

**ANÁLISE ESPECTRAL MHD EM PLASMAS
CILÍNDRICOS DE DUAS CAMADAS.
APLICAÇÕES A MANCHAS SOLARES**

por

Roberto da Trindade Faria Júnior

Orientador: prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakznaka

*Este exemplar corresponde a versão final
da tese de Mestrado defendida pelo
Sr. Roberto da Trindade Faria Júnior e aprovada
pela banca examinadora. 14/02/96*

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATHAGIN"**

**ANÁLISE ESPECTRAL MHD
EM PLASMAS CILÍNDRICOS
DE DUAS CAMADAS.
APLICAÇÃO A MANCHAS
SOLARES**

por

Roberto da Trindade Faria Júnior

Orientador: Prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Campinas
1995

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

F225a Faria Júnior, Roberto da Trindade
Análise espectral MHD em plasmas cilíndricos de duas camadas. Aplicação a manchas solares / Roberto da Trindade Faria Júnior. -- Campinas, SP : [s.n.], 1995.

Orientador: Paulo Hiroshi Sakanaka.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Ondas magnetoidrodinâmicas. 2. Manchas solares. I. Sakanaka, Paulo Hiroshi. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.



INSTITUTO DE FÍSICA
GLEB WATAGHIN

PARECER DE APROVAÇÃO

DEFESA DE TESE DE MESTRADO DE

ROBERTO DA TRINDADE FARIA JÚNIOR

DATA: 26 / 07 / 95

BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka (Orientador)

- Prof. Dr. Carlos Augusto de Azevedo

- Prof. Dr. José Busnardo Neto

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	1
2	TEORIA MAGNETOHIDRODINÂMICA IDEAL	5
2.1	Introdução	5
2.2	Equação MHD Ideal	6
2.3	Modelo	7
2.3.1	Equilíbrio	7
2.3.2	Análise dos Modos Normais	9
2.3.3	Crítério de Suydam	14
2.3.4	Interface Perturbada	16
3	MÉTODO NUMÉRICO E RESULTADOS	26
3.1	Introdução	26
3.2	Método Numérico	26
3.3	Procedimento do Cálculo	27
4	APLICAÇÃO À MANCHA SOLAR	45
4.1	Introdução	45
4.2	Modelo	47
4.3	Discussões	48

5 CONCLUSÕES	62
A Introdução às Ondas de Alfvén	64
B Aplicação da Teoria MHD em Geometrias Cilíndricas	67
B.1 Equação de Hain-Lüst	67
B.2 Singularidades da Equação de Hain-Lüst	68
B.3 Ondas de Superfície	72

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, Roberto, Alda, Jussara, Ana Claudia, Alexandra e Alexandre Antônio, responsáveis pela minha formação moral e espiritual, pelo total apoio e pela paciência e compreensão nos meus dias de apuro.

Agradeço ao meu orientador prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka pelos conselhos, sugestões , estímulos e pela sensibilidade que só um “Mestre” possui.

Agradeço ao prof. Dr. Carlos Augusto de Azevedo por ter me iniciado no universo da pesquisa.

Agradeço ao prof. Dr. Altair Souza de Assis pelo apoio e pela sugestão do tema desta dissertação .

Agradeço à amiga Márcia, responsável direta por esta minha rápida passagem pelo Mestrado e também pelo carinho que sempre me dispensou.

A todos os conhecidos, como Antônio de Pádua, que direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, meus agradecimentos.

À CAPES, pelo apoio financeiro durante a realização do trabalho, meus agradecimentos.

Finalmente, desejo agradecer à Mônica (e quem vier), que com paciência suportou as dificuldades; minhas longas ausências, bem como as minhas preocupações no decorrer desta dissertação .

Dedico esta dissertação à minha mãe, por ter me encorajado a ir para a Física, pois já previa que este era o meu destino.

Sumário

É proposto um modelo cilíndrico para estudar o espectro magnetohidrodinâmico (MHD) ideal. Este modelo consiste de duas camadas cilíndricas concêntricas de plasma que definem duas regiões (interna e externa) com características físicas distintas. Supõe-se neste modelo uma pequena corrente longitudinal difusa na região interna, assim, campos magnéticos helicoidais com uma pequena razão entre B_θ/B_z aparecem em ambas as regiões. Um código numérico foi desenvolvido para se obter modos de oscilação das perturbações de plasma referente a este modelo, usando a teoria MHD e analisando os espectros obtidos. Verifica-se que, devido a dupla camada, o espectro caracteriza-se por apresentar modos discretos de natureza mista (lenta, Alfvênica ou rápida), separados por regiões de contínuos. É confirmado definitivamente a existência do comportamento Sturmiano e anti-Sturmiano das autofunções. Ondas superficiais também são obtidas, associadas às descontinuidades acima citadas. Sugere-se a aplicação do presente modelo ao estudo de oscilações em diversos objetos solares e astrofísicos, bem como na pesquisa da fusão termonuclear. Em particular, a aplicação a manchas solares é apresentada nesta tese. É observado que os períodos estimados pelo modelo são comparáveis àqueles obtidos de dados observacionais, principalmente os das oscilações umbrais e os das ondas caminantes na penumbra.

Abstract

A cylindrical model is presented, in order to study the ideal magnetohydrodynamic (MHD) spectrum. We modeled a two-layered cylindrical plasma, where two regions are defined, an internal and an external one, with different aspects each other. A diffuse longitudinal current is present in the internal region, so, twisted magnetic fields with a small B_θ/B_z ratio are assumed in both region. A numerical code was developed for this model, in order to get oscillations modes, originated from the plasma disturbances, via MHD theory. The various spectra, solutions of this code, are studied carefully. Due the double layer, it is verified combined modes (slow, Alfvén or fast ones) in the spectra. These combined modes are separated by continua regions. Sturmian and anti-Sturmian behaviour of the functions are proved numerically in a definite way. Connected with these discontinuities, surface waves are obtained. We suggest a large application of this model in the study of solar and astrophysical objects oscillations, as well in the thermonuclear fusion analysis. In particular, we apply the model to sunspots. It is noted that estimated periods obtained by our model are comparable to the periods obtained from observational data, mainly umbral oscillations and the running penumbral waves.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A análise espectral de ondas magnetohidrodinâmicas em uma coluna de plasma magnetizada tem sido motivo de pesquisa para muitos físicos de plasma e astrofísicos. Dentro deste contexto, um estudo bastante amplo, utilizando teoria espectral foi realizado por Goedbloed [1][2]. Tal estudo consistiu em uma continuação para a região estável do espectro, $\omega^2 > 0$, de análises anteriores sobre instabilidades do plasma cilíndrico na região do espectro $\omega^2 < 0$ [3][4]. Desta forma, foi obtida uma descrição teórica para os espectros contínuos e discretos.

O estudo do aquecimento do plasma por ressonância espacial de Alfvén, realizado por Tataronis e Grossmann [5][6] e por Hasegawa e Chen [7], abriu a possibilidade de aquecimento do plasma por ondas de Alfvén. Este fato levou o CRPP (“Centre de Recherche en Physique des Plasmas”), Lausanne, Suíça, a desenvolver um projeto do TCA (“Tokamak Chauffage Alfvén”), que visava o aquecimento do plasma por ondas de Alfvén numa configuração do tipo tokamak. Para a realização deste projeto, foi feito um estudo mais profundo por Appert et al. [8] dos modos discretos e do contínuo de Alfvén, também previstos por Goedbloed [9]. Tais previsões teóricas foram verificadas experimentalmente por De Chambrier et al. [10].

O estudo da estabilidade de objetos solares e astrofísicos foi iniciado antes da

pesquisa da fusão termonuclear. O início da Teoria magnetohidrodinâmica foi desenvolvido por astrofísicos, Alfvén [11] e Astrom (1950) [12][13]. Entretanto só mais recentemente é que a análise espectral da teoria MHD foi reconhecida como uma importante ferramenta no estudo da estabilidade e ressonâncias e, consequentemente, para a previsão dos tempos de vida de objetos solares e astrofísicos, como demonstrado nos trabalhos de Sakurai et al. [14], Azevedo et al. [15] e Goedbloed e Halberstadt [16], baseados nas similaridades entre a análise espectral em fusão e em sistemas solares. Foi afirmado por Goedbloed [9], e outros, que as equações MHD contêm uma escala de comprimento intrínseco independente do tamanho do fenômeno estudado. Somente as dimensões relativas da geometria é que caracterizam os fenômenos em análise. Por exemplo, em tokamaks as dimensões podem ser de 10 a 50 cm ou 3 a 5 m, mas o parâmetro relevante é a razão de aspecto, isto é, a relação entre o raio menor e o raio maior. Outro exemplo pode ser visto nos arcos coronais, que se situam na atmosfera solar, cujas dimensões são da ordem de Megametros (Mm). Mesmo assim o parâmetro relevante continua sendo a razão de aspecto. Pode-se observar isto em Goedbloed e Halberstadt [16].

Nesta tese é estendida a análise espectral de configurações como a do “pinch” linear difuso em contato com uma parede rígida condutora ou rodeada por uma região de vácuo. Nesta extensão usa-se uma configuração mais complexa, onde são consideradas duas regiões diferentes de plasma, uma região cilíndrica central como em um “pinch” linear difuso e uma região cilíndrica tubular, externa, com uma pressão mais alta, confinando a região interna. Sugere-se a aplicação deste modelo no estudo de espectros de oscilações de alguns objetos solares e astrofísicos. Regiões de campo magnético helicoidal, que são modeláveis por uma geometria cilíndrica, rodeados por plasmas com características distintas, são largamente encontradas no Sol e na astrofísica. As manchas solares com suas regiões de umbra e penumbra,

estruturas arciformes no Sol [17], caudas cometárias, são exemplos que podem ser descritos pelo modelo aqui apresentado.

O campo magnético tem componente azimutal em todo o sistema, criado por uma corrente difusa na região central do cilindro. O campo magnético axial apresenta uma descontinuidade na interface entre as duas regiões. A linearização das equações MHD ideais relativa a pequenos desvios de um estado de equilíbrio estático, na ausência de efeitos dissipativos, leva a uma formulação autoadjunta do problema espectral. Neste caso, os autovalores do problema são reais e implicam em soluções de dois tipos, oscilações puras (não amortecidas) ou exponencialmente crescentes no tempo. Assim são denominadas as soluções estáveis ou as instáveis, respectivamente. As soluções estáveis são as ondas magnetossônicas (chamadas também de compressionais) e as ondas de Alfvén (ou torcionais) com frequências características para o espectro discreto.

Quando uma configuração cilíndrica é adotada e considerando que os perfis de equilíbrio dependam somente da variação radial, supondo um equilíbrio estático, então a análise pode ser baseada na equação de Hain-Lüst [18], mas na forma adotada por Appert et al. [8]. Esta equação apresenta duas singularidades, dando origem a dois contínuos, chamados contínuos de Alfvén e contínuo de onda lenta. Devido à descontinuidade assumida aos parâmetros de equilíbrio no modelo (campo magnético, pressão cinética ou densidade de massa), os contínuos de Alfvén, assim como os contínuos lentos, separam-se em dois ramos cada um, isto é, os intervalos dos contínuos de cada região são diferentes. Entre os contínuos obtém-se um modo superficial (“surface wave”), como já predito por Goedbloed [1], devido a descontinuidade na interface, mas, além deste modo, surgem modos oscilantes discretos, que não eram previstos anteriormente, Ochi et al. [19]. Também foi comprovado que estes modos que oscilam na região externa exibem comportamentos Sturmiano

ou anti-Sturmiano [19]. Nesta tese é realizado o estudo de vários modos globais em diversas situações do perfil de equilíbrio.

No capítulo 2 é analisado o espectro MHD no lado estável de configuração de equilíbrio σ -estáveis, levando em consideração o modelo proposto. No capítulo 3 são introduzidos o método numérico e a análise dos resultados obtidos, através de gráficos. No capítulo 4 é proposta uma aplicação à mancha solar deste modelo, onde é sugerida uma possível explicação para certos fenômenos que são observados na mancha. O último capítulo é destinado às conclusões.

Capítulo 2

TEORIA MAGNETOHIDRODINÂMICA IDEAL

2.1 Introdução

Magnetohidrodinâmica (MHD) é o estudo de interações macroscópicas relativamente lentas de fluidos eletricamente condutores em um campo magnético. A teoria MHD é a junção das equações hidrodinâmicas com as equações de pré-Maxwell, isto é, considerando a corrente de deslocamento desprezível, tendo como elementos de acoplamento a densidade de corrente e a Lei de Ohm generalizada. As equações MHD preservam a massa, o momento linear e a energia.

A teoria MHD desconsidera efeitos quânticos, correções relativísticas, efeitos cinéticos e corrente de deslocamento. Isto significa que o efeito total das interações entre partículas a distâncias atômicas é desprezível, os fenômenos ocorrem a velocidades não-relativísticas, o fluido está próximo do equilíbrio termodinâmico, de modo que os efeitos cinéticos são ignorados, e o tempo característico é longo, tal que a corrente de deslocamento é desprezada. No caso mais simples, não se considera o efeito das colisões e a teoria é chamada MHD ideal. Aqui, o fenômeno é suficien-

temente rápido, tal que os efeitos da viscosidade e a resistividade são desprezíveis, porém deve-se entender que as colisões são suficientemente freqüentes para manter o equilíbrio quasi-termodinâmico, isto é, consideram-se as oscilações desprezíveis, porém suficientes para que o sistema esteja perto do equilíbrio termodinâmico. Os fenômenos são também considerados lentos em relação às oscilações de plasma, mas suficientemente rápidos em relação ao tempo de colisão. Considera-se também a pressão isotrópica. A teoria é relativamente simples, mas muito usada em física de plasmas, devido a sua capacidade de previsão de resultados, como na análise de confinamento do plasma, levando-se em conta geometrias realistas.

2.2 Equação MHD Ideal

O modelo MHD descreve o comportamento do plasma como um fluido. As equações básicas, no sistema MKS são as seguintes, por exemplo, Sakanaka [20]:

Equação de Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.1)$$

Equação de Momento Linear:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p - \vec{j} \times \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

Lei de Faraday/Ohm:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.3)$$

Equação de Estado (Equação adiabática):

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (2.4)$$

onde $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ é a condição inicial, $\vec{j} = \nabla \times \vec{B}$ é a densidade de corrente, γ é a constante de adiabaticidade, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ é a derivada convectiva, ρ é a densidade de massa do fluido, $\vec{v}$ é a velocidade do fluido, $\vec{B}$ é o campo magnético e p é a pressão. Este conjunto de equações determina a evolução das grandezas macroscópicas $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{v}(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

2.3 Modelo

O modelo é constituído por um cilindro de plasma de raio r_2 , separado em duas regiões: uma interna, cilindro de raio $r_1 < r_2$ e uma região externa, correspondendo ao resto do cilindro. Define-se então: a região 1, volume compreendido entre $0 < r \leq r_1$ e a região 2, volume ocupado entre $r_1 < r \leq r_2$, conforme mostra a Figura 1.

A geometria da configuração sugere a introdução de coordenadas cilíndricas, (r, θ, z) , onde o eixo z é o eixo do cilindro. A densidade, o campo magnético e as pressões cinética e magnética apresentam descontinuidades na interface entre as duas regiões; em particular considera-se que B_{z1} e B_{z2} componentes axiais do campo magnético na região 1 e 2, respectivamente, são constantes de valores diferentes, o que implica na existência de uma corrente superficial azimuthal na interface.

Supõe-se, também uma corrente na direção $\hat{z}$ distribuída na região 1 e nula na região 2. Esta implica em um campo azimuthal, $B_\theta(r)$ nas duas regiões do plasma.

2.3.1 Equilíbrio

O equilíbrio é a solução das equações 2.1 a 2.4, considerando que a variação temporal é nula. Supondo o equilíbrio estático, isto é, a velocidade do fluido no equilíbrio é nula, as equações do equilíbrio se reduzem a duas:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.5)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante} \quad (2.6)$$

e supondo a variação das grandezas somente na direção r e chamando as grandezas com nomes usuais: $\vec{B} = (0, B_\theta(r), B_z(r))$, $p(r)$, $\rho(r)$ e $\vec{j} = (0, 0, j_z(r))$; as equações do equilíbrio se reescrevem como,

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B^2}{2} \right) + \frac{B_\theta^2}{r} = 0 \quad e \quad (2.7)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante} \quad (2.8)$$

onde $B^2 = B_z^2 + B_\theta^2$.

Note-se que existem aqui quatro variáveis e duas equações. Para resolver estas equações faz-se necessário especificar dois perfis arbitrariamente. Já foi dito anteriormente que as componentes B_z são constantes e arbitradas dentro de cada região: B_{z1} para a região 1 e B_{z2} para a região 2. Outra quantidade arbitrada é a densidade de corrente $\vec{j} = j_z(r)\hat{z}$,

$$j_z = j_0(1 - r^2) \quad 0 \leq r < r_1 \quad e \quad (2.9)$$

$$j_z = 0, \quad r > r_1 \quad (2.10)$$

Usando a equação de Ampère obtém-se:

$$B_\theta(r) = j_0 \frac{r}{4} (2 - r^2) \quad . \quad (2.11)$$

Com as expressões de $B_\theta(r)$ e $B_z(r)$ dadas, pode-se encontrar, então, a expressão para a pressão, usando a equação 2.7

$$p_1(r) = p_0 - \frac{j_0^2}{4} \left(1 - \frac{3r^2}{4} + \frac{r^4}{6} \right) r^2 \quad (2.12)$$

$$p_2(r) = p_0 - \frac{5}{48}j_0^2 - \frac{1}{2}B_{z2}^2 + \frac{1}{2}. \quad (2.13)$$

A constante indicada na equação 2.8 tem valores diferentes para cada uma das regiões, permitindo assim, uma descontinuidade da temperatura na interface

$$\rho_i = \rho_{i,0} \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{1/\gamma} \quad i = 1, 2 \quad (2.14)$$

2.3.2 Análise dos Modos Normais

Se for feita uma perturbação pequena ao estado de equilíbrio estático, o sistema é estável se esta tender a diminuir a perturbação, retornando à posição de equilíbrio; é instável se a perturbação aumenta. Para analisar este problema do ponto de vista de um plasma ideal, utilizam-se as equações MHD ideais. Definem-se as quantidades em equilíbrio com índice 0, ($\vec{B}_0$, p_0 , ρ_0 , $\vec{j}_0$, etc), e as grandezas perturbadas com índice 1, ($\vec{B}_1(\vec{r}, t)$, $p_1(\vec{r}, t)$, $\vec{j}_1(\vec{r}, t)$, $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$, etc). Pode-se descrever estas perturbações em termos de um pequeno deslocamento a partir da posição de equilíbrio de um elemento de plasma, definido como $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$, tal que, em equilíbrio estático:

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (2.15)$$

supondo as perturbações do tipo normal o deslocamento $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ é dado por

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}(r) \exp(-i\omega t + im\theta + ikz), \quad (2.16)$$

onde se considera a decomposição de Fourier para θ , z e t : m é o modo azimutal, k é o número de onda na direção axial e ω é a frequência de oscilação.

As equações MHD linearizadas podem então ser escritas:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi})$$

ou

$$\rho_1 = -\nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}), \quad (2.17)$$

Da equação 2.3 obtém-se

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)]$$

ou

$$\vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \equiv \vec{Q}, \quad (2.18)$$

Da equação 2.2

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p_1 + \nabla \times (\vec{Q} \times \vec{B}_0) + \vec{j}_0 \times \vec{Q}$$

obtém-se

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\nabla p_1 + \nabla \times (\vec{Q} \times \vec{B}_0) + \vec{j}_0 \times \vec{Q} \quad (2.19)$$

e da equação de estado

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_1 + \vec{\xi} \cdot \nabla p_0) = -\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \nabla \cdot \vec{\xi})$$

ou

$$p_1 = -\vec{\xi} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi}. \quad (2.20)$$

Considerando a geometria do sistema cilíndrica, conforme descrita no início desta seção, usando as equações 2.17 a 2.20, eliminando todos os valores perturbados em favor de ξ_r e introduzindo uma nova quantidade definida por $P = p_1 + \vec{B}_0 \cdot \vec{Q}$, obtém-se a equação descrita por Appert et al. [8]

$$D \frac{d}{dr} (r \xi_r) = C_1 r \xi_r - r C_2 P \quad e \quad (2.21)$$

$$D \frac{d}{dr} P = \frac{1}{r} C_3 \xi_r - C_1 P. \quad (2.22)$$

Aqui,

$$D = \rho^2 (\gamma p_0 + B_0^2) (\omega^2 - \omega_A^2) (\omega^2 - \omega_S^2), \quad (2.23)$$

$$C_1 = 2 \frac{B_{0\theta}}{r} \left\{ \rho_0^2 \omega^4 B_{0\theta} - \frac{m}{r} F \rho_0 (\gamma p_0 + B_0^2) - (\omega^2 - \omega_A^2) \right\}, \quad (2.24)$$

$$C_2 = \rho_0^2 \omega^4 - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) [\rho_0 (\gamma p_0 + B_0^2) - (\omega^2 - \omega_A^2)], \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} C_3 = & D [\rho_0 (\omega^2 - \omega_A^2) + 2 B_{0\theta} \frac{d}{dr} \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \right)] + \\ & \rho_0^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_A^2) \left(2 \frac{(B_{0\theta})^2}{r} \right)^2 - \\ & [\gamma p_0 (\rho_0 (\omega^2 - \omega_A^2) + \rho_0 \omega^2 B_{0z}^2)] \left(2 \frac{(B_{0\theta})^2}{r} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\omega_A^2 = \frac{F^2}{\rho_0} \quad (2.27)$$

$$\omega_S^2 = \frac{\gamma p_0}{\gamma p_0 + B_0^2} \frac{F^2}{\rho_0}, \quad (2.28)$$

$$F = \frac{m}{r} B_{0\theta} + k B_{0z}. \quad (2.29)$$

As equações 2.21 e 2.22 são equações de primeira ordem. Quando colocadas na forma de uma equação de segunda ordem, estas equações se transformam na equação de Hain-Lüst [18] mostrada no apêndice B.1.

As equações 2.21 e 2.22, com as condições de contorno $[P_r]_{r_2} = 0$ e $[r\xi_r]_{r_2} = 0$, são equações de autovalores ω^2 e autofunções $\xi_r(r)$ e $P(r)$.

O sistema de equações 2.21 e 2.22 apresenta duas singularidades que são pontos onde o coeficiente D é igual a zero, isto é

$$\omega^2 - \omega_A^2(r) = 0 \quad \text{e}$$

$$\omega^2 - \omega_S^2(r) = 0$$

Estas faixas, $\{\omega_A^2\}$ e $\{\omega_S^2\}$ são chamadas de contínuos de Alfvén e contínuos lentos, Figura 2.

Nestes pontos de singularidade, o sistema de equações tem soluções impróprias com divergência logarítmica, cuja norma, isto é, $\int \xi_r^2(r) r dr$, converge, mas a energia associada a ela diverge. São soluções não físicas, portanto inaceitáveis (Apêndice B). As faixas de valores de ω_A^2 e ω_S^2 para r variando de 0 a r_2 constituem a faixa contínua para os valores de ω^2 , onde admitem soluções impróprias.

