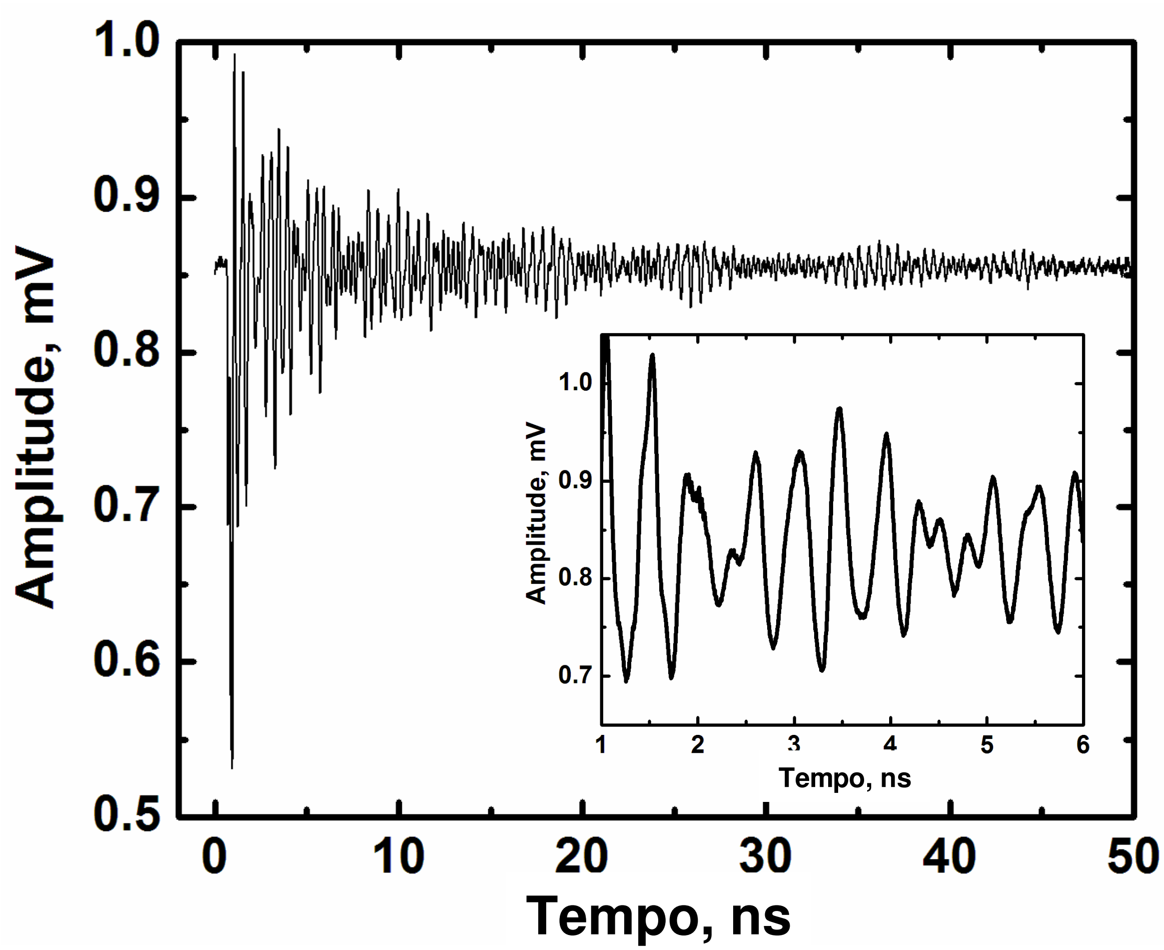


Figura 3. 25: sinal detectado no fotodiodo da montagem mostrada na figura Figura 3. 24, mostrando a resposta impulsiva da fibra fotônica de $1,22\ \mu m$ de diâmetro. O resultado demonstra uma interação contínua entre o pulso acústico e o laser de prova, em contraste com a série de *spikes* observado em fibras convencionais. Inset: zoom da região de $1-6$ ns para melhor visualização da resposta impulsiva;

3.2.5. Modulação de índice: polarização do laser de prova

Assumindo que os eixos principais da perturbação acústica são coincidentes com os eixos ópticos, máxima visibilidade do sinal de batimento é obtida quando o laser de prova é circularmente polarizado, excitando igualmente ambos os eixos. Este ponto é descrito em detalhes no capítulo 5, e por aqui assumamos como verdade. Como conseqüência a componente ao longo do eixo rápido (digamos *y*) serve como um oscilador local para detectarmos a modulação de fase da componente ao longo do eixo lento (digamos *x*), e vice-versa. O fato de estarem circularmente polarizados implica que as bandas de modulação estão em quadratura de fase, e a modulação de fase em um eixo vira modulação de amplitude no outro. Se as componentes estivessem em fase (luz linearmente polarizada), a modulação de fase de uma componente também seria modulação de fase na componente ortogonal. Para pequenas perturbações de índice, o sinal detectado é dado aproximadamente por

$$V = \bar{V}\left[1 \pm \frac{2\pi L}{\lambda}\Delta n(t)\right], \tag{3.2}$$

onde $\Delta n = \Delta n_{\mathrm{y}} - \Delta n_{\mathrm{x}}$ é a diferença entre as perturbações induzidas ao longo dos eixos rápido (Δn_{y}) e lento (Δn_{x}), respectivamente, $\bar{V}$ é o nível DC do sinal detectado, e os sinais + e – aplicam-se à polarizações circulares à direita e à esquerda.

A Figura 3. 26 mostra duas medidas da excitação impulsiva para os casos do laser de prova polarizado circularmente à direita e à esquerda. Reduzimos a janela temporal para melhor visualização. A quase perfeita complementaridade das curvas está em pleno acordo com o esperado pela equação (3.2), e reforça a confiança na montagem experimental.

Notemos que existe uma pequena diferença no nível DC das duas curvas, que acreditamos ser devido a uma perda dependente da polarização na montagem.

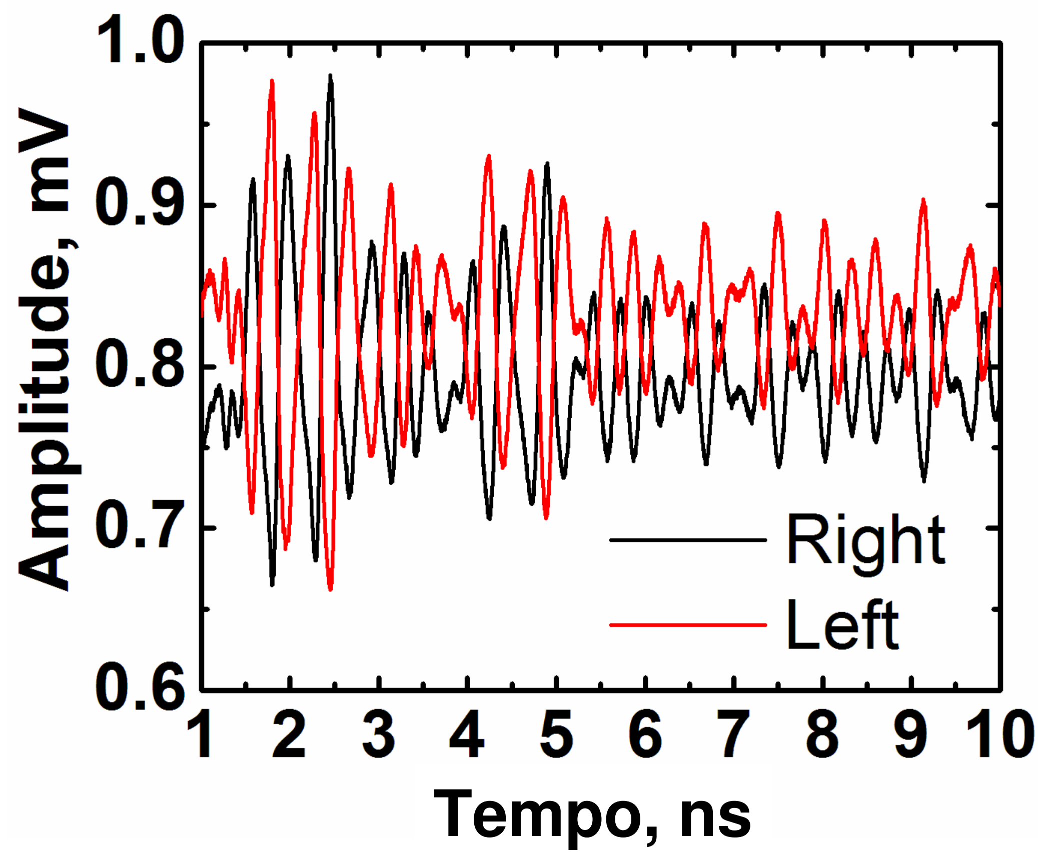


Figura 3. 26: medidas da excitação impulsiva para polarizações circulares à direita (curva preta) e à esquerda (curva vermelha). O caráter complementar está em acordo com a equação (3.2);

3.2.6. Comparação das PCFs de núcleo pequeno

Medimos também a resposta impulsiva para a fibra de $1,25\ \mu\text{m}$ e uma comparação entre os resultados para as duas fibras está mostrada na Figura 3. 27, em uma janela temporal de 20 ns para melhor visualização. Notemos que usamos a equação (3.2) e os comprimentos das fibras para transformar o sinal detectado em modulação de índice. Vemos que, diferentemente do resultado para a fibra menor mostrado em (a), a resposta impulsiva para a fibra maior mostrada em (b) apresenta uma maior pureza espectral, resultado em acordo com o único pico de espalhamento observado no espectro espontâneo.

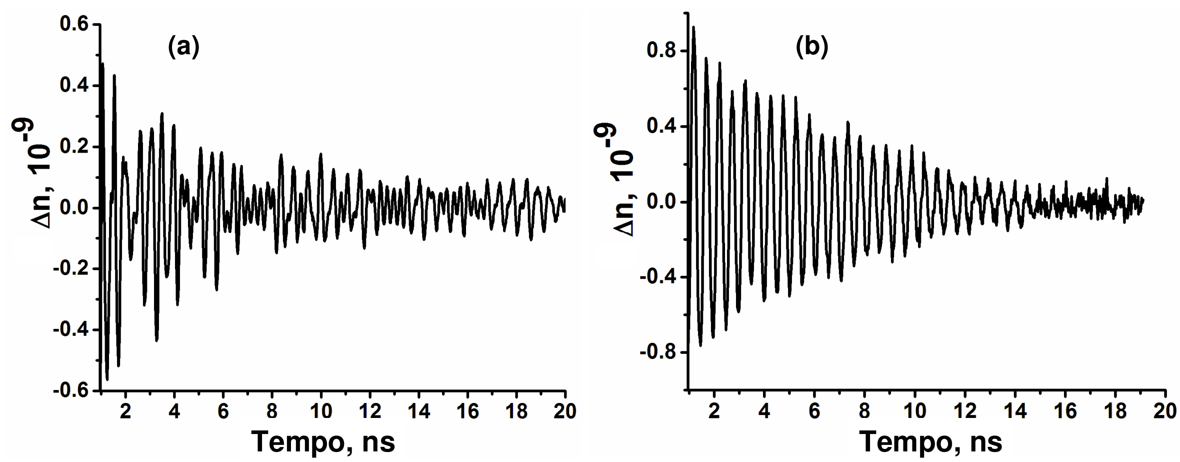


Figura 3. 27: comparação das medidas de resposta impulsiva para as duas fibra de diâmetro pequeno: (a) para a fibra de $1,22\ \mu m$ e (b) para a fibra de $1,25\ \mu m$;

Tomando a transformada de Fourier da resposta impulsiva temos os espectros mostrados na Figura 3. 28. Notemos que o resultado obviamente confirma que a fibra de núcleo maior contém apenas uma freqüência enquanto a fibra menor, um número maior de modos está presente. Como esperado, as mesmas freqüências observadas nos espectros de espalhamento espontâneo estão presentes na excitação impulsiva. Entretanto, é valido mencionar que as amplitudes relativas são diferentes. Por exemplo, na fibra menor, o pico de em torno de $3,67$ GHz aparece mais intenso que no espectro espontâneo. Uma possível explicação é que o mecanismo de excitação é diferente de um experimento para o outro. No caso espontâneo os modos acústicos são excitados termicamente enquanto na excitação impulsiva, a força de eletrostrição é o mecanismo de excitação.

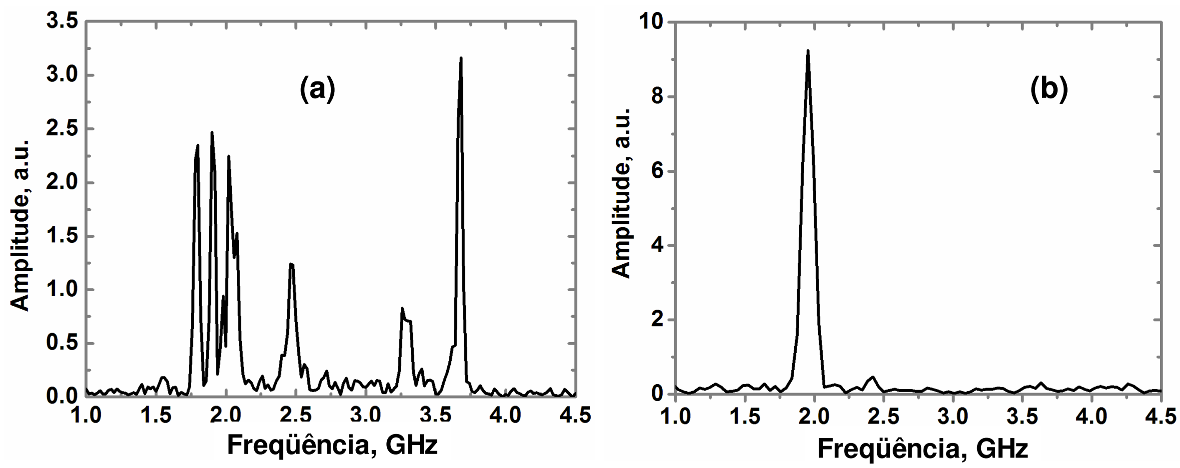


Figura 3. 28: Transformadas de Fourier das respostas impulsivas mostradas na Figura 3. 27 para (a) a fibra de $1,22\ \mu\text{m}$ e (b) para a fibra de $1,25\ \mu\text{m}$ de diâmetro.

Um comentário a respeito do tempo de decaimento das respostas obtidas. O tempo de decaimento medido diretamente nas Figura 3. 27 (a) e (b) é da ordem de $10\ \text{ns}$, que resulta em um fator de qualidade Q de aproximadamente $40\pi \approx 126$. Assumindo que a energia acústica está confinada no núcleo e que as perdas devem-se apenas às perdas viscosas do material, resulta numa taxa de atenuação de $25\ \text{mm}^{-1}$, aproximadamente 20 vezes maior que reportada na literatura para meios *bulk* [40]. Este resultado sugere que a energia acústica pode não estar perfeitamente confinada e algum "vazamento" pode estar ocorrendo. Uma possibilidade é que a casca micro-estruturada não seja larga o suficiente e as ondas acústicas podem *tunelar* para a região externa da fibra escapando do núcleo.

Capítulo 4 – Modelos teóricos: retro-espalhamento

O presente capítulo tem como objetivo apresentar os modelos desenvolvidos para explicar as observações experimentais descritas no capítulo 3. Tratamos aqui o caso de retro-espalhamento e no capítulo 5 o caso de co-espalhamento. Iniciamos este capítulo estudando o primeiro passo na transição de um meio infinito para uma região confinada: uma interface. Em seguida, passamos a estudar o espalhamento Brillouin em um cilindro de vidro no vácuo (que chamamos de modelo do *rod*), ou seja, em um guia tanto óptico quanto acústico. Apesar de simples, este modelo explicita a física da interação e facilita a análise mais sofisticada que apresentamos depois, onde calculamos numericamente os modos acústicos e ópticos de uma fibra fotônica e exploramos suas propriedades.

4.1. Acoplamento longitudinal-transversal em uma interface

A transição de um meio infinito para uma região confinada se dá por meio de interfaces. Interfaces entre diferentes materiais ou mesmo interface de um material com o vácuo. Portanto, achamos útil entender em detalhes, do ponto de vista acústico o papel de uma interface. Apesar de parecer simples, este é um tópico extenso e com uma riqueza de aspectos físicos impressionante. Uma rápida busca acerca do assunto na literatura nos traz nomes como os de Rayleigh, Brillouin e Lamb, todos cientistas que em algum momento dedicaram suas mentes a este assunto. Nosso objetivo aqui não é cobrir todos os aspectos deste assunto, mas apenas aqueles que julgamos serem diretamente relevantes nesta tese.

No capítulo 2, aprendemos que as ondas longitudinais e as ondas transversais são ambas soluções independentes da equação de onda acústica em um meio infinito, isotrópico e elástico. Seguindo a notação daquele capítulo, podemos escrever a solução geral da equação de onda expressando o vetor deslocamento da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}, \tag{4.1}$$

dado que as funções φ e ψ satisfazem as equações (2.7) e (2.8), para as ondas longitudinais e transversais. Esta solução é conhecida como solução de Lamè. Como vimos, em um meio infinito, isto é, sem condições de contorno, as ondas *L* (longitudinais ou dilatacionais) e *T* (transversais ou equivolumiais) propagam-se de maneira independente. A situação é diferente quando existe uma interface entre dois meios de propriedades acústicas diferentes como, por exemplo, uma interface vidro-vácuo. Ao incidir em uma determinada interface, as ondas puramente longitudinais ou transversais se acoplam, e a reflexão ou a refração contém ambas as componentes, mesmo que apenas uma delas incida na interface. Por exemplo, uma onda puramente longitudinal propagando-se no vidro é refletida em duas componentes ao incidir numa interface vidro-vácuo, uma das componentes sendo longitudinal e a outra transversal. Vejamos com mais profundidade alguns exemplos interessantes [36, 37].

Consideremos o semi espaço infinito $z<0$, $-\infty < x, y < +\infty$, como ilustra a Figura 4. 1. Apenas ondas planas propagando-se no vidro (região de $z<0$) com vetores de propagação ($\boldsymbol{k}_L$ e $\boldsymbol{k}_T$) contidos no plano xz serão analisadas. Estas ondas incidem na interface do vidro com o vácuo em $z=0$ (plano xy) e são refletidas. Chamamos de L_{inc} e T_{inc} as ondas longitudinais e transversais incidentes e de L_{ref} e T_{ref}, as refletidas. O vetor deslocamento total é a soma das ondas *L* e *T*, ou seja,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_L^{inc} + \boldsymbol{u}_T^{inc} + \boldsymbol{u}_L^{ref} + \boldsymbol{u}_T^{ref}, \tag{4.2}$$

onde lembramos que as componentes longitudinais apontam na direção do vetor de propagação $\boldsymbol{k}_L$, enquanto as componentes transversais apontam perpendicularmente à direção de propagação $\boldsymbol{k}_T$. Podemos escolher os eixos cartesianos de modo que a componente *T*, perpendicular à direção de propagação $\boldsymbol{k}_T$, esteja contida no plano xz, assim a componente u_y é nula. Desta forma simplificamos os cálculos eliminando todas as dependências em y, além de podermos escrever $\boldsymbol{u} = (u_x, 0, u_z)$. Em termos das funções potenciais, equação (4.1), o vetor deslocamento pode ser escrito como

$$\boldsymbol{u} = (u_x, 0, u_z), \quad u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \ \text{ e } \ u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{4.3}$$

De modo a representar a soma de todas as ondas *L* e *T*, incidentes e refletidas, as funções potenciais são escritas como

$$\begin{aligned} \varphi &= A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 \ \text{ e} \\ \psi &= A_3\psi_3 + A_4\psi_4, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \exp\left[j\omega t - jk_L \left(x\sin\alpha_1 - z\cos\alpha_1 \right) \right], \\ \varphi_2 &= \exp\left[j\omega t - jk_L \left(x\sin\alpha_2 + z\cos\alpha_2 \right) \right], \\ \psi_3 &= \exp\left[j\omega t - jk_T \left(x\sin\beta_3 - z\cos\beta_3 \right) \right], \\ \psi_4 &= \exp\left[j\omega t - jk_T \left(x\sin\beta_4 + z\cos\beta_4 \right) \right], \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde A_1 e A_2 são as amplitudes da ondas longitudinais incidente e refletida, L_{inc} e L_{ref}, enquanto A_3 e A_4 são as amplitudes das ondas transversais incidente e refletida, T_{inc} e T_{ref}. Conforme ilustra a Figura 4. 1, os ângulos de incidências são α_1 e β_3 para L_{inc} e T_{inc}, respectivamente, e os ângulos de reflexão são α_2 e β_4 para L_{ref} e T_{ref}, respectivamente.

Notemos que ambas ondas L e T compartilham da mesma freqüência angular ω, mas têm diferentes comprimentos de onda $\lambda_L = 2\pi c_L / \omega$ e $\lambda_T = 2\pi c_T / \omega$. Tipicamente, estudamos ondas acústicas de freqüências da ordem de $10\ \text{GHz}$ que, levando em conta as velocidades c_L e c_T em sílica fundida resultam em $\lambda_L = 597\ \text{nm}$ e $\lambda_L = 376\ \text{nm}$.

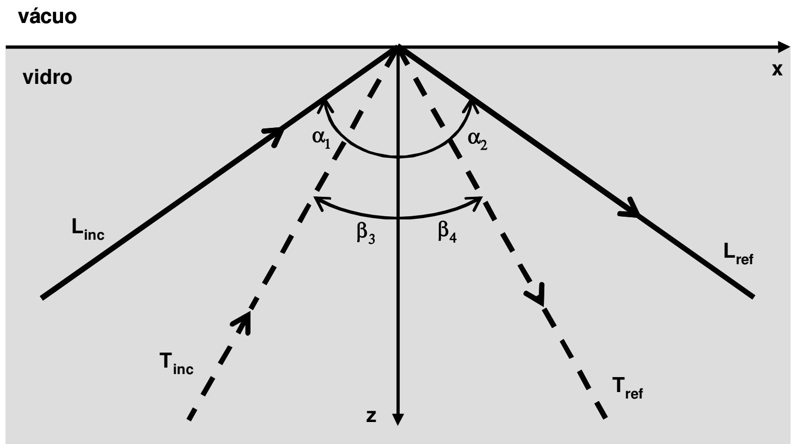


Figura 4. 1: ilustração do acoplamento longitudinal-transversal. Ondas puramente longitudinal (L_{inc}) ou transversal (T_{inc}), ao incidirem em uma interface livre de um semi-plano infinito são refletidas contendo ambas componentes longitudinal (L_{ref}) e transversal (L_{ref}); Os ângulos de incidência e reflexão estão mostrados na figura;

A origem do acoplamento dilatacional-equivolumial (ou seja, longitudinal-transversal) em uma interface está ligada às condições de contorno nesta interface, as quais em geral impõem restrições ao vetor deslocamento e ao tensor de tensão. Uma superfície completamente rígida por exemplo, implica que $\boldsymbol{u} = 0$ em todos os pontos desta superfície. Já uma superfície completamente livre implica que os elementos do tensor de tensão T_{ij} devem ser nulos nesta superfície. É útil, portanto, expressarmos os elementos do tensor de tensões em função das soluções obtidas para o vetor deslocamento, equação (4.3). Usando as relações entre o tensor de stress e o tensor de tensões e também a equação de onda acústica, podemos mostrar que [36, 37], em todo ponto,

$$
\begin{aligned}
T_{xx} &= \frac{\lambda}{c_L^2}\ddot{\varphi} + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right),\\
T_{zz} &= \frac{\lambda}{c_L^2}\ddot{\varphi} + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right),\\
T_{xz} &= \mu\left[\frac{\lambda}{c_T^2}\ddot{\varphi} + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\right],\\
T_{xy} &= T_{yz} = 0 \text{ e } T_{yy} = \nu\left(T_{xx} + T_{zz}\right),
\end{aligned}
$$

onde por simplicidade não incluímos termos de dissipação por viscosidade. Voltemos agora ao nosso exemplo específico do caso da interface vidro-vácuo. Como a superfície é livre, as tensões no plano $z = 0$ devem ser nulas. Aqui lembramos que a força por unidade de área (tensão) exercida em um plano ortogonal ao versor $\hat{z}$ é simplesmente $\boldsymbol{T}\cdot\hat{z} = T_{xz}\hat{x} + T_{yz}\hat{y} + T_{zz}\hat{z}$. Assim, devemos impor as seguintes condições de contorno

$$T_{zz} = T_{xz} = T_{yz} = 0 \text{ no plano } z = 0.$$

O vetor de tensões $\boldsymbol{T}\cdot\hat{z}$ representa a força (por unidade de área) de ação e reação entre as partículas contidas em dois planos adjacentes S_+ e S_-, perpendiculares ao vetor $\hat{z}$. Como ilustra a Figura 4. 2, estamos analisando o vetor de tensão exatamente na superfície livre vidro-vácuo, de modo que o plano S_+ está contido no vácuo e o plano S_- está contido no vidro. Obviamente, não há nenhuma partícula no plano que está *no vácuo*, S_+, e portanto não há força entre estes planos.

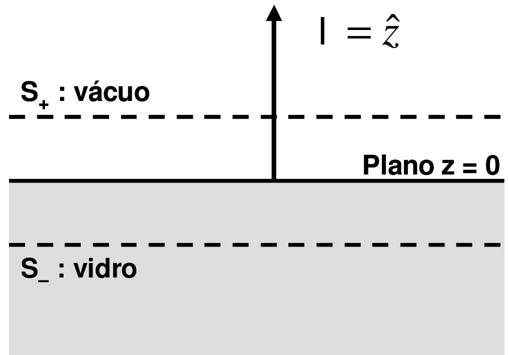


Figura 4. 2: ilustração da interface entre o semi-plano infinito e o vácuo, mostrando os planos adjacentes S_+ e S_-, perpendiculares ao vetor $\hat{z}$, exatamente dentro e exatamente fora do material. A condição de contorno a ser aplicada nesta interface é que a tensão entre os planos S_+ e S_- seja nula;

Apliquemos então as condições de contorno ora obtidas mas também simplifiquemos nosso problema, supondo que inicialmente apenas a onda longitudinal propagava-se no meio, isto é, apenas a onda L_{inc} estava presente antes da reflexão. Isto equivale a impormos $A_3 = 0$ nas equações (4.4). Usando as expressões (4.5) para as funções potenciais φ e ψ, as condições de que $T_{zz} = 0$ e $T_{xz} = 0$ implicam que

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \left(\lambda + 2\mu\cos^2\alpha_1\right)k_L^2 A_1 + \left(\lambda + 2\mu\cos^2\alpha_2\right)k_L^2 A_2 e^{jk_L x(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)} + \\ \left(\mu\sin 2\beta_4\right)k_T^2 A_4 e^{jx(k_L\sin\alpha_1 - k_T\sin\beta_4)} \end{bmatrix} e^{j(\omega t - k_L x\sin\alpha_1)} = 0, \text{ e} \\
&\begin{bmatrix} \left(\sin 2\alpha_1\right)k_L^2 A_1 - \left(\sin 2\alpha_2\right)k_L^2 A_2 e^{jk_L x(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)} + \\ \left(\cos 2\beta_4\right)k_T^2 A_4 e^{jx(k_L\sin\alpha_1 - k_T\sin\beta_4)} \end{bmatrix} e^{j(\omega t - k_L x\sin\alpha_1)} = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

As duas condições devem ser válidas em todo o plano $z = 0$, e portanto, devem ser independentes da coordenada x. Em ambas as equações vêem que os termos em exponenciais são idênticos. A dependência com x é eliminada somente se os expoentes forem nulos. Da primeira exponencial dentro dos colchetes segue que

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \text{ e}$$
$$k_L \sin\alpha_1 = k_T \sin\beta_4$$

O primeiro resultado implica que uma onda puramente longitudinal incidindo em uma interface livre reflete-se, em parte, em uma onda também longitudinal, cujo ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência. Similarmente, podemos mostrar facilmente que no caso de uma onda incidente puramente transversal, o ângulo de reflexão da porção transversal também é igual ao ângulo de incidência $(\beta_3 = \beta_4 = \beta)$. O segundo resultado implica que

$$k_L \sin\alpha = k_T \sin\beta \Rightarrow \frac{1}{c_L}\sin\alpha = \frac{1}{c_T}\sin\beta.$$

Este resultado representa uma regra para as ondas acústicas similar à conhecida *Lei de Snell* em óptica. No caso de nosso interesse, vemos que a equação este resultado implica que

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{c_T}{c_L} = \frac{3764.8}{5970.7} = 0.63 < 1$$
$$\Rightarrow \beta < \alpha,$$

e, portanto a onda *T* propaga-se mais inclinada (isto é, numa direção mais próxima da normal) do que a onda *L*. Por exemplo, se a onda longitudinal incide na interface com um ângulo de $60°$ com a normal, a onda transversal resultante da reflexão sai com um ângulo de $33°$.

Uma vez eliminada a dependência em x, ainda resta satisfazer as condições de contorno para todo instante de tempo t, o que implica que a quantia entre colchetes do primeiro membro em (4.6) deve ser nula em ambas equações, resultando em

$$\left(\lambda + 2\mu\cos^2\alpha\right)k_L^2\left(A_1 + A_2\right) + \left(\mu\sin 2\beta\right)k_T^2 A_4 = 0, \text{ e}$$
$$\left(\sin 2\alpha\right)k_L^2\left(A_1 - A_2\right) + \cos 2\beta k_T^2 A_4 = 0,$$

que resolvendo para A_2 / A_1 e para A_4 / A_1 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta - \gamma^2 \cos^2 2\beta}{\sin 2\alpha \sin 2\beta + \gamma^2 \cos^2 2\beta}, \text{ e} \\ \frac{A_4}{A_1} &= \frac{-2 \sin 2\alpha \cos 2\beta}{\sin 2\alpha \sin 2\beta + \gamma^2 \cos^2 2\beta}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $\gamma = c_L / c_T = 1.586$ é a razão entre as velocidades longitudinais e transversais em sílica fundida. Observando as definições (4.4), vemos que as equações (4.7) nos dão as razões entre as amplitudes das funções potenciais e não entre os deslocamentos acústicos. Entretanto, estes podem ser facilmente obtidos utilizando as equações (4.3). O vetor deslocamento da onda longitudinal incidente é

$$\boldsymbol{u}_L^{inc} = -jA_1\varphi_1 \boldsymbol{k}_L^{inc}, \text{ onde } \boldsymbol{k}_L^{inc} = k_L \left(\hat{x} \sin\alpha - \hat{z} \cos\alpha \right), \tag{4.8}$$

e os vetores deslocamento das ondas refletidas são

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_L^{ref} &= -jA_2\varphi_2 \boldsymbol{k}_L^{ref}, \text{ onde } \boldsymbol{k}_L^{ref} = k_L \left(\hat{x} \sin\alpha + \hat{z} \cos\alpha \right), \text{ e} \\ \boldsymbol{u}_T^{ref} &= -jA_4\psi_4 \boldsymbol{k}_T^{ref} \times \hat{\boldsymbol{y}}, \text{ onde } \boldsymbol{k}_T^{ref} = k_T \left(\hat{x} \sin\beta + \hat{z} \cos\beta \right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Comparando as amplitudes destes vetores obtemos os chamados *coeficientes de reflexão* para o deslocamento:

$$\begin{aligned} \eta_{LL} &= \frac{u_L^{ref}}{u_L^{inc}} = \frac{A_2}{A_1}, \text{ e} \\ \eta_{LT} &= \frac{u_T^{ref}}{u_L^{inc}} = \gamma \frac{A_4}{A_1}, \end{aligned}$$

onde $u_{L,T}^{inc,ref} = \left\| \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{L,T}}^{\boldsymbol{inc,ref}} \right\|$. Os coeficientes de reflexão de deslocamento ora obtidos são válidos para uma onda acústica puramente longitudinal incidindo em uma interface livre vidro-vácuo. Em particular, η_{LT} representa o acoplamento dilatacional-equivolumial várias vezes comentado. Este coeficiente nos fornece a amplitude do vetor deslocamento acústico da onda transversal resultante da reflexão da onda longitudinal incidente. As curvas no gráfico da Figura 4. 3 mostram os coeficientes de reflexão para o caso de uma interface vidro-vácuo.

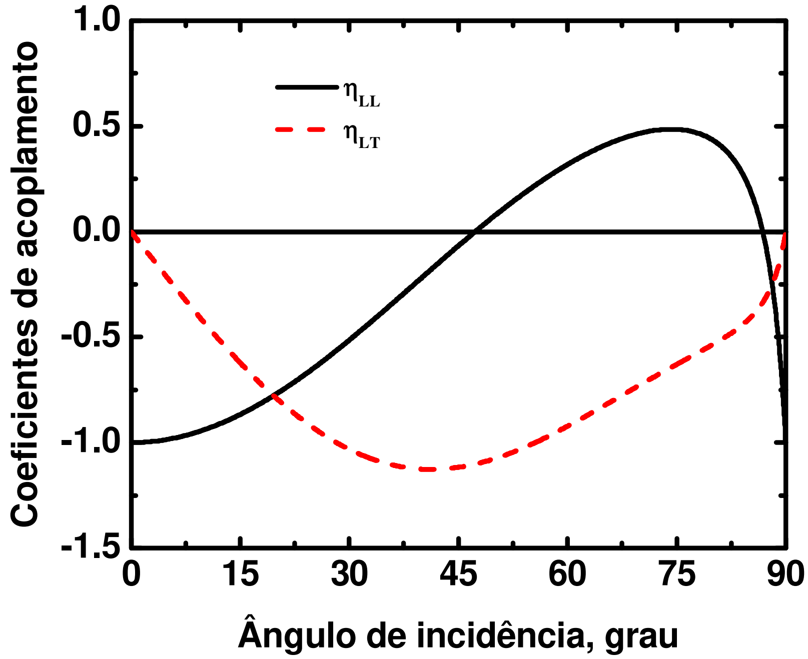


Figura 4. 3: gráfico dos coeficientes de reflexão η_{LL} e η_{LT} em função do ângulo de incidência da onda longitudinal α_1 (para sílica-vácuo). O coeficiente η_{LT} representa o acoplamento longitudinal-transversal na interface.

Vemos que para incidência normal $(\alpha = 0)$, os coeficientes de reflexão valem $\eta_{LL} = -1$ e $\eta_{LT} = 0$. Isto significa que para incidência normal, não há conversão dilatacional-equivolumial e a onda L_{inc} reflete-se totalmente em uma onda também longitudinal. Vemos ainda que η_{LL} é negativo, mas isto não significa que o vetor deslocamento muda de sentido após a reflexão. Observando as equações (4.8) e (4.9), vemos que o sinal negativo de η_{LL} se contrapõe com a inversão de sentido do vetor de propagação, mantendo $\boldsymbol{u}_L^{ref}$ no mesmo sentido de $\boldsymbol{u}_L^{inc}$. Analogamente, quando η_{LL} for positivo, daí sim o vetor deslocamento muda de sentido na reflexão. Para $\alpha = 0$, tomando a parte real do vetor deslocamento total chegamos em

$$\operatorname{Re}\boldsymbol{u} = 2A_1 k_L \hat{\boldsymbol{z}} \cos k_L z \sin \omega t.$$

Vemos que a onda resultante no semi-plano infinito $z < 0$ é uma onda estacionária, com período espacial λ_L e período temporal $T = 2\pi / \omega$. Exatamente na superfície $(z = 0)$, o deslocamento vale $\operatorname{Re}\boldsymbol{u}(z = 0) = 2A_1 k_L \hat{\boldsymbol{z}} \sin \omega t$, ou seja, aponta perpendicularmente à superfície e tem amplitude $2A_1 k_L$.

Voltando à analise do gráfico da Figura 4. 3, podemos notar que saindo da incidência normal $(\alpha \neq 0)$, η_{LL} continua sendo negativo e o coeficiente de acoplamento dilatacional-equivolumial η_{LT} passa a ser não nulo (e também negativo). No caso de η_{LT}, o sinal não carrega nenhuma informação sobre a mudança de sentido da onda acústica transversal, já que esta não existia antes da reflexão. A amplitude de T_{ref} cresce em módulo até atingir o valor máximo quando o ângulo de incidência é aproximadamente $41°$. Neste caso, a amplitude da onda T_{ref} é $1{,}13$ vezes maior que a amplitude da onda longitudinal incidente L_{inc}. Após o pico, a amplitude decresce de forma monótona, chegando novamente a zero para incidência rasante $(\alpha = 90°)$. Já a porção longitudinal da onda refletida apresenta um comportamento mais complicado. Saindo da incidência normal $\alpha = 0$, a amplitude da onda L_{ref} decresce em módulo de 1 até 0 (amplitude nula) para um ângulo de incidência $\alpha \cong 47°$. Neste ângulo, dizemos que a onda L_{inc} foi completamente convertida na onda T_{ref}, cuja amplitude é $1{,}10$ vezes a amplitude de L_{inc}. Continuando a aumentar o ângulo de incidência, a amplitude de L_{ref} passa a ser positiva, chegando a um máximo (em $\alpha \cong 74°$) e depois decrescendo até ser novamente nula para incidência em $\alpha \cong 87°$. Este é o segundo ângulo para o qual ocorre conversão total dilatacional-equivolumial. A amplitude da onda T_{ref} neste segundo ponto de conversão total é $0,64$ vezes a amplitude de L_{inc}.

É interessante notarmos que o valor máximo da amplitude da onda T_{ref} (em módulo) ocorre num ângulo de incidência de $41°$, diferente dos dois ângulos em que a amplitude da onda longitudinal refletida é nula $(47° \text{ e } 87°)$. Este fato pode induzir o leitor a uma certa confusão, já que, à primeira vista, parece razoável esperar que a amplitude da onda transversal seja máxima exatamente quando a amplitude da onda longitudinal for mínima, o quê de fato não ocorre. Esta expectativa errônea se deve à correlação entre a amplitude da onda e a energia carregada por esta e que a conservação de uma quantia significaria a conservação da outra. Entretanto, devemos lembrar que as ondas viajam em velocidades diferentes e também em ângulos diferentes e, de fato, não há razão alguma para haver tal "conservação de amplitude". Deve sim haver a conservação de energia, ou melhor, do fluxo de energia (energia por unidade de tempo por unidade de área). O fluxo de energia trazido até à superfície pela onda longitudinal incidente deve ser igual à soma dos fluxos de energia carregado pelas ondas acústicas refletidas longitudinal e transversal, o quê obviamente pode ser mostrado ser de fato verdade.

Finalmente, para incidência razante $(\alpha \cong 90°)$ o acoplamento é pequeno. Este é o caso de fibras ópticas convencionais, onde as ondas acústicas excitadas por luz são praticamente longitudinais e viajam ao longo da fibra sem converterem-se em componentes transversais.

4.2. Ondas elásticas em um cilindro homogêneo de seção transversal circular

Discutimos na seção anterior que uma interface entre dois meios com propriedades elásticas diferentes causa o acoplamento entre ondas dilatacionais e equivolumiais. Quando uma onda puramente diltacional, propagando-se em um determinado meio, incide em uma interface com outro meio cujas propriedades elásticas sejam diferentes, as ondas refletida e refratada não são mais puramente dilatacional e passam a ter também uma componente equivolumial. De maneira geral, quanto maior o contraste acústico, ou seja, quanto maior a diferença entre as propriedades elásticas dos meios, maior será o acoplamento dilatacional-equivolumial. Em particular, uma interface "dura" como a interface vidro-vácuo causa um forte acoplamento entre estas ondas, como vimos em nosso exemplo específico no qual a amplitude das ondas transversais originadas na reflexão na interface vidro-vácuo podia ser tão grande quanto a amplitude da onda incidente (e para alguns ângulos de incidência até maior).

Em um guia de onda, como por exemplo um *rod* – cilindro de vidro no vácuo, de comprimento infinito e secção transversal circular de raio R – as ondas elásticas incidem na interface vidro-vácuo ao se propagarem ao longo deste guia. O resultado é que o acoplamento longitudinal-transversal faz com que os *modos normais de propagação* deste guia de onda são constituídos de ambas as componentes longitudinais e transversais (com raras exceções). Nesta seção discutimos em detalhes os modos acústicos do *rod*. O alto contraste acústico entre o vidro e o vácuo é algo em comum entre o *rod* e as fibras fotônicas de diâmetro pequeno ($:\ 1\ \mu\mathrm{m}$), como aquelas exploradas no capítulo 3. Estudar o modelo simplificado de espalhamento Brilluoin em um *rod* é interessante não apenas do ponto de vista da física fundamental e da didática, mas também é efetivamente útil para explicarmos semi-quantitativamente alguns resultados experimentais observados nas fibras fotônicas. Mais ainda, alguns conceitos físicos facilmente visualizados aqui são também válidos no caso das PCFs, apesar da grande complexidade destas últimas.

