Heitor do Amaral Jurkovich

Uma Introdução à Teoria Quântica de Campos: Quebra Espontânea de Simetria

campinas,

2014

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Heitor do Amaral Jurkovich

Uma Introdução à Teoria Quântica de Campos: Quebra Espontânea de Simetria

Orientador: **Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção de Título de Mestre em Física.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Heitor do Amaral Jurkovich e orientada pelo Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo.

Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo - Orientador do Candidato
DRCC/IFGW/UNICAMP

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Valkíria Succi Vicente - CRB 8/5398

J979i	Jurkovich, Heitor do Amaral, 1990- Uma introdução à teoria quântica de campos : quebra espontânea de simetria / Heitor do Amaral Jurkovich. – Campinas, SP : [s.n.], 2014. Orientador: Marcelo Moraes Guzzo. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin. 1. Partículas (Física nuclear). 2. Teoria quântica de campos. 3. Quebra espontânea de simetria. I. Guzzo, Marcelo Moraes,1963-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: An introduction to quantum field theory : spontaneous symmetry breaking
Palavras-chave em inglês:
Particles (Nuclear physics)
Quantum field theory
Spontaneous symmetry breaking
Área de concentração: Física
Titulação: Mestre em Física
Banca examinadora:
Marcelo Moraes Guzzo [Orientador]
Pedro Cunha de Holanda
Célio Adrega de Moura Junior
Data de defesa: 28-06-2014
Programa de Pós-Graduação: Física

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE **HEITOR DO AMARAL JURKOVICH - RA 086784** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 28 / 05 / 2014.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo - Orientador do Candidato
DRCC/IFGW/UNICAMP

Célio A. Moura Jr.

Prof. Dr. Célio Adrega de Moura Junior – CCNH/UFABC

Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda – DRCC/IFGW/UNICAMP

Abstract

A detailed study of the spontaneous symmetry breaking since its fundamental basis is done. The spontaneous symmetry breaking is the only know mechanism capable of generating masses to a theory still preserving its symmetry and being renormalizable. Such process occurs when one defines a scalar sector to a certain theory with a symmetry and then break the generators of this symmetry, creating Goldstone bosons in the case of global symmetries and massive gauge fields in the case of local symmetries. We start this dissertation studying Group Theory, which is fundamental to the understanding of spontaneous symmetry breaking. Then we study local and global symmetries of the lagrangian, Goldstone Theorem, then spontaneous symmetry breaking to several models, including the scalar theory, complex scalar theory with global and local symmetries and the standard model. Then we make a study in one of the standard model extentions, the SU(5) model and we applied spountaneous symmetry breaking to this model. In the end we show that the approach of minimizing que classical potential is valid because quantum contributions are analogous to a zero point energy to the effective potential.

Resumo

Nessa dissertação foi estudada a quebra espontânea de simetria desde suas bases mais fundamentais. A quebra espontânea de simetria é o único mecanismo conhecido capaz de gerar massas a uma teoria, preservando as simetrias e sendo renormalizável. Tal processo ocorre quando se define um setor escalar para uma teoria com uma certa simetria e se quebra os geradores dessa simetria, criando bósons de Goldstone no caso de simetrias globais e campos de gauge massivos, no caso de simetrias locais.

Nessa dissertação começamos o estudo de quebra espontânea de simetria com um estudo de Teoria de Grupos, que é fundamental para o entendimento da mesma seguido por um estudo em simetrias nas lagrangianas, ou seja, como gerar uma lagrangiana invariante por um dado grupo, local ou global; depois estudamos o Teorema de Goldstone e por fim aplicamos a quebra espontânea de simetria para diversos modelos, entre eles o campo escalar, campo escalar complexo com simetria global, campo escalar complexo com simetria local, modelo padrão. Depois fazemos um estudo em uma das extensões do modelo padrão, o modelo $SU(5)$ e aplicamos a quebra espontânea de simetria em tal modelo. No fim mostramos como a abordagem de minimização de um potencial clássico é válida, pois contribuições quântica são análogas a uma energia de ponto zero ao potencial efetivo.

Sumário

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Marcelo Moraes Guzzo por sempre ser muito prestativo e atencioso.
Ao CNPq por ter financiado o projeto.
Ao meu pai João Cesar Jurkovich por sempre me ensinar que a educação é a única coisa importante que um pai pode deixar para um filho.
A minha mãe Marli do Amaral Jurkovich por ter abdicado de uma carreira profissional para criar a mim e minha irmã e por sempre ser tão cuidadosa.
A minha irmã Victória do Amaral Jurkovich por ser minha companheira de todas as horas.
Aos meus amigos João, Shadi, Cesar, Kevin, Pedro e Marcelo pelas muitas horas de boas conversas e pela amizade de todos esses anos.

"A compreensão humana não é um exame desinteressado, mas recebe infusões da vontade e dos afetos; disso se originam ciências que podem ser chamadas ciências conforme a nossa vontade. Pois um homem acredita mais facilmente no que gostaria que fosse verdade. Assim, ele rejeita coisas difíceis pela impaciência de pesquisar; coisas sensatas, porque diminuem a esperança; as coisas mais profundas da natureza, por superstição; a luz da experiência, por arrogância e orgulho; coisas que não são comumente aceitas, por deferência à opinião do vulgo. Em suma, inúmeras são as maneiras, e às vezes imperceptíveis, pelas quais os afetos colorem e contaminam o entendimento."
Francis Bacon

"Vi veri veniversum vivus vici"
The Tragical History of Doctor Faustus, de Christopher Marlowe

Lista de Figuras

Capítulo 1
Introdução

A quebra espontânea de simetria é um mecanismo que primeiramente surgiu em matéria condensada, nesse contexto tinha-se um ferromagneto com spins desordenados e tal sistema era um invariante por rotações. Quando se aplicava um campo magnético esses spins se alinhavam e então havia uma quebra dessa simetria rotacional. A ideia então foi aplicada por Peter Higgs em 1964 para lagrangianas de física de partículas e foi-se mostrado possível gerar massa para uma teoria usando esse mecanismo e ainda ser uma teoria renormalizável, o preço a se pagar era o aparecimento de uma partícula escalar, que mais tarde fora chamada de bóson de Higgs. Numa sequência de artigos que começa em 1971 com Steven Weinberg ele aplica esse mecanismo criado por Higgs para descrever a força fraca e eletromagnética a partir de um grupo de simetria conhecido como $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Tal mecanismo foi um sucesso para explicar a força fraca e dar massa aos férmions, porem uma partícula que se assemelha muito ao bóson de Higgs só fora descoberto no ano de 2012; no ano de 2013 Peter Higgs foi laureado com o nobel de física.

Tal mecanismo fora aplicado em outras teorias, que estendem o modelo padrão, para após a quebra espontânea de simetria você obter o modelo padrão, dentre essas extensões encontra-se o modelo SU(5) que fora estudado nessa dissertação e também teve sua simetria quebrada.

Capítulo 2
Teoria de Grupos

A simetria sempre foi de suma importância para a física, mas nos últimos tempos a simetria teve um papel ainda maior. Com o auxílio dela os físicos foram capazes de criar a teoria mais bem sucedida da física, o modelo padrão.
Quando falamos de simetria não estamos apenas falando de simetrias geométricas (espaciais e temporais), por exemplo, associado a conservação de número leptônico há uma simetria unitária, que não tem análogo geométrico. Essas simetrias não observáveis tem um papel fundamental para a física de hoje, pois são baseados nessas simetrias que os novos modelos que tentam estender o modelo padrão são baseados. Por causa de sua importância no cenário atual, um estudo detalhado dos métodos quantitativos que tratam das simetrias é necessário, tal método é dado pela Teoria de Grupos e por isso uma revisão sucinta da mesma é apresentada.[1]

2.1 Definição de Grupo

Um grupo $(G, .)$ é composto por um conjunto G e uma operação $(.)$ (binária) definida sobre esse conjunto e que obedece as seguintes relações [2]:

- 1 - Se x e y pertencem a G, então $x.y$ também pertence a G
- 2 - Existe um elemento identidade e, tal que $e.x = x.e = x$ para todo x em G
- 3 - Para todo x pertencente a G existe um x^{-1} tal que: $x.x^{-1} = x^{-1}.x = e$
- 4 - A operação . é associativa, ou seja, $(x.y).z = x.(y.z)$ para todo x,y e z pertencente a G

Se além dessas propriedades o grupo satisfizer a relação:

- $x.y = y.x$ para todo x e y pertencentes a G

É dito que o grupo é comutativo, ou Abeliano.

[1] *Mike Guidry "Gauge Field Theories: An Introduction with Applications", capítulo 5*

[2] *José M. Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani "Teoria de Grupos para Físicos", capítulos 1 e 2*

O número de elementos de um grupo é chamado de ordem do grupo, essa ordem pode ser finita ou infinita. Suponha um grupo formado pelos número complexos C e a operação de adição, notamos que esse grupo tem um número infinito de elementos e não é possível enumerá-los, esse tipo de grupo é chamado de grupo contínuo. Nesse caso cada elemento desse grupo é rotulado com um parâmetro α que varia continuamente e pode ser complexo. Para especificação dos elementos de um grupo contínuo é necessário um conjunto de parâmetros contínuos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ e então é dito que esse grupo é um grupo de n parâmetros.

2.1.1 Subgrupos

Um grupo $(G, .)$ pode conter um subgrupo de G (um número finito ou infinito de elementos que obedecem as definições de conjunto) que também obedecem as definições de um grupo. Esse subconjunto é chamado de subgrupo do grupo G. Como exemplo tomemos o grupo $(R, +)$ formado pelo conjunto dos números reais R e a operação de adição $+$. O conjunto dos números inteiros Z é um subconjunto de R e sobre a operação de adição também forma um grupo, dizemos que $(Z, +)$ é um subgrupo de $(R, +)$.

2.1.2 Teorema do Rearranjamento

Seja G um grupo de ordem g com os elementos $E, A_1, A_2, ..., A_g$. Se A_k é um elemento arbitrário de G, então cada elemento do grupo G só aparece uma vez na sequência definida por: $EA_k = A_k, A_2A_k, A_3A_k, ..., A_gA_k$.

Demonstração: Seja Y qualquer elemento de G. Seja ainda $YA_k^{-1} = A_l$. Então temos que $YA_k^{-1}A_k = A_lA_k = Y$ logo Y pertence a sequência acima definida. Porém Y não pode aparecer duas vezes nessa sequência, pois se $A_lA_k = Y$ e $A_sA_k = Y$, pelas definições de grupo, temos que: $A_l = A_s$. Sendo assim cada elemento dessa sequência corresponde a um elemento diferente de G e gera todo G, provando o teorema.

2.1.3 Tabela de Multiplicação

Agora vamos definir a a tabela de multiplicação (ou tabela de Cayley), que descreve a estrutura de um grupo finito arranjando todas as possíveis combinações de produtos dos elementos desse grupo. Com essa tabela é possível verificar várias propriedades dos grupos, como se ele é comutativo ou não (se ele é ou não simétrico), quais elementos são os inversos de outros. Também é possível preencher vários elementos dessa tabela sem precisar fazer a multiplicação, por causa do teorema do rearranjamento acima provado.

Como exemplo tomemos um grupo de grau 3 formado pelos elementos a, b, c sua tabela de multiplicação fica:

	a	b	c
a	a^2	ab	ac
b	ba	b^2	bc
c	ca	cb	c^2

2.1.4 Isomorfismo e Homeomorfismo

As correspondências entre os grupos podem ser de dois tipos, podem ser homeomorfismos ou isomorfismos.

2.1.4.1 Isomorfismo

Sejam G e G', tal que:

- 1- Para cada elemento g_i de G há um e somente elemento g_i' de G'.
- 2- Se $g_i g_j = g_k$, então $g_i' g_j' = g_k'$, para todos os elementos de G e G'.

Assim dizemos que G e G' são isomórficos. Um exemplo de grupo isomórfico é o das permutações S_2 e o grupo das reflexão de dois pontos no eixo x do plano cartesiano.

Tomemos o grupo das permutações S_2, seus elementos são I, P_1, onde I é a identidade e P_1 troca a ordem de 1 e 2. Montando sua tabela de multiplicação obtemos:

	I	P_1
I	I	P_1
P_1	P_1	I

Agora tomemos o grupo formado pelas reflexões de dois pontos no eixo x do plano cartesiano, que tem os elementos I, R, onde I é a identidade e R é a reflexão desses pontos. Montando sua tabela de multiplicação obtemos:

	I	R
I	I	R
R	R	I

Assim notamos que o fato deles serem isomórficos faz com que eles tenham a mesma tabela de multiplicação.

Outro exemplo de grupos isomórfico é o grupo das permutações S_3 e o grupo que preserva a identidade de um triângulo equilátero.

2.1.4.2 Homeomorfismo

Dizemos que dois grupos G e $G^{'}$ são homomórficos se os elementos de G tem uma correspondência com os elementos de $G^{'}$ (essa correspondência não precisa ser um a um, diferente do isomorfismo) e se esta correspondência preserva as leis de multiplicação dos dois grupos. Abaixo temos uma figura que representa a ideia de homeomorfismo.

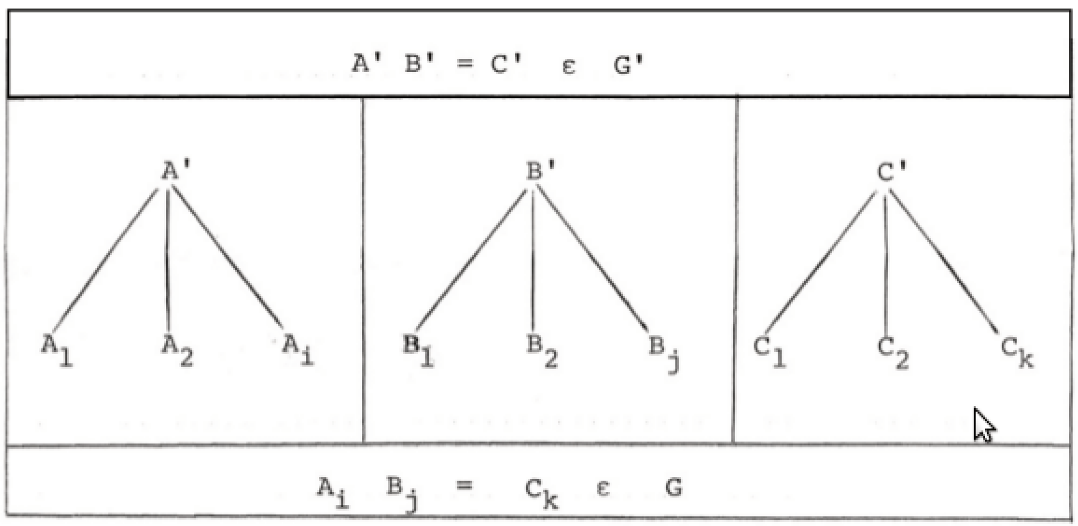


Figura 2.1: Homeomorfismo, tirado da referência [2]

2.2 Representações

Uma representação de um grupo é um grupo de transformações lineares homomórficas ao grupo abstrato original. Assim, fazendo um homeomorfismo de um grupo de operadores lineares $D(G)$ que pertencem a L (espaço de representações) e um grupo abstrato G, dizemos que $D(G)$ é uma representação de G no espaço de representações L. Se L tem dimensão k dizemos que a representação tem dimensão k. Quando essas representações são na forma de matrizes, elas são denotadas por $D_{ij}(G)$. Podem haver várias representações para um dado grupo abstrato, por isso vamos denotar $D_{ij}^{(\mu)}(G)$ uma representação de dimensão μ.

