

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

Ordem e Caos em Plasmas Magnetizados

Roberto da Trindade Faria Júnior

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo H. Sakanaka (orientador)
Prof. Dr. Padma K. Shukla - RUB (orientador externo)
Prof. Dr. Ricardo M. O. Galvão - USP
Prof. Dr. Roberto Clemente - UNICAMP
Prof. Dr. Munemasa Machida - UNICAMP
Prof. Dr. Edson C. da Silva - UNICAMP (suplente)
Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas - USP (suplente)

Tese apresentada no Instituto de Física "Gleb Wataghin" como
requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

*Este exemplar corresponde à redação final
da tese de doutorado defendida pelo aluno
Roberto da Trindade Faria Júnior e aprovada
pela Comissão julgadora 16/5/2000*
dezembro de 1999 

UNIDADE IFGW
N.º CHAMADA:
T/UNICAMP
F2250
V. Ex.
BO/41864
278/00
D
RB11,00
05-08-00
CPD.

IF/1224

CM-00143124-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

F2250

Faria Júnior, Roberto da Trindade
Ordem e caos em plasmas magnetizados / Roberto
da Trindade Faria Júnior. - Campinas, SP : [s. n.], 1999.

Orientador: Paulo Hiroshi Sakanaka.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Astrofísica. 2. Sistemas não lineares. 3. Comportamento
caótico nos sistemas. 4. Fusão controlada. 5. Turbulência de
plasma. 6. Ondas de plasma. 7. Magnetoidrodinâmica.
I. Sakanaka, Paulo Hiroshi. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

**Instituto de Física "Gleb Wataghin"
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DO SR. ROBERTO DA TRINDADE FARIA JUNIOR, RA 945814, APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 03 DE DEZEMBRO DE 1999.

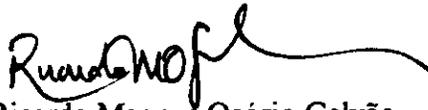
COMISSÃO JULGADORA:



**Prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka
(Orientador do Candidato) – IFGW/UNICAMP**



**Prof. Dr. Padma Kant Shukla
Ruhr – University of Bochum, Germany**



**Prof. Dr. Ricardo Magnus Osório Galvão
IF/USP**



**Prof. Dr. Roberto Antonio Clemente
IFGW/UNICAMP**



**Prof. Dr. Munemasa Machida
IFGW/UNICAMP**

Conteúdo

1. Introdução	1
2. Teoria de deriva	11
2.1 Velocidades de deriva	12
2.1.1 Deriva diamagnética	12
2.1.2 Efeitos de forças externas constantes	13
2.1.3 Deriva devido à curvatura das linhas de força do campo magnético .	15
2.1.4 Deriva de polarização	16
2.2 Como obter as soluções lineares e não-lineares gerais?	18
3. Dinâmica não-linear de ondas eletromagnéticas em plasmas magnetiza-	
dos não uniformes	20
3.1 Modelo teórico	20
3.2 Ondas lineares e relação de dispersão	24
3.3 Ondas não-lineares	30
3.3.1 Vórtices de ondas longas	30
3.3.2 Vórtices de ondas curtas	35
3.4 Aplicação de Ondas não-lineares na Aurora Boreal e na magnetopausa . .	38
3.5 Comportamento caótico da turbulência eletromagnética	43
3.5.1 Equação de Lorenz	43
3.6 Aplicação em magnetoplasmas	45
4. Outros modelos de plasma	49
4.1 Sistemas de plasmas de poeira	49
4.2 Ondas de Alfvén dispersivas lineares e não-lineares em plasmas de dois íons	52
4.3 Perfis de equilíbrio de um plasma de poeira não-linear	55
5. Conclusões	61
A. Vórtices. Introdução	69
A.1 Ondas de “Rossby”	70

B. Síntese sobre caos ou teoria da complexidade	76
B.1 Bifurcações	79
C. Nonlinear dynamics of electromagnetic turbulence in a nonuniform magnetized plasma. Referência [9]	83
D. Vortex formation in sheared flow driven fluctuations in nonuniform magnetized dusty gases. Referência [10]	93
E. Self-organized and chaotic states in nonuniform dusty magnetoplasmas with sheared flows. Referência [11]	100
F. Linear and nonlinear dispersive Alfvén waves in two-ion plasmas. Referência [12]	104
G. A class of stationary nonlinear dusty plasma equilibria. Referência [34]	110

Dedico esta tese à Alda, minha mãe, responsável pelo sucesso de seus filhos, a custa de muito trabalho, luta e sacrifícios.

Agradecimentos

A **Deus**, por ter me proporcionado a fé, alavanca primordial para o cumprimento dos meus objetivos possíveis e impossíveis.

Ao **Professor Paulo Hiroshi Sakanaka**, meu orientador e “mestre” de Taichichuan, que me apóia e me orienta com entusiasmo em todas as atividades profissionais, acadêmicas e particulares, sempre respeitando as nossas individualidades. Parte do meu objetivo alcançado deve-se ao seu exemplo de vida disciplinada e de sua conduta humana e profissional.

Ao **Professor Padma Kant Shukla**, meu orientador no exterior (Universidade do Ruhr em Bochum, Alemanha). Foi quem me ensinou os segredos da teoria não-linear na Física de Plasmas. Área tão importante e bastante atual, base da minha tese. Também foi o meu “guru”, com seus sábios conselhos sobre a física e sobre a vida.

Ao **Professor Carlos Augusto de Azevedo**, por ter sido o responsável pelos meus primeiros passos na física e pelos constantes incentivos.

Aos **Professores Edson C. da Silva, Roberto Clemente, Munemasa Machida e Ricardo Galvão**, que durante os seminários anteriores à defesa me ofereceram críticas construtivas, ocasionando uma melhora considerável na minha apresentação final.

Ao **Professor José Busnardo Neto**, pelas discussões sempre interessantes e atuais.

Ao colega **Dr. Arshad M. Mirza**, que me auxiliou nas minhas primeiras pesquisas sobre sistemas não-lineares e pelas ótimas discussões que tanto enriqueceram o trabalho.

À **FAPESP**, exemplo ímpar de competência, pelo apoio financeiro e pelo consentimento para realizar o estágio no exterior.

À **CAPES** pelo apoio financeiro no período do curso de doutoramento na Alemanha. Com uma referência especial à **Sra. Marigens Carvalho**.

Ao **DAAD** pelos quatro meses de ajuda financeira, durante o curso intensivo da língua alemã no Instituto Goethe em Mannheim. Uma atenção especial à **Frau Helga Wahre**.

Aos meus pais, **Roberto e Alda**, por todo apoio material e espiritual; responsáveis pelos meus valores morais.

Aos meus irmãos: **Jussara**, pelos estímulos e a ajuda imprescindível na correção da tese, principalmente em relação à metodologia científica; **Ana Claudia, Alexandra e Alexandre Antonio**, pelo constante apoio e incentivos.

Ao meu padrinho **Antônio de Pádua** e ao **Dr. Alexandre Dias Filho**, pelas lições de vida.

À minha amiga e jovem mamãe **Dra. Márcia**, pelas excelentes conversas e incentivos.

À amiga **Angelika**, secretária do departamento (Theoretische Physik, Lehrstuhl IV - TP4) que foi uma das pessoas responsáveis pelo excelente ambiente de trabalho que encontrei na Alemanha.

À **Sra. Kiku e filhas** pelo apoio e amizade, principalmente nas horas mais importantes.

À **Sra. Shukla e filhos**, pela cordial acolhida.

Aos **funcionários das secretarias de pós-graduação, do DEQ, e da biblioteca do Instituto de Física "Gleb Wataghin" (IFGW)**, pelo atendimento gentil que sempre me dispensaram.

Aos **velhos e novos colegas do IFGW no Brasil e TP4 na Alemanha** que direta ou indiretamente me ajudaram nas tarefas diárias.

À colega **Iglika**, pela imensa torcida para que tudo desse certo neste período.

Finalmente, à **Clara** que, com seu amor de filha, sofreu pelas minhas longas ausências. Chorava de alegria quando eu chegava e de tristeza quando partia...

No momento solene volita nos espaços um hálito divino. O pensamento, permeado pelo grande mistério, olha e recolhe-se em oração.

Orai assim:

“Adoro-Te, recôndito Eu do universo, alma do Todo, meu Pai e Pai de todas as coisas, minha respiração e respiração de todas as coisas.

Adoro-Te, indestrutível essência, sempre presente no espaço, no tempo e além, no infinito.

Pai, amo-Te, mesmo quando a Tua respiração é dor, porque Tua dor é amor; mesmo quando Tua Lei é esforço, porque o esforço que Tua Lei impõe é o caminho das ascensões humanas.

Pai, mergulho em Tua potência, nela repouso e me abandono, e peço à fonte o alimento que me sustente.

Procuro-Te no âmago onde Tu estás, de onde me atraís. Sinto-Te no infinito que não atinjo e donde me chamas. Não Te vejo e, no entanto, ofuscas-me com Tua luz; não Te ouço, mas sinto o tom de Tua voz; não sei onde estás, mas encontro-Te a cada passo, esqueço-Te e Te ignoro no entanto, ouço-Te em toda a minha palpitação. Não sei individuar-Te, mas gravito em torno de Ti, centro do universo.

Potência invisível que diriges os mundos e as vidas, em Tua essência estás acima de toda a minha concepção. Que serás Tu, que não sei descrever nem definir, se apenas o reflexo de Tuas obras me cega? que serás Tu, se já me assombra a incomensurável complexidade desta Tua emanção, pequena centelha espiritual que me anima integralmente? O homem Te busca na ciência, invoca-te na dor, Te bendiz na alegria. Mas na grandiosidade de Tua potência, como na bondade de Teu amor, estás sempre além, além de todo o pensamento humano, acima das formas e do vir-a-ser, um lampejo do infinito.

No ribombar da tempestade está Deus; na carícia do humilde, está Deus; na evolução do turbilhão atômico, na arrancada das formas dinâmicas, na vitória da vida e do espírito, está Deus. Na alegria e na dor, na vida e na morte, no bem e no mal, está Deus; um Deus sem limites, que tudo abarca, estreita e domina, até mesmo as aparências dos contrários, que guia para seus fins supremos.

E o ser sobe, de forma em forma, ansioso por conhecer-Te, buscando uma realização cada vez mais completa de Teu pensamento, tradução em ato de Tua essência.

Adoro-Te, supremo princípio do Todo, em Teu revestimento de matéria, em Tua manifestação de energia; no inexaurível renovar-se de formas sempre novas e sempre belas; eu Te adoro, Conceito sempre novo e bom e belo, inesgotável Lei animadora do universo. Adoro-Te grande Todo, ilimitado além de todos os limites de meu ser.

Nesta adoração, aniquilo-me e me alimento, humilho-me e me incendeio; fundo-me na grande Lei, a fim de que minha ação seja sempre harmonia, ascensão, oração, amor.”

Orai assim, no silêncio das coisas, olhando sobretudo para o âmago que está dentro de vós. Orai com espírito puro, com intenso arrebatamento, com poderosa fé e a radiação anímica, harmoniosamente sintonizada com a grande vibração, invadirá os espaços. E ouvireis uma voz de conforto, que vos chegará do infinito...

Pietro Ubaldi.

Resumo

A presente tese visa a apresentar um claro entendimento de alguns fenômenos não-lineares importantes que ocorrem tanto em plasmas espaciais quanto em plasmas de laboratório. Especificamente os estudos analíticos e numéricos apresentados focalizam as propriedades eletromagnéticas turbulentas bem como as estruturas coerentes e os comportamentos caóticos em um magnetoplasma de multi-componentes. Enfatiza-se a geração de ondas eletromagnéticas, devido à presença de fluxos de plasma de cisalhamento em um magnetoplasma não-uniforme que contém um gradiente de densidade no equilíbrio. Dois cenários são considerados. Primeiramente são estudadas as flutuações eletromagnéticas de alta-freqüência (em comparação com a freqüência de plasma dos íons e da giro-freqüência dos íons, mas menor do que a giro-freqüência dos elétrons) e do comprimento de onda longo (em relação ao raio de giro dos elétrons) envolvendo somente o movimento dos elétrons; os íons são considerados estacionários, compondo o fundo de plasma, porque em uma escala de tempo curta, eles não respondem aos distúrbios eletromagnéticos. Deduz-se então um conjunto de equações não-lineares, onde as equações de fluido são usadas com a aproximação da velocidade de deriva para os elétrons, suplementadas pelas leis de Ampère e Faraday. De outro modo, a resposta dos íons foi incluída para as ondas de freqüências baixas (em referência à giro-freqüência dos íons) e comprimento de onda longo (em comparação com o raio de giro dos íons, ρ_i) bem como para as de comprimento de onda curto (referente a ρ_i). As equações não-lineares apropriadas para o caso de comprimento de onda longo são obtidas, considerando o modelo de dois-fluidos, enquanto que para comprimentos de onda curto emprega-se o modelo híbrido com a cinética dos íons. As relações de dispersão locais são deduzidas, desprezando os termos não-lineares do sistema das equações dinâmicas, considerando que o comprimento das flutuações são mais curtos do que as escalas de comprimento dos gradientes de densidade e de velocidade. As análises numéricas das relações de dispersão visam exibir as variações das taxas de crescimento para os parâmetros típicos de sistemas de plasma espacial. Demonstra-se que os fluxos do plasma de cisalhamento podem provocar flutuações de alta e baixa freqüência, mesmo na ausência do gradiente de densidade.

As flutuações dos fluxos de plasma de cisalhamento adquirem grandes amplitudes e começam a interagir entre si. Tal acoplamento não-linear provê a possibilidade de auto-

organização na forma de diversos tipos de estruturas vorticiais em um magnetoplasma não-dissipativo.

Atribui-se a formação de vórtices às não linearidades vetoriais que aparecem devido à deriva de polarização não-linear dos elétrons/íons e ao acoplamento da velocidade de fluido paralelo com a perturbação do campo magnético de cisalhamento. Os perfis específicos do vórtice dipolar, das cadeias de vórtices e de vórtices rotacionais são encontrados analítica e numericamente. Os resultados são então aplicados na ionosfera terrestre e na magnetosfera a fim de se entender as características salientes dos vórtices curtos e longos que existem em associação com os fluxos de plasma de cisalhamento. A teoria de vórtices é também estendida para os sistemas de plasma de multi-componentes, onde a presença de grãos de poeira carregados (“dusty plasmas”), mesmo estacionários, possibilitam o aparecimento de corrente $\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0$. Esta última é responsável por novos auto-modos, contribuindo para uma melhor localização do vórtice dipolar de Alfvén em um plasma de multi-espécies.

O comportamento caótico da turbulência eletromagnética tem sido estudada, retendo os efeitos dissipativos (resistividade, viscosidade, etc.). No presente trabalho mostramos pela primeira vez que as equações dinâmicas para as ondas eletromagnéticas não-lineares acopladas podem ser representadas na forma das equações de Lorenz-Stenflo. Estas últimas admitem trajetórias caóticas e atratores estranhos que dependem fortemente dos parâmetros do plasma. Também é examinada a estabilidade dos pontos fixos.

Finalmente, discute-se a possibilidade do aparecimento de campos magnéticos espontâneos em um plasma com poeiras carregadas e portando gradientes de densidade de número e de temperatura. Os campos magnéticos podem ser mantidos por vórtices que são criados pelo vetor baroclínico. A fim de demonstrar este fenômeno, o equilíbrio auto-consistente não-linear do “dusty plasma” é discutido, empregando uma descrição cinética e invocando um modelo Hamiltoniano. São encontrados perfis de equilíbrio do número de densidade do plasma, do fluxo de velocidade, da densidade de corrente, do campo magnético e do potencial elétrico para parâmetros que são relevantes para plasmas de laboratório e astrofísicos. Observações recentes mostram conclusivamente a presença de vórtices em um experimento de “dusty plasma”, considerando a microgravidade, apesar do plasma ser fortemente acoplado.

Abstract

The objective of this thesis is to present a clear understanding of some important nonlinear phenomena that are common in space and laboratory plasmas. Specifically, the present analytical and numerical studies have focused on the properties of electromagnetic turbulence as well as associated coherent structures and chaotic behaviors in a multi-component magnetoplasma. The emphasis is on the generation of electromagnetic waves by sheared plasma flows in a nonuniform magnetoplasma containing an equilibrium density gradient. Two scenarios are considered. First, it is studied high-frequency (in comparison with the ion plasma and ion gyrofrequencies, but smaller than the electron gyrofrequency), long wavelength (in comparison with the electron gyroradius) electromagnetic fluctuations involving only the electron motion; the ions are considered as stationary background because on a short time-scale of our interest they do not respond to electromagnetic disturbances. A set of nonlinear equations is then derived by employing the hydrodynamic equations with the electron fluid velocity in drift approximation, supplemented by the Ampère and Faraday laws. On the other hand, the response of the ions in our analysis has been included for low-frequency (in comparison with the ion gyrofrequency) and long wavelength (in comparison with the ion gyroradius ρ_i) as well as for short wavelength ($\ll \rho_i$) waves. The appropriate nonlinear equations for the long wavelength case are obtained by means of the two-fluid approach, while the short wavelength case involves a hybrid approach with kinetic ions. The local dispersion relations are derived by neglecting the nonlinear terms and assuming that the wavelength of the fluctuations are shorter than the scalelengths of the density and velocity gradients. Numerical analysis of the dispersion relations are performed in order to exhibit the variations of the growth rates for typical space plasma parameters. It is found that sheared plasma flows can drive both high- and low-frequency fluctuations, even in the absence of the density gradient.

Sheared plasma flow driven fluctuations acquire large amplitudes and start interacting among themselves. Such a nonlinear mode coupling provides the possibility of self-organization in the form of various types of vortical structures in a non-dissipative magnetoplasma. The formation of vortices is attributed to the vector nonlinearities that arise from the nonlinear electron/ion polarization drift and the coupling of the parallel electron fluid velocity with the perturbed sheared magnetic field. Specific profiles of the dipolar

vortex, the vortex street, and counter-rotating vortices are found both analytically and numerically. The results are then applied to the Earth's ionosphere and magnetosphere in order to understand the salient features of large and short scale coherent vortices that exist in association with sheared plasma flows. The theory of vortices has also been extended for a multi-component dusty plasma in which the presence of even stationary charged dust grains gives rise to a finite $\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0$ current. The latter is responsible for new eigenmodes as well as contribute to a better localization of the dipolar Alfvén vortex in a multi-species plasma.

The chaotic behavior of the electromagnetic turbulence has been studied by retaining the dissipative effects (viz, resistivity, viscosity, etc). It was shown for the first time that the dynamical equations for the nonlinearly coupled electromagnetic waves can be represented in the form of Lorentz-Stenflo equations. The latter admit chaotic trajectories and strange attractors which strongly depend on the plasma parameters. The stability of the fixed points are also examined.

Finally, it was discussed the possibility of spontaneous magnetic fields in a dusty plasma with non-parallel density and temperature gradients. The magnetic fields can be maintained by vortices which are created by the baroclinic vector. In order to demonstrate this phenomena, it was investigated a self-consistent stationary nonlinear dusty plasma equilibria by employing a kinetic description and invoking the Hamiltonian approach. It was found profiles of the plasma number density, the flow velocity, the current density, the magnetic field, and the electric potential for parameters that are relevant for laboratory and astrophysical plasmas. Recent observations conclusively show the presence of vortices in a microgravity dusty plasma experiment, although the plasma there is strongly coupled.

Capítulo 1. Introdução

Os plasmas encontrados na natureza ou nos laboratórios quase nunca estão em equilíbrio termodinâmico. Sendo assim, há sempre, uma ou outra fonte de energia livre que se transforma em um ou outro modo coletivo de oscilação do plasma que cresce no tempo. São as instabilidades. Existe uma grande variedade de tipos diferentes de instabilidade em plasmas, o que faz com que o estudo deste estado de matéria seja conduzido de forma diferente em relação ao de outros estados da matéria. Nos últimos 40 anos vimos acontecer um surto de pesquisas experimentais e teóricas em física de plasmas. A cada dia novos efeitos dos plasmas são encontrados em uma diversidade de situações, tais como, na astrofísica, na magnetosfera, na ionosfera, nos laboratórios, e principalmente na pesquisa de fusão termonuclear controlada. Um modo coletivo pode se tornar instável em alguns casos tendo energia livre para sustentá-lo. As flutuações podem se desenvolver próximo ou acima do nível térmico das partículas. As instabilidades nem sempre são vistas como prejudiciais. Dependendo das circunstâncias, elas podem favorecer alguns efeitos desejados, mas em outras situações são destrutivas. Como exemplo, podemos citar o aquecimento turbulento de plasmas conduzindo o sistema a condições instáveis para poder atingir temperaturas de fusão nuclear. É o caso de instabilidade desejável. Mas, por outro lado, as instabilidades que destroem o plasma ou aumentam a perda de energia têm sido um grande obstáculo no desenvolvimento da fusão termonuclear controlada. Naturalmente, as instabilidades não são da mesma natureza nos dois casos.

As instabilidades fazem com que alguns modos de oscilação cresçam e atinjam valores que começam a modificar as propriedades locais do plasma. Nestes casos a descrição do plasma, somente do ponto de vista da teoria linearizada, não é mais válida. Precisam-se incorporar nas equações componentes não lineares para entender melhor o seu comportamento. Só muito recentemente o estudo dos efeitos não-lineares tem feito um avanço considerável, que são tão importantes para um bom entendimento dos fenômenos de plasmas. A aproximação linear, exaustivamente trabalhada e ainda hoje importante nos estudos de modos de oscilação, não responde à questão fundamental: são as instabilidades um fator crucial para o sistema, ou o seu desenvolvimento provoca apenas leves distorções nos parâmetros do plasma? Importa saber, por exemplo, qual a fração de energia livre que é utilizada no desenvolvimento da instabilidade. A constatação de um grande número

de instabilidades indica a ineficiência da teoria linear para a descrição de certos plasmas, pois o rápido crescimento exponencial das perturbações invalida esta teoria. Se o crescimento das perturbações for rapidamente limitado por efeitos não-lineares que inibem o crescimento da instabilidade e se o plasma entrar em um tipo de estado quase-estacionário que difere, apenas levemente, do estado estacionário inicial, então, podemos afirmar que essas instabilidades não produzem grandes efeitos. Mas, se o estado final é drasticamente diferente do estado inicial, como, por exemplo, o caso da temperatura aumentada, então o efeito é relevante. Sob esta perspectiva, vemos que só a análise dos efeitos não-lineares pode completar o estudo do fenômeno. Um dos efeitos não-lineares mais estudados é a turbulência. É o resultado final de se ter um espectro amplo de modos instáveis com fatores de crescimento comparáveis. Esses tipos de instabilidades aparecem, por exemplo, devido a uma não-uniformidade termodinâmica do plasma, ou as partículas têm uma distribuição de velocidade não-Maxwelliana ou o plasma é espacialmente não-homogêneo. As instabilidades devido a distribuições de velocidade não-Maxwellianas são chamadas de microinstabilidades e podem acontecer em plasmas homogêneos. Se há não-homogeneidades no plasma, chamamos, então, instabilidades de não-homogeneidade ou instabilidades de gradiente. O conhecimento dessas últimas é relevante para a solução do problema da fusão termonuclear controlada. As instabilidades de gradiente ocorrem, em geral, em um plasma na presença de um campo magnético. Geralmente as componentes perpendiculares (em relação ao campo magnético) dos gradientes são as responsáveis por estas instabilidades.

As instabilidades de gradiente são fortemente afetadas por alguns parâmetros que caracterizam o estado do plasma. Dentre esses parâmetros, indicaremos alguns mais importantes:

- a) O β (a razão entre a pressão cinética p e magnética $B^2/8\pi$).
- b) O grau de não-homogeneidade do plasma. É caracterizado pela razão entre o raio de Larmor da partícula, ρ , e a escala de comprimento da não-homogeneidade do plasma " L ", definida como inverso da derivada espacial logarítmica da grandeza.
- c) O grau de não-homogeneidade do fluxo de plasma. Um plasma pode conter fluxos de velocidade que variam no espaço.
- d) O grau de colisionalidade. A razão entre a frequência de colisão e a frequência de modos de oscilação é importante.
- e) A curvatura das linhas de força do campo magnético. Este parâmetro pode ser caracterizado pela razão da escala de comprimento do gradiente do plasma sobre o raio de curvatura L/R . A natureza das instabilidades depende fortemente do sinal da curvatura e a relação entre os parâmetros L/R e $(\rho/L)^2$.
- f) O efeito de um campo elétrico estático ou quasi-estático. Este campo pode ter uma componente ao longo ou perpendicular ao campo magnético. Também podem ter a presença dos dois componentes.
- g) O fluxo de cisalhamento devido à componente perpendicular do campo magnético perturbado. Nos casos mais simples isto pode ser caracterizado pelo ângulo entre as linhas de força do campo magnético separadas entre si por uma distância da ordem de " L ".

A resposta do sistema às flutuações do plasma caracteriza-se pelo tensor dielétrico, usado para a dedução da relação de dispersão. Podemos classificar os possíveis modos de oscilação no plasma examinando a relação entre a frequência angular de oscilação ω e o vetor de onda \mathbf{k} . Se, para um dado \mathbf{k} , ω apresentar parte imaginária positiva, o modo é instável. Estes modos que são excitados pelas instabilidades já anteriormente explicadas, são os responsáveis diretos pelo transporte de energia e momento do sistema. A inclusão de não-linearidades pode resultar no surgimento de estruturas coerentes e não-coerentes. Estas podem acumular ou dispersar uma quantidade muito grande de energia, proporcionando uma forte aceleração de partículas, bem como a ocorrência de fortes atenuações dos modos. Podemos citar como estruturas não-lineares os sólitons, cávitons e vórtices ordenados e caóticos, entre outras.

Atualmente, as propriedades lineares e não-lineares de ondas de baixa frequência com características Alfvénicas são objeto de importantes pesquisas, com possíveis aplicações a plasmas de laboratório, nas regiões próximas da Terra e no espaço, considerando baixas temperaturas. A teoria linear prediz a relação de dispersão, que mostra o espectro de frequências da onda, tendo como objetivo principal identificar as regiões de instabilidade

do espectro. A análise não-linear, por outro lado, considera o desenvolvimento da turbulência eletromagnética.

As ondas de Alfvén (AW) são ondas eletromagnéticas dentro de um fluido magnetizado. Em AW a tensão da linha do campo magnético provê uma força restauradora, onde a massa do íon fornece a inércia. Após a descoberta teórica realizada por Alfvén em 1942 [1], a confirmação, através de técnicas experimentais, aconteceu só dez anos mais tarde. Uma frente de onda foi observada primeiro por Bostik e Levine [2]. A partir desta época um sem número de experimentos confirmaram a eficácia e facilidade com que este tipo de onda atua dentro de um sistema magnetizado.

A magnetohidrodinâmica ideal (MHD ideal), por definição, não tem um campo elétrico paralelo ao campo magnético e, assim, as ondas não podem fazer uma energização de partículas consideradas como responsáveis pelo acoplamento entre a ionosfera e magnetosfera, por exemplo. Depois que Stefant [3] demonstrou que a inclusão de efeitos cinéticos relacionados ao raio de giro do íon produz uma dispersão de ondas de Alfvén, na presença de um campo elétrico paralelo ao campo magnético, as ondas de Alfvén dispersivas (DAW) tornaram-se importantes no estudo de interações entre a magnetosfera e a ionosfera. O campo elétrico paralelo é produzido por DAW de baixa frequência ($\omega < \omega_{ci}$) quando o comprimento de onda perpendicular ao campo magnético é comparável ao raio de giro dos íons na temperatura do elétron, $\rho_s = \sqrt{T_e/m_i}/\omega_{ci}$, o raio de giro térmico, $\rho_i = \sqrt{T_i/m_i}/\omega_{ci}$, ou à profundidade de penetração não colisional $\lambda_e = c/\omega_{pe}$.

O ambiente mais natural para a existência de AW situa-se na presença de fluxos de cisalhamento perpendicular ao campo magnético. Um exemplo típico de tal fenômeno ocorre na expansão do plasma nas regiões internas da magnetosfera terrestre durante as tempestades magnéticas ou pela força executada no limiar da magnetopausa pelos ventos solares. As ondas criadas em tais processos propagam-se na ionosfera gerando estruturas filamentárias estendendo-se ao longo das linhas do campo magnético que conectam gradientes espaciais na magnetosfera e na ionosfera, possibilitando um acoplamento eficiente entre a magnetosfera e a ionosfera.

Existem dois tipos principais de DAW. Chamamos de AW inerciais (IAW) às ondas de baixa frequência que navegam em um meio onde a velocidade térmica do elétron ($v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$ é muito menor do que a velocidade de Alfvén ($v_A = B_0/\sqrt{4\pi n_i m_i}$), onde

B_0 é o campo magnético no equilíbrio e ρ , a densidade do plasma). O campo elétrico é suportado pela inércia dos elétrons. Por sua vez, quando consideramos um meio onde $v_{Te} > v_A$, chamamos de AW cinéticas (KAW). Neste caso a força do campo elétrico é contra-balançada pelo componente paralelo do gradiente de pressão dos elétrons. Logo, resumindo, para um plasma com baixo beta, $\beta < m_e/m_i$, temos IAW, aqui $T = T_e + T_i$, e para um plasma com $m_e/m_i < \beta < 1$, aparecem KAW.

As propriedades dispersivas das ondas tornam-se cada vez mais importantes, quando o comprimento de onda perpendicular ou quando as escalas características de não-homogeneidades tornam-se comparáveis a ρ_s , ρ_i ou λ_e ,

Em relação à teoria não-linear, alguns autores, principalmente na década de 80, iniciaram a pesquisa teórica de estruturas Alfvénicas não-lineares [4, 5, 6]. Em particular, foram mostrados vários tipos de vórtice de Alfvén com aplicações na astrofísica, mais especificamente, magnetosfera, ionosfera, ventos solares entre outros e em laboratórios de baixa-freqüência. Basicamente, no final dos anos 80 e início dos anos 90 começaram a surgir evidências observacionais que comprovaram as previsões teóricas, devido à utilização de satélites portando equipamentos de medida de mais alta resolução, que possibilitaram medidas novas e mais completas dos fenômenos em análise [7, 8].

Entre as várias medidas de diversas grandezas físicas, a nós nos interessa a flutuação da densidade e dos campos elétrico e magnético. A razão entre os campos elétrico e magnético nos informa a velocidade do plasma no ponto observado, $v_{||} = E_{\perp}/B_{\perp}$.

Um grande número de medidas das flutuações dos campos nas regiões de Aurora Boreal nos mostram $E_{\perp}/B_{\perp} \approx v_A (\sim 10^7 \text{ m/s})$.

Há pesquisas com AW ou DAW em várias áreas de suma importância na física de plasmas, enunciaremos algumas destas:

- Transportes de energia;
- Oscilações e ressonâncias globais;
- Acoplamento magnetosfera-ionosfera;
- Turbulências, energias em cascatas em escalas espaciais de largo alcance;
- Criação de vórtices e sólitons, filamentações, caos;
- Efeitos ponderomotivos;
- Aquecimentos e
- Campos elétricos paralelos, aceleração de partículas.

Estes são alguns exemplos em que uma grande parte da comunidade científica de plasmas atua. Dentro dos trabalhos por nós desenvolvidos aparecem vários exemplos de acoplamentos de DAW com outros tipos de onda [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

As frequências de IAW e KAW são [4, 17, 18, 19, 20]:

IAW

$$\omega^2 = \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{1 + k_{\perp}^2 \lambda_e^2}.$$

KAW

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2 (1 + k_{\perp}^2 \rho_s^2)^{1/2}.$$

Apesar das oscilações Alfvénicas serem abundantes e relevantes para a estabilização ou acúmulo de energias do plasma, temos exemplos de medidas das perturbações de grandezas físicas nos vários domínios do espectro. Podemos classificar de ondas curtas e ondas longas. Estas últimas são correlacionadas a ondas íon-acústicas e as ondas curtas a ondas eletron-acústicas. Mas quase não ouvimos falar nas ondas eletron-acústicas. Por que?

Em plasmas espaciais [21], “theta-pinches”, em alguns espelhos magnéticos e outras máquinas de fusão [22], a temperatura dos íons é geralmente maior do que a temperatura dos elétrons. Quando isto ocorre e se o plasma é magnetizado, aparece um novo modo normal, o modo eletron-acústico. Essas oscilações são devidas à pressão iônica e à inércia dos elétrons, em contraste com o modo íon-acústico altamente amortecido por “Landau-damping” neste tipo de plasma.

As ondas eletron-acústicas não têm estado em evidência na pesquisa da física devido principalmente às suas raras condições de existência. Entretanto, em um plasma com $T_e \ll T_i$ e na configuração de ondas curtas, só este tipo de onda acústica é que se propaga. Logo a sua importância não pode ser assim tão subestimada. A relação de dispersão para um plasma com $B_0 \hat{z}$ uniforme onde há a presença de ondas curtas é [23, 24, 25]

$$\omega^2 - k_z^2 \frac{T_i}{m_e} = 0. \quad (1)$$

Se o plasma não é uniforme, temos

$$\omega^2 - \omega k_{\perp} \mathbf{v}_{Di0} - k_z^2 \frac{T_i}{m_e} = 0. \quad (2)$$

Aqui $v_{D;0} = cT_i/eB_0\partial \ln n_0/\partial x$ é a velocidade diamagnética de deriva no equilíbrio.

Em relação à aplicação em plasmas espaciais, podemos destacar a dinâmica do plasma na magnetosfera e na ionosfera terrestre, incluindo a região de “bow shock” [26, 27, 28, 29, 30, 31]. Geralmente no plasma espacial temos um sistema de multi-fluidos composto por distribuições de íons frios e dois tipos de distribuição eletrônica uma com elétrons quentes e outra com elétrons frios. Nestes casos o elétron quente é o responsável pela presença dos modos eletron-acústicos.

Na parte de fusão é freqüente encontrarmos este modo em sistemas onde acontecem instabilidades paramétricas [32]. A onda eletron-acústica pode ser facilmente excitada quando empregadas ondas eletromagnéticas para aquecer ou confinar o plasma. Assim, ela seria uma das ondas decaídas.

Dependendo da densidade das espécies, o modo eletron-acústico pode ser amortecido rapidamente, ou propagar-se em uma aproximação linear ou, então, não-linear [33].

A teoria linear nos mostra que as flutuações não-térmicas podem ser geradas, devido à existência de energias livres na forma de distribuições de partículas anisotrópicas no equilíbrio, gradientes de pressão e de velocidade, etc. Sob condições específicas e apropriadas, estas energias livres do sistema podem ser acopladas em modos eletrostáticos ou eletromagnéticos em plasmas não-uniformes. Alguns autores [34, 35, 36, 37] têm investigado a instabilidade de células convectivas e ondas acústicas eletrostáticas de deriva, bem como ondas eletromagnéticas Alfvén cinéticas de deriva de baixa-freqüência (em relação à freqüência de giro dos íons) e de comprimento de onda longo (em comparação com o raio de giro dos íons) na presença de gradientes do fluxo de plasma alinhado ao campo magnético.

Os dados experimentais de sistemas de plasma mostram que as ondas eletromagnéticas observadas em plasmas magnetizados não-uniformes apresentam um amplo espectro de freqüências. Mais claramente, podemos dizer que as freqüências das ondas podem ser maior ou menor do que a freqüência de giro dos íons, enquanto que os comprimentos de onda poderiam ser localizados na faixa entre a profundidade de penetração não-colisional dos elétrons (λ_e) e o raio de giro dos íons ou até em escalas menores. As ondas acompanham simultaneamente as perturbações perpendiculares do campo magnético de cisalhamento e da densidade finita. Assim, elas podem ser classificadas como ondas do tipo

Alfvénico de cisalhamento ou cinéticas.

Os sistemas de multi-fluido de plasma magnetizado não-uniforme também podem apresentar perturbações ou turbulências com propriedades Alfvén-cinéticas. Um ítem importante é a dinâmica de plasma na presença de grãos de poeira carregados [38, 39]. A área de plasmas com microgrãos carregados (“dusty plasmas”) tem despertado atualmente grande interesse pela comunidade científica. Um “dusty plasma” é um gás parcialmente ou altamente ionizado de baixa temperatura, consistindo de átomos neutros, elétrons, íons e grãos de matéria sólida altamente massivos em relação a íons, apresentando dimensões na faixa de micron e sub-micron. Um dos principais aspectos deste novo sistema é a introdução de fortes não-homogeneidades no plasma nas escalas de comprimento de Debye, λ_D , e perturbações em longas escalas. Os grãos de poeira podem agir como fontes ou sumidouros para o plasma, possivelmente introduzindo mudanças dinâmicas. As partículas de poeira estão sujeitos a forças eletromagnéticas e não-eletromagnéticas, tais como gravidade, fricção e pressão de radiação.

Esta área recebeu uma maior atenção nos anos 80, quando a Voyager detectou características mais peculiares dos anéis de Saturno, que não poderiam ser explicadas simplesmente utilizando termos puramente gravitacionais. As recentes observações das sondas Ulysses e Galileo, como altas velocidades esporádicas de poeiras da ordem de sub-micron emanando de Júpiter, levanta o interesse do contínuo estudo desta área.

Há numerosos efeitos do grão de poeira carregado dentro do plasma e dos campos eletromagnéticos. Podemos citar, por exemplo, efeitos não-lineares associados a fortes perturbações locais devido aos grãos, afetando as suas opacidades e suas propriedades químicas, como em nuvens interestelares, ondas de choque devido à inércia e corrente dos grãos, amortecimento de ondas de Alfvén, transferindo momento dentro do ambiente do plasma. Um dos tratamentos de “dusty plasmas” é a formação de células de convecção com o aparecimento de vórtices.

Um outro aspecto importante refere-se ao fenômeno de “gyrophase” (fase de rotação) em “dusty plasmas” tênues. Isto leva a novos aspectos, tais como “gyrophase drift” e “gradient drifts”. O “gyrophase drift” ocorre, porque um grão de poeira não pode ser carregado instantaneamente até atingir o seu equilíbrio: há um atraso na fase, obrigando a força eletromagnética a mudar a excentricidade e a energia das órbitas da partícula.

Efeitos similares ocorrem quando há gradientes na temperatura, densidade ou na composição do plasma. Como são fenômenos que só agora começam a ser altamente explorados, há grandes possibilidades de se descobrir novos modos de oscilação.

Outra característica que está relacionada com o sistema de “dusty plasma”, é a possibilidade de aplicar esta teoria a vórtices com comportamento caótico [10].

As interações de “dusty plasmas” não ocorrem somente no espaço, mas também em laboratórios. Por exemplo, o processamento por plasma está sendo agora muito utilizado na produção de semicondutores. A condensação e o transporte de partículas finas de poeira inseridas em sistemas de plasma de altas densidades e de baixas temperaturas, têm levado a significativas perdas de energia do sistema. Inicia-se agora um amplo estudo para solucionar este efeito, que significaria uma efetiva economia nesta indústria bilionária.

Nesta tese nos concentraremos no estudo das propriedades lineares e não-lineares das ondas eletromagnéticas com características Alfvénicas de baixa-freqüência, considerando ondas curtas e longas em um plasma não uniforme que contém um gradiente de densidade eletrônica no equilíbrio e fluxos de cisalhamento no equilíbrio. Para este propósito, empregamos as equações de dois fluidos, consistindo da equação da continuidade dos elétrons e da equação de momento, complementado pela lei de Ampère. Este conjunto de equações é necessário para derivar as equações não-lineares. Para as ondas com comprimento-de-onda longo, podemos dizer que os íons estão fixos e usamos a equação de Poisson para eliminar a perturbação da densidade de número de elétrons. Para a análise das ondas curtas, usamos a distribuição de Boltzmann para a perturbação de densidade de número dos íons. No limite linear obtemos a relação de dispersão em várias aproximações locais. No caso não-linear discutimos as possíveis soluções estacionárias e não-estacionárias para as novas equações não-lineares. As equações não-lineares modo-acopladas que são derivadas excluem efeitos dissipativos. Enquanto que, no caso do comportamento temporal do nosso sistema não-linear, sem considerar o gradiente de densidade no equilíbrio, estes efeitos são imprescindíveis. Para tanto, seguimos Lorenz [40] e Stenflo [41] para derivarmos um sistema caótico de equações não-lineares.

No capítulo 2 apresentamos o modelo de multi-fluidos e fazemos um breve relato sobre as principais velocidades de deriva, que foram trabalhadas nesta tese. No capítulo 3 apresentamos a dedução das equações dinâmicas. São equações modo-acopladas de baixa-

freqüência e não-lineares. Fazemos uma análise para as ondas com comprimento de onda longo e curto. O fluxo de cisalhamento também é fator preponderante deste sistema não uniforme e dissipativo, portando também gradientes de densidade e de velocidade do fluxo no equilíbrio. A relação de dispersão linear é derivada e detalhadamente analisada para as várias situações físicas possíveis. Pesquisamos também, as soluções não-lineares, onde demonstramos a possível existência de diversos tipos de vórtices de ondas longas e curtas. Encerramos este capítulo com o estudo do comportamento não-estacionário das equações dinâmicas não-lineares considerando a inclusão da dissipação, mostrando a possibilidade do aparecimento de estruturas caóticas. Desenvolvemos no capítulo 4 as investigações para o modelo de multi-fluido com a inclusão no plasma de poeira ou a presença de dois íons. Todas as conclusões são expostas no capítulo 5. Finalmente, apresentamos no apêndice uma breve introdução sobre vórtices e caos, bem como, os artigos, (entre os treze publicados em revistas internacionais durante o curso de doutoramento), que melhor representam o tema desta tese.

Capítulo 2. Teoria de deriva

Neste capítulo apresentamos inicialmente as fórmulas gerais empregadas em sistemas de plasma de baixa frequência.

As soluções para as ondas de baixa frequência em plasmas ($\omega \ll \omega_{pe}, kc$, onde ω_{pe} é a frequência de plasma para os elétrons) podem ser obtidas das equações de momento de multi-fluidos para espécies $j = \{e, i, d, \dots\}$. Onde e representa os elétrons, i os íons e d as poeiras ou grãos de poeira carregados [42].

$$\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla \mathbf{v}_j = \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_j}{c} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{nm_j} \nabla n_j T_j - \frac{1}{nm_j} \nabla \cdot \pi^j - \nu \mathbf{v}_j, \quad (3)$$

combinadas com as respectivas equações de continuidade

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j) = 0, \quad (4)$$

e as equações de pré-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{c \partial t}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_q \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (8)$$

Aqui, \mathbf{v}_j representa a velocidade de fluido das espécies j , n_j é a densidade de número de partículas das espécies, q_j a carga da partícula, T_j a temperatura, π^j é o tensor stress, incluindo viscosidade [43], ν é a frequência de colisão entre os elétrons e íons, $\mathbf{J} = \sum_j n_j q_j \mathbf{v}_j$ a densidade da corrente elétrica, $\rho_q = \sum_j q_j n_j$ é a densidade de carga e c é a velocidade da luz.

É conveniente expressar os campos elétrico e magnético em função do potencial escalar ϕ e do potencial vetor \mathbf{A} , como

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (9)$$

Para $\omega \ll \omega_{ci}$, os movimentos perpendiculares das partículas podem ser bem aproximadas para a teoria de deriva (“drift-theory”).

2.1 Velocidades de deriva

Existem no plasma não uniforme fontes adicionais de energia livre associadas às variações espaciais das quantidades físicas não constantes. Há uma tendência natural nestes sistemas não uniformes a se desfazer dessas energias excedentes, para tentar um estado uniforme de equilíbrio termodinâmico. O campo magnético aplicado ao plasma usualmente insere certos vínculos no movimento das partículas carregadas. Normalmente, os processos de relaxação devido às colisões, não provêem um mecanismo efetivo e suficiente para que se alcance um equilíbrio desejável. As instabilidades, então, são um dos processos pelo qual essas energias livres extras se dispersam.

A natureza dessas instabilidades depende fortemente da interação entre o campo magnético e as não-homogeneidades espaciais. Em muitos casos, os efeitos dos campos de força sobre o movimento das partículas também podem influenciar no sistema. Podemos citar a gravidade, o campo elétrico e a força centrífuga devido à curvatura das linhas de força do campo magnético. Todas essas forças e não-homogeneidades, atuando conjuntamente com o campo magnético, produzem vários movimentos de deriva das partículas carregadas. Descreveremos abaixo alguns tipos de velocidades de deriva mais comumente surgidas em magnetoplasmas.

2.1.1 Deriva diamagnética

A deriva diamagnética aparece devido à interação entre a não-homogeneidade espacial e o raio de Larmor. Quando há um gradiente de densidade, as contribuições da corrente das órbitas ciclotrônicas da parte mais densa excedem àquelas que vêm da parte menos densa; um fluxo de corrente aparece. Analogamente, quando o gradiente de temperatura é envolvido, a diferença média das velocidades entre as regiões de temperatura alta e de temperatura baixa acarreta no aparecimento de um fluxo de corrente. Ver Fig. 1.

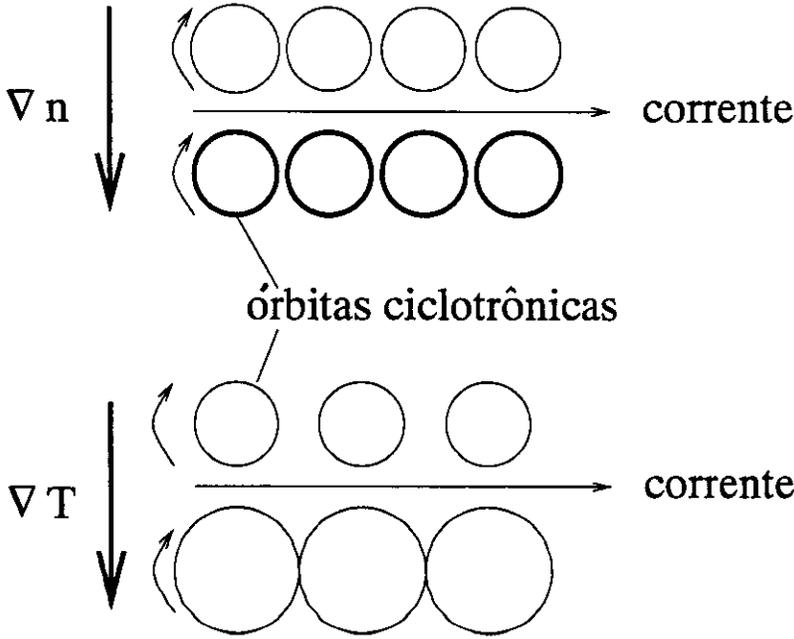


Fig. 1. Correntes diamagnéticas. No gráfico superior a espessura das linhas dos círculos indica o número de partículas contidas em cada órbita, sendo a contribuição da camada de círculo mais espessa, maior que a camada menos densa, implicando em um fluxo de corrente para a direita. No gráfico inferior, a velocidade é maior na região de temperatura mais elevada, resultando no aparecimento de uma corrente.

No caso de considerarmos uma distribuição de velocidade Maxwelliana localizada, a velocidade média das partículas envolvidas, v_D , associada com a corrente diamagnética é [44]

$$v_D = -\frac{cT}{qB^2} \left(\frac{\nabla n}{n} + \frac{\nabla T}{T} \right) \times \mathbf{B}. \quad (10)$$

Como $p = nT$, a equação (10) fica

$$v_D = -\frac{c}{nqB^2} \nabla p \times \mathbf{B}. \quad (11)$$

Portanto, a velocidade de deriva aparece como um resultado do gradiente de pressão.

2.1.2 Efeitos de forças externas constantes

Quando um campo de forças externo é aplicado ao plasma magnetizado, aparece uma deriva de partículas carregadas na direção perpendicular a \mathbf{F} e a \mathbf{B} . A equação de movimento da partícula é

$$m \frac{dv}{dt} = \mathbf{F} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (12)$$

Para as componentes paralelas ao campo magnético, a equação (12) descreve um simples movimento de aceleração constante. Para as componentes perpendiculares ao campo magnético, temos

$$m \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}, \quad (13)$$

onde $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_\perp - \mathbf{v}_F$ é a perturbação da componente perpendicular da velocidade, sendo $\mathbf{v}_F \equiv (c/qB^2)\mathbf{F}_\perp \times \mathbf{B}$. A equação (13) descreve um movimento ciclotrônico trivial. Percebemos que há uma superposição entre o movimento uniforme de deriva \mathbf{v}_F e o movimento ciclotrônico \mathbf{v}_1 .

Para $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, a equação torna-se

$$\mathbf{v}_E = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (14)$$

que é a bem conhecida deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Se a gravidade também é relevante, então

$$\mathbf{v}_g = \frac{mc}{qB^2} \mathbf{g} \times \mathbf{B}, \quad (15)$$

que é a deriva gravitacional [44].

Analisemos agora o significado físico dessas derivas. Para $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, uma partícula gira na direção que depende do sinal da carga. O seu raio é proporcional à v_\perp . Ela é acelerada também pelo campo elétrico. No lado em que a energia cinética da partícula aumenta, devido ao campo elétrico, a órbita da partícula apresenta um raio maior de curvatura. No caso oposto o raio de curvatura é menor. Como consequência, um movimento de deriva aparece. Se há uma inversão do sinal da carga, ambas as direções de giro e de aceleração são invertidas. Logo não há mudança na direção da deriva. Resolvemos a equação (12), considerando a massa dos elétrons igual a 1 e a massa dos prótons igual a 2. Comprovamos graicamente esta solução na Fig. 2. Para a deriva gravitacional a idéia é análoga, mas neste caso, o sinal da carga é importante e a direção da deriva é invertida.