Restringimos aqui ao tratamento de meios elásticos e isotrópicos do ponto de vista acústico. A equação de propagação de ondas acústicas em um meio elástico (equações (2.7) e (2.8)) pode ser facilmente resolvida utilizando o método de separação de variáveis em coordenadas cilíndricas (r,θ,z). A solução geral obtida para o deslocamento acústico $\boldsymbol{u}$ é escrita da seguinte forma [36, 66, 67]:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}(r,\theta,z) = u_r\hat{\boldsymbol{r}} + u_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + u_z\hat{\boldsymbol{z}}, \text{ onde} \\
&u_r = U(r)\begin{Bmatrix}\sin p\theta \\ \cos p\theta\end{Bmatrix} e^{j(\Omega t-\beta z)}, \\
&u_\theta = V(r)\begin{Bmatrix}\cos p\theta \\ -\sin p\theta\end{Bmatrix} e^{j(\Omega t-\beta z)}, \\
&u_z = W(r)\begin{Bmatrix}\sin p\theta \\ \cos p\theta\end{Bmatrix} e^{j(\Omega t-\beta z)},
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

onde $(\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{z}})$ são os versores unitários, Ω é a freqüência angular da onda acústica e β é a constante de propagação do modo. O número inteiro p representa a simetria azimutal do modo acústico, e ambos os conjuntos de funções trigonométricas superior $(\sin p\theta, \cos p\theta, \sin p\theta)$ e inferior $(\cos p\theta, -\sin p\theta, \cos p\theta)$ são soluções possíveis da equação de onda e representam a *polarização* do modo acústico. As funções U,V,W

dependem apenas da coordenada radial r e são dadas por

$$\begin{aligned} U(r) &= Ak_L J_p'(k_L r) + \beta B J_p'(k_T r) + \frac{p}{r} C J_p(k_T r), \\ V(r) &= \frac{p}{r} Ak_L J_p'(k_L r) + \frac{\beta p}{k_L r} B J_p(k_T r) + k_T C J_p'(k_T r), \\ W(r) &= -j\left[\beta A J_p(k_L r) + k_T B J_p(k_T r)\right], \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde A, B, C são constantes determinadas pelas condições de contorno e pela normalização de energia do modo. O símbolo J_p denota a função de Bessel do primeiro tipo e de ordem p e $J_p'(x) = dJ_p(x)/dx$. Notemos que as funções de Bessel oscilam radialmente com quasi-período espacial determinado por k_L e k_T. Os termos do tipo $J_p(k_L r)$ originam-se de uma onda dilatacional enquanto termos originados de uma onda equivolumial são aqueles do tipo $J_p(k_T r)$. O fato de o modo ser híbrido, no sentido de que contem ambas componentes longitudinal e transversal, é resultado do acoplamento dilatacional-equivolumial na interface do *rod*. As constantes k_L e k_T são na verdade as componentes transversais dos vetores de onda dilatacional e equivolumial. Fazemos aqui um pequeno parêntese para discutir um pouco mais a natureza do modo acústico ora apresentado. Em um meio infinito, as ondas elásticas fundamentais (isto é, puramente longitudinais ou dilatacionais), propagam-se independentemente e com vetores de onda diferentes Ω / c_L e Ω / c_T, mas se acoplam quando encontram uma interface. Em um guia de onda, este acoplamento resulta na formação dos *modos acústicos* que contém ambas as componentes propagando-se com a mesma constante de propagação β, a constante do modo. Obviamente, para que isso seja possível, obrigatoriamente os vetores de onda transversais k_L e k_T devem ser diferentes, já que as velocidades c_L e c_T são diferentes. A Figura 4. 4

ilustra este fato. Explicitamente, são escritas como

$$
\begin{aligned}
k_L^2 &= \left(\frac{\Omega}{c_L}\right)^2 - \beta^2, \\
k_T^2 &= \left(\frac{\Omega}{c_T}\right)^2 - \beta^2.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

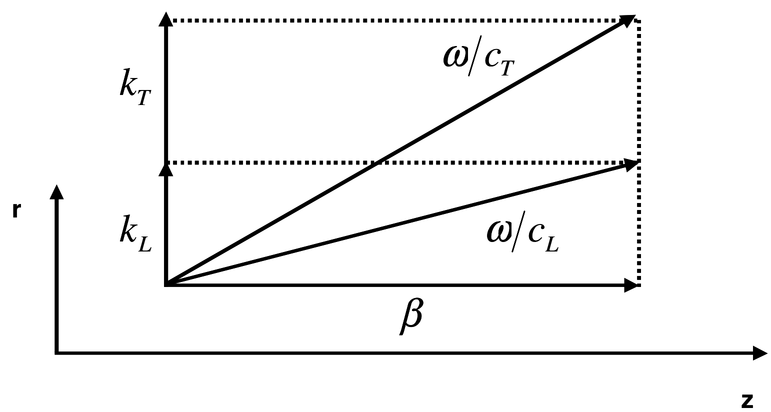


Figura 4. 4: diagrama ilustrativo mostrando os diferentes vetores de onda transversos, $\boldsymbol{k}_L$ e $\boldsymbol{k}_T$, das componentes dilatacional e equivolumial que forma um modo acústico do *rod* cuja de constante de propagação é β. Como as velocidades das ondas dilatacional (c_L) e equivolumial (c_T) são diferentes, obrigatoriamente os vetores transversos $\boldsymbol{k}_L$ e $\boldsymbol{k}_T$ também devem ser diferentes;

4.3. Equação característica

As condições de contorno a serem aplicadas na superfície livre do *rod* (em $r = R$) são análogas àquelas aplicadas no caso que estudamos de uma interface plana entre vidro e vácuo. Naquela ocasião, vimos que a tensão entre dois planos adjacentes S_+ e S_- paralelos à interface livre (um imediatamente interno ao vidro e outro imediatamente externo, no vácuo) é nula. De maneira análoga, lembrando agora que a superfície livre é a superfície cilíndrica do *rod*, devemos impor que as componentes $T_{r\theta}$, T_{rz} e T_{rr} do tensor de tensões devem ser nulas em $r = R$. Não reproduzimos os cálculos explicitamente aqui, mas interessados podem seguir as referências [Auld, Miklovicks, Waldron e Turston]. Aplicando as condições de contorno ora discutidas, chegamos a uma equação característica para cada família de modos acústicos de ordem p. Nosso caso de interesse são os modos acústicos de ordens $p = 0$ e $p = 2$, que por argumentos de simetria são os únicos que interagem eficientemente com o modo óptico (voltaremos a este ponto mais adiante). Para $p = 0$, ou seja, modos que não radialmente simétricos que não dependem da coordenada azimutal θ, podemos ver diretamente das equações (4.10) e (4.11) que os modos se dividem em duas famílias resultante dos duas diferentes polarizações possíveis. A primeira família, chamada de *torsional*, resulta do conjunto superior de funções trigonométricas e é direto vermos que neste caso o vetor deslocamento é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(r,\theta,z) &= \left[u_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}\right] e^{j(\Omega t - \beta z)}, \\ u_\theta(r) &= k_T C J_1(k_T r). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Da forma do vetor deslocamento, entendemos a origem do nome *torsional* para esta família de modos. Cada anel da seção transversal do *rod*, de espessura infinitesimal e localizado na posição radial r, é caracterizado por uma rotação em torno da origem com amplitude u_θ. Esta família de modos têm um movimento puramente *shear* ou transversal, e vemos diretamente de (4.13) que apenas a componente transversal contribui para este modo. Este tipo de movimento causa pouca perturbação na constante dielétrica e é menos significativo que a outra família com $p = 0$, aquela originada do conjunto inferior de funções trigonométricas. Esta segunda família é chamada de *axial-radial*, e a forma do vetor deslocamento é

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}(r,\theta,z)=\left[u_r\hat{\boldsymbol{r}}+u_z\hat{\boldsymbol{z}}\right]e^{j(\Omega t-\beta z)},\\
&u_r(r)=-Ak_LJ_1(k_Lr)-\beta BJ_1(k_Tr),\text{ e}\\
&u_z(r)=-j\left[\beta AJ_0(k_Lr)+k_TBJ_0(k_Tr)\right]
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

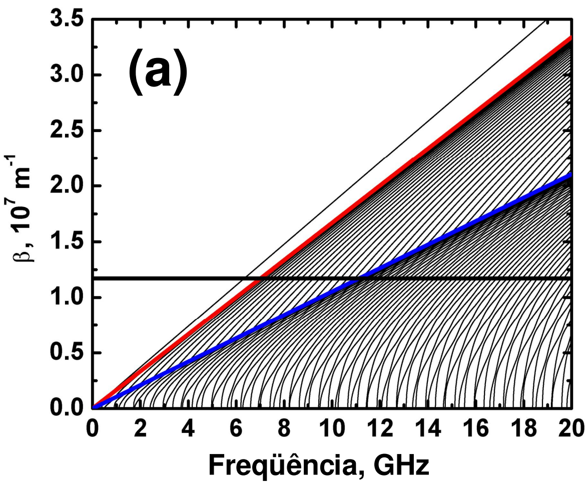
Vemos que apenas as componentes do deslocamento ao longo do eixo da fibra e na direção radial estão presentes. Notemos também que a componente u_r está $90°$ fora de fase com relação à componente u_z (note o número complexo j). Isto significa que, enquanto a fibra se expande na direção radial, ela se comprime na direção do eixo da fibra, um movimento do tipo *respiração*, e vice-versa. Os coeficientes A e B são determinados resolvendo a seguinte equação característica:

$$
\begin{vmatrix}
\begin{bmatrix}-\lambda\left(k_T^2+\beta^2\right)J_0(k_TR)\\ +2\mu k_T^2J_0^{''}(k_TR)\end{bmatrix} & 2\mu j\beta k_LJ_0^{''}(k_LR)\\
2j\beta k_TJ_0^{'}(k_TR) & \left(k_L^2-\beta^2\right)J_0^{'}(k_LR)
\end{vmatrix}=0,
\tag{4.15}
$$

onde λ e μ são as constantes de Lamè, discutidas no capítulo 2. Resolvemos numericamente esta equação e também a equação característica para os modos torsionais, a qual não incluímos aqui mas pode ser encontrada nas referências.

4.4. Relação de dispersão

A solução numérica da equação (4.15) foi implementada utilizando o software Matlab, e vale comentar que as soluções são re-escaláveis com relação ao diâmetro do *rod*. Basicamente encontramos todos os possíveis auto-estados do sistema de equações (4.15), ou seja, dentro de uma faixa de freqüências, encontramos numericamente todos os possíveis modos das famílias axial-radial e torsional. As Figura 4. 5 (a) e (b) mostram a relação de dispersão para os modos da família axial-radial dentro da faixa de $0-20\ \mathrm{GHz}$. O eixo vertical é a constante de propagação do modo e as linhas vermelha e azul são as relações de dispersão das ondas transversais e longitudinais no bulk, respectivamente. A linha horizontal de cor preta representa o dobro da constante de propagação do modo óptico fundamental. Na verdade, esta linha representa a condição de *phase-matching* para o efeito Brillouin, ou seja, para cada modo acústico a freqüência de *phase-matching* é dada pelo cruzamento da curva de dispersão com a linha preta. Apenas para deixar claro, o cruzamento da linha azul (relação de dispersão das ondas puramente longitudinais) com a linha preta nos daria a condição de *phase-matching* em bulk, ou seja, $11{,}12\ \mathrm{GHz}$. A figura Figura 4. 5(a) foi calculada para um *rod* de $9.27\ \mu\mathrm{m}$ de diâmetro e a Figura 4. 5(b) para um *rod* de $1.22\ \mu\mathrm{m}$. Lembramos que estes são o maior e o menor diâmetro dos núcleos das fibras fotônicas utilizadas em nossos experimentos. Na Figura 4. 5(a) indicamos também a relação de dispersão para o modo Rayleigh (uma onda de superfície que comentaremos adiante). Não o repetimos da Figura 4. 5(b), e portanto, nesta, a numeração dos modos no pequeno começa em 2.



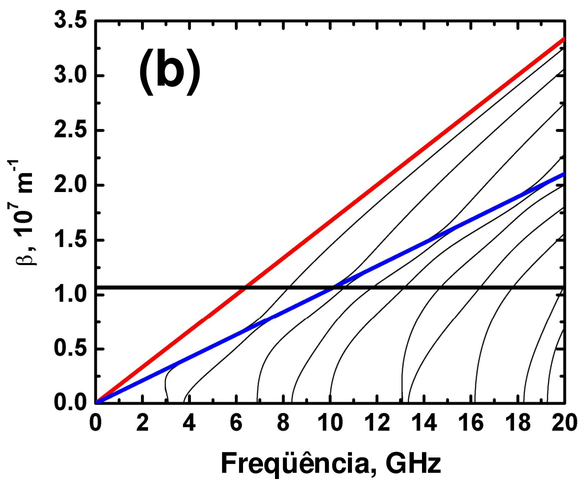


Figura 4. 5: gráfico da relação de dispersão (constante de propagação em função da freqüência acústica) para os modos da família axial-radial dentro da faixa de $0-20\ \text{GHz}$, para um *rod* de (a) $9.27\ \mu\text{m}$ e (b) $1.22\ \mu\text{m}$ de diâmetro. As linhas vermelha e azul representam a relação de dispersão linear para ondas puramente transversal ou longitudinal, respectivamente. A linha horizontal de cor preta representa o dobro da constante de propagação do modo óptico fundamental do *rod*, indicando a freqüência em que cada modo acústico satisfaz a condição de *phase-matching* com o modo óptico.

Primeiramente vemos que ambos são guias acústicos multimodos e a densidade de modos transversais aumenta quanto maior o diâmetro, como é esperado. Mais ainda, verificamos que para diâmetros grandes, a densidade de modos aumenta aproximadamente com o quadrado do diâmetro, como também esperado. Observando com mais detalhes vemos que a densidade de modos não é uniforme em toda a região do gráfico. Vemos que os modos tendem a se agregar próximos à relação de dispersão longitudinal (curva azul) conforme a freqüência aumenta, deixando a densidade de modos nesta região maior que a densidade de modos no *cut-off*, por exemplo. Esta não-uniformidade dos modos tem origem na formação de um platô [67] na relação de dispersão acústica quando as curvas se aproximam da curva de dispersão em *bulk* (curva azul), um tópico por si só extensivamente discutido na literatura de ondas elásticas. A Figura 4. 6 mostra um zoom desta região e a formação do platô pode ser vista mais claramente. Nessa região $k_L \approx 0$. Após ultrapassarem esta linha azul, seguem mais uniformemente distribuídos e tornam a se agregarem próximos à relação de dispersão transversal (linha vermelha). Como veremos adiante, a região próxima do cruzamento da curva de dispersão *bulk* longitudinal (linha azul) com a curva de dispersão de cada modo é a região de maior interesse aqui também. Nesta região, os modos do *rod* apresentam um caráter predominantemente longitudinal e, portanto, causam uma maior perturbação no índice de refração. De maneira simples, é nesta região que os modos acústicos mais interagem com a luz. Introduzimos o símbolo Ω_L^α para designar esta freqüência de cruzamento da dispersão do modo (identificado com o índice α) com a dispersão longitudinal *bulk* (por isso o sub-índice *L*). Podemos notar que próximo a este ponto de cruzamento, os modos adjacentes estão separados de $25\ \text{MHz}$ para o *rod* de $9.27\ \mu\text{m}$ de diâmeteo. Para o caso do *rod* pequeno, esta separação aumenta para $1{,}18\ \text{GHz}$, seguindo aproximadamente a relação quadrática com o diâmetro. Extrapolando estes números para uma fibra convencional de $125\ \mu\text{m}$ de diâmetro da casca, a separação entre os modos transversais é aproximadamente $0{,}1\ \text{MHz}$.

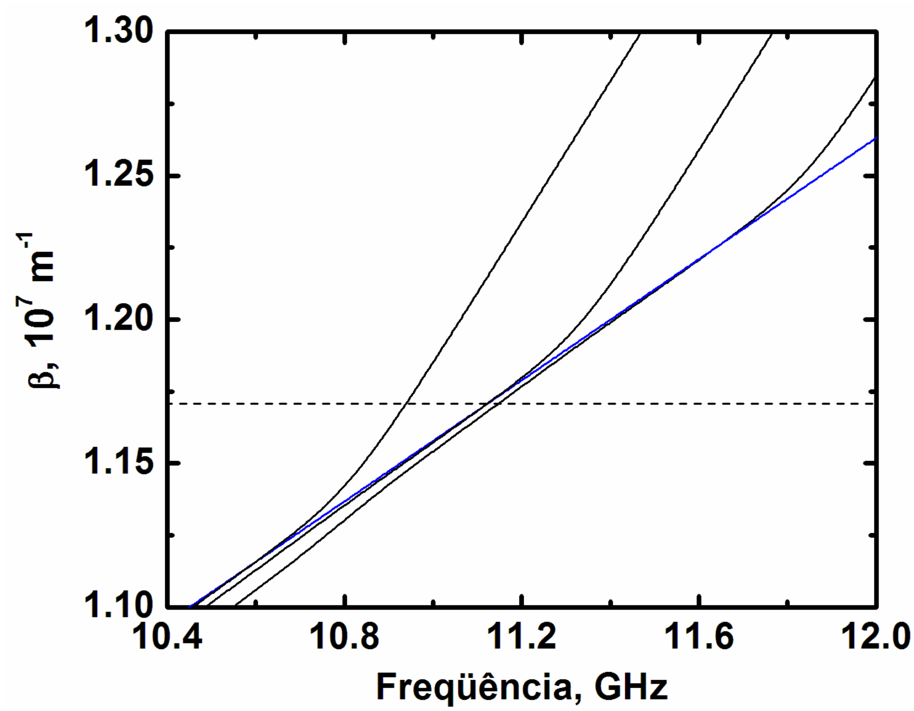


Figura 4. 6: *zoom* da região em torno do ponto de cruzamento entre a relação de dispersão do modo e a curva de dispersão *bulk* das ondas longitudinais. A freqüência de cruzamento para cada modo é denotada por Ω_L^α. As curvas de dispersão dos modos tendem a ficar paralelas à curva de dispersão *bulk* nesta região, resultando na formação de um platô [67] e aumentando a densidade de modos;

4.5. Perturbação na constante dielétrica: *efeito elasto-óptico*

Uma vez tendo o vetor deslocamento para cada modo acústico, podemos calcular o tensor de *strain* e em seqüência a perturbação causada por estes modos no índice de refração, ou mais especificamente, na permissividade dielétrica do meio. No capítulo 2, definimos o tensor de *strain* e também o tensor de perturbação da constante dielétrica em coordenadas retangulares. É útil redefinirmos estas quantidades em coordenadas cilíndricas com segue

$$
\begin{aligned}
&S_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, S_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, S_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
&S_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right), \\
&S_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \\
&S_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right),
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

e o tensor de perturbação fica

$$
\begin{aligned}
&\Delta\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_0 n^4 \left(p_{11}S_{rr} + p_{12}S_{\theta\theta} + p_{12}S_{zz}\right), \\
&\Delta\varepsilon_{\theta\theta} = -\varepsilon_0 n^4 \left(p_{12}S_{rr} + p_{11}S_{\theta\theta} + p_{12}S_{zz}\right), \\
&\Delta\varepsilon_{zz} = -\varepsilon_0 n^4 \left(p_{12}S_{rr} + p_{12}S_{\theta\theta} + p_{11}S_{zz}\right), \\
&\Delta\varepsilon_{r\theta} = -\varepsilon_0 n^4 2 p_{44} S_{r\theta}, \\
&\Delta\varepsilon_{rz} = -\varepsilon_0 n^4 2 p_{44} S_{rz}, \\
&\Delta\varepsilon_{\theta z} = -\varepsilon_0 n^4 2 p_{44} S_{\theta z},
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Em alguns casos, é interessante mantermos a perturbação na constante dielétrica escrita no sistema de coordenadas retangulares, mas expressá-las em termos do stress em coordenadas cilíndricas. Isto porque os modos acústicos seguem a simetria cilíndrica, mas a polarização do modo óptico é aproximadamente linear, de modo que pode ser facilmente escrita no sistema de coordenadas retangulares. Para isso, basta aplicarmos uma rotação no tensor (4.17), ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\Delta\varepsilon_{ret} = R_\theta^\dagger \varepsilon_{cil} R_\theta \\
&R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

A análise detalhada de cada componente deste tensor, o acoplamento com o modo óptico e as demais propriedades do espalhamento causados pelos modos do *rod* serão tratadas separadamente para os casos de co- e retro-espalhamento Brillouin.

4.6. Retro-espalhamento Brillouin: acoplamento de modos contra-propagantes

Nesta seção, desenvolvemos de maneira bastante sucinta a teoria de acoplamentos de modos para calcularmos o espectro de espalhamento em guias de onda devido à perturbação. Diferentemente do caso de *bulk*, onde a luz espalhada pode propagar-se em qualquer direção e ter qualquer polarização, aqui a luz espalhada também deve ser um modo do guia para que o espalhamento seja eficiente ao longo de todo o comprimento deste guia. Não consideramos, portanto, o espalhamento por modos de radiação. Aqui seguimos como referência [68], que trata o caso de perturbações escalares e também os artigos [69, 70] que generalizam a teoria para o caso de uma perturbação geral não-escalar. O desenvolvimento matemático está bastante detalhado nestas referências e aqui apresentamos apenas os resultados e esboços dos argumentos. No final da seção, apresentamos a solução para o caso de uma perturbação não-escalar como uma extensão. Assumimos que o meio é não magnético e que o índice de refração perturbado é n e o não perturbado n_0. Notemos que por perturbados queremos dizer que $n = n(z)$. Os modos normais são soluções da equação de Maxwell escritas em função do índice de refração não perturbado. As equações de Maxwell no domínio da freqüência são

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{H} &= j\omega\varepsilon_0 n^2\boldsymbol{E}, \\ \nabla\times\boldsymbol{E} &= -j\omega\mu_0\boldsymbol{H}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Os campos elétrico e magnético podem ser expressos apenas em termos das componentes transversais $\boldsymbol{E}_t$ e $\boldsymbol{H}_t$. As componentes longitudinais $\boldsymbol{E}_z$ e $\boldsymbol{H}_z$ podem ser obtidas automaticamente através das próprias equações de Maxwell, como usual [69, 70]. Fazendo algumas manipulações nas equações de Maxwell e deixando explícitas as derivadas ao longo da direção de propagação z, chegamos nas seguintes equações para os campos transversais

$$\begin{aligned} -\left(1/i\omega\mu_0\right)\nabla_t\times\left(\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t\right)+\left(\hat{z}\times\partial\boldsymbol{H}_t/\partial z\right) &= j\omega\varepsilon_0 n^2\boldsymbol{E}_t \\ \left(1/i\omega\varepsilon_0\right)\nabla_t\times\left[\left(1/n^2\right)\nabla_t\times\boldsymbol{H}_t\right]+\left(\hat{z}\times\partial\boldsymbol{E}_t/\partial z\right) &= -j\omega\mu_0\boldsymbol{H}_t \end{aligned} \tag{4.20}$$

Os modos normais são soluções das equações (4.20) quando $n\equiv n_0$, ou seja, quando não há perturbação. Denotamos os campos elétrico e magnético dos modos normais como $\boldsymbol{E}_{\nu t}$ e $\boldsymbol{H}_{\nu t}$, respectivamente. Os modos $\boldsymbol{E}_{\nu t}$ e $\boldsymbol{H}_{\nu t}$ são independentes de z e o fator de propagação $e^{j\beta_\nu z}$ não está incluído (devemos colocarmos externamente, como fazemos adiante). O sub-índice ν é usado para identificar os modos do guia. A relação de ortogonalidade é escrita da seguinte maneira

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\boldsymbol{E}_{\nu t}\times\boldsymbol{H}_{\mu t}^{*}\right)dxdy = P_\nu\delta_{\mu\nu}\frac{\beta_\mu}{\left|\beta_\mu\right|}. \tag{4.21}$$

onde P é a potência carregada pelo modo. Notemos que o fator $\beta_\mu/\left|\beta_\mu\right|$ vale 1 se a onda é co-propagante e -1 se a onda é contra-propagante. Este fator é necessário para mantermos a potência P sempre positiva.

Nosso objetivo é calcular o espectro da luz espalhada nos modos guiados, portanto é útil expressarmos os campos como uma somatória sobre todos os modos guiados

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_t &= \sum_{\nu}\left(c_\nu^{(+)}e^{-j\beta_\nu z}+c_\nu^{(-)}e^{j\beta_\nu z}\right)\boldsymbol{E}_{\nu t},\\
\boldsymbol{H}_t &= \sum_{\nu}\left(c_\nu^{(+)}e^{-j\beta_\nu z}-c_\nu^{(-)}e^{j\beta_\nu z}\right)\boldsymbol{H}_{\nu t},
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

onde é importante salientarmos que incluímos ondas co- e contra-propagantes, denotadas pelo símbolos $(+)$ e $(-)$, respectivamente. Notemos que os coeficientes para os campos elétrico e magnético são idênticos para o modo co-propagante, mas têm sinais opostos se o modo é contra-propagante. Os coeficientes $c_\nu^{(+)}$ e $c_\nu^{(-)}$ dependem da coordenada de propagação z e representam a troca de energia entre os diversos modos do guia devido à presença de uma perturbação ao longo de z. Mais adiante, faremos a suposição de que apenas o laser incidente é lançado na fibra (ou no *rod* mais especificamente) e veremos quais modos de outras freqüências são excitados pela perturbação. Basicamente, calculamos explicitamente os coeficientes $c_\nu^{(+)}$ e $c_\nu^{(-)}$. O método utilizado aqui é bastante direto apesar dos cálculos serem um pouco complexos. Substituímos as definições dos campos (4.22) nas equações de Maxwell (4.20). Depois usamos a relação de ortogonalidade para eliminarmos a somatória sobre todos os modos e, usando que os modos normais satisfazem as equações de Maxwell quando $n=n_0$, chegamos na seguinte equação de propagação para os coeficientes $c_\nu^{(+)}$ e $c_\nu^{(-)}$

$$
\begin{aligned}
\frac{dc_\mu^{(+)}}{dz} &= \sum_{\nu}\left[K_{\mu\nu}^{(+,+)}c_\nu^{(+)}e^{j(\beta_\mu-\beta_\nu)z}+K_{\mu\nu}^{(+,-)}c_\nu^{(-)}e^{j(\beta_\mu+\beta_\nu)z}\right],\\
\frac{dc_\mu^{(-)}}{dz} &= \sum_{\nu}\left[K_{\mu\nu}^{(-,+)}c_\nu^{(+)}e^{-j(\beta_\mu+\beta_\nu)z}+K_{\mu\nu}^{(-,-)}c_\nu^{(-)}e^{-j(\beta_\mu-\beta_\nu)z}\right],
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

onde o coeficiente de acoplamento é

$$
K_{\mu\nu}^{(p,q)}=\frac{\omega\varepsilon_0}{4jP}\frac{\beta_\mu^{(p)}}{\left|\beta_\mu\right|}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(n^2-n_0^2\right)\left[\boldsymbol{E}_{\mu t}^{(p)*}\cdot\boldsymbol{E}_{\nu t}^{(q)}+\frac{n_0^2}{n^2}\boldsymbol{E}_{\mu z}^{(p)*}\cdot\boldsymbol{E}_{\nu z}^{(q)}\right]dxdy,
\tag{4.24}
$$

onde os índices p, q podem ser $+$ para o caso de ondas co-propagantes e $-$ para contra-propagantes. Notemos que o último termo da integral envolve as componentes longitudinais do campo elétrico. Este resultado foi obtido usando a equação de Maxwell para voltar de $\boldsymbol{H}_{vt}$ para $\boldsymbol{E}_{vz}$. Usamos uma notação contraída para designar ondas co- e contra-propagantes que segue a seguinte convenção

$$\begin{aligned}
&\beta_\mu^{(+)} = \beta_\mu \\
&\beta_\mu^{(-)} = -\beta_\mu \\
&\boldsymbol{E}_{\mu t}^{(-)} = \boldsymbol{E}_{\mu t}^{(+)} = \boldsymbol{E}_{\mu t} \\
&\boldsymbol{E}_{\mu z}^{(-)} = -\boldsymbol{E}_{\mu z}^{(+)} = -\boldsymbol{E}_{\mu z}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Fizemos aqui uma simplificação justificada pelo fato de a perturbação ser pequena, que é a seguinte. Escrevendo $n^2 = \dfrac{\varepsilon + \Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}$ e $n_0^2 = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, temos que no segundo termo dentro da integral podemos fazer a aproximação $\dfrac{n_0^2}{n^2} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + \Delta\varepsilon} \cong 1 - \dfrac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \approx 1$. Isso significa que não consideramos termos quadráticos em $\Delta\varepsilon$. Usando também que $\varepsilon_0 \left(n^2 - n_0^2\right) = \Delta\varepsilon$, chegamos em

$$K_{\mu\nu}^{(p,q)} = \frac{\omega}{4jP} \frac{\beta_\mu^{(p)}}{\left|\beta_\mu\right|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\varepsilon \left[\boldsymbol{E}_\mu^{(p)*} \cdot \boldsymbol{E}_\nu^{(q)} \right] dxdy. \tag{4.26}$$

Notemos que na equação (4.26) o campo do modo é agora o campo total e não separadamente a componente longitudinal ou transversal. O resultado da equação (4.26) foi obtido considerando uma perturbação escalar $\Delta\varepsilon$. Nas referências [69, 70] um desenvolvimento muito similar é feito para o caso de uma perturbação tensorial $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ (veja o símbolo em negrito denotando uma quantidade tensorial). Para pequenas perturbações, o resultado é simplesmente substituirmos apropriadamente a perturbação escalar pela tensorial, ou seja,

$$K_{\mu\nu}^{(p,q)} = \frac{\omega}{4jP}\frac{\beta_{\mu}^{(p)}}{\left|\beta_{\mu}\right|}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{E}_{\mu}^{(p)*}\cdot\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}_{\nu}^{(q)}\right]dxdy. \tag{4.27}$$

A partir deste ponto, começamos a particularizar o tratamento para nosso caso de interesse. Primeiramente, temos que o conjunto de equações (4.23) representa o acoplamento geral de modos co- e contra-propagantes. Entretanto, aqui estamos interessados apenas no caso do retro-espalhamento por considerações de *phase-matching* também já discutidas extensivamente ao longo desta tese. Mais ainda, este conjunto de equações descreve a troca de energia entre modos, considerando que a perturbação é um efeito linear independente da potência dos modos. Sabemos, entretanto, que o retro-espalhamento Brillouin tem dois regimes bastante distintos. No primeiro regime, de espalhamento espontâneo, um laser incidente é retro-espalhado pelas ondas acústicas por meio do efeito elasto-óptico que de fato é um efeito linear. No segundo regime, o de espalhamento estimulado, a potência espalhada é alta e o efeito de eletrostrição passa a ser dominante. Neste caso, a perturbação é na verdade amplificada e o processo passa a ser não-linear. Assim, nosso tratamento aqui é válido apenas no regime espontâneo, ou seja, para baixa intensidade ou comprimento de interação muito pequeno. Considerando apenas o termo de acoplamento entre a onda retro-espalhada e o laser incidente, temos que a equação (4.23) fica

$$\frac{dc_{\mu}^{(-)}}{dz} = \sum_{\nu} K_{\mu\nu}^{(-,+)} c_{\nu}^{(+)} e^{-j\left(\beta_{\mu}+\beta_{\nu}\right)z} \tag{4.28}$$

Até aqui não explicitamos a dependência da perturbação com z. Sabemos dos capítulos anteriores que ambas as linhas Stokes e anti-Stokes estão presentes no retroespalhamento Brillouin no regime espontâneo. A linha Stokes, de freqüência menor origina-se de uma onda acústica propagando-se na direção de $-z$, ou seja, de uma perturbação contra-propagante. A linha anti-Stokes, de freqüência maior, origina-se de uma onda acústica que propaga-se na direção positiva de $-z$, e portanto através de uma perturbação co-propagante. O espectro de espalhamento Brillouin é simétrico, como mostramos no Apêndice. Desse modo, consideramos apenas a linha Stokes aqui, e assim o termo de propagação da perturbação contra-propagante é $e^{j\beta_{ac}z}$. Vamos deixar esta dependência explicitamente fora do coeficiente de acoplamento $K_{\mu\nu}^{(-,+)}$, e a equação (4.28) é reescrita como

$$\frac{dc_\mu^{(-)}}{dz} = \sum_\nu K_{\mu\nu}^{(-,+)} c_\nu^{(+)} e^{-j(\beta_\mu + \beta_\nu - \beta_{ac})z}, \tag{4.29}$$

onde na segunda passagem consideramos que $c_\nu^{(+)}$ é independente de z. Esta aproximação se justifica pelo fato de que no regime espontâneo não consideramos a depleção do laser incidente. O termo exponencial no segundo membro da equação (4.29) representa a condição de *phase-matching* para o modo acústico envolvido. Como as fibras fotônicas que trabalhamos são monomodo, consideramos aqui apenas o acoplamento entre o modo fundamental do *rod* e a somatória sobre todos os outros modos ópticos transversos é desprezada. Devemos tomar o cuidado mais adiante de considerar as duas possíveis polarizações do modo óptico. Assim, a equação (4.29) fica

$$\begin{aligned} \Delta c^{(-)} &= K^{(-,+)} c^{(+)} e^{-j(\beta_\mu + \beta_\nu - \beta_{ac})z} \Delta z, \\ \left|\Delta c^{(-)}\right|^2 &= \left|K^{(-,+)} c^{(+)} \Delta z\right|^2. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Aqui o coeficiente de acoplamento $K^{(-,+)}$ é calculado para os modos ópticos fundamentais do *rod*, que deixamos sem índice específico por simplicidade. Explicitamente,

$$K^{(-,+)} = \frac{\omega}{4P}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{E}^{(-)*}\cdot\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}^{(+)}\right]dxdy. \tag{4.31}$$

A primeira conclusão que podemos tomar neste momento é que a amplitude de espalhamento na direção contra-propagante é proporcional ao coeficiente de acoplamento $K^{(-,+)}$. Portanto o espectro de potência espalhada no regime espontâneo $S(\omega)$ é proporcional à $\left|K^{(-,+)}\right|^2$, ou seja,

$$S(\omega) \propto \left|K^{(-,+)}\right|^2. \tag{4.32}$$

Sabendo então a forma espectral de $\left|K^{(-,+)}\right|^2$, podemos calcular a forma espectral do espectro de espalhamento espontâneo. Até o momento não explicitamos a dependência com a freqüência da perturbação, e nem a soma sobre todos os possíveis modos acústicos do *rod*. Fazemos isso agora. Entretanto, todo o desenvolvimento no domínio da freqüência foi extensivamente discutido no Apêndice I e aqui fazemos uso do resultado. Conforme a equação 12 do Apêndice I, que nos dá a polarização induzida pelas ondas acústicas, podemos escrever a perturbação na constante dielétrica como

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{P}}_w(\omega) &= \frac{\varepsilon_0}{2}\tilde{\chi}_w(\omega-\omega_P)\boldsymbol{E}_P \\ \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\Omega = \omega-\omega_P). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Explicitamente, para cada modo acústico representado pelo símbolo α, a perturbação é escrita no domínio da freqüência como

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{\alpha}(\Omega) = -j\frac{\varepsilon_0 n^4}{2\pi}p_{ijkl}S_{kl}^{\alpha}(\Omega)\frac{1}{\Gamma_\alpha - i\left(\Omega-\Omega_B^\alpha\right)}, \tag{4.34}$$

ou de uma forma comprimida

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}(\Omega) = -j\frac{\varepsilon_0 n^4}{2\pi}\boldsymbol{pS}^{\alpha}(\Omega)\frac{1}{\Gamma_{\alpha} - i\left(\Omega - \Omega_B^{\alpha}\right)}. \tag{4.35}$$

Onde a condição de *phase-matching* em (4.30) é levada em conta através da freqüência de Brillouin de cada modo

$$\Omega_B^{\alpha} = \Omega\left(\beta_{\alpha} = \beta_{(-)} + \beta_{(+)}\right).$$

Para cada freqüência acústica, temos que somar sobre todos os modos acústicos possíveis, ou seja,

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \sum_{\alpha}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}\left(\Omega = \omega - \omega_P\right)\\ &= \sum_{\alpha} -j\frac{\varepsilon_0 n^4}{2\pi}\boldsymbol{pS}^{\alpha}\left(\omega - \omega_P\right)\frac{1}{\Gamma_{\alpha} - i\left(\omega - \omega_P - \Omega_B^{\alpha}\right)}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Finalmente, substituindo o resultado de (4.36) na equação (4.31) chegamos em

$$\begin{aligned}\left|K^{(-,+)}\right|^2 &= \frac{\omega^2}{\left(8\pi P\right)^2}\sum_{\alpha}K_{\alpha}^{(-,+)},\\ K_{\alpha}^{(-,+)} &= \boldsymbol{I}_{\alpha}\boldsymbol{L}_{\alpha},\\ \boldsymbol{I}_{\alpha} &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{E}^{(-)*}\cdot\varepsilon_0 n^4\boldsymbol{pS}^{\alpha}\left(\omega - \omega_P\right)\cdot\boldsymbol{E}^{(+)}\right]dxdy\right|^2,\\ \boldsymbol{L}_{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma_{\alpha}^2 + \left(\omega - \omega_P - \Omega_B^{\alpha}\right)^2}.\end{aligned} \tag{4.37}$$

É importante mencionarmos que para deduzirmos a primeira equação em (4.37), consideramos que o módulo quadrado da soma dos termos proveniente de cada modo é igual à soma dos módulos quadrados individuais. Analogamente com a dedução detalhada no Apêndice I, podemos justificar esta passagem pelo fato dos modos acústicos serem estatisticamente descorrelacionados. Vemos da equação (4.37) que o coeficiente de acoplamento é o produto de dois termos (para cada modo). O primeiro termo $\boldsymbol{I}_{\alpha}$ é uma integral na seção transversal do guia envolvendo os modos ópticos e a perturbação, e é chamado daqui em diante de integral de *overlap*. O segundo termo, $\boldsymbol{L}_\alpha$, representa nada mais que a *Lorentziana* proveniente condição de *phase-matching* longitudinal. No caso do meio *bulk*, a condição de phase-matching deve ocorrer em todas as direções, resultando na Lorentziana centrada na freqüência de Brillouin. No caso de guia, a condição de conservação de *phase-matching* é relaxada e deve acontecer apenas na direção de propagação do modo, ou seja, ao longo do eixo z. Diferentemente do caso *bulk*, as ondas acústicas e ópticas, não sendo mais ondas planas e sim *modos* do guia, obrigatoriamente têm uma componente do vetor de onda na direção transversal. O intrigante é que o processo de espalhamento não mais impõe a conservação desta componente do vetor de onda transversal. Entretanto, a integral de *overlap* de algum modo substitui ou representa a condição de *phase-matching* transversal. Modos que oscilem transversalmente de forma muito diferente, óptico e acústico, têm a integral de *overlap* diminuída. Veremos adiante que a forma do espectro de espalhamento, os modos que mais contribuem, a eficiência de cada modo, tudo é determinado por uma "competição" entre a integral de *overlap* e a Lorentziana de *phase-matching*.

4.7. Integral de *overlap*

O objetivo desta seção é calcular a integral de *overlap* para os modos acústicos da família axial-radial e discutir suas propriedades. Basicamente, gostaríamos de entender: (1) para um modo acústico específico, qual a dependência de $\boldsymbol{I}_\alpha$ com a freqüência; e (2) como $\boldsymbol{I}_\alpha$ muda de modo para modo. Comecemos abrindo a expressão da integral de *overlap*. Aqui devemos tomar o cuidado de que o modo fundamental óptico é degenerado e tem duas polarizações possíveis. Suponhamos primeiramente que ambos os modos incidente e espalhado têm a mesma polarização, portanto o coeficiente de acoplamento é calculado considerando exatamente o mesmo modo. Neste caso denotamos a integral de *overlap* por $\boldsymbol{I}_\alpha^{\mathrm{P}}$. Abrindo o integrando de(4.37), podemos usar a notação de (4.17) para obter

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_\alpha^{\mathrm{P}} &= \left| \int dA \left[\boldsymbol{E}^{(-)*} \cdot \varepsilon_0 n^4 \boldsymbol{pS}^\alpha \left(\omega - \omega_P\right) \cdot \boldsymbol{E}^{(+)} \right] \right|^2 \\
&= \left| \int dA \left[\boldsymbol{E}^{(-)*} \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E}^{(+)} \right] \right|^2 \\
&= \left| \int dA \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \left|E_x\right|^2 + \Delta\varepsilon_{yy} \left|E_y\right|^2 + \Delta\varepsilon_{xy} \left(E_x^* E_y + E_x E_y^*\right) + \\ -\Delta\varepsilon_{zz} \left|E_z\right|^2 + \Delta\varepsilon_{xz} \left(E_x^* E_z - E_x E_z^*\right) + \Delta\varepsilon_{yz} \left(E_y^* E_z - E_y E_z^*\right) \end{bmatrix} \right|^2 .
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

O modo óptico do *rod* é aproximadamente linearmente polarizado. Para os cálculos numéricos que apresentamos adiante consideramos a forma exata do modo, mas aqui é interessante estudarmos o caso em que $\boldsymbol{E}^{(+)} = \boldsymbol{E}^{(-)} \cong E_x \hat{\boldsymbol{x}}$. Substituindo esta aproximação em (4.38) temos

$$
\boldsymbol{I}_\alpha^{\mathrm{P}} = \left| \int \Delta\varepsilon_{xx} \left|E_x\right|^2 dA \right|^2 , \tag{4.39}
$$

e vemos que apenas o elemento $\Delta\varepsilon_{xx}$ importa no processo de espalhamento. Suponhamos agora que o modo espalhado seja ortogonal ao modo incidente, ou seja, fazemos aqui a aproximação de que $\boldsymbol{E}^{(+)} \cong E_x \hat{\boldsymbol{x}}$ e $\boldsymbol{E}^{(-)} \cong E_y \hat{\boldsymbol{y}}$. Para o caso ortogonal, a integral de overlap fica

$$
\boldsymbol{I}_\alpha^{\perp} = \left| \int \Delta\varepsilon_{xy} E_x E_y^* dA \right|^2 . \tag{4.40}
$$

Podemos ver que a intensidade de luz espalhada na mesma polarização que o laser incidente é proporcional a $\left|\Delta\varepsilon_{xx}\right|^2$ e envolve apenas termos da diagonal da perturbação. Já a intensidade espalhada na polarização ortogonal ao laser incidente depende das componentes fora da diagonal, ou seja, de $\Delta\varepsilon_{xy}$. Como calculamos no capítulo 2, ondas acústicas puramente longitudinais geram apenas termos diagonais e causam espalhamento polarizado, entretanto, ondas transversais geram apenas termos fora da diagonal e causam espalhamento na polarização ortogonal. Mais especificamente, como vimos no capítulo 2, ondas transversais não espalham na direção de 180° (retro-espalhamento). Em geral, porém, *modos acústicos* de guias contém ambas componentes, longitudinal e transversal, e a princípio, diferentemente do caso *bulk*, espalham tanto na mesma polarização quanto na polarização ortogonal ao laser incidente. A intensidade de espalhamento de cada polarização depende da forma do modo acústico específico. Como veremos adiante, modos com caráter mais longitudinal (ou seja, modos com componentes longitudinais mais fortes que as transversais) ainda espalham mais efetivamente a luz. Assim, o espalhamento em um *rod* de diâmetro grande é bastante polarizado. A situação se complica quando o diâmetro do *rod* fica pequeno. Primeiramente, o modo óptico deixa de ser linearmente polarizado e então a forma da integral de *overlap* fica mais complicada, mas basicamente o espalhamento despolarizado aumenta. Segundo, quando menor o diâmetro, maior a componente longitudinal do campo E_z na equação (4.38), complicando mais ainda a análise mas que, de maneira geral diminui a eficiência de espalhamento, como pode ser visto pelo sinal negativo do principal termo em $|E_z|^2$. A razão disto é que o campo elétrico longitudinal do espalhado tem sinal oposto ao campo do laser incidente, e diminuem a projeção de um modo no outro, ou seja, quanto maior E_z, mais diferentes são os modos co- e contra-propagantes.

Antes de apresentarmos os cálculos numéricos da integral de *overlap*, vamos seguir com uma análise analítica fazendo algumas aproximações para simplificar o entendimento do processo físico. Primeiramente, sabemos que o *stress* causado por uma onda acústica é proporcional à derivadas espaciais do vetor deslocamento. Ou seja, não interessa o deslocamento em si, mas sim o gradiente do deslocamento (obviamente, um deslocamento não-nulo com derivadas nulas representa uma translação rígida do corpo como um todo, e portanto não causa mudança no índice de refração). Vamos analisar as derivadas. As derivadas com relação a z, ou seja, ao longo da direção de propagação, são proporcionais a β_α, a constante de propagação do modo. Já as derivadas com relação às coordenadas transversais são proporcionais à componente transversa do vetor de onda. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial z} \propto \beta_\alpha \text{ e } \frac{\partial}{\partial r} \propto k_L \text{ ou } k_T .$$

Vejamos alguns números. Sabemos que os modos que espalham a luz devem satisfazer a condição de *phase-matching*, de onde resulta que

$$\beta_\alpha = \beta_{(-)} + \beta_{(+)} \approx 2\beta \approx \frac{4\pi n}{\lambda} = 1{,}17\times 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Para calcular o vetor de onda transverso, sabendo que o modo acústico satisfaz condições de contorno em $r = R$, cabe esperar que

$$\begin{gathered} k_L R \sim \pi \\ \Rightarrow k_L \sim \frac{\pi}{R} = 6{,}8\times 10^5 \text{ m}^{-1}. \end{gathered}$$

para um diâmetro de $2R = 9{,}27\ \mu\text{m}$. Concluímos assim que as derivadas em z são pelo menos $20\times$ maiores que as derivadas transversas. Também vemos aqui que, quanto maior o confinamento (menor raio), maiores são as derivadas transversas. Para $2R = 1{,}22\ \mu\text{m}$, $k_L = 5{,}2\times 10^6 \text{ m}^{-1}$, somente duas vezes menor que a derivada longitudinal. Desprezamos aqui, para uma análise simplificada, todas as derivadas transversas (uma aproximação para diâmetros grandes). Os elementos do tensor de *strain* ficam

$$\begin{aligned} &S_{rr}^{\alpha}=S_{\theta\theta}^{\alpha}=S_{r\theta}^{\alpha}=S_{\theta z}^{\alpha}=0, \\ &S_{zz}^{\alpha}=-j\beta_{\alpha}u_{z}^{\alpha}, \\ &S_{rz}^{\alpha}=\frac{-j\beta_{\alpha}u_{r}^{\alpha}}{2}, \end{aligned} \tag{4.41}$$

onde usamos o fato de que para os modos da família axial-radial, o vetor deslocamento tem a forma dada pelas equações (4.14). Substituindo o *strain* dado pelas equações (4.41) no tensor de perturbação e fazendo a transformação de coordenadas temos que

$$\begin{aligned} &\Delta\varepsilon_{xx}=-\varepsilon_{0}n^{4}p_{12}S_{zz}, \\ &\Delta\varepsilon_{xy}=0. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Substituindo o resultado nos coeficientes de acoplameto (4.39) e (4.40), e usando que o modo óptico tem simetria radial

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{I}_{\alpha}^{\mathrm{P}}=\left|\int\Delta\varepsilon_{xx}\left|E_{x}\right|^{2}dA\right|^{2}=\left(2\pi\varepsilon_{0}n^{4}p_{12}\beta_{\alpha}\right)^{2}\left|\int u_{z}^{\alpha}\left|E_{x}\right|^{2}rdr\right|^{2}, \\ &\boldsymbol{I}_{\alpha}^{\perp}=\left|\int\Delta\varepsilon_{xy}E_{x}E_{y}^{*}dA\right|^{2}=0. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Aprendemos do resultado (4.43) que a família radial-axial não despolariza a luz pela própria simetria do modo. Usando a forma específica do modo dada pela equação (4.14)

$$\mathrm{I}_{\alpha}^{\mathrm{P}}=\left(2\pi\varepsilon_{0}n^{4}p_{12}\beta_{\alpha}\right)^{2}\left|\int_{0}^{R}\left[\beta AJ_{0}\left(k_{L}r\right)+k_{T}BJ_{0}\left(k_{T}r\right)\right]\left|E_{x}\right|^{2}rdr\right|^{2}. \tag{4.44}$$

A integral de *overlap* envolve portanto o produto de uma função de Bessel com o modo óptico. Obviamente o valor da integral diminui quanto mais oscila a função de Bessel no núcleo, ou seja, quanto maior o produto $k_{L,T}R$. Portanto, modos com menor $k_{L,T}R$ contribuem mais eficientemente para o espalhamento. Notemos que há um limite inferior que é $k_{L,T}R\sim 1$, já que a onda acústica está confinada e não pode ter o vetor transverso nulo. Façamos aqui algumas aproximações para estimar a tolerância ou a largura de linha da integral de *overlap*. É possível mostrar que a função de Bessel $J_0(x)$, dentro do intervalo $[0,1]$ pode ser aproximada por uma Gaussiana tal que

$$J_0(x) \cong e^{-\frac{x^2}{w^2}}, \text{ com } w = 1{,}96, \tag{4.45}$$

onde o valor de $w = 1{,}96$ foi obtido minimizando o módulo da diferença $J_0(x) - \exp\left[-x^2/w^2\right]$. Assim,

$$J_0(k_L r) \cong e^{-\frac{k_L^2 r^2}{w^2}} \text{ e } J_0(k_T r) \cong e^{-\frac{k_T^2 r^2}{w^2}}.$$

O modo óptico do *rod* também é aproximado por uma Gaussiana de largura igual ao diâmetro do *rod*, ou seja,

$$|E_x|^2 = E_0^2 e^{-\frac{r^2}{R^2}}.$$

Aqui faremos mais uma aproximação. Observando a relação de dispersão dos modos acústicos, é claro que a constante de propagação ou está próxima da dispersão *bulk* longitudinal (curva azul) ou da transversal (curva vermelha), e nunca próxima das duas na mesma freqüência. Um resultado mais que óbvio já que as velocidades de propagação são diferentes. Portanto, podemos concluir que apenas um dos dois vetores transversos k_L ou k_T é pequeno em uma freqüência, e nunca ambos. Assim, apenas um termo da integral contribui, o termo que contém k_L quando a curva de dispersão do modo cruza a dispersão longitudinal *bulk* (curva azul), ou o termo que contém k_T quando a curva de dispersão do modo se aproxima da dispersão transversal *bulk* (curva vermelha). Desse modo, vamos manter apenas o termo longitudinal para ilustrar os cálculos seguintes. Após todas estas aproximações, temos que a integral de *overlap* fica

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_\alpha^{\mathrm{P}} &\cong \left(2\pi\varepsilon_0 n^4 p_{12}\beta_\alpha^2 E_0 A\right)^2 \left|\int_0^R e^{-\frac{k_L^2 r^2}{w^2}} e^{-\frac{r^2}{R^2}} r dr\right|^2 \\
&= \left(2\pi\varepsilon_0 n^4 p_{12}\beta_\alpha^2 E_0 \beta A R\right)^2 f\left(\frac{k_L R}{w}\right),
\end{aligned} \tag{4.46}
$$

$$
f(x) = \frac{\left[1-e^{-\left(x^2+1\right)}\right]^2}{4\left(x^2+1\right)^2}.
$$

A Figura 4. 7 mostra um gráfico da função $f(x)$. Vemos que a função cai para metade do valor de pico quando $x \sim 1$. Isso implica que a largura da integral de *overlap* é aproximadamente

$$
k_L \approx 2\frac{w}{R} \approx \frac{4}{R}. \tag{4.47}
$$

A conclusão importante aqui é que a largura de linha da integral de *overlap* é proporcional ao inverso do raio. Obviamente o resultado (4.47) nos dá a largura de linha em termos do vetor de onda transversal e não em termos da freqüência. Para passar de um para o outro, temos que conhecer a relação de dispersão do modo.

