

SOLUÇÕES SUPERLUMINAIS DAS EQUAÇÕES  
DE ONDA RELATIVÍSTICAS E A  
RELATIVIDADE ESPECIAL

José Emílio Maiorino

Orientador: Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira - IMECC/UNICAMP;

Prof. Dr. Márcio José Menon; - IFGW/UNICAMP;

Prof. Dr. André Koch Torres Assis - IFGW/UNICAMP;

Prof. Dr. Roberto Antonio Clemente - IFGW/UNICAMP;

Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov (suplente) - IMECC/UNICAMP;

Prof. Dr. Bernardo Laks (suplente) - IFGW/UNICAMP.

Tese de Doutorado  
Instituto de Física Gleb Wataghin  
Unicamp  
Julho de 1999

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

Maiorino, José Emílio  
M285s Soluções superluminais das equações de onda  
relativísticas e a relatividade especial. - Campinas, SP :[s.n.], 1999.

Orientador: Waldyr Alves Rodrigues Jr.  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Equação de onda. 2. Relatividade especial (Física). 3.  
Sólitons. I. Rodrigues Júnior, Waldyr Alves. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III.  
Título.

Dedico este trabalho a Joi, Clara e Júlia,  
razão dele e minha.



## Agradecimentos

Agradeço a Joi, minha mulher, e a minhas filhas Clara e Júlia, cujo apoio e carinho foram e são fundamentais para este trabalho e para minha vida.

Agradeço ao Professor Waldyr A. Rodrigues Jr., pela orientação deste trabalho, e também pelo apoio e amizade constantes, manifestados tantas vezes ao longo desses anos em que o conheço. Sem esse apoio e amizade este trabalho certamente jamais chegaria a bom termo.

Agradeço também aos meus colegas do Imecc e aos professores do grupo de Física-Matemática. Menciono especialmente Edmundo Capelas de Oliveira, Jayme Vaz Jr., Patricio Letelier e Quintino A. Gomes de Souza.

Agradeço a meus amigos Glacir, Marcelo, Tadeu, Rosane, Rose e Paulinho, minha segunda família.

Agradeço ao CNPq, pela ajuda financeira.



# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Siglas e abreviações</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Equações de onda relativísticas</b>	<b>9</b>
2.1 Os fibrados de Clifford e Spin-Clifford . . . . .	10
2.1.1 Os operadores diferencial, de Dirac, codiferencial de Hodge e estrela de Hodge . . . . .	12
2.2 A teoria de Maxwell . . . . .	13
2.2.1 O fibrado de Clifford complexo e o fibrado de Pauli . .	14
2.2.2 A equação de Maxwell e o fibrado de Pauli . . . . .	14
2.2.3 Extensores . . . . .	15
2.2.4 O tensor de energia-momento de $F$ . . . . .	16
2.2.5 Tensor de momento angular de $F$ . . . . .	17
2.2.6 Invariantes de $F$ . . . . .	18
2.2.7 Soluções de onda plana ( $v = c$ ) da $EM$ . . . . .	18
2.2.8 O teorema de Hertz . . . . .	20
2.3 O operador dalembertiano, a $EOH$ e a $EKG$ . . . . .	21
2.4 A teoria de Dirac . . . . .	21
2.4.1 Campos de spinores de Dirac-Hestenes . . . . .	21
2.4.2 A equação de Dirac-Hestenes . . . . .	23
2.4.3 A interpretação de de Broglie-Bohm da teoria quântica	24
2.4.4 Soluções de onda plana da equação de Dirac-Hestenes	24
2.4.5 Tunelamento de ondas planas de Dirac-Hestenes . . .	25
2.5 Teoremas de conservação . . . . .	27
2.5.1 Corrente conservada do campo de Dirac-Hestenes . . .	27

2.5.2	Tensor de energia-momento do campo de Dirac-Hestenes	28
2.5.3	Tensor de momento angular do campo de Dirac-Hestenes	31
<b>3</b>	<b>Novas soluções da EOH e da EKG</b>	<b>33</b>
3.1	Soluções <i>UPW</i> com $v \neq c$ da <i>EOH</i>	33
3.2	Soluções <i>UPW</i> com $v > c$ da <i>EKG</i>	37
3.3	Soluções <i>UPW</i> com $v = c$ da <i>EKG</i>	38
3.4	As soluções de onda <i>X</i> da <i>EOH</i>	39
<b>4</b>	<b>Novas soluções <i>UPW</i> das equações de Maxwell</b>	<b>43</b>
4.1	Soluções subluminais das <i>EM</i> e <i>PEPs</i>	43
4.2	A onda <i>X</i> eletromagnética superluminal	47
4.3	Como lançar uma <i>FAASEXW</i>	49
4.3.1	A teoria da difração de Huygens-Kirchhoff	50
4.3.2	A teoria da difração de Rayleigh-Sommerfeld	52
4.3.3	Evidência experimental para <i>FAASEXWs</i>	55
<b>5</b>	<b>Novas soluções da EDH e da EW</b>	<b>56</b>
5.1	Soluções com $v \neq c$ da <i>EDH</i> e da <i>EW</i> com $m = 0$	56
5.2	Soluções com $v \geq c$ da <i>EDH</i>	58
<b>6</b>	<b>A Teoria das Características e o Conceito de Sinal</b>	<b>59</b>
6.1	Introdução	59
6.2	Equações diferenciais parciais de segunda ordem	60
6.2.1	Características	61
6.2.2	Famílias de características	63
6.2.3	Equações diferenciais parciais lineares	64
6.2.4	Invariância das características	66
6.3	Raios e bicaracterísticas	67
6.4	Características como frentes de onda	69
6.5	Cone de raios, cone normal e conóide de raios	70
6.6	O papel das características	71
6.6.1	Descontinuidades de segunda ordem	72
6.6.2	A equação diferencial ao longo de uma superfície característica	73
6.6.3	Propagação de descontinuidades ao longo de raios	75
6.7	Características de sistemas de equações diferenciais parciais de primeira ordem em $(M, g, D)$	76
6.7.1	Sistemas de equações diferenciais parciais de primeira ordem hiperbólicos	78

6.7.2	As equações de Maxwell e de Dirac são sistemas hiperbólicos . . . . .	79
6.7.3	Características para o sistema de equações de Maxwell quando $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dependem somente de $t$ e $z$ . . . . .	80
6.7.4	Característica para a equação de Dirac . . . . .	81
6.7.5	Características para as equações de Klein-Gordon e Klein-Gordon modificada . . . . .	82
6.8	Relação entre as características . . . . .	82
6.9	Determinação das características com o formalismo do fibrado de Clifford . . . . .	83
6.10	Formulação do problema de Cauchy generalizado para a equação de onda homogênea . . . . .	85
6.11	Conclusões . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Ondas em Meios Dispersivos</b>	<b>88</b>
7.1	As <i>EM</i> em meios dispersivos com absorção . . . . .	89
7.1.1	Velocidade de fase . . . . .	91
7.1.2	Velocidade de grupo . . . . .	92
7.1.3	Velocidade do sinal e da frente de onda . . . . .	94
7.2	Velocidades de grupo $v_g > 1$ ou $v_g < 0$ . . . . .	98
7.3	Reformatamento de pulso . . . . .	102
7.4	Movimento ondulatório em guias de ondas . . . . .	107
7.4.1	Novas soluções para o movimento de microondas em guias de onda . . . . .	109
<b>8</b>	<b>Mecânica Quântica e Tunelamento</b>	<b>115</b>
8.1	Elétrons não tunelam com $v > c$ . . . . .	115
8.2	Tunelamento de microondas e fótons . . . . .	117
8.3	Qual a velocidade da Energia? . . . . .	129
8.3.1	Velocidade da energia em meio dispersivos . . . . .	129
8.3.2	Velocidade da energia em um guia de ondas . . . . .	132
8.3.3	Velocidade de transporte de energia para uma <i>UPW</i> superluminal . . . . .	134
8.3.4	Sinais ideais <i>versus</i> sinais técnicos . . . . .	136
8.4	O surpreendente experimento de Nimtz . . . . .	138
8.5	Propagação superluminal de microondas no ar . . . . .	140
<b>9</b>	<b>Conseqüências para a teoria da relatividade</b>	<b>146</b>
9.1	Formulação do <i>PR</i> . . . . .	146
9.2	Movimentos superluminais violam $PR_1$ e $PR_2$ . . . . .	153

<b>10 Conclusões</b>	<b>159</b>
<b>A Sobre derivadas interiores e “para fora” de uma hipersuperfície <math>\mathcal{B}</math> em <math>M</math></b>	<b>162</b>
A.1 Derivadas de $u$ em $\mathcal{B}$ . . . . .	163

## Resumo

Nos últimos anos, dois tipos de movimento ondulatório superluminal foram preditos teoricamente e verificados experimentalmente: *(i)* velocidades de grupo superluminais, observadas na propagação de ondas eletromagnéticas em meios dispersivos, no tunelamento de elétrons e de microondas e na propagação superluminal de microondas no ar; *(ii)* movimento superluminal de aproximações de energia finita de soluções superluminais das equações de Maxwell. Neste trabalho tentamos esclarecer o significado de tais fenômenos e suas implicações para a Teoria Especial da Relatividade. Para isso, escrevemos as teorias de Maxwell e de Dirac no formalismo do fibrado de Clifford, expressando no formalismo as principais equações de onda da física. A partir de um conjunto de soluções não dispersivas sub- e superluminais da equação de onda homogênea, encontramos com o auxílio do formalismo de Clifford soluções correspondentes para as equações de Maxwell, de Klein-Gordon e de Dirac. Apresentamos em seguida a teoria das características, que nos permite entender os resultados de Sommerfeld e Brillouin sobre a propagação de sinais em meios dispersivos. Mostramos assim, no capítulo 7, que as velocidades superluminais observadas recentemente estão associadas ao fenômeno de reformatamento de pulso, não implicando por isso em violação do Princípio de Relatividade. A mesma conclusão é obtida ao estudarmos os fenômenos de tunelamento, o que é feito no capítulo 8. No capítulo 9 formulamos o Princípio de Relatividade de maneira rigorosa, mostrando que a existência de configurações do campo eletromagnético com velocidades superluminais implica em sua violação.

## Abstract

In the last years, two types of superluminal wave motion have been predicted theoretically and verified experimentally: (i) superluminal group velocities, observed in the propagation of electromagnetic waves in dispersive media, in the tunneling of electrons and microwaves and in the propagation of microwaves in the air; (ii) superluminal motion of finite energy approximations to superluminal solutions of Maxwell equations. In this work we try to clear up the meaning of such phenomena and their implications for Special Relativity. We write down the theories of Maxwell and Dirac in the Clifford bundle formalism, expressing with it the main wave equations of physics. From a set of solutions of the homogeneous wave equation we construct, with this formalism, corresponding solutions for the Maxwell, Klein-Gordon and Dirac equations. We then present the theory of characteristics, in order to understand the classical results of Sommerfeld and Brillouin about the propagation of waves in dispersive media. We thus can show that the recently observed superluminal velocities are a consequence of the phenomenon of pulse reshaping, and thus do not violate the Principle of Relativity. We formulate this principle rigorously in chapter 9, and we show that the existence of superluminal electromagnetic configurations imply in its violation.

## Abreviações

<i>EOH</i>	Equação de Onda Homogênea
<i>UPW</i>	Onda plana não distorcida (de <i>Undistorted Progressive Wave</i> )
<i>EKG</i>	Equação de Klein-Gordon
<i>EM</i>	Equações de Maxwell
<i>PEP</i>	Partícula Puramente Eletromagnética (de <i>Purely Electromagnetic Particle</i> )
<i>SEXW</i>	Onda X Eletromagnética Superluminal (de <i>Superluminal Electromagnetic X Wave</i> )
<i>FAA</i>	Aproximação de Abertura Finita (de <i>Finite Aperture Approximation</i> )
<i>FAASEXW</i>	Aproximação de Abertura Finita de uma Onda X Eletromagnética Superluminal
<i>EDH</i>	Equação de Dirac-Hestenes
<i>ED</i>	Equação de Dirac
<i>EW</i>	Equação de Weyl
<i>SB</i>	Sommerfeld e Brillouin
<i>SOP</i>	Solução de Onda Plana
<i>PR<sub>1</sub></i>	Princípio de Relatividade na forma ativa
<i>PR<sub>2</sub></i>	Princípio de Relatividade na forma passiva

# Capítulo 1

## Introdução

Nos últimos anos, dois tipos de movimento ondulatório *superluminal* foram preditos teoricamente e verificados experimentalmente. São eles:

A. Velocidades de grupo superluminais, que surgem nas seguintes situações:

- (i) Configurações do campo eletromagnético propagando-se em meios dispersivos com absorção ou ganho (Chiao 1993).
- (ii) Tunelamento de microondas (Enders & Nimtz 1993*a*, Enders & Nimtz 1992, Enders & Nimtz 1993*b*, Heitmann & Nimtz 1994).
- (iii) Tunelamento de elétrons (Leavens 1998).
- (iv) Propagação superluminal de microondas no ar (Giakos & Ishii 1991, Ishii & Giakos 1991, Ranfagni, Fabeni, Pazzi & Mugnai 1993).

B. Velocidades superluminais de picos de *QUPWs* (Rodrigues & Lu 1997, Saari & Reivelt 1997).<sup>1</sup>

O objetivo principal deste trabalho é esclarecer o significado da superluminalidade envolvida em tais fenômenos, e investigar suas implicações (se existirem) para os fundamentos da Relatividade. A estratégia de nossa exposição é descrita no que segue, e achamos uma boa idéia começar esta

---

<sup>1</sup>Entendemos por *UPW* uma onda que é uma solução exata de uma equação de onda relativística (ver capítulos 3, 4, 5) e que é livre de distorsão, i.e., que é translacionalmente invariante (não sofre espalhamento ou alargamento) ou que readquire sua forma original após um certo período de tempo. Chamamos *QUPW* (*quasi-UPW*) uma aproximação de abertura finita (*FAA*) de uma solução *UPW* das equações de Maxwell. As *QUPWs* possuem energia finita e mudam de forma durante o movimento.

introdução recordando os principais resultados da teoria de Sommerfeld e Brillouin (*SB*) (Brillouin 1960), que há muito tempo investigaram a propagação da luz em meios dispersivos com absorção. Esses autores estudaram a propagação em um meio dispersivo, na direção  $z$ , de uma particular configuração transversal do campo eletromagnético, a qual Brillouin chamou de *senal* (ver cap. 7). O sinal de *SB* era tal que

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = E_0 f(t, z) \hat{x} \quad (1.1)$$

com  $E_0$  uma constante real e

$$f(t, 0) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \text{sen } \bar{\omega} t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (1.2)$$

Um sinal deste tipo, com suporte compacto no domínio temporal, é gerado pelo ligamento e desligamento abruptos de uma fonte especial (ver, e.g., (Wladimirov 1971)) e possui uma *frente* (Courant & Hilbert 1966, Taylor 1981), i.e., a descontinuidade definida pela equação 1.2. A primeira observação importante a ser feita é que a teoria de Fourier mostra que sinais com suporte compacto no domínio temporal possuem espectros de frequências infinitos.<sup>2</sup> De fato, para (1.2) temos

$$f(t, 0) = \mathcal{F}^{-1}[f(\omega, 0)] = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega - \bar{\omega}} [e^{i\omega(t-T)} - e^{-i\omega t}] \right\} \quad (1.3)$$

A figura 1.1 mostra (linha pontilhada) o pulso causal definido pela eq.(1.2). Observamos também que os sinais com uma transformada de Fourier definida sobre um espectro de frequências limitado são em geral *acausais*, no sentido de que um pulso com espectro de frequências desse tipo apresenta sinais componentes em tempos negativos. A linha sólida na figura 1.1 mostra um sinal acausal, obtido da eq.(1.3) por integração sobre uma faixa de frequências limitada. Este resultado é bastante geral. De fato, segue-se da teoria de Fourier que qualquer pulso com um espectro de frequências de banda limitada é ilimitado no domínio temporal, i.e., é acausal. Sobre a teoria de Fourier veja-se, por exemplo, Sneddon (1995).

---

<sup>2</sup>A recíproca não é verdadeira, i.e., um sinal com espectro de frequências infinito não é necessariamente finito no domínio temporal. Um exemplo bem conhecido é o de um pacote de ondas gaussiano.

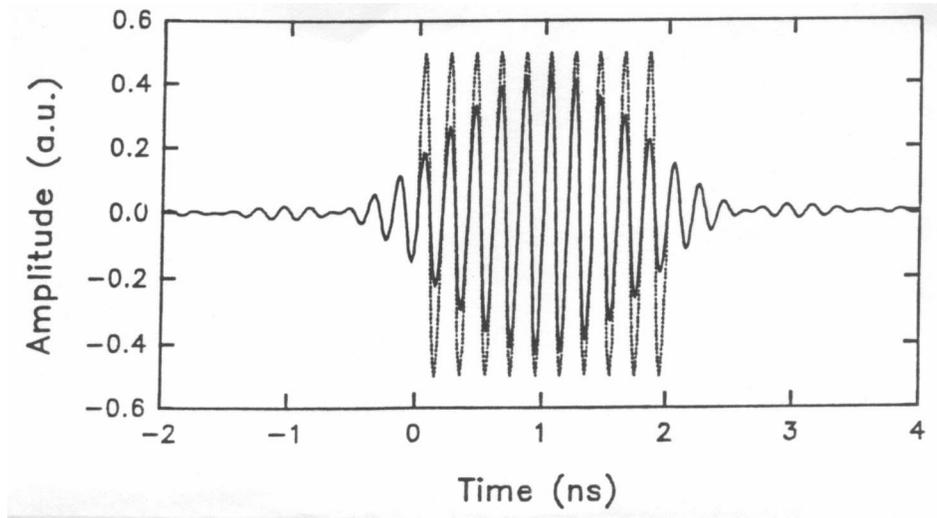


Figura 1.1: A linha pontilhada mostra um sinal de banda de frequência ilimitada. A linha sólida mostra um sinal de banda de frequência limitada ( $5 \text{ GHz} \pm 0.5 \text{ GHz}$ ). Ambos os sinais são ligados em  $t = 0$ , e como consequência de uma transformada de Fourier, o sinal de frequência limitada já apresenta sinais componentes em tempos negativos. Fonte: ???

Em sua análise da propagação do sinal definido por (1.1) e (1.2) através de um meio com dispersão anômala, *SB* introduziram cinco tipos diferentes de velocidade:<sup>3</sup>

- (i) A velocidade de *fase*, com a qual se movem os pontos de amplitude nula da onda carregadora.
- (ii) A velocidade de *grupo*, com a qual os picos dos pacotes de onda se movem.
- (iii) A velocidade da *frente*, com a qual se move a primeira aparição de uma descontinuidade.
- (iv) A velocidade de transporte de *energia*, com a qual a energia seria transportada pela onda.
- (v) A velocidade do *sinal*, com a qual se movem os pontos com metade da amplitude máxima da onda.

<sup>3</sup>Para uma definição mais precisa dos cinco tipos de velocidade e do conceito de dispersão veja-se as seções 7.1 e 8.3.

*SB* descobriram que em uma região de dispersão anômala próxima de uma linha de absorção, todas as cinco velocidades acima são diferentes. Em particular, encontraram que as velocidades de fase e de grupo podem ser superluminais (sem qualquer limite superior) ou até mesmo negativas. Concluíram, por isso, que a velocidade de grupo, quando for superluminal, não tem nenhum significado físico, conclusão esta repetida em quase todo livro-texto de física como, por exemplo, Jackson (1983, p. 233) e Stratton (1941, p. 333). Entretanto, veremos que velocidades de grupo superluminais (e mesmo negativas) possuem um significado preciso, estando associadas com o fenômeno de reformatamento de pulso, que é discutido nos capítulos 7 e 8

Além disso, *SB* encontraram também que a velocidade da frente é sempre *igual* à velocidade da luz no vácuo, e que em todas as situações estudadas por eles as velocidades do sinal e de transporte de energia eram *subluminais*.

A questão natural que os experimentalistas se colocam, após a observação das velocidades de grupo superluminais previstas nos estudos de *SB*, é: existem situações onde as velocidades da energia e do sinal possam tornar-se superluminais?

Esta questão é realmente importante, pois se fossem possíveis velocidades de transporte de energia e de sinal genuinamente superluminais, o Princípio de Relatividade (*PR*) estaria em grande perigo.<sup>4</sup>

O fato é que alguns autores afirmam que seus experimentos mostram velocidades superluminais de sinais e de transporte de energia. Entre eles podemos citar experimentos de tunelamento de microondas (Nimtz 1997), um experimento mostrando o tunelamento superluminal da função de onda de um fóton isolado (Steinberg, Kwiat & Chiao 1993) e experimentos em meios dispersivos com ganho. Até mesmo experimentos mostrando velocidades de grupo *negativas* foram realizados (Bolda, Garrison & Chiao 1994). Seriam tais afirmações corroboradas pela análise teórica desses experimentos?

Vamos mostrar na seção 8.3 que a velocidade de transporte de energia superluminal relatada por Chiao e colaboradores (Chiao 1993) resulta simplesmente de uma definição *incorreta* deste conceito. Após uma análise cuidadosa da dinâmica da propagação da energia (com base em exemplos específicos) propomos uma definição para a velocidade de transporte da energia que é sempre limitada superiormente pela velocidade da luz no vácuo.

---

<sup>4</sup>Desejamos enfatizar que, ao contrário de alguns autores que mantêm que a existência de sinais superluminais não implica em violação do *PR* (e.g., Recami (1986)), vamos demonstrar que a existência de sinais com velocidades genuinamente superluminais implica na quebra da invariância de Lorentz e na violação do *PR*. O capítulo 9 é inteiramente dedicado a esse assunto.

Alguns autores, como Nimtz (1997), afirmam que sinais reais apresentam bandas limitadas no domínio de frequências e, portanto, não têm fronteiras. Então, segundo eles, não tem sentido definir para tais sinais uma velocidade da frente, e portanto, se estes podem mover-se, em certas situações, com velocidades de grupo superluminais, essa velocidade deve ser tomada como a verdadeira velocidade do sinal. Entretanto, a questão não é tão simples, pois é possível mostrar teóricamente (e experimentalmente) que detectores *reais*, que possuem necessariamente limiares de detecção finitos, podem em certas condições registrar (e de fato registram) velocidades de sinal superluminais, mesmo para sinais com suporte compacto no domínio temporal (ver seções 7.4 e 8.4).

Nimtz acredita também que sinais com espectros de frequência limitados (i.e., sem limites no domínio temporal) implicam na quebra da invariância de Lorentz (Nimtz 1999). Não concordamos tampouco com esta afirmação, pois o argumento de Nimtz baseia-se em resultados da teoria de transformadas de Fourier, aplicados a situações nas quais nos parece que a matemática não modela adequadamente a realidade. Para mais detalhes sobre este assunto veja-se a seção 7.4 e o capítulo 8.

Outras situações interessantes nas quais aparecem velocidades de grupo superluminais são:

- (i) O tunelamento de elétrons e de microondas (seções 8.1, 8.2), onde a inteligibilidade dos fenômenos esbarra em problemas profundos relacionados à interpretação do formalismo da Teoria Quântica.
- (ii) Experimentos descrevendo a propagação superluminal de microondas no ar. Estes podem ser entendidos com a teoria de ondas complexas desenvolvida na seção 8.5.

Há muitos trabalhos sobre o problema do tunelamento na literatura, mas o sentimento de alguém que estude, por exemplo, Hauge & Støvneng (1989), Landauer & Martin (1994) e Leavens (1998), é que as questões sobre o tempo de tunelamento estão longe de ter sido respondidas de maneira satisfatória. Considerando-se que ainda existem sérias dúvidas (Huelga, Ferrero & Santos 1995) sobre as provas de violação das desigualdades de Bell nos experimentos de Aspect (Aspect, Dalibard & Roger 1982) (e também em experimentos similares (Rarity & Tapster 1990)), acreditamos que uma análise do problema baseada na interpretação de de Broglie-Bohm da teoria quântica constitua um empreendimento válido, o que fazemos na seção 8.1. O resultado é que este tratamento tem sucesso em fornecer uma interpretação para esses fenômenos. Em particular, é possível mostrar que

ainda que o pacote de onda associado a um elétron tunele com velocidade de grupo superluminal, qualquer elétron descrito pelo pacote percorre sempre uma trajetória tipo tempo, i.e., sua velocidade (na interpretação de de Broglie-Bohm) é sempre *subluminal*. O estudo do tunelamento de microondas (seções 7.4 e 8.2) revela uma analogia completa com o caso do tunelamento de elétrons.

Outros aspectos das soluções clássicas usados na análise do tunelamento de microondas também são discutidos, juntamente com a apresentação de novas soluções não padrões (cf. seção 7.4.1), cuja importância é realçada pelo formalismo matemático empregado neste trabalho, o formalismo do fibrado de Clifford. Cabe aqui uma digressão.

Alguns anos atrás, W. A. Rodrigues Jr. e colaboradores começaram a investigar se existiriam similaridades, do ponto de vista matemático, entre os campos de Maxwell, de Dirac e gravitacional e entre as equações satisfeitas por estes campos. No formalismo matemático usual, empregado pela maioria dos físicos, esses três campos são representados por objetos matemáticos de naturezas bastante diferentes. Em consequência, é quase impossível, em tais formulações, encontrar algo além de similaridades triviais entre as teorias. Entretanto, é possível representar todos esses campos, e também os campos de Klein-Gordon e de Weyl, por objetos matemáticos de mesma natureza matemática, a saber, como seções do fibrado de Clifford sobre o espaço-tempo de Minkowski  $\mathcal{C}(M)$ .<sup>5</sup> A maneira como isto pode ser feito é apresentada no capítulo 2, e com mais detalhes nas referências Hestenes & Sobczyk (1984), Lounesto (1993), Rodrigues & Souza (1993), Rodrigues, Souza & Vaz (1995) e Rodrigues, Souza, Vaz & Lounesto (1996).

No capítulo 4 apresentamos soluções das equações de Maxwell no vácuo com invariantes de campo não nulos, que são geradas a partir de soluções *UPW* subluminais e superluminais da equação de onda homogênea (*EOH*) com o uso do teorema de Hertz, mostrado na seção 2.2.8. Os métodos para a construção de soluções *UPW* com  $v \neq 1$  da equação de onda homogênea são apresentados no capítulo 3, onde exibimos também soluções *UPW* da equação de Klein-Gordon (*EKG*) que se deslocam com  $v < 1$  ou  $v > 1$ . Essas soluções são necessárias para a construção, no capítulo 5, de soluções *UPW* com  $v \neq 1$  da equação de Dirac. As soluções *UPW* subluminais das equações de Maxwell podem eventualmente descrever *partículas puramente eletromagnéticas (PEPs)* (seção 4.1).

---

<sup>5</sup>O campo gravitacional é representado nesse formalismo como um campo de (1,1)-extensores. Para a definição de extensores veja-se a seção 2.2.3; mais detalhes podem ser encontrados em Moya (1999).

No capítulo 4 mostramos também que é teoricamente possível produzir aproximações de abertura finita (*FAA*) de ondas superluminais, e apresentamos em 4.3 a evidência experimental existente (Saari & Reivelt 1997) sobre a produção de aproximações de abertura finita da onda  $X$  superluminal eletromagnética (*SEXW*). Mencionamos ainda que desde 1992 têm sido produzidas ondas  $X$  acústicas, tendo sido realmente comprovado que os *picos* dessas ondas viajam com velocidade maior que a velocidade do som  $c_s$  presente na equação de onda homogênea (Lu & Greenleaf 1992*a*, Lu & Greenleaf 1992*b*, Rodrigues & Lu 1997).

Considerando-se que foi possível produzir e lançar no espaço livre ondas eletromagnéticas superluminais (na região óptica) (Saari & Reivelt 1997), parece válido investigar se isso implica em alguma violação do Princípio de Relatividade. A resposta a esta questão depende, como mostrado em 4.3.3, das hipóteses sobre a produção de tais ondas. Temos duas possibilidades:

- (i) Não existe violação do princípio de relatividade, porque as *FAA* de soluções superluminais das equações de Maxwell são de fato *padrões de interferência* gerados por ondas componentes limitadas no domínio temporal, e que portanto apresentam uma frente (ou fronteira) que se move com a velocidade da luz no vácuo.
- (ii) Existe uma violação do princípio de relatividade, porque as *FAA* das soluções superluminais das equações de Maxwell são padrões de interferência gerados por ondas componentes com um *espectro de frequências limitado* (Nimtz 1997). Isto implica que tais ondas não têm fronteiras no domínio temporal, i.e., uma onda desse tipo não possui uma frente, e não se pode provar que uma parte dela se propaga com a velocidade da luz. Na medida em que se aceite tal premissa, tais padrões de interferência são a única coisa realmente mensurável na natureza, e portanto sua velocidade é o único dado real sobre as ondas. Dito de outra forma: a grandeza que chamamos “velocidade da luz” é, ela própria, resultado de medidas realizadas sobre configurações do campo eletromagnético desprovidas de frente bem definida.

Saari & Reivelt (1997) acreditam que a superluminalidade observada em seus experimentos corresponde a um processo livre de inércia (Barashenkov & Rodrigues 1998) e que portanto não implica em violação do princípio de relatividade. Concordamos com sua escolha, mas não cremos que a propagação de uma *FAA* de uma *SEXW* seja um processo livre de inércia, como é discutido em 4.3. Acreditamos que a resposta correta a nossa questão é (i), e as razões para isso são apresentadas nas seções 4.3 e 8.3.

Finalmente, no capítulo 10 apresentamos nossas conclusões.

## Capítulo 2

# Equações de onda relativísticas

Vamos iniciar nosso estudo relembrando as definições e resultados principais a respeito do formalismo matemático dos fibrados de Clifford e Spin-Clifford sobre o espaço-tempo de Minkowski. Não pretendemos fazer aqui uma apresentação rigorosa dessas teorias, mas somente reunir os elementos necessários para tornar compreensíveis os resultados expostos ao longo deste trabalho; o leitor interessado pode consultar as referências Hestenes & Sobczyk (1984), Rodrigues & Souza (1993), Rodrigues, Souza & Vaz (1995) e Rodrigues et al. (1996).

Recordando a maneira de escrever a equação de onda homogênea (*EOH*), as equações de Maxwell (*EM*) e as equações de Dirac (*ED*), de Weyl (*EW*) e de Klein-Gordon (*EKG*) nos fibrados de Clifford e Spin-Clifford sobre o espaço-tempo de Minkowski, perceberemos imediatamente que nesse formalismo as equações de Maxwell e Dirac são muito parecidas. Em particular, quando a equação de Dirac é escrita no fibrado Spin-Clifford, sugere-se naturalmente uma particular interpretação do formalismo da mecânica quântica. Essa interpretação é muito similar à interpretação de de Broglie-Bohm (Bohm & Halley 1993, Holland 1993, Grib & Rodrigues 1999), e conforme mostrado na seção 8.1, proporciona uma explicação causal para o tunelamento superluminal de elétrons. Segundo ela, ainda que os pacotes de onda que descrevem os elétrons apresentem velocidades de grupo superluminais, um elétron nunca atravessa a barreira com velocidade superluminal, pois seu vetor velocidade é sempre tipo tempo. Veremos também (seção 8.2) que o mesmo formalismo fornece também uma descrição completamente causal para o tunelamento superluminal de microondas.

## 2.1 Os fibrados de Clifford e Spin-Clifford

Seja  $\mathcal{M} = (M, g, D)$  o espaço-tempo de Minkowski. O par  $(M, g)$  é uma variedade lorentziana quadridimensional orientada espacialmente e temporalmente.  $M \simeq \mathbb{R}^4$  e  $g \in \text{sec}(T^*M \otimes T^*M)$  é uma métrica lorentziana de assinatura  $(1,3)$ .  $T^*M [TM]$  é o fibrado cotangente [tangente] de  $M$ .  $T^*M = \cup_{x \in M} T_x^*M$ ,  $TM = \cup_{x \in M} T_xM$ , e  $T_xM \simeq T_x^*M \simeq \mathbb{R}^{1,3}$ , onde  $\mathbb{R}^{1,3}$  é o espaço vetorial de Minkowski (Sachs & Wu 1977, Rodrigues & Rosa 1989).  $D$  é a conexão de Levi-Civita de  $g$ , i.e.,  $Dg = 0$ ,  $\mathbf{T}(D) = 0$ ; além disso,  $\mathbf{R}(D) = 0$ . Nestas expressões,  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{R}$  são respectivamente os tensores de torsão e de curvatura.

O fibrado de Clifford das formas diferenciais  $\mathcal{C}\ell(M)$  é o fibrado de álgebras  $\mathcal{C}\ell(M) = \cup_{x \in M} \mathcal{C}\ell(T_x^*M)$ , onde  $\forall x \in M$ ,  $\mathcal{C}\ell(T_x^*M) = \mathcal{C}\ell_{1,3}$ , a chamada *álgebra do espaço-tempo* (Hestenes 1966).<sup>1</sup> Localmente, como um espaço linear sobre o corpo dos reais  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}\ell(T_x^*M)$  é isomórfica à álgebra de Cartan  $\bigwedge(T_x^*M) = \sum_{k=0}^4 \bigwedge^k(T_x^*M)$  do espaço cotangente e  $\bigwedge^k(T_x^*M)$  é o espaço  $\binom{4}{k}$ -dimensional das  $k$ -formas. Escrevemos  $\bigwedge^k(M) = \cup_{x \in M} \bigwedge^k(T_x^*M)$  e definimos o fibrado de Cartan como  $\bigwedge(M) = \cup_{x \in M} \bigwedge(T_x^*M)$ , que pode então ser pensado como “mergulhado” em  $\mathcal{C}\ell(M)$ . Dessa forma, seções de  $\mathcal{C}\ell(M)$  podem ser representadas como somas de formas diferenciais não homogêneas.

Seja  $\{e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\} \in \text{sec}TM$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , uma base ortonormal de  $TM$ ,  $g(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , e seja  $\{\gamma^\nu = dx^\nu\} \in \text{sec}\bigwedge^1(M) \subset \text{sec}\mathcal{C}\ell(M)$  a base dual. Seja também  $g^{-1} : \text{sec}(T^*M \times T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g^{-1}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Então, o produto de Clifford associativo fundamental, que denotaremos simplesmente por justaposição de símbolos, é gerado por

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

e se  $\mathcal{C} \in \text{sec}\mathcal{C}\ell(M)$ , temos

$$\mathcal{C} = s + v_\mu \gamma^\mu + \frac{1}{2!} b_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{3!} a_{\mu\nu\rho} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho + p \gamma^5, \quad (2.2)$$

onde  $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$  é o elemento de volume e  $s$ ,  $v_\mu$ ,  $b_{\mu\nu}$ ,  $a_{\mu\nu\rho}$  e  $p$  são funções reais.

Para  $r = s$  definimos o produto escalar, denotado por  $\cdot$ , entre  $A_r = a_1 \wedge \dots \wedge a_r$  e  $B_r = b_1 \wedge \dots \wedge b_r$ ,  $A_r, B_r \in \text{sec}\bigwedge^r(M) \subset \mathcal{C}\ell(M)$ , como

<sup>1</sup>As álgebras de Clifford reais são denotadas por  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$  a fim de enfatizar sua associação com um espaço vetorial  $\mathbb{R}^{p,q}$ , i.e., um espaço vetorial real de dimensão  $(p+q)$  e assinatura  $(p, q)$ .

$$\begin{aligned} \cdot : (A_r, B_s) &\mapsto A_r \cdot B_s = (a_1 \wedge \dots \wedge a_r) \cdot (b_1 \wedge \dots \wedge b_r) \\ &= (a_1 \cdot b_1) \dots (a_r \cdot b_r) \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde, para quaisquer  $a, b \in \sec \bigwedge^1(M) \subset \sec \mathcal{C}(M)$  temos

$$a \cdot b = g^{-1}(a, b). \quad (2.4)$$

Além disso, valem as seguintes convenções:

(i) Se  $r = s = 0$ , concordamos que o produto escalar de duas zero-formas é simplesmente o produto ordinário do corpo dos reais.

(ii) O produto escalar é estendido por linearidade para todas as seções de  $\sec \mathcal{C}(M)$ , i.e., para todo  $A, B \in \sec \mathcal{C}(M)$ , temos

$$A \cdot B = \sum_k \langle A \rangle_k \langle B \rangle_k \quad (2.5)$$

onde  $\langle \rangle_k$  é a componente do campo de Clifford em  $\bigwedge^k(M)$ .

Para  $r \leq s$ ,  $A_r = a_1 \wedge \dots \wedge a_r \in \sec \bigwedge^r(M) \subset \sec \mathcal{C}(M)$ ,  $B_s = b_1 \wedge \dots \wedge b_s \in \sec \bigwedge^s(M) \subset \mathcal{C}(M)$ , definimos a *contração à esquerda* como

$$\lrcorner : (A_r, B_s) \mapsto A_r \lrcorner B_s = (a_1 \wedge \dots \wedge a_r) \cdot (\widetilde{b_1 \wedge \dots \wedge b_r}) b_{r+1} \wedge \dots \wedge b_s. \quad (2.6)$$

O operador de reversão  $\widetilde{\phantom{x}}$  é a aplicação definida por

$$\widetilde{\phantom{x}} : \sec \bigwedge^k(M) \ni a_1 \wedge a_2 \dots \wedge a_p \mapsto a_p \wedge \dots \wedge a_2 \wedge a_1 \in \sec \bigwedge^k(M), \quad (2.7)$$

para  $a_i \in \sec \bigwedge^1(M)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , e estendida por linearidade a todas as seções de  $\mathcal{C}(M)$ .

Convencionamos que para  $\alpha, \beta \in \sec \bigwedge^0(M) \subset \sec \mathcal{C}(M)$  a contração é igual ao produto ordinário (ponto a ponto) do corpo real, e que se  $\alpha \in \sec \bigwedge^0(M) \subset \sec \mathcal{C}(M)$  e  $A_r \in \sec \bigwedge^r(M) \subset \sec \mathcal{C}(M)$ ,  $B_s \in \sec \bigwedge^s(M)$ ,  $(\alpha A_r) \lrcorner B_s = A_r \lrcorner (\alpha B_s) = \alpha (A_r \lrcorner B_s)$ . A contração à esquerda é estendida por linearidade a todos os pares de elementos de seções de  $\mathcal{C}(M)$ , i.e., para  $A, B \in \sec \mathcal{C}(M)$ ,

$$A \lrcorner B = \sum_{r,s} \langle A \rangle_r \langle B \rangle_s, \quad r \leq s. \quad (2.8)$$

É também necessário introduzir em  $\mathcal{C}(M)$  o operador de *contração à direita*, denotado por  $\llcorner$ . A definição é obtida a partir daquela dada para a

contração à esquerda, impondo-se que  $r \geq s$  e levando-se em consideração que, agora, se  $A_r \in \sec \bigwedge^r(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$  e  $B_s \in \sec \bigwedge^s(M) \subset \mathcal{C}\ell(M)$ , então  $A_r \lrcorner (\alpha B_s) = (\alpha A_r) \lrcorner B_s = \alpha (A_r \lrcorner B_s)$ ,  $\forall \alpha \in \sec \bigwedge^0(M) \simeq \mathbb{R}$ .

Definimos também,  $\forall r, s = 0, \dots, 3$  o *produto exterior* por

$$\begin{aligned} A_r \wedge B_s &= \langle A_r B_s \rangle_{r+s}, \\ A_r \wedge B_s &= (-1)^{rs} B_s \wedge A_r \end{aligned} \quad (2.9)$$

e estendemos este produto, por linearidade, a toda  $\mathcal{C}\ell(M)$ . As principais fórmulas usadas no cálculo de Clifford podem ser obtidas a partir das seguintes expressões, nas quais  $a \in \sec \bigwedge^1(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$ :

$$\begin{aligned} aB_s &= a \lrcorner B_s + a \wedge B_s, \\ B_s a &= B_s \lrcorner a + B_s \wedge a = B_s \lrcorner a + (-1)^s a \wedge B_s \\ a \lrcorner B_s &= \frac{1}{2}(aB_s - (-1)^s B_s a) \\ A_r \lrcorner B_s &= (-1)^{r(s-1)} B_s \lrcorner A_r \\ a \wedge B_s &= \frac{1}{2}(aB_s + (-1)^s B_s a), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} A_r B_s &= \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} + \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2} + \dots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \\ &= \sum_{k=0}^m \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2k} \quad m = \max[r, s]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

### 2.1.1 Os operadores diferencial, de Dirac, codiferencial de Hodge e estrela de Hodge

Os operadores *estrela de Hodge*, *diferencial* e *codiferencial* têm papel fundamental na teoria de formas diferenciais, e supomos aqui que suas definições sejam conhecidas. No formalismo de Clifford temos as seguintes novidades:

(i) Seja  $\star$  o operador estrela de Hodge,  $\star : \sec \bigwedge^k(M) \rightarrow \sec \bigwedge^{4-k}(M)$ . Então, pode-se mostrar que se  $A_p \in \sec \bigwedge^p(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$ , teremos  $\star A = \tilde{A} \gamma^5$ .

Sejam  $d$  e  $\delta$  os operadores *diferencial de Hodge* e *codiferencial de Hodge*, respectivamente, agindo sobre seções de  $\bigwedge(M)$ . Se  $\omega_p \in \sec \bigwedge^p(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$ , então, usando nossas convenções, temos  $\delta \omega_p = (-1)^p \star^{-1} d \star \omega_p$ , com  $\star^{-1} \star = \text{identidade}$ .

(ii) O operador de Dirac agindo sobre seções de  $\mathcal{C}\ell(M)$  é por definição o operador diferencial de primeira ordem invariante  $\boldsymbol{\partial} = \gamma^\mu D_{e_\mu}$ , e é possível demonstrar o importante resultado

$$\boldsymbol{\partial} = \boldsymbol{\partial} \wedge + \boldsymbol{\partial} \cdot = d - \delta. \quad (2.12)$$

## 2.2 A teoria de Maxwell

Na teoria das formas diferenciais, um campo eletromagnético é representado por  $F \in \sec \bigwedge^2(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$ . Neste formalismo as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$dF = 0, \quad \delta F = -J \quad (2.13)$$

onde  $J \in \sec \bigwedge^1(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$  é a densidade de corrente elétrica. Segue-se imediatamente da eq.(2.12) que as equações de Maxwell (2.13) podem de fato ser escritas como uma única equação:

$$\boldsymbol{\partial} F = J \quad (2.14)$$

que doravante chamaremos simplesmente *EM*.

É uma boa idéia mostrar explicitamente como este formalismo está relacionado com a formulação usual, em termos do cálculo vetorial, das equações de Maxwell. A fim de fazê-lo, precisamos primeiro introduzir os conceitos de *sistema de referência inercial I* (ou referencial inercial, simplesmente) e de *sistema de coordenadas naturalmente adaptado ao referencial I* (nacs/*I*) (Rodrigues & Rosa 1989, Rodrigues, Souza & Bozhkov 1995).

**Definição:** Um sistema de referência inercial  $I \in \sec TM$  é um campo de vetores tipo tempo que aponta para o futuro, tal que  $g(I, I) = 1$  e  $DI = 0$ . Cada linha integral de  $I$  é chamada um *observador*. Uma carta do atlas maximal de  $M$  com funções coordenadas  $\langle x^\mu \rangle$  é dita um *sistema de coordenadas naturalmente adaptado a I* (nacs/*I*) se  $I = \partial/\partial x^0$ .

*Observação:* Tomando  $I = e_0$ , é sempre possível encontrar três outros campos  $e_i = \partial/\partial x^i$  tais que  $g(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$ . As funções coordenadas  $\langle x^\mu \rangle$  são então as coordenadas de Einstein-Lorentz usuais e possuem um significado operacional preciso (Rodrigues & Tiomno 1985): a coordenada  $x^0$  é medida por *relógios ideais* em repouso, sincronizados “à la Einstein”, e os  $x^i$  são medidos por *régua ideais* em repouso no referencial  $I$ .

### 2.2.1 O fibrado de Clifford complexo e o fibrado de Pauli

Para cada  $x \in M$ ,  $\mathcal{C}(T_x^*M) \simeq \mathcal{C}_{1,3} \simeq \mathbb{H}(2)$ , a álgebra do espaço-tempo. Os elementos pares de  $\mathcal{C}_{1,3}$  formam uma subálgebra fechada chamada álgebra de Pauli. Denotamos esta subálgebra por  $\mathcal{C}_{1,3}^+ \simeq \mathcal{C}_3 \simeq \mathbb{C}(2)$ .  $\mathbb{H}(2)$  é a álgebra das matrizes quaterniônicas  $2 \times 2$  e  $\mathbb{C}(2)$  é a álgebra das matrizes complexas  $2 \times 2$ . Observamos para referência futura que a complexificação de  $\mathcal{C}_{1,3}$  é a álgebra de Dirac, i.e.,

$$\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}_{1,3} \simeq \mathcal{C}_{4,1} \simeq \mathbb{C}(4), \quad (2.15)$$

onde  $\mathbb{C}(4)$  é a álgebra das matrizes complexas  $4 \times 4$ .

O isomorfismo  $\mathcal{C}_{1,3}^+ \simeq \mathcal{C}_3$  é facilmente exibido. Para isso basta escrever

$$\sigma_i = \gamma_i \gamma_0, \quad \mathbf{i} = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\gamma^5 \quad (2.16)$$

Observemos que  $\mathbf{i}$  comuta com bivectores e portanto age como uma “unidade imaginária” ( $i = \sqrt{-1}$ ) em  $\mathcal{C}_{1,3}$ . Para a apresentação das soluções extraordinárias das equações de onda relativísticas é matematicamente conveniente introduzir o fibrado de Clifford complexo  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(M)$  definido por

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(M) = \cup_{x \in M} \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}(T_x^*M) \quad (2.17)$$

cujas fibras típicas são  $\mathcal{C}_{4,1} \simeq \mathbb{C}(4)$ , a álgebra de Dirac.

### 2.2.2 A equação de Maxwell e o fibrado de Pauli

As equações (ou a equação) de Maxwell no fibrado de Pauli  $\mathcal{C}^+(M)$  são formuladas da seguinte forma. O campo eletromagnético é representado em  $\mathcal{C}(M)$  como  $F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu \in \sec \wedge^2 M \subset \sec \mathcal{C}(M)$ , com

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E^2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E^3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

onde  $(E^1, E^2, E^3)$  e  $(B^1, B^2, B^3)$  são as componentes cartesianas dos campos elétrico e magnético. Podemos então escrever

$$F = \vec{E} + \mathbf{i}\vec{B}, \quad (2.19)$$

onde  $\vec{E} = E^i \sigma_i$ ,  $\vec{B} = B^i \sigma_i$ .

Para a densidade de corrente elétrica escrevemos

$$J\gamma_0 = \rho + \vec{j} = \rho + J^i \sigma_i. \quad (2.20)$$

Para o operador de Dirac escrevemos

$$\partial\gamma_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} + \sum_{i=1}^3 \sigma_i \partial^i = \frac{\partial}{\partial t} - \nabla. \quad (2.21)$$

Multiplicando a *EM* (2.14) pelo lado direito por  $\gamma_0$  obtemos

$$\begin{aligned} \partial\gamma_0\gamma_0 F\gamma_0 &= J\gamma_0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla\right)(-\vec{E} + \mathbf{i}\vec{B}) &= \rho + \vec{j} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Da eq.(2.22) obtemos

$$-\partial_0\vec{E} + \mathbf{i}\partial_0\vec{B} + \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \wedge \vec{E} - \mathbf{i}\nabla \cdot \vec{B} - \mathbf{i}\nabla \wedge \vec{B} = \rho + \vec{j}. \quad (2.23)$$

Para qualquer campo de vetores  $\vec{A}$  definimos o operador rotacional  $\nabla \times$  por

$$\nabla \times \vec{A} = -\mathbf{i}\nabla \wedge \vec{A}, \quad (2.24)$$

Esta relação torna-se evidente uma vez que percebamos que o produto *vetorial* usual de dois vetores  $\vec{a} = a^i \sigma_i$  e  $\vec{b} = b^i \sigma_i$  pode ser identificado com o dual do bivector  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  através da fórmula  $\vec{a} \times \vec{b} = -\mathbf{i}\vec{a} \wedge \vec{b}$ . Finalmente, obtemos da eq.(2.23), igualando termos de mesma graduação,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho, & \nabla \times \vec{B} - \partial_0\vec{E} &= \vec{j} \\ \nabla \times \vec{E} + \partial_0\vec{B} &= 0, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

que são as equações de Maxwell na notação vetorial tradicional.

### 2.2.3 Extensores

As seções do fibrado de Clifford não são suficientes para descrever todas as propriedades dos campos físicos, tais como os tensores de energia-momento e de momento angular dos campos.<sup>2</sup> Esses objetos, chamados extensores, podem ser introduzidos em nosso formalismo como tensores sobre

---

<sup>2</sup>Em nosso formalismo, também o campo gravitacional é um tensor (1,1) especial (Rodrigues & Souza 1993, Moya, Fernandez & Rodrigues 1999).

$\Lambda(T^*M)$  com valores em  $\Lambda^\diamond(T^*M)$ , onde  $\Lambda^\diamond(T^*M)$  é um subespaço-parte de  $\Lambda(T^*M)$ . Um subespaço-parte de  $\Lambda(T^*M)$  é por definição uma soma de subespaços de multiformas homogêneas de  $\Lambda(T^*M)$ .<sup>3</sup> Introduzimos em primeiro lugar os  $k$ -extensores, que são funções multilineares

$$\mathbf{M} : \sec \bigwedge_1^\diamond(T^*M) \times \dots \times \bigwedge_k^\diamond(T^*M) \rightarrow \bigwedge^\diamond(T^*M) \quad (2.25)$$

onde  $\bigwedge_1^\diamond(T^*M) \dots \bigwedge_k^\diamond(T^*M)$ ,  $\bigwedge^\diamond(T^*M)$  são subespaços-partes de  $\Lambda(T^*M)$ . Denotamos por  $(j, p)$  extensor os  $k$ -extensores

$$M : \sec \bigwedge^j(T^*M) \rightarrow \sec \bigwedge^p(T^*M). \quad (2.26)$$

#### 2.2.4 O tensor de energia-momento de $F$

O tensor de energia-momento de  $F$  é um particular extensor (1,1) *conservado*, o qual pode ser deduzido do formalismo lagrangiano uma vez que algumas condições de invariância sejam impostas sobre este.<sup>4</sup> É um tensor não simétrico, e sua parte não simétrica é a fonte do spin (Moya 1999). Para nossos objetivos neste trabalho, é suficiente trabalhar com o tensor *simétrico* de Belinfante  $\mathbf{T}(\gamma^\mu) \equiv T^\mu$ , o qual é introduzido da seguinte forma:

Dado que  $\boldsymbol{\partial} F = J$ , temos que  $\tilde{F}\tilde{\boldsymbol{\partial}} = \tilde{J} = J$ . Multiplicando a primeira destas igualdades à esquerda por  $\tilde{F}$ , a segunda à direita por  $F$  e somando, temos

$$\frac{1}{2}(\tilde{F}\tilde{\boldsymbol{\partial}}F + \tilde{F}\tilde{\boldsymbol{\partial}}F) = J \lrcorner F \quad (2.27)$$

onde  $\tilde{F}\tilde{\boldsymbol{\partial}} = -\partial_\mu(\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta)\gamma^\mu$ . Agora, o lado esquerdo da eq.(2.27) pode ser escrito (com  $n = n_\mu\gamma^\mu$  um campo constante de 1-formas):

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu F \gamma^\mu F + \tilde{F}\gamma^\mu \partial_\mu F) = \gamma^\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_n \frac{1}{2}(\partial_\mu \tilde{F} n F + \tilde{F} \partial_\mu n F + \tilde{F} n \partial_\mu F) \quad (2.28)$$

com  $\boldsymbol{\partial}_n = \gamma^\mu \partial / \partial n^\mu$ . Visto que  $\gamma^\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_n \partial_\mu n = 0$ , temos

$$\gamma^\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_n \partial_\mu \left( \frac{1}{2} \tilde{F} n F \right) = J \lrcorner F \quad (2.29)$$

<sup>3</sup>Quando não houver risco de confusão, usaremos a palavra tensor para extensores.

<sup>4</sup>Veja-se (Moya et al. 1999) para um tratamento completo dos métodos lagrangianos no formalismo do cálculo multivetorial.

o que significa que existe um operador diferencial e um campo de extensores (1,1) definidos por

$$\mathbf{T}^\dagger(n) = \frac{1}{2} \tilde{F} n F$$

tais que

$$\partial_n \cdot \partial \mathbf{T}^\dagger(n) = J \lrcorner F \quad (2.30)$$

O adjunto de  $\mathbf{T}^\dagger(n)$ , denotado  $\mathbf{T}(n)$ , é chamado tensor de energia-momento de Belinfante e

$$\mathbf{T}^\dagger(n) = \mathbf{T}(n) \quad (2.31)$$

o que significa que  $\mathbf{T}$  é simétrico. Com efeito, escrevendo  $\mathbf{T}(\gamma^\mu) = T^\mu$  temos

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= T^\mu \cdot \gamma^\nu = -\langle (F \cdot \gamma^\mu) F \gamma^\nu \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle \gamma^\mu F^2 \gamma^\nu \rangle_0 \\ &= -(F \cdot \gamma^\mu) \cdot (F \cdot \gamma^\nu) - \frac{1}{2} (F \cdot F) \gamma^\mu \cdot \gamma^\nu \\ &= F^{\mu\alpha} F^{\lambda\nu} \eta_{\alpha\lambda} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

que reconhecemos como as coordenadas do *tensor de energia-momento* de Belinfante do campo eletromagnético.

Escrevendo  $F = \vec{E} + i\vec{B}$  temos

$$T^0 = \left[ \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + (\vec{E} \times \vec{B}) \right] \gamma^0, \quad (2.33)$$

que é um campo de vetores tipo tempo ou tipo luz, dependendo dos valores dos invariantes de campo. A equação de conservação para  $T^\mu$  pode ser escrita como

$$\partial \cdot T^\mu = 0. \quad (2.34)$$

e, em particular, a equação  $\partial \cdot T^0 = 0$  é análoga à equação de conservação para a corrente de Dirac, como veremos adiante.

