DINÂMICA DE COMPRESSÃO E MECANISMOS DE AQUECIMENTO DE PLASMA NO θ - PINCH

por

YOSHYUKI SHIGUEOKA

Orientador: Prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka

Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de Mestre.

Campinas, agôsto de 1979

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka pela sua orientação segura e eficaz e acima de tudo pelo amigo que tenho em sua pessoa e família.

Aos Profs. Drs. José Busnardo Neto, Shuko Aihara, Helmut K. Böckelmann, Ricardo M. O. Galvão, Massanobu Niimura e Aruy Marotta pelas inestimáveis colaborações e sugestões durante a execução deste trabalho.

Ao Hisataki, mais do que um irmão, pelo incentivo em todos os momentos, principalmente nos mais difícies.

A FAPESP pelo auxílio financeiro e ao CNPq e FINEP pelos convênios, que tornara possível esse trabalho.

Ao Departamento de Física - I.C.E da Universidade do Amazonas pela compreenssão e tolerância durante o período final da confecção deste trabalho.

A todos aqueles que de alguma forma colaboraram na - reliazação deste trabalho.

Aos meus pais.

Aos meus irmãos.

E especialmente à minha esposa Aida.

RESUMO

Foi desenvolvido um modelo de 1 + zero dimensões, borda abrupta na direção r e uma dimensão na direção z, para estudar a dinâmica do θ - pinch, com o campo de polarização.

Verificou-se que o efeito do raio do plasma sobre a descarga é apreciável, podendo até inverter o sinal do dB_z/dt.

A influência do fato do solenóide ser de tamanho finito se manifesta como oscilação de grandezas como B_z, R, T_i, etc. ao longo do eixo z. Estas oscilações são as oscilações transpostas de bounce e não constituem nenhuma instabilidade nova.

SUMMARY

It has been developed a (1 + zero) D model, sharp boundary in r and 1D in z, to study dynamics of θ - pinches with bias field, in order to calculate bounce oscilations, plasma temperature, effects of plasma radius on the discharge and the influence of finiteness of the θ - pinch coil length on the bounce oscilations.

It was observed that the effect of plasma radius variation on discharge is appreciable. It can even invert the sign of dB_z/dt.

The influence of the finite length coil is manifested through oscillations of quantities; such as, B_z, R, T_i and B_i along z axis. These oscillations are simply bounce oscillations transformed into oscillations in z direction, and do not mean a new instability.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II - EQUAÇÕES DE θ - PINCH 3

II.1 - Modelo 3

II.2 - Equação de Movimento da Camada Móvel 8

II.3 - Equação da Pressão 14

II.4 - Equação do Circuito 15

II.5 - Fluxo do Campo Magnético ao Longo do Tubo de Linha do Campo Magnético ... 17

II.6 - Equação da Difusão do Fluxo Magnético 18

II.7 - Sistema Completo de Equações 21

CAPÍTULO III - SOLUÇÕES PARTICULARES 23

III.1 - Solução do Circuito para R = Constante 23

III.2 - Snow-Plow Clássico 25

III.3 - Snow-Plow Modificado 29

III.4 - Campos Magnéticos Estáticos no Vácuo 33

III.5 - Oscilação do Raio do Plasma 38

CAPÍTULO IV - APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS 41

IV.1 - Método Numérico 41

IV.2 - Resultados 46

IV.3 - Conclusões 58

REFERÊNCIAS 60

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O "θ - pinch" é um aparelho de fusão termonuclear que está sendo investigado há mais de 25 anos e que tem a vantagem de ser simples na construção comparado com outros aparelhos de fusão e que produz temperaturas termonucleares. A sua maior desvantagem é a rapidez com que perde as partículas e energia através das suas extremidades (1) – (16).

O aparelho tem uma geometria cilíndrica e produz altas temperaturas em plasmas por meio de uma implosão(constrição rápida) magnética, aquecimento ôhmico e instabilidades eletromagnéticas e eletrostáticas na superfície do plasma.

O aparelho é constituído de uma câmara de plasma cilíndrica envolto por um solenóide cilíndrico de uma única espira ligado em série a um banco de capacitores. Quando um capacitor carregado for descarregado através do solenóide, este produz um campo magnético que constringe rapidamente o plasma radialmente, confinando-o e aquecendo-o. A UNICAMP adquiriu recentemente um θ - pinch de porte médio mas rápido capaz de produzir plasmas com temperaturas de íons da ordem de alguns keV.

A dinâmica do plasma dentro de um θ - pinch pode ser estudada em vários níveis de complexidade, dependendo dos recursos disponíveis(tamanho do computador e tempo de computação) e objetivos a serem alcançados. O nível mais sofisticado é a simulação por partículas(17) em uma ou duas dimensões(r só ou r e θ em coordenadas cilíndricas). Vem em seguida o modelo de simulação híbrida, em que os íons são tratados cineticamente e os elétrons como fluidos. (18) – (21) Em terceiro, pode-se citar a simu

lação de fluidos.[22] Como ilustração, a simulação do θ - pinch em uma dimensão com o modelo de um-fluido, por exemplo, leva da ordem de uma hora de tempo CPU de computação para se obter a primeira fase da dinâmica - a implosão no computador PDP-10 da UNICAMP[23].

Nesta tese foi estudada a dinâmica da constrição e mecanismos de aquecimento por meio de um modelo bem simples em duas dimensões (r e z) acoplada com o circuito elétrico externo. O objetivo disto é obter informações a respeito da temperatura máxima atingível pelo θ - pinch, o efeito do comprimento finito do θ - pinch e o efeito que a dinâmica do plasma traz sobre o circuito de descarga. A dinâmica foi dividida em duas fases, a primeira, a da implosão e depois a da pós-implosão. Na fase da implosão o processo é inteiramente não-adiabática e o modelo considerado é o do "snow-plow" modificado e a da pós-implosão, que é uma fase quase-adiabática(foi considerada resistividade) o modelo usado é o de borda abrupta.[24] - [26]

No Capítulo II está descrito o modelo utilizado e estão desenvolvidas em detalhes as equações de θ - pinch.

No Capítulo III foram explorados resultados analíticos do modelo e consta de seis ítens: 1. Solução do circuito quando a indutância do sistema solenóide-plasma é constante; 2. Snow-plow clássico; 3. Snow-plow modificado; 4. Variação da densidade ao longo do Z; 5. Oscilação do raio do plasma e 6. Campo magnético estático no vácuo para o θ - pinch.

Finalmente, no Capítulo IV : os resultados numéricos, as discussões e as conclusões são apresentadas.

CAPÍTULO II

EQUAÇÕES DE θ - PINCH

Neste capítulo será apresentado um modelo matemático para descrever a dinâmica do plasma dentro do θ - pinch.

II. 1 - Modelo

Suponha-se que o plasma está totalmente ionizado inicialmente com uma temperatura uniforme, T_o , com a densidade e a pressão variando ao longo do z. Este plasma é contido num tubo de raio interno, A , colocado dentro do solenóide de θ - pinch com o raio interno $A_o > A$, conforme a Fig. II-1.

Suponha-se que o circuito elétrico externo ao solenóide possa ser representado por elementos discretos, como se seguem: a capacitância C do banco de capacitores, a resistência R_e representando todos os elementos dissipativos do circuito, exceto a dissipação do plasma, e a indutância externa L_1 que engloba as indutâncias parasitas dos capacitores, da linha de transmissão e da chave. Despreza-se a capacitância da linha de transmissão. O solenóide com o plasma é tratado como um elemento que comporta um fluxo magnético variável produzindo uma força eletromotriz, $\mathcal{E}$, nos terminais da linha de transmissão.

Conforme o modelo, a dinâmica do plasma se processa assim . Quando a chave for ligada uma corrente elétrica I começa a fluir sobre o circuito produzindo um campo magnético crescente B_z no vácuo existente entre o raio interno do solenóide e o plasma. Quando a pressão magnética do B_z atingir um valor igual a pressão interna do plasma, isto é ,

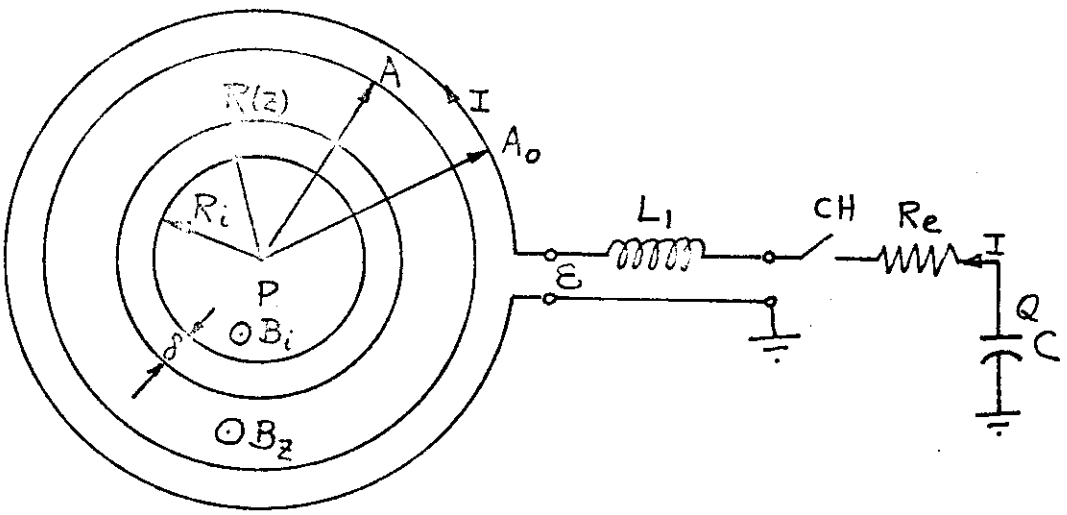

Fig. II-1 : Modelo de θ - pinch

$R(z)$	raio do plasma, com simetria axial, com dependência ao longo da ordenada z.
$R_i(z)$	raio do plasma não pertubado.
$\delta = R-R_i$	espessura da camada de plasma móvel .
B_i	campo interno
P	pressão do plasma.
B_z	campo externo, pistão magnético.

$B_z^2/2\mu_0 = p + B_i^2/2\mu_0$, o plasma começa a ser constringido pela força $\vec{F} = \int \vec{J} \times \vec{B}\, d^3x$, onde $\vec{J}$ é a densidade de corrente diamagnética que surge na "superfície" do plasma. Suponha-se que a constrição se processa muito rapidamente, devido ao crescimento rápido do campo B_z, como pistão magnético, de tal maneira que o plasma varrido pelo pistão magnético se acumule numa camada fina móvel na frente do pistão, ocupando uma espessura $\delta << A$. Suponha-se que a espessura δ seja igual a profundidade penetrada pelo campo magnético até aquele instante. A energia total, cinética e interna, ganho pelo plasma devido ao trabalho feito pelo pistão magnético é acumulado na camada móvel do plasma. Este processo de constrição rápida, que é denominada de implosão, é seguida de uma constrição mais lenta quando o raio interno da camada fina, R_i, atinge o centro, isto é, $R_i = 0$. Quando isto acontece a pressão interna do plasma se torna muito alta, devido a energia interna acumulada durante a implosão e como conseqüência o pistão é freado bruscamente. Suponha-se que no início desta fase o plasma termalize rapidamente a energia cinética do fluido, por meio de processos de instabilidade e que a pressão se torna uniforme e isotrópica no plano perpendicular ao eixo, mas que possa variar ao longo do z. As forças externas e internas que agem sobre o plasma se tornam da mesma ordem de grandeza e a superfície do plasma começa a se oscilar.

Considera-se que existe a dissipação da energia magnética por efeito Joule e a penetração do fluxo magnético, ϕ_z do campo magnético B_z externo ao plasma devido a resistividade. A resistividade é suposta clássica(Spitzer) na fase implosão, mas anômala na fase de pós-implosão.

As equações que descrevem a dinâmica do plasma, segundo este modelo são as seguintes:

A - Equação de Movimento

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \qquad (II-1)$$

onde $\vec{P}$ é a quantidade de movimento da camada de plasma móvel na frente do pistão e $\vec{F}$ é a força resultante que age sobre esta camada, isto é, a força do pistão magnético menos a força devida a pressão interna total do plasma.

B - Equação da Pressão

$$\frac{dp}{dt} = \mathcal{P}_\eta + \mathcal{P} \qquad (II-2)$$

onde p é a pressão do plasma, $\mathcal{P}_\eta$ o aquecimento ôhmico e $\mathcal{P}$ o trabalho da força $\vec{F}$ por unidade de tempo e por unidade de volume.

C - Equação do Circuito

$$\frac{d\phi}{dt} = -R_e I - \frac{1}{C}\int^t I\,dt \qquad (II-3)$$

onde ϕ é o fluxo total do campo magnético incluindo fluxos dos campos $\mathcal{B}_i$ e $\mathcal{B}_z$, e aquele através do solenóide interno L_1.

D - Equação da Difusão do Fluxo Magnético

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \mathcal{D} \qquad (II-4)$$

onde ϕ_i é o fluxo magnético do campo $\mathcal{B}_i$ e $\mathcal{D}$ é a difusão do fluxo ϕ_z do campo $\mathcal{B}_z$ através da superfície do plasma devido a resistividade.

A seguir serão desenvolvidas cada uma destas equaçoes em termos precisos.

