



RAPHAEL SANTARELLI

**“TESTANDO A CONJECTURA DA CENSURA
CÓSMICA EM BURACOS NEGROS”**

CAMPINAS
2012



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

RAPHAEL SANTARELLI

**“TESTANDO A CONJECTURA DA CENSURA CÓSMICA
EM BURACOS NEGROS”**

Orientador: Prof. Dr. Alberto Saa

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin”
da Universidade Estadual de Campinas para a obtenção do título
de Doutor em Ciências.

**ESSE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELO ALUNO RAPHAEL SANTARELLI
E ORIENTADA PELO PROF. DR. ALBERTO SAA.**

Assinatura do Orientador:

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Alberto Saa", is written over a horizontal line.

CAMPINAS
2012

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
VALKÍRIA SUCCI VICENTE – CRB8/5398 - BIBLIOTECA DO IFGW
UNICAMP**

Sa59t Santarelli, Raphael, 1984-
Testando a conjectura da censura cósmica em buracos
negros / Raphael Santarelli.-- Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Alberto Vazquez Saa.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Física “Gleb Wataghin”.

1. Buracos negros (Astronomia). 2. Censura cósmica.
3. Singularidade nua. I. Saa, Alberto Vazquez, 1966-
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física
“Gleb Wataghin”. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Testing the cosmic censorship conjecture in black holes

Palavras-chave em inglês:

Black holes (astronomy)

Cosmic censorship

Naked singularity

Área de Concentração: Física

Titulação: Doutor em Ciências

Banca Examinadora:

Alberto Vazquez Saa [Orientador]

George Emanuel Avraam Matsas

Elcio Abdalla

Orlando Luis Goulart Peres

Pedro Cunha de Holanda

Data da Defesa: 25-10-2012

Programa de Pós-Graduação em: Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **RAPHAEL SANTARELLI – RA 024960** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 25 / 10 / 2012.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa - Orientador do Candidato
DMA/IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas – IFT/UNESP

Prof. Dr. Elcio Abdalla – IF/USP

Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres – DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda – DRCC/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Gostaria de começar agradecendo meus pais, Mauricéia e Júlio Cesar, que sempre me apoiaram nas minhas escolhas, mesmo quando eu disse que prestaria Física no vestibular. Foi graças a esse suporte, e a toda confiança que depositaram em mim, que pude chegar onde estou hoje.

Em segundo lugar gostaria de agradecer minha esposa Maria Clara por todo apoio, companheirismo, incentivo e paciência que teve comigo por todos esses anos. Ela sempre esteve do meu lado me ajudando em todas as situações, seja lendo inúmeras vezes meus relatórios e trabalhos em busca de erros (e sempre sugerindo uma melhor maneira de formular uma frase, já que esse nunca foi meu forte), seja ouvindo várias vezes a mesma apresentação para que eu pudesse ensaiar minhas palestras, ou mesmo me mandando estudar quando eu me sentia desmotivado. Grande parte desse meu trabalho eu devo a ela.

Também gostaria de agradecer meu orientador, prof. Dr. Alberto Saa, que sempre apostou em mim e confiou no meu potencial, tanto que foi meu único orientador desde a iniciação científica, que teve início em 2004. E também o prof. Dr. Vitor Cardoso e todo o pessoal do IST de Lisboa pela ótima acolhida e por toda ajuda que tive durante minha estadia por lá.

Eu gostaria de agradecer todos os meus professores, desde os do ensino médio, que despertaram em mim o interesse por exatas, e mais especificamente pela Física, até os da pós-graduação. Todos tiveram sua parcela de contribuição no meu aprendizado. Também queria agradecer meus familiares por entenderem que as várias comemorações que perdi não foram por querer, mas sim porque estava estudando para alguma prova, ou fazendo algum trabalho; e também meus amigos, especialmente os da faculdade, pelas discussões sobre as disciplinas.

Por fim, gostaria de agradecer a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro, sob processo 2007/03522-7.

Resumo

O objetivo deste trabalho é testar a validade da Conjectura Fraca da Censura Cósmica em espaços-tempo com buracos negros. Essa conjectura foi proposta por Roger Penrose em 1969, e diz que singularidades resultantes de colapso gravitacional de matéria fisicamente razoável estão sempre envolvidas por um horizonte de eventos, ou seja, escondidas de um observador externo. Apesar de muitas evidências a favor dessa conjectura, ela nunca foi provada. Nossa meta é analisar se essa conjectura pode ser violada classicamente sob específicas circunstâncias. Começaremos com uma introdução ao assunto, apresentando os conceitos que nos serão úteis ao longo de nosso trabalho. Depois investigaremos os trabalhos anteriores na área, que visaram destruir o horizonte de eventos de um buraco negro, criando assim uma singularidade nua (visível), e conseqüentemente violando a conjectura. Por fim, apresentaremos nossos resultados, que podem ser divididos em duas partes: (i) generalização dos casos clássicos obtidos anteriormente, e demonstração, sob dadas condições, da violação da conjectura para um buraco negro de Kerr-Newman e (ii) análise da validade da conjectura para um buraco negro com cinco dimensões em um espaço-tempo assintoticamente AdS, dando assim uma contribuição para a correspondência AdS/CFT.

Abstract

The aim of this work is to test the Weak Cosmic Censorship Conjecture in black holes. This conjecture was proposed by Roger Penrose in 1969, and it states that singularities arising from the gravitational collapse of physically reasonable matter are always involved by an event horizon, i.e., they are hidden from an external observer. Despite so much evidence in favor of this conjecture, it has never been proven. Our aim is to analyze if this conjecture can be violated classically under specific circumstances. We will start with an introduction to the subject, presenting the concepts that will be useful throughout the work. After that, we will investigate the previous studies in the field that tried to destroy the event horizon of a black hole, creating a naked (visible) singularity, and hence violating the conjecture. Lastly, we will present our results, which may be divided in two parts: (i) generalization of the classic cases previously obtained, and demonstration, under specific conditions, of the violation of the conjecture in a spacetime with a Kerr-Newman black hole and (ii) study of the validity of this conjecture with a five-dimensional rotating black hole in a asymptotically AdS spacetime, making a contribution to the AdS/CFT correspondence.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Resumo Histórico da Relatividade Geral	1
1.2	Objetivos do Trabalho	6
2	Considerações Iniciais	8
2.1	Fundamentos da Relatividade Geral	8
2.1.1	Variedades, vetores e tensores	8
2.1.2	Curvatura e as equações de Einstein	12
2.2	Perturbações lineares em buracos negros, espaços-tempo anti-de-Sitter e correspondência AdS/CFT	15
2.3	Singularidades e a conjectura da censura cósmica	17
3	Motivação e trabalhos anteriores	21
3.1	Análises Clássicas	22
3.1.1	Análise de Wald	22
3.1.2	Análise de Hubeny	26
3.1.3	Análise de Jacobson	33
3.2	Análises Semiclássicas	39
4	Destruindo o horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr-Newman quase-extremo	46
4.1	Conceitos Iniciais	46

4.2	Lançamento do Horizonte	49
4.3	Lançamento do Infinito	53
4.4	Exemplo	58
5	Investigação em espaços-tempo anti-de-Sitter cinco-dimensionais	59
5.1	Introdução	60
5.2	Perturbação gravitacional	61
5.3	Quantidades conservadas	63
5.4	Tensor de energia-momento	65
5.5	Fixando o calibre	66
5.6	Testando a conjectura da censura cósmica	69
6	Considerações finais	73
	Referências Bibliográficas	76

Lista de Figuras

1.1	Albert Einstein	1
1.2	Cones de luz para o espaço-tempo de Schwarzschild	4
4.1	Parâmetros para os quais podemos ou não ter a criação de uma singularidade nua	51
4.2	Potencial efetivo para diferentes valores de α	54
4.3	Potencial efetivo para o buraco negro de Reissner-Nordström ($\alpha = \pi/2$)	55
4.4	Potencial efetivo para o buraco negro de Kerr ($\alpha = 0$)	56
4.5	Potencial efetivo para o buraco negro de Kerr-Newman ($\alpha = \pi/4$) com $L/M^2 =$ $4q/M = 4 \times 10^{-5}$	57
4.6	Potencial efetivo para o buraco negro de Kerr-Newman ($\alpha = \pi/4$) com $L/M^2 =$ $q/M = 10^{-5}$	57

Capítulo 1

Introdução

1.1 Resumo Histórico da Relatividade Geral

Albert Einstein publicou sua teoria da relatividade geral em 1916, e com ela tivemos uma profunda mudança de perspectiva e de interpretação da gravidade. Ao contrário da lei da gravitação universal de Newton, que diz que corpos massivos se atraem por ação a distância instantânea, a relatividade geral de Einstein nos dá uma descrição geométrica da gravidade, na qual espaço e tempo se fundem em um contínuo denominado espaço-tempo, que é o “pano de fundo” para todos os eventos físicos.



Figura 1.1: *Albert Einstein.*

Apesar de ser o pano de fundo, o espaço-tempo não é mais um mero espectador estático, ele faz parte da dinâmica Física, e tem papel fundamental na teoria da relatividade. A atração gravitacional agora é uma consequência da curvatura desse espaço-tempo. Parafraseando John Wheeler, podemos dizer que o espaço-tempo atua na matéria dizendo como ela deve se mover e a matéria reage atuando no espaço-tempo dizendo como ele deve se curvar.

A relatividade geral nos introduz às chamadas equações de campo de Einstein, que são um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas. Elas podem ser escritas de uma maneira sucinta (em notação tensorial, e omitindo a constante cosmológica Λ) como:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

na qual $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, G é a constante gravitacional de Newton, c é a velocidade da luz no vácuo e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento. Basicamente, o lado esquerdo da equação (tensor de Einstein) está relacionado com a curvatura do espaço-tempo, enquanto o lado direito representa o conteúdo de matéria e energia do universo. Resolver essas equações significa encontrar uma métrica (tensor métrico), que nada mais é do que um elemento de linha que descreve as propriedades do espaço-tempo, como sua geometria e sua estrutura causal.

Essas equações são muito complicadas, e o próprio Einstein não acreditava que pudessem existir soluções exatas. Mas apenas alguns meses depois de publicada sua teoria, quando ele trabalhava com aproximações para tentar simplificar as equações, surge a primeira solução exata não-trivial, encontrada por Schwarzschild, que descreve o espaço-tempo ao redor de um objeto massivo com simetria esférica, sem rotação e sem carga elétrica, no vácuo.

Essa métrica de Schwarzschild, que foi como essa solução ficou conhecida, possuía duas singularidades (locais onde a curvatura do espaço-tempo diverge, e as equações perdem a validade) quando foi proposta, uma em $r = 0$ e outra em $r = R_s = 2GM/c^2$ (chamado raio de Schwarzschild), onde r é a coordenada radial e M é a massa do objeto. Mais tarde descobriu-se que essa segunda singularidade surgia devido a escolha das coordenadas, ou seja, quando fazemos uma mudança de coordenadas adequada, essa singularidade desaparece. Já a singularidade em $r = 0$ é real, e não há nenhuma transformação de coordenadas que a faça desaparecer.

Para objetos astronômicos usuais, como planetas e estrelas, esse valor de R_s geralmente é muito menor que o próprio raio R do objeto (por exemplo, o raio da Terra é $R_T \approx 6370 \text{ km}$, enquanto que o raio de Schwarzschild da Terra é $R_s \approx 9 \text{ mm}$), e não precisamos nos preocupar com ele, já que a solução de Schwarzschild só é válida para $r > R$ (fora do objeto). Dessa forma, a métrica de Schwarzschild descreve bem o espaço-tempo fora desses objetos (na região de vácuo), desde que não possuam rotação nem carga elétrica, e sejam (aproximadamente) esféricos. Ela também pode ser usada como uma aproximação para o campo gravitacional gerado por objetos que possuam a rotação bem lenta, como a Terra ou o Sol.

Suponha que agora tenhamos um objeto massivo esférico, sem rotação, sem carga elétrica e

no vácuo, mas cujo raio R seja menor que seu correspondente raio de Schwarzschild R_s . Nesse caso temos o chamado buraco negro de Schwarzschild.

Na época essa solução não recebeu o devido mérito, pois muitos físicos, inclusive Einstein, não acreditavam que pudesse existir tal objeto. Essa descrença vinha do fato de que esse buraco negro apresentava características muito incomuns na superfície $r = R_s$. Objetos massivos, e até mesmo a luz, podem cruzar esse raio em direção à $r = 0$, mas se o fizerem não poderão mais voltar. Isso ocorre pois a curvatura do espaço-tempo é tão grande para $r < R_s$, que nem mesmo a luz consegue escapar dessa região, ou seja, todos os objetos que cruzam esse raio caem na singularidade $r = 0$. Dessa forma, seria impossível existir um objeto estável com raio $R < R_s$, pois toda a matéria colapsaria na singularidade.

Essa superfície em $r = R_s$ ficou conhecida como *horizonte de eventos*, pois atua como uma fronteira entre as regiões visíveis e invisíveis para um observador distante. Colocando de outra maneira, podemos dizer que os eventos que ocorrem dentro do horizonte não afetam um observador que está fora. Logo, o buraco negro de Schwarzschild é um objeto caracterizado por sua massa M , por uma singularidade em $r = 0$ e por um horizonte de eventos em $r = R_s$. A “atração gravitacional” sentida por um observador externo, ou seja, situado em $r > R_s$, é a mesma que seria sentida por esse observador se, ao invés do buraco negro, tivéssemos um objeto esférico com raio $R > R_s$ sem rotação e sem carga elétrica, e com a mesma massa M . Veja a figura 1.2 na próxima página.

O primeiro estudo sobre colapso gravitacional e possível formação de buracos negros foi feito por Chandrasekhar na década de 1930. Ele calculou que estrelas com massa acima de um determinado valor podiam não ser estáveis, e conseqüentemente passariam por um colapso gravitacional, formando um buraco negro [2, 3]. Alguns físicos da época, como Eddington e Landau [4], argumentaram que algum mecanismo desconhecido poderia evitar o colapso. Mais tarde descobriu-se que estrelas de nêutrons realmente violam o limite de Chandrasekhar, e evitam o colapso graças a propriedades quânticas (princípio de exclusão de Pauli).

Porém, no fim da década de 1930, Oppenheimer, Volkoff e Snyder mostraram que mesmo as estrelas de nêutrons, quando possuem massa acima de um determinado limite, não conseguem evitar o colapso gravitacional e acabam formando um buraco negro [5,6]. Oppenheimer e Snyder calcularam também que o colapso de uma esfera homogênea de um gás ideal (sem pressão), e mostraram que essa esfera em um determinado momento perde a comunicação com o resto do universo.

Apesar desses trabalhos sobre colapso gravitacional e buracos negros, o estudo desses objetos ficou em segundo plano até o final da década de 50, quando começou a chamada “época de ouro” dos buracos negros. Nessa época todas as atenções se voltaram para esses objetos, devido aos trabalhos de Wheeler, e também devido a descoberta, na década de 1960, dos pulsares, que nada mais são do que estrelas de nêutrons que possuem uma alta rotação e são fontes de radiação.

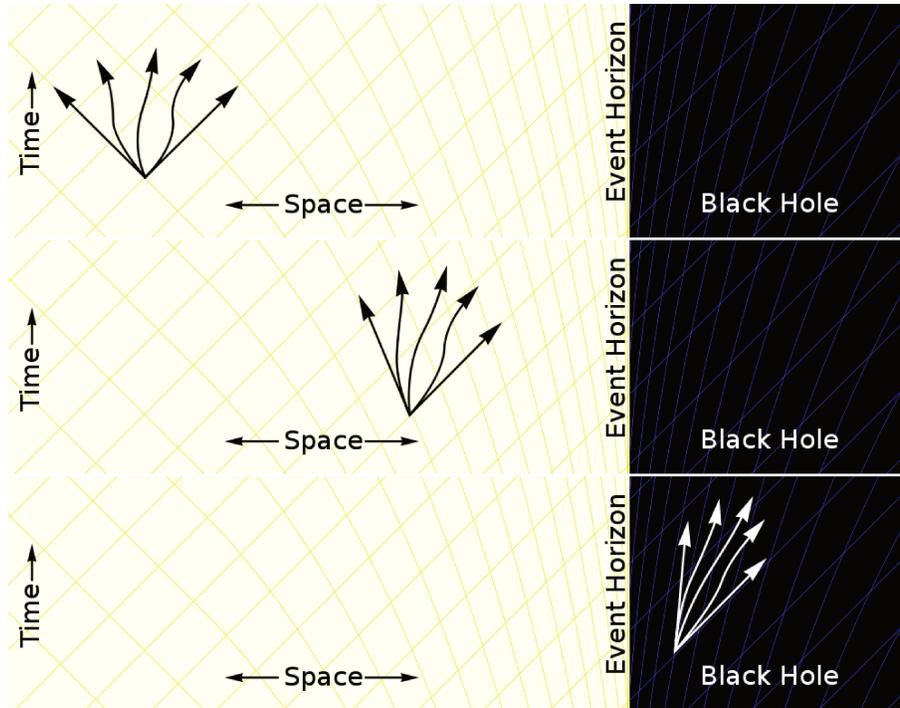


Figura 1.2: Cones de luz para o espaço-tempo de Schwarzschild, que mostram as possíveis direções que uma partícula pode seguir. Note que quando ela ultrapassa o horizonte de eventos, não pode mais voltar. Figuras retiradas da referência [1].

Nesse período, Kerr encontrou uma família exata de soluções das equações de campo de Einstein que descreve o espaço-tempo ao redor de um objeto massivo no vácuo, sem carga elétrica, mas com rotação. Essa solução também descreve o chamado buraco negro de Kerr, que além da massa possui o momento angular como parâmetro [7].

Alguns anos depois surge a solução exata que descreve o espaço-tempo de um buraco negro com rotação e com carga elétrica, o chamado buraco negro de Kerr-Newman [8]. Nesse contexto surge também o teorema “no hair”, que diz que um buraco negro estacionário possui apenas três parâmetros visíveis a observadores externos: sua massa M , seu momento angular J e sua carga elétrica Q . Dessa forma o buraco negro de Kerr-Newman é a solução assintoticamente plana mais genérica possível das equações de Einstein, e se tivermos dois buracos negros com os mesmos valores de M , J e Q , eles são classicamente indistinguíveis.

Assim sendo, temos apenas quatro “tipos” de buracos negros, que podem ser classificados da seguinte maneira:

1. Buraco negro de Schwarzschild: Possui apenas massa M .
2. Buraco negro de Kerr: Possui massa M e momento angular J .

3. Buraco negro de Reissner-Nordström: Possui massa M e carga elétrica Q .
4. Buraco negro de Kerr-Newman: Possui massa M , momento angular J e carga elétrica Q .

Também nessa época Hawking e Penrose provam os chamados teoremas de singularidade, que afirmam que singularidades são inevitáveis na relatividade geral [15, 16]. Como elas são indesejáveis, pois toda a Física perde a validade ao redor delas, Penrose formula a chamada Conjectura Fraca da Censura Cósmica [17], que diz que singularidades nuas (que são simplesmente singularidades visíveis a observadores no infinito) não podem surgir do colapso gravitacional de objetos fisicamente razoáveis (existe a versão *forte* da conjectura, mas trabalharemos com a *fraca*). Portanto, essa conjectura diz que todas as singularidades estão “escondidas” desses observadores externos por um horizonte de eventos. Muitas evidências sugerem que essa conjectura é válida, mas ainda não existe uma prova definitiva dela. Nesse nosso trabalho pretendemos investigar a validade dessa conjectura, por isso esse tópico será retomado mais detalhadamente adiante.

Ainda nessa época, Bekenstein e Hawking dão início à chamada termodinâmica de buracos negros. Se supormos que essa conjectura é válida, e impondo algumas restrições sob a energia, podemos mostrar que a área do horizonte de eventos nunca decresce com o tempo, comportamento esse muito similar ao da entropia de acordo com a segunda lei da termodinâmica. Baseado nessa similaridade, Bekenstein propõe que a área do horizonte de um buraco negro é proporcional à sua entropia [20].

Hawking mostra, usando teoria quântica de campos, que buracos negros devem emitir radiação como um corpo negro, e que, portanto, devem possuir uma temperatura [21]. Dessa maneira, a analogia entre as leis Físicas dos buracos negros com as leis da termodinâmica fica completa, relacionando energia com massa, entropia com a área do horizonte de eventos, e a temperatura com a gravidade da superfície do horizonte. A segunda lei da termodinâmica de buracos negros diz que a área do horizonte não pode decrescer por processos clássicos. Já a terceira lei diz que é impossível reduzir a gravidade da superfície do horizonte à zero através de um número finito de processos.

Segundo essa teoria, a entropia e temperatura de um buraco negro com massa M , momento angular J e carga elétrica Q podem ser escritas como [22]:

$$S_{\text{BN}} = \frac{kc^3}{4\hbar G} A \quad \text{e} \quad T_{\text{BN}} = \frac{\kappa\hbar}{2\pi kc}, \quad (1.2)$$

nas quais k é a constante de Boltzmann, \hbar é a constante de Planck, e A e κ são respectivamente a área do horizonte de eventos e a gravidade da superfície, dadas por:

$$\kappa = \frac{4\pi\sqrt{G^2M^2 - J^2c^2/M^2 - GQ^2}}{A},$$

$$A = \frac{4\pi G}{c^4} \left[2GM^2 - Q^2 + 2\sqrt{G^2M^4 - J^2c^2 - GM^2Q^2} \right].$$

Apesar de muitos trabalhos terem sido feitos nessa área e termos tido muitos avanços nas últimas décadas, ainda existem muitos problemas em aberto e perguntas a serem respondidas. Não sabemos ainda como é o processo de formação de um buraco negro, e há ainda muita discussão sobre a massa que uma estrela deve ter para haver a formação de um buraco negro a partir de seu colapso gravitacional. Outra questão importante ainda não respondida completamente diz respeito à validade da conjectura fraca da censura cósmica, que será nosso foco de trabalho. Vamos a seguir apresentar nossos objetivos.

1.2 Objetivos do Trabalho

Nosso objetivo é testar a validade da conjectura fraca da censura cósmica em dois casos distintos. Primeiro vamos usar como ponto de partida um buraco negro de Kerr-Newman, que possui uma singularidade em $r = 0$ e um horizonte de eventos em $r = r_+$, e verificar se é possível destruir esse seu horizonte através da absorção de uma partícula de teste.

Quando uma partícula cai em direção a um buraco negro (ou seja, atravessa seu horizonte e cai na singularidade), sua energia é adicionada à do buraco negro, aumentando a massa do buraco negro resultante. O mesmo ocorre com o seu momento angular e com a sua carga elétrica (lembrando que no caso do momento angular devemos fazer uma soma vetorial). Iremos analisar se existe uma partícula de teste com parâmetros específicos (massa m , energia E , momento angular L e carga elétrica q) que faça com que na situação final não tenhamos mais solução real para o horizonte de eventos r_+ , criando assim uma singularidade nua.

No segundo caso iremos analisar um buraco negro de Myers-Perry cinco-dimensional em um espaço-tempo assintoticamente anti-de-Sitter (AdS_5). O estudo deste tipo de espaço-tempo AdS é importante, pois segundo a correspondência AdS/CFT (espaço anti-de-Sitter/teoria de campo conforme) é possível descrever efeitos quânticos em n dimensões através da análise de um espaço-tempo AdS em $n + 1$ dimensões. Se pudermos mostrar que é possível termos uma singularidade nua nesse espaço-tempo (violando assim a conjectura proposta por Penrose), então essa singularidade poderia ser analisada pela sua contraparte da correspondência AdS/CFT, o que poderia levar a um melhor entendimento da natureza das singularidades em relatividade geral, e contribuir de certa forma na busca por uma teoria quântica da gravidade. Esse trabalho está atualmente em andamento.

Recentemente essa conjectura serviu de motivação para uma aposta entre três notáveis físicos da área: Stephen Hawking, John Preskill e Kip Thorne [23]. Na aposta, originalmente feita em 1991, Hawking defendia que singularidades nuas não poderiam ocorrer, enquanto Preskill e Thorne afirmavam que poderiam. Devido a “uma questão técnica”, Hawking reconheceu que perdeu a aposta quando Choptuik [24] mostrou ser possível a formação de singularidades nuas sob condições iniciais não-genéricas bem específicas. Mas como Hawking ainda acreditava que singularidades nuas não deveriam existir sob condições genéricas, em 1997 fizeram nova aposta,

que dura até hoje.

Esse trabalho é baseado no artigo [25], publicado ano passado, e também no [26] a ser publicado.

Começaremos revisando alguns conceitos importantes que serão usados durante toda a tese, e também o teorema de singularidade provado por Hawking e Penrose, que culminou com a formulação da conjectura fraca (e forte) da censura cósmica. Depois faremos um resumo das tentativas anteriores de destruir o horizonte de eventos de um buraco negro e criar assim uma singularidade nua. A seguir iremos mostrar nossos cálculos, e mostraremos que trabalhando no regime de partícula de teste, no qual os parâmetros da partícula são muito menores que os do buraco negro, podemos destruir o horizonte de um buraco negro de Kerr-Newman quase-extremo, criando assim uma singularidade nua, e servindo de contra-exemplo para a conjectura.

