

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física “Gleb Wataghin”

Dissertação de Mestrado

**Perturbações cosmológicas escalares
para um gás degenerado de férmions**

Autor : Eder Leonardo Duarte Perico

Orientador: Alex Eduardo de Bernardini

Banca Examinadora:

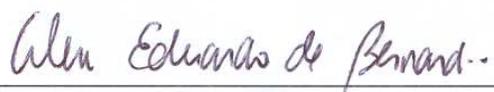
Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini - UFSCAR

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa - IMECC/UNICMAP

Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda - IFGW/UNICAMP

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado defendida pelo aluno Eder Leonardo Duarte Perico e aprovada pela Comissão Julgadora

Campinas, 16 de Fevereiro de 2011



Alex Eduardo de Bernardini

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW – UNICAMP**

D85p Duarte Perico, Eder Leonardo
Perturbações cosmológicas escalares para um gás degenerado de férmions / Eder Leonardo Duarte Perico. -- Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientador: Alex Eduardo de Bernardini.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Gás degenerado de férmions. 2. Gás generalizado de Chaplygin.
3. Perturbações cosmológicas escalares. 4. Calibre sincrónico.
5. Calibre longitudinal. I. Bernardini, Alex Eduardo de. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Scalar cosmological perturbations for a degenerate Fermi gas
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Degenerate Fermi gas
 2. Generalized Chaplygin gas
 3. Scalar cosmological perturbations
 4. Synchronous gauge
 5. Longitudinal gauge
- **Área de Concentração:** Cosmologia
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca Examinadora:**
Prof. Alex Eduardo de Bernardini
Prof. Alberto Vazquez Saa
Prof. Pedro Cunha de Holanda
- **Data da Defesa:** 16-02-2011
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **EDER LEONARDO DUARTE PERICO 088964** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 16 / 02 / 2011.

COMISSÃO JULGADORA:

Alex Eduardo de Bernardini

Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini - Orientador do Candidato
DF/UFSCar

Alberto

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa – IMECC/UNICAMP

Pedro Cunha de Holanda

Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda – DRCC/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Dedico este trabalho à minha mãe e ao meu pai, lhes agradeço imensamente pelo apoio e carinho incondicional que sempre tenho recebido de suas partes, pois sem eles não seria quem sou no presente. Devo a eles a vida toda.

Agradeço também aos meus irmãos, à minha família toda e aos meus amigos. Academicamente agradeço ao meu orientador, aos professores do IFGW e do IMECC que contribuíram para minha formação, aos meus colegas de trabalho no instituto, e por final agradeço à CAPES pelo suporte financeiro do trabalho.

Resumo

O assunto deste estudo é a formação de estruturas em grandes escalas em um universo plano dominado por radiação, matéria escura fria e constante cosmológica como modelo de energia escura no caso particular de presença de um gás degenerado de férmions (GDF) não interagentes como fluido de teste. Nosso modelo admite uma evolução linear das perturbações cosmológicas como também se limita a perturbações escalares, responsáveis pela formação de estruturas. O objetivo principal é analisar a contribuição do GDF no espectro de potências da matéria no presente após uma evolução isentrópica das perturbações primordiais, e compará-la com resultados obtidos para neutrinos cosmológicos. Neste caso, teremos uma mudança contínua de comportamento do GDF de gás ultra-relativístico para não relativístico, o qual aconteceria durante o período de domínio da matéria.

Com o objetivo de obter expressões analíticas para a evolução temporal das perturbações do GDF tivemos que fazer o estudo destas em quatro casos diferentes: no período de domínio da radiação, no período de domínio da matéria escura, na escala de super-horizonte durante a transição entre estes dois períodos, e finalmente no período de domínio da constante cosmológica. Fomos bem sucedidos ao chegar a resultados consistentes utilizando dois caminhos diferentes: no primeiro, usando a equação de conservação do tensor momento energia para um gás ideal de férmions totalmente degenerado e não interagente, e no segundo, usando a equação de Boltzmann para um gás de férmions fortemente degenerado e também não interagente.

Os dois métodos analíticos levam à mesma solução para as perturbações do GDF quanto escritas até primeira ordem em teoria de perturbações. De forma complementar, os nossos resultados numéricos mostram um aumento no espectro de potências da matéria para escalas intermediárias se comparado com a contribuição dos neutrinos massivos.

Finalmente estendemos nossa análise numérica ao substituímos a matéria escura fria CDM e a constante cosmológica Λ por um gás generalizado de Chaplygin GCG como modelo efetivo para o setor escuro do universo, mantendo as condições de contorno que envolvem as densidades médias, e as condições iniciais para as perturbações.

Palavras Chaves: Gás degenerado de férmions; gás generalizado de Chaplygin; perturbações cosmológicas escalares; calibre sincrônico; calibre longitudinal.

Áreas do conhecimento: Cosmologia.

Abstract

The subject of this study is the formation of large scale structures (LSS) in a flat universe dominated by radiation, cold dark matter and cosmological constant - as a dark energy model - in presence of a degenerate fermionic gas (GDF) as non-interacting test fluid. Our model assumes a linear evolution of cosmological perturbations as well as merely scalar perturbations responsible for structure formation. Our main objective is to analyze the contribution of the GDF in the matter power spectrum today, after an isentropic evolution of primordial perturbations and a continuous change of behavior of ultra-relativistic for non-relativistic GDF, which occurs during the matter domination era in our model.

To obtaining analytical expressions for temporal evolution of the GDF perturbations we did study them in four different cases: during the radiation domination era, the dark matter domination, the super-horizon scale limit during the transition between these first two periods and finally during the cosmological constant domination era. We get these results using two different approaches: first, using the conservation equation of the stress-energy tensor for a perfect and non-interacting and fully degenerated fermionic gas, and second, using the Boltzmann equation for a non-interacting and strongly degenerated fermionic gas.

Both methods lead to the same analytical solution for GDF perturbations at first order on perturbation theory. On the other hand, our numerical results show an increase in the power spectrum of matter for intermediate scales if compared it with the contribution of massive neutrinos.

Finally, we show the change on the results of the standard model of cosmology (Λ CDM) when we exchanging the cold dark matter CDM and the cosmological constant Λ for a generalized Chaplygin gas GCG how effective model of twice old fluids with the same mean density of energy.

Key words: Degenerate Fermi gas; GDF; generalized Chaplygin gas; GCG; scalar cosmological perturbations; Synchronous gauge; Longitudinal gauge.

Area: Cosmology.

Sumário

Capa	i
Ficha catalográfica	ii
Capa de aprovação	iii
Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Sumário	viii
Lista de figuras	ix
1 Introdução	1
2 Universo plano, homogêneo e isotrópico em expansão	5
2.1 Geometria do universo	6
2.2 Conteúdo energético do universo	10
2.3 Equação de Einstein	13
2.4 Inflação	15
3 Perturbações	17
3.1 Perturbações escalares na métrica	18
3.2 Tensor momento energia para um gás ideal	20
3.3 Componentes da equação de Einstein	22
3.4 Equação de Boltzmann	23
3.5 Espectro de potência da matéria	25
4 Conteúdo do universo	26
4.1 Matéria escura fria	26
4.2 Neutrinos sem massa	26

4.3	Neutrinos com massa	28
4.4	Fótons	29
4.5	Bárions	30
5	Algumas soluções simples	31
5.1	Domínio da radiação	31
5.2	Domínio da matéria escura	35
5.3	Domínio da constante cosmológica	37
5.4	Super-horizonte radiação matéria	38
5.5	Sub-horizonte radiação-matéria	40
6	Gás degenerado de Fermi	45
6.1	Equação de Boltzmann para o GDF	45
7	Soluções para as perturbações do GDF	48
7.1	Usando a conservação do tensor momento energia	48
7.1.1	Super-horizonte radiação matéria	49
7.1.2	Era de domínio da radiação	50
7.1.3	Era de domínio da matéria escura fria	50
7.1.4	Era de domínio da energia escura	52
7.2	Usando a equação de Boltzmann	52
7.2.1	Gás ultra-relativístico não interagente na era da radiação	53
7.2.2	Gás não relativístico e não interagente na era da matéria	53
7.2.3	Gás não relativístico e não interagente na era da energia escura	54
8	Resultados numéricos	56
8.1	Modelo padrão	56
8.2	Incluindo o GDF no inventário cósmico	60
8.3	Espectro de potência da matéria	63
8.4	Gas generalizado de Chaplygin	64
9	Conclusões	69
	Referencias	74

Lista de Figuras

2.1	Laço infinitesimal definido pelos vetores A^μ e B^μ	8
2.2	Expansão do universo	8
2.3	Densidade média de energia da radiação, da matéria escura fria, da energia escura e do GDF	12
2.4	Fator de escala a em função do tempo conforme η	15
2.5	Expansão do universo durante a inflação	16
5.1	Solução de ϕ durante o período de domínio da radiação	32
5.2	Solução de δ_m durante o período de domínio da radiação	33
5.3	Solução de θ_m durante o período de domínio da radiação	34
5.4	Solução de ϕ na aproximação de super-horizonte	39
5.5	Soluções de δ_r e δ_m na aproximação de super-horizonte	41
5.6	Solução de ϕ no limite de sub-horizonte	41
5.7	Solução de δ_m no limite de sub-horizonte	43
5.8	Solução de θ_m no limite de sub-horizonte	44
7.1	Contrastes de densidade δ_d , δ_r e δ_m na aproximação de super-horizonte	49
7.2	Contraste de densidade δ_d para o GDF durante o período de domínio da matéria	50
7.3	Perturbação θ_d para o GDF durante o período de domínio da matéria	51
8.1	Perturbação ϕ em função do número de onda k	57
8.2	δ_i para $k = 0.01 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo ΛCDM com neutrinos massivos.	58
8.3	δ_i para $k = 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo ΛCDM com neutrinos massivos.	58
8.4	δ_i para $k = 1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo ΛCDM com neutrinos massivos.	59
8.5	δ_ν e δ_d para $k = 1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo ΛCDM	62
8.6	δ_ν e δ_d para $k = 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo ΛCDM	63
8.7	Espectro de potência da matéria no modelo ΛCDM	64
8.8	δ_i para $k = 1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo GCG com $\alpha = 0$ e neutrinos massivos	65
8.9	δ_i para $k = 1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo GCG com $\alpha = 10^{-5}$ e neutrinos massivos	66
8.10	Espectro de potência da matéria no modelo GCG com neutrinos massivos	67

Capítulo 1

Introdução

Um grande volume de dados experimentais que atualmente são usados para testar as bases da cosmologia é proveniente das medições das inhomogeneidades na distribuição de matéria e das anisotropias na radiação cosmológica de fundo do universo. Isto pode ser teoricamente determinado a partir do crescimento de perturbações iniciais tanto na métrica como no tensor momento energia na base de um universo homogêneo e isotrópico [1]. O modelo cosmológico padrão (Λ CDM) estuda a evolução destas perturbações a partir da teoria tensorial de Einstein, a qual introduz a possibilidade de se descrever três tipos de perturbações provenientes de campos escalares, vetoriais e tensoriais, todas como componentes irredutíveis de um tensor generalizado. Esses três tipos de perturbações até a primeira ordem evoluem de maneira independente segundo o teorema da decomposição [2, 3] e produzem efeitos diferentes: as perturbações escalares são as responsáveis pela formação de estruturas, as perturbações vetoriais produzem efeitos gravito-magnéticos, e a existência de perturbações tensoriais permitiria a propagação de ondas gravitacionais.

Assumindo a solução mais geral da equação de Einstein estacionária com simetria esférica para um universo isotrópico, homogêneo e em expansão uniforme (a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)) temos que os dados experimentais apontam para uma densidade de energia do universo muito próxima da chamada densidade crítica ρ_{cr} [4], a qual está associada a um universo espacialmente plano. No cenário para grandes escalas (maiores que 100 Mpc [3]), onde o universo é muito próximo de ser homogêneo e isotrópico, podemos aplicar a teoria de perturbações lineares nas equações de Einstein como boa aproximação. Esse procedimento é aplicado assumindo-se que as perturbações iniciais são geradas pelo processo de inflação [5, 6], de modo a se obter o nível suficiente de uniformidade na temperatura dos fótons provenientes de pontos muito distantes no universo [4].

Como variações do modelo cosmológico padrão, motivadas pela desconhecida natureza da matéria escura fria (CDM) e da constante cosmológica (Λ) (as quais constituem respectivamente 21% e 74% da densidade energética do universo no presente [7]) temos teorias que descrevem o comportamento da energia escura a partir de potenciais de quintessência [8, 9, 10, 11], ou mesmo através de componentes exóticas como o gás generalizado de Chaplygin (GCG) [12, 13, 14]. Ainda há casos em que os autores atribuem massa variável aos neutrinos [15, 16], ou mesmo introduzem tentativas de quantizar a gravidade para se ter uma teoria

compatível com o modelo padrão das interações eletro-fracas e das interações fortes.

Neste trabalho estudaremos o comportamento de um gás degenerado de férmions (GDF) [17, 18] não interagente introduzido como um fluido de teste (densidade média do GDF muito menor que a densidade crítica do universo) no contexto do modelo cosmológico padrão Λ CDM. Em particular estamos interessados em estudar a contribuição das perturbações do GDF no espectro de potências da matéria no presente, o que nos permitirá determinar a inomogeneidade na densidade da matéria em função da escala observada. A idéia fundamental, além de acrescentar uma componente de GDF ao espectro de potência de matéria, é parametrizar a transição entre os regimes relativístico e não-relativístico dos neutrinos de *background* cosmológico de maneira analítica, de forma a se identificar eventuais peculiaridades nesta transição. Usualmente, os neutrinos no cenário cosmológico são descritos separadamente em dois casos distintos: nos limites ultra-relativístico e não-relativístico. De forma geral, obtivemos soluções analíticas aproximadas para a evolução temporal das perturbações do GDF nos períodos de domínio da radiação, da matéria e da constante cosmológica, válidas até primeira ordem em teoria de perturbações. Para descrever estes resultados, nosso trabalho está organizado da seguinte maneira:

- No segundo capítulo apresentaremos alguns elementos básicos de geometria diferencial necessários para manipular a equação de Einstein, e introduziremos o modelo de universo isotrópico, homogêneo e em expansão uniforme. Logo depois, fazendo uso das equações de Einstein e da equação de conservação do tensor momento energia para gases ideais, observaremos como evoluem as densidades médias de energia da radiação, da matéria escura e da constante cosmológica em função do fator de escala do universo. E como evolui o fator de escala em função do tempo de maneira dinâmica dependendo do conteúdo energético do universo no domínio de cada uma das componentes principais, isto é, no caso em que a densidade da componente em questão seja muito maior que as densidades das outras componentes do universo. Finalmente introduziremos as bases da teoria inflacionária postulada para resolver problemas tais como a grande uniformidade na temperatura dos fótons no presente, e que pode também ser a causa do surgimento das perturbações iniciais.
- No terceiro capítulo - fazendo uso da teoria de perturbações lineares aplicável para grandes escalas do universo (maiores que 100 Mpc [3]) onde as inomogeneidades e anisotropias na densidade de energia são muito menores que a densidade média - vamos introduzir perturbações tanto na métrica como no tensor momento energia, restringindo nossa análise às perturbações escalares, as quais são as responsáveis pela formação de estruturas. Chegaremos às equações linearizadas de Einstein e de conservação do tensor momento energia, que são as equações que regem a evolução das perturbações no background homogêneo e isotrópico estudado no capítulo 2. Devemos ressaltar que para pequenas escalas o contraste de densidade de energia dos fluidos presentes no universo é muitas ordens de magnitude maior que a densidade média, razão pela qual não é possível de se desenvolver uma análise perturbativa. Com isto, o estudo perturbativo apresentado neste trabalho é válido só para grandes escalas. Apresentaremos também a equação de Boltzmann, a qual permite um tratamento mais geral das perturbações como uma generalização das equações de conservação do tensor momento

energia. Por fim, definiremos o espectro de potências de matéria, o qual indica a medida de quanto o universo é inhomogêneo em função da escala de observação, variável esta, que pode se medir experimentalmente. Não nos preocuparemos com perturbações vetoriais e tensoriais, já que cada qual evolui independentemente das perturbações escalares, e, portanto não vão interferir no processo de formação de estruturas.

- No capítulo quatro apresentaremos as equações de evolução das perturbações para cada um dos fluidos componentes do universo no modelo Λ CDM, usando o calibre longitudinal e o formalismo da equação de Boltzmann no espaço de Fourier, incluindo as interações padrão entre bárions e fótons. Um conjunto de equações equivalentes, mas escritas no calibre sincrônico, são resolvidas pelo programa CAMB, o qual foi usado para a obtenção dos gráficos numéricos da evolução temporal das perturbações e do espectro de potência da matéria no presente, apresentados no capítulo 8. Não apresentamos estas equações no calibre sincrônico [19] pelo fato de nossas soluções analíticas dos capítulos cinco e sete estarem no calibre longitudinal. Isto se deve a facilidade de se manipular analiticamente algumas variáveis e equações para o cenário de perturbações escalares no calibre longitudinal. Trabalharemos no espaço de Fourier se devido à facilidade de se manipular as equações que no espaço de coordenadas são equações diferenciais parciais com derivadas temporais e espaciais, mas que transformam-se em equações diferenciais no tempo parametrizadas pelo vetor de onda k no espaço de Fourier; e a que devido à linearidade da teoria de perturbações os diferentes modos k evoluem independentemente.
- No capítulo cinco vamos resolver as equações de evolução das perturbações da radiação e da matéria escura (desconsiderando termos de estresse anisotrópico nas perturbações do tensor momento energia) para cinco casos diferentes: primeiro para o período de domínio da radiação sobre as outras componentes do universo, segundo para o período de domínio da matéria escura, terceiro caso para o domínio da constante cosmológica, quarto para escalas muito grandes (super-horizonte) no período de transição do domínio da radiação para o domínio da matéria escura, e finalmente para o caso de pequenas escalas (sub-horizonte) também no período de transição radiação-matéria.
- No capítulo seis nos reportamos aos fundamentos da teoria que descreve um GDF, de modo a obter a sua equação de estado em função da massa e do momento de Fermi do gás. Ao utilizarmos a equação de Boltzmann obteremos as equações de evolução das perturbações do GDF.
- No capítulo sete apresentaremos as soluções analíticas da evolução das perturbações do GDF válidas no caso de super-horizonte radiação-matéria e nos períodos de domínio da radiação, da matéria escura e da constante cosmológica, usando as equações de conservação do tensor momento energia de um gás ideal e a equação de estado do GDF. Igualmente apresentaremos as soluções das perturbações do GDF utilizando o formalismo da equação de Boltzmann (obtidas na segunda parte do capítulo seis) na aproximação de gás ultra-relativístico durante períodos de domínio da radiação, e na aproximação de gás não-relativístico durante os períodos de domínio da matéria escura e da constante cosmológica. Nos dois casos desconsideraremos os termos de estresse anisotrópico nas perturbações do tensor momento energia.

-
- Por fim, no capítulo 8 apresentaremos os resultados numéricos obtidos com o programa CAMB [20] para a evolução temporal das perturbações dos diferentes fluidos do modelo Λ CDM incluindo um GDF, e da sua contribuição ao espectro de potência da matéria no presente. Para efeitos comparativos, utilizaremos o mesmo procedimento para um cenário cosmológico com o setor escuro descrito pelo gás generalizado de Chaplygin em substituição ao modelo Λ CDM.
 - As conclusões serão apresentadas no capítulo 9, em particular, referentes à inclusão do GDF como fluido de teste no programa CAMB para obter o espectro de potência da matéria, às comparações entre as soluções analíticas e os resultados numéricos provenientes dos cálculos com o CAMB, no caso da evolução das perturbações restrita a certos períodos, e às diferenças entre os modelos Λ CDM e *GCG*.

Finalmente, resta dizer que ao longo do trabalho usaremos unidades de $\hbar = c = K_B = 1$, e resolveremos as equações diferenciais no espaço de Fourier.

Capítulo 2

Universo plano, homogêneo e isotrópico em expansão

Neste capítulo introduziremos os elementos que são a base do modelo cosmológico padrão, o modelo Λ CDM. O eixo central deste modelo do universo é a relatividade geral, resumido através da equação de Einstein [21, 22], para um universo com fótons (γ), neutrinos (ν) [23], bárions (b), matéria escura fria ou não-relativística (CDM) e constante cosmológica (Λ) como modelo de energia escura.

Antes de introduzirmos a equação de Einstein (a qual relaciona dinamicamente a geometria do universo com seu conteúdo energético) apresentaremos alguns elementos de geometria diferencial que vão nos permitir manipular e interpretar a modelagem geométrica da gravidade feita através desta equação. Posteriormente vamos descrever o cenário base do nosso modelo: um universo espacialmente plano em expansão muito próximo de ser homogêneo e isotrópico em grandes escalas (da ordem de 100Mpc que é a distância típica entre aglomerados de galáxias [3]).

Logo depois discutiremos o conteúdo energético do universo no modelo Λ CDM (cujas componentes principais vão dominar a sua evolução, no caso, a radiação, a matéria escura e a energia escura) e da sua modelagem mais simples neste cenário geométrico [2, 24, 25, 26, 27, 28].

O modelo matemático da geometria do universo interagindo com seu conteúdo energético nos levará a obter expressões para a evolução das densidades médias de cada uma das componentes principais (radiação, matéria escura e constante cosmológica) em função do parâmetro de expansão cosmológica a . Com isto será possível descrever a evolução temporal do parâmetro de expansão durante os períodos de domínio de cada um desses fluidos.

2.1 Geometria do universo

Elementos básicos de geometria

A modelagem geométrica (tensorial) da gravitação (como em qualquer outro modelo ou teoria física) deve nos permitir calcular observáveis físicos (escalares) que sejam independentes do sistema inercial de coordenadas escolhido. No caso da magnitude de um vetor em uma variedade, o elemento que nos permitirá fazer uma medida ou predição que independa das coordenadas será a métrica. Por exemplo, a medição do comprimento s de uma curva pode ser feita pela integração do seu elemento de linha ds definido como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é chamado de tensor métrico e é um tensor de grau $(0, 2)$ simétrico $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ¹ e com determinante diferente de zero, o qual permite a sua inversão como sendo $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} = \delta_\sigma^\mu$. O tensor métrico não é apenas utilizado para calcular escalares simples como magnitudes, mas também pode ser empregado na determinação da causalidade do espaço tempo, permitindo calcular as trajetórias das partículas livres, ou mesmo descrever uma fonte de gravidade (no caso de um universo espacialmente curvo).

Com a forma de medir distâncias esclarecida, se define a derivada covariante como sendo uma derivada que transforma tensores de grau N em tensores de grau $N + 1$, e que se reduz à derivada parcial em uma variedade plana em coordenadas inerciais. Escrevemos, então, a derivada covariante de um tensor de grau (i, j) como sendo:

$$\begin{aligned} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_j}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_i};\sigma - T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_j}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_i} = & \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_j}^{\lambda\mu_2\dots\mu_i} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_j}^{\mu_1\lambda\mu_3\dots\mu_i} + \dots + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_i} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_j}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{i-1}\lambda} \\ & - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T_{\lambda\nu_2\dots\nu_j}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_i} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T_{\nu_1\lambda\nu_3\dots\nu_j}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_i} - \dots - \Gamma_{\sigma\nu_j}^\lambda T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_{j-1}\lambda}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_i}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde o *ponto e vírgula* denotam a derivada covariante enquanto que a *vírgula* só denota a derivada parcial. Os símbolos $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$ chamados de *conexão* não são tensores, e a derivada parcial de um tensor também não é em geral um tensor, mas a soma toda é definida para ser um tensor. Em geral a conexão depende da curvatura da variedade (a conexão é intrínseca à variedade), mas a conexão pode, ou não, depender da métrica. No caso da relatividade geral, usualmente se utiliza a única conexão que é compatível com a métrica (ou seja, $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$) e que não tem torção (isto é $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$), a qual pode ser descrita como:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}]. \quad (2.3)$$

A derivada covariante (2.2) de um tensor é a taxa instantânea de variação do tensor na direção σ com respeito ao tensor inicial, se este tivesse sido transportado paralelamente ao longo da direção σ . Isto introduz o conceito de transporte paralelo como sendo a generalização (para variedades arbitrárias) da operação que transporta um vetor de um ponto a outro em um espaço plano deixando suas componentes constantes. Numa variedade arbitrária o transporte paralelo de um tensor depende da trajetória escolhida

¹Em geral poderia ter uma parte antissimétrica, mas esta não contribuiria ao ds^2 , já que o produto $dx^\mu dx^\nu$ é simétrico

(a diferença de uma variedade plana), e justifica a interpretação de que na derivada covariante a conexão é o que leva a informação do transporte paralelo.

O conceito de transporte paralelo nasce da necessidade de comparar dois tensores que inicialmente estão definidos em diferentes pontos da variedade. Para comparar dois vetores, primeiramente devemos transportá-los até um mesmo ponto. Assim o transporte paralelo é definido simplesmente como o transporte que conserva constantes cada uma das componentes de um tensor com respeito ao vetor tangente à trajetória de transporte (o que em coordenadas curvilíneas em espaços planos não é trivial, já que os versores da base podem variar ponto a ponto).

Assim, as componentes do tensor $T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_j}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_i}$ transportado paralelamente ao longo da curva x^σ (parametrizada pelo parâmetro contínuo λ) respeitam a relação:

$$\left(\frac{D}{d\lambda}T\right)_{\nu_1\nu_2\dots\nu_j}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_i} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda}T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_j;\sigma}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_i} = 0, \quad (2.4)$$

e, para o caso de um vetor V^σ , tem a forma simples:

$$\frac{dV^\sigma}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\lambda}V^\beta = 0. \quad (2.5)$$

Esta definição de transporte paralelo depende claramente da conexão. O que podemos fazer é impor que a conexão seja compatível com a métrica, assim a métrica é sempre transportada paralelamente, ou seja:

$$\frac{D}{d\lambda}g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda}g_{\mu\nu;\sigma} = 0, \quad \text{já que} \quad g_{\mu\nu;\sigma} = 0. \quad (2.6)$$

Fazendo o transporte paralelo do vetor $V^\sigma \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda}$ (é o vetor tangente à curva x^σ) ao longo de x^σ , obtemos a condição de transporte paralelo desse vetor, conhecida como equação das geodésicas:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (2.7)$$

a qual resulta na equação de trajetória para uma partícula livre na variedade.

Agora, se fizermos o transporte paralelo do vetor V^α ao longo do laço fechado A B (figura 2.1) no sentido anti-horário, o vetor vai experimentar a mudança:

$$\delta V^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha V^\beta A^\mu B^\nu, \quad (2.8)$$

que é a definição do tensor de curvatura de Riemann $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$, o qual pode ser escrito em ausência de torção como:

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\beta;\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta;\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\lambda, \quad (2.9)$$

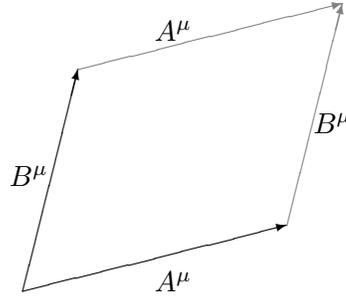


Figura 2.1: Laço infinitesimal definido pelos vetores A^μ e B^μ

e que contraído com a métrica é chamado tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = g^\alpha_\beta R^\alpha_{\mu\beta\nu}, \quad (2.10)$$

e mais uma vez contraído é chamado de escalar curvatura:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Este escalar é essencial na definição da ação geométrica mais simples, a qual leva à origem da equação de Einstein. Lembremos que os escalares (tensores de ordem (0,0)) são invariantes, isto é, não dependem do sistema de coordenadas inercial escolhido.