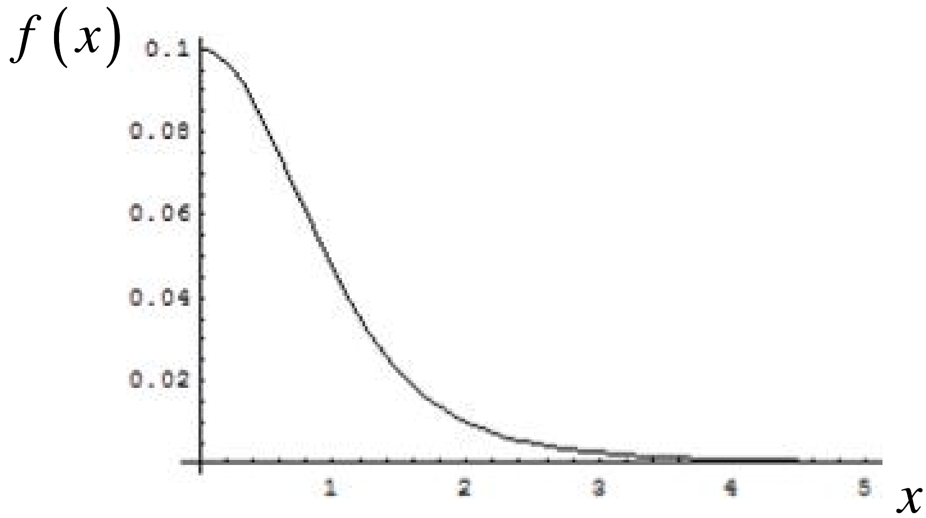


Figura 4. 7: gráfico da função $f(x)$ dada pela equação (4.46). Esta função representa a dependência da integral de *overlap* com o vetor de onda trasverso, onde $x = \frac{k_L R}{w}$. Vemos que quanto maior o produto $k_L R$, maior a oscilação radial da perturbação acústica e portanto menor é a integral de *ovelap*;

Vejamos o cálculo completo (numérico) da integral de *overlap* para alguns exemplos específicos. Primeiramente escolhemos começar com um diâmetro grande comparado com o comprimento de onda óptico ou acústico, de $9,27\ \mu\text{m}$, mas não muito grande quanto o diâmetro de uma fibra convencional ($125\ \mu\text{m}$). A razão é que as características do espalhamento Brillouin para o *rod* de $9,27\ \mu\text{m}$ são similares aos casos de diâmetros maiores. Além disso, a densidade de modos acústicos aumenta muito rapidamente, tornando o problema computacionalmente mais complexo sem trazer mais benefícios para o entendimento físico. Consideramos o material novamente a sílica fundida, como sempre nesta tese, e o comprimento de onda óptico $\lambda = 1550\ \text{nm}$. O índice de refração neste comprimento de onda é $n = 1.444$. A densidade da sílica é $2200\ \text{kg/m}^3$ e as velocidades do som longitudinal e transversal são respectivamente $5970.7\,\text{m/s}$ e $3764.8\ \text{m/s}$. A relação de dispersão acústica para a família axial-radial é aquela da Figura 4. 5, já discutida na seção anterior. Para esse diâmetro o modo óptico fundamental tem índice efetivo igual a 1.439 e portanto constante de propagação $\beta = 5,832\times10^6\ \text{m}^{-1}$. A Figura 4. 8 mostra o campo elétrico do modo óptico fundamental para ilustração. A curva preta representa o módulo do campo elétrico transversal E_t e a curva azul o módulo do campo longitudinal E_z. O valor de pico do campo transversal é $21\times$ maior que o valor de pico do campo longitudinal.

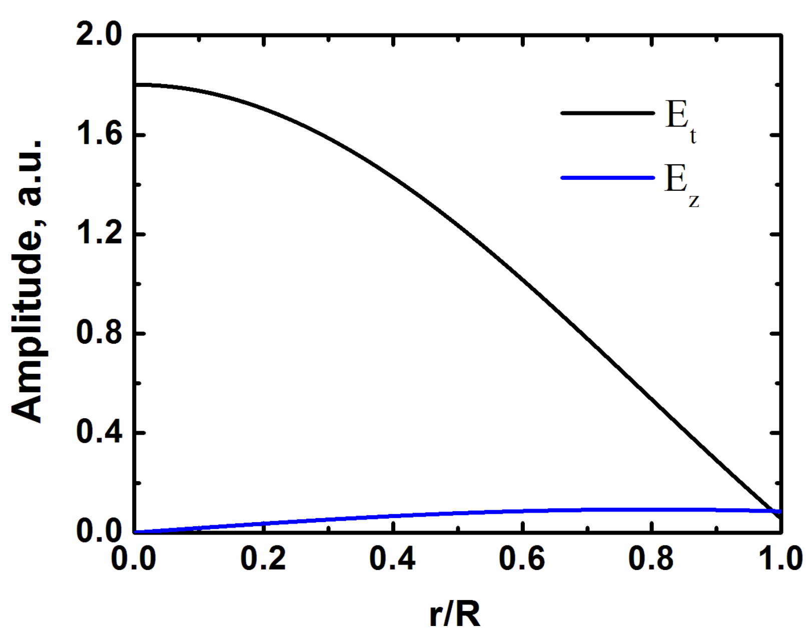


Figura 4. 8: gráfico da amplitude (em módulo) dos campos elétricos transverso E_t (curva de cor preta) e longitudinal E_z (curva de cor azul) do modo fundamental de um *rod* com $9,27\ \mu\text{m}$ em função da coordenada radial variando de $r = 0$ até $r = R$ (raio). O eixo

vertical está em unidades arbitrárias. O valor de pico do campo transversal é $21\times$ maior que o valor de pico do campo longitudinal.

A condição de *phase-matching*, lembrando do capítulo 2, requer que a constante de propagação acústica seja duas vezes a constante de propagação óptica, ou seja, $\beta_\alpha = \beta_{(-)} + \beta_{(+)} \approx 2\beta = 1{,}166\times 10^7\ \text{m}^{-1}$. Para visualizar a condição de *phase-matching*, na Figura 4. 5 contendo as relações de dispersão para a família axial-radial, traçamos uma linha horizontal (de cor preta) indicando exatamente o valor de β_α. O ponto de cruzamento desta linha horizontal com a curva de dispersão de cada modo nos fornece a freqüência de *phase-matching* deste modo, $\Omega_B^\alpha = \Omega\left(\beta_\alpha = \beta_{(-)} + \beta_{(+)}\right)$. Aqui cabe um primeiro comentário. Basta observar a Figura 4. 5 para percebermos que todos os modos têm sua própria freqüência de *phase-matching*, que nos dá o centro da Lorentziana $\boldsymbol{L}_\alpha$. Mas isso não significa que todos os modos vão contribuir no espalhamento de luz. Apenas aqueles que de fato provocarem uma significativa perturbação no índice de refração vão de fato espalhar a luz, ou seja, apenas aqueles para os quais a integral de *overlap* $\boldsymbol{I}_\alpha$ for não-nula. Vejamos quais as características que os modos têm que ter para isso ocorrer.

Numeramos os modos simplesmente na ordem de freqüências de *phase-matching*, da menor para a maior. O modo fundamental acústico é o de menor freqüência de *phase-matching* e, portanto, é o número 1, e assim por diante. Tomemos um modo qualquer da figura de dispersão, por exemplo, o modo número $\alpha = 10$. A relação de dispersão (curva vermelha) para este modo está mostrada na Figura 4. 9(a), juntamente com a linha horizontal (pontilhada) indicando a freqüência de *phase-matching* e também juntamente com a curva de dispersão *bulk* das ondas longitudinais (linha azul). A freqüência de *phase-matching* para este modo é $\Omega_B^{10} = 8,03$ GHz. Podemos ver ainda que o ponto de cruzamento da relação de dispersão do modo com a dispersão *bulk* ocorre na freqüência $\Omega_L^{10} = 4,83$ GHz, portanto bastante diferente de Ω_B^{10}. Lembremos que a notação Ω_L^{α} indica a freqüência de cruzamento da dispersão do modo α com a dispersão *bulk* (longitudinal). A integral de *overlap* para este modo está mostrada na Figura 4. 9(b). Vemos claramente que $\boldsymbol{I}_{10}$ é máxima na freqüência Ω_L^{10}, confirmando o quê comentamos anteriormente na seção que discutíamos a relação de dispersão, de que o modo perturba o índice de refração mais eficientemente quando adquire um caráter longitudinal, ou seja, próximo de Ω_L^{α}. Vale comentar que a integral de *overlap* tem a mesma forma para todos os modos da família axial-radial, apenas o centro sendo deslocado de modo para modo. A curva vermelha da Figura 4. 9(b) mostra a Lorentziana de *phase-matching* $\boldsymbol{L}_{10}$, centrada em $\Omega_B^{10} = 8,03$ GHz.

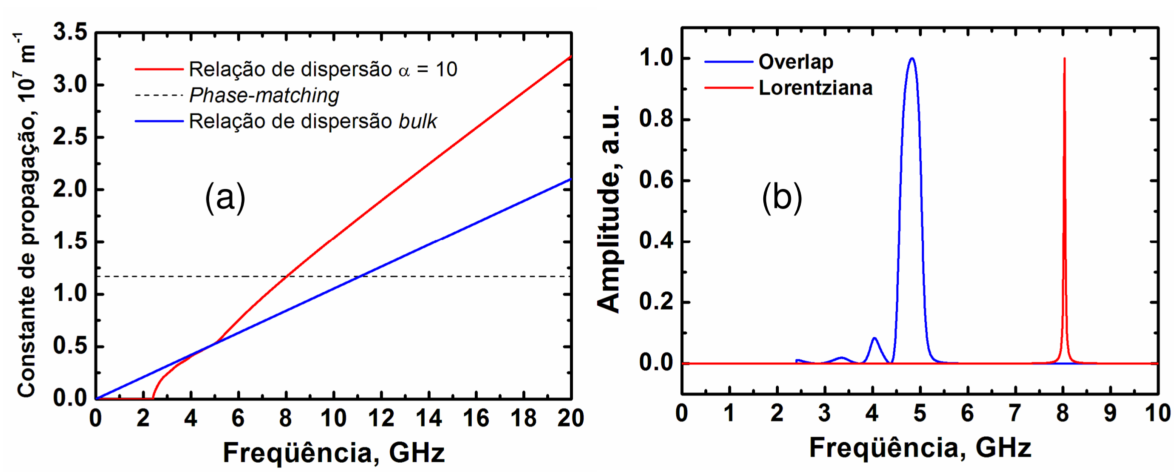


Figura 4. 9: (a) relação de dispersão (curva vermelha contínua) para o modo acústico $\alpha = 10$, juntamente com a relação de dispersão longitudinal *bulk* (curva azul). O cruzamento destas curas ocorre em $\Omega_L^{10} = 4,83$ GHz. A linha horizontal tracejada indica a

freqüência de *phase-matching* $\Omega_B^{10} = 8,03\ \text{GHz}$ para este modo; (b) integral de *overlap* $\boldsymbol{I}_{10}$ (curva azul) para o mesmo modo acústico $\alpha = 10$. O pico de *overlap* ocorre em $\Omega_L^{10} = 4,83\ \text{GHz}$. A curva vermelha representa a Lorentziana de *phase-matching* $\boldsymbol{L}_{10}$, centrada em $\Omega_B^{10} = 8,03\ \text{GHz}$;

Apenas para comparação, a Figura 4. 10 mostra a integral de *overlap* para dois modos acústicos de *rods* de diâmetros diferentes, $9,27\ \mu\text{m}$ para curva azul e $1,22\ \mu\text{m}$ para a curva vermelha. Para diâmetro pequeno, não apenas a forma da curva é alterada, mas também a largura de linha aumenta. No caso do *rod* grande a largura de linha a meia altura é $0,45\ \text{GHz}$ e no caso do *rod* pequeno a largura de linha é $3,68\ \text{GHz}$, em bom acordo com a dependência proporcional ao inverso do raio, como predito pela equação (4.47).

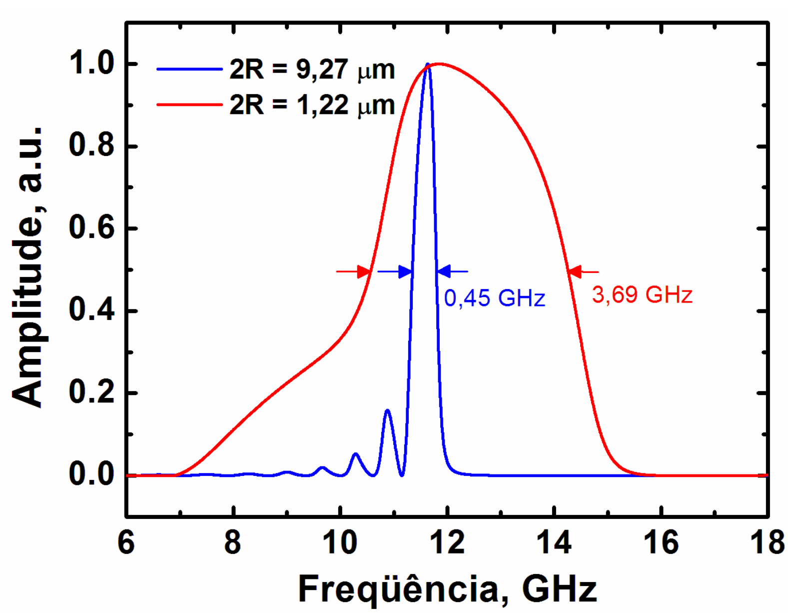


Figura 4. 10: comparação da integral de *overlap* em função da freqüência acústica para *rods* com diferentes diâmetros: $9,27\ \mu\text{m}$ (curva azul) e $1,22\ \mu\text{m}$ (curva vermelha);

Analisemos agora por quê o caráter longitudinal implica numa maior perturbação do índice, ou numa maior integral de *overlap*. Em *bulk* já sabemos que uma onda longitudinal espalha mais eficientemente que uma onda transversal, entretanto para um *modo* híbrido a análise é mais complexa. Nosso estudo analítico, embora bastante aproximado, nos deu uma boa intuição física de que a perturbação é mais eficiente para aqueles modos que oscilam pouco radialmente, e isso ocorre quando o vetor transverso é pequeno, próximo freqüência Ω_L^α. Entretanto, é interessante discutirmos um pouco a solução completa, principalmente para compararmos com o caso de diâmetros pequenos onde nossas aproximações não valem mais. Faremos isso na seção seguinte, já discutindo o espectro de espalhamento.

4.8. Espectro de retro-espalhamento

Na seção 4.7, vimos que a integral de *overlap* $\boldsymbol{I}_\alpha$ é máxima na freqüência Ω_L^α, na qual o modo acústico adquire um caráter longitudinal. É interessante notarmos, entretanto, que não basta $\boldsymbol{I}_\alpha$ ter um máximo para que o espalhamento seja eficiente. Para isso, a freqüência de máximo *ovelap* Ω_L^α deve coincidir com a freqüência de *phase-matching* Ω_B^{10}, ou seja, deve coincidir com o centro da Lorentziana $\boldsymbol{L}_\alpha$. Tomamos esta conclusão diretamente da expressão (4.37) para o espectro de espalhamento. A curva vermelha da Figura 4. 9(b) mostra a Lorentziana $\boldsymbol{L}_{10}$, juntamente com a integral de *ovelap* (notemos que as amplitudes foram re-escaladas para melhor visualização). Na verdade, basta que Ω_L^α e Ω_B^α sejam próximos o suficiente para que as curvas tenham alguma superposição, ou seja, basta que a diferença $\left|\Omega_B^\alpha - \Omega_L^\alpha\right|$ seja menor que a soma da largura de linha Brillouin e da largura de linha da integral de *overlap* Δ_α, ou seja, $\left|\Omega_B^\alpha - \Omega_L^\alpha\right| \leq \Gamma_\alpha + \Delta_\alpha$. Só quando esta coincidência ocorrer é que $K_\alpha^{(-,+)} = \boldsymbol{I}_\alpha \boldsymbol{L}_\alpha$ será não desprezível. Vemos que obviamente não é o caso para o modo $\alpha = 10$.

Se voltarmos a analisar a relação de dispersão da Figura 4. 5, mostrando todos os modos acústicos, podemos resumir a discussão até aqui da seguinte maneira. A coincidência $\left|\Omega_B^\alpha - \Omega_L^\alpha\right| \leq \Gamma_\alpha + \Delta_\alpha$ ocorre apenas para aqueles modos cujas relações de dispersão passam próximas da região e torno da freqüência de Brillouin em *bulk*, indicada com uma região hachurada. Esta freqüência é na verdade o cruzamento entre a relação de dispersão *bulk* (longitudinal, curva azul) com a linha horizontal da condição de *phase-matching*. Uma pergunta surge naturalmente aqui. Sempre existem modos acústicos que satisfazem esta condição? Ou, fisicamente, sempre existem modos acústicos que na freqüência de *phase-matching* adquirem o caráter longitudinal? A resposta é que não, e depende basicamente de quão confinados estão os modos. Vejamos. Antes de desenvolver uma explicação física, vejamos um exemplo para ilustrar. Discutimos a respeito da densidade de modos na seção de dispersão. Naquele exemplo, vimos que em um *rod* de 125 μm de diâmetro, a separação entre os modos era menor que $0{,}1\ \text{MHz}$. Lembrando que a largura de linha Brillouin é aproximadamente $20\ \text{MHz}$, pelo menos duas centenas de modos satisfazem a condição $\left|\Omega_B^\alpha - \Omega_L^\alpha\right| \leq \Gamma_\alpha + \Delta_\alpha$. Basicamente temos um meio *bulk*, com uma distribuição quase contínua de modos. Conforme o diâmetro é diminuído, a separação entre os modos aumenta, chegando a um ponto em que a condição $\left|\Omega_B^\alpha - \Omega_L^\alpha\right| \leq \Gamma_\alpha + \Delta_\alpha$ não mais é satisfeita plenamente. Por exemplo, o caso do *rod* de $9{,}27\ \mu\text{m}$, a separação entre os modos é $25\ \text{MHz}$ e está no limite de separação entre o regime contínuo e discreto, tal que haja superposição entre $\boldsymbol{I}_\alpha$ e $\boldsymbol{L}_\alpha$. O caso do *rod* de $1{,}22\ \mu\text{m}$ já está obviamente dentro do regime discreto, com $1{,}18\ \text{GHz}$ de separação. O resultado é que modos não mais puramente longitudinais, e sim híbridos, interagem com a luz neste regime. O caráter híbrido dos modos acústicos altera as propriedades do espalhamento Brillouin. Cabe neste ponto uma observação interessante. Sabemos que as ondas longitudinais e as transversais são acopladas devido à presença de uma interface, que no caso do *rod* é a superfície externa entre o vidro e o vácuo. O volume do *rod* é o produto da área da seção transversa $A_{transv} = \pi R^2$ pelo comprimento L, ou seja, $V = A_{extern} L = \pi R^2 L$. A área da superfície externa é simplesmente $A_{sup} = 2\pi RL$. Se assumirmos que o efeito da interface pode ser pesado através da razão entre a superfície e o volume do meio, temos que $A_{sup}/V = 2/R$. Portanto, esperar um comportamento híbrido para diâmetros cada vez menores parece natural segundo este simples fato.

Iniciemos a análise do espectro Brillouin pelo caso do *rod* grande (diâmetro $9{,}27\ \mu\text{m}$). Um fato deve estar claro neste ponto: apenas modos $\left|\Omega_B^\alpha - \Omega_L^\alpha\right| \sim \Gamma_\alpha + \Delta_\alpha$ contribuem para o espectro. Mais ainda, sabemos que isso ocorre próximo do cruzamento da linha azul (dispersão *bulk*) com a linha horizontal preta (condição de *phase-matching*). Tendo isto em mente, analisemos $\boldsymbol{I}_\alpha$ e $\boldsymbol{L}_\alpha$ para alguns modos próximos desta região. A Figura 4. 11 mostra $\boldsymbol{I}_\alpha$ e $\boldsymbol{L}_\alpha$ para 3 modos consecutivos (números 21, 22 e 23), onde o modo intermediário (22) apresenta a coincidência $\Omega_B^\alpha \cong \Omega_L^\alpha$. Para os modos adjacentes, é claro que a contribuição será bem menor, já que a superposição entre as curvas é pequena.

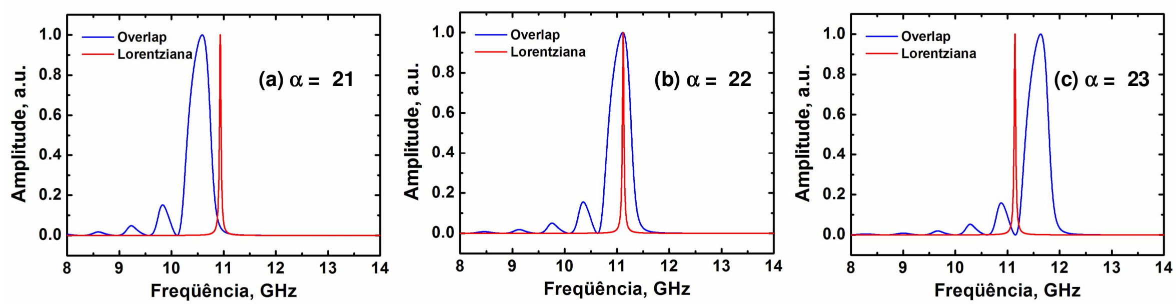


Figura 4. 11: gráficos das integrais de *overlap* $\boldsymbol{I}_{\alpha}$ (curva azul) e da Lorentziana de *phase-matching* $\boldsymbol{L}_{\alpha}$ (curva vermelha) para três modos adjacentes de um *rod* de $9,27\ \mu\text{m}$ de diâmetro. Seguindo a numeração estabelecida, os modos são os 21, 22 e 23, respectivamente em (a), (b) e (c). O modo 22 em (b) é aquele em que os máximos de $\boldsymbol{I}_{\alpha}$ e $\boldsymbol{L}_{\alpha}$ coincidem a mesma freqüência;

Calculamos então $\boldsymbol{I}_{\alpha}$ e $\boldsymbol{L}_{\alpha}$ para todos os modos acústicos e o resultado foi somado de acordo com (4.37) para obtermos o espectro de retro-espalhamento Brillouin em um *rod.* O resultado está mostrado na Figura 4. 12, onde a amplitude foi novamente normalizada. Vemos que o pico mais forte corresponde ao modo de freqüência de $11,09\ \text{GHz}$. Outros pequenos picos adjacentes aparecem na base do espectro, um indício que ficará claro no caso do *rod* pequeno – o aparecimento de múltiplos picos de espalhamento. Notemos ainda que em torno de $6\ \text{GHz}$, um pequeno pico de espalhamento aparece, quase não perceptível na escala da figura. Este pico corresponde ao modo fundamental da família axial-radial. Este modo tem as características de uma onda de superfície, ou uma onda to tipo Rayleigh [66, 67]. Para freqüências altas (acima de $1\ \text{GHz}$) toda a energia acústica se concentra na superfície do *rod* [67]. Voltaremos a este ponto adiante.

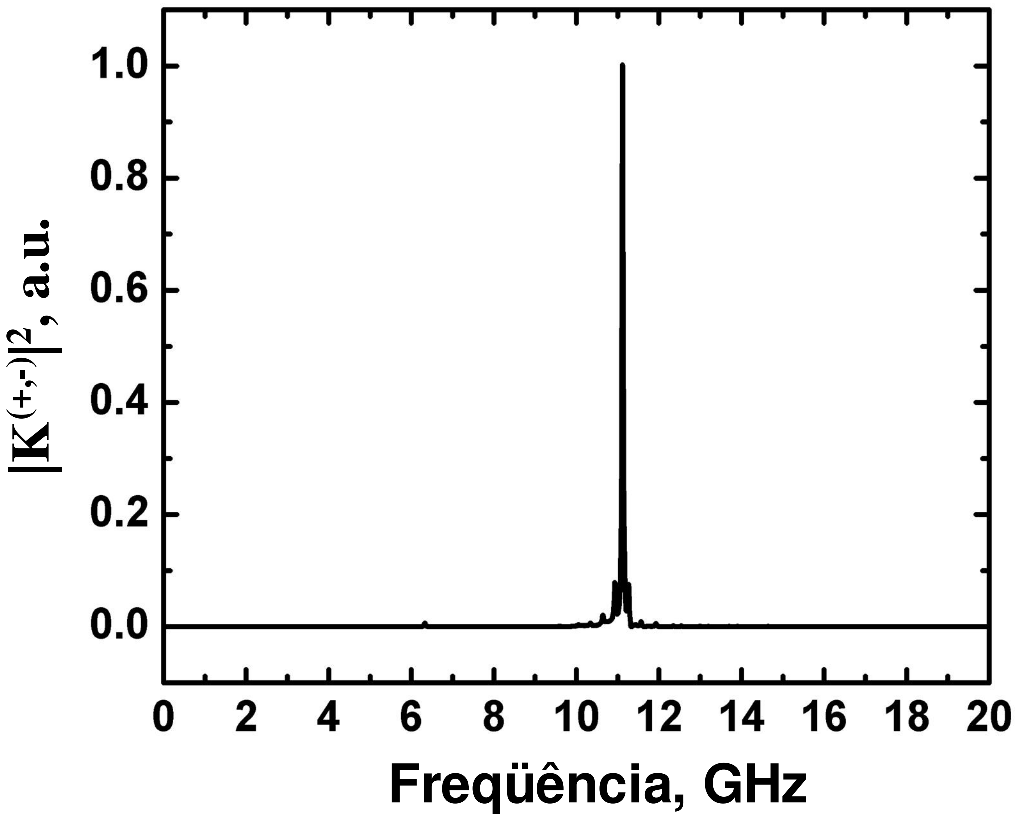


Figura 4. 12: espectro de retro-espalhamento Brillouin calculado para um *rod* de $9,27$ μm de diâmetro. O modo óptico é o fundamental e consideramos todos os modos acústicos com simetria azimutal, das famílias radial-axial e torsional. O eixo vertical tem unidades arbitrárias.

Vejamos como é a perturbação no índice de refração causada por aqueles modos adjacentes que mostramos. Basta para isso analisarmos o modo central (22) correspondente à Figura 4. 11(b) e mais um adjacente, por exemplo, o 23, correspondente à Figura 4. 11(c). Como vimos anteriormente, equações (4.42) e (4.43), o termo principal do *strain* que causa perturbação é o $S_{zz} = j\beta u_z$, e portanto analisamos a própria componente u_z do deslocamento. A Figura 4. 13 mostra u_z para os modos 22 em (a) e 23 em (b). Como a solução analítica pode ser separada em dois termos, um proveniente do caráter de onda longitudinal e outro de onda transversal, graficamos separadamente cada termo no mesmo gráfico do vetor deslocamento total. Para o modo que espalha a luz mais eficientemente, podemos ver que o termo longitudinal não oscila dentro do núcleo, enquanto que o transversal oscila ao longo da direção radial. Isto pode ser visto comparando o produto $k_{L,T}R$ do vetor de onda transverso pelo raio do *rod*. Para a componente dilatacional temos que $k_L R = 0,98$ e para a onda equivolumial $k_T R = 66,56$. Lembrando o resultado mostrado na Figura 4. 7, é óbvio que a perturbação de índice média, ponderada pelo modo óptico, causada pela componente dilatacional é maior que aquela causada pela equivolumial. Agora, se analisarmos o modo adjacente, tanto o termo longitudinal quanto o transversal oscilam dentro do núcleo (o transversal oscilando mais). A diferença entre os modos é que no caso do 22 (mais eficiente), o vetor de onda transverso é menor, causando maior *overlap*.

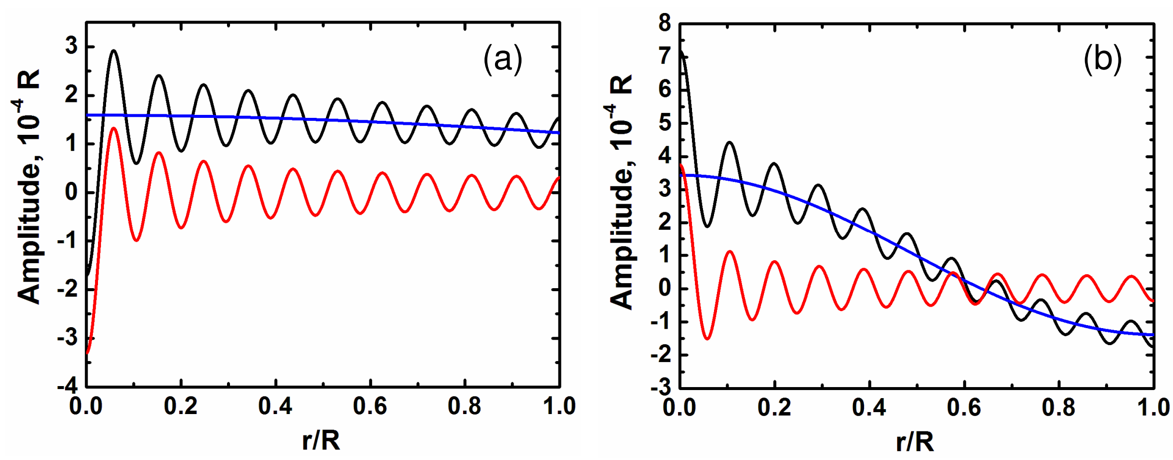


Figura 4. 13: gráfico da componente longitudinal do vetor deslocamento, u_z, para os modos (a) $\alpha = 22$ e (b) $\alpha = 23$ da família axial-radial de um *rod* de $9,27$ μm de diâmetro.

A curva preta representa u_z (em unidades arbitrárias) em função da coordenada radial desde $r = 0$ até $r = R$ (raio). As curvas azul e vermelha representam as componentes dilatacional e equivolumial que constituem cada modo. A soma destas componentes resulta no deslocamento total do modo u_z.

Podemos ainda graficar os termos do tensor de perturbação $\Delta\varepsilon_{ij}$, e isto está feito na Figura 4. 14 para o modo $\alpha = 22$, aquele que espalha mais eficientemente. As curvas de cor preta, vermelha e azul correspondem aos termos da diagonal $\Delta\varepsilon_{rr}$, $\Delta\varepsilon_{\theta\theta}$ e $\Delta\varepsilon_{zz}$; e a curva de cor verde corresponde ao menor termo de todos, o termo fora da diagonal $\Delta\varepsilon_{r\theta}$. Todas as curvas apresentam uma componente que oscila rapidamente na direção radial, proveniente do termo transversal. A componente que oscila pouco provém do termo longitudinal. Apesar de a componente longitudinal ser maior, a componente transversal não é desprezível. Quanto menor o diâmetro, mais forte fica esta componente.

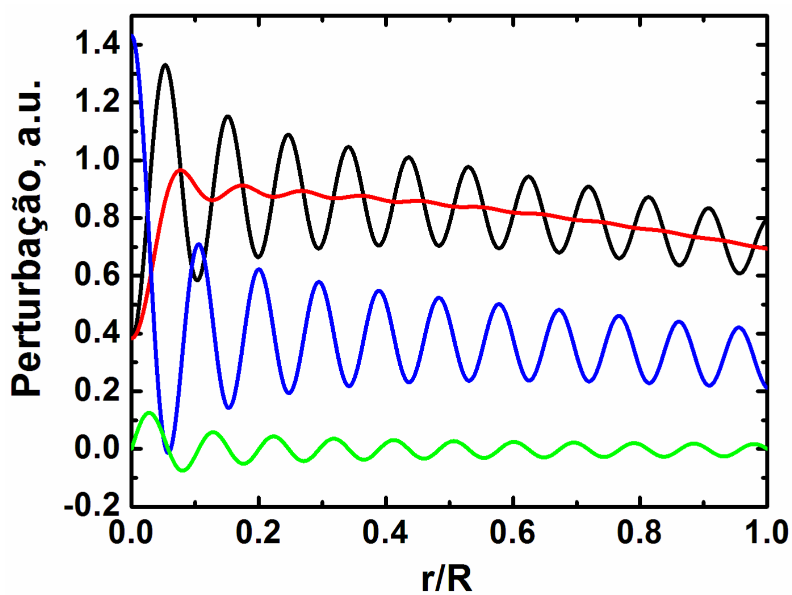


Figura 4. 14: gráfico dos elementos do tensor de perturbação $\Delta\varepsilon_{rr}$ (curva preta), $\Delta\varepsilon_{\theta\theta}$ (curva vermelha) e $\Delta\varepsilon_{zz}$ (curva azul) em função da coordenada radial desde $r = 0$ até

$r = R$ (raio), para o modo $\alpha = 22$ (aquele que espalha mais eficientemente) da família axial-radial de um *rod* com $9,27\ \mu\text{m}$ de diâmetro. A curva de cor verde corresponde ao menor termo de todos, o termo fora da diagonal $\Delta\varepsilon_{r\theta}$.

Vamos analisar agora um *rod* pequeno. Aqui, as conclusões não são mais diretas quanto no caso anterior. Ao diminuirmos o diâmetro, tanto o modo óptico quanto o acústico adquirem características mais complexas. Por exemplo o campo elétrico do modo fundamental não é mais transverso, e a componente $\boldsymbol{E}_z$ passa ser não-desprezível quando o diâmetro é $1,22\ \mu\text{m}$. A Figura 4. 15 mostra um gráfico das componentes transversa e longitudinal do campo elétrico. Lembrando que no caso de diâmetro grande $\boldsymbol{E}_t$ era pelo menos $21\times$ maior que $\boldsymbol{E}_z$. Agora, o valor de pico do campo $\boldsymbol{E}_t$ é apenas $2,6\times$ maior que $\boldsymbol{E}_z$. O índice efetivo do modo também diminui com o diâmetro, caindo para 1.238 e a constante de propagação para $\beta = 5,019\times10^{6}\ \text{m}^{-1}$. Esperamos, portanto, a freqüência Brillouin também ser menor, comparado com o caso de diâmetro grande.

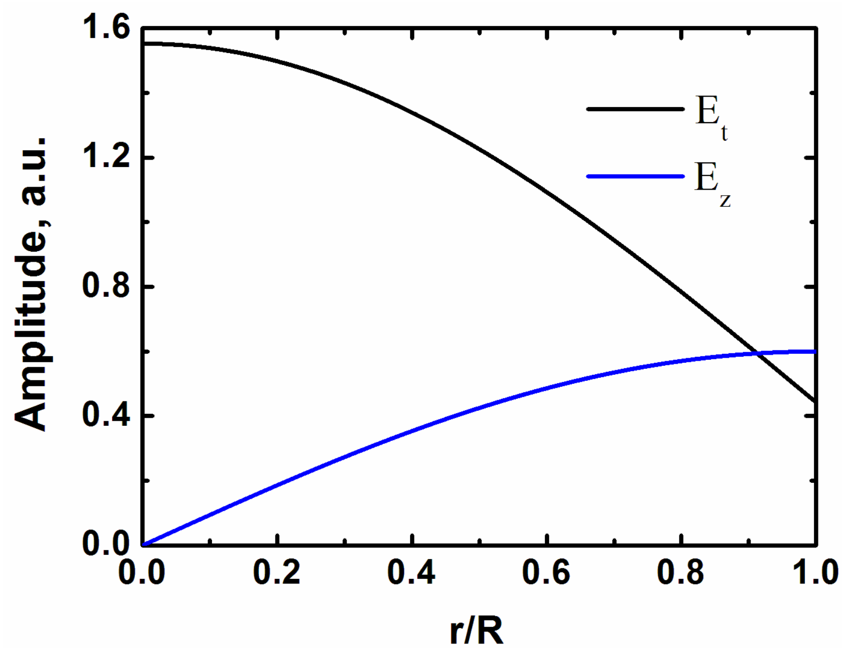


Figura 4. 15: gráfico da amplitude (em módulo) dos campos elétricos transverso E_t (curva de cor preta) e longitudinal E_z (curva de cor azul) do modo fundamental de um *rod* com $1,22\ \mu\text{m}$ em função da coordenada radial variando de $r = 0$ a $r = R$ (raio). O eixo vertical está em unidades arbitrárias. O valor de pico do campo transversal é $2,6\times$ maior que o valor de pico do campo longitudinal.

Com relação aos modos acústicos, dois pontos devem ser mencionados. O primeiro é que os modos são híbridos e a componente de origem longitudinal não domina a componente de origem transversal. O segundo é que as derivadas transversas do vetor deslocamento acústico não são mais desprezíveis se comparadas com a derivada longitudinal. Vejamos com mais detalhes. Primeiramente, analisemos as integrais de *overlap* para modos adjacentes como fizemos no caso de diâmetro grande. A Figura 4. 16 mostra $\boldsymbol{I}_\alpha$ e $\boldsymbol{L}_\alpha$ para os modos 3,4,5 e 6. O modo 3 apresenta uma pequena superposição e portanto quase não contribui para o espalhamento. Os outros modos apresentam todos uma contribuição apreciável.

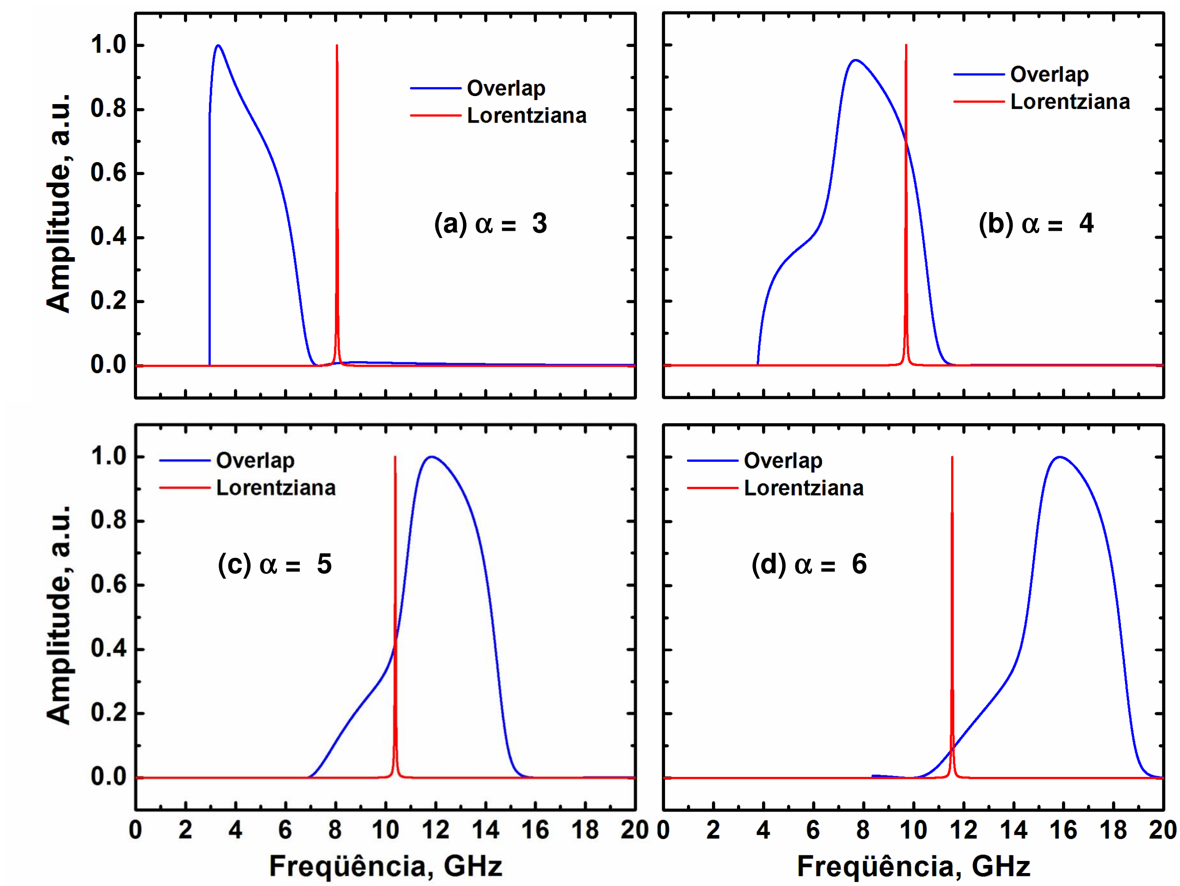


Figura 4. 16: gráficos das integrais de *overlap* $\boldsymbol{I}_{\alpha}$ (curva azul) e da Lorentziana de *phase-matching* $\boldsymbol{L}_{\alpha}$ (curva vermelha) para quatro modos adjacentes de um *rod* de $1,22\ \mu\text{m}$ de diâmetro. Seguindo a numeração estabelecida, os modos são os 3 a 6, respectivamente em (a), (b), (c) e (d);

Novamente, utilizando a equação (4.37) somamos a contribuição de cada modo para obtermos o espectro de espalhamento. Como estes modos estão bastante separados em freqüência, cada um contribui com um pico isolado no espectro de espalhamento, como mostra o gráfico da Figura 4. 17. Vemos que o pico mais forte está centrado na freqüência de 10 GHz que, como esperado, é menor que a freqüência do pico único obtido para o *rod* de diâmetro grande. A principal característica do espectro obtido é a presença de múltiplos picos de espalhamento, em analogia com o observado em fibras fotônicas de núcleo pequeno. Se os modos acústicos estão sendo guiados no pequeno núcleo da PCF, a discretização da distribuição de modos causa um *splitting* no espectro de espalhamento. O comportamento físico é bem entendido usando o modelo do *rod* mas as freqüências absolutas não podem ser explicadas. No caso da PCF, os picos estavam entre 9.7 e 10.2 GHz, já no caso do *rod* a separação em freqüência é maior.