### 2.2.5 Tensor de momento angular de $F$

O tensor de momento angular de  $F$  em nosso formalismo é um extensor (1,2)  $\mathbf{J}(n)$ . Vamos precisar apenas de  $\mathbf{J}_\mu = \mathbf{J}(\gamma_\mu)$ , introduzido da seguinte maneira. Consideremos a carta lorentziana  $\langle x^\mu \rangle$ , que é um (nacs/ $I$ ), onde

$I = \partial/\partial t$  e  $\gamma^\mu = dx^\mu$ . Consideremos o campo de 1-formas de *vetores posição*  $x = x^\mu \gamma_\mu$ . Então

$$\mathbf{J}_\mu = x \wedge T_\mu = \frac{1}{2}(x_\alpha T_{\mu\nu} - x_\nu T_{\alpha\mu})\gamma^\alpha \wedge \gamma^\nu. \quad (2.35)$$

Dado que  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ , obtemos a conservação do tensor de momento angular

$$\partial^\mu \mathbf{J}_\mu = 0. \quad (2.36)$$

### 2.2.6 Invariantes de $F$

Os invariantes do campo eletromagnético  $F$  são  $F \cdot F$  e  $F \wedge F$  e

$$\begin{aligned} F^2 &= F \cdot F + F \wedge F, \\ F \cdot F &= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad F \wedge F = -\mathbf{i}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Escrevendo como anteriormente  $F = \vec{E} + \mathbf{i}\vec{B}$  temos

$$F^2 = (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + 2\mathbf{i}\vec{E} \cdot \vec{B} = F \cdot F + F \wedge F. \quad (2.38)$$

### 2.2.7 Soluções de onda plana ( $v = c$ ) da $EM$

Apresentações elementares da teoria eletromagnética dão ênfase às soluções de onda plana (*SOP*) das  $EM$ , o que deu origem à crença bastante difundida de que todas as soluções das equações de Maxwell livres são ondas transversais que se movem com velocidade  $c = 1$ . Um dos objetivos deste trabalho é mostrar que tal afirmação é incorreta. De fato, encontraremos nos próximos capítulos soluções exatas das equações de Maxwell livres que não são ondas transversais e que, além disso, se movem com velocidades  $v < 1$  ou  $v > 1$ . Nesta subseção mostramos as soluções de onda plana das  $EM$  no vácuo com os métodos do fibrado de Clifford, pois mesmo para esta solução simples é possível identificar afirmações incorretas na literatura, relacionadas ao uso de funções vetoriais complexas.<sup>5</sup>

As equações de Maxwell no vácuo podem ser escritas como

$$\partial F = 0, \quad (2.39)$$

---

<sup>5</sup>Naturalmente, o uso de funções vetoriais complexas é muito importante na teoria eletromagnética (e será empregado nos próximos capítulos), mas é necessário tomar cuidado para não confundir  $i = \sqrt{-1}$  com  $\mathbf{i} = \gamma^5$ .

onde  $F \in \sec \bigwedge^2(M) \subset \sec \mathcal{C}(M)$ . As conhecidas soluções de onda plana da eq.(2.39) são obtidas da seguinte maneira: Escrevemos, em uma dada carta lorentziana  $\langle x^\mu \rangle$  do atlas maximal de  $M$  uma solução de onda plana movendo-se na direção  $z$ :

$$F = f e^{\gamma_5 k \cdot x}, \quad k = k^\mu \gamma_\mu, \quad k^1 = k^2 = 0, \quad x = x^\mu \gamma_\mu, \quad (2.40)$$

onde  $k, x \in \sec \bigwedge^1(M) \subset \sec \mathcal{C}(M)$  e onde  $f$  é uma 2-forma constante. Das equações (2.39) e (2.40) obtemos

$$kF = 0. \quad (2.41)$$

Multiplicando eq.(2.41) por  $k$  temos

$$k^2 F = 0 \quad (2.42)$$

e como  $k \in \sec \bigwedge^1(M) \subset \sec \mathcal{C}(M)$ , então

$$k^2 = 0 \leftrightarrow k_0 = \pm |\vec{k}| = k^3, \quad (2.43)$$

i.e., o vetor de propagação é tipo luz. Também

$$F^2 = F \cdot F + F \wedge F = 0 \quad (2.44)$$

como pode ser facilmente verificado multiplicando-se ambos os membros da eq.(2.41) por  $F$  e levando em consideração que  $k \neq 0$ . A equação (2.44) nos diz que os invariantes de campo são nulos.

É interessante compreender o papel fundamental do elemento de volume  $\gamma^5$  (operador de dualidade) na teoria eletromagnética. Em particular, como  $e^{\gamma_5 k x} = \cos kx + \gamma_5 \text{sen } kx$ , vemos que

$$F = f \cos kx + \gamma_5 f \text{sen } kx. \quad (2.45)$$

Escrevendo  $F = \vec{E} + \mathbf{i}\vec{B}$ , com  $\mathbf{i} \equiv \gamma_5$  e escolhendo  $f = \vec{e}_1 + \mathbf{i}\vec{e}_2$ , com  $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ ,  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  vetores constantes no sentido da subálgebra de Pauli, a eq.(2.45) se torna

$$(\vec{E} + \mathbf{i}\vec{B}) = \vec{e}_1 \cos kx - \vec{e}_2 \text{sen } kx + \mathbf{i}(\vec{e}_1 \text{sen } kx + \vec{e}_2 \cos kx). \quad (2.46)$$

Esta equação é importante porque mostra que devemos ter cuidado com o termo  $i = \sqrt{-1}$  que aparece nas formulações usuais da teoria de Maxwell com campos eletromagnéticos complexos. A unidade  $i = \sqrt{-1}$  encobre em muitos casos um segredo que só pode ser conhecido através da eq.(2.46). Da

eq.(2.41) podemos também mostrar facilmente que  $\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ , i.e., as soluções de onda plana das *EM* são *ondas transversais*.

Podemos reescrever a eq.(2.41) como

$$k\gamma_0\gamma_0F\gamma_0 = 0 \quad (2.47)$$

e como  $k\gamma_0 = k_0 + \vec{k}$ ,  $\gamma_0F\gamma_0 = -\vec{E} + \mathbf{i}\vec{B}$ , temos

$$\vec{k}f = k_0f. \quad (2.48)$$

Agora, lembremos que em  $\mathcal{C}\ell^+(M)$  (onde a fibra típica é isomórfica à álgebra de Pauli  $\mathcal{C}\ell_{3,0}$ ) podemos introduzir o operador de conjugação espacial (Hestenes 1966), denotado por  $*$ , e tal que escrevendo  $f = \vec{e} + \mathbf{i}\vec{b}$  temos

$$f^* = -\vec{e} + \mathbf{i}\vec{b} \ ; \ k_0^* = k_0 \ ; \ \vec{k}^* = -\vec{k}. \quad (2.49)$$

Podemos agora interpretar as duas soluções de  $k^2 = 0$ , i.e.,  $k_0 = |\vec{k}|$  e  $k_0 = -|\vec{k}|$  como correspondendo às soluções  $k_0f = \vec{k}$  e  $k_0f^* = -\vec{k}$ ;  $f$  e  $f^*$  correspondem na teoria quântica a “fótons” de helicidade positiva e negativa. Assim podemos interpretar  $k_0 = |\vec{k}|$  como uma partícula e  $k_0 = -|\vec{k}|$  como uma antipartícula.

Em resumo, temos os seguintes resultados importantes a respeito das soluções de onda plana das *EM*: (i) o vetor de propagação é tipo luz,  $k^2 = 0$ ; (ii) os invariantes de campo são nulos,  $F^2 = 0$ ; (iii) as soluções de onda plana são ondas transversais, i.e.,  $\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ .

### 2.2.8 O teorema de Hertz

A fim de apresentar nos capítulos 3 e 4 as soluções subluminais e superluminais das equações de Maxwell, precisamos do seguinte resultado (Rodrigues & Vaz 1997):

Seja  $A \in \sec \Lambda^1(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$  o potencial vetor. Fixamos o calibre de Lorentz, i.e.,  $\boldsymbol{\partial} \cdot A = -\delta A = 0$ , de tal forma que  $F = \boldsymbol{\partial} A = (d - \delta)A = dA$ . Vale neste caso o seguinte teorema:

**Teorema.** Seja  $\pi \in \sec \Lambda^2(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$  o chamado *potencial de Hertz*. Se  $\pi$  satisfaz a equação de onda, i.e.,

$$\boldsymbol{\partial}^2 \pi = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \pi = -(d\delta + \delta d)\pi = 0 \quad (2.50)$$

e se  $A = -\delta\pi$ , então  $F = \boldsymbol{\partial} A$  satisfaz as equações de Maxwell  $\boldsymbol{\partial} F = 0$ .

*Demonstração.* Com efeito, como  $A = -\delta\pi$ , então  $\delta A = -\delta^2\pi = 0$  e  $F = \partial A = dA$ . Então

$$\partial F = (d - \delta)(d - \delta)A = -(d\delta + \delta d)A = \delta d(\delta\pi) = -\delta^2 d\pi = 0,$$

visto que  $\delta d\pi = -d\delta\pi$  em conseqüência de  $\partial^2 \pi = 0$  (eq. (2.50)). ■

### 2.3 O operador dalembertiano, a *EOH* e a *EKG*

É fácil verificar que o quadrado do operador de Dirac  $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$  é o operador dalembertiano, i.e.,

$$\partial^2 = (d - \delta)(d - \delta) = -(d\delta + \delta d) = \partial_0^2 - \nabla^2. \quad (2.51)$$

Os campos reais  $\Phi$  e complexos  $\Phi^{KG}$  que satisfazem a equação de onda homogênea (*EOH*) e a equação de Klein-Gordon (*EKG*) podem ser tomados como seções escalares do fibrado de Clifford real  $\mathcal{C}(M)$  e do fibrado de Clifford complexo  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(M)$ , respectivamente. Então, a *EOH* e a *EKG* são escritas como

$$\begin{aligned} \partial^2 \Phi &= 0, \\ \partial^2 \Phi^{KG} + m^2 \Phi^{KG} &= 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

## 2.4 A teoria de Dirac

### 2.4.1 Campos de spinores de Dirac-Hestenes

Além do fibrado vetorial  $\mathcal{C}(M)$ , precisamos também introduzir outro fibrado vetorial  $\mathcal{C}_{\text{Spin}_+(1,3)}(M)$  ( $\text{Spin}_+(1,3) \simeq \text{SL}(2, \mathbb{C})$ ) chamado o fibrado Spin-Clifford (Rodrigues, Souza & Vaz 1995). Podemos mostrar que  $\mathcal{C}_{\text{Spin}_+(1,3)}(M) \simeq \mathcal{C}(M)/\mathbf{R}$ , onde  $\mathbf{R}$  é uma certa relação de equivalência. Isto significa que as seções de  $\mathcal{C}_{\text{Spin}_+(1,3)}(M)$  são classes de equivalência especiais do fibrado de Clifford, i.e., a relação de equivalência  $\mathbf{R}$  é definida por seções equivalentes de formas diferenciais não homogêneas definidas através da eq.(2.53) abaixo.

Como é possível representar os campos de spinores de Dirac neste formalismo? Podemos mostrar que isto pode ser feito empregando-se seções pares de  $\mathcal{C}_{\text{Spin}_+(1,3)}(M)$ , chamadas campos de spinores de Dirac-Hestenes. Se fixarmos duas base ortonormais  $\Sigma = \{\gamma^\mu\}$  como antes e  $\tilde{\Sigma} = \{\hat{\gamma}^\mu = R\gamma^\mu \tilde{R} = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu\}$  com  $\Lambda_\nu^\mu \in \text{SO}_+(1,3)$  e  $R \in \text{Spin}_+(1,3)$  tal que  $\forall x \in M$ ,

$R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1$ , e onde  $\tilde{\phantom{x}}$  é o operador de reversão em  $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ , então os representantes  $\psi_\Sigma$  e  $\psi_{\tilde{\Sigma}}$  de  $\mathcal{C}\ell(M)$  de uma seção par estão relacionados por

$$\psi_{\tilde{\Sigma}} = \psi_\Sigma R, \quad (2.53)$$

com

$$\psi_\Sigma = s + \frac{1}{2!}b_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu + p\gamma^5. \quad (2.54)$$

Note-se que  $\psi_\Sigma$  tem o número correto de graus de liberdade (oito) necessário para representar um campo de spinores de Dirac.

### Spinores de Weyl e operador de paridade

Por definição,  $\psi \in \sec \mathcal{C}\ell^+(M)$  é um spinor de Weyl (Lounesto 1993, Lounesto 1994, Lounesto 1997) se

$$\gamma_5\psi = \pm\psi\gamma_2\gamma_1. \quad (2.55)$$

O “autoestado” positivo [negativo] de  $\gamma_5$  será denotado  $\psi_+$  [ $\psi_-$ ]. Para um  $\psi \in \sec \mathcal{C}\ell^+(M)$  geral podemos escrever

$$\psi = \psi_+ + \psi_-. \quad (2.56)$$

onde

$$\psi_\pm = \frac{1}{2}[\psi \mp \gamma_5\psi\gamma_2\gamma_1] \quad (2.57)$$

O operador de paridade  $P$ , neste formalismo (Lounesto 1993), é representado de tal forma que para  $\psi \in \sec \mathcal{C}\ell^+(M)$ ,

$$P\psi = -\gamma_0\psi\gamma_0. \quad (2.58)$$

Os seguintes spinores de Dirac-Hestenes são autoestados do operador de paridade com autovalores  $\pm 1$ :

$$\begin{aligned} P\psi^\uparrow &= +\psi^\uparrow, & \psi^\uparrow &= \gamma_0\psi_-\gamma_0 - \psi_-; \\ P\psi^\downarrow &= -\psi^\downarrow, & \psi^\downarrow &= \gamma_0\psi_+\gamma_0 + \psi_+. \end{aligned} \quad (2.59)$$

## Tradução para o cálculo matricial

Se desejarmos trabalhar com o formalismo comum de campos spinoriais, podemos traduzir nossos resultados escolhendo, por exemplo, a representação matricial padrão de  $\gamma^\mu$  em  $\mathbb{C}(4)$ . Então, para  $\psi_\Sigma$  dado pela eq.(2.54) temos a seguinte representação matricial padrão (Rodrigues et al. 1996):

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\phi_2^* \\ \phi_2 & \phi_1^* \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

onde

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} s - ib_{12} & b_{13} - ib_{23} \\ -b_{13} - ib_{23} & s + ib_{12} \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} -b_{03} + ip & -b_{01} + ib_{02} \\ -b_{01} - ib_{02} & b_{03} + ip \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

e  $s, b_{12}, \dots$  são funções reais. Multiplicando  $\Psi$  pela direita pela transposta de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

encontramos o campo de spinores de Dirac usual.

### 2.4.2 A equação de Dirac-Hestenes

No formalismo do fibrado de Clifford, a equação de Dirac para um campo de carga elementar  $\psi_\Sigma$  em interação com o campo eletromagnético  $F = dA$  é representada por

$$\partial\psi_\Sigma\gamma^1\gamma^2 + m\psi_\Sigma\gamma^0 + eA\psi_\Sigma = 0. \quad (2.62)$$

Quando  $A = 0$  esta equação será chamada a equação de Dirac-Hestenes (Hestenes 1966).

Se  $m = 0$  e  $A = 0$  temos a equação de Dirac sem massa,

$$\partial\psi_\Sigma = 0, \quad (2.63)$$

que é a equação de Weyl quando  $\psi_\Sigma$  é reduzido a um campo de spinores de Weyl. Lembremos que a especificação de  $\psi_\Sigma$  depende do referencial  $\Sigma$ . Quando não houver risco de confusão, representaremos  $\psi_\Sigma$  simplesmente por  $\psi$ .

Quando  $\psi_\Sigma\tilde{\psi}_\Sigma \neq 0$ , onde  $\tilde{\cdot}$  é o operador de reversão, o spinor  $\psi_\Sigma$  tem a seguinte decomposição canônica:

$$\psi_\Sigma = \sqrt{\rho}e^{\beta\gamma_5/2}R, \quad (2.64)$$

onde  $\rho, \beta \in \text{sec } \bigwedge^0(M) \subset \text{sec } \mathcal{C}\ell(M)$  e  $R \in \text{Spin}_+(1, 3) (\simeq \text{SL}(2, \mathbb{C})) \subset \mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ ,  $\forall x \in M$ .  $\beta$  é chamado de *ângulo de Yvon-Takabayasi*. A ação de  $R$  sobre uma 1-forma  $a = a_\mu \gamma^\mu$  é dada por

$$Ra\tilde{R} = a_\mu \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (2.65)$$

onde  $\Lambda_\nu^\mu \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ , o grupo de Lorentz homogêneo ortócrono.

Neste formalismo a corrente de Dirac conservada é

$$J = \psi \gamma^0 \tilde{\psi} = \rho V, \quad V = R \gamma^0 \tilde{R}, \quad \partial \cdot J = 0 \quad (2.66)$$

### 2.4.3 A interpretação de de Broglie-Bohm da teoria quântica

Na interpretação de de Broglie-Bohm da teoria quântica (Bohm & Halley 1993, Holland 1993, Grib & Rodrigues 1999), o campo de 1-formas de velocidade  $V$ , mostrado na eq. (2.66), é tal que as linhas integrais do campo de vetores velocidade fisicamente equivalentes são as possíveis trajetórias da partícula quântica descrita pela *EDH*. Dado o significado geométrico do campo de spinores de Dirac-Hestenes exibido pela eq.(2.64), fica claro que  $V$  é *sempre* tipo tempo, independentemente de  $\psi$  ser uma solução *UPW* subluminal, luminal ou superluminal da *EDH*, ou se  $\psi$  é um pacote de ondas representando um elétron que tunela com velocidade de grupo maior que 1. Com efeito, a eq.(2.66) mostra que  $V$  é sempre igual ao produto  $R\gamma^0\tilde{R}$ ; visto que  $\gamma^0$  é tipo tempo, o mesmo valerá para  $V$  (cf. eq.(2.65)).

Esta observação, como veremos, será muito importante na interpretação dos experimentos de tunelamento de elétrons, discutidos na seção 8.1.

### 2.4.4 Soluções de onda plana da equação de Dirac-Hestenes

Para resolver a *EDH* livre supomos primeiro a existência de soluções não singulares, i.e., soluções  $\psi$  que admitem a decomposição canônica

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{\beta \gamma^5 / 2} R. \quad (2.67)$$

A densidade de corrente elétrica, o campo de velocidades e as densidades vetorial e bivectorial de spin associados a  $\psi$  são respectivamente

$$J = \rho V, \quad V = R \gamma^0 \tilde{R}, \quad s = \psi \gamma_3 \tilde{\psi}, \quad S = \psi i \sigma_3 \tilde{\psi} \quad (2.68)$$

Para continuar escrevemos  $R$  como

$$R = L\Phi, \quad L^+ = \gamma^0 L \gamma^0 = L, \quad \Phi^+ = \gamma^0 \Phi \gamma^0 = \tilde{\Phi}, \quad (2.69)$$

o que implica, como é facilmente verificado (Zeni & Rodrigues 1992), que  $L$  é um *boost* de Lorentz e  $\Phi$  é uma rotação espacial pura.

Introduzimos agora uma carta de Lorentz  $\langle x^\mu \rangle$  (a qual é um  $(nacs/I)$ ,  $I = \partial/\partial t$ ), a 1-forma de posição  $x = x^\mu \gamma_\mu$  e a 1-forma de momento  $p = p^\mu \gamma_\mu$ . Podemos então verificar, por substituição direta, que os  $\psi$  escritos como

$$\psi^\pm = \psi_0^\pm e^{\pm \gamma_{12} p \cdot x} = \psi_0^\pm e^{\mp \mathbf{i} \sigma_3 p \cdot x} \quad (2.70)$$

são soluções da *EDH* livre.  $\psi_0^\pm$  são spinores de Dirac-Hestenes constantes. Tomamos a solução (+) [respectivamente, (-)] como sendo a solução de energia positiva [negativa]. Vemos imediatamente que

$$p = m \psi_0 \gamma_0 \psi_0 = m J (\psi \tilde{\psi})^{-1} = m J e^{-\mathbf{i} \beta} \quad (2.71)$$

o que implica que os únicos valores possíveis para o ângulo de Tabayasi são  $\beta = 0$  e  $\beta = \pi$ ; com nossa convenção de que a solução (+) tem energia positiva, é necessário para esta solução  $\beta = 0$ . Segue-se também da eq.(2.70) que  $\psi_0$  deve ser igual ao produto de uma constante real (fator de normalização) por um elemento de  $\text{Spin}_+(1, 3)$ . Para determinar completamente  $R$  na eq.(2.69), observamos que o boost  $L$  determina completamente  $p$ . De fato,

$$p \gamma^0 = E + \vec{p} = m L \gamma^0, \quad \tilde{L} \gamma^0 = m L^2, \quad (2.72)$$

e então

$$L = \frac{\vec{p} + E + m}{\sqrt{2m(E + m)}} \quad (2.73)$$

$\Phi$  determina  $S_0 = \Phi \mathbf{i} \sigma_3 \tilde{\Phi}$ , o bivetor de spin de repouso, i.e., ele dá o spin do elétron no referencial de Lorentz em que este se encontra em repouso, e é idêntico à grandeza chamada de polarização na representação matricial padrão da teoria de Dirac. Finalmente, o boost  $L$ , aplicado a  $S_0$  fornece  $S$ .

#### 2.4.5 Tunelamento de ondas planas de Dirac-Hestenes

Em um experimento típico de tunelamento envolvendo microondas ou elétrons (ver capítulo 8), um pacote de ondas (possivelmente com uma fronteira, e que se supõe representar uma dada distribuição de fótons ou elétrons) incide sobre uma barreira de potencial de largura finita. Para determinar

o que acontece com o pacote transmitido, precisamos resolver um problema de contorno bem formulado.<sup>6</sup> Visto que um pacote de ondas é uma superposição bem definida de ondas planas, apresentamos aqui a forma da onda transmitida no caso em que a onda incidente é uma função de onda de spinores de Dirac-Hestenes plana de energia  $E$ .

Supomos que a barreira se encontra em  $-d \leq z \leq 0$ , e que o potencial da barreira é  $e\phi$ . Para spin arbitrário, a função de onda de Dirac-Hestenes na região da barreira é

$$\begin{aligned} \psi = & \left[ \cosh\left(\frac{u'}{2}\right) \Phi + \sinh\left(\frac{u'}{2}\right) \sigma_1 \sigma_2 \Phi \sigma_2 \right] e^{-\kappa z} e^{-\mathbf{i}\sigma_3 E t} \xi \\ & + \left[ \cosh\left(\frac{u'}{2}\right) \Phi - \sinh\left(\frac{u'}{2}\right) \sigma_1 \sigma_2 \Phi \sigma_2 \right] e^{\kappa z} e^{-\mathbf{i}\sigma_3 E t} \bar{\xi} \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{m^2 - (E - e\phi)^2}, \\ \operatorname{tgh}\left(\frac{u'}{2}\right) &= \frac{\kappa}{E - e\phi + m}, \\ \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{2}\right) &= \frac{p}{E + m} \\ \xi &= \frac{\mathcal{T}}{\sinh u'} \left[ \sinh\left(\frac{u'}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right) \Phi - i\sigma_2 \cosh\left(\frac{u'}{2}\right) \sinh\left(\frac{u}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.75)$$

e  $\mathcal{T}$  é o coeficiente de transmissão, que no caso mais geral é uma soma  $(a + \mathbf{i}\sigma_3 b)$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais.  $\bar{\xi}$  é obtido de  $\xi$  trocando  $\mathbf{i}\sigma_2$  por  $-\mathbf{i}\sigma_2$ . Da eq.(2.68) vemos que a corrente na região da barreira é

$$\begin{aligned} J = \psi \gamma^0 \bar{\psi} = & \frac{|\mathcal{T}|^2}{\kappa^2 m} [m^2 e\phi \cosh(2\kappa z) + E'^2 (p^2 - Ee\phi) \\ & + \kappa^2 p \sigma_3 - e\kappa m \phi \sinh(2\kappa z) (\mathbf{i}\sigma_3) \cdot s] \gamma_0, \end{aligned} \quad (2.76)$$

e o campo de velocidades é tal que

$$V \cdot \gamma_3 = \gamma_3 \cdot J / \gamma_0 \cdot J = \frac{p\kappa^2}{m^2 e\phi \cosh(2\kappa z) + E'(p^2 - Ee\phi)}. \quad (2.77)$$

Parece bastante claro da eq.(2.77) que não é possível definir um tempo de tunelamento único, pois segundo a interpretação de de Broglie-Bohm, um dado elétron pode seguir qualquer uma das linhas integrais do campo

---

<sup>6</sup>O caso específico do tunelamento de um pacote de ondas gaussiano é investigado em detalhes na seção 8.2.

de velocidades. Um tempo de tunelamento médio foi sugerido por Leavens (1998) (ver também Landauer & Martin (1994), Hauge & Støvneng (1989)), mas não nos estenderemos sobre este assunto aqui.

Uma grande simplificação é obtida se o spin está alinhado com a direção do movimento do feixe de elétrons. Nesse caso temos um problema unidimensional e torna-se mais fácil superpor soluções em  $t = 0$  para construir, e.g., um pacote de ondas gaussiano, como aquele usado por Lasenby e colaboradores (Lasenby, Gull & Doran 1996) para produzir simulações do problema de tunelamento. Esses resultados são discutidos na seção 8.1.

## 2.5 Teoremas de conservação

### 2.5.1 Corrente conservada do campo de Dirac-Hestenes

Multiplicando a equação de Dirac-Hestenes (eq.(2.62)) à esquerda por  $\tilde{\psi}$  obtemos as identidades de  $\mathcal{C}(M)$

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\psi\mathbf{i}\gamma_3\tilde{\psi}) &= \partial_\mu\psi\mathbf{i}\gamma_3\tilde{\psi} + \psi\mathbf{i}\gamma_3\partial_\mu\tilde{\psi} \\ \langle\partial_\mu\psi\mathbf{i}\gamma_3\tilde{\psi}\rangle_1 &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\psi\mathbf{i}\gamma_3\tilde{\psi} - \psi\mathbf{i}\gamma_3\partial_\mu\tilde{\psi}\right)\end{aligned}\quad (2.78)$$

onde a segunda linha em (2.78) é consequência da identidade

$$\langle\psi_{\text{impar}}\rangle_1 = \frac{1}{2}(\psi_{\text{impar}} + \widetilde{\psi_{\text{impar}}}), \quad (2.79)$$

Então, após alguma álgebra encontramos

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\partial}(\mathbf{i}s) + \gamma^\mu \langle\partial_\mu\psi\mathbf{i}\gamma_3\tilde{\psi}\rangle_1 = eAJ + m\psi\tilde{\psi}, \quad (2.80)$$

$$s = \psi\gamma_3\tilde{\psi}, \quad J = \psi\gamma_0\tilde{\psi}, \quad (2.81)$$

onde  $s$  é o vetor de spin,  $J$  é a densidade de corrente e  $\mathbf{i}$ , o dual de  $s$ , é o trivetor de spin. Da eq.(2.80) obtemos também as identidades

$$\partial_\mu(\psi\gamma_0\tilde{\psi}) = \partial_\mu\psi\gamma_0\tilde{\psi} + \psi\gamma_0\partial_\mu\tilde{\psi}, \quad (2.82)$$

$$\langle\partial_\mu(\psi\gamma_0\tilde{\psi})\rangle_3 = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\psi\gamma_0\tilde{\psi} - \psi\gamma_0\partial_\mu\tilde{\psi}\right) \quad (2.83)$$

de onde se segue que

$$\boldsymbol{\partial}(\psi\gamma_0\tilde{\psi}) + \gamma^\mu \langle\partial_\mu(\psi\gamma_0\tilde{\psi})\rangle_3 = \boldsymbol{\partial}\psi\gamma_0\tilde{\psi} \quad (2.84)$$

Após mais algumas manipulações, chegamos à identidade

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\partial}J + \gamma^\mu \left\langle \partial_\mu(\psi\gamma_0\tilde{\psi}) \right\rangle_3 = -eAis - mcS, \quad (2.85)$$

com

$$S = \psi\mathbf{i}\sigma_3\tilde{\psi}, \quad (2.86)$$

o bivector de spin. A parte escalar da eq.(2.85) fornece a equação de conservação da corrente,

$$\boldsymbol{\partial} \cdot J = 0 \quad (2.87)$$

### 2.5.2 Tensor de energia-momento do campo de Dirac-Hestenes

Iterando a *EDH* e usando a identidade

$$\partial(aX) = (\partial a)X - a(\partial X) + 2a \cdot \partial X$$

onde  $a$  é um campo de 1-formas e  $X$  uma seção arbitrária de  $\mathcal{C}(M)$ , temos

$$\boldsymbol{\partial}^2\psi = (e^2 A^2 - m^2)\psi - e[(\boldsymbol{\partial}A) + 2A \cdot \boldsymbol{\partial}\psi]\mathbf{i}\sigma_3 \quad (2.88)$$

Lembrando que para qualquer seção ímpar de  $\mathcal{C}(M)$  vale

$$\left\langle \boldsymbol{\partial}^2\psi\mathbf{i}\gamma_3\tilde{\psi} \right\rangle_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\partial}^2\psi\mathbf{i}\gamma_3\tilde{\psi} - \psi\mathbf{i}\gamma_3\boldsymbol{\partial}^2\tilde{\psi}), \quad (2.89)$$

obtemos

$$\left\langle \boldsymbol{\partial}^2\psi\mathbf{i}\gamma_3\tilde{\psi} \right\rangle_1 = eF \lrcorner J + e[(\boldsymbol{\partial} \cdot A)J + (A \cdot \boldsymbol{\partial})J], \quad (2.90)$$

onde  $F = \boldsymbol{\partial} \wedge A$  é o campo eletromagnético. A eq.(2.90) é essencialmente o teorema de energia-momento para o campo acoplado Maxwell-Dirac.

Para ver isto, mostraremos que é possível colocar ambos os lados desta equação em uma forma na qual o operador diferencial  $\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial}$  age sobre um campo de (1,1)-extensores. Para o lado esquerdo da eq.(2.90) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left\langle \boldsymbol{\partial}^2 \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} \right\rangle_1 &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\partial}^2 \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} - \psi i \gamma_3 \boldsymbol{\partial}^2 \tilde{\psi}) \\
&= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\partial}^2 \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} - \partial_\mu \psi i \gamma_3 \partial^\mu \tilde{\psi} + \partial^\mu \psi i \gamma_3 \partial_\mu \tilde{\psi} - \psi i \gamma_3 \boldsymbol{\partial}^2 \tilde{\psi}) \\
&= \frac{1}{2} [\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} (n \cdot \boldsymbol{\partial} \psi) i \gamma_3 \tilde{\psi} - \partial_\mu \psi i \gamma_3 \gamma^\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_n (n \cdot \boldsymbol{\partial} \tilde{\psi}) \\
&\quad + \gamma^\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_n (n \cdot \boldsymbol{\partial} \psi) i \gamma_3 \partial_\mu \tilde{\psi} - \psi i \gamma_3 \boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} (n \cdot \boldsymbol{\partial} \tilde{\psi})] \\
&= \gamma^\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_n \partial_\mu \frac{1}{2} [(n \cdot \boldsymbol{\partial} \psi) i \gamma_3 \tilde{\psi} - \psi i \gamma_3 (n \cdot \boldsymbol{\partial} \tilde{\psi})] \\
&= \boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \left\langle (n \cdot \boldsymbol{\partial} \psi) i \gamma_3 \tilde{\psi} \right\rangle_1,
\end{aligned} \tag{2.91}$$

onde foram usadas a identidade  $\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} (n \cdot \boldsymbol{\partial} X) = \boldsymbol{\partial}^2 X$  e  $\partial^\mu X = \gamma^\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_n (n \cdot \boldsymbol{\partial} X)$ , a regra de Leibniz e (2.89).

Para o lado direito da eq.(2.90) podemos escrever

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\partial} \cdot A)J + (A \cdot \boldsymbol{\partial})J &= \gamma^\mu \cdot (\partial_\mu A)J + \gamma^\mu \cdot A \partial_\mu J \\
&= \gamma^\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_n [(\partial_\mu n) \cdot AJ + n \cdot (\partial_\mu A)J + n \cdot A \partial_\mu J] \\
&= \gamma^\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_n \partial_\mu (n \cdot AJ) \\
&= \boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} (n \cdot AJ).
\end{aligned} \tag{2.92}$$

de onde se segue que

$$\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \left[ \left\langle (n \cdot \boldsymbol{\partial} \psi) i \gamma_3 \tilde{\psi} \right\rangle_1 - en \cdot AJ \right] = eF \llcorner J. \tag{2.93}$$

o que mostra que existe um campo de (1,1)-extensores

$$\mathbf{T}^\dagger(n) = \hbar \left\langle (n \cdot \boldsymbol{\partial} \psi) i \gamma_3 \tilde{\psi} \right\rangle_1 - en \cdot AJ, \tag{2.94}$$

tal que

$$\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \mathbf{T}^\dagger(n) = eF \llcorner J. \tag{2.95}$$

Esta equação é nossa formulação do teorema de conservação de energia-momento. O campo tensorial adjunto de  $\mathbf{T}^\dagger(n)$ , denotado por  $\mathbf{T}(n)$ , associado a  $\psi$  (o campo  $A$  entra na formulação como um parâmetro!), é o tensor de energia-momento. Quando  $A = 0$ , ele é chamado o tensor de energia momento de *Tetrode* do campo de Dirac-Hestenes.

Encontramos imediatamente que também  $T_\mu = \mathbf{T}(\gamma_\mu)$  satisfaz

$$\boldsymbol{\partial} \cdot T_\mu = e(F \llcorner J) \cdot \gamma_\mu. \tag{2.96}$$

Observemos que se  $F = 0$ , o tensor de energia-momento de Tetrode do campo de Dirac-Hestenes é conservado.

Em seguida, calculamos o *traço* e o *bivetor* do tensor de energia momento, e provamos que

$$\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \mathbf{T}^\dagger(n) = \boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \mathbf{T}(n). \quad (2.97)$$

**Cálculo de  $\text{tr}(\mathbf{T})$**

$$\text{tr}(\mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{T}^\dagger) \equiv \mathbf{T}^\dagger(\gamma_\mu) \cdot \gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot \mathbf{T}^\dagger(\gamma_\mu). \quad (2.98)$$

Tomando a parte  $\langle \rangle_0$  da eq.(2.80), obtemos

$$\hbar \gamma^\mu \cdot \left\langle \partial_\mu \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} \right\rangle_1 = eA \cdot J + mc \left\langle \psi \tilde{\psi} \right\rangle_0. \quad (2.99)$$

Então

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{T}) &= \gamma^\mu \cdot \mathbf{T}^\dagger(\gamma_\mu) \\ &= \gamma^\mu \cdot (\hbar \left\langle \partial_\mu \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} \right\rangle_1 - e \gamma_\mu \cdot AJ), \\ \text{tr}(\mathbf{T}) &= mc \left\langle \psi \tilde{\psi} \right\rangle_0. \end{aligned} \quad (2.100)$$

**Cálculo de  $\text{biv}(\mathbf{T})$**

$$\text{biv}(\mathbf{T}) = -\text{biv}(\mathbf{T}^\dagger) \equiv -\mathbf{T}^\dagger(\gamma_\mu) \wedge \gamma^\mu = \gamma^\mu \wedge \mathbf{T}^\dagger(\gamma_\mu). \quad (2.101)$$

Tomando a parte  $\langle \rangle_2$  da eq.(2.80) temos

$$\frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\partial}_\perp(is) + \gamma^\mu \wedge \hbar \left\langle \partial_\mu \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} \right\rangle_1 = eA \wedge J. \quad (2.102)$$

Então

$$\begin{aligned} \text{biv}(\mathbf{T}) &= \gamma^\mu \wedge \mathbf{T}^\dagger(\gamma_\mu) \\ &= \gamma^\mu \wedge (\hbar \left\langle \partial_\mu \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} \right\rangle_1 - e \gamma_\mu \cdot AJ), \\ \text{biv}(\mathbf{T}) &= -\frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\partial}_\perp(is) = \frac{\hbar}{2} \mathbf{i} \boldsymbol{\partial} \wedge s. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Consideremos agora a identidade

$$\mathbf{T}^\dagger(n) - \mathbf{T}(n) = n \lrcorner \text{biv}(\mathbf{T}). \quad (2.104)$$

Aplicando o operador diferencial  $\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial}$  obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \mathbf{T}^\dagger(n) - \boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \mathbf{T}(n) &= \boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} [n \lrcorner \text{biv}(\mathbf{T})] \\ &= \gamma^\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_n [\partial_\mu n \lrcorner \text{biv}(\mathbf{T}) + n \cdot \partial_\mu \text{biv}(\mathbf{T})] \\ &= \boldsymbol{\partial}_\lrcorner \text{biv}(\mathbf{T}) = \boldsymbol{\partial}_\lrcorner \left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\partial}_\lrcorner(\mathbf{i} s)\right) = 0,\end{aligned}$$

o que implica que

$$\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \mathbf{T}^\dagger(n) = \boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \mathbf{T}(n). \quad (2.105)$$

### 2.5.3 Tensor de momento angular do campo de Dirac-Hestenes

Fazendo o produto exterior do teorema da energia-momento (eq.(2.95)) pelo vetor posição  $x$ , definido na seção 2.4.4, e levando em consideração a eq.(2.105) temos

$$[\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \mathbf{T}(n)] \wedge x = e(F \cdot J) \wedge x. \quad (2.106)$$

Lembrando a identidade

$$\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} [\mathbf{T}(n) \wedge x] = [\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \mathbf{T}(n)] \wedge x + \text{biv}(\mathbf{T})$$

obtemos

$$\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} [\mathbf{T}(n) \wedge x] - \text{biv}(\mathbf{T}) = e(F \lrcorner J) \wedge x. \quad (2.107)$$

Mostraremos agora que o bivector do tensor de energia-momento pode ser escrito como o operador  $\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial}$  aplicado a um campo de  $(1, 2)$ -extensores.

De fato, da eq.(2.95) temos

$$\begin{aligned}\text{biv}(\mathbf{T}) &= \frac{1}{2} \mathbf{i} \boldsymbol{\partial} \wedge s = -\frac{1}{2} \mathbf{i} \partial_\mu (s \wedge \gamma^\mu) \\ &= -\frac{1}{2} \gamma^\mu \cdot \partial_n \mathbf{i} [(\partial_\mu s) \wedge n + s \wedge (\partial_\mu n)] \\ &= -\gamma^\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_n \partial_\mu \frac{1}{2} \mathbf{i} (s \wedge n) = -\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} \frac{1}{2} \mathbf{i} (s \wedge n) \\ &= -\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} S(n).\end{aligned} \quad (2.108)$$

e provamos que

$$\text{biv}(\mathbf{T}) = -\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial} S(n). \quad (2.109)$$

Introduzindo a eq.(2.109) na eq.(2.99), obtemos finalmente

$$\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial}[\mathbf{T}(n) \wedge x + S(n)] = e(F \lrcorner J) \wedge x. \quad (2.110)$$

Esta equação demonstra que existe um  $(1, 2)$ -extensor  $\mathbf{J}(n)$  associado ao campo de Dirac-Hestenes  $\psi$ , definido por

$$\mathbf{J}(n) = \mathbf{T}(n) \wedge x + S(n), \quad (2.111)$$

e tal que

$$\boldsymbol{\partial}_n \cdot \boldsymbol{\partial}\mathbf{J}(n) = e(F \lrcorner J) \wedge x. \quad (2.112)$$

Esta equação diferencial é o teorema de conservação do momento angular;  $\mathbf{J}(n)$  é o tensor de momento angular total,  $\mathbf{T}(n) \wedge x$  é o momento angular orbital e  $S(n)$  é o tensor de spin do campo de Dirac-Hestenes. Quando  $F = 0$ ,  $\mathbf{J}(n)$  é conservado.

## Capítulo 3

# Novas soluções da EOH e da EKG

### 3.1 Soluções *UPW* com $v \neq c$ da *EOH*

Seja  $\mathcal{M} = \langle M, D, g \rangle$  o espaço-tempo de Minkowski (Sachs & Wu 1977, Rodrigues & Rosa 1989). Seja  $\Phi \in \text{sec } \mathbb{C} \otimes \wedge^0(T_x^*M) \subset \mathcal{C}_\mathbb{C}(M)$  (ou  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{C}$ ) e considere a *EOH* (com  $c = 1$ ):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 0. \quad (3.1)$$

Vamos agora apresentar algumas soluções subluminais e superluminais desta equação. Seja  $\langle x^\mu \rangle = \langle t, x, y, z \rangle$  uma carta de Lorentz do atlas maximal de  $M$  (Rodrigues & Rosa 1989). Introduzimos as variáveis

$$\xi_{<} = [x^2 + y^2 + \gamma_{<}^2(z - v_{<}t)^2]^{1/2}; \quad (3.2)$$

$$\gamma_{<} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{<}^2}}; \quad \omega_{<}^2 - k_{<}^2 = \Omega_{<}^2; \quad v_{<} = \frac{d\omega_{<}}{dk_{<}}; \quad (3.3)$$

$$\xi_{>} = [-x^2 - y^2 + \gamma_{>}^2(z - v_{>}t)^2]^{1/2}; \quad (3.4)$$

$$\gamma_{>} = \frac{1}{\sqrt{v_{>}^2 - 1}}; \quad \omega_{>}^2 - k_{>}^2 = -\Omega_{>}^2; \quad v_{>} = \frac{d\omega_{>}}{dk_{>}}. \quad (3.5)$$

Com estas definições pode-se verificar facilmente que as funções  $\Phi_{<}^{lm}$  e  $\Phi_{>}^{lm}$  mostradas abaixo são soluções respectivamente subluminais e superluminais da *EOH*. Temos:

$$\Phi_p^{lm}(t, \vec{x}) = C_l j_l(\Omega_p \xi_p) P_m^l(\cos \theta) e^{im\varphi} e^{i(\omega_p t - k_p z)}, \quad (3.6)$$

onde o índice  $p = < \text{ ou } >$ , os  $C_l$  são constantes,  $j_l$  são as funções de Bessel esféricas,  $P_m^l$  são as funções de Legendre e  $(r, \theta, \varphi)$  são as coordenadas esféricas usuais. As soluções  $\Phi_{<}^{lm}$  [ $\Phi_{>}^{lm}$ ] possuem velocidade de fase  $(\omega_{<}/k_{<}) < 1$  [ $(\omega_{>}/k_{>}) > 1$ ], e a função de modulação  $j_l(\Omega_{<}\xi_{<})$  [ $j_l(\Omega_{>}\xi_{>})$ ] move-se com velocidade de grupo  $v_{<}$  [ $v_{>}$ ], onde  $0 \leq v_{<} < 1$  e  $1 < v_{>} < \infty$ . Ambas as soluções  $\Phi_{<}^{lm}$  e  $\Phi_{>}^{lm}$  são ondas progressivas não distorcidas (*UPW*). A expressão *UPW* foi introduzida por Courant e Hilbert (Courant & Hilbert 1966) para soluções da *EOH* que se moviam com velocidade  $v = 1$ ; esses autores não suspeitavam da existência de *UPWs* que se movessem com  $v \neq 1$ . Se denotarmos  $\Phi_{<}^{00}$  e  $\Phi_{>}^{00}$  respectivamente por  $\Phi_{<}$  e  $\Phi_{>}$ , teremos:

$$\Phi_p(t, \vec{x}) = C \frac{\text{sen}(\Omega_p \xi_p)}{\xi_p} e^{i(\omega_p t - k_p z)}, \quad p = < \text{ ou } > . \quad (3.7)$$

Quando  $v_{<} = 0$  temos  $\Phi_{<} \rightarrow \Phi_0$ , dada por

$$\Phi_0(t, \vec{x}) = C \frac{\text{sen} \Omega_{<} r}{r} e^{i\Omega_{<} t}, \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}. \quad (3.8)$$

Esta solução foi encontrada originalmente por H. Bateman (1915). A solução  $\Phi_{>}$  foi apresentada pela primeira vez por Barut e Chandola (1993). Observe-se que escrevendo

$$\text{sen} \Omega_{<} r = \frac{e^{i\Omega_{<} r} - e^{-i\Omega_{<} r}}{2i} \quad (3.9)$$

vemos que  $\Phi_0$  pode ser escrita como uma superposição de duas ondas esféricas,

$$\Phi_0(t, \vec{x}) = A \left[ \frac{e^{i\Omega_{<}(t+r)}}{r} - \frac{e^{i\Omega_{<}(t-r)}}{r} \right]. \quad (3.10)$$

A primeira é uma onda que se propaga na direção da origem, enquanto que a segunda se propaga para fora. Ambas são soluções bem conhecidas da equação de onda (Feynman, Leighton & Sands 1964, p. 20-12).

Em suas *Autobiographical Notes*, Einstein (1949) observa, a respeito do raciocínio que o levou à teoria da Relatividade Especial:

After ten years of reflection such a principle resulted from a paradox upon which I had already hit at the age of sixteen: If I pursue a beam of light with the velocity  $c$  (velocity of light in a vacuum), I should observe such a beam of light as a spatially oscillatory electromagnetic field at rest. However, there seems to be no such thing, whether on the basis of experience or according to Maxwell's equations. (Einstein 1949, p. 53)

O resultado que acabamos de mostrar é um contra-exemplo a esta afirmativa.

Se nossa interpretação das velocidade de fase e de grupo está correta, então deve existir um referencial de Lorentz no qual  $\Phi_{<}$  está em repouso (i.e., onde sua velocidade de grupo seja zero), e não haverá nenhum outro sistema de referência inercial  $I'$  no qual  $\Phi_{>}$  esteja em repouso. Com efeito, é fácil verificar que na carta coordenada  $\langle x'^{\mu} \rangle$  que é um sistema de coordenadas naturalmente adaptado ao referencial inercial  $I'$  (nacs/ $I'$ ) (Rodrigues & Rosa 1989), onde

$$I' = (1 - v_{<}^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_{<}}{\sqrt{1 - v_{<}^2}} \frac{\partial}{\partial z}$$

se move com velocidade  $v_{<}$  na direção  $z$  com relação ao referencial inercial  $I = \partial/\partial t$ , a solução  $\Phi_{<}$  dada pela equação (3.7) transforma-se em  $\Phi_0(t', \vec{x}')$  dada em (3.8), com  $t \mapsto t'$  e  $\vec{x} \mapsto \vec{x}'$ . Da mesma forma, verifica-se que não existe nenhum sistema de Lorentz (com parâmetro de velocidade  $0 \leq v < 1$ ) no qual  $\Phi_{>}$  esteja em repouso.

Como obter, *e.g.*, as soluções *não separáveis*  $\Phi_{<}$  e  $\Phi_{>}$  mostradas? A maneira mais simples de fazê-lo baseia-se no método de Donnelly e Ziolkowsky (1992, 1993), usado extensivamente em Rodrigues & Maiorino (1996) e Rodrigues & Lu (1997).

Consideremos novamente a *EOH* (eq.(3.1)) para  $\Phi$  em um meio homogêneo. Seja  $\tilde{\Phi}(\omega, \vec{k})$  a transformada de Fourier de  $\Phi(t, \vec{x})$ :

$$\tilde{\Phi}(\omega, \vec{k}) = \int_{\mathcal{R}^3} d^3x \int_{-\infty}^{+\infty} dt \Phi(t, \vec{x}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.11)$$

$$\Phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathcal{R}^3} d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\Phi}(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.12)$$

Inserindo a eq.(3.11) na *EOH*, obtemos

$$(\omega^2 - \vec{k}^2) \tilde{\Phi}(\omega, \vec{k}) = 0. \quad (3.13)$$

Vamos procurar por soluções da *EOH* e da eq.(3.13) no sentido da teoria de distribuições. Para isso, reescrevemos (3.13) como

$$(\omega^2 - k_z^2 - \Omega^2) \tilde{\Phi}(\omega, \vec{k}) = 0. \quad (3.14)$$

Desta expressão fica claro que qualquer  $\tilde{\Phi}(\omega, \vec{k})$  da forma

$$\tilde{\Phi}(\omega, \vec{k}) = \Xi(\Omega, \beta) \delta[\omega - (\beta + \Omega^2/4\beta)] \delta[k_z - (\beta - \Omega^2/4\beta)], \quad (3.15)$$

onde  $\Xi(\Omega, \beta)$  é uma função peso arbitrária, é solução de (3.14), visto que as funções  $\delta$  implicam que

$$\omega^2 - k_z^2 = \Omega^2. \quad (3.16)$$

As funções delta fazem com que qualquer função das variáveis transformadas  $\omega$ ,  $k_z$  e  $\Omega$  assumam valores em uma curva sobre a superfície  $\omega^2 - k_z^2 - \Omega^2 = 0$ . Especificamente, o suporte da função  $\delta$  é a curva

$$\omega = \beta + \Omega^2/4\beta; \quad k_z = \beta - \Omega^2/4\beta. \quad (3.17)$$

A projeção desta curva sobre o plano  $(\omega, k_z)$  é uma reta de inclinação  $-1$  terminando no ponto  $(\beta, \beta)$ . Quando  $\beta = 0$  devemos ter  $\Omega = 0$ ; neste caso a linha é a reta  $\omega = k_z$  e  $\Phi(t, \vec{x})$  é simplesmente uma superposição de ondas planas, cada uma das quais tem frequência  $\omega$  e viaja com velocidade  $c = 1$  na direção  $z$ .

A fim de obtermos a solução  $\Phi_{<}$  (eq.(3.7)), consideremos duas linhas arbitrárias com a mesma inclinação recíproca, que denotaremos por  $v > 1$ , ambas colocadas entre as linhas  $\omega = \pm k_z$  no semiplano  $\omega > 0$ , cada uma das quais corta o eixo  $\omega$  em pontos diferentes de coordenadas  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Estas linhas são projeções de membros de uma família de linhas-soluções da *EOH*, e cada uma delas pode ser representada como uma porção dos segmentos de reta (entre as retas  $\omega = \pm k_z$ )

$$k_z = v(\omega - \beta_1) \quad e \quad k_z = v(\omega - \beta_2). \quad (3.18)$$

Sobre uma linha-solução da *EOH*,  $\Omega$  assume valores que vão de zero até um máximo que depende de  $v$  e  $\beta$  e novamente de volta a zero. O valor máximo de  $\Omega$  sobre qualquer linha-solução da *EOH*, dado por  $\beta v / \sqrt{v^2 - 1}$ , acontece para os valores de  $\omega$  e  $k_z$  nos quais as linhas de projeção correspondentes interceptam a reta  $\omega = vk_z$ . Não é difícil comprovar que existem dois pontos em qualquer linha-solução da *EOH* com o mesmo valor de  $\Omega$  no intervalo

$$0 < \Omega < v\beta / \sqrt{v^2 - 1} = \Omega_0. \quad (3.19)$$

Segue-se que neste caso a linha-solução da *EOH* se *quebra* em dois segmentos, como no caso das linhas de projeção. Torna-se então possível associar funções peso diferentes para cada segmento. Vamos então escrever

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(\Omega, \omega, k_z) &= \Xi_1(\Omega, v, \beta) \delta \left[ k_z - \frac{v[\beta + \sqrt{\beta^2 v^2 - \Omega^2(v^2 - 1)}]}{(v^2 - 1)} \right] \times \\
&\times \delta \left[ \omega - \frac{[\beta v^2 + \sqrt{v^2 \beta^2 - \Omega^2(v^2 - 1)}]}{(v^2 - 1)} \right] + \\
&+ \Xi_2(\Omega, v, \beta) \delta \left\{ k_z - \frac{v[\beta - \sqrt{\beta^2 v^2 - \Omega^2(v^2 - 1)}]}{(v^2 - 1)} \right\} \times \\
&\times \delta \left\{ \omega - \frac{[\beta v^2 - \sqrt{v^2 \beta^2 - \Omega^2(v^2 - 1)}]}{(v^2 - 1)} \right\}. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\Xi_1(\Omega, v, \beta) = \Xi_2(\Omega, v, \beta) = (2\pi)^3 / 2 \sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}$$

obtemos, escrevendo  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,

$$\begin{aligned}
\Phi_{v,\beta}(t, \rho, z) &= \Omega_0 \exp \left( \frac{i\beta v(z - vt)}{\sqrt{v^2 - 1}} \right) \int_0^\infty d\chi \chi J_0(\Omega_0 \rho \chi) \cos \left\{ \frac{\Omega_0 v}{\sqrt{v^2 - 1}} \frac{(z - t/v)}{\sqrt{1 - \chi^2}} \right\} \\
&= \exp \left[ i\beta \frac{v(z - vt)}{\sqrt{v^2 - 1}} \right] \frac{\text{sen} \left\{ \Omega_0 \sqrt{\frac{v^2}{(v^2 - 1)}(z - t/v)^2 + \rho^2} \right\}}{\left\{ \Omega_0 \sqrt{\frac{v^2}{(v^2 - 1)}(z - t/v)^2 + \rho^2} \right\}}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Vamos chamar  $v_< = 1/v < 1$ ; considerando o valor de  $\Omega_0$  dado pela eq.(3.19), podemos escrever (3.21) como

$$\begin{aligned}
\Phi_{v_<}(t, \rho, z) &= \frac{\text{sen}(\Omega_0 \xi_<)}{\xi_<} e^{i\Omega_0(z - vt)}, \\
\xi_< &= \left[ x^2 + y^2 + \frac{1}{1 - v_<^2} (z - v_< t)^2 \right]^{1/2}, \tag{3.22}
\end{aligned}$$

onde reconhecemos imediatamente a solução  $\Phi_<$  dada na eq.(3.7).

### 3.2 Soluções *UPW* com $v > c$ da *EKG*

Vamos mostrar agora como obter uma *solução superluminal* da equação de *Klein-Gordon*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi^{KG} - \nabla^2 \Phi^{KG} + m^2 \Phi^{KG} = 0, \tag{3.23}$$

a qual pode ser usada para obter  $\Phi_{>}$ , dada pela eq.(3.7), no limite  $m = 0$ .

Escrevendo  $\tilde{\Phi}^{KG}$  para a transformada de Fourier de  $\Phi^{KG}$ , podemos escrever, em analogia à eq.(3.15),

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{v,\beta}^{KG}(\omega, \Omega, k_z) &= \Xi(\Omega, v, \beta) \delta \left[ \omega - \frac{(-\beta v^2 + \sqrt{(\Omega^2 + m^2)(1 - v^2) + v^2 \beta^2})}{1 - v^2} \right] \times \\ &\times \delta \left[ k_z - \frac{v(-\beta + \sqrt{(\Omega^2 + m^2)(1 - v^2) + v^2 \beta^2})}{1 - v^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Em seguida, escolhemos

$$\Xi(\Omega, v, \beta) = \frac{(2\pi)^3 \exp(-z_0 \sqrt{\Omega_0^2 + \Omega^2})}{\sqrt{\Omega_0^2 + \Omega^2}}, \quad (3.25)$$

onde  $z_0 > 0$  é um parâmetro arbitrário, e onde

$$\Omega_0^2 = \frac{\beta^2 v^2}{1 - v^2} + m^2. \quad (3.26)$$

Introduzindo  $v_{>} = 1/v > 1$  e  $\gamma_{>} = 1/\sqrt{v_{>}^2 - 1}$ , obtemos

$$\Phi_{v,\beta}^{KG>}(t, \vec{x}) = e^{\frac{i(\Omega_0^2 - m^2)(z - vt)}{\beta v}} \frac{\exp\{-\Omega_0 \sqrt{[z_0 - i\gamma_{>}(z - v_{>}t)]^2 + x^2 + y^2}\}}{\sqrt{[z_0 - i\gamma_{>}(z - v_{>}t)]^2 + x^2 + y^2}}, \quad (3.27)$$

que é uma solução superluminal *UPW* da *EKG* movendo-se com velocidade  $v_{>}$  na direção  $z$  (Rodrigues & Lu 1997, Rodrigues & Maiorino 1996). A partir da expressão (3.27) é fácil reproduzir a solução superluminal  $\Phi_{>}$  da *EOH* no limite  $m \rightarrow 0$ .

### 3.3 Soluções *UPW* com $v = c$ da *EKG*

Dissemos anteriormente que a *EKG* possui *soluções luminais*. Para exibir uma solução deste tipo, tomemos

$$\tilde{\Phi}^{KG} = \Xi(\Omega, \beta) \delta[k_z - (\Omega^2 + (m^2 - \beta^2)/2\beta)] \delta[\omega - (\Omega^2 + (m^2 + \beta^2)/2\beta)]. \quad (3.28)$$

Escolhendo

$$\Xi(\Omega, \beta) = \frac{(2\pi)^2}{\beta} \exp(-z_0 \Omega^2 / 2\beta), \quad z_0 > 0, \quad (3.29)$$

obtemos

$$\Phi_\beta^{KG}(t, \vec{x}) = e^{iz(m^2 - \beta^2)/2\beta} e^{-it(m^2 + \beta)/2\beta} \frac{e^{-\rho^2 \beta / 2 [z_0 - i(z-t)]}}{[z_0 - i(z-t)]}, \quad (3.30)$$

que é claramente uma solução que se move com velocidade  $c = 1$  na direção  $z$ .

