

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

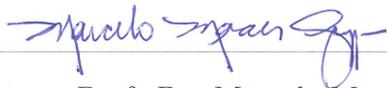
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Análise Fenomenológica da Descoerência na Oscilação de Neutrinos

Roberto Leandro Neves de Oliveira

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado defendida pelo aluno Roberto Leandro Neves de Oliveira e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 04 de Dezembro de 2007



Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo

Orientador:

Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

OL4a

Oliveira, Roberto Leandro Neves de
Análise fenomenológica da descoerência na oscilação de
neutrinos / Roberto Leandro Neves de Oliveira. -- Campinas, SP :
[s.n.], 2007.

Orientador: Marcelo Moraes Guzzo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Neutrinos. 2. Oscilações. 3. Descoerência.
4. Fenomenologia. I. Guzzo, Marcelo Moraes. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin".
III. Título.

- **Título em inglês:** Phenomenological analysis of the decoherence in the oscillation of neutrinos
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Neutrinos
 2. Oscillations
 3. Decoherence
 4. Phenomenology
- **Área de concentração:** Física das Partículas Elementares e Campos
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca examinadora:**

Prof. Marcelo Moraes Guzzo
Prof. Vicente Pleitez
Prof. Pedro Cunha de Holanda
- **Data da defesa:** 30.08.2007
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **ROBERTO LEANDRO NEVES DE OLIVEIRA – RA 040836** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 30 / 08 / 2007.

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo (Orientador do Candidato) –
DRCC/IFGW/UNICAMP



Prof. Dr. Vicente Pleitez – IFT/UNESP



Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda – DRCC/IFGW/UNICAMP

À Fernanda A. Meghioratti

“Melhor que uma Valsa”

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as oportunidades que tem me dado. Agradeço minha família, pois sem eles não teria chances de concretizar nem uma de todas as etapas de meus estudos.

Agradeço a pessoa mais importante que conheci e tive o privilegio de dividir muitos momentos da minha vida, à Fernanda Meghioratti, minha amiga, companheira e amor da vida. Desejo que você consiga alcançar todos os seus objetivos, e desculpe por ter atribulado sua vida em algumas ocasiões, te adoro.

A Unicamp e ao IFGW por terem me dado a oportunidade de vir cursar o programa de Pós-Graduação em Física e a todo seu pessoal que auxilia os estudantes e assim, nos permitem concentrar todos os nossos esforços somente em nossos projetos, meus sinceros agradecimentos.

Obrigado aos amigos de pós-graduação, a todos sem exceção, mas principalmente o pessoal as APGF, associação que tenho imenso carinho e onde discussões importantes acontecem. Além disso, dois desses amigos são especiais, Pedro e Eder, essas figuras conviveram comigo por quatro anos na graduação e agora mais dois de Mestrado e pelo visto mais quatro de Doutorado, acho que a essa altura consigo entender melhor o ditado “Eles já fazem parte da família”.

Agradeço ao Prof. Marcelo Guzzo, por ter me orientado, incentivado e acreditado em minha capacidade de estudar temas novos em física de oscilação de neutrinos.

Por fim, agradeço a FAPESP pelo apoio financeiro, sem o qual a minha permanência no curso de Pós-graduação seria impossível, tal qual, o desenvolvimento e minha participação neste projeto.

“Qual a primeira obrigação daquele que quer adquirir a sabedoria?
Abandonar a presunção. Pois é impossível começar a aprender aquilo
que se pensa já conhecer”

(Epictetus, Discursos, Livro 2, cap. 17)

Resumo

Neste trabalho, estudamos algumas conseqüências fenomenológicas da introdução do fenômeno de descoerência quântica na fenomenologia de oscilações de neutrinos. O Modelo de Violação da Mecânica Quântica e o modelo de tratamento de Sistemas Quânticos Abertos são estudados. Mostramos o comportamento e as diferenças entre os dois modelos para encontrar qual deles melhor descreve os sistemas quânticos que podem sofrer efeitos de descoerência. Esses dois modelos são estudados na literatura e ambos incluem efeitos de descoerência na Mecânica Quântica Padrão. Investigamos como o efeito de descoerência pode ser incluído em oscilações de neutrinos e examinamos como a probabilidade padrão pode ser modificada fenomenologicamente quando levamos em conta o efeito de descoerência em duas famílias de neutrinos.

Abstract

In this work, we study some phenomenological consequences of the introduction of the quantum decoherence in the phenomenology of neutrinos oscillations. The Model of Violation of the Quantum Mechanics and the general framework of Open Quantum Systems are studied. We explicitly show the behavior and the differences between the two models to find which of them better describes quantum systems that can suffer decoherence effect. These two models are studied in literature and both include decoherence effects in the Quantum Mechanics standard. We investigate how decoherence effects can be included in neutrino oscillations and examine how the standard oscillation probability can be phenomenologically modified when take into account quantum decoherence effects in two neutrinos flavor.