Os elementos de uma representação devem obedecer as seguintes identidades.

- $D(RS) = D(R)D(S)$, para todo R e S pertencentes à G;
- $D(R^{-1}) = [D(R)]^{-1}$, para todo R pertencente à G;
- $D(E) = I$, onde E é o elemento unitário de G.

Com isso podemos concluir que o determinante de cada representação também é uma representação, pois temos que:

- $det[D(R)].det[D(S)] = det[D(R)D(S)] = det[D(RS)]$.

Agora vamos ver um exemplo de representação na forma de transformações lineares para o grupo de permutações S_2 formados pelos elementos (I, P_1). Se transformarmos os objetos que sofrem permutação (a, b) em um vetor coluna: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Fica fácil ver que o seguinte conjunto de matrizes formam uma representação para S_2.

$$D(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

$$D(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

2.2.0.3 Representações Redutíveis e Irredutíveis

Sabemos que para definir uma transformação linear você precisa definir uma base, bases diferentes levam a representações lineares (matrizes) diferentes. Duas representações D e $D^{'}$ de um grupo abstrato são ditas equivalentes se elas são relacionadas por uma transformação de similaridade:

$$D^{'}(x) = SD(x)S^{-1}. \tag{2.3}$$

Onde D,$D^{'}$ e S são operadores. Uma representação D é dita redutível se é possível colocar ela na forma bloco diagonal usando o mesmo operador S. Ou seja:

$$D'(x) = SD(x)S^{-1} = \begin{pmatrix} D_1'(x) & 0 & ... & 0 \\ 0 & D_2'(x) & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & D_k' \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Uma representação redutível também pode ser vista como uma representação que contém um subespaço invariante. Ou seja, existe um subespaço no espaço de representações L onde a aplicação de qualquer um dos $D(G)$ leva um elemento desse subespaço em outro elemento do subespaço.

Quando uma representação não é redutível, ela é dita irredutível, ou seja, não é possível colocar ela numa forma bloco diagonal por uma transformação de similaridade. Se uma representação $D(x)$ é redutível o espaço vetorial na qual $D'(G)$ atua é quebrado em k espaços ortogonais, cada um mapeado em ele mesmo pelos operadores $D_i'(x)$. Assim podemos escrever a representação $D'(x)$ como:

$$D'(x) = D_1' \oplus D_2' \oplus ... \oplus D_k'. \tag{2.5}$$

Onde $\oplus$ representa uma soma direta.

2.3 Grupos de Lie

Para física de partículas esse tipo de grupo é o grupo mais importante a ser estudado. Pelo fato das simetrias da natureza em sua maioria serem contínuas (simetria por translação espaciais, temporais, rotacionais; simetrias por transformações de gauge entre outras) o estudo de Grupos de Lie é de suma importância. Um Grupo de Lie G é um grupo com um número finito de parâmetros θ^α, $\alpha = 1, ..., N$ que variam continuamente e são diferenciáveis.[3]

Como exemplo tomemos o Grupo de Lie G de um parâmetro contínuo α. Esse grupo satisfaz:

$$G(a).G(b) = G(c). \tag{2.6}$$

Onde a, b e c são valores específicos do parâmetro contínuo α.

[3] *Michele Maggiore "A Modern Introduction to Quantum Field Theory", capítulo 2*

2.3.0.4 Produto direto de Grupos

Suponha um grupo G que tem como subgrupo F_1 e F_2 e suponha que satisfaçam as seguintes propriedades:

- Todo elemento f_1 de F_1 comuta com todo elemento f_2 de F_2.
- Todo elemento g de G pode ser escrito unicamente como $g = f_1 f_2$.

Satisfazendo essas propriedades dizemos que o grupo G é um produto direto dos grupos F_1 e F_2.

2.3.0.5 Representação de Grupos de Lie

Para podermos aplicar os Grupos de Lie as simetrias na física, precisamos das representações desses Grupos de Lie.
Definindo um parâmetro genérico desse grupo como $\alpha^a = 0$, temos que $G(0) = e$, onde e é a identidade.
Uma representação linear R desse grupo é uma operação que associa um elemento abstrato de G com um operador linear $D_R(G)$ definido no espaço linear:

$$G \longmapsto D_R(G). \tag{2.7}$$

Com as propriedades:

- $D_R(e) = 1$, onde 1 é a o operador identidade.
- $D_R(g_1)D_R(g_2) = D_R(g_1 g_2)$, onde g_1 e g_2 pertencem a G.

O espaço onde o operador D_R atua é dito a base para a representação R. Um exemplo muito usado de representações é a representação matricial. Nesse caso a base é um espaço vetorial de dimensão n e um elemento do grupo abstrato G é representado por uma matriz $n \times n$ $(D_R(G))^i_j$ com $i, j = 1, ...n$ A dimensão da representação é definida pela dimensão n da base. Tomemos um elemento genérico do espaço de base, o grupo G induz uma transformação nesse elemento da forma:

$$\phi^i \to ((D_R(G))^i_j \phi^j. \tag{2.8}$$

Com isso notamos que o significado físico dos elementos da base e das representações podem ser compreendidos. Suponha o grupo $SO(3)$ (que será estudado logo a seguir) e tomemos como base os vetores do espaço tridimensional. As aplicações lineares do $SO(3)$ nos vetores geram novo vetores que preservam o comprimento, logo a representação do grupo $SO(3)$ são matrizes de rotação e os elementos desse grupo pode ser enxergados como rotações dos vetores no espaço.

Se nós expandirmos em série $D_R(\theta)$ (onde θ é um parâmetro do grupo) e ficarmos apenas com o termo infinitesimal (correspondendo a uma transformação infinitesimal), obtemos:

$$D_R(\theta) \simeq 1 + i\theta_a T_R^a. \tag{2.9}$$

Com

$$T_R^a = -i\frac{\partial D_R}{\partial \theta_a} \mid_{\theta=0} . \tag{2.10}$$

Os T_R^a são chamados de geradores do grupo G na representação R. Assim obtemos que qualquer elemento $G(\theta)$ pode ser representado por:

$$D_R(G(\theta)) = e^{i\theta_a T_R^a}.(2.11)$$

Essa expressão reproduz o resultado infinitesimal e o valor i é colocado ali para que a representação seja unitária ($\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = 1$) caso os geradores sejam Hermitianos ($\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger$).

Dados duas matrizes $D_R(g_1) = e^{i\alpha_a T_R^a}$ e $D_R(g_2) = e^{i\beta_a T_R^a}$ o produto delas $D_R(g_1 g_2)$ também pertence a representação, logo:

$$e^{i\alpha_a T_R^a} e^{i\beta_a T_R^a} = e^{i\delta_a T_R^a}. \tag{2.12}$$

Mas como os T_R^a são matrizes não é sempre válida a relação $e^A e^B = e^{A+B}$ então $\delta_a \neq \alpha_a + \beta_a$. Queremos encontrar a relação de comutação entre T_R^a e T_R^b. Para isso tiramos o logaritmo dessa equação e expandimos até segunda ordem em α e β:

$$i\delta_a T_R^a = log[1 + i\alpha_a T_R^a + \frac{1}{2}(i\alpha_a T_R^a)^2][1 + i\beta_a T_R^a + \frac{1}{2}(i\beta_a T_R^a)^2].(2.13)$$

$$i\delta_a T_R^a = log[1 + i(\alpha_a + \beta_a)T_R^a - \frac{1}{2}(\alpha_a T_R^a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_a T_R^a)^2 - \alpha_a \alpha_b T_R^a T_R^b].(2.14)$$

Agora expandindo o logaritmo em $log(1+x) \simeq x - x^2/2$ e mantendo apenas ordem 2 em α e β obtemos:

$$i\delta_a T_R^a = i(\alpha_a+\beta_a)T_R^a - \frac{1}{2}(\alpha_a T_R^a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_a T_R^a)^2 - \alpha_a\alpha_b T_R^a T_R^b + \frac{1}{2}(\alpha_a^2 + 2\alpha_a\beta_b + \beta_a^2)T_R^a T_R^b. \tag{2.15}$$

$$i\delta_a T_R^a = i(\alpha_a+\beta_a)T_R^a - \alpha_b\alpha_a T_R^b T_R^a + \alpha_a\alpha_b T_R^a T_R^b = i(\alpha_a+\beta_a)T_R^a + \alpha_a\beta_b[T_R^a, T_R^b]. \tag{2.16}$$

Logo:

$$\alpha_a\beta_b[T_R^a, T_R^b] = i\gamma_c(\alpha,\beta)T^c. \tag{2.17}$$

Com $\gamma_c(\alpha,\beta) = -2(\delta_c(\alpha,\beta) - \alpha_c - \beta_c)$. γ deve ser linear em α e β, com isso obtemos:

$$[T_R^a, T_R^b] = if_c^{ab}T^c. \tag{2.18}$$

Essa relação é chamada de Álgebra de Lie desse grupo e f_c^{ab} é chamado de constante de estrutura desse Grupo de Lie. Notamos que apesar dos geradores dependerem da representação usada, as constantes de estrutura são independentes da representação. Pois se dependessem da representação, γ também dependeria e com isso α, β e δ também dependeriam e assim o produto de elementos do grupo dependeria da representação, o que violaria as definições de representação. Um grupo é abeliano se os geradores comutam, caso contrário é não abeliano. Agora será apresentado vários exemplos de grupos de Lie de suma importância para o estudo da quebra espontânea de simetria.

2.3.1 O grupo SO(3)

O grupo $SO(3)$ é o grupo formado pelas rotações no espaço tridimensional. Existe uma transformação linear que associa a cada vetor $\mathbf{x}'^i$ de um espaço rodado em relação a um vetor $\mathbf{x}^j$ (com i e j indo de 1 à 3):

$$\mathbf{x}'^i = \mathbf{M}^{ij}\mathbf{x}^j. \tag{2.19}$$

Onde $\mathbf{M}$ é uma matriz 3x3.

No caso de uma rotação por um ângulo θ no eixo z essa matriz assume a forma:

$$\mathbf{M}^{03} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Também notamos que o grupo $SO(3)$ preserva o comprimento dos vetores (afinal eles estão apenas sendo rodados) isso implica que o produto escalar é um invariante por esse grupo, isso é:

$$\mathbf{x}'^{T}\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{T}\mathbf{x}. \tag{2.21}$$

E notamos que:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{M}\mathbf{x} \ ; \ \mathbf{x}'^{T} = \mathbf{x}^{T}\mathbf{M}^{T} \ . \tag{2.22}$$

Logo:

$$\mathbf{x}'^{T}\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{T}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{T}\mathbf{M}^{T}\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{T}\mathbf{x} \ . \tag{2.23}$$

Com isso temos que:

$$\mathbf{M}^{T}\mathbf{M} = \mathbf{I}. \tag{2.24}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade.

Se $\mathbf{M}^{T}\mathbf{M} = \mathbf{I}$ então, pela propriedade dos determinantes, temos:

$$det(\mathbf{M}^{T}\mathbf{M}) = det(\mathbf{M}^{T})det(\mathbf{M}) = 1. \tag{2.25}$$

E como $det(\mathbf{M}^{T}) = det(\mathbf{M})$ chegamos que $det(\mathbf{M}) = 1, -1$.
As rotações com $det(\mathbf{M}) = 1$ são chamadas rotações próprias.
Rotações impróprias tem $det(\mathbf{M}) = -1$, um exemplo desse tipo de rotação é a inversão. A inversão também preserva o produto escalar.

2.3.2 O grupo U(1)

O grupo $U(1)$ é formado pelas matrizes unitárias 1x1 (números complexos). Uma matriz unitária obedece a seguinte relação:

$$\mathbf{U}^{T}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{T} = I \tag{2.26}$$

.

Os elementos desse grupo assumem a forma: $\mathbf{U} = e^{iY\theta}$ e $\mathbf{U}^{T} = \mathbf{U}^{*} = e^{-iY\theta}$ onde

θ varia de 0 à 2π e Y é o gerador do grupo.

Essa simetria é de suma importância no modelo padrão, pois a quebra espontânea de simetria do $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ gera o $U(1)_{em}$ que é o grupo de gauge do electromagnetismo.

Esse grupo tem como quantidade conservada a carga elétrica. A relação entre o gerador da hipercarga Y e o da carga elétrica é dada pela relação de Gell-Mann-Nishijima (ver seção 2.1.1):

$$Q = \tau^3 + Y. \tag{2.27}$$

Onde τ^3 é a terceira componente do isospin.

Outra evidência da importância desse tipo de simetria é que a Hamiltoniana da QED é invariante por:

$$e^{iL\theta} H e^{-iL\theta} = H. \tag{2.28}$$

Onde L é o operador de número leptônico.

$$L = \int \Psi^\dagger(x)\Psi(x) d^3x. \tag{2.29}$$

Ou seja o número leptônico é conservado na QED.

2.3.3 O grupo SU(2)

O grupo $SU(2)$ é formado pelas matrizes unitárias $2 \otimes 2$ com determinante igual a um. Uma matriz unitária pode ser representada pela exponenciação de uma matriz Hermitiana com traço nulo.[4] Ou seja:

$$\mathbf{U} = e^{i\mathbf{H}\theta} \tag{2.30}$$

onde $\mathbf{H}$ é uma matriz Hermitiana, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger$ e θ é um parâmetro como no caso $U(1)$

Uma matriz Hermitiana $2 \otimes 2$ de traço nulo pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha^3 & \alpha^1 - i\alpha^2 \\ \alpha^1 + i\alpha^2 & -\alpha^3 \end{pmatrix} = \alpha^1\sigma^1 + \alpha^2\sigma^2 + \alpha^3\sigma^3. \tag{2.31}$$

onde, $\sigma^0 = I$ e σ^1 σ^2 σ^3 .

