

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física Gleb Wataghin

Dissertação de Mestrado

**Sistemas gravitacionais com massa variável:
Merger de galáxias**

Aluno: Tiago Amancio da Silva - IFGW/Unicamp
Orientador: Patricio Anibal Letelier Sotomayor - IMECC/Unicamp
Co-orientador: Orlando Luis Goulart Peres - IFGW/Unicamp
Campinas - Setembro de 2009



Este exemplar corresponde à versão final da dissertação de mestrado defendida e aprovada perante a comissão julgadora em 14/09/2009.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

Si38s Silva, Tiago Amancio da
Sistemas gravitacionais com massa variável : merger de galáxias / Tiago Amancio da Silva. -- Campinas, SP : [s.n.], 2009.

Orientadores: Patricio Anibal Letelier Sotomayor e Orlando Luis Goulart Peres.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Massa variável. 2. Problema de dois corpos.
3. Problema de três corpos. I. Sotomayor, Patricio Anibal Letelier.
II. Peres, Orlando Luis Goulart. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". IV. Título.

- **Título em inglês:** Gravitational systems with variable mass : galaxy merger
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Variable mass
 2. Two-body problem
 3. Three-body problem
- **Área de Concentração:** Astrofísica
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca examinadora:**

Prof. Patricio Anibal Letelier Sotomayor
Prof. Pedro Cunha de Holanda
Prof. Vilson Tonin Zanchin
- **Data da Defesa:** 14/09/2009
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **TIAGO AMANCIO DA SILVA – RA 025296** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 14 / 09 / 2009.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Patrício Aníbal Letelier Sotomayor
Presidente da Comissão Julgadora
IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Wilson Tonin Zanchin – CCNH/UFABC

Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda - DRCC/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, motivo e finalidade da vida.

Agradeço ao meu orientador Prof. Patricio Letelier pelos ensinamentos, sugestões e idéias. Também agradeço ao meu co-orientador Prof. Orlando Peres.

Agradeço aos meus pais e meu irmão, que me deram o apoio para chegar até aqui.

E agradeço à FAPESP e à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

É estudado o processo de merger entre galáxias, onde as galáxias são consideradas como objetos compactos com massa dependendo do tempo. O estudo se dá por meio da análise das órbitas de tal sistema. Para isso, é desenvolvido o problema gravitacional de dois corpos que trocam massa com a atmosfera que os envolve. O problema de Gylden-Mestschersky é revisado para servir como referência para este problema. Alguns modelos de variação de massa são propostos, tendo como base uma analogia com a hidrodinâmica e a análise microscópica do sistema. O problema de dois corpos estudado é aplicado ao problema de três corpos de massas variáveis. São encontradas soluções estacionárias correspondentes às que estão presentes no problema usual de massas constantes.

Abstract

We study the process of galactic merger, where galaxies are regarded as compact objects with time-dependent masses. This study is made through the analysis of the system's orbit. For this purpose, we consider the gravitational problem of two bodies exchanging mass with a surrounding atmosphere. The Gylden-Mestschersky problem is reviewed in order to be used as a reference for that problem. We propose some models of mass variation, based on a hydrodynamics analogy and on a microscopic analysis of the system. The two-body problem considered is applied to the three-body problem of varying masses. We found stationary solutions corresponding to the ones of the usual constant masses problem.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
2 O problema de Gylden-Mestschersky	4
2.1 Dinâmica de corpos de massa variável	4
2.2 Leis de Mestschersky	6
2.3 Lei de variação de massas de Jeans	10
2.4 Problema conservativo	14
3 Fluidos	16
3.1 Equação de Euler	16
3.2 Equação de Navier-Stokes	18
3.3 Lei de Stokes	21
4 Problema de dois corpos de massas variáveis	26
4.1 O problema usual	26
4.2 Problema de dois corpos: uma massa constante e outra variável	27
4.3 Dinâmica	30
4.4 Problema de dois corpos de massas variáveis	34
5 Modelos	39
5.1 Analogia hidrodinâmica	39
5.2 Massa virtual	44
5.3 Força de atrito como variação de massa	52
5.4 Abordagem microscópica	56

5.5	Transformações	61
5.6	Galáxias	67
6	O problema de três corpos	72
6.1	Massas constantes	72
6.2	Problema restrito de três corpos	74
6.3	Pontos de Lagrange	79
6.4	Problema de três corpos de massa variável	81
6.5	Problema restrito de massas variáveis	82
7	Conclusão	87
	Referências	89

Lista de Figuras

1	Um ciclo da órbita de um cometa no plano (x, y) , calculada através do modelo de López [8]	30
2	Órbitas calculadas através do modelo linear de variação de massa . . .	41
3	Órbitas calculadas segundo o modelo linear e o modelo de Oseen para a variação de massa. Respectivas massas em função do tempo	43
4	Órbita calculada segundo o modelo de variação de massa baseado na força de atrito para altas velocidades. Massa em função do tempo . .	44
5	Exemplo da equivalência entre variação de massa e força de atrito . .	54
6	Comportamento da função que sugere a existência de um raio máximo para a atmosfera retida por um corpo	57
7	Densidade em função do raio do modelo de Plummer para galáxias esféricas	68
8	Perfis de Plummer para uma galáxia esférica que se desenvolve de maneira auto-similar	70
9	Órbita de duas galáxias em uma atmosfera, segundo os modelos propostos	70
10	Relação entre um sistema inercial e um não inercial	75
11	Localização das massas primárias no referencial que gira junto com elas (problema restrito de três corpos)	77
12	Soluções da equação que determina as posições estacionárias colineares (problema de três corpos)	79
13	Curvas de nível no plano (x, y) para o potencial efetivo do problema de três corpos. Pontos de Lagrange	81

1 Introdução

No universo, é comum a interação entre galáxias. A velocidade de uma galáxia pode ser separada em duas componentes. Uma delas é a velocidade de Hubble, que é a velocidade com que duas galáxias quaisquer se afastam uma da outra. Segundo a lei de Hubble, duas galáxias se afastam com uma velocidade v proporcional à distância d entre elas, ou seja, $v = H_0 d$. O valor de H_0 , a constante de Hubble, é da ordem de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Porém, a distribuição das galáxias pelo universo não é uniforme, ao menos em escalas da ordem de megaparsecs. Devido ao efeito gravitacional de concentrações locais de galáxias, existe a outra componente da velocidade da galáxia, chamada velocidade peculiar [1]. Um valor típico da velocidade peculiar para galáxias vizinhas é de 100 km s^{-1} . Dessa maneira, se as galáxias estiverem a uma distância menor que 1 Mpc , a velocidade peculiar será maior que a velocidade de Hubble, permitindo que as galáxias se aproximem.

Um dos possíveis tipos de interação entre galáxias é o merger. O merger é o processo de fusão entre duas galáxias. O merger geralmente ocorre quando duas galáxias de massas aproximadamente iguais colidem a uma velocidade que é comparável com as velocidades internas dessas galáxias (a velocidade das estrelas que as compõe).

Neste trabalho, propõe-se o estudo do processo de merger entre galáxias, que são consideradas como corpos compactos cujas massas variam com o tempo. Portanto, a determinação da ocorrência ou não do merger em um encontro galáctico é feita através do estudo da órbita de um problema de dois corpos de massas variáveis, obviamente com algumas suposições apropriadas.

A discussão sobre o problema de dois corpos de massas variáveis se iniciou praticamente com o trabalho de Gylden [2] em 1884. Gylden escreveu e analisou a equação de movimento para esse problema. Em 1893, Mestschersky [3] encontrou o primeiro caso integrável dessa equação, em que as massas seguem uma certa lei de variação temporal [4]. Esta, e duas outras leis obtidas por ele em 1902 [5], ficaram conhecidas como *leis de Mestschersky*. O estudo de Mestschersky sobre as forças de reação deu à equação de Gylden seu significado físico, passando o problema a ser

conhecido como *problema de Gylden-Mestschersky*. Em 1924, com base na teoria de Eddington sobre a relação entre a luminosidade e a massa das estrelas, Jeans [6] encontrou uma lei de variação mais geral, da qual as lei de Mestschersky são casos especiais.

Além do problema de Gylden-Mestschersky, existe uma variedade de problemas gravitacionais de massas variáveis com significados físicos diferentes (para uma classificação dos tipos, ver [4]). Neste trabalho, analisa-se o problema específico em que os dois corpos se movem em uma atmosfera, com a qual trocam massa.

No capítulo 2 deste trabalho, é feito um estudo sobre o problema de Gylden-Mestschersky em geral e sobre as leis de Mestschersky e de Jeans. O capítulo 2.1 é dedicado ao estudo da dinâmica de um corpo de massa variável, o que nos permitirá diferenciar a equação do problema de Gylden-Mestschersky da equação do problema onde os corpos trocam massa com uma atmosfera. O capítulo 2.4 apresenta um exemplo do problema de Gylden-Mestscherky, encontrado em [7].

No capítulo 3 é feito o desenvolvimento, em mecânica dos fluidos, das equações de Euler e de Navier-Stokes, além da lei de Stokes. Estes resultados são úteis na determinação do modo com que os corpos trocam massa com a atmosfera, no problema gravitacional.

O capítulo 4 contém a definição, a equação de movimento e resultados gerais do problema de dois corpos em uma atmosfera ou halo. O problema usual de massas constantes é revisto rapidamente no capítulo 4.1. O capítulo 4.2 traz como exemplo o trabalho encontrado em [8].

Uma vez determinado o problema de dois corpos em uma atmosfera ou halo, só é possível encontrar sua solução se conhecidas as variações temporais das massas envolvidas. Portanto, no capítulo 5 são propostos alguns modelos de variação da massa, baseados em uma analogia com a mecânica de fluidos (capítulo 5.1) ou em uma abordagem microscópica do sistema (capítulo 5.4). Os capítulos 5.2 e 5.3 apresentam resultados que reforçam a analogia entre o problema gravitacional e a mecânica de fluidos. No capítulo 5.5, realiza-se um estudo sobre transformações da equação de movimento do problema que permitam que se encontre uma lei de variação de massa

correspondentes às leis de Mestschersky para o problema de Gylden-Mestscherky. O capítulo 5.6 considera o problema do merger de galáxias, suas órbitas e a ocorrência ou não do fenômeno, utilizando os modelos propostos neste capítulo.

Por fim, no capítulo 6, os resultados do problema de dois corpos são estendidos para o problema de três corpos. Primeiramente, as soluções estacionárias com alta simetria presentes no problema usual de massas constantes são estudadas nos capítulos 6.1 e 6.2 (problema geral e restrito). O capítulo 6.3 trata dos *pontos de Lagrange*, uma característica desses sistemas. E então, nos capítulos 6.4 e 6.5, são procuradas, no caso de massas variáveis, soluções estacionárias equivalentes às do problema de massas constantes.

Dos resultados apresentados neste trabalho, acreditamos serem novos os modelos hidrodinâmicos propostos no capítulo 5.1 e o modelo microscópico, desenvolvido no capítulo 5.4 para um corpo de densidade constante e adaptado ao modelo de Plummer para galáxias no capítulo 5.6. Também acreditamos serem novas as soluções especiais do problema de três corpos de massas variáveis (capítulo 6.5).

2 O problema de Gylden-Mestschersky

Um sistema de dois corpos de massa variável pode ser classificado em vários tipos de acordo com características, como por exemplo a forma em que a massa é absorvida ou expelida de cada um dos corpos e o movimento do centro de massa, entre outras [4]. O problema de Gylden-Mestschersky é um desses tipos, provavelmente o mais amplamente estudado. Para a identificação da situação a que a equação de cada problema representa, obviamente deve-se conhecer a dinâmica de um corpo de massa variável.

2.1 Dinâmica de corpos de massa variável

Como se sabe, a segunda lei de Newton relaciona a força \mathbf{F} que age em um corpo com a variação temporal de seu momento linear \mathbf{p} , ou seja, $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. Como em grande parte dos problemas tratados a massa m do corpo é constante, temos a seguinte relação entre a força e a aceleração \mathbf{a} do corpo: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Porém, deve-se atentar a um fato quando se trata de um corpo de massa variável. Consideremos o exemplo de um foguete no espaço, distante de qualquer corpo, de forma que possamos considerar como nula a força que age sobre ele. O foguete possui massa m e velocidade v , e se movimenta expelindo massa (o combustível queimado) a uma velocidade u , medida de um referencial inercial, ou $v - u$ em relação ao próprio foguete. Se aplicarmos ingenuamente a segunda lei de Newton, chegaremos a:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{d(mv)}{dt} = 0 \Rightarrow \\ m\dot{v} &= -\dot{m}v\end{aligned}$$

Segundo este resultado, a aceleração do foguete não depende da velocidade com que o combustível é expelido, ao contrário do que se espera. Esta inconsistência se deve ao fato de que não consideramos a fração do momento que o combustível leva consigo. Supomos que a força \mathbf{F} age sobre o corpo durante um intervalo de tempo dt . A segunda lei de Newton nos diz que:

$$\mathbf{F}dt = \mathbf{p}(t + dt) - \mathbf{p}(t) \quad (2.1)$$

Imaginemos que um corpo de massa m absorve uma partícula de massa dm (e velocidade \mathbf{u} imediatamente antes da absorção). O momento linear do sistema num tempo t é a soma do momento do corpo e da partícula: $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v} + \mathbf{u}dm$. Para o momento no tempo $t + dt$, levamos em conta que houve uma variação dm na massa do foguete e uma variação $d\mathbf{v}$ na velocidade do foguete. Desta forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t + dt) &= (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \\ &= m\mathbf{v} + md\mathbf{v} + \mathbf{v}dm \end{aligned}$$

onde o produto de dois diferenciais $dmd\mathbf{v}$ foi desprezado.

Portanto, substituindo estes termos na equação (2.1), chegamos a:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}dt &= md\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})dm \Rightarrow \\ \mathbf{F} &= m\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})\dot{m} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Esta é a equação correta para um corpo de massa variável [9]. A equação deve envolver \mathbf{u} , a velocidade com que a massa é ejetada pelo corpo, ou sua velocidade imediatamente antes de ser absorvida pelo corpo. Voltando ao exemplo unidimensional do foguete, encontramos sua equação de movimento:

$$m\dot{v} = (u - v)\dot{m}$$

que depende de u , conforme esperado. Também, caso o combustível fosse expelido em repouso em relação ao foguete, ou seja, $u - v = 0$, o movimento seria a uma velocidade constante, $\dot{v} = 0$, como esperado.

Existem, porém, dois casos especiais que podemos ressaltar na equação (2.2). O primeiro é justamente o caso em que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, ou seja, as partículas ejetadas ou absorvidas possuem velocidade nula em relação ao corpo. As forças de reação não agem

sobre o corpo, como por exemplo em uma estrela que perde massa isotropicamente, emitindo partículas ou radiação. Neste caso, a equação (2.2) assume forma simples

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2.3)$$

O segundo caso especial é aquele em que $\mathbf{u} = 0$; as partículas são absorvidas em repouso no mesmo referencial em que se mede \mathbf{v} para a velocidade do corpo, ou emitidas também em repouso (a partícula se desprenderia do corpo e permaneceria imóvel naquele referencial). Como exemplo, temos uma estrela que se move por uma atmosfera estacionária, capturando partículas. Neste caso, a equação (2.2) fica

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2.4)$$

ou seja, podemos fazer $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v}$, “sem nos preocuparmos” com as forças de reação (na verdade, o efeito destas forças já está incluído na equação). Neste trabalho, consideraremos sempre um ou outro desses dois casos especiais.

2.2 Leis de Mestschersky

Gylden [2] introduziu a equação diferencial para um problema gravitacional de dois corpos de massas variáveis. Mais tarde, Mestschersky [3] encontrou o primeiro caso integrável, estabelecendo uma lei de variação da massa, a chamada primeira lei de Mestschersky, e deixando claro o significado físico das equações. O problema, que tratamos a seguir, ficou conhecido como *problema de Gylden-Mestschersky*.

Define-se o problema de Gylden-Mestschersky como o problema gravitacional de dois corpos cujas massas m_1 e m_2 variam segundo a mesma lei, e que a emissão ou absorção de massa ocorre isotropicamente, de modo que não há forças de reação. Conforme visto no capítulo 2.1, as equações de movimento para esses corpos seguem a equação (2.3):

$$\begin{aligned}
m_1(t) \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{Gm_1(t)m_2(t)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\
m_2(t) \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{Gm_1(t)m_2(t)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

onde G é a constante gravitacional, \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 são suas coordenadas em um referencial inercial, e m_1 e m_2 são funções do tempo. Utilizando as coordenadas relativa e centro de massa usuais:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad e \quad \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.6}$$

podemos reduzir as equações de movimento a:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM(t)}{r^3} \mathbf{r} \tag{2.7}$$

onde $M(t) = m_1 + m_2$ é a massa total dos dois corpos e também é uma função do tempo. O fato de que m_1 e m_2 seguem a mesma lei implica que a qualquer instante de tempo, a razão entre as duas massas é a mesma, digamos k . Então, podemos escrever a relação $m_2 = km_1$. Esse fato nos garante que o centro de massa \mathbf{R} do sistema se move como um referencial inercial. Pode-se concluir isso utilizando-se a definição do centro de massa (2.6) para escrever:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \frac{1}{1+k} (\mathbf{r}_1 + k\mathbf{r}_2) \Rightarrow \\
\ddot{\mathbf{R}} &= \frac{1}{1+k} (\ddot{\mathbf{r}}_1 + k\ddot{\mathbf{r}}_2) \Rightarrow \\
m_1\ddot{\mathbf{R}} &= \frac{1}{1+k} (m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2) = 0
\end{aligned}$$

já que a quantidade entre parêntesis é zero, como pode ser verificada da soma das equações (2.5), e assim obtemos $\ddot{\mathbf{R}} = 0$. Esse movimento inercial do centro de massa é verificado mais formalmente através da seguinte equação, encontrada em [10], que determina o movimento geral do centro de massa medido em um referencial inercial:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

Determinado o movimento do centro de massa do sistema, resta determinar o movimento relativo dos corpos, dado pela equação (2.7). No entanto, esta equação não pode ser integrada diretamente sem se conhecer a dependência temporal $M(t)$. A *primeira lei de Mestschersky* [3] para a variação da massa

$$M(t) = \frac{1}{\beta + \alpha t} \quad (2.8)$$

sendo β e α constantes, juntamente com a transformação para novas coordenadas espaciais e temporal:

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{r}}{\beta + \alpha t} \quad e \quad \tau = \frac{-1}{\alpha(\beta + \alpha t)}$$

permitem reduzir o problema à seguinte equação:

$$\mathbf{X}'' + \frac{G\mathbf{X}}{X^3} = 0$$

onde o apóstrofo (') denota a derivação em relação à nova variável temporal τ .

Agora a equação pode ser integrada diretamente. De fato, esta equação é a mesma do caso usual de massas constantes, cuja solução analítica é bem conhecida. Essa lei, com a constante α positiva, representa uma massa monotonicamente decrescente, como no caso de uma estrela emitindo partículas e radiação.