Sumário

1	Introdução	1
2	Oscilação de Neutrinos	4
2.1	Oscilação de Neutrinos no Vácuo	6
3	Um Modelo Baseado em Violação da Mecânica Quântica	13
3.1	O Modelo fenomenológico de VMQ	14
3.1.1	Conservação da Probabilidade	15
3.1.2	O Valor Médio de um Observável	16
3.1.3	Entropia	17
3.1.4	Hermiticidade e Parametrização	18
4	Sistemas Quânticos Abertos	19
4.1	Desenvolvimento Teórico da MQSA	20
4.1.1	Dinâmicas Reduzidas e a Positividade Completa	20
4.1.2	O Gerador de Dinâmica da MQSA	23
4.2	Aproximação de Markov	26
5	VMQ ou MQSA?	35
5.1	Gerador Kossakowski-Lindblad	35
5.2	MQSA x VMQ	40
6	Oscilações de Neutrino e Descoerência	48

6.1	Novas Probabilidades de Sobrevivência	48
6.2	Violação de CP	59
7	Conclusão e Perspectiva do Trabalho	62
	Apêndice	66
	Referências	69

Lista de Figuras

5.1	Comportamento dos autovalores do operador densidade obtido a partir do formalismo VMQ para um estado quântico emaranhado.	46
5.2	Comportamento dos autovalores do operador densidade obtido a partir do formalismo MQSA para um estado quântico emaranhado.	47
6.1	Ganho de energia do sistema devido à interação com o meio. A linha tracejada é referente ao valor médio da hamiltoniana de oscilação para o caso padrão e para o caso 1. A linha cheia é referente ao comportamento do valor médio que agora apresenta dependência com a distância de propagação do neutrino para os casos 2, 3 e 4.	55
6.2	Comportamento, para todos os casos incluindo o caso padrão, da probabilidade de sobrevivência de neutrinos do elétron com energia de criação de 10 MeV.	57
6.3	Comportamento, para todos os casos incluindo o caso padrão, da probabilidade de sobrevivência de neutrinos do elétron com energia de criação de 10 MeV.	58

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação, procuramos relacionar dois efeitos intrigantes da física: a oscilação de neutrinos e a descoerência quântica.

Existem muitos trabalhos na literatura que, a partir de evidência experimental, confirmam o efeito de oscilação de neutrinos [1–3]. Isto implica fisicamente que os neutrinos possuem massa, contrariando assim o Modelo Padrão das Partículas Elementares na sua versão mínima [5], onde estas partículas são desprovidas de massa.

Teoricamente os neutrinos podem sofrer o efeito de oscilação quântica por centenas de milhares de quilômetros durante sua propagação. A base da descrição teórica do efeito de oscilação é o princípio da superposição quântica. Este fundamental princípio da Mecânica Quântica (QM) permite que os estados quânticos possam ser representados por superposições de outros estados quânticos. Nos neutrinos, esse princípio se aplica supondo que um dado estado de sabor criado possa ser representado pela superposição de auto-estados de massa.

Esse fato é também a motivação de incluir os efeitos de descoerência, que fisicamente acaba por eliminar a coerência quântica dos estados superpostos de forma dinâmica. Desta maneira, os neutrinos depois de algum tempo de evolução temporal acabam por se tornar estados que não são mais formados pelas superposições.

Então, este trabalho, apesar de não conter nenhum tipo de análise com dados experimentais, possui a característica de estudar a viabilização de uma teoria quântica

que inclua efeitos não padrão. Sabemos que a MQ em sua formulação convencional serve de base teórica para o modelo padrão de oscilações de neutrinos e este responde satisfatoriamente a maioria dos dados experimentais, entretanto nossa motivação está vinculada possibilidade de testar efeitos não padrão para que, tanto possa melhorar as explicações de dados experimentais como servir de teste para a própria MQ. A descrição desses efeitos, mesmo que estes sejam de segunda ordem, são importantes na compreensão das características físicas de todos os sistemas físicos. Desta forma, para os neutrinos isso não deve ser diferente e, assim, estudamos como os neutrinos se comportam com o ganho de novas características. Além disso, podemos ainda, em um momento posterior, com o auxílio de dados experimentais, obter quais seriam os limites ou intensidade desses efeitos não padrão de forma a ser possível decidir se eles devem ou não ser levados em conta e quais seriam as possíveis modificações ao modelo padrão de oscilação.