### 3.4 As soluções de onda $X$ da $EOH$

Partindo da eq.(3.14), definimos

$$\tilde{\Phi}(\omega, \bar{k}) = \Xi(\bar{k}, \eta) \delta(k_z - \bar{k} \cos \eta) \delta(\omega - \bar{k}). \quad (3.31)$$

Isto implica que

$$k_z = \bar{k} \cos \eta; \quad \cos \eta = k_z / \omega, \quad \omega > 0, \quad -1 < \cos \eta < 1. \quad (3.32)$$

Além disso, escolhemos

$$\Omega = \bar{k} \sin \eta; \quad \bar{k} > 0. \quad (3.33)$$

Lembrando que  $\vec{\Omega} = (k_x, k_y)$  e  $\vec{\rho} = (x, y)$ , podemos escrever  $\vec{\Omega} \cdot \vec{\rho} = \Omega \rho \cos \theta$ . Substituindo a eq.(3.31) na eq.(3.12) encontramos

$$\Phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k} \sin^2 \eta \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \Xi(\bar{k}, \eta) e^{i\bar{k}\rho \sin \eta \cos \theta} \right] e^{i(\bar{k} \cos \eta z - \bar{k}t)}. \quad (3.34)$$

Escolhendo

$$\Xi(\bar{k}, \eta) = (2\pi)^3 \frac{z_0 e^{-\bar{k}z_0 \sin \eta}}{\bar{k} \sin \eta}, \quad (3.35)$$

onde  $z_0 > 0$  é uma constante, obtemos

$$\Phi(t, \vec{x}) = z_0 \operatorname{sen} \eta \int_0^\infty d\bar{k} e^{-\bar{k}z_0 \operatorname{sen} \eta} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\bar{k}\rho \operatorname{sen} \eta \cos \theta} \right] e^{i\bar{k}(\cos \eta z - t)}. \quad (3.36)$$

Chamando  $z_0 \operatorname{sen} \eta = a_0 > 0$ , a eq.(3.36) se torna

$$\Phi_{XBB_0}^>(t, \vec{x}) = a_0 \int_0^\infty d\bar{k} e^{-\bar{k}a_0} J_0(\bar{k}\rho \operatorname{sen} \eta) e^{i\bar{k}(\cos \eta z - t)}. \quad (3.37)$$

Então

$$\Phi_{XBB_0}^>(t, \vec{x}) = \frac{a_0}{\sqrt{(\rho \operatorname{sen} \eta)^2 + [a_0 - i(z \cos \eta - t)]^2}}, \quad (3.38)$$

que foi chamada por Lu e Greenleaf (Lu & Greenleaf 1992b) de onda  $X_0$  de banda larga. O perfil de  $\Phi_{XBB_0}^>$  é mostrado na figura 3.1.

Uma outra solução superluminal da  $EOH$ , bastante semelhante à onda  $X$ , pode ser obtida com o método mencionado acima escolhendo-se  $\Xi(\bar{k}, \eta)$  na equação (3.34) como

$$\Xi(\bar{k}, \eta) = (2\pi)^3 \cotg \eta \exp(-z_0 |\cos \eta|), \quad z_0 \in \mathbb{R}^+, \quad (3.39)$$

o que nos dá

$$\Phi^>(t, \vec{x}) = \frac{[z_0 - i \operatorname{sgn}(\cos \eta)(z - t/\cos \eta)]}{[\rho^2 \operatorname{tg}^2 \eta + [z_0 - i \operatorname{sgn}(\cos \eta)(z - t/\cos \eta)]^2]^{3/2}}. \quad (3.40)$$

É claro destas expressões que  $\Phi_{XBB_n}^>$  e  $\Phi^>$  são  $UPWs$  que se propagam com velocidade  $c_1 = 1/\cos \eta > 1$  na direção  $z$ . Nossa afirmação se justifica porque, como no caso da solução  $\Phi_>$  (eq.(3.7)) não existe um referencial de Lorentz no qual  $\Phi_{XBB_n}^>$  e  $\Phi^>$  estão em repouso. Além disso, devemos observar que  $c_1$  é a verdadeira velocidade da onda, pois os conceitos normais de velocidade de fase e de grupo não se aplicam nesta situação.

Existem também soluções de onda  $X$  superluminais de banda limitada da  $EOH$ . As soluções mais gerais deste tipo são dadas por

$$\Phi_{XBLn}(t, \vec{x}) = e^{in\theta} \int_0^\infty d\bar{k} B(\bar{k}) J_n(\bar{k}\rho \operatorname{sen} \eta) e^{-i\bar{k}[a_0 - i(z \cos \eta - t)]}, \quad (3.41)$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$   $B(\bar{k}) \neq a_0$  (uma constante real) é uma função complexa bem comportada arbitrária, que representa a função de transferência de um

radiador real, e  $J_n$  é a função de Bessel de ordem  $n$ . Quando  $B(\bar{k})$  não for especificado, denotaremos a onda  $X$  correspondente por  $\Phi_{X_n}$ .

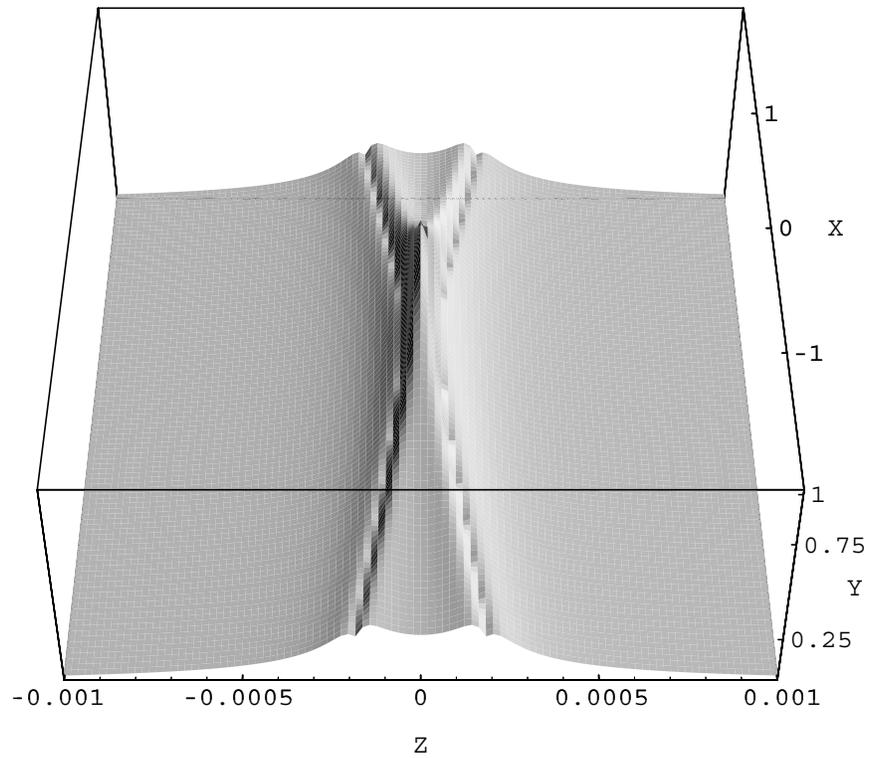


Figura 3.1: Solução de onda  $X$  exata da equação de onda homogênea. A solução tem simetria cilíndrica em redor da direção de propagação, o eixo  $z$ , que aponta para a direita na figura. A coordenada  $y$  representa o valor da parte real da função nos pontos do plano  $y = 0$ . Note-se a grande localização da onda em redor de seu máximo, na origem, variando de 1 em  $z = 0$  até quase 0 em  $z = \pm 0.001$ . A função decai muito mais vagarosamente na direção perpendicular ( $x$ ).

## Capítulo 4

# Novas soluções *UPW* das equações de Maxwell

Neste capítulo estudaremos:

- (i) Soluções subluminais *UPW* das equações de Maxwell (*EM*) e uma relação insuspeitada entre tais soluções e a possível existência de partículas puramente eletromagnéticas (*PEPs*) imaginadas por Einstein, Poincaré e Ehrenfest (Einstein 1952, Poincaré 1906, Ehrenfest 1907) e discutidas recentemente por Waite (1995) e colaboradores (Waite, Barut & Zeni 1997) e também por Rodrigues e Vaz (1997).
- (ii) As ondas *X* superluminais eletromagnéticas (*SEXWs*) (Rodrigues & Lu 1997, Rodrigues & Maiorino 1996).
- (iii) A teoria de como produzir e lançar no espaço aproximações de abertura finita (*FAA*) de tais ondas.

### 4.1 Soluções subluminais das *EM* e *PEPs*

Nesta seção estudaremos a existência de soluções *UPW* subluminais das *EM* que se parecem com partículas puramente eletromagnéticas (*PEPs*).

Tomemos  $\Phi \in \sec(\Lambda^0(M) \oplus \Lambda^4(M)) \subset \sec \mathcal{C}(M)$  e consideremos o seguinte potencial de Hertz  $\pi \in \sec \Lambda^2(M) \subset \sec \mathcal{C}(M)$ :

$$\pi = \Phi \gamma^1 \gamma^2. \quad (4.1)$$

Escrevamos agora

$$\Phi(t, \vec{x}) = \phi(\vec{x})e^{\gamma_5 \Omega t}. \quad (4.2)$$

Visto que  $\pi$  satisfaz a equação de onda, temos

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) + \Omega^2 \phi(\vec{x}) = 0. \quad (4.3)$$

As soluções da eq.(4.3) (a equação de Helmholtz) são bem conhecidas. Aqui, consideraremos a solução mais simples em coordenadas esféricas,

$$\phi(\vec{x}) = C \frac{\text{sen } \Omega r}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (4.4)$$

onde  $C$  é uma constante real arbitrária. A partir deste resultado, obtemos o seguinte campo eletromagnético, que está em repouso no referencial  $I$  para o qual  $\langle x^\mu \rangle$  são coordenadas naturalmente adaptadas:

$$\begin{aligned} F_0 = \frac{C}{r^3} & [\text{sen } \Omega t (\alpha \Omega r \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi - \beta \cos \theta \text{ sen } \theta \cos \varphi) \gamma_0 \gamma_1 \\ & - \text{sen } \Omega t (\alpha \Omega r \text{ sen } \theta \cos \varphi + \beta \text{ sen } \theta \cos \theta \text{ sen } \varphi) \gamma_0 \gamma_2 \\ & + \text{sen } \Omega t (\beta \text{ sen}^2 \theta - 2\alpha) \gamma_0 \gamma_3 + \cos \Omega t (\beta \text{ sen}^2 \theta - 2\alpha) \gamma_1 \gamma_2 \\ & + \cos \Omega t (\beta \text{ sen } \theta \cos \theta \text{ sen } \varphi + \alpha \Omega r \text{ sen } \theta \cos \varphi) \gamma_1 \gamma_3 \\ & + \cos \Omega t (-\beta \text{ sen } \theta \cos \theta \cos \varphi + \alpha \Omega r \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi) \gamma_2 \gamma_3] \end{aligned} \quad (4.5)$$

com  $\alpha = \Omega r \cos \Omega r - \text{sen } \Omega r$  e  $\beta = 3\alpha + \Omega^2 r^2 \text{ sen } \Omega r$ . Observe-se que  $F_0$  é regular na origem e se anula no infinito. Vamos agora reescrever esta solução usando a álgebra de Pauli em  $\mathcal{C}^+(M)$ . Tomando  $\mathbf{i} \equiv \gamma_5$ , escrevemos

$$F_0 = \vec{E}_0 + \mathbf{i} \vec{B}_0. \quad (4.6)$$

obtemos assim

$$\vec{E}_0 = \vec{W} \text{ sen } \Omega t, \quad \vec{B}_0 = \vec{W} \cos \Omega t, \quad (4.7)$$

com

$$\vec{W} = -C \left( \frac{\alpha \Omega y}{r^3} - \frac{\beta x z}{r^5}, -\frac{\alpha \Omega x}{r^3} - \frac{\beta y z}{r^5}, \frac{\beta(x^2 + y^2)}{r^5} - \frac{2\alpha}{r^3} \right). \quad (4.8)$$

É possível mostrar que  $\text{div } \vec{W} = 0$ ,  $\text{div } \vec{E}_0 = \text{div } \vec{B}_0 = 0$ ,  $\text{rot } \vec{E}_0 + \partial \vec{B}_0 / \partial t = 0$ ,  $\vec{B}_0 - \partial \vec{E}_0 / \partial t = 0$ , e

$$\text{rot } \vec{W} = \Omega \vec{W}. \quad (4.9)$$

Conforme mostrado na seção 2.2,  $T_0 = \frac{1}{2}\tilde{F}\gamma_0 F$  é a 1-forma que representa a densidade de energia e o vetor de Poynting (Hestenes 1966, Maia, Recami, Rosa & Rodrigues 1990). Segue-se disto que  $\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 = 0$ . A solução tem momento angular nulo. A densidade de energia  $u = T^{00}$  é dada por

$$u = \frac{1}{r^6}[\text{sen}^2 \theta(\Omega^2 r^2 \alpha^2 + \cos^2 \theta \beta^2) + (\beta \text{sen}^2 \theta - 2\alpha)^2] \quad (4.10)$$

Então  $\iiint_{\mathbb{R}^3} u \, d\mathbf{v} = \infty$ . Em (Rodrigues & Lu 1997) discute-se como gerar soluções de energia finita. Estas podem ser construídas considerando-se “pacotes de onda” com uma distribuição de frequências intrínsecas  $F(\Omega)$  satisfazendo condições apropriadas. Pode-se mostrar que tais “pacotes de onda” não são *UPWs*, pois vão distorcer-se depois de algum tempo. Entretanto, tais pacotes ainda se moverão com velocidades subluminais. Em particular, foi possível projetar e lançar (Rodrigues & Lu 1997) um pulso de Bessel acústico dentro da água. Nesse experimento, observou-se o pico do pulso viajar com velocidade 0.611(3)% menor que uma onda de som comum, de velocidade  $c_s$ .

Vamos agora dirigir nossa atenção para a eq.(4.9). Esta é uma equação muito importante, chamada *equação livre de forças* (*force free equation*), que aparece, por exemplo, na hidrodinâmica e em várias situações na física de plasma. No âmbito deste trabalho, esta equação nos leva a fazer as seguintes considerações:

Einstein, entre outros (veja-se (Waite 1995) para uma revisão), estudou a possibilidade de se “construírem” partículas puramente eletromagnéticas (*PEPs*). Para isso, partiu das equações de Maxwell para uma configuração de *PEP* descrita por um campo eletromagnético  $F_p$  e uma densidade de corrente  $J_p = \rho_p \gamma_0 + j_p^i \gamma_i$ , onde

$$\partial F_p = J_p \quad (4.11)$$

e prontamente concluiu que a condição para a existência de *PEPs* é

$$J_p \lrcorner F_p = 0. \quad (4.12)$$

Esta condição implica, em notação vetorial,

$$\rho_p \vec{E}_p = 0, \quad \vec{j}_p \cdot \vec{E}_p = 0, \quad \vec{j}_p \times \vec{B}_p = 0. \quad (4.13)$$

A partir da eq.(4.13) Einstein concluiu que a única solução possível de (4.11) com a condição extra (4.12) é  $J_p = 0$ . Entretanto, tal conclusão é correta somente se  $J_p^2 > 0$ , *i.e.*, se  $J_p$  for uma densidade de corrente tipo

tempo. Mas se supusermos que  $J_p$  pode ser tipo espaço, *i.e.* que  $J_p^2 < 0$ , então existirá um referencial no qual  $\rho_p = 0$  e uma solução possível da eq.(4.12) é

$$\rho_p = 0 \quad , \quad \vec{E}_p \cdot \vec{B}_p = 0 \quad , \quad \vec{j}_p = kC\vec{B}_p, \quad (4.14)$$

onde  $k = \pm 1$  é chamada a quiralidade da solução e  $C$  é uma constante real. Em (Waite 1995, Waite et al. 1997) são mostradas soluções estáticas das equações (4.11) e (4.12) nas quais  $\vec{E}_p = 0$ . Nesse caso verifica-se que  $\vec{B}_p$  satisfaz

$$\nabla \times \vec{B}_p = kC\vec{B}_p. \quad (4.15)$$

Agora, se escolhermos  $F \in \sec \bigwedge^2(M) \subset \sec \mathcal{C}(M)$  tal que

$$\begin{aligned} F_0 &= \vec{E}_0 + \mathbf{i}\vec{B}_0, \\ \vec{E}_0 &= \vec{B}_p \text{sen } \Omega t \quad , \quad \vec{B}_0 = \vec{B}_p \text{cos } \Omega t, \end{aligned} \quad (4.16)$$

percebemos imediatamente que (para  $\Omega = kC > 0$ )

$$\partial F_0 = 0. \quad (4.17)$$

Este resultado é surpreendente, pois significa que as *EM* livres possuem soluções estacionárias capazes de modelar *PEPs*. Em tais soluções a estrutura do campo  $F_0$  é tal que podemos escrever, por exemplo, quando  $\vec{B}_p = \vec{W}$  (eq.(4.16))

$$\begin{aligned} F_0 &= F'_p + \bar{F} = \vec{W} \text{sen } \Omega t + \mathbf{i}\vec{W} \text{cos } \Omega t, \\ \partial F'_p &= -\partial \bar{F} = J'_p, \end{aligned} \quad (4.18)$$

*i.e.*,  $\partial F_0 = 0$  é equivalente a um campo mais uma corrente. Este fato eventualmente abre várias possibilidades interessantes para a modelagem de *PEPs*.

Observamos aqui que soluções subluminais das *EM* podem ser facilmente obtidas tomando-se como potencial de Hertz, por exemplo,

$$\begin{aligned} \pi^<(t, \vec{x}) &= C \frac{\text{sen } \Omega \xi_<}{\xi_<} \\ \omega_<^2 - k_<^2 &= \Omega_<^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \xi_< &= [x^2 + y^2 + \gamma_<^2(z - vt)^2] \\ \gamma_< &= \frac{1}{\sqrt{1 - v_<^2}}, \quad v_< = d\omega_</dk_< \end{aligned} \quad (4.20)$$

Vamos terminar esta seção com as seguintes observações:

- (i) Em geral, para soluções subluminais das *EM* o vetor de propagação satisfaz uma equação com a eq.(4.19).
- (ii) É possível verificar que para uma *SSME* os invariantes de campo são em geral não nulos.
- (iii) A solução subluminal das equações de Maxwell não é uma onda transversal. Isto pode ser verificado explicitamente a partir das equações (4.7) e (4.8), com uma transformação de Lorentz de parâmetro  $v_<$ .

As condições (i), (ii) e (iii) contrastam com o caso das soluções de onda plana das *EM*. Na seção 6.2 mostramos que para campos eletromagnéticos livres ( $\partial F = 0$ ) tais que  $F^2 \neq 0$ , existe uma equação de Dirac-Hestenes para  $\psi \in \sec(\Lambda^0(M) + \Lambda^2(M) + \Lambda^4(M)) \subset \sec \mathcal{C}(M)$ , onde  $F = \psi \gamma_1 \gamma_2 \tilde{\psi}$ , que é *equivalente* às *EM* livres (Vaz & Rodrigues 1993, Vaz & Rodrigues 1997).

## 4.2 A onda *X* eletromagnética superluminal

Nesta seção estudaremos as ondas *X* eletromagnéticas superluminais (*SEXWs*). A fim de simplificar o tratamento, suporemos que as funções  $\Phi_{X_n}$  e  $\Phi_{X_{BB_n}}$  abaixo, as quais, como sabemos, são soluções superluminais da equação de onda escalar (Lu & Greenleaf 1992*b*, Rodrigues & Lu 1997), são seções de 0-formas do fibrado de Clifford complexificado  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(M) = \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}(M)$ . Temos

$$\Phi_{X_n}(t, \vec{x}) = e^{in\theta} \int_0^{\infty} B(\bar{k}) J_n(\bar{k}\rho \text{sen } \eta) e^{-\bar{k}[a_0 - i(z \cos \eta - t)]} d\bar{k} \quad (4.21)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$  e  $\eta$  é uma constante, chamada de ângulo axicon. Escolhendo  $B(\bar{k}) = a_0$ , temos uma generalização da eq.(3.38),

$$\Phi_{X_{BB_n}}(t, \vec{x}) = \frac{a_0 (\rho \text{sen } \eta)^n e^{in\theta}}{\sqrt{M}(\tau + \sqrt{M})^n} \quad (4.22)$$

$$M = (\rho \text{sen } \eta)^2 + \tau^2; \quad \tau = [a_0 - i(z \cos \eta - t)]. \quad (4.23)$$

Além disso, supomos ainda que o potencial de Hertz  $\Pi$ , o potencial vetor  $A$  e o campo eletromagnético correspondente  $F$  são seções apropriadas de  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(M)$ . Tomamos

$$\Pi = \Phi\gamma_1\gamma_2 \in \sec \mathbb{C} \otimes \bigwedge^2(M) \subset \sec \mathcal{C}_C(M), \quad (4.24)$$

onde  $\Phi$  pode ser  $\Phi_{X_n}$  ou  $\Phi_{X_{BB_n}}$ . Vamos começar apresentando a forma explícita de  $F_{X_{BB_n}}$ , *i.e.* a *SEXW*. Neste caso, escrevendo  $\Pi = \vec{\Pi}_e + i\vec{\Pi}_m$ , a eq.(4.24) fornece  $\Pi = i\vec{\Pi}_m$  e

$$\vec{\Pi}_m = \Phi_{X_{BB_n}} \mathbf{z}, \quad (4.25)$$

onde  $\mathbf{z}$  é o versor do eixo  $z$ . Da mesma forma, sejam  $\boldsymbol{\rho}$  e  $\boldsymbol{\theta}$  os versores nas direções  $\rho$  e  $\theta$ , respectivamente, onde  $(\rho, \theta, z)$  são as coordenadas cilíndricas usuais. Escrevendo

$$F_{X_{BB_n}} = \vec{E}_{X_{BB_n}} + \gamma_5 \vec{B}_{X_{BB_n}} \quad (4.26)$$

encontramos

$$\vec{E}_{X_{BB_n}} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \theta} \Phi_{X_{BB_n}} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \Phi_{X_{BB_n}} \quad (4.27)$$

$$\vec{B}_{X_{BB_n}} = \boldsymbol{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \Phi_{X_{BB_n}} + \boldsymbol{\theta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \Phi_{X_{BB_n}} + \mathbf{z} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_{X_{BB_n}} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_{X_{BB_n}} \right) \quad (4.28)$$

As expressões explícitas para as componentes em coordenadas cilíndricas são:

$$(\vec{E}_{X_{BB_n}})_\rho = -\frac{1}{\rho} n \frac{M_3}{\sqrt{M}} \Phi_{X_{BB_n}} \quad (4.29a)$$

$$(\vec{E}_{X_{BB_n}})_\theta = \frac{1}{\rho} i \frac{M_6}{\sqrt{M} M_2} \Phi_{X_{BB_n}} \quad (4.29b)$$

$$(\vec{B}_{X_{BB_n}})_\rho = \cos \eta (\vec{E}_{X_{BB_n}})_\theta \quad (4.29c)$$

$$(\vec{B}_{X_{BB_n}})_\theta = -\cos \eta (\vec{E}_{X_{BB_n}})_\rho \quad (4.29d)$$

$$(\vec{B}_{X_{BB_n}})_z = -\sin^2 \eta \frac{M_7}{\sqrt{M}} \Phi_{X_{BB_n}}. \quad (4.29e)$$

As funções  $M_i$ , ( $i = 2, \dots, 7$ ) nestas equações são dadas por:

$$M_2 = \tau + \sqrt{M} \quad (4.30a)$$

$$M_3 = n + \frac{1}{\sqrt{M}} \tau \quad (4.30b)$$

$$M_4 = 2n + \frac{3}{\sqrt{M}}\tau \quad (4.30c)$$

$$M_5 = \tau + n\sqrt{M} \quad (4.30d)$$

$$M_6 = (\rho^2 \sin^2 \eta \frac{M_4}{M} - nM_3)M_2 + n\rho^2 \sin^2 \rho \frac{M_5}{M} \quad (4.30e)$$

$$M_7 = (n^2 - 1)\frac{1}{\sqrt{M}} + 3n\frac{1}{M}\tau + 3\frac{1}{\sqrt{M^3}}\tau^2 \quad (4.30f)$$

Vemos imediatamente das equações (4.29) e (4.30) que as ondas  $F_{XBB_n}$  são de fato soluções superluminais tipo *UPW* das *EM*, propagando-se com velocidade  $1/\cos \eta$  na direção  $z$ . É trivial verificar que estas ondas não se distorcem; que elas se propagam com velocidade  $c_1 = 1/\cos \eta$  é consequência de que  $F_{XBB_n}$  é uma função somente de  $(z - c_1 t)$ , e quaisquer derivadas de  $\Phi_{XBB_n}$  conservarão a mesma estrutura de dependência. Mais detalhes podem ser encontrados em (Rodrigues & Lu 1997, Rodrigues & Maiorino 1996). Na próxima seção mostramos como lançar aproximações de abertura finita de uma onda *X* eletromagnética superluminal (*FAASEXW*).

### 4.3 Como lançar uma *FAASEXW*

A formação de feixes de luz tem uma história bastante antiga, iniciada em 1678 com o tratamento intuitivo de Huygens, que postulou a formação de feixes usando *wavelets*. Uma descrição quantitativa das idéias de Huygens foi feita por Fresnel, em 1818. Levou bastante tempo para que se desenvolvessem fórmulas melhores, e uma das mais importantes é a chamada fórmula de difração de Rayleigh-Sommerfeld. Uma descrição detalhada dos conceitos básicos sobre as técnicas de formação de feixes pode ser encontrada em (Goodman 1968, Kino 1987, Lu, Zou & Greenleaf 1994). Visto que o conhecimento dos resultados teóricos principais é essencial para se compreender como é possível produzir ondas eletromagnéticas superluminais, apresentamos em seguida, de maneira breve, as formulações (a) de Huygens-Kirchhoff e (b) de Rayleigh-Sommerfeld da difração por uma tela plana.

Usando (b), mostraremos o resultado de uma simulação em computador (fig. 4.1) para o nascimento programado de uma aproximação de abertura finita do potencial de Hertz  $\mathfrak{H}$  (usado para gerar uma *SEXW*) com o máximo de intensidade do campo formando-se em um dado ponto  $z_0$  sobre o eixo  $z$ . Mostramos ainda simulações (fig. 4.2) para a propagação de aproximações de abertura finita de uma *SEXW* de banda larga e outra de banda limitada,

que mostra tais ondas propagando-se por até 100 km sem sofrerem distorção apreciável, com seus picos viajando com velocidade superluminal.

### 4.3.1 A teoria da difração de Huygens-Kirchhoff

Uma simulação da propagação da onda superluminal  $\Phi^>(t, \vec{x})$  dada pela eq.(3.40) foi feita por Donnelly, Power & Templeman (1994) usando uma aproximação de abertura finita para a formulação de Huygens-Kirchhoff da difração por uma tela plana. Esta aproximação parte da solução geral (Morse & Feshbach 1953, p. 1433) da equação de onda não homogênea  $\partial^2 \Phi = 4\pi\rho$ , dada por

$$\begin{aligned} \Phi(t, \vec{x}) = & \int_0^{t^+} dt' \iiint_V d\mathbf{v}' G_R(t-t', \vec{x}-\vec{x}') \rho(t', \vec{x}') \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_V d\mathbf{v}' \left[ G_R(t', \vec{x}') \frac{\partial}{\partial t'} \Phi(t', \vec{x}') - \Phi(t', \vec{x}') \frac{\partial}{\partial t'} G_R(t', \vec{x}') \right]_{t'=0} \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^+} dt' \iint_S d\vec{S}' \cdot [G_R \text{grad}' \Phi - \Phi \text{grad}' G_R]. \quad (4.31) \end{aligned}$$

Na eq.(4.31)  $G_R(t-t', \vec{x}-\vec{x}') = \delta(t-t'-R)/R$  é a função de Green retardada e  $R = |\vec{x}-\vec{x}'|$ . A expressão  $t^+$  significa que a integral sobre  $t'$  deve terminar em  $t' = t + \varepsilon$ , a fim de evitar que o limite de integração caia sobre o pico da função delta. O primeiro termo é o termo da fonte, o segundo traz a solução do famoso problema de Cauchy e o terceiro é o mais importante ao se construírem dispositivos para a produção e o lançamento de ondas no espaço físico. Com efeito, a fim de lançar a solução superluminal  $\Phi^>(t, \vec{x})$  dada pela eq.(3.40), tomamos  $\rho = 0$  e também fazemos  $\Phi^>(0, \vec{x})$  e  $[(\partial/\partial t)\Phi^>(t, \vec{x})]_{t=0}$  nulos em todo o domínio espacial  $V$ , e diferentes de zero sobre a superfície  $S = \partial V$ , tomada como o plano  $z = 0$  e fechada por uma semi-esfera no infinito, onde  $\Phi^>$  tende a 0. Na aproximação de Huygens-Kirchhoff imaginamos uma abertura de raio  $a$  no plano  $z = 0$ , e consideramos que  $\Phi^>(t, \vec{x}) = 0$  e que  $(\partial/\partial t)\Phi^>(t, \vec{x}) = 0$  fora da abertura, levando em consideração distâncias deste plano tais que  $z \approx R$ . Chamamos  $\Phi_{FAA}^>(t, \vec{x})$  o campo aproximado de  $\Phi^>(t, \vec{x})$ . Temos

$$\begin{aligned}\Phi_{FAA}^{\gt}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S dS' \frac{1}{R} [\text{grad}' \Phi^{\gt}(t', \vec{x}') - \frac{z}{R} \frac{\partial}{\partial t'} \Phi^{\gt}(t', \vec{x}')] \\ &\quad + \frac{z}{R^2} \Phi^{\gt}(t', \vec{x}') \Big|_{t'=t-R}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

A eq.(4.32) pode agora ser usada para reconstruir  $\Phi^{\gt}(t, \vec{x})$ , a qual é focalizada próximo ao eixo  $z$  usando-se um número finito de fontes pontuais cuja resposta é modulada por  $\delta(t - R)/4\pi$ . Se  $N$  é o número de fontes em um arranjo uniforme na abertura e se  $A(n)$  é um peso de área constante para cada elemento que substituirá  $dS'$  na eq.(4.32), temos (com  $t' = t - R$ )

$$\Phi_{FAA}^{\gt}(t, \vec{x}) \simeq \sum_{n=1}^N \frac{A(n)}{4\pi R} \left[ \text{grad}' \Phi^{\gt}(t', \vec{x}') + \frac{z}{R^2} \Phi^{\gt}(t', \vec{x}') - \frac{z}{R} \frac{\partial}{\partial t'} \Phi^{\gt}(t', \vec{x}') \right]\tag{4.33}$$

Fixando o ponto  $\vec{x}$ , a eq.(4.33) pode ser usada para determinar o sinal que deve ser emitido por cada uma das fontes na abertura em  $z = 0$  com o intervalo de tempo apropriado. É muito importante observar que o pulso “superluminal”  $\Phi_{FAA}^{\gt}(t, \vec{x})$  é um tipo de *padrão de interferência* gerado por pulsos que emanam das fontes na abertura, no plano  $z = 0$ , e viajam com velocidade  $c = 1$ . Assim, mesmo se o pico do pulso se move com velocidade superluminal, pelo menos teoricamente o pulso deve possuir uma frente de onda, a qual deve desloca-se, segundo resultados matemáticos bem conhecidos (Courant & Hilbert 1966, Taylor 1981), com velocidade  $c = 1$ . As simulações realizadas em (Donnelly et al. 1994) mostram que a natureza superluminal do padrão de interferência<sup>1</sup> é mantida com coerência somente na chamada região de campo próximo do arranjo de fontes.<sup>2</sup> Esta pode ser uma distância bastante grande, dependendo do arranjo experimental. A este respeito, vejam-se também as simulações numéricas do nascimento de uma *FAA* para uma *SEXW* de banda larga (fig. 4.1) e as simulações da propagação (por distâncias de até 100 km) de aproximações de abertura finita para *SEXWs* de banda larga e de banda limitada (fig. 4.2), as quais foram obtidas com a aproximação de Rayleigh-Sommerfeld.

<sup>1</sup>Com o significado preciso de que o pico viaja com velocidade superluminal.

<sup>2</sup>A distância de campo próximo é definida como  $z \leq \pi w_0 a / \lambda$ , onde  $w_0$  é a largura e  $\lambda$  é o comprimento de onda típico do pulso localizado (veja-se (Ziolkowski, Besieris & Shaarawi 1993) para detalhes).

### 4.3.2 A teoria da difração de Rayleigh-Sommerfeld

A fórmula de difração de Rayleigh-Sommerfeld (Goodman 1968), que é válida também para ondas superluminais, como provado em (Rodrigues & Lu 1997), pode ser usada para projetar o lançamento, com um radiador plano de raio  $a$  sobre o plano  $z = 0$ , de aproximações de abertura finita para qualquer solução exata da *EOH*. Temos, por exemplo, para a *FAA* de  $\Phi_{XBB_0}(t, \vec{x}) \equiv \Phi_0(t, \vec{x})$ , doravante denotada  $\Phi_0^{FAA}(t, \vec{x})$ , que

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_0^{FAA}(\bar{k}, \vec{x}) &= \frac{1}{i\lambda} \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \rho' d\rho' d\theta' \hat{\Phi}_0(\bar{k}, \vec{x}') \frac{e^{i\bar{k}R}}{R^2} z \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \rho' d\rho' d\theta' \hat{\Phi}_0(\bar{k}, \vec{x}') \frac{e^{i\bar{k}R}}{R^3} z \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde  $\hat{\Phi}_0(\omega, \vec{x}) = \mathcal{F}[\Phi_0(t, \vec{x})]$ ,  $\mathcal{F}$  indica a transformada de Fourier e  $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$ .

Podemos agora escrever a *FAA* (derivada da fórmula de difração de Rayleigh-Sommerfeld) para o potencial de Hertz  $\Pi$  que gera a *SEXW* de banda larga mais simples, que denotaremos por  $\Pi_{FAA}$ .

$$\Pi_{FAA}(t, \vec{x}) = \frac{\gamma^{12}}{2\pi} \left[ \iint_{\Sigma} dS' \frac{z}{R^2} \left[ \frac{d}{dt'} \Phi_0(t', x', y', 0) + \frac{1}{R} \Phi_0(t', x', y', 0) \right] \right]_{t'=t-R} \quad (4.35)$$

Na eq.(4.35)  $\Sigma$  é a área de integração no plano  $z = 0$ , explicitada na eq.(4.34). Ela corresponde fisicamente à área do radiador do potencial de Hertz ( $a = 10$  m) mostrado na fig. 4.1 (Oliveira & Rodrigues 1998). A expressão (4.35) mostra claramente a possibilidade de se lançar uma *FAA-SEXW* com o pico do campo programado para nascer em um ponto escolhido do eixo  $z$ ; no caso da fig. 4.1,  $z_0 = 68$  m. A técnica para isto consiste em ativar os diferentes anéis do radiador de Hertz nos tempos retardados corretos, que podem ser obtidos diretamente da eq.(4.35). A seqüência de imagens na figura 4.1 mostra com clareza o que acontece.

Além disso, as imagens na figura 4.2 (Rodrigues & Lu 1997) mostram simulações para os movimentos de uma *FAASEXW* de banda larga (discutida acima) e uma *FAA* para uma onda *X* eletromagnética superluminal de banda limitada, gerada pelo potencial de Hertz

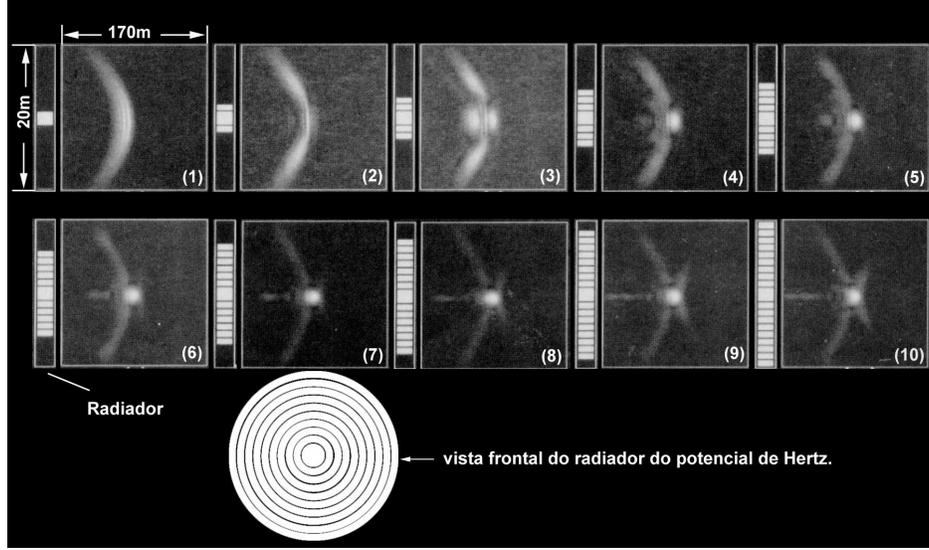


Figura 4.1: Simulação computacional do nascimento programado da (parte real da) aproximação de abertura finita do potencial de Hertz, com pico em  $z_0 = 68$  m,  $D = 20$  m,  $a_0 = 0,05$  mm,  $\eta = 0,005^\circ$ . Fonte: Oliveira & Rodrigues (1998).

$$\Pi_{XBL_0} = \gamma^{12} \Phi_{XBL_0} \quad (4.36)$$

onde  $\Phi_{XBL_0}$  é dado pela eq.(3.41) com  $n = 0$ ,  $\eta = 0.005^\circ$  e  $B(\bar{k})$  é a função janela de Blackman, definida por

$$B(\bar{k}) = \begin{cases} a_0 [0.42 - 0.5 \frac{\pi \bar{k}}{k_0} + 0.08 \frac{2\pi \bar{k}}{k_0}] & \text{para } 0 \leq \bar{k} \leq 2\bar{k}_0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.37)$$

com  $a_0 = 0.05$  mm e a frequência central  $f_0 = \frac{c}{2\pi} \bar{k}_0 = 700$  GHz, com uma largura de banda de 6 db em redor de 576 GHz. As simulações mostram que em ambos os casos as ondas propagam-se por até pelo menos 100 km sem sofrer espalhamento apreciável e, ainda mais importante, seus picos se propagam com velocidades superluminais dadas aproximadamente por  $1/\cos \eta$ .

É importante enfatizar que após o seu nascimento, mesmo se a *FAA-SEXW* se propaga com distorção mínima, e ainda que o pico possa ser programado para surgir em um ponto arbitrário sobre o eixo  $z$  com coor-

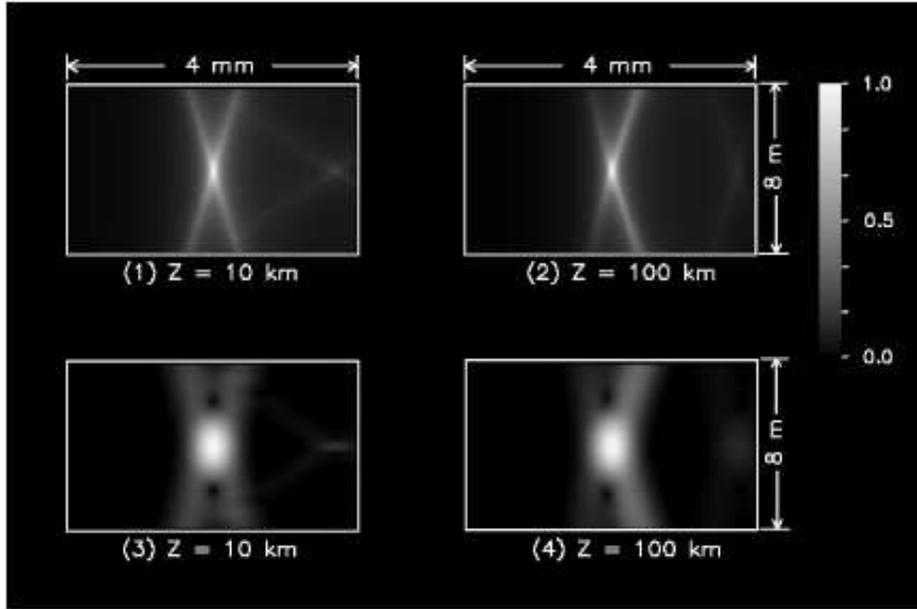


Figura 4.2: (1,2) A parte real de  $FAA\Phi_{XBB_0}$  nas distâncias  $z = 10$  km e  $z = 100$  km a partir do radiador, localizado no plano  $z = 0$ , com  $D = 20$  m e  $\eta = 0,005^\circ$ . (3,4) A parte real de  $FAA\Phi_{XBL_0}$  para as mesmas distâncias. Fonte: Rodrigues & Lu (1997).

denada menor que a profundidade de campo,<sup>3</sup> ela *não pode* ser usada para enviar informações ao longo do eixo  $z$  com velocidade maior que a da luz.

Para entender isso, lembremos que o movimento de uma *FAASEXW* é completamente causal, visto que é governado pela função de Green retardada. Isto significa que a formação do pico da onda, em um certo ponto do eixo  $z$ , no instante  $t_p$ , é determinada pela configuração do sistema em pontos do espaço situados à distância  $D = c(t - t_p)$ , ou seja, os picos de uma *FAASEXW* em dois pontos diferentes do eixo  $z$  não estão causalmente relacionados.

Como veremos na seção 7.3, o fenômeno é similar à propagação superluminal do pico de um pulso que se desloca através de um meio dispersivo. Este comportamento superluminal (que só tem lugar sob certas condições)

<sup>3</sup>A profundidade de campo é por definição a distância na qual o campo cai para metade de seu valor no plano  $z = 0$ . Pode ser facilmente mostrado que este valor, para a *FAASEXW*, é dado por  $a \cotg \eta$ . Com os parâmetros usados nas simulações, esta distância é de 115 km!

é devido ao fenômeno de *reformatamento de pulso*. Como mencionado na seção 8.4, existe atualmente um consenso de que, devido ao fato de que todo detector possui um limiar de detecção finito, tais picos superluminais *transportam* informação. Entretanto, o movimento superluminal de pulsos em meios dispersivos, da mesma forma que os movimento de uma *FAASEXW*, não implicam em uma falsificação do Princípio de Relatividade (*PR*). O que entendemos exatamente pelo *PR* será discutido no capítulo 8.

Finalmente, vale a pena mencionar que o lançamento de uma *FAASEXW*, na medida em que se trata de um processo bem definido no tempo (como fica claro da discussão apresentada acima) não tem qualquer relação com o problema de Cauchy, que é um problema de valor inicial.

### 4.3.3 Evidência experimental para *FAASEXWs*

A questão central é: é possível lançar-se uma *FAASEXW* no espaço físico? Bem, a resposta é sim. Nos últimos anos, várias *FAASEXWs* foram produzidas em um engenhoso e importante experimento conduzido por Saari e Reivelt (Saari & Reivelt 1997), usando técnicas baseadas em aproximações de abertura finita.

É muito importante deixar claro, contudo, que uma das conclusões dos autores de (Saari & Reivelt 1997) parece ser *non sequitur*. Com efeito, eles afirmam que a superluminalidade envolvida em seu experimento é somente um tipo de processo livre de inércia (Barashenkov & Rodrigues 1998) “similar to the one that happens in a faster than light movement of a bright stripe on a screen when a plane light pulse is falling at an angle  $\theta$  onto a plane screen.” Naturalmente, a afirmação entre aspas não tem nada a ver com o movimento de *FAASEXWs*, como a discussão acima deixa claro.

## Capítulo 5

# Novas soluções da *EDH* e da *EW*

### 5.1 Soluções com $v \neq c$ da *EDH* e da *EW* com $m = 0$

A fim de encontrar tais soluções, apresentadas pela primeira vez em Rodrigues & Vaz (1997), vamos utilizar algumas idéias da supersimetria. Recordamos que a equação de Dirac sem massa e a equação de Weyl (*EW*) têm a forma  $\boldsymbol{\partial}\psi_\Sigma = 0$ , com  $\psi_\Sigma \in \text{sec } \mathcal{C}^+(M)$ , onde  $\psi_\Sigma$  é um campo de spinores de Dirac-Hestenes no primeiro caso, e um campo de spinores de Weyl no segundo. Este fato permite definir um potencial generalizado para  $\psi_\Sigma$ . Com efeito, para cada  $\psi_\Sigma$  existe um  $\mathcal{A} = A + \gamma^5 B$ ,  $A, B \in \text{sec } \bigwedge^1(M) \subset \text{sec } \mathcal{C}(M)$ , tal que

$$\psi_\Sigma = \boldsymbol{\partial}(A + \gamma^5 B). \quad (5.1)$$

O operador de Dirac  $\boldsymbol{\partial}$  tem aqui um papel análogo ao de um operador de supersimetria (Giéres n.d.). De fato, as álgebras de Clifford são  $\mathbb{Z}_2$  graduadas, e  $\mathcal{C}^+\mathcal{C}^+ \subset \mathcal{C}^+$ ,  $\mathcal{C}^\pm\mathcal{C}^\mp \subset \mathcal{C}^-$ ,  $\mathcal{C}^-\mathcal{C}^- \subset \mathcal{C}^+$ , onde  $\mathcal{C}^+$  [ $\mathcal{C}^-$ ] denota o conjunto dos elementos de  $\mathcal{C}$  de grau par [ímpar]. Visto que o operador de Dirac tem propriedades de vetor, sua ação transforma campos de grau par em campos de grau ímpar, e vice-versa. Representar um campo de spinores por meio de formas não homogêneas de grau par é portanto equivalente a encontrar uma representação bosônica para o campo fermiônico.

A quantidade  $\mathcal{A}$  pode ser interpretada como um tipo de potencial para o campo de Dirac sem massa (ou para o campo de Weyl). Com efeito, de

$\partial \psi_\Sigma = 0$  e da eq.(5.1) segue-se que

$$\partial^2 \mathcal{A} = 0, \quad (5.2)$$

ou que

$$\partial^2 A = 0, \quad \partial^2 B = 0. \quad (5.3)$$

Uma solução subluminal simples, em repouso no referencial inercial  $I = e_0$ , nas coordenadas  $\langle x^\mu \rangle$  naturalmente adaptadas a  $I$  é

$$\mathcal{A}_0(t, \vec{x}) = \gamma^0 \phi(\vec{x}) \exp(\gamma^5 \Omega t) \quad (5.4)$$

com  $\phi(\vec{x})$  dado pela expressão (3.8). Temos

$$\mathcal{A}_0 = \frac{C}{r} (\text{sen } \Omega r \cos \Omega t \gamma^0 - \text{sen } \Omega r \text{ sen } \Omega t \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \quad (5.5)$$

Então

$$\begin{aligned} \psi_\Sigma^0 = & \frac{C}{r^3} [-\Omega r^2 \text{sen } \Omega r \text{ sen } \Omega t + \gamma^0 \gamma^1 \lambda x \cos \Omega t \\ & + \gamma^0 \gamma^2 \lambda y \cos \Omega t + \gamma^0 \gamma^3 \lambda z \cos \Omega t - \gamma^1 \gamma^2 \lambda z \text{sen } \Omega t + \gamma^1 \gamma^3 \lambda y \text{sen } \Omega t \\ & - \gamma^2 \gamma^3 \lambda x \text{sen } \Omega t + \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \Omega r^2 \text{sen } \Omega r \cos \Omega t], \quad (5.6) \end{aligned}$$

onde  $\lambda = \Omega r \cos \Omega r - \text{sen } \Omega r$ .

A solução acima no formalismo usual se escreve como:

$$\psi^0 = \begin{pmatrix} i \text{sen } \Omega t \left( \frac{\lambda z}{r^3} + i \frac{\Omega}{r} \text{sen } \Omega r \right) \\ i \text{sen } \Omega t \left( \frac{x + iy}{r^3} \right) \lambda \\ - \cos \Omega t \left( \frac{\lambda z}{r^3} + i \frac{\Omega}{r} \text{sen } \Omega r \right) \\ - \cos \Omega t \left( \frac{x + iy}{r^3} \right) \lambda \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

e pode-se verificar explicitamente que de fato  $\partial \psi^0 = 0$ .

Outras soluções subluminais podem ser obtidas por *boosts* apropriados. Uma solução superluminal explícita  $\psi_\Sigma^>$  pode ser obtida escrevendo-se

$$\mathcal{A}_>(t, \vec{x}) = \gamma^0 \Phi_>(t, \vec{x}) \quad (5.8)$$

com  $\Phi_{>}$  dado por (3.7) e  $\psi_{\Sigma}^{\geq} = [\boldsymbol{\partial} \Phi_{>}(t, \vec{x})] \gamma^0$ . Barut (Barut 1994) encontrou soluções subluminais de  $\boldsymbol{\partial} \Psi = 0$ , onde  $\Psi$  é o campo de spinores de Dirac usual, empregando um método diferente daquele usado aqui; o método aqui apresentado é bem mais simples, pois é independente de representações e emprega ferramentas elegantes da supersimetria.

## 5.2 Soluções com $v \geq c$ da *EDH*

A fim de obter essas soluções, lembramos que na seção 2 encontramos soluções com  $v \geq c$  da equação de Klein-Gordon. Sejam  $A, B \in \text{sec } \Lambda^1(TM) \subset \mathcal{C}(M)$  soluções com  $v \geq c$  das equações

$$\boldsymbol{\partial}^2 A + m^2 A = 0, \quad \boldsymbol{\partial}^2 B + m^2 B = 0. \quad (5.9)$$

Chamemos  $\mathcal{A} = A + \gamma^5 B$ . Então,  $\mathcal{A}$  pode ser usada, como no caso das equações de Dirac sem massa e de Weyl, como um “potencial” para gerar um campo de spinores de Dirac-Hestenes. De fato, escrevendo

$$\psi = \boldsymbol{\partial} \mathcal{A} \gamma^{21} + m \mathcal{A} \gamma^0, \quad (5.10)$$

Verificamos facilmente que

$$\boldsymbol{\partial} \psi \gamma^{21} - m \psi \gamma^0 = 0. \quad (5.11)$$

Agora, se escolhermos uma solução luminal ou superluminal das equações (5.9) para  $\mathcal{A}$  ( $\boldsymbol{\partial}^2 \mathcal{A} + m^2 \mathcal{A} = 0$ ), *e.g.* escrevendo

$$\mathcal{A}_{>} = \Phi_{>} e^{\gamma^5 \beta} \mathbf{n}, \quad (5.12)$$

onde  $\beta$  é uma constante real,  $\mathbf{n}$  é um campo de 1-formas constante e  $\Phi_{>}$  é qualquer solução *UPW* luminal ou superluminal da *EKG*, então teremos soluções *UPW* luminiais e superluminiais da equação de Dirac.

Cabe aqui um comentário final. A aproximação não relativística da *EDH* produz uma equação de Schrödinger mostrando que nela o spin encontra-se “congelado” (Gutler & Hestenes 1975). Existem soluções não dispersivas, *i.e.* soluções *UPW* da equação de Schrödinger? Esta questão foi recentemente investigada em (Barashenkov & Rodrigues 1998). Encontrou-se a solução *UPW* em repouso

$$\Psi(t, \vec{x}) = \frac{\text{sen } \alpha r}{r} e^{-imc^2 t/2\hbar}, \quad (5.13)$$

onde  $\alpha = mc/\hbar$ . Todavia, se aplicarmos um *boost* de Galileu  $(x, y, z, t) \mapsto (x, y, z - vt, t)$  a esta solução, veremos que a função correspondente só será solução da equação de Schrödinger para  $v = 0$ !

## Capítulo 6

# A Teoria das Características e o Conceito de Sinal

### 6.1 Introdução

Nos capítulos 3, 4 e 5 demonstramos a existência de soluções tipo UPW que se propagam com velocidades arbitrárias  $0 \leq v < \infty$  para todas as equações de onda relativísticas.

Além disso, as simulações numéricas de aproximações fisicamente realizáveis para a onda  $X$  apresentadas em 4.3 mostram que os picos dessas ondas realmente se propagam com velocidades superluminais, ao menos na região de campo próximo. Este fato constitui uma forte evidência teórica de que é possível produzir-se ondas eletromagnéticas superluminais no vácuo, o que nos coloca diante da seguinte questão: Como estes resultados podem ser entendidos em face da afirmação, referida em muitos livros (como por exemplo (Stratton 1941, p. 337)) de que Sommerfeld e Brillouin (Brillouin 1960) provaram que nenhum sinal eletromagnético pode se propagar com velocidade maior que  $c$ ?

Para responder adequadamente a esta questão precisamos investigar os conceitos de sinal, de velocidade da frente de onda ( $v_F$ ) e de velocidade do sinal ( $v_s$ ) adotados por Sommerfeld e Brillouin ( $SB$ ). Em especial, é preciso verificar se é possível produzir na prática um ‘sinal’ que satisfaça tal definição. Esses conceitos estão intimamente relacionados à noção de *superfície característica* de um sistema de equações diferenciais parciais, que será estudada em detalhes neste capítulo. As seções 6.2 a 6.7 seguem de perto a apresentação de Courant e Hilbert (Courant & Hilbert 1966). Os resultados obtidos servirão para mostrar no capítulo 7 que os resultados

de  $SB$  são bastante particulares e não podem ser usados para endossar a afirmação de que nenhuma configuração eletromagnética pode se propagar com velocidade maior que  $c$ .

## 6.2 Equações diferenciais parciais de segunda ordem

Consideremos no espaço-tempo de Minkowski  $M$ , munido de uma carta de Lorentz  $\langle x^\mu \rangle$ , a equação diferencial parcial de segunda ordem

$$L(u) + d = a^{\mu\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + d = 0, \quad a^{\mu\nu} = a^{\nu\mu}, \quad (6.1)$$

onde  $u$ ,  $\partial u / \partial x^\mu$  e  $\partial^2 u / \partial x^\mu \partial x^\nu$  são funções de  $\langle x^\mu \rangle$ . Consideraremos inicialmente um caso bastante geral, em que  $a^{\mu\nu}$  e  $d$  são funções de  $\langle x^\mu \rangle$  e eventualmente de  $u$  e  $\partial u / \partial x^\mu$ , o que quer dizer que nossa equação é linear apenas nas derivadas de segunda ordem. Supomos ainda que todas as funções que aparecem na eq.(6.1) são contínuas, a menos que se afirme o contrário.

O conceito de *característica* origina-se no problema de estender os valores iniciais, dados sobre uma (hiper-)superfície  $\mathcal{B} \subset M$  de *dimensão três*, definida de forma implícita por

$$\mathcal{B} : \phi(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0, \quad \text{grad } \phi \neq 0, \quad (6.2)$$

para uma solução da eq.(6.1). Os dados iniciais em  $\mathcal{B}$  consistem nos valores de  $u$  em  $\mathcal{B}$ , que determinam as derivadas interiores de  $u$  em  $\mathcal{B}$  (vide Ap.A), e nos valores de uma derivada “para fora” de  $u$ , por exemplo

$$u_\phi = \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \phi^\mu, \quad \phi^\mu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}. \quad (6.3)$$

Desta maneira, como é mostrado no apêndice A, todas as derivadas interiores de  $u$  em  $\mathcal{B}$  ficam determinadas.

O famoso *problema de Cauchy* consiste em encontrar uma solução da eq.(6.1) em uma vizinhança completa de  $\mathcal{B} \subset M$ . Entretanto, se considerarmos a equação diferencial dada somente “ao longo” de  $\mathcal{B}$ , obteremos um problema bem mais simples, que pode ser formulado da seguinte maneira:

Estenda os dados iniciais em  $\mathcal{B}$  a uma *faixa integral*, i.e., encontre as funções  $u$ ,  $\partial u / \partial x^\mu$ ,  $\partial^2 u / \partial x^\mu \partial x^\nu$  que satisfaçam a eq.(6.1) ao longo de  $\mathcal{B}$ .

A solução deste problema, como veremos, conduz naturalmente à formulação do conceito de característica.

### 6.2.1 Características

Para resolver o problema proposto, introduzimos um novo sistema de coordenadas  $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$  em  $\mathcal{B}$ , de maneira que  $\xi^0 = \phi$  e que os  $\xi^i$ 's,  $i = 1, 2, 3$ , sejam variáveis independentes em  $\mathcal{B}$ . A formulação de nosso problema passa a ser:

Dados sobre a hipersuperfície  $\mathcal{B}$  os valores de  $u(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$  e  $u_\phi(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ , com

$$u_\phi = \frac{\partial u}{\partial \xi^0} = \frac{\partial u}{\partial \phi}, \quad (6.4)$$

construa uma função  $u(x^0, x^1, x^2, x^3)$  de maneira que para todos os pontos de  $\mathcal{B}$  esta função e suas derivadas em relação a  $\phi$  coincidam com os valores dados de  $u$  e  $u_\phi$ , e tal que  $u(x^0, x^1, x^2, x^3)$  satisfaça a eq.(6.1).