II. 2 - Equação de Movimento da Camada Móvel

Para estudar a dinâmica do plasma no θ - pinch, supos-se que o movimento possui uma simetria em relação ao eixo z, mas que há uma dependência na direção z. O plasma foi então considerado como um conjunto de fatias com espessuras dz, Fig. II-2. Cada uma destas fatias do plasma são regidas pela equação do movimento. Considera-se duas fases, isto é, inicialmente a fase de implosão e posteriormente a fase de pós-implosão.

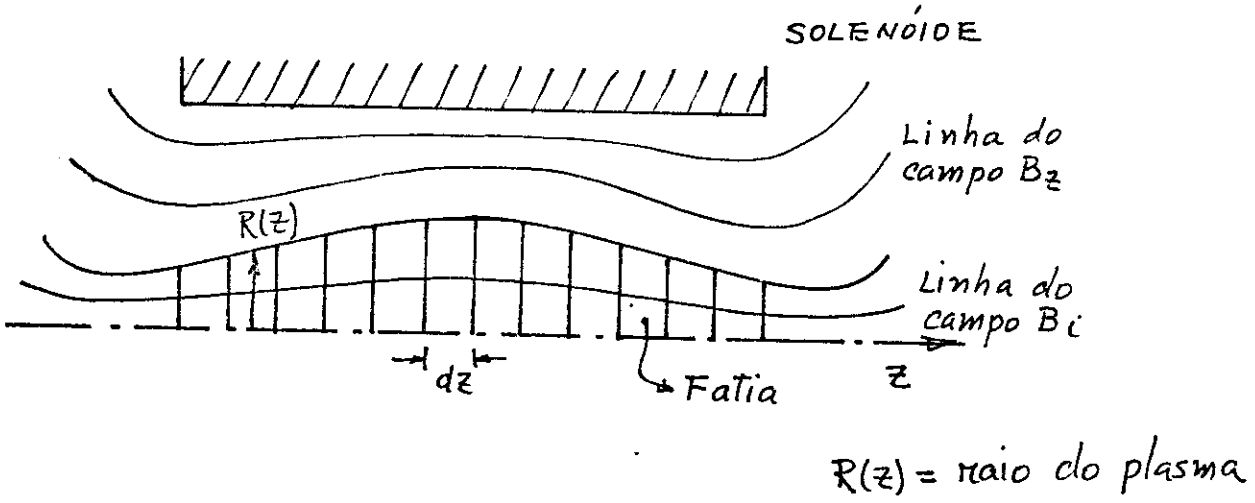

Fig. II-2. O modelo:
O plasma no θ - pinch é dividido em fatias de espessuras dz. A dinâmica de cada fatia é regida pelas equações(II-1) a (II-4). A interação entre fatias serão através da curvatura do campo B_z.

A - Fase de Implosão

Na fase de implosão a equação de movimento é

$$\frac{d}{dt}\left(\Delta M \frac{dR}{dt}\right) = \Delta F \qquad (II-5)$$

onde $\Delta M = \pi \rho (A^2 - R^2) dz$ é a massa da camada móvel, (II-6)

e $\Delta F = \int_{Camada} (\vec{J} \times \vec{B} - \nabla p) d^3x$ é a força aplicada. (II-7)

Sendo ρ a densidade do plasma, A e $R(z)$ raios do plasma inicial e no instante t, na coordenada z e dz o elemento do plasma. A força (II-7) pode ser desenvolvida da seguinte maneira:

Das equações de Maxwell em coordenadas cilindricas, obtém-se:

$$\nabla \times \vec{B} = \left(0, \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}, 0\right) = \left(0, \mu_0 J_\theta, 0\right) \text{ e } \qquad (II-8)$$

$$\nabla . \vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r B_r + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad (II-9)$$

onde foi levada em consideração a simetria axial, isto é:

$$\vec{B} = \left(B_r(r,z), 0, B_z(r,z)\right) \text{ e } \qquad (II-10)$$

$$\vec{J} = (0, J_\theta, 0) \qquad (II-11)$$

portanto

$$J_\theta = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right) \qquad (II-12)$$

A densidade de força é expressa por

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B} = (J_\theta B_z, 0, -J_\theta B_r) \qquad (II-13)$$

A componente radial é então dada por

$$f_r = J_\theta B_z = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right) B_z \qquad (II-14)$$

ou

$$f_r = \frac{1}{\mu_0}\left(B_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r}\frac{B_z^2}{2}\right) \qquad (II-15)$$

Considerando que a componente B_r é pequena pode-se desprezar a componente da força na direção do z.

O termo proporcional a $\frac{\partial}{\partial r} B_z^2$ é a força devido a pressão magnética e o termo proporcional a $B_z \frac{\partial B_r}{\partial z}$ é o termo devido a curvatura da linha do campo.

Como a força é concentrada no contorno plasma-vácuo, o gradiente do campo neste ponto é grande, portanto:

$$\nabla . \vec{B} = \frac{B_r}{r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \cong \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \simeq 0 \qquad (II-16)$$

então

$$\frac{\partial B_z}{\partial B_r} \simeq - \frac{\partial z}{\partial r}\Big|_{contorno} \qquad (II-17)$$

Supondo que B_z continue sendo a solução da equação (II-13), sem o plasma, então:

$$B_r = - \frac{\partial r}{\partial z}\Big|_{contorno} B_z \qquad (II-18)$$

ou

$$B_r = B_z \tan\theta \qquad (II-19)$$

Então a componente:

$$B_z \frac{\partial B_r}{\partial z} \simeq B_z \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial B_r}{\partial r}$$

$$= \tan^2\theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{B_z^2}{2} + B_z^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\tan^2\theta}{2}$$

$$(II-20)$$

Portanto:

$$f_r = -\frac{\partial}{\partial r}\left[1 - \tan^2\theta\right]\frac{B_z^2}{2\mu_0} \qquad (II\text{-}21)$$

onde $\tan\theta = \frac{dR}{dz}$ mede a declividade da linha do campo em relação ao eixo do θ - pinch.

Integrando esta densidade de força sobre o volume atuante, $2\pi R\delta\, dz$, obtém-se o total da força aplicada;

$$F = -\pi\, dz\, \alpha R\left[\left(B_z^2 - B_i^2\right)\left(1 - \tan^2\theta\right) - 2\mu_0 p\right] \qquad (II\text{-}22)$$

onde $\alpha = \left(n_0 m_i \mu_0\right)^{-1}$

O termo $\tan^2\theta$ na equação (II-22) é o efeito de curvatura da linha do campo magnético.

B - Fase de Pós-Implosão

Na fase de pós-implosão a equação de movimento é

$$\frac{d}{dt}\left(\Delta M \frac{dR}{dt}\right) = \Delta F \qquad (II\text{-}23)$$

onde $\Delta M = \delta\pi R^2 dz$ e a força ΔF é a mesma da anterior.

Suponha-se que o movimento da massa ao longo do z é desprezível, portanto:

$$\rho \pi R^2 dz = \rho_0 \pi A^2 dz = \text{constante} \qquad (II-24)$$

Por outro lado a densidade ρ e o raio R variam com o tempo, tem-se:

$$\frac{dM}{dt} = \pi R^2 dz \frac{d\rho}{dt} + 2\pi R \rho dz \frac{dR}{dt} = 0 \qquad (II-25)$$

ou seja $$\frac{dR}{dt} = -\frac{R}{2\rho}\frac{d\rho}{dt} \qquad (II-26)$$

Supondo que a densidade seja uniforme, na fatia, até $r = R$, o raio r de lagrange, isto é, raio r do elemento de fluido deve satisfazer:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{2\rho}{r}\frac{dr}{dt} = \text{constante em } r \qquad (II-27)$$

A quantidade de movimento do plasma após a implosão é

$$|\vec{P}| = \int dM \frac{dr}{dt} = \frac{2\pi}{3} dz \rho R^2 \frac{dR}{dt} \qquad (II-28)$$

Então a variação da quantidade de movimento é

$$\frac{d|\vec{P}|}{dt} = \frac{2}{3}\frac{d}{dt}\left[\rho\pi R^2 dz \frac{dR}{dt}\right] = \Delta F \qquad (II-29)$$

Da equação (II-24) tem

$$\frac{d|\vec{P}|}{dt} = \frac{2}{3}\frac{d}{dt}\left[\rho_0 \pi A^2 dz \frac{dR}{dt}\right]$$

Finalmente temos a equação de movimento na fase de pós-implosão:

$$\frac{2}{3}A^2\frac{d^2R}{dt^2} = -\alpha R\left[\left(B_z^2 - B_i^2\right)\left(1-\tan^2\theta\right) - 2\mu_0 P\right] \qquad (II-30)$$

II. 3 - Equação da Pressão

A equação da pressão para um plasma resistivo é tirada da teoria MHD não-ideal:(27)

$$\frac{dp}{dt} = (\gamma-1)\eta\vec{J}^2 - \gamma p \nabla.\vec{v} \qquad (II-31)$$

onde $\frac{d}{dt}$ é a derivada material p a pressão do plasma, η a resistividade, $\vec{J}$ a densidade de corrente e $\vec{v}$ é a velocidade macroscópica.

Considerando que na fase de pós-implosão o plasma é uniforme e que desaparece abruptamente na interface com o vácuo e considerando uma simetrial azimutal, podem-se fazer as seguintes simplificações:

$$\nabla.\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dr}{dt}\right) \qquad (II-32)$$

introduzindo (II-24), (II-26) e (II-27) obtém-se

$$\nabla.\vec{v} = \frac{4}{R}\frac{dR}{dt} \qquad (II-33)$$

Portanto a equação da pressão se torna

$$\frac{dp}{dt} = (\gamma-1)\eta J^2 - 4\gamma\frac{p}{R}\frac{dR}{dt} \qquad (II-34)$$

II. 4 - Equação do Circuito

A equação do circuito é expressa por

$$\frac{d\phi}{dt} = -R_e I - \frac{1}{c}\int^t I\,dt \qquad (II-35)$$

onde $$\phi = \phi_i + \phi_2 + \phi_1 \qquad (II-36)$$

sendo $$\phi_i = B_i R^2 \qquad (II-37)$$

$$\phi_2 = B_2 (A^2 - R^2) \qquad (II-38)$$

$$\phi_1 = L_1 I \qquad (II-39)$$

são fluxos de campo $\vec{B}$.

Nesta equação o aquecimento ôhmico poderia ser incluído como um termo dissipativo mas isto foi desprezado. A penetração do campo B_z no plasma não afeta em si o fluxo total, pois o fluxo que se perde do ϕ_z é ganho em ϕ_i . Aplicando a Lei de Ampère $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ calcula-se a relação entre a corrente sobre o elemento do solenóide e o campo magnético B_z : $dI(z) = \frac{dz B_z}{\mu_0}$. A corrente I é a soma das correntes dI sobre o eixo. O termo da integral é dada por

$$\frac{1}{C}\int^t I\,dt = \frac{Q_0}{C} + \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt \qquad (II-40)$$

sendo $Q_0/C = -V_0$, e V_0 é a tensão de carga do capacitor. O acoplamento com o plasma se faz através do raio R do plasma que afeta o campo B_z na expressão (II-38).

II. 5 - Fluxo do Campo Magnético ao Longo do Tubo de Linha do Campo Magnético

No Θ - pinch, então, o fluxo ϕ no centro, isto é, z=0 , deve ser igual ao fluxo em qualquer z , supondo que o plasma e as paredes são condutores ideais:

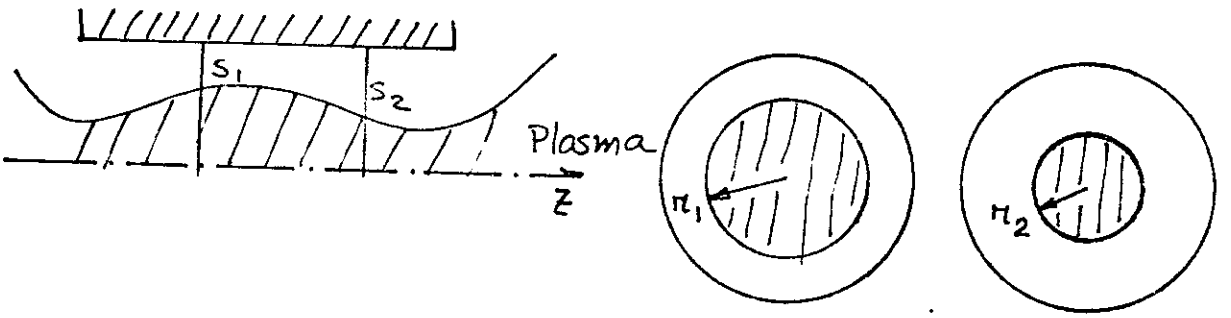

Fig.II-2 Fluxos dos campos magnéticos externo e interno, Φ_z e Φ_i .

$$\phi_{is_1} = \phi_{is_2}$$

Supondo que $B_z(z=0,r) = B_z(z=0,0) = \frac{\mu_0 I}{\ell}$

Supondo também que $\left.\frac{\partial B_z}{\partial r}\right|_{z=fixo} = 0$ para todo z e sabendo-se que da $\nabla.\vec{B}=0$ obtém-se $\phi_{s_1} = \phi_{s_2}$, calcula-se o B_z através da expressão

$$B_z(z, r>R(z))\left(A_0 - R^2(z)\right) = B_z(z=0, r>R(z=0))\left(A_0^2 - R^2(0)\right) \qquad (II-41)$$

ou seja

$$B_z(z, r>R(z)) = B_z(z=0, r>R(z=0))\frac{A_0^2 - R(0)^2}{A_0^2 - R(z)^2} \qquad (II-42)$$

Como pela simetria $B_r(z=0,r)=0$ para qualquer r o snow-plow para z=0 não depende das vizinhanças.