Fora das faixas de contínuos, há soluções próprias para frequências ω distintas, denominadas modos discretos. Nas Figuras 2 e 3 apresentam-se espectros típicos onde se mostram dois contínuos em barras cheias, contínuos de Alfvén e de ondas lentas; mostram-se também duas barras tracejadas, que representam a faixa de separadores, as quais são definidos pelas soluções em $C_2 = 0$, que equivalem a singularidades da função f na equação de Hain-Lüst B.1; abaixo e acima dos contínuos de Alfvén e de ondas lentas, estão marcados por modos discretos (X), soluções próprias das equações de Appert 2.21 2.22.

Embutido no sistema de equações de Appert et al., tem-se a razão entre a pressão cinética e a pressão magnética, definida por β , onde $\beta = \gamma p_0 / B_0^2$.

As propriedades do plasma modificam-se consideravelmente, de acordo com o β , (β baixo: $B_0^2 \gg \gamma p_0$ ou β alto: $\gamma p_0 \gg B_0^2$). A influência de β é melhor visualizada na equação de Hain-Lüst [18], pois aparece explicitamente em B.1.

Percebe-se que a equação B.1 tem a mesma estrutura de uma equação de Sturm-Liouville, que é descrita como (subentende-se aqui o sistema de equações 2.21 e

$$(P\chi')' - (Q - \lambda R)\chi = 0 \quad (2.30)$$

onde λ é o autovalor e $P = P(x) \neq 0$, $Q = Q(x)$, $R = R(x)$. Observando a equação B.1 vê-se que se consegue ajustá-la na forma da equação 2.30. Mas, tecnicamente falando, não se pode caracterizar a equação B.1 exatamente igual à da classe de Sturm-Liouville, devido à complicada dependência dos coeficientes f e g com ω^2 . Portanto, a propriedade da equação B.1 de que ω^2 é monotônica no número de modos n da solução ξ_r não pode ser assegurada.

Entretanto uma propriedade de monotonicidade parcial é apresentada por Goedbloed e Sakanaka [3] e por Sakanaka e Goedbloed [4].

Uma das propriedades da equação de Sturm-Liouville estabelece o comportamento das soluções da equação de Hain-Lüst B.1, para a parte discreta do espectro em qualquer subintervalo de uma região. Quando as soluções oscilam mais rápido com o aumento do autovalor λ , chama-se a este comportamento de **Sturmiano**. Quando ocorre o inverso, isto é, a frequência de oscilação diminui com o aumento de λ , denomina-se **anti-Sturmiano**.

De acordo com as Figuras 2 e 3, percebe-se que o espectro é formado por regiões bem distintas. As autofunções têm dois comportamentos distintos, ou seja, entre zero e o extremo inferior do contínuo lento seu comportamento é “Sturmiano”, pois $f > 0$ entre o extremo superior do contínuo lento e a faixa ω_I^2 o comportamento é “anti-Sturmiano” ($f < 0$), entre ω_I^2 e o extremo inferior do contínuo de Alfvén é “Sturmiano” ($f > 0$), entre o extremo superior do contínuo de Alfvén e ω_{II}^2 é “anti-Sturmiano” ($f < 0$) e entre ω_{II}^2 e o infinito o comportamento é “Sturmiano” ($f > 0$). Quando as funções se aproximam dos contínuos ou do infinito, isto é, no caso Sturmiano, os zeros aumentam continuamente formando nos extremos inferiores dos

contínuos ou no infinito pontos de acumulação. No caso anti-Sturmiano acontece o inverso, ou seja, há pontos de acumulação nos extremos superiores dos contínuos. Sendo que o infinito aqui significa a frequência ciclotrônica dos íons.

Uma outra importante característica que deve ser realçada é que o termo direito da equação 2.19 é um operador autoadjunto. Chamando-o de $\vec{F}\{\vec{\xi}\}$, pode-se escrever

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F}\{\vec{\xi}\}. \quad (2.31)$$

onde $\vec{F}\{\vec{\xi}\} = \nabla(\vec{\xi} \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi}) + (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{Q} + (\nabla \times \vec{Q}) \times \vec{B}_0$. $\vec{F}$ representa o operador força, agindo sobre o elemento de plasma perturbado.

Foi demonstrado em [1] que o operador $\vec{F}\{\vec{\xi}\}$ é auto-adjunto (Hermitiano), ou seja, definindo a norma $\int \vec{\xi}^* \rho^{-1} \vec{F}\{\vec{\xi}\} d^3r$, verifica-se que

$$\int \vec{\xi}_a^* \rho^{-1} \vec{F}\{\vec{\xi}_b\} d^3r = \int \vec{\xi}_b^* \rho^{-1} \vec{F}\{\vec{\xi}_a\} d^3r, \quad (2.32)$$

onde $\xi_{a,b}$ são dois vetores deslocamento distintos do plasma.

Sendo autoadjunta a quantidade $\int \vec{\xi}^* \rho^{-1} \vec{F}\{\vec{\xi}\} d^3r$ é sempre um número real. Lembrando a variação temporal na forma $e^{(-i\omega t)}$ a equação 2.31 se escreve

$$-\omega^2 \vec{\xi} = \rho^{-1} \vec{F}\{\vec{\xi}_a\} \quad (2.33)$$

Daqui resulta que ω^2 é sempre real, positivo (estável) ou negativo (instável), como é mostrado na Figura 5.

2.3.3 Critério de Suydam

As linhas do campo magnético formam um conjunto de “espiras”, devido ao campo magnético ser helicoidal. O passo deste conjunto é definido como $\mu \equiv \frac{B_\theta}{r B_z}$, onde μ varia de superfície a superfície, por ser inversamente proporcional à posição. Por outro lado, as linhas de campo de $\vec{\xi}$ têm uma formação em espiral com passo

constante. Se as linhas de campo de $\vec{B}$ e $\vec{\xi}$ coincidem em alguma região, então é possível um deslocamento que não cause uma “torção” das linhas do campo magnético. Se μ' não se anula em nenhum ponto, então é sempre possível escolher k , tal que os dois sistemas de espirais coincidam para um determinado raio. Quando isto acontece, deslocamentos que “torcem” somente ligeiramente as linhas de campo magnético são possíveis. Então, os piores valores de k e m , em relação à estabilidade do plasma, são tais que F , dada pela expressão 2.29 se anula. Este é um ponto singular regular da equação B.1. Fazendo uma análise em torno deste ponto, Suydam [21] chegou ao critério dado por

$$\frac{r}{4} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + \frac{2p}{(B_z)^2} \geq 0, \quad (2.34)$$

O critério de Suydam é uma condição necessária à estabilidade, mas nem sempre é uma condição suficiente, pois este critério é derivado somente das considerações do comportamento de modo-local.

Levando em consideração este critério em relação a sistemas físicos com estruturas cilíndricas compatíveis com o modelo apresentado nesta tese, verifica-se que o pior valor de k é próximo da unidade, isto é, $k > 1$, o valor de B_{z1} é normalizado e B_{z1} é máximo, $B_{z1} = 1$, da equação 2.11, tem-se $B_\theta = j_0(r_s/4)(2 - r_s^2)$ e sabendo que a posição do ponto singular, r_s , está compreendido entre 0 e r_2 , e que r_2 , em termos de código numérico, é igual a 2, toma-se então $r_s = 1$. Analisando estes valores em $F = 0$, ou seja

$$k \cdot B_z(r_s) + \frac{m}{r_s} B_\theta(r_s) = 0$$

e substituindo as grandezas pelos seus respectivos valores, chega-se a

$$1 + \frac{m}{r_s} \frac{j_0}{4} (2 - r_s^2) = 0$$

Percebe-se que para um valor de j_0 máximo para este modelo, isto é, $j_0 \approx 0,6$, o sistema é estável se $m \leq 3$.

Nesta tese μ' é diferente de zero, exceto em alguns pontos. Nas proximidades de $r = 0$, $\mu' \sim r$, de modo que $(r/4)(\mu'/\mu)^2 \sim r^3$. Se a pressão é parabólica nas proximidades de $r = 0$, como neste caso, $p(r) \sim p_0 - \alpha r^2$, há sempre alguma região próxima de $r = 0$ que é instável.

2.3.4 Interface Perturbada

Há que se ressaltar a perturbação que a interface entre as duas regiões sofre, isto é, a perturbação da interface plasma-plasma. Para conectar o vetor deslocamento $\vec{\xi}$ entre as duas regiões, tem-se que linearizar as condições de contorno na interface.

$$\hat{n} \cdot \vec{\xi}_1 = \hat{n} \cdot \vec{\xi}_2 \quad (2.35)$$

onde $\hat{n} = \hat{n}_0 + \hat{n}_1$, $\hat{n}_0$ é a normal à superfície não perturbada, $\hat{n}_1$ é a normal à superfície perturbada, $\vec{\xi}_{1,2}$ é o vetor deslocamento da região 1,2. respectivamente.

Inicia-se a análise pela componente normal do elemento de linha

$$(d\vec{l} = d\vec{l}_0 + d\vec{l}_0 \cdot \nabla \vec{\xi})$$

movendo-se com o fluido. Então, conforme mostra a Figura 6,

$$\vec{n} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.36)$$

$$\approx d\vec{l} \cdot (\hat{n}_0 + \hat{n}_1)$$

considerando só os termos de primeira ordem, vem

$$\approx d\vec{l}_0 \cdot (\nabla \vec{\xi} \cdot \hat{n}_0 + \hat{n}_1)$$

assim

$$\hat{n}_1 = -\nabla \vec{\xi} \cdot \hat{n}_0 + \vec{\lambda}$$

onde $d\vec{l}$ é o elemento de linha paralelo à superfície; $\nabla \vec{\xi}$ é a variação espacial da perturbação a partir da interface em equilíbrio e $\vec{\lambda}$ é a perpendicular a $d\vec{l}_0$ e representa a direção aleatória da interface perturbada, este termo generaliza a normal perturbada, logo $\vec{\lambda} = \alpha \hat{n}_0$.

Se

$$|\hat{n}| = 1$$

$$(\hat{n}_0 + \hat{n}_1)(\hat{n}_0 + \hat{n}_1) = 1$$

$$\text{logo } \hat{n}_0 \cdot \hat{n}_1 = \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_0 = 0$$

$$\hat{n}_0 \cdot \hat{n}_1 = \hat{n}_0 \cdot (-\nabla \vec{\xi}) \cdot \hat{n}_0 + \vec{\lambda} = 0$$

$$\vec{\lambda} = \hat{n}_0 \cdot (\nabla \vec{\xi}) \cdot \hat{n}_0$$

portanto

$$\hat{n}_1 = -(\nabla \vec{\xi}) \hat{n}_0 + \hat{n}_0 \hat{n}_0 \cdot (\nabla \vec{\xi}) \cdot \hat{n}_0 \quad (2.37)$$

Considerando o campo magnético $\vec{B}$ nesta interface perturbada, leva-se, então, em conta um termo extra, $\vec{\xi} \cdot \nabla \vec{B}_0$.

$$\vec{B}_\alpha(\vec{r}) \approx (\vec{B}_{0\alpha} + \vec{B}_{1\alpha} + \vec{\xi} \cdot \nabla \vec{B}_0)_{\vec{r}_0} \quad \alpha = 1, 2.$$

e utilizando a condição de contorno $\vec{n} \cdot \vec{B}_1 - \vec{n} \cdot \vec{B}_2 = 0$, chega-se à seguinte expressão

$$\vec{B}_{01} \cdot \nabla(\hat{n}_0 \cdot \vec{\xi}) - \hat{n}_0 \cdot \vec{\xi} \hat{n}_0 \cdot \nabla \vec{B}_{01} \cdot \hat{n}_0 = \vec{B}_{02} \cdot \nabla(\hat{n}_0 \cdot \vec{\xi}) - \hat{n}_0 \cdot \vec{\xi} \hat{n}_0 \cdot (\nabla \vec{B}_{02}) \cdot \hat{n}_0$$

ou melhor

$$[[\vec{B}_{0\alpha} \cdot \nabla(\hat{n}_0 \cdot \vec{\xi}) - \hat{n}_0 \cdot \vec{\xi} \hat{n}_0 \cdot (\nabla \vec{B}_{0\alpha}) \cdot \hat{n}_0]] = 0 \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.38)$$

onde $[[...]]$ representa a diferença entre os valores das regiões 1 e 2 das grandezas com descontinuidade na interface.

Em relação à equação de balanço de pressão, também tem uma expressão análoga à do campo magnético.

$$p_1 = (p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi}) \vec{r}_0 \quad (2.39)$$

levando esta expressão em

$$[[p + \frac{1}{2} B^2]] = 0,$$

chega-se a

$$[[-\gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi} + B_{0\alpha}(\vec{Q}_\alpha + \vec{\xi} \cdot \nabla B_{0\alpha})]] = 0 \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.40)$$

É importante ressaltar os efeitos da pressão total sobre a interface, para um sistema composto por duas camadas de plasma. A expressão da pressão total perturbada na região interna tem que ser a mesma da pressão total perturbada na região externa nas vizinhanças da interface perturbada. Como as duas regiões têm características distintas, é melhor expressar a perturbação na interface perturbada na posição $\vec{r} = \vec{r}_0 + (\hat{n}_0 \cdot \vec{\xi}) \hat{n}_0$, desde que a componente normal de $\vec{\xi}$ seja contínua, como pode-se observar na Figura 6. Nesta posição a expressão para a perturbação da pressão cinética e da pressão magnética é

$$[[p]] = p_1 - p_2 = \delta p + \hat{n}_0 \cdot \vec{\xi} \hat{n}_0 \cdot \nabla p_0 \quad (2.41)$$

$$[[\frac{1}{2} B^2]] = \delta \frac{1}{2} B^2 + \hat{n}_0 \cdot \vec{\xi} \hat{n}_0 \cdot \nabla \frac{1}{2} B_0^2 \quad (2.42)$$

logo

$$[[p + \frac{1}{2}B^2]] = -\gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi} + B_0 \cdot \vec{Q} - \vec{\xi}_t \cdot \nabla p_0 + \hat{n}_0 \cdot \vec{\xi} \hat{n}_0 \cdot \nabla \frac{1}{2}B^2 \quad (2.43)$$

onde

$$\vec{\xi}_t = \vec{\xi} - \hat{n}_0 \cdot \vec{\xi} \hat{n}_0$$

$$\delta p \approx -\vec{\xi} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi}$$

$$\delta B \approx \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \vec{Q}$$

Relacionando as equações 2.35 e 2.43, chega-se a uma forma mais elegante de se apresentar a perturbação da interface plasma-plasma, isto é,

$$[[\frac{-\gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi} + \vec{B}_0 \cdot \vec{Q}}{\vec{n}_0 \cdot \vec{\xi}} + \hat{n}_0 \cdot \nabla \frac{1}{2}B_0^2]] = 0 \quad (2.44)$$

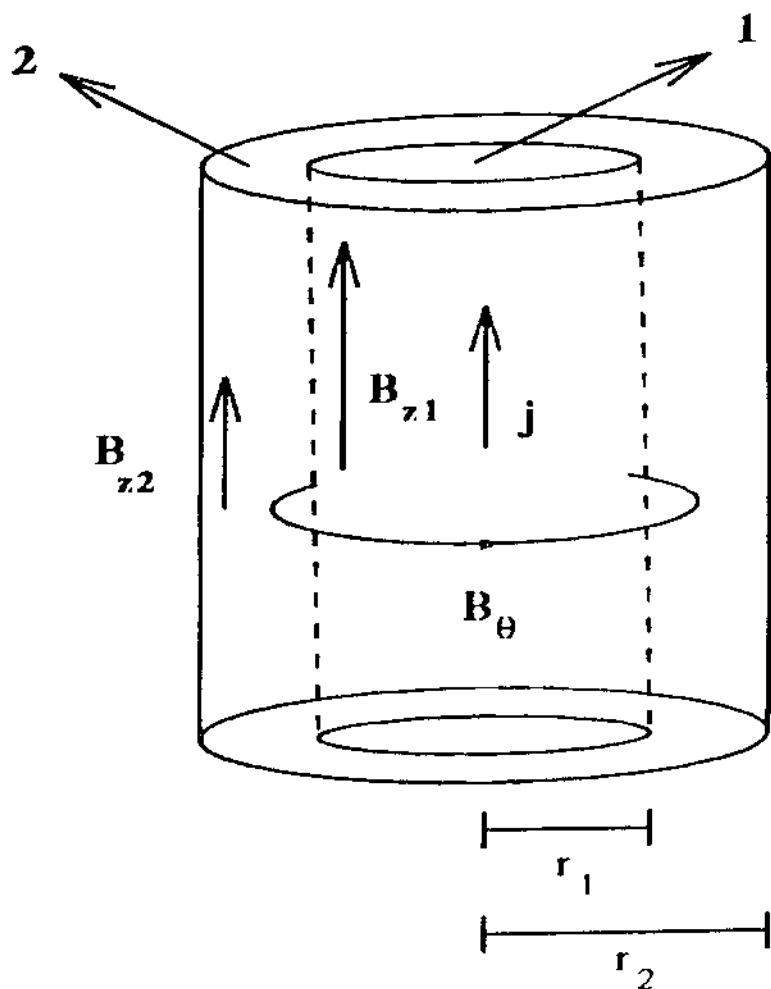


Fig. 1- Modelo de equilibrio.

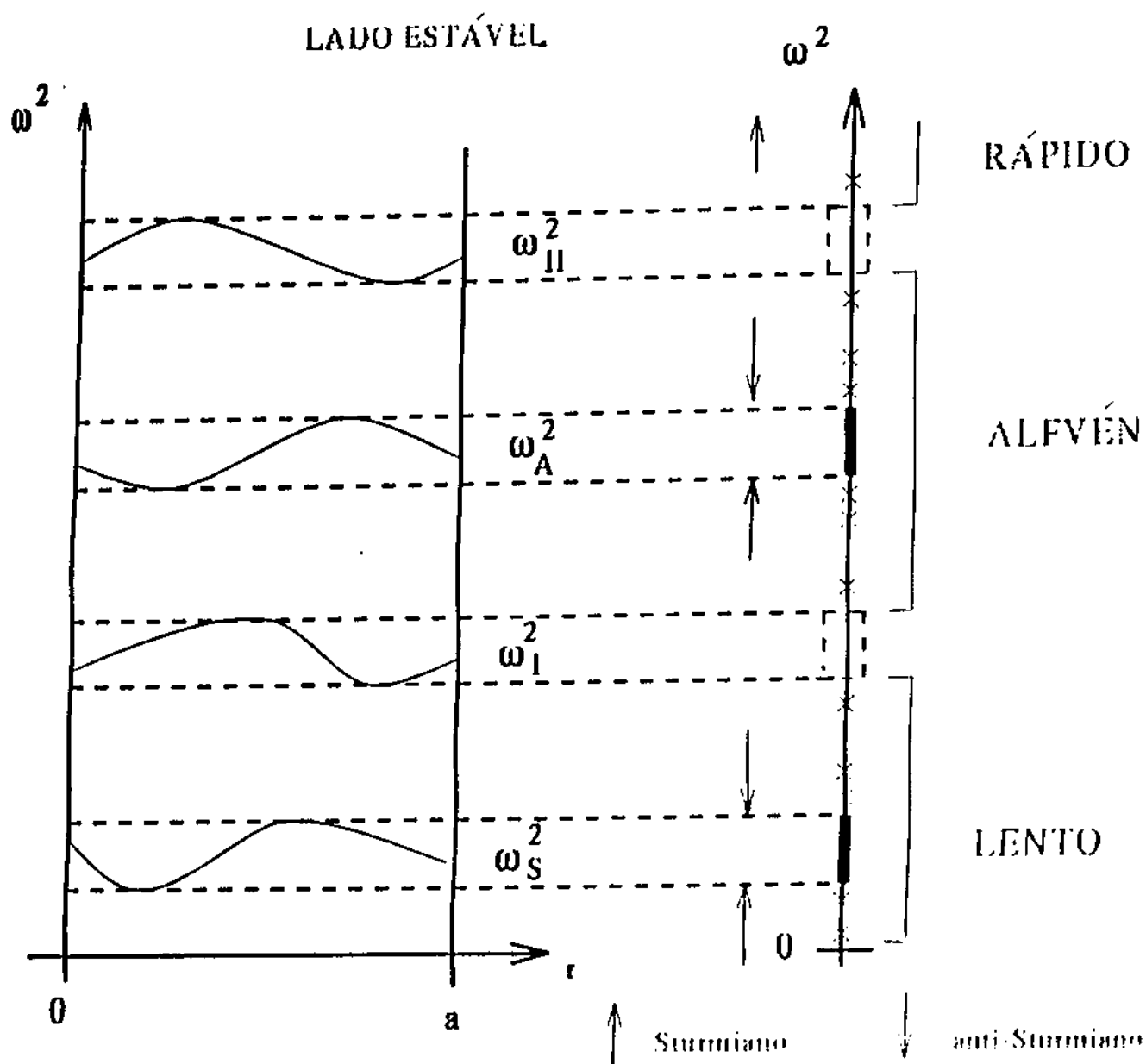
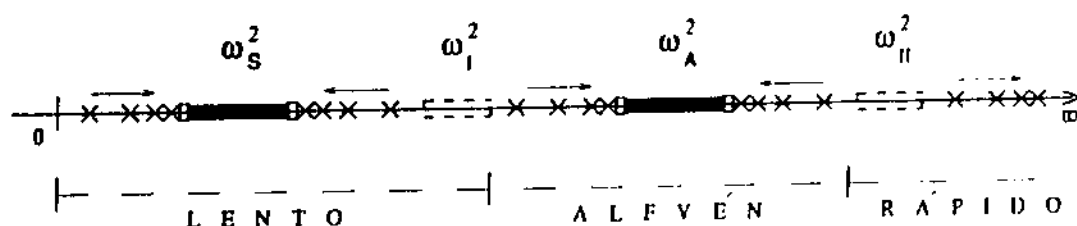


Fig. 2- Representação esquemática do espectro estável ($\omega^2 \times r$) das equações de Appert e de Hain-Lüst.



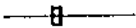
	CONTÍNUO
	SEPARADOR MATEMÁTICO
	ESPECTRO DISCRETO "STURMIANO"
	ESPECTRO DISCRETO "ANTI-STURMIANO"
	PONTO DE ACUMULAÇÃO

Fig. 3- Outra representação esquemática do espectro das soluções da equação de modos normais de segunda ordem (Hain-Lüst e Appert).