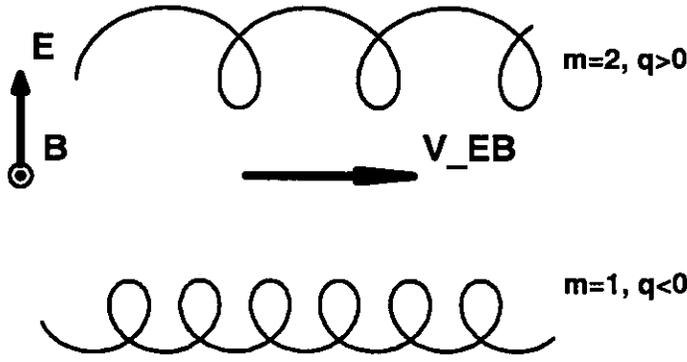


Fig. 2. A deriva $E \times B$ para $m = 1$, a carga negativa e $m = 2$, para a carga positiva, V_{EB} é a velocidade média da deriva $E \times B$.

2.1.3 Deriva devido à curvatura das linhas de força do campo magnético

Quando as linhas do campo magnético que confinam o plasma têm um raio de curvatura finito, podemos observar uma deriva específica a esse problema. Como o raio de curvatura, R é dado por [44]

$$\frac{\mathbf{R}}{R^2} = - \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B}. \quad (16)$$

Uma partícula carregada movendo-se ao longo do campo magnético sofre uma força centrífuga

$$\mathbf{F}_R = mv_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}}{R^2} = 2w_{\parallel} \frac{\mathbf{R}}{R^2}. \quad (17)$$

A curvatura também envolve o gradiente do campo nas direções perpendiculares às linhas de força do campo magnético. Assim, tal gradiente de campo produz uma força efetiva nas direções perpendiculares como dado em

$$\mathbf{F}_G = -\mu_B \nabla_{\perp} \mathbf{B} = -\frac{w_{\perp}}{B} \nabla_{\perp} \mathbf{B}, \quad (18)$$

onde ∇_{\perp} é o operador nas direções perpendiculares ao campo magnético. Invocando $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ para o caso do vácuo, que podemos utilizar aqui por ser uma afirmação bem razoável para um sistema de confinamento de plasma [a) instável; b) estável], encontramos

$$\frac{\nabla_{\perp} \mathbf{B}}{B} = -\frac{\mathbf{R}}{R^2}. \quad (19)$$

Então, considerando as duas forças, (17) e (18), podemos escrever

$$\frac{w_{\perp} + 2w_{\parallel}}{m} \frac{\mathbf{R}}{R^2} = - \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \frac{\nabla_{\perp} \mathbf{B}}{B}, \quad (20)$$

onde w_{\perp} e w_{\parallel} são as energias perpendicular e paralela.

Além disso, podemos dizer que um sistema de confinamento de plasma devido ao campo magnético, como ilustrado na Fig. 3, é instável quando \mathbf{R} está direcionado do plasma para o vácuo, Fig. 3a. Para o caso contrário, o sistema é estável, Fig. 3b.

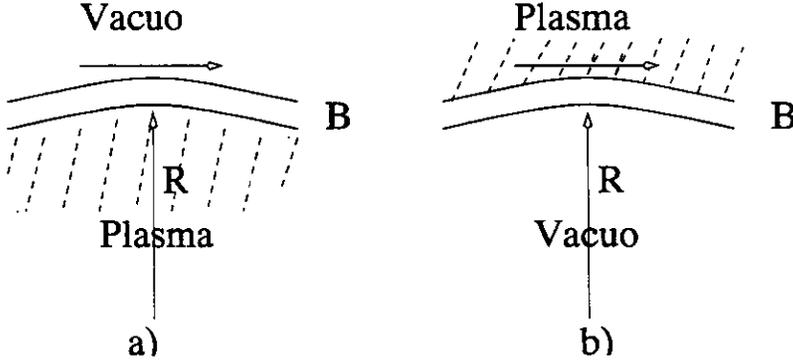


Fig. 3. Estabilidade de um confinamento magnético.

2.1.4 Deriva de polarização

Se tivermos um campo elétrico oscilante em uma direção e um magnético constante em direção perpendicular ao elétrico, iremos presenciar para um sistema de plasma uma deriva oscilante que apresenta duas direções: uma perpendicular a ambos os campos e outra paralela ao campo elétrico. Denominamos de deriva de polarização (“drift polarization”) à componente que se arrasta paralelamente a \mathbf{E} [45].

Supondo $\mathbf{E}(t) = E_0 \hat{y} \cos \omega t$ e $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$, a solução da equação (12) produz uma função que é uma combinação de senos e cossenos com frequências angulares ω e ω_{cj} , onde $\omega_{cj} = q_j B_0 / m_j c$, onde j indica elétrons ou íons. Supondo que $\omega_{cj} \gg \omega$ podemos usar o conceito de centro de guia e cancelar todas as oscilações com frequência ω_{cj} . O resultado desta operação dá como solução da equação (12):

$$\mathbf{v}_{gj} = \frac{1}{m_j (\omega_{cj}^2 - \omega^2)} \left[\omega_{cj} |q_j| E(t) \hat{x} + q_j \frac{d\mathbf{E}(t)}{dt} \right] \quad (21)$$

A componente x é a derivada $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ e a componente y é a chamada deriva de polarização. Observa-se que ambas as componentes oscilam com a frequência ω do campo elétrico \mathbf{E} .

No caso limite de ω ser desprezível em comparação com ω_{cj} teremos

$$\mathbf{v}_{gj} = \frac{|q_j|}{q_j} \frac{c}{B_0} E(t) \hat{\mathbf{x}} + \frac{c^2 m_j}{B_0^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt}. \quad (22)$$

Observamos que em um plasma quasineutro a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ não produz corrente elétrica, pois as contribuições de íons e de elétrons se cancelam. Entretanto, na direção do campo elétrico \mathbf{E} , a deriva de polarização produz a corrente chamada corrente de polarização, dada pela equação (23) no caso de $n_e = n_i = n$; $q_i = -e$

$$\mathbf{j}_p = ne(\mathbf{v}_{ip} - \mathbf{v}_{ep}) = \frac{nc^2}{B_0^2} (m_i + m_e) \frac{d\mathbf{E}}{dt}. \quad (23)$$

A Fig. 4 ilustra o caso em que ω é pequena, mas não desprezível, ou seja, $\omega_{ce} = 1$, $\omega_{ci} = 0.25$, $\omega = 0.03$ e mostramos que neste caso a corrente devido a $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, embora pequena, existe. A corrente de polarização, no entanto é bem maior.

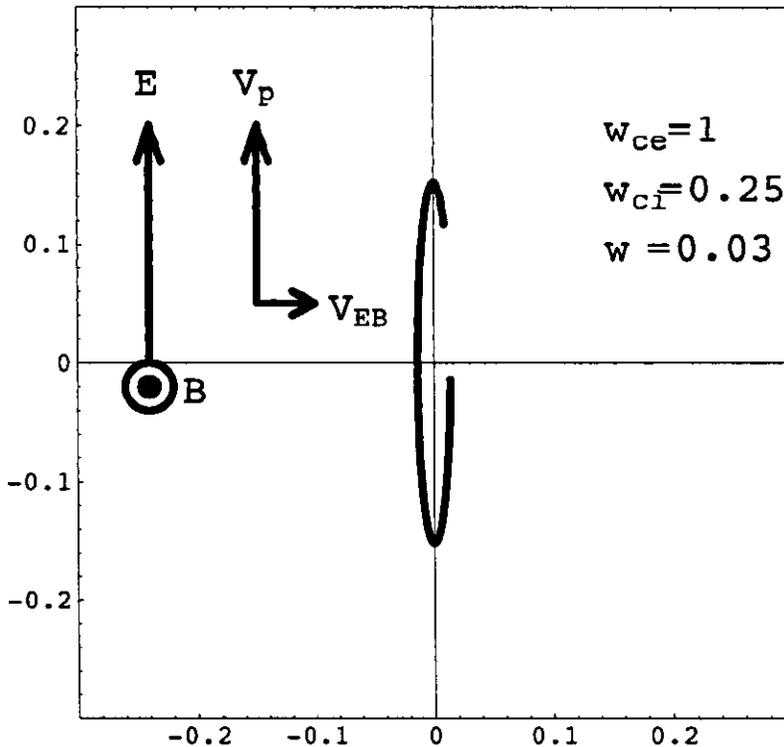


Fig. 4. A deriva de polarização, calculada para $\omega_{ce} = 1$, $\omega_{ci} = 0.25$ e $\omega = 0.03$

Assim, consideramos as derivas mais importantes e gerais para um sistema de plasma magnetizado.

As velocidades de deriva geralmente utilizadas para elétrons e íons são :

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{EB} + \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_{Dj} + \mathbf{v}_{pj} + (v_{j0} + v_{jz}) \frac{\mathbf{B}_\perp}{B_0} + \hat{z}v_{jz}, \quad (24)$$

onde $\mathbf{v}_{EB} = (c/B_0)\hat{z} \times \nabla\phi$, $\mathbf{v}_g = (m/qB_0^2)(\mathbf{g} \times \mathbf{B})$, $\mathbf{v}_{Dj} = -(cT_j/q_jB_0n_j)\hat{z} \times \nabla n_j$, $\mathbf{v}_{pj} = (c/B_0\omega_{cj})[\partial_t + v_{j0}\partial_z - \mu_j\nabla_\perp^2 + (\mathbf{v}_{EB} + \mathbf{v}_{Dj}) \cdot \nabla + \mathbf{v}_g \cdot \nabla + v_{jz}\partial_z]\nabla_\perp\phi$ são as velocidades de deriva de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, gravitacional, diamagnética e de polarização, respectivamente. Aqui, μ_j é a giro-viscosidade da espécie j . No caso de considerarmos um plasma girante, podemos acrescentar em (24) $\mathbf{v}_R \cdot \nabla$, que representa a velocidade rotacional de deriva do plasma, $\mathbf{v}_R = c\mathbf{E}_r \times \hat{z}/B_0$, onde $\mathbf{E}_r(r) = -B_0\Omega r/c$ é o campo elétrico radial no equilíbrio, sendo $\Omega = \Omega\hat{\theta}$ a velocidade angular constante do plasma [46].

A componente paralela da perturbação do fluido de velocidade dos elétrons é obtida através da lei de Ampère.

$$v_{ez} \approx (c/4\pi n_e)\nabla_\perp^2 A_z. \quad (25)$$

2.2 Como obter as soluções lineares e não-lineares gerais?

Obedecendo sempre as características do plasma, ou também, dependendo da faixa de frequência que estamos analisando, vários termos podem ser desprezados. Nós substituímos (24) nas equações de continuidade (4) e de momento (3). Considerando também (25), derivamos as equações não-lineares das espécies “ j ” na presença dos campos eletromagnéticos.

Dependendo do número de variáveis que caracterizam o sistema em análise, suplementamos o sistema de equações de acordo com o modelo. Por exemplo na Ref. [12, 46], utilizamos a equação de conservação da densidade de corrente $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Um dos pontos mais importantes na configuração dos modelos de multi-fluidos é a condição de neutralidade de carga no equilíbrio. Por exemplo, nos modelamentos de plasma com grãos de poeira carregados a condição de quase-neutralidade é

$$n_{i0} = n_{e0} + Z_{d0}n_{d0}, \quad (26)$$

onde Z_{d0} representa o número de cargas negativas carregadas ao grão de poeira no equilíbrio e n_{d0} é o número de densidade dos grãos no equilíbrio.

Para a Ref. [12], plasma com dois íons, a condição de quase-neutralidade no equilíbrio é

$$n_{e0} = Z_i^l n_{i0}^l + Z_i^h n_{i0}^h, \quad (27)$$

onde o superescrito l (h) significa a componente do íon mais leve (pesado) e Z_i a carga dos íons.

Após obtermos as equações dinâmicas não-lineares, através da linearização e da transformação de Fourier das equações, obtemos a relação de dispersão do plasma. Analiticamente várias aproximações são necessárias para a obtenção de uma solução. Mas, geralmente, obtemos uma visão razoável das condições de estabilidade e instabilidade do sistema do plasma em estudo. Como expressado em [9, 10, 11, 12, 46, 47].

A solução não-linear é mais complexa. Analisamos dois tipos de solução: a solução para estruturas coerentes, (no nosso caso, vórtices) e para estruturas caóticas. Nos nossos modelos encontramos como solução de estruturas regulares, em relação à ordem, três tipos de vórtice: vórtices dipolares, cadeias de vórtices [9, 10, 12, 46] e vórtices duplos [12]. Na Ref. [47] discutimos um interessante tema pouco discutido pela literatura científica, ou seja, os perfis de equilíbrio para a geração de vórtices, que criam campos magnéticos espontâneos.

Apesar de não podermos obter a solução geral das equações não-lineares que originam os vórtices, podemos discutir algumas soluções estacionárias levando em conta algumas limitações. Nós devemos apresentar soluções considerando que $(\partial/\partial x)n_{j0} = 0$, $(\partial/\partial t) \ll \omega'_{ci}$ e $(\partial/\partial t) \ll \nabla_{\perp}^2$. Estas são as três condições básicas, além de algumas mais peculiares ao sistema em estudo. Um novo espaço de referência é introduzido, $\xi = y + \alpha - ut$, onde α e u são constantes. Consideramos que ϕ e A_z são funções de ξ e x somente. A introdução deste novo espaço em um meio não-homogêneo é bem conhecido para os casos em que estão presentes vórtices de Rossby e de deriva (“Rossby” e “drift-vortices”).

Por outro lado, também podemos obter soluções caóticas, dependendo dos parâmetros adotados no plasma. Para analisar o comportamento temporal, podemos aplicar a equação de Lorenz, com o objetivo de analisar a interação entre duas ondas eletromagnéticas bi-dimensionais em um magnetoplasma colisional onde não consideramos gradientes de densidade [9, 11, 13].

Capítulo 3. Dinâmica não-linear de ondas eletromagnéticas em plasmas magnetizados não uniformes

3.1 Modelo teórico

Nesta tese nós consideramos a propagação não-linear das ondas eletromagnéticas de baixa-freqüência (em comparação com a girofreqüência dos elétrons $\omega_{ce} = eB_0/m_e c$, onde e é a magnitude da carga eletrônica, B_0 é a magnitude do campo magnético externo, m_e é a massa do elétron e c é a velocidade da luz) em um plasma magnetizado não uniforme contendo um gradiente de densidade no equilíbrio $\partial n_0/\partial x$ e um gradiente de velocidade no equilíbrio $\partial v_{k0}/\partial x$, onde n_0 é a densidade de número do plasma no equilíbrio, v_{k0} é a velocidade não perturbada do fluxo das partículas de espécie k (k igual a e para os elétrons e i para os íons) alinhada ao campo magnético. A direção do campo magnético não perturbado segue o eixo z , $B_0\hat{z}$; \hat{z} é o vetor unitário ao longo deste eixo. Consideramos desprezíveis as correntes no equilíbrio produzidas pela diferença entre as velocidades de deriva dos elétrons e dos íons que levam a um pequeno cisalhamento do campo magnético no equilíbrio. Podemos dizer, por exemplo, que encontramos esse fato em fenômenos locais na ionosfera terrestre e em laboratórios de plasma, onde a componente principal do campo magnético é milhares de vezes maior do que a componente de cisalhamento do campo magnético. Afirmamos, também, que o gradiente de densidade no equilíbrio é mantido por campos externos (campos elétricos externos, forças gravitacionais, etc.), apesar que tais fontes não sejam requeridas para a existência de $\nabla\mathbf{v}_{k0}$, pois $\mathbf{v}_{k0} \cdot \nabla\mathbf{v}_{k0} \equiv 0$ e $\mathbf{v}_{k0} \times \mathbf{B}_0 \equiv 0$ quando $\mathbf{v}_{k0} = \hat{z}v_{k0}(x)$. Assim, a injeção não uniforme de partículas carregadas ao longo das linhas do campo magnético externo criam os fluxos de cisalhamento.

Neste modelo, o campo elétrico é tratado em função dos potenciais como

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \\ \mathbf{E}_{\perp} &= -\nabla_{\perp}\phi, \end{aligned} \tag{28}$$

onde os subscritos \parallel e \perp são as componentes paralela e perpendicular em relação ao campo magnético, respectivamente.

Para os campos magnéticos de baixa-freqüência e comprimentos de onda longos (em comparação com o raio de giro dos elétrons ρ_e) em um plasma isotérmico, a perturbação

da velocidade do fluido dos elétrons é dada por

$$\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v}_{EB} + \mathbf{v}_{De} + \mathbf{v}_{pe} + (v_{e0} + v_{ez})\mathbf{B}_\perp/B_0 + \hat{\mathbf{z}}v_{ez}, \quad (29)$$

onde $\mathbf{v}_{EB} = (c/B_0)\hat{\mathbf{z}} \times \nabla\phi$, $\mathbf{v}_{De} = -(cT_e/eB_0n_e)\hat{\mathbf{z}} \times \nabla n_e$ e $\mathbf{v}_{pe} = (c/B_0\omega_{ce})[\partial_t + v_{e0}\partial_z - \mu_e\nabla_\perp^2 + (\mathbf{v}_{EB} + \mathbf{v}_{De}) \cdot \nabla + v_{ez}\partial_z]\nabla_\perp\phi$. A temperatura dos elétrons T_e é constante, $\mu_e = 0.51\nu_e\rho_e^2$ é a giro-viscosidade dos elétrons, onde ν_e é a frequência de colisão dos elétrons, $\rho_e = \sqrt{T_e/m_e/\omega_{ce}}$ o raio de giro eletrônico e $\mathbf{B}_\perp = \nabla A_z \times \hat{\mathbf{z}}$ é a perturbação do campo magnético bi-dimensional.

Devido às mudanças que acontecem nas linhas de força do campo magnético, aparece um modo que se comporta como um campo elétrico de corrente contínua. Este é o efeito que a giroviscosidade provoca. Quando o comprimento de onda da perturbação é maior do que o raio de giro dos elétrons, este modo tem um tempo de vida longo e pode até a causar uma convecção macroscópica no plasma. Entretanto, quando o comprimento de onda já é comparável ao raio de giro dos elétrons, este modo amortece rapidamente e não causa problema nenhum. Na presença de um campo magnético os componentes do tensor “stress”, $\pi_{\alpha\beta}$ têm o seguinte sistema de coordenadas com o eixo z paralelo ao campo magnético [43]:

$$\begin{aligned} \pi_{zz} &= -\eta_0 W_{zz}, \\ \pi_{xx} &= -\frac{\eta_0}{2}(W_{xx} + W_{yy}) - \frac{\eta_1}{2}(W_{xx} - W_{yy}) - \eta_3 W_{xy}, \\ \pi_{yy} &= -\frac{\eta_0}{2}(W_{xx} + W_{yy}) - \frac{\eta_1}{2}(W_{yy} - W_{xx}) + \eta_3 W_{xy}, \\ \pi_{xy} &= \pi_{yx} = -\eta_1 W_{xy} + \frac{\eta_3}{2}(W_{xx} - W_{yy}), \\ \pi_{xz} &= \pi_{zx} = -\eta_2 W_{xz} - \eta_4 W_{yz}, \\ \pi_{yz} &= \pi_{zy} = -\eta_2 W_{yz} + \eta_4 W_{xz}. \end{aligned} \quad (30)$$

Aqui, $W_{\alpha\beta} = \partial V_\alpha / \partial x_\beta + \partial V_\beta / \partial x_\alpha - (2/3)\delta_{\alpha\beta} \nabla \cdot \mathbf{V}$ representa a taxa de força do tensor. Os coeficientes de viscosidade eletrônica, η^e , são ($Z = 1$)

$$\begin{aligned} \eta_0^e &= 0.73n_e T_e \nu_e \\ \eta_1^e &= 0.51 \frac{n_e T_e \nu_e}{\omega_{ce}^2} \\ \eta_2^e &= 4\eta_1^e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_3^e &= -\frac{1}{2} \frac{n_e T_e}{\omega_{ce}} \\ \eta_4^e &= 4\eta_3^e.\end{aligned}\quad (31)$$

Se $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\partial_z \mathbf{v} = 0$ os termos que contém η_0^e em π desaparecem. Além disto η_1^e domina sobre o resto nos casos de nosso interesse. Então, chegamos ao valor da giroviscosidade $\mu_e = \eta_1^e / (m_e n_e) = 0.51 \nu_e \rho_e^2$, como já acima assinalado.

Adotando a aproximação de β baixo, desprezamos a parte compressional do campo magnético perturbado ao longo da direção $\hat{\mathbf{z}}$. Lembramos que a componente paralela da velocidade da perturbação do fluido eletrônico é

$$v_{ez} \approx (c/4\pi n_e e) \nabla_{\perp}^2 A_z. \quad (32)$$

Para a dedução específica das equações não-lineares modo-acopladas dos elétrons na presença do campo eletromagnético, nós substituímos a equação (29) na equação de continuidade e fazendo uso da equação (32), obtemos radialmente no limite em que $\rho_e^2 \nabla^2 \ll 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t \left(n_{e1} + \frac{cn_0}{B_0 \omega_{ce}} \nabla_{\perp}^2 \phi \right) - D_c \nabla_{\perp}^2 n_{e1} - \frac{cn_0}{B_0 \omega_{ce}} \mu_e (\nabla_{\perp}^2)^2 \phi - \frac{c}{B_0} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla n_0 \cdot \nabla \phi \\ - \frac{1}{B_0 e} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla j_{e0} \cdot \nabla A_z + \frac{c}{4\pi e} \mathcal{L}_z \nabla_{\perp}^2 A_z = 0,\end{aligned}\quad (33)$$

onde $\mathcal{L}_t \equiv \partial_t + v_{e0} \partial_z + \mathbf{v}_{EB} \cdot \nabla + v_{ez} \partial_z$, $\mathcal{L}_z = \partial_z + B_0^{-1} \nabla A_z \times \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla$, $j_{e0} = -n_0 e v_{e0}$, $D_c = \nu_e \rho_e^2$ é o coeficiente de difusão eletrônica e $n_{e1} (= n_e - n_0 \ll n_0)$ é a densidade de número perturbada dos elétrons.

Analogamente se nós substituirmos a componente paralela do campo elétrico $E_z = -\partial_z \phi - c^{-1} \partial_t A_z$ na componente paralela da equação de momento resistiva dos elétrons e, novamente, usando (29) e (32), obteremos, então

$$(d_t + \mathbf{v}_{D0} \cdot \nabla) A_z - \lambda_e^2 (\mathcal{L}_t + \nu_e) \nabla_{\perp}^2 A_z + c(\partial_z + \mathbf{S}_{v0} \cdot \nabla) \phi - (cT_e/en_0) \mathcal{L}_z n_{e1} = 0, \quad (34)$$

onde $d_t = \partial_t + \mathbf{v}_{EB} \cdot \nabla$, $\mathbf{v}_{D0} = -(cT_e/eB_0n_0) \hat{\mathbf{z}} \times \nabla n_0$ é a velocidade de deriva diamagnética dos elétrons no equilíbrio, $\lambda_e = c/\omega_{pe}$ é a profundidade de penetração não-colisional dos elétrons, $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m_e}$ é a frequência de plasma eletrônica e $\mathbf{S}_{v0} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla v_{e0}/\omega_{ce}$. Notamos que o termo $\lambda_e^2 \mathcal{L}_t \nabla_{\perp}^2 A_z$ em (34) é a contribuição linear e não-linear das forças inerciais dos elétrons.

Agora consideraremos dois tipos de resposta do plasma. Primeiro, quando o período da onda é mais curto do que os dos giro-períodos dos íons e do plasma de fundo. Assim,

os íons podem ser considerados como fundo do plasma e eles não têm tempo para responder às perturbações eletromagnéticas. Dentro deste contexto, os fenômenos lineares e não-lineares ocorrem em escalas muito mais baixas do que o comprimento de inércia dos íons c/ω_{pi} , onde a dinâmica do plasma é governada pelos fluxos eletrônicos e seus campos magnéticos auto-consistentes. Neste caso, podemos aproximar, usando a equação de Poisson, n_{e1} para $(1/4\pi e)\nabla^2\phi$ e escrever as equações (33) e (34) para as perturbações de comprimento de onda longo como

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_t \left(\nabla^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \nabla_{\perp}^2 \right) \phi - D_c \left(\nabla^2 + 0.51 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \nabla_{\perp}^2 \right) \nabla_{\perp}^2 \phi - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 \omega_{ce}} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla n_0 \cdot \nabla \phi \\ & - \frac{4\pi}{B_0} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla j_{e0} \cdot \nabla A_z + c \mathcal{L}_z \nabla_{\perp}^2 A_z = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

e

$$(d_t + \mathbf{v}_{D0} \cdot \nabla) A_z - \lambda_e^2 (\mathcal{L}_t + \nu_e) \nabla_{\perp}^2 A_z + c(\partial_z + \mathbf{S}_{v0} \cdot \nabla) \phi - c \lambda_{De}^2 \mathcal{L}_z \nabla^2 \phi = 0. \quad (36)$$

Considerando agora, as ondas com comprimento de onda curto (em relação ao raio de giro ρ_i e $\lambda_{Di}^2 \gg \lambda_{\perp}^2$), $n_i \approx n_0 \exp(-e\phi/T_i)$ é a densidade de número dos íons, onde T_i é a temperatura constante dos íons. Portanto, da equação de Poisson nós temos $n_e = (1/4\pi e)[\nabla^2\phi + (T_i\lambda_{Di}^{-2}/e) \exp(-e\phi/T_i)]$, onde $\lambda_{Di} = (T_i/4\pi n_0 e^2)^{1/2}$ é o comprimento de onda Debye. Analogamente podemos obter para este caso das equações (33) e (34)

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_t \left(1 - \rho_a^2 \nabla_{\perp}^2 \right) \phi - D_c (1 - 0.51 \rho_a^2 \nabla_{\perp}^2) \nabla_{\perp}^2 \phi + \rho_a^2 \frac{\omega_{ce}}{n_0} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla n_0) \cdot \nabla \phi \\ & + \frac{4\pi \lambda_{Di}^2}{B_0} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla j_{e0}) \cdot \nabla A_z - c \lambda_{Di}^2 \mathcal{L}_z \nabla_{\perp}^2 A_z = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

e

$$(d_t + \mathbf{v}_{D0} \cdot \nabla) A_z - \lambda_e^2 (\mathcal{L}_t + \nu_e) \nabla_{\perp}^2 A_z + c(\partial_z + \mathbf{S}_{v0} \cdot \nabla) \phi + c\sigma \mathcal{L}_z \phi = 0. \quad (38)$$

onde $\rho_a = c_a/\omega_{ce}$, $c_a = (T_i/m_e)^{1/2}$ é a velocidade elétron-acústica e $\sigma = T_e/T_i$. Em (37), consideramos que $\nabla^2 \lambda_{Di}^2 \ll 1$ e que $\partial_t \phi^2 \ll \omega_{ce} \rho_a^4 |\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \phi \cdot \nabla \nabla_{\perp}^2 \phi|$.

As equações (35) e (36) governam a dinâmica não-linear para as ondas “longas”, enquanto que (37) e (38) para as ondas “curtas” em um plasma magnetizado resistivo não uniforme apresentando fluxos de cisalhamento. Agora podemos dizer que (35)–(38) governam e percorrem todo o espectro dos distúrbios do sistema, na forma de ondas eletromagnéticas modo-acopladas. Assim, é possível ter a transferência de energia em cascata

da região de ondas curtas para o setor de ondas longas do espectro, devido à interação não-linear das oscilações de comprimento de onda curto. Assim, a física de interação modulada [15] permanece válida em relação ao nosso formalismo. Por exemplo, em plasma com íons fixos de fundo, os modos de deriva para o elétron magnetizado poderiam ser excitados não-linearmente por células convectivas de elétrons do tipo Alfvénico. O acoplamento entre os modos de deriva de elétrons magnetizados e as células convectivas de elétrons do tipo Alfvénico têm uma influência muito grande na magnetohidrodinâmica eletrônica (EMHD) [9], onde o fenômeno não-linear ocorre em uma escala de tempo curto (em comparação com os íons e os seus giro-períodos) considerando escalas típicas da ordem da profundidade de penetração não-colisional dos elétrons.

3.2 Ondas lineares e relação de dispersão

Considerando os modos de onda “longos” e “curtos”, vamos derivar as relações de dispersão, mas sem levar em conta a influência dos termos não-lineares das equações dinâmicas e afirmamos que, os comprimentos de onda das perturbações são muito menores do que a escala de comprimento de gradientes da velocidade e da densidade no equilíbrio. As equações são Fourier-transformadas, supondo que as quantidades perturbadas ϕ e A_z são proporcionais a $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, onde \mathbf{k} e ω são o vetor de onda e a frequência, respectivamente. Assim, (35) e (36) ficam

$$(\Omega - \omega_{c*} + i\Gamma_c)\phi = \left(\frac{4\pi j_{e0}}{B_0} \mathbf{k}_J \cdot \mathbf{k} + ck_z k_\perp^2 \right) k_0^{-2} A_z, \quad (39)$$

e

$$\left(\omega - \frac{k_z v_{e0} b_e}{1 + b_e} - \omega_{m*} + i\Gamma_m \right) A_z = (1 + b_e)^{-1} c (k_z + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0}) \phi, \quad (40)$$

onde $\Omega = \omega - k_z v_{e0}$, $\omega_{c*} = a\omega_{ce} \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{k} / k_0^2$, $a = \omega_{pe}^2 / \omega_{ce}^2$, $k_0^2 = k^2 + ak_\perp^2$, $\mathbf{k}_n = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \ln n_0$, $\mathbf{k}_J = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \ln j_{e0}$, $\Gamma_c = (k^2 + 0.51ak_\perp^2) D_c k_\perp^2 / k_0^2$, $\omega_{m*} = \omega_{e*} / (1 + b_e)$, $\omega_{e*} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{D0}$, $b_e = k_\perp^2 \lambda_e^2$, $\Gamma_m = b_e \nu_e / (1 + b_e)$ e $k_\perp^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$.

Combinando (39) e (40), obtemos a relação de dispersão linear para as ondas eletromagnéticas de comprimento de onda longo

$$(\Omega - \omega_{c*} + i\Gamma_c)[\omega + b_e \Omega - \omega_{e*} + ib_e \nu_e] = \frac{c}{k_0^2} \left(\frac{4\pi j_{e0}}{B_0} \mathbf{k}_J \cdot \mathbf{k} + ck_z k_\perp^2 \right) (k_z + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0}). \quad (41)$$

A equação (41) exibe um acoplamento linear entre as células convectivas de deriva dos elétrons (o primeiro termo entre parênteses no lado esquerdo) e os modos de deriva magnetostáticos (o termo entre colchetes no lado esquerdo), devido ao k_z finito e o fluxo de cisalhamento no equilíbrio. Na ausência do último, os dois modos degeneram e obtemos $\omega = \omega_{c*} - i\Gamma_c$ e $\omega = (\omega_{e*} - ib_e\nu_e)/(1 + b_e)$, que são modos eletromagnéticos normais amortecidos do plasma de elétrons magnetizados que contém um gradiente de densidade no equilíbrio.

Por outro lado, para os modos eletromagnéticos de comprimento de onda curto, as equações (37) e (38) tornam-se

$$(\Omega - \omega_{i*} + i\Gamma_s)\phi = \frac{\lambda_{Di}^2}{1 + b_a} \left(\frac{4\pi j_{e0}}{B_0} \mathbf{k}_J \cdot \mathbf{k} + k_z c k_\perp^2 \right) A_z, \quad (42)$$

e

$$\left(\omega - \frac{k_z v_{e0} b_e}{1 + b_e} - \omega_{m*} + i\Gamma_m \right) A_z = (1 + b_e)^{-1} c [(1 + \sigma)k_z + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0}] \phi, \quad (43)$$

onde $\omega_{i*} = \rho_a^2 \omega_{ce} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_n / (1 + b_a)$, $b_a = k_\perp^2 \rho_a^2$ e $\Gamma_s = D_c (1 + 0.51 b_a) k_\perp^2 / (1 + b_a)$.

Combinando (42) e (43), nós obtemos a equação de dispersão linear para as ondas eletromagnéticas de comprimento de onda curto

$$(\Omega - \omega_{i*} + i\Gamma_s) (\omega + b_e \Omega - \omega_{e*} + ib_e \nu_e) = \frac{c \lambda_{Di}^2}{1 + b_a} \left(\frac{4\pi j_{e0}}{B_0} \mathbf{k}_J \cdot \mathbf{k} + c k_z k_\perp^2 \right) \times [(1 + \sigma)k_z + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0}]. \quad (44)$$

A equação (44) nos mostra que um k_z finito e um fluxo de cisalhamento podem causar um acoplamento linear entre os modos de deriva de íons (o primeiro termo no lado esquerdo no parênteses) e magnetostáticos. Na ausência do fluxo de equilíbrio, a frequência da onda de deriva dos íons amortecida do tipo flauta é $\omega = \omega_{i*} - i\Gamma_s$.

Para as perturbações do tipo flauta ($k_z = 0$), as equações (41) e (44) tornam-se, respectivamente

$$(\omega - \omega_{c*} + i\Gamma_c)(\omega - \omega_{m*} + i\Gamma_m) = \frac{k_y^2 \omega_{pe}^2}{k_\perp^2 (1 + a)(1 + b_e) \omega_{ce}^2 n_0 e} \frac{\partial v_{e0}}{\partial x} \frac{\partial j_{e0}}{\partial x}, \quad (45)$$

e

$$(\omega - \omega_{i*} + i\Gamma_s)(\omega - \omega_{m*} + i\Gamma_m) = \frac{k_y^2 \lambda_{Di}^2 \omega_{pe}^2}{(1 + b_a)(1 + b_e) \omega_{ce}^2 n_0 e} \frac{\partial v_{e0}}{\partial x} \frac{\partial j_{e0}}{\partial x}. \quad (46)$$

Na ausência do gradiente de densidade no equilíbrio ($\omega_{c*} = \omega_{i*} = \omega_{m*} = 0$) e da dissipação, as equações (45) e (46) admitem instabilidades puramente crescentes se os

gradientes de velocidade e de corrente opõem-se entre si. As taxas de crescimento para modos com comprimento de onda longo e curto são, respectivamente,

$$\gamma_c \approx \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}} \left[\frac{1}{(1+a)(1+b_e)n_0e} \right]^{1/2} \left| \frac{\partial v_{e0}}{\partial x} \frac{\partial j_{e0}}{\partial x} \right|^{1/2}, \quad (47)$$

e

$$\gamma_s \approx k_y \lambda_{Di} \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}} \left[\frac{1}{(1+b_a)(1+b_e)n_0e} \right]^{1/2} \left| \frac{\partial v_{e0}}{\partial x} \frac{\partial j_{e0}}{\partial x} \right|^{1/2}. \quad (48)$$

É evidente que das equações (47) e (48) as taxas de crescimento são diretamente proporcionais à raiz quadrada do produto dos gradientes da velocidade e da corrente de equilíbrio. Assim, o fluxo de cisalhamento no equilíbrio é o responsável pela instabilidade.

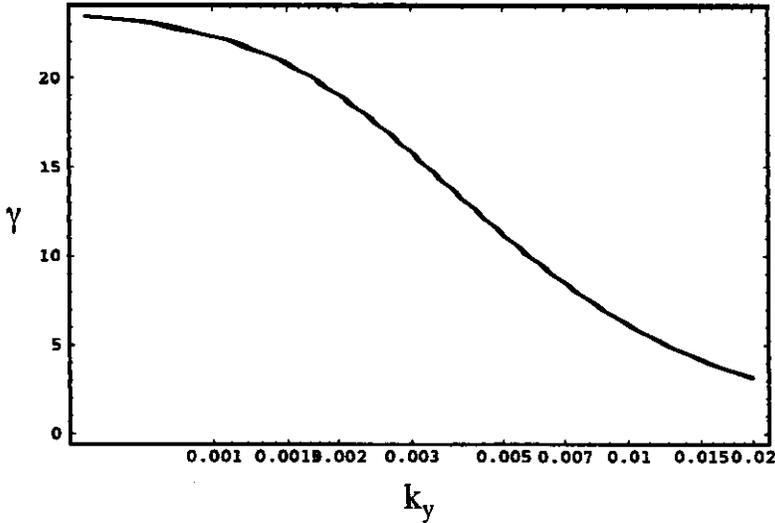


Fig. 5. Taxa de crescimento para os modos de comprimento de onda longo. As maiores instabilidades são para k_y baixo e vai diminuindo na medida que se dirige aos valores mais altos de k_y .

Na Fig. 5 vemos a taxa de crescimento para as ondas longas, equação (48). Notamos que há uma instabilidade maior para os números de onda de menor valor. O efeito do fluxo torna-se mais fraco para os valores de k_y maiores.

Para entender o efeito do k_z finito e da não-homogeneidade, nós reescrevemos (41) e (44), dizendo que $\omega \gg k_z v_{e0}, \Gamma_c, \Gamma_m$. Assim, em um plasma sem colisões, nós temos, respectivamente

$$\omega^2 - (\omega_{c*} + \omega_{m*})\omega + \omega_{c*}\omega_{m*} - S_l = 0, \quad (49)$$

onde $S_l = [c/k_0^2(1 + b_e)][(4\pi k_y(\partial j_{e0}/\partial x)/B_0) + ck_z k_\perp^2][k_z + k_y(\partial v_{e0}/\partial x)/\omega_{ce}]$ e

$$\omega^2 - (\omega_{i*} + \omega_{m*})\omega + \omega_{i*}\omega_{m*} - S_s = 0, \quad (50)$$

onde $S_s = [c\lambda_{Di}^2/(1+b_a)(1+b_e)][(4\pi k_y(\partial j_{e0}/\partial x)/B_0) + ck_z k_\perp^2][(1+\sigma)k_z + k_y(\partial v_{e0}/\partial x)/\omega_{ce}]$.

Ambas as ondas eletromagnéticas “longas” e “curtas” são estáveis quando S_l e S_s são positivos. Entretanto, para $S_l, S_s < 0$ e $|S_l| > (\omega_{c*} - \omega_{m*})^2/4$ e $|S_s| > (\omega_{i*} - \omega_{m*})^2/4$, as equações (49) e (50) prevêm instabilidades de corrente convectiva oscilatórias. Fisicamente, estas instabilidades aparecem porque na presença do gradiente de velocidade da componente paralela da velocidade perturbada dos elétrons e do potencial da onda há um defasamento, tão longo quanto os comprimentos de onda que são extremamente grandes.

Notamos, também, que existem instabilidades resistivas quando $\omega_{m*}, k_z v_{e0} \ll \omega \ll b_e \nu_e$. Neste caso, (41) e (44) levariam a $\omega = \omega_{c*} - i\Gamma_c - iS_l/\nu_e b_e$ e $\omega = \omega_{i*} - i\Gamma_s - iS_s/\nu_e b_e$, respectivamente. Logo, para $S_l, S_s < 0$ e $|S_l| > \nu_e b_e \Gamma_c$ e $|S_s| > \nu_e b_e \Gamma_s$ temos a excitação de células convectivas de deriva de elétrons de escala longa e ondas de deriva de íons em plasmas não uniformes colisionais. Além disso, notamos que os modos magnéticos de deriva também tornam-se instáveis se $|\omega - \omega_{c*}| \ll \Gamma_c$, $|\omega - \omega_{i*}| \ll \Gamma_s$ e $S_l, S_s < 0$. As taxas de crescimento acima do limite são $|S_l|/\Gamma_c$ e $|S_s|/\Gamma_s$, respectivamente.

Analisemos agora o espectro para as ondas curtas, considerando a temperatura dos íons maior que a temperatura dos elétrons, $T_i > T_e$. Para este caso específico estudamos detalhadamente as propriedades lineares do sistema. Como temos um conjunto de íons quentes, então o raio de Larmor, ρ_i , torna-se uma medida importante, pois não podemos desprezá-lo em relação às dimensões perpendiculares ao campo magnético. Na maioria dos sistemas experimentais com uma razão ρ_i/L_α (L_α sendo a dimensão característica das não-homogeneidades) grande, suficiente para termos $(v_A/c)^2 < (\rho_i/L_\alpha)^2$, a instabilidade do tipo flauta é estabilizada. O efeito da instabilidade eletrônica-acústica pode provocar difusão anômala.

Mostramos na Fig. 6 o acoplado modos de onda curta ω versus k_z com $k_y = -0.2 \text{ cm}^{-1}$, que dá o valor máximo da taxa de crescimento ω_i no plasma. Notamos que o acoplamento inicia-se em $k_z \approx 0$ e termina em $k_z = 0.00015$. A linha cheia representa a parte real ω_r que percebemos ser uma onda eletrônica-acústica e a parte imaginária ω_i , linha tracejada,

representa a taxa de crescimento. Para este caso, $T_e = 1,0 \text{ eV}$, $T_i = 10,0 \text{ eV}$, $n_e = n_i = 2 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$, $B_0 = 0,4 \times 10^{-4} \text{ G}$.

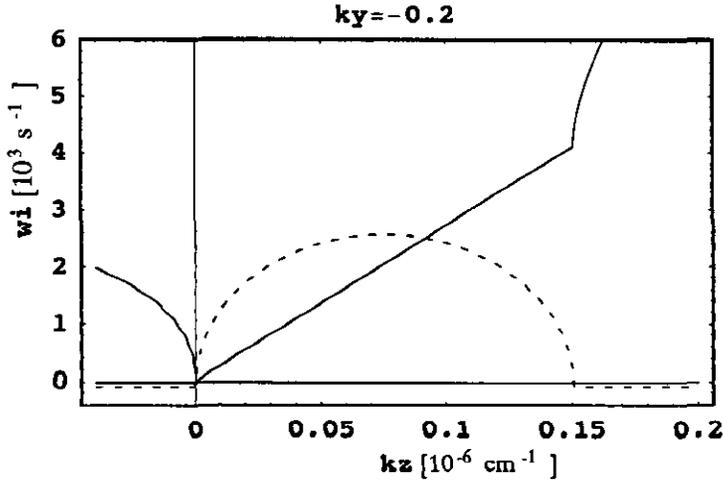


Fig. 6. Acoplamento entre modos formado por uma onda eletrônica-acústica (linha cheia) e a taxa de crescimento (linha tracejada) para $k_y = -0.2 \text{ cm}^{-1}$ é o valor para o qual a taxa de crescimento é máxima.

A Fig. 7 nos mostra a taxa de crescimento máxima em k_z para cada valor da componente perpendicular do número de onda k_y . Percebemos que o máximo deste gráfico acontece em $k_y = \pm 0.2 \text{ cm}^{-1}$, cujo modo é mostrado na Fig. 6. Em $k_y \approx 0$ observamos uma aparente descontinuidade. Acontece que neste ponto onde o comprimento de onda perpendicular vai para infinito, a aproximação não vale, o que mostra a coerência da análise analítica e numérica em relação à teoria. Esta instabilidade só é válida para modos com comprimento de onda curto.

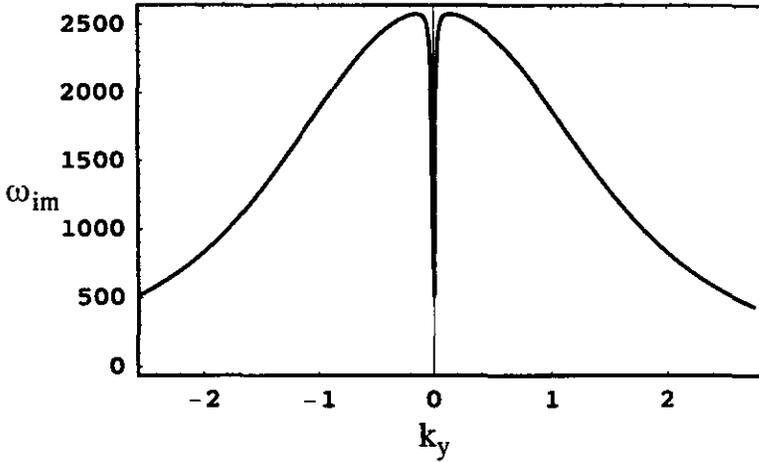


Fig. 7. Taxa de crescimento máxima ω_i em k_z como função do número de onda k_y . Para melhor visualização, o ponto do valor máximo da taxa de crescimento na Fig. 6 é o ponto $k_y = 0.2 \text{ cm}^{-1}$ onde $\omega_{im} = 2,6 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ e $k_{zm} = 0,75 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$.

Plotamos na Fig. 8 os valores das frequências nos pontos de máxima taxa de crescimento do modo eletrôn-acústico ω_{rm} em relação à k_y . Notamos que este modo apresenta simetria em relação à origem. O mesmo acontece na Fig. 9, onde plotamos os valores de k_z quando ω_i atinge o seu valor máximo $\omega_{im} = \omega_i(k_{zm})$.

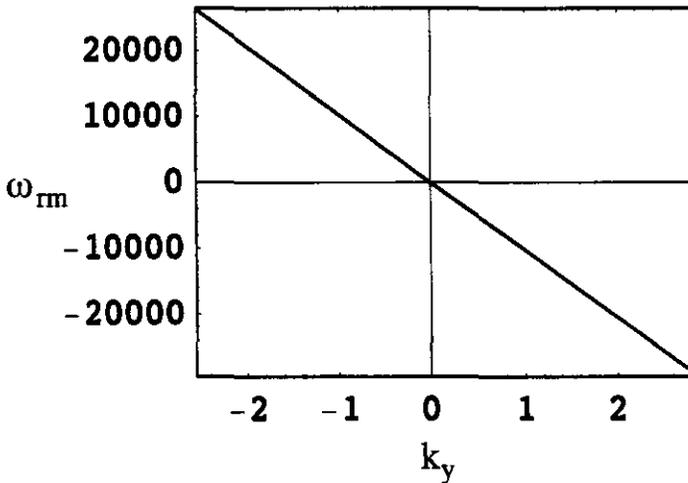


Fig. 8. Parte real de ω para a parte imaginária máxima em função de k_y . $T_i = 10T_e = 10 \text{ eV}$

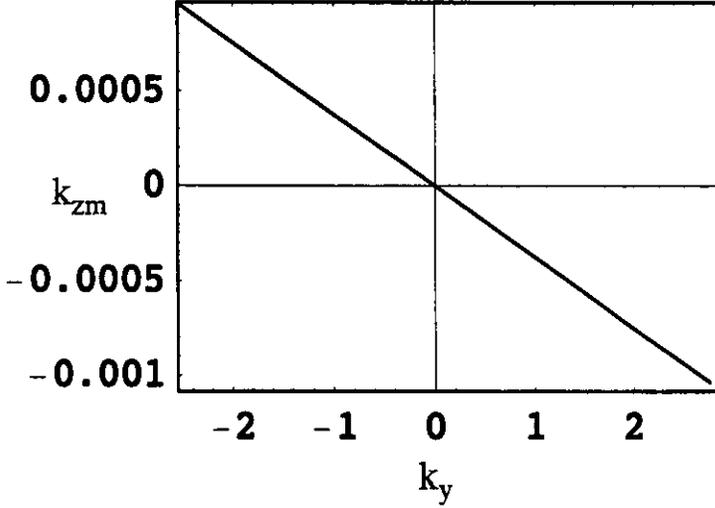


Fig. 9. Mostra a relação entre os valores da componente paralela do número de onda k_{zm} , onde a taxa de crescimento é máxima para cada valor de k_y .

3.3 Ondas não-lineares

Na seção anterior, vimos que o gradiente de velocidade pode causar a instabilidade das ondas eletromagnéticas. A interação não-linear entre os modos de amplitude finita podem ser os responsáveis para a formação de estruturas ordenadas ou caóticas, dependendo do estado dos parâmetros. Apesar da solução geral estacionária e da solução não-estacionária das equações (35)–(38), não poderem ser encontradas analiticamente, discutimos aqui algumas soluções aproximadas. Primeiro, apresentamos as soluções para os vórtices de um sistema magnetizado não homogêneo e dissipativo, dizendo que $c\omega_{ce}|\nabla_{\perp}^2 A_z \partial_z| \ll \omega_{pe}^2 |\hat{z} \times \nabla \phi \cdot \nabla|$ e $\partial_z^2 \ll \nabla_{\perp}^2$. Especificamente, nós procuramos soluções não-lineares localizadas que se deslocam em um referencial inercial, definido por $\xi = y + \alpha z - ut$. Agora ϕ e A_z estão em função de x e ξ somente.

3.3.1 Vórtices de ondas longas

No quadro estacionário, as equações (35) e (36) podem ser escritas como

$$\mathcal{L}_{\phi}(\nabla_{\perp}^2 \phi + u_c \phi) + u_J \partial_{\xi} A_z - \frac{c\alpha}{u_{\alpha}(1+a)} \mathcal{L}_A \nabla_{\perp}^2 A_z = 0, \quad (51)$$

e

$$\mathcal{L}_\phi(A_z - \lambda_e^2 \nabla_\perp^2 A_z) + \frac{V_* + \alpha v_{e0}}{u_\alpha} \partial_\xi A_z - \frac{c\alpha_0}{u_\alpha} \partial_\xi \phi = 0, \quad (52)$$

onde $\mathcal{L}_\phi = \partial_\xi - (c/u_\alpha B_0)(\partial_x \phi \partial_\xi - \partial_\xi \phi \partial_x)$, $\mathcal{L}_A = \partial_\xi - (1/\alpha B_0)(\partial_x A_z \partial_\xi - \partial_\xi A_z \partial_x)$, $\nabla_\perp^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial \xi^2$, $u_c = a\omega_{ce}/L_n(1+a)u_\alpha$, $u_\alpha = u - \alpha v_{e0}$, $u_J = 4\pi j_{e0}/L_J B_0(1+a)u_\alpha$, $L_n = n_0/(\partial n_0/\partial x)$, $L_J = j_{e0}/(\partial j_{e0}/\partial x)$, $V_* = cT_e/eB_0 L_n$ e $\alpha_0 = \alpha + (\partial v_{e0}/\partial x)/\omega_{ce} \equiv \alpha + v'_{e0}/\omega_{ce}$.