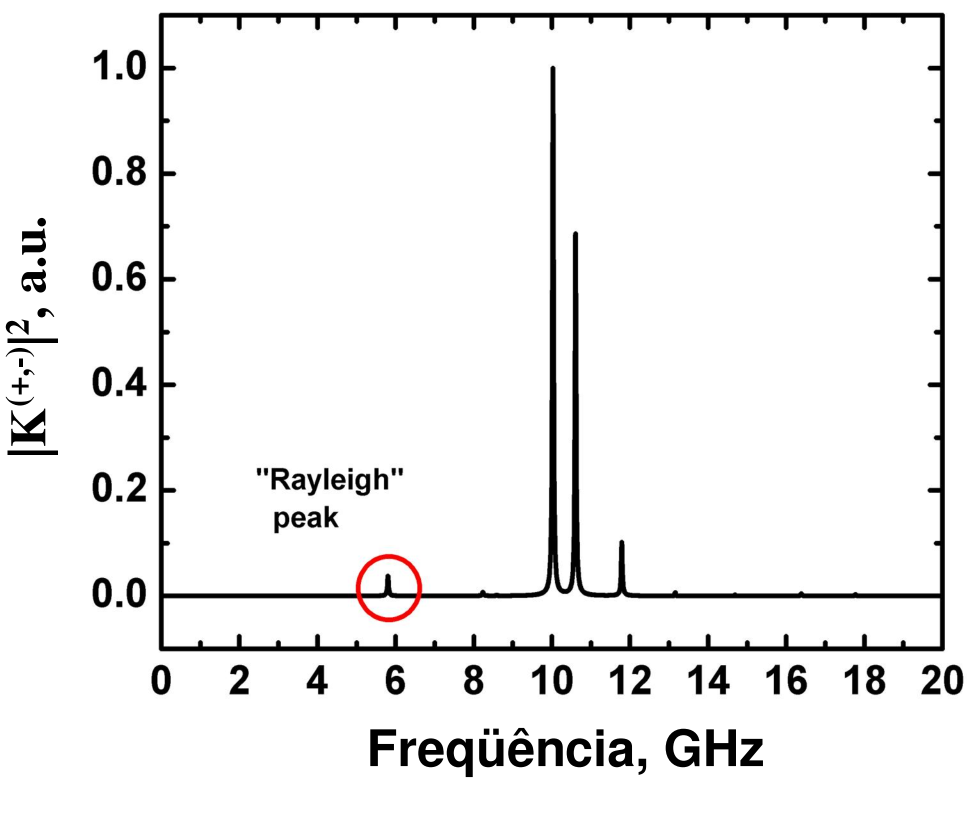


Figura 4. 17: espectro de retro-espalhamento Brillouin calculado para um *rod* de $1,22$ μm de diâmetro. O modo óptico é o fundamental e consideramos todos os modos acústicos com

simetria azimutal, das famílias radial-axial e torsional. O eixo vertical tem unidades arbitrárias.

Além disso, uma segunda divergência é o caso do pico de espalhamento em $6\ \text{GHz}$, resultante do modo acústico de superfície – Rayleigh. Vemos que para diâmetro pequeno, este pico fica relativamente mais intenso, se comparado com os picos em torno de $10\ \text{GHz}$. Novamente, o efeito de superfície aumenta para diâmetros pequenos. Para ilustrar o modo Rayleigh, a Figura 4. 18 mostra a componente u_z do vetor deslocamento para duas freqüências do modo fundamental (Rayleigh): na freqüência de *phase-matching* $5{,}6\ \text{GHz}$ e para uma freqüência mais alta $20\ \text{GHz}$. Vemos que deslocamento acústico (e portanto a energia deste modo acústico) é máximo na superfície do *rod* em ambos os casos, a concentração aumentando quanto maior a freqüência do modo. Apesar do *overlap* com o modo óptico ser pequeno, não é desprezível, resultando em uma contribuição no espetro de espalhamento. Outro comentário interessante à respeito do modo Rayleigh é que este é o único modo que viaja com velocidade de fase menor que a velocidades longitudinal e transversal [67].

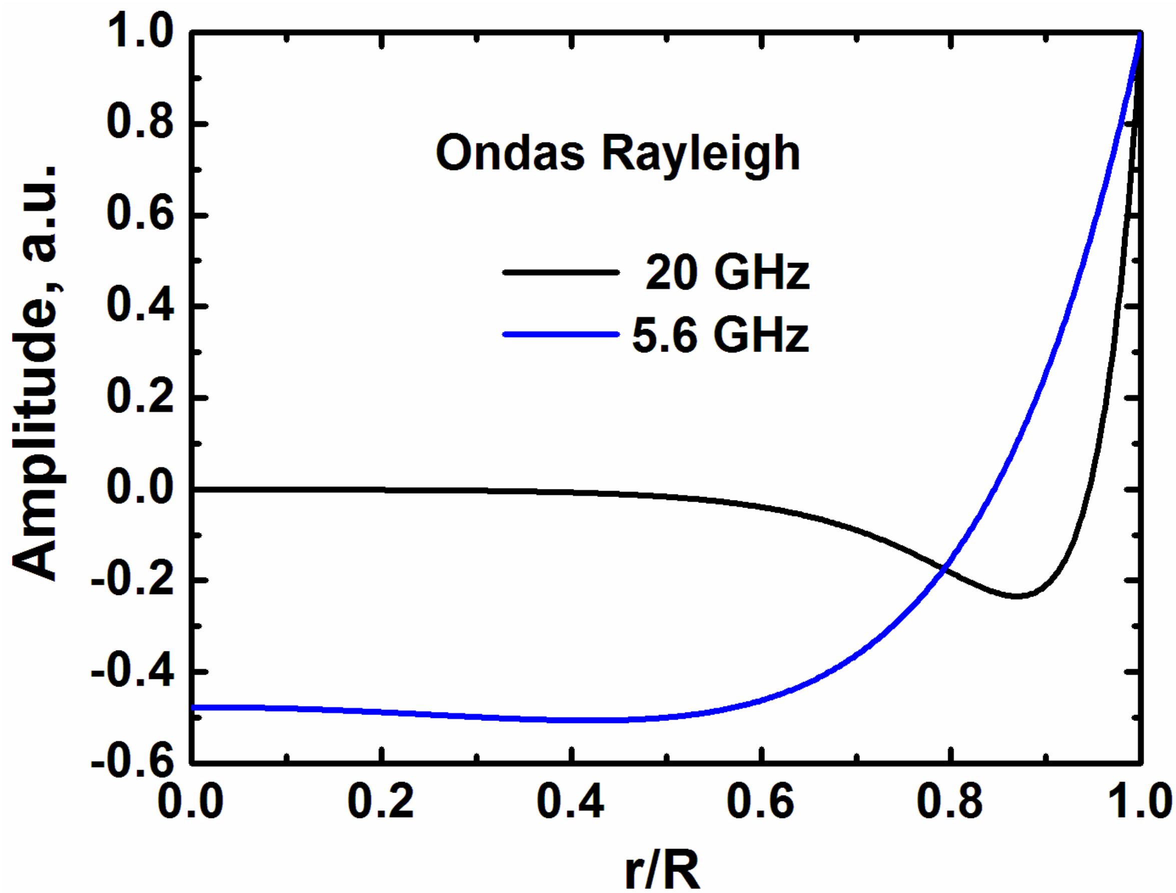


Figura 4. 18: gráfico da componente longitudinal do vetor deslocamento, u_z, em função da coordenada radial variando de $r = 0$ a $r = R$ (raio), para o modo Rayleigh ($\alpha = 1$) da família axial-radial de um *rod* de $1,22\ \mu\text{m}$ de diâmetro. A freqüência exata deste modo é $5,6\ \text{GHz}$ e podemos ver que o deslocamento acústico se concentra na superfície do *rod*;

Vejamos agora como é a perturbação no índice de refração no caso de diâmetro pequeno. O modo que espalha a luz mais eficientemente é o modo número 4, e assim vejamos a perturbação causada por este modo. A Figura 4. 19 mostra a componente u_z do vetor deslocamento, onde novamente usando a solução analítica, separamos os termos provenientes das ondas longitudinal (curva azul) e transversal (curva vermelha). Vemos que aqui, o valor de pico da componente transversal é maior que o valor de pico da longitudinal. Como no caso de diâmetro grande, para o modo que espalha a luz mais eficientemente, o termo dilatacional oscila radialmente menos que a componente equivolumial. Comparando o produto $k_{L,T}R$ do vetor de onda transverso pelo raio do *rod*, temos que ara a componente dilatacional $k_L R = 2,44$ e para a onda equivolumial $k_T R = 8,47$. Na Figura 4. 20 comparamos as derivadas transversas $\partial u_r / \partial r$ (curva preta) e $\partial u_z / \partial r$ (curva vermelha) e da derivada longitudinal $\partial u_z / \partial z$ (curva azul). Vemos claramente que estas derivadas são da mesma magnitude e não podemos desprezar termos transversos. Outro ponto é que as derivadas estão fora de fase, ou seja, quando a fibra é comprimida na direção z, ela se expande transversalmente.

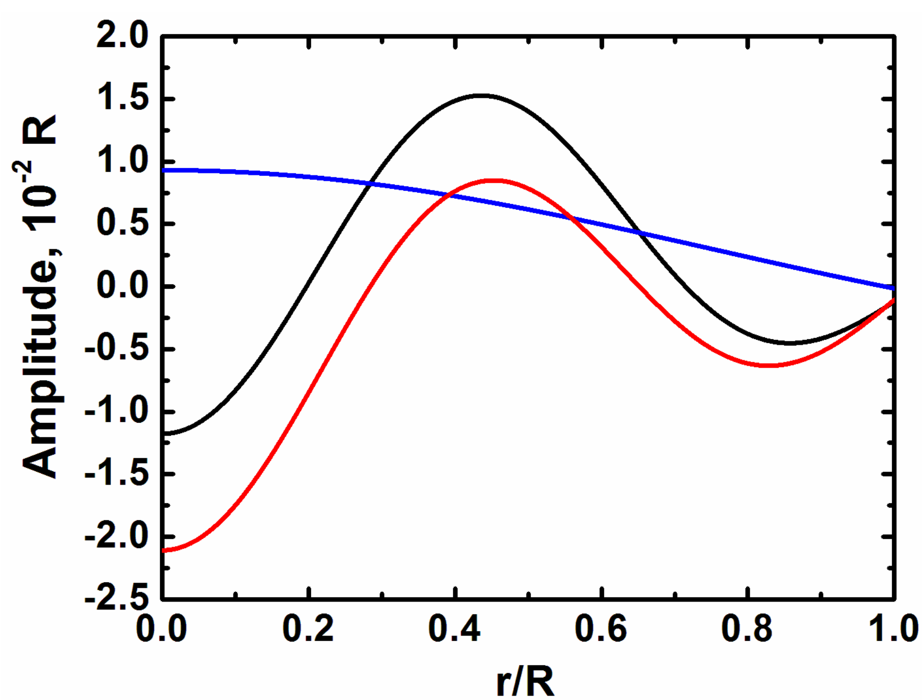


Figura 4. 19: gráfico da componente longitudinal do vetor deslocamento, u_z, para o modo $\alpha = 4$, aquele que resulta no pico de espalhamento mais intenso, da família axial-radial de

um *rod* de $1,22\ \mu\mathrm{m}$ de diâmetro. A curva preta representa a amplitude de u_z (em unidades arbitrárias) em função da coordenada radial desde $r=0$ até $r=R$ (raio). As curvas azul e vermelha representam as componentes dilatacional e equivolumial que constituem cada modo. A soma destas componentes resulta na amplitude total do modo u_z.

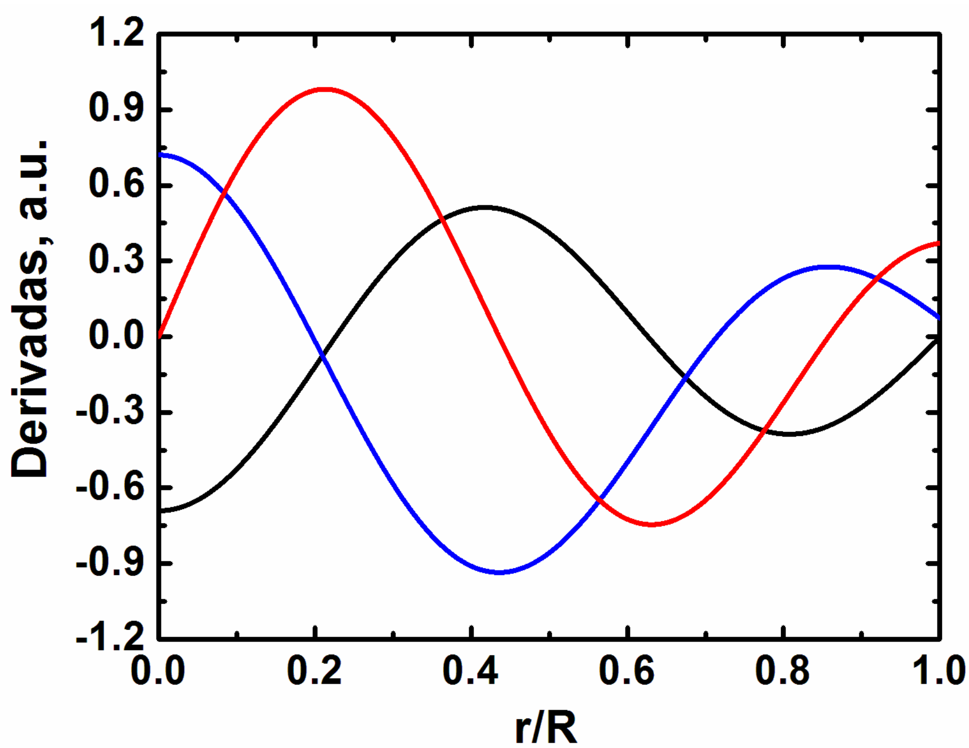


Figura 4. 20: gráfico das derivadas transversas $\partial u_r/\partial r$ (curva preta) e $\partial u_z/\partial r$ (curva vermelha) e da derivada longitudinal $\partial u_z/\partial z$ (curva azul) em função da coordenada radial desde $r=0$ até $r=R$ (raio), para o modo $\alpha=4$ da família axial-radial de um *rod* de $1,22\ \mu\mathrm{m}$ de diâmetro;

Apenas para ilustrar, graficamos na Figura 4. 21 as componentes do tensor de perturbação, do mesmo modo que fizemos para diâmetro grande. A ordem de cores se repete: as curvas de cor preta, vermelha e azul correspondem aos termos da diagonal $\Delta\varepsilon_{rr}$,

$\Delta\varepsilon_{\theta\theta}$ e $\Delta\varepsilon_{zz}$; e a curva de cor verde corresponde ao menor termo de todo, o termo fora da diagonal $\Delta\varepsilon_{r\theta}$. Vemos agora que, ao contrário do caso de diâmetro grande, o termo DC proveniente de ondas longitudinais não é mais dominante sobre os termos que oscilam na direção radial. Mais ainda, o termo cruzado é mais significativo do que no caso de diâmetro grande.

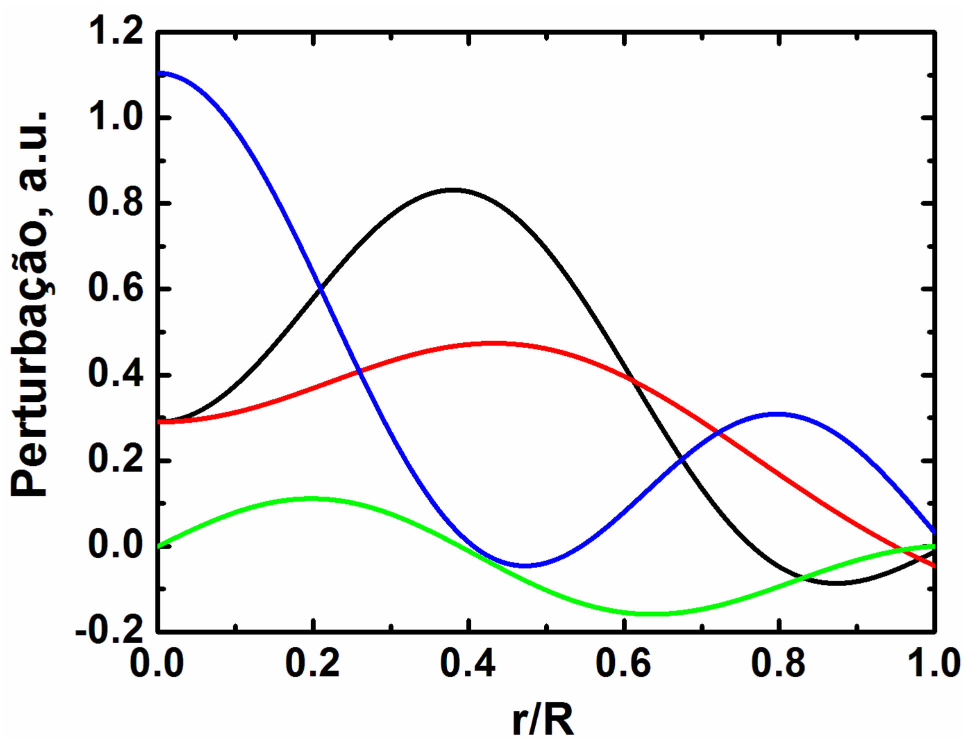


Figura 4. 21: gráfico dos elementos do tensor de perturbação $\Delta\varepsilon_{rr}$ (curva preta), $\Delta\varepsilon_{\theta\theta}$ (curva vermelha) e $\Delta\varepsilon_{zz}$ (curva azul) em função da coordenada radial desde $r = 0$ até $r = R$ (raio), para o modo $\alpha = 4$ (aquele que espalha mais eficientemente) da família axial-radial de um *rod* com $9,27\ \mu\text{m}$ de diâmetro. A curva de cor verde corresponde ao menor termo de todos, o termo fora da diagonal $\Delta\varepsilon_{r\theta}$.

4.9. Acoplamento longitudinal-transversal no *rod*

Para concluir o estudo do acoplamento longitudinal-transversal, presentes nos modos acústicos do *rod*, graficamos na Figura 4. 22 a componente u_z do vetor deslocamento (curva preta) para diversos diâmetros. O modo escolhido para cada *rod* é aquele com maior caráter dilatacional, ou seja, aquele com menor vetor transverso da componente dilatacional que resulta no maior *overlap*. A Figura 4. 22 mostra o resultado para 3 diferentes diâmetros (a) $100\ \mu\text{m}$, (b) $10\ \mu\text{m}$ e (c) $1\ \mu\text{m}$. Novamente, usando a solução analítica, separamos as componentes dilatacional (curva azul) e equivolumial (curva vermelha). O resultado é claro: quanto menor o diâmetro, mais forte a componente proveninete de ondas equivolumiais. O caso do diâmetro de 100 mícorns mostra que o modo acústico é praticamente puramente longitudinal, muito similar ao caso *bulk*, entretanto, conforme o diâmetro diminui, a componente equivolumial cresce e, não somente, a oscilação transversal desta componente diminui. No caso *rod* de menor diâmetro, a amplitude da componente equivolunial é maior que a amplitude da componente dilatacional.

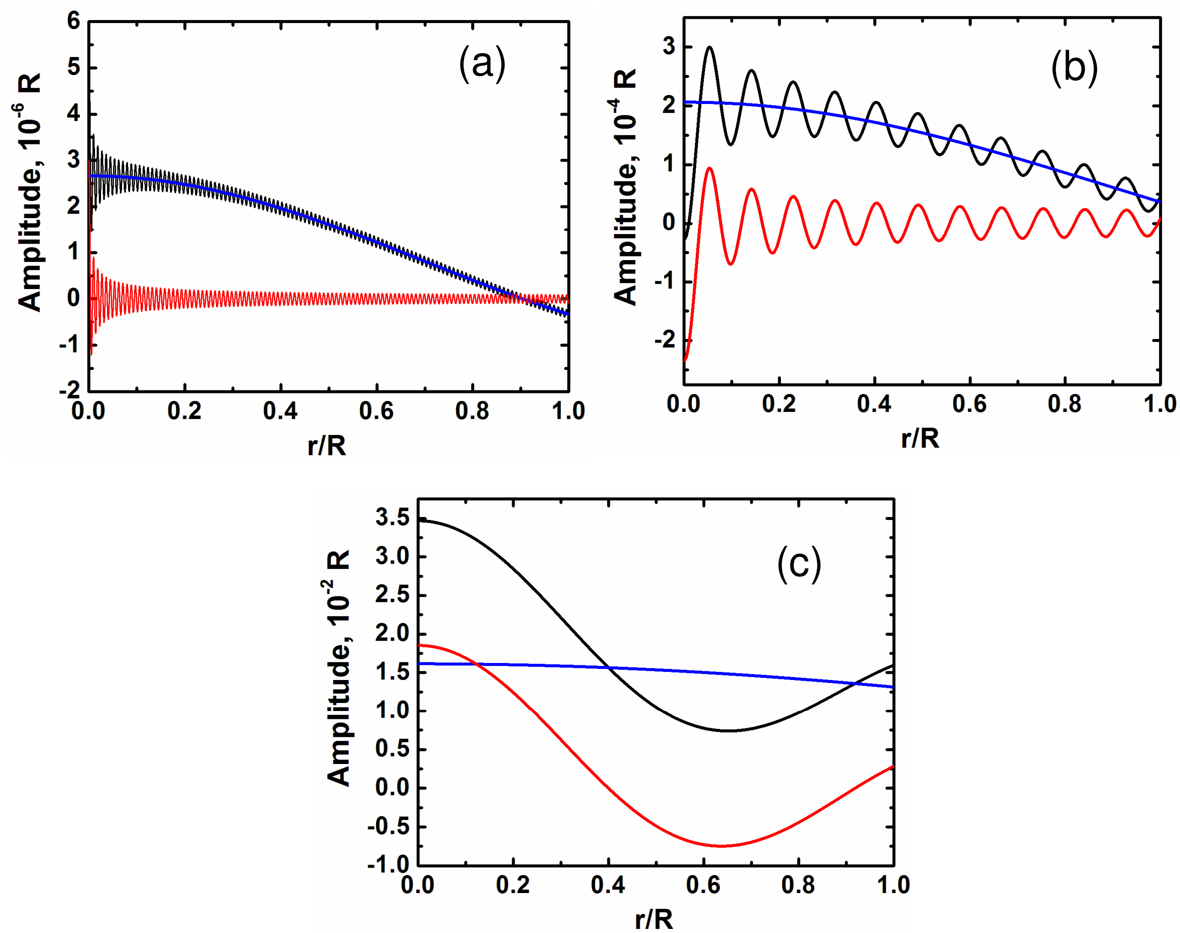


Figura 4. 22: gráfico da componente longitudinal do vetor deslocamento, u_z, para o modo com maior caráter dilatacional (aquele que resulta no pico de espalhamento mais intenso), da família axial-radial para diferentes diâmetros do *rod*: (a) 100 μm, (b) 10 μm e (c) 1 μm de diâmetro. A curva preta representa a amplitude de u_z (em unidades arbitrárias) em função da coordenada radial desde $r = 0$ até $r = R$ (raio). As curvas azul e vermelha representam as componentes dilatacional e equivolumial que constituem cada modo. A soma destas componentes resulta na amplitude total do modo u_z;

4.10. Evolução do espectro Brillouin

Finalmente, para concluir esta etapa da análise do modelo do *rod*, calculamos a evolução do espectro de espalhamento em função do diâmetro. O resultado está mostrado na Figura 4. 23. O aparecimento de múltiplos picos de espalhamento para *rods* pequenos é claro. Também podemos ver que a freqüência do pico central é deslocada para freqüências menores quanto menor o diâmetro, em acordo com nossas observações experimentais.

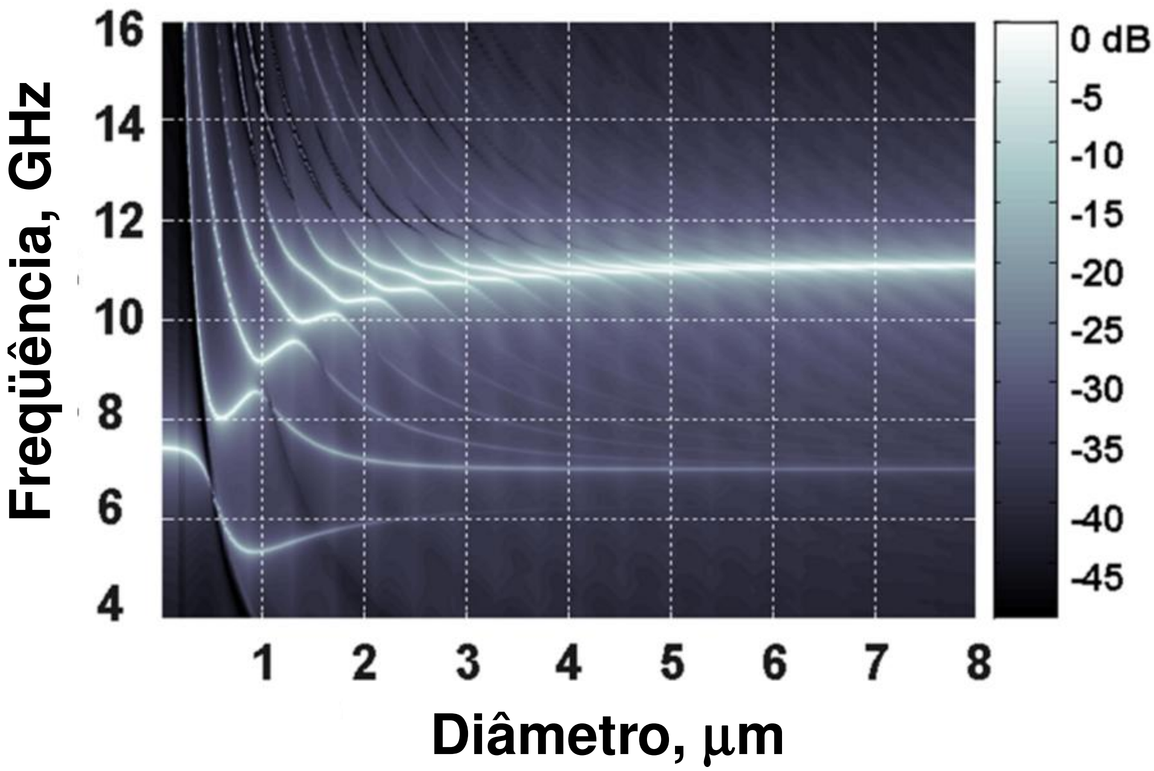


Figura 4. 23: evolução do espectro de retro-espalhamento Brillouin em função do diâmetro do *rod*. A escala de cores é logarítmica e a cor branca indica maior intensidade. Para cada diâmetro, o espectro de espalhamento foi calculado considerando os modos acústicos das famílias axial-radial e torsional, e o modo óptico o fundamental.

4.11. Modos acústicos da Fibra Fotônica

O modelo do *rod* foi bastante útil para entendermos a física básica do processo de espalhamento Brillouin quando há um forte confinamento das ondas acústicas. Vários aspectos foram entendidos e comparados com nosso estudo prévio do espalhamento em *bulk*. Dentre estes aspectos, o caráter híbrido dos modos acústicos devido ao acoplamento dilatacional-equivolumial na interface, a discretização da distribuição de modos, o aparecimento de múltiplos picos no espectro de espalhamento, a diminuição da freqüência Brillouin para diâmetros pequenos são os principais pontos discutidos, e em pleno acordo com as observações experimentais em fibras fotônicas. Entretanto, divergências também são observadas. A primeira é que as freqüências exatas dos modos observados nas fibras fotônicas não são explicadas pelo modelo do *rod.* A segunda, não menos importante, é o aumento do limiar de Brillouin. O fato de o modo ser híbrido faz com que a perturbação seja menor que a de um modo puramente longitudinal. Mais ainda, o modo óptico para diâmetros pequenos exibe um forte campo elétrico longitudinal $\boldsymbol{E}_z$ e, como já comentamos o campo incidente e retro-espalhado têm estas componentes com sinais opostos. Isto também diminui o acoplamento entre estes modos. Estes dois fatos juntos diminuem um pouco o acoplamento acusto-óptico, mas não o suficiente para explicar o limiar de Brillouin. Aqui vale um comentário importante. A comparação entre a PCF e o modelo do *rod* é feita assumindo que os modos acústicos estejam confinados no núcleo da PCF. Hipótese esta baseada nas diversas observações experimentais. Mas o porquê de haver o confinamento não pode ser explicado por este modelo simples. Portanto, além das divergências já descritas entre o modelo do *rod* e as observações experimentais, o confinamento por si só é um ponto a ser discutido.

Para entendermos melhor a natureza dos modos acústicos da fibra fotônica, desenvolvemos cálculos numéricos usando o Método dos Elementos Finitos. Este trabalho foi feito em colaboração com o grupo dos professores Dr. Vincent Laude e Dr. Abdelkrim Khelif, do Instituto FEMTO em Besançon na França. Este grupo é especialista em simulações de elementos finitos aplicados à acústica. Em nosso grupo, o aluno de doutoramento Gustavo Wiederhecker desenvolveu seu próprio programa de elementos finitos para o cálculo dos modos ópticos. Esta etapa foi elaborada em conjunto com o grupo do professor Dr. Hugo Figueroa, da Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP. Tendo ambos modos óptico e acústico da PCF, pudemos calcular numericamente a interação entre eles, obtendo várias características do processo de espalhamento. Não é nosso objetivo estudar o método dos elementos finitos em detalhes nesta tese. Deixamos aqui as referências [31, 71] para aqueles interessados.

Começamos aqui fazendo um comentário. O cálculo numérico de modos guiados, utilizando elementos finitos, pode ser bastante pesado do ponto de vista computacional [31]. Lembremos que, numericamente, não podemos separar os modos em famílias e calcular apenas aqueles que nos interessam. Todos os modos acústicos da estrutura são calculados. Mais ainda, para cada modo, não podemos analisar as componentes provenientes de ondas longitudinais ou transversais já que não temos a solução analítica. Assim, o cálculo de possíveis efeitos de *bandgap* para o confinamento de ondas acústicas é feito apenas para os modos no *cut-off*, responsáveis pelo co-espalhamento. Nesta seção, limitamos o tamanho da estrutura (o número de anéis em torno do núcleo da PCF) e calculamos os modos que esta estrutura suporta.

O cálculo numérico dos modos é feito usando uma estrutura ideal da fibra fotônica, criada a partir das dimensões do núcleo e da separação entre os buracos de ar. Uma malha de pontos para discretização da estrutura é criada e a Figura 4. 24 mostra um exemplo. As dimensões foram estimadas através da imagem de SEM da estrutura da fibra. Entretanto, como as estruturas de vidro são sub-micrométricas (as paredes de vidro por exemplo têm aproximadamente $100\ \text{nm}$ de espessura) há uma incerteza nestas estimativas. Para obter a imagem de SEM, uma camada de grãos de ouro evaporados é depositada sobre a estrutura de vidro. Os grãos de ouro têm diâmetros de algumas dezenas de nanômetros e causam uma incerteza na definição da borda da parede de vidro.

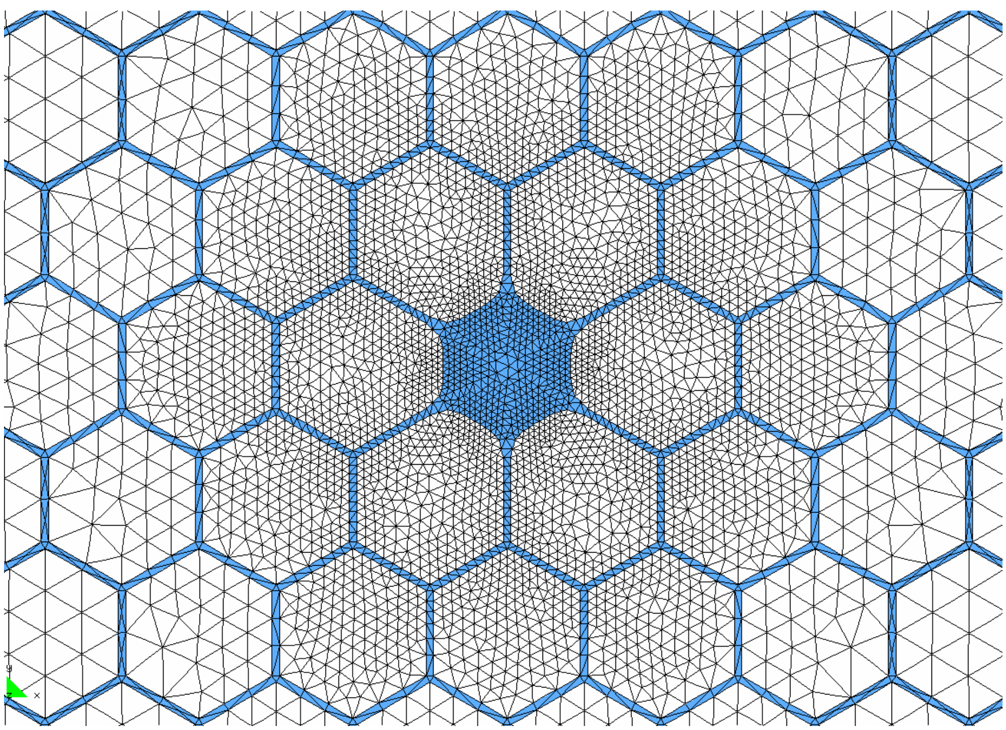


Figura 4. 24: malha de discretização criada sobre a estrutura ideal da fibra fotônica para o cálculo dos elementos finitos. Tanto o cálculo do modo óptico quanto o cálculo dos modos acústicos foram feitos utilizando a mesma malha. As dimensões da fibra, como o tamanho

do núcleo, a separação entre os buracos de ar, a espessura das paredes de vidro, foram medidas usando uma imagem SEM da fibra fotônica;

Do ponto de vista óptico, a fibra é monomodo e, portanto, podemos calcular com precisão o modo óptico guiado pela PCF. Além disso, o modo é guiado no núcleo por reflexão interna total e não por efeitos de *bandgap*. A Figura 4. 25 mostra a intensidade do modo óptico (módulo do vetor de Poynting) para as duas polarizações do modo fundamental na seção transversal da PCF, numa região de $2\times 2\ \mu\text{m}^2$, centrada no núcleo. Vemos que o modo óptico está de fato concentrado fortemente no núcleo e que o perfil do modo é levemente diferente para as diferentes polarizações. Mais ainda, pela própria forma dos modos, a estrutura das bordas do núcleo pode ser visualizada. O índice efetivo dos modos foi calculado como sendo $1,2607$. Como a estrutura é simétrica, não há birrefringência (a menos de um erro numérico de 10^{-10} no índice efetivo). Os vetores na Figura 4.25 representam a direção do campo elétrico transverso. É possível notar que o campo transverso tem a polarização ao longo do eixo *x* (ou *y*) em quase toda a região do núcleo, e algum desvio é observado nas interfaces com o ar e fora do núcleo. A Figura 4. 26 mostra gráficos das amplitudes (em módulo) das componentes transversa $\boldsymbol{E}_t$ e longitudinal $\boldsymbol{E}_z$ para as duas polarizações do modo óptico. ao longo do eixo x, o campo elétrico transverso e o campo longitudinal $\boldsymbol{E}_z$. Vemos que a amplitude de pico do campo $\boldsymbol{E}_z$ é aproximadamente 37% da amplitude de pico do campo transverso, para ambos as polarizações. Por motivos óbvios, a distribuição espacial da intensidade do vetor de Poynting segue a distribuição das componentes transversas. Entretanto, a componente longitudinal apresenta um perfil bastante diferente. Primeiramente, apresenta um nodo ao longo da direção perpendicular à polarização. Observando a amplitude (e não o módulo), podemos ver que a componente longitudinal troca de sinal dentro do núcleo. Comparando a distribuição da componente longitudianl das diferentes polarizações, vemos que são bastante diferentes, mas seguindo a estrutura da fibra.

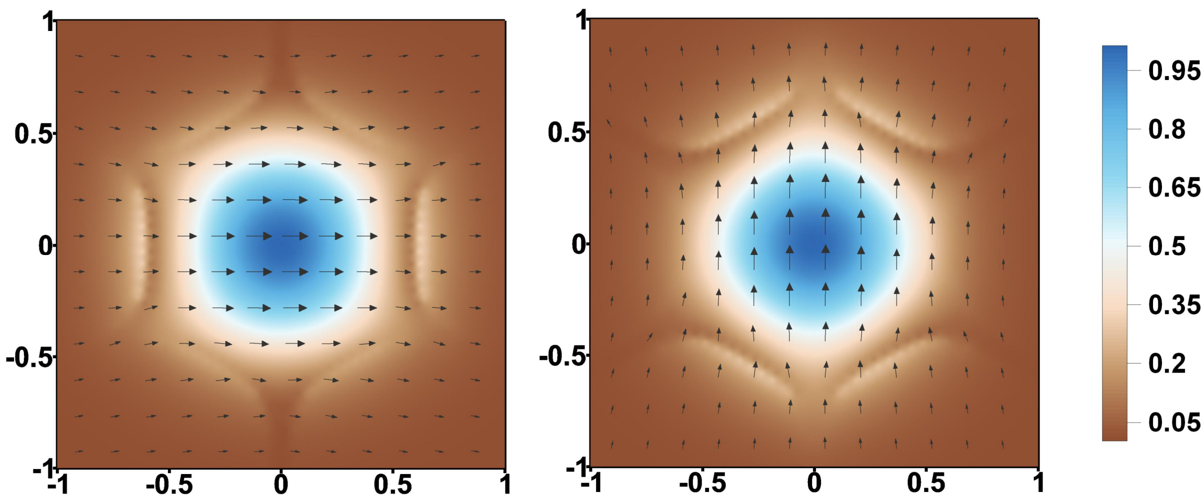


Figura 4. 25: gráfico da intensidade óptica (módulo do vetor de Poynting) para as duas polarizações do modo óptico da fibra fotônica. A escala de intensidade é arbitrária e as escalas *x* e *y* são dadas em mícrons. Os vetores sobrepostos aos modos representam a direção do campo elétrico transverso;

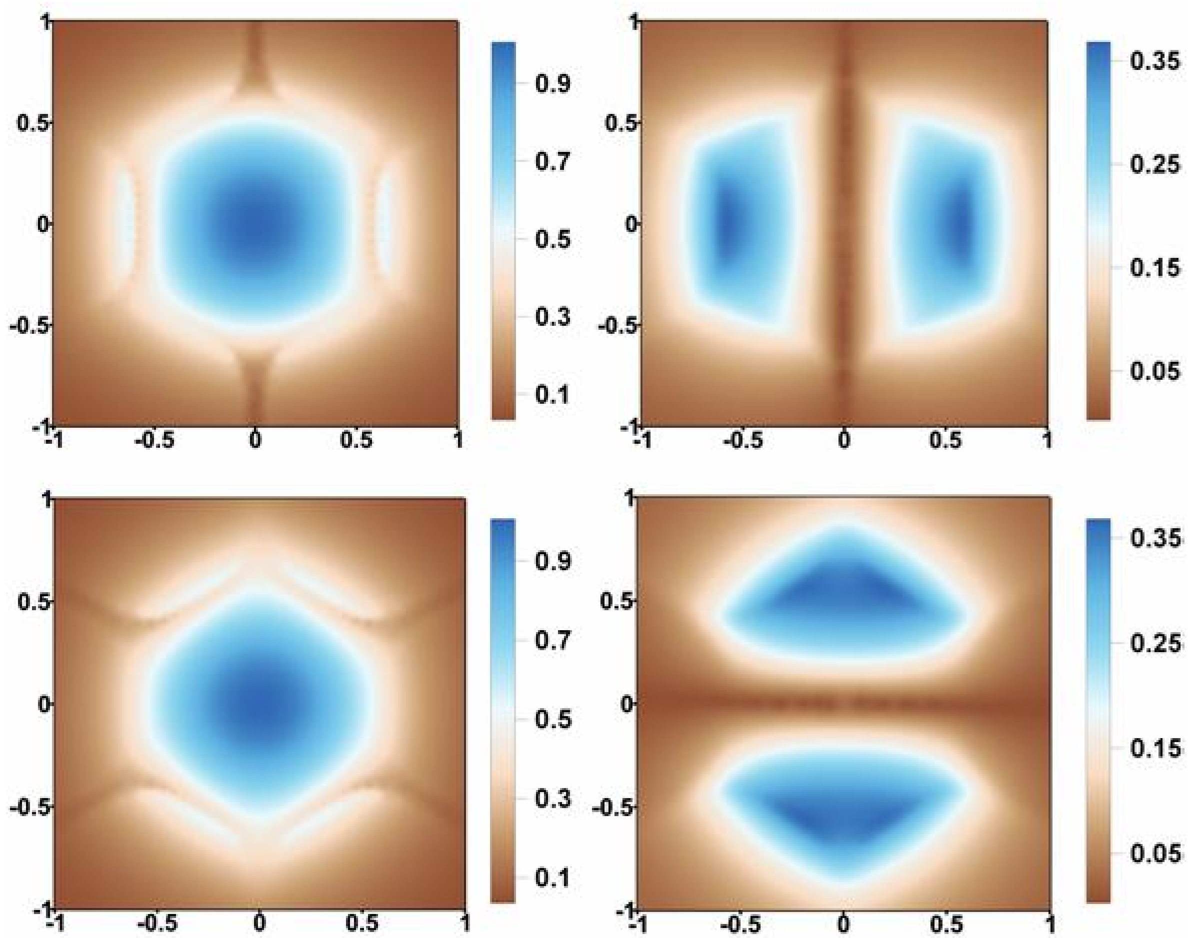


Figura 4. 26: gráfico dos módulos das (a) componentes transversal $\boldsymbol{E}_t$ e (b) longitudinal $\boldsymbol{E}_z$ do campo elétrico do modo óptico da PCF com polarização na direção *x*. Para o modo polarizado na direção *y* as componentes transversal $\boldsymbol{E}_t$ e longitudinal $\boldsymbol{E}_z$ estão mostradas em (c) e (d) respectivamente. Os campos foram normalizados pelo valor de pico do campo transverso. Assim, nos gráficos (a) e (c) para os campos elétricos transversos $\boldsymbol{E}_t$, a escala de intensidade vai 0 a 1. Já para os campos longitudinais $\boldsymbol{E}_z$, a escala vai de 0 até um valor menor que a unidade, que representa a proporção entre o pico do campo longitudinal e o pico do campo transverso;

Os modos acústicos da fibra fotônica foram calculados para a mesma estrutura usada no cálculo do modo óptico, mas com um menor número de anéis. Realizamos os cálculos para os casos de um e dois anéis, este último aumentando a complexidade numérica e não adicionando mais conteúdo ao entendimento físico. Portanto, nos restringimos ao caso de um único anel aqui. Todos os modos acústicos foram calculados para o vetor de onda acústico que satisfaz a condição de *phase-matching*, ou seja, usando $\beta_{ac} = 2\beta$. Alguns modos ilustrativos estão mostrados na Figura 4. 27. Nesta figura, graficamos a densidade de energia acústica $\rho\omega^2 |\boldsymbol{u}|^2 / 2$. Modos flexurais de baixa freqüência ($\sim 2\ \text{GHz}$) estão relacionados às vibrações das nanométricas paredes de vidro, com aproximadamente $100\ \text{nm}$ de espessura. Modos predominantemente transversais, concentrados na superfície do núcleo da PCF, em analogia com o modo Rayleigh do modelo do *rod*, oscilam com freqüência de $\sim 6\ \text{GHz}$. Finalmente, modos predominantemente longitudinais, com forte deslocamento no núcleo aparecem em $\sim 10\ \text{GHz}$.

