

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA
BIBLIOTECA

EFEITO TOROIDAL SOBRE A ESTABILIDADE DE
PLASMA CONFINADO POR UM CAMPO MAGNÉTICO.

POR

HISATAKI SHIGUEOKA

Orientador: Prof. Paulo Hiroshi Sakanaka.

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Setembro/1977.

a meus país

ÍNDICE

página

Agradecimentos	1
Resumo	2
1. Introdução	3
2. Equação de Euler - Lagrange para o estudo da estabilidade magnetohidrodinâmica ideal.	6
2.1 Equação de Euler - Lagrange para um plasma cilíndrico.	6
2.2 Equação de Euler - Lagrange para um plasma toroidal com seção circular.	14
3. Métodos numéricos.	23
4. Estabilidade magnetohidrodinâmica de pinch linear difuso.	27
4.1 Classificação.	27
4.2 Instabilidade kink : modos $m = 1$.	40
5. Estabilidade de plasma toroidal.	45
5.1 Estabilidade de tokamak de baixo - β .	45
5.2 Critério de comparação.	49
5.3 Variação de estabilidade com a razão de aspecto com n fixo.	53
5.4 Variação de estabilidade com a razão de aspecto com k fixo.	60
5.5 Conclusões.	66
6. Referências.	69

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. P. H. Sakanaka, orientador que foi para mim mestre e amigo, sua assídua dedicação e orientação segura possibilitaram na realização desse trabalho, meus sinceros agradecimentos.

Ao Dr. R. M. O. Galvão pelas valiosas contribuições e discussões dos resultados e da revisão final dessa dissertação, meus agradecimentos.

Aos professores e colegas do Grupo de Física de Plasmas da UNICAMP pelas saudáveis convivências, meus agradecimentos.

A meus pais, pelos ensinamentos e incentivos, e aos meus irmãos e aos tios, meus agradecimentos por tudo que a mim fizeram.

A Lucila expresso meus agradecimentos pela compreensão e pela paciência demonstrada.

Ficam aqui meus agradecimentos a Selma pela confecção dos gráficos.

E, finalmente, a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo da qual fui bolsista, e aos CNPQ e FNDCT / FINEP pelo apoio financeiro aos projetos de pesquisa, meus agradecimentos.

Hisataki

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar a influência da toroidicidade na estabilidade de plasmas em sistemas toroidais tipo tokamaks com seção circular. Usando a equação de movimento da teoria magnetohidrodinâmica ideal expandida em A^{-1} pequeno, onde A é a razão de aspecto de toróide definida como razão entre o raio maior com raio menor de toróide, como foi feito por Copenhaver (1976), desenvolveu-se um programa computacional pelo método de tiro ao alvo.

Calculou-se a variação da razão de crescimento de modos instáveis em função da razão de aspecto para perfis de Suydam estável e instável. Observou-se que existem duas classes de modo kink, $m = 1$, para tokamaks de baixo β . A primeira, modo kink interno surge quando o fator de fuga q no eixo magnético está abaixo de unidade, $q(0) < 1$, e a sua razão de crescimento decresce com o aumento da toroidicidade. A outra, modo kink central, surge quando o fator de fuga q no eixo magnético é aproximadamente igual a um e a razão de crescimento cresce com o aumento do efeito toroidal. Estes modos instáveis existem independente da estabilidade Suydam.

1 INTRODUÇÃO

Um dos problemas principais para demonstrar a viabilidade de fusão termonuclear controlada é o problema de confinamento de plasma. Entre os vários aspectos do problema estudado, o de instabilidades magnetohidrodinâmicas (MHD), em particular, numa geometria toroidal ocupa um lugar de destaque.

Extensas investigações foram realizadas por muitos autores para determinar o espectro instável dos modos MHD. Partindo das equações de MHD ideal, Bernstein *et al.* (1958) formularam o princípio de energia. Este princípio diz que se a variação da energia potencial resultante de um pequeno deslocamento ξ de seu equilíbrio é positiva, $\delta W > 0$, então o plasma é estável e, no caso contrário, o plasma é instável. O princípio de energia foi utilizado por Newcomb (1960) e Suydam (1958) que o aplicaram para os estudos da estabilidade de um pinch linear difuso e estabeleceram condições mais explícitas de necessidade e suficiência para a estabilidade. Em particular, um critério necessário para estabilidade de deslocamentos localizados foi obtido por Suydam (1958). A vantagem do princípio de energia é a sua generalidade em que permite usar o método variacional a fim de derivar as condições de estabilidade. No entanto, esta generalidade se limita, em essência, a dar somente a informação se um plasma em equilíbrio é exponencialmente estável ou não, sem dar qualquer outra informação tais como a natureza da instabilidade ou a sua razão de crescimento.

Na pesquisa de configurações estáveis (ou menos instáveis) de plasma cilíndrico, um dado importante é a máxima razão de crescimento das instabilidades. Isto pode ser obtido, resolvendo a equação de movimento do pinch linear difuso ao invés de usar a equação de Euler , obtida do princípio de energia. Esta linha de pesquisa começou com Hain e Lüst (1958) que resolveram numericamente a equação de movimento para configurações bem particulares. Seus resultados são tão limitados que são insuficientes para relacionar a geometria do equilíbrio com a natureza das instabilidades.

Para evitar estes problemas, Goedbloed e Sakanaka (1974 -I) desenvolveram o conceito de estabilidade - σ como uma extensão do princípio de energia. Um equilíbrio é denominado estável- σ se não há perturbações que cresçam mais rapidamente que $\exp(\sigma t)$. Uma classificação das configurações de equilíbrio cilíndrico foi feita por Sakanaka e Goedbloed (1974-II) e a estabilidade - σ das classes destes equilíbrios foi extensivamente explorada.

O objetivo deste trabalho é o estudo da estabilidade de um tokamak com seção circular supondo que a razão de aspecto é suficientemente pequena para poder modelar o toroide como um cilindro mais uma correção toroidal proporcional ao inverso da razão de aspecto. Razão de aspecto é a relação entre o raio maior e o raio menor do toroide. Tenta - se aqui verificar se a toroidicidade estabiliza ou desestabiliza os modos instáveis de um plasma cilíndrico. Por tokamak (Artsimovich(1972)) entende - se por um sistema

toroidal de simetria axial em que o plasma está confinado pelo campo magnético helicoidal criado pela superposição de um forte campo toroidal externo e pelo campo poloidal produzido pela corrente ao longo do plasma. Denomina-se deestabilizante ou estabilizante o aumento ou a diminuição da razão de crescimento de modos instáveis.

Esta dissertação está distribuída como se segue. No capítulo 2, são apresentadas, na primeira parte, a teoria de estabilidade - σ e a derivação da equação de Euler - Lagrange para estudo da estabilidade MHD de um plasma cilíndrico. Na segunda parte é mostrada a derivação da equação de Euler - Lagrange com efeitos toroidais para um tokamak de seção circular. Verifica-se que no limite de grande razão de aspecto, a equação se torna igual a aquela obtida anteriormente.

No capítulo 3 o método numérico tiro ao alvo (*shooting code*) é desenvolvido para a resolução da equação de Euler - Lagrange com efeitos toroidais. Este método baseia-se no trabalho de Sakanaka e Goedbloed (1974-II).

Uma classificação de estabilidade MHD de pinch linear difuso é dada no capítulo 4. Apresentam-se três tipos de modo kink instável: interno, central e externo.

Finalmente, no capítulo 5, são dadas as condições de estabilidade de um tokamak de baixo - β . São apresentados os resultados numéricos da variação de estabilidade para n fixo e k fixo no modo kink. Como principal resultado deste trabalho, observou-se que existem parâmetros estabilizantes como também deestabilizante

2 EQUAÇÃO DE EULER - LAGRANGE PARA O ESTUDO DA ESTABILIDADE MAGNETOHIDRODINÂMICA IDEAL

Neste capítulo serão desenvolvidas duas equações de Euler - Lagrange que extremizam δW , i. e., a variação da energia potencial devido a uma perturbação ξ sobre o equilíbrio.

A primeira delas refere - se a estabilidade de plasma cilíndrico de seção circular. Ela foi desenvolvida por Goedbloed e Sakanaka (1974-I) que formularam a teoria de estabilidade - o como uma extensão ao princípio de energia de Bernstein *et al.* (1958).

A segunda se refere a estabilidade de plasma toroidal de seção circular. Foi feita uma expansão da equação toroidal em termos do inverso da razão de aspecto e se restringiu a expansão até de primeira ordem. Obtem - se então a equação de Euler- Lagrange com efeitos toroidais.

2.1 EQUAÇÃO DE EULER - LAGRANGE PARA UM PLASMA CILÍNDRICO

Supomos para o presente estudo um plasma neutro com condutividade infinita e sem influência da força de gravidade.

As equações de magnetohidrodinâmica ideal, por exemplo, em Krall e Trivelpiece (1973), são as seguintes. A equação de transferência de momento:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

A equação de continuidade :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 . \quad (2.2)$$

A lei de Ohm :

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 . \quad (2.3)$$

A lei adiabática para um observador fixo,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) (p \rho^{-\Gamma}) = 0 . \quad (2.4)$$

E, as equações de Maxwell nas formas

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j} , \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 . \quad (2.7)$$

As notações e o sistema de unidade (sistema Gaussiana racionalizada) são idênticas com aquelas do trabalho de Goedbloed e Sakanaka (1974-I). A exceção é que aqui Γ é utilizada como razão de calores específicos.

As equações acima são aplicadas se as seguintes considerações são satisfeitas. (1) O sistema é neutro, isto é, a distância de blindagem de Debye é pequena comparada com a dimensão do sistema. (2) A razão entre as massas de elétrons e de íons é muito pequena. (3) O tensor de pressão é isotrópico, o que implica em muitas colisões num certo tempo característico, donde decorre uma pressão escalar. (4) As correntes de deslocamentos são desprezíveis; esta aproximação é válida se a velocidade de propagação da onda de Alfvén é pequena em comparação com a velocidade da luz. (5) O fluxo de calor é desprezível, o que justifica a lei adiabática. (6) Todas as distâncias são grandes comparadas com o raio de ór-

bita de Larmor .

O modelo para o estudo de estabilidade de MHD ideal considerado neste ítem, é uma configuração de plasma com simetria cilíndrica, infinitamente longa e com as seguintes propriedades : (a) o campo magnético de equilíbrio possui componentes azimutal e longitudinal que dependem somente de r ; (b) o plasma se estende até uma parede perfeitamente condutora, portanto não há região de vácuo .

As seguintes equações

$$\begin{aligned} \nabla p_0 &= \vec{j}_0 \times \vec{B}_0 , \\ \nabla \cdot \vec{B}_0 &= 0 , \\ \nabla \times \vec{B}_0 &= \vec{j}_0 , \end{aligned} \tag{2.8}$$

descrevem o sistema numa configuração de equilíbrio estático com $\vec{v} = 0$ e sem dependência de tempo.

A linearização das equações (2.1) a (2.7) é feita na representação Lagrangeana do movimento de fluido como em Bernstein *et al.* (1958). Todas as variáveis serão funções de \vec{r}_0 , posição inicial, e de tempo t . O vetor de deslocamento $\vec{\xi}(\vec{r}_0, t)$ está relacionado por

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{\xi}(\vec{r}_0, t) \tag{2.9}$$

à posição $\vec{r}(t)$ do elemento de fluido num instante t . Para primeira ordem em $\vec{\xi}$ temos o operador gradiente na forma

$$\nabla = \nabla_0 - (\nabla_0 \cdot \vec{\xi}) \cdot \nabla_0 \tag{2.10}$$

onde ∇_0 é o operador gradiente em relação a \vec{r}_0 .

A estabilidade do plasma em torno de um determinado estado de equilíbrio é avaliada através da variação δW de sua energia potencial com relação à pequena perturbação $\vec{\xi}$. As variáveis perturbadas em termos de primeira ordem em $\vec{\xi}$ das quantidades \vec{v} , \vec{B} , p , ρ e \vec{j} são

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \quad (2.11)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{Q} + (\vec{\xi} \cdot \nabla_0) \cdot \vec{B}_0 \quad (2.12)$$

com
$$\vec{Q} = \nabla_0 \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \quad (2.13)$$

$$p = p_0 - \gamma p_0 \nabla_0 \cdot \vec{\xi} \quad (2.14)$$

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \nabla_0 \cdot \vec{\xi} \quad (2.15)$$

e
$$\vec{j} = \vec{j}_0 - \{(\nabla_0 \cdot \vec{\xi}) \cdot \nabla_0\} \times \vec{B}_0 + \nabla_0 \times \vec{Q} + \nabla_0 \times \{(\vec{\xi} \cdot \nabla_0) \vec{B}_0\} \quad (2.16)$$

Substituindo as expressões (2.11) a (2.16) na Eq. (2.1) e desprezando os termos acima de primeira ordem em $\vec{\xi}$ e usando as equações de equilíbrio, obtem-se a equação linearizada de movimento na forma

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F}\{\vec{\xi}\} \quad (2.17)$$

onde

$$\vec{F}\{\vec{\xi}\} = \nabla \{(\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} + (\vec{\xi} \cdot \nabla) p) + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{Q} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{Q})\} \quad (2.18)$$

Este é um operador de força, linear e auto-adjunto obtido primeiramente por Bernstein *et al.* (1958). Notam-se que as equações de primeira ordem para \vec{B} , \vec{j} , ρ , p e \vec{v} dependem todas de $\vec{\xi}$ mas não de $\dot{\vec{\xi}}$. Esta propriedade se segue da natureza conservativa do sistema. Na Eq. (2.18) foi eliminado o índice 0 por ser desnecessário.

Na teoria de estabilidade - o (Goedbloed *et al.* (1974-I))

um funcional de energia , W^σ , foi definido como

$$W^\sigma = W + \sigma^2 I \quad (2.19)$$

onde $W = -\frac{1}{2} \int \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) d\tau$ é a variação da energia potencial e $\sigma^2 I$ é a variação da energia cinética associada com a perturbação que cresce com a razão $\exp(\sigma t)$ e I é o virial

$$I = \frac{1}{2} \int \vec{\xi} \cdot \rho \vec{\xi} d\tau . \quad (2.20)$$

Este funcional possui o termo $\sigma^2 I$ que não existe na definição de W dado por Bernstein . Pode ser escrito como produto escalar com o operador de força reduzida :

$$W^\sigma = -\frac{1}{2} \int \vec{\xi} \cdot \vec{F}^\sigma(\vec{\xi}) d\tau \quad (2.21)$$

onde

$$\vec{F}^\sigma(\vec{\xi}) = \vec{F}(\vec{\xi}) - \rho \sigma^2 \vec{\xi} . \quad (2.22)$$

Pode - se dizer que a força para induzir uma instabilidade de σ é reduzida pela quantidade $\rho \sigma^2 \vec{\xi}$ em relação à força no conceito usual .

A extremização do funcional de energia modificado , W^σ , segundo a norma $\frac{1}{2} \int \vec{\xi} \cdot \rho \vec{\xi} d\tau = I$, leva a equação de Euler

$$\vec{F}^\sigma(\vec{\xi}) = 0 , \quad (2.24)$$

com as devidas condições de contorno. De (2.18) e (2.24) obtém-se um sistema de três equações diferenciais parciais acopladas de segunda ordem. Quando a configuração de equilíbrio independe de duas coordenadas, ou seja, θ e z , o sistema de equação se reduz a uma equação ordinária de segunda ordem em r .

Seja um plasma cilíndrico limitado por uma parede condutora ideal em $r = a$. Este equilíbrio é descrito pelos perfis

$p(r)$, $B_z(r)$ e $B_\theta(r)$ que estão ligados um a outro através da equação de equilíbrio

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{1}{2} B^2 \right) + \frac{B_\theta^2}{r} = 0 \quad (2.25)$$

onde $B^2 = B_z^2 + B_\theta^2$.

Introduz-se a função de $\vec{\xi}$ do tipo

$$\vec{\xi} = \{ \xi_r(r), \xi_\theta(r), \xi_z(r) \} \exp(im\theta + ikz), \quad (2.26)$$

então para cada componente de Fourier (m, k) do sistema de Eq.(2.24) temos a equação diferencial de segunda ordem para ξ_r e duas relações expressando ξ_θ e ξ_z em função de ξ_r e $(r\xi_r)'$. Usando também a equação de equilíbrio, Eq.(2.25), obtem-se, após uma tediosa transformação algébrica a seguinte equação diferencial de segunda ordem para $r\xi_r$ (Goedbloed e Sakanaka (1974-I)) :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left[\frac{(\rho\sigma^2 + F^2) \{ \rho\sigma^2 (\Gamma\rho + B^2) + \Gamma\rho F^2 \}}{D} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) \right] \\ & - \left[\rho\sigma^2 + F^2 + 2B_\theta \left(\frac{B_\theta}{r} \right)' - 4 \frac{k^2 B_\theta^2}{r^2} \frac{\rho\sigma^2 B^2 + \Gamma\rho F^2}{D} \right. \\ & \left. + r \left\{ 2 \frac{kB_\theta}{r^2} \left(\frac{mB_z}{r} - kB_\theta \right) \frac{\rho\sigma^2 (\Gamma\rho + B^2) + \Gamma\rho F^2}{D} \right\} \right] \xi_r = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde
$$F = \frac{mB_\theta}{r} + kB_z, \quad (2.28)$$

$$D = \rho^2 \sigma^4 + \rho\sigma^2 (m^2/r^2 + k^2) (\Gamma\rho + B^2) + (m^2/r^2 + k^2) \Gamma\rho F^2 \quad (2.29)$$

com as condições de contorno

$$r\xi_r = 0 \text{ em } r = 0 \text{ e } r = a. \quad (2.30)$$

Fazendo $x = r\xi_r$, podem-se escrever as Eqs. (2.27) e

(2.30) como

$$\left[f(\sigma) \chi' \right]' - g(\sigma) \chi = 0 \quad (2.31)$$

$$\chi(r=0) = \chi(r=a) = 0 \quad (2.32)$$

respectivamente, de maneira que a equação diferencial, Eq.(2.31), é a equação de Euler correspondente ao funcional

$$J\{\chi\} = \int_0^a \left[f(\sigma) \chi'^2 + g(\sigma) \chi^2 \right] dr \quad (2.33)$$

A grande diferença entre a equação de σ - Euler com a forma usual de Newcomb (1958) é o fato de que a Eq.(2.31) é não singular para $\sigma^2 > 0$ enquanto que a equação de Euler marginal, $\sigma = 0$, possui singularidades nos pontos onde $F = 0$.

O cálculo variacional, pelo seu critério de Jacobi, nos diz que o funcional quadrático $J\{\chi\}$ é positivo definido se a sua solução $\chi = \chi(r)$ da equação de Euler corresponde a um mínimo do funcional $J\{\chi\}$ ao longo do caminho extremo e se não possui zeros no intervalo $0 < r < a$.

Esta condição permite formular o seguinte teorema para estabilidade - σ : " para valores especificados de m e k , o pinch linear difuso é estável - σ , se e só se, a solução não trivial da equação de σ - Euler que se anula em $r = 0$ não possua um zero no intervalo aberto $(0, a)$ " (Goedbloed e Sakanaka (1974-I)).