Todas as derivadas segundas de  $u(x^\mu)$ , exceto  $\partial^2 u / \partial \phi^2$ , são univocamente determinadas pelos dados em  $\mathcal{B}$ , diferenciando-se as expressões para  $u$  e  $u_\phi$  em relação às variáveis interiores  $\xi^\mu$ . Em termos das novas variáveis a eq.(6.1) fica

$$\begin{aligned} L(u) + d &= a^{\mu\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + d \\ &= a^{\mu\nu} \left[ u_{\phi\phi} \phi_\mu \phi_\nu + u_\phi \phi_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial u_\phi}{\partial \xi^i} \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\mu} \phi_\nu + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\nu} \phi_\mu \right) + \frac{\partial u}{\partial \xi^i} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\nu} \right] + d \\ &= a^{\mu\nu} u_{\phi\phi} \phi_\mu \phi_\nu + (\dots) \\ &= u_{\phi\phi} Q(\phi_\mu, \phi_\nu) + (\dots) = 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde escrevemos  $\phi_\mu = \partial\phi/\partial x^\mu$  e  $u_\phi = \partial u/\partial \xi^0 = \partial u/\partial \phi$ . Os parênteses  $(\dots)$  representam termos conhecidos a partir dos dados iniciais, i.e., que contêm somente derivadas interiores de  $u$  e de suas derivadas primeiras. A expressão

$$Q(\phi_\mu, \phi_\nu) = a^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu \quad (6.6)$$

é chamada de *forma característica*.

Da eq.(6.5) vemos que  $u_{\phi\phi}$  é univocamente determinada pelos dados iniciais em um ponto  $p \in \mathcal{B}$  se e somente se  $Q(\phi_\mu, \phi_\nu) \neq 0$  naquele ponto. Para cada ponto  $p \in \mathcal{B} \subset M$  temos então as seguintes alternativas:

- (i) A derivada de segunda ordem  $u_{\phi\phi}$  “para fora” de  $\mathcal{B}$ , e com ela todas as derivadas de segunda ordem de  $u$ , são *univocamente* determinadas pelos dados iniciais.
- (ii) A eq.(6.1) representa uma restrição adicional em relação aos dados iniciais.

Suponhamos que uma das alternativas acima seja verdadeira para toda a hipersuperfície  $\mathcal{B}$ . Então, no caso (i)  $\mathcal{B}$  é chamada de superfície *livre* ou de *Cauchy*, enquanto que no caso (ii) dizemos que  $\mathcal{B}$  é uma superfície *característica*. Neste caso a condição característica

$$Q(\phi_\mu, \phi_\nu) = a^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu = 0 \quad (6.7)$$

é verificada substituindo-se nos  $a^{\mu\nu}$  os valores conhecidos de  $u$  e  $u_\phi$  em  $\mathcal{B}$ .

Devemos notar que apesar da condição característica [eq.(6.7)] ter a forma de uma equação diferencial parcial de primeira ordem para  $\phi$ , a função  $\phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$  não precisa satisfazer esta equação identicamente; por definição ela precisa satisfazer a eq.(6.7) apenas em  $\mathcal{B}$ , i.e., para  $\phi = 0$ .

Por outro lado, se  $\mathcal{B}$  é dada na forma

$$x^0 = \psi(x^1, x^2, x^3), \quad (6.8)$$

então a eq.(6.7) representa uma equação diferencial para  $\psi$  em apenas três variáveis. Neste caso a equação característica assume a forma

$$-a^{ij} \psi_i \psi_j - 2 \sum_{i=1}^3 a^{i0} \psi_i + a^{00} = 0, \quad (6.9)$$

onde  $\psi_i = \partial\psi/\partial x^i$  e as expressões para os coeficientes em  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  precisam ser substituídas por expressões envolvendo  $x^0$ ,  $u$  e  $u^i$ .

Para entender melhor a relação entre as equações (6.7) e (6.9), suponha que  $\phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$  é uma solução da equação característica, interpretada como uma equação diferencial para  $\phi$ . Se  $\phi = \text{constante} = \alpha$  for resolvida para  $x^0$ , i.e., se escrevermos

$$x^0 = \psi(x^1, x^2, x^3, \alpha), \quad (6.10)$$

então teremos obtido uma família a um parâmetro de soluções da eq.(6.9). Reciprocamente, se  $x^0 = \psi(x^1, x^2, x^3, \alpha)$  representa uma família a um parâmetro de soluções de (6.9) e se ela for resolvida para  $\alpha$ , encontraremos

$$\alpha = \phi(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (6.11)$$

e  $\phi$  será uma solução da equação característica (6.7).

No caso particular em que  $\phi$  satisfaz a eq.(6.7) para  $\phi = 0$ , a função correspondente  $x^0 = \psi(x^1, x^2, x^3)$  será uma solução da eq.(6.9). Cada solução suficientemente suave desta equação diferencial parcial de primeira ordem pode ser mergulhada em uma família a um parâmetro de soluções  $x^0 = \psi(x^1, x^2, x^3, \alpha)$ . Resolvendo esta equação para  $\alpha$  encontramos então uma solução correspondente da eq.(6.7). Em resumo:

Cada superfície característica  $\phi = 0$  pode ser mergulhada em um família a um parâmetro de superfícies características  $\phi = \alpha$ .

Podemos, portanto, supor a existência de um tal mergulho, sem perda de generalidade, o que faremos de agora em diante, salvo menção explícita em contrário. Em tais condições a função  $\phi$  será uma solução da equação característica (6.7) interpretada como uma equação diferencial parcial.

No caso particular em que  $a^{00} = 1$ ,  $a^{i0} = 0$  ( $a^{ij} < 0$ ) temos

$$\sum_{i,k=1}^3 a^{ik} \psi_i \psi_k = -1. \quad (6.12)$$

Este é o caso mais comum quando se estuda a equação de onda homogênea em problemas de física.

## 6.2.2 Famílias de características

Podemos pensar no problema de forma diferente. Para uma dada solução  $u(x^0, x^1, x^2, x^3)$  da eq.(6.1),  $u$  e  $\partial u / \partial x^\mu$  são funções conhecidas de  $x^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Se substituirmos as expressões conhecidas para  $u$  e  $\partial u / \partial x^\mu$

nas fórmulas dos  $a^{\mu\nu}$ , a condição característica (6.7) passará a definir as *superfícies características* correspondentes à solução  $u$  dada.

Se a eq.(6.7) é satisfeita não somente para  $\phi = 0$ , mas identicamente em todo o espaço-tempo, então a expressão  $\phi = \text{constante} = \alpha$  define uma família de superfícies características parametrizadas por  $\alpha$ . Neste caso,  $\phi$  satisfaz a eq.(6.7), interpretada como uma equação diferencial parcial de primeira ordem.

A eq.(6.5) mostra que, para uma superfície característica  $\mathcal{B} : Q(\phi_\mu, \phi_\nu) = 0$ , o operador diferencial  $L(u)$  é um operador diferencial *interior* no seguinte sentido: Se os valores de  $u$  e  $\partial u / \partial x^\mu$  são dados ao longo de  $\mathcal{B}$ , então  $L(u)$  é conhecido. Isto ocorre porque a partir dos dados iniciais podemos obter todas as derivadas interiores de  $\partial u / \partial x^\mu$  e também de  $u_\phi$ .

A derivada de segunda ordem “para fora” de  $\mathcal{B}$ ,  $u_{\phi\phi}$ , não aparece em  $L(u)$ , pois está multiplicada por  $Q(\phi_\mu, \phi_\nu)$ , que é zero se  $\mathcal{B}$  é característica. Assim,  $L(u) = 0$  pode ser considerada em  $\mathcal{B}$  como uma equação diferencial de primeira ordem para a derivada “para fora” de  $\mathcal{B}$ ,  $u_\phi$ .

Superfícies características somente podem existir se  $\phi$  é real. A partir de agora restringiremos nosso estudo aos casos em que isto é verdadeiro. Suporemos, além disso, que em cada ponto  $p \in \mathcal{B} \subset M$ ,  $Q$  pode ser escrita na forma

$$Q = \phi_0^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2 \quad (6.13)$$

por meio de uma transformação linear nas variáveis independentes  $x^\mu$  em  $p$ . Neste caso a eq.(6.1) é chamada *hiperbólica* e sua parte principal, nas novas coordenadas no ponto  $p$ , é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial (x^3)^2} \quad (6.14)$$

### 6.2.3 Equações diferenciais parciais lineares

O caso geral discutido na seção 6.2 simplifica-se bastante quando consideramos uma equação diferencial parcial de segunda ordem linear,

$$L(u) + d = 0, \quad (6.15)$$

com

$$L(u) = a^{\mu\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + a^\mu \frac{\partial u}{\partial x^\mu} + au, \quad (6.16)$$

e onde os coeficientes  $a^{\mu\nu}$ ,  $a^\mu$  e  $a$  são funções conhecidas das variáveis independentes  $x^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Neste caso a condição característica [eq.(6.7) ou (6.9)] depende somente da superfície  $\mathcal{B}$ , mas não dos dados iniciais, ou seja, a condição característica é independente da solução particular considerada.<sup>1</sup>

Consideremos, por exemplo, a equação de onda homogênea em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (6.17)$$

Neste caso temos  $a^{00} = 1$ ,  $a^{ii} = -1$ ,  $i = 1, 2, 3$  e  $a^{\mu\nu} = 0$  se  $\mu \neq \nu$ . Então a equação característica (6.7) assume a forma da chamada *equação eikonal*:

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2 = 0. \quad (6.18)$$

É fácil comprovar que a superfície

$$\chi = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (6.19)$$

satisfaz a eq.(6.18) e é, portanto, uma superfície característica. Esta superfície é chamada de a *cone característico*. Embora o cone  $\chi = 0$  seja uma superfície característica, as superfícies  $\chi = \alpha$  não são características para  $\alpha \neq 0$ .

Por outro lado, e conforme foi dito anteriormente, se mergulharmos o cone característico original na família de cones

$$\phi = t - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \alpha, \quad (6.20)$$

teremos

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 = 0, \quad (6.21)$$

e as superfícies  $\phi = \alpha$  serão características para todo valor (real) de  $\alpha$ .

---

<sup>1</sup>Isto será verdadeiro mesmo que somente a parte principal de  $L(u)$  seja independente de  $u$  e  $\partial u/\partial x^\mu$ , i.e., quando os  $a^{\mu\nu}$  não dependem de  $u$  e de suas derivadas, mas os coeficientes  $a^\mu$  e  $a$  são funções de  $u$  e  $\partial u/\partial x^\mu$ . Equações deste tipo são chamadas *semi-lineares*.

### 6.2.4 Invariância das características

Consideremos a transformação de coordenadas

$$x^\mu \mapsto \xi^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (6.22)$$

Com uma transformação de coordenadas como esta, uma função  $u(x^\mu)$  será transformada em uma função diferente  $\omega(\xi^\mu)$ . Em termos das novas variáveis a eq.(6.16) é escrita como:

$$\begin{aligned} L(u) &= L'(u) + au \\ &= \alpha^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^\mu \partial \xi^\nu} + \beta^\mu \frac{\partial \omega}{\partial \xi^\mu} + a\omega \\ &= \Lambda'(\omega) + a\omega \equiv \Lambda(\omega). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Com estas definições temos  $L(u) = \Lambda(\omega)$  e também  $L'(u) = \Lambda'(\omega)$ . Vale então o resultado:

Características são invariantes em relação a transformações arbitrárias das coordenadas (variáveis independentes).

Com efeito, seja

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (6.24)$$

Então,

$$\alpha^{\mu\nu} = T_\rho^\mu T_\sigma^\nu a^{\rho\sigma}. \quad (6.25)$$

Se  $\phi(x^0, x^1, x^2, x^3) = \psi(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ , então

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = T_\mu^\nu \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\nu}, \quad (6.26)$$

de onde se segue que

$$a^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} = a^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu = a^{\mu\nu} T_\mu^\rho \psi_\rho T_\nu^\sigma \psi_\sigma = \alpha^{\rho\sigma} \psi_\rho \psi_\sigma = \alpha^{\rho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\sigma}, \quad (6.27)$$

o que mostra que de fato a forma característica é invariante.

### 6.3 Raios e bicaracterísticas

Cada superfície característica  $\phi = 0$  ou  $\phi = \alpha$  é gerada por uma família de *curvas bicaracterísticas* ou *raios característicos*. Nos casos em que os coeficientes  $a^{\mu\nu}$  da eq.(6.1) são independentes de  $u$  e  $\partial u/\partial x^\mu$ , ou seja, para equações lineares ou semi-lineares, esses raios são dados por aplicações (curvas)  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $s \mapsto \sigma(s)$  tais que

$$\frac{d}{ds}(x^\mu \circ \sigma) = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \phi_\mu} = a^{\mu\nu} \phi_\nu. \quad (6.28)$$

Por simplicidade, e quando não houver risco de confusão, escreveremos  $\dot{x}^\mu = dx^\mu/ds$  no lugar de  $d(x \circ \sigma)/ds$ . Dado o raio característico  $\sigma(s)$ , associamos a ele a *faixa característica* definida pelo par de aplicações  $x^\mu(s)$  e  $p_\mu(s) = \phi_\mu(x \circ \sigma(s))$ . Estas aplicações são soluções do sistema canônico

$$\dot{x}^\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial p_\mu} = a^{\mu\nu} \phi_\nu, \quad \dot{p}_\mu = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (6.29)$$

Este sistema fornece todas as possíveis faixas características para a solução  $u$ .

Devemos ter em mente que as equações diferenciais ordinárias em (6.29) fornecem soluções para as quais  $Q = \text{const.} = \alpha$ . Para obtermos uma solução genuína da eq.(6.1) precisamos impor a condição característica  $Q = 0$  [eq.(6.7)] em um ponto de cada um dos raios, o que então implicará que  $Q = 0$  ao longo de todo o raio. As curvas integrais da eq.(6.28) satisfazendo esta condição são os *raios característicos* ou *bicaracterísticas* da eq.(6.1) e geram todos os membros das famílias de superfícies características  $\phi = \text{constante}$ .

Se duas superfícies características distintas  $t = \psi$  e  $t = \chi$  são tangentes em  $t = 0$ , então para qualquer  $t > 0$  elas possuem em comum um ponto de tangência, que se move ao longo do raio comum às duas superfícies características. No caso em que os coeficientes  $a^{\mu\nu}$  da eq.(6.1) são constantes, os raios característicos são *retas*.

Para ver um exemplo de aplicação destes conceitos, consideremos em  $M$  a equação de onda homogênea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0. \quad (6.30)$$

A superfície característica satisfaz a equação característica

$$Q(\phi_\mu, \phi_\nu) = \phi_0^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2 = \eta^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu = 0, \quad (6.31)$$

cujos coeficientes, como se pode ver, não dependem explicitamente de  $\langle x^\mu \rangle$  nem de  $u$  ou suas derivadas.

O sistema de equações (6.29) para as faixas características fornece então:

$$\dot{x}^\mu(s) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\phi_\nu = \phi^\mu; \quad (6.32)$$

$$\dot{\phi}_\mu = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x^\mu} = 0. \quad (6.33)$$

Derivando (6.32) e substituindo em (6.33) encontramos que  $\dot{\phi}^\mu = \ddot{x}^\mu = 0$  e portanto

$$x^\mu = a^\mu s + \alpha^\mu, \quad (6.34)$$

com  $a^\mu$  e  $\alpha^\mu$  constantes. Os raios característicos são portanto retas parametrizadas por  $s$ . Escolhendo  $a^0 = 1$  e  $\alpha^0 = 0$  identificamos o tempo  $t$  e o parâmetro  $s$ . As equações para os raios tornam-se então:

$$x^0 = t, \quad x^i = a^i t + \alpha^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.35)$$

Finalmente, substituindo estes valores em (6.32) encontramos

$$\phi_0 = \dot{x}_0 = 1, \quad \phi_i = -\dot{x}_i = -a^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.36)$$

Quaisquer que sejam os valores dos  $a^i$  e  $\alpha^i$  nas duas últimas equações, os pares  $(x^\mu, \phi_\mu)$  satisfazem o sistema canônico. Entretanto, para que a superfície seja característica é ainda necessário que os  $\phi_\mu$  satisfaçam a condição  $Q = 0$ , i.e., que

$$\eta^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu = 1 - (-a^1)^2 - (-a^2)^2 - (-a^3)^2 = 0, \quad (6.37)$$

o que implica que

$$\sum_{i=1}^3 (a^i)^2 = 1. \quad (6.38)$$

Desta maneira as bicaracterísticas, interpretadas não no espaço-tempo  $M$  mas no  $\mathbb{R}^3$ , são retas parametrizadas pelo tempo  $t$ , ao longo das quais o ponto de coordenadas  $(x^i(t))$  se move com velocidade unitária. Uma solução da eq.(6.31) é o cone

$$\phi(t, x, y, z) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu. \quad (6.39)$$

As características definidas pela equação

$$\phi = t - \psi(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad (6.40)$$

satisfazem

$$\sum_{i=1}^3 (\psi_i)^2 = 1, \quad (6.41)$$

e neste caso as características para a equação de onda homogênea são definidas por uma família de superfícies paralelas  $t = \psi(x^1, x^2, x^3)$  geradas a partir da superfície inicial por movimento paralelo com velocidade unitária ao longo das normais. Os raios são as trajetórias ortogonais associadas.

## 6.4 Características como frentes de onda

As superfícies características desempenham o papel de *frentes de onda*, i.e., superfícies através das quais as soluções da eq.(6.1) podem apresentar *descontinuidades*, por exemplo, nas derivadas segundas (no sentido de que tais derivadas assumem valores distintos de cada lado da superfície). Visto que sobre uma superfície de Cauchy as derivadas segundas estão univocamente determinadas pelos dados de Cauchy, uma descontinuidade desse tipo só pode acontecer ao longo de uma superfície característica.

Frentes de onda como essa aparecem, por exemplo, na forma de fronteiras além das quais não existe nenhuma excitação em um certo instante de tempo  $t$ . A situação física típica é aquela em que a solução representando a excitação anula-se identicamente em um lado da fronteira, mas não no outro.

Consideremos agora a equação linear de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + a^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + d = 0, \quad (6.42)$$

onde  $i, j = 1, 2, 3$  e  $a^{ij}, a^i$ , e  $d$  são funções conhecidas das coordenadas  $(x^i)$ . Consideremos a função  $\phi = t - \psi(x^1, x^2, x^3)$ . Estamos interessados em uma solução  $u(t, x^1, x^2, x^3)$  da eq.(6.42) com uma superfície de descontinuidade  $\psi(x^1, x^2, x^3) = t$  que depende do tempo e se move no espaço físico tridimensional, identificado com o  $\mathbb{R}^3$ .

Ao longo dos raios, como na seção 6.3, tomamos  $dt/ds = 1$ . Então o parâmetro  $s$  a ser introduzido na definição dos raios é o tempo  $t$  e a equação para eles fica (cf. eq.(6.29))

$$\frac{dx^i}{dt} = a^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^k}. \quad (6.43)$$

No  $\mathbb{R}^3$  esses raios atravessam as frentes de onda  $\psi = t$  e temos:

$$\frac{dx^i}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = a^{ik} \psi_i \psi_k = 1. \quad (6.44)$$

O vetor  $\vec{v} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$  é chamado raio transversal à frente de onda  $\psi = t$ .

Se a matriz  $(a^{ij})$  for positiva definida, fica assegurada a hiperbolicidade da eq.(6.42). Nesse caso a direção do raio e o plano tangente à frente de onda são ditos *conjugados* em relação ao elipsóide

$$a^{ik} \psi_i \psi_k = 1. \quad (6.45)$$

Além do vetor velocidade do raio, com componentes  $v^i = \dot{x}^i$ , podemos também introduzir o *vetor velocidade normal* da frente de onda progressiva. Esta velocidade é determinada acompanhando-se no tempo um ponto de  $\psi = t$  nas trajetórias ortogonais da família  $\psi = t = \text{constante}$ . Suas componentes  $n^i$  são proporcionais às derivadas  $\partial\psi/\partial x^i$  e são dadas por

$$n_i = \frac{\psi_i}{(\text{grad } \psi)^2}. \quad (6.46)$$

Assim, a relação entre  $v^i$  e  $n^i$  é

$$v^i = a^{ik} \psi_k = a^{ik} n_k (\text{grad } \psi)^2. \quad (6.47)$$

## 6.5 Cone de raios, cone normal e conóide de raios

As direções dos raios que passam por um ponto  $p \in M$  formam uma superfície quádrlica denominada *cone de raios local* (ou *cone de Monge*) para a equação diferencial característica (6.6):

$$Q(\phi_\mu, \phi_\nu) = a^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} = 0. \quad (6.6')$$

Esta equação diferencial é uma condição imposta sobre os coeficientes direcionais  $\phi_\mu$  das normais aos elementos da superfície característica. Na base coordenada  $\{\mathbf{e}_\mu = \partial/\partial x^\mu\}$ ,  $\mathbf{e}_\mu \in \text{sec } TM$ , o vetor  $\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_\mu$  “mora” na quádrlica chamada *cone normal* ou *cone dual*, definida pela equação (6.6').

As direções dos raios são dadas por

$$\dot{x}^\mu = a^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}, \quad (6.48)$$

e portanto

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = (a^{-1})_{\mu\nu} \dot{x}^\nu. \quad (6.49)$$

Usando a eq.(6.49) na eq.(6.6') obtemos

$$(a^{-1})_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (6.50)$$

Finalmente, notamos que se  $\dot{x}^\mu$  satisfaz a eq.(6.50), então o vetor  $\mathbf{x} = \dot{x}^\mu \mathbf{e}_\mu$  aponta em uma direção bicaracterística.

Por definição o *cone de raios* é o envelope de todos os elementos de superfícies características que passam por um ponto  $p \in M$ . De uma forma “dual” o *cone normal* é o envelope de todos os planos normais aos raios que passam por  $p$ .

Para coeficientes  $a^{\mu\nu}$  constantes ou não o *conóide de raios* é definido como sendo constituído por todos os raios através de  $p \in M$  e tangentes em  $p$  ao cone de raios local. Este conóide é uma superfície característica em que  $p$  é o centro de uma *pergurbacão* e é chamado de *frente de onda esférica* em torno de  $p$ .

Finalmente, observamos que as duas partes do cone de raios local emergindo do ponto  $p \in M$  no tempo  $t$  são comumente chamadas cone do futuro (na direção de  $t$  crescente) e cone do passado (em  $t$  decrescente).

## 6.6 O papel das características

Já definimos as superfícies características como sendo superfícies nas quais os dados de Cauchy *não* podem ser dados livremente. Daremos agora uma outra definição equivalente, que enfatiza um outro aspecto do conceito: Em uma superfície característica  $\mathcal{B}$  o operador diferencial  $L$  é um operador *interior*.<sup>2</sup>

Esta propriedade é crucial para a construção do problema de Cauchy em duas variáveis. Para mais de duas variáveis independentes a propriedade não é em geral suficiente para a construção direta da solução, exceto para algumas equações diferenciais especiais. Entretanto, mesmo em tais casos os aspectos principais da solução podem, em geral, ser analisados, aproveitando-se o caráter ‘interior’ do operador diferencial ao longo das características para estudar as discontinuidades da solução. Assim, pelo menos o ‘esqueleto’ da solução pode ser construído resolvendo-se apenas

---

<sup>2</sup>O sentido do termo interior será esclarecido mais adiante.

equações diferenciais ordinárias. Sob hipóteses adicionais apropriadas podemos ainda, algumas vezes, ir mais além e construir a solução completa do problema de Cauchy.

Um *senal* é definido matematicamente como sendo uma solução da equação (de onda) apropriada que possui uma descontinuidade. Tais descontinuidades só podem ocorrer através de uma superfície característica, sendo este também o contexto em que são chamadas de *frentes de onda*, e se propagam, no caso da equação de onda homogênea, sobre essas características ao longo de raios bicaracterísticos. Essa propagação, como veremos, é governada por uma equação diferencial simples. Restringiremos nosso estudo aos casos de equações lineares ou semi-lineares.

### 6.6.1 Descontinuidades de segunda ordem

Seja  $M \supset \mathcal{B} : \phi(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$  uma hipersuperfície ao longo da qual as derivadas primeiras de uma solução  $u$  da eq.(6.1), e também todas as derivadas tangenciais, ou *interiores*, destas derivadas primeiras sejam *contínuas*. As derivadas de segunda ordem  $\partial^2 u / \partial x^\mu \partial x^\nu$  (no caso de não serem derivadas interiores) podem sofrer descontinuidades (na forma de saltos) através de  $\mathcal{B}$ . Denotaremos por  $\llbracket f \rrbracket$  o salto de uma dada função  $f$  através de  $\mathcal{B}$ .

Como é mostrado no Apêndice A,  $(\partial^2 u / \partial x^\mu \partial x^\nu) \phi_\alpha - (\partial^2 u / \partial x^\mu \partial x^\alpha) \phi_\nu$  é uma derivada interior de  $u$  em  $\mathcal{B}$ , sendo portanto contínua em  $\mathcal{B}$ . Da mesma forma,  $(\partial^2 u / \partial x^\mu \partial x^\alpha) \phi_\beta - (\partial^2 u / \partial x^\beta \partial x^\alpha) \phi_\mu$  também é contínua em  $\mathcal{B}$ . Portanto a combinação linear destas duas expressões,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \phi_\alpha \phi_\beta - \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \phi_\mu \phi_\nu \quad (6.51)$$

também é contínua através de  $\mathcal{B}$ . Obtemos então para o salto destas quantidades:

$$\llbracket \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \rrbracket \phi_\alpha \phi_\beta = \llbracket \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \rrbracket \phi_\mu \phi_\nu. \quad (6.52)$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por  $\phi^\alpha \phi^\beta$  e efetuando a soma encontramos que

$$\llbracket \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \rrbracket = \lambda \phi_\mu \phi_\nu, \quad (6.53)$$

com

$$\lambda = \left[ \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right] \right] \frac{\phi^\alpha \phi^\beta}{(\phi^\alpha \phi_\alpha)(\phi^\beta \phi_\beta)}. \quad (6.54)$$

Se fizermos agora uma transformação linear  $x^\mu \mapsto \xi^\mu$  tal que  $\phi = \xi^{\gamma'}$  para algum  $\gamma' = 0, 1, 2, 3$ , então  $\partial\phi/\partial\xi^{\gamma'} = 1$  e  $\partial\phi/\partial\xi^\nu = 0$  se  $\nu \neq \gamma'$ . Teremos portanto  $\phi_\mu \phi^\mu = \phi_{\gamma'} \phi^{\gamma'} = \pm 1$  (+1 se  $\gamma' = 0$  e -1 se  $\gamma' = 1, 2$  ou 3). Nas novas coordenadas temos

$$u_\phi = \frac{\partial u}{\partial \xi^\mu} \xi^\mu = u_{\gamma'} \phi^{\gamma'}, \quad (6.55)$$

e portanto

$$u_{\phi\phi} = \frac{\partial(u_{\gamma'} \phi^{\gamma'})}{\partial \xi^\beta} \phi^\beta = u_{\gamma'\beta} \phi^{\gamma'} \phi^\beta + \underbrace{u_{\gamma'} \frac{\partial \phi^{\gamma'}}{\partial \xi^\beta}}_{=0} \phi^\beta = u_{\gamma'\beta} \phi^{\gamma'} \phi^\beta. \quad (6.56)$$

Comparando este resultado com (6.54) concluímos que

$$\lambda = \llbracket u_{\phi\phi} \rrbracket. \quad (6.57)$$

Isto quer dizer que  $\lambda$  é diferente de zero em todos os pontos onde qualquer uma das derivadas segundas de  $u$  é descontínua. Vemos portanto que  $\mathcal{B}$  precisa ser uma característica, pois de outra maneira todas as derivadas segundas de  $u$  ao longo de  $\mathcal{B}$  seriam univocamente determinadas por  $u$  e por suas derivadas primeiras  $\partial u/\partial x^\mu$  em  $\mathcal{B}$ , e não poderiam sofrer saltos.

Pode-se entender imediatamente o que foi dito acima se considerarmos a relação de descontinuidade para  $L(u) = 0$  ao longo de  $\mathcal{B}$ . Usando as equações (6.53) e (6.56) vemos facilmente que

$$0 = \llbracket L(u) \rrbracket = a^{\mu\nu} \left[ \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right] \right] = \lambda a^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu, \quad (6.58)$$

o que implica que devemos ter  $a^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu = 0$ .<sup>3</sup>

### 6.6.2 A equação diferencial ao longo de uma superfície característica

Nesta seção tratamos o caso das equações parciais de segunda ordem lineares, analisando a informação expressa pela equação

---

<sup>3</sup>Courant e Hilbert mencionam ((Courant & Hilbert 1966), cap. V, §1 e §3) que descontinuidades nas derivadas primeiras fornecem soluções generalizadas de  $u$  que podem eventualmente ser compatíveis com a equação diferencial ao longo de superfícies características.

$$L(u) = a^{\mu\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + a^\mu \frac{\partial u}{\partial x^\mu} + a u = 0 \quad (6.59)$$

ao longo da superfície característica  $\phi = 0$ , na qual

$$a^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu = 0. \quad (6.60)$$

Vamos supor, sem perda de generalidade, que a família de superfícies  $\phi = \text{const.} = \alpha$  é transformada na família de planos coordenados  $x^3 = \text{const.} = \alpha$ . Os resultados que apresentaremos a seguir podem ser facilmente reformulados para superfícies arbitrárias  $\phi = c$  levando-se em conta as propriedades de invariância das características sob transformações de coordenadas que estudamos na seção 6.2.4. Lembrando que nesse caso devemos ter  $a^{33} = 0$ , a eq.(6.59) fica

$$L(u) = \sum_{\mu,\nu=0}^2 a^{\mu\nu} u_{\mu\nu} + 2 \sum_{\beta=0}^2 a^{\beta 3} u_{\beta 3} + \sum_{\alpha=0}^2 a^\alpha u_\alpha + a^3 u_3 = 0. \quad (6.61)$$

Vamos agora combinar os termos que contêm somente derivadas interiores em  $\mathcal{B}$  (onde  $x^3 = 0$ ) e denotar sua soma por  $J$ . Obtemos assim

$$L(u) = J + a^3 u_3 + 2 \sum_{\alpha=0}^2 a^{\alpha 3} u_{\alpha 3} = 0 \quad (6.62)$$

Visto que

$$u_\phi = u_\mu \phi^\mu = u_3 \phi^3 = -u_3 \equiv v, \quad (6.63)$$

temos

$$\frac{\partial v}{\partial s} = 2 \sum_{\alpha=0}^2 a^{\alpha 3} \frac{\partial(-u_3)}{\partial x^\alpha} = -2 \sum_{\alpha=0}^2 a^{\alpha 3} u_{3\alpha} \quad (6.64)$$

e a eq.(6.62) se torna

$$J - \frac{\partial v}{\partial s} - a^3 v = 0. \quad (6.65)$$

Como sabemos, a diferenciação característica é invariante sob transformações de coordenadas que transformam os planos  $x^3 = \alpha$  em outras famílias de superfícies características  $\phi = \alpha = \text{const.}$ . Ainda mais,  $L(\phi - \alpha)$  também

é invariante sob transformações de coordenadas. Para  $\phi = x^3 = 0$  temos imediatamente que

$$L(\phi) = a^3. \quad (6.66)$$

Mais geralmente, para  $\phi = x^3 = \alpha$ ,  $L(\phi - \alpha) = a^3$  e podemos escrever que ao longo da superfície característica

$$J - \frac{\partial v}{\partial s} + L(\phi - \alpha)v = 0. \quad (6.67)$$

$L(\phi - \alpha)$  é uma função conhecida ao longo de  $\mathcal{B}_\alpha$ , e  $J$  também é conhecida ao longo de  $\mathcal{B}_\alpha$  se  $u$  for conhecida em  $\mathcal{B}_\alpha$ . Assim a eq.(6.67) mostra que ao longo de  $\mathcal{B}_\alpha$  os dados de Cauchy não podem ser dados livremente. Usaremos esta equação na próxima seção para estudar a propagação de descontinuidades.

### 6.6.3 Propagação de descontinuidades ao longo de raios

A eq.(6.67) representa uma equação diferencial ordinária de primeira ordem para a derivada “para fora” de  $\mathcal{B}$ ,  $u_\phi = v$ , e é satisfeita ao longo de cada um dos raios que geram a superfície característica  $\phi = c$ . Partindo das mesmas hipóteses simplificadoras usadas para deduzi-la, vamos diferenciar a eq.(6.59) em relação  $x^3 = \phi$ . Obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \nu=0}^2 a^{\mu\nu} u_{\mu\nu,3} + 2 \sum_{\mu=0}^2 a^{\mu 3} u_{,33\mu} + \sum_{\mu=0}^3 a^\mu u_{3\mu} + a_3 u + a_3 u_{33} \\ + 2 \sum_{\mu, \nu=0}^2 (a^{\mu\nu})_3 u_{\mu\nu} + 2 \sum_{\mu=0}^3 (a^{\mu 3})_3 u_{3\mu} + \sum_{\mu=0}^3 (a^\mu)_3 u_\mu = 0. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Em  $\phi = 0$ ,  $u$ ,  $\partial u / \partial x^i$  e, em conseqüência, todas as derivadas interiores são conhecidas. Agrupando todos os termos conhecidos da eq.(6.68) como uma expressão interior  $J^*$ , e lembrando que  $u_{\phi\phi} = -u_{33}\phi^3 = u_{33} \equiv w$ , encontramos que

$$J^* + 2 \sum_{\mu=0}^3 a^{\mu 3} w_\mu + a^3 w = 0. \quad (6.69)$$

Como para a eq.(6.67), denotamos a diferenciação ao longo de um vetor tangente a  $\mathcal{B}$  por  $\partial / \partial s = 2 \sum_{\mu=0}^2 a^{\mu 3} \partial / \partial x^\mu$  e podemos escrever então

$$J^* + \frac{\partial w}{\partial s} + a^3 w = 0. \quad (6.70)$$

Suponhamos agora que  $u_{\phi\phi}$  possui uma descontinuidade através de  $\mathcal{B}$ , dada por  $[[u_{\phi\phi}]] = [[w]] = \lambda$ , enquanto que  $u$ ,  $\partial u/\partial x^i$  e todas as derivadas interiores ao longo de  $\mathcal{B}$  permanecem constantes. Então a relação de descontinuidade em  $\mathcal{B} : x^3 = 0$  fica

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} + P \lambda = 0, \quad (6.71)$$

onde  $\partial/\partial s$  é a diferenciação ao longo de um dos raios característicos em  $\mathcal{B}$  e  $P = L(\phi) = L(x^3)$  é conhecido em  $\mathcal{B}$ .

A eq.(6.71) é a “lei” que governa a propagação de descontinuidades ao longo dos raios nas superfícies características de descontinuidades. Ela tem a forma de uma equação diferencial ordinária e mostra em particular que uma descontinuidade não pode se anular em nenhum ponto de um raio se ela for não nula em algum ponto do raio.

Dada a propriedade de invariância das características e da diferenciação característica ao longo de  $\mathcal{B}$  sob transformações de coordenadas, concluímos que a eq.(6.71), com  $P = L(\phi)$ , é válida para características  $\phi = 0$  que não precisam ser planos. Isto pode ser entendido facilmente se observarmos que com a transformação  $x^3 \mapsto \phi$  a derivada “para fora” de  $\mathcal{B}$ ,  $u_{33}$ , transforma-se em  $u_{\phi\phi} (\phi^3)^2 + (\dots)$ , onde novamente os parênteses representam termos que são constantes através de  $\mathcal{B}$  e que portanto se cancelam ao tomarmos a diferença entre os valores de  $L(u)$  em ambos os lados de  $\mathcal{B}$ . O fator  $(\phi^3)^2$  só modifica o parâmetro  $s$  ao longo do raio. Então, se as descontinuidades ocorrem através da superfície característica  $\phi = \alpha$ , a eq.(6.71) transforma-se em

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s'} + L(\phi - \alpha)\lambda = 0. \quad (6.72)$$

## 6.7 Características de sistemas de equações diferenciais parciais de primeira ordem em $(M, g, D)$

Seja  $\langle x^\mu \rangle$  uma carta de Lorentz, e consideremos um sistema de  $k$  equações diferenciais parciais para  $k$  funções  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Suponhamos que o sistema possa ser escrito na forma

$$L_j(u) \equiv a_j^{i,\nu} \frac{\partial u_i}{\partial x^\nu} + b_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad (6.73)$$

onde os coeficientes  $a_j^{i,\nu}$  dependem de  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  e os  $b_j$  dependem de  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  e possivelmente de  $u^t \equiv (u_1, \dots, u_k)$ . Usando notação matri-

cial podemos reescrever esta equação como

$$L(u) = A^\nu \frac{\partial u}{\partial x^\nu} + b = 0, \quad b^t = (b_1, \dots, b_k), \quad (6.74)$$

onde os  $A^\nu$  são as quatro matrizes  $k \times k$  ( $a_j^{i,\nu}$ ).

Consideremos agora uma superfície dada por  $\mathcal{B} : \phi(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$ , com  $\text{grad } \phi \neq 0$ , por exemplo,  $\partial\phi/\partial x^3 \neq 0$ . Consideremos em  $\mathcal{B}$  a *matriz característica* do sistema (6.73),

$$A = A^\nu \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}, \quad (6.75)$$

e o determinante ou *forma característica*

$$Q(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = \|A\|. \quad (6.76)$$

Valores iniciais de um vetor  $u$ , ( $u^t = (u_1, \dots, u_k)$ ) podem ser dados em  $\mathcal{B}$ . Vale então o seguinte teorema:

**Teorema.** (i) Se  $Q \neq 0$  em  $\mathcal{B}$ , então o sistema de equações (6.73) determina univocamente todas as derivadas  $\partial u/\partial x^\mu$  ao longo de  $\mathcal{B}$ , a partir dos valores iniciais dados arbitrariamente. Neste caso dizemos que  $\mathcal{B}$  é uma superfície *livre* ou *de Cauchy*.

(ii) Se  $Q = 0$  ao longo de  $\mathcal{B}$ , então  $\mathcal{B}$  é dita uma superfície característica. Neste caso, dado um vetor  $l$ ,  $l^t = (l^1, \dots, l^k)$ , existe uma combinação linear característica

$$(l^t)L(u) = l^j L_j(u) \equiv \Lambda(u) \quad (6.77)$$

dos operadores diferenciais  $L_j$  tal que em  $\Lambda$  a diferenciação do vetor  $u$  em  $\mathcal{B}$  é interior (no sentido definido no apêndice A). Então a condição  $\Lambda(u) = 0$  estabelece uma relação entre os dados iniciais, de onde se conclui que esses dados não podem ser dados livremente.

*Demonstração.* Para provarmos (i) e (ii) recordamos primeiramente que

$$\rho_{\nu,3}(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial x^\nu} \phi_3 - \frac{\partial u}{\partial x^3} \phi_\nu, \quad \nu \neq 3, \quad (6.78)$$

é um operador diferencial interior em  $\mathcal{B}$ . Portanto,  $\partial u/\partial x^\nu$  será conhecido em  $\mathcal{B}$  a partir dos dados iniciais se e somente se a única derivada “para fora”,  $\partial u/\partial x^3$ , for conhecida (supondo sempre  $\phi_3 \neq 0$ ). Multiplicando a eq.(6.73) por  $\phi_3$  obtemos

$$a_j^{i,\nu} \phi_3 \frac{\partial u_i}{\partial x^\nu} + \phi_3 b_j = a_j^{i,\nu} \phi_\nu \frac{\partial u_i}{\partial x^3} + \phi_3 b_j + \sum_{\nu=0}^2 a_j^{i,\nu} \rho_{\nu,3}(u_i) = 0. \quad (6.79)$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\phi_3 L(u) = A^\nu \phi_\nu \frac{\partial u}{\partial x^3} + J = A \frac{\partial u}{\partial x^3} + J = 0, \quad (6.80)$$

onde  $J$  é um operador diferencial interior de  $u$  em  $\mathcal{B}$ . Segue-se que se  $\|A\| = Q \neq 0$ , o sistema de equações lineares (6.80) determina  $\partial u / \partial x^3$  univocamente.

Por outro lado, se  $Q = \|A\| = 0$ , então existe um vetor  $l, l^t = (l^1, \dots, l^k)$ , tal que  $l^t A = 0$ . Multiplicando a eq.(6.80) por  $l^t$  obtemos então

$$l^t \phi_3 L(u) = l^t J = 0. \quad (6.81)$$

Esta equação representa um operador diferencial interior para os dados ao longo de  $\mathcal{B}$ . Como  $l^t J$  não contém  $\partial u / \partial x^3$ , segue-se que (6.81) é uma relação diferencial que restringe os valores iniciais de  $u$  em  $\mathcal{B}$ . ■

A equação característica  $Q = 0$  tem a forma de uma equação diferencial parcial de primeira ordem para  $\phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Ela é satisfeita em  $x$  não somente sob a condição  $\phi(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$ , mas para toda a família de superfícies  $\phi = \text{const.}$ , que constituem as possíveis superfícies características.

### 6.7.1 Sistemas de equações diferenciais parciais de primeira ordem hiperbólicos

Quando o sistema algébrico homogêneo  $Q = 0$  nas quantidades  $\phi_0, \phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  não pode ser satisfeito por quaisquer funções  $\phi_\nu$  reais, exceto  $\phi_\nu = 0$ , então não existem características e o sistema é dito *elíptico*.

Quando a equação  $Q = 0$  possui  $k$  soluções reais  $\phi_3$  diferentes, uma vez prescritos os valores de  $\phi_0, \phi_1$  e  $\phi_2$  (ou se isto for verdadeiro depois de uma transformação de coordenadas), então o sistema é dito (totalmente) *hiperbólico*. Um resultado fundamental para sistemas hiperbólicos é o teorema de Cauchy:

**Teorema (Cauchy).** Para sistemas totalmente hiperbólicos o problema de Cauchy é completamente solúvel.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em Courant e Hilbert, vol. 2, cap. VI (Courant & Hilbert 1966).

### 6.7.2 As equações de Maxwell e de Dirac são sistemas hiperbólicos

As equações de Maxwell no vácuo podem ser escritas no formalismo do fibrado de Clifford como

$$dF = 0, \quad \delta F = 0, \quad (6.82)$$

onde  $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  e

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.83)$$

Em notação vetorial as equações (6.82) ficam

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \times \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (6.84)$$

onde  $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z)$ . Estas são as equações importantes que governam a propagação. Para uma onda que se propaga  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são funções de  $t$ . Tomando o divergente das duas primeiras equações e trocando a ordem de diferenciação temos, respectivamente,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{E}) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B}) = 0. \quad (6.85)$$

Para que estas equações sejam satisfeitas devemos ter  $\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$ , que são as duas últimas equações em (6.84).

Pondo  $(u_1, u_2, u_3) = (E_1, E_2, E_3)$  e  $(u_4, u_5, u_6) = (B_1, B_2, B_3)$ , as duas primeiras equações em (6.84) podem ser escritas como o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial u_5}{\partial z} - \frac{\partial u_6}{\partial y} & \frac{\partial u_4}{\partial t} &= \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ -\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial u_6}{\partial x} - \frac{\partial u_4}{\partial z} & \frac{\partial u_5}{\partial t} &= \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial u_3}{\partial t} &= \frac{\partial u_4}{\partial y} - \frac{\partial u_5}{\partial x} & \frac{\partial u_6}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.86)$$

Estas equações podem então ser postas na forma

$$a_j^{i,\nu} \frac{\partial u_j}{\partial x^\nu} = 0, \quad (6.87)$$

onde  $a_j^{i,\nu}$  são quatro matrizes  $6 \times 6$  e  $i, j = 1, \dots, 6$ . Por inspeção construímos a matriz  $A = A^\nu \phi_\nu$  como

$$A = \begin{bmatrix} -\phi_0 + \phi_2 - \phi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_0 - \phi_1 + \phi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_0 + \phi_1 - \phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_0 + \phi_2 - \phi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_0 - \phi_1 + \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_0 + \phi_1 - \phi_2 \end{bmatrix} \quad (6.88)$$

Então a equação das características,  $Q = \det A = 0$  fornece

$$\phi_0^2 (\phi_0^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2)^2 = 0. \quad (6.89)$$

Uma solução possível para (6.89) é dada pelo “cone de luz”

$$\phi_0^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0 \quad (6.90)$$

e neste caso a característica é a mesma que a da equação de onda. Entretanto, a eq.(6.89) também é satisfeita se  $\phi_0 = 0$ . Uma família de “funções características” que satisfazem  $\phi_0 = 0$  é dada, e.g., por  $\mathcal{B}_a : \phi = -x^2 - y^2 - z^2 + a^2 = 0$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ . As aspas devem-se ao fato que as  $\mathcal{B}_a \sim S^2$  e portanto  $\dim \mathcal{B}_a = 2$ , enquanto que sempre havíamos pensado em superfícies características como sendo aquelas para as quais  $\dim \mathcal{B} = n$  se  $\dim M = n + 1$  (veja-se a definição, eq.(6.2)).

Na seção 6.9 apresentaremos um método, baseado no formalismo do fibrado de Clifford, que mostra de maneira clara e em poucas linhas que se as superfícies características devem ser de dimensão 3, então tanto para as equações de Maxwell quanto para a equação de Dirac tais superfícies são cones de luz.

### 6.7.3 Características para o sistema de equações de Maxwell quando $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dependem somente de $t$ e $z$

As soluções mais conhecidas das equações de Maxwell sem fontes, para um meio material ou para o vácuo, são as ondas planas transversais. Neste caso temos, por exemplo,  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$  e  $\vec{H} = (0, H_y, 0)$ , com  $E_x$  e  $H_y$  dependentes apenas de  $t$  e  $z$ . O sistema de Maxwell torna-se então, como é trivial verificar,

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \quad (6.91)$$

onde  $\epsilon$  e  $\mu$  são respectivamente a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do meio através do qual a onda se desloca.<sup>4</sup> Pondo  $E_x = u_1$  e  $H_y = u_2$  este sistema pode ser escrito como

$$a_j^{i,\nu} \frac{\partial u_i}{\partial x^\nu} = 0, \quad (6.92)$$

onde  $i, j = 1, 2, \nu = 0$  ou  $3$  e

$$[a_j^{i,0}] = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [a_j^{i,3}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.93)$$

A matriz característica para este sistema é portanto

$$A = A^\nu \phi_\nu = \begin{bmatrix} \epsilon\phi_0 & \phi_3 \\ \phi_3 & \mu\phi_0 \end{bmatrix}, \quad (6.94)$$

e as “superfícies” características são somente cones pois temos  $Q = \det A = \frac{1}{c^2}\phi_0^2 - \phi_3^2 = 0$ ,  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ . Vemos assim que para o caso particular das ondas planas transversais é perdida a generalidade do sistema completo de equações de Maxwell no que diz respeito às características.

#### 6.7.4 Característica para a equação de Dirac

A equação de Dirac para o spinor  $\psi \in \sec P_{\text{Spin}+1,3} \times \mathbb{C}^4$ , em interação com o campo eletromagnético  $A \in \sec \Lambda^1(T^*M)$ , é escrita em uma carta de Lorentz  $\langle x^\mu \rangle$  como

$$i\gamma^\mu (\partial_\mu - A_\mu)\psi - m\psi = 0. \quad (6.95)$$

Introduzindo as matrizes  $\alpha^\mu = i\gamma^\mu\beta$ , reescrevemos esta equação como

$$\alpha^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu \right) \psi - \beta m\psi = 0, \quad (6.96)$$

onde

---

<sup>4</sup>Supomos neste capítulo que  $\epsilon$  e  $\mu$  são constantes e reais. O caso geral será tratado no capítulo 7.

$$\alpha^0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \alpha^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \alpha^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\alpha^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Com esta nova forma a eq.(6.76) fornece

$$Q(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = \|\alpha^\mu \phi_\mu\|^2 = (\phi_0^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2)^2 = 0, \quad (6.97)$$

e portanto as superfícies características são cones, como no caso da equação de onda homogênea.

### 6.7.5 Características para as equações de Klein-Gordon e Klein-Gordon modificada

Estas equações são dadas respectivamente por

$$\square\psi + m^2\psi = 0 \quad \text{e} \quad \square\psi - m^2\psi = 0, \quad (6.98)$$

onde  $m$  é uma constante real e  $\psi$  é uma função complexa. Vemos imediatamente que em ambos os casos as características são os cones de luz. Estes resultados são compatíveis com aqueles obtidos por Fox, Kuper & Lipson (1970) e também Strnad & Kodre (1975) usando métodos de integrais no plano complexo análogas àquelas empregadas em alguns desenvolvimentos no capítulo 7.

## 6.8 Relação entre as características

Estudamos agora como se relacionam as definições de características para uma equação diferencial parcial de segunda ordem linear ou semilinear e para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem obtido da primeira equação. Consideremos a equação de segunda ordem

$$a^{\mu\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \dots = 0. \quad (6.99)$$

Se pudermos trocar esta equação por um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{\partial p_l}{\partial x^0} = \frac{\partial p_0}{\partial x^l} & l = 1, 2, 3, \\ a^{\mu\nu} \frac{\partial p_\mu}{\partial x^\nu} + \dots = 0 \end{cases} \quad (6.100)$$

com  $p_\mu = \frac{\partial}{\partial u} x^\mu$ , obtemos para o sistema a condição característica

$$\det \begin{bmatrix} a^{1\mu} \phi_\mu & a^{2\mu} \phi_\mu & a^{3\mu} \phi_\mu & a^{0\mu} \phi_\mu \\ \phi_0 & 0 & 0 & -\phi_1 \\ 0 & \phi_0 & 0 & -\phi_2 \\ 0 & 0 & \phi_0 & -\phi_3 \end{bmatrix} = 0, \quad (6.101)$$

ou seja,

$$\phi_0^2 (a^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu)^2 = 0, \quad (6.102)$$

e vemos que a equação característica (6.102) contém a condição  $a^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu = 0$  da equação de segunda ordem original, mas que para o sistema de equações de primeira ordem existem novas possibilidades, como no caso já estudado das equações de Maxwell.

## 6.9 Determinação das características com o formalismo do fibrado de Clifford

Nesta seção mostraremos, utilizando o formalismo do fibrado de Clifford, que se exigirmos que as superfícies características para as equações de Maxwell tenham dimensão 3, então elas serão necessariamente *cones de luz*. Entretanto, é importante ter em mente que o caso das características com dimensão 2 deverá eventualmente ser investigado com rigor. Este assunto será discutido em futuros trabalhos.

No formalismo do fibrado de Clifford as equações de Maxwell e Dirac têm a forma

$$\partial\psi = f(\psi, x), \quad (6.103)$$

onde no caso de Maxwell  $\psi \equiv F \in \sec \Lambda^2(TM) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M, g)$ , e no caso de Dirac  $\psi = \bigwedge^0 + \bigwedge^2 + \bigwedge^4 \in \sec \Lambda^0(TM) + \Lambda^2(TM) + \Lambda^4(TM) \subset \mathcal{C}\ell(M, g)$ .

Como sabemos, o problema de Cauchy consiste em fornecer dados iniciais sobre uma superfície *tridimensional*  $\mathcal{B} : \phi = 0$  e estudar a existência de obstruções para propagarmos essa informação para fora de  $\mathcal{B}$ . Seja  $p \in U \subset \mathcal{B}$  e sejam  $e_i \in T_p \mathcal{B}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Como  $\psi$  é dado em  $\mathcal{B}$  podemos calcular

$$(\mathbf{e}_i \cdot \partial)\psi, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.104)$$

Consideremos o vetor

$$\mathbf{n} = \gamma_5(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3), \quad (6.105)$$

que é ortogonal a  $\mathcal{B}$  em  $p$ , pois

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.106)$$

Calculemos  $\mathbf{n}\partial\psi$ . Podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\partial\psi &= (\mathbf{n} \cdot \partial)\psi + (\mathbf{n} \wedge \partial)\psi = \mathbf{n} \cdot (\partial\psi) + \mathbf{n} \wedge (\partial\psi) \\ &= (\mathbf{n} \cdot \partial)\psi + \gamma_5[(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \cdot \partial]\psi. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Então

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \partial)\psi &= \mathbf{n}f(\psi, x) - \gamma_5[(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_3 \cdot \partial)\psi \\ &\quad - (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_2 \cdot \partial)\psi + (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 \cdot \partial)\psi]. \end{aligned} \quad (6.108)$$

Como todos os termos no lado direito de (6.108) são conhecidos em  $\mathcal{B}$ , podemos determinar  $(\mathbf{n} \cdot \partial)\psi$  e propagar  $\psi$  na direção de  $\mathbf{n}$ , i.e., para fora de  $\mathcal{B}$ .

A propagação para fora de  $\mathcal{B}$  não será possível somente no caso em que  $\mathbf{n} \in T_p\mathcal{B}$ , i.e., quando

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) &= \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n}\gamma_5) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{n}\mathbf{n}\gamma_5 - \mathbf{n}\gamma_5\mathbf{n}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{n}\mathbf{n}\gamma_5 + \mathbf{n}\mathbf{n})\gamma_5 \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\gamma_5 = 0, \end{aligned} \quad (6.109)$$

o que significa que as superfícies características são os cones de luz.

Fica assim provado que tanto as equações de Maxwell quanto a de Dirac têm os cones de luz como características, quando  $\mathcal{B}$  é *suposta* de dimensão 3.

## 6.10 Formulação do problema de Cauchy generalizado para a equação de onda homogênea

Desejamos agora resolver o chamado *problema de Cauchy generalizado* (Wladimirov 1971). Consideremos a equação de onda homogênea

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = d(t, \vec{x}), \quad (6.110)$$

com as condições iniciais

$$u|_{t=+0} = u_0(\vec{x}) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=+0} = u_1(\vec{x}), \quad (6.111)$$

onde  $d, u_1 \in \mathcal{D}^0(M)$ ,  $u_0 \in \mathcal{D}^1(M)$  e onde  $\mathcal{D}^i(M)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  denota a classe das funções com as  $i$ -ésimas derivadas contínuas em  $M$ .

Suponhamos agora que existe uma solução clássica  $u(t, \vec{x})$  do problema de Cauchy dado por (6.110) e (6.111). Isto significa que  $u$ , de classe  $\mathcal{D}^2(t > 0) \cup \mathcal{D}^1(t \geq 0)$  satisfaz (6.110) para  $t > 0$  e satisfaz as condições (6.111) para  $t \rightarrow +0$ .

Queremos *continuar* as funções  $u$  e  $d$  de maneira que ambas se anulem para  $t < 0$ , isto é, supomos que

$$\tilde{u}(t, \vec{x}) = \begin{cases} u(t, \vec{x}), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{d} = \begin{cases} d(t, \vec{x}), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (6.112)$$

Mostramos agora que a função  $\tilde{u}(t, \vec{x})$  satisfaz em  $M$  a equação de onda

$$\square \tilde{u}(t, \vec{x}) = \tilde{d}(t, \vec{x}) + u_0(\vec{x})\delta'(t) + u_1(\vec{x})\delta(t). \quad (6.113)$$

Naturalmente,  $\tilde{u}(t, \vec{x})$  é uma distribuição (Wladimirov 1971) e assim, para todas as funções-teste  $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ , onde  $\mathcal{D}(M)$  é a classe das funções com suporte compacto em  $M$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \square \tilde{u}, \varphi \rangle &= \langle \tilde{u}, \square \varphi \rangle = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} u \square \varphi \, d^3 x \, dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\epsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^3} u \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi \right) d^3 x \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u \right) \varphi \, d^3 x \, dt \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \varphi(\epsilon, \vec{x})}{\partial t} u(\epsilon, \vec{x}) \, d^3 x + \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\epsilon, \vec{x}) \frac{\partial u(\epsilon, \vec{x})}{\partial t} \, d^3 x \right] \\
&= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} d(t, \vec{x}) \varphi \, d^3 x \, dt \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \varphi(0, \vec{x})}{\partial t} u(0, \vec{x}) \, d^3 x + \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(0, \vec{x}) \frac{\partial u(0, \vec{x})}{\partial t} \, d^3 x \\
&= \int_M \tilde{d} \varphi \, d^3 x \, dt - \int_{\mathbb{R}^3} u_0(\vec{x}) \frac{\partial \varphi(0, \vec{x})}{\partial t} \, d^3 x + \int_{\mathbb{R}^3} u_1(\vec{x}) \varphi(0, \vec{x}) \, d^3 x \\
&= \langle \tilde{d} + u_0(\vec{x})\delta'(t) + u_1(\vec{x})\delta(t), \varphi \rangle, \tag{6.114}
\end{aligned}$$

o que prova a eq.(6.113).