Expansão do universo

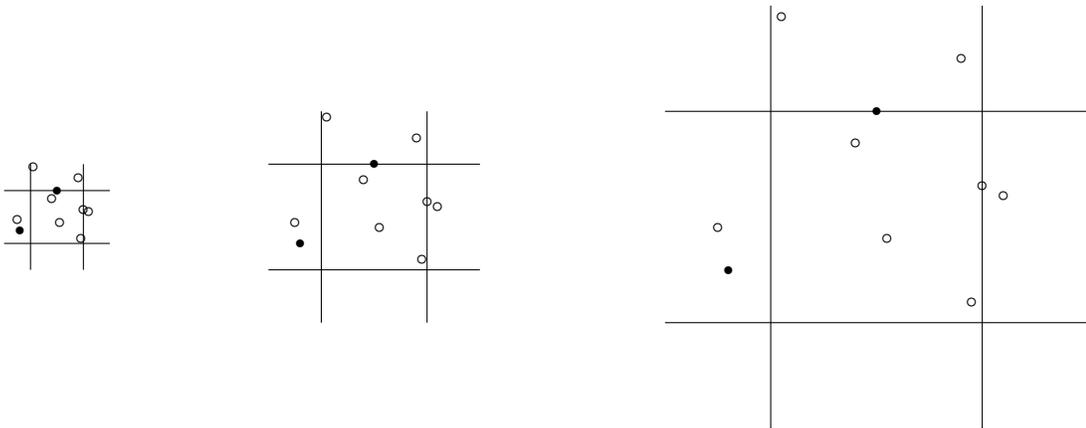


Figura 2.2: Expansão do universo

De esquerda para direita temos a mesma configuração de galáxias para os tempos $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$ respectivamente. A distância comóvel entre as duas galáxias pretas independe do tempo, e é d_c . Enquanto que a distância própria entre elas aumenta de acordo com o fator de escala para cada tempo: $d_p(\eta_1) = a(\eta_1)d_c$, $d_p(\eta_2) = a(\eta_2)d_c$ e $d_p(\eta_3) = a(\eta_3)d_c$ com $a(\eta_1) < a(\eta_2) < a(\eta_3)$

Em um universo em expansão uniforme, a distância entre duas galáxias distantes era menor que a sua distância no presente, ou seja, as galáxias distantes estão se afastando umas das outras. Se o universo esta se expandindo uniformemente, podemos traçar uma rede imaginária que cresce uniformemente com o universo, como é mostrado na figura (2.2) para um universo espacialmente plano. Com respeito a essa rede de coordenadas (coordenadas comóveis), a distância entre duas galáxias não muda em função do tempo. Porém, a distância física entre dois pontos no universo é a distância comóvel multiplicada pelo parâmetro de expansão, que chamamos de a e que cresce em função do tempo. Com isto, a relação entre as coordenadas comóveis $x^\mu = (\eta, \vec{x})$ e as coordenadas próprias $r^\mu = (\tau, \vec{r})$ de um ponto no universo em expansão uniforme é dada pela relação:

$$a(\eta) \equiv \frac{\partial r^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{x}}, \quad (2.12)$$

de maneira que r é a distância física, e x a distância na rede comóvel,

$$r = xa, \quad r' = x'a + xa', \quad (2.13)$$

onde o *índice* denota a derivada com respeito ao tempo próprio. Em ausência de movimento comóvel (com $x' = 0$ para o que chamamos de velocidade peculiar) a velocidade física será:

$$r' = \frac{a'}{a}ax = \frac{a'}{a}r \equiv Hr, \quad (2.14)$$

que corresponde à chamada lei de Hubble [29]. Se o universo esta se expandindo uniformemente (todos os pontos nele estão se afastando uns dos outros) a lei de Hubble prediz que a velocidade instantânea de afastamento das galáxias distantes aumenta linearmente com a distância ao observador (2.14), onde a constante de proporcionalidade é chamada de parâmetro de Hubble (2.15):

$$H(\tau) \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} = \frac{1}{a^2} \frac{da}{d\eta} \equiv \frac{\dot{a}}{a^2}. \quad (2.15)$$

O *ponto* denota a derivada com respeito ao tempo conforme η . Para $c = 1$ temos que a velocidade aparente de afastamento entre duas galáxias é maior que $c = 1$ quando $r > H^{-1}$, que chamaremos de raio de Hubble. Por outro lado temos que distância tem as mesmas unidades que o tempo, assim o tempo η equivale ao horizonte comóvel: se dois pontos no espaço tempo estão afastados por uma distância maior que η estarão desconectados causalmente, já que η representa a distância que um fóton pode viajar (a velocidade $c = 1$) desde o início do universo.

Com isto, a métrica para um universo plano em expansão uniforme fica:

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

2.2 Conteúdo energético do universo

O tensor momento energia T_{ν}^{μ} para um fluido ideal pode ser escrito na forma de:

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{P}g^{\mu\nu} + (\rho + \mathcal{P})U^{\mu}U^{\nu}, \quad (2.17)$$

que em coordenadas comóveis e para velocidades peculiares zero se reduz a:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

onde ρ é a densidade de energia do fluido e \mathcal{P} é a sua pressão, ambas medidas em um sistema de coordenadas comóveis. Se o fluido interage somente gravitacionalmente, a derivada covariante do tensor T_{ν}^{μ} é zero. Isto corresponde à equação de conservação do tensor momento energia:

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \partial_{\mu}T^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}T^{\nu\beta} = 0. \quad (2.19)$$

de modo que, da componente temporal desta equação, teremos:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\eta} + \frac{\dot{a}}{a}[3\rho + 3\mathcal{P}] = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\rho}{\partial a} + \frac{3\rho + 3\mathcal{P}}{a} = 0. \quad (2.20)$$

que, em associação à equação de estado de cada fluido, leva à solução da pressão e da densidade de energia dos fluidos que compõem o universo (radiação, matéria escura e energia escura) em função do parâmetro de expansão a . A componente espacial da equação do tensor momento energia (2.18) é identicamente nula para um universo perfeitamente homogêneo e isotrópico.

- No caso da radiação, cuja equação de estado independe do tempo e é dada pela expressão $\mathcal{P}_r = \rho_r/3$, temos que a equação de conservação do tensor momento energia (2.20) (válida para qualquer dependência temporal do fator de escala, ou seja, para qualquer que seja o conteúdo do universo, mesmo fora do período de domínio da radiação) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial\rho_r}{\partial\eta} + \frac{\dot{a}}{a}4\rho_r = a^{-4}\frac{\partial[\rho_r a^4]}{\partial\eta} = 0. \quad (2.21)$$

Esta equação tem como solução $\rho_r \propto a^{-4}$, com $a = a(\eta)$. Conforme explicamos anteriormente, esta solução é válida para qualquer valor do fator de escala, particularmente para $a = 1$ (no presente), de onde podemos fazer a medição da densidade de energia da radiação se comparada com a densidade média do universo (próxima da chamada densidade crítica associada a um universo plano no modelo FRW). Escrevendo a densidade de energia da radiação em função da densidade crítica, temos que:

$$\bar{\rho}_r = \frac{\Omega_r \rho_0}{a^4}. \quad (2.22)$$

- Em geral a equação (2.20) pode ser reescrita como:

$$a^{-3} \frac{\partial [\rho a^3]}{\partial \eta} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \mathcal{P}. \quad (2.23)$$

Para o caso da matéria escura modelada como sendo não relativística (chamada de matéria escura fria), cuja equação de estado pode ser escrita como $\mathcal{P}_m = 0$ (independe do tempo e da densidade ρ_m), a equação de conservação do tensor momento energia fica:

$$a^{-3} \frac{\partial [\rho_m a^3]}{\partial \eta} = 0, \quad (2.24)$$

e tem a solução $\rho_m \propto a^{-3}$. Novamente, esta solução é válida para qualquer que seja a dependência temporal do fator de escala, ou seja, para qualquer que seja o fluido dominante no universo. Com isto, podemos obter a constante de proporcionalidade da medição da densidade de energia no presente em função da densidade crítica:

$$\bar{\rho}_m = \frac{\Omega_m \rho_0}{a^3}. \quad (2.25)$$

- Outra componente relevante do universo é a energia escura, que no modelo padrão tem a equação de estado simples $\mathcal{P}_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Esta pressão negativa seria a responsável pela expansão acelerada do universo observada atualmente [30]. A energia escura modelada por esta equação de estado $\mathcal{P}_\Lambda = -\rho_\Lambda$ é conhecida como constante cosmológica já que a equação de conservação do tensor momento energia deste fluido fica:

$$\frac{\partial \rho_\Lambda}{\partial \eta} = 0, \quad (2.26)$$

o qual tem a solução $\rho_\Lambda = cte$, isto é, não depende de $a(\eta)$ (daí vem o nome de constante cosmológica). Dos dados experimentais podemos obter a relação da densidade de energia da constante cosmológica (que não varia no tempo) com a densidade de energia crítica (valor da densidade de energia total do universo para que este seja espacialmente plano) no presente:

$$\rho_\Lambda = \rho_0 \Omega_\Lambda. \quad (2.27)$$

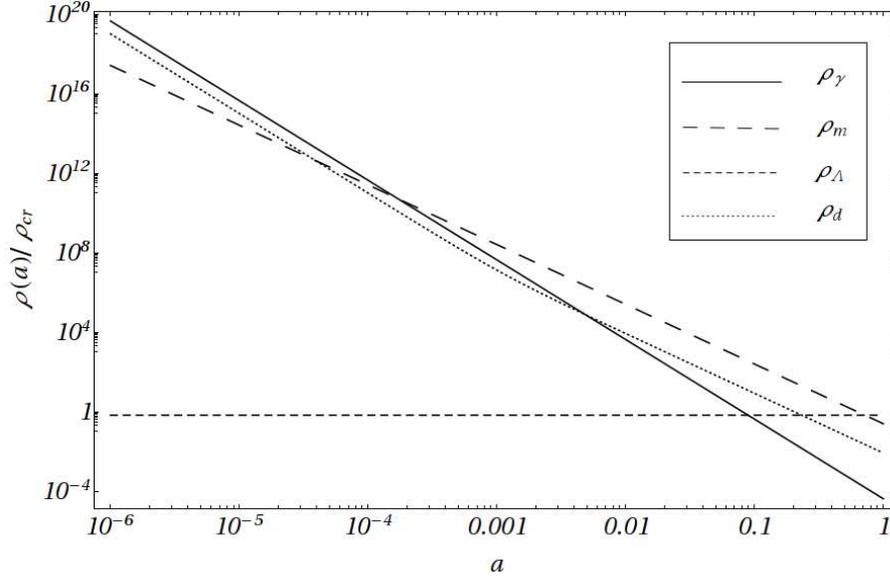


Figura 2.3: Densidade média de energia da radiação, da matéria escura fria, da energia escura e do GDF em função do fator de escala a para o universo plano, homogêneo e isotrópico. Usando os valores da última coluna da tabela 8.1 para as densidades no presente.

Das equações (2.22, 2.25, 2.27) temos que as densidades de energia da radiação, da matéria escura, e da constante cosmológica evoluem como $\rho_r \propto a^{-4}$, $\rho_m \propto a^{-3}$ e $\rho_\Lambda \propto \text{cte}$ respectivamente. Portanto a densidade de energia da radiação decresce mais rapidamente que a densidade da matéria com o aumento do fator de escala, enquanto a densidade da constante cosmológica permanece invariante.

O modelo Λ CDM tem como fluidos dominantes a radiação, a matéria escura modelada como sendo matéria escura não relativística (matéria escura fria) CDM e a energia escura modelada como constante cosmológica Λ . O modelo Λ CDM assume que inicialmente a densidade de energia da radiação foi muito maior que a densidade de energia da matéria escura, e esta última por sua vez, muito maior que a densidade de energia escura, ou seja, a densidade de energia da radiação dominava a evolução do universo (inicialmente).

Com estas condições iniciais ($\rho_r \gg \rho_m \gg \rho_\Lambda$ no começo da era da radiação) e devido à relação entre as taxas de decrescimento das diferentes densidades ($\dot{\rho}_r/\rho_r > \dot{\rho}_m/\rho_m > \dot{\rho}_\Lambda/\rho_\Lambda$ para qualquer valor do tempo cosmológico) temos que o universo vai ser dominado inicialmente pela radiação, depois pela matéria escura e mais tarde dominado pela constante cosmológica.

Estes três períodos da evolução do universo no modelo Λ CDM são chamados de período de domínio da radiação, período de domínio da matéria e período de domínio da constante cosmológica (se o modelo Λ CDM estiver certo, ainda estaríamos em um período de transição entre o domínio da matéria e o domínio da constante cosmológica). Chamamos de período de equilíbrio a vizinhança da superfície espaço-temporal ao redor do tempo de equilíbrio η_{eq} , caracterizado pela igualdade nas densidades de energia da radiação e da matéria.

2.3 Equação de Einstein

A relatividade geral é uma teoria que descreve a maneira como a curvatura do espaço-tempo (informação que podemos obter a partir do tensor métrico) atua sobre a matéria para se manifestar como gravidade, e como a energia e o momento dos fluidos contidos no universo influenciam o espaço-tempo para modificar a curvatura. A equação fundamental desta teoria é a equação de Einstein (2.28), que relaciona dinamicamente estas duas componentes do universo: o tensor momento energia $T_{\mu\nu}$ que da conta do conteúdo energético do universo, e o tensor de Einstein (lado esquerdo da equação (2.28)) que leva a informação da geometria do universo.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

Esta equação pode ser obtida fazendo pela da ação S com respeito à métrica $g^{\mu\nu}$:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_M, \quad \delta S = 0. \quad (2.29)$$

Onde S_M é a ação do conteúdo energético do universo que dá origem ao tensor momento energia:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.30)$$

A componente tempo-tempo da equação de Einstein (2.28) para a métrica do universo plano, homogêneo e isotrópico (2.16) e o tensor momento energia de um gás ideal com densidade de energia e pressão também uniformes (2.18) é:

$$\frac{8\pi G a^2}{3} \rho = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2. \quad (2.31a)$$

Esta equação é conhecida como equação de Friedmann. A componente espaço-espaço que contribui ao traço da equação de Einstein (2.28) nas condições de homogeneidade e isotropia vem dada por:

$$8\pi G a^2 \mathcal{P} = -2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2. \quad (2.31b)$$

As equações (2.31) são redundantes se a equação de estado do fluido em consideração $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho)$ é conhecida.

Finalmente, as componentes espaço-tempo e espaço-espaço sem traço da equação de Einstein são identicamente nulas para o tensor momento energia da equação (2.18) nas condições de homogeneidade e isotropia.

O sistema de equações (2.20) e (2.31), se conhecida a equação de estado, fornece a dependência da densidade de energia com o parâmetro de expansão e fornece o parâmetro de expansão como função do tempo (em nosso caso do tempo conforme). Vamos usar a dependência da densidade da radiação, da matéria e da constante cosmológica com o parâmetro de expansão para obter a dependência temporal do fator de escala na presença de cada um desses fluidos usando a equação (2.31):

- Domínio da radiação

Durante o período de domínio da radiação no universo (densidade de energia da radiação muito maior que as densidades de energia da matéria e da energia escura, ou seja, para $a \ll a_{eq}$) podemos resolver aproximadamente a equação de Einstein (2.31a) para obter a dependência temporal do fator de escala a neste período. Para fazer isto vamos escrever a equação de Friedman (2.31) com $\rho \approx \rho_r$, isto é, em um universo dominado pela radiação, e com ρ_r dado pela expressão (2.22). Com isto obtemos uma equação diferencial para a na variável temporal η :

$$\dot{a}^2 \propto cte \quad \rightarrow \quad a(\eta) \propto (\eta + \eta_0), \quad \text{ou} \quad a(\tau) \propto (\tau + \tau_0)^{1/2}, \quad (2.32)$$

onde η é o tempo conforme e τ é o tempo próprio. Temos agora a expressão que da a evolução aproximada do fator de escala para a época de domínio da radiação, que escrita com as constantes apropriadas fica:

$$a(\eta) \approx \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 \Omega_r}{3}} \eta. \quad (2.33)$$

- Domínio da matéria escura fria

Após o período de domínio da radiação no universo, para $a \gg a_{eq}$ no modelo Λ CDM, temos o período de domínio da matéria (maiormente matéria escura fria). Neste período podemos aproximar a densidade total do universo (igual a ρ_0 para um universo plano) como sendo a densidade da matéria ρ_m , já que neste período de tempo as densidades de energia da radiação e da constante cosmológica são desprezíveis se comparadas com a densidade de energia da matéria presente no universo. Substituindo então $\rho \approx \rho_m$ dado pela equação (2.25) na equação de Friedman (2.31a) obtemos uma equação diferencial para a em função de η :

$$\dot{a}^2 \propto a \quad \rightarrow \quad a(\eta) \propto (\eta + \eta_{eq})^2, \quad \text{ou} \quad a(\tau) \propto (\tau + \tau_{eq})^{2/3}, \quad (2.34)$$

onde o sub-índice "eq" se refere ao período de equilíbrio da densidade da radiação e da matéria. Com as constantes adequadas, o fator de escala pode ser escrito aproximadamente durante o período de domínio da matéria como:

$$a(\eta) \approx \frac{2\pi G \rho_0 \Omega_m}{3} \eta^2. \quad (2.35)$$

- Período conjunto da radiação e da matéria

Para nosso conforto, as soluções da equação de Friedman (2.31a) que nos dão a dependência temporal do fator de escala $a(\eta)$ para o período de domínio da radiação (2.33) e para o período de domínio da matéria (2.35), são compatíveis. Isto é, a solução da equação de Friedmann (2.31a) para $\rho \approx \rho_r + \rho_m \approx \rho_0$, que nos dá a dependência temporal do fator de escala para o período em que a densidade da energia escura é desprezível, se comparadas com a soma das densidades da radiação e da matéria, é:

$$a(\eta) \approx \frac{2\pi G \rho_0}{3} \Omega_m \eta^2 + \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3}} \Omega_r \eta. \quad (2.36)$$

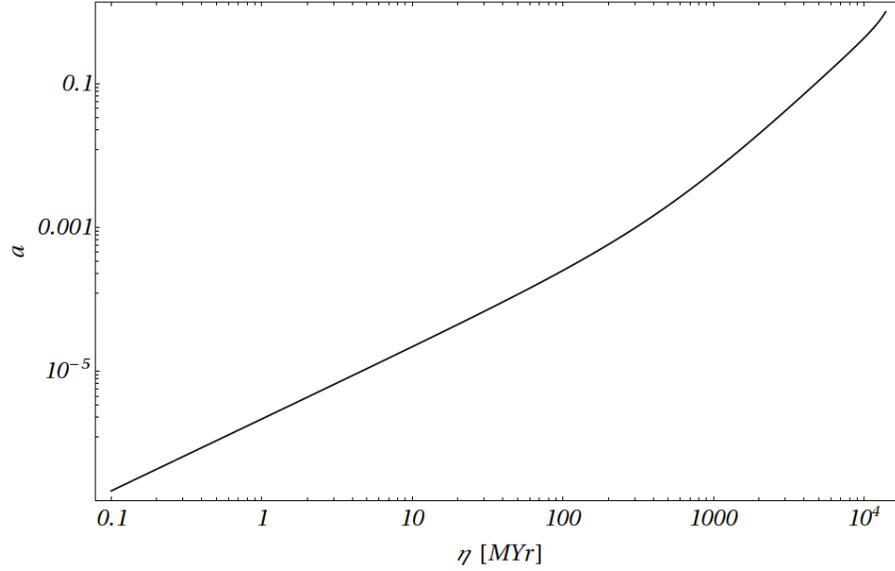


Figura 2.4: Fator de escala a em função do tempo conforme η no modelo Λ CDM para o conteúdo da terceira coluna da tabela 8.1.

- Domínio da constante cosmológica

Após os períodos de domínio do universo por parte da densidade de energia da radiação e da matéria, e devido a que a densidade de energia escura neste modelo permanece constante no tempo, teremos um período de domínio da energia escura (constante cosmológica no modelo Λ CDM). Este período, como já foi dito, é caracterizado por um crescimento acelerado do parâmetro de expansão, o qual é causado pela pressão negativa da constante cosmológica. Vamos, então, aproximar a densidade de energia total do universo pela densidade de energia escura $\rho \approx \rho_\Lambda$ na equação de Friedman (2.31a):

$$\dot{a}^2 = a^4 \quad \rightarrow \quad a(\eta) \propto \frac{1}{b - \eta} \quad \text{ou} \quad a(\tau) \propto e^{cte \cdot \tau}. \quad (2.37)$$

Com as devidas constantes temos que o parâmetro de expansão será aproximadamente:

$$a(\eta) \approx \left[3 \left(\frac{\Omega_\Lambda^{2/6}}{\Omega_m^{1/3}} - \frac{4\sqrt{\Omega_r \Omega_\Lambda}}{\Omega_m} \right) - \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 \Omega_\Lambda}{3}} \eta \right]^{-1}. \quad (2.38)$$

2.4 Inflação

Dos dados experimentais [4] se tem que a temperatura dos fótons da radiação cósmica de fundo que chegam à Terra de todas as direções do céu é muito uniforme. Isto é algo inesperado se repararmos que dois pontos separados por uma distância um pouco menor que o raio comóvel de Hubble (a/\dot{a}) no presente, não tiveram tempo suficiente (após entrarem no raio comóvel de Hubble do outro) para interagir e alcançar uma mesma temperatura (mesmo que os pontos em questão estejam separados por uma distância menor que o horizonte comóvel há muito tempo). Isto, dado que o raio comóvel de Hubble a/\dot{a} é uma função crescente para os períodos de domínio da radiação e da matéria. Este é o chamado problema de horizontes.

O problema de horizontes pode ser resolvido se consideramos a possibilidade de que antes da época de domínio radiação teve lugar outro período do universo dominado por um fluido com pressão negativa. Um fluido com pressão negativa (na verdade com $\mathcal{P} < -\rho/3$) permite um período de expansão acelerada (muito parecido com o período de domínio da constante cosmológica), o qual dá um efeito muito especial no raio comóvel de Hubble:

$$\frac{a}{\dot{a}} = cte - \eta, \quad (2.39)$$

com o qual, para um período de expansão acelerada (que chamaremos de período de inflação, e que teve lugar antes do período de domínio da radiação) o raio comóvel de Hubble (a/\dot{a}) diminui a medida que o fator de escala cresce (o raio de Hubble $1/H = a^2/\dot{a}$ permanece constante durante o dito período). Como isto pode nos ajudar a explicar a homogeneidade da temperatura da radiação cósmica de fundo? Se o raio comóvel de Hubble diminui em função do tempo da forma dada pela equação (2.39) quer dizer que este era muito maior no passado (antes do período de inflação), logo diminuiu durante a inflação e finalmente voltou a aumentar durante os períodos de domínio da radiação e da matéria. Com isto, dois pontos que até a pouco tempo (ainda durante o período de domínio da matéria) entraram no raio comóvel de Hubble do outro poderiam ter permanecido dentro dele durante um período anterior (antes do período de inflação), sempre que o período de inflação for o suficientemente longo para fazer com que o raio de Hubble tivesse sido bem maior do que é no presente (na maioria dos modelos precisa-se de aproximadamente 60 *e-folds* para fazer com que o raio comóvel de Hubble antes da inflação seja maior do que é no presente).

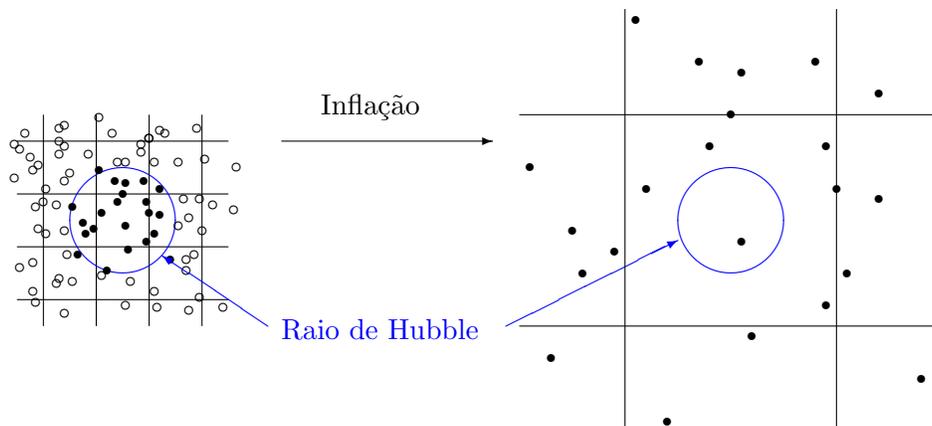


Figura 2.5: Expansão do universo durante a inflação

Esquema da maneira como o universo se expande uniformemente enquanto o raio de Hubble (a^2/\dot{a}) permanece constante durante a inflação. A rede mostrada é a rede comóvel (invariante em função do tempo), de onde fica evidente que o raio comóvel de Hubble (a/\dot{a}) diminui a medida que o universo vai se expandindo [25].

Capítulo 3

Perturbações

No capítulo anterior deduzimos as equações que descrevem a evolução temporal de um universo espacialmente plano, homogêneo, isotrópico e em expansão. Para aquela análise se considerou um universo como composto somente por radiação, matéria escura fria e constante cosmológica.

Estas equações são: as componentes das equações de conservação do tensor momento energia para a radiação, a matéria e a constante cosmológica (as componentes espaciais são identicamente nulas se assumirmos isotropia e homogeneidade); as componentes da equação de Einstein não perturbada (duas são nulas se assumirmos isotropia e homogeneidade, as duas que restam são redundantes se conhecemos as equações de estado de cada fluido presente no universo); e as equações de estado $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho)$ para cada um dos fluidos presentes no universo.

Se conhecermos as equações de estado para a radiação, a matéria e a constante cosmológica teremos então um sistema de 4 equações (a componente temporal da equação de conservação do tensor momento energia para cada um dos três fluidos, e uma componente da equação de Einstein) e 4 incógnitas (a densidade para cada fluido em função do fator de escala, e o fator de escala em função do tempo).

As três equações de conservação do tensor momento-energia podem ser resolvidas exatamente para qualquer tempo, enquanto que a equação de Einstein só tem soluções analíticas em três épocas desconexas: na época de domínio da radiação, da matéria e da constante cosmológica.

As observações experimentais [3] mostram que o universo em grandes escalas (da ordem de 100 Mpc ou maiores) é muito próximo de ser homogêneo e isotrópico, mas apresenta pequenas flutuações na sua homogeneidade e isotropia, sendo assim podemos modelá-las usando teoria de perturbações lineares. Nesta seção introduziremos perturbações escalares no tensor métrico, e perturbações no tensor momento energia da radiação e a matéria para modelar o nosso universo em grandes escalas. Para estudar a evolução destas perturbações assumiremos que as equações até ordem zero (sem perturbações) são válidas e têm as soluções do capítulo anterior. Depois, a partir da equação de conservação do tensor momento-energia até primeira

ordem para a radiação e a matéria, e das componentes da equação de Einstein também até primeira ordem, obteremos as equações de evolução das perturbações introduzidas.

De maneira complementar, no capítulo 5, vamos obter soluções analíticas das perturbações em casos restritos (usando algumas aproximações) e vamos compará-las (no capítulo 8) com resultados numéricos obtidos usando o programa CAMB [20].

3.1 Perturbações escalares na métrica

Graças à formulação tensorial da gravitação de Einstein, na qual está baseado o modelo cosmológico padrão, é possível introduzir perturbações escalares, vetoriais e tensoriais no tensor métrico. Se as perturbações são pequenas vão evoluir independentemente [2, 3] produzindo efeitos diferentes. As perturbações escalares vão contribuir à formação de estruturas, as perturbações tensoriais vão produzir ondas gravitacionais, enquanto que as perturbações vetoriais vão produzir efeitos gravitomagnéticos. Neste trabalho estamos interessados na formação de estruturas em grandes escalas, portanto restringiremos nosso estudo à evolução das perturbações escalares.

A métrica de Friedman-Robertson-Walker é a solução estacionária e com simetria espacial esférica mais geral às equações de Einstein para um universo homogêneo, isotrópico e em expansão uniforme. Esta solução permite um universo com curvatura positiva (fechado), negativa (aberto) e sem curvatura (plano). A métrica FRW não perturbada pode ser escrita em coordenadas esféricas como:

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (3.1)$$

onde k pode ser 1, -1 e 0 para um universo espacialmente fechado, aberto e plano respectivamente.