As matrizes de Pauli:

[4] *W.N.Cotingham and D.A.Greenwood: "An Introduction to the Standard Model of Particle Physics", Second Edition, Apêndice B*

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Logo: $\mathbf{U} = e^{i\theta\alpha^j\sigma^j}$.

Também temos a seguinte relação de comutação:

$$[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}] = i_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}. \tag{2.33}$$

E as constantes de estrutura são:

$$f_{ij}^k = \epsilon_{ij}^k. \tag{2.34}$$

Assim notamos que o grupo $SU(2)$ é não Abeliano e que as matrizes de Pauli podem ser escolhidas como geradores do $SU(2)$ atuando na representação fundamental (duas dimensões) do $SU(2)$.
Podemos generalizar para representações de dimensão N do $SU(2)$ usando matrizes $N \otimes N$ com geradores J_i satisfazendo a álgebra do $SU(2)$:

$$[J_i, J_k] = \epsilon_{ijk}J_k. \tag{2.35}$$

Como nas representações fundamentais, essas matrizes são Hermitianas e sem traço. Com o auxílio de operadores escada, cassimir e diagonais também podemos descrever as representações de diferentes dimensões do $SU(2)$.

2.3.3.1 Relação entre o grupo SO(3) e SU(2)

Vamos definir para cada ponto do espaço uma matriz:

$$\mathbf{X}(x) = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Essa matriz tem $Tr(\mathbf{X}) = 0$ e $det(\mathbf{X}) = -(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. Agora se fizermos a transformação $\mathbf{X}' = \mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{U}^T$ onde U pertence à $SU(2)$ temos que:

$tr(X^{'}) = tr(X)$ e $det(X^{'}) = det(X)$ logo $X^{'}$ também tem a forma:

$$\mathbf{X}^{'} = \begin{pmatrix} x^{'3} & x^{'1} - ix^{'2} \\ x^{'1} + ix^{'2} & -x^{'3} \end{pmatrix} . \tag{2.37}$$

Tomemos o caso:

$$\mathbf{U} = e^{\frac{i\theta\sigma^3}{2}} = \cos\tfrac{\theta}{2} I + i \sin\tfrac{\theta}{2}\sigma^3 \ = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} . \tag{2.38}$$

Fazendo: $\mathbf{X}^{'} = \mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{U}^T$ encontramos que $\mathbf{x}^{'} = \mathbf{M}^{03}\mathbf{x}$ Logo uma rotação de $\frac{\theta}{2}$ no espaço $SU(2)$ é equivalente a uma rotação de θ no espaço tridimensional. Assim é necessário uma rotação de 4π no espaço de spin SU(2) para voltar ao ponto original no espaço tridimensional, cada ponto do espaço SU(2) mapeia dois pontos no espaço tridimensional.

2.3.4 O grupo SU(3)

O grupo SU(3) é usado no modelo padrão para descrever a cor dos quarks, é o grupo formado pelas matrizes unitárias 3x3 com determinante igual a 1. Analogamente ao grupo SU(2) esse grupo pode ser gerado por matrizes Hermitianas de traço 0. Podemos estender as matrizes de Pauli para três dimensões para obter todos os geradores do grupo SU(3). Essas matrizes são chamadas de matrizes de Gell-Mann

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \ \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Podemos escrever uma matriz Hermitiana 3x3 com traço nulo como:

$$H = \alpha^1\lambda^1 + \alpha^2\lambda^2 + \alpha^3\lambda^3 + \alpha^4\lambda^4 + \alpha^5\lambda^5 + \alpha^6\lambda^6 + \alpha^7\lambda^7 + \alpha^8\lambda^8 \ . \tag{2.39}$$

Logo H é igual a:

$$H = \begin{pmatrix} \alpha^3 + \frac{\alpha^8}{\sqrt{3}} & \alpha^1 - i\alpha^2 & \alpha^4 - i\alpha^5 \\ \alpha^1 + i\alpha^2 & -\alpha^3 + \frac{\alpha^8}{\sqrt{3}} & \alpha^6 - i\alpha^7 \\ \alpha^4 + i\alpha^5 & \alpha^6 + i\alpha^7 & -2\frac{\alpha^8}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Temos também que essa álgebra de Lie satisfaz as seguintes relações:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2i\Sigma_{c=1}^{8} f_c^{ab}\lambda^c) \quad tr(\lambda^a\lambda^b) = 2\delta^{ab} \ . \tag{2.41}$$

onde, f_c^{ab} , é a constante de estrutura desse grupo de Lie.

Para o $SU(3)$ essas constantes de estrutura assumem os valores:

$$f_{12}^3 = 1. \tag{2.42}$$

$$f_{14}^7 = f_{24}^6 = f_{25}^7 = f_{34}^5 = \frac{1}{2}. \tag{2.43}$$

$$f_{15}^6 = f_{36}^7 = -\frac{1}{2}. \tag{2.44}$$

$$f_{45}^8 = f_{67}^8 = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{2.45}$$

Também obedecem a seguinte relação de anti-comutação:

$$[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}]_{ac} = \frac{1}{3}\delta_{ij} + d_{ijk}(\frac{\lambda_k}{2}). \tag{2.46}$$

Com as relações de comutação e anti comutação é possível escrever os operadores escada, Cassimir e diagonais que darão os diagramas de peso do $SU(3)$.

2.3.5 O grupo SU(5)

Para buscar uma teoria de unificação precisamos ter apenas uma constante de acoplamento para as forças fundamentais da natureza. Dentre as extensões do modelo padrão aquela que é mais elegante pois consegue esse objetivo (a menos da gravidade) de maneira muito simples é o modelo baseado na simetria $SU(5)$. Nessa sessão será introduzido os geradores do $SU(5)$ e sua álgebra.[5]

[5] *D.Balin e Alexander Love "An Introduction to Gauge Field Theory", Revised Edition, capítulo 16*

Como o $SU(5)$ é um grupo unitário, novamente podemos escrever a representação dele na forma de exponenciais de uma matriz H Hermitiana 5x5 e a mesma pode ser decomposta em 24 ($N^2 - 1$) geradores, que são dados por:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{15} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda^{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{17} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{18} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda^{19} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \lambda^{24} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Essas matrizes estão normalizadas tal que:

$$Tr(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}. \tag{2.47}$$

2.4 Diagramas de Young

Para determinar a dimensão de representações que são produtos diretos de representações de dimensões menores, que as vezes são necessárias em física de partículas (como exemplo, descrição de sistema de partículas de spin 1/2 com momento angular orbital) se é usada uma receita conhecida como diagramas de Young. A demonstração da validade desse método é encontrada na referência.[6]

2.4.1 Diagramas de Young permitidos

A representação fundamental do $SU(N)$ **N** é denotada por uma caixa:

$$\mathbf{N} = \square \tag{2.48}$$

[6] *Howard Georgi "Lie Algebras in Particle Physics", capítulo 12*

Dada uma representação R a representação adjunta descreve o complexo conjugado dos elementos de R. Essa representação adjunta terá uma coluna e de $N-1$ linhas, ou seja $N-1$ caixas.

2.4.1.1 Exemplos

Para o $SU(2)$:

$$\mathbf{2} = \square \tag{2.49}$$

$$\bar{\mathbf{2}} = \square \tag{2.50}$$

Para o $SU(3)$:

$$\mathbf{3} = \square \tag{2.51}$$

$$\bar{\mathbf{3}} = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array} \tag{2.52}$$

Notamos que as representações adjunta e fundamental são equivalentes no $SU(2)$.

Diagramas de Young com apenas uma linha são associados à representações totalmente simétricas e diagramas com apenas uma coluna são associados à representações totalmente antissimétricas, diagramas mistos são associados à representações mistas.

2.4.2 Regras

Para fazer o produto direto das representações precisamos seguir algumas regras:

Desenhe os dois diagramas correspondentes as representações a serem multiplicadas e coloque números nas caixas do segundo diagrama dando a linha em que a caixa está. Exemplo:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \tag{2.53}$$

- Todos os diagramas são diagramas próprios, isto é, as linhas não aumentam de tamanho conforme vamos movendo de cima para baixo.

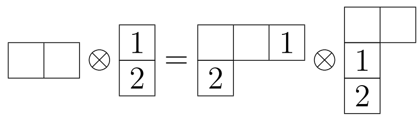
- Nenhuma coluna tem mais que N caixas para um $SU(N)$.

- Criando um caminho da direita para a esquerda, de cima para baixo até sair do diagrama, o número nas caixas i deve ser menor ou igual que nas caixas i-1.

- O número nas caixas não diminui da esquerda pra direita numa linha.

- Os números das caixas aumentam de baixo para cima.

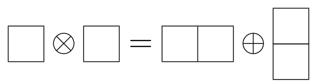
Sendo assim:



(2.54)

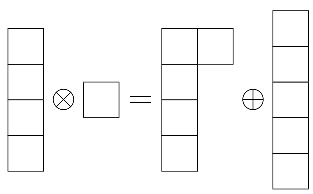
Como exemplo temos que para o $SU(5)$:

O produto das representações fundamentais $\mathbf{5} \otimes \mathbf{5}$:



(2.55)

E o produto da representação fundamental e da adjunta $\mathbf{5} \otimes \bar{\mathbf{5}}$ é:

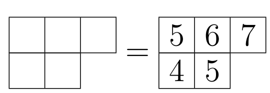


(2.56)

Feito isso precisamos agora de regras que nos digam a dimensão dessas representações. Tais regras são [7]:

- Para um diagrama $SU(N)$ coloque um N para cada caixa diagonal começando no canto esquerdo superior. Insira N+1 e N-1 imediatamente abaixo e acima da diagonal e continue somando +1 para as linhas que estão acima e -1 para as que estão abaixo até completar o diagrama.

Por exemplo para uma dada representação mista do $SU(5)$:



(2.57)

Agora definimos um numerador n que é o produto de todos esses números:

$$n = \Pi_{caixas}(n_i). \tag{2.58}$$

[7] *F.E. Close, "An Introduction to Quarks and Partons", Academic Press*

Onde n_i é o número nas caixas.

Para a representação mista do $SU(5)$ temos:

$$n = 5 \times 6 \times 7 \times 4 \times 5 = 4200. \tag{2.59}$$

- Para cada diagrama você fará um caminho da esquerda para a direita e procurará uma saída abaixo nas colunas seguintes, o produto do número de caixas que você passar pelos caminhos possíveis será associado a um número d.

$$d = \Pi_{caminhos}(d_i). \tag{2.60}$$

Onde d_i é o número de caixas em cada caminho. Para o exemplo da representação mista do $SU(5)$ temos:

$$d = 1 \times 3 \times 4 \times 1 \times 2 = 24. \tag{2.61}$$

- A dimensão da representação será dada por $Dim = n/d$.

  No exemplo anterior temos então que $Dim = 4200/24 = 175$.

  E com essas regras podemos calcular:

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}. \tag{2.62}$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}. \tag{2.63}$$

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \tag{2.64}$$

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5} = \mathbf{15} \otimes \mathbf{10}. \tag{2.65}$$

Que serão utilizados nos capítulos posteriores.

Capítulo 3
Simetrias da lagrangiana do modelo padrão

3.1 O Teorema de Noether

De maneira sucinta o teorema de Noether pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema de Noether: Para cada simetria contínua da lagrangiana há uma quantidade conservada.

Prova para invariâncias espaço-temporais: Tomemos a transformação $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$, onde o deslocamento infinitesimal a^μ depende de x^μ. Assim se expandirmos $\mathcal{L}(x^{'})$ numa série de Taylor temos que:

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^{'}) - \mathcal{L}(x) = a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \tag{3.1}$$

Também temos que:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta(\partial_\mu\Phi). \tag{3.2}$$

Mas,

$$\delta\Phi = \Phi(x^{'}) - \Phi(x) = a^\mu \partial_\mu \Phi. \tag{3.3}$$

e,

$$\delta(\partial_\mu\Phi) = \Phi(x^{'}) - \Phi(x) = a^\nu \partial_\nu(\partial_\mu\Phi). \tag{3.4}$$

Assim obtemos, usando Euler-Lagrange:

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi)})a^\mu\partial_\mu\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi)}a^\mu\partial_\mu(\partial_\nu\Phi). \tag{3.5}$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi)}a^\mu\partial_\mu\Phi. \tag{3.6}$$

Rearranjado índices, obtemos:

$$a_\nu\partial_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial^\nu\Phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}) = 0. \tag{3.7}$$

Com isso podemos definir o tensor momento-energia como:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \tag{3.8}$$

E assim temos uma lei de conservação local:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0. \tag{3.9}$$

As componentes Θ^{00} e Θ^{0k} são associadas a densidade Hamiltoniana e densidade de momento respectivamente. Agora faremos uma aplicação do Teorema de Noether para $SU(2)$ de isospin. Apesar dessa demonstração ser válida apenas para invariâncias espaço-temporais é fácil ver as correntes conservadas no caso das invariâncias de Gauge, como vemos no exemplo a seguir.

3.1.1 Conservação da corrente de Isospin e a relação de Gell-Mann-Nishijima

Como exemplo para encontrar a corrente conservada a partir de uma simetria de gauge, tomemos a lagrangiana descrevendo um próton (p) e um nêutron (n) livres. Podemos definir o isospinor como:[8]

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

e assim podemos definir a lagrangiana como:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi. \tag{3.11}$$

Agora uma rotação no espaço de isospin pode ser dada por:

$$\Psi \rightarrow e^{\frac{i}{2}\tau^a \alpha_a} \Psi. \tag{3.12}$$

Onde τ^a são as matrizes de Pauli (em geral quando falamos de isospin usamos essa nomenclatura ao invés de λ^a). Os parâmetros α_a são constantes (transformação global).