Sendo assim, nosso principal objetivo é incluir efeitos de descoerência no efeito de oscilações de neutrinos de forma que os resultados obtidos sejam capazes de serem interpretados segundo os postulados MQ. Por esse motivo, tomamos os dois formalismos [6, 7] mais recorrentes na literatura de física de partículas que incluem efeitos de descoerência e os analisamos de forma a confrontá-los até que um deles se mostrasse frágil em algum determinado tipo de problema físico. Após isso, buscamos quais as possibilidades que o formalismo resultante pode trazer de contribuição para a física de oscilação de neutrinos.

Desta forma, iniciamos o capítulo 1 com uma revisão do formalismo de oscilação de neutrinos no vácuo, utilizando para isso o operador densidade como representante dos estados quânticos. Apesar deste tipo de abordagem ser pouco divulgado na literatura, ele é fundamental para conseguirmos expandir o modelo padrão de oscilação de forma a incluir os efeitos de descoerência.

No capítulo 2, discutiremos como foi construído o modelo de Violação de Mecânica Quântica (VMQ) pelos autores da referência [6] e como este modelo é utilizado na literatura [6, 8, 9]. A MQ sofre profundas modificações dentro deste modelo, inclusive com respeito a conceitos bem estabelecidos.

No capítulo 3, estudamos um modelo rigoroso que forma a base da Mecânica

Quântica de Sistemas Abertos (MQSA), tentando explicitá-lo de forma didática e em pormenores de modo a facilitar sua compreensão e deixar acessível sua utilização. Dentro desse estudo, discutimos conceitos importantes como a dinâmica reduzida e obtemos os seus geradores de evolução [10,11]. Esses geradores fazem a evolução quântica dos estados físicos e são construídos a partir da dinâmica reduzida e por esse motivo, como veremos, não obedecem a uma dinâmica unitária. Em especial, mostramos como a aproximação de Markov é útil ao tratar estados físicos de interesse em constante contato com o meio. Por esse motivo, o tratamento teórico da MQSA torna-se mais realístico quando comparado ao que a MQ padrão pode nos oferecer.

No Capítulo 4, resolvemos dois problemas especiais. O primeiro sobre a equivalência entre os dois geradores da MQSA e como devem satisfazer os critérios de entropia dos sistemas. O segundo mostrando quais as diferenças entre os formalismos VMQ e MQSA. Além disso, definimos qual dos formalismos é capaz de descrever, em quaisquer situações físicas, os estados de um sistema de interesse mantendo a interpretação probabilista que a MQ padrão possui.

No Capítulo 5, discutiremos o efeito de oscilação de neutrinos no vácuo sob a luz do formalismo obtido nos capítulos anteriores e descreveremos novas probabilidades de oscilação que podem ser obtidas de forma simples. Além disso, descreveremos rapidamente como as mesmas condições que levam a novas probabilidades podem também gerar violação de CP, mesmo em duas gerações de neutrinos.

Assim, temos como objetivo neste trabalho entender melhor os mecanismos de oscilação de neutrinos no vácuo e como a descoerência quântica pode ser incluída de forma clara e quais suas conseqüências.

Capítulo 2

Oscilação de Neutrinos

Os neutrinos são originados em muitas partes do Universo e na Terra, as principais fontes de criação de neutrinos são: os reatores nucleares; os aceleradores de Partículas; os neutrinos formados na atmosfera terrestre e os geoneutrinos que são formados no interior da Terra [1–4].

As características físicas dos neutrinos podem revelar informações sobre as fontes onde eles foram originados. Essas informações são obtidas estudando seu fluxo. A previsão teórica do número de neutrinos capturados nos experimentos terrestres é obtida, basicamente, considerando o fluxo de neutrinos, $\phi(E)$, que é dado teoricamente pelo modelo da fonte e da seção de choque, $\sigma(E)$, do tipo de reação ocorrida entre os neutrinos e o alvo, ou seja,

$$R = \int \phi(E) \times \sigma(E) dE, \quad (2.1)$$

onde todas as grandezas são funções da energia do neutrino.

Contudo, desde o início das atividades experimentais obtendo dados sobre o fluxo de neutrinos, observou-se que os experimentos capturavam menos neutrinos do que o previsto pelos modelos de emissão das fontes [12].

A hipótese que se tornou mais pertinente para explicar essa discrepância foi elaborada por Pontecorvo [13]. Esta hipótese considerava que os neutrinos, analogamente aos

kaons neutros ($K^0 - \bar{K}^0$), são capazes de oscilar entre um estado e o outro, e nos neutrinos a oscilação correspondente seria $\nu \rightarrow \bar{\nu}$, uma vez que essa seria a única possibilidade, pois os neutrinos de outros sabores foram descobertos alguns anos depois. Com a descoberta de neutrinos de outros sabores, a hipótese anterior foi substituída pela hipótese de oscilação entre neutrinos de diferentes sabores, ou seja, $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ [14]. Esta se tornou a melhor candidata à explicação do desaparecimento dos neutrinos. Além disso, o modelo que classifica as partículas elementares constituintes de toda matéria da natureza conhecido como Modelo Padrão das Partículas Elementares, em sua versão mínima, não é capaz de explicar esse desaparecimento, pois nele os neutrinos não possuem massa [5]. Entretanto, para que ocorra o efeito de oscilação, segundo a hipótese de Pontecorvo [14], necessariamente, os neutrinos devem possuir massa.

