UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

DEPARTAMENTO DE RAIOS CÓSMICOS E CRONOLOGIA

TESE DE DOUTORADO

Soluções Exatas das Equações de Einstein para Buracos Negros e Anéis de Matéria

Este exemplar corresponde à
redação final da tese de
doutorado defendida pelo
aluno Gian Machado de Castro
e aprovada pela comissão
julgadora.

Autor: GIAN MACHADO DE CASTRO

Orientador: PROF. DR. PATRICIO A. LETELIER SOTOMAYOR

Co-orientador: PROF. DR. MARCELO MORAES GUZZO

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

C279s

Castro, Gian Machado de
Soluções exatas das equações de Einstein para buracos negros e anéis de matéria / Gian Machado de Castro. – Campinas, SP : [s.n.], 2009.

Orientadores: Patrício Aníbal Letelier Sotomayor e Marcelo Moraes Guzzo.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Buracos negros com rotação. 2. Anéis delgados. 3. Expansões multipolares. 4. Órbitas circulares. 5. Estabilidade. 6. Perturbações verticais. 7. Método de espalhamento inverso. I. Sotomayor, Patrício Aníbal Letelier. II. Guzzo, Marcelo Moraes. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". IV. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Exact solutions of Einstein's equations for black holes and matter rings
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. Rotating Black holes
  2. Thin rings
  3. Multipolar expansions
  4. Circular orbits
  5. Stability
  6. Vertical perturbations
  7. Inverse scattering method
- **Área de Concentração:** Relatividade e Gravitação
- **Titulação:** Doutor em Ciências
- **Banca examinadora:**
  Prof. Patrício Aníbal Letelier Sotomayor
  Prof. Alex Eduardo de Bernardini
  Profª Carola Dobrigkeit Chinellato
  Prof. José Francisco Gomes
  Prof. Pedro Cunha de Holanda
- **Data da Defesa:** 16-06-2009
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física

Secretaria de Pós-Graduação - Tel: (19) 3521-5305 FAX: (19) 3521-4142

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **GIAN MACHADO DE CASTRO – RA 021889,** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 16/06/2009.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Patrício Aníbal Letelier Sotomayor – DMA/IMECC/UNICAMP
(Orientador do Candidato)

Alex Eduardo de Bernardini

Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini – DF/UFSCAR

Carola Dobrigkeit Chinellato

Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato – DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. José Francisco Gomes – IFT/UNESP

Pedro C Holanda

Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda – DRCC/IFGW/UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas - Instituto de Física Gleb Wataghin – Secretaria da Pós-Graduação
CP 6165 – CEP 13083-970 - Campinas - SP –
Fone: +55 19 3521-5305 / 3521-5279 / 3521-5280
e-mail: secpos@ifi.unicamp.br

"*O que não nos mata nos torna mais fortes.*"

Friedrich Nietzsche

Agradecimentos

Agradeço inicialmente ao professor Patrício A. Letelier, a orientação séria, completa e de qualidade inquestionável. Em segundo, e não menos importante, meus agradecimentos sinceros ao professor Marcelo Moraes Guzzo, que aceitou participar deste projeto, o que permitiu que o mesmo fosse realizado.

Aos professores Abraham Zimerman, José Francisco Gomes, Luis Agostinho Ferreira, George Avraam Matsas e Fernando Kokubun, pelo apoio durante e depois do mestrado e pela indicação para realizar meu doutorado aqui, na Unicamp, com o professor Patrício Letelier. Também gostaria de agradecer à professora Carola Dobrigkeit Chinellato pela leitura minuciosa e pelas correções que acrescentaram muito à versão final deste texto.

Aos meus amigos e colegas, por sua força e amizade: Wanderson Wanzeller, Ives Araújo, Wiliam Hipolito, Amilton Bandeira, Luis Fernando Zagonel, Luis Fernando Martins, Diego Gratieri, Flávia Cardoso e Jacson Menezes, Bruno Requião, Daniel Boriero, Walter Mello Jr. e a tantos outros.

À Cintia Matsumura, pelo tempo em que estivemos juntos. Pelo seu amor, carinho, cuidado e respeito. E depois, por seu apoio e amizade. Pela paciência em ler todo o texto e por me ajudar a diminuir os erros, embora todos que ainda permaneçam sejam de minha inteira responsabilidade. Aos Matsumura, por me receberem como parte da família.

À minha família: meu pai (Odilon), minha mãe (Tereza), minha irmã (Patrícia) e sobrinhos (Thaís e Matheus), pelo amor, carinho e apoio.

Aos funcionários da CPG do IFGW, em particular à Maria Ignez S. R. Mokarzel e Gilvani de Fátima Pereira Rodrigues, e aos da BIF, em nome de sua diretora Rita Aparecida Sponchiado, meu muito obrigado por terem sido sempre tão solícitos comigo.

Às equipes do KURUMIN, OPENSUSE, UBUNTU, LATEX, GNU-LINUX, REDUCE, MAPLE, MATHEMATICA, GRACE e FORTRAN, por tornarem minha vida muito mais fácil.

Finalmente, agradeço o apoio financeiro do CNPq, que viabilizou a realização deste trabalho.

Resumo

Nesta tese, estudamos o problema de um anel delgado de matéria de densidade constante com um buraco negro de Kerr em seu centro. Nosso objetivo foi resolver as equações de Einstein no vácuo com simetria axial para esse sistema gravitacional. Para fazer a sobreposição não-linear do anel com o buraco negro (BN), utilizamos o método de Belinsky e Zakharov (MBZ). Este método necessita de uma solução conhecida (solução semente) para gerar uma nova solução. Tomamos a aproximação da solução do anel em multipolos como solução semente. Como resultado, obtivemos a solução de um anel com o BN central.

A expansão do anel em multipolos exige o truncamento da série. Esta aproximação introduz um erro em nossa solução. Realizamos o estudo do mesmo devido ao truncamento da série. Também estudamos a estabilidade de órbitas circulares equatoriais de partículas movendo-se ao redor do sistema anel-BN quanto a perturbações epicíclicas e verticais. Analisamos essas perturbações para os modelos de gravitação relativística e newtoniana. Como resultado, encontramos o efeito inesperado da duplicação das órbitas circulares de fótons para alguns valores de parâmetros relacionados com o anel e o BN, bem como zonas de estabilidade na região interna do anel.

Abstract

In this thesis, we will study the problem of a thin ring of matter of constant density with a central Kerr black hole. The aim of this work is to solve the Einstein equations in the vacuum with axial symmetry for that gravitational system. To do the nonlinear superposition of the ring with the black hole (BH), we used the Belinsky and Zakharov method (BZM). This method needs a known solution (called seed solution) to generate a new one. We took the Newtonian ring potential approximated by a multipolar expansion as seed solution. As result, we obtained the solution of a ring with a central BH.

The ring multipolar expansion demands the truncation of the series. This approach introduces an error in our solution. Estimations of errors due to the truncation of the multipolar expansions are performed. We also studied the stability of equatorial circular orbits of particles moving around the system ring plus BH due to epicycle and vertical perturbations. We analyzed those perturbations for relativistic and Newtonian gravitational models. As result, we found the unexpected effect of the duplication of the photons circular orbits for certain values of parameters related with the ring and BH, as well as zones of stability in the inner area of the matter ring.

Sumário

1

Introdução

O estudo de soluções exatas em relatividade geral começou logo após o trabalho de Einstein em 1915 [16]. Em 1916, supondo uma simetria esférica na métrica, o astrônomo e físico alemão Karl Schwarzschild encontrou uma solução para um buraco negro (BN) sem carga e sem rotação [43]. A partir desta solução, muitas outras foram encontradas.

Com o objetivo de resolver as equações de Einstein no vácuo com simetria axial, Belinsky e Zakharov fizeram uma versão do Método de Espalhamento Inverso (MEI) para a gravitação, conhecida como método de Belinsky e Zakharov (MBZ).

Algumas classes de soluções descritas pelo MBZ são importantes na teoria de gravitação, pois possuem interesse astrofísico e cosmológico (por exemplo, as soluções de Schwarzschild e Kerr). Esse método permite a construção das soluções de maneira sistemática, utilizando uma solução semente para obter uma nova solução.

Originalmente, o MEI surgiu no estudo de equações diferenciais não-lineares bidimensionais tais como Korteweg-de Vries, que descrevem a propagação de ondas em canais de águas rasas. Tais soluções ficaram conhecidas como sólitons, devido ao seu caráter não-linear e por propagarem-se como um pulso solitário. Possuem energia finita e localizada, uma velocidade característica de propagação e tendem à não dispersão (mesmo quando dois sólitons colidem). Portanto, são resultado do balanço entre os efeitos não-lineares e a dispersão da onda.

O MEI foi desenvolvido nos anos 60 para resolver a equação de Korteweg-de Vries e usado em seguida para solucionar outras equações não-lineares, tais como as de Sine-Gordon e de Schrödinger não-linear.

Já na década de 70, o MEI foi adaptado para a relatividade geral com o objetivo de resolver as equações de Einstein no vácuo para espaços-tempo com métricas que dependiam somente de duas variáveis. Mais precisamente para espaços-tempo que admitem uma ortogonalidade transitiva em grupos de dois parâmetros de isometrias. Estas métricas incluem situações físicas bastante distintas como em cosmologia, ondas gravitacionais planas colidindo e soluções estacionárias axialmente simétricas [7].

Um tipo de estrutura axialmente simétrica é a de anel. Sistemas com anéis são comuns em planetas gigantes do Sistema Solar [17]. Também observamos tais estruturas em diversas galáxias e nebulosas [10].

O potencial gravitacional newtoniano exato de um anel delgado de densidade linear constante é dado por uma integral elíptica [23]. Este potencial é geralmente aproximado por uma série de harmônicos esféricos truncada, ou seja, por uma expansão multipolar. Na literatura existem trabalhos mostrando a sobreposição não-linear de um buraco negro com um termo quadrupolar ([19] e [32]). Nesta tese, consideramos termos na série truncada, que representam o anel de matéria, correspondentes ao monopolo, quadrupolo, 16-polo, 64-polo e 256-polo. A consideração dos três últimos termos não é encontrada na literatura, assim como o estudo do erro desta aproximação em comparação à solução exata em termos da integral elíptica.

Existem poucas soluções das equações de Einstein representando anéis ou estruturas similares. O primeiro a considerar anéis no contexto da relatividade geral foi Bach, que estudou a métrica estática associada a um anel delgado de densidade constante [3]. Esta solução é um caso particular da métrica de Weyl [47] e é escrita em termos de uma integral elíptica e suas derivadas. Este espaço-tempo tem zonas de repulsão e também possui singularidades direcionais indicando a presença de matéria exótica com altas tensões [14]. Este tipo de comportamento é comum na classe de Weyl de soluções das equações de Einstein no vácuo. Em relatividade geral, bem como na gravitação newtoniana, há um certo equívoco na interpretação do potencial gravitacional "complexificado" de uma partícula como sendo o potencial de um anel muito especial, o anel de Appell [2]. Este anel possui uma membrana e sua fonte não é conhecida (veja a discussão em [14]). Soluções das equações de Einstein representando um centro de atração circundado por um *flat ring* ("anel chato") foram consideradas em [27] e [41]. Pares de potencial-densidade newtonianos para os *flat ring* e outras estruturas similares são mostrados em [33]. Também foram consideradas as soluções das equações de Einstein-Maxwell para um anel num campo magnético constante em [22].

O objetivo desta tese é obter uma solução exata das equações de Einstein no vácuo que represente o campo gravitacional de um centro de atração circundado por um anel delgado de densidade constante. O centro de atração é modelado por um buraco negro de Kerr. Para atingirmos nosso objetivo, utilizamos o MBZ [7, 5, 6]. Tomamos como solução semente a expansão multipolar truncada do anel de matéria.

É importante destacar neste ponto que usamos o termo solução exata no sentido de se tratarem de soluções que são expressas por funções analíticas.

A estabilidade de órbitas circulares equatoriais de partículas em sistemas gravitacionais tem um papel importante em astrofísica [8]. Nós a testamos sob pertubações radiais (epicíclicas) e verticais, pois em primeira aproximação o anel também pode ser considerado uma coleção de partículas movendo-se em órbitas circulares. A estabilidade de órbitas circulares (geodésicas) de partículas movendo-se ao redor de um centro de atração circundado por diferentes distribuições de matéria, incluindo a sobreposição de um BN de Schwarzschild mais um termo quadrupolar, foi estudada em [32]. Porém, o estudo da estabilidade para um sistema com um buraco negro de Kerr com um anel de matéria com densidade constante dado por uma expansão em multipolos não é encontrado na literatura.

No capítulo 2, fazemos uma breve introdução aos principais conceitos e fórmulas da teoria da relatividade geral utilizadas nesta tese. Já no capítulo 3, é feita uma breve exposição sobre o método de espalhamento inverso (MEI), em particular, de sua aplicação em gravitação conhecida como método de Belinsky e Zakharov (MBZ). Finalizamos o capítulo obtendo as soluções de Schwarzschild e Kerr a partir da solução de Minkowski.

No capítulo 4, discutimos a solução de Weyl-Bach que descreve um anel delgado relativístico com densidade constante. Utilizamos a aproximação desta solução em termos de multipolos como solução semente no MBZ para obter a solução do anel de matéria com o buraco negro central. Esta solução é apresentada na última seção do capítulo. Também discutimos o erro na solução devido ao truncamento na série.

No capítulo 5, fazemos um resumo sobre a teoria de estabilidade referente a órbitas circulares equatoriais sob perturbações radiais e verticais. Mostramos que esta estabilidade pode ser analisada em termos das frequências epicíclicas (ou radiais) e verticais, obtendo suas expressões para os modelos newtoniano e relativístico. Já no capítulo 6, analisamos estas perturbações nos dois modelos para vários valores dos parâmetros relacionados ao buraco negro e ao anel de matéria. Finalmente, no capítulo 7, fazemos um sumário dos resultados e conclusões obtidas no capítulo anterior.

2

Relatividade Geral

"Space acts on matter, telling it how to move. In turn, matter reacts back on space, telling it how to curve."

C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, Gravitation*, página 5.*

Neste capítulo, faremos uma breve introdução aos principais conceitos e fórmulas da gravitação einsteiniana, ou teoria da relatividade geral, utilizadas nesta tese.

2.1 Espaço-Tempo e Equações de Einstein

Na teoria de Newton, a interação gravitacional é consequência da ação de um campo escalar $\Phi(x, y, z)$ criado por uma distribuição espacial de matéria com densidade de massa $\rho(x, y, z)$. Tal campo gravitacional é determinado pela seguinte equação:

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) = 4\pi G \rho(x, y, z), \tag{2.1}$$

que é conhecida na literatura como equação de Poisson. Usamos a seguinte notação: $\nabla^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2}$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ e $\frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2}$ denotando derivadas parciais de segunda ordem nas variáveis dadas.

Uma vez determinado o campo gravitacional Φ, a dinâmica das partículas sob ação deste campo é descrita pelas Leis de Newton da Mecânica,

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}, \tag{2.2}$$

sendo que a dinâmica não depende da massa da partícula sob ação do campo Φ, e este depende apenas da massa de sua fonte geradora. A equação (2.2) é , na verdade, um sistema de três equações diferenciais acopladas. Conhecer a dinâmica é encontrar as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ que satisfazem esta equação para uma dada condição inicial.

A relatividade geral postula que a matéria e a energia distorcem o espaço-tempo ao seu redor. Essa curvatura no espaço-tempo é descrita através do tensor métrico, que contém a informação sobre a geometria do mesmo. Este tensor métrico permite definir um elemento de linha como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{2.3}$$

sendo ds o intervalo espaço-temporal infinitesimal, $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico com assinatura +2 e dx^μ representa um deslocamento infinitesimal com relação à coordenada x^μ, com o índice μ assumindo valores inteiros entre 0 e 3. Utilizamos a convenção da soma de Einstein para os índices repetidos.

No caso da ausência de matéria e energia que curvem o espaço-tempo, dizemos que o mesmo é plano. Numa situação possível, o tensor métrico tem a seguinte forma matricial:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

e é conhecido como tensor métrico de Minkowski. Portanto, o elemento de linha é escrito como,

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{2.5}$$

sendo que há a seguinte correspondência entre as variáveis: $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$.

Para escrever esta métrica, utilizamos o sistema de unidades geométricas onde a velocidade da luz é igual à unidade, $c = 1$. Neste mesmo sistema de unidades, a constante universal de gravitação de Newton também assume o valor $G = 1$ e, portanto, grandezas como posição, tempo e massa possuem a mesma unidade de medida [42].

As equações de Einstein são dadas em termos de objetos matemáticos mais complexos do que o campo escalar $\Phi(x, y, z)$, que são os tensores. No lugar de Φ, temos o tensor métrico $g_{\mu\nu}(t, x, y, z)$, que é um tensor simétrico de segunda ordem que possui 16 componentes. Porém, devido à simetria $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, temos apenas 10 componentes independentes. A métrica $g_{\mu\nu}$ nos permite realizar medidas espaço-temporais e, como já foi dito, contém toda a informação sobre a geometria do espaço-tempo.

Na notação de componentes e no sistema de unidades geométricas, as equações de Einstein são:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{2.6}$$

sendo $G_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein, que descreve todo o conteúdo geométrico do espaço-tempo,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{2.7}$$

com $R_{\mu\nu}$ representando o tensor de Ricci e R o escalar de curvatura. Eles são dados, respectivamente, por

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \tag{2.8}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{2.9}$$

e $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel que tem a seguinte forma

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}, \tag{2.10}$$

tendo $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ como o símbolo de Christofell,

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}), \tag{2.11}$$

e as vírgulas denotam a derivação parcial em relação às variáveis x^{μ}.

O tensor de curvatura de Riemann nos informa qual é a curvatura do espaço-tempo. Assim, espaços-tempo curvos possuem $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \neq 0$ e os planos têm $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$. Já no lado direito das equações de Einstein, temos o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$. Este tensor descreve a fonte de matéria e energia que curva o espaço-tempo.

O tensor de Einstein é função da métrica e de suas derivadas. Portanto, dado $T_{\mu\nu}$, resolver as equações de Einstein é encontrar a forma funcional das 10 componentes independentes da função métrica $g_{\mu\nu}$. Logo, a equação (2.6) é na verdade um sistema de 10 equações diferenciais parciais não-lineares acopladas. O caráter não-linear das equações torna a tarefa de resolvê-las não trivial.

Para encontrar soluções de (2.6), nos valemos de simetrias que simplifiquem as equações. Isto não significa obter soluções que não sejam realistas. Por exemplo, as soluções de vácuo (ou exteriores) possuem $T_{\mu\nu} = 0$ e simplificam as equações de Einstein à forma

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{2.12}$$

nos dando um importante grupo de soluções astrofísicas que descrevem buracos negros e estrelas compactas. Como exemplos, temos as soluções de Schwarzschild e Kerr que são usadas para modelar tais objetos astrofísicos.

Para conhecermos a trajetória das partículas no espaço-tempo precisamos resolver a equação da geodésica:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \tag{2.13}$$

sendo $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ o símbolo de Christoffel (2.11) e τ o tempo próprio. Resolvendo a equação (2.13), encontramos as funções $t(\tau)$, $x(\tau)$, $y(\tau)$ e $z(\tau)$ que descrevem as trajetórias das partículas no espaço-tempo.

A teoria da relatividade geral faz previsões diferentes da newtoniana no limite de campos gravitacionais extremos (tais como os de buracos negros e estrelas compactas) e no limite de velocidades relativas muito próximas à da luz. Ela explica muito bem a deflexão da luz por um campo gravitacional, bem como a precessão do periélio de Mercúrio. Estes fatos observacionais não possuem explicação satisfatória na teoria da gravitação de Newton. No limite de campos fracos e velocidades não relativísticas, são obtidas as mesmas previsões da teoria newtoniana.

2.2 Desvios Geodésicos Lineares

Para realizarmos o transporte paralelo dos quadrivetores, precisamos de uma "conexão" ou transformação. Assim, definimos a derivação covariante como:

$$\frac{DA^{\mu}(\tau)}{D\tau} \equiv \frac{dA^{\mu}(\tau)}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha}(\tau) \frac{dx^{\beta}(\tau)}{d\tau}, \tag{2.14}$$

sendo $A^{\mu}(\tau)$ um quadrivetor, $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ é a "conexão" definida por (2.11), $x^{\beta}(\tau)$ é uma curva parametrizada por τ na variedade e $\frac{D}{D\tau}$ denota a derivação covariante com respeito a τ. Quando $x^{\beta}(\tau)$ é uma curva geodésica na variedade riemanniana munida de métrica (espaço-tempo), identificamos $A^{\mu}(\tau)$ com a quadrivelocidade da partícula teste $u^{\mu}(\tau) = \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau}$ e τ com o tempo-próprio.

Como uma partícula gravitando deve seguir um movimento geodésico, a derivada covariante de sua quadrivelocidade deve ser nula em toda a variedade, ou seja, deve satisfazer a equação da geodésica (2.13).