Pela mesma razão o campo interno também varia segundo o mesmo raciocínio:

$$B_i(z, r<R(z)) = B_i(0, r<R(0)) \frac{R(0)^2}{R(z)^2} \qquad (II-43)$$

supondo a resistividade do plasma igual a zero.

Define-se a indutância do solenóide com o plasma a

$$L_p = \frac{\phi_z}{I} \qquad (II-44)$$

II. 6 - Equação da Difusão do Fluxo Magnético

Suponha-se que uma camada de plasma está implodindo num gás inteiramente ionizado conduzido por um campo magnético B_z e por um campo magnético interno B_i .

Se o plasma tem resistividade finita η , descreve-se a variação do fluxo a partir das equações:

Lei de Ohm

$$\vec{E} = \eta \vec{J} \qquad (II-45)$$

Equações de Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (II-46)$$

$$\nabla . \vec{B} = 0 \qquad (II-47)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (II-48)$$

A Lei de Faraday afirma que

$$\frac{d}{dt} \phi = - \oint \vec{E} . d\vec{\ell} \qquad (II-49)$$

então

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} . d\vec{S} = - \oint \vec{E} . d\vec{\ell} = - \frac{\eta}{\mu_o} \int \nabla \times \vec{B} . d\vec{\ell} \qquad (II-50)$$

em coordenadas cilíndricas tem-se a componente azimutal

$$(\nabla \times \vec{B})_\theta = - \frac{dB_z}{dR} \qquad (II-51)$$

Substituindo na equação acima e integrando tem-se

$$\frac{d}{dt} R^2 B_i = \frac{e \eta R}{\mu_o \delta} (B_z - B_i) \qquad (II-52)$$

Finalmente tem-se a variação do fluxo magnético pela equação

$$\frac{d}{dt} (R^2 B_i) = e R v_d (B_z - B_i) \qquad (II-53)$$

onde

$$v_d = \frac{\eta}{\mu_0 \delta^p} \qquad (II-54)$$

é a velocidade de difusão do campo no plasma e δ^p é a profundidade de penetração do campo magnético. No plasma ideal a penetração é c/w_p onde c é a velocidade da luz e w_p é a frequência do plasma, mas no plasma resistivo a penetração é dada por $\sqrt{\eta t/\mu_0}$.

II. 7 - Sistema Completo de Equações

Portanto o sistema de equação que resolve a dinâmica do θ - pinch é:

Equação de Movimento:

Fase de Implosão:

$$\frac{d}{dt}\left[(A^2-R^2)\frac{dR}{dt}\right] = -\alpha R\left[(B_z^2-B_i^2)(1-\tan^2\theta) - 2\mu_0 P\right] \quad (II-55)$$

Fase de Pós-Implosão:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{3}A^2\frac{dR}{dt}\right] = -\alpha R\left[(B_z^2-B_i^2)(1-\tan^2\theta) - 2\mu_0 P\right] \quad (II-56)$$

Equação da Pressão:

$$\frac{dP}{dt} = (\gamma-1)\eta J^2 - 4\gamma\frac{P}{R}\frac{dR}{dt} \quad (II-57)$$

Equação de Circuito:

$$\frac{d\phi}{dt} = -R_e I - \frac{1}{C}\int^t I\,dt \quad (II-58)$$

Equação de Fluxo:

$$\frac{d}{dt}\phi_i = 2R\,V_d\,(B_z - B_i) \quad (II-59)$$

Condições Iniciais:

$$R(z,0) = A \quad ; \quad \left.\frac{dR}{dt}\right|_0 = 0 \quad (II-60)$$

$$n(z,0) = n_0 \exp(-2z) \qquad (II\text{-}61)$$

$$T(z,0) = T_0 \qquad (II\text{-}62)$$

$$p = n(z,0)\,T(z,0)$$

$$B_i(z,0) = B_i \qquad (II\text{-}63)$$

$$B_z(z,0) = 0 \qquad (II\text{-}64)$$

$$I(0) = 0 \qquad (II\text{-}65)$$

$$Q(0) = -V_0 C \qquad (II\text{-}66)$$

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES PARTICULARES

Neste capítulo descreve-se uma coleção de soluções analíticas relacionadas com os casos particulares do problema em questão. São descritas as soluções da equação do circuito quando a indutância do sistema solenóide-plasma for considerada constante, da equação de movimento de implosão com o campo interno e pressão iguais a zero(snow-plow clássico) , da equação de implosão com o campo magnético interno e pressão constantes(snow-plow modificado), da equação do campo magnético do solenóide sem o plasma e em regime estático e o período de oscilação do raio do plasma segundo J. B. Taylor.

III. 1 - Solução do Circuito para R = Constante

Supondo que o raio do plasma R seja constante, a equação (II-58) se desacopla com as equações do plasma e se torna uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes:

$$L\frac{dI}{dt} + R_e I + \frac{1}{C}\int^{t} I\,dt = 0 \qquad (III-1)$$

onde R_e e C são a resistência e a capacitância do circuito e

$$L = L_1 + L_p \qquad (III-2)$$

sendo $$L_p = \frac{\pi \mu_0}{\ell}(A^2 - R^2) \qquad (III-3)$$

a indutância do sistema plasma-solenóide.

No instante $t=0$ tem-se $I(0)=0$ e $V(0)=V_0$.

Definindo-se o seguinte parâmetro

$$\gamma = \frac{R_e}{2}\left(\frac{C}{L}\right)^{1/2} \qquad (III-4)$$

e sabendo-se que $\gamma < 1$ (caso oscilatório ou sub-amortecido) é o caso mais importante, cuja solução para a equação (III-1) é uma senóide amortecida no tempo:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{R_e}{2L}t\right) sen(\omega t) \qquad (III-5)$$

onde $$I_0 = \frac{V_0}{\omega L} \qquad (III-6)$$

e $$\omega = \left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_e}{2L}\right)^2\right]^{1/2} = \omega_0\left(1-\gamma^2\right)^{1/2} \qquad (III-7)$$

sendo $$\omega_0 = (LC)^{-1/2} \qquad (III-8)$$

O tempo de subida é definido como um quarto do período

$$t_s = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} \qquad (III-9)$$

O campo magnético máximo é dado por

$$B_{z\,MAX} \cong \frac{\mu_0}{\ell} I_0 e^{-\frac{Re}{2L} t_s} \qquad (III-10)$$

a derivada da corrente em t=0 é

$$I_0' = \frac{V_0}{L} \qquad (III-11)$$

que é uma quantidade importante para um θ - pinch.

III. 2 - Snow-Plow Clássico

O modelo de snow-plow(limpa neve) supõe que toda a massa varrida pelo choque é comprimida numa camada infinitamente fina imediatamente na frente do choque para que o "pistão" e o choque estejam na mesma interface. Neste modelo supõe-se que o campo magnético interno B_i e a pressão p são iguais a zero.(24)

A equação de movimento para essa constrição é obtida da equação (II-55)

$$\frac{d}{dt}\left[(A^2-R^2)\frac{dR}{dt}\right] = -\frac{\mu_0}{\rho_0 \ell^2}\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 t^2 R \qquad (\text{III}-12)$$

supondo que o campo magnético aumenta linearmente com o tempo, $p = 0$ e $B_i = 0$. Introduzindo variáveis adimensionais, X e τ escreve-se a equação de movimento na forma mais compacta

$$\frac{d}{d\tau}\left[(1-X^2)\frac{dX}{d\tau}\right] = -\tau^2 X \qquad (\text{III}-13)$$

onde $X = R/A$ e $\tau = t/t_1$, onde t_1 é o tempo característico dependente de ℓ, A, ρ_0 e I_0', isto é:

$$t_1 = \left[\left(\frac{A\ell}{I_0'}\right)^2 \frac{\rho_0}{\mu_0}\right]^{1/4} \qquad (\text{III}-14)$$

A função $X(\tau)$, que satisfaz a equação com as condições iniciais $X(0) = 1$ e $X'(0) = 0$ pode ser expressa pela série,

$$X(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \tau^n \qquad (\text{III}-15)$$

Substituindo (III-15) na equação (III-14) e igualando as potências da mesma ordem, obtém-se:

$$X(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{(12)^{1/2}} + \frac{\tau^4}{360} - \cdots \qquad (III-16)$$

e somente tomando os dois primeiros termos da espressão, obtém-se

$$X(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{\sqrt{12}} \qquad (III-17)$$

A camada móvel de plasma cilíndrico atinge então o eixo em $\tau = 12^{1/4}$, isto é, no tempo

$$t_c = 12^{1/4}\, t_1 \qquad (III-18)$$

o qual corresponde o tempo da primeira inflexão(ou tempo de implosão do plasma).

Pode-se estimar a temperatura final do plasma, após a primeira implosão, como sendo igual a energia cinética da camada móvel convertida em temperatura:

$$T_i = (\gamma-1)\, m_i \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \qquad (III-19)$$

onde γ é a razão dos calores específicos e m_i massa dos íons.

TABELA III-1 : Parâmetros típicos do θ - pinch da UNICAMP

Comprimento do Solenóide , ℓ	1.00 m
Diâmetro Interno do Solenóide , $2A_o$	0.16 m
Diâmetro Interno do Tubo de Plasma , $2A$	0.15 m
Tensão Máxima do Banco , V_o	100 kV
Capacitância do Banco , C	11.0 μF
Indutância Interna , L_I	18.0 nH
Resistência , R_e	10.0 mΩ
Densidade Inicial , n_o	$5.x10^{20}$ m^{-3}
Massa de uma partícula(deutério), m_i	$1.67x10^{-27}$ kg
Raio do Plasma , R	0.030 m
Indutância , L_p	22.o nH
Tempo de Subida , t_s	1.05 μs
Corrente Máxima , I_o	1.65 MA
Campo Magnético Máximo , $B_{z\,MAX}$	2.00 $Wb/_{m^2}$
Derivada da Corrente Inicial , I_o'	$2.50x10^{12}$ A/s
Tempo de Constrição Máxima , t_c (Modelo do snow-plow)	0.25 μs
Temperatura Estimada , T_i	2.50 keV

Da equação (III-17) obtém-se:

$$T_i = \frac{2}{\sqrt{3}} (\gamma - 1) m_i \left(\frac{A}{t_1}\right)^2 \qquad (III-20)$$

Como exemplo, foi feita uma tabela de valores característicos para o sistema de Θ - pinch da UNICAMP, Tabela III-1.

III. 3 - Snow-Plow Modificado

Desprezando os efeitos como onda de choque, radiação, ionização, etc. e fazendo um cálculo aproximado do aumento na temperatura das partículas e é obvio que, ao menos durante o estágio final de compressão, o termo pressão e o campo magnético interno terão influências apreciáveis no desenvolvimento da descarga. Por simplicidade, tomam-se neste modelo, a pressão e o campo magnético interno constantes e despreza-se o termo do efeito da curvatura da linha do campo magnético, isto é, $\tan\theta = 0$, na equação (II-55) obtém-se a equação de movimento na forma:

$$\frac{d}{dt}\left[(A^2 - R^2)\frac{dR}{dt}\right] = -\alpha R\left[B_z(t)^2 - B_i^2 - 2\mu_0 p\right] \qquad (III-21)$$

onde

$$B_z = \frac{\mu_0}{\ell} I = \frac{\mu_0 I_0}{\ell} e^{-\frac{Re\,t}{2L}} \operatorname{sen} \omega t \qquad (III-22)$$

Fazendo a aproximação:

$$B_z \cong \left(\frac{\mu_0 I_0}{\ell}\right) \omega t \quad , \quad (\omega t << 1) \qquad (III-23)$$

elevando ao quadrado e substituindo por $t = t - t_2 + t_2$ tem-se

$$B_z^2 = \left(\frac{\mu_0 I_0 \omega}{\ell}\right)^2 \left[(t - t_2) + t_2\right]^2 \qquad (III-24)$$

$$= \left(\frac{\mu_0 I_0 \omega}{\ell}\right)^2 t_2^2 + 2 t_2 \left(\frac{\mu_0 I_0 \omega}{\ell}\right)^2 (t - t_2) + \left(\frac{\mu_0 I_0 \omega}{\ell}\right)^2 (t - t_2)^2$$

$$(III-25)$$

Define-se t_2 tal que a pressão magnética do pistão seja igual a pressão interna total.