Surge disto um método prático de calcular a estabilidade - σ . Dados m e k , e um valor fixo de σ , um equilíbrio é estável - σ se a solução da Eq.(2.27) com as condições de contorno Eq.(2.30) não apresentar nenhum zero entre os pontos 0 e a . Um equilíbrio é dito estável - σ se a estabilidade, que por ventura existir, não crescer mais rapidamente do que $\exp(\sigma t)$. Se o

equilíbrio for instável - σ , pode - se determinar a razão de crescimento γ simplesmente aumentando o valor de σ tal que o zero do σ se desloca da região entre 0 e a até a posição a . Neste ponto o equilíbrio é marginalmente instável - σ , isto é, $\gamma = \sigma$. Note - se também que $\vec{F}(\vec{\xi})$ sendo auto-adjunto, o valor próprio σ tem que ser real.

Goedbloed *et al.* (1974-I) fizeram também a análise espectral relacionado ao lado instável do espectro. Isto é evidente ao substituir a dependência temporal da forma $\exp(i\omega t)$ na Eq. (2.24), ou, mais explicitamente substituir σ^2 por $-\omega^2$ na Eq. (2.27); obtendo - se uma equação de Euler igual a equação de movimento já derivada por Hain e Lüst (1958). Nestes termos as Eqs. (2.31) e (2.32) podem ser escritas como

$$\left[f(i\omega)\chi' \right]' - g(i\omega)\chi = 0 \quad (2.34)$$

$$\chi(r=0) = \chi(r=a) = 0 \quad (2.35)$$

E é evidente que a Eq. (2.34) é não singular para $\omega^2 < 0$, tal que o lado instável do espectro é um espectro discreto. E ainda, para $\omega^2 = 0$, a equação se transforma na equação singular marginal e para $\omega^2 > 0$, a equação adquire um número de singularidades que origina autofunções singulares e espectros contínuos.

A ligação entre a estabilidade - σ e o lado instável do espectro baseia - se na propriedade Sturmiana da equação de movimento (2.34) para $\omega^2 < 0$. Esta propriedade significa que os zeros das soluções oscilatórias se movem monotonicamente com o aumento de $-\omega^2$. Esta é a propriedade básica da equação de mo

vimento do pinch linear difuso para $\omega^2 < 0$ cujo teorema acima se segue de imediato .

Para a resolução numérica da equação de σ - Euler , a propriedade Sturmiana permite desenvolver um esquema numérico denominado método de tiro ao alvo , que será abordado no próximo capítulo .

2.2 EQUAÇÃO DE EULER - LAGRANGE PARA UM PLASMA TOROIDAL COM SEÇÃO CIRCULAR .

O estudo da estabilidade de um equilíbrio toroidal de simetria axial com seção transversal circular é realizado usando uma aproximação cilíndrica na equação de autovalor com uma pequena correção toroidal .

Para uma configuração de simetria axial, Fig.2.1, escolhe-se um sistema de coordenada de fluxo magnético ψ, χ, ϕ , em que ϕ é o ângulo azimutal (toroidal) e χ é um ângulo poloidal de modo que as superfícies constantes χ são ortogonais a superfícies ψ e ϕ .

A equação de fôrça, Eq.(2.17) , que descreve instabilidades MHD ideal, foi deduzida por Goedbloed (1975) num sistema de coordenadas ortogonais ψ, χ, ϕ centrada no eixo magnético. $\vec{\xi}$ e \vec{F} são projetados sobre o vetor normal à superfície magnética \vec{n} , e sobre as direções tangentes à superfície magnética, \vec{e}_1 , perpendicular a linhas de campo, e \vec{e}_2 , paralelo a linhas de campo . Introduzindo componente de Fourier na coordenada ignorável ϕ ,

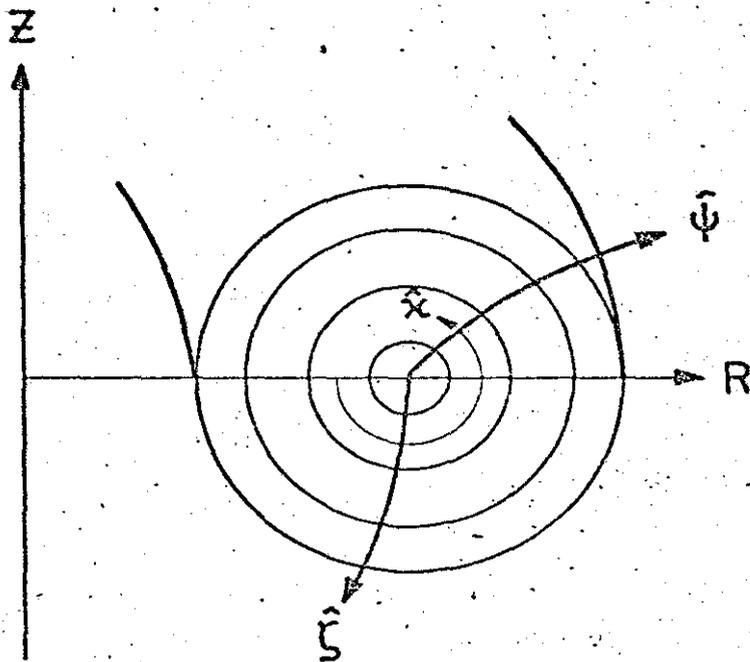


Fig. 2.1 Configuração de simetria axial.
Coordenadas toroidais (ψ, χ, ζ) .

$$\xi = \sum_k \xi_k e^{ik\phi} \quad (2.36)$$

onde $k, k = n/R_c$, \bar{e} é o número de onda toroidal, a equação de força resulta na forma

$$\sum_j F_{ij} X_j = \rho \sigma^2 \alpha_i X_i \quad (2.37)$$

onde $\vec{X} = (X, Y, Z) = (JRB_\chi \xi_\psi, \frac{iB_\phi}{B_\chi} \frac{B_\phi \xi_\chi - B_\chi \xi_\phi}{B^2}, i \frac{B_\chi \xi_\chi + B_\phi \xi_\phi}{B^2})$

$$\alpha_1 = \frac{1}{J^2 R^2 B_\chi^2}, \quad \alpha_2 = \frac{B_\chi B^2}{B_\phi^2}, \quad \alpha_3 = B^2 \quad (2.38)$$

e

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} D(\Gamma p + B^2)D - \frac{1}{J} \frac{1}{R^2 B_\chi^2} \frac{1}{J} & DG(\Gamma p + B^2) & D\Gamma p F \\ -\frac{2}{J^2}(\tau' + q\lambda') & -\frac{2}{IJ}(\tau n + \lambda i \frac{\partial}{\partial \chi})B^2 & \\ -(\Gamma p + B^2)GD & -G\Gamma p G - B^2 G \frac{1}{B^2} GB^2 & -G\Gamma p F \\ -\frac{2}{IJ} B^2 (n\tau + i \frac{\partial \lambda}{\partial \chi}) & -B^2 F \frac{1}{B_\phi^2 B^2} FB^2 & \\ -F\Gamma p D & -F\Gamma p G & -F\Gamma p F \end{bmatrix}$$

Os operadores gradientes D, F e G projetados em \vec{n}, \vec{e}_\perp e \vec{e}_\parallel possuem a forma

$$D = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad F = -\frac{i}{J} \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{nq}{J}, \quad G = \frac{-i}{J} \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{nB^2}{I} \chi \quad (2.39)$$

enquanto que os termos de curvatura transversal e longitudinal τ

e λ , respectivamente, estão relacionados com as curvaturas poloidal, k_p , e toroidal, k_t , por

$$\tau = \frac{B_\chi}{h_3} k_p = \frac{B_\chi}{J} \frac{d}{d\psi} (JB_\chi) , \quad \lambda = \frac{B_\phi}{h_2} k_t = \frac{B_\phi}{J} \frac{dR}{d\psi} . \quad (2.40)$$

Usando a definição de linha fechada, considera-se que a função

$$X_i(\psi, \chi) = X_{i_0}(\psi) \exp\{i \int_0^\chi m(\chi') d\chi'\} \quad (2.41)$$

é periódica em χ , isto é,

$$X_i(\psi, l) = X_i(\psi, 0) = 1 , \quad (2.42)$$

a qual é satisfeita se existem inteiros m e k tal que

$$\int_0^l m(\chi') d\chi' = 2\pi k . \quad (2.43)$$

Shafranov (1966) demonstrou que, quando uma coluna cilíndrica de plasma é transformada em um toróide a forma das superfícies magnéticas não se altera, em primeira ordem com relação a a/R_c , o inverso da razão de aspecto, mas se deslocam uma em relação a outra.

Definindo os termos do operador força como funções médias sobre a superfície de fluxo,

$$\langle F_{ij} \rangle = \int \frac{d\chi}{2\pi} J(\psi, \chi) \exp\{-i \int_0^\chi m^*(\chi') d\chi'\} F_{ij} \cdot \exp\{i \int_0^\chi m(\chi') d\chi'\} \quad (2.44)$$

e usando os operadores gradiente, Eq.(2.39), segue-se que $\langle F_{ij} \rangle$ é auto-adjunto, $\langle F_{ij} \rangle = \langle F_{ji} \rangle^+$. O seguinte resultado da equação diferencial de segunda ordem foi obtida por Copenhaver (1976)

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ a_{11} + |a_{12}| \frac{2b_{33}}{D\psi} + |a_{13}| \frac{2b_{22}}{D\psi} - \left(\frac{a_{11}b_{23}a_{13}^* + a_{13}b_{23}^*a_{12}^*}{D\psi} \right) \right\} \cdot$$

$$\frac{\partial X}{\partial \psi} + \left\{ \frac{b_{33}}{D\psi} (b_{12}a_{12}^* - a_{12}b_{12}^*) + \frac{1}{D\psi} (a_{13}b_{23}^*b_{12} - b_{12}b_{23}^*a_{13}^*) \right\} \frac{\partial X}{\partial \psi}$$

$$\left\{ +b_{11} + |b_{12}| \frac{2b_{33}}{D\psi} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{-a_{12}b_{33}b_{12}^* + a_{13}b_{23}b_{12}^*}{D\psi} \right) \right\} X = 0$$

(2.45)

onde a_{ij} e b_{ij} são definidas como

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial \psi} + b_{11} = \langle F_{11} \rangle + \omega^2 \langle \rho \alpha_1 \rangle ,$$

$$b_{22} = \langle F_{22} \rangle + \omega^2 \langle \rho \alpha_2 \rangle ,$$

$$b_{33} = \langle F_{33} \rangle + \omega^2 \langle \rho \alpha_3 \rangle ,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial \psi} + b_{12} = \langle F_{12} \rangle , \quad -a_{12}^* \frac{\partial}{\partial \psi} + b_{12}^* = \langle F_{21} \rangle ,$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial \psi} = \langle F_{13} \rangle , \quad -a_{13}^* \frac{\partial}{\partial \psi} = \langle F_{31} \rangle ,$$

$$b_{23} = \langle F_{23} \rangle , \quad b_{23}^* = \langle F_{32} \rangle ,$$

e

$$D\psi = b_{22}b_{33} - b_{32}b_{23} = \langle \rho \alpha_2 \rangle \langle \rho \alpha_3 \rangle (\omega^2 - \omega_3^2) (\omega^2 - \omega_4^2)$$

A Eq. (2.45) pode ser escrita como

$$\frac{d}{d\psi} \left[f(\psi) \frac{dX_0}{d\psi} \right] - g(\psi) X_0 = 0 \quad (2.46)$$

ao eliminar o termo $\frac{dX}{d\psi}$ usando a seguinte função

$$X(\psi) = X_0(\psi) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int \frac{g(\psi)}{f(\psi)} d\psi \right\} ,$$

que, em geral, $g(\psi)$ é complexo.

Para a melhor compreensão da natureza dos efeitos to-

roidais, aplicamos a Eq. (2.46) para um tokamak com grande razão de aspecto, e de seção transversal circular e de perfis arbitrários de pressão e de corrente.

Uma transformação do sistema de coordenadas de fluxo magnético, Fig. 2.1, para o sistema de coordenadas (R, θ, Z) , Fig. (2.2), é requerida para o estudo de um tokamak de seção circular. As superfícies de fluxo destes equilíbrios na primeira ordem da razão de aspecto são conhecidas serem círculos deslocados. Cada círculo possui seu raio r e seu centro está deslocado do eixo da superfície condutora por uma distância ζ , Fig. (2.2). O deslocamento do eixo da superfície toroidal do eixo magnético é representado por ξ . Então as variáveis R e Z nas coordenadas cilíndricas podem ser representadas como

$$R = R_c + \zeta + r \cos \theta, \quad (2.47)$$

$$e \quad Z = r \sin \theta$$

onde R_c e a são raio maior e menor de um toróide, respectivamente, Fig. (2.2).

A equação de equilíbrio toroidal,

$$\frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{J} \frac{d}{d\psi} (JB_\chi)^2 + \frac{I}{R^2} \frac{dI}{d\psi} = 0, \quad (2.48)$$

na forma linearizada para um tokamak circular de grande razão de aspecto resulta, em ordem zero,

$$\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2(R_c + \zeta)^2} \frac{d}{dr} I^2 + \frac{1}{2dr} B_\theta^2 + \frac{B_\theta^2}{r^3} = 0, \quad (2.49)$$

e em primeira ordem

$$\frac{r}{R_c} \frac{dp}{dr} = \frac{B_\theta^2}{2R_c} + \zeta \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta^2}{2} \right) + \frac{B_\theta^2}{2} \zeta'' + \frac{B_\theta^2}{2r} \zeta'. \quad (2.50)$$

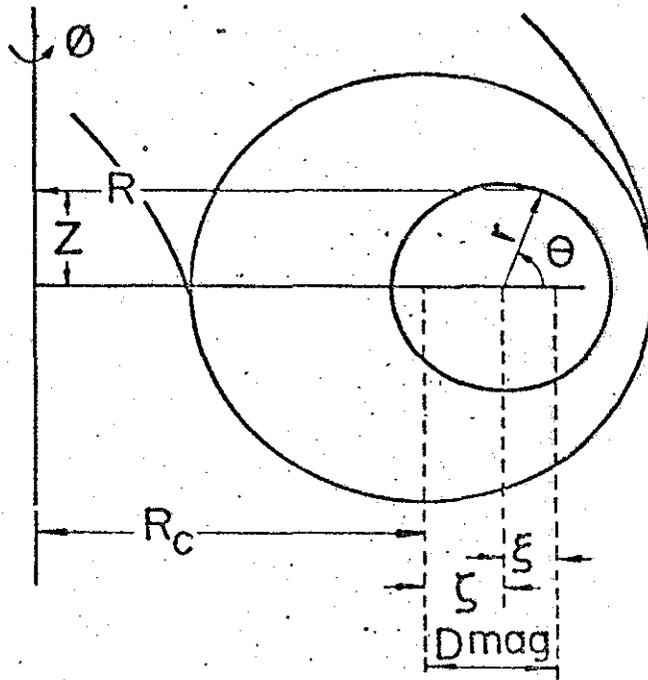


Fig. 2.2 Sistema de coordenadas para tokamak de seção circular, r , θ , Z . R_c = raio maior do toróide, D_{mag} = deslocamento do eixo magnético.

Usando estas equações, e com numerosas transformações algébricas, a Eq. (2.46) resulta numa equação ordinária de segunda ordem dependente de r

$$\frac{d}{dr} \left[g(r) \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right] - H(r) (r \xi_r) = 0 \quad (2.51)$$

onde

$$g(r) = \frac{N(r)}{D(r)},$$

$$N(r) = (\rho \sigma^2 + F^2) \{ \rho \sigma^2 (\Gamma p + B^2) + \Gamma p F^2 \},$$

$$D(r) = \rho^2 \sigma^4 + \rho \sigma^2 \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) (\Gamma p + B^2) + \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) \Gamma p F^2,$$

$$e \quad H(r) = \frac{1}{r} \left[\rho \sigma^2 + F^2 + 2B_\theta \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta}{r} \right) - 2q^2 \frac{B_\theta^2}{r^2} \left(2 + \frac{\zeta' R_c}{r} + \Delta \left(\frac{r}{I} - 1 \right) \right) - 4 \frac{k^2 B_\theta^2}{r^2 D} (\rho \sigma^2 B^2 + \Gamma p F^2) \left(1 + m q \frac{\Delta}{n} \right)^2 + r \frac{d}{dr} \left\{ 2 \frac{k B_\theta}{r^2 D} \left(\frac{m B_\theta}{r} - k B_\theta \right) \{ \rho \sigma^2 (\Gamma p + B^2) + \Gamma p F^2 \} \left(1 + m q \frac{\Delta}{n} \right) \right\} \right] \quad (2.51a)$$

tal que

$$F = m \frac{B_\theta}{r} + k B_\phi,$$

$$\Delta = 2 + \frac{R_c}{r} \int_0^r dr' \frac{\zeta'}{r'},$$

$$q(r) = \frac{r B_\phi}{R_c B_\theta} \quad (2.52)$$

e

$$k = \frac{n}{R_c}.$$

No limite cilíndrico, $A \rightarrow \infty$ ou $R_c \rightarrow \infty$, $nq(r)$ mantém-se fixo enquanto que o número de onda toroidal, n , tende ao infinito e a equação de Euler - Lagrange com efeitos toroidais, Eq. (2.51), se transforma identicamente em Eq. (2.27). Verifica-se também que os efeitos toroidais surgem somente no termo $H(r)$. A

Eq.(2.51) possui as seguintes condições de contorno,

$$r\xi_r = 0 \text{ em } r = 0 \text{ e } r = a . \quad (2.53)$$

A resolução numérica desta equação de Euler - Lagrange é descrita no próximo capítulo onde a solução pelo método de tiro ao alvo é obtida .

3 MÉTODO NUMÉRICO

Este capítulo descreve um procedimento numérico para resolver a equação de Euler - Lagrange para um plasma toroidal, Eq. (2.51). Obtem-se, para valores dados dos números de onda m e k , com as condições de contorno, Eq. (2.53), as autofunções, $r\xi_r$, e os autovalores, σ , denominados de razões de crescimento de instabilidades. A resolução da Eq. (2.27) para um confinamento cilíndrico (Sakanaka e Goedbloed (1974-II) também foi realizado no decurso do desenvolvimento deste trabalho.