Assim, a hipótese de Pontecorvo [14] dá origem a uma probabilidade dos neutrinos alterarem seu sabor durante sua propagação. Essa probabilidade é utilizada como uma função peso dentro da equação (2.1). Como iremos tratar somente o formalismo padrão de oscilação de neutrinos no vácuo, a probabilidade de sobrevivência, $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}$, que é utilizada na previsão teórica do número eventos esperados modifica a equação (2.1) para

$$R = \int \sigma(E)\phi(E)P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}dE, \quad (2.2)$$

onde α é um dado sabor de neutrino.

Sabendo agora qual a importância da probabilidade de oscilação, na próxima seção revisamos o modelo de oscilação no vácuo, onde sua construção seguirá uma abordagem diferente da usual, porém análoga. Na obtenção do formalismo, utilizaremos o operador densidade como representante dos estados quânticos, pois esta abordagem será útil posteriormente nos estudos sobre modelos com efeitos de descoerência.

2.1 Oscilação de Neutrinos no Vácuo

Para construir o formalismo teórico que permite aos neutrinos oscilarem entre seus sabores, supomos que os neutrinos podem ser representados por uma superposição de auto-estados de massa.

Atualmente é conhecida, com evidência experimental, a existência de três tipos de sabores de neutrinos. Para cada um deles é possível fazer uma representação de três estados de massa superpostos. Entretanto, assumiremos por simplicidade que a oscilação ocorrerá somente entre duas famílias de neutrinos, visto que não há perda de generalidade e, além disso, a extensão para um formalismo de três sabores pode ser realizada sem grandes dificuldades.

Deste modo, a relação entre os estados de sabor e de massa podem ser expressos por

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

onde $\nu_{(\alpha,\beta)}$ e $\nu_{(1,2)}$ são auto-estados de sabor e massa respectivamente. A matriz U é uma matriz de rotação e neste caso, conhecida como matriz de mistura e pode ser escrita da seguinte forma

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{i\phi}\sin\theta \\ -e^{-i\phi}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

onde θ é o ângulo de mistura e ϕ uma fase. Esta matriz unitária ($UU^\dagger = 1$) é responsável por rotações no espaço especial unitário de duas dimensões, o conhecido $SU(2)$. Desta forma, quando conveniente, a extensão para o formalismo de três sabores de neutrinos pode ser feita substituindo a matriz U do $SU(2)$ pela matriz responsável por rotações no $SU(3)$ e acrescentando aos vetores em (2.3) as componentes de sabor ν_γ e de massa ν_3 .

A suposição de oscilação também é feita para os antineutrinos e desta maneira a equação (2.3) é escrita como

$$\begin{pmatrix} \bar{\nu}_\alpha \\ \bar{\nu}_\beta \end{pmatrix} = U^* \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Uma forma, também geral, de se representar os estados é a utilização do operador densidade, cuja definição pode ser escrita como

$$\rho \equiv \lambda_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (2.6)$$

onde $\lambda_n \geq 0$ para todo n e $\sum_n \lambda_n = 1$ para estados normalizados. Explicitamente o operador densidade pode ser representado por uma matriz hermitiana da seguinte forma

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1j} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{i1} & \rho_{i2} & \cdots & \rho_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

onde

$$\{\rho_{ij}\} = \sum_{i,j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j|. \quad (2.8)$$

A evolução temporal do estado é feita pela equação de Liouville ($\hbar = c = 1$) [15]:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[H, \rho(t)], \quad (2.9)$$

onde H é a hamiltoniana do sistema. No formalismo padrão de oscilações de neutrinos a hamiltoniana na base de auto estados de massa é diagonal e pode ser representada por

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

O método que utilizamos para a resolução da equação (2.9) consiste em expandi-la na base de matrizes do $SU(2)$ que é formada pela matriz $\sigma_0 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ e as seguintes matrizes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

conhecidas como matrizes de Pauli σ_i .