Posteriormente, Mestschersky [5] aplicou ao problema uma nova transformação, mais geral, dada por:

$$\mathbf{R} = f(t) \mathbf{r} \quad d\tau = \varphi(t) dt \quad (2.9)$$

que, aplicada na equação original (2.7), nos fornece:

$$\begin{aligned} \varphi \frac{d}{d\tau} \left(\varphi \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\mathbf{R}}{f} \right) \right) + GMf^2 \frac{\mathbf{R}}{R^3} = 0 \Rightarrow \\ \mathbf{R}'' + \frac{GMf^3}{\varphi^3} \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \mathbf{R}' \left(\frac{\varphi'}{\varphi} - 2 \frac{f'}{f} \right) + \mathbf{R} \left(-\frac{f}{\varphi} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varphi f'}{f^2} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Desejamos agora, eliminar a dependência temporal em τ de toda esta equação, com exceção logicamente de \mathbf{R} . Primeiramente, requeremos que a quantidade entre parêntesis que multiplica \mathbf{R}' na última equação seja nula, ou seja, $\frac{\varphi'}{\varphi} - 2 \frac{f'}{f} = 0$. Daí obtém-se que:

$$\varphi = kf^2$$

onde k é uma constante. Impomos também que o coeficiente de \mathbf{R} na equação (2.10) seja igual a uma constante, digamos ω^2 :

$$-\frac{f}{\varphi} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varphi f'}{f^2} \right) = \omega^2$$

Substituindo $\varphi = kf^2$ na equação acima, encontramos para f a equação diferencial $f'' = -\omega^2 f$, cuja solução, em termos de τ é dada por $f(\tau) = A \cos(\omega\tau - \theta_0)$, com A e θ_0 constantes. Podemos obter $f(t)$ a partir de $f(\tau)$ da seguinte maneira: a definição da transformação (2.9) nos dá $\frac{d\tau}{dt} = \varphi = kf^2(\tau)$. Resolvendo esta equação, encontramos uma expressão para τ em função de t e a substituímos em $f(\tau)$, para obter:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}}$$

onde as constantes anteriores foram redefinidas para α , β e γ .

Embora a constante usada, ω^2 , seja positiva, o mesmo resultado é obtido para uma constante negativa (a constante nula corresponde à primeira lei de Mestchersky).

A última imposição sobre a equação (2.10) é que o fator Mf^3/φ^2 que multiplica \mathbf{R}/R^3 também seja constante. A conclusão é que M deve ser proporcional a f (ou podemos identificá-la com a própria f):

$$M = \frac{1}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}}$$

Esta é conhecida como a *lei unificada de Mestschersky*. Novamente encontra-se uma variação monotonicamente decrescente para a massa. A equação original fica reduzida agora a:

$$\mathbf{X}'' + \frac{G\mathbf{X}}{X^3} - \eta\mathbf{X} = 0$$

que pode ser integrada diretamente, ao menos numericamente. O valor da constante $\eta = \beta^2/4 - \alpha\gamma$ determina a natureza do termo proporcional a \mathbf{X} . Se $\beta^2/4 < \alpha\gamma$, este termo representa uma força atrativa, como em um oscilador harmônico. Se $\beta^2/4 > \alpha\gamma$, a força será repulsiva. No caso de $\beta^2/4 = \alpha\gamma$, obtemos novamente a primeira lei de Mestschersky. O caso em que $\alpha = 0$ é conhecido como *segunda lei de Mestschersky*.

Por fim, definidos os valores de f e φ , mostramos a forma explícita da transformação (2.9):

$$\mathbf{R} = M(t) \mathbf{r} \qquad d\tau = M^2(t) dt \qquad (2.11)$$

que é a mesma para qualquer uma das três leis de Mestschersky.

2.3 Lei de variação de massas de Jeans

Jeans [6] estuda o problema de dois corpos que perdem massa, motivado por problemas até então não explicados, como órbitas de estrelas binárias, que apresentavam dimensões além do que se acreditava possível, caso as massas fossem aproximadamente constantes. Jeans considerou que o processo de perda de massa ocorre por

irradiação de energia. Também apresentou um modelo de variação de massa, a *lei de Jeans*.

Sob as condições acima, supondo que a irradiação ocorre isotropicamente, como visto em 2.1, as equações de movimento (similares à do problema de Gylden-Mestschersky) são:

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\theta} &= n \\ \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 &= -M/r^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde n é uma constante, e M varia com o tempo. Aqui, utilizou-se unidades tais que a constante gravitacional é $G = 1$. A partir dessas equações, podemos deduzir:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{M}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{dM}{dt} \quad (2.13)$$

que mostra que a energia do sistema aumenta com o tempo, já que dM/dt é negativo. Multiplicar (2.13) pela massa da partícula nos dá a taxa de aumento de energia do sistema. As equações (2.12) ainda nos dão:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{n^2}{r^3} = -\frac{M}{r^2}$$

Fazendo a substituição $\lambda \equiv Mr$, essa equação fica:

$$\frac{1}{M^3} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\lambda}{M} \right) = \frac{n^2}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.14)$$

Definindo $q \equiv \int M^2 dt$, uma função somente do tempo, de forma que:

$$\frac{d}{dt} = M^2 \frac{d}{dq}$$

podemos reescrever (2.14) da seguinte maneira:

$$\frac{d^2\lambda}{dq^2} - \frac{\lambda}{M} \frac{d^2M}{dq^2} = \frac{n^2}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.15)$$

Para que esta equação seja integrável diretamente, para uma função M qualquer, é necessário que:

$$\frac{d^2M}{dq^2} = \alpha^2 M \quad (2.16)$$

onde α é uma constante. Integrando (2.16) em relação a M e voltando à variável t , encontramos a relação

$$\frac{dM}{dt} = -M^2 (\alpha^2 M^2 + \beta)^{1/2} \quad (2.17)$$

onde β é a constante de integração.

Pela teoria de Eddington, a luminosidade de uma estrela, dada por $L = -c^2 dM/dt$, é proporcional a M^ν , onde ν varia de 1,4 (limite para estrelas grandes) a 4,4 (limite para estrelas pequenas). Existe uma faixa considerável de massa onde a luminosidade é proporcional a M^3 . Isso corresponde a escolher $\beta = 0$ em (2.17):

$$\frac{dM}{dt} = -\alpha M^3 \quad (2.18)$$

A *lei de Jeans* é mais geral que a equação (2.18) e permite uma variação no expoente de M , que geralmente vai de 1,4 a 4,4, explicitamente:

$$\frac{dM}{dt} = -\alpha M^\nu \quad (2.19)$$

Para analisar a variação das dimensões da órbita, o autor utiliza a equação (2.18) para reescrever (2.15), que integrada em relação a λ , dá:

$$\frac{d\lambda}{dq} = \alpha^2 \lambda^2 - \frac{n^2}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda} + A$$

onde A é constante de integração. Quando o lado direito desta equação possui três raízes, se dá o movimento oscilatório de λ entre duas raízes adjacentes, λ_1 e λ_2 . Isso corresponde, via $\lambda = Mr$, a r oscilando entre λ_1/M e λ_2/M . Se M não varia muito rápido, a órbita pode ser comparada a uma elipse de semi-eixo maior a e excentricidade ϵ . Desta forma:

$$\begin{aligned} a(1 - \epsilon) &= \lambda_1/M \\ a(1 + \epsilon) &= \lambda_2/M \end{aligned}$$

que resulta em

$$\epsilon = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1},$$

de onde se conclui que a excentricidade é independente do tempo, e

$$a = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2M}$$

que implica que o produto Ma é uma constante.

Se a luminosidade da estrela não é proporcional a M^3 , mas à forma geral $M^2 (\alpha^2 M^2 + \beta)^{1/2}$, o problema pode ser melhor analisado de outra maneira [6]. A energia de uma partícula em órbita elíptica, de semi-eixo maior a , é igual a $-M/2a$. Substituindo esse valor na equação (2.13):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M}{2a} \right) = \frac{1}{r} \frac{dM}{dt}$$

O valor médio de $1/r$ em uma revolução da partícula em órbita elíptica é $1/a$. Se substituirmos esse valor médio na equação acima, temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M}{2a} \right) = \frac{1}{a} \frac{dM}{dt}$$

sendo que esta equação resulta em $Ma = \text{constante}$, como obtido no caso restrito.

Posteriormente, Jeans [11] faz uma observação que permite estender o resultado obtido para a excentricidade ϵ para qualquer caso. Se a elipse tem semi-eixo maior a e *semi-latus rectum* l , é válida a equação:

$$1 - \epsilon^2 = \frac{l}{a} = \frac{n^2}{aM} \quad (2.20)$$

Sendo Ma uma constante sempre, conclui-se que a excentricidade também é. Portanto, para qualquer dependência da luminosidade L com a massa, o produto Ma e a excentricidade ϵ sempre são constantes.

Podemos constatar que as leis de Mestschersky são casos especiais da lei de Jeans. Se escolhermos o expoente $\nu = 2$ em (2.19), obtemos a primeira lei de Mestschersky. Se $\nu = 3$, recuperamos a segunda lei. A lei unificada de Mestschersky não pode ser obtida através de (2.19), mas sim, integrando-se a equação (2.17).

2.4 Problema conservativo

Neste capítulo, é apresentado um exemplo de um sistema de massas variáveis. Luk'yanov [7] estuda o problema de dois corpos em que há transferência de massa entre os corpos, porém a massa total do sistema é constante e igual a $M = m_1 + m_2$. Não há presença de forças de reação. O autor indica a solução do movimento relativo e a solução do movimento absoluto, que depende do modelo de transferência de massa utilizado.

As equações de movimento para esses corpos de massa $m_1(t)$ e $m_2(t)$ são:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{Gm_1 m_2}{r^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$.

A equação do movimento relativo é imediatamente obtida desta equação:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$$

Essa é a mesma equação do problema de dois corpos usual, já que M é constante. A solução, bem conhecida, é a seção cônica $r = \alpha/(1 + \epsilon \cos \theta)$. Determinado o movimento relativo dos corpos, pode-se determinar seu movimento absoluto. A relação

$$(M - m_2)\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad (2.22)$$

pode ser obtida a partir de (2.21). m_1 foi eliminado da equação (2.22) através de $M = m_1 + m_2$. Integrando-se (2.22) uma e duas vezes, chegamos a:

$$\begin{aligned} (M - m_2)\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 - \int \dot{m}_2\dot{\mathbf{r}}dt &= \mathbf{a} \\ (M - m_2)\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 - \int \dot{m}_2\mathbf{r}dt - \int \int \dot{m}_2\dot{\mathbf{r}}dt &= \mathbf{a}t + \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} são constantes de integração. Utilizando a definição do centro de massa e sua derivada temporal:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (M - m_2)\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \\ \dot{\mathbf{R}} &= (M - m_2)\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + \dot{m}_2\mathbf{r} \end{aligned}$$

as equações (2.23) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{a} + \dot{m}_2\mathbf{r} + \int \dot{m}_2\dot{\mathbf{r}}dt \\ \mathbf{R} &= \mathbf{a}t + \mathbf{b} + \int \dot{m}_2\mathbf{r}dt + \int \int \dot{m}_2\dot{\mathbf{r}}dt \end{aligned} \quad (2.24)$$

Em (2.24), os dois primeiros termos de \mathbf{R} correspondem ao caso usual, em que o centro de massa é um referencial inercial. Fazendo $\dot{m}_2 = 0$, recupera-se esse caso.

3 Fluidos

Neste capítulo, é mostrado brevemente o desenvolvimento em mecânica de fluidos, até a obtenção da lei de Stokes [12], que é um resultado utilizado no capítulo 5.

3.1 Equação de Euler

Primeiramente, o fluxo de um fluido de densidade ρ e de velocidade dada pelo campo vetorial \mathbf{v} (ambas funções das coordenadas espaciais e temporal) através de um volume fixo V_0 é igual à taxa com que a massa de fluido no interior de V_0 diminui. Equacionando:

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV \quad (3.1)$$

sendo que a integral de volume é calculada sobre todo o interior de V_0 e a integral de superfície sobre toda a superfície que limita o volume V_0 . Esta última pode ser transformada pelo teorema da divergência em uma integral de volume:

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$$

de forma que a equação (3.1) se torna:

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

Como esta equação deve ser válida para um volume arbitrário, é necessário que o integrando seja nulo, ou seja:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.2)$$

que é conhecida como *equação da continuidade*. Se a densidade do fluido é constante (tanto no tempo quanto no espaço) segue que:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.3)$$

A força que age em um certo volume do fluido é igual a

$$- \oint p d\mathbf{S}$$

onde $p(x, y, z, t)$ é a pressão, integrada sobre toda a superfície do volume. Esta integral pode ser transformada em uma integral de volume:

$$- \oint p d\mathbf{S} = - \int (\nabla p) dV$$

de onde se conclui que a força por unidade de volume do fluido é igual a $-\nabla p$. Portanto, podemos escrever a equação de movimento igualando essa força por unidade de volume ao produto da massa por unidade de volume (ρ) pela aceleração $d\mathbf{v}/dt$:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p$$

A derivada temporal da velocidade não deve ser tomada em relação a um ponto fixo, mas sim em relação à posição de uma partícula do fluido que se move segundo \mathbf{v} . Em outras palavras, podemos considerar x , y e z como funções do tempo. Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \end{aligned}$$

A equação de movimento fica, então:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.4)$$

que é chamada *equação de Euler*. Esta equação descreve o movimento de um fluido não viscoso, já que na sua dedução não foi feita nenhuma consideração sobre a viscosidade do fluido. As condições de fronteira desta equação exigem que a componente da velocidade perpendicular à superfície limitante do fluido se anule naquele ponto (o que equivale a dizer que o fluido não ultrapassa sua superfície limitante).

3.2 Equação de Navier-Stokes

Para introduzir o efeito da viscosidade do fluido na sua equação de movimento, vamos reescrever a equação de Euler em notação tensorial (com soma implícita sobre índices repetidos). A taxa de variação do momento $\partial(\rho\mathbf{v})/\partial t$ fica:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i \quad (3.5)$$

A equação da continuidade (3.2)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

e a equação de Euler (3.4)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

juntamente com (3.5), resultam em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) \end{aligned}$$

Reescrevendo o primeiro termo da direita como:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \quad (3.6)$$

onde o tensor Π_{ik} é dado por:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

O tensor Π_{ik} , chamado *tensor de densidade de fluxo de momento*, tem o significado físico da i -ésima componente do momento que atravessa uma unidade de área perpendicular ao eixo x_k por unidade de tempo.

O fluxo de momento que Π_{ik} representa é devido ao momento que uma partícula do fluido carrega ao se mover e devido à força causada pela pressão. Podemos incluir em Π_{ik} mais um termo $-\sigma'_{ik}$, correspondente à viscosidade:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k$$

onde o tensor

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

é chamado *tensor de tensão*. Este tensor corresponde à parte do fluxo de momento que não é devido à transferência direta de momento com a massa do fluido. Quando o fluido apresenta viscosidade, existe atrito entre diferentes pontos seus. Se uma porção do fluido se move, esse atrito faz com que partes adjacentes a essa porção se movam com ele. Ou seja, há uma transferência de momento de uma parte do fluido para outra, e por consequência, para todo o fluido. O *tensor de tensão viscosa* σ'_{ik} representa justamente essa transferência de momento.

Para obter a forma geral de σ'_{ik} , procedemos da seguinte maneira: o atrito entre diferentes partes do fluido só ocorre quando elas têm velocidades diferentes, então σ'_{ik}

deve depender das derivadas espaciais da velocidade. Se o gradiente de velocidade é pequeno, podemos considerar somente a primeira derivada. σ'_{ik} não pode depender da velocidade, já que deve ser nulo para $\mathbf{v} = \text{constante}$. Impondo que não haja viscosidade também quando o fluido está em movimento de rotação uniforme, a forma geral do tensor σ'_{ik} pode ser escrita como:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

onde η e ζ são os coeficientes de viscosidade dinâmica e volumar, respectivamente.

Finalmente, a equação de movimento para um fluido é obtida acrescentando à equação de Euler o termo $\partial \sigma'_{ik} / \partial x_k$, que é o termo extra que surge em (3.6) depois da inclusão da viscosidade em Π_{ik} . Em notação vetorial, esse procedimento resulta em:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

que é a *equação de Navier-Stokes*. Para se obter esta equação, os valores dos coeficientes de viscosidade η e ζ foram considerados constantes. De modo geral, esses valores dependem da pressão e da temperatura do fluido, porém, na maioria dos casos, a variação é pequena e podemos considerá-los constantes. Se o fluido é incompressível ($\rho = \text{constante}$), a equação se reduz, através de (3.3), a:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.7)$$

enquanto σ_{ik} se reduz a:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

As condições de contorno para (3.7) são que a velocidade se anula na superfície limitante do fluido, tanto a componente normal quanto a componente paralela.

3.3 Lei de Stokes

A partir da equação de Navier-Stokes na forma (3.7), podemos calcular a força de arrasto para uma esfera se movendo com velocidade constante \mathbf{u} em um fluido viscoso e em repouso.

Como esta é uma situação estacionária, $\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$.

Consideremos u uma velocidade característica do fluido e l um comprimento característico de um objeto que se move através dele. Dos parâmetros de um fluido, apenas o *coeficiente de viscosidade cinemática* $\nu = \eta/\rho$ aparece na equação de Navier-Stokes. Portanto o fluxo pode ser caracterizado por estes três parâmetros: u , l e ν . A única quantidade adimensional possível de se formar com esses três parâmetros é o número de Reynolds $R = \rho ul/\eta$. Este é um número adimensional que caracteriza o fluido.