São dados dois perfis de equilíbrio: o de pressão, $p(r)$ e o do inverso de passo das linhas do campo magnético helicoidal, $\mu(r)$. Este é definido como $\mu(r) = \frac{B_\theta(r)}{rB_z(r)}$. Da equação de equilíbrio, Eq. (2.25), transformada como

$$\frac{d}{dr} \left\{ p + \frac{B_z^2}{2} (1 + r^2 \mu^2) \right\} + r \mu^2 B_z^2 = 0, \quad (3.1)$$

pode-se obter o terceiro perfil de equilíbrio, $B_z(r)$. Define-se a função

$$b(r) = \frac{B_\theta(r)}{r} = \mu(r) B_z(r), \quad (3.2)$$

e determinam-se as densidades de corrente longitudinal, $J_z(r)$, e azimutal, $J_\theta(r)$, das equações de Maxwell, obtendo-se

$$J_z(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 b(r)) \quad (3.3)$$

$$J_\theta(r) = - \frac{d}{dr} B_z(r) \quad (3.4)$$

Os coeficientes $g(r)$ e $H(r)$ da equação de Euler - Lagrange possuem divergências em $r = 0$. Afim de poder resolver

a equação (2.51) em torno deste ponto, utiliza-se a Eq. (3.2) e re-
arranja-se da seguinte maneira para modos $m \neq 0$,

$$\frac{d}{dr} \left[r g(r) \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right] - H(r) \xi_r = 0, \quad (3.5)$$

onde

$$g(r) = \frac{(\rho \sigma^2 + F^2) \{ \rho \sigma^2 (\Gamma p + B^2) + \Gamma p F^2 \}}{D} \quad (3.6)$$

$$H(r) = F_B - 4k^2 b^2 (q_B - \rho \sigma^2 \Gamma p) \left(1 + \frac{m q}{n} \Delta \right)^2 r^2 - \\ 2q^2 b^2 \left\{ 2 + \frac{R_e \zeta'}{r} + \Delta \left(\frac{r I'}{I} - 1 \right) \right\} + r \frac{d}{dr} q_A, \quad (3.7)$$

tal que

$$F = mb + k B_\phi, \\ F_B = \rho \sigma^2 + F^2, \\ q_B = \rho \sigma^2 (\Gamma p + B^2) + \Gamma p F^2, \\ D = \rho^2 \sigma^4 r^2 + (m^2 + k^2 r^2) q_B, \quad (3.8)$$

$$e \quad q_A = b^2 + 2kb (m B_\phi - k b r^2) \left(1 + \frac{m q}{n} \Delta \right) \frac{q}{D}.$$

Como as várias fórmulas de integração numérica utiliza-
das só funcionam conhecendo - se alguns pontos anteriores, então
a expansão em torno de $r = 0$ é necessária ser feita. A expres-
são seguinte,

$$f(r) = f_0 + f_2 r^2 + f_4 r^4 + O(r^6), \quad (3.9)$$

descreve a expansão até a quarta ordem naquele ponto. Utilizando
esta equação, permite encontrar uma expressão analítica da solu-
ção da Eq. (3.5), em torno de $r = 0$, dadas as condições iniciais
 $\xi(0) = 0$ e $\xi'(0) = \text{const.}$

Resolve - se numericamente a equação de Euler - Lagran-
ge, transformando - a num sistema de duas equações diferenciais

de primeira ordem na forma

$$\xi'_r(r) = \frac{1}{r} \left(\frac{n(r)}{g(r)} - \xi_r(r) \right) \quad (3.10)$$

$$n'(r) = \frac{H(r)\xi_r(r) - n(r)}{r} \quad (3.11)$$

onde
$$n(r) = g(r) \frac{d}{dr} (r\xi_r) \quad (3.12)$$

A fórmula de Moulton do método de preditor - corretor (Issacson e Keller (1966)) é utilizada para resolução deste sistema de equações diferenciais . Nesta fórmula, o preditor da Eq.(3.10) é escrito como

$$\xi_{k+1}^* = \xi_k + \Delta r \sum_{j=0}^3 \beta_j \xi'(r_{k-j}, \eta_{k-j}, \xi_{k-j}) \quad (3.13)$$

e o corretor

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} = \xi_k + \Delta r \sum_{l=1}^3 \alpha_l \xi'(r_{k-l+1}, \eta_{k-l+1}, \xi_{k-l+1}) \\ + \Delta r \alpha_0 \xi'(r_{k+1}, \xi_{k+1}^*, \eta_{k+1}^*) \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde os coefeciente β_j e α_j para $j = 0, 1, 2, 3$ são

$$\beta_j = 55/24 ; -59/24 ; 37/24 ; -9/24 \quad (3.15)$$

e

$$\alpha_j = 9/24 ; 19/24 ; -5/24 ; 1/24 .$$

Conjuntamente ρ mesmo procedimento é utilizado na Eq.(3.11) . A fórmula de Moulton sô pode ser utilizada quando os quatro valores anteriores de $\xi(r)$ e de $n(r)$ estiverem determinados.

A equação de Euler - Lagrange marginal ($\sigma = 0$) possui singularidades nos pontos r_s onde $\mu(r_s) = -\frac{k}{m}$, Eq.(3.8) , mas para $\sigma \neq 0$, $g > 0$, a equação é não singular nestes pontos. Entretanto para a maioria dos casos σ é pequeno e a equação se

aproxima da singularidade . É necessário prestar uma atenção especial na resolução da equação nestes pontos. Estes pontos de quasi-singularidade foram denominados de sigma - singularidade .

Para a resolução de uma σ -singularidade testa ponto a ponto a mudança de sinal de F, Eq.(3.8). Onde isto acontece é, justamente, o ponto r_s de sigma - singularidade. Faz-se uma interpolação quadrática em torno deste ponto se existir um certo N, inteiro muito maior do que 1, tal que vale a relação $N = \frac{\Delta r}{\delta r}$, onde Δr é o incremento radial da resolução da equação de Euler - Lagrange, e δr é o incremento obtido da equação

$$\sqrt{\rho\sigma^2} = \left. \frac{dF}{dr} \right|_{r=r_s} \delta r . \quad (3.16)$$

Uma vez satisfeito isto a interpolação é realizada para os coeficientes $g(r)$ e $H(r)$ nos intervalos δr e $\frac{\delta r}{2}$ para alguns pontos anteriores e posteriores de r_s . O método de quarta ordem de Runge - Kutta é suficiente para solucionar o sistema de equações (3.10) e (3.11) , com os coeficientes interpolados. Terminada a resolução nesta região de sigma - singularidade, volta a utilizar o método de preditor - corretor.

Os primeiros testes foram realizados passo a passo com a Eq.(2.27) de confinamento cilíndrico. Baseado nos dados de Goebloed e Hagebeuk(1972) foram obtidas as autofunções, $r\xi_r$, e os autovalores , Γ , no campo de Lundquist, $\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B}$.

Uma atenção especial foi dispensada na expansão e na análise em região de $r \sim 0$.

Verificou - se numericamente a propriedade Sturmiana da equação de Euler-Lagrange com efeitos toroidais .

4 ESTABILIDADE MAGNETOHIDRODINAMICA DE PINCH LINEAR DIFUSO

Um dos problemas relevantes à fusão termonuclear controlada é o problema da estabilidade magnetohidrodinâmica de pinch linear difuso que após o trabalho de Newcomb(1960) teve um avanço considerável. Diz - se difuso no sentido de que a corrente de plasma é espalhada e, por contraste, designa - se pinch abrupto quando a corrente no plasma está localizada numa camada extremamente fina .

Neste capítulo, vários tipos de instabilidades de pinch linear difuso são tratados . Na próxima seção uma classificação de instabilidades é dada e na Sec.(4.2) uma explanação detalhada de instabilidades de modo kink, $m = 1$, é mostrada .

4.1 CLASSIFICAÇÃO DE INSTABILIDADES

Durante o progresso na pesquisa de confinamento de plasmas de alta temperatura, vários tipos diferentes de instabilidades foram encontrados. De uma maneira geral elas podem ser classificadas em dois grupos : instabilidades macroscópicas e microscópicas . O primeiro trata dos fenômenos em baixas frequências e comprimento de ondas longas em que os valores médios dos movimentos de partículas dentro de plasma são importantes, ou seja, o plasma é considerado um fluido de uma, duas ou mais espécies .As instabilidades macroscópicas são derivadas das equações de fluido para

plasmas e, em particular, equações de magnetohidrodinâmica.

As instabilidades microscópicas são instabilidades que surgem devido a peculiaridades na função de distribuição no espaço das velocidades, portanto o fenómeno é geralmente tratado por equações cinéticas, tais como, equações de Vlasov - Maxwell. Um exemplo clássico de instabilidade microscópica é a instabilidade de duas correntes. Tais instabilidades surgem quando existem velocidades médias diferentes entre duas espécies de partículas ou entre duas ou mais facções de partículas de mesma espécie. Um outro exemplo de grande importância que pode ser classificada como instabilidade microscópica é a instabilidade ciclotrônica dos íons

Entre vários tipos de instabilidades macroscópicas, os mais bem conhecidos são as instabilidades de troca, *interchange*, ou de estria, *flute*, e as instabilidades de mangueira de bombeiro, *firehose*. São tratadas e estudadas com um cuidado especial devido a sua própria natureza de alta destrutibilidade de plasmas.

Define-se um pinch puro como aquele em que o plasma colunar é comprimido radialmente pelo campo magnético induzido pela própria corrente ao longo do plasma. Um pinch puro é extremamente instável. Para ter melhor estabilidade campos longitudinais estabilizantes são aplicadas externamente. O resultado é um campo helicoidal que comprime e confina, ou, só confina um plasma colunar e o termo pinch foi generalizado para expressar este sistema.

Em sistemas toroidais os campos longitudinais têm mais um papel importante, o de campo equilibrante. Pois só se consegue o equilíbrio de um plasma toroidal se este campo for alto, da

ordem de 90% do campo total ou maior em casos de plasmas de seção quase circular. Embora o campo longitudinal seja equilibrante persiste ainda uma série de instabilidades.

Em sistemas cilíndricos é natural representar as perturbações sobre um equilíbrio, $\vec{\xi}$, que expressam os deslocamentos de elementos de plasma, em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e além da dependência temporal t . Estes deslocamentos podem ser representados como uma superposição das componentes de Fourier na forma $\vec{\xi}(r, \theta, z, t) = (\xi_r(r), \xi_\theta(r), \xi_z(r)) \exp\{i(m\theta + kz - \omega t)\}$. A quantidade k é o número de onda toroidal que caracteriza a periodicidade da perturbação ao longo do eixo e está relacionada com o comprimento de onda da deformação, λ , por $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. O coeficiente m é denominado modo azimutal da perturbação e determina a periodicidade na direção θ . Quando θ muda de 2π , $\vec{\xi}$ deve voltar ao seu valor inicial, portanto m possui valores inteiros, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Mais adiante serão discutidas as instabilidades devido a estes modos. A dependência temporal da perturbação é determinada resolvendo a equação linearizada de perturbações. Pelo fato do operador de força, Eq.(2.17), ser auto-adjunto para o caso de MHD ideal, ω^2 é real, e, conseqüentemente, ω pode ser real ou imaginário puro. Se ω for real, então a amplitude da perturbação é limitada, i.e., o pinch é estável. No caso contrário, ω imaginário, pinch é instável.

Num caso idealizado de um pinch abrupto a corrente flui somente na superfície do plasma, o campo magnético azimutal, B_θ , só existe fora do plasma e o campo longitudinal, B_z , é constante dentro e fora do plasma. Supõe-se agora que não exista cam

po magnético no interior do plasma. O campo e a corrente produzem a força $\vec{j} \times \vec{B}$ na superfície dirigida para dentro, de tal modo que a pressão do campo na superfície contrabalança a pressão de plasma, obtendo-se assim o equilíbrio. Como as linhas de força são convexas onde o centro da curvatura está no interior do plasma, o equilíbrio assim obtido é instável (Rosenbluth e Longmire (1957)) .

O primeiro tipo de instabilidades é a perturbação incompressível com $m=0$ e $k \neq 0$. Na região onde a coluna de plasma é contraída, devido a perturbação $\propto \exp(ikz)$, há um aumento de pressão magnética, pois $B_0 \propto 1/r$. Este aumento não é contrabalanceado com um correspondente aumento na pressão de plasma, por que a perturbação é incompressível. Então a contração aumenta, resultando em um aumento maior na pressão magnética sem ser contrabalanceada pelo aumento da pressão de plasma. O processo evolue até que um efeito não linear pare a instabilidade, ou, que a ruptura da coluna ocorra. Este tipo de instabilidade é denominado instabilidade de salsicha.

A instabilidade pode ser estabilizada aplicando - se um campo longitudinal B_z dentro do plasma. Considera - se que este campo é uniforme no interior do pinch e é nulo na parte externa do mesmo. A variação da pressão magnética devido a este campo longitudinal é oposto à variação da pressão produzida pelo campo B_0 e, conseqüentemente, B_z pode eliminar as instabilidades do tipo de salsicha. A condição de estabilidade é dada por Kadomtsev (... 1966) pela relação

$$B_z^2 > \frac{B_0^2}{2} \quad (4.1)$$

A perturbação de modo $m = 1$, denominada de instabilidade de kink, corresponde a um deslocamento radial da coluna de pinch e, combinado com o modo k a coluna do plasma se deforma de maneira helicoidal. Na região encurvada, a densidade das linhas de força ao redor da coluna é maior no lado côncavo do que no lado convexo da coluna, e, conseqüentemente, o campo magnético azimutal, B_θ , exerce uma pressão magnética mais intensa no lado côncavo e tende a aumentar a curvatura. A estabilização pode ser feita com um campo magnético longitudinal, B_z , dentro do plasma. O encurvamento deste campo produz uma tensão magnética que age como uma força restauradora contra a deestabilização produzida pelo campo magnético azimutal. Tem-se mostrado (Kruskal, et al. (1958) e Kadomtsev (1966)) que a seguinte condição de estabilidade

$$\left(\frac{B_z}{B_\theta}\right)^2 > \ln\left(\frac{1}{ka}\right) \quad (4.2)$$

não é efetiva para estabilizar as perturbações de comprimento de onda longa, mesmo para campo magnético longitudinal muito intenso.

Por esta razão há duas possibilidades para estabilizar a instabilidade kink: (a) colocando uma parede metálica condutora ao redor do vácuo, ou (b) superpor um campo magnético longitudinal externo.

Quando o pinch se desloca, no caso (a), o fluxo magnético entre o plasma e a parede condutora não muda porque as linhas de força não podem penetrar no metal. Se a coluna de plasma move para perto da parede, as linhas de força são comprimidas,

causando um aumento da pressão magnética, de modo que surge uma força restauradora que estabiliza a instabilidade. Se, porém, o raio da parede condutora for muito maior do que o raio da coluna de plasma, o comprimento de onda de perturbação suficientemente pequeno em relação ao raio da coluna de plasma, então as linhas de força não são comprimidas apreciavelmente de sorte que a força restauradora não é suficiente para estabilizar o kink. Uma análise detalhada mostra uma relação entre o raio da parede condutora, b , com o raio da coluna de plasma, a , para que todos os comprimentos de onda sejam estabilizadas (Taylor (1957))

$$b < 5a \quad (4.3)$$

No caso em que exista um campo magnético longitudinal externo, caso (b), a estabilidade decresce. Isto está associado com a mudança na geometria do campo magnético. As linhas de força fora do pinch são helicoidais e o passo desta hélice é dada pela

$$h(r) = 2\pi \frac{rB_z}{B_\theta} \quad (4.4)$$

Entre várias perturbações pode existir uma que o comprimento de onda de perturbação coincide com o passo do campo magnético helicoidal. A deformação deste tipo resulta numa distorção mínima do campo fora do pinch (distorção incompressível). Pode-se dizer que o plasma se move entre as linhas de força sem distorcê-las. Longe da superfície do pinch o campo não é perturbado. Na prática o passo não pode exceder o comprimento L do próprio pinch. A condição de estabilidade leva ao valor crítico da corrente de descarga I_c ,

$$I_c = \sqrt{c} \frac{r^2 B_z}{L} . \quad (4.5)$$

Se a corrente de descarga excede este valor crítico então a instabilidade surge. Este resultado foi encontrado independentemente por Kruskal *et al.* (1958) e por Shafranov (1957) . A corrente crítica I_c é sempre denominado de limite de Kruskal - Shafranov. No Cap.5 este critério será novamente abordado quando será tratado o sistema toroidal.

Até aqui, os casos tratados representam uma extrema idealização. Se se tomar em consideração o sistema de pinch com contorno difuso então o critério de estabilidade dependerá essencialmente dos perfis de distribuição de corrente , dos campos magnéticos e da pressão de plasma sobre a seção do pinch.

A estabilidade de um pinch difuso pode ser melhor investigada por meio do princípio de energia que leva a equação de Euler. Esta equação é singular nos pontos $r = r_s$, onde a quantidade F da Eq. (2.28) se anula, ou , $\mu(r) = -k/m$. Uma expansão da equação de Euler ao redor de tais pontos leva ao critério de Suydam (1958),

$$\frac{dp}{dr} + \frac{rB_z^2}{8} \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right)^2 > 0 , \quad (4.6)$$

onde r é a distância ao eixo do pinch e $\mu = \frac{B_\theta}{rB_z}$. Este critério, como foi derivado por Suydam, é só uma condição necessária , Newcomb (1960) formulou por minimização da $W(\xi)$ a condição necessária e suficiente para a estabilidade. A minimização com respeito a ξ_θ e ξ_z reduz W na forma quadrática em somente ξ_r e $d\xi_r/dr$. Em consequência, o seguinte teorema é formulado:

O pinch é estável para todos os valores de m e k se e somente se é estável para $m = 1$, $-\infty < k < +\infty$ e para $m = 0$ no limite para $k \rightarrow 0$.

Na teoria de estabilidade - σ , o critério de Suydam não possui seu sentido próprio, pois a equação de sigma - Euler não é singular para $r = r_s$ (Goedbloed e Sakanaka (1974-I)). Nesta referência, os autores têm aventado que tal critério é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade cujos modos estão suficientemente localizados nas direções perpendiculares ao campo magnético. Tal localização é obtida pela superposição de modos com o número de nós em direções radial, n_s , azimutal, m , e longitudinal, k . Na Fig.(4.1) diferentes autofunções são mostradas para $m = 1$ com vários números de nós para um perfil de equilíbrio que é Suydam estável. Fixando n_s ($n_s = 0$) e aumentando m obtém-se uma sequência de autofunções como é mostrada em Fig. (4.2). A dependência da razão de crescimento de instabilidades, γ , em n_s e m é mostrada nas Figs.(4.3)-(4.4). A razão de crescimento é uma função decrescente de n_s , de acordo com a propriedade Sturmiana. A outra evidência, como mostra a Fig.(4.4), é que o γ aumenta, inicialmente, quando m cresce e o pinch é estável para $m \gg 1$, pois, o critério de Suydam é um critério necessário de estabilidade para $m \rightarrow \infty$. De maneira usual a razão de crescimento de instabilidades é uma função decrescente de m , tal que na análise de estabilidade tem que só testar para modos de m pequenos.