Atualmente ainda é muito difícil encontrar as soluções gerais de (51) e (52). Logo, consideramos dois casos limites. Primeiro, dizemos que $\lambda_e^2 \nabla_\perp^2 A_z \ll A_z$ de tal forma que as dimensões dos vórtices são muito menores do que a profundidade de penetração eletrônica sem colisões. Assim, de (52) temos

$$\mathcal{L}_{\phi u_*} \left[A_z - \frac{c\alpha_0}{u_*} \phi \right] = 0, \quad (53)$$

onde $\mathcal{L}_{\phi u_*} = \partial_\xi - (c/u_* B_0)(\partial_x \phi \partial_\xi - \partial_\xi \phi \partial_x)$ e $u_* = u + V_*$.

Segundo, dizemos que $u \gg V_*$ e αv_{e0} , tal que (52) simplifica para

$$\mathcal{L}_{\phi u} \left[(1 - \lambda_e^2 \nabla_\perp^2) A_z - \frac{c\alpha_0}{u} \phi \right] = 0, \quad (54)$$

aqui $\mathcal{L}_{\phi u} \equiv \partial_\xi - (c/u B_0)(\partial_x \phi \partial_\xi - \partial_\xi \phi \partial_x)$.

Uma solução típica localizada de (53) é

$$A_z = \frac{c\alpha_0}{u_*} \phi, \quad (55)$$

enquanto que a equação (54) é satisfeita pelo “ansatz”

$$\nabla_\perp^2 A_z = \frac{1}{\lambda_e^2} \left(A_z - \frac{c\alpha_0}{u} \phi \right). \quad (56)$$

Inserindo (55) em (51), vem

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{\alpha\alpha_0 c^2}{u_\alpha u_* (1+a)} \right] \partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi + \frac{a\omega_{ce}}{u_\alpha (1+a)} \left(\frac{1}{L_n} - \frac{\alpha_0 v_{e0}}{u_* L_J} \right) \partial_\xi \phi \\ & - \frac{c}{u_\alpha B_0} \left[1 - \frac{\alpha_0^2 c^2}{u_*^2 (1+a)} \right] J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = 0, \end{aligned} \quad (57)$$

onde $J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = \partial_x \phi \partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - \partial_\xi \phi \partial_x \nabla_\perp^2 \phi$.

A equação (57) do tipo Hasegawa-Mima é satisfeita por

$$\nabla_\perp^2 \phi = F_1 \phi + F_2 x, \quad (58)$$

onde as constantes F_1 e F_2 são relacionadas por $\delta F_1 + (c/u_\alpha B_0)(1 - \alpha_0^2 c^2/u_*^2(1+a))F_2 + [a\omega_{ce}/u_\alpha(1+a)](L_n^{-1} - \alpha_0 v_{e0}/u_* L_J) = 0$ e onde $\delta = 1 - \alpha\alpha_0 c^2/u_\alpha u_*(1+a)$.

A equação (58) admite uma solução de vórtice dipolar do tipo

$$\phi_{out} = \phi_0 K_1(k_1 r) \cos \theta, \quad (59)$$

na região externa definida por $r = (x^2 + \xi^2)^{1/2} > R$, onde R é o raio do vórtice, ϕ_0 é uma constante, K_1 é a função modificada de Bessel, $k_1^2 = [a\omega_{ce}/u_\alpha(1+a)][(\alpha_0 v_{e0}/u_* e u_J \delta) - 1/L_n] > 0$ e $\cos \theta = x/r$. na região interna ($r < R$), a solução é

$$\phi_{in} = \left(\phi_i J_1(k_2 r) + \frac{F_{2i}}{k_2^2} r \right) \cos \theta, \quad (60)$$

onde ϕ_i é uma constante, J_1 é a função de Bessel de primeira ordem e $[1 - \alpha_0^2 c^2/u_*^2(1+a)]F_{2i} = \delta(k_1^2 + k_2^2)u_\alpha B_0/c$.

As constantes ϕ_0 , ϕ_i e F_{2i} são determinadas obedecendo a continuidade em R

$$\begin{aligned} \phi_i|_{r=R} &= \phi_0|_{r=R}, \\ \nabla_\perp \phi_i|_{r=R} &= \nabla_\perp \phi_0|_{r=R}, \\ \nabla_\perp^2 \phi_i|_{r=R} &= \nabla_\perp^2 \phi_0|_{r=R}. \end{aligned} \quad (61)$$

Encontramos que $\phi_0 = RF_{2i}/(k_1^2 + k_2^2)K_1(k_1 R)$, $\phi_i = -k_1^2 RF_{2i}/k_2^2(k_1^2 + k_2^2)J_1(k_2 R)$ e

$$K_2(k_1 R)/k_1 K_1(k_1 R) = -J_2(k_2 R)/k_2 J_1(k_2 R), \quad (62)$$

onde J_2 e K_2 são a função de Bessel e a função de Bessel modificada de segunda ordem, respectivamente. Para um dado valor de k_1 , a equação (62) determina k_2 .

Na Fig. 10 plotamos as curvas de nível de um vórtice dipolar, equações (59) e (60), considerando valores da ionosfera.

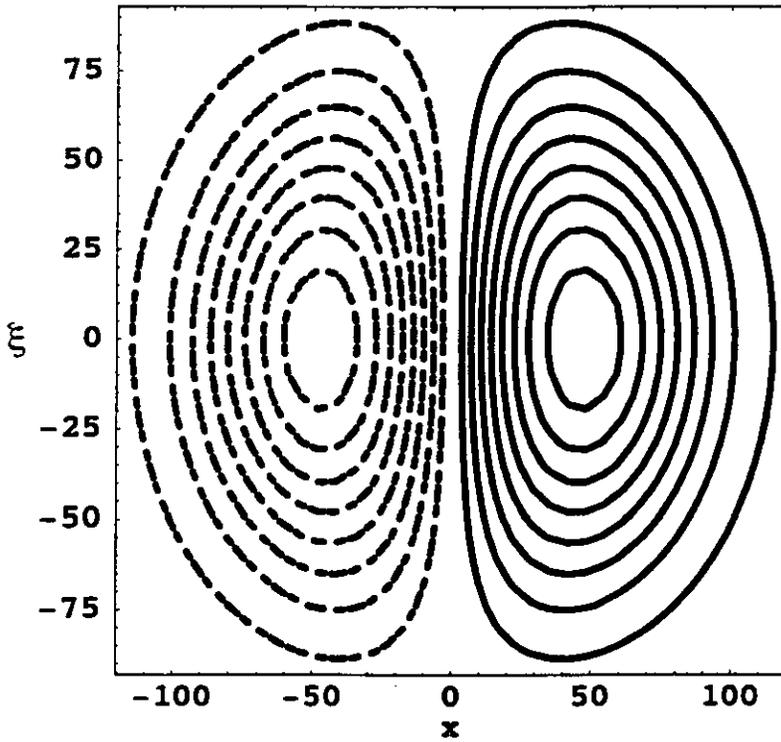


Fig. 10. Vórtice dipolar, apresentando os contornos da curva. As curvas cheias são valores positivos, crescendo para o centro e as tracejadas são valores negativos decrescendo para o centro. Supondo que a direção do campo magnético é saindo do plano do gráfico, na região das curvas cheias a rotação do vórtice é anti-horária e na região das curvas tracejadas a rotação é horária. A direção da rotação se determina pela derivada $\nabla\phi \times B$.

Por outro lado, quando $L_n \approx L_J u_* / \alpha_0 v_{e0}$, então (57) fica da forma da equação estacionária de Euler, ou seja

$$\partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - \frac{\mu_l c}{u_\alpha B_0} J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = 0, \quad (63)$$

onde $\mu_l = [1 - \alpha_0^2 c^2 / u_*^2 (1 + a)] / \delta > 0$. A equação (63) é satisfeita por

$$\nabla_\perp^2 \phi = \frac{4\phi_l K_l^2}{a_l^2} \exp \left[-\frac{2}{\phi_l} \left(\phi - \frac{u_\alpha B_0}{\mu_l c} x \right) \right], \quad (64)$$

onde ϕ_l , K_l e a_l são constantes arbitrárias. A solução de (64) é dada por

$$\phi = \frac{u_\alpha B_0}{\mu_l c} x + \phi_l \ln \left[2 \cosh(K_l x) + 2 \left(1 - \frac{1}{a_l^2} \right) \cos(K_l \xi) \right]. \quad (65)$$

Para $a_l^2 > 1$, o perfil do vórtice dado por (65) representa uma cadeia de vórtices conhecida

como “street vortex”. A Fig. 11 nos mostra uma curva de nível das cadeias de vórtices em questão.

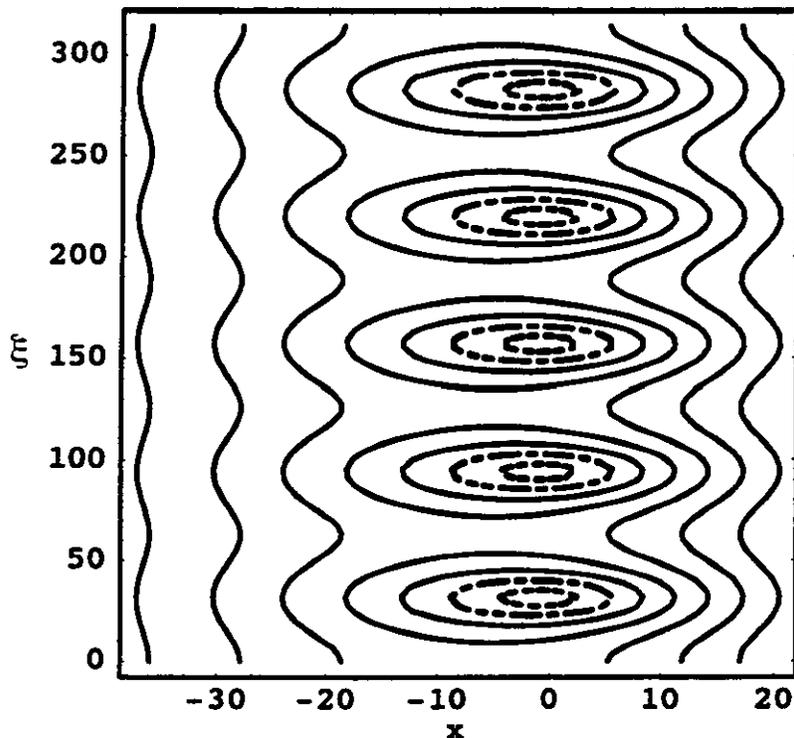


Fig. 11. Cadeia de vórtices conhecida como “street vortex”. As linhas cheias representam valores positivos e as tracejadas representam valores negativos. A rotação é sempre anti-horária para B saindo do plano do gráfico.

Uma outra solução acontece quando substituímos $\nabla_{\perp}^2 A_z$ de (56) em (51), obtendo

$$\mathcal{L}_{\phi} \left(\nabla_{\perp}^2 \phi + \beta_1 \phi - \beta_2 A_z \right) = 0, \quad (66)$$

vemos que $\alpha = \alpha_0 + (4\pi j_{e0} \lambda_e^2 / B_0 c L_J)$. Aqui, o tamanho do vórtice é da ordem de λ_e . Abaixo mostramos uma solução possível que atende a (66)

$$\nabla_{\perp}^2 \phi + \beta_1 \phi - \beta_2 A_z = F_3 \left(\phi - \frac{u B_0}{\mu_1 c} x \right), \quad (67)$$

onde $\beta_1 = [c^2 \alpha \alpha_0 / u^2 (1+a) \lambda_e^2] + a \omega_{ce} / u (1+a) L_n$, $\beta_2 = \alpha_0 c / u (1+a) \lambda_e^2$ e F_3 é uma constante de integração arbitrária.

Combinando (56) e (67), obtemos uma equação diferencial de quarta ordem

$$\nabla_{\perp}^4 \phi + C_1 \nabla_{\perp}^2 \phi + C_2 \phi - F_3 \frac{u B_0}{\lambda_e^2 \mu_1 c} x = 0, \quad (68)$$

onde $C_1 = \beta_1 + F_3 - 1/\lambda_e^2$ e $C_2 = [(F_3 - \beta_1) + c\beta_2\alpha_0/u]/\lambda_e^2$. A equação (68) admite soluções de vórtice dipolar espacialmente limitado. Na região externa ($r > R$), fazemos $F_3 = 0$ e escrevemos a solução de (68) como

$$\phi = [Q_1 K_1(s_1 r) + Q_2 K_1(s_2 r)] \cos \theta, \quad (69)$$

onde Q_1 e Q_2 são constantes e $s_{1,2}^2 = [-\alpha_1 \pm (\alpha_1^2 - 4\alpha_2)^{1/2}]/2$ para $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_1^2 > 4\alpha_2 > 0$. Aqui, $\alpha_1 = \beta_1 - \lambda_e^{-2}$ e $\alpha_2 = -(\beta_1/\lambda_e^2) + c\beta_2\alpha_0/u\lambda_e^2$. Assim, $u^2 \gg \alpha\alpha_0$ é condição necessária para a localização da solução externa. na região interna ($r < R$), a solução é

$$\phi = \left[Q_3 J_1(s_3 r) + Q_4 I_1(s_4 r) - \frac{F_3}{\lambda_e^2} \frac{u B_0}{\mu_l c C_2} r \right] \cos \theta, \quad (70)$$

onde Q_3 e Q_4 são constantes [9, 20]. Nós definimos $s_{3,4} = [(C_1^2 - 4C_2)^{1/2} \pm C_1]/2$ para $C_2 < 0$. Naturalmente, os perfis dos vórtices eletromagnéticos inerciais da região externa e interna são diferentes daqueles dos vórtices não-inerciais. É importante ressaltar que o fluxo eletrônico de cisalhamento é o responsável pela completa localização do vórtice dipolar na região externa. Sem a presença deste fluxo, teremos $\alpha_0 = \alpha$ e $C_2 = 0$ na região externa e a solução de (68) apresenta uma longa cauda.

As constantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 e F_3 podem ser determinadas com o casamento das soluções internas e externas de ϕ e A_z e seus operadores $\nabla\phi$, $\nabla_{\perp}^2\phi$, $\nabla_{\perp} A_z$ e $\nabla_{\perp}^2 A_z$ na interface do vórtice em $r = R$. Procedimento análogo como foi realizado em (61) [4, 48].

3.3.2 Vórtices de ondas curtas

Vamos agora analisar as soluções de vórtice das equações (37) e (38), não considerando a dissipação. Então, em um quadro estacionário, reescrevemos (37) e (38) como

$$\mathcal{L}_{\phi} \left[1 - \rho_a^2 \nabla_{\perp}^2 - \frac{c_a}{u_{\alpha} L_n} \right] \phi - \frac{4\pi j_{e0} \lambda_{Di}^2}{B_0 L_J u_{\alpha}} \partial_{\xi} A_z + \frac{c\alpha \lambda_{Di}^2}{u_{\alpha}} \mathcal{L}_A \nabla_{\perp}^2 A_z = 0, \quad (71)$$

e

$$\mathcal{L}_{\phi} (1 - \lambda_e^2 \nabla_{\perp}^2) A_z + \frac{(V_* + \alpha v_{e0})}{u_{\alpha}} \partial_{\xi} A_z - \frac{c\alpha_0}{u_{\alpha}} \partial_{\xi} \phi - \frac{c\alpha\sigma}{u_{\alpha}} \mathcal{L}_A \phi = 0. \quad (72)$$

onde $c_a = \rho_a^2 \omega_{ce}$.

É bom ressaltar que estes vórtices que estamos ora deduzindo, contém a velocidade eletron-acústica. Estes tipos de vórtices estão sendo pela primeira vez relacionados às

velocidades eletron-acústicas. Sugerimos que estas estruturas não-lineares podem justificar os fenômenos que acontecem nos sistemas descritos no capítulo da introdução, no parágrafo onde descrevemos as ondas eletron-acústicas. No caso em que é prevista a aproximação não-linear. Necessitamos de mais estudos para podermos analisar a influência da velocidade eletron-acústica nas estruturas por nós derivadas.

Quando a escala perpendicular da estrutura não-linear é menor do que λ_e , (72) é aproximada para

$$\mathcal{L}_{\phi u_*} \left[A_z - \frac{c(\alpha_0 + \sigma\alpha)}{u_*} \phi \right] = 0, \quad (73)$$

Uma solução possível da eq. (73) é

$$A_z = \frac{c(\alpha_0 + \sigma\alpha)}{u_*} \phi \equiv \frac{c\alpha_0^*}{u_*} \phi. \quad (74)$$

Se embutirmos (74) em (71), obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\rho_a^2 - \frac{\alpha\alpha_0^*c^2\lambda_{Di}^2}{u_\alpha u_*} \right) \partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - \left(1 - \frac{c_a}{u_\alpha L_n} - \frac{4\pi c\alpha_0^*\lambda_{Di}^2 j_{e0}}{B_0 u_\alpha u_* L_J} \right) \partial_\xi \phi \\ & - \frac{c\rho_a^2}{u_\alpha B_0} \left(1 - \frac{\alpha_0^{*2}c^2\lambda_{Di}^2}{u_*^2\rho_a^2} \right) J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

A equação (75) é satisfeita considerando o seguinte “ansatz”

$$\nabla_\perp^2 \phi = F_1^* \phi + F_2^* x. \quad (76)$$

Aqui as constantes F_1^* e F_2^* são relacionados por $\delta^* F_1^* - (c\rho_a^2/u_\alpha B_0)(1 - \alpha_0^{*2}c^2\lambda_{Di}^2/u_*^2\rho_a^2)F_2^* - [1 - (c_a/u_\alpha L_n) - 4\pi c\alpha_0^*\lambda_{Di}^2 j_{e0}/B_0 u_\alpha u_* L_J] = 0$, onde $\delta^* = \rho_a^2 - \alpha\alpha_0^*c^2\lambda_{Di}^2/u_\alpha u_*$. Para $[1 - (c_a/u_\alpha L_n) - 4\pi c\alpha_0^*\lambda_{Di}^2 j_{e0}/B_0 u_\alpha u_* L_J]/\delta^* \equiv P/\delta^* > 0$, a solução do vórtice dipolar de (75) é semelhante à (59) e (62).

Quando $P = 0$, estado em que a solução dos vórtices duplos é proibida, a equação (76) toma a seguinte forma

$$\partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - \frac{\mu^* c}{u_\alpha B_0} J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = 0, \quad (77)$$

onde $\mu^* = (\rho_a^2 - \alpha_0^{*2}c^2\lambda_{Di}^2/u_*^2)/(\rho_a^2 - \alpha\alpha_0^*c^2\lambda_{Di}^2/u_\alpha u_*) > 0$. A equação (77) é novamente satisfeita por

$$\nabla_\perp^2 \phi = \frac{4\phi_s^* K^{*2}}{a^{*2}} \exp \left[-\frac{2}{\phi_s^*} \left(\phi - \frac{uB_0}{\mu^* c} x \right) \right], \quad (78)$$

onde ϕ_s^* , K^* e a^* são constantes arbitrárias. A solução de (78) é, por sua vez, familiar à equação (65), sendo que a condição em que as cadeias de vórtice curto aparecem, é bem diferente. Então, temos

$$\phi = \frac{uB_0}{\mu^*c}x + \phi_s^* \ln \left[2 \cosh(K^*x) + 2 \left(1 - \frac{1}{a^*} \right) \cos(K^*\xi) \right]. \quad (79)$$

Por último, apresentamos as soluções das equações (71) e (72), considerando que $u \gg V_*$, αv_{e0} e $\sigma \ll 1$. Aqui, a equação (72) é também satisfeita por (56), tal que (71) pode ser colocada na seguinte forma

$$\mathcal{L}_\phi(\nabla_\perp^2 \phi + \beta_1^* \phi - \beta_2^* A_z) = 0, \quad (80)$$

obedecendo a seguinte relação $v_{e0}\rho_a c_a / c^2 L_J = (\alpha \lambda_{Di}^2 / \lambda_e^2) - \alpha_0$. Uma possível solução da equação (80) é

$$\nabla_\perp^2 \phi + \beta_1^* \phi - \beta_2^* A_z = F_3^* \left(\phi - \frac{uB_0}{\mu^*c}x \right), \quad (81)$$

onde $\beta_1^* = (c^2 \alpha \alpha_0 \lambda_{Di}^2 / u^2 \rho_a^2 \lambda_e^2) + (c_a / u \rho_a^2 L_n) - 1 / \rho_a^2$, $\beta_2^* = \alpha_0 c \lambda_{Di}^2 / u \rho_a^2 \lambda_e^2$, $\mu^* = (1 - c^2 \alpha_0^2 \lambda_{Di}^2 / \rho_a^2 u_*^2) / (1 - c^2 \alpha \alpha_0^* \lambda_{Di}^2 / u_* u_\alpha)$ e F_3^* é uma constante arbitrária de integração.

Relacionando (65) e (81), obtemos uma equação diferencial de quarta ordem

$$\nabla_\perp^4 \phi + C_1^* \nabla_\perp^2 \phi + C_2^* \phi - \frac{F_3^*}{\lambda_e^2} \frac{uB_0}{\mu^*c} x = 0, \quad (82)$$

onde $C_1^* = \beta_1^* - F_3^* - 1 / \lambda_e^2$ e $C_2^* = [(F_3^* - \beta_1^*) + c \beta_2^* \alpha_0 / u] / \lambda_e^2$. A equação (82) admite também soluções de vórtice espacialmente limitadas, que são similares ao caso dos vórtices longos.

Um estudo mais cuidadoso dos vórtices nos diz que as constantes u e α estão relacionados com os gradientes de velocidade e densidade, entre outros parâmetros. Então, para alguns valores das escalas de comprimento do gradiente de velocidade e da densidade, percebemos que u é completamente determinado por uma escolha específica de α e certos valores para a densidade de número não perturbado do plasma, a temperatura do plasma e a intensidade do campo magnético externo. As escalas de comprimento dos vórtices, que foram aqui analisados, são tipicamente da ordem de λ_e e ρ_a , que são muito menores do que as escalas de comprimento dos gradientes da densidade e da velocidade no equilíbrio. Estes vórtices podem ser encontrados no espaço e em laboratório de plasmas.

3.4 Aplicação de Ondas não-lineares na Aurora Boreal e na magnetopausa

Pretendemos falar um pouco sobre onde podemos aplicar esta teoria das ondas não-lineares acima derivadas. Uma aplicação mais prática seria nas regiões de aurora. Observações recentes proporcionadas pelos satélites Freja e Fast demonstraram a existência de vórtices de diversas escalas na região de aurora [49].

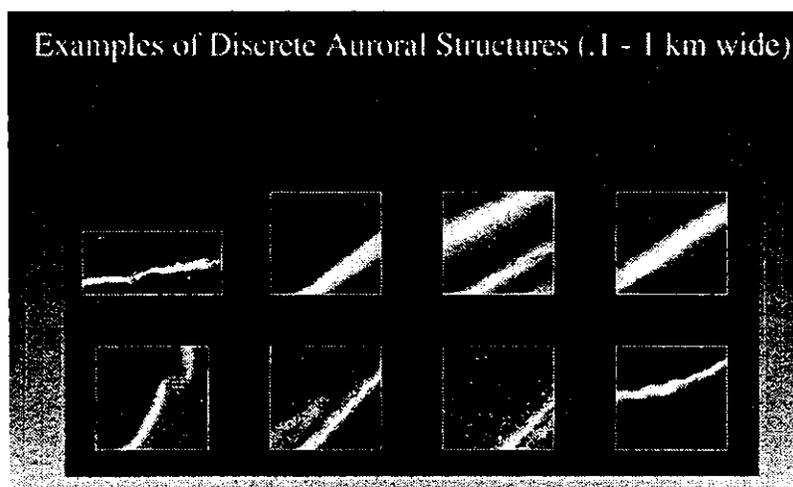


Fig. 12. Estruturas discretas na região da Aurora Boreal [49].

Estruturas auto-organizadas na forma de vorticidades e cadeias de vórtices foram observadas nos arcos aurorais discretos, como podemos ver nas Fig. 12 e 13. Estas estruturas podem ser descritas em termos de modelos de ondas de Alfvén inerciais. A evolução dinâmica das formas dos arcos aurorais podem ser o resultado da instabilidade do fluxo não-linear de cisalhamento.

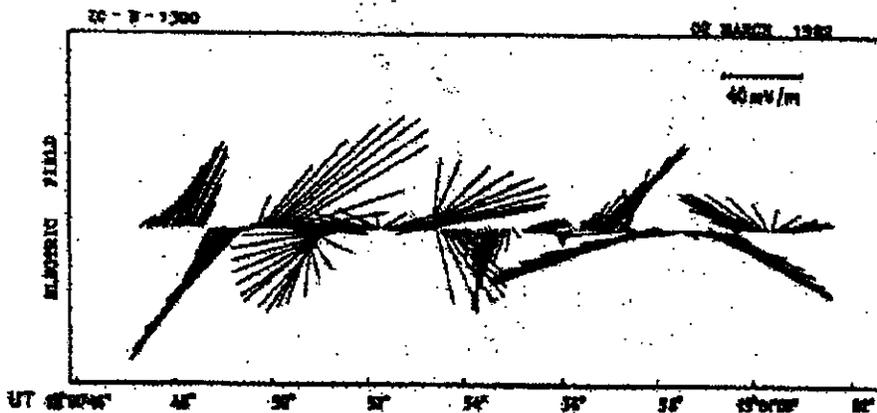


Fig. 13. Medida observacional detalhada das cadeias de vórtice mostradas na figura anterior.

As soluções estacionárias do vórtice das equações não-lineares podem representar um estado estacionário ideal. Equações modo-acopladas para as ondas de Alfvén dispersivas são desenvolvidas e podem ser utilizadas para o estudo de energias em cascata e para as propriedades dos vórtices de Alfvén.

As estruturas aurorais são tipicamente da ordem de, (ou menor), 1 km de largura na direção N-S e se estende até 1000 km na direção E-O.

Sugerimos que as formas raiadas observadas da aurora podem ser entendidas em termos de ondas de Alfvén não-lineares em plasmas frios.

Fisicamente, o acoplamento de diferentes modos das flutuações Alfvén inerciais se auto-organiza em estruturas de dimensões grandes, que, eventualmente, quebram-se em estruturas coerentes de vórtice de escalas menores. A energia transferida das estruturas maiores para as estruturas menores é evidente num magnetoplasma de baixo β que contenha turbulência de ondas de Alfvén. Estes resultados têm uma enorme relevância nas estruturas que são observadas na Aurora Boreal.

Uma outra aplicação de vórtice é a formação de vórtices duplos na ionosfera, devido à influência do vento solar.

A interação do vento solar com as linhas do campo magnético da Terra determina mudanças em seu campo magnético, bem como na velocidade do plasma e em sua densidade. Este é um fenômeno de um grande dinamismo, que está atraindo a atenção de vários pesquisadores teóricos e experimentais [50, 51, 52, 53]. As mudanças súbitas da

dinâmica da pressão do vento solar provoca uma compressão de toda a magnetosfera do lado do dia, originando mudanças no balanço do equilíbrio localizado na magnetopausa. Como consequência, são criadas perturbações no sistema de corrente da magnetopausa, (δJ). Em outras palavras, um pulso de pressão localizado é associado por modos perturbativos de Alfvén. O pulso de Alfvén é acompanhado por correntes alinhadas ao campo com direção para baixo (para cima) no lado do dia da magnetosfera e correntes para cima (para baixo) no lado da noite, se a perturbação é devida a dilatação (compressão).

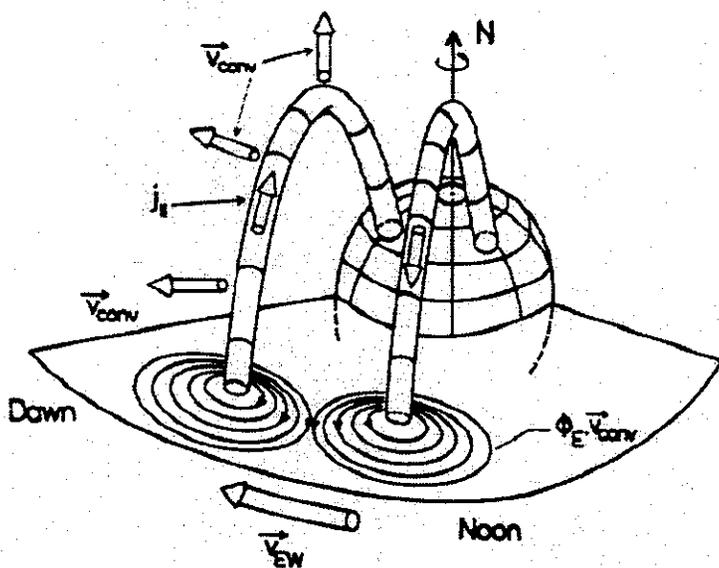


Fig. 14. Representação esquemática dos processos físicos observados em 24 de dezembro de 1978. São mostrados dois tubos de fluxo magnético portando correntes auto-alinhadas, como sugeridas pelas observações magnéticas da Terra. Os movimentos de subida e descida desses tubos de fluxo originam os dipolos elétricos, representando os vórtices duplos.

Estas estruturas de corrente são as responsáveis pelas perturbações do campo magnético que acarreta o aparecimento de vórtices duplos localizados. Este par de correntes com magnitudes praticamente semelhantes, mas com sentidos invertidos distam entre si 600 km. Estes vórtices duplos são eventos similares ao observados na zona auroral, sendo que por-

tam tamanhos superiores. Sua ordem de magnitude é algumas dezenas de nT . Apresentamos na Fig. 14 [52] uma representação esquemática deste fenômeno.

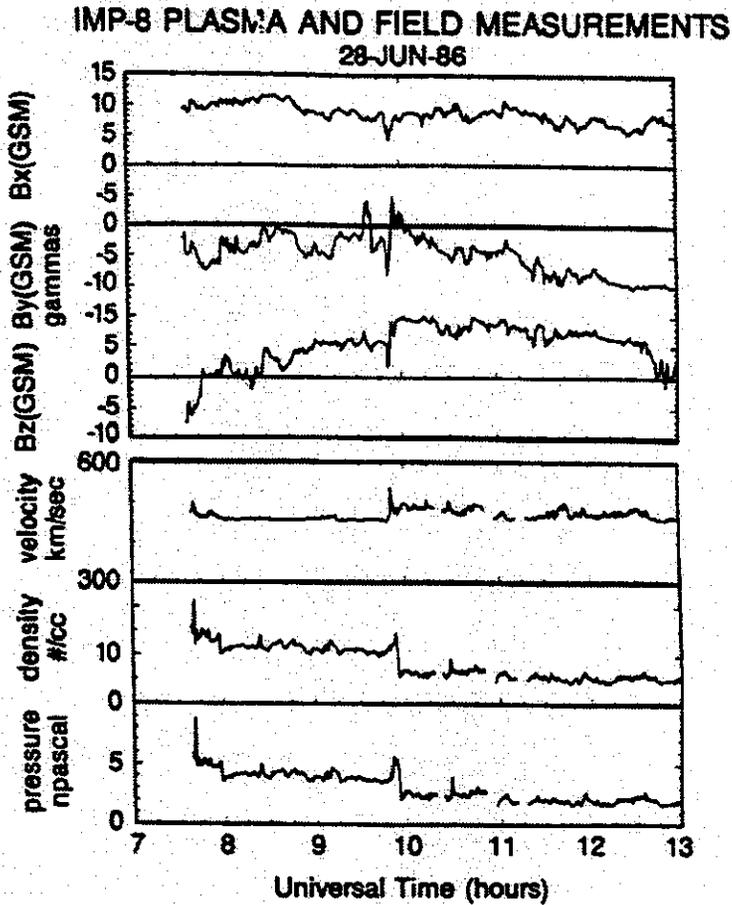


Fig. 15. Dados do vento solar medidos por IMP-8. De cima para baixo são mostrados as componentes do campo magnético interplanetário, a velocidade do vento solar, a densidade de número e a pressão do vento solar em nanopascal.

Na Fig. 15 vemos um magnetograma típico da perturbação do campo magnético nesta região e a Fig. 16 [53] nos mostra os vetores da perturbação do campo magnético horizontal correspondendo às variações da Fig. 15.

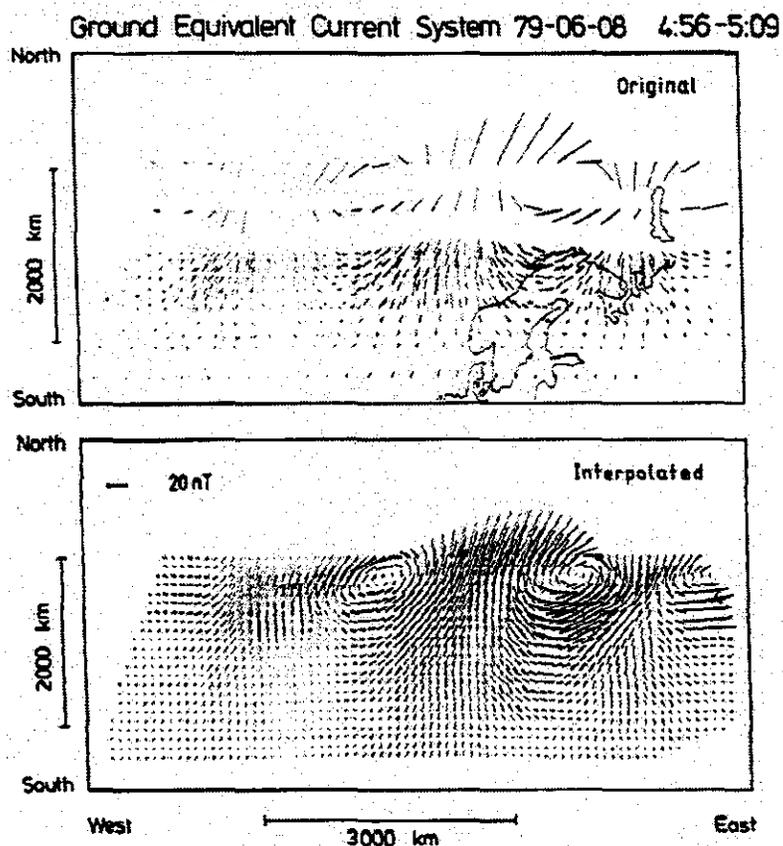


Fig. 16. Distribuição dos vetores de corrente de junho de 1979. A parte superior nos mostra a distribuição original da corrente. Em baixo vemos uma medida utilizando a técnica de interpolação.

3.5 Comportamento caótico da turbulência eletromagnética

Atualmente várias medidas de satélites na magnetosfera terrestre e no sistema solar apresentam em determinadas partes do seu espectro de frequência uma característica caótica. Da mesma forma existem teorias exemplificando uma possível trajetória caótica das partículas próxima à parede externa do tokamak (“edge”) [54]. Nesta seção apresentamos um sistema caótico que pode ser aplicado nestas situações. É uma generalização das equações de Lorenz, conhecidas como as equações generalizadas de Lorenz-Stenflo. Primeiro discutiremos uma introdução ao sistema de Lorenz e depois a aplicação ao sistema de equações de Lorenz-Stenflo.

3.5.1 Equação de Lorenz

Imagine uma caixa retangular fechada, portando um gás homogêneo e que sofreu um processo de aquecimento. Como já sabemos as porções do gás que estão próximas ao local aquecido sobem, enquanto as que estão do lado oposto descem. Depois de uma determinada temperatura, o gás começará a apresentar uma configuração cilíndrica. Com a aplicação de uma temperatura constante e considerando o sistema totalmente hermético, espera-se um movimento circular uniforme e previsível do gás. Só que a natureza não é regular e nem previsível. Este movimento circular é caótico. Os rolos de gás se movimentam em várias direções com diferentes velocidades. A explicação para este movimento irregular deve-se às características moleculares do gás, que obviamente não é linear. A justificativa encontra-se na dependência sensível do gás às condições iniciais.

Depois de apresentar o “Efeito Borboleta” (ver apêndice B), Lorenz iniciou uma formulação matemática para o sistema caixa-gás acima descrito. Como ferramenta ele utilizou as equações de “Navier–Stokes”. Após derivações apropriadas ele chegou ao sistema de equações

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \delta(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{83}$$

onde δ representa o “número de Prandtl”. Este número é a razão da viscosidade do fluido de uma substância para a sua condutividade térmica. Lorenz usou como valor $\delta = 10$;

r é a diferença de temperatura entre o topo e o fundo do sistema gasoso. Normalmente usamos $r = 28$. A variável b é a razão entre a largura e a altura da caixa. Lorenz escolheu $b = 8/3$. Por sua vez x representa a razão de rotação do rolo de gás, y , a diferença de temperatura nos lados opostos do cilindro e z é o desvio do sistema para uma função linear que representa uma temperatura de referência.

O sistema de Lorenz, equação (84) tem dois tipos de pontos fixos. A origem $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ é um ponto fixo para todos os valores dos parâmetros. Para $r > 1$ há também um par simétrico de pontos fixos $x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $z^* = r - 1$. Lorenz os chamou de C^+ e C^- . Quando $r \rightarrow 1^+$, C^- e C^+ representam uma bifurcação de forçado.

Linearizando (84) e derivando a sua equação característica, percebemos que $z(t) \rightarrow 0$ rapidamente. As outras duas direções são governadas por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\delta x + \delta y \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y,\end{aligned}\tag{84}$$

com traço $\tau = -\delta - 1 < 0$ e determinante $\Delta = \sigma(1 - r)$. Para $r < 1$ todas as trajetórias se aproximam da origem quando $t \rightarrow \infty$. A origem é globalmente estável. Para $r > 1$, a origem é um ponto de sela (“saddle point”). Analisando mais detalhadamente este caso, percebemos que entre $1 < r < r_H = [\delta(\delta + b + 3)]/(\delta - b - 1)$ o sistema é linearmente estável. Definimos r_H como o ponto onde C^+ e C^- perdem estabilidade em uma bifurcação de “Hopf”. Assim, para $r > r_H$ o sistema é instável. Mas como o sistema (de equações) de Lorenz é dissipativo, em $r > r_H$ as trajetórias se aproximam de um atrator distante. Lorenz em seu artigo [40] prova isso, através de um método indireto e cuja solução não é trivial. Mostramos na Fig. 17 um gráfico esquemático das bifurcações e estados de equilíbrio de um sistema de Lorenz genérico.

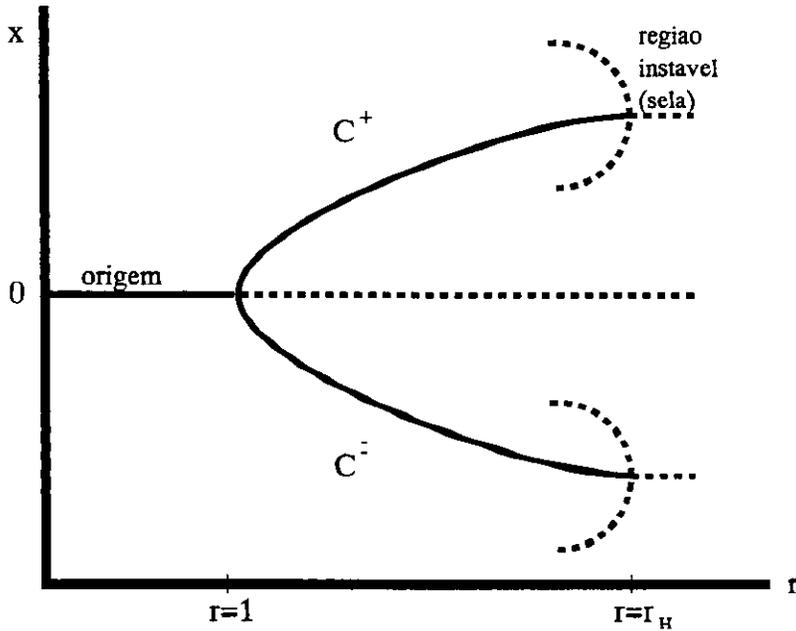


Fig. 17. Representação esquemática do sistema das regiões de estabilidade e instabilidade de um sistema de Lorenz. Linha cheia representa o estado estável e a linha tracejada indica o estado instável

No nosso caso, para mostrar um comportamento caótico de um plasma com ou sem grãos de poeira carregados utilizamos o sistema de equações de Lorenz com algumas modificações. O que fizemos é só uma introdução e um simples exemplo de aplicação de teoria da complexidade em sistemas de plasma.

3.6 Aplicação em magnetoplasmas

Seguindo Lorenz [40] e Stenflo [41], derivamos um conjunto de equações que são apropriadas para o estudo do comportamento temporal do movimento caótico envolvendo ondas eletromagnéticas não-lineares bi-dimensionais de baixa-freqüência em um magnetoplasma dissipativo sem gradientes de densidade. Iniciamos introduzindo a seguinte relação

$$\phi = \phi_1(t) \sin(K_x x) \sin(K_y y) \quad (85)$$

e

$$A_z = A_1(t) \sin(K_x x) \cos(K_y y) - A_2(t) \sin(2K_x x), \quad (86)$$

onde K_x e K_y são parâmetros constantes e ϕ_1 , A_1 e A_2 são as amplitudes que são funções do tempo.

Para facilitar, consideremos o comportamento caótico da interação de ondas eletromagnéticas curtas do tipo flauta. Assim, substituindo (85) e (86) em (37) e (38), temos

$$(1 + K^2 \rho_a^2) \dot{\phi}_1 = -\mu_1 K^4 \phi_1 + \delta_1 K_y A_1 - \delta_2 (K^2 - 4K_x^2) K_x K_y A_1 A_2 - \delta_3 K^2 \phi_1, \quad (87)$$

$$(1 + K^2 \lambda_e^2) \dot{A}_1 = -\eta K^2 A_1 - \sigma_1 K_y \phi_1 + \frac{c}{B_0} [1 + K^2 \lambda_e^2 - 6K_x^2 \lambda_e^2] K_x K_y A_2 \phi_1 + \sigma_2 K_x K_y \phi_1 A_2, \quad (88)$$

e

$$(1 + 4K_x^2 \lambda_e^2) \dot{A}_2 = -\frac{c}{2B_0} (1 + 4K_x^2 \lambda_e^2) K_x K_y \phi_1 A_1 - 4\eta K_x^2 A_2 - \sigma_2 K_x K_y \phi_1 A_1 / 2, \quad (89)$$

onde $\mu_1 = \mu_e \rho_a^2$, $\delta_1 = 4\pi \lambda_{Di}^2 (\partial j_{e0} / \partial x) / B_0$, $\delta_2 = c \lambda_{Di}^2 / B_0$, $\delta_3 = \nu_e \rho_e^2$, $\eta = \nu_e \lambda_e^2$, é a resistividade do plasma, $\sigma_1 = c (\partial v_{e0} / \partial x) / \omega_{ce}$ e $\sigma_2 = c \sigma / B_0$. A derivada temporal é definida por um ponto sobre ϕ_1 , A_1 e A_2 . Vemos que os termos que contém $\sin(3K_x x)$ são desprezados na dedução das equações (87)–(88). Esta aproximação, que é frequentemente usada por muitos autores na derivação das equações do tipo de Lorenz, pode ser generalizada para descrever mais realisticamente as soluções de dependência espacial. Ao deduzirmos (87) e (88), consideramos, também, que $\partial_t \gg V_* \partial_y$, $\rho_a^2 \omega_{ce} K_n \partial_y$, onde $V_* = -(cT_e / eB_0) K_n$ e $K_n = n_0^{-1} \partial n_0 / \partial x$, que justifica termos excluído o gradiente de densidade das equações (37) e (38). As equações (87)–(89) são normalizadas de tal forma que possam se amoldar à estrutura das equações de Lorenz-Stenflo. Temos, então

$$\begin{pmatrix} d_\tau X \\ d_\tau Y \\ d_\tau Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma + sZ & 0 \\ r - Z & -1 & 0 \\ Y & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (90)$$

que descrevem o acoplamento não-linear entre várias amplitudes. Aqui, $\sigma = (\mu_1 K^2 + \delta_3) b_e^* / \eta (1 + K^2 \rho_a^2)$, $r = -\delta_1 \sigma_1 K_y^2 / \eta K^4 (\mu_1 K^2 + \delta_3)$, $b = 4K_x^2 b_e^* / (1 + 4K_x^2 \lambda_e^2) K^2$ e o novo parâmetro $s = -\delta_2 a_2 a_3 (K^2 - 4K_x^2) b_e^* K_x K_y / a_1 \eta (1 + K^2 \rho_a^2)$, com $K^2 = K_x^2 + K_y^2$ e $\tau = t / t_0$; onde $t_0 = \eta K^2 / b_e^*$ e $b_e^* = 1 + K^2 \lambda_e^2$.

É fácil demonstrar que, se $s = 0$, que acontece quando $K_y^2 = 4K_x^2$, a equação (90) reduz-se à equação do tipo Stenflo. Foram adotadas as seguintes normalizações

$$\phi_1 = a_1 X = \frac{\sqrt{2} \eta K^2 B_0}{K_x K_y \sqrt{b_e^* (b_e^* - 6K_x^2 \lambda_e^2 + B_0 \sigma_2 / c) [1 + \sigma_2 B_0 / c (1 + 4K_x^2 \lambda_e^2)]}} X,$$

$$A_1 = a_2 Y = \frac{\sqrt{2}\eta K^4 B_0 (\mu_1 K^2 + \delta_3)}{c\delta_1 K_x K_y^2 \sqrt{b_e^* (b_e^* - 6K_x^2 \lambda_e^2 + B_0 \sigma_2 / c) [1 + \sigma_2 B_0 / c (1 + 4K_x^2 \lambda_e^2)]}} Y,$$

e

$$A_2 = a_3 Z = \frac{-\eta K^4 B_0 (\mu_1 K^2 + \delta_3)}{[c\delta_1 K_x K_y^2 (b_e^* - 6K_x^2 \lambda_e^2 + B_0 \sigma_2 / c)]} Z.$$

Observamos que (90) são as equações generalizadas de Lorenz, cujas propriedades podem ser analisadas analítica e numericamente, utilizando técnicas já conhecidas. Os pontos de equilíbrio de (90) são

$$X_0 = \pm \left[b \left((r - 2 + sr^2 / \sigma) + \sqrt{(r - 2 + sr^2 / \sigma)^2 + 4(r - 1)} \right) / 2 \right]^{1/2}, \quad (91)$$

$$Y_0 = \frac{rbX_0}{(b + X_0^2)}, \quad (92)$$

e

$$Z_0 = \frac{X_0 Y_0}{b}. \quad (93)$$

Se não considerarmos os termos que contém s , vemos que para $|r| > 1$, os pontos fixos de equilíbrio $[X_0 = Y_0 = \pm \sqrt{b}(|r| - 1)^{1/2}$, e $Z_0 = |r| - 1]$ são instáveis devido aos movimentos de células convectivas. Assim, a instabilidade linear deveria saturar pela atração de um desses novos estados fixos.

A estabilidade dos estados estacionários podem ser estudados aplicando uma análise linear. Fazendo $X = X_s + X_1$, $Y = Y_s + Y_1$ e $Z = Z_s + Z_1$, o sistema linearizado é

$$\begin{pmatrix} d_\tau X_1 \\ d_\tau Y_1 \\ d_\tau Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - Z_s & -1 & -X_s \\ Y_s & X_s & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \quad (94)$$

onde $X_1 \ll X_s$, $Y_1 \ll Y_s$ e $Z_1 \ll Z_s$ e (X_s, Y_s, Z_s) representam um estado estacionário. A equação característica correspondente é

$$(\lambda + b) [(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + (1 - r)\sigma)] = 0, \quad (95)$$

que governa a estabilidade linear do estado estacionário. Se tomarmos $r < 1$, a origem é um sumidouro hiperbólico e, então, estável. Por outro lado, para $r = 1$, os auto-valores são $\lambda = -b$ e $\lambda = -(1 + \sigma)$ que são sempre negativos. Finalmente, no caso em que $r > 1$, os pontos não-triviais são $X_s^\pm = Y_s^\pm = \pm \sqrt{b(r - 1)}$ e $Z_s = r - 1$. Os auto-valores de

(95) são $\lambda = -(\sigma + b + 1)$ e $\pm i\sqrt{2\sigma(\sigma + 1)/(\sigma - b - 1)}$, tal que os estados estacionários (X_s^\pm, Y_s^\pm, Z_s) são sumidouros para $r \in (1, r_H)$, onde $r_H \equiv \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$. Uma bifurcação de Hopf ocorre em r_H . Para $\sigma > 1 + b$, as raízes imaginárias são possíveis e para $r > r_H$, os pontos fixos não-triviais são selas (“saddles”) com instabilidades de duas dimensões. Assim, para $r > r_H$ todos os três pontos fixos são instáveis, mas o atrator ainda existe [9]. A inclusão de não-homogeneidades da densidade de equilíbrio pode levar a mudanças na dinâmica caótica da turbulência eletromagnética.

Ainda não encontramos medidas efetivas sobre sistemas caóticos em plasmas espaciais, apesar de sabermos que é bem provável estes fenômenos neste espaço. Em [55] são mostrados os resultados e discussões sobre o movimento de uma partícula viajando na cauda magnética terrestre. Foi considerada a possível influência da dinâmica da partícula na dinâmica do plasma. Se a cauda magnética, inicialmente em equilíbrio térmico, for sujeita a mudanças devido às condições externas, por exemplo, as condições do campo magnético interplanetário (IMF), a magnetopausa, etc., então, a discussão acima sugere que o plasma da cauda magnética pode desenvolver aspectos não-Maxwellianos que podem provocar um forte aumento na instabilidade. Este processo pode se manifestar através de rápidas reconexões seguindo às mudanças das condições na IMF. Isto acarreta uma distribuição de partículas não-trivial, devido à dinâmica muito complicada do movimento da partícula.