A métrica perturbada de Friedman-Robertson-Walker (em coordenadas Cartesianas) para um universo espacialmente plano, em expansão, e muito próximo de ser homogêneo e isotrópico, pode ser parametrizada na forma mais geral como:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -a^2(\tau) \{1 + 2\psi(x^\mu, \tau)\}, \\ g_{0i} &= a^2(\tau) \omega_i(x^\mu, \tau), \\ g_{ij} &= a^2(\tau) \{[1 - 2\phi(x^\mu, \tau)]\delta_{ij} + \chi_{ij}(x^\mu, \tau)\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico não perturbado (no caso de um universo plano é o tensor métrico de Minkowski) e $h_{\mu\nu}$ é a perturbação da métrica escrita como um tensor. Como o tensor $h_{\mu\nu}$ é simétrico e de ordem 2, em quatro dimensões terá no máximo 10 componentes independentes que podem ser escritas como dois campos escalares (tensores de ordem zero) ϕ e ψ somando 2 graus de liberdade, um trivetor ω_i (tensor de grau um em 3 dimensões) com 3 graus de liberdade, e um tensor de ordem dois χ_{ij} (em três dimensões) obviamente simétrico e com traço nulo o qual tem 5 graus de liberdade (o traço do

tensor perturbação da métrica é dado só pelos campos escalares ψ e ϕ). No total, os campos ϕ , ψ , ω_i e χ_{ij} que compõem a perturbação ao tensor métrico somam 10 de graus de liberdade.

Teorema de decomposição

Adicionalmente podemos decompor os campos ω_i e χ_{ij} em função de tensores irredutíveis como sendo:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{\parallel} + \boldsymbol{\omega}^{\perp}, \quad \text{onde} \quad \nabla \times \boldsymbol{\omega}^{\parallel} = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^{\perp} = 0. \quad (3.3)$$

Assim, o campo $\boldsymbol{\omega}^{\parallel}$ pode ser reescrito como sendo o gradiente de um campo escalar $\boldsymbol{\omega}^{\parallel} \equiv \nabla B$, portanto terá só 1 grau de liberdade. Isto deixa o vetor $\boldsymbol{\omega}^{\perp}$ com 2 graus de liberdade (e não pode se escrever em função de nenhum campo escalar, portanto é um vetor irredutível).

Igualmente, o tensor simétrico sem traço χ_{ij} (lembrando que os índices latinos correm de 1 até 3, enquanto que os índices gregos correm de 0 até 3) pode ser escrito como:

$$\chi_{ij} = \chi_{ij}^{\parallel} + \chi_{ij}^{\perp} + \chi_{ij}^T, \quad \text{com} \quad \chi \equiv \chi_{ii}, \quad (3.4)$$

e onde as componentes longitudinal χ_{ij}^{\parallel} , solenoidal χ_{ij}^{\perp} e a componente transversal sem traço χ_{ij}^T estão definidas como tendo as propriedades:

$$\epsilon^{ijk} \partial_j \partial^l \chi_{lk}^{\parallel} = 0, \quad \partial^i \partial^j \chi_{ij}^{\perp} = 0, \quad \partial^i \chi_{ij}^T = 0. \quad (3.5)$$

Com isto, a componente longitudinal do tensor χ pode ser reescrita em função de um campo escalar μ (1 grau de liberdade) e a componente solenoidal pode ser escrita em função de um campo vetorial A_i (3 graus de liberdade) como:

$$\chi_{ij}^{\parallel} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \mu, \quad \chi_{ij}^{\perp} = \partial_{(i} A_{j)} \equiv \partial_i A_j + \partial_j A_i. \quad (3.6)$$

Resumindo, a decomposição da perturbação do tensor métrico em tensores irredutíveis fica composta por quatro campos escalares ψ , ϕ , μ e B com 1 grau de liberdade cada, dois campos vetoriais transversos A_i e ω_i^{\perp} cada um com 2 graus de liberdade, e finalmente um tensor transversal sem traço χ_{ij}^T que só tem 2 graus de liberdade.

Estas três perturbações irredutíveis (escalares, vetores transversos e tensores transversos sem traço) evoluem independentemente segundo o teorema de decomposição [2, 3], e cada um é responsável por um efeito perturbativo diferente: formação de estruturas (perturbações escalares), gravitomagnetismo (perturbações vetoriais) e ondas gravitacionais (perturbações tensoriais).

Transformações de calibre

Dos 10 graus de liberdade do tensor $\eta_{\mu\nu}$ somente 6 são independentes e podem representar graus de liberdade físicos. Já que os observáveis físicos devem ser invariantes por transformações de coordenadas vamos ter 4 restrições e portanto 4 graus de liberdade não físicos que correspondem a 2 campos escalares e 1 campo vetorial transversal. Assim, os 10 graus de liberdade do tensor $\eta_{\mu\nu}$ podem ser expressas em função de 6 componentes independentes, o que nos dá a liberdade de expressar o tensor $\eta_{\mu\nu}$ de formas diferentes sem mudar os observáveis físicos. Isto é chamado de liberdade de calibre.

As perturbações escalares são estudadas usualmente no calibre longitudinal ou no calibre sincrônico. Nós trabalharemos no calibre longitudinal com exceção da análise numérica feita usando o programa CAMB [20, 31] (escrito no calibre sincrônico). As perturbações da métrica no calibre longitudinal são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -1 - 2\psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\phi \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Este calibre é particularmente simples para trabalhar, já que temos somente perturbações diagonais.

3.2 Tensor momento energia para um gás ideal

Partiremos do novo do tensor momento energia para um gás ideal:

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{P}g^{\mu\nu} + (\rho + \mathcal{P})U^\mu U^\nu, \quad (3.8)$$

onde U é a quadrivelocidade do fluido (lembrando que em coordenadas comóveis as suas componentes espaciais são zero para um gás não perturbado) e onde ρ e \mathcal{P} são sua densidade de energia e sua pressão medidas todas por um observador comóvel. Se o fluido que possui uma velocidade peculiar pequena $v^i = dx^i/d\eta$ diferente de zero, a qual consideraremos como uma perturbação dependente do ponto de medição, esta pequena perturbação na velocidade do gás vai gerar uma diferença da pressão e de densidade se comparadas com a pressão e densidade médias. Desta maneira $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$ e $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}} + \delta\mathcal{P}$, onde $\delta\rho$ e $\delta\mathcal{P}$, assim como v^i , dependem do ponto de medição. Em geral, estas perturbações podem terminar afetando a isotropia do tensor momento energia que, uma vez perturbado, pode ser parametrizado como:

$$T_0^0 = -\rho = -(\bar{\rho} + \delta\rho), \quad (3.9a)$$

$$T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{\mathcal{P}})v_i, \quad T_0^i = (\bar{\rho} + \bar{\mathcal{P}})v^i, \quad (3.9b)$$

$$T_j^i = \mathcal{P}\delta_j^i + \Sigma_j^i = (\bar{\mathcal{P}} + \delta\mathcal{P})\delta_j^i + \Sigma_j^i, \quad \Sigma_i^i = 0, \quad (3.9c)$$

onde Σ_j^i é a parte anisotrópica, e com traço nulo, da componente espacial do tensor momento energia.

Conservação do tensor momento energia

Assumindo a validade da equação de Einstein, e usando uma derivada covariante compatível com a métrica, a derivada covariante do lado esquerdo da equação de Einstein é zero. Portanto, a derivada covariante do lado direito da equação de Einstein será também zero:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} T^{\nu\beta} = 0. \quad (3.10)$$

No caso de fluidos não interagentes temos, adicionalmente, que a derivada covariante do tensor momento energia para cada um dos fluidos é individualmente zero. No caso de fluidos interagentes teremos que adicionar um termo de colisão à direita da equação (3.10) se quisermos estudar os fluidos individualmente.

Para um fluido não interagente a equação de conservação do seu tensor momento energia perturbado é escrita como (3.9). Usando as conexões compatíveis com a métrica perturbada (3.7) temos que as componentes temporal e espacial da equação (3.10) são:

$$\dot{\delta} = -(1 + \omega)(\theta - 3\dot{\phi}) - 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \delta)(1 + \omega) - \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}(1 + \delta), \quad (3.11a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{k^2\delta}{1 + \omega} \frac{\delta\mathcal{P}}{\delta\rho} - \sigma k^2 - 4\frac{\dot{a}}{a}\theta + \psi k^2 - \left(\frac{\dot{\bar{\rho}} + \dot{\bar{\mathcal{P}}}}{\bar{\rho}} \right) \frac{\theta}{1 + \omega}, \quad (3.11b)$$

onde definimos as perturbações espaço-temporal, θ , e espacial anisotrópica, σ , para cada fluido como:

$$(\bar{\rho} + \bar{\mathcal{P}})\theta \equiv ik^j \delta T_j^0,$$

$$(\bar{\rho} + \bar{\mathcal{P}})\sigma \equiv - \left(\hat{k}^i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \right) \Sigma_i^j \quad \Sigma_i^j \equiv T_i^j - \frac{\delta_i^j}{3} T_k^k,$$

válidas para fluidos individuais que não interagem entre si. No caso específico de um universo com radiação e matéria escura, desconsiderando qualquer interação entre elas, as equações de conservação do tensor momento energia ficam da seguinte forma:

Radiação

Para o caso da radiação, temos que a equação de estado é $\omega_r = \bar{\mathcal{P}}_r/\bar{\rho}_r = 1/3$. Por outro lado, da equação (2.21) temos que $\bar{\rho}_r \propto a^{-4}$, com o que $\dot{\bar{\rho}}_r = -4\bar{\rho}_r \frac{\dot{a}}{a}$. Com isto, as equações (3.11a) e (3.11b) tornam-se:

$$\dot{\delta}_r + \frac{4}{3}\theta_r - 4\dot{\phi} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\theta}_r - k^2 \left(\frac{\delta_r}{4} - \sigma_r + \psi \right) = 0, \quad (3.12)$$

onde usamos $c_{s(r)}^2 \equiv \delta\mathcal{P}_r/\delta\rho_r \approx \omega_r = 1/3$. Estas duas equações diferenciais acopladas de primeira ordem

podem ser reescritas como equações diferenciais de segunda ordem desacopladas como:

$$\ddot{\delta}_r + \frac{k^2}{3}(\delta_r - 4\sigma_r + 4\psi) - 4\ddot{\phi} = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{\theta}_r + \frac{k^2}{3}\theta_r - k^2\left(\dot{\phi} + \dot{\psi} - \frac{\dot{\sigma}_r}{4}\right). \quad (3.13)$$

Matéria escura fria

Para o caso da matéria, temos que a equação de estado é $\omega_m = \bar{\mathcal{P}}_m/\bar{\rho}_m = 0$. Por outro lado, da equação (2.24) temos que $\bar{\rho}_m \propto a^{-3}$, com o que $\dot{\bar{\rho}}_m = -3\bar{\rho}_m \frac{\dot{a}}{a}$. Com isto, as equações (3.11a) e (3.11b) tornam-se:

$$\dot{\delta}_m + \theta_m - 3\dot{\phi} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\theta}_m + \frac{\dot{a}}{a}\theta_m - k^2(\delta_m c_s^2 - \sigma_m + \psi) = 0, \quad (3.14)$$

onde $k^2 c_s^2 = k^2 \delta \mathcal{P} / \delta \rho$ não é necessariamente desprezível. Como antes, estas duas equações diferenciais acopladas de primeira ordem na variável temporal podem ser reescritas como uma equação de segunda ordem:

$$\ddot{\delta}_m + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_m + k^2(\delta_m c_s^2 - \sigma_m + \psi) - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - 3\ddot{\phi} = 0. \quad (3.15)$$

3.3 Componentes da equação de Einstein

No calibre longitudinal e no espaço de Fourier, onde $\partial_l \rightarrow ik_l$ com k_l sendo o vetor de onda na direção l , temos que as componentes tempo-tempo, tempo-espaço, longitudinal espacial, e espacial sem traço das equações de Einstein (2.28) ficam:

$$8\pi a^2 G T_0^0 = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 6\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + 6 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \psi + 2k^2 \phi, \quad (3.16a)$$

$$4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{\mathcal{P}})\theta = k^2 \left(\dot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\psi\right), \quad (3.16b)$$

$$\frac{4}{3}\pi G a^2 T_i^i = -\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k^2}{3}(\phi - \psi) + \ddot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\psi} + 2\dot{\phi}) + 2\psi \frac{\ddot{a}}{a} - \psi \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \quad (3.16c)$$

$$12\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{\mathcal{P}})\sigma = k^2(\phi - \psi), \quad (3.16d)$$

às vezes é útil usar as componentes tempo-tempo e tempo-espaço da equação de Einstein para obter uma equação algébrica para os parâmetros da perturbação da seguinte forma:

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \left[k^2 \delta - 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega)\theta \right] = k^4 \phi. \quad (3.17)$$

Estas equações, junto com as equações de conservação do tensor momento energia (ou as equações de Boltzmann que introduziremos na seção seguinte) constituem um sistema completo de equações diferenciais que determina a evolução temporal das perturbações ao tensor métrico e ao tensor momento energia.

3.4 Equação de Boltzmann

No espaço de fase o número de partículas de uma determinada espécie de fluido em um diferencial de volume $dx^1 dx^2 dx^3 dP_1 dP_2 dP_3$ é dado pela sua função distribuição da seguinte forma:

$$f(x^i, p_j, \eta) dx^1 dx^2 dx^3 dP_1 dP_2 dP_3 = dN, \quad (3.18)$$

igualmente, no espaço de fase podemos calcular o tensor momento energia como sendo:

$$T_{\mu\nu} = \int dP_1 dP_2 dP_3 (-g)^{-1/2} \frac{P_\mu P_\nu}{P^0} f(x^i, p_j, \eta), \quad (3.19)$$

Onde $f(x^i, p_j, \eta)$ é a função distribuição estatística do fluido em consideração, e P_i é o momento conjugado da coordenada comóvel x^i . Este momento conjugado P_i é simplesmente a componente espacial do quadri vetor momento $P^\mu = mU^\mu$. Agora, se reescrevermos $f(x^i, p_j, \eta)$ como um termo não perturbado mais uma pequena perturbação:

$$f(x^i, p_j, \eta) \equiv \bar{f}(p, \eta) [1 + \Psi(x^i, p_j, \eta)], \quad (3.20)$$

com $\bar{f}(p(\eta), \eta) = \bar{f}(q, \eta)$ sendo a função distribuição não perturbada independente do ponto x^i onde é calculada e da direção do momento \hat{p}_i do fluido nesse ponto:

$$\bar{f}(q, \eta) = \bar{f}(\epsilon) = \frac{g_s}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu_0)/T_0} \pm 1}, \quad (3.21)$$

onde T_0 é a temperatura média do fluido, e onde:

$$\epsilon(q, a) \equiv aE(p) \equiv a\sqrt{p^2 + m^2} \equiv \sqrt{q^2 + a^2 m^2}, \quad \mu_0 \equiv a\mu, \quad T_0 \equiv aT. \quad (3.22)$$

Com esta parametrização [19] podemos calcular as componentes da equação (3.19), levando em conta que no calibre longitudinal a raiz quadrada do determinante da métrica até primeira ordem em ψ e ϕ é:

$$(-g)^{-1/2} \approx a^{-4}(1 - \psi + 3\phi), \quad (3.23)$$

e que a magnitude do quadrimomento P é:

$$P^2 \equiv g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = g_{00} P^0 P^0 + p^2 = m_0^2, \quad (3.24)$$

com $p^2 \equiv g_{ij} P^i P^j$. Se escrevermos $P^i = C \hat{p}^i$ (onde p_i é o momento próprio do fluido medido em coordenadas comóveis) encontramos que $C \approx a^{-1} p(1 + \phi) \equiv a^{-2} q(1 + \phi)$, com o que o momento conjugado pode ser reescrito como:

$$P^i = q^i \frac{1 + \phi}{a^2}, \quad P_i = q_i(1 - \phi), \quad (3.25)$$

e usando $g_{00} = -(1 + 2\psi)a^2$ em (3.24) obtemos também que

$$P^0 = \epsilon \frac{1 - \psi}{a^2}, \quad P_0 = -\epsilon(1 + \psi). \quad (3.26)$$

Com isto, as expressões para as diferentes componentes do tensor momento energia (3.19) perturbadas até primeira ordem ficam:

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -a^{-4} \int d^3q \epsilon \bar{f}(q, \eta) [1 + \Psi(x^i, q_j, \eta)], \\ T_i^0 &= a^{-4} \int d^3q q_i \bar{f}(q, \eta) \Psi(x^i, q_j, \eta), \\ T_i^i &= a^{-4} \int d^3q \frac{q^2}{\epsilon} \bar{f}(q, \eta) [1 + \Psi(x^i, q_j, \eta)], \\ \Sigma_j^i &= a^{-4} \int d^3q \frac{1}{\epsilon} \bar{f}(q, \eta) \Psi(x^i, q_j, \eta) \left(q^i q_j - \frac{\delta^i \delta_j}{3} q^2 \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Estas três primeiras equações são equivalentes às equações (3.11a) e (3.11b) sempre até primeira ordem levando em conta que:

$$-\delta\rho \equiv \delta T_0^0, \quad \delta\mathcal{P} \equiv \frac{\delta T_i^i}{3}, \quad \theta(\bar{\rho} + \bar{\mathcal{P}}) \equiv k_i T_0^i, \quad \sigma(\bar{\rho} + \bar{\mathcal{P}}) \equiv \frac{T_k^k}{3} - \hat{k}_i \hat{k}^j T_j^i, \quad (3.28)$$

No entanto, das equações (3.11a) e (3.11b) podemos obter as equações de evolução das perturbações θ e δ mais facilmente quando a equação de estado do fluido é simples, é o caso da matéria e da radiação não interagentes. No caso em que a equação de estado não é simples é melhor deixar as equações (3.27) em função de $\Psi(x^i, q, n_j, \eta)$, cuja equação de evolução pode ser obtida a partir da equação de Boltzmann:

$$\frac{Df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dq}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{dn_i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial n_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_C, \quad (3.29)$$

onde o quarto termo da primeira igualdade é de segunda ordem nas variáveis perturbativas, e a equação é toda igualada ao termo de colisão do fluido em questão, ou igualada a zero se não interage com nenhum outro fluido. Usamos também a definição $a\vec{p} = \vec{q} \equiv q\hat{n}$, onde q é o momento comóvel (não depende do tempo até ordem zero em teoria de perturbações).

Usando as equações (3.25) e (3.26), obtemos no calibre longitudinal:

$$\frac{\partial x^i}{\partial \eta} = \frac{\partial x^i / \partial \tau}{\partial \eta / \partial \tau} = -\frac{q_i}{\epsilon} (1 + \phi + \psi), \quad (3.30)$$

também, da componente temporal da equação geodésica (2.7) e usando novamente as equações (3.25) e (3.26) podemos obter a relação:

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = -\vec{k} \cdot \hat{n} \epsilon \psi + q \dot{\phi}. \quad (3.31)$$

Com isto, a equação de Boltzmann (3.29) no espaço de Fourier (parametrizado pelo vetor de onda \vec{k}) usando o calibre longitudinal pode ser reescrita como:

$$\dot{\Psi} + i\frac{q}{\epsilon}\vec{k} \cdot \hat{n}\Psi + \left(\dot{\phi} - i\frac{\epsilon}{q}\vec{k} \cdot \hat{n}\psi\right) \frac{\partial \ln \bar{f}}{\partial \ln q} = \frac{1}{\bar{f}} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_C, \quad (3.32)$$

com

$$\Psi = \Psi(\vec{k}, \vec{q}, \eta), \quad \vec{k} \equiv k\hat{k}, \quad \vec{q} \equiv q\hat{n}. \quad (3.33)$$

Lembrando que o termo da direita é o termo de colisão, temos que a equação de Boltzmann é igual a zero para um fluido que somente interage gravitacionalmente. De agora em diante vamos trabalhar no espaço de Fourier parametrizado pelo vetor de onda \vec{k} , não no espaço de coordenadas.

Em geral $\bar{f} = \bar{f}(q, \eta)$, com o que a equação (3.29) não será escrita como:

$$\frac{\partial \ln \bar{f}}{\partial \eta}(1 + \Psi) + \dot{\Psi} + i\frac{q}{\epsilon}\vec{k} \cdot \hat{n}\Psi + (q\dot{\phi} - i\epsilon\vec{k} \cdot \hat{n}\psi) \frac{\partial \ln \bar{f}}{\partial q} = \frac{1}{\bar{f}} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_C. \quad (3.34)$$

3.5 Espectro de potência da matéria

Define-se o espectro de potência $P_m(\vec{k}, \eta)$ da matéria no espaço de Fourier como a média da função de correlação do contraste de densidade de dois pontos da seguinte maneira:

$$\left\langle \delta_m^\dagger(\vec{k}, \eta) \delta_m(\vec{k}', \eta) \right\rangle \equiv (2\pi)^3 P_m(k, \eta) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.35)$$

com δ_m é o contraste de densidade da matéria massiva:

$$\delta_m \equiv \frac{\sum_i \bar{\rho}_i \delta_i}{\sum_i \bar{\rho}_i}. \quad (3.36)$$

Onde o índice i é somado sobre todos os fluidos massivos, no modelo padrão serão a matéria escura fria, os bárions e os neutrinos massivos. O termo $\delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$ surge pela independência na evolução dos modos (\vec{k}, \vec{k}') na teoria de perturbações lineares. As condições iniciais para o espectro de potência é parametrizado como uma potência de ordem $n - 1$ em k :

$$P_0 \propto \left(\frac{k}{H_0}\right)^{n-1}, \quad (3.37)$$

onde $n \approx 0.96$ [32, 33]. $n = 1$ corresponderia a um espectro de potência inicial invariante de escala.

É de destacar que o espectro de potência da matéria como qualquer outro observável físico calculado a partir das perturbações na equação de Einstein depende do calibre escolhido para escalas de super-horizonte ($k\eta \ll 1$) já que a evolução de essas escalas envolve física não causal [19].

Capítulo 4

Conteúdo do universo

Tanto as equações (3.11a) e (3.11b), obtidas usando a conservação do tensor momento energia, como a equação de Boltzmann (3.29), nos fornecem a mesma informação sobre a evolução das perturbações do tensor momento energia θ e δ ; mas a obtenção destas equações é bem mais fácil a partir das equações (3.11a) e (3.11b) quando temos uma equação de estado simples, é o caso da radiação e da matéria onde $\mathcal{P}_r = \rho_r/3$ e $\mathcal{P}_m = 0$. Isto é certo se desconsiderarmos multipolos de ordem superior a 1 nas equações de Boltzmann.

Vamos então obter as equações de evolução das perturbações do tensor momento energia para cada um dos fluidos presentes no universo no modelo cosmológico padrão.

4.1 Matéria escura fria

É o modelo mais simples de matéria escura, no qual é considerada como sendo não relativística (inclusive no período de domínio da radiação). De onde se origina o nome de matéria escura fria e cuja equação de estado é $\mathcal{P} \approx 0$, dando como resultado o crescimento monótono das suas flutuações de densidade. Para o caso aproximado, onde desconsideramos σ (com o que da equação (3.16c) temos que $\psi \approx \phi$) e levando em conta que a velocidade $c_s^2 \equiv \delta\mathcal{P}/\delta\rho$ é muito pequena para a matéria escura, então as equações (3.14) vão se simplificar a:

$$\dot{\delta}_c = -\theta_c + 3\dot{\phi}, \quad \dot{\theta}_c = -\frac{\dot{a}}{a}\theta_c + k^2\psi. \quad (4.1)$$

4.2 Neutrinos sem massa

Na época do domínio da radiação os neutrinos são muito relativísticos, dessa forma sua massa é desprezível se comparada com a sua energia cinética portanto, é uma boa aproximação modelá-los como radiação. Como a equação de estado para a radiação é bem simples, podemos usar as equações (3.11a) e (3.11b), mas também pelo fato da radiação não ter massa, podemos obter as equações de evolução das perturbações

a partir das equações (3.27):

$$\bar{\rho}_\nu = 3\bar{\mathcal{P}}_\nu = a^{-4} \int d^3q q \bar{f}, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \delta\rho_\nu &= 3\delta\mathcal{P}_\nu = a^{-4} \int d^3q q \bar{f} \bar{\Psi}, \\ (\delta T_i^0)_\nu &= a^{-4} \int d^3q q n_i \bar{f} \bar{\Psi}, \\ (\Sigma_j^i)_\nu &= a^{-4} \int d^3q q \left(n^i n_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \right) \bar{f} \bar{\Psi}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para partículas não interagentes e sem massa a equação (3.32) fica:

$$\dot{\bar{\Psi}} + ik\mu\bar{\Psi} + \left(\dot{\phi} - ik\mu\psi \right) \frac{\partial \ln \bar{f}}{\partial \ln q} = 0, \quad (4.4)$$

onde $\alpha \equiv \hat{k} \cdot \hat{n}$. Se integrando esta equação vezes $q\bar{f}(q)$ com respeito a $\int q^2 dq$ e definindo

$$F_\nu(\vec{k}, \hat{n}, \eta) \equiv \frac{\int q^2 dq q \bar{f}(q) \Psi(\vec{k}, \vec{q}, \eta)}{\int q^2 dq q \bar{f}(q, \eta)}, \quad (4.5)$$

pode-se obter a equação de evolução temporal de F_ν :

$$\dot{F}_\nu + i\mu F_\nu = 4(\dot{\phi} - ik\alpha\psi). \quad (4.6)$$

Se expandirmos F_ν em polinômios de Legendre como:

$$F_\nu(\vec{k}, \hat{n}, \tau) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) F_{\nu l}(k, \tau) P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}), \quad (4.7)$$

e substituímos esta expansão na equação (4.6), e integrar-mo-la multiplicada por $P_l(\mu)$ no espaço dos momentos, por comparação com (4.3) obteremos:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_\nu &= -\frac{4}{3}\theta_\nu + 4\dot{\phi} = \dot{F}_{\nu 0}, \\ \dot{\theta}_\nu &= k^2 \left(\frac{1}{4}\delta_\nu - \sigma_\nu \right) + k^2\psi = \frac{3}{4}\dot{F}_{\nu 1}, \\ \dot{\sigma}_\nu &= \frac{1}{2}\dot{F}_{\nu 2}, \\ \dot{F}_{\nu l} &= \frac{k}{2l+1} [lF_{\nu(l-1)} - (l+1)F_{\nu(l+1)}], \quad l \geq 2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como se tinha dito, as duas primeiras equações podem ser obtidas a partir das equações (3.11a) e (3.11b) levando em conta que:

$$c_s^2 \equiv \frac{\delta\mathcal{P}_\nu}{\delta\rho_\nu} \approx \omega_\nu \equiv \frac{\bar{\mathcal{P}}_\nu}{\bar{\rho}_\nu} = \frac{1}{3} \quad e \quad \frac{\dot{\bar{\mathcal{P}}}_\nu}{\bar{\rho}_\nu} = \frac{1}{3} \frac{\dot{\bar{\rho}}_\nu}{\bar{\rho}_\nu} = -\frac{4}{3} \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.9)$$

no caso em que os neutrinos têm massa muito menor que sua energia, isto é, no domínio da radiação.

