

Problema Inverso do Espalhamento  
Elástico Próton-Próton na Representação  
de Parâmetro de Impacto

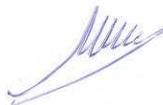
Geovanna Luiz Pereira da Silva

Prof. Dr.: Márcio José Menon  
Orientador

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de mestre em física.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado defendida pela aluna Geovanna Luiz Pereira da Silva.

04 de agosto de 2009



**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

Si38p

Silva, Geovanna Luiz Pereira da  
Problema inverso do espalhamento elástico próton-  
próton na representação de parâmetro de impacto /  
Geovanna Luiz Pereira da Silva.-- Campinas, SP : [s.n.],  
2009.

Orientador: Márcio José Menon.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

- 1           1. Espalhamento elástico. 2. Parâmetro de impacto.  
2           3. Prótons. I. Menon, Márcio José. II. Universidade  
3           Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin".  
4           III. Título.

5 (vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Inverse problem in próton-proton elastic scattering in the impact parameter representations
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. Elastic scattering
  2. Impact parameter
  3. Protons
- **Área de Concentração:** Física das Partículas Elementares e Campos
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca Examinadora:**

Prof. Márcio José Menon  
Prof. Pedro Cunha de Holanda  
Prof. Adriano Antonio Natale
- **Data da Defesa:** 09-10-2009
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



UNICAMP



Instituto de Física Gleb Wataghin

Secretaria de Pós-Graduação - Tel: (19) 3521-5305 FAX: (19) 3521-4142

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE  
**GEOVANNA LUIZ PEREIRA DA SILVA - RA 023890**, APRESENTADA E  
APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 09 DE OUTUBRO DE 2009

**COMISSÃO JULGADORA:**

Prof. Dr. Márcio José Menon – DRCC/IFGW/UNICAMP  
(Orientador do Candidato)

Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda – DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Adriano Antonio Natale – IFT/UNESP

Aos meus pais, Benedito e Maria Lucia,  
meus avós Benedito, Clélia e Deolinda,  
ao meu irmão Gustavo e ao Luis Fernando.

# Agradecimentos

A minha família e namorado pelo apoio em todos os momentos.

Ao Prof. Márcio José Menon pela orientação e pela grande contribuição na minha formação.

Aos colegas de grupo Regina, Daniel, Emerson, Montanha e Rafael pelas ajudas e discussões.

Aos meus amigos com quem morei ou que ainda moro por me apoiarem.

Ao pessoal da secretaria do Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia (DRCC).

Finalmente agradeço a Fapesp (09/2007 - 08/2009) pelo suporte financeiro.

# Resumo

Apresenta-se um estudo das Representações de Parâmetro de Impacto e Eiconal através de uma análise empírica dos dados experimentais de espalhamento elástico próton-próton, na região de mais alta energia com informações experimentais disponíveis (seis conjuntos de dados no intervalo de energia no centro de massa 19.4 - 62.5 GeV). Fazendo-se uso de uma nova parametrização independente de modelo para a amplitude de espalhamento e através de reduções (ajustes) dos dados experimentais de seção de choque diferencial, determina-se as funções de perfil (partes real e imaginária), recobrimento inelástica e eiconal (partes real e imaginária) no espaço de parâmetro de impacto. Utilizando-se um método semi-analítico, determina-se a função opacidade (parte imaginária da eiconal) no espaço de momento transferido. Todos os resultados empíricos para essas grandezas são determinados com as incertezas correspondentes, calculadas através da propagação de erros dos parâmetros livres de ajuste (variâncias e covariâncias). Em particular, mostra-se que a função de recobrimento inelástica apresenta um efeito periférico em torno de 2,0 fm e que os resultados empíricos para a função opacidade podem ser analiticamente parametrizados por três contribuições gaussianas, dominantes nas regiões de pequeno, médio e grande momento transferido. Discute-se interpretações físicas dos resultados (aspectos ópticos/geométricos e baseados na QCD), bem como a aplicabilidade dos resultados empíricos na seleção, construção e desenvolvimento de modelos fenomenológicos, em particular, aqueles baseados ou inspirados na QCD.

---

# Abstract

The Impact Parameter and Eikonal Representations are investigated by means of an empirical analysis of the experimental data on proton-proton elastic scattering, at the highest energy region with experimental information available (six data sets at center of mass energies 19.4 - 62.5 GeV). Making use of a novel model-independent parametrization for the scattering amplitude and data reductions (fits) to differential cross section data, we extract the profile function (real and imaginary parts), the inelastic overlap function and the eikonal function (real and imaginary parts) in the impact parameter space. By means of a semi-analytical method, the opacity function (imaginary part of the eikonal) is also extracted in the momentum transfer space. All the empirical results for these quantities are determined with the corresponding uncertainties, evaluated through error propagation from the free fit parameters (variances and covariances). In particular, it is shown that the inelastic overlap functions present a peripheral effect around 2.0 fm and that the empirical results for the opacity function can be analytically parametrized by three Gaussian components each one with leading contribution at small, intermediate and large values of the momentum transfer. Physical interpretations of the results are discussed (optical/geometrical and QCD-based aspects), as well as the applicability of the empirical results in the selection, construction and development of phenomenological models, mainly those based or inspired in QCD.



# Conteúdo



# Capítulo 1

## Introdução

Em distâncias microscópicas ( $\sim 10^{-15}$  m), várias partículas constituintes da matéria interagem através da chamada interação forte (também denominada nuclear ou hadrônica), sendo exemplos o próton, neutron, pión, kaon, entre outras.

O estudo dessas partículas (hádrons) é feito através de colisões em aceleradores e de raios cósmicos com núcleos da atmosfera em altas energias (acima de  $10^{10}$  eV). Espalhamentos hadrônicos são divididos em processos suaves e duros. Suaves são aqueles caracterizados por pequeno momento transferido na colisão, sendo exemplos os espalhamento elástico hadron-hadron e dissociação difrativa. Já os processos duros são aqueles caracterizados por grande momento transferido na colisão, sendo exemplo o espalhamento inelástico profundo.

Atualmente, a importância do estudo do espalhamento *elástico* de hádrons na região de altas energias deve-se tanto aos aspectos teóricos como experimentais envolvidos, como discutido a seguir.

Do ponto de vista teórico, por tratar-se de processo de espalhamento a pequeno momento transferido (grandes distâncias de interação), o canal elástico não possui ainda uma descrição teórica baseada exclusivamente no formalismo quântico de campos das interações fortes, a Cromodinâmica Quântica (QCD). A razão é que, de um lado, a abordagem perturbativa não se aplica devido ao crescimento do acoplamento com a distância e de outro, a abordagem não-perturbativa trata atualmente somente com estados ligados, não havendo nenhum esquema adequado de cálculo aplicável diretamente a estados de espalhamento elástico [?, ?].

Do ponto de vista experimental, as expectativas atuais na área de espalhamento elástico são grandes devido aos novos experimentos que serão realizados. O principal aspecto diz respeito às energias que serão alcançadas e reações a serem estudadas. Até o momento, as mais altas energias atingidas pelos aceleradores com interações elásticas partícula-partícula e partícula-antipartícula correspondem às interações próton-próton ( $pp$ ), até  $\simeq 60$  GeV e antipróton-próton ( $\bar{p}p$ ), até  $\simeq 2$  TeV. Esses diferentes valores máximos tem dificultado o estudo sistemático das características essenciais dos processos envolvendo tanto partículas como antipartículas nas mais altas energias (por exemplo, analiticidade, unitaridade e crossing). Nesse sentido, serão fundamentais as experiências planejadas para espalhamentos elásticos próton-próton ( $pp$ ) a 200 GeV no Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC), Brookhaven National Laboratory, pela Colaboração pp2pp

[?], e a 14 TeV no Large Hadron Collider (LHC), CERN, pela Colaboração TOTEM [?]. Esses experimentos deverão fornecer novas e excelentes oportunidades para um desenvolvimento rápido tanto da fenomenologia de hádrons como da própria QCD, levando a uma melhor compreensão das interações  $pp$  na região das mais altas energias atingidas em aceleradores.

Portanto, nesse estágio, a fenomenologia tem um papel fundamental no estabelecimento de correlações entre os dados experimentais, princípios gerais da teoria de campos e modelos que possam indicar novos esquemas formais de cálculo no contexto da QCD, contribuindo com o desenvolvimento necessário da teoria nesse setor [?, ?].

Entretanto, uma grande variedade de modelos fenomenológicos, apresenta boas descrições locais dos dados experimentais, porém, não de forma global e/ou com sólidas bases na QCD. Nesse contexto, informações empíricas, extraídas diretamente dos dados experimentais, através de abordagens que não violem princípios e/ou teoremas da teoria de campos, constituem importantes ferramentas no desenvolvimento de novos esquemas adequados de cálculo e possivelmente novas concepções teóricas. Como observado recentemente por renomados especialistas em espalhamento elástico e difrativo: “In this situation useful empirical parametrization, unbiased by any theoretical prejudice can be useful” [?]. Essa estratégia, a extração de informação empírica, ou seja, o estudo do problema inverso do espalhamento elástico de hádrons foi o ponto central de nossa pesquisa.

Nesta dissertação, apresentamos e discutimos os resultados obtidos através de uma nova parametrização para a amplitude de espalhamento elástica independente de modelo [?, ?]. Através do ajuste (redução) dos dados experimentais da seção de choque diferencial e utilizando os dados experimentais da seção de choque total e parâmetro  $\rho$ , extraímos informações empíricas para o estudo do espalhamento nas representações de parâmetro de impacto e eiconal (funções de perfil, de recobrimento inelástica e eiconal). Como será mostrado e discutido, as representações de parâmetro de impacto e eiconal, constituem a estrutura essencial dos modelos fenomenológicos unitarizados e daí a importância dessas representações.

O estudo é limitado ao espalhamento elástico próton-próton, devido à disponibilidade de dados experimentais na região de grande momento transferido ( $\sim 10\text{-}14\text{ GeV}^2$ ), o que é fundamental na análise e não ocorre para outras reações (por exemplo, antipróton-próton ou méson-próton).

O texto é organizado com segue. Os capítulos 2 a 5 são básicos e introdutórios: no capítulo 2 revisamos alguns aspectos cinemáticos do espalhamento elástico, definições e notações a serem utilizadas; no capítulo 3 tratamos da formulação das representações de parâmetro de impacto e eiconal, tanto via óptica geométrica (regime de difração de Fraunhofer), como via mecânica quântica, no limite de altas energias e aproximação semiclássica; no capítulo 4 tratamos dos dados experimentais utilizados e no capítulo 5 discutimos aspectos estatísticos, relacionados à redução de dados, avaliação da qualidade de um ajuste e características do código utilizado (CERN-Minuit).

Os capítulos 6 a 9 tratam da pesquisa realizada e resultados obtidos: no capítulo 6 discutimos os métodos e as variantes de redução de dados e os resultados selecionados; no capítulo 7 determinamos as funções de perfil, recobrimento inelástica e eiconal, destacando algumas características empíricas dos resultados; no capítulo 8 apresentamos uma discussão geral de todos os resultados obtidos, comparação com outras análises,

interpretações físicas e conexões com modelos fenomenológicos; o capítulo 9 trata das conclusões e algumas observações finais. Testes e ajustes que não foram considerados eficientes são discutidos nos apêndices A, B e C e no apêndice D discutimos o método semi-analítico, empregado no capítulo 7 e sua relação com o método de expansão, utilizado em outras análises.



# Capítulo 2

## Aspectos Cinemáticos

Neste capítulo revisamos as grandezas cinemáticas associadas ao espalhamento elástico de duas partículas em altas energias [?, ?].

### 2.1 Quadrimentos e Invariantes Fundamentais

Para todos os cálculos adotaremos a convenção usual em física de altas energias,  $\hbar = 1$  e  $c = 1$ . O quadrimento de uma partícula é definido por [?]

$$p_i = (E_i, \vec{p}_i), \quad (2.1)$$

onde  $E$  é a energia e  $\vec{p}$  é o momento tridimensional expressos num dado referencial.

O produto interno de dois quadrivetores  $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$  e  $p_2 = (E_2, \vec{p}_2)$  é um invariante de Lorentz (o mesmo valor independente do referencial), definido por

$$p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2. \quad (2.2)$$

Considerando um espalhamento geral, do tipo

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots N,$$

pela conservação do quadrimento, temos

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 + \dots + p_N$$

e

$$p_i^2 = m_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

## 2.2 Variáveis de Mandelstam - Canais $s$ , $t$ e $u$

Para colisão de dois corpos ( $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ ), Mandelstam introduziu três invariantes de Lorentz, denominados variáveis de Mandelstam,  $s$ ,  $t$  e  $u$ , definidas por

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Adicionando as 3 variáveis e da conservação do quadrimomento:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \quad (2.4)$$

Através do princípio de cruzamento (crossing), podemos interpretar essas variáveis de três maneiras. Uma em que  $s$  é quadrado da energia no centro de momento,  $t$  e  $u$  são o quadrado do quadrimomento transferido entre as partículas 1 e 4, 2 e 3 respectivamente (canal  $s$  - figura 1a). A segunda maneira é interpretar  $t$  como o quadrado da energia no centro de momento se as partículas iniciais forem 1 e a antipartícula de 3,  $\bar{3}$ , (canal  $t$  - figura 1b) e  $s$  e  $u$  são o quadrado do quadrimomento transferido; ou podemos, ainda, interpretar  $u$  como sendo o quadrado da energia no centro de momento se as partículas iniciais forem 1 e  $\bar{4}$  (canal  $u$  - figura 1c).

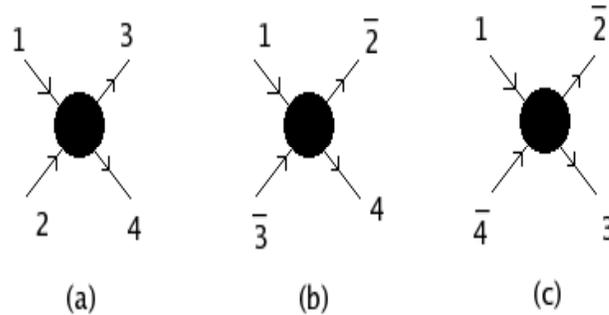


Figura 2.1: (a) canal  $s$ , (b) canal  $t$  e (c) canal  $u$ .

A colisão de dois corpos pode ser descrita em termos de duas dessas variáveis, devido ao vínculo (2.4). Escolhemos  $s$ , o quadrado da energia e  $t$  o quadrado do quadrimomento transferido, considerando que estamos no canal  $s$ .

Como as variáveis de Mandelstam são invariantes de Lorentz, podemos expressá-las em qualquer referencial, sendo de interesse, neste trabalho, o sistema de centro de momento.

## 2.3 Sistema de Centro de Momento

No sistema de centro de momento (SCM), figura ??, o centro de momento encontra-se em repouso

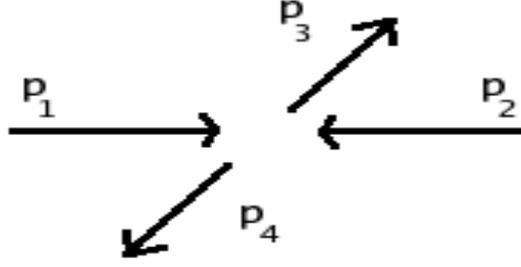


Figura 2.2: Processo do espalhamento  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  visto no sistema de centro de momento.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0. \quad (2.5)$$

Dessa forma, denotando  $\vec{p}_1 \equiv \vec{p}$ ,  $\vec{p}_2 \equiv -\vec{p}$  e  $E_i^*$  a energia total de cada partícula no SCM, os quadrimomentos das partículas podem ser escritos como

$$\begin{aligned} p_1^* &= (E_1^*, \vec{p}), \\ p_2^* &= (E_2^*, -\vec{p}), \\ p_3^* &= (E_3^*, \vec{p}'), \\ p_4^* &= (E_4^*, -\vec{p}'). \end{aligned} \quad (2.6)$$

A variável  $s$  (2.3) calculada nesse referencial é dada por

$$s = (E_1^* + E_2^*)^2 = (E_3^* + E_4^*)^2. \quad (2.7)$$

e portanto corresponde ao quadrado da energia no SCM.

As energias  $E_1^*$ ,  $E_2^*$ ,  $E_3^*$  e  $E_4^*$  podem ser expressas em termos das variáveis de Mandelstam [?]

$$\begin{aligned} E_1^* &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_1^2 - m_2^2), \\ E_2^* &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_2^2 - m_1^2), \\ E_3^* &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_3^2 - m_4^2), \\ E_4^* &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_4^2 - m_3^2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pela relação  $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ ,

$$\begin{aligned}\vec{p}^2 &= E_1^{*2} - m_1^2 \\ \vec{p}'^2 &= E_3^{*2} - m_3^2.\end{aligned}\tag{2.9}$$

No limite de altas energias as massas podem ser desprezadas, pois  $s \gg m_1, m_2, m_3, m_4$ . Neste caso,

$$E_1^*, E_2^*, E_3^*, E_4^* \simeq \frac{\sqrt{s}}{2}\tag{2.10}$$

e

$$|p|, |p'| \simeq \frac{\sqrt{s}}{2}.\tag{2.11}$$

## 2.4 Espalhamento Elástico de Duas Partículas com Massas Iguais

Para o espalhamento elástico de partículas com massas iguais,  $m$ , as variáveis de Mandelstam podem ser expressas de forma mais simples [?]:

$$\begin{aligned}s &= 4(k^2 + m^2), \\ t &= -2k^2(1 + \cos\theta),\end{aligned}\tag{2.12}$$

onde  $|\vec{p}| = k$  e  $\theta$  é o ângulo de espalhamento, ambos no centro de momento. Nos próximos capítulos utilizaremos somente as variáveis  $s$  e  $t$ , definindo

$$q^2 \equiv -t.$$

# Capítulo 3

## Representações de Parâmetro de Impacto e Eiconal

Neste capítulo discutimos o estabelecimento das representações de parâmetro de impacto e eiconal através de duas abordagens [?, ?, ?, ?, ?, ?]: (1) óptica clássica no regime de difração de Fraunhofer; (2) mecânica quântica não relativística (ondas parciais), aproximação semiclássica e o limite de altas energias.

### 3.1 Introdução

Muitos experimentos em física de altas energias, consistem em colidir um feixe de partículas (1) com um alvo ou outro feixe (2) e estudar o resultado: as partículas do estado final. Obviamente, o objetivo desse estudo é determinar propriedades da interação que ocorre entre as partículas colididas [?].

O fenômeno observado pode ser **elástico**, onde os estados inicial e final são compostos pelas mesmas partículas ( $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ ) com energia cinética conservada, **inelástico** no qual há “surgimento” de novas partículas ( $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots$ ), e o mais comum: espalhamento elástico com absorção onde uma parte das partículas sofre espalhamento elástico, enquanto outra é espalhada inelasticamente.

Óptica clássica e física hadrônica parecem diferentes a primeira vista, já que a produção de partículas na colisão a altas energias torna o problema mais complexo que a óptica, onde o princípio de Huygens é a solução de todos os problemas [?]. Na prática, porém, as duas áreas são muito parecidas: ambas possuem um grande número de ondas e características ondulatórias. Dessa forma vemos que a difração cobre uma gama de fenômenos físicos, desde física óptica a mecânica quântica, física nuclear a física hadrônica [?].

Precisamos, agora, definir difração em termos de física de partículas. Uma reação na qual não há troca de números quânticos das partículas colididas, a altas energias é um fenômeno difrativo, cujos exemplos são espalhamento elástico, difração simples e difração dupla.

- *Espalhamento elástico* - quando as partículas incidentes são as mesmas que as partículas emergentes:  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ .

- *Difração simples* - quando uma partícula incidente se mantém depois da colisão enquanto a outra resulta em várias partículas (ressonância) com os mesmos números quânticos:  $1 + 2 \rightarrow 1' + X_2$ .

- *Difração dupla* - quando cada partícula incidente resulta em várias partículas (ressonância) com os mesmos números quânticos das partículas incidentes:  $1 + 2 \rightarrow X_1 + X_2$ .

## 3.2 Abordagem via Óptica Clássica

Como estamos interessados no espalhamento elástico próton-próton a altas energias, podemos atacar esse problema fazendo uma analogia com a óptica clássica, pois como vimos espalhamento elástico é um fenômeno difrativo.

Quando a luz passa por uma fenda muito pequena cuja distância entre a fenda e o detector é suficientemente grande vemos que há o aparecimento de franjas claras e escuras na vizinhança do limite da sombra. Esses desvios da propagação retilínea da luz foram chamados de difração [?]. A condição para ocorrer difração é que o comprimento de onda  $\lambda$  da onda incidente seja muito menor que a dimensão  $l$  da fenda:  $kl \gg 1$ , onde  $k = 2\pi/\lambda$ .

Para determinar a função de onda  $\psi(P)$  difratada, em um ponto qualquer P, de acordo com o princípio de Huygens-Fresnel, deve-se conhecer as amplitudes e as fases das ondas secundárias e somá-las no ponto P, ou então utilizar a equação de Helmholtz com a condição de contorno de Kirchhoff, que trataremos a seguir [?].

### 3.2.1 Integral de Helmholtz-Kirchhoff

A função de onda  $\psi(\vec{r})$  é solução da equação de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0.$$

Para resolvê-la, escolhamos uma função auxiliar  $\chi$ ,  $\chi(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$ , que também é solução da equação de Helmholtz e utilizando o teorema de Green, temos

$$\oint_S (\psi \vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{a} = 0. \quad (3.1)$$

A função  $\chi(r)$  tem uma singularidade em  $r = 0$ , tomando essa singularidade como o ponto P, ( $P=0$ ), que se encontra dentro da superfície de integração e dividindo essa superfície em duas regiões, como mostra a figura ??a, a equação ?? pode ser reescrita da seguinte forma

$$\oint_S (\psi \vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{a} + \oint_{esfera} (\psi \vec{\nabla} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} - \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{a}' = 0. \quad (3.2)$$

Considerando  $\rho \rightarrow 0$ , os termos proporcionais a  $\rho$  desaparecem e  $\psi \rightarrow \psi(P)$ . Com isso, a integral na esfera é igual a  $-4\pi\psi(P)$ . Temos então a integral de Helmholtz-Kirchhoff:

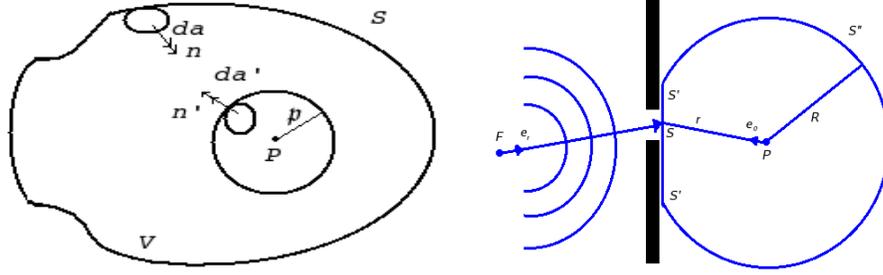


Figura 3.1: a) Superfície de integração para a singularidade em  $P$ .

b) Superfície para aplicação das condições de contorno de Kirchhoff.

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \psi \vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \vec{\nabla} \psi \right) \cdot \vec{n} da. \quad (3.3)$$

Essa superfície  $S$  é arbitrária, exigindo somente que o ponto  $P$  esteja no interior e que todas as fontes estejam fora dela. Por isso, escolheremos a superfície de forma que a integral possa ser resolvida [?]. Primeiro, consideramos que uma parte de  $S$  coincida com a abertura da fenda,  $s$ , que outra parte fique atrás do anteparo opaco,  $s'$  e fechamos  $S$  com uma esfera de raio  $R$ ,  $s''$ , como mostra a figura ??b.

Para calcular a função de onda em  $P$ , equação (??) precisamos conhecer  $\psi$  e  $\vec{\nabla} \psi$  em  $s$ ,  $s'$  e  $s''$ , grandezas que não conhecemos a priori; por isso utilizaremos as condições de contorno de Kirchhoff [?]:

1. Em  $s$ ,  $\psi$  é a onda incidente na ausência do anteparo. Essa hipótese é feita se considerarmos que o anteparo não altera a onda incidente nas proximidades da fenda.
2. Em  $s'$ ,  $\psi$  e  $\partial\psi/\partial n$  são nulas. Isso ocorre se considerarmos que o anteparo é perfeitamente opaco.
3. Tomando  $R \rightarrow \infty$  e considerando que a onda emitida não teve tempo de chegar em  $s''$ , podemos desprezar  $\psi$  e  $\partial\psi/\partial n$ .

Considerando que a onda incidente é uma onda plana,  $\psi_0$ , e utilizando as condições de contorno, determinamos a função de onda espalhada por uma fenda

$$\psi(P) = -i \frac{\psi_0}{2\lambda} \int_S \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \cos\theta) da. \quad (3.4)$$

Temos dois regimes de difração, um para distâncias pequenas ( $D \approx kl^2$ ) onde a imagem é semelhante à forma geométrica da fenda entremeada de franjas - Regime de Fresnel e outro para distâncias infinitas ( $D \gg kl^2$ ) onde a imagem não tem semelhança com a forma da fenda - Regime de Fraunhofer. Em qual desses regimes estamos interessados?

Sabemos que  $p \approx \frac{\sqrt{s}}{2}$  para altas energias [?]. Para  $\sqrt{s} = 10$  GeV (trabalhamos com energias acima de 10 GeV),  $p = k \approx \frac{\sqrt{s}}{2} = 5$  GeV  $\approx 25$  fm<sup>-1</sup>, pois 1 GeV  $\approx 5$  fm<sup>-1</sup>. Como a dimensão do próton é aproximadamente 1 fm,  $l \approx 1$ , então  $kl^2 \approx 25$  fm =  $25 \cdot 10^{-15} m \ll D$ , onde  $D \approx 1m$ , pois os detectores estão a distâncias da ordem de metro do feixe. Portanto, estamos no regime de Fraunhofer.

### 3.2.2 Difração de Fraunhofer

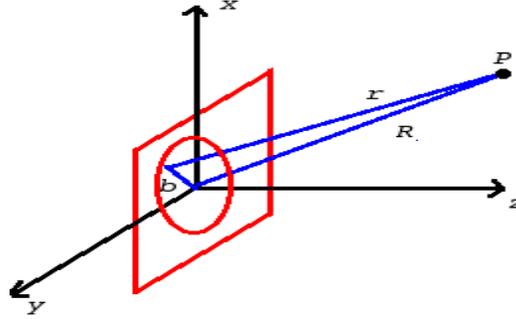


Figura 3.2:

Como estamos trabalhando com distâncias infinitas, podemos aproximar  $\cos\theta \approx 1$  e  $r \approx R - b\theta \cos\varphi$  (veja figura ??). Além disso, aproximaremos  $r$  do numerador por  $R$ . Com isso a função de onda no regime de Fraunhofer é expressa por

$$\psi(P) = -i \frac{ke^{ikR}}{2\pi R} \iint d^2b e^{-ibk\theta \cos\varphi}. \quad (3.5)$$

Sabendo que o momento transferido é dado por (2.12) e considerando que a distância é infinita (o ângulo  $\theta$  é pequeno), podemos aproximar  $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  e  $q \approx k\theta$ , obtendo

$$\psi(P) = -i \frac{ke^{ikR}}{2\pi R} \iint d^2b e^{-i\vec{b} \cdot \vec{q}}. \quad (3.6)$$

Dado que esperamos uma onda esférica da forma  $\psi(r, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$ , de (??) obtemos uma expressão explícita para a amplitude de espalhamento  $f$ :

$$f(q, \varphi) = -i \frac{k}{2\pi} \iint d^2b e^{-i\vec{b} \cdot \vec{q}}, \quad (3.7)$$

onde introduzimos  $q \simeq k\theta$ .

Até agora calculamos a função de onda espalhada por uma fenda, mas o nosso interesse é determinar a amplitude de onda espalhada por um obstáculo, o que discutimos a seguir.

### 3.2.3 Difração Através de um Obstáculo

De acordo com a equação (??) a onda espalhada por uma fenda em um ponto P é calculada integrando-se sobre a área da abertura, que denotaremos  $\psi_{fenda}$ . Se tivermos um obstáculo, a integração seria sobre a área sem obstáculo (área onde a onda atravessa), que denotaremos  $\psi_{obs}$ . Nesse sentido, a onda propagada livremente é a soma dessas duas integrais.

Este é o princípio de Babinet, que diz que a soma das ondas difratadas num ponto P, por dois dispositivos complementares (o que é abertura em um é o anteparo opaco em outro) é igual à onda incidente em P, propagada livremente,  $\psi_{inc} = \psi_{obs} + \psi_{fenda}$ , conforme esquema da figura ?? (desenho superior).

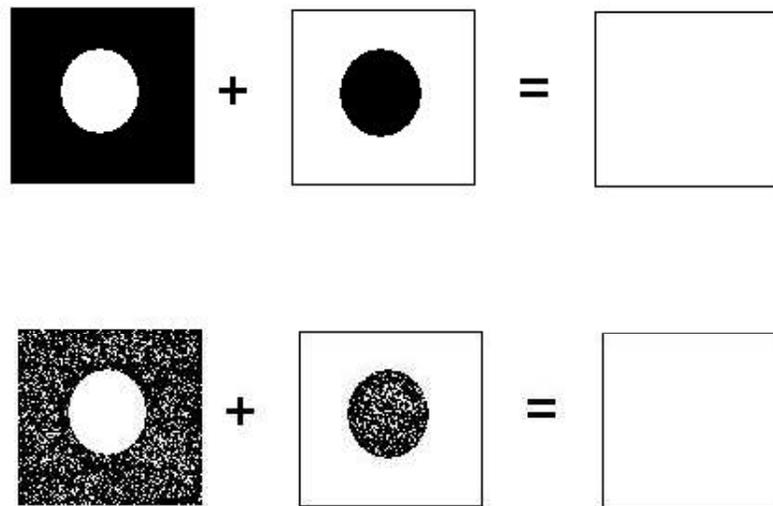


Figura 3.3: Esquema do princípio de Babinet.

