Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física Gleb Wataghin

Gravitação com dimensões extras e uma interpretação da matéria escura

Carlos Henrique Coimbra-Araújo

Orientador: Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor

Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Ciências.

Este exemplar corresponde
à redação final da tese de doutorado
defendida pelo aluno
Carlos Henrique Coimbra-Araújo
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Prof. Dr. Patricio A. Letelier Sotomayor
Orientador

Campinas, 09/11/2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

C665g

Coimbra-Araújo, Carlos Henrique
Gravitação com dimensões extras e uma interpretação da matéria escura / Carlos Henrique Coimbra-Araújo. – Campinas, SP : [s.n.], 2009.

Orientador: Patricio Anibal Letelier Sotomayor.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Matéria escura (Astronomia). 2. Dimensões extras. 3. Curvas de rotação de galáxias. 4. Discos finos. 5. Einstein, Equações de – Soluções analíticas. I. Sotomayor, Patricio Anibal Letelier. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Gravity with extra dimensions and an interpretation of dark matter
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. Dark matter (Astronomy)
  2. Extra dimensions
  3. Galaxy rotation curves
  4. Thin disks
  5. Einstein equation – Analytical solutions
- **Área de Concentração:** Relatividade e Gravitação
- **Titulação:** Doutor em Ciências
- **Banca examinadora:**
  Prof. Patricio Anibal Letelier Sotomayor
  Profª Carola Dobrigkeit Chinellato
  Prof. Luís Raul Weber Abramo
  Prof. Pedro Cunha de Holanda
  Prof. Vilson Tonin Zanchin
- **Data da Defesa:** 14/10/2009
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física

UNICAMP
IFGW
Instituto de Física Gleb Wataghin
Secretaria de Pós-Graduação - Tel: (19) 3521-5305 FAX: (19) 3521-4142

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **CARLOS HENRIQUE COIMBRA ARAÚJO - RA 049304,** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 14 DE OUTUBRO DE 2009

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Patrício Aníbal Letelier Sotomayor – DMA/IMECC/UNICAMP
(Orientador do Candidato)

Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato – DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo – IF/USP

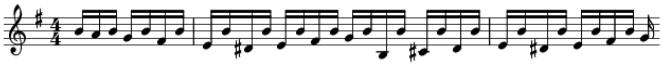
Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda – DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin – UFABC

Universidade Estadual de Campinas - Instituto de Física Gleb Wataghin – Secretaria da Pós-Graduação
CP 6165 – CEP 13083-970 - Campinas - SP –
Fone: +55 19 3521-5305 / 3521-5279 / 3521-5280
e-mail: secpos@ifi.unicamp.br

.

Àquele que descobrir que diabos é a matéria escura, dedico.



(Johann Sebastian Bach, BWV565)

.

Procurad también que, leyendo vuestra historia, el melancólico se mueva a risa, el risueño la acreciente, el simple no se enfade, el discreto se admire de la invención, el grave no la desprecie, ni el prudente deje de albarla.
(Miguel de Cervantes Saavedra, no prólogo de *El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha*[1])

Suponhamos uns homens numa habitação subterrânea em forma de caverna, com uma entrada aberta para a luz, que se estende a todo o comprimento dessa gruta. Estão lá dentro desde a infância, algemados de pernas e pescoços, de tal maneira que só lhes é dado permanecer no mesmo lugar e olhar em frente; são incapazes de voltar a cabeça, por causa dos grilhões; serve-lhes de iluminação um fogo que se queima ao longe, numa elevação, por detrás deles(...). Certamente, pessoas nessas condições não pensavam que a realidade fosse senão a sombra dos objetos.
(Platão, *A República*[2], Livro VII)

O mistério das alturas
Desfaz-se em ritmos sem forma
Nas desregradas negruras
Com que o ar se treva torna.
(Fernando Pessoa, *Bóiam farrapos de sombra*)

[1] *in:* M. de Cervantes, *Don Quijote de la Mancha* (Madrid: Real Academia Española, 2004)
[2] Trad.: P. Nassetti (São Paulo: Martin Claret, 2003).

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Patricio Letelier pela maestria na orientação coerente e dinâmica, pela rica oportunidade de oferecer um tema tão envolvente, pela amizade, pelos ensinamentos e discussões, tudo isto fruto de uma excepcional competência e profunda experiência científica. Tenha ele certeza que tal caráter acadêmico contribuiu enormemente para minha independência profissional.

Também aproveito o ensejo e agradeço ao Prof. Bryan Webber pela hospitalidade e orientação na *University of Cambridge*, ao Prof. Roldão da Rocha, da UFABC, pela amizade e colaboração acadêmica e a cada amigo que fiz durante o doutorado. Fica aqui a lembrança da enorme ajuda dada por Daniel, Manuela, Andreia, Tizei, Hugo, Crazy, Giovani, Ronaldo, Karl, Renato, Diego e tantos outros.

Devo também enorme gratidão a todos que compõem a Comissão de Pós-Graduação do IFGW/Unicamp. Ao coordenador Prof. George Kleiman e ao Prof. Eduardo Miranda pela oportunidade de oferecer espaço para o trabalho no IFGW, e pelo competente trabalho da equipe secretariada por Maria Ignez Morkazel.

Ao povo que mora no Brasil, que mesmo não sabendo, financiou minha pesquisa ao pagar a alta carga tributária. Agradeço pelo sacrifício e espero contribuir para que ele seja recompensado via meu trabalho acadêmico futuro. E espero também que a carga tributária brasileira um dia recupere a sua razão.

À Capes por ter disponibilizado os recursos financeiros a partir das bolsas Proex e PDEE 3874-07-9.

À União Astronômica Internacional, à *International Union of Pure and Applied Physics* e à *University of Oxford* por financiar algumas das conferências internacionais de que participei.

Não poderia esquecer do enorme apoio dado por todos do TRE-PE, a força e amizade de Cláudio, Claudiany, Cosme, Igor, Mário, Mirian, Serginho, Simone, e em especial, ficarei devendo imensamente, até o fim da vida do universo, a André Neves e Flávio Costa, todos da Setec/Sti.

Agradecimento sem fim a meu avô Luiz Coimbra Filho, que com seu entusiasmo e conhecimento relacionados à astronomia levou-me ao caminho da curiosidade sobre as estrelas e galáxias.

E sobretudo agradeço a meus pais Diana e José Araújo pelo constante apoio, motivação e carinho, e à noiva Tamara Pedron pela paciência, ajuda perene em muitos sentidos e amor sincero. Te vuio ben e el xe stà pi grande del móndo.

Há ainda uma infinidade de pessoas a quem devo enorme gratidão. Algumas delas já partiram, como Hipatia, Bach, Mahler, Santoro, Einstein, Thoreau, Mukunda e tio Coimbrinha. Outras ainda estão entre nós, como tia Lucy, Cláudia, Flávio, Fábio, Marco, Andreas e Seiy.

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma nova abordagem teórica e semifenomenológica acerca do que dimensões extras poderiam representar na explicação do que é a matéria escura. Aqui mostra-se que a gravitação baseada numa ação de Einstein-Hilbert para espaços-tempo com dimensão acima de quatro, produz um termo de força extra nas equações de movimento de um sistema de partículas teste, o que pode ser aplicado ao problema do campo gerado por alguma estrutura autogravitante, como *clusters* esféricos ou discos, por exemplo.

Tal resultado é explorado no cálculo de configurações que possam mimetizar uma galáxia real. As configurações calculadas são o disco fino – a partir do método de imagens – e também a distribuição isotrópica de Miyamoto-Nagai – que reproduz o comportamento idealizado de uma galáxia espiral graças à estratificação de matéria num bojo central mais um disco galático. Para tais configurações são calculadas as curvas de rotação bem como a sua estabilidade, perfis de densidade e pressão, e mostra-se que no domínio onde as curvas são estáveis há a possibilidade de se reproduzir os resultados observacionais usualmente relacionados à incidência de um halo escuro. Nos modelos apresentados, no entanto, não há inclusão de matéria escura.

O cálculo de lentes gravitacionais para *clusters* esféricos também é desenvolvido, indicando que as dimensões extras promovem desvios capazes de explicar as anomalias nas observações astronômicas de aglomerados de galáxias.

Os resultados são amplamente discutidos e algumas comparações fenomenológicas são feitas. Dos resultados em estruturas autogravitantes, conclui-se que a presença de dimensões extras (sem matéria escura) é equivalente ao procedimento usual de se adicionar matéria escura às configurações calculadas, o que poderia levar à interpretação de que a matéria escura é apenas o produto de um desconhecimento acerca da natureza do espaço-tempo.

Abstract

In the present work it is showed a new theoretical and semiphenomenological approach concerning what extra dimensions could represent to explain the nature of dark matter. Here the gravitation based on an multidimensional Einstein-Hilbert action reveals that an extra force term appears in the equations of motion for a system of test particles, that can be applied for the problem of the field produced by a self gravitating structure, as for instance spherical clusters or disks.

Such results are explored in the calculation of configurations that mimic real galaxies. The computed configurations are the thin disk – from the inverse method – and also the isotropic distribution of Miyamoto-Nagai – that reproduces the idealized behavior of a disk galaxy thanks to the stratification of matter in a central bulge plus a disk. The rotation curves, the stability, density and pressure profiles are calculated. In the domain where the curves are stable it is possible to reproduce observational results usually related to a dark halo. In present models, however, there is no inclusion of dark matter.

It is also presented the calculation for gravitational lensing of spherical clusters, indicating that extra dimensions promote deviations capable to explain anomalies in the astronomical observation of many galaxy clusters.

The results are widely discussed and some phenomenological comparisons are made. From results for self gravitating objects, one concludes that the presence of extra dimensions (without dark matter) is equivalent to the effect due to addition of dark matter in the calculated configurations. This could lead to the interpretation where dark matter concerns to an unfamiliarity related to the real structure of spacetime.

Lista de Figuras

1.1 Curva de rotação de galáxias espirais segundo a gravitação newtoniana e as observações. 2

4.1 Abordagem pictórica do método de "deslocar, cortar e refletir" para a geração de discos. 25
4.2 **(a)** Perfis de densidade superficial do disco $4D$. **(b)** Pressões no disco $4D$. 28
4.3 Curvas de rotação para o disco $4D$. 29
4.4 Estabilidade do disco $6D$ a partir do critério de Rayleigh. 39
4.5 Gráfico da frequência epicíclica quadrada para o estudo de estabilidade perturbativo de órbitas para o disco $6D$ para $0 < r' < 7$. 43
4.6 Gráfico da frequência epicíclica quadrada para o estudo de estabilidade perturbativo de órbitas para o disco $6D$ para $0 < r' < 22$. 43
4.7 Curvas de rotação para o disco $6D$ para vários parâmetros: **(a)** para parâmetros diversos; **(b)** para parâmetros estáveis; **(c)** quando r' tende ao infinito as curvas caem a zero no caso do disco fino. 44
4.8 Comparação entre os perfis de densidade do disco fino $4D$ e do disco fino $6D$. 45
4.9 Comparação entre as curvas de rotação estáveis calculadas para discos finos em $6D$ e as curvas de rotação de galáxias observadas (NGC7331, UGC12591, NGC3198). 46

5.1 Curvas de rotação de NGC3198. Aqui é considerada a comparação entre o modelo GEDi em $6D$ com Miyamoto-Nagai, o modelo de disco fino em $6D$ e outros modelos ou *fittings* 52
5.2 O gráfico de curvas de nível de densidade para a galáxia NGC 3198, obtido a partir da galáxia de Miyamoto-Nagai em $6D$. 54
5.3 **(a)** Densidade newtoniana ρ_N em $M_\odot \mathrm{pc}^{-3}$ para o modelo $4D$ de Miyamoto-Nagai para NGC 3198, onde R e z são dados em kpc. **(b)** Gráfico em $3D$ do perfil de densidade obtido para o presente modelo. Note que não há cúspide, diferentemente do problemático perfil de Navarro-Frenk-White [Nav96]. 55
5.4 Comparação entre a densidade obtida a partir das velocidades circulares calculadas, um perfil puro $4D$ de Myiamoto-Nagai, e um perfil de Satoh. 56
5.5 Galáxia espiral com curva de rotação não-plana. 56

5.6 A nova deflexão calculada para um raio de luz usando o modelo proposto é maior que a deflexão produzida por um raio passando através de um aglomerado calculado apenas com a relatividade geral em $4D$. A presença de dimensões extras atua exatamente como se fora um halo de matéria escura fria. 59

5.7 Integração numérica da deflexão por lente gravitacional produzida por um aglomerado vivendo em um universo que contém dimensões extras. Aqui usa-se uma equivalência entre o campo gravitacional induzido por dimensões extras e uma matéria fictícia — "matéria de Kaluza-Klein (KK)" — para mostrar que a contribuição devida ao campo extra induzido por dimensões extras atua como matéria escura. No exemplo acima, a matéria KK fictícia constitui $(79,5 \pm 3,3)\%$ da matéria total de um aglomerado galático com simetria esférica. Foi usado $R_y = 0,9$ e $R_x = 0,4$, que constituem valores estáveis de acordo com o calculado para discos finos. 59

6.1 **(a)** Curvas de rotação para um potencial efetivo onde a equação de Poisson é resolvida a partir de um ansatz de Miyamoto-Nagai (no limite newtoniano). **(b)** Frequência epicíclica quadrada no estudo de estabilidade das curvas apresentadas em **(a)**. 64

7.1 Curvas de rotação de NGC 3198 usando todos os modelos desenvolvidos. 67

7.2 Curvas de rotação de M31 usando todos os modelos desenvolvidos. . . 68

7.3 Curvas de rotação de UGC 12591 usando todos os modelos desenvolvidos. 69

7.4 Curvas de rotação de UGC 3270 usando todos os modelos desenvolvidos. 70

Sumário

Agradecimentos **vi**

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Lista de figuras **x**

1 Introdução **1**

2 Elementos de relatividade geral **6**
2.1 Tensor métrico 6
2.2 Formalismo de tetradas 7
2.3 Derivada covariante e transporte paralelo 7
2.4 Geodésicas 8
2.5 Curvatura e equações de Einstein 9
2.6 Limite newtoniano 10

3 Gravitação com dimensões extras **11**
3.1 Exemplos históricos e preliminares para dimensões extras em teorias físicas 12
3.1.1 A concepção de Kaluza 12
3.1.2 A compactificação de Klein 13
3.2 Geodésicas a partir de uma teoria geral com dimensões extras 14
3.2.1 Termos de uma métrica multidimensional 15
3.2.2 Calculando e compreendendo o TEM 16
3.2.3 Expressão para as equações de movimento 17
3.3 O problema da compactificação 18
3.3.1 Cordas e *braneworld* 18
3.3.2 Uma nova massa de Planck? 19
3.3.3 Seria possível dimensões extras não compactificadas? 20

4 Disco fino em $6D$ **22**
4.1 Discos finos em $4D$ 23
4.1.1 Aspectos gerais 23
4.1.2 Método de imagens e método distribucional 24
4.1.3 Cálculo de densidade e pressões 25

4.1.4 Algumas soluções 27
4.1.5 Órbitas circulares de uma partícula clássica sobre o disco . . . 28
4.2 Soluções axissimétricas para qualquer número de dimensões 30
4.3 Um disco em $6D$ 34
4.3.1 Equações de Einstein no vácuo 34
4.3.2 Conteúdo material do disco 35
4.3.3 Soluções 36
4.4 Curvas de rotação para o novo disco 37
4.5 Cálculo da estabilidade 38
4.5.1 Critério de Rayleigh 38
4.5.2 Método perturbativo 38
4.6 Curvas de rotação estáveis 44

5 Galáxias e outras estruturas 48
5.1 Galáxia de Miyamoto-Nagai 48
5.1.1 Equações de campo 48
5.1.2 Geodésicas circulares 51
5.1.3 Estabilidade 52
5.2 Exemplo: comparando o modelo com galáxias reais 54
5.3 Curvas de rotação reais não são planas 55
5.4 Aglomerados de galáxias e lentes gravitacionais 57

6 No limite newtoniano 61
6.1 Equação para o campo visível 61
6.2 Obtendo a aceleração e testando o método para um caso axisimétrico 63
6.3 Potencial efetivo de GEDi 65

7 Resultados comparados (galáxias) 66

8 Considerações finais 71

Referências Bibliográficas 73

Índice remissivo 78

1

Introdução

Um dos maiores desafios interdisciplinares que o século 20 não viu respondido foi a pergunta ao sério problema: o que é a "matéria escura"? Interdisciplinar, porque envolve astronomia, física e subáreas como cosmologia, astrofísica extragalática, física de partículas, teoria quântica de campos, gravitação e toda uma série de colaborações entre estas áreas. E com o fim da primeira década do século 21, sem dúvida, ao menos até o momento em que esta tese foi defendida, a resposta para a pergunta acima continua um mistério.

A missão do presente trabalho está longe de responder a um questionamento tão complexo. No entanto, o enfoque sobre alguns pontos, a partir dos resultados obtidos, podem sugerir algumas contraperguntas:

1. Será que a matéria escura de fato existe?

2. O que é chamado de matéria escura não seria algum tipo de ignorância acerca da natureza do espaço-tempo?

3. Seria esta ignorância relacionada ao nosso desconhecimento da possível existência de dimensões extras?

Mas o que é a matéria escura, no sentido em que é atualmente divulgada? Quais as evidências observacionais e porque não foi diretamente detectada?

Em relação à questão observacional, existe uma forte evidência para um fenômeno de massa faltante em escalas astronômicas, cujo apelido comum, segundo consta criado por Fritz Zwicky em 1937 [Zwi37], é "matéria escura" . Em poucas linhas, primeiramente, têm-se os efeitos dinâmicos e de lentes gravitacionais que apontam para a presença de matéria escura em galáxias e aglomerados (*clusters*) de galáxias. Também há a forte evidência na observação da radiação cosmológica de fundo, indicando que em grande escala o universo tem um componente considerável de matéria escura.

No caso dos discos galáticos em especial, onde se esperava que a gravitação newtoniana poderia ser uma excelente teoria, a aceleração das estrelas e do gás, conforme estimativa a partir de suas velocidades Doppler, é muito maior que aquela devido ao campo newtoniano gerado pela matéria visível. Esse é um efeito extremamente inusitado, que gera estranhas anomalias do tipo platô, ou mesmo enormes discrepâncias ascendentes, nas curvas de rotação de galáxias (veja a Fig. 1.1 para

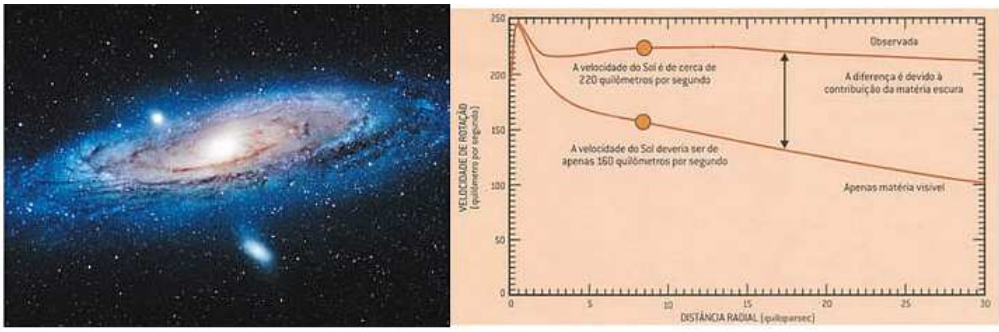


Figura 1.1: Figura ilustrativa para uma galáxia espiral (em forma de disco), digamos a própria Via Láctea, o que é esperado teoricamente pela gravitação newtoniana (curva em queda) e o que é observado realmente (a curva em forma de platô). Patrizia Caraveo e Marco Roncadelli *in* Scientific American Brasil, edição 3, agosto de 2002.

uma ilustração do que isto significa). As curvas de rotação são a maior ferramenta para se determinar a distribuição de massa em galáxias espirais e também são importantes no estudo dinâmico e na inferência da presença de "matéria faltante", i.e., matéria escura nas galáxias. Para uma revisão completa sobre curvas de rotação, veja por exemplo [Sof01].

Acerca dos aglomerados de galáxias, é verificado por medidas observacionais que eles são compostos por três ingredientes principais: $\sim 5\%$ em massa representa matéria bariônica luminosa; $\sim 15\%$ está na forma de gás interaglomerado que emite fortemente em raios-X; e os $\sim 80\%$ restantes estão em alguma forma de "matéria faltante" não-bariônica. Historicamente, a primeira evidência de tal "matéria escura" em aglomerados remonta à época de Oort e Zwicky, quando na década de 1930 [Oor32, Zwi33, Smi36, Zwi37] verificaram, aplicando o teorema do virial ao aglomerado de Coma (e outros), que a maioria da matéria do aglomerado era escura. Uma outra maneira de estimar as massas envolvidas em aglomerados de galáxias é usando-se técnicas de lentes gravitacionais, tanto no regime forte quanto no fraco [For94, Mel99]. Quando interpretada à luz da relatividade geral, o desvio produzido devido à lente de diversos aglomerados é anomalamente grande a não ser que seja assumida a presença de matéria escura em quantidades e com distribuição similar àquelas requeridas para explicar a aceleração de estrelas e gás em galáxias.

Cálculos de nucleossíntese em cosmologia [Ste94] e a observação das flutuações de temperatura na radiação cósmica de fundo [Spe03, Spe07], aliados às observações acima expostas, têm sido as principais bandeiras para confirmar a existência real da matéria escura. Em especial, os picos acústicos da radiação cósmica de fundo e cálculos da nucleossíntese são as principais ferramentas para estabelecer que a matéria escura, ou boa parte dela, deve ser não-bariônica.

Uma outra frente que fortalece o que foi dito acima é a de simulações cosmológicas para a evolução de *clusters* de galáxias a partir da teorização de matéria escura fria (ou *cold dark matter*, CDM) [Nav96, Spr05] . Tais simulações utilizam o paradigma

CDM aliado ao cenário de um universo que se expande aceleradamente (o que inclui portanto a presença de constante cosmológica, e por isso é denominado de cenário ΛCDM). Neste caso, inicialmente a matéria escura é vista como uma substância que interage pouco com a matéria convencional, formando halos escuros que envolvem galáxias e aglomerados formados gravitacionalmente pela queda do gás no centro dos halos. Diz-se nos modelos CDM que a matéria escura deve ser fria, i.e. não-relativística, para que as estruturas tenham o tempo suficiente para se formar não sofrendo qualquer impacto destrutivo.

As partículas que comporiam o halo escuro seriam essencialmente exóticas, teorizadas para que tenham baixa interação com a matéria bariônica e reproduzam a densidade $\Omega_{DM}h^2 \sim 0,1$ observada cosmologicamente [Spe07] (o que fornece uma série de características como prováveis seções de choque – derivadas da equação de Ricatti –, ou *branching ratios* – a partir do mecanismo de Higgs). Os candidatos não-bariônicos para partículas CDM variam desde miniburacos negros [Blu84, Cri06] até partículas elementares relíquias do universo primordial (muitas delas mais conhecidas como WIMPs [Ber00]). Existe uma série de dificuldades para se detectar todos estes candidatos, e uma infinidade de experimentos estão sendo feitos, sem muito sucesso (detecção direta, indireta, experimentos em aceleradores, com raios cósmicos, etc). Para um sumário atualizado sobre os experimentos veja p. ex. [Cir08]. Nesta referência destaca-se a detecção do excesso de pósitrons na Galáxia pela missão PAMELA. Este talvez seja o experimento que de alguma forma consegue divisar um pouco mais concretamente a possibilidade de alguma partícula candidata para a matéria escura, porém sem conclusões definitivas.

Após tantos experimentos, pode-se então perguntar por que a matéria escura ainda não foi detectada. Seria devido ao fato de ter tão baixa interação com a matéria bariônica? E os decaimentos previstos para partículas do modelo padrão, por que não são identificados? Ou será que a matéria escura simplesmente não existe? Até o momento, a melhor evidência, não vem da física experimental, e sim da astrofísica observacional, sem uma definição clara porém de qual tipo de partícula se trataria. Um exemplo famoso de uma observação astronômica é o da colisão de aglomerados de galáxias (como o *Bullet Cluster* [Clo04]). Não obstante, o baixo número de colisões observadas que forneçam evidências sobre a matéria escura comprometem conclusões definitivas sobre o assunto.

Complementando tudo isso, o sucesso das simulações do ΛCDM é inequívoco para a grande escala do universo e com ele se obtêm excelentes resultados para o processo de formação e evolução das estruturas. No entanto, apresenta diversos problemas para a escala de tamanho de galáxias. Um dos potenciais problemas, não só no ΛCDM mas como em outras versões de modelos CDM, é que eles predizem halos de galáxia com perfil de densidade com uma cúspide na parte central e centenas ou milhares de pequenas galáxias satélites, em contraposição com o que é observado no mundo real [Moo94].

O próprio apelo que envolve o tema matéria escura e mais os problemas presentes nos modelos CDM, levaram alguns pesquisadores a se perguntarem se a matéria escura existiria realmente e a proporem a ideia de que o fenômeno de massa faltante

poderia ser traduzido como um efeito devido a modificações teóricas da gravidade newtoniana ou da relatividade geral para escalas de tamanho da ordem de galáxias e aglomerados. Alguns exemplos desse esforço são a modificação newtoniana de Milgrom [Mil83] e as modificações relativísticas de Moffat [Mof05] e Bekenstein [Bek04]. Estes modelos são muito bem sucedidos na maior parte dos aspectos relacionados às observações, tendo apenas alguma dificuldade em explicar fenômenos dinâmicos de colisão de *clusters*, como o já referido *Bullet Cluster*.

Dados os principais paradigmas acima, que envolvem a explicação do que seria a massa faltante em astronomia (e sua interpretação como matéria escura ou não), pode-se explanar em algumas linhas os principais aspectos do presente trabalho. Inicialmente, será tomado um caminho bastante conservador no sentido em que a relatividade geral não será modificada. No entanto, toma-se *a priori* que nada impede que o espaço-tempo seja descrito como multidimensional. Também, nenhuma matéria extra é evocada ou adicionada no cálculo de objetos autogravitantes. Uma modificação efetiva é encontrada no espaço-tempo $4D$, traduzida essencialmente a partir do que se encontra nas equações de movimento para o sistema, dada uma certa métrica em d-dimensões: um termo de força externa aparece e o potencial gravitacional efetivo tem um componente de correção. Será apresentada uma nova abordagem teórica e semifenomenológica acerca do que dimensões extras poderiam representar na explicação do que é a matéria escura. Aqui mostra-se que a gravitação baseada numa ação de Einstein-Hilbert para espaços-tempo com dimensão acima de quatro, produz um termo de força extra nas equações de movimento de um sistema de partículas teste, o que pode ser aplicado para o problema do campo gerado por alguma estrutura autogravitante, como *clusters* esféricos ou discos, por exemplo.

Não é novidade alguma introduzir-se dimensões extras para explicar a matéria escura. No entanto, em geral, as dimensões extras são evocadas para gerar as chamadas "partículas de Kaluza-Klein", induzidas por modos extradimensionais. Assim, estas partículas seriam uma espécie de WIMP. Por exemplo, na teoria de dimensões extras universais [App01] obtém-se uma partícula estável leve que apresentaria as características necessárias para representar matéria escura [Hoo07].

Já aqui, não será apresentada nenhuma teoria fundamental e nem se evocará a indução de partículas de Kaluza-Klein. As correções nas equações de movimento e no potencial obtidos a partir da introdução de dimensões extras numa teoria einsteiniana objetiva, já possibilitam uma interpretação de massa faltante como um fenômeno associado à teoria de gravitação com dimensões extras. Tal enfoque será essencialmente debatido no Capítulo 3, que possui resultados totalmente originais. Na verdade, a discussão produzida naquele capítulo leva a uma série de construções fenomenológicas também completamente originais que serão apresentadas nos Capítulos 4, 5 e 7. Respectivamente, os capítulos referidos modelam um disco fino – a partir do método de imagens – e uma galáxia – a partir do ansatz de Miyamoto-Nagai – ambos vivendo num universo multidimensional. Exemplos usando-se seis dimensões serão apresentados. Para tais configurações são calculadas as curvas de rotação bem como a sua estabilidade, perfis de densidade e pressão, e mostra-se

que no domínio onde as curvas são estáveis há a possibilidade de se reproduzir os resultados observacionais usualmente relacionados à incidência de um halo escuro. Também no Capítulo 5 será apresentado o cálculo de lentes gravitacionais para *clusters* esféricos, indicando que as dimensões extras promovem desvios capazes de explicar as anomalias nas observações astronômicas de *clusters* de galáxias.

Como teste dos modelos relativísticos apresentados, no Capítulo 6 calculam-se as equações de movimento no limite newtoniano, mostrando-se resultados similares aos obtidos para os casos relativísticos.

O Capítulo 7 mostra resultados para galáxias utilizando-se os modelos calculados em $6D$ para o disco fino relativístico, a galáxia de Miyamoto-Nagai e para órbitas do disco no limite newtoniano.

Assim, os Capítulos 3, 4, 5, 6 e 7 apresentam material totalmente novo. A abordagem será concentrada no cálculo em relatividade geral das estruturas autogravitantes. Portanto, para uma melhor compreensão deste material, introduz-se no Capítulo 2 os pontos essenciais da teoria da relatividade geral.

UNICAMP

2

Elementos de relatividade geral

Para se compreender boa parte do tratamento e resultados obtidos nesta tese, é necessário apresentar alguns dos aspectos essenciais da relatividade geral. A relatividade geral apresenta a descrição geométrica da gravitação, introduzindo a noção de espaço-tempo curvo e sua correlação com a distribuição de matéria. Maiores detalhes sobre relatividade geral, bem como aplicações, podem ser vistos em [Crl97, Crl03, Mis73, Sch85, Wal84, Wei72].

No decorrer do texto, será usada a convenção de soma de Einstein, ou seja, dados dois tensores a^{κ}_{μ} e b^{μ}_{ν} que tenham índices repetidos, porém sendo um deles com índice "baixado" e o outro com índice "levantado", será assumido que $a^{\kappa}_{\mu} b^{\mu}_{\nu} = \sum_{\mu=0}^{d-1} a^{\kappa}_{\mu} b^{\mu}_{\nu}$, onde os índices gregos, no presente capítulo, variam de 0 a $N-1=3$, i.e., o espaço-tempo $4D$. Nos capítulos seguintes esta visão será estendida para espaços-tempo com maiores dimensões.

2.1 Tensor métrico

Intuitivamente, o conceito de métrica está relacionado a uma distância infinitesimal ao quadrado, i.e., a um deslocamento ao quadrado. Um dado vetor tangente $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a uma variedade em certo ponto pode levar ao cálculo de tal deslocamento. Assim, dada a sua natureza de "distância infinitesimal ao quadrado", uma certa métrica g deve ser uma aplicação linear que leva $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ em um número. Este tipo de aplicação é comumente denominada de tensor. Preliminarmente, pode-se definir **tensor** como uma **aplicação multilinear** (i.e. linear para cada variável) **de vetores** (ou vetores duais) **em números**. Ou de maneira mais formal, seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial cujo espaço dual é $\mathcal{V}^*$. Então um **tensor do tipo** (r, s) é definido como a seguinte aplicação multilinear

$$\mathbf{T}^r_s : \underbrace{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \times ... \times \mathcal{V}^*}_{r} \times \underbrace{\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times ... \times \mathcal{V}}_{s} \to \mathbb{R}.$$

O conjunto de todas as aplicações, para r e s fixos, formam um espaço vetorial representado como $\mathcal{T}^r_s(\mathcal{V})$. O número r é denominado de **grau covariante** do tensor, e s de **grau contravariante** do tensor. Um tensor do tipo $(r, 0)$ é chamado de **tensor contravariante** de *posto* r, e um do tipo $(0, s)$ é chamado de **tensor covariante** de *posto* s.

Tem-se então a definição:

Definição 2.1 ► *Uma métrica* g *definida sobre uma variedade* $\mathcal{M}$ *é um campo tensorial do tipo* $(0,2)$ *simétrico e não-degenerado, escrito em termos de seus componentes* $g_{\mu\nu}$*, numa dada base, como a soma que define o elemento de linha*

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu. \blacktriangleleft \tag{2.1}$$

Dada uma métrica g, sempre será possível encontrar uma base ortonormal tal que $\mathrm{g}(v_\mu, v_\nu) = 0$ se $\mu \neq \nu$ e $\mathrm{g}(v_\mu, v_\mu) = \pm 1$. O número de sinais $+$ e $-$ é denominado assinatura da métrica. Ordinariamente, na geometria diferencial a métrica é positiva definida, i.e., com assinatura $(+,+,...,+)$ (métrica riemanniana). Por outro lado, na relatividade geral a métrica do espaço-tempo $4D$ pode ser convencionada como $(-,+,+,+)$ (denominada lorentziana).