O termo $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ da equação de Navier-Stokes é da ordem de u^2/l , enquanto $(\eta/\rho)\nabla^2\mathbf{v}$ é da ordem de $\eta u/\rho l^2$. A razão entre estes termos é justamente o número de Reynolds. Quando $R \ll 1$, temos que $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ é muito menor que $(\eta/\rho)\nabla^2\mathbf{v}$ e podemos desprezá-lo. Então passamos a:

$$\eta\nabla^2\mathbf{v} = \nabla p \quad (3.8)$$

Aplicando o rotacional a esta equação:

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (3.9)$$

Passamos então para um problema equivalente a este e mais simples de se tratar; no lugar de uma esfera se movendo em um fluido em repouso, consideremos a esfera parada e o fluido passando por ela. Neste caso, a velocidade do fluido é \mathbf{u} no infinito e nula na superfície da esfera (condições de contorno para a equação de Navier-Stokes). Obtemos a velocidade do problema original subtraindo \mathbf{u} da velocidade do segundo. Sendo a equação da continuidade (3.3) válida para a velocidade \mathbf{v} do problema original, também é válida para velocidade $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ do segundo, já que

$\nabla \cdot \mathbf{v}' = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Esta pode, portanto, ser escrita como o rotacional de um certo vetor \mathbf{A} :

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.10)$$

com $\nabla \times \mathbf{A}$ nulo no infinito. \mathbf{A} deve ser axial para que seu rotacional seja polar, como a velocidade. O vetor \mathbf{u} deve aparecer linearmente em \mathbf{A} , já que a equação e as condições de contorno são lineares. Um vetor A satisfazendo essas condições é $\mathbf{A} = f'(r) \hat{r} \times \mathbf{u}$, ou equivalentemente, $\mathbf{A} = \nabla f \times \mathbf{u}$. A equação (3.10) se torna, então:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla \times (\nabla f \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} + \nabla \times \nabla (f\mathbf{u}) \quad (3.11)$$

sendo que na última passagem se utilizou o fato de \mathbf{u} ser constante. Para o rotacional de \mathbf{v} , temos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times \nabla \times \nabla \times (f\mathbf{u}) = \nabla [\nabla \cdot (\nabla \times f\mathbf{u})] - \nabla^2 (\nabla \times f\mathbf{u}) \\ &= -\nabla^2 (\nabla \times f\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Substituindo esta equação em (3.9):

$$\nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla^4 (\nabla \times f\mathbf{u}) = -\nabla^4 (\nabla f \times \mathbf{u}) = -(\nabla^4 \nabla f) \times \mathbf{u} = 0$$

onde ∇^4 denota o operador laplaciano aplicado duas vezes. Desta equação, decorre que:

$$\nabla^4 \nabla f = 0$$

Integrando-se esta equação:

$$\nabla^4 f = \text{constante}$$

Esta constante deve ser 0, já que a velocidade e suas derivadas devem se anular no infinito. Sendo f uma função somente de r :

$$\begin{aligned}\nabla^4 f &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \nabla^2 f = 0 \Rightarrow \\ \nabla^2 f &= \frac{2a}{r} + c\end{aligned}$$

onde a e c são constantes. Para que a velocidade seja nula no infinito, $c = 0$. Segue que:

$$\nabla^2 f = \frac{2a}{r} \Rightarrow f = ar + \frac{b}{r}$$

Uma terceira constante aditiva é omitida, já que em \mathbf{v} só aparecem as derivadas de f . Substituindo f em (3.11), e colocando \mathbf{u} paralelo ao eixo z , pode-se encontrar uma expressão para \mathbf{v} , que terá uma componente radial e outra zenital. As constantes a e b são determinadas pelas condições de contorno: ambas componentes devem se anular em $r = R$, o raio da esfera. A expressão encontrada é:

$$\begin{aligned}v_r &= u \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ v_\theta &= -u \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right)\end{aligned}\tag{3.12}$$

Para calcular a força agindo na esfera, é necessário conhecer a pressão p . Voltando a (3.8):

$$\begin{aligned}\nabla p &= \eta \nabla^2 \mathbf{v} = \eta \nabla^2 (\nabla \times \nabla \times f \mathbf{u}) \\ &= \eta \nabla^2 [\nabla (\nabla \cdot f \mathbf{u}) - \mathbf{u} \nabla^2 f]\end{aligned}$$

Como visto anteriormente, $\nabla^4 f = 0$, portanto:

$$\begin{aligned}\nabla p &= \nabla [\eta \nabla^2 (\nabla \cdot f \mathbf{u})] = \nabla [\eta \mathbf{u} \cdot \nabla (\nabla^2 f)] \Rightarrow \\ p &= \eta \mathbf{u} \cdot \nabla (\nabla^2 f) + p_0\end{aligned}$$

onde p_0 é o valor da pressão no infinito. Substituindo a pressão encontrada para f , chega-se a:

$$p = p_0 - \frac{3\eta R u \cos \theta}{2 r^2} \quad (3.13)$$

A força agindo em um elemento de superfície df_k é o fluxo de momento através desse elemento, ou seja, $\Pi_{ik} df_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) df_k$. Escrevendo $df_k = n_k df$ (\mathbf{n} vetor normal), e lembrando que \mathbf{v} se anula na superfície limitante, concluímos que a força por unidade de área do fluido sobre essa superfície é $F_i = -\sigma_{ik} n_k$. Por simetria, a força que age sobre a esfera só pode ser paralela a \mathbf{u} . Integrando as componentes de $F_r \hat{r}$ e $F_\theta \hat{\theta}$ paralelas a \mathbf{u} sobre a superfície da esfera, temos:

$$F = \oint (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) dS \quad (3.14)$$

Na superfície da esfera, $\sigma'_{rr} = 0$ e $\sigma'_{r\theta} = -(3\eta/2R) u \sin \theta$. Substituindo essas expressões e $p(R)$ dado em (3.13) na equação (3.14), encontra-se:

$$F = 6\pi\eta R u \quad (3.15)$$

Esta é a expressão para a força de arrasto agindo sobre a esfera, conhecida como *lei de Stokes*.

Existe também um refinamento para esta equação, devido a Oseen (1910). Tomando as equações (3.12) como base, notamos que a grandes distâncias $\mathbf{v} \approx \mathbf{u}$ e a derivada de \mathbf{v} é da ordem de uR/r^2 (considera-se “grandes distâncias” uma distância r que é muito maior que o raio R da esfera). Então, o termo $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ é da ordem

de u^2R/r^2 . Os termos mantidos em (3.8) são da ordem de $\eta Ru/\rho r^3$. Somente teremos $u^2R/r^2 \ll \eta Ru/\rho r^3$ quando $r \ll \nu/u$. Portanto, a grandes distâncias, a velocidade encontrada em (3.12) não é válida.

Para refinar a velocidade a grandes distâncias, devemos incluir o termo $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Porém, nesta região, podemos aproximar este termo por $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. O cálculo para a força de arrasto neste caso é encontrado em [12]. Essa força é dada por:

$$\mathbf{F} = 6\pi\eta u R \left(1 + \frac{3u\rho R}{8\eta} \right) \quad (3.16)$$

Quando o fluido é caracterizado por um número de Reynolds grande, $\mathbf{R} \gg 1$, a lei de Stokes não é mais válida. A expressão para a força de arrasto experimentada por um corpo em movimento em um fluido com número de Reynolds grande, pode ser justificada com uma série de argumentos, encontradas em Landau [12]:

A respeito do padrão do fluxo, e baseado em resultados anteriores, conclui-se que ele pode ser considerado ideal em toda a extensão do fluido (exceto em uma fina camada na superfície do corpo) e que é irrotacional, exceto no rastro turbulento. Este rastro é análogo ao rastro que um navio deixa na água ao passar. A largura deste rastro depende das propriedades da camada na superfície do corpo, mas não do número de Reynolds. Isso nos permite dizer que todo o fluxo quase independe de \mathbf{R} e, por consequência, da viscosidade η . Sendo assim, a força de arrasto também não pode depender de η , o que nos deixa com três parâmetros: a densidade ρ , a dimensão l e a velocidade u . A única combinação possível de se formar com esses parâmetros com dimensão de força é $\rho u^2 l^2$ (ou com a seção transversal A no lugar de l^2). A força de arrasto geralmente é escrita como [13]:

$$F = \frac{1}{2} C_a A u^2 \quad (3.17)$$

onde a constante C_a é o coeficiente de arrasto, a ser determinado empiricamente.

4 Problema de dois corpos de massas variáveis

Neste capítulo, trataremos do problema de dois corpos onde, ao contrário do problema de Gylden-Mestschersky, forças de reação estão presentes. Além disso, há também a condição de que as partículas que se unem (ou que se separam) ao corpo em questão tenham velocidade nula logo antes (ou depois) disso. Conforme discutido no capítulo 2.1, a segunda lei de Newton é aplicada a este sistema na forma $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v}$. Neste trabalho, o termo “problema de dois corpos de massas variáveis” (ou PMV) será reservado para este problema, em oposição ao problema de Gylden-Mestschersky.

Uma dificuldade extra que o PMV apresenta em relação ao problema de Gylden-Mestschersky é que o desacoplamento das equações de movimento não é imediato como neste e como no problema usual de massas constantes, quando se usa as coordenadas relativa e centro de massa.

Na seqüência deste capítulo, a primeira parte traz um resumo do problema usual, no que se refere ao desacoplamento das equações. A segunda parte traz um exemplo de um trabalho onde as equações são desacopladas com hipóteses simplificadoras. A terceira parte apresenta resultados sobre a dinâmica de um sistema de partículas de massa variável. Por fim, na quarta parte o PMV propriamente dito é analisado.

4.1 O problema usual

Considera-se o problema de dois corpos de massa constante. As únicas forças que agem nos corpos são as forças de atração gravitacional mútua. As equações de movimento em um referencial inercial são:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= - \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Estas equações podem ser desacopladas através das coordenadas relativa \mathbf{r} e centro de massa \mathbf{R} , dadas por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad e \quad \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}$$

Estas equações podem ser invertidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Substituindo \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 dadas pelas equações (4.2) na equação (4.1), obtemos:

$$\begin{aligned} m_1 \left(\ddot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M}\ddot{\mathbf{r}} \right) &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \\ m_2 \left(\ddot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M}\ddot{\mathbf{r}} \right) &= \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \end{aligned}$$

A soma das duas equações acima resulta em $(m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0} \Rightarrow \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, o que implica que o centro de massa também é um referencial inercial, como esperado. Sendo assim, podemos eliminar $\ddot{\mathbf{R}}$ das equações acima, e qualquer uma das duas nos fornecerá a equação para o movimento relativo \mathbf{r} :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$$

Desta forma, o problema de dois corpos foi reduzido a um problema de um corpo sob ação do campo gravitacional fixo equivalente ao gerado por um corpo de massa M . A solução desta equação é a seção cônica $r = \alpha / (1 + \epsilon \cos \theta)$.

4.2 PMV: uma massa constante e outra variável

López [8] considera o problema de dois corpos, sendo que somente um dos corpos tem massa variável e que a massa deste é muito menor que a do outro. Essa última condição é necessária para que as equações de movimento se desacoplem. O resultado

pode ser aplicado ao caso de um cometa orbitando uma estrela, já que a massa da estrela é praticamente constante durante a passagem do cometa, que perde massa devido à interação com o vento solar.

As equações de movimento gerais são:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right) &= -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ \frac{d}{dt} \left(m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right) &= -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\end{aligned}$$

Considerando que m_1 é constante e m_2 depende do tempo, essas equações se reduzem a:

$$\begin{aligned}m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} &= -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} &= -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \dot{m}_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\end{aligned}\quad (4.3)$$

Porém, a usual mudança para as coordenadas relativa \mathbf{r} e de centro de massa \mathbf{R} não desacopla as equações de movimento, devido ao termo extra de (4.3), proveniente da variação temporal de m_2 . As equações obtidas com essa transformação são:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\dot{m}_2}{m_2} \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \ddot{\mathbf{R}} &= -\frac{\dot{m}_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}_2 + \frac{2m_2\dot{m}_2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}} + \frac{(m_1 + m_2)m_1\ddot{m}_2 - 2m_1\dot{m}_2^2}{(m_1 + m_2)^3} \mathbf{r}\end{aligned}$$

Para contornar essa dificuldade, podemos considerar o caso em que $m_1 \gg m_2$. Assim podemos considerar que o corpo m_1 fica imóvel em um referencial inercial (portanto, sendo ele mesmo um referencial inercial) enquanto o corpo m_2 orbita ao redor dele. Escolhendo como referencial o próprio corpo m_1 , teremos $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ e a equação (4.3) fica:

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \mathbf{r} - \dot{m}_2 \dot{\mathbf{r}}$$

Separando essa equação em componentes, em coordenadas esféricas (r, θ, φ) , temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} m_2 \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) &= -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} - \dot{m}_2 \dot{r} \\ m_2 \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) &= -\dot{m}_2 r \dot{\theta} \\ m_2 \left(2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta + r\ddot{\varphi} \sin \theta \right) &= -\dot{m}_2 r \dot{\varphi} \sin \theta \end{aligned} \quad (4.4)$$

Em seguida, o autor restringe-se ao caso em que $\dot{m}_2 r \approx 0$. Assim, da última das equações (4.4), o autor obtém $\dot{\varphi} = 0$ e as equações resultantes são:

$$m_2 \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} - \dot{m}_2 \dot{r} \quad (4.5)$$

$$m_2 \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) = 0 \quad (4.6)$$

A partir de (4.6), obtém-se a seguinte constante de movimento:

$$P_\theta = m_0 r^2 \dot{\theta} \quad (4.7)$$

onde m_0 é uma constante que pode ser identificada como a massa que o cometa teria a uma grande distância da estrela. Utilizando (4.7) e $\dot{m}_2 = (dm_2/dr) \dot{r}$, a equação (4.5) pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r^2} + \frac{P_\theta^2}{m_0^2 r^3} - \frac{m'_2}{m_2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (4.8)$$

onde $m'_2 = dm_2/dr$.

O autor [8] fornece também um modelo de variação da massa:

$$\begin{aligned} m_2(r) &= m_0 \sqrt{1 - e^{-\alpha r}} && \text{durante a aproximação} \\ &= m_i e^{\alpha(r_1 - r)} + m_f (1 - e^{-\alpha(r - r_1)}) && \text{durante o afastamento} \end{aligned}$$

Neste modelo, m_0 e m_f são a massa do cometa a uma grande distância da estrela, no início da aproximação e ao final do afastamento, respectivamente. A massa do cometa no periastro $r = r_1$ é $m_i = m_0 \sqrt{1 - \exp^{-\alpha r_1}}$ e está relacionada com as anteriores pela relação $m_f = 2m_i - m_0$. O parâmetro adimensional α deve ser ajustado empiricamente.

Como exemplo de aplicação de (4.8) e do modelo proposto, mostramos na figura 1 um ciclo de uma órbita de um cometa ao redor de uma estrela, calculado numericamente. Os parâmetros utilizados são: $m_1 = 2 \times 10^{30} kg$, $m_0 = 10^6 kg$, $m_f = 0,5m_0$, $r_1 = 6 \times 10^{10} m$, $\alpha = 1,4 \times 10^{-11}$ e $P_\theta = 3,2 \times 10^{21} kgm^2/s$.

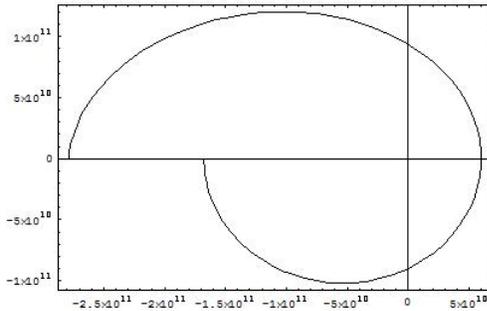


Figura 1: Um ciclo da órbita calculada através da equação (4.8).

4.3 Dinâmica

Neste capítulo, alguns resultados para um sistema de N partículas são revistos para o caso em que as partículas têm massas variáveis. Se as partículas de um sistema possuem massa variável, resultados familiares deixam de ser válidos. O centro de massa, definido por $R = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} / M$ (com $\alpha = 1, \dots, N$, sempre que não for indicado) não é mais um referencial inercial (como pode ser visto no exemplo particular de 2.4). Consideramos que as forças de reação estão presentes, agindo da mesma forma dada pela equação (2.4). Portanto, temos:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (4.9)$$

onde \mathbf{F} é a soma de todas as forças de origem externa ao sistema e \mathbf{p} é o momento linear total, dado por $\mathbf{p} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}$. Utilizando a definição do centro de massa, o momento total pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \\ &= \frac{d}{dt} (M\mathbf{R}) - \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \end{aligned}$$

de forma que a equação (4.9) fica:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d^2}{dt^2} (M\mathbf{R}) - \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \right) = \mathbf{F}$$

Se o sistema não sofre ação de forças externas, ou seja, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, podemos integrar a equação acima para obter:

$$\frac{d}{dt} (M\mathbf{R}) = \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{p}_0 \quad (4.10)$$

onde \mathbf{p}_0 é uma constante e corresponde ao problema de massa constante.

No caso específico de duas partículas ($N = 2$), podemos substituir as equações (4.2) em (4.10), para obter:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M\mathbf{R}) &= \dot{m}_1 \mathbf{r}_1 + \dot{m}_2 \mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_0 \\ &= \dot{M}\mathbf{R} + \left(\frac{\dot{m}_1 m_2 - m_1 \dot{m}_2}{M} \right) \mathbf{r} + \mathbf{p}_0 \Rightarrow \\ M\dot{\mathbf{R}} &= \left(\frac{\dot{m}_1 m_2 - m_1 \dot{m}_2}{M} \right) \mathbf{r} + \mathbf{p}_0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Analisemos, agora, o momento angular do sistema de N partículas de massas variáveis. Começando pela derivada temporal do momento de uma partícula:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}_\alpha &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) = \dot{\mathbf{r}}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{r}_\alpha \times \dot{\mathbf{p}}_\alpha = \\ &= \mathbf{r}_\alpha \times \dot{\mathbf{p}}_\alpha\end{aligned}$$

sendo que na última passagem foi utilizado o fato de que $\dot{\mathbf{r}}_\alpha$ e \mathbf{p}_α são colineares. Sendo $\dot{\mathbf{p}}_\alpha$ justamente a força que age sobre a α -ésima partícula, reescrevemos esta equação como:

$$\dot{\mathbf{L}}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times \left(\mathbf{F}_\alpha^e + \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta} \right)$$

onde \mathbf{F}_α^e é a soma de todas as forças externas agindo sobre a partícula α e $\mathbf{f}_{\alpha\beta}$ é a força interna do sistema agindo em α devido à partícula β (considerar $\mathbf{f}_{\alpha\alpha} = \mathbf{0}$). Para encontrar a derivada do momento angular total do sistema, somamos a última equação para $\dot{\mathbf{L}}_\alpha$ acima sobre α (de 1 até N):

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{L}}_\alpha = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^e) + \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) \quad (4.12)$$

O último termo pode ser reescrito como:

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha < \beta} [(\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) + (\mathbf{r}_\beta \times \mathbf{f}_{\beta\alpha})]$$

Definindo o vetor que liga as partículas α e β como $\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$ e utilizando a terceira lei de Newton, $\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha}$, temos:

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \times \mathbf{f}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha < \beta} \mathbf{r}_{\alpha\beta} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta} = 0$$

sendo que o produto vetorial é nulo, considerando $\mathbf{f}_{\alpha\beta}$ uma força central, ou seja, colinear a $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$. Desta forma, retornando a (4.12):

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^e)$$

A expressão entre parêntesis é o torque na α -ésima partícula devido a forças externas, portanto o lado direito desta equação é o torque externo total \mathbf{N}^e agindo sobre o sistema:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}^e$$

Uma consequência imediata da equação acima é que se o sistema é isolado, \mathbf{L} é uma constante do movimento. Isso implica que o movimento todo se dá em um plano.

No caso particular de um sistema isolado de duas partículas de massas variáveis, o momento angular total é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \\ &= \left(\mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \right) \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \left(\mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \right) \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 \\ &= \mathbf{R} \times (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2) + \mu \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) \\ &= \mathbf{R} \times \mathbf{p} + \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde μ é a massa reduzida do sistema, definida por:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

Aqui, nota-se que existe uma semelhança com o caso usual. O momento angular total é composto de dois termos: um é o momento da partícula de massa reduzida em relação ao centro de massa e o outro é o produto $\mathbf{R} \times \mathbf{p}$. Enquanto no caso usual este termo corresponde ao momento do centro de massa em relação à origem (o CM se move como uma partícula de massa M sujeita às forças externas ao sistema), no

caso de massa variável isso não é mais verdade (veja (4.11)). De qualquer forma, com a escolha apropriada do referencial inercial, e sendo \mathbf{p} uma constante para o sistema isolado, podemos fazer $\mathbf{p} = 0$. Podemos ainda, com uma rotação adequada do referencial, escolher $\dot{\varphi} = 0$ (em coordenadas esféricas (r, θ, φ)), de modo que $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$. Assim, de volta a (4.13):

$$\mathbf{L} = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{\varphi} = \mu l \hat{\varphi} \quad (4.14)$$

Em geral, nem a massa reduzida μ , nem o momento angular por unidade de massa l são constantes. Porém, como garantido pela equação $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}^e$ (e mostrado explicitamente no capítulo 4.4), o produto μl é constante para um sistema isolado.

4.4 Problema de dois corpos de massas variáveis

Galáxias estão comumente organizadas em grupos ou em aglomerados, que podem conter de algumas dezenas de galáxias (para os grupos) até milhares (nos aglomerados) [1]. Essas galáxias podem absorver massa umas das outras, ou ainda absorver o gás intergalático presente nestas estruturas. Uma situação semelhante pode ocorrer entre aglomerados globulares (estruturas esféricas formadas de milhares ou milhões de estrelas) que estão presentes nas galáxias. Em ambas situações, o PMV pode ser aplicado.

Definimos formalmente o PMV como o problema gravitacional de dois corpos de massas variáveis que se movem em uma atmosfera gasosa. A variação da massa faz com que forças de reação ajam sobre os corpos. As partículas da atmosfera estão em repouso no referencial inercial onde é medida a velocidade dos corpos, conforme discutido no capítulo 2.1. Além das condições sobre forças de reação no PMV, é necessário mencionar mais outra condição: considera-se aqui que a atmosfera não exerce força de atrito sobre os corpos, ou melhor, a força de atrito exercida é desprezível. A atmosfera atua somente como uma fonte ou depósito de massa.