Com algumas transformações algébricas obtém-se a expressão

$$\frac{d}{d\tau}\left[(A^2 - R^2)\frac{dR}{d\tau}\right] = -C_2 R\left(\tau + \frac{\tau^2}{2t_2}\right) \qquad (III-26)$$

onde $t_2 = \dfrac{\sqrt{B_i^2 + 2\mu_0 p}}{\left(\frac{\mu_0 I_0 \omega}{\ell}\right)}$ e $C_2 = 2\alpha t_2 \left(\frac{\mu_0 I_0 \omega}{\ell}\right)^2$

Para a função $R(\tau)$ tenta-se a solução em série da forma:

$$R(\tau) = A\left(1 + a_0 \tau^{3/2} + a_1 \tau^{5/2} + \ldots\right) \qquad (\text{III}-27)$$

Perfazendo os cálculos e igualando os coeficientes e potências tem-se finalmente a solução em série:

$$R(\tau) \cong A\left(1 + a_0 \tau^{3/2} + a_1 \tau^{5/2}\right) \qquad (\text{III}-28)$$

onde $a_0 = \frac{1}{A}\left(\frac{C_2}{6}\right)^{1/2}$ e $a_1 = \frac{1}{A}\frac{C_2}{48\, a_0 t_2}$ (III-29)

Acontece a seguinte situação:

$t < t_2$ $\quad \frac{B_z^2}{2\mu_0} < \frac{B_i^2}{2\mu_0} + p$ não ocorre a constrição

$t = t_2$ " = " inicia-se a constrição

$t > t_2$ " > " implosão

TABELA III-2: Tempo de 1º constrição máxima em dois modelos de snow-plow para a densidade inicial de $5.0 \times 10^{20} m^{-3}$.

T_o (eV)	B_i (W/m^2)	Snow-Plow	Snow-Plow Modificado
5	0	0.25 μs	0.40 μs
5	0.05	0.25 μs	0.375 μs
5	0.10	0.25 μs	0.34 μs
50	0	0.25 μs	0.345 μs

Embora a expressão não seja muito válida para o tempo grande, pode-se estimar o tempo da primeira constrição máxima a partir da equação (II-28) igualando R a zero e resolvendo a equação algébrica em z . .

Uma comparação do resultado do cálculo de tempo da primeira constrição máxima usando os modelos de snow-plow e snow-plow modificado está apresentado na Tabela III-2 . Observe-se um fato curioso de que quando a pressão interna aumenta o tempo da 1º constrição máxima diminue. Este fato realmente acontece no cálculo numérico apresentado no capítulo seguinte.

III. 4 - Campos Magnéticos Estáticos no Vácuo

Um solenóide cilíndrico, de comprimento ℓ, e raio interno A_o, como se mostra a figura abaixo, conduz uma corrente I uniformemente distribuída à superfície. Obtém-se os campos magnéticos no centro do solenóide e nos pontos internos deste.

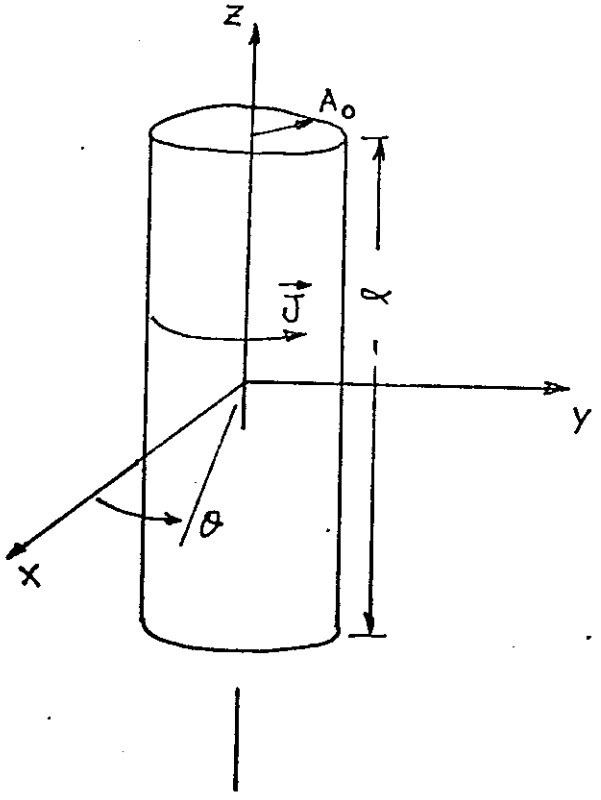

Fig. III-1 Solenóide cilíndrico de comprimento ℓ, raio A_o e densidade de corrente $\vec{J}$, uniforme.

Introduz-se a definição de densidade de corrente $\vec{J} = (0, J_\theta, 0)$ onde

$$J_\theta = \frac{I}{\ell} \frac{\delta(\pi - A_\theta)}{A_o} \qquad (III-30)$$

A equação que relaciona $\vec{J}$ com $\vec{B}$ é a Lei de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} \qquad (III-31)$$

e o vetor potencial é

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \qquad (III-32)$$

O campo magnético $\vec{B}$ pode ser expresso como

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \qquad (III-33)$$

onde está relacionado com o vetor potencial $\vec{A}$.

Então a componente azimutal do vetor potencial para a corrente é dada por

$$A_\theta = \frac{\mu_o A_o}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz' \int_0^{2\pi} \frac{J_\theta(z') \cos\theta' \, d\theta'}{\left[\pi^2 + A_o^2 + (z - z')^2 - 2A_o\pi\cos\theta'\right]^{1/2}}$$

$$(III-34)$$

Introduzindo a variável $\alpha^2 = r^2 + A_o^2 - 2A_o r\cos\theta$, pode-se simplificar a expressão A_θ, com $J_\theta(z') = \frac{I}{\ell}$

$$A_\theta = \frac{\mu_o I A_o}{4\pi\ell}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{\ell-2z}{2\alpha}\right) + \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{\ell+2z}{2\alpha}\right)\right]\cos\theta'\,d\theta' \qquad (III-35)$$

As componentes radial e axial do campo magnético se obtêm diferenciando o vetor potencial A_θ:

$$B_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \qquad (III-36)$$

$$B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r A_\theta \qquad (III-37)$$

Então tem-se:

$$B_r(r,z) = -\frac{\mu_o I A_o}{2\pi\ell}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{}{\left[(\ell+2z)^2+4\alpha^2\right]^{1/2}} - \frac{}{\left[(\ell-2z)^2+4\alpha^2\right]^{1/2}}\right\}\cos\theta'\,d\theta' \qquad (III-38)$$

$$B_z(r,z) = \frac{\mu_o I A_o}{4\pi\ell}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{r}\left[\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{\ell-2z}{2\alpha}\right) + \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{\ell+2z}{2\alpha}\right)\right] - \right.$$

$$\left. -\left[\frac{\ell-2z}{\left[1+\left(\frac{\ell-2z}{2\alpha}\right)^2\right]^{1/2}} + \frac{\ell+2z}{\left[1+\left(\frac{\ell+2z}{2\alpha}\right)^2\right]^{1/2}}\right]\left(\frac{r-A_o\cos\theta'}{2\alpha^3}\right)\right\}\cos\theta'\,d\theta' \qquad (III-39)$$

Portanto, as expressões ao longo do eixo de simetria, deduz-se das equações (III-38) e (III-39) colocando . Então

$$B_r(0,z) = 0 \qquad \text{(III-40)}$$

$$B_z(0,z) = \frac{\nu_0 I}{4\ell A_0}\left\{\frac{\ell - 2z}{\left[1+\left(\frac{\ell-2z}{2A_0}\right)^2\right]^{1/2}} + \frac{\ell+2z}{\left[1+\left(\frac{\ell+2z}{2A_0}\right)^2\right]^{1/2}}\right\} \qquad \text{(III-41)}$$

No centro do solenóide, o campo magnético é máximo:

$$B_r(0,0) = 0 \qquad \text{(III-42)}$$

$$B_z(0,0) = \frac{\nu_0 I}{\ell}\,\frac{1}{\left[1+\left(\frac{2A_0}{\ell}\right)^2\right]^{1/2}} \qquad \text{(III-43)}$$

no caso de $\ell \to \infty$ o $B_z(0,0) = \frac{\nu_0 I}{\ell}$

As equações (III-38) e (III-39) são resolvidos numericamente.

Esta solução é válida quando o tempo de penetração do campo magnético no solenóide é menor do que o tempo característico de variação do campo magnético. Como em geral o tempo de penetração do campo em condutores comuns, como, cobre, latão, aço inox são da ordem de milisegundos, o campo que realmente

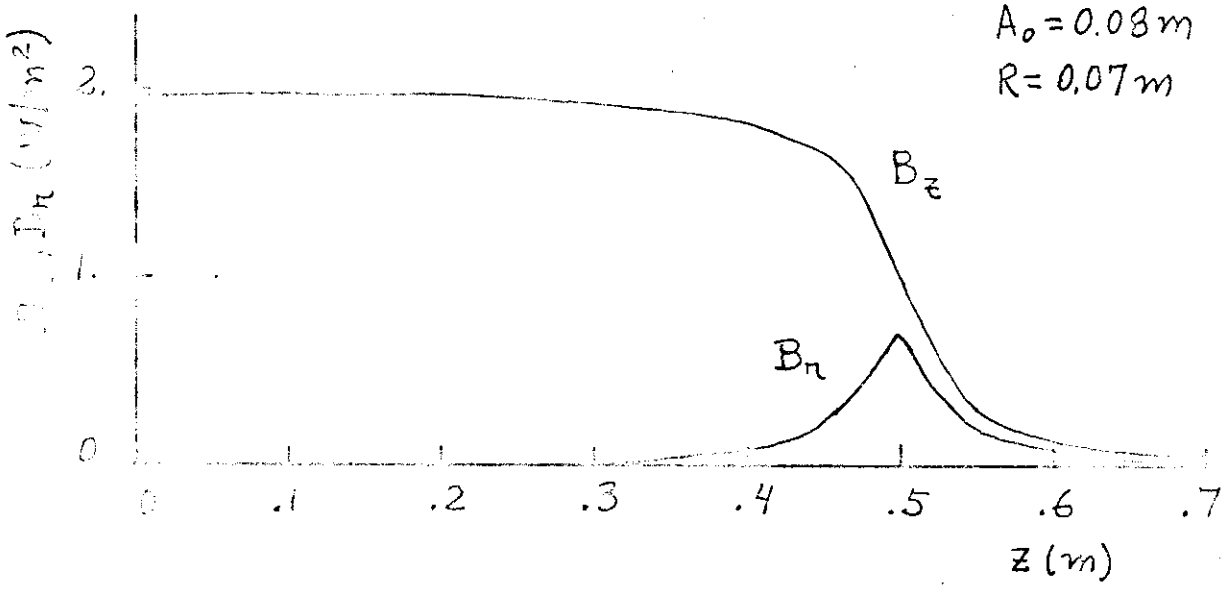

Fig. III-2 As componentes B_z e B_r do Campo Magnético Estático em z.

vai constringir o plasma é um pouco diferente do campo calculado neste capítulo.

Na Fig. III-2 apresentam-se as componentes do campo magnético, $B_z(r,z)$ e $B_r(r,z)$ para $r = 0.07m$, onde $A_0 = .08m$, $\ell = 1.m$ e $I_0 = 1.6MA$. A componente B_z permanece quase não alterada quando se varia r, mas a componente B_r vai de zero para um máximo quando r vai de 0 a A_0.

III. 5 - Oscilação do Raio do Plasma

No esquema de contração rápida produzido pela corrente, o plasma comprimida não chega imediatamente ao repouso na posição de equilíbrio mas sofre séries de oscilações radiais sobre a posição média que mudaria lentamente com o tempo. É interessante discutir as oscilações em termos da teoria MHD. Como modelo para este sistema considera-se o plasma cilíndrico perfeitamente condutor de raio R confinado dentro de um condutor cilíndrico concêntrico de raio A_0. O campo magnético é paralelo ao eixo. Esta oscilação se distingue de outras oscilações pelo fato de que ela envolve somente movimento radial.

Para o caso de situação elementar é aquele no qual a densidade, pressão e campo magnético externo são uniformes, isto é, o plasma é confinado pela corrente superficial. Neste ca

so a freqüência de oscilação pode ser expressa como,[28] e [29]

$$w = g(x)\left[\left(\frac{\pi}{M}\right)\left(\frac{B_z^2}{\mu_0}\right)(1+\delta_2)\right] \qquad (III-44)$$

onde B_z é o campo magnético externo, M a massa do plasma por unidade de comprimento e

$$\delta_2 = \left(\frac{\gamma}{2}-1\right)\frac{2\mu_0}{B_z^2}P \qquad (III-45)$$

ou

$$\delta_2 = \left(\frac{\gamma}{2}-1\right)\beta \qquad (III-46)$$

A quantidade δ_2 geralmente é muito menor do que a unidade para o movimento radial rápido. O plasma tem um γ efetivo igual a 5/3 (gás monoatômico) e o β varia somente de 0 a 1 .

O parâmetro X é associado com a razão do raio do tubo do plasma, isto é, R/A_o por

$$\frac{1}{X} = \frac{(1+\delta_2)}{2}\left(\frac{A_o^2}{R^2}-1\right) \qquad (III-47)$$

ou fazendo $\Lambda = A_o/R$ a equação (III-47) fica

$$\frac{1}{X} = \frac{(1+\delta_2)}{2}(\Lambda^2-1) \qquad (III-48)$$

A influência do termo pressão de gás, representado por δ_2, será pequeno, tal que a frequência pode, para a resolução prática, ser expressa em termos de campo magnético do vácuo, o qual é determinado pela corrente externa, e a massa do plasma por unidade de comprimento da descarga. Então

$$W = g(x)\left[\frac{1}{R^2}\,\frac{B_z^2}{\mu_0 \rho_0}\right]^{1/2} \qquad (III-49)$$

ou

$$W = g(x)\,\frac{V_A}{R} \qquad (III-50)$$

onde

$$V_A = \frac{B_z}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \qquad (III-51)$$

é a velocidade de Alfvén e $M = \pi \rho R^2$ massa total do gás.