2.2 Formalismo de tetradas

Em alguns problemas torna-se vantajosa a escolha de uma base de tetradas (*vierbein*) constituída por quatro quadrivetores linearmente independentes e projetar as grandezas físicas convenientes nesta base. Um desenvolvimento detalhado deste formalismo pode ser encontrado em [Cha98].

Em cada ponto do espaço-tempo definimos uma base de quatro vetores contravariantes ${\epsilon_{(a)}}^\mu$, onde os índices entre parênteses referem-se aos índices do tensor. Associados aos vetores contravariantes temos os vetores covariantes $\mathbf{e}_{(a)\mu} = g_{\mu\nu}{\mathbf{e}_{(a)}}^\nu$. Definimos ainda a inversa ${\mathbf{e}^{(b)}}_\mu$ da matriz $\left[{e_{(a)}}^\mu\right]$ de modo que

$${\mathbf{e}_{(a)}}^\mu {\mathbf{e}^{(b)}}_\mu = {\delta^{(b)}}_{(a)}, \quad {\mathbf{e}_{(a)}}^\mu {\mathbf{e}^{(a)}}_\nu = {\delta^\mu}_\nu. \tag{2.2}$$

Assume-se ainda que ${\mathbf{e}_{(a)}}^\mu \mathbf{e}_{(b)\mu} = \eta_{(a)(b)}$, onde $\eta_{(a)(b)}$ são os elementos da matriz diagonal com elementos diagonais $(-1,1,1,1)$. Assim, são obtidas

$$\eta_{(a)(b)}{\mathbf{e}^{(a)}}_\mu = \mathbf{e}_{(b)\mu}, \quad \eta^{(a)(b)}\mathbf{e}_{(a)\mu} = \mathbf{e}^{(b)}_\mu, \tag{2.3}$$

além da importante propriedade $\mathbf{e}_{(a)\mu}{\mathbf{e}^{(a)}}_\nu = g_{\mu\nu}$. Dado um vetor ou tensor, pode-se projetá-los na base de tetradas para obter-se seus componentes de tetradas da seguinte maneira

$$A_{(a)} = \mathbf{e}_{(a)\mu}A^\mu = {\mathbf{e}_{(a)}}^\mu A_\mu, \tag{2.4}$$

$$T_{(a)(b)} = \mathbf{e}_{(a)\mu}\mathbf{e}_{(b)\nu}T^{\mu\nu} = {\mathbf{e}_{(a)}}^\mu {\mathbf{e}_{(b)}}^\nu T_{\mu\nu}. \tag{2.5}$$

2.3 Derivada covariante e transporte paralelo

Inicialmente, supondo que um dado espaço-tempo seja uma variedade $\mathcal{M}$, deve existir sobre $\mathcal{M}$ um operador derivada ∇, definido como um operador que leva um tensor do tipo (r,s) em um do tipo $(r,s+1)$, realizando assim uma operação covariante. Esta derivada, denominada de derivada covariante, deve ser consistente com a noção de vetor tangente como derivada direcional de um campo escalar. Para

um tensor de *posto* genérico, tem-se

$$\nabla_\mu T^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\tau_1\ldots\tau_s} = \tilde{\nabla}_\mu T^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\tau_1\ldots\tau_s} + \sum_i C^{\nu_i}{}_{\mu\kappa} T^{\nu_1\ldots\kappa\ldots\nu_r}{}_{\tau_1\ldots\tau_s} - \sum_j C^{\kappa}{}_{\mu\tau_j} T^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\tau_1\ldots\kappa\ldots\tau_s}, \tag{2.6}$$

onde $C^\tau{}_{\mu\nu}$ é uma conexão. A aplicação mais importante para a Eq. (2.6) vem do caso em que $\tilde{\nabla}_\mu$ é um operador derivada parcial ∂_μ e a condição de metricidade é satisfeita $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ (estas condições definem a geometria riemanniana).

Neste caso, $C^\tau_{\mu\nu}$ pode ser escrito como $\left\{ {\tau \atop \mu\nu} \right\}$, ou $\Gamma^\tau_{\mu\nu}$, comumente chamado símbolo de Christoffel. Assim, para um dado vetor v^μ pode-se escrever

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \left\{ {\nu \atop \mu\tau} \right\} v^\tau. \tag{2.7}$$

$$\left\{ {\tau \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\tau\kappa} \left[\partial_\mu g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \right]. \tag{2.8}$$

Dado um operador derivada covariante ∇_μ, definido sobre uma variedade $\mathcal{M}$, o transporte paralelo de um certo vetor $\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu$ ao longo de uma curva C, cujo vetor tangente é $\mathbf{t}$, é definido se a condição

$$t^\mu \nabla_\mu v^\nu = 0 \tag{2.9}$$

é satisfeita ao longo de toda a curva. Similarmente, um tensor sofre transporte paralelo se

$$t^\mu \nabla_\mu T^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\tau_1\ldots\tau_s} = 0. \tag{2.10}$$

2.4 Geodésicas

Quando a Eq. (2.9) é escrita a partir do símbolo de Christoffel tem-se

$$t^\mu \partial_\mu v^\nu + t^\mu \left\{ {\nu \atop \mu\tau} \right\} v^\tau = 0, \tag{2.11}$$

ou, dado que t^μ define um parametro t ao longo da curva C tal que $t^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$ tem-se

$$\frac{\mathrm{d}v^\nu}{\mathrm{d}t} + t^\mu \left\{ {\nu \atop \mu\tau} \right\} v^\tau = 0. \tag{2.12}$$

Quando o transporte paralelo acima ocorre para um vetor $\mathbf{v}$ que é o próprio vetor tangente a C em dado ponto, i.e, $v^\mu = t^\mu$, então é dito que t^μ sofre um transporte paralelo sobre si mesmo e agora a curva C é chamada de **geodésica** com equação

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}t^2} + \left\{ {\mu \atop \nu\tau} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\tau}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{2.13}$$

Para um campo físico, como o gravitacional p.ex., a equação acima descreve a trajetória de uma partícula teste que encontra-se livre em tal campo. A equação acima, na verdade, é um conjunto de equações de movimento que também podem ser obti-

das através da variação da lagrangiana

$$L = g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}. \tag{2.14}$$

2.5 Curvatura e equações de Einstein

A falha de um vetor em retornar a seu valor original após sofrer transporte paralelo em uma curva fechada é governada pelo tensor de curvatura de Riemann ${R_{\mu\nu\tau}}^\kappa$. Será bastante útil estudar os tensores de *posto* menor associados ao tensor de Riemann. Assim, tem-se o tensor de Ricci, definido como

$$R_{\mu\nu} = {R_{\mu\tau\nu}}^\tau, \tag{2.15}$$

e o escalar de curvatura, ou escalar de Ricci

$$R = R_\mu^\mu. \tag{2.16}$$

Pode-se mostrar que o tensor de Ricci é escrito em termos dos símbolos de Christoffel como

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} - \partial_\beta \left\{ {\mu \atop \alpha\mu} \right\} + \left\{ {\nu \atop \alpha\beta} \right\} \left\{ {\mu \atop \nu\mu} \right\} - \left\{ {\nu \atop \alpha\nu} \right\} \left\{ {\mu \atop \nu\beta} \right\} \tag{2.17}$$

Agora, suponha que o sistema esteja sob a presença de um campo gravitacional. Neste caso, a equação geodésica de uma partícula livre apresentará termos que podem ser associados à curvatura do espaço-tempo (este é uma breve sentença daquilo que pode ser chamado de princípio da equivalência). Logo, como o espaço-tempo apresenta curvatura, não existe mais uma família global de observadores inerciais.

Na relatividade geral, os campos e a distribuição de matéria são descritos através do tensor $T_{\alpha\beta}$, chamado de tensor de energia-momento, ou TEM. O TEM para um fluido perfeito é dado por

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + P(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta), \tag{2.18}$$

que deve satisfazer à equação de movimento ${T_{\alpha\beta}}^{;\alpha} = 0$.

As equações capazes de descrever a relação entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria, conhecidas como equações de Einstein de campo, são

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \tag{2.19}$$

onde $G_{\alpha\beta}$ é chamado de tensor de Einstein. As equações de Einstein também podem ser obtidas variando-se a ação de Hilbert

$$S = -\int \left[\frac{1}{16\pi}R + \mathcal{L}_M\right]\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x, \tag{2.20}$$

onde $\sqrt{-g}$ é a raiz quadrada do determinante da matriz relacionada ao tensor

métrico $g_{\mu\nu}$, e $\mathcal{L}_M$ é a densidade lagrangiana referente à distribuição de matéria. O TEM é então obtido a partir da definição

$$T_{\alpha\beta} := -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\alpha\beta}} = -2\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\alpha\beta}} + g_{\alpha\beta}\mathcal{L}_M. \tag{2.21}$$

2.6 Limite newtoniano

Impondo a condição de baixas velocidades e campos fracos, e tomando as componentes $T_{00} = T_{tt}$ para o TEM de um fluido perfeito, Eq. (2.18), tem-se $T_{tt} \approx \rho u_t u_t \approx \rho$ e o traço $T = T_\mu{}^\mu = \rho - 3P$. Outra forma de escrever as equações de Einstein (2.19) é tomando o seu traço, o que implica em $R_{\alpha\beta} = 8\pi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right)$. Desta forma, obtêm-se para o tratamento ora utilizado

$$R_{tt} \approx 4\pi(\rho + 3P). \tag{2.22}$$

Como o campo é fraco, pode-se imaginar que a métrica é aproximadamente plana, i.e. o espaço-tempo é Minkowski com uma perturbação $h_{\mu\nu}$ tal que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. O componente R_{tt} reduz-se a

$$R_{tt} \approx \frac{1}{2}\nabla^2 h_{tt}. \tag{2.23}$$

Comparando-se a Eq. (2.22) com (2.23) e usando a relação $h_{tt} = 2\phi$, obtêm-se a equação

$$\nabla^2\phi = 4\pi(\rho + 3P) = 4\pi\rho_N, \tag{2.24}$$

onde ρ_N é a densidade efetiva newtoniana. Na matéria comum, a pressão (P/c^2 em unidades não geométricas) é muito menor do que a densidade de energia e assim tem-se $\rho_N \approx \rho$, resgatando-se a equação de Poisson para a dinâmica newtoniana.

3

Gravitação com dimensões extras

As teorias de gravitação com dimensões extras (algumas vezes referidas como teorias de Kaluza-Klein[1]) compreendem um conjunto de concepções onde o espaço-tempo possui mais de 1+3 dimensões. Originalmente, os trabalhos de Kaluza [Kal97] e Klein [Kle26] tinham o objetivo de unificar ambas a gravitação $4D$ de Einstein e a teoria eletromagnética de Maxwell, usando o artifício da introdução de uma quinta dimensão. No entanto, atualmente, estas teorias tem uma grande profusão de novas motivações: a unificação das interações gravitacional, eletromagnética, fraca e forte via uma teoria de supergravidade em $11D$ [Wit81] ou via teoria de supercordas em $10D$ [Gre82]; a resolução do problema da hierarquia em teoria de campos, através das chamadas dimensões extras "largas" (onde o raio de compactificação não se limita a ser do tamanho do comprimento de Planck – i.e. $\sqrt{\hbar G/c^3} = 10^{-33}$cm, como em supercordas [para $\hbar$ constante de Planck, G constante gravitacional e c a velocidade da luz] – mas pode adquirir valores bem maiores, como até da ordem de $\sim$ 1mm). No caso desta última, os principais representantes são: os modelos de Randall-Sundrum (RS) [Rsu99a, Rsu99b], de Arkani-Hammed-Dmopoulous-Dvali (ADD) [Ark98] ou de dimensões extras universais (UED) [App01].

A presente tese vem mostrar uma possível motivação astrofísica para dimensões extras: haveria alguma conexão entre dimensões extras e matéria escura? Algumas teorias de dimensões extras já possuem uma resposta preparada. Por exemplo, na concepção UED é possível obter fenomenologicamente uma partícula que tem propriedades similares à da matéria escura supersimétrica (para uma revisão ver [Hoo07]). Aqui, no entanto, será argumentado o fato de que a simples presença de dimensões extras já é suficiente para produzir efeitos capazes de explicar o problema da massa faltante sem a necessidade de uma partícula de matéria escura.

Está fora do escopo do presente trabalho adentrar as teorias de supercordas, supergravidade ou alguma teoria de dimensões extras "largas". Será apresentada, no entanto, uma breve introdução à concepção de Kaluza-Klein, para permitir uma melhor compreensão da proposta do caráter das equações de movimento num universo com mais de $1 + 3$ dimensões e a interpretação do problema da massa faltante.

Neste capítulo, a não ser quando especificado, $c = 1$, $G = 1$ e a assinatura

[1]Esta terminologia é algumas vezes considerada errônea pois nem todas as teorias com dimensões extras tem a formatação sugerida por Kaluza-Klein. A confusão tem sido persistentemente realimentada na literatura por alguns autores (p.ex. [Ove97])

adotada para a métrica é $(-,+,+,+)$ para a parte $4D$ (e em complemento, será considerado *ab initio* que a parte extra representa coordenadas espaciais).

3.1 Exemplos históricos e preliminares para dimensões extras em teorias físicas

3.1.1 A concepção de Kaluza

Na concepção de Kaluza [Kal97] (para uma revisão, veja [Duf94]), o eletromagnetismo pode ser unificado à gravitação, ao incluir-se na relatividade geral um espaço-tempo de cinco dimensões. Tal procedimento pode ser sumarizado como se segue.

As equações de Einstein em $5D$ para um tensor de energia-momento pentadimensional nulo são

$$G_{AB} = 0, \tag{3.1}$$

ou equivalentemente

$$R_{AB} = 0, \tag{3.2}$$

onde $A, B = 0, 1, ..., 4$, e como já visto no Cap. 2, o tensor de Einstein é $G_{AB} \equiv R_{AB} - Rg_{AB}/2$, com R_{AB} e $R = g_{AB}R^{AB}$ o tensor e o escalar de Ricci pentadimensionais, respectivamente, e g_{AB} é o tensor métrico pentadimensional. A versão $5D$ das equações de Einstein podem ser obtidas da variação da versão $5D$ da ação usual de Einstein-Hilbert [Eq. (2.20)]

$$S = -\frac{1}{16\pi^{(5)}G} \int R\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x\mathrm{d}y \tag{3.3}$$

onde aqui $y = x^4$ representa a coordenada extra e ${}^{(5)}G$ simboliza a constante gravitacional pentadimensional.

A idéia de Kaluza era que o universo deveria ser vazio nas dimensões superiores e as dimensões extras deveriam explicar a própria existência da matéria em quatro dimensões como uma manifestação da geometria.

Uma outra característica desta teoria é a escolha da métrica $5D$ como algo essencial. Em geral, se identifica a parte $4D$ da métrica com $g_{\alpha\beta}$, e os termos $g_{\alpha 4}$ com A_α (o potencial eletromagnético) e a parte g_{44} com um campo escalar ϕ. Uma maneira conveniente de escrever a métrica é

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + \kappa^2\phi^2 A_\alpha A_\beta & | & \kappa\phi^2 A_\alpha \\ - - - & & - - - \\ \kappa\phi^2 A_\beta & | & \phi^2 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

onde o potencial eletromagnético A_α está escalonado de uma constante κ de forma a obter-se os valores multiplicativos corretos na ação. Como escrito em (3.4) a métrica, e também todas as funções envolvidas, dependem apenas das coordenadas

$4D$ (condição cilíndrica). Assim, as equações de campo calculadas são [Les82, Thi87]

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\kappa^2\phi^2 T^{EM}_{\alpha\beta} - \frac{1}{\phi}[\nabla_\alpha(\partial_\beta\phi) - g_{\alpha\beta}\Box\phi], \tag{3.5}$$

$$\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = -3\frac{\partial^\alpha\phi}{\phi}F_{\alpha\beta}, \tag{3.6}$$

$$\Box\phi = \frac{1}{4}\kappa^2\phi^3 F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \tag{3.7}$$

onde $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - Rg_{\alpha\beta}/2$ é o tensor convencional de Einstein, $T^{EM}_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4 - F_\alpha{}^\mu F_{\beta\mu}$ é o tensor de energia-momento eletromagnético, com $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ e $\Box$ é o dalambertiano. Existem um total de $10+4+1 = 15$ equações, coincidindo como esperado com os quinze elementos independentes da métrica pentadimensional.

3.1.2 A compactificação de Klein

A idéia de que as quantidades físicas não dependeriam das dimensões extras (conforme sugerido por Kaluza) foi considerada inadequada por Klein [Kle26], que postulou portanto a idéia de que a dependência deveria existir, mas ela seria condicionada a uma dimensão extra extremamente pequena.

Klein assumiu que a quinta coordenada deveria ter escala de comprimento e possuiria duas propriedades principais: (1) topologia circular (S^1), e como já dito (2) pequena escala. Sob a propriedade (1), qualquer quantidade $f(x,y)$ [onde $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ e $y = x^4$] se torna periódica, tal que $f(x,y) = f(x, y + 2\pi r)$ onde r é o parâmetro de escala da quinta dimensão (ou o raio da quinta dimensão). Assim, todos os campos são expandidos como séries de Fourier:

$$g_{\alpha\beta}(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g^{(m)}_{\alpha\beta}(x)e^{imy/r}, \quad A_\alpha(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A^{(m)}_\alpha(x)e^{imy/r},$$
$$\phi(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi^{(m)}e^{imy/r}, \tag{3.8}$$

onde o superescrito (m) refere-se ao m-ésimo modo de Fourier. Graças à teoria quântica, estes modos possuem momento na direção y da ordem de $|m|/r$. Aqui entra a propriedade (2): se r é suficientemente pequeno, então os momentos na direção y serão tão grandes que estarão fora da detecção de qualquer experimento, para qualquer $m \neq 0$. Apenas nos modos em que $m = 0$, os quais são independentes de y, haverá a possibilidade de observabilidade, como requerida pela teoria de Kaluza.

3.2 Geodésicas a partir de uma teoria geral com dimensões extras

Na relatividade geral, ao lado das soluções que oferecem importante suporte para entender buracos negros e cosmologia, também observa-se um crescente interesse pelo caso de soluções para espaços-tempo multidimensionais. Existem muitas motivações para se considerar uma tal abordagem. Atualmente a idéia de Kaluza-Klein de unir campos desenvolveu-se na direção da teoria de cordas. Além disso, desde os últimos dez anos tem-se feito um esforço para compreender o problema hierárquico em teoria de campos a partir da diluição da gravidade em dimensões extras submilimétricas [Ark98, Rsu99a, Rsu99b]. No entanto, há uma motivação mais básica do ponto de vista puramente gravitacional/geométrico que vem a partir da tentativa de compreender se as dimensões extras poderiam desempenhar um papel importante na natureza intrínseca do espaço-tempo. Neste sentido, o esforço desenvolvido aparece na forma de algumas soluções das equações de Einstein para espaços-tempo multidimensionais, como podem ser vistas na seguinte série de referências: [Leu60, Dob82, Cho82, Pol83, Gib82, Gib86, Let93, Cve95, Ras95, Emp02].

Na presente seção serão desenvolvidas as equações de movimento de uma partícula teste que viva em um universo multidimensional, com o objetivo de observar o que poderia acontecer com as órbitas circulares se a métrica fosse axisimétrica. Esse último cenário será melhor desenvolvido no próximo capítulo, onde serão calculadas as órbitas explicitamente para um disco. No presente capítulo, o caso será mais geral, e o objetivo será mais teórico que fenomenológico. No Cap. 7, testes fenomenológicos decorrentes do seguinte desenvolvimento serão comparados a outros modelos também aqui desenvolvidos.

Inicialmente, usando uma concepção *alla* Kaluza, i.e., assumidas as condições cilíndricas e onde não há preocupação com a compactificação, pode-se expandir a métrica de um universo multidimensional em setores $1+3$ e setores extras, onde não há *a priori* nenhum impedimento para os campos acessarem as dimensões extras. Esse é o cenário mais geral que pode ser imaginado. Portanto, para tal cenário, a ação de Einstein–Hilbert multidimensional (com matéria) é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^n y \sqrt{-{}^{(4+n)}g}\ ({}^{(4+n)}R + \mathcal{L}_M), \tag{3.9}$$

que remete às equações de campo

$${}^{(4+n)}G_{AB} = 8\pi\ {}^{(4+n)}T_{AB}, \tag{3.10}$$

onde $A, B = 0, 1, ..., 4+n-1$, y são as coordenadas extras e os índices $(4+n)$ informam sobre a natureza multidimensional da ação. A partir de agora, por simplificação, ${}^{(4+n)}G_{AB}$ e ${}^{(4+n)}T_{AB}$ serão chamados de G_{AB} e T_{AB} (o mesmo para o tensor e o escalar de curvatura, assim como para a métrica).

3.2.1 Termos de uma métrica multidimensional

Imaginando um universo com mais de $1+3$ dimensões, i.e., $(1+3+n)D$, a métrica mais geral para este caso é dada por

$$g_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha b} \\ \hline g_{a\beta} & g_{ab} \end{array} \right), \tag{3.11}$$

onde $\alpha, \beta = (0, .., 3)$ e $a, b = (4, .., n)$, para um inteiro $n \geqslant 4$, e onde os elementos da métrica são apenas funções das coordenadas $1+3$. De fato, a Eq. (3.11) pode ser reescrita, por conveniência, de uma maneira diferente como

$$g_{AB} = g_{\alpha\beta}\delta^{\alpha}_{A}\delta^{\beta}_{B} + g_{ab}\delta^{a}_{A}\delta^{b}_{B} + g_{\alpha b}\delta^{\alpha}_{A}\delta^{b}_{B} + g_{a\beta}\delta^{a}_{A}\delta^{\beta}_{B}, \tag{3.12}$$

para $A, B = (0, .., 3+n)$ e onde δ^{i}_{j} são os símbolos de Kronecker. As derivadas dos elementos de tal métrica são

$$\begin{aligned} g_{AB,C} = \quad & g_{\alpha\beta,\gamma}\delta^{\alpha}_{A}\delta^{\beta}_{B}\delta^{\gamma}_{C} + g_{ab,\gamma}\delta^{a}_{A}\delta^{b}_{B}\delta^{\gamma}_{C} \\ & + g_{\alpha b,\gamma}\delta^{\alpha}_{A}\delta^{b}_{B}\delta^{\gamma}_{C} + g_{a\beta,\gamma}\delta^{a}_{A}\delta^{\beta}_{B}\delta^{\gamma}_{C}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por simplicidade, pode-se tratar o caso onde a métrica é diagonal, i.e., $g_{AB} = g_{\alpha\beta}\delta^{\alpha}_{A}\delta^{\beta}_{B} + g_{ab}\delta^{a}_{A}\delta^{b}_{B}$. Aqui, a inversa da métrica será

$$g^{AB} = g^{\alpha\beta}\delta^{A}_{\alpha}\delta^{B}_{\beta} + g^{ab}\delta^{A}_{a}\delta^{B}_{b}, \tag{3.14}$$

e as derivadas vêm diretamente da Eq. (3.13)

$$g_{AB,C} = g_{\alpha\beta,\gamma}\delta^{\alpha}_{A}\delta^{\beta}_{B}\delta^{\gamma}_{C} + g_{ab,\gamma}\delta^{a}_{A}\delta^{b}_{B}\delta^{\gamma}_{C}. \tag{3.15}$$

Pode-se derivar os seguintes símbolos de Christoffel

$$\left\{ {A \atop BC} \right\} = \frac{1}{2} g^{AM}(g_{BM,C} + g_{CM,B} - g_{BC,M}). \tag{3.16}$$

Desenvolvendo estes através das Eqs. (3.14) e (3.15) obtém-se

$$\left\{ {A \atop BC} \right\} = \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} \delta^{A}_{\alpha}\delta^{\beta}_{B}\delta^{\gamma}_{C} + \frac{1}{2}\left[g^{am}(g_{bm,\gamma}\delta^{A}_{a}\delta^{b}_{B}\delta^{\gamma}_{C} + g_{cm,\beta}\delta^{A}_{a}\delta^{\beta}_{B}\delta^{c}_{C}) - g^{\alpha\mu}g_{bc,\mu}\delta^{A}_{\alpha}\delta^{b}_{B}\delta^{c}_{C} \right]. \tag{3.17}$$

Os componentes do tensor de Ricci são escritos como

$$R_{AB} = \partial_M \left\{ {M \atop AB} \right\} - \partial_B \left\{ {M \atop AM} \right\} + \left\{ {N \atop AB} \right\} \left\{ {M \atop NM} \right\} - \left\{ {N \atop AM} \right\} \left\{ {M \atop NB} \right\}. \tag{3.18}$$

Desenvolvendo para o caso em que a métrica depende apenas de x^{α}, a Eq. (3.18) pode ser reescrita como

$$R_{AB} = R_{\alpha\beta}\delta^{\alpha}_{A}\delta^{\beta}_{B} + R_{ab}\delta^{a}_{A}\delta^{b}_{B}, \tag{3.19}$$

e sem termos cruzados entre a parte (1+3) e a parte extra. Introduzindo (3.14) e suas derivadas (3.15) nos símbolos de Christoffel (3.17) obtêm-se as seguintes expressões para a Eq. (3.19)

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta} \quad - \quad & \frac{1}{2}\left[g^{mc}{}_{,\beta}g_{mc,\alpha} + g^{mc}g_{mc,\alpha\beta}\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}g^{nc}g_{mc,\alpha}g^{me}g_{ne,\beta}\right], \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} R_{ab} = \quad & -\frac{1}{2}\left[g^{\mu\gamma}{}_{,\mu}g_{ab,\gamma} + g^{\mu\gamma}g_{ab,\gamma\mu} - \frac{1}{2}\left(g^{nc}g_{ac,\mu}g^{\mu\gamma}g_{nb,\gamma}\right.\right. \\ & \left.\left. + g^{\nu\gamma}g_{am,\gamma}g^{mc}g_{bc,\nu} - g^{\nu\gamma}g_{ab,\nu}g^{mc}g_{mc,\gamma}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ é o tensor de Ricci convencional para a parte $(1+3)D$ (i.e. $\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \partial_{\mu}\left\{{}^{\mu}_{\alpha\beta}\right\} - \partial_{\beta}\left\{{}^{\mu}_{\alpha\mu}\right\} + \left\{{}^{\nu}_{\alpha\beta}\right\}\left\{{}^{\mu}_{\nu\mu}\right\} - \left\{{}^{\nu}_{\alpha\nu}\right\}\left\{{}^{\mu}_{\nu\beta}\right\}$).

3.2.2 Calculando e compreendendo o TEM

Agora, para $G_{AB} = R_{AB} - 1/2Rg_{AB}$ e $R = g^{MN}R_{MN}$, serão obtidos os componentes estendidos do tensor de energia-momento (onde para a métrica diagonal o TEM pode ser escrito como $T_{AB} = T_{\alpha\beta}\delta^{\alpha}_{A}\delta^{\beta}_{B} + T_{ab}\delta^{a}_{A}\delta^{b}_{B}$)

$$8\pi T_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(g^{MN}R_{MN})g_{\alpha\beta}, \tag{3.22}$$

$$8\pi T_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}(g^{MN}R_{MN})g_{ab}. \tag{3.23}$$

O tensor $T_{\alpha\beta}$ representa o conteúdo de energia/pressão em $(1+3)D$, e pode ser observado que a influência das dimensões extras é evidente. De (3.20), (3.21) e (3.22) tem-se

$$T_{\alpha\beta} = \mathcal{T}_{\alpha\beta} + \mathfrak{T}_{\alpha\beta}, \tag{3.24}$$

onde $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ representa a parte do TEM em $(1+3)D$ que contém apenas componentes do espaço-tempo convencional e $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ é a correção que aparece devido às dimensões extras, onde têm-se explicitamente

$$8\pi\mathcal{T}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu})g_{\alpha\beta}, \tag{3.25}$$

$$8\pi\mathfrak{T}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left\{\mathfrak{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\mathfrak{R}_{\mu\nu})g_{\alpha\beta} + (g^{mn}R_{mn})g_{\alpha\beta}\right\}. \tag{3.26}$$

Note que $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ possui o formato de um tensor de Einstein usual $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$. O tensor $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$, obtido a partir do desenvolvimento de (3.24), representa um termo de "curvatura" que vem exclusivamente devido às dimensões extras e é calculado como

$$\mathfrak{R}_{\alpha\beta} = g^{mc}{}_{,\beta} g_{mc,\alpha} + g^{mc} g_{mc,\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{nc} g_{mc,\alpha} g^{me} g_{ne,\beta}. \tag{3.27}$$

O principal enfoque deve ser dado à parte $(1+3)$ do TEM e na conseguinte explicação do significado da parte extra contida na expressão (3.24). Uma melhor compreensão disto virá a partir do desenvolvimento de uma equação geral de movimento para o sistema.

3.2.3 Expressão para as equações de movimento

Para o espaço-tempo $(1+3+n)$ desenvolvido anteriormente, pode-se escrever o seguinte funcional lagrangiano

$$\begin{aligned} L &= (g_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B)^{1/2} \\ &= (g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b)^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $\dot{x}^A = \mathrm{d}x^A/\mathrm{d}s$. A Eq. (3.28) é o lagrangiano clássico mais geral para um espaço-tempo com dimensões extras, onde os elementos da métrica são dados por $g_{AB} = g_{\alpha\beta}\delta^\alpha_A\delta^\beta_B + g_{ab}\delta^a_A\delta^b_B$. As equações de movimento são derivadas a partir da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^C}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^C} = 0. \tag{3.29}$$

Como $\partial_A = \partial_\alpha\delta^\alpha_A + \partial_a\delta^a_A$ e $g_{ab} = g_{ab}(x^\alpha)$ então tem-se que

$$\frac{\partial L}{\partial x^C} = \frac{\partial L}{\partial x^\gamma}\delta^\gamma_C + \frac{\partial L}{\partial x^c}\delta^c_C, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\gamma} = \frac{1}{2}L^{-1}(g_{\alpha\beta,\gamma}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + g_{ab,\gamma}\dot{x}^a\dot{x}^b) \tag{3.31}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial x^c} = 0, \tag{3.32}$$

e portanto

$$\frac{\partial L}{\partial x^C} = \frac{1}{2}L^{-1}(g_{\alpha\beta,\gamma}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + g_{ab,\gamma}\dot{x}^a\dot{x}^b)\delta^\gamma_C. \tag{3.33}$$

Da mesma forma pode-se desenvolver o termo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^C}\right)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\gamma} = \frac{1}{2}L^{-1}(g_{\gamma\beta}\dot{x}^\beta + g_{\alpha\gamma}\dot{x}^\alpha) = L^{-1}g_{\mu\gamma}\dot{x}^\mu, \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} = \frac{1}{2}L^{-1}(g_{cb}\dot{x}^b + g_{ac}\dot{x}^a) = L^{-1}g_{mc}\dot{x}^m. \tag{3.35}$$

Agora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\gamma}}\right) = L^{-1}\left[\left(\frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial x^{\sigma}}\right)\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\mu} + g_{\mu\gamma}\ddot{x}^{\mu}\right], \tag{3.36}$$

Também, dado o fato que x^a são variáveis cíclicas, pode-se escrever a seguinte constante de integração

$$g_{cm}\dot{x}^{m} = N_c, \tag{3.37}$$

i.e., um vetor constante, e assim

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{c}}\right) = 0. \tag{3.38}$$

Introduzindo estes últimos em (3.36) e multiplicando por $Lg^{\mu\gamma}$ e usando (3.33) e (3.37) chega-se às seguintes equações de movimento

$$\boxed{\ddot{x}^{\mu} + \left\{{}^{\mu}_{\alpha\beta}\right\}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = \frac{1}{2}g_{ab,\gamma}g^{\mu\gamma}N_c g^{ac}N_d g^{bd}, \qquad (3.39)}$$

onde claramente se vê que as dimensões extras induzem uma força externa no sistema, que depende de g_{ab} e N_c.

3.3 O problema da compactificação

Até agora não se perguntou sobre a questão observacional das dimensões extras. Por que não se enxergam as dimensões extras? Se elas existirem o que previne que os fótons não escapem na direção delas? Abaixo, uma pequena discussão sobre o assunto. Inicialmente, será discutido o porquê da necessidade da compactificação em muitas das teorias com dimensões extras. Em seguida, mostra-se que para a presente proposta, o mecanismo de compactificação pode ser tranquilamente dispensado. Outros aspectos sobre a natureza da observação de uma dimensão extra podem ser vistos p. ex. em [Coi05a, Coi05b, Coi05c, Coi06a].