O chamado desvio geodésico linear, que pode ser associado a uma perturbação linear, é definido por:

$$X^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}, \tag{2.15}$$

com δx^{μ} representando uma pequena variação de x^{μ} (ver figura 2.2). Sua equação tem a seguinte forma:

$$\frac{D^2}{Ds^2}\delta x^{\mu} + R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} \delta x^{\gamma} = 0,$$

sendo $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel (2.10). Podemos reescrever a equação do desvio geodésico como segue:

$$\frac{d^2\delta x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \delta x^{\gamma} + 2\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{d\delta x^{\beta}}{d\tau} = 0, \tag{2.16}$$

que é uma forma não manifestamente covariante (ver referência [44]).

2.3 Soluções das Equações de Einstein

Passaremos agora a soluções exatas de vácuo axialmente simétricas que utilizaremos nesta tese. Começaremos pela solução de simetria esférica de Schwarzschild, que descreve buracos

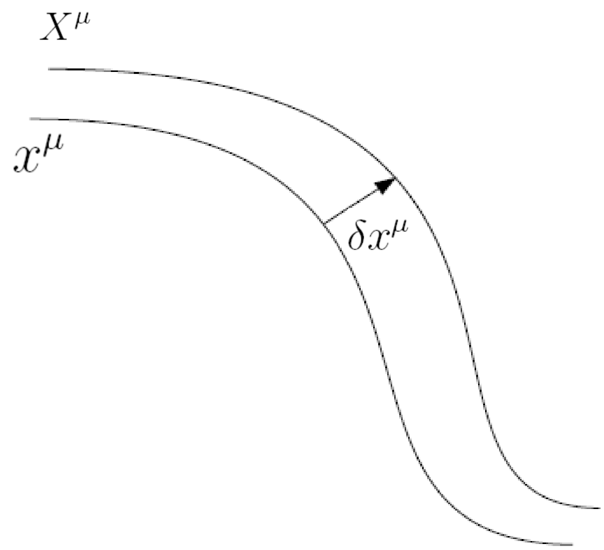

Figura 2.1: A figura mostra duas trajetórias geodésicas x^μ e X^μ e o desvio da geodésica δx^μ da primeira para a segunda, sendo $X^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$.

negros sem carga e sem rotação. Depois passaremos às soluções de Weyl, onde veremos a solução de Schwarzschild como um caso particular desta classe. Por último, a solução de Kerr, que descreve um buraco negro sem carga e com rotação.

2.3.1 Solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild descreve a geometria do espaço-tempo fora de uma fonte gravitacional esférica e estática. Estas soluções fora da fonte são ditas soluções de vácuo ou soluções exteriores e satisfazem as equações de Einstein na forma (2.12). O elemento de linha é determinado apenas por um parâmetro de massa M e tem a forma:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{R})dt^2 + (1 - \frac{2M}{R})^{-1}dR^2 + R^2 d\Omega^2, \tag{2.17}$$

sendo

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{2.18}$$

e R, θ e φ correspondem às coordenadas esféricas usuais (ver por exemplo [26]). Esta solução foi descoberta pelo astrônomo alemão K. Schwarzschild em 1916 e foi a primeira solução exata das equações de Einstein encontrada [43]. Como já mencionamos, tal solução é de grande importância astrofísica, pois descreve a gravidade produzida por estrelas e objetos compactos com simetria esférica e sem rotação.

Uma importante previsão desta geometria é a existência de buracos negros. Neste caso, o buraco negro é dito de Schwarzschild. Este possui uma singularidade física em $R = 0$ coberta por um horizonte de eventos (uma superfície esférica definida pelo raio de Schwarzschild $R_S = 2M$). Ao atravessarmos o horizonte de eventos, indo para o centro do buraco negro, temos a inversão dos sinais das coordenadas espaciais e temporal.

Particularidades sobre a dinâmica num espaço-tempo de Schwarzschild serão descritas no capítulo 6. Veja também a referência [42].

2.3.2 Soluções de Weyl

A simetria esférica impõe restrições, pois a solução depende apenas de uma coordenada do espaço-tempo. Um outro tipo de simetria, com menos restrições, é a axial, onde a solução depende de duas coordenadas do espaço-tempo (independe do tempo e do ângulo de rotação em torno do eixo de simetria). Foi este o caso tratado por Weyl, e tais soluções acabaram por receber o seu nome [47]. Uma revisão do assunto foi feita na tese de mestrado de D'Afonseca [13].

O elemento de linha correspondente à métrica de Weyl tem a forma:

$$ds^2 = -e^{\Phi}dt^2 + r^2e^{-\Phi}d\varphi^2 + e^{\sigma}(dr^2 + dz^2), \tag{2.19}$$

onde fizemos a correspondência $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \varphi, r, z)$, que são chamadas coordenadas de Weyl.

Ao usarmos a forma geral do elemento de linha de Weyl (2.19) nas equações de Einstein para o vácuo (2.12), conseguimos reescrevê-las encontrando as seguintes equações para Φ e σ:

$$\Phi_{,rr} + \frac{\Phi_{,r}}{r} + \Phi_{,zz} = 0, \tag{2.20}$$

$$\sigma[\Phi] = -\Phi + \frac{1}{2}\int r[(\Phi_{,r}^2 + \Phi_{,z}^2)dr + 2\Phi_{,r}\Phi_{,z}dz], \tag{2.21}$$

que são conhecidas como equações de Weyl. Note que a equação (2.20) é a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, que é linear e suas soluções são bem conhecidas no contexto da teoria da gravitação newtoniana. Já a integral (2.21) em termos da função Φ é não-linear e sua solução é garantida por (2.20).

As soluções de Weyl formam uma classe de métricas diagonais com simetria axial, à qual pertence a solução de Schwarzschild. Isso se deve ao fato de que a simetria esférica é um caso especial da simetria axial. A solução de Schwarzschild em coordenadas de Weyl é dada por

$$\begin{aligned} \Phi &= \ln(\mu_2/\mu_1), \\ \sigma &= \ln[\frac{M^2\mu_1^3\mu_2}{(\mu_1^2+r^2)(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_2^2+r^2)}], \end{aligned} \tag{2.22}$$

sendo

$$\begin{aligned} \mu_1 &= M - z + R_1, \qquad \mu_2 = -M - z + R_2, \\ R_1 &= \sqrt{(z-M)^2+r^2}, \qquad R_2 = \sqrt{(z+M)^2+r^2}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Para relacioná-la com a solução em coordenadas de Schwarzschild, fazemos a seguinte transformação:

$$r = \sqrt{R^2 - 2MR}\sin\theta, \qquad z = (R-M)\cos\theta, \tag{2.24}$$

que é válida para $R > 2M$, ou seja, a solução (2.22) está relacionada com a região exterior do horizonte de eventos da métrica de Schwarzschild.

Após realizarmos esta transformação de coordenadas, conseguimos escrever a solução (2.22) na sua forma usual,

$$ds^2 = -(1-\frac{2M}{R})dt^2 + (1-\frac{2M}{R})^{-1}dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{2.25}$$

Uma outra solução de Weyl que será utilizada nesta tese é o anel de Weyl-Bach [14]. Esta solução será utilizada como solução semente no método de Belinsky-Zakharov e detalhada no capítulo 4.

2.3.3 Solução de Kerr

A solução de Kerr possui simetria axial, porém não pertence à classe de Weyl por tratar-se de uma métrica não-diagonal. Este termo não-diagonal representa a rotação deste espaço-tempo. Portanto, a solução de Kerr refere-se a um espaço-tempo axialmente simétrico e com rotação constante. Esta solução é caracterizada por dois parâmetros: M (massa) e J (momento angular), onde costuma-se definir o *parâmetro de Kerr*,

$$a = J/M, \tag{2.26}$$

que possui a mesma dimensão de M. O elemento de linha desta solução é:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} dt^2 - 2a\frac{2MR\sin^2\theta}{\rho^2} dtd\varphi \\ &+ \frac{(R^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta d\varphi^2 \\ &+ \rho^2\Delta^{-1}dR^2 + \rho^2 d\theta^2, \end{aligned} \tag{2.27}$$

sendo

$$\rho^2 = R^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = R^2 + a^2 - 2MR. \tag{2.28}$$

Estas coordenadas são chamadas de Boyer-Lindquist. A coordenada φ é o ângulo no plano do eixo de simetria, t é o tempo coordenado no qual tudo é estacionário. As coordenadas R e θ não são as coordenadas esféricas.

Quando a rotação é nula na métrica de Kerr ($a = 0$), recuperamos a solução de Schwarzschild e R e θ correspondem às coordenadas esféricas. Esta solução foi obtida por R. P. Kerr em 1963 [24] no estudo algébrico de soluções de vácuo, e escrita na forma (2.27) de Boyer-Lindquist, em 1967 [9]. Como no caso da métrica de Schwarzschild, além de descrever estrelas e objetos compactos, a solução de Kerr prevê a existência de buracos negros com simetria axial e com rotação. Neste caso, o buraco negro é dito Buraco Negro de Kerr e além de um *horizonte de eventos* ele possui uma região chamada de *ergosfera*. A ergosfera é a região definida por

$$R_{ergosfera} = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}, \tag{2.29}$$

e o horizonte de eventos como

$$R_{horizonte} = M + \sqrt{M^2 - a^2}. \tag{2.30}$$

Note que, quando não há rotação, $a = 0$, e o horizonte de Kerr coincide com o horizonte de eventos de Schwarzschild, $R_{horizonte} = 2M$ (veja por exemplo [42]).

3

Método de Integração

Neste capítulo, faremos um exposição sobre o método de espalhamento inverso (MEI) no contexto das soluções solitônicas que surgiram inicialmente da resolução do problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries. Posteriormente, detalharemos o desenvolvimento deste método para resolver as equações de Einstein no vácuo com simetria axial, o método de Belinsky e Zakharov (MBZ). Finalizaremos o capítulo aplicando o método para obter as soluções de Schwarzschild e Kerr a partir de uma solução semente de Minkowski.

3.1 Método de Espalhamento Inverso

Partiremos da seguinte equação diferencial parcial não-linear:

$$u_{,t} = F(u, u_{,z}, u_{,zz}, ...). \tag{3.1}$$

Para que a função $u(z,t)$ seja integrável pelo método de espalhamento inverso (MEI), precisamos primeiro que a mesma tenha associada um problema de autovalores linear do tipo,

$$L\Psi = \lambda\Psi, \quad L = -\frac{d^2}{dz^2} + u(z,t), \tag{3.2}$$

com a função desconhecida $u(z,t)$ fazendo o papel do "potencial" no operador linear L. Também é necessário encontrar uma equação para descrever a evolução temporal,

$$\dot{\Psi} = A\Psi, \tag{3.3}$$

tal que a condição de integrabilidade ($\Psi_{,tz} = \Psi_{,zt}$) das equações (3.2) e (3.3) seja a mesma de (3.1).

Quando conhecemos o valor inicial $u(z,0)$, definimos os dados do "espalhamento". Na mecânica quântica este problema é conhecido como o espalhamento de uma partícula por um potencial $u(z,0)$ e inclui os coeficientes de transmissão e reflexão e os autovalores de energia λ.

Caso as condições descritas sejam satisfeitas, a equação não-linear (3.1) é integrável pelo MEI e a solução $u(z,t)$ é encontrada pelo cálculo do potencial correspondente à evolução temporal dos dados do espalhamento. Este último passo é o problema do espalhamento inverso propriamente dito e requer, usualmente, a solução de uma equação integral linear não-trivial.

Este procedimento torna-se vantajoso quando obtemos uma equação para a evolução dos dados de espalhamento que possa ser integrada de maneira viável. Isso acontece para algumas classes especiais de equações da física não-linear. Esta descoberta foi feita por Gardner, Greene, Kruskal e Miura em 1967, ao resolverem o problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries [18].

Embora o procedimento como um todo seja complexo, existe uma classe especial de soluções chamadas *soluções solitônicas*, para as quais o problema de espalhamento inverso pode ser resolvido de forma analítica.

3.1.1 Generalização e Exemplos

Podemos generalizar um sistema de equações da seguinte forma:

$$\Psi_{,z} = U^{(1)}\Psi \qquad \Psi_{,t} = V^{(1)}\Psi, \tag{3.4}$$

com as matrizes $U^{(1)}$ e $V^{(1)}$ dependendo racionalmente do parâmetro espectral complexo λ e de duas coordenadas espaço-temporais reais z e t. A matriz coluna Ψ também é função destas variáveis independentes. Usando a condição de integrabilidade de Ψ ($\Psi_{,zt} = \Psi_{,tz}$), reescrevemos a mesma em termos das matrizes $U^{(1)}$ e $V^{(1)}$:

$$U^{(1)}_{,t} - V^{(1)}_{,z} + U^{(1)}V^{(1)} - V^{(1)}U^{(1)} = 0. \tag{3.5}$$

Esta condição deve ser satisfeita para todos os valores de λ e deve coincidir com a equação diferencial integrável (ou sistema) de interesse.

Equação de Korteweg-de Vries. Fazendo a escolha

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.6) \\ V^{(1)} &= 4i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} \\ &+ 2i\lambda \begin{pmatrix} u & 0 \\ u_{,z} & -u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_{,z} & 2u \\ 2u^2 - u_{,zz} & u_{,z} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

para que a equação (3.5) seja satisfeita precisamos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{,t} - 6uu_{,z} - u_{,zzz} & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{3.7}$$

a qual é a equação de Korteweg-de Vries:

$$u_{,t} - 6uu_{,z} - u_{,zzz} = 0. \tag{3.8}$$

O problema espectral, definido para a matriz Ψ,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

é o seguinte:

$$\begin{aligned} \Psi_{1,z} &= i\lambda\Psi_1 + \Psi_2, \qquad (3.10) \\ \Psi_{2,z} &= -i\lambda\Psi_2 + u\Psi_1, \end{aligned}$$

que equivale ao problema (3.2).

Equação de Sine-Gordon. Neste exemplo temos uma equação relativisticamente invariante. Do ponto de vista matemático, as naturezas físicas das variáveis z e t são irrelevantes e nós podemos interpretá-las como coordenadas nulas do tipo-luz. Portanto, torna-se útil fazer a transformação para as coordenadas nulas ζ e η:

$$\zeta = \frac{1}{2}(z+t), \qquad \eta = \frac{1}{2}(z-t). \tag{3.11}$$

Agora, reescreveremos o sistema de equações (3.4) e (3.5) como:

$$\Psi_{,\zeta} = U^{(2)}\Psi, \qquad \Psi_{,\eta} = V^{(2)}\Psi, \tag{3.12}$$

$$U^{(2)}_{,\eta} - V^{(2)}_{,\zeta} + U^{(2)}V^{(2)} - V^{(2)}U^{(2)} = 0, \tag{3.13}$$

com $U^{(2)} = U^{(1)} + V^{(1)}$ e $V^{(2)} = U^{(1)} - V^{(1)}$. Então, fazemos a seguinte escolha:

$$\begin{aligned} U^{(2)} &= i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u_{,\zeta} \\ u_{,\zeta} & 0 \end{pmatrix}, \\ V^{(2)} &= \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i\sin u \\ i\sin u & -\cos u \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Temos da condição de integrabilidade (3.13) que

$$\begin{pmatrix} 0 & u_{,\zeta\eta} - \sin u \\ u_{,\zeta\eta} - \sin u & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.15}$$

Esta é a equação de Sine-Gordon:

$$u_{,\zeta\eta} - \sin u = 0. \tag{3.16}$$

Para este caso, o problema espectral (3.12) é:

$$\begin{aligned} \Psi_{1,\zeta} &= i\lambda\Psi_1 + \frac{i}{2}u_{,\zeta}\Psi_2, \\ \Psi_{2,\zeta} &= -i\lambda\Psi_2 + \frac{i}{2}u_{,\zeta}\Psi_1. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ao resolver o problema do espalhamento inverso para o sistema estacionário, encontramos a evolução dos dados de espalhamento no "tempo" η. Dessa forma, a técnica do espalhamento inverso nos dá a solução $u(\zeta, \eta)$ [36].

3.2 Método de Belinsky e Zakharov

O método de Belinsky e Zakharov (MBZ) é uma aplicação do MEI para a relatividade geral com o objetivo de resolver as equações de Einstein no vácuo com simetria axial para um grupo de simetria de dois parâmetros. A motivação para o estudo destes métodos, está no fato de serem matematicamente bem definidos, possuindo soluções analíticas. Um outro motivo é o fato de existirem diversas soluções de interesse astrofísico e cosmológico que se enquadram dentro do esquema do método, tais como: estrelas, anãs brancas, buracos negros, discos de acreção de matéria e galáxias.

De maneira geral, o MBZ consiste em encontrar, para as equações não-lineares de Einstein, um problema de operadores diferenciais lineares (equações espectrais) associado, cuja condição de integrabilidade seja a equação não-linear a ser resolvida. O próximo passo é obter as soluções conhecidas como sólitons. Para tanto, precisamos conhecer uma solução das equações de Einstein (solução semente) e, a partir daí, obter uma nova solução através da resolução de um sistema de equações e de uma série de operações algébricas (ver esquema da figura 3.2).

A forma geral para o elemento de linha de uma métrica com simetria axial na teoria da relatividade geral é:

$$ds^2 = g_{ab}(r, z)dx^a dx^b + f(r, z)(dr^2 + dz^2), \tag{3.18}$$

com $a, b = 0, 1$ e, em geral, o subespaço g_{ab} é não-diagonal. As equações de Einstein no vácuo têm a seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{3.19}$$

sendo que os índices μ e ν assumem os valores entre 0 e 3, com a seguinte correspondência $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \varphi, r, z)$.

Das equações de Einstein podemos definir, sem perda de generalidade, o determinante de

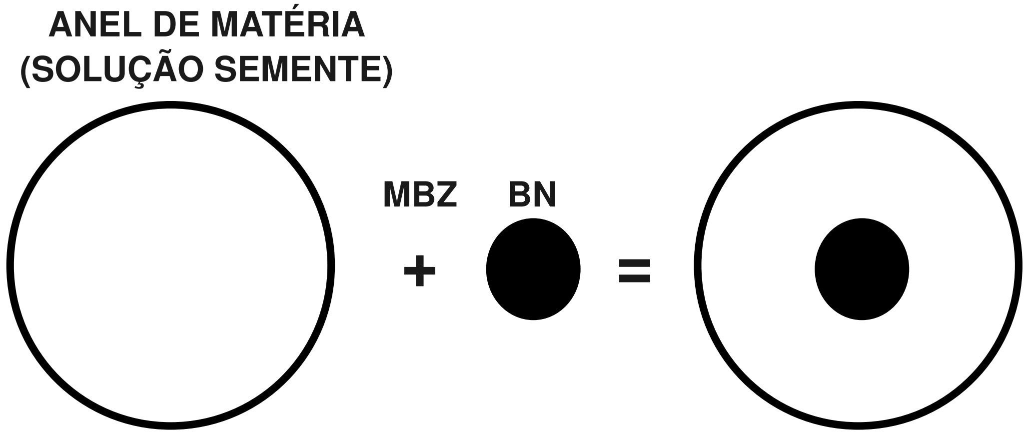

Figura 3.1: Esquema do método de Belinsky-Zakharov (MBZ), ilustrando a idéia básica da sobreposição não-linear. Conhecendo uma solução das equações de Einstein no vácuo com simetria axial, podemos obter sua sobreposição não-linear com um buraco negro (BN) através das operações do MBZ. Como resultado, encontramos o anel de matéria (solução semente) com o buraco negro em seu centro.

$g = (g_{ab})$ como:

$$\det g = -r^2. \tag{3.20}$$

Usando (3.20), podemos reescrever as equações de Einstein no vácuo como,

$$U_{,r} + V_{,z} = 0, \tag{3.21}$$

$$(\ln f)_{,r} = -\frac{1}{r} + \frac{1}{4r} Tr(U^2 - V^2), \tag{3.22}$$

$$(\ln f)_{,z} = \frac{1}{2r} Tr(UV), \tag{3.23}$$

sendo as matrizes U e V definidas da seguinte forma:

$$U = rg_{,r}g^{-1}, \qquad V = rg_{,z}g^{-1}. \tag{3.24}$$

Dentro do esquema do método, podemos ver que (3.21) é a condição de integrabilidade de (3.22) e (3.23). Temos que obter a equação para U e V (condição de integrabilidade) a partir de um problema mais geral superdeterminado, relacionado a um problema de autovalores de algum operador diferencial linear. Tal sistema dependerá de um parâmetro espectral complexo λ. As soluções das equações do problema original dependerão do tipo de estrutura analítica das autofunções no plano λ. Para tanto, Belinsky e Zakharov introduziram o problema de operadores diferenciais lineares associados [7, 5, 6]:

$$D_1\Psi = \frac{rV - \lambda U}{\lambda^2 + r^2}\Psi, \qquad D_2\Psi = \frac{rU + \lambda V}{\lambda^2 + r^2}\Psi, \tag{3.25}$$

sendo

$$D_1 = \partial_z - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + r^2}\partial_\lambda, \quad D_2 = \partial_r + \frac{2\lambda r}{\lambda^2 + r^2}\partial_\lambda. \tag{3.26}$$

Do sistema acima, podemos observar que a matriz g é simplesmente a matriz generalizada $\Psi(r, z, \lambda)$ para $\lambda = 0$.

$$g(r, z) = \Psi(r, z, \lambda = 0).$$

Logo, o problema de operadores lineares reproduz a equação para U e V quando $\lambda = 0$. A solução deste sistema não só garante que a equação para U e V (3.21) é verdadeira, mas nos dá a solução para as componentes g_{ab} da métrica.