#### • Amplitude de Espalhamento

Discutimos a seguir os casos em que o obstáculo corresponde a um disco negro e a um disco semitransparente.

##### - Disco negro

Como o disco negro é o dispositivo complementar da fenda, podemos calcular sua função de onda através do princípio de Babinet.

A função de onda espalhada é dada pela soma da função de onda incidente (que não sofreu difração) com a função de onda espalhada pelo disco que denotaremos  $\psi_{dn}$ . Ou seja,  $\psi_{obs} = \psi_{inc} + \psi_{dn}$ . Mas sabemos, por Babinet, que  $\psi_{obs} = \psi_{inc} - \psi_{fenda}$ . Logo  $\psi_{dn} = -\psi_{fenda}$ .

Com a função de onda espalhada pelo disco podemos calcular a sua amplitude  $f_{dn}(q) = -f_{fenda}(q) = e^{i\pi} f_{fenda}(q)$  [?]. Portanto, exceto na direção de propagação, as figuras de difração de Fraunhofer associadas a dois dispositivos complementares são iguais [?].

### - Disco Semitransparente

Se ao invés de disco negro, que absorve toda a onda incidente, consideramos um disco onde parte da onda é absorvida e outra parte é transmitida (disco semi-transparente), teremos uma onda atrás do disco cuja amplitude denotaremos  $\eta$ .

Utilizando o mesmo raciocínio que o disco negro, obtemos a amplitude de espalhamento para o disco semitransparente, substituindo 1 por  $1 - \eta$  e da equação (??):

$$f_{dst}(q, \varphi) = \frac{ik}{2\pi} \int \int d^2b [1 - \eta(b)] e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}}.$$

Para simetria azimutal (nosso caso),

$$f_{dst}(q) = ik \int b db [1 - \eta(b)] J_0(qb),$$

onde  $J_0$  é a função de Bessel de ordem 0.

De agora em diante, todos os cálculos serão feitos a partir dessa amplitude (disco semitransparente com simetria azimutal), que é o nosso objeto de estudo. Além disso, consideraremos que  $f(q)$  e  $\eta(b)$  dependem da energia, de modo que, desprezando o índice  $sdt$ :

$$f(s, q) = ik \int b db [1 - \eta(s, b)] J_0(qb)$$

ou, em termos da amplitude normalizada,  $F(s, q) = f(s, q)/k$ :

$$F(s, q) = i \int b db [1 - \eta(s, b)] J_0(qb) \quad (3.8)$$

### • Seção de Choque Diferencial Elástica

As intensidades da onda incidente e espalhada são dadas, respectivamente, por

$$I_{inc} = |\Psi_{inc}|^2 = |\Psi_0|^2 \quad (3.9)$$

e

$$I_{esp} = |\Psi_{esp}|^2 = |\Psi_0|^2 \frac{|f(q)|^2}{r^2}. \quad (3.10)$$

Definindo a seção de choque  $d\sigma$  como a razão da energia emergente em um ângulo sólido,  $d\Omega$ , pelo fluxo de energia incidente, temos

$$d\sigma = \frac{I_{esp} r^2 d\Omega}{I_{inc}}. \quad (3.11)$$

Substituindo as equações (??) e (??) em (??) obtemos a seção de choque diferencial em função da amplitude de espalhamento:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(q)|^2. \quad (3.12)$$

Utilizando a substituição de variáveis, considerando simetria azimutal e que a seção de choque depende da energia  $s$ , assim como a amplitude de espalhamento,

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{\pi}{k^2} |f(s, q)|^2,$$

ou, em termos da amplitude normalizada:

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \pi |F(s, q)|^2. \quad (3.13)$$

### • Seção de Choque Elástica

Para calcular a seção de choque elástica total basta integrar a seção de choque diferencial elástica. Utilizando como amplitude de espalhamento a do disco semitransparente (??), obtemos

$$\sigma_{el}(s) = 2\pi \int_0^a b db |1 - \eta(s, b)|^2, \quad (3.14)$$

onde  $a$  é o raio do disco semitransparente.

### • Seção de Choque de Absorção

Temos que  $\eta(b)$  é a amplitude da onda atrás do objeto, ou seja a parte da onda que não sofreu absorção. Então, a probabilidade da onda incidente não ser absorvida,  $P_{abs}$  é  $|\eta(b)|^2$  e pela unitariedade:  $P_{abs} = 1 - |\eta(b)|^2$ .

Integrando e considerando simetria azimutal, obtemos a seção de choque de absorção

$$\sigma_{abs}(s) = 2\pi \int_0^a b db [1 - |\eta(s, b)|^2]. \quad (3.15)$$

## • Seção de Choque Total e o Teorema Óptico

### - Seção de Choque Total

Somando a seção de choque elástica com a de absorção determinamos a seção de choque total:

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \int_0^a b db \operatorname{Re}[1 - \eta(s, b)]. \quad (3.16)$$

### - Teorema Óptico

O teorema óptico constitui um resultado fundamental em toda abordagem difrativa. Para demonstrá-lo, partimos da amplitude de espalhamento (??) em  $q^2 = 0$

$$\operatorname{Re}f(s, 0) + i \operatorname{Im}f(s, 0) = ik \int_0^a b db \operatorname{Re}[1 - \eta(s, b)] - k \int_0^a b db \operatorname{Im}[1 - \eta(s, b)],$$

de modo que

$$\operatorname{Im}f(s, 0) = k \int_0^a b db \operatorname{Re}[1 - \eta(s, b)]. \quad (3.17)$$

Da expressão (??) para  $\sigma_{tot}$ , obtemos

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \operatorname{Im}F(s, 0), \quad (3.18)$$

lembrando que  $F(s, q) = f(s, q)/k$ .

Esse resultado conhecido como teorema óptico é consequência do princípio da unitariedade ( $\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{in}$ ).

## 3.3 Abordagem via Equação de Schroedinger

A grande dificuldade de se determinar a amplitude do espalhamento hadrônica é o desconhecimento do potencial da interação forte, uma vez que não conseguimos separar dois quarks e medir o potencial entre eles, como podemos fazer com elétrons, no caso do potencial Coulombiano. Sem esse potencial não é possível resolver a equação de Schroedinger na região onde a interação ocorre propriamente.

Uma maneira de se resolver esse problema é obter a amplitude do espalhamento, utilizando os dados experimentais das seções de choque total e diferencial, e com ela determinar a função de perfil (amplitude de espalhamento elástica na representação do parâmetro de impacto), eiconal e função de recobrimento inelástica e assim obter uma idéia sobre algumas características da interação.

Como discutido a seguir, na abordagem quântica, parte-se das soluções de ondas parciais e considera-se o limite de altas energias e aproximação semiclássica.

### 3.3.1 Método das Ondas Parciais

#### a) Considerações Gerais

Para obter a função de onda precisamos resolver a equação de Schroedinger independente do tempo:

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}^2 + V(r) \right] \varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}), \quad (3.19)$$

onde  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$  e  $\mu$  é a massa reduzida das partículas colidentes.

Para considerar o problema de espalhamento, analisamos a função de onda assintoticamente e consideramos o potencial espalhador como um potencial central.

A função de onda emergente, fora do alcance do potencial, pode ser aproximada por uma onda plana que sofre uma deformação de caráter esférico, devido à influência do potencial. Deste modo, podemos expressar a função de onda total, numa região muito distante do potencial, como soma da onda plana (incidente) com a onda esférica (espalhada),

$$\varphi_k(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) \approx e^{ikz} + f_k(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3.20)$$

onde  $f_k(\theta, \varphi)$  é a amplitude de espalhamento que nos interessa.

A vantagem de se trabalhar com um potencial central é que o momento angular é conservado e as soluções da hamiltoniana também são autofunções dos operadores  $L^2$  e de uma projeção (a escolher) do momento angular ( $L_x$ ,  $L_y$  e  $L_z$ ); optamos pelo operador  $L_z$ .

Assim, as soluções dependem de três números quânticos:  $k$ ,  $l$  e  $m$ , de modo que, denotaremos  $\varphi_{klm}(r)$  [?].

O laplaciano, em coordenadas esféricas é dado por

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{L^2}{r^2 \hbar^2} \quad (3.21)$$

e substituindo  $L^2$  pelos autovalores  $l(l+1)\hbar^2$ , podemos reescrever a equação de Schroedinger na forma

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] \varphi_{klm}(\vec{r}) = E \varphi_{klm}(\vec{r}). \quad (3.22)$$

Como o potencial independe de  $\theta$  e  $\varphi$ , vamos utilizar o método de separação de variáveis,  $\varphi(\vec{r}) = R(r)G(\theta, \varphi)$  para achar a solução da equação de Schroedinger.

A equação da parte angular corresponde a equação de Laplace em coordenadas esféricas, cuja solução são os harmônicos esféricos:  $G(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi)$ . Para a parte radial, temos

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] R_{kl}(r) = E R_{kl}(r). \quad (3.23)$$

A solução para cada valor discreto de  $l$  e  $m$ , que depende da variável contínua  $k$ , é:  $\varphi_{klm}(\vec{r}) = R_{kl}(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$ . A solução geral é combinação linear dessas soluções linearmente independentes [?]

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_l \sum_m C_{lm} \varphi_{klm}(\vec{r}). \quad (3.24)$$

Neste ponto, consideraremos inicialmente o caso de espalhamento elástico sem absorção e em seguida, o espalhamento elástico com absorção, que é o nosso interesse.

### b) Espalhamento Elástico Sem Absorção

Para analisarmos o efeito do potencial, basta obter as soluções da equação (??) e sua expressão assintótica, primeiro sem potencial (ondas parciais livre), depois para um potencial arbitrário (ondas parciais em um potencial central), comparar as expressões assintóticas para determinar o efeito do potencial e depois comparar com a solução geral assintótica com potencial (??), obtendo-se assim  $f_k(\theta, \varphi)$  [?].

#### - Ondas parciais livres, $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ .

Nesse caso denotaremos as soluções  $\varphi_{klm}^0$  e de (??), temos:

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] \varphi_{klm}^0(\vec{r}) = E \varphi_{klm}^0(\vec{r}). \quad (3.25)$$

Utilizando o método de separação de variáveis,  $\varphi_{klm}(\vec{r}) = R_{kl}(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$ , obtemos

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R_{kl}^0(r) = E R_{kl}^0(r). \quad (3.26)$$

A solução é do tipo [?]

$$R_{kl}^0(r) = \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} j_l(kr), \quad (3.27)$$

onde  $j_l$  são funções de Bessel, cujo comportamento assintótico é dado por

$$j_l = \frac{1}{kr} \text{sen} \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right). \quad (3.28)$$

Com isso, a solução assintótica da partícula livre é expressa por

$$\varphi_{klm}^0(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} Y_l^m(\theta, \varphi) \frac{\text{sen}(kr - \frac{l\pi}{2})}{r}. \quad (3.29)$$

### - Ondas parciais em um potencial central

Considerando um potencial central, temos para a parte radial (??),

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] R_{kl}(r) = E R_{kl}(r) \quad (3.30)$$

e definindo  $R_{kl} = \frac{u_{kl}}{r}$  obtemos a equação

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \right] u_{kl}(r) = 0. \quad (3.31)$$

Essa equação no limite  $r \rightarrow \infty$ ,  $V(r) \rightarrow 0$  e com a condição  $u_{kl}(0) = 0$ , possui solução [?]  $u_{kl}(r) = A \text{sen}(kr + \alpha_l)$ , onde  $\alpha_l$  é uma fase real, a qual é conveniente (simetria) expressar por  $\alpha_l = \delta_l - \frac{l\pi}{2}$ . Com isso, a solução assintótica da onda parcial é dada por

$$\varphi_{klm}(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) = A Y_l^m(\theta, \varphi) \frac{\text{sen}(kr + \delta_l - \frac{l\pi}{2})}{r}. \quad (3.32)$$

Comparando as equações (??) e (??), vemos que a primeira é um caso particular da segunda ( $\delta_l = 0$  para  $V(r)=0$ ). Isso mostra que o potencial está relacionado com  $\delta_l$ , pois quando  $V(r) \neq 0$  temos a presença dessa defasagem (**phase shift**).

Para uma melhor compreensão do efeito do potencial vamos reescrever os senos das equações livres (??) e com potencial (??), como exponenciais complexas

$$\varphi_{klm}^0(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) = \frac{i}{2k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} Y_l^m(\theta, \varphi) \left[ \frac{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} - \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} \right], \quad (3.33)$$

$$\varphi_{klm}(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) = \frac{i}{2k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} Y_l^m(\theta, \varphi) \left[ \frac{e^{-i(kr + \delta_l - \frac{l\pi}{2})}}{r} - \frac{e^{i(kr + \delta_l - \frac{l\pi}{2})}}{r} \right]. \quad (3.34)$$

As equações acima diferem somente de um termo de fase. Como o observável físico não se altera com a introdução de uma fase global, podemos multiplicar a equação (??) por  $e^{i\delta_l}$  e efetuando a calibração  $e^{i\delta_l} \varphi_{klm} \equiv \varphi_{klm}$ , obtemos

$$\varphi_{klm}(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) = \frac{i}{2k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} Y_l^m(\theta, \varphi) \left[ \frac{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} - \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} e^{i2\delta_l} \right]. \quad (3.35)$$

É fácil observar que o último termo, “phase shift”, reflete o efeito do potencial na onda espalhada. Em geral, o fase shift depende do momento angular  $l$  e da energia  $k$ .

Falta obter a solução geral, que é combinação linear das infinitas soluções determinadas na (??):

$$\varphi(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) = \sum_l \sum_m C_{lm} \varphi_{klm}(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi). \quad (3.36)$$

Como estamos considerando um potencial central, temos simetria azimutal ( $m=0$ )

$$\varphi(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) = \sum_l C_l \varphi_{kl0}(r \rightarrow \infty, \theta). \quad (3.37)$$

Precisamos determinar os coeficientes  $C_l$ . Considerando que para  $V(r) = 0$  a solução mais geral é a de uma onda plana  $e^{ikz}$ , recorrendo à expansão [?],

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta), \quad (3.38)$$

é intuitivo que os coeficientes sejam os mesmos na solução geral, isto é,  $c_l = i^l (2l+1)$ , levando-nos a

$$\varphi_k(r \rightarrow \infty, \theta) = \sum_l i^l (2l+1) \varphi_{kl0}(r \rightarrow \infty, \theta). \quad (3.39)$$

Porém, visamos determinar  $f_k(\theta)$ . Para tanto é preciso obter a solução assintótica,  $\varphi_{kl0}(r \rightarrow \infty, \theta)$  e com um pouco de álgebra, comparar o resultado com a condição assintótica, equação (??). Feito isso [?], obtemos a amplitude de espalhamento desejada

$$f_k(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) (1 - e^{i2\delta_l}). \quad (3.40)$$

### c) Espalhamento Elástico Com Absorção

Espalhamento com absorção é o tipo de espalhamento que ocorre em colisões de altas energias, onde uma parcela das partículas incidentes espalha elasticamente e a outra inelasticamente. Experimentalmente temos que o detetor de eventos elásticos não detecta os eventos inelásticos: é como se uma parte das partículas incidentes fossem absorvidas pelo alvo. Dessa forma, precisamos levar em conta, mesmo sem detalhes, a parte do espalhamento inelástico.

Intuitivamente, pensamos que, se há absorção, o módulo da onda emergente deve ser menor que o módulo da onda incidente. Para espalhamento elástico sem absorção, observamos através das equações (??) e (??), que a onda incidente possui o mesmo módulo que a onda emergente ( $\propto \frac{1}{r}$ ), pois o “phase shift” é real.

Uma possível solução fenomenológica é considerar o phase shift complexo, pois como a onda emergente possui o termo  $e^{i2\delta_l}$ , seu módulo será menor que o da onda incidente, se a parte imaginária,  $Im\delta_l$ , for positiva. A partir de agora consideramos o phase shift complexo

$$\delta_l = Re\delta_l + iIm\delta_l,$$

com a condição física

$$Im\delta_l > 0$$

e definiremos

$$e^{i2\delta_l} \equiv \eta_l.$$

#### d) Seções de Choque e Teorema Óptico

A seção de choque representa a probabilidade de ocorrência do espalhamento, já seção de choque diferencial a probabilidade de ocorrência de eventos detectáveis por unidade de ângulo sólido.

Para um dada densidade de corrente incidente (fluxo por unidade de área perpendicular),  $J_{inc}$ , o número de partículas espalhadas por unidade de tempo, e detectadas em um ângulo sólido  $d\Omega$  (determinado pelos ângulos  $\theta$  - ângulo de espalhamento - e  $\phi$  - ângulo azimutal), longe do ponto de interação, é proporcional a  $J_{inc} d\Omega$ . Logo, tem-se que

$$dn = \frac{d\sigma}{d\Omega} J_{inc} d\Omega, \quad (3.41)$$

onde  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  é definido como a seção de choque diferencial do espalhamento, Através dessa equação, percebemos que a seção de choque diferencial tem dimensões de área e pode ser encarada como um fluxo espalhado por corrente incidente. Recorrendo à definição de fluxo

$$\phi_{esp} = \int \mathbf{J}_{esp} \cdot \hat{\mathbf{n}} da, \quad (3.42)$$

encontramos a expressão da seção de choque diferencial [?]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r^2 \frac{\mathbf{J}_{esp} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{J_{inc}}. \quad (3.43)$$

Integrando a seção de choque diferencial em todo ângulo sólido, obtemos a seção de choque total,  $\sigma_{tot}$ , se estivermos trabalhando com espalhamento puramente elástico, pois caso

contrário devemos considerar a absorção (espalhamento inelástico). Devido a conservação de probabilidade temos

$$\sigma_{in} + \sigma_{el.} = \sigma_{tot} \Rightarrow \frac{\sigma_{in}}{\sigma_{tot}} + \frac{\sigma_{el.}}{\sigma_{tot}} = 1, \quad (3.44)$$

e com essa relação somos capazes de determinar a seção de choque inelástica, se soubermos a seção de choque total e a seção de choque diferencial integrada (elástica).

Para calcularmos a seção de choque diferencial, necessitamos dos valores das correntes de probabilidade incidente e espalhada,  $J_{inc}$  e  $J_{esp}$ , que são facilmente determinadas [?] pela equação

$$J = Re[\Psi^*(\vec{r}, t) \frac{\hbar}{mi} \nabla \Psi(\vec{r}, t)]. \quad (3.45)$$

Aplicando essa equação à função de onda incidente e emergente e levando em conta só o termo radial da onda emergente ( $\propto \frac{1}{r^2}$ ), pois os demais termos são desprezíveis ( $\propto \frac{1}{r^3}$ ), conseguimos determinar a seção de choque diferencial e total elástica, respectivamente:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta, \varphi)|^2, \quad (3.46)$$

onde  $f_k(\theta, \varphi)$  é a amplitude de espalhamento e

$$\sigma_{el} = \int |f_k(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (3.47)$$

Substituindo o valor encontrado de  $f_k$ , (??), e utilizando a definição de  $\eta_l$  complexo na equação acima, obtemos a seção de choque elástica, para o caso mais geral (levando em conta a absorção):

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - \eta_l|^2. \quad (3.48)$$

Utilizando o mesmo raciocínio, determinamos a seção de choque inelástica (espalhamento inelástico):

$$\sigma_{in} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - |\eta_l|^2]. \quad (3.49)$$

Dessa forma, obtemos a seção de choque total de interação, que é a soma da seção de choque elástica com a inelástica:

$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{Re}[1 - \eta_l]. \quad (3.50)$$

### - Teorema Óptico

Agora vamos analisar a amplitude de espalhamento elástica (??) na região frontal ( $\theta = 0$ ):

$$f_k(\theta = 0) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)[1 - \eta_l] = \text{Re}f_k(0) + i\text{Im}f_k(0). \quad (3.51)$$

Lembrando que  $\eta_l = \text{Re}\eta_l + i\text{Im}\eta_l$ , obtemos que a parte imaginária da amplitude frontal é dada por  $\frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{Re}[1 - \eta_l]$ .

Com isso, concluímos que a seção de choque total pode ser determinada pela parte imaginária da amplitude frontal

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}f_k(\theta = 0), \quad (3.52)$$

resultado, como já vimos na Sec 3.2 (abordagem clássica), conhecido como teorema óptico, proveniente da unitariedade.

### 3.3.2 Limite de Altas Energias e Aproximação Semiclássica

Classicamente, o momento angular é dado por  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$  e introduzindo o parâmetro de impacto  $b$  (erro de pontaria) pode, em módulo, ser expresso por

$$l = pb.$$

Tendo em vista que trabalhamos com potenciais de alcance finito ( $R$ ), só ocorrerá espalhamento se as partículas estiverem no domínio do potencial. Ou seja, se  $b \leq R$  ocorrerá espalhamento e se  $b > R$  não ocorrerá. Existe, portanto, um valor máximo do momento angular,  $l_{max} = pR$  para a partícula ser espalhada. Dessa forma, temos uma soma finita para a amplitude de espalhamento

$$f_k(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) P_l(\cos\theta) (1 - \eta_l). \quad (3.53)$$

### - Limite de Altas Energias

Se estivéssemos trabalhando em baixas energias teríamos um momento angular máximo pequeno, necessitando de poucas ondas parciais, mas para altas energias precisamos de

um grande número de ondas parciais, de modo que, em princípio não seria conveniente trabalhar com o método de ondas parciais.

Entretanto, para o limite de altas energias  $l_{max} \rightarrow \infty$  enquanto  $\Delta l \rightarrow 0$ , uma boa aproximação é passar do limite discreto para o contínuo. Lembrando que estamos trabalhando com pequenos ângulos de espalhamento, podemos aproximar  $P_l(\cos\theta)$  por  $J_0((l + \frac{1}{2})\theta)$ , obtendo

$$f_k(\theta) = \frac{i}{2k} \int_{l=0}^{\infty} (2l+1) J_0((l + \frac{1}{2})\theta) [1 - \eta(l)] dl. \quad (3.54)$$

### - Aproximação Semiclássica

Até agora utilizamos o conceito clássico do momento angular, falta analisá-lo quanticamente. A solução para a equação de Schroedinger obtida é autofunção do momento angular  $L^2$ , com autovalores  $\hbar\sqrt{l(l+1)}$ . Como estamos em altas energias  $l \gg 1$  e  $\sqrt{l(l+1)} \approx l + \frac{1}{2}$ . Considerando que  $p = \hbar k$  e  $\hbar = 1$ , pela aproximação semiclássica:

$$l + \frac{1}{2} \simeq kb.$$

Através do limite para o contínuo, utilizando a aproximação semiclássica e introduzindo o momento transferido,  $q = k \sin\theta$ , obtemos a amplitude de espalhamento no limite de altas energias

$$f_k(q) = ik \int_{b=0}^{\infty} b db J_0(qb) [1 - \eta(b)], \quad (3.55)$$

lembrando que estamos trabalhando com simetria azimutal.

A amplitude de espalhamento além de depender do quadrado do momento transferido,  $q^2$ , também depende da energia, através de  $k$  ( $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ , Sec. 3.3.1.a). Em termos das variáveis de Mandelstam, introduzimos  $s$ , passamos a denotar em (??):

$$f_k(\theta) \rightarrow f(s, q).$$

Isso significa que em geral  $\eta$  também depende de  $s$  e passaremos a denotar  $\eta(s, b)$ . Com isso, introduzindo a normalização  $F = f/k$ , obtemos nossa expressão final:

$$F(s, q) = i \int_{l=0}^{\infty} b db J_0(qb) [1 - \eta(s, b)]. \quad (3.56)$$

Portanto, de (??), (??) e (??), para altas energias, as seções de choque elástica, de absorção e total podem ser expressas, respectivamente, por

$$\sigma_{el}(s) = 2\pi \int_{b=0}^{\infty} b db |1 - \eta(s, b)|^2. \quad (3.57)$$

$$\sigma_{in}(s) = 2\pi \int_{b=0}^{\infty} bdb[1 - |\eta(s, b)|^2]. \quad (3.58)$$

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \int_{b=0}^{\infty} bdbRe[1 - \eta(s, b)]. \quad (3.59)$$

Reescrevendo a seção diferencial em termos  $F(s, q)$  e mudando de variáveis ( $d\Omega$  em termos de  $dq^2$ ), temos

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \pi |F(s, q)|^2. \quad (3.60)$$

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi ImF(s, 0), \quad (3.61)$$

que é o teorema optico em termos de  $F(s, q)$ .

## 3.4 Representações de Parâmetro de Impacto e Eiconal

### 3.4.1 Introdução

Das duas seções anteriores, obtivemos os mesmos resultados analíticos via equação de Schroedinger, equações (3.59), (3.60), (3.56), (3.57), (3.58), (3.61), e via difração de Fraunhofer, equações (3.8), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.18), os quais reproduzimos abaixo:

$$F(s, q) = i \int_{l=0}^{\infty} bdbJ_0(qb) [1 - \eta(s, b)],$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \pi |F(s, q)|^2,$$

$$\sigma_{el}(s) = 2\pi \int_0^{\infty} bdb|1 - \eta(s, b)|^2,$$

$$\sigma_{in}(s) = 2\pi \int_0^{\infty} bdb[1 - |\eta(s, b)|^2],$$

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \int_0^{\infty} bdbRe[1 - \eta(s, b)]$$

e

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \text{Im}F(s, 0).$$

Entretanto, essas duas abordagens possuem interpretações físicas diferentes:

- 1) Difração de Fraunhofer  $\rightarrow \eta$  representa a função de onda atrás do objeto;
- 2) Equação de Schroedinger via ondas parciais  $\rightarrow 2\delta(b)$  é o limite para o contínuo das defasagens discretas.

A seguir introduzimos as funções de perfil, eiconal e de recobrimento inelástico, discutindo algumas interpretações físicas e geométricas (em analogia com a óptica).

### 3.4.2 Função de Perfil

No formalismo de parâmetro de impacto, a *função de perfil*, denotada  $\Gamma(s, b)$ , corresponde à transformada de Fourier-Bessel da amplitude de espalhamento [?]. Definindo

$$\Gamma(s, b) = 1 - \eta(s, b), \quad (3.62)$$

temos

$$F(s, q) = i \int_0^\infty b db J_0(qb) \Gamma(s, b). \quad (3.63)$$

Com isso, podemos interpretar a função de perfil como a amplitude de espalhamento no espaço de parâmetro de impacto.

Como vimos, no contexto óptico,  $\eta(s, b)$  representa a amplitude complexa da onda atrás do obstáculo, normalizada ( $0 \leq |\eta| \leq 1$ ). Se  $\eta = 1 \rightarrow \Gamma = 0$  nada é espalhado (não há obstáculo) e se  $\eta = 0 \rightarrow \Gamma = 1$  temos absorção máxima (disco negro). Portanto, em analogia com a óptica clássica, a função de perfil é a função associada ao que é absorvido em cada ponto atrás do disco, resultando, como o próprio nome diz, no perfil do alvo.

Em termos da função de perfil (??), as seções de choque elástica, inelástica e total (eqs. (??), (??) e (??)), introduzindo a dependência em  $s$ , são dadas por

$$\sigma_{el}(s) = 2\pi \int_0^\infty b db |\Gamma(s, b)|^2, \quad (3.64)$$

$$\sigma_{in}(s) = 2\pi \int_0^\infty b db [2\text{Re}\Gamma(s, b) - |\Gamma(s, b)|^2], \quad (3.65)$$

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \int_0^\infty b db \text{Re}\Gamma(s, b). \quad (3.66)$$

### 3.4.3 Função Eiconal

#### a) Eiconal no Espaço de Parâmetro de Impacto

A *função eiconal* no espaço de parâmetro de impacto, corresponde ao limite para o contínuo (altas energias e aproximação semiclássica) das defasagens complexas, sendo definida por

$$\chi(s, b) \equiv 2\delta(s, b). \quad (3.67)$$

Dessa forma, ela representa o efeito do potencial espalhador e temos a condição física  $Im\chi \geq 0$  (se  $Im\chi = 0$  não há absorção, se  $Im\chi > 0$  há absorção), uma vez que  $Im\delta \geq 0$ , (pois se a parte imaginária do phase shift fosse menor que zero, o módulo da onda emergente seria maior que o módulo da onda incidente o que não tem sentido físico).

Da relação  $\eta_l \equiv e^{i2\delta_l}$  (Sec. 3.3.1.c), teremos

$$\eta(s, b) = e^{i\chi(s, b)}, \quad (3.68)$$

de modo que podemos relacionar diretamente a eiconal com a função de perfil:

$$\Gamma(s, b) = 1 - e^{i\chi(s, b)}. \quad (3.69)$$

#### b) Eiconal no Espaço de Momento Transferido

A função eiconal no espaço de momento transferido, denotada  $\tilde{\chi}(s, q)$ , é determinada pela transformada de Fourie-Bessel da eiconal no espaço de parâmetro de impacto,  $\chi(s, b)$ ,

$$\tilde{\chi}(s, q) = \int_0^\infty b db J_0(qb) \chi(s, b). \quad (3.70)$$

Trata-se de uma função importante para se estabelecer possíveis conexões com teoria de campos, uma vez que propagadores, fatores de forma dos nucleons e amplitudes elementares são expressos no espaço de momento transferido. Voltaremos a esse ponto no que segue.