4.3 Neutrinos com massa

No domínio da matéria os neutrinos já não são muito relativísticos, dessa forma é preciso levar em conta a sua massa. Para obter as equações de evolução das perturbações vamos utilizar de novo as equações (3.27), só que agora não vão se simplificar porque $\epsilon \neq q$:

$$\bar{\rho}_h = a^{-4} \int d^3q \epsilon \bar{f}(q), \quad \bar{\mathcal{P}}_h = \frac{1}{3} a^{-4} \int d^3q \frac{q^2}{\epsilon} \bar{f}, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \delta\rho_h &= a^{-4} \int d^3q \epsilon \bar{f} \Psi, \\ \delta\mathcal{P}_h &= \frac{1}{3} a^{-4} \int d^3q \frac{q^2}{\epsilon} \bar{f} \Psi, \\ (\delta T_i^0)_h &= a^{-4} \int d^3q q n_i \bar{f} \Psi, \\ (\Sigma_j^i)_h &= a^{-4} \int d^3q \frac{q^2}{\epsilon} \left(n^i n_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \right) \bar{f} \Psi, \end{aligned} \quad (4.11)$$

substituindo a expansão

$$\Psi(\vec{k}, \hat{n}, \tau) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \Psi_l(k, \tau) P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}), \quad (4.12)$$

nas equações (4.11) e integrando com respeito a $d\alpha$, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta\rho_h &= 4\pi a^{-4} \int q^2 dq \epsilon \bar{f} \Psi_0, \\ \delta\mathcal{P}_h &= \frac{4\pi}{3} a^{-4} \int q^2 dq \frac{q^2}{\epsilon} \bar{f} \Psi_0, \\ (\bar{\rho}_h + \bar{\mathcal{P}}_h) \theta_h &= 4\pi k a^{-4} \int q^2 dq q \bar{f} \Psi_1, \\ (\bar{\rho}_h + \bar{\mathcal{P}}_h) \sigma_h &= \frac{8\pi}{3} a^{-4} \int q^2 dq \frac{q^2}{\epsilon} \bar{f} \Psi_2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

se também substituimos (4.12) em (3.32) e integramos esta última equação multiplicando-la por $P_l(\alpha)$ com respeito a $d\alpha$, obtemos as equações de evolução dos coeficientes da expansão de Ψ :

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_0 &= -\frac{qk}{\epsilon} \Psi_1 - \dot{\phi} \frac{d \ln \bar{f}}{d \ln q}, \\ \dot{\Psi}_1 &= \frac{qk}{3\epsilon} (\Psi_0 - 2\Psi_2) - \frac{\epsilon}{3q} \dot{\psi} \frac{d \ln \bar{f}}{d \ln q}, \\ \dot{\Psi}_l &= \frac{qk}{(2l+1)\epsilon} [l\Psi_{l-1} - (l+1)\Psi_{l+1}], \quad l \geq 2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.4 Fótons

Devido às inomogeneidades na densidade dos bárions, durante o desacoplamento com os fótons, a dispersão Compton produz radiação polarizada anisotrópica. Depois da última superfície de dispersão, os fótons propagam-se livremente até no presente, com o que temos um retrato da última superfície de dispersão medindo-se as anisotropias na radiação cósmica de fundo. Como no caso dos neutrinos sem massa, temos que as perturbações no tensor momento energia estão dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned}\delta_\gamma &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega F_\gamma(\vec{k}, \hat{n}, \eta) = F_{\gamma 0}, \\ \theta_\gamma &= \frac{3i}{16\pi} \int d\Omega F_\gamma(\vec{k}, \hat{n}, \eta) (\vec{k} \cdot \hat{n}) = \frac{3}{4} F_{\gamma 1}, \\ \sigma_\gamma &= \frac{-3}{16\pi} \int d\Omega F_\gamma(\hat{k}, \hat{n}, \eta) \left[(\vec{k} \cdot \hat{n})^2 - \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{2} F_{\gamma 2}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

onde os $F_{\gamma l}$ são os coeficientes da expansão em multipolos de Legendre da perturbação da função de distribuição dos fótons. Antes de tentar aplicar a equação de Boltzmann (3.32) aos fótons devemos lembrar que o termo de colisão (lado direito desta equação) é diferente de zero, já que os fótons interagem com os bárions, e, além disso, esta interação depende da direção de polarização dos fótons. O termo de polarização pode ser escrito da forma [19, 34, 35]:

$$\left(\frac{\partial F_\gamma}{\partial \tau} \right)_c = an_e \sigma_T \left[-F_\gamma + F_{\gamma 0} + 4\hat{n} \cdot \vec{v}_e - \frac{1}{2} (F_{\gamma 2} + G_{\gamma 0} + G_{\gamma 2}) P_2 \right],\tag{4.16}$$

onde F_γ está relacionada com a função de distribuição somadas sobre todas as possíveis polarizações (intensidade da radiação) e G_γ está relacionado com o parâmetro de Stokes $Q \equiv |E_i|^2 - |E_j|^2$ (a diferença das duas componentes perpendiculares de polarização linear) que também pode ser expandido em polinômios de Legendre, e que satisfaz a equação:

$$\left(\frac{\partial G_\gamma}{\partial \tau} \right)_c = an_e \sigma_T \left[-G_\gamma + \frac{1}{2} (F_{\gamma 2} + G_{\gamma 0} + G_{\gamma 2}) (1 - P_2) \right].\tag{4.17}$$

Substituindo as equações (4.15) nestas duas últimas, expandindo G_γ e F_γ em polinômios de Legendre P_l , e usando a definição: $\hat{n} \cdot \vec{v}_e = -\left(\frac{i\theta_b}{k} P_1(\hat{k} \cdot \hat{n}) \right)$ temos que

$$\left(\frac{\partial F_\gamma}{\partial \tau} \right)_c = an_e \sigma_T \left[\frac{4i}{k} (\theta_\gamma - \theta_b) P_1 + \left(9\sigma_\gamma - \frac{1}{2} G_{\gamma 0} - \frac{1}{2} G_{\gamma 2} \right) P_2 - \sum_{l \geq 3}^{\infty} (-i)^l (2l+1) F_{\gamma l} P_l \right],\tag{4.18}$$

$$\left(\frac{\partial G_\gamma}{\partial \tau} \right)_c = an_e \sigma_T \left[\frac{1}{2} (F_{\gamma 2} + G_{\gamma 0} + G_{\gamma 2}) (1 - P_2) - \sum_{l \geq 0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) G_{\gamma l} P_l \right],\tag{4.19}$$

com o qual, a equação de Boltzmann (4.15) para os fótons torna-se:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_\gamma &= -\frac{4}{3}\theta_\gamma + 4\dot{\phi} = \dot{F}_{\gamma 0}, \\ \dot{\theta}_\gamma &= k^2 \left(\frac{1}{4}\delta_\gamma - \sigma_\gamma \right) + k^2\psi + an_e\sigma_T(\theta_b - \theta_\gamma) = \frac{3}{4}\dot{F}_{\gamma 1},\end{aligned}\quad (4.20)$$

$$2\dot{\sigma}_\gamma = \frac{8}{15}\theta_\gamma - \frac{3}{5}kF_{\gamma 3} - \frac{9}{5}an_e\sigma_T\sigma_\gamma + \frac{1}{10}an_e\sigma_T(G_{\gamma 0} + G_{\gamma 2}) = \dot{F}_{\gamma 2},$$

$$\dot{F}_{\gamma l} = \frac{k}{2l+1} [lF_{\gamma(l-1)} - (l+1)F_{\gamma(l+1)}] - an_e\sigma_T F_{\gamma l}, \quad l \geq 3, \quad (4.21)$$

com G_γ respeitando a relação:

$$\dot{G}_{\gamma l} = \frac{k}{2l+1} [lG_{\gamma(l-1)} - (l+1)G_{\gamma(l+1)}] - an_e\sigma_T \left[G_{\gamma l} + \frac{1}{2}(F_{\gamma 2} - G_{\gamma 0} + G_{\gamma 2}) \left(\delta_{l0} + \frac{\delta_{l2}}{5} \right) \right]. \quad (4.22)$$

4.5 Bárions

Os prótons, elétrons e pósitrons (que constituem o que chamamos de bárions no modelo Λ CDM) estão ligados aos fótons mediante a interação eletromagnética evoluindo da mesma forma até a última superfície de dispersão. Logo depois do desacoplamento com os fótons, os bárions podem se aglomerar, mas são incapazes de aglomerarem o suficiente para formar as estruturas que vemos no presente (devido à pressão de dispersão que sofrem até o desacoplamento). Isto é uma das razões que motiva a introdução do fluido conhecido como matéria escura, que não possui pressão, e por tanto pode se aglomerar desde o início da era de domínio da radiação.

Considerando os bárions no seguinte modelo

$$\omega_b \equiv \frac{\bar{\mathcal{P}}_b}{\bar{\rho}_b} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\bar{\mathcal{P}}}_b}{\bar{\rho}_b} = 0 \quad e \quad \frac{\dot{\bar{\rho}}_\nu}{\bar{\rho}_\nu} = -3\frac{\dot{a}}{a} \quad (4.23)$$

$$c_s^2 = \frac{\dot{\bar{\mathcal{P}}}_b}{\dot{\bar{\rho}}_b} = \frac{T_b}{\mu} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{d \ln T_b}{d \ln a} \right) \quad (4.24)$$

tem-se que as equações (3.11a) e (3.11b) tornam-se:

$$\dot{\delta}_b = -\theta_b + 3\dot{\phi}, \quad \dot{\theta}_b = -\frac{\dot{a}}{a}\theta_b + c_s^2 k^2 \delta_b + k^2\psi + \frac{4\bar{\rho}_\gamma}{3\bar{\rho}_b} an_e\sigma_T(\theta_\gamma - \theta_b). \quad (4.25)$$

O último termo vem da conservação do tensor momento energia em conjunto com os fótons devido à interação entre eles (olhar segunda linha da equação (4.20)).

Capítulo 5

Algumas soluções simples

No capítulo 3 encontramos as equações que fornecem a evolução temporal das perturbações escalares para um fluido geral. No capítulo 4 aplicamos essas equações aos fluidos que compõem o universo no modelo Λ CDM. Nesse capítulo vamos resolver esse conjunto de equações diferenciais para alguns casos restritos (diferentes períodos de domínio, no caso de super-horizonte e no caso de sub-horizonte) sempre para $\sigma \approx 0$, ou seja, $\psi \approx \phi$ no calibre longitudinal.

5.1 Domínio da radiação

Durante o período de domínio da radiação, que é definido como $\rho_0 \approx \bar{\rho}_r$, temos que o fator de escala pode ser aproximado como $a \propto \eta$, portanto $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{\eta}$ e também $\ddot{a} = 0$. Vamos também desconsiderar os multipolos de ordem maior o igual a dois (na expansão de Legendre das perturbações) assim: da terceira linha da equação (4.15) temos que $\phi = \psi$ e, portanto $\sigma_r = \sigma_m = 0$. Com isto, as componentes não triviais da equação de Einstein (3.16) (as quais agora ficam redundantes) são:

$$-\frac{3}{2} \left(\frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r} + \delta_r \right) = 3\eta\dot{\phi} + 3\phi + k^2\eta^2\phi, \quad (5.1a)$$

$$2\theta_r = k^2\eta^2\dot{\phi} + k^2\eta\phi, \quad (5.1b)$$

$$\frac{1}{2}\delta_r = \eta^2\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}\eta - \phi. \quad (5.1c)$$

Isolando $\dot{\phi}$ da primeira equação e substituindo-lo na segunda equação se obtém a seguinte equação algébrica (equivalente a (3.17)) até primeira ordem em $\bar{\rho}_m/\bar{\rho}_r$:

$$4\theta_r + k^2\delta_r\eta + \frac{2}{3}k^4\eta^3\phi = 0. \quad (5.2)$$

As equações de Boltzmann não triviais para a radiação (4.20) e para a matéria (4.1) durante o período de

domínio da radiação podem ser aproximadas como:

$$\dot{\delta}_r = -\frac{4}{3}\theta_r + 4\dot{\phi}, \quad \dot{\theta}_r = k^2\frac{1}{4}\delta_r + k^2\phi, \quad (5.3)$$

$$\dot{\delta}_m = -\theta_m + 3\dot{\phi}, \quad \dot{\theta}_m = -\frac{1}{\eta}\theta_m + k^2\phi. \quad (5.4)$$

Aproximando a matéria como um fluido teste ($\bar{\rho}_r \gg \bar{\rho}_m$), as perturbações na radiação influenciam e são influenciadas pela perturbação ϕ enquanto que as perturbações na matéria são influenciadas por ϕ mas não o influenciam, como se mostra no seguinte esquema:

$$\text{radiação} \rightleftharpoons \phi \rightarrow \text{matéria}$$

Assumindo isto, vamos resolver as equações (5.3) e (5.2) para as variáveis δ_r , θ_r e ϕ . Posteriormente, usando a solução para ϕ poderemos obter expressões para as perturbações da matéria com base nas equações (5.4). Do sistema de equações (5.2) e (5.3) na aproximação da era de domínio da radiação pode-se extrair a equação de segunda ordem para a perturbação métrica ϕ :

$$\ddot{\phi} + \frac{4\dot{\phi}}{\eta} + \frac{k^2\phi}{3} = 0, \quad (5.5)$$

a qual tem como solução geral:

$$\phi = C_1 \frac{\cos \omega + \omega \sin \omega}{\omega^3} + C_2 \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3}, \quad \omega \equiv k\eta/\sqrt{3}. \quad (5.6)$$

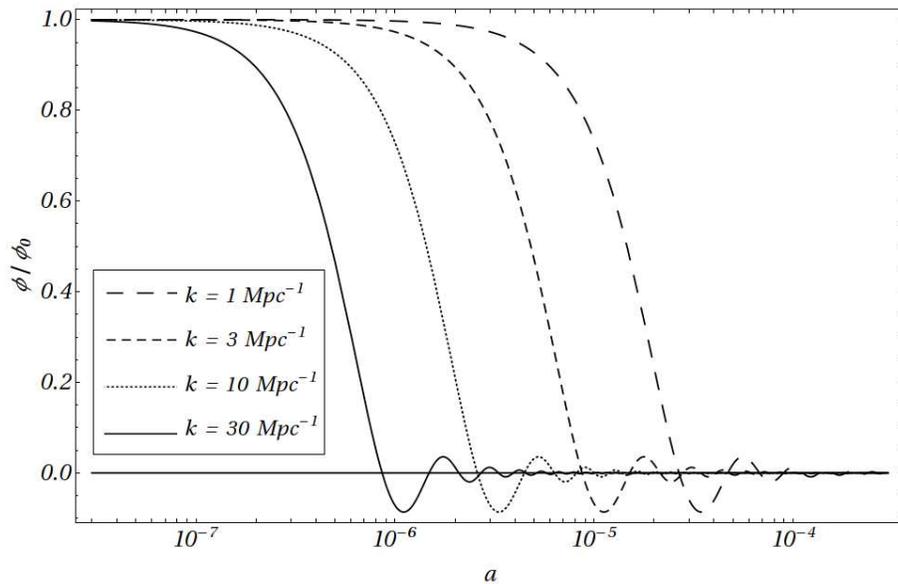


Figura 5.1: Solução de ϕ durante o período de domínio da radiação (5.6) com $C_1 = 0$ e $C_2 = 3\phi_0$ (modo de crescimento).

Essa solução da perturbação métrica ϕ (5.6) possui dois termos com comportamentos bem diferentes. O termo associado ao coeficiente C_1 é um termo que em geral decresce com $1/\omega$. Enquanto que o termo associado ao coeficiente C_2 (que chamamos de modo de crescimento) tem o comportamento apresentado na Figura 5.1. O termo que constitui o modo de crescimento é chamado assim devido a que ele esta associado ao termo que permite o crescimento das perturbações na densidade de energia da matéria.

O modo de crescimento da perturbação métrica ϕ permanece constante até entrar no raio comóvel de Hubble (no calibre longitudinal), isto é quando $kaH \approx 1$. Depois que o modo em consideração entra no raio comóvel de Hubble a perturbação métrica ϕ (que podemos associar ao potencial gravitacional no calibre longitudinal no limite Newtoniano) decresce acompanhado de uma oscilação como é apresentado na Figura (5.1).

Agora que temos a solução da perturbação métrica ϕ (5.6) durante o período de domínio da matéria, podemos isolar δ_r e θ_r das equações (5.1b) e (5.1c), que escritas até primeira ordem em $\bar{\rho}_m/\bar{\rho}_r$ ficam:

$$\delta_r = 2C_1 \frac{2(1 - \omega^2) \cos \omega + \omega(2 - \omega^2) \sin \omega}{\omega^3} + 2C_2 \frac{2(1 - \omega^2) \sin \omega - \omega(2 - \omega^2) \cos \omega}{\omega^3}, \quad (5.7a)$$

$$\theta_r = \frac{\sqrt{3}}{2} C_1 \frac{(\omega^2 - 2) \cos \omega - 2\omega \sin \omega}{\omega^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 \frac{(\omega^2 - 2) \sin \omega + 2\omega \cos \omega}{\omega^2}. \quad (5.7b)$$

As constantes C_1 e C_2 nas soluções (5.7) são as mesmas que na solução à perturbação métrica ϕ (5.6) e portanto estão associadas novamente aos modos de decaimento e de crescimento das perturbações. No caso das soluções das perturbações da radiação, o modo C_2 esta associado a uma oscilação das perturbações enquanto que o modo C_1 decresce em função do tempo tanto no caso de δ como no caso de θ .

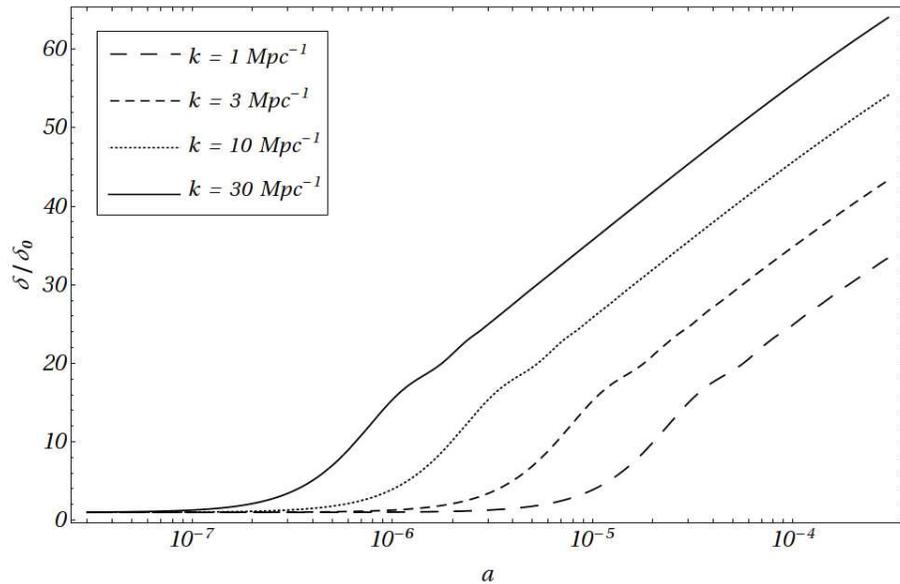


Figura 5.2: Solução de δ_m durante o período de domínio da radiação Modo de crescimento da solução (5.9a).

A partir das equações (5.4) pode-se obter uma equação diferencial de segunda ordem para δ_m , e uma de primeira ordem para θ_m , dado por:

$$\ddot{\delta}_m + \frac{\dot{\delta}_m}{\eta} - 3\frac{\dot{\phi}}{\eta} + k^2\phi - 3\ddot{\phi} = 0, \quad (5.8a)$$

$$\dot{\theta}_m + \frac{1}{\eta}\theta_m - k^2\phi = 0. \quad (5.8b)$$

Para ϕ dado por (5.6), as equações (5.8) têm as soluções:

$$\delta_m = C_3 + C_4 \ln \omega - 3C_1 \frac{(\omega^2 - 1) \cos \omega - \omega \sin \omega + \omega^3 \text{ci } \omega}{\omega^3} - 3C_2 \frac{(\omega^2 - 1) \sin \omega + \omega \cos \omega - \omega^3 \text{ci } \omega}{\omega^3}, \quad (5.9a)$$

$$\theta_m = \frac{C_5}{\omega} - \sqrt{3}kC_1 \frac{\cos \omega}{\omega^2} - \sqrt{3}kC_2 \frac{\sin \omega}{\omega^2}. \quad (5.9b)$$

Novamente, guardando o nome das constantes da solução da perturbação métrica (5.6) pode-se associar aos termos com coeficientes C_1 e C_3 respectivamente um modo constante e um modo de decrescimento para a solução de δ_m (5.9a), e aos termos com coeficientes C_2 e C_4 , respectivamente modos de oscilação e de crescimento logarítmico (visível só a partir do instante em que a perturbação entra no raio de Hubble). A figura 5.2 apresenta o modo de crescimento e oscilação de δ_m associado aos coeficientes C_2 e C_4 .

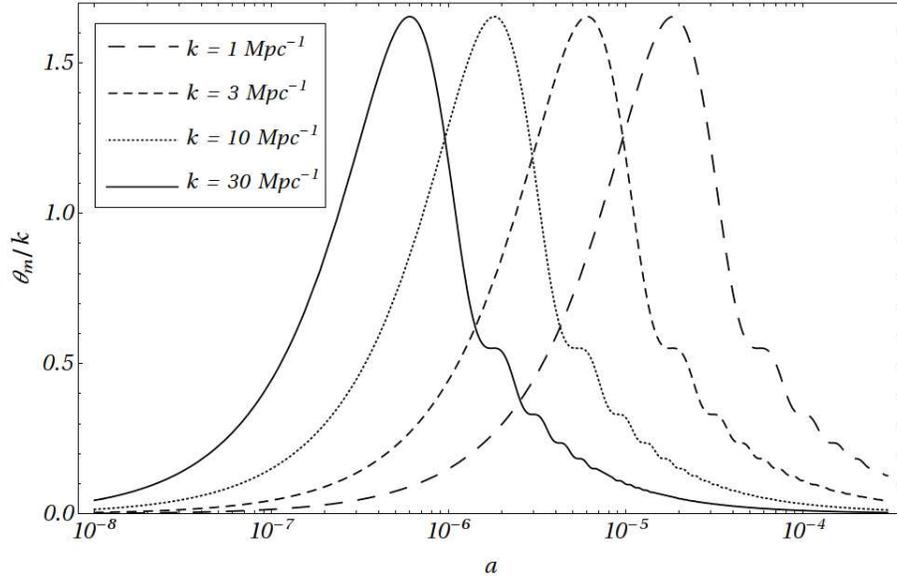


Figura 5.3: Solução de θ_m durante o período de domínio da radiação
Modo de crescimento da solução (5.7).

A solução θ_m (5.9b) tem dois termos decrescentes associados aos coeficientes C_1 e C_5 , somados ao termo associado ao coeficiente C_2 , o qual é mostrado na figura (5.3), e é caracterizado por uma oscilação que é suprimida a partir do instante em que a perturbação entra no raio de Hubble.

5.2 Domínio da matéria escura

Durante o período de domínio da matéria ($\rho_0 \approx \bar{\rho}_m$) a solução da equação de Einstein não perturbada é $a \propto \eta^2$, com o qual $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{\eta}$ e $\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{2}{\eta^2}$. Para obter soluções analíticas para as perturbações do tensor métrico e do tensor momento-energia vamos novamente desconsiderar os multipolos de ordem maior ou igual que dois. Com essa aproximação, a equação de Einstein (4.15) nos diz que $\phi \approx \psi$. As componentes não triviais da equação de Einstein (3.16) durante o período de domínio da matéria para $\sigma \approx 0$ são:

$$-6 \left(\delta_m + \frac{\bar{\rho}_r}{\bar{\rho}_m} \right) = 6\eta\dot{\phi} + 12\phi + k^2\eta^2\phi, \quad (5.10a)$$

$$6\theta_m = k^2\eta^2\dot{\phi} + 2k^2\eta\phi, \quad (5.10b)$$

$$2\frac{\bar{\rho}_r}{\bar{\rho}_m} = \eta^2\ddot{\phi} + 6\eta\dot{\phi}. \quad (5.10c)$$

Isolando $\dot{\phi}$ da primeira equação e substituindo-lo na segunda, obtemos a seguinte equação algébrica (equivalente a (3.17)) até primeira ordem em $\bar{\rho}_r/\bar{\rho}_m$:

$$6 \left[k^2\delta_m - 6\frac{\theta_m}{\eta} \right] = k^4\eta^2\phi. \quad (5.11)$$

As equações de Boltzmann para a radiação (4.20) e para a matéria (4.1) com $\bar{\rho}_r \ll \bar{\rho}_m$ (período de domínio da matéria) se simplificam como:

$$\dot{\delta}_m = -\theta_m + 3\dot{\phi}, \quad \dot{\theta}_m = -\frac{2}{\eta}\theta_m + k^2\phi, \quad (5.12)$$

$$\dot{\delta}_r = -\frac{4}{3}\theta_r + 4\dot{\phi}, \quad \dot{\theta}_r = k^2\frac{\delta_r}{4} + k^2\phi. \quad (5.13)$$

Tratando a radiação como fluido teste:

$$\text{matéria} \rightleftharpoons \phi \rightarrow \text{radiação}$$

podemos obter das equações (5.11) e (5.12) a seguinte equação diferencial para ϕ :

$$\left(\frac{18}{\eta^2} + k^2 \right) (\eta\ddot{\phi} + 6\dot{\phi}) = 0, \quad (5.14)$$

a qual tem a solução geral:

$$\phi(\omega) = -\frac{D_1}{5\omega^5} + D_2. \quad (5.15)$$

Nessa solução o modo de decaimento esta associado ao termo com coeficiente D_1 , e o modo de crescimento das perturbações ao coeficiente D_2 (já que com esse termo a perturbação métrica ϕ permanece constante permitindo o crescimento das flutuações na densidade da matéria). A partir das equações de Einstein

(5.10a) e (5.10b) podemos por em evidencia δ_m e θ_m , e usando a solução para ϕ (5.15) as perturbações no tensor momento energia da matéria até primeira ordem em $\bar{\rho}_r/\bar{\rho}_m$ podem ser expressas como:

$$\delta_m = D_1 \frac{\omega^2 - 6}{10\omega^5} - D_2 \frac{4 + \omega^2}{2}, \quad (5.16a)$$

$$\theta_m = D_1 \frac{\sqrt{3}k}{10\omega^4} + D_2 \frac{k\omega}{\sqrt{3}}. \quad (5.16b)$$

Nas soluções (5.16) as constantes D_1 e D_2 são as mesmas da solução para ϕ (5.15). Tanto na expressão para δ_m como para θ_m os termos com coeficiente D_1 são modos de decrescimento das perturbações. Enquanto o termo com coeficiente D_2 para a perturbação δ_m cresce com o quadrado do tempo conforme (ou proporcional ao parâmetro de expansão a dado aproximadamente pela expressão 2.35 durante o período de domínio da matéria), e para a perturbação θ_m cresce proporcionalmente ao tempo conforme (ou proporcional à raiz quadrada do parâmetro de expansão).

Agora, das equações (5.13) podemos obter as equações diferenciais na variável temporal para δ_r e θ_r :

$$\ddot{\delta}_r + \frac{k^2}{3}\delta_r + \frac{4k^2}{3}\phi - 4\ddot{\phi} = 0, \quad (5.17a)$$

$$\theta_r = \frac{3}{4}\dot{\delta}_r + 3\dot{\phi}, \quad (5.17b)$$

as quais (para $\phi(\eta)$ dado pela equação (5.15)) têm como soluções:

$$\begin{aligned} \delta_r = & -4D_2 + D_3 \cos \omega + D_4 \sin \omega - \frac{D_1}{15} \frac{12 - 2\omega^2 + \omega^4}{\omega^5} \\ & - i \frac{D_1}{60} [e^{i\omega} \text{Ei}(-i\omega) - e^{-i\omega} \text{Ei}(i\omega)] + \frac{D_1}{30} [\sin \omega \text{ci} \omega - \cos \omega \text{si} \omega], \end{aligned} \quad (5.18a)$$

$$\begin{aligned} \theta_r = & \frac{k\sqrt{3}}{4} [D_4 \cos \omega - D_3 \sin \omega] + D_1 \frac{k}{\sqrt{3}} \frac{120 - 6\omega^2 + \omega^4}{20} \\ & + \frac{D_1}{80} [e^{i\omega} \text{Ei}(-i\omega) + e^{-i\omega} \text{Ei}(i\omega)] + \frac{D_1}{40} [\cos \omega \text{ci} \omega + \sin \omega \text{si} \omega]. \end{aligned} \quad (5.18b)$$

Nessas soluções, novamente todos os termos associados ao coeficiente D_1 são termos que decrescem rapidamente em função do tempo, já que vem do termo decrescente da solução da perturbação métrica ϕ (5.15). O modo de "crescimento" da perturbação δ_r é dado pelos termos constante e oscilante associados aos coeficientes D_2 , D_3 e D_4 .

Para o caso da perturbação θ_m se tem somente termos oscilantes associados dos coeficientes D_3 e D_4 , com o que, novamente as perturbações da radiação não apresentam crescimento efetivo em função do tempo devido a que sua pressão impede um eventual colapso gravitacional.