Para encontrarmos as matrizes $U_0(r, z)$ e $V_0(r, z)$ e obtermos $\Psi_0(r, z, \lambda)$ por integração, precisamos conhecer uma solução $g_0(r, z)$ das equações de Einstein. Com tal propósito, vamos reescrever a matriz Ψ da seguinte forma:

$$\Psi = \chi\Psi_0. \tag{3.27}$$

A partir daí, encontramos as seguintes equações para $\chi(r, z, \lambda)$:

$$D_1\chi = \frac{rV - \lambda U}{\lambda^2 + r^2}\chi - \chi\frac{rV_0 - \lambda U_0}{\lambda^2 + r^2}, \tag{3.28}$$

$$D_2\chi = \frac{rU + \lambda V}{\lambda^2 + r^2}\chi - \chi\frac{rU_0 - \lambda V_0}{\lambda^2 + r^2}. \tag{3.29}$$

A matriz χ tem que satisfazer algumas condições especiais. Ela deve ser real e simétrica para que g também o seja. Logo, precisamos impor que

$$\overline{\chi}(\overline{\lambda}) = \chi(\lambda), \qquad \overline{\Psi}(\overline{\lambda}) = \Psi(\lambda), \tag{3.30}$$

com $\overline{\chi}$ denotando o complexo conjugado de χ. Uma outra condição é

$$\chi^{'}(\lambda) = g(\chi^t)^{-1}(-r^2/\lambda)g_0^{-1}, \tag{3.31}$$

sendo $\chi^{'}(\lambda) = \chi(\lambda)$ para garantir que g seja simétrica. Esta condição nos dá a expressão:

$$g = \chi(\lambda)g_0\chi^t(-r^2/\lambda), \tag{3.32}$$

com χ^t igual à transposta de χ. Portanto, é necessário impor que, quando $\lambda \to \infty$, a matriz χ tenda à unidade,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \chi(\lambda) = I.$$

Então, temos o seguinte resultado para $\lambda = 0$:

$$g = \chi(0)g_0. \tag{3.33}$$

Uma outra condição suplementar (do fato de $\det g_0 = \det g$) é que:

$$\det \chi(0) = 1. \tag{3.34}$$

Esta última condição imporá uma renormalização das soluções, que, por motivo de praticidade, faremos no final do processo de cálculo. As soluções renormalizadas, que indicaremos como $g^{(f)}$ (g físico), têm a seguinte forma geral:

$$\begin{aligned} g^{(f)} &= \pm r(-\det g)^{-1/2}g, \qquad (3.35)\\ U^{(f)} &= U + [1 - \frac{1}{2}r(\ln\det g)_{,r}]I, \\ V^{(f)} &= V - \frac{1}{2}r(\ln\det g)_{,z}I. \end{aligned}$$

Temos que encontrar a matriz χ que satisfaça as condições suplementares.

A matriz χ será determinada por pontos do plano λ que constituem pólos simples:

$$\chi = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{\lambda - \mu_k}. \tag{3.36}$$

Logo, podemos escrever para $\lambda = 0$ em (3.27):

$$g(r,z) = (I - \sum_{k=1}^{n} \mu_k^{-1} R_k) g_0. \tag{3.37}$$

Passaremos agora ao estudo da estrutura analítica do plano λ. As equações para os pólos são as seguintes:

$$\mu_{k,z} = \frac{-2\mu_k^2}{\mu_k^2 + r^2}, \tag{3.38}$$

$$\mu_{k,r} = \frac{2r\mu_k}{\mu_k^2 + r^2}. \tag{3.39}$$

Suas soluções são raízes da equação quadrática

$$\mu_k^2 + 2(z - \omega_k)\mu_k - r^2 = 0, \tag{3.40}$$

com os ω_k's sendo constantes complexas arbitrárias.

Uma vez determinados os pólos, devemos prosseguir no sentido de determinar a matriz R_k. Para tanto, vamos reescrever as equações para χ ((3.28) e (3.29)) em termos dos operadores D_1 e D_2 da seguinte forma:

$$\frac{rV - \lambda U}{\lambda^2 + r^2} = (D_1\chi)\chi^{-1} + \chi \frac{rV_0 - \lambda U_0}{\lambda^2 + r^2} \chi^{-1}, \tag{3.41}$$

$$\frac{rU + \lambda V}{\lambda^2 + r^2} = (D_2\chi)\chi^{-1} + \chi \frac{rU_0 + \lambda V_0}{\lambda^2 + r^2} \chi^{-1}. \tag{3.42}$$

Calculando os resíduos das equações (3.41) e (3.42), vemos que R_k precisa satisfazer:

$$R_{k,z}\chi^{-1}(\mu_k) + R_k \frac{rV_0 - \mu_k U_0}{\mu_k^2 + r^2} \chi^{-1}(\mu_k) = 0, \tag{3.43}$$

$$R_{k,r}\chi^{-1}(\mu_k) + R_k \frac{rU_0 + \mu_k V_0}{\mu_k^2 + r^2} \chi^{-1}(\mu_k) = 0. \tag{3.44}$$

De $\chi\chi^{-1} = I$ nos pólos $\lambda = \mu_k$, temos

$$R_k \chi^{-1}(\mu_k) = 0. \tag{3.45}$$

A última equação nos permite escrever a seguinte forma matricial para R_k e χ^{-1}:

$$(R_k)_{ab} = n_a^{(k)} m_b^{(k)}, \qquad [\chi^{-1}(\mu_k)]_{ab} = q_a^{(k)} p_b^{(k)}, \tag{3.46}$$

e também a seguinte condição:

$$m_a^{(k)} q_a^{(k)} = 0. \tag{3.47}$$

Substituindo a forma matricial de R_k de (3.46), encontramos as seguintes equações:

$$[m_{a,z}^{(k)} + m_b^{(k)} \frac{(rV_0 - \mu_k U_0)_{ba}}{\mu_k^2 + r^2}] q_a^{(k)} = 0, \tag{3.48}$$

$$[m_{a,r}^{(k)} + m_b^{(k)} \frac{(rU_0 + \mu_k V_0)_{ba}}{\mu_k^2 + r^2}] q_a^{(k)} = 0. \tag{3.49}$$

Sua solução está associada com Ψ_0 da seguinte forma:

$$m_a^{(k)} = (m_0^{(k)})_b [\Psi_0^{-1}(\mu_k, r, z)]_{ba}, \tag{3.50}$$

com $(m_0^{(k)})_b$ sendo um vetor constante arbitrário.

Ainda precisamos determinar o vetor $n_a^{(k)}$ para escrevermos a matriz R_k. Para tanto, vamos impor que g satisfaça a condição suplementar (3.32) no pólo μ_k e encontramos para R_k:

$$R_k g_0 [I - \sum_{l=1}^{n} (r^2 + \mu_k \mu_l)^{-1} \mu_k R_l^t] = 0. \tag{3.51}$$

Substituindo a expressão matricial de R_k na última equação, temos o seguinte sistema de equações lineares para $n_a^{(k)}$:

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{kl} n_a^{(k)} = \mu_k^{-1} m_c^{(k)} (g_0)_{ca}, \tag{3.52}$$

$$\Gamma_{kl} \equiv (r^2 + \mu_k \mu_l)^{-1} m_c^{(k)} (g_0)_{cb} m_b^{(l)}. \tag{3.53}$$

Defininos a inversa de Γ_{kl}:

$$\sum_{m=1}^{n} \Pi_{km} \Gamma_{ml} = \delta_{kl}. \tag{3.54}$$

Uma vez garantida a existência da inversa, podemos resolver o sistema para $n_a^{(k)}$:

$$n_a^{(k)} = \sum_{l=1}^{n} \mu_l^{-1} \Pi_{kl} L_a^{(k)}, \tag{3.55}$$

$$L_a^{(k)} \equiv m_c^{(k)} (g_0)_{ca}. \tag{3.56}$$

Agora, podemos escrever as componentes do tensor métrico como segue:

$$g_{ab} = (g_0)_{ab} - \sum_{k,l=1}^{n} \mu_k^{-1} \mu_l^{-1} \Pi_{kl} L_a^{(k)} L_b^{(l)}. \tag{3.57}$$

Nesta última expressão podemos ver que g é simétrica, como deveria ser.

A componente f da métrica é dada pela expressão:

$$f = C_n f_0 r^n (\prod_{k=1}^{n} \mu_k^2)(\prod_{k=1}^{n} (\mu_k^2 + r^2))^{-1} \det \Gamma_{kl}, \tag{3.58}$$

as constantes C_n's são arbitrárias e f_0 é a *solução semente.*

Agora, temos que renormalizar as funções g_{ab} e f de acordo com (3.35). Para g_{ab}, obtemos:

$$g^{(f)} = \pm r (-\det g)^{-1/2} g,$$

com $\det g$ sendo

$$\det g = (-1)^n r^{2n} (\prod_{k=1}^{n} \mu_k^{-2}) \det g_0.$$

Para f usamos as transformações:

$$U^{(f)} = U + [1 - \frac{1}{2} r (\ln \det g)_{,r}] I,$$

$$V^{(f)} = V - \frac{1}{2} r (\ln \det g)_{,z} I,$$

e encontramos:

$$f^{(f)} = C_f f_0 r^{-n^2/2} (\prod_{k=1}^{n} \mu_k)^{n+1} [\prod_{k>l=1}^{n} (\mu_k - \mu_l)^{-2}] \det \Gamma_{kl}, \tag{3.59}$$

sendo C_f uma constante arbitrária que garante a condição $f^{(f)} \geq 0$.

Uma última observação sobre a estrutura analítica do plano λ é que, se os pólos são reais, para que g também o seja temos que tomar todas as constantes arbitrárias reais. Caso os pólos sejam complexos, eles devem aparecer aos pares com os seus conjugados. Logo, as constantes arbitrárias também deverão aparecer aos pares com os seus respectivos complexos conjugados. As soluções que obtemos possuem pólos reais.

3.2.1 A Função Ψ_0

A *solução semente* é introduzida no cálculo através da função Ψ_0. Estudaremos a função Ψ_0 que satisfaz as equações (3.25) e pertence a uma classe de Weyl de métricas diagonais dada por (2.19),

$$ds^2 = -e^{\Phi} dt^2 + r^2 e^{-\Phi} d\theta^2 + f_0(dr^2 + dz^2),$$

com $f_0 = e^{\sigma}$ e Φ sendo funções de z e r que satisfazem (2.20) e (2.21):

$$\Phi_{,rr} + \Phi_{,r}/r + \Phi_{,zz} = 0$$

e

$$\sigma[\Phi] = -\Phi + \frac{1}{2} \int r[(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2)dr + 2\Phi_{,r}\Phi_{,z}dz].$$

As equações (3.21), (3.22) e (3.23) são equivalentes às (2.20) e (2.21) para a métrica (2.19). Estas soluções das equações de Einstein no vácuo são conhecidas na literatura como *soluções de Weyl* ou *métricas de Weyl* [47].

Como a métrica (2.19) é diagonal, podemos assumir que sua função Ψ_0 associada é também uma matriz diagonal [30]. Então, as equações (3.25) tornam-se:

$$(r\partial_r - \lambda\partial_z + 2\lambda\partial_r) \det \Psi_0 = 2 \det \Psi_0, \tag{3.60}$$

$$(r\partial_z + \lambda\partial_r) \det \Psi_0 = 0, \tag{3.61}$$

$$\det \Psi_0|_{\lambda=0} = -r^2. \tag{3.62}$$

Uma solução para este sistema é:

$$\det \Psi_0 = (-r^2 + \lambda^2 + 2\lambda z). \tag{3.63}$$

Do fato que Ψ_0 é diagonal e de (3.63), nós podemos concluir que não há perda de generalidade em escrever as soluções como segue:

$$(\Psi_0)_{00} = (r^2 - \lambda^2 - 2\lambda z)e^F, \tag{3.64}$$

$$(\Psi_0)_{11} = -e^{-F}. \tag{3.65}$$

Com esta parametrização de Ψ_0, as equações matriciais para a métrica (2.19) reduzem-se às seguintes equações escalares:

$$(r\partial_r - \lambda\partial_z + 2\lambda\partial_\lambda)F = r\Phi_{,r}, \tag{3.66}$$

$$(r\partial_z + \lambda\partial_r)F = r\Phi_{,z}, \tag{3.67}$$

$$F|_{\lambda=0} = \Phi. \tag{3.68}$$

Para calcular as soluções solitônicas, precisamos conhecer a matriz Ψ_0 nos pólos μ_k. Logo, nós temos

$$F \equiv F|_{\lambda=\mu_k}, \tag{3.69}$$

ou seja, a função F ao longo das trajetórias dos pólos. Estas são dadas pelas seguintes equações:

$$\mu_{k,r} = 2r\mu_k/(\mu_k^2 + r^2), \quad \mu_{k,z} = -2\mu_k^2/(\mu_k^2 + r^2). \tag{3.70}$$

Utilizando (3.66) e (3.70), temos

$$r\partial_r F_k - \mu_k \partial_z F_k = r\Phi_{,r}, \tag{3.71}$$

$$\mu_k \partial_r F_k + r\partial_z F_k = r\Phi_{,z}. \tag{3.72}$$

Logo,

$$F_k[\Phi] = \frac{1}{2}\int \frac{r}{\mu_k}[(\mu_{k,r}\Phi_{,r} - \mu_{k,z}\Phi_{,z})dr + (\mu_{k,r}\Phi_{,z} + \mu_{k,z}\Phi_{,r})dz]. \tag{3.73}$$

Este problema está resolvido em [29].

3.3 Exemplos em gravitação

As soluções de Schwarzschild e Kerr podem ser obtidas utilizando uma solução semente de Minkowski para $n = 2$ na expressão (3.57). Soluções com $n = 2$ são conhecidas como soluções a dois sólitons. Nesta seção, encontraremos estas soluções com objetivo de ilustrar a aplicação do método dentro do contexto da gravitação. As soluções foram obtidas com o auxílio do *software REDUCE*.

Solução de Schwarzschild

Usamos a solução semente de vácuo (espaço-tempo plano de Minkowski):

$$ds^2 = -dt^2 + r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2. \tag{3.74}$$

Logo, g_0 é,

$$g_0 = diag(-1, r^2), \tag{3.75}$$

e Ψ_0 tem a seguinte forma:

$$\Psi_0 = diag(-1, r^2 - 2z\mu_k - \mu_k^2) \tag{3.76}$$

As constantes $m_b^{(k)}$ são definidas como:

$$m_t^{(k)} = C_t^{(k)}, \qquad m_\varphi^{(k)} = C_\varphi^{(k)} \mu_k^{-1}. \tag{3.77}$$

Através do MBZ encontramos as seguintes componentes para a métrica em coordenadas de Weyl:

$$g_{tt} = -\mu_2/\mu_1, \tag{3.78}$$

$$g_{\varphi\varphi} = (\mu_1/\mu_2) r^2, \tag{3.79}$$

$$g_{t\varphi} = g_{\varphi t} = 0, \tag{3.80}$$

$$f = \frac{(C_t^{(1)})^2 (C_\varphi^{(2)})^2 \mu_1^3 \mu_2}{(\mu_1^2 + r^2)(\mu_1 - \mu_2)^2 (\mu_2^2 + r^2)}, \tag{3.81}$$

com

$$\mu_1 = M - z + R_1, \qquad \mu_2 = -M - z + R_2,$$

$$R_1 = \sqrt{(z - M)^2 + r^2}, \qquad R_2 = \sqrt{(z + M)^2 + r^2},$$

$$(C_t^{(1)} C_\varphi^{(2)})^2 = M^2.$$

Fazendo a transformação para coordenadas prolatas,

$$x = \frac{R_2 + R_1}{2M}, \qquad y = \frac{R_2 - R_1}{2M}, \tag{3.82}$$

e depois para as coordenadas de Schwarzschild,

$$x = \frac{R}{M} - 1, \qquad y = \cos\theta, \tag{3.83}$$

encontramos a forma usual da solução:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{R})dt^2 + (1 - \frac{2M}{R})^{-1}dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{3.84}$$

Solução de Kerr

Em coordenadas de Weyl, a métrica de Kerr tem a seguinte forma para suas componentes:

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= (-(((\mu_1\mu_2 + r^2)C_t^{(2)} + (\mu_1 - \mu_2)C_\varphi^{(2)} r)C_\varphi^{(1)} \\
&- ((\mu_1\mu_2 + r^2)C_\varphi^{(2)} - (\mu_1 - \mu_2)C_t^{(2)} r)C_t^{(1)}) \\
&\times (((\mu_1\mu_2 + r^2)C_t^{(2)} - (\mu_1 - \mu_2)C_\varphi^{(2)} r)C_\varphi^{(1)} \\
&- ((\mu_1\mu_2 + r^2)C_\varphi^{(2)} + (\mu_1 - \mu_2)C_t^{(2)} r)C_t^{(1)})\mu_1\mu_2) \\
&/ \ ((((\mu_1\mu_2 + r^2)^2(C_\varphi^{(2)})^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2(C_t^{(2)})^2\mu_2^2) \\
&\times C_t^{(1)}\mu_1 - 2(\mu_1^2 + r^2)(\mu_2^2 + r^2)C_\varphi^{(1)}C_\varphi^{(2)}C_\varphi^{(2)} \\
&\times \mu_2)C_t^{(1)}\mu_1 + ((\mu_1\mu_2 + r^2)^2(C_t^{(2)})^2\mu_2^2 \\
&+ (\mu_1 - \mu_2)^2(C_\varphi^{(2)})^2 r^4)(C_\varphi^{(1)})^2)
\end{aligned} \tag{3.85}$$

$$\begin{aligned}
g_{t\varphi} &= (-((C_t^{(1)}\mu_1 + C_t^{(1)} r)(C_t^{(1)}\mu_1 - C_\varphi^{(1)} r)(\mu_2^2 + r^2) \\
&\times C_t^{(2)}C_\varphi^{(2)} - (C_t^{(2)}\mu_2 + C_\varphi^{(2)} r)(C_t^{(2)}\mu_2 - C_\varphi^{(2)} r)(\mu_1^2 + r^2) \\
&\times C_t^{(1)}C_\varphi^{(1)})(\mu_1\mu_2 + r^2)(\mu_1 - \mu_2))/((((\mu_1\mu_2 + r^2)^2 \\
&\times (C_\varphi^{(2)})^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2(C_t^{(2)})^2\mu_2^2)C_t^{(1)}\mu_1 - 2(\mu_1^2 \\
&+ r^2)(\mu_2^2 + r^2)C_\varphi^{(1)}C_t^{(2)}C_\varphi^{(2)}\mu_2)C_t^{(1)}\mu_1 \\
&+ ((\mu_1\mu_2 + r^2)^2(C_t^{(2)})^2\mu_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2(C_\varphi^{(2)})^2 \\
&\times r^4)(C_\varphi^{(1)})^2) = g_{\varphi t}
\end{aligned} \tag{3.86}$$

$$
\begin{aligned}
g_{\varphi\varphi} &= ((((\mu_1\mu_2 + r^2)C_t^{(2)}\mu_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)C_\varphi^{(2)}r^3)C_\varphi^{(1)}r \\
&- ((\mu_1\mu_2 + r^2)C_\varphi^{(2)}r - (\mu_1 - \mu_2)C_t^{(2)}\mu_2^2)C_t^{(1)}\mu_1^2) \\
(& ((\mu_1\mu_2 + r^2)C_t^{(2)}\mu_2^2 - (\mu_1 - \mu_2)C_\varphi^{(2)}r^3)C_\varphi^{(1)}r - ((\mu_1\mu_2 \\
&+ r^2)C_\varphi^{(2)}r + (\mu_1 - \mu_2)C_t^{(2)}\mu_2^2)C_t^{(1)}\mu_1^2))/(((((\mu_1\mu_2 \\
&+ r^2)^2(C_\varphi^{(2)})^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2(C_t^{(2)})^2\mu_2^2)C_t^{(1)}\mu_1 - 2(\mu_1^2 \\
&+ r^2)(\mu_2^2 + r^2)C_\varphi^{(1)}C_t^{(2)}C_\varphi^{(2)}\mu_2)C_t^{(1)}\mu_1 + ((\mu_1\mu_2 \\
&+ r^2)^2(C_t^{(2)})^2\mu_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2(C_\varphi^{(2)})^2r^4)(C_\varphi^{(1)})^2)\mu_1\mu_2),
\end{aligned} \tag{3.87}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= ((4(C_t^{(2)})^4M^2\mu_1^2\mu_2^4 + 8(C_t^{(2)})^4M^2\mu_1\mu_2^3r^2 \\
&+ 4(C_t^{(2)})^4M^2\mu_2^2r^4 + 16(C_t^{(2)})^2(C_\varphi^{(2)})^2M^4\mu_1^4\mu_2^2 \\
&- 32(C_t^{(2)})^2(C_\varphi^{(2)})^2M^4\mu_1^3\mu_2^3 + 16(C_t^{(2)})^2(C_\varphi^{(2)})^2M^4\mu_1^2\mu_2^4 \\
&+ 8(C_t^{(2)})^2(C_\varphi^{(2)})^2M^2\mu_1^3\mu_2^3 + 8(C_t^{(2)})^2(C_\varphi^{(2)})^2M^2\mu_1^3\mu_2r^2 \\
&+ 8(C_t^{(2)})^2(C_\varphi^{(2)})^2M^2\mu_1\mu_2^3r^2 + 8(C_t^{(2)})^2(C_\varphi^{(2)})^2M^2\mu_1\mu_2r^4 \\
&+ (C_t^{(2)})^2(C_\varphi^{(2)})^2\mu_1^2r^4 - 2(C_t^{(2)})^2(C_\varphi^{(2)})^2\mu_1\mu_2r^4 \\
&+ (C_t^{(2)})^2(C_\varphi^{(2)})^2\mu_2^2r^4 + 4(C_\varphi^{(2)})^4M^2\mu_1^4\mu_2^2 \\
&+ 8(C_\varphi^{(2)})^4M^2\mu_1^3\mu_2r^2 + 4(C_\varphi^{(2)})^4M^2\mu_1^2r^4)(C_t^{(1)})^2\mu_1\mu_2) \\
&/ (4(\mu_1^2 + r^2)(\mu_1\mu_2 + r^2)^2(\mu_1 - \mu_2)^2(\mu_2^2 + r^2)(C_\varphi^{(2)})^2M^2).
\end{aligned} \tag{3.88}
$$

Passamos a solução para coordenadas prolatas e depois para coordenadas de Boyer-Lindquist:

$$
\begin{gathered}
px + 1 = \frac{r}{m}, \quad qy = \frac{a}{m}\cos\theta, \quad t^{'} = t + 2a\varphi, \\
p = \frac{\sigma}{m}, \quad q = \frac{a}{m}, \quad \sigma = \sqrt{m^2 - a^2}.
\end{gathered} \tag{3.89}
$$

As constantes físicas acima estão relacionadas com as do MBZ da seguinte forma:

$$
\begin{gathered}
C_\varphi^{(1)}C_t^{(2)} - C_t^{(1)}C_\varphi^{(2)} = \sigma, \quad C_\varphi^{(1)}C_t^{(2)} + C_t^{(1)}C_\varphi^{(2)} = -m, \\
C_\varphi^{(1)}C_\varphi^{(2)} - C_t^{(1)}C_t^{(2)} = -b, \quad C_\varphi^{(1)}C_\varphi^{(2)} + C_t^{(1)}C_t^{(2)} = a.
\end{gathered} \tag{3.90}
$$

Portanto, podemos escrever a solução de Kerr da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\rho^2}dt^2 - 2a\frac{2MR\sin^2\theta}{\rho^2}dtd\varphi \\ &+ \frac{(R^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta d\varphi^2 \\ &+ \rho^2\Delta^{-1}dR^2 + \rho^2 d\theta^2, \end{aligned} \tag{3.91}$$

com

$$\rho^2 = R^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = R^2 + a^2 - 2MR. \tag{3.92}$$

4

Soluções via MBZ

Neste capítulo discutiremos a solução de Weyl-Bach que descreve um anel de matéria relativístico. Ela pertence à classe de Weyl de métricas diagonais e será usada como solução semente no MBZ para gerar a sobreposição não-linear com os buracos negros de Schwarzschild e Kerr. Abordamos com detalhes o problema do anel de matéria em termos de sua expansão em multipolos e da integral elíptica, do ponto de vista newtoniano e relativístico. Na última seção do capítulo, apresentamos a solução do anel de matéria com um buraco negro de Kerr no seu centro.