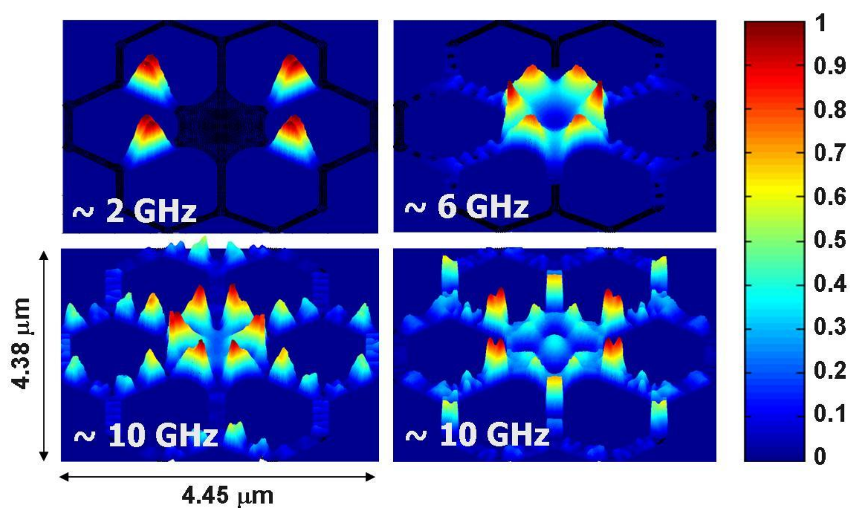


Figura 4. 27: gráficos de densidade de energia de alguns modos acústicos da fibra de cristal fotônico. Modos de baixa freqüência (2 GHz) originam-se de vibrações flexurais das

membranas em torno do núcleo. Em analogia com o modelo do *rod*, modos transversais de superfície aparecem em 6 GHz e modos predominantemente longitudinais aparesem em 10 GHz;

Tendo calculado os modos acústicos e o modo óptico, podemos seguir o mesmo procedimento utilizado no modelo do *rod*, e calcular a integral de *overlap* para cada modo acústico e em seguida obter o espectro de retro-espalhamento e o resultado está mostrado na Figura 4. 28(a). O espectro de Brillouin calculado desta maneira utilizando estes modos da PCF descreve de forma acurada o espectro experimental, mas não difere, em aspectos gerais, daquele obtido com o modelo do *rod*. Vemos especificamente que o espectro exibe uma série de três picos de espalhamento nas freqüências 9.3, 9.5 e 9.7 GHz. Lembrando que os valores medidos são 9.76, 9.95, 10.22 GHz, este resultado está de acordo com as observações experimentais dentro de um erro menor que 4%,. Considerando nossa incerteza nas dimensões da fibra e nos parâmetros acústicos da sílica, o acordo é bastante satisfatório. O vetor deslocamento acústico para o modo que mais contribui para o espalhamento, pico mais forte da Figura 4. 28(a), está mostrado na Figura 4. 28(b) e (c). A componente transversal está graficada na figura Figura 4. 28(b) e a componente longitudinal u_z Figura 4. 28(c). A amplitude de pico da componente transversal é 87% da componente longitudinal. Observamos ainda que nodos na componente u_z do modo acústico estão presentes, seguindo a simetria da estrutura da fibra.

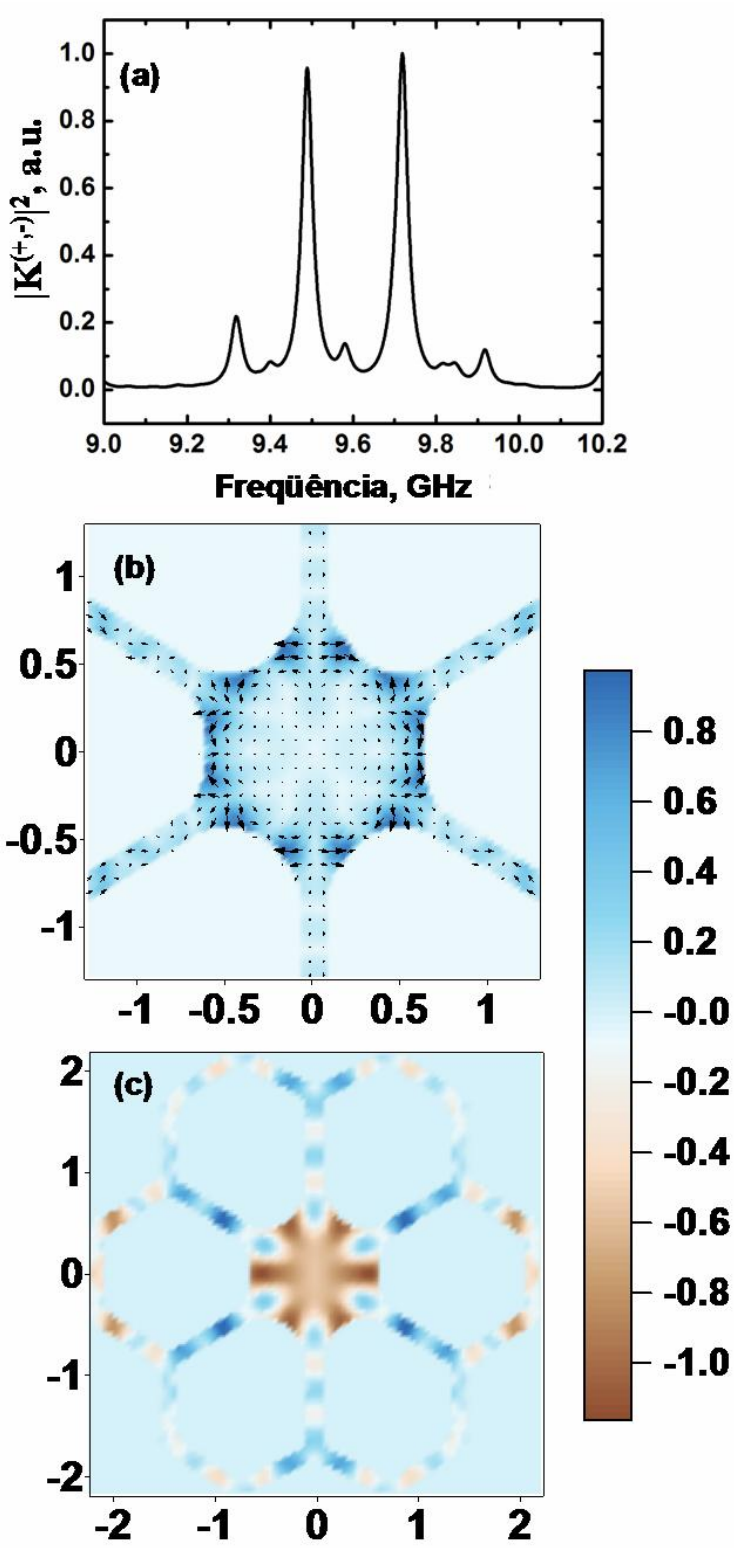


Figura 4. 28: (a) espectro de retro-espalhamento Brillouin calculado usando os modos numéricos da fibra fotônica, tanto óptico quando acústicos. O eixo vertical está em escala

arbitrária; (b) componente transversal do vetor deslocamento acústico para o modo que contribui com o maior pico de espalhamento em (a). Os vetores indicam a direção do deslocamento transversal; (c) componente longitudinal do vetor deslocamento acústico para o mesmo modo acústico. A amplitude da componente transversa foi normalizada pelo valor de pico da componente longitudinal. O valor máximo absoluto da componente transversa é 0.87 da componente longitudinal;

4.12. O limiar de Brillouin

O modo acústico da fibra fotônica que mais interage com a luz, aquele mostrado na Figura 4. 1, tem a distribuição de energia acústica seguindo a estrutura da PCF. Os nodos presentes no núcleo, seguindo a direção das pontes de vidro conectadas ao núcleo, significam que há um pequeno, ou quase nulo, deslocamento acústico nesta região. Como conseqüência, podemos esperar que a perturbação causada por este modo também seja pequena. Mais ainda, esperamos que seja menor do que a perturbação causada por um modo radialmente simétrico, como no *rod*. Obviamente, a integral de *overlap* é reduzida devido à presença dos nodos. Este fato tem que ser levado em conta no cálculo do limiar de Brillouin. Lembremos que a fórmula de Smith, equação (2.32), utilizada para estimar o limiar de Brillouin em fibras convencionais, leva em conta apenas a área efetiva do modo óptico. Em outras palavras, considera apenas o confinamento óptico e não o acústico. A referência [17] apresenta um modelo simples e útil para levar em consideração o efeito do confinamento acústico no cálculo do limiar de Brillouin, que ocorre no caso de uma fibra especial da *Corning Inc.*, especialmente desenvolvida para aumentar o limiar de Brillouin.

Não explicamos o modelo aqui em detalhes. O motivo é que o desenvolvimento feito naquele artigo é muito similar aos modelos encontrados na literatura para explicar a excitação impulsiva em fibras convencionais [59, 60, 72], no caso de co-espalhamento. Na seção seguinte, apresentamos todo nosso estudo acerca da excitação impulsiva, portanto, não o repetimos aqui. De modo apenas a localizar o leitor, aqui apresentamos a idéia geral por trás do modelo e o resultado principal. O modelo considera a equação de propagação acústica na presença da força de eletrostrição causada pela presença do modo óptico [3]. A equação resolvida é simplificada de modo a considerar apenas ondas dilatacionais. Assim, o problema pode ser tratado em termos da densidade do material [3] ao invés do vetor deslocamento. A idéia é basicamente escrever a solução para a densidade como uma combinação linear dos modos normais da fibra. Projetando a força de elestrostrição em cada modo, podemos calcular a amplitude de excitação destes modos. O resultado é que a amplitude de excitação é pesada por uma integral de *overlap* entre a distribuição espacial da força eletrostritiva e a distribuição espacial do modo acústico. Se o modo é uma onda plana, o resultado se reduz ao caso anterior da fórmula de Smith, mas se tem alguma estrutura resultante do confinamento, esta estrutura é levada em consideração através da integral de *overlap*. De uma maneira bastante direta e prática, o aumento do limiar de Brillouin é calculado simplesmente pela razão entre a uma *área efetiva acusto-óptica* A_{ac} e a área efetiva tradicional A_{eff}, aquela considerando apenas o modo óptico. Ou seja,

$$\begin{aligned}
A_{eff} &= \frac{\left\langle f^2(r)\right\rangle^2}{\left\langle f^4(r)\right\rangle}, \\
A_{ac} &= \left[\frac{\left\langle f^2(r)\right\rangle}{\left\langle \xi(r) f^2(r)\right\rangle}\right]^2 \left\langle \xi(r)^2\right\rangle, \\
\Delta P_{th}[dB] &= 10\log_{10}\left(\frac{A_{ac}}{A_{eff}}\right),
\end{aligned} \tag{4.48}$$

onde o símbolo $\langle\ \rangle$ significa integral sobre a área da seção transversal da fibra. Aqui, ΔP_{th} é o aumento na potência de limiar de Brillouin. Notemos que este aumento ΔP_{th} tem como referência o limiar de Brillouin calculado usando a área efetiva tradicional, ou seja, calculado usando a fórmula de Smith.

Usando o modo óptico da PCF, pudemos aplicar a fórmula (4.48) para o nosso caso, obtendo um valor para A_{ac} de $6{,}1\ \mu\mathrm{m}^2$, enquanto a área efetiva tradicional é $1{,}4\ \mu\mathrm{m}^2$. O aumento no limiar é portanto calculado como sendo $6{,}3\ \mathrm{dB}$, em bom acordo com o valor experimental de 7.3 dB. Outras contribuições entretanto devem ser levadas em conta. A primeira é a presença de mais de um modo acústico, e portanto devemos somar a contruibuição dos outros modos. A segunda é que no caso das PCFs, a forte componente longitudinal do campo elétrico $\boldsymbol{E}_z$, calculada como sendo $\sim 37\%$ da componente transversa $\boldsymbol{E}_t$. Como já comentamos, as ondas *backward* e *forward* têm sinais opostos de $\boldsymbol{E}_z$, e portanto resulta num menor acoplamento eletrostritivo.

Capítulo 5 – Modelos teóricos: co-espalhamento

Este capítulo é uma continuação do capítulo anterior, focalizado agora no caso de co-espalhamento. Seguimos a mesma estrutura do anterior, primeiramente descrevendo o modelo analítico de um cilindro de vidro no vácuo (que chamamos de modelo do *rod*), e depois os cálculos numéricos dos modos acústicos da fibra fotônica., ou seja, em um guia tanto óptico quanto acústico. Façamos aqui, entretanto, uma consideração acerca da condição de *phase-matching* no processo de co-espalhamento Brillouin em um guia de onda. Como vimos no primeiro capítulo, se as ondas incidente e espalhada propagam-se na mesma direção, a condição de *phase-matching* requer que a velocidade de fase da onda acústica seja igual à velocidade de fase da luz, ou seja,

$$\frac{\Omega}{k} = \frac{c}{n}, \tag{5.1}$$

onde Ω é a freqüência angular acústica, c é a velocidade da luz no vácuo e n o índice de refração do meio. Naquele capítulo, tratamos o caso de ondas livres, propagando-se em *bulk*, de forma que k é o próprio vetor de onda acústico. Aprendemos que a condição de *phase-matching* não é satisfeita para co-espalhamento em meios *bulk*. A razão é basicamente que a relação de dispersão das ondas acústicas é uma reta, isto é, , a curva $\Omega/k = V$, onde V é a velocidade das ondas acústicas (muito menor que c/n). Ao tratarmos o caso de guias de onda, um *modo guiado* não mais é representado pelo vetor de onda no material, mas sim pela constante de propagação β do modo. O tratamento de acoplamento de modos feito no capítulo 4 ilustra bem este fato. Mostramos que a própria condição de *phase-matching* também deve ser satisfeita pela constante de propagação β e não mais por k. Podemos re-escrever a condição (5.1) como

$$\frac{\Omega}{\beta} = \frac{c}{n}. \tag{5.2}$$

Saber se a condição de *phase-matching* é agora satisfeita em um guia depende da relação de dispersão. No capítulo 4, discutimos detalhadamente a relação de dispersão dos modos da família axial-radial de um *rod*. Daquela discussão, gostaríamos de destacar aqui a forte alteração da relação de dispersão na região próxima da freqüência de corte de cada modo acústico. O diagrama da Figura 5. 1 ilustrativo a relação de dispersão dos modos acústicos em um guia de onda, em comparação com a relação de dispersão da luz. Vemos que, na freqüência de corte, a relação de dispersão das ondas acústicas é aproximadamente plana, de modo que a velocidade de fase aumenta indefinidamente quando $\beta \to 0$, atingindo facilmente c/n. O resultado é que, em analogia com o caso do co-espalhamento Raman, o co-espalhamento Brillouin passa a ser permitido em um guia. A presença de uma freqüência de corte, fato intrinsecamente ligado ao confinamento transverso, altera a relação de dispersão, permitindo o *phase-matching*. Trazendo as conclusões do capítulo 1 para este, a freqüência Brillouin pode ser tomada como muito próxima da freqüência de corte de cada modo e, devido ao caráter plano da relação de dispersão, sabemos que a freqüência Brillouin é independente de β, permitindo portanto experimentos de bombeio & prova. Feito estes comentários, passamos à descrição dos modelos de fato.

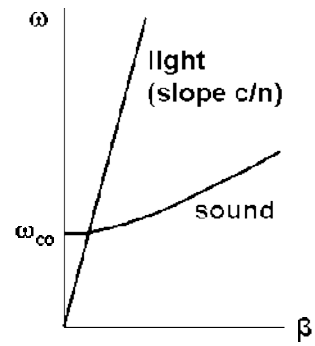


Figura 5. 1: diagrama ilustrativo da relação de dispersão dos modos acústicos em um guia de onda, em comparação com a relação de dispersão da luz. Na região da freqüência de corte, a relação de dispersão das ondas acústicas é aproximadamente plana, de modo que a velocidade de faze aumenta indefinidamente quando $\beta \rightarrow 0$;

5.1. Introdução

Depois de apresentar detalhadamente nosso estudo sobre retro-espalhamento Brillouin, passamos agora a apresentar nossos modelos para o caso do co-espalhamento. Ambos processos dão origem a uma série de efeitos interessantes, tanto do ponto de vista fundamental como de aplicações. Dentre os diversos efeitos fundamentais, podemos citar para o caso de retroespalhamento, por exemplo, o Espalhamento Brillouin Estimulado (*Stimulated Brillouin Scattering*, SBS), a Conjugação de fase óptica (*Optical Phase Conjugation*), e o controle da velocidade da luz via espalhamento Brillouin (*Slow and Fast ligth*) [73-78]; no caso de co-espalhamento, temos como exemplos a interação electrostritiva entre sólitons [56, 57, 59, 60, 63-65, 71, 72, 79], modulação de fase, amplitude e/ou polarização induzidas pelas ondas acústicas. Dentre as aplicações práticas, destacam-se moduladores acusto-ópticos totalmente a fibra (moduladores de fase, polarização e amplitude), filtros ópticos, sensores de temperatura e pressão e detectores de ondas ultra-sônicas [7-10, 12].

Da mesma forma que o retro, o co-espalhamento em fibras fotônicas apresenta características radicalmente diferentes daquelas observadas em fibras convencionais, como mostraremos adiante. Iniciamos esta seção, apresentando nosso modelo do guia acústico cilíndrico (*rod*). Basicamente, nosso objetivo nesta etapa é calcularmos (i) a excitação dos modos acústicos do guia através do efeito de eletrostrição e (ii) o espalhamento de luz devido aos modos excitados. Posteriormente, descrevemos o modelo numérico do cálculo dos modos acústicos da estrutura completa da fibra fotônica, feita em colaboração com o grupo dos professores Dr. Vincent Laude e Dr. Abdelkrim Khelif, do Instituto FEMTO, Besançon (França).

É interessante aqui, antes de iniciarmos com os cálculos propriamente, retomarmos alguns conceitos básicos e introdutórios. Espalhamento Brillouin é o acoplamento da luz com ondas acústicas (interação entre fótons e fônons acústicos). Em geral, um fóton de freqüência ω_P é espalhado em um fóton mais um fônon de freqüências ω e Ω, respectivamente. Conservações de energia e momento são necessárias para o processo ocorrer. Em geral, a freqüência acústica é muito menor que a freqüência óptica ($\Omega =\ \omega,\omega_P$), de modo que podemos fazer a aproximação de que o índice efetivo n_{eff} do modo óptico espalhado é igual àquele do modo icidente. Assim, a conservação de momento pode ser expressa como

$$\beta_{AC}\ ;\ \frac{n_{eff}}{c}(\omega_P \pm \omega),$$

onde os sinais positivo e negativo aplicam-seque ao caso retro e co respectivamente. Esta expressão para o caso de co-espalhamento resulta que

$$\beta_{AC} \; ; \; 0.$$

Este resultado significa que, ao contrário do caso de retro-espalhamento, o modo acústico envolvido no co-espalhamento é não-propagante longitudinalmente, ou seja, no ponto de *cutoff* acústico. Esta é a principal característica que diferencia os processos dois de espalhamento. A estimativa da freqüência acústica envolvida no processo *forward* requer um modelo relativamente mais sofisticado. Se considerarmos a fibra como um guia acústico cilíndrico de raio R, no vácuo, e supondo que a onda acústica esteja confinada neste guia, o vetor de onda transversal k_t pode ser aproximado por $k_t = z_{01} / R$, onde $z_{01} = 2.4$ é o primeiro zero da função de Bessel de ordem zero J_0. Sabendo que $\beta_{AC} = \sqrt{(\Omega / c_L)^2 - k_t^2}$, e usando que $\beta_{AC} \; ; \; 0$, a freqüência da onda acústica é estimada como sendo

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{z_{01} c_L}{2\pi R}.$$

Usando $R = 62.5 \ \mu m$ para uma fibra convencional temos $\Omega / 2\pi = 36{,}5$ MHz, portanto muito menor que a freqüência do caso retro, que lembremos está em torno de 10 GHz. No caso das fibras fotônicas que estudamos experimentalmente, a onda acústica é transversalmente confinada numa região de raio da ordem de $0{,}5$ µm, e como a freqüência acústica é proporcional ao inverso do raio do guia, resulta numa freqüência acústica da ordem de alguns GHz.

5.2. Modos do *rod* no *cut-off*

De maneira análoga ao retroespalhamento Brillouin, muitos aspectos do coespalhamento Brillouin também podem ser entendidos modelando a fibra, do ponto de vista das ondas acústicas, como um cilindro de vidro no vácuo (que chamamos simplesmente de *rod*). Assumimos que a onda acústica não "percebe " a diferença entre o núcleo e a casca, dado que ambos têm propriedades acústicas (constantes de Lamè e densidade) muito próximas, e que portanto a onda acústica está transversalmente distribuída em toda a seção transversal da fibra, de raio R igual ao raio da casca. Esta suposição não está baseada apenas no fato de o núcleo e a casca serem muito similares do ponto de vista acústico, mas, principalmente pelas diversas experiências reportadas na literatura [20, 55-57, 59-62, 65]. R. M. Shelby e colaboradores [20, 55] mostraram que as freqüências dos modos acústicos observados em fibras convencionais são explicadas com grande precisão modelando a fibra como um cilindro de vidro (*rod*) com diâmetro igual ao diâmetro da casca. Em outros experimentos [59, 60, 62], um pulso acústico é excitado no núcleo da fibra por eletrostrição. Este pulso acústico é basicamente composto por modos da casca da fibra, tanto é que não ficam confinados no núcleo e se propagam transversalmente em direção à casca. O modo óptico, entretanto, é considerado confinado no núcleo, ou seja, numa região de raio a como em uma fibra convencional. Veremos adiante que a fibra fotônica de raio sub-micrométrico é representada pelo caso limite em que o raio da casca é igual ao raio do núcleo, ou seja, $R = a$. A Figura 5. 2 mostrando o núcleo da fibra fotônica com $1,22\ \mu\text{m}$ de diâmetro.

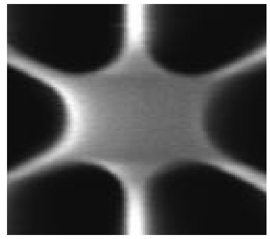


Figura 5. 2: imagem de microscopia eletrônica (SEM) do núcleo da fibra fotônica com $1,22\ \mu\text{m}$ de diâmetro. A região de cor cinza é vidro (sílica fundida) e a região de cor preta é ar;

Iniciamos o modelo descrevendo os modos acústicos de um *rod*. Como já vimos, apenas os modos acústicos no *cutoff* ($\beta_{AC} = 0$) participam do co-espalhamento Brillouin. Mais ainda, é possível mostrar, e o faremos adiante, que apenas as famílias R_{0m} (radial) e TR_{2m} (torsional-radial) participam do processo. Em coordenadas cilíndricas, o vetor deslocamento para os modos radiais tem a seguinte forma [66, 67]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_m^R(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{u}_m^R(\boldsymbol{r})\cos\left(\Omega_m^R t\right), \\ \boldsymbol{u}_m^R(\boldsymbol{r}) &= U_{rm}^R(r)\hat{\boldsymbol{r}}, \\ U_{rm}^R(r) &= J_1\left(y_m^R \frac{r}{R}\right), \\ \Omega_m^R &= \frac{y_m^R c_L}{R}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde R é o raio do *rod*, J_i é a função de Bessel de ordem i e y_m^R é a *m*-ésima solução da equação característica obtida ao aplicarmos a condição de contorno de superfície livre do *rod*. Explicitamente, obtemos y_m^R resolvendo a equação transcedental

$$\left(1-\alpha^2\right)J_0\left(y_m^R\right)-\alpha^2 J_2\left(y_m^R\right)=0, \tag{5.2}$$

onde $\alpha = c_T / c_L$ é a razão entre as velocidades das ondas acústicas transversal e longitudinal. Usando os valores de c_L e c_T para a sílica fundida obtemos $\alpha = 0.6305$. Usando este valor, podemos resolver a equação (5.2) e os primeiros valores de y_m^R estão mostrados na Tabela 5. 1. Usando o raio da casca de uma fibra convencional $R = 62.5\ \mu\text{m}$, e também o raio do núcleo de uma fibra fotônica $R = 0.5\ \mu\text{m}$, calculamos as freqüências esperadas para cada um, também mostradas na Tabela 5. 1.

Tabela 5. 1: raízes y_m^R da equação característica (5.2) para a família axial-radial. Usando a definição (5.1), calculamos as freqüências dos cinco primeiros modos do *rod* para dois raios diferentes.

m	y_m^R	$\Omega_m^R / 2\pi$	
		$R = 62.5\ \mu\text{m}$	$R = 0.5\ \mu\text{m}$
0	1,99	30,2 MHz	3,8 GHz
1	5,37	81,7 MHz	10,2 GHz
2	8,56	130,2 MHz	16,3 GHz
3	11,72	178,2 MHz	22,3 GHz
4	14,88	226,2 MHz	28,3 GHz

A Figura 5. 3 mostra os gráficos de $U_{rm}^R(r)$ para os primeiros cinco modos radiais. Quanto maior a ordem do modo, maior o número de nodos deste modo. Por exemplo, o modo R_{00} não tem nenhum nodo na fibra, o modo R_{01} tem um nodo e assim por diante. Fisicamente, no modo R_{00}, em todos os pontos ao longo da direção radial r, o deslocamento acústico tem o mesmo sentido, ou seja, a fibra como um todo está ou expandindo-se ou comprimindo-se. No caso de modos de ordem superior, presença de nodos significa que, ao longo da direção radial, o deslocamento acústico troca de sinal e algumas camadas da fibra se expandem enquanto outras se comprimem.

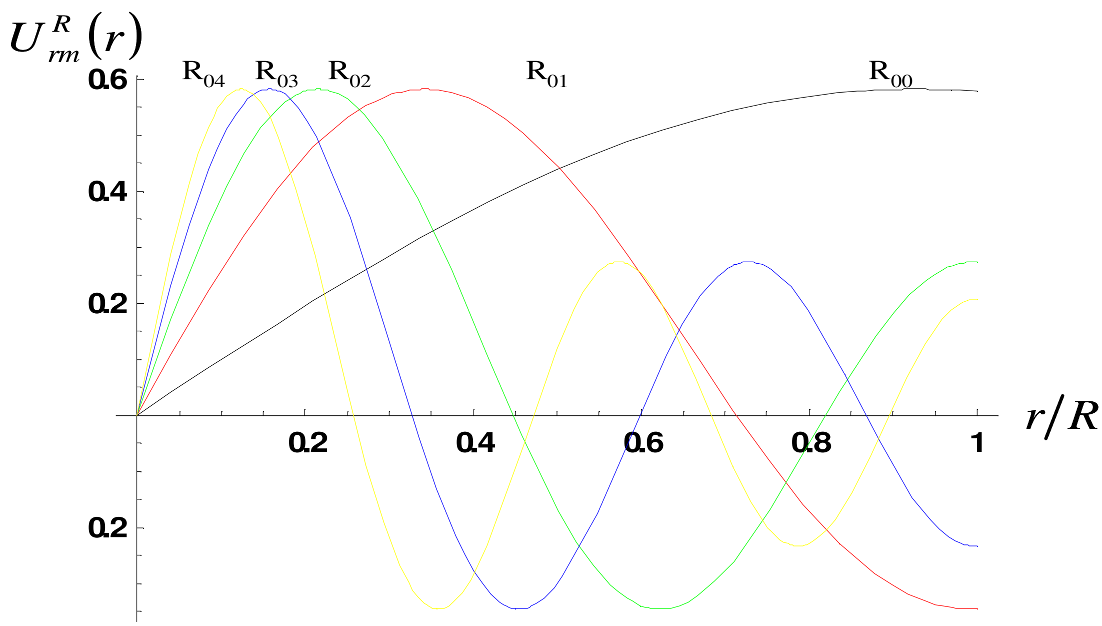


Figura 5. 3: gráfico da amplitude de deslocamento acústico para alguns modos da família radial R_{0m}, mostrando que quanto maior a ordem do modo, maior o número de nodos. O eixo vertical está em unidades arbitrárias;

Os modos torsionais-radiais têm ambas componentes do vetor deslocamento nas direções $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$, e, ao contrário dos modos radiais, os TR $_{2m}$ dependem da coordenada azimutal com $\cos 2\theta$ ou $\sin 2\theta$. Explicitamente:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_m^{TR}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{u}_m^{TR}(\boldsymbol{r})\cos\left(\Omega_m^{TR}t\right),\\
\boldsymbol{u}_m^{TR}(\boldsymbol{r}) &= \left[U_{rm}^{TR}(r)\hat{r}\begin{Bmatrix}\sin 2\theta\\ \cos 2\theta\end{Bmatrix} + U_{\theta m}^{TR}(r)\hat{\theta}\begin{Bmatrix}\cos 2\theta\\ -\sin 2\theta\end{Bmatrix}\right],\\
\Omega_m^{TR} &= \frac{y_m^{TR}c_T}{R}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

A forma explícita de $U_{rm}^{TR}(r)$ e $U_{\theta m}^{TR}(r)$ pode ser vista em [66, 67]. As duas dependências com o ângulo azimutal θ mostradas entre chaves na (5.3) representam duas possíveis polarizações do modo TR_{2m} ($0-90°$ ou $\pm 45°$) ilustradas na Figura 5. 4, onde graficamos o deslocamento no plano da seção transversa da fibra deformada pelo modo TR_{21} (com amplitude de vibração re-escalada a aproximadamente 20 % do raio, para melhor visualização). A equação característica para os modos TR_{2m} também pode ser encontrada em nas referências [66, 67], e os primeiros valores de y_m^{TR} estão mostrados na Tabela 5. 2. Novamente, para os raios de uma fibra convencional e do núcleo da PCF, as cinco primeiras freqüências de vibração dos modos torsionais-radias foram calculadas e estão na Tabela 5. 2.

Tabela 5. 2: raízes y_m^{TR} da equação característica para a família torsional-radial. Usando a definição **(5.3)**, calculamos as freqüências dos cinco primeiros modos do *rod* para dois raios diferentes.

m	y_m^{TR}	$\Omega_m^{TR}/2\pi$	
		$R = 62.5$ μm	$R = 0.5$ μm
0	2,34	22,5 MHz	2,8 GHz
1	4,12	39,5 MHz	4,9 GHz

2	7,37	70,7 MHz	8,8 GHz
3	8,54	81,9 MHz	10,2 GHz
4	11,38	109,1 MHz	13,6 GHz

Devido à simetria dos modos TR_{2m} (vejamos em particular a polarização $0-90°$), é interessante notarmos que, enquanto ao longo do eixo x a fibra é comprimida, ao longo do eixo y ocorre o contrário, a fibra se expande (como ilustrado para o modo mostrado para o modo TR_{21} na Figura 5. 4). Como veremos adiante, esta característica dos modos TR_{21} causa uma birrefringência óptica, cujos eixos principais são os eixos de simetria do modo.

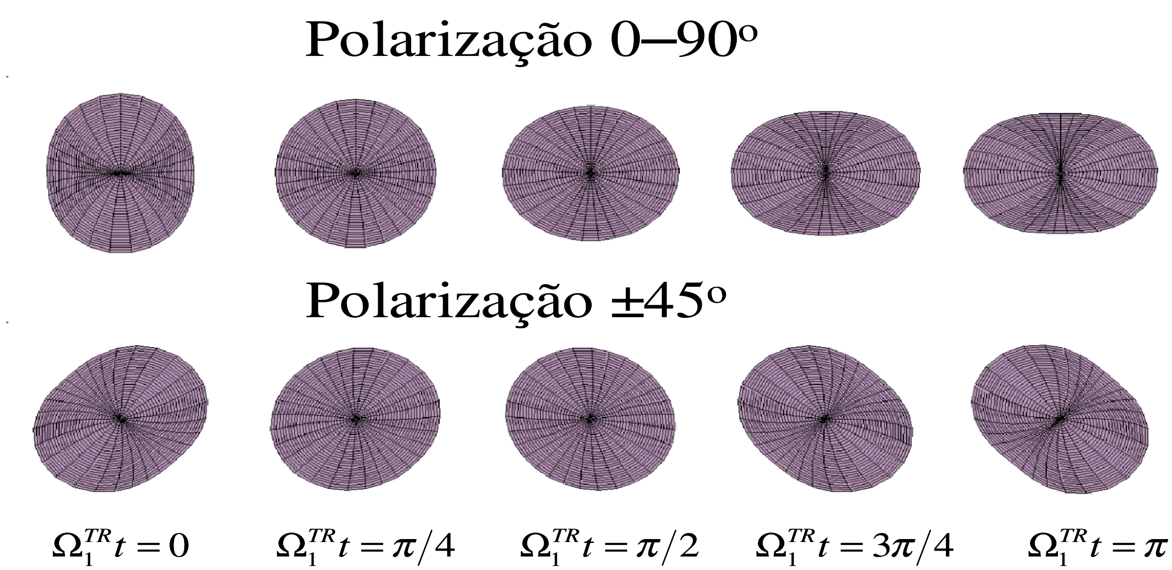


Figura 5. 4: Ilustração da seção transversal da fibra sob a ação, ao longo do tempo, do modo acústico fundamental TR_{20} da família transversal-radial para as duas polarizações possíveis $0-90°$ e $\pm45°$;

5.3. Força de eletrostrição

O processo pelo qual a luz excita uma onda acústica é denominado *eletrostrição*. Por este efeito, um campo elétrico causa uma tensão no material, ou *stress*, cuja amplitude é proporcional ao quadrado do campo. Este efeito é, na verdade, uma correção [38, 71] ao efeito de primeira ordem no campo elétrico, conhecido como *piezoeletricidade*. Materiais com simetria de inversão, como a sílica fundida, não exibem piezoeletricidade e o principal efeito de acoplamento acustoóptico é a eletrostrição. Formalmente, a eletrostrição é descrita por uma relação tensorial entre o tensor de tensão $\boldsymbol{T}$ (tensor de *stress*) e o campo elétrico $\boldsymbol{E}$, da seguinte forma

$$T_{ij} = \gamma_{ijkl} E_k E_l, \tag{5.4}$$

onde γ_{ijkl} são os coeficientes strain-ópticos. Por argumentos de simetria, é possível mostrar [38] que em um meio isotrópico, o tensor γ é representado por apenas dois elementos, de modo que a equação (5.4) pode ser escrita explicitamente como

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \gamma_{11} E_x^2 + \gamma_{12} E_y^2 + \gamma_{12} E_z^2, \\ T_{yy} &= \gamma_{12} E_x^2 + \gamma_{11} E_y^2 + \gamma_{12} E_z^2, \\ T_{zz} &= \gamma_{12} E_x^2 + \gamma_{12} E_y^2 + \gamma_{11} E_z^2, \\ T_{yz} &= 2\gamma_{44} E_y E_z, \\ T_{xz} &= 2\gamma_{44} E_x E_z, \\ T_{xy} &= 2\gamma_{44} E_x E_y, \end{aligned} \tag{5.5}$$

onde os coeficiente strain-óptico se relacionam com os coeficientes elasto-ópticos: $\gamma_{11} = \varepsilon_0 n^4 p_{11}$, $\gamma_{12} = \varepsilon_0 n^4 p_{12}$, $\gamma_{44} = \frac{1}{2}(\gamma_{11} - \gamma_{12}) = \frac{\varepsilon_0 n^4}{2}(p_{11} - p_{12})$ e, para sílica, $p_{11} = 0{,}121$ e $p_{12} = 0{,}270$ são os coeficientes elastoópticos. Na presença de um campo elétrico, portanto, a equação de movimento para as ondas acústicas, discutida no capítulo 2, passa a ter um termo fonte. A força por unidade de volume causada pelo campo elétrico pode ser calculada a partir do tensor de *stress* da seguinte maneira

$$\boldsymbol{f}_{el} = \nabla \cdot \boldsymbol{T}. \tag{5.6}$$

É fácil mostrar que esta força pode ser reescrita da seguinte forma

$$\boldsymbol{f}_{el} = \gamma_{12} \nabla E^2 + 2\gamma_{44} \nabla \cdot \left(\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E} \right), \tag{5.7}$$

onde $E^2 = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}$ e o símbolo $\otimes$ representa o produto diádico:

$$\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & E_y^2 & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & E_z^2 \end{pmatrix}.$$

Analisemos com mais detalhes a forma da força de eletrostrição. Vemos inicialmente que o primeiro termo depende apenas do escalar E^2, e portanto é independente da polarização do campo elétromagnético. O segundo termo, entretanto, contém a díada e depende da polarização. Calculemos então explicitamente ambos os termos. Escrevemos o campo elétrico, em uma polarização arbitrária, da seguinte forma

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} \left[E_{0x} \hat{\boldsymbol{x}} + E_{0y} \hat{\boldsymbol{y}} \right] \sqrt{b(t)} f\left(x, y\right) e^{i(\omega t - \beta z)} + c.c., \tag{5.8}$$

onde $f\left(x, y\right)$ representa o modo óptico (aqui, fazemos a aproximação de que as componentes do campo nas direções x e y tem a mesma distribuição espacial e que a componente longitudinal do campo é nula). $b(t)$ representa a forma temporal do pulso óptico (consideramos b e f funções reais). $E_{0x} = \left| E_{0x} \right| e^{i\varphi_{0x}}$ e $E_{0y} = \left| E_{0y} \right| e^{i\varphi_{0y}}$ são as amplitudes (e fases) de cada componente de polarização. Fazemos ainda a aproximação de que o modo óptico é uma gaussiana de largura a (onde a é igual ao raio do núcleo da fibra), ou seja,

$$f = f(r) = e^{-\frac{r^2}{2a^2}}. \tag{5.9}$$

Assim, temos que o termo em E^2 da força fica

$$E^2 = b(t)\,f(r)^2\left[\left|E_{0x}\right|^2\cos^2\left(\omega t-\beta z+\varphi_{0x}\right)+\left|E_{0y}\right|^2\cos^2\left(\omega t-\beta z+\varphi_{0y}\right)\right].$$

onde $E_0^2 = \left|E_{0x}\right|^2 + \left|E_{0y}\right|^2$. Desprezando os termos que oscilam em 2ω temos

$$E^2 = \frac{1}{2}b(t)\,f(r)^2\,E_0^2.$$

De maneira análoga, é fácil mostrar que o termo em $\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}$ fica

$$\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}b(t)\,f(r)^2\begin{pmatrix} \left|E_{0x}\right|^2 & \left|E_{0x}E_{0y}\right|\cos\varphi_0 & 0 \\ \left|E_{0x}E_{0y}\right|\cos\varphi_0 & \left|E_{0y}\right|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\varphi_0 = \varphi_{0x} - \varphi_{0y}$ é a diferença de fase entre as componentes do campo na entrada da fibra. Como os modos acústicos estão escritos em coordenadas cilíndricas, também expressamos a força neste sistema de coordenadas. O primeiro termo da força é

$$\begin{aligned} \nabla E^2 &= \frac{b(t)\,E_0^2}{2}\frac{\partial f(r)^2}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= -b(t)\,f(r)^2\,E_0^2\,\frac{r}{a^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

Para calcularmos o segundo termo da força, temos primeiramente que expressar o tensor $\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}$ em coordenadas cilíndricas e então calcular o divergente deste tensor. Após efetuarmos as derivadas devidas e após alguma álgebra, chegamos em

$$
\begin{aligned}
\left[\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}\right)\right]_r = -\frac{1}{2}b(t)\,f(r)^2\,[&\frac{r}{a^2}E_0^2 + \\
&-\left(\frac{r}{a^2}+\frac{1}{r}\right)\left(\left|E_{0y}\right|^2-\left|E_{0x}\right|^2\right)\cos 2\theta + \\
&+\left(\frac{r}{a^2}+\frac{1}{r}\right)2\left|E_{0x}E_{0y}\right|\cos\varphi_0\sin 2\theta],\ \text{e} \qquad (5.11)\\
\left[\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}\right)\right]_\theta = -\frac{1}{2}b(t)\,f(r)^2\,[&\left(\frac{r}{a^2}+\frac{1}{r}\right)\left(\left|E_{0y}\right|^2-\left|E_{0x}\right|^2\right)\sin 2\theta + \\
&+\left(\frac{r}{a^2}+\frac{1}{r}\right)2\left|E_{0x}E_{0y}\right|\cos\varphi_0\cos 2\theta].
\end{aligned}
$$

É interessante notarmos que o termo da força originado de E^2, dado pela equação (5.10), aponta na direção $\hat{\boldsymbol{r}}$ e é independente de θ. Como veremos, este termo só excita modos acústicos radiais R_{0m}. Já as componentes da força originadas de $\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}$ podem excitar ambos R_{0m} e TR_{2m}, já que têm termos independentes de θ e termos proporcionais a $\cos 2\theta$ (a simetria angular também explica porque apenas os modos R_{0m} e TR_{2m} são excitados pelo modo óptico). Agrupando os temos das equações (5.10) e (5.11), e usando a equação (5.7), temos que a força de eletrostrição é, finalmente,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_{el} = -\frac{b(t)\,f(r)^2}{2}[&\left(\gamma_{11}+\gamma_{12}\right)E_0^2\frac{r}{a^2}\hat{\boldsymbol{r}} + \\
&-\left(\gamma_{11}-\gamma_{12}\right)\left(\frac{r}{a^2}+\frac{1}{r}\right)\left(\left|E_{0y}\right|^2-\left|E_{0x}\right|^2\right)\left(\hat{\boldsymbol{r}}\cos 2\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin 2\theta\right) + \qquad (5.12)\\
&+\left(\gamma_{11}-\gamma_{12}\right)\left(\frac{r}{a^2}+\frac{1}{r}\right)2\left|E_{0x}E_{0y}\right|\cos\varphi_0\left(\hat{\boldsymbol{r}}\sin 2\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos 2\theta\right)].
\end{aligned}
$$

O primeiro termo da equação (5.12) é aquele que aponta na direção radial e é independente de θ. Notemos que esta componente da força tem contribuições provenientes de ambos os termos em E^2 e em $\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}$. Assim, a excitação de modos radialmente simétricos não é descrita somente considerando o primeiro termo da (5.7), como geralmente encontrado na literatura[3, 59]. Os modos TR_{2m} são excitados pelas componentes da força que dependem de $\cos 2\theta$ e $\sin 2\theta$, termos estes que têm origem apenas em $\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E}$. Especificamente, o segundo termo, aquele proprocional a $\left(\hat{\boldsymbol{r}}\cos 2\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin 2\theta\right)$ excita os modos TR_{2m} polarizados na direção $0-90°$, enquanto que o terceiro termo, proporcional a $\left(\hat{\boldsymbol{r}}\sin 2\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos 2\theta\right)$ excita a polarização $\pm 45°$ do ramo torsional-radial. Vemos ainda, que se a luz é circularmente polarizada ($\varphi_0 = \varphi_{0x} - \varphi_{0y} = \pi/2$ e $\left|E_{0y}\right|^2 = \left|E_{0x}\right|^2$), estes termos são nulos, de modo que os modos TR não são excitados. Vejamos um exemplo específico considerando o campo elétrico linearmente polarizado na direção $\hat{\boldsymbol{x}}$. Neste caso, a força é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{el} = -\frac{b(t) f(r)^2 E_0^2}{2} [& (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \frac{r}{a^2} \hat{\boldsymbol{r}} + \\ & + (\gamma_{11} - \gamma_{12}) \left(\frac{r}{a^2} + \frac{1}{r} \right) \left(\hat{\boldsymbol{r}} \cos 2\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin 2\theta \right)]. \end{aligned} \tag{5.13}$$

A Figura 5. 5 ilustra a direção das duas componentes da força de eletrostrição, dada pela equação (5.13). Vemos que o termo independente de θ representa uma força radial que tende a comprimir a fibra na direção de $-\hat{\boldsymbol{r}}$. O termo com dependência angular exerce uma força que tende a comprimir a fibra na direção $\hat{\boldsymbol{y}}$ e a expandir a fibra na direção $\hat{\boldsymbol{x}}$, comportamento análogo ao movimento imposto pelo modos TR_{2m} com polarização $0-90°$, conforme discutimos no exemplo da Figura 5. 4. Podemos concluir que se o modo óptico está linearmente polarizado na direção $\hat{\boldsymbol{x}}$ (ou $\hat{\boldsymbol{y}}$) apenas os modos TR_{2m} com polarização $0-90°$ são excitados.