Assim, a equação (2.9) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\dot{\rho}_\eta \sigma_\eta = 2\epsilon_{ijk} H_i \rho_j \sigma_\eta \delta_{\eta k}, \quad (2.12)$$

onde utilizamos o fato de que matrizes hermitianas podem ser expandidas da seguinte forma

$$M = M_\mu \sigma_\mu, \quad (2.13)$$

em que cada coeficiente da expansão pode ser obtido fazendo

$$M_0 = \frac{1}{2} \text{Tr}[M], \quad (2.14)$$

e

$$M_i = \frac{1}{2} \text{Tr}[M \sigma_i]. \quad (2.15)$$

Além disso, em (2.12) deixamos os índices gregos irem de 0 a 3 e os latinos de 1 a 3¹. Então, a equação (2.12) se transforma em uma equação de vetores linearmente independentes, podendo ser escrita explicitamente como

¹Em toda a dissertação seguimos essa convenção. Além da notação de Einstein para índices duplos.

$$\begin{cases} \dot{\rho}_0(t) = 0; \\ \dot{\rho}_1(t) = 2(H_2\rho_3(t) - H_3\rho_2(t)); \\ \dot{\rho}_2(t) = 2(H_3\rho_1(t) - H_1\rho_3(t)); \\ \dot{\rho}_3(t) = 2(H_1\rho_2(t) - H_2\rho_1(t)). \end{cases} \quad (2.16)$$

Agora, supondo que exista um feixe de neutrinos com momento \mathbf{p} e que a massa seja suficientemente baixa, ou seja, $|\mathbf{p}| \gg m_i$, então é possível reescrever os autovalores de (2.10) utilizando a seguinte aproximação

$$E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2} \simeq |\mathbf{p}| + \frac{m_i^2}{2|\mathbf{p}|}, \quad (2.17)$$

onde, toma-se $|\mathbf{p}| \sim E$. Assim, a hamiltoniana pode ser reescrita como

$$H = \begin{pmatrix} E + \frac{m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & E + \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Após expandi-la na base de matrizes do $SU(2)$, com as relações (2.14) e (2.15) obtemos os seguintes coeficientes da expansão: $H_0 = \left(E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E}\right)$, $H_1 = H_2 = 0$ e $H_3 = -\frac{\Delta m^2}{4E}$ com $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$. Substituindo esses valores em (2.9), a solução geral torna-se

$$\begin{cases} \rho_0(t) = \rho_0(0); \\ \rho_1(t) = \rho_1(0) \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2E}t\right); \\ \rho_2(t) = -\rho_1(0) \sin\left(\frac{\Delta m^2}{2E}t\right); \\ \rho_3(t) = \rho_3(0). \end{cases} \quad (2.19)$$

A condição inicial pode ser obtida supondo que o feixe em questão seja originado em uma fonte onde apenas neutrinos de um determinado sabor são criados. Assim podemos escrever o estado de criação a partir de (2.3) como

$$|\nu_\alpha\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + e^{-i\phi}\sin\theta|\nu_2\rangle. \quad (2.20)$$

Utilizando as equações (2.3) e (2.8) obtemos

$$\begin{aligned} \rho(0) &= |\nu_\alpha\rangle\langle\nu_\alpha|, \\ &= (\cos\theta|\nu_1\rangle + e^{-i\phi}\sin\theta|\nu_2\rangle)(\langle\nu_1| \cos\theta + \langle\nu_2| e^{-i\phi} \sin\theta), \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \frac{1}{2}e^{-i\phi}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}e^{i\phi}\sin 2\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Este estado, quando expandido na base de matrizes do $SU(2)$, origina os seguintes coeficientes: $\rho_0(0) = \frac{1}{2}$, $\rho_1(0) = \frac{1}{2}\sin 2\theta \cos\phi$, $\rho_2(0) = -\frac{1}{2}\sin 2\theta \sin\phi$ e $\rho_3(0) = \frac{1}{2}\cos 2\theta$. No formalismo padrão é comum considerar $\phi = 0$ de forma que, o coeficiente $\rho_2(0)$ se torna nulo. Com esses resultados substituídos na equação (2.19) a solução particular é dada por

$$\begin{cases} \rho_0(t) = \frac{1}{2}; \\ \rho_1(t) = \frac{1}{2}\sin 2\theta \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2E}t\right); \\ \rho_2(t) = -\frac{1}{2}\sin 2\theta \sin\left(\frac{\Delta m^2}{2E}t\right); \\ \rho_3(t) = \frac{1}{2}\cos 2\theta. \end{cases} \quad (2.22)$$

Podemos recuperar a forma do estado em termos da matriz densidade. Para isso fazemos

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_0(t) + \rho_3(t) & \rho_1(t) - i\rho_2(t) \\ \rho_1(t) + i\rho_2(t) & \rho_0(t) - \rho_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta & \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\Delta m^2}{2E}t\right)} \\ \frac{1}{2}e^{-i\left(\frac{\Delta m^2}{2E}t\right)} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Com essa representação torna-se fácil identificar que os elementos fora da diagonal principal, que além da energia dependem explicitamente da massa dos neutrinos, são os

responsáveis pela coerência quântica que como veremos resultam no efeito de oscilação de neutrinos.