Quando trabalhamos nesse regime de partícula de teste, podemos desprezar os chamados efeitos de “backreaction”, que são efeitos relacionados com a mudança que a partícula irá introduzir no espaço-tempo. O fato de jogarmos uma partícula com massa, momento angular e carga elétrica modifica o espaço-tempo, e essa mudança deve ser levada em conta se quisermos fazer um cálculo mais preciso, pois a modificação no espaço-tempo pode acarretar em mudanças na curvatura e na trajetória da partícula. Porém, se os parâmetros da partícula forem desprezíveis em relação aos do buraco negro, então podemos desprezar o “backreaction” (pois essas mudanças no espaço-tempo serão muito pequenas), e podemos supor que a partícula se moverá em uma geodésica do espaço-tempo do buraco negro.

Após isso analisaremos essa conjectura em um espaço-tempo com cinco dimensões e assintoticamente AdS. Esse trabalho ainda está em andamento, e está sendo realizado em colaboração com pesquisadores do Instituto Superior Técnico (IST) de Lisboa, Portugal.

Capítulo 2

Considerações Iniciais

Vamos aqui apresentar as bases teóricas que serão usadas durante os capítulos posteriores, começando com um resumo da teoria da relatividade geral. Para isso, iremos introduzir as unidades geométricas, nas quais $c = G = 1$, pois simplificam as expressões. Dessa forma, se quisermos recuperar os c 's e G 's, basta fazermos $M \rightarrow GM/c^2$, $t \rightarrow ct$, $Q^2 \rightarrow GQ^2/c^4$ e $J \rightarrow GJ/c^3$. Usaremos essas unidades daqui em diante ao longo de toda a tese, a não ser quando explicitamente dito o contrário.

2.1 Fundamentos da Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral (RG) é a teoria de gravitação com maior sucesso experimental, e como dito anteriormente, ela nos diz que a gravidade surge como consequência da curvatura do espaço-tempo. Para entendermos formalmente a teoria, precisamos de algumas definições preliminares. Seguindo as referências [27–30], vamos listar aqui os principais conceitos de geometria e Física necessários para a construção da teoria.

2.1.1 Variedades, vetores e tensores

Para definirmos o que é o espaço-tempo propriamente dito, precisamos de alguns conceitos topológicos e geométricos antes. Vamos começar definindo uma variedade, que é uma estrutura de grande importância na teoria da relatividade geral. Essencialmente uma variedade pode ser pensada como um espaço possivelmente curvo, mas que em pequenas regiões (infinitesimais) parece um espaço plano. Essa estrutura não faz distinção entre diferentes sistemas de coordenadas, e pode ser formalmente definida como:

Definição 1. *Uma variedade \mathcal{M} real, C^∞ (infinitamente diferenciável com derivadas contínuas)*

as), n -dimensional é definida como um conjunto, juntamente com uma coleção de sub-conjuntos $\{\mathcal{O}_\alpha\}$, tal que:

- (i) cada ponto $p \in \mathcal{M}$ pertence a pelo menos um \mathcal{O}_α , de forma que a coleção $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ cobre toda a variedade,
- (ii) para cada α existe um mapa bijetor $\psi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow U_\alpha$, no qual $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$,
- (iii) se $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$, então o mapa $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ que leva pontos contidos em $\psi_\alpha[\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ para pontos em $\psi_\beta[\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$ é infinitamente diferenciável.

Considerando a estrutura de uma variedade, podemos definir alguns objetos geométricos de maneira natural. Vamos começar com vetores tangentes.

Definição 2. Um vetor tangente v em um ponto $p \in \mathcal{M}$ é um mapa entre \mathcal{F} - que representa a coleção das funções C^∞ de \mathcal{M} para \mathbb{R} - e os reais \mathbb{R} , de forma que esse mapa $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tenha as seguintes propriedades:

- (i) Seja linear, ou seja, $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$ para todo $f, g \in \mathcal{F}$ e $a, b \in \mathbb{R}$,
- (ii) Obedeça a regra de Leibnitz: $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$.

O conjunto de todos os vetores tangentes em $p \in \mathcal{M}$ forma o espaço tangente V_p , que é um espaço vetorial com dimensão igual à da variedade, ou seja, $\dim V_p = n$. Podemos construir uma base para V_p considerando um mapa $\psi : \mathcal{O} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ com o ponto $p \in \mathcal{O} \subset \mathcal{M}$. Dessa forma podemos definir os vetores

$$X_\mu(f) = \partial_\mu(f \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)}, \quad (2.1)$$

nos quais $f \in \mathcal{F}$, e $\mu = 0, 1, \dots, n-1$. Esses vetores funcionam como base do espaço vetorial, e são chamados de base coordenada. Essa base é importante na teoria, e é escrita como $\{\partial/\partial x^\mu\} = \{\partial_\mu\}$. Assim sendo, podemos escrever um vetor tangente arbitrário como $v = v^\mu \partial_\mu$. Se tivéssemos escolhido um diferente mapa ψ' , teríamos obtido bases diferentes $\{X_{\nu'}\}$ (seguindo a notação da referência [29], que coloca a “linha” no índice, e não no objeto, pois esse último é invariante). A relação entre as componentes de um vetor v nas duas bases pode ser escrita como (usando a convenção da soma, que será sempre considerada daqui para frente, a não ser quando explicitamente dito o contrário.):

$$v^{\mu'} = v^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}, \quad (2.2)$$

na qual $x^{\mu'}$ representa a μ' -ésima componente do mapa $\psi' \circ \psi^{-1}$.

Definição 3. Uma curva λ em \mathcal{M} é um mapa C^∞ de um intervalo da linha real para \mathcal{M} , $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$.

Podemos pensar um vetor $v \in V_p$ como uma “seta” em p , apontando na direção da curva λ com vetor tangente v em p .

Definição 4. Um covetor ω em $p \in \mathcal{M}$ é uma função linear no espaço vetorial V_p , $\omega : V_p \rightarrow \mathbb{R}$.

Dessa forma, podemos definir o espaço cotangente V_p^* como o conjunto de todos os covetores ω em p . Definindo adição e multiplicação por escalar, V_p^* fica com estrutura de espaço vetorial, cuja dimensão é igual a de V_p , ou seja, $\dim V_p = \dim V_p^* = n$, e a base $\{\omega^\beta\}$ de V_p^* pode ser calculada a partir da base $\{v_\alpha\}$ de V_p de acordo com a seguinte regra: ω^i leva qualquer vetor v ao número v^i , que nada mais é do que a i -ésima componente de v com relação à base $\{v_\alpha\}$. Portanto, temos a seguinte relação:

$$\omega^\mu(v_\nu) = \delta^\mu_\nu. \quad (2.3)$$

Cada função f em \mathcal{M} define um covetor df em p de forma que sua ação em um vetor $d/d\eta$ é a derivada direcional da função, dada por

$$df \left(\frac{d}{d\eta} \right) = \frac{df}{d\eta}.$$

Do mesmo modo que derivadas parciais ao longo dos eixos coordenados nos fornece uma base natural para o espaço tangente V_p , o gradiente das funções coordenadas x^μ nos fornece uma base natural para o espaço cotangente V_p^* . Assim, se (x^0, \dots, x^{n-1}) são as coordenadas locais, então o conjunto de diferenciais $(dx^0, dx^1, \dots, dx^{n-1})$ em p forma a base de covetores que é dual à base coordenada $\{\partial/\partial x^\mu\}$ de vetores tangentes em p , tal que

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu,$$

como esperado. Dessa maneira qualquer covetor pode ser escrito como $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, e a lei de transformação de coordenadas fica $\omega_{\mu'} = \omega_\mu (\partial x^\mu / \partial x^{\mu'})$. Com os conceitos acima de V_p e de V_p^* , podemos definir tensores.

Definição 5. O espaço dos tensores de posto (k, l) em $p \in \mathcal{M}$ pode ser definido como o conjunto de mapas multilineares (linear em cada argumento)

$$T : \overbrace{V_p^* \times \dots \times V_p^*}^k \times \overbrace{V_p \times \dots \times V_p}^l \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Note que, dados k covetores e l vetores, T nos retorna um número. Dessa forma um tensor de posto $(0, 0)$ é um escalar, um tensor de posto $(0, 1)$ é justamente um covetor, enquanto que

um tensor de posto $(1, 0)$ é um vetor. Definindo adição e multiplicação por escalar, a coleção $\mathcal{T}(k, l)$ de todos os tensores de posto (k, l) possui estrutura de espaço vetorial com dimensão n^{k+l} . Podemos definir duas operações importantes em tensores, a contração e o produto externo.

Utilizando as bases $\{v_\alpha\}$ de V_p e $\{\omega^\beta\}$ de V_p^* , podemos definir a contração de índices em tensores, que nada mais é que um mapa entre $\mathcal{T}(k, l)$ e $\mathcal{T}(k-1, l-1)$, através da soma

$$\sum_{\mu} T(\dots, \omega^\mu, \dots; \dots, v_\mu, \dots).$$

A contração de um tensor de posto $(1, 1)$ é chamado de traço do tensor. Já o produto externo é usado para construir um tensor a partir de (pelo menos) outros dois. Dado um tensor T de posto (k, l) e um tensor S de posto (m, n) , podemos formar um novo tensor de posto $(k+m, l+n)$ conhecido como produto externo de T e S , e escrito como $T \otimes S$, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} T \otimes S(\omega^{(1)}, \dots, w^{(k+m)}, v^{(1)}, \dots, v^{(l+n)}) \\ = T(\omega^{(1)}, \dots, w^{(k)}, v^{(1)}, \dots, v^{(l)}) \times S(\omega^{(k+1)}, \dots, w^{(k+m)}, v^{(l+1)}, \dots, v^{(l+n)}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Lembrando que $\omega^{(i)}$ ($v^{(i)}$) são diferentes covetores (vetores), e não diferentes coordenadas de um mesmo covetor (vetor). Se $\{v_\mu\}$ é uma base de V_p e $\{\omega^\nu\}$ sua base dual, então os n^{k+l} tensores do tipo $\{v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes w^{\nu_1} \otimes \dots \otimes w^{\nu_l}\}$ gera uma base para $\mathcal{T}(k, l)$. Dessa forma podemos escrever um tensor arbitrário de posto (k, l) como

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes w^{\nu_l}. \quad (2.6)$$

Enquanto que, sob uma transformação de coordenadas, suas componentes mudam de acordo com a seguinte relação:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \quad (2.7)$$

Um tensor muito importante na teoria da relatividade geral é o tensor métrico g .

Definição 6. *A métrica é tensor simétrico, não-degenerado de posto $(0, 2)$. Utilizando a base coordenada, podemos escrevê-la como:*

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (2.8)$$

Na qual $g_{\mu\nu}$ são as componentes da métrica em relação a essa base. Este tensor métrico está relacionada com distâncias infinitesimais ao quadrado, e por isso pode ser escrito como ds^2 , e tratado como um elemento de linha. Nesse caso escrevemos simplesmente

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Ao longo desse trabalho, sempre definiremos o espaço-tempo em que iremos trabalhar através de sua métrica ds^2 . Esse tensor é usado também para “elevar” e “abaixar” índices de tensores, e seu inverso pode ser escrito como:

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma}g^{\lambda\mu} = \delta^{\mu}_{\sigma}.$$

Como consequência da definição, para qualquer ponto $p \in \mathcal{M}$ podemos sempre achar uma base ortonormal (v_{α}) de V_p que diagonaliza g , deixando apenas $(+1)$'s e (-1) 's na diagonal. O número de sinais $+$ e $-$ encontrados é chamado de assinatura da métrica. Na relatividade geral estamos interessados em métricas com assinatura *Lorentziana*, ou seja, que possuem apenas um sinal $-$ e todos os outros $+$, e utilizando essa assinatura podemos classificar os vetores tangentes em três categorias.

Definição 7. *Dado um vetor v^a , ele será*

- *Do tipo tempo se $g_{ab}v^av^b < 0$,*
- *Do tipo espaço se $g_{ab}v^av^b > 0$,*
- *Do tipo luz (nulo) se $g_{ab}v^av^b = 0$.*

Essa definição também é utilizada para classificar a curva a qual o vetor v^a é tangente. Dessa forma, o par (\mathcal{M}, g) - com \mathcal{M} sendo uma variedade diferenciável real, suave e n -dimensional, e g uma métrica *Lorentziana* - é denominado de espaço-tempo. Porém, mesmo com todas essas definições feitas até agora, ainda não somos capazes de definir curvatura formalmente.

2.1.2 Curvatura e as equações de Einstein

Intuitivamente, nossa noção de curvatura está atrelada às superfícies bidimensionais que estão “mergulhadas” no espaço Euclidiano tridimensional, mas agora estamos interessados em definir a curvatura do próprio espaço-tempo, que a princípio não está “mergulhado” em um espaço com dimensão superior. Portanto, precisamos definir curvatura de modo intrínseco, sem recorrer a dimensões superiores.

Uma maneira de caracterizarmos intrinsecamente uma superfície como plana ou curva pode ser definida a partir do conceito de transporte paralelo. Se transportarmos um vetor paralelamente ao longo de uma curva fechada, e no final obtermos o mesmo vetor inicial, então classificamos a superfície como plana, já se o vetor mudar, dizemos que a superfície é curva. Mas para isso precisamos primeiro definir formalmente o transporte paralelo, pois dados dois pontos distintos $p, q \in \mathcal{M}$, os espaços tangentes correspondentes V_p e V_q formam diferentes espaços vetoriais, e não podemos comparar vetores em diferentes espaços. Como o transporte paralelo está relacionado com a derivada de campos vetoriais, vamos definir derivadas no espaço-tempo.

Definição 8. Em uma variedade \mathcal{M} , o operador derivada, também chamado de derivada covariante, é representado por ∇ , e é definido como um mapa entre um campo tensorial suave de posto (k, l) , $\mathcal{T}(k, l)$, e um campo tensorial suave de posto $(k, l + 1)$, $\mathcal{T}(k, l + 1)$, que

(i) É linear: $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$,

(ii) Obedece a regra de Leibnitz: $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$,

(iii) Comuta com contrações: $\nabla_\mu(T^\lambda_{\lambda\rho}) = (\nabla T)^\lambda_{\mu\lambda\rho}$,

(iv) É consistente com a noção de vetores tangentes como derivadas direcionais, tal que para $f \in \mathcal{F}$ e $v^\mu \in V_p$ temos $v(f) = v^\mu \nabla_\mu f$, e

(v) Possui torção nula, ou seja, para todo $f \in \mathcal{F}$, temos $\nabla_\mu \nabla_\nu f = \nabla_\nu \nabla_\mu f$.

Apesar dessa derivada covariante apresentar várias propriedades, ainda existem muitas maneiras de se definir como esse operador atua em tensores. Vamos considerar dois operadores distintos ∇_μ e $\tilde{\nabla}_\mu$. Pode-se mostrar que a diferença entre eles é completamente caracterizada por um tensor de posto $(1, 2)$, dado por $S^\lambda_{\mu\nu}$. O caso mais interessante surge quando temos $\tilde{\nabla}_\mu = \partial_\mu$. Nesse caso específico $S^\lambda_{\mu\nu}$ é escrito como $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, e recebe o nome de *símbolo de Christoffel* ou *conexão*. A derivada de um vetor e de um covetor podem então ser escritas como:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu v^\nu &= \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda, \\ \nabla_\mu \omega_\nu &= \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Dada uma métrica, podemos definir unicamente o operador derivada ∇ através da chamada compatibilidade, impondo que $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$. Com isso obtemos a seguinte equação para a conexão:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}).\tag{2.10}$$

Portanto, a partir de uma métrica pré-definida, a derivada covariante é dada pela equação (2.9) (que pode facilmente ser generalizada para tensores de ordem superior), juntamente com a conexão dada pela equação (2.10) acima. Com a definição do operador derivada, podemos definir formalmente transporte paralelo.

Definição 9. Dada uma curva $x^\mu(\lambda)$, dizemos que um tensor T de posto (k, l) foi paralelamente transportado ao longo dessa curva se a seguinte equação for satisfeita:

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = 0.\tag{2.11}$$

Assim, dado um vetor em um ponto específico da curva, existe uma única “continuação” desse vetor para outros pontos da curva, de forma que essa continuação satisfaça a equação

acima. Logo, podemos usar essa unicidade para identificar os espaços tangentes V_p e V_q em pontos distintos p e q , dado um operador derivada e uma curva conectando esses dois pontos. Vamos agora definir uma geodésica, que pode ser pensada como uma generalização da noção de “linha reta” em espaços-tempo curvos.

Definição 10. *Uma geodésica é uma curva ao longo da qual seu vetor tangente é paralelamente transportado. Como o vetor tangente à curva $x^\mu(\lambda)$ é $dx^\mu/d\lambda$, usando a equação (2.11) obtemos:*

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}, \quad (2.12)$$

na qual λ é chamado de parâmetro afim, e escrito como $\lambda = a\tau + b$, onde a, b são constantes e τ é o tempo próprio. Com essas definições acima de transporte paralelo e conexão, sabemos como transportar paralelamente um vetor de V_p para V_q , mas em geral o vetor que obtemos em V_q depende da curva que escolhemos para fazer esse transporte. Vamos usar esse fato para definirmos a curvatura de um espaço-tempo.

Quando transportamos paralelamente um vetor v^μ por uma curva fechada (que começa e termina em um mesmo ponto) infinitesimal γ , obtemos o vetor v'^μ . Se escolhermos uma curva diferente γ' , então obteremos um terceiro vetor diferente de v e v' . Essa diferença está relacionada com o fato de que, em geral, derivadas covariantes (que são usadas no transporte paralelo) não comutam. O *tensor de curvatura de Riemann* está relacionado com essa diferença, e pode ser escrito como:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (2.13)$$

O tensor $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ acima só possui todas as componentes iguais a zero se e somente se o espaço-tempo é plano, o que é esperado, já que ele está relacionado com a curvatura. Existem duas contrações desse tensor que são muito úteis: O *tensor de Ricci* e o *escalar de curvatura*:

- O tensor de Ricci é dado por $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\alpha\lambda\beta}$,
- O escalar de curvatura (ou de Ricci) é o traço do tensor de Ricci, dado por $R = R^\lambda{}_\lambda = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$.

Além dessas contrações, o tensor de Riemann possui algumas propriedades interessantes. Seja $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}$, temos:

- | | |
|---|---|
| 1) $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$, | 3) $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}$, |
| 2) $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$, | 4) $R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$. |

Por fim, esse tensor também obedece a *identidade de Bianchi*, que pode ser escrita como:

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0. \quad (2.14)$$

Com esse tensor podemos definir o chamado *tensor de Einstein*:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Usando as propriedades acima do tensor de Riemann, pode-se mostrar que o tensor de Einstein deve obedecer a seguinte relação: $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$.

Dessa forma, podemos escrever a equação de Einstein para a relatividade geral como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

na qual $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, e está relacionado com o conteúdo de matéria e energia presente no espaço-tempo. Já o lado esquerdo da equação depende do tensor Ricci $R_{\mu\nu}$, que é uma contração do tensor de Riemann $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$, que por sua vez depende da conexão $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ e de sua derivada conforme equação (2.13), que por sua vez depende da métrica $g_{\mu\nu}$ e de sua derivada conforme equação (2.10).

Portanto, a equação de Einstein relaciona o tensor $G_{\mu\nu}$, simétrico e conservado de posto $(0,2)$, que é construído a partir da métrica e de suas primeira e segunda derivadas, com o tensor $T_{\mu\nu}$, também simétrico e conservado, que é construído a partir da distribuição de energia e momento do universo. Assim, dado $T_{\mu\nu}$, podemos descobrir qual a curvatura do espaço-tempo, e conseqüentemente sua métrica $g_{\mu\nu}$. A constante de proporcionalidade 8π é escolhida de forma a recuperar a teoria de Newton no limite de campo fraco.

2.2 Perturbações lineares em buracos negros, espaços-tempo anti-de-Sitter e correspondência AdS/CFT

Como visto acima, a equação de Einstein (2.16) representa na verdade um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas, de modo que esse sistema é muito difícil de ser resolvido analiticamente. De fato, a maioria das soluções exatas conhecidas fizeram uso de simetrias e hipóteses acerca da distribuição de matéria no universo para simplificar as equações.

Um procedimento muito usado quando queremos obter alguma informação de uma configuração que não apresenta solução exata é a linearização em torno de uma solução conhecida.

Um exemplo de quando esse mecanismo é aplicado é quando consideramos a interação gravitacional entre dois objetos, tal que a massa e energia de um deles é muito menor que do outro. Dizemos que o primeiro é uma partícula de teste e o segundo um objeto central. Podemos considerar essa situação como uma “perturbação” do caso exato em que temos apenas o objeto central.

Logo, dada uma métrica de fundo $g_{\mu\nu}$ conhecida (que é solução da equação de Einstein), podemos escrever uma pequena mudança no sistema como uma perturbação $h_{\mu\nu}$. Assim obtemos uma nova métrica perturbada $\tilde{g}_{\mu\nu}$, que pode ser escrita como:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

Para que essa abordagem seja válida, temos que ter $|h_{\mu\nu}| \ll g_{\mu\nu}$, com:

$$|h_{\mu\nu}| = \sup_{\mu\nu} \sum |h_{\mu\nu}(x)|^2.$$

Assim sendo, podemos calcular, pelo menos em primeira ordem, as mudanças que são introduzidas pela partícula de teste, lembrando que dentro desse aproximação consideramos que a partícula de teste segue uma geodésica do espaço-tempo de fundo (gerado pelo objeto central). Usaremos esse conceito ao longo dessa tese, em especial no capítulo 5.

Nesse mesmo capítulo trabalharemos com um espaço-tempo assintoticamente anti-de-Sitter (AdS), vamos então aqui apresentar a definição desse conceito. Os chamados espaços de de-Sitter (de-Sitter, representado por dS; e anti-de-Sitter, representado por AdS) são, juntamente com os de Minkowski, os mais simétricos entre as soluções da equação de Einstein no vácuo, com a diferença que para os espaços de-Sitter adicionamos a constante cosmológica Λ , de modo que a equação de Einstein passa a ser escrita como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

Se a constante cosmológica adicionada for positiva, obtemos os espaços de-Sitter, e se for negativa obtemos os espaços anti-de-Sitter. Os espaços-tempo anti-de-Sitter são conhecido principalmente pelo papel desempenhado na correspondência AdS/CFT.

Podemos dizer que essa dualidade é uma realização do chamado *princípio holográfico*, que diz que o número de graus de liberdade locais em um sistema físico está relacionado com a área da superfície que engloba esse sistema, e não com o volume do sistema. Assim, dizemos que dentro da correspondência AdS/CFT, sistemas fortemente acoplados podem ser holograficamente relacionados com gravidade clássica a pequenas curvaturas, o que é computacionalmente muito mais favorável.

Portanto, a importância de se estudar essa correspondência AdS/CFT está no fato de que, além de permitir uma simplificação nos cálculos em determinadas circunstâncias, ela oferece

uma perspectiva de testes experimentais em laboratório de teorias gravitacionais através de seus duais em matéria condensada.

Não é nosso objetivo aqui estudar a fundo essa correspondência, mas sim analisar um espaço-tempo AdS_5 usando a teoria clássica da relatividade geral, de forma a obter mais informações sobre a conjectura da censura cósmica, sobre singularidades nuas e sobre colisões de buracos negros, informações essas que poderiam vir a ser úteis no contexto da correspondência AdS/CFT, na caracterização das singularidades e na busca por uma teoria quântica da gravitação.

2.3 Singularidades e a conjectura da censura cósmica

Anteriormente falamos que os buracos negros são caracterizados por uma singularidade que está “escondida” pelo horizonte de eventos. A teoria da relatividade geral não consegue explicar fenômenos nas vizinhanças de uma singularidade, ou seja, ela perde a validade nessa região, visto que a singularidade é uma região na qual a curvatura do espaço-tempo diverge. Dessa forma, podemos dizer que a presença do horizonte “escondendo” a singularidade de um observador que está fora possui um papel importante, pois tal observador não precisa se preocupar com eventos que ocorrem perto da singularidade.

Porém, esses conceitos não foram muito bem detalhados. Vamos aqui então tratar um pouco melhor desse assunto. Em especial, vamos apresentar o teorema provado por Hawking e Penrose sobre a existência de singularidades, que mostra que não podemos evitar o aparecimento desses pontos singulares dentro da teoria da relatividade geral, mesmo para condições iniciais razoáveis. Logo após iremos enunciar as duas versões da conjectura da censura cósmica (a fraca e a forte), lembrando que ao longo da tese trabalharemos com a versão fraca.

Existem vários teoremas sobre a existência de singularidades [9–15], mas vamos nos focar no teorema do artigo [15], que de certa forma engloba os teoremas anteriores. De acordo com esse trabalho, temos que:

Definição 11. *Nenhum espaço-tempo M pode satisfazer todos os três requerimentos a seguir simultaneamente:*

- (1) *M não contém curvas do tipo-tempo fechadas,*
- (2) *Toda geodésica causal inextensível em M contém um par de pontos conjugados,*
- (3) *Existe um future- (ou past-) trapped set (conjunto aprisionado ao futuro ou ao passado) $S \subset M$.*

Vamos fazer alguns comentários em relação ao teorema anterior. O item (1) trata sobre a existência de curvas do tipo-tempo fechadas. Esse tipo de curva nos leva a grandes dificuldades

interpretativas, pois significa que algo ou alguém poderia viajar para seu próprio passado, apresentando assim problemas de causalidade. Um espaço-tempo fisicamente razoável não apresenta tais curvas.