4.1 O Anel de Matéria

Sabemos, da teoria newtoniana, que o potencial gravitacional satisfaz a equação de Poisson com as devidas condições de contorno para cada situação física. Na ausência da fonte (solução de vácuo), precisamos resolver a equação de Laplace,

$$\nabla^2\Phi(R,\theta,\varphi) = 0, \tag{4.1}$$

em coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\Phi) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = 0. \tag{4.2}$$

Para realizar a separação de variáveis, a solução da equação (4.2) é escrita como o produto

$$\Phi(R,\theta,\varphi) = \frac{U(R)}{R}P(\theta)Q(\varphi). \tag{4.3}$$

Então obtemos um sistema de três equações acopladas. A equação para $Q(\varphi)$ tem a seguinte forma:

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2, \tag{4.4}$$

e tem como solução

$$Q = e^{\pm im\varphi}, \tag{4.5}$$

sendo m um número inteiro. Já a equação para $U(R)$ é a seguinte:

$$\frac{d^2U}{dR^2} - \frac{l(l+1)}{R^2}U = 0, \tag{4.6}$$

com a solução

$$U = AR^{l+1} + BR^{-l}, \tag{4.7}$$

com l assumindo valores inteiros positivos. Por último, a equação para $P(\theta)$ pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}) + [l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}]P = 0. \tag{4.8}$$

Se fizermos a seguinte transformação de coordenadas:

$$x = \cos\theta$$

na equação (4.8), obtemos a chamada equação de Legendre generalizada, cujas soluções são as funções de Legendre associadas. Para o caso em que $m = 0$, temos a chamada equação de Legendre ordinária, que tem como solução os polinômios de Legendre. Problemas onde não há dependência de φ possuem simetria azimutal ($m = 0$). Logo, a solução será em termos dos polinômios de Legendre:

$$\Phi(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}[A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}]P_l(\cos\theta). \tag{4.9}$$

As condições de contorno nos darão os valores das constantes físicas para cada situação. Em nosso caso, estamos interessados no problema de um anel delgado de massa m e densidade constante (anel de matéria). O potencial gravitacional em termos de sua expansão multipolar tem a seguinte expressão:

$$\Phi(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{R_>}(\frac{R_<}{R_>})^l P_l(\cos\theta), \tag{4.10}$$

sendo que $\Phi \sim -1/R = -1/|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|$ e se $|\vec{R}_2| > |\vec{R}_1|$, então $R_> = |\vec{R}_2|$ e $R_< = |\vec{R}_1|$ (ver figura 4.1). Para um anel de massa m no plano $r\varphi$, em coordenadas cilíndricas, o potencial Φ no eixo z é:

$$\Phi(r=0,\varphi=0,z) = -G\frac{m}{[z^2+b^2]^{1/2}}, \tag{4.11}$$

sendo b o raio do anel. Expandimos usando a série binomial. Primeiro para $z > b$:

$$\Phi(z) = -\frac{Gm}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(\frac{b}{z})^{2n}, \tag{4.12}$$

que comparamos com a solução (4.10),

$$\Phi(r=0,\varphi=0,z) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{z}(\frac{b}{z})^l, \tag{4.13}$$

concluindo que $l = 2n$. Portanto, para $R > b$, temos:

$$\Phi(R,\theta) = -\frac{Gm}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{b^{2n}}{R^{2n}}P_{2n}(\cos\theta), \tag{4.14}$$

sendo $R = \sqrt{r^2+z^2}$.

Da mesma forma, podemos calcular Φ para $R < b$. Expandimos novamente em uma série binomial em b para $z < b$:

$$\begin{aligned} \Phi(r=0,\varphi=0,z) &= -\frac{Gm}{b}[1+(z/b)^2]^{-1/2} \qquad (4.15) \\ &= -\frac{GM}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(\frac{z}{b})^{2n}, \end{aligned}$$

que comparamos novamente com a solução geral,

$$\Phi(r=0,\varphi=0,z) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{b}(\frac{z}{b})^l, \tag{4.16}$$

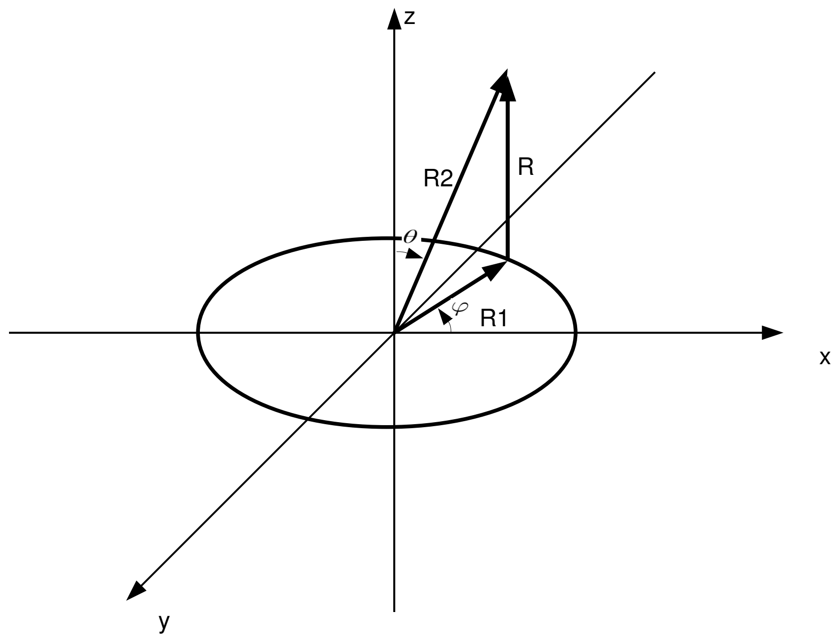

Figura 4.1: Sistema de coordenadas: o anel está no plano xy (ou $r\varphi$), $\vec{R}_1$ é o vetor posição do anel e $\vec{R}_2$ do campo gravitacional.

e comparando as duas, vemos também que $l = 2n$. Então, para $R < b$, temos:

$$\Phi(R,\theta) = -\frac{Gm}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{R^{2n}}{b^{2n}}P_{2n}(\cos\theta), \tag{4.17}$$

em coordenadas esféricas. Portanto, nós podemos expandir o potencial do anel de matéria como:

$$\Phi(R,\theta) = -\frac{Gm}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{R^{2n}}{b^{2n}}P_{2n}(\cos\theta), \tag{4.18}$$

para $R < b$ e

$$\Phi(R,\theta) = -\frac{Gm}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{b^{2n}}{R^{2n}}P_{2n}(\cos\theta), \tag{4.19}$$

para $R > b$.

Quando expandimos a solução de um anel delgado em polinômios de Legendre só teremos uma solução completa se considerarmos infinitos termos na série. Isso é, certamente, impossível do ponto de vista computacional. A solução exata do problema dá-se em termos de uma integral elíptica. A solução em série será comparada com a da integral elíptica para sabermos quantos termos devem ser considerados em uma boa aproximação.

4.2 A Integral Elíptica

O potencial gravitacional newtoniano do anel de matéria em coordenadas esféricas é dado pela expressão:

$$\Phi = -G\int_V \frac{\rho(\vec{R}_2)dV}{R'}, \tag{4.20}$$

sendo $R' = |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|$. As coordenadas do anel são dadas pelo vetor $\vec{R}_1(R = b, \theta = \pi/2, \varphi = \varphi')$ e o potencial é calculado na posição $\vec{R}_2(R, \theta, \varphi = 0)$. Escolhemos $\varphi = 0$, pois o potencial possui simetria azimutal e não depende de φ. Isso nos permite fazer esta escolha sem perda de generalidade. Logo, temos que

$$\frac{1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2bR\sin\theta\cos\varphi'}}, \tag{4.21}$$

que deve ser substituído na integral no potencial (4.20). Então, encontramos

$$\Phi(R,\theta) = -G\rho b\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2bR\sin\theta\cos\varphi'}}, \tag{4.22}$$

que pode ser reescrito como:

$$\Phi(R,\theta) = -\frac{G\rho b}{\sqrt{R^2+b^2}}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - q\cos\varphi'}}, \tag{4.23}$$

com

$$q(R,\theta) \equiv \frac{2bR\sin\theta}{R^2+b^2}. \tag{4.24}$$

Fazemos a transformação $\varphi' = 2\varphi$ para chegarmos em uma forma de integral elíptica conhecida: a integral elíptica completa de primeiro tipo. Partimos da integral de (4.23),

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - q\cos\varphi'}} = 2\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - q(1-\sin^2\varphi)}}, \tag{4.25}$$

que pode ser escrita como:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - q\cos\varphi'}} = \frac{2}{\sqrt{1-q}}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \tag{4.26}$$

com

$$k^2 \equiv -\frac{2q}{1-q}. \tag{4.27}$$

Portanto, o potencial gravitacional do anel pode ser escrito como:

$$\Phi(R,\theta) = -\frac{2b\rho G}{\sqrt{R^2+b^2}\sqrt{1-q}} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{4.28}$$

O próximo passo é resolver a integral em (4.28). Este resultado foi comparado ao da expansão multipolar para várias ordens da expansão. Constatamos que uma boa aproximação é a utilização da quarta ordem da expansão ($n = 4$ em (4.18) e (4.19)), pois mantém o erro relativo menor que 1%, como veremos na seção posterior.

4.3 Expansão Multipolar do Anel como Solução Semente

No início do capítulo mostramos a solução de um anel delgado de matéria com densidade constante dentro do contexto da teoria newtoniana de Gravitação. Mostramos o tratamento em termos da integral elíptica e da expansão em multipolos. Em relatividade geral, o anel de Weyl-Bach representa o mesmo sistema gravitante. Esta é uma solução de vácuo axialmente simétrica das equações de Einstein que pertence à classe de Weyl (ver capítulos 2 e 3) e o potencial Φ corresponde à mesma função do problema newtoniano (imagem newtoniana). Utilizamos a expansão multipolar do anel de Weyl-Bach (referido como anel de matéria) como solução semente no MBZ.

Na teoria newtoniana o potencial gravitacional do anel de massa m e raio b é solução da equação de Laplace [23]. Podemos reescrever a expressão (4.28) da seguinte forma:

$$\Phi = -\frac{2Gm}{[(r+b)^2+z^2]^{1/2}} K(k), \tag{4.29}$$

sendo K a função elíptica de primeiro tipo, e

$$k^2 = 4br/[(r+b)^2+z^2].$$

Este potencial pode ser escrito em termos dos polinômios de Legendre [23]. Encontramos,

$$\Phi^{in}(r,z) = -\frac{Gm}{b}\sum_{l=0}^{\infty} a_{2l}\left(\frac{R}{b}\right)^{2l} P_{2l}(\frac{z}{R}), R < b, \tag{4.30}$$

$$\Phi^{out}(r,z) = -\frac{Gm}{R}\sum_{l=0}^{\infty} a_{2l}\left(\frac{b}{R}\right)^{2l} P_{2l}(\frac{z}{R}), R > b, \tag{4.31}$$

com

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, \quad R = (r^2+z^2)^{1/2}. \tag{4.32}$$

Para estimar o erro devido ao truncamento na expansão do potencial newtoniano do anel, tomamos $l = 4$ na expressão acima, ao invés do potencial exato (4.29), e denotamos por $\Phi_4^{out,in}$. Como usualmente a região de interesse não é muito distante do plano do anel, calculamos o erro $\Delta_4^{out,in} \equiv |(\Phi - \Phi_4^{out,in})/\Phi|$ para $\hat{\vartheta} = 1,4$ ($\cos\hat{\vartheta} = z/R$), ou seja, aproximadamente 10 graus acima e abaixo deste plano.

As tabelas 4.1 e 4.2 mostram que esta expansão é uma boa aproximação do potencial exato (4.29). Também é interessante comparar a expressão exata (4.29) com a expansão (4.30) ou (4.31), quando consideramos um número grande de termos. Encontramos que o potencial do anel representado pela expansão com $l = 300$ não tem diferença com o potencial exato até a quinta casa decimal.

A outra função que aparece na solução semente é a função σ definida em (3.23). É conveniente definir uma nova função, $\hat{\sigma} = \sigma + \Phi$. Esta pode ser calculada a partir da expansão em série para o potencial Φ, (4.30) e (4.31). Encontramos:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^{in} = \sum_{n,l=1}^{\infty} \frac{G^2m^2a_{2n}a_{2l}R^{2(n+l)}}{2(n+l)b^{2(n+l+1)}} \times \\ \{\sin^2\theta[4nlP_{2n}P_{2l} - P'_{2n}P'_{2l}] \\ +2n\sin(2\theta)P_{2n}P'_{2l}\},\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^{out} = \sum_{n,l=0}^{\infty} \frac{G^2m^2(2n+1)(2l+1)a_{2n}a_{2l}b^{2(n+l)}}{2(n+l+1)R^{2(n+l+1)}} \times \\ (P_{2n}P_{2l} - P_{2n+1}P_{2l+1}).\end{aligned} \tag{4.34}$$

$\Delta_{\Phi}^{in(l=4)}$ para $R < b$		
R/b	erro para $\theta = \pi/2$	erro para $\theta = 1,4$
0,05	0,0000	0,0000
0,10	0,0000	0,0000
0,15	0,0000	0,0000
0,20	0,0000	0,0000
0,25	0,0000	0,0000
0,30	0,0000	0,0000
0,35	0,0000	0,0000
0,40	0,0000	0,0000
0,45	0,0000	0,0000
0,50	0,0001	0,0000
0,55	0,0002	0,0000
0,60	0,0005	0,0001
0,65	0,0011	0,0004
0,70	0,0025	0,0010
0,75	0,0054	0,0025
0,80	0,0114	0,0059
0,85	0,0238	0,0134
0,90	0,0502	0,0299
0,95	0,1135	0,0633

Tabela 4.1: Erro relativo para a expansão multipolar truncada ($l = 4$), na região dentro do anel, para $\theta = \pi/2$ e $1,40$ radianos, ou seja, no plano do anel e 10 graus acima ou abaixo do plano do anel, respectivamente.

com

$$P_{2n} = P_{2n}(\cos\theta), \ \cos\theta = z/R, \tag{4.35}$$

$$P'_{2n} = \frac{(n+1)(P_{2n+1} - \cos\theta P_{2n})}{\sin\theta}. \tag{4.36}$$

$\Delta_{\Phi}^{out(l=4)}$ para $R > b$		
R/b	erro para $\theta = \pi/2$	erro para $\theta = 1,4$
1,05	0,1185	0,0654
1,10	0,0578	0,0344
1,15	0,0317	0,0185
1,20	0,0186	0,0102
1,25	0,0114	0,0059
1,30	0,0072	0,0035
1,35	0,0047	0,0021
1,40	0,0031	0,0013
1,45	0,0021	0,0008
1,50	0,0014	0,0005
1,55	0,0010	0,0003
1,60	0,0007	0,0002
1,65	0,0005	0,0001
1,70	0,0004	0,0001
1,75	0,0003	0,0000
1,80	0,0002	0,0000
1,85	0,0001	0,0000
1,90	0,0001	0,0000
1,95	0,0001	0,0000

Tabela 4.2: Erro relativo para expansão multipolar truncada ($l = 4$) na região fora do anel para $\theta = \pi/2$ e $1,40$ radianos, ou seja, no plano do anel e 10 graus acima ou abaixo deste plano, respectivamente.

A função (4.34) pode ser encontrada em [25] e [38], porém não fomos capazes de encontrar a função (4.33) ou equivalente na literatura.

Como no caso do potencial Φ, é possível estimar o erro na função $\hat{\sigma}$ quando fazemos a

$\Delta_{\hat{\sigma}}^{in,out(l=4)}$ para $\theta = \pi/2$			
$R/b < 1$	erro	$R/b > 1$	erro
0,05	0,0000	1,05	0,4505
0,10	0,0000	1,10	0,2354
0,15	0,0000	1,15	0,1318
0,20	0,0000	1,20	0,0774
0,25	0,0000	1,25	0,0472
0,30	0,0000	1,30	0,0296
0,35	0,0001	1,35	0,0191
0,40	0,0005	1,40	0,0126
0,45	0,0014	1,45	0,0085
0,50	0,0034	1,50	0,0058
0,55	0,0075	1,55	0,0040
0,60	0,0155	1,60	0,0028
0,65	0,0302	1,65	0,0020
0,70	0,0561	1,70	0,0014
0,75	0,1001	1,75	0,0010
0,80	0,1721	1,80	0,0008
0,85	0,2857	1,85	0,0006
0,90	0,4571	1,90	0,0004
0,95	0,7004	1,95	0,0003

Tabela 4.3: Erro relativo da expansão multipolar (região interna e externa do anel) para a função $\hat{\sigma}$ no plano do anel.

aproximação pela série truncada com $l = 4$. Encontramos o erro relativo mostrado na tabela 4.3.

Encontramos que a não-linearidade de σ aumenta o erro, mas ainda temos uma boa aproximação até metade do raio do anel na região interna, $r = b/2$, e até $r = 3b/2$ para a região externa. A tabela 4.3 foi calculada considerando $\hat{\sigma}$ como exata para as expressões (4.33) e (4.34) truncadas em $l = 300$. Existe uma forma exata para a função $\hat{\sigma}$ associada ao anel [3] que envolve funções de integrais elípticas. Constatamos que o cálculo numérico desta integral usando diretamente uma linguagem de programação de alto nível como MAPLE [35] e MATHEMATICA [48] não é viável. Esta integral pode ser calculada através de uma linguagem de programação de baixo nível tal como C++ [14]. Os resultados apresentados nas tabelas 4.1-4.3 foram calculados usando o MAPLE.

4.3.1 Cálculo dos F_k's para o Anel de Matéria

Com o objetivo de aplicar o MBZ é conveniente escrever as expressões (4.30) e (4.31) como segue

$$\Phi^{out} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \Phi_l^{out}, \; \Phi^{in} = \sum_{l=1}^{\infty} B_l \Phi_l^{in}, \tag{4.37}$$

sendo A_l e B_l constantes que são obtidas das expressões originais, e

$$\Phi_l^{out} = R^{-(l+1)} P_l(z/R), \tag{4.38}$$

$$\Phi_l^{in} = R^l P_l(z/R). \tag{4.39}$$

As equações (3.22) e (3.66) são lineares. Então, para uma solução Φ_l existe apenas uma solução $F^{(l)}$ associada. Portanto,

$$F^{out} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l F^{out(l)}, \; F^{in} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l F^{in(l)}. \tag{4.40}$$

Para calcular F^{out}, notamos que a função F relacionada ao termo monopolar,

$$\Phi_P \equiv \Phi_0^{out} = 1/R \tag{4.41}$$

é

$$F^{(P)} \equiv F^{out(0)} = \frac{z + R}{(z + R + \lambda)R}, \tag{4.42}$$

ver referência [28].