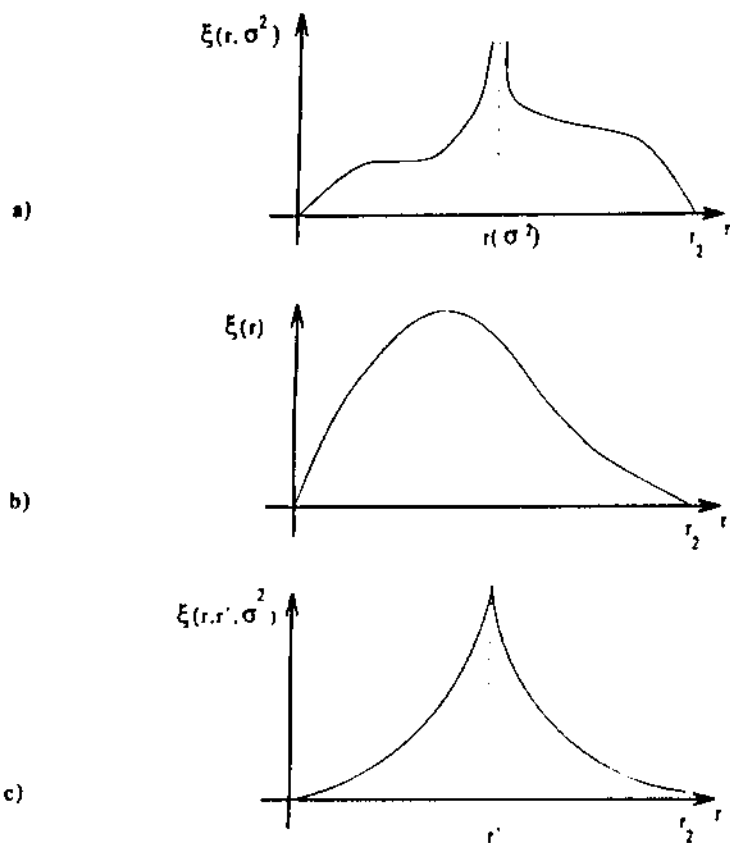


Fig. 4- Os três tipos de funções que aparecem como soluções da equação de Hain-Lüst. (a) solução imprópria, quase-modo, (b) solução própria, modo oscilatório e (c) modo de superfície ("surface mode").

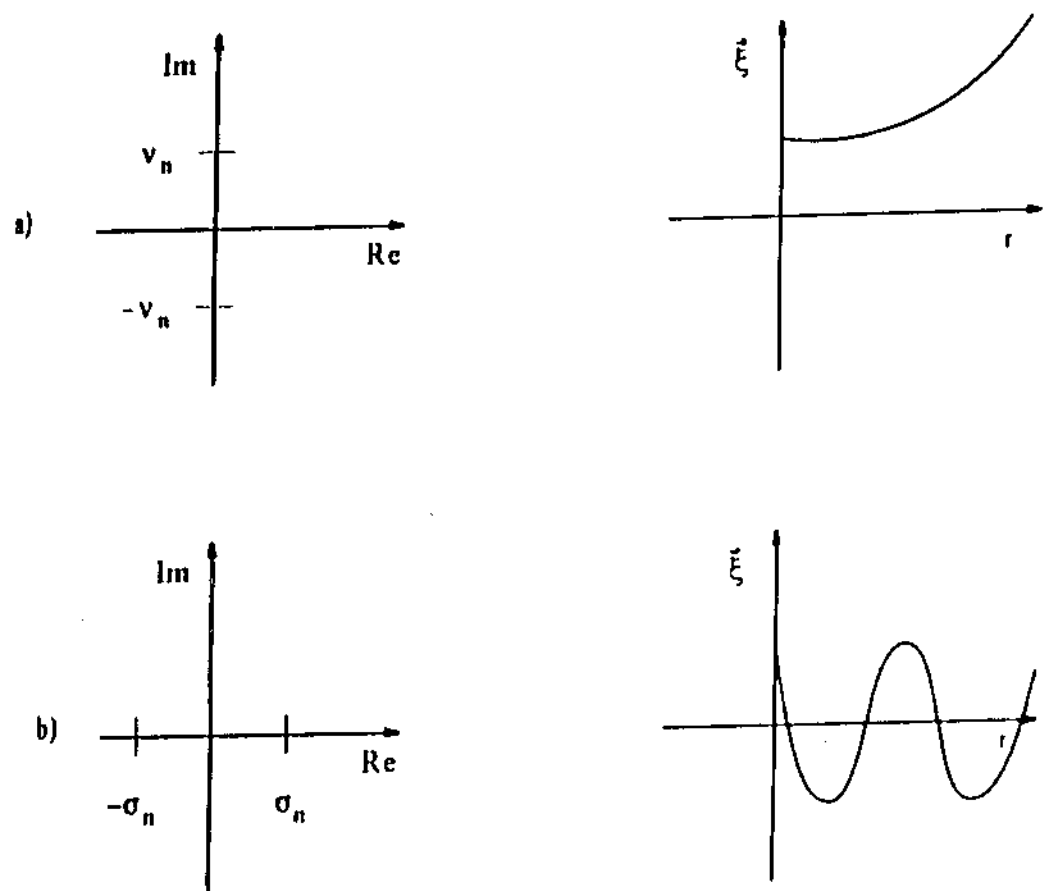


Fig. 5- (a) Sistema instável, $\omega^2 < 0$ e (b) sistema estável, $\omega^2 > 0$.

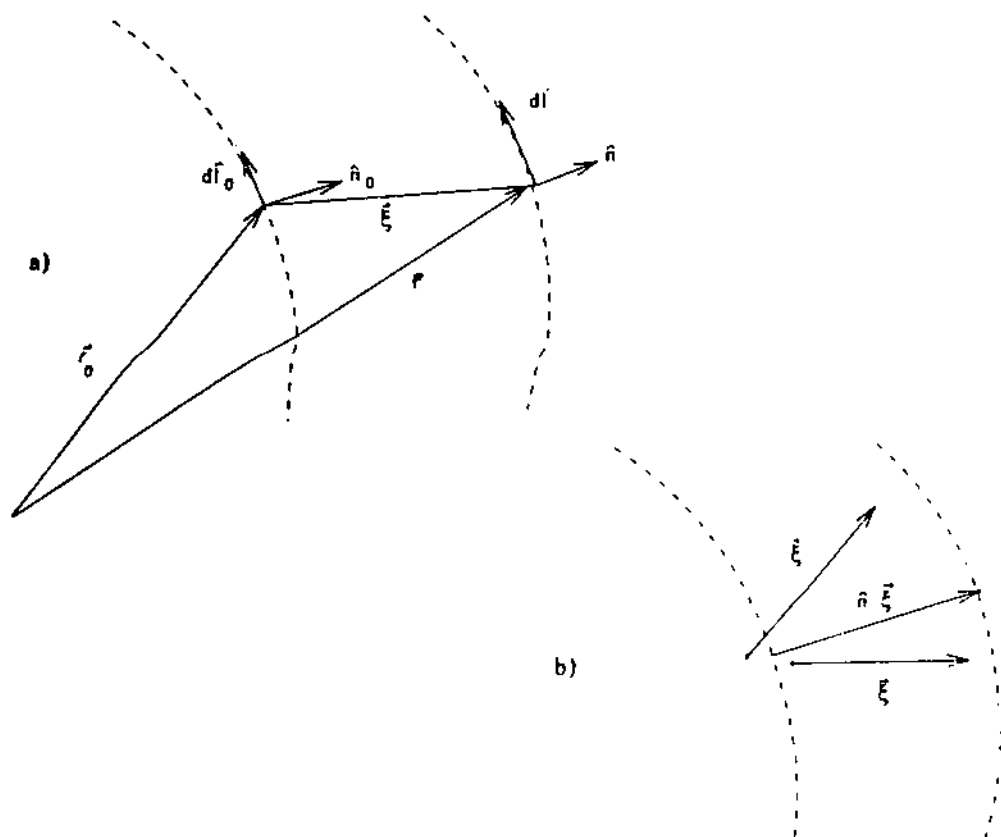


Fig. 6- Esquema mostrando a perturbação da interface.

Capítulo 3

MÉTODO NUMÉRICO E RESULTADOS

3.1 Introdução

Esta seção descreve o método numérico utilizado, que pode muito bem servir tanto para a aplicação em fusão termonuclear, como para uma enorme variedade de objetos astrofísicos e solares. É realizada uma análise sobre a atuação dos parâmetros de equilíbrio na formação dos espectros discretos e contínuos (lado estável).

3.2 Método Numérico

O objetivo deste método é determinar as soluções do sistema de equações que satisfaçam as condições de contorno descritas no capítulo 2. Ele é destinado à solução da equação de Hain-Lüst, utilizando a equação equivalente de Appert et al., onde é solucionado um sistema composto por duas equações diferenciais de primeira ordem, considerando $r\xi_r$ e a pressão total perturbada como variáveis dependentes. A pressão total perturbada e $r\xi_r$ são, assim, contínuos em toda região do modelo.

Uma solução analítica em torno de $r = 0$ é obtida através da expansão das funções de equilíbrio e, por sua vez, dos coeficientes da equação B.1 em termos de

uma função polinomial. Esta solução analítica é regular em $r = 0$ e prova que as autofunções são $\xi_r(0) \neq 0$ para $m = 1$ e $\xi_r(0) = 0$ para $m \neq 1$, as suas derivadas são $\xi'_r(0) = 0$ e $\xi'_r(0) \neq 0$ para $m = 1$ e $m \neq 1$, respectivamente. Resumindo

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \xi_r &= r^{|m|-1} \\ \xi_r(r_2) &= 0 \\ P(r_2) &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

A equação é resolvida numericamente usando um algoritmo apropriado, tipo “Runge-Kutta” de segunda ordem. É denominado método balístico ou calibre (“shooting method”). Arbitra-se um valor inicial para ω^2 e a equação é resolvida até $r = r_2$. Se a solução $\xi_r(r_2)$ satisfaz as condições de contorno, termina-se o cálculo, caso negativo, acrescenta-se a ω^2 um pequeno valor e repete-se o procedimento até atender à condição de contorno em $r = r_2$. Assim se obtém o autovalor ω^2 e sua correspondente autofunção ξ_r .

Através deste método, podemos estudar a variação dos autovalores com os parâmetros de equilíbrio. Da mesma forma o método satisfaz a solução na região do contínuo.

3.3 Procedimento do Cálculo

Na análise dos autovalores ω^2 são definidos os seguintes aspectos: os parâmetros de valor constante são normalizados e os parâmetros de valor variável são mensurados em relação aos parâmetros normalizados. Foi feita uma variação em todos os parâmetros de valor variável ($m, k, B_{z2}, p_0, \rho_{02}$ e j_0), o regime adotado é o de baixo β na região 1, assim o valor máximo para p_0 é 0,05.

O código foi programado para apresentar alguns autovalores e as conseqüentes autofunções, no máximo quatro para cada conjunto de parâmetros de equilíbrio e

também associados a cada intervalo do espectro estável. Com isso, possibilitar a análise do comportamento das respectivas autofunções, prevendo assim, a natureza global das cadeias de autofunções calculadas.

Um exemplo de perfil de equilíbrio é mostrado na Figura 7.

Um espectro esquemático do modelo é mostrado na Figura 8. As faixas contínuas representam o intervalo de variação de $\omega_i^2(r)$, ($i = A, S, I, II$) em função do raio r , onde o subíndice “A” representa o contínuo de Alfvén, “S” o contínuo lento e “I” e “II” os separadores matemáticos.

A faixa de frequências ω_I^2 se sobrepõe ao contínuo lento, na região 1 em todos os espectros determinados, o que corresponde à ausência de modos lentos na região 1. A posição relativa dos contínuos e de $\omega_{I,II}^2$, bem como as suas larguras dependem dos parâmetros B_{z2} , p_0 , j_0 , ρ_{02} , m e k .

Duas importantes características deste modelo são :

- 1) a existência de modos combinados, ou seja, a mesma onda apresenta modos diferentes em relação às regiões 1 e 2, conforme ilustrado nas Figuras de 9 a 15. O modo combinado predominante é o modo com características Alfvênicas na região 1 e o modo (magnetossônico) rápido na região 2 e
- 2) o comportamento das ondas é determinado predominantemente pela região 2, onde as oscilações são bem mais atuantes.

Para melhor determinar o quanto cada parâmetro influencia no espectro foram utilizados os seguintes procedimentos:

- a) Procura de autofunções para diferentes valores da pressão p_0 , (0,02; 0,03; 0,04 e 0,05), com um mesmo conjunto de parâmetros de equilíbrio, $k = 3,5$; $m = 2$; $B_{z2} = 0,2$; $\rho_{02} = 0,1$ e $j_0 = 0,4$. Não há muita diferença entre os resultados. A Figura 9 mostra as autofunções para $p_0 = 0,02$. Achou-se uma onda de superfície entre os contínuos de Alfvén, que está localizada bem próximo de ω_I^2 na

região 2. Não há a possibilidade de aparecimento do espectro discreto de Alfvén na parte anti-Sturmiana, pois ω_{II}^2 sobrepõe ω_A^2 . A Figura 10 mostra os espectros para $p_0 = 0,02, 0,03$ e $0,04$. Quanto à análise dos espectros, pode-se dizer que há uma pequena subida dos contínuos lentos em ambas as regiões e no contínuo de Alfvén na região 2. O mesmo contínuo na região 1 se estreita à proporção que a pressão é elevada, apesar de manter aproximadamente igual os seus valores de mínimo. Veja que essas informações a respeito da variação do espectro, em relação às variações dos parâmetros de equilíbrio são facilmente deduzidas com uma simples análise na equação de Hain-Lüst ou de Appert et al.. Mas o objetivo aqui é uma análise simples e rápida de todos os parâmetros, evitando uma maior perda de tempo para verificar estes dados e também uma forma de se ter uma visão mais geral de como funciona o espectro;

b) Procura de autofunções para o efeito da variação de ρ_{02} , onde, $k = 3, 5$; $m = 3$; $p_0 = 0,02$; $B_{z2} = 0,5$ e $j_0 = 0,4$, para densidades da região 2 iguais a $0,5$; $1,0$ e $2,5$ em relação à densidade da região 1. Isto significa a variação do parâmetro de equilíbrio ρ_{02} para valores iguais a $0,05$; $0,1$ e $0,3$, respectivamente. Analogamente esta variação não provoca diferenças importantes e as curvas se apresentam similares às acima citadas. A variação de ρ_{02} acarreta uma variação inversamente proporcional na mesma ordem de grandeza no deslocamento das regiões discretas e contínuas. Os espectros podem ser observados na Figura 11;

c) Determinação de autofunções para $m = 1, 2$ e 3 . Continua a variação compatível com as anteriores. A Figura 12a mostra como é a variação das ondas de superfície e a Figura 12b, para as autofunções de modo alto;

d) Determinação de autofunções para $j_0 = 0,2$; $0,4$ e $0,6$, para $k = 3, 5$; $m = 3$; $B_{z2} = 0,5$; $\rho_{02} = 0,5$ e $p_0 = 0,05$. Com o aumento da corrente, os contínuos do lado 2 diminuem, o contínuo lento do lado 1 não altera muito a sua posição, mas o

de Alfvén alarga consideravelmente, estando o seu extremo inferior um pouco acima do de corrente mais baixa. Ver Figura 13;

e) Determinação de autofunções para $B_{z2} = 0,2; 0,4; 0,6$ e $0,8$, para $k = 3,5$; $m = 2$; $p_0 = 0,05$; $\rho_{02} = 0,5$ e $j_0 = 0,4$. Os contínuos sobem proporcionalmente ao incremento do campo magnético, conforme Figura 14;

f) Determinação de três autofunções para dois parâmetros distintos, onde fixa-se o parâmetro m em $m = 1$, conforme mostra a Figura 15;

g) Na Figura 16, vê-se um autovalor dentro de ω_{II}^2 , comprovando que essas regiões estão contidas no espectro discreto;

Para todas as variações de parâmetros, verificou-se que o comportamento das funções é praticamente o mesmo, só o espectro é que varia de acordo com os parâmetros variáveis, sendo que a densidade ρ_{02} e o campo magnético B_{z2} , obviamente só influenciam a região 2, enquanto que o vetor de onda $\vec{k}$, o número de onda azimutal m , a pressão p_0 e a corrente j_0 têm uma influência marcante em todo o sistema tubular. Naturalmente o grau de influência de todos os parâmetros é regida pela equação de Appert et al..

A Figura 17 exhibe um conjunto de autofunções localizado na parte lenta do espectro. Comprova-se o comportamento anti-Sturmiano das autofunções.

A Figura 18 exhibe um conjunto de autofunções localizado na parte rápida do espectro, é um bom exemplo para explicar o comportamento Sturmiano das funções.

Outro enfoque está no aspecto do sistema quando é variada a posição em r_2 . Para valores de r_2 , tais como, $2,5$, $6,0$ e $8,0$. O número de modos discretos permanece o mesmo, quando comparado aos resultados de $r_2 = 2,0$. Os autovalores são proporcionais aos obtidos em $r_2 = 2,0$ e as autofunções mantêm uma mesma característica geral, só que aumentam consideravelmente os seus zeros, conforme verifica-se nas Figuras 19 e 20.

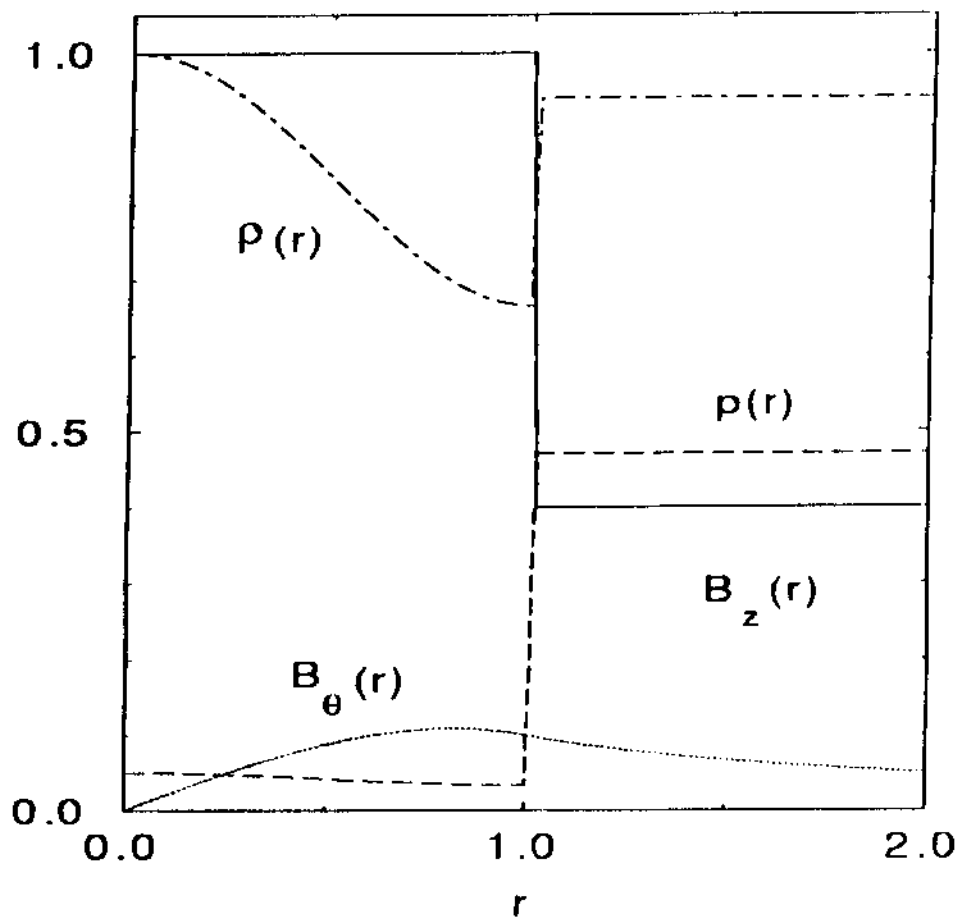


Fig. 7- Um exemplo de perfil de equilíbrio normalizado, onde $B_{z2} = 0,4$, $p_0 = 0,05$, $\rho_{02} = 0,1$ e $j_0 = 0,4$.

- $B_z(r)$;
- $B_\theta(r)$;
- - - - $p(r)$ e
- · - · - $\rho(r)$.

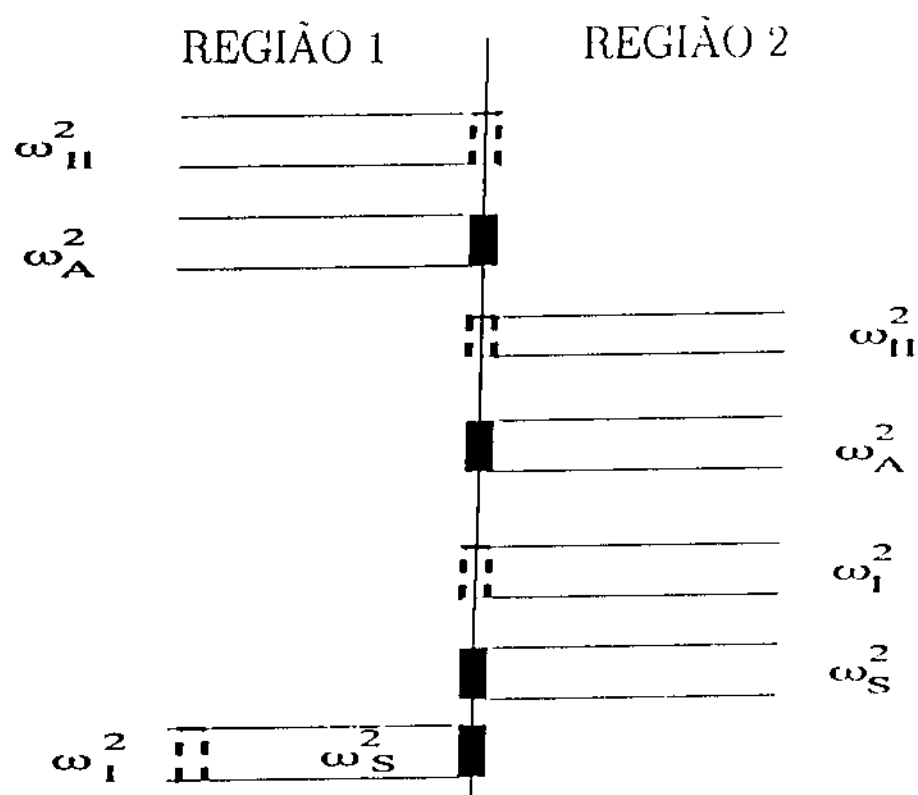


Fig. 8- Esquema do espectro para as regiões 1 e 2.