Finalmente, para obter a probabilidade de sobrevivência, ou seja, a probabilidade de encontrar o neutrino no estado em que foi criado, após um período de tempo, utiliza-se a seguinte equação [15, 16]:

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} &= \text{Tr}[\rho(0)\rho(t)], \\ P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= 2\rho_\beta(0)\rho_\beta(t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Substituindo os valores dos coeficientes de $\rho(0)$, e os resultados encontrados em (2.22) na equação acima, a probabilidade é expressa como

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4E} t \right). \quad (2.25)$$

Por conveniência de interpretação desta probabilidade, geralmente, é realizada uma reparametrização, onde a dependência temporal é substituída por um parâmetro de distância, que no caso, representa a distância entre a criação e o detector dos neutrinos. Isso é feito explorando o caráter relativístico do neutrino, $|\mathbf{p}| \gg m_i$, onde se relaciona o parâmetro temporal t com um parâmetro de distância x , escrevendo $x = vt$, onde v é a velocidade do neutrino. Mas, considerando $v \approx c$ e como por definição $c = 1$, então a probabilidade pode ser reescrita como

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4E} x \right). \quad (2.26)$$

Essa alteração completa o formalismo padrão de oscilações de neutrinos no vácuo.

Entretanto, pontos de vistas fisicamente mais realísticos podem ser aplicados ao efeito de oscilação. Por exemplo, formalismos que representam os estados dos neutrinos por pacotes de ondas, não fazem a aproximação de que os momentos dos auto-estados das partículas sejam iguais, como foi feito em (2.17). Além disso, nessa abordagem as

reinterpretações de parâmetros de evolução temporal e espacial são desnecessárias [17] já que ambos possuem interpretações distintas.

Capítulo 3

Um Modelo Baseado em Violação da Mecânica Quântica

Em mecânica quântica quando se é preparado um estado e este não é submetido a nenhuma outra medida é postulado que, nestas condições, o estado permanece inalterado em toda sua evolução temporal, ou seja, se é definido um estado puro, $Tr[\rho^2] = 1$ em $t = 0$, então para todo $t > 0$, o estado continua puro.

O modelo de violação da mecânica quântica (VMQ) que iremos discutir altera esse postulado de forma que quando se é definido um estado puro, $Tr[\rho^2] = 1$, com a evolução temporal o estado pode vir a ser misto, $Tr[\rho^2] < 1$ [6, 16].

A principal motivação de se criar um modelo fenomenológico do tipo VMQ surge com as tentativas de descrever efeitos quânticos da gravidade [6]. Uma hipótese que é muito conhecida diz respeito a uma possível criação de pares de partículas na fronteira do horizonte de eventos dos buracos negros, onde existe a possibilidade de que em seguida uma partícula caia dentro do horizonte e a outra partícula escape [18]. Assim, parte da informação contida no estado inicial é perdida, pois se supormos, por exemplo, que o par criado seja um estado puro, $Tr[\rho^2] = 1$, superposto e correlacionado, com a perda de uma das partículas, o estado acaba por se tornar misto, $Tr[\rho^2] < 1$, uma vez que deixa de estar correlacionado e também superposto, além disso, neste caso dizemos que houve

perda de informação, pois a partir do estado final não é possível recuperar o estado inicial do sistema.

O princípio de superposição dos estados quânticos conduz ao conceito de coerência quântica. Estados que deixam de se manter superpostos com a evolução temporal, também perdem coerência quântica de forma dinâmica e esse fenômeno é chamado de descoerência quântica.

O modelo VMQ pode incluir efeitos de descoerência quântica. Esse foi o primeiro modelo aplicado à física de partículas que inclui o efeito de descoerência e foi desenvolvido pelos autores da referência [6]. A seguir mostraremos como esse modelo foi construído e como ele é aplicado na literatura [6, 8, 9, 19].

3.1 O Modelo fenomenológico de VMQ

Um modelo fenomenológico de VMQ consiste em alterar a evolução hamiltoniana, de forma que os estados não permaneçam puros durante sua evolução. Isso pode ser obtido definindo que a equação de movimento anteriormente escrita em (2.9) contenha um termo a mais, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)] + D[\rho], \quad (3.1)$$

onde $D[\rho]$ é responsável por descrever os efeitos de violação. A forma expandida da equação (3.1) na base de matrizes do $SU(2)$ é escrita da seguinte forma:

$$\dot{\rho}_\mu \sigma_\mu = 2\epsilon_{ijk} H_i \rho_j \sigma_\mu \delta_{\mu k} + \rho_\nu D_{\mu\nu} \sigma_\mu, \quad (3.2)$$

onde os coeficientes $\rho_{\mu,\nu}$ e H_i são obtidos a partir de (2.13), (2.14), (2.15).