Se as equações (3.22) e (3.66) forem invariantes sob uma translação na variável z e os termos multipolares fora da fonte tiverem função geradora $\Phi_P(z-\xi, r)$, nós encontramos

$$F^{out(l)}(z,r,\lambda) = \frac{(-1)^l}{l!}\partial_z^l F_0^{(P)}(z,r,\lambda). \tag{4.43}$$

Resolvendo diretamente (3.66) para as primeiras cinco funções $F^{in(l)}(z,r,\lambda)$, temos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
F^{in(0)} &= 1, && (4.44)\\
F^{in(1)} &= z - \frac{1}{2}\lambda, && (4.45)\\
F^{in(2)} &= (z-\frac{1}{2}\lambda)^2 - \frac{1}{2}R^2, && (4.46)\\
F^{in(3)} &= (z-\frac{1}{2}\lambda)^3 - \frac{3}{2}R^2(z-\frac{1}{4}\lambda), && (4.47)\\
F^{in(4)} &= (z-\frac{1}{2}\lambda)^4 - 3(z^2-\frac{1}{2}z\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2)R^2 + \frac{3}{8}R^4, ... && (4.48)
\end{aligned}$$

Estas funções obedecem a fórmula de recorrência

$$F^{in(l)}(z,r) = (z-\frac{\lambda}{2})^l + \frac{l}{\lambda}\int r(F^{in(l-1)} - L_{l-1})dr, \tag{4.49}$$

sendo $L_l = R^l P_l(z/R)$[29].

4.4 Buraco Negro de Kerr com o Anel de Matéria

Para colocar o buraco negro de Kerr no centro do anel construímos a solução com $n=2$ em (3.57) com a representação multipolar do anel como solução semente. Encontramos que a métrica do espaço-tempo pode ser escrita neste caso como:

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= (-e^{\Phi}((e^{(2F_2+\Phi}(\mu_1\mu 2+r^2)MC_0^{(2)} + (\mu_1-\mu_2)C_1^{(2)}r)C_1^{(1)} + e^{2F_1+\Phi}((\mu_1\mu_2+r^2)C_1^{(2)} && (4.50)\\
&- e^{2F_2+\Phi}(\mu_1-\mu_2)MC_0^{(2)}r)MC_0^{(1)})((e^{2F_2+\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)MC_0^{(2)} - (\mu_1-\mu_2)C_1^{(2)}r)C_1^{(1)}\\
&+ e^{2F_1+\Phi}((\mu_1\mu_2+r^2)C_1^{(2)} + e^{2F_2+\Phi}(\mu_1-\mu_2)MC_0^{(2)}r)MC_0^{(1)})\mu_1\mu_2)\\
&/ (e^{2F_1+2\Phi}(e^{2F_1}((\mu_1\mu_2+r^2)^2(C_1^{(2)})^2 + e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1-\mu_2)^2M^2(C_0^{(2)})^2\mu_2^2)C_0^{(1)}\mu_1\\
&+ 2e^{2F_2}(\mu_1^2+r^2)(\mu_2^2+r^2)C_1^{(1)}C_0^{(2)}C_1^{(2)}\mu_2)M^2C_0^{(1)}\mu_1\\
&+ (e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)^2M^2(C_0^{(2)})^2\mu_2^2 + (\mu_1-\mu_2)^2(C_1^{(2)})^2r^4)(C_1^{(1)})^2),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_{t\varphi} &= (-e^{\Phi}(e^{2F_2}(e^{2F_1+\Phi}MC_0^{(1)}\mu_1 + C_1^{(1)}r)(e^{2F_1+\Phi}MC_0^{(1)}\mu_1 - C_1^{(1)}r)(\mu_2^2+r^2)C_0^{(2)}C_1^{(2)} \\
&+ e^{2F_1}(e^{2F_2+\Phi}MC_0^{(2)}\mu_2 + C_1^{(2)}r)(e^{2F_2+\Phi}MC_0^{(2)}\mu_2 - C_1^{(2)}r)(\mu_1^2+r^2)C_0^{(1)}C_1^{(1)})(\mu_1\mu_2+r^2)(\mu_1-\mu_2)M) \\
&/ (e^{2F_1+2\Phi}(e^{2F_1}((\mu_1\mu_2+r^2)^2(C_1^{(2)})^2 + e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1-\mu_2)^2M^2(C_0^{(2)})^2\mu_2^2)C_0^{(1)}\mu_1 \\
&+ 2e^{2F_2}(\mu_1^2+r^2)(\mu_2^2+r^2)C_1^{(1)}C_0^{(2)}C_1^{(2)}\mu_2)M^2C_0^{(1)}\mu_1 + (e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)^2M^2(C_0^{(2)})^2\mu_2^2 \\
&+ (\mu_1-\mu_2)^2(C_1^{(2)})^2r^4)(C_1^{(1)})^2),
\end{aligned} \tag{4.51}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{\varphi\varphi} &= (((e^{2F_2+\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)MC_0^{(2)}\mu_2^2 + (\mu_1-\mu_2)C_1^{(2)}r^3)C_1^{(1)}r + e^{2F_1+\Phi}((\mu_1\mu_2+r^2)C_1^{(2)}r \\
&- e^{2F_2+\Phi}(\mu_1-\mu_2)MC_0^{(2)}\mu_2^2)MC_0^{(1)}\mu_1^2)((e^{2F_2+\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)MC_0^{(2)}\mu_2^2 \\
&- (\mu_1-\mu_2)C_1^{(2)}r^3)C_1^{(1)}r + e^{2F_1+\Phi}((\mu_1\mu_2+r^2)C_1^{(2)}r + e^{2F_2+\Phi}(\mu_1-\mu_2)MC_0^{(2)}\mu_2^2)MC_0^{(1)}\mu_1^2)) \\
&/ (e^{\Phi}(e^{2F_1+2\Phi}(e^{2F_1}((\mu_1\mu_2+r^2)^2(C_1^{(2)})^2 + e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1-\mu_2)^2M^2(C_0^{(2)})^2\mu_2^2)C_0^{(1)}\mu_1 \\
&+ 2e^{2F_2}(\mu_1^2+r^2)(\mu_2^2+r^2)C_1^{(1)}C_0^{(2)}C_1^{(2)}\mu_2)M^2C_0^{(1)}\mu_1 + (e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)^2M^2(C_0^{(2)})^2\mu_2^2 \\
&+ (\mu_1-\mu_2)^2(C_1^{(2)})^2r^4)(C_1^{(1)})^2)\mu_1\mu_2),
\end{aligned} \tag{4.52}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= (e^{\sigma}(e^{2F_1+2\Phi}(e^{2F_1}((\mu_1\mu_2+r^2)^2(C_1^{(2)})^2 + e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1-\mu_2)^2M^2(C_0^{(2)})^2\mu_2^2)C_0^{(1)}\mu_1 \\
&+ 2e^{2F_2}(\mu_1^2+r^2)(\mu_2^2+r^2)C_1^{(1)}C_0^{(2)}C_1^{(2)}\mu_2)M^2C_0^{(1)}\mu_1 + (e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)^2M^2(C_0^{(2)})^2\mu_2^2 \\
&+ (\mu_1-\mu_2)^2(C_1^{(2)})^2r^4)(C_1^{(1)})^2)\mu_1\mu_2)/(e^{2F_1+2F_2+2\Phi}(\mu_1^2+r^2)(\mu_1\mu_2+r^2)^2(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_2^2+r^2)M^4),
\end{aligned} \tag{4.53}
$$

sendo $C_a^{(k)}$ constantes e, para $k = 1$ e 2, temos

$$\mu_k = \delta - z + \sqrt{(\delta - z)^2 + r^2}. \tag{4.54}$$

As constantes $C_a^{(k)}$ estão relacionadas com os parâmetros físicos da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
C_1^{(1)}C_0^{(2)} - C_0^{(1)}C_1^{(2)} &= \delta, \\
C_1^{(1)}C_0^{(2)} + C_0^{(1)}C_1^{(2)} &= -M, \\
C_1^{(1)}C_1^{(2)} - C_0^{(1)}C_0^{(2)} &= -\gamma \\
C_1^{(1)}C_1^{(2)} + C_0^{(1)}C_0^{(2)} &= a,
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

sendo M a massa do buraco negro, a o parâmetro de Kerr (momento angular dividido pela massa), γ o parâmetro de Taub-NUT e δ

$$\delta^2 = M^2 - a^2 + \gamma^2. \tag{4.56}$$

As constantes $C_a^{(k)}$ são relacionadas aos elementos da matriz constante $(m_0^{(k)})_a$ do MBZ (3.57) como segue

$$(m_0^{(k)})_a = C_a^{(k)}.$$

O índice k representa o número de sólitons e $()_a$ são as coordenadas do espaço-tempo. Para a presente situação temos uma solução a dois sólitons e k assume os valores 1 e 2. Temos

$$\begin{aligned} C_0^{(k)} &= C_t^{(k)}, \\ C_1^{(k)} &= C_\varphi^{(k)}. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Para a solução de Kerr, o parâmetro de Taub-NUT é nulo, $\gamma = 0$, ou seja,

$$C_1^{(1)} C_1^{(2)} - C_0^{(1)} C_0^{(2)} = 0.$$

Temos também

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{C_0^{(1)}}{C_1^{(2)}}[(C_0^{(2)})^2 - (C_1^{(2)})^2], \\ M &= -\frac{C_0^{(1)}}{C_1^{(2)}}[(C_0^{(2)})^2 + (C_1^{(2)})^2], \\ a &= 2C_0^{(1)} C_0^{(2)}, \end{aligned} \tag{4.58}$$

os quais satisfazem a relação

$$\delta^2 = M^2 - a^2.$$

Por isso podemos escrever a solução de Kerr com o anel de matéria como

$$\begin{aligned} g_{tt} &= (-e^{\Phi}(e^{2F_1+\Phi}((\delta + M)(\mu_1\mu_2 + r^2) + e^{2F_2+\Phi}(\mu_1 - \mu_2)ar)(\delta + M) \\ &+ ((\delta + M)(\mu_1 - \mu_2)r - e^{2F_2+\Phi}(\mu_1\mu_2 + r^2)a)a)(e^{2F_1+\Phi}((\delta + M)(\mu_1\mu_2 + r^2) \\ &- e^{2F_2+\Phi}(\mu_1 - \mu_2)ar)(\delta + M) - ((\delta + M)(\mu_1 - \mu_2)r + e^{2F_2+\Phi}(\mu_1\mu_2 + r^2)a)a)\mu_1\mu_2) \\ &/ (e^{2F_1+2\Phi}(e^{2F_1}((\delta + M)^2(\mu_1\mu_2 + r^2)^2 + e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1 - \mu_2)^2 a^2 \mu_2^2)\mu_1 \\ &- 2e^{2F_2}(\mu_1^2 + r^2)(\mu_2^2 + r^2)a^2\mu_2)(\delta + M)^2\mu_1 + ((\delta + M)^2(\mu_1 - \mu_2)^2 r^4 \\ &+ e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1\mu_2 + r^2)^2 a^2 \mu_2^2)a^2), \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$
\begin{aligned}
g_{t\varphi} &= (e^{\Phi}(e^{2F_2}(e^{2F_1+2F_2+2\Phi}(\mu_1^2+r^2)\mu_2^2 \\
&+ (\mu_2^2+r^2)r^2)a^2 - e^{2F_1}((\mu_1^2+r^2)r^2 + e^{2F_1+2F_2+2\Phi}(\mu_2^2 \\
&+ r^2)\mu_1^2)(\delta+M)^2)(\delta+M)(\mu_1\mu_2+r^2)(\mu_1-\mu_2)a) \\
&/ (e^(2F_1+2\Phi)(e^{2F_2}(2(\mu_1^2+r^2)(\mu_2^2+r^2) - e^{2F_1+2F_2+2\Phi}(\mu_1 \\
&- \mu_2)^2\mu_1\mu_2)a^2\mu_2 - e^{2F_1}(\delta+M)^2(\mu_1\mu_2+r^2)^2\mu_1)(\delta+M)^2\mu_1 \\
&- ((\delta+M)^2(\mu_1-\mu_2)^2r^4 + e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)^2a^2\mu_2^2)a^2),
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{\varphi\varphi} &= (-(e^(2F_1+\Phi)((\delta+M)(\mu_1\mu_2+r^2)r + e^{2F_2+\Phi}(\mu_1-\mu_2)a\mu_2^2)(\delta+M)\mu_1^2 \\
&+ ((\delta+M)(\mu_1-\mu_2)r^3 - e^{2F_2+\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)a\mu_2^2)ar)(e^{2F_1+\Phi}((\delta+M)(\mu_1\mu_2 \\
&+ r^2)r - e^{2F_2+\Phi}(\mu_1-\mu_2)a\mu_2^2)(\delta+M)\mu_1^2 - ((\delta+M)(\mu_1-\mu_2)r^3 \\
&+ e^{2F_2+\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)a\mu_2^2)ar))/(e^{\Phi}(e^{2F_1+2\Phi}(e^{2F_2}(2(\mu_1^2+r^2)(\mu_2^2+r^2) \\
&- e^{2F_1+2F_2+2\Phi}(\mu_1-\mu_2)^2\mu_1\mu_2)a^2\mu_2 - e^{2F_1}(\delta+M)^2(\mu_1\mu_2+r^2)^2\mu_1)(\delta \\
&+ M)^2\mu_1 - ((\delta+M)^2(\mu_1-\mu_2)^2r^4 + e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)^2a^2\mu_2^2)a^2)\mu_1\mu_2),
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= (-4e^{\sigma}(e^{2F_1+2\Phi}(e^{2F_2}(2(\mu_1^2+r^2)(\mu_2^2+r^2) - e^{2F_1+2F_2+2\Phi}(\mu_1 \\
&- \mu_2)^2\mu_1\mu_2)a^2\mu_2 - e^{2F_1}(\delta+M)^2(\mu_1\mu_2+r^2)^2\mu_1)(\delta+M)^2\mu_1 \\
&- ((\delta+M)^2(\mu_1-\mu_2)^2r^4 + e^{4F_2+2\Phi}(\mu_1\mu_2+r^2)^2a^2\mu_2^2)a^2)\mu_1\mu_2) \\
&/ (e^{2F_1+2F_2+2\Phi}(\delta+M)^2(\mu_1^2+r^2)(\mu_1\mu_2+r^2)^2(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_2^2+r^2)).
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Para a região interna ao anel ($R < b$), temos para a série truncada de Φ:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{in} &= (-Gm(4096(r^2-2z^2+4b^2)b^6 \\
&+ 2304b^4r^4 - 18432b^4r^2z^2 + 6144b^4z^4 + 1600b^2r^6 \\
&- 28800b^2r^4z^2 + 38400b^2r^2z^4 - 5120b^2z^6 + 1225r^8 \\
&- 39200r^6z^2 + 117600r^4z^4 - 62720r^2z^6 + 4480z^8) \\
&)\ /(16384b^9),
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

e para a externa ($R > b$):

$$
\begin{aligned}
\Phi^{out} &= (-Gm(64(4(16(4(r^2+z^2)^2 \\
&+ (r^2-2z^2)b^2)(r^2+z^2)^2+3(3r^4 \\
&- 24r^2z^2+8z^4)b^4)(r^2+z^2)^2 \\
&+ 5(5r^6-90r^4z^2+120r^2z^4-16z^6)b^6)(r^2 \\
&+ z^2)^2+35(35r^8-1120r^6z^2+3360r^4z^4 \\
&- 1792r^2z^6+128z^8)b^8))/(16384\sqrt{r^2+z^2}(r^2+z^2)^8).
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

Quando $R < b$, temos para a série truncada de σ:

$$
\begin{aligned}
\sigma^{in} \;=\;& (Gm(8192((4096b^6 + 2304b^4r^2 - 18432b^4z^2 \\
+\;& 1600b^2r^4 - 28800b^2r^2z^2 + 38400b^2z^4 \\
+\;& 1225r^6 - 39200r^4z^2 + 117600r^2z^4 - 62720z^6)r^2 \\
-\;& 128(64b^6 \\
-\;& 48b^4z^2 + 40b^2z^4 - 35z^6)z^2)b^9 \\
+\;& (4194304b^{12}r^2 - 33554432b^{12}z^2 + 6291456b^{10}r^4 \\
-\;& 113246208b^{10}r^2z^2 + 100663296b^{10}z^4 + 7569408b^8r^6 \\
-\;& 242221056b^8r^4z^2 + 591396864b^8r^2z^4 - 201326592b^8z^6 \\
+\;& 8437760b^6r^8 - 421888000b^6r^6z^2 + 1966080000b^6r^4z^4 \\
-\;& 1866465280b^6r^2z^6 + 335544320b^6z^8 + 5683200b^4r^{10} \\
-\;& 409190400b^4r^8z^2 + 3030835200b^4r^6z^4 \\
-\;& 5528616960b^4r^4z^6 + 2857697280b^4r^2z^8 \\
-\;& 338165760b^4z^{10} + 3360000b^2r^{12} - 329280000b^2r^{10}z^2 \\
+\;& 3575040000b^2r^8z^4 - 10612224000b^2r^6z^6 \\
+\;& 10407936000b^2r^4z^8 - 3337420800b^2r^2z^{10} \\
+\;& 275251200b^2z^{12} + 1500625r^{14} - 192080000r^{12}z^2 \\
+\;& 2881200000r^{10}z^4 - 12600448000r^8z^6 \\
+\;& 19998272000r^6z^8 - 12222873600r^4z^{10} \\
+\;& 2669363200r^2z^{12} \\
-\;& 160563200z^{14})Gmr^2))/(134217728b^{18}),
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

e para $R > b$, encontramos:

$$
\begin{aligned}
\sigma^{out} &= (-Gm((16(32(8(8(32(8(8(4(r^2+z^2)^2 \qquad (4.66)\\
&+ 3(r+2z)(r-2z)b^2)(r^2+z^2)^2+3(7r^4\\
&- 84r^2z^2+64z^4)b^4)(r^2+z^2)^2\\
&+ 5(31r^6-744r^4z^2+1632r^2z^4\\
&- 512z^6)b^6)(r^2+z^2)^2+15(313r^8\\
&- 12520r^6z^2+53760r^4z^4-48128r^2z^6\\
&+ 8192z^8)b^8)(r^2+z^2)^2+105(205r^{10}\\
&- 12300r^8z^2+90160r^6z^4-165248r^4z^6\\
&+ 84864r^2z^8-9728z^{10})b^{10})(r^2+z^2)^2\\
&+ 175(605r^{12}-50820r^{10}z^2+555240r^8z^4\\
&- 1647296r^6z^6+1612416r^4z^8-517632r^2z^{10}\\
&+ 41984z^{12})b^{12})(r^2+z^2)^2+11025(175r^{14}\\
&- 19600r^{12}z^2+296800r^{10}z^4-1294720r^8z^6\\
&+ 2056960r^6z^8-1255424r^4z^{10}+274432r^2z^{12}\\
&- 16384z^{14})b^{14})(r^2+z^2)^2+11025(1225r^{16}\\
&- 176400r^{14}z^2+3528000r^{12}z^4-21262080r^{10}z^6\\
&+ 49754880r^8z^8-49158144r^6z^{10}+20471808r^4z^{12}\\
&- 3244032r^2z^{14}+147456z^{16})b^{16})Gmr^2\\
&- 65536\sqrt{r^2+z^2}(64(4(16(4(r^2+z^2)^2\\
&+ (r^2-2z^2)b^2)(r^2+z^2)^2+3(3r^4-24r^2z^2\\
&+ 8z^4)b^4)(r^2+z^2)^2+5(5r^6-90r^4z^2\\
&+ 120r^2z^4-16z^6)b^6)(r^2+z^2)^2+35(35r^8\\
&- 1120r^6z^2+3360r^4z^4-1792r^2z^6\\
&+ 128z^8)b^8)(r^2+z^2)^9))/(1073741824(r^2+z^2)^{18}).
\end{aligned}
$$

Para a função F_1^{in} temos que

$$
\begin{aligned}
F_1^{in}(r,z,\mu_1) &= -Gm(1-(1/2)(-1/2r^2+(z-(1/2)\mu_1)^2)/b^2+(3/8)((z-1/2\mu_1)^4 \\
&- 3(z^2-(1/2)\mu_1 z+(1/12)\mu_1^2)r^2+(3/8)r^4)/b^4-(5/16)((z-(1/2)\mu_1)^6-(5/16)r^6 \\
&+ (-(15/8)\mu_1 z+(15/64)\mu_1^2+(45/8)z^2)r^4+(-(15/2)z^4+(15/2)z^3\mu_1-(15/4)z^2\mu_1^2 \\
&+ (15/16)z\mu_1^3-(3/32)\mu_1^4)r^2)/b^6+(35/128)((z-1/2\mu_1)^8+(35/128)r^8 \\
&+ (-(35/4)z^2+(35/16)\mu_1 z-(7/32)\mu_1^2)r^6+(-(21/16)z\mu_1^3-(35/2)z^3\mu_1 \\
&+ (105/16)z^2\mu_1^2+(105/4)z^4+(7/64)\mu_1^4)r^4+(-(21/8)z^2\mu_1^4+(7/16)z\mu_1^5 \\
&- (1/32)\mu_1^6-(35/2)z^4\mu_1^2+(35/4)z^3\mu_1^3-14z^6+21z^5\mu_1)r^2)/b^9).
\end{aligned} \tag{4.67}
$$