Capítulo 4. Outros modelos de plasma

Apresentaremos aqui modelos de multi-fluido. No caso seria a aplicação em plasmas com grãos de poeira carregados e plasmas contendo dois tipos de íons.

4.1 Sistemas de plasmas de poeira

Baseados no modelo apresentado nos capítulos anteriores, desenvolvemos também, o estudo de plasmas que portam grãos de poeira carregados.

As propriedades das ondas eletrostáticas e eletromagnéticas de baixa frequência são analisadas. Utilizamos o modelo de plasma de multi-fluido com os grãos de poeira carregados, onde $B_0(x)\hat{z}$ é o campo magnético no equilíbrio. Há gradientes de densidade e de velocidade no equilíbrio, $(\partial n_{j0}/\partial x$ e $\partial v_{j0}/\partial x$, respectivamente). Aqui $j = e$ para elétrons, i para os íons e d para os grãos.

A condição de neutralidade no equilíbrio pode ser expresso por

$$n_{i0} = n_{e0} + Z_{d0} n_{d0}, \quad (96)$$

onde Z_{d0} representa o número de cargas elétricas aderidas aos grãos. Os grãos de poeira são considerados cargas pontuais e seus tamanhos e os espaços entre grãos são muito menores do que os comprimentos de escala característicos do plasma. Além disso o número de grãos situados na esfera de Debye é significativo, de forma que podemos considerar um comportamento coletivo para esses grãos de poeira. Na presença de ondas de baixa frequência, adotamos a aproximação de velocidade de deriva para os elétrons e os íons ($|\partial_t| \ll \omega_{ci} = eB_0/m_i c$), ou seja,

$$\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v}_{EB} + (v_{e0} + v_{ez})\mathbf{B}_\perp/B_0 + v_{ez}\hat{z}, \quad (97)$$

e

$$\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{EB} + \mathbf{v}_{ip} + v_{i0}\mathbf{B}_\perp/B_0, \quad (98)$$

Para os nossos propósitos, adotamos a equação de conservação de carga,

$$\partial_t(n_e - n_i) + \nu_{e,d}(n_e - n_{e0}) - \nu_{i,d}(n_i - n_{i0}) + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e - n_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (99)$$

a equação de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi e(n_e - n_i + Z_d n_d), \quad (100)$$

e a componente paralela da equação de momento dos elétrons,

$$(\partial_t + \nu_e + v_{e0}\partial_z + \mathbf{v}_e \cdot \nabla)v_{ez} = -(e/m_e) \left[E_z + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}_\perp) \cdot \hat{\mathbf{z}} \right], \quad (101)$$

onde ν_e é a frequência de colisão dos elétrons. Na equação (99) nós incluímos os termos das partículas do plasma que compensam as suas perdas devido à recombinação na superfície dos grãos [56]. As frequências efetivas de colisão para as distribuições Maxwellianas das partículas são $\nu_{e,d} = \nu_{i,d}(1 + P) = \nu_{ch}P(\tau + \eta)/\eta(1 + \tau + \eta)$, onde $P = n_{d0}Z_{d0}/n_{e0}$, $\tau = T_e/T_i$, $\eta = Z_{d0}e^2/aT_e$, e $\nu_{ch} = \omega_{pi}^2 a (1 + \tau + \eta) / v_{ti} \sqrt{2\pi}$. Aqui a é o tamanho do grão, ω_{pi} a frequência de plasma dos íons, v_{ti} a velocidade térmica dos íons e $T_e(T_i)$ a temperatura dos elétrons (íons). Para $P \ll 1$, temos $\nu_{e,d} \approx \nu_{i,d} \equiv \nu_0$.

A relação de dispersão geral para as ondas eletromagnéticas é

$$\begin{aligned} & \left[\omega - \omega_{sv} + i\nu_0 - \frac{k_y^2 c^2 (k_z v_{i0} - i\nu_i)}{v_A^2 (k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right] \left[(\omega - k_z v_{e0}) + i \frac{\nu_e k_y^2 \lambda_e^2}{(1 + k_y^2 \lambda_e^2)} \right] \\ & = \left[k_z^2 v_A^2 + \frac{4\pi c k_y k_z c \partial_x (J_{ei}/B_0)}{(k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right] \frac{(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0}/k_z)}{(1 + k_y^2 \lambda_e^2)}, \end{aligned} \quad (102)$$

onde $\omega_{sv} = 4\pi e c k_y \partial_x (Z_{d0} n_{d0}/B_0)/(k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)$ é a frequência da célula convectiva dos grãos, $v_A (= c\omega_{ci}/\omega_{pi})$ a velocidade de Alfvén e $k^2 = k_y^2 + k_z^2$.

A solução geral para as equações não-lineares, considerando o mesmo método adotado na capítulo 3 ($\xi = y + \gamma z - ut$), é

$$\begin{aligned} & u_{i*} \partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - u_d \partial_\xi \phi - (c/B_0) J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) - (v_A^2/c) \gamma \left\{ \nabla_\perp^2 \right. \\ & \left. - \frac{4\pi}{c\gamma} \partial_x (J_{ei}/B_0) \right\} \partial_\xi A_z + (1/\gamma B_0) J(A_z, \nabla_\perp^2 A_z) \Big] = 0, \end{aligned} \quad (103)$$

e

$$[\partial_\xi - (c/u_{e*} B_0) (\partial_x \phi \partial_\xi - \partial_\xi \phi \partial_x)] \left[(1 - \lambda_e^2 \nabla_\perp^2) A_z - \frac{c\gamma_0}{u_{e*}} \phi \right] = 0, \quad (104)$$

onde $u_d = -4\pi e c \omega_{ci}^2 \partial_x (Z_{d0} n_{d0}/B_0)/\omega_{pi}^2$, $J(f, g) \equiv (\partial_x f \partial_\xi g - \partial_x g \partial_\xi f)$ é o Jacobiano, $\gamma_0 = \gamma + (\partial_x v_{e0})/\omega_{ce}$ e $u_{j*} = u - \gamma v_{j0}$.

Seguindo as deduções do capítulo 3, chegamos às seguintes equações para os diversos tipos de vórtices:

$$\begin{aligned} & \partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - \frac{c\nu}{u_{i*}} J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) \\ & - \left[\frac{u_d}{\delta u_{i*}} - \frac{4\pi\gamma_0 v_A^2}{c\delta u_{i*} u_{e*}} \partial_x \left(\frac{J_{ei}}{B_0} \right) \right] \partial_\xi \phi = 0, \end{aligned} \quad (105)$$

Quando $u_d u_{e*} - 4\pi\gamma_0 v_A^2 \partial_x (J_{ei}/cB_0)] / (u_{i*} u_{e*} - \gamma\gamma_0 v_A^2) > 0$, a equação (105) admite soluções para o vórtice dipolar e também para a cadeia de vórtices. A cadeia de “dust-vórtices” aparece para a seguinte condição: $u_d = (4\pi\gamma_0 v_A^2 / c u_{e*}) \partial_\xi (J_{ei}/B_0)$. Assim,

$$\partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - \frac{c\nu}{u_{i*} B_0} J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = 0. \quad (106)$$

Para $\nu > 0$, a equação (106) é satisfeita por

$$\nabla_\perp^2 \phi = \frac{4\phi_0 K^2}{a_0^2} \exp \left[-\frac{2}{\phi_0} \left(\phi - \frac{u_{i*} B_0}{\mu c} x \right) \right], \quad (107)$$

onde ϕ_0 , K and a_0 são parâmetros constantes. Uma possível solução para a equação acima é

$$\phi = \frac{u_{i*} B_0}{\mu c} x + \phi_0 \ln \left[2 \cosh(Kx) + 2 \left(1 - \frac{1}{a_0^2} \right) \cos(K\xi) \right]. \quad (108)$$

Esta equação representa uma cadeia de vórtices, semelhante à Fig. 10. Ela só é válida quando $a_0^2 > 1$.

Uma outra aplicação para esse modelo seria a possibilidade da existência de órbitas caóticas. Seguimos Lorenz [40] e Stenflo [41] e desenvolvemos um conjunto de equações que representam uma análise de um comportamento temporal de movimentos caóticos, envolvendo interações entre ondas eletromagnéticas não-lineares bi-dimensionais de baixa frequência em um meio dissipativo.

Como já conhecido de capítulos anteriores, adotamos a seguinte relação:

$$\phi = \phi_1(t) \sin(K_x x) \sin(K_y y) \quad (109)$$

e

$$A_z = A_1(t) \sin(K_x x) \cos(K_y y) - A_2(t) \sin(2K_x x), \quad (110)$$

onde K_x e K_y são parâmetros constantes. ϕ_1 , A_1 e A_2 representam as amplitudes que são em função do tempo somente. Apesar da diferença entre os sistemas de plasma apresentados aqui e no capítulo 3, adotamos métodos análogos de derivação das equações.

Considerando que $\partial_x \ln(Z_{D0} n_{d0}) = \partial_x \ln B_0$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= -\alpha_0 \phi_1 + \alpha_1 \frac{K_y}{K^2} A_1 - \alpha_2 K_x K_y \frac{(K^2 - 4K_x^2)}{K^2} A_1 A_2 \\ \dot{A}_1 &= -\frac{\eta K^2}{1 + K^2 \lambda_e^2} A_1 - \frac{\delta_1 K_y}{1 + K^2 \lambda_e^2} \phi_1 + \frac{c K_x K_y}{B_0} \left[1 - \frac{12 K_x^2 \lambda_e^2}{1 + K^2 \lambda_e^2} \right] A_2 \phi_1 \\ \dot{A}_2 &= -\frac{c K_x K_y}{2 B_0} \phi_1 A_1 - 4 \frac{\eta K_x^2}{1 + 4 K_x^2 \lambda_e^2} A_2, \end{aligned} \quad (111)$$

onde $\alpha_0 = \nu_0 + \nu_i$, $\alpha_1 = 4\pi v_A^2 (\partial J_{ei} / \partial x) / B_0 c^2$, $\alpha_2 = v_A^2 / c^2$, $\eta = \nu_e \lambda_e^2$, é a resistividade do plasma, $\delta_1 = c(\partial v_{e0} / \partial x) / \omega_{ce}$ e $\delta_2 = cB_0$. A derivada temporal é definida com um ponto sobre ϕ_1 , A_1 and A_2 .

Após uma apropriada normalização, chegamos a

$$\begin{pmatrix} d_\tau X \\ d_\tau Y \\ d_\tau Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & \delta + sZ & 0 \\ r - Z & -1 & 0 \\ Y & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (112)$$

que descreve o acoplamento linear entre as várias amplitudes. Aqui, $\delta = \alpha_0 b_e^* / \eta K^2$, $s = -\alpha_0^2 \alpha_2 (K^2 - 4K_x^2) b_e^* K^2 B_0 / c \alpha_1^2 K_y^2 (b_e^* - 12K_x^2 \lambda_e^2)$, $r = -\alpha_1 \delta_1 K_y^2 / \eta K^4$, $b = 4K_x^2 b_e^* / (1 + 4K_x^2 \lambda_e^2) K^2$, com $K^2 = K_x^2 + K_y^2$ e $\tau = t/t_0$; onde $t_0 = \eta K^2 / b_e^*$ e $b_e^* = 1 + K^2 \lambda_e^2$.

Se $s = 0$, (112) obedece à seguinte normalização:

$$\phi_1 = a_1 X = \frac{\sqrt{2} \eta K^2 B_0}{c K_x K_y \sqrt{b_e^* (b_e^* - 12K_x^2 \lambda_e^2)}} X,$$

$$A_1 = a_2 Y = \frac{\sqrt{2} \alpha_0 \eta K^4 B_0}{c \alpha_1 K_x K_y^2 \sqrt{b_e^* (b_e^* - 12K_x^2 \lambda_e^2)}} Y$$

e

$$A_2 = a_3 Z = \frac{-\alpha_0 \eta K^4 B_0}{[c \alpha_1 K_x K_y^2 (b_e^* - 12K_x^2 \lambda_e^2)]} Z.$$

$X_0 = \pm [b(r - 2 + sr^2/\delta) + \sqrt{(r - 2 + sr^2/\delta)^2 + 4(r - 1)}] / 2]^{1/2}$, $Y_0 = r b X_0 / (b + X_0^2)$ e $Z_0 = X_0 Y_0 / b$ são os pontos de equilíbrio para a equação (112).

Para $s = 0$, notamos que quando $|r| > 1$, os pontos fixos de equilíbrio [$X_0 = Y_0 = \pm \sqrt{b}(|r| - 1)^{1/2}$, e $Z_0 = |r| - 1$] são instáveis, resultando em movimentos de células convectivas. A instabilidade linear deve saturar pela atração a um desses novos estados fixos.

Assim, comprovamos a possibilidade de estruturas caóticas para sistemas de plasmas que portam grãos de poeira carregados.

4.2 Ondas de Alfvén dispersivas lineares e não-lineares em plasmas de dois íons

Aqui, derivamos, via o modelo de multi-fluido, um conjunto de equações não-lineares acopladas para as ondas de Alfvén dispersivas, (DAW), em magnetoplasmas não uniformes

com duas espécies de íon. Consideramos que a frequência das DAW localiza-se entre as frequências de giro dos dois íons.

Novamente, $B_0(x)\hat{z}$ é o campo magnético no equilíbrio. Há gradientes de densidade e de velocidade no equilíbrio, $(\partial n_{j0}/\partial x$ e $\partial v_{j0}/\partial x$, respectivamente). Aqui $j = e$ para elétrons, i para os íons.

No equilíbrio, a divergência da densidade de corrente do plasma é zero e a condição de neutralidade de carga leva a

$$n_{e0} = Z_i^l n_{i0}^l + Z_i^h n_{i0}^h, \quad (113)$$

onde $l(h)$ representa os componentes dos íons mais leves(pesados) e Z_i , a carga do íon.

Consideramos que a frequência das DAW é muito menor do que a giro-frequência dos íons mais leves ($\Omega_{cl} = Z_i^l e B_0 / m_i^l c$).

Adotamos para esse sistema as velocidades de deriva para os elétrons,

$$\mathbf{v}_{e\perp} \approx \mathbf{v}_{EB} + \mathbf{v}_{De} + (v_{e0} + v_{ez}) \frac{\mathbf{B}_\perp}{B_0} \quad (114)$$

e para os íons

$$\mathbf{v}_i^l \approx \mathbf{v}_{EB} + \frac{c}{B_0 \Omega_{cl}} \left(\partial_t + v_{i0} \partial_z + \mathbf{v}_i^l \cdot \nabla \right) \mathbf{E}_\perp + \frac{v_{i0} \mathbf{B}_\perp}{B_0}. \quad (115)$$

Após obtermos as equações não-lineares gerais, considerando a equação de continuidade para os elétrons e íons, a equação de momento do componente paralelo dos elétrons e, também, da condição de conservação de densidade de corrente total, $(\nabla \cdot \mathbf{J} = 0)$, levantamos a equação geral para a relação de dispersão, isto é,

$$D_m \epsilon_l = \omega k_y k_z c \left(1 + \frac{k_y S}{k_z} \right) \left(\frac{4\pi}{B_0} J'_0 + k_y k_z c \right), \quad (116)$$

onde

$$D_m = \left(1 + k_y^2 \lambda_e^2 \right) \omega^2 - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{D0} - k_z^2 c^2 k_y^2 \lambda_{De}^2 - k_y k_z \rho_e^2 \Omega_{ce} J'_{e0} / e n_{e0},$$

$$\epsilon_l = \left(\frac{\omega_{ph}^2}{\Omega_{ch}} + \frac{\omega_{ph}^2 \Omega_{ch}}{\Omega_{ch}^2 - \omega^2} \right) k_y \kappa_i + \left(\frac{\omega_{pl}^2 \omega}{\Omega_{cl}^2} + \frac{\omega_{ph}^2 \omega}{\Omega_{ch}^2 - \omega^2} \right) k_y^2,$$

sendo ω_{ph} e ω_{pl} a frequência do plasma dos íons mais pesados e mais leves, respectivamente. Além disso, definimos $J'_0 = \partial J_0 / \partial x$, $\kappa_i = (\partial n_{i0}^h / \partial x) / n_{i0}^h$, $S = (\partial v_{e0} / \partial x) / \Omega_{ce} \equiv V'_{e0} / \Omega_{ce}$,

Ω_{ce} é a frequência de giro dos elétrons, $\Omega_{ci}(\Omega_{ch})$ a frequência de giro dos íons mais leves(pesados) e o parâmetro de cisalhamento dos elétrons é $\mathbf{S}_{v0} = (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla v_{e0}) / \omega_{ce}$.

Para as soluções não-lineares podemos encontrar vários tipos de vórtices. Só para exemplificar discutiremos uma destas possíveis soluções. Fazemos estas considerações:

$$\partial_x n_{j0} = 0, |\partial_t| \ll \Omega_{ch}, c\omega_{ce} |\nabla_{\perp}^2 A_z \partial_z| \ll \omega_{pe}^2 |\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \phi \cdot \nabla| \text{ e } \partial_z^2 \ll \nabla_{\perp}^2.$$

Fazendo uso das definições e métodos anteriores, chegamos a

$$\partial_{\xi} \nabla_{\perp}^2 \phi - \frac{c\mu_s}{uB_0} J(\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi) = 0, \quad (117)$$

onde $\mu_s = (1 - c^2\alpha_0^2/au^2) / (1 - c^2\alpha\alpha_0/au^2)$.

A equação (117) é satisfeita por

$$\nabla_{\perp}^2 \phi = \frac{4\phi_s K_s^2}{a_s^2} \exp \left[-\frac{2}{\phi_s} \left(\phi - \frac{uB_0}{\mu_s c} x \right) \right], \quad (118)$$

onde ϕ_s , K_s e a_s são constantes arbitrárias. A solução para (118) é

$$\phi = \frac{uB_0}{\mu_s c} x + \phi_s \ln \left[2 \cosh(K_s x) + 2 \left(1 - \frac{1}{a_s^2} \right) \cos(K_s \xi) \right], \quad (119)$$

que representa uma cadeia de vórtices, já discutida em detalhes no capítulo 3, quando $a_s^2 > 1$.

4.3 Perfis de equilíbrio de um plasma de poeira não-linear

Nós consideramos a geração e manutenção de campos magnéticos em plasmas com grãos carregados. Quando o gradiente de pressão dos íons e o gradiente de densidade dos grãos de poeira não são paralelos entre si, nós temos a possibilidade da geração de campos magnéticos espontâneos neste tipo de plasma. Mostramos as equações correspondentes. Após a constatação deste fenômeno, discutimos uma classe de perfis de equilíbrio auto-consistentes, não só considerando o perfil do campo magnético criado, bem como os perfis do número de densidade, do potencial elétrico e das correntes do plasma não-linear em estudo. Para entendermos este assunto aplicamos o modelo Hamiltoniano e do centro de guia (“guiding center”) para as partículas de plasma e, assim, construímos as devidas funções de distribuição. Estas funções nos habilitam ao cálculo da densidade de número do plasma e das densidades de corrente. A condição de quase-neutralidade e a lei de Ampère são introduzidas para deduzir no equilíbrio a densidade, o potencial e o campo magnético gerado. A importância da nossa investigação para plasmas de laboratório e espaciais é discutida.

Consideremos um plasma de multi-componentes formado por elétrons, íons e grãos de poeira. No estado de equilíbrio temos $n_{i0} = n_{e0} + Z_d n_{d0}$, onde n_{j0} é a densidade de número não perturbado das partículas de espécie j (j é e para os elétrons, i para os íons e d para os grãos de poeira) e Z_d é o número de cargas agregadas nos grãos. Quando a maioria dos elétrons está acoplada aos grãos, podemos dizer que há um esvaziamento completo dos elétrons de fundo do plasma, levando à condição de quase-neutralidade geral $n_{i0} \approx Z_d n_{d0}$. Em uma situação dessas, o “dusty” plasma pode ser considerado como um sistema de dois componentes.

Seguindo a lei de Faraday, o campo magnético \mathbf{B} em um plasma pode ser gerado quando o rotacional do campo elétrico é relevante. Logo a equação determina a evolução do campo magnético.

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (120)$$

onde o campo elétrico devido à separação de cargas da equação de momento dos íons

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla p_i}{en_i} - \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} + \frac{m_i}{e} d_t \mathbf{v}_i, \quad (121)$$

onde $p_i = n_i T_i$ é a pressão iônica, n_i e T_i são a densidade de número e a temperatura do

ion, respectivamente. A velocidade do fluido iônico é \mathbf{v}_i , que é obtida da lei de Ampère $n_i \mathbf{v}_i = Z_d n_d \mathbf{v}_d + (1/e\mu_0) \nabla \times \mathbf{B}$, onde v_d é a velocidade de fluido dos grãos. Por isso, de (120) e (121) temos

$$\begin{aligned} \partial_t (1 - \lambda_i^2 \nabla^2) \mathbf{B} = & -\frac{1}{eZ_d^2 n_d^2} \nabla p_i \times \nabla (Z_d n_d) + \nabla \times (\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) \\ & + \frac{m_i}{e} \nabla \times \mathbf{v}_i \times \left(\nabla \times \mathbf{v}_d - \frac{e\lambda_i^2}{m_i} \nabla^2 \mathbf{B} \right) + \frac{eZ_d \lambda_d^2}{m_d} \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \end{aligned} \quad (122)$$

onde $\lambda_d = c/\omega_{pd}$ é a profundidade de penetração do grão, $\omega_{pd} = (Z_d^2 e^2 n_d / m_d \epsilon_0)^{1/2}$ a frequência de plasma do grão, c a velocidade da luz e λ_i a profundidade de penetração dos íons. O primeiro termo do lado direito de (122) é o vetor baroclínico para o plasma com os grãos de poeira, que é a fonte para a geração do campo magnético e permanece atuante quando o gradiente de pressão dos íons e o gradiente de $Z_d n_d$ não são paralelos entre si. O segundo termo é um tipo de efeito Hall (dínamo) que implica na vorticidade dos grãos. O terceiro e quarto termo são acoplamentos não-lineares entre a vorticidade dos grãos e o fluxo $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ com os dos íons, bem como o rotacional de $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ onde \mathbf{J} é a corrente do plasma. O dínamo e os termos não-lineares são importantes na evolução dos campos magnéticos espontâneos. Seguindo [57], apresentamos uma classe de perfis de equilíbrio, considerando a dinâmica não-linear.

Considerando que o movimento das partículas dentro dos campos magnéticos seja governado pela Hamiltoniana

$$H_d = \frac{1}{2m_d} \left[\left(\frac{p_\theta}{R} + Z_d e A \right)^2 + p_R^2 \right] - Z_d e \phi, \quad (123)$$

onde m_d é a massa do grão, A é a componente θ do potencial vetorial, ϕ o potencial escalar e o momento angular canônico é dado por

$$p_\theta = m_d R^2 \dot{\theta} + Z_d e R A \quad (124)$$

e $p_R = m_d \dot{R}$, sendo R e θ as coordenadas radial e azimutal na configuração cilíndrica.

A função de distribuição dos grãos $f_d(p_\theta, p_R, \theta, R) = f_d(H, p_\theta)$ é

$$f_d = \frac{Z_{d0} n_{d0}}{2\pi m_d T_d} \exp \left[-\frac{1}{T_d} \left(H_d + \frac{\alpha_d}{2m_d} p_\theta^2 \right) \right], \quad (125)$$

onde T_d é a temperatura do grão e α_d uma constante.

Agora podemos calcular a densidade e a corrente dos grãos de uma forma direta, isto é, $n_d(R)$ e a componente θ da densidade de corrente $J_d(R)$.

$$n_d = \int \frac{f_d}{R} dp_R dp_\theta = \frac{Z_{d0} n_{d0}}{(1 + \alpha_d R^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{T_d} \left(\frac{\alpha_d Z_d^2 e^2 R^2 A^2}{2m_d (1 + \alpha_d R^2)} - Z_d e\phi \right) \right], \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 J_d &= \mu_0 e \int \frac{R\dot{\theta} f_d}{R} dp_R dp_\theta \\ &= -\frac{\omega_{pd}^2}{c^2} \frac{\alpha_d R^2 A}{(1 + \alpha_d R^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{1}{T_d} \left(\frac{\alpha_d Z_d^2 e^2 R^2 A^2}{2m_d (1 + \alpha_d R^2)} - Z_d e\phi \right) \right]. \end{aligned} \quad (127)$$

Para os íons consideramos que o seu raio de Larmor é muito menor do que a escala do sistema e, portanto, podemos adotar

$$H_i = \mu\omega_{ci} + e\phi, \quad (128)$$

onde $\mu (= m_i v_\perp^2 / 2\omega_{ci})$ é o momento magnético. As variáveis canônicas são como μ , $\theta = \int \omega_{ci} dt$, R , e Θ . Para os íons R e θ correspondem às coordenadas do centro de guia e H e R são considerados constantes de movimento. A função de distribuição é da forma

$$f_i(\mu, \theta, R, \Theta) = f_i(H_i, R) = \frac{n_{i0}\omega_{ci}}{2\pi T_i} \exp \left[-\frac{1}{T_i} (\mu\omega_{ci} + e\phi) + g(R) \right]. \quad (129)$$

aqui $g(R)$ atua na função para R .

É fácil agora determinar a densidade de número, de corrente e de magnetização dos íons. Assim temos, respectivamente

$$n_i = \int f_i(H, R) d\mu d\theta = n_{i0} \exp \left[-\frac{e\phi}{T_i} + g(R) \right], \quad (130)$$

$$\mu_0 J_i = -e\mu_0 \int R\dot{\theta} f_i d\mu d\theta = \frac{\omega_{pd}^2}{c^2} \frac{1}{\omega_{cd}} \left(\frac{T_i}{Z_d e} \frac{d \ln \omega_{ci}}{dR} + \frac{1}{Z_d} \frac{d\phi}{dR} \right) \exp \left[-\frac{e\phi}{T_i} + g(R) \right], \quad (131)$$

e

$$\begin{aligned} \mu_0 J_m &= \frac{e\mu_0}{m_i} \frac{d}{dR} \int \mu f_i d\mu d\theta \\ &= -\frac{\omega_{pd}^2}{c^2} \frac{1}{\omega_{cd}} \left(\frac{T_i}{Z_d e} \frac{d \ln \omega_{ci}}{dR} + \frac{1}{Z_d} \frac{d\phi}{dR} - \frac{T_i}{Z_d e} \frac{\eta_d \alpha_d R}{(1 + \alpha_d R^2)} \right) \exp \left[-\frac{e\phi}{T_i} + g(R) \right]. \end{aligned} \quad (132)$$

O primeiro e segundo termo do lado direito de (132) correspondem à derivas $\nabla \mathbf{B}$ e $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, respectivamente. Utilizamos $R\dot{\theta} = (\partial H / \partial R) / eB$ e a condição de quase-neutralidade para o plasma de dois componentes.

A lei de Ampère em termos do potencial vetor em coordenadas cilíndricas é

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d}{dR} A \right) - \frac{A}{R^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_t, \quad (133)$$

onde $\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_m$.

O campo magnético é dado por

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (RA) = \mathbf{B}. \quad (134)$$

No momento em que um vórtice aparece a força centrífuga do grão deve ser balanceada pelo gradiente de pressão. O campo magnético auto-gerado deve ser nulo quando $R \rightarrow \infty$. O valor da densidade no centro do vórtice é bem baixo e aumenta, saturando em um valor próximo do seu valor no equilíbrio em $R \rightarrow \infty$. Quando $|\mathbf{B}|_\infty \rightarrow 0$, A deve ser limitado. Aplicando a condição de quase-neutralidade e o potencial $|\phi|_\infty \rightarrow T_d / [(2Z_d e) \ln(1 + \alpha_d R^2)]$, nós rapidamente obtemos

$$g(R) = \frac{\eta_d}{2} \ln(1 + \alpha_d R^2),$$

onde $\eta_d = T_d / (Z_d T_i)$. Logo, a densidade e o potencial são

$$Z_d n_d = n_i = n_0 \exp \left[-\frac{\eta_d}{1 + \eta_d} \frac{\alpha_d Z_d^2 e^2 R^2 A^2}{2m_d T_d (1 + \alpha_d R^2)} \right], \quad (135)$$

e

$$\frac{e\phi}{T_i} = \frac{\eta_d}{2} \ln(1 + \alpha_d R^2) + \frac{\eta_d}{1 + \eta_d} \left[\frac{\alpha_d Z_d^2 e^2 R^2 A^2}{2m_d T_d (1 + \alpha_d R^2)} \right]. \quad (136)$$

Substituindo (127), (131) e (132) em (133), obtemos

$$\frac{d^2 A}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dA}{dR} - \frac{A}{R^2} = -\frac{\omega_{pd}^2}{c^2} \frac{1}{1 + \alpha_d R^2} \left(\frac{T_d}{\omega_{cd} Z_d^2 e} \alpha_d R - RA \right) \exp \left[-\tau_d \left(\frac{\alpha_d Z_d^2 e^2 R^2 A^2}{2m_d T_d (1 + \alpha_d R^2)} \right) \right]. \quad (137)$$

onde $\tau_d = \eta_d / (\eta_d + 1)$.

Achamos conveniente definir $r = R\omega_{pd}/\sqrt{2}c$, $A_0 = \sqrt{[(1 + \eta_d)/\eta_d] 2m_d T_d / Z_d e}$, $\alpha_0 = 2c^2 \alpha_d / \omega_{pd}^2$ e introduzir os símbolos $A^* = A/A_0$, $A_d = \omega_{pd} / (\omega_{cd} c Z_d) \sqrt{\eta_d T_d / [2m_d (1 + \eta_d)]}$, $\xi = r^2$, and $u = rA^*$, de tal forma que a equação (137) pode ser expressada por

$$4 \frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 \xi} (u - A_d) \exp \left[-\frac{\alpha_0 u^2}{2(1 + \alpha_0 \xi)} \right]. \quad (138)$$

Desprezando o lado esquerdo de (138), o valor assintótico da solução do vórtice de (138) é A_d . Assim, o potencial vetor torna-se constante e a densidade

$$n_\infty = n_0 \exp \left[-\frac{\eta_d}{2(1 + \eta_d)} \right]. \quad (139)$$

Nós integramos a equação (138) de fora para dentro na escala logarítmica de $\log \xi = 10$. Escolhendo valores típicos para o plasma espacial, temos $n_d \approx 5 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}$, o tamanho do grão de 1 micron, $Z_d \sim 1000$, a densidade de massa é 1 g/cm^3 , $m_d \sim 10^{-14} \text{ g}$, $T_d \sim 300 \text{ K}$, $T_i \sim 0.2 \text{ eV}$. A Fig. 14 exibe o perfil do campo magnético em função de R . Na Fig. 15 são mostradas os perfis normalizados da densidade de corrente J_d , o potencial escalar ϕ , a densidade de íons n e o potencial vetorial vezes raio rA .

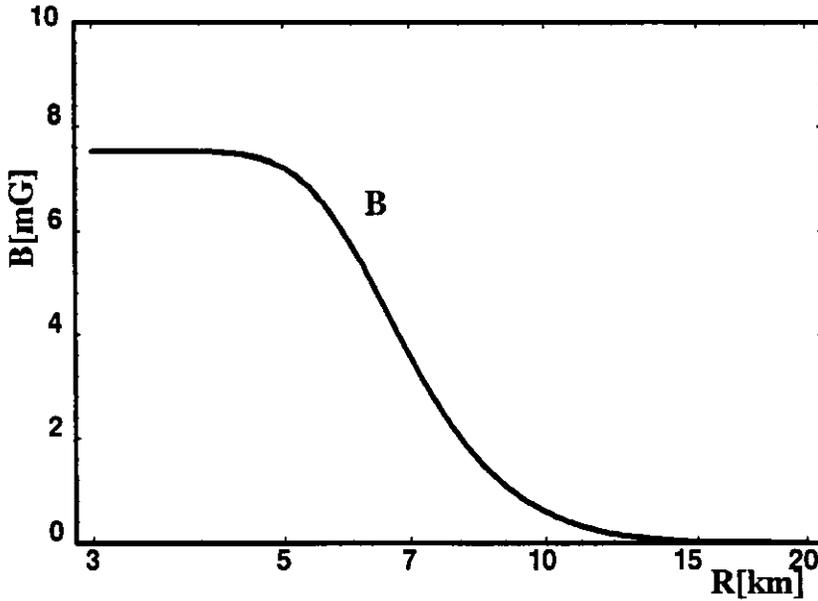


Fig. 14. O perfil do campo magnético auto gerado por grãos de poeira carregados no plasma. O valor do campo na região central é da ordem de 7,5 mG e o raio do perfil é da ordem de 7 km.

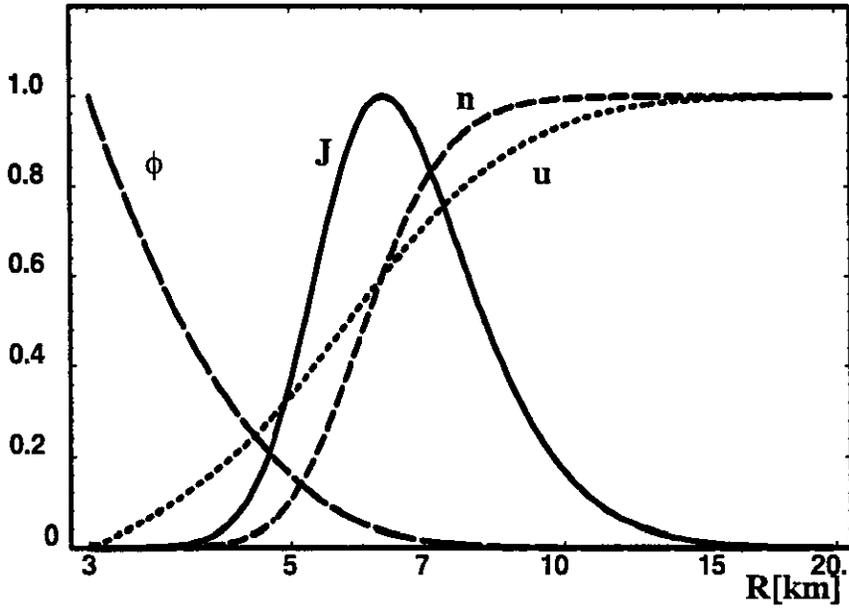


Fig. 15. A variação da densidade de corrente total normalizada, J_d , o potencial escalar ϕ , a densidade dos íons n e o potencial vetorial vezes raio $u = RA$ em função do raio R . A escala de u é diferente para as outras quantidades; ela começa com -1 no ponto $R = 3$ e termina com 0 no ponto $R = 20$.

Nossos resultados podem ser úteis para o entendimento do equilíbrio de sistemas de plasma no espaço intersideral com poeira carregados. Com parâmetros diferentes esta teoria pode ser aplicada a plasmas produzidos por laser intenso.

Capítulo 5. Conclusões

Nesta tese são investigadas as propriedades lineares e não-lineares das ondas eletromagnéticas de baixa-freqüência em um sistema de plasma magnetizado e dissipativo na presença de densidade de fluxo não uniforme. Estas propriedades são analisadas utilizando o modelo de fluidos. Estuda-se plasmas de dois fluidos, plasmas que portam dois tipos diferentes de íons e plasmas de poeira (“dusty plasmas”).

No modelo de dois fluidos mostra-se que flutuações eletrostáticas e eletromagnéticas que crescem rapidamente e que cobrem todo o espectro de freqüências (de comprimentos de onda longos e comprimentos de onda curtos em relação ao raio de giro dos íons) são excitados por fluxos de plasma de cisalhamento. No regime linear e no não-linear derivam-se ondas eletrôn-acústicas que se acoplam com outros modos de ondas, como, por exemplo, as ondas de Alfvén dispersivas. O acoplamento não-linear de ondas eletromagnéticas podem levar a um magnetoplasma não uniforme e com presença de fluxos de cisalhamento a vários tipos de vórtices. As condições explícitas para a existência destes diferentes tipos de vórtices são obtidas. Assim, pode-se justificar o acúmulo localizado de energias livres, que são observados tanto em plasmas espaciais como em plasmas de laboratório. É possível descrever estruturas caóticas, devido aos efeitos dissipativos contidos nas equações dinâmicas não-lineares. Estas equações em um sistema de equações de Lorenz-Stenflo. Atualmente, enfatiza-se os estudos de trajetórias caóticas próximas às paredes do tokamak, onde há um aumento de entropia, que causa um movimento totalmente irregular das partículas nesta região do tokamak. Também aplica-se esta teoria na astrofísica e física espacial, como na cauda magnética terrestre que pode ser perturbada, devido aos fatores externos, como o campo magnético interplanetário (IMF) e a magnetopausa. Estas perturbações podem ser tão fortes que provocam aspectos não-Maxwellianos no sistema, ocasionando uma dinâmica complicada, que resulta em uma distribuição não-trivial de partículas. Uma das consequências é o aparecimento de reconexões rápidas, seguindo às mudanças das condições de IMF.

No modelo de plasma de dois-íons, percebe-se a forte influência das flutuações de estruturas de Alfvén. A nossa investigação esclarece alguns fenômenos ionosféricos. Sugere-se a presença marcante de vários tipos de vórtices com características Alfvénicas na Aurora Boreal, como vórtices dipolares e cadeias de vórtices, de acordo com as inúmeras medidas

observacionais já realizadas nesta região.

É estudada, também, a possibilidade de haver estruturas não-lineares vorticosas ou caóticas em plasmas de poeira. Os modos lineares instáveis saturam-se devido ao modo de acoplamento, formando estruturas coerentes não-lineares em magnetoplasmas não dissipativos. As estruturas coerentes consistem de vórtices dipolares e de cadeias de vórtices. As não-linearidades vetoriais associadas com a deriva de polarização dos íons e do acoplamento entre o fluxo eletrônico paralelo com as linhas do campo magnético causam estas estruturas não-lineares. Se for considerado o efeito dissipativo, mais uma vez podemos aproximar a dinâmica às estruturas caóticas.

A presença do fluxo de cisalhamento em sistemas de plasma é crucial para a formação de vórtices localizados de diversos tamanhos.

Há pouca referência sobre as condições de equilíbrio necessárias à existência de vórtices. Sob esta perspectiva, são levantados os perfis de equilíbrio de um sistema não-linear de um plasma de poeira. Nota-se que gradientes de densidade e de temperatura não-paralelos podem gerar campos magnéticos espontâneos em um plasma de poeira. A manutenção desses campos magnéticos depende diretamente da existência das vorticidades. Para entender este fenômeno são levantados os perfis de equilíbrio da densidade de número, das correntes do sistema de plasma de poeira e do campo magnético. É discutida a importância deste tema para laboratórios de plasma de poeira de baixa temperatura e, também, para plasmas espaciais.

A nossa teoria tem aplicações para as estruturas não-lineares que são observadas por diversos foguetes e satélites na magnetosfera e ionosfera terrestre e por diversos plasmas em laboratórios de baixa temperatura.

Referências

- [1] H. Alfvén. Existence of electromagnetic-hyromagnetic waves. *Nature*, 150:405, (1942).
- [2] W. H. Bostik and M. A. Levine. Experimental demonstration in the laboratory of the existence of magneto-hydrodynamic waves in ionized helium. *Phys. Rev.*, 94:671, (1952).
- [3] J. R. Stefant. Alfvén wave damping from finite gyroradius coupling to the ion acoustic mode. *Phys. Fluids*, 13:440, (1970).
- [4] A. B. Mikhailovskii, V. P. Lakhin, G. D. Aburdzhaniya, L. A. Mikhailovskaya, O. G. Onishchenko, and A. I. Smolyakov. "On the theory of Alfvén vortices". *Plasma Phys. and Contr. Fus.*, 29:1, (1987).
- [5] M. Y. Yu, P. K. Shukla, and L. Stenflo. "Alfvén vortices in a strongly magnetized electron-positron plasma". *Astrophys. J.*, 309:L63, (1986).
- [6] P. K. Shukla, H. L. Pécseli, and J. Juul Rasmussen. "Nonlinear propagation of short wavelength drift-Alfvén waves". *Physica Scripta*, 34:171, (1986).
- [7] P. Louarn, J. E. Wahlund, T. Chust, H. de Feraudy, A. Roux, B. Holback, P. O. Dovner, A. I. Eriksson, and G. Holmgren. "Observation of kinetic Alfvén waves by FREJA spacecraft". *Geophys. Res. Lett.*, 21:1847, (1994).
- [8] M. H. Boehm, C. W. Carlson, J. P. McFadden, J. H. Clemmons, and F. S. Mozer. "High-resolution sounding rocket observations of large-amplitude Alfvén waves". *J. Geophys. Res.*, 95:12157, (1990).
- [9] P. K. Shukla, A. M. Mirza, and R. T. Faria Jr. "Nonlinear dynamics of electromagnetic turbulence in a nonuniform magnetized plasma". *Phys. Plasmas*, 5:2846, (1998).
- [10] A. M. Mirza, R. T. Faria Jr., P. K. Shukla, and G. Murtaza. "Vortex formation in sheared flow driven fluctuations in nonuniform magnetized dusty gases". *Phys. Rev. E*, 57:1047, (1998).

- [11] R. T. Faria Jr., A. M. Mirza, and P. K. Shukla. "Self-organized and chaotic states in nonuniform dusty magnetoplasmas with sheared flows". *Physica Scripta*, T75:158, (1998).
- [12] R. T. Faria Jr., A. M. Mirza, P. K. Shukla, and O. A. Pokhotelov. "Linear and nonlinear dispersive alfvén waves in two- ion plasmas". *Phys. Plasmas*, 5:2947, (1998).
- [13] A. M. Mirza, T. Rafiq, G. Murtaza, P. K. Shukla, and R. T. Faria Jr. Chaos in the parallel sheared plasma flow driven electromagnetic turbulence in nonuniforme magnetoplasmas. *Phys. Plasmas*, 6:1107, (1999).
- [14] P. K. Shukla, A. M. Mirza, and R. T. Faria Jr. Parallel ion velocity shear driven electromagnetic fluctuations and associated particle transport in partially ionized plasmas. *J. Geophys. Res.*, 103:9417, (1998).
- [15] P. K. Shukla, L. Stenflo, and R. T. Faria Jr. Modulational instability of random phase plasmons in collisional plasmas. *Phys. Plasmas*, 5:2864, (1998).
- [16] R. T. Faria Jr. and P. K. Shukla. "Generalized Kaufman-Stenflo equations for collisional magnetoplasmas". *Physica Scripta*, T82:7, (1999).
- [17] V. M. Chmyrev, S. V. Bilichenko, O. A. Pokhotelov, V. A. Marchenko, V. I. Lazarev, A. V. Streltsov, and L. Stenflo. "Alfvén vortices and related phenomena in the ionosphere and teh magnetosphere". *Physica Scripta*, 38:841, (1988).
- [18] A. Hasegawa and C. Uberoi. *The Alfvén Waves*. Technical Information Center, Tennessee, 1982.
- [19] V. I. Petvsiashvili and O. A. Pokhotelov. *Solitary Waves in Plasmas and in the Atmosphere*. Gordon and Breach, London, 1992.
- [20] P. K. Shukla, G. T. Birk, J. Dreher, and L. Stenflo. "Dynamics of sheared flow driven drift-Alfvén waves in nonuniform plasmas". *Plasma Phys. Rep.*, 22:818, (1996).
- [21] N. L. Shatashvilli and N. N. Rao. "Localized nonlinear structures of intense electromagnetic waves in two-electron-temperature electron-positron plasmas". *Phys. Plasmas*, 6:66, (1999).

- [22] M. Surendra and D. B. Graves. "Electron acoustic waves in capacitively coupled low-pressure rf glow discharges". *Phys. Rev. Lett.*, 66:1569, (1991).
- [23] A. B. Mikhailovskii. "Drift-cyclotron instability of a plasma with hot ions". *Nuclear Fusion*, 5:125, (1965).
- [24] K. Watanabe and T. Taniuti. "Electron-acoustic mode in a plasma of two-temperature electrons". *J. Phys. Soc. Japan*, 43:1819, (1977).
- [25] T. H. Stix. *The Theory of Plasmas Waves*. McGraw-Hill, London, 1962.
- [26] V. I. Somikov, V. D. Shapiro, and V. I. Shevchenko. *Sov. Phys. JETP*, 51:295, (1980).
- [27] C. S. Lin and D. Winske. "Simulation of the electron acoustic instability for a finite-size electron beam system". *J. Geophys. Res.*, 92:7569, (1987).
- [28] J. L. Roeder, V. Angelopoulos, W. Baumjohann, and R. R. Anderson. "Observations of correlated broadband electrostatic noise and electron cyclotron emissions in the plasma sheet". *Geophys. Res. Lett.*, 18:53, (1991).
- [29] R. E. Erlandson, R. Pottelette, T. A. Potemra, L. J. Zanetti, R. Lundin, and M. Hamelin. "Impulsive electrostatic waves and field-aligned currents observed in the entry layer". *Geophys. Res. Lett.*, 14:431, (1987).
- [30] V. I. Sotnikov, D. Schriver, and M. Ashour-Abdalla. "Excitation of electron acoustic waves by a gyrating electron beam". *J. Geophys. Res.*, 100:19765, (1995).
- [31] R. L. Mace, G. Amery, and M. A. Hellberg. "The electron-acoustic mode in a plasma with hot suprathermal and cool Maxwellian electrons". *Phys. Plasmas*, 6:44, (1998).
- [32] R. P. Sharma and K. Ramamurthy. "Parametric excitation of electron acoustic waves". *Phys. Fluids*, 27:399, (1983).
- [33] A. B. Mikhailovskii, V. P. Lakhin, and S. E. Sharapov. "Solitary vortices of electron acoustic waves and short drift waves". *Sov. J. Plasma Phys.*, 11:385, (1985).
- [34] M. J. Keskinen and J. D. Huba. "Generation of lower hybrid waves by inhomogeneous electron streams". *J. Geophys. Res.*, 88:3109, (1983).

- [35] A. B. Mikhailovskii. *Theory of Plasma Instabilities*. Consultants Bureau, New York, 1974.
- [36] P. K. Shukla, J. Srinivas, G. Murtaza, and H. Saleem. Formation of vortex chains in a nonuniform magnetized electron-plasma. *Phys. Plasmas*, 1:3505, (1994).
- [37] A. G. Elfimov, R. M. O. Galvão, I. C. Nascimento, and G. Amarante-Segundo. Modification of Alfvén wave dispersion and Alfvén wave heating in multiple ion species tokamak plasmas. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 39:1551, (1997).
- [38] U. de Angelis. The physics of dusty plasmas. *Physica Scripta*, 45:465, (1992).
- [39] P. K. Shukla and V. P. Silin. Dust ion-acoustic wave. *Physica Scripta*, 45:508, (1992).
- [40] E. N. Lorenz. *J. Atmos. Sci.*, 20:130, (1964).
- [41] L. Stenflo. Generalized Lorenz equations for acoustic-gravity waves in the atmosphere. *Physica Scripta*, 53:83, (1996).
- [42] H. Okuda and J. M. Dawson. Theory and numerical simulation on plasma diffusion across a magnetic field. *Phys. Fluids*, 16:408, (1973).
- [43] S. I. Braginskii. *Reviews of Plasma Physics vol.1*. Consultants Bureau, New York, 1965.
- [44] S. Ichimaru. *Basic Principles of Plasma Physics*. W. A. Benjamin Inc., Massachusetts, 1973.
- [45] F. F. Chen. *Introduction to Plasma Physics*. Plenum Press, New York, 1974.
- [46] P. K. Shukla, A. M. Mirza, G. Murtaza, and R. T. Faria Jr. Drift-ballooning modes in the presence of charged dust impurities in a nonuniform rotating plasma. *Phys. Plasmas*, 5:167, (1998).
- [47] R. T. Faria Jr., T. Farid, P. K. Shukla, and P. H. Sakanaka. “A class of stationary nonlinear dusty plasma equilibria”. *Phys. Plasmas*, 6:2950, (1999).

- [48] J. Liu and W. Horton. The intrinsic electromagnetic solitary vortices in magnetized plasma. *J. Plasma Phys.*, 36:1, (1986).
- [49] K. Stasiewicz, C. Seyler, P. K. Shukla, P. Bellan, C. Chaston, C. Kletzing, R. Lysak, J. Maggs, O. Pokhotelov, L. Stenflo, A. Streltsov, and J-E. Wahlund. Small scale Alfvénic structure in the aurora. *Space Sci. Rev.*, *in press*.
- [50] K-H. Glassmeier and C. Heppner. Traveling magnetospheric convection twin vortices: another case study, global characteristics, and a model. *J. Geophys. Res.*, 97:3977, (1992).
- [51] L. J. Lanzerotti, A. Wolfe, N. Trivedi, C. G. MacLennan, and L. V. Medford. Magnetic impulse events at high latitudes: magnetopause and boundary layer plasma processes. *J. Geophys. Res.*, 95:97, (1990).
- [52] K-H. Glassmeier, M. Hoenisch, and J. Untiedt. Ground-based and satellite observations of travelling magnetospheric convection twin vortices. *J. Geophys. Res.*, 94:2520, (1989).
- [53] M. Lockwood, S. W. H. Cowley, P. E. Sandholt, and R. P. Lepping. The ionospheric signatures of flux transfer events and solar wind dynamic pressure changes. *J. Geophys. Res.*, 95:17113, (1990).
- [54] A. Takayama, M. Wakatani, and H. Sugama. "Nonlinearity interchange mode in edge plasma with a poloidal shear flow". *J. Phys. Soc. Japan*, 64:791, (1995).
- [55] J. Chen and P. Palmadesso. Chaos and nonlinear dynamics of single-particle orbits in a magnetotail-like magnetic field. *J. Geophys. Res.*, 91:1499, (1986).
- [56] S. Benkada, P. Gabbai, V. N. Tsytovich, and A. Verga. Nonlinearities and instabilities of dissipative drift waves in dusty plasmas. *Phys. Rev. E*, 53:2717, (1996).
- [57] A. Hasegawa, M. Y. Yu, P. K. Shukla, and K. H. Spatschek. Vortex formation by baroclinic vector in laser-pellet interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 41:1656, (1978).
- [58] J. G. Charney. *Geophys. Public. Nors. Visenkamp. Akad. Oslo*, 17:3, (1948).