### 3.4.4 Unitaridade e a Função de Recobrimento Inelástica

As equações (??), (??) e (??) permitem expressar o princípio de unitaridade, equação (??), no espaço de parâmetro de impacto (integrandos), na forma

$$G_{tot}(s, b) = G_{el}(s, b) + G_{in}(s, b). \quad (3.71)$$

Com isso, define-se a *função de recobrimento inelástica* por

$$G_{in}(s, b) = 2Re\Gamma(s, b) - |\Gamma(s, b)|^2. \quad (3.72)$$

Em termos da eiconal, de (??), pode-se expresar

$$G_{in} = 1 - e^{-2Im\chi(s,b)}. \quad (3.73)$$

Da condição  $Im\chi \geq 0$  temos que

$$0 \leq G_{in} \leq 1. \quad (3.74)$$

Dessa forma a função de recobrimento inelástica pode ser interpretada como a probabilidade de ocorrer eventos inelásticos em  $b$  a uma determinada energia  $s$ . Integrando-se  $G_{in}$  obtém-se a seção de choque inelástica:

$$\sigma_{in}(s) = \int_0^\infty G_{in}(s,b). \quad (3.75)$$

### 3.4.5 Modelos Fenomenológicos e o Problema Inverso

#### a) Discussão Geral

O formalismo de parâmetro de impacto pode ser utilizado em dois sentidos. De um lado, partindo de um modelo fenomenológico para a eiconal em  $q$ , ou eiconal em  $b$ , ou mesmo para a função de perfil (por exemplo, modelo geométrico), determina-se a amplitude de espalhamento e compara-se com os dados experimentais. No outro sentido (problema inverso), utilizando uma parametrização empírica para a amplitude de espalhamento, ajusta-se aos dados experimentais e a partir deste resultado, extrai-se informações empíricas sobre função de perfil, recobrimento inelástica e eiconais e com essas informações tenta-se estabelecer resultados de interesse teórico ou fenomenológico. Esses dois sentidos são esquematizados na figura ?? e comentados a seguir.

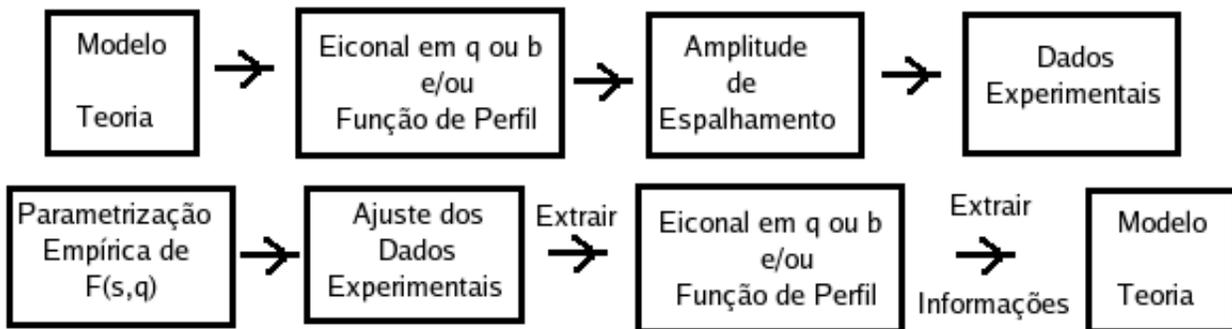


Figura 3.4: Esquemas de funcionamento do formalismo de parâmetro de impacto.

### b) Alguns Modelos Eiconais Representativos

Como exemplo, revisaremos nesta seção, algumas hipóteses básicas de três modelos eiconais incluindo tradicionais e de interesse atual. Faremos referência a esses modelos nos capítulos 7 e 8, ao discutirmos nossos resultados.

#### - Modelo de Chou-Yang

Neste modelo “clássico” [?, ?, ?, ?, ?, ?], a estrutura interna de um hádron é descrita por uma densidade, chamada de densidade de opacidade  $\rho(x, y, z)$ . Na colisão os efeitos relativísticos resultam na contração do objeto, de modo que no centro de massa cada hádron “vê” o outro como uma distribuição bidimensional (sem espessura),

$$D(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y, z) dz,$$

onde  $x$  e  $y$  se encontram no plano do parâmetro de impacto e  $z$  é a coordenada perpendicular a este plano. Fazendo analogia com a óptica, na colisão de hadrons  $A$  e  $B$  a resultante da opacidade é a convolução destas distribuições de matérias,

$$\Omega(s, b) = C_{AB} \int d^2\vec{b}' D_A(|\vec{b}'|) D_B(|\vec{b}' - \vec{b}|) \equiv C_{AB} D_A \otimes D_B,$$

onde  $C_A$  depende só da energia, e  $D_{A,B}$  estão relacionados com o fator de forma hadrônico através da transformada de Fourier

$$D_{A,B} = \langle G_{A,B}(q) \rangle,$$

onde  $G_{A,B}$  é o fator de forma hadrônico dado por

$$G_{A,B}(q) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho_{A,B}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Na versão original o fator de forma é expresso por uma função de dipolo

$$G(q) = \frac{1}{[1 + q^2/\mu^2]^2}, \quad (3.76)$$

onde  $\mu^2$  é um parâmetro livre.

#### - Modelos de Difração Múltipla

Este modelo, introduzido por Glauber e Velasco [?, ?], é baseado no formalismo de difração múltipla, cuja expressão para a eiconal é dada por

$$\tilde{\chi}(s, q) = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} G_A G_B f_{ij}, \quad (3.77)$$

onde  $G_A$  e  $G_B$  são os fatores de forma hadronico,  $N_A$  e  $N_B$  são os números dos constituintes de cada hadron e  $f_{ij}$  é a amplitude de espalhamento elementar entre seus constituintes. Quando estas amplitudes elementares forem as mesmas,  $f$ , e  $N_A N_B \equiv N$ , teremos que a parte imaginária da eiconal pode ser escrita da seguinte forma (englobando  $N$  em  $f$ ):

$$Im\tilde{\chi}(s, q) = G_A G_B Imf. \quad (3.78)$$

Nesse modelo, as escolhas para  $G_A$ ,  $G_B$  e  $Imf$  são estritamente fenomenológicas [?, ?].

### - Modelos Inspirados na QCD

Os modelos inspirados na QCD [?, ?], mais atuais, expressam a eiconal como soma de três contribuições, provenientes das interações *glúon-glúon* ( $gg$ ), *quark-glúon* ( $qg$ ) e *quark-quark* ( $qq$ )

$$\begin{aligned} \chi(s, b) &= \chi_{gg}(s, b) + \chi_{qg}(s, b) + \chi_{qq}(s, b) \\ &= A(\mu_{gg}, b)\sigma_{gg}(s) + A(\mu_{qg}, b)\sigma_{qg}(s) + A(\mu_{qq}, b)\sigma_{qq}(s), \end{aligned}$$

onde  $A(\mu, b)$  é a função de “overlap” no espaço de parâmetro de impacto e  $\sigma_{ij}$  é o subprocesso elementar da seção de choque dos quarks e gluons colididos ( $i, j = q, g$ ). A função de “overlap” é, usualmente, associada com a transformada de Fourier do fator de forma do dipolo (??). Embora a contribuição  $gg$  sejam calculada a partir de funções de estrutura dos glúons, via QCD [?], as hipóteses a respeito das contribuições  $qq$  e  $qg$  são estritamente fenomenológicas. Voltaremos a esse ponto no capítulo 8.

### c) O Problema Inverso

A maioria dos trabalhos envolvendo as representações de parâmetro de impacto e eiconal, tratam do problema direto: modelo→dados. Poucos autores tem-se ocupado do problema inverso, como comentado e referido na Sec 3.2 da referência [?].

Nosso objetivo neste trabalho é justamente o problema inverso: extração empírica das funções de perfil, recobrimento inelástica e eiconal a partir dos dados experimentais. Como discutido nos capítulos que seguem, dois aspectos cruciais desse tipo de análise são:

1. Dado que as transformadas de Fourier-Bessel envolvem integrações em todo o espaço ( $b$  ou  $q^2 : 0 \rightarrow \infty$ ) o estudo só pode ser feito para interações com dados experimentais cobrindo a maior região possível em termos de momento transferido (seção de choque diferencial).
2. A redução de dados demanda análise estatística, de modo que as incertezas possam ser propagadas para o resultado final.

# Capítulo 4

## Dados Experimentais

Neste trabalho, utilizamos dados experimentais de três grandezas físicas que caracterizam o espalhamento elástico de hádrons: seção de choque diferencial elástica, seção de choque total e parâmetro  $\rho$ . Como já referido, o tipo de análise empírica que estamos interessados, demanda dados de seção de choque diferencial na região de grande momento transferido ( $q^2 \sim 10 \text{ GeV}^2$ ). Por essa razão, o estudo é focalizado em 6 conjuntos de dados experimentais de espalhamento  $pp$  nas energias  $\sqrt{s} = 19.4, 23.5, 30.7, 44.7, 52.8$  e  $62.5 \text{ GeV}$ . Como será discutido, consideraremos também os dados a  $\sqrt{s} = 27.4 \text{ GeV}$ , que cobre somente a região de grande momento transferido.

### 4.1 Seção de Choque Diferencial

Os dados nas energias  $\sqrt{s} = 23.5, 30.7, 44.7, 52.8$  e  $62.5 \text{ GeV}$ , foram obtidos no acelerador CERN Intersecting Storage Ring (ISR), nos anos 70 e foram analisados, normalizados e compilados por Amaldi e Schubert [?], sendo disponíveis em tabela Landolt Börnstein [?].

Os dados a  $\sqrt{s} = 19.4 \text{ GeV}$  foram obtidos no Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab) e no CERN-Super Proton Synchrotron (SPS) nos anos 70 e início dos 80 e não são normalizados. Utilizamos também os dados a  $27.4 \text{ GeV}$ , obtidos no Fermilab, e que cobre a região extrema de grande momento transferido.

Todos os dados correspondem à região de interação hadrônica, isto é, acima da região de interferência Coulomb-nuclear,  $q^2 \geq 0.01 \text{ GeV}^2$  [?].

Informações sobre os dados utilizados são apresentados na tabela ?? : intervalo de momento transferido, número de pontos e referências correspondentes.

Passamos agora a uma discussão sobre o comportamento empírico dos dados experimentais em termos da energia e do momento transferido. Os dados da seção de choque diferencial para as energias  $23.5, 30.7, 44.7, 52.8$  e  $62.5 \text{ GeV}$ , multiplicados por fatores  $10^{\pm 4}$  (para uma melhor visualização), encontram-se na figura ?? a esquerda; os dados a  $19.4$  (diferenciando cada experimento) e  $27.4 \text{ GeV}$ , também são mostrados na figura ?? à direita.

O maior conjunto de dados disponíveis de seção de choque diferencial para colisão elástica próton- próton ( $pp$ ), em termos de intervalo de momento transferido,  $q^2$ , são os dados a  $\sqrt{s} = 52.8 \text{ GeV}$ , cobrindo a região até  $q^2 \leq 9.8 \text{ GeV}^2$ . Nele podemos observar

Tabela 4.1: Intervalo de momento transferido dos dados da seção de choque diferencial próton-próton, número de pontos e referências.

$\sqrt{s}$ (GeV)	intervalo de $q^2$ (GeV <sup>2</sup> )	N. pontos	Referencia
19.4 (Fermilab e CERN-SPS)	0.010 - 11.9	314	[?, ?, ?, ?, ?, ?]
23.5 (CERN-ISR)	0.042 - 5.75	172	[?]
27.4 (Fermilab)	5.5 - 14.2	39	[?]
30.7 (CERN-ISR)	0.016 - 5.75	211	[?]
44.7 (CERN-ISR)	0.01026 - 7.25	246	[?]
52.8 (CERN-ISR)	0.01058 - 9.75	244	[?]
62.5 (CERN-ISR)	0.01074 - 6.25	163	[?]

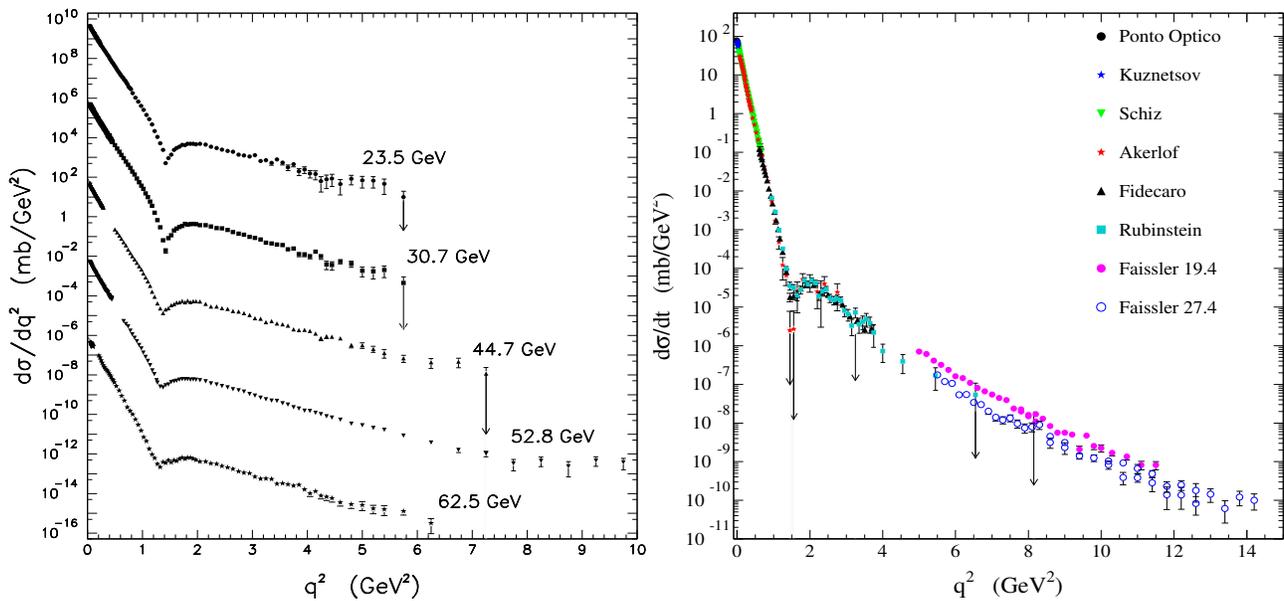


Figura 4.1: Dados da seção de choque diferencial para as energias 23.5, 30.7, 44.7, 52.8 e 62.5 GeV, a esquerda e 19.4 e 27.4 GeV à direita.

algumas características, uma delas é o caráter difrativo, representado pelo pico frontal acentuado, pico difrativo, ( $0.01 \geq q^2 \geq 0.5$ ), seguido de um mínimo (dip) [?, ?].

Analisando o gráfico da seção de choque diferencial, vide figura ??, para todas as energias percebemos que, na região de ISR ( $\sqrt{s} \approx 20 - 60$  GeV), a inclinação do pico difrativo aumenta com o crescimento da energia, mudando a posição e o formato do dip de acordo com a energia.

Um aspecto notável e fundamental na análise dos dados da seção de choque diferencial é que, na região de grande momento transferido ( $q^2 \geq 3$  GeV<sup>2</sup>), esses dados não apresentam uma dependência com a energia na região do ISR ( $23.5 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$  GeV) [?]. Esse resultado é exemplificado na figura ??, na qual a curva corresponde a um ajuste através da fórmula empírica

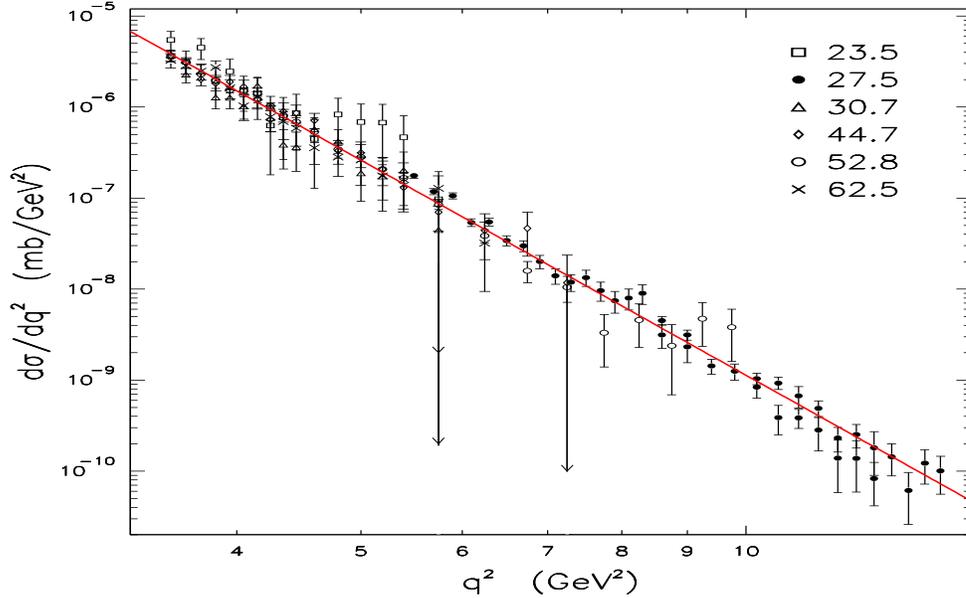


Figura 4.2: Dados a grande momento transferido da seção de choque, em conjunto com dados a 27.4 GeV e ajuste através da equação (??) [?].

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{k}{(q^2)^\lambda}, \quad (4.1)$$

o qual fornece [?]  $k = 0.080 \pm 0.006 \text{ mb} \cdot \text{GeV}^{-2}$ ,  $\lambda = 7.85 \pm 0.04$  com  $\chi^2/gl = 1.38$  para 128 graus de liberdade.

Com base nesse resultado, pode-se adicionar os dados a 27.4 GeV (que cobre a região  $5.5 \leq q^2 \leq 14.2 \text{ GeV}^2$ ) a cada conjunto de dados do ISR ( $q_{max}^2 \simeq 6 - 10 \text{ GeV}^2$ ), obtendo-se conjuntos com maiores informações estatísticas. Isso será feito em nossa redução de dados, apresentada no Cap. 6.

Por outro lado, como demonstrado em [?], os dados a 19.4 GeV não são estatisticamente compatíveis com a dependência acima, de modo que, neste caso, os dados a 27.4 GeV não podem ser adicionados.

## 4.2 Seção de Choque Total

Os dados de seção de choque total no intervalo  $23.5 \leq \sqrt{s} \leq 62.5 \text{ GeV}$ , foram compilados por Amaldi e Schubert [?], correspondendo a valores médios de diferentes experiências e são apresentados na tabela ??, juntamente com o dado a 19.4 GeV.

## 4.3 Parâmetro $\rho$

O parâmetro  $\rho$  é definido pela razão entre as partes real e a imaginária da amplitude frontal de espalhamento.

Tabela 4.2: Dados de seção de choque total e parâmetro  $\rho$  para o espalhamento  $pp$  e referências.

$\sqrt{s}$ (GeV)	$\sigma_{tot}$ (mb)	$\rho$
19.4	$38.98 \pm 0.04$ [?]	$0.019 \pm 0.016$ [?]
23.5	$38.94 \pm 0.17$ [?]	$0.02 \pm 0.05$ [?]
30.7	$40.14 \pm 0.17$ [?]	$0.042 \pm 0.011$ [?]
44.7	$41.79 \pm 0.16$ [?]	$0.0620 \pm 0.011$ [?]
52.8	$42.67 \pm 0.19$ [?]	$0.078 \pm 0.010$ [?]
62.5	$43.32 \pm 0.23$ [?]	$0.095 \pm 0.011$ [?]

$$\rho = \frac{ReF(s, q^2 = 0)}{ImF(s, q^2 = 0)}. \quad (4.2)$$

Informações experimentais sobre esse parâmetro também, foram compiladas por Amaldi e Schubert para as energias do ISR [?], correspondendo a valores médios de diferentes experiências, e são apresentados na tabela ?? juntamente com o dado a 19.4 GeV.

## 4.4 Ponto Óptico

Com as informações experimentais de  $\rho$  e  $\sigma_{tot}$ , determina-se o chamado ponto óptico, que corresponde ao valor da seção de choque diferencial em  $q^2 = 0$ .

$$\left. \frac{d\sigma}{dq^2} \right|_{q^2=0} = \frac{\sigma_{tot}^2(1 + \rho^2)}{16\pi} \quad (4.3)$$

Essa expressão decorre das equações (??), (??) e (??).

# Capítulo 5

## Método dos Mínimos Quadrados e Propagação de Erros

Neste capítulo discutimos, brevemente, aspectos da redução de dados através do método dos mínimos quadrados, da análise de  $\chi^2$  e  $\chi^2_{red}$ , da propagação de erros e comentamos sobre o programa utilizado na redução de dados (CERN-Minuit).

### 5.1 Método dos Mínimos Quadrados

Dado um conjunto de dados experimentais, caracterizado pelas ternas  $\{x_i, y_i, \sigma_i\}$ , em que a variável independente  $x_i$  é isenta de erros, enquanto a variável dependente,  $y_i$ , possui uma incerteza estatística dada pelo desvio padrão,  $\sigma_i$ , podemos ajustar estes dados por uma função  $f(x)$  pelo método dos mínimos quadrados se as seguintes condições são satisfeitas [?]:

1. As distribuições de erros,  $\sigma_i$ , são gaussianas;
2. A melhor função  $f(x)$  deve ser determinada a partir de uma função geral  $f(x; a_1, a_2, \dots, a_n)$  previamente escolhida; ou seja  $f(x)$  tem forma e número de parâmetros predeterminados.

Utilizando a distribuição gaussiana de erros, a probabilidade de se obter um resultado  $\{x_i, y_i, \sigma_i\}$  de um conjunto de N medidas independentes é proporcional à função densidade de probabilidade gaussiana

$$P_i = \frac{C}{\sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2}, \quad (5.1)$$

em que  $\mu_i$  é o valor médio verdadeiro de  $y_i$  e  $C$  a constante de normalização. A probabilidade,  $P$ , de ocorrer o conjunto de N medidas independentes é dada pelo produto das probabilidades para cada medida

$$P = \frac{C^n}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2}. \quad (5.2)$$

Assumindo que  $f(x)$  é a função verdadeira podemos substituir  $\mu_i$  por  $f(x; a_1, a_2, \dots, a_p)$  e definindo

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - f(x; a_1, a_2, \dots, a_p)}{\sigma_i} \right)^2, \quad (5.3)$$

podemos reescrever a probabilidade  $P$  como

$$P = \frac{C^n}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}. \quad (5.4)$$

Pelo método de máxima verossimilhança, a melhor aproximação de  $f(x)$  será aquela em que a probabilidade é máxima, o que implica  $\chi^2$  mínimo. Para o caso de funções lineares, basta resolver o sistema abaixo

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial a_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial a_p} = 0. \quad (5.5)$$

Para ajustes não-lineares (aqueles nos quais a função de ajuste não é linear nos parâmetros (potência, exponencial, logaritmo, etc.), a equação (??) é tratada, geralmente, como uma função contínua de  $p$  parâmetros, descrevendo uma hipersuperfície no espaço de dimensão  $p$  [?]. Para solucioná-la é preciso procurar, através das  $p$  equações obtidas pela equação (??), um espaço apropriado no qual o valor de  $\chi^2$  seja mínimo. Existem métodos de aproximação apropriados para determinação dos zeros de tais funções, sobre as quais falaremos a seguir [?].

Para um número suficientemente grande de medidas, podemos aproximar a probabilidade de se obter uma determinada medida,  $\{x_i, y_i, \sigma_i\}$ , por uma gaussiana centrada nos valores  $a'_j$  que minimize  $\chi^2$ ,

$$P(a_j) = A e^{-(a_j - a'_j)^2 / 2\sigma_j^2}, \quad (5.6)$$

onde  $A$  é função dos outros parâmetros (diferentes de  $a_j$ ). Comparando as equações (??) e (??), podemos expressar  $\chi^2$  da seguinte forma

$$\chi^2 = -2 \ln[P(a_1, a_2, \dots, a_p)] + 2 \sum \ln(\sigma_i \sqrt{2\pi}). \quad (5.7)$$

Então, pela equação (??) podemos escrever

$$\chi^2 = \frac{(a_j - a'_j)^2}{\sigma_j^2} + C. \quad (5.8)$$

Tomando a segunda derivada da equação (??) com respeito ao parâmetro  $a_j$ , temos

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_j^2} = \frac{2}{\sigma_j^2}, \quad (5.9)$$

a qual é uma medida de curvatura de  $\chi^2$ . As variâncias em relação aos parâmetros da função de ajuste, são definidos em termos dessa curvatura da seguinte forma:

$$\sigma_{a_j}^2 = 2 \left( \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_j^2} \right)^{-1}, \quad (5.10)$$

ao passo que as covariâncias são dadas por:

$$\sigma_{a_i a_j}^2 = \left( \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_i \partial a_j} \right)^{-1}, \quad (5.11)$$

com  $i \neq j$ .

A matriz de erros  $M$  é formada pelas variâncias e covariâncias,  $m_{jj} = \sigma_{a_j}$  e  $m_{jk} = \sigma_{a_j a_k}$ , sendo por isso chamada de “matriz de covariância”.

Utilizamos o código CERN-Minuit [?] na realização de ajustes, o qual efetua ajustes de funções não-lineares através do método descrito acima. Como resultado desses ajustes obtivemos a matriz de covariância e o valor de  $\chi^2$  na região de mínimo alcançada, dados os parâmetros iniciais fornecidos ao programa.

### 5.1.1 Procura dos Parâmetros

Ajuste de dados por funções não-lineares parece, algumas vezes, ser mais uma arte do que ciência. Em parte por causa das aproximações, nas quais a velocidade de convergência e a solução podem depender da escolha do método utilizado (dois destes métodos se encontram na seção 5.1.2 e 5.1.3), mas também das escolhas dos valores iniciais e dos passos (incrementos dados aos valores dos parâmetros a cada rodada de resultado).

Outro problema dos ajustes não-lineares é que estes ajustes possuem múltiplas soluções ou mínimos locais. Uma escolha “infeliz” para os valores iniciais e passos dos parâmetros pode resultar numa solução que é um mínimo local da função multimodal  $\chi^2$ . O ideal para qualquer tipo de ajuste seria atingir o mínimo global de  $\chi^2$ , mas a medida que o número de parâmetros se torna muito grande ( $> 10$ ) isso se torna uma tarefa quase impraticável e, em geral, tomamos a solução local como boa; é uma solução afinal!

Vemos, então, que o ajuste não-linear é um problema muito “delicado” e sem solução **única**. Essa solução depende da escolha da função que ajusta os dados, do método a ser utilizado e ainda, temos que a função  $\chi^2$  é uma função multimodal e por isso possui inúmeros mínimos locais, ou seja várias soluções que depende dos valores iniciais escolhidos; quanto maior o número de parâmetros mais “delicado” é o ajuste (mais difícil é a procura da região que minimize o  $\chi^2$ ), pois temos que encontrar os valores de todos os parâmetros para os quais o valor de  $\chi^2$  seja mínimo.

Dessa maneira, ao fazermos um ajuste temos de lidar com essas inúmeras soluções e determinar um critério para a escolha do resultado. Esse critério deve ser tanto físico (se o resultado é possível fisicamente) quanto estatístico (menor  $\chi^2$ ). Na seção 5.1.5 discutimos, brevemente, a qualidade de ajuste.

### 5.1.2 Método de Rede

Se a variação da função do  $\chi^2$  em relação a um parâmetro,  $a_j$ , não for muito sensível aos valores dos demais parâmetros, então os valores ótimos dos parâmetros podem ser obtidos minimizando o  $\chi^2$  com respeito a cada parâmetro separadamente. O procedimento é simples: escolher um parâmetro, encontrar o valor deste parâmetro que minimize o  $\chi^2$  com respeito a ele para depois fixá-lo e repetir o procedimento para todos os parâmetros; este processo é repetido até que o mínimo do  $\chi^2$  se estabilize.

A maior vantagem deste processo é a simplicidade: com sucessivas iterações o mínimo absoluto da função do  $\chi^2$  pode ser obtida com qualquer precisão desejada. A principal desvantagem é que se os parâmetros são correlacionados a aproximação do mínimo será lenta.

### 5.1.3 Método do Gradiente

Neste método todos os parâmetros  $a_j$  são analisados simultaneamente.

O gradiente  $\nabla\chi^2$  é um vetor que aponta na direção na qual o  $\chi^2$  aumenta mais rapidamente e tem componentes no espaço dos parâmetros igual a taxa da mudança de  $\chi^2$  ao longo de cada eixo:

$$\nabla\chi^2 = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial\chi^2}{\partial a_j} \hat{a}_j \right], \quad (5.12)$$

onde  $\hat{a}_j$  indica o vetor unitário na direção do eixo da coordenada  $a_j$ . Para determinar o gradiente, estimamos as derivadas parciais da seguinte forma [?]

$$(\nabla\chi^2)_j = \frac{\partial\chi^2}{\partial a_j} \simeq \frac{\chi^2(a_j + f \Delta a_j) - \chi^2(a_j)}{f \Delta a_j}, \quad (5.13)$$

onde  $f$  é a fração do tamanho do passo  $\Delta a_j$  pelo qual  $a_j$  varia na determinação da derivada.