O período de oscilação τ é

$$\tau = \frac{2\pi}{W} = \frac{2\pi R}{g(x)\,V_A} \qquad (III-52)$$

Da referência [29], $g(x)$ varia de 2.405 até 3.832 dependendo da razão A_0/R.

Em geral as oscilações ocorrem em compressão alta e com amplitude pequena bastante para fazer os efeitos da parede desprezível de modo que as oscilações não se modifiquem significativamente o campo magnético externo.

CAPÍTULO IV

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

IV. 1 - Método Numérico

O sistema de equações para o θ - pinch descrito no capítulo II foi resolvido numericamente, para o caso mais geral, usando o método das diferenças finitas com as condições de contornos apropriadas. O algoritmo utilizado foi o de Runge-Kutta de quarta ordem com tempos subdivididos em $\Delta/3$.

O sistema completo de equações, incluindo todos os detalhes possíveis para o cálculo se escreve:

Equações de Movimento

Fase de Implosão

$$\frac{d}{dt}\left[(A^2-R^2)\frac{dR}{dt}\right] = -\alpha R\left[(B_z^2-B_i^2)(1-\tan^2\theta)-2\mu_0 p\right] \equiv F \quad (II\text{-}55)$$

onde $\alpha = 1/(n(z,0)m_i\eta)$, $n(z,0) = n_0 \exp(-2z)$,

$B_i = B_{io}$, campo de polarização inicial,

$B_z = \frac{\mu_0}{\ell} I$, onde I é calculado na equação do circuito,

$$\tan\theta = \frac{dR(z)}{dz}$$

$p = p_o$, pressão inicial do plasma

a camada móvel carrega o campo B_i e p comprimidos.

Fase de Pós-Implosão

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{3}A^2\frac{dR}{dt}\right] = -\alpha R\left[(B_z^2 - B_i^2)(1-\tan^2\theta) - 2\mu_o p\right] \qquad (II-56)$$

onde as variáveis que diferem da equação anterior são: B_i , campo interno de polarização, que é calculada na equação do fluxo e p , pressão do plasma, que é calculada pela equação da pressão. . .

A transição se faz quando a espessura de penetração atingir o valor 2/3 do raio R do plasma, porém para atenuar o impacto numérico de variação da pressão interna total foi inserido no código numérico uma transição gradual num intervalo de dez passos de tempo.

Equação da Pressão

$$\frac{dP}{dt} = (\gamma-1)\eta J^2 - 4\gamma\frac{P}{R}\frac{dR}{dt} \equiv D \qquad (II-57)$$

onde $\eta = 1/625\ T_e^{3/2}$ onde T_e é dado em eV. O valor 625 se refere a deutério e $\ln\Lambda = 15$. Foi suposto $T_i = T_e$.

A temperatura é calculada como sendo $T = p/n$ onde

a densidade é dada por: $\eta = \eta_o(z) A^2 / R(z)^2$.

Equação do Circuito

$$\frac{d\phi}{dt} = -R_e I - \frac{1}{C}\int^t I\,dt \equiv Q \qquad (II-58)$$

onde $\phi = L_1 I + \phi_z$

sendo $\phi_z = \mu_o \pi (A_o^2 - R^2)\frac{dI}{dz}$ = uniforme em z devido a $\nabla.\vec{B} = 0$ a impenetrabilidade do campo no material do solenóide e plasma e $I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dI}{dz} dz$ onde foi tomado o centro do solenóide como z=0.

O efeito dc plasma sobre o circuito se faz através do raio do plasma $R(z)$.

Equação do Fluxo

$$\frac{d\phi_i}{dt} = 2R V_d (B_z - B_i) \equiv E \qquad (II-59)$$

onde $V_d = \frac{\eta}{\mu_o \delta}$ é a velocidade de difusão do campo e $\delta = \delta_o + \int_o^t \Delta\,dt$ sendo $\Delta = \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{\eta(H)t}{\mu_o}}$ uma função da temperatura que varia com o tempo. δ_o foi tomado como $10\sqrt{\frac{\eta(0)\Delta t}{\mu_o}}$ onde Δt é da

ordem de 0.005 μs.

Na fase de pós-implosão, a resistividade foi multiplicada por um fator 10 para simular a resistividade anômala que aparece devido a várias instabilidades.

As condições iniciais são descritas no fim do capítulo II.

O algoritmo numérico usado é o de Runge-Kutta de quarta ordem descrita na seguinte forma:(30)

$$y(x_j+h) = y(x_j) + h\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu f(\xi_\nu, y_{\nu j}) \qquad (IV-1)$$

onde $n = 3$

$$y_{0j} = y(x_j)$$

$$y_{\nu j} = y_{0j} + h\sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_{\nu k} f(\xi_k, y_{kj}) \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

$$\xi_0 = x_j$$

$$\xi_\nu = \xi_0 + \theta_\nu h$$

sendo

ν ou j		0	1	2	3
α_ν	=	1/8	3/8	3/8	1/8
θ_j	=	0	1/3	2/3	1
α_{1j}	=	1/3			
α_{2j}	=	-1/3	1		
α_{3j}	=	1	-1	1	

No problema em consideração $\underline{y}$ é a matriz coluna

$$\underline{y} = (R, S, P, V, \phi_i) \qquad (IV-2)$$

onde
$$S = \begin{cases} (A^2 - R^2)\dfrac{dR}{dt} \\ \dfrac{2}{3} A^2 \dfrac{dR}{dt} \end{cases}, \quad V = \phi_2 + L_1 I \qquad (IV-3)$$

e
$$\underline{f} = (G, F, D, Q, E) \qquad (IV-4)$$

onde F é a força definida em (II-55)

$G = \begin{cases} S/(A^2 - R^2) & \text{na fase de implosão} \\ S/(\frac{2}{3} A^2) & \text{na fase de pós-implosão} \end{cases}$

D = Aquecimento Joule mais o trabalho por unidade de tempo definida por (II-57)

Q é definida em (II-58) e

E é o fluxo difundido por unidade de tempo definido como em (II-59).

O sistema de θ - pinch estudado é o do Tupã cujos parâmetros estão na tabela III-1.

O código numérico gerado para resolver êste problema é rápido. Um tempo típico de CPU no computador PDP-10 da UNICAMP é de 30 segundos para correr um microsegundo(aproximadamente igual ao tempo de subida do campo magnético)do tempo real do θ - pinch.

IV. 2 Resultados

No cálculo da dinâmica do Θ - pinch os parâmetros principais foram tomados da tabela IV-1. As quantidades que foram variadas são, a temperatura inicial T_o, a densidade inicial n_o, para z=0, e o campo magnético de polarização B_i. A tabela IV-1 mostra os parâmetros estudados.

TABELA IV-1: Parâmetros variados para o estudo da dinâmica do Θ - pinch da UNICAMP-Tupã. O tempo corrido foi até t≈0.8 μs e z de 0 a 0.5 (fim do selenóide)

T_o = 5 eV

B_i (Wb/$_m$2)	-0.10	-0.05	0	0.005	0.10
N_o (m^{-3})					
$1x10^{19}$			X		
$5x10^{19}$			X		
$1x10^{20}$	X	X	X	X	X
$5x10^{20}$			X		
$1x10^{21}$			X		

T_0 = 50 eV

B_i = 0
N_o = $5x10^{20}$ m^{-3}

Perfis típicos da dinâmica são apresentados nas figuras IV-1 a IV-4, onde são apresentados gráficos do raio R, temperatura T_i, campos magnéticos externo B_z e interno B_i, a derivada do campo magnético externo em tempo $\frac{dB_z}{dt}$ e a espessura de penetração δ, para o caso de $T_o = 5$ eV, $N_o = 5x10^{20} m^{-3}$ e $z=0$.

Na Fig. IV-1 verifica-se que a implosão do plasma termina ao redor do tempo 0.2 μs e então inicia a fase de oscilações de "bounce" com uma amplitude aproximadamente constante. A fase da implosão propriamente dita termina ao redor do tempo 0.2 μs. A temperatura dos íons apresenta picos enormes nos pontos de mínimo de raio e que chegam a ordem de 5 keV para uma corrida típica. Os valores de T_i na fase da implosão foi tomado como se a energia cinética tivesse sido totalmente termalizado.

Na Fig. IV-2 apresentam-se os campos magnéticos em função do tempo. O perfil tracejado é o campo magnético calculado tomando o raio do plasma fixo a 3 cm. As oscilações do campo magnético em torno deste campo é devido a dinâmica do plasma. Observa-se na Fig. IV-3 que a sua derivada vai para negativo nos pontos mais apertados do raio. Pode-se relacionar o valor do $\frac{dB_z}{dt}$ com o raio mínimo, e como $\frac{dB_z}{dt}$ é proporcional ao sinal da bobina de Rogowski enrolado sobre o solenóide, isto seria um método de determinar o raio mínimo do plasma experimentalmente.

A Fig. IV-2 mostra também o campo magnético inter

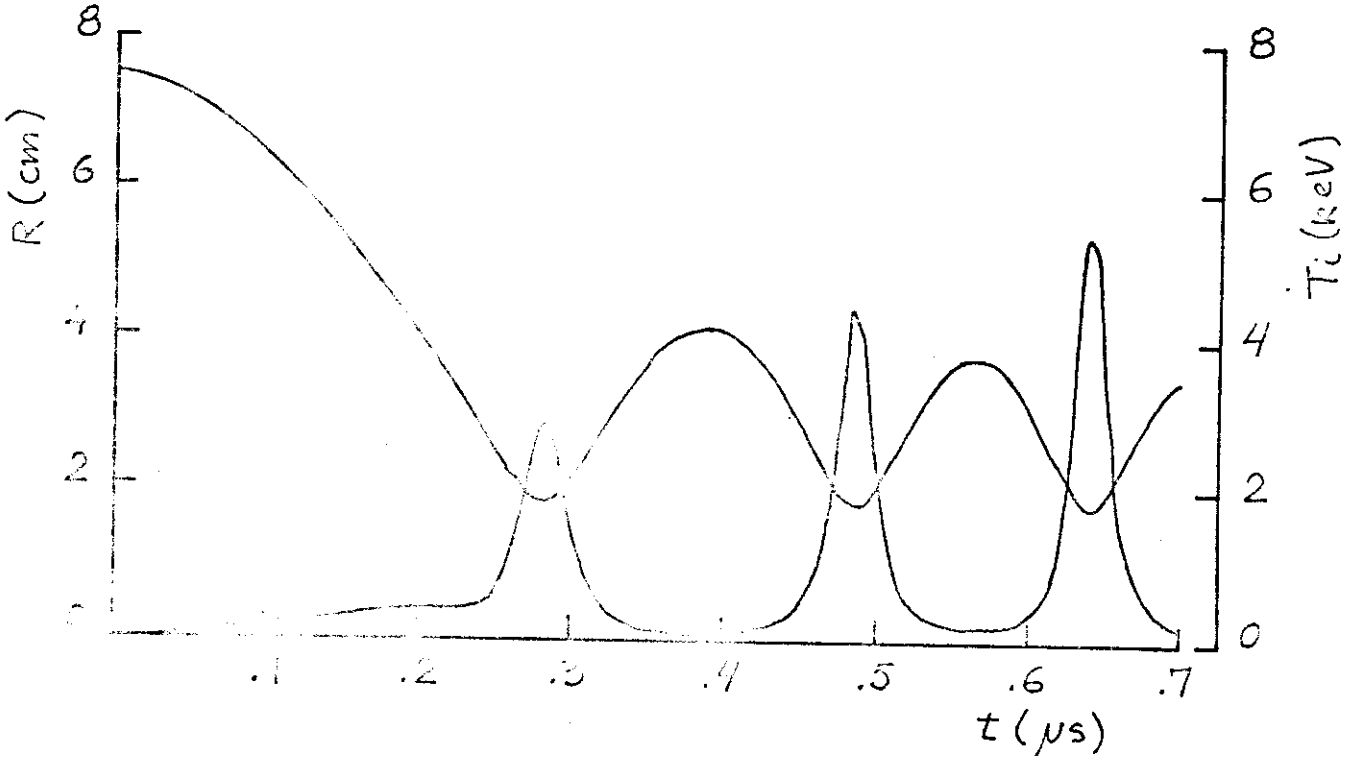

Fig. IV-1. Evolução temporal do raio de plasma e da temperatura do ion para $n_o=5x10^{20}m^{-3}$, $T_o=5eV$, $B_i=0$ e $z=0$.