A função F_2^{in} é obtida trocando μ_1 por μ_2 em (4.67). Para F_1^{out} temos:

$$
\begin{aligned}
F_1^{out}(r,z,\mu_1) &= -Gm((z+(r^2+z^2)^{1/2})/((z+(r^2+z^2)^{1/2}+\mu_1)(r^2 \\
&+ z^2)^{1/2})-(1/2)b^2(18(r^2+z^2)^{1/2}z^3\mu_1-9(r^2+z^2)^{3/2}z\mu_1 \\
&- 6z^2\mu_1 r^2+8z^4\mu_1-3z\mu_1^2r^2+3z^3\mu_1^2+18(r^2+z^2)^{1/2}z^4 \\
&+ 11z^3r^2+20z^5+3z^2(r^2+z^2)^{3/2}-3zr^4-2\mu_1 r^4-(r^2+z^2)^{5/2})/((r^2 \\
&+ z^2)^{5/2}(z+(r^2+z^2)^{1/2}+\mu_1)^3)+(3/16)b^4(796z^7r^2-617z^5r^4-210z^3r^6 \\
&+ 15zr^8-30(r^2+z^2)^{7/2}z^2-445(r^2+z^2)^{5/2}z^4+15(r^2+z^2)^{7/2}\mu_1^2 \\
&+ 1100(r^2+z^2)^{3/2}z^6+700(r^2+z^2)^{1/2}z^8+13\mu_1 r^8+3\mu_1^3r^6+247z^6\mu_1^3 \\
&+ 55z^5\mu_1^4+1688z^8\mu_1+970z^7\mu_1^2+3(r^2+z^2)^{9/2}+1328z^9+75(r^2+z^2)^{5/2}z\mu_1^3 \\
&+ 15\mu_1 r^6z^2-1421\mu_1 r^4z^4+33\mu_1^3r^4z^2-283\mu_1^3r^2z^4-550z^3\mu_1^2r^4 \\
&- 560z^5\mu_1^2r^2+140z\mu_1^2r^6+15z\mu_1^4r^4-70z^3\mu_1^4r^2-1200(r^2+z^2)^{3/2}z^4\mu_1^2 \\
&- 295\mu_1 r^2z^6+400(r^2+z^2)^{3/2}z^5\mu_1-500(r^2+z^2)^{3/2}z^3\mu_1^3-895(r^2 \\
&+ z^2)^{5/2}z^3\mu_1+45(r^2+z^2)^{5/2}z^2\mu_1^2+85(r^2+z^2)^{7/2}z\mu_1+700(r^2 \\
&+ z^2)^{1/2}z^5\mu_1^3+2100(r^2+z^2)^{1/2}z^6\mu_1^2+2100(r^2+z^2)^{1/2}z^7\mu_1)/((r^2 \\
&+ z^2)^{9/2}(z+(r^2+z^2)^{1/2}+\mu_1)^5)-(5/32)b^6(-44062\mu_1^3r^4z^6-45071\mu_1^3r^2z^8 \\
&- 106\mu_1^5r^6z^2+2086\mu_1^5r^4z^4-5438\mu_1^5r^2z^6-6027z^5\mu_1^4r^4
\end{aligned} \tag{4.68}
$$

$$
\begin{aligned}
- & \ 21091z^7\mu_1^4r^2 + 17144z^4\mu_1r^8 - 13692z^6\mu_1r^6 - 123999z^8\mu_1r^4 + 7987z^{10}\mu_1r^2 \\
+ & \ 11025z^3\mu_1^2r^8 + 26313z^5\mu_1^2r^6 - 110355z^7\mu_1^2r^4 - 39354z^9\mu_1^2r^2 - 5(r^2 \\
+ & \ z^2)^{13/2} + 50752z^{13} + 2975z^4(r^2+z^2)^{9/2} + 12936z^{12}(r^2+z^2)^{1/2} - 3822z^8(r^2 \\
+ & \ z^2)^{5/2} + 1085z^3r^{10} + 4375z^5r^8 - 20809z^7r^6 - 38872z^9r^4 + 34096z^{11}r^2 - 75\mu_1^3r^{10} \\
- & \ 35zr^{12} - 4\mu_1^5r^8 - 33\mu_1r^{12} + 112432z^{12}\mu_1 + 113190z^{11}\mu_1^2 + 20608z^9\mu_1^4 \\
+ & \ 3462z^8\mu_1^5 + 539z^7\mu_1^6 + 63373z^{10}\mu_1^3 + 55860z^{10}(r^2+z^2)^{3/2} \\
- & \ 17297z^6(r^2+z^2)^{7/2} + 105z^2(r^2+z^2)^{11/2} - 77(r^2+z^2)^{11/2}\mu_1^2 \\
- & \ 28(r^2+z^2)^{9/2}\mu_1^4 + 7231z^3\mu_1^4r^6 + 161z^2\mu_1r^{10} - 819z\mu_1^2r^{10} \\
- & \ 35z\mu_1^6r^6 + 385z^3\mu_1^6r^4 - 889z^5\mu_1^6r^2 + 26666\mu_1^3r^6z^4 - 831\mu_1^3r^8z^2 \\
- & \ 721z\mu_1^4r^8 - 12348z^5(r^2+z^2)^{3/2}\mu_1^5 + 64680z^{11}(r^2+z^2)^{1/2}\mu_1 \\
+ & \ 129360z^{10}(r^2+z^2)^{1/2}\mu_1^2 + 129360z^9(r^2+z^2)^{1/2}\mu_1^3 + 64680z^8(r^2 \\
+ & \ z^2)^{1/2}\mu_1^4 + 12936z^7(r^2+z^2)^{1/2}\mu_1^5 - 39984z^5(r^2+z^2)^{5/2}\mu_1^3 \\
- & \ 9569z^5(r^2+z^2)^{7/2}\mu_1 + 31570z^4(r^2+z^2)^{7/2}\mu_1^2 + 13230z^4(r^2 \\
+ & \ z^2)^{5/2}\mu_1^4 + 16310z^3(r^2+z^2)^{7/2}\mu_1^3 + 7133z^3(r^2+z^2)^{9/2}\mu_1 \\
+ & \ 147588z^9(r^2+z^2)^{3/2}\mu_1 + 147z^2(r^2+z^2)^{9/2}\mu_1^2 - 385z^2(r^2+z^2)^{7/2}\mu_1^4 \\
- & \ 41160z^7(r^2+z^2)^{3/2}\mu_1^3 - 143080z^6(r^2+z^2)^{5/2}\mu_1^2 + 95256z^8(r^2 \\
+ & \ z^2)^{3/2}\mu_1^2 - 57036z^6(r^2+z^2)^{3/2}\mu_1^4 - 97118(r^2+z^2)^{5/2}z^7\mu_1 \\
- & \ 1099(r^2+z^2)^{9/2}z\mu_1^3 - 280(r^2+z^2)^{11/2}z\mu_1 + 3430z^3(r^2 \\
+ & \ z^2)^{5/2}\mu_1^5 - 245z(r^2+z^2)^{7/2}\mu_1^5)/((r^2+z^2)^{13/2}(z \\
+ & \ (r^2+z^2)^{1/2} + \mu_1)^7) + (35/1024)b^8(-212970z^3\mu_1^6r^8 + 12895z^2\mu_1^3r^{12} \\
+ & \ 7245z^2(r^2+z^2)^{9/2}\mu_1^6 - 22723488z^9(r^2+z^2)^{7/2}\mu_1 - 12051z^2(r^2 \\
+ & \ z^2)^{13/2}\mu_1^2 + 18030z^2(r^2+z^2)^{11/2}\mu_1^4 - 69161400z^9(r^2 \\
+ & \ z^2)^{5/2}\mu_1^3 - 43340616z^{10}(r^2+z^2)^{5/2}\mu_1^2 - 37402200z^8(r^2 \\
+ & \ z^2)^{5/2}\mu_1^4 - 1315512z^{11}(r^2+z^2)^{5/2}\mu_1 + 2878785z^5(r^2 \\
+ & \ z^2)^{9/2}\mu_1^3 + 11455983z^6(r^2+z^2)^{9/2}\mu_1^2 + 8217344z^{17} \\
+ & \ 35(r^2+z^2)^{17/2} + 18196824z^{13}\mu_1^4 + 26177152z^{16}\mu_1 + 38355912z^{15}\mu_1^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ &\quad 22059z^9\mu_1^8 + 1474158z^{11}\mu_1^6 + 6503028z^{12}\mu_1^5 + 185057z^{10}\mu_1^7 \\
+ &\quad 33076700z^{14}\mu_1^3 + 25\mu_1^7 r^{10} + 1879\mu_1^3 r^{14} + 861\mu_1^5 r^{12} - 8610288z^{13}r^4 \\
+ &\quad 6181568z^{15}r^2 + 307\mu_1 r^{16} + 315zr^{16} - 17220r^{14}z^3 - 87150r^{12}z^5 + 1003716r^1 0z^7 \\
+ &\quad 1957691r^8z^9 - 5793112r^6z^{11} + 587244z^6(r^2+z^2)^{11/2} - 58590z^4(r^2+z^2)^{13/2} \\
- &\quad 75141z^8(r^2+z^2)^{9/2} - 6095736z^{10}(r^2+z^2)^{7/2} - 1260z^2(r^2+z^2)^{15/2} \\
+ &\quad 5150376z^{12}(r^2+z^2)^{5/2} + 7783776z^{14}(r^2+z^2)^{3/2} + 1749(r^2+z^2)^{13/2}\mu_1^4 \\
+ &\quad 225(r^2+z^2)^{11/2}\mu_1^6 + 1071(r^2+z^2)^{15/2}\mu_1^2 + 926640(r^2+z^2)^{1/2}z^{16} \\
- &\quad 1341315z^4(r^2+z^2)^{11/2}\mu_1^2 - 2098215z^4(r^2+z^2)^{9/2}\mu_1^4 + 6509277z^7(r^2 \\
+ &\quad z^2)^{9/2}\mu_1 + 364317z^5(r^2+z^2)^{11/2}\mu_1 - 837270z^3(r^2+z^2)^{11/2}\mu_1^3 \\
- &\quad 1267812z^5\mu_1^2 r^{10} - 2548239z^8\mu_1^5 r^4 + 1245z^2\mu_1^7 r^8 - 43150z^4\mu_1^7 r^6 \\
+ &\quad 225538z^6\mu_1^7 r^4 - 368715z^8\mu_1^7 r^2 + 315z\mu_1^8 r^8 - 6300z^3\mu_1^8 r^6 \\
+ &\quad 29106z^5\mu_1^8 r^4 - 45180z^7\mu_1^8 r^2 - 4689z^2\mu_1 r^{14} - 476086z^4\mu_1 r^{12} \\
+ &\quad 1279722z^6\mu_1 r^{10} + 10377807z^8\mu_1 r^8 - 7610055z^{10}\mu_1^5 r^2 - 615825z^3(r^2 \\
+ &\quad z^2)^{9/2}\mu_1^5 + 6164658z^9\mu_1^2 r^6 - 50786586z^{11}\mu_1^2 r^4 - 6351480z^{13}\mu_1^2 r^2 \\
- &\quad 14596698z^9\mu_1^4 r^4 - 15559020z^{11}\mu_1^4 r^2 - 388098z^3\mu_1^2 r^{12} + 23061z^2\mu_1^5 r^{10} \\
- &\quad 1072770z^4\mu_1^5 r^8 + 4704114z^6\mu_1^5 r^6 + 32432400(r^2+z^2)^{1/2}z^{13}\mu_1^3 \\
+ &\quad 19459440(r^2+z^2)^{1/2}z^{14}\mu_1^2 + 16595208z^6(r^2+z^2)^{7/2}\mu_1^4 \\
+ &\quad 53127360z^{11}(r^2+z^2)^{3/2}\mu_1^3 + 8648640z^{10}(r^2+z^2)^{3/2}\mu_1^4 \\
+ &\quad 180252z^7\mu_1^6 r^4 - 2145462z^9\mu_1^6 r^2 + 11250z\mu_1^6 r^{10} + 692772z^5\mu_1^6 r^6 \\
+ &\quad 34902z\mu_1^4 r^{12} - 7953213z^{10}\mu_1 r^6 + 37003824z^{13}(r^2+z^2)^{3/2}\mu_1 + 67150512z^{12}(r^2 \\
+ &\quad z^2)^{3/2}\mu_1^2 - 12911184z^9(r^2+z^2)^{3/2}\mu_1^5 + 32432400(r^2+z^2)^{1/2}z^{12}\mu_1^4 \\
+ &\quad 6486480(r^2+z^2)^{1/2}z^{15}\mu_1 - 31428z^5\mu_1^4 r^8 + 12639888z^7\mu_1^4 r^6 \\
- &\quad 35667340z^{12}\mu_1 r^4 + 6266340z^{14}\mu_1 r^2 - 2168634z^4\mu_1^3 r^{10} + 6873570z^6\mu_1^3 r^8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad 16616715z^8\mu_1^3r^6 - 37080285z^{10}\mu_1^3r^4 - 17332840z^{12}\mu_1^3r^2 \\
&+ \quad 14260212z^7\mu_1^2r^8 - 684468z^3\mu_1^4r^{10} + 3302208z^5(r^2+z^2)^{7/2}\mu_1^5 \\
&- \quad 150933z^3(r^2+z^2)^{13/2}\mu_1 + 14608728z^7(r^2+z^2)^{7/2}\mu_1^3 - 15017184z^8(r^2 \\
&+ \quad z^2)^{7/2}\mu_1^2 + 19459440(r^2+z^2)^{1/2}z^11\mu_1^5 + 6486480(r^2+z^2)^{1/2}z^{10}\mu_1^6 \\
&+ \quad 28449(r^2+z^2)^{13/2}z\mu_1^3 + 926640(r^2+z^2)^{1/2}z^9\mu_1^7 + 13194z\mu_1^2r^{14} \\
&- \quad 2753784z^7(r^2+z^2)^{5/2}\mu_1^5 + 3195(r^2+z^2)^{15/2}z\mu_1 - 1111968z^7(r^2 \\
&+ \quad z^2)^{3/2}\mu_1^7 + 2810808z^6(r^2+z^2)^{5/2}\mu_1^6 - 7474896z^8(r^2+z^2)^{3/2}\mu_1^6 \\
&+ \quad 2835z(r^2+z^2)^{9/2}\mu_1^7 - 68040z^3(r^2+z^2)^{7/2}\mu_1^7 + 449064z^5(r^2 \\
&+ \quad z^2)^{5/2}\mu_1^7 + 25425z(r^2+z^2)^{11/2}\mu_1^5 - 362880z^4(r^2 \\
&+ \quad z^2)^{7/2}\mu_1^6)/((r^2+z^2)^{17/2}(z+(r^2+z^2)^{1/2}+\mu_1)^9)).
\end{aligned}
$$

Novamente, a função F_2^{out} é encontrada trocando μ_1 por μ_2 em (4.68). As expressões acima foram encontradas usando o REDUCE [21].

5

Estabilidade em Órbitas Circulares

Neste capítulo faremos o estudo da estabilidade de órbitas circulares equatoriais no sistema descrito no capítulo anterior. Analisamos perturbações radiais e verticais encontrando, respectivamente, as freqüências epicíclicas e verticais para os casos newtoniano e relativístico. Quando as duas freqüências forem reais, temos que as órbitas são estáveis.

5.1 O Modelo Newtoniano

Sempre que possível, é importante ter como ponto de comparação a versão newtoniana do problema em questão. Podemos obter informações sobre a estabilidade através do estudo do potencial gravitacional. Órbitas circulares equatoriais podem ser reduzidas a um problema bidimensional se considerarmos a conservação da componente z do momento angular. Assumimos o potencial como tendo simetria de reflexão em relação ao plano equatorial ($z = 0$). Neste caso, as equações de movimento em coordenadas cilíndricas são:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \tag{5.1}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0, \tag{5.2}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{5.3}$$

nas respectivas direções r, φ e z. A equação para φ nos fornece a componente na direção z do momento angular,

$$L_z = r^2 \dot{\varphi},$$

e as equações para r e z descrevem o movimento oscilatório acoplado neste plano. Podemos reescrever as equações de movimento definindo o potencial efetivo como:

$$\Phi_{eff} = \Phi(r,z) + \frac{L_z^2}{2r^2} \tag{5.4}$$

e as equações ficam

$$\ddot{r} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} \tag{5.5}$$

e

$$\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z}. \tag{5.6}$$

Logo, o movimento de uma partícula em um espaço tridimensional reduz-se ao movimento sobre um plano sob a ação de um potencial axissimétrico $\Phi(r,z)$.

O mínimo do potencial efetivo Φ_{eff} tem um significado físico. Ele é dado por:

$$0 = \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{L_z^2}{r^3} \tag{5.7}$$

e

$$0 = \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{5.8}$$

A segunda condição é satisfeita pela simetria de reflexão em torno do plano equatorial $z = 0$, e a primeira, para o valor $r = r_0$,

$$(\frac{\partial \Phi}{\partial r})_{(r_0,0)} = \frac{L_z^2}{r_0^3} = r_0 \dot{\varphi}^2. \tag{5.9}$$

Esta última, é a condição para uma órbita circular de raio r_0. Então, o mínimo de Φ_{eff} é dado para $r = r_0$ de uma órbita circular equatorial.

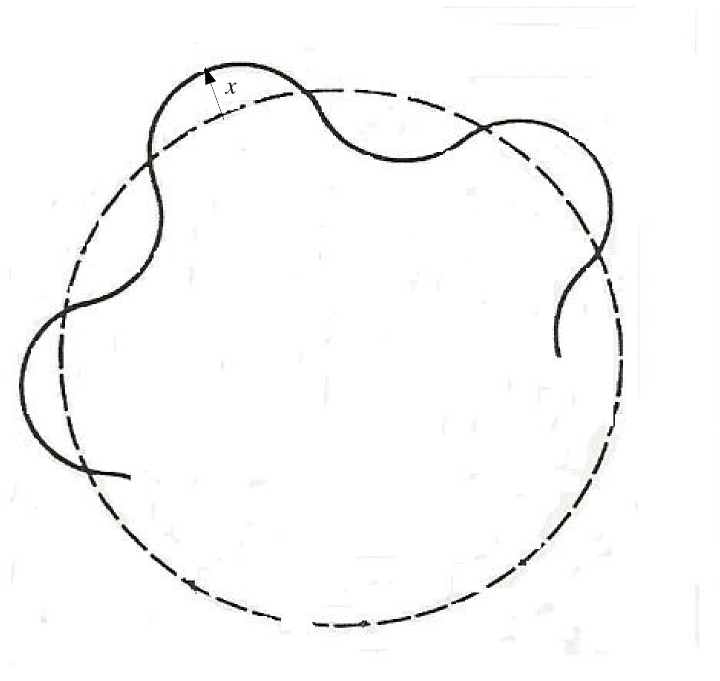

Figura 5.1: Movimento oscilatório de uma partícula perturbada radialmente em torno de uma órbita circular estável.

5.1.1 Perturbando uma Órbita Circular

Quando uma órbita circular de raio r_0 no plano equatorial $z = 0$ é perturbada, ocorre um pequeno desvio de sua trajetória, $x \sim 0$ (veja a figura 5.1). Podemos reescrever as equações de movimento em termos desse desvio, fazendo a transformação de coordenadas $(r, z') \Rightarrow (x, z)$. Vamos supor também que o desvio $z \sim 0$. Para tanto, precisamos definir a transformação:

$$z' \mapsto z, \qquad r \mapsto x = r - r_0.$$

As equações de movimento tornam-se:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{eff}(x, z), \tag{5.10}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{eff}(x, z). \tag{5.11}$$

Agora, calculamos o potencial Φ_{eff} em torno de $(r_0, 0)$ expandindo em série de Taylor:

$$\begin{aligned}\Phi_{eff}(x,z) &= \Phi_{eff}(r_0,0) + \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r}|_{(r_0,0)}x + \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z}|_{(r_0,0)}z + \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r \partial z}|_{(r_0,0)}xz \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2}|_{(r_0,0)}x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2}|_{(r_0,0)}z^2 + O(> xz, x^2, z^2).\end{aligned} \tag{5.12}$$

Quando $x \sim 0$ e $z \sim 0$, os termos de ordem superior a x^2 e z^2 não contribuem significativamente para o potencial. Além disso, os termos cruzados xz são nulos devido à simetria de reflexão do potencial em relação ao plano equatorial $z = 0$:

$$\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z}|_{(r_0,z=0)} = 0 \tag{5.13}$$

e

$$\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r \partial z}|_{(r_0,z=0)} = 0. \tag{5.14}$$

Logo,

$$\Phi_{eff}(x,z) \approx \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2}|_{(r_0,0)}x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2}|_{(r_0,0)}z^2. \tag{5.15}$$

Portanto, as equações de movimento assumem a forma:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \tag{5.16}$$

e

$$\ddot{z} + \nu^2 z = 0, \tag{5.17}$$

com

$$k^2 = \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2}|_{(r_0,0)} \tag{5.18}$$

e

$$\nu^2 = \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2}|_{(r_0,0)}. \tag{5.19}$$

As freqüências (5.18) e (5.19) dos osciladores (5.16) e (5.17) são chamadas, respectivamente, de *freqüência epicíclica* (ou *radial*) e *freqüência vertical*.