5.3 Domínio da constante cosmológica

Durante o período de domínio da energia escura, modelada como uma constante cosmológica $\rho_0 \approx \rho_\Lambda$, temos que $\frac{\dot{a}}{a} \approx \frac{1}{b-\eta}$ e também $\frac{\ddot{a}}{a} \approx \frac{2}{(b-\eta)^2}$ (válido para $\eta < b$). Novamente, vamos desconsiderar os multipolos de ordem maior ou igual a dois para poder resolver as equações para as perturbações de forma analítica. Assim, da equação de Einstein (4.15) temos que $\phi = \psi$. Com essas simplificações, a componente espacial da equação de Einstein pode ser escrita como:

$$\frac{4}{3}\pi G a^2 T_i^i = \ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \left(\phi - \frac{1}{2}\right) \left[2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right]. \quad (5.19)$$

As equações de Boltzmann para a radiação (4.20) e para a matéria (4.1) durante o período de domínio da constante cosmológica são:

$$\ddot{\delta}_r + \frac{k^2}{3}(\delta_r + 4\phi) - 4\ddot{\phi} = 0, \quad \theta_r = 3\dot{\phi} - \frac{3}{4}\dot{\phi}_r, \quad (5.20)$$

$$\ddot{\delta}_m + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_m + k^2\phi - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - 3\ddot{\phi} = 0, \quad \theta_m = 3\dot{\phi} - \dot{\delta}_m. \quad (5.21)$$

Nesse período, as densidades da radiação e da matéria são muito menores que a densidade da energia escura, portanto, o potencial ϕ vai depender fracamente dessas grandezas. Vamos, então, resolver a equação para ϕ como só dependendo da densidade da energia escura:

$$\text{energia escura} \rightleftharpoons \phi, \quad \phi \rightarrow \text{radiação}, \quad \phi \rightarrow \text{matéria}.$$

Com essas aproximações e igualando ordem a ordem a equação (5.19) obtém-se:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \phi = 0. \quad (5.22)$$

Escrevendo $a = c/(b-\eta)$, onde as constantes c e b são dadas por:

$$c = \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_0 \Omega_\Lambda}}, \quad b = 3\sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_0}} \left(\frac{1}{\Omega_m^{1/3} \Omega_\Lambda^{1/6}} - \frac{4\Omega_r^{1/2}}{\Omega_m} \right), \quad (5.23)$$

a equação (5.22) tem a solução geral:

$$\phi = F_2(b-\eta) + F_1(b-\eta)^3. \quad (5.24)$$

Essa solução é válida somente para $\eta < b$, assim, os dois termos da expressão (5.24) decrescem em função do tempo: o termo associado ao coeficiente F_2 decresce com o inverso do parâmetro de expansão a (2.37) enquanto o termo associado ao coeficiente F_1 decresce com o inverso do parâmetro de expansão ao cubo.

Vamos chamar os termos associados ao coeficiente F_2 de termos de decrescimento.

Substituindo a solução para ϕ (5.24) nas equações (5.20) e (5.21) obtemos as soluções para as perturbações do tensor momento energia da radiação e da matéria:

$$\delta_m = F_4 + F_3 \frac{(b - \eta)^2}{2} + F_2(b - \eta) \left[3 - k^2 \frac{(b - \eta)^2}{3} \right] + F_1(b - \eta)^3 \left[9 - k^2 \frac{(b - \eta)^2}{15} \right], \quad (5.25)$$

$$\theta_m = F_3(b - \eta) - F_2 k^2 (b - \eta)^2 - F_1 k^2 \frac{(b - \eta)^4}{3}. \quad (5.26)$$

Nessas soluções podemos identificar novamente os termos que decrescem mais rapidamente como os termos associados aos coeficientes F_1 e F_3 , esses termos decrescem com o quadrado, o cubo e a quarta potência do inverso do fator de escala a . O modo de "crescimento" é composto pelo termo constante com coeficiente F_4 (nulo para θ_m) e o termo com coeficiente F_2 que decresce como o inverso do fator de escala.

$$\delta_r = 4F_2(b - \eta) \left[\frac{36}{k^2} - (b - \eta)^2 \right] - 4F_1(b - \eta) + F_5 \cos(\omega) + F_6 \sin \omega, \quad (5.27)$$

$$\theta_r = F_2 \left[\frac{108}{k^2} - \frac{(b - \eta)^2}{4} \right] - 6F_1 + F_5 \frac{\sqrt{3}k}{4} \sin(\omega) - F_6 \frac{\sqrt{3}k}{4} \cos(\omega). \quad (5.28)$$

No caso da radiação, as perturbações novamente estão compostas por termos oscilatórios proporcionais às constantes F_5 e F_6 , acompanhados por termos decrescentes ou constantes associados aos fatores F_1 e F_2 . A tendência decrescente em todas as perturbações é causada pela pressão negativa do fluido dominante durante esse período (constante cosmológica).

5.4 Super-horizonte radiação matéria

Usando a componente temporal da equação de Einstein (3.16a) quando $k\eta \ll 1$ (que chamamos de super-horizonte) obtemos a expressão:

$$8\pi G a^2 \delta T_0^0 = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \frac{\bar{\rho}_m}{\rho_c} \delta_m \left(1 + \frac{\rho_r}{\rho_m} \frac{\delta_r}{\delta_m} \right) = 6 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + 6 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \phi. \quad (5.29)$$

Reescrevendo essa equação usando $y \equiv \frac{\bar{\rho}_m}{\rho_r} = \frac{a}{a_{eq}}$ como nossa nova variável independente, com o que

$\frac{\bar{\rho}_m}{\rho_c} = \frac{y}{y+1}$, e levando em conta que $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial y}$ obtemos uma equação diferencial na variável y :

$$\frac{\delta_m}{1+y} \left(y + \frac{\delta_r}{\delta_m} \right) = 2y\phi' + 2\phi, \quad (5.30)$$

que será nossa nova equação de Einstein. As equações de conservação do tensor momento-energia para a radiação (4.1) e para a matéria (4.20) no caso em que $k\eta \ll 1$ podem ser simplificadas como:

$$\dot{\delta}_r = 4\dot{\phi}, \quad \dot{\delta}_m = 3\dot{\phi}. \quad (5.31)$$

Dessas duas equações podemos obter a restrição $3\delta_r - 4\delta_m = cte$. Adicionalmente, das condições iniciais isentrópicas (8.1) temos que $cte = 0$. Assim, no limite de super-horizonte $\delta_r = 4\delta_m/3$, o qual poder ser substituído na equação de Einstein (5.30) para obter:

$$\frac{\delta_m}{1+y} \left(y + \frac{4}{3} \right) = 2y\phi' + 2\phi \quad \rightarrow \quad \delta_m = 6 \frac{1+y}{3y+4} [y\phi' + \phi]. \quad (5.32)$$

Derivando a equação acima na variável y , e usando-a na segunda equação (5.31) obtém-se a relação:

$$-3\phi' = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 6 \frac{1+y}{3y+4} [y\phi' + \phi] \right\}. \quad (5.33)$$

Refazendo a derivada obtemos a seguinte equação diferencial para a perturbação métrica ϕ na variável y :

$$2y(y+1)(3y+4)\phi'' + (21y^2 + 54y + 32)\phi' + \phi = 0, \quad (5.34)$$

essa equação tem como solução geral:

$$\phi = S_1 \frac{\sqrt{1+y}}{y^3} + S_2 \frac{16 + 8y - 2y^2 - 9y^3}{y^3}. \quad (5.35)$$

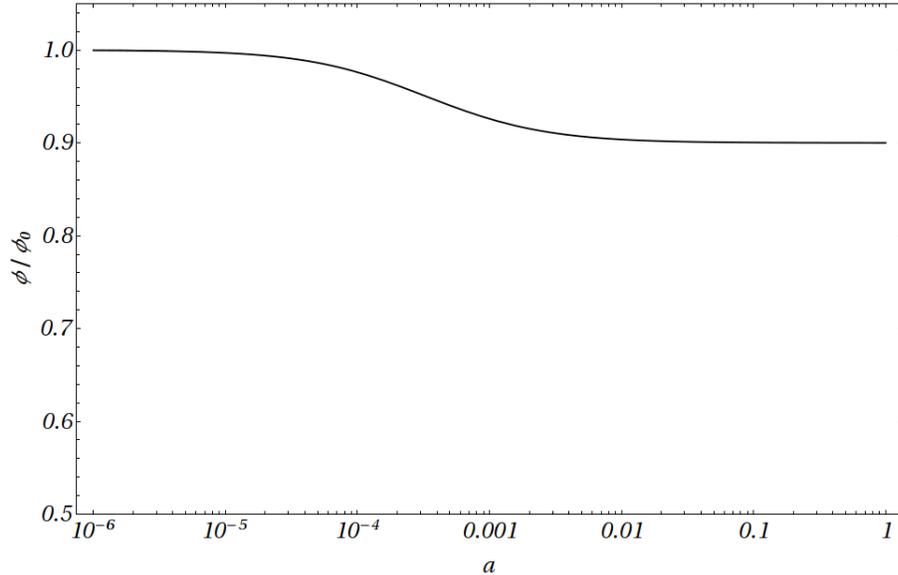


Figura 5.4: Solução de ϕ na aproximação de super-horizonte isto é, para $k\eta \ll 1$ durante o período de domínio da radiação e da matéria.

Lembrando que $y \equiv a/a_e$, temos que tanto o primeiro como o segundo termo divergem individualmente

quando $a \rightarrow 0$. Para que ϕ seja finita quando $y \rightarrow 0$ (modo de crescimento) escolhemos $S_1 = -16S_2$, com o que a solução para o modo de crescimento de ϕ é:

$$\phi = \frac{\phi_0}{10} \frac{1}{y^3} \left[16\sqrt{1+y} - 16 - 8y + 2y^2 + 9y^3 \right], \quad (5.36)$$

onde ϕ_0 representa a amplitude da perturbação quando $a \rightarrow 0$. Para $y \gg 1$ isto é, durante o período de domínio da matéria, temos que $\phi \rightarrow (9/10)\phi_0$ como mostra a figura 5.4.

Agora que temos a solução aproximada para a perturbação métrica ϕ no caso de escalas muito grandes (super-horizonte) vamos obter as soluções para as perturbações da radiação e da matéria com base na expressão (5.35). As equações de conservação do tensor momento-energia para a matéria e a radiação (3.12) podem ser reescritas na variável y como:

$$\begin{aligned} 2y\delta_m'' + \delta_m' \frac{3y+2}{y+1} &= 3 \left(2y\phi'' + \phi' \frac{3y+2}{y+1} \right), & y\theta_m' + \theta_m &= 0, \\ 2(y+1)\delta_r'' + \delta_r' &= 4 \left(2(y+1)\phi'' + \phi' \right), & 2(y+1)\theta_r'' + \theta_r' &= 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Assumindo a solução da perturbação ϕ no super-horizonte dada pela expressão (5.35) temos que as soluções das equações acima para as perturbações na radiação e na matéria são:

$$\delta_m = 3S_1 \frac{\sqrt{1+y}}{y^3} + 3S_2 \frac{16+8y-2y^2}{y^3} + 2S_3 \operatorname{Arctanh}\sqrt{1+y} + S_4, \quad (5.38)$$

$$\delta_r = 4S_1 \frac{\sqrt{1+y}}{y^3} + 4S_2 \frac{16+8y-2y^2}{y^3} + 2S_5 \sqrt{1+y} + S_6. \quad (5.39)$$

Das soluções numéricas no limite de super-horizonte usando condições iniciais isentrópicas temos que as perturbações na densidade de energia para radiação e matéria são essencialmente iguais, o que é equivalente a se ter $S_3 = S_5 = 0$. Na figura 5.5 mostra se a solução na qual $\delta_r = \delta_m$ para o modo de crescimento $S_1 = -16S_2$. Essas soluções mostram que as flutuações primordiais na densidade da matéria e a radiação não crescem significativamente ao longo do tempo no caso do super-horizonte, pelo que no presente observamos um universo muito homogêneo e isotrópico em escalas muito grandes. Finalmente as soluções para θ_r e θ_m para essas escalas têm um comportamento simples dado por:

$$\theta_m = \frac{S_7}{y}, \quad \theta_r = 2S_8 \sqrt{1+y} + S_9. \quad (5.40)$$

5.5 Sub-horizonte radiação-matéria

Nas outras sub-sessões desse capítulo, mediante o uso de algumas aproximações, encontramos e resolvemos uma equação diferencial de segunda ordem na variável temporal (η ou $y \equiv a/a_e q$) para a perturbação do tensor métrico ϕ . Em seguida, assumindo como certa a solução ϕ , resolvemos as equações diferenciais para

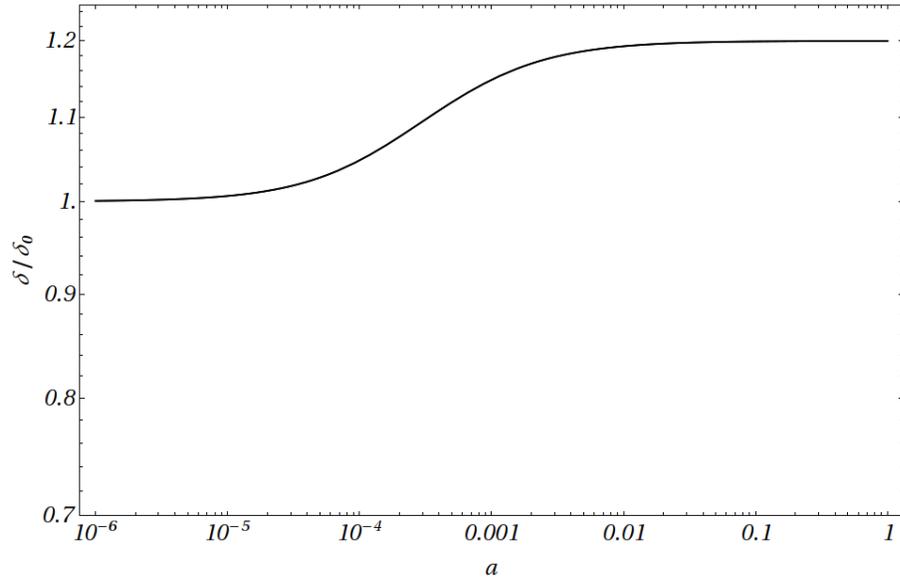


Figura 5.5: Soluções de δ_r e δ_m na aproximação de super-horizonte isto é, para $k\eta \ll 1$ durante o período de domínio da radiação e da matéria.

as perturbações do tensor momento-energia.

Nesta sub-sessão seguiremos um procedimento alternativo. No caso de escalas pequenas ($k\eta \gg 1$) vai ser mais fácil encontrar uma equação diferencial para a perturbação δ_m que para a perturbação métrica ϕ . Com essa solução para δ_m vamos solucionar as equações diferenciais para a perturbação métrica e para as outras perturbações do tensor momento-energia.

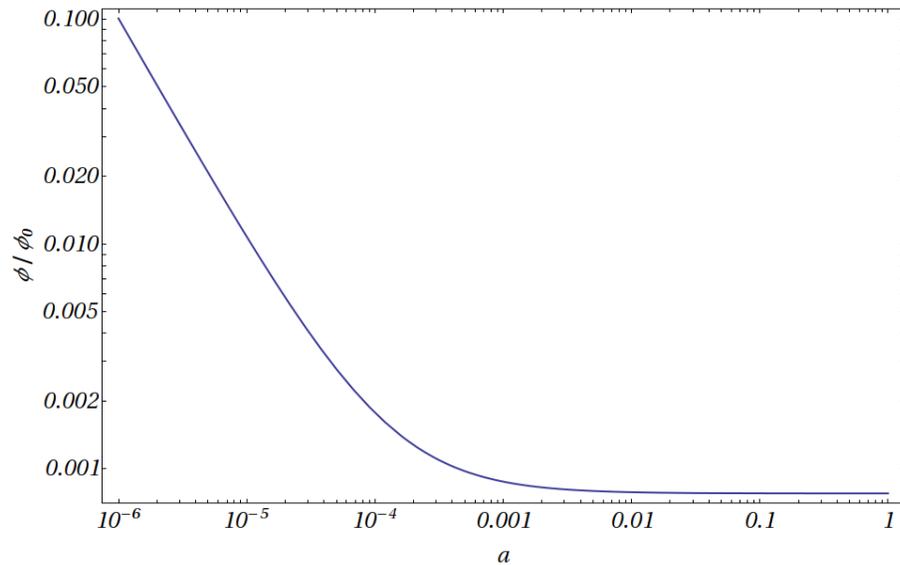


Figura 5.6: Solução de ϕ no limite de sub-horizonte durante o período de domínio da radiação e da matéria.

Para $k\eta \gg 1$ temos que as perturbações na matéria crescem rapidamente depois que o modo k entra no raio de Hubble. Diferente das perturbações da radiação, que não crescem. Com isto, para $k\eta \gg 1$ (que chamaremos de sub-horizonte) $\delta\rho_m \equiv \bar{\rho}\delta_m$ pode chegar a ser maior que $\delta\rho_r \equiv \bar{\rho}\delta_r$ sempre que $kaH \ll 1$. Então, muito depois que os modos de sub-horizonte entraram no raio de Hubble teremos que $\delta\rho_r \ll \delta\rho_m$ com o que as componentes temporais e espaço-temporal da equação de Einstein (3.16a) e (3.16b) até primeira ordem em $y \equiv \rho_m/\rho_r$ podem aproximar-se como:

$$-4\pi a^2 G \delta\rho = 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\dot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a} \psi \right) + k^2 \phi, \quad (5.41)$$

$$4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{\mathcal{P}}) \theta = k^2 \left(\dot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a} \psi \right). \quad (5.42)$$

Dessas duas equações temos que para $k\eta \gg 1$:

$$k^2 \phi = -\frac{4\pi G \rho_0 \Omega_m}{a_e} \frac{\delta_m}{y} = -\frac{3}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \frac{y}{1+y} \delta_m. \quad (5.43)$$

Essa é a equação de Einstein da qual vamos fazer uso nessa sessão. Igualmente, as equações para as perturbações no tensor momento-energia da matéria (4.1) no sub-horizonte ficam:

$$\delta'_m = -\frac{\theta_m}{y} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^{-1} + 3\phi', \quad \theta'_m = -\frac{\theta_m}{y} + k^2 \frac{\phi}{y} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^{-1}. \quad (5.44)$$

Onde o *índice* denota a derivada respeito da variável y . Da equação (de Einstein) (5.43) e da equação diferencial para δ_m podemos escrever uma equação de segunda ordem para δ_m desconsiderando ϕ'' [25]:

$$\delta''_m 2y(y+1) + \delta'_m (3y+2) - 3\delta_m = 0. \quad (5.45)$$

A equação acima tem como solução:

$$\delta_m = s_2 \left(\frac{2}{3} + y \right) + s_1 \frac{3}{2} \left[3\sqrt{1+y} - (2+3y) \operatorname{arctanh} \sqrt{1+y} \right]. \quad (5.46)$$

Nesse caso podemos associar o modo de crescimento da perturbação δ_m ao termo com coeficiente s_2 já que este cresce mais rápido que o termo com coeficiente s_1 ($\operatorname{arctanh} y$ não esta definida para $y > 1$). Na figura 5.7 mostra-se o modo de crescimento de δ_m , de onde temos que a perturbação cresce rapidamente com o fator de escala, o qual dá validade à aproximação $\delta\rho_m \gg \delta\rho_r$ (já que como veremos δ_r oscila, não cresce) para tempos maiores que o raio de Hubble aH , mas menores que o horizonte comóvel η .

Para achar a solução para a perturbação métrica ϕ não é preciso resolver nenhuma equação diferencial, só basta substituir a solução para δ_m na expressão (5.43). Essa solução tem a forma que se mostra na figura 5.6 para o modo de crescimento da perturbação δ_m . Substituindo a solução geral para ϕ na segunda

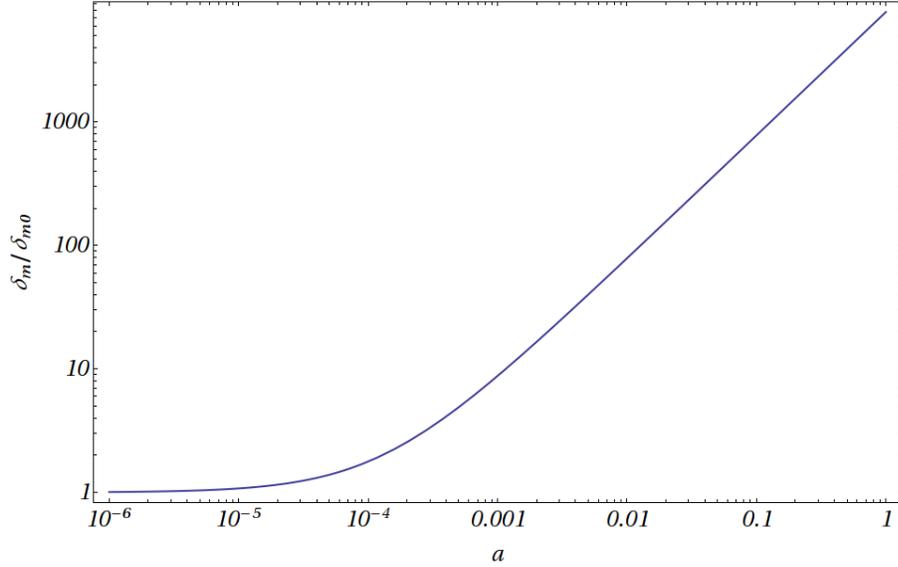


Figura 5.7: Solução de δ_m no limite de sub-horizonte durante o período de domínio da radiação e da matéria.

equação de (5.44) podemos obter uma equação diferencial para θ_m :

$$\theta'_m + \frac{\theta_m}{y} + \sqrt{\frac{6\pi G\rho_0\Omega_m}{a_e}} \frac{\delta_m}{y\sqrt{y+1}} = 0, \quad (5.47)$$

que tem como solução:

$$\theta_m = \frac{s_3}{y} - \sqrt{\frac{c_e}{8}} \left[2\sqrt{1+y}s_2 + 9\frac{1+y-y\sqrt{1+y}\operatorname{arctanh}\sqrt{1+y}}{y}s_1 \right]. \quad (5.48)$$

Essa expressão para θ_m tem o modo de crescimento associado ao termo com coeficiente s_2 , assim a perturbação θ_m vai crescer proporcionalmente a $\sqrt{1+a/a_e}$, enquanto que a perturbação δ cresce proporcionalmente ao fator de escala a .

Escrevendo agora as equações para as perturbações no tensor momento energia da radiação (4.15) em função da variável y e para $k\eta \gg 1$ obtemos:

$$\delta'_r + 2(1+y)\delta''_r + \frac{2}{c_e} \frac{k^2}{3} \delta_r = 0, \quad \theta'_r + 2(1+y)\theta''_r + \frac{2}{c_e} \frac{k^2}{3} \theta_r = 0. \quad (5.49)$$

Nessas equações desconsideramos ϕ em relação a δ_r já que $\phi \propto \delta_m/(yk^2)$. Essas equações diferenciais têm as soluções:

$$\delta_r = s_7 \cos\left(2k\sqrt{\frac{1+y}{3c_e}}\right) + s_9 \sin\left(2k\sqrt{\frac{1+y}{3c_e}}\right), \quad (5.50)$$

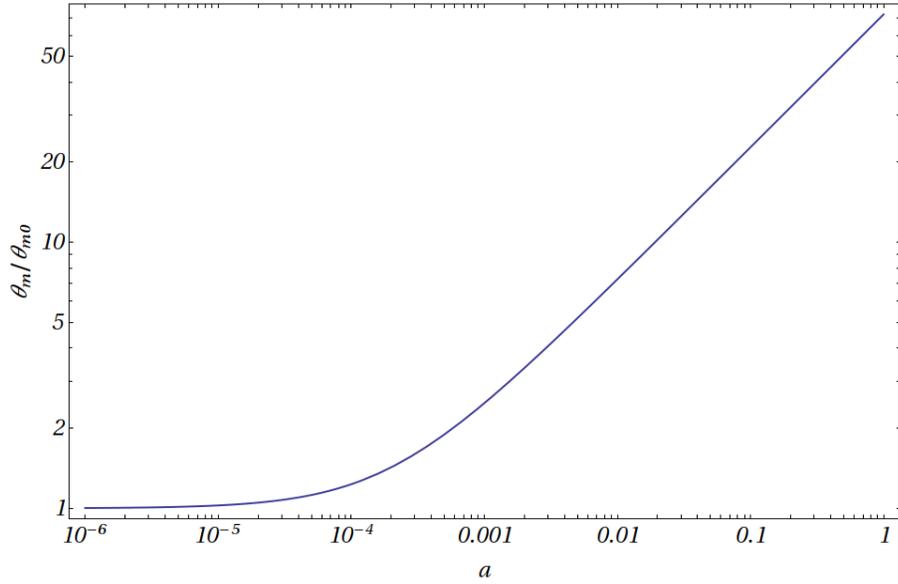


Figura 5.8: Solução de θ_m no limite de sub-horizonte durante o período de domínio da radiação e da matéria.

$$\theta_r = s_6 \cos \left(2k \sqrt{\frac{1+y}{3c_e}} \right) + s_8 \sin \left(2k \sqrt{\frac{1+y}{3c_e}} \right), \quad (5.51)$$

com $c_e \equiv 8\pi G\rho_0\Omega_m/(3a_e)$.

Essas duas soluções nos dizem que as perturbações da radiação não crescem, no entanto as perturbações da matéria crescem proporcionalmente a y e $\sqrt{1+y}$ com o que a nossa aproximação de $\delta\rho_m \gg \delta\rho_r$ é válida no sub-horizonte $k\eta \gg 1$ sempre que o modo k esteja bem dentro do raio de Hubble $kaH \ll 1$.

Capítulo 6

Gás degenerado de Fermi

Neste capítulo introduziremos um fluido de teste descrito por um gás degenerado de férmions expresso pela função distribuição:

$$\bar{f}(p, \eta) = \frac{g_d}{(2\pi)^3} \left(\exp \left[\frac{E - \mu}{T} \right] + 1 \right)^{-1} \approx \begin{cases} g_d/(2\pi)^3 & \text{para } E < \mu \\ 0 & \text{para } E > \mu \end{cases}, \quad (6.1)$$

onde g_d é o grau de degenerescência dos férmions, E é a energia total, T a temperatura do gás e μ é o seu potencial químico, que para baixas temperaturas pode ser aproximado pela energia de Fermi $\mu \xrightarrow{T \rightarrow 0} E_f$. Usando essa função distribuição na equação (3.27) tem-se que a pressão e a densidade do GDF são:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_d &= a^{-4} \int d^3q \epsilon \bar{f}(q, \eta) = \frac{g_f}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{2} m^4 \left[\frac{\sqrt{1 + \chi^2}}{\chi^4} (2 + \chi^2) - \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \chi^2}}{\chi} \right], \\ \bar{\mathcal{P}}_d &= a^{-4} \int d^3q \frac{q^2}{\epsilon} \bar{f}(q, \eta) = \frac{g_f}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{2} m^4 \left[\frac{\sqrt{1 + \chi^2}}{\chi^4} \left(\frac{2}{3} - \chi^2 \right) + \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \chi^2}}{\chi} \right]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Onde definimos χ como $\chi \equiv am/q_f$, com m sendo a massa dos férmions, q_f o momento comóvel de Fermi e a o já definido parâmetro de expansão. Adicionalmente podemos verificar que:

$$\bar{\rho}_d + \bar{\mathcal{P}}_d = \frac{g_f}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} m^4 \frac{\sqrt{1 + \chi^2}}{\chi^4}. \quad (6.3)$$

Outra forma de obter essas equações através da termodinâmica pode ser visto na referência [36].

6.1 Equação de Boltzmann para o GDF

Para férmions a função distribuição estatística é:

$$f(x^i, p_j, \eta) = \frac{g_f}{(2\pi)^3} \left(\exp \left[\frac{E - \mu}{T} \right] + 1 \right)^{-1}. \quad (6.4)$$

Onde g_f é o grau de degenerescência dos férmions, E é a energia e μ é o potencial químico das partículas,

com $E = \sqrt{p^2 + m^2 c^2} = \sqrt{q^2/a^2 + m^2 c^2}$, sendo q o momento comóvel.