Já em relação ao item (2), temos que dois pontos $p, q \in M$ são considerados conjugados em uma geodésica causal (do tipo-tempo ou nula) γ se uma “geodésica vizinha” à γ cruzar com γ em p e q . Essa condição é consequência de três requerimentos: (i) completeza de geodésicas causais, (ii) condição de energia e (iii) hipótese de generalidade.

O requerimento (i) diz que toda geodésica do tipo-tempo ou nula pode ser estendida para valores arbitrariamente grandes de seu parâmetro afim, tanto para o futuro quanto para o passado. Já o requerimento (ii) diz respeito a condição de energia. Para geodésicas do tipo-tempo, temos a seguinte condição:

$$\forall t \in V_p \text{ (do tipo-tempo), então } R_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta \geq 0 \text{ e } T_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta \geq \frac{1}{2}Tt_\alpha t^\alpha,$$

chamada de condição de energia *forte*, que é válida para uma constante cosmológica $\Lambda \leq 0$. Se ρ denota a densidade de energia, e p_1, p_2 e p_3 as pressões principais, então a relação acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \rho + p_i &\geq 0, \\ \rho + \sum p_i &\geq 0, \end{aligned}$$

na qual $i = 1, 2, 3$. Já para geodésicas nulas, a condição de energia *fraca* é suficiente, e pode ser escrita como:

$$\text{Se } l^\alpha l_\alpha = 0 \text{ (vetor nulo), então } R_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta \geq 0.$$

A relação acima diz que a densidade de energia medida por qualquer observador será sempre não-negativa. Já o requerimento (iii) diz respeito a condição de generalidade, que diz que toda geodésica causal γ contém algum ponto no qual:

$$k_{[\alpha} R_{\beta]\gamma\delta[\rho} k_{\sigma]} k^\gamma k^\delta \neq 0, \quad (2.19)$$

na qual k^α é o vetor tangente à geodésica. Logo, é possível mostrar que os requerimentos (i), (ii) e (iii) implicam na existência de um par de pontos conjugados.

Finalmente, o item (3) trata sobre existência de *trapped sets* (conjuntos aprisionados). Um exemplo de *future-trapped set* é a chamada *closed trapped surface* (superfície fechada aprisionada), definida como uma superfície bidimensional do tipo-espaço S com a propriedade de que ambos os sistemas de geodésicas nulas que interceptam S ortogonalmente convergem em S quando nos dirigimos ao futuro.

Em outros termos, podemos considerar uma esfera \mathcal{T} que envolve um corpo. Em algum instante suponha que essa esfera emita luz. Após um tempo, a frente de onda da luz que foi dirigida para dentro da esfera irá definir a esfera \mathcal{T}_1 , e a que foi dirigida para fora a esfera \mathcal{T}_2 . Em uma situação normal a área de \mathcal{T}_1 seria menor que a de \mathcal{T} , que por sua vez seria menor que a de \mathcal{T}_2 . Porém, se uma grande quantidade de matéria estiver contida dentro da esfera \mathcal{T} , então as áreas de \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 serão ambas menores que a área de \mathcal{T} . Nesse caso, dizemos que \mathcal{T} é uma superfície fechada aprisionada.

Dessa forma, Hawking e Penrose provaram que não existe nenhum espaço-tempo que satisfaça as condições (1), (2) e (3) simultaneamente. Por fim, temos o seguinte corolário, que resume as principais aplicações do teorema:

Definição 12. *Um espaço-tempo M não pode satisfazer a completeza geodésica causal (causal geodesic completeness) se, juntamente com a equações de Einstein, as quatro seguintes condições forem satisfeitas:*

- (1) *M não contém curvas do tipo-tempo fechadas,*
- (2) *A condição de energia forte é satisfeita em todos os pontos,*
- (3) *A condição de generalidade é satisfeita para todas as geodésicas causais,*
- (4) *M contém:*
 - (i) *uma trapped surface (superfície aprisionada), ou*
 - (ii) *um ponto p no qual a convergência de todas as geodésicas nulas que passam por p muda de sinal em algum lugar no passado de p , ou*
 - (iii) *uma superfície do tipo-espaço compacta.*

Portanto, vimos que singularidades podem existir na teoria de relatividade geral, mesmo para espaços-tempo fisicamente razoáveis. Porém, o teorema acima não diz nada sobre a singularidade ser visível (nua) ou não. De fato, muito pouco se sabe sobre a natureza dessas singularidades. Foi nesse contexto que Penrose introduziu as chamadas conjecturas fraca e forte da censura cósmica

A *Conjectura Fraca da Censura Cósmica* [17–19] diz que singularidades produzidas a partir do colapso gravitacional de matéria fisicamente razoável estão sempre envolvidas por um horizonte de eventos de um buraco negro, de forma a não serem detectadas por um observador exterior. Desde sua proposta, muitos trabalhos foram realizados tentando ou provar a conjectura ou achar um contra-exemplo [25, 26, 31, 32, 34–36, 38–50]. Ao longo dessa tese analisaremos com mais detalhes alguns desses trabalhos citados que tentam violá-la, e no final colocaremos nossa contribuição para o tema.

Apesar de não termos uma prova formal, existem algumas evidências em favor dessa conjectura. Sabemos que o colapso gravitacional esfericamente simétrico de um corpo fluido sempre produz um buraco negro como estado final. Além disso, sabemos que buracos negros são estáveis sob perturbações lineares.

Por fim, a própria consistência interna da teoria de buracos negros representa uma forte evidência em favor da conjectura, já que muitos resultados dentro dessa teoria assumem explicitamente a validade dessa conjectura. De acordo com essa teoria, a entropia de um buraco negro está relacionada com a área do horizonte de acordo com a equação (1.2).

Dessa forma, a segunda lei da termodinâmica de buracos negros diz que a área do horizonte não pode decrescer por processos clássicos. Já a terceira lei diz que é impossível reduzir a gravidade da superfície do horizonte à zero através de um número finito de processos (a gravidade da superfície está relacionada ao conceito de temperatura). Note que se destruímos o horizonte de eventos, poderemos invalidar esses resultados, e talvez precisemos de uma nova perspectiva no estudo da termodinâmica de buracos negros.

Já a *Conjectura Forte da Censura Cósmica* [18, 19] também foi proposta por Penrose, e apesar de estar relacionada com a versão fraca, elas são independentes. A versão forte diz que a teoria da relatividade é uma teoria determinística, de modo que o destino clássico de todos os observadores possa ser predito a partir das condições iniciais. De outro modo, essa versão diz que todos os espaços-tempo fisicamente aceitáveis são globalmente hiperbólicos, de forma que nenhuma singularidade (não só as resultantes do colapso gravitacional de um corpo isolado) possa ser visível (a não ser pelo *Big Bang*).

Daqui em diante quando nos referirmos à conjectura da censura cósmica estaremos nos referindo a sua versão fraca.

Tendo introduzido esses conceitos, vamos agora analisar as tentativas anteriores de se violar essa conjectura, trabalhos esses que serviram de base e motivação para nossa pesquisa.

Capítulo 3

Motivação e trabalhos anteriores

Como dito anteriormente, o buraco negro mais genérico (assintoticamente plano) é o de Kerr-Newman, com massa M , momento angular J e carga elétrica Q . O raio do horizonte de eventos desse buraco negro pode ser escrito como (recuperando os c 's e G 's):

$$r_+ = \frac{GM}{c^2} + \frac{1}{c^2} \sqrt{G^2 M^2 - GQ^2 - a^2 c^2}, \quad (3.1)$$

na qual $a = J/M$. Essa expressão é genérica e vale para os outros buracos negros (que são casos particulares desse), bastando ajustar os parâmetros. Note que para termos uma solução real, precisamos satisfazer a seguinte relação:

$$M^2 \geq \frac{a^2 c^2}{G^2} + \frac{Q^2}{G}. \quad (3.2)$$

Caso contrário a raiz seria imaginária, e se esse for o caso, existe a possibilidade de termos um espaço-tempo sem o horizonte de eventos. Dessa maneira, teríamos uma singularidade nua, o que é proibido pela censura cósmica. A expressão acima escrita em unidades geométricas fica:

$$M^2 \geq a^2 + Q^2. \quad (3.3)$$

Como visto acima, singularidades são inevitáveis e indesejáveis na teoria da relatividade geral. Especula-se que uma teoria quântica da gravitação poderia resolver esse problema da validade ou não da censura cósmica, mas esta é ainda uma das muitas questões em aberto na Física.

Neste capítulo faremos um resumo dos principais resultados sobre a violação da conjectura da censura cósmica em buracos negros. Vamos iniciar analisando os casos clássicos, e depois vamos ver os semiclassicos (que fazem uso de teorias de campo).

3.1 Análises Clássicas

Vamos aqui fazer um breve resumo das tentativas clássicas de se destruir o horizonte de eventos de um buraco negro, criando assim uma singularidade nua. Começaremos pela análise de Wald [31].

3.1.1 Análise de Wald

Wald foi um dos primeiros a investigar se era possível destruir o horizonte de eventos de um buraco negro. A ideia principal que Wald usou foi a seguinte: Ele considerou inicialmente um buraco negro de Kerr-Newman extremo (com carga Q , momento angular $J = aM$ e massa M tal que $M^2 = a^2 + Q^2$), e jogou em direção à esse buraco negro uma partícula de teste de massa m e carga q . Sabemos que o raio do horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr-Newman é dado por:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}. \quad (3.4)$$

Se a situação final possuir $M^2 < a^2 + Q^2$, então r_+ não terá solução real, o que pode sobre-rotacionar (possuir momento angular acima do limite extremo) e/ou sobrecarregar (possuir carga elétrica acima do limite extremo) o buraco negro, de forma a fazer com que seu horizonte seja destruído e tenhamos uma singularidade nua. A equação do movimento para uma partícula com massa m e carga elétrica q nessa geometria de Kerr-Newman é dada por:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = \frac{q}{m} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{ds}, \quad (3.5)$$

e sua Lagrangeana é dada por:

$$L = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + q A_\nu \frac{dx^\nu}{ds}. \quad (3.6)$$

Dessa forma, as constantes de movimento são:

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = m g_{t\mu} \frac{dx^\mu}{ds} + q A_t, \quad (3.7)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m g_{\phi\mu} \frac{dx^\mu}{ds} + q A_\phi. \quad (3.8)$$

Calculando essas constantes no infinito, obtemos $p_t = -E_\infty$ e $p_\phi = L_\infty$, ou seja, recuperamos a energia e o momento angular da partícula ao longo do eixo de simetria no infinito (com respeito ao buraco negro). Usando agora o fato de que a partícula descreve uma trajetória do tipo tempo, temos a seguinte normalização para a quadri-velocidade:

$$u^\mu u_\mu = \frac{1}{m^2} g^{\mu\nu} (p_\mu - q A_\mu) (p_\nu - q A_\nu) = -1, \quad (3.9)$$

na qual usamos $g_{\nu\mu}dx^\mu/ds = (p_\nu - qA_\nu)/m$. Os termos não nulos obtidos da expansão acima são:

$$g^{tt}(-E_\infty - qA_t)^2 + 2g^{t\phi}(-E_\infty - qA_t)(p_\phi - qA_\phi) + g^{\phi\phi}(p_\phi - qA_\phi)^2 + g^{rr}p_r^2 + g^{\theta\theta}p_\theta^2 + m^2 = 0. \quad (3.10)$$

Vamos agora resolver essa equação para E_∞ :

$$E_\infty = -qA_t + \frac{1}{g^{tt}} \left\{ g^{t\phi}(p_\phi - qA_\phi) \pm \sqrt{[(g^{t\phi})^2 - g^{tt}g^{\phi\phi}](p_\phi - qA_\phi)^2 - g^{tt}(g^{rr}p_r^2 + g^{\theta\theta}p_\theta^2 + m^2)} \right\}. \quad (3.11)$$

Como a equação era quadrática, obtivemos duas soluções, mas optamos pela solução com sinal negativo, para garantir que dt/ds seja positivo para todos os movimentos do tipo tempo dirigidos para o futuro na região fora do horizonte ($r > r_+$). Como o determinante dessa equação era positivo, a energia é limitada por baixo. Usando o fato de que o termo dentro da raiz quadrada é nulo no horizonte, obtemos a seguinte relação:

$$E_\infty \geq -qA_t + \frac{1}{g^{tt}}(g^{t\phi})(p_\phi - qA_\phi). \quad (3.12)$$

Para substituímos os valores de g^{tt} e $g^{t\phi}$, precisamos da inversa da métrica que descreve o espaço-tempo ao redor do buraco negro de Kerr-Newman. O elemento de linha dessa métrica expresso nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) é dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [adt - (r^2 + a^2) d\phi]^2 + \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right), \quad (3.13)$$

na qual $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$. Escrevendo a métrica acima na forma matricial, obtemos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{a^2 \sin^2 \theta - \Delta}{\rho^2} & 0 & 0 & \frac{a \sin^2 \theta [\Delta - a^2 - r^2]}{\rho^2} \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ \frac{a \sin^2 \theta [\Delta - a^2 - r^2]}{\rho^2} & 0 & 0 & \frac{\sin^2 \theta [(a^2 + r^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta]}{\rho^2} \end{bmatrix}.$$

Para acharmos a inversa da métrica ($g^{\mu\nu}$), vamos inverter a matriz acima. Fazendo isso

obtemos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{a^2 \Delta \sin^2 \theta - (a^2 + r^2)^2}{\rho^2 \Delta} & 0 & 0 & \frac{a(\Delta - a^2 - r^2)}{\rho^2 \Delta} \\ 0 & \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a(\Delta - a^2 - r^2)}{\rho^2 \Delta} & 0 & 0 & \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \end{bmatrix}.$$

Portanto, da matriz acima vemos que

$$\frac{g^{t\phi}}{g^{tt}} = \frac{a(\Delta - a^2 - r^2)}{a^2 \Delta \sin^2 \theta - (a^2 + r^2)^2}.$$

Vamos agora encontrar os valores de A_t e de A_ϕ . Para tal, precisamos do vetor potencial que descreve o campo eletromagnético do buraco negro. Sabemos que esse potencial pode ser escrito como:

$$\vec{A} = -\frac{Qr}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi). \quad (3.14)$$

Dessa forma, obtemos facilmente os coeficientes:

$$A_t = -\frac{Qr}{\rho^2} \quad \text{e} \quad A_\phi = \frac{Qra \sin^2 \theta}{\rho^2}.$$

Substituindo esses coeficientes na equação (3.12) obtemos:

$$E_\infty \geq \frac{qQr}{\rho^2} + \frac{a(\Delta - a^2 - r^2)}{[a^2 \Delta \sin^2 \theta - (a^2 + r^2)^2]} \left(L_\infty - \frac{qQra \sin^2 \theta}{\rho^2} \right). \quad (3.15)$$

Como dito anteriormente, estamos interessados no caso em que o buraco negro é extremo, ou seja, quando $M^2 = a^2 + Q^2$. Usando isso, e calculando essa expressão para $r = r_+$, obtemos:

$$\begin{aligned} E_\infty &\geq \frac{qQM}{M^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left[1 - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{M^2 + a^2} \right] + \frac{a}{M^2 + a^2} L_\infty, \\ &\geq \frac{QqM + aL_\infty}{M^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Calculamos para $r = r_+$ pois essa é a energia necessária para a partícula atravessar o horizonte de eventos. Vamos agora encontrar a condição que precisamos ter para destruímos o horizonte, ou seja, para que a relação $M^2 < a^2 + Q^2$ seja satisfeita. Derivando essa expressão

obtemos:

$$\begin{aligned}
2M\delta M &< \frac{2J}{M^2}\delta J - \frac{2J^2}{M^3}\delta M + 2Q\delta Q, \\
\left(M + \frac{J^2}{M^3}\right)\delta M &< \frac{J}{M^2}\delta J + Q\delta Q, \\
\left(M^2 + \frac{J^2}{M^2}\right)\delta M &< \frac{J}{M}\delta J + MQ\delta Q, \\
\delta M &< \frac{MQ\delta Q + a\delta J}{M^2 + a^2}, \\
\Rightarrow E_\infty &< \frac{QqM + aL}{M^2 + a^2}. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Note que a relação acima (3.17) é oposta à obtida anteriormente (3.16), ou seja, se a partícula de teste tiver os parâmetros necessários para destruir o horizonte do buraco negro, ela simplesmente não cairá no buraco negro. Considere que inicialmente tínhamos $a = 0$ e $Q = M$ (buraco negro de Reissner-Nordström). Nesse caso, para termos $Q > M$ na situação final (condição para que o horizonte seja destruído), precisamos que $q > m$ (equação 3.17). Dessa forma, a força eletromagnética de repulsão entre o buraco negro e a partícula é maior que a força gravitacional, e a partícula não atravessa o horizonte de eventos.

Já para o caso em que $Q = 0$ e $a = M$, o momento angular que a partícula precisa ter para obtermos $a > M$ na situação final faz com que o parâmetro de impacto seja muito grande, e dessa forma a partícula “erra” o buraco negro e não atravessa o horizonte. Dessa maneira, concluímos que não podemos formar uma singularidade nua seguindo esse procedimento. Vamos agora estudar os resultados obtidos por Hubeny [32].

3.1.2 Análise de Hubeny

Hubeny também tenta violar a conjectura da censura cósmica enviando uma partícula de teste em direção a um buraco negro. Existem duas grandes diferenças entre essa análise e a anterior de Wald. A primeira é que Hubeny considera inicialmente um buraco negro de Reissner-Nordström (com carga elétrica, mas sem momento angular), e a segunda e principal diferença é que Hubeny não considera o buraco negro inicialmente extremo, mas sim quase-extremo, de forma que $Q \lesssim M$, ou seja, a carga elétrica Q é menor que a massa M , mas a diferença é muito pequena.

A ideia básica seguida por ela é a seguinte: No início tínhamos um buraco negro de Reissner-Nordström quase-extremo, com carga Q e massa M . O objetivo é enviar radialmente em direção ao buraco negro uma partícula de teste que possui carga q , massa de repouso m e energia E , tal que $m < E < q \ll Q < M$, de forma que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. A partícula tem que cair em direção ao buraco negro até atravessar seu horizonte de eventos.
2. A configuração final tem que ultrapassar o limite extremo, ou seja, no final devemos ter $Q + q > M + E$.
3. A partícula pode ser tratada como partícula de teste, de maneira que os efeitos de “back-reaction” possam ser desprezados.

Logo, nosso objetivo é, dado os parâmetros Q e M do buraco negro, tentar encontrar os parâmetros m , q e E da partícula de modo que as três condições acima sejam satisfeitas. Como primeiro passo, vamos estudar as condições 1. e 2., *assumindo* que a condição 3. seja válida, e depois vamos argumentar que esse procedimento é válido.

Para começar nossa análise, precisamos da métrica que descreve o espaço-tempo ao redor do buraco negro de Reissner-Nordström. O elemento de linha dessa métrica é dado colocando $a = 0$ na equação (3.13). Porém, nossa análise será mais simples se reescrevermos essa métrica nas coordenadas de Eddington, (v, r, θ, ϕ) . Fazendo isso obtemos:

$$ds^2 = -g(r)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2, \quad (3.18)$$

na qual $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ e $g(r) \equiv 1 - 2M/r + Q^2/r^2$. Os horizontes de evento (r_+) e de Cauchy (r_-) são dados por $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$, e em termo desses parâmetros podemos escrever $g(r) = (r - r_+)(r - r_-)/r^2$. Como estamos assumindo a condição 3., temos que a partícula de teste se move em uma geodésica do espaço-tempo de fundo (Reissner-Nordström), de forma que a equação de movimento para essa partícula é dada por:

$$u^a \nabla_a u^b = \frac{q}{m} F_c^b u^c, \quad (3.19)$$

na qual $F_{ab} = 2\nabla_{[a}A_{b]}$ é o tensor eletromagnético. Note que a equação acima é análoga à usada por Wald. Para trajetórias radiais, podemos escrever a velocidade como:

$$u^a = \dot{v} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) + \dot{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right),$$

na qual $\dot{v} = \partial v / \partial \tau$ e $\dot{r} = \partial r / \partial \tau$, com τ sendo o parâmetro afim ao longo da trajetória da partícula. Usando as equações (3.6) e (3.7) juntamente com a (3.18), encontramos a seguinte relação para a energia da partícula (que é uma constante de movimento):

$$-E_\infty = -E = p_v = -mg(r)\dot{v} + m\dot{r} + qA_v \Rightarrow E = m[g(r)\dot{v} - \dot{r}] - qA_v. \quad (3.20)$$

Como a partícula segue uma trajetória do tipo tempo, temos:

$$-1 = u^a u_a = -g(r)\dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{r} = -\frac{1}{m}(E + qA_v)\dot{v} + \dot{v}\dot{r}. \quad (3.21)$$

Eliminando \dot{v} das equações acima e resolvendo para \dot{r} , obtemos a equação de movimento radial:

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{m^2} [E + qA_v(r)]^2 - g(r). \quad (3.22)$$

Como $\dot{r} = 0$ corresponde a um ponto de retorno, a partícula cairá no buraco negro se \dot{r}^2 não for zero para nenhum r fora do horizonte:

$$\dot{r}^2 > 0 \quad \text{para todo} \quad r \geq r_+. \quad (3.23)$$

Como $g(r)$ é positivo fora do horizonte, juntando as duas equações dadas acima obtemos:

$$[E + qA_v(r)]^2 > m^2 g(r) > 0 \quad \text{para todo} \quad r \geq r_+. \quad (3.24)$$

Dessa maneira, a energia deve satisfazer a relação: $E > -qA_v(r)$. Usando a equação (3.14) para encontrarmos o valor de $A_v(r)$ obtemos $E > qQ/r$. Como essa expressão possui seu valor máximo em $r = r_+$, podemos reescrevê-la como:

$$E > \frac{qQ}{r_+}. \quad (3.25)$$

Portanto, a condição 1. acima de que a partícula deve ultrapassar o horizonte do buraco negro nos deu um limite inferior para a energia E . Vamos agora analisar a condição 2.:

$$E < Q + q - M. \quad (3.26)$$

Logo, para satisfazermos as duas relações acima simultaneamente, devemos ter:

$$\frac{qQ}{r_+} < E < Q + q - M \Rightarrow q > \left[\frac{M - Q}{r_+ - Q} \right] r_+ = \frac{r_+ - Q}{2}. \quad (3.27)$$

Note que se o buraco negro for inicialmente extremo, então $M = Q = r_+$, e a equação (3.25) se reduz à $E > q$, enquanto que a equação (3.26) se reduz à $E < q$. Dessa forma, se o buraco negro for extremo não será possível satisfazer as condições 1. e 2. acima simultaneamente, e conseqüentemente não será possível destruir o horizonte e criar uma singularidade nua, resultado esse que está de acordo com o obtido por Wald.

Já para um buraco negro quase-extremo, em que $Q < M$, isso será possível, pois nesse caso podemos sempre encontrar um valor suficientemente grande para a carga q de modo que exista um intervalo finito de energias permitidas E . Além disso, o tamanho desse intervalo permitido de energias cresce linearmente com q . Para determinarmos a restrição na massa m da partícula, vamos retornar à equação (3.22). Como $g(r)$ é limitada e $[E + qA_v(r)]^2 > 0$, chegamos a seguinte relação para a massa da partícula:

$$m < \frac{[E + qA_v(r)]}{\sqrt{g(r)}} = \frac{[E - qQ/r]}{\sqrt{g(r)}} \quad \text{para todo } r \geq r_+, \quad (3.28)$$

na qual usamos o fato de $\dot{r}^2 > 0$. Podemos simplificar essa expressão, encontrando o valor de r_{\min} que minimiza a função acima. Derivando e igualando a zero obtemos:

$$r_{\min} = \left[\frac{qM - EQ}{qQ - EM} \right] Q. \quad (3.29)$$

Usando a relação (3.25), verificamos que $r_{\min} > r_+$. Substituindo esse valor de r em (3.28) e simplificando a expressão obtemos:

$$m < Q \sqrt{\frac{-E^2 + 2\frac{M}{Q}Eq - q^2}{M^2 - Q^2}}. \quad (3.30)$$

Com essa restrição em m garantimos que a relação (3.23) é satisfeita. Dessa maneira, podemos satisfazer as condições 1. e 2. acima escolhendo os parâmetros m , q e E de forma que:

- A carga q satisfaça a equação (3.27) para os valores dados de M e Q ,
- A energia E satisfaça as equações (3.25) e (3.26) com os valores dados de M , Q e com o valor de q acima,
- A massa m satisfaça a equação (3.30) usando os outros parâmetros.