As equações de movimento para esse sistema, segundo a discussão no capítulo 2.1, são:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1) &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \\ \frac{d}{dt}(m_2\dot{\mathbf{r}}_2) &= \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}\end{aligned}\quad (4.15)$$

Aqui, as equações dos dois corpos ainda estão acopladas. Podemos desacoplá-las da seguinte maneira. Segundo as equações (4.2), temos:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_1 &= \dot{\mathbf{R}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{m_2}{M}\mathbf{r}\right) \\ &= \dot{\mathbf{R}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{m_2}{M}\right)\mathbf{r} + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\end{aligned}\quad (4.16)$$

com uma equação similar para $\dot{\mathbf{r}}_2$. A expressão entre parêntesis na equação (4.11) pode ser simplificada de duas maneiras, de forma que, no referencial em que $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, ela se torna:

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{M}\right)\mathbf{r} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{m_2}{M}\right)\mathbf{r}\quad (4.17)$$

que são facilmente verificadas. Substituindo a segunda igualdade em (4.16) (ou a primeira na equação similar para $\dot{\mathbf{r}}_2$), obtemos:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}$$

(ou uma equação similar para $\dot{\mathbf{r}}_2$). Tanto a equação acima para $\dot{\mathbf{r}}_1$ quanto a similar para $\dot{\mathbf{r}}_2$, se substituídas em (4.15), resultam em:

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{\mathbf{r}}) = -\frac{G\mu M}{r^3}\mathbf{r}$$

que pode ser escrita como:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} - \frac{d}{dt}(\ln \mu)\dot{\mathbf{r}}\quad (4.18)$$

Portanto, utilizando-se da equação (4.17), é possível desacoplar as equações de movimento do sistema.

Em coordenadas esféricas, no caso $\dot{\varphi} = 0$, temos $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ e $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$, e podemos decompor (4.18) em:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} - \left(\frac{d}{dt} \ln \mu\right) \dot{r} \quad (4.19)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -r\dot{\theta} \frac{d}{dt} \ln \mu \quad (4.20)$$

A equação (4.20) multiplicada por r nos dá:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) &= -r^2\dot{\theta} \frac{d}{dt} \ln \mu \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \ln r^2\dot{\theta} &= -\frac{d}{dt} \ln \mu \Rightarrow \\ r^2\dot{\theta} &= \frac{k}{\mu} \equiv l \end{aligned}$$

onde k é uma constante (momento angular total) e l é o momento angular por unidade de massa, como indicado em (4.14). Como usualmente, essa equação pode ser utilizada para se eliminar $\dot{\theta}$ de (4.19):

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} - \left(\frac{d}{dt} \ln \mu\right) \dot{r}$$

e também para mudar a variável da equação acima de t para θ , através de:

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta}$$

A equação (4.19) fica, então:

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} - \frac{l^2}{r^4} \frac{dr}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \ln \mu$$

onde l e μ são considerados agora funções de θ .

Fazendo a substituição de r por $u \equiv 1/r$ e de $dr/d\theta$ por $(-1/u^2) du/d\theta$, esta equação se torna:

$$\begin{aligned} l \frac{d}{d\theta} \left(l \frac{du}{d\theta} \right) + l^2 u &= GM - l^2 \frac{du}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \ln \mu \Rightarrow \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(\frac{1}{l} \frac{dl}{d\theta} + \frac{d}{d\theta} \ln \mu \right) \frac{du}{d\theta} + u &= \frac{GM}{l^2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Manipulando a expressão entre parêntesis, chegamos a:

$$\frac{1}{l} \frac{dl}{d\theta} + \frac{d}{d\theta} \ln \mu = \frac{d}{d\theta} \ln l + \frac{d}{d\theta} \ln \mu = \frac{d}{d\theta} \ln l\mu = \frac{d}{d\theta} \ln k = 0$$

Portanto, a equação (4.21) se torna:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{l^2} \quad (4.22)$$

Essa é exatamente a mesma equação a que se chega no problema de massa constante, porém, aqui l é uma função de θ . Sua solução é dada por:

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + U$$

onde A e θ_0 são constantes e U é uma solução particular de (4.22). U pode ser calculado através de:

$$U = \frac{G}{k^2} \left(\sin \theta \int M \mu^2 \cos \theta d\theta - \cos \theta \int M \mu^2 \sin \theta d\theta \right)$$

Neste estágio, se o produto $M\mu^2$ não varia muito com θ , podemos considerá-lo constante na integral. Este procedimento é exato para o caso em que consideramos a expansão deste produto até primeira ordem em θ . De qualquer forma, o procedimento resulta em:

$$\frac{1}{r} = u(\theta) = A \cos \theta + \frac{GM\mu^2}{k^2} \quad (4.23)$$

com a escolha mais conveniente das constantes arbitrárias.

O resultado obtido tem a mesma forma do resultado apresentado em [10], quando se considera a ausência de forças de reação. Porém, enquanto l é uma constante neste trabalho, aqui $l = k/\mu$ é uma função de θ . Os parâmetros *semi-latus rectum* α , excentricidade ϵ e semi-eixo maior a da elipse, obtidos através da equação (4.23) são:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k^2}{GM\mu^2} \\ \epsilon &= \frac{Ak^2}{GM\mu^2} \\ \frac{1}{a} &= \frac{GM\mu^2}{k^2} \left[1 - \left(\frac{Ak^2}{GM\mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Das três equações (4.24) segue que a razão $\epsilon/\alpha = A$ é uma constante durante a evolução da órbita no tempo. Também se conclui que a aumenta quando α aumenta. Estes resultados diferem dos obtidos por Jeans [6], que dão a excentricidade ϵ e o produto Ma como constantes.

5 Modelos

5.1 Analogia hidrodinâmica

Como pode ser visto na equação (4.18), existe uma analogia entre um corpo de massa variável se movendo e um corpo se movendo em um fluido viscoso. Pela lei de Stokes, um corpo esférico se movendo com uma velocidade constante em um meio de viscosidade η está sujeito a uma força de arrasto dada pela equação (3.15), ou seja, da forma $\gamma \mathbf{v}$, onde \mathbf{v} é a velocidade. Multiplicando-se a equação (4.18) por μ

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G\mu M}{r^3} \mathbf{r} - \dot{\mu} \dot{\mathbf{r}}$$

podemos compará-la com a equação para um corpo de massa μ constante sob ação de uma força do tipo Stokes e sob a mesma força gravitacional:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G\mu M}{r^3} \mathbf{r} - \gamma \dot{\mathbf{r}}$$

O último termo da primeira equação, que é o efeito que a variação de massa causa no movimento do corpo, pode ser considerado uma força de arrasto. Este termo é $\dot{\mu} \mathbf{v}$. Nesta analogia, igualamos a força de arrasto dada pela lei de Stokes a esse termo de (4.18), para obter:

$$\dot{\mu} = \gamma \tag{5.1}$$

onde γ é uma constante. Obviamente μ possui uma variação linear da massa.

Rigorosamente, a forma dada da lei de Stokes só se aplica a um corpo com velocidade constante e em movimento retilíneo, porém pode ser uma aproximação se a velocidade não varia muito rápido. A expressão da força de arrasto para um movimento arbitrário (mas ainda retilíneo) é dada em [12].

A determinação de $\mu(t)$, no entanto, não é suficiente para se determinar $m_1(t)$ e $m_2(t)$, sendo necessário impor mais uma condição sobre as massas. Por exemplo,

no caso em que uma das massas é muito maior que a outra, a massa reduzida pode ser igualada à massa do corpo menor. Ou ainda, se a massa total dos dois corpos é constante, podemos substituir $m_2 = M - m_1$ na definição da massa reduzida e resolver para m_1 :

$$m_1 = a + \sqrt{b - ct}$$

onde a , b e c são os parâmetros do modelo, e sua correspondência com os dados físicos do problema são $a = M/2$, $b = a^2 - M\mu_0$ e $c = M\gamma$.

Com m_1 e m_2 dados desta maneira, o corpo mais massivo sempre perde massa para o menos massivo, até que suas massas se igualem. Após este momento, não é mais possível ter $\dot{\mu} = \gamma$ (esta restrição sendo válida somente quando $M = \text{constante}$). Embora o valor de γ seja sempre positivo na lei de Stokes, podemos extrapolá-lo para valores negativos. Assim, os corpos apresentarão o comportamento oposto: o menos massivo sempre perderá massa para o mais massivo.

A figura 2 mostra dois exemplos de órbita calculada com o modelo de variação linear da equação (5.1), para uma variação positiva da massa com o tempo. A órbita, que se inicia em $r = 8$, vai diminuindo de dimensão, comportamento que era esperado. Os dois casos diferem claramente de excentricidade, devido ao fato de que possuem valores diferentes da constante k .

Como alternativa ao modelo linear, podemos considerar uma dependência temporal de R na lei de Stokes:

$$\dot{\mu} = 6\pi\eta R(t)$$

Podemos escrever a dependência temporal de $R(t)$ explicitamente, considerando μ a massa real de um corpo de densidade ρ :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{4\pi\rho}{3}R^3 \Rightarrow \\ \dot{\mu} &= \frac{dm}{dR}\dot{R} = 4\pi\rho R^2\dot{R} \end{aligned}$$

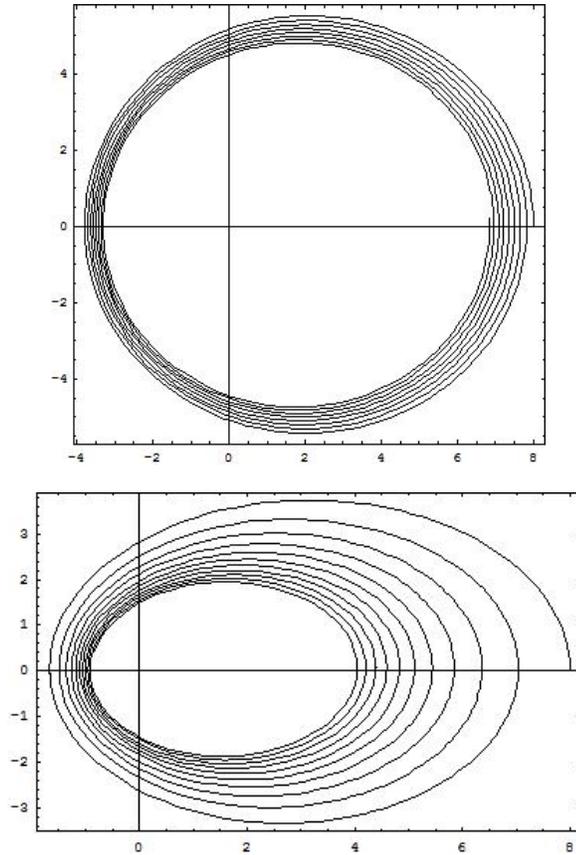


Figura 2: Exemplo de órbitas no plano (x, y) calculadas através de (5.1). Para a primeira foram utilizados $\gamma = 1 \times 10^{-4}$, $\mu_0 = 0.5$, $k = 1.8$ e $M = 2.5$; para a segunda, $\gamma = 0.001$, $\mu_0 = 0.5$, $k = 1.6$ e $M = 3.5$.

Pelas duas equações acima, pode-se encontrar $R(t)$ e $\mu(t)$, dado por:

$$\mu(t) = (at + b)^{3/2}$$

onde a e b são as constantes do modelo.

Uma terceira possibilidade é considerar não a analogia com a lei de Stokes somente, mas também com a correção de Oseen. Igualamos o termo $\dot{\mu}\mathbf{v}$ a $(\gamma + \delta v)\mathbf{v}$, onde γ e δ são constantes conforme visto em (3.16) e $v = |\mathbf{v}|$. Sendo

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{\dot{r}^2 + \left(\frac{k}{\mu r}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\mu r} \sqrt{(\mu r \dot{r})^2 + k^2}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} &= \gamma + \frac{\delta}{\mu r} \sqrt{(\mu r \dot{r})^2 + k^2} \\
&= \gamma + \delta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

onde a segunda igualdade é a forma bem mais simples que a equação assume em coordenadas cartesianas.

A figura 3 apresenta uma órbita calculada com o modelo dado pela equação (5.3), comparada com uma órbita que segue a equação (5.1), além da comparação entre as massas $\mu(t)$ dos dois casos.

Por fim, quando o movimento se dá em alta velocidade (alto número de Reynolds), a força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade, $\gamma v^2 \hat{v}$, conforme mencionado em (3.17). Esse modelo de força de arrasto é utilizado para prever e simular trajetórias de satélites de baixa altitude (que se movem no interior da atmosfera terrestre), como por exemplo em [14], [15],[16]. Igualando esta força a $\dot{\mu}\mathbf{v}$, obtemos $\dot{\mu} = \gamma v$, ou ainda, conforme a equação (5.2):

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} &= \frac{\gamma}{\mu r} \sqrt{(\mu r \dot{r})^2 + k^2} \\
&= \gamma \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

A figura 4 mostra um exemplo calculado com o modelo dado pela equação (5.4). Ao lado, é mostrada a variação temporal de μ .

Tanto em (5.3) como em (5.4), não se encontra uma expressão explícita para μ , o que não impede de se encontrar a trajetória do corpo numericamente.

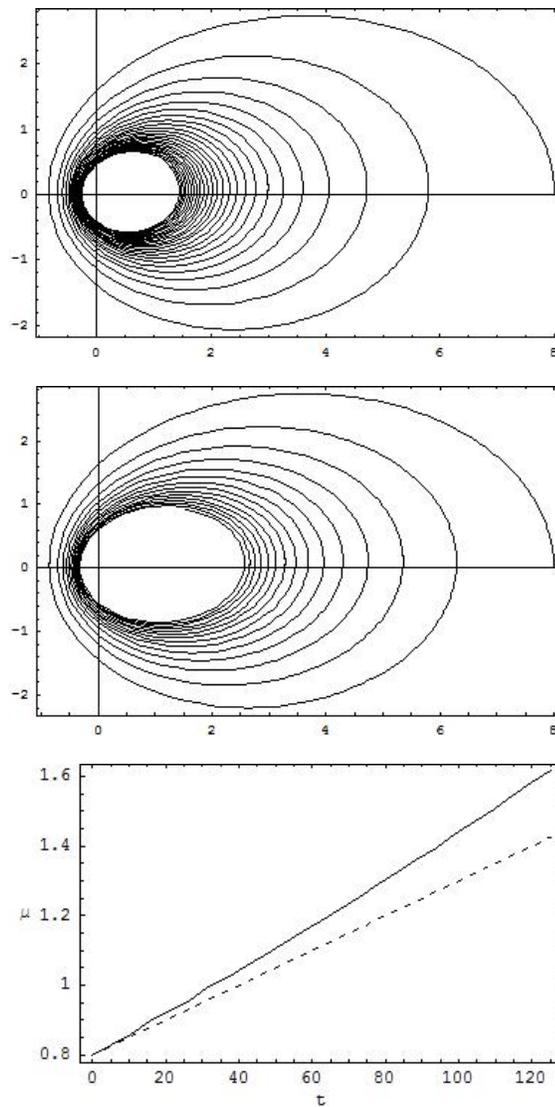


Figura 3: Exemplo de órbitas no plano (x, y) calculadas através da equação (5.3) (superior) e da equação (5.1). Foram utilizadas os mesmos parâmetros e condições iniciais: $\gamma = 0.005$, $\mu_0 = 0.8$, $k = 2.56$ e $M = 5.8$. Para o modelo baseado em Oseen, $\delta = 0.001$. Também é apresentado a variação temporal da massa μ para o modelo baseado em Oseen e para o modelo linear (linha tracejada). Observa-se uma leve ondulação na curva de $\mu(t)$ (Oseen) nos tempos iniciais.

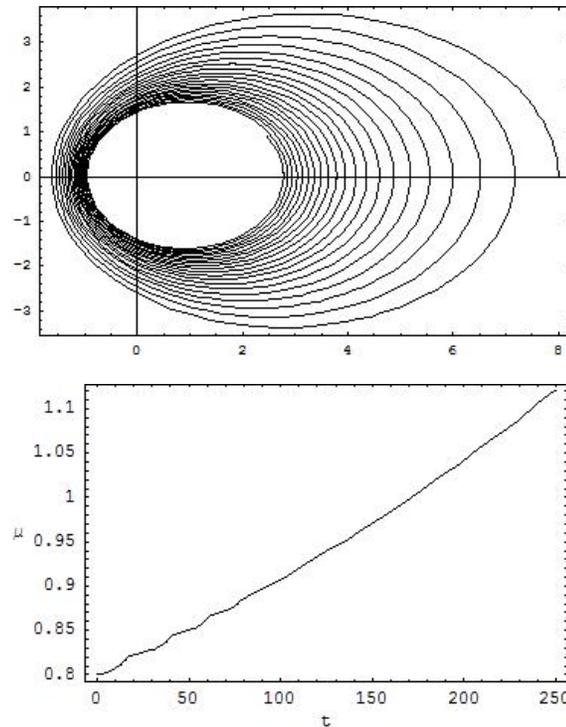


Figura 4: Exemplo de órbita no plano (x, y) calculada através de (5.4). Foram utilizados $\gamma = 0.001$, $\mu_0 = 0.8$, $k = 3.2$ e $M = 5.8$. Também é apresentado a variação temporal da massa μ . Observa-se pequenas ondulações na curva de $\mu(t)$ nos tempos iniciais.

5.2 Massa virtual

No capítulo anterior, através da analogia com a hidrodinâmica, foi possível relacionar a variação da massa de um corpo com o efeito da força de arrasto que um corpo sofre ao se mover em um fluido. A fim de completar essa analogia, apresentamos neste capítulo o conceito de *massa virtual* (segundo a discussão encontrada em [12]).

Consideremos uma esfera se movendo em um fluido irrotacional (ou seja, para o qual $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$), não viscoso e incompressível. Por ser irrotacional, tal fluido satisfaz a equação de Euler (3.4), como podemos ver aplicando o operador rotacional sobre ela para obter:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla \times [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = 0$$

e, através da identidade $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]$$

o que obviamente é satisfeito por $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Além disso, \mathbf{v} pode ser escrito como o gradiente de um potencial Φ , ou seja, $\mathbf{v} = \nabla \Phi$. Juntamente com a equação da continuidade para um fluido incompressível, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, isso implica que Φ satisfaz a equação de Laplace, $\nabla^2 \Phi = 0$.