[8] *S.F.Novaes "Standard Model: An Introduction", capítulo 2*

Assim obtemos para uma transformação infinitesimal:

$$\Psi(x) \to \Psi(x) + \frac{i}{2}\tau^a \alpha_a \Psi(x) = \Psi + \delta\Psi. \tag{3.13}$$

A invariância da ação sobre essa transformação resulta em:

$$\delta\mathcal{L} = 0. \tag{3.14}$$

Onde:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi}(\delta\Psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}(\delta\partial_\mu\Psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}}\delta\bar{\Psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})}\delta(\partial_\mu\bar{\Psi}). \tag{3.15}$$

Então obtemos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} = 0. \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} = 0. \tag{3.17}$$

Com isso e com o fato de:

$$\delta\Psi = \frac{i}{2}\tau^a \alpha_a \Psi. \tag{3.18}$$

$$\delta(\partial_\mu\Psi) = \frac{i}{2}\tau^a \alpha_a (\partial_\mu\Psi). \tag{3.19}$$

Podemos reescrever a equação da invariância, utilizando as equações de Euler-Lagrange, como:

$$\delta\mathcal{L} = [\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}]\frac{i}{2}\tau^a \alpha_a \Psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\frac{i}{2}\tau^a \alpha_a (\partial)\mu\Psi). \tag{3.20}$$

Que pode ser escrita como:

$$\partial_\mu \alpha_a [\frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\tau^a \Psi]. \tag{3.21}$$

Assim encontramos uma lei de conservação com a forma:

$$\partial_\mu J^\mu_a = 0. \tag{3.22}$$

Onde J_a^μ é uma corrente conservada, chamada de corrente de isospin.

$$J_a^\mu = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\tau^a\Psi. \tag{3.23}$$

Para o dubleto de $SU(2)$ (ν_L, e) (primeira geração) temos:

$$J_\mu^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \nu_L & \bar{e}_L \end{pmatrix}\gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_L + \bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L). \tag{3.24}$$

$$J_\mu^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \nu_L & \bar{e}_L \end{pmatrix}\gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \frac{i}{2}(\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_L - \bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L). \tag{3.25}$$

$$J_\mu^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \nu_L & \bar{e}_L \end{pmatrix}\gamma_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma_\mu e_L). \tag{3.26}$$

Será visto que a corrente que acopla o bóson vetorial W_μ^- é dada por:

$$J_\mu^+ = \bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu = 2\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_L. \tag{3.27}$$

Assim temos que:

$$J_\mu^+ = 2(J_\mu^1 - iJ_\mu^2). \tag{3.28}$$

Para podermos acomodar a corrente J^3 vamos definir a corrente de hipercarga por:

$$J_\mu^Y = -\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L + \bar{e}_L\gamma_\mu e_L + 2\bar{e}_R\gamma_\mu e_R). \tag{3.29}$$

E a corrente eletromagnética pode ser escrita como:

$$J_\mu^{em} = -\bar{e}\gamma_\mu e = J_\mu^3 + J_\mu^Y. \tag{3.30}$$

E agora notamos que:

$$T^i = \int d^3x J_0^i. \tag{3.31}$$

e,

$$Y = \int d^3x J_0^Y. \tag{3.32}$$

satisfazem:

$$[T^i, T^j] = i\epsilon^{ijk}T^k. \tag{3.33}$$

$$[T^i, Y] = 0. \tag{3.34}$$

E assim temos que:

$$Q = T^3 + Y \tag{3.35}$$

3.2 As simetrias na lagrangiana do campo escalar

A lagrangiana do campo escalar complexo.

$$\mathcal{L}_{scalar} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V\left(\Phi^\dagger \Phi\right). \tag{3.36}$$

$$V\left(\Phi^\dagger \Phi\right) = \mu^2 \left(\Phi^\dagger \Phi\right) + \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi\right)^2. \tag{3.37}$$

Aqui notamos claramente que essa lagrangiana é invariante por uma transformação global $U(1)$ que da forma $U = e^{-iq\theta}$ (q é um parâmetro que mais tarde será associado a carga) mas queremos uma transformação local $U(x) = e^{-iq\theta(x)}$ pois queremos poder ter cargas conservadas localmente e poder associar uma transformação de gauge para cada ponto do espaço-tempo. Porém notamos que a forma que está escrita essa lagrangiana não é uma invariante por transformações locais, pois termos do tipo $-iq\partial_\mu \alpha(x)$ aparecem.

Podemos consertar isso introduzindo a derivada covariante da seguinte maneira:

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu(x). \tag{3.38}$$

Onde $A_\mu(x)$ é um campo de gauge que se transforma como:

$$A_\mu^{'}(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x). \tag{3.39}$$

Também podemos definir uma quantidade invariante por essas transformações de gauge, chamadas de “field strenght tensor” $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3.40}$$

Feito isso podemos introduzir a parte dinâmica desse campo de gauge. Para ser um invariante de Lorentz ele precisa se transformar como um escalar em transformações de Lorentz e para obter esse resultado basta fazer uma contração nesse "field strenght tensor": $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e essa será a parte dinâmica do campo A_μ na lagrangiana.

E então a Lagrangeana fica, com a adição da parte dinâmica dos campos de gauge:

$$\mathcal{L}_{scalar} = (\partial_\mu - iqA_\mu(x))\Phi^\dagger(\partial^\mu + iqA^\mu(x))\Phi - V\left(\Phi^\dagger\Phi\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.41}$$

$$= \partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - iqA_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi + iq\partial_\mu\Phi^\dagger A^\mu\Phi + q^2A_\mu A^\mu\Phi^\dagger\Phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V\left(\Phi^\dagger\Phi\right). \tag{3.42}$$

3.3 As simetrias da lagrangiana das teorias de gauge abelianas

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi. \tag{3.43}$$

Assim como no caso escalar notamos que ela é invariante por $U(1)$ global, mas queremos uma transformação local. Então vamos novamente introduzir a derivada covariante.[9]

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu(x). \tag{3.44}$$

Onde $A_\mu(x)$ é um campo de gauge que se transforma como:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x). \tag{3.45}$$

Também aparece um termo de interação do tipo:

$$\mathcal{L}_{int} = q\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A^\mu. \tag{3.46}$$

Poderíamos ter n campos Ψ e com isso teríamos uma transformação de gauge do tipo $\mathbf{U} = e^{-iq\alpha(x)}$ onde $\mathbf{U}$ e $\alpha(x)$ são matrizes e seus elementos são:

$$U_{ij}(x) = e^{-iq\alpha_{ij}(x)}. \tag{3.47}$$

E o produto de duas transformações de gauge $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$: $\mathbf{UV} = \mathbf{VU}$ é comutativo.

[9] *Roberto Casalbuoni "Advanced Quantum Field Theory", capítulo 8*

Também temos um “field strenght tensor” da seguinte forma:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3.48}$$

Então a lagrangiana invariante por transformações locais fica:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu(x)) - m)\Psi - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \tag{3.49}$$

3.4 As simetrias na lagrangiana das teorias de gauge não-abelianas

Suponha agora que temos a seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{não-Abeliana} = \Sigma_{a=1}^{N}\bar{\Phi}_a(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Phi_a. \tag{3.50}$$

E essa seja invariante pela transformação Global:

$$\Psi(x)^{'} = \mathbf{U}\Psi(x). \tag{3.51}$$

Onde $\mathbf{U}$ é uma matriz unitária $N \otimes N$ e $\Psi(x)$ é um vetor coluna de componentes Φ_a U pode ser representado por:

$$\mathbf{U} = e^{-i\alpha_A T^A}. \tag{3.52}$$

onde T^A são os geradores da álgebra de Lie associada a essa transformação satisfazendo:

$$[T^A, T^B] = if_C^{AB}T^C. \tag{3.53}$$

Agora para introduzir uma transformação Local novamente precisamos recorrer as derivadas covariantes, que assumirão a seguinte forma:

$$\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{W}_\mu(x). \tag{3.54}$$

onde $\mathbf{W}_\mu$ é uma matriz NxN com componentes:

$$\mathbf{D}_{ab}^{\mu} = \delta_{ab}\partial^\mu + ig(W^\mu)_{ab}. \tag{3.55}$$

E terão a seguinte lei de transformação:

$$[\mathbf{D}_\mu \Psi(x)]^{'} = \mathbf{U}(x)[\mathbf{D}_\mu \Psi(x)]. \tag{3.56}$$

Com isso:

$$\begin{aligned}[\mathbf{D}^\mu \Psi(x)]^{'} = \mathbf{U}(x)[\mathbf{D}^\mu \Psi(x)] = (\partial_\mu + ig\mathbf{W}^{'}_\mu)\mathbf{U}(x)\Psi \\ = \mathbf{U}(x)\partial_\mu \Psi + \mathbf{U}(x)[\mathbf{U}^{-1}(x)ig\mathbf{W}^{'}_\mu \mathbf{U}(x)]\Psi + (\partial_\mu \mathbf{U}(x))\Psi \ . \\ = \mathbf{U}(x)[\partial_\mu + \mathbf{U}^{-1}(x)ig\mathbf{W}^{'}_\mu \mathbf{U}(x) + \mathbf{U}^{-1}(x)\partial_\mu \mathbf{U}(x)]\Psi\end{aligned} \tag{3.57}$$

Identificando a parte que contém o campo $\mathbf{W}_\mu$:

$$\mathbf{U}^{-1}(x)ig\mathbf{W}^{'}_\mu \mathbf{U}(x) + \mathbf{U}^{-1}(x)\partial_\mu \mathbf{U}(x) = ig\mathbf{W}_\mu \ . \tag{3.58}$$

Com isso temos:

$$\mathbf{W}^{'}_\mu = \mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu \mathbf{U}^{-1}(x) + \tfrac{i}{g}(\partial_\mu \mathbf{U}(x))\mathbf{U}^{-1}(x) \ . \tag{3.59}$$

Agora vamos definir os “field strenght tensor” $\mathbf{W}_{\mu\nu}$, mas como ele não comuta ele precisa ser definido usando as derivadas covariantes:

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = [\partial_\mu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu]\mathbf{W}_\nu - [\partial_\nu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\nu]\mathbf{W}_\mu. \tag{3.60}$$

Agora notamos que o campo $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ não é um invariante por transformações de gauge pois se transforma da seguinte maneira.

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} \to \mathbf{W}^{'}_{\mu\nu} = \mathbf{U}\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{U}^\dagger. \tag{3.61}$$

Para obter uma expressão invariante precisamos definir:

$$-\frac{1}{8}Tr(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}). \tag{3.62}$$

Pois o traço tem a propriedade:

$$Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(CAB) = Tr(ACB) = Tr(BAC) = Tr(CBA). \tag{3.63}$$

Sendo assim temos:

$$-\frac{1}{8}Tr(\mathbf{W}^{'}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu'}) = -\frac{1}{8}Tr(U\mathbf{W}_{\mu\nu}U^{\dagger}U\mathbf{W}^{\mu\nu}U^{\dagger}) = -\frac{1}{8}Tr(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}). \tag{3.64}$$

E assim a lagrangiana invariante por transformações locais fica:

$$\mathcal{L}_{não-Abeliana} = \Sigma_{a=1}^{N}\bar{\Phi}_a(i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + ig\mathbf{W}_{\mu}(x)) - m)\Phi_a. - \frac{1}{8}Tr(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}) \tag{3.65}$$

Agora vamos ver a lagrangiana que será usada para se fazer a quebra de simetria no modelo padrão.

3.5 As simetrias da lagrangiana invariante por $SU(2) \otimes U(1)$

Como visto anteriormente a lagrangiana do modelo padrão possui uma simetria $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. O setor eletrofraco descrito pelo mecanismo de Higgs possui essa invariância $SU(2)\otimes U(1)$ por isso é de suma importância o seu estudo detalhado. O mecanismo de Higgs é a quebra de simetria da parte $SU(2)$ dessa teoria, que gerará a massa dos campos de gauge que mediam a interação eletrofraca. (W^+, W^-, Z^0)

Essa simetria tem uma parte abeliana $U(1)$ e uma parte não abeliana $SU(2)$. Usaremos os resultados obtidos acima para descrever a simetria dessa lagrangiana.

Tomemos um campo escalar complexo de duas componentes

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{pmatrix}. \tag{3.66}$$

: Queremos que esse campo seja invariante pela transformação:

$$\Phi \rightarrow \Phi^{'} = e^{-i\theta}U\Phi. \tag{3.67}$$

Onde U pertence a $SU(2)$ e $e^{-i\theta}$ pertence a $U(1)_Y$, aqui tomamos o valor da hipercarga como 1, que é a hipercarga do Higgs.

Uma lagrangiana simples que possui essa invariância é:

$$\mathcal{L}_{\Phi} = \partial_{\mu}\Phi^{\dagger}\partial^{\mu}\Phi - V(\Phi^{\dagger}\Phi). \tag{3.68}$$

E também temos que:

$$e^{i\theta}\Phi = e^{-i\theta\tau^0}\Phi. \tag{3.69}$$

onde τ^0 é:

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.70}$$

Nós queremos que essa simetria seja local, então vamos novamente introduzir a derivada covariante e um campo e Gauge B_μ :

$$B_\mu(x) \to B'_\mu(x) = B_\mu(x) + \frac{2}{g_1}\partial_\mu\theta. \tag{3.71}$$

$$i\partial_\mu \to i\partial_\mu - \frac{g_1}{2}B_\mu. \tag{3.72}$$

onde g_1 é uma constante adimensional.

Como visto anteriormente qualquer elemento do grupo $SU(2)$ pode ser escrito como:

$$U = e^{-i\alpha^k\tau^k} \ . \tag{3.73}$$

Onde α^k são três parâmetros reais τ^k são os três geradores do grupo (matrizes de Pauli).

Para que essa teoria global seja transformada em uma teoria local vamos introduzir os campos de gauge vetoriais $W_\mu^k(x)$ para cada gerador τ^k. Tal que:

$$\mathbf{W}_\mu(x) = W_\mu^k(x)\tau^k. \tag{3.74}$$

Esse $\mathbf{W}_\mu(x)$ se transforma como um campo não-Abeliano:

$$\mathbf{W}_\mu(x) \to \mathbf{W}_\mu(x)' = \mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu(x)\mathbf{U}^\dagger(x) + \frac{2i}{g_2}(\partial_\mu\mathbf{U}(x))\mathbf{U}^\dagger(x). \tag{3.75}$$

$\mathbf{W}_\mu(x)$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{W}_\mu(x) = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix}. \tag{3.76}$$

Notamos que essa matriz é Hermitiana e tem traço nulo.

Finalmente podemos escrever a derivada covariante como:

$$D_\mu\Phi = [\partial_\mu + \frac{ig_1}{2}B_\mu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu]\Phi. \tag{3.77}$$

Com isso temos que:

$$D'_\mu\Phi' = [\partial_\mu + \frac{ig_1}{2}B'_\mu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}'_\mu]\Phi' = e^{-i\theta}\mathbf{U}D_\mu\Phi. \tag{3.78}$$

Definindo os "field strenght tensors" dessa teoria como:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \tag{3.79}$$

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = [\partial_\mu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu]\mathbf{W}_\nu - [\partial_\nu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\nu]\mathbf{W}_\mu. \tag{3.80}$$

E como visto anteriormente a parte dinâmica dos campos fica: $-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ e $-\frac{1}{8}Tr(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu})$.