Para verificarmos que após atravessar o horizonte a partícula de teste vai realmente em direção à singularidade (e não é “reemitida” pelo horizonte), precisamos analisar o sinal de \dot{r} . Se $\dot{r}(r) < 0$ para qualquer valor de r , então a partícula atingirá a singularidade em $r = 0$. Na análise acima consideramos que $\dot{r}^2 > 0$ apenas para $r \geq r_+$, mas a equação (3.25) implica que a relação $(E - qQ/r)$ só se anula para $r = r_0$, tal que:

$$r_0 > Q > r_-.$$

Quando $r_0 < r_+$, temos que $g(r_0) < 0$, o que implica que $\dot{r}^2(r_0) > 0$. Já quando $r_0 > r_+$ corresponde ao caso discutido acima. De qualquer forma, a restrição na massa m dada pela equação (3.30) garante que $\dot{r}^2 > 0$ para qualquer valor de r , o que significa que, uma vez que a partícula de teste atravessa o horizonte de eventos, ela irá necessariamente atingir a singularidade $r = 0$.

Substituindo as expressões para $g(r)$ e para A_v , e reagrupando os termos, podemos reescrever a equação (3.22) como:

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{E^2}{m^2} - 1 \right) - \frac{2M}{r} \left(\frac{qQE}{m^2 M} - 1 \right) + \frac{Q^2}{r^2} \left(\frac{q^2}{m^2} - 1 \right). \quad (3.31)$$

O raio r_{\min} que minimiza a expressão acima é dado por:

$$r_{\min} = Q \left(\frac{q^2}{m^2} - 1 \right) \left[\frac{Eq}{m^2} - \frac{M}{Q} \right]^{-1},$$

de forma que o correspondente valor mínimo de \dot{r}^2 é dado por:

$$\dot{r}^2(r_{\min}) = \frac{-\left(\frac{q-E}{m}\right)^2 + 2\left(\frac{M}{Q} - 1\right) \left[\frac{Eq}{m^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{M}{Q} + 1 \right) \right]}{\frac{q^2}{m^2} - 1}. \quad (3.32)$$

Utilizando a relação (3.30), podemos mostrar que $\dot{r}^2(r_{\min}) > 0$. Portanto, concluímos ser possível destruir o horizonte de um buraco negro de Reissner-Nordström quase-extremo usando a aproximação de partícula de teste e desprezando os efeitos de “backreaction”.

Feito isso, vamos agora investigar se esses efeitos podem realmente ser desprezados. Basicamente precisamos garantir que a partícula não é muito grande - de forma que seja possível que ela caia no buraco negro e também para que ela não afete significativamente a métrica de fundo - e que as energias relativísticas e eletromagnéticas não sejam muito altas para não afetarem a curvatura. Para verificarmos isso vamos analisar os tensores de energia-momento da partícula e do buraco negro.

Considerando que a partícula seja uma esfera de poeira uniformemente carregada (as estruturas internas são desprezíveis), o tensor de energia-momento da partícula é máximo em sua

superfície (raio r_p), de maneira que $|T_p^{ab}| \sim F_p^2 \sim q^2/r_p^4$. Já o tensor eletromagnético do buraco negro para um raio r perto do horizonte pode ser escrito como $|T_{BN}^{ab}| \sim F_{BN}^2 \sim Q^2/r^4 \sim 1/M^2$. Logo, para termos $|T_p^{ab}| \ll |T_{BN}^{ab}|$ (e dessa forma poderemos considerar que a métrica de fundo está fixa), precisamos que $r_p^2 \gg qM$. Além disso, precisamos ter $r_p \ll M$, para que a partícula seja menor que o buraco negro, e para que todas suas partes constituintes estejam sujeitas à mesma curvatura.

Logo, temos que $\sqrt{qM} \ll r_p \ll M$. Como essa relação pode ser satisfeita com uma apropriada escolha de r_p , e como a equação do movimento é independente dessa escolha de r_p , podemos considerar que a partícula se move em uma métrica de fundo fixa. Para continuarmos nossa análise, vamos agora modificar um pouco a equação de movimento da partícula (mas ainda considerando que ela se move em uma métrica de fundo fixa, de acordo com a análise acima). Essa modificação contém correções devido aos efeitos de “auto-campo”. Expandindo em termos de q^2/m , a equação de movimento para uma pequena partícula esférica e carregada (até primeira ordem) pode ser escrita como [33]:

$$\begin{aligned} a^a &\equiv u^b \nabla_b u^a \\ &= \frac{q}{m} F^{ab} u_b + \frac{2}{3} \frac{q^2}{m} \left[\frac{q}{m} u^c \nabla_c F^{ab} u_b + \frac{q^2}{m^2} F^{ab} F_{bc} u^c - \frac{q^2}{m^2} u^a F^{bc} u_c F_{bd} u^d \right] \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{q^2}{m} \left[R^a_b u^b + u^a R_{bc} u^b u^c \right] + \frac{q^2}{m} u_b \int_{-\infty}^{\tau} \nabla^{[b} (G^-)^{a]c} u_c(\tau') d\tau', \end{aligned} \quad (3.33)$$

na qual F^{ab} é o tensor de Maxwell correspondente ao campo eletromagnético do buraco negro (mas sem levar em conta o campo da partícula), R^{ab} é o tensor de curvatura de Ricci da métrica de fundo, e $(G^-)^{ab}$ é a função de Green retardada para o potencial vetor no calibre de Lorentz.

O primeiro termo do lado direito da equação acima corresponde ao termo de partícula de teste usado anteriormente, conforme equação (3.19). Os próximos três termos descrevem o amortecimento devido à radiação de Abraham-Lorentz. Os próximos dois termos de curvatura estão presentes para preservar a invariância da aceleração, e o último termo surge devido à falha do princípio de Huygens em espaços curvos. Note que todos os termos de correção possuem o fator q^2/m . Dessa maneira, precisamos que o raio clássico da partícula, $r_{cl} = q^2/m$, seja muito menor que M (para que os termos de correção sejam pequenos). Sabemos que para movimentos radiais em um potencial estático, o terceiro e quarto termos da equação acima se cancelam. Os termos de curvatura (quinto e sexto termos) também se cancelam.

Quanto aos outros termos, podemos reescrevê-los de modo que nossa equação de movimento se reduza à:

$$\begin{aligned} u^b \nabla_b u^a &= \frac{q}{m} F^{ab} u_b \left[1 + \frac{2}{3} \frac{q^2}{m} \left(\dot{r} \frac{f'}{f} + g' \dot{v} \right) + \left(\frac{q^2}{m} F^{ab} u_b \right) [-qf'(g\dot{v} - \dot{r})] \right], \\ f(r) = F^{vr} &= \frac{Q}{r^2} \Rightarrow f'(r) = \frac{df}{dr} = -\frac{2Q}{r^3}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

na qual $\dot{*} = d/d\tau$, $*' = d/dr$ e $g'(r) = 2M/r^2 - 2Q^2/r^3$. Com essa nova equação, vamos fazer uma análise mais sistemática para verificarmos se a condição 3. pode ser satisfeita no regime em que as condições 1. e 2. são. Para tal, vamos definir $M = 1$, e introduzir o parâmetro ϵ , tal que:

$$\begin{aligned} M &= 1. \\ Q &= 1 - 2\epsilon^2. \\ q &= a\epsilon, & a > 1. \\ E &= a\epsilon - 2b\epsilon^2, & 1 < b < a. \\ m &= c\epsilon, & c < \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Analisando a equação de movimento com esses novos parâmetros, podemos concluir que os termos de correção se tornam arbitrariamente pequenos - a ordem dos efeitos de “backreaction” são da mesma ordem da velocidade da partícula, $O(\epsilon)$. Desse modo, quando $\epsilon \rightarrow 0$, a condição 3. pode ser satisfeita de um modo auto-consistente com a precisão desejada. Porém, esse fato não é suficiente para que possamos negligenciar os efeitos de “backreaction” em nosso contexto, pois uma pequena diferença nas equações de movimento podem gerar situações finais completamente diferentes, ou seja, um termo pequeno na equação de movimento pode fazer com que a partícula não caia mais no buraco negro, mas sim encontre um ponto de retorno em seu caminho.

Isso pode ser explicado pois a medida que a partícula se aproxima do buraco negro, ela perde energia devido radiação eletromagnética e gravitacional. Isso pode fazer com que ela não tenha energia suficiente para vencer a repulsão eletrostática. Para descobirmos o que realmente ocorre, precisamos resolver a equação do movimento, mas essa equação é muito complicada para determinarmos uma solução, além do fato de que a energia não é mais uma constante do movimento. Para verificar se a partícula cai ou não no buraco negro, vamos analisar um exemplo numérico.

Considere um buraco negro com $Q = 0.99999$ (e conseqüentemente $M - Q = 10^{-5}$). Suponha que a partícula tenha carga $q = 3 \times 10^{-3}$, massa $m = 1.8 \times 10^{-3}$, e que seja jogada radialmente em direção ao buraco negro com energia $E = 2.9897 \times 10^{-3}$. Em termos dos parâmetros definidos acima, obtemos $\epsilon \approx 0.0022$, $a \approx 1.34$, $b \approx 1.03$ e $c \approx 0.805$.

Se desconsiderarmos os efeitos de “backreaction”, a partícula cairá no buraco negro, pois $\dot{r}^2 > 0 \forall r$, já que $\dot{r}(r_{min}) = 2.36 \times 10^{-6} > 0$. Além disso, a massa total final é $M_f \leq M + E = 1.0029897$, enquanto que a carga final é $Q_f = Q + q = 1.0029900$. Portanto, temos $Q_f > M_f$, de forma que a partícula cai no buraco negro e destrói seu horizonte, gerando uma singularidade nua.

Quando levamos em conta os efeitos de “backreaction”, \dot{r}^2 se torna negativo, indicando que a partícula não atravessa o horizonte. Relaxando algumas condições, e deixando a energia inicial ser maior que a usada acima, então a partícula atravessa o horizonte de eventos e produz uma

singularidade nua. A conclusão final de Hubeny é que mais trabalhos precisam ser feitos sobre o assunto. Vamos agora estudar os resultados obtidos por Jacobson [34–36].

3.1.3 Análise de Jacobson

Jacobson também tenta violar a conjectura da censura cósmica enviando uma partícula de teste em direção a um buraco negro. A principal diferença em relação à análise de Hubeny é que Jacobson considera que o buraco negro inicial possui apenas momento angular, sem carga elétrica (buraco negro de Kerr). Jacobson também considera o buraco negro inicialmente quase-extremo, assim como Hubeny.

Para podermos tratar a partícula como uma partícula de teste, e, dessa forma podermos desprezar os efeitos de radiação e de “backreaction”, vamos assumir que a energia da partícula (δE) e seu momento angular (δJ) definidos em relação ao buraco negro sejam pequenos em relação aos parâmetros do buraco negro:

$$\delta E \ll M, \quad \delta J \ll J. \quad (3.36)$$

Vamos assumir também que o momento angular da partícula esteja alinhado com o do buraco negro para maximizarmos o momento adicionado. Como queremos destruir o horizonte de eventos, a situação final deve apresentar a seguinte relação:

$$J + \delta J > (M + \delta E)^2. \quad (3.37)$$

Dessa forma, obtemos um limite inferior para o momento angular da partícula:

$$\delta J > \delta J_{\min} = (M^2 - J) + 2M\delta E + \delta E^2. \quad (3.38)$$

Vamos agora obter o limite superior para o momento angular. Como a partícula atravessa o horizonte do eventos do buraco negro, então o fluxo de energia e momento para dentro do buraco negro estão relacionados com o tensor de energia momento da partícula da seguinte forma:

$$\delta E - \Omega_H \delta J = \int T_{ab} \chi^a d\Sigma^b, \quad (3.39)$$

na qual $\Omega_H = a/2Mr_+$ é a velocidade angular do horizonte, $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ é o raio do horizonte, $\chi^a = \partial_t^a + \Omega_H \partial_\phi^a$ é o vetor de Killing e $d\Sigma^b$ é o elemento de superfície do horizonte. Ambos χ^a e $d\Sigma^b$ são paralelos ao gerador nulo do horizonte, de forma que a condição de energia nula sobre a matéria da qual é feita a partícula de teste implica que:

$$\delta E > \Omega_H \delta J \Rightarrow \delta J < \delta J_{\max} = \frac{2Mr_+}{a} \delta E. \quad (3.40)$$

Essa última relação garante que a partícula pode atravessar o horizonte vindo de algum ponto exterior. Portanto, se para algum valor de δE obtermos $\delta J_{\min} < \delta J_{\max}$, então teremos valores de δJ que satisfazem as equações (3.38) e (3.40).

Note que se o buraco negro for extremo, teremos $J = M^2 \Rightarrow a = M = r_+$. Logo, teremos:

$$\delta J_{\min} = 2M\delta E + \delta E^2 > \delta J_{\max} = 2M\delta E.$$

Portanto, se o buraco negro for extremo, é impossível satisfazermos ambas as condições para o momento angular, e consequentemente não poderemos gerar uma singularidade nua. Esse resultado é justamente o resultado obtido por Wald. Porém, para buracos negros quase-extremos, essas condições podem ser satisfeitas, como veremos a seguir. Considere $\epsilon \ll 1$ definido como:

$$\frac{J}{M^2} = \frac{a}{M} = 1 - 2\epsilon^2. \quad (3.41)$$

Note que essa é a mesma expansão usada por Hubeny. Da relação acima vemos que o buraco negro não é extremo, mas sim quase-extremo. Aplicando essa definição nas equações (3.38) e (3.40), e usando daqui em diante $M = 1$ para simplificar as expressões, obtemos:

$$\delta J_{\min} = 2\epsilon^2 + 2\delta E + \delta E^2, \quad (3.42)$$

$$\delta J_{\max} = (2 + 4\epsilon)\delta E + O(\epsilon^2\delta E). \quad (3.43)$$

Portanto, a diferença entre os valores máximo e mínimo permitidos para o momento pode ser escrita como:

$$\delta J_{\max} - \delta J_{\min} = 4\epsilon\delta E - \delta E^2 - 2\epsilon^2. \quad (3.44)$$

Se essa diferença for positiva, então as condições acima são satisfeitas. Logo, impondo que a expressão acima seja positiva, obtemos:

$$(2 - \sqrt{2})\epsilon < \delta E < (2 + \sqrt{2})\epsilon. \quad (3.45)$$

Dessa maneira, se a energia da partícula estiver dentro do intervalo anterior, ela poderá entrar no buraco negro, destruir seu horizonte, e gerar uma singularidade nua. Note que os valores permitidos para a energia δE são da ordem de ϵ , e que, segundo as equações (3.42) e (3.43), $\delta J \sim \delta E$, valores esses consistentes com a hipótese de que estamos trabalhando com uma partícula de teste (com $\delta E \ll M$ e $\delta J \ll J$).

Como exemplo numérico, considere que $\epsilon = 10^{-2}$. Dessa forma, se o buraco negro possuir inicialmente momento angular dado por:

$$a = J = 1 - 2\epsilon^2 = 0.9998,$$

poderemos criar uma singularidade nua, lembrando que usamos $M = 1$ na equação acima. Note que o parâmetro a é bem próximo de 1, mas ainda assim menor que a unidade.

Vamos agora analisar a trajetória da partícula. Pode ser que com esses valores permitidos de energia e momento angular encontrados acima, a partícula esteja em uma órbita fechada, e que encontre um ponto de retorno ao longo de seu caminho em direção ao buraco negro.

Se isso acontecer, ela não será capaz de chegar até o horizonte. Para investigarmos esse problema, vamos analisar a coordenada radial do movimento orbital da partícula no plano equatorial do buraco negro. Sabemos que essa coordenada satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r, \tilde{E}, \tilde{L}) = 0, \quad (3.46)$$

na qual V_{eff} é o potencial efetivo sentido pela partícula, \tilde{E} é a energia e \tilde{L} o momento angular da partícula por unidade de massa. O potencial efetivo pode ser escrito como [27]:

$$V_{\text{eff}}(r, \tilde{E}, \tilde{L}) = -\frac{1}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2} - \frac{(\tilde{L} - a\tilde{E})^2}{r^3} + \frac{1}{2}(1 - \tilde{E}^2) \left[1 + \frac{a^2}{r^2}\right]. \quad (3.47)$$

Sabemos que os pontos de retorno da partícula são encontrados fazendo $V_{\text{eff}}(r) = 0$. Para analisarmos os possíveis pontos de retorno de nossa partícula, vamos escolher um valor de energia δE que esteja dentro do intervalo encontrado acima. Por simplicidade, vamos escolher o valor médio do intervalo, ou seja, vamos considerar $\delta E = 2\epsilon$. Dessa maneira, obtemos:

$$\tilde{E} = \frac{2\epsilon}{m},$$

na qual m é a massa de repouso da partícula. Para esse valor específico de energia, o intervalo de valores permitidos para o momento angular é dado por:

$$\begin{cases} \delta J_{\min} = 4\epsilon + 6\epsilon^2, \\ \delta J_{\max} = 4\epsilon + 8\epsilon^2. \end{cases} \Rightarrow (2 + 3\epsilon)\tilde{E} < \tilde{L} < (2 + 4\epsilon)\tilde{E}.$$

Podemos reescrever a última inequação como:

$$\tilde{L} = (2 + b\epsilon)\tilde{E}, \quad 3 < b < 4.$$

Se pudermos encontrar valores de m , b e ϵ tal que $V_{\text{eff}} < 0$ para todos os valores de r fora do horizonte, então será possível a partícula sair do infinito e cair em direção ao buraco negro até atravessar o horizonte, pois nesse caso não haverá ponto de retorno. Vamos apresentar um exemplo numérico de que tal órbita existe.

Vamos nos focar no caso em que temos uma velocidade assintótica muito alta ($\tilde{E} \gg 1$). Expandindo o potencial acima até segunda ordem em ϵ , e retirando os termos independentes de \tilde{E} , obtemos:

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\tilde{E}^2}{2} \left[1 - (3 + 4b\epsilon + (b^2 + 4)\epsilon^2)r^{-2} + (2 + 4b\epsilon + 2(b^2 + 4)\epsilon^2)r^{-3}\right]. \quad (3.48)$$

Note que esse potencial é negativo tanto para $r \rightarrow 0$ ($V_{\text{eff}} \rightarrow -\infty$) quanto para $r \rightarrow \infty$ ($V_{\text{eff}} \rightarrow -\tilde{E}^2/2$). Para encontrarmos seus pontos críticos, precisamos de sua derivada, que pode ser escrita como:

$$\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = \frac{\tilde{E}^2 [3 + 6b\epsilon + 3(4 + b^2)\epsilon^2 - (3 + 4b\epsilon + (4 + b^2)\epsilon^2)r]}{r^4}. \quad (3.49)$$

Igualando essa expressão a zero, obtemos apenas um ponto crítico, dado por $r_{\text{cr}} = 1 + \frac{2}{3}b\epsilon + O(\epsilon^2)$. Para verificarmos se é ponto de máximo ou mínimo, precisamos da segunda derivada, dada por:

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}(r)}{dr^2} = \frac{3\tilde{E}^2 [-4 + \epsilon(4\epsilon(r - 4) + b^2\epsilon(r - 4) + 4b(r - 2)) + 3r]}{r^5}. \quad (3.50)$$

Substituindo o valor de r_{cr} , obtemos

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}(r_{\text{cr}}) = -3\tilde{E}^2 + O(\epsilon) < 0.$$

Como esse valor é negativo (estamos trabalhando no limite em que $\tilde{E} \gg 1$), r_{cr} é um ponto de máximo, e o valor do potencial nesse máximo é dado por:

$$V_{\text{eff}}(r_{\text{cr}}) = -\left(2 - b^2/6\right)\epsilon^2\tilde{E}^2 + O(\epsilon^3). \quad (3.51)$$

Isso significa que o potencial $V_{\text{eff}}(r)$ será negativo para todos os valores de r desde que tenhamos a seguinte relação satisfeita:

$$(2 - b^2/6) > 0 \Rightarrow b^2 < 12 \Rightarrow b < \sqrt{12} \approx 3,46.$$

Mas vimos que b deveria estar entre 3 e 4. Considerando $b = 3.3$, $m = 10^{-3}$ e $\epsilon = 10^{-2}$ (conforme exemplo anterior), teremos $\tilde{E} = 20$, o que justifica o caso anterior. Logo, mostramos que é possível ter uma órbita em que a partícula cai do infinito direto até o horizonte do buraco negro.

Por fim, vamos analisar o tamanho e estrutura da partícula. Por simplicidade, vamos assumir que a partícula está caindo ao longo do eixo de simetria do buraco negro. Vamos primeiro considerar o caso em que $\delta E \sim m$. Se a partícula não possui momento relativístico, então temos $\delta J \sim mvR \sim \delta E v R$, na qual v é a velocidade da superfície da partícula e R é seu raio. Como $v < 1$, então temos que $R > \delta J / \delta E \sim 1 (= M)$. Logo, nesse caso a partícula seria maior que o buraco negro, e tratá-la como pontual seria injustificável.

Se impormos uma velocidade tangencial ultra-relativística, a componente do tensor de energia-momento $T_{\hat{r}\hat{r}}$ em um referencial ortonormal deve satisfazer a seguinte relação:

$$-T_{\hat{r}\hat{r}}R^2 > m/R \Rightarrow -T_{\hat{r}\hat{r}} > m/R^3.$$

Mas essa é justamente a densidade de energia da partícula, de forma que essa desigualdade viola a condição de energia, e a partícula precisaria ser formada por matéria não-física. Logo, não é possível destruir o horizonte de um buraco negro de Kerr enviando uma partícula cuja energia é da ordem da sua massa de repouso.

Vamos analisar agora o caso em que a partícula está em uma órbita fechada, com $\delta E \ll m$, pois nesse caso é possível obter um valor alto de δJ com um valor pequeno de R (já que o momento angular envolve a massa de repouso m e não a energia δE). Isso seria possível se pudéssemos levar lentamente a partícula de sua órbita até um ponto bem perto do horizonte antes de a soltarmos.

Nesse caso, como $m \gg \delta E$, para podermos usar a aproximação de partícula de teste precisamos impor que $m \ll 1$ e $R \ll 1$. Para o caso de momento não relativístico, temos que $\delta J \sim mvR$. Colocando $v < 1$ obtemos $R > \frac{\delta J}{m} \simeq \frac{4\epsilon}{m}$. Já o fato de que $R \ll 1$ implica que $m \gg \epsilon$, e dessa maneira obtemos as seguintes relações:

$$\epsilon \ll m \ll 1, \quad \frac{4\epsilon}{m} \lesssim R \ll 1. \quad (3.52)$$

Vamos agora analisar a distância do ponto em que a partícula será solta até o horizonte (d). Precisamos garantir que a partícula é menor que essa distância, para que ele fique totalmente fora do horizonte antes de ser solta. Dessa forma, temos que $R_{polar} < d$. Por fim, precisamos garantir que a partícula, depois de solta, realmente irá cair para dentro do horizonte, ao invés de ser repelida pelo buraco negro. Para que ela caia, pode ser mostrado que o maior valor permitido para d é dado por: $d_{max} \simeq \epsilon/m$. Dessa maneira, obtemos:

$$R_{polar} < \frac{\epsilon}{m} \Rightarrow R_{polar} \lesssim \frac{R}{4}.$$

Juntando as duas relações acima obtemos:

$$\frac{4\epsilon}{m} \lesssim R < \frac{\epsilon}{m}. \quad (3.53)$$

Portanto, podemos concluir que não existe um valor de R aceitável, pois se a partícula for grande o suficiente para possuir o momento angular necessário com um stress fisicamente aceitável, então ela será muito grande, e não ficará totalmente para fora do horizonte de eventos do buraco negro antes de ser solta.

Dessa maneira, através da análise da órbita, e desprezando efeitos de radiação e de “back-reaction”, mostramos que é possível destruir o horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr com uma partícula de teste, criando assim uma singularidade nua. Vimos que isso é possível tanto no caso em que a partícula é solta a partir de uma distância finita do horizonte, quanto no caso em que ela cai a partir do infinito.

Quando levamos em conta o tamanho e estrutura da partícula de teste, chegamos a uma inconsistência, pois vimos que não existe nenhum valor de raio R que seja compatível com os requerimentos de stress fisicamente aceitável e tamanho limitado. Nesse caso nossa análise é injustificada.

Iremos analisar os casos semiclássicos.

3.2 Análises Semiclássicas

Nesta seção continuaremos a análise da conjectura fraca da censura cósmica, e da possibilidade de se criar uma singularidade nua a partir de um buraco negro. Porém, vamos agora nos focar nas abordagens semiclássicas, nas quais existe uma métrica de fundo ditada pela Relatividade geral, mas a partícula de teste agora é substituída por um campo.

Um trabalho muito influente sobre esse tópico foi publicado por Matsas e Silva em 2007 [39], cujo objetivo é testar a conjectura em um contexto semiclássico. Considere um buraco negro de Reissner-Nordström inicialmente quase-extremo, para o qual $Q/M \lesssim 1$. Vamos analisar, através do processo de tunelamento quântico, se esse buraco negro será capaz de adquirir momento angular suficiente para que na situação final tenhamos:

$$M^2 < Q^2 + \left(\frac{J}{M}\right)^2, \quad (3.54)$$

de maneira a não termos mais horizonte, criando assim uma singularidade nua.