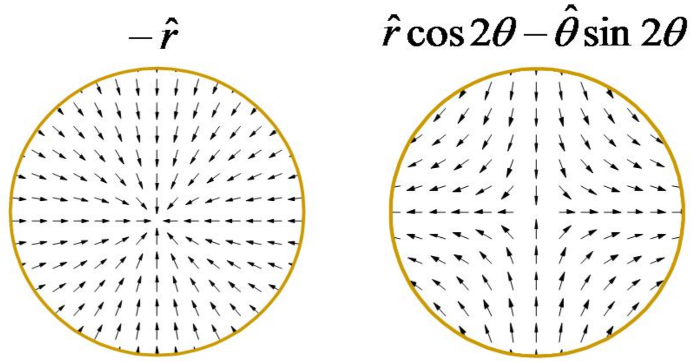


Figura 5. 5: Ilustração da direção dos dois termos da forças de eletrostrição (dada pela equação (5.13)) na seção transversal da fibra, causada por um campo elétrico com distribuição gaussiana e polarizado ao longo da direção *x*. A figura da esquerda ilustra o primeiro termo da força, radialmente simétrico, que aponta na direção radial; e a figura da direita ilustra o termo dependente de θ, a coordenada azimutal, e excita modos torsionais-radiais;

5.4. Excitação dos modos acústicos

Os modos acústicos de um *rod* discutidos anteriormente são soluções da equação de movimento homogênea, sem termo fonte, dada por [71, 80]

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_m}{\partial t^2} - \rho c_L^2 \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_m\right) - \rho c_T^2 \nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{u}_m\right) = 0, \tag{5.14}$$

onde $\rho = 2200 \ \ kg/m^3$ é a densidade da sílica. Vejamos agora como estes modos são excitados pela luz. Como vimos na seção anterior, um campo elétrico causa uma força de eletroatrição $\boldsymbol{f}$, cuja forma explícita esta dada pela equação (5.13). Incluindo na equação de movimento a força eletrostritiva e ainda os termos de viscosidade que causam a atenuação da onda acústica, a equação de onda completa para um meio isotrópico fica

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}-\left[\rho c_L^2+\eta_{11}\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})-\left[\rho c_T^2+\eta_{44}\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f}_{el}. \tag{5.15}$$

onde η_{11} e η_{44} são os coeficientes de viscosidade para a onda longitudinal e transversal respectivamente. O procedimento adotado para resolvermos esta equação é expandirmos o vetor deslocamento em termos dos modos acústicos não perturbados $\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{r},t)$, dados pelas equações (5.1) e (5.3). Dessa forma, a solução geral é [59, 60]

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=\sum_m A_m(t)\,\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{r})\frac{e^{i\Omega_m t}}{2}+c.c., \tag{5.16}$$

onde a soma em no índice m inclui os modos R_{0m} e TR_{2m}. Substituindo $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ dado pela equação (5.16) na equação(5.15), e usando a equação (5.14) para os modos do guia não perturbados, chegamos à seguinte equação

$$\sum_m\left[\frac{\partial^2 A_m}{\partial t^2}+(2i\Omega_m+2\Gamma_m)\frac{\partial A_m}{\partial t}+2i\Gamma_m\Omega_m A_m\right]\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{r})\frac{e^{i\Omega_m t}}{2}+c.c.=\frac{\boldsymbol{f}_{el}}{\rho}, \tag{5.17}$$

onde $\Gamma_m=\Omega_m^2\eta_{11}/2\rho V_L^2$. Ao derivarmos a equação (5.17), fizemos a aproximação de que $\eta_{11}/c_L^2=\eta_{44}/\rho c_T^2$. Esta aproximação significa que as *atenuações por unidade de tempo* das ondas longitudinal e transversal são consideradas iguais, o que vale aproximadamente para a sílica fundida [40]. A somatória em m é eliminada multiplicando-se ambos os lados da equação (5.17) $\boldsymbol{u}_n$ e integrado na seção transversal da fibra de raio R igual ao raio da casca. Supomos aqui que vale a relação de ortogonalidade $\int\boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{u}_m dA=0$ se $m\neq n$, a qual verificamos ser válida dentro de um erro de uma parte em 10^4. O lado esquerdo da equação (5.17) fica

$$\frac{1}{\rho}\int\boldsymbol{f}_{el}\cdot\boldsymbol{u}_m dA=\frac{b(t)}{\rho}\int\boldsymbol{f}_{el}^{'}\cdot\boldsymbol{u}_m dA, \tag{5.18}$$

onde separamos a dependência temporal $b(t)$ do termo da força, de modo que $\boldsymbol{f}_{el} = b(t)\boldsymbol{f}_{el}^{'}$. Finalmente, a equação resultante é facilmente resolvida no domínio da freqüência. Definimos então a Transformada e a Transformada Inversa de Fourier de uma função I como

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{I}(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega, \text{ e} \\ \tilde{I}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) e^{i\Omega t} dt \end{aligned} \tag{5.19}$$

Após eliminarmos a somatória da equação (5.17) usando a relação de ortogonalidade e tomarmos a Transformada de Fourier, a equação resultante no domínio da freqüência é

$$\left[-\Omega^2 - 2i\Omega(i\Omega_m + \Gamma_m) + 2i\Gamma_m\Omega_m\right]\tilde{A}_m = \frac{2B_m}{\rho}\tilde{b}(\Omega - \Omega_m), \text{ onde} \tag{5.20}$$

onde definimos o fator B_m, que representa a eficiência de excitação de modo m, da seguinte forma

$$B_m = \frac{\int \boldsymbol{f}_{el}^{'} \cdot \boldsymbol{u}_m dA}{\int u_m^2 dA}. \tag{5.21}$$

A solução da equação (5.20) é trivial

$$A_m(\Omega) = -\frac{2B_m}{\rho} \frac{\tilde{b}(\Omega - \Omega_m)}{(\Omega - \Omega_m + i\Gamma_m)^2 - (\Omega_m^2 - \Gamma_m^2)}. \tag{5.22}$$

Vejamos explicitamente o cálculo dos coeficiente B_m para os modos R_{0m}. Como estes modos não dependem da coordenada azimutal θ, a integral angular em (5.21) elimina todos os termos da força dependentes de θ, e o resultado é simplesmente

$$
\begin{aligned}
B_m^R &= -\frac{(\gamma_{11}+\gamma_{12})|E|^2}{2a} \frac{\int_0^{R/a} x^2 e^{-x^2} J_1\left(\frac{y_m^R a}{R}x\right)dx}{\int_0^{R/a} x J_1\left(\frac{y_m^R a}{R}x\right)^2 dx} \\
&= -\frac{(\gamma_{11}+\gamma_{12})|E|^2}{2a} g_m^R,
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

onde vemos que a integral radial está limitada entre 0 e a razão entre os raios da casca e do núcleo R/a. Para ilustrar, calculamos B_m^R para uma fibra com raio da casca $R = 62{,}5\ \mu\text{m}$ e do núcleo $a = 3\ \mu\text{m}$, e para um *rod*, para o qual $R = a = 3\ \mu\text{m}$. O resultado está mostrado na Figura 5.6, onde graficamos $g_m^R = \left[-2a/(\gamma_{11}+\gamma_{12})|E|^2\right] B_m^R$. Vemos que em uma fibra convencional, vários modos são excitados enquanto que em um *rod*, apenas o modo fundamental é excitado eficientemente. Esta conclusão não pode ser diretamente aplicada à fibra fotônica, já que os modos acústicos da PCF têm estruturas diferentes do caso do *rod*. Entretanto, considerando que na PCF, tanto o modo óptico e os modos acústicos estão confinados na mesma região, esperamos que o número de modos excitados seja pequeno, como de fato observamos experimentalmente. Vale comentar que o mesmo comportamento é observado para os modos radiais e torsionais-radiais.

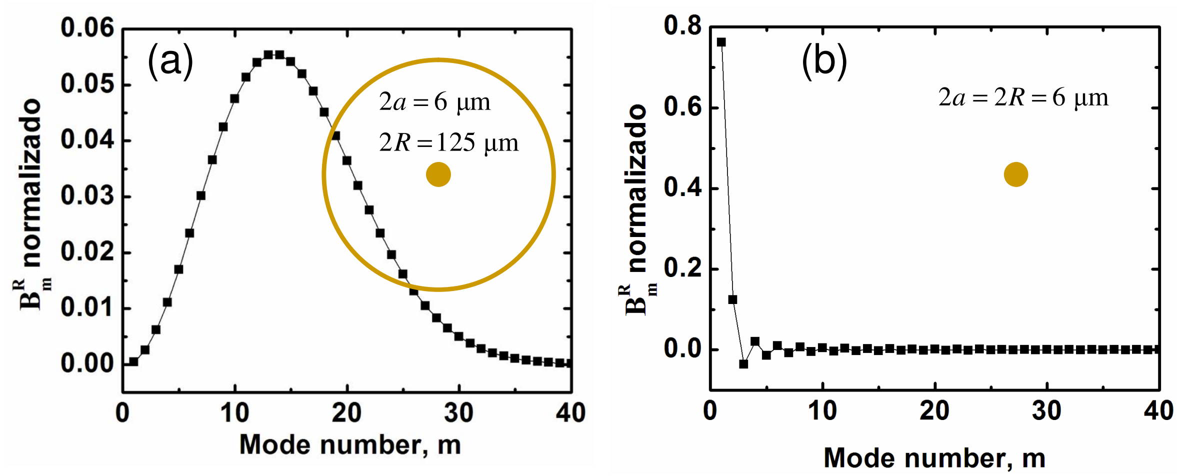


Figura 5. 6: comparação da eficiência de excitação dos modos acústicos em (a) uma fibra convencional com núcleo + casca e em (b) um cilindro de vidro no vácuo (*rod*). No primeiro caso, dezenas de modos são excitados enquanto no segundo apenas o primeiro modo é excitado eficientemente;

Como no caso do *rod*, apenas o modo fundamental é excitado eficientemente, vale a pena analisarmos mais profundamente o coeficiente B_0^R, que é dado por

$$B_0^R = -\frac{(\gamma_{11} + \gamma_{12})|E|^2}{2a} 0.76,$$

e como a intensidade óptica é

$$I = \frac{P}{\pi a^2} = \frac{\varepsilon_0 n^2 c |E|^2}{2},$$

onde P é a potência óptica, ε_0 a permissividade elétrica do vácuo e n o índice de refração, temos que

$$B_0^R = -\frac{0.76 n^2 (p_{11} + p_{12})}{\pi c a^3} P.$$

Vemos portanto, que o coeficiente de excitação depende de $1/a^3$ para uma mesma potência óptica. Para o caso dos modos torsionais-radiais, nos limitaremos a calcular a eficiência de excitação para o campo óptico polarizado na direção $\hat{\boldsymbol{x}}$. Como comentamos anteriormente, a integral angular nos mostra que apenas os modos $0-90°$ são excitados. Assim, os coeficientes B_m^{TR} são

$$\begin{aligned} B_m^{TR} &= -\frac{(\gamma_{11}-\gamma_{12})|E|^2}{2a} \frac{\int_0^{R/a}(x^2+1)e^{-x^2}\left[U_{rm}^{TR}(x)+U_{\theta m}^{TR}(x)\right]dx}{\int_0^{R/a}x\left[U_{rm}^{TR}(x)^2+U_{\theta m}^{TR}(x)^2\right]dx} \\ &= -\frac{(\gamma_{11}-\gamma_{12})|E|^2}{2a} g_m^{TR}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Voltemos para a solução geral do vetor deslocamento. Suponhamos agora que o pulso óptico seja uma delta de Dirac no tempo, ou seja, $b(t)=t_p\delta(t)$, onde t_p é uma quantidade que define caracteriza a energia do pulso. Vejamos: a potência óptica é

$$\frac{P(t)}{\pi a^2} = \frac{\varepsilon_0 n^2 c|E|^2}{2} b(t),$$

e portanto a energia do pulse é a integral no tempo da potência, ou seja,

$$En = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,dt = \frac{\varepsilon_0 n^2 c|E|^2 \pi a^2 t_p}{2}.$$

A Transformada de Fourier de $b(t)$ é

$$\tilde{b}(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(t)e^{i\Omega t}dt = \frac{t_p}{2\pi}. \tag{5.25}$$

de modo que a solução para os coeficientes A_m, dada pela equação (5.22), fica

$$A_m(\Omega) = -\frac{B_m t_p}{\pi\rho}\frac{1}{(\Omega-\Omega_m+i\Gamma_m)^2-(\Omega_m^2-\Gamma_m^2)}. \tag{5.26}$$

A Transformada inversa é facilmente calculada usando cálculo de resíduos

$$A_m(t) = \frac{2B_m t_p}{\rho} \frac{e^{-i\Omega_m t} e^{-\Gamma_m t} \sin \Omega_m t}{\Omega_m} \theta(t), \tag{5.27}$$

onde $\theta(t)$ é a função degrau de t, e vale 1 se $t > 0$ e 0 se $t < 0$. Deste modo, a solução geral para o vetor deslocamento, após alguma manipulação, é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{2n^2 En}{\rho c \pi a^3} \theta(t) \sum_m [(p_{11}+p_{12}) g_m^R \boldsymbol{u}_m^R(\boldsymbol{r}) \frac{e^{-\Gamma_m^R t} \sin \Omega_m^R t}{\Omega_m^R} + \\ +(p_{11}-p_{12}) g_m^{TR} \boldsymbol{u}_m^{TR}(\boldsymbol{r}) \frac{e^{-\Gamma_m^{TR} t} \sin \Omega_m^{TR} t}{\Omega_m^{TR}}], \end{aligned} \tag{5.28}$$

que inclui a contribuição de ambas as famílias Radial e Torsional-Radial. Voltando ao caso de um *rod* ou uma fibra fotônica, sabemos que apenas um único modo (de cada ramo radial ou torsional-radial) é relevante, e usando que $\Omega_m = y_m c_{L,T} / a$, temos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{2n^2 En}{\rho c \pi a^2} \theta(t) [(p_{11}+p_{12}) g_0^R \boldsymbol{u}_0^R(\boldsymbol{r}) \frac{e^{-\Gamma_0^R t} \sin \Omega_0^R t}{y_0^R V_L} + \\ +(p_{11}-p_{12}) g_0^{TR} \boldsymbol{u}_0^{TR}(\boldsymbol{r}) \frac{e^{-\Gamma_0^{TR} t} \sin \Omega_0^{TR} t}{y_0^{TR} V_S}]. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Portanto, para uma mesma energia do pulso óptico, a amplitude da onda acústica excitada aumenta com $1/a^2$, que reflete na verdade o produto $\Omega_m^{-1} B_m \propto a \cdot 1/a^3$. A Figura 5. 7 mostra a evolução temporal do deslocamento acústico, levando em conta apenas os modos radiais, para $r = a/2$ em uma fibra convencional (a) e em um *rod* (b). O pulso óptico tem energia de 100 pJ. Vemos que na fibra convencional, o padrão é uma série de picos separados de $21\,\mathrm{ns}$ (com amplitude decaindo exponencialmente), que é o tempo do pulso acústico excitado propagar-se do núcleo até a borda da casca, refletir-se e atingir novamente o núcleo. O primeiro pulso acústico é negativo, ou seja, há uma compressão na região núcleo, o quê, como veremos, resulta num aumento no índice de refração. Já o segundo pico é positivo, ou seja, o núcleo se expande na segunda passagem da onda acústica. Isto se deve ao fato de a superfície ser livre, de modo que a direção de propagação é invertida na reflexão, mas a direção do vetor deslocamento não é. A Figura 5. 8 ilustra este comportamento. Está graficada a amplitude do vetor deslocamento (na verdade o negativo da amplitude, para melhor visualização) para diferentes instantes de tempo. Vemos que inicialmente o pulso acústico gerado no núcleo se propaga mantendo o sinal até a reflexão na borda, e depois volta com sinal oposto. No *rod*, como o pulso acústico está confinado, o padrão de deslocamento é senoidal com a amplitude decaindo exponencialmente. É interessante notarmos que o valor de pico da onda acústica excitada é o mesmo no *rod* e na fibra. Esta observação é explicada pelo fato de a amplitude da força de eletrostrição ser a mesma em ambos os casos, desde de que o diâmetro do núcleo da fibra seja igual ao diâmetro do *rod*. A diferença é que toda a energia impulsiva é concentrada em um único modo acústico no *rod*, enquanto que na fibra convencional se divide entre aproximadamente 40 modos.

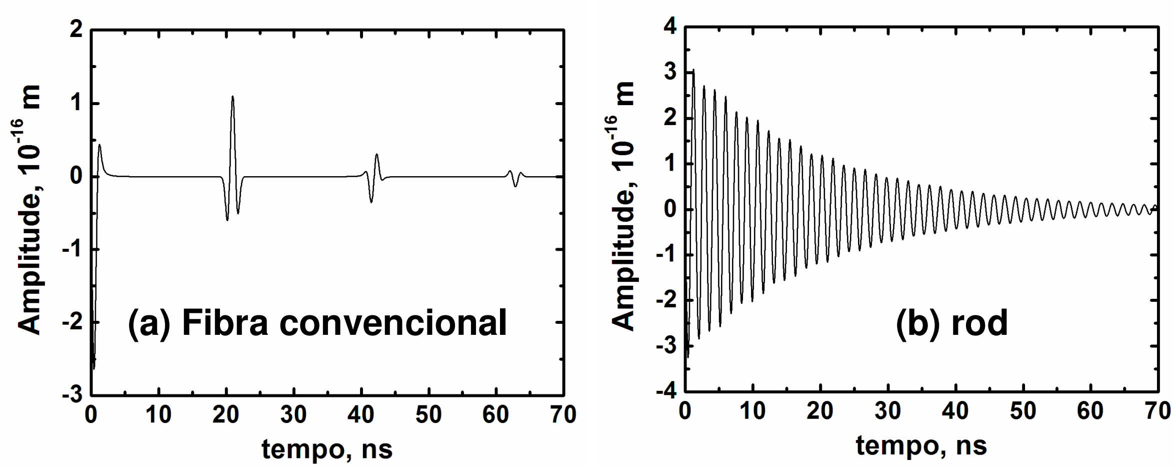


Figura 5. 7: amplitude de deslocamento do pulso acústico em função do tempo, gerado pela força de eletrostrição em (a) uma fibra convencional com núcleo + casca e em (b) em um *rod*. A amplitude graficada é aquela correspondente ao vetor deslocamento em $r = a$, e

apenas os modos radiais foram considerados;

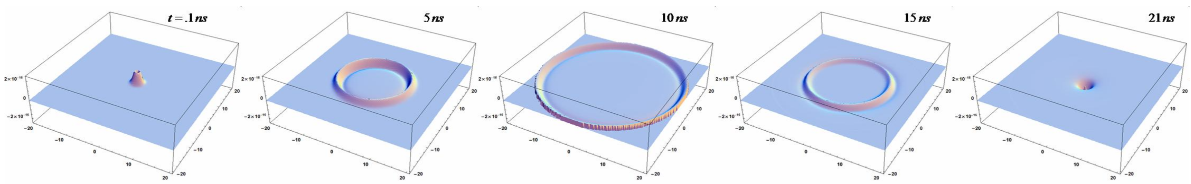


Figura 5. 8: Evolução temporal do pulso acústico gerado no núcleo de uma fibra convencional (considerando apenas os modos radiais). O pulso se propaga transversalmente para fora do núcleo com a velocidade da onda longitudinal. Como a superfície externa é livre, o pulso refletido chega no núcleo com o sentido do deslocamento invertido;

5.5. Espalhamento de luz: modos radiais e torsionais

Nesta seção passada, calculamos como um pulso de luz excita os modos acústicos. Agora, calculemos o inverso, ou seja, como o modo acústico espalha a luz. Suponhamos que o modo acústico já esteja presente na fibra, não importando por enquanto como ele tenha sido gerado. Como já vimos nos capítulo 2 e também no início deste capítulo, pelo efeito elasto-óptico, o modo acústico causa uma perturbação na constante dielétrica do meio, dada por

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_{xx} &= -\varepsilon_0 n^4 \left(p_{11} S_{xx} + p_{12} S_{yy} + p_{12} S_{zz} \right), \\
\Delta\varepsilon_{yy} &= -\varepsilon_0 n^4 \left(p_{12} S_{xx} + p_{11} S_{yy} + p_{12} S_{zz} \right), \\
\Delta\varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_0 n^4 2 p_{44} S_{xy}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Como os modos acústicos são expressos em coordenadas cilíndricas, é útil expressarmos as componentes do tensor de deformação (strain) em coordenadas cilíndricas. Adiantamos, entretanto que a apenas as componentes S_{rr}, $S_{\theta\theta}$ e $S_{r\theta}$ são não nulas para modos acústicos no *cutoff*. Podemos usar a equação para relacionar os elementos do tensor de perturbação em coordenadas retangulares com o *stress* em coordenadas cilíndricas e o resultado é

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_{xx} &= -\varepsilon_0 n^4 \left[\left(p_{11}S_{rr} + p_{12}S_{\theta\theta} \right)\cos^2\theta + \left(p_{12}S_{rr} + p_{11}S_{\theta\theta} \right)\sin^2\theta - p_{44}S_{r\theta}\sin 2\theta \right], \\
\Delta\varepsilon_{yy} &= -\varepsilon_0 n^4 \left[\left(p_{12}S_{rr} + p_{11}S_{\theta\theta} \right)\cos^2\theta + \left(p_{11}S_{rr} + p_{12}S_{\theta\theta} \right)\sin^2\theta + p_{44}S_{r\theta}\sin 2\theta \right], \\
\Delta\varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_0 n^4 p_{44} \left[2S_{r\theta}\cos 2\theta + \left(S_{rr} - S_{\theta\theta} \right)\sin 2\theta \right].
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Antes de prosseguirmos com a análise detalhada de cada um dos termos da equação (5.31), vejamos o efeito de uma perturbação na constante dielétrica na propagação do campo eletromagnético, de uma forma mais genérica. Restringimos nosso problema, entretanto, a perturbações reais e simétricas, como é o caso daquela gerada pelas ondas acústicas. De maneira geral, o tensor de perturbação pode ser escrito como

$$\left(\Delta\varepsilon \right) = \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} & \Delta\varepsilon_{xy} \\ \Delta\varepsilon_{xy} & \Delta\varepsilon_{yy} \end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

Sabendo que toda matriz real e simétrica é diagonalizável, podemos tratar nosso problema no sistema de coordenadas dos eixos principais da matriz de perturbação, no qual esta é diagonal. Chamemos de $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ os versores ortonormais, na direção dos eixos principais de $\left(\Delta\varepsilon \right)$. Neste sistema, a perturbação e o campo elétrico são escritos como

$$\begin{aligned}
\left(\Delta\varepsilon \right) &= \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \Delta\varepsilon_2 \end{pmatrix}, \text{ e} \\
\boldsymbol{E} &= \frac{1}{2}\left[E_1\left(z,t \right)\boldsymbol{e}_1 + E_2\left(z,t \right)\boldsymbol{e}_2 \right] f\left(r \right) e^{i\left(\omega t - \beta z \right)} + c.c.,
\end{aligned} \tag{5.33}$$

onde $\Delta\varepsilon_{1,2}$ são os autovalores da matriz de perturbação e $E_{1,2}$ são as envoltórias dos campos, que variam lentamente no tempo. Na presença de uma perturbação, a equação de ondas para o campo elétrico é

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \Delta \boldsymbol{P}}{\partial t^2}, \text{ onde}$$
$$\Delta \boldsymbol{P} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E} \tag{5.34}$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo, e $\varepsilon = n^2 \varepsilon_0$ é a permissividade elétrica do meio. Como veremos adiante, a perturbação causada por cada modo acústico transversal pode ser escrita de maneira genérica como

$$\Delta \varepsilon_i = \Delta \varepsilon_i (x, y) \sin \Omega t,$$

onde $\Omega / 2\pi$ é a freqüência do modo. Considerando que $\omega ? \Omega$, podemos fazer a aproximação de que

$$\frac{\partial^2 \Delta \boldsymbol{P}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E})}{\partial t^2} \approx \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2},$$

de modo que a equação (5.34) fica

$$\nabla^2 E_i - \mu_0 (\varepsilon + \Delta \varepsilon_i) \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0, \tag{5.35}$$

cuja solução aproximada é obtida tomando a média espacial da perturbação, ponderada pelo modo óptico não perturbado. O índice de refração corrigido é, dessa forma

$$n_i \approx n + \Delta n_i \sin \Omega t, \text{ com}$$
$$\Delta n_i = \frac{1}{2 \varepsilon_0 n} \frac{\int \Delta \varepsilon_i (x, y) f^2 (r) dA}{\int f^2 (r) dA}. \tag{5.36}$$

Supondo que inicialmente o campo é contíuno, ou seja, $E_i (z = 0, t) = E_i e^{i \varphi_{0i}}$, a solução em $z = L$ é um campo modulado em fase

$$E_i (L, t) = E_i e^{i(\varphi_{0i} + \delta_i \sin \Omega t)}$$
$$\delta_i = -\frac{\omega \Delta n_i L}{c} = -\frac{\omega L}{2 \varepsilon_0 n c} \frac{\int \Delta \varepsilon_i (x, y) f^2 (r) dA}{\int f^2 (r) dA}, \tag{5.37}$$

onde não necessariamente a fase é a mesma para ambas as componentes E_1 e E_2 , fato este que é verdade apenas se a perturbação não causa birrefringência. A solução final para o campo total é obtida inserindo o resultado da equação (5.37) na equação (5.33)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} = f(x,y)[&E_1 \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{01} + \delta_1 \sin \Omega t)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \\ &+ E_2 \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{02} + \delta_2 \sin \Omega t)\hat{\boldsymbol{e}}_2]. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Concluímos portanto que uma perturbação real e simétrica, causa uma modulação de fase em cada componente na direção dos eixos principais do tensor $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Vemos que se os autovalores de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ são degenerados, ou seja, se a perturbação é isotrópica, ambas componentes do campo são moduladas em fase igualmente (veremos que este é o caso da perturbação que vem dos modos radiais R_{0m}). Se a perturbação não é isotrópica, a modulação no índice de refração é diferente em cada componente, ou seja, a perturbação causa uma birrefringência na fibra (birrefringência que oscila no tempo com $\sin \Omega t$). Neste caso, se o modo óptico é polarizado na direção de um dos eixos principais, então ele sofre uma modulação de fase pura. Entretanto, se o modo tem componentes nas duas direções principais, surge uma diferença de fase entre as componentes devido à perturbação, causando uma modulação do estado de polarização. A diferença de fase entre uma polarização e outra é

$$\delta\varphi = \varphi_{01} - \varphi_{02} + (\delta_1 - \delta_2)\sin \Omega t. \tag{5.39}$$

Vejamos um exemplo: se inicialmente a onda é linearmente polarizada a $45°$ com os eixos principais $\varphi_{01} - \varphi_{02} = 0$, e se a diferença de fase $\delta_1 - \delta_2 = \pi / 2$, a polarização passa de linear para circular à direita, voltanto novamente à linear. Depois passa a circular à esquerda e finalmente voltando a linear, sempre passando por estados elípticos nos tempo intermediários. A Figura 5. 9 ilustra a evolução do estado de polarização com o tempo.

Vemos que uma componente é criada a $-45°$ dos eixos principais, ou seja, ortogonal à polarização linear de entrada. Se na saída da fibra, passamos o feixe por um polarizador orientado na direção $\boldsymbol{\alpha}$, o sinal detectado em um fotodetector é proporcional a

$$S = \left\langle \left| \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\alpha} \right|^2 \right\rangle_t \tag{5.40}$$

onde o símbolo $\langle\,\rangle_t$ representa a média temporal sobre os termos de alta frequencia. Se $\boldsymbol{\alpha}$ está a $-45°$, ou seja, $\boldsymbol{\alpha} = 1/\sqrt{2}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \hat{\boldsymbol{e}}_2\right)$, então

$$S = \frac{1}{4}\left(E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\delta\varphi\right), \tag{5.41}$$

onde $\delta\varphi$ é dado pela equação (5.39). Para o feixe linearmente polarizado a $45°$, $\varphi_{01} - \varphi_{02} = 0$ e $E_1 = E_2 = E_0$, então o sinal detectado S é quadrático em $\left(\delta_1 - \delta_2\right)$

$$S = \frac{E_0^2}{2}\left[1 - \cos\left(\left(\delta_1 - \delta_2\right)\sin\Omega t\right)\right] \approx \frac{E_0^2}{4}\left(\delta_1 - \delta_2\right)^2 \sin^2\Omega t. \tag{5.42}$$

onde supomos que a diferença de fase adquirida devido à perturbação é pequena. Suponhamos agora que o sinal seja circular ao invés de linear. Então, a diferença de fase inicial é agora $\varphi_{01} - \varphi_{02} = \pi/2$, de modo que o cosseno da equação (5.41) vira um seno, ou seja,

$$S \approx \frac{1}{4}\left(E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\left(\delta_1 - \delta_2\right)\sin\Omega t\right), \tag{5.43}$$

e, se o sinal é circular, temos que $E_1 = E_2 = E_0$ e portanto

$$\begin{aligned} S &= \overline{S}\left[1 + \left(\delta_1 - \delta_2\right)\sin\Omega t\right], \text{ para circular à direita e} \\ S &= \overline{S}\left[1 - \left(\delta_1 - \delta_2\right)\sin\Omega t\right], \text{ para circular à esquerda.} \end{aligned} \tag{5.44}$$

onde $\overline{S}$ é o valor médio do sinal detectado (termo DC). Vemos que o termo oscilante do sinal detectado (termo AC) dado pelas equações (5.44) tem sinais opostos se a luz é circularmente polarizada à direita ou à esquerda, e o resultado experimental mostrado no capítulo 3 reproduz este fato. Podemos determinar a diferença de fase adquirida devido à perturbação, simplesmente fazendo a seguinte operação

$$\frac{S-\overline{S}}{\overline{S}}=\left(\delta_1-\delta_2\right)\sin\Omega t. \tag{5.45}$$

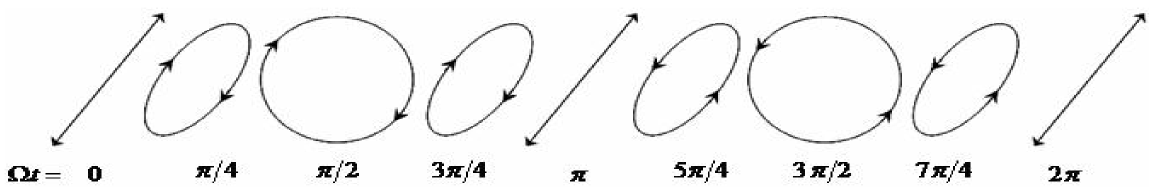


Figura 5. 9: Evolução temporal do estado de polarização para um campo incidente linearmente polarizado a $45°$ dos eixos principais de birrefringência. Aqui, assumimos que a perturbação causa uma diferença de fase $\delta_1-\delta_2=\pi/2$;

Calculemos agora explicitamente o tensor de perturbação dado pela equação (5.31) para ambos modos radiais R_{0m} e torsionais-radiais TR_{2m}. Comecemos pelos modos radiais. Os elementos do tensor de *strain* são

$$\begin{aligned} S_{rr}^{R_{0m}} &= \frac{\partial U_{rm}^{R}\left(r\right)}{\partial r}, \\ S_{\theta\theta}^{R_{0m}} &= \frac{U_{rm}^{R}\left(r\right)}{r}, \\ S_{r\theta}^{R_{0m}} &= 0, \end{aligned} \tag{5.46}$$

onde todos os elementos de tensor de strain são independentes de θ. Os elementos do tensor de perturbacão da constante dielétrica, conforme a equação (5.31), são

$$
\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_{xx} &= -\varepsilon_0 n^4 \left[\left(p_{11} S_{rr} + p_{12} S_{\theta\theta} \right) \cos^2\theta + \left(p_{12} S_{rr} + p_{11} S_{\theta\theta} \right) \sin^2\theta \right], \\
\Delta\varepsilon_{yy} &= -\varepsilon_0 n^4 \left[\left(p_{12} S_{rr} + p_{11} S_{\theta\theta} \right) \cos^2\theta + \left(p_{11} S_{rr} + p_{12} S_{\theta\theta} \right) \sin^2\theta \right], \\
\Delta\varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_0 n^4 p_{44} \left(S_{rr} - S_{\theta\theta} \right) \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{5.47}
$$

A integração em θ da equação (5.36) anula o termo fora da diagonal $\Delta\varepsilon_{xy}$, de modo que a matriz de perturbação é diagonal. Mais ainda, vemos que a integração em θ faz com que os elementos da diagonal sejam iguais. Assim, temos que a amplitude de perturbação do índice de refração são as mesmas em ambas direções $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$:

$$
\Delta n_x = \Delta n_y = \Delta n_{R_{0m}} = -\frac{n^3}{2a^2} \left(p_{11} + p_{12} \right) \int_0^R \left(S_{rr}^{R_{0m}} + S_{\theta\theta}^{R_{0m}} \right) f^2(r)\, r dr,
$$

onde usamos que $\int f^2(r)\, dA = \pi a^2$, com a sendo o raio do núcleo. No caso de um *rod* ou de um fibra fotônica, temos que $R = a$. Usando que o modo acústico só depende da coordenada r/a, ou seja, $U_{rm}^R(r) = U_{rm}^R(r/a)$, a equação (5.36) resulta em

$$
\Delta n_x = \Delta n_y = \Delta n_{R_{0m}} = -\frac{n^3}{2a} \left(p_{11} + p_{12} \right) \int_0^1 \left[S_{rr}^{R_{00}}(x) + S_{\theta\theta}^{R_{00}}(x) \right] f^2(x)\, x dx, \tag{5.48}
$$

de modo que o a amplitude da fase induzida depende de $1/a$. Como vimos na seção 5.4, a amplitude da onda excitada por eletrostrição varia com $1/a^2$, de modo que no resultado final, espalhamento causado por esta onda é re-escalado com $1/a^3$. O deslocamento instantâneo da freqüência da luz por unidade de comprimento da fibra causado pela modulação do índice de refração é

$$
\frac{\delta \nu_R}{L} = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial \Delta n_R}{\partial t} = \frac{\pi n^3 y_0^R c_L}{\lambda a^2} \left(p_{11} + p_{12} \right) \int_0^1 \left[S_{rr}^{R_{00}}(x) + S_{\theta\theta}^{R_{00}}(x) \right] f^2(x)\, x dx, \tag{5.49}
$$

onde vemos que o desvio em freqüência escala com $1/a^2$, que associado à excitação eletrostritiva resulta no fator de escala em $1/a^4$. Esta simples comparação nos mostra que o desvio em frequencia na fibra fotônica $a = 0,5$ μm é aproximadamente 1300 vezes maior que aquele obtido em uma mesma fibra com raio de 3 μm.

Como vimos anteriormente, um campo polarizado na direção x excita apenas os modos TR_{2m} na polarização $0-90°$. Calculemos agora a perturbação na constante dielétrica causada por esta família de modos acústicos. Os elementos não nulos do tensor de strain são

$$\begin{aligned}
&S_{rr}^{TR_{2m}}(r,\theta) = S_{rr}^{TR_{2m}}(r)\cos 2\theta,\\
&S_{\theta\theta}^{TR_{2m}}(r,\theta) = S_{\theta\theta}^{TR_{2m}}(r)\cos 2\theta,\\
&S_{r\theta}^{TR_{2m}}(r,\theta) = S_{r\theta}^{TR_{2m}}(r)\sin 2\theta, \text{ com}\\
&\quad S_{rr}^{TR_{2m}}(r) = \frac{\partial U_{rm}^{TR}(r)}{\partial r},\\
&\quad S_{\theta\theta}^{TR_{2m}}(r) = \frac{1}{r}\left[U_{rm}^{TR}(r) - 2U_{\theta m}^{TR}(r)\right],\\
&\quad S_{r\theta}^{TR_{2m}}(r) = -\frac{1}{r}\left[2U_{rm}^{TR}(r) - U_{\theta m}^{TR}(r) + r\frac{\partial U_{\theta m}^{TR}(r)}{\partial r}\right].
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Os elementos do tensor de perturbacão da constante dielétrica, conforme a equação (5.31), são

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_{xx} &= -\varepsilon_0 n^4[\left(p_{11}S_{rr}^{TR_{2m}} + p_{12}S_{\theta\theta}^{TR_{2m}}\right)\cos 2\theta\cos^2\theta +\\
&\quad + \left(p_{12}S_{rr}^{TR_{2m}} + p_{11}S_{\theta\theta}^{TR_{2m}}\right)\cos 2\theta\sin^2\theta - p_{44}S_{r\theta}^{TR_{2m}}\sin^2 2\theta],\\
\Delta\varepsilon_{yy} &= -\varepsilon_0 n^4[\left(p_{12}S_{rr}^{TR_{2m}} + p_{11}S_{\theta\theta}^{TR_{2m}}\right)\cos 2\theta\cos^2\theta +\\
&\quad + \left(p_{11}S_{rr}^{TR_{2m}} + p_{12}S_{\theta\theta}^{TR_{2m}}\right)\cos 2\theta\sin^2\theta + p_{44}S_{r\theta}^{TR_{2m}}\sin^2 2\theta],\\
\Delta\varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_0 n^4 p_{44}\left[2S_{r\theta}^{TR_{2m}}\sin 2\theta\cos 2\theta + \left(S_{rr}^{TR_{2m}} - S_{\theta\theta}^{TR_{2m}}\right)\cos 2\theta\sin 2\theta\right].
\end{aligned} \tag{5.51}$$

A integração em θ da equação (5.36) anula o termo fora da diagona $\Delta\varepsilon_{xy}$, de modo que a matriz de perturbação é diagonal. Mais ainda, vemos que a integração em θ faz com que os elementos da diagonal sejam iguais em amplitude e de sinais opostos. Assim, temos que a amplitude de perturbação do índice de refração é

$$\Delta n_x = -\Delta n_x = -\frac{n^3}{4a^2}\left(p_{11} - p_{12}\right)\int_0^R \left(S_{rr}^{TR_{2m}} - S_{\theta\theta}^{TR_{2m}} - S_{r\theta}^{TR_{2m}}\right) f^2\left(r\right) r dr. \tag{5.52}$$

5.6. Modulação de índice devido à excitação impulsiva

Nesta seção, combinamos os resultados das duas seções prévias (excitação e espalhamento) para calcular a perturbação de índice causada pela excitação impulsiva dos modos acústicos. Na seção de 5.4, calculamos a amplitude de cada modo acústico devido à força eletrostritiva, cujo resultado final é dado pela equação (5.29). Agora, usamos este resultado para calcular a perturbação de índice causada por cada modo acústico usando a equação (5.48) para os modos radiais e (5.52) para os modos torsionais. Finalmente, somando as contribuições de cada modo, temos a perturbação total no índice de refração. A Figura 5. 10 mostra a perturbação devido apenas aos modos radiais, em uma fibra convencional ($a = 3\ \mu\text{m}$ e $R = 62,6\ \mu\text{m}$), para um pulso de $100\ \text{pJ}$ de energia. Vemos uma série de picos a cada $21\ \text{ns}$, que é o tempo do pulso acústico excitado propagar-se do núcleo até a borda da casca, refletir-se e atingir novamente o núcleo, comportamento análogo ao obtido na Figura 5. 7 para o deslocamento acústico. Vemos que os modos radiais causam uma perturbação máxima no índice de $3,6 \cdot 10^{-11}$.

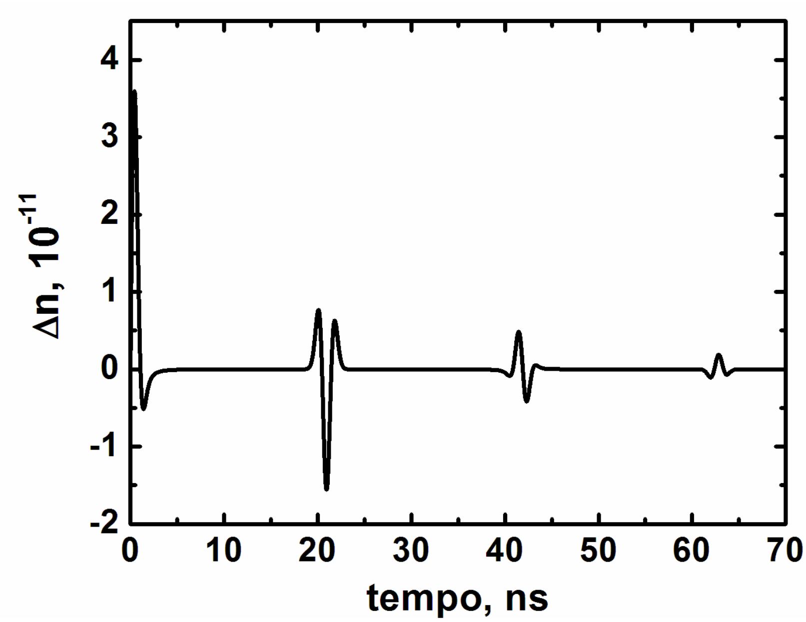


Figura 5. 10: Perturbação do índice de refração causado pela excitação impulsiva dos modos radiais de uma fibra convencional. Uma série de picos separados de $21\,\text{ns}$ é a resposta característica. A energia do pulso óptico é 100 pJ ;

A Figura 5. 11 mostra a perturbação para a componente $\hat{\boldsymbol{x}}$ do campo elétrico, devido apenas aos modos torsionais-radiais, em uma fibra convencional ($a = 3\ \mu\text{m}$ e $R = 62,6\ \mu\text{m}$), para um pulso de 100 pJ de energia. Vemos agora, que há picos presentes não apenas a cada 21 ns, mas também a cada 33 ns, que é o tempo do pulso acústico de origem transversal excitado propagar-se do núcleo até a borda da casca, refletir-se e atingir novamente o núcleo. Vemos que os modos radiais causam uma perturbação máxima no índice de $-1,6\cdot 10^{-11}$. Notemos que a perturbação para a componente $\hat{\boldsymbol{x}}$ é negativa, o que implica que para a componente $\hat{\boldsymbol{y}}$ será positiva (ver equação (5.52)). Para um *rod*, ambas perturbações radiais ou torisonais-radiais passam a ter a mesma característica senoidal como ocorre com o vetor deslocamento (Figura 5. 7).

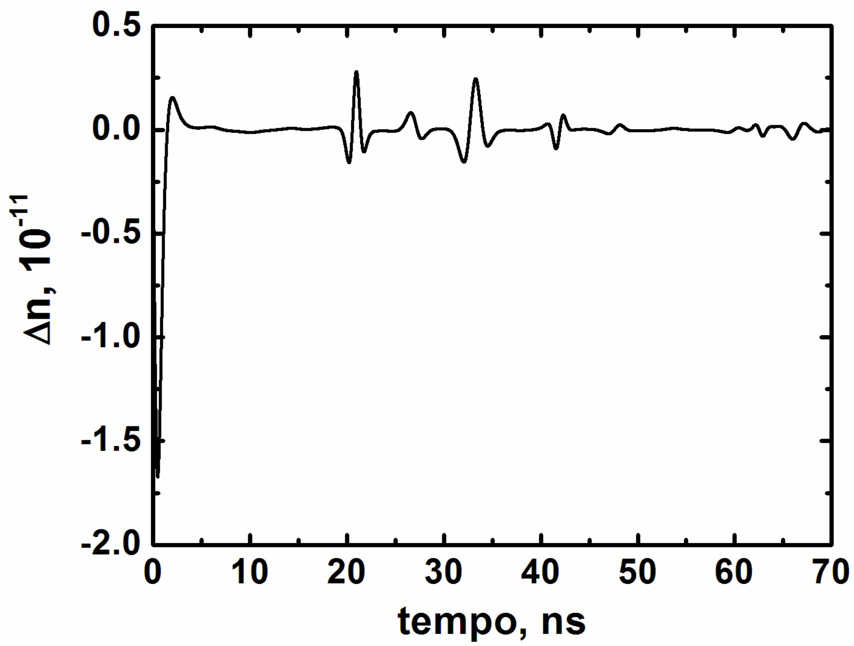


Figura 5. 11: Perturbação do índice de refração causado pela excitação impulsiva dos modos torsionais-radiais de uma fibra convencional. Picos localizados a cada $21\,\text{ns}$ ou $33\,\text{ns}$ agora estão presentes. A energia do pulso óptico é 100 pJ.

5.7. Modos numéricos

Para explicar as observações experimentais de forma quantitativa, o modelo do *rod* é insuficiente. Entendemos bem como é a excitação de ondas acústicas por eletrostrição, como a energia acústica está distribuída nos modos da estrutura, dependendo do confinamento destas ondas. Além disso, pudemos entender que os principais efeitos causados pelos modos acústicos no *cut-off* são a modulação de fase para os modos puramente radiais e a modulação da polarização para modos do tipo TR. Particularmente, usando as equações (5.1) e (5.3), podemos calcular as freqüências dos modos R_{0m} e TR_{2m}

para um *rod* com diâmetro $2R = 1,22\ \mu m$ para compararmos com a PCF. O resultado é $3,1$ e $8,4$ GHz para os modos radiais e $2,3$ e $4,0$ GHz para os torsionais-radiais. Apesar de as freqüências dos modos fundamentais serem da mesma ordem de grandeza que as freqüências observadas, os valores são diferentes. Mais ainda, o modelo do *rod* prediz apenas um modo de cada família interagindo eficientemente com a luz, e o resultado experimental mostra, entretanto, que pode haver mais picos de espalhamento.