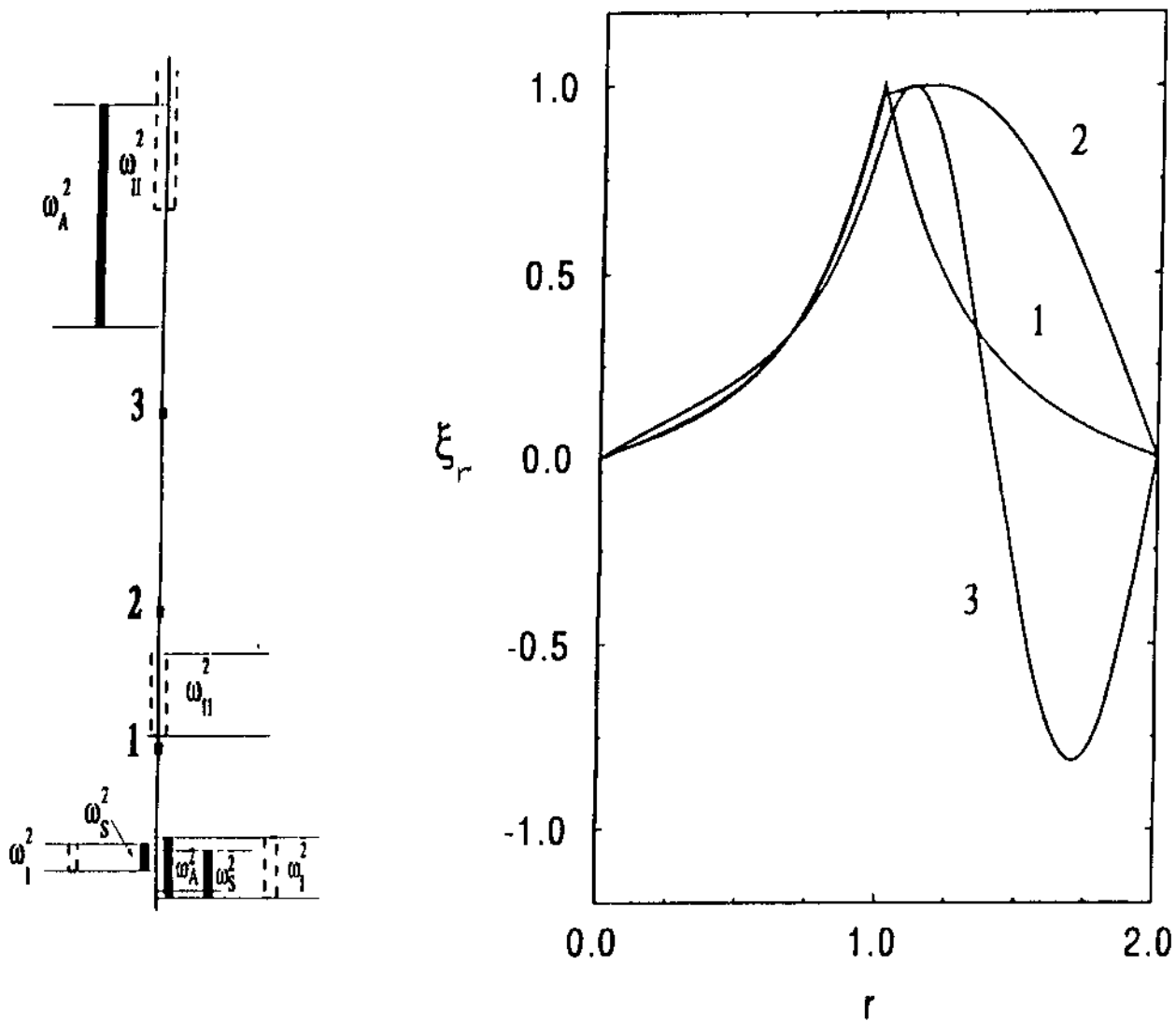


Fig. 9- (a) espectro onde os marcadores quadrados representam os autovalores ω_i^2 , ($i = 1, n$) e (b) as autofunções da parte discreta em função de r , ξ_r , onde $k = 3, 5$, $m = 2$, $B_{22} = 0, 2$, $p_0 = 0, 02$, $\rho_{02} = 0, 1$ e $j_0 = 0, 4$. A autofunção 1 exibe um comportamento anti-Sturmiano e as autofunções 2 e 3 exibem um comportamento Sturmiano. Todas as três funções são modos com características Alfvênicas na região 1 e modos rápidos na região 2.

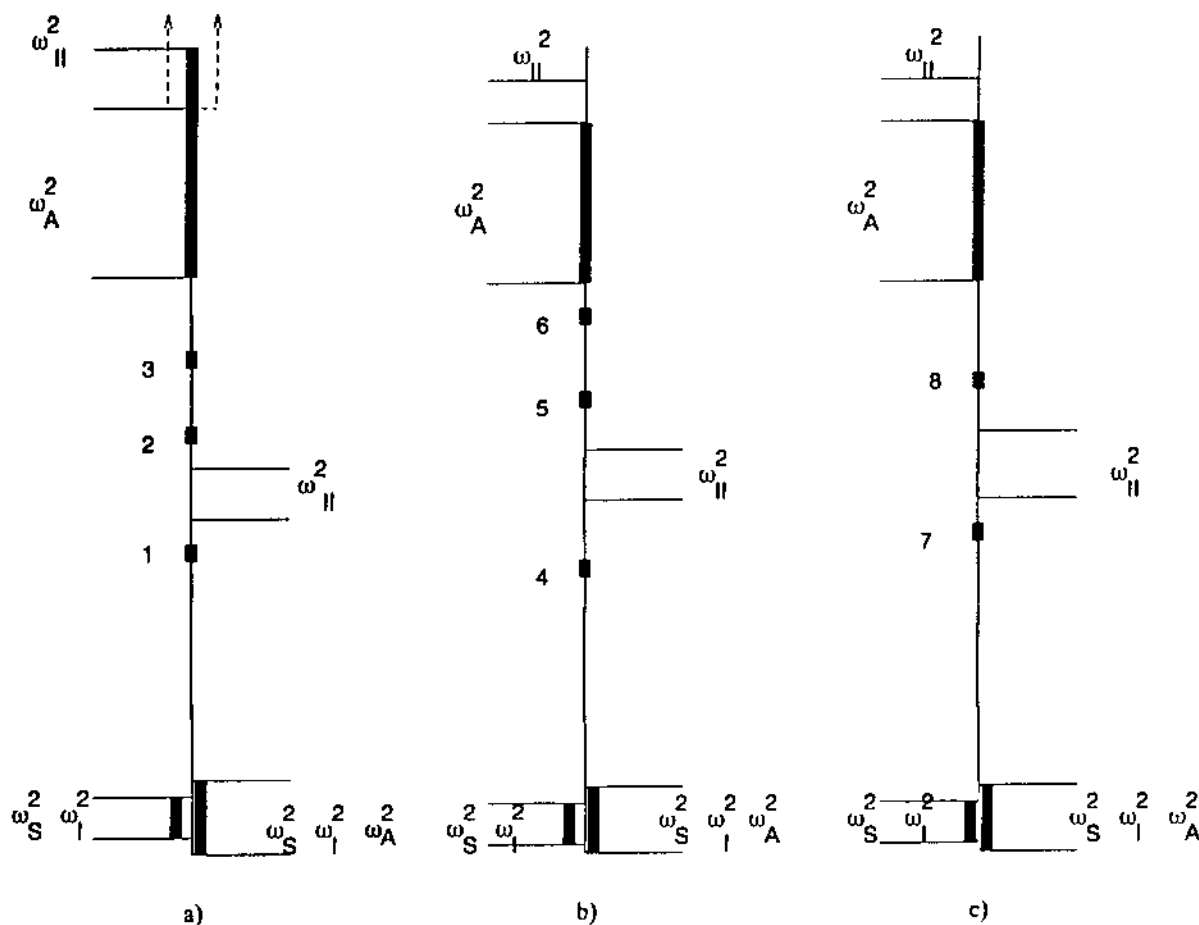


Fig. 10- Variação do espectro para diferentes valores da pressão cinética, $k = 7,5$, $m = 3$, $B_{z2} = 0,4$, $\rho_{02} = 0,5$ e $j_0 = 0,4$; (a) $p_0 = 0,02$, (b) $p_0 = 0,03$ e (c) $p_0 = 0,04$. Os autovalores das autofunções ω_i^2 , ($i = 1,8$) são: 1 = 3,68, 2 = 5,70, 3 = 13,07, 4 = 2,49, 5 = 3,90, 6 = 9,12, 7 = 4,80 e 8 = 7,40. Os modos das autofunções 2 e 3, 5 e 6 e 8 têm uma característica Alfvênica na região 1 e são rápidos na região 2. Mostram um comportamento Sturmiano. Enquanto que as autofunções 1, 4 e 7 mostram um comportamento anti-Sturmiano.

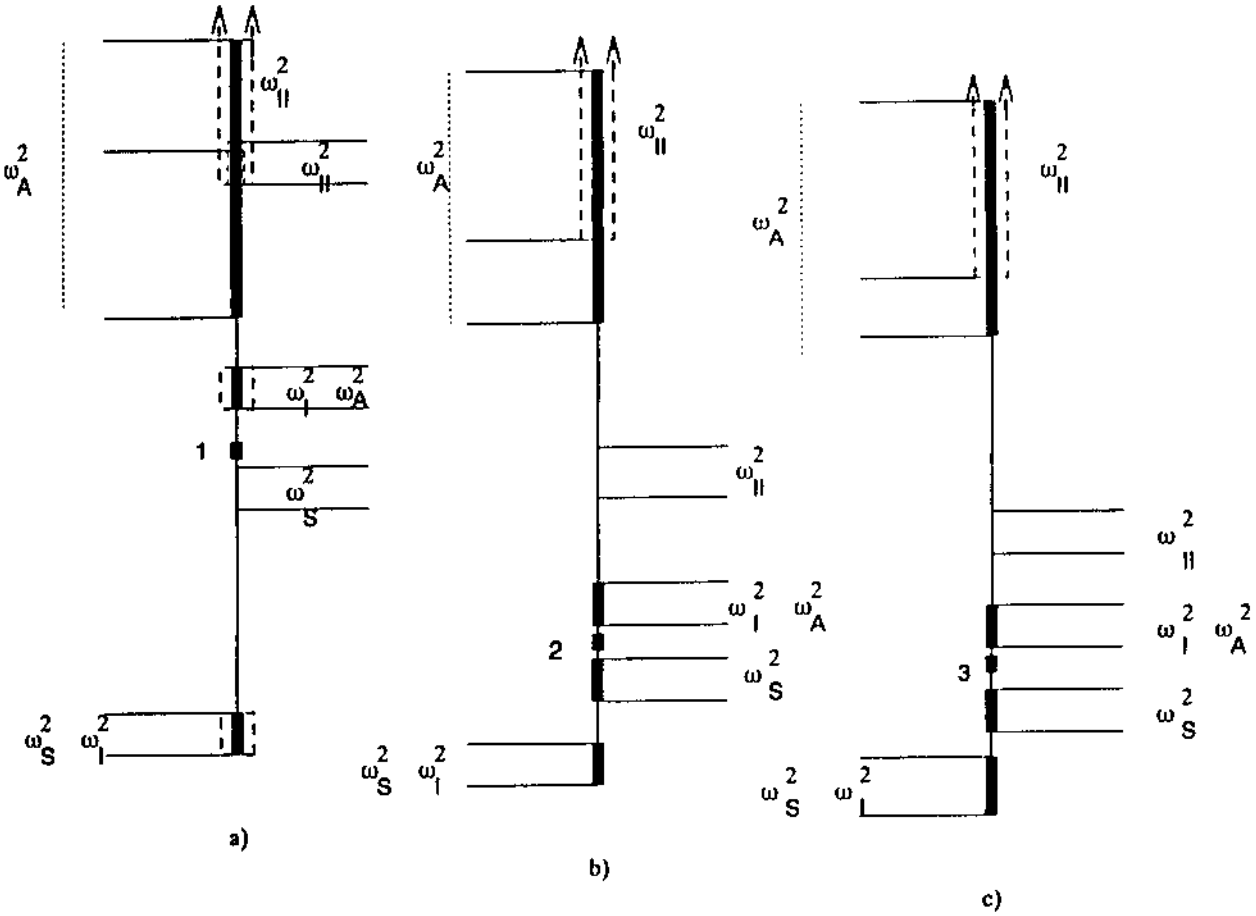


Fig. 11- Variação do espectro para diferentes valores de densidade, onde (a) $\rho_{02} = 0,01$, (b) $\rho_{02} = 0,1$ e (c) $\rho_{02} = 0,5$, para $k = 3,5$, $m = 1$, $B_{z2} = 0,4$, $p_0 = 0,02$ e $j_0 = 0,4$, onde os autovalores ω_i^2 , ($i = 1,3$) são: 1 = 7,87, 12 = 0,78 e 3 = 0,16. Os modos das autofunções 1, 2 e 3 têm características Alfvênicas na região 1 e lentos na região 2. Apresentam comportamento anti-Sturmiano.

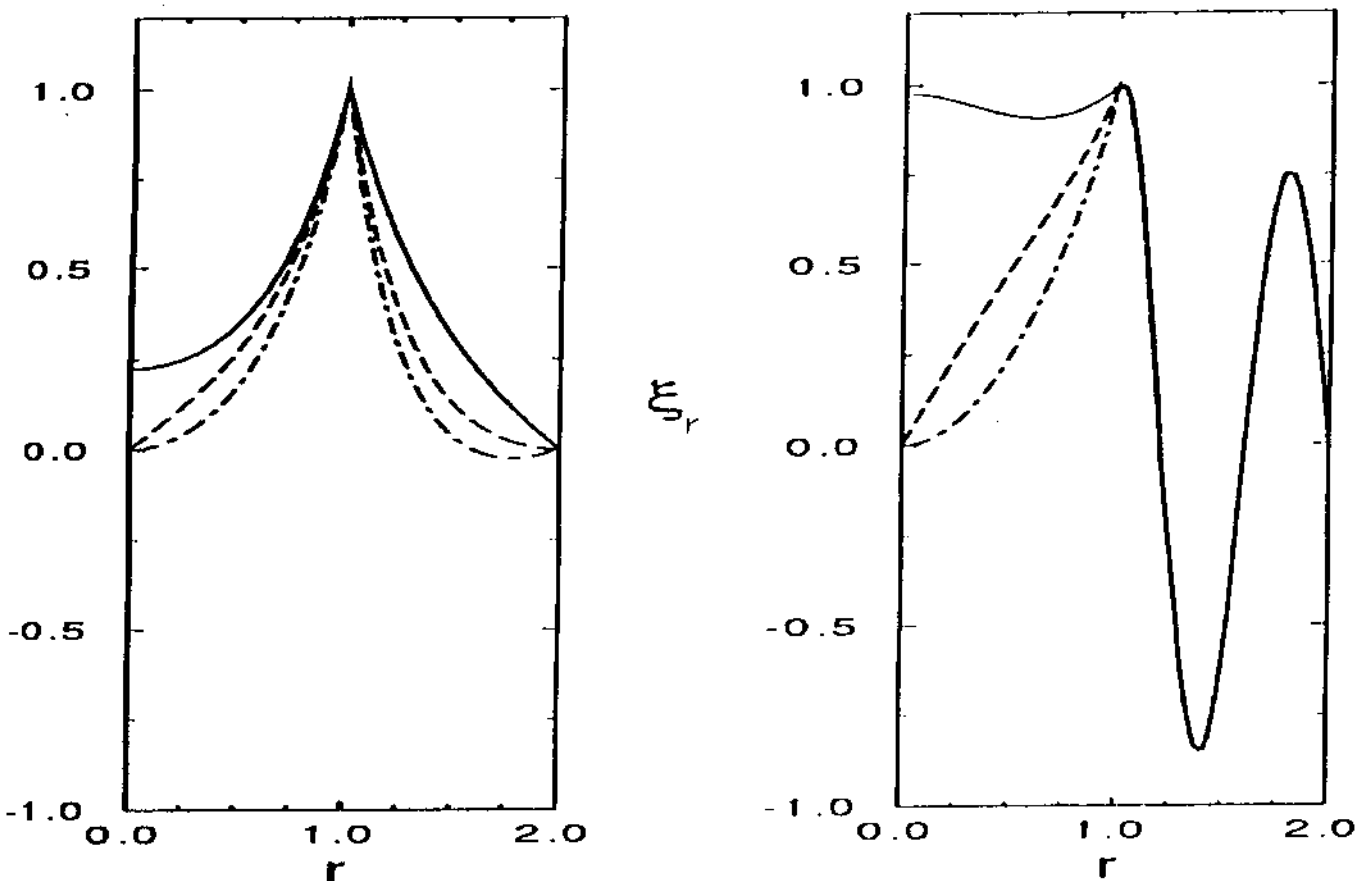


Fig. 12- Autofunções, como função de r , ξ_r , para diferentes valores de m . (a) estas funções representam o modo mais baixo para $k = 3,5$, $B_{z2} = 0,5$, $p_0 = 0,05$, $\rho_{02} = 0,1$ e $j_0 = 0,4$; (b) Estas autofunções são os modos mais altos para $k = 3,5$, $B_{z2} = 0,5$, $p_0 = 0,05$, $\rho_{02} = 0,5$ e $j_0 = 0,2$. Os modos em (b) são modos de Alfvén relativos à região 1. As autofunções em (a) são tipicamente ondas de superfície; em (b) são ondas do tipo modo combinado.

- $m = 1$
- $m = 2$
- · - · - $m = 3$

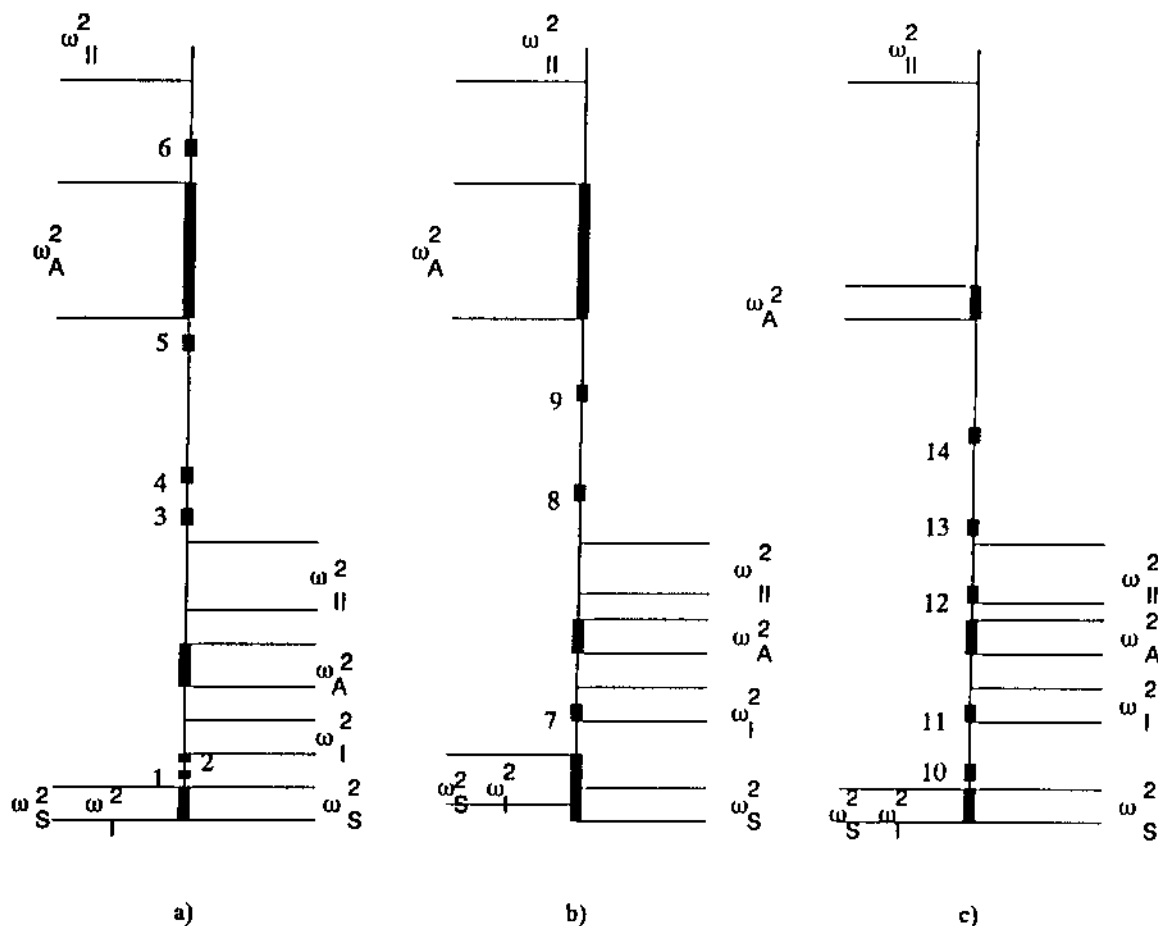


Fig. 13- Variação do espectro para diferentes valores de corrente, (a) $j_0 = 0,2$, (b) $j_0 = 0,4$ e (c) $j_0 = 0,6$, onde $k = 3,5$, $m = 3$, $B_{z2} = 0,5$, $p_0 = 0,05$ e $\rho_{02} = 0,2$. Os autovalores ω_i^2 , ($i = 1, 14$) são: 1 = 0,82, 2 = 0,96, 3 = 3,40, 4 = 7,70, 5 = 15,20, 6 = 22,30, 7 = 1,06, 8 = 8,11, 9 = 16,10, 10 = 0,76, 11 = 0,88, 12 = 2,16, 13 = 3,30 e 14 = 7,50. Os modos das autofunções 1, 2, 7, 10 e 11 têm propriedades Alfvênicas na região 1 e são modos lentos na região 2. Já 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13 e 14 têm as propriedades Alfvênicas na região 1 e rápidos na região 2. Quanto ao comportamento as funções 1, 2 e 10 são anti-Sturmianas, 7, 11 e 12 são modos superficiais e os demais são Sturmianos.