Vamos então analisar o processo em que partículas escalares sem massa são lançadas em direção à esse buraco negro. Devido à existência de um potencial efetivo na métrica de Reissner-Nordström, essas partículas (dependendo de sua energia) poderiam atingir um ponto de retorno clássico, sendo assim refletidas novamente para o infinito. Porém, algumas dessas partículas podem tunelar por esse potencial, caindo no buraco negro. Na nossa análise vamos considerar partículas de baixa energia ω , de modo que $M \gg \hbar\omega/c^2$, pois assim estaremos diminuindo os efeitos de “backreaction”.

A dinâmica de um campo real escalar sem massa $u_{\lambda\omega lm}$ pode ser descrito pela equação de Klein-Gordon:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu u_{\lambda\omega lm} = 0. \quad (3.55)$$

Utilizando o “ansatz”:

$$u_{\lambda\omega lm}(t, r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{\Psi_{\lambda\omega l}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (3.56)$$

no qual $\omega \geq 0$, $l \geq 0$ e $m \in [-l, l]$ (com l natural), podemos reduzir a equação acima em uma equação diferencial unidimensional para $\Psi_{\lambda\omega l}$ dada por:

$$\left\{ -f(r) \frac{d}{dr} \left[f(r) \frac{d}{dr} \right] + V_{\text{eff}}(r) \right\} \Psi_{\lambda\omega l}(r) = \omega^2 \Psi_{\lambda\omega l}, \quad (3.57)$$

na qual:

$$V_{\text{eff}}(r) = f(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} \right],$$

$$f(r) = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right),$$

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}.$$

Sabemos que a equação (3.57) não apresenta soluções que podem ser escritas em termos das funções usuais. Porém, isso não é verdade quando consideramos apenas o regime de baixas energias. Considerando $\omega = 0$, obtemos:

$$\frac{d}{dv} \left[(1-v^2) \frac{d}{dv} \left(\frac{\Psi_{\lambda\omega l}(\bar{r}[v])}{\bar{r}[v]} \right) \right] + l(l+1) \frac{\Psi_{\lambda\omega l}(\bar{r}[v])}{\bar{r}[v]} = 0, \quad (3.58)$$

na qual $v = (2\bar{r} - 1)/(\bar{r}_+ - \bar{r}_-)$, $\bar{r} = r/2M$ e $\bar{r}_{\pm} = r_{\pm}/2M$. A equação (3.57) apresenta dois conjuntos de soluções independentes associados com modos “incoming” vindos (i) do horizonte de um buraco branco ($\lambda = \rightarrow$), e (ii) do infinito nulo passado ($\lambda = \leftarrow$). Como estamos interessados em partículas que saem do infinito, vamos daqui para frente considerar que $\lambda = \leftarrow$. Dessa maneira podemos escrever a parte radial como:

$$\Psi_{\leftarrow\omega l}(\bar{r}) = C_{\omega l} \bar{r} P_l[v(\bar{r})], \quad (3.59)$$

na qual $C_{\omega l}$ é uma constante de normalização a ser determinada. Assim sendo, podemos analisar o comportamento dessa função tanto perto quanto longe do horizonte. Vamos agora introduzir a coordenada de Regge-Wheeler, dada por:

$$r^* \equiv \bar{r} + \frac{\bar{r}_+^2 \ln |\bar{r} - \bar{r}_+| - \bar{r}_-^2 \ln |\bar{r} - \bar{r}_-|}{\bar{r}_+ - \bar{r}_-}. \quad (3.60)$$

Com isso, conseguimos escrever a equação (3.57) da seguinte maneira:

$$\left\{ -\frac{d^2}{dr^{*2}} + 4M^2 V_{\text{eff}}[r(r^*)] \right\} \Psi_{\leftarrow\omega l}(r^*) = 4M^2 \omega^2 \Psi_{\leftarrow\omega l}(r^*). \quad (3.61)$$

Analisando o comportamento dessa equação perto do horizonte ($r^* < 0$ e $|r^*| \gg 1$), podemos definir a função $\Psi_{\leftarrow\omega l}(r^*)$ para essa região, na qual aparece o termo $\mathcal{T}_{\omega l}$, relacionado com o coeficiente de transmissão da partícula. O mesmo procedimento pode ser feito para grandes distâncias do horizonte ($r^* \gg 1$), só que aqui nossa expressão dependeria do termo $\mathcal{R}_{\omega l}$, relacionado com o coeficiente de reflexão. Assim, podemos obter duas expressões para $\Psi_{\leftarrow\omega l}(r^*)$: uma para perto e outra para longe do horizonte.

Após isso podemos comparar essas duas expressões obtidas com a equação (3.59). Dessa forma conseguimos obter tanto a constante $C_{\omega l}$ quanto os coeficientes de reflexão e transmissão das partículas (já que estão relacionados por $|\mathcal{R}_{\omega l}|^2 + |\mathcal{T}_{\omega l}|^2 = 1$).

Por fim, para verificarmos se a conjectura da censura cósmica pode ou não ser violada nesses casos, vamos definir a seguinte função:

$$\mathcal{C}(M, Q, J) \equiv M^2(M^2 - Q^2) - J^2. \quad (3.62)$$

Note que se a função acima for maior ou igual a zero temos um buraco negro, e se for menor que zero temos uma singularidade nua. No nosso caso tínhamos inicialmente um buraco negro de Reissner-Nordström quase-extremo. Vamos assumir que uma partícula com parâmetros $\lambda = \leftarrow$, ω , l e m entre no buraco negro (possua coeficiente de transmissão maior que zero). Dessa forma essa função se torna:

$$\mathcal{C}(M + \omega, Q, J) = \mathcal{C}(M, Q, 0) - J^2 + O(\omega), \quad (3.63)$$

com a condição de que $\omega/M \ll \mathcal{C}(M, Q, 0)/M^4 \ll 1$. Portanto, para partículas com valores de energia baixos o suficiente, essa função se tornará negativa desde que tenhamos a seguinte relação satisfeita:

$$l(l + 1) > \mathcal{C}(M, Q, 0). \quad (3.64)$$

Logo, para um buraco negro que está apenas a uma carga elementar da condição extrema, ou seja, $Q = M - e$ (com e a carga do elétron), temos que a relação acima se torna:

$$l(l + 1) > M^3 \left(2e - \frac{e^2}{M} \right). \quad (3.65)$$

Se a massa inicial do buraco negro for de $M = 10^5 M_{\odot}$, então precisamos ter $l \sim 10^{64}$. Dessa forma, concluímos que efeitos quânticos podem violar a conjectura da censura cósmica, apesar de que o valor de l necessário seja muito grande, lembrando que estamos desprezando efeitos de “backreaction”.

Baseado nessa análise, Hod [40] argumenta que nesse caso não é possível desprezarmos os efeitos de “backreaction”, pois o momento angular da partícula é muito alto comparado com os outros parâmetros envolvidos. Ele diz que uma análise deve ser feita considerando um espaço-tempo de fundo do tipo Kerr-Newman, já que a partícula irá induzir uma rotação no buraco negro.

Dessa maneira, a dinâmica do campo escalar Ψ em um espaço-tempo de Kerr-Newman (caracterizado pelos parâmetros M , Q e $a = J/M$ do buraco negro) é governada pela equação de Teukolsky, e o campo pode ser decomposto como:

$$\Psi_{lm}(t, r, \theta, \phi) = e^{im\phi} S_{lm}(\theta; a\omega) \psi_{lm}(r; a\omega) e^{-i\omega t}, \quad (3.66)$$

na qual (t, r, θ, ϕ) são as coordenadas de Boyer-Lindquist, e ψ e S obedecem equações radiais e angulares respectivamente, acopladas por uma constante $A(a\omega)$. Podemos escrever a equação radial como:

$$\frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{d\psi}{dr} \right) + \left[\frac{K^2}{\Delta} - (a\omega)^2 + 2ma\omega - A \right] \psi = 0, \quad (3.67)$$

com $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2$ e $K = (r^2 + a^2)\omega - am$. Já as funções $S(\theta; a\omega)$ são funções esferoidais, que no limite $a\omega \ll 1$ se reduzem aos esféricos harmônicos com autovalores $A_{lm} = l(l+1) + O(a\omega)$.

Seguindo o mesmo raciocínio do trabalho anterior, vamos impor condições de contorno. No horizonte de eventos do buraco negro teremos apenas modos “incoming”, enquanto que no infinito teremos tanto modos “incoming” como “outcoming”, de forma que:

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\omega y} + \mathcal{R}(\omega)e^{i\omega y} & \text{para } r \rightarrow \infty \text{ (} y \rightarrow \infty \text{)}, \\ \mathcal{T}(\omega)e^{-i(\omega - m\Omega)y} & \text{para } r \rightarrow r_+ \text{ (} y \rightarrow -\infty \text{)}, \end{cases} \quad (3.68)$$

com $dy = [(r^2 + a^2)/\Delta]dr$. Ω é a velocidade angular do buraco negro, e os coeficientes $\mathcal{R}(\omega)$ e $\mathcal{T}(\omega)$ são as amplitudes de reflexão e transmissão para uma onda vinda do infinito.

Escrevendo a solução da equação (3.67) tanto para $r \rightarrow r_+$ quanto para $r \rightarrow r_+$, e determinando seus coeficientes através da combinação dessas duas soluções na região em que se sobrepõem (intermediária), podemos escrever a probabilidade de transmissão como:

$$|\mathcal{T}(\omega)|^2 = \left[\frac{l^2}{(2l)!(2l+1)!!} \right]^2 \prod_{n=1}^l \left[1 + \left(\frac{\omega - m\Omega}{2\pi n T_{\text{BN}}} \right)^2 \right] \times \left(\frac{\omega - m\Omega}{\pi T_{\text{BN}}} \right) [(r_+ - r_-)\omega]^{2l+1}, \quad (3.69)$$

na qual $T_{\text{BN}} = (r_+ - r_-)/[4\pi(r_+^2 + a^2)]$ é a temperatura do buraco negro. Precisamos então definir a velocidade angular Ω . Sabemos que em ordem zero da interação entre o buraco negro e a onda, o espaço-tempo de fundo é fixo, e temos $\Omega^{(0)} = a/(r_+^2 + a^2)$.

Já em primeira ordem, temos que a onda incidente interage com o buraco negro, induzindo uma rotação neste último, que pode ser expressa como:

$$\Omega^{(1)} = \frac{m}{Mr_+^2}. \quad (3.70)$$

Note que $\Omega^{(1)}$ é proporcional à m . Logo, a velocidade angular final pode ser escrita como $\Omega = \Omega^{(0)} + \Omega^{(1)}$. De acordo com a equação (3.69), temos que se $\omega - m\Omega < 0$ então a probabilidade de transmissão é negativa, o que indica que esses modos são amplificados ao invés de absorvidos, fenômeno conhecido como *superradiança*.

Portanto, apenas modos com $\omega > m\Omega$ podem ser absorvidos pelo buraco negro. No caso original do trabalho do Matsas e Silva, temos que:

$$\Omega^{(0)} = 0 \quad \text{e} \quad \Omega^{(1)} = \frac{m}{Mr_+^2}, \quad (3.71)$$

o que implica que apenas modos com

$$\omega > \frac{m^2}{M^3} \quad (3.72)$$

poderão ser absorvidos pelo buraco negro. Considere então um modo com número azimutal m e energia $\omega = m^2/M^3$, que é a menor energia possível (mais adequada para o teste da conjectura). Na situação final teremos:

$$M \rightarrow M + \omega \quad \text{e} \quad a = 0 \rightarrow \frac{m}{M}. \quad (3.73)$$

Vamos então substituir esses novos valores na expressão $M^2 - Q^2 - a^2$ para ver se ela se torna negativa (o que implica em destruição do horizonte e criação de singularidade nua). Fazendo isso obtemos:

$$\left(M + \frac{m^2}{M^3}\right)^2 - Q^2 - \left(\frac{m}{M}\right)^2 = (M^2 - Q^2) + \left[\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(\frac{m^2}{M^3}\right)^2\right]. \quad (3.74)$$

Como o buraco negro inicial respeita a relação $M^2 - Q^2 \geq 0$, então temos que na situação final a condição para existência do horizonte também é satisfeita, de forma que a conjectura nesse caso é preservada.

Baseado nesse trabalho, Richartz e Saa [41] decidem testar a validade da conjectura com férmions sem massa e sem carga elétrica em um espaço-tempo de Kerr-Newman, pois sabe-se que esses férmions não sofrem o efeito de superradiança. A dinâmica desse campo é descrita pela equação de Dirac, que é separável nesse espaço-tempo de fundo de Kerr-Newman. De maneira análoga ao caso anterior, podemos definir o modo como:

$$u_{s\omega lm}(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} R_{s\omega lm}(r) S_{s\omega lm}(\theta) e^{im\phi}, \quad (3.75)$$

na qual as funções radial $R = R_{s\omega lm}(r)$ e angular $S = S_{s\omega lm}(r)$ satisfazem as equações de Teukolsky para spin $s = \pm 1/2$:

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4is\omega r + 2am\omega - a^2\omega^2 - \lambda \right) R = 0, \quad (3.76)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left[(a\omega \cos\theta - s)^2 - \left(\frac{s \cos\theta + m}{\sin\theta} \right)^2 - s(s-1) + \lambda \right] S = 0, \quad (3.77)$$

com Δ e K definidos anteriormente. Trabalhando de maneira similar à análise de Hod, ou seja, escrevendo a solução para a equação radial acima tanto para perto quanto para longe do horizonte, e identificando seus coeficientes, obtemos a seguinte expressão para o coeficiente de transmissão no limite de baixas energias ($M\omega \ll 1$) e para $Q = 0$:

$$|\mathcal{T}_{s\omega lm}|^2 = \left[\frac{(l-s)!(l+s)!}{(2l)!(2l+1)!!} \right]^2 \times \prod_{n=1}^{l+1/2} \left[1 + \left(\frac{\omega - m\Omega}{n\kappa - \frac{1}{2}\kappa} \right)^2 \right] \left(\frac{A_{\text{BN}}\kappa}{2\pi} \omega \right)^{2l+1}, \quad (3.78)$$

na qual $s = \pm 1/2$, e A_{BN} e κ representam a área e a gravidade da superfície do buraco negro respectivamente. Note que essa expressão pode ser positiva para valores arbitrariamente pequenos de ω , ao contrário do resultado encontrado por Hod.

Suponha então que inicialmente temos um buraco negro de Kerr quase-extremo com massa M (em unidades de Planck), momento angular $J = M^2 - 1$ e carga $Q = 0$. No limite em que $M\omega \ll 1$, podemos mostrar que esse buraco negro pode absorver um modo com energia ω arbitrariamente pequena e $l = m = 3/2$. A probabilidade para esse processo é dada por:

$$\left| \mathcal{T}_{\frac{1}{2}\omega\frac{3}{2}\frac{3}{2}} \right|^2 = \frac{(M\omega)^4}{36} \left(1 + 8\frac{a^2}{M^2} \right) > 0. \quad (3.79)$$

Após a absorção, a situação final terá $M_f = M + \omega$, $J_f = J + m = M^2 + 1/2$ e $Q_f = 0$. Logo, para termos a violação da conjectura, precisamos satisfazer a seguinte relação:

$$M_f^2 - \frac{J_f^2}{M_f^2} - Q_f^2 < 0 \Rightarrow \omega < M \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2M^2}} - 1 \right) \sim \frac{1}{4M}. \quad (3.80)$$

Dessa forma, vimos que nesse caso é possível violarmos a conjectura da censura cósmica, em oposição ao resultado de Hod (pois não temos o efeito de superradiança), e vimos também que essa violação pode ocorrer mesmo para valores baixos de momento angular, em oposição ao resultado de Matsas e Silva, diminuindo assim os efeitos de “backreaction”.

Se considerarmos que o buraco negro inicialmente possui uma pequena carga, de forma a termos massa M (em unidades de Planck), momento angular $J = M^2 - 1$ e carga $Q = 1$, então pode-se mostrar que a conjectura pode ser violada nesse caso com transferência mínima de momento angular, já que férmions sem carga não se acoplam com o campo elétrico do buraco negro, de maneira que o coeficiente de transmissão pode ser calculado essencialmente pela mesma equação (3.78).

Neste caso temos que a probabilidade de um modo com energia ω (arbitrariamente pequena), e $l = m = 1/2$ tunelar a barreira de potencial e ser absorvido pelo buraco negro é de:

$$\left| \mathcal{T}_{\frac{1}{2}\omega\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \right|^2 = (M^2 - Q^2)\omega^2 > 0. \quad (3.81)$$

Na situação final teremos $M_f = M + \omega$, $J_f = J + m = M^2 - 1/2$ e $Q_f = 1$, e uma singularidade nua será formada se tivermos a seguinte condição para a energia:

$$\omega < M \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4(M^2 - \frac{1}{2})^2}}{2M^2}} - 1 \right) \sim \frac{1}{16M^3}. \quad (3.82)$$

Embora a probabilidade de absorção seja muito pequena, mostramos que em princípio é possível violar a conjectura da censura cósmica através de fenômenos quânticos, criando assim

uma singularidade nua. Vimos que esse processo é possível mesmo com a absorção de um único férmion sem massa e sem carga elétrica, e com momento angular mínimo, desde que tenhamos $M\omega \ll 1$ de forma a minimizar os efeitos de “backreaction”.

Todos esses trabalhos discutidos nesse capítulo serviram de motivação para nossa pesquisa. Vamos então no próximo capítulo apresentar nossos resultados, que de certa forma generalizam os casos clássicos discutidos aqui.

Capítulo 4

Destruindo o horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr-Newman quase-extremo

Nessa seção apresentaremos uma generalização para os resultados obtidos anteriormente. A ideia principal é tentar obter um resultado semelhante aos de Hubeny e de Jacobson, mas seguindo a análise de Wald (já que Wald usa o buraco negro de Kerr-Newman, que é o mais geral possível). Portanto, vamos seguir o procedimento adotado por Wald no capítulo anterior, com a diferença que agora não iremos mais considerar que o buraco negro de Kerr-Newman está inicialmente extremo, mas sim quase-extremo (conforme Hubeny e Jacobson).

4.1 Conceitos Iniciais

Vimos que, conforme equação (3.13), a métrica de Kerr-Newman - que descreve o espaço-tempo ao redor de um buraco negro com massa M , carga elétrica Q e momento angular $J = aM$ - pode ser escrita como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [adt - (r^2 + a^2) d\phi]^2 + \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right), \quad (4.1)$$

na qual $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$. Essa métrica de fato apenas descreverá um buraco negro se tivermos satisfeita a seguinte relação:

$$M^2 \geq a^2 + Q^2, \quad (4.2)$$

na qual a igualdade corresponde ao chamado caso extremo. Se a relação acima não for satisfeita, então não temos o horizonte de eventos, e o espaço-tempo resultante apresenta uma singularidade nua, o que é proibido pela conjectura fraca da censura cósmica. O raio do horizonte de eventos desse buraco negro é dado por:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \quad (4.3)$$

Note que se a relação (4.2) não for satisfeita, não temos solução real para r_+ , o que implica em uma singularidade nua, conforme dito anteriormente.

Queremos então verificar se podemos, a partir de um buraco negro de Kerr-Newman quase-extremo e de uma partícula de teste, criar uma singularidade nua através da destruição do horizonte de eventos do buraco negro. Nesse contexto, definimos um buraco negro como sendo quase-extremo se ele pode ser caracterizado por um parâmetro δ , tal que:

$$\delta^2 = M^2 - a^2 - Q^2 > 0, \quad \frac{\delta}{M} \ll 1. \quad (4.4)$$

Note que segundo essa definição, o raio do horizonte pode ser escrito como $r_+ = M + \delta$. Considere que a partícula de teste possui energia E , carga elétrica q e momento angular orbital L , sendo que as cargas Q e q podem ser consideradas positivas sem perda de generalidade, e podemos assumir L alinhado com o momento J do buraco negro. Vamos trabalhar na aproximação de partícula de teste, de forma a manter os efeitos de “backreaction” desprezíveis. Nessa aproximação temos que:

$$\frac{E}{M} \ll 1, \quad \frac{L}{J} = \frac{L}{aM} \ll 1 \quad \text{e} \quad \frac{q}{Q} \ll 1. \quad (4.5)$$

Para criarmos a singularidade nua, precisamos que a partícula caia no buraco negro, atravessando o horizonte, e que apresente parâmetros E , q e L tais que na situação final tenhamos:

$$M_f^2 < a_f^2 + Q_f^2. \quad (4.6)$$

De acordo com as leis da termodinâmica de buracos negros (ver, por exemplo, a seção 33.8 de [37]), após a captura da partícula de teste, o buraco negro final terá momento angular total $J + L = aM + L$, carga elétrica $Q + q$, e sua massa será menor que $M + E$. Assim, podemos escrever a condição acima como:

$$(M + E)^2 < \left(\frac{aM + L}{M + E} \right)^2 + (q + Q)^2. \quad (4.7)$$

Para obtermos um limite superior para a energia da partícula, vamos isolar E na relação anterior, substituir o δ definido acima, e escrever apenas os termos até segunda ordem em (δ/M) . Dessa forma obtemos:

$$E < E_{\max} = \frac{qQM + aL}{M^2 + a^2} - \frac{M^3}{2(M^2 + a^2)} \left(\frac{\delta}{M} \right)^2 + O \left(\frac{\delta}{M} \right)^3. \quad (4.8)$$

Introduziremos aqui uma nova parametrização para buracos negros quase-extremos:

$$a = \sqrt{M^2 - \delta^2} \cos \alpha, \quad (4.9)$$

$$Q = \sqrt{M^2 - \delta^2} \sin \alpha, \quad (4.10)$$

na qual temos $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Note que se $\alpha = 0$ temos $Q = 0$ e o buraco negro se reduz ao de Kerr, já se $\alpha = \pi/2$ temos $a = 0$ e o buraco negro se reduz ao de Reissner-Nordström. Para um valor de α intermediário temos o caso mais geral, com carga e momento angular. Com mais essa definição, o buraco negro pode agora ser completamente caracterizado pelos parâmetros (M, δ, α) , pois a partir de δ e α recuperamos os parâmetros iniciais a e Q .

Vamos então agora escrever a expressão para E_{\max} com esse novo parâmetro. Fazendo as substituições e simplificando, obtemos a seguinte expressão:

$$E < E_{\max} = A - \left[\frac{M + A \sin^2 \alpha}{2 + 2 \cos^2 \alpha} \right] \left(\frac{\delta}{M} \right)^2, \quad (4.11)$$

na qual:

$$A = \frac{(L/M) \cos \alpha + q \sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \geq 0. \quad (4.12)$$

Lembrando que apenas termos até segunda ordem em (δ/M) foram mantidos. Note que a expressão encontrada para E_{\max} cresce linearmente com L/M e com q , de forma que quanto maior o momento angular e/ou a carga elétrica da partícula, maior a energia máxima permitida.

Logo, para que a partícula de teste tenha os parâmetros necessários para destruir o horizonte de eventos do buraco negro, sua energia tem que ser menor que o valor encontrado em (4.11).

Precisamos agora encontrar um limite inferior para a energia. Seguindo a análise de Wald, a energia mínima que a partícula de teste tem que ter para que efetivamente caia no buraco negro, atravessando seu horizonte de eventos, pode ser calculada de maneira análoga à feita na seção (3.1.1), com a diferença que agora não mais consideramos o buraco negro extremo. De acordo com a equação (3.15), temos que:

$$E \geq E_{\min} = \frac{qQr}{\rho^2} + \frac{a(\Delta - a^2 - r^2)}{[a^2\Delta \sin^2 \theta - (a^2 + r^2)^2]} \left(L - \frac{qQra \sin^2 \theta}{\rho^2} \right), \quad (4.13)$$

na qual r e θ são duas das coordenadas usuais (t, r, θ, ϕ) que foram usadas para escrevermos a métrica de Kerr-Newman, e:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2.$$

4.2 Lançamento do Horizonte

Vamos calcular o valor dessa energia mínima para $r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$, pois nesse primeiro momento vamos supor que a partícula de teste será solta diretamente do horizonte de eventos por algum mecanismo externo. Os detalhes de como a partícula seria levada até o horizonte e depois solta não são importantes nesse instante. Basta-nos saber que esse procedimento é teoricamente possível, pois a princípio podemos levar a partícula tão próxima quanto quisermos do horizonte, soltá-la, e depois nos afastarmos do buraco negro.

Iremos também desprezar os efeitos de “backreaction” correspondentes a esse mecanismo, que certamente ocorreriam. Mais adiante discutiremos se a partícula poderia sair do infinito e seguir uma geodésica até atravessar o horizonte do buraco negro, evitando assim a necessidade de recorrermos a um mecanismo desse tipo.