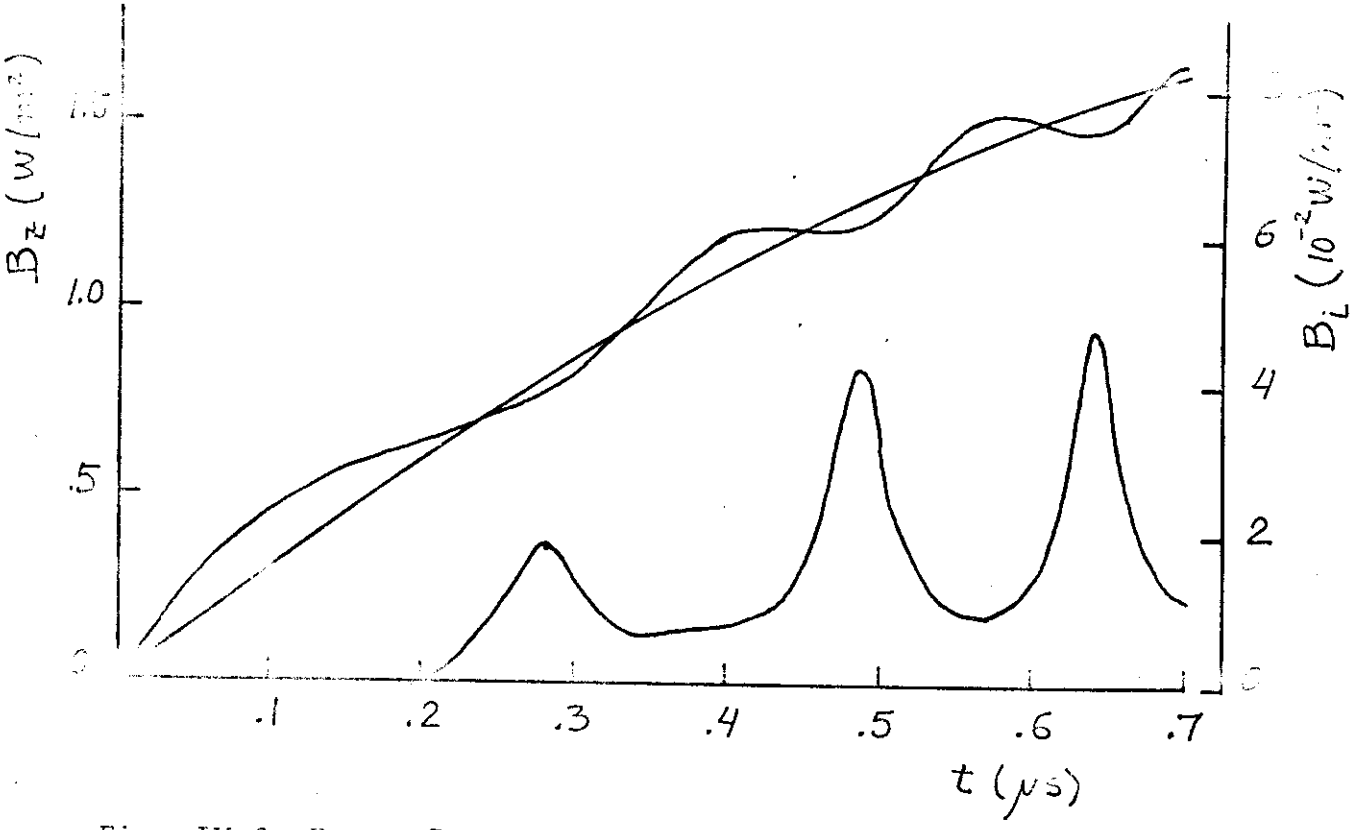

Fig. IV-2. Evolução temporal dos campos magnéticos para $n_o=5x10^{20}m^{-3}$, $T_o=5eV$, $B_i=0$ e $z=0$.

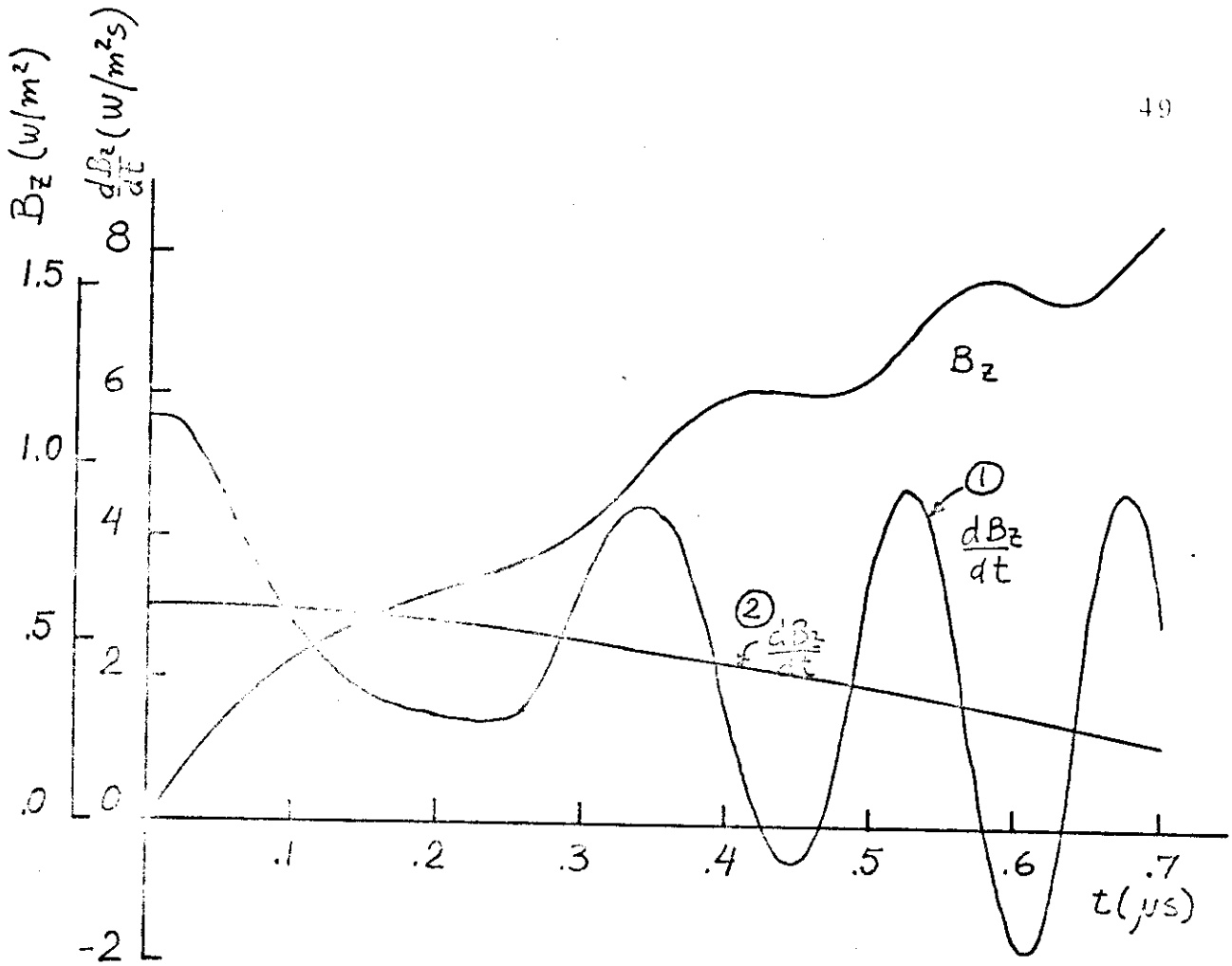

Fig. IV-3. Evolução temporal do campo magnético externo e a derivada do campo magnético externo em tempo para $n_o=5x10^{20}m^{-3}$, $T_o=5eV$, $B_i=0$ e z=0: 1) L variável e 2) L = constante.

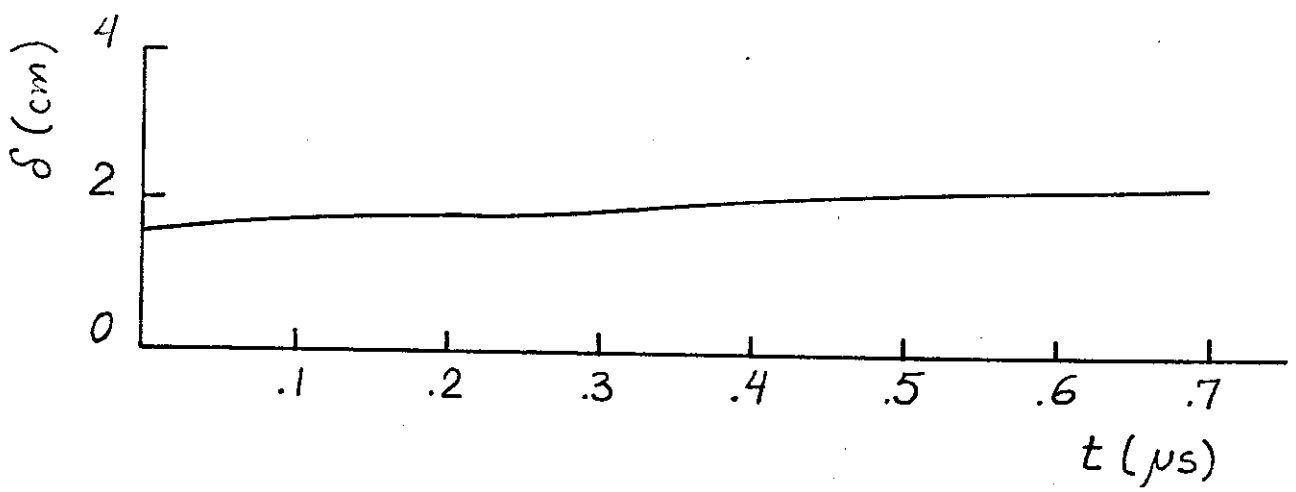

Fig. IV-4. Evolução temporal da espessura de penetração para $n_o=5x10^{20}m^{-3}$, $T_o=5eV$, $B_i=0$ e z=0.

no B_i. Inicialmente este campo é zero, mas com o tempo ocorre a difusão do campo B_z e quando o raio do plasma se constringe o campo B_i se constringe também apresentando picos. Como a penetração do campo B_z é lenta, o pico do B_i também está relacionado com o raio mínimo. A medida do campo B_i produz também uma medida indireta do raio mínimo.

Na Fig. IV-4 apresenta-se a variação da espessura de penetração do campo magnético. A penetração do campo ocorre lentamente a escala de tempo da dinâmica do θ - pinch.

Nas Figuras IV-5 e IV-6 apresentam-se alguns perfis para o caso de campo de polarização B_i diferente de zero. Na Fig. IV-5 estão plotados o raio e a temperatura do plasma para o caso de $B_i = -0.10\ Wb/m^2$, $T_o = 5\ eV$ e $N_o = 5x10^{20} m^{-3}$. O raio mínimo atingido é maior do que aquele atingido sem a polarização, e a temperatura máxima atingida é menor, porém a variação entre os dois casos é muito pequena. Nas experiências com polarização antiparalela como neste caso a temperatura atingida tem sido muito maior do que no caso sem a polarização. Crê-se que isto é devido ao fato de resistividade anômala ter aumentado enormemente devido a instabilidade. No caso deste cálculo a anomalidade foi colocado somente ao fator 10.

A Fig. IV-6 apresenta o campo de polarização em função do tempo. Nos mínimos do raio do plasma o campo B_i apresenta picos enormes chegando B_i a igualar o campo externo B_z.

Na Fig. IV-7 estão os perfis do raio em função de tempo tomando vários valores de densidade central do plasma.

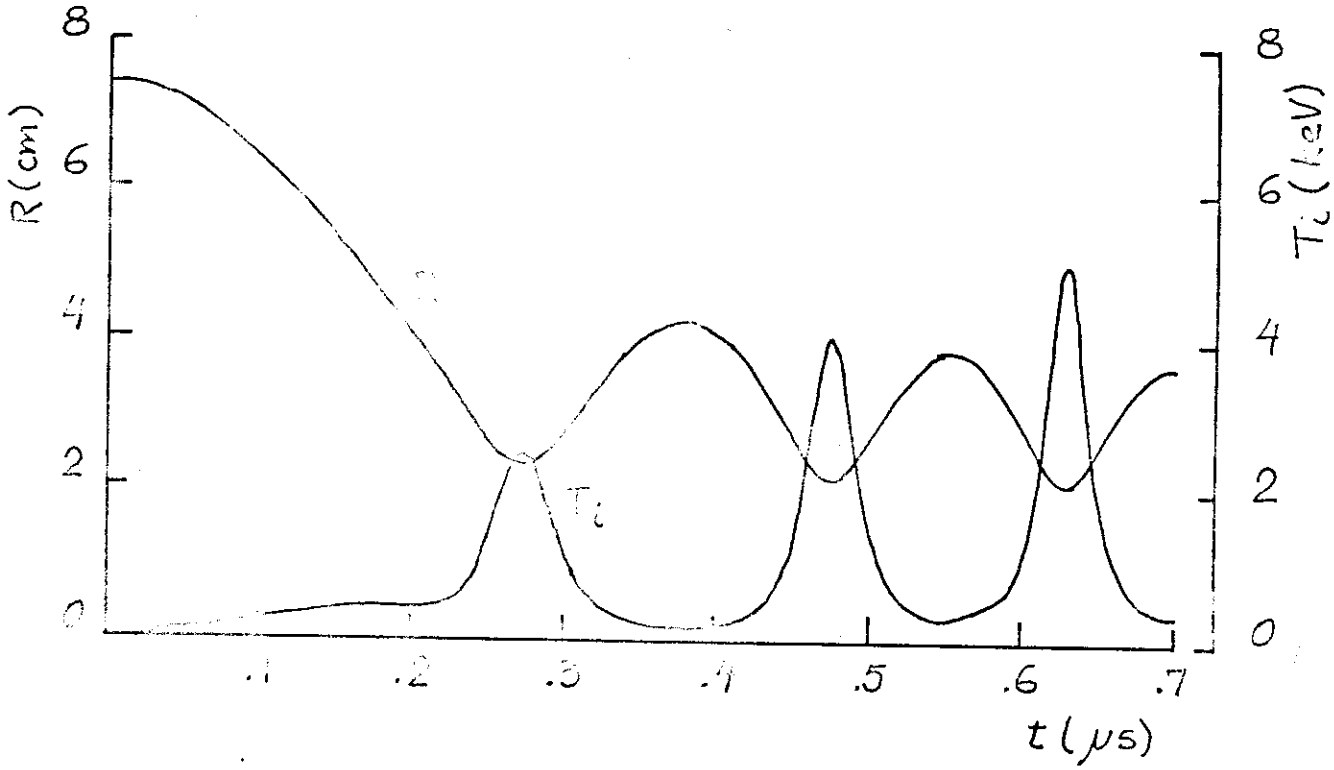

Fig. IV-5. Evolução temporal do raio de plasma e da temperatura do ion para $n_o=5x10^{20}m^{-3}$, $T_o=5eV$, $B_i=-0.10Wb/m^2$ e z=0.