A matriz $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = W^i_{\mu\nu}\tau^i. \tag{3.81}$$

Onde temos que:

$$W^1_{\mu\nu} = \partial_\mu W^1_\nu - \partial_\nu W^1_\mu - g_2(W^2_\mu W^3_\nu - W^2_\nu W^3_\mu). \tag{3.82}$$

$$W^2_{\mu\nu} = \partial_\mu W^2_\nu - \partial_\nu W^2_\mu - g_2(W^3_\mu W^1_\nu - W^3_\nu W^1_\mu). \tag{3.83}$$

$$W^3_{\mu\nu} = \partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu - g_2(W^1_\mu W^2_\nu - W^1_\nu W^2_\mu). \tag{3.84}$$

Como $Tr((\tau^i)^2) = 2$ e $Tr(\tau^i\tau^j) = 0$ para $i \neq j$ podemos escrever:

$$\mathcal{L}_{dyn} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \Sigma^3_{i=1}\frac{1}{4}W^i_{\mu\nu}W^{i\mu\nu}. \tag{3.85}$$

e se definirmos:

$$W^+_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu - iW^2_\mu), W^-_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu + iW^2_\mu). \tag{3.86}$$

Podemos reescrever:

$$\mathcal{L}_{dyn} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^3_{\mu\nu}W^{3\mu\nu} - \frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+\mu\nu}. \tag{3.87}$$

E assim a lagrangiana total que será quebrada no modelo padrão será:

$$\mathcal{L} = D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^3_{\mu\nu} W^{3\mu\nu} - \frac{1}{2} W^-_{\mu\nu} W^{+\mu\nu}. \tag{3.88}$$

Reescrevemos dessa maneira porque assim ficará claro após a quebra de simetria quem são os campos de gauge massivos associados as partículas W^+, W^-, Z^0.

3.6 As simetrias da lagrangiana invariante por SU(5)

Apesar do seu sucesso, o modelo padrão não unifica de verdade a força fraca com a eletromagnética, pois temos duas constantes de acoplamento. Como a interação forte tem como grupo de simetria o $SU(3)_C$ uma classe de grupos que parece inicialmente tentadora para unificar as forças eletromagnética e fraca seria do tipo: $SU(3) \otimes W$ onde W sofreria uma quebra espontânea de simetria para o $SU(2) \otimes U(1)$ e finalmente a quebra usual do modelo padrão. Os únicos candidatos para essa unificação seriam os grupos de gauge $SU(3) \otimes SU(3)$ e um $SU(6)$.

Para ambos os casos se é mostrado não ser possível descrever os hádrons,pois os geradores correspondentes de carga elétrica não admitem cargas fracionadas, nem possuem traço nulo, logo concluímos que não é possível unificar a força fraca e eletromagnética separadamente da força forte.[10] [11][12]

O grupo mais simples e de menor rank que consegue essa unificação é o grupo $SU(5)$ e por isso o mesmo é estudado nessa dissertação.

Para montarmos a lagrangiana do modelo $SU(5)$ precisamos encontrar as representações do $SU(5)$ que contém todos os 15 estados de helicidade (projeção do spin na direção do movimento) do modelo Padrão da primeira geração.

A primeira geração é a que contém os quarks up e down, com todos os sabores e com cargas 2/3 e -1/3 respectivamente; o elétron e o neutrino do elétron, com carga -1 e 0 respectivamente. (u_i, d_i, e^-, v_e) onde $i = 1, 2, 3$

Para as outras gerações a lagrangiana fica igual, só repetindo a forma e mudando o valor das massas.

---

[10] *Steven Weinberg, "Mixing Angle in Renormalizable Theories of Weak and Electromagnetic Interactions", Phycal Review D, volume 5, número 8*

[11] *Howard Georgi e S.L. Glashow, "Attemps to Calculate Eletron Mass" Physical Review D, volume 7, número 8*

[12] *Howard Georgi e S.L. Glashow, "Unity of All Elementary-Particle Forces", Physical Review Letters Volume 32, número 8*

Esses 15 estados de helicidade tem as seguintes propriedades:

$$(3,2,\frac{1}{6})_L. \tag{3.89}$$

Esse estado representa o quark up e down, left-handed. Pois eles se transformam como um tripleto por $SU(3)$, dubleto por $SU(2)$ e tem hipercarga igual a $\frac{1}{6}$.

$$(3,1,\frac{2}{3})_R. \tag{3.90}$$

Esse estado representa o quark up, right-handed. Pois ele se transforma como um tripleto por $SU(3)$, singleto por $SU(2)$ e tem hipercarga igual a $\frac{1}{6}$.

$$(3,1,-\frac{1}{3})_R. \tag{3.91}$$

Esse estado representa o quark down, right-handed. Pois ele se transforma como um tripleto por $SU(3)$, singleto por $SU(2)$ e tem hipercarga igual a -$\frac{1}{3}$.

$$(1,2,-\frac{1}{2})_L. \tag{3.92}$$

Esse estado representa o elétron e o neutrino do elétron, left-handed. Pois ele se transformam como um singleto por $SU(3)$, dubleto por $SU(2)$ e tem hipercarga igual a -$\frac{1}{2}$.

$$(1,1,-1)_R. \tag{3.93}$$

Esse estado representa o elétron e o neutrino do elétron, right-handed. Pois eles se transformam como um singleto por $SU(3)$, singleto por $SU(2)$ e tem hipercarga igual a -1.

Para trabalharmos apenas com campos left-handed, vamos aplicar a conjugação de carga nos right-handed, assim obtemos:

$$(3,2,\frac{1}{6})_L. \tag{3.94}$$

$$(3^*,1,-\frac{2}{3})_L. \tag{3.95}$$

$$(3^*,1,\frac{1}{3})_L. \tag{3.96}$$

$$(1, 2, -\frac{1}{2})_L. \tag{3.97}$$

$$(1, 1, 1)_L. \tag{3.98}$$

Notamos nas matrizes de Gell-Mann do $SU(5)$ que o grupo de cor $SU(3)_C$ pode ser representado pelas matrizes que tem as três primeiras linhas e colunas com entrada não nula, isto é: Ele pode ser representado por λ_i com $i = 1, 2, ..., 8$. Com os geradores definidos por:

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2}. \tag{3.99}$$

Com $a = 1, 2, ..., 8$.
E para o $SU(2)_L$ podemos usar as matrizes que só tem as duas últimas linhas e colunas não nulas, λ_{22}, λ_{23} e $(\sqrt{10}\lambda_{24} - \sqrt{6}\lambda_{15})/4$.
E os geradores ficam:

$$T_1^L = \frac{\lambda_{22}}{2}. \tag{3.100}$$

$$T_2^L = \frac{\lambda_{23}}{2}. \tag{3.101}$$

$$T_3^L = \frac{\sqrt{10}\lambda_{24} - \sqrt{6}\lambda_{15})}{8}. \tag{3.102}$$

E pegando emprestado do modelo padrão, vamos definir a hipercarga no $SU(5)$ como:

$$Q = T_3^L + Y. \tag{3.103}$$

E usando os valores de carga dos quarks e léptons temos que:

$$Q = -\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_{15}. \tag{3.104}$$

E então:

$$Y = -\frac{(\sqrt{10}\lambda_{24} + \frac{5\sqrt{6}}{3}\lambda_{15})}{8}. \tag{3.105}$$

Com isso notamos que o grupo $SU(3) \otimes SU(2)$ é um subgrupo de $SU(5)$ e que podemos tomar a representação fundamental 5^* como:

$$5^* \to (3^*, 1, \frac{1}{3}) \oplus (1, 2, -\frac{1}{2}). \tag{3.106}$$

Pois $(3^*, 1, \frac{1}{3})$ é singleto de $SU(2)$ e $(1, 2, -\frac{1}{2})$ é singleto de $SU(3)$ ou seja, as oito primeiras matrizes de Gell-Mann que representam o $SU(3)$ agem em $(3^*, 1, \frac{1}{3})$ mas não em $(1, 2, -\frac{1}{2})$ e as λ_{22}, λ_{23} e $(\sqrt{10}\lambda_{24} - \sqrt{6}\lambda_{15})/4$ agem em $(1, 2, -\frac{1}{2})$ mas não agem em $(3^*, 1, \frac{1}{3})$. Logo:

$$5^* = \begin{bmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e \\ -\nu \end{bmatrix}. \tag{3.107}$$

Essa escolha também é compatível com a definição de hipercarga Y. Nesse 5^* conseguimos colocar 5 dos 15 estados de helicidade, agora precisamos encontrar uma representação que contenha os outros 10 estados.
Usando as regras de Young, sabemos que:

$$5 \otimes 5 = 15_S \otimes 10_A. \tag{3.108}$$

Por outro lado temos que:

$$5 \otimes 5 \to ((3, 1, -\frac{1}{3}) \oplus (1, 2, \frac{1}{2})) \otimes ((3, 1, -\frac{1}{3}) \oplus (1, 2, \frac{1}{2})). \tag{3.109}$$

$$5 \otimes 5 \to (6, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (1, 3, 1) \oplus (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (3^*, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (1, 1, 1). \tag{3.110}$$

E como no $SU(3)$ $3 \otimes 3 = 6_S \oplus 3^*_A$ e no $SU(2)$ $2 \otimes 2 = 3^*_S \oplus 1_A$; temos que a parte antissimétrica de $5 \otimes 5$, 10_A é:

$$10 \to (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (3^*, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (1, 1, 1). \tag{3.111}$$

Que é exatamente as representações faltantes para completar o modelo padrão (os

10 faltantes estados de helicidade). Assim 10 é dado por:

$$10 = \begin{bmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{bmatrix}.$$

(3.112)

É interessante notar que o modelo padrão não da uma explicação de o porque a carga dos quarks deve ser fracionaria e isso emerge naturalmente no $SU(5)$. Como o gerador de carga tem traço nulo, a soma das cargas em qualquer representação do $SU(5)$ deve ser nula, isso resulta em:

$$-3Q_d + Q_e = 0. \tag{3.113}$$

Para ambas as representações!

Com essas representações já é possível escrever a lagrangiana e a a derivada covariante para o $SU(5)$.

Primeiramente vamos definir para o campo de Higgs para a quebra $SU(5) \rightarrow SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Como o $SU(5)$ tem 24 geradores ele terá 24 bósons de gauge (12 a mais que o modelo padrão). Esperamos que esses bósons sejam massivos e deem interações de curto alcance, caso contrário já teríamos identificado essas forças na natureza. Portanto queremos 12 bósons de Goldstone (que serão discutidos no próximo capítulo) para gerarem essas massas. A representação mínima do Higgs que consegue fazer isso é a representação adjunta de dimensão 24, definida por:

$$\Phi = \Phi^a T^a. \tag{3.114}$$

Onde $a = 1, ...24$.

Esse campo se transforma como:

$$\Phi \rightarrow U \Phi U^\dagger. \tag{3.115}$$

Assim podemos definir a derivada covariante para o campo de Higgs da seguinte maneira:

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu - igA^a_\mu [T^a, \Phi]. \tag{3.116}$$

E sua lagrangiana invariante por $SU(5)$ fica:

$$\mathcal{L}_{Higgs} = Tr(D_\mu \Phi)^2 + \frac{\mu^{2\,2}}{2} Tr(\Phi)^2 - \frac{\lambda_1}{4} Tr\Phi^4 - \frac{\lambda_2}{4}(Tr(\Phi^2))^2. \tag{3.117}$$

Para $5^* = (\bar{\Psi}_p)_L$ temos que a derivada covariante fica:

$$D_\mu(\bar{\Psi}_p)_L = \partial_\mu(\bar{\Psi}_p)_L - ig_G T^*_{pq}(\Psi_q)_L A^a_\mu = \partial_\mu(\bar{\Psi}_p)_L - ig_G(A^*_\mu)(\Psi_q)_L. \tag{3.118}$$

Para $10 = x^{pq}_L$ temos que a derivada covariante fica:

$$D_\mu x^{pq}_L = \partial_\mu x^{pq}_L + ig_G A^a_\mu[(T_a)_{pr} x^{rp}_l + (T_a)_{qs} x^{ps}_L] = \partial_\mu x^{pq}_L + ig_G[(A_\mu)_{pr} x^{rp}_L + (A_{\mu qs}) x^{pq}_L].$$

E como x^{pq}_L é antissimétrico, obtemos:

$$D_\mu x^{pq}_L = \partial_\mu x^{pq}_L + 2ig_G(A_\mu)_{pr} x^{rq}_L. \tag{3.119}$$

E a lagrangiana invariante por $SU(5)$ para férmions fica:

$$\mathcal{L}_{fermions} = i(\bar{(}\Psi_p)_L)\gamma^\mu(D^\mu \Psi_p)_L + i(\bar{x}^{pq})_L \gamma^\mu D_\mu (x^{pq})_L. \tag{3.120}$$

Agora os bósons que são inseridos pela derivada covariante tem a seguinte estrutura. Como já havíamos estudado $5 \to (3, 1, -\frac{1}{3}) \oplus (1, 2, \frac{1}{2})$ e sabemos que pelos diagramas de Young:

$$5 \otimes 5^* = 1 \oplus 24. \tag{3.121}$$

Por outro lado:

$$5 \otimes 5^* = ((3, 1, -\frac{1}{3} \oplus (1, 2, \frac{1}{2})) \otimes ((3^*, 1, \frac{1}{3}) \oplus (1, 2, -\frac{1}{2})). \tag{3.122}$$

$$5 \otimes 5^* = (8,1,0) \oplus (1,1,0) \oplus (3,2,-\frac{5}{6}) \oplus (3^*,2,\frac{5}{6}) \oplus (1,3,0) \oplus (1,1,0). \quad (3.123)$$

Logo:

$$24 \to O(8,1,0) \oplus S(1,1,0) \oplus X(3,2,-\frac{5}{6}) \oplus X^*(3^*,2,\frac{5}{6}) \oplus T(1,3,0). \quad (3.124)$$

Que pode ser escrito como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} O & X \\ X^* & T \end{bmatrix} + (1+\frac{S}{v})\Sigma. \quad (3.125)$$

Assim notamos que temos os glúons do modelo padrão $(8,1,0)$, temos os bósons da interação fraca W^+, W^-, Z^0 com $(1,3,0)$ e o fóton com $(1,1,0)$ e os 12 novos campos de gauge que fazem a interação de léptons e quarks (setor lepto-quark) representados por $(3^*,2,\frac{5}{6})$ e $(3,2,-\frac{5}{6})$.