A eq.(6.113) mostra que as perturbações iniciais  $u_0$  e  $u_1$  para a função  $\tilde{u}(t, \vec{x})$  fazem o papel de uma fonte  $u_0(\vec{x})\delta'(t) + u_1(\vec{x})\delta(t)$  que atua momentaneamente no instante  $t = 0$ . Além disso, as soluções clássicas do problema de Cauchy (eqs.(6.110) e (6.111)) estão contidas entre as soluções da eq.(6.113) que se anulam para  $t < 0$ . Podemos então dizer que o problema de encontrar soluções generalizadas de (6.113) que se anulam para  $t < 0$  é o *problema de Cauchy generalizado*. Neste caso,  $\tilde{d}$ ,  $u_0$  e  $u_1$  precisam ser consideradas como funções generalizadas. Dizemos então que o problema de encontrar soluções generalizadas  $u$  que se tornam zero para  $t < 0$  e que satisfazem a equação de onda

$$\square u(t, \vec{x}) = d(t, \vec{x}) + u_0(\vec{x})\delta'(t) + u_1(\vec{x})\delta(t). \tag{6.115}$$

é o problema de Cauchy generalizado para a equação de onda para uma distribuição  $\tilde{d}$  e perturbações iniciais  $u_0$  e  $u_1$  que também são distribuições .

## 6.11 Conclusões

Mostramos neste capítulo que as discontinuidades na derivada segunda de soluções da equação de onda homogênea e da equação de Klein-Gordon com massa quadrática positiva ou negativa só podem propagar-se ao longo de características, que são cones de luz.

Mostramos também que as equações de Maxwell e de Dirac possuem como características cones de luz, se elas forem hipersuperfícies de dimensão 3, e apresentamos uma formulação do problema de Cauchy generalizado (6.115).

Se olharmos para a eq.(A.9) de Rodrigues & Lu (1997), que fornece a solução completa para a equação de onda em uma região  $V \subset \mathbb{R}^3$ , com fronteira  $S = \partial V$  (isto é, a superfície de Cauchy é o plano  $t = 0$ , com uma fronteira) vemos que a equação  $\square u = 0$  tem como solução

$$u(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x \underbrace{\left[ G_R|_{t'=0} \frac{\partial u(t', \vec{x}')}{\partial t'} \Big|_{t'=0} - u(t', \vec{x}')|_{t'=0} \frac{\partial}{\partial t'} G_R|_{t'=0} \right]}_{=0} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^+} dt' \int_S d\vec{s}' \cdot [G_R \text{grad}' u - u \text{grad}' G_R] \quad (6.116)$$

Agora supomos que, em  $t = 0$ ,  $u$  e  $\partial u/\partial t$  se anulam em todo o espaço, com exceção do plano  $z = 0$ . Assim, o primeiro termo em (6.116) vale zero. Naturalmente, para obtermos a solução de (6.116) precisamos conhecer também  $\text{grad} u|_S$  e  $u|_S$ . Isto é compatível com a hipótese de que  $u$  e  $\partial u/\partial t$  se anulam para  $t < 0$ . Vemos assim que a solução dada por (6.116) pode ser superluminal ou subluminal desde que  $u|_S$  e  $\text{grad} u|_S$  sejam os valores *exatos* em  $S$  de uma solução superluminal ou subluminal. Para tais soluções o problema a ser resolvido não é, obviamente, o problema de Cauchy.

## Capítulo 7

# Ondas em Meios Dispersivos

Neste capítulo estudamos a propagação de ondas em meios dispersivos. Esse estudo permitirá a introdução de vários tipos diferentes de velocidades — velocidade de fase, velocidade de grupo, velocidade da frente, velocidade do sinal, velocidade de transporte de energia — associados aos fenômenos de movimento ondulatório.<sup>1</sup> Cada uma dessas velocidades descreve uma característica diferente do movimento ondulatório, e a compreensão de como tais conceitos podem ser aplicados, bem como de suas limitações, é um pré-requisito necessário para qualquer estudo sério do movimento ondulatório. A teoria de Sommerfeld e Brillouin (*SB*) (Brillouin 1960) sobre a propagação de ondas em meios dispersivos é ideal para a apresentação desses diferentes conceitos de velocidade.<sup>2</sup>

Por essa razão, principiamos este capítulo com uma apresentação da teoria de *SB*. Nosso objetivo principal é discutir e esclarecer a bem conhecida afirmação de que estes autores provaram que nenhum *sinal* pode propagar-se em qualquer meio com velocidade maior que  $c$ , a velocidade da luz no vácuo.

Vamos ver que os resultados de *SB* são válidos somente sob uma condição matemática bastante restritiva, a de que existem (ou podem ser produzidos) na natureza sinais *ideais* (ou *matemáticos*), i.e., configurações do campo eletromagnético que apresentem um movimento ondulatório limitado. Nas palavras de Sommerfeld: “. . . nothing until a certain moment in time, then,

---

<sup>1</sup>Já utilizamos os conceitos de velocidade de fase e de grupo em associação com algumas soluções subluminais e superluminais das equações de Maxwell no vácuo. Neste capítulo mostraremos como tais conceitos foram originalmente introduzidos.

<sup>2</sup>*SB* estudaram a propagação de ondas em meios dispersivos com absorção; nós investigaremos o movimento ondulatório em meios dispersivos com ganho. Em (Brillouin 1960) o leitor pode encontrar as referências originais dos artigos de Sommerfeld.

for instance, a series of regular sine waves, which stop after a certain time or which continue indefinitely. Such a wave motion will be called a signal.”<sup>3</sup>

## 7.1 As *EM* em meios dispersivos com absorção

As equações de Maxwell para os campos fundamentais  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Nas eqs.(7.1)  $\rho$  e  $\vec{j}$  são respectivamente as densidades totais de carga e corrente do meio. Estas equações, juntamente com a lei de força de Lorentz (que descreve o movimento de partículas carregadas sob a ação de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ ) resumem o conhecimento clássico a respeito dos fenômenos eletromagnéticos. As equações foram escritas em um sistema de unidades no qual a permissividade elétrica do vácuo  $\epsilon_0$  e a permeabilidade magnética  $\mu_0$  são iguais a 1. Dessa forma, a constante  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , como nos capítulos anteriores, terá o valor numérico 1.

Quando uma onda eletromagnética se propaga em um meio inicialmente neutro, ele em geral se torna polarizado. Apresentamos aqui um modelo simplificado desse processo, no qual se supõe que os elétrons em cada molécula (ou átomo) do meio comportam-se como osciladores harmônicos amortecidos e forçados sob a ação do campo elétrico  $\vec{E}$ . Além disso, supomos também que é lícito, em uma primeira aproximação, ignorar a ação do campo magnético  $\vec{B}$  sobre o seu movimento.

Seja então  $\vec{s}(t, \vec{x})$  uma função vetorial complexa, tal que sua parte real  $\vec{s}(t, \vec{x}) = \text{Re}\vec{s}(t, \vec{x})$  representa o deslocamento (densidade) de um “elétron” na posição  $\vec{x}$  no instante  $t$ . Sejam  $\vec{\mathcal{E}}$  e  $\vec{\mathcal{B}}$  campos vetoriais complexos tais que  $\vec{E} = \text{Re}\vec{\mathcal{E}}$  e  $\vec{B} = \text{Re}\vec{\mathcal{B}}$ .

Suponhamos que uma onda eletromagnética transversal se propaga através de um meio dispersivo na direção  $z$ . Escrevemos:

$$\vec{\mathcal{E}} = E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \hat{x} = \mathfrak{E}_x \hat{x}, \quad \vec{\mathcal{B}} = B_0 e^{-i(\omega t - kz)} \hat{y} = \mathfrak{B}_y \hat{y} \quad (7.2)$$

onde  $E_0$  e  $B_0$  são constantes complexas. Então, escrevendo

---

<sup>3</sup>Brillouin (1960, p. 18). Preferimos usar a expressão sinal ideal para o sinal de  $SB$  porque, como será discutido na seção 7.4, há dúvidas sobre se um sinal desse tipo pode ser produzido experimentalmente.

$$\vec{s}(t, \vec{x}) = s_0 e^{-i(\omega t - kz)} \hat{x} = s_x \hat{x} \quad (7.3)$$

onde  $s_0$  é uma constante, a equação de movimento satisfeita por  $\vec{s}$  reduz-se a

$$s_0 = \frac{E_0(e/m)}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2} = \frac{E_0(e/m) e^{i\phi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}, \quad \text{tg } \phi = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (7.4)$$

onde  $e$  e  $m$  são a carga e a massa do elétron,  $\gamma$  é a constante de amortecimento (dividida por  $m$ ) e  $\omega_0$  é a frequência de ressonância do meio. Se  $N$  é o número de elétrons polarizáveis por unidade de volume, então o vetor de polarização complexo é

$$\vec{\mathfrak{P}} = Ne\vec{\mathfrak{E}}. \quad (7.5)$$

É usual introduzir na teoria o campo vetorial de deslocamento complexo

$$\vec{\mathfrak{D}} = \vec{\mathfrak{E}} + \vec{\mathfrak{P}} = \epsilon\vec{\mathfrak{E}}. \quad (7.6)$$

onde  $\epsilon$  é chamada de constante dielétrica complexa do meio,<sup>4</sup> e é dada por

$$\epsilon(\omega) = \left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2} \right], \quad \omega_p^2 = Ne^2/m. \quad (7.7)$$

Definimos também as densidades complexas de carga e corrente no meio polarizado como

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}, \quad \vec{j}_P = \frac{\partial \vec{\mathfrak{P}}}{\partial t}. \quad (7.8)$$

As partes reais das funções acima são as densidades de polarização de carga e corrente verdadeiras do meio. Podemos então escrever o seguinte sistema de equações de Maxwell complexas:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathfrak{D}} &= 0 & \nabla \times \vec{\mathfrak{E}} + \frac{\partial \vec{\mathfrak{B}}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{\mathfrak{B}} &= 0, & \nabla \times \vec{\mathfrak{H}} - \frac{\partial \vec{\mathfrak{D}}}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

onde a conexão não instantânea entre  $\vec{\mathfrak{D}}$  e  $\vec{\mathfrak{E}}$  é dada por

---

<sup>4</sup>A permeabilidade magnética do meio é tomada como sendo igual ao seu valor no vácuo.

$$\begin{aligned}\vec{\mathfrak{D}}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \vec{\mathfrak{D}}(\omega, \vec{x}), \quad \vec{\mathfrak{D}}(\omega, \vec{x}) = \epsilon(\omega) \vec{\mathfrak{E}}(\omega, \vec{x}), \\ \vec{\mathfrak{D}}(t, \vec{x}) &= \vec{\mathfrak{E}}(t, \vec{x}) + \int d\tau G(\tau) \vec{\mathfrak{E}}(t - \tau, \vec{x}),\end{aligned}\tag{7.10}$$

Para nosso modelo

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}\tag{7.11}$$

Então, em nosso problema, para cada componente monocromática do campo eletromagnético (eq.(7.2)) as equações de Maxwell se reduzem a

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = 0\tag{7.12}$$

com

$$k^2 = \omega^2 \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \right)\tag{7.13}$$

o que significa que o vetor de onda será geralmente complexo para meios dispersivos. Quando  $\gamma = 0$  o meio dispersivo é dito ser não dissipativo. A eq.(7.13) é um caso particular da relação de dispersão de Lorenz-Lorentz.

### 7.1.1 Velocidade de fase

Vamos reescrever a eq.(7.2) como

$$\begin{aligned}\vec{\mathfrak{E}} &= E_0 e^{-i\omega(t-z/W)} \hat{x} = \mathfrak{E}_x \hat{x}, \\ \vec{\mathfrak{B}} &= B_0 e^{-i\omega(t-z/W)} \hat{y} = \mathfrak{B}_y \hat{y}\end{aligned}\tag{7.14}$$

onde

$$W = \frac{\omega}{k}\tag{7.15}$$

é chamada a *velocidade de fase complexa*. Definindo o índice de refração complexo do meio como

$$\mathbf{n} = \frac{1}{W} = \sqrt{\epsilon} = n + in_i\tag{7.16}$$

vemos que o significado de um  $W$  complexo é que existe absorção durante a propagação da onda monocromática. De fato,

$$e^{-i\omega(t-z/W)} = e^{(-\kappa z)} e^{[-i\omega(t-nz)]} = e^{(-\kappa z)} e^{[-i(\omega t - \text{Re} k)]}, \quad (7.17)$$

onde  $\kappa = \text{Im} k = \omega n_i(\omega)$  é o coeficiente de absorção e  $\text{Re} k = \omega n(\omega)$ . A parte real do índice de refração ( $n$ ) permite-nos calcular a diferença de fase entre dois pontos ao longo do eixo  $z$ . Definimos então a *velocidade de fase* como

$$v_{ph} = \frac{1}{n}. \quad (7.18)$$

### 7.1.2 Velocidade de grupo

Consideremos uma configuração do campo eletromagnético em forma de pacote de onda propagando-se na direção  $z$  positiva. Então, as componentes  $\mathfrak{E}_x$  e  $\mathfrak{B}_y$  do campo podem ser escritas, para  $z > 0$ , como

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E}_x(t, z) \\ \mathfrak{B}_y(t, z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \begin{pmatrix} E_0(\omega) \\ B_0(\omega) \end{pmatrix} \exp[-i(\omega t - k(\omega)z)]. \quad (7.19)$$

Para a componente elétrica temos

$$E_0(\omega) = \frac{2}{1 + n(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathfrak{E}_x(t, 0_-) e^{i\omega t}. \quad (7.20)$$

O símbolo  $0_-$  na eq.(7.20) significa que a integral deve ser calculada com o valor do campo incidente em uma vizinhança externa do meio, em  $z = 0_-$ . Escolhendo  $E_0(\omega)$  real, então  $B_0(\omega)$  deve ser complexo e as equações de Maxwell levam à seguinte relação:

$$|B_0|^2 = |\epsilon| E_0^2. \quad (7.21)$$

Estamos agora preparados para introduzir o conceito de *velocidade de grupo* ( $v_g$ ) do pacote de ondas. Como primeira observação, é necessário enfatizar que este conceito pode ser aplicado a um pulso geral (arbitrário) somente se restringirmos o intervalo de freqüências na integral de Fourier da eq.(7.19) a uma *banda limitada* de freqüências

$$(\bar{\omega} - \eta, \bar{\omega} + \eta). \quad (7.22)$$

Sob esta condição, se  $\phi$  representa  $\mathfrak{E}_x$  ou  $\mathfrak{B}_y$ , podemos escrever a seguinte expansão:

$$\begin{aligned} \omega t - kz &= (\bar{\omega}t - \bar{k}z) + (\omega - \bar{\omega}) \left[ t - z \left( \frac{d(\operatorname{Re} k)}{d\omega} \right)_{\bar{\omega}} \right] \\ &\quad - i(\omega - \bar{\omega})z \left( \frac{d(\operatorname{Im} k)}{d\omega} \right)_{\bar{\omega}}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Visto que  $\kappa(\bar{\omega}) = \left[ \frac{d(\operatorname{Im} k)}{d\omega} \right]_{\bar{\omega}}$ , encontramos

$$\begin{aligned} \phi(t, z) &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\omega}-\eta}^{\bar{\omega}+\eta} d\omega [\bar{\phi}(\omega) e^{-(\omega-\bar{\omega})\kappa(\bar{\omega})z} e^{-i(\omega-\bar{\omega})(t-z/v_g)}] e^{-i(\bar{\omega}t-\bar{k}z)} \\ &\equiv \bar{\phi}(t, z) e^{-i(\bar{\omega}t-\bar{k}z)} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Se  $\kappa(\bar{\omega}) = 0$ , a amplitude média  $\bar{\phi}$  é constante sobre as superfícies  $z - v_g t = \text{constante}$ , e então fica evidente que  $\bar{\phi}$  se propaga com  $v_g$  — a velocidade de grupo do pacote de ondas, dada por

$$\frac{1}{v_g} = \left[ \frac{d(\operatorname{Re} k)}{d\omega} \right]_{\bar{\omega}} = \left[ n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right]_{\bar{\omega}}. \quad (7.25)$$

Se  $\kappa(\bar{\omega}) \neq 0$ , a amplitude média da onda é atenuada durante a propagação, mas ela ainda se move com velocidade  $v_g$ . Observe-se que usando as equações (7.15) e (7.18) e definindo o comprimento de onda da componente monocromática de frequência  $\omega$  como  $\lambda = 1/\operatorname{Re} k$ , podemos escrever

$$v_g = \frac{d\omega}{d(\operatorname{Re} k)} = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda} \quad (7.26)$$

Vemos assim que se  $\left[ \frac{dv_{ph}}{d\lambda} \right]_{\bar{\lambda}} < 0$ , então  $v_g > v_{ph}$  e pode acontecer que  $v_g > 1$ . Se  $\left[ \frac{dv_{ph}}{d\lambda} \right]_{\bar{\lambda}} > 0$  é possível ter  $v_g < 0$ ! Uma região é dita ser de dispersão anômala se  $v_g > 1$  ou se  $v_g < 0$ . Ambas as possibilidades podem ocorrer próximo a uma linha de absorção do meio.

Sommerfeld e Brillouin,<sup>5</sup> e também Stratton (1941, p. 333) e Jackson (1983, p. 233), afirmam que em tais casos a velocidade de grupo perde seu significado. Esta afirmação é incorreta. De fato, mostraremos na seção 7.3 que pode ser atribuído um significado físico preciso a velocidades de grupo  $v_g > 1$  ou  $v_g < 0$ . Isto corresponde a um fenômeno conhecido como reformatamento de pulso, que tem sido observado em vários experimentos realizados nos últimos anos (Chiao 1993, Bolda et al. 1994).

---

<sup>5</sup>Brillouin (1960), p. 22 e 122 respectivamente.

### 7.1.3 Velocidade do sinal e da frente de onda

Vamos discutir agora os conceitos de velocidade da frente de onda e velocidade do sinal, segundo *SB*. Vamos supor que o meio dispersivo, com índice de refração  $n(\omega)$  dado pela eq.(7.16), estende-se do plano  $z = 0$  até  $z = \infty$ , fazendo fronteira com o vácuo. Suponhamos que uma onda eletromagnética plana (transversal) penetre no meio vindo do vácuo, com vetor de propagação na direção  $z$ . No plano  $z = 0$  as componentes  $\mathfrak{E}_x$  e  $\mathfrak{B}_y$  serão funções somente do tempo  $t$ . Estaremos interessados somente na onda transmitida.

#### O problema de Sommerfeld

O problema de Sommerfeld consiste em resolver as equações de Maxwell no meio, quando são dados  $\mathfrak{E}_x(t, 0)$  ou  $\mathfrak{B}_y(t, 0)$ . Note-se que este não é um problema de Cauchy (Taylor 1981). Suponhamos que  $\phi(t, 0)$  representa a situação de  $\mathfrak{E}_x(t, 0)$  ou  $\mathfrak{B}_y(t, 0)$ .

*SB* consideram que um *sinal ideal* é uma função com uma descontinuidade na sua primeira derivada. O exemplo clássico disto, que estudaremos agora, é

$$\phi(t, 0) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-i\omega t}, & t > 0 \end{cases} \quad (7.27)$$

cuja representação de Laplace é

$$\phi(t, 0) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{st}}{s+i\omega} ds, \alpha > 0, & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (7.28)$$

É fácil verificar que o valor de  $\mathfrak{E}_x(t, z)$  ou  $\mathfrak{B}_y(t, z)$  para  $0 < z < \infty$ , a menos de alguns fatores irrelevantes para nossa análise, é dado por uma função  $\phi(t, z)$  cuja representação de Laplace é

$$\phi(t, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\exp\{s[t - n(s)z]\}}{s+i\omega} ds, \alpha > 0 \quad (7.29)$$

onde

$$n(s) = n(i\omega) = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{s^2 + \gamma s + \omega_0^2}} \quad (7.30)$$

Quando  $s \rightarrow \pm i\infty$ ,  $n(s) \rightarrow 1$ . Então, para  $(t - z) < 0$  o caminho de integração  $\Gamma$  para o cálculo da integral de Laplace no plano complexo  $s$  deve ser fechado com um semicírculo (de raio infinito) pelo lado direito (figura 7.1).

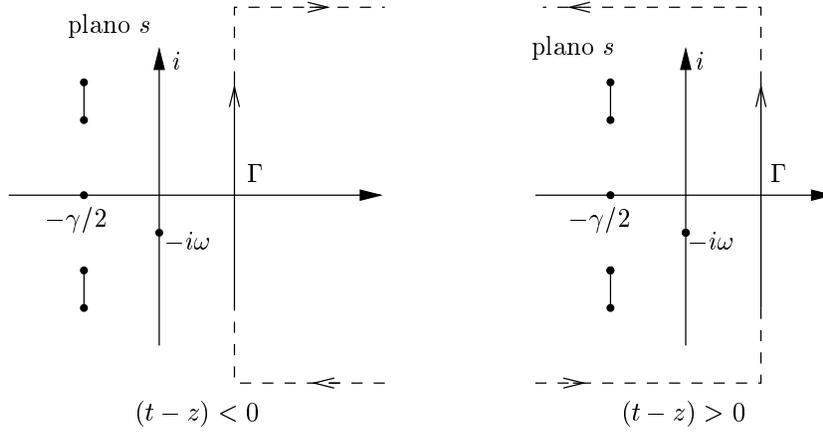


Figura 7.1: Contornos de integração  $\Gamma$  no plano  $s$  complexo, para  $t - z < 0$  e para  $t - z > 0$ .

O caminho  $\Gamma$  exclui todas as singularidades do integrando. Segue-se então do teorema de Cauchy que

$$\phi(t, z) = 0 \quad \text{para } t - z < 0 \quad (7.31)$$

Fica assim provado que para um certo instante de tempo  $t$ , não existe campo no meio nos pontos de coordenada  $z > t$ . Concluimos assim que, sob as hipóteses consideradas acima, a velocidade da frente de onda não pode ser maior que a velocidade da luz no vácuo.

Quando  $t - z > 0$  o caminho de integração deve ser fechado pelo lado esquerdo, e neste caso

$$\begin{aligned} \text{para } n \rightarrow \infty, \quad s &= -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}; \\ \text{para } n = 0, \quad s &= -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4(\omega_0^2 + \omega_p^2) - \gamma^2}. \end{aligned}$$

Estas singularidades são mostradas nas figuras 7.1 e 7.2, juntamente com as linhas de ramificação da integral dada pela eq.(7.29).

Se dermos uma volta em torno do ponto de ramificação no plano complexo  $s$ , retornaremos ao valor inicial de  $n$  com uma mudança de sinal. Por

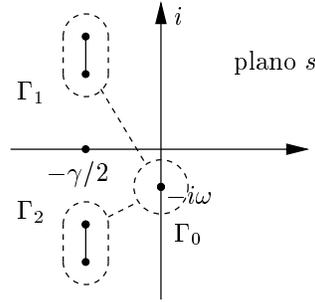


Figura 7.2: Caminhos de integração no plano  $s$  mostrando as linhas de ramificação.

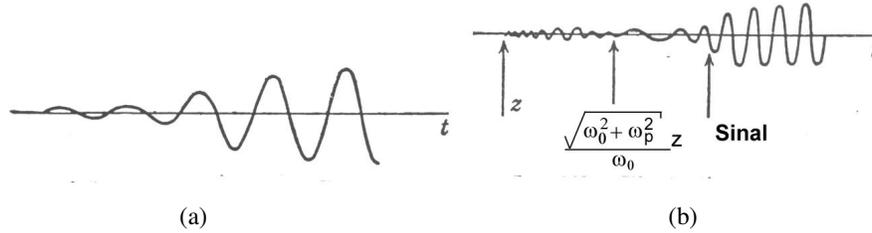


Figura 7.3: (a) Variação com o tempo da amplitude do primeiro precursor. (b) Chegada do primeiro e segundo precursores e o sinal principal.

essa razão, introduzimos linhas de ramificação (cortes) no plano  $s$ , como mostrado na figura 7.1. No plano com os cortes a função  $n(s)$  é univalente. O caminho de integração pode então ser deformado (no plano  $s$  cortado) em qualquer caminho que não passe pelo pólo, localizado em  $s = -i\omega$ , sem alterar o valor da integral. Em particular, o caminho pode ser deformado até tornar-se aquele mostrado na figura 7.2.

As contribuições dos percursos de ida e volta pelas linhas ligando  $\Gamma_0$  a  $\Gamma_1$  e a  $\Gamma_2$  cancelam-se, e a integral de Laplace (eq.(7.29)) fornece

$$\phi(t, z) = \phi_0(t, z) + \phi_{12}(t, z), \quad (7.32)$$

onde  $\phi_0$  representa as chamadas oscilações forçadas e  $\phi_{12}$  representa as oscilações livres. Temos

$$\begin{aligned}\phi_0(t, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} ds \frac{e^{s[t-n(s)s]}}{s + i\omega} \\ &= \exp(-\kappa z) \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{z}{v_{ph}} \right) \right].\end{aligned}\quad (7.33)$$

Não existe nenhum modo simples de calcular  $\phi_{12}(t, z)$ . Temos

$$\phi_{12}(t, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} ds \frac{e^{s[t-n(s)s]}}{s + i\omega} \quad (7.34)$$

Brillouin estimou  $\phi_{12}(t, z)$  utilizando o método do ponto de sela. Apresentamos aqui um resumo de seus resultados (ver fig. 7.3):

(i) Em contraste com as oscilações livres, que possuem a mesma frequência da onda incidente e não são amortecidas no tempo, as oscilações forçadas sofrem amortecimento no tempo. Este fato é interpretado fisicamente como resultado das forças de amortecimento que agem sobre os elétrons das moléculas do meio.

(ii) Já vimos que  $\phi(t, z) = 0$  para  $t < z$ ; é possível mostrar também por um cálculo explícito que  $\phi_0(z, z) = -\phi_{12}(z, z)$ . Então, mesmo se  $v_{ph} > 1$  ou se  $v_g > 1$ , nada chega aos pontos com coordenada  $z$  antes de  $t = z$ . Assim, se por *frente de onda* entendemos a chegada a  $z$  da primeira perturbação ondulatória, que começa a pôr os elétrons em movimento, então a velocidade da frente de onda é  $c (= 1)$ , qualquer que seja o meio considerado e dadas as *condições particulares* que impusemos à configuração do campo eletromagnético que constitui o *sinal ideal*. O significado de como é possível ter-se  $v_g > 1$  sob tais condições será discutido nas seções 7.2 a 7.4. O estado estacionário é construído de forma suave com o decaimento da onda transiente  $\phi_{12}(t, z)$ .

(iii) Recordemos novamente que um sinal ideal, de acordo com *SB*, é um pacote ou um trem de ondas que começa a existir em um dado tempo. Durante a propagação através do meio dispersivo o sinal ideal é deformado. O corpo principal do sinal ideal é precedido por um primeiro precursor (chamado precursor de Sommerfeld) que, como vimos, propaga-se com a velocidade  $c (= 1)$ . O precursor de Sommerfeld chega com amplitude zero, que aumenta gradualmente, enquanto a frequência diminui. A amplitude então diminui enquanto a frequência se aproxima da frequência natural de vibração dos elétrons, que vale  $\omega_0$  em nosso modelo.

(iv) Surge então uma nova perturbação, chamada de segundo precursor (ou precursor de Brillouin), que se propaga com velocidade  $\omega_0 / \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ .

Inicialmente, a frequência do precursor de Brillouin é muito pequena e sua amplitude apresenta uma variação similar ao caso do precursor de Sommerfeld.

(v) Finalmente, um aumento súbito da amplitude anuncia a chegada do corpo principal (também chamado parte principal) da perturbação ondulatória. Essa parte principal viaja com uma velocidade que Brillouin chama de *velocidade do sinal*  $v_s$ . O valor de  $v_s$  é um tanto arbitrário; de qualquer forma, Brillouin mostrou que

$$v_s \leq v_g, \quad (7.35)$$

onde a velocidade de grupo do sinal é estimada da seguinte maneira. A partir da representação de Fourier do sinal *real* ( $\text{Im } \phi(t, z)$ ) dada por

$$\text{Im } \phi(t, z) = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int d\omega' \frac{e^{-i[\omega' - k(\omega')]} }{\omega' - \omega}, \quad (7.36)$$

podemos ver que as componentes harmônicas próximas de  $\omega_0$  têm amplitudes maiores que as outras componentes. Dessa forma, expandindo  $k(\omega')$  em torno de  $\omega_0$ , como foi feito na eq.(7.23), obtemos

$$\frac{1}{v_g} = \left[ \frac{d \text{Re } k(\omega')}{d\omega'} \right]_{\omega_0}. \quad (7.37)$$

## 7.2 Velocidades de grupo $v_g > 1$ ou $v_g < 0$

Vimos na seção 7.1 que quando uma configuração do campo eletromagnético com espectro de frequência concentrado em torno de  $\bar{\omega}$  se propaga em um meio dispersivo com absorção (ou ganho), as velocidades de fase e de grupo são dadas por

$$\frac{1}{v_{ph}} = n(\bar{\omega}) \quad \text{e} \quad \frac{1}{v_g} = \left[ \frac{d \text{Re } k}{d\omega} \right]_{\bar{\omega}} = \left[ n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right]_{\bar{\omega}}. \quad (7.38)$$

Vamos agora estudar, seguindo Garrett & McCumber (1970), o comportamento de  $v_g$  em uma situação simples, na qual o índice de refração é dado por

$$n(\omega) = 1 + \frac{\omega_0 \Omega_p}{\omega(\omega_0 - \omega - i\gamma)}, \quad \left| \frac{\Omega_p}{\gamma} \right| \ll 1, \quad (7.39)$$

onde  $\Omega_p > 0$  para meios absorvedores e  $\Omega_p < 0$  para meios amplificadores. Desejamos conhecer o comportamento de um pulso gaussiano em um meio

com índice de refração dado por (7.39). Para isso, escrevemos  $\vec{E}(t, \vec{x}) = \hat{x}\phi(t, z)$ , e para  $\phi(t, 0) = e^{-i\bar{\omega}t} e^{-t^2/2\tau^2}$  obtemos

$$\phi(t, z) = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-(\omega-\bar{\omega})^2\tau^2/2} e^{-i[\omega t - \omega n(\omega)z]}, \quad z > 0. \quad (7.40)$$

Nesta expressão,  $1/\tau$  é a largura espectral do pacote gaussiano incidente,  $\bar{\omega}$  é a frequência central do pacote e  $\gamma$  é a largura de linha atômica.

Vamos agora aproximar (7.40) para  $z \ll 1$ . Supomos para isso que a largura espectral é muito menor que a largura de linha atômica, i.e., que  $\gamma\tau \gg 1$ . Primeiramente, expandimos  $\omega n(\omega)$  em uma série de Taylor em torno de  $\bar{\omega}$ :

$$\omega n(\omega) = \bar{\omega} n(\bar{\omega}) + (\omega - \bar{\omega}) \left. \frac{d[\omega n(\omega)]}{d\omega} \right|_{\bar{\omega}} + \frac{1}{2} (\omega - \bar{\omega})^2 \left. \frac{d^2[\omega n(\omega)]}{d\omega^2} \right|_{\bar{\omega}} + \dots \quad (7.41)$$

com

$$\left. \frac{d[\omega n(\omega)]}{d\omega} \right|_{\bar{\omega}} = 1 - \frac{\omega_0 \Omega_p}{(\bar{\omega} - \omega_0 + i\gamma)^2}; \quad (7.42)$$

$$\left. \frac{d^2[\omega n(\omega)]}{d\omega^2} \right|_{\bar{\omega}} = \frac{2\omega_0 \Omega_p}{(\bar{\omega} - \omega_0 + i\gamma)^3} \quad (7.43)$$

e

$$\frac{1}{m!} \left. \frac{d^m[\omega n(\omega)]}{d\omega^m} \right|_{\bar{\omega}} = \frac{(-1)^m \omega_0 \Omega_p}{(\bar{\omega} - \omega_0 + i\gamma)^{m+1}}, \quad m \geq 2. \quad (7.44)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \omega n(\omega) = \bar{\omega} n(\bar{\omega}) + (\omega - \bar{\omega}) \left[ 1 - \frac{\omega_0 \Omega_p}{(\bar{\omega} - \omega_0 + i\gamma)^2} \right] + \dots \\ + \frac{(-1)^m \omega_0 \Omega_p (\omega - \bar{\omega})^m}{(\bar{\omega} - \omega_0 + i\gamma)^{m+1}} + \dots \end{aligned} \quad (7.45)$$

Esta série converge se  $(\omega - \bar{\omega})^2 \leq [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2]$ , e diverge se acontecer o contrário. Se  $z \ll 1$ , então as frequências importantes são aquelas para as quais  $(\omega - \bar{\omega})^2 \leq [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2]$  e  $\gamma\tau > 1$ , pois nesse caso a integral (7.40) converge. Quando  $(\omega - \bar{\omega})\tau = 1$ , a série também converge rapidamente.

Vamos truncar a série (7.45) após os três primeiros termos. Escrevendo  $u = \omega - \bar{\omega}$ , encontramos para (7.40)

$$\begin{aligned}
\phi(t, z) &= \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left[\frac{-u^2\tau^2}{2}\right] \exp\{-i[ut + \bar{\omega}t - \omega\mathbf{n}(\omega)z]\} \\
&\approx \frac{\tau e^{-i\bar{\omega}t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left\{-\frac{u^2\tau^2}{2} - iut + i\left[\bar{\omega}\mathbf{n}(\bar{\omega})\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ (\omega - \bar{\omega})\left(1 - \frac{\omega_0\Omega_p}{(\bar{\omega} - \omega_0 + i\gamma)^2}\right) + (\omega - \bar{\omega})^2 \frac{\omega_0\Omega_p}{(\bar{\omega} - \omega_0 + i\gamma)^3}\right]z\right\} \\
&= \frac{\tau}{2\pi} e^{-i(\bar{\omega}t - \mathbf{n}(\bar{\omega})z)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-itu - \frac{\tau^2 u^2}{2}\right. \\
&\quad \left.+ iz\left(u\left[\frac{d(\omega\mathbf{n}(\omega))}{d\omega}\right]_{\bar{\omega}} + \frac{1}{2}u^2\left[\frac{d^2(\omega\mathbf{n}(\bar{\omega}))}{d\omega^2}\right]_{\bar{\omega}}\right)\right\} \\
&= \frac{\tau}{2\pi} e^{-i(\bar{\omega}t - \mathbf{n}(\bar{\omega})z)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-iu\left(t - z\left[\frac{d[\omega\mathbf{n}(\omega)]}{d\omega}\right]_{\bar{\omega}}\right)\right. \\
&\quad \left.- \frac{u^2\tau^2}{2}\left(1 - \frac{iz}{\tau^2}\left[\frac{d^2[\omega\mathbf{n}(\omega)]}{d\omega^2}\right]_{\bar{\omega}}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{7.46}$$

Se

$$\operatorname{Re}\left\{1 - \frac{iz}{\tau^2}\left[\frac{d^2[\omega\mathbf{n}(\omega)]}{d\omega^2}\right]_{\bar{\omega}}\right\} > 0, \tag{7.47}$$

a integral (7.46) converge e obtemos

$$\begin{aligned}
\phi(t, z) &\approx \left(1 - \frac{iz}{\tau^2}\left[\frac{d^2[\omega\mathbf{n}(\omega)]}{d\omega^2}\right]_{\bar{\omega}}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\bar{\omega}(t - \mathbf{n}(\bar{\omega})z)} \\
&\quad \times \exp\left\{-\left[t - z\left[\frac{d^2\omega\mathbf{n}(\omega)}{d\omega^2}\right]_{\bar{\omega}}\right]^2 \left[2\tau^2\left(1 - \frac{iz}{\tau^2}\left[\frac{d^2\omega\mathbf{n}(\omega)}{d\omega^2}\right]_{\bar{\omega}}\right)\right] - 1\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( 1 - \frac{iz}{\tau^2} \frac{2\omega_0\Omega_p}{(\bar{\omega} - \omega_0 + i\gamma)^3} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\bar{\omega}(t-n(\bar{\omega})z)} \\
&\quad \times \exp \left\{ - \left[ t - z \left( 1 - \frac{\omega_0\Omega_p}{(\bar{\omega} - \omega_0 + i\gamma)^2} \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. \times \left[ 2\tau^2 \left( 1 - \frac{iz}{\tau^2} \frac{2\omega_0\Omega_p}{(\bar{\omega} - \omega_0 + i\gamma)^3} \right) \right] - 1 \right\} \quad (7.48)
\end{aligned}$$

É importante observar que a eq.(7.47) é verdadeira se  $z \ll 1$ , mas que em geral não é válida para  $z$  grande. Também, os termos

$$\frac{z}{\tau^2} \frac{d^2\omega n(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\bar{\omega}} e^{\varkappa} = \frac{z\Omega_p\omega_0}{\tau^2\gamma^3} \quad (7.49)$$

são da mesma ordem. Quando  $|\varkappa| \simeq 1$ , o procedimento usado para truncar a série em segunda ordem não é mais válido. Por essa razão, vamos no que segue considerar que  $|\varkappa| \ll 1$ . Com esta suposição, vamos analisar os fatores do lado direito da eq.(7.48) que são relevantes para nossos objetivos (uma discussão mais completa pode ser encontrada em (Garrett & McCumber 1970)). Introduzimos, além de  $\varkappa$ , as seguintes variáveis adimensionais:

$$\Gamma = \frac{\gamma\tau}{\sqrt{2}}, \quad T = \frac{\sqrt{2}(t-z)}{\tau}, \quad \eta = \frac{\bar{\omega} - \omega_0}{\gamma}, \quad \kappa(\eta) = \frac{1}{1 + \eta^2}, \quad \nu = -\frac{\eta}{1 + \eta^2}. \quad (7.50)$$

Observando que sob a hipótese de que  $z \ll 1$ , o primeiro fator no lado direito de (7.48) é aproximadamente igual a 1, podemos escrever

$$\phi(t, z) \approx \exp[i\bar{\omega}(t-z)] \exp[F_1(T, \varkappa) + F_2(T, \varkappa)] \quad (7.51)$$

onde

$$\begin{aligned}
F_1(T, \varkappa) &= -2\Gamma^2 \varkappa \left( \kappa - \frac{\frac{1}{2}(\kappa')^2 \varkappa}{1 - \varkappa\kappa''} \right) \\
&\quad - \frac{\frac{1}{4}(1 + \varkappa\kappa'')}{(1 - \varkappa\kappa'')^2 - (\varkappa\nu'')^2} \left[ T - 2\Gamma \varkappa \left( \nu' - \frac{\varkappa\nu''\kappa'}{1 + \varkappa\kappa''} \right) \right]^2 \quad (7.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(T, \varkappa) &= 2\Gamma^2 \varkappa \left( \nu + \frac{(\kappa')^2}{2\nu''} \right) \\
&\quad + \frac{\frac{1}{4}\varkappa\nu''}{(1 + \varkappa\kappa'')^2 + (\varkappa\nu'')^2} \left[ T - \frac{2\Gamma}{\nu''} [\kappa' + \varkappa(\kappa'\kappa'' + \nu'\nu'')] \right]^2 \quad (7.53)
\end{aligned}$$

$F_1$  governa a amplitude do pulso. A variação temporal para  $\varkappa$  fixo é a de um pacote gaussiano com largura aproximadamente igual à largura do pulso incidente até  $\varkappa \simeq 1$ . Inicialmente o pico do pulso gaussiano varia como  $\exp 4(-2\Gamma^2 \varkappa \kappa)$ , desviando-se deste comportamento somente quando  $\varkappa \approx 1$ . Podemos verificar que para  $\varkappa$  fixo o instante de passagem do pico do pulso corresponde a

$$T = 2\Gamma \varkappa \left( \nu' + \frac{\varkappa \nu'' \kappa}{1 + \varkappa \kappa''} \right) \quad (7.54)$$

onde o primeiro termo corresponde exatamente ao valor que seria dado pela velocidade de grupo clássica dada pela eq.(7.38), sob nossa suposição de que  $|\Omega_p/\gamma| \ll 1$ . Agora, consideremos, e.g., um meio absorvedor ( $\Omega_p > 0$ ) para o qual  $\bar{\omega} = \omega_0$ . Neste caso temos

$$v_g = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0 \Omega_p}{\gamma^2}} \quad (7.55)$$

Já exigimos que  $\Omega_p/\gamma \ll 1$ , mas até agora não supusemos que  $\omega_0 \Omega_p \ll \gamma^2$ . Isto significa que o denominador na eq.(7.55) pode ter qualquer sinal. Podemos então ter situações nas quais  $v_g > 1$  e mesmo situações onde  $v_g < 0$ ! Para  $v_g > 1$  temos o pulso viajando de tal forma que o locus de amplitude máxima (i.e., o pico) desloca-se mais rápido que  $c = 1$ . Em particular, em meios amplificadores com população atômica invertida também podemos ter  $v_g > 1$  ou  $v_g < 0$ . Tais casos foram estudados por Chiao e outros (Chiao 1993, Diener 1997, Mitchell & Chiao 1997), que observaram experimentalmente ambas as situações.

### 7.3 Reformatamento de pulso

O estranho fenômeno relacionado a situações nas quais  $v_g > 0$  ou  $v_g < 0$  que acabamos de prever é chamado de *reformatamento de pulso*. Esse fenômeno não implica em nenhuma violação da causalidade ou falsificação do Princípio de Relatividade, e a razão para isto é que o pico do pulso incidente não está relacionado causalmente com o pico do pulso transmitido. Este resultado geral tem sido descoberto e redescoberto muitas vezes (Chiao 1993, Bolda et al. 1994, Deutch & Low 1993, Low & Mende 1991, Low 1998). A análise a seguir segue de perto a apresentação de Diener (1997).

Consideremos novamente nosso pacote gaussiano atravessando um meio

(no qual, por simplicidade, tomamos  $\text{Im } n = 0$ )<sup>6</sup> em uma situação na qual  $v_g > 1$  e sem qualquer mudança significativa de formato (veja-se a fig. 7.4), i.e., uma situação que pode ocorrer se algumas das condições discutidas acima forem satisfeitas. Podemos escrever, sem fazer qualquer aproximação, que

$$\begin{aligned}\phi(t, z) &= \int dt' G(t - t', z) \phi(t', 0) \\ \phi(t, 0) &= e^{-i\bar{\omega}t} e^{-t^2/2\tau^2}\end{aligned}\tag{7.56}$$

onde o  $G$  é a função de Green retardada

$$G(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i[\omega t - k(\omega)z]}.\tag{7.57}$$

Esta função se anula no exterior do cone de luz, i.e., quando  $t - z < 0$ . A razão para isso é que, como  $k(\omega) \rightarrow \omega$  quando  $|\omega| \rightarrow \infty$  para  $t - z < 0$ , o contorno no plano complexo  $\omega$  para o cálculo de (7.57) deve ser fechado por um semicírculo de raio infinito no semiplano superior, e não existem singularidades do integrando no interior do contorno.

Vamos agora comparar o pulso transmitido em  $z = l$  com o pulso gaussiano incidente  $\phi(t, 0)$  em  $z = 0$ . Vemos então que a conexão causal é expressa por

$$\phi(t, l) = \int_{-\infty}^{t-l} dt' G(t - t', l) \phi(t', 0)\tag{7.58}$$

Nosso pacote de ondas viajando com velocidade de grupo superluminal é tal que ele chega à saída da camada que forma o meio mais cedo do que chegaria se houvesse vácuo (curva tracejada na fig 7.4.a). O fato é que a eq.(7.58) implica que os máximos não são causalmente conectados. A parte cortada do pacote transmitido é completamente determinada pela parte cortada do pacote incidente. Isto pode ser visualizado da seguinte forma: cortemos o pacote incidente em um certo instante  $t_0$ , como mostrado na figura 7.4.b. Então o pacote incidente permanece inalterado até  $t_0 + l$  e repetindo os cálculos da seção 6.2 descobrimos que ele começa a oscilar fortemente somente após o instante em que a informação sobre o corte atinge

---

<sup>6</sup>O reformatamento de pulso também ocorre quando  $\text{Im } n \neq 0$ . A demonstração é análoga (ainda que um pouco complicada) ao caso onde  $\text{Im } n = 0$ .

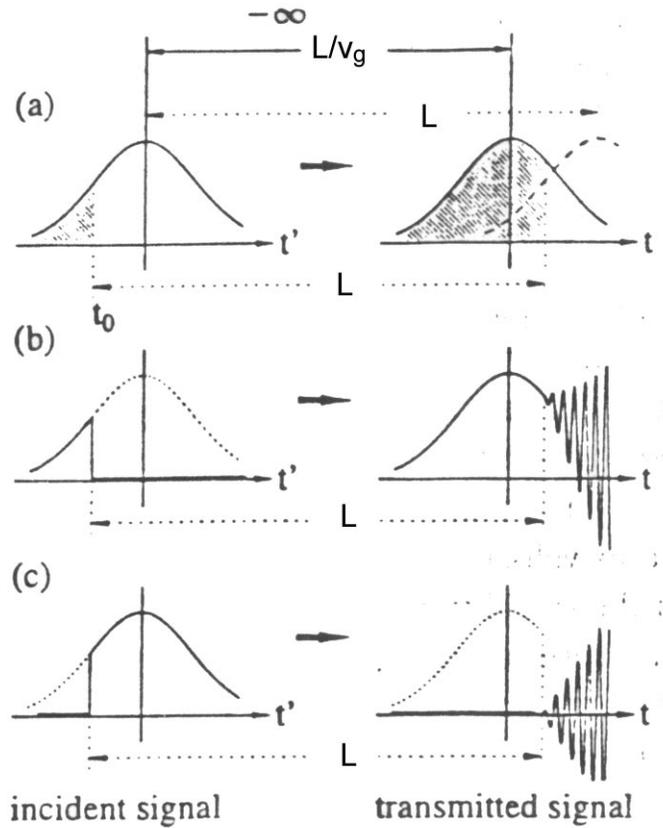


Figura 7.4: Representação esquemática dos sinais incidente e transmitido para uma linha de transmissão de comprimento  $L$  quando  $v_g > 1$ . Fonte: Diener (1997).

$z = l$ . É impressionante verificar que o máximo suprimido do pacote incidente reaparece no pacote transmitido. Na figura 7.4.c vemos o que acontece se cortarmos a parte inicial do pacote para tempos  $t < t_0$ . Neste caso a resposta desaparece até um tempo  $t_0 + l$ , e o máximo presente no pacote incidente não reaparece no pacote transmitido. A explicação para o comportamento dos pacotes de onda é que o meio utiliza a informação disponível no cone de luz para realizar uma extrapolação da forma do sinal por continuação analítica sobre um certo intervalo de tempo. Esta é a razão porque este fenômeno é conhecido como reformatamento de pulso. Para ver exatamente

o que acontece, vamos supor, por simplicidade, que  $k(\omega)$  é real<sup>7</sup> e vamos escrever novamente a eq.(7.58) da seguinte forma:

$$\phi(t, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-l} dt' d\omega e^{-i[\omega - k(\omega)]l} e^{i\omega(l-t+t')} e^{-i\bar{\omega}t'} e^{-\frac{t'^2}{2\tau^2}} \quad (7.59)$$

Devido à forma desta expressão, podemos substituir na primeira exponencial de (7.59) a variável  $\omega$  pelo operador  $i\partial/\partial t$ . Para entender isto, observemos o que acontece se trocarmos  $e^{-i\omega}$  por  $e^{-il(i\partial/\partial t)}$ . O operador resultante pode ser expandido como

$$e^{-il(i\frac{\partial}{\partial t})} = e^{l\partial/\partial t} = 1 + \left(l\frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{1}{2!} \left(l\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(l\frac{\partial}{\partial t}\right)^3 + \dots \quad (7.60)$$

A ação deste operador sobre o único termo dependente de  $t$  no integrando de (7.59) tem então a seguinte forma:

$$\begin{aligned} e^{-il(i\frac{\partial}{\partial t})} e^{-i\omega(t-l-t')} &= \left[1 + \left(l\frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{1}{2!} \left(l\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \dots\right] e^{-i\omega t} e^{i\omega(l+t')} \\ &= \left[1 + l(-i\omega) + \frac{1}{2} l^2 (-i\omega)^2 + \dots\right] e^{-i\omega t} e^{i\omega(l+t')} \\ &= e^{-il\omega} e^{-i\omega t} e^{i\omega(l+t')} \end{aligned} \quad (7.61)$$

Podemos então escrever

$$\phi(t, l) = \frac{e^{il[k(i\frac{\partial}{\partial t}) - i\frac{\partial}{\partial t}]} }{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{t-l} dt' e^{i\omega(l-t+t')} e^{-i\bar{\omega}t'} A(t'), \quad (7.62)$$

onde  $A(t') = e^{-\frac{t'^2}{2\tau^2}}$ . Trocando a ordem de integração encontramos

$$\begin{aligned} \phi(t, l) &= e^{il[k(i\frac{\partial}{\partial t}) - i\frac{\partial}{\partial t}]} \int_{-\infty}^{t-l} dt' \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(l-t+t')} \right] e^{-i\bar{\omega}t'} A(t'), \\ &= e^{il[k(i\frac{\partial}{\partial t}) - i\frac{\partial}{\partial t}]} \int_{-\infty}^{t-l} dt' \delta(l-t+t') A(t') e^{-i\bar{\omega}t'} \\ &= e^{il[k(i\frac{\partial}{\partial t}) - i\frac{\partial}{\partial t}]} A(t-l) e^{-i\bar{\omega}(t-l)} \end{aligned} \quad (7.63)$$

---

<sup>7</sup>Quando  $k(\omega)$  é complexo, obtêm-se os mesmos resultados.

Notemos agora que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left[ A(t-l) e^{-i\bar{\omega}(t-l)} \right] &= \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{t-l} e^{-i\bar{\omega}(t-l)} - i\bar{\omega} A e^{-i\bar{\omega}(t-l)} \\
&= \left[ -i\bar{\omega} + \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_A \right] A e^{-i\bar{\omega}(t-l)} \\
&= e^{-i\bar{\omega}(t-l)} \left[ -i\bar{\omega} + \frac{\partial}{\partial t} \right] A.
\end{aligned} \tag{7.64}$$

Isto nos permite reescrever  $\phi(t, l)$  como

$$\phi(t, l) = e^{-i\bar{\omega}(t-l)} e^{il \left[ k(\bar{\omega} + i \frac{\partial}{\partial t}) - \bar{\omega} - i \frac{\partial}{\partial t} \right]} A(t-l). \tag{7.65}$$

Vamos agora expandir  $k(\bar{\omega} + i \partial/\partial t)$  e conservar somente o primeiro termo. A aproximação obtida será boa se  $A(t-l)$  variar lentamente, como é o caso de uma gaussiana. Então

$$\begin{aligned}
k \left( \bar{\omega} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) &= k(\bar{\omega}) + \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\bar{\omega}} i \frac{\partial}{\partial t} \\
&= k(\bar{\omega}) + \frac{1}{v_g} i \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned} \tag{7.66}$$

Usando  $A(t-l) = e^{-\frac{(t-l)^2}{2\tau^2}}$  encontramos finalmente

$$\begin{aligned}
\phi(t, l) &\approx e^{-i(\bar{\omega}t - k(\bar{\omega})l)} e^{l(1 - \frac{1}{v_g}) \partial/\partial t} e^{-\frac{(t-l)^2}{2\tau^2}} \\
&= \exp \left[ -i(\bar{\omega}t - k(\bar{\omega})l) \right] \exp \left[ -\frac{\left( t - \frac{l}{v_g} \right)^2}{2\tau^2} \right]
\end{aligned} \tag{7.67}$$

Esta expressão mostra que o máximo de  $\phi(t, l)$  localiza-se em  $l = v_g t$ , deslocando-se portanto com a velocidade de grupo  $v_g$ . Vemos assim que é o operador  $e^{-l(1 - \frac{1}{v_g}) \frac{\partial}{\partial t}}$  (entendido, naturalmente, no sentido de uma série de Taylor) que fornece a continuação analítica do envelope sobre o intervalo de tempo positivo  $(1 - 1/v_g)l$ . Essa continuação analítica é então a *origem* do reformatamento do pulso.

Precisamos ainda saber se um pulso viajando com velocidade superluminal em um meio dispersivo carrega informação. Também precisamos estudar qual é a velocidade de propagação da energia em tais situações. Estas questões serão deixadas para o capítulo 8.

## 7.4 Movimento ondulatório em guias de ondas

Nos últimos anos, vários experimentos têm sido realizados com o fim de determinar o tempo de tunelamento de pulsos de microondas em guias de onda (veja-se Nimitz (1997) para uma revisão). Parece que o primeiro experimento foi realizado por Ranfagni e colaboradores (Ranfagni, Mugnai, Fabeni & Pazzi 1991). Foram enviados pulsos de microondas através de guias de onda *subdimensionadas*, as quais, como veremos no capítulo 8, representam o análogo de uma barreira de potencial para o caso do tunelamento de partículas quânticas descritas pela equação de Schrödinger.<sup>8</sup>

A relação de dispersão em um guia de ondas retangular (de seção  $a \times b$ ) é dada por

$$k^2 = (2\pi\nu)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\nu_c}{\nu} \right) \right]^2, \quad (7.68)$$

onde  $\nu$  é a frequência da microonda e  $\nu_c = 1/b$  é a frequência de corte do guia. A eq.(7.68) nos diz que quando  $\nu < \nu_c$  o vetor de onda  $k$  é imaginário; dizemos então que em tal situação o guia de ondas é subdimensionado. A transmissão de microondas neste caso constitui o *problema de tunelamento de microondas*. Da eq.(7.68) e da definição geral de velocidade de grupo (eq.(7.37)), vemos que quando  $\omega < \omega_c$ ,  $v_g = \infty$ !

Nos experimentos de Ranfagni et al. (1991) os tempos de tunelamento observados correspondiam a velocidades de propagação menores que  $c$  ( $= 1$ ). Todavia, como observado em Ranfagni et al. (1993), os tempos medidos não representam necessariamente os tempos de tunelamento, visto que as medidas não foram realizadas para frequências suficientemente menores que a frequência de corte.

Em 1992, Enders e Nimitz (Enders & Nimitz 1992) conduziram experimentos análogos aos de Ranfagni e colaboradores e observaram pela primeira vez que o tunelamento de microondas na condição  $\omega_c < \omega$  ocorre realmente com velocidades superluminais. A questão central é: qual o significado das velocidades superluminais observadas nesse e em muitos outros experimentos como, e.g., Steinberg et al. (1993) (incluindo o surpreendente experimento realizado por Nimitz e colaboradores (Nimitz 1997), a ser discutido na seção 8.4). No próximo capítulo mostraremos, seguindo Emig (1996), que um pacote de ondas gaussiano truncado (no espaço), com frequência abaixo da frequência de corte do guia, pode tunelar com velocidade superluminal,

---

<sup>8</sup>A menção à equação de Schrödinger significa que a Mecânica Quântica está em ação; de fato, vamos estudar nas seções 8.1 e 8.2 o que as experiências de tunelamento sugerem para a interpretação dessa teoria.

sem distorção apreciável, devido ao reformatamento de pulso. Este resultado, mais a analogia entre este problema e a propagação de ondas em meios dispersivos levou à *visão da maioria* de que as velocidades superluminais observadas nas experiências de Nimtz são simples manifestações do fenômeno de reformatamento.