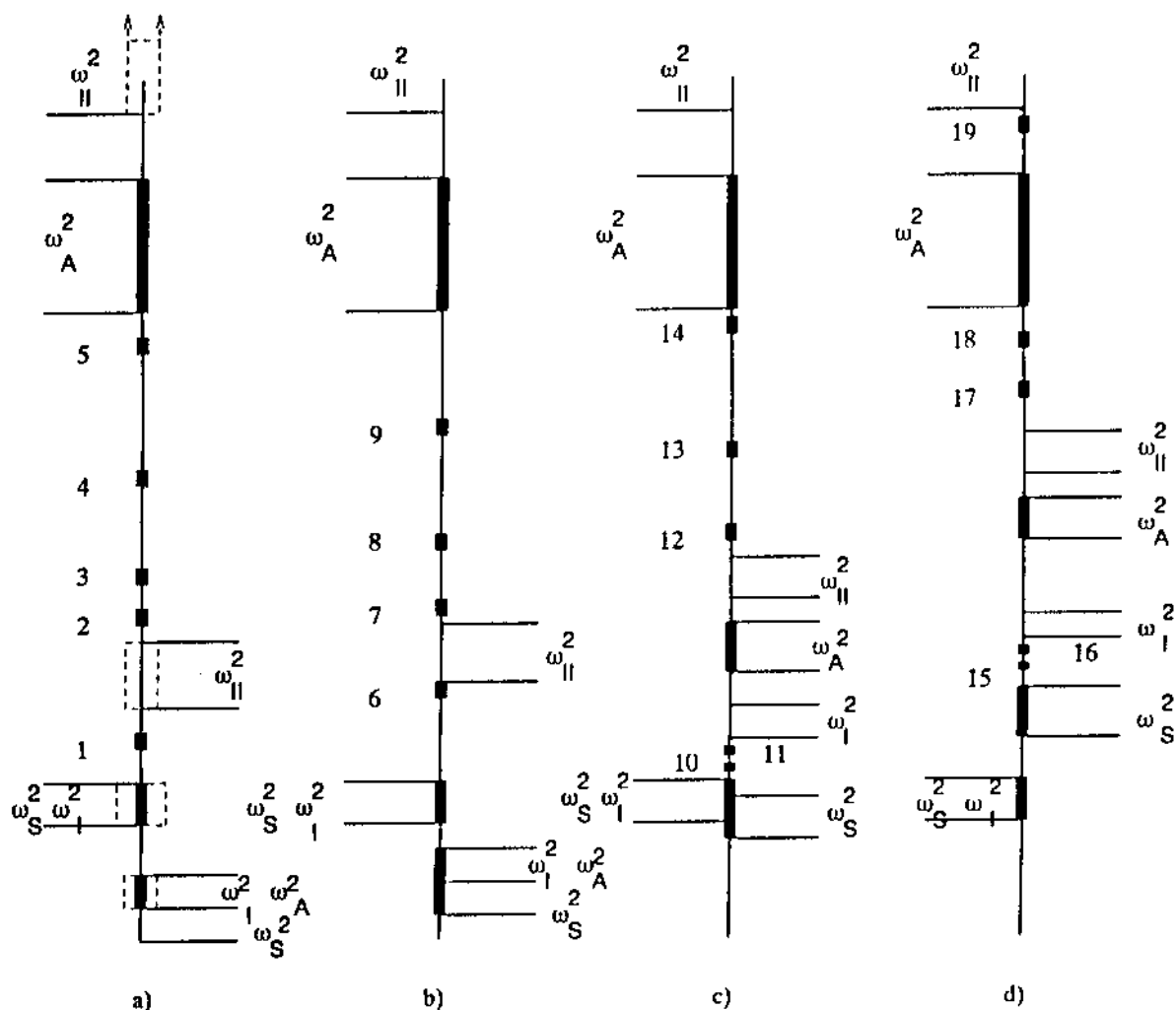


Fig. 14- Variação do espectro para diferentes valores de B_{z2} , (a) $B_{z2} = 0,2$, (b) $B_{z2} = 0,4$, (c) $B_{z2} = 0,6$ e (d) $B_{z2} = 0,8$, onde $k = 3,5$, $m = 2$, $p_0 = 0,05$, $\rho_{02} = 0,5$ e $j_0 = 0,4$. Os autovalores ω_i^2 , ($i = 1, 19$) são: 1 = 1,23, 2 = 1,91, 3 = 4,42, 4 = 8,84, 5 = 14,81, 6 = 1,33, 7 = 2,23, 8 = 5,33, 9 = 10,60, 10 = 0,82, 11 = 0,96, 12 = 3,44 e 13 = 7,77, 14 = 15,26, 15 = 25,26, 16 = 1,08, 17 = 1,22, 18 = 6,57 e 19 = 24,20. Os modos 1 e 6 têm características Alfvênicas em ambas regiões. Os modos 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 17 e 18 têm as características Alfvênicas na região 1 e são rápidos na região 2. Os modos 10, 11, 15 e 16 têm características Alfvênicas na região 1 e são lentos na região 2. Quanto ao comportamento, 1, 6, 10, 11, 15 e 16 são anti-Sturmianos e os demais são Sturmianos.

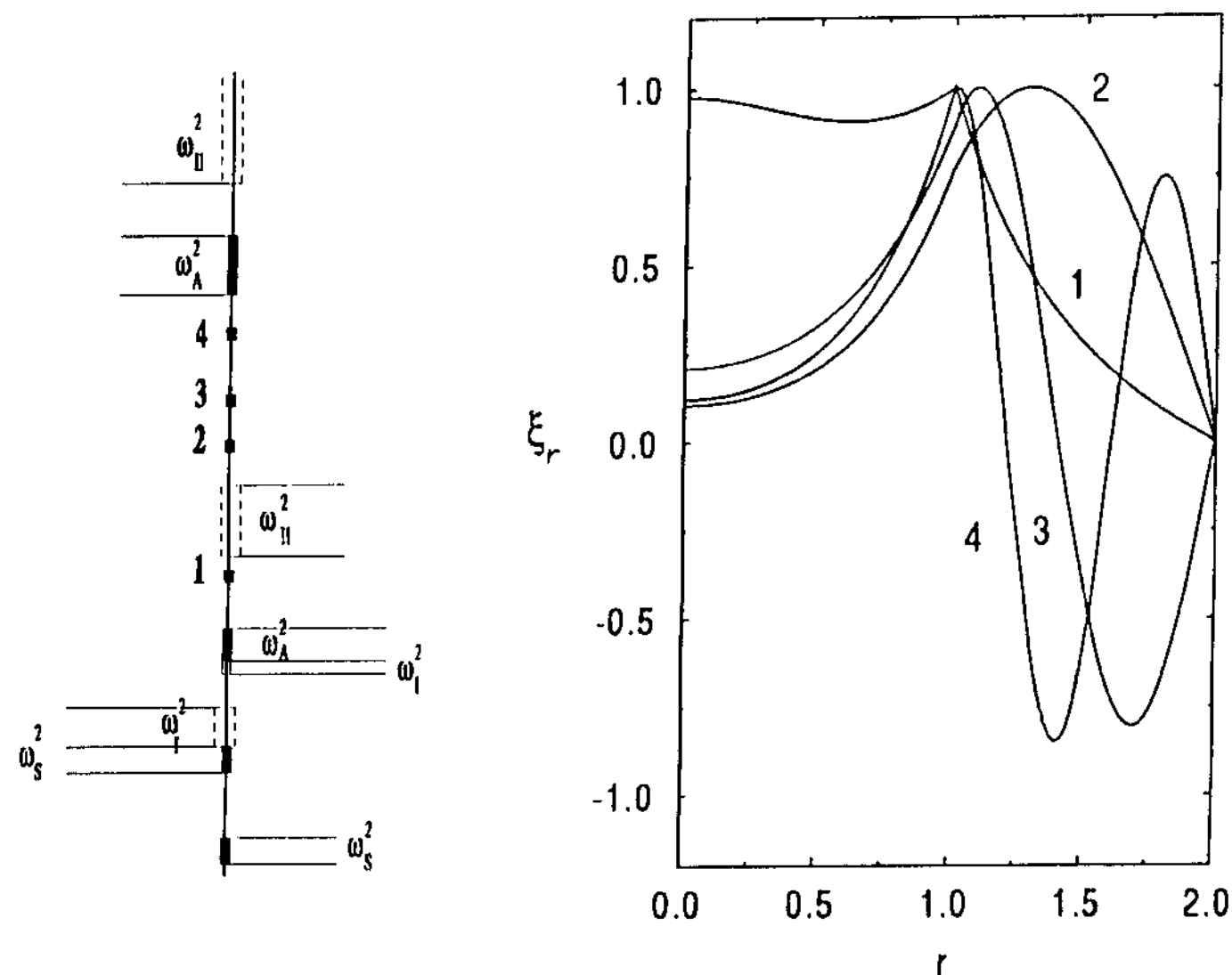


Fig. 15- (a) esquema do espectro e (b) as autofunções normalizadas em função de r , ξ_r , correspondentes, cujos parâmetros de equilíbrio são $k = 3,5$, $m = 1$, $B_{z2} = 0,5$, $p_0 = 0,05$, $\rho_{02} = 0,5$ e $j_0 = 0,2$. As funções 2, 3 e 4 mostram um carácter Sturmiano e a função 1 anti-Sturmiano.

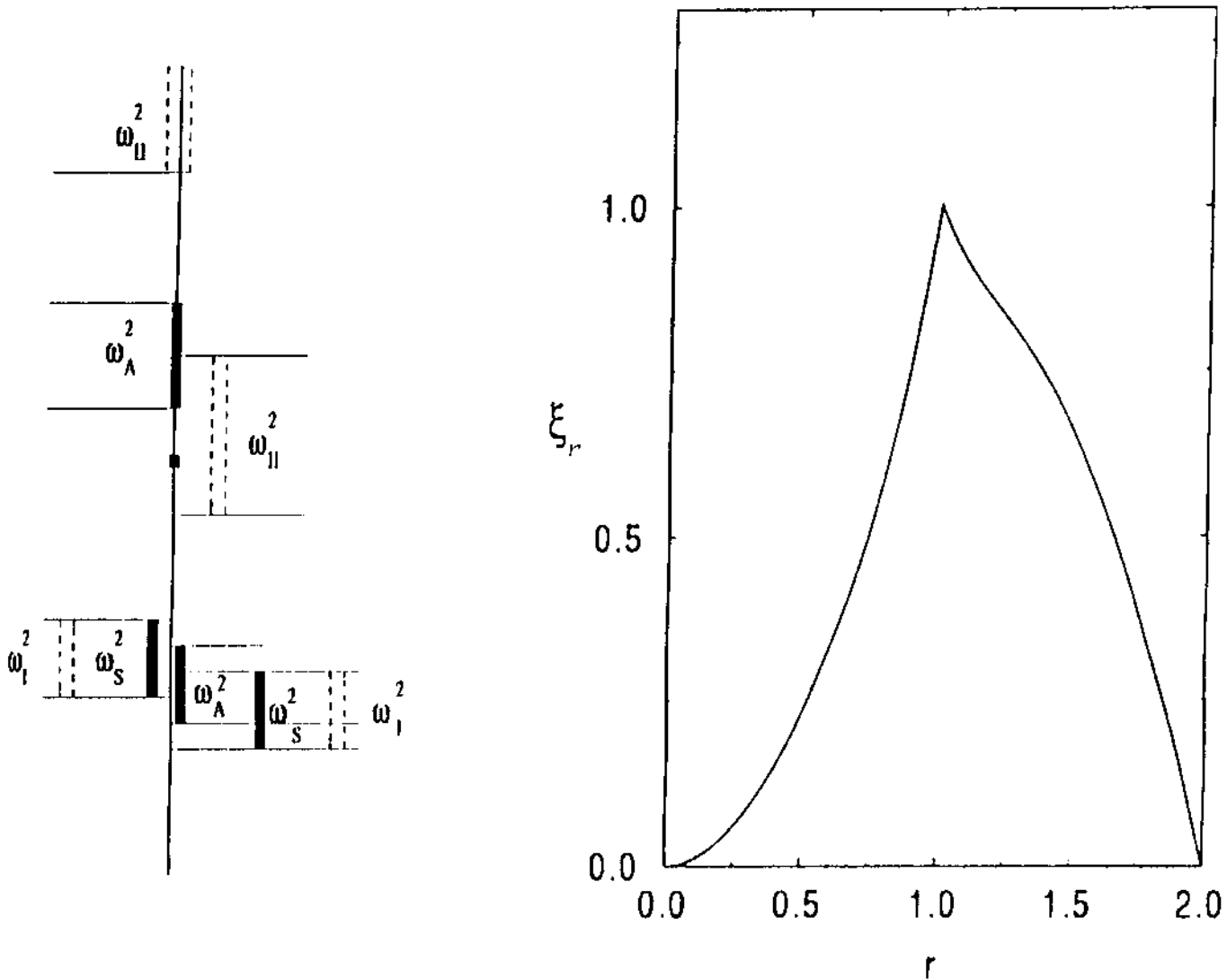


Fig. 16- Um modo dentro da região ω_{II}^2 , obtido quando $k = 3,5$, $m = 3$, $B_{z2} = 0,5$, $p_0 = 0,05$, $\rho_{02} = 0,5$ e $j_0 = 0,4$.

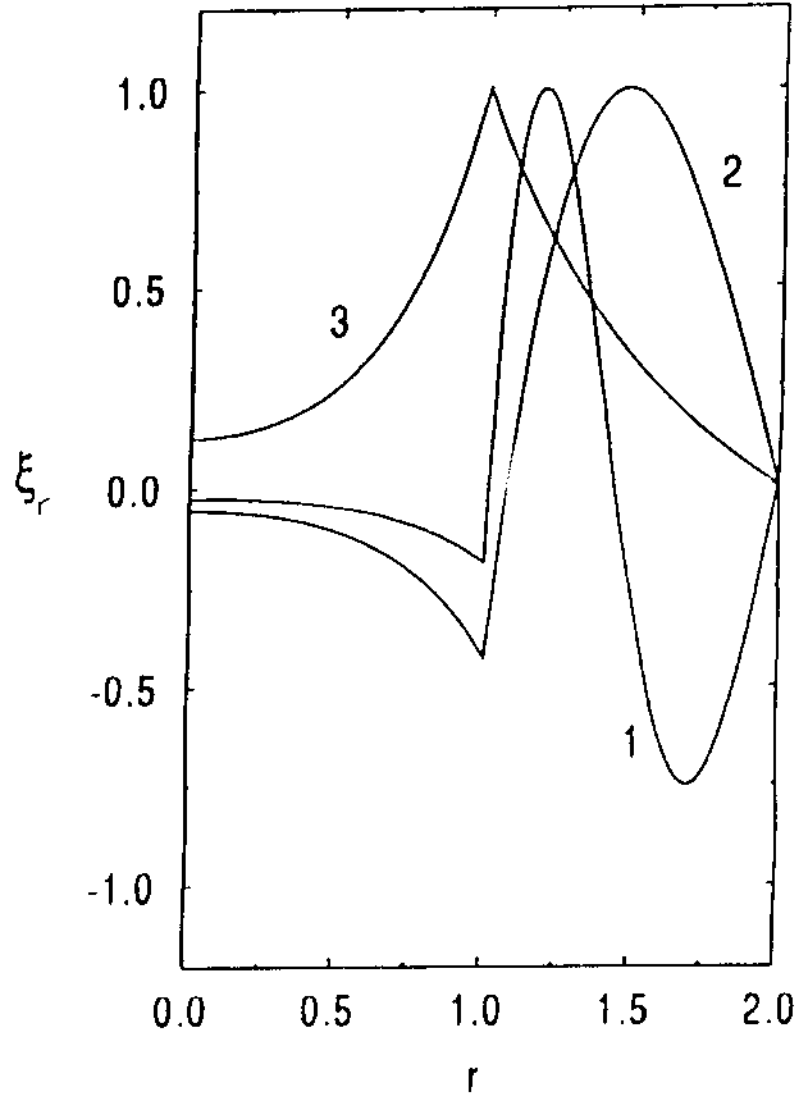
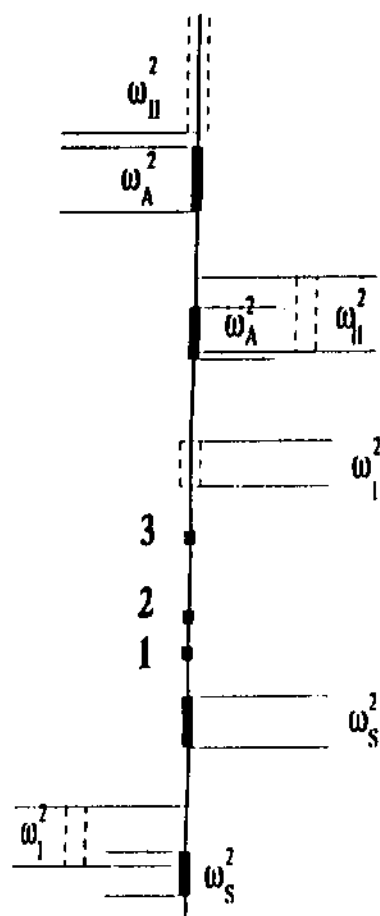


Fig. 17- Esquema do espectro, onde (a) $k = 3.5$, $m = 1$, $B_{z2} = 0.8$, $p_0 = 0.05$, $\rho_{02} = 0.5$ e $j_0 = 0.4$, para os autovalores próximos ao contínuo lento do lado 2 e em (b) as respectivas autofunções em função de r e normalizadas. Novamente aqui aparece uma onda de superfície próximo de ω_l^2 . Estas funções exibem um comportamento anti-Sturmiano para as ondas lentas.

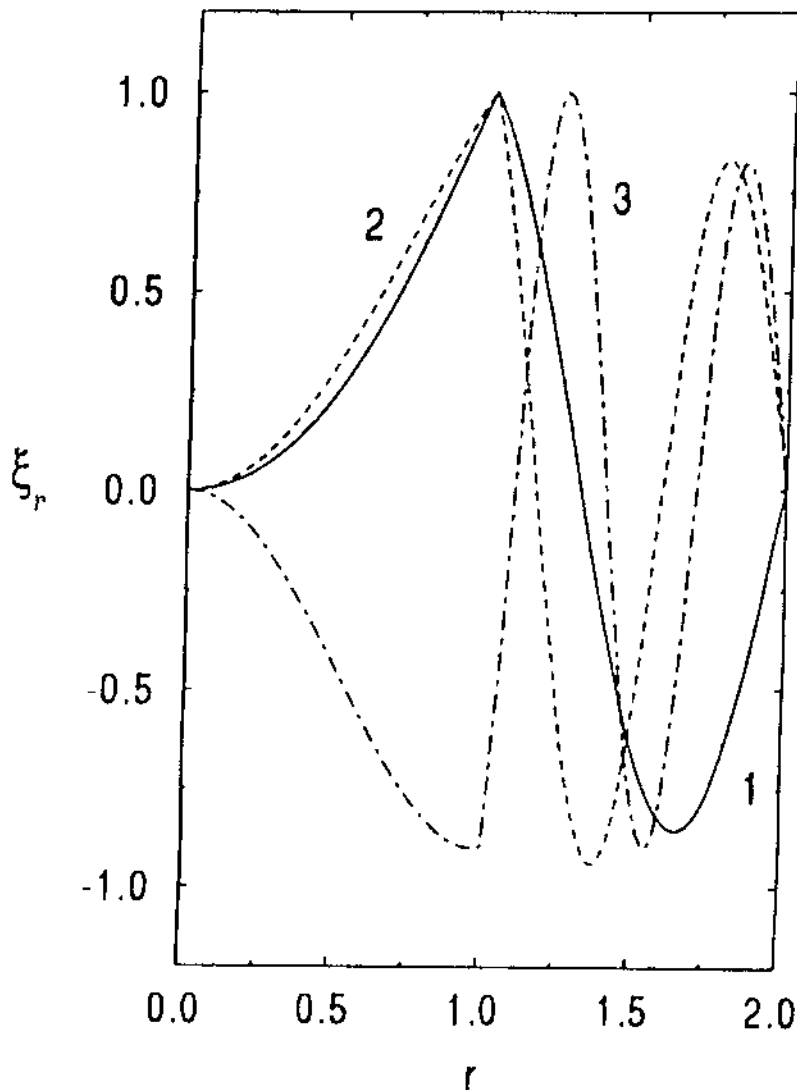
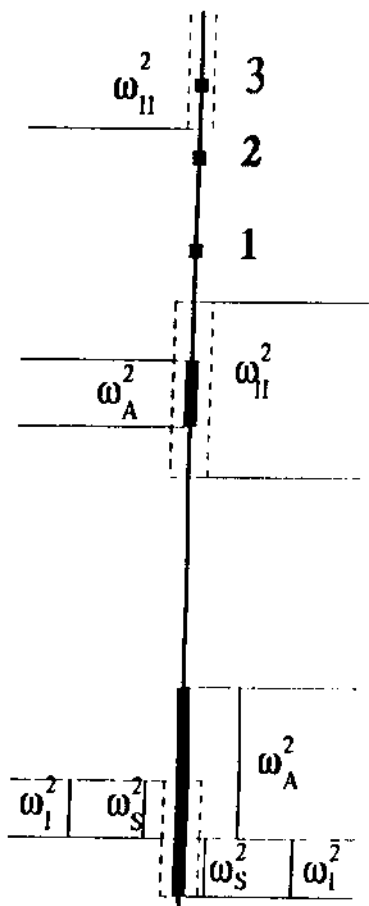


Fig. 18- (a) espectro com os valores discretos de modo rápido e (b) as respectivas autofunções que apresentam um comportamento Sturmiano, para $k = 0,5$, $m = 3$, $B_{z2} = 0,5$, $p_0 = 0,05$, $\rho_{02} = 0,5$ e $j_0 = 0,2$, onde

- onda 1;
- - - - - onda 2 e
- · - · - · - onda 3.

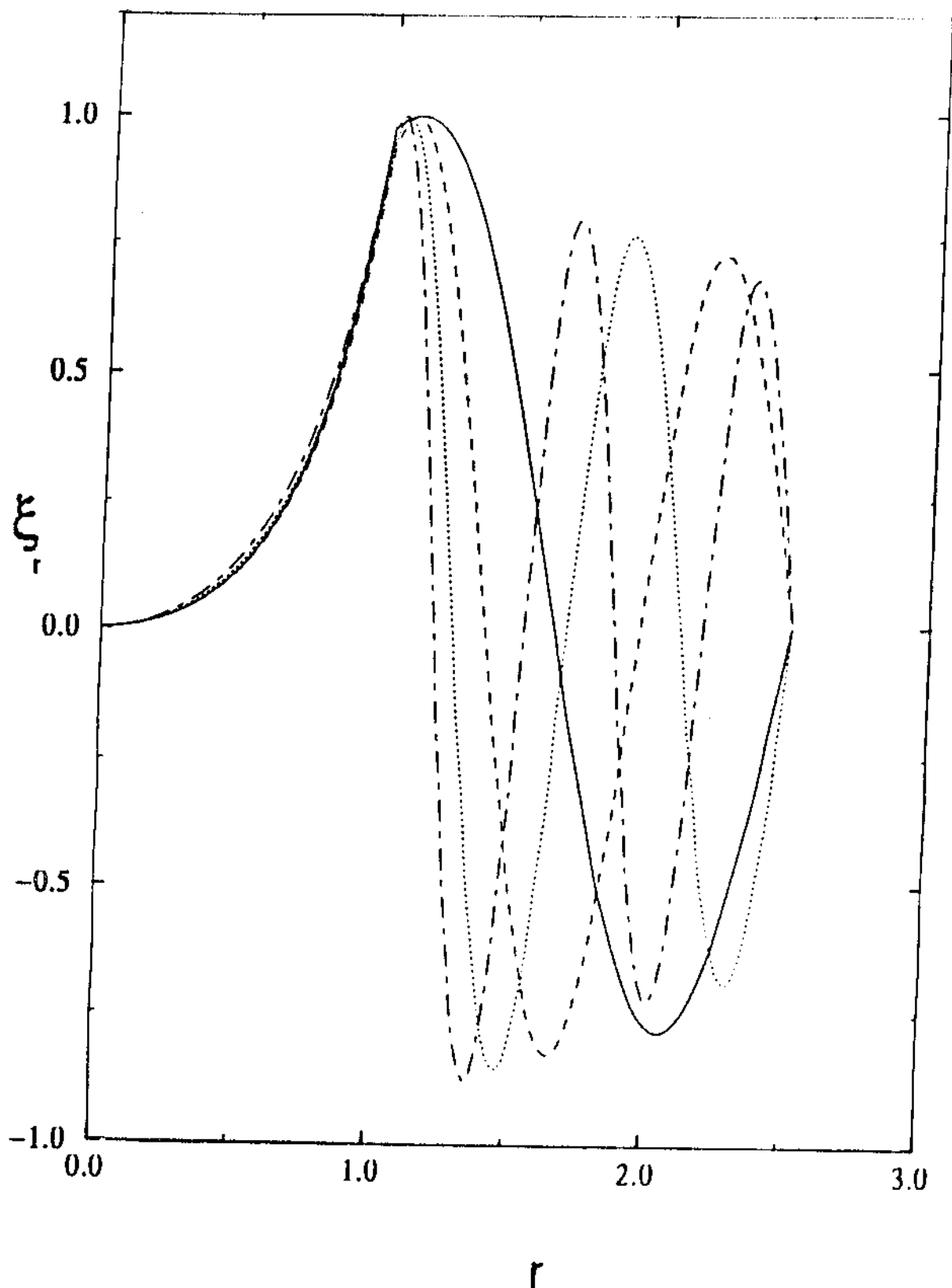


Fig. 19- Comportamento das autofunções para $k = 3,5$, $m = 3$, $B_{z2} = 0,2$, $p_0 = 0,02$, $\rho_{02} = 0,5$ e $j_0 = 0,2$, quando a região 2 é 1,5 vezes a região 1.