$$P(r) = .02 \exp [10.r^2 - 32.r^4]$$

$$\mu(r) = .1 \exp [-3.r^2 + 1.r^4]$$

$$R = 10. \quad m=1 \quad n=-1 \quad a=.2$$

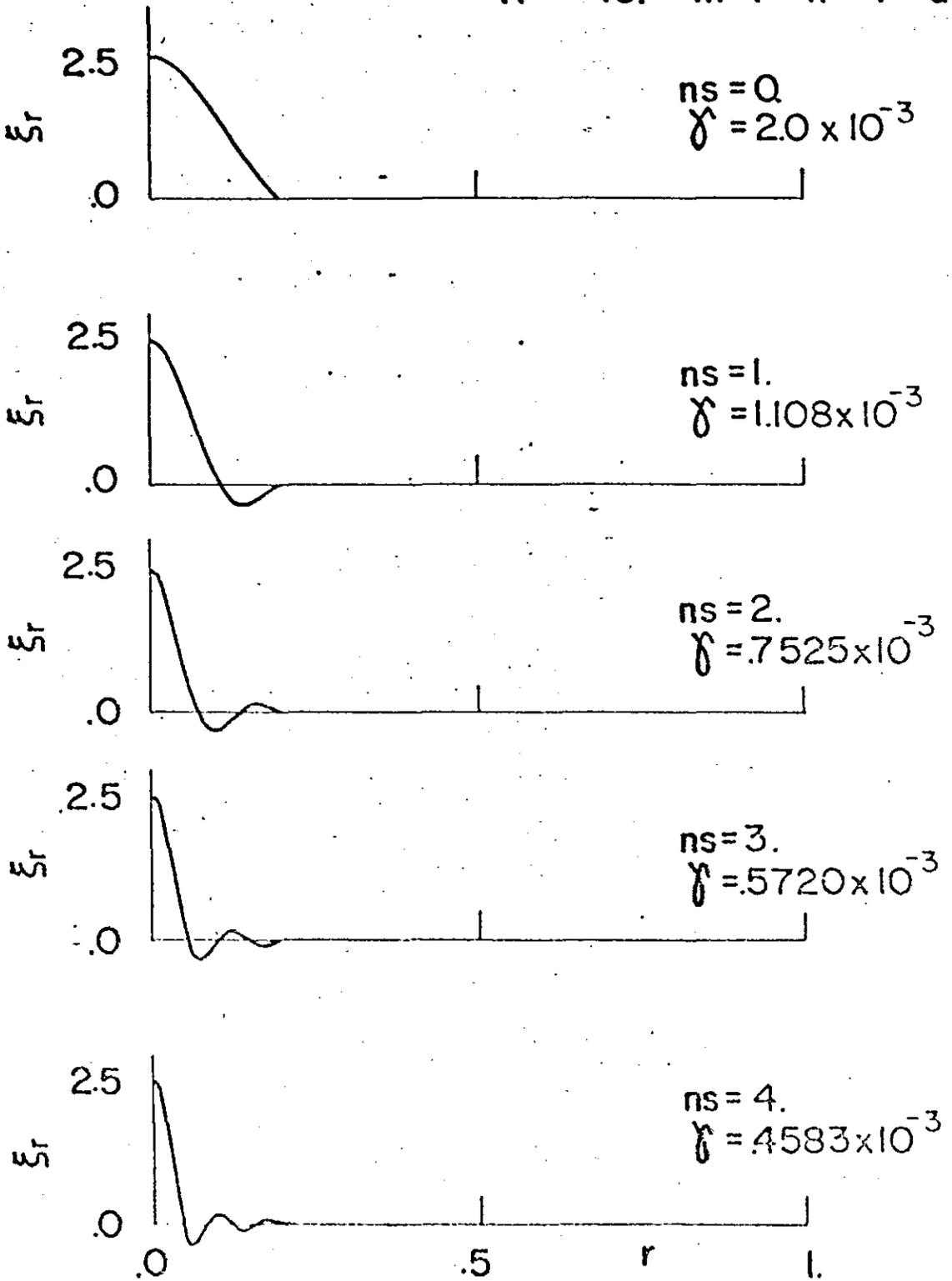


Fig. 4.1 Modo central para número de nós crescente.

$$P(r) = .02 \exp[-32 \cdot r^4]$$

$$\mu(r) = \mu_0 \exp[-3 \cdot r^2 + 1.15 r^4]$$

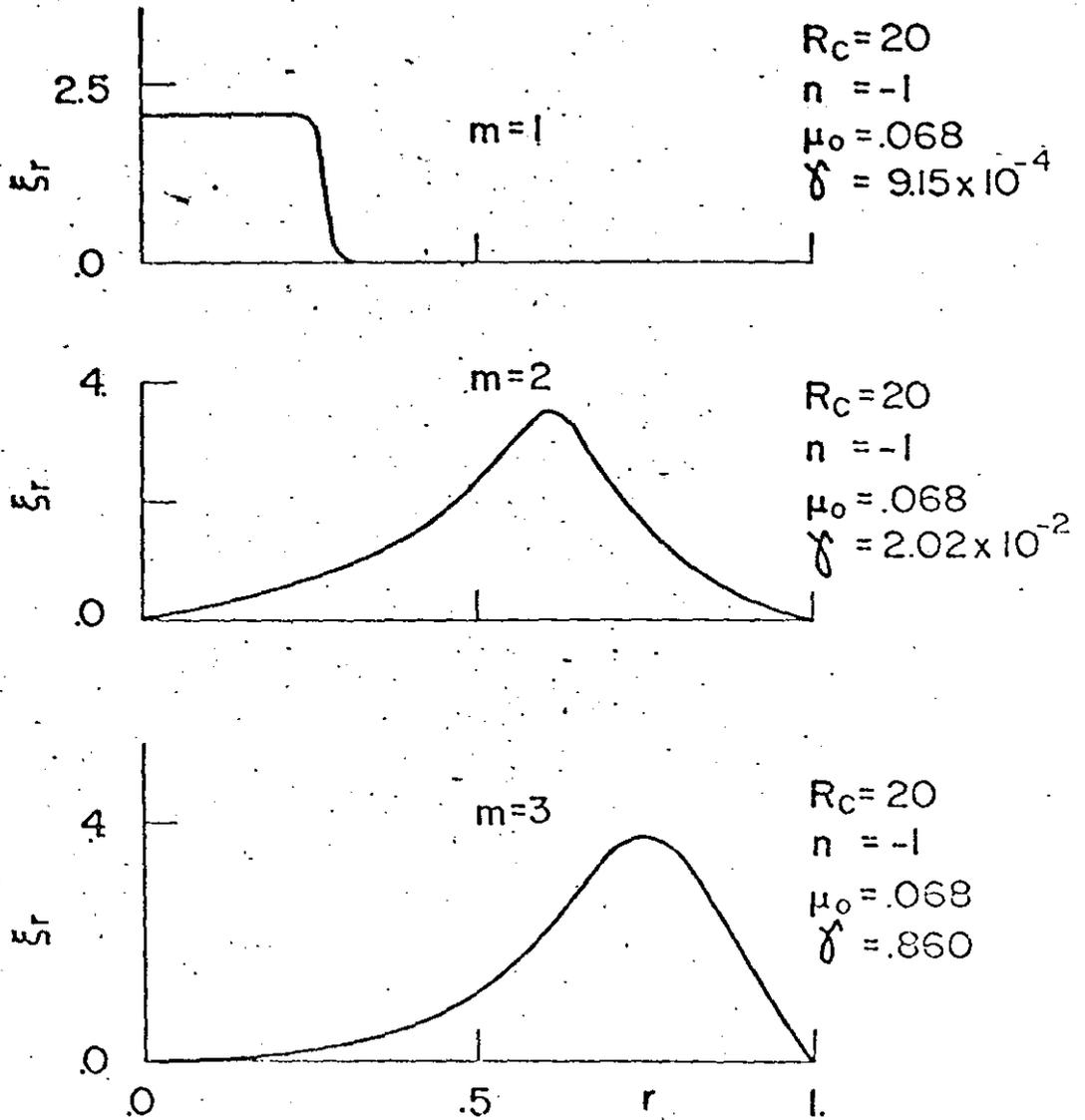
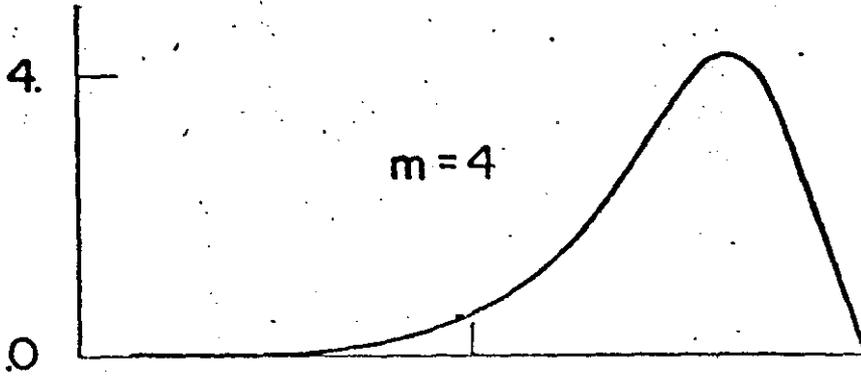
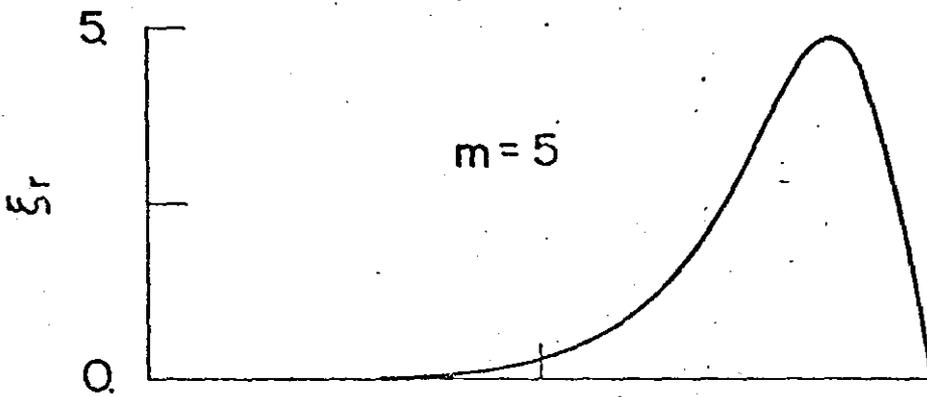


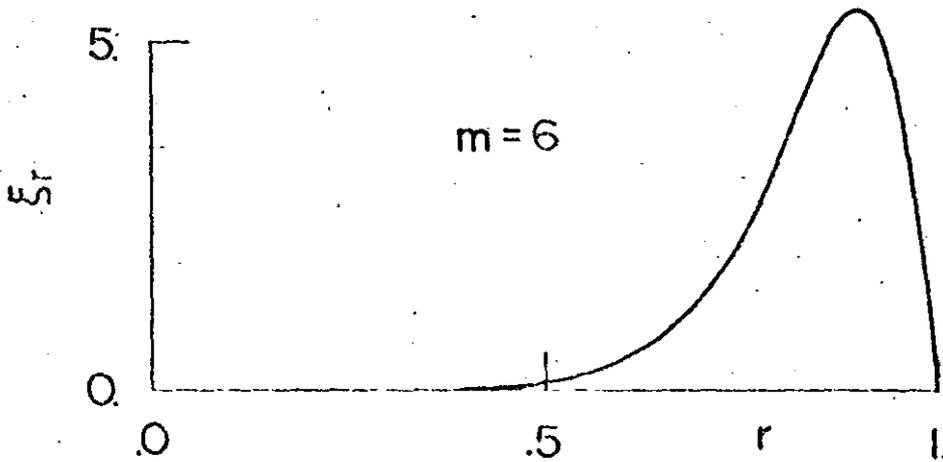
Fig. 4.2a Perfis de autofunções ξ_r para modo kink interno com $m=1, 2$ e 3 e $n_s=0$.



$R_c=20$
 $n=-1$
 $\mu_0=.068$
 $\gamma=.101$



$R_c=20$
 $n=-1$
 $\mu_0=.068$
 $\gamma=4.83 \times 10^{-2}$



$R_c=20$
 $n=-1$
 $\mu_0=.068$
 $\gamma=3.46 \times 10^{-2}$

Fig. 4.2b Perfis de autofunções ξ_r para modo kink interno com $m = 4, 5$ e 6 e $n_s = 0$.

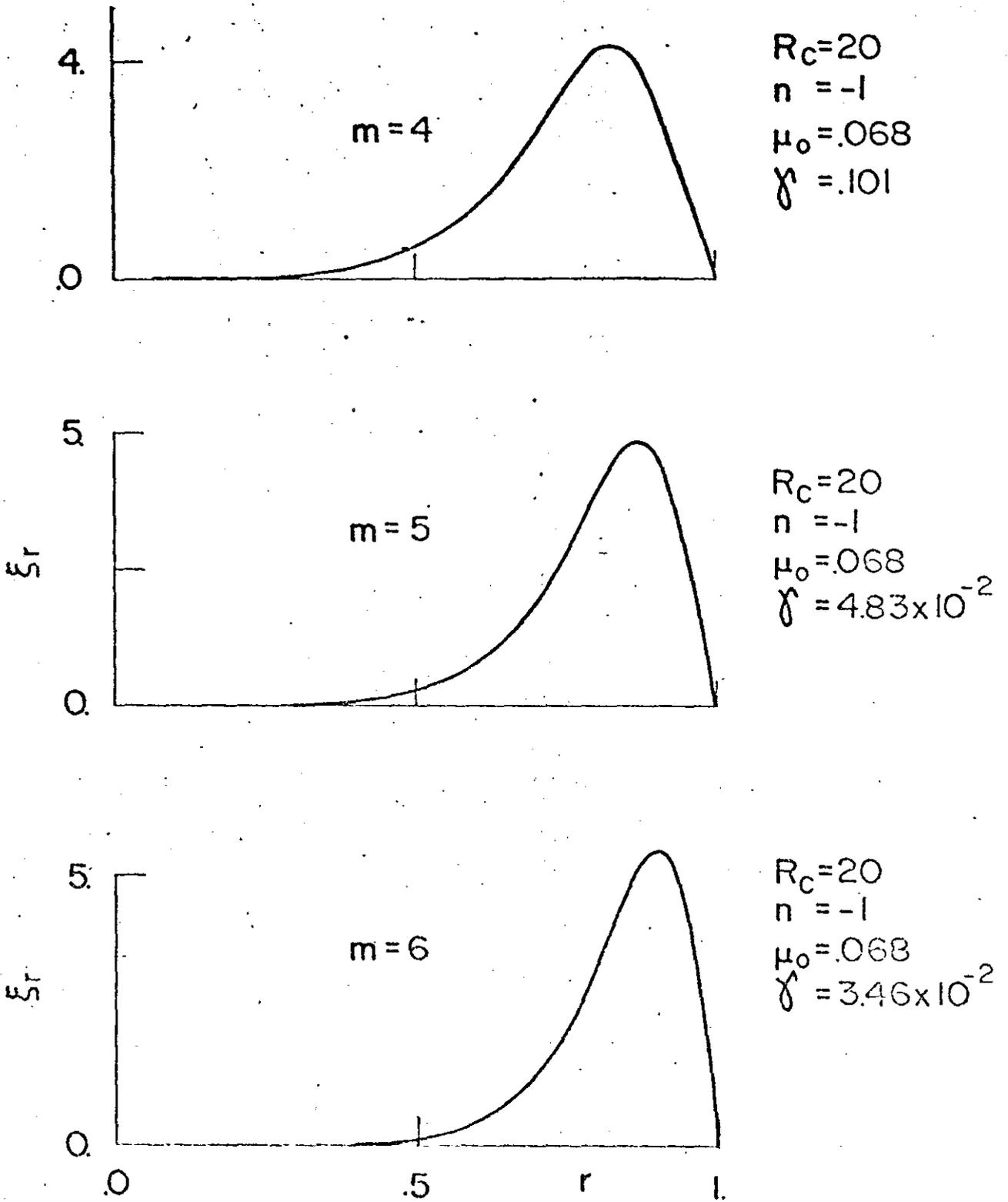


Fig. 4.2b Perfis de autofunções ξ_r para modo kink interno com $m = 4, 5$ e 6 e $n_s = 0$.

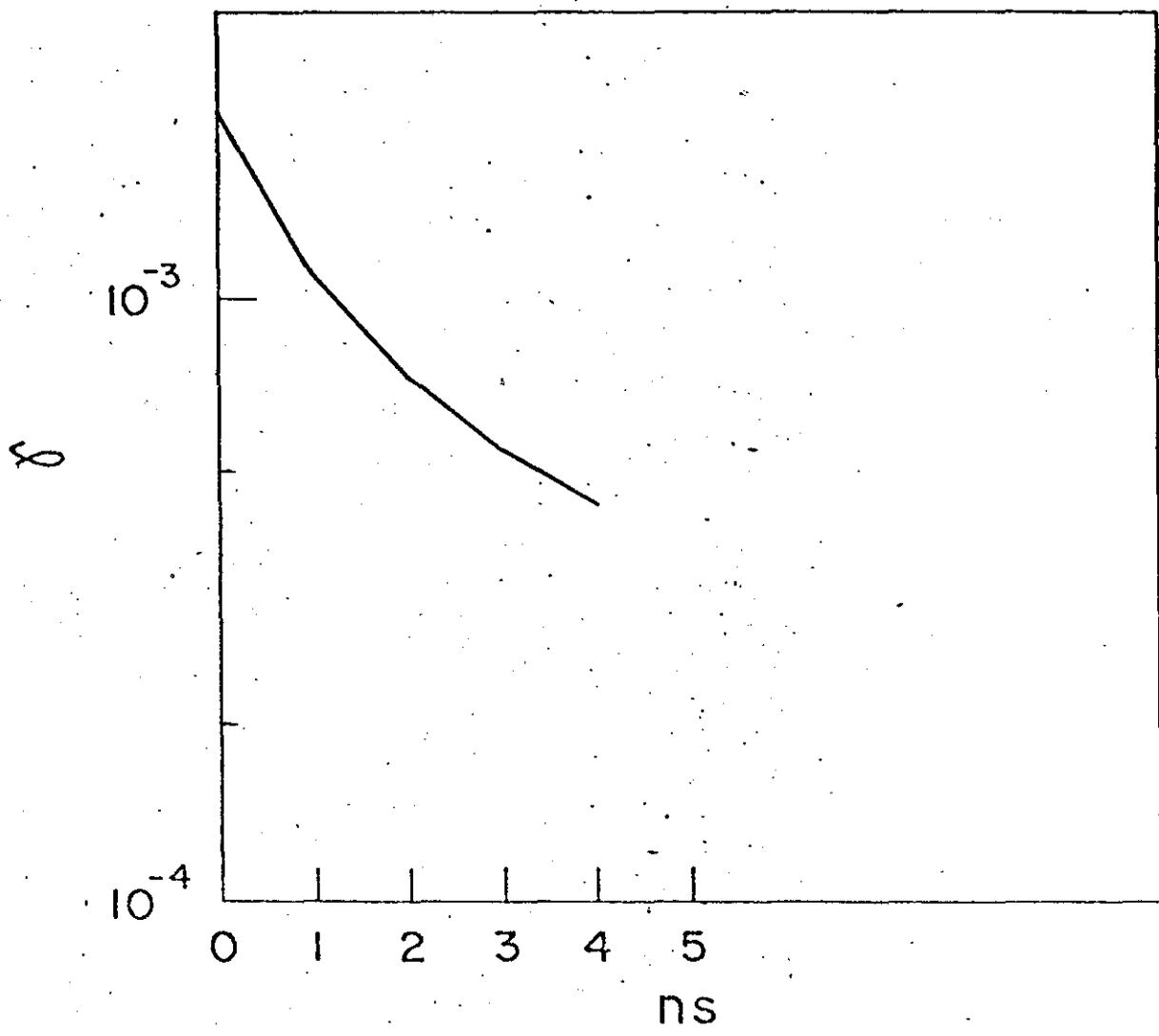


Fig. 4.3 Razão de crescimento de modo central versus ns para $m = 1$ e $R_c = 10$.