As soluções da equação de Laplace que se anulam no infinito são dadas por:

$$\Phi = \sum_{n=1} \frac{A_n P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}$$

sendo P_n o polinômio de Legendre de ordem n e A_n o coeficiente correspondente, a ser determinado. As condições de contorno também requerem $(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \hat{r}|_{r=R} = 0$, ou seja, $\partial \Phi / \partial r = u \cos \theta$. Daí segue que $A_1 = -\frac{1}{2} R^3 u$, enquanto $A_n = 0$ para $n \neq 1$. Portanto:

$$\Phi = -\frac{R^3}{2r^2} u \cos \theta$$

Podemos encontrar a energia deste fluido através da integral $\frac{\rho}{2} \int v^2 dV$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho}{2} \int \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi dV \\ &= \frac{\rho}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \right] dV \\ &= \frac{\rho}{2} \int \left[\left(\frac{R^3}{r^3} u \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{R^3}{2r^2} u \sin \theta \right)^2 \right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{\pi}{3} \rho R^3 u^2 \end{aligned}$$

Se uma força \mathbf{f} age sobre o fluido durante um intervalo de tempo dt , haverá um aumento no seu momento de $d\mathbf{P} = \mathbf{f}dt$. Fazendo a multiplicação escalar desta equação por \mathbf{u} , temos $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{P} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}dt$. Este último termo representa o acréscimo de energia do fluido devido ao trabalho realizado pela força \mathbf{f} em uma distância $\mathbf{u}dt$. Chega-se, então, à relação $dE = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P}$ (no caso que está sendo tratado, \mathbf{u} e \mathbf{P} são paralelos, por simetria, sendo possível considerar simplesmente $dE = u dP$). Portanto, a força agindo sobre o fluido é dada por $\frac{dP}{dt} = \frac{1}{u} \frac{dE}{dt}$, ou:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{2\pi}{3} \rho R^3 \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (5.5)$$

A força de arrasto \mathbf{F} do fluido sobre a esfera é a quantidade dada por (5.5), com sinal oposto:

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

Consideremos que a esfera é colocada em movimento por uma força externa \mathbf{f} . A energia que o fluido adquire vem do trabalho realizado por essa força \mathbf{f} . Essa força deve ser igual à variação temporal do momento *total* do sistema: o momento $M\mathbf{u}$ da esfera e o momento \mathbf{P} do fluido. Equacionando:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= M \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ &= \left(M + \frac{2\pi}{3} \rho R^3 \right) \frac{d\mathbf{u}}{dt} \end{aligned} \quad (5.6)$$

A quantidade entre parêntesis acima é chamada *massa virtual*. Essa massa é igual à massa real da esfera mais a metade da massa do fluido deslocado pela esfera (neste caso específico). Para colocar a esfera em movimento segundo a aceleração $d\mathbf{u}/dt$, a massa que a força deve mover é a massa virtual, e não a real, devido à presença do fluido.

A equação (5.5) nos diz que a força agindo sobre a esfera é proporcional à sua aceleração. Por isso, se a esfera é posta em movimento, continuará a se mover

com velocidade constante, sem necessidade de uma força para mantê-la. Não há força de atrito para se opor ao movimento e o deslocamento do fluido pela esfera é compensado pela pressão gerada. A esfera e o fluido estão em uma “situação inercial”. Porém, quando a esfera está em aceleração, a pressão na parte dianteira é maior que na parte traseira, dando origem à força de arrasto. Neste caso, a massa virtual surge como a resistência à quebra da situação inercial da esfera e do fluido no movimento uniforme.

Passemos então para o caso em que o fluido apresenta viscosidade. A equação (5.6) continua sendo válida, sendo necessário somente substituir o termo $d\mathbf{P}/dt$ pela força de arrasto na esfera, com sinal oposto. Essa força já foi calculada para o caso de velocidade \mathbf{u} constante: a lei de Stokes. Calculemos, então, a força de arrasto para um movimento arbitrário da esfera e, em particular, para uma variação linear da velocidade.

Inicialmente consideremos que a esfera apresenta um movimento oscilatório segundo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$. Uma vez que as equações são lineares, podemos utilizar esta forma complexa para \mathbf{u} e tomar a parte real da solução final. Pelos mesmos motivos apresentados no capítulo 3.3, procuramos uma velocidade da forma $\mathbf{v} = e^{-i\omega t} \nabla \times (\nabla \times f(r) \mathbf{u}_0)$ e novamente teremos $\nabla \times \mathbf{v} = -\nabla^2 (\nabla \times f \mathbf{u})$. Aplicando o operador rotacional sobre a equação de Navier-Stokes e seguindo o mesmo desenvolvimento usado no capítulo 3.3, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{v}) &= \nu \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v}) \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 (\nabla \times f \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t})) &= \nu \nabla^4 (\nabla \times f \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}) \Rightarrow \\ (-i\omega) (\nabla^2 (\nabla \times f \mathbf{u}_0)) &= \nu \nabla^4 (\nabla \times f \mathbf{u}_0) \Rightarrow \\ (-i\omega) (\nabla^2 (\nabla f)) \times \mathbf{u}_0 &= \nu \nabla^4 (\nabla f) \times \mathbf{u}_0 \Rightarrow \\ \nu \nabla^4 (\nabla f) + (i\omega) (\nabla^2 (\nabla f)) &= 0 \Rightarrow \\ \nu \nabla^4 f + (i\omega) \nabla^2 f &= 0 \end{aligned}$$

Na última passagem, a integração gera uma constante, que deve ser zero para que a velocidade e suas derivadas se anulem no infinito. Colocando $\nabla^2 f = \Phi$ na

última equação, vemos que ela é satisfeita por soluções do tipo $\Phi = \frac{A}{r}e^{kr}$, com A a ser definido e:

$$k = -\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1-i)$$

A solução de $\nabla^2 f = \Phi$, com Φ dado acima é:

$$f(r) = A \frac{e^{kr}}{k^2 r} - \frac{a}{r}$$

Finalmente, a velocidade é encontrada através de $\mathbf{v} = e^{-i\omega t} \nabla \times (\nabla \times f(r) \mathbf{u}_0)$. Temos:

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{2u \cos \theta}{k^2 r^3} (ak^2 - Ae^{kr}(1-kr)) \\ v_\theta &= \frac{u \sin \theta}{k^2 r^3} (-ak^2 + Ae^{kr}(1-kr - k^2 r^2)) \end{aligned}$$

onde $u = u_0 e^{-i\omega t}$. Aplicando a condição de contorno, em que a velocidade do fluido se anula na superfície da esfera, $\mathbf{v}(R) = \mathbf{u}$, encontra-se os valores das constantes:

$$A = -\frac{3R}{2}e^{-kR} \quad e \quad a = -\frac{R}{2k^2}(3 - 3kr + k^2 r^2)$$

Como anteriormente, a força de arrasto agindo sobre a esfera é dada por:

$$F = \oint (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) dS$$

O valor da pressão p é obtido integrando-se a equação de Navier-Stokes

$$p = p_0 - \frac{a\rho}{r^2} \dot{u} \cos \theta$$

onde p_0 é a pressão no infinito. Os valores de σ'_{rr} e $\sigma'_{r\theta}$ na superfície da esfera são 0 e $\frac{3\eta}{2R}(kR - 1)u \sin \theta$, respectivamente. A força de arrasto encontrada pode ser escrita

de forma a apresentar somente valores reais, porém, no que se segue, é mais útil a seguinte forma:

$$F = \pi\rho R^3 u \left(\frac{6\nu}{R^2} - \frac{2}{3}i\omega + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R} (1-i)\sqrt{\omega} \right) \quad (5.7)$$

Se a esfera se move de maneira arbitrária, podemos escrever sua velocidade $u(t)$ como uma integral de Fourier e u_ω sua transformada:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad u_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (5.8)$$

Já que as equações são lineares, a força de arrasto pode ser dada como a integral sobre ω das forças relativas às velocidades $u_\omega e^{-i\omega t}$, que são as componentes de Fourier de $u(t)$. A força calculada em (5.7) corresponde justamente a uma velocidade $u_0 e^{-i\omega t}$, portanto a força de arrasto total é a integral de (5.7), fazendo-se a substituição $u \rightarrow u_\omega e^{-i\omega t}$. Se utilizarmos o fato de que $(\dot{u})_\omega = -i\omega u_\omega$ (onde $(\dot{u})_\omega$ corresponde à componente de Fourier de \dot{u} , o que pode ser verificado por (5.8)), a força pode ser escrita da seguinte maneira:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi\rho R^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(\frac{6\nu}{R^2} u_\omega + \frac{2}{3} (\dot{u})_\omega + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R} (\dot{u})_\omega \frac{1+i}{\sqrt{\omega}} \right) d\omega$$

Os dois primeiros termos do integrando resultam, por definição, em $u(t)$ e $\dot{u}(t)$. Para calcular o terceiro termo, dividimos a integral em duas partes, da seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 (\dot{u})_\omega \frac{1+i}{\sqrt{\omega}} d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (\dot{u})_\omega \frac{1+i}{\sqrt{\omega}} d\omega$$

O fator $(1+i)/\sqrt{\omega}$ para ω negativo é igual a $(1-i)/\sqrt{|\omega|}$, enquanto que para a parte positiva simplesmente substituímos ω por seu módulo. Portanto, as integrais podem ser reunidas como:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{u})_{\omega} \frac{1}{\sqrt{|\omega|}} d\omega$$

Ou seja, obtemos $2\mathcal{F}^{-1} \left((\dot{u})_{\omega} \frac{1}{\sqrt{|\omega|}} \right)$, onde \mathcal{F}^{-1} denota a transformada inversa de Fourier. Pode-se agora fazer uso do *teorema da convolução*. Este teorema afirma que a transformada de Fourier (ou sua inversa) de um produto de funções f e g é igual à convolução das transformadas de cada uma das funções (multiplicada por um fator, dependendo da convenção utilizada). Em linguagem matemática:

$$\mathcal{F}^{-1}(f.g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$$

onde o asterisco significa a convolução das duas funções, definida como:

$$f * g \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Assim sendo, o termo a calcular fica

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left((\dot{u})_{\omega} \right) * \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{|\omega|}} \right) = \\ & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{du}{dt} * \frac{1}{\sqrt{|t|}} = \\ & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(\tau) \frac{1}{\sqrt{|t - \tau|}} d\tau \end{aligned}$$

Antes de escrever a solução final, devemos atentar ao resultado acima. Sua forma implica que uma componente da força de arrasto sobre a esfera depende não só da história passada da esfera, mas também do seu futuro, devido à integração no tempo, de $-\infty$ a ∞ . Se quisermos adotar um princípio de causalidade, ou seja, de que as causas de um efeito são anteriores a ele no tempo, procedemos de maneira[17] que

podemos considera a integração até o instante presente t . Por fim, obtemos como a força de arrasto sobre a esfera:

$$F = 2\pi\rho R^3 \left(\frac{3\nu}{R^2}u + \frac{1}{3}\frac{du}{dt} + \frac{3}{R}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right)$$

Utilizando a equação acima, calculemos a força de arrasto quando a esfera está em repouso e começa a se mover em $t = 0$ com velocidade constante, $u = \alpha t$ (obviamente, esta também pode ser uma aproximação caso a velocidade não varie muito rápido). Obtém-se:

$$F = 2\pi\rho R^3\alpha \left(\frac{3\nu t}{R^2} + \frac{1}{3} + \frac{6}{R}\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} \right)$$

Vejamos qual a massa induzida gerada por esta força de arrasto, através da equação (5.6). Caso aja no sistema uma força \mathbf{f} , a massa induzida, o termo entre parêntesis, é encontrado evidenciando-se a aceleração $\alpha = du/dt$:

$$\mathbf{f} = \left(M + \frac{2\pi}{3}\rho R^3 + 6\pi\eta Rt + 12\rho R^2\sqrt{\pi\nu t} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

O primeiro termo adicional é o termo inercial, o mesmo encontrado no caso do fluido sem viscosidade (metade da massa do fluido deslocado pela esfera). Os outros dois termos têm origem na viscosidade: o segundo é a lei de Stokes e o terceiro está relacionado com a história do movimento. Este último termo é desprezível em relação ao segundo no limite $t \rightarrow \infty$ (ou mesmo se $\sqrt{t} \gg R/\sqrt{\nu}$). Nestas condições, se considerarmos a massa virtual como uma massa real μ (aqui, μ não representa a massa reduzida, necessariamente), teremos o mesmo modelo de variação linear da massa proposto em (5.1):

$$\dot{\mu} = \gamma$$

quando simplesmente se igualou o termo de variação de massa ao termo da força de arrasto. Naquele contexto, a velocidade da esfera era constante. Mas a aproximação é válida, já que dos termos provenientes da aceleração, o primeiro é constante e o terceiro pode ser desprezado nas condições dadas acima (ou ainda mantido, como um refinamento do modelo).

Consideremos a seguinte situação: se uma estrela se move em uma atmosfera gasosa, sua atração gravitacional fará com que as partículas da atmosfera se aproximem dela (caso não sejam efetivamente absorvidas pela estrela, o que obviamente depende da definição do limite estrela-atmosfera). No seu movimento por essa atmosfera, a estrela carrega consigo essas partículas. Analogamente, no problema hidrodinâmico, a grandes distâncias da esfera, o fluido está parado. Conforme ela se movimenta, movimenta também as partículas do fluido mais próximas consigo. Embora somente a camada imediatamente acima da superfície da esfera se fixe a ela, todas as partículas são movidas pela esfera quando se aproximam dela e isso dá origem à massa virtual.

5.3 Força de atrito como variação de massa

Consideremos uma partícula de massa m , variável ou não, que está sob ação de uma força de atrito proporcional à velocidade, além de outras forças não dissipativas denotadas por Q . Conclui-se que:

Teorema 1. *A equação de movimento dessa partícula pode ser transformada em uma equação para uma partícula de uma nova massa variável sob ação somente de novas forças Q' não dissipativas.*

Demonstração. A equação original, com coeficiente de atrito b , é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) + b\dot{\mathbf{r}} &= Q(\mathbf{r}) \Rightarrow \\ m\ddot{\mathbf{r}} + (\dot{m} + b)\dot{\mathbf{r}} &= Q(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pretende-se definir uma nova massa μ , de modo que essa equação possa ser escrita como:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mu\dot{\mathbf{r}}) &= Q'(\mathbf{r}) \Rightarrow \\ \mu\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mu}\dot{\mathbf{r}} &= Q'(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (5.10)$$

Para isso, multiplica-se (5.9) pelo fator integrante $F(t)$:

$$mF\ddot{\mathbf{r}} + (\dot{m} + b)F\dot{\mathbf{r}} = FQ(\mathbf{r})\quad (5.11)$$

Comparando as equações (5.10) e (5.11), nota-se que devemos ter $\mu \equiv mF$ e $Q' \equiv QF$, além de:

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= (\dot{m} + b)F \Rightarrow \\ \dot{m}F + m\dot{F} &= (\dot{m} + b)F \Rightarrow \\ m\dot{F} &= bF \Rightarrow \\ F &= F_0 \exp\left(\int \frac{bdt}{m(t)}\right)\end{aligned}$$

□

Como exemplo, tratemos o oscilador harmônico amortecido unidimensional. Sob uma partícula de massa m constante, agem uma força restauradora $-kx$ e uma força dissipativa que segue a lei de Stokes:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = -kx$$

Segundo o desenvolvimento acima, definimos o fator integrante $F = F_0 e^{bt/m}$, a nova massa $\mu = mF$ e a nova constante elástica $k' = kF$, para obter a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{x}) = -k'x\quad (5.12)$$

Observando, ainda, o cálculo do fator integrante, em nenhum momento se supôs que b fosse uma constante. De fato, podemos considerar que a força dissipativa não é do tipo Stokes, mas proporcional ao quadrado da velocidade, ou seja, a equação original:

$$m\ddot{x} + B|\dot{x}|\dot{x} = -kx$$

passa para a forma de (5.12) se tomarmos $F = F_0 \exp\left(\frac{B}{m} \int_0^t |\dot{x}| dt\right)$.

A figura 5 mostra dois exemplos calculados numericamente através de (5.12), o primeiro quando a força dissipativa segue a lei de Stokes e o segundo quando ela é proporcional ao quadrado da velocidade. A equação original do primeiro caso possui solução analítica bem conhecida. Obviamente, foi obtida numericamente a mesma solução. O segundo caso apresenta um amortecimento do mesmo tipo que o primeiro, porém o amortecimento da amplitude é maior inicialmente e menor para tempos posteriores.

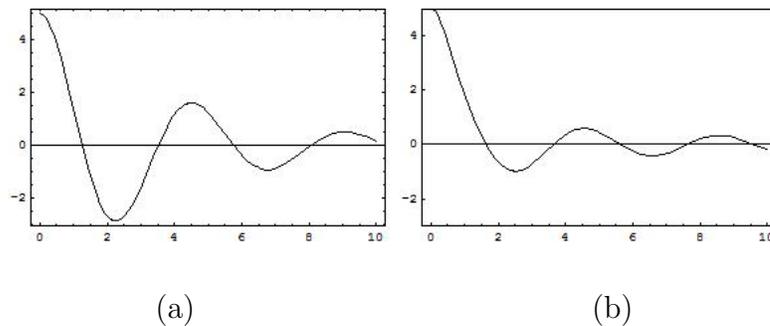


Figura 5: Soluções $x(t)$ da equação (5.12) com $\mu = mF$ e $k' = kF$. Em (a), a força dissipativa segue a lei de Stokes e temos $F = F_0 \exp^{bt/m}$. Em (b), esta força é proporcional ao quadrado da velocidade e temos $F = F_0 \exp\left(\frac{B}{m} \int_0^t |\dot{x}| dt\right)$

Consideremos, agora, o caso em que a força não dissipativa que atua na equação original seja proporcional à massa da partícula. Mais especificamente, consideremos que essa força é devida a um potencial gravitacional Φ . Então, conclui-se:

Teorema 2. *A equação de movimento de uma partícula sob ação de uma força dissipativa proporcional à sua velocidade e de um potencial Φ pode ser reduzida à equação para uma nova partícula de massa variável sujeita ao potencial Φ somente.*

Demonstração. A verificação deste fato é imediata. A equação original é:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) + b\dot{\mathbf{r}} = -m\nabla\Phi$$

que multiplicada pelo fator integrante F é transformada em

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{\mathbf{r}}) = -\mu\nabla\Phi \quad (5.13)$$

com μ e F definidos como anteriormente. \square

A diferença entre as versões 1 e 2 do Teorema é que no caso 1 a equação (5.10), obtida da original, não representa um caso geral, ou seja, a massa μ e a força Q não são arbitrárias, mas são proporcionais entre si, através de F . Por isso, a equação (5.12) por exemplo não representa um oscilador harmônico de massa e constante elásticas variáveis quaisquer, mas sim proporcionais. Na versão 2, no entanto, a equação (5.13) representa qualquer partícula de massa variável sob ação do potencial Φ . Neste sentido, a equação (5.13) é mais geral. Assim sendo, os resultados obtidos para uma partícula de massa variável sob ação de força gravitacional também podem ser aplicados ao caso em que uma força de atrito também está presente, já que uma equação pode ser transformada na outra.

Infelizmente, se o sistema em questão é composto de duas partículas ao menos, já não é possível realizar essa transformação. Ocorre que quando se realiza a transformação $m_1 \rightarrow \mu_1$ em uma das equações, m_1 continua presente na outra equação, e vice-versa. Desta forma, os termos representando as forças gravitacionais em cada partícula deixariam de ter módulos iguais nas equações, que não mais representariam um problema de dois corpos.

No entanto, se uma das partículas, de massa variável ou não, é muito mais massiva que a outra, a ponto de ser possível considerar seu centro como o centro de

massa do sistema, o problema se reduz ao de uma única partícula em um potencial gravitacional, e a transformação é aplicável.

5.4 Abordagem microscópica

Neste capítulo, objetiva-se encontrar um modelo de variação de massa através de uma abordagem microscópica simples. Tratamos a estrela como sendo formada por um gás de densidade constante e a atmosfera a sua volta como um gás de densidade a se determinar. Tanto na estrela quanto na sua atmosfera a força entre as partículas dos gases são desprezíveis. Aplicando o ensemble canônico sobre uma partícula da atmosfera, a densidade de probabilidade de um estado é proporcional a $e^{-\beta E_r}$, onde E_r é a energia desse estado e $\beta = 1/k_B T$, com k_B constante de Boltzmann e T a temperatura da atmosfera. Antes de prosseguir, deve-se mencionar que, rigorosamente, o ensemble canônico somente deve ser aplicado para um sistema em equilíbrio térmico, o que obviamente não é o caso de uma estrela que irradia energia e que se move pela atmosfera. Intenciona-se, porém, encontrar uma primeira aproximação.