3.3.1 Cordas e *braneworld*

O mecanismo físico mais conhecido para explicar tais perguntas é o da compactificação de Klein, já apresentado na Seção 3.1.2. A motivação para tal mecanismo pode ser melhor compreendida ao se questionar por que as interações físicas são regidas por leis do tipo inverso do quadrado. Em teorias de cordas, p.ex., se chega à conclusão que a compactificação deve ocorrer na escala de Planck. No entanto, as chamadas teorias de mundo brana (*braneworlds*) como a ADD [Ark98] falam que a escala de compactificação poderia ser bem maior que a escala de Planck, como discutido abaixo.

Na teoria quântica de campos, quando uma partícula sem massa (um fóton, p.ex.) é trocada entre duas partículas, a energia potencial associada entre as duas partículas é escrita como [Pes05]

$$V(r) \propto \int \mathrm{d}^3k \; e^{i\vec{k}.\vec{x}} \frac{1}{\vec{k}^2} \propto \frac{1}{r}, \tag{3.40}$$

onde $\vec{k}$ é o vetor de onda, que pode ser associado ao próprio momento $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ quando se trabalha em unidades naturais $\hbar = 1$. Basicamente, $V(r)$ é a transformada de Fourier do propagador e o valor $\vec{k}^2$ no propagador vem a partir da invariância rotacional.

Agora, supondo a existência de n dimensões extras, pode-se dizer que elas estão associadas a uma escala fundamental $\mathcal{R}$. Agora, a interação fundamental entre duas partículas nesse cenário pode ser escrita como

$$V(r) \propto \int \mathrm{d}^{3+n}k \; e^{i\vec{k}.\vec{x}} \frac{1}{\vec{k}^2} \propto \frac{1}{r^{1+n}}. \tag{3.41}$$

No entanto, na natureza não se observa este tipo de lei. A explicação para que isto faça sentido é então supor que a lei de quadrado inverso (i.e. a lei de Newton) é válida para escalas do tipo $r \gg \mathcal{R}$. Neste regime, as coordenadas extras seriam efetivamente desprezíveis quando comparadas com o tamanho r. Assim, pensa-se que a dimensão extra deve ser compactificada, ou seja, a escala $\mathcal{R}$ deve ser suficientemente pequena para que campos eletromagnéticos, p. ex., continuem a se comportar como o observado.

Uma coisa interessante no entanto ocorreria para escalas $r \ll \mathcal{R}$. Euristicamente, quando $\mathcal{R}$ é muito maior que a separação entre duas partículas, o fluxo do campo não sabe que as coordenadas extras são finitas e o universo parecerá ser $(1+3+n)$. Como a gravidade nunca foi testada em escalas submilimétricas, haveria então a possibilidade teórica de especular sobre $\mathcal{R}$: essa escala poderia ser bem maior que a escala das partículas elementares e ainda assim bem menor que as escalas dos fenômenos a que os humanos estão acostumados. Esta possibilidade é melhor conhecida como "dimensões extras grandes", pois a compactificação ocorre para escalas bem maiores que a de Planck.

3.3.2 Uma nova massa de Planck?

Em termos numéricos, e além disso, em termos históricos, a massa de Planck é definida como

$$V(r) = \frac{Gm_1m_2}{r} = \frac{(m_1m_2/M_P^2)}{r}. \tag{3.42}$$

Isto significa que $M_P \sim 10^{19}$ GeV. Um valor extremamente grande que traduz o quão fraca é a gravidade.

Em unidades fundamentais onde $\hbar$ e c são igualados à unidade, a gravidade apresenta uma escala de energia muito maior que qualquer escala antes explorada experimentalmente. De fato, um dos mistérios mais fundamentais da física de partículas é saber por que existe esta imensa lacuna entre a gravidade e as outras interações. Este é o chamado "problema hierárquico" das interações fundamentais. Uma maneira de "aliviar" o problema é trazer a gravidade para uma escala diferente, através da

redefinição da escala de Planck a partir da introdução de dimensões extras.

Seja a escala característica da gravidade em $(1+3+n)$ dimensões escrita como $M_{P(1+3+n)}$. O potencial gravitacional entre dois objetos de massas m_1 e m_2 separados por uma distância $r \ll \mathcal{R}$ será dado por

$$V(r) = \frac{m_1 m_2}{\left[M_{P(1+3+n)}\right]^{2+n}} \frac{1}{r^{1+n}}. \tag{3.43}$$

Note que a dependência de $M_{P(1+3+n)}$ vem da análise dimensional: a potência de dois cancela $m_1 m_2$ e a potência em n coaduna-se com as n potências extras de $1/r$. Quando $r \gg \mathcal{R}$, haverá uma espécie de "*cut-off* geométrico" do fluxo gravitacional e o potencial é escrito como

$$V(r) = \frac{m_1 m_2}{\left[M_{P(1+3+n)}\right]^{2+n}} \frac{1}{\mathcal{R}^n} \frac{1}{r}. \tag{3.44}$$

Comparando-se com a lei observada $V(r) = (m_1 m_2 / M_P^2)(1/r)$ obtém-se

$$M_{P(1+3+n)}^2 = \frac{M_P^2}{\left[M_{P(1+3+n)} \mathcal{R}\right]^n}. \tag{3.45}$$

Se $M_{P(1+3+n)}\mathcal{R}$ for suficientemente grande, então haverá a possibilidade de $M_{P(1+3+n)}$ ser muito menor que a escala de Planck convencionalmente calculada. Então dependendo da escala de tamanho fixada para $\mathcal{R}$, haverá uma nova escala de Planck, i.e., uma nova escala para a gravidade. Estima-se, p.ex., que se as dimensões extras estiverem compactadas em tamanhos $\mathcal{R}$ de ordem submilimétrica, então a nova escala de Planck seria da ordem de TeV, algo capaz de ser acessado por aceleradores de partículas como o LHC (*Large Hadron Collider*).

3.3.3 Seria possível dimensões extras não compactificadas?

Mas sendo necessária uma compactificação, como se deve interpretar para grandes escalas o provável aparecimento de efeitos que explicariam a matéria escura? Através de uma partícula de "Kaluza-Klein"? Ou a simples presença das dimensões extras já explicaria por si só o fenômeno da massa faltante?

De maneira geral, não admitindo o mecanismo de compactificação, também poderia-se recuperar uma lei do tipo quadrado inverso, para grandes escalas, ao admitir-se que os objetos observados em $3D$ tem uma extensão do tipo "iceberg" para as dimensões extras[2]. Logo, a densidade de tais objetos seria do tipo $\rho \propto M_{(3+n)}/r^{3+n}$ e ao menos o potencial gravitacional associado seria do tipo

$$V(r) \propto \frac{M_{(3+n)}}{r^{1+n}} = \frac{\rho r^{3+n}}{r^{1+n}} = \frac{M_{(3)}}{r} \propto \frac{1}{r}, \tag{3.46}$$

onde $M_{(3)}$ e $M_{(3+n)}$ são as massas associadas ao objeto em $3D$ ou em $3+n$ dimensões espaciais respectivamente, de tal forma que o potencial final estaria associado apenas

[2]Esta visão seria uma adaptação em grandes escalas da teoria fundamental de dimensões extras universais [App01]

a uma lei de quadrado inverso, como esperado, e o universo poderia ter dimensões extras mesmo que estas não fossem compactificadas.

Assim, a explicação do fenômeno da massa faltante poderia estar associado ou não a dimensões extras compactificadas. No entanto, há um problema associado a esta visão: dado que a Lei de Hubble é válida, i.e., o universo se expande e isto é observado, o que impediria que os fótons vindos das galáxias observadas não escapem, caso não houvesse compactificação?

O problema seria resolvido caso fosse adicionada ao modelo uma hipótese adicional que confinasse, via algum tipo de mecanismo, a maior parte dos fótons do universo. Não será o objetivo do presente trabalho abordar o assunto. No entanto, pode-se visualizar que algum tipo de *warp factor*, como aquele usado em modelos de Randall-Sundrum [Rsu99a], deverá ser usado para o caso dos fótons.

4

Disco fino em $6D$

Com base no desenvolvimento da última seção, aqui será apresentada a primeira aplicação para o fato de obter-se uma força externa nas equações de movimento em quatro dimensões de partículas clássicas, quando é considerado que o espaço-tempo em que se trabalha é multidimensional.

Esta primeira aplicação é a construção de discos finos que tem estrutura $4D$ mas vivem em um universo multidimensional. É uma aplicação relativística, e o sistema é construído com base no método inverso e na indução de matéria a partir do cálculo distribucional (sugere-se em particular a leitura das teses [Gon98, Vog06a], que apresentam em detalhe o método).

A principal motivação para trabalhar com um sistema assim é que se pode derivar algumas propriedades interessantes como os perfis de densidade e pressão e também o perfil de órbitas circulares de uma partícula pontual.

Serão apresentados neste capítulo:

▷ O método geral de construção de um disco fino em $4D$.

▷ O teorema de Emparan-Reall, onde se considera a possibilidade de obter-se soluções axissimétricas em espaços-tempo com mais de $4D$, i.e., demonstra-se que, dadas configurações axissimétricas em um espaço-tempo $1+3+n$, é possível encontrar soluções válidas das equações de Einstein para tais configurações.

▷ É mostrado que para uma dada configuração axissimétrica somente as métricas com dimensão par produzem configurações sem presença de matéria exótica. Dado tal fato, procede-se à construção de um disco fino em $6D$.

▷ As propriedades do conteúdo material do disco fino em $6D$ são apresentadas.

▷ É desenvolvido um método perturbativo para o cálculo de estabilidade do disco.

▷ As órbitas estáveis são calculadas e o mostra-se que um certo conjunto de órbitas estáveis podem reproduzir a observação astronômica para o comportamento anômalo das curvas de rotação de galáxias.

4.1 Discos finos em $4D$

4.1.1 Aspectos gerais

Uma estrutura autogravitante do tipo disco fino pode ser obtida a partir de soluções das equações de Einstein para configurações cuja geometria é axissimétrica. Um disco fino, neste contexto, passa a ser interessante pois pode ser uma aproximação de sistemas astrofísicos reais como galáxias ou discos de acreção.

Uma longa lista de soluções para discos pode ser obtida na literatura. Por exemplo, soluções para discos estáticos sem pressão radial foram inicialmente estudadas por Bonnor e Sackfield [Bon68], e por Morgan e Morgan [Mor69]. Com pressão radial há primeiramente o estudo de [Mor70]. Uma grande classe de soluções que descrevem discos finos estáticos foi obtida por [Let87] a partir do método inverso. Discos com tensão radial foram considerados em [Gon99] e posteriormente foram obtidos modelos de disco com campos elétricos [Led99], campos magnéticos [Let99] e com campos elétricos e magnéticos [Kat99]. Soluções para discos estáticos autossimilares foram analisadas por Lynden-Bell e Pineault [Lyn78], e Lemos [Lem89]. Outra abordagem relevante é a superposição de soluções, como discos estáticos superpostos a buracos negros [Lem94] ou discos superpostos a halos [Vog03]. Uma extensão deste tipo de enfoque pode ser vista em soluções astrofísicas que mimetizam AGNs [Vog05a]. Uma consequência direta de todos os ricos estudos sobre discos aparece também no trabalho de Vogt e Letelier sobre modelos de galáxias a partir da relatividade geral [Vog05b]. Neste contexto, importantes discussões sobre o papel da relatividade geral para explicar as curvas de rotação de galáxias foram desenvolvidas em [Coo06] e respectivos contra-argumentos em [Vog06b].

Em especial, para o caso de soluções para espaços-tempo multidimensionais veja as referências citadas no Capítulo 3, Seção 3.2. Uma destas soluções, chamada de Emparan-Reall, é bastante importante para a descrição de configurações axissimétricas [Emp02].

Começando com o caso bem conhecido em $4D$, uma das soluções mais antigas das equações de Einstein no vácuo é a de Weyl [Wey17]. Tais soluções são encontradas para o caso axissimétrico estático

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{2\Phi}\mathrm{d}t^2 + e^{-2\Phi}\left[e^{2\gamma}(\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2) + r^2\mathrm{d}\varphi^2\right], \tag{4.1}$$

onde $\Phi(r, z)$ é uma solução arbitrária da equação de Laplace

$$\Phi_{,rr} + \Phi_{,r}/r + \Phi_{,zz} = 0, \tag{4.2}$$

no espaço plano $3D$ com elementos de linha

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2, \tag{4.3}$$

e γ satisfaz

$$\gamma_{,r} = r[\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2], \tag{4.4}$$

$$\gamma_{,z} = 2r\Phi_{,r}\Phi_{,z}, \tag{4.5}$$

A solução destas equações é dada por uma integral de linha. Como Φ é harmônica ela pode ser interpretada como um potencial newtoniano produzido por uma certa fonte axissimétrica. Como nestas coordenadas as soluções de simetria esférica das equações de Einstein correspondem a uma barra de densidade 1/2, deve-se ter cuidado para o uso de imagens newtonianas, conforme mostrado em [Let87].

A métrica (4.1) também pode ser reescrita como

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{-\phi}\mathrm{d}t^2 + \chi^2 e^{\phi}\mathrm{d}\varphi^2 + f(\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2), \tag{4.6}$$

onde χ, ϕ, e f são funções apenas de r e z. No vácuo, as equações de Einstein ($R_{\alpha\beta} = 0$) são equivalentes a

$$\chi_{,rr} + \chi_{,zz} = 0, \tag{4.7}$$

$$(\chi\phi_{,r})_{,r} + (\chi\phi_{,z})_{,z} = 0. \tag{4.8}$$

Fazendo $\zeta = r + iz$ é possível considerar χ como a parte real de uma função analítica $W(\zeta) = \chi(r,z) + iZ(r,z)$. Notando que $\overline{W}(\zeta) = W(\overline{\zeta})$, pode-se escrever $\mathrm{d}W\mathrm{d}\overline{W} = \frac{\partial W}{\partial \zeta}\frac{\partial W}{\partial \overline{\zeta}}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\overline{\zeta} = |W'(\zeta)|^2\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\overline{\zeta}$. Ou mesmo, $\mathrm{d}W\mathrm{d}\overline{W} = \mathrm{d}\chi^2 + \mathrm{d}Z^2 = |W'(\zeta)|^2(\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2)$. Logo, sem perda de generalidade, pode-se escolher $\chi = r$, e chega-se ao seguinte resultado para $f(r,z)$

$$\ln f[\phi] = \frac{1}{2}\int r\{[\phi_{,r}^2 - \phi_{,z}^2]\mathrm{d}r + [2\phi_{,r}\phi_{,z}]\mathrm{d}z\}. \tag{4.9}$$

4.1.2 Método de imagens e método distribucional

De forma a obter uma solução de (4.7)–(4.9) que represente um disco localizado em $z = 0$, assume-se que as funções χ, ϕ, e f são contínuas ao longo do disco, mas tendo primeiras derivadas descontínuas na direção normal ao disco. Soluções tipo disco fino em coordenadas axissimétricas são funções de classe C^0. A simetria de reflexão de (4.7)–(4.9) com respeito ao plano $z = 0$ permite assumir que χ, ϕ, e f são funções pares de z. Logo, $\chi_{,z}$, $\phi_{,z}$ e $f_{,z}$ são necessariamente funções ímpares de z. O que se requer no entanto é que elas não se anulem sobre as superfícies $z = 0^{\pm}$. Tais suposições são importantes porque podem induzir uma descontinuidade no espaço-tempo a partir da reflexão das soluções através do plano. Isto representa em outras palavras a construção de um disco a partir do bem conhecido método "deslocar, cortar e refletir", usado tanto em gravidade newtoniana [Kuz56] quanto em relatividade geral [Gon99, Led99, Let99, Kat99, Lyn78, Lem89, Lem94, Vog03, Vog05a, Vog05b]. O conteúdo material do disco é então descrito como funções que são distribuições com suporte no disco. O método pode ser dividido nos seguintes passos, como ilustrado na Fig. 4.1. Inicialmente, para um espaço onde tem-se uma fonte compacta de campo gravitacional, escolhe-se uma superfície (no presente caso, o plano $z = 0$) que dividirá o espaço em duas partes: uma delas sem singularidades ou fontes e a outra com as fontes. Descarta-se então a parte do espaço com singularidades ou fontes e usa-se a superfície para fazer uma reflexão da parte não singular. Isto

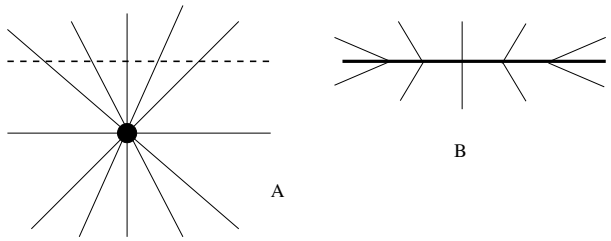


Figura 4.1: Abordagem pictórica do método de "deslocar, cortar e refletir" para a geração de discos. Em A o espaço-tempo com uma singularidade é deslocado e cortado por um plano (linha pontilhada), em B a parte com a singularidade é descartada e a parte superior é refletida no plano.

resulta em um espaço com uma singularidade que é uma função delta com suporte em $z = 0$.

Este procedimento é matematicamente equivalente a fazer-se a transformação $z \to |z| + a$, com a constante. No tensor de Einstein tem-se primeiras e segundas derivadas de z. Como $\partial_z|z| = 2\vartheta(z) - 1$ e $\partial_{zz}|z| = 2\delta(z)$, onde $\vartheta(z)$ e $\delta(z)$ são respectivamente as distribuições de Heaviside e Dirac, as equações de campo de Einstein se separarão em duas partes distintas [Tau80]: uma delas válida para $z \neq 0$ (as equações usuais de Einstein), e outra envolvendo distribuições com um tensor de energia-momento. Devido ao comportamento descontínuo das derivadas do tensor métrico ao se atravessar o disco, tem-se que o tensor de curvatura de Riemann deve conter deltas de Dirac. O tensor de energia-momento pode ser obtido a partir do método distribucional atribuído a Papapetrou e Hamoui [Pap68], Lichnerowicz [Lic71], e Taub [Tau80]. Tal tensor deve ser escrito como $T^{\alpha}{}_{\beta} = [T^{\alpha}{}_{\beta}]\ \delta(z)$, onde $[T^{\alpha}{}_{\beta}]$ é o tensor distribucional de energia-momento, de onde se obtêm a densidade de energia no volume e os principais termos de *stress*. Para uma abordagem um equivalente, ver [Isr66], onde se faz uso da curvatura extrínseca da superfície para se recuperar a matéria numa região de descontinuidade. Tal equivalência é demonstrada em [Let93].

4.1.3 Cálculo de densidade e pressões

O disco em $z = 0$ divide o espaço-tempo em duas partes. A normal ao disco pode ser descrita como $n_a = \partial z/\partial x^a = (0, 0, 0, 1)$ e acima do disco a métrica pode ser expandida como

$$g_{\alpha\beta} = g^0_{\alpha\beta} + z\frac{\partial g^+_{\alpha\beta}}{\partial z}|_{z=0} + z^2\frac{\partial^2 g^+_{\alpha\beta}}{\partial z^2}|_{z=0} + ..., \tag{4.10}$$

e abaixo de $z = 0$,

$$g_{\alpha\beta} = g^0_{\alpha\beta} + z\frac{\partial g^-_{\alpha\beta}}{\partial z}|_{z=0} + z^2\frac{\partial^2 g^-_{\alpha\beta}}{\partial z^2}|_{z=0} + ... \tag{4.11}$$

A quantidade $g^0_{\alpha\beta}$ está relacionada ao valor de $g_{\alpha\beta}$ em $z = 0$. As descontinuidades na primeira derivada do tensor métrico podem ser expressadas como

$$b_{\alpha\beta} \;=\; g_{\alpha\beta,z}\big|_{z=0^+} \;-\; g_{\alpha\beta,z}\big|_{z=0^-}. \tag{4.12}$$

A simetria do problema vincula $\phi^+_{,z}|_{z=0} = -\phi^-_{,z}|_{z=0}$, e $f^+_{,z}|_{z=0} = -f^-_{,z}|_{z=0}$. Escrevendo $\phi_{,z}|_{z=0} = \phi^+_{,z}|_{z=0}$, e o mesmo para as demais funções, pode-se calcular as descontinuidades

$$b_{tt} = 2\mathrm{e}^{-\phi}\phi_{,z}\big|_{z=0}, \tag{4.13}$$

$$b_{rr} = 2f_{,z}\big|_{z=0}, \tag{4.14}$$

$$b_{zz} = b_{rr}, \tag{4.15}$$

$$b_{\varphi\varphi} = 2r^2\mathrm{e}^{\phi}\phi_{,z}\big|_{z=0}. \tag{4.16}$$

Contraindo os índices em $b^{\alpha\beta}$ encontram-se os outros termos de descontinuidade:

$$b^{tt} = -2\mathrm{e}^{\phi}\phi_{,z}\big|_{z=0} \quad ; \quad b^t{}_t = 2\phi_{,z}, \tag{4.17}$$

$$b^{rr} = -\frac{2}{f^2}f_{,z}\big|_{z=0} \quad ; \quad b^r{}_r = -\frac{2}{f}f_{,z}, \tag{4.18}$$

$$b^{zz} = -\frac{2}{f^2}f_{,z}\big|_{z=0} \quad ; \quad b^z{}_z = -\frac{2}{f}f_{,z}, \tag{4.19}$$

$$b^{\varphi\varphi} = -\frac{2}{r^2}\mathrm{e}^{-\phi}\phi_{,z}\big|_{z=0} \quad ; \quad b^\varphi{}_\varphi = -2\phi_{,z}. \tag{4.20}$$

De (4.12), é possível calcular os termos de descontinuidade dos símbolos de Christoffel ao longo do disco

$$\left[\left\{{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right\}\right] = [\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}] = \frac{1}{2}(b^\alpha{}_\gamma\delta^z{}_\beta + b^\alpha{}_\beta\delta^z{}_\gamma - g^{\alpha z}b_{\beta\gamma}) \tag{4.21}$$

onde $[\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}] \equiv \Gamma^{+\alpha}{}_{\beta\gamma} - \Gamma^{-\alpha}{}_{\beta\gamma}$ em $z = 0$. Usando o tensor de Riemann, já definido no Capítulo 2 em 2.5 e escrito como

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu} + g_{\beta\mu,\alpha\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu}) + g_{\rho\sigma}\Gamma^\rho{}_{\alpha\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} - g_{\rho\sigma}\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu}, \tag{4.22}$$

pode-se calcular o tensor distribucional de Riemann como

$$[R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}] = \frac{1}{2}(b^\alpha{}_\nu\delta^z{}_\beta\delta^z{}_\mu - b^\alpha{}_\mu\delta^z{}_\beta\delta^z{}_\nu + g^{\alpha z}b_{\beta\nu}\delta^z{}_\mu). \tag{4.23}$$

Definindo o tensor distribucional de Ricci como $[R_{\alpha\beta}] = [R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}]$ e o escalar distribucional de Ricci $[R] = [R^\mu{}_\mu]$, pode-se identificar o tensor distribucional de energia-momento do disco, a partir das equações de Einstein, como

$$[R^\alpha{}_\beta] - \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\beta[R] = [T^\alpha{}_\beta], \tag{4.24}$$

e que calcula-se como

$$[T^{\alpha}{}_{\beta}] = \frac{1}{2}\{b^{\alpha z}\delta^{z}{}_{\beta} - b^{zz}\delta^{\alpha}{}_{\beta} + g^{\alpha z}b^{z}{}_{\beta} - g^{zz}b^{\alpha}{}_{\beta} + b^{\gamma}{}_{\gamma}(g^{zz}\delta^{\alpha}{}_{\beta} - g^{\alpha z}\delta^{z}{}_{\beta})\}. \tag{4.25}$$

Este tensor de energia-momento descreve o conteúdo material, i.e. o fluido, de um disco localizado em $z = 0$. Os componentes deste tensor são então calculados como

$$[T^{t}{}_{t}] = \frac{1}{2}\{-b^{zz} + g^{zz}(b^{r}{}_{r} + b^{z}{}_{z})\}, \tag{4.26}$$

$$[T^{r}{}_{r}] = \frac{1}{2}\{-b^{zz} + g^{zz}(b^{t}{}_{t} + b^{\varphi}{}_{\varphi})\}, \tag{4.27}$$

$$[T^{z}{}_{z}] = 0, \tag{4.28}$$

$$[T^{\varphi}{}_{\varphi}] = \frac{1}{2}\{-b^{zz} + g^{zz}(b^{t}{}_{t} + b^{r}{}_{r})\}. \tag{4.29}$$

Definindo-se uma tetrada para este caso como

$$\mathbf{e}_{(t)}{}^{\alpha} = \left(\frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}, 0, 0, 0\right), \mathbf{e}_{(r)}{}^{\alpha} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}, 0, 0\right),$$
$$\mathbf{e}_{(\varphi)}{}^{\alpha} = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}, 0\right), \mathbf{e}_{(z)}{}^{\alpha} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{zz}}}\right),$$

pode-se escrever o tensor de energia-momento (4.25) como

$$\begin{aligned}[T^{\alpha}{}_{\beta}] = \; & - \; \epsilon\mathbf{e}_{(t)}{}^{\alpha}\mathbf{e}_{(t)}{}^{\beta} + p_r\mathbf{e}_{(r)}{}^{\alpha}\mathbf{e}_{(r)}{}^{\beta} \\ & + \; p_\varphi\mathbf{e}_{(\varphi)}{}^{\alpha}\mathbf{e}_{(\varphi)}{}^{\beta} + p_z\mathbf{e}_{(z)}{}^{\alpha}\mathbf{e}_{(z)}{}^{\beta},\end{aligned} \tag{4.30}$$

para assim obter-se as densidades no volume, i.e., a densidade de energia e as pressões como

$$\epsilon = -[T^{t}{}_{t}] = -\frac{f_{,z}}{f^2}|_{z=0} \tag{4.31}$$

$$p_\varphi = [T^{\varphi}{}_{\varphi}] = -\frac{\phi_{,z}}{f}|_{z=0} \tag{4.32}$$

$$p_r = [T^{r}{}_{r}] = 0, \tag{4.33}$$

$$p_z = [T^{z}{}_{z}] = 0. \tag{4.34}$$

Por exemplo, na Fig. 4.2 mostra-se os perfis da densidade ϵ e da pressão p_φ para o disco fino $4D$ que acabou-se de construir para uma solução do tipo Schwarzschild (veja a próxima seção). Para uma abordagem mais detalhada sobre estes perfis, veja [Bic93].

4.1.4 Algumas soluções

Na Eq. (4.6), a função ϕ está intrisicamente relacionada ao potencial newtoniano Φ_N por $\phi = 2\Phi_N$. Uma propriedade importante da métrica axissimétrica é que

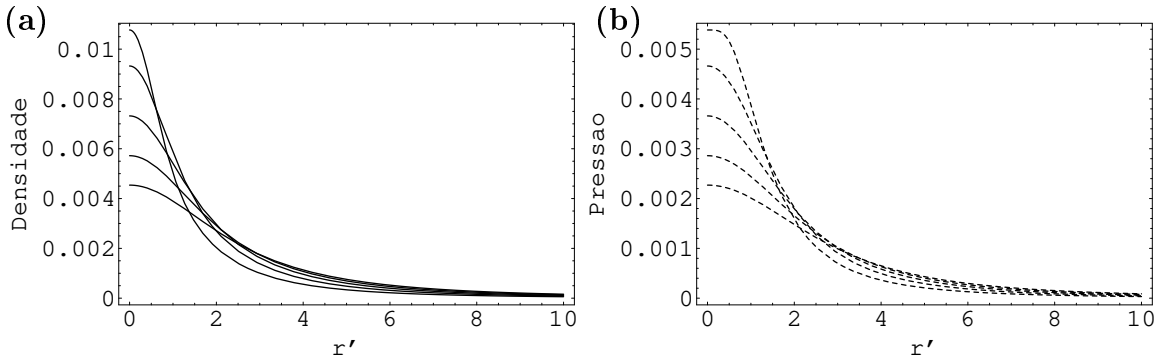


Figura 4.2: **(a)** Perfis de densidade superficial do disco $4D$ por unidade de massa, para valores do parâmetro de corte $a/m = 1; 1,5; 2; 2,5; 3$ (de cima para baixo), onde $r' = r/m$. **(b)** O mesmo que em **(a)** porém para as pressões no disco. A solução utilizada aqui é a de Schwarzschild (soluções do tipo Chazy-Curzon oferecem perfis similares).

como ela gera uma equação de Laplace para as funções envolvidas, Eq. (4.8), dada a linearidade desta equação, é possível empregar a superposição de soluções ao sistema. Algumas das soluções assintoticamente planas mais comumente utilizadas são, p.ex., a de Chazy-Curzon, da barra infinita e a de Schwarzschild.

No caso de Chazy-Curzon, a solução para uma partícula de massa m numa posição $z = z_0$ é dada por [Cha24, Cur24]

$$\phi = \frac{2m}{R}, \qquad \ln f = \frac{m^2 r^2}{R^4}, \tag{4.35}$$

onde $R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$.

A solução de Schwarzschild corresponde a tomar uma barra fina como fonte para ϕ que está localizada no eixo z com $1/2$ de densidade linear de massa [Wey17]. Esta solução, em coordenadas cilíndricas representa a solução usual de Schwarzschild, e por isso a barra fina pode ser interpretada como um buraco negro "hiper amassado". O disco vem por simetria e a matéria vem a partir do método distribucional acima explicado. Tal solução é escrita como

$$\phi(r, z) = \ln \frac{R_1 + R_2 - 2}{R_1 + R_2 + 2}, \tag{4.36}$$

onde $R_1 = \sqrt{\tilde{r}^2 + (z-1)^2}$ e $R_2 = \sqrt{\tilde{r}^2 + (z+1)^2}$, e $\tilde{r}$ é a coordenada radial normalizada pela massa, $\tilde{r} = r/m$.

4.1.5 Órbitas circulares de uma partícula clássica sobre o disco

Em primeira aproximação pode-se considerar que as partículas clássicas do fluido descrito pelas equações (4.26)–(4.29) movem-se ao longo de geodésicas. Em parti-

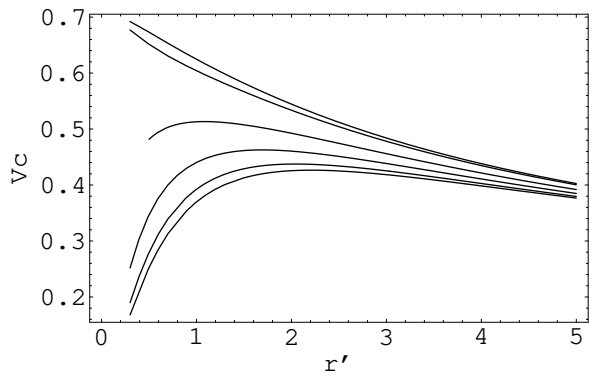


Figura 4.3: Curvas de rotação para o disco construído em $4D$ com parâmetros de corte $a/m = 0,3$ até $a = 2$ (de cima para baixo). Tais curvas apresentam um aspecto de queda Kepleriana, como esperado. Tomou-se $r' = r/m$. A solução utilizada foi a de Schwarzschild (embora a de Chazy-Curzon também proporcione perfis similares).

cular, pode-se considerar que as partículas movem-se em geodésicas circulares cujas velocidades tangenciais proporcionam as curvas de rotação.

Da Eq. (4.6) tem-se a primeira integral de movimento,

$$-e^{-\phi}\dot{t}^2 + f(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + r^2 e^{\phi}\dot{\varphi}^2 = 1, \tag{4.37}$$

onde $\dot{x}^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}s$. Assumindo $\dot{r} = 0$ e $\dot{z} = 0$ (as partículas não possuem movimento radial e estão confinadas no disco, i.e. $z = 0$), a Eq.(4.37) fica

$$-e^{-\phi}\dot{t}^2 + r^2 e^{\phi}\dot{\varphi}^2 = 1. \tag{4.38}$$

Logo as equações geodésicas sobre o disco reduzem-se a

$$(e^{-\phi})_{,r}\dot{t}^2 - (r^2 e^{\phi})_{,r}\dot{\varphi}^2 = 0. \tag{4.39}$$

As Eqs. (4.38) e (4.39) formam um sistema de equações para $\dot{\varphi}^2$ e $\dot{t}^2$. De tal sistema encontra-se consequentemente as curvas de rotação V_C,

$$V_C = \sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}\frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{t}^2}}, \tag{4.40}$$

que se reduzem a

$$V_C = \sqrt{-\phi_{,r}/(2/r + \phi_{,r})}. \tag{4.41}$$

Na Fig. 4.3 mostra-se algumas destas curvas para o presente disco fino em $4D$, onde é variado o parâmetro de corte a definido na Seção 4.1.2. Aqui usou-se a solução de barra fina (Schwarzschild) com densidade de massa linear de $1/2$.