Calculando então o valor de E_{\min} no horizonte obtemos:

$$E_{\min} = \frac{1}{Q^4 + 4a^2M^2} \left[2a^2MqQ + qQ^3 \left(M - \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \right) - aL \left(Q^2 - 2M \left(M - \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \right) \right) \right]. \quad (4.14)$$

Substituindo (a, Q) por (δ, α) do mesmo modo que fizemos anteriormente, podemos reescrever essa energia mínima como:

$$E_{\min} = \frac{\sqrt{M^2 - \delta^2} [L \cos \alpha + q (M + \delta) \sin \alpha]}{(M + \delta) [M + \delta + (M - \delta) \cos^2 \alpha]}. \quad (4.15)$$

Considerando apenas os termos até segunda ordem em δ/M , obtemos:

$$E \geq E_{\min} = A - B \left(\frac{\delta}{M} \right) - \left[\frac{(2 + \sin^2 \alpha)A - 4B}{2(1 + \cos^2 \alpha)} \right] \left(\frac{\delta}{M} \right)^2, \quad (4.16)$$

na qual A foi definido anteriormente, e:

$$B = \frac{2(L/M) \cos \alpha + q \sin^3 \alpha}{(1 + \cos^2 \alpha)^2} \geq 0. \quad (4.17)$$

Logo, para que a partícula de teste seja capaz de cair no buraco negro, atravessando seu horizonte de eventos, sua energia tem que ser maior ou igual ao valor encontrado em (4.16). Se essa relação não for respeitada, então ou a repulsão eletromagnética ou um parâmetro de impacto muito grande (ou uma combinação dos dois efeitos no caso mais geral) farão com que a partícula não caia no buraco negro.

Portanto, se a partícula de teste satisfizer as relações (4.11) e (4.16) simultaneamente, então será possível a criação de uma singularidade nua. Vamos investigar se isso é possível, e para

quais intervalos dos parâmetros. Em primeiro lugar, observe que se tivermos um buraco negro inicialmente extremo, então $\delta = 0$, o que implica que:

$$E_{\max} = E_{\min} = A = \frac{(L/M) \cos \alpha + q \sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}. \quad (4.18)$$

Assim sendo, as expressões (4.11) e (4.16) para a energia da partícula não podem ser ambas satisfeitas. Recuperamos então o resultado obtido por Wald, de que é impossível destruir o horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr-Newman extremo.

Vamos então nos concentrar no caso em que $\delta > 0$. Subtraindo E_{\min} de E_{\max} obtemos:

$$E_{\max} - E_{\min} = B \left(\frac{\delta}{M} \right) - \frac{M}{2(1 + \cos^2 \alpha)} \left(\frac{\delta}{M} \right)^2 + \left[\frac{A - 2B}{1 + \cos^2 \alpha} \right] \left(\frac{\delta}{M} \right)^2. \quad (4.19)$$

Note que, no limite em que $\delta/M \ll 1$, a relação acima é positiva, indicando que de fato é possível termos um valor de energia E que satisfaça as relações (4.11) e (4.16) simultaneamente.

Para seguirmos com a nossa investigação, vamos calcular a região de interseção entre E_{\min} e E_{\max} , para que assim possamos obter os parâmetros críticos. Desprezando o terceiro termo do lado direito da equação acima, e fazendo $E_{\min} = E_{\max}$, obtemos:

$$2 \left(\frac{L}{M\delta} \right) \cos \alpha + \left(\frac{q}{\delta} \right) \sin^3 \alpha = \frac{(1 + \cos^2 \alpha)}{2}. \quad (4.20)$$

Definindo $\lambda = L/(M\delta)$ e $\epsilon = q/\delta$, a equação acima nada mais é que a equação de uma reta no plano (λ, ϵ) , Lembrando que as relações (4.11) e (4.16) são lineares em L/M e q para $\delta/M \ll 1$, e também são crescentes em ambas as direções.

Dessa forma, temos que na região acima da reta definida pela equação (4.20) as condições (4.11) e (4.16) são satisfeitas simultaneamente, criando assim a singularidade nua. Já na região abaixo dessa reta temos que $E_{\min} > E_{\max}$, ou seja, não podemos satisfazer as duas condições simultaneamente, e dessa maneira a singularidade nua não pode ser criada. Veja a figura a seguir para mais detalhes:

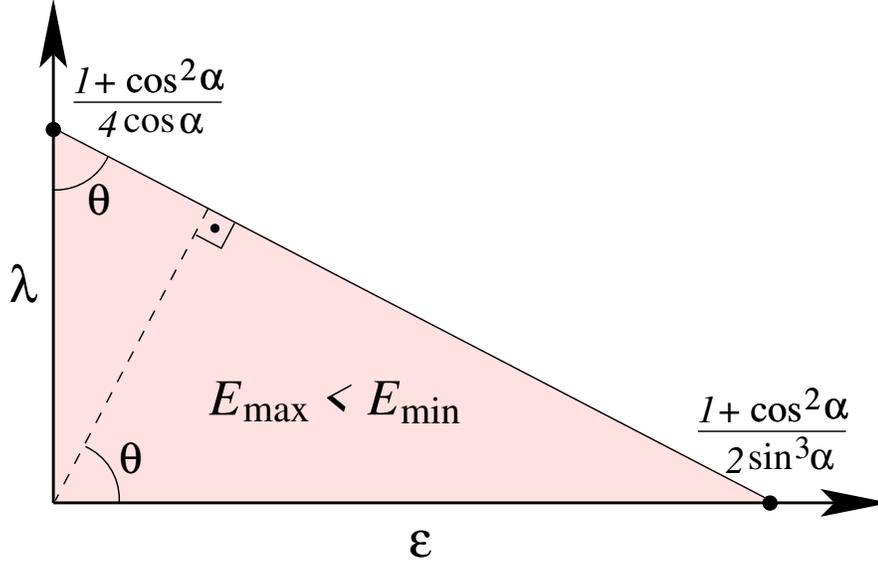


Figura 4.1: Reta no plano (λ, ϵ) que separa as regiões onde podemos (acima da reta) e não podemos (abaixo da reta, colorido) ter a criação de uma singularidade nua. Lembrando que temos $\lambda \geq 0$ e também $\epsilon \geq 0$. Na figura estão destacados os pontos em que a reta cruza os eixos. Note que esses pontos dependem do valor de α , que é definido pelos parâmetros do buraco negro.

Portanto, para termos a criação da singularidade nua, a partícula de teste deve possuir momento angular L e carga elétrica q tais que façam com que o ponto de coordenada $(L/(M\delta), q/\delta)$ esteja acima da reta (lembrando que M e δ são parâmetros relativos ao buraco negro, e não à partícula). Porém, esses valores de L e q não podem ser arbitrariamente grandes, pois dessa forma a aproximação de partícula de teste não seria mais válida.

Vamos então achar os valores ótimos para os parâmetros da partícula de teste, de forma a minimizar a energia da partícula, pois assim estaremos também minimizando os efeitos de “backreaction”. Sabemos que a energia mínima que a partícula tem que ter é dada pela expressão (4.16). Quando sujeitamos essa energia à equação (4.20), obtemos o valor ótimo para a energia. Como nossa restrição é uma reta, esse é um problema de otimização linear, e os valores mínimos para a energia são encontrados nos extremos da reta. Dessa forma temos que o valor ótimo da energia será dado por:

$$E(\lambda, 0) = \frac{\delta}{4} + O(\delta^2), \quad (4.21)$$

ou por:

$$E(0, \epsilon) = \frac{\delta}{2 \sin^2 \alpha} + O(\delta^2). \quad (4.22)$$

Note que $E(\lambda, 0) < E(0, \epsilon)$ para qualquer valor de α , o que nos indica que a melhor opção, ou seja, a que minimiza os efeitos de “backreaction”, seria jogar uma partícula de teste sem

carga elétrica ($q = 0$). Para esse caso temos:

$$\lambda = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{4 \cos \alpha}. \quad (4.23)$$

Como podemos ver da equação acima, o valor de λ (e conseqüentemente o de L) pode crescer muito, dependendo do valor de α , mesmo com o valor mínimo para a energia. Dessa forma, minimizar a energia não garante a minimização de L e q , pondo em risco a validade da aproximação de partícula de teste. Vamos então usar uma nova abordagem. Para isso vamos minimizar a soma $\lambda^2 + \epsilon^2$.

Como nossa superfície de restrição é uma reta, essa minimização significa que iremos considerar ótimo o ponto que está mais próximo da origem, pois é justamente nesse ponto que temos o menor valor possível (dentro os pontos da reta) para a soma $\lambda^2 + \epsilon^2$. Usando os dados da Fig. 4.1 acima e um pouco de trigonometria, obtemos a seguinte relação para a carga q e o momento angular L ótimos da partícula de teste:

$$\frac{qM}{L} = \frac{\sin^3 \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{(Q/a)^3}{2 [1 + (Q/a)^2]}. \quad (4.24)$$

Vamos analisar um pouco mais essa equação acima. Note que se tivermos inicialmente um buraco negro de Kerr quase-extremo, então $Q = 0$. De acordo com a classificação definida em função de M , δ e α , esse buraco negro pode ser descrito pelos parâmetros ($M, \delta = \sqrt{M^2 - a^2}, \alpha = 0$). Portanto, a equação (4.24) implica que $q = 0$.

Logo, a melhor maneira de destruir o horizonte desse buraco negro é soltar uma partícula de teste descarregada, como era de se esperar. Nesse caso a energia mínima da partícula é dada pela equação (4.21):

$$E(\lambda, 0) = \frac{\delta}{4}.$$

Quanto ao momento angular da partícula, da Fig. 4.1 acima temos que (usando $\cos \alpha = 1$):

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{L}{M} \geq \frac{\delta}{2}.$$

Dessa maneira, podemos escolher os parâmetros da partícula de teste como sendo ($E = \delta/4$, $L/M = \delta/2$, $q = 0$) de forma que a aproximação de partícula de teste seja válida, desde que $\delta/M \ll 1$, assegurando assim que os efeitos de “backreaction” podem ser desprezados.

Já para o caso de um buraco negro de Reissner-Nordström quase-extremo, temos que $a = 0$, de forma que esse buraco negro pode ser descrito pelos parâmetros ($M, \delta = \sqrt{M^2 - Q^2}, \alpha = \pi/2$). Logo, a equação (4.24) implica que $L = 0$ (como esperado). A energia mínima, calculada na equação (4.22), é dada por:

$$E(0, \epsilon) = \frac{\delta}{2}.$$

Já da Fig. 4.1 obtemos:

$$\epsilon \geq \frac{1}{2} \Rightarrow q \geq \frac{\delta}{2}.$$

Assim, os parâmetros ótimos nesse caso para a partícula são ($E = \delta/2$, $L = 0$, $q = \delta/2$), e a aproximação de partícula de teste também é válida, o que significa que podemos desprezar os efeitos de “backreaction”.

Por fim, gostaria de lembrar que esses valores de energia mínima dados pelas equações (4.21) e (4.22) foram calculados levando em conta a superfície de restrição (reta), ou seja, em primeira ordem essa energia mínima é igual à energia máxima. Porém, conforme visto acima na equação (4.19), quando levamos em conta os termos de segunda ordem, obtemos de fato $E_{\max} > E_{\min}$.

Concluimos então que para um buraco negro de Kerr-Newman quase-extremo, é possível soltarmos uma partícula do seu horizonte e criarmos uma singularidade nua.

4.3 Lançamento do Infinito

Até esse ponto nossa análise foi feita considerando que a partícula de teste era trazida de alguma maneira até o horizonte de eventos do buraco negro por algum mecanismo externo, e depois solta dessa posição. Porém, nossa análise fica vinculada a tal processo, que pode por si só causar efeitos indesejáveis, e fazer com que a partícula não caia no buraco negro.

Para não termos que nos preocupar com isso, vamos agora considerar o caso em que a partícula é solta do infinito em direção ao buraco negro, e ver se ainda sim podemos ter a destruição do horizonte de eventos e a criação de uma singularidade nua. Vamos considerar que nesse percurso a partícula se move ao longo do plano equatorial da métrica de Kerr-Newman. Nesse caso a energia mínima que a partícula deve ter é encontrada através do potencial efetivo, que pode ser escrito como [37]:

$$V(r) = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \nu\gamma_0}}{\nu}, \quad (4.25)$$

na qual

$$\beta = (La + Qer)(r^2 + a^2) - La\Delta, \quad (4.26)$$

$$\nu = (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta, \quad (4.27)$$

$$\gamma_0 = (La + Qer)^2 - (L^2 + \mu^2 r^2)\Delta, \quad (4.28)$$

e μ é a massa de repouso da partícula de teste.

Note que esse potencial efetivo é válido apenas para $r \geq r_+$. Se $r = r_+$, então esse potencial nos dá a equação (4.14), que é a energia mínima que a partícula tem que ter no horizonte de

eventos para cair no buraco negro. Para que a partícula consiga sair do infinito e atravessar o horizonte, sua energia tem que ser maior que o valor máximo do potencial efetivo, pois se $E = V(r)$ para algum $r > r_+$, então temos um ponto de retorno, e a partícula não chega ao horizonte. Note também que no limite em que $r \rightarrow \infty$ temos que $V \rightarrow \mu$, o que era esperado, já que essa métrica é assintoticamente plana.

Vamos então analisar esse potencial efetivo. O gráfico abaixo mostra três casos distintos:

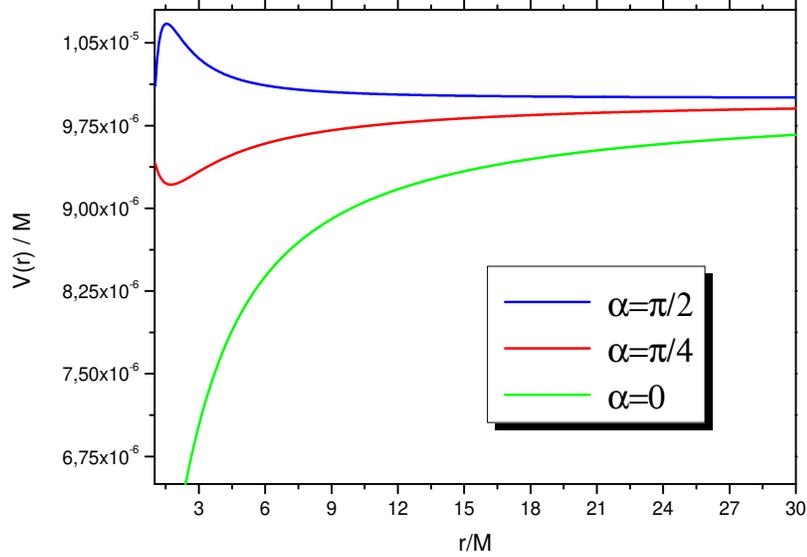


Figura 4.2: *Potencial Efetivo no qual usamos $L/M^2 = q/M = \mu/M = \delta/M = 10^{-5}$, e variamos o valor de α . O buraco negro de Reissner-Nordström é representado pela curva azul, o de Kerr pela verde, e a curva vermelha representa um caso intermediário, com iguais valores de carga elétrica e momento angular.*

Note que essas curvas de potencial acima possuem comportamentos distintos. Para fazermos uma melhor análise vamos primeiro trabalhar com o buraco negro de Reissner-Nordström, que possui $\alpha = \pi/2$. Vimos acima que para destruirmos tal buraco negro a partícula de teste deve ter $L = 0$. Mantendo q/M e δ/M constantes e variando a massa de repouso da partícula, μ/M , construímos o seguinte gráfico:

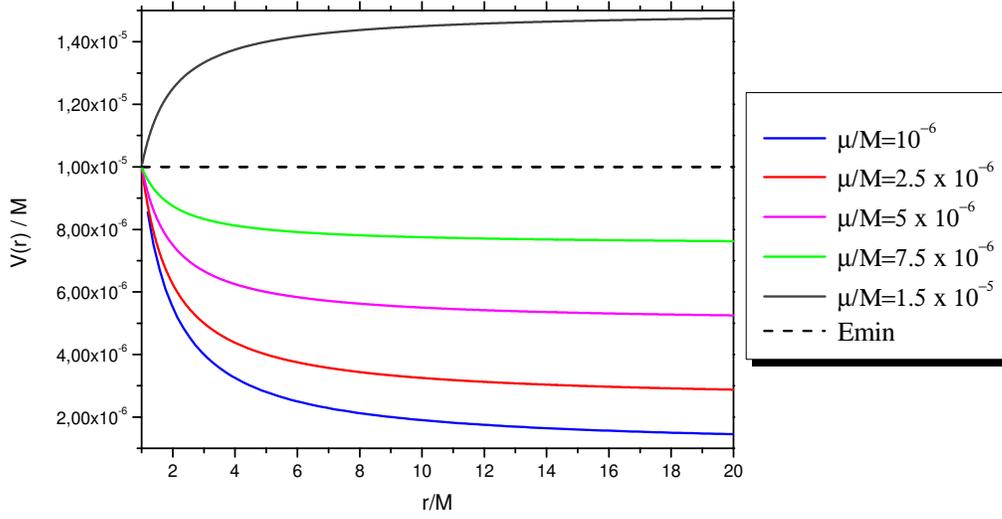


Figura 4.3: Potencial efetivo para o buraco negro de Reissner-Nordström ($\alpha = \pi/2$). Os parâmetros usados foram $q/M = \delta/M = 10^{-5}$, $L = 0$, e variamos o valor de μ/M . O valor da energia mínima (potencial efetivo no horizonte), que não depende de μ/M , calculado para esses parâmetros também foi colocado para comparação.

Note que para alguns valores de μ/M o valor da energia mínima é maior que o do potencial efetivo.

Dessa forma, uma partícula de teste jogada do infinito com energia $E \approx E_{\min}$ não terá nenhum ponto de retorno, e será capaz de atravessar o horizonte de eventos do buraco negro. Como teremos para esse caso (como já discutido acima) $E_{\max} > E_{\min}$, então será possível criar uma singularidade nua jogando a partícula do infinito.

Vamos fazer essa mesma análise para o buraco negro de Kerr. Vimos que nesse caso a partícula deve ter $q = 0$. Mantendo constantes L/M^2 e δ/M , e variando μ/M obtemos o seguinte gráfico:

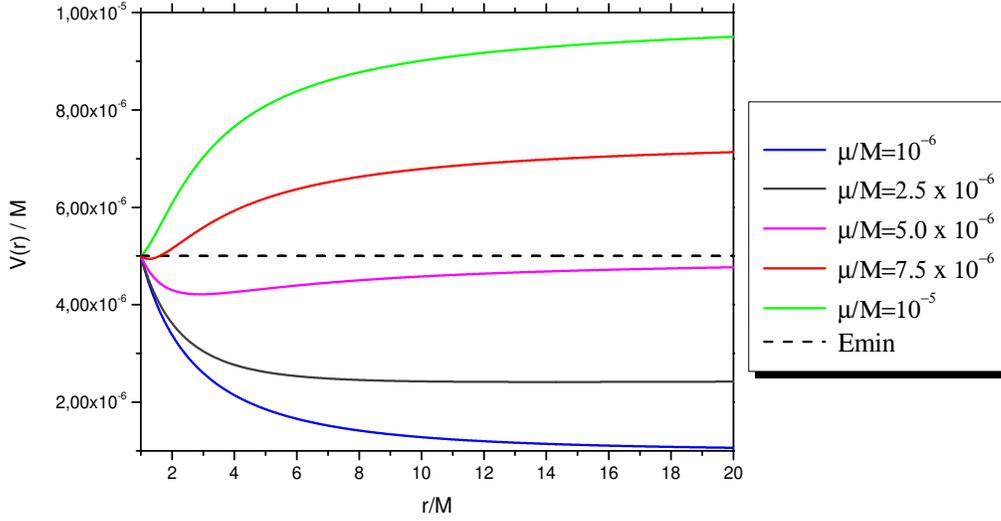


Figura 4.4: Potencial efetivo para o buraco negro de Kerr ($\alpha = 0$). Os parâmetros usados foram $L/M^2 = \delta/M = 10^{-5}$, $q = 0$, e variamos o valor de μ/M . O valor da energia mínima, que não depende de μ/M , calculado para esses parâmetros também foi colocado para comparação.

Note que aqui também obtivemos casos em que a energia mínima é maior que o potencial, permitindo assim que uma partícula jogada do infinito com essa energia seja capaz de destruir o horizonte do buraco negro. Em geral, vemos que quando $E_{\min} > \mu$ então seremos capazes de criar a singularidade nua.

Seria interessante também analisarmos o caso mais geral, em que o buraco negro possui tanto carga elétrica Q quanto momento angular $J = aM$. Vamos considerar que $a = Q$, de forma que $\alpha = \pi/4$, que corresponde à curva em vermelho na Fig. (4.2).

Segundo a equação (4.24), os parâmetros ótimos para a partícula de teste nesse caso são:

$$\frac{qM}{L} = \frac{\sin^3 \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{L}{M} = 4q. \quad (4.29)$$

Vamos então construir mais dois gráficos semelhantes aos anteriores para verificarmos se nesse caso genérico a partícula consegue atravessar o horizonte de eventos partindo do infinito. Primeiro vamos usar a relação ótima entre L e q obtida acima. Mantendo constantes $L/M^2 = 4q/M$ e δ/M , e variando μ/M obtemos o seguinte gráfico:

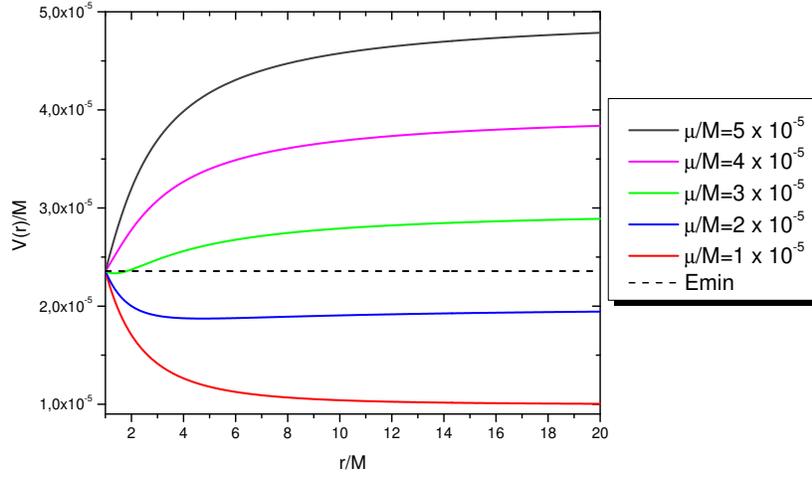


Figura 4.5: Potencial efetivo para o buraco negro de Kerr-Newman ($\alpha = \pi/4$) utilizando a relação ótima entre L e q , de forma que $L/M^2 = 4q/M = 4 \times 10^{-5}$. Deixamos $\delta/M = 10^{-5}$ e variamos o valor de μ/M . O valor da energia mínima, que não depende de μ/M , calculado para esses parâmetros também foi colocado para comparação.

Vamos também analisar o caso em que a relação entre L e q não é a encontrada acima. Deixando o valor de L/M^2 igual ao de q/M , de forma a termos $L/M^2 = q/M = \times 10^{-5}$, obtemos:

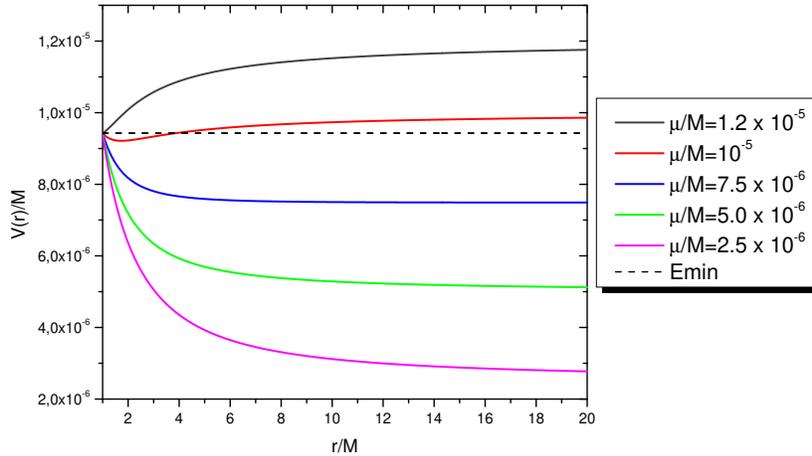


Figura 4.6: Potencial efetivo para o buraco negro de Kerr-Newman ($\alpha = \pi/4$) no qual utilizamos $L/M^2 = q/M = \delta/M = 10^{-5}$, e variamos o valor de μ/M . O valor da energia mínima, que não depende de μ/M , calculado para esses parâmetros também foi colocado para comparação.

Novamente observamos, a partir dos dois gráficos acima, que existem valores de μ/M que permitem que a partícula siga uma geodésica e caia no horizonte do buraco negro. Tal resultado pode ser obtido tanto com a relação ótima entre L e q (que minimiza efeitos de “backreaction”) quanto com $L/M^2 = q/M$.

Podemos então concluir que é possível, com uma escolha adequada dos parâmetros, e utilizando a aproximação de partícula de teste, destruir o horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr-Newman quase-extremo, criando uma singularidade nua.

Essa singularidade pode ser criada tanto a partir de partículas soltas diretamente do horizonte de eventos (por algum mecanismo) quanto a partir de partículas lançadas do infinito.

4.4 Exemplo

Por fim, vamos analisar um exemplo que possa vir a ser utilizado como condição inicial para uma análise mais completa em relatividade numérica (full numerical relativity), pois dessa forma seremos capazes de verificar, através de uma simulação, se a formação de uma singularidade nua é possível mesmo com a utilização de todos os elementos da teoria da relatividade, ou seja, sem desprezarmos os efeitos de “backreaction”.