5.1.2 Estabilidade das Órbitas Circulares

A estabilidade de uma órbita pode ser estudada através da forma do seu potencial. Os extremos desse potencial irão definir regiões de instabilidade e estabilidade. Sabemos que as coordenadas ($r = r_0, z = 0$) que definem a órbita circular extremos do seu potencial efetivo Φ_{eff}. Portanto, precisamos apenas saber se neste caso se trata de um máximo ou um mínimo do potencial. As freqüências epicíclica (5.18) e vertical (5.19) permitem obter esta resposta, pois são proporcionais a derivadas segundas do potencial efetivo. Para efetuar o cálculo precisamos ainda determinar a componente L_z do momento angular, relacionada com a velocidade angular da partícula, $\dot{\varphi}$.

Sabemos que em uma órbita circular a coordenada radial r da partícula orbitante é constante ($r = r_0$). Da equação de movimento na direção radial (5.1) temos que $\ddot{r} = 0$. Logo:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Utilizamos as equações para as freqüências epicíclica e vertical para calcular a estabilidade para diferentes raios de órbitas circulares r_0:

$$k^2 = \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2}|_{(r_0,0)} \tag{5.20}$$

e

$$\nu^2 = \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2}|_{(r_0,0)}. \tag{5.21}$$

Quando $k^2, \nu^2 > 0$, temos que a órbita circular é estável. No caso em que $k^2, \nu^2 < 0$ e $k^2, \nu^2 = 0$ (marginalmente estável), teremos a sua instabilidade.

5.2 O Modelo Relativístico

Como já vimos, a forma geral da métrica para um espaço-tempo axialmente simétrico é dada por (3.18), nas coordenadas de Weyl:

$$ds^2 = g_{tt}(r,z)dt^2 + g_{\varphi\varphi}(r,z)d\varphi^2 + 2g_{t\varphi}(r,z)dtd\varphi + f(r,z)(dr^2 + dz^2),$$

com as componentes da métrica sendo funções apenas de r e z. Tomamos uma linha de mundo $x^\mu(\tau)$ do tipo-tempo. Sua quadrivelocidade é

$$u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \tag{5.22}$$

e sua velocidade angular no plano de rotação é

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{5.23}$$

Para órbitas circulares, temos que $r = const$, $z = const$ e $\Omega = const$. Portanto,

$$u^\mu = u^t(1, \Omega, 0, 0), \tag{5.24}$$

com

$$(u^t)^{-2} = -g_{tt} - 2g_{t\varphi}\Omega - g_{\varphi\varphi}\Omega^2 \tag{5.25}$$

e

$$\Omega_\pm = \frac{-g_{t\varphi,r} \pm \sqrt{g^2_{t\varphi,r} - g_{tt,r}g_{\varphi\varphi,r}}}{g_{\varphi\varphi,r}}.$$

Analisamos o movimento circular para os dois casos: sem e com rotação do buraco negro central, que correspondem, respectivamente, ao buraco negro de Schwarzschild com um anel de matéria ($g_{t\varphi} = 0$) e ao buraco negro de Kerr com um anel de matéria ($g_{t\varphi} \neq 0$).

5.2.1 Perturbando o Movimento Geodésico

Em relatividade geral, uma pequena perturbação no movimento geodésico $\delta x^\mu(\tau)$ satisfaz a equação do desvio geodésico (2.16) descrita no capítulo 2:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(\delta x^\mu) + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d}{d\tau}(\delta x^\beta) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\nu}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\delta x^\nu = 0.$$

No movimento geodésico circular, devido à simetria axial da métrica, temos uma simetria adicional de reflexão ao plano $z = 0$ que pode ser expressa em termos da condição $g_{\mu\nu,z}(z = 0) = 0$. Isso mostra que o movimento (devido à perturbação) na direção espaço-temporal z é desacoplado das demais. Podemos evidenciar este fato escrevendo as componentes da equação do desvio geodésico:

$$\frac{d^2(\delta t)}{d\tau^2} + 2(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{\varphi r}\Omega)u^t\frac{d(\delta r)}{d\tau} = 0, \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2(\delta r)}{d\tau^2} &+ 2(\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{t\varphi}\Omega)u^t\frac{d(\delta t)}{d\tau} + 2(\Gamma^r_{t\varphi} + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\Omega)u^t\frac{d(\delta\varphi)}{d\tau} \\ &+ (\Gamma^r_{tt,r} + 2\Gamma^r_{t\varphi,r}\Omega + \Gamma^r_{\varphi\varphi,r}\Omega^2)(u^t)^2(\delta r) = 0,\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\frac{d^2(\delta\varphi)}{d\tau^2} + 2(\Gamma^\varphi_{tr} + \Gamma^\varphi_{\varphi r}\Omega)u^t\frac{d(\delta r)}{d\tau} = 0, \tag{5.28}$$

$$\frac{d^2(\delta z)}{d\tau^2} + (\Gamma^z_{tt,z} + 2\Gamma^z_{t\varphi,z}\Omega + \Gamma^z_{\varphi\varphi,z}\Omega^2)(u^t)^2(\delta z) = 0. \tag{5.29}$$

Observamos claramente que a solução para δz tem a forma de uma oscilação harmônica $\sim e^{i\nu\tau}$, com

$$\nu^2 = (\Gamma^z_{tt,z} + 2\Gamma^z_{t\varphi,z}\Omega + \Gamma^z_{\varphi\varphi,z}\Omega^2)(u^t)^2.$$

Supondo que as demais soluções δt, $\delta\varphi$ e δr também tenham a forma de oscilações harmônicas $\sim e^{iK\tau}$, podemos escrever a forma geral da solução δx^μ, como [8, 41]:

$$\delta x^\nu = A^\nu e^{iK\tau}. \tag{5.30}$$

Substituindo (5.30) na equação do desvio geodésico (2.16), encontramos o seguinte sistema de equações a ser resolvido:

$$M^\mu_\nu A^\nu = 0, \tag{5.31}$$

com

$$M^\mu_\nu = -K^2\delta^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\nu}u^\alpha u^\beta + 2i\Gamma^\mu_{\alpha\nu}u^\alpha K. \tag{5.32}$$

De maneira geral, precisamos que

$$\det M = 0, \tag{5.33}$$

para que o sistema (5.31) tenha solução não-trivial.

Para uma órbita circular equatorial a geodésica tem as seguintes componentes:

$$x^\mu_{circ} = (t, \varphi, r = r_{circ}, z = 0), \tag{5.34}$$

com a quadrivelocidade dada por,

$$u^{\mu}_{circ} = u^t(1, \Omega, 0, 0). \tag{5.35}$$

Como a equação na direção z é desacoplada das demais, o sistema (5.31) para perturbação na direção z reduz-se a:

$$M^z_z(x^{\mu}_{circ}) = 0. \tag{5.36}$$

Resolvendo esta equação, encontramos o mesmo resultado anterior para a freqüência de oscilação na direção z, que é chamada de *freqüência vertical* e é dada pela expressão:

$$\nu^2 = (u^t)^2[\Gamma^z_{tt,z} + 2\Gamma^z_{t\varphi,z}\Omega + \Gamma^z_{\varphi\varphi,z}\Omega^2], \tag{5.37}$$

onde fizemos a equivalência

$$\nu \equiv K. \tag{5.38}$$

Para a perturbação em r, o sistema (5.31) envolve as coordenadas t, φ e r assumindo a seguinte forma:

$$\det(M^b_a(x^{\mu}_{circ})) = 0, \tag{5.39}$$

com os índices a e b assumindo as componentes t, φ e r. Obtemos a seguinte equação a resolver:

$$\det\begin{pmatrix} -K^2 & 0 & 2iK\Gamma^t_{ar}u^a \\ 0 & -K^2 & 2iK\Gamma^{\varphi}_{ar}u^a \\ 2iK\Gamma^r_{at}u^a & 2iK\Gamma^r_{a\varphi}u^a & -K^2 + \Gamma^r_{ab,r}u^a u^b \end{pmatrix} = 0.$$

Da mesma forma, resolvemos (5.39) para K e definimos a *freqüência epicíclica* como:

$$\kappa \equiv K. \tag{5.40}$$

As únicas soluções para κ não nulas são:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= (u^t)^2[\Gamma^r_{tt,r} + 2\Gamma^r_{t\varphi,r}\Omega + \Gamma^r_{\varphi\varphi,r}\Omega^2 \\ &- 4(\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{t\varphi}\Omega)(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{\varphi r}\Omega) \\ &- 4(\Gamma^r_{t\varphi} + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\Omega)(\Gamma^{\varphi}_{tr} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi r}\Omega)]. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Esta freqüência de oscilação harmônica no plano do anel é a *freqüência epicíclica*. O resultado obtido é o mesmo da referência [41], assim como para a *freqüência vertical* (5.37).

5.2.2 Estabilidade do Movimento Geodésico Circular

Em relatividade geral, o papel do potencial gravitacional newtoniano é desempenhado pela função métrica $g_{\mu\nu}$. Analogamente ao caso newtoniano, é possível mostrar que as freqüências epicíclicas e verticais envolvem derivadas segundas da função métrica, que contém toda a informação sobre a geometria do espaço-tempo. Portanto, o conhecimento destas freqüências nos diz se o movimento geodésico está ocorrendo em uma região de estabilidade ou instabilidade da órbita circular.

Precisamos calcular os valores de ν^2 e κ^2 para cada valor do raio da órbita $r = r_0$ no plano equatorial $z = 0$:

$$\nu^2_{|r=r_0,z=0} = (u^t)^2[\Gamma^z_{tt,z} + 2\Gamma^z_{t\varphi,z}\Omega + \Gamma^z_{\varphi\varphi,z}\Omega^2]_{|r=r_0,z=0},$$

e

$$\begin{aligned}
\kappa^2_{|r=r_0,z=0} &= (u^t)^2[\Gamma^r_{tt,r} + 2\Gamma^r_{t\varphi,r}\Omega + \Gamma^r_{\varphi\varphi,r}\Omega^2 \\
&- 4(\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{t\varphi}\Omega)(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{\varphi r}\Omega) \\
&- 4(\Gamma^r_{t\varphi} + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\Omega)(\Gamma^\varphi_{tr} + \Gamma^\varphi_{\varphi r}\Omega)]_{|r=r_0,z=0},
\end{aligned} \tag{5.42}$$

com

$$\Omega_{|r=r_0,z=0} = \frac{-g_{t\varphi,r} \pm \sqrt{g^2_{t\varphi,r} - g_{tt,r}g_{\varphi\varphi,r}}}{g_{\varphi\varphi,r}}.$$

Assim como no caso newtoniano, quando temos $\kappa^2, \nu^2 > 0$, a órbita circular será estável. No caso em que $\kappa^2, \nu^2 < 0$ e $\kappa^2, \nu^2 = 0$ (marginalmente estável), teremos a situação de instabilidade.

5.3 Comparando o Modelo Newtoniano e o Relativístico

Como dito anteriormente, podemos aproximar o potencial newtoniano para um anel de matéria através da seguinte série:

$$\Phi^{(i)}_A(R,\theta) = -\frac{Gm}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\left(\frac{R}{b}\right)^{2l}P_{2l}(\cos\theta),$$

para $R < b$, e para o caso $R > b$ temos,

$$\Phi^{(e)}_A(R,\theta) = -\frac{Gm}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\left(\frac{b}{R}\right)^{2l}P_{2l}(\cos\theta),$$

com b sendo o raio do anel e R o raio esférico, que está relacionado com as coordenadas cilíndricas da seguinte forma:

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

O potencial newtoniano para o corpo central (buraco negro) é:

$$\Phi_C(R) = -\frac{M}{R}. \tag{5.43}$$

Logo, o potencial do sistema corpo central mais anel de matéria é dado por:

$$\Phi^{(i)}(R, \theta) = \Phi_A^{(i)}(R, \theta) + \Phi_C(R) \tag{5.44}$$

e

$$\Phi^{(e)}(R, \theta) = \Phi_A^{(e)}(R, \theta) + \Phi_C(R), \tag{5.45}$$

pois as equações de Newton são lineares. Podemos definir o potencial efetivo como

$$\Phi_{eff}^{(i)}(R, \theta) = \Phi^{(i)}(R, \theta) + \frac{L_z^2}{2R^2}, \tag{5.46}$$

e

$$\Phi_{eff}^{(e)}(R, \theta) = \Phi^{(e)}(R, \theta) + \frac{L_z^2}{2R^2}. \tag{5.47}$$

Utilizamos as equações das freqüências epicíclica e vertical para calcular a estabilidade para diferentes raios de órbitas circulares r_0:

$$\kappa^2 = \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2}|_{(r_0,0)}, \tag{5.48}$$

e

$$\nu^2 = \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2}|_{(r_0,0)}. \tag{5.49}$$

Executamos estes cálculos através do *software Maple* para $l = 4$ na série da expansão multipolar do anel. Os resultados para os modelos newtoniano e relativístico serão discutidos no próximo capítulo.

6

Análise da Estabilidade das Órbitas

Neste capítulo faremos o estudo da estabilidade de órbitas circulares equatoriais conforme descrito no capítulo anterior. Analisaremos perturbações radiais e verticais encontrando, respectivamente, as freqüências epicíclicas e verticais para os casos newtoniano e relativístico para vários valores dos parâmetros relacionados ao buraco negro central e ao anel de matéria.

Dinâmica do Sistema Gravitante

Apresentamos o estudo da estabilidade das órbitas circulares para valores específicos de diferentes parâmetros. Fixamos nossas unidades fazendo a massa do buraco negro, a constante de gravitação universal e a velocidade da luz, respectivamente, iguais à unidade ($M = G = c = 1$). A relação entre as coordenadas cilíndricas usadas (t, φ, r, z) e as de Boyer-Lindquist $(t, \varphi, \rho, \vartheta)$ é [7]:

$$r = [(\rho - M)^2 + a^2 - M^2]^{1/2} \sin\vartheta, \tag{6.1}$$

$$z = (\rho - M)\cos\vartheta. \tag{6.2}$$

A órbita circular de fótons (OCF) é encontrada resolvendo a equação da geodésica para fótons que se movem no plano equatorial. Para um buraco negro sem rotação, caso de Schwarzschild, o raio da OCF é $r_{OCF} = 1,73$ ($\rho_{OCF} = 3$). Órbitas circulares com raios entre $r = 0$ e r_{OCF} são superluminais [42].

A órbita circular estável interna (OCEI) está em $r_{OCEI} = 4,89$. O horizonte de eventos nas coordenadas de Weyl torna-se uma barra fina de comprimento $2M$ localizada simetricamente ao longo do eixo z. Na região entre $r = 1,73$ e $r = 4,89$ (OCEI) temos $\kappa^2 < 0$ e $\nu^2 > 0$, ou seja, as órbitas circulares equatoriais nesta região são instáveis. Para $r > 4,89$, temos $\kappa^2 > 0$ e $\nu^2 > 0$ e as órbitas são estáveis. Lembramos que as órbitas circulares de partículas em torno de um centro newtoniano de atração $1/R$ são estáveis sob estas perturbações radiais e verticais (ver [8]).

No caso do buraco negro de Kerr temos duas possibilidades para as partículas se movendo em órbitas circulares: elas podem orbitar no mesmo sentido de rotação do buraco negro (co-rotação) ou no sentido contrário (contra-rotação). Na tabela 6.1 apresentamos os valores de r_{OCEI} e r_{OCF}, bem como seus respectivos valores nas coordenadas de Boyer-Lindquist, em função do parâmetro de rotação a (veja também [44] e [4]).

Na co-rotação, a OCEI é movida para fora do centro de atração. Por isso, a região de instabilidade aumenta com a. Para contra-rotação, temos o comportamento oposto: a OCEI é movida em direção ao centro de atração com o aumento de a. Portanto, para $r_0 > r_{OCEI}$ temos estabilidade epicíclica e vertical.

Analisaremos agora a estabilidade de órbitas circulares ao redor de um buraco negro de Kerr com um anel de matéria. Consideramos o potencial do anel como uma expansão multipolar truncada em $l = 4$ para construir as soluções das equações de Einstein. Como dissemos anteriormente, temos uma boa aproximação com o erro menor que 1%, no cálculo das funções Φ e σ quando $R < b/2$, ou seja, num disco com a metade do raio do anel. Temos a mesma aproximação para $R > 3b/2$.

Escolhemos três valores para o raio do anel, $b = 3$, $b = 6$ e $b = 10$ (em coordenadas de Weyl) e dois valores para sua massa $m = 0,4$ e $m = 0,8$. O valor $m = 0,8$ é típico para massa de um disco de acreção [27].

Quando introduzimos o anel de matéria, podemos ter regiões de estabilidade na parte interna

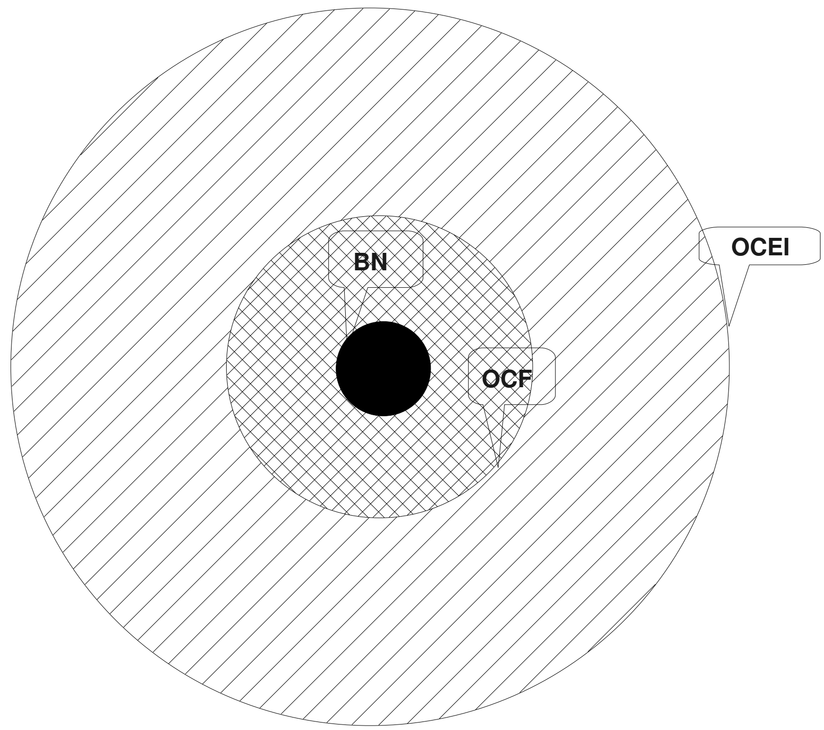

Figura 6.1: Órbitas circulares equatoriais especiais de um buraco negro (BN). Do centro para fora, temos a órbita circular de fótons (OCF), que delimita a região do plano equatorial onde apenas órbitas superluminais ocorrem, e órbita circular estável interna (OCEI), que é a primeira órbita estável. A partir desta, todas as órbitas são estáveis. A região de instabilidade está entre a OCF e OCEI. Nesta figura, as regiões com hachuras representam zonas de instabilidade, as em branco, de estabilidade, e as cruzadas, zonas de órbitas não físicas.

do mesmo. O conceito de OCEI não é adequado e o substituímos por um conceito de órbita circular que limite uma zona de instabilidade fora do anel. Esta órbita será chamada de Órbita Circular Instável Externa (OCIE), pois além desta órbita teremos estabilidade sob perturbações radiais e verticais ($\kappa^2 > 0$ e $\nu^2 > 0$, veja figura 6.2).

Para um centro newtoniano de atração de massa igual à unidade com um anel de raio $b = 3, 6, 10$, temos que as órbitas circulares internas ao anel são estáveis. Fora do anel, temos estabilidade para órbitas de raio maiores que $r_{OCIE} = 3,98; 7,95$ e $13,24$, respectivamente. Em

Co-rotação ($\Omega > 0$)											
a	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,99
r_{OCF}	1,73	1,87	1,99	2,12	2,26	2,38	2,51	2,63	2,76	2,87	2,99
r_{OCEI}	4,89	5,22	5,54	5,86	6,18	6,49	6,79	7,09	7,39	7,68	7,95
ρ_{OCF}	3,00	3,11	3,22	3,32	3,44	3,54	3,63	3,73	3,82	3,91	3,99
ρ_{OCEI}	6,00	6,31	6,63	6,93	7,25	7,55	7,84	8,12	8,41	8,70	8,95
Contra-rotação ($\Omega < 0$)											
r_{OCF}	1,73	1,60	1,46	1,33	1,18	1,03	0,88	0,72	0,55	0,35	0,10
r_{OCEI}	4,89	4,56	4,21	3,86	3,49	3,11	2,70	2,27	1,80	1,24	0,43
ρ_{OCF}	3,00	2,88	2,76	2,63	2,50	2,35	2,19	2,02	1,81	1,56	1,17
ρ_{OCEI}	6,00	5,66	5,32	4,97	4,61	4,23	3,82	3,38	2,90	2,32	1,45

Tabela 6.1: O raio da órbita circular fotônica (OCF) e da órbita circular estável interna (OCEI) em coordenadas de Weyl (r) e Boyer-Lindquist (ρ) para um buraco negro (BN) de Kerr de massa igual à unidade. Na co-rotação, quando $a \to 1$, temos $\rho_{OCEI} \to 9$ e $\rho_{OCF} \to 4$. Para contra-rotação, se $a \to 1$, constatamos que $\rho_{OCEI} \to 1$ e $\rho_{OCF} \to 1$.

outras palavras, o anel cria uma zona de instabilidade além do seu raio.