A energia total desta partícula é a soma da energia cinética e da energia potencial gravitacional:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r}$$

onde m é a massa da partícula e M a massa da estrela. Portanto, obtemos a seguinte densidade de probabilidade:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C e^{-\beta p^2/2m} e^{\beta GmM/r}$$

No entanto, esta não é uma distribuição de probabilidade possível, já que quando a integramos em todo o espaço (exterior ao raio R da estrela), o que deveria resultar em 1, notamos que a integral não converge:

$$\int_V e^{\beta GmM/r} d^3\mathbf{r} = 4\pi \int_R^\infty r^2 e^{\beta GmM/r} dr$$

A figura 6 mostra o comportamento desta função. Isto sugere que um corpo não pode manter uma atmosfera relativamente grande apenas por atração gravitacional. A figura 6 ainda nos sugere que uma pequena atmosfera de R a r_0 poderia ser mantida. O ponto r_0 é facilmente calculado:

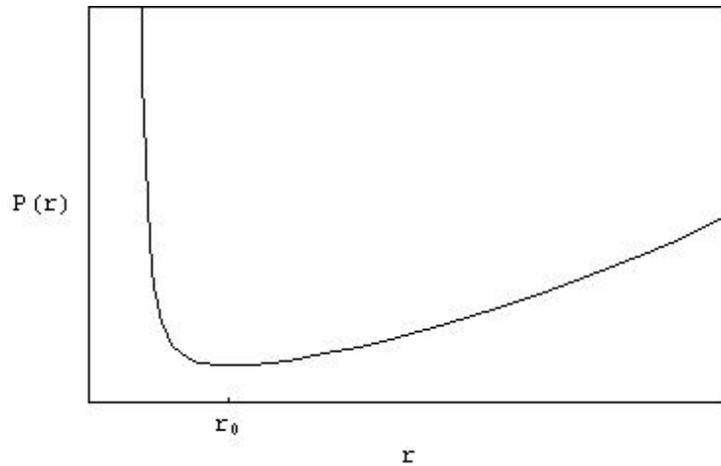


Figura 6: Gráfico da função $r^2 e^{\beta GmM/r}$. Também é mostrada a posição de mínimo r_0 .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (r^2 e^{\beta GmM/r}) &= 0 \Rightarrow \\ r_0 &= \frac{\beta GmM}{2} \end{aligned}$$

Considerando, então, que a atmosfera retida pela estrela é pequena se comparada ao raio desta, podemos supor um campo gravitacional constante, de forma que a energia total da partícula passa a ser:

$$E = \frac{p^2}{2m} + mgh$$

onde $h = r - R$ é a altura da partícula em relação à superfície da estrela. Portanto, a probabilidade de a partícula estar entre \mathbf{r} e $\mathbf{r} + d^3\mathbf{r}$ e com momento linear entre \mathbf{p} e $\mathbf{p} + d^3\mathbf{p}$ é dada por:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} = C e^{-\beta p^2/2m} e^{-\beta mgh} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}$$

Nota-se que, apesar da dependência em r , esta distribuição de probabilidade gera, pelo termo $e^{-\beta p^2/2m}$, a distribuição de velocidades de Maxwell[18]. Para se verificar a dependência desta probabilidade com a massa da estrela, é preciso determinar a constante C . Primeiramente, integra-se a equação acima em p para se obter a probabilidade de a partícula estar entre \mathbf{r} e $\mathbf{r} + d^3\mathbf{r}$, sem restrição de momento:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} &= C e^{-\beta mgh} d^3\mathbf{r} \int_0^\infty e^{-\beta p^2/2m} d^3\mathbf{p} \\ &= \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} C e^{-\beta mgh} d^3\mathbf{r} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Integrando esta equação de R a ∞ e igualando a 1, determinamos C :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} C e^{\beta mgR} \int_R^\infty e^{-\beta mgr} (4\pi r^2) dr &= 1 \Rightarrow \\ C &= \frac{(\beta mg)^3}{4\pi} \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} \frac{1}{2 + \beta mgR(2 + \beta mgR)} \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão para C na equação (5.14) e integrando no ângulo sólido, obtemos a probabilidade de a partícula estar entre r e $r + dr$:

$$P(r) dr = \frac{(\beta mg)^3 e^{-\beta mgh} r^2 dr}{2 + \beta mgR(2 + \beta mgR)} \quad (5.15)$$

O comportamento encontrado para $P(r)$ (dominado por $e^{-\beta mgh}$ para distâncias maiores) justifica *a posteriori* o fato de se realizar a integração em r de R a ∞ , embora se tivesse considerado a atmosfera fina (onde é possível aproximar a energia

potencial por mgh). É possível, agora, encontrar a densidade ρ da atmosfera, através da equação (5.15):

$$\rho = \frac{dm'}{dV} = m \frac{dn}{dV} = mN \frac{P(r) dr}{dV}$$

onde dm' é a quantidade de massa em um volume dV , dn é o número de partículas em um volume dV e N é o número total de partículas da atmosfera, de modo que $mN = M_a$ é a massa total da atmosfera. A densidade encontrada é

$$\rho = \frac{M_a}{4\pi} \frac{(\beta mg)^3 e^{-\beta mgh}}{2 + \beta mgR(2 + \beta mgR)} \quad (5.16)$$

Consideremos, então, que a passagem de partículas da atmosfera para a estrela se dá em uma fina camada ao redor desta, de espessura do livre caminho médio λ das partículas naquele ponto. O livre caminho médio é dado por

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{m}{\sigma\rho}$$

onde n , σ e m são o número de partículas por unidade de volume, sua seção de choque e sua massa, ρ é a densidade da atmosfera e $mn = \rho$. Nessa casca esférica, cujo volume é $4\pi R^2\lambda$, existem $4\pi nR^2\lambda$ partículas ou, equivalentemente, uma massa de $4\pi nmR^2\lambda$. Sendo $\langle v \rangle$ a velocidade média das partículas e $\tau = \lambda / \langle v \rangle$ o tempo médio entre colisões, supomos que a cada período τ , uma fração f da massa na casca esférica entre na estrela. Assim, podemos aproximar:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi nmfR^2\lambda}{\tau} = 4\pi f\rho R^2 \langle v \rangle \quad (5.17)$$

Como primeira aproximação, considera-se f constante, ou independente de M . A velocidade média $\langle v \rangle$, dada pela distribuição de velocidades de Maxwell, também não depende de M . Supondo também que a densidade da estrela é constante (não varia conforme ela perde ou ganha massa), o raio da estrela está relacionado com

sua massa através de $M = (4/3)\pi\rho_e R^3$ (onde ρ_e é a densidade da estrela), portanto $R^2 \propto M^{2/3}$. Isso nos leva a

$$\frac{dM}{dt} = cte \times \rho M^{2/3} \quad (5.18)$$

Para analisarmos a dependência de ρ com a massa M da estrela, por simplicidade, na equação (5.16) vamos considerar $\beta mgR \gg 1$ ($\beta mgR \approx 4,0 \times 10^3$ para o sol). Desta forma, mantemos somente o termo de ordem mais alta $(\beta mgR)^2$ e obtemos

$$\rho = cte \times \frac{M_a g}{R^2} e^{-\beta mgh} \quad (5.19)$$

A massa da atmosfera é $M_a = M_t - M$, onde M_t é a massa total do sistema estrela + atmosfera. A aceleração da gravidade é $g = GM/R^2$, ou seja, $g \propto M^{1/3}$, já que $R^2 \propto M^{2/3}$. Na região de interesse, a casca esférica, temos $h \approx 0$, portanto

$$\rho = cte \times M^{-1/3} (M_t - M) \quad (5.20)$$

Substituindo esta equação em (5.18), finalmente obtemos

$$\frac{dM}{dt} = aM^{1/3} (M_t - M) \quad (5.21)$$

onde a é a constante do modelo.

Esta variação de massa reflete somente a entrada de partículas da atmosfera na estrela. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para se encontrar uma expressão para a perda de massa da estrela. O livre caminho médio obviamente é dado por

$$\lambda = \frac{m}{\sigma\rho_e}$$

e a equação (5.17) continua sendo válida, mas um sinal negativo deve ser acrescentado a um dos lados da igualdade, pois a estrela está perdendo massa. Porém, agora, somente R^2 depende de M , já que $\rho_e = cte$. Ou seja

$$\frac{dM}{dt} = -bM^{2/3}$$

onde $b > 0$ é a constante do modelo. Na presença de ambos efeitos, unimos esta equação à equação (5.21), para obter

$$\frac{dM}{dt} = aM^{1/3} (M_t - M) - bM^{2/3}$$

que nos permite, através de integração numérica, encontrar a dependência temporal da massa $M = M(t)$.

5.5 Transformações

Conforme mostrado no capítulo 2.2, os modelos de variação de massa conhecidos como lei de Mestschersky foram obtidos aplicando-se a transformação (2.9) à equação original e eliminando-se a dependência temporal das funções f e φ da nova equação. Nestes capítulos, este método é aplicado ao PMV, com o objetivo de encontrar transformações que impliquem em um modelo de variação de massa.

Portanto, à equação de movimento do PMV:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{GM}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (5.22)$$

aplicamos a transformação:

$$\mathbf{R} = f(t) \mathbf{r} \quad d\tau = \varphi(t) dt \quad (5.23)$$

que implica que $d/dt = \varphi d/d\tau$. A equação obtida e reorganizada é a seguinte:

$$\mathbf{R}'' + \left(\frac{GMf^3}{\varphi^3} \right) \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \mathbf{R}' \left(\frac{\varphi'}{\varphi} - 2\frac{f'}{f} + \frac{\mu'}{\mu} \right) + \mathbf{R} \left(-\frac{f'\varphi'}{f\varphi} - \frac{f'\mu'}{f\mu} - \frac{f''}{f} + 2\frac{f'^2}{f^2} \right) = 0$$

onde, como anteriormente, o apóstrofo (') indica derivação em relação à nova variável τ .

Em comparação ao problema de Gylden-Mestschersky, onde temos somente a massa total M , aqui aparece também a massa reduzida μ . Devemos impor a condição de que as três quantidades entre parêntesis da equação acima sejam iguais a constantes. No caso de GM, as três condições correspondentes permitiam encontrar as expressões para f , φ e M . No caso do PMV, devido ao grau de liberdade extra, μ , estas condições nos permitem somente definir f , φ e M em função de μ , que continua indefinida, como vemos a seguir.

Se impormos que a quantidade que multiplica \mathbf{R}' seja nula, como feito no caso do problema de Gylden-Mestschersky, obtemos a relação $\varphi = kf^2/\mu$, com k constante. Substituindo esse valor de φ na expressão que multiplica \mathbf{R} e impondo que essa expressão seja igual a uma constante, ω^2 , obteremos exatamente a mesma forma para f obtida para o problema de GM, ou seja, $f = A \cos(\omega\tau - \theta_0)$, com A e θ_0 constantes. Para retornar à variável t , como anteriormente, devemos encontrar $\tau(t)$ a partir de $\tau' = \varphi = kf^2/\mu$. Porém agora, devido à presença de μ , τ fica definida em termos de uma integral envolvendo μ . A última imposição é que Mf^3/φ^2 seja uma constante, o que implica que f é proporcional ao produto $M\mu^2$, ao invés de M simplesmente, como no problema de GM. Explicitamente, temos:

$$M\mu^2 = k_0 f = \frac{k_0}{\sqrt{1 + \left(k_1 + A^2 k \omega \int \frac{dt}{\mu}\right)^2}}$$

sendo k_0 e k_1 constantes. Apesar desta relação ser algebricamente mais complicada, ela nos permite transformar a equação original em uma equação de coeficientes constantes, que pode ser integrada diretamente (se μ estiver definida, obviamente).

É possível, no entanto, redefinir as condições impostas de modo a obter uma relação mais simples algebricamente. Por exemplo, podemos dividir a condição sobre o coeficiente de \mathbf{R}' em duas partes: na primeira, impomos que $\varphi'/\varphi + \mu'/\mu = 0$, de onde segue que:

$$\varphi = \frac{a}{\mu}$$

sendo a uma constante arbitrária. Na segunda parte, nos resta fazer $-2f'/f$ igual a uma constante, digamos $2k$. Desta forma, f também fica definido:

$$f = Ae^{-k\tau}$$

Com f definida da forma acima, a segunda condição, de que o coeficiente de \mathbf{R} seja uma constante fica automaticamente satisfeita, como é facilmente verificado por substituição. A constante que resulta é k^2 .

A terceira condição, sobre o coeficiente de \mathbf{R}/R^3 , implica que

$$M\mu^2 = bf^{-3}$$

onde b é uma constante.

Por fim, a nova variável τ pode ser relacionada com t através da relação $d\tau/dt = \varphi = a/\mu$, ou seja:

$$\tau = \int \frac{adt}{\mu(t)}$$

Este exemplo de transformação assume uma forma particularmente simples quando consideramos o modelo de variação linear para μ baseado na analogia hidrodinâmica, proposto no capítulo 5.1. Consideremos $\mu = \alpha t + \beta$. As três últimas equações nos fornecem:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{a}{\alpha} \ln(\alpha t + \beta) \\ f &= A(\alpha t + \beta)^{-ak/\alpha} \\ M &= B(\alpha t + \beta)^{\frac{3ak}{\alpha} - 2}\end{aligned}$$

onde B é uma combinação das outras constantes. Vemos que M é proporcional a uma certa potência de μ . Essa potência é determinada pelo produto ak de constantes arbitrárias. Um caso especial é quando M é proporcional a μ , o que implica que o centro de massa do sistema é um referencial inercial. Para obter este caso, basta escolhermos $ak = \alpha$.

Portanto, esses resultados indicam que não é possível obter um modelo de variação da massa baseado na transformação (5.23). Podemos encontrar em [19] uma segunda transformação que, por assumir a lei de Jeans, englobam as transformações de Mestschersky. O autor aplica essa transformação ao problema de Gylden Mestschersky. Aplicadando essa nova transformação ao PMV, novamente não podemos encontrar um modelo para a massa (sob algumas circunstâncias, as duas transformações são equivalentes), porém, ela contribui para a análise do problema.

Vamos considerar que a transformação apresente dependência a alguma potência da massa reduzida μ . Definimos como parâmetro adimensional

$$\nu \equiv \mu/\mu_0$$

A transformação que aplicamos à equação (5.22), em termos do parâmetro ν é

$$\mathbf{R} = \nu^q \mathbf{r} \quad d\tau = \nu^k dt \quad (5.24)$$

de modo que temos $d/dt = \nu^k d/d\tau$. Os expoentes q e k devem ser determinados. Novamente, aplicamos a transformação e livramos a equação obtida dos termos dependentes do tempo, igualando-os a constantes. Desta forma, é natural que a massa total vá depender de alguma potência de μ , por isso, de antemão colocamos explicitamente essa dependência:

$$M = M_0 \nu^n$$

A equação obtida também apresenta as primeira e segunda derivadas temporais de μ . Para que o procedimento possa ser aplicado, essas derivadas também devem

dependem de alguma potência de μ . Obviamente, isso restringe as formas possíveis de μ , já que nem toda função tem derivada proporcional a alguma potência dela mesma. De qualquer forma, supomos válida a relação $\dot{\mu} = b_0\mu^m$, que, em termos do parâmetro ν , toma a forma:

$$\dot{\nu} = b\nu^m \quad (5.25)$$

onde definimos $b \equiv b_0\mu_0^{m-1}$, com $\mu_0 = \mu(t=0)$. Quando este método é aplicado ao problema de GM, o papel da equação (5.25) é desempenhado pela lei de Jeans.

Após estas considerações, chegamos à equação final:

$$\begin{aligned} \nu^k \frac{d}{d\tau} \left(\nu^k \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\mathbf{R}}{\nu^q} \right) \right) + GM_0 \nu^n \nu^{2q} \frac{\mathbf{R}}{R^3} + b\nu^{m-1} \nu^k \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\mathbf{R}}{\nu^q} \right) = 0 \Rightarrow \\ \mathbf{R}'' + GM_0 \frac{\mathbf{R}}{R^3} \nu^{3q-2k+n} + b^2 q (q-m) \mathbf{R} \nu^{2(m-k-1)} + \\ b(k-2q+1) \mathbf{R}' \nu^{m-k-1} = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

A dependência temporal nesta equação está contida em ν , portanto, devemos impor que seus expoentes sejam nulos:

$$3q - 2k + n = 0$$

$$m - k - 1 = 0$$

Como anteriormente, temos quatro incógnitas e somente duas equações, ou seja, não é possível determinar todas elas, mas somente expressar duas delas em função das outras duas:

$$q = (2m - n - 2) / 3$$

$$k = m - 1$$

Conclui-se que as transformações (5.24), embora permitam passar a equação (5.22) para uma forma com coeficientes constantes, não permitem a determinação

das constantes q e k de maneira única e não arbitrária. Ou seja, ao contrário do que ocorre no problema de Gylden-Mestschersky, essas transformações não nos fornecem um modelo de variação de massa.

No entanto, é possível acrescentar algumas imposições mais específicas que determinem os quatro expoentes. Consideremos o caso em que μ varie linearmente. Isto corresponde a $m = 0$. Consideremos também, que o centro de massa seja um referencial inercial. Devemos, então, ter $M \propto \mu$, ou seja, $n = 1$. Desses valores, segue que $q = k = -1$. A equação (5.26) torna-se:

$$\mathbf{R}'' + GM_0 \frac{\mathbf{R}}{R^3} + b^2 \mathbf{R} + 2b\mathbf{R}' = 0$$

De qualquer forma, esta equação possui coeficientes constantes e pode ser integrada de forma elementar.

Também podemos determinar sob quais circunstâncias temos a solução clássica (seção cônica), mesmo as massas sendo variáveis. Voltando à equação (5.26), vemos que essas circunstâncias são:

$$\begin{aligned} 3q - 2k + n &= 0 \\ q &= 0 \\ k - 2q + 1 &= 0 \end{aligned} \tag{5.27}$$

sendo que a primeira delas elimina a dependência temporal da massa no segundo termo de (5.26), a segunda elimina o terceiro termo e a terceira elimina o quarto termo. Explicitamente, temos $n = -2$, $q = 0$ e $k = -1$. Tendo $q = 0$, as coordenadas espaciais não são afetadas pela transformação, $\mathbf{R} = \mathbf{r}$. O fato de termos $n = -2$ implica que a massa total é inversamente proporcional à segunda potência da massa reduzida, ou ainda, $M\mu^2 = \text{constante}$. Em outras palavras, sempre que o produto $M\mu^2$ for constante no tempo, a solução do PMV é uma seção cônica, como sugere a equação (4.23). Nota-se que esta afirmação é válida independentemente do comportamento temporal de μ , já que o expoente m não está presente nas três equações (5.27).

Por fim, após esta discussão, podemos ver que o PMV sempre pode ser reduzido ao problema de um corpo de massa constante sujeito a uma atração gravitacional, além de uma força de atrito e outra proporcional à distância do corpo ao centro de atração. Essas duas forças são pequenas em relação à força gravitacional, já que são proporcionais a b e b^2 , respectivamente (a condição $b \ll 1$ reflete o fato de que a massa não varia muito rapidamente). Por isso, elas causam uma perturbação na seção cônica, esta proveniente do termo gravitacional dominante.

5.6 Galáxias

Os resultados e modelos vistos até aqui são aplicáveis, obviamente, ao PMV. Ou seja, embora se tenha citado somente estrelas até aqui, também estão incluídos quaisquer problemas gravitacionais de dois corpos em uma atmosfera (foi assumido implicitamente que esses corpos devem ser esféricos, ao menos aproximadamente). Sendo assim, podemos incluir também galáxias esféricas e aglomerados globulares, desde que envoltos por uma atmosfera.

Consideremos então o PMV onde temos um par de galáxias de massas variáveis (ou ainda um par de aglomerados globulares) em uma atmosfera. Novamente, a equação de movimento do problema é a equação (4.18):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} - \frac{d}{dt}(\ln \mu)\dot{\mathbf{r}}$$

Para a evolução temporal de μ , podemos utilizar a variação linear, dada pela equação (5.1), ou alternativamente outro modelo do capítulo 5.1.