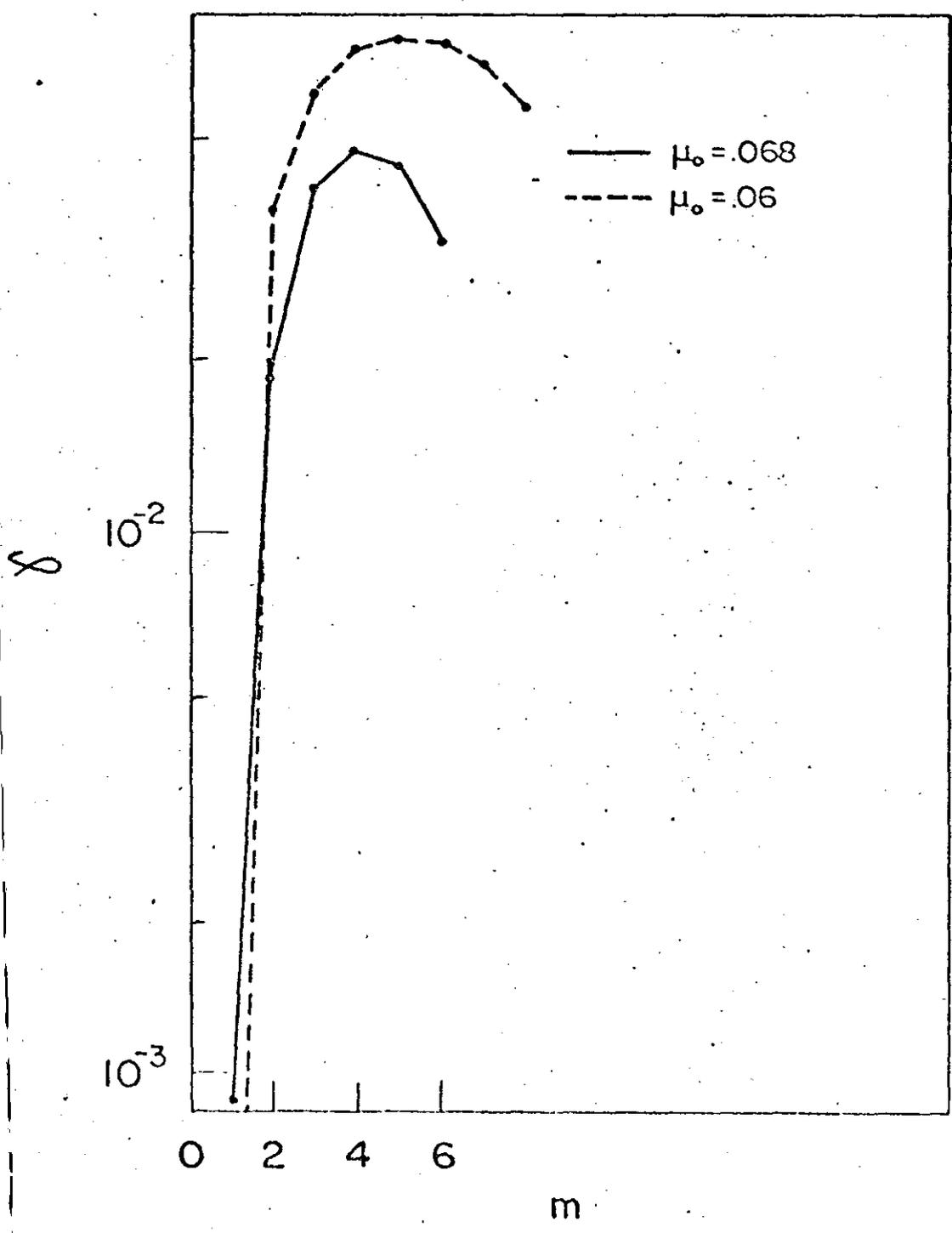


Fig. 4.4 Razão de crescimento de modo kink interno versus m para $n_s = 0$ e $R_c = 20$.

4.2 INSTABILIDADE KINK : MODO $M = 1$

As perturbações de modo azimutal $m=1$ são denominadas modo kink e a sua estabilidade foi objeto de numerosos trabalhos de pesquisa. Na seção anterior, descreveu - se o mecanismo pelo qual o modo se torna instável e a maneira de como estabilizá - lo. Neste ítem, o modo kink é analisado com mais cuidado. É classificado em três classes : o modo kink interno, o modo kink central e o modo kink externo.

O modo kink interno foi previsto teoricamente por Shafranov (1970) em tokamaks de baixo- β . Define - se β a razão entre a pressão cinética, $p = 2nk_b T$, do plasma com a pressão do campo magnético,

$$\beta = \frac{p}{\frac{B^2}{2}}$$

Designa - se baixo - β aos valores menores do que 0.01 e alto - β aos valores correspondente entre 0.1 a 1.0 (máximo valor possível) .

Esta instabilidade se caracteriza principalmente pelo fator de segurança $q(r)$ ($= \frac{rB_z}{R_c B_\theta}$) ser monotonicamente crescente e pelo vetor de deslocamento $\vec{\xi}$ ser constante para $r \leq r_s$ e zero para $r > r_s$. O ponto r_s é o ponto de singularidade onde $\mu(r_s) = -k$ ou $q(r_s) = 1$. A instabilidade é possível só por causa da presença de ponto singular , por isso a instabilidade não ocorre para $q_{\min}(r) = q(0) > 1$. Estas considerações teóricas foram encontrados numericamente como mostra a Fig .

(4.5b) . Os perfis de equilíbrio, pressão, $p(r)$, o inverso do passo das linhas de campo magnético helicoidal, $\mu(r)$, e a densidade de corrente longitudinal, $j_z(r)$, se caracterizam por serem monotonicamente decrescente.

Experiências recentes em ST tokamak de Princeton (Goe - ler *et al.* (1974)) mostram que um modo instável pode ocorrer quando o fator de segurança cai abaixo de unidade na vizinhança do eixo magnético. As medidas das características desta instabilidade estão de acordo com as previsões teóricas do modo kink interno.

Um outro modo kink, o que foi denominado de modo kink central é mostrado na Fig. (4.5a) . Este modo possui as mesmas propriedades de modo kink interno; no entanto, o ponto singular r_s está localizado muito próximo do, ou sobre o, eixo magnético, e $q(r = 0) = 1 + \epsilon$, onde ϵ é pequeno. Este modo instável tem surgido para $\frac{R}{a} < 15$ em contraste com o modo kink interno que só aparece para $\frac{R}{a} > 15$, para os perfis de equilíbrio considerado.

Finalmente, o terceiro modo kink aparece para um equilíbrio de tokamak de alto $-\beta$ (Sakanaka e Goedbloed (1974-II)). Este modo instável é obtido para perfis de $\mu(r)$ crescente. Tais configurações têm distribuições de corrente diferentes daquelas de um tokamak de baixo $-\beta$. Num tokamak de baixo $-\beta$ a corrente longitudinal é alta no eixo afim de criar um perfil de μ decrescente com bastante cisalhamento das linhas de força para a estabilidade. Em tokamak de alto- β , o cisalhamento necessário é criado de maneira oposta, isto é, pelas densidades de corrente baixas no eixo e altas na região exterior. A Fig. (4.6) mostra o perfil de equilíbrio que

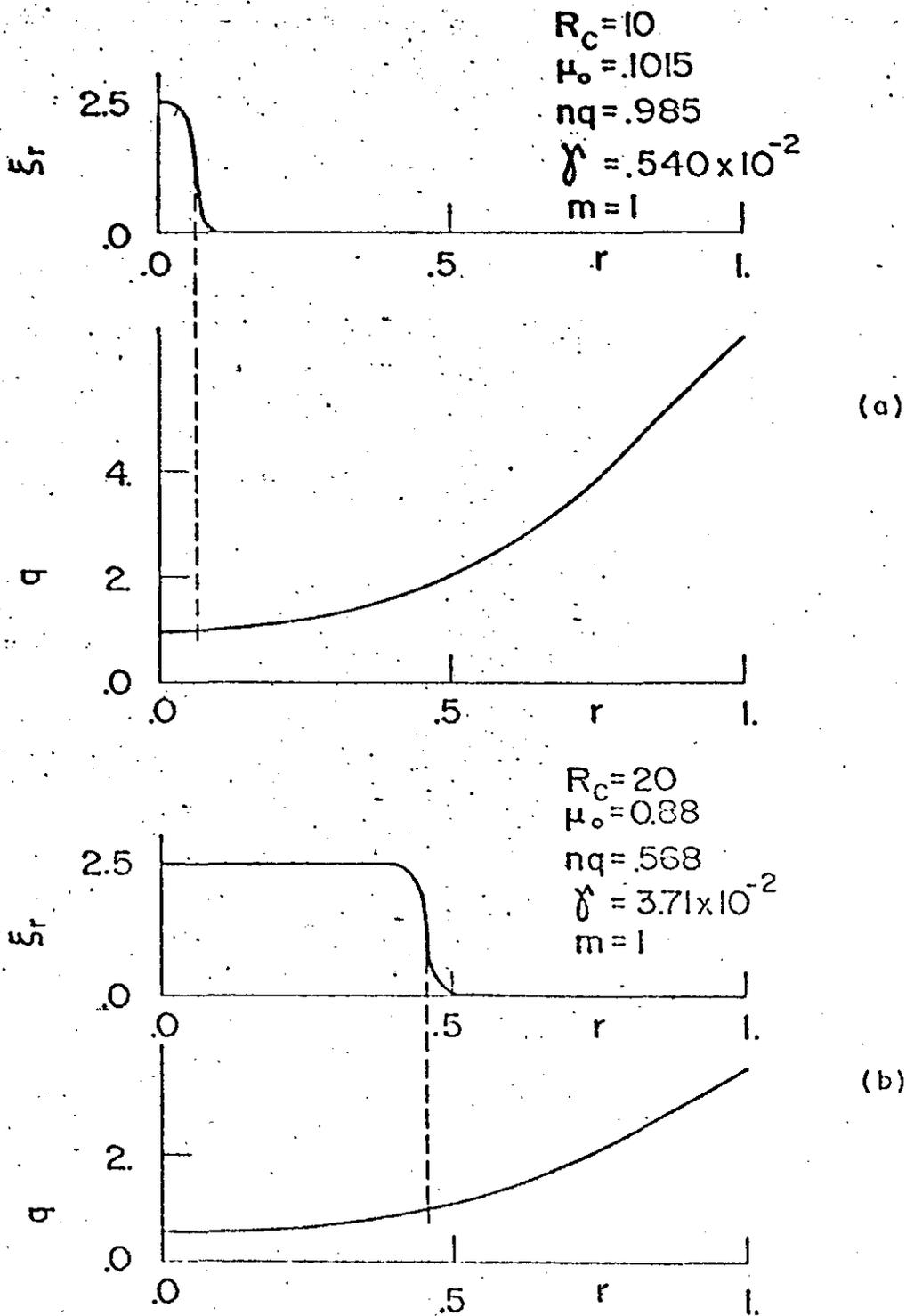


Fig. 4.5 Autofunção, ξ_r , e fator de fuga, q , para modo kink. (a) modo kink central. (b) modo kink interno.

$$P(r) = 0.2 \exp[-32r^4]$$

$$\mu(r) = 0.025 \exp[3r^2 - 2r^4]$$

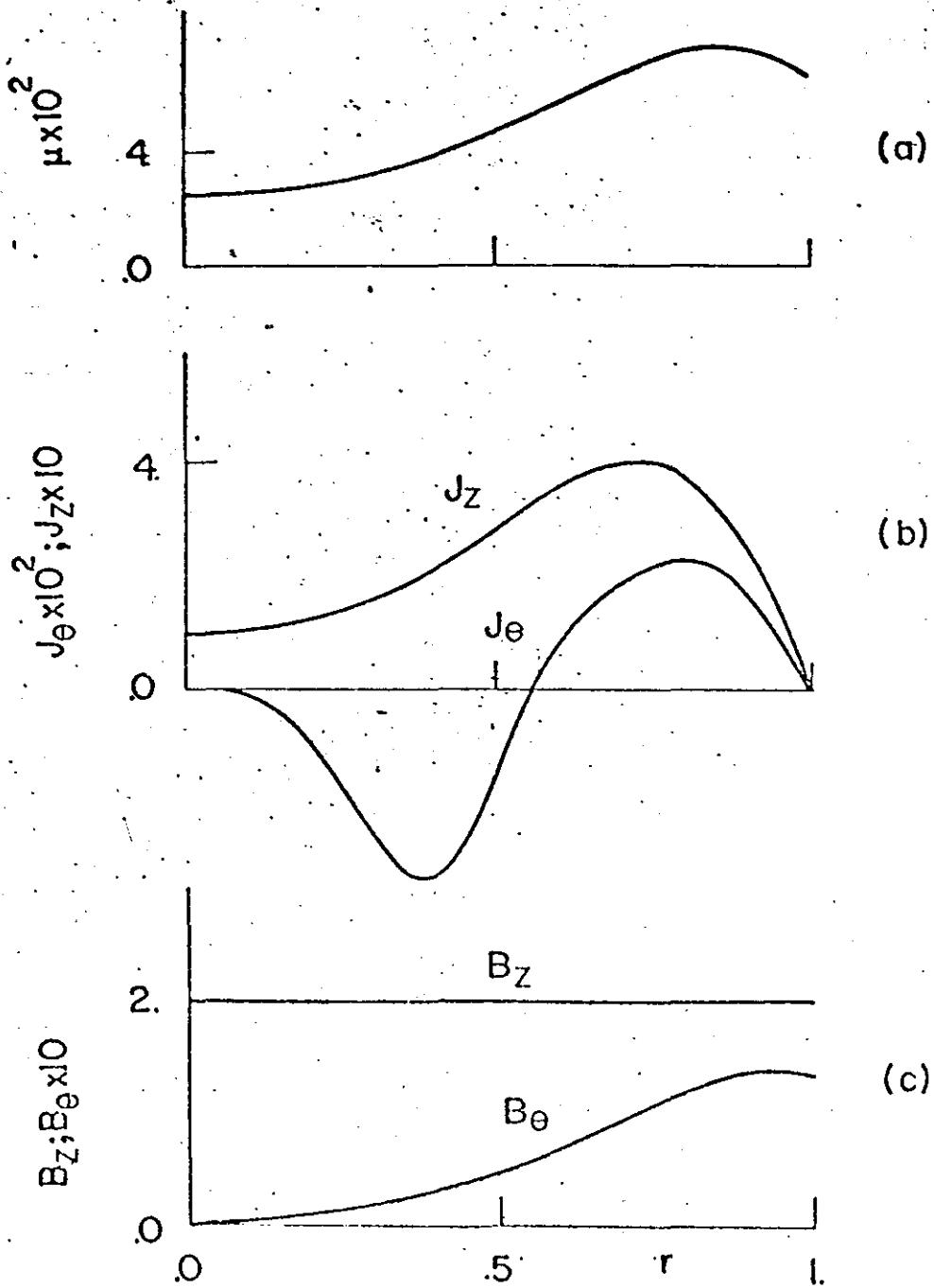


Fig. 4.6. Perfil de tokamak alto - β . $\beta=1$. (a) perfil do passo magnético helicoidal μ . (b) perfis das densidades de correntes toroidal, J_z , e poloidal, J_θ . (c) perfis dos campos magnéticos toroidal, B_z , e poloidal, B_θ .

é mais ou menos uma imagem oposta daquele de um tokamak de baixo- β . Pela sua característica, a instabilidade de modo $m=1$ para tokamak de alto- β é denominado de instabilidade de modo kink externo.

A estabilidade de tal configuração foi primeiro mostrada para um modelo de contorno abrupto com uma função de $\mu(r)$ (Schuurman *et al.* (1969)). Num sistema de pinch difuso como da Fig. (4.6) uma prova tem sido dada para a instabilidade de modo kink segundo a qual o pinch sempre será instável se o perfil de μ possui um mínimo (Robinson (1971)). E uma classificação de perfis de equilíbrio de estabilidade σ foi dada por Sakanaka e Goedbloed (1974-II).

Concluindo, uma discussão detalhada dos resultados numéricos para a instabilidade de modo kink interno e central será o objeto do próximo capítulo.

5 ESTABILIDADE DE PLASMA TOROIDAL

O sistema toroidal do tipo tokamak é de grande interesse do ponto de vista de confinamento de plasma de alta temperatura por um campo magnético.

O tokamak foi concebido por L.A. Artsimovich na Rússia, em 1964. Um tokamak possui um campo magnético toroidal intenso produzido por um enrolamento externo e um campo poloidal produzido por uma corrente no próprio plasma na direção longitudinal.

Em tokamaks, o mais recente valor para o produto de densidade com o tempo de confinamento de energia chegou a 2×10^{13} cm^{-3}seg . em Alcator (Fusion Forefront (1977)). Este novo valor recorde está a menos de um pequeno fator do valor de 6×10^{13} referido como critério de Lawson para a ignição de fusão.

5.1 ESTABILIDADE DE TOKAMAK DE BAIXO β

Para estudar a estabilidade de um tokamak é necessário que se faça primeiro o estudo de equilíbrio de um sistema toroidal e então o da estabilidade.

A condição para equilíbrio toroidal envolve a pressão e a magnitude do campo magnético poloidal, B . Entretanto não existe uma limitação fundamental do valor de β em equilíbrios toroidais. Por considerações práticas se coloca um limite convenientemente escrito como (Callen e Dory (1972))

$$\beta_{\theta} < A, \quad (5.1)$$

onde A é a razão de aspecto de toróide, e

$$\beta_{\theta} = \frac{2p(0)}{B_{\theta\max}^2} \quad (5.2)$$

Este resultado parece bastante plausível pois ele expressa o fato de que o campo B_{θ} , o qual é comprimido contra a parede, seria suficientemente grande para contrabalançar a força de expansão do plasma toroidal.

O principal efeito estabilizante da geometria toroidal é a eliminação dos modos $m = 1$ com comprimento de onda maior do que o perímetro do toróide. Esta eliminação pode ser verificada ao introduzir a condição de periodicidade (Kruskal et al. (1958))

$$k = \frac{n}{R_c} \quad (5.3)$$

onde n é o número de onda toroidal e R_c é o raio maior do toróide.

O limite de Kruskal-Shafranov para tokamaks de baixo β (a máxima corrente toroidal admissível para a estabilidade em conexão com a helicoidicidade das linhas de campo magnético ao redor do eixo magnético) resulta da aplicação da condição de periodicidade, e é expressa por

$$\left| \mu R_c \right| < 1 \quad \text{ou} \quad \left| q \right| > 1 \quad (5.4)$$

Desde que μ está relacionado com as correntes superficiais, esta condição coloca um limite ao corrente total I_c fluindo na direção toroidal. Em termos da corrente I_c , a condição (5.4) torna-

$$\frac{2I_c R_c}{r^2 B_z} < 1 . \quad (5.5)$$

Esta restrição na corrente toroidal é prejudicial para tokamaks porque limita a temperatura a ser obtida por meio de aquecimento ôhmico. Não é óbvio que o valor de μ deve ser substituído na Eq. (5.4) para uma configuração difusa. No entanto, em geral, toma-se o valor de μ no centro magnético do plasma. É necessário enfatizar aqui que esta limitação se aplica só tokamaks de baixo β .

Em vez de tomar a condição de periodicidade, a análise da estabilidade será mais completa se considerar a geometria toroidal.

A curvatura toroidal é importante para modos localizados. Isto é evidente pelo critério de Suydam generalizado para um plasma toroidal. Esta generalização foi obtida primeiro por Mercier (1960). A representação mais clara deste critério como dada por Shafranov e Yurchenko (1960) é mais adequada,

$$\frac{1}{4} \left(\frac{q'^2}{q} \right) + \frac{2p'}{rB_z} (1 - q^2) > 0 . \quad (5.6)$$

No limite cilíndrico, $R_c \rightarrow \infty$, resulta que $q^2 \rightarrow 0$ e o critério se reduz ao de Suydam para plasma cilíndrico. Como em maioria dos casos, $p' < 0$, o critério de suficiência para estabilidade contra os modos $m \neq 0$ é obtida,

$$q^2 > 1 . \quad (5.7)$$

Perto do eixo magnético este critério é necessário porque o primeiro termo da Eq. (5.6) é desprezível comparado com o

segundo termo se $p'(r \rightarrow 0) \propto r$. É importante notar que neste caso o critério de estabilidade expressa em (5.7) pela curvatura toroidal é independente da magnitude de p' .

Um fato curioso deste critério é que ele coincide com o limite de Kruskal - Shafranov, Eq.(5.4), embora tenham sido deduzidos com considerações completamente diferentes. O critério acima só vale para plasma toroidal cujas superfícies magnéticas sejam circulares.