Para tal considere um buraco negro de Kerr com massa $M \approx 10^8 M_\odot$, e suponha que $\delta/M \approx 10^{-5}$. Conforme a discussão acima, para que a partícula de teste destrua o horizonte do buraco negro, ela precisa de um momento angular $L/M^2 \geq \delta/2M \geq 5 \times 10^{-6}$. Nesse caso a energia mínima dessa partícula, calculada pela equação (4.21), é $E_{\min} \approx \delta/4 = 10^{-5}M/4 = 250M_\odot$.

Suponha que nossa partícula de teste tenha uma massa de repouso igual à massa da Lua, $\mu \approx 4 \times 10^{-8}M_\odot$. Considerando que $L/M^2 = 10^{-5}$, de acordo com a Fig. 4.4 vemos que tal partícula seria capaz de cair no buraco negro partindo do infinito, já que $E_{\min} > \mu/M$. Para verificar nosso resultado, vamos utilizar os termos de segunda ordem das equações (4.11) e (4.16). De acordo com essas equações teremos:

$$E_{\min} = (1 - 10^{-5})\frac{10^{-5}}{2}, \quad E_{\max} = \left(1 - \frac{10^{-5}}{2}\right)\frac{10^{-5}}{2}. \quad (4.30)$$

Como $E_{\max} - E_{\min} = 10^{-10}/4 > 0$, então se a partícula tiver uma energia E com valor entre esses dois extremos, ela destruirá o horizonte de eventos do buraco negro e formará uma singularidade nua. Note também que a aproximação de partícula de teste é válida nesse exemplo. A confirmação desse resultado através de simulação numérica ainda não foi possível, pois atualmente a razão mínima para as massas que pode ser implementada na programação é de 1 para 100. Porém, espera-se que no futuro essa simulação seja sim possível de ser feita e testada.

Capítulo 5

Investigação em espaços-tempo anti-de-Sitter cinco-dimensionais

Nesta seção temos por objetivo investigar a conjectura da censura cósmica com um buraco negro girante em um espaço-tempo assintoticamente anti-de-Sitter (AdS) cinco-dimensional (5D). O processo é semelhante ao adotado anteriormente, isto é, jogaremos partículas de teste em direção ao buraco negro, e veremos se no final existe a possibilidade de destruímos o horizonte de eventos, criando assim uma singularidade nua.

Concentraremos nossa atenção no estudo de perturbações lineares na métrica gerada por um buraco negro de Myers-Perry em 5D com constante cosmológica negativa. Essa solução considerada por nós nada mais é do que uma generalização da família Myers-Perry [51]. Ela foi introduzida primeiramente em [52], e logo depois generalizada em [53, 54] para dimensões maiores que cinco.

Hoje em dia sabe-se muito pouco sobre colisões de buracos negros em espaços-tempo assintoticamente AdS. Essa investigação tem por finalidade buscar um melhor entendimento nessa área, que é muito relevante para a correspondência AdS/CFT, como dito no capítulo 2.

Em particular, se conseguirmos violar a conjectura da censura cósmica classicamente nesse espaço-tempo assintoticamente AdS, possibilitando assim o aparecimento de uma singularidade nua, acreditamos que poderemos usar a parte de teoria de campos dessa correspondência para entendermos melhor o próprio conceito de singularidade em relatividade geral, dando assim uma contribuição na busca por uma teoria quântica da gravitação.

5.1 Introdução

Vamos aqui introduzir alguns conceitos e parâmetros que serão usados ao longo dessa investigação.

Sabemos que em um espaço-tempo com cinco dimensões podemos escolher dois planos de rotação ortogonais. Dessa forma, a solução geral é parametrizada por dois momentos angulares independentes a_1 e a_2 , além do parâmetro de massa M . No nosso trabalho vamos considerar apenas a situação em que $a_1 = a_2 = a$, ou seja, quando temos apenas um parâmetro de momento angular, pois como pode ser visto em [55], nesse caso a solução se torna cohomogeneidade-1, o que nos possibilita uma simplificação nos cálculos.

Portanto, usando as coordenadas $(t, r, \psi, \theta, \phi)$, que serão detalhadas a seguir, nossa métrica de fundo pode ser escrita como:

$$ds^2 = -f(r)^2 dt^2 + g(r)^2 dr^2 + r^2 \widehat{g}_{ab} dx^a dx^b + h(r)^2 [d\psi + A_a dx^a - \Omega(r) dt]^2, \quad (5.1)$$

na qual:

$$\begin{aligned} g(r)^2 &= \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{2M\xi}{r^2} + \frac{2Ma^2}{r^4} \right)^{-1}, \\ h(r)^2 &= r^2 \left(1 + \frac{2Ma^2}{r^4} \right), \\ \Omega(r) &= \frac{2Ma}{r^2 h(r)^2}, \\ f(r) &= \frac{r}{g(r)h(r)}, \\ \xi &= 1 - \frac{a^2}{\ell^2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Na expressão acima \widehat{g}_{ab} representa a métrica de Fubini-Study no espaço projetivo complexo CP^1 , que é isomórfico à esfera S^2 , e $A = A_a dx^a$ é seu potencial de Kähler, dados por:

$$\widehat{g}_{ab} dx^a dx^b = \frac{1}{4} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad A = \frac{1}{2} \cos \theta d\phi. \quad (5.3)$$

Substituindo essas duas relações acima na métrica, obtemos:

$$ds^2 = -f(r)^2 dt^2 + g(r)^2 dr^2 + \frac{r^2}{4} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + h(r)^2 \left[d\psi + \frac{1}{2} \cos \theta d\phi - \Omega(r) dt \right]^2. \quad (5.4)$$

Essa métrica, quando escrita da forma acima, se estende para dimensões superiores ímpares do tipo $D = 2N + 3$, pois a esfera S^{2N+1} pode ser escrita como S^1 sobre CP^N . Para o caso

$D = 5$ no qual vamos nos concentrar, isso corresponde ao fibrado de Hopf (S^1 sobre CP^1). Assim sendo, temos que a coordenada ψ parametriza a fibra S^1 , e possui período de 2π .

Já os dois planos de rotação ortogonais correspondem a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ nessas coordenadas utilizadas, ou seja, esses dois planos são mapeados para os polos de S^2 . Por fim, o parâmetro ℓ que aparece nas expressões acima está relacionado com a constante cosmológica (negativa), de forma que a métrica apresentada é solução da equação de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = -4\ell^{-2}g_{\mu\nu}. \quad (5.5)$$

Assintoticamente essa solução se torna anti-de-Sitter com raio de curvatura ℓ . O raio do horizonte de eventos desse buraco negro, designado por r_+ , é dado pela maior solução real de g^{-2} , e possui a geometria de uma esfera S^3 homogeneamente achatada, geometria essa que foi descrita acima em função de seu fibrado de Hopf.

Esse buraco negro possui um limite extremo, acima do qual seu horizonte se torna degenerado, e esse extremo nos dá o valor máximo permitido para a em função de M e ℓ . Expressando esse limite em função da velocidade angular do horizonte Ω_H e de seu raio r_+ , obtemos [55]:

$$\Omega_H = \frac{2Ma}{r_+^4 + 2Ma^2} \leq \frac{1}{\ell} \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{2r_+^2}}. \quad (5.6)$$

5.2 Perturbação gravitacional

Queremos então perturbar essa métrica de fundo descrita acima jogando em direção ao buraco negro uma membrana de partículas de teste homogeneamente distribuídas sobre a esfera S^3 achatada. Escolhemos jogar essa membrana de partículas pois assim estamos preservando toda a simetria rotacional da métrica de fundo, e em particular a propriedade de que os momentos angulares a_1 e a_2 são iguais. Também temos que nossa métrica não é mais estacionária, já que as partículas de teste estão caindo em direção ao buraco negro.

Vamos então trabalhar seguindo a estrutura das perturbações lineares, ou seja, temos uma métrica de fundo fixa, e vamos tratar as partículas de teste como sendo pequenas perturbações nessa métrica. A métrica perturbada $\tilde{g}_{\mu\nu}$ pode ser obtida a partir da métrica de fundo $g_{\mu\nu}$ através da seguinte relação:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (5.7)$$

na qual $h_{\mu\nu}$ representa a perturbação que é imposta pelas partículas de teste. Sabemos que no calibre Transverso e sem Traço (TT - do inglês *transverse-traceless*), temos que:

$$\nabla^\mu h_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0,$$

e a equação cosmológica de Einstein linearizada se reduz à [55]:

$$\begin{aligned}\Delta_L h_{\mu\nu} &\equiv -2R_{\mu\rho\nu\sigma}h^{\rho\sigma} - \nabla^2 h_{\mu\nu} - 8\ell^{-2}h_{\mu\nu} \\ &= -8\ell^{-2}h_{\mu\nu} + 16\pi G_N T_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{5.8}$$

na qual Δ_L é o operador de Lichnerowicz e G_N é a constante gravitacional de Newton em N dimensões. Note que o segundo termo do lado direito possui o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ das partículas de teste, que encontraremos mais adiante. Lembrando que para obtermos essa equação linearizada temos que substituir a métrica perturbada $\tilde{g}_{\mu\nu}$ na equação de Einstein, e expandir em termos da perturbação $h_{\mu\nu}$.

Porém, gostaríamos de obter a perturbação $h_{\mu\nu}$ em um formato que permitisse uma leitura direta da variação dos parâmetros de massa e de momento angular:

$$M \rightarrow M + \delta M, \quad a \rightarrow a + \delta a,$$

e esse formato não é consistente com o calibre TT. Dessa maneira, vamos calcular as equações de perturbação linear sem fixar o calibre (trabalharemos com ele depois), e para um espaço-tempo geral de dimensão D .

Estamos assumindo que a métrica de fundo fixa é solução da equação cosmológica (que possui constante cosmológica não-nula) de Einstein sem fonte, que pode ser escrita como:

$$G_{\mu\nu}^c \equiv G_{\mu\nu} + \frac{D-2}{2}\Lambda g_{\mu\nu} = 0,\tag{5.9}$$

na qual $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ é o tensor de Einstein e $\Lambda \equiv -(D-1)/\ell^2$ é a constante cosmológica (negativa, pois estamos considerando um espaço-tempo assintoticamente AdS). Substituindo a métrica perturbada $\tilde{g}_{\mu\nu}$ na equação acima e realizando os cálculos obtemos a seguinte equação para a perturbação linear [56, 57]:

$$\begin{aligned}2\delta G_{\mu\nu}^c &\equiv -\nabla^2 h_{\mu\nu} + 2\nabla^\lambda \nabla_{(\mu} h_{\nu)\lambda} - \nabla_\mu \nabla_\nu h \\ &\quad + g_{\mu\nu} (\nabla^2 h - \nabla^\alpha \nabla^\beta h_{\alpha\beta}) - h_{\mu\nu} R \\ &\quad + g_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + (D-2)\Lambda h_{\mu\nu} \\ &= 16\pi G_N T_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{5.10}$$

na qual as derivadas covariantes são calculadas com relação à métrica de fundo $g_{\mu\nu}$, e $h \equiv g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ denota o traço da perturbação. De acordo com a identidade de Bianchi, o tensor de energia-momento das partículas de teste deve ter o divergente nulo, o que ocorre se e somente se as partículas de teste seguirem uma geodésica da métrica de fundo fixa.

A equação obtida acima é genérica. Particularizando para o nosso caso, usando a métrica de fundo definida pela equação (5.4) e $D = 5$, a equação de perturbação se torna:

$$\begin{aligned} 2\delta G_{\mu\nu}^c &\equiv -\nabla^2 h_{\mu\nu} + 2\nabla^\lambda \nabla_{(\mu} h_{\nu)\lambda} - \nabla_\mu \nabla_\nu h \\ &\quad + g_{\mu\nu} (\nabla^2 h - \nabla^\alpha \nabla^\beta h_{\alpha\beta}) + 8\ell^{-2} \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h \right) \\ &= 16\pi G_N T_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

5.3 Quantidades conservadas

Como já foi visto, esse espaço-tempo não é assintoticamente plano. Dessa forma, a identificação da energia e do momento angular de uma partícula de teste não é imediata. Portanto, vamos seguir o seguinte roteiro para nossa investigação, que pode ser dividido em duas partes:

- (i) Em um primeiro momento vamos jogar uma membrana de partículas para preservar a simetria (conforme dito acima), e resolver para a perturbação.
- (ii) Após os cálculos, vamos descobrir como os parâmetros de energia E e momento angular L das partículas de teste influenciam no aumento de massa e momento angular do buraco negro.
- (iii) Com essa informação, podemos então partir para a segunda parte da pesquisa, que consiste no teste da conjectura da censura cósmica propriamente dito. Nessa parte, como será visto, atiraremos apenas duas partículas em direção ao buraco negro.

Logo, vamos começar nossa análise pelo item (i). Como visto, precisamos primeiro identificar o momento angular e a energia de uma partícula de teste em um espaço-tempo de fundo assintoticamente AdS.

Podemos construir algumas quantidades conservadas a partir das isomerias da métrica de fundo, mas qualquer combinação linear delas também será uma quantidade conservada. Precisamos então encontrar a combinação correta. O espaço-tempo descrito pela métrica (5.4) possui vetores de Killing tanto rotacionais quanto do tipo-tempo, dos quais podemos construir as três seguintes quantidades conservadas:

$$E \equiv -g_{\mu\nu}(\partial/\partial t)^\mu \dot{z}^\nu = -\frac{dT}{d\tau} \left[g_{tt} + g_{t\psi} \frac{d\Psi}{dt} + g_{t\phi} \frac{d\Phi}{dt} \right], \tag{5.12}$$

$$L_\psi \equiv g_{\mu\nu}(\partial/\partial \psi)^\mu \dot{z}^\nu = \frac{dT}{d\tau} \left[g_{t\psi} + g_{\psi\psi} \frac{d\Psi}{dt} + g_{\psi\phi} \frac{d\Phi}{dt} \right], \tag{5.13}$$

$$L_\phi \equiv g_{\mu\nu}(\partial/\partial \phi)^\mu \dot{z}^\nu = \frac{dT}{d\tau} \left[g_{t\phi} + g_{\psi\phi} \frac{d\Psi}{dt} + g_{\phi\phi} \frac{d\Phi}{dt} \right], \tag{5.14}$$

nas quais $z^\mu(\tau) = (T(\tau), R(\tau), \Psi(\tau), \Theta(\tau), \Phi(\tau))$ representa as coordenadas da partícula de teste, e o ponto representa derivada com relação ao tempo próprio τ . Note que temos as seguintes relações entre os termos da métrica:

$$\begin{aligned} g_{t\phi} &= \frac{\cos \theta}{2} g_{t\psi}, & g_{\psi\phi} &= \frac{\cos \theta}{2} g_{\psi\psi}, \\ g_{\phi\phi} &= \frac{\cos \theta}{2} g_{\psi\phi} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{4}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

de forma que a partícula de teste cujo movimento pertence inteiramente ao plano de rotação $\theta = 0$ possui $L_\phi = \frac{1}{2}L_\psi$. Do mesmo modo, a partícula de teste cujo movimento pertence inteiramente ao plano de rotação $\theta = \pi$ possui $L_\phi = -\frac{1}{2}L_\psi$. Essas duas geodésicas possuem:

$$\dot{\Theta}(\tau) = \dot{\Phi}(\tau) = 0. \quad (5.16)$$

Na verdade, existem geodésicas que obedecem as relações acima para quaisquer valores de θ e ϕ . Tais geodésica correspondem simplesmente a trajetórias radiais em S^2 . Logo, para preservarmos a simetria da métrica de fundo, nesse nosso experimento iremos jogar uma membrana de partículas de teste homoganeamente distribuídas sobre S^2 , sendo que cada partícula estará caindo em direção ao buraco negro radialmente. Essas partículas também serão homoganeamente distribuídas sobre S^1 , mas nesse caso elas possuirão rotação ao longo da coordenada ψ .

Podemos obter as outras equações que governam o movimento das partículas de teste invertendo as equações (5.12) e (5.13), e usando a normalização da quadrivelocidade, que é dada por:

$$g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu = -\epsilon,$$

na qual $\epsilon = 1, 0$ para geodésicas do tipo-tempo e nulas, respectivamente. Usando essas três relações, após um pouco de álgebra obtemos:

$$\dot{T} = \frac{E - \Omega L_\psi}{f^2}, \quad (5.17)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{h^2 \Omega E + (f^2 - h^2 \Omega^2) L_\psi}{h^2 f^2}, \quad (5.18)$$

$$\dot{R}^2 = -\frac{\epsilon - f^{-2} [E - \Omega L_\psi]^2 + h^{-2} L_\psi^2}{g^2}, \quad (5.19)$$

na qual o ponto denota derivada em relação ao tempo próprio. Nessas três equações acima, as funções f, g, h e Ω (definidas mais acima, juntamente com a métrica) devem ser consideradas como funções de $R(\tau)$ ao invés de funções de r .

5.4 Tensor de energia-momento

Dessa forma obtivemos as equações de movimento das partículas de teste. Vamos agora encontrar o tensor de energia-momento para essas partículas. Sabemos que para uma partícula de teste de massa de repouso m_0 , esse tensor pode ser escrito como [59]:

$$T_{(1p)}^{\mu\nu} = m_0 \int \delta^{(5)}(x - z(\tau)) \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\nu}{d\tau} d\tau, \quad (5.20)$$

na qual τ denota o tempo próprio ao longo da linha de mundo $z^\mu(\tau)$. Como dito acima, iremos perturbar a métrica de fundo com partículas de teste homogeneamente distribuídas sobre ambos S^2 e S^1 , de forma que o tensor de energia-momento do conjunto de partículas será função das coordenadas t e r apenas.

Fazendo uma mudança de variável na função delta, e realizando a integral no tempo, o tensor de energia-momento pode ser escrito da seguinte forma [59, 60]:

$$T^{\mu\nu} = \vartheta^{\mu\nu} \frac{\delta(r - R(t))}{r^3}, \quad (5.21)$$

com

$$\vartheta^{\mu\nu} = 4m_0 \frac{dT}{d\tau} \frac{dz^\mu}{dt} \frac{dz^\nu}{dt}, \quad (5.22)$$

na qual a quantidade m_0 pode ser interpretada como densidade. As componentes covariantes desse tensor podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \vartheta_{tt} &= -4m_0 E \left[g_{tt} + g_{t\psi} \frac{d\Psi}{dt} \right], \\ \vartheta_{tr} &= -4m_0 E g_{rr} \frac{dR}{dt}, \\ \vartheta_{t\psi} &= -4m_0 E \left[g_{t\psi} + g_{\psi\psi} \frac{d\Psi}{dt} \right] = 4m_0 L_\psi \left[g_{tt} + g_{t\psi} \frac{d\Psi}{dt} \right], \\ \vartheta_{rr} &= 4m_0 \frac{dT}{d\tau} g_{rr}^2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2, \\ \vartheta_{r\psi} &= 4m_0 L_\psi g_{rr} \frac{dR}{dt}, \\ \vartheta_{\psi\psi} &= 4m_0 L_\psi \left[g_{t\psi} + g_{\psi\psi} \frac{d\Psi}{dt} \right], \\ \vartheta_{t\phi} &= -4m_0 E \left[g_{t\phi} + g_{\psi\phi} \frac{d\Psi}{dt} \right] = 4m_0 L_\phi \left[g_{tt} + g_{t\psi} \frac{d\Psi}{dt} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{r\phi} &= 4m_0 L_\phi g_{rr} \frac{dR}{dt}, \\
\vartheta_{\psi\phi} &= 4m_0 L_\psi \left[g_{t\phi} + g_{\psi\phi} \frac{d\Psi}{dt} \right] = 4m_0 L_\phi \left[g_{t\psi} + g_{\psi\psi} \frac{d\Psi}{dt} \right], \\
\vartheta_{\phi\phi} &= 4m_0 L_\phi \left[g_{t\phi} + g_{\psi\phi} \frac{d\Psi}{dt} \right].
\end{aligned} \tag{5.23}$$

As componentes $\vartheta_{\mu\theta}$ são nulas.

Com essas definições acima, vamos agora adotar a seguinte estratégia: Primeiro fixaremos o calibre para que a perturbação $h_{\mu\nu}$ tenha a mesma forma que a variação esperada de massa e de momento angular. Com isso conseguiremos anular várias componentes da perturbação. Depois iremos resolver a equação (5.11) para as componentes da perturbação. Após isso, a partir dessas componentes, poderemos obter diretamente δM e δa .

5.5 Fixando o calibre

Vamos então fixar o calibre. Sabemos que é conveniente decompor a perturbação na métrica em partes escalares, vetoriais e tensoriais, de acordo com a maneira com a qual se transformam sob uma transformação genérica das coordenadas angulares $\{\psi, \theta, \phi\}$. Dessa forma, de acordo com [57], temos quatro componentes escalares h_{AB} , duas vetoriais h_{Ai} e uma tensorial h_{ij} , nas quais $A, B = t, r$ e $i, j = \psi, \theta, \phi$.

Cada um desses setores podem ser expandidos em termos das funções de Wigner $D_{KM}^J(\psi, \theta, \phi)$. Em cinco dimensões, que é nosso caso de interesse, temos dois operadores de momento angular que comutam, e que os operadores de Casimir coincidem. As funções de Wigner são as autofunções desses operadores.

Dado o alto grau de simetria que estamos assumindo na distribuição de matéria, a perturbação induzida irá preservar a simetria da métrica de fundo. Isso significa que apenas os zero-modos ($J = M = K = 0$) da expansão em funções de Wigner podem ser excitados, e esses modos se desacoplam dos demais.

Seguindo a referência [57], existem apenas sete componentes independentes para a perturbação:

$$\{h_{tt}, h_{tr}, h_{rr}, h_{t\psi}, h_{r\psi}, h_{\psi\psi}, h_{\theta\theta}\}, \tag{5.24}$$

enquanto que as quatro componentes $h_{\mu\theta}$ com $\mu \neq \theta$ são nulas, e as componentes restantes

podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} h_{t\phi} &= \frac{\cos\theta}{2} h_{t\psi}, & h_{r\phi} &= \frac{\cos\theta}{2} h_{r\psi}, \\ h_{\psi\phi} &= \frac{\cos\theta}{2} h_{\psi\psi}, & h_{\phi\phi} &= \sin^2\theta h_{\theta\theta} + \frac{\cos^2\theta}{4} h_{\psi\psi}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Sob uma transformação infinitesimal de coordenadas, a perturbação da métrica se transforma como:

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu}^{\text{new}} = h_{\mu\nu} + \nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}. \quad (5.26)$$

Para preservarmos a simetria, vamos considerar apenas transformações de calibre da forma:

$$\xi_{\mu} = (\xi_t, \xi_r, \xi_{\psi}, 0, \frac{\cos\theta}{2}\xi_{\psi}),$$

com $\xi_{t,r,\psi}$ funções de t e r apenas. Vamos então escolher essas funções do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \xi_t &= -\frac{f^2}{2r\Omega} \left[h_{r\psi} + \left(1 - \frac{2r^2(f^2 - \Omega^2 h^2)}{h^2 f^2} \right) \frac{\xi_{\psi}}{r} + \frac{\partial_r \xi_{\psi}}{2} \right], \\ \xi_r &= -\int \left[2h_{tr} + \frac{2}{r}\xi_t + \partial_r \xi_t - 2\frac{(\ell^2 + 2r^2)}{r\ell^2 f^2}(\xi_t + \Omega\xi_{\psi}) \right] dr, \\ \xi_{\psi} &= -(r^2 + r^{-2}) \int_1^r \frac{J(t, \tilde{r}) (\tilde{r}^2 - \tilde{r}^{-2})}{8\tilde{r}} d\tilde{r} + (r^2 - r^{-2}) \int_1^r \frac{J(t, \tilde{r}) (\tilde{r}^2 + \tilde{r}^{-2})}{8\tilde{r}} d\tilde{r}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

com:

$$J(t, r) = \frac{8r^3\Omega}{f^2} \left(h_{tr} + \Omega h_{r\psi} - \frac{2g^2}{r} \partial_t h_{\theta\theta} \right) - \frac{8r^3 - 2rh^2}{h^2} h_{r\psi} - 2r^2 \partial_r h_{r\psi}. \quad (5.28)$$

Dessa forma conseguimos eliminar as componentes h_{tr} , $h_{r\psi}$, $h_{r\phi}$ e $h_{\theta\theta}$, deixando a perturbação com apenas quatro componentes independentes. Logo, podemos escrever a perturbação como:

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} h_{tt}(t, r) & 0 & h_{t\psi}(t, r) & 0 & \frac{\cos\theta}{2} h_{t\psi}(t, r) \\ 0 & h_{rr}(t, r) & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & h_{\psi\psi}(t, r) & 0 & \frac{\cos\theta}{2} h_{\psi\psi}(t, r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & \frac{\cos^2\theta}{4} h_{\psi\psi}(t, r) \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Porém, essa fixação de calibre ainda nos deixa com uma liberdade residual, ou seja, podemos ainda realizar uma transformação de coordenadas definida por:

$$\xi_{\mu}^{\text{res}} = (\zeta_t, 0, \zeta_{\psi}, 0, \frac{\cos\theta}{2}\zeta_{\psi}), \quad (5.30)$$

na qual temos:

$$\begin{aligned}\zeta_t(t, r) &= \omega_1(t)r^2 + \omega_2(t)r^{-2}, \\ \zeta_\psi(t, r) &= -a \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) \omega_1(t) + \frac{r^4 + r^2\ell^2 - 2M\ell^2}{2Ma\ell^2r^2} \omega_2(t).\end{aligned}\quad (5.31)$$

Essa transformação deixa todas as componentes inalteradas, a não ser h_{tt} e $h_{t\psi}$, que se transformam como:

$$\begin{aligned}h_{tt} &\longrightarrow h_{tt} - a \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) \omega_1'(t) + \frac{r^4 + r^2\ell^2 - 2M\ell^2}{2Ma\ell^2r^2} \omega_2'(t), \\ h_{t\psi} &\longrightarrow h_{t\psi} + \frac{r^2}{2} \omega_1'(t) + \frac{1}{2r^2} \omega_2'(t).\end{aligned}\quad (5.32)$$

Em particular, essa transformação implica que o traço da perturbação se transforma de acordo com:

$$h^\mu{}_\mu \longrightarrow h^\mu{}_\mu + a\omega_1'(t) - \frac{1}{2Ma}\omega_2'(t).\quad (5.33)$$

Portanto, podemos ainda usar essa transformação de calibre residual para eliminar do traço da perturbação uma função de t apenas.