- [59] V. D. Larichev and G. M. Reznik. Nonlinear rossby waves on a large-scale current. *Okeanologiya*, 16:200, (1976).
- [60] T. Taniuti and A. Hasegawa. Nonlinear drift waves. *Physica Scripta*, T2:529, (1982).

Apêndice A. Vórtices. Introdução

Diferentes formas de estruturas coerentes, como vórtices dipolar e monopolar, bem como cadeias de vórtices originados da auto-organização de plasmas espaciais e de fusão têm atraído a atenção dos físicos nos últimos 20 anos. Estas estruturas coerentes podem aparecer em sistemas não-lineares, tais como em vários processos de aquecimento de plasmas, com perturbações de baixa frequência, no desenvolvimento de diferentes tipos de instabilidades, etc. Uma vez que eles podem efetivamente carregar partículas, investigações de vórtices podem ser de grande importância em problemas de transporte de partículas em plasmas de fusão. Sabe-se que em plasmas com gradientes de densidades e/ou temperaturas, modos eletromagnéticos podem existir, localizados junto à uma profundidade de penetração em sistemas não-colisionais (“collisionless skin depth”). Eles fornecem a auto-geração de um campo magnético localizado [47].

Os vórtices dipolares são uma classe especial de soluções estacionárias de um certo tipo de equações diferenciais parciais freqüentemente encontradas no estudo da dinâmica da atmosfera planetária, oceanografia, fluidos girantes em laboratórios experimentais e no fenômeno de ondas não-lineares em plasmas confinados magneticamente [19]. Fisicamente, estes vórtices aparecem quando a velocidade do movimento de fluido associada com as ondas tornam-se localmente maiores do que a velocidade de fase da onda, devido a efeitos não-lineares, causando um curvamento da frente de onda e, eventualmente, levando a uma estrutura de frente de onda bi-dimensional.

Historicamente, foi Charney [58] que derivou uma equação diferencial parcial não-linear para os vórtices de “Rossby”, (RV), em um fluido girante. Esta equação, que é similar a de Hasegawa-Mima, (HM), também possui a propriedade de não apresentar uma analogia uni-dimensional. Ela contém uma não-linearidade na forma de um produto vetorial bi-dimensional (Jacobiano),

$$[F, G] \equiv J(F, G) = \hat{z} \times \nabla F \cdot \nabla G \equiv \partial_x F \partial_y G - \partial_y F \partial_x G \quad (140)$$

onde as funções genéricas F e G situam-se no plano (x, y) .

A solução da equação de Charney foi resolvida só mais tarde por Larichev & Reznik [59] que, em seu trabalho pioneiro, descobriram uma técnica para solucionar a equação de Charney e acharam vórtices dipolares como soluções estacionárias.

Invocando a similaridade entre as equações de Charney e HM, Taniuti & Hasegawa [60] construíram as soluções de vórtice dipolar em simulações numéricas em plasma não uniformes magnetizados para ondas de deriva não-lineares. Desde então, um grande número de artigos, apresentando soluções de vórtices dipolares para vários modos em plasmas confinados magneticamente têm sido publicados.

A turbulência devido a vórtices está despontando como um novo conceito na física não-linear. Portanto, precisamos entender as propriedades dessas entidades não-lineares que estão fascinando a ciência da física moderna.

A.1 Ondas de “Rossby”

Mostraremos aqui a derivação da equação das ondas de Rossby e a sua solução. Chamamos a atenção que este é um dos modelos básicos dentro da teoria de vórtice. Entretanto, geralmente, os outros tipos, como vórtice de deriva (“drift-vórtice”), vórtice monopolar, cadeias de vórtice, apresentam um mecanismo de solução similar.

Para a turbulência da onda de Rossby, consideremos o movimento da atmosfera de um planeta girante. O campo de velocidades bi-dimensionais $\mathbf{v}(x, y, t)$ de uma atmosfera girante no plano horizontal (x, y) , cuja escala é muito menor do que a do comprimento de onda, obedece a equação de movimento

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -g\nabla H + f\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (141)$$

onde g é a constante gravitacional, H é a escala de comprimento da altura da atmosfera na direção vertical (z), $f(x)$ é o parâmetro de coriolis ($= 2\omega_0 \sin \theta$, ω_0 sendo a frequência angular de rotação e θ o ângulo latitudinal) que varia em relação a direção x (norte-sul). ∇H aparece em (141) devido ao balanço quase-estático entre a gravidade e o gradiente vertical da pressão. A quantidade H também representa a densidade de superfície da atmosfera sob condições isotérmicas; portanto ela obedece a equação de continuidade.

$$\partial_t H + \nabla \cdot (H\mathbf{v}) = 0. \quad (142)$$

Notando a semelhança estrutural entre (141) e o balanço de momento da partícula em um plasma frio magnetizado, podemos resolver (141) para \mathbf{v} . Fazendo $H = H_0 + h$, onde H_0 é a profundidade média da atmosfera e h é a perturbação da escala de altura.

Se $\langle f \rangle \partial_t \ll 1$, nós definimos de (141)

$$\mathbf{v} = \frac{g}{f} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \times h - \frac{g}{f^2} (\partial_t + \frac{g}{f} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla h \cdot \nabla) \nabla h, \quad (143)$$

onde $\langle f \rangle (\approx \omega_0)$ é o valor local do parâmetro de coriolis a latitude média, onde $\theta = 30^\circ$.

Por outro lado, (142) torna-se

$$\partial_t h + H_0 \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla (H_0 + h) = 0, \quad (144)$$

Eliminando \mathbf{v} de (143) em (144), obtemos

$$\partial_t (1 - \rho_0^2 \nabla^2) h + v^* \partial_y h - \frac{g^2 H_0}{\langle f \rangle^3} J(h, \nabla h) = 0, \quad (145)$$

onde $v^* = -gH_0(d_x \ln H_0 / \langle f \rangle)$ e $\rho_0 = (gH_0)^{1/2} / \langle f \rangle$ são a velocidade e o raio de Rossby, respectivamente. A equação (145) é a equação de Charney [58]. Desconsiderando o termo não-linear e expressando h em termos da amplitude de Fourier, $h(x, y, t) + h_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + c.c.$, obtemos a relação de dispersão para as ondas de Rossby como

$$\omega = \frac{k_y v^*}{1 + k_\perp^2 \rho_0^2}. \quad (146)$$

A equação (146) mostra-nos que as ondas de Rossby se propagam na direção y (longitudinal).

Agora consideremos um exemplo de um sistema de plasma magnetizado portando ondas de deriva, na presença de uma não-homogeneidade de densidade $\nabla n_0(x)$ e com temperatura constante. Nosso modelo de equações não-lineares será

$$\partial_t (\rho_s^2 \nabla_\perp^2) \phi + v_e^* \partial_y \phi - \rho_s^2 \frac{c}{B_0} J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) + \frac{T_e}{e} \partial_z v_{iz} = 0, \quad (147)$$

$$[\partial_t + \frac{c}{B_0} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \phi \cdot \nabla] v_{iz} = -\frac{e}{m_i} \partial_z \phi, \quad (148)$$

onde $v_e^* = -\Omega_i \rho_s^2 \kappa_n$, $\rho_s^2 = cT_e(x) / eB_0$ e $\kappa_n = d_x \ln n_0(x)$. Desprezando o movimento paralelo de íons, nós imediatamente percebemos características familiares entre (144) e a equação HM (147) com $v_{iz} = 0$. Entretanto, a equação HM governa a dinâmica das ondas de deriva não-lineares em um plasma magnetizado não-uniforme.

Em seguida, apresentamos as soluções quase-estacionárias do nosso sistema acoplado (147) e (148) que governa os modos acústicos de deriva não-lineares no plasma. Procuramos por frentes de onda, considerando que as variáveis ϕ e v_{iz} são funções somente de

x e $\xi = y + \alpha z - ut$. Aqui, α e u são constantes. No espaço estacionário ξ , (147) e (148) podem ser escritos como

$$u(\rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 - 1) \partial_{\xi} \phi + v_e^* \partial_{\xi} \phi - \rho_s^2 \frac{c}{B_0} [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] + \frac{\alpha T_e}{e} \partial_{\xi} v_{iz} = 0, \quad (149)$$

$$[\partial_{\xi} - \frac{c}{u B_0} [\phi, v_{iz}] v_{iz} = -\frac{\alpha e}{m_i u} \partial_{\xi} \phi, \quad (150)$$

onde $\nabla_{\perp} = (\partial_x, \partial_{\xi})$ e definimos

$$[\phi, U] = \partial_x \phi \partial_{\xi} U - \partial_x U \partial_{\xi} \phi. \quad (151)$$

Facilmente notamos que $v_{iz} = (\alpha e / m_i u) \phi$ é uma solução exata para (150). Então, a equação (149) torna-se

$$\nabla_{\perp}^2 \phi - \Lambda \partial_{\xi} \phi - \frac{c}{u B_0} [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] = 0, \quad (152)$$

onde

$$\Lambda = \left[1 - \frac{v_e^*}{u} - \alpha^2 \frac{c_s^2}{u^2} \right] / \rho_s^2. \quad (153)$$

Note que no limite $\alpha \rightarrow 0$, (152) transforma-se exatamente em (145). Assim, as soluções para as ondas de deriva e de Rossby são idênticas. Além do mais (152) é uma equação diferencial parcial não-linear complicada. Até hoje não existe uma solução analítica bem comportada (localizada) para (152). Entretanto, é utilizada a seguinte expressão

$$\nabla_{\perp}^2 \phi = C_1 \phi + C_2 x, \quad (154)$$

que foi estabelecida por Larichev & Reznik [59]. Eles resolveram (152) argumentando que as constantes C_1 e C_2 interagem entre si segundo a seguinte relação

$$C_1 - \Lambda + \frac{c}{u B_0} C_2 = 0. \quad (155)$$

Assim, impondo as condições de contorno apropriadas para as perturbações localizadas, no caso C_1 e C_2 , podemos, finalmente, solucionar (152).

Seguindo Larichev & Reznik, conseguimos obter soluções analíticas bem comportadas. Introduzindo as coordenadas polares $r = (x^2 + \xi^2)^{1/2}$ e $\theta = \arctan(\xi/x)$, e dividindo o

plano (r, θ) em duas regiões: uma externa $r > R$ e uma interna $r < R$; R significa os valores da estrutura localizada.

Impondo as condições de contorno

$$\begin{aligned}\phi(r, \theta) &\rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \\ \phi(r, \theta) &\rightarrow \text{regular}, \quad r = 0\end{aligned}\tag{156}$$

então, (154) pode ser dividida em duas regiões como

$$\nabla_{\perp}^2 \phi(r, \theta) - C_1^0 \phi(r, \theta) = 0, \quad r > R\tag{157}$$

$$\nabla_{\perp}^2 \phi(r, \theta) - C_1^i \phi(r, \theta) - C_2^i r \cos \theta = 0, \quad r < R\tag{158}$$

onde os superescritos '0' e 'i' denotam as regiões externas e internas e o Laplaciano na configuração cilíndrica é escrito como $\nabla_{\perp}^2 = r^{-1} \partial_r (r \partial_r) + r^{-2} \partial_{\theta}^2$. Para existir soluções localizadas na região externa, precisamos que $C_2^0 = 0$. Assim, (154) é

$$C_1^0 = \Lambda \equiv a^2.\tag{159}$$

Por outro lado, dizendo que $C_1^i \equiv -bn^2$ já é conhecido (mais tarde isso tornar-se-á óbvio), de (154) encontramos

$$C_2^i = \frac{uB_0}{c} (a^2 + b^2).\tag{160}$$

As soluções do vórtice dipolar de (157) e (158) podem ter a forma

$$\phi(r, \theta) = \phi(r) \cos \theta.\tag{161}$$

Inserindo (161) em (157) e (158), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \phi) - \left(\frac{1}{r^2} + a^2 \right) \phi &= 0, \quad r > R, \\ \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \phi) - \left(\frac{1}{r^2} - b^2 \right) - C_2^i r &= 0, \quad r < R,\end{aligned}\tag{162}$$

que são as equações de Bessel. As soluções espaciais para (162) são, respectivamente obtidas por Larichev & Reznik [59]

$$\phi^0(r) = A^0 K_1(ar),\tag{163}$$

$$\phi^i(r) = A^i J_1(br) + \frac{C_2^i}{b^2} r, \quad (164)$$

onde J_1 e K_1 são as funções de Bessel e a modificada de Bessel de primeira ordem, respectivamente, e A^0 e A^i são as constantes que são determinadas pelo casamento das soluções internas e externas e suas derivadas na interface do vórtice $r = R$. Por exemplo, a continuidade de ϕ e $\nabla^2\phi$ em $r = R$ dá, respectivamente

$$A^0 K_1(aR) = A^i J_1(bR) + \frac{C_2^i}{b^2} R, \quad (165)$$

$$(a^2 + b^2)\phi^0 = C_2^i R. \quad (166)$$

Usando (163), podemos eliminar ϕ^0 de (166), obtendo

$$A^0 = \frac{C_2^i R}{(a^2 + b^2)K_1(aR)}. \quad (167)$$

Substituindo A^0 de (167) em (165) temos

$$A^i = -\frac{C_2^i R a^2}{b^2(a^2 + b^2)J_1(bR)}. \quad (168)$$

Finalmente, a continuidade de $\partial_r\phi$ em $r = R$ leva a

$$A^0 a K_1'(aR) = A^i J_1'(bR) + \frac{C_2^i}{b^2}, \quad (169)$$

onde o primo denota a primeira derivada em relação a R . Substituindo os valores de A^0 e A^i de (167) e (168) em (169), temos

$$\frac{K_2(aR)}{aR K_1(aR)} = -\frac{J_2(bR)}{bR J_1(bR)}, \quad (170)$$

onde usamos a seguinte fórmula recursiva

$$\begin{aligned} K_1'(aR) &= -K_2(aR) + (aR)^{-1} K_1(aR), \\ \text{e } J_1'(bR) &= -J_2(bR) + (bR)^{-1} J_1(bR), \end{aligned}$$

aqui J_2 e K_2 são as funções de Bessel e a modificada de Bessel de segunda ordem, respectivamente. Note que para um dado valor de aR , (170) determina bR . Não há soluções para (170) com b puramente imaginário, neste caso (170) fica

$$\frac{K_2(aR)}{aR K_1(aR)} = -\frac{I_2(|b|R)}{|b|R J_1(|b|R)}, \quad (171)$$

aqui o sinal do lado esquerdo de (171) é positivo, enquanto que do lado direito é negativo. Entretanto para cada aR há um conjunto infinito de raízes discretas $Rb_n(aR)$ satisfazendo (171).

Quando aR é grande ($aR \rightarrow \infty$), a formação assintótica da função de primeira ordem K_1 é

$$K_1 \sim (aR)^{-1} \exp(-aR) . \quad (172)$$

Devido às soluções localizadas precisamos impor $a > 0$. Para os vórtices acústicos de deriva, temos

$$u^2 - uv_e^* - \alpha^2 c_s^2 > 0 . \quad (173)$$

Para ondas de Rossby ou de deriva (“drift”), colocamos $\alpha \rightarrow 0$ e (173) é substituída por

$$u(u - v_e^*) > 0 . \quad (174)$$

Em um plasma uniforme, os vórtices iônicos acústicos aparecem sob a seguinte condição

$$u^2 > \alpha^2 c_s^2 . \quad (175)$$

De (173) a (175) deduzimos que os vórtices dipolares têm uma velocidade oposta à velocidade de fase dos modos lineares.

Apêndice B. Síntese sobre caos ou teoria da complexidade

Caos é umas das mais recentes teorias. Esta ciência consegue ser aplicada a todas as áreas científicas e pode moldar o perfil da ciência no futuro.

Qualquer sistema que se desenvolve no tempo de uma forma não-trivial pode ser considerado um sistema dinâmico não-linear. A teoria da dinâmica não-linear considera, também, os efeitos que contêm não-linearidades. Discutiremos isso mais vêzes no decorrer deste tema.

Uma definição precisa de caos ainda estar por vir. Mas quase todos concordam que caos tem um comportamento aperiódico de longo-termo em um sistema pseudo-determinístico que exhibe dependência sensítiva sobre as condições iniciais. Basicamente um comportamento aperiódico de longo-termo significa que não podemos definir pontos fixos, órbitas periódicas ou quase-periódicas quando $t \rightarrow \infty$. Determinístico significa que o sistema não aceita entradas ou parâmentros randômicos, apesar de que considerar um caos puramente determinístico, também não é correto. O movimento irregular aparece devido às não-linearidades do sistema. Uma sensível dependência às condições iniciais significa que duas trajetórias mesmo situadas muito próximas, rapidamente divergem entre si, perfazendo caminhos totalmente diferentes.

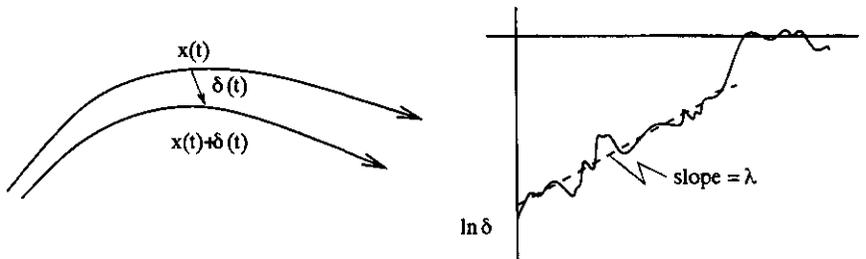


Fig. B1. *Evolução de duas trajetórias inicialmente muito próximas que divergem em função de λ .*

Suponha que $x(t)$ seja um ponto e próximo a ele encontra-se um outro ponto $x(t) + \delta(t)$, sendo δ um pequeno deslocamento no espaço, como podemos visualizar na Fig. B1. Digamos que no início $\delta = 10^{-12}$. Em estudos numéricos do atrator de Lorenz, encontramos que $\delta(t) \sim \delta_0 \exp(\lambda t)$, onde $\lambda \approx 0.9$, o que possibilita uma rápida mudança em sua trajetória. Por isso que as trajetórias vizinhas se afastam exponencialmente muito

rápido, como podemos ver na Fig. B1; λ , que é conhecida como expoente de Liapunov, é representada por um valor médio dos deslocamentos em função do tempo.

Quando um sistema tem um valor positivo para λ , constatamos que é difícil fazer previsões da evolução das trajetórias dentro de um intervalo de tempo prolongado. Um exemplo clássico da sensibilidade às condições iniciais é o “Butterfly Effect” (Efeito Borboleta). Uma pequena alteração no início, pode ocasionar grandes transformações no sistema. Lorenz define isso como o “Efeito Borboleta”. As perturbações desprezíveis do movimento das asas de uma borboleta provocadas na atmosfera em um dos hemisférios da Terra, pode provocar verdadeiros tornados no outro lado do planeta. Como caos é altamente sensível às condições iniciais, um sinal praticamente desprezível na entrada de um sistema não-linear pode apresentar na saída uma forma e uma intensidade muitas vezes amplificadas.

Caos também é conhecido como Teoria de Sistemas Complexos, Teoria da Complexidade, Teoria dos Sistemas Dinâmicos ou Estudos de Sistemas Não-lineares. O termo Caos é largamente adotado devido ao livro de James Gleick (1987), “Chaos: Making a New Science”. Como veremos adiante, o termo Teoria da Complexidade ou Teoria de Sistemas Complexos representa com mais eficácia este sistema, pelo menos hoje em dia.

A maioria dos estudos científicos anteriores ao desenvolvimento da teoria das complexidades tentava entender o mundo através de modelos lineares. Iniciando com Sir Isaac Newton, a física tem adotado o modelamento da natureza. Mas, nem tudo que se previa teoricamente demonstrava ser correto no ponto de vista da natureza. A natureza não se comporta linearmente. Atualmente percebemos que o “ruído” é uma informação importante no processo experimental. Quando adicionamos o ruído, os resultados já não são tão lineares e previsíveis. Este ruído é o que era originalmente referido como um caos no experimento. A análise mais detalhada deste ruído, isto é, caos, foi um dos primeiros conceitos para o estudo da teoria de sistemas complexos.

Primeiramente, precisamos entender o que é complexidade. O prêmio Nobel Ilya Prigogine explica que complexidade de um sistema é definido pela necessidade do modelo prever efetiva e realmente o comportamento deste sistema. Quanto mais próximo do sistema real, mais complexo será o modelo. O exemplo mais complexo que podemos citar são as condições meteorológicas. Segundo Edward Lorenz, o único modelo que poça

prever as condições reais do tempo seria uma duplicação exata do mesmo. A teoria de caos representa um esforço para descrever um mundo não-linear mais preciso. Isto significa incluir muito mais informações ao nosso modelo convencional. Estão sendo desenvolvidas certas pesquisas cujo objetivo é tentar mapear cada ponto de uma determinada dinâmica. Isto implica em obter novas variáveis para cada ponto no espaço. Um aumento de variáveis implica em um aumento de dimensões. Para cada variável extra significa introduzir um novo eixo no gráfico, ou seja um aumento nos graus de liberdade. Isto envolve um grande aumento na quantidade de informações a ser considerada. Se analisarmos, por exemplo, um espaço com sete dimensões, precisaríamos de milhões, quiçá, bilhões de pontos de informação. Mesmo cientes de que necessitamos de novos métodos para calcular sistemas de altas dimensões, ainda estamos arraigados à nossa natureza material que não permite que nossos pensamentos possam alçar vôos em dimensões maiores. Ainda não sabemos como projetar isso na teoria, pois não concebemos cientificamente tais características, só conseguimos trabalhar com métodos numéricos para baixas dimensões.

A tendência atual é a pesquisa considerando ORDEM e CAOS, (criticalidade). A interação entre as duas teorias prevê um modelo não perfeito, mas muito mais próximo da realidade dos fenômenos.

Uma questão agora aparece: o que faz com que um sistema caótico não se disperse até o infinito? A resposta seria a influência dos atratores. Considerando um pêndulo de relógio, podemos dizer que o seu ponto de repouso seria um atrator. Um atrator é uma região espacial de um sistema dinâmico que converge todas as trajetórias vizinhas. Ele pode ser desde um ponto fixo até uma vasta região. Buracos negros são exemplos de atratores gigantes. Não há restrições espaciais, um atrator pode ser de infinitas configurações. Vemos alguns exemplos na Fig. B2.

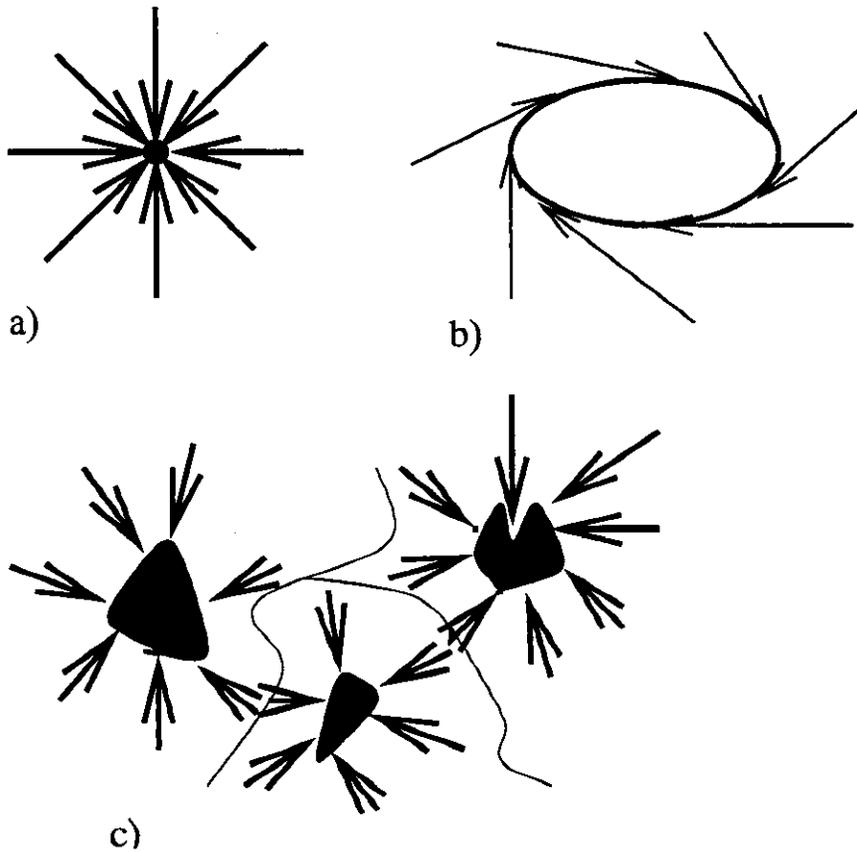


Fig. B2. a) atrator pontual, b) atrator limite de círculo. As trajetórias começam fora do atrator, mas terminam em um movimento circular contínuo ao redor do círculo e c) três atratores com as suas respectivas regiões de domínio.

B.1 Bifurcações

Os sistemas dinâmicos são normalmente regulados por parâmetros. Quando os parâmetros mudam, as propriedades de um sistema tendem também a mudar. Como sabemos, a estabilidade de um sistema pode ser investigada considerando os resultados de pequenos deslocamentos a partir do perfil de equilíbrio. Se estas perturbações se desvanecem com o tempo, o sistema é estável. Se estas perturbações crescem, o sistema é instável. Vários sistemas dinâmicos não-lineares perdem estabilidade por motivos não óbvios, acarretando uma mudança drástica dos padrões dinâmicos. Este tipo de fenômeno é conhecido como bifurcação. De uma maneira genérica dizemos que um sistema tem bifurcação se e somente se o comportamento global de um sistema, que depende de um parâmetro de controle, muda quando este parâmetro varia. Em particular, os pontos fixos (os valores do

parâmetro em que estas mudanças ocorrem) podem ser criados ou destruídos, ou quando o sistema muda de estado em relação a estes pontos, por exemplo, de estáveis podem se tornar instáveis.

As bifurcações são importantes cientificamente. Elas fornecem modelos de transições e instabilidades quando algum parâmetro de controle é variado. Existem vários tipos de bifurcação. As mais famosas são entre outras “pitchfork bifurcation” (bifurcação de forcado), “saddle-node bifurcation” (bifurcação nó de sela), “transcritical bifurcation” (bifurcação transcritical) e “Hopf bifurcation” (bifurcação de “Hopf”). Mostramos esquematicamente o gráfico de uma bifurcação de forcado na Fig. B3.

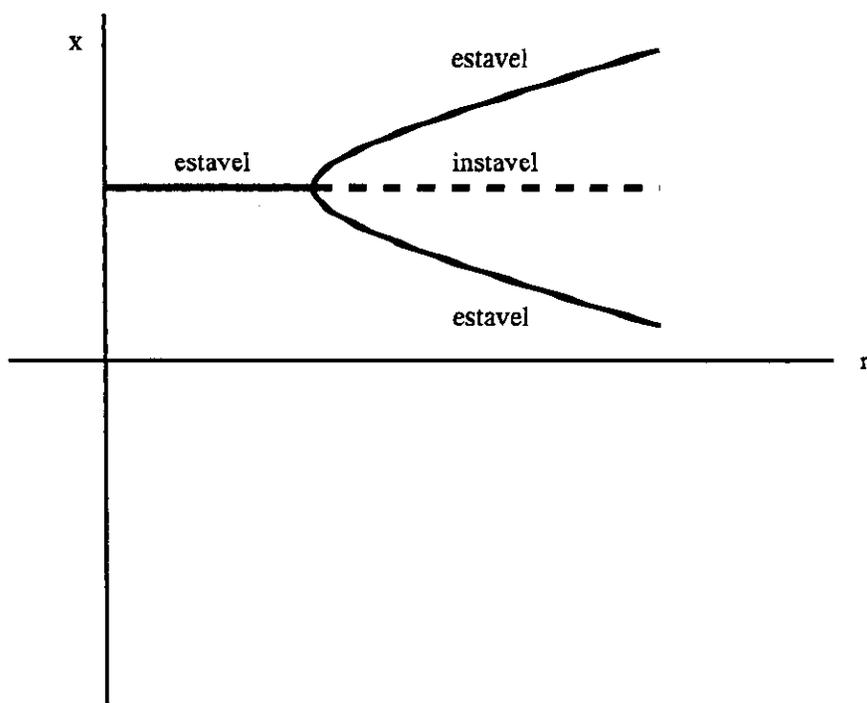


Fig. B3. Representação esquemática de uma bifurcação de forcado.

Estamos interessados mais nas bifurcações “saddle-node” e “Hopf”.

A bifurcação “saddle-node” é o mecanismo básico onde os pontos fixos são criados e destruídos. Quando o parâmetro de controle varia, os pontos fixos movem-se um em direção ao outro, colidem e se aniquilam mutuamente. Esta bifurcação pode ser analisada até em sistemas uni-dimensionais. Na Fig. B4 mostramos um exemplo protótipo de uma bifurcação nó de sela para um sistema de primeira ordem, cuja equação é $\dot{x} = r + x^2$,

onde r é o parâmetro de controle. Quando r é negativo há dois pontos fixos, um estável (ponto cheio) e outro instável (ponto cinza). Quando $r = 0$ os pontos se unem formando um único ponto meio estável. Este ponto é extremamente sensível, pois quando $r = 0^+$ ele desaparece, fazendo com que em $r > 0$ não haja mais pontos fixos.

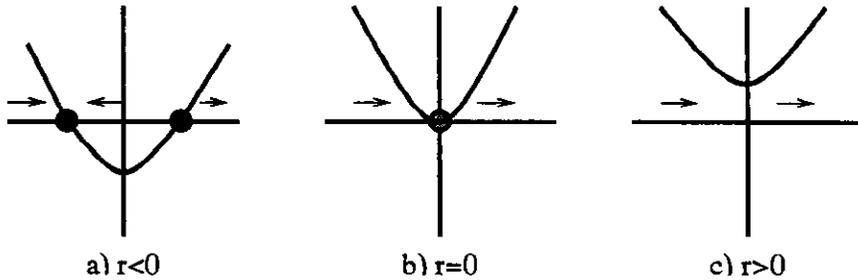


Fig. B4. Em a) r é negativo e temos dois pontos fixos, um estável (ponto preto) e outro instável (ponto cinza escuro); em b), $r = 0$, temos só um ponto que “vê” a esquerda um sistema estável e a direita um sistema instável; e, finalmente em c) r é positivo e não há mais pontos fixos.

A bifurcação de “Hopf” aparece em sistemas de, pelo menos, duas dimensões. Imagine um sistema bi-dimensional que tenha um ponto fixo estável. Quais são as possibilidades para que este ponto perca estabilidade quando um parâmetro μ varia? A solução está nos auto-valores da equação linear característica. Se o ponto fixo é estável, os auto-valores λ_1 e λ_2 precisam estar localizados no lado esquerdo do espaço $[\text{Im } \lambda, \text{Re } \lambda]$. Se os λ 's satisfazem uma equação quadrática com coeficientes reais, há duas possibilidades: ou os autovalores são ambos reais e negativos ou são ambos conjugados complexos. Para desestabilizar o ponto fixo, precisamos que pelo menos um dos auto-valores passe para o sub-espaço direito quando μ varia. A Fig. B5 exemplifica esquematicamente uma bifurcação de “Hopf” trivial. Quando o parâmetro de controle μ é negativo ou nulo formam-se espirais estáveis e o ponto fixo é também estável. No caso de $\mu > 0$ o ponto fixo torna-se instável e surgem espirais instáveis partindo do ponto até alcançar um ciclo estável.

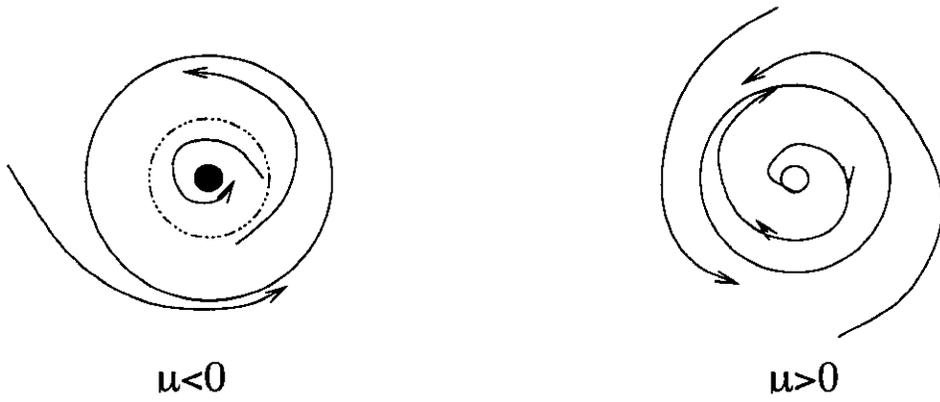


Fig. A5. Vemos que para μ negativo temos dois atratores um círculo e um ponto estável. Entre eles encontramos um círculo instável. Para μ positivo a origem é instável e alcançam um círculo limite estável que estrutura o sistema.

Apêndice C. Nonlinear dynamics of electromagnetic turbulence in a nonuniform magnetized plasma. Referência [9]

Nonlinear dynamics of electromagnetic turbulence in a nonuniform magnetized plasma

P. K. Shukla, Arshad M. Mirza,^{a)} and R. T. Faria, Jr.^{b)}

Institut für Theoretische Physik IV, Fakultät für Physik und Astronomie, Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum, Germany

(Received 24 June 1997; accepted 17 November 1997)

By using the hydrodynamic electron response with fixed (kinetic) ions along with Poisson's equation as well as Ampère's law, a system of nonlinear equations for low-frequency (in comparison with the electron gyrofrequency) long-(short-) wavelength electromagnetic waves in a nonuniform resistive magnetoplasma has been derived. The plasma contains equilibrium density gradient and sheared equilibrium plasma flows. In the linear limit, local dispersion relations are obtained and analyzed. It is found that sheared equilibrium flows can cause instability of Alfvén-like electromagnetic waves even in the absence of a density gradient. Furthermore, it is shown that possible stationary solutions of the nonlinear equations without dissipation can be represented in the form of various types of vortices. On the other hand, the temporal behavior of our nonlinear dissipative systems without the equilibrium density inhomogeneity can be described by the generalized Lorenz equations which admit chaotic trajectories. The density inhomogeneity may lead to even qualitative changes in the chaotic dynamics. The results of our investigation should be useful in understanding the linear and nonlinear properties of nonthermal electromagnetic waves in space and laboratory plasmas. © 1998 American Institute of Physics. [S1070-664X(98)00403-0]

I. INTRODUCTION

Recently, there has been a great deal of interest¹⁻³ in understanding the linear and nonlinear properties of finite amplitude low-frequency Alfvén-like waves in low-temperature space and laboratory plasmas. The linear theory⁴⁻⁶ focuses on the derivation of the dispersion relation and identifying the unstable wave spectra, whereas the nonlinear analyses^{1-3,6-8} compute the saturation level of fluctuations as well as develop mode coupling equations which are needed for predicting the salient features of fully developed electromagnetic turbulence in nonuniform magnetized plasmas.

Finite amplitude dispersive Alfvén-like electromagnetic waves accompany an electric field parallel to the external magnetic field lines. Intense electric fields may cause energization of electrons, which may produce interesting phenomena. The dispersive kinetic Alfvén waves⁹ cannot be obtained within the framework of the ideal magnetohydrodynamic (MHD) equations and one has to invoke either a kinetic theory or a two-fluid model in order to include the dispersion caused by finite Larmor radius or electron inertial effects.

Linear theory dictates that nonthermal fluctuations can be generated provided that there exist free energy sources in the form of equilibrium anisotropic particle distributions, pressure and velocity gradients, etc. Under appropriate conditions, free energy of the system can be coupled to both the

electrostatic and electromagnetic modes in nonuniform magnetoplasmas. Several authors³⁻⁶ have investigated the instability of low-frequency (in comparison with the ion gyrofrequency), long wavelength (in comparison with the ion gyroradius) electrostatic convective cells and drift-acoustic waves³ as well as of electromagnetic kinetic Alfvén-drift waves⁶ in the presence of magnetic field-aligned plasma flow gradients. The nonlinear mode coupling equations excluding dissipative effects have also been derived and analyzed.^{3,6} The results have been applied to understand the nonlinear structures in the auroral region of the Earth's ionosphere.

However, the experimental data from space¹⁰ and laboratory¹¹ plasmas exhibit that the observed electromagnetic waves in nonuniform magnetoplasmas have a broad frequency and wavevector spectra. Specifically, the wave frequencies could be smaller or larger than the ion gyrofrequency, whereas wavelengths could be in the range between the collisionless electron skin depth and the ion gyroradius scale or even shorter. The waves accompany simultaneously finite density and sheared magnetic field perturbations. Thus, they can be categorized as sheared or kinetic Alfvén-like waves.⁹

In this paper, we focus on the linear and nonlinear properties of low-frequency (in comparison with the electron gyrofrequency) long as well as short wavelength electromagnetic Alfvén-like waves in a nonuniform magnetoplasma containing an equilibrium electron density gradient and sheared equilibrium plasma flows. For this purpose, we have employed the electron MHD equations consisting of the electron continuity and the parallel component of the electron momentum equations, supplemented by Ampère's law, in order to derive a set of nonlinear equations. For long

^{a)}Permanent address: Department of Physics, Quaid-i-Azam University, Islamabad 45320, Pakistan.

^{b)}Permanent address: Instituto de Física "Gleb Wataghin," Universidade Estadual de Campinas, 13083-970, Campinas, SP, Brazil.

wavelength disturbances in an electron plasma with fixed ion background, we use Poisson's equation to eliminate the electron number density perturbation. On the other hand, for short wavelength waves, we use the Boltzmann response for the ion number density perturbation. In the linear limit, we obtain dispersion relations in the local approximation, whereas in the nonlinear case we discuss possible stationary and non-stationary solutions of the newly derived nonlinear equations.

The manuscript is organized as follows. In Sec. II, we present a derivation of the three-dimensional nonlinear mode coupling equations for low-frequency (in comparison with the electron gyrofrequency), long and short wavelengths sheared electromagnetic waves in a nonuniform dissipative magnetoplasma having an equilibrium density gradient and sheared equilibrium plasma flows. The linear dispersion relations are derived and analyzed in Sec. III. Section IV contains stationary solutions of the nonlinear equations when the dissipation is ignored. In Sec. V we study the non-stationary behavior of the nonlinear dynamical equations including dissipation. Finally, the main results of our investigation are summarized in Sec. VI.

II. GOVERNING NONLINEAR EQUATIONS

Let us consider the nonlinear propagation of low-frequency (in comparison with the electron gyrofrequency $\omega_{ce} = eB_0/m_e c$, where e is the magnitude of the electron charge, B_0 is the strength of the external magnetic field, m_e is the electron mass, and c is the speed of light) electromagnetic waves in a nonuniform magnetized plasma containing the equilibrium density gradient $\partial n_0/\partial x$ and the equilibrium velocity gradient $\partial v_{j0}/\partial x$, where n_0 is the equilibrium plasma number density, v_{j0} is the magnetic field-aligned unperturbed plasma flow velocity of the particle species j (j equals e for the electrons and i for the ions) in a direction transverse to the equilibrium magnetic field $B_0 \hat{z}$; \hat{z} being the unit vector along the z axis. We assume that the equilibrium currents produced by the difference between the electron and ion drift velocities lead to a negligible shear component of the equilibrium magnetic field. This is justified, for example, for local phenomena in the Earth's ionosphere and in several laboratory devices, where the main component of the magnetic field is thousand times larger than the sheared equilibrium magnetic field component. Furthermore, it is supposed that the equilibrium density gradient is maintained by external sources (e.g. external electric fields, gravitational forces, etc.), although no such sources are required for a non-zero gradient of v_{j0} to exist because $\mathbf{v}_{j0} \cdot \nabla v_{j0} = 0$ and $\mathbf{v}_{j0} \times \mathbf{B}_0 = 0$ when $\mathbf{v}_{j0} = \hat{z} v_{j0}(x)$. Thus, non-continuous injection of charged particles along the external magnetic field lines establishes sheared plasma flows.

For low-frequency, long wavelength (in comparison with the electron gyroradius ρ_e) electromagnetic fields in an isothermal plasma, the electron fluid velocity perturbation is given by

$$\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v}_{EB} + \mathbf{v}_{De} + \mathbf{v}_{pe} + (v_{e0} + v_{ez}) \mathbf{B}_{1\perp} / B_0 + \hat{z} v_{ez}, \quad (1)$$

where $\mathbf{v}_{EB} = (c/B_0) \hat{z} \times \nabla \phi$, $\mathbf{v}_{De} = -(cT_e/eB_0 n_e) \hat{z} \times \nabla n_e$, and $\mathbf{v}_{pe} = (c/B_0 \omega_{ce}) [\partial_t + v_{e0} \partial_z - \mu_e \nabla_{\perp}^2 + (\mathbf{v}_{EB} + \mathbf{v}_{De}) \cdot \nabla + v_{ez} \partial_z] \nabla_{\perp} \phi$ are the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0$, the diamagnetic, and the polarization drift velocities, respectively, $\mathbf{E} = -\nabla \phi - c^{-1} \partial_t A_z \hat{z}$ is the electric field vector, ϕ is the electrostatic potential, and A_z is the component of the vector potential along the z axis. Furthermore, n_e is the electron number density, T_e is the constant electron temperature, $\mu_e = 0.51 \nu_e \rho_e^2$ is the electron gyro-viscosity,¹² ν_e is the electron collision frequency, and $\mathbf{B}_{1\perp} = \nabla A_z \times \hat{z}$ is the two-dimensional magnetic field perturbation. By adopting the low- β approximation, the compressional magnetic field perturbation along the \hat{z} direction has been neglected.

The z -component of the electron fluid velocity perturbation is obtained from the Ampère's law

$$v_{ez} \approx (c/4\pi n_e e) \nabla_{\perp}^2 A_z. \quad (2)$$

To derive the appropriate nonlinear mode coupling equations for the electrons in the presence of the electromagnetic fields, we substitute Eq. (1) into the electron continuity equation and make use of Eq. (2), and radially obtain in the limit of $\rho_e^2 \nabla^2 \ll 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \left(n_{e1} + \frac{cn_0}{B_0 \omega_{ce}} \nabla_{\perp}^2 \phi \right) - D_c \nabla_{\perp}^2 n_{e1} - \frac{cn_0}{B_0 \omega_{ce}} \mu_e \nabla_{\perp}^4 \phi \\ - \frac{c}{B_0} \hat{z} \times \nabla n_0 \cdot \nabla \phi - \frac{i}{B_0 e} \hat{z} \times \nabla j_{e0} \cdot \nabla A_z \\ + \frac{c}{4\pi e} \mathcal{L}_2 \nabla_{\perp}^2 A_z = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

where $\mathcal{L}_1 \equiv \partial_t + v_{e0} \partial_z + \mathbf{v}_{EB} \cdot \nabla + v_{ez} \partial_z$, $\mathcal{L}_2 \equiv \partial_z + B_0^{-1} \nabla A_z \times \hat{z} \cdot \nabla$, $j_{e0} = -n_0 e v_{e0}$, $D_c = \nu_e \rho_e^2$ is the coefficient of the electron diffusion, and $n_{e1} (= n_e - n_0 \ll n_0)$ is the perturbed electron number density.

Similarly if we substitute the z -component of the electric field $E_z = -\partial_z \phi - c^{-1} \partial_t A_z$ into the z -component of the resistive electron momentum equation and use Eqs. (1) and (2), then we have

$$\begin{aligned} (d_t + \mathbf{v}_{D0} \cdot \nabla) A_z - \lambda_e^2 (\mathcal{L}_1 + \nu_e) \nabla_{\perp}^2 A_z + c (\partial_z + \mathbf{S}_{v0} \cdot \nabla) \phi \\ - (cT_e/en_0) \mathcal{L}_2 n_{e1} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

where $d_t = \partial_t + \mathbf{v}_{EB} \cdot \nabla$, $\mathbf{v}_{D0} = -(cT_e/eB_0 n_0) \hat{z} \times \nabla n_0$ is the equilibrium electron diamagnetic drift velocity, $\lambda_e = c/\omega_{pe}$ is the collisionless electron skin depth, $\omega_{pe} = (4\pi n_0 e^2/m_e)^{1/2}$ is the electron plasma frequency, and $\mathbf{S}_{v0} = \hat{z} \times \nabla v_{e0}/\omega_{ce}$. We note that the $\lambda_e^2 \mathcal{L}_1 \nabla_{\perp}^2 A_z$ term in Eq. (4) is the contribution of the linear and nonlinear electron inertial forces.

In the following, we consider two types of plasma response. First, when the wave period is shorter than the ion plasma and ion gyroperiods, the ions can be regarded as a static charge neutralizing background and they do not have time to respond to electromagnetic disturbances. Thus, the linear and nonlinear phenomena occurs on scales much below the ion inertial length c/ω_{pi} , where the plasma dynamics is governed by electron flows and their self-consistent magnetic fields. The ion plasma frequency is denoted by

ω_{pi} . Here, we can approximate n_{e1} by $(1/4\pi e)\nabla^2\phi$ and write Eqs. (3) and (4) for long wavelength perturbations as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i \left(\nabla^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \nabla_{\perp}^2 \right) \phi - D_c \left(\nabla^2 + 0.51 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \nabla_{\perp}^2 \right) \nabla_{\perp}^2 \phi \\ - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 \omega_{ce}} \hat{z} \times \nabla n_0 \cdot \nabla \phi - \frac{4\pi}{B_0} \hat{z} \times \nabla j_{e0} \cdot \nabla A_z \\ + c \mathcal{L}_z \nabla_{\perp}^2 A_z = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

and

$$\begin{aligned} (d_i + v_{D0} \cdot \nabla) A_z - \lambda_{Di}^2 (\mathcal{L}_i + \nu_e) \nabla_{\perp}^2 A_z + c(\partial_z + S_{v0} \cdot \nabla) \phi \\ - c \lambda_{De}^2 \mathcal{L}_z \nabla^2 \phi = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Second, for short wavelength (in comparison with the ion gyroradius ρ_i), the ion number density is given by $n_i \approx n_0 \exp(-e\phi/T_i)$, where T_i is the constant ion temperature. Hence, from Poisson's equation we have $n_e = (1/4\pi e)[\nabla^2\phi + (T_i\lambda_{Di}^{-2}/e)\exp(-e\phi/T_i)]$, where $\lambda_{Di} = (T_i/4\pi n_0 e^2)^{1/2}$ is the ion Debye length. Accordingly, for this case Eqs. (3) and (4) can be cast in the form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i (1 - \rho_a^2 \nabla_{\perp}^2) \phi - D_c (1 - 0.51 \rho_a^2 \nabla_{\perp}^2) \nabla_{\perp}^2 \phi \\ + \rho_a^2 \frac{\omega_{ce}}{n_0} (\hat{z} \times \nabla n_0) \cdot \nabla \phi \\ + \frac{4\pi\lambda_{Di}^2}{B_0} (\hat{z} \times \nabla j_{e0}) \cdot \nabla A_z - c \lambda_{Di}^2 \mathcal{L}_z \nabla_{\perp}^2 A_z = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

and

$$\begin{aligned} (d_i + v_{D0} \cdot \nabla) A_z - \lambda_{Di}^2 (\mathcal{L}_i + \nu_e) \nabla_{\perp}^2 A_z + c(\partial_z + S_{v0} \cdot \nabla) \phi \\ + c \sigma \mathcal{L}_z \phi = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

where $\rho_a = c_a/\omega_{ce}$, $c_a = (T_i/m_e)^{1/2}$ is the electron-acoustic velocity, and $\sigma = T_e/T_i$. In Eq. (7), we have assumed that $\nabla^2 \lambda_{Di}^2 \ll 1$ and $\partial_t \phi^2 \ll \omega_{ce} \rho_a^4 |\hat{z} \times \nabla \phi \cdot \nabla \nabla_{\perp}^2 \phi|$.

Equations (5) and (6) govern the nonlinear dynamics of long wavelength electromagnetic waves, whereas Eqs. (7) and (8) are for nonlinearly interacting short wavelength disturbances in a nonuniform resistive magnetized plasma with sheared plasma flows. We note that Eqs. (5)–(8) govern the mode coupling within the electromagnetic wave spectra. We thus have the possibility of energy cascading from short wavelength part of the spectrum to long wavelengths due to the nonlinear interactions of short wavelength oscillations. Thus, the physics of the modulation interaction¹³ remains in tact within our formalism. For example, in an electron plasma with fixed ion background, magnetic electron drift modes could be nonlinearly excited by Alfvén-like electron convective cells. Thus, nonlinearly coupled magnetic electron drift modes and Alfvén-like electron convective cells can play a very important role in the electron magnetohydrodynamics (EMHD),¹⁴ where the nonlinear phenomena occur on a short time (in comparison with the ion plasma and ion gyroperiods) scale over a typical scale size of the order of the collisionless electron skin depth λ_e .