Como a temperatura dos fluidos que compõem o universo não é uniforme, no caso do GDF escrevemos $T = \bar{T} + \delta T$, onde $\delta T = \delta T(x^i, n_j, \eta)$, com $q^i \equiv q n^i$ e \bar{T} só depende de a . Se expandirmos a função distribuição até primeira ordem na perturbação da temperatura da seguinte maneira:

$$f(x^i, p_j, \eta) \approx f|_{\bar{T}} + \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{\bar{T}} \delta T(x^i, n_j, \eta) \equiv \bar{f} [1 + \Psi(x^i, p_j, \eta)] , \quad (6.5)$$

e substituímos essa expressão aproximada na equação de Boltzmann (3.34) até ordem zero (na perturbação da temperatura) para um gás não interagente, obtém-se que:

$$0 = \frac{d\bar{f}}{d\eta} = \dot{a} \frac{\partial \bar{f}}{\partial a} \propto \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{E - \mu}{\bar{T}} \right) , \quad (6.6)$$

então

$$\frac{E - \mu}{T} = \frac{\epsilon_0 - \nu_0}{\bar{T}_0} . \quad (6.7)$$

Assim \bar{f} independe de a e, portanto independe do tempo. Temos definido $\mu = a\nu$ e, de agora em diante, vamos assumir o sub-índice 0, como sendo calculado no presente, significando $F_0 \equiv F(a = 1)$. Com isso temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial T} = f \left(\exp \left[-\frac{E - \mu}{T} \right] + 1 \right)^{-1} \left(\frac{E - \mu}{T^2} \right) , \quad (6.8)$$

enquanto que

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial q} = -\bar{f} \left(\exp \left[-\frac{E - \mu}{\bar{T}} \right] + 1 \right)^{-1} \left(\frac{P}{aE\bar{T}} \right) . \quad (6.9)$$

Com essas duas expressões podemos escrever:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{\bar{T}} = \frac{aE}{p} \frac{\mu - E}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} = \frac{\epsilon \nu - \epsilon}{q} \frac{\partial \bar{f}}{\bar{T}} , \quad (6.10)$$

e assim podemos reescrever a perturbação da função distribuição do gás degenerado de Fermi (6.5) como sendo:

$$\Psi = \frac{\epsilon(\nu - \epsilon)}{q^2} \frac{\partial \ln \bar{f}}{\partial \ln q} \Delta , \quad \text{com} \quad \Delta = \Delta(\eta, n_j, x^i) \equiv \frac{\delta T}{\bar{T}} . \quad (6.11)$$

Substituindo essa expressão na equação de Boltzmann (3.34) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\epsilon(\nu - \epsilon)}{q} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \Delta \right) + (\nu - \epsilon) \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} (i\vec{k} \cdot \hat{n}) \Delta + (q\dot{\phi} - \epsilon\phi(i\vec{k} \cdot \hat{n})) \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} = 0 . \quad (6.12)$$

Se fizermos a expansão de Δ em polinômios de Legendre como sendo

$$\Delta(\vec{k}, \hat{n}, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \Delta_l(k, \eta) P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}), \quad (6.13)$$

e integrarmos a equação (6.12) multiplicado por $P_l(\hat{k} \cdot \hat{n})$ com respeito ao ângulo sólido Ω obtém-se as seguintes equações de evolução temporal dos coeficientes Δ_l da expansão de Δ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\epsilon(\nu - \epsilon)}{q} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \Delta_0 \right) + (\nu - \epsilon) \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} k \Delta_1 + q \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \phi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\epsilon(\nu - \epsilon)}{q} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \Delta_1 \right) - (\nu - \epsilon) \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \frac{k}{3} (\Delta_0 - 2\Delta_2) + \epsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \frac{k}{3} \phi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\epsilon(\nu - \epsilon)}{q} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \Delta_l \right) + (\nu - \epsilon) \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \frac{k}{2l+1} [(l+1)\Delta_{l+1} - l\Delta_{l-1}] &= 0, \quad \text{para } l \geq 2. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Se levarmos em conta que

$$\Delta_0 = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \Delta(\alpha), \quad \Delta_1 = \frac{i}{4\pi} \int d\Omega \alpha \Delta(\alpha), \quad \Delta_2 = -\frac{1}{4\pi} \int d\Omega P_2(\alpha) \Delta(\alpha), \quad (6.15)$$

podemos usar a expressão de Ψ para o GDF (6.11) nas equações que fornecem as componentes do tensor momento energia (3.27) e obter:

$$\begin{aligned} \delta \rho_d &= \frac{4\pi \Delta_0}{a^4} \int dq q \epsilon^2 (\nu - \epsilon) \frac{\partial \bar{f}}{\partial q}, \\ \delta \mathcal{P}_d &= \frac{4\pi \Delta_0}{3a^4} \int dq q^3 (\nu - \epsilon) \frac{\partial \bar{f}}{\partial q}, \\ \theta_d(\bar{\rho}_d + \bar{\mathcal{P}}_d) &= \frac{4\pi \Delta_1}{a^4} \int dq q^2 \epsilon (\nu - \epsilon) \frac{\partial \bar{f}}{\partial q}, \\ \sigma_d(\bar{\rho}_d + \bar{\mathcal{P}}_d) &= -\frac{4\pi \Delta_2}{a^4} \frac{2}{3} \int dq q^3 (\nu - \epsilon) \frac{\partial \bar{f}}{\partial q}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Podemos integrar, na variável q , o conjunto de equações (6.14) tornando-se um conjunto de equações acopladas na variável temporal para os multipolos Δ_l . Se resolvermos esse conjunto de equações diferenciais e substituirmos os multipolos Δ_l nas expressões (6.16), integradas na variável q , obteremos a evolução temporal das perturbações no tensor momento energia para o GDF (faremos isso no seguinte capítulo para alguns casos restritos).

Capítulo 7

Soluções para as perturbações do GDF

Neste capítulo vamos resolver as equações de evolução temporal das perturbações de um gás degenerado de férmions como fluido de teste em um universo dominado pela radiação, a matéria escura e a constante cosmológica usando dois métodos equivalentes.

Primeiro, vamos resolver as equações de conservação do tensor momento energia para gases ideais no caso de escalas muito grandes (que chamamos de super-horizonte), isto é, para comprimentos de onda ($2\pi/k$) grandes se comparados com o horizonte comóvel. Igualmente, obtemos resultados equivalentes durante os períodos de domínio da radiação, da matéria, e da constante cosmológica.

Em seguida, resolveremos as equações de Boltzmann para o GDF durante os períodos de domínio da radiação, da matéria e da constante cosmológica. Na era de domínio da radiação fazendo a aproximação de gás ultra-relativístico, e para as eras de domínio da matéria escura e a constante cosmológica assumindo-se que o gás é não relativístico. Para o caso em que $\bar{\rho}_d = \bar{\rho}_\nu$ no começo da era da radiação e também no presente temos que $\chi \ll 1$ (gás ultra-relativístico) durante o período de domínio da radiação e $\chi \gg 1$ (gás não relativístico) depois do período de equilíbrio radiação matéria. Usaremos essas aproximações nos casos respectivos neste capítulo.

7.1 Usando a conservação do tensor momento energia

Para usar as equações de conservação do tensor momento energia de um gás ideal (3.11a) e (3.11b) só precisamos conhecer a equação de estado do fluido considerado. Tal equação de estado, definida como $\omega = \mathcal{P}/\rho$, é dada para o GDF pelas expressões (6.2). Com isto, temos que as equações de conservação do tensor momento energia para o GDF são:

$$\frac{\partial \delta \rho_d}{\partial \eta} = -\frac{m^4}{3\pi^2} \frac{\sqrt{1+\chi^2}}{\chi^4} (\theta_d - 3\dot{\phi}) - \frac{\dot{a}}{a} \delta \rho_d \frac{4+3\chi^2}{1+\chi^2}, \quad (7.1a)$$

$$\dot{\theta}_d + \sigma_d k^2 + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\theta_d}{1+\chi^2} - \phi k^2 = \delta \rho_d \frac{k^2 \chi^4 \pi^2}{m^4 (1+\chi^2)^{3/2}}. \quad (7.1b)$$

A equação de estado pode ser aproximada¹ durante os períodos de domínio da radiação ($\chi \ll 1$), da matéria e da constante cosmológica ($\chi \gg 1$) para solucionar analiticamente as equações de conservação do tensor momento energia assumindo a validade das soluções da perturbação métrica ϕ obtidas no capítulo 5.

7.1.1 Super-horizonte radiação matéria

As equações de conservação do tensor momento energia de um GDF ideal (7.1) no caso em que $k\eta \ll 1$ e para σ desprezível se reduzem a:

$$\frac{\partial \ln [\chi(\bar{\rho}_d + \bar{\mathcal{P}}_d)\theta_d]}{\partial \ln \chi} = -3, \quad (7.2a)$$

$$\chi \frac{\partial}{\partial \chi} \delta\rho_d - \frac{m^4}{\pi^2} \frac{\sqrt{1+\chi^2}}{\chi^3} \frac{\partial \phi}{\partial \chi} + \delta\rho_d \frac{4+3\chi^2}{1+\chi^2} = 0, \quad (7.2b)$$

onde ϕ é a perturbação escalar da métrica no caso de super-horizonte, dada pela solução (5.35), e onde $\chi \equiv ma/q_f$. As soluções para as equações (7.2) são:

$$\theta_d = \frac{\pi^2}{m^4} \frac{3}{\sqrt{1+\chi^2}} S_{11}, \quad (7.3)$$

$$\delta_d = 8 \left[S_1 \frac{\sqrt{1+y}}{y^3} + S_2 \frac{16+8y-2y^2}{y^3} + S_{12} \right] \left[(2+\chi^2) - \frac{\chi^4}{\sqrt{1+\chi^2}} \operatorname{arccsch} \chi \right]^{-1}, \quad (7.4)$$

com $y \equiv a/a_e$ tal que $\bar{\rho}_m(a_e) = \bar{\rho}_r(a_e)$ (período de equilíbrio radiação-matéria). O modo de crescimento da perturbação δ_d é mostrado no gráfico 7.1 em comparação com o comportamento de δ_r e δ_m .

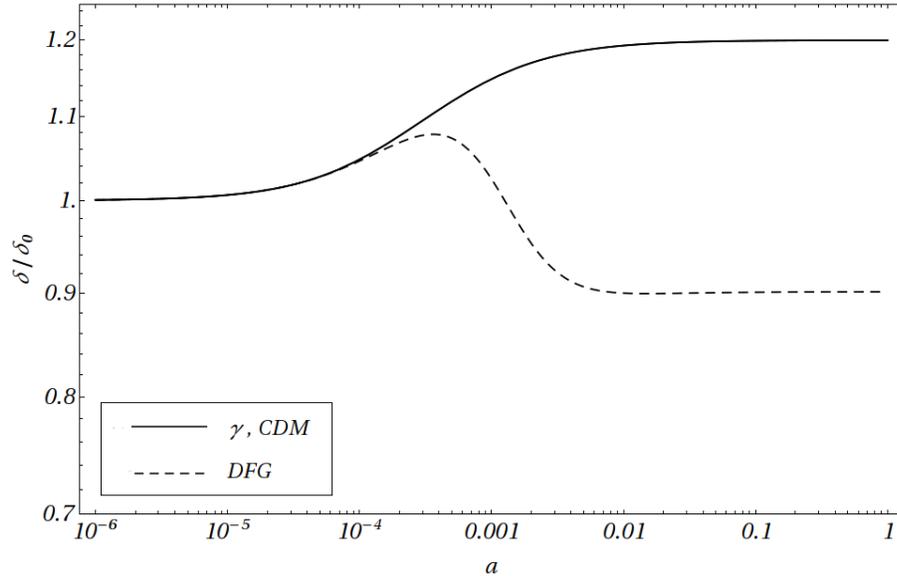


Figura 7.1: Contrastes de densidade δ_d , δ_r e δ_m na aproximação de super-horizonte

¹Para o caso em que $\bar{\rho}_d = \bar{\rho}_\nu$ no começo da era da radiação e no presente

7.1.2 Era de domínio da radiação

As equações (7.1a) e (7.1b) durante o período de domínio da radiação ($\rho_{cr} \approx \bar{\rho}_r$) são iguais às equações de evolução das perturbações da radiação (5.3), portanto as suas soluções são iguais. Tais soluções são dadas pelas expressões (5.7) obtidas para as perturbações da radiação.

7.1.3 Era de domínio da matéria escura fria

Na aproximação $\rho_{cr} \approx \bar{\rho}_m$, ou período de domínio da matéria, as equações da conservação do tensor momento energia do GDF ideal (7.1b) e (7.1a) até primeira ordem em χ tornam-se:

$$\dot{\delta}_d = -\theta_d + 3\dot{\phi}, \quad \dot{\theta}_d = \frac{k^2 \delta_d}{5\chi^2} - k^2 \sigma_d + k^2 \psi. \quad (7.5)$$

Usando a solução para ϕ no caso em que σ é desprezível e durante a era de domínio da matéria (5.15), as soluções para as perturbações do GDF são:

$$\begin{aligned} \delta_d = & D_1 \frac{12\sqrt{3}c_m^2}{k^9\eta} \left[\frac{k^4}{5} - 12\frac{k^2}{\eta^2} + 96c_m^2 \right] + D_3 \cos \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} - D_4 \sin \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} \\ & - D_2 \frac{k^4}{8c_m^2} \left[\cos \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} \text{Ci} \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} + \sin \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} \text{Si} \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} \right] - D_2 \frac{k^2\eta^2}{6}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

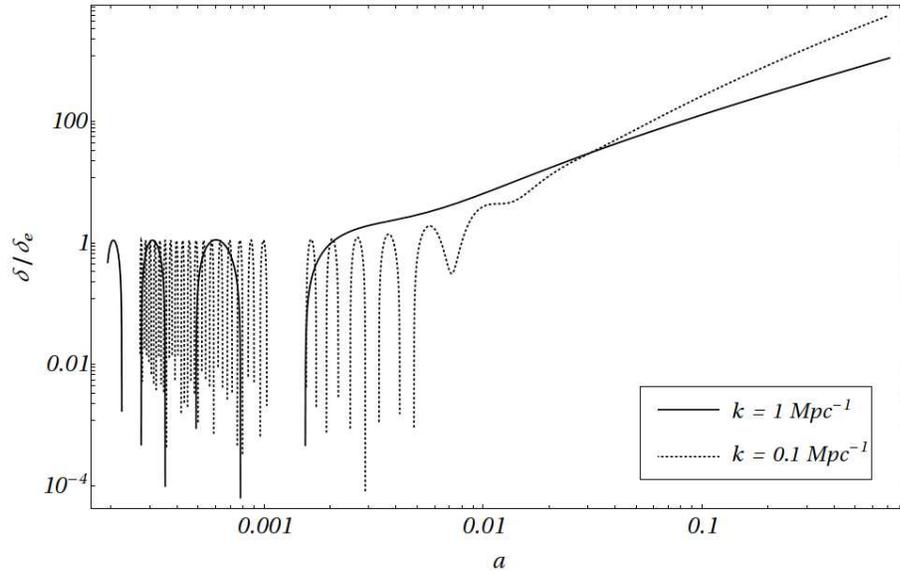


Figura 7.2: Contraste de densidade δ_d para o GDF durante o período de domínio da matéria Modo de crescimento da equação (7.6).

com $c_m = G\rho_0 m \pi \Omega_m / q_f$. As funções $\text{Ci}(z)$ e $\text{Si}(z)$ são o cosseno e o seno integral de z . Essa solução é composta pelo termo de decréscimo cujo coeficiente é D_1 . Os termos com coeficientes D_3 e D_4 são oscilações. O termo entre colchetes com coeficiente D_2 oscila como uma função $\sin[\sqrt{3}k/(2c_m\eta)]$ para $\eta < \sqrt{3}k/(2c_m)$, depois tem um crescimento logarítmico em η . O termo com coeficiente D_2 fora dos

colchetes cresce como $\eta^2 \propto a$. Se $D_4 = -\pi D_2 k^4 / (16c_m^2)$, dos termos com coeficientes D_2 e D_4 restará só o crescimento logarítmico somado com o crescimento quadrático associados a D_2 .

A evolução temporal do modo de crescimento para o contraste de densidade δ_d é mostrada no gráfico 7.2. Este tem inicialmente um comportamento oscilatório (como o contraste de densidade da radiação) e logo depois começa a crescer como uma combinação de um termo potencial e outro logarítmico, tendendo ao comportamento do contraste de densidade da matéria. O período quando ocorre a transição entre o comportamento oscilatório ($k\chi \ll 1$) e o crescimento ($k\chi \gg 1$) (causado pela transição do gás entre a sua fase relativística para não relativística) depende da escala.

A solução para θ_d no período de domínio da matéria é:

$$\theta_d = \left\{ D_1 \frac{9\sqrt{3}}{k^9} \left[\frac{6k^4}{\eta^4} - \frac{96k^2 c_m^2}{\eta^2} + \frac{8k^4 c_m^2}{15} + 256c_m^4 \right] - D_3 \frac{\sqrt{3}k}{c_m} \sin \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} - D_4 \frac{\sqrt{3}k}{c_m} \cos \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} \right. \\ \left. + D_2 \frac{\sqrt{3}k^5}{8c_m^3} \left[\text{Ci} \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} \sin \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} - \text{Si} \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} \cos \frac{\sqrt{3}k}{2c_m\eta} \right] + D_2 \frac{k^2\eta}{c_m^2} \left[\frac{k^2}{4} + \frac{2\eta^2 c_m^2}{3} \right] \right\} \frac{1}{2\eta^2}. \quad (7.7)$$

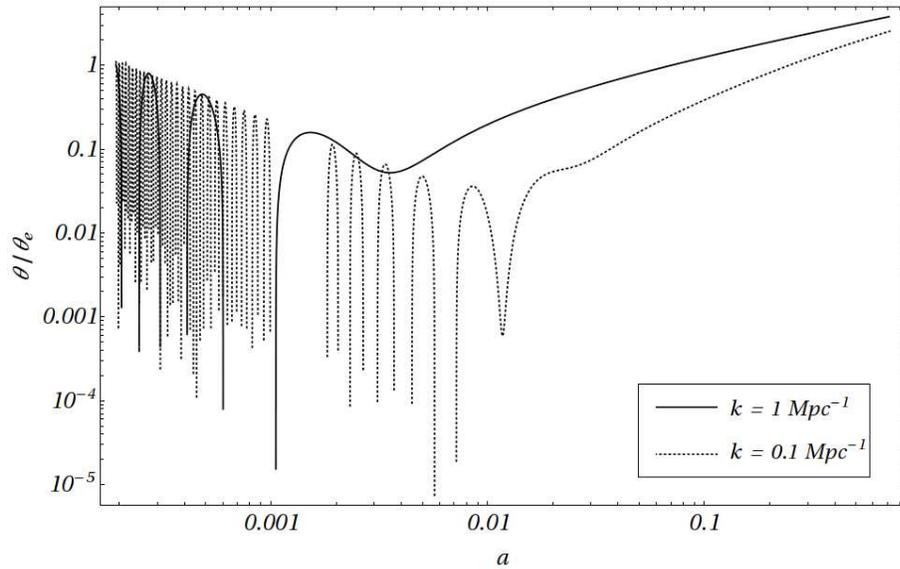


Figura 7.3: Perturbação θ_d para o GDF durante o período de domínio da matéria
Modo de crescimento da equação (7.7).

Como nos casos anteriores, para θ_d , o termo com coeficiente D_1 está associado ao modo de decaimento da perturbação. Os termos associados a D_3 e D_4 são oscilações cuja amplitude decresce com $1/\eta^2 \propto 1/a$. O primeiro termo entre colchetes com coeficiente D_2 oscila como $\sin(\sqrt{3}k/(2c_m\eta))$ com amplitude decrescendo com $1/a$, isto para $\eta < \sqrt{3}k/(2c_m)$, e logo depois para de oscilar. Finalmente, o último termo proporcional a D_2 cresce linearmente com η . A Figura 7.3 mostra o comportamento do modo de crescimento da perturbação θ_d , que tem a mudança de comportamento de gás ultra-relativístico para não-relativístico quando $k\chi \approx 1$.

7.1.4 Era de domínio da energia escura

Na aproximação da era de domínio da energia escura, modelada como uma constante cosmológica, as equações da conservação do tensor momento energia de um GDF ideal (7.1a) e (7.1b) ficam iguais ao período de domínio da matéria escura (7.5). A única diferença é que devemos usar a expressão (5.24) para a perturbação métrica ϕ , o qual leva às soluções:

$$\begin{aligned} \delta_d = & 3F_1 c_x^2 (b - \eta) + F_3 \cos \left[\frac{\pi \eta (2b - \eta)}{2 c_\Lambda^2} \right] + F_4 \sin \left[\frac{\pi \eta (2b - \eta)}{2 c_\Lambda^2} \right] \\ & + \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fc} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] + \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fs} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] \right\} \{ 3F_2 c_\Lambda + 3F_1 c_x^2 c_\Lambda \} \\ & + \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fs} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] - \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fc} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] \right\} \left\{ F_2 \frac{k^2 c_\Lambda^3}{\pi} - F_1 c_\Lambda^3 \frac{9}{\pi} \right\}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

onde $c_\Lambda^2 \equiv \frac{\sqrt{3} c m \pi}{k q_f}$, $c_x \equiv \frac{c m}{q_f}$, c e b são dadas por (5.23), e as funções $\text{Fc}(z)$ e $\text{Fs}(z)$ são o cosseno e o seno integrais de Fresnel. Essa solução para δ_d é composta por dois termos oscilatórios com coeficientes F_3 e F_4 , por termos de decaimento associados ao coeficiente F_1 e pelos termos associados ao coeficiente F_2 (que não decaem tão rápido).

$$\begin{aligned} \theta_d = & -9F_1 (\eta - b)^2 + F_3 \frac{\pi}{c_\Lambda^2} (b - \eta) \cos \left[\frac{\pi \eta (2b - \eta)}{2 c_\Lambda^2} \right] - F_4 \frac{\pi}{c_\Lambda^2} (b - \eta) \sin \left[\frac{\pi \eta (2b - \eta)}{2 c_\Lambda^2} \right] \\ & - \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fc} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] + \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fs} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] \right\} \{ F_2 k^2 - 9F_1 \} c_\Lambda (b - \eta) \\ & + \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fs} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] - \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fc} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] \right\} \left\{ F_2 \frac{3\pi}{c_\Lambda} + F_1 \sqrt{3} k c_\Lambda c_x \right\} (b - \eta). \end{aligned} \quad (7.9)$$

No caso da evolução da perturbação θ_d tem-se basicamente o mesmo tipo de comportamento decrescente acentuado por um fator $1/a$, fazendo com que a perturbação θ_b decresça mais rapidamente que a perturbação δ_d durante o período de domínio da constante cosmológica.

7.2 Usando a equação de Boltzmann

As equações (6.14) e (6.16) podem ser integradas no caso do GDF ser não-relativístico e no caso de ser ultra-relativístico usando a expressão:

$$\int_0^\infty \frac{\phi'(z)}{e^{z-z_0} + 1} dz = \phi(z_0) + \sum_{n=1}^\infty \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(z_0) \left(1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \dots \right), \quad (7.10)$$

que tem validade para $|e^{-z_0 t} \phi(t)| < M$ quando $t \rightarrow \infty$, onde M é um número real positivo.

7.2.1 Gás ultra-relativístico não interagente na era da radiação

No caso do GDF ser ultra-relativístico ($\chi \equiv ma/q_f \ll 1$) temos que $E \equiv a\epsilon = a\sqrt{q^2 + m^2a^2} \approx aq$, e $T \approx T_0 m/(aq_f)$ (onde T_0 seria a temperatura do GDF no presente). Com o que obtemos

$$\frac{E - \mu}{T} \approx \frac{q - q_f}{T_0 m/q_f} \equiv (z - z_0). \quad (7.11)$$

Usando a expressão (7.10) para integrar as equações (6.14) na variável z obtém-se até primeira ordem ($n=1$) em $q_f^2/(T_0 m)$:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_0 + k\Delta_1 - \dot{\phi} c_u &= 0, & \dot{\Delta}_1 - \frac{k}{3}(\Delta_0 - 2\Delta_2) - \frac{k}{3}\phi c_u &= 0, \\ \dot{\Delta}_l + \frac{k}{2l+1}[(l+1)\Delta_{l+1} - l\Delta_{l-1}] &= 0, & \text{para } l \geq 2, \end{aligned} \quad (7.12)$$

onde $c_u \equiv q_f^2/(\ln(2)T_0 m)$, q_f é o momento de Fermi do GDF e m a massa das suas partículas. Usando a solução de ϕ na era de domínio da radiação (Equação (5.6)), e que foi obtida para $\sigma \approx 0$, podemos obter a solução às equações (7.12) para os dois primeiros multipolos:

$$\Delta_0 = \frac{C_1 c_u}{\omega^3} [\cos \omega (1 - \omega^2) + \omega \sin \omega] + \frac{C_2 c_u}{\omega^3} [\sin \omega (1 - \omega^2) - \omega \cos \omega] + C_3 \cos \omega - C_4 \sin \omega, \quad (7.13)$$

$$\Delta_1 = -\frac{C_1 c_u}{\sqrt{3}\omega^2} [\cos \omega + \omega \sin \omega] - \frac{C_2 c_u}{\sqrt{3}\omega^2} [\sin \omega - \omega \cos \omega] + \frac{C_3}{\sqrt{3}} \sin \omega + \frac{C_4}{\sqrt{3}} \cos \omega. \quad (7.14)$$

Igualmente, integrando as equações (6.16) na variável $z \equiv q/T_0$ obtemos:

$$\begin{aligned} \delta_d &\approx 2^4 \pi^3 \ln(2) \frac{T_0 m}{q_f^2} \Delta_0, & \frac{\delta \mathcal{P}_d}{\delta \rho_d} &\approx \frac{1}{3}, \\ \theta_d &\approx 12 \pi^3 \ln(2) \frac{T_0 m}{q_f^2} k \Delta_1, & \sigma_d &\approx -2^3 \pi^3 \ln(2) \frac{T_0 m}{q_f} \Delta_2. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Essas soluções são completamente equivalentes às soluções obtidas usando a conservação do tensor momento energia (no limite $\chi \ll 1$) e, portanto, equivalentes à solução para as perturbações da radiação durante o período de domínio da radiação (5.7).

7.2.2 Gás não relativístico e não interagente na era da matéria

Para matéria não relativística temos que sua temperatura evolui como $T \approx T_0/a^2$, a sua energia pode ser aproximada pela expressão $E \approx m + p^2(2m)^{-1}$, e assim

$$\frac{E - \mu}{T} \approx \frac{q^2 - q_f^2}{2T_0 m} \equiv (z - z_0). \quad (7.16)$$

Integrando as equações (6.14) na variável z usando a expressão (7.10) obtemos as equações diferenciais

acopladas para os multipolos Δ_l na variável temporal

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_0 + \frac{k}{x} \Delta_1 - c_n \dot{\phi} &= 0, & \dot{\Delta}_1 - \frac{k}{3x} (\Delta_0 - 2\Delta_2) - \frac{k}{3} x c_n \phi &= 0, \\ \dot{\Delta}_l + \frac{k}{2l+1} \frac{1}{x} [(l+1)\Delta_{l+1} - l\Delta_{l-1}] &= 0, & \text{para } l &\geq 2, \end{aligned} \quad (7.17)$$

com $c_n = c_u \equiv q_f^2 / (\ln(2) T_0 m)$. Agora, usando a solução de ϕ obtida na aproximação de $\sigma \approx 0$ para a era de domínio da matéria (Equação 5.15) podemos encontrar a solução das equações (7.17):

$$\begin{aligned} \Delta_0 = & D_1 c_n \frac{4\sqrt{3}c_m^2}{k^9 \eta} \left[\frac{k^4}{5} - 12 \frac{k^2}{\eta^2} + 96c_m^2 \right] + D_3 \cos \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} - D_4 \sin \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} \\ & - D_2 c_n \frac{k^4}{24c_m^2} \left[\cos \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} \text{Ci} \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} + \sin \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} \text{Si} \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} \right] - D_2 c_n \frac{k^2 \eta^2}{18}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & D_1 c_n \frac{\sqrt{3}c_m}{k^{10}} \left[\frac{6k^4}{\eta^4} - \frac{96k^2 c_m^2}{\eta^2} + \frac{8k^4 c_m^2}{15} + 256c_m^4 \right] - \frac{D_3}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} - \frac{D_4}{\sqrt{3}} \cos \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} \\ & + D_2 c_n \frac{k^4}{24\sqrt{3}c_m^2} \left[\text{Ci} \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} \sin \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} - \text{Si} \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} \cos \frac{\sqrt{3}k}{2c_m \eta} \right] + D_2 c_n \frac{k\eta}{9c_m} \left[\frac{k^2}{4} + \frac{2\eta^2 c_m^2}{3} \right], \end{aligned} \quad (7.19)$$

onde $c_m = \frac{G\rho_0 m \pi \Omega_m}{q_f}$. Finalmente, se integrarmos as equações (6.16) na variável z usando aproximação não-relativística, tem-se que as perturbações no tensor momento-energia do GDF são dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} \delta_d &\approx 12\pi^3 \ln(2) \frac{T_0 m}{q_f^2} \Delta_0, & \frac{\delta \mathcal{P}_d}{\delta \rho_d} &\approx \frac{1}{3x^2}, \\ \theta_d &\approx 12\pi^3 \ln(2) \frac{T_0 m}{q_f^2} \frac{\Delta_1}{x}, & \sigma_d &\approx 2^3 \pi^3 \ln(2) \frac{T_0 m}{q_f^2} \frac{\Delta_2}{x}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Como no caso do período de domínio da radiação, temos que essas soluções (válidas para o período de domínio da matéria) são totalmente equivalentes às soluções obtidas usando as equações de conservação do tensor momento energia para um gás ideal (7.6) e (7.7), sendo válida então a mesma análise feita no capítulo anterior para essas soluções.