Tendo definido o formato da perturbação $h_{\mu\nu}$, vamos retornar a nosso problema inicial. O que precisamos fazer é introduzir a perturbação definida em (5.29), juntamente com as componentes do tensor de energia-momento definidos em (5.23), na equação (5.11), e resolver para as quatro componentes $h_{tt}(t, r)$, $h_{rr}(t, r)$, $h_{t\psi}(t, r)$ e $h_{\psi\psi}(t, r)$.

A partir dessas quatro componentes, podemos obter a variação da massa δM e momento angular δa , e a partir delas podemos verificar se na situação final conseguiremos destruir o horizonte de eventos do buraco negro e criar uma singularidade nua.

Para obtermos δM e δa a partir das componentes da perturbação, primeiro substituímos na métrica original, dada pela equação (5.1), M por $M + \delta M$, e a por $a + \delta a$. Depois pegamos apenas os termos em primeira ordem em δM e em δa , e comparamos com o resultado obtido para a perturbação $h_{\mu\nu}$.

Dessa forma, conseguiremos obter as variações da massa e momento angular introduzidas pelas partículas de teste. Como esse sistema “membrana-teste” é altamente simétrico, o valor relativo obtido para o acréscimo de momento angular em relação ao acréscimo de massa devido à essa membrana de partículas é o mesmo que para uma partícula.

Com esses valores poderemos verificar a conjectura, como mostra a seção a seguir.

5.6 Testando a conjectura da censura cósmica

A partir da métrica, podemos identificar a massa \mathcal{M} e o momento angular \mathcal{J} do espaço-tempo de fundo, que são dados por [55, 58]:

$$\mathcal{M} = \frac{\pi M}{4G} \left(3 + \frac{a^2}{\ell^2} \right), \quad \mathcal{J} = \frac{\pi M a}{G}, \quad (5.34)$$

na qual G é a constante gravitacional de Newton. Queremos investigar se é possível destruir o horizonte de tal buraco negro através das partículas de teste, de forma que na situação final tenhamos um momento angular maior que o limite extremo. Seja \mathcal{M}_0 a massa inicial do buraco negro, e \mathcal{J}_0 seus momentos angulares iniciais (lembrando que para $D = 5$ temos dois momentos angulares possíveis), dados em função dos parâmetros a , M e ℓ , conforme expressões acima.

Para testarmos a conjectura, precisamos jogar $(D - 1)/2$ partículas de teste, cada uma ao longo de um plano de rotação ortogonal. No nosso caso precisamos jogar apenas duas partículas, uma ao longo do plano $\theta = 0$ e outra ao longo de $\theta = \pi$. Assumiremos que essas partículas possuem a mesma massa m_0 e as mesmas cargas conservadas, como o momento angular $\delta\mathcal{J} = m_0 L$ e a energia $\delta\mathcal{M} = m_0 E$.

Devemos ter $\delta\mathcal{M} \ll \mathcal{M}_0$ e $\delta\mathcal{J} \ll \mathcal{J}_0$ para que a aproximação de partícula de teste seja válida. Após as partículas caírem no buraco negro, o momento angular adimensional do buraco negro, que é dado por:

$$j \equiv \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{M}^{\frac{D-2}{D-3}}}, \quad (5.35)$$

mudará para:

$$j = j_0 + \delta j, \quad (5.36)$$

na qual os subscritos se referem aos parâmetros iniciais do buraco negro, e a variação δj pode ser obtida a partir da expansão em série de Taylor da equação (5.35) em torno de \mathcal{J}_0 e \mathcal{M}_0 . Fazendo

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mathcal{J}_0 + \delta\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + m_0 L, \\ \mathcal{M} &= \mathcal{M}_0 + \delta\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + m_0 E, \end{aligned} \quad (5.37)$$

inserindo essas duas expressões em (5.35) e considerando termos até primeira ordem, obtemos:

$$\delta j = \frac{m_0}{\mathcal{M}_0} \left(\frac{L}{\mathcal{M}_0^{\frac{1}{D-3}}} - E j_0 \frac{D-2}{D-3} \right). \quad (5.38)$$

Particularizando para $D = 5$ obtemos:

$$j \equiv \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{M}_0^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.39)$$

$$\delta j = \frac{m_0}{\mathcal{M}_0} \left(\frac{L}{\mathcal{M}_0^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} E j_0 \right). \quad (5.40)$$

Trabalharemos com esse momento angular adimensional por conveniência. Dessa maneira, uma vez identificados os parâmetros E e L da partícula de teste, podemos substituí-los nas expressões acima, e seremos assim capazes de identificar se esse processo pode ou não destruir o horizonte de eventos desse buraco negro.

Vamos considerar que a situação inicial corresponda a um buraco negro extremo, $j_0 = j_{ext}$. Assim, se obtivermos $\delta j > 0$ para esse caso, então teremos passado do limite extremo, violando a conjectura da censura cósmica nesse espaço-tempo. Devido à complexidade das equações, decidimos primeiro começar com um caso mais simples, para depois irmos adicionando elementos aos nossos cálculos, até chegarmos ao resultado desejado. Revisaremos aqui o problema da perturbação linear em um caso conhecido na literatura, que é o caso da métrica de Schwarzschild em quatro dimensões para $L = 0$ (trajetória radial) [61, 62]. Essa métrica pode ser escrita nas unidades usuais (t, r, θ, ϕ) como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.41)$$

Lembrando que essa métrica permanecerá fixa (de fundo). As equações para a perturbação podem ser calculadas a partir da expressão (5.10), com $D = 4$ e $\Lambda = 0$. Definido o calibre, podemos escrever essa perturbação como:

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) H_0[t, r]}{2\sqrt{\pi}} & \frac{H_1[t, r]}{2\sqrt{\pi}} & 0 & 0 \\ \frac{H_1[t, r]}{2\sqrt{\pi}} & \frac{H_2[t, r]}{2\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2 K[t, r]}{2\sqrt{\pi}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r^2 K[t, r] \sin^2 \theta}{2\sqrt{\pi}} \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Para o caso $L = 0$ em que estamos interessados, essa escolha de calibre permite ainda

fazemos $H_1[t, r] = K[t, r] = 0$, de forma que a perturbação final fica escrita como:

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{(1 - \frac{2M}{r}) H_0[t, r]}{2\sqrt{\pi}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H_2[t, r]}{2\sqrt{\pi} (1 - \frac{2M}{r})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

O tensor de energia-momento da partícula de teste (com massa m_0 e energia E) é dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{m_0}{4\pi} \frac{E}{\left(1 - \frac{2M}{R(t)}\right)} \frac{1}{r^2} \delta[r - R(t)] \times \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2M}{R(t)}\right)^2 & -R'(t) & 0 & 0 \\ -R'(t) & \frac{R'(t)^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

com $R(t)$ sendo a coordenada radial da partícula, e $R'(t)$ sua derivada em relação à t . Substituindo as expressões (5.43) e (5.44) nas equações das componentes da perturbação e resolvendo o sistema, obtemos o seguinte resultado:

$$H_2[t, r] = \frac{4\sqrt{\pi} m_0 E \Theta[r - R(t)]}{r - 2M}, \quad (5.45)$$

$$H_0[t, r] = \frac{1}{(r - 2M)[2M - R(t)]^3} \left\{ 4\sqrt{\pi} m_0 E [4M^2 r - 4M(M + r)R(t) - R(t)^3 + R(t)^2 (4M + r + (r - 2M)R'(t)^2)] \Theta[r - R(t)] \right\}, \quad (5.46)$$

na qual Θ representa a função degrau de Heaviside. Sabemos que a geodésica radial seguida por uma partícula de teste massiva (trajetória do tipo-tempo) no espaço-tempo de Schwarzschild apresenta as seguintes relações [63]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 &= \frac{2M}{R(t)} - (1 - E^2), \\ \frac{dt}{d\tau} &= \frac{E}{1 - \frac{2M}{R(t)}}, \end{aligned}$$

com τ sendo o tempo-próprio. Dessas duas equações acima podemos obter a seguinte expressão para $R'(t)$:

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = - \left(1 - \frac{2M}{R(t)}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{E^2} + \frac{2M}{E^2 R(t)}}, \quad (5.47)$$

na qual o sinal negativo foi usado pois a partícula está se movendo em direção ao buraco negro. Dessa forma, a componente $H_0[t, r]$ da perturbação pode ser reescrita como:

$$H_0[t, r] = 4\sqrt{\pi}m_0E \left[\frac{1}{r-2M} - \frac{2}{R(t)-2M} + \frac{1}{E^2R(t)} \right] \Theta[r - R(t)]. \quad (5.48)$$

Com esses elementos, vamos agora calcular a variação na massa do buraco negro. Escrevendo a métrica original de Schwarzschild com $M \rightarrow M + \delta M$ e considerando apenas os termos em primeira ordem em δM , obtemos:

$$g(M + \delta M) - g(M) = \begin{bmatrix} \frac{2\delta M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2r\delta M}{(r-2M)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Dessa maneira, podemos encontrar o valor de δM para esse caso, descobrindo assim como a partícula de teste altera a massa do buraco negro. Nosso objetivo é realizar este mesmo procedimento com o buraco negro assintoticamente AdS em $D = 5$. Este trabalho encontra-se atualmente em andamento.

Capítulo 6

Considerações finais

Ao longo dessa tese investigamos alguns casos que tinham por objetivo principal testar a validade da conjectura fraca da censura cósmica em espaços-tempo com buracos negros. Inicialmente fizemos um breve resumo histórico sobre os principais resultados da teoria da relatividade geral, em especial os relacionados aos buracos negros, seguido por uma introdução aos principais conceitos dessa teoria. Mostramos também os resultados obtidos por Hawking e Penrose [9–15] sobre a existência de singularidades dentro da teoria, mesmo para espaços-tempo fisicamente aceitáveis, assim como enunciamos a conjectura da censura cósmica tal qual foi proposta por Penrose em 1969 [16–19].

O primeiro caso analisado foi o de Wald [31], que mostrou não ser possível destruir o horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr-Newman inicialmente extremo através do lançamento de uma partícula de teste, de acordo com a conjectura. Já Hubeny [32] mostrou ser possível destruir o horizonte de um buraco negro de Reissner-Nordström com uma partícula de teste, criando assim uma singularidade nua e violando a conjectura. As condições impostas nessa análise foram: buraco negro inicialmente quase-extremo, e efeitos de “backreaction” desprezíveis. Mostrou-se também que mesmo quando parte desses efeitos são levados em conta, podem ser arbitrariamente reduzidos, de forma a não alterar o resultado final.

Jacobson [34–36] também mostrou ser possível violar a conjectura com uma partícula de teste em um espaço-tempo com um buraco negro de Kerr quase-extremo, desde que efeitos de “backreaction” possam ser desprezados. Através da análise do potencial efetivo foi mostrado que essa violação da conjectura é possível mesmo quando as partículas de teste são soltas do infinito. A única inconsistência encontrada foi na análise da estrutura e dimensão da partícula, que quando são levadas em conta invalidam a análise.

Vimos também que processos semiclássicos podem produzir uma singularidade nua. Matsas e Silva [39] mostraram que, desprezando efeitos de “backreaction”, essa violação da conjectura é possível para um buraco negro de Reissner-Nordström quase-extremo através da absorção de

partículas escalares sem massa. Hod [40] argumenta que quando esses efeitos de “backreaction” são levados em conta, temos o fenômeno da superradiança, que evita a destruição do horizonte e salva a conjectura. Porém, Richartz e Saa [41], seguindo a mesma linha de raciocínio, mostraram que quando consideramos férmions não temos mais superradiança, e a violação da conjectura é possível minimizando os efeitos de “backreaction”.

No nosso trabalho [25] generalizamos os resultados clássicos anteriores obtidos por Wald, Hubeny e Jacobson. Mostramos que é possível, desprezando os efeitos de “backreaction”, destruir o horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr-Newman quase-extremo. Além disso calculamos os parâmetros ótimos da partícula de teste, que deixam o “backreaction” no mínimo possível, e através da análise do potencial mostramos que podemos violar a conjectura mesmo quando a partícula de teste é solta do infinito. Sugerimos também um exemplo numérico em que os efeitos de “backreaction” são mantido mínimos, que poderá em breve ser verificado computacionalmente. Por fim, investigamos se podemos obter a violação da conjectura em um espaço-tempo cinco-dimensional e assintoticamente AdS, também desprezando efeitos de “backreaction”. Este trabalho está em andamento, e se confirmada a criação de uma singularidade nua, poderemos usar a contraparte da correspondência AdS/CFT para obter mais informações sobre a natureza dessas singularidades.

Após a publicação de nosso artigo [25], alguns outros trabalhos foram publicados na área. No que diz respeito às análises semiclássicas, tivemos o trabalho de Richartz e Saa [43], que investigam a possibilidade de violar a conjectura através do tunelamento quântico de partículas carregadas com spin-0 (escalares) e com spin- $\frac{1}{2}$ (férmions). Eles primeiramente analisaram um espaço-tempo com um buraco negro de Reissner-Nordström quase-extremo, e obtiveram analiticamente (no regime de baixas energias $M\omega \ll 1$) os coeficientes de reflexão e de transmissão. Com isso puderam mostrar que a criação de uma singularidade nua é possível, violando assim a conjectura tanto para partículas com spin-0 como para partículas com spin- $\frac{1}{2}$. Depois fizeram a mesma análise para um espaço-tempo com um buraco negro de Kerr, e demonstraram que nesse caso as partículas escalares sofrem superradiança, que impõe limitações na capacidade dessas partículas em violar a conjectura. Já os férmions não apresentam esse efeito, e podem ser usados para criar uma singularidade nua mantendo os efeitos de “backreaction” os mínimos possíveis.

Já o trabalho [50] analisa os trabalhos de Jacobson [34–36], introduzindo neles efeitos de “backreaction”, em especial a chamada “self-force”, que pode ser dividida em duas categorias: dissipativa (relacionada com a perda de energia e momento angular em forma de ondas gravitacionais) e conservativa. Nesse trabalho é mostrado que efeitos relacionados com a parte dissipativa da “self-force” podem evitar a formação da singularidade nua para algumas das trajetórias calculadas por Jacobson, o que não salvaria a conjectura, pois ainda existiriam trajetórias que levam à destruição do horizonte do buraco negro. Porém, foi mostrado também que quando efeitos relacionados com a parte conservativa da “self-force” são levados em conta, todas as trajetórias de Jacobson são afetadas, e que a magnitude desses termos de “backreac-

tion” são comparáveis com a dos termos que dão origem à singularidade nua, de maneira que a “self-force” conservativa poderia salvar a conjectura. Todavia, os próprios autores deixam claro que é apenas um argumento em favor da conjectura, e não uma prova da mesma.

Apesar de todos esses trabalhos, ainda não temos uma prova definitiva da conjectura fraca da censura cósmica, e nem um contra-exemplo definitivo, já que foram calculados desprezando efeitos de “backreaction” e/ou para um intervalo muito restritivo de parâmetros da partícula de teste. Logo, a questão da conjectura permanece como um dos mais importantes problemas em aberto na relatividade geral, e seu estudo mais detalhado é fundamental para um maior entendimento da natureza das singularidades na relatividade geral, contribuindo assim na busca de uma teoria quântica da gravidade.

Referências Bibliográficas

- [1] Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Event_horizon.
- [2] S. Chandrasekhar, *The Maximum Mass Of Ideal White Dwarfs*, The Astrophysical Journal, **74** (1), 81-82 (1931).
- [3] R. Penrose, *Chandrasekhar, Black Holes, and Singularities*, J. Astrophys. Astr. **17**, 213231 (1996).
- [4] L. D. Landau, *On the theory of stars*, Phys. Z. Sowjetunion **1**, 285-288 (1932).
- [5] J. R. Oppenheimer e G.M. Volkoff, *On massive neutron cores*, Phys. Rev. **55**, 374-381 (1939).
- [6] J. R. Oppenheimer e H. Snyder, *On continued gravitational contraction*, Phys. Rev. **56**, 455-459 (1939).
- [7] R. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Phys. Rev. Lett. **11**, 237238 (1963).
- [8] E. T. Newman et al., *Metric of a Rotating, Charged Mass*, J. Math. Phys. **6**, 918-919 (1965).
- [9] R. Penrose, *Gravitational Collapse And Space-Time Singularities*, Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965).
- [10] S. W. Hawking, *The occurrence of singularities in cosmology*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **294**, 511 (1966).
- [11] R. P. Geroch, *Singularities in closed universes*, Phys. Rev. Lett. **17**, 445 (1966).
- [12] S. W. Hawking, *The occurrence of singularities in cosmology. II*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **295**, 490 (1966).
- [13] S. W. Hawking, *Singularities and the Geometry of space-time*, Adams Prize Essay, Cambridge University (1966).

-
- [14] S. W. Hawking, *The occurrence of singularities in cosmology. III. Causality and singularities*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **300**, 187 (1967).
- [15] S. W. Hawking e R. Penrose, *The singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **314**, 529-548 (1970).
- [16] S. W. Hawking e R. Penrose, *The Nature of Space and Time*, Princeton University Press, (1986).
- [17] R. Penrose, *Gravitational collapse: The role of general relativity*, Riv. Nuovo Cim. **1**, 252-276 (1969).
- [18] R. Penrose, *The question of cosmic censorship*, Journal of Astrophysics and Astronomy, **20**, 233-248, (1999).
- [19] R. M. Wald, *Gravitational collapse and cosmic censorship*, arXiv:gr-qc/9710068
- [20] J. D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, Phys. Rev. D **7**, 23332346 (1973).
- [21] S. W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Comm. Math. Phys. **43**, Number 3, 199-220 (1975).
- [22] S. W. Hawking, *Black holes and thermodynamics*, Phys. Rev. D **13**, 191-197 (1976).
- [23] John Preskill, <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/bets.html>.
- [24] M. W. Choptuik, *Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field*, Phys. Rev. Lett. **70**, 9-12 (1993).
- [25] A. Saa e R. Santarelli, *Destroying a near-extremal Kerr-Newman black hole*, Phys. Rev. D **84**, 027501 (2011).
- [26] V. Cardoso, T. Delsate, A. Nerozzi, Jorge V. Rocha e R. Santarelli, *Testing cosmic censorship with a five-dimensional rotating black hole in AdS* - Em andamento.
- [27] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, (1984).
- [28] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, (1973).
- [29] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2004).4
- [30] J. Natário, *Relativity and Singularities - A Short Introduction for Mathematicians*, arXiv:math/0603190v4 [math.DG].
- [31] R. M. Wald, *Gedanken experiments to destroy a black hole*, Ann. Physics, **82** 548-556 (1974).

-
- [32] V. E. Hubeny, *Overcharging a black hole and cosmic censorship*, Phys. Rev. D **59**, 064013 (1999).
- [33] T. C. Quinn e M. Wald, *An Axiomatic Approach to Electromagnetic and Gravitational Radiation Reaction of Particles in Curved Spacetime*, Phys. Rev. D **56**, 3381 (1997) [gr-qc/9610053].
- [34] T. Jacobson e T. P. Sotiriou, *Overspinning a Black Hole with a Test Body*, Phys. Rev. Lett. **103**, 141101 (2009).
- [35] T. Jacobson e T. P. Sotiriou, *Might black holes reveal their inner secrets?*, arXiv:1006.1763v1 [gr-qc].
- [36] T. Jacobson e T. P. Sotiriou, *Destroying black holes with test bodies*, arXiv:1006.1764v1 [gr-qc].
- [37] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman, San Francisco, (1973).
- [38] S. Hod, *Cosmic censorship, area theorem, and self-energy of particles*, Phys. Rev. D, **66**, 024016 (2002).
- [39] G. E. A. Matsas e A. R. R. da Silva, *Overspinning a nearly extreme charged black hole via a quantum tunneling process*, Phys. Rev. Lett., **99**, 181301 (2007).
- [40] S. Hod, *Weak Cosmic Censorship: as strong as ever*, Phys. Rev. Lett. **100**, 121101 (2008).
- [41] M. Richartz and A. Saa, *Overspinning a nearly extreme black hole and the Weak Cosmic Censorship Conjecture*, Phys. Rev. D **78**, 081503 (2008).
- [42] G. E. A. Matsas, M. Richartz, A. Saa, A. R. R. da Silva, e D. A. T. Vanzella, *Can quantum mechanics fool the cosmic censor?* Phys. Rev. D, **79**, 101502, (2009).
- [43] M. Richartz e A. Saa, *Challenging the weak cosmic censorship conjecture with charged quantum particles*, Phys. Rev. D **84**, 104021 (2011).
- [44] Pankaj S. Joshi, *Spacetime Singularities and Cosmic Censorship*, arXiv:1010.2049 [gr-qc].
- [45] Pankaj S. Joshi e Daniele Malafarina, *Recent developments in gravitational collapse and spacetime singularities*, Int. J. Mod. Phys. D **20**, 2641 (2011).
- [46] T. P. Singh, *Gravitational Collapse and Cosmic Censorship*, arXiv:gr-qc/9606016.
- [47] R. M. Wald, *“Weak” Cosmic Censorship*, PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, Volume 2, 181-190 (1992).

-
- [48] M. Bouhmadi-López, V. Cardoso, A. Nerozzi e Jorge V. Rocha, *Black holes die hard: Can one spin up a black hole past extremality?* Phys. Rev. D **81**, 084051 (2010).
- [49] E. Barausse, V. Cardoso e G. Khanna *Test Bodies and Naked Singularities: Is the Self-Force the Cosmic Censor?* Phys. Rev. Lett. **105**, 261102 (2010).
- [50] E. Barausse, V. Cardoso e G. Khanna *Testing the cosmic censorship conjecture with point particles: The effect of radiation reaction and the self-force* Phys. Rev. D **84**, 104006 (2011).
- [51] R. C. Myers e M. J. Perry, *Black Holes In Higher Dimensional Space-Times*, Annals Phys. **172**, 304 (1986).
- [52] S. W. Hawking, C. J. Hunter e M. Taylor, *Rotation and the AdS / CFT correspondence*, Phys. Rev. D **59**, 064005 (1999) [hep-th/9811056].
- [53] G. W. Gibbons, H. Lu, D. N. Page e C. N. Pope, *Rotating black holes in higher dimensions with a cosmological constant*, Phys. Rev. Lett. **93**, 171102 (2004) [hep-th/0409155].
- [54] G. W. Gibbons, H. Lu, D. N. Page e C. N. Pope, *The General Kerr-de Sitter metrics in all dimensions*, J. Geom. Phys. **53**, 49 (2005) [hep-th/0404008].
- [55] H. K. Kunduri, J. Lucietti e H. S. Reall, *Gravitational perturbations of higher dimensional rotating black holes: Tensor perturbations*, Phys. Rev. D **74**, 084021 (2006) [hep-th/0606076].
- [56] T. Ortín, *Gravity and strings*, Cambridge University, Cambridge University Press, 2004.
- [57] K. Murata, *Instabilities of Kerr-AdS₅ × S⁵ Spacetime*, Prog. Theor. Phys. **121**, 1099 (2009) [arXiv:0812.0718 [hep-th]].
- [58] G.W. Gibbons, M. J. Perry, e C. N. Pope, *The First Law of Thermodynamics for Kerr-Anti-de Sitter Black Holes*, Classical Quantum Gravity **22**, 1503 (2005).
- [59] F. J. Zerilli, *Gravitational field of a particle falling in a schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics*, Phys. Rev. D **2**, 2141 (1970).
- [60] C. O. Lousto and R. H. Price, *Headon collisions of black holes: The Particle limit*, Phys. Rev. D **55**, 2124 (1997) [gr-qc/9609012].
- [61] F. J. Zerilli, *Gravitational Field of a Particle Falling in a Schwarzschild Geometry Analyzed in Tensor Harmonics*, Phys. Rev. D **2**, 21412160 (1970).
- [62] N. Sago, H. Nakano e M. Sasaki, *Gauge problem in the gravitational self-force: Harmonic gauge approach in the Schwarzschild background*, Phys. Rev. D **67**, 104017 (2003).
- [63] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, Oxford Univ. Press (1983).