III. LOCAL DISPERSION RELATIONS

In the following, we obtain the local linear dispersion relations for both the long and short wavelength electromagnetic modes. Accordingly, we neglect the nonlinear terms in Eqs. (5)–(8) and assume that the wavelengths of the perturbations are much smaller than the scalelengths of the equilibrium velocity and density gradients. The governing Eqs. (5)–(8) are then Fourier transformed by supposing that the perturbed quantities ϕ and A_z are proportional to $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, where \mathbf{k} and ω are the wavevector and the frequency, respectively. Thus, Eqs. (5) and (6) give

$$(\Omega - \omega_{c*} + i\Gamma_c) \phi = \left(\frac{4\pi j_{e0}}{B_0} \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{k} + c k_z k_{\perp}^2 \right) k_0^{-2} A_z \quad (9)$$

and

$$\begin{aligned} \left(\omega - \frac{k_z v_{e0} b_e}{1 + b_e} - \omega_{m*} + i\Gamma_m \right) A_z \\ = (1 + b_e)^{-1} c (k_z + \mathbf{k} \cdot S_{v0}) \phi, \end{aligned} \quad (10)$$

where $\Omega = \omega - k_z v_{e0}$, $\omega_{c*} = a \omega_{ce} \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{k} / k_0^2$, $a = \omega_{pe}^2 / \omega_{ce}^2$, $k_0^2 = k^2 + a k_{\perp}^2$, $\mathbf{k}_n = \hat{z} \times \nabla \ln n_0$, $\mathbf{k}_j = \hat{z} \times \nabla \ln j_{e0}$, $\Gamma_c = (k^2 + 0.51 a k_{\perp}^2) D_c k_{\perp}^2 / k_0^2$, $\omega_{m*} = \omega_{e*} / (1 + b_e)$, $\omega_{e*} = \mathbf{k} \cdot v_{D0}$, $b_e = k_{\perp}^2 \lambda_e^2$, $\Gamma_m = b_e \nu_e / (1 + b_e)$, and $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$.

Combining Eqs. (9) and (10) we obtain the linear dispersion relation for long wavelength electromagnetic waves

$$\begin{aligned} (\Omega - \omega_{c*} + i\Gamma_c) [\omega + b_e \Omega - \omega_{e*} + i b_e \nu_e] \\ = \frac{c}{k_0^2} \left(\frac{4\pi j_{e0}}{B_0} \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{k} + c k_z k_{\perp}^2 \right) (k_z + \mathbf{k} \cdot S_{v0}). \end{aligned} \quad (11)$$

Equation (11) exhibits a linear coupling between the electron drift-convective cells (the first term in the parenthesis on the left-hand side) and the magnetostatic drift modes (the term in the square bracket on the left-hand side) due to finite k_z and the equilibrium sheared flow. In the absence of the latter, the two modes degenerate, and we obtain $\omega = \omega_{c*} - i\Gamma_c$ and $\omega = (\omega_{e*} - i b_e \nu_e) / (1 + b_e)$, which are damped normal electromagnetic modes of the magnetized electron plasma containing an equilibrium density gradient.

On the other hand, for short wavelength electromagnetic modes, Eqs. (7) and (8) yield

$$(\Omega - \omega_{i*} + i\Gamma_s) \phi = \frac{\lambda_{Di}^2}{1 + b_a} \left(\frac{4\pi j_{e0}}{B_0} \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{k} + c k_z k_{\perp}^2 \right) A_z \quad (12)$$

and

$$\begin{aligned} \left(\omega - \frac{k_z v_{e0} b_e}{1 + b_e} - \omega_{m*} + i\Gamma_m \right) A_z \\ = (1 + b_e)^{-1} c [(1 + \sigma) k_z + \mathbf{k} \cdot S_{v0}] \phi, \end{aligned} \quad (13)$$

where $\omega_{i*} = \rho_a^2 \omega_{ce} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_n / (1 + b_a)$, $b_a = k_{\perp}^2 \rho_a^2$, and $\Gamma_s = D_c (1 + 0.51 b_a) k_{\perp}^2 / (1 + b_a)$.

Combining Eqs. (12) and (13), we obtain the linear dispersion equation for short wavelength electromagnetic waves

$$(\Omega - \omega_{i*} + i\Gamma_s)(\omega + b_e\Omega - \omega_{e*} + ib_e\nu_e) = \frac{c\lambda_{Di}^2}{1+b_a} \left(\frac{4\pi j_{e0}}{B_0} \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{k} + ck_z k_\perp^2 \right) [(1+\sigma)k_z + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0}]. \tag{14}$$

Equation (14) shows that finite k_z and the equilibrium sheared plasma flow can cause a linear coupling between the ion-drift (the first term on the left-hand side in the parenthesis) and magnetostatic drift modes. In the absence of the equilibrium flow, the frequency of a flute-like damped ion-drift wave is $\omega = \omega_{i*} - i\Gamma_s$.

For flute perturbations (viz. $k_z=0$), Eqs. (11) and (14) become, respectively,

$$(\omega - \omega_{c*} + i\Gamma_c)(\omega - \omega_{m*} + i\Gamma_m) = \frac{k_y^2 \omega_{pe}^2}{k_\perp^2 (1+a)(1+b_e) \omega_{ce}^2 n_0 e} \frac{\partial v_{e0}}{\partial x} \frac{\partial j_{e0}}{\partial x} \tag{15}$$

and

$$(\omega - \omega_{i*} + i\Gamma_s)(\omega - \omega_{m*} + i\Gamma_m) = \frac{k_y^2 \lambda_{Di}^2 \omega_{pe}^2}{(1+b_a)(1+b_e) \omega_{ce}^2 n_0 e} \frac{\partial v_{e0}}{\partial x} \frac{\partial j_{e0}}{\partial x}. \tag{16}$$

In the absence of the equilibrium density gradient (viz. $\omega_{c*}=0, \omega_{i*}$ and $\omega_{m*}=0$) and dissipation, Eqs. (15) and (16) admit purely growing instabilities, provided that the velocity and current gradients oppose each other. The growth rates for long and short wavelength modes are, respectively,

$$\gamma_c \approx \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}} \left[\frac{1}{(1+a)(1+b_e)n_0 e} \right]^{1/2} \left| \frac{\partial v_{e0}}{\partial x} \frac{\partial j_{e0}}{\partial x} \right|^{1/2} \tag{17}$$

and

$$\gamma_s \approx k_y \lambda_{Di} \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}} \left[\frac{1}{(1+b_a)(1+b_e)n_0 e} \right]^{1/2} \left| \frac{\partial v_{e0}}{\partial x} \frac{\partial j_{e0}}{\partial x} \right|^{1/2}. \tag{18}$$

It is evident from Eqs. (17) and (18) that the growth rates are directly proportional to the square root of the product of the equilibrium velocity and current gradients. Thus, the equilibrium sheared plasma flow is responsible for the instability.

In order to understand the effect of finite k_z and the density inhomogeneity, we rewrite Eqs. (11) and (14) by assuming that $\omega \gg k_z v_{e0}, \Gamma_c, \Gamma_m$. Thus, in a nonuniform collisionless plasma, we have, respectively,

$$\omega^2 - (\omega_{c*} + \omega_{m*})\omega + \omega_{c*}\omega_{m*} - S_I = 0, \tag{19}$$

where $S_I = [c/k_0^2(1+b_e)][(4\pi k_y(\partial j_{e0}/\partial x)/B_0) + ck_z k_\perp^2][k_z + k_y(\partial v_{e0}/\partial x)/\omega_{ce}]$, and

$$\omega^2 - (\omega_{i*} + \omega_{m*})\omega + \omega_{i*}\omega_{m*} - S_S = 0, \tag{20}$$

where $S_S = [c\lambda_{Di}^2/(1+b_a)(1+b_e)][(4\pi k_y(\partial j_{e0}/\partial x)/B_0) + ck_z k_\perp^2][(1+\sigma)k_z + k_y(\partial v_{e0}/\partial x)/\omega_{ce}]$.

It turns out that both the long and short scale electromagnetic waves are stable when S_I and S_S are positive. However, for $S_I, S_S < 0$ and $|S_I| > (\omega_{c*} - \omega_{m*})^2/4$, and $|S_S| > (\omega_{i*} - \omega_{m*})^2/4$, Eqs. (19) and (20) predict oscillatory current

convective instabilities. Physically, the latter arise because in the presence of velocity gradient the parallel component of the electron velocity perturbation and the wave potential are out of phase, as long as the parallel wavelengths are extremely large.

Next, we note that there also exist resistive instabilities when $\omega_{m*}, k_z v_{e0} \ll \omega \ll b_e \nu_e$. In this case, Eqs. (11) and (14) would lead to $\omega = \omega_{c*} - i\Gamma_c - iS_I/\nu_e b_e$ and $\omega = \omega_{i*} - i\Gamma_s - iS_S/\nu_e b_e$, respectively. Thus, for $S_I, S_S < 0$ and $|S_I| > \nu_e b_e \Gamma_c$ and $|S_S| > \nu_e b_e \Gamma_s$, we have the excitation of long scale electron drift-convective cells and short scale ion drift waves in nonuniform collisional plasmas. Furthermore, the magnetic drift modes also become unstable if $|\omega - \omega_{c*}| \ll \Gamma_c, |\omega - \omega_{i*}| \ll \Gamma_s$, and $S_I, S_S < 0$. The growth rates above threshold are $|S_I|/\Gamma_c$ and $|S_S|/\Gamma_s$, respectively.

IV. VORTEX SOLUTIONS

In the preceding section, we have seen that velocity gradient can cause the instability of electromagnetic waves which attain finite amplitude. The nonlinear interaction between finite amplitude modes can be responsible for the formation of either ordered structures or a chaotic state depending upon various plasma parameters. Although the general stationary and non-stationary solutions of Eqs. (5)–(8) cannot be found analytically, we discuss here some approximate solutions. First, we present vortex solutions of a non-dissipative inhomogeneous magnetized system, by assuming that $c\omega_{ce}|\nabla_\perp^2 A_z \partial_z| \ll \omega_{pe}^2 |\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \phi \cdot \nabla|$ and $\partial_z^2 \ll \nabla_\perp^2$. Specifically, we seek traveling localized solutions of our governing equations by letting $\xi = y + \alpha z - ut$, where α and u are constants, and assume that ϕ and A_z are functions of x and ξ only. Conditions for the formation of different types of vortices as well as their structures are presented below. The introduction of the new reference frame ξ with constant α and u for an inhomogeneous medium is a well established fact for cases involving Rossby and gravity dipolar vortices in fluids^{2,15} as well as drift-acoustic¹⁶ and drift-Alfvén^{2,7,8} vortices in nonuniform magnetized plasmas. Therefore, it does not make sense to allow α and u to be a function of x , as ξ is an independent variable (characteristic line) which depends only on y and z . The physical field variables are certainly functions of x and ξ , as indicated above.

A. Long scale vortices

In the stationary frame, Eqs. (5) and (6) may be written as

$$\mathcal{L}_\phi(\nabla_\perp^2 \phi + u_c \phi) + u_j \partial_\xi A_z - \frac{c\alpha}{u_\alpha(1+a)} \mathcal{L}_A \nabla_\perp^2 A_z = 0 \tag{21}$$

and

$$\mathcal{L}_\phi(A_z - \lambda_c^2 \nabla_\perp^2 A_z) + \frac{V_* + \alpha v_{e0}}{u_\alpha} \partial_\xi A_z - \frac{c\alpha_0}{u_\alpha} \partial_\xi \phi = 0, \tag{22}$$

where $\mathcal{L}_\phi = \partial_\xi - (c/u_\alpha B_0)(\partial_x \phi \partial_\xi - \partial_\xi \phi \partial_x)$, $\mathcal{L}_A = \partial_\xi - (1/\alpha B_0)(\partial_x A_z \partial_\xi - \partial_\xi A_z \partial_x)$, $\nabla_\perp^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial \xi^2$, $u_c = a\omega_{ce}/L_n(1+a)u_\alpha$, $u_\alpha = u - \alpha v_{e0}$, $u_j = 4\pi j_{e0}/L_j B_0(1$

+a)u_α, L_n=n₀/(∂n₀/∂x), L_j=j_{e0}/(∂j_{e0}/∂x), V_{*}=cT_e/eB₀L_n, and α₀=α+(∂v_{e0}/∂x)/ω_{ce}≡α+v_{e0}/ω_{ce}.

It is somewhat difficult to find the general solutions of Eqs. (21) and (22). Thus, we consider two limiting cases. First, we consider λ_e²∇_⊥²A_z≪A_z so that the scale sizes of the vortices are much smaller than the collisionless electron skin depth. Here, Eq. (22) gives

$$\mathcal{L}_{\phi u_*} \left[A_z - \frac{c\alpha_0}{u_*} \phi \right] = 0, \tag{23}$$

where $\mathcal{L}_{\phi u_*} = \partial_\xi - (c/u_* B_0)(\partial_x \phi \partial_\xi - \partial_\xi \phi \partial_x)$, and $u_* = u + V_*$.

Second, we take $u \gg V_*$ and αv_{e0} so that Eq. (22) simplifies as

$$\mathcal{L}_{\phi u} \left[(1 - \lambda_e^2 \nabla_\perp^2) A_z - \frac{c\alpha_0}{u} \phi \right] = 0, \tag{24}$$

where $\mathcal{L}_{\phi u} \equiv \partial_\xi - (c/u B_0)(\partial_x \phi \partial_\xi - \partial_\xi \phi \partial_x)$.

A typical localized solution of Eq. (23) is

$$A_z = \frac{c\alpha_0}{u_*} \phi, \tag{25}$$

whereas Eq. (24) is satisfied by the ansatz

$$\nabla_\perp^2 A_z = \frac{1}{\lambda_e^2} \left(A_z - \frac{c\alpha_0}{u} \phi \right). \tag{26}$$

Inserting Eq. (25) into Eq. (21), we obtain

$$\left[1 - \frac{\alpha\alpha_0 c^2}{u_\alpha u_* (1+a)} \right] \partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi + \frac{a\omega_{ce}}{u_\alpha (1+a)} \left(\frac{1}{L_n} - \frac{\alpha_0 v_{e0}}{u_* L_j} \right) \partial_\xi \phi - \frac{c}{u_\alpha B_0} \left[1 - \frac{\alpha_0^2 c^2}{u_*^2 (1+a)} \right] J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = 0, \tag{27}$$

where $J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = \partial_x \phi \partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - \partial_\xi \phi \partial_x \nabla_\perp^2 \phi$.

Equation (27) is satisfied by the ansatz

$$\nabla_\perp^2 \phi = F_1 \phi + F_2 x, \tag{28}$$

where the constants F₁ and F₂ are related by $\delta F_1 + (c/u_\alpha B_0)[1 - \alpha_0^2 c^2/u_*^2(1+a)]F_2 + [a\omega_{ce}/u_\alpha(1+a)] \times (L_n^{-1} - \alpha_0 v_{e0}/u_* L_j) = 0$, and where $\delta = 1 - \alpha\alpha_0 c^2/u_\alpha u_* (1+a)$.

It can be readily shown¹⁵⁻¹⁸ that Eq. (28) admits a dipolar vortex solution, the form of which is

$$\phi_{out} = \phi_0 K_1(k_1 r) \cos \theta, \tag{29}$$

in the outer region defined by $r = (x^2 + \xi^2)^{1/2} > R$, where R is the vortex radius, ϕ_0 is a constant, K₁ is the modified Bessel function, $k_1^2 = [a\omega_{ce}/u_\alpha(1+a)][(\alpha_0 v_{e0}/u_* e u_j \delta) - 1/L_n] > 0$, and $\cos \theta = x/r$. In the inner region ($r < R$), the solution reads

$$\phi_{in} = \left(\phi_i J_1(k_2 r) + \frac{F_{2i}}{k_2^2} r \right) \cos \theta, \tag{30}$$

where ϕ_i is a constant, J₁ is the Bessel function of the first order, and $[1 - \alpha_0^2 c^2/u_*^2(1+a)]F_{2i} = \delta(k_1^2 + k_2^2)u_\alpha B_0/c$.

The constants ϕ_0 , ϕ_i and F_{2i} are determined from the equations that come from the matching conditions of the inner and outer ϕ , $\nabla_\perp^2 \phi$ and $\nabla_\perp \phi$ at $r=R$. One finds that $\phi_0 = RF_{2i}/(k_1^2 + k_2^2)K_1(k_1 R)$, $\phi_i = -k_1^2 RF_{2i}/k_2^2(k_1^2 + k_2^2)J_1(k_2 R)$, and

$$K_2(k_1 R)/k_1 K_1(k_1 R) = -J_2(k_2 R)/k_2 J_1(k_2 R), \tag{31}$$

where J₂ and K₂ are the Bessel function and the modified Bessel function of the second order, respectively. For a given value of k₁, Eq. (31) determines k₂.

On the other hand, when $L_n \approx L_j u_* / \alpha_0 v_{e0}$, then Eq. (27) takes the form of a stationary Navier-Stokes equation, namely,

$$\partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - \frac{\mu_1 c}{u_\alpha B_0} J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = 0, \tag{32}$$

where $\mu_1 = [1 - \alpha_0^2 c^2/u_*^2(1+a)]/\delta > 0$. Equation (32) is satisfied by

$$\nabla_\perp^2 \phi = \frac{4\phi_i K_i^2}{a_i^2} \exp \left[-\frac{2}{\phi_i} \left(\phi - \frac{u_\alpha B_0}{\mu_1 c} x \right) \right], \tag{33}$$

where ϕ_i , K_i and a_i are arbitrary constants. The solution of Eq. (33) is given by³

$$\phi = \frac{u_\alpha B_0}{\mu_1 c} x + \phi_i \ln \left[2 \cosh(K_i x) + 2 \left(1 - \frac{1}{a_i^2} \right) \cos(K_i \xi) \right]. \tag{34}$$

For $a_i^2 > 1$ the vortex profile given by Eq. (34) resembles the Kelvin-Stuart "cat's eyes" that are chains of vortices.

Next, we substituting for $\nabla_\perp^2 A_z$ from Eq. (26) into Eq. (21), we have

$$\mathcal{L}_{\phi} (\nabla_\perp^2 \phi + \beta_1 \phi - \beta_2 A_z) = 0, \tag{35}$$

provided that $\alpha = \alpha_0 + (4\pi j_{e0} \lambda_e^2 / B_0 c L_j)$. Here, the vortex size is of the order of λ_e. A possible solution of Eq. (35) is

$$\nabla_\perp^2 \phi + \beta_1 \phi - \beta_2 A_z = F_3 \left(\phi - \frac{u B_0}{\mu_1 c} x \right), \tag{36}$$

where $\beta_1 = [c^2 \alpha \alpha_0 / u^2 (1+a) \lambda_e^2] + a\omega_{ce}/u(1+a)L_n$, $\beta_2 = \alpha_0 c/u(1+a)\lambda_e^2$, and F₃ is an arbitrary constant of integration.

Combining Eqs. (26) and (36), we obtain a fourth order differential equation

$$\nabla_\perp^4 \phi + C_1 \nabla_\perp^2 \phi + C_2 \phi - F_3 \frac{u B_0}{\lambda_e^2 \mu_1 c} x = 0, \tag{37}$$

where $C_1 = \beta_1 + F_3 - 1/\lambda_e^2$ and $C_2 = [(F_3 - \beta_1) + c\beta_2 \alpha_0 / u]/\lambda_e^2$. Equation (37) admits spatially-bounded dipolar vortex solutions. In the outer region ($r > R$), we set F₃=0 and write the solution of Eq. (37) as

$$\phi = [Q_1 K_1(s_1 r) + Q_2 K_1(s_2 r)] \cos \theta, \tag{38}$$

where Q_1 and Q_2 are constants and $s_{1,2}^2 = [-\alpha_1 \pm (\alpha_1^2 - 4\alpha_2)^{1/2}]/2$ for $\alpha_1 < 0$ and $\alpha_1^2 > 4\alpha_2 > 0$. Here, $\alpha_1 = \beta_1 - \lambda_e^{-2}$ and $\alpha_2 = -(\beta_1/\lambda_e^2) + c\beta_2\alpha_0/u\lambda_e^2$. Thus, $u^2 \gg \alpha\alpha_0$ is required for the localization of the outer solution. In the inner region ($r < R$), the solution reads

$$\phi = \left[Q_3 J_1(s_3 r) + Q_4 I_1(s_4 r) - \frac{F_3}{\lambda_e^2} \frac{u B_0}{\mu_1 c C_2} r \right] \cos \theta, \quad (39)$$

where Q_3 and Q_4 are constants.³ We have defined $s_{3,4} = [(C_1^2 - 4C_2)^{1/2} \pm C_1]/2$ for $C_2 < 0$. Evidently, the outer and inner region profiles of inertial electromagnetic vortices are different from those of non-inertial vortices. It is worthwhile to mention here that the sheared equilibrium electron flow is responsible for complete localization of the dipolar vortex in the outer region. Without the sheared plasma flow, we have $\alpha_0 = \alpha$ and $C_2 = 0$ in the outer region and the solution of Eq. (37) has a long tail.¹⁹

The constants Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 and F_3 can be determined by matching the inner and outer solutions of ϕ and A_z and the higher derivatives $\nabla\phi, \nabla_\perp^2\phi, \nabla_\perp A_z$ and $\nabla_\perp^2 A_z$ at the vortex interface $r=R$. This exercise has been carried out by Mikhailovskii *et al.*⁷ and Liu and Horton,⁷ and explicit expressions for the various constants had been found.

B. Short scale vortices

Here, we discuss the vortex solutions of Eqs. (7) and (8) by ignoring dissipation. Thus, in the stationary frame, we rewrite Eqs. (7) and (8) as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi \left[1 - \rho_a^2 \nabla_\perp^2 - \frac{c_a}{u_a L_n} \right] \phi - \frac{4\pi j_{e0} \lambda_{Di}^2}{B_0 L_j \mu_a} \partial_\xi A_z \\ + \frac{c\alpha \lambda_{Di}^2}{u_a} \mathcal{L}_A \nabla_\perp^2 A_z = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi (1 - \lambda_e^2 \nabla_\perp^2) A_z + \frac{(V_* + \alpha v_{e0})}{u_a} \partial_\xi A_z - \frac{c\alpha_0}{u_a} \partial_\xi \phi \\ - \frac{c\alpha\sigma}{u_a} \mathcal{L}_A \phi = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

where $c_a = \rho_a^2 \omega_{ce}$.

When the perpendicular scale size of the nonlinear structure is smaller than λ_e , Eq. (41) is then approximated by

$$\mathcal{L}_{\phi u_*} \left[A_z - \frac{c(\alpha_0 + \sigma\alpha)}{u_*} \phi \right] = 0, \quad (42)$$

A possible localized solution of Eq. (42) is

$$A_z = \frac{c(\alpha_0 + \sigma\alpha)}{u_*} \phi \equiv \frac{c\alpha_0^*}{u_*} \phi. \quad (43)$$

If we insert Eq. (43) into Eq. (40), we obtain

$$\begin{aligned} \left(\rho_a^2 - \frac{\alpha\alpha_0^* c^2 \lambda_{Di}^2}{u_a u_*} \right) \partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - \left(1 - \frac{c_a}{u_a L_n} - \frac{4\pi c \alpha_0^* \lambda_{Di}^2 j_{e0}}{B_0 u_a u_* L_j} \right) \\ \times \partial_\xi \phi - \frac{c\rho_a^2}{u_a B_0} \left(1 - \frac{\alpha_0^{*2} c^2 \lambda_{Di}^2}{u_*^2 \rho_a^2} \right) J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Equation (44) is satisfied by the ansatz

$$\nabla_\perp^2 \phi = F_1^* \phi + F_2^* x. \quad (45)$$

Here the constants F_1^* and F_2^* are related by $\delta^* F_1^* - (c\rho_a^2/u_a B_0)(1 - \alpha_0^{*2} c^2 \lambda_{Di}^2 / u_*^2 \rho_a^2) F_2^* - [1 - (c_a/u_a L_n) - 4\pi c \alpha_0^* \lambda_{Di}^2 j_{e0} / B_0 u_a u_* L_j] = 0$, where $\delta^* = \rho_a^2 - \alpha\alpha_0^* \times c^2 \lambda_{Di}^2 / u_a u_*$. Clearly, for $[1 - (c_a/u_a L_n) - 4\pi c \alpha_0^* \times \lambda_{Di}^2 j_{e0} / B_0 u_a u_* L_j] / \delta^* \equiv P / \delta^* > 0$, the dipolar vortex solution of Eq. (45) is also similar to Eqs. (29) and (30).

On the other hand, when $P=0$ (where the double vortex solutions are forbidden), Eq. (45) takes the form

$$\partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - \frac{\mu^* c}{u_a B_0} J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = 0, \quad (46)$$

where $\mu^* = (\rho_a^2 - \alpha_0^{*2} c^2 \lambda_{Di}^2 / u_*^2) / (\rho_a^2 - \alpha\alpha_0^* c^2 \lambda_{Di}^2 / u_a u_*) > 0$. Equation (46) is again satisfied by

$$\nabla_\perp^2 \phi = \frac{4\phi_s^* K^{*2}}{a^{*2}} \exp \left[-\frac{2}{\phi_s^*} \left(\phi - \frac{u B_0}{\mu^* c} x \right) \right], \quad (47)$$

where ϕ_s^*, K^* and a^* are arbitrary constants. The solution of Eq. (47) is again similar to Eq. (34), but the condition under which the short scale vortex street arises is completely different.

Finally, we present the vortex solutions of Eqs. (40) and (41) by assuming that $u \gg V_*, \alpha v_{e0}$ and $\sigma \ll 1$. Here, Eq. (41) is also satisfied by Eq. (26), so that Eq. (40) can be cast in the form

$$\mathcal{L}_\phi (\nabla_\perp^2 \phi + \beta_1^* \phi - \beta_2^* A_z) = 0, \quad (48)$$

provided that $v_{e0} \rho_a c_a / c^2 L_j = (\alpha \lambda_{Di}^2 / \lambda_e^2) - \alpha_0$. A possible solution of Eq. (48) is

$$\nabla_\perp^2 \phi + \beta_1^* \phi - \beta_2^* A_z = F_3^* \left(\phi - \frac{u B_0}{\mu^* c} x \right), \quad (49)$$

where $\beta_1^* = (c^2 \alpha \alpha_0 \lambda_{Di}^2 / u^2 \rho_a^2 \lambda_e^2) + (c_a / u \rho_a^2 L_n) - 1 / \rho_a^2$, $\beta_2^* = \alpha_0 c \lambda_{Di}^2 / u \rho_a^2 \lambda_e^2$, $\mu^* = (1 - c^2 \alpha_0^{*2} \lambda_{Di}^2 / \rho_a^2 u_*^2) / (1 - c^2 \alpha \alpha_0^* \times \lambda_{Di}^2 / u_* u_a)$, and F_3^* is an arbitrary constant of integration.

Combining Eqs. (26) and (49), we obtain a fourth order differential equation

$$\nabla_{\perp}^4 \phi + C_1^* \nabla_{\perp}^2 \phi + C_2^* \phi - \frac{F_3^*}{\lambda_e^2} \frac{u B_0}{\mu^* c} x = 0, \quad (50)$$

where $C_1^* = \beta_1^* - F_3^* - 1/\lambda_e^2$ and $C_2^* = [(F_3^* - \beta_1^*) + c\beta_2^* \alpha_0/u]/\lambda_e^2$. Equation (50) also admits spatially-bounded dipolar vortex solutions,^{7,8} which are similar to the long wavelength case, as discussed in Sec. IV B. An examination of the vortex analyses reveals that the constants u and α are related in terms of the density and velocity gradients as well as other plasma parameters. Thus, for given values of constant density and velocity gradient scalelengths we find that u is completely determined by a specific choice of α and prescribed values for the unperturbed plasma number density, the plasma temperature and the external magnetic field strength. The scale sizes of the vortices, as found here, are typically of the order of λ_e and ρ_a , which are smaller than the scale length of the equilibrium density and velocity gradients. Such scenarios are common in space¹⁰ and laboratory plasmas.¹¹ Finally, we note that the present methods of solutions do not allow to construct vortices whose scale sizes are of the order of the inhomogeneity scale lengths. However, we anticipate that in such a situation, the governing Eqs. (5)–(8) may admit global vortex patterns⁸ provided that the profiles of the density and velocity inhomogeneities are known. A detailed investigation of this problem is beyond the scope of the present paper.

V. CHAOTIC BEHAVIOR OF ELECTROMAGNETIC TURBULENCE

In the following, we follow Lorenz²⁰ and Stenflo^{21,22} and derive a set of equations which are appropriate for studying the temporal behavior of chaotic motion involving two-dimensional low-frequency nonlinearly interacting electromagnetic waves in a dissipative magnetoplasma without the density gradient. Accordingly, we introduce the Ansatz

$$\phi = \phi_1(t) \sin(K_x x) \sin(K_y y) \quad (51)$$

and

$$A_z = A_1(t) \sin(K_x x) \cos(K_y y) - A_2(t) \sin(2K_x x), \quad (52)$$

where K_x and K_y are constant parameters, and ϕ_1 , A_1 and A_2 are amplitudes which are only functions of time.

As an illustration, we consider in detail the chaotic behavior of nonlinearly interacting flute-like short wavelength electromagnetic waves. Thus, by substituting Eqs. (51) and (52) into Eqs. (7) and (8), we readily obtain

$$(1 + K^2 \rho_a^2) \dot{\phi}_1 = -\mu_1 K^4 \phi_1 + \delta_1 K_y A_1 - \delta_2 (K^2 - 4K_x^2) \times K_x K_y A_1 A_2 - \delta_3 K^2 \phi_1, \quad (53)$$

$$(1 + K^2 \lambda_e^2) \dot{A}_1 = -\eta K^2 A_1 - \sigma_1 K_y \phi_1 + \frac{c}{B_0} [1 + K^2 \lambda_e^2 - 6K_x^2 \lambda_e^2] K_x K_y A_2 \phi_1 + \sigma_2 K_x K_y \phi_1 A_2, \quad (54)$$

and

$$(1 + 4K_x^2 \lambda_e^2) \dot{A}_2 = -\frac{c}{2B_0} (1 + 4K_x^2 \lambda_e^2) K_x K_y \phi_1 A_1 - 4\eta K_x^2 A_2 - \sigma_2 K_x K_y \phi_1 A_1 / 2, \quad (55)$$

where $\mu_1 = \mu_e \rho_a^2$, $\delta_1 = 4\pi \lambda_{Di}^2 (\partial j_{e0} / \partial x) / B_0$, $\delta_2 = c \lambda_{Di}^2 / B_0$, $\delta_3 = \nu_e \rho_e^2$, $\eta = \nu_e \lambda_e^2$, is the plasma resistivity, $\sigma_1 = c(\partial v_{e0} / \partial x) / \omega_{ce}$ and $\sigma_2 = c\sigma / B_0$. The time derivative is defined by a dot on ϕ_1 , A_1 and A_2 . We note that the terms proportional to $\sin(3K_x x)$ have been dropped in the derivation of Eqs. (53)–(55). This approximation, which is often employed by many authors for deriving the relevant Lorenz-like equations in many branches of physics, can easily be generalized²¹ to describe more realistic space dependence solutions. Furthermore, we note that in deriving Eqs. (53) and (54) we have assumed that $\partial_t > V_* \partial_y$, $\rho_a^2 \omega_{ce} K_n \partial_y$, where $V_* = -(cT_e / eB_0) K_n$ and $K_n = n_0^{-1} \partial n_0 / \partial x$, which justify the neglect of the density gradient from Eqs. (7) and (8).

Equations (53)–(55) can be appropriately normalized so that they can be put in a form which is similar to that of Lorenz and Stenflo. We have

$$\begin{pmatrix} d_{\tau} X \\ d_{\tau} Y \\ d_{\tau} Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma + sZ & 0 \\ r - Z & -1 & 0 \\ Y & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (56)$$

which describes the nonlinear coupling between various amplitudes. Here, $\sigma = (\mu_1 K^2 + \delta_3) b_e^* / \eta (1 + K^2 \rho_a^2)$, $r = -\delta_1 \sigma_1 K_y^2 / \eta K^4 (\mu_1 K^2 + \delta_3)$, $b = 4K_x^2 b_e^* / (1 + 4K_x^2 \lambda_e^2) K^2$ and the new parameter $s = -\delta_2 a_2 a_3 (K^2 - 4K_x^2) b_e^* K_x K_y / a_1 \eta (1 + K^2 \rho_a^2)$, with $K^2 = K_x^2 + K_y^2$ and $\tau = t/t_0$; where $t_0 = \eta K^2 / b_e^*$ and $b_e^* = 1 + K^2 \lambda_e^2$.

A comment is in order. If we set $s = 0$, which happens for $K_y^2 = 4K_x^2$, Eq. (56) then reduce to the Stenflo type equations. However, the normalizations used here are

$$\phi_1 = a_1 X = \frac{\sqrt{2} \eta K^2 B_0}{K_x K_y \sqrt{b_e^* (b_e^* - 6K_x^2 \lambda_e^2 + B_0 \sigma_2 / c) [1 + \sigma_2 B_0 / c (1 + 4K_x^2 \lambda_e^2)]}} X,$$

$$A_1 = a_2 Y = \frac{\sqrt{2} \eta K^4 B_0 (\mu_1 K^2 + \delta_3)}{c \delta_1 K_x K_y^2 \sqrt{b_e^* (b_e^* - 6K_x^2 \lambda_e^2 + B_0 \sigma_2 / c) [1 + \sigma_2 B_0 / c (1 + 4K_x^2 \lambda_e^2)]}} Y,$$

and

$$A_2 = a_3 Z = \frac{-\eta K^4 B_0 (\mu_1 K^2 + \delta_3)}{[c \delta_1 K_x K_y^2 (b_e^* - 6 K_x^2 \lambda_e^2 + B_0 \sigma_2 / c)]} Z.$$

Equations (56) are the generalized Lorenz equations, whose properties can be studied both analytically as well as numerically by means of standard techniques.²³ We observe that the equilibrium points of Eq. (56) are

$$X_0 = \pm [b((r-2) + sr^2/\sigma) + \sqrt{(r-2 + sr^2/\sigma)^2 + 4(r-1)}] / 2^{1/2}, \tag{57}$$

$$Y_0 = \frac{rbX_0}{(b + X_0^2)}, \tag{58}$$

and

$$Z_0 = \frac{X_0 Y_0}{b}. \tag{59}$$

In the absence of the *s*-term, we note that for $|r| > 1$, the equilibrium fixed points $[X_0 = Y_0 = \pm \sqrt{b}(|r|-1)^{1/2}$, and $Z_0 = |r|-1]$ are unstable resulting in convective cell motions. Thus, the linear instability should saturate by attracting to one of these new fixed states. Furthermore, it is worth mentioning that a detailed behavior of chaotic motion for $K_y \neq \sqrt{3}K_x$ can be studied by numerically solving Eqs. (53)–(55). However, this investigation is beyond the scope of this paper.

The stability of the stationary states can be studied by a simple linear analysis. Letting $X = X_s + X_1$, $Y = Y_s + Y_1$ and $Z = Z_s + Z_1$, the linearized system is

$$\begin{pmatrix} d_t X_1 \\ d_t Y_1 \\ d_t Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - Z_s & -1 & -X_s \\ Y_s & X_s & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

where $X_1 \ll X_s$, $Y_1 \ll Y_s$, and $Z_1 \ll Z_s$ and (X_s, Y_s, Z_s) represents a stationary state. The corresponding characteristic equation is thus

$$(\lambda + b)[(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + (1 - r)\sigma)] = 0, \tag{61}$$

which governs the linear stability of the stationary state. For example, if we take $r < 1$, the origin is a hyperbolic sink and is thus stable. On the other hand, for $r = 1$, the eigenvalues are $\lambda = -b$ and $\lambda = -(1 + \sigma)$, which are always negative. Finally, for $r > 1$, the nontrivial stationary points are $X_s^\pm = Y_s^\pm = \pm \sqrt{b(r-1)}$ and $Z_s = r-1$. The eigenvalues of Eq. (61) are $\lambda = -(\sigma + b + 1)$ and $\pm i\sqrt{2\sigma(\sigma+1)/(\sigma-b-1)}$, so that the stationary states (X_s^\pm, Y_s^\pm, Z_s) are sinks for $r \in (1, r_H)$, where $r_H \equiv \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$. A Hopf bifurcation occurs at r_H . For $\sigma > 1 + b$, imaginary roots are possible and that for $r > r_H$ the nontrivial fixed points are saddles with two-dimensional unstable manifolds. Thus, for $r > r_H$ all the three fixed points are unstable but the attractor set still exists.²⁰ Further bifurcations at larger r values eventually lead to chaotic behavior.²⁰ The inclusion of the equi-

librium density inhomogeneity may lead to even qualitative changes in the chaotic dynamics of electromagnetic turbulence, as discussed here.

VI. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

In this paper, we have investigated the linear as well as nonlinear properties of low-frequency electromagnetic waves in a nonuniform dissipative magnetized plasmas. For this purpose, we have employed the electron MHD equations supplemented by Ampere's law as well as the electron (ion) response given by Poisson's equation (the Boltzmann distribution) and have derived a set of nonlinear mode coupling equations. In the linear regime, our analyses show that electromagnetic disturbances of various scale sizes can be driven on account of the free energy stored in the sheared equilibrium plasma flows. The physical mechanism of the present instabilities is similar to the current convective electrostatic instability.⁴⁻⁶ Furthermore, we have shown that the nonlinear mode coupling of finite amplitude electromagnetic waves in nonuniform magnetoplasmas with sheared plasma flows can lead to self-organization in the form of various types of vortex patterns. Explicit conditions for the existence of different types of vortices are obtained. For example, we have found that the electron magnetohydrodynamic (EMHD) equations in an electron plasma with stationary ions admit vortices whose characteristic transverse (to \hat{z}) scale length λ_\perp satisfies the inequality $\lambda_e \ll \lambda_\perp \ll \lambda_i$, where $\lambda_i = c/\omega_{pi}$ is the collisionless ion skin depth. Inclusion of the Boltzmann ion distribution allows shorter scale (in comparison with the ion gyroradius) dipolar vortices. Since the vortex solutions exist locally, our theory requires that the vortex sizes are much smaller than the scalelengths of the equilibrium density and velocity gradients. Furthermore, weakly interacting flute-like electromagnetic waves in a dissipative system without the density gradient are shown to obey the generalized Lorenz-Stenflo equations, which admit a chaotic state. The parameter regimes for the onset of chaos have been identified. We have thus pointed out the possibility of different classes of solutions including ordered structures as well as a chaos in a fully developed electromagnetic turbulence in nonuniform magnetoplasmas. Unfortunately, we are unsuccessful writing our complete set of Eqs. (5)–(8) in terms of the generalized Lorenz-Stenflo equations in the presence of the density gradient and the magnetic field-aligned variation terms. Therefore, the role of the latter on the chaotic motion could not be rigorously identified. It may well turn out that inclusion of the equilibrium density inhomogeneity may lead to even qualitative changes in the chaotic dynamics of electromagnetic turbulence, in contrast to what has been described here.

The present paper neither includes the sheared magnetic fields nor addresses the issue of the vortex stability. In the presence of equilibrium magnetic shear, the parallel wavevector is a function of position and one encounters an eigenvalue problem for the linear electromagnetic waves, which may also have a discrete spectrum. Furthermore, a critical evaluation of the literature²⁴ reveals that long-lived vortices can indeed exist around the mode rational surfaces when the magnetic shear is incorporated. On the other hand,

a number of investigations²⁵⁻²⁷ has been carried out in order to answer the question of the stability of dipolar vortices and the vortex chain, which are stationary solutions of the nonlinear partial differential equations. The latter are somewhat different from ours. Clearly, the procedure of those investigations can be utilized to examine the stability of long and short scale electromagnetic vortices. We anticipate that these nonlinear structures should remain stable, because the structures of our nonlinear equations are similar in form to those of earlier investigations.²⁵⁻²⁷ A complete stability analysis of the vortices would lead us far beyond the scope of this paper.

In closing, we stress that the results of the present investigation, which is complementary to Ref. 3, shall provide a complete and better view of the linear and nonlinear features of long and short wavelength electromagnetic turbulence in magnetized plasmas with equilibrium density and velocity gradients, which are common in space and laboratory plasmas. Specifically, the measurements of broadband electric and magnetic fluctuations peaked in the current layer¹⁰ do support the current as the source of the fluctuations.

ACKNOWLEDGMENTS

This research was partially supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft through the Sonderforschungsbereich 191 "Physikalische Grundlagen der Niedertemperaturplasmen," as well as by the Alexander von Humboldt (AvH) Foundation, the Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD) and Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

¹V. M. Chmyrev, O. A. Pokhotelov, V. A. Marchenko, V. I. Lazarev, A. V. Streltsov, and L. Stenflo, *Phys. Scr.* **38**, 841 (1988).

²V. I. Petviashvili and O. A. Pokhotelov, *Solitary Waves in Plasmas and in the Atmosphere* (Gordon and Breach, Reading, Birkshire, 1992).

³P. K. Shukla, G. T. Birk, J. Dreher, and L. Stenflo, *Plasma Phys. Rep.* **22**, 818 (1996).

⁴A. B. Mikhailovskii, *Theory of Plasma Instabilities* (New York, Consultants Bureau, 1974), Vol. 2, p. 63.

⁵A. B. Mikhailovskii, *Electromagnetic Instabilities in an Inhomogeneous Plasma* (Adam Hilger, Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 1992).

⁶P. K. Shukla, J. Srinivas, G. Murtaza, and H. Saleem, *Phys. Plasmas* **1**, 3505 (1994); P. K. Shukla, G. T. Birk, and R. Bingham, *Geophys. Res. Lett.* **22**, 671 (1995).

⁷A. B. Mikhailovskii, V. P. Lakhin, G. D. Aburdzhaniya, L. A. Mikhailovskaya, O. G. Onishenko, and A. I. Smolyakov, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **29**, 1 (1984); J. Liu and W. Horton, *J. Plasma Phys.* **36**, 1 (1986).

⁸P. K. Shukla, in *A Variety of Plasmas; Proceedings of the Invited Talk of the 1989 International Conference on Plasma Physics, New Delhi*, edited by A. Sen and P. K. Kaw (Indian Academy of Sciences, Bangalore, 1991), pp. 297-314.

⁹A. Hasegawa and C. Uberoi, *The Alfvén Wave* (National Technical Information Service, Springfield, VA, 1982).

¹⁰B. T. Tsurutani, A. L. Brinca, E. J. Smith, R. T. Okida, R. R. Anderson, and T. E. Eastman, *J. Geophys. Res.* **94**, 1270 (1989); P. Loran, J. E. Wahlund, T. Chust, H. de Feraudy, A. Roux, B. Holback, P. O. Dover, A. I. Eriksson, and G. Holmgren, *Geophys. Res. Lett.* **21**, 1847 (1994).

¹¹E. J. Hains, I. H. Tan, and S. C. Prager, *Phys. Plasmas* **2**, 1521 (1995); H. Saleem and P. K. Shukla, *Phys. Fluids B* **4**, 86 (1992); R. L. Stenzel, J. M. Urruita, and C. L. Rousculp, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 702 (1995).

¹²H. Okuda and J. M. Dawson, *Phys. Fluids* **16**, 408 (1973).

¹³P. K. Shukla, M. Y. Yu, H. U. Rahman, and K. H. Spatschek, *Phys. Rep.* **105**, 227 (1984).

¹⁴A. S. Kingsep, K. V. Chukbar, and V. V. Yan'kov, in *Reviews of Plasma Physics*, Vol. 16, edited by B. B. Kadomtsev (Consultants Bureau, New York, 1990); A. V. Gordeev, A. S. Kingsep, and L. I. Rudakov, *Phys. Rep.* **243**, 215 (1994).

¹⁵L. Stenflo, *Phys. Fluids* **30**, 3297 (1987).

¹⁶J. D. Meiss and W. Horton, *Phys. Fluids* **26**, 990 (1983).

¹⁷L. Stenflo, *Phys. Lett. A* **186**, 133 (1994).

¹⁸L. Stenflo, *Phys. Lett. A* **222**, 378 (1996).

¹⁹M. Y. Yu, P. K. Shukla, and L. Stenflo, *Astrophys. J.* **309**, L-63 (1986).

²⁰E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1964).

²¹L. Stenflo, *Phys. Lett. A* **212**, 224 (1996).

²²L. Stenflo, *Phys. Scr.* **53**, 83 (1996).

²³C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors* (Springer, New York, 1982).

²⁴I. O. Pogutse, *Fiz. Plazmy* **17**, 874 (1991) [*Sov. J. Plasma Phys.* **17**, 511 (1991)]; I. O. Pogutse, *ibid.* **19**, 1479 (1993) [*Plasma Phys. Rep.* **19**, 779 (1993)]; D. J. Jovanovic and J. Vranjes, *Phys. Scr.* **T63**, 234 (1996).

²⁵T. Dauxois, *Phys. Fluids* **6**, 1625 (1994).

²⁶R. Benzi, S. Pierini, A. Vulpiani, and E. Salusti, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **20**, 293 (1982).

²⁷C. F. Carnevale and G. K. Vallis, *J. Fluid Mech.* **213**, 549 (1990).

Apêndice D. Vortex formation in sheared flow driven fluctuations in nonuniform magnetized dusty gases. Referência [10]

Vortex formation in sheared flow driven fluctuations in nonuniform magnetized dusty gases

Arshad M. Mirza,* R. T. Faria, Jr.,† P. K. Shukla, and G. Murtaza‡
Institut für Theoretische Physik IV, Ruhr-Universität -Bochum, D-44780 Bochum, Germany

(Received 18 July 1997)

The linear and nonlinear properties of low-frequency (in comparison with the ion gyrofrequency) electrostatic and electromagnetic waves in nonuniform, magnetized dusty plasmas with sheared plasma flows are examined. For this purpose, the multifluid dusty plasma model is employed to derive the relevant nonlinear equations for the modified dust-convective cells as well as for the coupled dust Alfvén waves and dust-convective cells. In the linear limit, we obtain dispersion relations which exhibit instabilities of both the electrostatic and electromagnetic waves. In the nonlinear case, it is shown that the newly derived dynamical equations for weakly coupled waves admit various types of vortex solutions. The results can have relevance to the understanding of the salient features of nonthermal fluctuations and coherent vortex structures in nonuniform dusty magnetoplasmas such as those in the Earth's ionosphere as well as in cometary tails and interstellar clouds. [S1063-651X(98)11101-7]

PACS number(s): 52.25.Vy 52.35.Lv 52.35.Mw

I. INTRODUCTION

A dusty plasma is a low-temperature partially or fully ionized gas, consisting of neutral atoms, electrons, ions, and micron-sized charged particulates of solid matter (dust grains). The latter, which are extremely massive, could be either negatively or positively charged to a high degree. The electrostatic charging of the dust grains results from various processes such as the electron and ion collection from the ambient plasma, the photoelectric emission, the secondary electron and ion emission, the field emission, etc. The dust grains can acquire a huge electric charge (up to tens of thousands of an electron charge). Dusty plasmas are ubiquitous in space environments as well as in laboratory discharges [1–3].

Recently, considerable attention has been focused on studies of waves [4–8] and instabilities [9–13], as well as the nonlinear structures [13–15] in dusty plasmas. Charged dust grains can give rise to new normal modes, in addition to modifying the existing plasma wave spectra. For example, it has been found that consideration of the dust dynamics is responsible for the dust-acoustic waves [5], which are now experimentally observed [11,16]. Linear properties of electrostatic and electromagnetic waves and mechanisms for their excitation in a uniform dusty plasma were reviewed by Verheest [17].

In this paper, we study linear as well as nonlinear properties of low-frequency (in comparison with the ion gyrofrequency) electrostatic and electromagnetic waves in a nonuniform magnetized dusty gas. The latter waves contain equilibrium density and magnetic field gradients as well as sheared plasma flows. It is found that free energy stored in

the latter is coupled to modified dust-convective cells and to linearly coupled dust-Alfvén waves and the dust-convective cells. On the other hand, finite amplitude electrostatic and electromagnetic waves interact nonlinearly. Accounting for convective and Lorentz force nonlinearities, we derive a set of nonlinear fluid equations in the presence of sheared plasma flows. It is found that the nonlinear equations admit new classes of coherent vortex structures.

The manuscript is organized in the following fashion. In Sec. II, we derive the relevant nonlinear equations for both the electrostatic and electromagnetic waves, by assuming that the wave frequencies are much smaller than the ion gyrofrequency. The effects of dust charge perturbations are also incorporated. However, for simplicity, we discuss in Secs. III and IV, the linear and nonlinear results, respectively, when the dust charge perturbations are ignored. Finally, Sec. V contains a brief summary and applications.

II. DERIVATION OF EQUATIONS

Let us consider a nonuniform multicomponent dusty plasma immersed in an inhomogeneous magnetic field $B_0(x)\hat{z}$, where B_0 is the strength of the external magnetic field, and \hat{z} is the unit vector along the z axis. The dusty plasma also has equilibrium density ($\partial n_{j0}/\partial x$) and velocity ($\partial v_{j0}/\partial x$) gradients, which are maintained by some external sources. Here n_{j0} and v_{j0} are the equilibrium density and the magnetic field aligned flow velocity of the particle species j (j equals e for the electrons, i for the ions, and d for the dust grains).

The charge neutrality condition at equilibrium can be expressed as

$$n_{i0} = n_{e0} + Z_{d0}n_{d0}, \quad (1)$$

where Z_{d0} represents the number of charges residing on the dust grains. The dust particles are supposed to be point charges, and their sizes and the intergrain spacings are much smaller than the characteristic scale lengths (viz. gyroradii, Debye radius, etc.) of the dusty plasma. Furthermore, there

*Permanent address: Department of Physics, Quaid-i-Azam University, Islamabad 45320, Pakistan.

†Permanent address: Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970 Campinas, São Paulo Brazil.

‡Permanent address: Department of Physics, Quaid-i-Azam University, Islamabad 45320, Pakistan.

are sufficient numbers of dust grains in a Debye sphere, so that the collective interactions, as described below, are intact.