A forma explicita desses campos de gauge é dada por:

$$\begin{bmatrix} G_r^r - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}B & G_r^g & G_r^b & \frac{1}{\sqrt{2}}X_r^1 & \frac{1}{\sqrt{2}}X_r^2 \\ G_g^r & G_g^g - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}B & G_g^b & \frac{1}{\sqrt{2}}X_g^1 & \frac{1}{\sqrt{2}}X_g^2 \\ G_b^r & G_b^g & G_b^b - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}B & \frac{1}{\sqrt{2}}X_b^1 & \frac{1}{\sqrt{2}}X_b^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}X_r^{\dagger 1} & \frac{1}{\sqrt{2}}X_g^{\dagger 1} & \frac{1}{\sqrt{2}}X_b^{\dagger 1} & \frac{1}{2}W^3 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}B & \frac{1}{\sqrt{2}}W^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}X_r^{\dagger 2} & \frac{1}{\sqrt{2}}X_g^{\dagger 2} & \frac{1}{\sqrt{2}}X_b^{\dagger 2} & \frac{1}{\sqrt{2}}W^- & -\frac{1}{2}W^3 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}B \end{bmatrix}.$$

Com o setor eletrofraco dado por:

$$W_3^\mu = (\sqrt{10}A_{24}^\mu - \sqrt{6}A_{15}^\mu)/4 \quad \mathrm{W}_+^\mu = (A_{22}^\mu - iA_{23}^\mu)/\sqrt{2}\ .$$

$$W_-^\mu = (A_{22}^\mu + iA_{23}^\mu)/\sqrt{2} \quad B^\mu = -(\sqrt{\tfrac{5}{2}}A_{15}^\mu + \sqrt{\tfrac{3}{2}}A_{24}^\mu)/2\ .$$

E o setor lepto-quark:

$$X_1^\mu = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(A_9^\mu + iA_{10}^\mu)\ . \quad X_2^\mu = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(A_{11}^\mu + iA_{12}^\mu)\ . \quad X_3^\mu = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(A_{13}^\mu + iA_{14}^\mu)\ .$$

$$Y_1^\mu = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(A_{16}^\mu + iA_{17}^\mu)\ . \quad Y_2^\mu = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(A_{18}^\mu + iA_{19}^\mu)\ . \quad Y_3^\mu = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(A_{20}^\mu + iA_{21}^\mu)\ .$$

E os G^i sendo os mediadores da força forte. E com isso concluímos a estrutura do $SU(5)$ antes da quebra de simetria.

Capítulo 4
Quebra espontânea de simetria

A quebra de simetria nasceu originalmente em matéria condensada ao se estudar um ferromagneto. Tal sistema era invariante por rotações $SO(3)$, pois os seus spins eram todos desordenados. Ao se aplicar um campo magnético no sistema os spins se alinhavam e se perdia a invariância por $SO(3)$, mantendo só uma invariância por $SO(2)$, porém tal quebra não é espontânea, pois há a inserção de um campo magnético. Após Peter Higgs aplicar o mecanismo de quebra de espontânea de simetria para gerar massa aos bósons intermediários a quebra de simetria se tornou uma área da física com inúmeras aplicações, entre tais aplicações estão:

- Gerar massa aos bóson de gauge do modelo padrão e suas extensões e ainda sim ser uma teoria renormalizável.
- Quebrar grupos maiores que o modelo padrão, com possíveis novas partículas, no grupo do modelo padrão.
- Melhor compreensão de fenômenos em matéria condensada como supercondutividade e superfluides.
- Melhor compreensão de fenômenos que envolvem transição de fase.

Dadas essas várias aplicações, um estudo detalhado sobre a mesma se torna algo pertinente. Começamos esse estudo enunciando o mais importante teorema de quebra de simetria.

4.1 O teorema de Goldstone

Teorema de Goldstone: Se uma simetria contínua é espontaneamente quebrada, campos sem massa, conhecidos como bósons de Nambu-Goldstone, aparecerão.

Prova: Suponha que o sistema tenha uma simetria contínua, pelo teorema de Noether existe uma carga Q associada a essa simetria.[13] Essa carga Q obedece:

$$[H, Q] = 0. \tag{4.1}$$

[13] *A.Zee "Quantum Field Theory in a Nutshell", Second Edition, Part IV*

Sempre podemos escolher um vácuo (adicionando ao Hamiltoniano H uma constante c $H \to H + c$) tal que $H|0\rangle = 0$.

Suponha que o vácuo desse sistema seja $|0\rangle$ então, por Q ser conservado, temos: $e^{iQ\theta}|0\rangle = |0\rangle$ o que significa que $Q|0\rangle = 0$.

Agora suponha que essa simetria seja quebrada, logo $Q|0\rangle \neq 0$.

A energia esse estado $Q|0\rangle$ será:

$$HQ|0\rangle = [H, Q]|0\rangle = 0. \tag{4.2}$$

pois

$$QH|0\rangle = 0. \tag{4.3}$$

Sabemos que associada a carga Q temos uma corrente J^0 tal que:

$$Q = \int d^D x J^0(\vec{x}, t). \tag{4.4}$$

Onde D é a dimensão do espaço.

Agora considere o seguinte estado:

$$|s\rangle = \int d^D x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} J^0(\vec{x}, t)|0\rangle\ . \tag{4.5}$$

Notamos que a medida que $k \to 0$ $|s\rangle \to Q|0\rangle$. O que significa que a medida que o momento vai para zero, a energia também vai para zero, o que significa que $|s\rangle$ descreve uma partícula sem massa.

4.2 A quebra de simetria do campo escalar

Primeiramente vamos tratar de um exemplo muito simples que é o campo escalar.[14]

$$\mathcal{L}_{scalar} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - V(\Phi^2). \tag{4.6}$$

Notamos que essa lagrangiana é invariante por transformação de paridade, isto é:

$$P\Phi \to \Phi' = -\Phi. \tag{4.7}$$

[14] *Roberto Casalbuoni "Advanced Quantum Field Theory", capítulo 9*

Como vimos anteriormente P comuta com a Hamiltoniana, com isso, se o vácuo não for degenerado (mas notando que agora a simetria é discreta) temos:

$$P\left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle. \tag{4.8}$$

Logo:

$$\left\langle 0\right|\Phi\left|0\right\rangle = \left\langle 0\right|P^{-1}P\Phi P^{-1}P\left|0\right\rangle = \left\langle 0\right|P\Phi P^{-1}\left|0\right\rangle = -\left\langle 0\right|\Phi\left|0\right\rangle. \tag{4.9}$$

Com isso:

$$\left\langle 0\right|\Phi\left|0\right\rangle = 0. \tag{4.10}$$

Agora, se $V(\Phi^2) = \frac{\mu^2}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{4}\Phi^4$ e se $\mu^2 < 0$:

$$\frac{dV}{d\Phi} = \mu^2\Phi + \lambda\Phi^3 = 0. \tag{4.11}$$

o potencial tem dois mínimos e um máximo:

$$\Phi_{maxlocal} = 0. \tag{4.12}$$

$$\Phi_{min} = +v. \tag{4.13}$$

$$\Phi_{min} = -v. \tag{4.14}$$

Com $v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$.

Se definirmos os estados associados a $\Phi = +v$ como $\left|R\right\rangle$ e $\Phi = -v$ como $\left|L\right\rangle$ iremos obter:

$$P\left|R\right\rangle = \left|L\right\rangle \neq \left|R\right\rangle. \tag{4.15}$$

Assim:

$$\left\langle R\right|\Phi\left|R\right\rangle = \left\langle R\right|P^{-1}P\Phi P^{-1}P\left|R\right\rangle = \left\langle R\right|P\Phi P^{-1}\left|R\right\rangle = -\left\langle L\right|\Phi\left|L\right\rangle. \tag{4.16}$$

O que é não é nulo necessariamente.

Isso significa que o valor esperado do vácuo é não nulo. Então dizemos que essa troca no sinal da massa quebra a simetria de paridade. Mas é importante ressaltar que a quebra é devida ao sistema ter que escolher um dos estados, a lagrangiana e as equações de movimento continuam preservando a simetria.

4.3 A quebra espontânea de simetria global do campo escalar complexo

Agora iremos estudar a quebra de simetria global de um campo escalar complexo.
[15] [16] Sua lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L}_{scalar} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi). \tag{4.17}$$

Onde $\Phi(x)$ pode ser escrito como $\Phi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$ com $\rho(x)$ e $\theta(x)$ reais.
Podemos transformar o campo da seguinte maneira deixando a lagrangiana invariante.

$$\Phi \to \Phi' = e^{-i\alpha}\Phi. \tag{4.18}$$

Com um potencial da forma:

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{m^2}{2\Phi_0^2}[\Phi^\dagger \Phi - \Phi_0^2]^2. \tag{4.19}$$

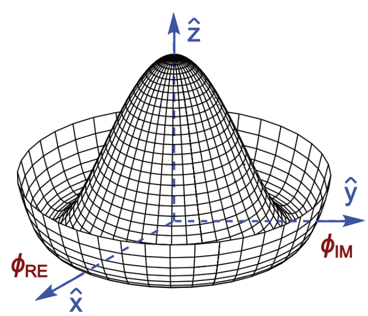


Figura 4.1: Potencial chapéu mexicano, tirado do Wikipedia Commons

Notamos que o mínimo do potencial é $V = 0$ quando $\Phi = \Phi_0 e^{i\theta}$, logo o vácuo é degenerado com o formato de um círculo de raio Φ_0.
Agora vamos escolher um desses vácuos, o vácuo na direção de Φ real, podemos escolher esse vácuo fazendo uma transformação de gauge $e^{-i\alpha}\Phi$ tomando $\alpha = \theta_0$,

[15] *W.N.Cotingham and D.A.Greenwood: "An Introduction to the Standard Model of Particle Physics", Second Edition, capítulo 10 e 11*

[16] *P.W.Higgs, "Broken symmetries, massless particles and gauge fields" Physics Letters, volume 12, número 2*

com isso podemos expandir Φ ao redor desse vácuo fazendo:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi + i\Psi). \tag{4.20}$$

E então a lagrangiana vai ficar:

$$\mathcal{L}_{scalar} = \frac{1}{2}\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2}\partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi - \frac{m^2}{2\Phi_0}[\sqrt{2}\Phi_0 \chi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\Psi^2}{2}]^2. \tag{4.21}$$

Após algumas manipulações, podemos isolar a parte livre da lagrangiana, obtendo:

$$\mathcal{L}_{free} = \frac{1}{2}\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - m^2\chi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi. \tag{4.22}$$

Onde notamos que existe um campo escalar massivo associado a uma partícula massiva de spin zero e um campo escalar sem massa associada a uma partícula sem massa de spin zero, chamada de bóson de Goldstone, como visto anteriormente. Então notasse que após a quebra de simetria apareceram uma partícula massiva sem spin e sem carga e uma partícula sem massa e sem spin (bóson de Goldstone).

4.4 A quebra espontânea de simetria local do campo escalar complexo

Agora estudaremos uma quebra local de simetria com a introdução de um campo de gauge.

$$\Phi \to \Phi' = e^{-iq\alpha(x)}; A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x). \tag{4.23}$$

Onde $\Phi(x)$ pode ser escrito como $\Phi(x) = \rho(x)e^{i\theta}$ com $\rho(x)$ e $\theta(x)$ reais. Como visto anteriormente essa lagrangiana escalar invariante por uma transformação local é dada por:

$$\mathcal{L}_{scalar} = (\partial_\mu - iqA_\mu(x))\Phi^\dagger(\partial^\mu + iqA^\mu(x))\Phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\Phi^\dagger\Phi). \tag{4.24}$$

Usaremos o mesmo potencial, da forma:

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\Phi_0^2}[\Phi^\dagger\Phi - \Phi_0^2]^2. \tag{4.25}$$

O mínimo é obtido quando $A_\mu = 0$ e $\Phi = \Phi_0 e^{i\theta(x)}$.

Com isso novamente obtemos um vácuo degenerado no formato de um círculo com raio Φ_0.

Se escolhermos uma transformação de gauge local tal que $q\alpha(x) = \theta(x)$ vamos obter que $\Phi(x) = \rho(x)$ onde $\rho(x)$ é real, assim podemos expandir em torno desse vácuo e obter:

$$\Phi(x) = \Phi_0 + \frac{h(x)}{\sqrt{2}}. \tag{4.26}$$

Com isso vamos obter:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = [(\partial_\mu - iqA_\mu)(\Phi_0 + \tfrac{h(x)}{\sqrt{2}})][(\partial^\mu - iqA^\mu)(\Phi_0 + \tfrac{h(x)}{\sqrt{2}})] - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ - \tfrac{m^2}{2\Phi_0}[\sqrt{2}\Phi_0 h + \tfrac{1}{2}h^2]^2.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Após algumas manipulações, podemos isolar a parte livre da lagrangiana como:

$$\mathcal{L}_{free} = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - m^2h^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + q^2\Phi_0^2 A_\mu A^\mu. \tag{4.28}$$

Onde notamos o surgimento de um campo escalar real de massa $\sqrt{2}m$ e um campo de gauge vetorial de massa $\sqrt{2}q\Phi_0$ com três componente de polarização (em contraste com as duas componentes de polarização no caso sem massa). Assim após a quebra de simetria temos uma partícula neutra de massa $\sqrt{2}m$ e um bóson de massa $\sqrt{2}q\Phi_0$ e spin 1. Dizemos que esse novo grau de liberdade do campo de gauge vetorial absorveu o bóson de Goldstone. Esse mecanismo que introduz massa a uma teoria é chamado de mecanismo de Higgs. Agora estamos prontos para estudar o mecanismo que é utilizado de fato no modelo padrão.

4.5 A quebra espontânea de simetria do modelo padrão

Agora estamos prontos para estudar a quebra de simetria do modelo padrão.