Entretanto, existem alguns aspectos importantes nas experiências de Nimtz que lançam dúvidas sobre se o reformatamento é realmente o único responsável pela existência de velocidades superluminais em guias de onda. A este respeito devemos lembrar o seguinte:

(i) Um resultado importante, obtido nos primeiros experimentos (Enders & Nimtz 1992, Steinberg et al. 1993, Enders & Nimtz 1993*a*) — e que concorda com uma predição teórica feita por Hartman (1962) para o tempo de tunelamento de partículas quânticas através de barreiras de potencial (usando a Mecânica Quântica) — é que o tempo de tunelamento para barreiras opacas ( $\kappa d \geq 1$ , onde  $\kappa = -ik$  e  $d$  é o comprimento da barreira) é independente do comprimento da barreira. Esse resultado também foi obtido no estudo de Emig sobre o tunelamento de um pulso gaussiano truncado (Emig 1996). Entretanto, em 1994, Nimtz, Spieker e Brodowski (1994) observaram que o efeito Hartman *desaparece* com o aumento da dissipação.

(ii) A propagação superluminal em barreiras também foi confirmada com técnicas ópticas. De fato, Steinberg et al. (1993) observaram em experimentos interferométricos a propagação superluminal de um único *fóton*, e Spielman, Szipöcs, Stingl & Krauss (1994) observaram a propagação superluminal de pulsos de ondas.

Os resultados do experimento de Nimtz, Spieker & Brodowski (1994) podem simplesmente refletir o fato de que, após algum tempo, o fenômeno de reformatamento coloca o pico do pulso gaussiano truncado próximo de sua fronteira, que se propaga com a velocidade da frente de onda, ou eventualmente o desaparecimento do efeito Hartman significa algum fenômeno novo não contemplado no tratamento convencional da propagação de modos evanescentes. O experimento de Steinberg, na medida em que trata do tunelamento de um único fóton, é de natureza mecânico-quântica. Qual o significado do reformatamento neste caso? Pode um fóton isolado ser descrito por um pulso gaussiano truncado? Um outro problema importante é que o tempo de tunelamento quântico não é um conceito bem definido — há várias quantidades diferentes que são chamadas de tempo de tunelamento (Landauer & Martin 1994, Martin & Landauer 1992); nenhuma

delas, acreditamos, representa realmente o tempo gasto pelas microondas ou elétrons no interior de uma barreira.

Por estas razões, discutiremos adiante a propagação de microondas em guias de ondas utilizando uma metodologia sugerida por Esposito (1997), baseada em um método para obter novas soluções das equações de Maxwell usado originalmente por Rodrigues e Vaz (1997).<sup>9</sup>

#### 7.4.1 Novas soluções para o movimento de microondas em guias de onda

Seja  $\omega$  a frequência de uma onda monocromática propagando-se no interior de um guia de ondas retangular na direção  $\hat{z}$ . Podemos escrever para o campo eletromagnético  $(\vec{E}, \vec{B})$  dentro do guia:

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, x, y, z) &= \vec{E}_0(x, y, \xi) e^{-i(\omega t - kz)} \\ \vec{B}(t, x, y, z) &= \vec{B}_0(x, y, \xi) e^{-i(\omega t - kz)}\end{aligned}\quad (7.69)$$

onde  $k = k(\omega)$  é o número de onda,

$$\xi = z - vt, \quad (7.70)$$

e o parâmetro  $v$ , com dimensões de velocidade, será interpretado abaixo. Substituindo as expressões (7.69) na equação de onda, encontramos que cada uma das componentes de  $\vec{E}_0$  e  $\vec{B}_0$  deve satisfazer as equações

$$\left[ (1 - v^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + \nabla_{\perp}^2 + (\omega^2 - k^2) + 2i(k - v\omega) \frac{d}{d\xi} \right] \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.71)$$

Vamos supor agora que cada uma das componentes de  $\vec{E}_0$  ou  $\vec{B}_0$  pode ser escrita na forma  $F(x, y)f(\xi)$ . Temos então

$$\begin{aligned}F(x, y)(1 - v^2) \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} + f(\xi) \nabla_{\perp}^2 F(x, y) \\ + (\omega^2 - k^2) F(x, y) f(\xi) + 2i(k - v\omega) F(x, y) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} = 0\end{aligned}\quad (7.72)$$

Impomos que  $v = k/\omega$ , de forma a eliminar a parcela complexa desta equação. Separando as variáveis encontramos

---

<sup>9</sup>É oportuno observar que a aplicação do método feita por Esposito, para encontrar soluções subluminais e superluminais da equação de onda homogênea em um espaço-tempo de duas dimensões, é incorreta, pois tais soluções não existem neste caso.

$$\frac{\nabla_{\perp}^2 F}{F} + (\omega^2 - k^2) = -\frac{(1-v^2)}{f} \frac{d^2 f}{d\xi^2} = \begin{cases} +\Omega^2 & \text{se } v^2 < 1, \\ -\Omega^2 & \text{se } v^2 > 1. \end{cases} \quad (7.73)$$

ou ainda

$$(1-v^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} = -\Omega^2 f \quad \text{se } v^2 < 1; \quad (7.74)$$

$$(v^2-1) \frac{d^2 f}{d\xi^2} = -\Omega^2 f \quad \text{se } v^2 > 1. \quad (7.75)$$

A constante de separação  $\Omega$  é suposta real e positiva.

Supondo que as condições (7.74) ou (7.75) sejam satisfeitas, obtemos imediatamente as equações para a dependência de  $\vec{E}_0$  e  $\vec{B}_0$  em  $(x, y)$ :

$$(\nabla_{\perp}^2 + \omega^2 - k^2 \mp \Omega^2) \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} = 0, \quad (7.76)$$

onde os sinais  $-$  e  $+$  referem-se respectivamente aos casos  $v^2 < 1$  e  $v^2 > 1$ .

Por outro lado, (7.74) e (7.75) implicam que  $f(\xi) \propto e^{\pm i\Omega\gamma_{\alpha}\xi}$ , onde  $\alpha$  pode ser igual a  $>$  ou  $<$  e

$$\begin{aligned} \gamma_{>} &= \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \quad \text{para } v^2 > 1, \\ \gamma_{<} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{para } v^2 < 1. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Vamos então supor que  $f(\xi) = e^{i\gamma\Omega\xi}$ , onde  $\gamma$  pode ser igual a  $\gamma_{<}$  ou  $\gamma_{>}$ . As equações de Maxwell para  $v^2 < 1$  assumem então a forma do sistema

$$(k + \gamma\Omega)\vec{E}_{\perp} + (\omega + \gamma\Omega v)\hat{z} \times \vec{B}_{\perp} = -i\nabla_{\perp} E_z; \quad (7.78a)$$

$$(k + \gamma\Omega)\vec{B}_{\perp} - (\omega + \gamma\Omega v)\hat{z} \times \vec{E}_{\perp} = -i\nabla_{\perp} B_z; \quad (7.78b)$$

$$\hat{z} \cdot (\nabla_{\perp} \times \vec{E}_{\perp}) = i(\omega + \gamma\Omega v)B_z; \quad (7.78c)$$

$$\hat{z} \cdot (\nabla_{\perp} \times \vec{B}_{\perp}) = -i(\omega + \gamma\Omega v)E_z; \quad (7.78d)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_{\perp} = -i(k + \gamma\Omega)E_z; \quad (7.78e)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \vec{B}_{\perp} = -i(k + \gamma\Omega)B_z; \quad (7.78f)$$

onde  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2} = \gamma_<$ . No caso  $v^2 > 1$  as equações de Maxwell transformam-se em um sistema idêntico às eqs.(7.78), com  $\gamma_> = 1/\sqrt{v^2-1}$  no lugar de  $\gamma$ .

A primeira coisa importante que o sistema de equações 7.78 nos diz é que as configurações do campo eletromagnético que se propagam no interior de guias de ondas não são *em geral* ondas transversais, visto que  $E_z$  ou  $B_z$  (ou ambos) podem ser não nulos.<sup>10</sup> Então, se  $E_z$  ou  $B_z$  são diferentes de zero, as eqs.(7.78) determinam as componentes transversais, uma vez que a dependência em  $\xi$  é determinada pelas condições subsidiárias (7.74) ou (7.75). Como é bem conhecido, existem dois tipos específicos de ondas não transversais, chamados modos *TM* (transverso magnético) e *TE* (transverso elétrico). Para modos *TM* as condições de contorno apropriadas são

$$B_z = 0 \quad \forall x \in M, \quad E_z|_S = 0 \quad (7.79)$$

onde  $S$  é o contorno do guia. Neste caso,

$$\vec{E}_\perp = i \frac{k + \gamma\Omega}{\Gamma^2} \nabla_\perp E_z, \quad (7.80)$$

onde  $\Gamma$  é a constante de separação, necessária para a solução da eq.(7.76), e que depende da geometria do guia de ondas.

Para modos *TE* as condições de contorno apropriadas para resolver (7.76) são

$$E_z = 0 \quad \forall x \in M, \quad \left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_S = 0 \quad (7.81)$$

Neste caso,

$$B_\perp = i \frac{k + \gamma\Omega}{\Gamma^2} \nabla_\perp B_z, \quad (7.82)$$

onde novamente  $\Gamma$  é uma constante de separação, a qual, como no caso anterior, depende da geometria do guia. Das equações de Maxwell, em ambos os casos obtemos soluções se e somente se

$$\omega^2 - k^2 = \pm\Omega^2 + \Gamma^2, \quad (7.83)$$

onde os sinais  $+$  e  $-$  referem-se respectivamente aos casos  $v^2 < 1$  e  $v^2 > 1$ . Também é preciso que

---

<sup>10</sup>É possível a existência de modos com ondas transversais, chamados *TEM*. Estes se propagam com velocidade  $c$  ( $= 1$ ), e não serão tratados aqui.

$$v_g = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = v \quad (7.84)$$

em ambos os casos.

Para modos  $TE$  a constante de separação, no caso de um guia retangular de seção  $a \times b$ , pode tomar os valores

$$\Gamma_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad m, n \in Z^+. \quad (7.85)$$

Vamos estudar agora o caso  $v^2 < 1$ . Neste caso a eq.(7.83) se torna

$$\omega^2 - k^2 = \Omega^2 + \Gamma^2 \quad (7.86)$$

ou

$$k^2 = \omega^2 - (\Gamma^2 + \Omega^2). \quad (7.87)$$

Vemos que  $k$  é real se e somente se  $\omega \geq \omega_c = \sqrt{\Gamma^2 + \Omega^2}$ . Nesse caso,

$$v_g = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = v < 1. \quad (7.88)$$

A frequência de corte usual é dada por

$$\omega_c = \Gamma, \quad (7.89)$$

visto que nas soluções mostradas em livros-texto (Stratton 1941, Jackson 1983) supõe-se sempre que  $\Omega = 0$ .

Investiguemos agora se a solução generalizada proposta por Esposito é de alguma utilidade. Suponhamos que  $\omega < \omega_c$ , o que implica que  $k$  é imaginário. Então, de acordo com a eq.(7.25), teríamos  $v_g = \infty$ ! Escrevendo  $k = i\kappa$ ,  $\kappa > 0$ , a solução proposta para  $E_z$  é escrita como

$$\begin{aligned} E_z(t, x, y, z) &= \psi(x, y) e^{i\gamma\Omega(z-vt)} e^{i(kz-\omega t)} \\ &= \psi(x, y) e^{-\kappa z} e^{i\gamma\Omega z} e^{-i\gamma\Omega vt} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (7.90)$$

Para que esta expressão seja uma solução das equações de Maxwell é necessário que  $v = (dk/d\omega)^{-1}$ . Então

$$v = \frac{dk}{d\omega} = \frac{k}{\omega} = i \left( \frac{\kappa}{\omega} \right) = iV \quad (7.91)$$

e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+V^2}} \in \mathbb{R}. \quad (7.92)$$

Como  $v$  é imaginário, vemos que além do decaimento exponencial  $e^{-\kappa z}$ , teremos para cada valor fixo de  $z$  um decaimento temporal dado por

$$e^{-\gamma\Omega V t}. \quad (7.93)$$

Um termo como este significaria que se enviássemos continuamente uma onda de frequência  $\omega$  através do guia, o meio tornar-se-ia opaco com o passar do tempo. Até onde sabemos, não há qualquer evidência empírica de tal fenômeno. Em qualquer caso, quando  $\omega < \omega_c$ , com  $\Omega$  nulo ou não, a velocidade de grupo é  $v_g = \infty$ !

Consideremos agora o caso  $v^2 > 1$ . A relação de dispersão é

$$k^2 = \omega^2 - (\Gamma^2 - \Omega^2) \quad (7.94)$$

Sendo

$$v = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \sqrt{1 - \frac{\omega_{0c}^2}{\omega^2} + \frac{\Omega^2}{\omega^2}}, \quad (7.95)$$

com  $\omega_{0c} = \Gamma$ , vemos que  $v > 1$  se e somente se  $\Omega^2 > \omega_{0c}^2$ . Se esta condição é válida, o vetor de onda é real. Neste caso temos uma propagação com velocidade de grupo superluminal mas finita, em contraste com o caso estudado acima, no qual  $\omega < \omega_c$  e  $v_g = \infty$ .

Em resumo, podemos dizer o seguinte:

(i) Como observado por Nimtz (1997), a descrição teórica *padrão* (i.e., aquela apresentada em livros-texto como, e.g., Stratton (1941), Jackson (1983)) dos modos evanescentes não é satisfatória. Em particular, como já foi dito, em 1994 Nimtz, Spieker e Brodowsky (Nimtz et al. 1994) observaram que o efeito Hartman desaparece com o aumento da dissipação. Isso pode significar, como mencionado acima, que na presença de uma dissipação muito grande o reformatamento ocorre de maneira tão rápida que o pico gerado localiza-se muito perto da frente do sinal, movendo-se, portanto, com a velocidade da frente, que é finita e menor que  $c$ . Uma outra possibilidade seria de que o aumento da dissipação leva a uma situação na qual aparece uma velocidade de tunelamento superluminal mas *finita*, cuja explicação pode ser encontrada na teoria apresentada acima sob as condições  $\Omega^2 > \omega_{0c}^2$ , quando  $k$  é real e  $1 < v_g < \infty$ .

(ii) Spielman, Szipöcs, Stingl e Krausz (1994) também observaram que as medidas do tempo de tunelamento de pulsos de microondas através de *photon band-gaps* revelaram que os pulsos transmitidos são significativamente mais curtos que os incidentes e que o efeito desaparece com o aumento da taxa de transmissão. Este termo parece sugerir que o termo  $e^{-\gamma\Omega V t}$  está atuando nesta situação.

Como dissemos, a visão da maioria argumenta que a propagação superluminal em guias de ondas não se deve a nada mais que o reformatamento de pulso. De fato, como descrito no próximo capítulo, é possível resolver com uma boa aproximação o movimento de um pulso eletromagnético gaussiano truncado no interior de um guia de ondas como aquele usado nos experimentos de Nimtz, i.e., no qual a região evanescente é realizada na forma de uma região subdimensionada localizada entre duas regiões com tamanhos normais em uma linha de guias de onda. Explicitamente, como na experiência de Nimtz (1997), uma barreira, produzida por uma região de constante dielétrica baixa  $\epsilon_2$ , foi colocada em um guia de ondas retangular com a mesma seção transversal, preenchido com um dielétrico de constante dielétrica  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  (fig. 7.5). É importante enfatizar aqui que os resultados de Emig (1996) não descrevem os resultados das experiências de Nimtz, porque este não usou pacotes gaussianos truncados. Em vez disso, a configuração do campo eletromagnético usada nesses experimentos apresentava um espectro de frequências limitado, com todas as frequências componentes abaixo da frequência de corte da região evanescente.

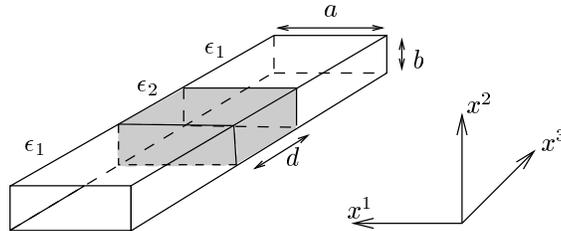


Figura 7.5: Esquema do guia de ondas usado no experimento de Nimtz.

Considerando-se esta última observação, e algumas outras sobre a mecânica quântica que serão apresentadas a seguir, é preciso dizer que ainda que este autor sinta simpatia pela visão da maioria, é mais seguro considerar o assunto como uma questão ainda em aberto.

## Capítulo 8

# Mecânica Quântica e Tunelamento

### 8.1 Elétrons não tunelam com $v > c$

Nesta seção e na próxima discutiremos o tunelamento de elétrons e de microondas. Vamos inicialmente apresentar as simulações computacionais feitas por Lasenby et al. (1996) para a evolução temporal de um pacote de ondas gaussiano (que é uma solução exata da equação de Dirac-Hestenes) de 5 eV e  $\delta k = 0.04 \text{ \AA}^{-1}$  tunelando através de uma barreira (fig. 8.1) e também as simulações para as linhas integrais (*streamlines*) do campo de velocidades  $V$  dado pela segunda igualdade da eq.(2.68) (fig. 8.2). Segundo a interpretação de de Broglie-Bohm da teoria quântica, essas linhas de corrente constituem as trajetórias possíveis dos elétrons. O campo de velocidades correspondente, por sua vez, é sempre tipo tempo, como mostrado no capítulo 2. Esse resultado é válido mesmo para soluções superluminais da equação de Dirac-Hestenes, um fato para o qual admitimos não ter uma boa explicação.

De qualquer forma, os resultados obtidos por Lasenby e colaboradores são novamente uma manifestação do fenômeno de reformatamento de pulso, o qual parece ser um fenômeno universal associado com o movimento ondulatório (Chiao 1993, Bolda et al. 1994, Landauer & Martin 1994, Garrett & McCumber 1970). O reformatamento de pulso, juntamente com a interpretação de de Broglie-Bohm da mecânica quântica, fornece uma explicação simples para o tunelamento “superluminal” de elétrons. Como podemos ver na figura 7.1d, em  $t = 0.5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$  o pico transmitido encontra-se a uma distância de 70 Å; sem a barreira o pico estaria a apenas 66 Å da origem. Is-

so significa que o pacote transmitido avança em relação ao pacote que viaja livremente, um fato que é interpretado como “prova” de que as partículas tunelaram com velocidade superluminais. A fig. 8.2 mostra que em verdade este não é o caso. Não há violação da causalidade de Einstein neste caso visto que a velocidade dos elétrons tunelantes é sempre menor que  $c$ . Em particular, somente as linhas de corrente da frente do pacote conseguem atravessar a barreira, enquanto que a maioria das trajetórias é refletida após penetrar um pouco na barreira.

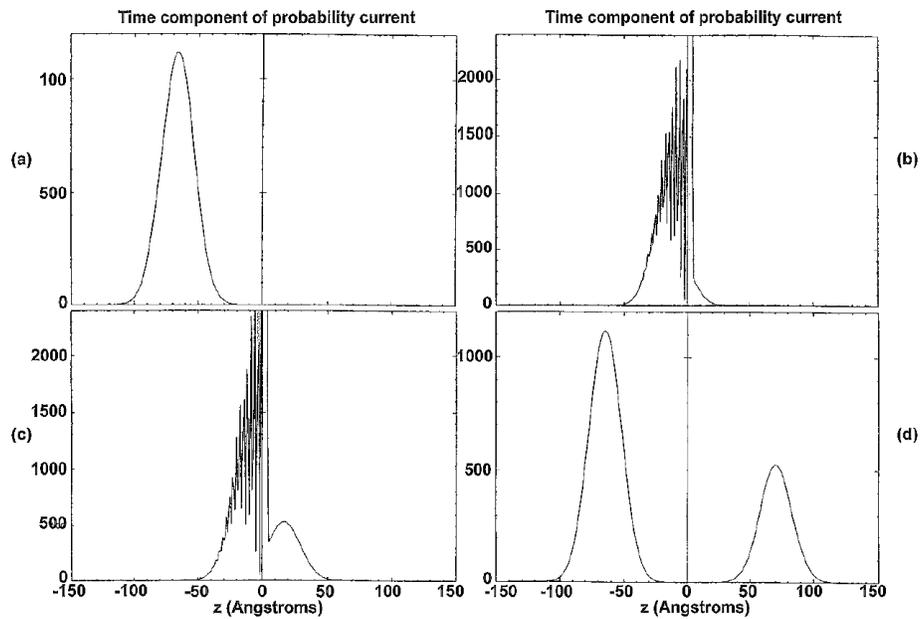


Figura 8.1: Evolução da densidade  $J_0$  como uma função do tempo. O pacote inicial é uma gaussiana de largura  $\Delta k = 0.04 \text{ \AA}^{-1}$  e energia 5 eV. A barreira começa na origem, tem largura de 5  $\text{\AA}$  e altura de 10 eV. A linha do alto mostra o perfil de densidade nos instantes  $-0.5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$  e  $-0.1 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ , e a linha de baixo mostra os tempos  $10^{-14} \text{ s}$  e  $0.5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ . Em todos os gráficos a escala vertical à direita da barreira é multiplicada por  $10^4$  para destacar as características do pequeno pacote transmitido. Fonte: Lasenby et al. (1996).

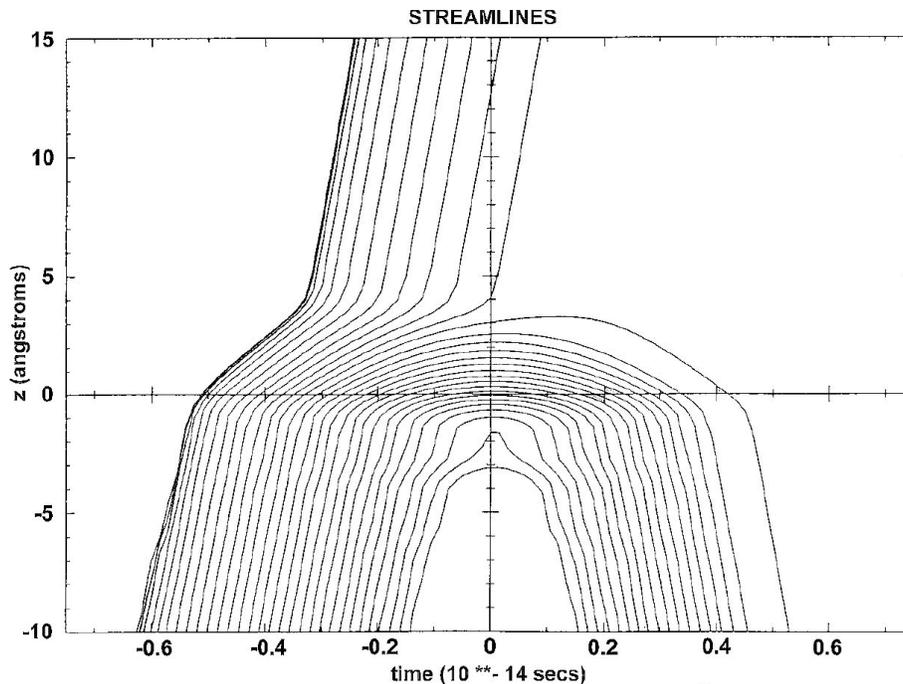


Figura 8.2: Linhas de corrente de partículas para a evolução do pacote mostrado na fig. 8.1. Somente as linhas de corrente (linhas integrais) da frente do pacote atravessam a barreira, com as linhas individuais desacelerando à medida que atravessam a barreira. Fonte: Lasenby et al. (1996).

## 8.2 Tunelamento de microondas e fótons

Nesta seção estudamos o tunelamento de pulsos gaussianos truncados de microondas em condições análogas (mas não completamente equivalentes) às dos experimentos de Nimtz (Nimtz 1997, Brodowsky, Heitmann & Nimtz 1996), seguindo Emig (1996). Como veremos, sob certas condições os máximos das soluções atravessam a barreira com velocidade superluminal. Este resultado é novamente uma faceta do fenômeno de reformatamento de pulso. É um resultado muito importante, pois mostra que mesmo quando os máximos se movem com velocidade superluminal, a velocidade da *frente de onda* (definida pelo corte imposto com uma função degrau de Heaviside) move-se no “meio dispersivo” (a barreira) com uma velocidade que é sempre

*c.*<sup>1</sup>

O problema que vamos estudar é formulado da seguinte forma. Tal como na experiência de Nimtz (Nimtz 1997), uma barreira, produzida por uma região de constante dielétrica baixa  $\epsilon_2$ , é colocada em um guia de ondas retangular com a mesma seção transversal, preenchido com um meio de constante dielétrica maior  $\epsilon_1$  (fig. 8.5). Vamos supor que  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  não são funções da frequência.<sup>2</sup>

Sob estas condições a relação entre o número de onda e a frequência é dada em cada uma das regiões por

$$k = \sqrt{\epsilon_i} \sqrt{\omega^2 - m_i^2}, \text{ com } i = 1, 2, \quad m_1^2 = \frac{\omega_c^2}{\epsilon_1}, \text{ e } m_2^2 = \frac{\omega_c^2}{\epsilon_2}, \quad (8.1)$$

onde  $\omega_c$  é a frequência de corte do guia. A expressão (8.1) impede a inversão analítica da transformada de Laplace, que é a transformada adequada para o estudo de pulsos truncados (Mehmeti 1996). Por este motivo, fazemos as seguintes aproximações para o número de onda em cada uma das regiões:

$$k = \sqrt{\omega^2 - m_1^2}, \quad \kappa = \sqrt{\omega^2 - m_2^2}. \quad (8.2)$$

Com estas relações de dispersão a velocidade da frente do pacote gaussiano truncado será  $c (= 1)$ . Lembramos do capítulo 2 que as equações de Maxwell livres para o tensor de Faraday  $F$  podem ser escritas no fibrado de Clifford de multiformas como uma única equação  $\boldsymbol{\partial} F = 0$ , a qual, com a

---

<sup>1</sup>O resultado de que uma frente de onda (para problemas bidimensionais) sempre se move com velocidade  $c$  em um meio dispersivo foi provado há muito tempo por Brillouin e Sommerfeld (Brillouin 1960). Vale a pena chamar a atenção do leitor que este fato está intimamente conectado com as características das equações de onda. Um fato interessante, conhecido por qualquer pessoa que tenha estudado (Courant & Hilbert 1966), e que perturba muitas pessoas e está sempre sendo redescoberto (veja-se, por exemplo, Fox et al. (1970), Strnad & Kodre (1975), Moretti & Agresti (1995), Chiao, Kozhekin & Kurizki (1996)) é que a *EOH* e a *EKG* para brádions e táquions possuem as mesmas características. Em particular, Chiao et al. (Chiao et al. 1996) propuseram e realizaram um experimento para lançar e observar excitações tipo táquion em meios invertidos de dois níveis. Naturalmente, tais excitações são devidas ao reformatamento de pulso. Aharanov et al. (1998) argumentaram que a teoria quântica impõe restrições severas sobre a observação dessas excitações tipo táquion, mas este não parece ser o caso, visto existirem atualmente muitos experimentos mostrando este tipo de comportamento.

<sup>2</sup>É importante enfatizar que os resultados de Emig não descrevem exatamente os resultados das experiências de Nimtz, pois este não empregou pacotes gaussianos truncados. Em vez disso, as configurações de campo eletromagnético usadas apresentam um espectro de frequência limitado, com todas as frequências abaixo da frequência de corte da região evanescente. Uma configuração de campo eletromagnético deste tipo não possui uma fronteira *matemática*.

hipótese expressa pela eq.(8.2) e supondo a inexistência de correntes, governa a propagação do nosso pulso gaussiano truncado no interior da barreira.

Podemos encontrar o valor do campo eletromagnéticos atrás da barreira (que se estende ao longo do eixo  $z$ ) calculando a integral (8.6) abaixo, se for dado o pulso localizado na frente da barreira como condição inicial. Isto é realmente suficiente. De fato, suponhamos que  $P \in \sec \wedge^p M \subset \sec \mathcal{C}(M)$ ,  $L \in \sec \wedge^{p-1} M \subset \sec \mathcal{C}(M)$ ,  $Q \in \sec \wedge^{p+1}(M) \subset \sec \mathcal{C}(M)$  e que  $\boldsymbol{\partial} P = L + Q$ . Então, o teorema de Green generalizado para formas diferenciais (Thirring 1980) fornece

$$P(x) = (-1)^{p+4} \int_{\mathcal{M}} [dG(x-x') \wedge \delta P(x') \delta G(x-x') \wedge dP(x')] - \int_{\partial \mathcal{M}} [\delta G(x-x') \wedge P(x') - (-1)^{4+p} \star dG(x-x') \wedge \star P(x')], \quad (8.3)$$

onde na integral  $d$  e  $\delta$  agem sobre a variável  $x$  e

$$\boldsymbol{\partial}^2 G(x-x') = -\delta_P(x-x') \quad (8.4)$$

$$\delta_P(x-x') = \gamma'_{\mu_1 \dots \mu_p} \otimes \star \gamma^{\mu_p \dots \mu_1} \delta(x-\bar{x}) \quad (8.5)$$

Para nosso problema específico, escolhendo  $\gamma^\mu = dx^\mu$ ,  $\gamma'^\mu = dx'^\mu$ , encontramos

$$F(t, \vec{x}) = - \int_{\mathbf{V}} \delta G(x-x') \wedge F(x') - \star dG(x-x') \wedge \star F(x') \quad (8.6)$$

onde  $\mathbf{V} = \{0 \leq x'^1 = x' < a, 0 \leq x'^2 = y < b, -d/2 \leq x'^3 = z < d/2, t' = 0\}$ . Esta última fórmula pode ser escrita de maneira bastante compacta como

$$F(t, \vec{x}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{V}} \gamma'^0 \gamma'^1 \gamma'^3 \left\langle \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} G_s(x, x') \gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^\beta F_{\alpha\beta}(x') \right\rangle_2 \quad (8.7)$$

onde  $G_s$  é a função de Green escalar *retardada*, i.e., ela se anula fora do cone de luz em  $x \equiv (t, \vec{x})$ .  $G$  deve satisfazer condições de contorno apropriadas, i.e., suas componentes devem apresentar descontinuidades adequadas nas duas fronteiras entre as regiões evanescente e de propagação.

A expansão da eq.(8.7) em componentes fornece

$$F_{01}(x) = \int_{\mathbf{V}} d^3 x' (G_{01,0} F_{01}(x') - G_{01,2} F_{12}(x') - G_{01,3} F_{13}(x')) \quad (8.8a)$$

$$F_{02}(x) = \int_{\mathbf{V}} d^3 x' (G_{02,0} F_{02}(x') + G_{02,1} F_{12}(x') - G_{02,3} F_{13}(x')) \quad (8.8b)$$

$$F_{03}(x) = \int_{\mathbf{V}} d^3 x' (G_{03,0} F_{03}(x') + G_{03,1} F_{13}(x') + G_{03,2} F_{23}(x')) \quad (8.8c)$$

$$F_{12}(x) = \int_{\mathbf{V}} d^3 x' (G_{12,0} F_{12}(x') + G_{12,1} F_{02}(x') - G_{12,2} F_{01}(x')) \quad (8.8d)$$

$$F_{13}(x) = \int_{\mathbf{V}} d^3 x' (G_{13,0} F_{13}(x') + G_{13,1} F_{03}(x') - G_{13,3} F_{01}(x')) \quad (8.8e)$$

$$F_{23}(x) = \int_{\mathbf{V}} d^3 x' (G_{23,0} F_{23}(x') + G_{23,2} F_{03}(x') - G_{23,3} F_{02}(x')) \quad (8.8f)$$

Nas equações (8.8) pusemos dois índices ( $\mu\nu$ ) na função de Green, a fim de lembrar que ela está associada com a componente  $F_{\mu\nu}$  do campo; o terceiro índice refere-se à derivada na direção  $\alpha$ . Esta distinção é necessária, pois as diferentes componentes do campo eletromagnético satisfazem condições de contorno diferentes. Vamos restringir-nos ao estudo de modos  $TE$ .

As condições de contorno adequadas para as componentes do campo são:

$$E_3 = 0 \quad \text{em todo o espaço}; \quad \left. \frac{\partial B_3}{\partial n} \right|_S = 0; \quad (8.9)$$

onde  $S$  é a superfície interna do guia de ondas e  $\vec{n}$  é a normal a  $S$ .

No que segue, concentraremos nossa atenção sobre a componente longitudinal  $F_{12} = -B_3$ . Temos

$$B_3(t, \vec{x}) = \int d^3 x' (-G_0 B_3 + G_1 E_2 - G_2 E_1) \quad (8.10)$$

onde, para simplificar a notação, escrevemos  $G_{12,k} = G_k$ . Escrevendo

$$\tilde{G}(\omega, \vec{x}) = \mathcal{L}[G(t, \vec{x})] = \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} G(t, \vec{x}) \quad (8.11)$$

e usando (8.8d), a transformada de Laplace da função de Green que fornece as condições de contorno corretas para  $B_3$  é

$$\tilde{G}(\omega, \vec{x}, t', \vec{x}') = \sum_{l,n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega t'} \cos\left(\frac{\pi l x'^1}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi l x'^2}{b}\right) e^{-i\left(\frac{\pi l x'^1}{a} + \frac{\pi l x'^2}{b}\right)} \tilde{g}(z, z') \quad (8.12)$$

onde

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \omega^2 - m^2(z)\right] \tilde{g}(z, z') = \delta(z - z'), \quad (8.13)$$

com

$$m(z) = \begin{cases} m_1 = \omega_c / \sqrt{\epsilon_1}, & |z| \geq d/2 \\ m_2 = \omega_c / \sqrt{\epsilon_2}, & |z| < d/2 \end{cases}, \quad \omega_c = \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (8.14)$$

Note-se que  $\tilde{g}(z, z')$  depende de  $l$  e  $n$ , visto que as “frequências” de corte  $m_1$  e  $m_2$  são diferentes para modos diferentes; também, não aparece em (8.13) nenhum termo de contorno em  $t = 0$  proveniente da transformada de Laplace da segunda derivada temporal, devido à anulação da função de Green para  $t < t'$  e à propriedade  $t' > 0$ .

A forma de  $\tilde{g}(z, z')$  pode ser obtida com o método padrão em termos de duas soluções linearmente independentes da equação de onda homogênea:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \omega^2 - m^2(z)\right] \psi(z) = 0. \quad (8.15)$$

Escrevemos, usando a notação padrão,

$$\psi^{(1)}(z) = \begin{cases} e^{ikz} + R e^{-ikz} & z \leq -d/2 \\ A e^{i\kappa z} + B e^{-i\kappa z} & |z| < d/2 \\ T e^{ikz} & z \geq d/2 \end{cases}, \quad (8.16)$$

$$\psi^{(2)}(z) = \begin{cases} T e^{-ikz} & z \leq -d/2 \\ A e^{-i\kappa z} + B e^{i\kappa z} & |z| < d/2 \\ e^{-ikz} + R e^{ikz} & |z| \geq d/2 \end{cases}. \quad (8.17)$$

onde os números de onda  $k$  e  $\kappa$  são definidos na eq.(8.2) e as raízes quadradas nas equações são escolhidas analíticas no semiplano  $\omega$  superior, devido à analiticidade nesse semiplano da transformada de Laplace. Isso significa que os números de onda têm partes imaginárias positivas, apresentando o comportamento assintótico correto para  $\psi^1(z)$  [ $\psi^2(z)$ ] quando  $z \rightarrow \infty$

$[z \rightarrow -\infty]$ . Os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $R$ , e  $T$  são determinados pelos dois planos que definem a região evanescente localizada em  $z = -d/2$  e  $z = d/2$ . Os coeficientes das duas soluções linearmente independentes foram escolhidos iguais porque a barreira é simétrica com respeito ao plano  $z = 0$ . Sendo  $W$  o wronskiano da solução, temos então que

$$\tilde{g}(z, z') = \frac{1}{W} \begin{cases} \psi^{(1)}(z')\psi^{(2)}(z) & z' \geq z \\ \psi^{(2)}(z')\psi^{(1)}(z) & z' \leq z \end{cases}. \quad (8.18)$$

Para o problema do tunelamento do pacote gaussiano truncado, precisamos do caso  $z' \geq z$  com  $z < -d/2$  e  $z' > d/2$ , para o qual a função de Green é

$$\tilde{g}(z, z') = \frac{1}{2ik} T e^{-ik(z-z')}. \quad (8.19)$$

Agora,  $B_3$  deve ser contínuo em  $z = -d/2$  e  $z = d/2$  e precisamos saber o comportamento de suas derivadas parciais nas direções perpendiculares aos planos que formam as fronteiras da barreira. As componentes transversais  $B_1$  e  $B_2$  são contínuas em todos os pontos pertencentes às fronteiras, o que implica que as derivadas parciais paralelas aos planos são contínuas sobre eles. Dado que  $\nabla \cdot \vec{B}_0$  e  $\partial B_3 / \partial z$  devem também ser contínuas nos planos  $z = -d/2$  e  $z = d/2$ , obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{L} 2k(k + \kappa) e^{i(\kappa-k)d/2}, \\ B &= -\frac{1}{L} 2k(k - \kappa) e^{i(3\kappa-k)d/2}, \\ R &= \frac{1}{L} e^{-ikd} (1 - e^{2i\kappa d}) (k^2 - \kappa^2), \\ T &= \frac{1}{L} 4k\kappa e^{i(\kappa-k)d}, \\ L &= (k + \kappa)^2 - (k - \kappa)^2 e^{2i\kappa d} \end{aligned} \quad (8.20)$$

Finalmente

$$g(t - t', z, z') = \int_{-\infty + is}^{\infty + is} d\omega e^{i\omega(t-t')} \tilde{g}(z, z') \quad (8.21)$$

Visto que no semiplano  $\omega$  superior temos que  $(k - \kappa) \neq 0$ , que  $(k - \kappa)/(k + \kappa)$  é limitado por 1 e que  $\text{Im } \kappa > 0$ , podemos expandir  $T$  na seguinte série geométrica:

$$T = 4k\kappa e^{-ikd} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(k - \kappa)^{2p}}{(k + \kappa)^{2p+2}} e^{ikd(2p+1)} \quad (8.22)$$

Então, usando as equações (8.20) e (8.22) na (8.21) obtemos

$$\begin{aligned} g(t, z) &= \frac{2}{m_0^2} \sum_{p=0}^{\infty} h_p(t, z) \\ &= -2 \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ q_p(t, z) + \frac{1}{m_0^2} \ddot{q}_p(t, z) \right. \\ &\quad \left. - m_1 \int_0^t du \left[ q_p(\sqrt{t^2 - u^2}, z) + \frac{1}{m_0^2} \ddot{q}_p(\sqrt{t^2 - u^2}, z) \right] J_1(m_1 u) \right\} \end{aligned} \quad (8.23)$$

com  $m_0 = \sqrt{m_2^2 - m_1^2}$  e

$$\begin{aligned} q_p(t, z) &= \Theta(t - z - 2pd) \left( \frac{t - z + d - (2p + 1)d}{t - z + d + (2p + 1)d} \right)^{2p+1} \\ &\quad \times J_{4p+2}(m_0 \sqrt{(t - z + d)^2 - d^2(2p + 1)^2}) \end{aligned} \quad (8.24)$$

onde  $\Theta$  é a função degrau de Heaviside e  $J_p$  é a função de Bessel de ordem  $p$ . Vemos que mesmo o termo inicial da série salta de zero para um valor finito na borda do cone de luz passado, levando assim a uma propagação *causal*. Entretanto, diferentemente da propagação no espaço livre, vemos que a função de Green também tem suporte no interior do cone de luz. É muito importante entender a razão para que isso aconteça.

Examinemos os termos  $p$  na segunda linha da eq.(8.23). Esses termos contribuem para a série somente para  $t > z + 2pd$ , e portanto representam a parte do campo que deixa o lado direito da barreira depois de  $2p$  reflexões nas suas fronteiras. Por outro lado, o termo dentro da integral na terceira linha da eq.(8.23) surge devido às condições de contorno e não tem qualquer relação com a barreira em si. A integral deste termo descreve o *efeito eco*, que acontece porque durante a propagação o campo eletromagnético dentro da barreira é refletido nas paredes metálicas. Então, o termo na terceira linha da eq.(8.23) descreve uma *distorção* durante o intervalo de tempo  $[0, t]$  para todas as excitações em uma dada posição.

Considerando a discussão acima, percebemos que o *atraso não distorcido*, que é o mais interessante, é dado pelo termo na segunda linha da eq.(8.23),

o qual será o único a ser considerado a seguir para o tunelamento de um modo  $H_{01}$  gaussiano truncado centrado em alguma posição  $z = s < -d/2$  em frente à barreira, com frequência central correspondente a  $k_0 = \sqrt{\omega_0^2 - m_1^2}$  e tal que a frente de onda do pulso deve estar na frente da barreira em  $t = 0$ . Para este caso, as componentes relevantes do campo incidente são

$$\begin{aligned} B_3(x) &= \cos(x^1 \pi/a) \phi(x^3), \\ E_2(x) &= i\omega_0 \operatorname{sen}(x^1 \pi/a) \phi(x^3), \\ \phi(x^3) &= \Theta(-x^3 + s + \gamma) e^{ik_0 x^3} e^{-(x^3 - s)^2 / \sigma^2} \end{aligned} \quad (8.25)$$

onde o parâmetro  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < -s - d/2$ , descreve a distância entre o máximo e a frente de onda. Com todos estes pontos levados em consideração, a eq.(8.10) fornece

$$B_3(x) = \frac{-2}{m_0^2} \cos\left(\frac{\pi x^1}{a}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \cos[k_0(u-s)] \Xi_p^{(1)}(u) + \operatorname{sen}[k_0(u-s)] \Xi_p^{(2)}(u) \right\}, \quad (8.26)$$

onde  $u = t - z + s + d$  e

$$\begin{aligned} \Xi_p^{(1,2)}(u) &= \Theta(u + \gamma - (2p+1)d) \\ &\times \int_{(2p+1)d}^{u+\gamma} dv e^{-(u-v)^2 / \sigma^2} \left( \frac{v - (2p+1)d}{v + (2p+1)d} \right)^{2p+1} \\ &\times J_{4p+2}(m_0 \sqrt{v^2 - (2p+1)^2 d^2}) \\ &\times \left[ \cos(k_0 v) \Upsilon^{(1,2)}(u-v) \mp \operatorname{sen}(k_0 v) \Upsilon^{(1,2)}(u-v) \right], \end{aligned} \quad (8.27)$$

com  $v = v' - z' + d$ , e

$$\begin{aligned} \Upsilon^{(1)}(u) &= \frac{2}{\sigma^2} u \left( \omega_0^2 - m_2^2 + 2k_0(k_0 + \omega_0) - \frac{4u^2}{\sigma^4} + \frac{6}{\sigma^2} \right), \\ \Upsilon^{(2)}(u) &= k_0 \left( \omega_0^2 - m_2^2 - \frac{12u^2}{2} \right) + \omega_0 \left( \omega_0^2 - m_2^2 - \frac{4u^2}{\sigma^4} + \frac{2}{\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (8.28)$$

A integral na eq.(8.27) foi calculada numericamente por Emig (1996) e a figura 8.3 mostra (em unidades arbitrárias) o envelope de  $B_z$  para frequências de corte e central fixas e para espessuras  $d$  diferentes em um ponto arbitrário atrás da barreira, em função da coordenada relativa  $u$ .

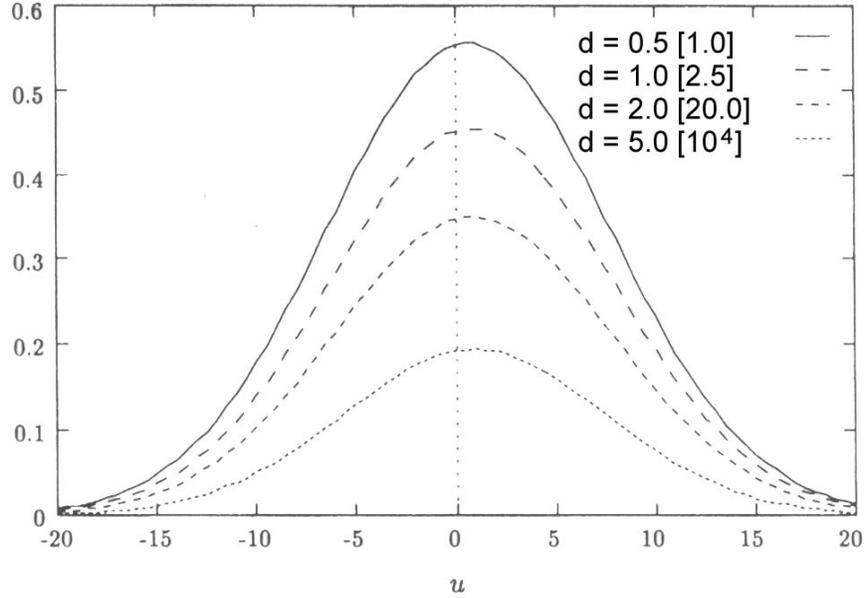


Figura 8.3: Gráficos para o envelope de  $B_z$  para pacotes gaussianos truncados transmitidos abaixo do corte através de barreiras de espessuras  $d$  diferentes como função da coordenada relativa  $u = t - z + s + d$ . As frequências de corte são dadas por  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 4$ . Além disso,  $\omega_0 = 3.2$  e  $\sigma_0 = 10$ . Fonte: Emig (1996).

A distância  $\gamma$  entre o máximo do pacote e sua fronteira foi escolhida como cinco vezes o valor da variância  $\sigma_0$  do pulso, a fim de prevenir deformações do pulso transmitido que surgem quando o pulso incidente apresenta uma componente de frequência alta muito grande. Foi usado o valor  $x^1 = 0$ .

O pulso não mudou sua forma, na figura 8.3, porque não levamos em consideração o efeito eco. Apesar disso, como no caso do problema estudado na seção 7.3, ocorre o *reformatamento de pulso*, produzindo uma velocidade de grupo superluminal. De fato, podemos comparar o tempo de tunelamento do pico de nosso pacote gaussiano truncado com o tempo que o pico gastaria para atravessar a mesma distância no vácuo, onde ele não muda de forma. O pico chega ao lado esquerdo da barreira em um instante  $t_f = -s - d/2$ . Seja  $\mathcal{T}$  tal que  $B_z(\mathcal{T})$  é um máximo. Então, dada a definição da variável  $u$  (eq.(8.26)), encontramos que o pico do pacote de ondas tunelado chega ao

	$m_1 = 1$	$m_2 = 4$	$\omega_0 = 3.2$
$d$		$\mathcal{T}$	$\sigma$
0.5		0.66	10.01
1.0		0.82	9.97
2.0		0.86	9.85
4.0		0.91	9.38
	$m_1 = 6.5$	$m_2 = 9.5$	$\omega_0 = 8.5$
$d$		$\mathcal{T}$	$\sigma$
3.0		0.48	9.82
4.0		0.49	9.66

Tabela 8.1: Valores numéricos para tempos de tunelamento e variância. Fonte: Emig (1996).

lado direito da barreira no instante

$$t_T = \mathcal{T} - s - \frac{d}{2}, \quad (8.29)$$

e o tempo de tunelamento é, naturalmente, dado por  $\mathcal{T}$ .

Emig obteve o tempo de tunelamento e a variância dos pacotes ajustando pacotes de ondas gaussianos aos gráficos da figura 8.3; os valores resultantes para  $\mathcal{T}$  e  $\sigma$  são apresentados na tabela 8.1 para dois conjuntos de parâmetros  $m_1$  e  $m_2$  e para duas frequências centrais diferentes. Em ambos os casos a variância inicial é tomada como  $\sigma_0 = 10$ .

Da tabela 8.1 vemos que para  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 4$ ,  $\omega_0 = 3.2$  e  $d = 0.5$ ,  $v_g = d/\mathcal{T} < 1$ , e  $v_g$  aumenta (e se torna superluminal) mais e mais lentamente com o aumento da espessura da barreira, um resultado de acordo com a experiência (efeito Hartman). A tabela 8.2 mostra o tempo de tunelamento para dois valores diferentes da variância inicial e a variância resultante dos pacotes gaussianos usados para ajustar os dados, para valores diferentes da frequência central para  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 4$  e  $d = 5$ . Esses tempos de tunelamento correspondem a velocidades de grupo superluminais.

A análise de Emig, que acabamos de reproduzir, mostra que *não* há violação da causalidade de Einstein. A fim de compreender o mecanismo do reformatamento de pulso no caso do tunelamento de pacotes de onda gaussianos, esse autor emprega uma idéia similar a uma idéia empregada no caso do tunelamento de elétrons (e fundada em fórmulas matemáticas similares, como mostrado no capítulo 2), i.e., ele afirma que o reformatamento pode ser entendido se seguirmos as linhas integrais do quociente do vetor de Poynting pela densidade de energia (o fluxo de energia). O autor exhibe

$\sigma_0 = 10$		
$\omega_0$	$\mathcal{T}$	$\sigma$
1.2	0.52	9.90
1.6	0.55	9.87
2.0	0.58	9.83
2.4	0.64	9.78
2.8	0.72	9.68
3.2	0.91	9.38
$\sigma_0 = 4$		
$\omega_0$	$\mathcal{T}$	$\sigma$
1.2	0.53	3.72
1.6	0.57	3.61
2.0	0.63	3.43

Tabela 8.2: Tempos de tunelamento e variâncias para pacotes de ondas com frequências centrais e variâncias iniciais diferentes. Fonte: Emig (1996).

um gráfico *qualitativo* do fluxo de energia (reproduzido na figura 8.4). O gráfico é muito similar ao da figura 8.2, e mostra que as linhas de corrente da energia tunelada vêm do extremo direito da cauda do pulso gaussiano truncado. Entretanto, além das questões intrínsecas referentes à interpretação do vetor de Poynting, a serem tratadas na seção 8.3, há aqui um outro problema. Segundo a interpretação de de Broglie-Bohm da mecânica quântica — a qual, como vimos no capítulo 2, é naturalmente sugerida pela formulação no fibrado de Clifford da Mecânica Quântica Relativística e da Teoria Eletromagnética — essas linhas integrais *não são* os caminhos dos fótons, porque nessa teoria não existem fótons!<sup>3</sup> O que é importante lembrar é que para todos os campos relativísticos (bósons, férmions) existem situações que permitem o reformatamento de pulsos (Deutch & Low 1993, Landauer & Martin 1994, Garrett & McCumber 1970), dando origem a velocidades de grupo superluminais, ou mesmo negativas.

Será que as velocidades de grupo superluminais observadas no tunelamento de microondas implicam que estamos enviando informação a velocidades superluminais? A energia viaja com velocidades superluminais nesses experimentos? A existência de velocidades de grupo negativas implica que a causalidade está sendo violada, no sentido de que estamos enviando informação de volta para o passado? De acordo com Nimtz (Heitmann &

<sup>3</sup>A bem da verdade, não existem partículas bosônicas na interpretação de de Broglie-Bohm da mecânica quântica (Bohm & Halley 1993, Holland 1993, Grib & Rodrigues 1999).

Nimtz 1994, Nimtz 1997) a resposta a estas questões é *sim*. Esta também é a opinião de Mehmeti, expressa em seu recente livro (Mehmeti 1996). Na seção 7.4 apresentamos nossa resposta a estas três questões.

A idéia, mencionada acima, de que não existem fótons na natureza pode parecer estranha, mas o fato é que, segundo Marshall (1997b), todos os resultados de experimentos envolvendo “fótons” podem ser explicados pela eletrodinâmica clássica de Maxwell mais o campo de ponto zero, sem lançar mão desse conceito. Sobre este assunto veja-se também (Marshall 1997a, Grimes & Grimes 1995, Ives 1951).

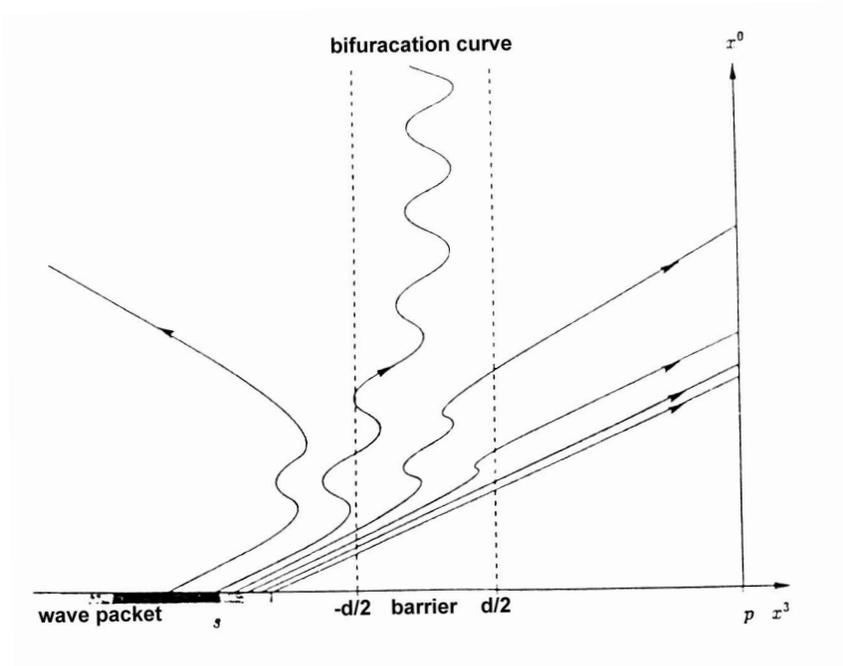


Figura 8.4: Gráfico qualitativo do fluxo de energia em um plano  $(x^0, x^3)$  do espaço-tempo de Minkowski. A intensidade do plote do pacote inicial corresponde a sua densidade de energia.

## 8.3 Qual a velocidade da Energia?

### 8.3.1 Velocidade da energia em meio dispersivos

Como é bem conhecido, a velocidade de transporte de energia é normalmente dada por (Jancewicz 1988, Band 1988a, Band 1988b)

$$v_{\mathcal{E}} = \frac{|\vec{P}|}{u} \quad (8.30)$$

onde  $\vec{P}$  é o vetor de Poynting e  $u$  é a densidade de energia. Já observamos que esta fórmula geral é de validade limitada. Apesar disso, ela foi usada em discussões sobre a propagação de ondas em meios dispersivos, mais exatamente, em meios amplificadores formados por átomos de dois níveis com população invertida (Chiao 1993, Bolda et al. 1994, Steinberg & Chiao 1994), que apresentam um índice de refração

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (8.31)$$

É fácil verificar que para  $|\omega_0 - \omega| \gg \gamma$  o meio é anômalo, i.e., a velocidade de grupo dada pela eq.(7.37) é maior que 1. A dispersão e a amplificação são desprezíveis quando  $\omega \rightarrow 0$ , o que significa que um pulso se propaga sem qualquer distorsão apreciável. Bolda et al. (1994) afirmam que neste caso a velocidade de propagação da energia deve ser identificada com a velocidade de grupo e é superluminal. Seu argumento é o seguinte: Usando a mesma notação da seção 6.1, e escolhendo novamente  $\mu = \mu_0 = 1$ , lembramos que de acordo com as equações de Maxwell *fenomenológicas*<sup>4</sup> temos a seguinte equação para o balanço de energia:

$$\nabla \cdot \vec{P} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (8.32)$$

onde  $\vec{j}$  é uma corrente externa.