4.2 Soluções axissimétricas para qualquer número de dimensões

A primeira atitude que se deve tomar para generalizar a geometria de Weyl para espaços-tempo com dimensões extras é considerar um sistema útil de coordenadas para um elemento de linha $1+3+n$. Seguindo o método apresentado por [Emp02], começa-se considerando que a métrica poderia ser riemanniana ou mesmo lorentziana. Seja $\xi_{(i)}$ um campo de vetores de Killing, com $1 \leq i \leq d-2$. Aqui d é o número de dimensões totais. É admissível escolher coordenadas (x^i, y^1, y^2) tal que $\xi_{(i)} = \partial/\partial x^i$, desde que comutem, e com elementos da métrica dependendo apenas de y^1 e y^2.

Agora, deve-se mostrar que é possível ter coordenadas y^1 e y^2 capazes de estender superfícies bidimensionais ortogonais a $\xi_{(i)}$. De maneira a realizar isto, é necessário que se evidencie que subespaços bidimensionais do espaço tangente, e ortogonais a todo $\xi_{(i)}$, são integráveis. As condições de suficiência para tal integrabilidade são garantidas a partir do seguinte teorema:

Teorema 4.1 *(Emparan-Reall)* ▶ *Sejam $\xi_{(i)}$, $1 \leq i \leq d-2$ campos de Killing tal que para cada i, (a) $\xi_{(1)}^{[\mu_1}\xi_{(2)}^{\mu_2}\ldots\xi_{(d-2)}^{\mu_{d-2}}\nabla^\nu\xi_{(i)}^{\rho]}$ se anula ao menos em um ponto do espaço-tempo (não necessariamente o mesmo ponto para cada i), e (b) $\xi_{(i)}^\nu R_\nu^{[\rho}\xi_{(1)}^{\mu_1}\xi_{(2)}^{\mu_2}\ldots\xi_{(d-2)}^{\mu_{d-2}]} = 0$. Então os dois planos ortogonais a $\xi_{(i)}$ são integráveis.*◀

A *Prova* deste teorema pode ser desenvolvida da seguinte forma. A condição (b) é trivialmente satisfeita se apenas forem contempladas soluções no vácuo das equações de Einstein. Sobre a condição (a), para quatro dimensões geralmente é suposto que um dos campos de Killing é uma coordenada angular que corresponde a rotações em torno de um eixo de simetria, e deve se anular sobre este eixo. Isto é suficiente para satisfazer a condição (a). Para o caso de dimensões maiores, se as condições deste teorema são satisfeitas, então pode-se escolher as coordenadas y^1 e y^2 para uma das superfícies ortogonais e então estendê-las ao longo das curvas integrais do campo de Killing. Para este sistema de coordenadas, os vetores $\partial/\partial y^i$ são ortogonais a $\partial/\partial x^j$. Se então é assumido que os campos de Killing são ortogonais uns aos outros, a métrica deve por consequência assumir a forma

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{d-2} \epsilon_i e^{2\Phi_i}(\mathrm{d}x^i)^2 + g_{ab}\mathrm{d}y^a\mathrm{d}y^b, \tag{4.42}$$

onde a e b tomam os valores $1, 2$, os coeficientes da métrica são independentes de x^i, e $\epsilon_i = \pm 1$ dependendo se $\xi_{(i)}$ é tipo espaço ou tipo tempo. Localmente é sempre possível encontrar coordenadas tais que

$$g_{ab}\mathrm{d}y^a\mathrm{d}y^b = e^{2C}\mathrm{d}Z\mathrm{d}\bar{Z}, \tag{4.43}$$

onde Z e $\bar{Z}$ são complexos conjugados se o espaço transversal é do tipo tempo. A função C é independente de x^i.

Agora de forma a calcular os componentes do tensor de curvatura, introduze-se o seguinte sistema de tetradas para a métrica (4.42), considerando-se o sistema de coordenadas da Eq. (4.43):

$$\mathbf{e}^i = e^{\Phi_i}\mathrm{d}x^i, \qquad \mathbf{e}^Z = e^C\mathrm{d}Z, \quad \mathbf{e}^{\bar{Z}} = e^C\mathrm{d}\bar{Z}. \tag{4.44}$$

Aqui a convenção de soma de Einstein não está sendo utilizada para os índices i, j. O espaço métrico tangente $\eta_{\alpha\beta}$ é dado por $\eta_{ii} = \epsilon_i$, $\eta_{Z\bar{Z}} = \eta_{\bar{Z}Z} = 1/2$, onde os outros componentes se anulam. É necessário agora definir as conexões 1-forma como

$$d\mathbf{e}^\alpha = -\omega^\alpha{}_\beta \wedge \mathbf{e}^\beta. \tag{4.45}$$

De (4.44) e (4.45) obtêm-se

$$\omega_{iZ} = e^{-C}\partial_Z\Phi_i\mathbf{e}_i, \quad \omega_{i\bar{Z}} = e^{-C}\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\mathbf{e}_i, \quad \omega_{ij} = 0, \tag{4.46}$$

$$\omega_{Z\bar{Z}} = -\frac{1}{2}e^{-C}\partial_Z C\mathbf{e}^Z + \frac{1}{2}e^{-C}\partial_{\bar{Z}}C\mathbf{e}^{\bar{Z}}. \tag{4.47}$$

As 2-formas de curvatura são definidas por

$$\Theta_{\alpha\beta} = d\omega_{\alpha\beta} + \omega_\alpha{}^\gamma \wedge \omega_{\gamma\beta}. \tag{4.48}$$

As 2-formas de curvatura não-nulas para as conexões (4.46) e (4.47) são

$$\Theta_{ij} = -2e^{-2C}\left(\partial_Z\Phi_i\partial_{\bar{Z}}\Phi_j + \partial_Z\Phi_j\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\right)e_i \wedge e_j, \tag{4.49}$$

$$\Theta_{iZ} = -e^{-2C}\left[\partial_Z^2\Phi_i + (\partial_Z\Phi_i)^2 - 2\partial_Z C\partial_Z\Phi_i\right]e_i\wedge e^Z - e^{-2C}\left[\partial_Z\partial_{\bar{Z}}\Phi_i + \partial_Z\Phi_i\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\right]e_i\wedge e^{\bar{Z}}, \tag{4.50}$$

$$\Theta_{i\bar{Z}} = -e^{-2C}\left[\partial_Z\partial_{\bar{Z}}\Phi_i + \partial_Z\Phi_i\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\right]e_i\wedge e^Z - e^{-2C}\left[\partial_{\bar{Z}}^2\Phi_i + (\partial_{\bar{Z}}\Phi_i)^2 - 2\partial_{\bar{Z}}C\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\right]e_i\wedge e^{\bar{Z}}, \tag{4.51}$$

$$\Theta_{Z\bar{Z}} = e^{-2C}\partial_Z\partial_{\bar{Z}}Ce^Z \wedge e^{\bar{Z}}. \tag{4.52}$$

Os componentes do espaço tangente do tensor de Riemann são derivados destas últimas expressões e então

$$\Theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}R_{\alpha\beta\gamma\delta}e^\gamma \wedge e^\delta. \tag{4.53}$$

Encontram-se portanto

$$R_{ijkl} = -2e^{-2C}\left(\partial_Z\Phi_i\partial_{\bar{Z}}\Phi_j + \partial_Z\Phi_j\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\right)\left(\eta_{ik}\eta_{jl} - \eta_{il}\eta_{jk}\right), \tag{4.54}$$

$$R_{iZjZ} = -e^{-2C}\left[\partial_Z^2\Phi_i + (\partial_Z\Phi_i)^2 - 2\partial_Z C\partial_Z\Phi_i\right]\eta_{ij}, \tag{4.55}$$

$$R_{i\bar{Z}j\bar{Z}} = -e^{-2C}\left[\partial_{\bar{Z}}^2\Phi_i + (\partial_{\bar{Z}}\Phi_i)^2 - 2\partial_{\bar{Z}}C\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\right]\eta_{ij}, \tag{4.56}$$

$$R_{iZj\bar{Z}} = -e^{-2C}\left(\partial_Z\partial_{\bar{Z}}\Phi_i + \partial_Z\Phi_i\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\right)\eta_{ij}, \tag{4.57}$$

$$R_{Z\bar{Z}Z\bar{Z}} = e^{-2C}\partial_Z\partial_{\bar{Z}}C, \tag{4.58}$$

com as outras componentes não-nulas derivadas a partir das propriedades de simetria do tensor de Riemann. Posteriormente, o cálculo das componentes não-nulas do tensor de Ricci fornece

$$R_{ij} = -2e^{-2C}\left[2\partial_Z\partial_{\bar{Z}}\Phi_i + \partial_Z\Phi_i\sum_k \partial_{\bar{Z}}\Phi_k + \partial_{\bar{Z}}\Phi_i\sum_k \partial_Z\Phi_k\right]\eta_{ij}, \tag{4.59}$$

$$R_{ZZ} = -e^{-2C}\sum_i\left(\partial_Z^2\Phi_i + (\partial_Z\Phi_i)^2 - 2\partial_Z C\partial_Z\Phi_i\right), \tag{4.60}$$

$$R_{\bar{Z}\bar{Z}} = -e^{-2C}\sum_i\left(\partial_{\bar{Z}}^2\Phi_i + (\partial_{\bar{Z}}\Phi_i)^2 - 2\partial_{\bar{Z}} C\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\right), \tag{4.61}$$

$$R_{Z\bar{Z}} = -e^{-2C}\left[2\partial_Z\partial_{\bar{Z}}C + \sum_i \partial_Z\partial_{\bar{Z}}\Phi_i + \sum_i \partial_Z\Phi_i\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\right]. \tag{4.62}$$

Agora, assuma que $\mu, \nu = i, Z, \bar{Z}$, o que remete às equações de Einstein no vácuo como $R_{\mu\nu} = 0$. Então as componentes ij são

$$\partial_Z\left[\exp\left(\sum_j \Phi_j\right)\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\right] + \partial_{\bar{Z}}\left[\exp\left(\sum_j \Phi_j\right)\partial_Z\Phi_i\right] = 0. \tag{4.63}$$

Somando esta equação sobre i obtém-se

$$\partial_Z\partial_{\bar{Z}}\exp\left(\sum_j \Phi_j\right) = 0. \tag{4.64}$$

Esta última possui como solução geral

$$\sum_j \Phi_j = \log\left[w(Z) + \tilde{w}(\bar{Z})\right], \tag{4.65}$$

onde $\tilde{w} = \bar{w}$ se Z e $\bar{Z}$ são complexos conjugados. Substituindo a equação (4.65) em (4.63) obtém-se

$$2(w + \tilde{w})\partial_Z\partial_{\bar{Z}}\Phi_i + \partial_Z w\partial_{\bar{Z}}\Phi_i + \partial_{\bar{Z}}\tilde{w}\partial_Z\Phi_i = 0. \tag{4.66}$$

Se w é não-constante, então $R_{ZZ} = 0$ pode ser rearranjada para dar

$$\partial_Z C = \frac{\sum_i \partial_Z^2\Phi_i}{\sum_i \partial_Z\Phi_i} + \frac{1}{2}\sum_i \partial_Z\Phi_i - \frac{\sum_{i<j}\partial_Z\Phi_i\partial_Z\Phi_j}{2\sum_i \partial_Z\Phi_i}. \tag{4.67}$$

Equação similar é obtida de $R_{\bar{Z}\bar{Z}} = 0$:

$$\partial_{\bar{Z}} C = \frac{\sum_i \partial_{\bar{Z}}^2\Phi_i}{\sum_i \partial_{\bar{Z}}\Phi_i} + \frac{1}{2}\sum_i \partial_{\bar{Z}}\Phi_i - \frac{\sum_{i<j}\partial_{\bar{Z}}\Phi_i\partial_{\bar{Z}}\Phi_j}{2\sum_i \partial_{\bar{Z}}\Phi_i}. \tag{4.68}$$

Integrando os dois primeiros termos destas equações e aplicando a Eq. (4.65) resulta

$$C = \frac{1}{2}\log\left(\partial_Z w \partial_{\bar{Z}} \tilde{w}\right) + \Xi, \tag{4.69}$$

onde

$$\partial_Z \Xi = -\frac{w+\tilde{w}}{\partial_Z w}\sum_{i<j}\partial_Z \Phi_i \partial_Z \Phi_j, \tag{4.70}$$

$$\partial_{\bar{Z}} \Xi = -\frac{w+\tilde{w}}{\partial_{\bar{Z}} \tilde{w}}\sum_{i<j}\partial_{\bar{Z}} \Phi_i \partial_{\bar{Z}} \Phi_j. \tag{4.71}$$

A condição de integrabilidade para Ξ é

$$\partial_Z \partial_{\bar{Z}} \Xi = \partial_{\bar{Z}} \partial_Z \Xi. \tag{4.72}$$

Não é difícil checar que esta última equação é satisfeita se (4.65) e (4.66) são válidas, o que também confirma que a equação de Einstein restante $R_{Z\bar{Z}} = 0$ é satisfeita.

Como w e $\tilde{w}$ foram assumidas não-constantes, pode-se operar uma transformação de coordenada de Z e $\bar{Z}$ para $w(Z)$ e $\tilde{w}(\bar{Z})$ de forma similar àquela citada para o caso $4D$, para chegar às chamadas coordenadas canônicas de Weyl como abaixo

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_i \epsilon_i e^{2\Phi_i}(\mathrm{d}x^i)^2 + e^{2\,\Xi}\mathrm{d}w\mathrm{d}\tilde{w}. \tag{4.73}$$

Esta transformação de coordenada é conforme. Eqs. (4.66), (4.70) e (4.71) são invariantes conformes, e então a transformação apenas substitui ∂_Z por $\partial \equiv \partial_w$ e $\partial_{\bar{Z}}$ por $\bar{\partial} \equiv \partial_{\tilde{w}}$. Logo a solução é determinada pelas seguintes equações

$$\sum_i \Phi_i = \log(w+\tilde{w}), \tag{4.74}$$

$$2(w+\tilde{w})\partial\bar{\partial}\Phi_i + \partial\Phi_i + \bar{\partial}\Phi_i = 0, \tag{4.75}$$

$$\partial\Xi = -(w+\tilde{w})\sum_{i<j}\partial\Phi_i\partial\Phi_j, \tag{4.76}$$

$$\bar{\partial}\Xi = -(w+\tilde{w})\sum_{i<j}\bar{\partial}\Phi_i\bar{\partial}\Phi_j. \tag{4.77}$$

Se Z e $\bar{Z}$ são coordenadas complexas conjugadas, então é possível fazer $\tilde{w} = \bar{w}$. Introduzindo coordenadas reais (r, z) tal que $w = r + iz$, então a forma canônica da métrica fica

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_i \epsilon_i e^{2\Phi_i}(\mathrm{d}x^i)^2 + e^{2\,\Xi}(\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2). \tag{4.78}$$

Eq. (4.75) então toma a forma

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial z^2} = 0, \tag{4.79}$$

que de novo é a equação de Laplace no espaço plano tridimensional com métrica (4.3). A função Φ_i é independente da coordenada θ, i.e., ela é axissimétrica. A solução é então determinada por $d-3$ soluções axissimétricas da equação de Laplace (sendo elas soluções independentes).

4.3 Um disco em $6D$

Como visto em (4.79), para d dimensões, Φ_i tem as soluções axissimétricas da equação de Laplace como sua solução definitiva. Assim, voltando às raízes desenvolvidas na primeira seção deste capítulo, poderia-se perguntar sobre a possibilidade de usar o fato para construir um disco fino imerso num espaço multidimensional. Inicialmente, como já visto na Seção 4.1.2 , deve-se assumir que Φ_i e Ξ em (4.78) são contínuas ao longo do disco, em particular na superfície $z=0$, mas com primeiras derivadas descontínuas sobre tal superfície. A abordagem deverá ser a mesma que a utilizada para o caso em quatro dimensões, e pode-se introduzir as descontinuidades ao fazer a transformação $z \to |z| + a$, onde a é constante.

E, como já dito nas Seções 4.1.2 e 4.1.3, as descontinuidades indicam que o tensor de curvatura de Riemann contêm funções delta de Dirac que fazem possível o cálculo do tensor de energia-momento via uma abordagem distribucional. Para a métrica do tipo Weyl calculada em 4.2, levam à seguinte expressão, para coordenadas extras do tipo espaço, e para os componentes extradimensionais do tensor de energia-momento: $[T^{x^i}_{x^i}] = -[T^{x^{i+1}}_{x^{i+1}}] = \frac{1}{16\pi} g^{zz} b^{x^i}_{x^i}$. Se d é par, então a soma das pressões extradimensionais se cancelam e a pressão total no disco depende apenas de componentes $4D$. Assim, a primeira consideração a ser feita é que o disco deve ser construído num espaço-tempo de dimensão par. Outro importante argumento a favor de dimensões pares é enfatizado por diversos autores acerca do princípio de Huygens e do fato de tal princípio só funcionar para dimensões pares [Kos99, Gal02, Kaz02, Cso03]. Também é enfatizado o uso de dimensões extras pares em modelos como o ADD [Ark98].

4.3.1 Equações de Einstein no vácuo

Assim, como exemplo mais simples, pode-se trabalhar com o caso de um disco imerso em um espaço-tempo de seis dimensões. A métrica axissimétrica para um espaço-tempo $6D$ pode ser escrita em coordenadas quasicilíndricas como

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{-\phi}\mathrm{d}t^2 + \chi^2 e^{\phi}\mathrm{d}\varphi^2 + \psi e^{\nu}\mathrm{d}x^2 + e^{-\nu}\mathrm{d}y^2 + f(\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2), \tag{4.80}$$

onde novamente $\phi = \phi(r,z)$, $f = f(r,z)$, $\chi = \chi(r,z)$, $\psi = \psi(r,z)$ e x e y são coordenadas extradimensionais. As equações de Einstein no vácuo $R_{AB} = 0$, $(A, B = 0, 1, ..., 5)$ são calculadas e expressas em termos das seguintes equações

$$(\chi\sqrt{\psi})_{,rr} + (\chi\sqrt{\psi})_{,zz} = 0, \tag{4.81}$$

$$\nu_{,rr} + \frac{\nu_{,r}(\chi\sqrt{\psi})_{,r}}{\chi\sqrt{\psi}} + \frac{\nu_{,z}(\chi\sqrt{\psi})_{,z}}{\chi\sqrt{\psi}} + \nu_{,zz} = 0, \tag{4.82}$$

$$\phi_{,rr} + \frac{\phi_{,r}(\chi\sqrt{\psi})_{,r}}{\chi\sqrt{\psi}} + \frac{\phi_{,z}(\chi\sqrt{\psi})_{,z}}{\chi\sqrt{\psi}} + \phi_{,zz} = 0. \tag{4.83}$$

onde $(\ )_{,a} = \partial/\partial x^a$. Sobre o grau de liberdade das coordenadas, pode-se considerar $\varsigma = \chi\sqrt{\psi}$ como a parte real de um função analítica $W(\zeta) = \varsigma(r,z) + iZ(r,z)$, onde $\zeta = r + iz$. Notando-se que $\overline{W}(\zeta) = W(\overline{\zeta})$, pode-se escrever $\mathrm{d}W\mathrm{d}\overline{W} = \frac{\partial W}{\partial \zeta}\frac{\partial W}{\partial \overline{\zeta}}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\overline{\zeta} = |W'(\zeta)|^2\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\overline{\zeta}$. Ou mesmo, $\mathrm{d}W\mathrm{d}\overline{W} = \mathrm{d}\varsigma^2 + \mathrm{d}Z^2 = |W'(\zeta)|^2(\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2)$. Assim, sem perda de generalidade, não há problema algum em escolher $\chi\sqrt{\psi} = r$. Uma forma simples de tratar o problema é escolhendo $\psi = 1$ e $\chi = r$, o que resulta numa equação de Einstein simplificada para $f(r,z)$,

$$\begin{aligned} \ln f[\phi,\nu] &= \frac{1}{2}\int r\{[\phi_{,r}^2 - \phi_{,z}^2 + 2\phi_{,r}/r + \nu_{,r}^2 - \nu_{,z}^2]\mathrm{d}r \\ &+ [2\phi_{,r}\phi_{,z} + 2\phi_{,z}/r + 2\nu_{,r}\nu_{,z}]\mathrm{d}z\}. \end{aligned} \tag{4.84}$$

As Eqs.(4.81)–(4.84) formam um conjunto completo de equações de Einstein no vácuo para a métrica (4.80).

4.3.2 Conteúdo material do disco

Para encontrar soluções de (4.81)–(4.84) que representem discos finos localizados em $z = 0$, deve-se, mais uma vez, assumir que as funções da métrica f e ϕ são contínuas ao longo do disco, em particular sobre a superfície $z = 0$, mas com derivadas descontínuas naquela superfície. Estas descontinuidades são introduzidas a partir do método inverso $z \to |z| + a$, onde a é uma constante. O cálculo distribucional do tensor de energia-momento, conforme método já apresentado para o caso $4D$, resulta em

$$[T^t{}_t] = \frac{1}{16\pi}\{-b^{zz} + g^{zz}(b^r{}_r + b^z{}_z + b^\varphi{}_\varphi + b^x{}_x + b^y{}_y)\}, \tag{4.85}$$

$$[T^r{}_r] = \frac{1}{16\pi}\{-b^{zz} + g^{zz}(b^t{}_t + b^z{}_z + b^\varphi{}_\varphi + b^x{}_x + b^y{}_y)\}, \tag{4.86}$$

$$[T^z{}_z] = 0, \tag{4.87}$$

$$[T^\varphi{}_\varphi] = \frac{1}{16\pi}\{-b^{zz} + g^{zz}(b^t{}_t + b^r{}_r + b^z{}_z + b^x{}_x + b^y{}_y)\}, \tag{4.88}$$

$$[T^x{}_x] = \frac{1}{16\pi}\{-b^{zz} + g^{zz}(b^t{}_t + b^r{}_r + b^z{}_z + b^\varphi{}_\varphi + b^y{}_y)\}, \tag{4.89}$$

$$[T^y{}_y] = \frac{1}{16\pi}\{-b^{zz} + g^{zz}(b^t{}_t + b^r{}_r + b^z{}_z + b^\varphi{}_\varphi + b^x{}_x)\}. \tag{4.90}$$

E as descontinuidades das primeiras derivadas da métrica $b_{AB} = (g^+_{AB,z} - g^-_{AB,z})|_{z=0}$ são abaixo calculadas

$$b_{tt} = 2\mathrm{e}^{-\phi}\phi_{,z}|_{z=0}, \tag{4.91}$$

$$b_{rr} = 2f_{,z}|_{z=0}, \tag{4.92}$$

$$b_{zz} = b_{rr}, \tag{4.93}$$

$$b_{\phi\phi} = 2r^2 \mathrm{e}^{\phi} \phi_{,z}|_{z=0}, \tag{4.94}$$

$$b_{xx} = 2\mathrm{e}^{\nu} \nu_{,z}|_{z=0}, \tag{4.95}$$

$$b_{yy} = -2\mathrm{e}^{-\nu} \nu_{,z}|_{z=0}. \tag{4.96}$$

Incluindo as dimensões extras, o *vierbein* agora é substituído por um *sechsbein*,

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{(t)}{}^{A} &= \left(\frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}, 0, 0, 0, 0, 0\right), \mathbf{e}_{(\mathbf{r})}{}^{A} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}, 0, 0, 0, 0\right), \\
\mathbf{e}_{(\varphi)}{}^{A} &= \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}, 0, 0, 0\right), \mathbf{e}_{(z)}{}^{A} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{zz}}}, 0, 0\right), \\
\mathbf{e}_{(x)}{}^{A} &= \left(0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{xx}}}, 0\right), \mathbf{e}_{(y)}{}^{A} = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{yy}}}\right),
\end{aligned}$$

e o tensor de energia-momento é agora escrito como

$$\begin{aligned}
[T^{A}{}_{B}] = \; & - \; \epsilon \mathbf{e}_{(t)}{}^{A} \mathbf{e}_{(t)}{}^{B} + p_r \mathbf{e}_{(r)}{}^{A} \mathbf{e}_{(r)}{}^{B} \\
& + \; p_\varphi \mathbf{e}_{(\varphi)}{}^{A} \mathbf{e}_{(\varphi)}{}^{B} + p_z \mathbf{e}_{(z)}{}^{A} \mathbf{e}_{(z)}{}^{B} \\
& + \; p_x \mathbf{e}_{(x)}{}^{A} \mathbf{e}_{(x)}{}^{B} + p_y \mathbf{e}_{(y)}{}^{A} \mathbf{e}_{(y)}{}^{B},
\end{aligned} \tag{4.97}$$

resultando nas seguintes components de densidade de energia e pressões

$$\epsilon = -[T^{t}{}_{t}] = -\frac{f_{,z}}{8\pi f^2}|_{z=0} \tag{4.98}$$

$$p_\varphi = [T^{\varphi}{}_{\varphi}] = -\frac{\phi_{,z}}{8\pi f}|_{z=0} \tag{4.99}$$

$$p_r = [T^{r}{}_{r}] = 0, \tag{4.100}$$

$$p_z = [T^{z}{}_{z}] = 0. \tag{4.101}$$

$$p_x + p_y = 0. \tag{4.102}$$

4.3.3 Soluções

Outro passo para a construção do disco, é escolher soluções apropriadas das equações (4.82) e (4.83) para as funções ϕ e ν. As equações de Laplace indicadas, para o caso axissimétrico, têm como soluções mais comuns aquelas listadas na Seção 4.1.4. A solução d-dimensional de Schwarzschild tem grupo de isometria $\mathbf{R} \times O(D-1)$. Para escrevê-la no formato de Weyl, são requeridas $d-2$ campos vetoriais de Killing ortogonais que comutem. Para a solução de Schwarzschild, isso ocorre apenas para $d = 4, 5$. Para $d > 5$, a solução d-dimensional de Schwarzschild não é uma generalização da solução de Weyl. No entanto, a geometria obtida ao tomar produtos das soluções de Schwartzschild em $d = 4$ ou $d = 5$ com espaços assintoticamente planos são facilmente vistas como soluções de Weyl. Assim, pode-se tomar, por exemplo, para as funções ϕ e ν soluções de Schwarzschild em $4D$

sem maiores problemas. Isto é equivalente então a tomar o potencial newtoniano associado a uma barra de densidade constante (tal qual explicado em 4.1.4),

$$\phi(r,z) = \nu(r,z) = \ln \frac{R_1 + R_2 - 2}{R_1 + R_2 + 2}, \tag{4.103}$$

onde $R_1 = \sqrt{\tilde{r}^2 + (z-1)^2}$ e $R_2 = \sqrt{\tilde{r}^2 + (z+1)^2}$, e $\tilde{r}$ é a coordenada radial normalizada pela massa, $\tilde{r} = r/m$. O comprimento da barra é $L = 2m$.

Também pode-se usar a solução de Chazy-Curzon para as funções ϕ e ν, ou uma combinação da solução acima e a de Chazy-Curzon. De fato, se $\phi(r,z) = \nu(r,z) = [r^2 + (|z| + a)^2]^{-1/2})$, tem-se uma solução assintoticamente plana, resultando em um disco que é solução de Weyl.

4.4 Curvas de rotação para o novo disco

Da equação (4.80) obtém-se a primeira integral de movimento,

$$-\mathrm{e}^{-\phi}\dot{t}^2 + f(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + r^2\mathrm{e}^{\phi}\dot{\varphi}^2 + \mathrm{e}^{\nu}\dot{x}^2 + \mathrm{e}^{-\nu}\dot{y}^2 = 1, \tag{4.104}$$

onde $\dot{x}^A = \mathrm{d}x^A/\mathrm{d}s$. Assumindo $\dot{r} = 0$ e $\dot{z} = 0$ (partículas sem movimento radial e confinadas em $z = 0$), a Eq.(4.104) toma a forma

$$-\mathrm{e}^{-\phi}\dot{t}^2 + r^2\mathrm{e}^{\phi}\dot{\varphi}^2 + \mathrm{e}^{\nu}\dot{x}^2 + \mathrm{e}^{-\nu}\dot{y}^2 = 1. \tag{4.105}$$

Observando as Eqs. (4.98)–(4.102), pensa-se evidentemente que as pressões devidas às dimensões extras não contribuem para a pressão total sobre o disco, o que poderia incutir o argumento de que as dimensões extras não contribuem para o perfil de densidade. Mas como visto no Capítulo 3 e também a partir da própria Eq. (4.84) pode-se notar que as dimensões extras introduzem informação nova no tensor de energia-momento do disco [observe que $f(r,z)$ contém componentes extradimensionais]. Portanto *a priori* as quantidades $\dot{x}$ e $\dot{y}$ devem ser não-nulas. Deste modo, as equações geodésicas no disco reduzem-se a

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{\nu}\dot{x} = C_x, \quad \mathrm{e}^{-\nu}\dot{y} = C_y, \\ & (\mathrm{e}^{-\phi})_{,r}\dot{t}^2 - (r^2\mathrm{e}^{\phi})_{,r}\dot{\varphi}^2 \\ = \; & C_x^2(\mathrm{e}^{-\nu})_{,r} + C_y^2(\mathrm{e}^{\nu})_{,r}, \end{aligned} \tag{4.106}$$

onde C_x e C_y são constantes de integração.

As Eqs. (4.105) e (4.106) formam um sistema de equações para $\dot{\varphi}^2$ e $\dot{t}^2$. Desta combinação pode-se calcular a velocidade circular (curva de rotação) V_C,

$$V_C = \sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}\frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{t}^2}}, \tag{4.107}$$

que se reduz a

$$V_C = \sqrt{\frac{F(r)\nu_{,r} + G(r)\phi_{,r}}{F(r)\nu_{,r} - G(r)(2/r + \phi_{,r})}}, \tag{4.108}$$

onde $F(r) = -C_x^2 \mathrm{e}^{-\nu} + C_y^2 \mathrm{e}^{\nu}$ e $G(r) = 1 - C_x^2 \mathrm{e}^{-\nu} - C_y^2 e^{\nu}$. Note que quando $C_x = C_y = 0$ (i.e., situação sem dimensões extras), tem-se que $V_C = \sqrt{-\phi_{,r}/(2/r + \phi_{,r})}$, a fórmula conhecida para órbitas circulares em um geometria axissimétrica em $4D$, Eq. (4.41). A maneira como foram calculadas as órbitas circulares aponta para um espaço-tempo onde é possível uma teoria de campo do tipo dimensões extras universais [App01]. Outro ponto importante, é que os valores de C_x e C_y serão calculados a partir da estabilidade do disco, como mostrado na seção a seguir.

4.5 Cálculo da estabilidade

Inicialmente há o interesse em responder à questão: quais são os valores de C_x e C_y (as constantes de integração que aparecem no cálculo do movimento das partículas) que fazem o disco estável? Um método mais trivial (o critério de Rayleigh) e um mais avançado (método perturbativo) serão ambos apresentados para vincular possíveis valores estáveis para C_x e C_y. As curvas de rotação procuradas serão obtidas mediante os resultados para a estabilidade.

4.5.1 Critério de Rayleigh

A estabilidade das órbitas circulares pode ser estudada usando uma extensão do critério de estabilidade de Rayleigh [Ray16]. Este método é extremamente bom para sistemas newtonianos, e apenas para órbitas circulares. Dada tal limitação, aqui será usado como um método de referência. No critério de Rayleigh, haverá estabilidade quando $h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} > 0$, onde h é o momento angular específico da partícula no plano do disco ($h = g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}$),

$$h = r^2 \mathrm{e}^{\phi} \sqrt{\frac{(1 - C_x^2 \mathrm{e}^{-\nu} - C_y^2 \mathrm{e}^{\nu})\phi_{,r} + (C_x^2 \mathrm{e}^{-\nu} - C_y^2 \mathrm{e}^{\nu})\nu_{,r}}{2r^2 \mathrm{e}^{\phi}(1/r + \phi_{,r})}}. \tag{4.109}$$

Para diferentes valores de C_x ed C_y menores que 1, a estabilidade é alcançada quando $a/m > 1$. Para pequenos valores de a/m ($a/m < 1$, discos altamente relativísticos) tem-se que uma pequena zona de instabilidade, tipicamente em torno de $r = 6m$ para discos em $4D$. Na Fig. 4.4 mostra-se a estabilidade do disco para o critério apresentado acima. O principal vínculo derivado deste método é encontrar valores estáveis para o parâmetro de corte a.