No limite cilíndrico o critério de Mercier - Shafranov - Yurchenko, (5.6), se reduz ao critério de Suydam dada pela desigualdade (4.6), a qual é expressa por

$$S > 0 \text{ para a estabilidade} \quad (5.8)$$

onde a S é a função de Suydam expressa por :

$$S = 1 + \frac{8p'}{rB_z} \left(\frac{\mu}{\mu'} \right)^2 \quad (5.9)$$

Embora este critério fora deduzido ao caso cilíndrico, verificou-se que continua importante no caso toroidal. Em um toróide ; $S > 0$ ou $S < 0$ resulta em modos instáveis com comportamentos diferentes. O critério (5.9) é válido para o caso de $p'(r \rightarrow 0) \propto r$ mas não o é para $p'(r \rightarrow 0) \propto r^3$.

Se $p'(r \rightarrow 0) \propto r^3$ então um novo critério rege a estabilidade. Este critério foi derivado por Galvão et al.(1977) e é expresso por

$$(\mu_0 a)^2 \frac{\beta_{\theta 0} a^4 - \frac{a^2 \mu''}{2\mu} \Big|_{r=0}}{\left(\frac{a^2}{2} \right)^2 \left(\frac{\mu''}{\mu} \right)^2 \Big|_{r=0}} < - \frac{9}{4} \quad (5.10)$$

tal que $\beta_{\theta 0} = \frac{2\bar{p}(0)}{(B_{z0} k a)^2}$, a é o raio da coluna de plasma e α_4 é

o coeficiente do perfil de pressão dada por $p(r) = p_0 \{ 1 + \alpha_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \alpha_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \}$.

5.2 CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é verificar como a toroidicidade afeta a estabilidade de modos instáveis de um tokamak de baixo β .

Para que isto possa ser feito, é necessário variar um certo parâmetro característico da toroidicidade, como por exemplo o raio maior do toróide R_c , e determinar a variação da razão de crescimento. Sendo $A = R_c/a$ e $k = n/R_c$, a variação de R_c implica na variação de A e também na variação de k ou n , dependendo do que fixar seja n ou seja k . Há então dois casos a serem considerados.

(a) VARIAÇÃO DE R_c COM n FIXO

Neste caso o número de ondas inteiras ao longo do toróide é mantido fixo e variando R_c , Fig.(5.1a). Uma versão diferente é manter R_c constante e variar o raio menor a , como na Fig.(5.1b), mantendo n fixo. A comparação é a mesma nestes dois casos, exceto que como o tempo de Alfvén, a/V_A , varia proporcionalmente com a , na segunda versão é necessário renormali

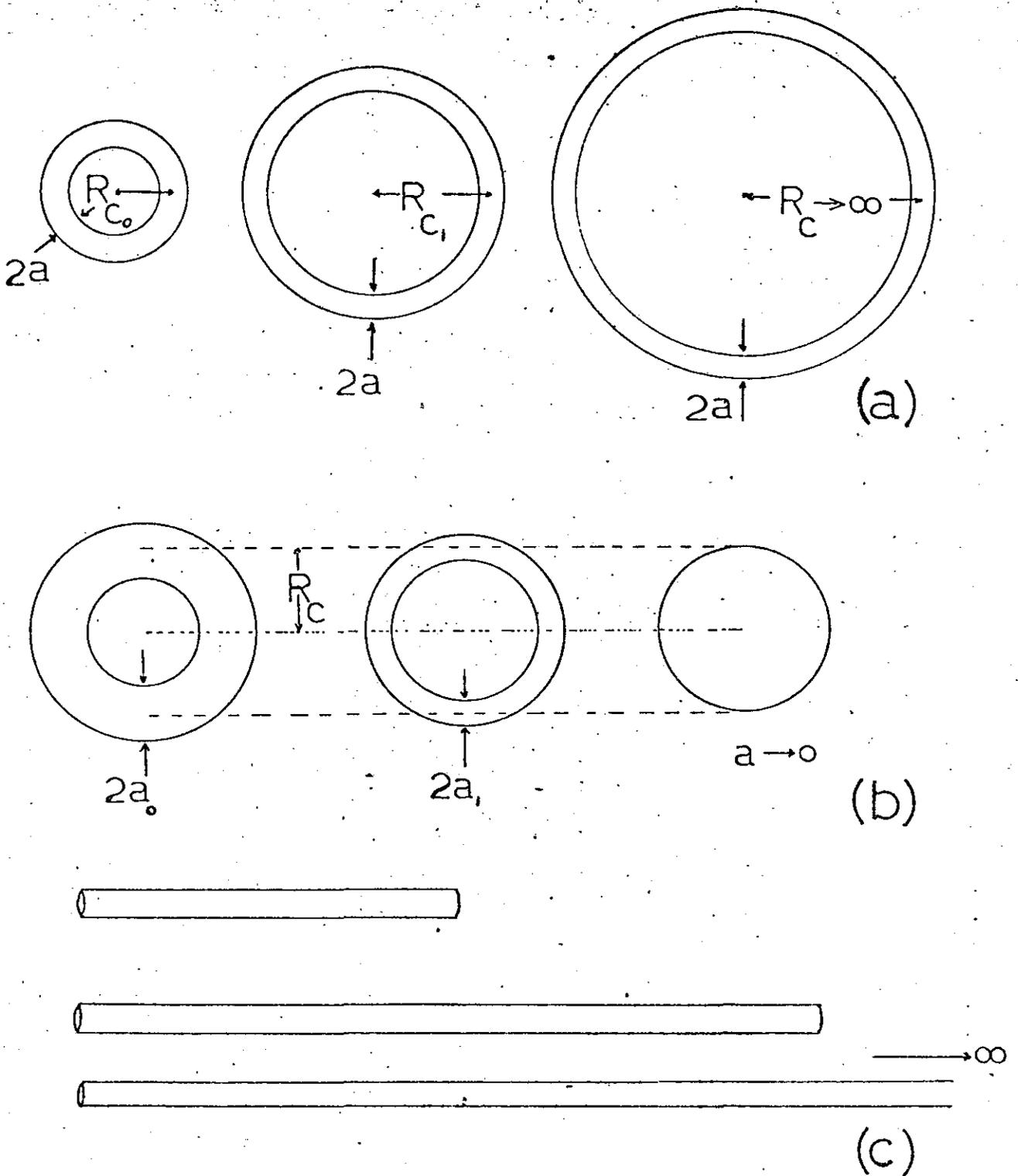


Fig. 5.1 Critério de comparação. Variação de R_c com n fixo. (a) e (b) comparação entre toróide "gordo" com o toróide "magro", sendo (a) normalizado para $a=1$ e (b) normalizado para $R_c=1$. (c) comparação entre um toróide e um toróide linearizado.

zar o tempo. Normalmente as razões de crescimentos são normalizados em relação a este tempo característico de Alfvén, a não ser nos casos explicitamente citados no texto.

Como se pode ver na Fig.(5.1a e b) o limite de a tender a zero o toróide tende a um anel unidimensional e não converge a um cilindro. Portanto, não se pode esperar que ao variar R_c ($R_c \rightarrow \infty$) ou a ($a \rightarrow 0$) a razão de crescimento convirja ao valor cilíndrico. Esta é (chamado caso a.1) a comparação entre um toróide "gordo" de um toróide "magro".

Entretanto, pode - se também comparar um toróide com um cilindro truncado com comprimento igual a $2R_c$ contendo o mesmo número de ondas n , Fig.(5.1c). Esta (chamado caso a.2) é a comparação entre um toróide e um "toróide linearizado".

(b) VARIAÇÃO DE R_c COM k FIXO

Neste caso a variação de R_c ($R_c \rightarrow \infty$) significa em tomar um pedaço de toróide contendo uma onda e gradualmente indiretá-lo até se tornar reto, Fig.(5.2). No limite de R_c tendendo a infinito o toróide se torna um cilindro.

A diferença fundamental entre este caso e o anterior reside no fato de que no limite de $R_c \rightarrow \infty$ a relação entre o comprimento de onda e o raio maior R_c se torna zero. No caso (a), esta relação é constante. Se esta relação se tornar zero, o toróide se reduz a um cilindro como no caso (b), o que não acontece no caso (a).

Outro fator importante no critério de comparação é o

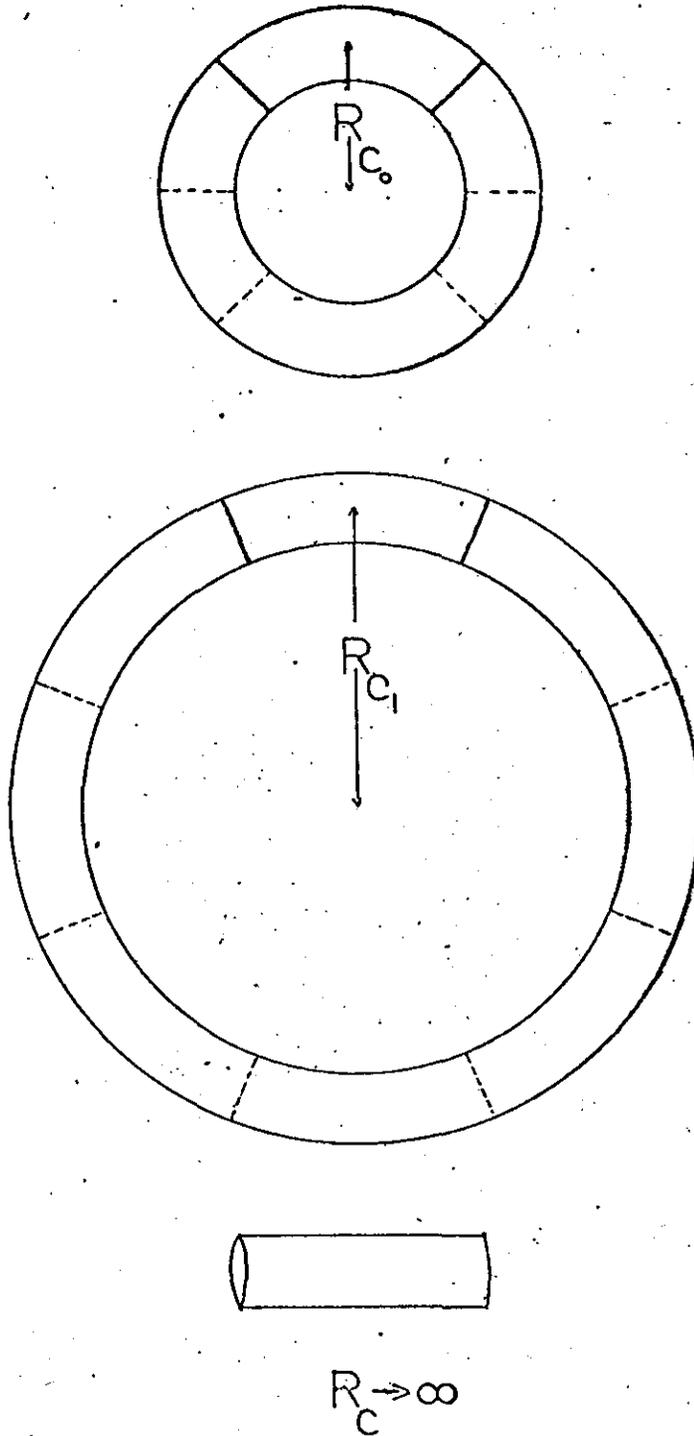


Fig. 5.2 Critério de comparação. Variação de R_c com k fixo. Debaixo para cima, uma onda completa encurva-se mais ao diminuir o R_c .

deslocamento do máximo valor da razão de crescimento , $\gamma = \gamma(nq)$, quando se varia a razão de aspecto, a comparação deve ser feita entre os máximos e não entre $\gamma(nq)$ para $|nq|$ fixos. É importante também considerar o espectro instável $\gamma(nq)$ determinado sem variar o cisalhamento, ou seja, a derivada logarítmica de μ .

5.3 VARIAÇÃO DE ESTABILIDADE COM A RAZÃO DE ASPECTO COM n FIXO

Nesta e na próxima seção serão apresentados resultados numéricos da resolução da equação de Euler - Lagrange dada pela equação (2.51) com condições de contorno (2.53). Foram estudadas as variações da razão de crescimento de modos instáveis variando o A mas fixando n (seção 5.3) ou fixando k (seção 5.4).

Nesta seção o único valor do n estudado foi $n = -1$ por ser este o modo mais importante. Este modo possui somente um comprimento de onda ao longo do eixo toroidal. Foram considerados os modos kink central e kink interno que possuem comportamento bastante diferentes frente a variação da razão de aspecto.

No caso de kink central observou-se que há uma diferença de comportamento dependendo do sinal da função S , portanto, foi investigada a estabilidade dos equilíbrios com $S > 0$ e $S < 0$.

Num equilíbrio em que $S > 0$ o perfil de pressão pode ser expresso por $p_0 + \alpha r^2 + \beta r^4$ onde $\alpha > 0$ na vizinhança de

$r = 0$. Isto se consegue fazendo $p \sim \exp(-P_2 r^2 - P_4 r^4)$ com $P_2 < 0$. Se o perfil de pressão for dado com $P_2 > 0$, então a função de Suydam é negativa na vizinhança de $r=0$.

Os perfis de pressão e de $\mu(r)$ que resultam $S > 0$ e $P_2 = 0$ são apresentados na Fig.(5.3a). Os perfis das densidades de corrente toroidal, J_z , e de poloidal, J_θ , são apresentados na Fig.(5.3b). Os perfis do campo magnético toroidal, B_z , (constante) e do poloidal, B_θ , são mostrados na Fig.(5.3c). Neste caso o critério de Mercier-Shafranov-Yurchenko não se aplica para $r \rightarrow 0$.

O teorema de estabilidade $-\sigma$ citado na seção (2.1) fornece uma maneira prática de encontrar as regiões de estabilidade e razão de crescimento para dados valores de $k \neq 0$ e $m = 1$, em termos de $|nq|$ no eixo magnético, onde $|nq| = \frac{k}{\mu_0}$ e $\mu_0 = \mu(0)$.

A Fig.(5.4) mostra as razões de crescimento γ do modo kink central em função de $|nq(0)|$ para várias razões de aspecto.

Os máximos de γ decrescem quando aumenta a razão de aspecto ao mesmo tempo em que os pontos de máximo se deslocam para a direita aproximando-se de unidade. O modo fica σ -estável para valores de R_c superiores a 15, onde $\sigma = 10^{-3}$.

Embora tenha-se dito na seção 5.2 que no caso de n fixo o limite de R_c tendendo a infinito não significa que o toróide se aproxima a um cilindro, é muito interessante notar que o critério de Galvão, válido para um cilindro e expresso

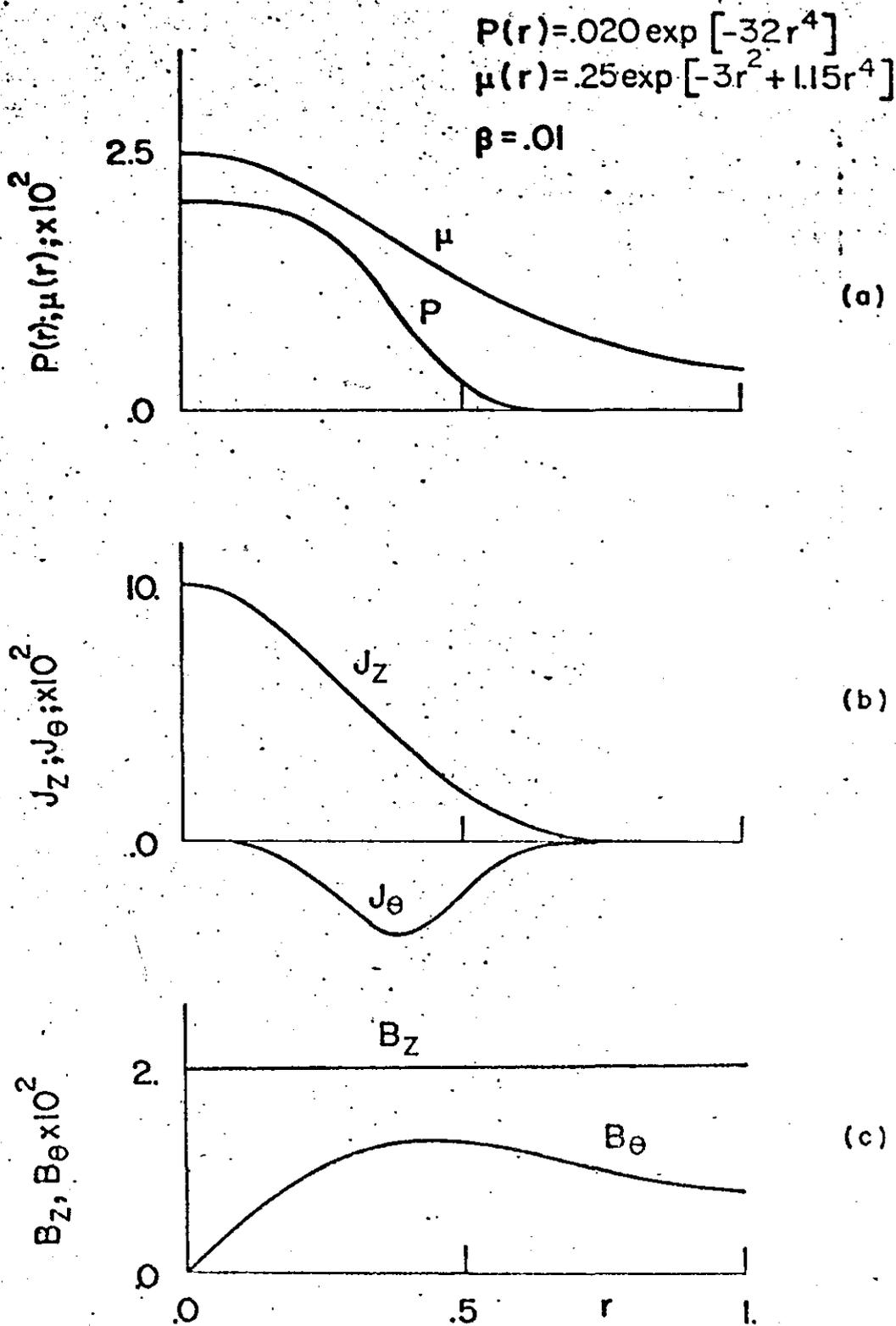


Fig. 53 Perfil de tokamak baixo- β . $\beta = .01$. (a) perfis de pressão, P , e do inverso de passo magnético helicoidal, μ . (b) perfis das densidades de correntes toroidal, J_z , e poloidal, J_θ . (c) perfis dos campos magnéticos toroidal, B_z , e poloidal, B_θ .