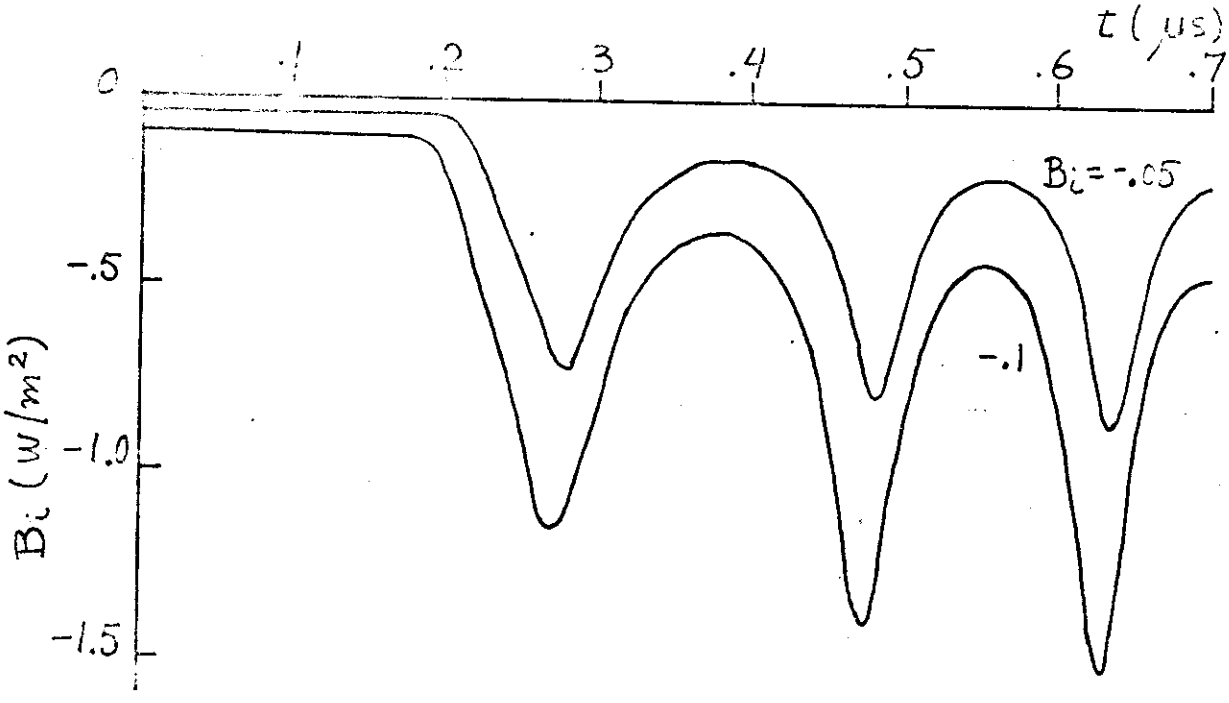

Fig. IV-6. Evolução temporal dos campos magnéticos internos para $n_o=5x10^{20}m^{-3}$, $T_o=5eV$, $B_i=-0.05$ e $B_i=-0.10$ Wb/m^2 em z=0.

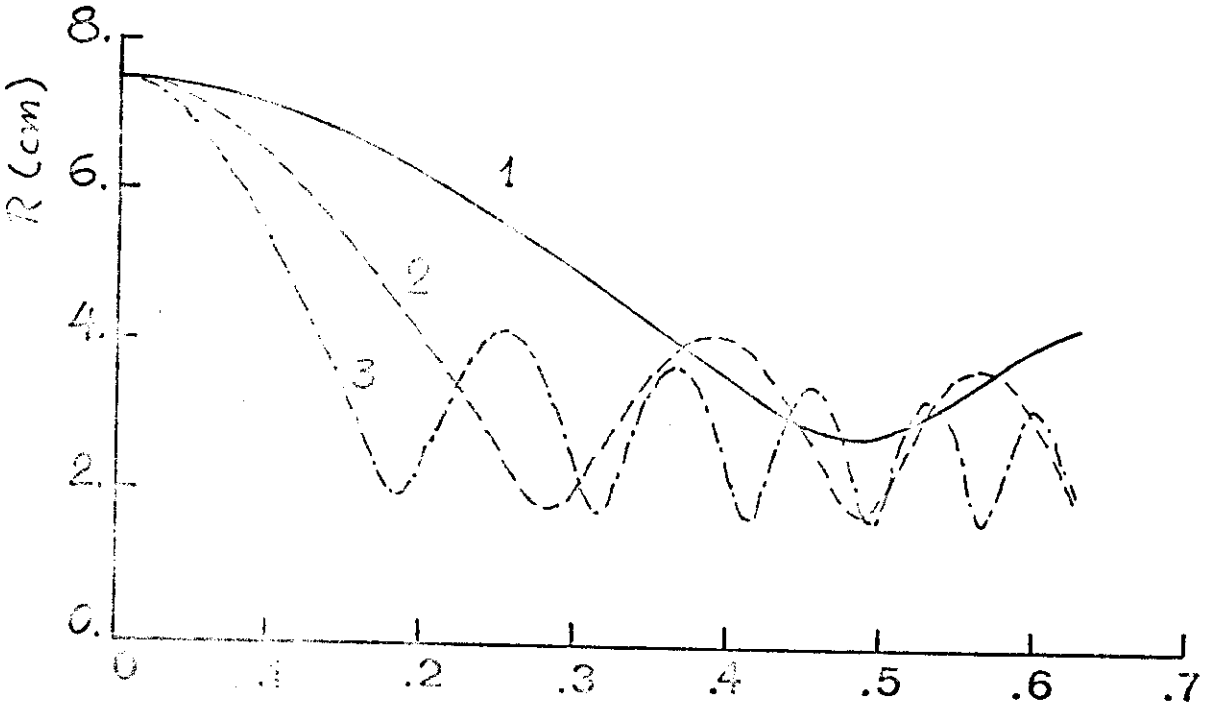

Fig. IV-7. Evolução temporal dos raios de plasma para vários valores de densidades com $B_i=0$ em z=0: 1) $n_o=5x10^{21}m^{-3}$ 2) $n_o= 1x10^{20}m^{-3}$ e 3) $n_o=5x10^{20}m^{-3}$.

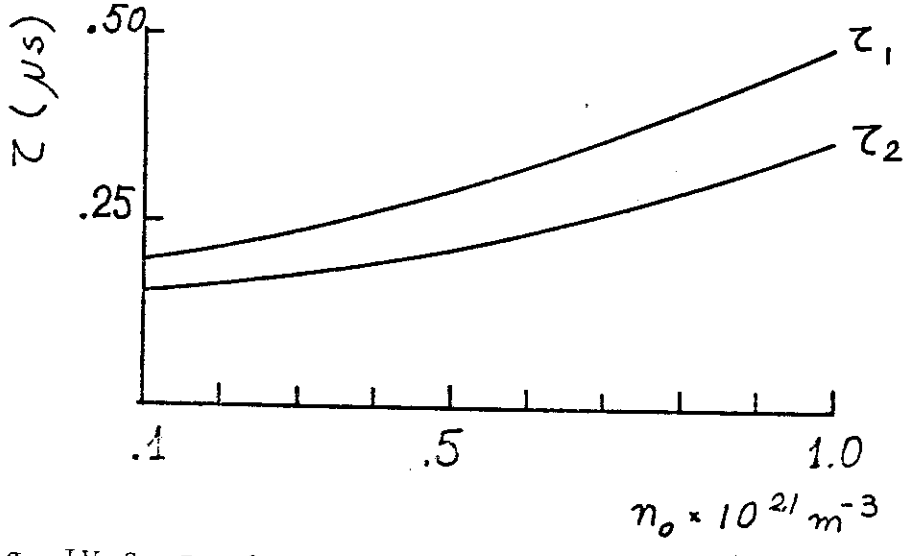

Fig. IV-8. Período em função da densidade para $T_o=5eV$, $B_i=0$ em z=0: τ_1 igual a $\tau_{R_{min}}$ igual a τ_{bounce}.

Quando aumenta a densidade os tempos de constrição máxima e de oscilação de "bounce" aumentam. A Fig. IV-8 apresenta o efeito da densidade sobre estes tempos.

Considerando agora a variação da densidade ao longo do eixo z observa-se um fenômeno interessante. Na Fig. IV-9 estão apresentados os perfis do raio do plasma como função do tempo e z, para a densidade inicial variando exponencialmente $n = n_o \exp(-2z)$. Observa-se que quanto menor for a densidade mais rápida se torna o tempo se implosão e as oscilações de bounce. O resultado é que em um instante t qualquer, surgem ao longo do eixo z oscilações do raio do plasma que parecem ser uma instabilidade.

Na Fig. IV-10 mostram-se os perfis e R, T_i e B_z em função do z no instante t = 0.985 μs. Observe-se que aparecem oscilações ao longo do z que na realidade é devido a diferença na frequência de oscilação radial que cresce quando decresce a densidade. Isto tem valor experimental por que a temperatura medida em um ponto z não deve ser confundida com a temperatura média medida ao longo do z num instante de tempo t. Na tese de M. Machida (14) observa-se uma oscilação do campo B_z do tipo apresentado nesta figura. Possivelmente esta teoria explica a ocorrencia desta oscilação experimental.

Na tabela IV-2 apresenta-se um resumo dos valores característicos encontrados numericamente e comparam-no com os valores encontrados analiticamente. A teoria das oscilações do "bounce" de Taylor apresenta um resultado que concorda muito

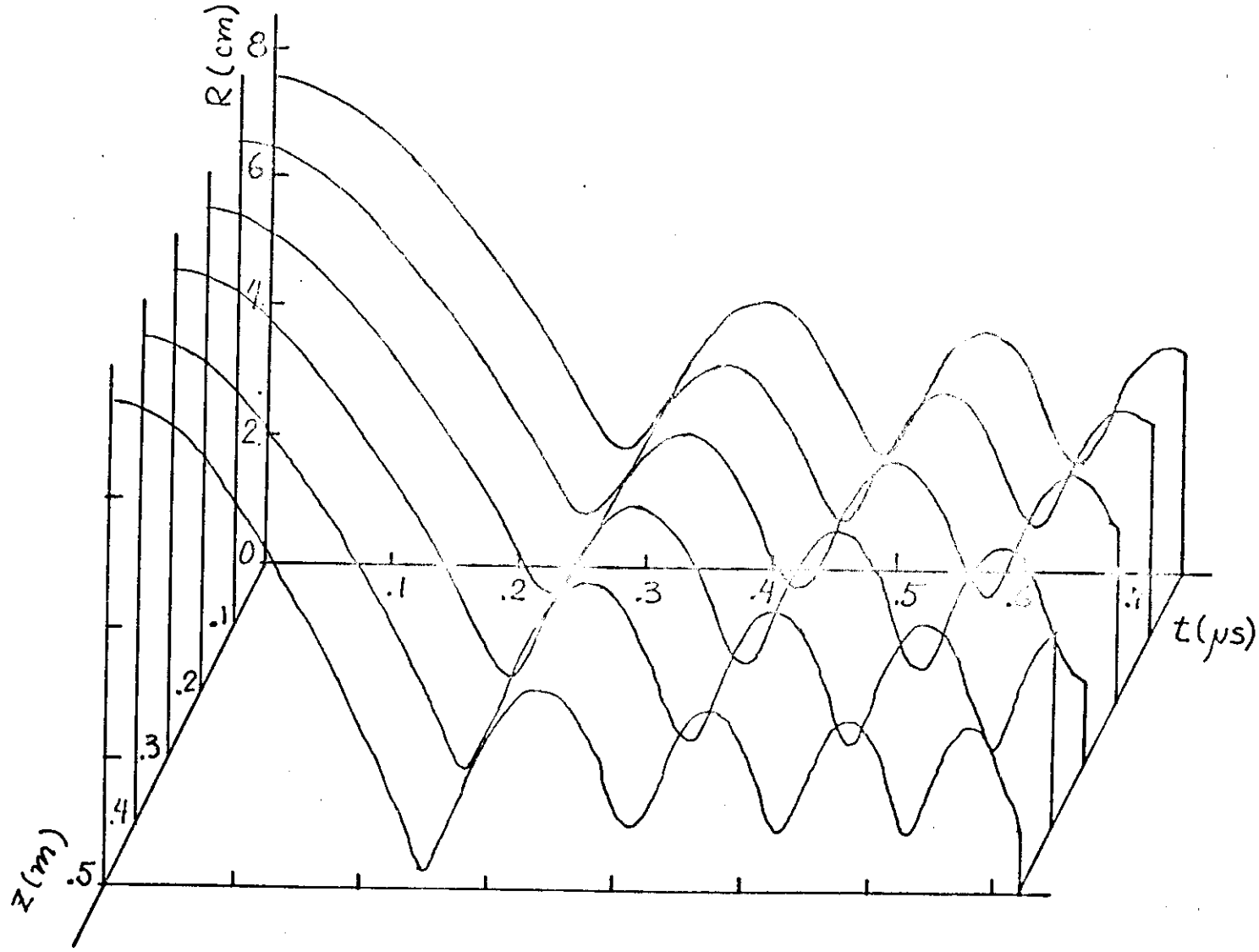

Fig. IV-9. Evolução do raio do plasma: axial-z e temporal-t para $n_o = 5 \times 10^{20} m^{-3}$, $T_o = 5eV$ e $B_i = 0$.