4.5.2 Método perturbativo

A estabilidade das órbitas circulares no plano do disco podem ser estudadas usando um método mais acurado e sofisticado que o critério de Rayleigh. Usualmente o critério de Rayleigh é estudado para órbitas circulares puramente newtonianas, e revela para o modelo aqui apresentado, importantes vínculos para os valores estáveis do parâmetro de corte a (aqui também normalizado pela massa). Pode ser visto na

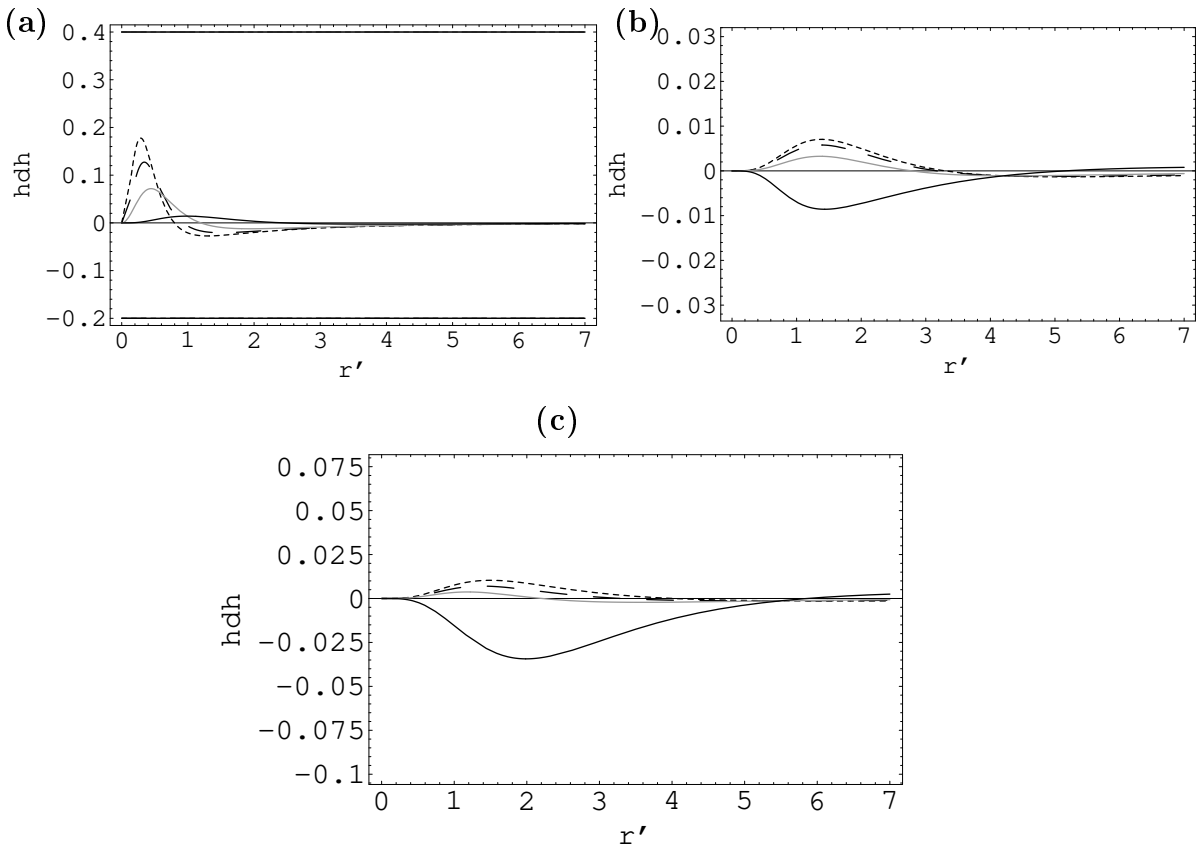


Figura 4.4: Estabilidade do disco a partir do critério de Rayleigh. Em **(a)** mostra-se que valores estáveis do parâmetro de corte a são obtidos apenas para $a/m > 1$ (a linha cheia), onde ocorre $h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} > 0$. **(b)** Na região de interesse, discos estáveis ocorrem para parâmetros extradimensionais $C_x = 0,8$ (linha pontilhada), $C_x = 0,85$ (linha tracejada) e $C_x = 0,9$ (linha cinzenta). Para $C_x > 0,95$, $h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} < 0$, e o disco se torna instável (linha cheia). **(c)** Na região de interesse, discos estáveis ocorrem para parâmetros extradimensionais $C_y = 0,1$ (linha pontilhada), $C_y = 0,2$ (linha tracejada) e $C_y = 0,3$ (linha cinzenta). Para $C_y > 0,5$, $h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} < 0$, e o disco disco se torna instável (linha cheia). Aqui a está normalizado pela massa de teste e $r' = r/m$.

seção anterior que, para $a > 1$, serão obtidos os melhores discos, isso porque a expressa quão relativístico é o disco. Valores de $a < 1$ apontam discos relativísticos que trazem como consequência configurações instáveis.

Deve-se perguntar agora para que valores das integrais de movimento C_x e C_y o disco é estável. O critério de Rayleigh não é bem sucedido em responder isto e um método mais acurado deve ser utilizado. Um método equivalente ao de Rayleigh, porém que use relatividade geral, é aquele que introduz perturbações na equação geodésica para uma partícula teste. A seguir, o método é apresentado.

Dada a equação geodésica para o espaço-tempo com dimensões extras $\ddot{x}^A + \Gamma^A_{BC}\dot{x}^B\dot{x}^C = 0$ é possível obter a perturbação desta última a partir da seguinte transformação infinitesimal $x^A \to x^A + \Delta^A$, onde $\Delta^A = (\delta t, \delta r, \delta\varphi, \delta z, \delta x, \delta y)$ são elementos infinitesimais.

Caso $4D$

Como o caso $6D$ é uma generalização do caso $4D$, abaixo calcula-se para o espaço-tempo $1+3$. A equação geodésica na situação $4D$ é

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0. \tag{4.110}$$

Aqui, a equação da geodésica é feita a partir de $x^\alpha \to x^\alpha + \Delta^\alpha$, com $\Delta^\alpha = (\delta t, \delta r, \delta\varphi, \delta z)$. Substituindo tal aplicação na Eq. (4.110), obtêm-se

$$\ddot{x}^\alpha + \ddot{\Delta}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x+\Delta)[\dot{x}^\mu + \dot{\Delta}^\mu][\dot{x}^\nu + \dot{\Delta}^\nu] = 0, \tag{4.111}$$

$$\ddot{x}^\alpha + \ddot{\Delta}^\alpha + \left[\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Delta^\beta\right][\dot{x}^\mu + \dot{\Delta}^\mu][\dot{x}^\nu + \dot{\Delta}^\nu] = 0, \tag{4.112}$$

Usando (4.110) isola-se apenas a parte perturbativa

$$\ddot{\Delta}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{\Delta}^\nu + \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\dot{\Delta}^\mu\dot{x}^\nu + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Delta^\beta\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0, \tag{4.113}$$

e como $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ finalmente derivam-se as equações geodésicas para as perturbações

$$\ddot{\Delta}^\alpha + 2\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{\Delta}^\nu + \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta}\Delta^\beta\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0. \tag{4.114}$$

Pode-se tomar o caso em que as coordenadas no plano do disco são dadas por $x^\mu = (t, \rho = \text{const}, \varphi = \text{const} + \Omega t, z = 0)$, e a métrica axissimétrica é $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{2\nu}\mathrm{d}t^2 + \rho^2 B^2 \mathrm{e}^{-2\nu}(\mathrm{d}\varphi - \Omega\mathrm{d}t)^2 + \mathrm{e}^{2\lambda-2\nu}(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2)$. Aqui, os símbolos de Christoffel não-nulos são $\Gamma^t_{t\rho}$, $\Gamma^\rho_{\rho\rho}$, Γ^ρ_{zz}, $\Gamma^z_{z\rho}$, Γ^ρ_{tt}, $\Gamma^\varphi_{\varphi\rho}$, $\Gamma^t_{\varphi\rho}$, $\Gamma^\rho_{\varphi t}$, $\Gamma^\rho_{\varphi\varphi}$, $\Gamma^\varphi_{t\rho}$, e encontram-se três equações geodésicas

$$(\ddot{\delta t}) + 2(\Gamma^t_{t\rho} + \Gamma^t_{\varphi\rho}\Omega)u^t(\dot{\delta\rho}) = 0, \tag{4.115}$$

$$(\ddot{\delta\rho}) + 2(\Gamma^\rho_{tt} + \Gamma^\rho_{\varphi t}\Omega)u^t(\dot{\delta t}) + 2(\Gamma^\rho_{t\varphi} + \Gamma^\rho_{\varphi\varphi}\Omega)u^t(\dot{\delta\varphi}) + (\Gamma^\rho_{tt,\rho} + 2\Gamma^\rho_{t\varphi,\rho}\Omega + \Gamma^\rho_{\varphi\varphi,\rho}\Omega^2)(u^t)^2(\delta\rho) = 0, \tag{4.116}$$

$$(\ddot{\delta\varphi}) + 2(\Gamma^\varphi_{t\rho} + \Gamma^\varphi_{\varphi\rho}\Omega)u^t(\dot{\delta\rho}) = 0, \tag{4.117}$$

onde $\dot{x}^\mu = u^\mu = u^t(1, 0, \Omega, 0)$, e $u^t\Omega = V_C$.

Generalização para o caso $6D$

Agora, para o caso de um espaço-tempo $6D$ (onde $A, B, C, D = 0, ..., 5$), as equações geodésicas para as perturbações são derivadas como

$$\ddot{\Delta}^A + 2\Gamma^A_{BC}\dot{x}^B\dot{\Delta}^C + \Gamma^A_{BC,D}\Delta^D\dot{x}^B\dot{x}^C = 0, \tag{4.118}$$

onde Γ^A_{BC} são os novos símbolos de Christoffel, $\dot{x}^A$ são derivadas do tempo próprio $\mathrm{d}x^A/\mathrm{d}s$ e podem ser escritas para o movimento orbital circular como

$$\dot{x}^A = (u^t, 0, 0, u^t\Omega, C_x, C_y), \tag{4.119}$$

onde $u^t\Omega = V_C$, Eq. (4.108). Assumindo apenas oscilações horizontais na parte $4D$ do disco fino ($\delta z = 0$), obtém-se

$$\Delta^A = (\delta t, \delta r, 0, 0, \delta\varphi, 0, 0). \tag{4.120}$$

Seja x^A uma geodésica circular equatorial em um espaço axissimétrico estacionário (4.80), i.e., a linha de mundo $x^A = (t, r = \text{const}, \varphi = \text{const} + \Omega t, z = 0, x = \text{const}, y = \text{const})$. Substituindo a quadrivelocidade (4.119) e impondo que $g_{AB,z}$ (mas não $g_{AB,zz}$) se anula no plano equatorial, os componentes da Eq.(4.118) para oscilações horizontais são:

$$(\ddot{\delta t}) + 2\Gamma^t_{tr}u^t(\dot{\delta r}) = 0, \tag{4.121}$$

$$(\ddot{\delta r}) + 2\Gamma^r_{tt} + 2\Gamma^r_{\varphi\varphi}u^t\Omega(\dot{\delta\varphi}) + [(\Gamma^r_{tt,r} \tag{4.122}$$
$$+\Gamma^r_{\varphi\varphi,r}\Omega^2)(u^t)^2 + \Gamma^r_{xx,r}C_x^2 + \Gamma^r_{yy,r}C_y^2]\delta r = 0,$$

$$(\ddot{\delta\varphi}) + 2\Gamma^\varphi_{\varphi r}\Omega u^t(\dot{\delta r}) = 0. \tag{4.123}$$

É possível supor que as soluções de δt, δr e $\delta\varphi$ têm a forma de oscilações harmônicas, $\sim e^{iKs}$, com uma frequência angular comum K. A condição de resolução do sistema (4.121)-(4.123) é

$$\det\begin{pmatrix} -K^2 & 2iK\Gamma^t_{tr}u^t & 0 \\ 2iK\Gamma^r_{tt}u^t & -K^2 + \Gamma^r_{AB,r}u^Au^B & 2iK\Gamma^r_{\varphi\varphi}u^t\Omega \\ 0 & 2iK\Gamma^\varphi_{\varphi r}u^t\Omega & -K^2 \end{pmatrix} = 0, \tag{4.124}$$

onde $\Gamma^r_{AB,r}u^Au^B = (\Gamma^r_{tt,r} + \Gamma^r_{\varphi\varphi,r}\Omega^2)(u^t)^2 + \Gamma^r_{xx,r}C_x^2 + \Gamma^r_{yy,r}C_y^2$. Da solução não-trivial desta equação pode-se derivar a frequência de oscilação com respeito ao infinito $\kappa = K/u^t$, conhecida na literatura como frequência epicíclica [Kto90, Sem00].

A frequência angular K é calculada como

$$K^2 = \Gamma^r_{AB,r}u^Au^B - 4(\Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{\phi\phi}\Omega^2 + \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{tr})(u^t)^2, \tag{4.125}$$

Tabela 4.1: Valores estáveis de C_x e C_y (aqui, segundo o critério de Rayleigh, os seguintes valores são aplicáveis apenas para o caso onde o disco tem parâmetro de corte $a/m > 1$)

Valores para C_x e C_y	Região de estabilidade do disco
$C_x = 0$; $C_y = 0$ (Newtoniano)	**Para todo** r'
$0 < C_x < 0,2$; $0 < C_y < 0,4$	**Para todo** r'
$0 < C_x < 0,2$; $C_y = 0,5$	$0 < r' \lesssim 0,4$
$0 < C_x < 0,2$; $C_y = 0,7$	$0 < r' \lesssim 1,4$
$0 < C_x < 0,2$; $C_y = 0,75$	$0 < r' \lesssim 2,6$
$0 < C_x < 0,2$; $C_y = 0,8$	$0 < r' \lesssim 4$
$0 < C_x < 0,2$; $C_y = 0,85$	$0 < r' \lesssim 5,5$
$0 < C_x < 0,2$; $C_y = 0,9$	$0 < r' \lesssim 15$
$0 < C_x < 0,2$; $C_y = 0,93$	$0 < r' \lesssim 22$
$0 < C_x < 0,2$; $C_y > 0,95$	**Disco instável**
$C_x > 0,2$; Para todo C_y	**Disco instável**

o que permite calcular a frequência epicíclica como

$$\kappa^2 = \frac{Z(r)}{2 + \phi_{,r} - P(r)}[\phi_{,rr} + r\phi_r^3 + 3\phi_{,r}/r + 3\phi_r^2 + Q(r)], \tag{4.126}$$

onde $Z(r) = -e^{-\phi}/f$, ϕ e ν são funções da métrica dadas por (4.80) e $P(r)$ e $Q(r)$ são termos que aparecem relacionados à presença das dimensões extras:

$$P(r) = M(r)[2 + \phi_{,r}r] + F(r)r\nu_{,r}, \tag{4.127}$$

$$Q(r) = P(r)[H(r)/r + 0.5\phi_{,r}f_{,r}/f - \phi_{,r}^2/2 - \phi_{,rr}/2] - H(r)\phi_{,r} - 2H(r)/r - N(r)/r, \tag{4.128}$$

$$H(r) = \frac{e^{\nu-\phi}}{2r}C_x^2[\nu_{,r}f_{,r}/f - \nu_{,r}^2 - \nu_{,rr}] + \frac{e^{-\nu-\phi}}{2r}C_y^2[-\nu_{,r}f_{,r}/f - \nu_{,r}^2 + \nu_{,rr}] \tag{4.129}$$

$$\begin{aligned} N(r) = F(r)[\; &- \; 3\nu_{,r} - 2r\phi_{,r}\nu_{,r} - 0.5r^2\phi_{,r}^2\nu_{,r} + 0.5r^2\phi_{,rr}] + M(r)[3\phi_{,r} + 2r\phi_{,r}^2 \\ &+ \; 0.5r^2\phi_{,r}^3 - 0.5r^2\phi_{,rr}\phi_{,r} + r\phi_{,r}f_{,r}/f + 0.5r^2\phi_{,r}^2 f_{,r}/f], \end{aligned} \tag{4.130}$$

e onde $M(r) = C_x^2 e^{-\nu} + C_y^2 e^{\nu}$ e $F(r) = -C_x^2 e^{-\nu} + C_y^2 e^{\nu}$. Quando $C_x = C_y = 0 \Rightarrow P(r) = Q(r) = 0$ (sem dimensões extras), a Eq.(4.126) se torna a fórmula bem conhecida para oscilações em uma geometria de axissimétrica (vide p.ex. em [Sem00]).

Os gráficos para a frequência epicíclica ao quadrado são mostrados na Figs. 4.5 e 4.6. A configuração é estável apenas quando $\kappa^2 > 0$. Os resultados mostram que as constantes de integração C_x e C_y que promovem a estabilidade estão em um intervalo muito restrito de valores. Na tabela 4.1 é possível observar quais são tais valores para C_x e C_y (aqui foi fixado $a = 1.5$, valor estável para o parâmetro de

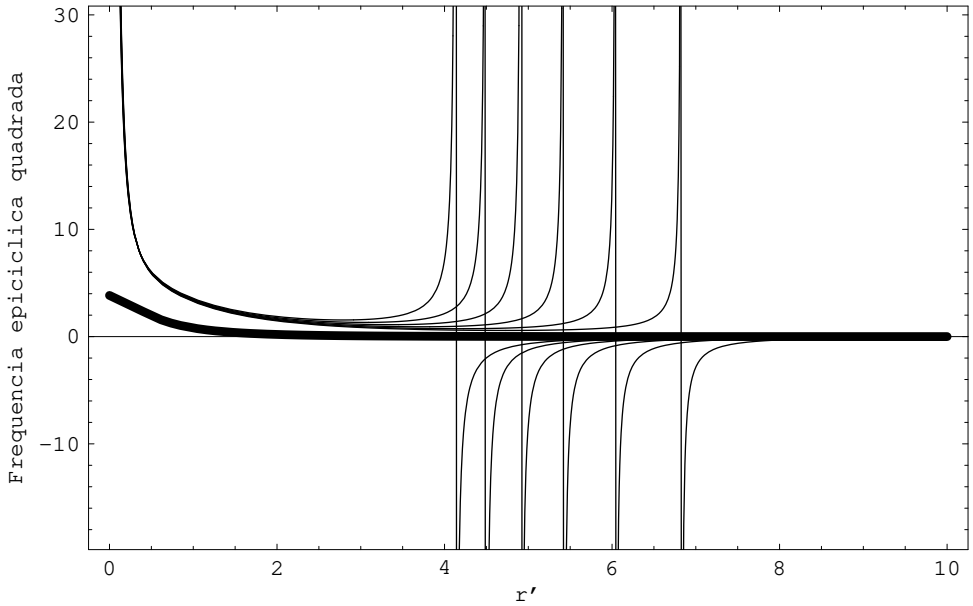


Figura 4.5: Frequência epicíclica quadrada versus o raio $r' = r/m$ para uma configuração onde $C_x = 0,15$ e C_y está variando entre 0,8 e 0,9. A estabilidade é alcançada para $0 < r' < 7$, ou seja, o intervalo onde $\kappa^2 > 0$. A curva em negrito é o resultado da estabilidade de um disco fino em $4D$ (similar a um disco kepleriano). Aqui usou-se um parâmetro de corte para o disco de $a/m = 1,5$.

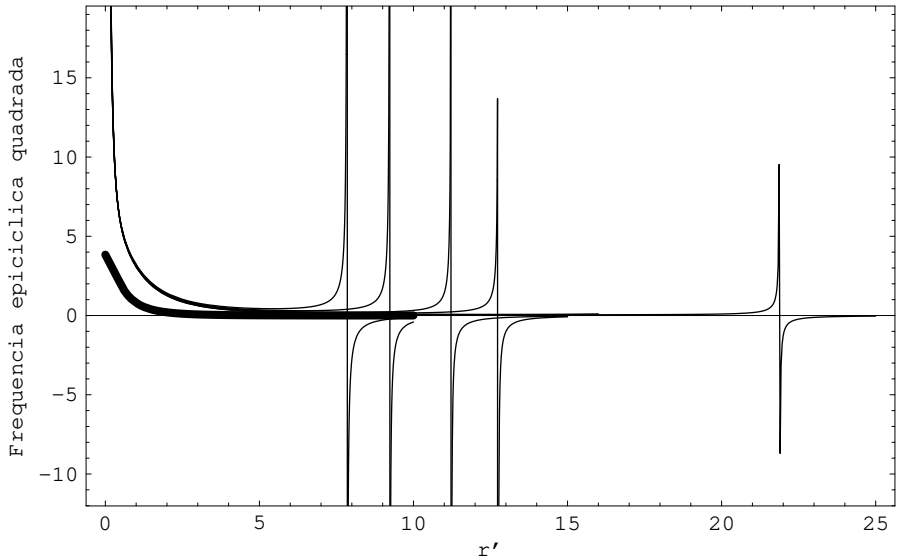


Figura 4.6: Um outro conjunto de soluções estáveis, permitindo agora um intervalo maior de possíveis r'. A configuração está calculada para $C_x = 0,2$ e C_y variando entre 0,91 a 0,94. É mostrada a frequência epicíclica quadrada κ^2 versus o raio normalizado $r' = r/m$. A estabilidade é alcançada para o caso em que κ^2 é positiva, região no gráfico em que $0 < r' < 22$. A curva em negrito é o resultado para um disco fino $4D$ (similar a um disco kepleriano). O parâmetro de corte do disco utilizado foi $a/m = 1,5$.

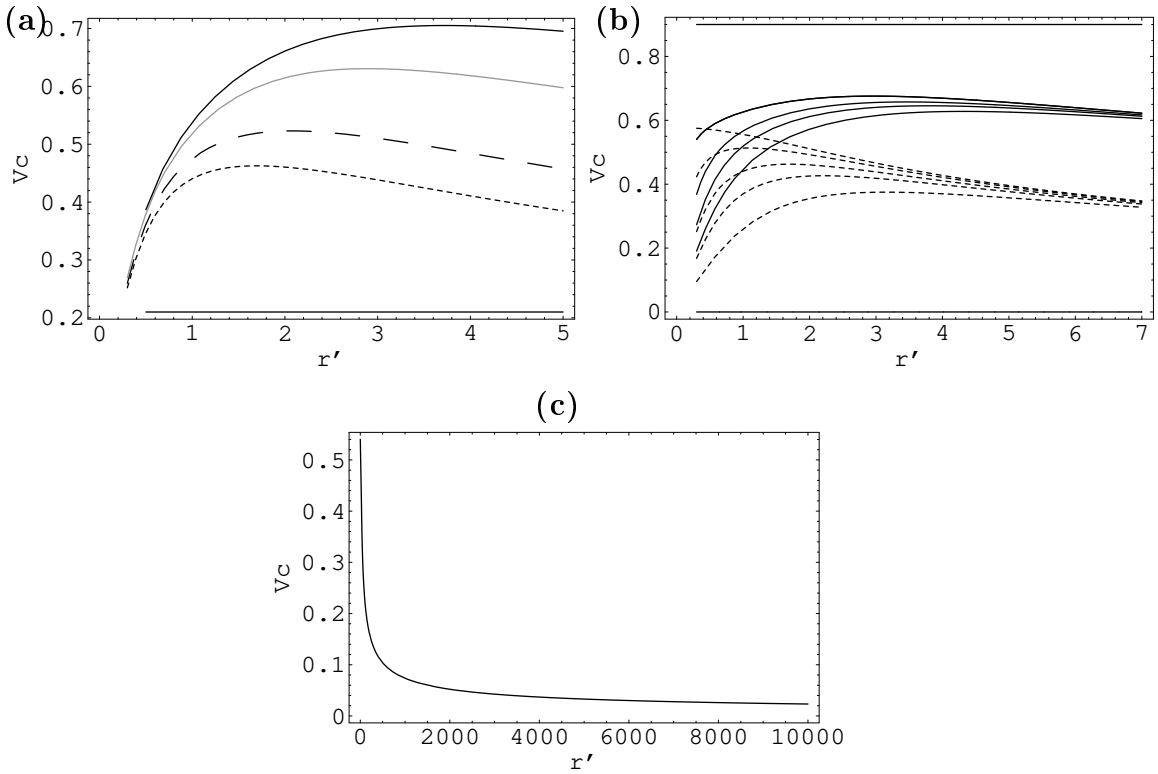


Figura 4.7: **(a)** Curvas de rotação do novo disco com parâmetros extradimensionais $C_x = 0$, $C_y = 0$, i.e., o perfil relativístico usual (linha pontilhada, estável); $C_x = 0,1$, $C_y = 0,7$ (linha tracejada, instável); $C_x = 0,1$, $C_y = 0,85$ (linha cinzenta, estável); $C_x = 0,1$, $C_y = 0,9$ (linha cheia, estável). **(b)** Apenas as curvas estáveis, para vários valores do parâmetro de corte a; aqui a está variando de $a/m = 1$ a $a/m = 2.5$, e $C_x = 0,1$ e $C_y = 0,85$. As pontilhadas são do tipo-newtoniano (onde não há dimensões extras), e as cheias representam as curvas estáveis admitindo duas dimensões extras. Em **(c)** mostra-se que para discos finos as curvas tendem a serem a zero no infinito. Para todos os casos, as soluções usadas foram as de Schwarzschild para a parte $4D$ e a de Chazy-Curzon para as dimensões extras. Aqui $r' = r/m$.

corte do disco segundo o critério de Rayleigh).

O estudo de estabilidade visto acima é fundamental para a discussão acerca de quais valores devem ser usados para os parâmetros extradimensionais C_x e C_y. Em geral, as dimensões extras contribuirão para desestabilizar o disco, no entanto é possível aplicar o intervalo de parâmetros encontrados em um modelo semifenomenológico de tal forma a comparar com as observações de curvas de rotação de galáxias tipo disco reais. É sobre isto que trata a próxima seção.

4.6 Curvas de rotação estáveis

O estudo de estabilidade da seção anterior é fundamental para o cálculo de valores exatos para os parâmetros extradimensionais C_x e C_y. Desta maneira, é

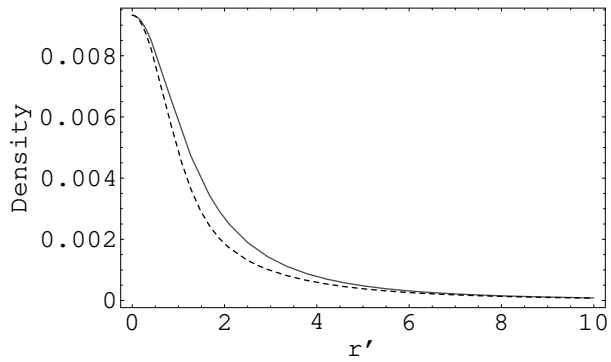


Figura 4.8: Comparação entre perfis de densidade para o disco calculado em $4D$ (linha cheia) e aquele calculado a partir do presente exemplo em $6D$ (linha pontilhada). É importante apontar que o pequeno desvio entre os dois perfis é devido às dimensões extras e de certa forma afeta também as curvas de rotação. Aqui, um exemplo estável com $a = 1,5$, para $m = 1$ (i.e. $r' = r/m$), $C_x = 0,1$ e $C_y = 0,85$. Das Eqs. (4.98) e (4.84), a densidade para o caso em $6D$ depende de $\phi_{,z}/r'$, que claramente aparece devido à influência de dimensões extras. Para um r' maior, $\phi_{,z}/r'$ vai a zero e a Eq. (4.98) recupera o perfil original do caso $4D$. Quando $r' \to 0$, $\phi_{,z}/r' \to \infty$, mas f vai ao infinito mais rápido, implicando que também a Eq. (4.98) recupera o perfil para $4D$ para pequenos r'.

possível derivar um modelo semifenomenológico onde existe um pequeno intervalo de valores estáveis que possam ser usados para a comparação com curvas de rotação de galáxias.

Na Fig. 4.7b apresenta-se apenas as curvas estáveis, para vários valores do parâmetro de corte a. Como discutido anteriormente, a estabilidade só é obtida para $0 < C_x < 0,4$ e $0 < C_y < 0,95$ (pelo critério de Rayleigh) ou mais especificamente os valores especificados a partir do método perturbativo apresentados na Tabela 4.1 (que restringem ainda mais o intervalo para C_x e confirma o critério de Rayleigh para C_y). Tais valores também previnem que as partículas teste tenham um comportamento superluminal (não ocorrendo portanto matéria exótica na presente configuração). Quando $C_x = C_y = 0$ obtém-se o perfil relativístico usual em $4D$ que é bastante similar ao esperado para o caso newtoniano. Por outro lado, para um disco fino, a "planura" das curvas de rotação ocorre na região onde se encontra a maior parte da matéria bariônica. Afastando-se desta área, torna-se difícil prever qual o comportamento dos perfis de rotação, então um modelo que apresenta as curvas planas para $r' \to \infty$ (como MOND, p.ex.) deve estar incorreto para escalas maiores que a galáxia. Na Fig. 4.7c mostra-se que as curvas calculadas caem para distâncias grandes.

Os perfis de densidade, como já discutido previamente, são muito similares e observa-se que as dimensões extras afetam pouco o perfil de densidade. Exemplos de perfis para o caso $4D$ podem ser vistos na Fig. 4.2 e em Bičák et al. [Bic93]. Na Fig. 4.8 mostra-se a comparação entre perfis derivados com e sem termos de dimensões extras, mostrando-se que o desvio entre as duas situações é pequeno e o perfil derivado no presente model é similar ao caso $4D$. No entanto, tal desvio

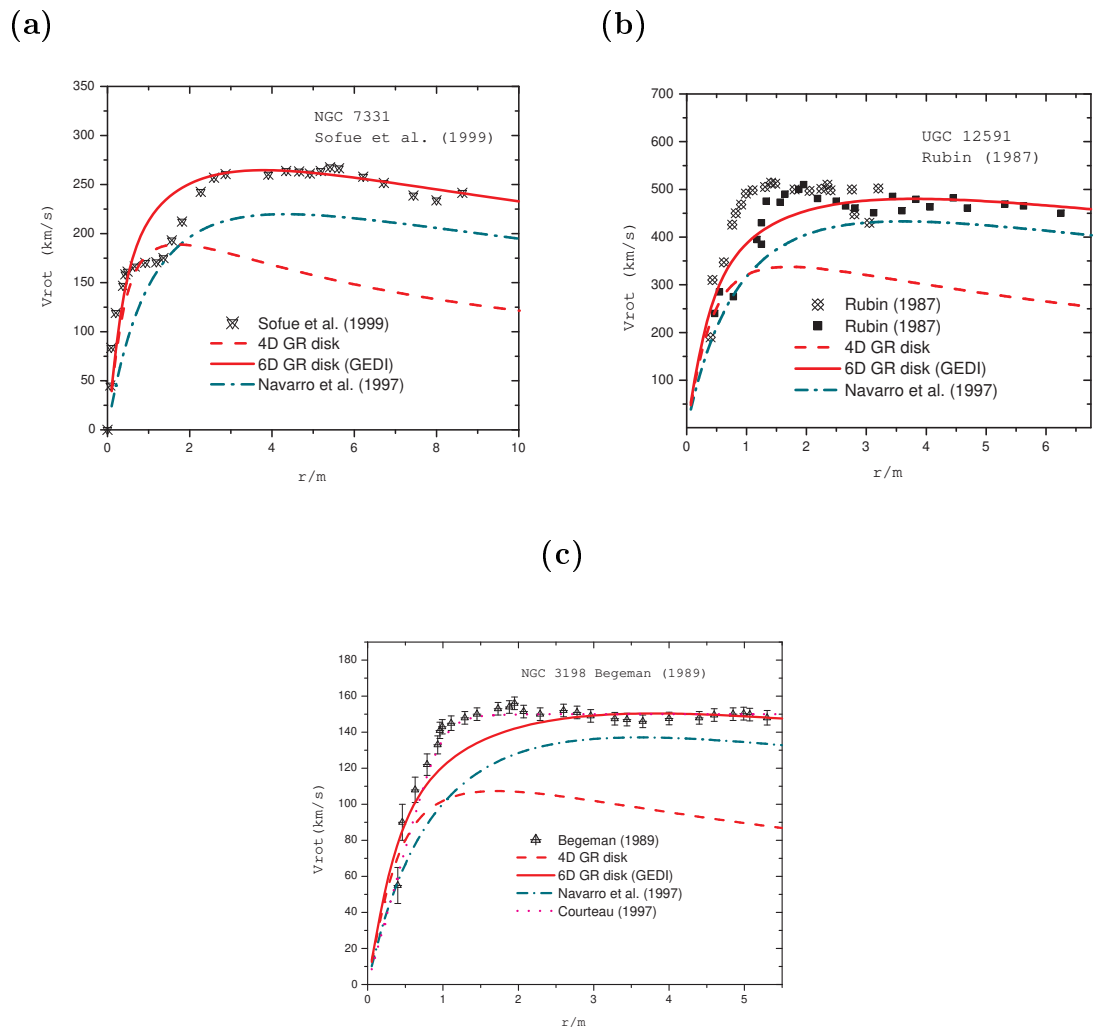


Figura 4.9: **(a)** Comparação entre diferentes modelos — o presente modelo (modelo de gravidade com dimensões extras [*gravity with extra dimensions*, GEDI]) e o perfil de halo escuro obtido por NFW [Nav96] para as curvas de rotação da galáxia espiral NGC 7331. Os dados observacionais são de Sofue et al. (1999) [Sof99]. **(b)** Comparação entre o atual modelo GEDI e [Nav96] para as curvas de rotação de alta velocidade da galáxia espiral UGC 12591. Dados observacionais de Rubin (1987) [Rub87]. **(c)** Comparação entre o atual modelo GEDI e os perfis de matéria escura de NFW [Nav96] e o *fitting* de Courteau [Cou97] para as curvas de rotação da galáxia espiral NGC 3198. Dados observacionais de Begeman (1999) [Beg89]. O presente modelo com $6D$ fita com boa precisão a região de interesse (a anomalia tipo platô após $r/m \sim 3$ em **(a)** e após $r/m \sim 2$ em **(b)** e **(c)**). Os parâmetros estáveis usados são $C_x = 0,15$ e $C_y = 0,88$ para **(a)** e **(b)**, e $C_x = 0,2$ e $C_y = 0,85$ para **(c)**. Para todos os gráficos, as soluções utilizadas foram as de Schwarzschild para a parte $4D$ e a de Chazy-Curzon para a parte extradimensional. A curva derivada do perfil de Navarro-Frenk-White [Nav96] descreve a curva do halo escuro que quando combinada com a curva do gás e estrelas deve fitar fenomenologicamente a curva de rotação de uma galáxia. A curva de Courteau em **(c)** é apenas uma referência de um *fitting* puramente fenomenológico.

pode ser um dos fatores que contribuem para a obtenção de um perfil de curva de rotação diferenciado. Em outras palavras, a presença de dimensões extras afeta a gravidade para determinadas escalas. É provável que de alguma forma isto esteja ligado a teorias de modificação da gravidade, e a natureza de tal modificação seja devida às dimensões extras.