Se os parâmetros  $a_j$  não tiverem as mesmas dimensões (o que ocorre usualmente) as componentes do gradiente não terão as mesmas dimensões. Por isso definiremos um parâmetro adimensional,  $b_j$  [?]

$$b_j = \frac{a_j}{\Delta a_j}, \quad (5.14)$$

tal que:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b_j} \simeq \frac{\chi^2(a_j + f \Delta a_j) - \chi(a_j)}{f \Delta a_j} \Delta a_j = \frac{\chi^2(a_j + f \Delta a_j) - \chi(a_j)}{f}. \quad (5.15)$$

Podemos definir um gradiente sem dimensão com módulo 1 e componentes dadas pela equação:

$$\gamma_j = \frac{\partial \chi^2 / \partial b_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^m (\partial \chi^2 / \partial b_j)^2}}. \quad (5.16)$$

A direção que o método do gradiente segue é a direção decrescente ao passo, que é oposta ao gradiente  $\gamma$ . A procura começa incrementando todos os parâmetros simultaneamente por uma quantidade  $\delta a_j$ , cujo valor é dado pelas componentes correspondentes  $\gamma_j$  e o valor absoluto dado pela constante do passo  $\Delta a_j$ :

$$\delta a_j = -\gamma_j \Delta a_j, \quad (5.17)$$

na qual o sinal negativo é introduzido a fim de garantir o decréscimo de  $\chi^2$ .

Existem várias maneiras para continuar a procura do gradiente. Uma delas é recalculer o gradiente depois de cada mudança nos valores dos parâmetros. Uma das desvantagens é a dificuldade em aproximar do mínimo, uma vez que o gradiente tende a 0 no mínimo; outra desvantagem é que ao recalculer o gradiente para cada passo, quando temos um passo pequeno, resulta numa procura ineficiente, enquanto o uso de passos maiores resultam em um mínimo menos preciso.

Uma variação deste método é procurar o gradiente na direção inicial com passos pequenos, calculando somente os valores de  $\chi^2$  até que o  $\chi^2$  aumente. Neste ponto, o gradiente é recalculado em uma nova direção. Toda vez que a procura encontra um mínimo, uma interpretação parabólica do  $\chi^2$  é usada para melhorar a determinação deste mínimo.

Uma abordagem mais sofisticada seria usar derivadas parciais de segunda ordem do  $\chi^2$  para determinar as mudanças do gradiente ao longo do caminho.

Desta forma, vemos que existem inúmeros métodos para fazer ajustes não-lineares de dados. Outros métodos podem ser encontrados na referência [?].

#### 5.1.4 Interpretação de $\chi^2$

Para facilitar os cálculos vamos considerar que as incertezas nos pontos experimentais são iguais. Dessa forma

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2. \quad (5.18)$$

Podemos estimar o valor médio para o  $\chi^2$  da seguinte forma: o desvio padrão pode ser entendido como o valor médio dos quadrados dos desvios em relação a função verdadeira,  $f_v(x)$  [?],

$$\sigma^2 \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - f_v]^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - f_v]^2 \cong n, \quad (5.19)$$

para simplificar a notação definimos  $f_v \equiv f_v(x_i)$  e  $f \equiv f(x_i)$ .

Reescrevendo a equação (??),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - f_v]^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n [(y_i - f) + (y_i - f_v)]^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - f)^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - f)(f - f_v) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n [f - f_v]^2, \end{aligned} \quad (5.20)$$

no qual o primeiro termo é o  $\chi^2$ . O segundo termo tende a se anular para um grande número de pontos pois a função ajustada  $f$  é o valor médio dos  $y_i$ , em cada posição. Assim, as somas dos desvios  $d_i = y_i - f$  tende a se anular estatisticamente para um grande número de pontos experimentais; por outro lado os desvios  $[f - f_v]$  não são correlacionados com os desvios  $d_i$ , pois a função ajustada representa toda correlação possível entre os valores  $y_i$  e  $f_v$ . Se houvesse qualquer relação entre  $y_i$  e  $f_v$ , que não estivesse contida em  $f$ , isto significaria a possibilidade de ajustar uma função melhor que  $f$ . Já o terceiro termo pode ser estimado substituindo  $(f - f_v)^2$  pelo variância  $\sigma_f^2$  [?]. Dessa forma

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n [f - f_v]^2 \cong p, \quad (5.21)$$

então  $\chi^2 \cong \nu$ , onde  $\nu$  é definido como o número de graus de liberdade,  $\nu = n - p$ . Apesar das hipóteses (incertezas iguais e parâmetros independentes) esse resultado é sempre válido para grande números de pontos.

### 5.1.5 Avaliação da Qualidade de um Ajuste

Para avaliar a qualidade de um ajuste definimos uma quantidade que independe do números de pontos ou mesmo do número de parâmetros. Essa quantidade é chamada de  $\chi^2$  reduzido,  $\chi_{red}^2$ :

$$\chi_{red}^2 \equiv \frac{\chi^2}{\nu}. \quad (5.22)$$

Na seção anterior mostramos que para um grande número de parâmetros,  $\chi^2$  é igual ao número de parâmetros livres ( $\nu$ ), ou seja,  $\chi^2 = \nu$ . Dessa forma o valor médio do  $\chi_{red}^2$  é 1. Por isso quanto mais próximo de 1 melhor o ajuste, porém saber o valor médio dele não ajuda muito pois o  $\chi_{red}^2$  pode apresentar flutuações em relação a este valor. Para avaliar a qualidade de ajuste é melhor estabelecer um intervalo de confiança P, para os valores de  $\chi_{red}^2$  [?], como discutido a seguir.

A probabilidade de se obter um valor de  $\chi^2$  em um determinado intervalo, é obtida integrando a função de probabilidade neste intervalo,  $h(\chi^2)$ . Geralmente, a probabilidade  $P_Q$  é a probabilidade de que um determinado valor  $Q$  seja excedido. Isto é,

$$P_Q = \int_Q^{\infty} h(\chi^2) d\chi^2, \quad (5.23)$$

Considerando  $Q_1$  e  $Q_2$ , com  $Q_2 > Q_1 > 0$ , então

$$P = P_{Q_1} - P_{Q_2} = \int_{Q_1}^{\infty} h(\chi^2) d\chi^2 - \int_{Q_2}^{\infty} h(\chi^2) d\chi^2 = \int_{Q_1}^{Q_2} h(\chi^2) d\chi^2. \quad (5.24)$$

Com isso  $P$  é a probabilidade de resultar um  $\chi^2$  entre  $Q_1$  e  $Q_2$ . Por exemplo para um intervalo de confiança de 98%  $Q_1 < \chi_{red}^2 < Q_2$  (considerando que  $P_{Q_1} = 99\%$  e  $P_{Q_2} = 1\%$ ). Se o valor de  $\chi_{red}^2$  estiver muito fora desse intervalo indica um ajuste muito ruim. Isso pode ser decorrente da escolha inadequada da função ou devido às incertezas serem estimadas erradas. Em [?] encontra-se a tabela de distribuição de probabilidade de  $\chi^2$  por graus de liberdade.

Em resumo, o teste do  $\chi_{red}^2$  pode ser utilizado com os seguintes objetivos [?]:

1. Verificar a qualidade do ajuste: para isso o  $\chi_{red}^2$  deve estar dentro da faixa do intervalo de confiança de 98%. Entretanto, é necessário que as incertezas tenham sido estimadas corretamente.
2. Escolher o tipo de função mais adequada entre os diversos tipos de funções: deve-se escolher a função com menor número de parâmetros levando em conta as considerações físicas.

## 5.2 Propagação de Erros

Se uma grandeza,  $w$ , é calculada em função das grandezas  $x, y, z, \dots$  que possuem erro (variâncias)  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \dots$  respectivamente, então  $w$  também terá um erro que será dado pela propagação de erro [?]:

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 = & \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 + \dots \\ & 2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \sigma_{xy} + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{xz} + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{yz} + \dots, \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde  $\sigma_{xy}$  é a covariância definida como

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y). \quad (5.26)$$

A covariância pode assumir valores negativos e se não existe correlação entre os erros  $\eta_{xi} = (x_i - \mu_x)$  e  $\eta_{yi} = (y_i - \mu_y)$ , seu produto ( $\eta_{xi}\eta_{yi}$ ) deve distribuir-se aleatoriamente, de forma que a covariância será nula.

## 5.3 Código CERN-Minuit

O CERN-Minuit [?] é um código utilizado para ajustes de funções. Seu principal objetivo é facilitar a localização de mínimos da distribuição  $\chi^2$ , associada à função ajustada a um conjunto de pontos experimentais, para grande números de parâmetros e funções complicadas (em geral, não lineares).

Este código é utilizado para a determinação dos parâmetros da função ajustada ( $f(x)$ ), em que a função  $\chi^2$  é minimizada. Essa função deve ser definida (se é logarítmica, exponencial, potências, etc.) e fornecida pelo usuário, assim como a quantidade de parâmetros (por exemplo  $f(x) = ae^{bx} + ce^{dx}$ ), os valores iniciais deles (por exemplo  $a = b = c = d = 1.0$ ) e os passos dos parâmetros. Este programa minimiza o  $\chi^2$  a partir da função e dos valores iniciais dos parâmetros dados pelo usuário, ou seja o programa encontra os valores finais dos parâmetros que resultam no menor valor do  $\chi^2$  a partir dos valores iniciais dados pelo usuário.

O programa que utilizamos, CERN-Minuit oferece ao usuário a opção de escolha de 5 comandos para minimizar uma função: Migrad, Minimize, Scan, Seek, Simplex, dentre eles escolhemos o comando Migrad por ser mais completo como discutiremos a seguir [?].

### 5.3.1 Migrad

É o melhor algoritmo e mais aconselhável para todas as funções. Este comando procura o mínimo da função usando informações do gradiente, calculando a derivada para cada parâmetro da função a ser ajustada, fornecendo a matriz de covariância [?].

### 5.3.2 Minimize

É equivalente ao Migrad, mas quando o Migrad falha, esse comando muda automaticamente do Migrad para o Simplex, retornando ao Migrad novamente.

### 5.3.3 Scan

Esse algoritmo não minimiza, só analisa a função, um parâmetro de cada vez. No entanto ele preserva o melhor resultado de cada análise.

### 5.3.4 Seek

Este algoritmo escolhe de maneira randômica os valores dos parâmetros para minimizar a função.

### 5.3.5 Simplex

Esse algoritmo é mais lento que o Migrad. Como não usa derivada primeira para minimizar a função, é mais preciso no cálculo do  $\chi^2$ . Mas não traz informações confiáveis dos erros dos parâmetros (variâncias), e nenhuma informação sobre suas covariâncias e o pior de tudo não converge a um mínimo em um intervalo finito de tempo.

### 5.3.6 Parâmetro UP

O parâmetro UP é um fator de normalização relacionado com o cálculo dos erros dos parâmetros livres do programa CERN-Minuit. Esse parâmetro é definido como 1 para o caso mais simples (quando a função  $\chi^2$  em termos de cada parâmetro é exatamente parabólica no mínimo), assumindo valores diferentes de acordo com a quantidade de parâmetros livres e a região de confiança das incertezas dos parâmetros desejada.

O valor desse parâmetro para 70% de intervalo de confiança das incertezas dos parâmetros é dado pela tabela abaixo [?].

número de parâmetros livres	valor do UP
10	11.78
12	14.02
14	16.23
16	18.42

Dessa forma o CERN-Minuit, ajusta uma função predeterminada através do método dos mínimos quadrados, encontrando o melhor valor para os parâmetros e a matriz de erro a partir dos parâmetros iniciais no intervalo de confiança determinado pelo usuário.



# Capítulo 6

## Redução dos Dados

### 6.1 Introdução

Neste e no próximo capítulo, apresentamos e discutimos os resultados originais obtidos na pesquisa desenvolvida, os problemas e dificuldades que enfrentamos e as soluções propostas.

O estudo do problema inverso do espalhamento elástico de hádrons, vem sendo estudado há alguns anos por Menon e colaboradores [?, ?, ?]. Nesse sentido, nossa pesquisa foi voltada para desenvolvimentos, generalizações e aprimoramentos de estudos, estratégias e resultados obtidos anteriormente. Por essa razão, no que segue, faremos referência a trabalhos anteriores, explicitando os desenvolvimentos e comparando alguns resultados.

Inicialmente, introduzimos a parametrização empírica para a amplitude de espalhamento (Sec. 6.2), discutimos dificuldades inerentes ao procedimento de redução de dados (Sec. 6.3) e alguns testes preliminares, detalhados nos apêndices A, B, C e (Sec. 6.4). Em seguida, tratamos a compilação e normalização dos dados a 19.4 GeV (Sec. 6.5) e detalhamos o procedimento e redução que consideramos o melhor resultado (Sec. 6.6), o qual é discutido em seguida (Sec. 6.7).

Com esse resultado selecionado, no próximo capítulo, determinamos as funções de perfil, recobrimento inelástica e eiconal.

### 6.2 Parametrização Analítica para a Amplitude de Espalhamento

Primeiramente, consideramos uma parametrização analítica geral (independente de modelo) para a amplitude de espalhamento a uma dada energia fixa

$$F(q) = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i e^{-b_i q^2} \right\} + i \left\{ \sum_{j=1}^n c_j e^{-d_j q^2} \right\}, \quad (6.1)$$

onde  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $c_j$ ,  $d_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  são parâmetros livres reais, relacionados com as partes real e imaginária da amplitude, respectivamente.

Levando em conta as definições das grandezas físicas  $\sigma_{\text{tot}}$ ,  $\rho$ , equações (??) e (??), esta parametrização pode ser expressa na forma:

$$F(s, q) = \left\{ \left[ \frac{\rho \sigma_{\text{tot}}}{4\pi} - \sum_{i=2}^m a_i \right] e^{-b_1 q^2} + \sum_{i=2}^m a_i e^{-b_i q^2} \right\} + i \left\{ \left[ \frac{\sigma_{\text{tot}}}{4\pi} - \sum_{j=2}^n c_j \right] e^{-d_1 q^2} + \sum_{j=2}^n c_j e^{-d_j q^2} \right\}. \quad (6.2)$$

Com isso, eliminamos dois parâmetros livres, que escolhemos ser  $a_1$  (parte real) e  $c_1$  (parte imaginária), restando  $2(m + n - 1)$  parâmetros de ajuste livres, com  $\sigma_{\text{tot}}$  e  $\rho$  dados pelos valores experimentais correspondentes (tabela ??).

Substituindo ?? em ?? obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dq^2} = & \pi \left[ \left( \frac{\rho \sigma_{\text{tot}}}{4\pi} - \sum_{i=2}^m a_i \right)^2 e^{-2b_1 q^2} + \left( \frac{\rho \sigma_{\text{tot}}}{4\pi} - \sum_{i=2}^m a_i \right) \sum_{l=2}^m a_l e^{-(b_1+b_l)q^2} + \right. \\ & + \sum_{l \neq m} a_l \sum_{i=2}^m a_i e^{-(b_i+b_l)q^2} + \sum_{i=2}^m a_i^2 e^{-2b_i q^2} + \left. \left( \frac{\sigma_{\text{tot}}}{4\pi} - \sum_{j=2}^n c_j \right)^2 e^{-2d_1 q^2} + \right. \\ & + \left. \left( \frac{\sigma_{\text{tot}}}{4\pi} - \sum_{k=2}^n c_k \right) \sum_{j=2}^n c_j e^{-(d_1+d_j)q^2} + \sum_{k \neq j} c_k \sum_{j=2}^n c_j e^{-(d_k+d_j)q^2} + \sum_{j=2}^n c_j^2 e^{-2d_j q^2} \right] \quad (6.3) \end{aligned}$$

Essa nova parametrização para a seção de choque diferencial foi por nós introduzida na referência [?].

## 6.3 A Questão da Redução dos Dados

No Capítulo 4 discriminamos os dados experimentais a serem analisados, no Cap. 5 revisamos aspectos estatísticos da redução de dados e na seção anterior, introduzimos nossa parametrização empírica. Com essas informações, ressaltamos que a questão da redução dos dados experimentais de seção de choque diferencial, através da parametrização empírica, é um **problema não trivial**. De fato:

1. Tratamos com dez décadas de dados experimentais, com 200-250 pontos em cada energia.
2. Como veremos, as reduções demandam 10-20 parâmetros livres e da ordem de 200 graus de liberdade.
3. Não temos nenhuma informação experimental sobre as contribuições das partes real ou imaginária da amplitude de espalhamento além da região frontal ( $q^2 > 0$ ), somente em  $q^2 = 0$ .

4. Do ponto de vista formal, um teorema geral demonstrado por André Martin [?] preve um zero (troca de sinal) na parte real de uma amplitude par (sob cruzamento), a pequeno momento transferido. Entretanto, tratamos com a amplitude hadrônica e não suas componentes par e/ou ímpar.
5. A função  $\chi^2$ , em termos de parâmetros livres, é uma função multimodal (múltiplos mínimos locais), de modo que só teremos informações sobre mínimos locais (e não absoluto).
6. No código CERN-Minuit, a redução é realizada a partir de uma escolha para valores iniciais dos parâmetros livres e do passo de busca. Diferentes valores iniciais e/ou passos podem levar a diferentes mínimos locais.
7. Em alguns casos, o mínimo local atingido depende do intervalo de confiança dos parâmetros livres (parâmetro UP da tabela ??).
8. O valor de  $\chi^2$  depende da função escolhida (se ela é correta) e da qualidade estatística dos dados. Reduções típicas de dados de seção de choque diferencial hádron-próton (por modelos ou independentes de modelo) resultam em  $\chi_{red}^2 \sim 2 - 3$  [?], o que indica baixo nível de confiança.

Desse modo, não temos como obter a solução da redução. No que segue, discutimos os diversos testes realizados e os critérios que nos levaram a selecionar uma solução.

## 6.4 Procedimentos e Testes

### 6.4.1 Dados Experimentais

Como referido no Cap. 4, os dados experimentais na região do ISR ( $23.5 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$  GeV) foram compilados, analisados e normalizados por Amaldi e Schubert. Vimos também que, nessa região, os dados a grande momento transferido ( $q^2 > 3.0$  GeV) não apresentam variação com a energia. Por essa razão, adicionamos a cada conjunto (23.5, 30.7, 44.7, 52.8 e 62.5 GeV) os dados a 27.4 GeV ( $5.5 \leq q^2 \leq 14.2$  GeV<sup>2</sup>), de modo a obter um ensemble estatístico mais significativo, cobrindo a região  $0.01 \leq q^2 \leq 14.2$  GeV, além do ponto óptico, nas energias do ISR.

Os dados a 19.4 GeV, os quais, como referimos não são consistentes com os dados a 27.4 GeV e não são normalizados, serão tratados à parte (Sec. 6.5).

### 6.4.2 Variantes

Iniciamos a análise com os dados do ISR (adicionando os dados a 27.4 GeV) e consideramos 4 variantes no processo de redução, duas associadas ao intervalo de confiança das incertezas nos parâmetros de ajuste e duas associadas à escolha (determinação) dos valores iniciais dos parâmetros de ajuste, como explicado a seguir.

### • Intervalo de Confiança (IC) nas Incertezas dos Parâmetros Livres

Como discutido no capítulo 5, no código CERN-Minuit, o IC é controlado pelo parâmetro UP, sendo default o valor UP=1. Consideramos 2 casos:

1. UP=1, portanto IC variável, dependendo do número de parâmetros.
2. Fixamos IC=70% e portanto UP variável, dependendo do número de parâmetros.

### • Valores Iniciais dos Parametros de Ajuste

1. Inicialmente realizamos um teste detalhado na energia de 52.8 GeV (o mais consistente e extenso conjunto de dados), ajustando os dados em diferentes regiões de momento transferido. Obtido o melhor resultado, utilizamos os valores finais do ajuste como iniciais de ajuste nas energias mais próximas (62.5, 44.7 e daí 30.7, e 23.5 GeV).
2. Num segundo procedimento, utilizamos como valores iniciais, em cada energia, valores finais obtidos com outras parametrizações em análises anteriores e também de outros autores.

As 4 variantes foram combinadas 2 a 2 e para referência denominaremos:

#### **Variante 1**

Ajuste por região a 52.8 GeV e Extensão às Demais Energias com IC Variável.

#### **Variante 2**

Valores Iniciais a Partir de Outros Resultados com IC Variável.

#### **Variante 3**

Ajuste por região a 52.8 GeV e Extensão às Demais Energias com IC=70%.

#### **Variante 4**

Valores Iniciais a Partir de Outros Resultados com IC=70%.

As Variantes 1 e 2 (IC variável, UP=1) foram limitadas às energias do ISR e no caso das variantes 3 e 4 (IC=70%, UP variável) as reduções incluíram os dados a 19.4 GeV (a serem discutidos na Sec. 6.4).

A seleção dos melhores resultados (Variante 4) foi baseada em dois critérios:

1) Valor de  $\chi^2/gl$  inferior aos obtidos em análises anteriores [?, ?, ?], isto é, o mais próximo de 1.0 e num intervalo de confiança razoável (Sec. 5.1.5), considerando o intervalo de 98% um bom resultado.

2) Regularidade no comportamento das grandezas em função da energia (tais como, contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento na seção de choque diferencial, funções de perfil e eiconal extraídas). Este critério tem por base as observações empíricas de que os dados experimentais apresentam uma variação suave com a energia, no intervalo relativamente pequeno analisado, 19.4 - 62.5 GeV (figura ??).

Assim não é de se esperar uma variação brusca ou efeito particular numa determinada energia e não em outras.

Com base nesses dois critérios, os resultados obtidos com a variante 4 foram considerados os melhores. Os procedimentos e resultados obtidos, com as variantes 1, 2 e 3 são apresentados, respectivamente, nos apêndices A, B e C, juntamente com comentários sobre os critérios acima.

No que segue, focalizaremos na variante 4, discutindo em detalhe o procedimento e resultados. Antes porém trataremos de alguns aspectos dos dados a 19.4 GeV.

## 6.5 Compilação e Normalização dos Dados a $\sqrt{s} = 19.4$ GeV

Os primeiros testes de ajuste a 19.4 GeV foram realizados com os dados compilados por Ávila e Menon [?] e indicaram valores de  $\chi^2/gl$  bem superiores aos obtidos em nossos ajustes na região do ISR. Por isso passamos a estudar os dados nessa energia com mais detalhe.

Inicialmente, ampliamos a compilação de dados, incluindo os resultados de Shiz et al. [?] e Kuznetsov et al. [?]. Os dados dos diferentes experimentos, em intervalos de momento transferido vizinhos, são mostrados na figura ???. No que segue faremos referência somente ao sobrenome do primeiro autor de cada publicação.

Dessa figura percebemos que os dados de Kuznetsov [?] são consistentes com o ponto óptico; em seguida comparamos os dados de Schiz [?] (que estavam mais próximos dos dados de Kuznetsov) com os dados de Kuznetsov e verificamos que são também consistentes. Passamos a analisar os dados mais próximos de Schiz (os dados de Akerlof [?]) e observamos que são compatíveis, assim como os dados de Fidecaro [?] e de Rubinstein [?] são consistentes entre si e com os dados de Akerlof.

Porém ao compararmos os dados de Rubstein com os de Faissler [?], verificamos que este último conjunto apresenta um comportamento médio acima dos dados de Rubstein. Como os dados de Faissler possuem erro sistemático estimado em 15% [?], diminuímos a posição desses dados em 15% como mostra a figura ??.

Com isso, nosso ensemble a  $\sqrt{s} = 19.4$  GeV é constituído dos dados publicados (tabelas ?? e ??) e uma redução de 15% nos valores publicados por Faissler et al. [?].

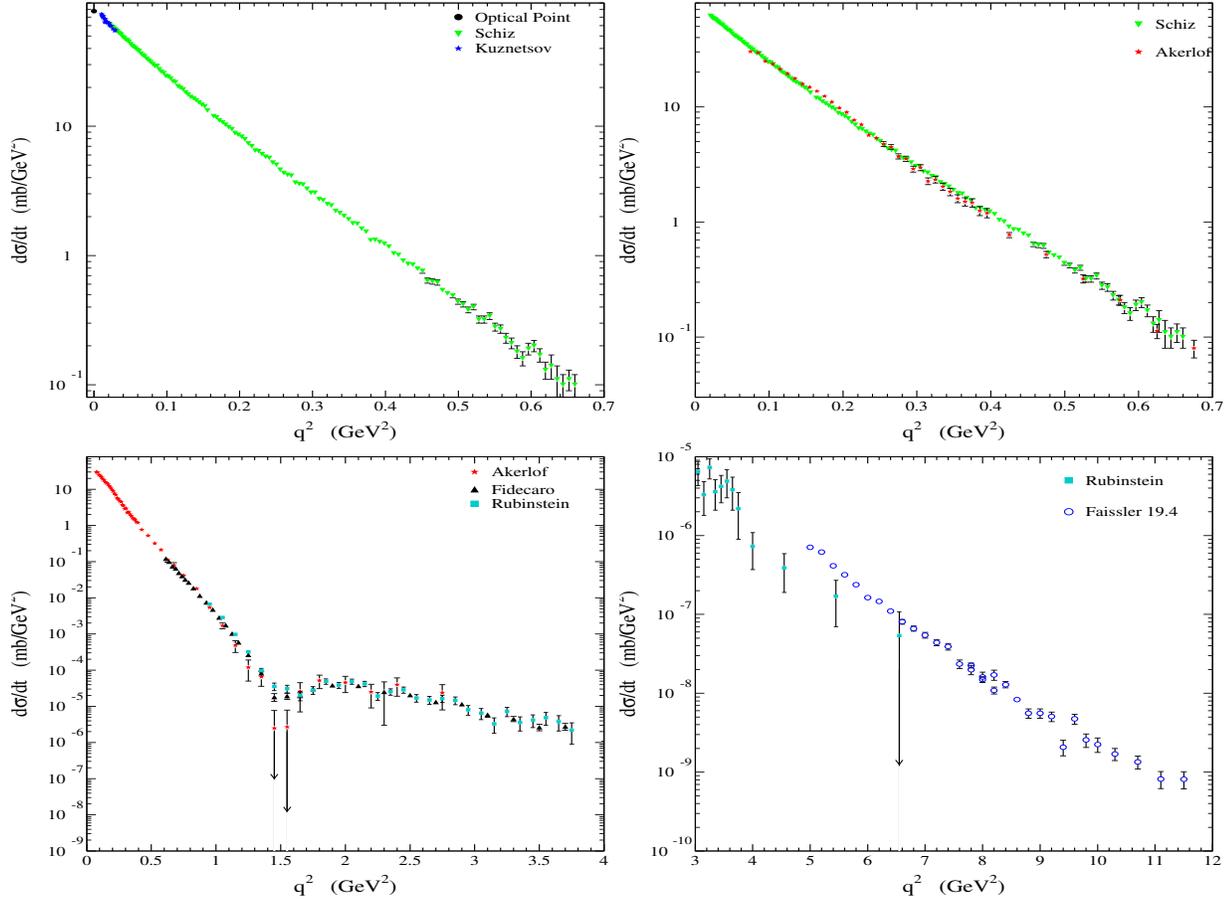


Figura 6.1: Comparação entre os dados de diferentes experiências realizadas a 19.4 GeV. Acima encontra-se o ponto óptico, os dados de Kuznetsov e o dados de Schiz (à esquerda); dados de Schiz com os de Akerlof (à direita). Abaixo temos os dados de Akerlof com os de Rubinstein (à esquerda) e os de Rubinstein com os de Faissler (à direita).

## 6.6 Resultados Seleccionados e Procedimento

Na redução dos dados experimentais, realizada anteriormente por Menon et al. [?, ?], foi utilizada uma parametrização empírica na forma

$$F(q) = \left\{ \mu \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{-\beta_j q^2} \right\} + i \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{-\beta_j q^2} \right\}, \quad (6.4)$$

onde

$$\mu = \frac{\rho(s) \sigma_{tot}}{4\pi \sum_{j=1}^m \alpha_j}.$$

Embora os ajustes apresentem bons resultados estatísticos, observamos que as partes real e imaginária são vinculadas: as exponenciais da parte real são as mesmas que aparecem na parte imaginária. Como isso não ocorre em nossa parametrização ??, testamos

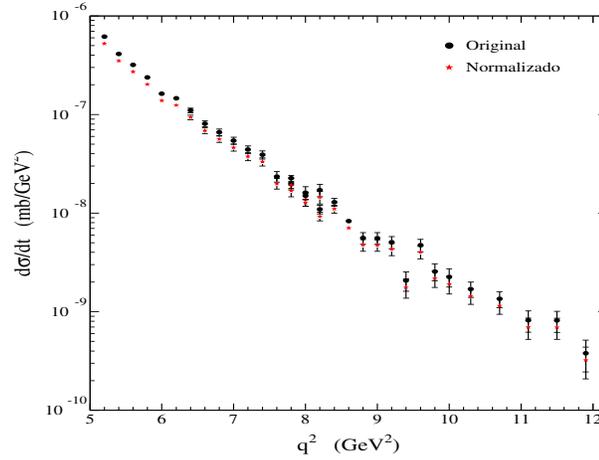


Figura 6.2: Comparação entre os dados publicados de Faissler e a normalização (redução) de 15%.