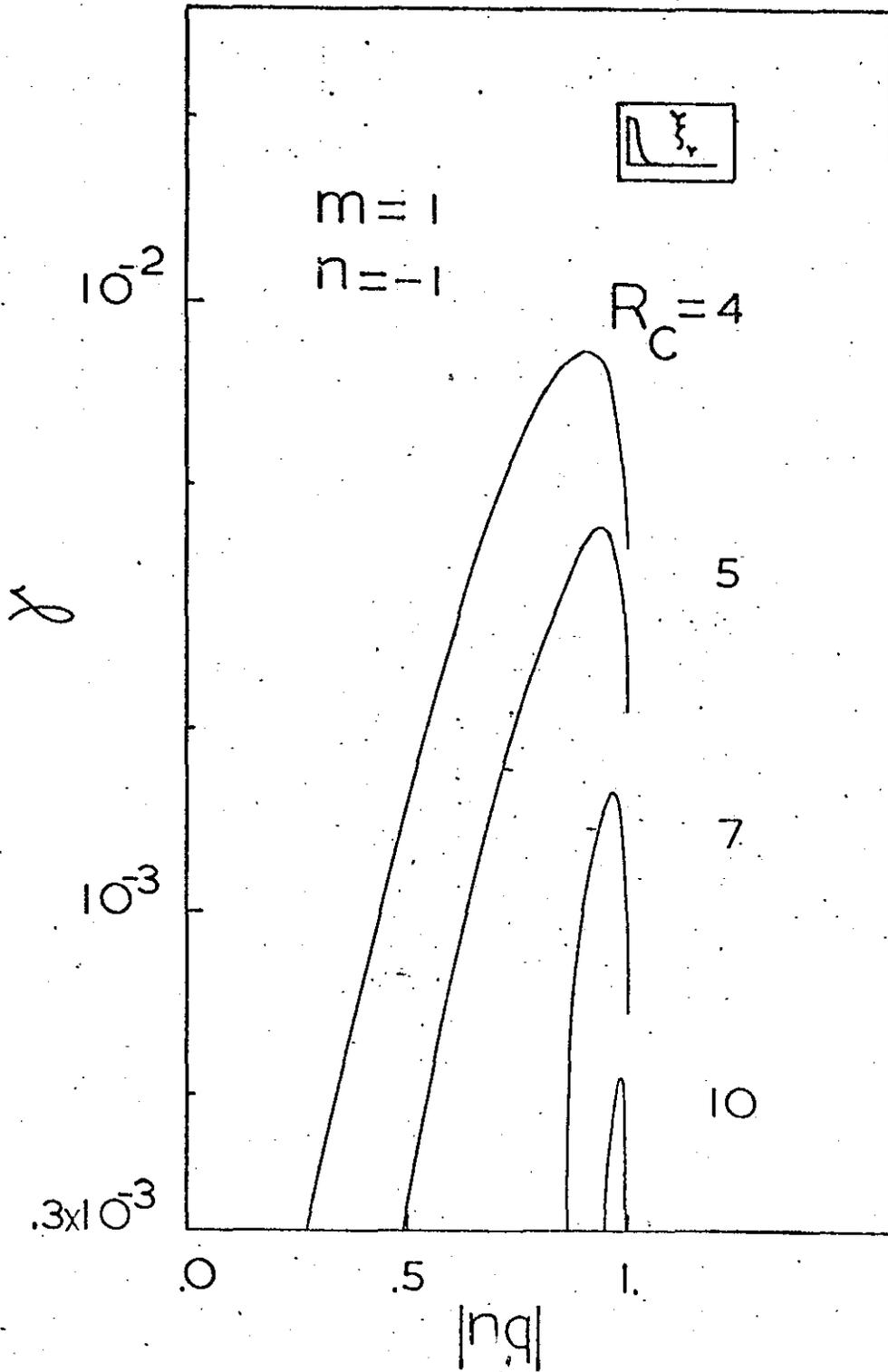


Fig. 5.4 Razão de crescimento de modo kink central versus q no eixo magnético para vários valores de R_c .

em (5.10) é aplicável para os perfis de equilíbrio em estudo. Conforme este critério o modo kink central é estável no cilindro. Este fato foi verificado numericamente quando foi testada a estabilidade deste equilíbrio no programa cilíndrico, para valores de $q(0)$ próximos de um para qualquer valor de k .

No caso do kink interno $|q(0)| < 1$, a sigma - singularidade, r_s , aparece na região de máxima derivada do perfil de pressão. O comportamento do kink interno, quando varia a razão de aspecto, é diferente daquele do kink central. A instabilidade começa a aparecer em $R_e = 15$ e aumenta ao aumentar o R_e .

Os perfis das razões de crescimento para várias razões de aspecto são mostrados na Fig. (5.5) e nota - se uma acentuada variação de γ_{max} em termos da razão de aspecto e aumenta quando R_e aumenta. Os seus máximos estão localizados na vizinhança de $|nq| = 0,57$.

A natureza de efeitos toroidais são melhor verificados nestes resultados pela Fig. (5.6). Neste gráfico são colocados os γ_{max} da sua respectiva razão de aspecto. Percebe-se melhor que no modo kink central para um toróide mais gordo ele é mais instável diminuindo à medida que o efeito toroidal diminui. No entanto, o modo kink interno é estável para um toróide com maior toroidicidade e instabilidade cresce quando o efeito toroidal diminui.

A outra maneira de avaliar a toroidicidade é fixar $|nq|$. Tomaram-se perfis que tenham $S > 0$ e $S < 0$ e em $|nq|=1$ calcularam - se as razões de crescimento para várias razões de

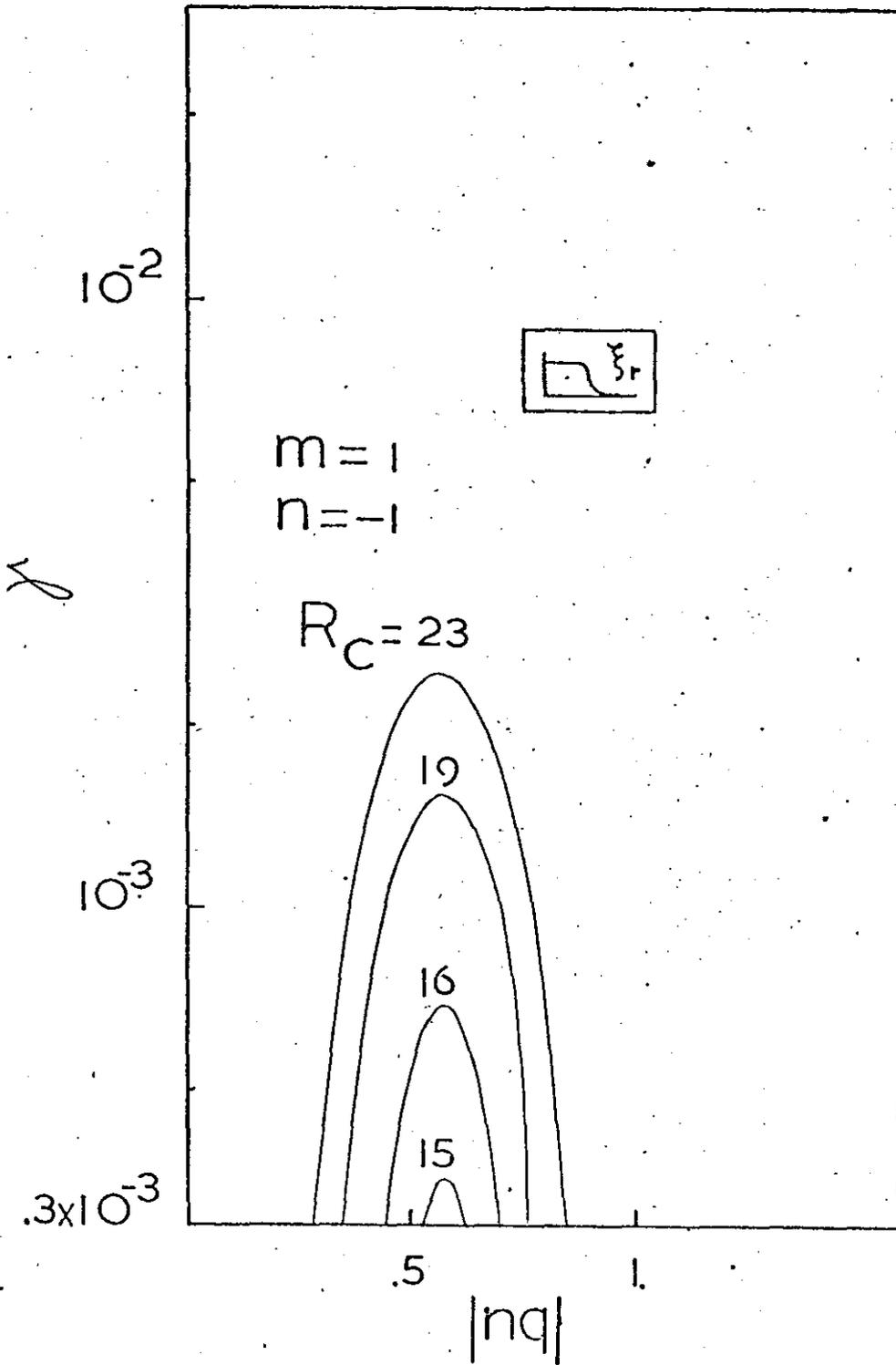


Fig. 5.5 Razão de crescimento de modo kink interno versus q no eixo magnético para vários valores de R_C .

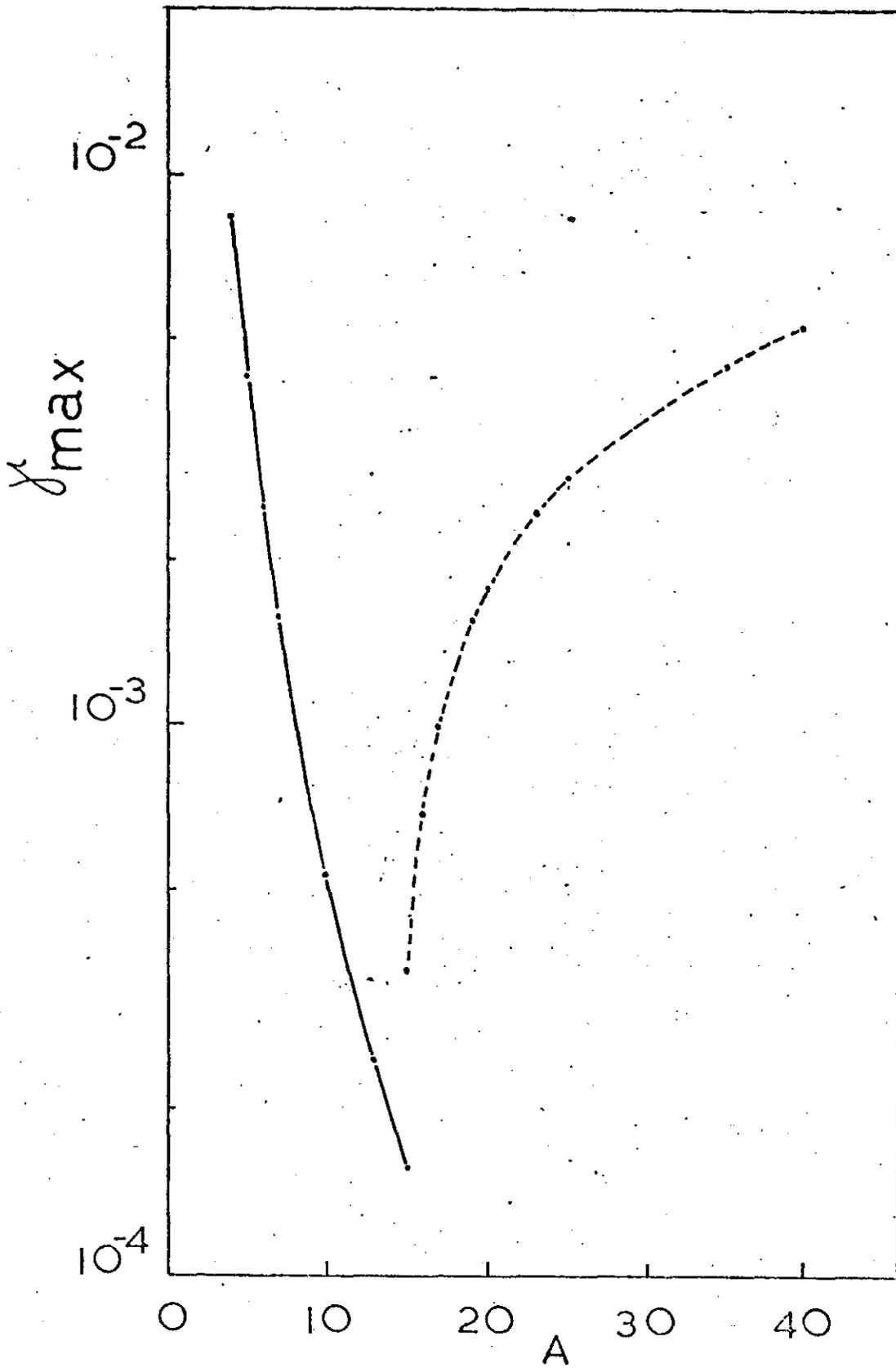


Fig. 5.6 Razão de crescimento máximo versus razão de aspecto para modo kink central (linha contínua) e para modo kink interno (linha tracejada).

aspecto, Fig. (5.7) . A razão de crescimento de um perfil com $S > 0$, $P_2 = -10$, linha mais cheia, é ligeiramente maior em $A=5$ do que aquele perfil de equilíbrio também $S > 0$, $P_2 = 0$. Naquele γ decresce atingindo logo um valor constante, $\gamma=1,78 \times 10^{-3}$. E neste o γ decresce rapidamente para ser estável em $A > 15$. Os cálculos realizados com programa desenvolvido para equação de Euler - Lagrange de um plasma cilíndrico, Eq. (2.27), mostraram serem estes perfis estáveis neste modo kink. As duas curvas restantes são os resultados do mesmo perfil, $S < 0$ e $P_2 = 10$. Uma delas, a curva tracejada, são os resultados das razões de crescimento de plasma toroidal que cresce com A e a outra curva é de um plasma cilíndrico de modos k ($k = A^{-1}$).

Nota - se que o efeito toroidal melhora a estabilidade fazendo a comparação entre dois toróides. No entanto a comparação feita entre um cilindro e um toróide percebe - se que um toróide com $A = 5$ é menos instável do que o seu equivalente cilíndrico com modo k . Aumentando A , ou seja, k diminuindo, o toróide se torna mais instável do que sistema cilíndrico.

5.4 VARIAÇÃO DE ESTABILIDADE COM A RAZÃO DE ASPECTO COM k FIXO

Aqui será analisado o efeito toroidal na estabilidade pelo caso (b) do critério de comparação.

Considerando - se uma variação proporcional de n e de

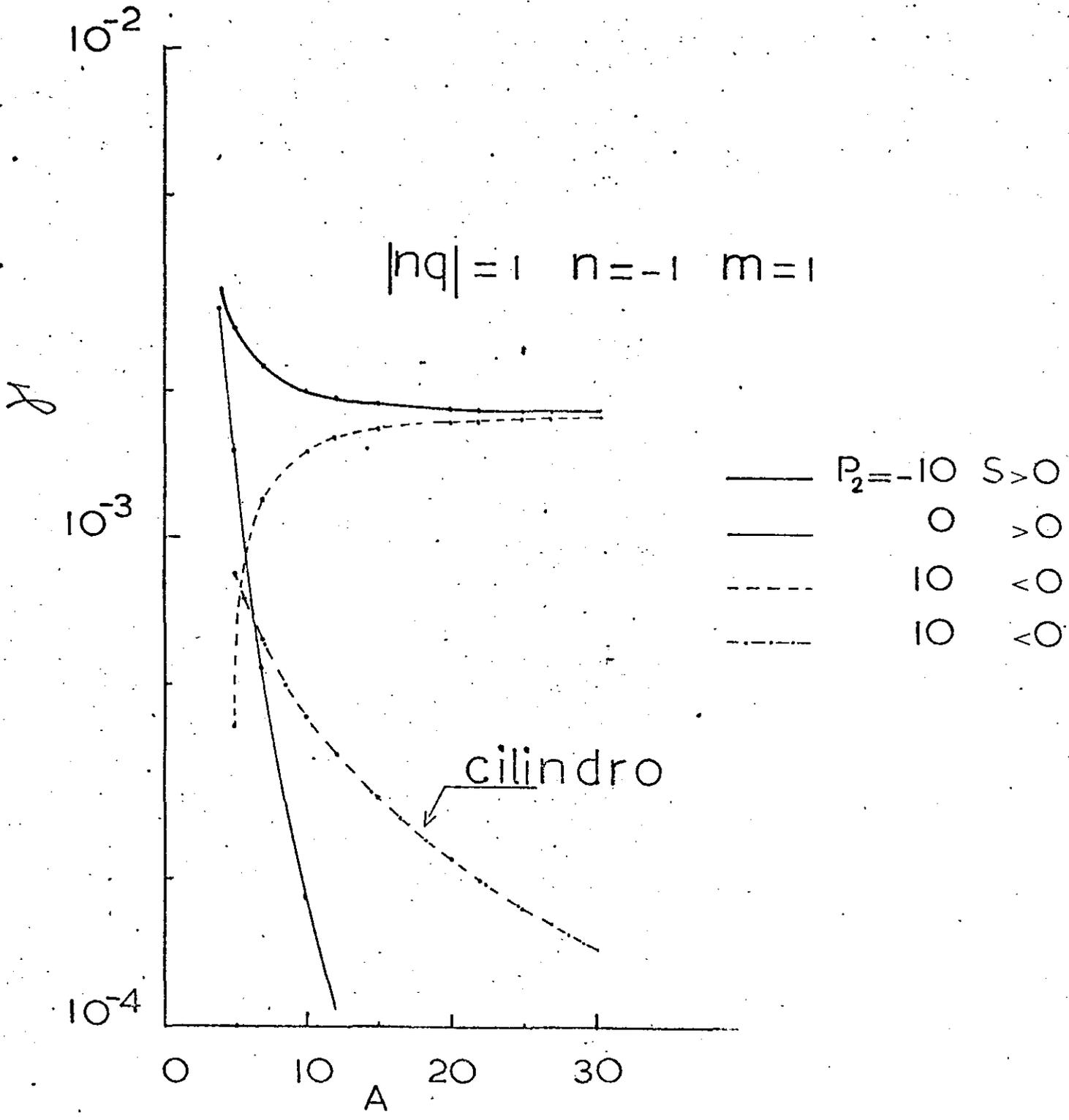


Fig. 5.7 Razão de crescimento de modo kink central versus a razão de aspecto em $|nq| = 1$ para vários perfis de pressão dada por $p(r) = 0.02 \exp(-P_2 r^2 - 32r^4)$.

R_e obtem - se o valor de k constante, ou seja, o comprimento de onda de perturbação é constante. Serão estudados modos kink interno e central separadamente pois eles têm comportamentos diferentes.

Tomando o modo $k = -0,33$ para um perfil de equilíbrio dado na Fig.(5.3) , a variação da razão de crescimento para modo kink interno é mostrada para vários valores de R_e e de n na Fig.(5.8) em função de $|nq|$.

Na Fig.(5.9) está mostrada a variação dos máximos das razões de crescimento em função das razões de aspecto. Observa-se que os γ_{\max} crescem quando se aumenta R_e e tende ao cilíndrico $R_e \rightarrow \infty$. Isto foi verificado em todos os casos de kink interno estudado. A conclusão é que a toroidicidade melhora a estabilidade de kink interno.

O modo central foi estudado no caso de S negativo, pois neste caso, o critério de Suydam implica que o modo central é instável em cilindro. Pode - se então fazer um estudo comparativo como no caso acima.