Para refinar nosso entendimento, calculamos numericamente os modos numéricos da PCF, assim como fizemos no caso de retro-espalhamento. Aqui, entretanto, calculamos os modos da PCF na condição de *cut-off*. Novamente utilizamos o Método dos Elementos Finitos mas, neste caso, obtivemos melhores resultados criando uma discretização da estrutura real da fibra através de uma imagem de SEM, e não de uma fibra ideal como no caso de retro-espalhamento. Resolvemos numericamente a equação de propagação de ondas acústicas consideramos apenas alguns anéis de buracos de ar em torno do núcleo (neste caso 2 anéis) e não a estrutura completa. Adiante, apresentamos cálculos da *gap* fonônico utilizando a estrutura periódica completa. Como resultado, obtemos uma descrição mais precisa dos modos acústico da fibra fotônica, e conseqüentemente das freqüências de ressonância do núcleo. Com relação ao modo óptico, novamente usamos o mesmo procedimento que no caso de retro-espalhamento e calculamos o modo óptico da PCF também através do método dos elementos finitos. Para cada modo acústico, calculamos a distribuição da perturbação do índice de refração na seção transversal da fibra usando o tensor de impermeabilidade. Depois calculamos a integral de *overlap* com o modo óptico, obtendo assim a perturbação no índice de refração efetivo do modo óptico Δn_x e Δn_y, para as duas polarizações.

No caso do *rod*, soluções analíticas para os modos são facilmente obtidas e mais ainda, os modos podem ser separadas em famílias com diferentes simetrias. Vimos na seção anterior que modos radialmente simétricos R_{0m} causam uma perturbação isotrópica no índice e não induzem birrefringência. Já modos da família torsional-radial TR_{2m} induzem birrefringência. Obviamente, podemos concluir que $\Delta n_{(-)} = \Delta n_y - \Delta n_x = 0$ para os modos R_{0m}, enquanto $\Delta n_y = -\Delta n_x$ e $\Delta n_{(+)} = \Delta n_y + \Delta n_x = 0$ para modos da família TR_{2m}. Os modos da PCF têm estruturas mais complexas e numericamente, é muito difícil os separarmos em famílias. Entretanto, uma maneira de investigarmos as simetrias dos modos é calculando as quantias $\Delta n_{(+)}$ e $\Delta n_{(-)}$. Modos da PCF que sejam simétricos, ou predominantemente "radiais" ou R_{0m}, aparecerão mais fortes no espectro de $\Delta n_{(+)}$, enquanto modos predominantemente assimétricos ou torsionais-radiais (TR_{2m}) aparecerão mais fortes no espectro de $\Delta n_{(-)}$. O resultado destes cálculos estão mostrados na Figura 5. 12, onde usamos a seguinte nomenclatura $\text{Signal}(+) = \Delta n_{(+)}^2$, que chamamos apenas de espectro par, e $\text{Signal}(-) = \Delta n_{(-)}^2$, que chamamos apenas de espectro ímpar. Vale notar que tomamos o quadrado da perturbação, já que a potência de cada banda de modulação criada pela presença de um modo acústico é proporcional a esta quantia. O espectro da Figura 5. 12(b) é portanto adequado para a comparação com o resultado medido e apresentado no capítulo 3.

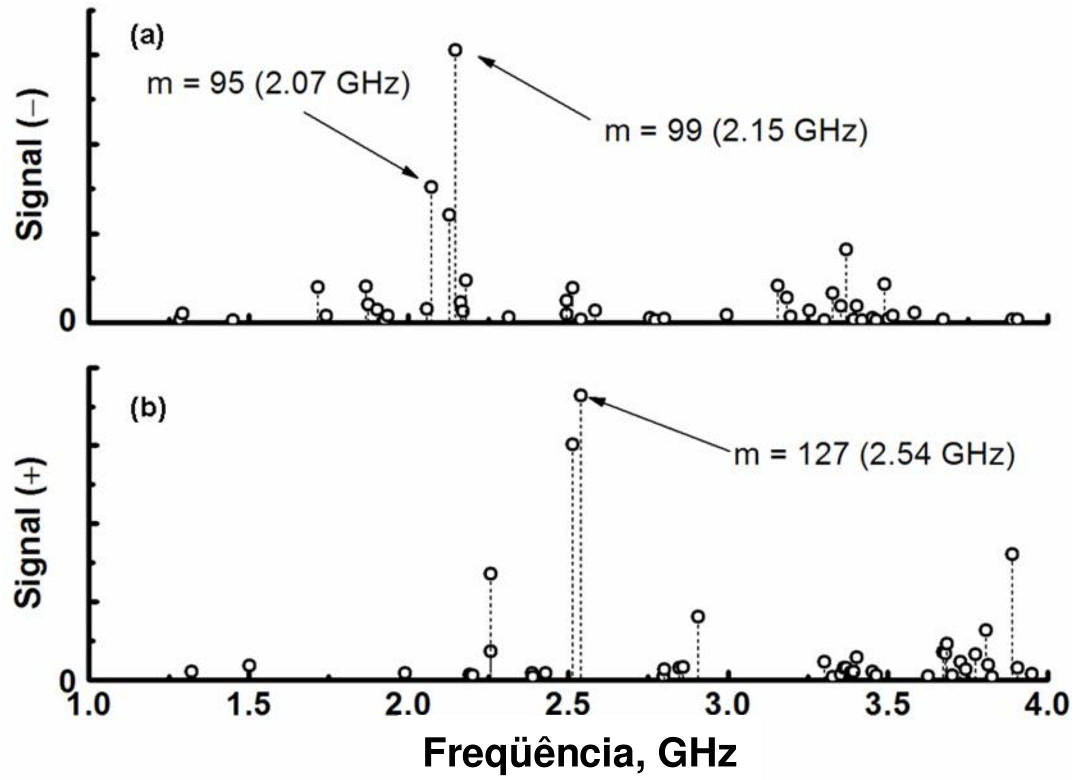


Figura 5. 12: gráfico dos espectros par (Signal(+)) e impar (Signal(−)) para os modos acústicos calculados numericamente da PCF. A escala vertical é linear (em unidades arbitrárias) e modos que contribuíam com menos de 1% do pico mais forte foram removidos por questão de clareza da figura. Os modos que contribuem mais eficientemente no espectro de espalhamento foram identificados (*m* sendo o índice do modo) e figuras do deslocamento acústico para estes modos são mostrados na Figura 5. 13;

Notamos inicialmente que e ambos os espectros, apenas alguns modos espalham eficientemente a luz, em acordo com o observado experimental. O pico dominante no espectro ímpar está em 2.54 GHz enquanto no espectro par notamos picos fortes em 2.07 GHz e 2.15 GHz, em bom acordo com o observado experimentalmente. A Figura 5. 13

ilustra a deformação causada no núcleo pelos modos predominantemente radiais e também predominantemente torsionais da PCF. Cada ponto da seção transversal foi deslocado pelo vetor deslocamento do modo acústico específico; e a amplitude deste deslocamento foi aumentada para melhor visualização.

Outra importante característica da Figura 5. 12 é que, como a estrutura não é perfeitamente simétrica, picos em torno de 2.5 GHz (aquele dominante no espectro par) também estão presentes no espectro impar, ou seja, uma assimetria residual está presentes nos modos predominantemente simétricos.

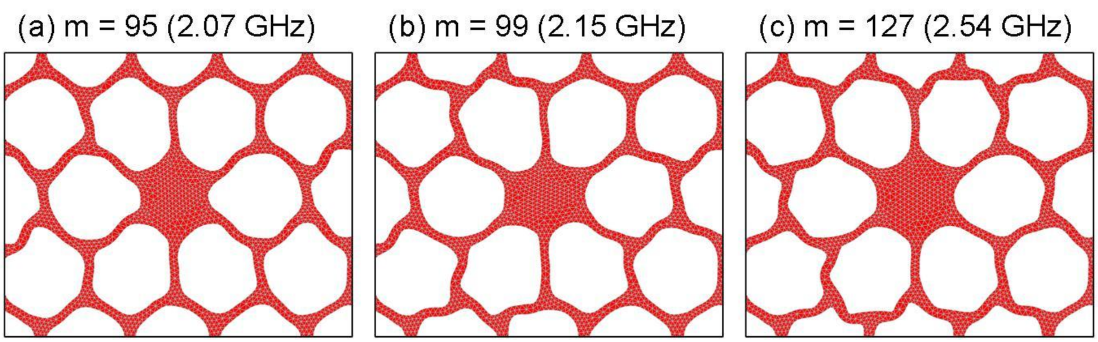


Figura 5. 13: Ilustração da seção transversal da fibra fotônica sob a ação dos modos acústicos identificados na Figura 5. 12 (modos que mais contribuem no espalhamento de luz). Os modos em (a) e (b) tem um caráter torsional, similar os modos TR_{2m} do *rod*. Enquanto o núcleo da PCF é comprimido ao longo de uma direção, ele se expande ao longo da outra causando uma birrefringência. O modo em (c), entretanto, tem um caráter radial, similar aos modos R_{0m} do *rod*, causando uma perturbação isotrópica no núcleo da PCF;

5.8. Bandgap fonônico

Observações experimentais como a resposta impulsiva, a presença de um pequeno número de modos acústico e as altas freqüências destes modos (alguns GHz) indicam que, em analogia com o modelo do *rod*, as ondas acústicas estão fortemente confinadas no núcleo. O fato de a casca estruturada ser formada de vidro e ar faz com que a PCF seja um anti-guia acústico e portanto o confinamento acústico sugere a presença de bandgap fonônico. Para testar esta possibilidade, nós calculamos numericamente o diagrama de bandas para uma estrutura periódica infinita similar à casca da fibra fotônica, como mostra a Figura 5. 14(b) – o núcleo seria um defeito nesta estrutura. Consideramos ondas acústicas propagando-se no plano da estrutura, já que estamos interessados nos modos da PCF exatamente no *cut-off*. O resultado do cálculo numérico está mostrado na Figura 5. 14(a), onde dois g*aps* aparecem claramente, exatamente na região de freqüências que estamos trabalhando, em torno de alguns GHz. Verificamos numericamente que a posição e a largura do *gap* dependem fortemente da espessura das paredes de vidro. Para explorar esta propriedade, calculamos a estrutura de bandas para diversas espessuras e o resultado deste cálculo está mostrado no mapa de *gap* da Figura 5. 15. Para cada diâmetro, encontramos todas as freqüências que podiam propagar-se na estrutura, e a marcamos com um ponto. A região sem pontos mostra a faixa de freqüências em que as ondas acústicas não se propagam na estrutura. As linhas delimitando as regiões brancas, sem pontos, servem apenas um guia para os olhos.

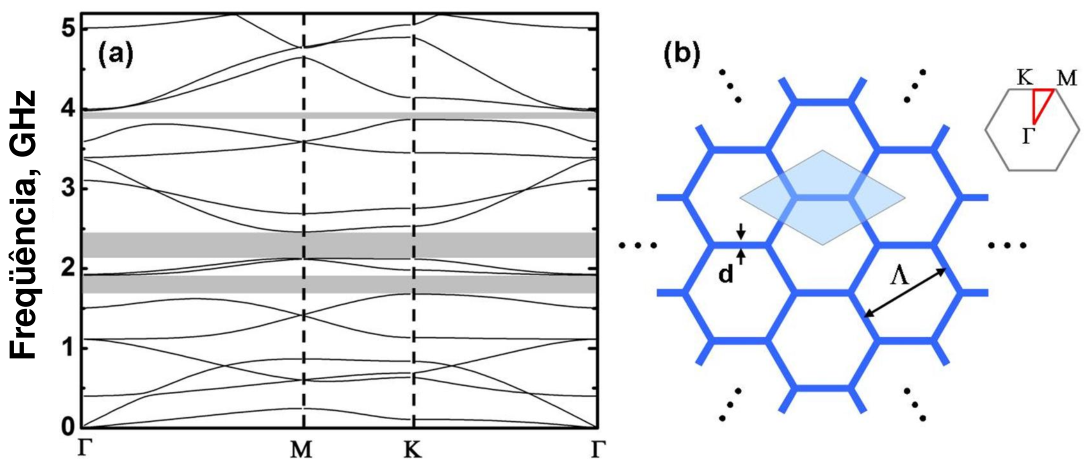


Figura 5. 14: (a) Diagrama de bandas fonônicas para um cristal fonônico formado a partir da célula unitária destacada em (b), cuja espessura d das paredes é $110\ \mathrm{nm}$. Três *gaps* fonônicos aparecem das freqüências 1.8 GHz, 2.38 GHz e 3.93 GHz (regiões em cinza). (b) Estrutura do cristal fonônico usada para calcular o diagrama de bandas para deslocamento acústico no plano em $\beta_{\mathrm{ac}} = 0$;

Estimando a largura da imagem de SEM da PCF obtemos um valor de ~110±15 nm, mas que é difícil de medir precisamente (as regiões de interface entre o vidro e o ar saem borradas na imagem do SEM). Então, do mapa de gaps da Figura 5. 15, vemos que para uma espessura de 120 nm, gaps aparecem em ~1.9 GHz e ~2.5 GHz, em bom acordo com as freqüências observadas na resposta impulsiva. Esta evidência nos indica que o bandgap fonônico pode ser importante para explicar com mais precisão nossos resultados experimentais.

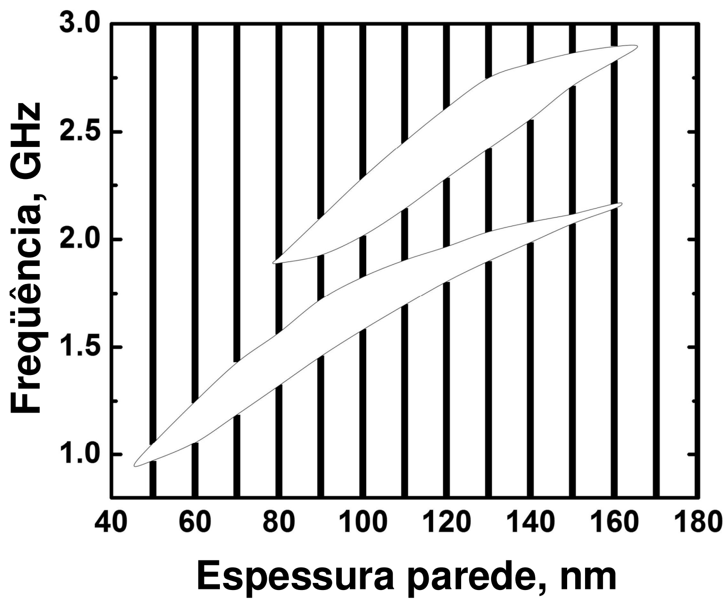


Figura 5. 15: Mapa dos *gaps* fonônicos para diferentes espessuras das paredes de vidro da estrutura mostrada na Figura 5. 14(b). Para cada espessura, as linhas verticais representam as freqüências dos modos que podem se propagar na estrutura. A região sem pontos indica o *gap*. A linha cinza que circunda a região de *gaps* é apenas um guia para os olhos e não representa o resultado exato do cálculo;

Capítulo 6 – Conclusões e Perspectivas

Concluímos esta tese fazendo um apanhado geral dos resultados experimetais, destacando as observações mais relevantes e como estas observações podem ser entendidas através dos modelos teóricos desenvolvidos. Finalmente, apresentamos nossas perspectivas para próximos trabalhos.

A análise das propriedades fundamentais dos processos de espalhamento Brillouin e Raman mostram que o primeiro, Brillouin, é fortemente alterado pelas propriedades do guia de onda. O guia aqui em consideração são as fibras de cristal fotônico. Como demonstramos, estas fibras permitem o confinamento de ambas as ondas, óptica e acústica, numa mesma região de dimensões sub-micrométricas e por comprimentos de interação de centenas de metros. O resultado é que as propriedades da interação acústo-óptica revelaram-se radicalmente diferentes daquelas observadas em fibras convencionais, onde o confinamento acústico ou não existe ou é muito fraco.

Uma das primeiras características do confinamento acústico é o aparecimento de múltiplos picos no espectro de retro-espalhamento Brillouin (veja Figura 3. 7), em contraste com um único pico observado no caso *bulk* (não confinado). Este resultado segue naturalmente da análise teórica de um cilindro de vidro suspenso no vácuo (*rod*). A Figura 4. 23 mostra a discretização dos modos acústicos e o conseqüente *splitting* do espectro Brillouin. A discretização de estados com o confinamento é uma constatação freqüênte em diversas áreas da física, como por exemplo nos estados eletrônicas em física do estado sólido. Entretanto, o núcleo da fibra fotônica não é um cilindro de vidro no vácuo. Este modelo é útil para entendermos qualitativamente o processo, mas um modelo mais complexo é necessário para explicarmos quantitativamente o espectro de retro-espalhamento (Figura 4. 28). Para isso, utilizamos métodos numéricos e calculamos os modos acústicos da fibra fotônica, levando em conta toda a micro-estrutura da casca.

Também em contraste com fibras convencionias, observamos que o limiar de Brillouin aumenta quanto menor é o diâmetro do núcleo da fibra fotônica (Figura 3. 5). Para diâmetros maiores que $8\ \mu\mathrm{m}$, o limiar é praticamente independente do diâmetro e vale aproximadamente $0.8\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}/\mu\mathrm{m}^2$. Conforme o diâmetro da fibra é diminuído, o produto $I_{th}L_{eff}$ (intensidade de limiar *x* comprimento efetivo) aumenta, chegando a um fator 5 vezes maior para uma fibra fotônica de $1.22\ \mu\mathrm{m}$ de diâmetro. Um fator importante na explicação deste efeito é o acoplamento das ondas acústicas longitudinais e transversais na interface *dura* vidro-ar. Usando o modelo do cilindro é possível mostrar que quanto menor o diâmetro, mais forte é a componente transversal dos modos acústico que interagem com a luz (Figura 4. 22). O modelo numérico nos permitiu calcular com precisão a estrutura do modos acústicos da fibra fotônica, mostrando claramente uma forte presença de ondas transversais. O resultado é a formação de nodos no deslocamento acústico dentro do núcleo (Figura 4. 28), de maneira que a perturbação média do índice de refração é diminuída. Também é diminuído o acoplamento com o modo óptico, aumentando portanto o limiar de Brillouin.

Outra observação experimental do confinamento acústico é a medida da resposta implusiva mostrada na Figura 3. 25. Notemos que, ao invés de uma série de *spikes* separados a cada $21\ \mathrm{ns}$ ou $33\ \mathrm{ns}$ (correspondentes respectivamente ao tempo de vôo das ondas longitudinais e transversais do núcleo até a casca, e de volta ao núcleo), a resposta obtida é um sinal *quasi-senoidal*, que representa uma interação contínua entre a onda acústica excitada e o laser de prova. Este resultado mostra claramente que a onda acústica fica de fato confinada no núcleo da PCF e interage com a luz por um longo período de tempo. A medida do espectro de co-espalhamento espontâneo confirma este resultado (Figura 3. 23). São duas as principais diferenças entre as medidas aqui reportadas e as observações feitas em fibras convencionais. A primeira é a quantidade muito pequena de modos acústicos envolvidos no co-espalhamento (em torno de 5 modos contra várias dezenas de modos em fibras convencionais). A segunda é a freqüência bem mais alta (alguns GHz contra dezenas de MHz em fibras convencionais), indicando o forte confinamento transversal dos modos acústicos. Novamente, o modelo do cilindro de vidro no vácuo explica a diminuição dos modos com o confinamento, e também a ordem de grandeza da freqüência de oscilação dos modos (Figura 5.6 e Figura 5.7). Entretanto, novamente utilizamos métodos numéricos para entender me detalhes a estrutura do espectro de co-espalhamento e os modos acústoicos da fibra fotônica envolvidos no processo. A Figura 5. 12 mostra o espectro calculado utilizando os modos numéricos e a Figura 5. 13 mostra as componentes do vetor deslocamento para alguns modos acústicos.

Apesar de as características do processo de espalhamento Brillouin serem analógas entre o cilindro e o observado nas fibras fotônicas, não é óbvio a razão do confinamento das ondas acústicas no núcleo da fibra fotônica, principalmente quando lembramos que a presença de ar na casca nos induz a pensar que a fibra fotônica é um *anti-guia* acústico. Cálculos numéricos indicam que o efeito de *gap* fonônico é uma possível explicação, o *gap* sendo gerado pela micro-estrutura periódica da casca. A Figura 5. 14 mostra a estrutura de banda onde regiões proibidas de propagação existem nas faixas de freqüências observadas experimentalmente. Outra possibilidade de confinamento, parcial neste caso, é aquele em que as ondas acústicas ficam no núcleo devido à *dura* interface acústica vidro-ar, formando forte refletor para o pulso acústico. Neste caso o modo não seria estritamente confinado mas sim um modo *leaky*. A perda por reflexão sendo pequena o suficiente para que a onda acústica se mantenha oscilando no núcleo por um tempo apreciável. Pesquisas futuras são necessárias para clarificar qual mecanismo é dominante e como este mecanismo depende da estrutura da fibra fotônica. Micro-estrutura diferentes podem resultar em diferentes comportamentos das ondas acústicas, alterar também a estrutura de banda e, como conseqüência alteraria também a interação acústo-óptica.

Apêndice I: Teoria de espalhamento espontâneo

O objetivo deste apêndice é apresentar uma descrição detalhada da teoria de espalhamento espontâneo de campos ópticos devido a não-homogeneidades do meio. O termo *espontâneo* refere-se ao espalhamento devido a flutuações estatísticas das propriedades do meio a uma temperatura finita T. Fisicamente, decorrentes do fato de as posições e orientações das moléculas ou átomos que compõem o sólido estarem mudando de momento a momento, estas flutuações podem ser decompostas em termos dos modos normais excitados randomicamente (modos acústicos, vibracionais e rotacionais). Apesar do tratamento aqui desenvolvido ser geral, no sentido de que pode ser aplicado a qualquer processo de espalhamento (Raman, Brillouin ou Rayleigh), estudamos especificamente ao caso do espalhamento Brillouin. Este apêndice está organizado na seguinte forma. Iniciamos calculando o campo eletromagnético emitido por uma fonte de espalhamento, representada por uma perturbação genérica. Depois usamos propriedades estatísticas, também gerais, e o campo ora obtido para calcularmos o espectro da luz espalhada. Finalmente, particularizamos o problema para o caso do espalhamento Brillouin, e exploramos suas propriedades.

Seguimos como referência o capítulo 12 do livro por F. A. Hopf e G. I. Stegeman (Volume I: Linear Optics). Tratamos apenas perturbações que se acoplam com os campos ópticos, de maneira que podemos descrevê-las em termos de uma perturbação na susceptibilidade dielétrica do meio (e depois em termos da polarização induzida). No domínio do tempo escrevemos

$$\chi_{tot} = \chi + \chi_w(\mathbf{r},t), \tag{I.1}$$

onde χ é o tensor de susceptibilidade dielétrico médio usual e $\chi_w(\boldsymbol{r},t)$ descreve a perturbação estatística (usamos o sub-índice w, proveniente do termo *weak* em inglês, para descrever pequenas perturbações). Definimos as Transformadas de Fourier temporal e espacial da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_w(\boldsymbol{k},t) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r\, \chi_w(\boldsymbol{r},t)\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\
\tilde{\chi}_w(\boldsymbol{k},\Omega) &= \frac{1}{2\pi}\int dt\, \tilde{\chi}_w(\boldsymbol{k},t)\, e^{+i\Omega t} \\
\chi_w(\boldsymbol{r},\Omega) &= \frac{1}{2}\int d^3k\, \tilde{\chi}_w(\boldsymbol{k},\Omega)\, e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + cc \\
\chi_w(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2}\int d\Omega\, \tilde{\chi}_w(\boldsymbol{r},\Omega)\, e^{-i\Omega t} + cc.
\end{aligned} \tag{I.2}$$

Usamos o símbolo " ~ " para identificar quantidades no domínio da freqüência. Por exemplo, usando estas definições podemos tomar ambas transformadas de Fourier espacial e temporal da susceptibilidade, e o resultado é:

$$\chi_w(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\int d^3k\, d\Omega\, \tilde{\chi}_w(\boldsymbol{k},\Omega)\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\Omega t)} + cc. \tag{I.3}$$

Vejamos ainda que a definição (I.2) resulta na seguinte relação envolvendo a função Delta de Dirac, a qual usamos adiante,

$$\begin{gathered}
\int d^3r\, e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} = (2\pi)^3\, \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \text{ e} \\
\int d^3k\, \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') = 1.
\end{gathered} \tag{I.4}$$

Campo espalhado

Iniciamos o desenvolvimento da teoria de espalhamento calculando o campo eletromagnético emitido por uma fonte de espalhamento. Uma maneira bastante conhecida de calcular campos de radiação gerados por uma distribuição qualquer de cargas ou correntes é utilizando o potencial vetor $\boldsymbol{A}$, e uma descrição detalhada pode ser encontrada nas seguintes referências [Jackson, e outro livro]. A idéia geral é representar a polarização induzida no meio $\boldsymbol{P}_w$ (que adiante expressaremos explicitamente em termos de χ_w) através de uma corrente elétrica *efetiva* $\boldsymbol{J}_w$. A partir de então, basta aplicar o método do potencial vetor para calcular o campo espalhado ou, mais apropriadamente, o campo de radiação *gerado* por esta corrente efetiva. A Figura I . 1 ilustra o procedimento adotado.

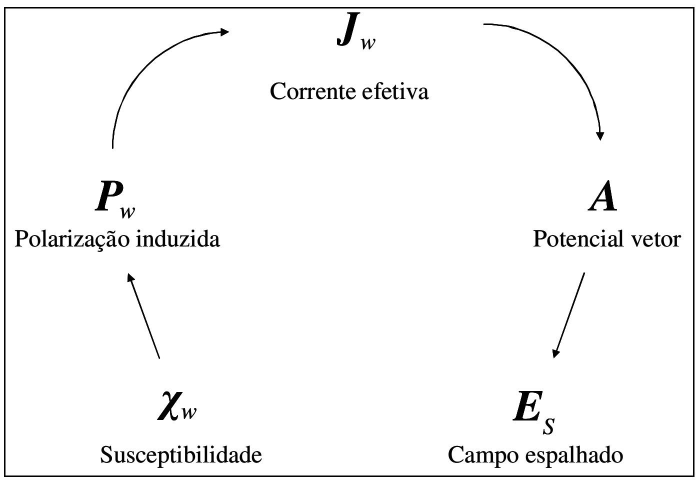


Figura I . 1: esquema ilustrativo do procedimento utilizado para o cálculo do campo espalhado. Caption: A susceptibilidade χ_w causa uma polarização do meio $\boldsymbol{P}_w$ que, por sua vez é representado por uma corrente efetiva $\boldsymbol{J}_w$. A seguir basta aplicarmos o método do potencial vetor.

Vejamos o desenvolvimento em mais detalhes. Formalmente, se não há indução de magnetização no material, as equações de Maxwell são satisfeitas escrevendo a corrente induzida como a derivada temporal da polarização, ou seja,

$$\boldsymbol{J}_w = \frac{\partial \boldsymbol{P}_w}{\partial t}. \tag{I.5}$$

Em termos da polarização expressa no domínio da freqüência, a corrente induzida é

$$\boldsymbol{J}_w(\boldsymbol{r},t) = -\frac{i}{2}\int d^3k \int d\omega\, \omega \tilde{\boldsymbol{P}}_w(\boldsymbol{k},\omega)\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} + cc. \tag{I.6}$$

A solução para o potencial vetor [referência], dada uma fonte de corrente $\boldsymbol{J}_w(\boldsymbol{r},t)$, é

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \int dt' \frac{\boldsymbol{J}_w(\boldsymbol{r}',t')}{R}\delta(t'+R/c-t), \tag{I.7}$$

onde $\boldsymbol{r}$ é o vetor que representa a posição do ponto de observação, $\boldsymbol{r}'$ é um vetor da origem até um ponto dentro do material e, neste ponto, a corrente induzida é $\boldsymbol{J}_w(\boldsymbol{r}',t)$, e $R = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ é a distância entre o ponto de observação e a fonte de corrente. Aqui, c é a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo (se o ponto de observação estiver localizado dentro de algum meio, fazemos a mudança $c \to c/n$, onde n é o índice de refração deste meio). Substituindo a corrente efetiva dada pela equação (I.6) na solução para o potencial vetor (I.7), e fazendo a integração em t', obtemos

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{i\mu_0}{8\pi}\int d^3k \int d\omega \int d^3r'\, \omega\, e^{i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'-\omega(t-R/c)]}\frac{\tilde{\boldsymbol{P}}_w(\boldsymbol{k},\omega)}{R} + cc. \tag{I.8}$$

Fazemos aqui a aproximação de *campo distante* (ou *far-field* em inglês), que consiste no seguinte: no denominador de (I.8) supomos que $R = r$ e, no coeficiente da exponencial escrevemos $R = r - \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'$. Após estas aproximações, podemos facilmente fazer a integral em k, bastando para isso usarmos o resultado de (I.4). Depois de alguma manipulação, o resultado é finalmente

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{i}{2}\frac{(2\pi)^3\mu_0}{4\pi r}\int d\omega\, \omega \tilde{\boldsymbol{P}}_w(k\hat{\boldsymbol{r}},\omega)\, e^{i(kr-\omega t)} + cc. \tag{I.9}$$

onde $k = \omega/c$ (ou $k = n\omega/c$ dentro de um material de índice de refração n). Sabendo portanto a polarização induzida $\tilde{\boldsymbol{P}}_w(k\hat{\boldsymbol{r}},\omega)$, podemos obter o potencial vetor usando (I.9).

Precisamos agora expressar $\tilde{\boldsymbol{P}}_w\left(k\hat{\boldsymbol{r}},\omega\right)$ em termos do campo óptico incidente $\boldsymbol{E}_P$ e da perturbação da suscetibilidade $\chi_w\left(\boldsymbol{r},t\right)$. Assumimos o campo incidente como sendo o de uma onda plana monocromática, escrito da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_P\left(\boldsymbol{r},t\right) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_P e^{i\left(\boldsymbol{k}_P\cdot\boldsymbol{r}-\omega_P t\right)}+c.c. \\
\tilde{\boldsymbol{E}}_P\left(\boldsymbol{k},\omega\right) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_P\left[\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_P\right)\delta\left(\omega-\omega_P\right)+\delta\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_P\right)\delta\left(\omega+\omega_P\right)\right].
\end{aligned}
\tag{I.10}
$$

A polarização $\tilde{\boldsymbol{P}}_w$ é obtida usando uma relação constitutiva entre o campo e a perturbação. No domínio da freqüência,

$$
\tilde{\boldsymbol{P}}_w\left(\boldsymbol{k},\omega\right)=\varepsilon_0\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\tilde{\chi}_w\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}',\omega-\omega'\right)\tilde{\boldsymbol{E}}_P\left(\boldsymbol{k}',\omega'\right)d^3k'\,d\omega'. \tag{I.11}
$$

É fácil mostrar que, usando o campo incidente em (I.10), a polarização fica simplesmente

$$
\tilde{\boldsymbol{P}}_w\left(k\hat{\boldsymbol{r}},\omega\right)=\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\tilde{\chi}_w\left(k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P,\omega-\omega_P\right)+\tilde{\chi}_w\left(k\hat{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{k}_P,\omega+\omega_P\right)\right]\boldsymbol{E}_P. \tag{I.12}
$$

Vemos imediatamente que o resultado em (I.12) contém dois termos. O primeiro acopla campos ópticos de freqüências ω e ω_P com a perturbação na freqüência $\omega-\omega_P$. O segundo termo da polarização acopla campos ópticos com perturbações de alta freqüência (aproximadamente duas vezes a freqüência óptica, ou $\omega+\omega_P$)*. Nosso interesse é o caso de perturbações de freqüências baixas, ou seja, no campo espalhado na freqüência $\omega=\omega_P\pm\Omega$, onde $\Omega = \omega_P$. Assim, apenas o primeiro termo de (I.12) é mantido. Substituindo em (I.9), o potencial vetor fica

---

* O termo em $\omega+\omega_P$ dá lugar a espalhamento estimulado, onde o meio emite dois fótons, um em $(\omega,\boldsymbol{k})$ e outro em $(\omega',\boldsymbol{k}')$. Neste processo o meio perde uma energia $h(\omega+\omega')$. A probabilidade deste processo ocorrer em relação ao processo de baixa freqüência é $e^{-h(\omega+\omega')/kT}/e^{-h(\omega-\omega')/kT}\cong e^{-h2\omega'/kT}$ que, para $\lambda=2\pi c/\omega=1{,}55$ μm e T = 300 K é ~ $1{,}33\times10^{-27}$. Porém, para rádio-freqüências, $\omega/2\pi=1$ MHz, esta probabilidade relativa é ~ 1 e deve ser levada em consideração [Ver: Landau, Electrodynamics of continuous media, capítulo XIV].

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{i}{4}\frac{(2\pi)^3 \mu_0 \varepsilon_0}{4\pi r}\int d\omega\,\omega\, \tilde{\chi}\left(k\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{k}_P, \omega - \omega_P\right)\boldsymbol{E}_P e^{i(kr-\omega t)} + cc. \tag{I.13}$$

Finalmente, o campo elétrico é calculado usando diretamente as equações de Maxwell e a definição do campo magnético em termos do potencial vetor (este procedimento torna a solução independente do calibre escolhido). Vejamos:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{B}_S(\boldsymbol{r},t) = \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \text{ e } \frac{\partial \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \frac{c^2}{n^2}\nabla\times\boldsymbol{B}_S(\boldsymbol{r},t) \\
\Rightarrow -i\omega\tilde{\boldsymbol{E}}_S(\boldsymbol{k},\omega) = -\frac{c^2}{n^2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\times\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{c^2k^2}{n^2}\boldsymbol{O}(\hat{\boldsymbol{k}})\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{k},\omega) \\
\Rightarrow \tilde{\boldsymbol{E}}_S(\boldsymbol{k},\omega) = i\omega\boldsymbol{O}(\hat{\boldsymbol{k}})\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{k},\omega),
\end{gathered} \tag{I.14}$$

onde tensor de projeção $\boldsymbol{O}(\hat{\boldsymbol{e}})$ é definido como

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{O}(\hat{\boldsymbol{e}}) = \boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{e}}\hat{\boldsymbol{e}}, \text{ e} \\
\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{I.15}$$

Note que $\boldsymbol{O}(\hat{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{A}$ é a projeção de $\boldsymbol{A}$ sobre o plano perpendicular a $\hat{\boldsymbol{k}}$. Finalmente, substituindo o resultado do potencial vetor dado em (I.13) no campo em (I.14), chegamos a

$$\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\frac{(2\pi)^3}{4\pi r c^2}\boldsymbol{O}(\hat{\boldsymbol{r}})\int_0^\infty d\omega\,\omega^2\, \tilde{\chi}\left(k\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{k}_P, \omega - \omega_P\right)\boldsymbol{E}_P e^{i(kr-\omega t)} + cc, \tag{I.16}$$

onde trocamos o limite de integração simplesmente notando que o integrando satisfaz a condição $f(\omega) = f^*(-\omega)$.

Espectro da luz espalhada

Tendo calculado na seção anterior o campo espalhado devido a flutuações estatísticas das propriedades do meio, seguimos agora com o formalismo necessário para o cálculo do espectro de freqüências e da intensidade da luz espalhada. Com a origem de $\boldsymbol{\chi}_w(\boldsymbol{r},t)$ é estatística, é útil definirmos a função de correlação como

$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{r},\tau) &= \frac{1}{c\mu_0}\left\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t+\tau)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right\rangle = \\
&= \frac{1}{c\mu_0}\left\langle E_x(\boldsymbol{r},t+\tau)E_x(\boldsymbol{r},t)\right\rangle + \left\langle E_y(\boldsymbol{r},t+\tau)E_y(\boldsymbol{r},t)\right\rangle .
\end{aligned}
\tag{I.17}
$$

O símbolo $\langle\ \rangle$ significa a média temporal e estatística, definida adiante. O espectro de freqüências é a Transformada de Fourier da função de coerência (diretamente do Teorema da Wiener-Khinchin), ou seja,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(\boldsymbol{r},\omega) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, G(\boldsymbol{r},\tau)e^{i\omega\tau} + cc \\
&= \frac{1}{4\pi c\mu_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t+\tau)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right\rangle e^{i\omega\tau} + cc,
\end{aligned}
\tag{I.18}
$$

Da mesma forma que a Transformada inversa resulta em

$$
G(\boldsymbol{r},\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega\tau} + cc = \int_{0}^{+\infty} d\omega\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega\tau} + cc. \tag{I.19}
$$

Flutuações estatísticas

Antes de prosseguirmos com o cálculo explícito do espectro, fazemos um rápido parêntese acerca da média estatística que a aprece na definição da função de correlação, (I.17). Seja $x(t)$ uma variável estocástica no tempo, que representa por exemplo a perturbação da susceptibilidade, $\boldsymbol{\chi}_w(\boldsymbol{r},t)$. Decompomos $x(t)$ em termos dos modos normais do sistema em consideração, tal que, $x(t)=\sum_{\beta} x_\beta(t)$. Consideramos que cada modo é excitado randomicamente e de forma independente, ou seja, não há correlação entre os modos.

Considerando este fato, a função de correlação é escrita em termos dos modos normais como

$$\left\langle x(t+\tau)\,x(t)\right\rangle = \sum_{\beta,\beta'} \left\langle x_\beta(t+\tau)\,x_{\beta'}(t)\right\rangle = \sum_{\beta} \left\langle x_\beta(t+\tau)\,x_\beta(t)\right\rangle, \tag{I.20}$$

onde usamos o fato de que a média estatística entre modos descorrelacionados ser nula. Assumindo que as flutuações seguem um processo estacionário, ou seja, que as propriedades estatísticas da luz espalhada não variam com o tempo, podemos afirmar que a média temporal também é invariante com o tempo. Podemos portanto tomar a média num intervalo de tempo T finito e depois tomar o limite de $T \to \infty$, ou seja,

$$\left\langle x_\beta(t+\tau)\,x_\beta(t)\right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x_\beta(t+\tau)\,x_\beta(t)\,dt. \tag{I.21}$$

Expressamos a equação (I.21) em termos das componentes espectrais de $x_\beta(t)$, ou seja,

$$x_\beta(t) = \int_0^\infty d\omega\, e^{-i\omega t}\, \tilde{x}_\beta(\omega) + cc,$$

onde supomos aqui novamente que $\tilde{x}_\beta(\omega) = \tilde{x}_\beta^*(-\omega)$ e limitamos a integração a freqüências positivas. Assim, o produto duplo da equação (I.21), após desprezarmos termos de alta freqüência, fica como

$$\left\langle x_\beta(t+\tau)\,x_\beta(t)\right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^\infty\int_0^\infty dt\,d\omega\,d\omega'\, e^{-i(\omega-\omega')t} e^{-i\omega\tau}\, \tilde{x}_\beta(\omega)\,\tilde{x}_\beta^*(\omega') + cc. \tag{I.22}$$

Aqui aparece a principal etapa desta dedução, que envolve a média temporal e estatística dos modos. Assumimos que os modos são excitados randomicamente a cada intervalo de tempo τ_β, ou seja, a taxa em que os modos são excitados é $\Lambda_\beta = 1/\tau_\beta$. Dentro de cada intervalo, o modo tem uma amplitude e uma fase definidas, mas diferentes e completamente descorrelacionadas da amplitude e da fase no intervalo anterior. Usamos então o seguinte artefato matemático. Supomos que a componente de Fourier de cada modo é, na verdade, diferente de intervalo a intervalo. A média estatística da função de correlação em (I.22) envolve portanto duas etapas: a primeira é uma média temporal dentro de um único intervalo; e a segunda é uma média estatística sobre todos os intervalos. Vejamos. Dividimos a integral temporal de 0 a T em N subintervalos de duração τ_β (então $N = T/\tau_\beta$), tal que em cada intervalo a componente de Fourier seja $\tilde{x}_{\beta,\alpha}(\omega)$, independente do tempo dentro deste intervalo (o índice α identifica o intervalo de tempo). Assim,

$$\begin{aligned}\left\langle x_\beta(t+\tau)\,x_\beta(t)\right\rangle &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^\infty\int_0^\infty dt\,d\omega\,d\omega'\,e^{-i(\omega-\omega')t}e^{-i\omega\tau}\,\tilde{x}_\beta(\omega)\,\tilde{x}_\beta^*(\omega')+cc \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^\infty\int_0^\infty d\omega\,d\omega'\,e^{-i\omega\tau}\sum_\alpha \tilde{x}_{\beta,\alpha}(\omega)\,\tilde{x}_{\beta,\alpha}^*(\omega')\int_0^{\tau_\beta} e^{-i(\omega-\omega')t}dt\;+cc.\end{aligned} \tag{I.23}$$

Supondo que cada intervalo é grande o suficiente para conter muitas oscilações de uma única freqüência ω, a integral temporal (primeira etapa) dentro do intervalo resulta simplesmente em

$$\int_0^{\tau_\beta} dt\,e^{-i(\omega-\omega')t} = 2\pi\delta(\omega-\omega').$$

Podemos fazer uso da Delta de Dirac para eliminar uma integração em freqüência na equação (I.23), obtendo

$$\left\langle x_\beta(t+\tau)\,x_\beta(t)\right\rangle = \int_0^\infty d\omega\,e^{-i\omega\tau}\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{T}\sum_\alpha\left|\tilde{x}_{\beta,\alpha}(\omega)\right|^2+cc. \tag{I.24}$$

Notemos entretanto que, no limite de $T\to\infty$, a soma em α percorre um número $N = T/\tau_\beta$ muito grande de intervalos. O resultado é exatamente a média estatística do valor quadrático da variável, ou seja,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{T}\sum_{\alpha}\left|\tilde{x}_{\beta,\alpha}(\omega)\right|^2=\frac{2\pi}{T}N\left\langle\left|\tilde{x}_{\beta}(\omega)\right|^2\right\rangle=\frac{2\pi}{T}\frac{T}{\tau_\beta}\left\langle\left|\tilde{x}_{\beta}(\omega)\right|^2\right\rangle=2\pi\Lambda_\beta\left\langle\left|\tilde{x}_{\beta}(\omega)\right|^2\right\rangle.$$

Este procedimento representa, rigorosamente, uma média sobre um *ensamble*, ou seja, uma média sobre um conjunto de amostragens do sinal. Posteriormente, calcularemos $\left\langle\left|\tilde{x}_{\beta}(\omega)\right|^2\right\rangle$ em termos da energia térmica kT de cada modo. Finalmente, temos que (I.24) fica

$$\left\langle x_\beta(t+\tau)\,x_\beta(t)\right\rangle=2\pi\Lambda_\beta\int_0^\infty d\omega\, e^{-i\omega\tau}\left\langle\left|\tilde{x}_{\beta}(\omega)\right|^2\right\rangle+c.c. \tag{I.25}$$

Inserindo o resultado de (I.25) em (I.20) obtemos finalmente

$$\left\langle x(t+\tau)\,x(t)\right\rangle=\sum_\beta 2\pi\Lambda_\beta\int_0^\infty d\omega\, e^{-i\omega\tau}\left\langle\left|\tilde{x}_{\beta}(\omega)\right|^2\right\rangle+cc. \tag{I.26}$$

Usaremos este resultado para calcular explicitamente o espectro de freqüência da luz espalhada. Façamos agora o desenvolvimento específico no caso de nosso interesse. Substituindo o campo espalhado $\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{r},t)$ dado pela equação (I.16) na expressão (I.17) para a função de coerência obtemos

$$G(\boldsymbol{r},\tau)=\frac{1}{c\mu_0}\left\langle\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{r},t+\tau)\cdot\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{r},t)\right\rangle=\frac{1}{4}\frac{(2\pi)^6}{(4\pi r)^2\mu_0c^5}\times$$
$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty d\omega d\omega'\,\omega^2\omega'^2\,e^{-i\omega\tau}e^{-i(\omega-\omega')t}\left\langle\boldsymbol{O}(\hat{\boldsymbol{r}})\,\tilde{\boldsymbol{\chi}}_w(k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P,\omega-\omega_P)\,\boldsymbol{E}_P\cdot\boldsymbol{O}(\hat{\boldsymbol{r}})\,\tilde{\boldsymbol{\chi}}_w^*(k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P,\omega'-\omega_P)\,\boldsymbol{E}_P^*\right\rangle+cc.$$
(I.27)

A média estatística na equação (I.27) envolve apenas a variável estocástica $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_w$. Podemos abrir os produtos tensoriais e deixar explícito a média $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_w$ apenas. É simples mostrar que

$$\begin{aligned}&\left\langle\boldsymbol{O}(\hat{\boldsymbol{r}})\,\tilde{\boldsymbol{\chi}}_w(k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P,\omega-\omega_P)\,\boldsymbol{E}_P\cdot\boldsymbol{O}(\hat{\boldsymbol{r}})\,\tilde{\boldsymbol{\chi}}_w^*(k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P,\omega'-\omega_P)\,\boldsymbol{E}_P^*\right\rangle=\\&\sum_{ijklm}O_{ij}O_{il}\left\langle\tilde{\chi}_{jk}\tilde{\chi}_{lm}^*\right\rangle E_kE_m^*.\end{aligned} \tag{I.28}$$