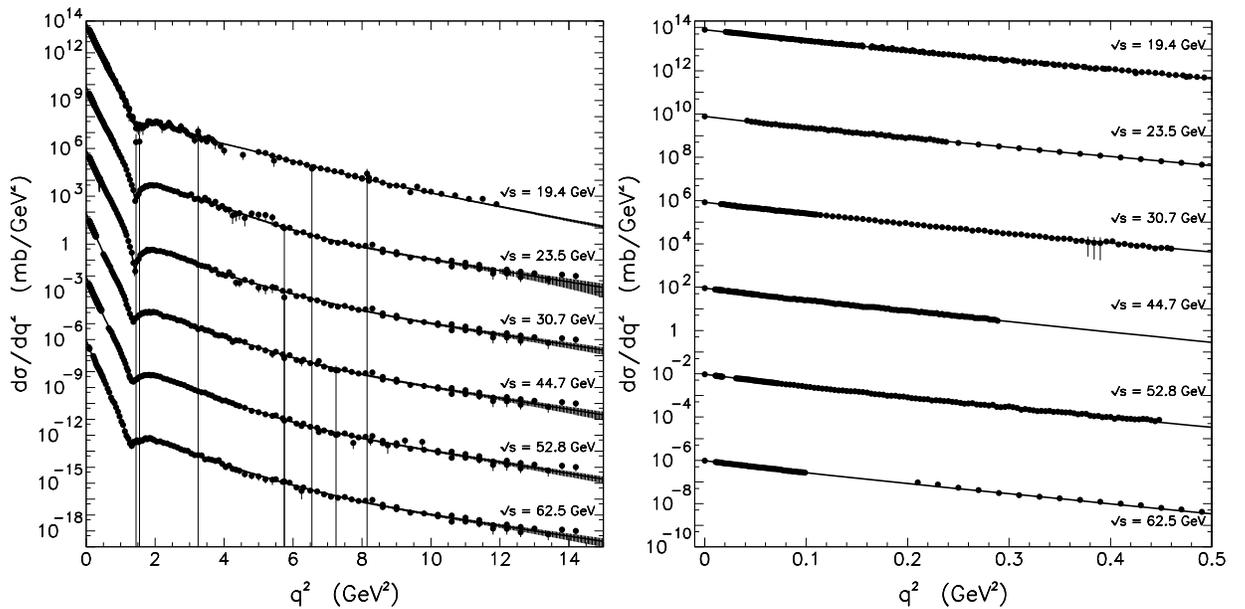


Figura 6.3: À esquerda, o ajuste dos dados e à direita os picos difrativos, ambos com a região de incerteza.

utilizar como **valores iniciais** dos parâmetros livres os resultados obtidos por esses autores [?, ?] em nossos ajustes.

Porém o  $\chi^2/gl$  para a energia de 44.7 GeV foi muito alto ( $\chi^2/gl = 2.18$ ) e por isso, para essa energia, realizamos outros testes de valores iniciais dos parâmetros livres, obtendo o melhor resultado com os valores finais da análise de França e Hama [?]. Neste trabalho os autores ajustam a seção de choque diferencial através de uma amplitude puramente imaginária, composta por somatória de exponenciais

$$a(s, t) = a(s, 0) \sum_{i=1}^6 a_i \exp(b_i t), \quad t = -q^2.$$

Para os dados a 44.7 GeV, utilizamos como valores iniciais dos parâmetros da parte imaginária da amplitude os resultados obtidos por França e Hama. Introduzimos a parte real da amplitude, adicionando uma exponencial real de cada vez, até obter o menor  $\chi^2/gl$ . Os resultados finais são apresentados na tabela ?? e figura ?. Comparamos o valor de  $\chi^2/gl$  entre esse resultado e os ajuste anteriores [?, ?] na tabela ?. Destacamos que com esse procedimento obtivemos  $\chi^2/gl = 1.99$ .

O ajuste de todos os dados juntamente com a região de incerteza e o pico difrativo dos dados, também, com a sua região de incerteza, encontra-se na figura ?. Apresentamos as contribuições da parte real e imaginária junto com suas regiões de incerteza na figura ?.

## 6.7 Discussão dos Resultados.

Na tabela ?? comparamos os valores de  $\chi^2/gl$  obtidos neste trabalho com os obtidos nas análises anteriores. Vemos que nossos valores de  $\chi^2/gl$  são os mais próximos de 1.0, o que seria esperado para o número de graus de liberdade envolvidos. Nesse sentido, entendemos que obtivemos o melhor resultado estatístico.

Os resultados a 23.5, 30.7 e 62.5 GeV estão dentro do intervalo de confiança de 98% [?]. O valor elevado de  $\chi^2/gl$  a 19.4 GeV pode ser decorrente da não normalização global dos dados.

Com relação às contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento, a figura ?? mostra que:

A parte real da amplitude apresenta um zero (troca de sinal) a pequeno momento transferido, o que, como referimos na Sec. 6.3, é previsto por um teorema geral de altas energias, demonstrado por André Martin, no caso de amplitude par [?].

A parte imaginária da amplitude apresenta dois zeros, exceto na energia de 62.5 GeV (um zero e uma mudança de curvatura).

A contribuição da  $ReF$  na seção de choque diferencial é menor que a contribuição da  $ImF$ , exceto na região de  $q^2 \approx 3 - 7$ .

Tabela 6.1: Parâmetros das partes real e imaginária do resultado do ajuste. Todos os parâmetros estão em  $\text{GeV}^{-2}$  e  $gl$  é o número de graus de liberdade. Todas as energias são dadas em GeV.

	19.5	23.5	30.7	44.7	52.8	62.5
$a_1$	-0.03 $\pm 0.13$	-0.05 $\pm 0.40$	-0.022 $\pm 0.090$	-0.035 $\pm 0.094$	-0.043 $\pm 0.087$	-0.022 $\pm 0.097$
$b_1$	0.772 $\pm 0.034$	0.93 $\pm 0.10$	0.764 $\pm 0.046$	0.858 $\pm 0.050$	0.912 $\pm 0.034$	0.774 $\pm 0.047$
$a_2$	0.1825 $\pm 0.0055$	0.212 $\pm 0.023$	0.3664 $\pm 0.0047$	0.5646 $\pm 0.0063$	0.7232 $\pm 0.0053$	0.8631 $\pm 0.0046$
$b_2$	1.760 $\pm 0.061$	2.01 $\pm 0.18$	2.644 $\pm 0.092$	3.12 $\pm 0.13$	3.249 $\pm 0.099$	4.16 $\pm 0.37$
$c_1$	-34.08 $\pm 0.43$	-32 $\pm 16$	-157.30 $\pm 0.61$	1244 $\pm 22$	-128.8 $\pm 1.0$	-140.1 $\pm 2.7$
$d_1$	2.5259 $\pm 0.0024$	2.63 $\pm 0.15$	2.33972 $\pm 0.00028$	10.2433 $\pm 0.0042$	2.77889 $\pm 0.00087$	2.7678 $\pm 0.0019$
$c_2$	392.00 $\pm 0.31$	398 $\pm 11$	3.802 $\pm 0.054$	1460 $\pm 10$	2.098 $\pm 0.081$	1.87 $\pm 0.19$
$d_2$	2.88166 $\pm 0.00033$	2.897 $\pm 0.046$	8.51 $\pm 0.18$	9.7419 $\pm 0.0034$	13.25 $\pm 0.54$	14.4 $\pm 1.3$
$c_3$	22.48 $\pm 0.13$	9.4 $\pm 3.1$	291.24 $\pm 0.070$	-4.613 $\pm 0.070$	-4.613 $\pm 0.94$	226.3 $\pm 2.6$
$d_3$	4.023 $\pm 0.013$	4.68 $\pm 0.74$	2.43478 $\pm 0.00024$	2.283 $\pm 0.012$	2.89792 $\pm 0.00051$	2.8746 $\pm 0.0012$
$c_4$	-373.86 $\pm 0.27$	-369 $\pm 11$	-219.53 $\pm 0.19$	-2697 $\pm 20$	-135.19 $\pm 0.28$	-118.34 $\pm 0.77$
$d_4$	2.94863 $\pm 0.00043$	2.931 $\pm 0.045$	2.68382 $\pm 0.00035$	9.9791 $\pm 0.0020$	3.2963 $\pm 0.0015$	3.2259 $\pm 0.0043$
$c_5$	1.425 $\pm 0.075$	1.48 $\pm 0.98$	89.99 $\pm 0.13$	$1.57 \times 10^{-3}$ $\pm 0.84 \times 10^{-3}$	56.30 $\pm 0.18$	39.16 $\pm 0.44$
$d_5$	11.35 $\pm 0.56$	12.7 $\pm 4.7$	2.9567 $\pm 0.0013$	0.399 $\pm 0.052$	3.8306 $\pm 0.0052$	3.942 $\pm 0.020$
$c_6$	$2.98 \times 10^{-3}$ $\pm 0.59 \times 10^{-3}$	$1.7 \times 10^{-3}$ $\pm 1.2 \times 10^{-3}$	$1.15 \times 10^{-3}$ $\pm 0.57 \times 10^{-3}$	5.702 $\pm 0.073$	$1.79 \times 10^{-3}$ $\pm 0.63 \times 10^{-3}$	$-1.22 \times 10^{-3}$ $\pm 0.72 \times 10^{-3}$
$d_6$	0.446 $\pm 0.021$	0.405 $\pm 0.073$	0.373 $\pm 0.046$	2.435 $\pm 0.013$	0.410 $\pm 0.039$	0.377 $\pm 0.056$
N. pontos	314	173	212	247	245	164
$\chi^2/gl$	2.62	1.09	1.09	1.99	1.55	1.18

Tabela 6.2: Valores de  $\chi^2/gl$  obtidos em análises anteriores e na Variante 4 deste trabalho.

$\sqrt{s}$ (GeV):	19.4	23.5	30.7	44.7	52.8	62.5
CMM (2005) [?, ?]	2.80	1.20	1.28	2.13	2.07	1.51
AM (2008) [?]	2.76	1.20	1.24	2.05	1.71	1.22
Variante 4	2.62	1.09	1.09	1.99	1.55	1.18

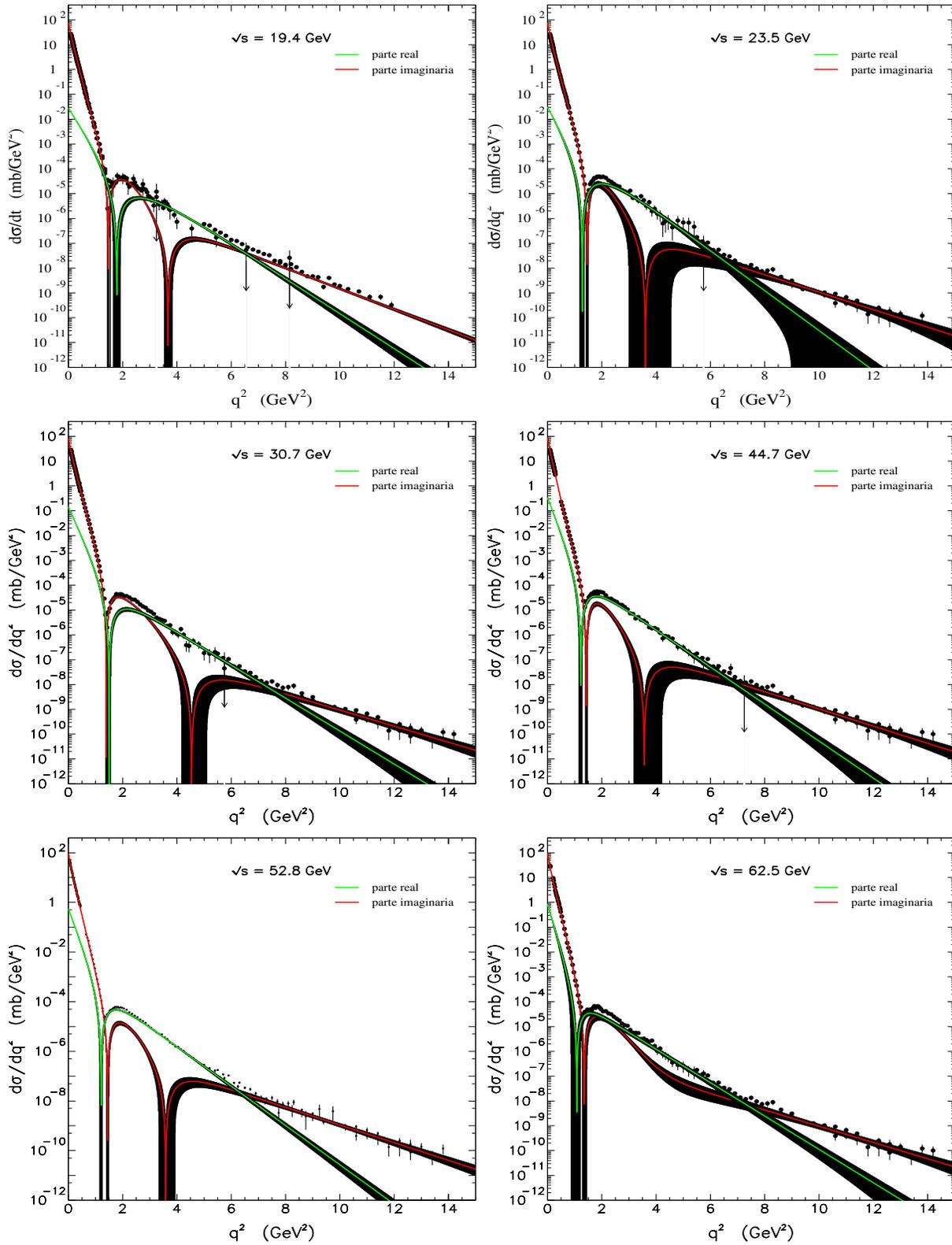


Figura 6.4: Contribuições para a seção de choque diferencial das partes  $ReF(s, q)$  e  $ImF(s, q)$  com suas regiões de incerteza.

# Capítulo 7

## Funções de Perfil, Recobrimento Inelástica e Eiconal

Neste capítulo, a partir dos resultados da redução selecionada no capítulo anterior, determinamos as funções de perfil (Sec. 7.1), de recobrimento inelástica (Sec. 7.2), eiconal no espaço de parâmetro de impacto (Sec 7.3.1) e a parte imaginária da eiconal (função opacidade) no espaço de momento transferido (Sec 7.3.2). Explicitamos também algumas características empíricas de cada resultado obtido.

Como mostraremos, nos três primeiros casos as funções são analiticamente determinadas, assim como as incertezas via propagação padrão de erros dos parâmetros de ajuste (Cap. 5). No caso da função opacidade no espaço de momento transferido, utilizamos um método semi-analítico para obtenção explícita da função com a respectiva incerteza.

### 7.1 Função de Perfil

#### 7.1.1 Expressão Analítica

Determinamos a função de perfil, para todas as energias, efetuando a transformada de Fourier inversa da equação ??.

$$\Gamma(s, b) = \frac{1}{i} \int_0^\infty q dq J_0(qb) F(s, q). \quad (7.1)$$

Utilizando a parametrização ?? e separando as partes real e imaginária, obtemos os resultados analíticos:

$$\text{Re } \Gamma(s, b) = \left[ \frac{\sigma_{tot}}{4\pi} - \sum_{j=2}^n c_j \right] \frac{e^{-\frac{b^2}{4d_j}}}{2d_j} + \sum_{j=2}^n \frac{c_j}{2d_j} e^{-\frac{b^2}{4d_j}}, \quad (7.2)$$

$$\text{Im } \Gamma(s, b) = - \left\{ \left[ \frac{\rho\sigma_{tot}}{4\pi} - \sum_{i=2}^n a_i \right] \frac{e^{-\frac{b^2}{4b_i}}}{2b_i} - \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{2b_i} e^{-\frac{b^2}{4b_i}} \right\}. \quad (7.3)$$

As incertezas nessas grandezas são obtidas através da propagação dos erros dos parâmetros de ajustes  $a_i, b_i, i = 1, \dots, m, c_j, d_j, j = 1, \dots, n$  e dos erros estatísticos de  $\sigma_{tot}$  e  $\rho$  em cada energia.

### 7.1.2 Resultados Empíricos

Os resultados para as partes real e imaginária da função de perfil são apresentados na figura ??, juntamente com as regiões de incerteza. Algumas características são discutidas a seguir.

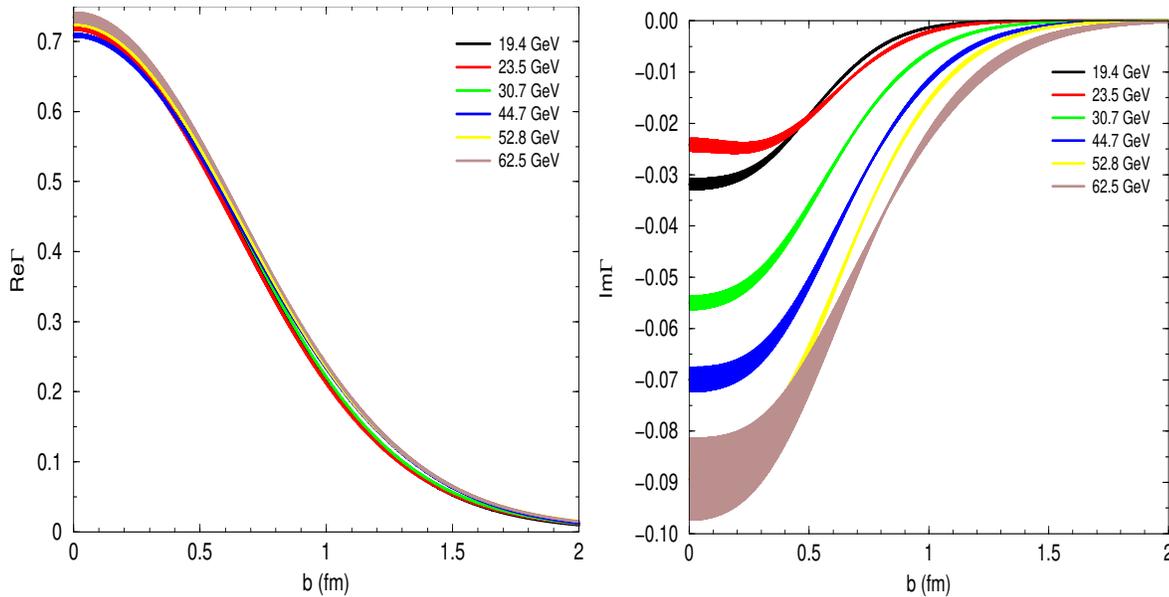


Figura 7.1: Partes real e imaginária da função de perfil, a esquerda e direita respectivamente, para as energias 19.4 (preto) 23.5 (vermelho), 30.7 (verde), 44.7 (azul), 52.8 (amarelo) e 62.5 GeV (marrom).

Com relação à parte real, devido às incertezas, não é possível inferir uma dependência energética. Porém, pode-se identificar uma mudança de curvatura na região  $\sim 0.5\text{-}0.8$  fm.

Com relação à parte imaginária, observa-se, em média, um crescimento com a energia (por valores negativos), mesmo levando-se em conta as regiões de incerteza. Pode-se também observar uma mudança de curvatura cuja posição em  $b$  aumenta com a energia, de  $\sim 0.5$  a  $\sim 0.8$  fm.

## 7.2 Função de Recobrimento Inelástica

### 7.2.1 Expressão Analítica

A função de recobrimento inelástica é também determinada analiticamente a partir da função de perfil, através da equação ??:

$$G_{in}(s, b) = 2\text{Re}\Gamma(s, b) - |\Gamma(s, b)|^2. \quad (7.4)$$

Desse modo, as incertezas são também determinadas por propagação padrão das incertezas de  $\text{Re}\Gamma(s, b)$  e  $\text{Im}\Gamma(s, b)$

### 7.2.2 Resultados Empíricos

Os resultados para  $G_{in}(s, b)$  obtidos da equação acima são mostrados na figura ??, para todas as energias, juntamente com as regiões de incerteza. Embora, devido às incertezas, não se possa inferir uma dependencia energética, se compararmos os resultados para as energias extremas do ISR (23.5 e 62.5 GeV) observa-se um crescimento periférico com a energia, com região central constante. Isso é exemplificado na figura ?? à direita.

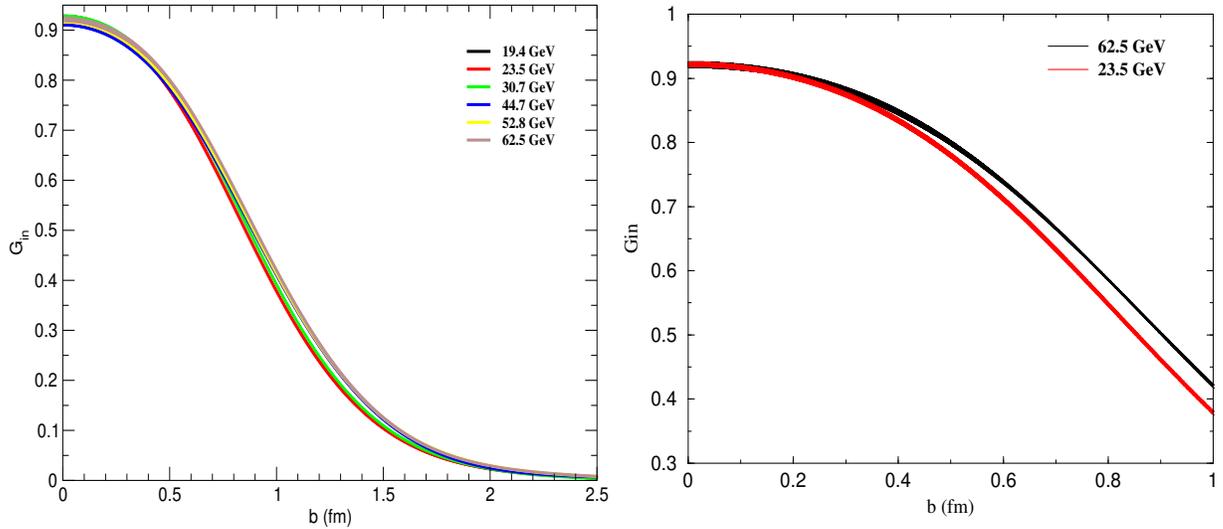


Figura 7.2: Função de recobrimento inelástica para todas as energias e para as energias extremas do ISR a esquerda e direita, respectivamente.

Verificamos que  $G_{in}(s, b)$  não é compatível com uma função gaussiana. Ajustando-se os pontos a pequeno parâmetro de impacto por uma gaussiana com centro na origem, há um aumento de  $G_{in}$  (cauda), acima de  $\sim 2.0$  fm, como exemplificado na figura ?. Esse efeito já foi observado por Amaldi e Schubert [?].

Na figura ??, exemplificamos as contribuições das funções de recobrimento elástica, inelástica e total, equação (??), para interação  $pp$  a 52.8 GeV, juntamente com o limite do disco negro.

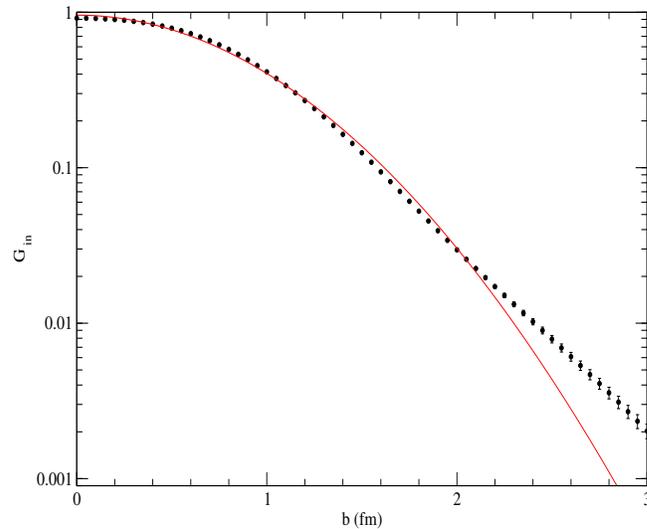


Figura 7.3: Função de recobrimento inelástica empírica, ajustada por uma gaussiana com centro na origem, para  $\sqrt{s} = 52.8$  GeV.

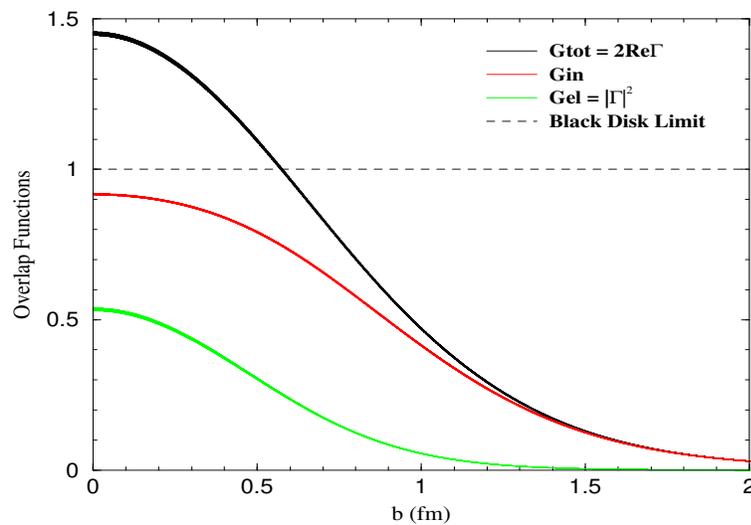


Figura 7.4: Estrutura de parâmetro de impacto do espalhamento  $pp$  a 52.8 GeV.

## 7.3 Função Eiconal

Nesta seção trataremos a extração da função eiconal no espaço de parâmetro de impacto (Sec. 7.3.1) e de momento transferido (Sec. 7.3.2)

### 7.3.1 Eiconal no Espaço de Parâmetro de Impacto

- Expressão Analítica

Determinamos a função eiconal a partir da função de perfil, invertendo a equação (??):

$$\chi(s, b) = -i \ln[1 - \Gamma(s, b)]. \quad (7.5)$$

Separando em partes real e imaginária:

$$Im\chi(s, b) = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1}{[1 - Re\Gamma(s, b)]^2 + Im\Gamma^2(s, b)} \right\}, \quad (7.6)$$

$$Re\chi(s, b) = tg^{-1} \left\{ \frac{Im\Gamma(s, b)}{Re\Gamma(s, b) - 1} \right\}. \quad (7.7)$$

### • Resultados Empíricos

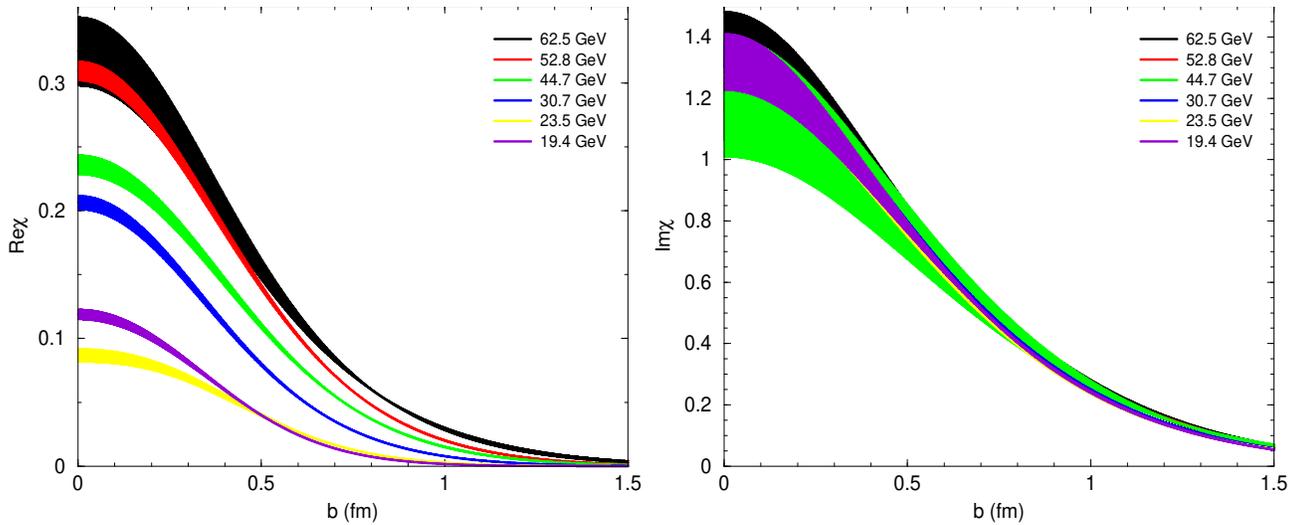


Figura 7.5: Partes real e imaginária da eiconal, no espaço de parâmetro de impacto, para todas as energias analisadas.

A partir dos resultados para  $Re\Gamma(s, b)$  e  $Im\Gamma(s, b)$  determinamos  $Re\chi(s, b)$  e  $Im\chi(s, b)$  pelas equações acima (?? e ??), juntamente com as regiões de incerteza, via propagação de erros. Os resultados para as energias analisadas são mostrados na figura ??.

Levando-se em conta as regiões de incerteza observamos que, em média,  $Re\chi(s, b)$  cresce com a energia exceto a 19.4 GeV. Isso pode ser efeito da normalização dos dados.

Com relação à  $Im\chi(s, b)$ , as incertezas não permitem inferir uma dependência energética, porém se analisarmos as regiões extremas do ISR (23.5 e 63.5 GeV), vemos que há um crescimento periférico com o aumento da energia, com região central constante, como mostrado na figura ??. Esse efeito, como vimos, também ocorre com  $G_{in}(s, b)$ , o que é esperado uma vez que das eqs. (??) e (??):

$$G_{in} = 1 - e^{-2Im\chi(s, b)} \quad (7.8)$$

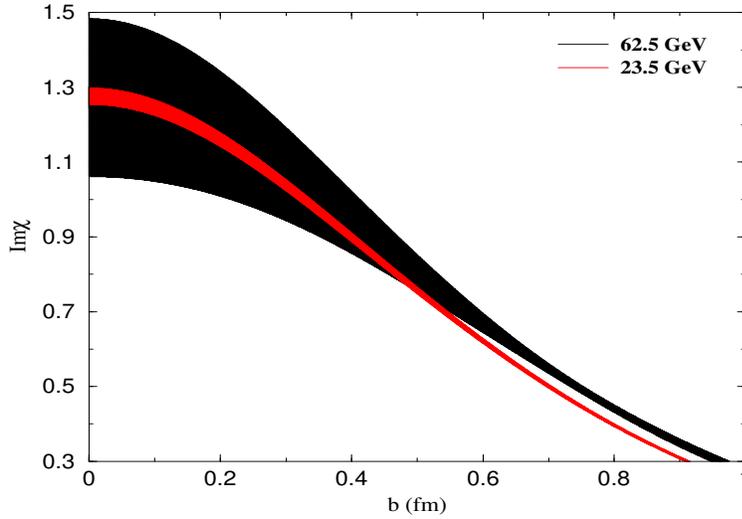


Figura 7.6: Função eiconal para as energias a 23.5 e 62.5 GeV.