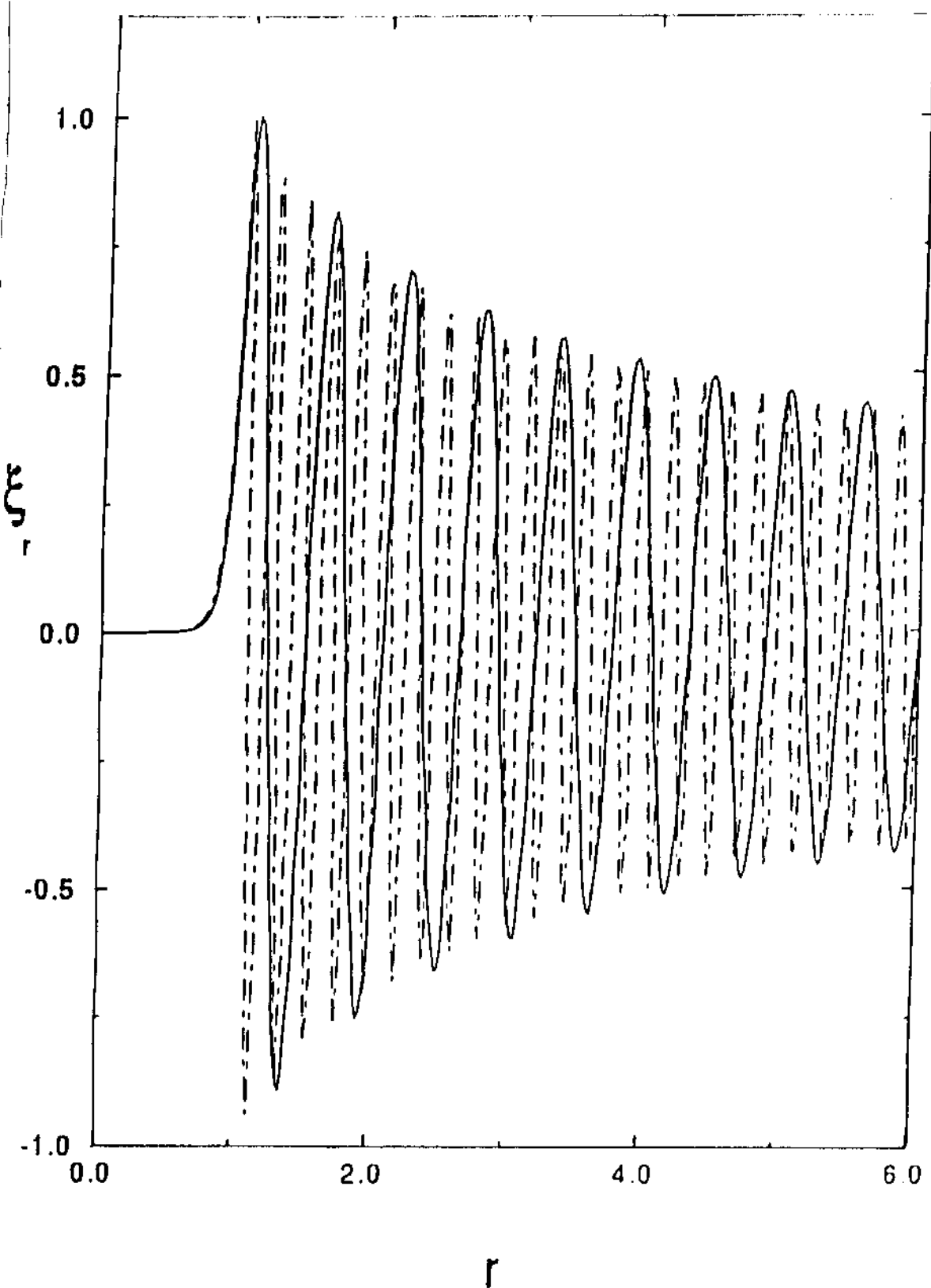


Fig. 20- Comportamento das autofunções para $k = 15.0$, $m = 3$, $B_{z2} = 0.5$, $p_0 = 0.02$, $\rho_{02} = 0.5$ e $j_0 = 0.2$, onde só são mostrados os dois primeiros modos para melhor visualizar as características das ondas, quando a região 2 é três vezes a região 1.

Capítulo 4

APLICAÇÃO À MANCHA SOLAR

4.1 Introdução

O sol é constituído por seis regiões principais distribuídas em camadas bem distintas: o núcleo, (onde há a fusão nuclear); a zona radiativa; a zona convectiva; a fotosfera; a cromosfera e a coroa ou coroa solar [17], Figura 21. Cada região possui características bem diversas. A atmosfera visível do Sol é constituída da fotosfera, que é relativamente densa e opaca e emite grande parte da radiação. Acima desta está a cromosfera, menos densa e mais transparente. Em seguida, encontramos a coroa solar que se estende do topo de uma região estreita de transição até a Terra e além destes limites. A densidade diminui à medida que se afasta da superfície solar.

Só a partir deste século é que pesquisadores começaram a analisar seriamente as manchas solares, apesar de serem conhecidas desde eras imemoriais. Houve a percepção de que estas manchas solares não eram eventos isolados e que interagiam com vários objetos solares (flares, arcos coronais, fáculas, etc.), chegando inclusive a influenciar fenômenos aqui na Terra, como exemplo, a dependência do clima com as manchas solares e também interações com a transmissão/recepção de sinais de

radiofrequências. Estes pesquisadores perceberam que as manchas são formadas por fortes fluxos magnéticos tubulares, onde a região escura central é chamada de **umbra** e a região que a circunda onde aparecem estruturas filamentosas é denominada de **penumbra**. Geralmente a umbra tem um diâmetro que representa 40% da mancha, com a incerteza de aproximadamente 20%. Um exemplo de mancha solar é mostrado na Figura 22. O campo magnético na umbra é predominantemente vertical e muito mais intenso ao campo da sua vizinhança, sendo aproximadamente 3.000 G, enquanto que na penumbra está em torno de 1.000 G e fora da mancha alcança, no máximo, poucas centenas de gauss [17]. A densidade eletrônica na fotosfera é da ordem de 10^{17}cm^{-3} , a temperatura menor que 1 eV e o logaritmo de Coulomb é da ordem de 3, comprovando assim a semelhança com o modelo proposto.

A mancha solar parece ter sua origem na zona convectiva, onde estima-se que o campo magnético é da ordem de 10.000 G [17].

Vários fenômenos dinâmicos aparecem na mancha, tais como: oscilações umbrais (“umbral oscillations”), “flashes” umbrais (“umbral flashes”), ondas caminhanças da penumbra (“running penumbral waves”) e pontos umbrais (“umbral dots”). O estudo destes fenômenos é importante para compreender o transporte de energia e a estrutura dinâmica das manchas. Dentre estes priorizam-se as oscilações umbrais e as ondas caminhanças da penumbra - RPW.

As manchas com uma formação regular da penumbra apresentam bandas sucessivas de claros e escuros, com direção para fora da mancha. Estas formações são chamadas de ondas caminhanças da penumbra (“running penumbral waves”, RPW [22] [23]). Estas ondas têm o formato de arco e propagam-se mais ou menos uniformemente para fora da penumbra, tornando-se gradualmente invisíveis até alcançarem o final da mancha (esta não uniformidade que se observa vai depender das características da umbra, de onde se originam estas ondas [24], Figura 23). A velocidade

de propagação está entre 10 e 25 km/s [23]. As RPW têm um período que varia de 170 s a 260 s. Spruit [25] observou que a umbra também tem este tipo de onda, ou alguma onda com os mesmos aspectos desta, que continua fluindo através da penumbra onde já é identificada como RPW. Lites e Thomas [26], Beckers [27] e Moore e Tang [28] dizem que há dois tipos principais de oscilação na umbra, a oscilação de 5 minutos, que é detectada na baixa fotosfera e a oscilação de 3 minutos, que é observada na alta fotosfera e na baixa cromosfera.

4.2 Modelo

Em relação ao modelo da Figura 1, considera-se a região da umbra a região 1 e a região da penumbra a região 2, de acordo com a Figura 24 que exhibe o perfil do campo magnético da mancha solar. Vê-se que o modelo cilíndrico se adapta perfeitamente à estrutura da mancha solar.

O modelo está de acordo com Solanki e Schmidt [29], onde afirmam que uma parte significativa do fluxo magnético (aproximadamente $1/2 - 2/3$) emerge na penumbra, isto é, a penumbra é profunda! Segundo Solanki e Schmidt se não for observada esta premissa, a estabilidade da mancha fica comprometida, levando em consideração a curvatura das linhas do campo magnético, pois há um limite em relação a este ângulo de curvatura para que a estrutura da mancha seja estável.

Os valores utilizados neste modelo são normalizados: $B_{z1} = r_1 = \rho_0 = \mu_0 = 1$, $r_2 = 2$. Os parâmetros de normalização são :

$$\begin{aligned} t_n &= \left(\frac{\mu_0 \rho_0}{B_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} r_1 \\ r_n &= r_1 \\ m_n &= \rho_0 r_1^3 \end{aligned}$$

4.3 Discussões

Além dos dados sobre a dinâmica do fluido, descritos no capítulo 3, complementa-se com as seguintes informações:

a) Para valores típicos de uma mancha, consideram-se $B_{z1} = 2.500G$, $r_1 = 5.000km$ e $\rho_{01} = 2 \times 10^{-8}g/cm^3$. Em termos dos parâmetros normalizados, foram adotados os seguintes valores: $p_0 = 0,05$, $B_{z1} = 1,0$, $B_{z2} = 0,4$, $\rho_{1,0} = 1,0$, $\rho_{2,0} = 0,6$ e $j_0 = 0,4$. Os parâmetros k e m foram variados, k de 3 a 15 e m de 1 a 3. Todos estes valores foram retirados ou baseados nas referências sobre física solar desta tese;

b) Nas Figuras 25 a 27 estão expressos os períodos, $T(\text{min})$, em função de k , para $m = 1$, $m = 2$ e $m = 3$, respectivamente, para os valores de parâmetros de equilíbrio típicos da mancha solar, citados no item “a”. Para cada k , percebe-se que pode-se encontrar mais do que um período, logo há um conjunto de modos localizados na parte discreta do espectro estável. Observa-se que a ordem de grandeza é a mesma daquelas obtidas por métodos observacionais para as oscilações umbrais, 150 s a 180 s e para as RPW, 180 s a 300 s.

c) As tabelas de 1 a 3 também mostram períodos de 3 a 5 minutos encontrados para valores variados dos parâmetros de equilíbrio normalizados, o que demonstra uma confiabilidade no modelo para a aplicação a manchas solares;

d) Considerando-se os vários tipos de mancha, montou-se uma faixa de valores para o raio e para o campo magnético axial da umbra, ou seja, $2.000 km < r_1 < 10.000 km$ e $2.000 G < B_{z1} < 3.500 G$. Cientes do valor mínimo e do valor máximo para o raio e o campo magnético da umbra e considerando as características das manchas dentro deste contexto, calculou-se os períodos mais baixos e os mais altos, no caso, $r_1 = 2.000 km$ e $B_{z1} = 3.500 G$ e $r_1 = 10.000 km$ e $B_{z1} = 2.000 G$, respec-

tivamente. Mesmo nestes casos extremos, há concordância com os valores medidos (observados) para algum intervalo de k . Como pode-se demonstrar na Figura 28;

e) As figuras 11 a 22 mostram que os modos perturbam ambas as regiões, sendo que bem mais acentuadamente na penumbra. Este modo é uma possível descrição para as RPW, onde comprova-se a sua origem dentro da umbra;

f) Praticamente todos os períodos ficaram dentro da faixa predita por Moore e Tang [28], ou seja, períodos de 2 a 8 minutos na umbra e períodos de 3 a 15 minutos na penumbra. De acordo com as observações, também são encontradas nos resultados numéricos mais oscilações em torno de 180 s e 300 s;

g) Os resultados demonstram a ocorrência de modos de 3 minutos se estendendo da baixa fotosfera à baixa cromosfera;

h) Sugere-se que as oscilações umbrais e as RPW surgem de um mesmo fenômeno. Este fato já foi mencionado, inclusive, por Giovanelli [23], Alissandrakis et al. [24] e Spruit [25]. É muito difícil medir o período das ondas na penumbra precisamente e não há diferenças significativas quando se compara com o período das oscilações na umbra. Isto está de acordo com os cálculos aqui desenvolvidos.

i) Assume-se o campo magnético azimuthal e cita-se como fator preponderante do modelo a presença de uma corrente axial, dando origem a um pequeno campo magnético azimuthal, que é um elemento essencial do modelo.

j) Quanto mais homogêneo for o campo magnético axial e mais extensa for a penumbra, mais fácil serão detectadas as RPW, pois serão contínuas e se propagarão radialmente em todas as direções da penumbra, conforme Figura 23.

l) Vários autores denominam estas ondas de diferentes nomes, (modos de Alfvén [23], modos grávito-acústicos [30] modos acústicos [31], etc). Na interpretação deste trabalho, estas ondas se comportam de diversas maneiras. Os seus modos dependem das características da mancha, isto é, sua profundidade, seu diâmetro, sua densidade,

em suma, a dependência está no perfil de equilíbrio. Logo a conclusão é que elas podem ser ora ondas de Alfvén, ora ondas lentas e ora ondas rápidas.

m) Além deste modelo há basicamente dois modelos principais que tentam explicar os fenômenos dinâmicos da mancha. Um deles é o estudo do comportamento do plasma dentro de um cilindro com campo magnético axial e densidade homogêneos. É imposta uma parede rígida como a parede externa do modelo cilíndrico. Estuda-se, assim, os fenômenos dinâmicos da umbra [32]. Mas ignora-se completamente a penumbra, dando a entender que é totalmente independente da umbra. Será que não há interação entre umbra e penumbra? Com o modelo de duas camadas percebe-se que as autofunções modificam-se totalmente quando surgem descontinuidades.

O outro modelo trata de zonas estratificadas verticalmente, isto é, trabalham em coordenadas retangulares, onde na direção horizontal paralela à superfície solar a fronteira é livre e a direção z é finita, (z_{min}, z_{max}) , simulando uma seção retangular de um cilindro “homogêneo” de raio infinito [31]. Da mesma forma, este modelo ignora a penumbra. Também interroga-se: será que as camadas vizinhas não influenciam na origem destes fenômenos nas fronteiras? A geometria plana representa melhor objetos com configuração cilíndrica? E por último, até que ponto é válido considerar-se a umbra alcançando o infinito?

No modelo aqui apresentado também há restrições. Não há identificação de uma zona do Sol específica, mas pode-se controlar a variação da direção em z , através do número de onda k .

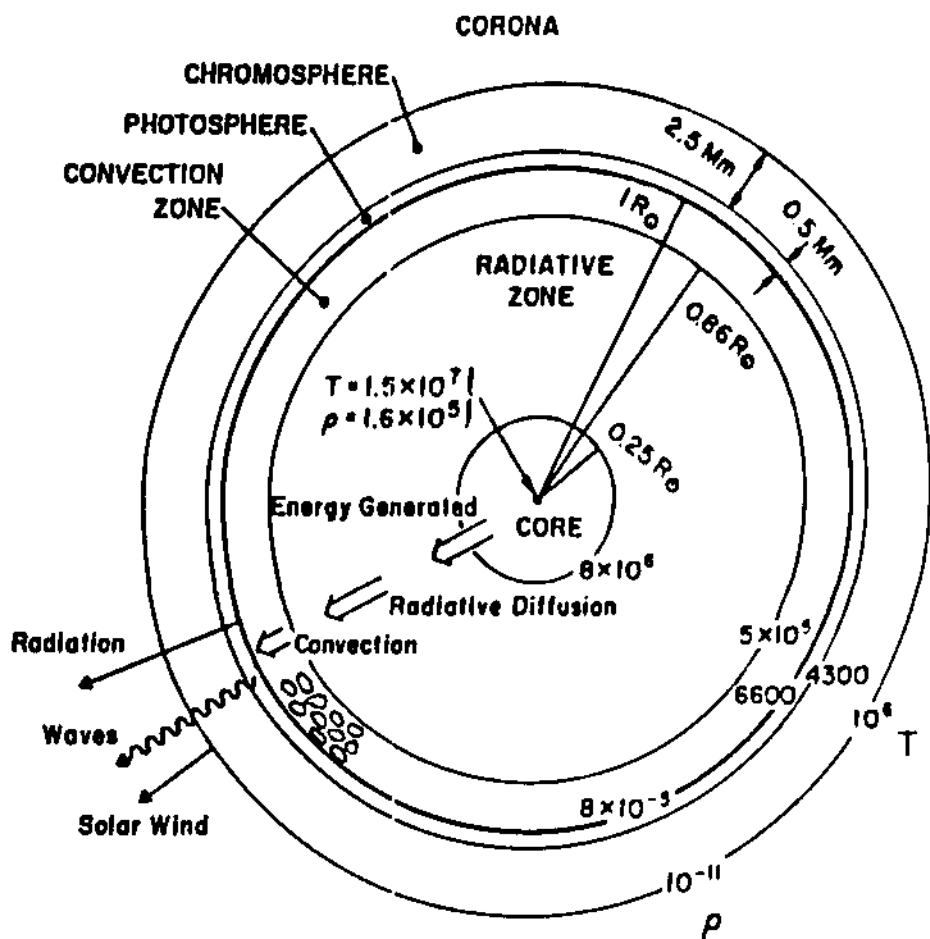


Fig. 21- Estrutura geral do sol.

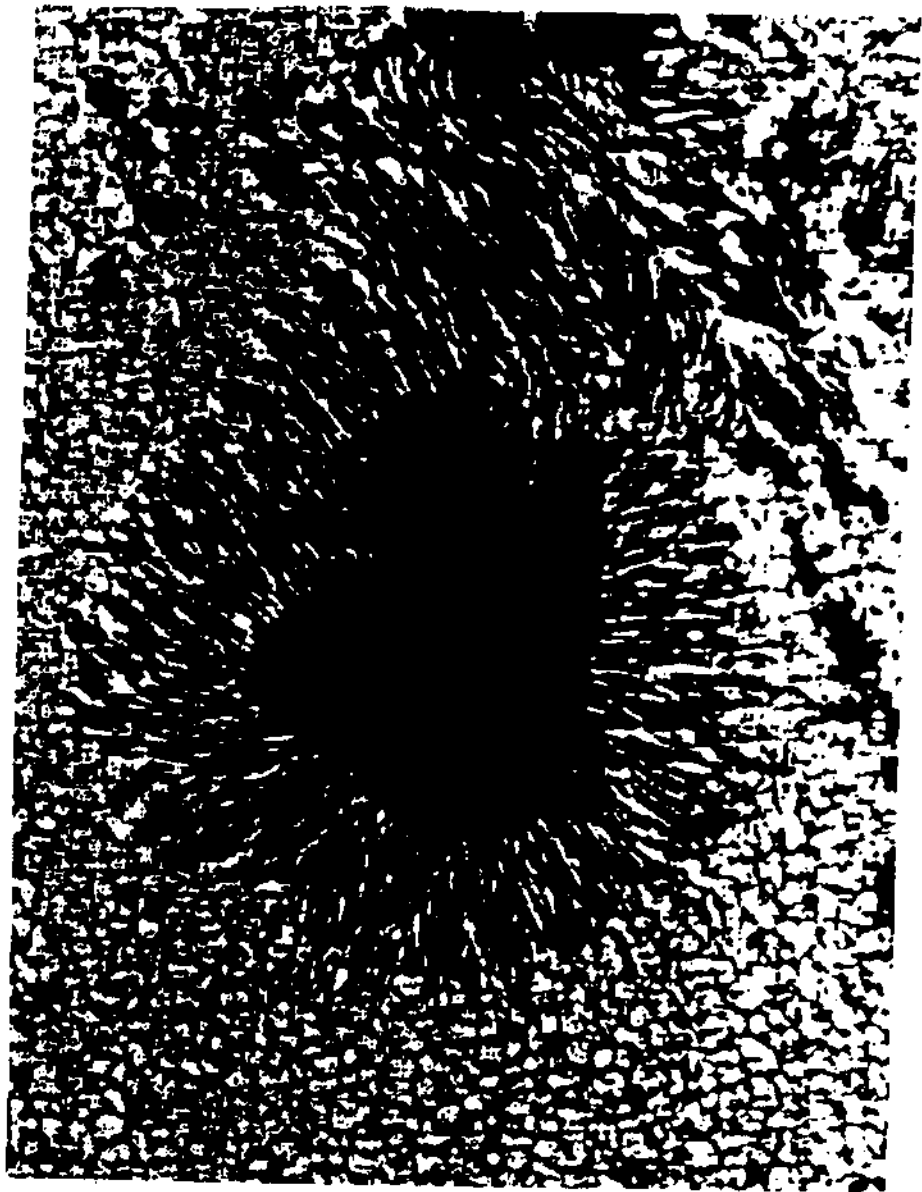
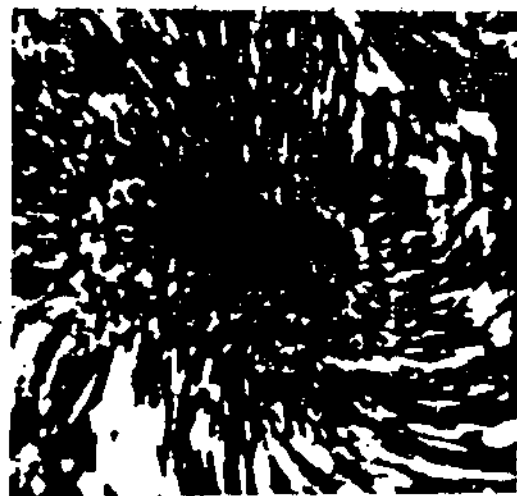


Fig. 22- Uma mancha solar típica.



a: 08:59:20 UT



b: 09:02:00 UT

10"



c: 09:03:10 UT



d: 08:43:25 UT

Fig. 23- Subtração de imagens mostrando as RPW no lado direito da penumbra. Em (d) são indicadas as RPW A e B e os elementos umbrais onde são originadas as ondas.