Tomando apenas as curvas estáveis, pode-se comparar os resultados do presente modelo com curvas de rotação de galáxias espirais óticamente observadas. Tal comparação pode ser vista na Fig. 4.9. Diferentemente dos modelos com matéria escura, aqui não existe uma composição da curva de um halo escuro com curvas de gás e estrelas. Aqui, as curvas calculadas, sem matéria escura, obtidas a partir das geodésicas relativísticas estáveis do disco são comparadas com os dados observacionais, sem técnicas de *fitting*, dentro da região de interesse. Ou seja, não há um simples ajuste *ad hoc* dos parâmetros C_x e C_y. Ao contrário, o cálculo de discos estáveis traz à tona um intervalo de valores para o espaço de parâmetros referido. Tais valores produzem as curvas em linha cheia da Fig. 4.7b, que quando comparadas com as curvas de galáxias, se ajustam com ótima precisão aos dados observacionais na região de interesse (a anomalia tipo platô após $r' \sim 2$). Neste sentido, o modelo pode ser considerado como uma abordagem semifenomenológica. Pode-se também comparar com modelos fenomenológicos de matéria escura comumente usados na astrofísica como os de Navarro, Frenk & White [Nav96] ou *fittings* puramente fenomenológicos como o de Courteau [Cou97].

Um problema na abordagem deste capítulo, no entanto, refere-se à própria natureza do método aplicado para construir discos finos. Como intrisecamente discos finos em $4D$ são estruturas exóticas (já que geometricamente representam singularidades no espaço-tempo), para que haja sentido físico nos artíficios matemáticos utilizados interpreta-se que o disco é formado como um fluxo e contrafluxo de partículas teste (veja p.ex. [Vog06a]). Assim, com o intuito de calcular uma estrutura mais realista, passa-se no próximo capítulo a um modelo de estratificação de matéria num bojo mais disco que tenha um sentido físico mais próximo daquele observado para uma galáxia real.

5

Galáxias e outras estruturas

Como visto, um disco fino construído a partir de um espaço-tempo composto por dimensões extras provê os parâmetros extras necessários para modelar, sem a presença de matéria escura, uma configuração que mimetiza um galáxia genérica e idealizada com simetria axisimétrica.

No presente capítulo serão apresentados exemplos fenomenológicos e também novas estruturas autogravitantes. Inicialmente, o disco fino construído previamente será estendido para uma configuração isotrópica onde uma galáxia será modelada conforme o mencionado em [Miy75]. Ao contrário dos resultados obtidos para o modelo de disco fino, onde uma galáxia é interpretada como um fluxo e contrafluxo de partículas geodésicas, no presente capítulo será obtido uma configuração estável de partículas não exóticas, o que é mais realista, num ambiente semelhante ao de uma galáxia espiral, i.e., onde há um bojo central e um disco dispostos de tal maneira a gerar um determinado perfil de densidade pertinente. O modelo é baseado em métodos desenvolvidos, p. ex., por Miyamoto-Nagai [Miy75] ou Vogt-Letelier [Vog05b]. Aqui, por conveniência, utilizaremos uma assinatura para a métrica do tipo $(+,-,-,-)$.

5.1 Galáxia de Miyamoto-Nagai

O presente exemplo de galáxia é desenhado a partir de uma configuração isotrópica em $4D$ vivendo em um universo multidimensional. Seguindo os argumentos apresentados anteriormente para os discos finos, aqui também será apresentado um modelo em seis dimensões.

Tais soluções são importantes porque descrevem um família de configurações autogravitantes que podem ser vistas como modelos tridimensionais para a distribuição de massa nas galáxias [Miy75]. Por exemplo, galáxias em forma de disco, i.e., galáxias espirais idealizadas podem ser construídas e suas curvas de rotação obtidas.

5.1.1 Equações de campo

Considerando a generalização de um universo $d = 4+n$, para a ação gravitacional de Einstein–Hilbert

$$S = -\frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^n y\sqrt{-{}^{(4+n)}g}\ {}^{(4+n)}R, \tag{5.1}$$

que, como visto, leva às equações de campo

$$^{(4+n)}G_{AB} = -8\pi\ ^{(4+n)}T_{AB}, \tag{5.2}$$

onde $A, B = 0, 1, ..., 4+n-1$, y representa as dimensões extras e os índices $(4+n)$ referem-se à natureza multidimensional da ação. Primeiramente, considere o caso de um espaço-tempo axisimétrico $4D$ cuja métrica pode ser escrita de forma isotrópica em coordenadas cilíndricas (t, R, z, φ):

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\nu(R,z)}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{\lambda(R,z)}(\mathrm{d}R^2 + \mathrm{d}z^2 + R^2\mathrm{d}\varphi^2). \tag{5.3}$$

Uma formulação em relatividade geral para o caso newtoniano bem conhecido de modelos de galáxias pode ser escrito na forma de uma métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas (veja por exemplo [Vog05b]). Também, como forma de estender o formalismo desenvolvido na seção sobre discos finos, pode-se introduzir n coordenadas extradimensionais. Seguindo-se o raciocínio desenvolvido no Capítulo 4 onde matéria não exótica é obtida apenas para n par, considere aqui também o caso simples onde $n = 2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \quad & \frac{(1-f)^2}{(1+f)^2}\mathrm{d}t^2 - (1+f)^4[\mathrm{d}R^2 + \mathrm{d}z^2 + R^2\mathrm{d}\varphi^2] \\ & -\mathrm{e}^{-k}\mathrm{d}x^2 - \mathrm{e}^{k}\mathrm{d}y^2, \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde $f = f(R, z)$ e $k = k(R, z)$. As equações de campo (5.2) levam às seguintes expressões para os componentes do tensor de energia-momento:

$$T^t_t = \frac{1}{2\pi(1+f)^5}\left(f_{,RR} + f_{,zz} + \frac{f_{,R}}{R}\right), \tag{5.5}$$

incluindo-se o vínculo

$$k^2_{,R} - k^2_{,z} = 0. \tag{5.6}$$

As soluções gerais para este último tem a forma

$$k = k_1(z - R) + k_2 \ \text{ ou } \ k = k_1(z + R) + k_2, \tag{5.7}$$

onde k_1 e k_2 são constantes, e, por simplicidade, será considerado $k_2 = 0$. Também, com tal vínculo, a parte $4D$ das soluções para pressão são as mesmas que aquelas obtidas por Vogt e Letelier [Vog05b]:

$$T^R_R = \frac{1}{4\pi(1+f)^5(1-f)}\left(ff_{,zz} + \frac{ff_{,R}}{R} + 2f^2_{,R} - f^2_{,z}\right), \tag{5.8}$$

$$T^z_z = \frac{1}{4\pi(1+f)^5(1-f)}\left(ff_{,RR} + \frac{ff_{,R}}{R} + 2f^2_{,z} - f^2_{,R}\right), \tag{5.9}$$

$$T_z^R = T_R^z = -\frac{1}{4\pi(1+f)^5(1-f)}\left(f f_{,Rz} - 3 f_{,R} f_{,z}\right), \tag{5.10}$$

$$T_\varphi^\varphi = \frac{1}{4\pi(1+f)^5(1-f)}\left[f\left(f_{,RR} + f_{,zz}\right) - f_{,R}^2 - f_{,z}^2\right]. \tag{5.11}$$

A parte de pressões extras tem a forma

$$T_x^x = \frac{e^k}{4\pi(1+f)^5}\left(f_{,RR} + f_{,zz} + \frac{f_{,R}}{R}\right), \tag{5.12}$$

$$T_y^y = -T_x^x. \tag{5.13}$$

A densidade de energia é dada por $\rho = T_t^t$, e as pressões ou tensões ao longo de uma direção particular são escritas como $P_i = -T_i^i$ quando o TEM é diagonal. A surpresa vem do fato de que o componente T_t^t é proporcional ao laplaciano usual da função f em coordenadas cilíndricas planas. Note que no limite newtoniano quando $f \ll 1$, a Eq. (5.5) se reduz à equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho_N, \tag{5.14}$$

se a função f estiver relacionada ao potencial gravitacional Φ por

$$f = -\frac{\Phi}{2}. \tag{5.15}$$

Neste caso, $\rho \to \rho_N$ e as condições de energia para o disco não têm matéria exótica ($\rho + \sum_i P_i > 0$). O TEM será diagonal ($T_z^R = T_R^z = 0$) se f tem a forma

$$f = \frac{C}{\sqrt{w(R) + g(z)}}, \tag{5.16}$$

onde C é constante e $w(R)$ e $g(z)$ são funções arbitrárias. Complementarmente, T_R^R e T_φ^φ serão iguais (estresses isotropicamente radiais e azimutais) somente se $w(R) = R^2$. O perfil de densidade ρ pode ser deduzido, por exemplo, a partir de soluções de Miyamoto-Nagai [Miy75], que representam estratificação de massa no bojo central e na parte do disco de galáxias. Neste caso, o potencial gravitacional mais simples que fornece componentes diagonais é

$$\Phi(R,z) = -\frac{M}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2+b^2})^2}}, \tag{5.17}$$

onde a, b são constantes positivas.

A densidade tridimensional correspondente derivada da Eq. (6.15) é

$$\rho_N(R,z) = \frac{b^2 M}{4\pi}\frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2+b^2})(a+\sqrt{z^2+b^2})^2}{[R^2 + (a+\sqrt{z^2+b^2})^2]^{5/2}(z^2+b^2)^{3/2})}, \tag{5.18}$$

e agora a função $f(R,z)$, de acordo com (5.15), é

$$f(R,z) = \frac{M}{2\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2+b^2})^2}}. \tag{5.19}$$

Como será visto mais adiante, o potencial gravitacional somente poderá ser proporcional a $f(R,z)$ se o domínio de trabalho for o limite newtoniano.

5.1.2 Geodésicas circulares

As partículas desta configuração podem descrever trajetórias circulares, calculadas a partir de um sistema de equações de geodésicas. Em particular, é possível obter a velocidade tangencial das partículas do disco (i.e. as curvas de rotação planas) a partir das equações geodésicas. Assumindo $\dot{R} = 0$ e $\dot{z} = 0$ (as partículas não possuem movimento radial e por simplicidade estão confinadas na superfície $z = 0$), a métrica (5.4) pode ser reescrita como

$$\frac{(1-f)^2}{(1+f)^2}\dot{t}^2 - (1+f)^4 R^2 \dot{\varphi}^2 - \mathrm{e}^{-k}\dot{x}^2 - \mathrm{e}^{k}\dot{y}^2 = 1 \tag{5.20}$$

onde $\dot{x}^A = \mathrm{d}x^A/\mathrm{d}s$, o qual resulta

$$\dot{t}^2 = \left(\frac{1+f}{1-f}\right)^2 [1 + (1+f)^4 R^2 \dot{\varphi}^2 + \mathrm{e}^{-k}\dot{x}^2 + \mathrm{e}^{k}\dot{y}^2]. \tag{5.21}$$

As equações de Euler-Lagrange para as coordenadas cíclicas x e y permitem calcular as seguintes equações geodésicas

$$(\mathrm{e}^{-k}\dot{x})^{\cdot} = 0; \quad \mathrm{e}^{-k}\dot{x} = C_x, \tag{5.22}$$

$$(\mathrm{e}^{k}\dot{y})^{\cdot} = 0; \quad \mathrm{e}^{k}\dot{y} = C_y, \tag{5.23}$$

onde C_x e C_y são constantes de integração. Pode-se fixar os valores de C_x e C_y por aqueles calculados para os discos finos, onde foi encontrada uma configuração plana estável. Uma outra equação é obtida ao derivar-se (5.21) em R e usando as Eqs. (5.22) e (5.23)

$$\begin{aligned} &2f_{,R}\left[\frac{(1-f)}{(1+f)^2} + \frac{(1-f)^2}{(1+f)^3}\right]\dot{t}^2 \\ &+2R(1+f)^3[(1+f) + 2Rf_{,R}]\dot{\varphi}^2 - k_{,R}(\mathrm{e}^{-k}\dot{x}^2 - \mathrm{e}^{k}\dot{y}^2) = 0. \end{aligned} \tag{5.24}$$

As Eqs. (5.21) e (5.24) formam um sistema de equações cujas variáveis são $\dot{\varphi}^2$ e $\dot{t}^2$. Ao se resolver o sistema, é possível calcular as curvas de rotação V_C por

$$V_C = \sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}\frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{t}^2}}, \tag{5.25}$$

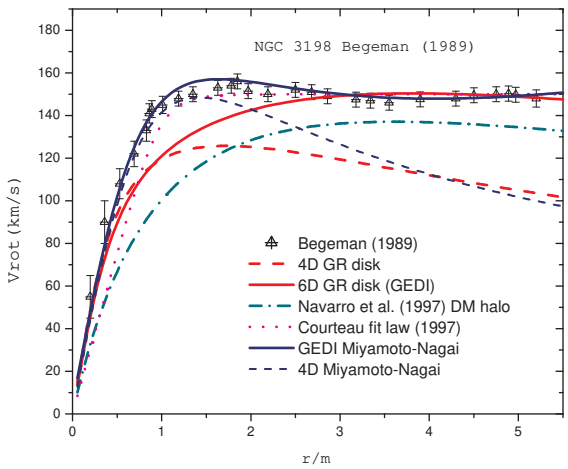


Figura 5.1: Curvas de rotação de NGC3198. Aqui é considerada a comparação entre o presente modelo (GEDi em seis dimensões com Miyamoto-Nagai), o modelo de disco fino já proposto e outros modelos ou *fittings* [Beg89, Nav96, Cou97]. As curvas vêm apenas da massa relacionada ao gás e estrelas da galáxia, i.e., a hipótese de matéria escura não é considerada. A pequena discrepância observada em $r' \approx 1$ é devido ao fato de não existir um modelamento astrofísico do centro da configuração. Não há técnicas de "fitting" implementadas. As coordenadas apresentadas são a velocidade de rotação e o raio normalizado pela massa.

5.1.3 Estabilidade

Utilizando a mesma técnica que a desenvolvida para os discos finos, são computadas as perturbações infinitesimais na geodésica. A perturbação $\ddot{x}^A + \Gamma^A_{BC}\dot{x}^B\dot{x}^C = 0$ é feita a partir da transformação $x^A \to x^A + \Delta^A$, onde $\Delta^A = (\delta t, \delta r, \delta\varphi, \delta z, \delta x, \delta y)$ são elementos infinitesimais. É possível encontrar as seguintes equações para as perturbações:

$$\ddot{\Delta}^A + 2\Gamma^A_{BC}\dot{x}^B\dot{\Delta}^C + \Gamma^A_{BC,D}\Delta^D\dot{x}^B\dot{x}^C = 0, \tag{5.26}$$

onde Γ^A_{BC} são os símbolos de Christoffel e $\dot{x}^A$ são as derivadas temporais próprias $\mathrm{d}x^A/\mathrm{d}s$ e pode-se escrever para o movimento orbital circular

$$\dot{x}^A = (u^t, 0, 0, u^t\Omega, u^tC_x, u^tC_y), \tag{5.27}$$

onde $\Omega = V_C/R$, Eq. (5.25). Assumindo que há apenas oscilações na parte 4D do disco com perturbações verticais ($\delta z \neq 0$), obtém-se

$$\Delta^A = (\delta t, \delta R, \delta z, \delta\varphi, 0, 0). \tag{5.28}$$

Seja x^A uma geodésica circular equatorial em um espaço-tempo estacionário axisimétrico (5.4), i.e., a linha de mundo $x^A = (t, R = \text{const}, \varphi = \text{const} + \Omega t, z = 0, x = \text{const}, y = \text{const})$. Substituindo a quadrivelocidade (5.27) e os símbolos de Christoffel não-nulos, e supondo que as soluções de δt, δR, δz e $\delta\varphi$ têm a forma de oscilações harmônica, $\sim e^{iKs}$, com frequência angular comum K, encontra-se:

$$(\ddot{\delta t}) + 2\Gamma^t_{tR} u^t (\dot{\delta R}) + 2\Gamma^t_{tz} u^t (\dot{\delta z}) = 0, \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}&(\ddot{\delta R}) + 2\Gamma^R_{tt} u^t (\dot{\delta t}) + 2\Gamma^R_{\varphi\varphi} u^t \Omega (\dot{\delta\varphi}) + [(\Gamma^R_{tt,R} \\ &+\Gamma^R_{\varphi\varphi,R}\Omega^2 + \Gamma^R_{xx,R}C_x^2 + \Gamma^R_{yy,R}C_y^2)(u^t)^2]\delta R \\ &+[(\Gamma^R_{tt,z} + \Gamma^R_{\varphi\varphi,z}\Omega^2 + \Gamma^R_{xx,z}C_x^2 + \Gamma^R_{yy,z}C_y^2)(u^t)^2]\delta z = 0,\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}&(\ddot{\delta z}) + 2\Gamma^z_{tt} u^t (\dot{\delta t}) + 2\Gamma^z_{\varphi\varphi} u^t \Omega (\dot{\delta\varphi}) + [(\Gamma^z_{tt,R} \\ &+\Gamma^z_{\varphi\varphi,R}\Omega^2 + \Gamma^z_{xx,R}C_x^2 + \Gamma^z_{yy,R}C_y^2)(u^t)^2]\delta R + [(\Gamma^z_{tt,z} \\ &+\Gamma^z_{\varphi\varphi,z}\Omega^2 + \Gamma^z_{xx,z}C_x^2 + \Gamma^z_{yy,z}C_y^2)(u^t)^2]\delta z = 0,\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$(\ddot{\delta\varphi}) + 2\Gamma^\varphi_{\varphi R}\Omega u^t (\dot{\delta R}) + 2\Gamma^\varphi_{\varphi z}\Omega u^t (\dot{\delta z}) = 0. \tag{5.32}$$

A solução para o sistema homogêneo será

$$\begin{aligned}K^2 = -\frac{1}{2} \quad &[4\Gamma^R_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi R}(\Omega u^t)^2 + 4\Gamma^z_{tt}\Gamma^t_{tz}(u^t)^2 - \Gamma^R_{AB,R}u^A u^B - \Gamma^z_{AB,z}u^A u^B] \\ &\pm\frac{1}{2}\{[4\Gamma^R_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi R}(\Omega u^t)^2 - 4\Gamma^z_{tt}\Gamma^t_{tz}(u^t)^2 + \Gamma^R_{AB,R}u^A u^B - \Gamma^z_{AB,z}u^A u^B]^2 \\ &+64\Gamma^R_{tt}\Gamma^t_{tR}\Gamma^z_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi z}(u^t)^4\Omega^4\}^{1/2},\end{aligned} \tag{5.33}$$

onde $\Gamma^R_{AB,R}u^A u^B = (\Gamma^R_{tt,R} + \Gamma^R_{\varphi\varphi,R}\Omega^2 + \Gamma^R_{xx,R}C_x^2 + \Gamma^R_{yy,R}C_y^2)(u^t)^2$. O sistema é estável se a frequência epicíclica ao quadrado $\kappa^2 = (K/u^t)^2$ é estritamente positiva. Isto ocorre quando o sinal antes da raiz quadrada na Eq. (5.33) é positiva e para $k = k_1(z + R)$ na Eq. (5.7). Mais que isso, o estudo da estabilidade pode ter um importante papel para determinar um intervalo estável de valores para as constantes C_x, C_y e k_1 — sendo esta última uma constante de integração que vem a partir da presença de dimensões extras, Eq. (5.7). No caso das constantes C_x e C_y, os valores coincidem ao caso obtido no Cap. 4. No caso da constante k_1, ela deve ser pequena ($k_1 \sim 10^{-5} - 10^{-7}$). A maneira usual de determinar os parâmetros a e b em (5.19) é a partir da fenomenologia da densidade de galáxias, conforme descrito em [Miy75]. Usualmente, a fração b/a estima o quão tipo disco ou tipo elipsoidal é a galáxia. Assim, a observação de densidades mais a o estudo de estabilidade representa uma forma eficaz de construir uma galáxia para um sistema modelado a

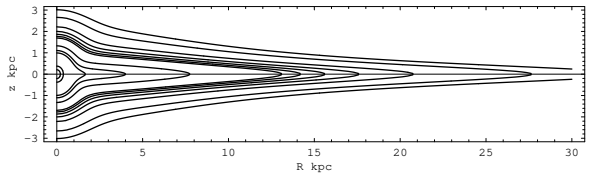


Figura 5.2: O gráfico de curvas de nível de densidade para a galáxia NGC 3198, obtido a partir da galáxia de Miyamoto-Nagai em $6D$.

partir de gravitação com dimensões extras.

5.2 Exemplo: comparando o modelo com galáxias reais

Como mostrado em [Miy75] pode-se modelar uma galáxia espiral de forma simples usando a superposição de densidades centrais e densidades marginais de uma estrutura isotrópica para diferentes valores de a e b. Aqui o valor de k será vinculado como explicado na seção anterior. Assim pode-se escrever $\rho = \sum_i \rho(a_i, b_i)$. Em outras palavras, isto é o mesmo que escrever a função f, Eq. (5.19), a partir da superposição $\sum_i f(a_i, b_i)$, o que para o caso de uma galáxia espiral é o suficiente para descrever o bojo central e a parte correspondente ao disco galático. É possível mesmo calcular as curvas de rotação de várias galáxias (incluindo não apenas aquelas de morfologia espiral). Como exemplo, a galáxia espiral NGC 3198 pode ser modelada. Considerando-se a densidade superficial observada no disco e as características morfológicas [Beg89] e assumindo que a densidade do bojo não é muito diferente daquela observada para a Via Láctea [Miy75] (onde usualmente faz-se a igual a zero e $b \sim 1$kpc; o que significa que $b/a \to \infty$, ou um bojo central esférico de ~ 1kpc), obtém-se um conjunto de curvas de rotação estáveis (veja a Fig. 5.1). O potencial apresentado na Eq. (6.19) – i.e. o ansatz de Miyamoto-Nagai – tem motivação puramente newtoniana e é útil para calcular a forma da função f na métrica. Portanto é necessário calcular o potencial com as devidas correções devido ao cálculo relativístico e dimensões extras. Pode-se utilizar a forma do potencial em

$$\rho = \frac{\nabla^2 \Phi}{4\pi}, \tag{5.34}$$

onde o potencial é reconstruído a partir das geodésicas circulares planas (5.25) por

$$\Phi = \int_0^R \frac{V_C^2}{R} \mathrm{d}R, \tag{5.35}$$

onde V_C é dada por

$$V_C = \sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}} \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{t}^2}}. \tag{5.36}$$

O gráfico dos contornos de densidade obtidos a partir desta última é mostrado na

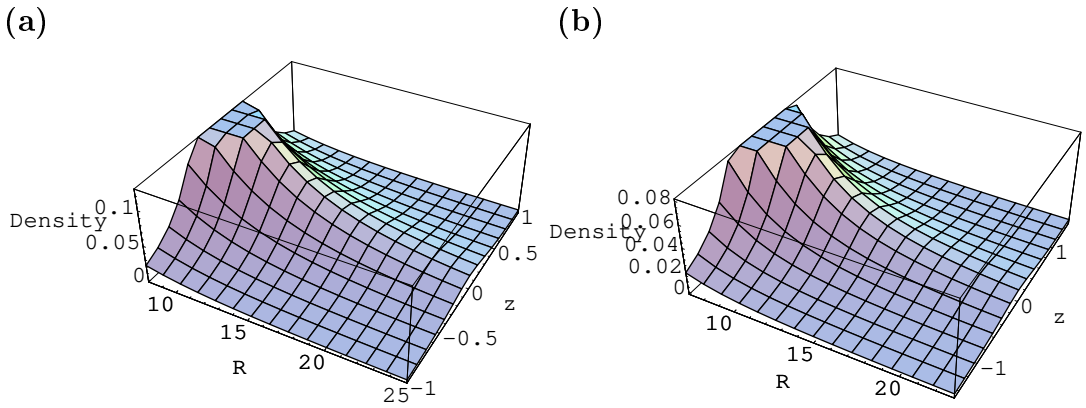


Figura 5.3: **(a)** Densidade newtoniana ρ_N em $M_\odot \mathrm{pc}^{-3}$ para o modelo $4D$ de Miyamoto-Nagai para NGC 3198, onde R e z são dados em kpc. **(b)** Gráfico em $3D$ do perfil de densidade obtido para o presente modelo. Note que não há cúspide, diferentemente do problemático perfil de Navarro-Frenk-White [Nav96].

Fig. 5.2, e o objeto obtido é bastante similar a uma galáxia espiral.

Pode-se comparar o potencial obtido a outros potenciais conhecidos na literatura. Em p. ex. [Bin87], são listados alguns dos possíveis potenciais. Um primeiro potencial, também utilizado aqui (o par potencial-densidade de Miyamoto-Nagai) pode ser prontamente comparado à densidade obtida a partir das velocidades circulares (veja a Fig. 5.3).

Um outro potencial interessante a ser comparado é o de Satoh:

$$\Phi_M^\infty(R,z) = -\frac{M}{S}, \tag{5.37}$$

$$\rho_M^\infty = \frac{ab^2M}{4\pi S^3(z^2+b^2)}\left[\frac{3}{a}\left(1-\frac{R^2+z^2}{S^2}\right)+\frac{1}{z^2+b^2}\right], \tag{5.38}$$

$$S = [R^2+z^2+a(a+2\sqrt{z^2+b^2})]^{1/2}. \tag{5.39}$$

Agora, para mesmos parâmetros a e b, as densidades são mostradas na Fig. 5.4. A pequena dirença entre o perfil de densidade obtido e o newtoniano $4D$ convencional, mostra que apesar de dimensões extras afetarem de forma marcante o perfil de velocidades circulares, o contorno de densidades apontam para um objeto bastante similar a uma galáxia espiral.

5.3 Curvas de rotação reais não são planas

No estudo observacional da dinâmica de galáxias, é crucial notar que as curvas de rotação não são assintoticamente planas (como imaginado por exemplo por perfis ditos universais como o de Navarro-Frenk-White [Nav96]). Este mito sobreviveu

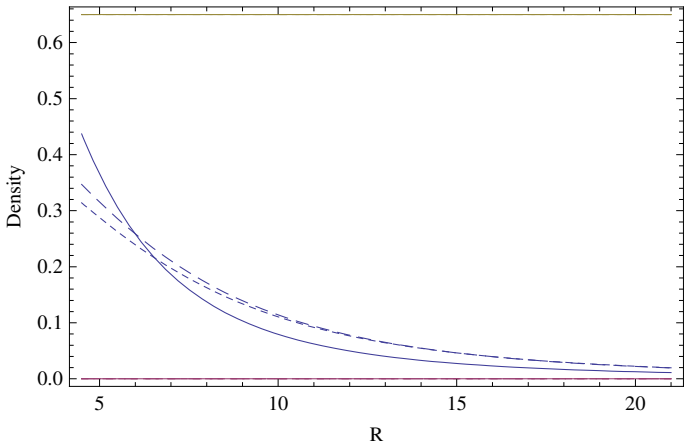


Figura 5.4: Comparação entre a densidade obtida a partir das velocidades circulares calculadas (linha cheia), um perfil puro $4D$ de Myiamoto-Nagai (linha tracejada longa), e um perfil de Satoh (linha tracejada curta). Aqui a densidade é dada em $M_\odot$ pc^{-3} e vem do *slice* onde $z = 0$.

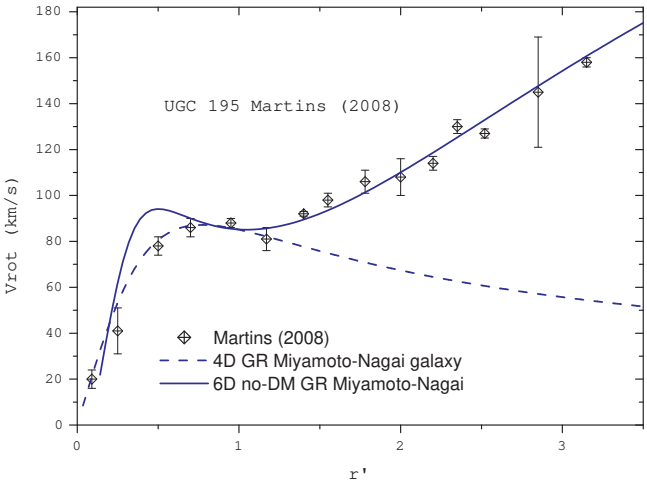


Figura 5.5: Exemplo observacional de galáxia espiral cuja curva de rotação é não plana. Aqui apresenta-se a galáxia UGC 195 (dados observacionais retirados de [Fri08]). O presente modelo em $6D$ é utilizado e descreve com boa aproximação os dados observacionais. As coordenadas apresentadas são a velocidade de rotação e o raio normalizado.

apenas até a década de 1990, quando foi então desmentido (veja p.ex. [Per88, Ash92]). Assim, por exemplo, mostra-se na Fig. 5.5 que o modelo aqui apresentado descreve também curvas de rotação não-planas, recobrindo os dados observacionais (sem técnicas de *fitting*).

O incrível número de teorias que implicam ou assumem a existência de um cenário onde as curvas de rotação de galáxias espirais são planas está claramente em contradição com as evidências observacionais, o que não é o caso do presente modelo.

5.4 Aglomerados de galáxias e lentes gravitacionais

Usando um exemplo simples em $6D$, é possível mostrar que, no regime de baixas acelerações, a lente gravitacional de aglomerados terá a magnitude correta para explicar a observação de lentes intergaláticas. Como na natureza muitas galáxias elípticas e aglomerados de galáxias são modelados idealmente a partir de uma simetria esférica em $4D$ com mais duas UEDs. A partir da métrica

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = -e^{\Phi}\mathrm{d}t^2 \quad &+ \quad e^{\Lambda}[\mathrm{d}R^2 + R^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2) \\ &+ \quad \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2], \end{aligned} \tag{5.40}$$

onde, como anteriormente, x e y representam as coordenadas extras. Φ e Λ são funções apenas de R. Considere agora um raio de luz que se propaga no plano equatorial da métrica. A velocidade $\dot{x}^A$ do raio deve satisfazer

$$-e^{\Phi}\,\dot{t}^2 + e^{\Lambda}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0. \tag{5.41}$$

Como a métrica é estacionário, segue-se a lei de conservação $e^{\Phi}\dot{t} = E$ onde E é uma constante característica do raio. Da simetria esférica, tem-se que $e^{\Lambda}R^2\dot{\varphi} = L$ onde L é outra constante característica do raio. Seja escrever $\dot{R} = (\mathrm{d}R/\mathrm{d}\varphi)\dot{\varphi}$, $\dot{x} = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}\varphi)\dot{\varphi}$ e $\dot{y} = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\varphi)\dot{\varphi}$. Agora, eliminando $\dot{t}$ e $\dot{\varphi}$ da Eq. (5.41) em favor de E e L, e dividindo-se por E^2 obtém-se

$$\begin{aligned} -e^{-\Phi} \quad &+ \quad (b/R)^2 e^{-\Lambda}\{R^{-2}[(\mathrm{d}R/\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}x/\mathrm{d}\varphi)^2 \\ &+ \quad (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\varphi)^2] + 1\} = 0, \end{aligned} \tag{5.42}$$

onde $b \equiv L/E$. Observando no infinito, onde os fatores da métrica tendem à unidade, vê-se que b é de fato o parâmetro de impacto do raio com respeito ao centro da distribuição material em $4D$, onde $R = 0$. Rearranjando a última equação, obtém-se a quadratura

$$\varphi = [1 + R_x^2 + R_y^2]^{1/2} \int^R \left[e^{\Lambda-\Phi}\left(\frac{R}{b}\right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \frac{\mathrm{d}R}{R}, \tag{5.43}$$

onde $R_x^2 = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}R)^2$ e $R_y^2 = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}R)^2$ são taxas de distribuição de "pressões" extradimensionais ao longo do *cluster* $4D$.