Agora, a relação entre  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$  é dada por (7.10), que reescrevemos como

---

<sup>4</sup>As equações de Maxwell fenomenológica são as eqs.(7.9) com as densidades externas de carga e corrente.

$$\begin{aligned}\vec{D}(t, \vec{x}) &= \int_0^t dt' \epsilon(t-t') \vec{E}(t', \vec{x}), \\ \vec{D}(\omega, \vec{x}) &= \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega, \vec{x}), \quad \epsilon(\omega) = \int_0^\infty dt \epsilon(t) e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (8.33)$$

Vamos supor a existência de um campo eletromagnético transversal que se propaga no meio,

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \text{Re } \vec{\mathfrak{E}}(t, \vec{x}), \quad \vec{\mathfrak{E}}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0(t, \vec{x}) e^{-i\omega t}, \quad (8.34)$$

onde  $\vec{E}_0(t, \vec{x})$  é uma modulação que varia *lentamente*. Das eqs.(8.33) obtemos as seguintes aproximações, válidas sob as hipóteses acima:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{Re } \epsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \omega \frac{d \text{Re } \epsilon(\omega)}{d\omega} \text{Re} \left( \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} e^{-i\omega t} \right) + \omega \text{Im } \epsilon(\omega) \vec{E}. \quad (8.35)$$

Substituindo (8.35) em (8.32), considerando  $\text{Im } \epsilon(\omega)$  e  $\text{Re} \left( \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \right)$  quantidades pequenas e omitindo termos de ordem superior, encontramos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{P} + \frac{\partial u}{\partial t} &= -\vec{j} \cdot \vec{E} - \eta_a, \\ |\vec{P}| &= [\text{Re } \epsilon(\omega)]^{\frac{1}{2}} E^2, \\ u &= \text{Re } \epsilon(\omega) E^2 + \frac{1}{4} \omega \frac{d \text{Re } \epsilon(\omega)}{d\omega} \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0, \\ \eta_a &= \omega \text{Im } \epsilon(\omega) E^2.\end{aligned}\quad (8.36)$$

onde  $u$  é a densidade de energia total e  $\eta_a$  é o ganho de energia no meio amplificador (ou a perda de energia, num meio dissipativo). Das equações de Maxwell segue-se que  $B = Dk/\omega = v_{ph} E$ . Denotando a média sobre um período por uma barra, temos

$$\begin{aligned}\bar{P} &= [\text{Re } \epsilon(\omega)]^{\frac{1}{2}} \bar{E}^2, \\ \bar{u} &= \left( \text{Re } \epsilon(\omega) + \frac{1}{2} \omega \frac{d \text{Re } \epsilon(\omega)}{d\omega} \right) \bar{E}^2 \\ \frac{\bar{P}}{\bar{u}} &= \frac{[\text{Re } \epsilon(\omega)]^{\frac{1}{2}}}{[\text{Re } \epsilon(\omega)]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \omega \frac{d \text{Re } \epsilon(\omega)}{d\omega}} = \frac{1}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = v_g\end{aligned}\quad (8.37)$$

Vemos que se a eq.(8.30) for aceita como a velocidade de transporte de energia, então deveremos aceitar que a energia flui a uma velocidade superluminal nos casos em que  $|\omega_0 - \omega| \gg \gamma$ . Entretanto, visto que já concluímos que a velocidade de grupo superluminal é devida ao reformatamento de pulso, sem qualquer violação da causalidade de Einstein, precisamos concluir que a análise acima é inválida. Uma análise rigorosa deve seguir a sugestão de Feynman (Feynman et al. 1964), i.e., que as equações de Maxwell fundamentais devem ser usadas para o estudo de fenômenos em meios dispersivos. Vamos por isso analisar novamente nosso problema, introduzindo explicitamente as distribuições de corrente ( $j_p$ ) e de carga ( $\rho_p$ ) de polarização no meio. Estas são dadas por

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad \text{e} \quad \vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8.38)$$

As equações de Maxwell apropriadas são

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \nabla \cdot \vec{P} & \nabla \times \vec{B} &= \vec{j} + \vec{j}_p + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Neste caso, teremos a seguinte equação para o balanço de energia:

$$\nabla \cdot \vec{P} + \frac{\partial u_f}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{j}_p \cdot \vec{E}, \quad (8.39)$$

onde a energia “livre”

$$u_f = \frac{E^2 + B^2}{2} \quad (8.40)$$

é a verdadeira energia armazenada no campo ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ), que se propaga através do meio. Agora,  $\vec{P}$  na eq.(8.39) é o mesmo que na eq.(8.36). Tomando a diferença entre a eq.(8.39) e a eq.(8.40) encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u - u_f)}{\partial t} &= \frac{\partial u_m}{\partial t} = \eta - \eta_a, \\ \eta &= \vec{j}_p \cdot \vec{E}. \end{aligned} \quad (8.41)$$

O significado da eq.(8.41) é que o trabalho  $\eta$  realizado pelo meio é parcialmente estocado no próprio meio com uma densidade de energia *recuperável*  $u_m$ , e parcialmente dissipado, esta última parte, naturalmente, sendo igual a  $\eta_a$  (Diener 1997, Diener 1998). Nenhum termo de transporte aparece em

(8.41), o que significa que a energia armazenada não se move! Este resultado concorda com a lei constitutiva local utilizada (eq.(8.33)), que implica que não existe interação entre diferentes elementos de volume do meio, sendo esta a razão pela qual a energia aí armazenada não se propaga. O transporte desta energia somente é possível pela sua conversão em energia móvel.

Continuando nossa análise, vemos que é possível escrever duas equações de balanceamento a partir das equações (8.39) e (8.41) (tomando a corrente externa  $\vec{j} = 0$ , que é nosso caso):

$$\nabla \cdot \vec{P} + \frac{\partial u_f}{\partial t} = -\eta - \eta_a, \quad \frac{\partial u_m}{\partial t} = \eta, \quad (8.42)$$

onde o termo  $\eta$  descreve uma troca oscilante entre as energias do campo e do meio, mantendo uma razão fixa entre elas, mesmo para ondas moduladas. Para o campo eletromagnético transversal considerado acima encontramos, após calcular a média,

$$\begin{aligned} u_f &= \frac{1}{2} (1 + \text{Re } \epsilon) \overline{E^2}, \\ u_m &= \frac{1}{2} \left( \text{Re } \epsilon - 1 + \omega \frac{d \text{Re } \epsilon(\omega)}{d\omega} \right) \overline{E^2}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Dadas as considerações acima, parece claro que uma definição razoável da velocidade de transporte de energia é dada por

$$v_{\mathcal{E}} = \frac{\bar{P}}{u_f} = \frac{2n}{1 + n^2} \leq 1. \quad (8.44)$$

Esta expressão é uma descrição teórica razoável do transporte de energia em um meio amplificador, mas devemos levar em consideração que parece impossível, do ponto de vista experimental, separar a densidade de energia total em densidade de energia do campo mais densidade de energia do meio.

### 8.3.2 Velocidade da energia em um guia de ondas

Em um guia de ondas (com  $\epsilon = \epsilon_0 = 1$ ), como já foi visto, temos para qualquer modo a relação de dispersão

$$\omega^2 - k^2 = \omega_c^2, \quad (8.45)$$

a partir da qual podemos escrever

$$\frac{1}{v_{ph}} = \frac{k}{\omega} = \frac{d\omega}{dk} = v_g = \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} = n = \sqrt{\epsilon(\omega)} \quad (8.46)$$

onde um índice de refração formal  $n$  foi introduzido, o que não significa, naturalmente, que exista um meio material dentro do guia de ondas. Parece razoável definir a velocidade de transporte de energia para uma microonda monocromática usando uma equação análoga à eq.(8.44), com a densidade de energia *viajante* apropriada e o  $\bar{P}$  apropriado. Para o caso atual temos

$$\begin{aligned} u_f &= \frac{1}{2}(1 + \epsilon)E^2 = \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) E^2, \\ u_m &= \frac{1}{2}(\epsilon - 1)E^2 + \frac{1}{2}\omega \frac{d \operatorname{Re} \epsilon(\omega)}{d\omega} \overline{E^2} = \frac{\omega_c^2}{2\omega^2} (2\overline{E^2} - E^2), \end{aligned} \quad (8.47)$$

onde  $\overline{E^2}$  é a média temporal de  $E = E_0 \cos \omega t$ . Para interpretar estes termos, que oscilam defasados de  $\pi/2$ , precisamos levar em consideração que neste caso o campo não é transversal, e.g., para um modo  $TE$  temos um campo magnético longitudinal. É então necessário considerar uma decomposição diferente da energia. Temos

$$u_{\perp} = \frac{1 (\langle E_{\perp}^2 \rangle + \langle B_{\perp}^2 \rangle)}{2}, \quad u_{\parallel} = \frac{1}{2} \langle B_{\parallel}^2 \rangle \quad (8.48)$$

O campo  $B_{\parallel}$  contribui para o vetor de Poynting com uma componente *transversal*, perpendicular à direção de propagação. Portanto, somente sua componente transversal é responsável pelo transporte de energia ao longo do guia, o que significa que  $u_{\parallel}$  deve ser considerado como não propagante. Definimos então a velocidade de transporte de energia como

$$v_{\mathcal{E}} = \frac{\bar{P}}{\bar{u}_{\perp}} = \frac{2n}{1 + n^2} < 1 \quad (8.49)$$

Todavia, neste caso temos  $v_{\mathcal{E}} > v_g$ . É claro que quando  $\omega = \omega_c$  e  $\bar{u}_{\perp} = \bar{u}_{\parallel}$ , ambos,  $v_g$  e  $v_{\mathcal{E}}$ , são nulos, o que significa que a energia oscila entre os modos transversal e longitudinal.

Qual o significado desta fórmulas se  $\omega < \omega_c$ ? Uma inspeção da eq.(8.47) revela que  $u_f$  é negativo quando  $\omega < \omega_c/\sqrt{2}$ . Alguns autores, como, por exemplo, Nimtz (1998), sustentam que a interpretação deste resultado deve ser feita em analogia com o tunelamento de partículas descrito pela equação de Schrödinger, i.e., a densidade de energia negativa significa que os modos evanescentes *não são diretamente mensuráveis*. Embora tal analogia seja atraente, acreditamos que é enganadora, pois vimos em nossas discussões anteriores (8.2) que existe uma interpretação razoável para o fluxo de energia de modos evanescentes, o qual parece ser superluminal por causa do reformatamento de pulso.

### 8.3.3 Velocidade de transporte de energia para uma *UPW* superluminal

Se uma solução *UPW* das *EM* de energia finita pudesse ser produzida em uma dada superfície de Cauchy, então nos defrontaríamos com uma contradição com a eq.(8.30), visto que para uma solução arbitrária das *EM* no vácuo,  $\partial F = 0$ , é sempre verdadeira a desigualdade

$$v_\varepsilon = \frac{|\vec{P}|}{u} \leq 1. \quad (8.50)$$

Por outro lado, é claramente absurdo supor que uma *UPW* que se move com velocidade superluminal transporta sua energia com velocidade no máximo igual a 1. Embora esta discussão possa parecer meramente acadêmica, visto que não parece ser possível gerar *UPW*s de energia finita, o fato é que pode ser oferecida uma solução para este dilema. Com efeito, recordemos que a conservação de energia-momento sobre um volume finito  $V$  com fronteira  $S = \partial V$  pode ser escrita, em forma integral, como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int dV \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right\} = \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{P} \quad (8.51)$$

A eq.(8.51) é interpretada dizendo-se que  $\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{P}$  é a energia do campo que atravessa a superfície  $S = \partial V$ , de forma que  $\vec{P}$  é a densidade de fluxo —a quantidade de energia do campo atravessando uma unidade de área da superfície durante uma unidade de tempo. Para soluções de onda plana das equações de Maxwell,

$$v_\varepsilon = 1 \quad (8.52)$$

e para o movimento “superluminal” em meios dispersivos, concluímos que uma definição razoável da velocidade de transporte de energia fornece  $v_\varepsilon < 1$ .<sup>5</sup>

Nossa proposta para resolver o dilema é simplesmente a observação de que  $\vec{P}$  não é univocamente definido. De fato, a eq.(8.51) continua válida se

---

<sup>5</sup>Em 1987, Band (1988a, 1988b) encontrou pulsos de Bessel modificados superluminais. Ele reconheceu imediatamente que a definição padrão de velocidade de transporte de energia leva a  $v_\varepsilon \leq 1$ . Além disso, esse autor afirma que não existe conflito entre soluções superluminais das *EM* e a teoria da relatividade, pois segundo ele o que a relatividade proíbe é a propagação de energia com velocidade maior que 1.

substituímos  $\vec{P}$  por  $\vec{P} + \vec{P}'$ , com  $\nabla \cdot \vec{P}' = 0$ . Então, podemos encontrar facilmente para soluções subluminais, luminais ou superluminais das equações de Maxwell um  $\vec{P}'$  tal que

$$\frac{|\vec{P} + \vec{P}'|}{u} \geq 1. \quad (8.53)$$

Nossa conclusão, nesta seção, é que a questão do transporte local de energia em fenômenos ondulatórios superluminais é um problema *experimental*, embora para todas as ondas reais pareça ser verdade que  $v_\varepsilon < 1$ .

Vamos finalizar esta seção apresentando um exemplo ilustrativo de uma situação na qual a eq.(8.30) é desprovida de sentido físico, pois ainda que  $\vec{P}$  e  $u$  sejam bem definidos, sua existência não implica em qualquer movimento da energia do campo.

Consideremos um condutor em equilíbrio eletrostático, com densidade superficial de carga  $\sigma$  (carga total  $Q$ ) e com um momento de dipolo magnético. Então teremos

$$\vec{E} = Q \frac{\mathbf{r}}{r^2}; \quad \vec{B} = \frac{C}{r^3} (2 \cos \theta \mathbf{r} + \sin \theta \boldsymbol{\theta}) \quad (8.54)$$

e

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{B} = \frac{CQ}{r^5} \sin \theta \boldsymbol{\varphi}, \quad u = \frac{1}{2} \left( \frac{Q^2}{r^4} + \frac{C^2}{r^6} (3 \cos^2 \theta + 1) \right). \quad (8.55)$$

Assim

$$\frac{|\vec{P}|}{u} = \frac{2CQr \sin \theta}{r^2 Q^2 + C^2 (3 \cos^2 \theta + 1)} \neq 0 \quad \text{para } r \neq 0. \quad (8.56)$$

Visto que os campos são estáticos, a lei de conservação (8.51) continua a valer, pois não existe movimento de cargas e para qualquer superfície contendo o condutor esférico temos

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{P} = 0. \quad (8.57)$$

Mas não existe campo em movimento!

Lembramos também que na seção 2.19 de seu livro (Stratton 1941), Stratton apresenta uma discussão sobre o vetor de Poynting e a questão da transferência de energia que em essência concorda com a visão que acabamos de apresentar. Nas palavras desse autor: “By this standard, there is every reason to retain the Poynting-Heaviside viewpoint until a clash with new experimental evidence shall call for its revision.”

### 8.3.4 Sinais ideais *versus* sinais técnicos

Principiamos este capítulo introduzindo a definição de Sommerfeld e Brillouin de um sinal ideal, i.e., uma configuração do campo eletromagnético que apresenta uma frente, ou seja, uma fronteira separando a região na qual o campo é nulo de uma região onde o campo assume valores diferentes de zero. Esta frente pode ser introduzida de duas maneiras diferentes:

(i) Em  $\vec{x} = 0$  o campo eletromagnético é dado com a configuração de um pulso no domínio temporal, i.e., a configuração eletromagnética é dada, por meio da eq.(7.27). A propagação desta configuração de campo define o que chamamos de *problema de Sommerfeld*, e aprendemos que a frente se propaga com velocidade  $v_f = 1$ .

(ii) Em  $t = 0$  é dada uma configuração do campo eletromagnético, tal que este tem suporte compacto, i.e., todas as componentes do campo se anulam fora de um domínio compacto do espaço. Este é o clássico *problema de Cauchy*, e como é bem conhecido, a frente só pode propagar-se sobre as superfícies características, que para as equações de Maxwell são o cone de luz (ver capítulo 6). Então, também neste caso  $v_f = 1$ .

É importante perceber que ambos os tipos de frente mencionados acima são idealizações, e que a definição de uma frente não requer uma descontinuidade de salto nas funções que descrevem as componentes do campo. Para ambos os casos (i) e (ii), as componentes do campo podem ser funções suaves na fronteira, com as funções e suas derivadas primeiras se anulando aí, mas com descontinuidades na derivadas de segunda ordem (Courant & Hilbert 1966, Taylor 1981) (ver cap. 6). Pulsos desse tipo possuem larguras de banda finitas, i.e., para um pulso suave, a dispersão quadrática média de sua frequência, calculada a partir de seu espectro de potência, é sempre finita.

Então, para o caso, por exemplo, do problema de Sommerfeld (usando a mesma notação da seção 6.1), um sinal que se propaga na direção  $z$  pode ser definido como um envelope de pulso tal que  $\phi(t, z)$  é seccionalmente analítico em  $t$ , sendo a frente um ponto de não analiticidade separando duas regiões nas quais o envelope do pulso tem formas diferentes. O tratamento do problema de Sommerfeld baseia-se na teoria das funções analíticas. Então, os valores do pulso sobre qualquer segmento finito no interior de um dos domínios de analiticidade determina o pulso até o próximo ponto de analiticidade, pelo teorema da unicidade da teoria de funções analíticas.

Este raciocínio sugere naturalmente associar a chegada de novos dados (*informação*) a um certo ponto do espaço aos pontos de não analiticidade do pulso; segundo esse ponto de vista, parece que a velocidade do *sinal* deve

ser identificada com a velocidade da *frente*, e portanto a informação, em meios dispersivos (incluindo guias de onda) *nunca* se propaga com velocidade superluminal. Entretanto, há problemas com essa definição que vamos discutir agora.

O primeiro problema vem sendo enfatizado há muito tempo por Nimtz (Heitmann & Nimtz 1994, Nimtz 1997, Nimtz 1998) e mais recentemente por Chiao e colaboradores (Garrison, Mitchel, Chiao & Bolda 1998), e diz respeito à definição de um pulso (ideal) como aquele no qual o campo se anula abruptamente na frente ou, no caso de um pulso suave, permanece muito pequeno por algum tempo. Visto que todos os detectores no mundo real possuem um limiar de detecção finito, isto significa que na prática que nenhum detector real pode detectar uma frente.

Garrison et al. (1998) sugerem que, a despeito desse fato, é possível construir uma definição operacional da velocidade da frente, dada por um processo de limite da seguinte maneira. Imaginemos uma seqüência de pulsos idênticos detectados por uma seqüência de detectores  $D_n$ , com limiar decrescente  $S_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Suponhamos que um pulso tenha início em  $t = 0$  e seja detectado por  $D_n$  em um instante  $t_n$ . Se a distância entre a fonte e o detector é  $L$ , então a velocidade efetiva da frente medida por  $D_n$  é  $v_n = L/t_n$ , e a velocidade da frente poderia ser definida, segundo Chiao, extrapolando-se  $v_n$  quando o limiar  $S_n \rightarrow 0$ . Chiao argumenta que esta definição é física e logicamente válida, mas muito pouco prática.

Aqui comentamos, junto com Nimtz (Nimtz 1998), que a definição proposta *ignora* a estrutura quântica da matéria. Para que qualquer detector real trabalhe, deve absorver pelo menos um quantum de energia, o que significa que o limite  $S_n \rightarrow 0$  não pode ser realizado sequer teoricamente de acordo com a teoria quântica.

Agora, se tivermos um único detector  $S$  com limiar próximo do pico esperado do pulso, i.e.,  $S \approx |\phi_{\text{pico}}|$ , é claro que um tal detector pode medir uma velocidade superluminal, pois já vimos que, sob circunstâncias especiais, o pico pode propagar-se com velocidade de grupo superluminal.

Este argumento sugere definir a velocidade *detectável* da frente como a velocidade de grupo.

Se admitirmos, como imaginado por Chiao e colaboradores, que a informação está associada à chegada de discontinuidades, então devemos dizer que um pulso ideal, detectado por detectores com limiar finito não propaga informação da fonte para o detector. É difícil imaginar que este raciocínio seja correto, pois o pico de um pulso é uma assinatura bem definida e pode ser associado com uma informação, como mostrado na discussão da experiência de Nimtz na seção 8.4.

De qualquer forma, os méritos do raciocínio acima são:

(i) Ele deixa claro que um sinal contendo informação confiável não precisa ser um sinal ideal (i.e., não precisa ter uma frente bem definida).

(ii) Um detector com limiar finito, a fim de responder apropriadamente, i.e., tornar disponível a informação confiável, precisa de mais que a frente efetiva de um sinal. Um detector requer informação sobre a frequência do carregador e a modulação do sinal a fim de obter a informação confiável.

Que tipo de sinal é então usado em comunicações reais? Conscientes das discussões acima, os engenheiros empregam o conceito de sinais *técnicos*. Estes são sinais de amplitude modulada (AM) ou frequência modulada (FM), e têm em comum o fato que o sinal não depende de sua magnitude.

A figura 8.5 mostra um sinal técnico. Trata-se de um sinal AM usado em telecomunicações, com um carregador infravermelho de frequência  $2 \cdot 10^{14}$  Hz, no qual a modulação de amplitude é dada por uma largura de banda finita de  $10^{10}$  Hz. A meia largura do pulso corresponde ao número de dígitos, i.e., à informação transmitida. Um sinal desse tipo naturalmente não tem fronteiras.

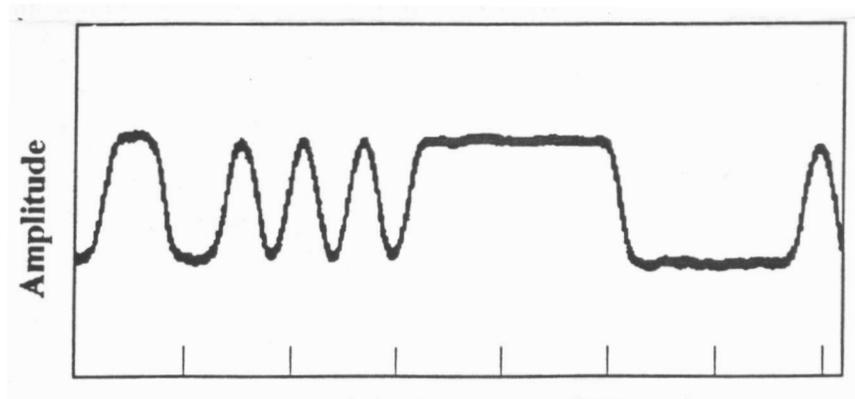


Figura 8.5: Sinal de teste usado em tecnologia de fibras ópticas. A abscissa está dividida em unidades de 1.5 ns.

## 8.4 O surpreendente experimento de Nimtz

A figura 8.6, mostra o esquema de um experimento realizado por Nimtz e colaboradores para mostrar que o tunelamento de sinais de microondas em guias de ondas subdimensionados é superluminal. O experimento de fato prova que para o *sinal técnico* usado (de banda limitada de frequência) as

velocidades do sinal, de grupo e da energia excedem, todas, excedem  $c$  ao atravessar a região evanescente, conforme verificado pelo detector de limiar finito de Nimtz.

Na experiência descrita em (Nimtz 1997) o pulso (gaussiano) usado era de amplitude modulada, com meia-largura de 1 ns sobre um carregador de 8,7 GHz. No ponto  $M_1$  o sinal é separado em dois sinais com uma razão 1:40 entre as intensidades. O sinal mais fraco percorre uma certa distância no ar, enquanto o segundo sinal atravessa uma barreira (o guia de ondas subdimensionado) de mesmo comprimento óptico que a distância no ar. A barreira é formada pelo *forbidden band gap* de uma heteroestrutura de um quarto de comprimento de onda de comprimento 0.1142 m (que é um “espelho óptico”). Os tempos de chegada dos sinais grande e pequeno foram observados com um osciloscópio HP54124, com resolução temporal de 10 ps; a resolução temporal do experimento era melhor que  $\pm 1$  ps. Nimtz observou que o sinal tunelado chegava 270 ps antes do sinal que viajou pelo ar. Isto significa que o sinal viajou por dentro da barreira com velocidade de  $4.7c$ !

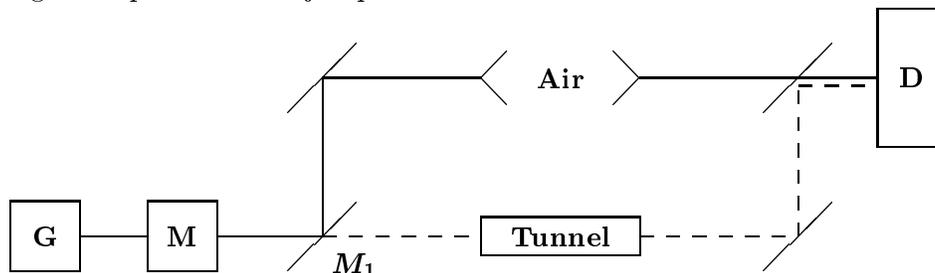


Figura 8.6: Arranjo experimental para demonstrar velocidades de tunelamento superluminais, usado na experiência de Nimtz (Nimtz 1997). **G** = Gerador (carregador); **M** = Modulador (sinal); **T** = Túnel (barreira); **D** = Detetor (osciloscópio).

Que tipo de informação é transmitida por um sinal como este? A resposta é clara: a largura de linha do pulso representa o sinal, ela é a informação contida nele, e de fato é a passagem da meia-largura do pulso transmitido que é medida pelo detetor.

Terminamos esta seção dizendo que não concordamos com a afirmação de Nimtz em (Nimtz 1997) de que o cruzamento superluminal de barreiras permite a comunicação com o passado. Ainda mais, mesmo que seja verdade que em algumas situações a velocidade de grupo pode ser negativa, e que o pico transmitido pode aparecer após a barreira antes da chegada do pico incidente à própria barreira, a situação como um todo é sempre *causal*. De

fato, para a existência de qualquer sinal após a barreira, a onda incidente deve ser preparada na fonte em um tempo  $t_e < t_p$ , onde  $t_p$  é o tempo em que o pico transmitido aparece atrás da barreira. Sem a preparação do pacote na fonte, não ocorrerá transmissão de pulso algum. Garrison et al. (Garrison et al. 1998) mostraram, a partir de cálculos explícitos sobre um modelo simples, que não existem soluções consistentes que permitam a formação de círculos causais.

## 8.5 Propagação superluminal de microondas no ar

Em 1991 Giakos e Ishii (Giakos & Ishii 1991) (ver também Ishii & Giakos (1991)) publicaram os resultados de um experimento notável, no qual transmitiram pulsos de microondas com frequência de carregador de 8202 GHz através do ar. A antena radiadora era simplesmente a saída aberta de um guia de ondas e o receptor era uma antena de chifre com seção transversal de  $7,1 \times 9,5 \text{ cm}^2$  e comprimento de 14,4 cm. O tempo entre a emissão e a recepção foi medido com um reflectômetro de domínio de tempo HP1415 para vários ângulos  $\theta$  entre os eixos das antenas transmissora e receptora (ver figura 8.7), e distâncias variáveis (1,658 m a 6,427 m) entre o radiador e o receptor. Os autores mostraram que a velocidade dos pulsos era bem representada por

$$v = \frac{1}{\cos \theta} \quad (c = 1), \quad (8.58)$$

e foram observadas velocidades de até  $1,747c$ .

É oportuno lembrar aqui que o ar é praticamente transparente para microondas; além disso, e mais importante, Giakos e Ishii observaram que na vizinhança da antena emissora as microondas *não são* ondas transversais. No que segue, mostraremos porque a eq.(8.58) é uma boa aproximação para as velocidades dos pulsos observada por esses autores.

O experimento de Giakos e Ishii foi repetido por Ranfagni e colaboradores em 1993 e 1996 (Ranfagni & Mugnai 1996, Ranfagni et al. 1991). Em seus experimentos, mais precisos que aqueles descritos em Giakos & Ishii (1991) e Ishii & Giakos (1991), foram usadas antenas de chifre piramidais (ver fig. 8.7). Os sinais usados eram pulsos com a forma de funções degrau (sobre um carregador de 9,5 GHz) produzidas por um klystron e moduladas por um modulador PIN cujo tempo de decaimento era menor que 10 ns.

O grupo de Ranfagni determinou primeiramente os tempos de trânsito de pulsos de microondas (acima do corte) através de um guia de ondas de 90 cm de comprimento, confirmando a predição teórica (ver seção 7.4)

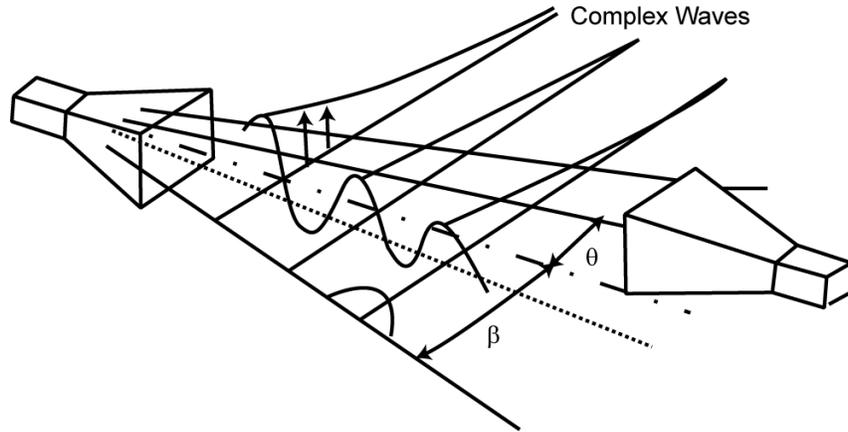


Figura 8.7: Antenas de chifre usadas na experiência de Ranfagni et al.

de que tais pulsos se propagam com velocidade de grupo  $v_g < 1$ . Depois disso, mediram o tempo de transmissão para os pulsos propagando-se entre o emissor e o receptor através do ar, para valores diferentes do ângulo  $\theta$  e para distâncias entre receptor e emissor variando de 10 cm a 100 cm. Os resultados obtidos confirmaram a propagação superluminal, com as velocidades dos pulsos sendo dadas pela eq.(8.65) abaixo. Os autores verificaram também que para longas distâncias o efeito desaparece.

Apresentamos agora um modelo matemático para a emissão de micro-ondas por uma antena de chifre que prediz que a propagação de ondas é superluminal, sob certas condições (Ranfagni & Mugnai 1996). Consideramos que o campo irradiado pode ser expresso como aquele devido a uma abertura retangular com as dimensões da boca da antena de chifre. Seja  $(\xi, \eta, \zeta)$  um sistema de coordenadas com origem no centro da abertura, como mostrado na figura 8.8.

A fim de facilitar nossa análise, suponhamos que a boca é infinita na direção  $\zeta$ . Sob esta condição podemos supor que o campo é independente desta coordenada. Na *aproximação escalar*, na qual supomos que somente a componente transversal  $E_\eta(\xi, \eta, t) = F(\xi, \eta, t)$  é importante, descrevemos o sinal emitido pela antena (i.e., para  $\xi > 0$ ) como uma superposição de ondas planas:

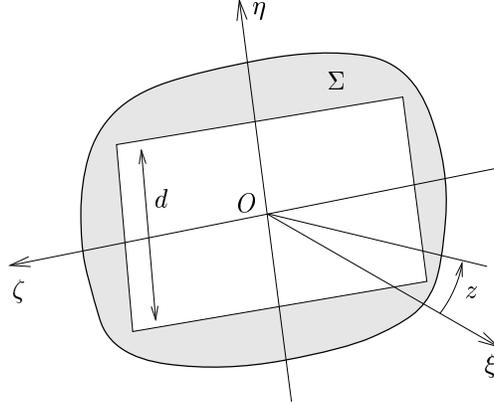


Figura 8.8: Sistema de coordenadas usado para calcular o campo emitido por uma antena de chifre piramidal.

$$\begin{aligned}
 F(\xi, \eta, t) &= e^{-i\omega t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A(z) \exp[ik(\xi \cos z + \eta \sin z)] dz \\
 &= e^{-i\omega t} f(\xi, \eta).
 \end{aligned}
 \tag{8.59}$$

Como é bem conhecido da teoria de antenas (Felsen & Marcuvitz 1973), a fim de produzir o campo no plano  $\Sigma$  da abertura, é necessário estender os limites de integração no plano complexo  $z$ . Escrevemos então

$$z = x + iy, \quad \xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta, \tag{8.60}$$

onde  $(\rho, \theta)$  são as coordenadas polares do ponto de observação. A integral para  $f(\xi, \eta)$  se torna

$$f(\xi, \eta) = \int_C A(z) \exp[ik\rho \cos(z - \theta)] dz, \tag{8.61}$$

onde o caminho de integração  $C$  é mostrado na figura 8.9.

Para  $\rho \gg \lambda$  (onde  $\lambda$  é o comprimento de onda do carregador) a eq.(8.61) pode ser calculada assintoticamente pelo método do ponto de sela. Para isso o caminho  $C$  é deformado em  $C'$  (figura 8.9), o qual é dado por um ramo da função transcendental

$$\cos(x - \theta) \cos ky = 1, \tag{8.62}$$

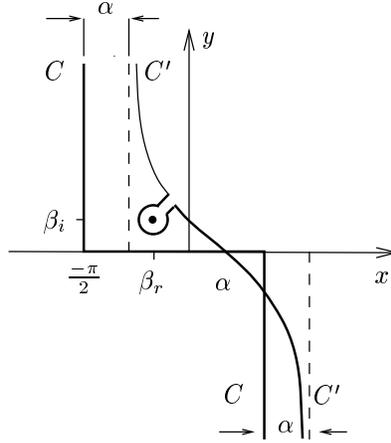


Figura 8.9: Caminhos de integração usados para calcular (8.61).

que corta o eixo real em  $x - \theta$  com um ângulo igual a  $-\pi/4$ . Quando deformamos o caminho de integração, é necessário, naturalmente, levar em consideração a contribuição dos pólos da amplitude  $A(z)$  que se encontram no interior do contorno, em  $\beta = \beta_r + i\beta_i$ . A existência de pólos para  $A(z)$  é mostrada abaixo. Calculando a integral, obtemos para (8.61):

$$f(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} e^{i(k\rho - \pi/4)} A(\theta) + 2\pi i \operatorname{Res}[A(z \rightarrow \beta)] e^{ik \cos(\beta - \theta)}. \quad (8.63)$$

Na eq.(8.63) o primeiro termo representa a contribuição normal (onda cilíndrica) e o segundo termo, devido ao pólo, representa uma onda *evanescente*. Escrevendo  $\beta = \beta_r + i\beta_i$ , encontramos para essa contribuição

$$2\pi i [A(z \rightarrow \beta)] \exp[ik\rho(\beta_r - \theta) \cosh \beta_i + k\rho \operatorname{sen}(\beta_r - \theta) \sinh \beta_i]. \quad (8.64)$$

Esta equação representa uma onda que se propaga na direção  $\beta_r$  e cuja amplitude é atenuada quando  $\theta$  e  $\rho$  aumentam. Quando  $\beta_r \rightarrow 0$  sua contribuição se torna dominante (se  $\beta_i$  for pequeno), um fato que parece estar em acordo com a experiência. Essas ondas evanescentes, que praticamente desaparecem para  $\theta$  grande, são chamadas *ondas complexas* (Tamir & Oliner (1963a), (1963b)).

Analisando o fator de fase na eq.(8.64) e levando em conta a variação temporal, vemos que a velocidade de propagação ao longo do caminho determinado por um ângulo  $\theta$  é dada por

$$v = \frac{\omega}{k \cos(\beta_r - \theta) \cosh \beta_i} = \frac{1}{\cos(\beta_r - \theta) \cosh \beta_i}, \quad (8.65)$$

onde usamos  $\omega = k$  para a propagação no ar. Esta equação mostra que  $v$  pode ser menor ou maior que 1, dependendo do pólo  $\beta$  e do ângulo de observação  $\theta$ .

Dado que a propagação de microondas no ar é não dispersiva, a velocidade  $v$  na eq.(8.65) representa a velocidade de propagação do sinal, um resultado confirmado no experimento de Ranfagni et al. (Ranfagni & Mugnai 1996), no qual foi observado que  $v > 1$  para  $\theta < \beta_r$ . O valor de  $\beta_r$  é aproximadamente metade do valor do ângulo do chifre da antena, (que tal ângulo de abertura da antena?) um fato que sugere que as ondas complexas estão relacionadas diretamente às paredes verticais da antena. Este parece ser de fato o caso, pois ao serem empregados outros tipos de antenas (como, por exemplo, antenas bicônicas) este efeito não foi mais observado no plano  $H$ .

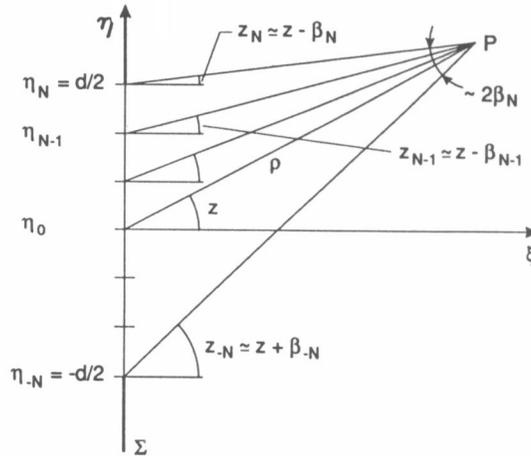


Figura 8.10: Divisão do plano  $\Sigma$  em  $2N$  zonas horizontais para o cálculo do campo no ponto  $P$ .

Mostraremos agora que  $A(z)$  tem pólos. Para isso, relembremos as condições usadas no experimento de Ranfagni et al. (Ranfagni & Mugnai 1996), onde  $\rho \simeq 0.5$  m,  $\lambda \simeq 3$  cm e a dimensão da abertura era  $d \simeq 10$  cm. Em seguida, dividimos o plano  $\Sigma$  (fig. 8.10) em  $2N$  zonas horizontais de largura  $d/2N$  e escrevemos

$$\begin{aligned}
f(\xi, \eta) &= \int A(z) e^{ik(\xi \cos z + \eta \sin z)} dz \\
&\simeq \sum_{n=-N}^N \int A(z_n) e^{ik(\xi \cos z_n + \eta \sin z_n)} dz_n
\end{aligned} \tag{8.66}$$

onde  $A(z_n)$  se refere à amplitude da  $n$ -ésima zona e é dada por

$$A(z_n) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta_n) e^{-ik\eta_n \sin z_n} d\eta_n, \tag{8.67}$$

onde  $F(\eta_n)$  é a intensidade do campo no plano  $\Sigma$ , suposta constante em cada zona. Sob estas condições temos

$$f(\xi, \eta) = \sum_{n=-N}^N \int \left( \int F(\eta_n) e^{-ik\eta \sin z_n} d\eta_n \right) e^{ik(\xi \cos z_n + \eta \sin z_n)} dz_n. \tag{8.68}$$

Para calcular (8.68) supomos normalmente que é possível inverter a ordem de integração. Aqui vamos trocar  $\sum_n$  com  $\int d\eta_n$ . Vamos agora investigar a eq.(8.67), que fornece a amplitude em cada zona. Supondo que é uma boa aproximação tomar  $F(\eta_n) = F(\eta)$  em cada zona, obtemos

$$\begin{aligned}
A(\sin z) &= \sum_{n=-N}^N \frac{\cos z}{2\pi} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} e^{-ik\eta \sin z} d\eta \\
&= \frac{\cos z}{2\pi} \left[ \frac{e^{-ik\frac{d}{2} \sin(z-\beta_n)}}{-ik \sin(z-\beta_n)} - \frac{e^{ik\frac{d}{2} \sin(z+\beta_n)}}{-ik \sin(z+\beta_n)} \right],
\end{aligned} \tag{8.69}$$

onde ao passar da primeira para a segunda linha escrevemos  $z_n = z - \beta_n$ , onde  $2\beta_n$  é o ângulo compreendido pela abertura à distância  $\rho$ , i.e.,  $2\beta_n \simeq d/\rho$ . Para  $\rho \gg d$ ,  $\beta_n \rightarrow 0$ , recuperamos a conhecida aproximação de Fraunhofer, i.e.,  $\sin[k(d/2) \sin z]/k \sin z$ .

Ranfagni e colaboradores verificaram (Ranfagni & Mugnai 1996) que a eq.(8.69) fornece uma excelente aproximação para o campo como uma função de  $z$  na vizinhança da abertura, quando  $\beta_N$  é complexo. Neste caso,  $\beta_{N,r} = \text{Re } \beta_N$ , que é o ângulo da abertura.

## Capítulo 9

# Conseqüências para a teoria da relatividade

Nos capítulos anteriores aprendemos que é possível lançar no espaço, com radiadores planos ou utilizando dispositivos ópticos, *FAASEXW* cujos picos se propagam com velocidade superluminal, e também que é possível ter sinais com velocidades de grupo superluminais em meios dispersivos.<sup>1</sup> Enfatizamos aqui que estes dois tipos de superluminalidade não implicam em falsificação do Princípio de Relatividade (*PR*), visto que a forma como tais ondas são geradas implica que na prática elas possuem frentes, que se movem sempre com a velocidade da luz. Nesta seção desejamos apresentar de forma rigorosa o *PR* e demonstrar que se fosse possível gerar uma *UPW* superluminal de energia finita sobre uma dada *superfície de Cauchy*, isto implicaria na perda de validade do *PR*.

Antes da descoberta da existência de soluções superluminais das equações de ondas relativísticas, apareceram na literatura especializada muitos trabalhos sobre *táquions*, partículas hipotéticas que viajam mais rápido que a luz. Alguns autores como, e.g., Recami (Recami 1986) argumentam que, devido a sua dinâmica peculiar, os táquions não violariam o *PR*. Também mostramos neste capítulo que esta afirmação é inválida.

### 9.1 Formulação do *PR*

Já definimos o espaço-tempo de Minkowski como a tripla  $\langle M, g, D \rangle$ , onde  $M \simeq \mathbb{R}^4$ ,  $g$  é uma métrica lorentziana e  $D$  é a conexão de Levi-Civita de  $g$ .

---

<sup>1</sup>É possível também lançar aproximações de abertura finita de outras soluções superluminais das *EM*.

Consideremos agora  $G_M$ , o grupo de todos os difeomorfismos de  $M$ , chamado o grupo de aplicação da variedade. Seja  $\mathbf{T}$  um objeto geométrico definido em  $A \subseteq M$ . O difeomorfismo  $h \in G_M$  induz uma aplicação deformadora  $h_* : \mathbf{T} \mapsto h_*\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}$  tal que

(i) Se  $f : M \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $h_*f = f \circ h^{-1} : h(A) \rightarrow \mathbb{R}$ .

(ii) Se  $\mathbf{T} \in \text{sec } T^{(r,s)}(A) \subset \text{sec } \mathcal{T}(M)$ , onde  $T^{(r,s)}(A)$  é o subfibrado dos tensores do tipo  $(r, s)$  do fibrado tensorial de  $\mathcal{T}(M)$ , então

$$(h_*\mathbf{T})_{h_e}(h_*\omega_1, \dots, h_*\omega_r, h_*X_1, \dots, h_*X_s) = \mathbf{T}_e(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) \quad (9.1)$$

$\forall X_i \in T_e A, i = 1, \dots, s, \forall \omega_j \in T_e^* A, j = 1, \dots, r, \forall e \in A$ .

(iii) Se  $D$  é a conexão de Levi-Civita e  $X, Y \in \text{sec } TM$ , então

$$(h_*D_{h_*X}h_*Y)_{h_e}h_*f = (D_X Y)_e f \quad \forall e \in M. \quad (9.2)$$

Se  $\{f_\mu = \partial/\partial x^\mu\}$  é uma base coordenada para  $TA$  e  $\{\theta^\mu = dx^\mu\}$  é a base dual correspondente para  $T^*A$  e se

$$\mathbf{T} = T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} \theta^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \theta^{\nu_s} \otimes f_{\mu_1} \otimes \dots \otimes f_{\mu_r}, \quad (9.3)$$

então

$$h_*\mathbf{T} = [T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} \circ h^{-1}] h_*\theta^{\nu_1} \otimes \dots \otimes h_*\theta^{\nu_s} \otimes h_*f_{\mu_1} \otimes \dots \otimes h_*f_{\mu_r}. \quad (9.4)$$

Suponhamos agora que  $A$  e  $h(A)$  podem ser recobertos pela carta local  $(U, \eta)$  do atlas maximal de  $M$ , e que  $A \subseteq U$  e  $h(A) \subseteq U$ . Sejam  $\langle x^\mu \rangle$  as funções coordenadas associadas a  $(U, \eta)$ . A aplicação

$$x'^\mu = x^\mu \circ h^{-1} : h(U) \rightarrow \mathbb{R} \quad (9.5)$$

define uma transformação de coordenadas  $\langle x^\mu \rangle \mapsto \langle x'^\mu \rangle$  se  $h(U) \supseteq A \cup h(A)$ . De fato,  $\langle x'^\mu \rangle$  são as funções coordenadas associadas à carta  $(V, \varphi)$  onde  $h(U) \subseteq V$  e  $U \cap V \neq \emptyset$ . Sob as condições acima,  $h_*\partial/\partial x^\mu \equiv \partial/\partial x'^\mu$  e  $h_*dx^\mu \equiv dx'^\mu$ , e as equações (9.4) e (9.5) implicam que

$$(h_*\mathbf{T})_{\langle x'^\mu \rangle}(he) = \mathbf{T}_{\langle x^\mu \rangle}(e), \quad (9.6)$$

onde  $\mathbf{T}_{\langle x^\mu \rangle}(e)$  significa as componentes de  $\mathbf{T}$  na carta  $\langle x^\mu \rangle$  no evento  $e \in M$ , i.e.,  $\mathbf{T}_{\langle x^\mu \rangle}(e) = T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}(x^\mu(e))$  e onde  $\bar{T}_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}(x'^\mu(he))$  são as componentes

de  $\bar{\mathbf{T}} = h_* \mathbf{T}$  na base  $\{h_* \partial / \partial x^\mu = \partial / \partial x'^\mu\}$ ,  $\{h_* dx^\mu = dx'^\mu\}$ , no ponto  $h(e)$ . Então a eq.(9.6) se torna

$$\bar{T}'^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}(x'^\mu(he)) = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}(x^\mu(e)), \quad (9.7)$$

ou, usando (9.5)

$$\bar{T}'^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}(x'^\mu(e)) = (\Lambda^{-1})^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\beta_s}_{\nu_s} T'^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}(x'^\mu(h^{-1}e)), \quad (9.8)$$

onde  $\Lambda^\mu_\alpha = \partial x'^\mu / \partial x^\alpha$ , etc.

Na seção 2.1 introduzimos o conceito de sistema de referência inercial  $I \in \text{sec } TU$ ,  $U \subseteq M$ , como

$$g(I, I) = 1 \quad \text{e} \quad DI = 0. \quad (9.9)$$

Um referencial geral  $Z$  satisfaz  $g(Z, Z) = 1$ , com  $DZ \neq 0$ . Se  $\alpha = g(Z, \cdot) \in \text{sec } T^*U$ , vale a igualdade

$$(D\alpha)_e = a_e \otimes \alpha_e + \sigma_e + \omega_e + \frac{1}{3}\theta_e h_e, \quad e \in U \subseteq M, \quad (9.10)$$

onde  $a = g(A, \cdot)$ ,  $A = D_Z Z$  é a aceleração e onde  $\omega_e$  é o tensor de rotação,  $\sigma_e$  é o tensor de cisalhamento,  $\theta_e$  é o tensor de expansão e  $h_e = g|_{H_e}$ , onde

$$T_e M = [Z_e] \oplus [H_e]. \quad (9.11)$$

Nesta expressão  $H_e$  é o espaço de repouso de um *observador instantâneo* em  $e$ , e um observador instantâneo é o par  $(e, Z_e)$ . Além disso,  $h_e(X, Y) = g_e(pX, pY)$ ,  $\forall X, Y \in T_e(M)$  e  $p : T_e M \rightarrow H_e$ .<sup>2</sup> Das equações (9.9) e (9.10) vemos que um sistema de referência inercial não apresenta aceleração, rotação, cisalhamento ou expansão.

Também na seção 2.1 foi introduzido o conceito de um (nacs/ $I$ ). Um (nacs/ $I$ )  $\langle x^\mu \rangle$  é dito estar no calibre de Lorentz se  $x^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  são as coordenadas de Lorentz usuais e  $I = \partial / \partial x^0 \in \text{sec } TM$ . Lembramos que é um teorema que escolhendo  $I = e_0 = \partial / \partial x^0$ , existem sempre três outros campos de vetores  $e_i \in \text{sec } TM$  tais que  $g(e_i, e_i) = -1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , e  $e_i = \partial / \partial x^i$ . Um *referencial móvel* para  $x \in M$  é uma base ortonormal de  $T_x M$ . Seja  $\sigma : \mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \sigma(t) \in M$  uma curva tipo tempo. Um sistema móvel para todos os pontos  $x \in \sigma(t)$  é chamado um *referencial comóvel* para a curva  $\sigma$ .

---

<sup>2</sup>Para as formas explícitas de  $\omega$ ,  $\sigma$  e  $\theta$  veja-se Sachs & Wu (1977) e Rodrigues & Rosa (1989).

Agora, sejam  $\langle x^\mu \rangle$  funções coordenadas de Lorentz como acima. Dizemos que  $l \in G_M$  é uma *aplicação de Poincaré* se e somente se<sup>3</sup>

$$x'^\mu(e) = \Lambda_\nu^\mu x^\nu(e) + a^\mu, \quad (9.12)$$

onde  $\Lambda_\nu^\mu \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  é uma transformação de Lorentz e  $a^\mu$  são as componentes de um vetor constante. Quando  $a^\mu = 0$ , a equação (9.12) é chamada uma aplicação de Lorentz especial ortócrona. Por abuso de notação também denotamos o subconjunto  $\{\ell\}$  de  $G_M$  tal que a eq.(9.12) é verdadeira por  $\mathcal{P} \subset G_M$ .

Quando  $\langle x^\mu \rangle$  são funções coordenadas de Lorentz,  $\langle x'^\mu \rangle$  também são funções coordenadas de Lorentz. Neste caso denotamos

$$e_\mu = \partial/\partial x^\mu, \quad e'_\mu = \partial/\partial x'^\mu, \quad \gamma^\mu = dx^\mu, \quad \gamma'^\mu = dx'^\mu; \quad (9.13)$$

quando  $\ell \in \mathcal{P} \subset G_M$  dizemos que  $\ell_*\mathbf{T}$  é a *versão Lorentz deformada* de  $\mathbf{T}$ .

Seja  $h \in G_M$ . Se para um objeto geométrico  $\mathbf{T}$  tivermos

$$h_*\mathbf{T} = \mathbf{T}, \quad (9.14)$$

então  $h$  é dita uma simetria de  $\mathbf{T}$  e o conjunto de todos os  $h \in G_M$  para os quais vale a equação (9.14) é chamado o grupo de simetria de  $\mathbf{T}$ . Podemos verificar imediatamente que para  $\ell \in \mathcal{P} \subset G_M$

$$\ell_*g = g, \quad \ell_*D = D, \quad (9.15)$$

i.e., o grupo de Poincaré (e em particular seu subgrupo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ) é um grupo de simetria de  $g$  e  $D$ .

Em (Rodrigues, Scanavini & Alcantara 1990) uma teoria física  $\tau$  é caracterizada por:

- (i) A teoria de uma certa “espécie de estrutura” no sentido de Bourbaki (Bourbaki 1957).
- (ii) Sua interpretação física.
- (iii) Seu significado atual e suas aplicações atuais.

---

<sup>3</sup>O conjunto de todas as aplicações de Poincaré define o grupo de Poincaré ( $\mathcal{P}$ ), que é igual ao produto semidireto de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  com o grupo de translações, i.e.,  $P = \mathcal{L}_+^\uparrow \boxtimes T$ . O conjunto de todas as aplicações de Poincaré tais que  $a^\mu = 0$  define o grupo de Lorentz ortócrono especial.

Recordemos que em exposições matemáticas de uma dada teoria física  $\tau$ , os postulados ou axiomas básicos são apresentados como definições. Tais definições significam que os fenômenos físicos descritos por  $\tau$  ocorrem de uma certa maneira. Então, as definições requerem mais motivação que as definições puramente matemáticas. Chamamos as definições físicas de *definições coordenativas*, um termo introduzido por Reichenbach (Reichenbach 1958). É necessário ter em mente que não se podem dar motivações completamente *convincentes e genuínas* para as definições coordenativas, na medida em que elas se referem à natureza como um todo e à teoria como um todo.

A postura teórica com relação à física por trás de (i), (ii) e (iii) é então admitir os conceitos matemáticos da *espécie de estrutura* que define  $\tau$  como primitivos, definindo coordenativamente as entidades observáveis a partir deles. Reichenbach supõe que “o *conhecimento físico* é caracterizado pelo fato que os conceitos são definidos não somente por outros conceitos, mas são também coordenados a objetos reais.” Entretanto, em nosso tratamento, cada teoria física, quando caracterizada como uma espécie de estrutura, contém também alguns objetos geométricos implícitos, como alguns dos campos de sistemas de referência definidos acima, que não podem, em geral, ser coordenados a objetos reais. De fato, seria um absurdo supor que a infinidade de referenciais inerciais existentes em  $M$  deve ter um suporte material.

Definimos uma teoria do *espaço-tempo* como uma teoria de uma espécie de estrutura tal que, se  $\text{Mod } \tau$  é a classe dos modelos de  $\tau$ , então cada  $\Upsilon \in \text{Mod } \tau$  contém uma subestrutura chamada espaço-tempo ( $ST$ ). Mais exatamente, temos

$$\Upsilon = (ST, \mathbf{T}_1 \dots \mathbf{T}_m), \quad (9.16)$$

onde  $ST$  pode ser uma estrutura bastante geral (Rodrigues et al. 1990). Em nossa apresentação suporemos que  $ST = \mathcal{M} = (M, g, D)$ , i.e. que  $ST$  é o espaço-tempo de Minkowski. Os  $\mathbf{T}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  são objetos geométricos explícitos definidos em  $U \subseteq M$  que caracterizam os campos físicos e as trajetórias das partículas, que não podem ser geometrizados em  $\Upsilon$ . Neste contexto, ser geometrizado significa ser um campo métrico ou uma conexão sobre  $M$ , ou ser um objeto derivado desses conceitos como, por exemplo, o tensor de Riemann ou o tensor de torção.

Os campos de referenciais serão chamados de objetos geométricos implícitos de  $\tau$ , visto tratar-se de objetos matemáticos que não correspondem necessariamente a propriedades de algum sistema físico descrito por  $\tau$ .

Com o formalismo do fibrado de Clifford podemos formular em  $\mathcal{C}\ell(M)$  todas as teorias físicas modernas, incluindo a teoria gravitacional de Eins-

tein (Rodrigues & Souza 1993). Vamos introduzir agora a eletrodinâmica de Lorentz-Maxwell (*ELM*) em  $\mathcal{C}(M)$  como uma teoria de uma espécie de estrutura. Dizemos que a eletrodinâmica de Lorentz-Maxwell  $\tau_{ELM}$  possui um modelo

$$\Upsilon_{ELM} = \langle M, g, D, F, J, \{\varphi_i, m_i, e_i\} \rangle, \quad (9.17)$$

onde  $(M, g, D)$  é o espaço-tempo de Minkowski,  $\{\varphi_i, m_i, e_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  é o conjunto de todas as partículas carregadas,  $m_i$  e  $e_i$  são as massas e as cargas das partículas e  $\varphi_i : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$  são as linhas de universo das partículas, caracterizadas pelo fato que se  $\varphi_{i*} \in \sec TM$  é o vetor velocidade, então  $\check{\varphi}_i = g(\varphi_{i*}, \cdot) \in \sec \Lambda^1(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$  e  $\check{\varphi}_i \cdot \check{\varphi}_i = 1$ .  $F \in \sec \Lambda^2(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$  é o campo eletromagnético e  $J \in \sec \Lambda^1(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$  é a densidade de corrente. Os axiomas próprios da teoria são

$$\begin{aligned} \partial F &= J \\ m_i D_{\varphi_{i*}} \check{\varphi}_i &= e_i \check{\varphi}_i \cdot F \end{aligned} \quad (9.18)$$

Do ponto de vista matemático é um resultado trivial que  $\tau_{LME}$  tem a seguinte propriedade: Se  $h \in G_M$  e se as equações (9.18) têm uma solução  $\langle F, J, (\varphi_i, m_i, e_i) \rangle$  em  $U \subseteq M$ , então  $\langle h_* F, h_* J, (h_* \varphi_i, m_i, e_i) \rangle$  também é uma solução das equações (9.18) em  $h(U)$ . Como este resultado é verdadeiro para qualquer  $h \in G_M$ , ele também vale para  $\ell \in \mathcal{P} \subset G_M$ , i.e., para qualquer aplicação de Poincaré.