7.2.3 Gás não relativístico e não interagente na era da energia escura

Neste caso vamos levar em conta as mesmas aproximações que durante a era de domínio da matéria, a única diferença será que, obviamente, tomaremos a solução de ϕ no período de domínio da constante cosmológica para resolver as equações diferenciais para os multipolos Δ_l apresentadas na sessão anterior. Substituindo, então, a solução da perturbação métrica ϕ válida durante o período de domínio da constante cosmológica e para σ desprezível (5.24) nas equações (7.17) obtêm-se as soluções para os coeficientes da expressão do tensor momento energia do GDF:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 = & F_1 c_n c_x^2 (\eta - b) + F_3 \cos \left[\frac{\pi \eta (2b - \eta)}{2 c_\Lambda^2} \right] + F_4 \sin \left[\frac{\pi \eta (2b - \eta)}{2 c_\Lambda^2} \right] \\
& + \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fc} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] + \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fs} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] \right\} \{ F_2 c_n c_\Lambda + F_1 c_n c_x^2 c_\Lambda \} \\
& + \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fs} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] - \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fc} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] \right\} \left\{ F_2 c_n c_x^{3/2} \sqrt{\frac{k\pi}{\sqrt{3}}} - F_1 c_n c_\Lambda^3 \frac{3}{\pi} \right\},
\end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_0 = & - F_1 c_n c_x^2 \frac{\sqrt{3}}{\pi} (b - \eta) + \frac{F_3}{\sqrt{3}} \cos \left[\frac{\pi \eta (2b - \eta)}{2 c_\Lambda^2} \right] - \frac{F_4}{\sqrt{3}} \sin \left[\frac{\pi \eta (2b - \eta)}{2 c_\Lambda^2} \right] \\
& - \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fc} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] + \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fs} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] \right\} \left\{ F_2 c_n c_x^{3/2} \frac{\sqrt{k\pi}}{3^{3/4}} - F_1 c_n c_\Lambda^3 \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right\} \\
& + \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fs} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] - \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right)^2 \right] \text{Fc} \left[\frac{b - \eta}{c_\Lambda} \right] \right\} \left\{ F_2 c_n \frac{c_\Lambda}{\sqrt{3}} + F_1 c_n \frac{c_x^2 c_\Lambda}{\sqrt{3}} \right\},
\end{aligned} \tag{7.22}$$

com $c_\Lambda^2 \equiv \frac{\sqrt{3} c m \pi}{k q_f}$, $c_x \equiv \frac{c m}{q_f}$, e com c e b dadas por (5.23).

Neste caso, as equações (7.20) ainda são válidas para calcular as perturbações do GDF, e re-escalando as constantes obtemos as mesmas soluções (7.8) e (7.9) obtidas usando as equações de conservação do tensor momento energia para gases ideais com a equação de estado do GDF (6.2).

Capítulo 8

Resultados numéricos

8.1 Modelo padrão

Nste capítulo apresentamos os resultados numéricos obtidos usando o programa CAMB [20], o qual resolve as equações diferenciais do capítulo 4, mas no calibre sincrônico [19]. Com isto, não somente pretende-se confirmar a validade dos resultados analíticos obtidos para os casos restritos dos capítulos 5 e 7, como também mostrar a contribuição de um GDF no espectro de potência da matéria no presente. É importante ressaltar que todos os resultados (analíticos no calibre longitudinal e numéricos no calibre sincrônico) não são necessariamente iguais para $k < aH$, já que as flutuações na densidade para grandes escalas (causalmente desconexos) são dependentes do calibre [19].

Condições iniciais para as perturbações

Nos resultados numéricos obtidos a partir do programa CAMB foram usadas as condições iniciais chamadas de isentrópicas, as quais permitem que durante a evolução das perturbações a entropia do universo permaneça constante [19]. Estas condições iniciais são dadas por:

$$\delta_\gamma = -2\psi, \quad \delta_c = \delta_b = \frac{3}{4}\delta_\nu = \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad (8.1a)$$

$$\theta_\gamma = \theta_\nu = \theta_c = \theta_b = \frac{1}{2}(k^2\eta)\psi, \quad (8.1b)$$

$$\sigma_\nu = \frac{1}{15}(k\eta)^2\psi, \quad (8.1c)$$

$$\phi = \left(1 + \frac{2}{5}R_\nu\right)\psi, \quad \psi = \frac{20C}{15 + 4R_\nu}, \quad (8.1d)$$

$$\Psi_0 = -\frac{1}{4}\delta_\nu \frac{d \ln \bar{f}}{d \ln q}, \quad \Psi_1 = -\frac{\epsilon}{3qk}\theta_\nu \frac{d \ln \bar{f}}{d \ln q}, \quad \Psi_2 = -\frac{1}{2}\sigma_\nu \frac{d \ln \bar{f}}{d \ln q}, \quad (8.1e)$$

onde $R_\nu \equiv \frac{\bar{\rho}_\nu}{\bar{\rho}_\nu + \bar{\rho}_\gamma}$, e os termos Ψ_l para $l > 2$ são desprezíveis inicialmente. É possível também encontrar as condições iniciais isentrópicas em outros calibres fazendo a transformação das condições iniciais [19]. No caso do programa CAMB [20] as condições iniciais estão no calibre sincrônico e podem se encontrar nas referências: [31, 37]. A constante C pode ser obtida a partir das medições do espectro de potência da matéria no presente.

Perturbação métrica

De início, mostraremos a solução à perturbação métrica ϕ para vários valores do número de onda k no espaço de Fourier em função do parâmetro de expansão.

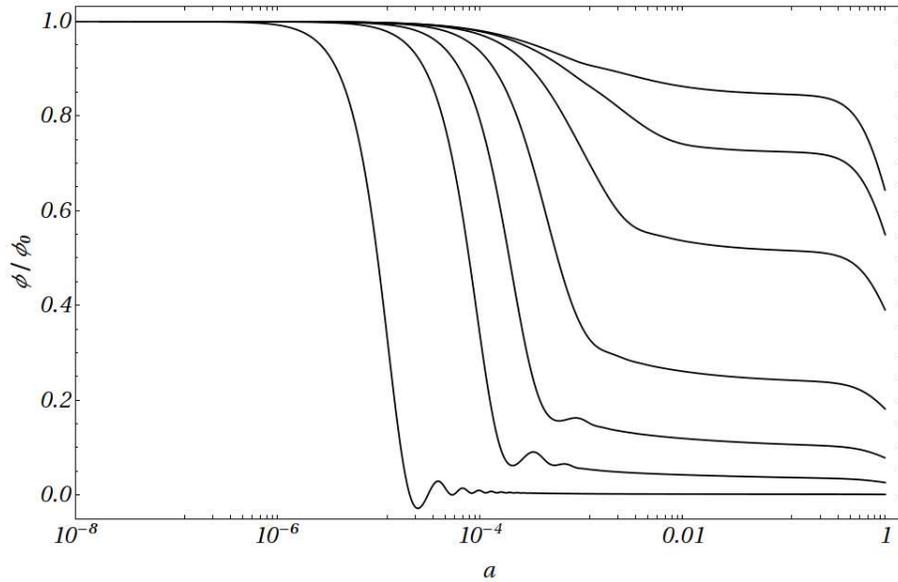


Figura 8.1: Perturbação ϕ em função do número de onda k .

Da cima para baixo temos $k = \{1.4 \cdot 10^{-3}, 6.7 \cdot 10^{-3}, 1.5 \cdot 10^{-2}, 3.5 \cdot 10^{-2}, 7.7 \cdot 10^{-2}, 0.17, 1.2\} Mpc^{-1}$

A figura 8.1 mostra que o potencial ϕ tem a forma da solução (5.6) evidente na figura 5.1 durante o período de domínio da radiação ($a \ll a_e \approx 2.7E - 4$). Igualmente, durante o período de domínio da matéria ($a_e \ll a \ll a_\Lambda \approx 0.7$) o potencial ϕ tende a ser constante, como é previsto pela solução 5.15. Seguidamente, para $a \approx 1$ (no presente) o potencial ϕ começa a decrescer como na solução (5.24) obtida para o período de domínio da energia escura. Por outro lado, é possível observar a tendência que a solução tem quando o número de onda é muito pequeno, dado pela expressão (5.36) apresentada na figura 5.4 com $\phi \rightarrow 9\phi_0/10$ no período de domínio da matéria.

Perturbação sobre a densidade de energia

Nos capítulos 5 e 7 foram obtidas expressões analíticas para as perturbações na densidade de energia da radiação, da matéria escura e do GDF para os limites de grandes e pequenas escalas, e para cada

um dos períodos de domínio da radiação. da matéria e da energia escura. As figuras 8.2, 8.3 e 8.4 mostram a evolução temporal das perturbações à densidade de cada uma das componentes do modelo padrão cosmológico Λ CDM (fótons γ , matéria escura fria c , bárions b e neutrinos com massa ν) para diferentes valores de k usando o inventário cósmico da terceira coluna da tabela 8.1 e as condições iniciais isentrópicas (8.1).

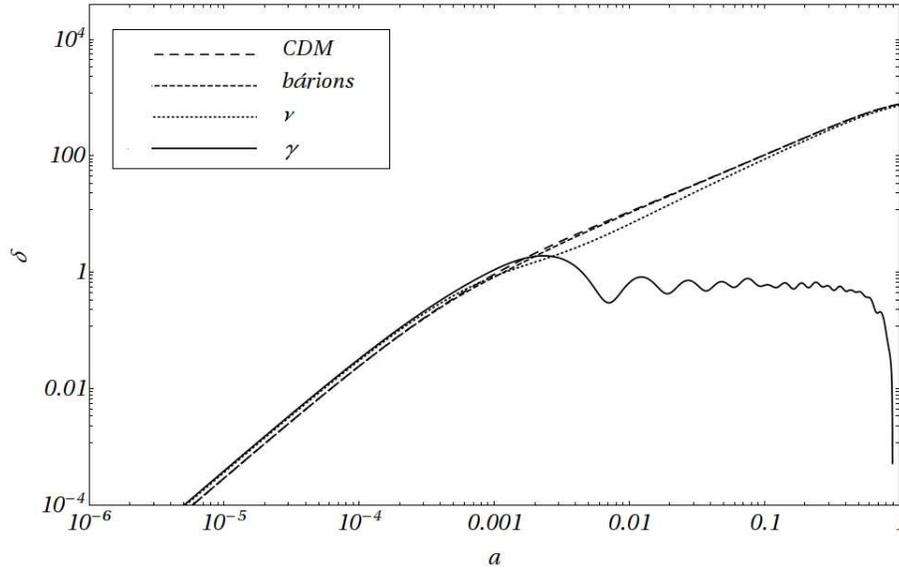


Figura 8.2: δ_i para $k = 0.01 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo Λ CDM com neutrinos massivos. Da cima para baixo temos: matéria escura fria c , bárions b , e neutrinos com massa ν e fótons γ .

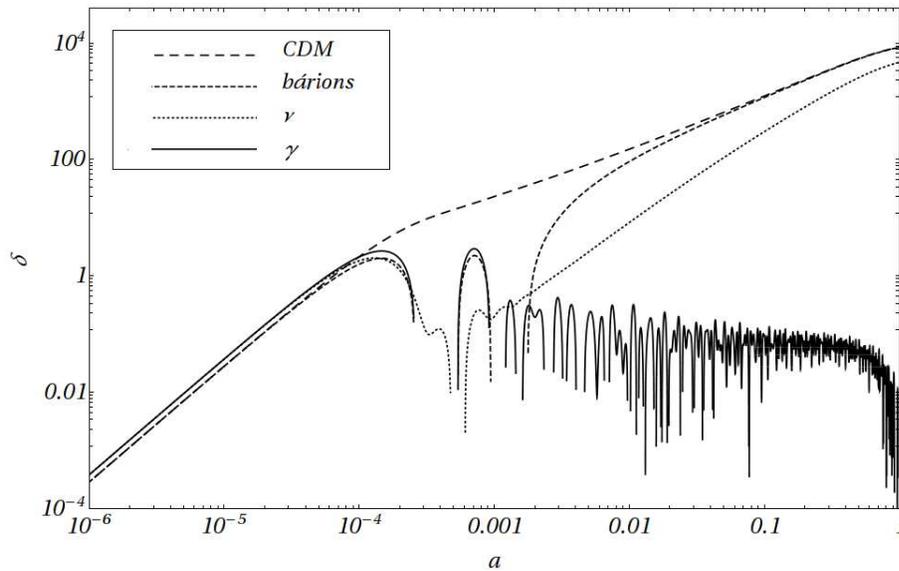


Figura 8.3: δ_i para $k = 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo Λ CDM com neutrinos massivos. Da cima para baixo temos: matéria escura fria c , bárions b , e neutrinos com massa ν e fótons γ .

Nas figuras 8.2, 8.3 e 8.4 pode se observar a validade dos resultados obtidos no capítulo 5 para o período de domínio da radiação ($a \ll a_e$), de onde a perturbação da densidade da radiação oscila (5.7) em função do tempo devido ao efeito misto da pressão da radiação que tende a dissipar o gás, e o potencial gravitacional que tende fazê-lo colapsar. No caso da CDM as perturbações na densidade de energia crescem logaritmicamente (Figura 5.2) depois que entrarem no raio de Hubble ($aH > k$). Já que na ausência de pressão só resta o efeito de colapso gravitacional devido à perturbação métrica, que no calibre longitudinal funciona como fonte de potencial gravitacional.

Este conjunto de figuras apresenta também a evolução temporal da perturbação na densidade dos neutrinos com massa e dos bárions. Como é de esperar-se os dois têm um comportamento oscilatório, devido à temperatura (durante o período de domínio da radiação), tanto os neutrinos massivos como os bárions apresentam um comportamento ultra-relativístico. Note-se que a amplitude de oscilação do contraste de densidade δ dos bárions têm a mesma amplitude que no caso dos fótons devido ao seu acoplamento eletromagnético. Entretanto que as oscilações no contraste de densidade dos neutrinos com massa não acompanham identicamente a evolução das perturbações dos fótons e dos bárions, pois simplesmente assumimos um modelo onde os neutrinos só interagem gravitacionalmente [19].

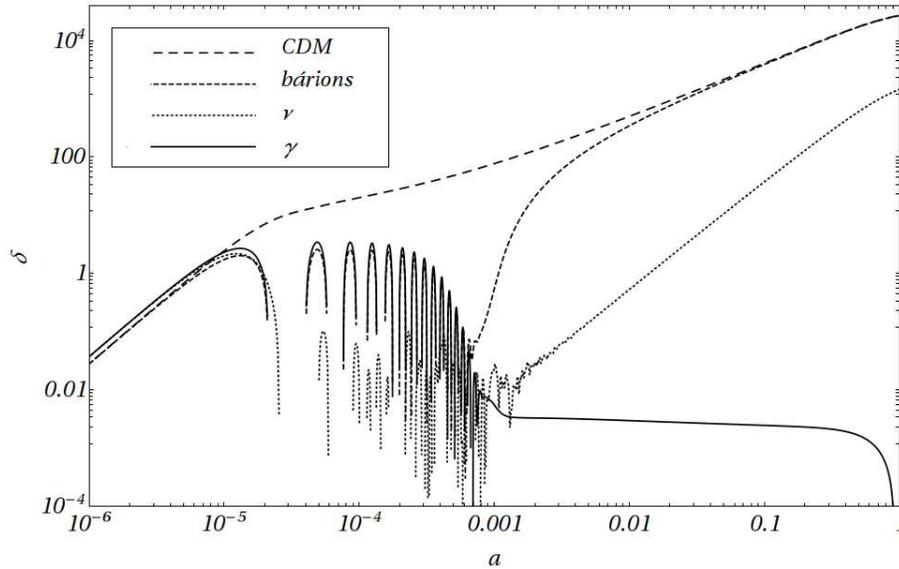


Figura 8.4: δ_i para $k = 1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo ΛCDM com neutrinos massivos.

Da cima para baixo temos: matéria escura fria c , bárions b , e neutrinos com massa ν e fótons γ .

Durante o período de domínio da matéria ($a_e \ll a \ll a_\Lambda$), a perturbação na densidade da matéria escura apresenta um crescimento potencial (como predito pela expressão (5.16)), enquanto que as flutuações na densidade dos fótons apresentam oscilações com amplitude decrescente. As perturbações dos bárions acompanham o comportamento dos fótons até o desacoplamento dos dois fluidos, logo depois evoluem de maneira similar às perturbações na matéria escura fria.

Finalmente o contraste de densidade dos neutrinos com massa oscila até eles se tornarem não relativísticos. Algum tempo depois disso o contraste de densidade apresenta um crescimento rápido, mas não consegue alcançar a amplitude do contraste de densidade da matéria escura fria e dos bárions. Esse último efeito tem como consequência direta uma queda na predição do espectro de potência da matéria para escalas pequenas caso seja incluído o efeito dos neutrinos massivos (Figura 8.7), já que a densidade de neutrinos massivos não colapsa gravitacionalmente tão rápido quanto o restante da matéria (CDM e bárions).

Finalmente para $a > a_\Lambda$, quando a densidade de energia escura começa a se tornar a densidade de energia dominante no universo, temos que todas as perturbações na densidade apresentam um decréscimo rápido. Já que a pressão negativa da energia escura produz a expansão acelerada do universo. A energia escura é modelada neste trabalho como tendo uma densidade de energia constante e uma pressão igual ao negativo da sua densidade.

8.2 Incluindo o GDF no inventário cósmico

Usando o programa CAMB [20] para calcular a evolução das perturbações do GDF a partir das equações de conservação do tensor momento energia no calibre sincrônico [19, 31] temos:

$$ds^2 = a^2 [-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j], \quad h \equiv h_{ii}, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial \eta} = -\dot{\rho} - (\bar{\rho} + \bar{\mathcal{P}}) \left(\theta + \frac{\dot{h}}{2} + 3\frac{\dot{a}}{a} \right) - 3\frac{\dot{a}}{a} \delta\rho \left(1 + \frac{\delta\mathcal{P}}{\delta\rho} \right),$$

$$\left(\dot{\theta} + \sigma k^2 + 4\frac{\dot{a}}{a} \theta \right) (\bar{\rho} + \bar{\mathcal{P}}) + \theta (\dot{\rho} + \dot{\mathcal{P}}) = \delta\rho k^2 \frac{\delta\mathcal{P}}{\delta\rho},$$

que no caso da equação de estado das expressões (6.2) para o GDF se tornam:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial \eta} = -\frac{m^4}{\pi^2} \frac{\sqrt{1+\chi^2}}{3\chi^4} \left(\theta + \frac{\dot{h}}{2} \right) - \delta\rho \frac{\dot{a}}{a} \frac{4+3\chi^2}{1+\chi^2}, \quad (8.3)$$

$$\dot{\theta} + \sigma k^2 + \theta \frac{\dot{a}}{a} \frac{2\chi^2}{1+\chi^2} = \delta\rho \frac{\chi^4 k^2 \pi^2}{m^4 (1+\chi^2)^{3/2}}. \quad (8.4)$$

Condições iniciais

Para encontrar as condições iniciais do GDF vamos escrever as expressões para a densidade média do GDF (6.2) nas aproximações de $\chi \ll 1$ (começo do domínio da radiação) e $\chi \gg 1$ (perto de no presente):

$$\bar{\rho}_d(\chi \ll 1) \approx \frac{m^4}{8\pi^2} \frac{g}{\chi^4} = \frac{g}{4\pi^2} \frac{q_f^4}{a^4}, \quad (8.5)$$

onde g é o grau de degenerescência e sendo $\rho_d(\chi \ll 1)$ independente de m , e

$$\bar{\rho}(\chi \gg 1) \approx \frac{m^4}{6\pi^2} \frac{g}{\chi^3} = \frac{g}{6\pi^2} \frac{q_f^3}{a^3} m. \quad (8.6)$$

Igualando a densidade do GDF à densidade dos neutrinos com massa no instante inicial e no presente para procurar o momento de Fermi q_f e a massa m do GDF obtemos:

$$\rho(\chi \ll 1) = \rho_\nu = 3 \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \rho_\gamma, \quad (8.7)$$

$$\rho(\chi \gg 1) = \rho_{cr} \frac{\Omega_\nu}{a^3}. \quad (8.8)$$

Com isto, o momento de Fermi é $q_f \approx 0.00048 \text{ eV}/c$ e a massa é $m \approx 0.32 \text{ eV}/c^2$ para $g = 2$. E o momento de Fermi é $q_f \approx 0.00036 \text{ eV}/c$ e a massa é $m \approx 0.24 \text{ eV}/c^2$ para o caso de duas famílias com a mesma massa, ou seja $g = 6$. As condições iniciais do DFG a partir das condições iniciais dos neutrinos com massa fornecem:

$$\delta\rho = \left(\frac{q_f}{a} \right)^4 g \frac{\delta_\nu}{8\pi^2}, \quad (8.9)$$

$$\theta = \theta_\nu. \quad (8.10)$$

Isto seria válido para um universo onde os neutrinos com massa forem substituídos por um GDF com a mesma densidade, e para condições iniciais isentrópicas. Isto foi feito com objetivo de comparar diretamente o comportamento das perturbações do GDF (e a sua contribuição ao espectro de potência no presente) com outro fluido que evolui baixo as mesmas circunstâncias. Por outro lado, se substituirmos a CDM por um GDF não relativístico (para todo tempo) com a mesma densidade média não se obtém nenhuma diferença.

Perturbação sobre a densidade de energia

No caso da substituição dos neutrinos massivos por um GDF no inventário cósmico (duas últimas colunas da tabela 8.1) temos o mesmo comportamento nas perturbações da *CDM*, dos bárions e dos fótons. Isto é devido ao fato que tanto os neutrinos massivos como o GDF têm basicamente a mesma densidade média, não alterando a duração das diferentes eras de domínio. Além disso, nenhum dos dois é um fluido dominante, e seus contrastes de densidade sempre são menores que o contraste de densidade da CDM.

No caso específico do gás degenerado de férmions temos que o contraste de densidade δ comporta-se claramente como o contraste de densidade dos fótons durante o período de domínio da radiação (e antes do desacoplamento dos fótons com os bárions), o qual concorda com as predições analíticas do capítulo anterior. Igualmente, durante o período de domínio da matéria temos que o contraste de densidade do GDF tem um comportamento oscilatório até o gás tornar-se não relativístico. Desse ponto em diante

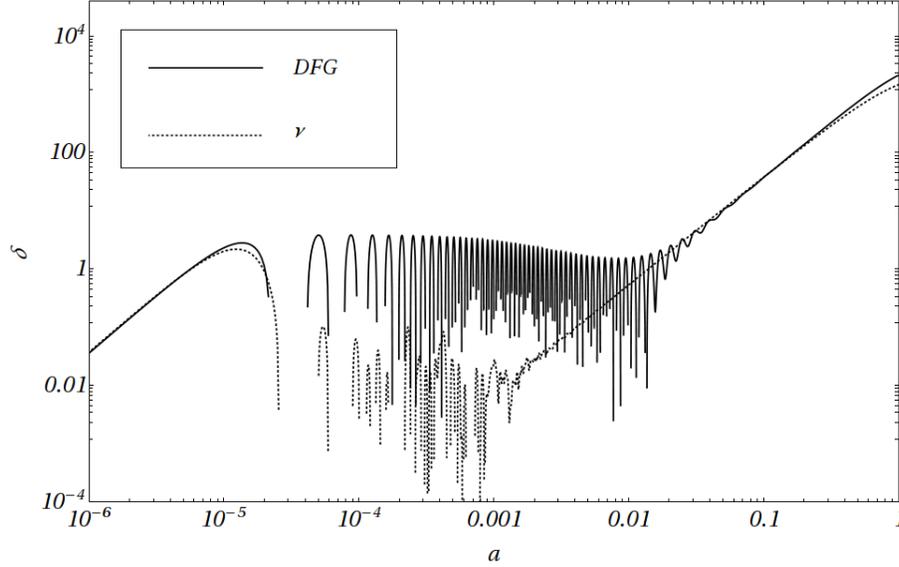


Figura 8.5: δ_ν e δ_d para $k = 1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo ΛCDM
 Da cima para baixo temos: gás degenerado de férmions d e neutrinos com massa ν .

a perturbação cresce como foi predita pela solução (7.6). E finalmente tende a decrescer no começo do período de domínio da constante cosmológica (7.8).

Os gráficos 8.5 e 8.6 mostram a diferença entre o comportamento do contraste de densidade do GDF e dos neutrinos massivos para dois valores de k . A evolução dessas perturbações tem duas diferenças fundamentais. A primeira é que no caso do GDF desconsideramos a perturbação de estresse σ_d no tensor momento energia enquanto que nas equações para os neutrinos massivos conservamos este termo. Já que o σ constitui um termo de dissipação na equação de evolução do contraste de densidade para gases ultra-relativísticos (3.13), onde o contraste de densidade dos neutrinos massivos será uma oscilação amortecida, enquanto o contraste de densidade para o GDF será uma oscilação com amplitude constante.

A segunda diferença notável entre o comportamento do contraste de densidade dos neutrinos massivos e do gás degenerado de férmions é o tempo para o qual eles tornam-se não relativísticos. Das condições iniciais para os dois fluidos e da densidade dos neutrinos no presente pode-se calcular a massa dos mesmos. Igualmente podemos fazer no caso do gás degenerado de férmions. Os dois modelos (respeitando as mesmas condições inicial e final) fornecem um valor diferente na massa das partículas: a massa predita para três famílias de neutrinos com mesma massa é de $m_\nu = 0.64 \text{ eV}/c^2$ e a massa predita para três famílias de um gás degenerado de férmions com mesma massa é de $m_d = 0.24 \text{ eV}/c^2$. Com o qual os neutrinos massivos se tornarem não-relativísticos antes que o GDF. Mesmo com estas diferenças, temos que os dois fluidos evoluem no fim da mesma maneira, por isso apresentam contribuições similares ao espectro de potência da matéria (8.7) com uma contribuição maior por parte do GDF para escalas intermediárias.

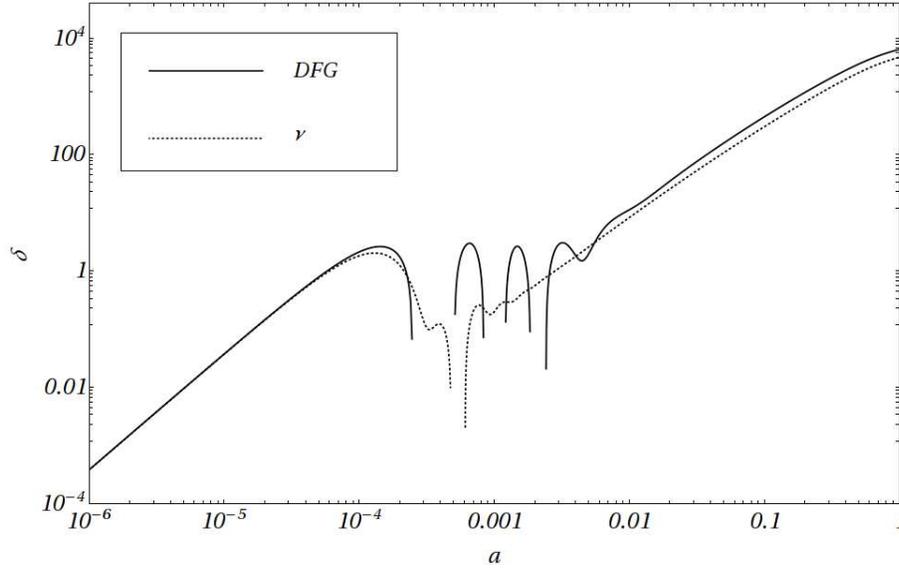


Figura 8.6: δ_ν e δ_d para $k = 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo ΛCDM
Da cima para baixo temos: gás degenerado de férmions d e neutrinos com massa ν .