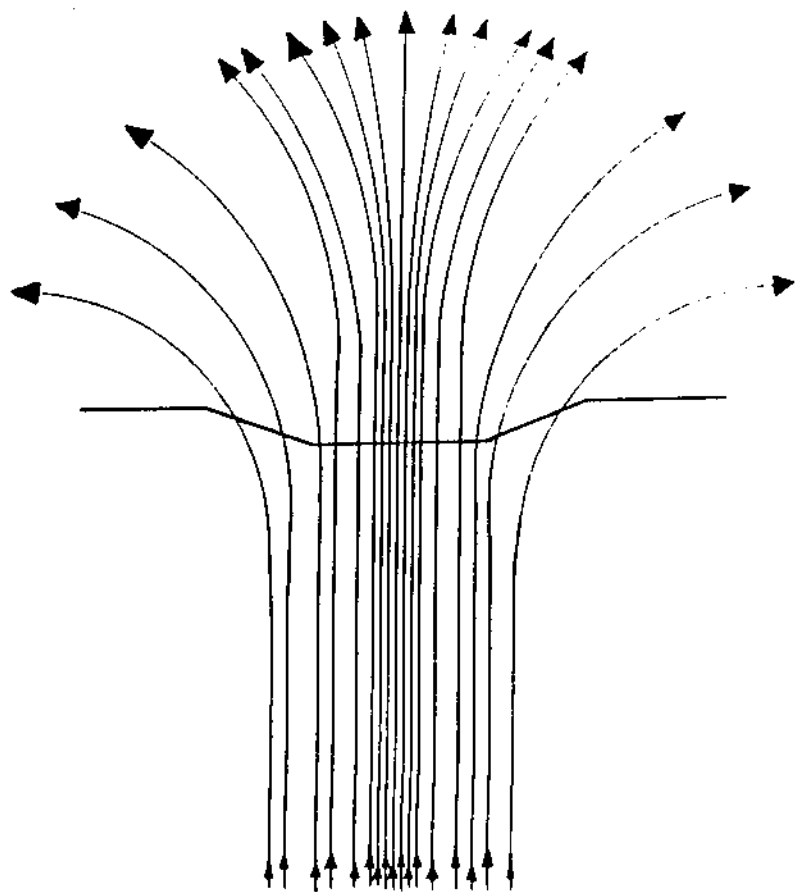


Fig. 24- Modelo esquemático para as linhas do campo magnético de uma mancha solar típica.

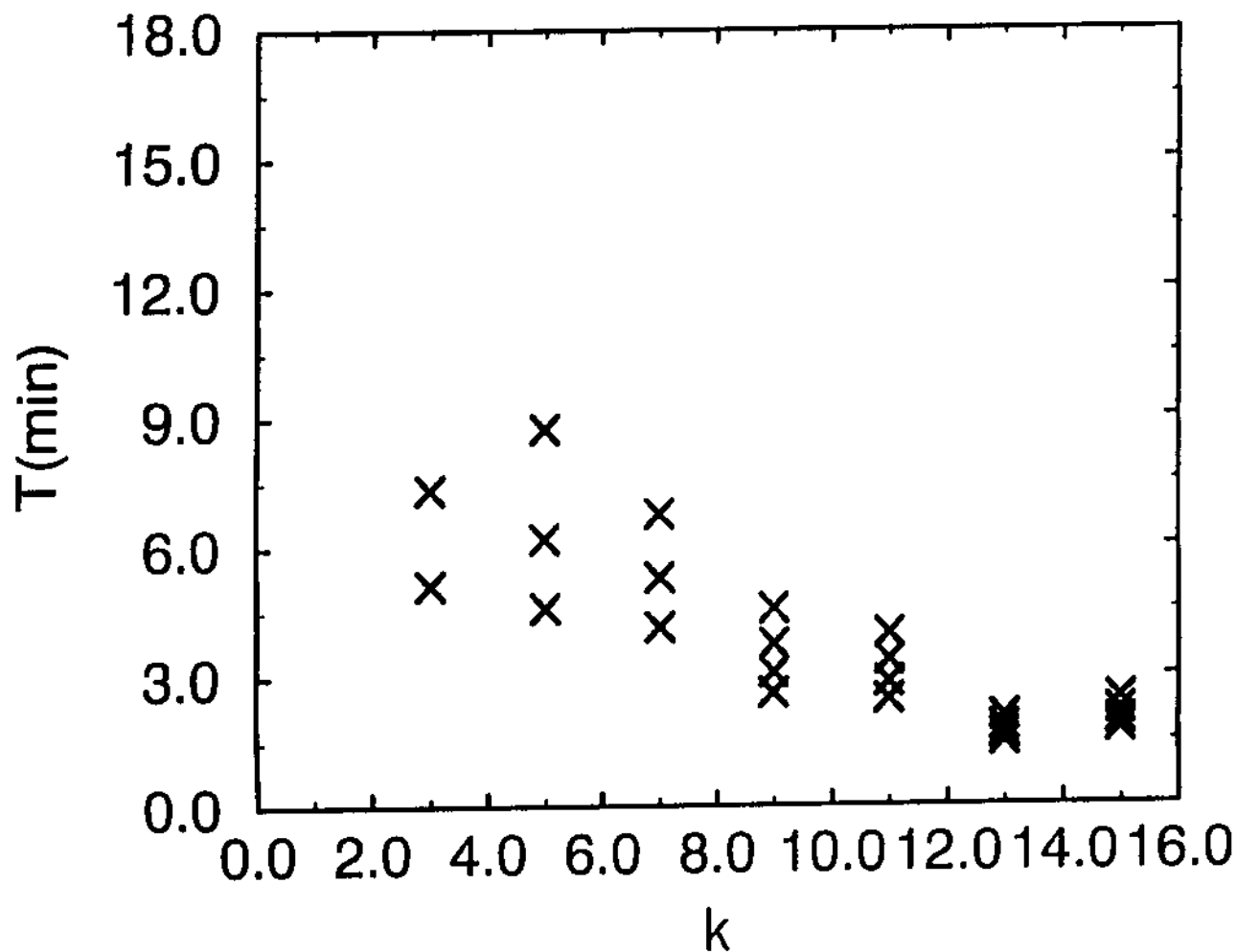


Fig. 25- São mostrados os períodos, $T(\text{min})$, estimados para as "running penumbral waves" em função do número de onda normalizado, k , para $m = 1$, $p_0 = 0,05$, $B_{z2} = 0,4$, $\rho_{z0} = 0,6$ e $j_0 = 0,4$.

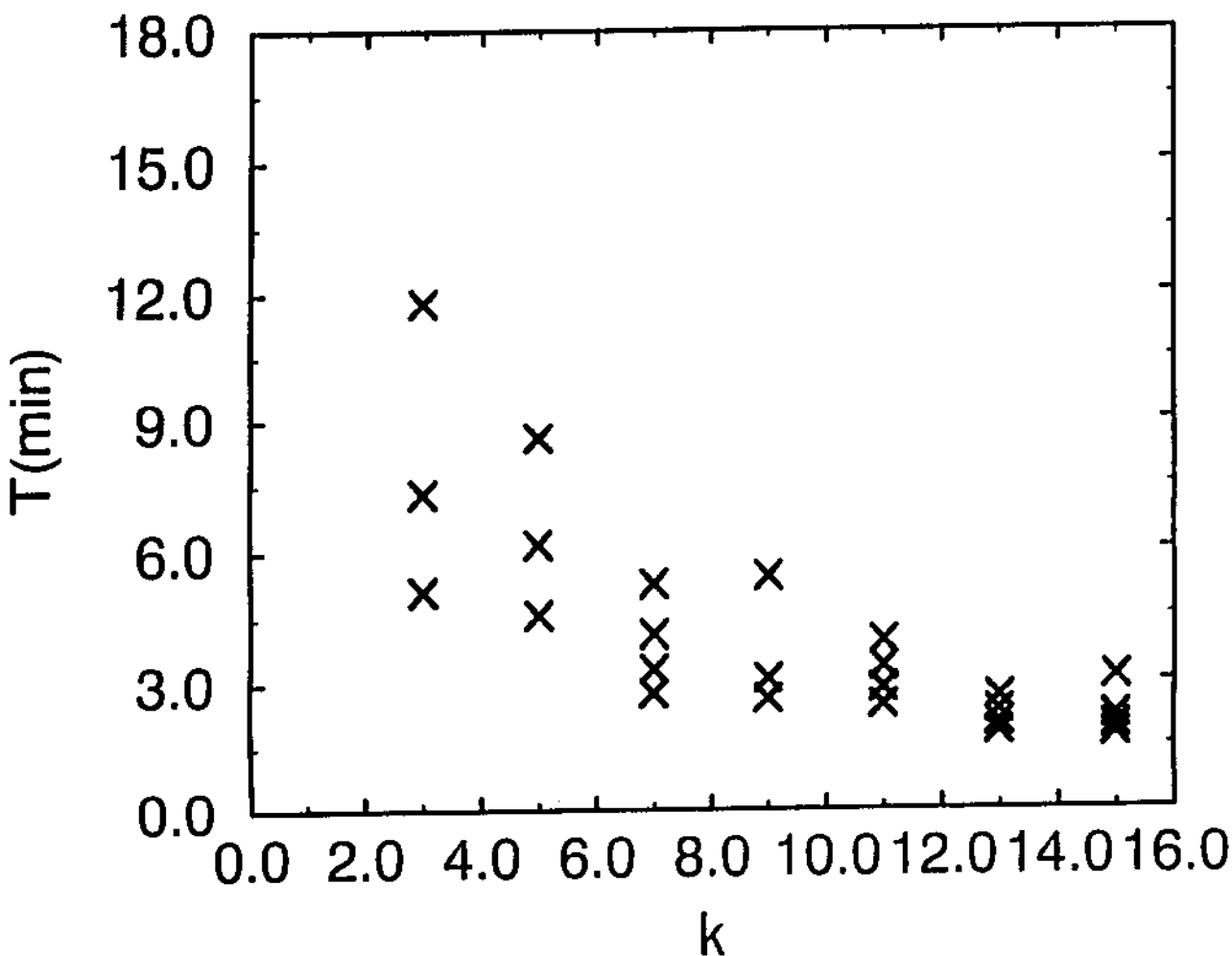


Fig. 26- São mostrados os períodos, $T(\text{min})$, estimados para as "running penumbral waves" em função do número de onda normalizado, k , para $m = 2$, $p_0 = 0,05$, $B_{z2} = 0,4$, $\rho_{2,0} = 0,6$ e $j_0 = 0,4$.

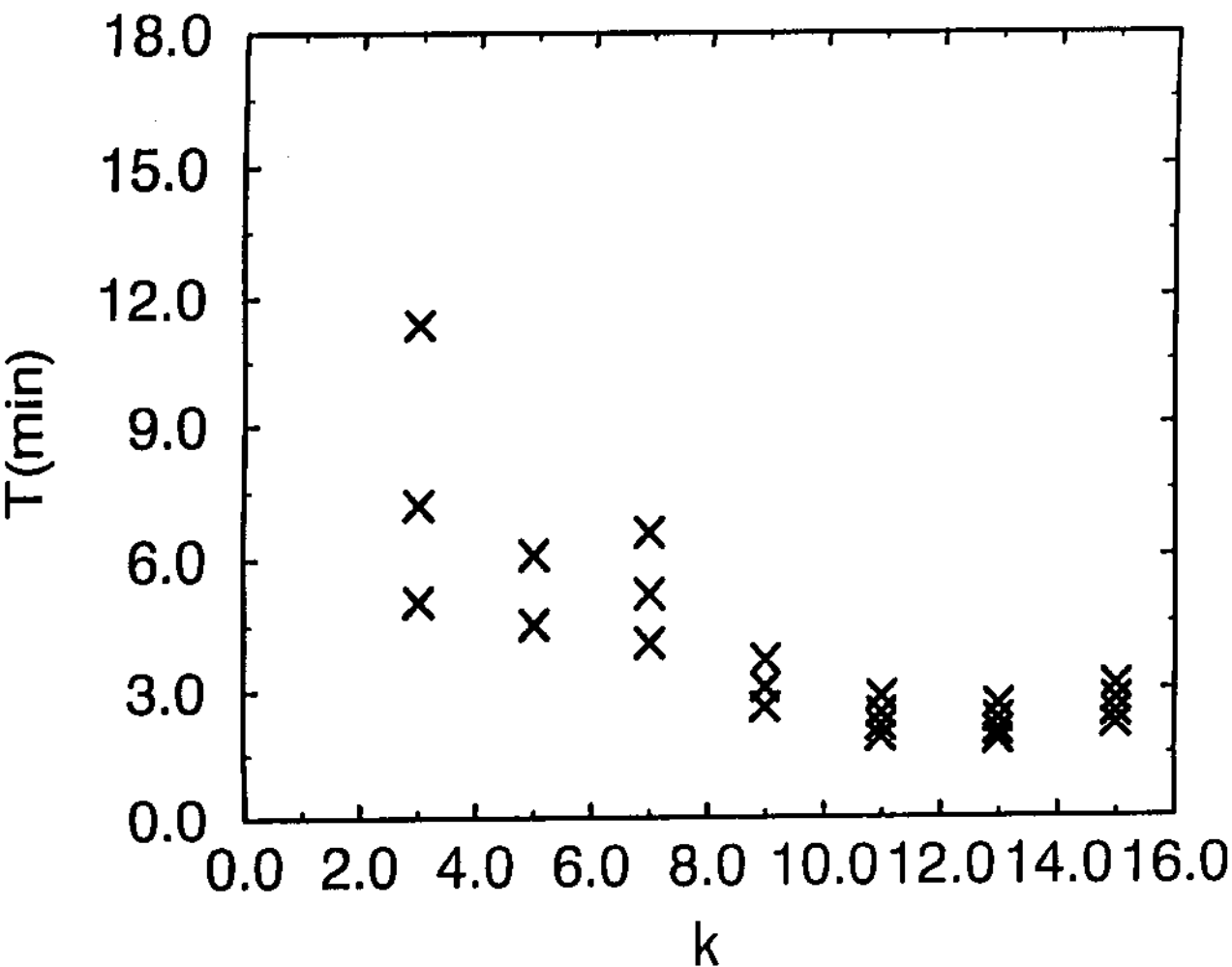


Fig. 27- São mostrados os períodos, $T(\text{min})$, estimados para as "running penumbral waves" em função do número de onda normalizado, k , para $m = 3$, $p_0 = 0,05$, $B_{z2} = 0,4$, $\rho_{2,0} = 0,6$ e $j_0 = 0,4$.

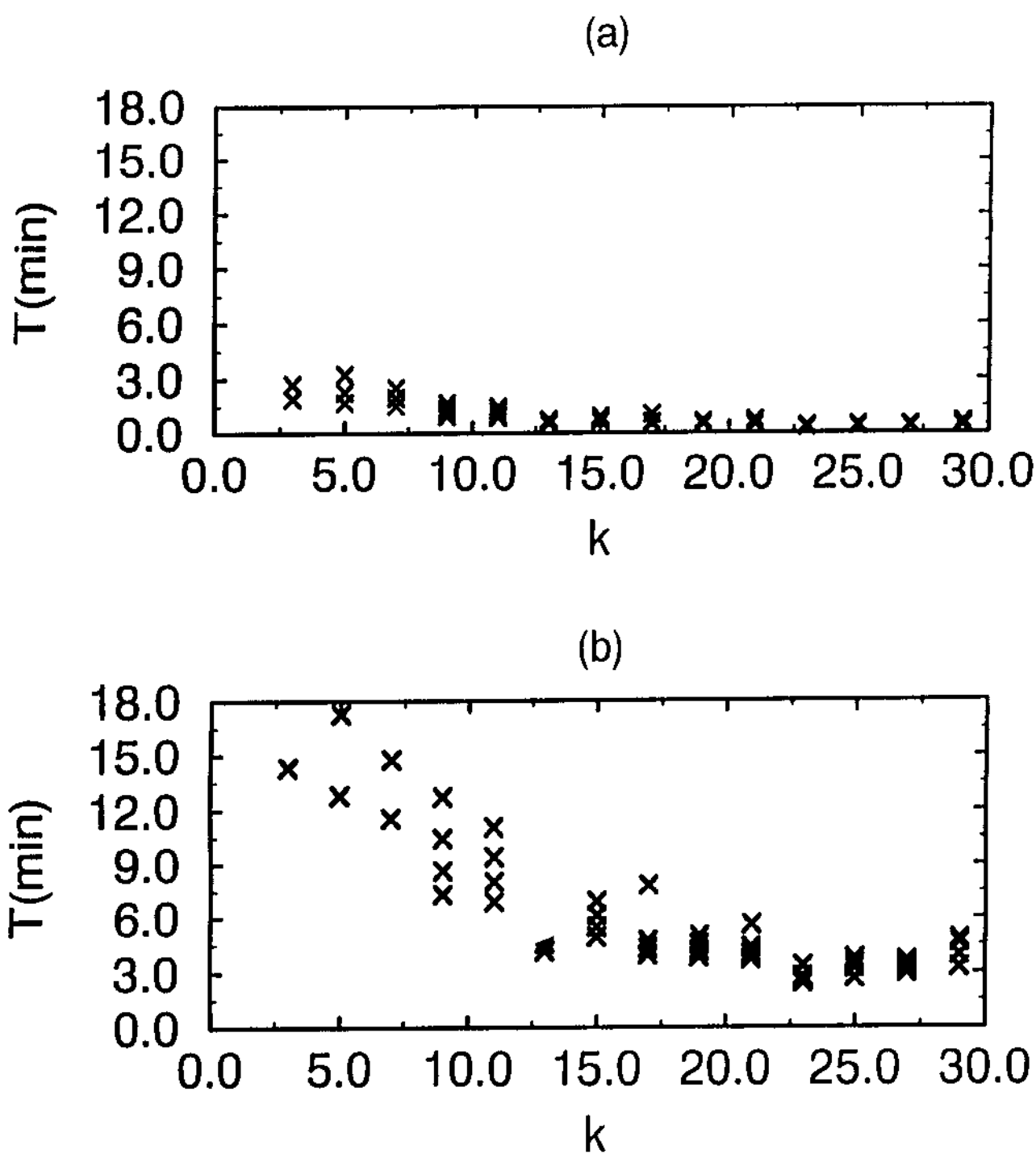


Fig. 28- São mostrados os períodos, $T(\text{min})$, estimados para as "running penumbral waves" em função do número de onda normalizado, k , para $m = 1$, $p_0 = 0,05$, $B_{z2} = 0,4$, $\rho_{2,0} = 0,6$ e $j_0 = 0,4$.

(a) $r_1 = 2.000 \text{ km}$ e $B_{z1} = 3.500 \text{ G}$

(b) $r_1 = 10.000 \text{ km}$ e $B_{z1} = 2.000 \text{ G}$.

m	k	B_{z2}	j_0	período(s)
1	3,5	0,5	0,2	194
1	3,5	0,8	0,2	187
1	3,5	0,2	0,4	227
1	3,5	0,2	0,6	225
1	3,5	0,8	0,4	182
1	3,5	0,5	0,6	187
1	3,0	0,2	0,2	237
1	2,5	0,5	0,2	303
1	2,5	0,2	0,6	239
1	2,5	0,5	0,6	295

Tabela 1 - Períodos obtidos para as soluções estáveis com $m = 1$ e diferentes valores dos parâmetros k , B_{z2} e j_0 .

m	k	B_{z2}	j_0	período(s)
2	3,5	0,5	0,2	190
2	3,5	0,2	0,4	173
2	3,5	0,5	0,4	189
2	3,5	0,5	0,6	187
2	3,5	0,8	0,6	171
2	3,5	0,2	0,6	170
2	3,0	0,2	0,2	233
2	3,0	0,8	0,4	270
2	2,5	0,5	0,2	291
2	2,5	0,5	0,4	288
2	2,5	0,2	0,6	234
2	2,5	0,5	0,6	285
2	2,5	0,8	0,6	290
2	2,0	0,2	0,2	359
2	1,5	0,2	0,4	373
2	1,5	0,8	0,4	319

Tabela 2 - Períodos obtidos para as soluções estáveis com $m = 2$ e diferentes valores dos parâmetros k , B_{z2} e j_0 .

m	k	B_{z2}	j_0	período(s)
3	4,5	0,5	0,2	178
3	3,5	0,2	0,2	221
3	3,5	0,5	0,2	186
3	3,5	0,8	0,2	228
3	3,5	0,5	0,4	185
3	3,5	0,8	0,4	166
3	3,5	0,2	0,6	168
3	3,5	0,5	0,6	183
3	3,5	0,8	0,6	163
3	3,5	0,2	0,4	225
3	3,0	0,2	0,4	225
3	2,5	0,5	0,2	274
3	2,5	0,5	0,4	273
3	2,5	0,8	0,4	257
3	2,5	0,2	0,6	228
3	1,5	0,2	0,2	345
3	1,5	0,5	0,6	286
3	1,5	0,8	0,6	284

Tabela 3 - Períodos obtidos para as soluções estáveis com $m = 3$ e diferentes valores dos parâmetros k , B_{z2} e j_0 .

Capítulo 5

CONCLUSÕES

Além das discussões apresentadas no capítulo anterior, sobre a aplicação do modelo em manchas solares, serão apresentadas agora as conclusões sob um ponto de vista mais geral, pois é esta a principal característica deste modelo de larga aplicação, tanto em fusão (naturalmente com outras condições de contorno), quanto em astrofísica e física solar.

Foi estudado o espectro MHD ideal do lado estável, para um modelo cilíndrico de dois plasmas, onde foram apresentados como solução da equação de Hain-Lüst os espectros para vários perfis de equilíbrio.

Cada parâmetro de equilíbrio, isto é, o vetor de onda k , o modo azimutal, m , a pressão, p_0 , a corrente, j_0 , a densidade na região 2, ρ_{02} , o campo magnético na região 2, B_{z2} , e a posição da parede externa, r_2 , foram variados. A consequência no espectro de cada parâmetro variado foi cuidadosamente verificada e explicada na seção 3.3.

Verificou-se que os modos globais são modos combinados, isto é, na região 1, comportam-se diferentemente do que na região 2. Há uma maior incidência de modos Alfvênicos na primeira região, combinados com modos rápidos na segunda região.

Observa-se a relação entre os parâmetros de equilíbrio e os autovalores. Por exemplo, quando são aumentados os valores dos parâmetros de equilíbrio (principalmente o número de onda k), também aumentam o número de autovalores.

O comportamento Sturmiiano e anti-Sturmiiano das funções discretas é verificado numericamente através da região 2. Esta característica das funções discretas é afirmada teoricamente em trabalhos anteriores, mas não é comprovada tão claramente como aqui nesta tese.

Como descrito por Goedbloed [2], existem modos de superfície centralizados na interface. Observa-se aqui neste trabalho, que além deste modo, que origina a onda de superfície ("surface wave"), aparecem os modos oscilantes na região 2. Verifica-se que estas duas ondas se localizam sempre bem próximas à faixa $\omega_i^2 (i = I, II)$, sendo que em alguns casos aparecem ondas de aspecto superficial, mas já apresentando uma ligeira modificação na região 2, como na Figura 16.