Agora analisamos a estabilidade de órbitas circulares equatoriais em torno do BN de Kerr com o anel de matéria.

Na co-rotação ($\Omega > 0$) encontramos que, tanto dentro como fora do anel, podemos ter órbitas circulares instáveis. Na tabela 6.2 observamos que, no caso limite $a = 0$, existe uma zona estável apenas na região interna do anel de massa $m = 0,4$, e, quando adicionamos uma pequena rotação ao buraco negro, a estabilidade é destruída.

Quando $\Omega < 0$ (contra-rotação), temos uma dinâmica mais complexa. Há zonas de estabilidade das órbitas dentro e fora do anel (ver figura 6.2). O surgimento destas zonas é intensificado quando a e b aumentam, e seu tamanho reduzido quando m aumenta. Na tabela 6.3 mostramos as zonas de estabilidade para o raio do anel $b = 10$ e massa $m = 0,4$ e $m = 0,8$.

Nas tabelas 6.4 e 6.5 mostramos o comportamento da OCF, assim como o da OCIE, para um

Zonas de estabilidade (co-rotação)				
Raio do anel ($b = 10$)				
$m = 0,4$			$m = 0,8$	
a	$r < 10$	$r > 10$	$r < 10$	$r > 10$
0,0	$5,38 < r < 6,74$	$r_{OCIE} > 13,33$	-	$r_{OCIE} > 15,20$
0,1	-	$r_{OCIE} > 13,45$	-	$r_{OCIE} > 15,36$
0,2	-	$r_{OCIE} > 13,56$	-	$r_{OCIE} > 15,52$
0,3	-	$r_{OCIE} > 13,67$	-	$r_{OCIE} > 15,67$
0,4	-	$r_{OCIE} > 13,78$	-	$r_{OCIE} > 15,82$
0,5	-	$r_{OCIE} > 13,89$	-	$r_{OCIE} > 15,96$
0,6	-	$r_{OCIE} > 13,99$	-	$r_{OCIE} > 16,11$
0,7	-	$r_{OCIE} > 14,10$	-	$r_{OCIE} > 16,26$
0,8	-	$r_{OCIE} > 14,21$	-	$r_{OCIE} > 16,41$
0,9	-	$r_{OCIE} > 14,30$	-	$r_{OCIE} > 16,55$

Tabela 6.2: Zonas de estabilidade como uma função do parâmetro de rotação a para partículas movendo-se em co-rotação com o buraco negro (BN) de Kerr de massa igual à unidade com o anel de raio $b = 10$, e massa $m = 0,4$ e $m = 0,8$.

BN de Kerr de massa igual à unidade, circundado por um anel de matéria de massa $m = 0,8$. Consideramos três valores para o raio do anel $b = 3, 6$ e 10.

Quando $a = 0$ (BN de Schwarzschild), temos que, para um anel de raio $b = 3$, a presença do anel produz a duplicação da OCF (veja tabela 6.4). A figura 6.3 mostra a posição das duas OCF's, interna e externa ao anel. Temos dois valores de raio para a OCF: $r_{OCF}^{In} = 1,66$ (dentro do anel) e $r_{OCF}^{Out} = 3,66$ (fora do anel). Em geral, temos que a OCF tem seu raio diminuído pela presença do anel e tende ao tamanho original quando b aumenta.

Em geral, esta duplicação depende do tamanho do anel de raio b e do parâmetro de Kerr a. Na tabela 6.4 mostramos o raio da OCF para a co-rotação. Para $b = 3$ o anel está próximo do buraco negro central e encontramos que há duplicação para todos os valores de a. Para $b = 6$,

Zonas de estabilidade (contra-rotação)				
$b = 10$				
$m = 0,4$			$m = 0,8$	
a	$r < 10$	$r > 10$	$b < 10$	$r > 10$
0,0	$5,38 < r < 6,74$	$r > 13,33$	-	$r > 15,20$
0,1	$4,84 < r < 7,01$	$r > 13,22$	-	$r > 15,04$
0,2	$4,39 < r < 7,19$	$r > 13,10$	$4,71 < r < 5,81$	$r > 14,88$
0,3	$3,97 < r < 7,33$	$r > 12,98$	$4,11 < r < 6,13$	$r > 14,70$
0,4	$3,57 < r < 7,44$	$r > 12,85$	$3,63 < r < 6,33$	$r > 14,53$
0,5	$3,16 < r < 7,54$	$r > 12,71$	$3,19 < r < 6,47$	$r > 14,35$
0,6	$2,74 < r < 7,63$	$r > 12,57$	$2,76 < r < 6,59$	$r > 14,16$
0,7	$2,30 < r < 7,70$	$r > 12,41$	$2,31 < r < 6,69$	$r > 13,96$
0,8	$1,82 < r < 7,77$	$r > 12,25$	$1,82 < r < 6,77$	$r > 13,74$
0,9	$1,25 < r < 7,83$	$r > 12,08$	$1,27 < r < 6,85$	$r > 13,52$

Tabela 6.3: Zonas de estabilidade como uma função do parâmetro de rotação a para partículas movendo-se em contra-rotação com o buraco negro (BN) de Kerr de massa igual a unidade com o anel de raio $b = 10$ e massa $m = 0,4$ ou $m = 0,8$.

a duplicação é produzida quando $a > 0,2$. Para $b = 10$, não observamos a duplicação da OCF. Este efeito é intensificado quando a e m aumentam, e é reduzido quando b aumenta.

Na tabela 6.5 vemos o efeito da duplicação da OCF para a contra-rotação para um buraco negro de massa igual à unidade circundado por um anel de matéria de massa $m = 0,8$ e raio $b = 3$. Para grandes valores de b, este valor de massa não é suficiente para criar a duplicação. Estudando anéis de massas diferentes encontramos que se a massa do anel diminui, este efeito também diminui.

A tabela 6.4 mostra que no caso de um BN de Schwarzschild ($a = 0,0$), o anel cria instabilidade movendo a OCIE para fora do centro de atração. Para a co-rotação o raio da OCIE é aumentado quando a cresce. Na tabela 6.5 vemos o comportamento oposto para a contra-

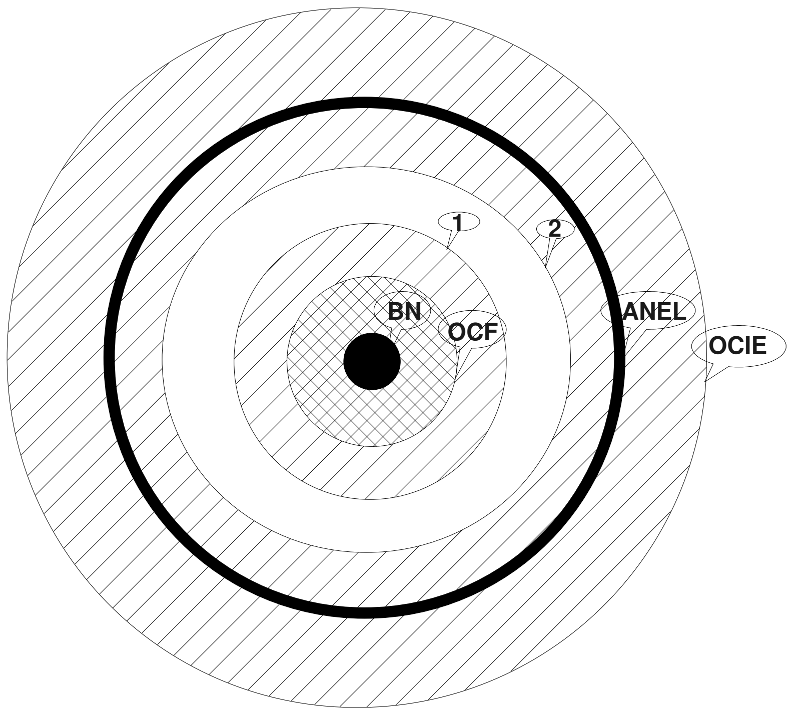

Figura 6.2: Para um buraco negro (BN) de Schwarzschild e Kerr com o anel de matéria, na contra-rotação, temos o aparecimento de uma zona de estabilidade entre as órbitas 1 e 2 (região em branco). Temos zonas de instabilidade entre a órbita circular de fótons (OCF) e a órbita 1, entre a órbita 2 e o anel, e entre o anel e a órbita circular instável externa (OCIE), que é a última órbita instável. Nesta figura, as regiões com hachuras representam zonas de instabilidade, as em branco, de estabilidade, e as cruzadas, zonas de órbitas não físicas.

rotação: a OCIE diminui quando a aumenta.

r_{OCF} e r_{OCIE} para um BN de Kerr + anel de massa $m = 0,8$								
Co-rotação ($\Omega > 0$)								
$b = 3$				$b = 6$			$b = 10$	
a	r^{in}_{OCF}	r^{out}_{OCF}	r_{OCIE}	r^{in}_{OCF}	r^{out}_{OCF}	r_{OCIE}	r_{CP0}	r_{OCIE}
0,0	1,60	3,66	8,12	1,72	–	10,77	1,73	15,20
0,1	1,74	3,78	8,48	1,85	–	11,01	1,87	15,36
0,2	1,87	3,89	8,83	1,99	–	11,24	2,00	15,52
0,3	1,99	4,00	9,17	2,14	6,02	11,47	2,13	15,67
0,4	2,09	4,10	9,49	2,28	6,09	11,69	2,27	15,82
0,5	2,20	4,18	9,81	2,42	6,16	11,92	2,39	15,96
0,6	2,29	4,28	10,13	2,56	6,23	12,15	2,54	16,11
0,7	2,38	4,37	10,44	2,69	6,29	12,37	2,66	16,26
0,8	2,47	4,46	10,74	2,84	6,35	12,60	2,78	16,41
0,9	2,54	4,55	11,04	2,97	6,40	12,82	2,92	16,55

Tabela 6.4: Buraco negro (BN) de Kerr de massa igual à unidade, cercado por um anel de matéria de massa $m = 0,8$. Mostramos os valores do raio da órbita circular fotônica (OCF) e da órbita circular instável externa (OCIE) para variações dos parâmetros de rotação a e raio do anel b (as partículas movem-se em co-rotação).

r_{OCF} e r_{OCIE} para um BN de Kerr + anel de massa $m = 0,8$							
Contra-rotação ($\Omega < 0$)							
$b = 3$				$b = 6$		$b = 10$	
a	r_{OCF}^{in}	r_{OCF}^{out}	r_{OCIE}	r_{OCF}	r_{OCIE}	r_{OCF}	r_{OCIE}
0,0	1,60	3,66	8,12	1,72	10,77	1,73	15,20
0,1	1,47	3,51	7,77	1,58	10,53	1,59	15,04
0,2	1,34	–	7,38	1,44	10,28	1,45	14,88
0,3	1,20	–	6,98	1,29	10,04	1,31	14,70
0,4	1,07	–	6,55	1,14	9,78	1,17	14,53
0,5	0,92	–	6,09	1,00	9,50	1,02	14,35
0,6	0,80	–	5,55	0,85	9,22	0,87	14,16
0,7	0,66	–	3,02	0,71	8,89	0,71	13,96
0,8	0,51	–	3,11	0,53	8,50	0,54	13,74
0,9	0,36	–	3,21	0,34	7,80	0,34	13,52

Tabela 6.5: Buraco negro (BN) de Kerr de massa igual à unidade cercado por um anel de matéria de massa $m = 0,8$. A tabela mostra valores do raio da órbita circular fotônica (OCF) e da órbita circular instável externa (OCIE) para variações dos parâmetros de rotação a e raio do anel b (as partículas movem-se em contra-rotação).

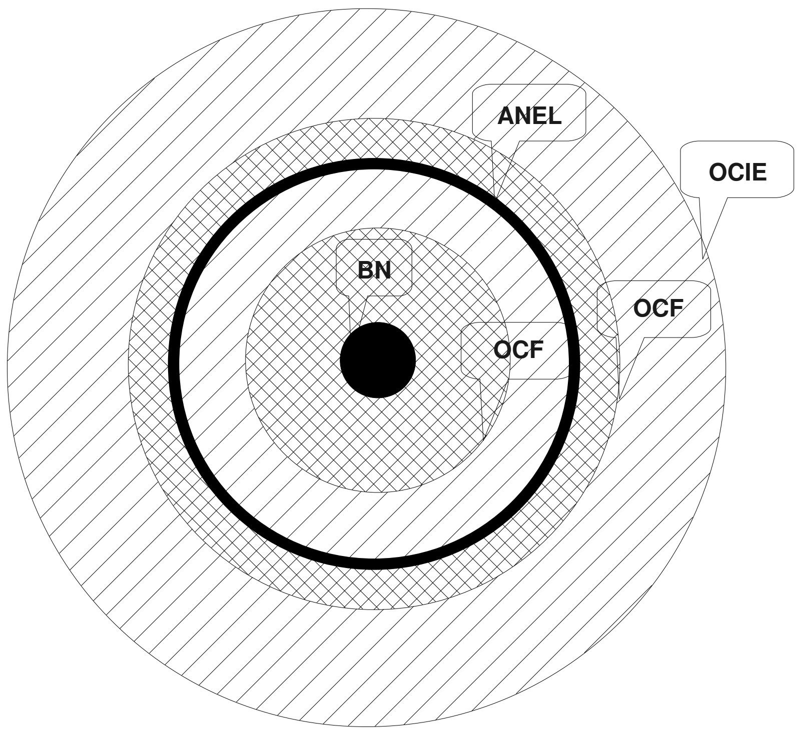

Figura 6.3: Para um buraco negro (BN) de Schwarzschild e Kerr com o anel de matéria, na co-rotação, ocorre o fenômeno da duplicação da órbita circular de fótons (OCF). Em geral, a duplicação depende do tamanho do raio do anel b e do parâmetro de Kerr a. Temos zonas de instabilidade entre a OCF interna e o anel e entre a OCF externa e a órbita circular instável externa (OCIE), que é a última órbita instável. Nesta figura, as regiões com hachuras representam zonas de instabilidade, as em branco, de estabilidade, e as cruzadas, zonas de órbitas não físicas.

7
Conclusões

Usando o método Belinsky e Zakharov, encontramos uma solução das equações de Einstein no vácuo associada a uma sobreposição não-linear de um buraco negro de Kerr e um anel de matéria de densidade constante. A solução associada ao anel foi aproximada por uma expansão multipolar truncada. Encontramos, através do estudo do erro relativo entre a série truncada e o potencial exato em termos de um integral elíptica, que uma boa aproximação para o potencial do anel dá-se com a soma dos termos de monopolo, quadrupolo, 16-pólo, 64-pólo e 256-pólo. O estudo do erro e os três últimos termos multipolares não são encontrados na literatura.

As estabilidades epicíclicas e verticais de órbitas circulares equatoriais de partículas movendo-se em torno deste sistema são consideradas para os casos relativístico e newtoniano. Nossos resultados foram apresentados nas tabelas 6.2–6.5.

De uma maneira geral, temos que a co-rotação aumenta a instabilidade e a contra-rotação a estabilidade. Encontramos o efeito não esperado da duplicação das órbitas circulares fotônicas, que é relacionado ao tamanho relativo entre o buraco negro e a massa do anel. Também encontramos outro efeito importante relacionado ao tamanho do raio do anel: o aparecimento de zonas de estabilidade na região interna do anel para o caso da contra-rotação. O tamanho destas zonas é aumentado quando o parâmetro de Kerr cresce. Tais resultados não são encontrados na literatura.

Como um comentário final, podemos dizer que o fenômeno da duplicação da órbita circular fotônica (OCF) é bastante intrigante e será assunto de um trabalho futuro, onde analisaremos os parâmetros envolvidos na produção do fenômeno. Também estudaremos outros tipos de movimento geodésico.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Referências Bibliográficas

[1] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer, *Introduction to General Relativity* (McGraw-Hill, Tokyo, 2 ed., 1975).

[2] P. Appell, Ann. Math. (Leipzig) **30**, 155 (1887).

[3] R. Bach and H. Weyl, Math. Z. **13**, 134 (1922)

[4] J. M. Bardeen, W. H. Press and S. A. Teukolsky, Astr. J. **178**, 347 (1972).

[5] V. A. Belinsky and V. E. Zakharov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **75**, 1955 (1978) [Sov. Phys. JETP **48**, 985 (1978)].

[6] V. A. Belinsky and V. E. Zakharov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **77**, 3 (1979) [Sov. Phys. JETP **50**, 1 (1979)].

[7] V. Belinsky and E. Verdaguer, *Gravitational Solitons* (Cambridge Univ. Press, 2001).

[8] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton Series in Astrophysics, 1994).

[9] R. H. Boyer and R. W. Lindquist, *J. Math. Phys.* **8**, 265 (1967).

[10] R. Buta and F. Combes, *Fund. Cosmic Physics*, **17**, 95 (1996).

[11] G. M. Castro e P. S. Letelier, *Aplicação do Método de Espalhamento Inverso em Gravitação: Buracos Negros e Anéis de Matéria*, (Trabalho apresentado no XXVII ENFPC, Águas de Lindóia, SP, setembro de 2006).

[12] A. Das, *Integrable Models* (World Scientific, 1989).

[13] Dissertação de mestrado - Instituto de Física Gleb Wataghin - Universidade Estadual de Campinas: L. A. D'Afonseca. *Soluções de Weyl: propriedades globais, singularidades e geodésicas* (Orientador: P. S. Letelier), 1999.

[14] L. A. D'Afonseca, P. S. Letelier and S. R. Oliveira, *Class. Quantum Grav.* **22**, 3803, (2005).

[15] P. G. Drazin and R.S. Johnson, *Solitons: an introduction* (Cambridge, Univ. Press, 1996).

[16] A. Einstein, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber*, 778, (1915). [retirada de: Wheeler *et al*, *Gravitation*, Freeman, New York, 1973. (Cap. 17, Sec. 7)]

[17] A. M. Fridman and N. N. Gorkavyi, *Physics of Planetary Rings: Celestial Mechanics of Continuous Media* (Springer, Berlin, 1999).

[18] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095 (1967).

[19] E. Guéron and P. S. Letelier, *Phys. Rev. E* **66**, 046611 (2002).

[20] J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity* (Addison Wesley, San Francisco, 2003).

[21] A. C. Hearn and J. P. Fitch, *Reduce User's Manual 3.6*, (Konrad-Zuse-Zentrum, Berlin, 1998).

[22] C. Hoenselaers, Class. Quantum Grav. **12**, 141, (1995).

[23] O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory* (Dover Publications, Inc., 1953).

[24] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963).

[25] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt and M. MacCallum, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge Univ. Press, 1980).

[26] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *The Classical Theory of Fields* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 4 ed., 1998).

[27] J. P. Lemos and P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* **49**, 5135 (1994).

[28] P. S. Letelier, Rev. Bras. Fís. **14**, 371 (1984).

[29] P. S. Letelier, J. Math. Phys. **26**, 326 (1985).

[30] P. S. Letelier, *J. Math. Phys.* **26**, 467 (1985).

[31] P. S. Letelier and S. R. Oliveira, *Class. Quantum Grav.***15**, 421 (1998).

[32] P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* **68**, 104002 (2003).

[33] P. S. Letelier, *Mon. Not. Astron. Soc.* **381**, 1031 (2007).

[34] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, New York, 1973).

[35] M. B. Monagan *et al*, *Maple V Programming Guide*, (Springer, 1996).

[36] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevsky and V. E. Zakharov, *Theory of solitons. The inverse scattering method* (Consultants Bureau, New York, 1984).

[37] I. D. Novikov and V. P. Frolov, *Physics of Black Holes* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989).

[38] H. Quevedo, *Phys. Rev. D* **39**, 2904 (1989).

[39] H. P. Robertson and T. W. Noonan, *Relativity and Cosmology* (Sounders, London, 1968).

[40] N. O. Santos, *Lett. Al Nuovo Cimento* **14**, 327 (1975).

[41] O. Semerak and M. Zacek, *Publ. Astron. Soc. Japan* **52**, 1067 (1984).

[42] B. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge Univ. Press, 1985).

[43] K. Schwarzschild, *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys. Tech.*, 189, (1916). [retirada de: Wheeler *et al*, *Gravitation*,Freeman, New York, 1973. (Cap. 23, Sec. 6)]

[44] M. F. Shirokov, Gen. Rel. Grav. **4**, 131 (1973).

[45] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1966).

[46] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity* (John Wiley & Sons, New York, 1972).

[47] H. Weyl, *Ann. Phys.* (*Alemanha*) **54**, 117 (1917).

[48] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, (Princeton Univ. Press, 1996).