Para o ponto onde a métrica se torna exatamente plana, a relação acima descreve uma linha onde φ varia entre 0 e π à medida em que R diminui de valor, do infinito ao valor R_{turn} (valor do ponto de retorno do raio). Assim, a defleção do raio devido à gravidade é

$$\Delta\varphi = [1 + R_x^2 + R_y^2]^{1/2} \left\{ 2 \int_{R_{turn}}^{\infty} \left[e^{\Lambda - \Phi} \left(\frac{R}{b} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \frac{\mathrm{d}R}{R} - \pi \right\}. \tag{5.44}$$

Para entender melhor esta última integral, pode-se tomar vantagem do fato de ter-se que os campos extragaláticos são fracos, o que garate que Λ e Φ são pequenos quando comparados à unidade. Como consequência o resultado acima é aproximadamente igual a

$$\Delta\varphi = [1 + R_x^2 + R_y^2]^{1/2} \left\{ -4 \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_{R_{turn}}^{\infty} \left[(1 + \Lambda - \Phi) \left(\frac{R}{b} \right)^2 - \alpha \right]^{1/2} \frac{\mathrm{d}R}{R} \Big|_{\alpha=1} - \pi \right\}. \tag{5.45}$$

Reescrevendo em termos de derivadas em α permite-se expandir em série de Taylor na pequena quantidade $\Lambda - \Phi$ sem incorrer em divergências da integral no seu limite inferior. A ordem zero da expansão resulta em uma bem conhecida integral que cancela o π. Assim, em primeira ordem

$$\Delta\varphi = -\frac{2\,[1 + R_x^2 + R_y^2]^{1/2}}{b} \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_{b\sqrt{\alpha}}^{\infty} \frac{(\Lambda - \Phi) R \mathrm{d}R}{(R^2 - \alpha b^2)^{1/2}} \Big|_{\alpha=1}. \tag{5.46}$$

E integrando em partes:

$$\Delta\varphi = -\frac{2\,[1 + R_x^2 + R_y^2]^{1/2}}{b} \frac{\partial}{\partial\alpha} \Big[\lim_{R\to\infty} (\Lambda - \Phi)(R^2 - \alpha b^2)^{1/2} - \int_{b\sqrt{\alpha}}^{\infty} (\Lambda_{,R} - \Phi_{,R})(R^2 - \alpha b^2)^{1/2} \mathrm{d}R \Big] \Big|_{\alpha=1} \tag{5.47}$$

Como Φ e Λ decrescem assintoticamente com R^{-1}, o termo integrado, sendo independente de α, nada contribui. Resolvendo a derivada em α, e introduzindo a coordenada cartesiana u ao longo do raio inicial como $u \equiv \pm(R^2 - b^2)^{1/2}$, tem-se

$$\Delta\varphi = \frac{b\,[1 + R_x^2 + R_y^2]^{1/2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Lambda_{,R} - \Phi_{,R}}{R} \mathrm{d}u. \tag{5.48}$$

Um fator 1/2 aparece porque o integrando foi incluído duas vezes em (5.47): uma vez com R decrescendo e outra com R crescendo a partir de b. A integral é agora resolvida sobre um linha reta infinita seguindo o raio original.

A Fig. 5.6 mostra que a nova deflexão calculada do raio de luz, para um intervalo de valores das taxas R_x e R_y, é maior que a deflexão produzida por um raio passando através de um aglomerado mas apenas usando-se a relatividade geral em $4D$. A diferença entre um cálculo em $4D$ com matéria escura e o cáculo acima (onde a geometria do problema substitui o conceito de matéria escura) é que no cenário convencional de matéria escura deve-se computar Φ e Λ a partir das equações de Einstein incluindo-se matéria escura como fonte, enquanto que no presente modelo tem-se um termo adicional na métrica e Λ e Φ são calculados apenas com base na

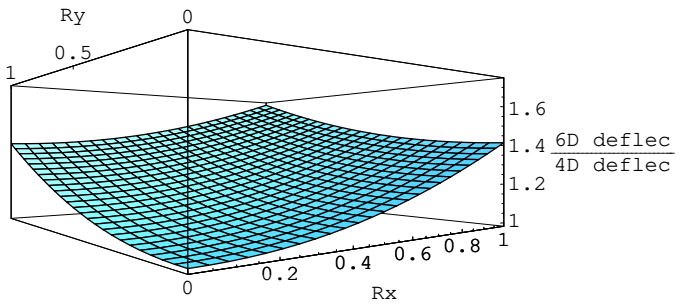


Figura 5.6: A nova deflexão calculada para o raio usando o modelo proposto, para um intervalo de taxas R_x e R_y, é maior que a deflexão produzida por um raio passando através de um aglomerado calculado apenas com a relatividade geral em $4D$. A presença de dimensões extras atua exatamente como se fora um halo de matéria escura fria.

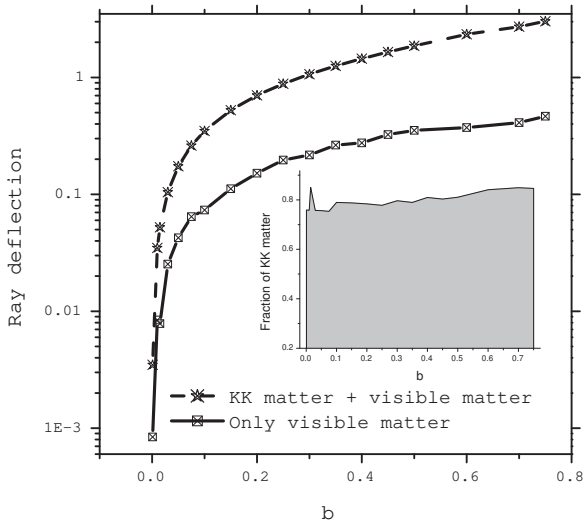


Figura 5.7: Integração numérica da deflexão por lente gravitacional produzida por um aglomerado vivendo em um universo que contém dimensões extras. Aqui usa-se uma equivalência entre o campo gravitacional induzido por dimensões extras e uma matéria fictícia — "matéria de Kaluza-Klein (KK)" — para mostrar que a contribuição devida ao campo extra induzido por dimensões extras atua como matéria escura. No exemplo acima, a matéria KK fictícia constitui $(79,5 \pm 3,3)\%$ da matéria total de um aglomerado galático com simetria esférica. Foi usado $R_y = 0,9$ e $R_x = 0,4$, que constituem valores estáveis de acordo com o calculado para discos finos.

matéria visível.

Resolvendo-se numericamente as equações de Einstein para simetria esférica descrita, mais a integração numérica de Eq. (5.48), é possível obter uma comparação entre um aglomerado galático com e sem dimensões extras. Na Fig. 5.7 mostra-se

isto, usando os mesmos valores para C_x e C_y calculados no capítulo sobre discos finos. No presente modelo, para as escalas de aglomerado, a geometria envolvida com as dimensões extras defletem mais luz do que o esperado. Assim, o sistema é equivalente a um sistema com matéria escura onde $(79,5 \pm 3,3)\%$ da matéria total num aglomerado esférico é escura. Este resultado é bem similar ao que ocorre de acordo com as observações astronômicas. É verificado por observações de lente gravitacional [Mel99] que aglomerados de galáxias são compostos de três componentes principais: $\sim 5\%$ em massa é devido oticamente a matéria bariônica; ~ 10–15% está na forma de raios-X devido ao gás interaglomerado; e o restante ~ 80–85% está na forma de algum tipo de "massa faltante" não-bariônica.

A explicação para o resultado acima explicitado é que tal "massa faltante" não-bariônica pode ser explicada geometricamente pela presença de dimensões extras universais no universo. Pode-se emoldurar o conceito como se a geometria prove-se uma massa gravitacional residual "equivalente". O campo gravitacional extra é induzido apenas por dimensões extras e observacionalmente é visto como massa faltante.

Apesar do excesso no desvio calculado acima, observacionalmente é comumente visto desvios 400% maiores do que o esperado, o que mostra que embora os resultados obtidos sejam interessantes para explicar aglomerados, eles ainda ficam aquém do que se espera astronomicamente.

6

No limite newtoniano

Como visto no Capítulo 3, as equações de movimento para uma partícula teste em uma teoria geral com dimensões extras são escritas como

$$\ddot{x}^{\mu} + \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} \dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = \frac{1}{2} g_{ab,\gamma} g^{\mu\gamma} N_c g^{ac} N_d g^{bd}. \tag{6.1}$$

Agora pode-se obter a equação do campo no limite newtoniano e relacionar o potencial à equação de movimento encontrada. O potencial obtido a partir do limite newtoniano vem da necessidade de testar a validade dos modelos desenvolvidos nos capítulos precedentes, onde objetos astrofísicos, como galáxias e aglomerados, podem muito bem ser vistos como objetos newtonianos. Isto evidentemente significa a aproximação em que a gravidade é fraca. E como o interesse reside apenas na parte visível, i.e., a parte observável, então o foco do presente cálculo deve permanecer sobre o encontrado até o momento para a parte $4D$.

6.1 Equação para o campo visível

Como já visto no Cap. 3, Eqs. (3.25) e (3.26), o TEM efetivo em $4D$ é escrito como o tensor convencional $\mathcal{T}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu})g_{\alpha\beta}$ mais uma correção induzida pelas dimensões extras $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$, onde

$$\mathfrak{T}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left\{ \mathfrak{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\mathfrak{R}_{\mu\nu})g_{\alpha\beta} + (g^{mn}R_{mn})g_{\alpha\beta} \right\}. \tag{6.2}$$

O limite newtoniano pode ser obtido a partir da abordagem em que o espaço-tempo plano possui um pequeno desvio e a curvatura é linearizada, i.e., dada a perturbação $\gamma_{\alpha\beta}$, a métrica do setor $4D$ é escrita como $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}$ (onde $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica de Minkowski). Para o caso da gravidade linearizada, o tensor de energia-momento (3.25) é essencialmente escrito a partir da curvatura linearizada $\mathcal{R}^{(1)}_{\alpha\beta} = \partial_{\mu}\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} - \partial_{\alpha}\left\{ {\mu \atop \mu\beta} \right\}$ como

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\partial^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\gamma}_{\alpha\beta} + \partial^{\mu}\partial_{(\beta}\overline{\gamma}_{\alpha)\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial^{\mu}\partial^{\nu}\overline{\gamma}_{\mu\nu} \tag{6.3}$$

onde $\overline{\gamma}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - 1/2\eta_{\alpha\beta}\gamma$.

A gravidade linearizada possui uma liberdade de calibre dada por $\gamma_{\alpha\beta} \to \gamma_{\alpha\beta} + \pounds_{\xi}\eta_{\alpha\beta}$, onde $\pounds_{\xi}$ é a derivada de Lie com relação aos geradores ξ^{α} de um difeomor-

fismo. Em primeira ordem, fisicamente tal transformação representa o mesmo que o próprio $\gamma_{\alpha\beta}$. Pode-se usar tal liberdade de calibre para simplicar as equações linearizadas de Einstein. Ao resolver a equação $\partial^\beta\partial_\beta\xi_\alpha = -\partial^\beta\overline{\gamma}_{\alpha\beta}$ para ξ_α, pode-se fazer uma transformação de calibre [Wal84] que resulta em $\partial^\beta\overline{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ (analogamente à condição do *gauge* de Lorentz) e obtém-se a simplificação

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu\overline{\gamma}_{\alpha\beta}. \tag{6.4}$$

Para a parte extra obtém-se

$$\mathfrak{T}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(g^{mn}\partial^\mu\partial_\mu g_{mn})g_{\alpha\beta} - g^{mn}g_{mn,\alpha\beta}\right]. \tag{6.5}$$

Apenas quando a gravidade é fraca é que a presente aproximação linear é válida. Neste caso, existe um sistema inercial de coordenadas globais de $\eta_{\alpha\beta}$ tal que

$$T_{\alpha\beta} = \mathcal{T}_{\alpha\beta} + \mathfrak{T}_{\alpha\beta} \approx \rho t_\alpha t_\beta, \tag{6.6}$$

$$-\frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu\overline{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(g^{mn}\partial^\mu\partial_\mu g_{mn})\eta_{\alpha\beta} - g^{mn}g_{mn,\alpha\beta}\right] = \rho t_\alpha t_\beta, \tag{6.7}$$

onde t_α é a direção temporal deste sistema de coordenadas. Esta equação pode ser interpretada como a equação de Poisson modificada considerando-se um universo com mais de $1+3$ dimensões.

Agora, defina $\overline{\gamma}_{\alpha\beta} \equiv -4\phi$, onde $\phi = \phi(\overrightarrow{x})$ é função apenas do espaço $3D$.

Tomando-se a consideração feita por Kaluza acerca do conteúdo material das dimensões extras, i.e., $R_{ab} = 0$, obtém-se o seguinte modelo sigma $g^{\mu\nu}(\sigma_{,mu}\sigma^{-1})_{,nu} = 0$ para a parte extra, onde σ é a matriz diagonal que representa a métrica no setor extra do sistema. Isto implica que

$$\partial^\mu\partial_\mu g_{ab} = 0, \tag{6.8}$$

resultando na seguinte equação

$$-\frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu\overline{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{mn}g_{mn,\alpha\beta} = \rho t_\alpha t_\beta. \tag{6.9}$$

Como os elementos g_{ab} são funções do espaço $3D$, então a última equação se reduz a

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho, \tag{6.10}$$

o que significa que o perfil de densidade, no limite newtoniano, é dado aproximadamente apenas pelo campo $4D$.

6.2 Obtendo a aceleração e testando o método para um caso axisimétrico

Escrevendo um elemento de linha para qualquer número de dimensões, tendo em mente o caso axisimétrico (conforme será comentado no Cap. 4, Seção 4.2), tem-se por exemplo $\mathrm{d}s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} e^{\psi_i}\mathrm{d}z_i^2$, para algum número de dimensões extras $n \geq 1$, onde $\mathrm{d}s_n^2$ é o elemento de linha para o setor extra, z_i são as coordenadas extras e $\psi_i = \psi_i(\overrightarrow{x})$ são os potenciais associados às dimensões extras (e que sejam funções do espaço $3D$).

Se as dimensões extras têm algum impacto na teoria, certamente não é como matéria extra, mas elas aparecem como um termo de pressão que contribuirá de fato para gerar a força extra contida na equação de movimento (6.1). O seguinte exemplo poderá deixar claro este conceito. Escrevendo uma métrica geral para algum número de dimensões (p.ex., seis dimensões, para trabalhar com um caso que será explorado mais intensamente nos próximos capítulos) tem-se $\mathrm{d}s^2 = -(1-2\phi)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\vec{x}.\mathrm{d}\vec{x} + e^{-\psi}\mathrm{d}z_1^2 + e^{\psi}\mathrm{d}z_2^2$, onde $\mathrm{d}\vec{x}$ é o elemento de espaço $3D$ em algum sistema de coordenadas. Agora, para o limite newtoniano, concebe-se que o movimento deve ser muito menor que a velocidade da luz e $\dot{x}^\alpha$ pode ser aproximado como $(1,0,0,0)$ em (6.1). Aproximando o parâmetro afim s à coordenada temporal t, encontra-se

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2} + \left\{{}^{\mu}_{00}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial(e^{-\psi})}{\partial x^\mu}\right]e^{2\psi}N_{z_1}^2 + \left[\frac{\partial(e^{\psi})}{\partial x^\mu}\right]e^{-2\psi}N_{z_2}^2\right\}. \tag{6.11}$$

Como as derivadas no tempo de ϕ e ψ são nulas, a Eq. (6.11) resulta em

$$\vec{a} = -\nabla\Phi, \tag{6.12}$$

$$\Phi = \phi + \frac{1}{2}(e^{-\psi}N_{z_2}^2 + e^{\psi}N_{z_1}^2), \tag{6.13}$$

que é a equação de movimento das partículas teste para o presente sistema, com um potencial efetivo Φ. Para encontrar uma forma para este potencial, pode-se ver de (6.8) e (6.10) que

$$\nabla^2\psi - \nabla\psi.\nabla\psi = 0, \tag{6.14}$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho. \tag{6.15}$$

Termos não-lineares não aparecem porque a matriz σ é diagonal. Em particular, a Eq. (6.14) pode ser reescrita como

$$\nabla^2\chi = 0, \tag{6.16}$$

onde de fato χ é identificada com

$$\chi = e^{-\psi} \tag{6.17}$$

e a Eq. (6.13) é então reescrita como

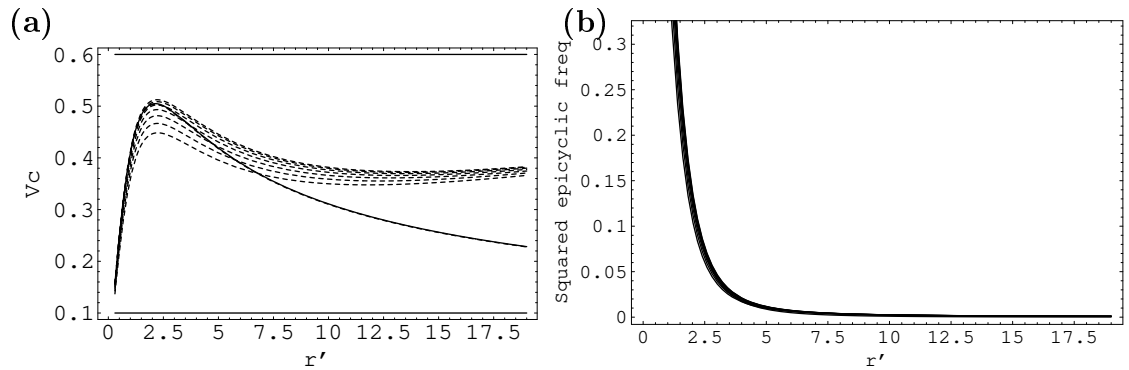


Figura 6.1: **(a)** Curvas de rotação para um potencial efetivo onde a equação de Poisson é resolvida a partir de um ansatz de Miyamoto-Nagai, com parâmetros $a = 1$ e $b = 0,1$ para uma dada galáxia tipo disco, e onde a equação de Laplace para o campo extra é resolvida por um disco de Chazy-Curzon, com parâmetro de corte estável $x_c = 1,5$. A linha cheia representa a situação onde não há dimensões extras, i.e., $N_{z_1} = N_{z_2} = 0$. As linhas pontilhadas representam um conjunto de soluções extradimensionais para $N_{z_1} = 0,1$ fixo e N_{z_2} variando de $0,8$ a $0,95$ como relatado em [Coi07]. **(b)** O mesmo conjunto de soluções apresentado em (a), mas agora a curva representa a frequência epicíclica quadrada κ^2. Quando esta última é positiva, a estabilidade do sistema é garantida.

$$\Phi = \phi + \frac{1}{2}(\chi N_{z_2}^2 + \chi^{-1} N_{z_1}^2). \tag{6.18}$$

Juntamente com as Eqs. (6.18) e (6.16), estas últimas representam um sistema completo de equações para um potencial gravitacional efetivo em $4D$, assumindo um universo multidimensional. Note também que (6.16) é a equação de Laplace no espaço plano tridimensional e então χ pode ser tomada como uma solução da equação de Laplace para um fonte newtoniana apropriada em alguma simetria.

Para um sistema cuja aceleração $\vec{a}$, Eq. (6.12), tenha direção radial, p.ex. um sistema idealizado similiar a uma galáxia, pode-se buscar uma solução exata para a equação de Poisson, como por exemplo o *ansatz* de Miyamoto-Nagai. A equação de Laplace pode ser resolvida a partir de uma solução de Chazy-Curzon, ideal para sistemas tipo disco fino.

O potencial de Miyamoto-Nagai é escrito como [Miy75]

$$\phi(R, z) = -\frac{M}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}, \tag{6.19}$$

onde a, b são constantes positivas. A solução de Chazy-Curzon para uma partícula de massa m na posição $z = z_0$ é dada por [Cha24, Cur24]

$$\chi = \frac{2m}{R}, \tag{6.20}$$

onde $R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$. Nesta última, sempre é possível fazer $z_0 = 0$ e introduzir o método de corte e gerar uma solução tipo disco [Bin87], tal que $z \to |z| + x_c$, onde x_c é o parâmetro de corte. Fixando os valores de a, b e x_c de forma tal que $b/a \sim 0,1$ (fornecendo a distribuição luminosa para uma galáxia tipo disco [Bin87]) e $x_c > 1$ (por razões de estabilidade e para prevenir discos relativísticos [Coi07]) é possível encontrar o conjunto de curvas dado pela Fig. 6.1a.

A estabilidade de tal configuração é garantida por um parâmetro epicíclico newtoniano positivo $\kappa^2 = \partial^2\Phi/\partial r^2 + 3V_C^2/r^2$, como mostrado na Fig. 6.1b.

6.3 Potencial efetivo de GEDi

Uma maneira mais útil de se ver o potencial efetivo para a gravitação com dimensões extras (GEDi) é reescrevendo-o como

$$\Phi = \phi + C\cosh(\psi + \delta), \tag{6.21}$$

onde C e δ são constantes a serem determinadas. Da Eq. (6.13) tais constantes podem ser relacionadas a N_{z_1} e N_{z_2} por

$$C^2 = \left[\frac{1}{2}N_{z_2}\right]^2 - \left[\frac{1}{2}N_{z_1}\right]^2, \tag{6.22}$$

$$\tanh\delta = \frac{N_{z_1}^2}{N_{z_2}^2}. \tag{6.23}$$

Dados os presentes resultados, pode-se perguntar sobre a natureza do potencial (6.21). Tal termo vem exclusivamente das dimensões extras e possivelmente haja alguma relação com um potencial tipo "matéria escura":

$$\phi_{extraD} = \phi_{DM} = C\cosh(\psi + \delta). \tag{6.24}$$

Se as dimensões extras têm algum impacto sobre a teoria, certamente não é como matéria extra, mas ao menos representam algum tipo de pressão extra [i.e. o termo $\frac{1}{2}g^{mn}g_{mn,\alpha\beta}$ em (6.9)]. Isto é confirmado pelo termo de força extra que aparece nas equações de movimento.

7

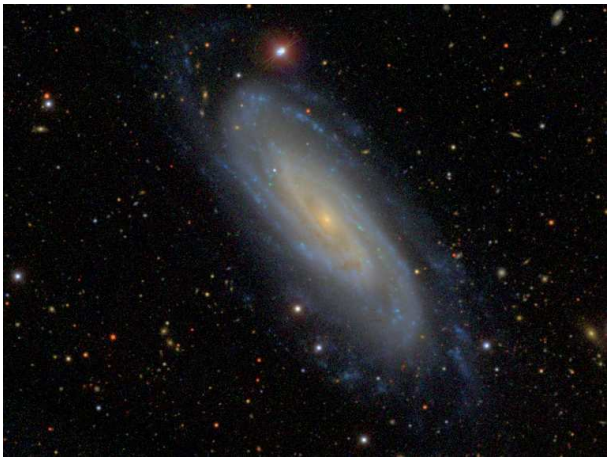
Resultados comparados (galáxias)

O presente trabalho apresentou alguns indícios de que a introdução de dimensões extras em sistemas autogravitantes como discos finos ou estruturas que se assemelham a galáxias reais (a partir de um *ansatz* de Myiamoto-Nagai) ou aglomerados de galáxias, induzem efeitos semelhantes àqueles descritos na literatura com o nome de "matéria escura".

Por exemplo, para o caso de galáxias e suas curvas de rotação, na Figs. 7.1, 7.2 e 7.3 mostra-se a comparação entre os modelos desenvolvidos na presente tese para a galáxia NGC 3198, M31 (Andrômeda) e UGC 12591, que são bons exemplos de galáxias oticamente observadas que possuem curva de rotação do tipo platô. Ainda, complementado a informação discutida no Capítulo 5 sobre curvas não-planas, mostra-se a galáxia UGC 3270 comparada aos modelos desenvolvidos (Fig. 7.4), mostrando-se que há um ótimo ajuste entre observação e o desenvolvido na presente tese.

As curvas mostradas são apenas as estáveis. Diferentemente dos modelos com matéria escura, aqui não existe uma composição da curva de um halo escuro com curvas de gás e estrelas. Aqui, as curvas calculadas, sem matéria escura, obtidas a partir das geodésicas relativísticas estáveis do disco são comparadas com os dados observacionais, sem técnicas de *fitting*, dentro da região de interesse. Ou seja, não há um simples ajuste *ad hoc* dos parâmetros envolvidos (conforme relatado no Capítulo 4). Ao contrário, o cálculo de discos estáveis traz à tona um intervalo de valores para o espaço de parâmetros referido. Tais valores produzem as curvas newtonianas ou relativísticas das figuras, que quando comparadas com as curvas de galáxias, se ajustam com ótima precisão aos dados observacionais na região de interesse.

Os modelos desenvolvidos podem assim ser considerados como uma abordagem semifenomenológica alternativa para o problema das curvas de rotação. Pode-se também comparar com modelos fenomenológicos de matéria escura comumente usados na astrofísica como os de Navarro, Frenk & White [Nav96] ou *fittings* puramente fenomenológicos como o de Courteau [Cou97] e o esperado pelo *ansatz* de Miyamoto-Nagai para curvas $4D$.



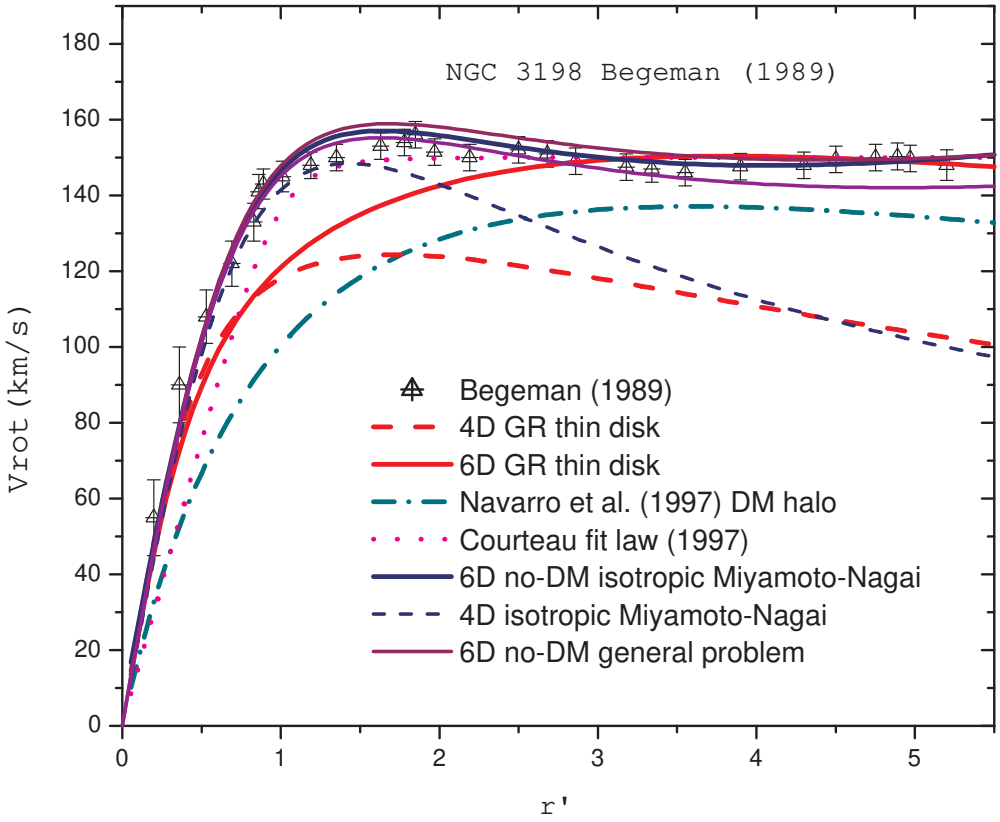
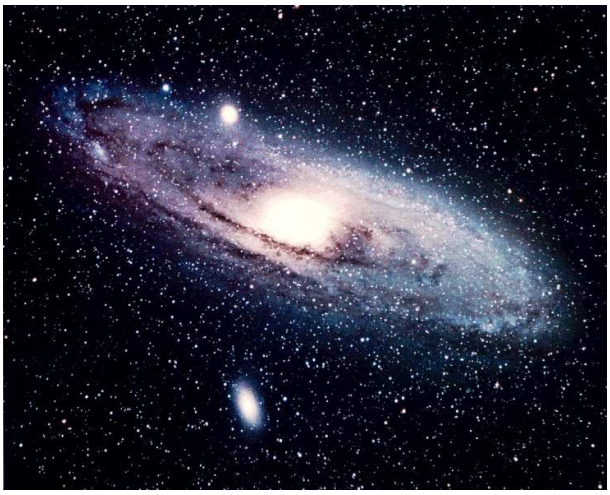


Figura 7.1: Curvas de rotação de todos os modelos desenvolvidos no presente trabalho: vermelha=discos finos, azul=galáxia de Miyamoto-Nagai, violeta=modelo geral com dimensões extras, comparados com a observação de NGC 3198 [Beg89].



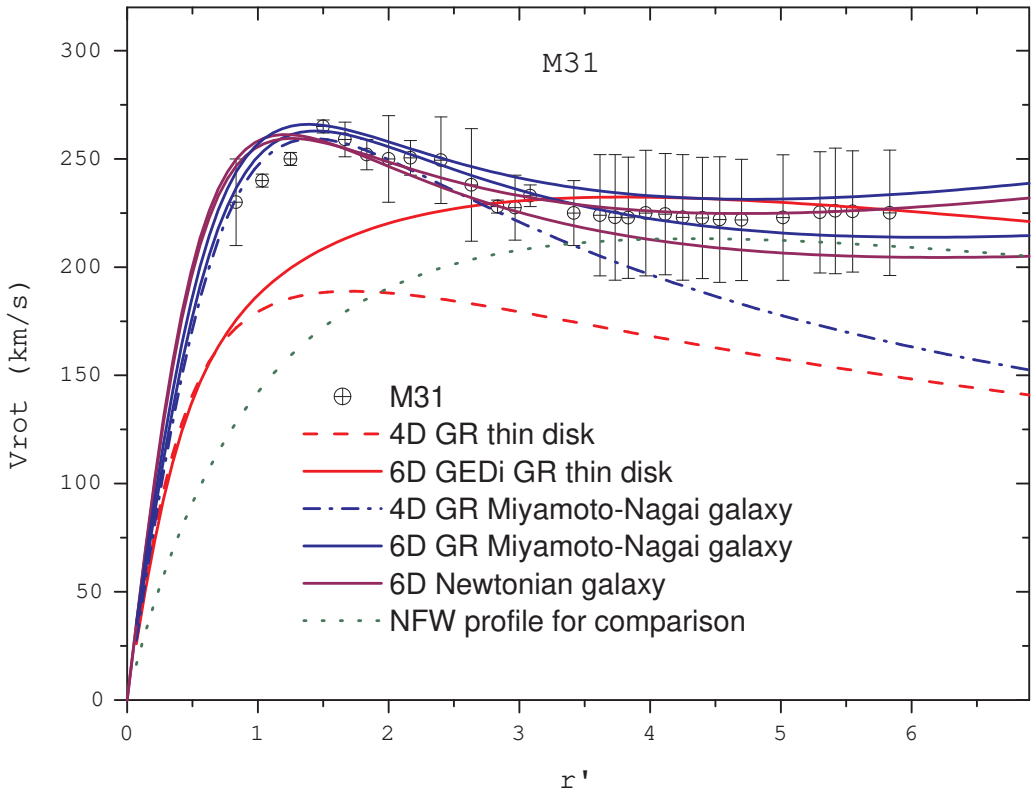


Figura 7.2: Curvas de rotação de todos os modelos desenvolvidos no presente trabalho: vermelha=discos finos, azul=galáxia de Miyamoto-Nagai, violeta=modelo geral com dimensões extras, comparados com a observação de M31 (galáxia de Andrômeda) .