Quando se realiza a mudança de coordenadas $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{R})$ o movimento é associado ao corpo de massa μ , enquanto o corpo de massa M se encontra em repouso, na origem. Desta forma, relacionamos a variação temporal da massa total M com a variação de uma massa em repouso em uma atmosfera também estática (macroscopicamente). Um exemplo de um modelo para tal variação é o apresentado no capítulo 5.4. Enquanto lá se considerou que a estrela tinha densidade constante,

aqui consideramos uma densidade mais próxima da encontrada nas galáxias esféricas e aglomerados globulares.

Galáxias esféricas e aglomerados globulares podem ser bem representados pelo *potencial de Plummer* [1], que é dado por

$$\Phi_P = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}$$

que gera a seguinte densidade (calculado via equação de Poisson):

$$\rho_P(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)^{-5/2} \quad (5.28)$$

onde o parâmetro b é um fator de escala que dá a dimensão da galáxia, delimitando o núcleo da galáxia, como mostra a figura 7.

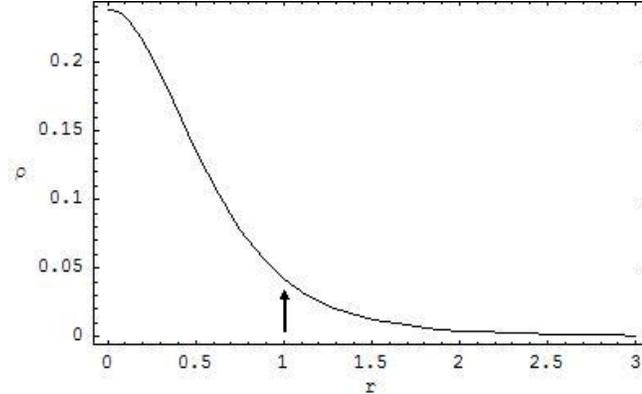


Figura 7: Densidade $\rho(r)$ do modelo de Plummer, equação (5.28). Foram utilizados $M = 1$ e $b = 1$. Nota-se que o raio $r = b = 1$ delimita o núcleo (região mais densa) da galáxia, na posição indicada pela seta.

Segundo a equação (5.17), a taxa de variação da massa M é proporcional a R^2 (onde R é o raio do objeto) e também é proporcional à densidade ρ da atmosfera que o envolve, tomada na superfície da galáxia:

$$\frac{dM}{dt} = cte \times \rho R^2 \quad (5.29)$$

Para o raio R da galáxia, podemos tomar o raio que envolve uma determinada porcentagem dela. Usualmente utiliza-se o raio que envolve metade da massa da galáxia, que no modelo de Plummer corresponde a $r_h = (1 + 2^{1/3}) b/\sqrt{3}$, porém aqui não é necessário se definir este raio. Notamos apenas que o raio R é proporcional ao parâmetro b , ou seja, se o raio da galáxia varia com a massa, o parâmetro b também deve depender da massa, $b = b(M)$.

A expressão para ρ_P não pode determinar sozinha a variação de R (ou b) com M , sendo necessária mais uma hipótese. Por simplicidade, assumimos que a evolução da galáxia se dá de maneira auto-similar, a galáxia não muda de forma conforme M e R variam. Para isso, impomos que a densidade central seja proporcional ao raio da galáxia, durante o processo de expansão ou redução. Daí, concluímos que $R \propto b \propto M^{1/4}$. A figura 8 mostra a densidade de uma galáxia que varia segundo esta hipótese.

A equação (5.19) nos dá a dependência de ρ com a massa: $\rho \propto g/R^2$. Como g é proporcional à razão M/R^2 , obtemos $\rho \propto M/R^4$. Sendo $R \propto M^{1/4}$, concluímos que ρ independe da massa M .

Voltando à equação (5.29), finalmente obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= cte \times M^{1/2} \Rightarrow \\ M(t) &= (at + b)^2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde a_1 e a_2 são constantes. A figura 9 mostra um exemplo de órbita calculada através desta equação e utilizando-se o modelo linear para $\mu(t)$. Como nos exemplos anteriores, a órbita é uma espiral em direção ao centro.

Desta forma, conclui-se este método simples que permite verificar a ocorrência ou não de merger (união) entre galáxias. Como visto nas órbitas simuladas neste trabalho, os corpos no PMV se movem em espirais, se aproximando cada vez mais

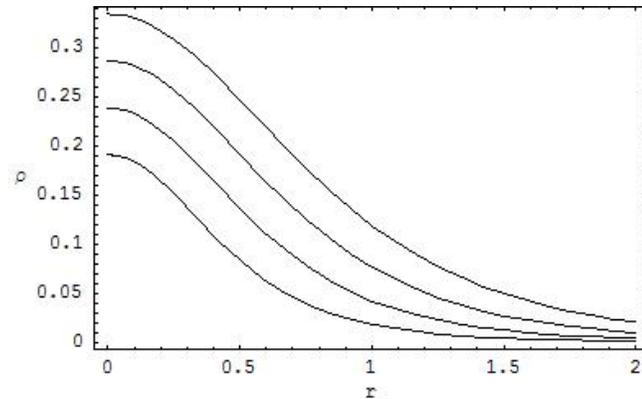


Figura 8: Densidade $\rho(r)$ do modelo de Plummer para uma galáxia que se desenvolve de maneira auto-similar, segundo $R \propto b \propto M^{1/4}$. Os valores da parâmetro b são, da curva inferior à superior, 0.8, 1, 1.2 e 1.4. As massas são, respectivamente, 0.4, 1.0, 2.1 e 3.8, aproximadamente.

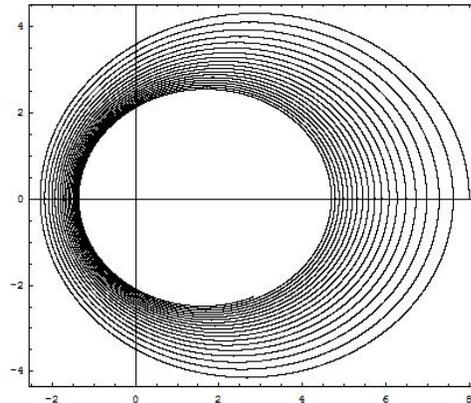


Figura 9: Simulação de órbita no plano (x, y) para duas galáxias calculada através da equação (5.1) (modelo linear) para $\mu(t)$ e da equação (5.30) para $M(t)$. Parâmetros utilizados: $\gamma = 5 \times 10^{-4}$, $\mu_0 = 1$, $a_1 = 2.1$, $a_2 = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 4$.

(obviamente, se assim permitirem as condições iniciais do problema). Assim, o merger ocorre se a órbita é uma espiral, como as mostradas aqui (o que corresponde à solução elíptica do problema de Kepler) e não ocorre caso a órbita leve uma galáxia a uma grande distância da outra (o que corresponde às soluções parabólica

e hiperbólicas do problema de Kepler). Neste último caso, ocorre apenas a deflexão mútua entre as galáxias. Portanto, se utilizarmos o modelo linear para $\mu(t)$ (equação (5.1)) e a equação (5.30) para a massa total $M(t)$, além das condições iniciais, o merger está condicionado aos valores dos parâmetros γ , μ_0 , a_1 e a_2 destes modelos.

6 O problema de três corpos

O problema de dois corpos é o único em que se pode desacoplar as equações de movimento e resolver o problema analiticamente, ao menos para certos potenciais proporcionais a algumas potências da distância entre os corpos [13]. Para três ou mais corpos já não é possível encontrar soluções gerais analiticamente. Neste caso, pode-se fazer uso de integrações numéricas ou procurar por soluções analíticas com alta simetria (com hipóteses simplificadoras).

6.1 Massas constantes

Consideremos o problema de três corpos de massa constante, identificados pelos sub-índices 1, 2 e 3, sujeitos somente às forças de atração gravitacional mútuas. Consideremos como referencial o centro de massa do sistema. A equação de movimento para o corpo 1 é:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}$$

com equações análogas para os outros dois corpos.

Se definirmos coordenadas relativas entre cada par de corpos:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$$

podemos reescrever as equações de movimento de uma forma que facilita a visualização das soluções simétricas. Do modo que são definidos, os vetores \mathbf{s}_i satisfazem a relação

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = 0 \tag{6.1}$$

Em termos dessas novas coordenadas relativas, equações se tornam, após algumas manipulações algébricas:

$$\ddot{\mathbf{s}}_i = -GM \frac{\mathbf{s}_i}{s_i^3} + m_i \mathbf{G} \quad (6.2)$$

onde M é a massa total e \mathbf{G} é definido como:

$$\mathbf{G} = G \left(\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} + \frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \right)$$

Existe a solução colinear, encontrada por Euler. Os vetores \mathbf{r}_i , e conseqüentemente os \mathbf{s}_i e \mathbf{G} são todos colineares. Nesta solução, os corpos se movem em elipses, de modo que as órbitas têm os mesmos períodos e a qualquer instante t os três corpos estão em linha reta. Consideremos, sem perda de generalidade, que m_2 está entre as outras duas massas. Para satisfazer a equação (6.1), devemos ter:

$$\mathbf{s}_1 = \lambda \mathbf{s}_3 \quad \mathbf{s}_2 = -(1 + \lambda) \mathbf{s}_3$$

Se substituirmos esses valores na equação (6.2) para $i = 3$, obteremos

$$\ddot{\mathbf{s}}_3 = -\Lambda GM \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3}$$

sendo Λ uma constante determinada. Para as outras duas massas, temos soluções análogas. Isso implica no movimento elíptico. Na verdade, o valor de λ não é arbitrário [20]. Impondo que ele satisfaça as três equações (6.2), constatamos que λ deve satisfazer uma equação do quinto grau envolvendo as massas do problema, que possui somente uma solução real. Portanto, para cada problema existe apenas uma solução. Levando em conta que as três massas podem ser a massa central, concluímos que existem três soluções colineares.

Outra solução é a chamada solução triangular. Notamos que o vetor \mathbf{G} , caso os r_i não sejam colineares é nulo se os s_i formam um triângulo equilátero. Podemos constatar isso, utilizando a definição de \mathbf{G} e a equação (6.1) para obter:

$$\mathbf{s}_2 \left(\frac{1}{s_2^3} - \frac{1}{s_1^3} \right) + \mathbf{s}_3 \left(\frac{1}{s_3^3} - \frac{1}{s_1^3} \right) = \mathbf{0}$$

que é satisfeita se os três \mathbf{s}_i têm mesmo módulo. Nesta solução, os corpos estão nos vértices do triângulo que muda de tamanho e orientação, de modo que os três corpos se movam também em elipses, com o mesmo foco. Isto é visto através de (6.2), com $\mathbf{G} = 0$.

6.2 Problema restrito de três corpos

O problema restrito de três corpos é uma versão simplificada do problema geral, em que uma das massas é muito menor que as outras (uma partícula), de modo que não afeta seu movimento. O problema é reduzido, então, ao problema de se determinar o movimento desta partícula no potencial gerado pelas outras massas, cujo movimento relativo é conhecido de antemão.

Para tal, é conveniente usar um sistema de coordenadas que gira com os dois corpos. Obviamente, este não é um referencial inercial, mas é possível determinar a forma das equações de Newton neste novo referencial.

Consideremos os referenciais S' , inercial, e S , não inercial, que estão relacionados através de $\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r}$, como mostra a figura 10. O referencial S pode se mover de maneira arbitrária, inclusive girar ao redor de um eixo.

A equação que relaciona um vetor \mathbf{Q} medido no referencial S com o mesmo vetor medido no referencial S' é [13]:

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_{S'} = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q} \quad (6.3)$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular com que o referencial S está girando (não é necessariamente constante).

A relação entre as derivadas temporais de \mathbf{r} e \mathbf{r}' é:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{S'} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{S'} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{S'}$$

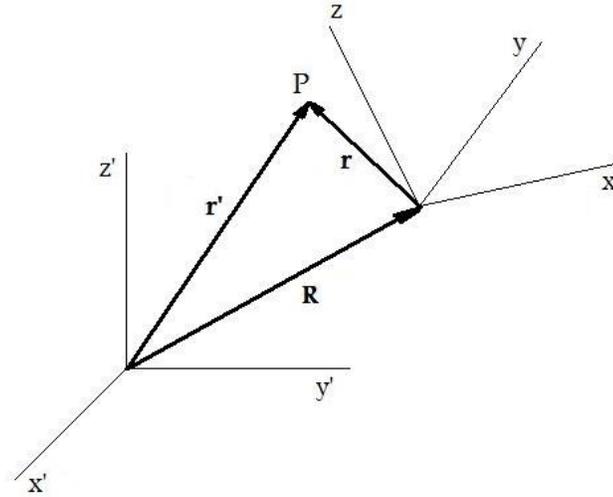


Figura 10: Relação entre o sistema inercial S e o não inercial S' , que se move arbitrariamente em relação ao primeiro, inclusive girando ao redor de um eixo instantâneo.

e este último termo pode ser calculado pela equação (6.3), de forma que teremos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{S'} &= \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{S'} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{ou} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{V} + \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde \mathbf{v}' é a velocidade do ponto P e \mathbf{V} é a velocidade da origem de S , ambos medidos em S' e \mathbf{v} é a velocidade medida em S .

Para a aceleração, usamos novamente a equação (6.3), agora em \mathbf{v}' . Omitimos aqui os detalhes dos cálculos, encontrados em [13], que vão resultar em:

$$\mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{a} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (6.5)$$

onde \mathbf{a}' e $\ddot{\mathbf{R}}$ são a aceleração do ponto P e da origem de S , medidos em S' e \mathbf{a} é a aceleração do ponto P medida em S . Multiplicando esta equação pela massa m

da partícula, obtemos a força sobre ela, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}'$. Assim é possível definir a força efetiva medida em S como $\mathbf{F}_{ef} \equiv m\mathbf{a}$, ou seja:

$$\mathbf{F}_{ef} = m\mathbf{a} = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (6.6)$$

O penúltimo termo do lado direito é a força centrífuga e o último é a força de Coriolis.

Estamos agora em condição de escrever a equação para o movimento da partícula neste sistema que gira com os dois corpos. Passamos do referencial inercial que é o centro de massa para o referencial que gira. Como o movimento se dá num plano, escolhemos a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ na direção z , deixando o movimento no plano xy . Por simplicidade, consideremos o movimento circular, que nos garante que $\boldsymbol{\omega}$ é constante: $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{z}$. Também coloquemos o eixo x ao longo da linha que une o centro dos dois corpos.

Podemos calcular cada elemento de (6.6), em coordenadas cartesianas. O vetor $\ddot{\mathbf{R}}$ é nulo, já que escolhemos o centro de massa como origem do referencial que gira. Decompondo a equação nas componentes x e y , obtemos o sistema de equações que o movimento da partícula deve satisfazer:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= -\partial_x\Phi + \omega^2x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= -\partial_y\Phi + \omega^2y \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde o potencial Φ , como pode ser visto na figura 11, é dado por

$$\Phi = -\frac{Gm_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}}$$

As massas m_1 e m_2 devem estar nas posições $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ que permitam que o centro de massa esteja localizado na origem. É necessário que

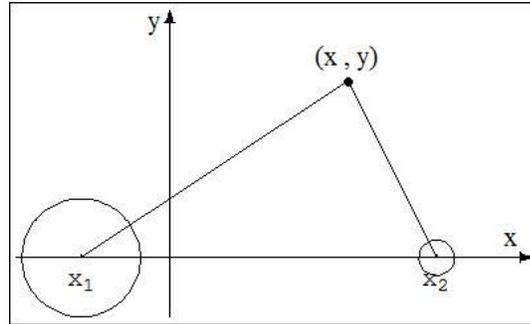


Figura 11: As massas m_1 e m_2 estão localizadas em $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, respectivamente, no sistema que gira com os corpos.

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1} x_2$$

além de que $l = x_2 - x_1$ é a distância entre elas. O movimento circular ainda deve satisfazer a relação $\omega^2 l^3 = GM$. Agora são escolhidas unidades de medida que facilitem os cálculos. Tomemos unidades de comprimento, massa e tempo tais que $l = 1$, $\omega = 1$ e $M = 1$. Definimos também o parâmetro $\nu \equiv m_2/M$ (sem perda de generalidade, escolhemos $m_2 < m_1$, de modo que $0 < \nu < 1/2$). Nestas novas unidades, as massas dos dois corpos e suas posições são dadas por:

$$m_1 = 1 - \nu \qquad m_2 = \nu$$

$$x_1 = -\nu \qquad x_2 = 1 - \nu$$

Vamos procurar soluções estacionárias para as equações (6.7). Fazemos as derivadas temporais de x e y serem nulas. Nas novas unidades, as equações (6.7) ficam:

$$x - \frac{1 - \nu}{\rho_1^3} (x + \nu) - \frac{\nu}{\rho_2^3} (x + \nu - 1) = 0$$

$$y \left(1 - \frac{1 - \nu}{\rho_1^3} - \frac{\nu}{\rho_2^3} \right) = 0 \qquad (6.8)$$

onde:

$$\rho_1 = \sqrt{(x + \nu)^2 + y^2} \quad \rho_2 = \sqrt{(x + \nu - 1)^2 + y^2}$$

A segunda equação (6.8) é satisfeita se a quantidade entre parêntesis é nula. Neste último caso, reescrevemos a primeira equação de forma que esta quantidade apareça explicitamente:

$$x \left(1 - \frac{1 - \nu}{\rho_1^3} - \frac{\nu}{\rho_2^3} \right) + \nu(1 - \nu) \left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3} \right) = 0 \quad (6.9)$$

de onde concluímos que devemos ter $\rho_1 = \rho_2$. Utilizando as definições de ρ_1 e ρ_2 , chegamos a

$$x + \nu = \frac{1}{2} \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6.10)$$

ou seja, as três massas formam um triângulo equilátero, como no caso visto anteriormente.

Outra opção para a segunda equação (6.8) é que $y = 0$. Isso muda a primeira equação para a forma:

$$x = \frac{x + \nu}{|x + \nu|^3} (1 - \nu) + \frac{x + \nu - 1}{|x + \nu - 1|^3} \nu \quad (6.11)$$

que possui três raízes reais (no intervalo válido $0 < \nu < 1/2$), como mostra a figura 12. Estas três raízes correspondem às soluções colineares obtidas anteriormente.

Assim, concluímos que as soluções colineares e triangulares no problema de três corpos também estão presentes no problema restrito.

Se, ao invés de circular, se considera o problema elíptico, as mesmas soluções estão presentes. Isso é verificado em [21].

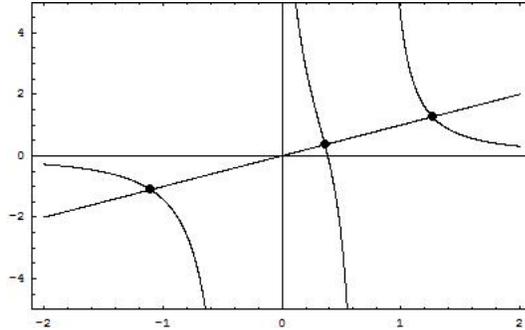


Figura 12: Soluções da equação (6.11), indicadas pelos pontos de cruzamento entre as funções do lado esquerdo e do direito de (6.11).

6.3 Pontos de Lagrange

Neste capítulo, continuamos analisando o problema restrito circular do capítulo anterior. Como os corpos apresentam um movimento circular, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{z}$ é constante, conforme dito antes. Nesta condição, a equação (6.6) passa a ser:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\nabla\Phi - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (6.12)$$

onde, claramente $\mathbf{F} = -m\nabla\Phi$.