### 7.3.2 Eiconal no Espaço de Momento Transferido - Função Opacidade

A função eiconal no espaço de momento transferido, denotada  $\tilde{\chi}(s, q)$ , é determinada pela transformada de Fourier-Bessel da eiconal no espaço de parâmetro de impacto,

$$\tilde{\chi}(s, q) = \int_0^{\infty} b db J_0(qb) \chi(s, b). \quad (7.9)$$

#### • Função Opacidade

Como vimos, na Sec. 3.4.3,  $Im\chi(s, b)$  está associada à absorção no processo de espalhamento e por isso denomina-se *função opacidade*, que denotaremos

$$\Omega(s, b) \equiv Im\chi(s, b). \quad (7.10)$$

No que segue, discutiremos somente a extração dessa função opacidade no espaço de momento transferido:

$$\tilde{\Omega}(s, q) = \int_0^{\infty} b db J_0(qb) \Omega(s, b). \quad (7.11)$$

Dada a estrutura de nossa parametrização para a amplitude de espalhamento, eq. (??), a expressão obtida para  $Im\chi(s, b)$  (através das eqs. (??) e (??)) não possui transformada analítica, eq. (??). A utilização de métodos numéricos de integração apresenta problemas de convergência, além de não permitir a propagação padrão dos erros dos parâmetros livres e portanto a determinação das regiões de incerteza.

Por isso, para determinar a função opacidade em  $q$ , consideraremos um método semi-analítico que discutimos a seguir.

Tabela 7.1: Valores dos parâmetros de ajuste gaussiano da opacidade no espaço de  $b$ , equação (??). Todos os parâmetros  $\alpha_i$  são adimensionais,  $\beta_i$  é dado em  $fm^{-2}$  e  $gl$  é o número de graus de liberdade. Todas as energias são dadas em GeV.

	19.4	23.5	30.7	44.7	52.8	62.5
$\alpha_1$	-0.0613 $\pm 0.0083$	0.069 $\pm 0.041$	0.219 $\pm 0.017$	0.0629 $\pm 0.0018$	0.0751 $\pm 0.0066$	0.0608 $\pm 0.0087$
$\beta_1$	0.565 2 $\pm 0.017$	0.525 $\pm 0.093$	0.7527 $\pm 0.0098$	0.4381 $\pm 0.0016$	0.481 $\pm 0.011$	0.440 $\pm 0.019$
$\alpha_2$	0.493 $\pm 0.029$	0.45 $\pm 0.12$	0.344 $\pm 0.061$	0.889 $\pm 0.013$	0.300 $\pm 0.036$	0.381 $\pm 0.066$
$\beta_2$	3.85 $\pm 0.20$	3.89 $\pm 0.86$	4.43 $\pm 0.67$	1.379 $\pm 0.013$	3.68 $\pm 0.31$	3.69 $\pm 0.63$
$\alpha_3$	0.754 $\pm 0.025$	0.74 $\pm 0.10$	0.747 $\pm 0.053$	0.259 $\pm 0.015$	0.783 $\pm 0.034$	0.828 $\pm 0.066$
$\beta_3$	1.347 $\pm 0.035$	1.38 $\pm 0.16$	1.663 $\pm 0.084$	5.07 $\pm 0.39$	1.312 $\pm 0.036$	1.309 $\pm 0.0061$
$\chi^2/gl$	0.25	0.034	0.013	3.23	0.48	0.0077

#### • Método Semi-Analítico

O método semi-analítico consiste em gerar um conjunto de pontos numéricos com erros (via propagação) para a opacidade em  $b$ , equações (??) e (??),

$$\Omega_i(s, b) \pm \Delta\Omega_i(s, b), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.12)$$

e ajustar esses “dados” por uma função integrável analiticamente. Para tanto, testamos funções gaussianas em  $b$ , com centro na origem,

$$\Omega(s, b) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{-\beta_i b^2}. \quad (7.13)$$

Para um conjunto com  $n = 10^3$  pontos no intervalo  $b : 0 \rightarrow 5$  fm, os melhores resultados foram obtidos para  $N = 3$ , os quais são apresentados na tabela ?? e figura ?. Nas figuras ?? e ?? discriminamos as componentes gaussianas para todas as energias analisadas.

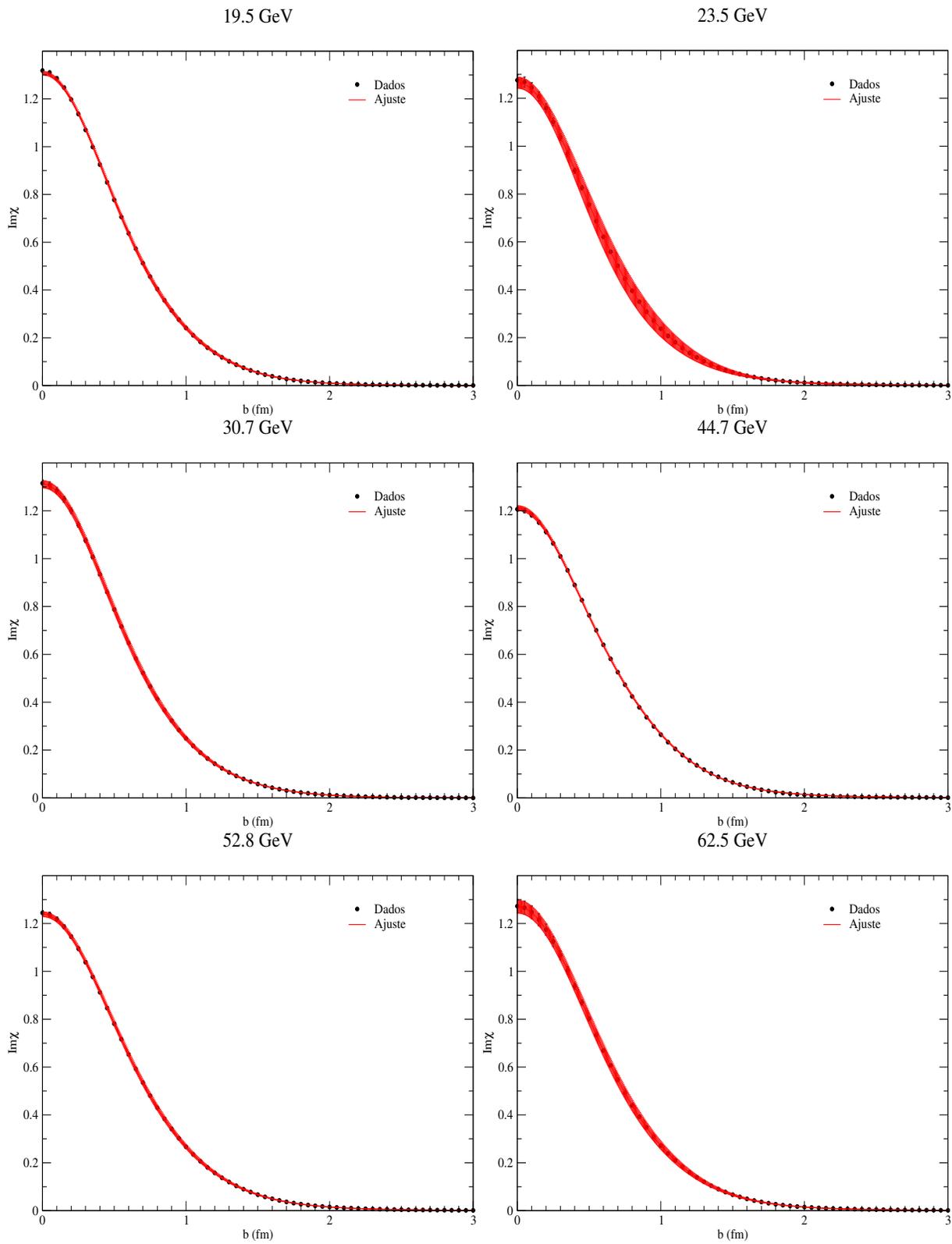


Figura 7.7: Ajuste da opacidade em  $b$ , conjunto (??), através da equação (??), para todas as energias analisadas.

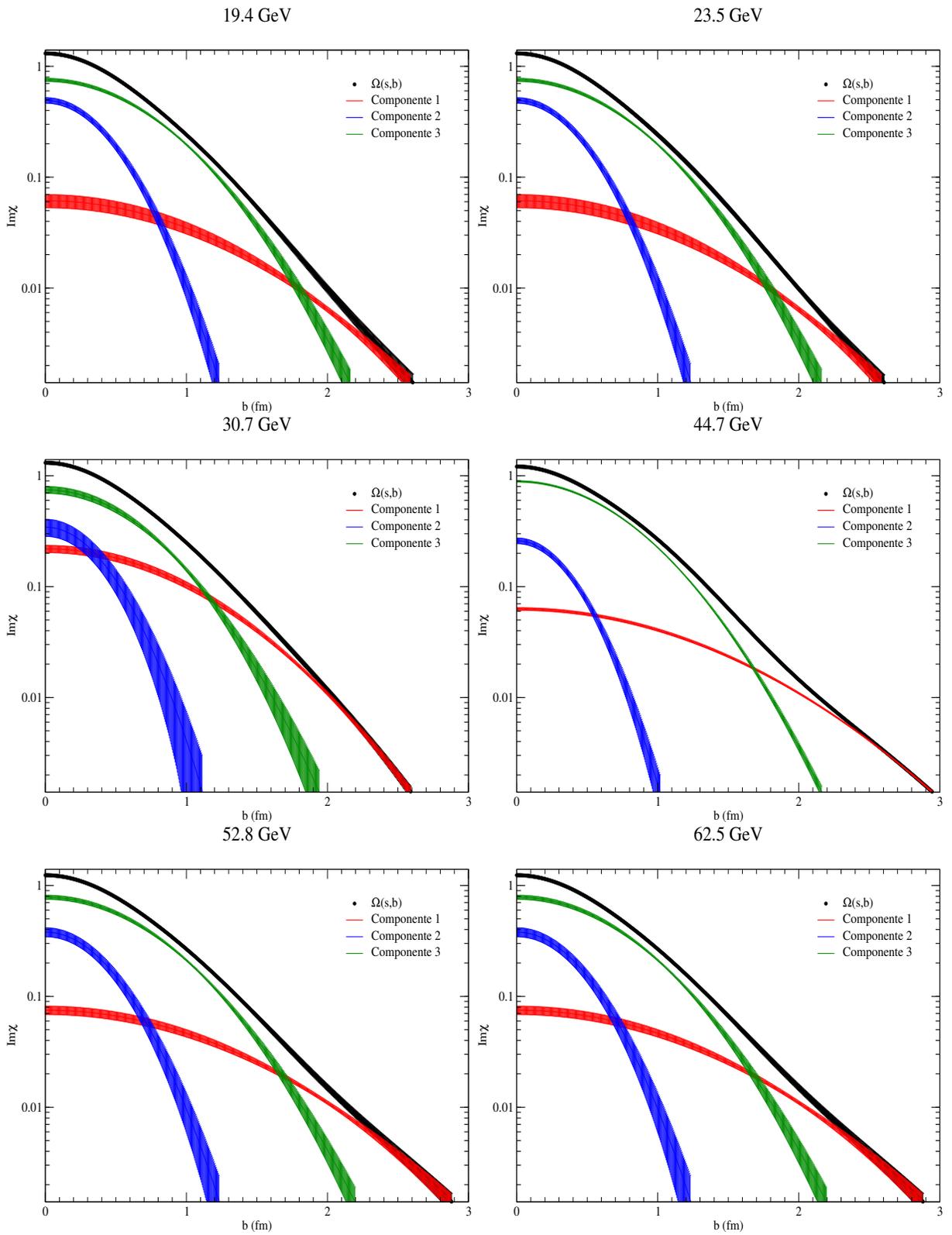


Figura 7.8: Opacidade em  $b$  e suas componentes em cada energia analisada.

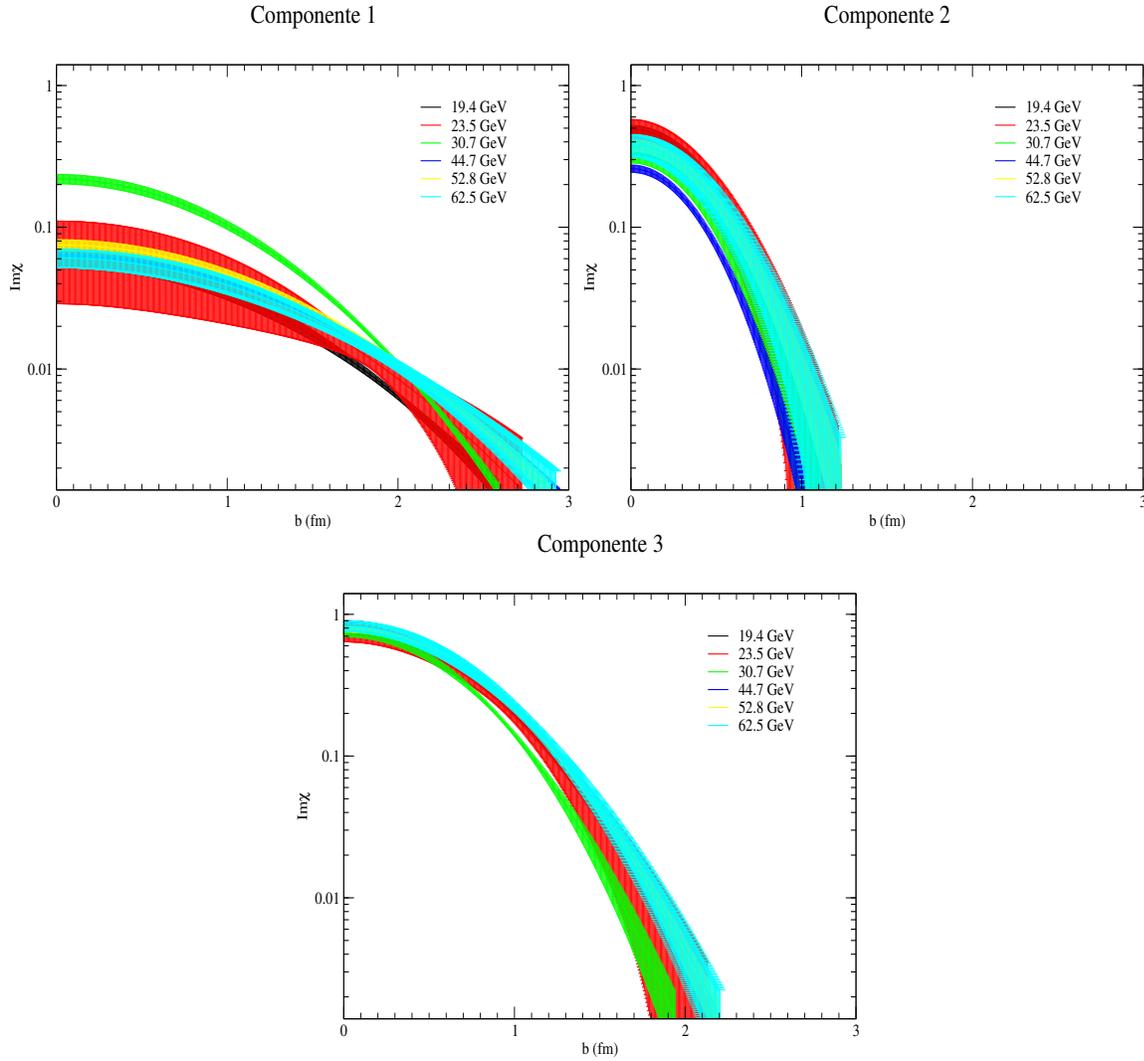


Figura 7.9: Cada uma das três componentes gaussianas da função opacidade em  $b$  para todas as energias analisadas.

Com isso, da equação (??) obtemos a opacidade em  $q$ ,

$$\tilde{\Omega}(s, q) = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{2\beta_i} e^{-\frac{q^2}{4\beta_i}}, \quad (7.14)$$

com as incertezas correspondentes,  $\Delta\tilde{\Omega}(s, q)$ , determinadas via propagação de erros.

Observamos que este método não foi utilizado por Menon e colaboradores em análises anteriores [?, ?, ?]. Discutimos esse assunto no apêndice D e retornamos a ele no capítulo 8.

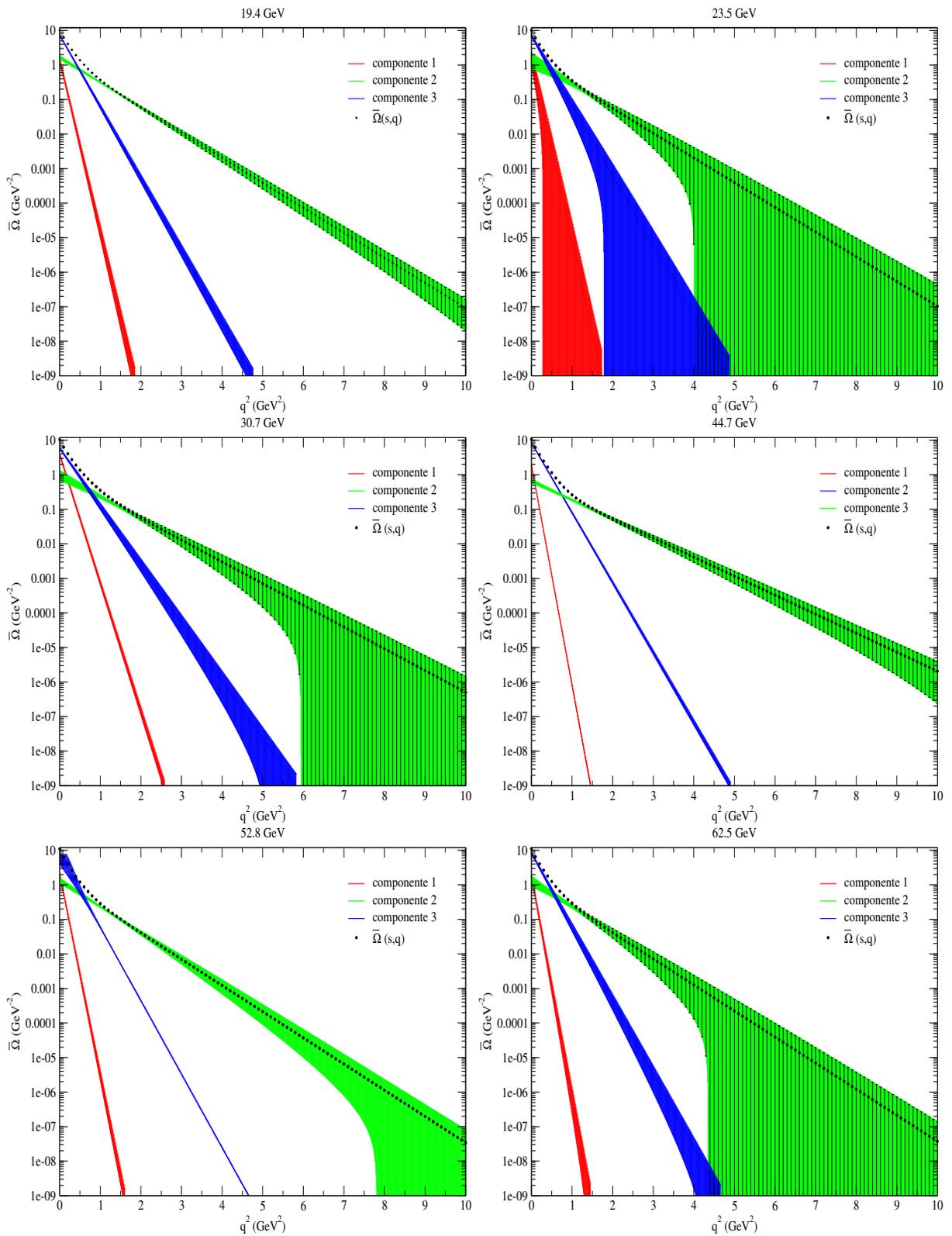


Figura 7.10: Opacidade em  $q^2$  e suas componentes gaussianas em cada energia analisada.

## Resultados Empíricos

Os resultados para  $\tilde{\Omega}(s, q)$ , juntamente com suas 3 componentes e regiões de incerteza, para todas energias analisadas, são mostradas na figura ???. Na figura ??, apresentamos cada componente separadamente, para cada energia analisada.

Os resultados indicam que para todas as energias a opacidade, no espaço de  $q^2$  é uma função positiva com decrescimento suave com o aumento do momento transferido e não apresenta nenhum zero (troca de sinal).

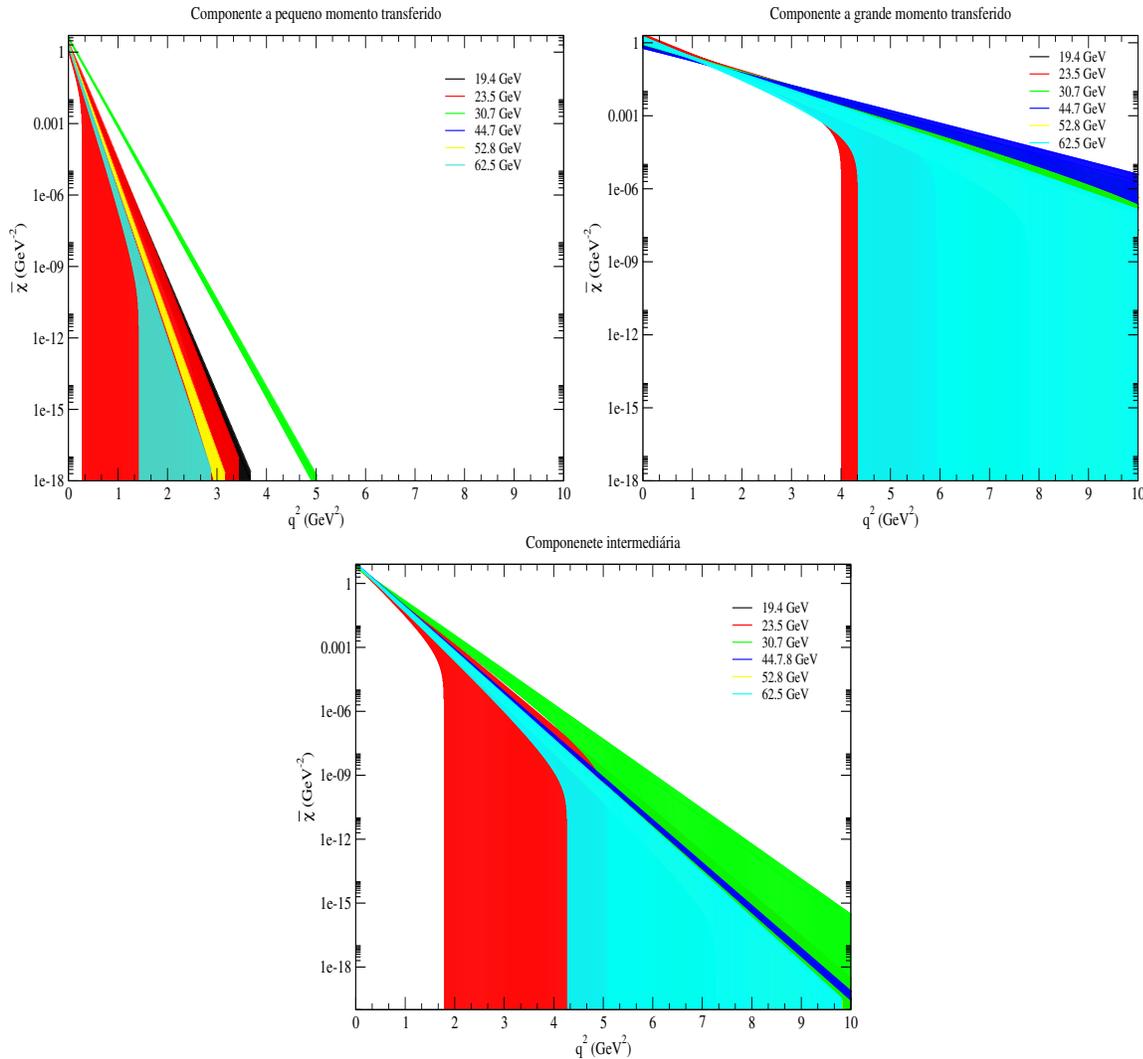


Figura 7.11: Cada uma das três componentes gaussianas da função opacidade em  $q^2$  para todas as energias analisadas.

Notando que a escala para a função opacidade nas figuras ??? e ??? é logarítmica e levando-se em conta as regiões de incerteza, podemos inferir as seguintes propriedades empíricas para as três componentes da função.

- Presença de praticamente uma única componente na região de grande momento transferido,  $q^2 \geq 5 \text{ GeV}^2$ , denotada componente 3 na figura ???.

- Contribuição de uma segunda componente na região de pequeno e médio momento transferido,  $q^2 = 0$  até  $q^2 \simeq 5 \text{ GeV}^2$ , denotada componente 2 na figura ??.
- Presença de uma componente somente na região de pequeno momento transferido,  $q^2 = 0$  a  $q^2 \simeq 2 \text{ GeV}^2$ , denotada componente 1 na figura ??.
- Na região de pequeno momento transferido,  $q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2$ , a contribuição 2 é dominante.



# Capítulo 8

## Discussão Geral dos Resultados

Neste capítulo, apresentamos uma discussão geral dos resultados obtidos, com foco em 2 aspectos: (1) comparação com análises empíricas anteriores (Sec. 8.1); (2) comparação com modelos fenomenológicos e discussão sobre possíveis interpretações físicas dos resultados (Sec. 8.2).

### 8.1 Comparação com Análises Empíricas Anteriores

Como mostrado na tabela ??, comparando com análises anteriores, os valores que obtivemos de  $\chi^2/gl$  são os mais próximos de 1.0, o que é estatisticamente esperado para o número de graus de liberdade das reduções.

As contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento para a seção de choque diferencial, figura ??, apresentam um predomínio da imaginária, exceto na região de médio momento transferido. Isso não ocorre nas análises anteriores, nas quais a contribuição real só excede a imaginária na região do mínimo difrativo (dip).

Como discutido no apêndice D, nossos resultados não verificam a condição D1 para aplicação do método de expansão e por essa razão utilizamos o método semi-analítico para a determinação da função opacidade no espaço de momento transferido.

As análises anteriores indicam um zero (troca de sinal) na opacidade no espaço de momento transferido, o que não ocorre em nossos resultados, figura ?. A esse respeito, entendemos que a evidência do zero está associado ao método de passagem de  $\Omega(s, b)$  para  $\tilde{\Omega}(s, q)$  (semi-analítico ou expansão). Como discutido no apêndice D isso depende do resultado da redução, isto é, das contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento (o que, a priori, não se conhece).

### 8.2 Modelos Fenomenológicos e Possíveis Interpretações Físicas

Como vimos, a função de recobrimento inelástica e a função opacidade ocupam um papel especial no contexto físico, uma vez que a primeira é associada à probabilidade de um evento inelástico ocorrer em um dado  $b$  e  $s$  e a segunda à absorção durante a colisão em termos de  $b$  e  $s$ . Por essa razão, focalizaremos a discussão nessas funções.

Tabela 8.1: Resultados numéricos empíricos e incertezas correspondentes para a função de recobrimento inelástica e opacidade no espaço de parâmetro de impacto e de momento transferido obtidas do espalhamento  $pp$  a 52.8 GeV.