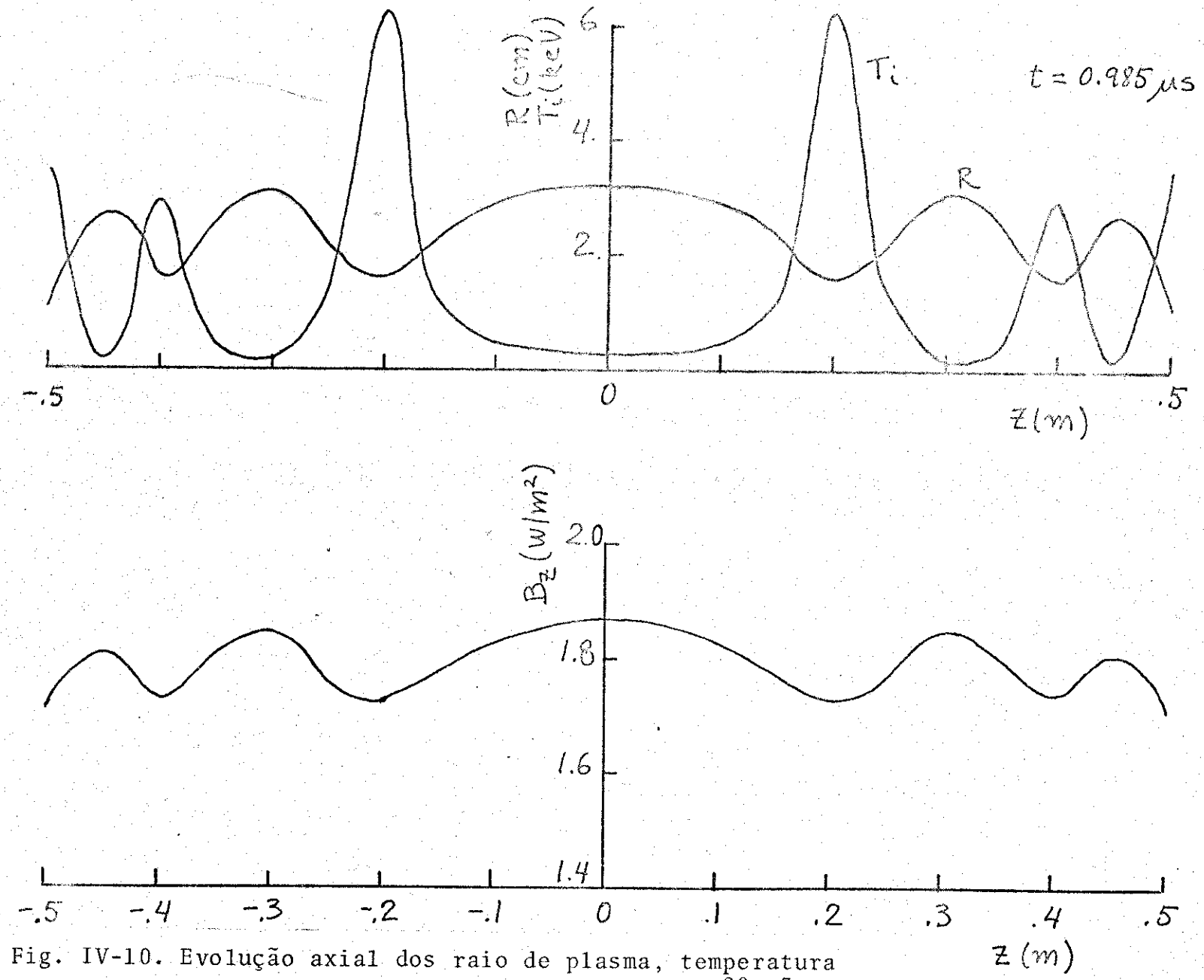

Fig. IV-10. Evolução axial dos raio de plasma, temperatura do ion e campo magnético externo para $n_o = 5 \times 10^{20} m^{-3}$, $T_o = 5eV$ e $B_i = 0$ no tempo t=0.985 μs.

TABELA IV-2: Resumo dos valores característicos encontrados numericamente e analiticamente.

$B_i = 0$

$N_o(m^{-3})$	$5x10^{19}$	$1x10^{20}$	$5x10^{20}$	$1x10^{21}$	$5x10^{21}$
$t_{Rmin}(\mu s)$	0.155	0.185	0.285	0.485	0.485
$R_{min}(m)$	0.0195	0.0195	0.0182	0.0280	0.0280
$B_z(Wb/m^2)$	0.4508	0.5331	0.7881	1.255	1.255
$V_A(m/s)$	$9.84x10^5$	$8.23x10^5$	$5.44x10^5$	$4.88x10^5$	$2.74x10^5$
$\tau_b(\mu s)$	0.124	0.148	0.21	0.36	0.64
$\tau_n(\mu s)$	0.11	0.1325	0.20	0.405	0.40

bem com os valores encontrados numericamente.

Obervou-se que a influência da curvatura do campo magnético sobre a dinâmica do plasma, representada pelo termo $\tan^2\theta$, é muito pequena. Em todas as corridas que foram feitas o valor do $\tan^2\theta$ não ultrapassou o valor de 0.01.

IV-3 - Conclusões

Foi desenvolvido um modelo de (1 + zero) dimensões, borda abrupta na direção r e uma dimensão na direção z , para estudar a dinâmica do θ - pinch, com o campo de polarização e com a possibilidade de calcular as oscilações radiais, a temperatura do plasma, o efeito do raio do plasma sobre a descarga do circuito e a influência do solenóide do comprimento finito sobre as oscilações.

Obteve-se uma solução série para o caso da pressão finita e campo de polarização, válida para o início da constrição.

Quanto a oscilações de bounce conclue-se que o seu período de oscilação é somente um pouco menor do que o tempo de constrição e que concorda com a teoria do J. B. Taylor.

A temperatura do plasma apresenta um pico bastante estreito quando o raio do plasma atinge o mínimo. No caso do θ - pinch da UNICAMP, Tupã, este pico pode ultrapassar de 5 keV.

O efeito do raio de plasma sobre a descarga é apreciável podendo até inverter o sinal de dB_z/dt. Este fato pode ser utilizado com um método de medir o raio mínimo do plasma, se se tomar cuidado em calibrar propriamente o sinal do enrolamento de Rogowski.

A influencia do fato do solenóide de tamanho finito se manifesta como oscilação de grandezas como B_z, R, T_i , etc. ao longo do eixo z. Estas oscilações são as oscilações transpostas de bounce e não constituem nenhuma instabilidade nova.

Como continuação deste trabalho pode-se sugerir a inclusão do efeito da perda de partículas pelas extremidades do θ - pinch sobre a sua dinâmica e tratar mais propriamente o movimento das partículas ao longo do z.

O modelo serve também para a previsão dos acontecimentos e interpretação dos resultados de Θ - Pinch I, IA, Θ - Pinch II e Tupã da UNICAMP.

REFERÊNCIAS

(1) - A. C. Kolb: Phys. Rev., 112, 291 (1958).

(2) - A. C. Kolb, W. R. Faus e A. D. Anderson: Nuclear Fusion 1, 257 (1961).

(3) - K. Hain e A. C. Kolb: 'Fast Theta Pinch', Nuclear Fusion, Suppl. Pt. 2, 561 (1962).

(4) - H. A. Bodin:'Rapid Axial Contraction of a High Density Deuterium Plasma in a Thetatron Discharge', Nuclear Fusion, Suppl. Pt. 2, 511,(1962).

(5) - H. Kever: 'Theory of Dynamical Behaviour of Plasmas with Internal Magnetic Fields during Magnetic Compression', Nuclear Fusion, Suppl. Pt. 2, 613 (1962).

(6) - T. Yamada, S. Aihara e outros: 'The Theta Pinch Device of the Electrotechnical Laboratory in Japan', Proceedings of Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Salzburg, CN-10/82, (1961).

(7) - M. Keilhacker:'Diffusion of Trapped Reversed Magnetic Field in a Theta-Pinch in the Presence of a Probe', Nuclear Fusion, 4,285 (1964).

(8) - T. A. Oliphant: 'A mixed Snow-Plow Bounce Model for Shock Heating in a Staged Theta Pinch',
Nuclear Fusion, 14, 377 (1974).

(9) - R. A. Hess e H. Griem: 'Heating of End Region Plasma in a θ-Pinch',
Phys. Fluids, 18, 1056 (1975).

(10)- K. Höthker: 'Plasma Dynamics and Current Sheath Structure in a Collision-free Theta Pinch',
Nuclear Fusion, 16, 253 (1976).

(11)- R. J. Comisso e H. R. Griem: 'Observation of Collisionless Heating and Thermalization in a θ-Pinch',
Phys. Rev. Lett., 36, 1038 (1976).

(12)- Y. G. Chen e outros: 'Plasma Heating in a High-Voltage Toroidal θ-Pinch',
Phys. Rev. Lett., 38, 1400 (1977).

(13)- R. J. Comisso e H. Griem: 'Experimental Study of the Post-Implosion Phase of a θ-Pinch',
Phys. Fluids, 20, 44 (1977).

(14)- M. Machida: 'Estudos da Compressão Magnética de Plasma em um Sistema θ-Pinch',
Tese de Mestrado, IFGW, UNICAMP (1977).

(15) - E. A. Luciano: 'Difusão e Oscilação da Densidade e Campo num Plasma de θ-Pinch sem Espelho', Tese de Mestrado, IFGW, UNICAMPO (1978).

(16) - A. C. J. Paes: 'Simulação de um θ-Pinch por Modelo de Dois Fluidos', Tese de Mestrado, IFGW, UNICAMP (1979).

(17) - Simulação do theta-pinch por partículas ainda não foi realizada por causa das dificuldades técnicas.

(18) - P. C. Liewer: 'Numerical Studies of Ion Reflection in Collisionless Theta-Pinch Implosion Using a Hybrid Vlasov-Fluid Model', Nuclear Fusion, 16, 817 (1976).

(19) - B. H. Hui e S. Hamasaki: 'Fluid Numerical Studies of High-Density θ-Pinch Implosion Including Classical and Anomalous Transport Processes', Nuclear Fusion, 16, 73 (1976).

(20) - A. G. Sgro e C. W. Nielson: 'Hybrid Model Studies of Ion Dynamics and Magnetic Field Diffusion During Pinch Implosion', Phys. Fluids, 19, 126 (1976).

(21) - A. Aydemir, J. Busnardo-Neto e outros: 'Experiment and Theoretical Studies of High-Beta Tokamaks', Proceedings of Seventh Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1978, Nuclear Fusion, Suppl. Vol. II, 105 (1979).

(22) - J. V. Brackbill, M. T. Menzel e D. C. Barnes:'Numerical Studies of the Linear θ-Pinch', Proceedings of Third Topical Conference on Pulsed High Beta Plasmas, Abingdon, U.K., 345 (1975).

(23) - M. Reusch: Código Numerico de MHD para θ-Pinch.

(24) - L. A. Artsimovich: Controlled Thermonuclear Reactions, Gordon and Breach, New York (1964).

(25) - M. Kaufmann: Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-5019-MS (1972).

(26) - K. Sato e T. Aizawa: Annual Review - IPP, Nagoya (1976).

(27) - J. P. Goedbloed: Lectures Notes on Ideal Magnetohydrodynamics, IFGW, UNICAMP, (1979).

(28) - G. B. F. Niblett e T. S. Green: Proc. Phys. Soc., 74, 737 (1959).

(29) - J. B. Taylor: Proceedings of a Conference on the Theoretical Aspects of Controlled Fusion Research, Gatlinburg, Tenn., U.S.Atomic Energy Commision, TID - 7582, (1959).

(30) - E. Isaacson e H. B. Keller: Analysis of Numerical Methods, J. Wiley, (1966).