In the presence of low-frequency waves, the electron and ion fluid velocity perturbations in the drift approximation ($|\partial_t| \ll \omega_{ci} \approx eB_0/m_i c$) are

$$\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v}_{EB} + (v_{e0} + v_{ez})\mathbf{B}_\perp/B_0 + v_{ez}\hat{\mathbf{z}} \quad (2)$$

and

$$\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{EB} + \mathbf{v}_{ip} + v_{i0}\mathbf{B}_\perp/B_0, \quad (3)$$

where $\mathbf{v}_{EB} = c\hat{\mathbf{z}} \times \nabla\phi/B_0$ and $\mathbf{v}_{ip} = -(c/B_0\omega_{ci})[\partial_t + v_i + \mathbf{v}_{EB} \cdot \nabla + v_{i0}\partial_z]\nabla_\perp\phi$ are the usual $\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0$ and the ion polarization drifts, respectively; $\mathbf{E} = -\nabla\phi - (1/c)\partial_t A_z\hat{\mathbf{z}}$ is the electric field vector; $\phi(A_z)$ is the electrostatic (z component of the vector) potential and $\mathbf{B}_\perp = \nabla A_z \times \hat{\mathbf{z}}$ is the perpendicular component of the wave magnetic field, c is the speed of light, and ν_i is the ion collision frequency. The compressional magnetic field perturbation has been neglected in view of the low- β approximation. For electrostatic waves, we can set $\mathbf{B} = 0$.

The parallel component of the electron fluid velocity perturbation is determined from the z component of Ampère's law, giving

$$v_{ez} \approx (c/4\pi n_e e)\nabla_\perp^2 A_z, \quad (4)$$

where $\nabla_\perp^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

The dynamics of waves in our dusty plasma system is governed by the equations of the continuity, and the momentum, which are supplemented by Poisson's equation and Ampère's law. For our purposes, for the conservation of the charge density we have

$$\partial_t(n_e - n_i) + v_{e,d}(n_e - n_{e0}) - v_{i,d}(n_i - n_{i0}) + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e - n_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (5)$$

Poisson's equation

$$\nabla^2 \phi = 4\pi e(n_e - n_i + Z_d n_d), \quad (6)$$

and the parallel component of the electron momentum equation,

$$(\partial_t + \nu_e + v_{e0}\partial_z + \mathbf{v}_e \cdot \nabla)v_{ez} = -(e/m_e)\left[E_z + \frac{1}{c}(\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}_\perp) \cdot \hat{\mathbf{z}}\right], \quad (7)$$

where ν_e is the electron collision frequency and the ions are assumed to be singly charged. In Eq. (5) we include [18] the source of the plasma particles which compensates for their losses due to the recombination on the surface of the dust grains. The effective collision frequencies for thermal Maxwellian plasma particle distributions are $\nu_{e,d} = \nu_{i,d}(1+P) = \nu_{ch}P(\tau + \eta)/\eta(1 + \tau + \eta)$, where $P = n_{d0}Z_d\omega_{pe}/n_e\omega_{ci}$, $\tau = T_e/T_i$, $\eta = Z_d\omega_{pe}^2/aT_e$, and $\nu_{ch} = \omega_{pi}^2 a(1 + \tau + \eta)/v_{ti}\sqrt{2\pi}$. Here a is the size of the dust grain, ω_{pi} the ion plasma frequency, v_{ti} the ion thermal velocity, and T_e (T_i) the electron (ion) temperature. For $P \ll 1$, we have $\nu_{e,d} \approx \nu_{i,d} \equiv \nu_0$.

In order to derive nonlinear set of equations, we write $n_j = n_{j0}(x) + n_{j1}$, where $n_{j1} \ll n_{j0}(x)$. Thus, substituting into

the fluid velocities from Eqs. (2) and (3) into Eq. (5), we obtain, for electrostatic waves ($\mathbf{B}_\perp = 0$),

$$\begin{aligned} (d_t + \nu_0)\left(\nabla^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}\nabla_\perp^2\right)\phi + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}(v_i + v_{i0}\partial_z)\nabla_\perp^2\phi - 4\pi e c\hat{\mathbf{z}} \\ \times \nabla\left(\frac{Z_d n_d}{B_0}\right) \cdot \nabla\phi + 4\pi e n_{e0}\partial_z v_{ez} \\ + 4\pi e n_{d0}(\partial_t + \nu_{d0} \cdot \nabla)Z_{d1} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

where v_{ez} is given by

$$(D_{te} + \nu_e)v_{ez} = \frac{e}{m_e}\partial_z\phi + \frac{c}{B_0}\hat{\mathbf{z}} \times \nabla v_{e0} \cdot \nabla\phi. \quad (9)$$

Here $d_t = \partial_t + \mathbf{v}_{EB} \cdot \nabla$, and $D_{te} = d_t + (v_{e0} + v_{ez})\partial_z$.

The dust charging equation for $P \ll 1$ is given by [18]

$$(\partial_t + \nu_{d0} \cdot \nabla + \nu_{ch})q_{d1} \approx I_{e1} + I_{i1}, \quad (10)$$

where $I_{j1} = \int \sigma_j v_j f_{j1} dv$ is the perturbed current in the presence of disturbances, and $\sigma_{i,e} = \pi a^2(1 \pm 2Z_d e^2/m_{i,e}v_{i,e}^2 a)$ is the charging collision cross section; the plus (minus) sign stands for the ions (electrons). The first order distribution function f_{j1} ($= f_j - F_j$) is given by

$$\begin{aligned} (\partial_t + \mathbf{v}_j \cdot \nabla)f_{j1} - \frac{q_j}{m_j c}[c\nabla\phi + \partial_t A_z \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{v}_j \\ \times (\mathbf{B}_0 - \hat{\mathbf{z}} \times \nabla A_z)] \cdot \nabla f_j \\ = -n_{d0}\sigma_{i,e}(v)v[f_{j1}(\mathbf{v}_j) - F_j(v_j)], \end{aligned} \quad (11)$$

where F_j is the equilibrium velocity distribution function. It appears that the charging equation (10) is quite tedious for electromagnetic waves in nonuniform magnetized dusty plasmas.

It is straightforward to derive the relevant equations for electromagnetic waves from Eqs. (1)–(7). We have

$$\begin{aligned} (d_t + \nu_0)\left(\nabla^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}\nabla_\perp^2\right)\phi + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}(v_i + v_{i0}\partial_z)\nabla_\perp^2\phi - 4\pi e c\hat{\mathbf{z}} \\ \times \nabla\left(\frac{Z_d n_d}{B_0}\right) \cdot \nabla\phi + c d_z \nabla_\perp^2 A_z - \frac{4\pi e}{B_0}\hat{\mathbf{z}} \times \nabla A_z \cdot \nabla J_{ei} \\ + 4\pi e n_{d0}(\partial_t + \nu_{d0} \cdot \nabla)Z_{d1} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

and

$$D_{te}(1 - \lambda_c^2 \nabla_\perp^2)A_z - \nu_e \lambda_c^2 \nabla_\perp^2 A_z + c(\partial_z + S_{v0} \cdot \nabla)\phi = 0, \quad (13)$$

where $\omega_{pi} = (4\pi n_{i0}e^2/m_i)^{1/2}$ is the ion plasma frequency, $\lambda_c = c/\omega_{pe}$ the collisionless electron skin depth, ω_{pe} the

electron plasma frequency, $J_{ei} = e(n_{i0}v_{i0} - n_{e0}v_{e0})$, and $S_{r0} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla v_{e0} / \omega_{ce}$. We have denoted $d_z \equiv \partial_z + \nabla A_z \times \hat{\mathbf{z}} / B_0$.

The origin of various terms in Eqs. (8)–(13) is now clear. The first three terms in Eqs. (8) and (12) come, respectively, from the deviation from the quasineutrality and the linear and nonlinear ion polarization drifts, whereas the fourth term in Eqs. (8) and (12) originates from the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ convection of the equilibrium dust charge density, as the divergence of the difference of the electron and ion fluxes in nonuniform dusty magnetoplasmas remains finite. The fifth and sixth terms in Eq. (12) originate due to the coupling of the equilibrium plasma currents with the perturbed magnetic field; these terms do not appear in the electrostatic model (8). On the other hand, the nonlinearity on the left-hand side of Eq. (9) is due to the $\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}}$ convection of the parallel (to $\hat{\mathbf{z}}$) electron velocity perturbation, whereas the important nonlinear terms in Eq. (13) come from the nonlinear parallel electron inertia as well as the nonlinear Lorentz force. The parallel phase velocity of the disturbances is assumed to be much larger than the electron thermal velocity.

III. DISPERSION RELATIONS

The local dispersion relation for electromagnetic waves is now derived by neglecting the nonlinear terms in Eqs. (12) and (13) and the dust charge fluctuations. We suppose that ϕ and A_z are proportional to $\exp(ik_y y + ik_z z - i\omega t)$, where k_y and k_z are the components of the wave vector \mathbf{k} , and ω is the frequency of the oscillations, and that the scale lengths of the equilibrium inhomogeneities are much larger than the wavelength. The resultant dispersion relation is of the form

$$\begin{aligned} & \left[\omega - \omega_{sv} + i\nu_0 - \frac{k_y^2 c^2 (k_z v_{i0} - i\nu_i)}{v_A^2 (k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right] \\ & \times \left[(\omega - k_z v_{e0}) + i \frac{\nu_e k_y^2 \lambda_e^2}{(1 + k_y^2 \lambda_e^2)} \right] \\ & = \left[k_z^2 v_A^2 + \frac{4\pi c k_y k_z \partial_x (J_{ei} / B_0)}{(k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right] \\ & \times \frac{(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0} / k_z)}{(1 + k_y^2 \lambda_e^2)}, \end{aligned} \quad (14)$$

where $\omega_{sv} = 4\pi e c k_y \partial_x (Z_{d0} n_{d0} / B_0) / (k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)$ is the dust convective cell frequency, $v_A (= c \omega_{ci} / \omega_{pi})$ represents the usual Alfvén velocity, and $k^2 = k_y^2 + k_z^2$. We note that for a highly dissipative case, the modes are damped. Also, for $k_y^2 c^2 / v_A^2 \gg k^2$, the convective cell modes and Alfvén waves are linearly coupled. It should be noted here that the presence of ω_{sv} is attributed to the presence of the static charged dust grains, and would not arise otherwise.

In the collisionless case, the dispersion relation (14) becomes

$$\begin{aligned} & \omega^2 - \omega \left(\omega_{sv} + k_z v_{e0} + \frac{k_y^2 c^2 k_z v_{i0}}{v_A^2 (k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right) \\ & + k_z v_{e0} \left(\omega_{sv} + \frac{k_y^2 c^2 k_z v_{i0}}{v_A^2 (k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right) \\ & - \left(k_z^2 v_A^2 + \frac{4\pi k_y k_z c \partial_x (J_{ei} / B_0)}{(k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right) \\ & \times \frac{(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0} / k_z)}{(1 + k_y^2 \lambda_e^2)} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Equation (15) predicts an oscillatory instability. For $\omega > k_z v_{e0}$, the threshold condition is

$$\begin{aligned} & \left(k_z^2 v_A^2 + \frac{4\pi k_y k_z c \partial_x (J_{ei} / B_0)}{(k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right) \frac{(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0} / k_z)}{(1 + k_y^2 \lambda_e^2)} \\ & > \left(\omega_{sv} + \frac{k_y^2 c^2 k_z v_{i0}}{v_A^2 (k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right)^2. \end{aligned}$$

On the other hand, for a highly collisional plasma in which $\nu_e k_y^2 \lambda_e^2 \gg (1 + k_y^2 \lambda_e^2) \times (\omega - k_z v_{e0})$ and $\nu_i \gg k_z v_{i0}$, we have

$$\begin{aligned} \omega & = \omega_{sv} - i \left[\nu_0 + \frac{k_y^2 c^2 \nu_i}{v_A^2 (k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right] \\ & + \left\{ k_z^2 v_A^2 + \frac{4\pi k_y k_z c \partial_x (J_{ei} / B_0)}{(k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right\} \frac{(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0} / k_z)}{\nu_e k_y^2 \lambda_e^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Equation (16) exhibits an instability if $\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0} / k_z > 1$ and $4\pi k_y k_z c \partial_x (J_{ei} / B_0) / (k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2) > k_z^2 v_A^2$ as well as both the density and velocity gradients are negative. The threshold condition is

$$\begin{aligned} & \left(k_z^2 v_A^2 + \frac{4\pi k_y k_z c \partial_x (J_{ei} / B_0)}{(k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)} \right) \frac{(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0} / k_z)}{\nu_e k_y^2 \lambda_e^2} \\ & > \nu_0 + \frac{k_y^2 c^2 \nu_i}{v_A^2 (k^2 + k_y^2 c^2 / v_A^2)}. \end{aligned}$$

Next, we focus our attention on sheared flow driven dust-convective cells. The appropriate dispersion relation for the latter can be directly derived either from Eqs. (8) and (9), or by setting $k_y^2 \lambda_e^2 \gg 1$ in Eq. (14). We have

$$\begin{aligned} & \omega^2 - \omega [\omega_{sv} + k_z (v_{e0} + v_{i0}) - i(\nu_0 + \nu_e + \nu_i)] \\ & = \omega_{\text{LH}}^2 \frac{k_z^2}{k_y^2} \left[1 + \frac{4\pi \partial_x (J_{ei} / B_0)}{k_y k_z c} \right] \left[1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0}}{k_z} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

where $\omega_{\text{LH}} (= \omega_{ce} \omega_{ci})^{1/2}$ is the lower-hybrid resonance frequency, and $\omega_{pi} \gg \omega_{ci}$ has been assumed. An inspection of Eq. (17) reveals that the dust-convective cells are driven at nonthermal level on account of free energy stored in the

magnetic field aligned velocity gradient and the density inhomogeneity. The maximum growth rate of the dust-convective cell instability is roughly $\omega_{LH}(k_z/k_y)[|1 + 4\pi\partial_x(J_{ei}/B_0)/(k_y k_z c)|^2(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0}/k_z)]^{1/2}$ for $\mathbf{S}_{v0} < 0$ and $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{v0}| > k_z$.

IV. NONLINEAR SOLUTIONS

In this section, we present the nonlinear coherent vortex solutions of Eqs. (12) and (13). Accordingly, we look for the stationary solution of the nonlinear equations (12) and (13) in the stationary frame $\xi = y + \gamma z - ut$, by assuming that $|\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \phi \cdot \nabla| \gg (c\omega_{ci}/\omega_{pi}^2)\nabla_{\perp}^2 A_z \partial_z$; where γ is a constant and u is the translational speed of the vortex, by ignoring dissipative terms. For $\nabla^2 \ll \omega_{pi}^2 \nabla_{\perp}^2 / \omega_{ci}^2$ and $\partial_z^2 \ll \nabla_{\perp}^2$, Eqs. (12) and (13) can then be rewritten in the following forms:

$$u_{i*} \partial_{\xi} \nabla_{\perp}^2 \phi - u_d \partial_{\xi} \phi - (c/B_0) J(\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi) - (v_A^2/c) \gamma \times \left[\left\{ \nabla_{\perp}^2 - \frac{4\pi}{c\gamma} \partial_x (J_{ei}/B_0) \right\} \partial_{\xi} A_z + (1/\gamma B_0) J(A_z, \nabla_{\perp}^2 A_z) \right] = 0 \quad (18)$$

and

$$[\partial_{\xi} - (c/u_{e*} B_0)(\partial_x \phi \partial_{\xi} - \partial_{\xi} \phi \partial_x)] \left[(1 - \lambda_c^2 \nabla_{\perp}^2) A_z - \frac{c\gamma_0}{u_{e*}} \phi \right] = 0, \quad (19)$$

where $u_d = -4\pi c \omega_{ci}^2 \partial_x (Z_{i0} n_{i0}/B_0)/\omega_{pi}^2$, $J(f, g) \equiv (\partial_x f \partial_{\xi} g - \partial_x g \partial_{\xi} f)$ is the Jacobian, $\gamma_0 = \gamma + (\partial_x v_{e0})/\omega_{ce}$ and $u_{i*} = u - \gamma v_{j0}$.

The solutions of Eq. (19) can be obtained in two limiting cases. First, when the scale size of the nonlinear structure is much shorter than the collisionless electron skin depth, then the parallel electron inertial force can be neglected. For this case, Eq. (19) gives

$$A_z \approx (c\gamma_0/u_{e*}) \phi. \quad (20)$$

Substituting for A_z from Eq. (20) into Eq. (18), we obtain

$$\partial_{\xi} \nabla_{\perp}^2 \phi - \frac{c\mu}{u_{i*} B_0} J(\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi) - \left[\frac{u_d}{\delta u_{i*}} - \frac{4\pi\gamma_0 v_A^2}{c \delta u_{i*} u_{e*}} \partial_x \left(\frac{J_{ei}}{B_0} \right) \right] \partial_{\xi} \phi = 0, \quad (21)$$

where $\gamma = \gamma_0 + 4\pi(\lambda_c^2/c)\partial_x(J_{ei}/B_0)$, $\mu = (1 - \gamma_0^2 v_A^2/u_{e*}^2)/\delta$, and $\delta = (1 - \gamma\gamma_0 v_A^2/u_{i*} u_{e*})$.

Equation (21) admits both the dipolar vortex [19] and the vortex street [20] solutions. The dipolar vortex appears provided that $[u_d u_{e*} - 4\pi\gamma_0 v_A^2 \partial_x (J_{ei}/cB_0)]/(u_{i*} u_{e*} - \gamma\gamma_0 v_A^2) > 0$, and that the vortex profiles are similar to those given in Ref. [19]. On the other hand, the dusty vortex street arises when $u_d = (4\pi\gamma_0 v_A^2/c u_{e*}) \partial_x (J_{ei}/B_0)$. Here Eq. (21) reduces to

$$\partial_{\xi} \nabla_{\perp}^2 \phi - \frac{c\mu}{u_{i*} B_0} J(\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi) = 0. \quad (22)$$

For $\mu > 0$, Eq. (22) is satisfied by

$$\nabla_{\perp}^2 \phi = \frac{4\phi_0 K^2}{a_0^2} \exp \left[-\frac{2}{\phi_0} \left(\phi - \frac{u_{i*} B_0}{\mu c} x \right) \right], \quad (23)$$

where ϕ_0 , K , and a_0 are some constant parameters. The solution of Eq. (23) is [20]

$$\phi = \frac{u_{i*} B_0}{\mu c} x + \phi_0 \ln \left[2 \cosh(Kx) + 2 \left(1 - \frac{1}{a_0^2} \right) \cos(K\xi) \right], \quad (24)$$

which represents the Kelvin-Stuart "cat's eyes" that are chains of vortices for $a_0^2 > 1$.

Second, we consider the case when the scale size of the nonlinear structure is of the order of the collisionless electron skin depth and that the vortex translation speed is much larger than γv_{j0} . Here a typical bounded solution of Eq. (19) is

$$\nabla_{\perp}^2 A_z = \frac{1}{\lambda_c^2} \left(A_z - \frac{c\gamma_0}{u} \phi \right). \quad (25)$$

Substituting Eq. (25) into Eq. (18), we obtain

$$[\partial_{\xi} - (c/uB_0)(\partial_x \phi \partial_{\xi} - \partial_{\xi} \phi \partial_x)] [\nabla_{\perp}^2 \phi + \beta_1 \phi - \beta_2 A_z] = 0. \quad (26)$$

A possible solution of Eq. (26) is

$$(\nabla_{\perp}^2 + \beta_1 - \beta_3) \phi - \beta_2 A_z + \beta_3 \frac{uB_0}{\mu c} x = 0, \quad (27)$$

provided that $\gamma = \gamma_0 + (4\pi/c)\lambda_c^2 \partial_x (J_{ei}/B_0)$. Here $\beta_1 = -u_d/u + \gamma\gamma_0 v_A^2/u^2 \lambda_c^2$, $\beta_2 = -\gamma_0 v_A^2/c u \lambda_c^2$, and β_3 is an arbitrary constant of integration.

Combining Eqs. (25) and (27), we obtain

$$(\nabla_{\perp}^4 + \chi_1 \nabla_{\perp}^2 + \chi_2) \phi - \beta_3 \frac{uB_0}{\lambda_c^2 \mu c} x = 0. \quad (28)$$

where $\chi_1 = \beta_1 - \beta_3 - 1/\lambda_c^2$ and $\chi_2 = [(\beta_3 - \beta_1) + c\beta_2 \gamma_0/u]/\lambda_c^2$. Equation (28) admits spatially bounded dipolar vortex solutions [21,22]. If we set $\beta_3 = 0$ then the solution of Eq. (28) in the outer region ($r > R$) can be expressed as

$$\phi = [C_1 K_1(s_1 r) + C_2 K_1(s_2 r)] \cos \theta, \quad (29)$$

where C_1 and C_2 are constants, K_1 is the modified Bessel function of the first order, and $s_{1,2}^2 = [-\gamma_1 \pm (\gamma_1^2 - 4\gamma_2)^{1/2}]/2$ for $\gamma_1 < 0$ and $\gamma_1^2 > 4\gamma_2 > 0$. Here $\gamma_1 = \beta_1 - \lambda_c^{-2}$ and $\gamma_2 = -(\beta_1/\lambda_c^2) + c\beta_2 \gamma_0/u \lambda_c^2$. In the inner region ($r < R$), we write the solution as

$$\phi = \left[C_3 J_1(s_3 r) + C_4 I_1(s_4 r) - \frac{\beta_3}{\lambda_e^2} \frac{u B_0}{\mu c \chi_2} r \right] \cos \theta, \quad (30)$$

where $J_1(I_1)$ is the Bessel function of the first order having real (imaginary) argument, and C_3 and C_4 are constants. Here, $s_{3,4} \equiv [(\chi_1^2 - 4\chi_2)^{1/2} \pm \chi_1]/2$ for $\chi_2 < 0$. Evidently, the outer and inner region profiles of inertial electromagnetic vortices are different from those of noninertial vortices for which the vortex scale sizes are much smaller than λ_e . It is worthwhile to mention here that the sheared equilibrium electron flow is responsible for a complete localization of the dipolar vortex in the outer region. Furthermore, the constants C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , and β_3 can be determined by matching the inner and outer solutions of ϕ and A_z and the higher derivatives $\nabla \phi$, $\nabla_{\perp}^2 \phi$, $\nabla_{\perp} A_z$, and $\nabla_{\perp}^2 A_z$ at the vortex interface ($r=R$). Mikhailovskii *et al.* [22] performed this calculation, and presented explicit expressions for the various constants.

In passing, we mention that stationary solutions of Eqs. (8) and (9) can also be readily obtained in the moving frame $\xi = y + \gamma z - ut$, with $|\hat{z} \times \nabla \phi \cdot \nabla| \gg (B_0/c) v_{e,z} \partial_z$. In the absence of dissipative effects from Eq. (9), we have $v_{e,z} = -(e\gamma_0/m_e u_{e*})\phi$, which can then be inserted into Eq. (8) to yield

$$u_{i*} \partial_{\xi} \nabla_{\perp}^2 \phi - \left(u_{i*} - \frac{\omega_{iH}^2 \gamma \gamma_0}{u_{e*}} \right) \partial_{\xi} \phi - \frac{c}{B_0} J(\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi) = 0, \quad (31)$$

where we again assumed that $\omega_{pi}^2 |\nabla_{\perp}^2| \gg \omega_{ci}^2 \nabla^2$, and discarded the dust charge fluctuation. It turns out that for $u_{e*} u_{i*} - u_{e*} u_{i*} + \gamma \gamma_0 \omega_{iH}^2 > 0$, Eq. (31) admits dipolar vortex of the type discussed in Ref. [19], whereas for $u_{i*} = \gamma \gamma_0 \omega_{iH}^2 / u_{e*}$, Eq. (31) reduces to the Navier-Stokes equation which is identical to Eq. (22) except that here $\mu = 1$. Clearly, for this case, we will have a chain of vortices that are given by Eq. (24).

V. SUMMARY

In this paper, we investigated linear as well as nonlinear properties of coupled Alfvén and convective cells modes in nonuniform multicomponent magnetized dusty gases. For this purpose, we employed the multifluid dusty plasma model, and derived a pair of coupled nonlinear equations for both the electrostatic and electromagnetic waves in dusty plasmas that have equilibrium density, magnetic field, and magnetic-field-aligned velocity gradients. In the linear limit, we have derived local dispersion relations. The latter are analytically analyzed in order to demonstrate the existence of both the collisionless and collisional instabilities of dust-convective cells and dust-Alfvén waves. Physically, the current convective instability arises because there appears a phase lag between the parallel electron velocity perturbation and the wave potential on account of the electron velocity gradient.

Finite amplitude disturbances in nonuniform dusty gases weakly interact among themselves, and the nonlinear mode coupling can lead to the formation of dipolar vortices and vortex streets. This has been analytically shown by seeking the stationary solutions of the governing nonlinear equations (12) and (13). We find that dusty vortex streets appear in a region where the dipolar vortices are forbidden.

The present investigation of the dusty plasma wave generation and the nonlinear mode coupling leading to the formation of coherent vortex structures does not account for the dust charge fluctuations. However, it is expected that the latter should introduce a non-Landau-type dissipation [10]. Accordingly, the growth rate of the instability has to overcome the damping associated with the dust charge perturbation, whereas vortices might be amplified [20] in a dissipative dusty medium. Furthermore, the dust grains are assumed to be immobile, which is justified as long as the typical oscillation frequency is much larger than the dust plasma and dust gyrofrequencies. However, for $|\partial_t| \gg \omega_{cd}$ and $\rho_d^2 |\nabla_{\perp}^2| \gg 1$, where ω_{cd} and ρ_d are the dusty gyrofrequency and the dust gyroradius, respectively, the dust grains would follow a straight-line orbit across the external magnetic field direction. The corresponding dust number density is $n_d \approx n_{d0} \exp(Z_{d0} e \phi / T_d)$, where T_d is the dust temperature. Thus the inclusion of the dust dynamics shall give rise to a new set of nonlinear equations and new classes of unstable waves and coherent nonlinear structures whose studies are beyond the scope of the present paper. Finally, the stability of the dipolar vortices and vortex streets, as found here, has to be analyzed.

In conclusion, we stress that we have reported possible mechanisms for the generation of electrostatic as well as electromagnetic fluctuations in the presence of sheared plasma flows in nonuniform magnetized dusty gases. We have also shown that the nonlinear mode coupling provides the possibility of the formation of dusty plasma vortices which can have different scale sizes. Thus, the results of the present work should be useful in identifying the frequency and wave-number spectra of fluctuations and the features of coherent nonlinear structures which are produced by sheared plasma flows in nonuniform dusty gases. The latter are frequently found in cometary tails and interstellar clouds, as well as in many low-temperature laboratory devices.

ACKNOWLEDGMENTS

Two of us (A.M.M. and G.M.) would like to thank the Alexander von Humboldt (AvH) Foundation for financial support, and Professor K. Elsässer and Professor M. Y. Yu for their hospitality at Ruhr-Universität Bochum, whereas R.T.F. acknowledges the financial support of Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD) and Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). This research was also partially supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft through the Sonderforschungsbereich "Physikalische Grundlagen der Niedertemperaturplasmen."

- [1] C. K. Goertz, *Rev. Geophys.* **27**, 271 (1989).
- [2] U. de Angelis, *Phys. Scr.* **45**, 465 (1992).
- [3] T. G. Northrop, *Phys. Scr.* **45**, 475 (1992).
- [4] U. de Angelis, V. Formisano, and M. Giordano, *J. Plasma Phys.* **40**, 399 (1988).
- [5] N. N. Rao, P. K. Shukla, and M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
- [6] N. D'Angelo, *Planet. Space Sci.* **38**, 1143 (1990).
- [7] P. K. Shukla, *Phys. Scr.* **45**, 504 (1992).
- [8] P. K. Shukla and V. P. Silin, *Phys. Scr.* **45**, 508 (1992).
- [9] N. D'Angelo and B. Song, *Planet. Space Sci.* **38**, 1577 (1990).
- [10] P. K. Shukla, in *The Physics of Dusty Plasmas*, edited by P. K. Shukla, D. A. Mendis, and V. W. Chow (World Scientific, Singapore, 1996), pp. 107–121.
- [11] R. L. Merlino, A. Barkan, C. Thompson, and N. D'Angelo, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **39**, A-421 (1996).
- [12] S. P. S. Rawat and N. N. Rao, *Planet. Space Sci.* **41**, 137 (1993).
- [13] P. K. Shukla, M. Y. Yu, and R. Bharuthram, *J. Geophys. Res.* **96**, 21 343 (1991).
- [14] P. K. Shukla and R. K. Varma, *Phys. Fluids B* **5**, 236 (1993).
- [15] P. K. Shukla, R. K. Varma, V. Krishan, and J. F. McKenzie, *Phys. Rev. E* **47**, 750 (1993).
- [16] A. Barkan, N. D'Angelo, and R. L. Merlino, *Phys. Plasmas* **2**, 3563 (1995); C. Thompson, A. Barkan, N. D'Angelo, and R. L. Merlino, *ibid.* **4**, 2331 (1997).
- [17] F. Verheest, *Space Sci. Rev.* **77**, 267 (1996).
- [18] S. Benkadda, P. Gabbai, V. N. Tsytovich, and A. Verga, *Phys. Rev. E* **53**, 2717 (1996).
- [19] L. Stenflo, *Phys. Fluids* **30**, 3297 (1987).
- [20] V. I. Petviashvili and O. A. Pokhotelov, *Solitary Waves in Plasmas and in the Atmosphere* (Gordon and Breach, London, 1992).
- [21] P. K. Shukla, in *A Variety of Plasmas*, edited by A. Sen and P. K. Kaw, Proceedings of the Invited Talk of the 1989 International Conference on Plasma Physics, New Delhi (Indian Academy of Sciences, Bangalore, India, 1991), p. 297.
- [22] A. B. Mikhailovskii, V. P. Lakhin, G. D. Aburdzhaniya, L. A. Mikahailovskaya, O. G. Onishenko, and A. I. Smolyakov, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **29**, 1 (1984).

Apêndice E. Self-organized and chaotic states in nonuniform dusty magnetoplasmas with sheared flows. Referência [11]

Self-organized and Chaotic States in Nonuniform Dusty Magnetoplasmas with Sheared Flows

R. T. Faria Jr,¹ Arshad M. Mirza² and P. K. Shukla

Institut für Theoretische Physik IV, Fakultät für Physik und Astronomie, Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum, Germany

Received September 29, 1997; accepted October 29, 1997

Abstract

It is well known that sheared plasma flows can be built up both in astrophysical environments as well as in laboratory dusty plasmas. Our objective here is to understand the coupling of velocity gradient energy to electrostatic and electromagnetic waves in nonuniform dusty magnetoplasma. For this purpose, we employ the multi-fluid dusty plasma model and derive the relevant nonlinear equations for low-frequency (in comparison with the ion gyrofrequency) waves in the presence of sheared plasma flows. Linear dispersion relations are derived and analyzed. It is found that both the electrostatic and electromagnetic waves are driven by sheared plasma flows. Furthermore, the newly derived mode coupling equations provide the possibility of self-organized and chaotic states in dusty plasmas. The results of our investigation should be helpful in understanding the properties of dusty plasma microturbulence when sources and sinks are simultaneously present.

1. Introduction

Recently there has been a great deal of interest in studying the linear and nonlinear evolution of instabilities in dusty plasmas. The presence of dust in the plasma modifies its collective properties. This kind of configuration can be found in space environments as well as in laboratory discharges [1–3]. In this paper, we study the linear as well as nonlinear properties of low-frequency (in comparison with the ion gyrofrequency) electrostatic and electromagnetic waves in a nonuniform magnetized dusty gas [4]. The latter contains equilibrium density and magnetic field gradients as well as sheared plasma flows. We show that nonlinearly coupled electromagnetic modes in nonuniform magnetoplasma can have a chaotic behavior. The three coupled nonlinear equations can be represented as a generalization of the Lorenz [5] and Stenflo [6] equations, which admit chaotic fluid behavior of electromagnetic turbulence in nonuniform magnetoplasmas.

2. Derivation of basic equations

Let us consider a nonuniform multi-component dusty plasma immersed in an inhomogeneous magnetic field $B_0(x)\hat{z}$, pointing in the z -axis direction. The dusty plasma also has the equilibrium density and velocity gradients. The charge neutrality condition at equilibrium can be expressed as $n_{i0} = n_{e0} + Z_{d0}n_{d0}$, where Z_{d0} represents the number of charges residing on the dust grains.

In the presence of low-frequency waves, the electron and ion fluid velocity perturbations in drift-approximation are $v_e \approx v_{EB} + (v_{e0} + v_{ez})B_{\perp}/B_0 + v_{ez}\hat{z}$, and $v_i \approx v_{EB} + v_{ip} + v_{i0}B_{\perp}/B_0$, where $v_{EB} = c\hat{z} \times \nabla\phi/B_0$ and $v_{ip} = -(c/B_0\omega_{ci})[\partial_t + v_i + v_{EB} \cdot \nabla + v_{i0}\partial_x]\nabla_{\perp}\phi$ are the usual $E \times B_0$ and the ion polarization drifts, respectively; $E = -\nabla\phi - (1/c)\partial_t A_z\hat{z}$ is the electric field vector; $\phi(A_z)$ is the electrostatic (z -component of the vector) potential and $B_{\perp} = \nabla A_z \times \hat{z}$ is the perpendicular component of the wave magnetic field, c is the speed of light, and ν_i is the ion collision frequency. The parallel component of the electron fluid velocity perturbation is determined from the z -component of the Ampère law, giving $v_{ez} \approx (c/4\pi n_{e0}e)\nabla_{\perp}^2 A_z$, where $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

The dynamics of waves in the dusty plasma system is governed by the equations of continuity, momentum, supplemented by Poisson's equation and Ampère's law. We linearize n_j . Thus, taking into account v_e , v_i , the continuity and the parallel component of the electron momentum equations, respectively, we have

$$\begin{aligned} (d_t + \nu_0)\left(\nabla^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}\nabla_{\perp}^2\right)\phi + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}(v_i + v_{i0}\partial_x)\nabla_{\perp}^2\phi \\ - 4\pi ec\hat{z} \times \nabla\left(\frac{Z_d n_d}{B_0}\right) \cdot \nabla\phi + cd_x\nabla_{\perp}^2 A_z \\ - \frac{4\pi}{B_0}\hat{z} \times \nabla A_z \cdot \nabla J_{ei} + 4\pi en_{d0}(\partial_t + \nu_{d0} \cdot \nabla)Z_{d1} = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

and

$$D_{ie}(1 - \lambda_e^2\nabla_{\perp}^2)A_z - \nu_e\lambda_e^2\nabla_{\perp}^2 A_z + \alpha(\partial_x + S_{e0} \cdot \nabla)\phi = 0, \quad (2)$$

where $d_t = \partial_t + v_{EB} \cdot \nabla$, $D_{ie} = d_t + (v_{e0} + v_{ez})\partial_x$, $\omega_{pi} = (4\pi n_{i0}e^2/m_i)^{1/2}$ is the ion plasma frequency, $\lambda_e = c/\omega_{pe}$ is the collisionless electron skin depth, ω_{pe} is the electron plasma frequency, $J_{ei} = e(n_e v_e - n_i v_i)$, and $S_{e0} = \hat{z} \times \nabla v_{e0}/\omega_{ce}$. We have denoted $d_x \equiv \partial_x + \nabla A_z \times \hat{z}/B_0$.

It is straightforward to derive similar equations for the electrostatic case, considering sheared flow plasma.

3. Dispersion relations

The local dispersion relation for electromagnetic waves can be derived from eqs (1) and (2). Assuming that ϕ and A_z are proportional to $\exp(iky + ik_z z - i\omega t)$, and that the scale-lengths of the equilibrium inhomogeneities are much larger than the wavelength, the resultant dispersion relation has

¹ Permanent address: Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970 Campinas, SP, Brazil.

² Permanent address: Department of Physics, Quaid-i-Azam University, Islamabad 45320, Pakistan.

the following form

$$\left[\omega - \omega_{sv} + iv_0 - \frac{k_y^2 c^2 (k_x v_{i0} - iv_i)}{v_A^2 K_*^2} \right] W_s = \left[k_x^2 v_A^2 + \frac{4\pi c k_y k_x c \partial_x (J_{ei}/B_0)}{K_*^2} \right] \frac{S_{vs}^*}{b_{ys}}, \quad (3)$$

where $\omega_{sv} = 4\pi e c k_y \partial_x (Z_{d0} n_{d0}/B_0)/K_*^2$ is the dust convective cell frequency, $v_A (= c\omega_{ci}/\omega_{pi})$ represents the usual Alfvén velocity, $W_s = \omega - k_x v_{e0} + i(v_e k_y^2 \lambda_c^2)/(b_{ys})$, $K_*^2 = k^2 + k_y^2 c^2/v_A^2$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, $S_{vs}^* = 1 + k \cdot S_{v0}/k_x$ and $b_{ys} = 1 + k_y^2 \lambda_c^2$. Notice that for a highly dissipative case, the modes are damped. Also, for $k_y^2 c^2/v_A^2 \gg k^2$, the convective cell modes and Alfvén waves are linearly coupled. It should be noted here that the presence of ω_{sv} is attributed to the presence of the static charged dust grains, and would not arise otherwise.

In the collisionless case, the dispersion relation eq. (3) becomes

$$\omega^2 - \omega(k_x v_{e0} + W_{sv}^*) + k_x v_{e0} W_{sv}^* - \left(k_x^2 v_A^2 + \frac{4\pi c k_y k_x c \partial_x (J_{ei}/B_0)}{K_*^2} \right) \frac{S_{vs}^*}{b_{ys}} = 0, \quad (4)$$

where $W_{sv}^* = \omega_{sv} + k_y^2 c^2 k_x v_{i0}/v_A^2 K_*^2$. Equation (4) predicts an oscillatory instability. For $\omega > k_x v_{e0}$, the threshold condition is

$$\left(k_x^2 v_A^2 + \frac{4\pi c k_y k_x c \partial_x (J_{ei}/B_0)}{K_*^2} \right) \frac{S_{vs}^*}{b_{ys}} > \left(\omega_{sv} + \frac{k_y^2 c^2 k_x v_{i0}}{v_A^2 K_*^2} \right)^2.$$

On the other hand, for a highly collisional plasma in which $v_e k_y^2 \lambda_c^2 \gg b_{ys}(\omega - k_x v_{e0})$ and $v_i \gg k_x v_{i0}$, we have

$$\omega = \omega_{sv} - i \left[v_0 + \frac{k_y^2 c^2 v_i}{v_A^2 K_*^2} + \left\{ k_x^2 v_A^2 + \frac{4\pi c k_y k_x c \partial_x (J_{ei}/B_0)}{K_*^2} \right\} \frac{S_{vs}^*}{v_e k_y^2 \lambda_c^2} \right]. \quad (5)$$

Equation (7) exhibits an instability if $k \cdot S_{v0}/k_x > 1$ and $4\pi c k_y k_x c \partial_x (J_{ei}/B_0)/K_*^2 > k_x^2 v_A^2$ as well as both the density and velocity gradients are negative. The threshold condition is

$$\left(k_x^2 v_A^2 + \frac{4\pi c k_y k_x c \partial_x (J_{ei}/B_0)}{K_*^2} \right) \frac{S_{vs}^*}{v_e k_y^2 \lambda_c^2} > v_0 + \frac{k_y^2 c^2 v_i}{v_A^2 K_*^2}.$$

Next, we focus on sheared flow driven dust-convective cells. The appropriate dispersion relation for the latter can be either directly derived from eqs (1) and (2), or by setting $k_y^2 \lambda_c^2 \gg 1$ in eq. (3). We have

$$\omega^2 - \omega[\omega_{sv} + k_x V_0 - iv_*] = \omega_{LH}^2 \frac{k_x^2}{k_y^2} \left[1 + \frac{4\pi \partial_x (J_{ei}/B_0)}{k_y k_x c} \right] S_{vs}^*, \quad (6)$$

where $V_0 = v_{e0} + v_{i0}$, $v_* = v_0 + v_e + v_i$, $\omega_{LH} \equiv (\omega_{ce} \omega_{ci})^{1/2}$ is the lower-hybrid resonance frequency, and $\omega_{pi} \gg \omega_{ci}$ has been assumed. An inspection of eq. (6) reveals that the dust-convective cells are driven at nonthermal level on account of the free energy stored in the magnetic field aligned velocity gradient and the density inhomogeneity. The maximum growth rate of the dust-convective cell instability is roughly

$\omega_{LH}(k_x/k_y) \{ [1 + 4\pi \partial_x (J_{ei}/B_0)/(k_y k_x c)] (1 + k \cdot S_{v0}/k_x) \}^{1/2}$ for $S_{v0} < 0$ and $|k \cdot S_{v0}| > k_x$.

4. Chaotic behavior of electromagnetic turbulence

In the following, we follow Lorenz [5] and Stenflo [6] and derive a set of equations which are appropriate for studying the temporal behavior of chaotic motion involving two-dimensional low-frequency nonlinearly interacting electromagnetic waves in a dissipative magnetoplasma. Accordingly, we introduce the Ansatz $\phi = \phi_1(t) \sin(K_x x) \sin(K_y y)$ and $A_x = A_1(t) \sin(K_x x) \cos(K_y y) - A_2(t) \sin(2K_x x)$, where K_x and K_y are constant parameters, and ϕ_1 , A_1 and A_2 are amplitudes which are only functions of time. Substituting ϕ and A_x into (1) and (2), and considering that $\partial_x \ln(Z_{d0} n_{d0}) = \partial_x \ln B_0$ we readily obtain

$$\dot{\phi}_1 = -\alpha_0 \phi_1 + \alpha_1 \frac{K_y}{K_x^2} A_1 - \alpha_2 K_x K_y \frac{(K^2 - 4K_x^2)}{K^2} A_1 A_2, \quad (7)$$

$$\dot{A}_1 = -\frac{\eta K^2}{1 + K^2 \lambda_c^2} A_1 - \frac{\delta_1 K_y}{1 + K^2 \lambda_c^2} \phi_1 + \frac{c K_x K_y}{B_0} \times \left[1 - \frac{12 K_x^2 \lambda_c^2}{1 + K^2 \lambda_c^2} \right] A_2 \phi_1, \quad (8)$$

and

$$\dot{A}_2 = -\frac{c K_x K_y}{2B_0} \phi_1 A_1 - 4 \frac{\eta K_x^2}{1 + 4K_x^2 \lambda_c^2} A_2, \quad (9)$$

where $\alpha_0 = v_0 + v_i$, $\alpha_1 = 4\pi v_A^2 (\partial J_{ei}/\partial x)/B_0 c^2$, $\alpha_2 = v_A^2/c^2$, $\eta = v_e \lambda_c^2$ is the plasma resistivity, $\delta_1 = c(\partial v_{e0}/\partial x)/\omega_{ce}$ and $\delta_2 = cB_0$. The time derivative is defined by a dot on ϕ_1 , A_1 and A_2 .

Equations (7)–(9) can be appropriately normalized so that they can be put in a form which is similar to that of Lorenz and Stenflo. We have

$$\begin{pmatrix} d_t X \\ d_t Y \\ d_t Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & \delta + \sigma Z & 0 \\ r - Z & -1 & 0 \\ Y & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (10)$$

which describes the nonlinear coupling between various amplitudes. Here, $\delta = \alpha_0 b_c^*/\eta K^2$, $r = -\alpha_1 \delta_1 K_y^2/\eta K^4$, $b = 4K_x^2 b_c^*/(1 + 4K_x^2 \lambda_c^2) K^2$ and the new parameter $\sigma = -\alpha_0^2 \alpha_2 (K^2 - 4K_x^2) b_c^* K^2 B_0 / c \alpha_1^2 K_y^2 (b_c^* - 12K_x^2 \lambda_c^2)$, with $K^2 = K_x^2 + K_y^2$ and $\tau = t/t_0$; where $t_0 = \eta K^2/b_c^*$ and $b_c^* = 1 + K^2 \lambda_c^2$.

If we set $\sigma = 0$, which happens for $K_y^2 = 2K_x^2$, eq. (10) then reduces to the Stenflo type equations. However, the normalizations used here are

$$\phi_1 = a_1 X = \frac{\sqrt{2} \eta K^2 B_0}{c K_x K_y \sqrt{b_c^* (b_c^* - 12K_x^2 \lambda_c^2)}} X;$$

$$A_1 = a_2 Y = \frac{\sqrt{2} \alpha_0 \eta K^4 B_0}{c \alpha_1 K_x K_y^2 \sqrt{b_c^* (b_c^* - 12K_x^2 \lambda_c^2)}} Y;$$

$$A_2 = a_3 Z = \frac{-\alpha_0 \eta K^4 B_0}{c \alpha_1 K_x K_y^2 (b_c^* - 12K_x^2 \lambda_c^2)} Z.$$

$X_0 = \pm [b(r - 2 + \sigma r^2/\delta) + \sqrt{(r - 2 + \sigma r^2/\delta)^2 + 4(r - 1)/2}]^{1/2}$, $Y_0 = r b X_0/(b + X_0^2)$, and $Z_0 = X_0 Y_0/b$ are the equilibrium points of eq. (10).

For $\sigma = 0$, we note that for $|r| > 1$, the equilibrium fixed points $[X_0 = Y_0 = \pm \sqrt{b}(|r| - 1)^{1/2}$, and $Z_0 = |r| - 1]$ are unstable resulting in convective cell motions. Thus, the linear instability should saturate by attracting to one of these new fixed states [7].

5. Summary

In this paper, we have investigated the linear as well as non-linear properties of coupled Alfvén and convective cells modes in nonuniform multi-component magnetized dusty gases. For this purpose, we have employed the multi-fluid dusty plasma model. In the linear limit, we have derived local dispersion relations. The latter is analytically analyzed in order to demonstrate the existence of both collisionless and collisional instabilities of dust-convective cells and dust-Alfvén waves. Physically, the current convective instability arises because there appears a phase lag between the parallel electron velocity perturbation and the wave potential on account of the electron velocity gradient.

Finite amplitude disturbances in nonuniform dusty gases weakly interact among themselves and self-organize in the form of the generalized Lorenz–Stenflo equations, which

admit a chaotic state. The parameter regimes for the onset of chaos have been identified and fully analyzed.

Acknowledgements

R. T. Faria Jr. would like to thank Fundação de Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) and the Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD) for a fellowship, whereas A. M. Mirza acknowledges the Alexander von Humboldt (AvH) Foundation for financial support. This research was also partially supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft through the Sonderforschungsbereich "Physikalische Grundlagen der Niedertemperaturplasmen".

References

1. Shukla, P. K., Varma, R. K., Krishan, V. and McKenzie, J. F., *Phys. Rev. E* **47**, 750 (1993).
2. Goertz, C. K., *Rev. Geophys.* **27**, 271 (1989).
3. de Angelis, U., *Physica Scripta* **45**, 465 (1992).
4. Shukla, P. K., in "The Physics of Dusty Plasma" (Edited by P. K. Shukla, D. A. Mendis and V. W. Chow) (World Scientific, Singapore 1996), pp. 107–121.
5. Lorenz, E. N., *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1964).
6. Stenflo, L., *Phys. Lett.* **A212**, 224 (1996).
7. Mirza, A. M. and Shukla, P. K., *Phys. Lett.* **A229**, 313 (1997).

Apêndice F. Linear and nonlinear dispersive Alfvén waves in two-ion plasmas. Referência [12]

Linear and nonlinear dispersive Alfvén waves in two-ion plasmas

R. T. Faria, Jr.,^{a)} Arshad M. Mirza,^{b)} P. K. Shukla, and O. A. Pokhotelov^{c)}
*Institut für Theoretische Physik IV, Fakultät für Physik und Astronomie, Ruhr-Universität Bochum,
 D-44780 Bochum, Germany*

(Received 5 March 1998; accepted 12 May 1998)

A set of coupled nonlinear equations for dispersive Alfvén waves (DAWs) in nonuniform magnetoplasmas with two-ion species is derived by employing a multifluid model. The DAW frequency is assumed to lie between the gyrofrequencies of the light and heavy ion impurities. In the linear limit, a local dispersion relation (LDR) is derived and analyzed. The LDR admits a new type of DAW in two-ion plasmas. Furthermore, it is found that stationary solutions of the nonlinear mode coupling equations in two-ion plasmas can be represented in the form of different types of coherent vortex structures. The relevance of our investigation to space and laboratory plasmas is pointed out.
 © 1998 American Institute of Physics. [S1070-664X(98)02408-2]

I. INTRODUCTION

The Alfvén wave is one of the important normal modes of a two-component electron ion plasma that is embedded in a uniform magnetic field. The dynamics of nondispersive Alfvén waves is normally governed by ideal magnetohydrodynamic (MHD) equations. In the Alfvén wave, the restoring force comes from the equilibrium magnetic pressure, and the ion mass provides the inertia. The inclusion of nonideal effects,¹⁻³ such as the perpendicular (parallel) inertial force of the ions (electrons) and the Hall force, is responsible for dispersion of the Alfvén wave. The dispersive Alfvén wave (DAW), which is also referred to as the kinetic (or shear) and inertial Alfvén waves,^{1,3} accompanies a finite parallel (along the ambient magnetic field lines of force) electric field, and the DAW dynamics is either governed by gyrokinetic equations or by two fluid equations that include the ion polarization drift and the parallel electron inertial force. The linear and nonlinear properties of the kinetic Alfvén and inertial Alfvén waves in a two-component electron-ion plasma have been discussed in depth by several authors.^{2,4-7} It is widely thought that the DAW can energize both the electrons and ions, and that it can also be associated with numerous scale low-frequency (in comparison with the ion gyrofrequency) electromagnetic waves in both the laboratory and in space/cosmic plasmas.

However, most of the laboratory (such as the tokamak) as well as space and astrophysical (such as those in Earth's ionosphere and magnetosphere, the solar wind, cometary tails, etc.) plasmas contain multiple ion species⁸⁻¹⁰ and inhomogeneities. Accordingly, it is of practical interest to examine the properties of linear and nonlinear DAWs in nonuniform multicomponent magnetized plasmas with equilibrium density gradients and sheared plasma flows.