Usando a lagrangiana encontrada anteriormente, que é invariante por $SU(2) \otimes U(1)$:

$$\mathcal{L}_{Higgs} = D_\mu\Phi^\dagger D^\mu\Phi - V(\Phi^\dagger\Phi) - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^3_{\mu\nu}W^{3\mu\nu} - \frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+\mu\nu}. \tag{4.29}$$

E usando um potencial da forma:

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\Phi_0^2}[\Phi^\dagger\Phi - \Phi_0^2]^2. \tag{4.30}$$

Vamos quebrar a simetria $SU(2)$. Para isso novamente notamos que qualquer elemento de SU(2) pode ser escrito como:

$$U = e^{-i\alpha^k(x)\tau^k}. \tag{4.31}$$

Como há três parâmetros $\alpha^k(x)$ e $\Phi(x)$ é um campo complexo de duas componente (logo há 4 componentes reais). Podemos escolher essa transformação tal que:

$$\alpha = \alpha(\sin(\phi), \cos(\phi), 0). \tag{4.32}$$

Pois queremos quebrar três graus de liberdade do sistema, pois assim surgirá três bósons de Goldstone e esses serão comidos pelos campos de gauge para gerar os três bósons massivos mediadores da interação eletrofraca e o fóton, assim como um escalar residual que será identificado como o Higgs e gerará as massas.
Expandindo em série e identificando os termos teremos:

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & e^{i\phi}\sin(\alpha) \\ -e^{-i\phi}\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

Se colocarmos o campos complexo Φ na forma:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{i\delta} \\ be^{i\gamma} \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

e se aplicarmos essa transformação, vamos obter:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \Phi' \\ \Phi'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\gamma}\sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

E aplicando uma outra transformação com $\alpha = \gamma(0,0,1)$, podemos colocar Φ na forma:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_0 + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Com $h(x)$ real e um vácuo:

$$\Phi_{ground} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

E notamos que ainda há uma simetria residual (a simetria $U(1)$ local) nesse estado, mesmo tendo perdido a simetria $SU(2)$ ele ainda é invariante por:

$$e^{-i\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Essa simetria residual será identificada como a simetria $U(1)$ do electromagnetismo.

Reescrevendo o potencial $V(\Phi^\dagger\Phi)$ com o estado escolhido, temos:

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = m^2h^2 + \frac{m^2h^3}{\sqrt{2}\Phi_0} + \frac{m^2h^4}{8\Phi_0^2} = V(h). \tag{4.39}$$

. E a derivada covariante fica:

$$D^\mu\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^\mu h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{ig_1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ B^\mu(\Phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix} + \frac{ig_2}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}W_\mu^+(\Phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}})) \\ -W_\mu^3(\Phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

Agora substituindo a derivada parcial pela covariante na lagrangiana e após algumas manipulações, encontramos:

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}_{Higgs} = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{g^2}{2}W_\mu^- W^{+\mu}(\Phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}})^2 \\ +[\frac{g_2^2}{4}W_\mu^3 W^{3\mu} - \frac{g_1 g_2}{2}W_\mu^3 B^\mu + \frac{g_1^2}{4}B^\mu B_\mu](\Phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}})^2 - V(h) \end{array}. \tag{4.41}$$

Para podermos ter uma lagrangiana que será fácil identificar os campos iremos introduzir os seguintes elementos:

$$Z_\mu = W_\mu^3 cos(\theta_w) + B_\mu sin(\theta_w). \tag{4.42}$$

Onde:

$$cos(\theta_w) = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}; sin(\theta_w) = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \tag{4.43}$$

O ângulo θ_w é chamado de ângulo de Weinberg.

Também definiremos uma combinação ortogonal à Z_μ:

$$A_\mu = W_\mu^3 sin(\theta_w) + B_\mu cos(\theta_w). \tag{4.44}$$

Esses campos correspondem a rotações no espaço (B_μ, W^3_μ). Assim:

$$\begin{array}{c} B_\mu = A_\mu cos(\theta_w) - Z_\mu sin(\theta_w) \\ W^3_\mu = A_\mu sin(\theta_w) + Z_\mu cos(\theta_w) \end{array}. \tag{4.45}$$

Usando isso na lagrangiana de Higgs encontramos:

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}_{Higgs} = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g_2^2}{2} W^-_\mu W^{+\mu}(\Phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}})^2 \\ +\frac{1}{4}(g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu (\Phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}})^2 - V(h) \end{array}. \tag{4.46}$$

Também precisamos ver como fica a parte dinâmica dos campos B_μ e W^3_μ. Para isso notamos que:

$$\begin{array}{c} B_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} cos(\theta_w) - Z_{\mu\nu} sin(\theta_w) \\ W^3_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} sin(\theta_w) + Z_{\mu\nu} cos(\theta_w) - i g_2 (W^-_\mu W^+_\nu - W^-_\nu W^+_\mu) \end{array}. \tag{4.47}$$

E após algumas manipulações podemos isolar a parte livre, que será:

$$\mathcal{L}_{free} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4. \tag{4.48}$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2. \tag{4.49}$$

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\Phi_0^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu. \tag{4.50}$$

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}. \tag{4.51}$$

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2}[(D_\mu W^+_\nu)^* - (D_\nu W^+_\mu)^*][(D_\mu W^+_\nu) - D_\nu W^+_\mu)] + \frac{1}{2} g_2^2 \Phi_0^2 W^-_\mu W^{+\mu}. \tag{4.52}$$

Onde temos que:

$$D^\mu W^+_\nu = (\partial_\mu + i g_2 sin(\theta_w) A_\mu) W^+_\nu. \tag{4.53}$$

Aqui identificamos $\mathcal{L}_1$ como um campo escalar massivo de massa $\sqrt{2}m$. $\mathcal{L}_2$ como um campo de gauge vetorial de massa $\frac{\Phi_0\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{\sqrt{2}}$. $\mathcal{L}_3$ como um campo de gauge

vetorial sem massa. $\mathcal{L}_4$ como um campo de gauge vetorial carregado de massa $\frac{g_2\Phi_0}{\sqrt{2}}$.
Associado a $\mathcal{L}_1$ temos o bóson de Higgs com massa $\sqrt{2}m$.
Associado a $\mathcal{L}_2$ temos a partícula com massa $\frac{\Phi_0\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{\sqrt{2}}$ de spin 1 neutra, chamada de Z^0, que é uma das mediadoras da força fraca.
Associado a $\mathcal{L}_3$ temos uma partícula sem massa de spin 1 neutra, que é o fóton.
Associado a $\mathcal{L}_4$ temos uma partícula, chamada de W^-, com massa $\frac{g_2\Phi_0}{\sqrt{2}}$, carga elétrica -e e spin 1 e sua antipartícula W^+, que também são mediadores da força fraca.

Notamos que antes da quebra tínhamos quatro graus de liberdade (dois campos complexos) e após a quebra três desses graus de liberdade foram absorvidos pelos campos de gauge e geraram massa a eles e o grau de liberdade residual deu origem ao bóson de higgs. Também notamos que o fato delas serem massivas faz com que a força fraca tenha curto alcance (princípio da incerteza).

A parte de interação fica:

$$\mathcal{L}_{interação} = (\frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}h\Phi_0)(g_2^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{2}(g_1^2 + g_2^2)Z_\mu Z^\mu).$$

$$-\frac{m^2h^3}{\frac{2}{\Phi 0}} - \frac{m^2h^4}{8\Phi_0^2} + \frac{g_2^2}{4}(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+)(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{-\nu}W^{+\mu}).$$

$$+\frac{ig_2}{2}(A_{\mu\nu}sin(\theta_w) + Z_{\mu\nu}cos(\theta_w))(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{-\nu}W^{+\mu}).$$

$$-g_2^2cos^2(\theta_w)(Z_\mu Z^\mu W_\nu^- W^{+\nu} - Z_\mu Z^\nu W_\nu^- W^{+\mu}).$$

$$+\frac{ig_2}{2}cos(\theta_w)[(Z_\mu W_\nu^- - Z_\nu W_\mu^-)(D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}).$$

$$-(Z_\mu W_\nu^+ - Z_\nu W_\mu^+)(D^\mu W^{+\nu})^* - (D^\nu W^{+\mu *})]. \tag{4.54}$$

Um dos canais de decaimento do Higgs aparece nessa lagrangiana de interação que é o decaimento do Higgs no W^+ e W^- em segunda ordem e em terceira ordem o decaimento do Higgs para dois fótons.

Experimentalmente foi verificado que as massas dessas partículas mediadoras são:

$$M_W = 80.425 \pm 0.038GeV. \tag{4.55}$$

$$M_Z = 91.1876 \pm 0.0021GeV. \tag{4.56}$$

Com isso podemos calcular:

$$\frac{\Phi_0 g_2}{\sqrt{2}} = M_W. \tag{4.57}$$

$$\frac{\Phi_0 (g_1^2 + g_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2} = M_Z. \tag{4.58}$$

E assim obtemos:

$$cos(\theta_w) = \frac{M_W}{M_Z} = 0.8810 \pm 0.0016. \tag{4.59}$$

$$sin^2(\theta_w) = 0.2315 \pm 0.0004. \tag{4.60}$$

Foi descoberto experimentalmente que o W^+ e W^- tem carga $\pm e$. Pela derivada covariante nós vemos que:

$$e = g_2 sin(\theta_w) = g_1 cos(\theta_w). \tag{4.61}$$

e o valor esperado do vácuo do Higgs é:

$$\Phi_0 = \frac{\sqrt{2} M_W}{g_2} = 180 GeV. \tag{4.62}$$

E sua massa (até o momento) é:

$$m = 125.3 \pm 0.6 GeV. \tag{4.63}$$

4.6 O setor de Yukawa

A lagrangiana usual de Dirac para os férmions dada por:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi. \tag{4.64}$$

Como há uma mistura de left com right no termo de massa e como ambos se transformam de maneira diferente por $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ esse termo não é invariante! Então precisamos de um novo termo de massa, que será dado por:

$$\mathcal{L} = -c_e[(L^\dagger \Phi) e_R + e_R^\dagger (\Phi^\dagger L)] \tag{4.65}$$

Onde aqui esse termo da massa para o elétron, mas pode ser generalizado para todos os outros férmions. Notamos que tal termo, após a quebra de simetria, dá massa aos férmions. Pois:

$$\mathcal{L} = -c_e[(L^\dagger(\frac{h}{\sqrt{2}} + \Phi_0))e_R + e_R^\dagger(\frac{h}{\sqrt{2}} + \Phi_0)^\dagger L)](4.66)$$

E dessa expressão podemos tirar termos do tipo:

$$\mathcal{L}_{mass} = -c_e\Phi_0(e_L^\dagger e_R + e_R^\dagger e_L) \tag{4.67}$$

Que é análogo ao termo de massa anterior com $c_e\Phi_0 = m$! Notemos agora que esse termo não precisa ser invariante pois a simetria já foi quebrada!

4.7 A quebra espontânea de simetria do modelo $SU(5)$

Com a lagrangiana e as derivadas covariantes já obtidas para o $SU(5)$ no capítulo anterior podemos aplicar o mecanismo de quebra espontânea de simetria do $SU(5) \to SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ e depois $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \to SU(3) \otimes U(1)$[17] [18]

4.7.1 A quebra $SU(5) \to SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$

Antes de realizar a quebra espontânea de simetria de maneira quantitativa, podemos enxergar o resultado dela da seguinte maneira.

- Pela transformação de gauge podemos escolher uma forma específica para o campo Φ tal que Σ (o VEV) seja bloco diagonal, Σ é Hermitiana 5x5 e sem traço.

- Como $U\Sigma U^\dagger = \Sigma + i\theta^c[T^c, \Sigma] + ...$ geradores quebrados não comutam com o VEV, mas os não quebrados comutam.

- Suponha que essas diagonais sejam da forma $\Sigma N_i v_i = 0$ (pois o VEV tem traço nulo) então todos os geradores com entradas não nulas que morem num dos blocos de Σ. comutam com Σ e portanto formam um subgrupo não quebrado $SU(N_i)$.

- A combinação linear de geradores diagonais é proporcional ao VEV, logo comuta com ele e formam um subgrupo $U(1)$.

[17] *Admir Greljo, "Towards unification: SU(5) and SO(10)", www-f1.ijs.si/ ziherl/Greljo12.pdf*
[18] *Safinaz Ramandan, "SU(5) Grand Unified Theory"*

- Portanto O grupo não quebrado pode ser escrito como $SU(N_1) \otimes SU(N_2) \otimes ... \otimes U(1)$.

- Mostrasse que essa quebra resulta em $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Agora basta ver como de fato essa quebra acontece de uma maneira quantitativa.
Reescrevendo o Higgs adjunto, temos:

$$\Phi = \Phi^a T^a \tag{4.68}$$

O potencial então assume a forma:

$$V_\phi = m_1^2 Tr(\Phi^2) + \lambda_1 (Tr(\Phi^2))^2 + \lambda_2 Tr(\Phi^4). \tag{4.69}$$

Agora podemos escolher um estado para esse Higgs tal que ele quebrará a simetria $SU(5)$, esse estado será:

$$\Phi = \frac{\phi + \phi_C}{\sqrt{15}} diag(1, 1, 1, -3/2, -3/2). \tag{4.70}$$

Onde ϕ é um campo real. Esse estado tem como VEV o seguinte valor:

$$\Sigma = \frac{\phi_C}{\sqrt{15}} diag(1, 1, 1, -3/2, -3/2). \tag{4.71}$$

Substituindo esse estado no potencial obtemos:

$$V_\phi = \frac{m_1^2}{2}(\phi + \phi_C)^2 + \lambda_1 (\frac{(\phi + \phi_C)^2}{2})^2 + \frac{7}{120}\lambda_2 (\phi + \phi_C)^4. \tag{4.72}$$

E calculando o seu mínimo obtemos, notando que $\phi = 0$ no mínimo (por construção):

$$\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi_C} = m_1^2 \phi_C + \lambda_1 \phi_C^3 + \frac{7}{30}\lambda_2 \phi_C^3. \tag{4.73}$$

$$\phi_C = -\frac{m_1^2}{\lambda_1 + \frac{7}{30}\lambda_2}. \tag{4.74}$$

E isso é mínimo quando escolhemos $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_1 > -7/30$.

Agora notamos que esse VEV e o estado Φ comutam com todos os geradores do $SU(3)$ e do $SU(2)$ e o VEV é proporcional a hipercarga (simetria $U(1)$) e não comuta com nenhum gerador do setor lepto-quark, logo esses bósons do setor lepto-quark irão adquirir massa.