Aplicou-se o modelo nas manchas solares, onde foi proposta uma solução para o equilíbrio e a estabilidade deste complexo sistema. Uma melhor e mais precisa explicação das oscilações umbrais e das ondas caminhanes na penumbra ("running penumbral waves") foi possível, conforme discutido detalhadamente na seção 4.3.

Sabe-se que a inclusão de uma parede rígida em r_2 , em termos de física solar não é muito apropriada. Entretanto as principais discussões deste trabalho não diferem demasiadamente, se substituir a parede por uma fronteira livre, conforme estudos preliminares, que serão analisados em um próximo trabalho.

A vantagem deste modelo é que pode ser largamente aplicado em estruturas arciformes, tanto para fusão, quanto para a astrofísica, principalmente à física solar. Como exemplo tem-se aplicações em arcos e buracos coronais, espículos solares, caudas cometárias, jatos extragaláticos, magnetosferas, entre outras estruturas tubulares.

Apêndice A

Introdução às Ondas de Alfvén

As ondas de Alfvén foram descobertas por Hannes Alfvén em 1942 [11] e observadas em laboratórios no final da década de 50 [33]. O conhecimento sobre as ondas de Alfvén se expandiu rapidamente neste período de 53 anos. Muitos experimentos em laboratório são referentes às condições de aquecimento do plasma com interesses termonucleares. Entretanto os plasmas são estruturas muito complexas e ainda muitos problemas esperam por soluções e muitos fenômenos esperam ser descobertos.

Apesar das enormes diferenças em escalas de tempo, comprimento e energia, o plasma astrofísico é a maior fonte de estudos no que se concerne ao aquecimento, sendo que a única diferença entre este e o plasma de laboratório é que no laboratório o plasma é rodeado por paredes metálicas, enquanto que no espaço percebem-se gigantescas estruturas estáveis com fronteiras livres. Este é um dos motivos que físicos teóricos de plasma de fusão começaram a trabalhar também com estruturas astrofísicas, como por exemplo o Sol.

Há dois tipos de ondas de Alfvén, conhecidas como ondas de **Alfvén torcional** e **compressional**. A onda torcional é também conhecida como onda de cisalhamento ou onda lenta de Alfvén ou, simplesmente, como onda de Alfvén. A onda torcional

não se propaga em frequências acima da frequência de ciclotron dos íons, pelo menos em um plasma frio.

Em frequências bem acima da frequência de ciclotron dos íons, a onda compressional é conhecida como onda sibilante, “whistler wave”, enquanto que em frequências próximas à frequência de ciclotron dos elétrons é denominada como onda eletroniciclotrônica.

Os nomes torcional e compressional são devidos ao movimento do fluido dos dois tipos de onda. Estes nomes são geralmente chamados como cisalhamento e magnetossônica, respectivamente. A palavra cisalhamento é mais apropriada em coordenadas cartesianas, enquanto que torcional está mais de acordo com as geometrias cilíndricas.

As propriedades físicas dos dois tipos de onda podem ser entendidas, notando que a força $\vec{j} \times \vec{B}$ em um plasma é equivalente a uma pressão isotrópica, $p = B^2/2$ ($\mu_0 = 1$), junto com uma tensão $T = B^2$ por m^2 ao longo das linhas do campo. A onda torcional propaga-se ao longo das linhas do campo com uma velocidade

$$V_A = (T/\rho)^{1/2} = B/(\rho)^{1/2}, \quad (A.1)$$

O aspecto mais importante da onda torcional é a energia da onda, que é guiada ao longo do campo magnético.

Já a onda compressional envolve a compressão do plasma, devido a um campo magnético puramente transversal. Não há nenhum movimento do plasma paralelo a $\vec{B}$, desde que a componente da força $\vec{j} \times \vec{B}$, paralela a $\vec{B}$, seja nula. Além disso na teoria MHD ideal, não há acoplamento do movimento do fluido nas direções paralelas ou perpendiculares a $\vec{B}$.

A velocidade de fase para a onda compressional é conhecida como velocidade do som e é a velocidade com que as regiões de compressão e rarefação do fluido se

propaga em um movimento longitudinal. É dada por

$$C_S = \left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

A onda compressional é freqüentemente chamada de onda rápida ou lenta. Uma das maneiras de se identificar se uma onda magnetossônica é rápida ou lenta é através da relação de dispersão em função do ângulo de propagação θ em relação à direção $\hat{z}$:

$$\omega_{s,f}^2 = \frac{1}{2} \left[1 \mp \left(1 - \frac{4V_A^2 C_S^2 \cos^2 \theta}{V^4} \right)^{1/2} \right] k^2 V^2. \quad (\text{A.3})$$

onde $\omega_{s,f}^2$ representa a onda lenta e a rápida, respectivamente e $V^2 = V_A^2 + C_S^2$.

Há evidências e observações de que as ondas MHD ocorrem em muitos e variados fenômenos astrofísicos. Sente-se a presença destas ondas nas manchas solares, arcos coronais, proeminências solares, caudas cometárias, jatos extragaláticos, etc.

Uma das formas de reconhecer se uma autofunção é torcional ou compressional é através da polarização da onda. onde se:

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = 0 \rightarrow \text{onda torcional}$$

$$\nabla \cdot \vec{\xi} \neq 0 \rightarrow \text{onda compressional}$$

Apêndice B

Aplicação da Teoria MHD em Geometrias Cilíndricas

B.1 Equação de Hain-Lüst

Considerando a geometria do sistema cilíndrica, conforme descrita no capítulo 2 e coletando todas as informações sobre perturbação, pode-se exprimi-las em uma única equação, conhecida por equação de Hain-Lüst [18]

$$\frac{d}{dr} \left[f \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right] + g r \xi_r = 0 \quad (\text{B.1})$$

onde

$$f = \frac{(\gamma p + B^2) (\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_S^2)}{r (\omega^2 - \omega_I^2)(\omega^2 - \omega_{II}^2)} \quad (\text{B.2})$$

$$g = \frac{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)}{r} - \frac{4k^2 B_\theta^2}{r^3} \frac{V_A^2(\omega^2 - \beta\omega_A^2)}{(\omega^2 - \omega_I^2)(\omega^2 - \omega_{II}^2)} - \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{d}{dr} \left[\frac{2kB_\theta}{r^2} G V_A^2 \frac{(1 + \beta)(\omega^2 - \omega_S^2)}{(\omega^2 - \omega_I^2)(\omega^2 - \omega_{II}^2)} \right] \quad (\text{B.3})$$

$$\omega_A^2 = \frac{F^2}{\rho} \quad (\text{B.4})$$

$$\omega_S^2 = \frac{\gamma p}{\gamma p + B^2} \frac{F^2}{\rho} \quad (\text{B.5})$$

$$\omega_{I,II}^2 = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) (\gamma p + B^2) \times \left[1 \pm \left(1 - \frac{4\gamma p F^2}{(m^2/r^2 + k^2)(\gamma p + B^2)^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{B.6})$$

$$F = \frac{mB_\theta}{r} + kB_z \quad G = \frac{mB_z}{r} - kB_\theta \quad (\text{B.7})$$

$$\beta = \frac{\gamma p}{B^2} \quad V_A^2 = \frac{B^2}{\rho} \quad (\text{B.8})$$

onde $\gamma = 5/3$

B.2 Singularidades da Equação de Hain-Lüst

É interessante falar um pouco da história da análise da solução desta equação.

A equação B.1, deduzida por Hain e Lüst em 1958, ficou um pouco desapercibida nesta época. A preocupação era com a instabilidade, que teve renovados ânimos com o artigo de Newcomb [34]. Depois de aproximadamente dez anos, retornou-se a falar sobre a equação B.1 por Freidberg [35] com seu artigo sobre o “pinch” linear difuso incompressível e por Goedbloed e Hagebeuk [36] sobre o “pinch” compressível. Grad [37], Uberoi [38] e Tataronis e Grossman [5] perceberam, que para um limite incompressível, a expressão de f , expressão B.2, simplesmente é

$$f = \frac{1}{r} \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{m^2/r^2 + k^2} \quad (\text{B.9})$$

para ficar mais compatível com este relato, será feita a seguinte relação : $\omega_A^2 = \omega_1^2$; $\omega_S^2 = \omega_2^2$; $\omega_I^2 = \omega_3^2$ e $\omega_{II}^2 = \omega_4^2$. A singularidade da equação B.9 dava origem a um contínuo $\omega^2 = \omega_1^2$. Logo depois Grad [39] afirmava que a equação B.1 tinha quatro singularidades que davam origem a quatro contínuos. Appert et al. [8] e também

de forma independente, Greene [40] provaram que as singularidades ω_3^2 e ω_4^2 eram só aparentes e que na verdade havia dois contínuos.

Appert et al. transformaram a equação representativa de um modelo com configuração cilíndrica em duas equações de primeira ordem.

Descrevendo abaixo o trabalho de Appert et al., comprova-se a afirmação de que ω_I^2 e ω_{II}^2 são entidades puramente matemáticas.

Eles trabalharam a partir das equações MHD linearizadas assim relacionadas. Considere-se $\mu_0 = 1$,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} + \nabla p + (\vec{B} \times \nabla \times \vec{B}_0 + \vec{B}_0 \times \nabla \times \vec{B}) = 0, \quad (\text{B.10})$$

$$p + \vec{\xi} \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi} = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$\vec{B} + \nabla \times (\vec{B}_0 \times \vec{\xi}) = 0, \quad (\text{B.12})$$

mais a equação de equilíbrio, equação 2.7,

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B^2}{2} \right) + \frac{B_\theta^2}{r} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Tomando a análise de Fourier das equações MHD, eliminando ξ_θ e ξ_z em função de ξ_r e, também $\vec{Q}$, o campo magnético perturbado, em favor de ξ_r e p e introduzindo uma nova quantidade definida por $P = p + \vec{B}_0 \cdot \vec{Q}$, obteve

$$D \frac{d}{dr} (r \xi_r) = C_1 r \xi_r - r C_2 P, \quad (\text{B.14})$$

$$D \frac{d}{dr} P = \frac{1}{r} C_3 r \xi_r - C_1 P. \quad (\text{B.15})$$

Aqui,

$$D = (\rho_0 \omega^2 - F^2) [\rho_0 \omega^2 (\gamma p_0 + B_0^2) - \gamma p_0 F^2] \quad (\text{B.16})$$

$$C_1 = 2 \frac{B_{0\theta}}{r} \{ \rho_0^2 \omega^4 B_{0\theta} - \frac{m}{r} F \rho_0 (\gamma p_0 + B_0^2) - (\omega^2 - \omega_A^2) \} \quad (\text{B.17})$$

$$C_2 = \rho_0^2 \omega^4 - (k^2 + \frac{m^2}{r^2}) [\rho_0 (\gamma p_0 + B_0^2) - (\omega^2 - \omega_A^2)], \quad (\text{B.18})$$

$$C_3 = D [\rho_0 (\omega^2 - \omega_A^2) + 2 B_{0\theta} \frac{d}{dr} (\frac{B_{0\theta}}{r}) + \rho_0^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_A^2) (2 \frac{(B_{0\theta})^2}{r})^2 - \\ [\gamma p_0 (\rho_0 (\omega^2 - \omega_A^2) + \rho_0 \omega^2 B_{0z}^2) (2 \frac{(B_{0\theta})^2}{r})^2], \quad (\text{B.19})$$

$$F = \frac{m}{r} B_{0\theta} + k B_{0z}.$$

Assim, eliminam-se os polos apresentados na equação de Hain-Lüst, provando que existem apenas singularidades em $D = 0$, dando origem aos dois contínuos do espectro.

Os pontos onde $\omega_I^2(r) = \omega^2$ ou $\omega_{II}^2(r) = \omega^2$, outrora denominados de **separadores matemáticos**, têm a função de mudar o sinal de $f(\vec{r})$, passando por infinito, mudando, assim, a tendência da função de onda ξ_r . Ver Figura 2 e 3.

É necessário dizer que as representações do espectro nas Figuras 2 e 3 são bastante esquemáticas. Geralmente partes do espectro são perdidas. De acordo com os parâmetros de equilíbrio, os contínuos podem se sobrepor.

O espectro da equação B.1 apresenta basicamente para o lado estável, duas soluções distintas: uma parte formada pelos contínuos e uma parte composta de autovalores discretos que se localizam entre os contínuos.

Sabe-se então, que o aparecimento dos contínuos estão vinculados aos zeros do termo de maior ordem da equação,

$$f = \frac{(\gamma p + B^2)}{r} \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_S^2)}{(\omega^2 - \omega_I^2)(\omega^2 - \omega_{II}^2)} = 0 \quad (\text{B.20})$$

Quando isto acontece, a equação se torna singular e admite soluções impróprias ($\omega^2 = \omega_A^2$ ou $\omega^2 = \omega_S^2$). O conjunto destas frequências, delimitados pela região do plasma, constituem o espectro contínuo. Há duas regiões de contínuo: $\omega^2 = \omega_A^2$ e $\omega^2 = \omega_S^2$, **contínuo de Alfvén** (corresponde à relação de dispersão da onda torcional) e **contínuo lento** (corresponde à relação de dispersão da onda magnetossônica lenta), respectivamente. A solução da equação de autovalor é uma solução imprópria com divergência logarítmica no ponto singular $\vec{r}_s(\omega^2)$, isto é, quando a solução existe é classificada como quase-modo.

O coeficiente f , expressão B.9, pode ser expandido numa série de potências em torno da posição $\vec{r}_s(\omega^2)$ para mostrar a existência de uma solução singular. A expansão é

$$f(\vec{r}, \omega) \approx f(\vec{r}_s, \omega) + f'(\vec{r}_s, \omega)(\vec{r} - \vec{r}_s) \quad (\text{B.21})$$

$$f(\vec{r}, \omega) \approx f'(\vec{r}_s, \omega)(\vec{r} - \vec{r}_s) = \lambda \delta$$

onde $\delta \equiv \vec{r} - \vec{r}_s$ e λ é um coeficiente constante que depende das funções de equilíbrio em $\vec{r}_s(\omega)$. A equação B.1 se reduz a

$$\frac{d}{d\delta} \left(\delta \frac{d\chi}{d\delta} \right) + \lambda_1 \chi = 0 \quad (\text{B.22})$$

nas vizinhanças do ponto singular, onde λ_1 é uma outra constante, g_s/λ e $\chi = r\xi_r$.

Esta equação possui duas soluções linearmente independentes que são dadas por

$$S_1 = f_1(\vec{r}, \omega) \quad (\text{B.23})$$

$$S_2 = f_1(\vec{r}, \omega) \ln \delta + \delta f_2(\vec{r}, \omega) \quad (\text{B.24})$$

onde $f_1(\vec{r}, \omega)$ e $f_2(\vec{r}, \omega)$ são funções analíticas de δ . A solução geral para χ próximo de $\vec{r}_s$, pode ser escrita na seguinte forma:

$$\chi = r \vec{\xi}_r = M S_1 + N S_2 \quad (\text{B.25})$$

onde $M(\omega, m, k)$ e $N(\omega, m, k)$ são funções independentes de $\vec{r}$, calculadas pelas condições de contorno em $r = 0$ e $r = r_2$. Assim, para um dado autovalor ω^2 , a variável $r \vec{\xi}_r$ possui, geralmente, uma singularidade logarítmica.

Quando $\delta < 0$, deve-se pensar da seguinte maneira: mudar a variável δ em B.22 para $\epsilon = -\delta$. Mesmo assim, ainda persiste um problema, ainda há descontinuidade em $\delta = 0$. A solução para a descontinuidade em $\delta = 0$ requer para $\delta < 0$,

$$\ln \delta = \ln |\delta| \pm i\pi \quad (\text{B.26})$$

desde que $e^{i\pi} = -1$. A contribuição imaginária à $r \vec{\xi}_r$ significa que a onda é amortecida, conforme Figura 4a mesmo que não tenha nenhum mecanismo de amortecimento incluído nas equações MHD ideais. Chen e Hasegawa [41] calcularam a razão da absorção de energia no contínuo de Alfvén e têm proposto a aplicação para o aquecimento de plasmas.

B.3 Ondas de Superfície

Considerando agora um perfil de frequência, $\sigma_A^2(r)$, que tenha uma descontinuidade em alguma posição radial dentro do cilindro, por exemplo, na interface entre as duas regiões. As singularidades dos dois espectros contínuos, $\sigma_{A1}^2(r) \leq \sigma^2(r) \leq \sigma_{A2}^2(r)$, estão todos concentrados no ponto $r = r_0$. Deste fato nasce um modo especial que é chamado de modo de superfície ou superficial. Da equação homogênea escreve-se,

$$-\frac{1}{k^2}[(\sigma^2 - \sigma_A^2)\xi']' - (\sigma^2 - \sigma_A^2)\xi = 0 \quad (\text{B.27})$$

onde $\sigma_A^2(r) = \sigma_{A1}^2 H(r_0 - r) + \sigma_{A2}^2 H(r - r_0)$. Aqui $H(r - r_0)$ é o operador Heaviside. Considerando os dois lados da região, $r_1 \leq r < r_0$ e $r_0 < r \leq r_2$, respectivamente, esta equação se reduz a

$$\xi'' - k^2 \xi = 0 \quad (\text{B.28})$$

tendo as seguintes soluções e^{kr} e e^{-kr} , quando $\sigma^2(r) \neq \sigma_{A1}^2(r)$ e $\sigma^2(r) \neq \sigma_A^2(r)$, respectivamente.

A solução $\xi_1 = \sinh[k(r - r_1)]$ que satisfaz as condições de contorno do lado 1 pode ser combinado com a solução que satisfaz as condições de contorno do lado 2, $\xi_2 = \sinh[k(r_2 - r)]$, resultando, assim, em uma perturbação em forma de cúspide (“cusp-shaped perturbation”), que é uma autofunção do sistema.

Pode-se demonstrar esta formação integrando a equação 2.34 em torno do ponto de singularidade, ou seja

$$\int_{r_0^-}^{r_0^+} \{[\sigma^2 - \sigma_{A1}^2 H(r_0 - r) - \sigma_{A2}^2 H(r - r_0)]\xi'\}' dr =$$

$$(\sigma^2 - \sigma_{A1}^2)\xi'_1 - (\sigma^2 - \sigma_{A2}^2)\xi'_2 = 0 \quad (\text{B.29})$$

Esta condição válida para $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 1/2(\sigma_{A1}^2 + \sigma_{A2}^2)$, que é a autofrequência para a onda de superfície. Ver Figura 4c.

Bibliografia

- [1] J. P. Goedbloed. *Lecture Notes on Ideal Magnethydrodynamics*. Unicamp (1979).
- [2] J.P. Goedbloed. *Lecture Notes on Ideal Magnethydrodynamics*. (versão corrigida das notas de 1979, Unicamp) (1983).
- [3] J. P. Goedbloed and P. H. Sakanaka, *Phys. Fluids* **17**, 908 (1974).
- [4] P.H. Sakanaka e J.P. Goedbloed, *Phys Fluids*, **17**, 919 (1974).
- [5] J. Tataronis and W. Grossman, *Z. Physik*, **261**: 203 (1973a).
- [6] J. Tataronis and W. Grossman, *Z. Physik*, **261**: 217 (1973b).
- [7] A. Hasegawa and L. Chen *Phys. Rev. Lett.*, **32**: 454 (1974).
- [8] K. Appert, R. Gruber, and J. Vaclavik, *Phys. Fluids* **17**, 1471 (1974).
- [9] J. P. Goedbloed, *Phys. Fluids* **18**, 1258 (1975).
- [10] A.De Chambrier, A. Heym, F. Hofmann, B. Joye, R. Keller, A. Lietti, J.B. Lister, P.D. Morgan, N. J. Peacock, and M.J. Stamp. *Plasma Phys.*, **24**: 893 (1982).
- [11] H. Alfvén, *Nature*, **150**, 405 (1942).

- [12] E. Astrom, *Nature*, **165**,1019 (1950).
- [13] E. Astrom, *Ark. Fys*, **2**,443 (1950).
- [14] T. Sakurai, M Goosens, J.V. Hollweg, *Solar Phys*, **133**,227 (1991).
- [15] C. A. de Azevedo, A. S. de Assis, H. Shigueoka and P. H. Sakanaka, *Solar Phys.* **131**, 119 (1991).
- [16] J.P. Goedbloed and G. Halberstadt, *Astr. and Astophys*, **281** (1994).
- [17] E. R. Priest, "Solar Magnetohydrodynamics", Reidel, Dordrecht, Holland (1982).
- [18] K. Hain and R. Lüst, *Z. Naturforschg* **13a**, 936 (1958).
- [19] Marcia M. Ochi, R. T. Faria Jr., P. H. Sakanaka, J. P. Goedbloed, C. A. Azevedo e A. S. de Assis, "Ideal MHD Spectral Analysis in a Two-Layered Cylindrical Plasma", (a ser publicado).
- [20] P.H. Sakanaka, *Introdução a Física de Plasma*, livro: Física de Plasma, Imprensa Universitária da UFF, vol. I, A (1979).
- [21] B.R. Suydam, *Proc. Second Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, **31**, 157 (1958).
- [22] H. Zirin, A. Stein, *Astrophys. J.* **178**, L85 (1972).
- [23] R. G. Giovanelli, *Solar Phys.* **27**, 71 (1972).
- [24] C. E. Alissandrakis, A. A. Georgakilas, D. Dialetis, *Solar Physics* **138**, 93 (1992).

- [25] H. C. Spruit, *it Space Scie. Rev.* **28**, 435 (1981).
- [26] B. W. Lites, J. H. Thomas, *Astrophys. J.* **294**, 682 (1985).
- [27] J. M. Beckers, *Astrophys. J.* **203**, 739 (1976).
- [28] R. L. Moore, Frances Tang, *Solar Physics* **41**, 81 (1975).
- [29] S. K. Solanki, H. U. Schmidt *Astron. Astrophys.* **267**, 287 (1993).
- [30] A. H. Nye and J. H. Thomas, *Solar Phys.* **38**, 399 (1974).
- [31] S. S. Hasan, Y. Sobouti, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **228**, 427 (1987).
- [32] J.V. Hollweg, B. Roberts, *Astrophys J.*, **250**, 398 (1981). *IAU Confer.*, 255 (1990).
- [33] T.K. Allen, R.V. Baker, R.V. Pyle e J.M. Wilcox, *Phys Rev Letters*, **2**, 383 (1959).
- [34] W. A. Newcomb, *Ann. Phys. (N. Y.)* **10**, 232 (1960).
- [35] J. P. Freidberg, *Reviews of Modern Phys.* **54**, 801 (1982).
- [36] J.P. Goedbloed and Hagebeuk, *Phys Fluids*, **15**, 1090 (1972).
- [37] H. Grad, *Proc. Natl. Acad. Sci., USA*, **70**: 3277 (1973).
- [38] C. Uberoi, *Phys Fluid*, **15**, 1673 (1972).
- [39] H. Grad, *Proc. Nati. Acad Sci*, **70**, 3377 (1973).
- [40] J.M. Greene and J.L. Johnson, *Plasma Phys. Lab.*, (1962).
- [41] L. Chen and A. Hasegawa, *Phys. Fluids*, **17**, 1399 (1974).