Devemos agora deixar claro que  $\langle F, J, \{\varphi_i, m_i, e_i\} \rangle$  que são uma solução da eq.(9.18) em  $U$  só podem ser obtidos impondo-se *condições de contorno matemáticas* que denotaremos por  $BU$ . A solução será realizável na natureza se e somente se as condições de contorno matemáticas forem fisicamente realizáveis. Este é de fato um ponto importante pois nos diz, em particular, que ainda que  $\langle h_* F, h_* J, \{h_* \varphi_i, m_i, e_i\} \rangle$  possam ser uma solução de (9.18) com condições de contorno matemáticas  $Bh(U)$ , pode ocorrer que  $Bh(U)$  não seja fisicamente realizável na natureza. A seguinte afirmação, denotada  $PR_1$ , é normalmente apresentada como o Princípio (Especial) de Relatividade na forma ativa:

$PR_1$ : Seja  $l \in \mathcal{P} \subset G_M$ . Se para uma teoria física  $\tau$ ,  $\Upsilon \in \text{Mod } \tau$ ,  $\Upsilon = \langle M, g, D, \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_m \rangle$  é um fenômeno físico possível, então  $l_* \Upsilon = \langle M, g, D, l_* \mathbf{T}_1, \dots, l_* \mathbf{T}_m \rangle$  também é um fenômeno físico possível.

Está claro que no  $PR_1$  encontra-se escondida a suposição de que as condições de contorno que determinam  $l_* \Upsilon$  são fisicamente realizáveis. Antes

de continuar, introduzimos a afirmação abaixo, denotada  $PR_2$  e conhecida como Princípio (Especial) de Relatividade na forma passiva (Rodrigues et al. 1990):

$PR_2$ : Todos os referenciais inerciais são fisicamente equivalentes ou indistinguíveis.

Vamos agora tentar dar um significado matemático preciso a esta afirmação.

Seja  $\tau$  uma teoria do espaço-tempo e seja  $ST = \langle M, g, D \rangle$  uma subestrutura de  $\text{Mod } \tau$  representando o próprio espaço tempo. Sejam  $I \in \text{sec } TV$  e  $I' \in \text{sec } TV$ ,  $U, V \subseteq M$ , dois sistemas de referência inerciais. Sejam  $(U, \eta)$  e  $(V, \varphi)$  duas cartas de Lorentz do atlas maximal de  $M$  que são sistemas de coordenadas naturalmente adaptados a  $I$  e  $I'$ , respectivamente. Se  $\langle x^\mu \rangle$  e  $\langle x'^\mu \rangle$  são funções coordenadas associadas a  $(U, \eta)$  e  $(V, \varphi)$ , então temos  $I = \partial/\partial x^0$ ,  $I' = \partial/\partial x'^0$ .

**Definição.** Dois sistemas de referência inerciais  $I$  e  $I'$  como acima são fisicamente equivalentes segundo  $\tau$  se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

(i)  $\exists \ell \in \mathcal{P} \subset G_M$ ,  $\ell : U \mapsto \ell(U) \subseteq V$ , tal que  $x'^\mu = x^\mu \circ \ell^{-1}$ , o que implica que  $I' = \ell_* I$

Além disso, sejam  $\Upsilon \in \text{Mod } \tau$ ,  $\Upsilon = \langle M, g, D, \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_m \rangle$ , tais que  $g$  e  $D$  sejam definidos sobre todo  $M$  e  $\mathbf{T}_i \in \text{sec } \mathcal{C}\ell(U) \subset \text{sec } \mathcal{C}\ell(M)$ . Consideremos uma subestrutura  $o = \langle g, D, \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_m \rangle$ , tal que  $o$  resolve um conjunto de equações diferenciais em  $\eta(U) \subset \mathbb{R}^4$  com um certo conjunto de condições de contorno denotadas  $b^{o\langle x^\mu \rangle}$ , o que denotamos como

$$D_{\langle x^\mu \rangle}^\alpha(o_{\langle x^\mu \rangle})_e = 0 ; b^{o\langle x^\mu \rangle} ; e \in U \quad (9.19)$$

Então, se todas as condições acima forem verdadeiras, devemos ter ainda:

(ii) Se  $\Upsilon \in \text{Mod } \tau \Leftrightarrow \ell_* \Upsilon \in \text{Mod } \tau$ , então necessariamente

$$\ell_* \Upsilon = \langle M, g, D, \ell_* \mathbf{T}_1, \dots, \ell_* \mathbf{T}_m \rangle \quad (9.20)$$

está definido em  $\ell(U) \subseteq V$  e chamando  $\ell_* o \equiv \{g, D, \ell_* \mathbf{T}_1, \dots, \ell_* \mathbf{T}_m\}$  devemos ter

$$D_{\langle x'^\mu \rangle}^\alpha(\ell_* o_{\langle x'^\mu \rangle})|_{\ell e} = 0 ; b^{\ell_* o \langle x'^\mu \rangle} \quad \ell e \in \ell(U) \subseteq V. \quad (9.21)$$

Nas equações (9.19) e (9.21)  $D_{\langle x^\mu \rangle}^\alpha$  e  $D_{\langle x'^\mu \rangle}^\alpha$  significam  $\alpha = 1, 2, \dots, m$  conjuntos de equações diferenciais em  $\mathbb{R}^4$ . O sistema de equações diferenciais (9.21) deve ter a mesma forma funcional que o sistema de equações diferenciais (9.19) e  $b^{\ell_* o \langle x'^\mu \rangle}$  deve ser com relação a  $\langle x'^\mu \rangle$  o mesmo que  $b^{o \langle x^\mu \rangle}$  é com relação a  $\langle x^\mu \rangle$ , e se  $b^{o \langle x^\mu \rangle}$  for fisicamente realizável, então  $b^{\ell_* o \langle x'^\mu \rangle}$  também deve ser fisicamente realizável. Dizemos em tais condições que  $I \sim I'$  e que  $\ell_* o$  é a versão Lorentz deformada dos fenômenos descritos por  $o$ .

Visto que na definição acima  $\ell_* \Upsilon = \langle M, g, D, \ell_* T_1, \dots, \ell_* T_m \rangle$ , segue-se que quando  $I \sim I'$ , então  $\ell_* g = g, \ell_* D = D$  (como já sabemos) e isto significa que a estrutura do espaço-tempo não atribui um estatuto especial a  $I$  ou  $I'$  segundo  $\tau$ .

## 9.2 Movimentos superluminais violam $PR_1$ e $PR_2$

Estamos agora prontos para provar a afirmação, feita no início deste capítulo, de que se fosse possível produzir uma  $UPW$  superluminal de energia finita sobre uma dada superfície de Cauchy, isto implicaria a violação do Princípio de Relatividade em ambas as suas versões, a ativa ( $PR_1$ ) e a passiva ( $PR_2$ ).

Seja  $\ell \in \mathcal{P} \subset G_M$  e sejam  $F, \bar{F} \in \sec \Lambda^2(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$ , tais que  $\bar{F} = \ell_* F$ . Seja  $\bar{F} = \ell_* F = R \check{F} R^{-1}$ , onde  $\check{F}_e = (1/2) F_{\mu\nu}(x^\delta(\ell^{-1}e)) \gamma^\mu \gamma^\nu$ ,  $e \in M$ , e onde  $R \in \sec \text{Spin}_+(1, 3) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$  é uma aplicação de Poincaré, e tal que  $\gamma'^\mu = R \gamma^\mu R^{-1} = \Lambda_\alpha^\mu \gamma^\alpha$ ,  $\Lambda_\alpha^\mu \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ . Suponhamos ainda que  $\langle x^\mu \rangle$  e  $\langle x'^\mu \rangle$  são funções coordenadas de Lorentz relacionadas entre si por uma aplicação de Poincaré (eq.(9.12))

$$x'^\mu(e) = \Lambda_\nu^\mu x^\nu(e) + a^\mu \quad (9.22)$$

tais que  $\gamma^\mu = dx^\mu$ ,  $\gamma'^\mu = dx'^\mu$  e  $x'^\mu = x^\mu \circ \ell^{-1}$ . Estas funções coordenadas estão associadas a dois referenciais inerciais  $I, I' \in \sec TM$ ,  $\langle x^\mu \rangle$  é um  $(\text{nacs}/I)$  e  $\langle x'^\mu \rangle$  é  $(\text{nacs}/I')$  (fig. 9.1) e

$$I' = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (9.23)$$

Além disso, temos:

$$F(e) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x^\delta(e)) \gamma^\mu \gamma^\nu; \quad (9.24a)$$

$$F(e) = \frac{1}{2} F'_{\mu\nu}(x'^\delta(e)) \gamma'^\mu \gamma'^\nu; \quad (9.24b)$$

$$\bar{F}(e) = \frac{1}{2}\bar{F}_{\mu\nu}(x^\delta(e))\gamma^\mu\gamma^\nu; \quad (9.25a)$$

$$\bar{F}(e) = \frac{1}{2}\bar{F}'_{\mu\nu}(x'^\delta(e))\gamma'^\mu\gamma'^\nu. \quad (9.25b)$$

Destas equações segue-se que

$$F'_{\alpha\beta}(x'^\delta(e)) = (\Lambda^{-1})^\mu_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu_\beta F_{\mu\nu}(x^\delta(e)). \quad (9.26)$$

e também

$$\bar{F}_{\alpha\beta}(x^\delta(e)) = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F_{\mu\nu}(x^\delta(\ell^{-1}e)) \quad (9.27)$$

Suponhamos agora que  $F$ , uma solução  $UPW$  superluminal de energia finita das equações de Maxwell, pode ser produzida em uma dada *superfície de Cauchy* (realizada como algum dispositivo hipotético) em um dado referencial inercial  $I$ , com  $\langle x^\mu \rangle$  sendo um (nacs/ $I$ ) (ver fig. 9.1). Suponhamos também que  $F$  viaja com velocidade  $c_1 > 1$  na direção  $z$  negativa, i.e.,  $v_F = v^\mu\gamma_\mu = (c_1^2 - 1)^{-1/2}(1, 0, 0, -c_1)$ . Nestas condições ela viajará para o futuro no espaço-tempo, segundo os observadores em  $I$ . A relação entre  $F$  e  $\bar{F}$  implica que

$$v_{\bar{F}} = v^\mu\gamma'_\mu = (c_1^2 - 1)^{-1/2}(1, 0, 0, -c_1), \quad (9.28)$$

i.e.,  $\bar{F}$  viaja relativamente a  $I'$  da mesma maneira que  $F$  viaja em relação a  $I$ .

Por outro lado, existe um  $\ell' \in \mathcal{L}_+^\uparrow \subset \mathcal{P}$  tal que  $\ell'_*F = F' = RFR^{-1}$  será uma solução das equações de Maxwell e tal que se a 1-forma de velocidade de  $F$  é  $v_F = (c_1^2 - 1)^{-1/2}(1, 0, 0, -c_1)$  de acordo com  $I$ , então a 1-forma de velocidade de  $F'$  é  $v_{F'} = (c_1'^2 - 1)^{-1/2}(-1, 0, 0, -c_1')$  de acordo com  $I$ , com  $c_1' > 1$ , i.e.,  $v_{F'}$  está apontando para o passado.

A *densidade* de energia carregada por  $F'$  é positiva, segundo os observadores em ambos os referenciais  $I$  e  $I'$  (e como se segue da eq.(2.33)). Agora, supondo que  $F'$  é um fenômeno físico possível, sua energia total, segundo os observadores em repouso no referencial  $I$ , é positiva ou negativa? Para encontrar a resposta recordemos primeiramente que a energia de uma configuração eletromagnética arbitrária  $\mathfrak{F} \in \sec \Lambda^2(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M)$  é dada pela equação

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} = P_{\mathfrak{F}}^0 = \int_{\sigma} T_{\mathfrak{F}}^{0\mu} d\sigma_\mu \quad (9.29)$$

onde  $T_{\mathfrak{F}}^{0\mu} = T_{\mathfrak{F}}^0 \cdot \gamma^\mu$  (veja-se a eq.(2.32)) é calculado com  $\mathfrak{F}$ ,  $\sigma$  é uma hipersuperfície tipo espaço e  $d\sigma_\mu = n_\mu d\sigma$ , sendo  $n_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , as componentes de um vetor tipo tempo na base  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  de  $TM$ . Agora, tomemos  $\sigma$  como hipersuperfície tipo espaço de tempo constante. A equação paramétrica de  $\sigma$  é

$$n_\mu x^\mu - \tau = 0 \quad (9.30)$$

onde  $\tau$  é um parâmetro invariante que mede a “distância” de  $\sigma$  a uma origem escolhida arbitrariamente. Neste caso  $d\sigma_\mu \rightarrow d\sigma_0 = n_0 dx^1 dx^2 dx^3$ . A orientação usual dada pelos observadores do referencial  $I$  a  $\sigma$  é  $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Esta escolha define o futuro absoluto dos observadores em repouso em  $I$  e reduz a eq.(9.30) a  $x^0 = \tau$ . Com esta convenção, ainda que  $F'$  esteja indo para o passado (segundo seu vetor velocidade) temos  $\mathcal{E}_{F'} > 0$ ! Por outro lado, visto que  $F'$  foi obtido de  $F$  por meio de uma transformação de Lorentz ativa, esperamos que a relação entre  $\mathcal{E}_{F'} > 0$  e  $\mathcal{E}_F$  seja dada pela mesma transformação de Lorentz ativa. Mas neste caso, como é bem conhecido (Recami 1986), temos  $\mathcal{E}_{F'} < 0$ , e chegamos a uma contradição com a conclusão anterior.

À primeira vista parece que seria possível evitar essa contradição se os observadores no referencial  $I$  escolhessem a orientação de  $\sigma$ , quando tratassem com ondas que viajam para o passado, como  $n^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ . Com esta escolha os observadores em  $I$  estariam enviando energia negativa para o passado, e, em conseqüência, o dispositivo que produz  $F'$  teria mais energia após o lançamento de  $F'$  do que possuía inicialmente, o que configura um moto perpétuo do primeiro tipo.

Portanto, podemos concluir que a suposição da validade do  $PR_1$  é equivalente a admitir ou (i) a possibilidade física de se enviar para o passado ondas carregando uma densidade de energia positiva ou (ii) a possibilidade de se construir uma máquina de moto perpétuo do primeiro tipo. Ambas as possibilidades nos parecem *impossíveis* de serem realizadas. A única solução para esse dilema é admitir que não existem condições de contorno fisicamente realizáveis que permitam aos observadores em  $I$  lançar  $F'$  no espaço-tempo de forma que este viaje para seu próprio passado. Em conseqüência a única conclusão razoável a que podemos chegar é que temos aqui uma violação de  $PR_1$ .

Mostraremos agora — sempre sob a hipótese de que existam ondas superluminais — que há também uma violação do  $PR_2$ , i.e., que no caso de existirem tais ondas, nem todos os referenciais inerciais serão fisicamente equivalentes. Suponhamos então que  $I$  e  $I'$  são dois referenciais inerciais

como os mencionados anteriormente, i.e.,  $I = \partial/\partial x^0$ ,  $I' = \partial/\partial x'^0$ , com  $\langle x^\mu \rangle$  e  $\langle x'^\mu \rangle$  relacionados por uma transformação de Poincaré (eq.(9.12)). Supomos que  $F_0$  (eq.(9.24) é uma *UPW* superluminal que pode ser lançada de  $I$  com 1-forma de velocidade  $v_{F_0} = (c_2^2 - 1)^{-1/2}(1, 0, 0, c_2)$ ,  $c_2 > 1$  (fig. 9.1) e que  $\bar{F}$ , relacionada a  $F$  pelas equações (9.24) e (9.25), é uma *UPW* superluminal produzida em  $I'$  com 1-forma de velocidade relativamente a  $\langle x'^\mu \rangle$  dada por (9.28).

Se  $F_0$  e  $\bar{F}$  estão relacionados como descrito acima, então  $F_0$ , que tem energia positiva e viaja para o futuro segundo os observadores em  $I$ , *poderia* ser enviado para o passado dos observadores em  $I'$  (ver fig. 9.1). Da mesma forma,  $\bar{F}$ , de energia positiva e que viaja para o futuro em  $I'$ , *poderia* ser enviado para o passado dos observadores em repouso no referencial  $I$ . Não existem razões *a priori* para que isto não seja possível, mas se fosse, seria também possível uma situação conhecida como o *paradoxo de Tolman-Regge*. O paradoxo é o seguinte:

Suponhamos que dois observadores, em repouso nos referenciais  $I$  e  $I'$ , respectivamente, e cujas linhas de universo são representadas na figura 9.1 pelos eixos  $t$  e  $t'$ , decidem realizar o seguinte experimento: Os observadores combinam que se  $I'$  receber de  $I$  um sinal superluminal (a *UPW*  $F_0$ ) até o momento do evento  $o'$  em  $I'$ , ele destruirá o laboratório de  $I$  usando a *UPW* superluminal  $\bar{F}$ . Como pode ser visto na figura 9.1 (e é facilmente verificado com alguns cálculos simples) a destruição do laboratório em  $I$  ocorreria no evento  $d$  tal que  $t_d < t_e$ , o que constitui um claro paradoxo lógico.

Acreditamos que se algum dia forem produzidas ondas superluminais, estas poderão ser usadas para identificar um referencial de Lorentz privilegiado, que definiria uma ordem temporal universal, pois em qualquer outro referencial inercial seria impossível produzir uma *UPW* superluminal que viajasse para o passado do referencial privilegiado. Dessa forma, como os observadores em movimento em relação ao referencial privilegiado não poderiam produzir ondas superluminais com velocidade arbitrária, eles encontrariam uma violação de  $PR_2$  e, além disso, seriam capazes de determinar sua velocidade absoluta em relação ao referencial privilegiado.

Com efeito, seja  $I \in \text{sec}TM$  o referencial fundamental. Suponhamos que  $I'$  se move com velocidade  $V$  relativamente a  $I$ , i.e., que

$$I' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (9.31)$$

Então, se os observadores em  $I'$  estiverem equipados com um gerador de *UPWs* superluminais e prepararem seus aparelhos para emitir tais ondas com diferentes 1-formas de velocidade em todas as direções possíveis no

espaço-tempo, eles encontrarão, para uma certa 1-forma de velocidade, uma particular direção no espaço-tempo na qual seus dispositivos pararão de funcionar. Um cálculo simples fornece então, para os observadores em  $I'$ , o valor de  $V$ !

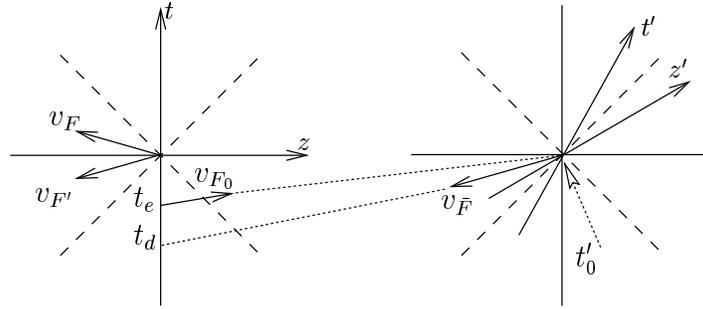


Figura 9.1: Ilustração do paradoxo de Tolman-Regge.

Recami (1986) argumenta que o Princípio de Relatividade continuaria a valer ainda que existissem na natureza — materializados na possível existência de táquions — fenômenos superluminais. Nessa teoria dos táquions também existe uma situação similar ao paradoxo de Tolman-Regge descrito acima para  $UPWs$ . Segundo Recami, o  $PR_2$  continuaria válido porque os observadores em  $I$  devem interpretar um táquion emitido de  $I'$ , que apresenta uma linha de universo igual à de  $\bar{F}$  na fig. 9.1 e que possui energia negativa do ponto de vista do referencial  $I$ , como um antitáquion de energia positiva viajando para o futuro. Em sua teoria dos táquions Recami consegue provar que a dinâmica taquiônica implica que nenhum detector *em repouso* em  $I$  pode detectar um táquion enviado por  $I'$  com a 1-forma de velocidade dada pela eq.(9.28).<sup>4</sup> Conclui daí que o  $PR_2$  continua verdadeiro.

À primeira vista o argumento parece bom, mas é pelo menos *incompleto*. De fato, um detector em  $I$  não precisa estar em repouso em  $I$  (nem um detector em  $I'$  precisa ficar parado ali). Podemos imaginar detectores em movimento periódico em cada um dos referenciais que poderiam, em princípio, absorver os táquions gerados no outro referencial, bastando para isso que no momento da absorção a velocidade do detector em  $I$  (por exemplo) tivesse a direção e o valor apropriados. Este argumento simples, juntamente com a discussão acima sobre a energia de hipotéticas  $UPWs$  su-

<sup>4</sup>É claro que também  $I'$  interpretará um táquion com linha de universo igual à de  $F$  como um antitáquion, o qual, pelo mesmo argumento, não poderia sequer ser absorvido. Dessa forma, não seria sequer possível uma situação como a do paradoxo de Tolman-Regge.

perluminais com 1-forma de velocidade apontando para o passado, mostra que não há salvação para  $PR_2$  (nem para  $PR_1$ ) se existir na natureza algum tipo de movimento superluminal.

A esta altura, uma questão intrigante surge naturalmente: Como é possível trabalhar no espaço-tempo de Minkowski, com equações que carregam a simetria de Lorentz, e ainda assim chegar à conclusão que  $PR_1$  e  $PR_2$  não são válidos? A razão para isto é que a estrutura lorentziana de  $\langle M, g, D \rangle$  já está embutida na própria estrutura do espaço-tempo *newtoniano*, como mostrado em (Rodrigues, Souza & Bozhkov 1995). Nesse trabalho demonstra-se que ainda que  $\mathcal{P}$  não seja um grupo de simetria da dinâmica newtoniana, é contudo um grupo de simetria da única formulação coerente possível da eletrodinâmica de Lorentz-Maxwell compatível com resultados experimentais e que pode ser formulada no espaço-tempo newtoniano.<sup>5</sup>

Para terminar, chamamos à atenção do leitor que, ainda que a evidência não seja completamente convincente, existem na literatura relatos de experiências que sugerem uma violação de  $PR_2$  para o movimento roto-translacional de corpos rígidos. Uma discussão e referências podem ser encontrados em (Rodrigues & Tiomno 1985).

---

<sup>5</sup>Recordamos aqui que as equações de Maxwell possuem muitos outros grupos de simetria além de  $\mathcal{P}$  (Fushchich & A 1987).

## Capítulo 10

# Conclusões

Mostramos neste trabalho que as principais equações relativísticas da Física, i.e., a equação de onda homogênea e as equações de Maxwell, Weyl, Klein-Gordon e Dirac possuem soluções com a forma de ondas progressivas não distorsivas (*UPW*) que se deslocam com velocidades arbitrárias  $0 \leq v < \infty$ . Essas soluções — tal como as soluções de onda plana das equações de Maxwell — têm energia infinita e, portanto, não podem ser lançadas no espaço físico. Entretanto, provamos que as aproximações de abertura finita para soluções *UPW* podem ser, como de fato foram, produzidas (Saari & Reivelt 1997). Para o caso particular das *SEXWs* verificou-se experimentalmente que seus picos se propagam com velocidades superluminais por grandes distâncias.

Mostramos a existência de soluções *UPW* das equações de Maxwell com  $v \neq c$ , que apresentam invariantes de campo  $F^2 \neq 0$ . Para soluções deste tipo pode-se provar uma equivalência Maxwell-Dirac.<sup>1</sup> Essa equivalência abre o caminho para a modelagem das partículas da matéria como *PEPs*. Além dessa possibilidade, mostramos que a interpretação de de Broglie-Bohm da teoria quântica fornece uma interpretação simples do tunelamento “supeluminal” de elétrons e de microondas, e sugere também que o tunelamento de microondas pode não ser compatível com o conceito de fóton. Nossa investigação mostra também que tais fenômenos não implicam em qualquer violação do princípio de Relatividade pois, ao que tudo indica, todas as ondas superluminais geradas experimentalmente parecem ter *suporte compacto* no domínio temporal e portanto possuem frentes que se propagam com a velocidade da luz no vácuo.

---

<sup>1</sup>Essa equivalência foi usada recentemente para construir uma teoria sobre o espectro de massa dos léptons (Rodrigues & Vaz 1998).

A teoria das características, apresentada no capítulo 6, serviu para recuperar os resultados bastante conhecidos de Sommerfeld e Brillouin a respeito da velocidade de propagação de sinais. O valor limite  $c$  para a velocidade da frente de onda, obtido por esses autores e corroborado pela teoria das características, não invalida os resultados sobre a existência das soluções *UPW* das diversas equações de onda estudadas, na medida em que diz respeito à existência de sinais com suporte compacto no tempo, e não de soluções com suporte infinito como as *UPW*. Em particular, a existência de fenômenos superluminais em meios dispersivos encontra uma boa explicação no reformatamento de pulso, estudado em detalhes no capítulo 7, no qual também foram apresentadas novas soluções superluminais para o movimento de microondas em guias de ondas.

O tunelamento de elétrons e a velocidade de propagação da energia foram tratados no capítulo 8. Aqui, a interpretação de de Broglie-Bohm da mecânica quântica serve para mostrar que os elétrons não tunelam com  $v > c$ , ainda que o pacote de onda que os descreve pareça indicar o contrário; segundo essa interpretação, o fenômeno de tunelamento quântico nada mais é do que uma nova instância do fenômeno de reformatamento de pulso. A definição canônica da velocidade de propagação da energia, ao contrário, leva-nos a um resultado paradoxal, na medida em que, por sua forma, tal definição implica que esta velocidade seja sempre menor que  $c$ , mesmo para uma *UPW* superluminal! Nossa conclusão é que somente a experiência e novas investigações teóricas poderão esclarecer satisfatoriamente a questão da velocidade da energia na teoria eletromagnética.

As possíveis conseqüências de todos estes fatos para a teoria da relatividade são analisadas no capítulo 9, no qual demonstramos que a existência de ondas superluminais, e a decorrente possibilidade de se transmitir informação a velocidades maiores que  $c$ , levam necessariamente a paradoxos que tornariam impossível sustentar essa teoria em sua forma atual.

Gostaríamos de enfatizar aqui que existem aplicações práticas para as *UPWs* ou *quasi-UPWs*, desde a geração de imagens com ultrassom ao projeto de canhões eletromagnéticos e de dispositivos para telecomunicações (Ziolkowski 1989). Além disso, acreditamos — e esta é uma conjectura — que a existência de soluções sub- e superluminais da equação de Weyl pode revelar-se importante na solução de alguns mistérios acerca dos neutrinos. De fato, se se puderem produzir neutrinos em modos subluminiais ou superluminais, estes poderiam eventualmente não ser detectados na Terra após serem produzidos no Sol (veja-se Otten (1995) e Giannetto, Maccarrone, Mignani & Recami (1986) para algumas evidências experimentais de neutrinos superluminais). Por outro lado, têm sido recentemente discutidas

na literatura (Primack, Holtzman, Klypin & Caldwell 1995, Simone 1998) evidências cosmológicas de que os neutrinos possuem massa não nula. Ora, seria possível definir para neutrinos sub- ou superluminais uma espécie de “massa efetiva”, a qual seria responsável por tais evidências, e de tal forma que ainda teríamos um neutrino levógiro, visto que ele satisfaria a equação de Weyl. Mais detalhes sobre a teoria dos neutrinos superluminais podem ser encontrados nos trabalhos de Rembielinski (Rembielinski 1994, Rembielinski 1997).

Acreditamos que muito trabalho ainda resta por fazer sobre o assunto do movimento ondulatório superluminal, em particular, um melhor modelamento matemático das ondas reais produzidas por geradores com espectros de frequência limitados, mas sentimos que o mecanismo dos fenômenos está agora bem entendido.

**Nota:** Após a apresentação desta tese, chegou ao nosso conhecimento um trabalho de Harold Willis Milnes (Milnes 1999) em que o autor relata a transmissão de sinais em linhas de transmissão a velocidades bastante superiores à velocidade da luz. A equação que descreve tais fenômenos é a equação dos telegrafistas. Um estudo detalhado das propriedades desta equação foi feito há bastante tempo por F. M. de Oliveira Castro (de Oliveira Castro 1949), em dissertação apresentada à Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil, em 1949, no qual são mostradas as soluções superluminais da equação dos telegrafistas. A verificação experimental desses resultados certamente abrirá caminho a novas investigações sobre a teoria eletromagnética e a teoria da relatividade.

## Apêndice A

# Sobre derivadas interiores e “para fora” de uma hipersuperfície $\mathcal{B}$ em $M$

Seja  $(M, g, D)$  o espaço-tempo de Minkowski e  $\langle x^\mu \rangle$  uma carta de Lorentz naturalmente adaptada a um sistema de referência inercial  $I = \partial/\partial x^0$ . Seja  $p = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in M$  e  $a = a^\mu \partial/\partial x^\mu|_p$ ,  $a \in T_p M$  um vetor tangente a  $M$  em  $p$  tal que

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 \neq 0. \quad (\text{A.1})$$

Uma regra  $\lambda$  na direção de  $\mathbf{a}$  é uma aplicação

$$\lambda : \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \mathbb{R} \ni s \mapsto \lambda(s) \in M, \quad (\text{A.2})$$

tal que as funções coordenadas têm a forma

$$x^\mu \circ \lambda(s) = x^\mu + sa^\mu. \quad (\text{A.3})$$

Seja  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) uma função<sup>1</sup>. A *derivada direcional* de  $u$  na direção de  $\mathbf{a}$  é por definição

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial s} (x^\mu \circ \lambda) = u_\mu a^\mu. \quad (\text{A.4})$$

No que segue chamaremos abreviadamente  $\partial u/\partial s$  de “derivada de  $u$  em relação a  $s$ ” e denotaremos  $x^\mu \circ \lambda(s)$  por  $x^\mu(s)$ , sempre que isto não dê margem a confusão.

---

<sup>1</sup>A representante de  $u$  na carta  $\langle x^\mu \rangle$  será denotada  $u(x^\mu)$  ou simplesmente  $u$  sempre que tal procedimento não resulte em confusão

Consideremos agora uma hipersuperfície  $\mathcal{B} \subset M$  de dimensão 3, dada de forma implícita por

$$\mathcal{B} : \phi(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Seja  $u(x^\mu)$  uma função cujas derivadas sejam contínuas em um aberto  $U \subset \mathcal{B}$ . Consideremos ainda um ponto  $p \in \mathcal{B} \subset M$  tal que, em  $p$ ,

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu = \phi_\mu \phi^\mu = \phi_0^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2 \neq 0, \quad (\text{A.6})$$

e seja  $\mathbf{a} \in T_p M$  um vetor arbitrário.

## A.1 Derivadas de $u$ em $\mathcal{B}$

A derivada de  $u$  em  $\mathcal{B}$  na direção de  $\mathbf{a}$  foi definida, segundo a eq.(A.4), como

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x^\mu} a^\mu, \quad a^\mu = \frac{\partial x^\mu \circ \lambda(s)}{\partial s}. \quad (\text{A.7})$$

Se a equação

$$a^\mu = \lambda \phi^\mu, \quad \phi^\mu = \eta^{\mu\nu} \phi_\nu, \quad (\text{A.8})$$

for satisfeita para algum  $\lambda$  real fixo, então a eq.(A.7) será dita derivada de  $u$  “na direção da normal” ou simplesmente *derivada normal*. Se, em particular,  $\mathbf{a}^2 = 1$ , i.e.,  $a^\mu = \phi^\mu (\phi_\alpha \phi^\alpha)^{-1/2}$ , então

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\phi^\mu}{(\phi_\alpha \phi^\alpha)^{1/2}} u_{,\mu}. \quad (\text{A.9})$$

Se  $\mathbf{a} \in T_p U \subset T_p M$ , sendo portanto ortogonal à normal a  $\mathcal{B}$  em  $p \in \mathcal{B} \subset M$ , i.e., se

$$a^\mu \phi_\mu = 0, \quad (\text{A.10})$$

então

$$\frac{\partial u}{\partial s} = a^\mu u_{,\mu} \quad (\text{A.11})$$

será dita *derivada tangencial* ou *derivada interior*. Neste caso dizemos que a derivada “mora” na superfície  $\mathcal{B}$ .

Se  $a^\mu \phi_\mu \neq 0$ ,  $\partial u / \partial s$  será chamada derivada “para fora” de  $\mathcal{B}$ .

**Exemplo:** Os vetores tangentes a  $M$  em  $p = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathcal{B}$  da forma

$$\phi_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \phi_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{A.12})$$

representam derivadas interiores. De fato, seja  $\mathbf{a}$  o vetor cujas componentes  $\mu$  e  $\nu$  são

$$\mathbf{a} = (0, \dots, \overbrace{-\phi_\nu}^\mu, \dots, \overbrace{\phi_\mu}^\nu, \dots, 0). \quad (\text{A.13})$$

Então

$$a_\alpha \phi^\alpha = -\phi_\nu \phi^\nu + \phi_\mu \phi^\mu = 0. \quad (\text{A.14})$$

Temos agora a seguinte proposição, que é muito importante no estudo da teoria das características de sistemas de equações diferenciais parciais:

**Proposição.** As derivadas interiores de  $u$  na superfície  $\mathcal{B}$  dependem somente dos valores de  $u$  sobre a própria superfície  $\mathcal{B}$ .

*Demonstração.* Introduzimos em uma vizinhança  $U \subset B$  uma carta local  $\langle \xi^\mu \rangle$  (em geral, diferente da carta  $\langle x^\mu \rangle$ ), de maneira que  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  sejam variáveis independentes em  $\mathcal{B}$  e tais que  $\xi^0|_{\mathcal{B}} = \phi = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial u}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi^0} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\mu}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

e denotaremos aqui  $\partial u / \partial \xi^0$  por  $u_\phi$ . Uma vez que na hipersuperfície  $\mathcal{B}$  temos  $\phi_\mu = \partial \xi^0 / \partial x^\mu$ , a eq.(A.15) fica

$$\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = u_\phi \phi_\mu + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.15}')$$

Temos então que, dado  $\mathbf{a} \in T_p M$ ,

$$\begin{aligned} a^\mu \frac{\partial u}{\partial x^\mu} &= a^\mu \frac{\partial u}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \\ &= (a^\mu \phi_\mu) u_\phi + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi^i} \sum_{\mu=0}^3 a^\mu \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Agora, se  $\mathbf{a} \in TU \subset TB \subset TM$ , então  $a^\mu \phi_\mu = 0$  e portanto

$$\frac{\partial u}{\partial s} = a^\mu \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi^i} \sum_{\mu=0}^3 a^\mu \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.17})$$

Esta igualdade mostra então que  $\partial u / \partial s$  será conhecida se os valores de  $u(0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$  de  $u$  em  $\mathcal{B}$  forem conhecidos. ■

Naturalmente, conhecidas três derivadas interiores de  $u$  em  $\mathcal{B}$  (e.g.,  $(\phi_i \partial u / \partial x^i - \phi_n \partial u / \partial x^n)$ ,  $\phi_n \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) e uma derivada de  $u$  “para fora” de  $\mathcal{B}$  (e.g.,  $u_\phi$ ), poderemos obter todas as outras derivadas interiores de  $u$  formando combinações lineares. Então, em resumo, todas as derivadas  $\partial u / \partial x^\mu$  de  $u$  em  $\mathcal{B}$  serão conhecidas se  $u$  e uma derivada sua “para fora” de  $\mathcal{B}$  forem conhecidas em  $\mathcal{B}$ .

# Referências Bibliográficas

- Aharonov, Y., B. Reznik & A. Stern (1998), Quantum limitations on superluminal propagation, Preprint, Tel Aviv University.
- Aspect, A., J. Dalibard & G. Roger (1982), 'Experimental test of bell inequalities using time-varying analysis', *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804–1807.
- Band, W. (1988*a*), 'Can information be transferred faster than light? I. A gedanken device for generating electromagnetic wave packets with superoptic group velocity', *Found. Phys.* **18**, 549–562.
- Band, W. (1988*b*), 'Can information be transferred faster than light? II. The relativistic doppler effect on electromagnetic wave packets with suboptic and superoptic velocities', *Found. Phys.* **18**, 625–638.
- Barashenkov, V. & W. A. Rodrigues, Jr. (1998), 'Launching of non-dispersive sub and superluminal beams', *N. Cimento* **B113**, 329–338.
- Barut, A. O. (1994), 'Localized rotating wavelets with half integer spin', *Phys. Lett. A* **189**, 277–281.
- Barut, A. O. & H. C. Chandola (1993), 'Localized tachyonic wavelet solutions of the wave equation', *Phys. Lett. A* **180**, 5–8.
- Bateman, H. (1915), *Mathematical Theory of Electrical and Optical Wave Motion*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Bohm, D. & B. J. Halley (1993), *Undivided Universe*, Routledge, London and New York.
- Bolda, E. L., J. C. Garrison & R. Y. Chiao (1994), 'Optical pulse propagation at negative group velocities due to nearby gain line', *Phys. Rev. A* **49**, 2938–2947.
- Bourbaki, N. (1957), *Théorie des Ensembles*, Hermann, Paris.

- Brillouin, L. (1960), *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, New York.
- Brodowsky, H. M., W. Heitmann & G. Nimtz (1996), ‘Comparison of experimental microwave tunneling data with calculations based on Maxwell equations’, *Phys. Lett. A* **222**, 125–129.
- Chiao, R. Y. (1993), ‘Superluminal (but causal) propagation of wave packets in transparent media with inverted populations’, *Phys. Rev. A* **48**, R34–R37.
- Chiao, R. Y., A. E. Kozhokin & G. Kurizki (1996), ‘Tachyonlike excitations in inverted two-level media’, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1254–1257.
- Courant, R. & D. Hilbert (1966), *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, John Wiley and Sons, New York.
- de Oliveira Castro, F. M. (1949), *Ondas em Linhas de Transmissão*, Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil, Rio de Janeiro.
- Deutch, J. M. & F. E. Low (1993), ‘Barrier penetration and superluminal velocity’, *Ann. Phys.* **228**, 184–201.
- Diener, G. (1997), ‘Energy transport in dispersive media and superluminal group velocities’, *Phys. Lett. A* **235**, 118–124.
- Diener, G. (1998), ‘Energy balance and energy transport in dispersive media’, *Ann. der Phys.* **7**, 639–644.
- Donnelly, R., D. Power & G. Templeman (1994), ‘Graphical simulation of superluminal acoustic localized wave pulses’, *IEEE Trans. Ultrasonics. Ferr. Freq. Contr.* **41**, 7–12.
- Donnelly, R. & R. Ziolkowski (1992), ‘A method for constructing solutions of homogeneous partial differential equations: Localized waves’, *Proc. R. Soc. London* **A437**, 673–692.
- Donnelly, R. & R. Ziolkowski (1993), ‘Designing localized waves’, *Proc. R. Soc. London* **A460**, 541–565.
- Ehrenfest, P. (1907), ‘Die translation deformierbarer elektron und der flächensatz’, *Ann. Phys. Leipzig* **23**, 204–205.

- Einstein, A. (1949), Autobiographical notes, *in* P. A.Schilpp, ed., ‘Albert Einstein: Philosopher-Scientist’, Open Court, La Salle, Illinois, Cambridge University Press, London, pp. 1–94. Edição bilingüe inglês-aleão. Tradução inglesa de P. A. Schilpp.
- Einstein, A. (1952), Do gravitational fields play an essential part in the structure of elementary particles of matter?, *in* H. A.Lorentz, A.Einstein, H.Minkowski & H.Weyl, eds, ‘The Principle of Relativity’, Dover, New York, pp. 191–198. Original alemão em *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften* (1919).
- Emig, T. (1996), ‘Propagation of an electromagnetic pulse through a wave guide with a barrier: A time domain solution within classical electrodynamics’, *Phys. Rev. E* **54**, 5780–5787.
- Enders, A. & G. Nimtz (1992), ‘On superluminal barrier traversal’, *J. Phys. I France* **2**, 1693–1698.
- Enders, A. & G. Nimtz (1993a), ‘Evanescent-mode propagation and quantum tunneling’, *Phys. Rev. E* **48**, 632–634.
- Enders, A. & G. Nimtz (1993b), ‘Photonic-tunneling experiments’, *Phys. Rev. B* **47**, 9605–9609.
- Esposito, S. (1997), ‘Classical  $v_{gr} \neq c$  solutions of Maxwell’s equations and the photon tunneling effect’, *Phys. Lett. A* **225**, 203–209.
- Felsen, L. B. & R. Marcuvitz (1973), *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Feynman, R. P., R. B. Leighton & M. Sands (1964), *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- Fox, R., C. G. Kuper & S. G. Lipson (1970), ‘Faster-than-light group velocities and causality violation’, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A316**, 515–524.
- Fushchich, W. I. & G. Nikitin A (1987), *Symmetries of Maxwell Equations*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.
- Garrett, C. G. B. & D. E. McCumber (1970), ‘Propagation of a Gaussian pulse through an anomalous dispersion medium’, *Phys. Rev. A* **1**, 305–313.

- Garrison, J. C., M. W. Mitchel, R. Y. Chiao & E. L. Bolda (1998), ‘Superluminal signals: Causal loop paradoxes revisited’, *Phys. Lett. A* **345**, 19–25.
- Giakos, G. C. & T. K. Ishii (1991), ‘Anomalous microwave propagation in open space’, *Microwave and Opt. Tech. Lett.* **4**, 79–81.
- Giannetto, E., G. D. Maccarrone, R. Mignani & E. Recami (1986), ‘Are neutrinos faster than light particles?’, *Phys. Lett. B* **178**, 115–120.
- Gières, F. (n.d.), Supersymmetries et mathématiques, Technical Report 9419, LYCEN. hep-th/9405101.
- Goodman, J. W. (1968), *Fourier Optics*, McGraw Hill, New York.
- Grib, A. A. & W. A. Rodrigues, Jr. (1999), *Nonlocality in Quantum Physics*, Plenum Publ. Co., New York. em publicação.
- Grimes, D. M. & C. A. Grimes (1995), A classical field theory explanation of photons, in T. W. Barret & D. M. Grimes, eds, ‘Advanced Electromagnetism: Foundations, Theory and Applications’, World Sci. Publ., Singapore, pp. 250–277.
- Gutler, R. & D. Hestenes (1975), ‘Consistency in the formulation of the Dirac, Pauli and Schrödinger theories’, *J. Math. Phys* **16**, 573–584.
- Hartman, Th. E. (1962), ‘Tunneling of a wave packet’, *J. Appl. Phys.* **33**, 3427–3433.
- Hauge, E. H. & J. A. Støvneng (1989), ‘Tunneling times: A critical review’, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 917–936.
- Heitmann, W. & G. Nimtz (1994), ‘On causality proofs of superluminal barrier traversal of frequency band limited wave packets’, *Phys. Lett. A* **196**, 154–158.
- Hestenes, D. (1966), *Spacetime Algebra*, Gordon and Breach Sci. Publ., New York.
- Hestenes, D. & G. Sobczyk (1984), *Clifford Algebra to Geometric Calculus*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.
- Holland, P. (1993), *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge University Press, Cambridge.

- Huelga, S. F., M. Ferrero & E. Santos (1995), ‘Proposed new polarization correlation test of local realism’, *Proc. New York Acad. Sci.* **775**, 429–437.
- Ishii, T. K. & G. C. Giakos (1991), ‘Transmit radio waves faster than light’, *Microwaves & RF* pp. 114–119.
- Ives, H. E. (1951), ‘Adventures with standing waves’, *Proc. Am. Acad. Arts and Sci.* **81**, 7–31.
- Jackson, J. D. (1983), *Eletrodinâmica Clássica*, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro. Tradução da segunda edição de “Classical Electrodynamics”, John Wiley, NY, 1975.
- Jancewicz, B. (1988), *Multivectors and Clifford Algebras in Electrodynamics*, World Sci. Publ. Co., Singapore.
- Kino, G. S. (1987), *Acoustical Waves: Devices, Imaging and Analog Signal Processing*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- Landauer, R. & Th. Martin (1994), ‘Barrier interaction time in tunneling’, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 217–228.
- Lasenby, A., S. Gull & C. Doran (1996), STA and the interpretation of quantum mechanics, in W. E. Baylis, ed., ‘Clifford (Geometrical) Algebras with Applications in Physics, Mathematics and Engineering’, Birkhäuser, Boston.
- Leavens, C. R. (1998), ‘Times of arrival in quantum and Bohmian mechanics’, *Phys. Rev. A* **59**, 840–847.
- Lounesto, P. (1993), ‘Clifford algebras and Hestenes spinors’, *Found. Phys.* **23**, 1203–1237.
- Lounesto, P. (1994), Clifford algebras, relativity and quantum mechanics, in P. Letelier & W. A. Rodrigues, Jr., eds, ‘Gravitation: The Spacetime Structure’, World Sci. Publ. Co., Singapore, pp. 50–81.
- Lounesto, P. (1997), *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge Univ. Press., Cambridge.
- Low, F. E. (1998), ‘Comments on apparent superluminal propagation’, *Ann. der Physik* **7**, 660–661.

- Low, F. E. & P. F. Mende (1991), ‘A note on the tunneling problem’, *Ann. Physics* **210**, 380–387.
- Lu, J.-Y., H. Zou & J. F. Greenleaf (1994), ‘Biomedical ultrasound beam forming’, *Ultrasound in Med. & Biol.* **20**, 403–428.
- Lu, J.-Y. & J. F. Greenleaf (1992*a*), ‘Experimental verification of nondiffracting  $X$ -wave’, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.* **39**, 441–446.
- Lu, J.-Y. & J. F. Greenleaf (1992*b*), ‘Nondiffracting  $X$ -waves - exact solutions to free-space scalar wave equation and their finite aperture realizations’, *IEEE Transact. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.* **39**, 19–31.
- Maia, Jr., A., E. Recami, M. A. F. Rosa & W. A. Rodrigues, Jr. (1990), ‘Magnetic monopoles without string in the Kahler-Clifford algebra bundle’, *J. Math. Phys.* **31**, 502–505.
- Marshall, T. W. (1997*a*), The myth of the down converted photon, in ‘Proc. of the Second Vigier Conference’, York University, Canada.
- Marshall, T. W. (1997*b*), The myth of the photon, in S. Jeffers et al., eds, ‘The Present Status of the Quantum Theory of Light’, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, pp. 66–77.
- Martin, Th. & R. Landauer (1992), ‘Time delay of evanescent electromagnetic waves and the analogy to particle tunneling’, *Phys. Rev. A* **45**, 2611–2617.
- Mehmeti, F. A. (1996), *Transient Tunnel Effect and Sommerfeld Problem*, Akademie Verlag, Berlin.
- Milnes, Harold Willis (1999), ‘Superluminary effects on fine wires’, *The Toth-Maatian Review* **14**, 6803–6837.
- Mitchell, M. W. & R. Y. Chiao (1997), ‘Negative group delay and “fronts” in a causal system: An experiment with very low frequency bandpass amplifiers’, *Phys. Lett. A* **230**, 133–138.
- Moretti, P. & A. Agresti (1995), ‘Can the Klein-Gordon equation describe superluminal processes?’, *N. Cimento* **B110**, 905–912.
- Morse, P. M. & H. Feshback (1953), *Methods of Theoretical Physics*, Vol. Part 1, McGraw-Hill, New York.

- Moya, A. M. (1999), Lagrangian Formalism for Multivector Fields on Spacetime, PhD thesis, IMECC-UNICAMP. Ph.D. thesis.
- Moya, A. M., V. Fernandez & W. A. Rodrigues, Jr. (1999), Gravitational theory in Minkowski spacetime. in preparation.
- Nimtz, G. (1997), New knowledge of tunneling from photonic experiments, in 'Proc. of the Adriatico Research Conference: Tunneling and its Applications', World Sci. Publ. Co.
- Nimtz, G. (1998), 'Superluminal signal velocity', *Ann. der Physik* **7**, 618–624.
- Nimtz, G. (1999), 'Evanescent modes are not necessarily Einstein causal', *Europhys. J. B* **7**, 523–525.
- Nimtz, G., H. Spieker & H. M. Brodowski (1994), 'Tunneling with dissipation', *J. Phys. I (France)* **4**, 1379–1382.
- Oliveira, E. C. & W. A. Rodrigues, Jr. (1998), Superluminal electromagnetic waves in free space, in P.Mittelstaed. & G.Nimtz, eds, 'Proc. Workshop on Superluminal (?) Velocities', *Ann. der Physik* **7**, 654–659 (1998), Köln.
- Otten, E. W. (1995), 'Squeezing the neutrino mass with new instruments', *Nucl. Phys. News* **5**, 11–16.
- Poincaré, H. (1906), 'Sur la dynamique de l'électron', *R. C. Circ. Mat. Palermo* **21**, 129–175.
- Primack, J. R., J. Holtzman, A. Klypin & D. O. Caldwell (1995), 'Cold+hot dark matter cosmology with  $m(\nu_\mu) \simeq m(\nu_\tau) \simeq 2.4 \text{ eV}$ ', *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2160–2163.
- Ranfagni, A. & D. Mugnai (1996), 'Anomalous pulse delay in microwave propagation: A case for superluminal behavior', *Phys. Rev. E* **54**, 5692–5696.
- Ranfagni, A., D. Mugnai, P. Fabeni & G. P. Pazzi (1991), 'Delay-time measurements in narrow waveguides as a test of tunneling', *Appl. Phys. Lett.* **58**, 774–776.
- Ranfagni, A., P. Fabeni, G. P. Pazzi & D. Mugnai (1993), 'Anomalous pulse delay in microwave propagation: A plausible connection to the tunneling time', *Phys. Rev. E* **48**, 1453–1460.

- Rarity, J. G. & P. R. Tapster (1990), ‘Experimental violation of Bell inequality based on phase and momentum’, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2495–2498.
- Recami, E. (1986), ‘Classical tachyons and applications’, *Riv. Nuovo Cimento* **9**, 1–178.
- Reichenbach, H. (1958), *The Philosophy of Space and Time*, Dover, New York.
- Rembielinski, J. (1994), Tachyonic neutrinos?, Technical Report UL 5/94, KTF. preprint.
- Rembielinski, J. (1997), ‘Tachyons and preferred frames’, *Int. J. Mod. Phys. A* **12**, 1677–1709.
- Rodrigues, Jr., W. A. & J. E. Maiorino (1996), ‘A unified theory for construction of arbitrary speeds ( $0 \leq v < \infty$ ) solutions of the relativistic wave equations’, *Random Oper. Stoch. Equ.* **4**, 355–400.
- Rodrigues, Jr., W. A. & J. Tiomno (1985), ‘On experiments to detect possible failures of relativity theory’, *Found. Phys.* **15**, 995–961.
- Rodrigues, Jr., W. A. & J. Vaz, Jr. (1997), ‘Subluminal and superluminal solutions in vacuum of the Maxwell equations and the massless Dirac equation’, *Advances in Appl. Clifford Algebras* **7**(Sup.), 453–462. Talk presented at the International Conference on the Theory of the Electron, Mexico City, 1995.
- Rodrigues, Jr., W. A. & J. Vaz, Jr. (1998), ‘From electromagnetism to relativistic quantum mechanics’, *Found. Phys.* **28**, 789–814.
- Rodrigues, Jr., W. A. & J.-Y. Lu (1997), ‘On the existence of undistorted progressive waves (upws) of arbitrary speeds  $0 \leq v < \infty$  in nature’, *Found. Phys.* **27**, 435–508.
- Rodrigues, Jr., W. A. & M. A. F. Rosa (1989), ‘The meaning of time in relativity and Einsteins’s later view of the twin paradox’, *Found. Phys.* **19**, 705–724.
- Rodrigues, Jr., W. A., M. E. F. Scanavini & L. P. Alcantara (1990), ‘Formal structures, the concepts of covariance, invariance, equivalent reference systems, and the principle of relativity’, *Found. Phys. Lett.* **3**, 59–79.
- Rodrigues, Jr., W. A. & Q. A. G. Souza (1993), ‘The Clifford bundle and the nature of the gravitational field’, *Found. of Phys.* **23**, 1465–1490.

- Rodrigues, Jr., W. A., Q. A. G. Souza & J. Vaz, Jr. (1995), Spinor fields and superfields as equivalence classes of exterior algebra fields, *in* R. Ablamowicz & P. Lounesto, eds, ‘Clifford Algebras and Spinor Structures’, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, pp. 177–198.
- Rodrigues, Jr., W. A., Q. A. G. Souza, J. Vaz, Jr. & P. Lounesto (1996), ‘Dirac-Hestenes spinor fields in Riemann-Cartan spacetime’, *Int. J. Theor. Phys.* **35**, 1849–1900.
- Rodrigues, Jr., W. A., Q. A. G. Souza & Y. Bozhkov (1995), ‘The mathematical structure of Newtonian spacetime: Classical dynamics and gravitation’, *Found. Phys.* **25**, 871–924.
- Saari, P. & K. Reivelt (1997), ‘Evidence of X-shaped propagation-invariant localized light waves’, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 4135–4138.
- Sachs, R. K. & H. Wu (1977), *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag, New York.
- Simone, G. (1998), On velocities beyond the speed of light  $c$ , Technical report, CERN. preprint.
- Sneddon, I. N. (1995), *Fourier Transform*, Dover Publ., Inc., New York.
- Spielman, C., R. Szipöcs, A. Stingl & F. Krauss (1994), ‘Tunneling of optical pulses through photonic band-gaps’, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2308–2311.
- Steinberg, A. M., P. G. Kwiat & R. Y. Chiao (1993), ‘Measurement of the single-photon tunneling time’, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 708–711.
- Steinberg, A. M. & R. Y. Chiao (1994), ‘Dispersionless, highly superluminal propagation in a medium with a gain doublet’, *Phys. Rev. A* **49**, 2071–2075.
- Stratton, J. A. (1941), *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York.
- Strnad, J. & A. Kodre (1975), ‘Barrier penetration as model for tachyons’, *Phys. Lett. A* **51**, 139–140.
- Tamir, T. & A. Oliner (1963*a*), ‘Guided complex waves, part 1: Field at an interface’, *Proc. I.E.E.* **110**, 310–324.
- Tamir, T. & A. Oliner (1963*b*), ‘Guided complex waves, part 2: Relation to radiation patterns’, *Proc. I.E.E.* **110**, 325–334.

- Taylor, M. E. (1981), *Pseudodifferential Operators*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Thirring, W. (1980), *Classical Field Theory*, Vol. 2, Springer-Verlag, New York.
- Vaz, Jr., J. & W. A. Rodrigues, Jr. (1993), ‘On the equivalence of Maxwell and Dirac equations and quantum mechanics’, *Int. J. Theor. Phys.* **32**, 945–958.
- Vaz, Jr., J. & W. A. Rodrigues, Jr. (1997), ‘Maxwell and Dirac theories as an already unified theory’, *Advances in Appl. Clifford Algebras* **7**(Sup.), 369–386. Talk presented at the International Conference on the Theory of the Electron, Mexico City, 1995.
- Waite, T. (1995), ‘The relativistic Helmholtz theorem and solitons’, *Phys. Essays* **8**, 60–70.
- Waite, T., A. Barut & J. R. Zeni (1997), ‘The purely electromagnetic electron re-visited’.
- Wladimirov, V. S. (1971), *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker Inc., New York.
- Zeni, J. R. R. & W. A. Rodrigues, Jr. (1992), ‘A thoughtful study of Lorentz transformations by Clifford algebras’, *Int. J. Mod. Phys. A* **7**, 1793–1817.
- Ziolkowski, R. W. (1989), ‘Localized transmission of electromagnetic energy’, *Phys. Rev. A* **39**, 2005–2033.
- Ziolkowski, R. W., I. M. Besieris & A. M. Shaarawi (1993), ‘Aperture realizations of exact solutions to homogeneous-wave equations’, *J. Opt. Soc. Am.* **A10**, 75–87.