$b(\text{fm})$	$G_{in}(b) \pm \Delta G_{in}$	$\Omega(b) \pm \Delta\Omega$	$q^2(\text{GeV}^2)$	$\tilde{\Omega}(q) \pm \Delta\tilde{\Omega} (\text{GeV}^2)$
0.0	$0.917 \pm 0.002$	$1.24 \pm 0.01$	0.0	$11.00 \pm 0.03$
0.2	$0.899 \pm 0.002$	$1.145 \pm 0.008$	0.4	$1.75 \pm 0.01$
0.4	$0.839 \pm 0.002$	$0.913 \pm 0.005$	0.8	$0.48 \pm 0.01$
0.6	$0.729 \pm 0.001$	$0.653 \pm 0.002$	1.2	$(1.85 \pm 0.09)10^{-1}$
0.8	$0.577 \pm 0.001$	$0.430 \pm 0.001$	1.6	$(8.4 \pm 0.8)10^{-2}$
1.0	$0.414 \pm 0.001$	$0.269 \pm 0.001$	2.0	$(4.1 \pm 0.6)10^{-2}$
1.2	$0.271 \pm 0.001$	$1.577 \pm 0.009)10^{-1}$	2.4	$(2.0 \pm 0.4)10^{-2}$
1.4	$0.164 \pm 0.001$	$(8.95 \pm 0.06)10^{-2}$	2.8	$(1.0 \pm 0.2)10^{-2}$
1.6	$(94.0 \pm 0.8)10^{-3}$	$(4.94 \pm 0.04)10^{-2}$	3.2	$(5 \pm 2)10^{-3}$
1.8	$(52.5 \pm 0.5)10^{-3}$	$(2.70 \pm 0.03)10^{-2}$	3.6	$(2.5 \pm 0.9)10^{-3}$
2.0	$(29.6 \pm 0.5)10^{-3}$	$(1.50 \pm 0.02)10^{-2}$	4.0	$(1.2 \pm 0.5)10^{-3}$
2.2	$(17.2 \pm 0.5)10^{-3}$	$(8.7 \pm 0.02)10^{-3}$	4.4	$(6 \pm 3)10^{-4}$
2.4	$(10.2 \pm 0.5)10^{-3}$	$(5.1 \pm 0.2)10^{-3}$	4.8	$(3 \pm 1)10^{-4}$
2.6	$(6.1 \pm 0.4)10^{-3}$	$(3.0 \pm 0.2)10^{-3}$	5.2	$(1.5 \pm 0.9)10^{-4}$
2.8	$(3.6 \pm 0.3)10^{-3}$	$(1.8 \pm 0.1)10^{-3}$	5.6	$(7 \pm 5)10^{-5}$
3.0	$(2.0 \pm 0.2)10^{-3}$	$(1.0 \pm 0.1)10^{-3}$	6.0	$(4 \pm 3)10^{-5}$
3.2	$(1.1 \pm 0.1)10^{-3}$	$(5.5 \pm 0.7)10^{-4}$	6.4	$(2 \pm 1)10^{-5}$
3.4	$(5.8 \pm 0.9)10^{-4}$	$(2.9 \pm 0.5)10^{-4}$	6.8	$(9 \pm 8)10^{-6}$
3.6	$(3.0 \pm 0.5)10^{-4}$	$(1.5 \pm 0.3)10^{-4}$	7.2	$(5 \pm 4)10^{-6}$
3.8	$(1.4 \pm 0.3)10^{-4}$	$(7 \pm 1)10^{-5}$	7.6	$(2 \pm 2)10^{-6}$
4.0	$(7 \pm 2)10^{-5}$	$(3.4 \pm 0.8)10^{-5}$	8.0	$(1 \pm 1)10^{-6}$
4.2	$(3.1 \pm 0.8)10^{-5}$	$(1.5 \pm 0.4)10^{-5}$	8.4	$(6 \pm 6)10^{-7}$
4.4	$(1.3 \pm 0.4)10^{-5}$	$(7 \pm 2)10^{-6}$	8.8	$(3 \pm 3)10^{-7}$
4.6	$(6 \pm 3)10^{-6}$	$(3 \pm 1)10^{-6}$	9.2	$(1 \pm 2)10^{-7}$
4.8	$(2.2 \pm 0.9)10^{-6}$	$(1.1 \pm 0.4)10^{-6}$	9.6	$(7 \pm 9)10^{-8}$
5.0	$(9 \pm 4)10^{-7}$	$(4 \pm 2)10^{-7}$	10.0	$(3 \pm 5)10^{-8}$

Na tabela ?? fornecemos, como ilustração, um conjunto de pontos empíricos com as correspondentes incertezas para as funções acima, no caso de interação  $pp$  a 52.8 GeV (melhor conjunto estatístico de dados). Resultados nas demais energias e em regiões mais detalhadas de  $b$  e  $q^2$ , poderão também ser disponibilizados, por solicitação de interessados. Acreditamos que esses “dados” possam ser úteis na seleção ou construção de grandezas de entrada em modelos fenomenológicos, por outros autores.

Embora não seja nosso objetivo efetuar uma comparação quantitativa com modelos eiconais, apresentamos a seguir alguns comentários qualitativos sobre o assunto e possíveis interpretações físicas.

Observamos que o caráter positivo da opacidade aqui extraída, isto é, ausência de troca de sinal (zero local), está de acordo, por exemplo, com os modelos geométricos (tipo Chou-Yang), de difração múltipla (tipo Glauber) e inspirados em QCD (Block et al., Luna et al.), uma vez que esses modelos utilizam parametrizações tipo dipolo (Sec. 3.4.5.b), não havendo, portanto, troca de sinal.

Por outro lado, alguns modelos eiconais apresentam um zero na opacidade, sendo exemplos o modelo de Bourrely, Soffer e Wu e alguns tipos de modelos de difração múltipla. Uma discussão detalhada sobre modelos com e sem zero é apresentada na Sec. 6 do trabalho de Ávila-Menon [?].

A seguir, apresentamos alguns comentários sobre possíveis interpretações físicas das três componentes da opacidade, gaussianas em  $q$  (ou exponenciais em  $q^2$ ).

Como vimos na seção 3.4.5, os modelos eiconais são caracterizados por diferentes escolhas fenomenológicas da opacidade no espaço de momento transferido. A estrutura (ou alicerce básico) desses modelos é bem exemplificada pela versão mais simples do modelo de Glauber [?, ?], no qual a opacidade é expressa por

$$\tilde{\chi}(s, q) = G_A G_B f, \quad (8.1)$$

onde  $G_A$  e  $G_B$  são os fatores de forma (hadrônicos) dos hádrons interagentes e  $f$  uma amplitude de espalhamento elementar média. Desse modo, diferentes componentes de  $\Omega(s, q)$  devem estar associadas a diferentes componentes dos fatores de forma e/ou amplitudes elementares.

De um modo global, os resultados empíricos obtidos para  $\Omega(s, b)$  (e também  $G_{in}(s, b)$ ) indicam uma elevada densidade ou absorção central, seguida por um decréscimo lento e assintótico (a zero) com o aumento de parâmetro de impacto. Nesse sentido, de um ponto de vista estritamente geométrico, parece razoável a visão de um hádron ser constituído por um caroço ou núcleo interno, envolto por uma nuvem evanescente. Como a opacidade é uma medida de absorção, podemos pensar que o efeito de interação das duas regiões acima, numa colisão de dois hádrons, deva resultar em diferentes contribuições de absorção. É claro que como se trata de espalhamento elástico (“grandes” distâncias), o fenômeno é essencialmente periférico e não é possível considerar uma interação frontal caroço-caroço, que deveria resultar num espalhamento inelástico profundo.

Entretanto, se pensarmos no campo ou potencial associado a essas regiões (caroço e nuvem) e considerarmos interações com um alcance periférico do campo (uma região “sente” a outra), não parece inconsistente identificar 3 tipos de interações: caroço-caroço, caroço-

nuvem e nuvem-nuvem. Essa, talvez, possa ser uma possível interpretação (geométrica) para as 3 componentes presentes na função opacidade.

No contexto geral da QCD, as considerações geométricas acima não parecem contradizer a visão de um hádron como constituído por quarks de valência (caroço), envoltos por uma nuvem (evanescente) de gluons.

No contexto fenomenológico, uma interpretação sugestiva para as 3 componentes pode ser obtida nos modelos eiconais inspirados na QCD, como os de Block et al. [?] e Luna et al. [?]. Nessa classe de modelos a opacidade é expressa como uma soma de 3 componentes, associadas às interações quark-quark, quark-gluon e gluon-gluon. Como comentado na Sec. 3.5.4.b, a contribuição  $gg$  é calculada via QCD (funções de estrutura), mas as outras duas  $qq$  e  $qg$  são estritamente fenomenológicas. Nesse sentido, nossos resultados empíricos poderão contribuir para uma escolha ou seleção adequada para esses processos elementares. Essa associação necessita entretanto de uma verificação quantitativa (comparação das opacidades fenomenológica e empírica).

Por último, discutimos uma conexão quantitativa também sugestiva entre as componentes gaussianas da opacidade (empírica) e resultados teóricos para as amplitudes elementares, obtidas via QCD na rede e modelo do vácuo estocástico [?, ?].

No contexto da QCD não perturbativa, a função de correlação gluônica entre dois pontos [?] pode ser determinada através de simulação numérica na rede, tanto no caso de aproximação *quenched* (ausência de férmions) como em *full QCD* (férmions dinâmicos incluídos). Martini, Menon e Thober, utilizando as funções de correlação calculadas por Di Giacomo e colaboradores [?] e fazendo o uso do modelo do vácuo estocástico [?], determinaram as correspondentes amplitudes de espalhamento elementares, no limite assintótico ( $s \rightarrow \infty$ ), tanto em aproximação *quenched* [?] como em *full QCD* [?].

Os resultados numéricos por eles obtidos para a amplitude normalizada,  $f(q^2)/f(q^2 = 0)$  são apresentados nas figuras ?? (quenched) e ?? (full QCD) e mostram um decréscimo monotônico com o aumento do momento transferido, sem troca de sinal (zero local). Esses dados numéricos foram parametrizados por funções analíticas e os melhores resultados foram obtidos com soma de gaussianas em  $q$  com centro na origem [?]:

$$\frac{f(q^2)}{f(q^2 = 0)} = \sum_{i=1}^n \mu_i e^{-\nu_i q^2}. \quad (8.2)$$

As parametrizações apresentaram  $n = 3$  componentes no caso *quenched* e  $n = 4$  componentes em *full QCD* e são também mostradas nas figuras ?? e ??.

No contexto do modelo de Glauber, essas amplitudes relacionam-se com a função opacidade através da equação (?). Comparando com nossos resultados empíricos para  $\tilde{\Omega}(s, q)$ , figuras ?? e ??, podemos identificar uma compatibilidade quantitativa razoável.

Uma possível aplicação desse conjunto de resultados seria, por exemplo, a partir dos resultados empíricos para  $\tilde{\Omega}$  e teóricos para  $f(q)/f(0)$  extrair o fator de forma hadrônico,  $G$ , através da equação (?). Entretanto, devemos observar que esse seria um resultado *indicativo*, uma vez que as amplitudes teóricas são normalizadas e determinadas no limite assintótico ( $s \rightarrow \infty$ ).

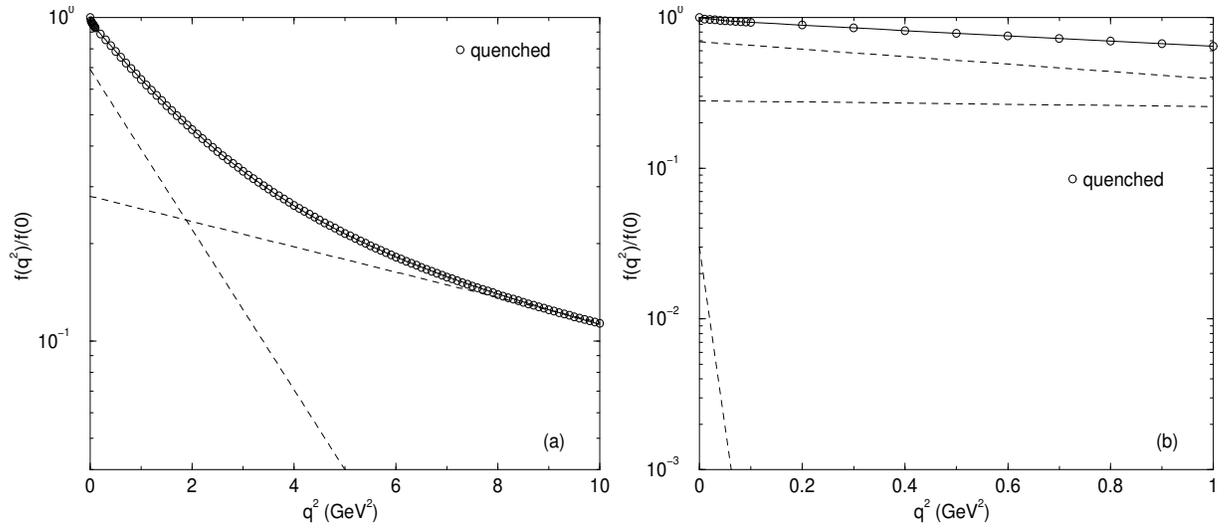


Figura 8.1: Amplitude elementar calculada via cálculo na rede e modelo de vácuo estocástico (aproximação quenched) e componentes (parametrização (??)) [?].

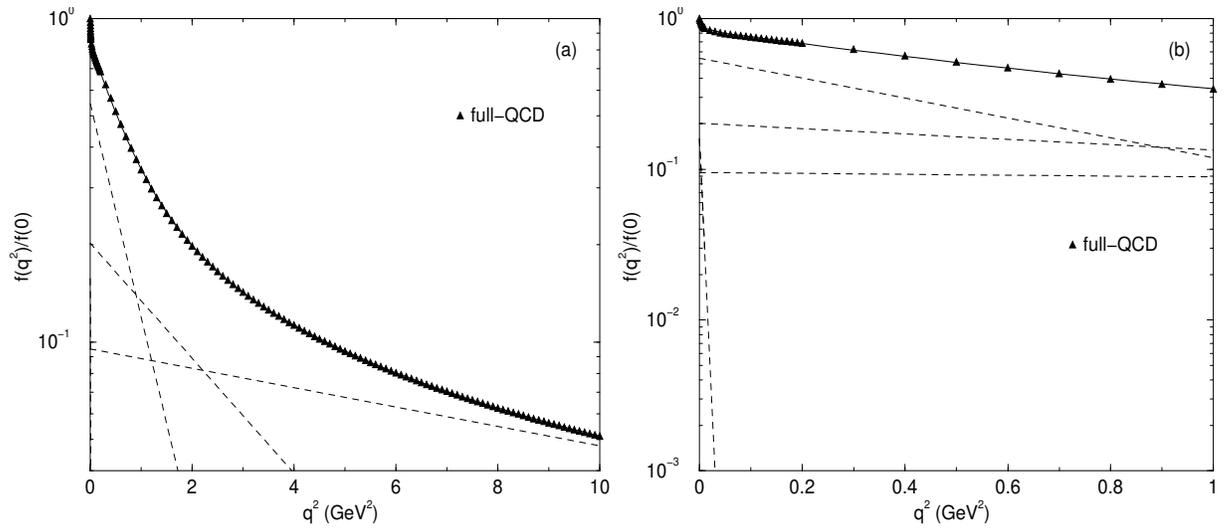


Figura 8.2: Amplitude elementar calculada via cálculo na rede e modelo de vácuo estocástico (full QCD) e componentes (parametrização (??)) [?].

De modo geral, acreditamos que as conexões quantitativas são sugestivas e que podem abrir novos caminhos para investigações futuras.



# Capítulo 9

## Conclusões e Observações Finais

Neste trabalho, apresentamos inicialmente uma revisão sobre a formulação das representações de parâmetro de impacto e eiconal, via óptica clássica e via mecânica quântica, no limite de altas energias e no contexto da aproximação semiclássica.

Através de uma nova parametrização analítica e empírica para a amplitude de espalhamento, realizamos vários testes de redução dos dados experimentais de seção de choque diferencial próton-próton nas mais altas energias, com dados experimentais disponíveis (incluindo a região de grande momento transferido):  $\sqrt{s} = 19.4, 23.5, 30.7, 44.7, 52.8$  e  $62.5$  GeV. Selecionamos como melhor resultado, aquele obtido a partir de outras parametrizações, com intervalo de confiança dos erros dos parâmetros livres fixo em 70% (tabela 6.1 e figura 6.3).

Comparados com análises anteriores [?, ?], nossos ajustes apresentaram o melhor resultado estatístico, em termos de  $\chi^2/gl$  e intervalo de confiança (tabela 6.2).

Com relação às contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento na seção de choque diferencial, os resultados indicam um predomínio da parte imaginária sobre a real, exceto na região de médio momento transferido ( $2 \sim 6$  GeV<sup>2</sup>) (figura ??).

Para todas as energias analisadas, a parte real da amplitude de espalhamento apresenta um zero (troca de sinal) a pequeno momento transferido e a parte imaginária, dois zeros, exceto na energia de 62.5 GeV, caracterizado por um zero e um segundo mínimo (ou mudança de curvatura).

Com esse resultado de ajuste, passamos à determinação empírica das funções de perfil, recobrimento inelástica e eiconal (nos espaços de parâmetro de impacto e momento transferido), juntamente com as regiões de incerteza, determinadas via propagação de erros da matriz de erro (variâncias e covariâncias).

Como mostrado na figura ??, a parte real da função de perfil apresenta uma mudança de curvatura na região  $\sim 0.5$ - $0.8$  fm e a parte imaginária é caracterizada, em média, por um crescimento com a energia (por valores negativos) e uma mudança de curvatura, cuja posição em  $b$  aumenta com a energia, de  $\sim 0.5$  a  $\sim 0.8$  fm.

A função de recobrimento inelástica, figura ??, apresenta um crescimento periférico com região central constante entre as energias extremas do ISR (23.5 e 62.5 GeV). Sua dependência em função do parâmetro de impacto pode ser descrita por uma gaussiana com centro na origem somente até  $b \sim 2.0$  fm. A partir deste ponto, o decréscimo é

mais lento que a distribuição gaussiana, indicando um efeito periférico de absorção (no canal inelástico).

No espaço de parâmetro de impacto, a parte real da eiconal, figura ??, apresenta, em média, um crescimento com a energia, exceto a  $\sqrt{s} = 19.4$  GeV (provavelmente devido a normalização de dados). A parte imaginária apresenta comportamento análogo à função de recobrimento inelástica, devido à equação (??).

A determinação da opacidade (parte imaginária da eiconal) no espaço de momento transferido foi realizada através do método semi-analítico. Com esse procedimento, identificamos 3 componentes para a opacidade, gaussianas em  $q$  (ou exponenciais em  $q^2$ ).

Discutimos algumas interpretações físicas possíveis para essas componentes no contexto geométrico e conexões sugestivas com a QCD e fizemos uma comparação preliminar com alguns modelos fenomenológicos.

Levando-se em conta as incertezas nas várias grandezas determinadas, não foi possível extrair uma dependência energética para os parâmetros de ajuste. Em parte, isso foi devido à proximidade das energias analisadas (6 conjuntos de dados na região  $\sim 20 - 60$  GeV). Deve-se também observar que essa região corresponde ao início de crescimento da seção de choque total, isto é, uma região caracterizada por uma mudança de curvatura e não de crescimento estável (ou monotônico) dos dados. É de se esperar que os dados a serem obtidos no RHIC,  $\sqrt{s} \sim 200$  GeV e no LHC,  $\sqrt{s} = 14$  TeV, possibilitem o estudo dos parâmetros livres (ou parametrizações) em função da energia.

Como comentado e discutido, a redução de dados experimentais analisados neste trabalho é um problema **não trivial** e o que obtivemos foi uma solução: a que apresentou o melhor resultado estatístico se comparado com as análises anteriores.

Esperamos que os resultados empíricos obtidos neste trabalho possam contribuir com o desenvolvimento de novas soluções para o problema inverso do espalhamento elástico de hádrons, bem como com o desenvolvimento de modelos fenomenológicos que apresentam conexões com a QCD.

# Apêndice A

## Variante 1.

### Ajuste por Região a 52.8 GeV e Extensão às Demais Energias com IC variável

Nesta variante (UP=1), partimos de uma análise detalhada dos dados experimentais a 52.8 GeV e efetuamos extensões às demais energias, como explicado nas duas subseções que seguem.

### A.1 Análise do Espalhamento Próton-Próton a $\sqrt{s} = 52.8$ GeV.

Em projeto anterior, de Iniciação Científica, utilizando a parametrização ?? e o programa CERN-Minuit [?], efetuamos a redução dos dados da seção de choque diferencial  $pp$  a 52.8 GeV através do método descrito a seguir.

Uma vez que não se tem nenhuma informação das contribuições das partes real e imaginária da amplitude fora da região frontal, iniciamos procurando o melhor resultado com todas as possibilidades de contribuições. Denotando cada teste  $(m,n)$ , onde  $m$  e  $n$  são os números de termos (funções exponenciais) das partes real e imaginária, respectivamente, realizamos testes com:

$$(m, n) = (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), \text{ etc...}$$

Iniciamos o ajuste considerando somente os dados experimentais até  $q_{max}^2 = 0.5$  GeV<sup>2</sup> e  $(m, n) = (0, 1)$  (pico difrativo). Nesse caso  $c_1$  é explicitamente determinado restando apenas  $d_1$ , que é determinado pelo ajuste (CERN-Minuit), com valor inicial estimado pelo gráfico (inclinação da reta). Para  $(m, n) = (1, 1)$ , nós temos 2 parâmetros livres e utilizamos como valor de entrada de  $d_1$  o valor obtido anteriormente para  $(m, n) = (0, 1)$ . Continuamos adicionando uma exponencial de cada vez até obter o menor  $\chi^2/\text{gl}$  (diminuição dos valores até que apresente um valor maior que o anterior).

Obtendo o melhor resultado, adicionamos os dados até  $q_{max}^2 = 2.0$  GeV<sup>2</sup> e com o mesmo procedimento, obtemos o melhor valor de  $\chi^2/\text{gl}$  para os parâmetros livres. Por último adicionamos os dados até  $q_{max}^2 = 9.8$  GeV<sup>2</sup>, repetindo o teste. Este mesmo teste foi feito começando de diferentes regiões do momento transferido até obtermos o melhor resultado estatístico em termos de  $\chi^2/\text{gl}$ .

Tabela A.1: Parâmetros das partes real e imaginária do resultado de ajuste. Todos os parâmetros estão em  $\text{GeV}^{-2}$  e  $gl$  é o número de graus de liberdade.

		23.5	30.7	44.7	52.8	62.5
parte real	$a_1$	5628 $\pm 22$	1750 $\pm 61$	97 $\pm 17$	51.7 $\pm 2.3$	9172 $\pm 64$
	$b_1$	7.48303 $\pm 0.00034$	7.19473 $\pm 0.00081$	7.763 $\pm 0.019$	8.093 $\pm 0.035$	7.9961 $\pm 0.0006$
	$a_2$	-2366 $\pm 12$	-1750 $\pm 61$	-15.85 $\pm 0.82$	-34.85 $\pm 0.92$	-4006 $\pm 36$
	$b_2$	7.34067 $\pm 0.00066$	7.21827 $\pm 0.00087$	6.194 $\pm 0.034$	6.604 $\pm 0.019$	7.8690 $\pm 0.0011$
	$a_3$	-3261 $\pm 19$	-	-80 $\pm 17$	-16.2 $\pm 1.4$	-5165 $\pm 53$
	$b_3$	7.57718 $\pm 0.00053$	-	7.658 $\pm 0.022$	9.75 $\pm 0.13$	8.0891 $\pm 0.0009$
parte imaginária	$c_1$	-716 $\pm 29$	-1631 $\pm 54$	-230.3 $\pm 7.3$	-81.0 $\pm 2.7$	-47.3 $\pm 2.3$
	$d_1$	4.84017 $\pm 0.00079$	5.07890 $\pm 0.00032$	4.9851 $\pm 0.0019$	4.9092 $\pm 0.0050$	4.984 $\pm 0.011$
	$c_2$	724 $\pm 29$	1639 $\pm 54$	238.8 $\pm 7.3$	89.6 $\pm 2.7$	56.1 $\pm 2.3$
	$d_2$	4.86058 $\pm 0.00086$	5.08952 $\pm 0.00037$	5.0482 $\pm 0.0020$	5.0771 $\pm 0.0051$	5.243 $\pm 0.010$
	$c_3$	$5.37 \times 10^{-2}$ $\pm 0.14 \times 10^{-2}$	$5.24 \times 10^{-2}$ $\pm 0.12 \times 10^{-2}$	0.0536 $\pm 0.0014$	0.0574 $\pm 0.0011$	$4.68 \times 10^{-2}$ $\pm 0.14 \times 10^{-2}$
	$d_3$	1.027 $\pm 0.015$	1.081 $\pm 0.016$	1.062 $\pm 0.015$	1.055 $\pm 0.010$	1.008 $\pm 0.014$
	$c_4$	$1.41 \times 10^{-3}$ $\pm 0.18 \times 10^{-3}$	$2.15 \times 10^{-3}$ $\pm 0.23 \times 10^{-3}$	$1.85 \times 10^{-3}$ $\pm 0.21 \times 10^{-3}$	$1.37 \times 10^{-3}$ $\pm 0.14 \times 10^{-3}$	$1.41 \times 10^{-3}$ $\pm 0.16 \times 10^{-3}$
	$d_4$	0.392 $\pm 0.012$	0.430 $\pm 0.011$	0.416 $\pm 0.011$	0.388 $\pm 0.010$	0.392 $\pm 0.011$
N. pontos	173	212	247	245	164	
$\chi^2/gl$	1.77	3.79	1.88	1.55	1.18	
$\chi^2/gl$ [?]	1.20	1.24	2.05	1.71	1.22	

Um segundo procedimento foi desenvolvido adicionando-se os dados a 27.4 GeV (cobrindo a região  $5.5 \leq q^2 \leq 14.2$  GeV), testando-se também diferentes contribuições das partes real e imaginária, até obtermos o menor  $\chi^2/gl$ , obtendo assim o melhor ajuste a 52.8 GeV. Os resultados dessa análise, junto com a função de perfil extraída, foram publicados em [?].

Com esse resultado, passamos ao estudo das demais energias do ISR.

## A.2 Extensão do Ajuste às Demais Energias.

Utilizamos os valores dos parâmetros livres obtidos anteriormente, a 52.8 GeV, como **valores de entrada** no programa CERN-minuit para as energias mais próximas, 62.5 e 44.7 GeV. Com o resultado a 44.7 GeV utilizamos o mesmo procedimento a 30.7 e daí a 23.5 GeV.

Os resultados são apresentados na tabela ?? e figura ?. Apesar de todos os detalhes do procedimento, o resultado estatístico possui baixo intervalo de confiança, sendo o  $\chi^2/gl$  nas energias de 23.5 e 30.7 GeV superior ao obtido em análise anterior [?], como mostrado na tabela ?. Em especial,  $\chi^2/gl \sim 3.8$  em  $\sqrt{s} = 30.7$  GeV.

Por essa razão, procuramos ajustes a partir de outras possibilidades para os valores iniciais dos parâmetros de ajuste (mantendo UP=1 e IC variável), como discutido na apêndice B.

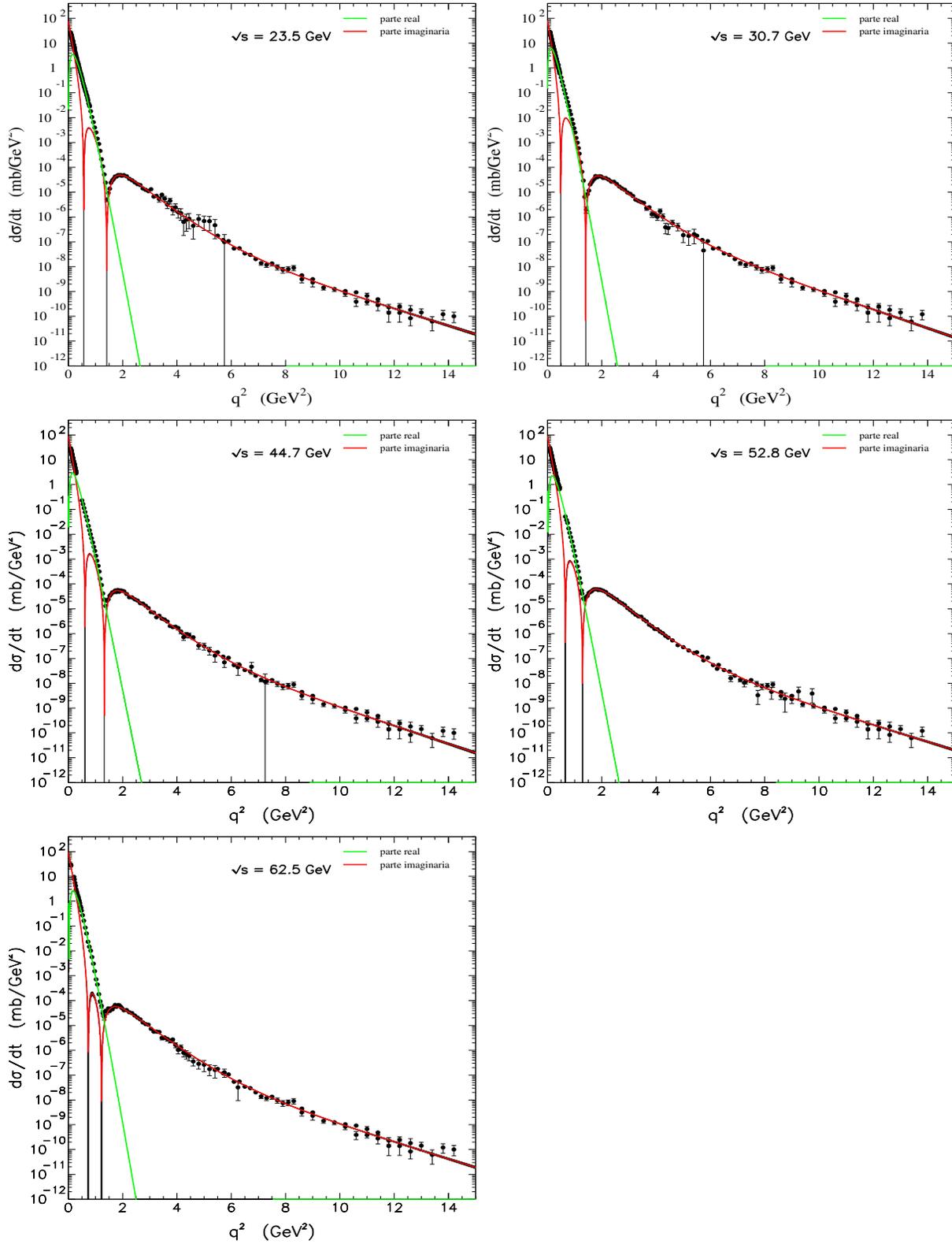


Figura A.1: Contribuições para a seção de choque diferencial das partes  $\text{Re}F(s, q)$  e  $\text{Im}F(s, q)$  com suas regiões de incerteza.

# Apêndice B

## Variante 2.

### Valores Iniciais a Partir de Outros Resultados com IC Variável

Na redução dos dados experimentais, realizada anteriormente por Menon e colaboradores [?, ?], foi utilizada uma parametrização empírica na forma ???. Testamos utilizar como **valores iniciais** dos parâmetros livres em nossos ajustes os valores finais obtidos por esses autores [?], mantendo a condição UP=1 (IC variável). Os resultados obtidos com esse procedimento são apresentados na tabela ?? e figura ??.