Realizemos o produto escalar desta equação com $\dot{\mathbf{r}}$. O segundo termo do lado direito da equação vai se anular com o produto escalar. Os demais termos geram:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{r}^2) = -\frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2$$

que pode ser escrita somente como:

$$\frac{dE_J}{dt} = 0 \quad (6.13)$$

desde que definamos a *integral de Jacobi* [1] como:

$$E_J \equiv \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + m\Phi - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2$$

A integral de Jacobi é uma integral do movimento no referencial que gira. Neste referencial nem a energia total nem o momento angular total são constantes. Notamos que em E_J os dois primeiros termos seriam a “energia” no referencial que gira, enquanto $\frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2$ seria uma “energia potencial” devido à força centrífuga. Isso nos encoraja a definir um potencial efetivo

$$\Phi_{ef} \equiv \Phi - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2 \quad (6.14)$$

de modo que a equação (6.12) se torna:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\nabla\Phi_{ef} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (6.15)$$

e também nos permite escrever a integral de Jacobi como:

$$E_J = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + m\Phi_{ef}$$

Com esta equação, podemos definir as regiões proibidas para a partículas, dadas por $E_J < m\Phi$. A figura 13 mostra as curvas de nível do potencial Φ_{ef} . Estas estão caracterizadas por cinco pontos estacionários, chamados *pontos de Lagrange*, denotados por L_1 a L_5 . Nestes pontos, tanto $\partial_x\Phi_{ef}$ quanto $\partial_y\Phi_{ef}$ se anulam [1]. Uma partícula posicionada em um destes pontos permanece estacionária no referencial que gira, e acompanha o movimento dos dois corpos de massa maior. As três soluções colineares e as duas triangulares do problema de três corpos mencionadas no capítulo 6.2 correspondem, respectivamente, à partícula nos pontos L_1 - L_3 e L_4 - L_5 .

Os pontos colineares de Lagrange L_1 - L_3 são pontos de sela (mínimos do potencial na direção x , mas decrescem na direção y), enquanto os pontos L_4 e L_5 são pontos de máximo [22]. Enquanto os pontos colineares são instáveis, os pontos triangulares

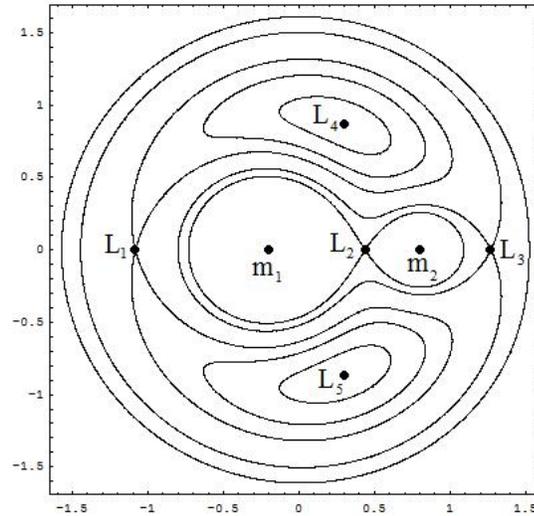


Figura 13: Curvas de nível para o potencial efetivo (6.14). Foram utilizadas as unidades de medida do capítulo 6.2, com parâmetro $\nu = 0,2$

podem ser estáveis, mesmo sendo pontos de máximo. Podemos ter uma noção de como isso ocorre, se observarmos na equação (6.15) que a força de Coriolis não está incluída no potencial efetivo. Portanto, se a partícula está em L_4 por exemplo, e começa a se afastar, o aumento de sua velocidade aumenta também a força de Coriolis que deflete a partícula para a direita (enquanto o movimento dos corpos é para a esquerda) e essa deflexão pode fazer a partícula voltar para o ponto L_4 , onde o ciclo recomeça. A condição para que isto ocorra é que $\frac{m_1 - m_2}{M} > \sqrt{\frac{23}{27}}$, o que é verdade para os sistemas Sol-Júpiter e Terra-Lua [20].

6.4 Problema de três corpos de massa variável

Analisamos neste capítulo o problema de três corpos onde as massas variáveis obedecem às mesmas condições do PMV. Também vamos nos restringir ao caso em que as massas variam segundo a mesma lei, de forma que a qualquer instante elas mantenham a mesma proporção entre si. Esta hipótese nos garante que o centro de massa é um referencial inercial, conforme a equação (4.11). Vamos procurar soluções

especiais equivalentes às obtidas no capítulo 6.1. As equações de movimento são:

$$\frac{d}{dt}(m_1 \dot{\mathbf{r}}_1) = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_1 m_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}$$

novamente com soluções análogas para as outras massas. Se realizarmos exatamente as mesmas manipulações utilizadas no capítulo 6.1, com as mesmas definições de \mathbf{G} e \mathbf{s}_i , obtemos as seguintes equações

$$\ddot{\mathbf{s}}_i + \left(\frac{\dot{m}_j}{m_j} \dot{\mathbf{s}}_j - \frac{\dot{m}_k}{m_k} \dot{\mathbf{s}}_k \right) = -GM \frac{\mathbf{s}_i}{s_i^3} + m_i \mathbf{G}$$

O termo entre parêntesis, a princípio, impede a existência das soluções que procuramos. No entanto, segundo a hipótese da proporcionalidade das massas, $\dot{m}_i/m_i = \dot{m}_j/m_j = \dot{m}_k/m_k$ e o termo entre parêntesis se reduz a $\frac{\dot{m}_i}{m_i} \dot{\mathbf{s}}_i$, nos deixando com a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{s}}_i) = -GM m_i \frac{\mathbf{s}_i}{s_i^3} + m_i^2 \mathbf{G}$$

Agora o paralelismo com o caso de massas constantes foi reestabelecido. Pelos mesmos argumentos dados no capítulo 6.1, é possível concluir a existência das três soluções colineares e das duas triangulares. No entanto, no primeiro caso as massas mantinham um movimento em elipse. Aqui o movimento é dado pelo PMV, dado nos capítulos 4.4 e 5.

6.5 Problema restrito de massas variáveis

Consideramos o problema de três corpos de massa variável, onde uma delas é muito menor que as outras. O desenvolvimento seguido aqui é o mesmo encontrado em [23]. Neste trabalho, o autor encontra, para o problema de Gylden-Mestschersky, as soluções estacionárias presentes no problema de massas constantes. Aqui, procedemos da mesma maneira que anteriormente, passando o problema para o sistema

de coordenadas que gira com os dois corpos mais massivos. Necessitamos de uma expressão nesse sistema para $\mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{p}'}{dt}\right)_{S'}$, onde \mathbf{p}' é o momento da partícula medido no referencial inercial. Esta expressão é

$$\mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{p}'}{dt}\right)_{S'} = \dot{m}\mathbf{v}' + m \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{S'} \quad (6.16)$$

com a mesma notação usada no capítulo 6.2. O termo $\left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{S'}$ é calculado através de (6.3). Como anteriormente, omitimos os cálculos, que são os mesmos. Definimos a força efetiva medida em S como $\mathbf{F}_{ef} = \dot{\mathbf{p}}$, onde \mathbf{p} é o momento medido em S . Da equação (6.16) segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ef} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} - \dot{m}\mathbf{V} - m\ddot{\mathbf{R}} - \dot{m}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \\ - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde \mathbf{V} e $\ddot{\mathbf{R}}$ são a velocidade e aceleração da origem de S .

Agora, os dois corpos giram conforme o PMV, portanto, ao contrário do que ocorreu anteriormente, a distância entre eles não é constante, nem é constante a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Conforme dito no capítulo 4.4, o movimento relativo no PMV é dado por (4.17), que reescrevemos aqui na forma mais conveniente no momento:

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) = \frac{k^2}{\mu r^3} - \frac{GM\mu}{r^2} \quad (6.18)$$

com $\dot{\theta} = \omega = k/\mu r^2$.

Não conhecemos solução analítica para o PMV, porém supomos que a distância entre os corpos a todo instante é dada por $r = r_0 R(t)$. Fazamos também a hipótese de que as massa dos corpos são proporcionais a todo instante. Como já dito, isso nos garante o movimento inercial do centro de massa e a proporcionalidade também como a massa reduzida e a massa total, de forma que podemos escrever: $\mu = \mu_0 u(t)$, $M = M_0 u(t)$, $m_1 = m_{10} u(t)$ e $m_2 = m_{20} u(t)$.

Passamos novamente para o referencial que gira com os corpos e cuja origem é o centro de massa do sistema. Assim como antes, os corpos estão sobre o eixo x , mas agora suas posições x_1 e x_2 não são mais fixas. A partir de (6.17), obtemos as equações para x e y :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= F_x + \dot{m}\omega y + 2m\omega\dot{y} + m\dot{\omega}y + m\omega^2x \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= F_y - \dot{m}\omega x - 2m\omega\dot{x} - m\dot{\omega}x + m\omega^2y\end{aligned}$$

onde F_x e F_y são as componentes x e y da força \mathbf{F} .

São escolhidas unidades de medida tais que $r_0 = 1$ e $M_0 = 1$. Para a unidade de tempo, escolhemos $\omega_0 = 1$, que é definido através de $\omega = k/\mu r^2 = k/\mu_0 u r_0^2 R^2 \equiv \omega_0/uR^2$.

Para que o centro de massa esteja na origem, novamente x_1 e x_2 devem satisfazer:

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1}x_2 = -\frac{m_{20}}{m_{10}}x_2 \quad (6.19)$$

além de que a distância entre os corpos agora é $x_2 - x_1 = R(t)$. Estas duas condições, juntamente com a definição de $\nu \equiv m_{20}/M_0 = m_{20}$ (e $m_{10} = 1 - \nu$, por consequência), nos fornece:

$$\begin{aligned}x_1 &= -\nu R(t) \equiv x_{10}R(t) \\ x_2 &= (1 - \nu) R(t) \equiv x_{20}R(t)\end{aligned}$$

Antes de escrever as equações para x e y , incluímos mais uma hipótese, a de que a massa da partícula também é proporcional às outras massas: $m = m_0 u(t)$. Desta forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(u\dot{x}) &= -\frac{Gu^2}{r_1^3}(1-\nu)(x+\nu R) - \frac{Gu^2}{r_2^3}\nu(x-(1-\nu)R) + \\
&\quad + \frac{2\dot{y}}{R^2} - \frac{2y\dot{R}}{R^3} + \frac{x}{uR^4} \\
\frac{d}{dt}(u\dot{y}) &= -\frac{Gu^2}{r_1^3}(1-\nu)y - \frac{Gu^2}{r_2^3}\nu y - \frac{2\dot{x}}{R^2} + \frac{2y\dot{R}}{R^3} + \frac{y}{uR^4}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

com $r_1 = \sqrt{(x+\nu R)^2 + y^2}$ e $r_2 = \sqrt{(x-(1-\nu)R)^2 + y^2}$.

Procuramos, como antes, por soluções estacionárias. Ou seja, buscamos soluções do tipo $x = \xi R(t)$ e $y = \eta R(t)$, sendo ξ e η constantes. Substituindo estes valores nas duas equações (6.20):

$$\begin{aligned}
\xi \frac{d}{dt}(u\dot{R}) &= -\frac{Gu^2(1-\nu)(\xi+\nu)}{R^2 \rho_1^3} - \frac{Gu^2\nu(\xi+\nu-1)}{R^2 \rho_2^3} + \frac{\xi}{uR^3} \\
\eta \frac{d}{dt}(u\dot{R}) &= -\frac{Gu^2(1-\nu)\eta}{R^2 \rho_1^3} - \frac{Gu^2\nu\eta}{R^2 \rho_2^3} + \frac{\eta}{uR^3}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

onde temos, agora, $\rho_1 = \sqrt{(\xi+\nu)^2 + \eta^2}$ e $\rho_2 = \sqrt{(\xi+\nu-1)^2 + \eta^2}$.

Finalmente, o valor de $\partial_t(u\dot{R})$ que aparece nas equações (6.21) pode ser calculado a partir de (6.18), fazendo as substituições $r = R$, $\mu = \mu_0 u$, $M = u$ e $k/\mu_0 = \omega_0 = 1$. O resultado:

$$\frac{d}{dt}(u\dot{R}) = \frac{1}{uR^3} - \frac{Gu^2}{R^2}$$

nos permite escrever (6.21) como:

$$\begin{aligned}
\left(\xi - \frac{(1-\nu)(\xi+\nu)}{\rho_1^3} - \frac{\nu(\xi+\nu-1)}{\rho_2^3}\right) \frac{Gu^2}{R^2} &= 0 \\
\eta \left(1 - \frac{1-\nu}{\rho_1^3} - \frac{\nu}{\rho_2^3}\right) \frac{Gu^2}{R^2} &= 0
\end{aligned}$$

Estas equações, se divididas por $\frac{Gu^2}{R^2}$ resultam exatamente nas equações obtidas para o caso circular de massas constantes, com ξ e η no lugar de x e y . Portanto,

conclui-se que as soluções encontradas naquelas circunstâncias também estão presentes aqui. Enquanto os dois corpos mais massivos prosseguem em seu movimento determinado pelo PMV, a partícula pode se manter nas soluções triangulares ou colineares. Deve-se ressaltar novamente a condição para que isso ocorra: todas as massas devem manter as mesmas razões entre si, inclusive a massa da partícula.

7 Conclusão

O estudo do PMV mostrou que o centro de massa dos dois corpos envolvidos não executa, em geral, um movimento inercial. Porém, é possível determinar esse movimento, uma vez conhecido o movimento relativo dos corpos, $\mathbf{r}(t)$. Esta relação entre as coordenadas absolutas do centro de massa e as coordenadas relativas dos corpos permitiu que se desacoplassem as equações de movimento e, então, a equação para $\mathbf{r}(t)$ foi determinada. A solução desta equação pode ser determinada somente em termos de integrais das massas total e reduzida. A partir desta solução, concluiu-se que a excentricidade das órbitas no PMV não é constante no tempo, ao contrário do que ocorre, segundo Jeans [6], no problema de Gylden-Mestschersky.

O modelo de variação de massa proposto baseado na lei de Stokes (modelo linear) através da analogia hidrodinâmica é reforçado pelo conceito de massa virtual, que provém do atrito entre o corpo e o fluido que o envolve. Além disso, é possível passar de um sistema de massa constante e força de atrito presente para um sistema de massa variável, através da definição conveniente da nova massa, o que mostra mais uma vez uma relação entre esses dois fenômenos. Dois dos outros modelos propostos (o que considera o efeito da variação do raio do corpo e o que é baseado na lei de Oseen) podem ser considerados um refinamento do modelo linear. O modelo que considera a força de atrito proporcional ao quadrado da velocidade também apresenta comportamento não muito diferente dos outros. Em todos os casos vistos, segundo esses modelos, os corpos descrevem órbitas em espiral em direção um ao outro, como se espera, já que suas massas aumentam com o tempo. Estes modelos, porém, só determinam o comportamento da massa reduzida. Para se determinar completamente a solução, é necessário um modelo para a massa total, o que foi feito através de abordagem microscópica.

Pelo estudo das transformações espaciais e temporais da equação de movimento, abordadas de diferentes maneiras, concluiu-se que não estão presentes no PMV leis de variação de massa correspondentes às leis de Mestschersky no problema de Gylden-Mestschersky, ou seja, que permitam que o problema seja diretamente integrado, ao menos numericamente. Embora tais leis não tenham sido encontradas,

as transformações foram bem-sucedidas em passar o problema para a forma diretamente integrável, onde a massa é constante e estão presentes uma força de atrito e uma força proporcional à distância entre os corpos. Como a equação transformada possui todos os coeficientes constantes, o cálculo numérico de suas soluções é mais simples.

No tratamento do PMV envolvendo duas galáxias, foi utilizado o modelo linear para a variação temporal da massa reduzida. Para a massa total, foi utilizado o modelo baseado na abordagem microscópica aplicada a uma esfera de Plummer cuja evolução temporal se dá de maneira auto-similar. Através das condições iniciais e dos parâmetros μ_0 , γ , a e b dos modelos, pode-se determinar a ocorrência ou não do merger entre as galáxias, o que se faz por meio da órbita determinada por esses parâmetros.

Finalmente, quanto às três soluções estacionárias colineares e às duas triangulares presentes no problema de três corpos de massas constantes (tanto o geral quanto o restrito), foram encontradas soluções equivalentes para o caso em que o movimento dos corpos obedece as equações do PMV (novamente, nos casos geral e restrito). No trabalho [23], foram encontradas soluções adicionais que não estão presentes no problema de massas constantes. Estas soluções não são procuradas para o PMV neste trabalho, porém, à primeira vista, parecem não estar presentes. No entanto, uma investigação mais profunda é necessária.

Referências

- [1] Binney, J.; Tremaine, S. “Galactic Dynamics”, Princeton U. P., 1994
- [2] Gylden, H. 1884, “Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind”, *Astron. Nachr.* **109**, 1
- [3] Mestschersky, F. 1893, “Ein Specialfall des Gyldén’schen Problems”, *Astron. Nachr.* **132**, 129
- [4] Razbitnaya, E. P. 1985, “The problem of two bodies with variable mass: classification of different cases”, *Sov. Astron.* **29**, 684
- [5] Mestschersky, F. 1902, “Ueber die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse”, *Astron. Nachr.* **159**, 229
- [6] Jeans, J. H. 1924, “Cosmogonic Problems associated with a Secular Decrease of Mass”, *MNRAS* **85**, 2
- [7] Luk’yanov, L. G. 2005, “Conservative Two-Body Problem with Variable Masses”, *AL* **31**, 563
- [8] Lopez, G. 2007, “Constant of Motion, Lagrangian and Hamiltonian of the Gravitational Attraction of Two Bodies with Variable Mass”, *IJTF* **46**, 806
- [9] Sommerfeld, A. “Mechanics”, Academic Press, New York, 1952
- [10] Brown, E. H. 1925, “The Effect of Varying Mass on a Binary System”, *PNAS* **11**, 274
- [11] Jeans, J. H. 1925, “The Effect of Varying Mass on a Binary System”, *MNRAS* **85**, 912
- [12] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. “Fluid Mechanics”, Pergamon, Oxford, 1986

-
- [13] Thornton, S. T.; Marion, J. B. "Classical Dynamics of Particles and Systems", Thomson, Belmont, 2004
- [14] Brouwer, D.; Hori, G. 1961, "Theoretical Evaluation of Atmospheric Drag Effects in the Motion of an Artificial Satellite", *Astron. Journ.* **66**, 193
- [15] Jupp, A. H. 1976, "Some investigations into the atmospheric drag problem", *Celest. Mech.* **14**, 335
- [16] Strezhenkova, E. P.; Tamarov, V. A. 1989, "Construction of an algorithm for allowing for atmospheric drag in the motion of an artificial earth satellite", *Sov. Astron.* **33**, 203
- [17] Arfken, G. B.; Weber, H. J. "Mathematical methods for physicists", Harcourt A. P., San Diego, 2001
- [18] Reif, F. "Fundamentals of statistical and thermal physics", McGraw-Hill B. C., Tokyo, 1965
- [19] Radzievskii, V. V.; Gel'fgat, B. E. 1957, "The restricted problem of two bodies of variable mass", *Sov. Astron.* **1**, 568
- [20] Hestenes, D. "New Foundations for Classical Mechanics", Kluwer A. P., Dordrecht, 1999
- [21] Szebehely, V.; Giacaglia, E. O. 1964, "On the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies", *Astron. Journ.* **69**, 230
- [22] Goldstein, H.; Poole, C.; Safko, J. "Classical Mechanics", Addison Wesley, San Francisco, 2000
- [23] Luk'yanov, L. G. 1989, "Particular solutions in the restricted three-body problem with arbitrarily varying masses", *Sov. Astron.* **33**, 194
- [24] Lamb, H. "Hydrodynamics", Cambridge U. P., 1975