Um perfil de $S > 0$, $P_2 = 10$, é tomado. No ponto de $|nq| = 1$ foram calculadas as razões de crescimento para dados $k = -0,1$ e $k = -0,2$ variando a razão de aspecto. Na Fig.(5.6.) pode - se observar que a razão de crescimento de plasma cilíndrico para estes modos k são $0,44 \times 10^{-3}$ e $0,85 \times 10^{-3}$, respectivamente. A Fig.(5.10) mostra que para modo $k = -0,2$ o efeito toroidal melhora a estabilidade , o que não acontece com o outro modo , $k = -0,1$. No entanto, ambos convergem para seus

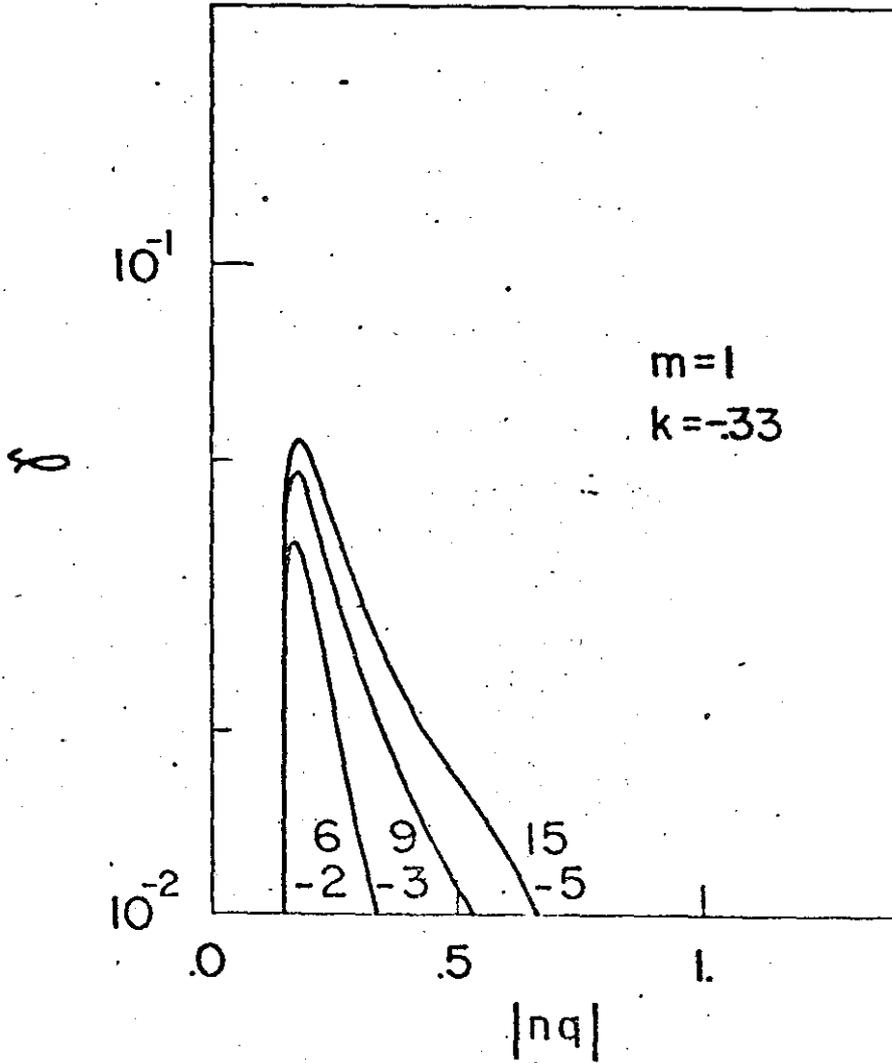


Fig. 5.8 Razão de crescimento para modo $m = 1$ e $k = -.33$ versus q no eixo magnético.

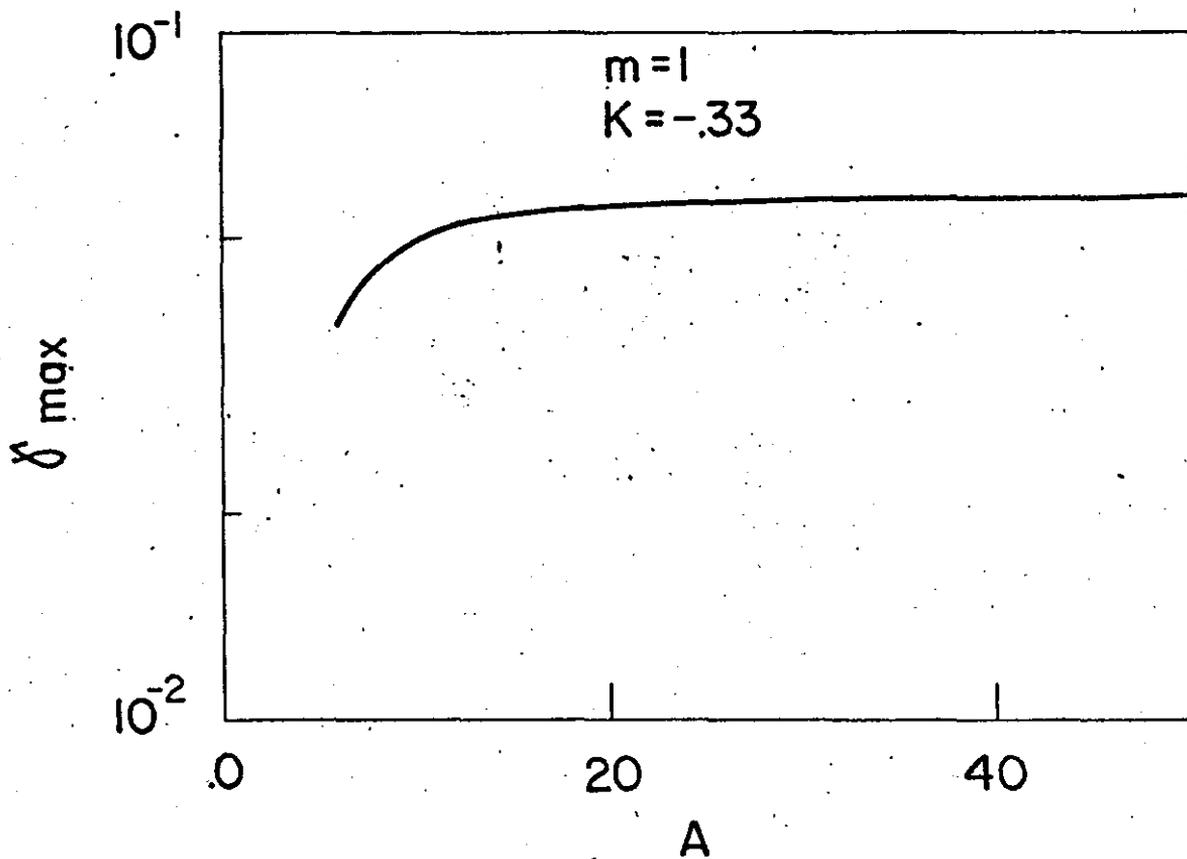


Fig. 5.9 Razão de crescimento máximo para $m = 1$ e $k = -.33$ versus razão de aspecto.

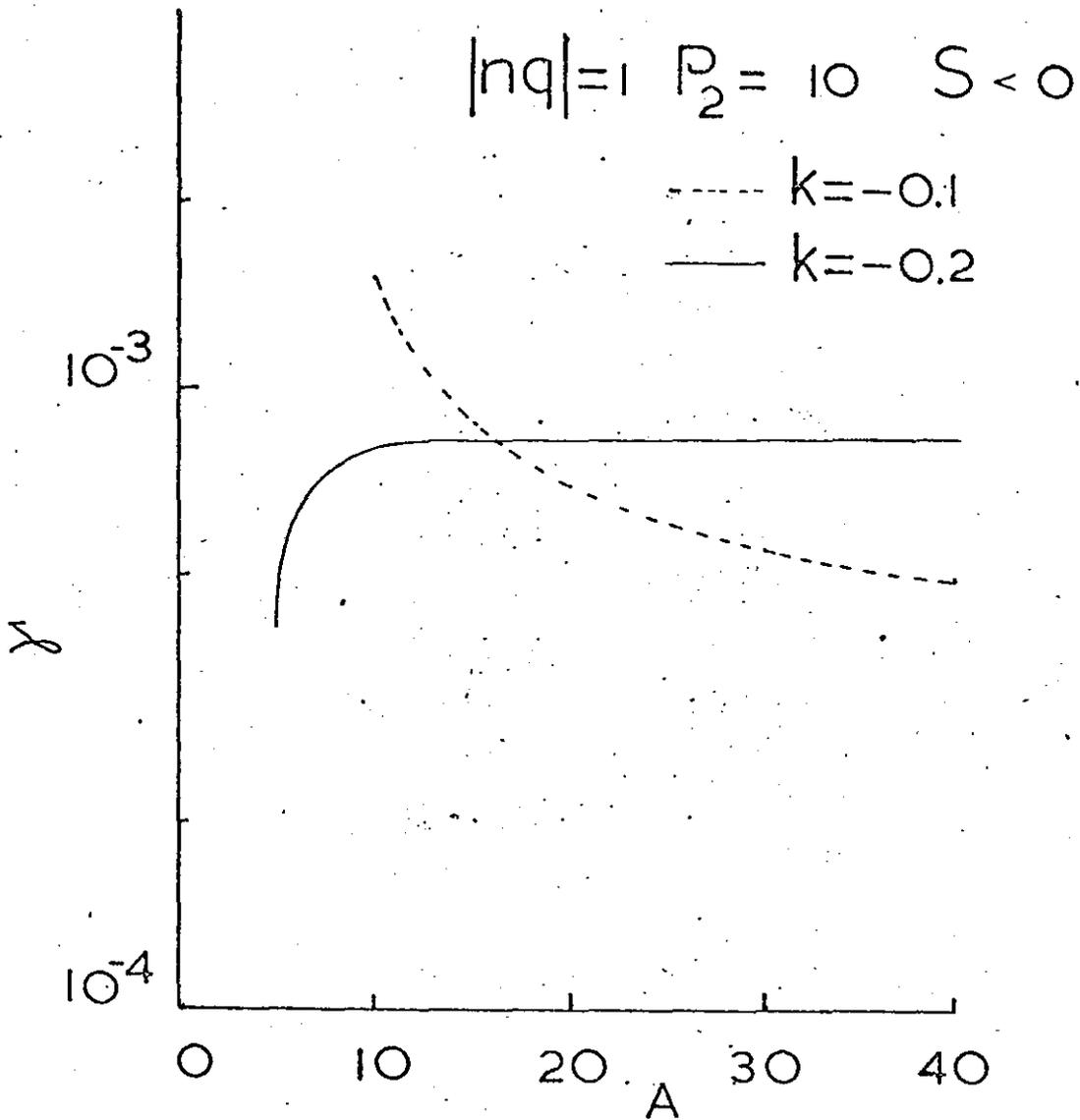


Fig. 5.10 Razão de crescimento para modo kink central versus a razão de aspecto em $|nq|=1$ para modo $k=-0.1$ (linha tracejada) e $k=-0.2$ (linha contínua).

respectivos valores de γ_c , razão de crescimento cilíndrico, de tal modo que o que era menos instável (ou estável) em toróide se tornou mais instável (ou estável) em cilindro.

Normalizando a razão de crescimento toroidal em termos da razão de crescimento cilíndrico obtém-se as curvas mostradas na Fig. (5.11). Observam-se que ambas tendem assintoticamente para um valor unitário em $A \rightarrow \infty$.

5.5 CONCLUSÕES

O principal resultado desse trabalho é a demonstração de que existem duas classes distintas de modos kink para tokamaks de baixo β . A primeira classe, o modo kink interno possui a razão de crescimento que decresce quando o efeito toroidal aumenta. Este resulta confirma o de Bussac et al. (1975). A segunda, denominada de kink central, tem a razão de crescimento que cresce com o aumento do efeito toroidal, em contraste com os resultados de Bussac. Há, porém, um trabalho de Pao (1976) que mostra o mesmo comportamento que o kink central encontrado neste trabalho, ou seja, o efeito toroidal é desestabilizante.

Um fato que ficou claramente estabelecido é o da existência de duas classes de kink com comportamentos opostos com respeito a efeito toroidal.

No caso do equilíbrio com $S < 0$ e $P_2 > 0$ o modo kink

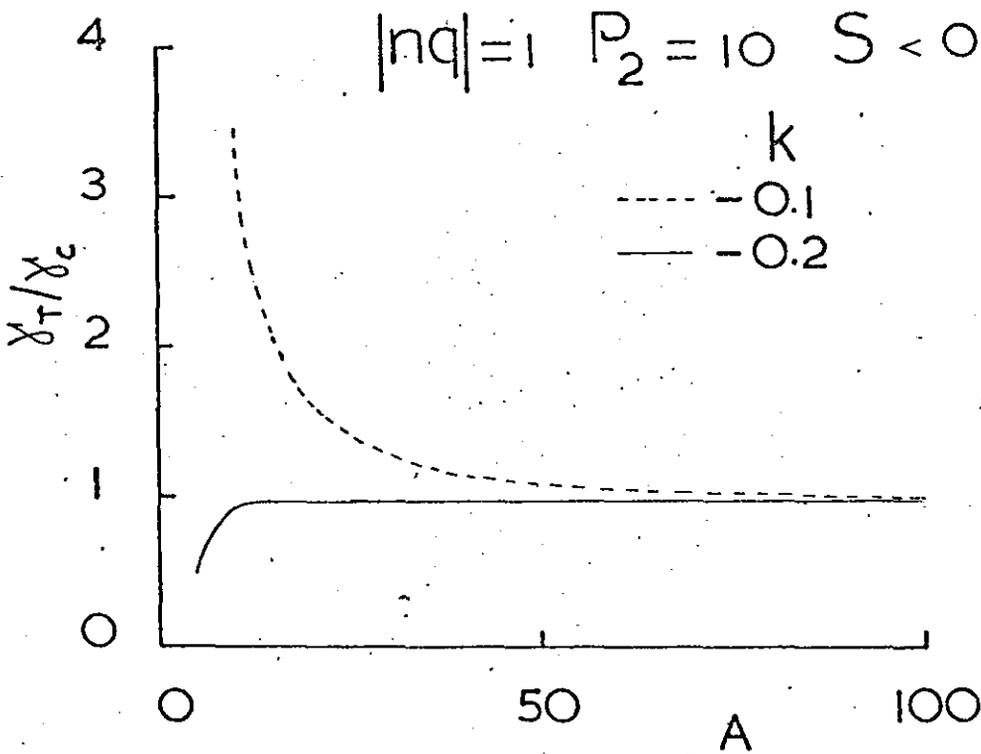


Fig. 5.11 Razão de crescimento para modo kink central dadas na Fig.5.10 normalizada em relação a razão de crescimento cilíndrico de mesmo valor de k .

interno se transforma em kink central de uma maneira contínua e a sua distinção é difícil de ser feita. Neste caso o espectro não apresenta um máximo na região $0 < |nq| < 1$ portanto a comparação foi feita tomando o valor de γ em $|nq| = 1$. No caso do equilíbrio com $S < 0$ e $P_2 < 0$ o modo kink central continua instável mas o modo kink interno se torna estável. Estes casos serão melhor estudados como problemas futuros.

Dando a continuidade a esse trabalho, planejam-se efetuar a pesquisa em três áreas: (a) Dedução do critério de estabilidade para o caso de $\alpha_2 = 0$ em $p = p_0 - \alpha_2 r^2 - \alpha_4 r^4$ em um sistema toroidal; (b) investigação de kink externo para tokamaks de alto beta, utilizando o mesmo programa de computador; (c) a investigação dos modos kink do sistema toroidal completo sem fazer a expansão em valores grandes da razão de aspecto. Este último trabalho seria o prosseguimento iniciado por Goedbloed (.. 1975) e constitui o trabalho da tese de doutoramento.

Como sugestões para outras investigações citam-se o desenvolvimento de estabilidade - σ para um plasma cilíndrico de seção não circular, o de estabilidade - σ com a resistividade.

6 REFERÊNCIAS

Artsimovich, L. A. , Nucl. Fusion 12 , 215 (1972).

Bernstein, I. B. , Frieman, E. A. , Kruskal, M. D. ,
e Kulsrud , R. M. , Proc. Roy. Soc. (London) A244,17 (1958) .

Bussac , M. N. , Pellat, R. , Edery, D., e Soule, J.
L. , Phys. Rev. Letters 35 , 1638 (1975) .

Callen, J. D. , e Dory , R. A. , Phys. Fluids 15 ,
1523 (1972) .

Copenhaver , C. M. Tese de doutoramento, University
of Tennessee , Knoxville , Dezembro de 1976 .

Fusion Forefront : A newsletter from the Erda/DMFE
OFFICE , vol.10 , nº 2 , maio de 1977 .

Galvão , R. M. O. , Sakanaka , P. H. , e Shigueoka , H.
a ser publicado (1977).

Goedbloed , J. P. , Phys. Fluids 18 , 1258 (1975) .

Goedbloed , J. P. , e Hagebeuk , H. J. L. , Phys.
Fluids 15 , 1090 (1972) .

Goedbloed , J. P. , e Sakanaka , P. H. , Phys.
Fluids 17,908 (1974 - I) .

Goeler , S. von , Stodiek , W. , e Sauthoff, N. ,
Phys. Rev. Letters 33 , 1201 (1974) .

Hain , K. , e Lüst , R. , Z. Naturforsch 13 , 936
(1958) .

Isaacson , E. , e Keller , H. B. , em Analysis of
Numerical Methods , Wiley , New York , (1960) .

Kadomtsev , B. B. , em Reviews of Plasma Physics ,
vol. 2 , editado por M. A. Leontovich , Consultants Bureau , New
York , 153 (1966) .

Krall , N. A. , e Trivelpiece , A. W. , em Principles
of Plasma Physics , McGraw - Hill Book Co. , New York, 94 (1973) .

Kruskal , M. D. , Johnson , J. L. , Gottlieb , M. B. ,
e Goldman , L. M. , Phys. Fluids 1 , 421 (1958) .

Kruskal , M. D. , e Schwarzschild , M. , Proc. Roy.
Soc. (London) A233 , 348 (1954) .

Kruskal , M. D. , e Tuck, J. L. , Proc. Roy. Soc. (Lon
don) A245 , 222 (1958) .

Laval , G. , Mercier , C. , e Pellat , R. , Nucl. Fu-
sion 5 , 156 (1965) .

Mercier , C. , Nucl. Fusion 1 , 47 (1960) .

Newcomb , W. A. , Ann. Phys. (N.Y.) 10 , 232 (1960) .

Pao , Y.- p. , Phys. Fluids 19 , 1796 (1976) .

Robinson , D. C. , Plasma Phys. 13 , 439 (1971) .

Rosenbluth , M. N. , Dagazian , R. Y. , e Rutherford,
P. H. , Phys. Fluids 16 , 1894 (1973) .

Rosenbluth , M. N. , e Longmire , C. L. , Ann. Phys. .
(N.Y.) 1 , 120 (1957) .

Sakanaka , P. H. , e Goedbloed , J. P. , Phys. Fluids
17 , 919 (1974 - II) .

Schuurman , W. , Bobeldijk , C. , e De Vries , R. F. ,
Plasma Phys. 11 , 495 (1969) .

Shafranov , V. D. , em Reviews of Plasma Physics, vol. 2,

editado por M. A. Leontovich , Consultants Bureau , New York ,
103 (1966) .

Shafranov , V. D. , Sov. Phys. - Tech. Phys. 15 ,175
(1970) .

Shafranov, V. D. Soviet Phys. JETP, 6 , 545 (1958).

Shafranov , V. D. , e Yurchenko , E. I. , Sov. Phys.-
- JETP 26 , 682 (1968).

Suydam , B. R. , em Proceedings of the Second Inter-
national Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy , vol.
31 , United Nations , Geneva, 157 (1958) .