Esse termo de massa que aparecerá no setor lepto-quark é dado pela derivada covariante no Higgs. Que assumirá a forma já demonstrada:

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu - igA^a_\mu [T^a, \Phi]. \tag{4.75}$$

Essa massa vai vir do seguinte termo: (que é uma generalização do que já vimos pros casos mais simples, como o campo escalar complexo):

$$-g_G^2 Tr([A_\mu, \Phi]^2). \tag{4.76}$$

Após algumas manipulações podemos encontrar que

$$-g_G^2 Tr([A_\mu, \Phi]^2) = \frac{5}{12} g_G^2 \phi_C^2 \Sigma_{i=1}^3 (\bar{X}_i^\mu X_\mu^i + \bar{Y}_i^\mu Y_\mu^i). \tag{4.77}$$

E o termo de massa m_X e m_Y é dada por:

$$m_X^2 = m_Y^2 = \frac{5}{12} g_G^2 \phi_C^2. \tag{4.78}$$

Logo m_X é da ordem da escala de grande unificação ($10^{15} GeV$) e então temos que o VEV é da ordem de 1.5×10^{15} GeV.

4.7.2 A quebra $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \rightarrow SU(3) \otimes U(1)$

Para recuperarmos a massa do W^+,W^- e Z^0 vamos usar um higgs **5** H com o seguinte potencial:

$$V_H = \frac{m_2^2}{2} H^\dagger H + \frac{\lambda_3}{4} (H^\dagger H)^2. \tag{4.79}$$

$$H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \tag{4.80}$$

Agora escolhendo um VEV na direção neutra do $SU(2)_L$ (quinta componente de H):

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_0 + h(x) \end{pmatrix}. \tag{4.81}$$

E notando que o mínimo do potencial resulta em:

$$\phi_0 = -\frac{m_2^2}{\lambda_3}. \tag{4.82}$$

Podemos dar massa para W^+,W^- e Z^0 assim como foi feito no modelo padrão. Pois essa representação do Higgs só vai agir no setor $SU(2)_L$.[19]

4.8 "Doublet-Triplet" splitting problem

O acoplamento do Higgs com os férmions no setor de Yukawa no $SU(5)$ leva a um violento processo de violação do número de bárions. Tal processo é causado pelo fato da componente neutra do tripleto de cor de H mediar o decaimento do próton e ter uma meia vida muito menor que o decaimento do próton mediado pelo setor lepto-quark.

Dado o setor de Yukawa para esse tripleto de cor de Higgs:

$$\mathcal{L}_{trip} = T^*(LY_5Q - d^cY_5u^c) - (\frac{1}{2}QY_{10}Q + u^cY_{10}e^c)T^* \tag{4.83}$$

Onde T é o tripleto de cor, Y_5 e Y_{10} são matrizes, L são léptons e Q são quarks.

Podemos obter diagramas do tipo:

Podemos aproximar tais diagramas por uma interação de quatro férmions e tal diagrama vai ter uma meia vida proporcional à massa dessa componente elevado a quatro. Isso significa que se dermos bastante massa a essa componente podemos fazer com que esse decaimento seja irrelevante em comparação ao mediado pelo setor lepto-quark. Para dar massa a essa componente vamos definir o termo de interação

[19] *T.N.Sherry, "Higgs potential in the SU(5) model", Jornal Physics A, volume 13, páginas 2205-2018*

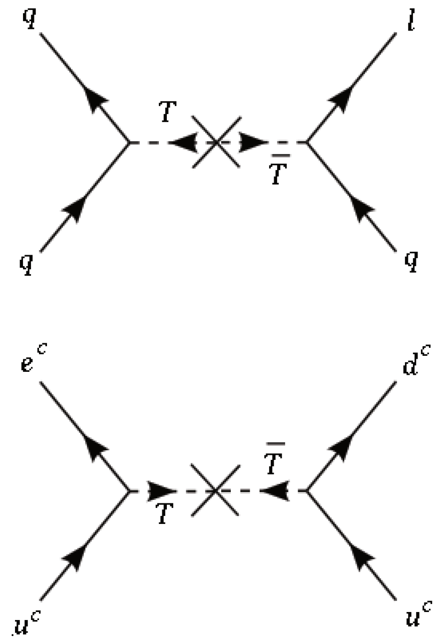


Figura 4.2: **Decaimento do próton via Higgs, tirado de Wikipedia Commons**

entre o Higgs adjunto Φ e o H como:

$$\mathcal{L}_{\Phi H} = -\lambda_5 H^\dagger H Tr(\Phi^2) - \lambda_6 H^\dagger \Phi^2 H. \tag{4.84}$$

Porém além de darmos massa a essa componente neutra do tripleto de cor nós também damos massa da ordem da escala de grande unificação ao Higgs padrão! Precisamos escolher as constantes λ_5 e λ_6 para que esse Higgs tenha a massa da ordem do modelo padrão!. Esse problema é chamado de "doublet-triplet splitting problem".

Notamos também que há duas escalas de energia, um VEV da ordem da escala de grande unificação e outro VEV da ordem do modelo padrão.

Com isso completamos a quebra do $SU(5)$.

4.9 O decaimento do próton via setor lepto-quark

Reescrevendo a lagrangiana para os férmions:

$$\mathcal{L}_{fermions} = i(\bar{(}\Psi_p)_L)\gamma^\mu(D^\mu \Psi_p)_L + i(\bar{x}^{pq})_L \gamma^\mu D_\mu (x^{pq})_L. \tag{4.85}$$

Usando a derivada covariante, obtemos:

$$\mathcal{L}_{fermions} = i(\bar{(}\Psi_p)_L)\gamma^\mu(\partial^\mu\Psi_p)_L + g_G\bar{(}\Psi^p)\gamma^\mu(A_\mu)_{pq}\Phi_q + i(\bar{x}^{pq})_L\gamma^\mu\partial_\mu(x^{pq})_L - 2g_G(\bar{x}^{pq})(A_\mu)^{pr}x_{rq}.$$

Onde temos os termos de interação:

$$\mathcal{L}_{int} = g_G\bar{(}\Psi^p)\gamma^\mu(A_\mu)_{pq}\Phi_q - 2g_G(\bar{x}^{pq})(A_\mu)^{pr}x_{rq}. \tag{4.86}$$

Dessa interação podemos pegar termos do tipo:

$$\mathcal{L}_{dec} = \frac{g_G}{\sqrt{2}}((\bar{e}^-)\gamma^\mu X^\alpha_\mu d^c_\alpha + hc). \tag{4.87}$$

$$\mathcal{L}_{dec} = \frac{g_G}{\sqrt{2}}(\epsilon_{\alpha\beta\lambda}(\bar{u}^\beta_L)\gamma^\mu X^\alpha_\mu u^{c\alpha} + hc). \tag{4.88}$$

Tais termos levam a diagramas do tipo:

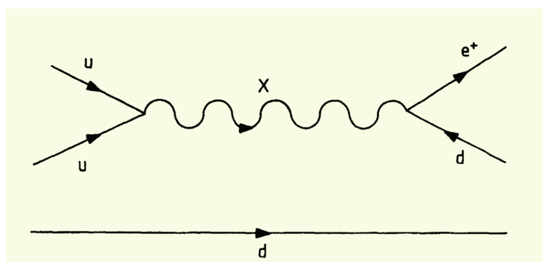


Figura 4.3: Decaimento do próton, tirado da referência [22]

E tem uma meia vida de aproximadamente: [20]

$$\tau_p = \alpha_G^{-2} m_X^4 m_p^{-5} \approx 3 \times 10^{30} y. \tag{4.89}$$

Porém dados experimentais excluem o decaimento do próton em $6 \times 10^{32} y$. Logo o modelo $SU(5)$ minimo precisa ser ajustado ou precisa ser estendido para um grupo maior, ou incorporando supersimetria, que resolve esses problemas.

[20] *Paul Langacker, "Grand unified theories and proton decay"*

4.10 Potencial efetivo

Esse estudo de quebra de espontânea de simetria foi baseada na minimização de um potencial clássico, porém tal sistema na verdade é quântico! Essas lagrangiana são quantizadas via integrais de caminho em teoria quântica de campos! Há algum efeito que surge que modificaria o que fora encontrado até agora para o caso clássico? A transição vácuo para vácuo em teoria quântica de campos, também chamada de função de partição, pode ser definida para o caso de um campo escalar como:

$$Z = e^{W[J]} = \int D\phi e^{S(\phi)+J\phi} \tag{4.90}$$

Onde W é o gerador de diagramas conectados, S é a ação e J é uma fonte externa. Uma discussão mais detalhada sobre essa seção e sobre esses elementos fundamentais em teoria quântica de campos pode ser encontrada em [13].
Definimos o valor esperado de ϕ no vácuo como:

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z}\int D\phi e^{i[S(\phi)+J\phi]} \tag{4.91}$$

Queremos encontrar um gerador funcional que ao invés de ser função de J como é $W[J]$, seja função de ϕ_C. Para isso faremos uma transformação de Legendre:

$$\Gamma(\phi_c) = W(J) - \int d^4x J(x)\phi_c \tag{4.92}$$

Vamos expandir esse gerador funcional da seguinte forma:

$$\Gamma(\phi_c) = \int d^4x[-V_{eff}(\phi_c) + Z(\phi_c)(\partial\phi)^2 + ...] \tag{4.93}$$

Pois notamos que há um termo cinético e um potencial para esse gerador funcional, igual há para o caso de $W[J]$ que é escrito em termos da ação. Com isso obtemos que:

$$\frac{\delta\Gamma\phi_c}{\delta\phi_c(y)} = -J(y) \tag{4.94}$$

E portanto temos que:

$$V'_{eff} = J \tag{4.95}$$

O que significa que sem fonte externa temos o caso clássico!

4.10.1 Correções de primeira ordem

Após reescrevermos a função $W[J]$ em torno de seu mínimo e aplicar a transformação de Legendre, podemos obter, em primeira ordem, a seguinte expressão:

$$\Gamma(\phi_c) = S(\phi_c) + \frac{i}{2}\hbar tr \log[\partial^2 + V''(\phi_c)] \tag{4.96}$$

Podemos ir para o espaço dos momentos e então, comparando com a equação 3.98, podemos isolar o potencial efetivo, que terá a seguinte forma:

$$V_{eff}(\phi_c) = V(\phi_c) - \frac{i\hbar}{2}(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \log[\frac{k^2 - V''(\phi_c)}{k^2}]) \tag{4.97}$$

Conhecido como potencial efetivo de Coleman-Weinberg. Podemos calcular ele para o caso de uma lagrangiana de Dirac interagindo com um campo escalar:

$$Z = \int D\phi D\bar{\Psi} D\Psi e^{i\int(\frac{1}{2}(\partial)^2 - V(\phi) + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - f\phi)\Psi)} \tag{4.98}$$

Após integramos nos campos e irmos para o espaço dos momentos podemos encontrar:

$$V_{eff}(\phi) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} tr \log(\frac{\gamma^\mu p - m - f\phi}{\gamma^\mu p}) = 2i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \log(\frac{p^2 - m(\phi)^2}{p^2}) \tag{4.99}$$

Portanto notamos que o potencial efetivo apenas adicionou uma densidade de energia ao potencial original, que é análoga a uma energia de ponto zero e essa pode ser desprezada! E isso é válido para o campo escalar, o modelo padrão e para o SU(5). Logo nossa abordagem clássica é válida!

Conclusão

Com isso concluímos o estudo de quebra espontânea de simetria. Vimos como a mesma consegue gerar massa para as partículas mediadoras da força fraca e como é possível estender o grupo de simetria do modelo padrão para um grupo de simetria maior e depois quebrar esse grupo no grupo do modelo padrão. Ou seja, vimos que é possível ter duas quebras de simetria de diferentes escalas, na mesma teoria. Também vimos que o modelo $SU(5)$ é um modelo bem econômico, pois contém os mesmos férmions que o modelo padrão e explica coisas como a quantização da carga, coisa que não é explicada pelo modelo padrão. Infelizmente, há uma evidência desfavorável ao modelo $SU(5)$ mínimo, que são medidas de decaimento do próton. Nessas medidas a meia vida do próton é muito maior que o valor previsto pela teoria. Tal problema pode ser solucionado estendendo o modelo $SU(5)$ para um grupo maior ou incorporando supersimetria. Por fim vimos que a abordagem de minimizar um potencial clássico é válida, pois contribuições quânticas ao potencial são análogas a uma energia de ponto zero.

Literatura Citada

[1] Mike Guidry "Gauge Field Theories: An Introduction with Applications", capítulo 5

[2] José M. Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani "Teoria de Grupos para Físicos", capítulos 1 e 2

[3] Michele Maggiore "A Modern Introduction to Quantum Field Theory", capítulo 2

[4] W.N.Cotingham and D.A.Greenwood: "An Introduction to the Standard Model of Particle Physics", Second Edition, Apêndice B

[5] D.Balin e Alexander Love "An Introduction to Gauge Field Theory", Revised Edition, capítulo 16

[6] Howard Georgi "Lie Algebras in Particle Physics", capítulo 12

[7] F.E.Close, "An Introduction to Quarks and Partons", Academic Press

[8] S.F.Novaes "Standard Model: An Introduction", capítulo 2

[9] Roberto Casalbuoni "Advanced Quantum Field Theory", capítulo 8

[10] Steven Weinberg, "Mixing Angle in Renormalizable Theories of Weak and Electromagnetic Interactions", Physical Review D, volume 5, número 8

[11] Howard Georgi e S.L. Glashow, "Attemps to Calculate Eletron Mass", Physical Review D, volume 7, número 8

[12] Howard Georgi e S.L. Glashow, "Unity of All Elementary-Particle Forces", Physical Review Letters Volume 32, número 8

[13] A.Zee "Quantum Field Theory in a Nutshell", Second Edition, Part IV

[14] Roberto Casalbuoni "Advanced Quantum Field Theory", capítulo 9

[15] W.N.Cotingham and D.A.Greenwood: "An Introduction to the Standard Model of Particle Physics", Second Edition, capítulo 10 e 11

[16] P.W.Higgs, "Broken symmetries, massless particles and gauge fields" Physics Letters, volume 12, número 2

[17] Admir Greljo, "Towards unification: SU(5) and SO(10)", www-f1.ijs.si/ ziherl/Greljo12.pdf

[18] Safinaz Ramandan, "SU(5) Grand Unified Theory".

[19] Paul Langacker, "Grand unified theories and proton decay"

[20] A.J.Buras, J.Ellis, M.K.Gaillard, D.V.Nanopoulos, “Aspects fo the grand unification of strong, weak and eletromagnetic interations”, Nuclear Physics B, Volume 135, páginas 66-92

[21] Marina von Steinkirch, “The gauge group SU(5) as a simple GUT”

[22] Ling-Fong Li, “Group theory of the spontaneously broken gauge symmetries”, Physical Review D, volume 9, número 6.

[23] T.N.Sherry, “Higgs potential in the SU(5) model”, Jornal Physics A, volume 13, páginas 2205-2018