In this article, we shall employ a multifluid model to derive a set of nonlinear equations for the DAW in a nonuniform magnetoplasma, by assuming that the frequency of the DAW is much smaller (either smaller, comparable, or larger) than the gyrofrequency of the heavier or inertial (lighter or inertialess) ions. The mode coupling equations consist of the electron continuity equation, the parallel component of the electron momentum equation, the conservation of the charge current density, as well as an equation which governs the dynamics of perpendicular velocity of the heavier ion component. In the linear limit, the four field equations are Fourier transformed and a general local dispersion relation is derived and analyzed in several limiting cases. It is found that sheared plasma flows can excite the DA-like waves in plasmas without the density gradient. On the other hand, the nonlinear coupling between finite amplitude DA-like waves can produce coherent vortex structures. Conditions under which the latter appear are given. The relevance of our investigation to space and laboratory plasmas is pointed out.

II. DERIVATION OF THE NONLINEAR EQUATIONS

We consider a nonuniform multicomponent plasma immersed in a homogeneous magnetic field $B_0 \hat{z}$, where B_0 is the strength of the external magnetic field, and \hat{z} is the unit vector along the z axis. The equilibrium density (n_{j0}) and velocity (v_{j0}) have gradients along the x axis. Here, the subscript j is e for the electrons and i for the ions. The equilibrium gradients are maintained by body forces and by noncontinuous injection of charged particles into plasmas. We assume that the strength of sheared magnetic fields, which are produced by the equilibrium parallel current, is negligibly small in comparison with the strength of the ambient magnetic field.

At equilibrium, the divergence of the equilibrium plasma current density is zero, and the charge neutrality condition reads

$$n_{e0} = \sum_i Z_i^l n_{i0}^l + \sum_i Z_i^h n_{i0}^h, \quad (1)$$

^{a)}Permanent address: Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970 Campinas, SP, Brazil.

^{b)}Permanent address: Department of Physics, Quaid-i-Azam University, Islamabad 45320, Pakistan.

^{c)}Permanent address: Institute of Physics of the Earth, 123810 Moscow, Russia.

where the superscript l (h) stands for the lighter (heavier) ion component, and Z_l is the ion charge. The negative ion is characterized by $Z_l < 0$.

We assume that the frequency of the DAW is much smaller than the gyrofrequency ($\Omega_{cl} = Z_l^l e B_0 / m_l^l c$) of the lighter ions, where e is the magnitude of the electron charge, m_l^l is the mass of the lighter ions, and c is the speed of light. Thus, the perpendicular (to \hat{z}) components of the electron and lighter ion fluid velocity perturbations in the electromagnetic fields of the DAW are, respectively,

$$\mathbf{v}_{e\perp} \approx \mathbf{v}_{EB} + \mathbf{v}_{De} + (v_{e0} + v_{ez}) \frac{\mathbf{B}_\perp}{B_0}, \quad (2)$$

and

$$\mathbf{v}_i^l \approx \mathbf{v}_{EB} + \frac{c}{B_0 \Omega_{cl}} (\partial_t + v_{i0} \partial_z + \mathbf{v}_i^l \cdot \nabla) \mathbf{E}_\perp + \frac{v_{i0} \mathbf{B}_\perp}{B_0}, \quad (3)$$

where $\mathbf{v}_{EB} = c \hat{z} \times \nabla \phi / B_0$, and $\mathbf{v}_{De} = -(c T_e / e B_0 n_e) \hat{z} \times \nabla n_e$ are the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0$, and the diamagnetic drift velocities, respectively, $\mathbf{E} = -\nabla \phi - (1/c) \partial_t A_z \hat{z}$ is the electric field vector, ϕ (A_z) is the electrostatic (z component of the vector) potential, and $\mathbf{B}_\perp = \nabla A_z \times \hat{z}$ is the perpendicular component of the wave magnetic field. Furthermore, n_e is the electron number density and T_e is the constant electron temperature. The compressional magnetic field perturbation along the \hat{z} direction has been neglected in view of the low- β ($\ll 1$) approximation. For simplicity, the motion of cold ions along the \hat{z} direction has been neglected.

The parallel (to \hat{z}) component of the electron fluid velocity perturbation (v_{ez}) can be obtained from the z component of Ampère's law,

$$v_{ez} \approx (c/4\pi n_{e0} e) \nabla_\perp^2 A_z, \quad (4)$$

where $\nabla_\perp^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

The relevant equations for nonlinear dispersive Alfvén waves in plasmas with two-ion components can easily be derived by substituting Eqs. (1)–(4) into the continuity equations for the electrons and ions, and into the parallel component of the electron momentum equations. Thus, by substituting Eq. (2) into the electron continuity equation and by eliminating v_{ez} by means of Eq. (4), we obtain

$$D_t^e n_{e1} - \frac{c}{B_0} \hat{z} \times \nabla n_{e0} \cdot \nabla \phi + \frac{1}{e B_0} \hat{z} \times \nabla A_z \cdot \nabla J_{e0} + \frac{c}{4\pi e} D_z \nabla_\perp^2 A_z = 0, \quad (5)$$

where $D_t^e = \partial_t + v_{e0} \partial_z + \mathbf{v}_{EB} \cdot \nabla + (c/4\pi n_{e0} e) \nabla_\perp^2 A_z \partial_z$, $D_z = \partial_z + B_0^{-1} \nabla A_z \times \hat{z} \cdot \nabla$, $J_{e0} = -en_{e0} v_{e0}$ is the equilibrium electron current density, and $n_{e1} (= n_e - n_{e0} \ll n_{e0})$ is the perturbed electron number density.

Inserting Eqs. (2) and (4) into the parallel component of the electron momentum equation, and noting that $E_z = -\partial_z \phi - c^{-1} \partial_t A_z$, we readily obtain

$$(D_t - \lambda_e^2 \nabla_\perp^2 D_t^e) A_z + \mathbf{v}_{D0} \cdot \nabla A_z + c(\partial_z + S_{v0} \cdot \nabla) \phi - \frac{c T_e}{e n_{e0}} D_z n_{e1} = 0, \quad (6)$$

where $D_t = \partial_t + \mathbf{v}_{EB} \cdot \nabla$, $\mathbf{v}_{D0} = -(c T_e / e B_0 n_{e0}) \hat{z} \times \nabla n_{e0}$ is the equilibrium electron diamagnetic drift, $\lambda_e = c / \omega_{pe}$ is the collisionless electron skin depth, $\omega_{pe} = (4\pi n_{e0} e^2 / m_e)^{1/2}$ is the electron plasma frequency, and $S_{v0} = (\hat{z} \times \nabla v_{e0}) / \omega_{ce}$ is the electron shear parameter.

From the conservation of the charge current density, viz., $\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla_\perp \cdot \mathbf{J}_\perp + \hat{z} \cdot \nabla J_{ez} = 0$, we obtain

$$\frac{c Z_l^h e}{B_0} \hat{z} \times \nabla n_{i0}^h \cdot \nabla \phi + \frac{c Z_l^h e n_{i0}^h}{B_0 \Omega_{cl}} D_{il} \nabla_\perp^2 \phi - Z_l^h e \nabla \cdot (n_{i0}^h \mathbf{v}_{i\perp}^h) - \frac{1}{B_0} \hat{z} \times \nabla J_0 \cdot \nabla A_z + \frac{c}{4\pi} d_z \nabla_\perp^2 A_z = 0, \quad (7)$$

where $D_{il} = \partial_t + v_{i0}^l \partial_z + \mathbf{v}_{EB} \cdot \nabla$, $J_0 = e(n_{i0} v_{i0} - n_{e0} v_{e0})$ is the unperturbed total plasma current density, and $\mathbf{v}_{i\perp}^h$ is the perpendicular component of the heavier (or inertial) ion fluid velocity perturbation. The latter is determined from

$$(D_{ih}^2 + \Omega_{ch}^2) \mathbf{v}_{i\perp}^h + \frac{Z_l^h e}{m_i^h} \partial_t \nabla_\perp \phi - \frac{c \Omega_{ch}^2}{B_0} \hat{z} \times \nabla \phi = 0, \quad (8)$$

where $D_{ih} = \partial_t + v_{i0}^h \partial_z + \mathbf{v}_{i\perp}^h \cdot \nabla$ and $\Omega_{ch} = Z_l^h e B_0 / m_i^h c$ is the gyrofrequency of the heavier ion component.

Equations (5)–(8) are the desired nonlinear equations for the study of dispersive Alfvén waves in nonuniform plasmas with two distinct groups of ions.

III. THE LOCAL DISPERSION RELATION

In Sec. III, we shall present the local linear dispersion relation for the DAW in a nonuniform plasma by assuming that the wavelength of the disturbance is much smaller than the scale lengths of the equilibrium inhomogeneities. Accordingly, we Fourier transform Eqs. (5)–(8) by assuming that the perturbed quantities n_{e1} , $\mathbf{v}_{i\perp}^h$, ϕ , and A_z are proportional to $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, where $\mathbf{k} (= \hat{y} k_y + \hat{z} k_z)$ and ω are the wave vector and the frequency, respectively. The unit vector along the y direction is denoted by \hat{y} .

We first present a general dispersion relation for the DAW in the presence of an equilibrium density gradient and equilibrium sheared plasma flows. Accordingly, we Fourier transform Eqs. (5)–(8) by neglecting the nonlinear terms. From Eq. (5) we have

$$n_{e1} = -\frac{1}{\omega} \left[\frac{k_y c n_{e0}'}{B_0} \phi + \left(\frac{k_y J_{e0}'}{e B_0} + \frac{k_y^2 c}{4\pi e} \right) A_z \right], \quad (9)$$

where we have assumed that $\omega \gg k_z v_{j0}$ and have denoted $n_{e0}' = \partial n_{e0} / \partial x$ and $J_{e0}' = \partial J_{e0} / \partial x$.

On the other hand, we Fourier transform Eq. (6) and eliminate n_{e1} by means of Eq. (9). The resultant equation reads

$$D_m A_z = k_z c \left[\omega \left(1 + \frac{k_y S}{k_z} \right) + \omega_{ce} k_y \kappa_e \rho_e^2 \right] \phi, \quad (10)$$

where $D_m = (1 + k_y^2 \lambda_e^2) \omega^2 - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{D0} - k_z^2 c^2 k_y^2 \lambda_{De}^2 - k_y k_z \rho_e^2 \Omega_{ce} J_{e0}' / e n_{e0}$, $\lambda_{De} = (T_e / 4\pi n_{e0} e^2)^{1/2}$ is the electron Debye length, $\rho_e = v_{te} / \Omega_{ce}$ is the electron Larmor radius,

$v_{te}(\Omega_{ce})$ is the electron thermal velocity (the electron gyro-frequency), $\kappa_e = n'_{e0}/n_{e0}$, and $S = (\partial v_{e0}/\partial x)/\Omega_{ce} \equiv V'_{e0}/\Omega_{ce}$.

Finally, we combine Eqs. (7) and (8) and Fourier transform the resulting equation. The result is

$$\epsilon_l \phi = \left(\frac{4\pi}{B_0} J'_0 + k_y k_z c \right) k_y A_z, \quad (11)$$

where

$$\epsilon_l = \left(\frac{\omega_{ph}^2}{\Omega_{ch}} + \frac{\omega_{ph}^2 \Omega_{ch}}{\Omega_{ch}^2 - \omega^2} \right) k_y \kappa_l + \left(\frac{\omega_{pl}^2 \omega}{\Omega_{cl}^2} + \frac{\omega_{ph}^2 \omega}{\Omega_{ch}^2 - \omega^2} \right) k_y^2,$$

with ω_{ph} and ω_{pl} being the plasma frequency of the heavier and lighter ion components, respectively. Furthermore, we have denoted $J'_0 = \partial J_0/\partial x$ and $\kappa_l = (\partial n'_l/\partial x)/n_l$.

From Eqs. (10) and (11) we can eliminate A_z or ϕ , and obtain the general dispersion relation

$$D_m \epsilon_l = \omega k_y k_z c \left(1 + \frac{k_y S}{k_z} \right) \left(\frac{4\pi}{B_0} J'_0 + k_y k_z c \right). \quad (12)$$

In the absence of the density gradients and equilibrium sheared plasma flows Eq. (12) reduces to

$$\left[(1 + k_y^2 \lambda_e^2) \omega^2 - k_z^2 c^2 k_y^2 \lambda_{De}^2 \right] \left(\omega^2 - \Omega_{ch}^2 - \frac{\omega_{ph}^2 \Omega_{cl}^2}{\omega_{pl}^2} \right) - k_z^2 V_A^2 (\omega^2 - \Omega_{ch}^2) = 0, \quad (13)$$

where $V_A^2 = B_0^2/(4\pi\rho_l)$ is the Alfvén velocity and $\rho_l (= n'_l m'_l)$ represents the mass density of the light ions. Equation (13) shows that the dispersive Alfvén waves are linearly coupled with the ion-cyclotron waves involving the heavy ion component. For $\omega \ll \Omega_{ch}$, Eq. (13) yields

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 V_A^2 + k_z^2 c^2 k_y^2 \lambda_{De}^2}{1 + k_y^2 \lambda_e^2}, \quad (14)$$

where $V_A = c/\sqrt{a}$ is the Alfvén velocity in two-ion plasma, and $a = \sum_{i=l,h} \omega_{pi}^2/\Omega_{ci}^2$. Equation (14) shows that the phase velocity of the usual kinetic/inertial Alfvén wave is decreased when an additional ion component is present in plasmas.

It can be readily shown from Eq. (12) that the DAW in two-ion plasmas can be driven by sheared plasma flows even in the absence of the density gradients. For $k_z v_{te} \ll \omega \ll \Omega_{ch}$, the instability occurs provided that $(k_z + k_y S) \times (k_y k_z c + 4\pi J'_0/B_0) < 0$. The latter is satisfied for $\partial v_{e0}/\partial x \equiv V'_{e0} < 0$ and $|V'_{e0}|/\omega_{ce} > k_z/k_y$ provided that $k_y k_z c > 4\pi J'_0/B_0$. The growth rate of that current convective instability is $k_z V_A |k_y V'_0/k_z \omega_{ce}|^{1/2}$. Finally, we would like to mention that when the density gradients and sheared plasma flows are present simultaneously, then one has to resort to a numerical analysis of Eq. (12) in order to deduce complete information regarding the growth of dispersive Alfvén-like waves in two-ion plasmas that are inhomogeneous.

IV. NONLINEAR SOLUTIONS

The nonlinear interaction between finite amplitude dispersive Alfvén waves in two-ion plasmas can be responsible for the formation of ordered structures. Although the general stationary and nonstationary solutions of Eqs. (5)–(8) cannot be found analytically, we discuss here stationary solutions in some limiting cases. Specifically, in the following, we shall present vortex solutions^{2,4–7,11–15} of Eqs. (5)–(8) by assuming that $\partial_x n_{j0} = 0$, $|\partial_t| \ll \Omega_{ch}$, $c\omega_{ce} |\nabla_{\perp}^2 A_z \partial_z| \ll \omega_{pe}^2 |\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \phi \cdot \nabla|$ and $\partial_z^2 \ll \nabla_{\perp}^2$. Accordingly, we introduce a new reference frame $\xi = y + \alpha z - ut$, where α and u are constants, and assume that ϕ and A_z are functions of x and ξ only. The introduction of the new reference frame ξ with constant α and u for an inhomogeneous medium is a well established fact for cases involving Rossby and gravity dipolar vortices in fluids,^{2,13–15} as well as for drift-acoustic^{11,12} and drift-Alfvén^{2,4,5,7} vortices in nonuniform magnetized plasmas.

In the stationary frame $\xi = y + \alpha z - ut$, we can replace ∂_t by $-u\partial_{\xi}$, ∂_y by ∂_{ξ} , and ∂_z by $\alpha\partial_{\xi}$. In the absence of the density gradients, Eq. (5) becomes

$$D_{\xi} \phi n_{e1} = D_{\xi A} \left[\frac{n_{e0} V'_{e0}}{u B_0} A_z + \frac{c\alpha}{4\pi e u} \nabla_{\perp}^2 A_z \right], \quad (15)$$

where $D_{\xi} \phi = \partial_{\xi} - (c/u B_0)(\partial_x \phi \partial_{\xi} - \partial_{\xi} \phi \partial_x)$ and $D_{\xi A} = \partial_{\xi} + (1/\alpha B_0)(\partial_{\xi} A_z \partial_x - \partial_x A_z \partial_{\xi})$, and $u \gg v_{j0}$ has been assumed.

From Eq. (6), we have

$$D_{\xi} \phi \left[(1 - \lambda_e^2 \nabla_{\perp}^2) A_z - \frac{c\alpha_0}{u} \phi \right] + \frac{c T_e \alpha}{e n_{e0} u} D_{\xi A} n_{e1} = 0, \quad (16)$$

where $\alpha_0 = \alpha + S$.

On the other hand, Eq. (7) gives

$$D_{\xi} \phi \nabla_{\perp}^2 \phi = D_{\xi A} \left(\frac{e n_{e0} V'_0}{a u B_0} A_z + \frac{c\alpha}{a u} \nabla_{\perp}^2 A_z \right), \quad (17)$$

where $V'_0 \approx \partial(v_{e0} - v_{i0})/\partial x$.

We now discuss analytical solutions of Eqs. (15)–(17) in some limiting cases. Let us focus on kinetic Alfvén waves which assume that the scale sizes of the vortices are much smaller than the collisionless electron skin depth. Here, we obtain from Eq. (16)

$$D_{\xi} \phi \left(A_z - \frac{c\alpha_0}{u} \phi \right) = - \frac{c T_e \alpha}{e n_{e0} u} D_{\xi A} n_{e1}. \quad (18)$$

In the ideal MHD limit, the Alfvén waves have insignificant density perturbations, so we can approximate A_z by $(c\alpha_0/u)\phi$. Substituting the latter into Eq. (17) we obtain

$$\left(1 - \frac{c^2 \alpha \alpha_0}{a u^2} \right) \partial_{\xi} \nabla_{\perp}^2 \phi - \frac{e n_{e0} c \alpha_0 V'_0}{a u^2 B_0} \partial_{\xi} \phi - \frac{c}{u B_0} \left(1 - \frac{c^2 \alpha_0^2}{a u^2} \right) J(\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi) = 0, \quad (19)$$

where $J(f, g) = \partial_x f \partial_{\xi} g - \partial_x g \partial_{\xi} f$.

In the absence of sheared plasma flows, Eq. (19) assumes the form of a stationary Navier-Stokes equation

$$\partial_\xi \nabla_\perp^2 \phi - \frac{c\mu_s}{uB_0} J(\phi, \nabla_\perp^2 \phi) = 0, \tag{20}$$

where $\mu_s = (1 - c^2 \alpha_0^2 / au^2) / (1 - c^2 \alpha \alpha_0 / au^2)$.

Equation (20) is satisfied by

$$\nabla_\perp^2 \phi = \frac{4\phi_s K_s^2}{a_s^2} \exp\left[-\frac{2}{\phi_s} \left(\phi - \frac{uB_0}{\mu_s c} x\right)\right], \tag{21}$$

where ϕ_s , K_s , and a_s are arbitrary constants. The solution of Eq. (21) is given by^{7,11}

$$\phi = \frac{uB_0}{\mu_s c} x + \phi_s \ln \left[2 \cosh(K_s x) + 2 \left(1 - \frac{1}{a_s^2}\right) \cos(K_s \xi) \right]. \tag{22}$$

For $a_s^2 > 1$ the vortex profile given by Eq. (22) resembles the Kelvin-Stuart "cat's eyes" that are chains of vortices.

In the presence of sheared plasma flows, Eq. (19) admits a double vortex solution, the profiles of which are similar to those given in Refs. 2 and 12.

Next, we consider the case when $u \gg \alpha v_{te}$. Here, the last term on the left-hand side of Eq. (16) can be neglected and Eq. (15) becomes redundant. Thus, a typical solution of Eq. (16) is

$$(1 - \lambda_e^2 \nabla_\perp^2) A_z - \frac{c\alpha_0}{u} \phi = 0. \tag{23}$$

Combining Eqs. (17) and (23) we obtain an equation whose solution is

$$\nabla_\perp^2 \phi + \beta_1 \phi - \beta_2 A_z = F_3 \left(\phi - \frac{uB_0}{c} x\right), \tag{24}$$

where $\beta_1 = \alpha \alpha_0 c^2 / au^2 \lambda_e^2$, $\beta_2 = \alpha_0 c / au \lambda_e^2$, and F_3 is a constant. In deriving Eq. (24) we have assumed that $\alpha = \alpha_0 + \lambda_e^2 en_{e0} V_0' / B_0$.

By substituting Eq. (23) into Eq. (24), we finally obtain

$$\nabla_\perp^4 \phi + C_1 \nabla_\perp^2 \phi + C_2 \phi - \frac{F_3 u B_0}{c \lambda_e^2} x = 0, \tag{25}$$

where $C_1 = \beta_1 - F_3 - 1/\lambda_e^2$ and $C_2 = [(F_3 - \beta_1) / \lambda_e^2] + c\beta_2 \alpha_0 / u \lambda_e^2$. Equation (25) is a fourth order differential equation, which admits spatially bounded dipolar vortex solutions. Specific forms of the latter are given in Refs. 4 and 7.

V. SUMMARY

In this article, we have investigated the linear as well as the nonlinear properties of dispersive Alfvén waves in a non-uniform multicomponent magnetized plasma. For this purpose, we have employed the multifluid plasma model and have derived a set of coupled nonlinear equations for low-frequency long wavelength (in comparison with the ion gyroradius) electromagnetic waves in plasmas that have equilibrium density and magnetic-field aligned velocity gradients. In the linear limit, we have derived a local dispersion relation. The latter is analytically analyzed in order to demonstrate the current convective instability of the DAW in plasmas without the density inhomogeneity. Physically, the

current convective instability arises because a phase lag between the parallel electron velocity perturbation and the wave potential appears due to the equilibrium velocity gradients.

Furthermore, it has been shown that finite amplitude DA disturbances in two-ion plasmas interact nonlinearly, giving rise to the vortex street and the dipolar vortex as possible stationary states. This has been shown analytically by seeking stationary solutions of the governing nonlinear equations, Eqs. (5)–(8), in two limiting cases.

We have thus reported a possible mechanism for the generation of dispersive Alfvén-like fluctuations in the presence of sheared plasma flows in a magnetized plasma containing two-ion species. The nonlinear mode couplings between finite amplitude DAWs provide the possibility of the formation of solitary vortices. We note that a vortex chain arises in the absence of the equilibrium sheared plasma flows, whereas the latter are required for the formation of a dipolar vortex. Thus, a possible saturated state of a current convective instability could appear as a dipolar vortex. However, the existence of the vortex chain and the double vortex is only guaranteed if these nonlinear coherent structures are stable against two- or three-dimensional perturbations. In order to investigate the stability of our nonlinear vortex solutions, we have to perturb the dynamical equations, Eqs. (5)–(8), around the zero order (vortex) solutions, and subsequently study the vortex stability by employing the method of Refs. 16 and 17. Although a complete stability analysis of our nonlinear equations is truly tedious, we anticipate that the coherent nonlinear structures should remain stable, because the form of the Jacobean nonlinearity in our problem is similar to that in the hydrodynamic problem.^{16,17}

In conclusion, we stress that the results of the present investigation should be useful in identifying the frequency and wave number spectra of low-frequency electromagnetic fluctuations and the salient features of associated coherent nonlinear structures which are produced by sheared plasma flows in a nonuniform, low-temperature, magnetized plasma containing two-ion components. The latter are frequently found in tokamak edges as well as in space and cosmic environments.

ACKNOWLEDGMENTS

P. K. S. thanks the Abdus Salam International Center for Theoretical Physics (ASICTP), Trieste, Italy, for supporting his visit to the Quaid-i-Azam University (QAU) at Islamabad, Pakistan, where this work was carried out. He also acknowledges the warm hospitality of Professor G. Murtaza at the QAU, as well as the invaluable help of Silvia Sfreddo of the ASICTP for organizing his visit to Islamabad.

This research was partially supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) through Research Grant No. 96-05-00032 of the RFBR-DFG program and the Sonderforschungsbereich 191, as well as by Pakistan Science Foundation Project No. C-QU/Phy(89). R. T. F. thanks the Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD) and Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) for financial support.

- ¹A. Hasegawa and C. Uberoi, *The Alfvén Wave* (National Technical Information Service, Springfield, VA, 1982).
- ²V. I. Petviashvili and O. A. Pokhotelov, *Solitary Waves in Plasmas and in the Atmosphere* (Gordon and Breach, Reading, Berkshire, UK, 1992).
- ³A. B. Mikhailovskii, *Electromagnetic Instabilities in an Inhomogeneous Plasma* (Hilger, Institute of Physics, Bristol, UK, 1992).
- ⁴A. B. Mikhailovskii, V. P. Lakhin, G. D. Aburdzhaniya, L. A. Mikhailovskaya, O. G. Onishenko, and A. I. Smolyakov, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **29**, 1 (1984); J. Liu and W. Horton, *J. Plasma Phys.* **36**, 1 (1986).
- ⁵M. Y. Yu, P. K. Shukla, and L. Stenflo, *Astrophys. J.* **309**, L63 (1986).
- ⁶V. M. Chmyrev, O. A. Pokhotelov, V. A. Marchenko, V. I. Lazarev, A. V. Streltsov, and L. Stenflo, *Phys. Scr.* **38**, 841 (1988).
- ⁷P. K. Shukla, G. T. Birk, J. Dreher, and L. Stenflo, *Plasma Phys. Rep.* **22**, 818 (1996).
- ⁸W. K. Peterson, M. W. Yau, and B. A. Whalen, *J. Geophys. Res.* **98**, 11177 (1993).
- ⁹D. I. Maslennikov, V. S. Mikhailenko, and K. N. Stepanov, *Fizika Plazmy* **23**, 1088 (1997) [*Plasma Phys. Rep.* **23**, 1007 (1997)].
- ¹⁰A. G. Elifomov, R. M. O. Galvao, I. C. Nascimento, and G. Amarante-Segundo, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **39**, 1151 (1997).
- ¹¹P. K. Shukla, G. T. Birk, and R. Bingham, *Geophys. Res. Lett.* **22**, 671 (1995).
- ¹²J. D. Meiss and W. Horton, *Phys. Fluids* **26**, 990 (1983).
- ¹³L. Stenflo, *Phys. Fluids* **30**, 3297 (1987).
- ¹⁴L. Stenflo, *Phys. Lett. A* **186**, 133 (1994).
- ¹⁵L. Stenflo, *Phys. Lett. A* **222**, 378 (1996).
- ¹⁶C. F. Carnevale and G. K. Vallis, *J. Fluid Mech.* **213**, 549 (1990).
- ¹⁷T. Dauxois, *Phys. Fluids* **6**, 1625 (1994).

Apêndice G. A class of stationary nonlinear dusty plasma equilibria. Referência [34]

A class of stationary nonlinear dusty plasma equilibria

R. T. Faria, Jr.,^{a)} Tahir Farid, P. K. Shukla, and P. H. Sakanaka^{a)}

Institut für Theoretische Physik IV, Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum, Germany

(Received 29 January 1999; accepted 22 March 1999)

It is shown that nonparallel density and temperature gradients can produce magnetic fields in dusty plasmas. Spontaneously created magnetic fields can be maintained if there exists plasma vorticity. In order to understand this phenomena, a self-consistent dusty plasma equilibrium model is constructed by employing a kinetic description and invoking the Hamiltonian approach. Stationary nonlinear dusty plasma equilibria contain specific profiles for the plasma number density, the plasma current, and the magnetic field. The relevance of this investigation to low-temperature laboratory dusty and space plasmas is discussed. © 1999 American Institute of Physics. [S1070-664X(99)01407-X]

It is well known¹⁻³ that the presence of charged dust grains in an electron-ion plasma introduces novel collective effects. The latter include dust-acoustic¹ and dust ion-acoustic² waves and their instabilities,⁴ as well as coherent nonlinear structures.^{5,6} New types of dusty plasma waves and vortex structures have been observed^{7,8} in low-temperature space and laboratory dusty plasmas. Specifically, recent laboratory observations have conclusively demonstrated the formation of dusty plasma vortices without and with magnetic fields. Dusty plasma vortices are thought to be produced by sheared flows.⁹

In this Brief Communication, we consider the generation and maintenance of magnetic fields in a dusty plasma. First, it is shown that when the equilibrium ion pressure gradient and the gradient of the dust charge density $Z_d n_d$ are nonparallel to each other, we have the possibility of spontaneous generation of magnetic fields in dusty plasmas. Second, we discuss a class of self-consistent dusty plasma equilibria in which spontaneously created magnetic fields are related with other field quantities, namely, the plasma number density, the electric potential, and the plasma currents, in a nonlinear fashion. In order to understand the stationary dusty plasma equilibria in electromagnetic fields, we have adopted the Hamiltonian and guiding center approaches for the plasma particles and have constructed appropriate distribution functions. The latter are then employed to calculate the plasma number and plasma current densities. The quasineutrality condition and Ampere's law are introduced to deduce the equilibrium density, the equilibrium potential and the stationary magnetic fields. Numerical examples of various field quantities are worked out by choosing typical laboratory dusty plasma parameters. The relevance of our investigation to space and laboratory plasma has been discussed.

Let us consider a multicomponent dusty plasma whose constituents are electrons, ions, and negatively charged micron sized dust particulates. In the unperturbed state, we have $n_{i0} = n_{e0} + Z_d n_{d0}$, where n_{j0} is the unperturbed number

density of the particle species j (j equals e for the electrons, i for the ions and d for the dust grains) and Z_d the number of charges residing on the dust grains. When most of the electrons from the background plasma are attached to the dust grains, we might encounter a complete electron depletion, leading to the overall quasineutrality condition $n_{i0} \approx Z_d n_{d0}$. In such a situation, the dusty plasma can be considered as a two-component system.

According to Faraday's Law, the magnetic field \mathbf{B} in a plasma can be generated provided that the curl of the electric field \mathbf{E} remains finite. Thus, the induction equation determines the evolution of the magnetic field

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (1)$$

where the electric field arising from the charge separation is determined from the ion momentum balance equation

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla p_i}{en_i} - \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} + \frac{m_i}{e} d_i \mathbf{v}_i, \quad (2)$$

where $p_i = n_i T_i$ is the ion pressure, n_i and T_i are the ion number density and the ion temperature, respectively, e the magnitude of the electron charge, and \mathbf{v}_i the ion fluid velocity. The latter is obtained from Ampere's Law $n_i \mathbf{v}_i = Z_d n_d \mathbf{v}_d + (1/e\mu_0) \nabla \times \mathbf{B}$, where \mathbf{v}_d is the dust fluid velocity. Hence, from (1) and (2) we obtain

$$\begin{aligned} \partial_t (1 - \lambda_i^2 \nabla^2) \mathbf{B} &= -\frac{1}{e Z_d^2 n_d^2} \nabla p_i \times \nabla (Z_d n_d) + \nabla \times (\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) + \frac{m_i}{e} \nabla \times \mathbf{v}_i \\ &\quad \times \left(\nabla \times \mathbf{v}_d - \frac{e \lambda_i^2}{m_i} \nabla^2 \mathbf{B} \right) + \frac{e Z_d \lambda_d^2}{m_d} \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \end{aligned} \quad (3)$$

where $\lambda_d = c/\omega_{pd}$ is the dust skin depth, $\omega_{pd} = (Z_d^2 e^2 n_d / m_d \epsilon_0)^{1/2}$ the dust plasma frequency, c the speed of light, and λ_i the ion skin depth. The origin of various terms in (3) is obvious. The first term on the right hand-side of (3) is the baroclinic vector for the dusty plasma, which is the source for the magnetic field and remains finite when the

^{a)}Permanent address: Instituto de Física "Gleb Wataghin," Universidade Estadual de Campinas, 13083-970 Campinas, São Paulo, Brazil.

ion pressure gradient and the gradient of $Z_d n_d$ are nonparallel to each other. The second term on the right-hand side is a kind of Hall term (the dynamo) involving the dust vorticity, whereas the third and fourth terms are associated with the nonlinear couplings between the dust vorticity and the $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ flow with the ion flows, as well as with the curl of the $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ flow, where \mathbf{J} is the plasma current. The dynamo and the nonlinear terms play very important roles in the evolution of spontaneously generated magnetic fields. The question now arises as how the latter are maintained in dusty plasmas. To answer this question, we follow Ref. 10 and present a class of stationary dusty plasma equilibria in which the plasma density, the electric potential, the plasma current densities, and the magnetic fields are related in a nonlinear fashion.

Let us suppose that the dust particulate dynamics in the electromagnetic fields is governed by the Hamiltonian

$$H_d = \frac{1}{2m_d} \left[\left(\frac{p_\theta}{R} + Z_d e A \right)^2 + p_R^2 \right] - Z_d e \phi, \quad (4)$$

where m_d is the dust mass, A is the theta component of the vector potential, ϕ the electric potential, and the canonical angular momentum is given by

$$p_\theta = m_d R^2 \dot{\theta} + Z_d e R A. \quad (5)$$

Here, $p_R = m_d \dot{R}$, and R and θ are the radial and azimuthal coordinates in the cylindrical geometry.

The corresponding dust distribution function $f_d(p_\theta, p_R, \theta, R) = f_d(H, p_\theta)$ is found to be

$$f_d = \frac{Z_{d0} n_{d0}}{2\pi m_d T_d} \exp \left[-\frac{1}{T_d} \left(H_d + \frac{\alpha_d}{2m_d} p_\theta^2 \right) \right], \quad (6)$$

where T_d is the dust temperature and α_d is a constant.

It is now an easy matter to determine the number density of the dust, $n_d(R)$, and the θ component of the current density $J_d(R)$. We have

$$\begin{aligned} n_d &= \int \frac{f_d}{R} dp_R dp_\theta \\ &= \frac{Z_{d0} n_{d0}}{(1 + \alpha_d R^2)^{1/2}} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{T_d} \left(\frac{\alpha_d Z_d^2 e^2 R^2 A^2}{2m_d(1 + \alpha_d R^2)} - Z_d e \phi \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 J_d &= \mu_0 e \int \frac{R \dot{\theta} f_d}{R} dp_R dp_\theta \\ &= -\frac{\omega_{pd}^2}{c^2} \frac{\alpha_d R^2 A}{(1 + \alpha_d R^2)^{3/2}} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{T_d} \left(\frac{\alpha_d Z_d^2 e^2 R^2 A^2}{2m_d(1 + \alpha_d R^2)} - Z_d e \phi \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Next, we suppose that the Larmor radius of singly charged positive ions is much smaller than the scale size, and therefore, use the guiding-center Hamiltonian for the ions

$$H_i = \mu \omega_{ci} + e \phi, \quad (9)$$

where $\mu (= m_i v_{\perp i}^2 / 2 \omega_{ci})$ is the magnetic moment. The canonical variables are as μ , $\theta = \int \omega_{ci} dt$, R , and Θ . It is to be noted that for ions, R and Θ correspond to guiding center coordinates and H_i and R are assumed as constants of motion. The ion distribution function is taken to be of the form

$$\begin{aligned} f_i(\mu, \theta, R, \Theta) &= f_i(H_i, R) \\ &= \frac{n_{i0} \omega_{ci}}{2\pi T_i} \exp \left[-\frac{1}{T_i} (\mu \omega_{ci} + e \phi) + g(R) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Here, $g(R)$ acts in the function at R larger. It will be determined later.

The ion number density and the ion guiding center and magnetization current densities can be obtained in a straightforward manner. The results are, respectively,

$$n_i = \int f_i(H, R) d\mu d\theta = n_{i0} \exp \left[\frac{e \phi}{T_i} + g(R) \right], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 J_i &= -e \mu_0 \int R \dot{\theta} f_i d\mu d\theta \\ &= \frac{\omega_{pd}^2}{c^2} \frac{1}{\omega_{ci}} \left(\frac{T_i}{Z_d e} \frac{d \ln \omega_{ci}}{dR} + \frac{1}{Z_d} \frac{d\phi}{dR} \right) \\ &\quad \times \exp \left[\frac{e \phi}{T_i} + g(R) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

and

$$\begin{aligned} \mu_0 J_m &= \frac{e \mu_0}{m_i} \frac{d}{dR} \int \mu f_i d\mu d\theta \\ &= -\frac{\omega_{pd}^2}{c^2} \frac{1}{\omega_{ci}} \left(\frac{T_i}{Z_d e} \frac{d \ln \omega_{ci}}{dR} + \frac{1}{Z_d} \frac{d\phi}{dR} \right. \\ &\quad \left. - \frac{T_i}{Z_d e (1 + \alpha_d R^2)} \right) \exp \left[\frac{e \phi}{T_i} + g(R) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

The first and second terms on the right-hand side of (13) correspond to the $\nabla \mathbf{B}$ and $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drifts, respectively. We have also used $R \dot{\theta} = (\partial H / \partial R) / e B$ and the quasineutrality condition for the two-component dusty plasma.

Ampere's Law for the vector potential in cylindrical coordinates is

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d}{dR} A \right) - \frac{A}{R^2} = -\mu_0 J_i, \quad (14)$$

where $\mathbf{J}_i = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_m$.

The magnetic field is given by

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R A) = \mathbf{B}. \quad (15)$$

At the time, when a vortex is setup, the centrifugal force of the dust should be balanced by the pressure gradient. The self-generated magnetic field should be zero when $R \rightarrow \infty$. The value of density at the heart of vortex is reduced and varies as $n(\neq 0)$ at $R \rightarrow \infty$. When $|\mathbf{B}|_\infty \rightarrow 0$, A should be bounded there. Then, applying the quasineutrality condition and the potential $[|\phi|_\infty \rightarrow T_d / (2Z_d e) \ln(1 + \alpha_d R^2)]$, we readily obtain

$$g(R) = \frac{\eta_d}{2} \ln(1 + \alpha_d R^2),$$

where $\eta_d = T_d / (Z_d T_i)$. Hence, the density and the potential assume the form

$$Z_d n_d = n_i = n_0 \exp \left[- \frac{\eta_d}{1 + \eta_d} \frac{\alpha_d Z_d^2 e^2 R^2 A^2}{2 m_d T_d (1 + \alpha_d R^2)} \right], \quad (16)$$

and

$$\frac{e\phi}{T_i} = \frac{\eta_d}{2} \ln(1 + \alpha_d R^2) + \frac{\eta_d}{1 + \eta_d} \left[\frac{\alpha_d Z_d^2 e^2 R^2 A^2}{2 m_d T_d (1 + \alpha_d R^2)} \right]. \quad (17)$$

By substituting (8), (12) and (13) into (14), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dA}{dR} - \frac{A}{R^2} \\ = - \frac{\omega_{pd}^2}{c^2} \frac{1}{1 + \alpha_d R^2} \left(\frac{T_d}{\omega_{cd} Z_d e} \alpha_d R - \frac{\alpha_d R^2 A}{1 + \alpha_d R^2} \right) \\ \times \exp \left[- \frac{\eta_d}{1 + \eta_d} \left(\frac{\alpha_d Z_d^2 e^2 R^2 A^2}{2 m_d T_d (1 + \alpha_d R^2)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

It is convenient to define $r = R \omega_{pd} / \sqrt{2} c$, $A_0 = \sqrt{(1 + \eta_d) / \eta_d} \sqrt{2 m_d T_d} / Z_d e$, $\alpha_0 = 2 c^2 \alpha_d / \omega_{pd}^2$ and introduce the symbols $A^* = A / A_0$, $A_d = \omega_{pd} / (\omega_{cd} c Z_d) \sqrt{\eta_d T_d} / m_d (1 + \eta_d)$, $\xi = r^2$, and $u = r A^*$, so that Eq. (18) can be expressed as

$$4 \frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 \xi} (u - A_d) \exp \left[- \frac{\alpha_0 u^2}{2(1 + \alpha_0 \xi)} \right]. \quad (19)$$

Neglecting the left-hand side of (19), the asymptotic value of its vortex solution is A_d . For this assumption the vector potential becomes constant and the density becomes

$$n_\infty = n_0 \exp \left[- \frac{\eta_d}{2(1 + \eta_d)} \right]. \quad (20)$$

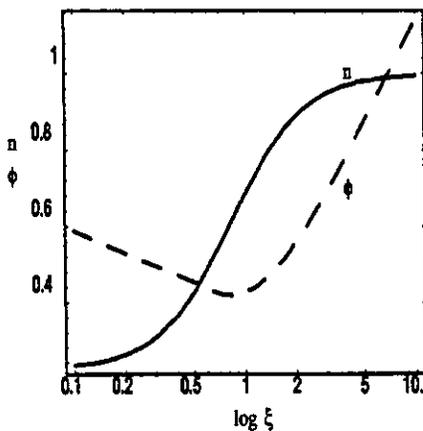


FIG. 1. The variation of the normalized number density, n , (solid line) and a proportional value of the potential 0.4ϕ , (dashed line) against $\log \xi$ for $\alpha_d = 3$ and $A_d = 1$.

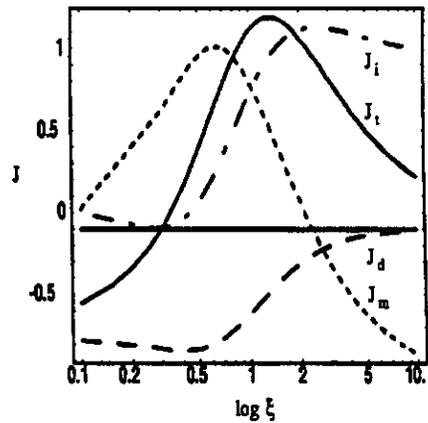


FIG. 2. The variation of the normalized dust current density, J_d (dashed line), the ion current density, J_i (dashed-dotted line), the magnetization current density, J_m (dotted line), and the total current density, J_t (solid line) against $\log \xi$ for $\alpha_d = 3$ and $A_d = 1$.

We have integrated Eq. (19) radially inwards on a logarithm scale from $\log \xi = 10$, by choosing typical parameters that are relevant to low-temperature dusty plasma devices. Accordingly, we take $n_d \approx 5 \times 10^2 \text{ cm}^{-3}$; the dust size of 5 microns; negatively charged grains have $Z_d \sim 4000$; whereas the dust mass density is 1 g/cm^3 . Moreover, we have taken $m_d \sim 10^{-12} \text{ g}$; $T_d \sim 300 \text{ K}$; $T_i \sim 0.2 \text{ eV}$; and $T_e \sim 2 \text{ eV}$. The next three figures show examples of stationary nonlinear profiles for the density, the electric potential, the plasma current density, and the magnetic fields in a dusty plasma. Figure 1 is the normalized profiles of the density and the electric potential. Figure 2 depicts the normalized profiles for the current densities, J_d , J_i , J_m , and J_t , whereas Fig. 3 exhibits the normalized magnetic field. All the figures have the normalized profiles as a function of $\log \xi$.

Let us now discuss the effects of some normalized parameters on various plasma and field quantities. First, in Eq. (19), for $\alpha_0 > 1$, we observe a decrease of n , whereas B practically does not change (in comparison to the one in Fig.

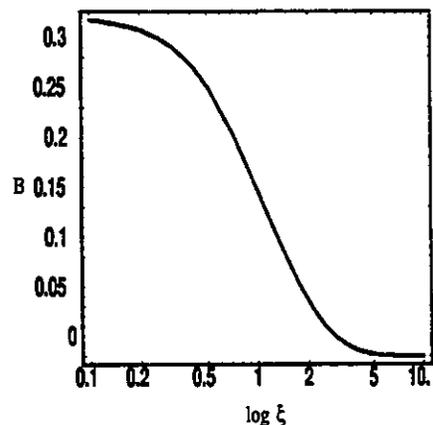


FIG. 3. The normalized magnetic field, B , as a function of $\log \xi$ for $\alpha_d = 3$ and $A_d = 1$.

3), and J_i is dominated by J_d . Second, for $\alpha_0 \gg 1$, we have $n \rightarrow 0$, $J_i \rightarrow J_d$, and \mathbf{B} remains unchanged. Third, for $0 < \alpha_0 < 1$, n increases, \mathbf{B} decreases and J_i is dominated by J_m . Fourth, when $\alpha_0 \ll 1$, $n \rightarrow n_0$ and $\mathbf{B} \rightarrow 0$. Finally, for $0 < A_d < 1$, n decreases, whereas for $A_d \gg 1$, we have $n \rightarrow 0$, $\mathbf{B} \rightarrow 0$, and for $A_d \ll 1$, we have $n \rightarrow n_0$.

To summarize, we have presented a class of stationary nonlinear dusty plasma equilibria in which the plasma number density, the electric potential, the plasma current density, and the magnetic field are connected in a specific fashion. This problem has been addressed by employing the Hamiltonian and guiding center models and by choosing appropriate dust and ion distribution functions that yield the desired form for a stationary dust vortex which is required for the maintenance of the magnetic fields that could be created by the baroclinic vector in a dusty plasma. The results of our investigation should be useful in understanding not only the dusty laboratory device equilibrium, but also the equilibrium of dusty stars and other astrophysical objects.

This work is partially supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft through the Sonderforschungsbereich 191, the Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD) and the Brazilian Agencies, Fundação Coordenação de Aper-

feiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) and Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). P. K. Shukla acknowledges the support of International Space Science Institute (ISSI) at Bern through the project "Dust Plasma Interaction in Space." He also thanks Professor Bengt Hultqvist for the warm hospitality at ISSI, where a part of this was carried out.

¹N. N. Rao, P. K. Shukla, and M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).

²P. K. Shukla and V. P. Silin, *Phys. Scr.* **45**, 504 (1992).

³See, for example, many articles, in *The Physics of Dusty Plasmas*, edited by P. K. Shukla, D. A. Mendis, and V. W. Chow (World Scientific, Singapore, 1996).

⁴M. Rosenberg, *Planet. Space Sci.* **41**, 229 (1993).

⁵R. L. Merlino, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **25**, 60 (1997).

⁶P. K. Shukla, in *A Variety of Plasmas*, in *Proceedings of the 1989 International Conference on Plasma Physics*, edited by A. Sen and P. K. Kaw (Indian Academy of Sciences, Bangalore, 1991), p. 297.

⁷A. Barkan, R. L. Merlino, and N. D'Angelo, *Phys. Plasmas* **2**, 3563 (1995).

⁸H. Fujiyama, S. C. Yang, Y. Maemura, et al., in *Double Layers: Potential Formation and Related Nonlinear Phenomena in Plasmas*, edited by Sendai (World Scientific, Singapore, 1997).

⁹M. Salimullah and P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **5**, 4502 (1998).

¹⁰A. Hasegawa, M. Y. Yu, P. K. Shukla, and K. H. Spatschek, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1656 (1978); **42**, 412 (1979).

ERRATA

Erratum: "A class of stationary nonlinear dusty plasma equilibria" [Phys. Plasmas 6, 2950 (1999)]

R. T. Faria, Jr., Tahir Farid, P. K. Shukla, and P. H. Sakanaka

Fakultät fuer Physik und Astronomie, Theoretische Physik, Lehrstuhl IV, D-44780 Bochum, Germany

(Received 30 June 1999; accepted 30 June 1999)

[S1070-664X(99)01710-3]

It is noticed that there are errors in Eqs. (11)–(15) and (18) of Ref. 1. Now Eqs. (11)–(15) are read as

$$n_i = \int f_i(H, R) d\mu d\theta = n_{i0} \exp\left[-\frac{e\phi}{T_i} + g(R)\right], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 J_i &= -e\mu_0 \int R \theta f_i d\mu d\theta \\ &= \frac{\omega_{pd}^2}{c^2} \frac{1}{\omega_{cd}} \left(\frac{T_i}{Z_d e} \frac{d \ln \omega_{ci}}{dR} + \frac{1}{Z_d} \frac{d\phi}{dR} \right) \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{e\phi}{T_i} + g(R)\right], \end{aligned} \quad (2)$$

and

$$\begin{aligned} \mu_0 J_m &= \frac{e\mu_0}{m_i} \frac{d}{dR} \int \mu f_i d\mu d\theta \\ &= -\frac{\omega_{pd}^2}{c^2} \frac{1}{\omega_{cd}} \left(\frac{T_i}{Z_d e} \frac{d \ln \omega_{ci}}{dR} + \frac{1}{Z_d} \frac{d\phi}{dR} \right. \\ &\quad \left. - \frac{T_i}{Z_d e} \frac{\eta_d \alpha_d R}{(1 + \alpha_d R^2)} \right) \exp\left[-\frac{e\phi}{T_i} + g(R)\right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Ampère's Law for the vector potential in cylindrical coordinates is

$$\left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d}{dR} A \right) - \frac{A}{R^2} \right] \hat{e}_\theta = -\mu_0 \mathbf{J}_t, \quad (4)$$

where $\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_m$.

The magnetic field is given by

$$\left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (RA) \right] \hat{e}_z = \mathbf{B}. \quad (5)$$

Now, Eq. (18) is read as

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dA}{dR} - \frac{A}{R^2} \\ = -\frac{\omega_{pd}^2}{c^2} \frac{1}{1 + \alpha_d R^2} \left(\frac{T_d}{\omega_{cd} Z_d^2 e} \alpha_d R - \alpha_d R^2 A \right) \\ \times \exp\left[-\frac{\eta_d}{1 + \eta_d} \left(\frac{\alpha_d Z_d^2 e^2 R^2 A^2}{2 m_d T_d (1 + \alpha_d R^2)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

However, the graphic representation is correct. We are sorry to say that this error was committed during the last transfer of the file.

¹R. T. Faria, Jr., Tahir Farid, P. K. Shukla, and P. H. Sakanaka, Phys. Plasmas 6, 2950 (1999).