Embora o resultado seja razoável, o  $\chi^2/gl$  a 44.7 GeV é superior ao da análise anterior e em média os intervalos de confiança ( $\chi^2/gl$ ) são baixos.

Tabela B.1: Parâmetros das partes real e imaginária do resultado de ajuste. Todos os parâmetros estão em  $\text{GeV}^{-2}$  e  $gl$  é o número de graus de liberdade.

	23.5	30.7	44.7	52.8	62.5		
parte real	$a_1$	-0.04 $\pm 0.40$	-0.023 $\pm 0.090$	-0.037 $\pm 0.094$	-0.043 $\pm 0.087$	-0.020 $\pm 0.097$	
	$b_1$	0.870 $\pm 0.034$	0.776 $\pm 0.012$	0.871 $\pm 0.011$	0.91138 $\pm 0.0085$	0.758 $\pm 0.012$	
	$a_2$	0.19854 $\pm 0.0063$	0.3677 $\pm 0.0012$	0.5664 $\pm 0.0014$	0.7230 $\pm 0.0013$	0.8615 $\pm 0.0011$	
	$b_2$	2.151 $\pm 0.076$	2.620 $\pm 0.023$	3.087 $\pm 0.027$	3.252 $\pm 0.024$	4.28 $\pm 0.11$	
	parte imaginária	$c_1$	-3.57 $\pm 0.43$	-106.08 $\pm 0.14$	188.74 $\pm 0.44$	-141.12 $\pm 0.27$	-128.27 $\pm 0.59$
		$d_1$	2.176 $\pm 0.014$	2.34464 $\pm 0.00011$	3.03702 $\pm 0.00018$	2.76763 $\pm 0.00019$	2.72623 $\pm 0.00049$
$c_2$		381.77 $\pm 0.22$	3.728 $\pm 0.014$	0.862 $\pm 0.019$	2.084 $\pm 0.020$	1.986 $\pm 0.046$	
$d_2$		2.84461 $\pm 0.00059$	8.580 $\pm 0.048$	19.93 $\pm 0.49$	13.28 $\pm 0.13$	14.07 $\pm 0.29$	
$c_3$		12.20 $\pm 0.18$	239.17 $\pm 0.11$	241.12 $\pm 0.43$	227.16 $\pm 0.25$	223.60 $\pm 0.55$	
$d_3$		3.968 $\pm 0.062$	2.471757 $\pm 0.000078$	3.11473 $\pm 0.00014$	2.87503 $\pm 0.00011$	2.84716 $\pm 0.00031$	
$c_4$		-384.94 $\pm 0.22$	-212.648 $\pm 0.048$	-91.092 $\pm 0.069$	-118.216 $\pm 0.073$	-135.25 $\pm 0.18$	
$d_4$		2.86310 $\pm 0.00054$	2.707860 $\pm 0.000097$	3.73855 $\pm 0.00079$	3.22926 $\pm 0.00040$	3.19041 $\pm 0.00090$	
$c_5$		2.50 $\pm 0.24$	84.033 $\pm 0.032$	46.387 $\pm 0.047$	38.814 $\pm 0.041$	46.79 $\pm 0.11$	
$d_5$		10.03 $\pm 0.57$	2.99585 $\pm 0.00037$	4.4309 $\pm 0.0022$	3.9298 $\pm 0.0020$	3.8221 $\pm 0.0037$	
$c_6$		$1.49 \times 10^{-3}$ $\pm 0.36 \times 10^{-3}$	$1.20 \times 10^{-3}$ $\pm 0.15 \times 10^{-3}$	$1.68 \times 10^{-3}$ $\pm 0.18 \times 10^{-3}$	$1.79 \times 10^{-3}$ $\pm 0.16 \times 10^{-3}$	$-1.11 \times 10^{-3}$ $\pm 0.17 \times 10^{-3}$	
$d_6$		0.394 $\pm 0.023$	0.376 $\pm 0.011$	0.405 $\pm 0.011$	0.4098 $\pm 0.0092$	0.3701 $\pm 0.014$	
N. pontos		173	212	247	245	164	
$\chi^2/gl$		1.15	1.09	2.16	1.68	1.16	
$\chi^2/gl$ [?]	1.20	1.24	2.05	1.71	1.22		

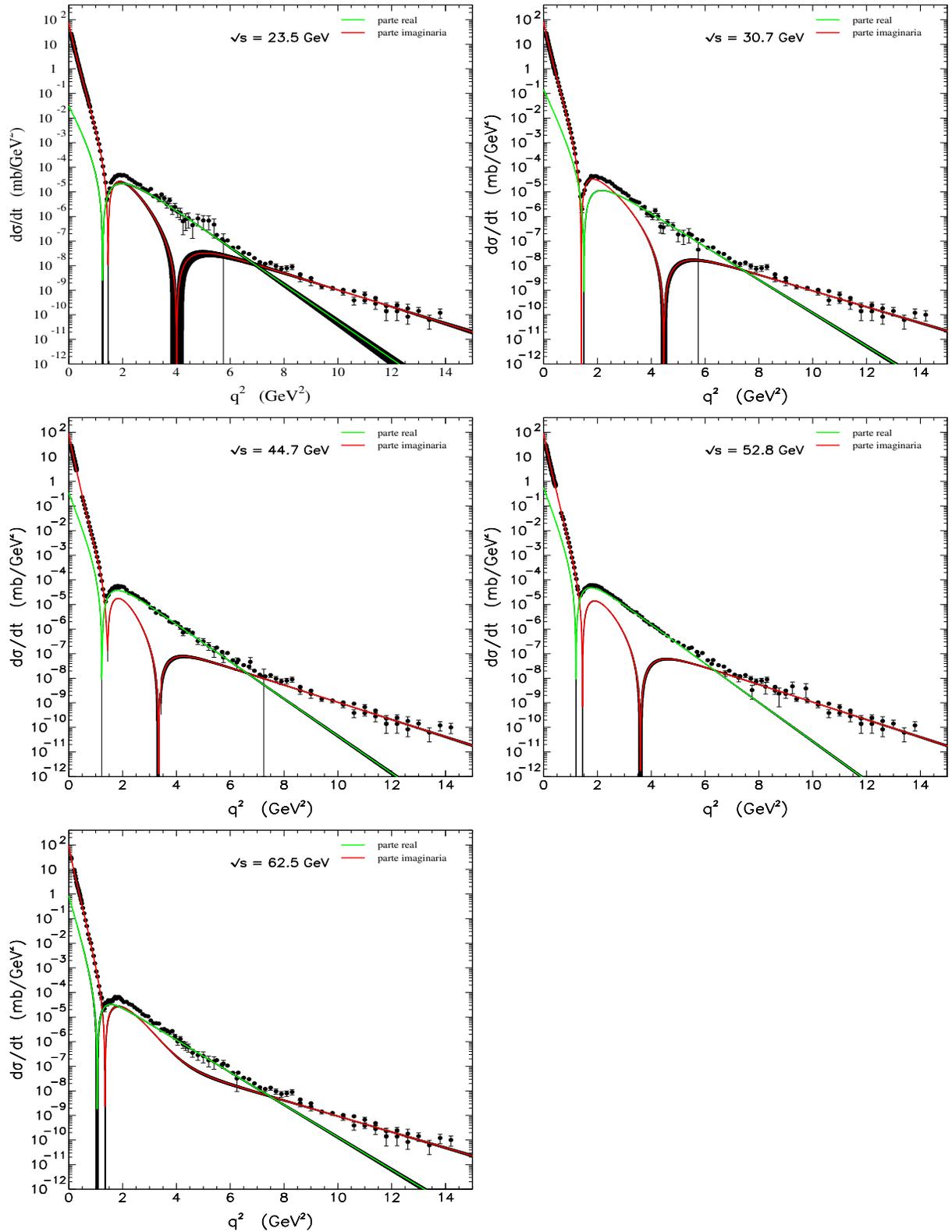


Figura B.1: Contribuições para a seção de choque diferencial das partes  $ReF(s, q)$  e  $ImF(s, q)$  com suas regiões de incerteza.



# Apêndice C

## Variante 3.

### Ajuste por Região a 52.8 GeV e Extensão às Demais Energias com IC=70%

Neste caso a única diferença em relação à Variante 1 (Apêndice A) é o UP variável e IC fixo em 70%. Também, os dados a 19.4 GeV foram incluídos nesta análise.

Os resultados dos ajustes são apresentados na tabela ?? e figura ?. Comparando as figuras ?? e ?? e tabelas ?? e ?? observamos que não houve uma mudança significativa no padrão dos ajustes (up = 1 e up variável) somente um aumento na região de incerteza.

Os resultados nas energias 19.4, 30.7, 44.7 e 52.8 GeV ( $\chi^2/gl$ ) estão fora do intervalo de confiança de 98% [?]. Além disso, como mostrado na figura C.2, a parte imaginária da função de perfil a 30.7 GeV apresenta sinal oposto ao das demais energias. Verificamos também que a eiconal no espaço de  $q$ , correspondente a esse resultado, apresenta componentes negativas, de significado físico duvidoso.

Tabela C.1: Parâmetros das partes real e imaginária do resultado de ajuste. Todos os parâmetros estão em  $\text{GeV}^{-2}$  e  $gl$  é o número de graus de liberdade.

	19.4	23.5	30.7	44.7	52.8	62.5
$a_1$	5168 $\pm 34$	5489 $\pm 85$	1730 $\pm 210$	18.6 $\pm 2.7$	51.7 $\pm 6.2$	2780 $\pm 150$
$b_1$	7.43058 $\pm 0.00055$	7.4862 $\pm 0.0013$	7.1947 $\pm 0.0028$	8.09 $\pm 0.24$	8.09 $\pm 0.13$	8.0228 $\pm 0.0077$
$a_2$	-1238.3 $\pm 9.3$	-2182 $\pm 42$	-1730 $\pm 210$	-18.0 $\pm 2.7$	-34.8 $\pm 3.4$	-1226 $\pm 80$
$b_2$	7.1578 $\pm 0.0019$	7.3353 $\pm 0.0027$	7.2188 $\pm 0.0031$	6.25 $\pm 0.11$	6.604 $\pm 0.072$	7.787 $\pm 0.014$
$a_3$	-3930 $\pm 33$	-3307 $\pm 74$	-	-	-16.2 $\pm 5.2$	-1550 $\pm 120$
$b_3$	7.51291 $\pm 0.00068$	7.5767 $\pm 0.0020$	-	-	9.75 $\pm 0.50$	8.190 $\pm 0.012$
$c_1$	-5200 $\pm 120$	-570 $\pm 88$	-1520 $\pm 170$	-148 $\pm 19$	-80 $\pm 10$	-70 $\pm 14$
$d_1$	3.99471 $\pm 0.000072$	4.8389 $\pm 0.0037$	5.0777 $\pm 0.0012$	4.968 $\pm 0.011$	4.909 $\pm 0.019$	5.024 $\pm 0.034$
$c_2$	5200 $\pm 120$	579 $\pm 88$	1530 $\pm 170$	157 $\pm 19$	90 $\pm 10$	79 $\pm 14$
$d_2$	3.99892 $\pm 0.00013$	4.8645 $\pm 0.0040$	5.0891 $\pm 0.0014$	5.065 $\pm 0.012$	5.077 $\pm 0.019$	5.204 $\pm 0.031$
$c_3$	8.42 $\pm 0.33$	0.0536 $\pm 0.0051$	0.0525 $\pm 0.0043$	0.0536 $\pm 0.0050$	0.0574 $\pm 0.0043$	0.0467 $\pm 0.0052$
$d_3$	3.117 $\pm 0.015$	1.026 $\pm 0.056$	1.082 $\pm 0.056$	1.062 $\pm 0.056$	1.055 $\pm 0.038$	1.008 $\pm 0.057$
$c_4$	$1.35 \times 10^{-2}$ $\pm 0.075 \times 10^{-2}$	$1.41 \times 10^{-3}$ $\pm 0.66 \times 10^{-3}$	$2.17 \times 10^{-3}$ $\pm 0.79 \times 10^{-3}$	$1.85 \times 10^{-3}$ $\pm 0.77 \times 10^{-3}$	$1.37 \times 10^{-3}$ $\pm 0.51 \times 10^{-3}$	$1.41 \times 10^{-3}$ $\pm 0.64 \times 10^{-3}$
$d_4$	0.6027 $\pm 0.0074$	0.392 $\pm 0.046$	0.431 $\pm 0.038$	0.416 $\pm 0.042$	0.388 $\pm 0.038$	0.392 $\pm 0.044$
N. pontos	314	173	212	247	245	164
$\chi^2/gl$	2.53	1.77	3.79	1.87	1.55	1.18
$\chi^2/gl$ [?]	2.76	1.20	1.24	2.05	1.71	1.22
up	14.02	14.02	11.78	11.78	14.02	14.02

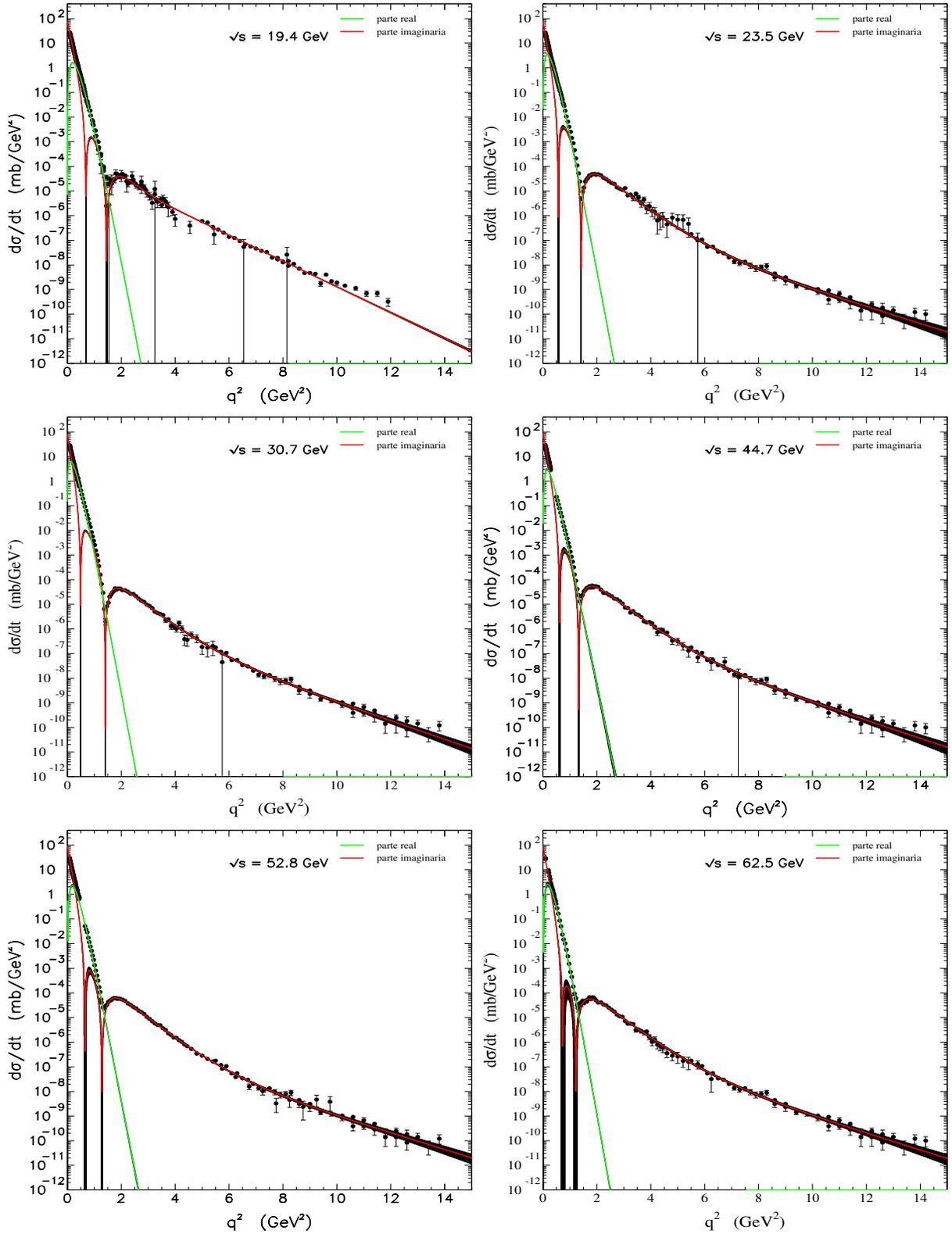


Figura C.1: Contribuições para a seção de choque diferencial das partes  $\text{Re}F(s, q)$  e  $\text{Im}F(s, q)$  com suas regiões de incerteza.

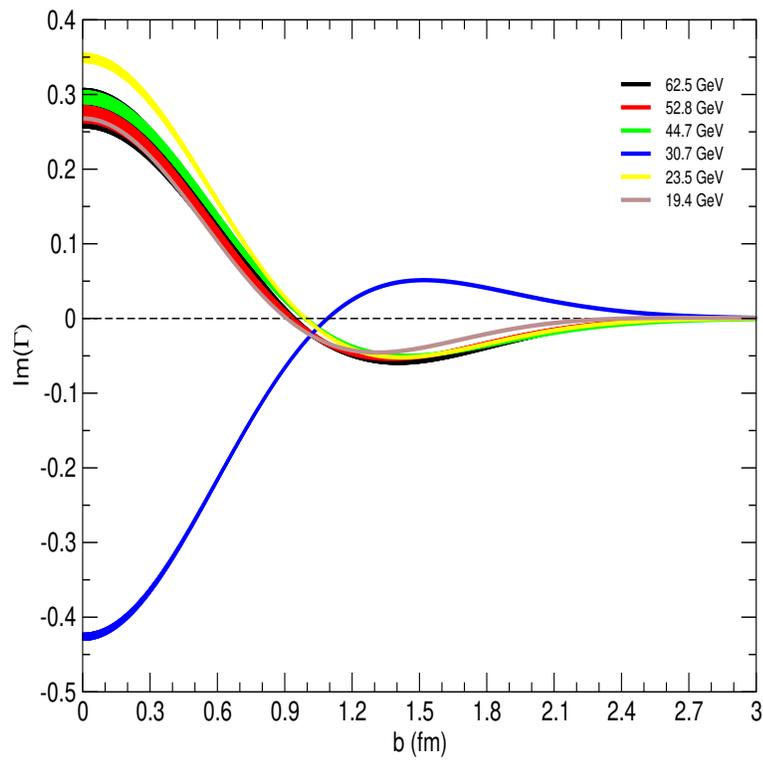


Figura C.2: Parte imaginária da função de perfil através da variante 3.

# Apêndice D

## Método Semi-Analítico e Método de Expansão

O *método semi-analítico* para o cálculo de  $\tilde{\Omega}(s, q) \pm \Delta\tilde{\Omega}$ , discutido na Sec. 7.3.2, não foi utilizado nas análises anteriores de Menon e colaboradores [?, ?, ?]. O método por eles utilizado, corresponde a um caso particular do *método semi-analítico*, que denominaremos *método de expansão* e que consiste no seguinte.

Da equação ?? para  $\Omega(s, b)$  em termos de  $Re\Gamma$  e  $Im\Gamma$ , vemos que se

$$\frac{Im\Gamma^2}{(1 - Re\Gamma)^2} \ll 1, \quad (D.1)$$

pode-se aproximar [?, ?]

$$\Omega(s, b) \approx \ln \left[ \frac{1}{1 - Re\Gamma(s, b)} \right]. \quad (D.2)$$

Expandindo-se essa função, o resultado pode ser colocado na forma

$$\Omega(s, b) = Re\Gamma(s, b) + R(s, b), \quad (D.3)$$

onde a função  $R(s, b)$  é o resto da série após o termo de primeira ordem. Ao aplicar a transformada de Fourier determinamos a eiconal em  $q$  [?, ?]

$$\tilde{\Omega}(s, q) = ImF(s, q) + \tilde{R}(s, q), \quad (D.4)$$

na qual  $ImF(s, q)$  é obtida diretamente da redução de dados. Neste ponto, o método de expansão é aplicado somente no resto da série. De ?? e ??,

$$R(s, b) = \ln \left\{ \frac{1}{1 - Re\Gamma(s, b)} \right\} - Re\Gamma(s, b). \quad (D.5)$$

Com essa expressão, gera-se um conjunto de pontos numéricos com erro,

$$R_i(s, b) \pm \Delta R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{D.6})$$

os quais são ajustados por soma de gaussianas e através da transformada de Fourier-Bessel obtém-se

$$\tilde{R}(s, q) \pm \tilde{R} \quad (\text{D.7})$$

e de ??,  $\tilde{\Omega}(s, q) \pm \tilde{\Omega}$ .

Os resultados das reduções em [?, ?, ?] foram consistentes com a condição ??, o que justifica a expansão. No nosso caso porém, essa condição não é verificada, como ilustra a figura ??. Por essa razão não utilizamos o método de expansão, mas o método semi-analítico aplicado diretamente na opacidade no espaço de parâmetro de impacto.

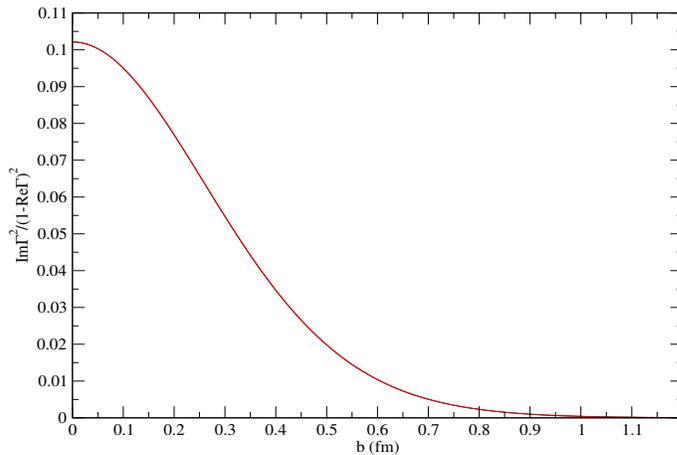


Figura D.1: Razão entre  $Im\Gamma^2$  e  $(1 - Re\Gamma)^2$  para  $pp$  a 52.8 GeV.

# Bibliografia

- [1] V. Barone, E. Predazzi, *High-Energy Particle Diffraction* (Spring-Verlag, Berlin, 2002).
- [2] S. Donnachie, G. Dosch, P.V. Landshoff, O. Natchmann, *Pomeron Physics and QCD* (Cambridge University Press, 2002).
- [3] The pp2pp Experiment, <http://www.rhic.bnl.gov/pp2pp>.
- [4] TOTEM - Total Cross Section, Elastic Scattering and Diffraction Dissociation at the LHC, <http://totem.web.cern.ch/Totem>.
- [5] R. Fiore, J. Jenkovzky, R. Orava, E. Predazzi, A. Prokudin, O. Selyugin, “Forward Physics at the LHC; Elastic Scattering” *Int. J. Mod. Phys. A*, **24**, 2551 (2009) (hep-ph0810-2902).
- [6] M. J. Menon, G. L. P. Silva, “Preliminary Results on the Proton Profile Function” proceedings do XXVII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos realizado de 24 a 28 de setembro de 2006 em Águas de Lindóia, SP, Brasil. Publicação eletrônica:  
[www.sbfisica.org/eventos/enfpc/xxvii/programa](http://www.sbfisica.org/eventos/enfpc/xxvii/programa), P064.
- [7] G. L. P. Silva, M. J. Menon, R. F. Ávila, “Proton profiles at 52.8 GeV”, *Int. J. Mod. Phys. E*, V.16, 2923 (2007).
- [8] B. E. T. Svensson “Proc. 1967 CERN School of Physics”, Vol II (1967).
- [9] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (John Wiley, New York, 1987).
- [10] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, John Wiley, 1977, cap.VIII.
- [11] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, vol. 4, cap I a IV.
- [12] J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, cap XXII, 2ª edição.
- [13] M. J. Menon, *Tópicos sobre Difração*, transparências e seminários, 2006.
- [14] M. J. Menon, *Tópicos sobre Teoria Quântica do Espalhamento*, transparências e seminários, 2006.

- [15] D. S. Almeida, “Aspectos das Formulações Quântica e Clássica da Teoria de Espalhamento e Aplicações ao Problema do Crescimento da Seção de Choque Total Hadronica em Altas Energias”, monografia, IFGW, UNICAMP, 2007, orientador M. J. Menon.
- [16] T.T. Wu, C.N. Yang, Phys. Rev. **137B**, 708 (1965).
- [17] N. Byers, C.N. Yang, Phys. Rev. **142**, 976 (1966).
- [18] L. Durand, R. Lipes, Phys. Rev. Lett. **20**, 637 (1968).
- [19] T.T. Chou and C.N. Yang, in *High Energy Physics and Nuclear Structure*, edited by G. Alexander (North-Holland, Amsterdam, 1967) p. 348; Phys. Rev. **170**, 1951 (1968); Phys. Rev. Lett. **20**, 1213 (1968); Phys. Rev. **175**, 1832 (1968).
- [20] T.T. Chou and C.N. Yang, Phys. Rev. Lett. B **244** 113 (1990).
- [21] R. F. Ávila, M. J. Menon, Eur. Phys. J. C. **54**, 555 - 576 (2008).
- [22] R.J. Glauber, J. Velasco, Phys. Lett. B **147**, 380 (1984).
- [23] R.J. Glauber, J. Velasco, in Proceedings of the Second International Conference on Elastic and Diffractive Scattering, edited by K. Goulianos (Editions Frontieres, Gif-sur-Yvette Cedex, France, 1988) p. 219.
- [24] M.M. Block, E.M. Gregores, F. Halzen, G. Pancheri, Phys. Rev. D **58**, 017503 (1998); **60**, 054024 (1999).
- [25] E.G.S. Luna, A.F. Martini, M.J. Menon, A. Mihara, A.A. Natale, Phys. Rev. D **72**, 034019 (2005).
- [26] P.A.S. Carvalho, A.F. Martini, M.J. Menon, Eur. Phys. J. C **39**, 359 (2005).
- [27] U. Amaldi and K. R. Schubert, Nucl. Phys. B **166**, 301 (1980).
- [28] K.R. Schubert, Landolt-Börnstein, Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, New Series, Vol. I/9a (Springer-Verlag, Berlin, 1979).
- [29] M. M. Block, R. N. Cahn, Rev. Mod. Phys. **57**, 563 (1985).
- [30] C.W. Akerlof et al., Phys. Rev. D **14**, 2864 (1976).
- [31] W. Faissler et al., Phys. Rev. D **23**, 33 (1981).
- [32] G. Fidecaro et al., Phys. Lett. B **105**, 309 (1981).
- [33] R. Rubinstein et al., Phys. Rev. D **30**, 1413 (1984).
- [34] A. Shiz et al., Phys. Rev. D **24**, 34 (1981).
- [35] A. Kuznetsov et al., Phys. Rev. Lett. **29**, 1755 (1972).

- [36] M. J. Menon *Introduction to Soft Diffraction: Some Results and Open Problems*; texto baseado em curso ministrado na “LISHEP 2002 - Advanced School on High Energy Physics”, UERJ, Rio de Janeiro, 2002.
- [37] G. Matthiae, Rep. Prog. Phys. **57**, 743 (1994).
- [38] A. S. Carrol et al., Phys. Lett. B **80**, 423 (1979).
- [39] L. A. Fajardo et al., Phys. Rev. D **24**, 46 (1981).
- [40] U. Amaldi et al., Phys. Lett. B **43**, 231 (1973).
- [41] U. Amaldi et al., Phys. Lett. B **66**, 390 (1977).
- [42] J. H. Vuolo, *Fundamentos da Teoria de Erros*, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2000.
- [43] P.R. Bevington, D.K. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Science*, 2nd Edition (McGraw-Hill, 1992).
- [44] F. James and M. Roos, *Minuit-Function Minimization and Error Analysis*, CERN D506 (CERN, Geneva, 1992).
- [45] [www.pdf-search-engine.com/distribui%C3%A7%C3%A3o-qui-quadrado-pdf-2.html](http://www.pdf-search-engine.com/distribui%C3%A7%C3%A3o-qui-quadrado-pdf-2.html)
- [46] Alfio Lazzaro, Lorenzo Moneta, “Minuit Package Parallelization and Application using the RooFit Package” PoS(ACAT08)083
- [47] P.A.S. Carvalho, M.J. Menon, Phys. Rev. D **56**, 7321 (1997);
- [48] A. Martin, Phys. Lett. B **404**, 137 (1997).
- [49] H. M. França, Y. Hama, Phys. Rev. D **19**, 3263 (1979).
- [50] A. F. Martini, M. J. Menon, D. S. Thober, Phys. Rev. D **57** (1998) 3126.
- [51] A. F. Martini, M. J. Menon, Phys. Lett. B **570**, 53 (2003).
- [52] A. Di Giacomo, H. Panagopoulos, Phys. Lett. B **285** (1992) 133; A. Di Giacomo, E. Meggiolaro, H. Panagopoulos, Nucl. Phys. B **483** (1997) 371; M. D’Elia, A. Di Giacomo, E. Meggiolaro, Phys. Lett. B **408** (1997) 315.
- [53] H. G. Dosch, Phys. Lett. B **190** (1987) 177; H. G. Dosch and Yu. A. Simonov, Phys. Lett. B **205** (1988) 339; Yu. A. Simonov, Nucl. Phys. B **307** (1998) 512; A. Krämer and H. G. Dosch, Phys. Lett. B **252** (1990) 669; H. G. Dosch, E. Ferreira, and A. Krämer, Phys. Rev. D **50** (1994) 1992.