Deste modo, a integral (I.27) é reescrita num formato mais compacto e, principalmente, explicitando que a média estatística envolve apenas a variável estocástica $\tilde{\chi}_w$:

$$
\begin{aligned}
G(r,\tau) &= \frac{1}{4}\frac{(2\pi)^6}{(4\pi r)^2\mu_0 c^5}\sum_{ijklm} O_{ij}(\hat{\boldsymbol{r}})\,O_{il}(\hat{\boldsymbol{r}})\,\Delta\, E_k E_m^* + cc \\
\Delta &= \int\int d\omega d\omega'\,\omega^2\omega'^2\, e^{-i\omega\tau} e^{-i(\omega-\omega')t}\left\langle \tilde{\chi}_{jk}\left(k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P,\omega-\omega_P\right)\tilde{\chi}_{lm}^*\left(k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P,\omega'-\omega_P\right)\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{I.29}
$$

Tomamos agora as médias seguindo exatamente o mesmo procedimento da seção anterior. Por uma questão de clareza, repetimos o procedimento aqui, mas sem passar novamente pelos detalhes. Expandimos a perturbação em termos dos modos normais de vibração

$$
\tilde{\chi}_w = \sum_{\beta,\alpha}\tilde{\chi}_{\beta,\alpha},
$$

onde o índice β indica a soma sobre todos os modos. O índice α identifica os subintervalos de tempo de duração τ_β, dentro do intervalo geral de 0 a T em que é realizada a média temporal (ver equação (I.23)). Em cada subintervalo, a componente de Fourier $\tilde{\chi}_{\beta,\alpha}$ é independente do tempo e a integração temporal resulta em uma Delta de Dirac, eliminando uma das integrações em freqüência em (I.29). O resultado deste procedimento é facilmente obtido e, em analogia com o resultado da seção anterior dado por (I.26), temos

$$
\Delta = \sum_\beta 2\pi\Lambda_\beta\int_0^\infty d\omega\,\omega^4 e^{-i\omega\tau}\left\langle \tilde{\chi}_{jk}^{\beta}\left(k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P,\omega-\omega_P\right)\tilde{\chi}_{lm}^{\beta,*}\left(k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P,\omega-\omega_P\right)\right\rangle, \tag{I.30}
$$

onde obviamente $\tilde{\chi}_{jk}^{\beta}$ é o elemento da jk do modo $\tilde{\chi}_\beta$. Finalmente, temos que a função de coerência é dada pela equação (I.29) usando Δ dado pelo resultado acima na equação (I.30) Comparando diretamente este resultado com a relação de Fourier entre $\tilde{S}(\boldsymbol{r},\omega)$ e $G(\boldsymbol{r},\tau)$, expressa na equação (I.19), é fácil notarmos que o espectro de freqüências é

$$\tilde{S}(\boldsymbol{r},\omega)=\sum_{\beta}\tilde{S}_{\beta}(\boldsymbol{r},\omega), \text{ onde}$$

$$\tilde{S}_{\beta}(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{1}{4}\frac{(2\pi)^{7}\Lambda_{\beta}\omega^{4}}{(4\pi r)^{2}\mu_{0}c^{5}}\sum_{ijklm}O_{ij}(\hat{\boldsymbol{r}})O_{il}(\hat{\boldsymbol{r}})\left\langle\tilde{\chi}_{jk}^{\beta}\tilde{\chi}_{lm}^{\beta,*}\right\rangle E_{k}E_{m}^{*}, \tag{I.31}$$

$$\text{e } \left\langle\tilde{\chi}_{jk}^{\beta}\tilde{\chi}_{lm}^{\beta,*}\right\rangle=\left\langle\tilde{\chi}_{jk}^{\beta}(k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_{P},\omega-\omega_{P})\tilde{\chi}_{lm}^{\beta,*}(k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_{P},\omega-\omega_{P})\right\rangle.$$

Espalhamento Brillouin

Finalmente estamos no ponto de aplicarmos nosso tratamento ao caso específico do espalhamento Brillouin. A origem da perturbação é a mudança na constante dielétrica (ou na susceptibilidade) devido à presença dos modos acústicos excitados termicamente. Este efeito é conhecido como efeito elasto-óptico. De forma geral, representamos a perturbação através de uma relação constitutiva entre $\boldsymbol{\chi}_{w}$ e o tensor de *strain* (deformação). Aqui, faremos uma representação mais direta (mas completamente equivalente), escrevendo diretamente a relação constitutiva envolvendo o vetor deslocamento do modo acústico, ou seja,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_{w}(\boldsymbol{r},t)&=\sum_{\beta}\boldsymbol{\chi}_{\beta}(\boldsymbol{r},t),\\ \chi_{ij}^{\beta}&=-n^{4}\sum_{kl}p_{ijkl}S_{kl}^{\beta},\end{aligned} \tag{I.32}$$

onde a soma em β percorre todos os modos normais de vibração, $\boldsymbol{p}$ é o tensor elasto-óptico e S é o tensor de *strain*. Aqui, nos restringimos a analisar o caso de meios elásticos e isotrópicos, de modo que fazemos uso das propriedades de simetria do tensor elasto-óptico [36, 38]. É útil primeiramente expressarmos as componentes do *strain* em função do vetor deslocamento

$$S_{kl}^{\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k^{\beta}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l^{\beta}}{\partial x_k}\right),$$

$$\boldsymbol{U}^{\beta} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{U}^{+}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)e^{i\left(\boldsymbol{K}_{\beta}\cdot\boldsymbol{r}-\Omega_{\beta}t+\phi_{\beta}^{+}\right)} + \boldsymbol{U}^{-}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)e^{i\left(\boldsymbol{K}_{\beta}\cdot\boldsymbol{r}+\Omega_{\beta}t+\phi_{\beta}^{-}\right)} + cc\right]e^{-\Gamma_{\beta}t}, \quad \text{(I.33)}$$

$$S_{kl}^{\beta} = \frac{1}{2}\left[S_{kl}^{+}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)e^{i\left(\boldsymbol{K}_{\beta}\cdot\boldsymbol{r}-\Omega_{\beta}t+\phi_{\beta}^{+}\right)} + S_{kl}^{-}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)e^{i\left(\boldsymbol{K}_{\beta}\cdot\boldsymbol{r}+\Omega_{\beta}t+\phi_{\beta}^{-}\right)} + cc\right]e^{-\Gamma_{\beta}t},$$

onde $\boldsymbol{U}_{+}$ e $\boldsymbol{U}_{-}$ são os vetores deslocamento acústico para ondas co- e contra-propagantes. O vetor de onda e a freqüência estão relacionados através da relação de dispersão de cada modo, ou seja, $\left|\boldsymbol{K}_{\beta}\right| = \Omega_{\beta}/V_{\beta}$ com V_{β} sendo a velocidade de fase do modo. Como os modos são excitados termicamente, podemos assumir que as fases $\phi_{\beta}^{+,-}$ são completamente randômicas e descorrelacionadas. Em conseqüência, a média estatística de qualquer produto cruzado entre diferentes modos (co- ou contra-propagantes) pode ser desprezada. Usaremos este fato adiante. Usando o resultado de (I.33) e as propriedades de simetria do tensor elasto-óptico[36, 38], é simples mostrar que χ_{ij}^{β} pode ser escrito em termos do vetor deslocamento como

$$\chi_{ij}^{\beta} = -i\,n^{4}\sum_{kl} p_{ijkl}K_{k}\,\frac{1}{2}\left[U_{l}^{+}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)e^{i\left(\boldsymbol{K}_{\beta}\cdot\boldsymbol{r}-\Omega_{\beta}t+\phi_{\beta}^{+}\right)} + U_{l}^{-}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)e^{i\left(\boldsymbol{K}_{\beta}\cdot\boldsymbol{r}+\Omega_{\beta}t+\phi_{\beta}^{-}\right)} + cc\right]e^{-\Gamma_{\beta}t}, \quad \text{(I.34)}$$

Podemos ainda definir Tomando as transformadas de Fourier temporal e espacial obtemos

$$\tilde{\chi}_{ij}^{\beta}\left(\boldsymbol{K},\Omega\right) = -i\,\frac{n^{4}}{2\pi}\sum_{kl} p_{ijkl}K_{\beta,k}\begin{bmatrix} U_{l}^{+}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)\delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right)\dfrac{1}{\Gamma_{\beta}-i\left(\Omega-\Omega_{\beta}\right)} + \\ U_{l}^{-}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)\delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right)\dfrac{1}{\Gamma_{\beta}-i\left(\Omega+\Omega_{\beta}\right)} \end{bmatrix}, \quad \text{(I.35)}$$

onde omitimos as fases randômicas por simplicidade. É claro neste ponto que as ondas co-propagantes dão origem à linha Stokes de espalhamento (deslocado para freqüências menores) enquanto as ondas contra-propagantes dão origem à linha anti-Stokes (deslocada para freqüências maiores). Para o cálculo do espectro (equação (I.31)), iniciamos calculando a média estatística

$$\left\langle \tilde{\chi}^{\beta}_{jk}\tilde{\chi}^{\beta,*}_{lm}\right\rangle = \frac{n^{8}}{(2\pi)^{2}}\sum_{rsr's'} p_{jkrs}p_{lmr's'}K_{\beta,r}K_{\beta,r'}\delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right)\delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right)$$

$$[\left\langle U^{+}_{s}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)U^{+,*}_{s'}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)\right\rangle \frac{1}{\Gamma^{2}_{\beta}+\left(\Omega-\Omega_{\beta}\right)^{2}} + \left\langle U^{-}_{s}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)U^{-,*}_{s'}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)\right\rangle \frac{1}{\Gamma^{2}_{\beta}+\left(\Omega+\Omega_{\beta}\right)^{2}}]$$

(I.36)

O produto de deltas de Dirac pode ser comprimido em uma única função Delta fazendo o seguinte truque:

$$\delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right)\delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right) = \delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right)\frac{1}{(2\pi)^{3}}\int d^{3}r\, e^{i\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right)\cdot\boldsymbol{r}}.$$

Mas quando $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_{\beta}$ (função Delta de fora da integral), o resultado da integral é simplesmente o volume da amostra V, assim

$$\delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right)\delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right) = \frac{V}{(2\pi)^{3}}\delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right).$$

Assim, a média estatística em (I.36) fica

$$\left\langle \tilde{\chi}^{\beta}_{jk}\tilde{\chi}^{\beta,*}_{lm}\right\rangle = \delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_{\beta}\right)\frac{Vn^{8}}{(2\pi)^{5}}\left[\frac{1}{\Gamma^{2}_{\beta}+\left(\Omega-\Omega_{\beta}\right)^{2}}+\frac{1}{\Gamma^{2}_{\beta}+\left(\Omega+\Omega_{\beta}\right)^{2}}\right] \tag{I.37}$$
$$\sum_{rsr's'} p_{jkrs}p_{lmr's'}K_{\beta,r}K_{\beta,r'}\left\langle U_{s}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)U^{*}_{s'}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)\right\rangle.$$

onde usamos o fato não haver razão nenhuma física para a média estatística envolvendo as onda co-propagantes, $\left\langle U^{+}_{s}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)U^{+,*}_{s'}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)\right\rangle$, ser diferente da média envolvendo as ondas contra-propagantes, $\left\langle U^{-}_{s}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)U^{-,*}_{s'}\left(\boldsymbol{K}_{\beta},\Omega_{\beta}\right)\right\rangle$. Para simplificar a notação, omitimos os índices $+$ ou $-$ no vetor deslocamento da equação (I.37). Notemos que a média estatística de (I.37) é na verdade a média dos elementos do tensor

$$\left\langle \boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{K}_\beta,\Omega_\beta\right)\otimes\boldsymbol{U}^*\left(\boldsymbol{K}_\beta,\Omega_\beta\right)\right\rangle = \left\langle \left|\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{K}_\beta,\Omega_\beta\right)\right|^2\right\rangle \hat{\boldsymbol{u}}_\beta\otimes\hat{\boldsymbol{u}}_\beta{}^*,$$

$$\text{com } \boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{K}_\beta,\Omega_\beta\right) = \left|\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{K}_\beta,\Omega_\beta\right)\right| \hat{\boldsymbol{u}}_\beta\left(\boldsymbol{K}_\beta,\Omega_\beta\right),$$

onde $\hat{\boldsymbol{u}}_\beta = \sum_i u_{\beta,i}\boldsymbol{i}$ é um vetor unitário que representa a direção do vetor deslocamento do modo β, e obviamente não é uma variável estocástica. Como os modos são excitados termicamente, sabemos que cada modo tem energia kT. Usando o fato de que a energia total é duas vezes a energia cinética média, podemos diretamente obter

$$kT = \rho\Omega_\beta^2 \left\langle \left|\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{K}_\beta,\Omega_\beta\right)\right|^2\right\rangle V$$

$$\Rightarrow \left\langle \boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{K}_\beta,\Omega_\beta\right)\otimes\boldsymbol{U}^*\left(\boldsymbol{K}_\beta,\Omega_\beta\right)\right\rangle = \frac{kT}{\rho\Omega_\beta^2 V}\hat{\boldsymbol{u}}_\beta\otimes\hat{\boldsymbol{u}}_\beta,$$

Substituindo este resultado na equação (I.37) obtemos que a média estatística é

$$\left\langle \tilde{\chi}_{jk}^{\beta}\tilde{\chi}_{lm}^{\beta,*}\right\rangle = \delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_\beta\right)\frac{n^8}{(2\pi)^5}\frac{kT}{\rho\Omega_\beta^2}\left[\frac{1}{\Gamma_\beta^2+\left(\Omega-\Omega_\beta\right)^2}+\frac{1}{\Gamma_\beta^2+\left(\Omega+\Omega_\beta\right)^2}\right] \times\sum_{rsr's'} p_{jkrs}p_{lmr's'}K_{\beta,r}K_{\beta,r'}u_{\beta,s}u_{\beta,s'} \qquad \text{(I.38)}$$

Usando a definição do tensor de strain, equação (I.33), podemos simplificar a notação reescrevendo o resultado de (I.38) em função do strain normalizado pela amplitude do deslocamento

$$\left\langle \tilde{\chi}_{jk}^{\beta}\tilde{\chi}_{lm}^{\beta,*}\right\rangle = \delta\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_\beta\right)\frac{n^8}{(2\pi)^5}\frac{kT}{\rho\Omega_\beta^2}\left[\frac{1}{\Gamma_\beta^2+\left(\Omega-\Omega_\beta\right)^2}+\frac{1}{\Gamma_\beta^2+\left(\Omega+\Omega_\beta\right)^2}\right]\sum_{rsr's'} p_{jkrs}p_{lmr's'}\tilde{S}_{rs}^{\beta}\tilde{S}_{r's'}^{\beta},$$

$$\text{com } \tilde{S}_{kl}^{\beta}\left(\boldsymbol{K}_\beta,\Omega_\beta\right) = \frac{1}{2}\left(K_{\beta,l}u_{\beta,k}+K_{\beta,k}u_{\beta,l}\right)$$

(I.39)

Onde novamente, para simplificar a notação, omitimos os índices + ou − no vetor deslocamento. Fazendo $\boldsymbol{K} = k\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{k}_P$ em (I.38) e substituindo na equação (I.31) para o espectro da luz espalhada chegamos em

$$S(\boldsymbol{r},\omega) = \sum_{\beta} \frac{\Gamma_\beta \omega^4}{16 r^2 \mu_0 c^5} \frac{n^8 kT}{\rho \Omega_\beta^2} \left|\boldsymbol{E}_P\right|^2 \delta\left(k\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{k}_P - \boldsymbol{K}_\beta\right) \left|\boldsymbol{e}_\beta\right|^2$$
$$\left[\frac{1}{\Gamma_\beta^2 + \left(\omega - \omega_P - \Omega_\beta\right)^2} + \frac{1}{\Gamma_\beta^2 + \left(\omega - \omega_P + \Omega_\beta\right)^2}\right], \tag{I.40}$$

Onde fizemos $\Lambda_\beta = \Gamma_\beta$, ou seja, supomos que a taxa com que os modos são excitados termicamente é igual à taxa com que são absorvidos, sugerindo um regime estacionário para a população de fônons. Ainda

$$\boldsymbol{e}_\beta = \sum_{ijklm} O_{ij}\left(k\hat{\boldsymbol{r}}\right) p_{jkrs} S_{rs}^{\beta} E_k \hat{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{O}\left(k\hat{\boldsymbol{r}}\right) \boldsymbol{p}\, \boldsymbol{\mathcal{S}}\left(\boldsymbol{K}_\beta, \Omega_\beta\right) \frac{\boldsymbol{E}_P}{\left|\boldsymbol{E}_P\right|}. \tag{I.41}$$

Nos resta agora realizarmos a soma sobre todos os modos. Para isso, supomos que os modos satisfazem condições de contorno periódicas, ou seja, que cada componente do vetor de onda acústico satisfaz

$$K_i = n_i \frac{2\pi}{L_i}, \text{ para } i = x, y \text{ ou } z$$

onde as dimensões de comprimento L_i são as dimensões do volume da amostra (supomos por simplicidade uma caixa retangular, mas veremos que o resultado é independente da escolha, já que estamos tratando de dimensões muito maiores que o comprimento de onda). Deste modo, o volume no espaço no espaço recíproco é

$$\Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z = \frac{(2\pi)^3}{V}.$$

A soma sobre os modos é equivalente a uma integral no espaço recíproco onde a densidade de modos é simplesmente $V/(2\pi)^3$. Supondo que o volume da amostra é grande o suficiente para aproximarmos a sobre discreta sobre uma integral contínua no espaço recíproco, ou seja,

$$\sum_{\beta} \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3K.$$

Obviamente, a função Delta de Dirac da equação (I.40) elimina esta integral e o resultado é

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{r},\omega) &= \frac{\Gamma_B\omega^4}{16r^2\mu_0 c^5}\frac{n^8kT}{\rho\Omega_B^2}\frac{V}{(2\pi)^3}\left|\boldsymbol{E}_P\right|^2\left|\boldsymbol{e}_B\right|^2 \\ &\times\left[\frac{1}{\Gamma_B^2+(\omega-\omega_P-\Omega_B)^2}+\frac{1}{\Gamma_B^2+(\omega-\omega_P+\Omega_B)^2}\right], \end{aligned} \tag{I.42}$$

onde a frequencia de *phase-matching* é simplesmente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_B &= k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P \\ \Omega_B &= \Omega\left(\boldsymbol{K}_B = k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P\right), \\ \hat{\boldsymbol{u}}_B &= \hat{\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{K}_B = k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P,\Omega_B\right),\ \text{e} \\ \boldsymbol{e}_B &= \boldsymbol{O}\left(k\hat{\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{S}\%\left(\boldsymbol{K}_B = k\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{k}_P,\Omega_B\right)\frac{\boldsymbol{E}_P}{\left|\boldsymbol{E}_P\right|}. \end{aligned} \tag{I.43}$$

Vejamos um exemplo específico. Suponhamos a configuração ilustrada na Figura I. 1, na qual o laser incidente propaga-se na direção positiva de $\boldsymbol{k}_P = k_P\hat{\boldsymbol{z}}$ e tem intensidade incidente (fora do material, no vácuo)

$$I = \frac{c\varepsilon_0 E_P^2}{2}.$$

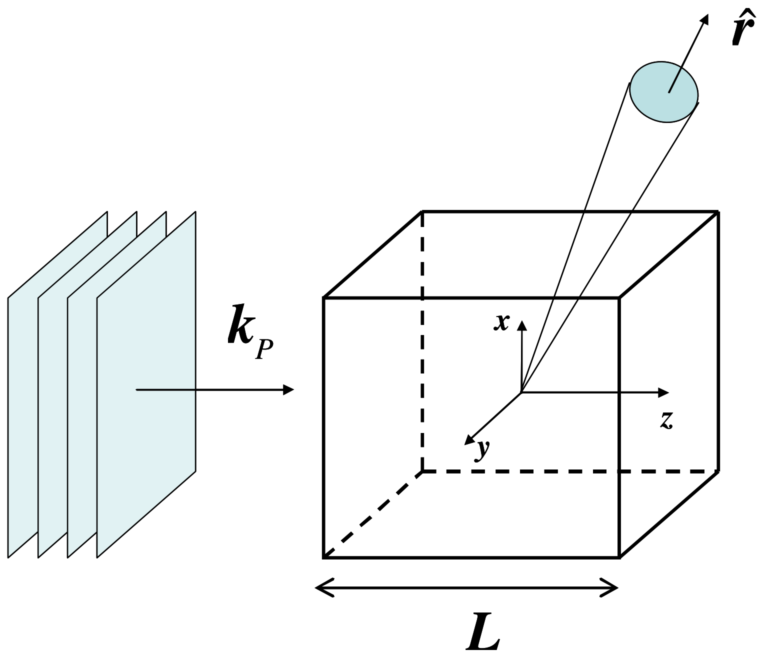


Figura I. 1: configuração utilizada para o cálculo do espalhamento Brillouin. Um laser incide na direção $\boldsymbol{k}_P$ em uma amostra cúbica de lado L. A direção de observação da luz espalhada é $\hat{\boldsymbol{r}}$.

A amostra consideramos novamente como sendo um cubo de lado L. O eixo de coordenadas está localizado no centro da amostra. Devemos agora escolher a direção de observação, que tomamos como exemplo a direção $-\hat{z}$, ou seja, queremos saber o espectro da luz retro-espalhada. Supomos ainda que o detector está localizado exatamente na superfície da amostra (em $z = -L/2$) e para simplificar, supomos que área do detector é igual à área da face da amostra L^2. As condições de phase-matching e conservação de energia expressas em (I.43) resultam simplesmente em

$$\boldsymbol{K}_B = k\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{k}_P = -\left(k + k_P\right)\hat{z} \cong -2k_P\hat{z} = -\frac{4\pi n}{\lambda_P}\hat{z},$$

$$\Omega_B = \Omega\left(k\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{k}_P\right) = K_B V = \frac{4\pi n V_{ac}}{\lambda_P},$$

onde V_{ac} é a velocidade da onda acústica envolvida. Calculemos agora o vetor $\boldsymbol{e}_B$. Aqui temos que considerar ainda todas as polarizações dos modos acústicos, isto é, temos que considerar a onda longitudinal e as duas transversais ortogonais. Temos

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{u}}_L\left(\boldsymbol{K}_B = k\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{k}_P, \Omega_B\right) &= \hat{\boldsymbol{z}} \\ \hat{\boldsymbol{u}}_{Tx}\left(\boldsymbol{K}_B = k\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{k}_P, \Omega_B\right) &= \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{u}}_{Ty}\left(\boldsymbol{K}_B = k\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{k}_P, \Omega_B\right) &= \hat{\boldsymbol{y}} \end{aligned} \tag{I.44}$$

O *strain* é então calculado diretamente usando (I.39) :

$$\tilde{\boldsymbol{S}}_L = K_B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{\boldsymbol{S}}_{Tx} = K_B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{\boldsymbol{S}}_{Ty} = K_B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.45}$$

Usando propriedades de simetria, é simples mostrarmos que em um meio isotrópico o tensor elasto-óptico tem a seguinte forma:

$$\boldsymbol{p}\,\tilde{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \\ S_{xy} \end{pmatrix},$$

onde p_{11}, p_{12} e $p_{44} = \dfrac{p_{11} - p_{12}}{2}$ são os elementos do tensor elasto-óptico. Usando (I.45) chegamos em

$$\boldsymbol{p}\,\tilde{\boldsymbol{S}}_L = K_B \begin{pmatrix} p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12} & 0 \\ 0 & 0 & p_{11} \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}\,\tilde{\boldsymbol{S}}_{Tx} = K_B \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{44} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{44} & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{p}\,\tilde{\boldsymbol{S}}_{Ty} = K_B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{44} \\ 0 & p_{44} & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.46}$$

Supondo agora que o laser incidente está polarizado na direção $\boldsymbol{E}_P = \left|\boldsymbol{E}_P\right| \hat{\boldsymbol{x}}$, chegamos em

$$\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{S}}_L \frac{\boldsymbol{E}_P}{|\boldsymbol{E}_P|} = K_B p_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{S}}_{Tx} \frac{\boldsymbol{E}_P}{|\boldsymbol{E}_P|} = K_B p_{44} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{S}}_{Ty} \frac{\boldsymbol{E}_P}{|\boldsymbol{E}_P|} = 0 \tag{I.47}$$

O tensor projeção é, lembrando a definição (I.15),

$$\boldsymbol{O}(\hat{z}) = \boldsymbol{I} - \hat{z}\hat{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.48}$$

Finalmente temos que

$$\boldsymbol{e}_{B,L} = K_B p_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_{B,Tx} = 0 \text{ e } \boldsymbol{e}_{B,Ty} = 0. \tag{I.49}$$

Podemos concluir que em um meio *bulk*, apenas as ondas longitudinais contribuem para o retroespalhamento Brillouin. Podemos inserir o resultado (I.49) na expressão do espectro, equação (I.42), chegando em

$$\frac{S(\omega)}{I} = \frac{2\pi^2 p_{12}^2 n^8 kT}{\lambda^4 \rho V_L^2} L \left[\frac{\Gamma_B/2\pi}{\Gamma_B^2 + (\omega - \omega_P - \Omega_B)^2} + \frac{\Gamma_B/2\pi}{\Gamma_B^2 + (\omega - \omega_P + \Omega_B)^2} \right], \tag{I.50}$$

onde fizemos $r = -L/2$ e $V = L^3$. Podemos integrar o resultado (I.50) em todo o espectro obtendo a potência total retro-espalhada. Dividindo o resultado por 2, obtemos a potência em cada pico Stokes e anti-Stokes e o resultado é

$$\frac{S}{I} = \frac{\pi^2 p_{12}^2 n^8 kT}{\lambda^4 \rho V_L^2} L. \tag{I.51}$$

Usando valores típicos obtemos

$$\frac{S}{IL} = 1,2 \cdot 10^{-7} m^{-1}.$$

Para uma amostra com $L = 1\text{cm}$ a intensidade espalhada é apenas $1,2 \cdot 10^{-9}$ da intensidade incidente, ou seja, 90 dB abaixo. Para 1 W de potência incidente, apenas 1 nW é retro-espalhado. Já para uma fibra óptica de 1 km de comprimento, a potência total espalhada está 40 dB abaixo da potência incidente.

Apêndice II: Tabela de constantes

A tabela a seguir contém todas as constantes básicas utilizadas nesta tese. Seguindo a notação quase universal da Teoria da Elasticidade, usamos o símbolo λ para designar a constante de Lamè. Este mesmo símbolo também é utilzado para designar com comprimento de onda óptico. Entretanto, isto não deve gerar ambigüidade, pois é claro no contexto quando o símbolo representa uma ou outra quantidade. As constantes relativas às propriedades do material referem-se sempre à sílica pura, à temperatura ambiente $T = 300\ \mathrm{K}$. O índice de refração da tabela é para comprimento de onda $\lambda = 1{,}55\times10^{-6}\ \mathrm{m}$. Os valores de constantes fundamentais foram obtidas a partir da base de dados do NIST – National Institute of Standards and Technology.

Constante	**Símbolo**	**Valor**	**Unidade**	**Referência**
Velocidade da luz no vácuo	c	$2{,}99792$	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	NIST
Permeabilidade magnética do vácuo	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$	$\mathrm{N\ A^{-2}}$	NIST
Constante dielétrica do vácuo	ε_0	$8{,}854\times10^{-12}$	$\mathrm{F\ m^{-1}}$	NIST
Constante de Planck	$\hbar = h/2\pi$	$1{,}055\times10^{-34}$	$\mathrm{J\ s}$	NIST
Constante de Boltzman	k	$1{,}381\times10^{-23}$	$\mathrm{J\ K^{-1}}$	NIST
Comprimento de onda no vácuo	λ	$1{,}55\times10^{-6}$	m	
Índice de refração da sílica pura	n	$1{,}444$		

Densidade da sílica pura	ρ	$2,2\times10^{3}$	$\mathrm{kg\ m^{-3}}$	NIST
Velocidade longitudinal	c_L	$5,9707\times10^{3}$	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	NIST
Velocidade transversal	c_T	$3,7648\times10^{3}$	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	NIST
Coeficientes de viscosidade	η_{11}	$2,8\times10^{-3}$	$\mathrm{Kg\ m^{-1}s^{-5}}$	[40]
	η_{44}	$1,1\times10^{-3}$	$\mathrm{Kg\ m^{-1}s^{-5}}$	[40]
Constantes de Lamè	λ	$47,2\times10^{9}$	$\mathrm{Pa\ m^{-1}}$	
	μ	$15,6\times10^{9}$	$\mathrm{Pa\ m^{-1}}$	
Coeficiente elastoóptico	p_{11}	$0,121$		[39]
	p_{12}	$0,270$		[39]
	$p_{44}=\dfrac{p_{11}-p_{12}}{2}$	$-0,0745$		[39]

Referências

1. Brillouin, L., Ann. Physique, 1922. **17**: p. 88.
2. Debye, P. and F.W. Sears, *On the Scattering of Light by Supersonic Waves.* Proceeding of the National Academic Sciences of the United States of America, 1932. **18**(6): p. 409-414.
3. Boyd, R.W., *Nonlinear Optics*. 1992, San Diego, CA: Academic Press.
4. Agrawal, G.P., *Nonlinear Fiber Optics*. 3 ed. 2001, San Diego, CA: Academic Press.
5. Birks, T.A., P.S.J. Russell, and D.O. Culverhouse, *The acousto-optic effect in single-mode fiber tapers and couplers.* Journal of Lightwave Technology, 1996. **14**(11): p. 2519-2529.
6. Dimmick, T.E., et al., *Compact all-fiber acoustooptic tunable filters with small bandwidth-length product.* Ieee Photonics Technology Letters, 2000. **12**(9): p. 1210-1212.
7. Culverhouse, D.O., et al., *Low-loss all-fiber acousto-optic tunable filter.* Optics Letters, 1997. **22**(2): p. 96-98.
8. Farwell, S.G., et al., *Low-loss all-fibre amplitude modulator at 1.55 mu m.* Electronics Letters, 1996. **32**(6): p. 577-578.

9. Birks, T.A., P.S.J. Russell, and C.N. Pannell, *Low-Power Acoustooptic Device Based on a Tapered Single-Mode Fiber.* Ieee Photonics Technology Letters, 1994. **6**(6): p. 725-727.

10. Culverhouse, D.O., et al., *40-MHz all-fiber acoustooptic frequency shifter.* Ieee Photonics Technology Letters, 1996. **8**(12): p. 1636-1637.

11. Depaula, R.P., et al., *Single-Mode Fiber Ultrasonic Sensor.* Ieee Journal of Quantum Electronics, 1982. **18**(4): p. 680-683.

12. Depaula, R.P., J.H. Cole, and J.A. Bucaro, *Ultrasonic Sensing from 100 Khz to 50 Mhz Using Single-Mode Optical Fiber.* Proceedings of the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 1983. **412**: p. 130-134.

13. Hansryd, J., et al., *Fiber-based optical parametric amplifiers and their applications.* Ieee Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 2002. **8**(3): p. 506-520.

14. Hansryd, J. and P.A. Andrekson, *Broad-band continuous-wave-pumped fiber optical parametric amplifier with 49-dB gain and wavelength-conversion efficiency.* Ieee Photonics Technology Letters, 2001. **13**(3): p. 194-196.

15. Boggio, J.M.C., J.D. Marconi, and H.L. Fragnito, *Double-pumped fiber optical parametric amplifier with flat gain over 47-nm bandwidth using a conventional dispersion-shifted fiber.* IEEE Photonics Technology Letters, 2005. **17**(9): p. 1842-1844.

16. Marconi, J.D., et al., *Double-pumped parametric amplifier with strained fibre to suppress SBS.* Electronics Letters, 2004. **40**(24): p. 1522-1523.

17. Kobyakov, A., et al., *Design concept for optical fibers with enhanced SBS threshold.* Optics Express, 2005. **13**(14): p. 5338-5346.

18. Hansryd, J., et al., *Increase of the SBS threshold in a short highly nonlinear fiber by applying a temperature distribution.* Journal of Lightwave Technology, 2001. **19**(11): p. 1691-1697.

19. Blakemore, J.P., *Solid State Physics*. Second Edition ed. 1985, Cambridge: Cambridge University Press.

20. Shelby, R.M., M.D. Levenson, and P.W. Bayer, *Guided Acoustic-Wave Brillouin-Scattering.* Physical Review B, 1985. **31**(8): p. 5244-5252.

21. Ippen, E.P. and R.H. Stolen, *Stimulated Brillouin-Scattering in Optical Fibers.* Applied Physics Letters, 1972. **21**(11): p. 539-&.

22. Gorishnyy, T., et al., *Hypersonic phononic crystals.* Physical Review Letters, 2005. **94**(11): p. -.

23. Russell, P.S., et al., *Sonic band gaps in PCF preforms: enhancing the interaction of sound and light.* Optics Express, 2003. **11**(20): p. 2555-2560.

24. Trigo, M., et al., *Confinement of acoustical vibrations in a semiconductor planar phonon cavity.* Physical Review Letters, 2002. **89**(22): p. -.

25. Diez, A., et al., *Acoustic stop-bands in periodically microtapered optical fibers.* Applied Physics Letters, 2000. **76**(23): p. 3481-3483.

26. Birks, T.A., J.C. Knight, and P.S. Russell, *Endlessly single-mode photonic crystal fiber.* Optics Letters, 1997. **22**(13): p. 961-963.

27. Knight, J.C., et al., *Anomalous dispersion in photonic crystal fiber.* Ieee Photonics Technology Letters, 2000. **12**(7): p. 807-809.

28. Knight, J.C., et al., *All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding.* Optics Letters, 1996. **21**(19): p. 1547-1549.

29. Russell, P., *Photonic crystal fibers.* Science, 2003. **299**(5605): p. 358-362.

30. Diez, A., et al., *1-D acoustic cavity in optical fibers using two acoustic Bragg gratings.* Ieee Photonics Technology Letters, 2001. **13**(9): p. 975-977.

31. Laude, V., et al., *Phononic band-gap guidance of acoustic modes in photonic crystal fibers.* Physical Review B, 2005. **71**(4): p. -.

32. Reed, E.J., M. Soljacic, and J.D. Joannopoulos, *Color of shock waves in photonic crystals.* Physical Review Letters, 2003. **90**(20): p. -.

33. Reed, E.J., M. Soljacic, and J.D. Joannopoulos, *Reversed Doppler effect in photonic crystals.* Physical Review Letters, 2003. **91**(13): p. -.

34. Dainese, P., et al., *Stimulated Brillouin scattering from multi-GHz-guided acoustic phonons in nanostructured photonic crystal fibres.* Nature Physics, 2006. **2**(6): p. 388-392.

35. Dainese, P., et al., *Raman-like light scattering from acoustic phonons in photonic crystal fiber.* Optics Express, 2006. **14**(9): p. 4141-4150.

36. Auld, B.A., *Acoustic fields and waves in solids*. 2 ed. Vol. I e II. 1990, Malabar, Flórida: krieger Publishing Company.

37. Miklowitz, J., *Elastic Waves and Waveguides*. 1978, Amsterdam: North-Holland.

38. Nye, J.F., *Physical Properties of Crystals*. 1985: Oxford University Press.

39. Yariv, A. and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*. 1984, New York: John Wiley & Sons.

40. Krischer, C., *Optical Measurements of Ultrasonic Attenuation and Reflection Losses in Fused Silica.* Journal of the Acoustical Society of America, 1970. **48**(5): p. 1086-&.

41. Shen, Y.R., *The Principles of Nonlinear Optics*. 1984: Wiley Intescience.

42. Stegeman, G.I., *Applied Classical Electrodynamics*. Vol. Volume I: Linear Optics. 1985, New York: John Wiley & Sons, Inc.

43. Shibata, N., et al., *Identification of Longitudinal Acoustic Modes Guided in the Core Region of a Single-Mode Optical Fiber by Brillouin Gain Spectra Measurements.* Optics Letters, 1988. **13**(7): p. 595-597.

44. Shibata, N., K. Okamoto, and Y. Azuma, *Longitudinal Acoustic Modes and Brillouin-Gain Spectra for Geo2-Doped-Core Single-Mode Fibers.* Journal of the Optical Society of America B-Optical Physics, 1989. **6**(6): p. 1167-1174.

45. Shibata, N., R.G. Waarts, and R.P. Braun, *Brillouin-Gain Spectra for Single-Mode Fibers Having Pure-Silica, Geo2-Doped, and P2O5-Doped Cores.* Optics Letters, 1987. **12**(4): p. 269-271.

46. Yeniay, A., J.M. Delavaux, and J. Toulouse, *Spontaneous and stimulated Brillouin scattering gain spectra in optical fibers.* Journal of Lightwave Technology, 2002. **20**(8): p. 1425-1432.

47. Juretschke, H.J., *Simple Derivation of Maxwell Stress Tensor and Electrostrictive Effects in Crystals.* American Journal of Physics, 1977. **45**(3): p. 277-280.

48. Kloos, G., *On photoelasticity and the quadratic electrostrictive effect.* Journal of Physics D-Applied Physics, 1997. **30**(10): p. 1536-1539.

49. Maradudi.Aa and E. Burstein, *Relation between Photoelasticity Electrostriction and First-Order Raman Effect in Crystals of Diamond Structure.* Physical Review, 1967. **164**(3): p. 1081-&.

50. Smith, R.G., *Optical Power Handling Capacity of Low Loss Optical Fibers as Determined by Stimulated Raman and Brillouin-Scattering.* Applied Optics, 1972. **11**(11): p. 2489-&.

51. Mortensen, N.A., *Effective area of photonic crystal fibers.* Optics Express, 2002. **10**(7): p. 341-348.

52. Jacob, X., et al., *Experimental study of the acoustic radiation strain in solids.* Applied Physics Letters, 2006. **88**(13): p. -.

53. Stolen, R.H., *Polarization Effects in Fiber Raman and Brillouin Lasers.* Ieee Journal of Quantum Electronics, 1979. **15**(10): p. 1157-1160.

54. Vandeventer, M.O. and A.J. Boot, *Polarization Properties of Stimulated Brillouin-Scattering in Single-Mode Fibers.* Journal of Lightwave Technology, 1994. **12**(4): p. 585-590.

55. Shelby, R.M., M.D. Levenson, and P.W. Bayer, *Resolved Forward Brillouin-Scattering in Optical Fibers.* Physical Review Letters, 1985. **54**(9): p. 939-942.

56. Audouin, O., et al., *Introduction of electrostriction-induced acoustic interaction in modeling of high-capacity long-haul transmission systems.* Ieee Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 2000. **6**(2): p. 297-307.

57. Buckland, E.L. and R.W. Boyd, *Electrostrictive contribution to the intensity-dependent refractive index of optical fibers.* Optics Letters, 1996. **21**(15): p. 1117-1119.

58. Buckland, E.L. and R.W. Boyd, *Measurement of the frequency response of the electrostrictive nonlinearity in optical fibers.* Optics Letters, 1997. **22**(10): p. 676-678.

59. Dianov, E.M., et al., *Long-Range Interaction of Picosecond Solitons through Excitation of Acoustic-Waves in Optical Fibers.* Applied Physics B-Photophysics and Laser Chemistry, 1992. **54**(2): p. 175-180.

60. Dianov, E.M., et al., *Electrostriction Mechanism of Soliton Interaction in Optical Fibers.* Optics Letters, 1990. **15**(6): p. 314-316.

61. Dianov, E.M., M.E. Sukharev, and A.S. Biriukov, *Electrostrictive response in single-mode ring-index profile fibers (vol 25, pg 390, 2000).* Optics Letters, 2000. **25**(13): p. 987-987.

62. du Mouza, L., Y. Jaouen, and C. Chabran, *Transverse Brillouin effect characterization in optical fibers and its geometrical aspects.* Ieee Photonics Technology Letters, 1998. **10**(10): p. 1455-1457.

63. LeQuang, D., et al., *Time-resolved measurement of dynamic frequency chirp due to electrostriction mechanism in optical fibers.* Ieee Photonics Technology Letters, 1996. **8**(3): p. 414-416.

64. Pilipetskii, A.N. and C.R. Menyuk, *Suppression of the acoustic effect in soliton information transmission by line coding.* Optics Letters, 1997. **22**(1): p. 28-30.

65. Smith, K. and L.F. Mollenauer, *Experimental-Observation of Soliton Interaction over Long Fiber Paths - Discovery of a Long-Range Interaction.* Optics Letters, 1989. **14**(22): p. 1284-1286.

66. Waldron, R.A., *Some Problems in Theory of Guided Microsonic Waves.* Ieee Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1969. **Mt17**(11): p. 893-&.

67. Thurston, R.N., *Elastic-Waves in Rods and Clad Rods.* Journal of the Acoustical Society of America, 1978. **64**(1): p. 1-37.

68. Marcuse, D., *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. 1972, New York: Academic.

69. Marcuse, D., *Derivation of Coupled Power Equations.* Bell System Technical Journal, 1972. **51**(1): p. 229-+.

70. Marcuse, D., *Coupled-Mode Theory for Anisotropic Optical-Waveguides.* Bell System Technical Journal, 1975. **54**(6): p. 985-995.

71. Aalami, B., *Waves in Prismatic Guides of Arbitrary Cross-Section.* Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme, 1973. **40**(4): p. 1067-1077.

72. Dianov, E.M., M.E. Sukharev, and A.S. Biriukov, *Electrostrictive response in single-mode ring-index-profile fibers.* Optics Letters, 2000. **25**(6): p. 390-392.

73. Bigelow, M.S., N.N. Lepeshkin, and R.W. Boyd, *Ultra-slow and superluminal light propagation in solids at room temperature.* Journal of Physics-Condensed Matter, 2004. **16**(46): p. R1321-R1340.

74. Boyd, R.W. and D.J. Gauthier, *"Slow" and "fast" light.* Progress in Optics, Volume 43, 2002. **43**: p. 497-530.

75. Boyd, R.W., et al., *Maximum time delay achievable on propagation through a slow-light medium.* Physical Review A, 2005. **71**(2): p. -.

76. Gauthier, D.J., A.L. Gaeta, and R.W. Boyd, *Slow light: From basics to future prospects.* Photonics Spectra, 2006. **40**(3): p. 44-+.

77. Matsko, A.B., et al., *Anomalous stimulated Brillouin scattering via ultraslow light.* Physical Review Letters, 2001. **86**(10): p. 2006-2009.

78. Okawachi, Y., et al., *Tunable all-optical delays via Brillouin slow light in an optical fiber.* Physical Review Letters, 2005. **94**(15): p. -.

79. Tsubokawa, M., et al., *Suppression of Stimulated Brillouin-Scattering in a Single-Mode Fiber by an Acoustooptic Modulator.* Electronics Letters, 1986. **22**(9): p. 473-475.

80. Peral, E. and A. Yariv, *Degradation of modulation and noise characteristics of semiconductor lasers after propagation in optical fiber due to a phase shift induced*

by stimulated Brillouin scattering. Ieee Journal of Quantum Electronics, 1999. **35**(8): p. 1185-1195.

Publicações geradas

Esta tese resultou em duas publicações em revistas internacionais e duas publicações em conferências internacionais, listadas abaixo. Os artigos publicados em revistas estão anexados no final desta tese.

Artigos em revistas

- P. Dainese, P. St.J. Russell, N. Joly, J. C. Knight, G.S. Wiederhecker, H.L. Fragnito, V. Laude & A. Khelif, "*Stimulated Brillouin scattering from multi-GHz-guided acoustic phonons in nanostructured photonic crystal fibres*", Nature Physics, 2006. **2**(6): p. 388-392;
- P. Dainese, P. St.J. Russell, G. S. Wiederhecker, N. Joly, H. L. Fragnito, V. Laude and A. Khelif , *Raman-like light scattering from acoustic phonons in photonic crystal fiber*. Optics Express, 2006. **14**(9): p. 4141-4150.

Artigos em congressos

- P. Dainese, P. St.J. Russell, G.S. Wiederhecker, N. Joly, and H.L. Fragnito, "*Raman-Like Scattering from Acoustic Phonons in Photonic Crystal Fibre*", accepted for oral presentation at the 2006 Conference on Lasers and Eletro Optics (USA, 2006).

- P. Dainese, N. Joly, E.J.H. Davies, J.C. Knight, P.St.J. Russell, and H.L. Fragnito, "*Stimulated Brillouin Scattering in small-core PCF*," accepted for oral presentation at the 2004 Conference on Lasers and Eletro Optics (USA, 2004).