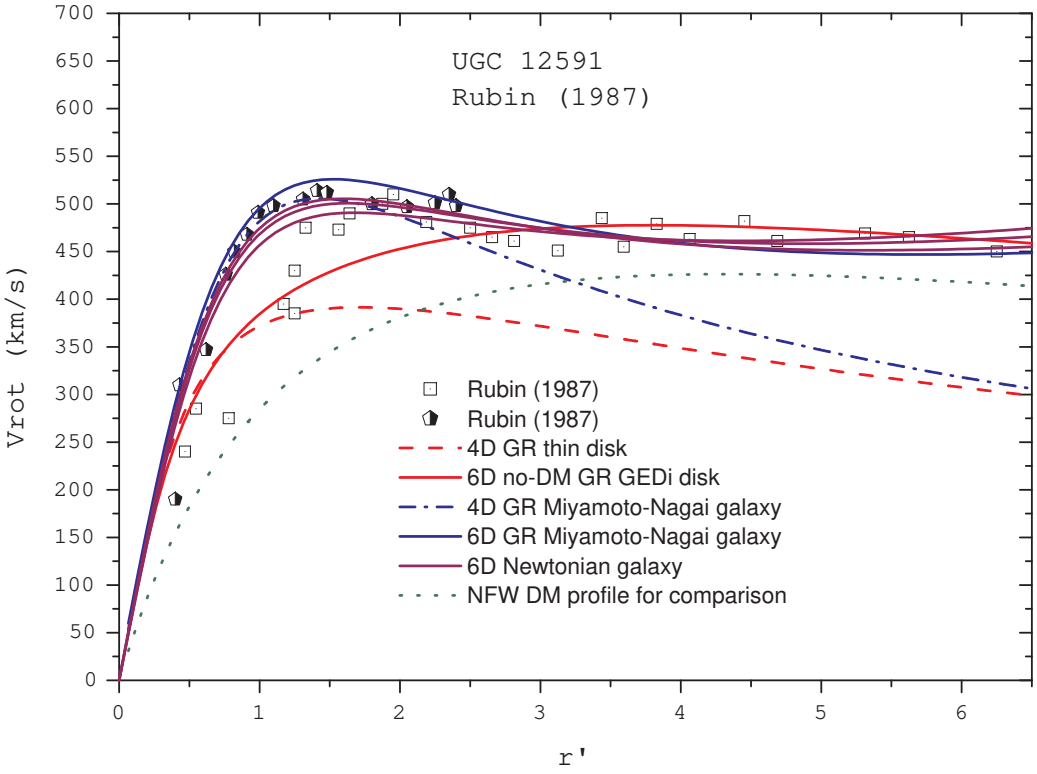
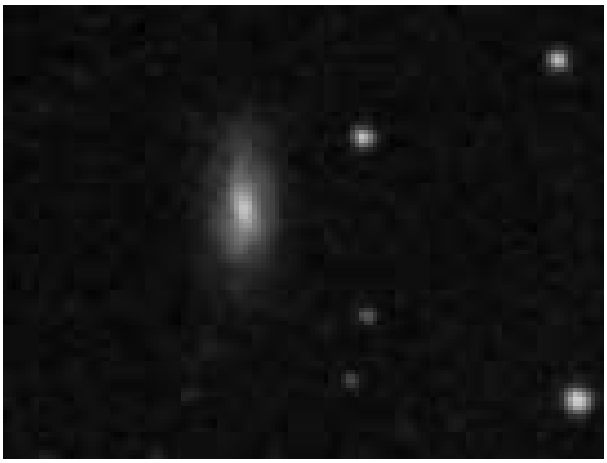


Figura 7.3: Curvas de rotação de todos os modelos desenvolvidos no presente trabalho: vermelha=discos finos, azul=galáxia de Miyamoto-Nagai, violeta=modelo geral com dimensões extras, comparados com a observação de UGC 12591 [Rub87].



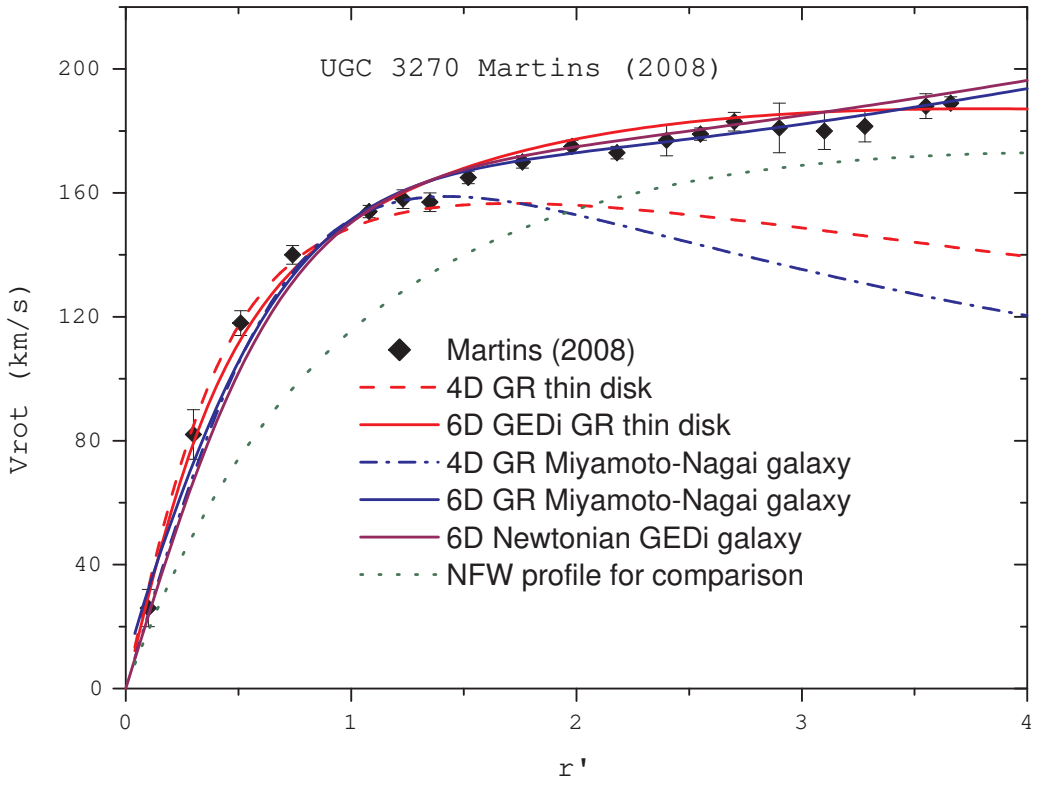


Figura 7.4: Curvas de rotação de todos os modelos desenvolvidos no presente trabalho: vermelha=discos finos, azul=galáxia de Miyamoto-Nagai, violeta=modelo geral com dimensões extras, comparados com a observação de UGC 3270 [Fri08], que ao contrário do geralmente evocado, não tem curva de rotação plana, e sim ascendente.

8

Considerações finais

Na presente tese levantou-se a hipótese de que possivelmente a presença de dimensões extras no universo poderiam ser uma explicação alternativa para o fenômeno de massa faltante no universo, comumente denominado matéria escura.

1. Será que a matéria escura de fato existe?

2. O que é chamado de matéria escura não seria algum tipo de ignorância acerca da natureza do espaço-tempo?

3. Seria essa ignorância relacionada ao nosso desconhecimento da possível existência de dimensões extras?

As perguntas acima foram inicialmente levantadas na introdução ao presente trabalho e deixadas em aberto. De fato, em complemento, dada a compreensão sobre os resultados obtidos nos capítulos anteriores, pode-se acrescentar ainda uma quarta pergunta:

4. Dimensões extras e massa faltante poderiam ser componentes de "suficiência e necessidade" de um "teorema" sobre um universo multidimensional onde o espaço visível seja apenas a ponta de um grande iceberg?

O que a presente tese responde em relação às perguntas enumeradas acima?

Não é possível por exemplo responder em definitivo se a matéria escura, como partícula presente nos tais halos escuros, de fato poderia ser desconsiderada. A nuance desenvolvida no presente trabalho é bem parcial. Dos resultados obtidos em estruturas autogravitantes, conclui-se que a presença de dimensões extras (sem matéria escura) é equivalente ao efeito devido à adição de matéria escura nas configurações calculadas, o que poderia levar à interpretação de que a matéria escura é apenas o produto de um desconhecimento acerca da natureza do espaço-tempo (o que, repetindo, para o caso de algumas estruturas autogravitantes, além de vislumbrar uma possível resposta para a pergunta 1., responderia também às perguntas 2. e 3.). Entretanto, como não se abordou o caso cosmológico, nada pode-se concluir porém em definitivo.

Outro ponto importante é que a vitalidade dos resultados depende profundamente da interpretação das constantes de integração devido às dimensões extras

(p.ex. C_x e C_y). Seriam estas constantes relacionadas a ângulos caso as dimensões extras forem compactificadas?

Assim, em absoluto, o presente trabalho está longe de qualquer pretensão de fechar o problema da matéria escura. Muitos testes relativos à falseabilidade da presente proposta devem ser feitos, não cabendo à presente tese contemplar o assunto. Entretanto, já se poderia divisar que os testes seriam de teor astrofísico, semelhantes aos apresentados, p.ex. em [Coi05a, Coi05b, Coi05c, Coi06a, Coi06b]. Cálculos preliminares que resgatam a dinâmica newtoniana no sistema solar para o presente modelo foram calculados e podem ser vistos em [Coi07].

Boa parte do material presente nesta tese foi publicada. O Capítulo 4 está publicado em [Coi07] e [Coi08]. Parte do Capítulo 5 está publicada em [Coi07] e a parte referente às galáxias de Miyamoto-Nagai está submetida[1]. O Capítulo 3 faz parte de um artigo em vias de submissão.

[1]Submetido ao Classical and Quantum Gravity

Referências Bibliográficas

[App01] T. Appelquist, H. C. Cheng e B. A. Dobrescu, Phys. Rev. **D**64, 035002 (2001)[`arXiv:hep-ph/0012100`].

[Ark98] N. Arkani-Hamedd, S. Dimopoulos, e G. Dvali, Phys. Lett. **B429**, 263-272 (1998) [`arXiv:hep-ph/9803315`].

[Ash92] K. M. Ashman, Publ. Astron. Soc. Pac. **104**, 1109 (1992).

[Beg89] K. G. Begeman, Astron. & Astrophys. **223**, 47 (1989).

[Bek04] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D**70**, 083509 (2004) [`arXiv:astro-ph/0403694`].

[Ber00] L. Bergström, Rep. Prog. Phys. **63**, 793 (2000) [`arXiv:hep-ph/0002126`].

[Bic93] J. Bičák, D. Lynden-Bell e J. Katz, Phys. Rev. **D47**, 4334 (1993).

[Bin87] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princenton: Princenton University Press, 1987).

[Bis64] R. L. Bishop e R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds* (New York: Academic Press, 1964).

[Blu84] G. R. Blumenthal *et al.*, Nature **287**, 774 (1984).

[Bon68] W. A. Bonnor e A. Sackfield, Commun. Math. Phys. **8**, 338 (1968).

[Cso03] V. Cardoso, *Quasinormal modes and gravitational radiation in black hole spacetimes*, Ph.D. Dissertation, Instituto Superior Técnico, Lisboa (2003) [`http://gamow.ist.utl.pt/~vitor/pdfs/tese.pdf`].

[Car76] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1976).

[Crl97] S. M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity* [`arXiv:gr-qc/9712019`]; na internet: [*http://preposterousuniverse.com/grnotes*].

[Crl03] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Menlo Park: Addison-Wesley, 2003).

[Cha98] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford: Oxford University Press, 1998).

[Cho82] A. Chodos e S. Detweiler, Gen. Rel. Grav. **14**, 879 (1982).

[Cha24] M. Chazy, Bull. Soc. Math. France **52**, 17 (1924).

[Cir08] M. Cirelli e A. Strumia, PoS (idm2008) 089. Para a relação completa de experimentos veja [`http://pos.sissa.it/cgi-bin/reader/conf.cgi?confid=64`].

[Clo04] D. Clowe, A. Gonzalez e M. Markevitch, Astrophys. J. **604**, 596 (2004); D. Clowe, M. Bradac, A. Gonzalez *et al.* [`arXiv:astro-ph/0608407`].

[Coi07] C. H. Coimbra-Araújo e P. S. Letelier, Phys. Rev. **D76**, 043522 (2007) [`arXiv:astro-ph/0703466`].

[Coi08] C. H. Coimbra-Araújo e P. S. Letelier, Class. Quantum Grav. **25**, 015001 (2008).

[Coi05a] C. H. Coimbra-Araújo, R. da Rocha e I. T. Pedron, Int. J. Mod. Phys. **D14** (2005) 1883-1898 [`arXiv:astro-ph/0505032`].

[Coi05b] C. H. Coimbra-Araújo e R. da Rocha, *JCAP* **0512** (2005) 009 [`arXiv:astro-ph/0510318`].

[Coi05c] C. H. Coimbra-Araújo, R. da Rocha e I. T. Pedron, Braz. J. Phys. **34N4B** (2005) 1129 [`arXiv:astro-ph/0509363`].

[Coi06a] C. H. Coimbra-Araújo e R. da Rocha, Phys. Rev. **D74**, 055006 (2006) [`arXiv:hep-ph/0607027`].

[Coi06b] C. H. Coimbra-Araújo e R. da Rocha, *Physical Effects of Extra Dimension in brane Randall-Sundrum model and Concomitant Map between Photons and Gravitons in RS Brane-World Scenario*, PoSIC2006:065 (2006) [`arXiv:gr-qc/0610134`].

[Coo06] F. I. Cooperstock e S. Tieu, *General Relativity Resolves Galactic Rotations Without Exotic Dark Matter* [`arXiv:astro-ph/0507619`].

[Cou97] S. Courteau, Astron. J. **114**, 2402 (1997) [`arXiv:astro-ph/9709201`].

[Cri06] J. R. Chisholm, Phys. Rev. D**73**, 083504 (2006) [`arXiv:astro-ph/0509141`].

[Cur24] H. Curzon, Proc. London Math. Soc. **23**, 477 (1924).

[Cve95] M. Cvetic e D. Youm, Phys. Rev. D **52**, 2144 (1995) [`arXiv:hep-th/9502099`].

[Dob82] P. Dobiasch e D. Maison, Gen. Rel. Grav. **14**, 231 (1982).

[Duf94] M. J. Duff, *Kaluza-Klein theory in perspective* [`hep-th/9410046`].

[Ein15] A. Einstein, *Der Feldgleichungen der Gravitation*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 844-847 (1915).

[Emp02] R. Emparan e H. S. Reall, Phys. Rev. D**65**, 084025 (2002) [`arXiv:hep-th/0110258`].

[For94] B. Fort e Y. Mellier, Astron. Astrophys. Rev. **5**, 239 (1994).

[Fri08] C. Frigerio Martins, *The distribution of the dark matter in galaxies as the imprint of its Nature*, Ph.D. Dissertation, International School for Advanced Studies, Sissa, 2008 [`arXiv:0904.4054`].

[Gal02] D. V. Gal'tsov, Phys. Rev. D**66**, 025016 (2002) [`arXiv:hep-th/0112110`].

[Gib82] G. W. Gibbons, Nucl. Phys. B **207**, 337 (1982).

[Gib86] G. W. Gibbons e D. L. Wiltshire, Annals Phys. **167**, 201 (1986) [Erratum-ibid. **176**, 393 (1986)].

[Gon98] G. González, *Construção de modelos relativísticos de discos com suporte de esforço na direção radial*, Tese de Doutorado, Unicamp (1998) [`http://libdigi.unicamp.br/document/?code=000133183`].

[Gon99] G. González and P. S. Letelier, Class. Quantum Grav. **16**, 479 (1999) [`arXiv:gr-qc/0006002`].

[Gre82] M. B. Green e J. H. Schwarz, Phys. Lett. **109B**, 444 (1982). Em complemento, veja também: M. B. Green e J. H. Schwarz, Phys. Lett. **149B**, 117 (1984); D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec e R. Rohm, Phys. Rev. Lett. **54**, 502 (1985); E. Witten, Nucl. Phys. **B443**, 85 (1995); M. J. Duff, *M-theory (the theory formely known as strings)*, SISSA preprint [`hep-th/9608117`](1996).

[Has99] S. Hassani, *Mathematical Physics: A Modern Introduction to its Foundations* (New York: Springer-Verlag, 1999), Caps. 25 e 26.

[Hoo07] D. Hooper e S. Profumo, Physics Reports **453**, 29 (2007) [`arXiv:hep-ph/0701197`].

[Isr66] W. Israel, Nuovo Cimento B **44**, 1 (1966).

[Kal97] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem in der Physik*, Press. Akad. Wiss. Berlin, Sitzunber. , **K1**, 966-972 (1921), Comunicado a Einstein em 1919. Também na tradução para o inglês em L. O'Raifeartaigh, (ed.), *The Dawning of Gauge Theory* (Princenton: Princenton University Press, 1997), 53-58.

[Kaz02] P. O. Kazinski, S. L. Lyakhovich and A. A. Sharapov, Phys. Rev. D**66**, 025017 (2002) [`arXiv:hep-th/0201046`].

[Kto90] S. Kato, Publ. of the Astron. Soc. Japan **49**, 99 (1990).

[Kat99] J. Katz, J. Bičák e D. Lynden-Bell, Class. Quantum Grav. **16**, 4023 (1999) [arXiv:gr-qc/9910087].

[Kle26] O. Klein, *Quantentheorie fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Z. Phys. **37**, 895-906 (1926).

[Kos99] B. P. Kosyakov, Theor. Math. Phys. **119**, 493 (1999) [arXiv:hep-th/0207217].

[Kuz56] G. G. Kuzmin, Astron. Zh. **33**, 27 (1956).

[Led99] T. Ledvinka, M. Zofka e J. Bičák, in *Proceedings of the 8th Marcel Grossman Meeting in General Relativity*, edited by T. Piran (Singapore: World Scientific, 1999), pp. 339-341.

[Lem89] J. P. S. Lemos, Class. Quantum Grav. **6**, 1219 (1989).

[Lem94] J. P. S. Lemos e P. S. Letelier, Phys. Rev. **D49**, 5135 (1994).

[Les82] G. Lessner, Phys. Rev. **D25**, 3202 (1982).

[Let87] P. S. Letelier e S. R. Oliveira, J. Math. Phys. **28**, 165 (1987).

[Let93] P. S. Letelier & A. Wang, Phys. Rev. **D48**, 631 (1993).

[Let99] P. S. Letelier, Phys. Rev. **D60**, 104042 (1999) [arXiv:gr-qc/9907050].

[Leu60] H. Leutwyler, Arch. Sci. **13**, 549 (1960).

[Lic71] A. Lichnerowicz, C. R. Acad. Sci. Paris **273**, 528 (1971).

[Lyn78] D. Lynden-Bell e S. Pineault, Mon. Not. R. Astron. Soc. **185**, 679 (1978).

[Mel99] Y. Mellier, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **37**, 127 (1999) [arXiv:astro-ph/9812172].

[Mil83] M. Milgrom, Astrophys. J. **270**, 365 (1983); *ibid.* **270**, 371 (1983).

[Mis73] C. W. Misner, K. S. Thorne, e J. A. Wheeler, *Gravitation* (San Francisco: Freeman, 1973).

[Miy75] M. Miyamoto e N. Nagai, Publications of the Astronomical Society of Japan **27**, 533 (1975).

[Mof05] J. W. Moffat, JCAP 0505 (2005) 003 [arXiv:astro-ph/0412195].

[Moo94] B. Moore, Nature **370**, 629 (1994) [arXiv:astro-ph/9402009].

[Mor69] T. Morgan e L. Morgan, Phys. Rev. **183**, 1097 (1969).

[Mor70] L. Morgan e T. Morgan, Phys. Rev. D**2**, 2756 (1970).

[Nav96] J. F. Navarro, C. S. Frenk e S. D. M. White, Astrophys. J. **462**, 563 (1996) [arXiv:astro-ph/9508025].

[Oor32] J. Oort, Bull. Astron. Inst. Neth. **6**, 249 (1932); *ibid.* **15**, 45 (1960).

[Ove97] J. M. Overduin and P. S. Wesson, Phys. Rept. **283**, 303-380 (1997) [arXiv:gr-qc/9805018].

[Pap68] A. Papapetrou e A. Hamouni, Ann. Inst. Henri Poincaré **9**, 179 (1968).

[Per88] M. Persic e P. Salucci, Mon. Not. R. Astron. Soc. **234**, 131 (1988).

[Pes05] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Kolkata: Levant Books, 2005).

[Pol83] D. Pollard, J. Phys. A **16**, 565 (1983).

[Rsu99a] L. Randall e R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690-4693 (1999) [arXiv:hep-th/9906064].

[Rsu99b] L. Randall e R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370-3373 [arXiv:hep-ph/9905221].

[Ras95] D. Rasheed, Nucl. Phys. B **454**, 379 (1995) [arXiv:hep-th/9505038].

[Ray16] Lord Rayleigh, Proc. R. Soc. London A**93**, 148 (1916); L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd ed. (Oxford: Pergamon, 1987), Sec. 27.

[Rub87] V. Rubin, Int. Astron. Un. Symp. **117**, 66 (1987).

[Sch85] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge: Cambridge University Press, 1985) Caps. 2-4.

[Sem00] O. Semerák e M. Žáček, Publ. of the Astron. Soc. Japan **52**, 1067 (2000).

[Shi71] M. F. Shirokov, Gen. Rel. Grav. **2**, 131 (1971).

[Smi36] S. Smith, Astrophys. J. **83**, 23 (1936).

[Sof99] Y. Sofue *et al.*, Astrophys. J. **523**, 136 (1999) [arXiv:astro-ph/9905056].

[Sof01] Y. Sofue e V. Rubin, Ann. Rev. Astr. Astrophys. **39**, 137 (2001) [arXiv:astro-ph/0010594].

[Spe03] D. N. Spergel *et al.*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003) [arXiv:astro-ph/0302209].

[Spe07] D. N. Spergel *et al.*, Astrophys. J. Suppl. **170**, 377 (2007) [arXiv:astro-ph/0603499].

[Spr05] V. Springel *et al.*, Nature **435**, 629 (2005) [arXiv:astro-ph/0504097].

[Ste94] G. Steigman e B. Moore, Nature **370**, 629 (1994).

[Tau80] A. H. Taub, J. Math. Phys. **21**, 1423 (1980).

[Thi87] Y. Thiry, *Les équations de la théorie unitaire de Kaluza*, Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) **226**, 216 (1948). Tradução para o inglês *in*: Modern Kaluza-Klein theories, eds. T. Appelquist, A. Chodos e P. G. O. Freund (Menlo Park: Addison-Wesley, 1987).

[Vog03] D. Vogt e P. S. Letelier, Phys. Rev. **D68**, 084010 (2003) [`arXiv:astro-ph/0308031`].

[Vog05a] D. Vogt e P. S. Letelier, Phys. Rev. D**71**, 044009 (2005) [`arXiv:gr-qc/0409109`].

[Vog05b] D. Vogt e P. S. Letelier, Mon. Not. R. Astron. **363**, 268 (2005) [`arXiv:astro-ph/0507406`].

[Vog06a] D. Vogt, *Modelos de discos e outras estruturas auto-gravitantes em relatividade geral*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp (2006) [`http://libdigi.unicamp.br/document/?down=vtls000378087`].

[Vog06b] D. Vogt e P. S. Letelier, *Presence of exotic matter in the Cooperstock and Tieu galaxy model* [`arXiv:astro-ph/0510750`]; D. Vogt e P. S. Letelier, *Exact general relativistic rotating disks immersed in rotating dust generated from van Stockum solutions*[`arXiv:astro-ph/0611428`].

[Wal84] R. M. Wald, *General Relativity* (Chicago: The University of Chicago Press, 1984), Caps. 2-4.

[Wei72] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (New York: Wiley, 1972) Caps. 2-3.

[Wey17] H. Weyl, Ann. Phys. **54**, 117 (1917); H. Weyl, Ann. Phys. **59**, 185 (1919).

[Wit81] E. Witten, Nucl. Phys. **B135**, 412 (1981). Em complemento, veja também: S. Deser e B. Zumino, Phys. Lett **62B**, 335 (1976); E. Cremmer, B. Julia e J. Scherk, Phys. Lett. **76B**, 409 (1978); D. Balin e A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory* (New York: Taylor & Francis, 1994) Caps. 4-6.

[Zwi33] F. Zwicky, Helv. Phys. Acta **6**, 110 (1933).

[Zwi37] F. Zwicky, Astrophys. J. **86**, 217 (1937).

Índice Remissivo

ΛCDM (Matéria escura fria), 2

Aceleradores de partículas, 3
ADD, 11
Aglomerados de galáxias, 1, 2, 5, 57
    Bullet Cluster, 3, 4
    Lentes gravitacionais, 57
Arkani-Hammed-Dmopoulous-Dvali
    Modelo de, 11
Astrofísica observacional, 3
Autogravitantes, objetos, 4

Bekenstein, Jacob, 4
Braneworld, 18
Bullet Cluster, 3, 4
Buracos negros, 3, 14, 28

Cíclicas, variáveis, 18
Chazy-Curzon, disco de, 28, 37, 64
Christoffel, símbolo de, 8
    Descontinuidades, 26
    Multidimensional, 15
Cilíndrica, condição, 13, 14
Coma, aglomerado de, 2
Compactificação, 11, 13, 18, 19
    Raio de, 13, 19
Conforme, transformação, 33
Constante cosmológica, 3
Cosmologia, 2, 14
    Simulações, 2
Curvas de rotação, 1, 4
    Comparação entre GEDi e galáxias, 44
    Discos finos 4D, 28
    Discos finos 6D, 37, 44
    Estabilidade, 4, 64
    M31, 68
    Não-planas, 55, 66
    Newtonianas, 64
    NGC3198, 46, 54, 67
    NGC7331, 46
    UGC12591, 46, 69
    UGC195, 56
    UGC3270, 70

Derivada covariante, 8
Dimensões extras, 1, 4, 11, 14, 18
    GEDi (Gravitação com), 11, 46
    Indução no stress, 16
    Largas, 11, 19
    Métrica axisimétrica, 30
    Não-compactificadas, 20
    Universais (UED), 4, 11
Discos finos, 4, 22
    Aspectos gerais, 23
    Curvas de rotação, 28
    Densidade e pressões disco 4D, 25
    Densidade e pressões disco 6D, 36, 45
    Em 6D, 34
    Estabilidade, 38
    Estabilidade (método perturbativo), 38
    Imagens, método de, 4, 22, 24
    Relativísticos, 22
    Soluções, 27
    Tensor de energia-momento, 27
Discos galáticos, 1
Distribucional, método, 24

Einstein
    Convenção de soma, 6
    Equações de, 9, 14
    Soluções equações de, 14
    Tensor de, 9
Einstein, Albert, 11
Einstein, equações de
    Em 5D, 12

Geometria axisimétrica no vácuo, 23, 24
Soluções axisimétricas em d dimensões, 30
Einstein-Hilbert, ação de, 4, 10, 12
Multidimensional, 14, 49
Einsten, equações de
Em 6D (discos), 34
Eletromagnético, potencial, 12
Emparan-Reall
Solução de, 23
Teorema de, 30
Energia-momento, tensor de, 9
Fluido perfeito, 9
Multidimensional, 16, 35
Epicíclico, parâmetro, 42, 65
Equações de movimento
Com dimensões extras, 17, 18, 63
Para espaço-tempo 6D, 63
Escalar de Ricci, 9, 12
Estabilidade
Discos newtonianos 6D, 65
Discos relativísticos 6D, 40
Galáxias 6D, 52
Método perturbativo, 38
Euler-Lagrange, equação de, 51
Com dimensões extras, 17

Física de partículas, 3
Fluido perfeito, 9
Fourier
Modos de, 13
Fourier, séries de, 13

Galáxias
Modelos relativísticos, 49, 54
Galáxias espirais, 2, 46
GEDi (Gravitação com dimensões extras), 11, 46
Relação com matéria escura, 65
Geodésicas, 8
Órbitas circulares (6D), 37, 51
Circulares, 28
Gravitação com dimensões extras (GEDi), 11, 46
Gravitação newtoniana, 1, 2, 4

Halo escuro, 3, 5
Hierarquia, problema da, 11, 14, 20
Hubble, lei de, 21
Huygens, princípio de, 34

Imagens, método de, 4, 24
Inverso ao quadrado, lei de, 19, 21
Inverso, método, 4, 22, 24

Kaluza, Theodor, 12
Condição cilíndrica de, 13, 14
Kaluza-Klein, 4
Equações de campo, 13
Teorias de, 11
Killing, vetores de, 30
Klein, Oscar, 13
Compactificação de, 13

Lagrangiano, funcional, 17
Laplace, equação de, 23, 64
Multidimensional, 34
Superposição de soluções, 28
Lentes gravitacionais, 1, 2, 5
Letelier, Patricio, 23
LHC (Large Hadron Collider), 20
Lorentz, gauge de, 62

Métrica, 6
Axisimétrica, 14, 23, 63
Axisimétrica em (4+n)D, 30
De Kaluza, 12
Definição, 7
Isotrópica, 49
Lorentziana, 7
Multidimensional, 15
Riemanniana, 7
Weyl, coordenadas canônicas de, 33
Matéria escura, 1, 2, 4, 66
Experimentos, 3
Partículas, 3, 4
Potencial escuro, 65
Supersimétrica, 11
UED, 11
WIMPs, 3, 4

Matéria escura versus GEDi, 65
Maxwell, James C., 11
Milgrom, Mordehai, 4
Miyamoto-Nagai, galáxia de, 4, 48, 64
Modelo padrão de partículas, 3
Modelo sigma, 62
MOND (*Modified Newtonian dynamics*), 4, 45
Movimento, equações de
    Com dimensões extras, 17, 18, 63
    Para espaço-tempo 6D, 63

Navarro-Frenk-White, perfil de, 46, 55, 66
Newtoniano, limite, 10, 50, 61, 62
Nucleossíntese, 2

Oort, Jan Hendrik, 2

Pósitrons, excesso de, 3
PAMELA, missão, 3
Pares, dimensões, 34
Perfil de densidade, 4
Perfil de pressão, 4
Plack
    Massa de, 19
Planck
    Comprimento de, 11
    Constante de, 11
Poisson, equação de, 10, 50
    Para dimensões extras, 62, 64
Potencial GEDi, 65
Princípio da equivalência, 9
Propagador do fóton
    Em 3D, 19
    Para 3+n D, 19

Quântica, teoria, 13
Quinta dimensão, 13

Radiação cósmica de fundo, 1, 2
Raios cósmicos, 3
Randall-Sundrum, modelos de, 11
Rayleigh, critério de, 38
Relatividade geral, 2, 4–6, 9, 14
    Solução de Weyl, 23
    Solução multidimensional, 23
Ricci
    Escalar de, 9, 12
    Tensor de, 9
Ricci, tensor de, 12
    Multidimensional, 16
Riemann, tensor de, 9
Riemanniana, geometria, 8

Schwarzschild, solução de, 28, 37
Sechsbein, 36
Sexta dimensão, 34, 64
Supercordas, teoria de, 11, 14, 18
Supergravidade, teoria de, 11

Tensor
    Contravariante, 6
    Covariante, 6
    De curvatura, 9
    De Einstein, 9, 12
    De Ricci, 9, 12
    De Ricci multidimensional, 16
    De stress, 9
    Definição, 6
    Distribucional de energia-momento, 25
    Distribucional de energia-momento (6D), 35
    Distribucional de Ricci, 26
    Distribucional de Riemann, 26
    Métrico, 6, 12
    Rank (ou posto), 6, 8
    Stress, 10
    Stress multidimensional, 16, 35
    Transporte paralelo, 8
Teorema do virial, 2
Tetradas, 7
TeVeS (*Tensor/Vector/Scalar gravity*), 4
Topologia
    S^1, 13
Transformação conforme, 33
Transporte paralelo, 8

UED (Dimensões extras universais), 4, 11
Unificação

Gravitação e eletromagnetismo, 12
Interações fundamentais, 11

Variáveis cíclicas, 18
Variedade (manifold), 6
Vetor tangente, 6
Via Láctea, 2
Vierbein, 7
Virial, teorema do, 2
Vogt, Daniel, 23

Weyl, Solução de, 23

Zwicky, Fritz, 1, 2