8.3 Espectro de potência da matéria

A partir dos resultados do programa CAMB [20] é possível verificar as diferenças entre os espectros de potência (3.35) do inventário cósmico mostrado na tabela 8.1. Ou seja, um universo sem neutrinos, com neutrinos sem massa, com neutrinos massivos (três famílias degeneradas com massa $m_\nu = 0.64 \text{ eV}/c^2$) e com um gás degenerado de Férmions (momento de Fermi $q_f \approx 0.00036 \text{ eV}/c$ massa $m_d \approx 0.24 \text{ eV}/c^2$ e grau de degenerescência $g = 6$). Com isto, veremos o efeito na formação de estruturas para universos com o mesmo conteúdo de Λ , γ , b , e c , mas variando o conteúdo de neutrinos e GDF usando o calibre sincrônico e condições iniciais isentrópicas.

Ω	sem ν	ν sem massa	ν massivos	GDF
Ω_Λ	0.73	0.73	0.73	0.73
Ω_γ	4.6E-5	4.6E-5	4.6E-5	4.6E-5
Ω_b	0.0425	0.0425	0.0425	0.0425
Ω_c	0.2+r	0.2	0.2	0.2
Ω_r	0	r	0	0
Ω_ν	0	0	r	0
Ω_d	0	0	0	r

Tabela 8.1: Parâmetros usados para obter o espectro de potência
Com $r = 1 - (\Omega_\Lambda + \Omega_\gamma + \Omega_b + \Omega_c) = 0.027454$

A figura 8.7 apresenta a comparação entre o espectro de potência para os diferentes conteúdos de energia apresentados na tabela 8.1. A diminuição do espectro de potência entre o modelo sem neutrinos e o modelo com neutrinos sem massa é devido ao fato que no segundo caso o período de domínio da radiação (fótons

mais neutrinos sem massa) é mais prolongada que no universo sem neutrinos. Com isto, o crescimento potencial do contraste de densidade da matéria escura fria e dos bárions começa mais tarde que no modelo sem neutrinos, e, portanto temos uma formação de estruturas menor.

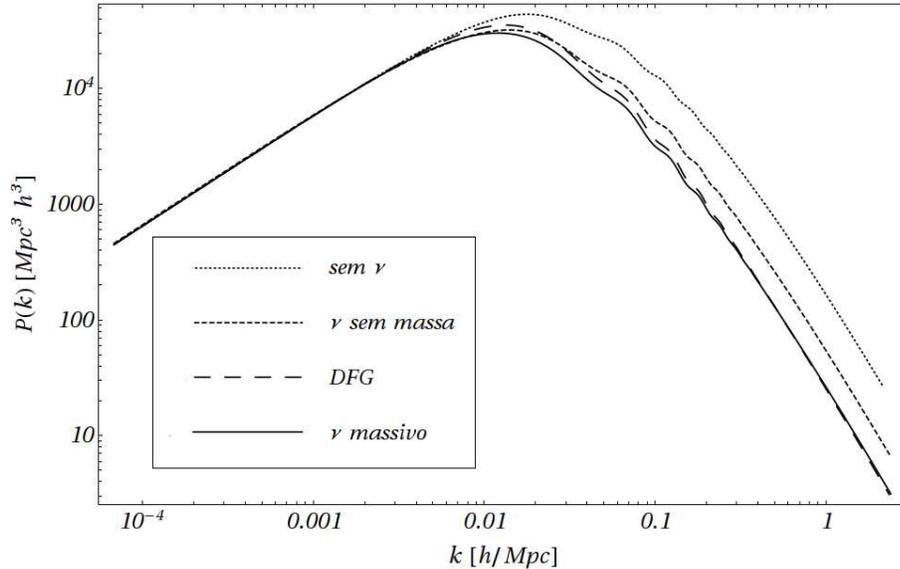


Figura 8.7: Espectro de potência da matéria no modelo Λ CDM para os conteúdos do universo apresentados na tabela 8.1.

Ao comparar os resultados do modelo com neutrinos sem massa e do modelo com neutrinos massivos durante o período de domínio da radiação, os neutrinos com massa são ultra-relativísticos, podendo ser considerados como radiação cumprindo então o mesmo papel dos neutrinos sem massa. Temos que os períodos de domínio da radiação nos dois modelos vão ter durações essencialmente iguais. Assim as perturbações da CDM terão o mesmo comportamento. A diminuição no espectro de potência da matéria para escalas pequenas é causada pelo fato de que os neutrinos massivos tornam-se não relativísticos dentro do período de domínio da matéria. Eles terão menos tempo do que a CDM para o crescimento das perturbações e para uma eventual contribuição na formação de estruturas.

Finalmente, como dito anteriormente, a diferença no espectro de potência da matéria no presente considerando o universo com neutrinos massivos ou com um gás degenerado de férmions é pequena. No entanto, as massas dos dois fluidos são diferentes ($m_\nu > m_d$) fazendo com que o GDF se torne não relativístico mais tarde do que os neutrinos massivos.

8.4 Gas generalizado de Chaplygin

Um gás generalizado de Chalygin (GCG) é caracterizado pela equação de estado

$$\bar{P}_g = -\frac{A}{(\bar{\rho}_g)^\alpha}. \quad (8.11)$$

Substituindo a expressão acima na equação (2.20), obtemos a solução geral

$$\bar{\rho}_g = \left[A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{1/(1+\alpha)}. \quad (8.12)$$

Esta equação reproduz a densidade e pressão médias da matéria escura e da constante cosmológica quando $\alpha = 0$. Para escrever as equações de conservação do tensor momento energia deste fluido precisamos da sua velocidade do som [38]

$$c_g^2 \equiv \frac{\delta \mathcal{P}_g}{\delta \rho_g} = -\alpha \omega_g, \quad \omega_g \equiv \frac{\bar{\mathcal{P}}_g}{\bar{\rho}_g} = -\frac{A}{A + B a^{-3(1+\alpha)}}. \quad (8.13)$$

Com esses resultados temos as seguintes equações de conservação do tensor momento energia para um gás ideal no calibre sincrônico (8.2):

$$\dot{\delta}_g = -(1 + \omega_g) \left(\theta_g + \frac{\dot{h}}{2} \right), \quad \dot{\theta}_g = \delta_g k^2 \frac{\alpha A a^{3(1+\alpha)}}{B} - \sigma_g k^2 - \frac{\dot{a}}{a} \theta_g (1 - 3\alpha \omega_g) \quad (8.14)$$

As condições iniciais usadas para as perturbações do GCG neste trabalho são as mesmas condições iniciais usadas para a CDM, já que para $\alpha \ll 1$ o GCG se comporta basicamente como a CDM no período de domínio da radiação. As equações (8.14) foram introduzidas no programa CAMB para obter os resultados numéricos apresentados a continuação.

Perturbação sobre a densidade de energia

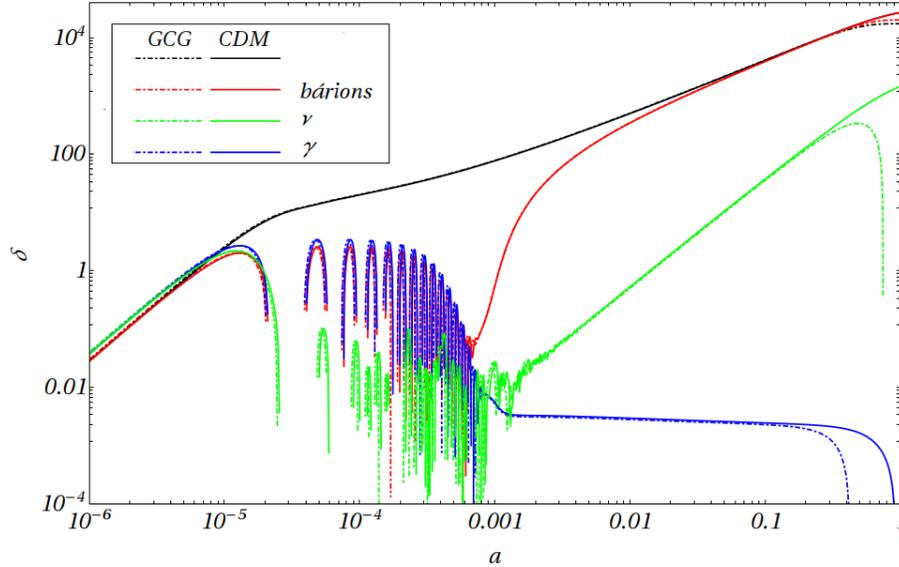


Figura 8.8: δ_i para $k = 1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo *GCG* com $\alpha = 0$ e neutrinos massivos. Comparação entre o modelo Λ CDM para o conteúdo da última coluna da tabela 8.1 e o modelo *GCG* com o mesmo conteúdo de energia, só que substituindo a Λ e a *CDM* por um *GCG* com $A = \Omega_\Lambda \rho_0$, $B = \Omega_c \rho_0$.

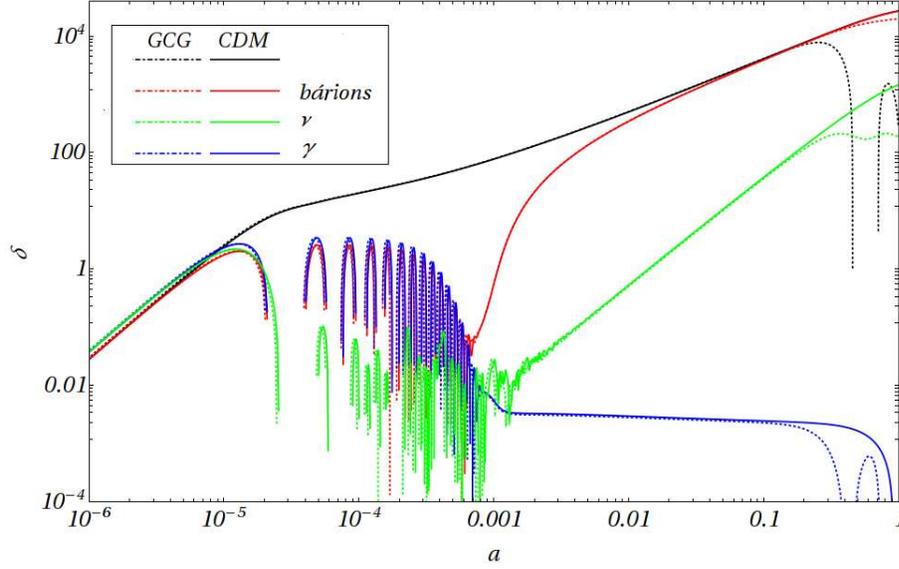


Figura 8.9: δ_i para $k = 1 \text{ Mpc}^{-1}$ no modelo GCG com $\alpha = 10^{-5}$ e neutrinos massivos. Comparação entre o modelo ΛCDM para o conteúdo da última coluna da tabela 8.1 e o modelo GCG com o mesmo conteúdo de energia, só que substituindo a Λ e a CDM por um GCG com $A = \Omega_\Lambda \rho_0$, $B = \Omega_c \rho_0$.

Contraste de densidade da CDM Vs GCG

Não existem provas quanto à existência de inhomogeneidade ou anisotropia na distribuição da constante cosmológica Λ , portanto no contexto modelo ΛCDM somente são consideradas perturbações na matéria escura fria.

No caso do modelo efetivo GCG para $A = \Omega_\Lambda \rho_0$, $B = \Omega_c \rho_0$ e $\alpha = 0$, temos a densidade e pressão médias do GCG são iguais à soma das densidades e pressões da Λ e da CDM . No entanto, as suas perturbações não são iguais. Já que as perturbações ao GCG são equivalentes a perturbações conjuntas da Λ e da CDM . Portanto o esperado para o contraste de densidade do GCG é que decresça muito mais rápido do que o contraste apenas da CDM quando $a \rightarrow 1$ (período de domínio da constante cosmológica) já que a pressão do GCG é $\mathcal{P}_g \xrightarrow{a \rightarrow 1} -\rho_g$.

No caso $\alpha \neq 0$ a densidade do GCG é menor, e sua pressão é mais negativa, quando $a \rightarrow 1$ do que no caso em que $\alpha = 0$. Assim a perturbação do GCG irá decrescer mais cedo e mais rapidamente, chegando até trocar de sinal e oscilar amortecidamente ao redor de zero se α for o suficientemente 'grande' ¹.

¹ $\alpha \gtrsim 10^{-7}$ produz um espectro de potência que não acompanha os dados experimentais, ver o gráfico 8.10

Outros contrastes de densidade (b , ν e γ)

No caso do modelo Λ CDM a componente que influencia mais fortemente a perturbação métrica depois do período de domínio da radiação é o contraste de densidade da matéria (CDM e bárions com uma importância similar depois do desacoplamento dos bárions, e neutrinos massivos com uma importância um pouco menor). Sabemos que o contraste de densidade dominante (neste caso matéria) influencia indiretamente os outros contrastes de densidade (por exemplo fótons) por causa da interação de todos eles com a perturbação métrica (que no caso do calibre longitudinal pode ser associada ao potencial gravitacional newtoniano no limite adequado).

Com isto, e com a análise feita para o contraste de densidade do GCG comparado com o contraste de densidade da CDM , temos que a perturbação métrica (devida basicamente ao contraste de densidade da matéria para $a \rightarrow 1$) vai decrescer mais rapidamente no caso do modelo GCG se comparado com o modelo Λ CDM. Este decréscimo adicional na perturbação métrica tem como consequência o decréscimo das perturbações dos bárions, neutrinos e fótons, que é o que pode ser observado nos gráficos dos resultados numéricos (comparados com o modelo Λ CDM).

Para $\alpha \geq 10^{-6}$ temos que o efeito de oscilação no contraste de densidade do GCG faz oscilar também o contraste de densidade dos neutrinos massivos (igual para o GDF) devido à interação com a perturbação métrica.

Espectro de potência

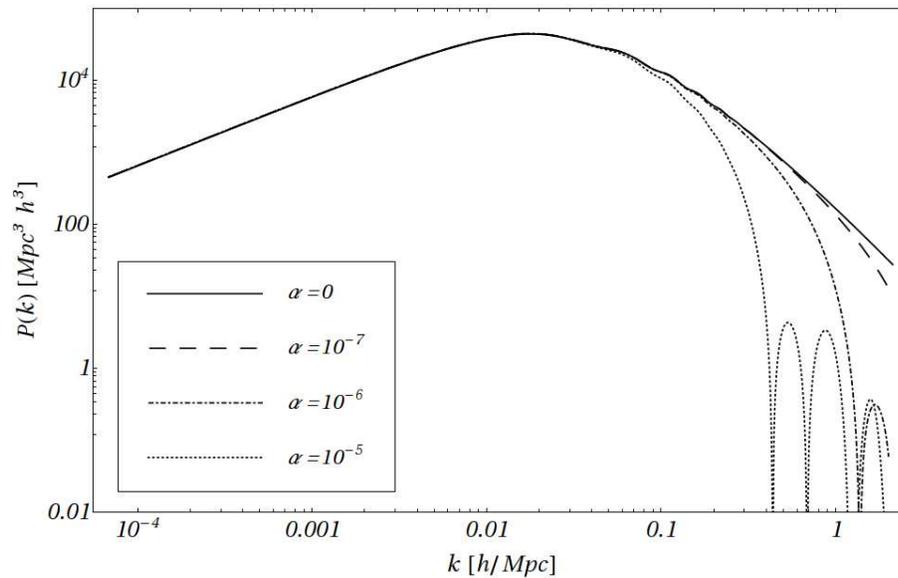


Figura 8.10: Espectro de potência da matéria no modelo GCG com neutrinos massivos Para $A = \Omega_{\Lambda}\rho_0$ e $B = \Omega_c\rho_0$. No caso $\alpha = 0$ o espectro de potência do modelo GCG é igual ao modelo Λ CDM, depois que serem renormalizados para concordarem no limite de escalas grandes.

Dos resultados numéricos para $\alpha = 0$ temos que o espectro de potência do modelo GCG é igual ao espectro de potência do modelo ΛCDM (devidamente renormalizados). Isto significa que o decréscimo adicional do contraste de densidade do GCG e dos bárions (se comparado com o modelo ΛCDM) devido à pressão negativa do GCG quando $a \rightarrow 1$ independe do k . Em outras palavras o contraste de densidade de todos os modos k apresenta uma diminuição considerável se comparado com o modelo ΛCDM , mas que não é visível no espectro de potência porque os dois foram renormalizados para que concordatem no limite escalas grandes (k pequeno).

Para $\alpha > 0$ temos o efeito de oscilação do contraste de densidade do GCG (devido à pressão mais negativa se comparado a $\alpha = 0$). O contraste total de densidade será então cada vez menor para cada uma das componentes (tanto GCG como bárions, fótons e neutrinos) somado ao efeito de oscilação tanto do GCG como dos neutrinos ou do GDF . Para α cada vez 'maior' teremos uma maior diminuição em todos os contrastes de densidade (e, portanto no espectro de potência) e também teremos que o contraste de densidade do GCG começa oscilar mais cedo (igual para o espectro de potência) devido ao aumento do efeito da pressão negativa do GCG .

Capítulo 9

Conclusões

Estudamos a formação de estruturas em grandes escalas em um universo plano dominado por radiação, matéria escura fria (CDM) e constante cosmológica (Λ) como modelo de energia escura no caso particular de presença de um gás degenerado de férmions (GDF) não interagentes como fluido teste. Além de acrescentar uma componente de GDF ao espectro de potência de matéria, também parametrizamos a transição entre os regimes relativístico e não-relativístico de um fluido teste, eventualmente aplicável aos neutrinos de *background* cosmológico, de maneira analítica, de forma a se identificar eventuais peculiaridades nesta transição.

As expressões analíticas que descrevem a evolução temporal das perturbações para a matéria escura fria são consistentes com resultados numéricos em seus intervalos de validade. Dado que a componente anisotrópica do tensor momento energia, σ , é desprezível no caso dos fluidos estudados as soluções analíticas do contraste de densidade δ , em função do parâmetro de expansão, a , para a matéria escura fria reproduzem corretamente o crescimento logarítmico durante o período de domínio da radiação, o crescimento linear durante a era de domínio da CDM e o decrescimento com $1/a$ durante o período de domínio da constante cosmológica.

Quanto às soluções analíticas para as perturbações da radiação, podemos dizer que também concordam com os resultados numéricos para cada caso estudado. Durante o domínio da radiação a solução do contraste de densidade é uma oscilação ao redor de zero. Para o domínio da CDM temos um termo de oscilação, um termo de decaimento e um termo constante, o que pode reproduzir razoavelmente os resultados numéricos. Da mesma forma isto ocorre para o período de domínio da constante cosmológica, já que analiticamente há termos de oscilação e termos que decaem com $1/a$. Em geral, a aproximação $\sigma \approx 0$ é perfeitamente válida no período de domínio da radiação, e não é discrepante nos períodos seguintes.

No caso do GDF, devido a que tanto analiticamente como numericamente desconsideramos qualquer contribuição de σ pelo fato de estarmos modelando, em certo sentido, matéria escura quente, as soluções analíticas para cada período coincidem com a solução numérica. Destes resultados temos que as perturbações na densidade do GDF oscilam durante o período de domínio da radiação, quando o gás pode ser

considerado ultra-relativístico. Durante o período de domínio da CDM (devido ao valor que obtivemos para a massa da componente na forma de GDF) temos que no início ainda existem oscilações devido a pressões elevadas em cenários relativísticos. Ainda no período de domínio da matéria o gás tem seu regime convertido para o não relativístico, mudando o seu comportamento para uma combinação de termos com crescimento logarítmico e potencial, o qual é típico da matéria não relativística. Devido ao fato do GDF tender ao regime não relativístico somente até o período de domínio da matéria, temos que as perturbações na densidade do GDF não conseguem crescer tanto como as perturbações da matéria escura não relativística, diminuindo a amplitude do espectro de potências para escalas pequenas. Este corresponde basicamente ao mesmo comportamento de outras partículas massivas que interagem apenas gravitacionalmente, como é o caso mais simples de neutrinos massivos completamente não relativísticos.

Podemos dizer que o comportamento das perturbações do GDF corresponde às expectativas, ou seja, no seu limite ultra-relativístico comporta-se como a radiação, e no limite de temperatura de conversão para um regime não relativístico, seu comportamento tende ao comportamento da CDM e dos bárions não relativísticos e não interagentes do final do período de domínio da matéria.

Ressaltamos novamente que quando desconsideramos os multipolos de ordem superior ou igual a dois no formalismo da equação de Boltzmann obtemos ao final as mesmas soluções para as perturbações que se usarmos a equação de conservação do tensor momento energia para gases ideais. Para o caso do GDF nem sempre temos as mesmas equações, por estarmos trabalhando com variáveis diferentes: os multipolos de expansão da função distribuição para o caso do formalismo de Boltzmann e o contraste de densidade para o caso do formalismo de conservação do tensor momento energia para gases ideais. Entretanto, podemos sempre obter a mesma solução para o contraste de densidade e a divergência da velocidade, θ , através de qualquer um dos dois caminhos.

Numericamente obtivemos diferentes contribuições ao espectro de potência da matéria no presente, tanto ao considerarmos neutrinos massivos ou um GDF. O resultado leva à conclusão de que os neutrinos massivos possuem uma massa maior que os férmions degenerados, mesmo quando se assumem densidades equivalentes no período primordial e no presente. Isto é possível quando o período de transição de gás ultra-relativístico para não relativístico é mais prolongado no caso dos neutrinos massivos. Mesmo dessa forma, as contribuições das perturbações devidas ao GDF e aos neutrinos massivos levam ao mesmo comportamento (isto é, não relativístico) para o final do período de domínio da matéria, de modo que suas respectivas contribuições ao espectro de potência são semelhantes, apenas um pouco mais relevantes para escalas intermediárias, no caso do GDF.

Se substituirmos a CDM por um GDF não relativístico com a mesma densidade média ($m/q_f \gtrsim 10^8 c$) é obtido o mesmo resultado para a evolução do parâmetro de expansão, das densidades médias e das perturbações do tensor momento energia de todos os fluidos do modelo, portanto, também é obtido o mesmo espectro de potência da matéria.

No cenário do modelo do gás generalizado de Chaplygin (*GCG*), caracterizado pela equação de estado $\mathcal{P} \propto \rho^{-\alpha}$ onde \mathcal{P} e ρ são a pressão e a densidade do gás, temos que todos os contrastes de densidade experimentam uma diminuição maior quando $a \rightarrow 1$ se comparado com o modelo padrão Λ CDM. Devido a sua pressão negativa, essa diminuição no contraste de densidade é maior para o caso do *GCG* que para os bárions, fótons e neutrinos. Dos resultados numéricos para $\alpha = 0$ temos que o espectro de potência do modelo *GCG* é igual ao espectro de potência do modelo Λ CDM (devidamente renormalizados). Isto significa que o decréscimo adicional do contraste de densidade do *GCG* e dos bárions (comparado com o modelo Λ CDM) devido à pressão negativa do *GCG* quando $a \rightarrow 1$ independe da escala. Em outras palavras, o contraste de densidade de todos os modos k no modelo *GCG* apresenta uma diminuição considerável (se comparado com o modelo Λ CDM), porém não visível no espectro de potência apresentado devido a que os dois foram renormalizados para concordarem no limite de escalas grandes.

No caso de $\alpha \neq 0$ o espectro de potência da matéria no modelo *GCG* é menor que quando $\alpha = 0$ para pequenas escalas, e se afasta dele de forma considerável quando $\alpha \gtrsim 10^{-7}$. Isto é devido a que a pressão do *GCG* é mais negativa para $\alpha \neq 0$ (se comparado com o caso em que $\alpha = 0$), o qual tem como efeito neto a dissipação mais rápida das sobre-densidades já formadas (antes do período de expansão acelerada).

Referências Bibliográficas

- [1] T. Padmanabhan. *Structure formation in the universe*. Cambridge Un. Press, 1993. 1
- [2] P. J. E. Peebles. *The large scale of the universe*. Princeton Un. Press, 1980. 1, 5, 18, 19
- [3] V. F. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge Un. Press, 2005. 1, 2, 5, 17, 18, 19
- [4] E. Komatsu et al. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe observations: Cosmological interpretation. *Astrophysical Journal Supplement Series*, 180(2):330–376, February 2009. 1, 15
- [5] J. E. Lidsey, A. R. Liddle, E. W. Kolb, E. J. Copeland, T. Barreiro, and M. Abney. Reconstructing the inflaton potential—an overview. *Rev. Mod. Phys.*, 69(2):373–410, Apr 1997. 1
- [6] D. H. Lyth and A. Riotto. Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation. *Physics Reports*, 314(1-2):1–146, 1999. 1
- [7] K. Nakamura and particle data group. Review of particle physics. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, 37(7A):075021, July 2010. 1
- [8] A. Kamenshchik and U. Moschella. An alternative to quintessence. *Physics Letters B*, 511(265), 2001. 1
- [9] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, 80(8):1582–1585, Feb 1998. 1
- [10] G. Huey, L. Wang, R. Dave, R. R. Caldwell, and P. J. Steinhardt. Resolving the cosmological missing energy problem. *Phys. Rev. D*, 59(6):063005, Feb 1999. 1
- [11] L. Amendola. Coupled quintessence. *Phys. Rev. D*, 62(4):043511, Jul 2000. 1
- [12] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 15(11), November 2006. 1
- [13] M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen. Generalized chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. *Phys. Rev. D*, 66(4):043507, Aug 2002. 1
- [14] Z. K. Guo and Y. Z. Zhang. Cosmology with a variable chaplygin gas. *Physics Letters B*, 645(4):326–329, 2007. 1

- [15] A. W. Brookfield, van de Bruck, D. F. Mota, and D. Tocchini-Valentini. Cosmology with massive neutrinos coupled to dark energy. *Phys. Rev. Lett.*, 96(6):061301, Feb 2006. 1
- [16] A. E. Bernardini. Mass varying dark matter in effentive generalized chaplygin gas scenarios. *Physical Review D*, 80:103522, 2009. 1
- [17] A. E. Bernardini and E. L. D. Perico. Degenerate fermi gas perturbations at standard background cosmology. *JCAP*, 01(010), January 2011. 2
- [18] E. L. D. Perico and A. E. Bernardini. Reproducing the neutrino effects on the matter power spectrum through a degenerate fermi gas approach. *article in preparation*. 2
- [19] C. P. Ma and E. Bertschinger. Cosmological perturbation-theory in the synchronous and conformal newtonian gauges. *The Astrophysical journal*, 455(7), December 1995. 3, 23, 25, 29, 56, 57, 59, 60
- [20] A. Lewis and A. Challinor. *Code for Anisotropies in the Microwave Background*. 4, 18, 20, 56, 57, 60, 63
- [21] S. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Wesley, Addison, 2004. 5
- [22] C. W. Misner and K. S. Thorne. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1993. 5
- [23] J. Lesgourgues and S. Pastor. Massive neutrinos ans cosmology. *Physics Reports Review section of Physics Letters*, 429, 7 2006. 5
- [24] S. Weinberg. *Cosmology*. Jhon Wiley & Sons, Inc, 1972. 5
- [25] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003. 5, 16, 42
- [26] E. W. Kolb and M. S. Turner. *The early universe*. Addison-Wesley, 1988. 5
- [27] J. V. Narlikar. *An introduction to cosmology*. Cambridge Un. Press, 2002. 5
- [28] J. A. Peacock. *Cosmological physics*. Cambridge Un. Press, 1999. 5
- [29] S. Perlmutter. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517:541–548, June 1999. 9
- [30] A. G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116:1009–1038, October 1998. 11
- [31] A. Lewis. *CAMB notes*. 20, 57, 60
- [32] Spergel et al. Three-year wilkinson microwave anisotropy probe observations: Implications for cosmology. *The Astronomical Journal*, 170(2):377, June 2007. 25
- [33] Percival et al. The shape of the sloan digital sky survey data release 5 galaxy power spectrum. *The Astronomical Journal*, 657(2):645, March 2007. 25

-
- [34] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover Publications, Inc, 1960. 29
- [35] J. R. Bond and G. Efstathiou. Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter. *The Astrophysical Journal*, 285(L45-L48), 10 1984. 29
- [36] S. Chandrasekhar. *An introduction to the study of stellar structure*. Dover Publications, 1967. 45
- [37] M. Bucher, K. Moodley, and N. Turok. General primordial cosmic perturbation. *Phys. Rev. D*, 62(8):083508, Sep 2000. 57
- [38] D. Carturan and F. Finelli. Cosmological effects of a class of fluid dark energy models. *Phys. Rev. D*, 68(10):103501, Nov 2003. 65