Com a adição desse termo, a evolução temporal deixa de ser unitária. Em outras palavras, como não há simetria temporal na equação (3.2) as regras de simetria deixam de corresponder às leis de conservação. Sendo assim, as leis de conservação que forem

importantes ao o estudo do sistema devem ser impostas à equação (3.2), em particular no termo $D[\rho]$. Com a evolução deixando de ser unitária, existirá a possibilidade dos estados puros não se manterem coerentes durante a evolução. O estudo detalhado do novo termo, fundamentado nos conceitos da MQ padrão permite encontrar a forma geral de $D_{\mu\nu}$ para que as leis de conservação sejam mantidas.

3.1.1 Conservação da Probabilidade

Começamos com o estudo sobre a conservação da probabilidade. Sabemos que na MQ, a soma de todas as probabilidades dos possíveis estados que um sistema pode assumir é geralmente normalizada, ou seja, $Tr[\rho(t)] = 1$. Para que o número de estados permaneça igual em toda a evolução temporal é necessário que a probabilidade se conserve, ou seja, $Tr[\dot{\rho}(t)] = 0$. Isso também deve ser aplicado à equação (3.2), assim, para o lado esquerdo da igualdade temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Tr[\rho(t)] &= Tr[\dot{\rho}_\mu\sigma_\mu] = 0, \\ &= \dot{\rho}_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Igualmente, na MQ, a conservação da probabilidade exige que para qualquer estado quântico definido pelo operador densidade, o vetor $\rho_0(t)$ permaneça constante no tempo, ou seja, da equação (3.3) sempre devemos ter $\rho_0(t) = \rho_0(0)$. Por outro lado, fazendo a mesma imposição para o lado direito de (3.2) temos

$$Tr[\dot{\rho}(t)] = Tr[2\epsilon_{ijk}H_i\rho_j\sigma_k + \rho_\nu D_{\mu\nu}\sigma_\mu] = 0, \tag{3.4}$$

como o $Tr[\sigma_0] = 2$, da equação acima segue que,

$$\begin{aligned} 2\rho_\nu D_{0\nu} &= 0, \\ D_{0\nu} &= 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

uma vez que ρ_ν é arbitrário, real e positivo. Deste modo, para que haja conservação da probabilidade os elementos $D_{0\nu}$ devem ser nulos.

3.1.2 O Valor Médio de um Observável

Segundo a MQ padrão o valor médio de um observável A , que seja independente do tempo e que comute com a hamiltoniana, é sempre conservado. Entretanto, para que o valor médio seja conservado no formalismo VMQ, deve-se impor que

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle(t) = Tr[A\dot{\rho}(t)] = 0. \quad (3.6)$$

Como caso particular, definimos A como um operador de duas dimensões, tendo em vista que a equação (3.1) foi expandida na base de matrizes do $SU(2)$, assim, substituindo $\dot{\rho}(t)$ na equação acima pelo lado esquerdo da equação (3.2),

$$\begin{aligned} Tr[A\dot{\rho}(t)] &= Tr[A_\alpha \sigma_\alpha \dot{\rho}_\mu \sigma_\mu] = 0, \\ &= Tr[2\epsilon_{ijk} H_i \rho_j A_k \sigma_0 + \rho_\nu D_{\mu\nu} A_\mu \sigma_0] = 0, \\ &= 2\rho_\nu D_{\mu\nu} A_\mu = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

considerando que $[A, H] = 0$, a conservação do valor médio de cada operador pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \rho_\nu D_{\mu\nu} A_\mu &= 0, \\ D_{\mu\nu} A_\mu &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde ρ_ν é real e positivo. A equação (3.8) quando imposta mantém o valor médio de qualquer observável conservado.

3.1.3 Entropia

No formalismo VMQ, os estados puros podem se tornar estados mistos devido à evolução temporal, embora, o contrario não deve ocorrer, pois do ponto de vista da termodinâmica a “ordem” e a “desordem” do sistema são representadas pelos estados puros e mistos, respectivamente. Como já foi dito, os estado puros são definidos por $Tr[\rho^2] = 1$, e estados mistos $Tr[\rho^2] < 1$, então, é possível utilizar estas condições para garantir que somente estados puros tornem-se mistos e não o contrario. Para isso é necessário garantir que $Tr[\rho^2] \leq 1$, para toda a evolução temporal, ou seja, devemos impor que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Tr[\rho^2(t)] &\leq 0, \\ Tr[\dot{\rho}^2(t)] = Tr[\rho(t)\dot{\rho}(t)] &\leq 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

de onde, se obtém a seguinte condição:

$$\begin{aligned} Tr[\rho\dot{\rho}] &= Tr[\rho_\beta\sigma_\beta\dot{\rho}_\mu\sigma_\mu], \\ &= Tr[\rho_\beta\sigma_\beta(2\epsilon_{ijk}H_i\rho_j\sigma_k + \rho_\nu D_{\mu\nu}\sigma_\mu)], \\ &= Tr[2\epsilon_{ijk}H_i\rho_j\rho_k\sigma_0 + \rho_\nu D_{\alpha\nu}\sigma_0\rho_\alpha], \\ &= 2D_{\alpha\nu}\rho_\nu\rho_\alpha \leq 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

como $D_{0\nu} = 0$, então,

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}\rho_\nu\rho_\mu &\leq 0, \\ D_{\mu\nu} &\leq 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

como ρ é definido como um operador hermitiano, os vetores ρ_μ e ρ_ν são reais e, portanto, para que seja satisfeita a equação acima $D_{\mu\nu}$ deve ser semidefinido negativo, ou seja, possuir apenas autovalores negativos [6].

3.1.4 Hermiticidade e Parametrização

A última imposição que fazemos ao novo termo fenomenológico, $D_{\mu\nu}$, diz respeito à conservação de hermiticidade da equação (3.1). Isso deve ser feito já que sabemos que a equação de Liouville, (2.9), é hermitiana e vamos manter esse caráter. Para que isso se mantenha tomamos explicitamente o novo termo $D[\rho]$ fazendo

$$\begin{aligned} D(\rho) &= [D(\rho)]^\dagger, \\ &= [\rho_\nu D_{\mu\nu} \sigma_\mu]^\dagger, \\ &= \rho_\nu^* D_{\mu\nu}^* \sigma_\mu^\dagger, \end{aligned} \tag{3.12}$$

como σ_μ é uma matriz hermitiana e ρ_μ é um vetor real, segue que $D_{\mu\nu}$ deve ser real. Agora é possível definir, sem perda de generalidade, $\{D_{\mu\nu}\}$ como uma matriz simétrica, pois de outra maneira este termo poderia ser fatorado pela hamiltoniana como correções de ordem superior e assim, estaríamos possivelmente descrevendo efeitos já esperados pela MQ padrão. Sendo assim, devido à possível forma simétrica do novo termo e para que a conservação da probabilidade, (3.5), seja satisfeita temos que $D_{0\nu} = D_{\mu 0} = 0$. Portanto, podemos então escrever a matriz $D_{\mu\nu}$ explicitamente como

$$D_{\mu\nu} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & a \\ 0 & \beta & \gamma & b \\ 0 & a & b & c \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Essa forma foi também expressa pelos autores [6] que desenvolveram o formalismo VMQ.

Concluindo, o formalismo de VMQ evolui estados a partir da equação (3.1) e ela deve respeitar as condições (3.3), (3.5) referentes à conservação da probabilidade, (3.8) que diz respeito às leis de conservação do modelo e (3.11) que é o critério de entropia sempre crescente com o tempo.

Capítulo 4

Sistemas Quânticos Abertos

O desenvolvimento de uma teoria que complemente a MQ com respeito a efeitos dissipativos pode ser bastante útil, principalmente se alguns conceitos básicos já adquiridos da MQ forem mantidos, por exemplo, conceitos como o da interpretação probabilista e dos valores médios de operadores, onde ambos não podem gerar valores negativos para todo tempo $t \geq 0$ [16].

A Mecânica Quântica de Sistemas Abertos (MQSA) é uma teoria que tem sido desenvolvida desde o início da década de 1960 [20]. Construída para auxiliar a MQ com respeito de efeitos de dissipação, a MQSA mantém a interpretação probabilista da MQ padrão, isso porque ela emerge da própria MQ quando é levada em consideração a impossibilidade de um sistema físico ser isolado do meio que o cerca, formando assim, um sistema aberto [21].

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos e os principais resultados da MQSA. Alguns deles são: o gerador de dinâmica da MQSA que, generaliza o gerador de dinâmica da MQ padrão [21, 22]; o conceito de mapas¹ completamente positivos [23]; a aproximação de Markov para sistemas fracamente acoplados ao meio [21, 24–27], supondo que podemos considerar que os neutrinos e o meio são fracamente acoplados (não no sentido da força fraca, mas de uma “interação térmica” [28]).

¹Mapas atuam no espaço de operadores, assim como operadores atuam no espaço de funções

4.1 Desenvolvimento Teórico da MQSA

A suposição de que os estados quânticos são formados por um sistema de interesse e o meio, nos conduz a uma mecânica quântica onde existirá a possibilidade de ocorrer dissipações [21] e trazer efeitos não padrão. Desta maneira, um sistema quântico de interesse, que podemos representar por S , será alterado devido suas dinâmicas internas e a interação com o meio externo, onde o meio pode ser representado por R [21]. O espaço de Hilbert associado com o estado global do sistema pode ser escrito como um produto tensorial, $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$, onde \mathcal{H}_S é o espaço de Hilbert associado aos estados do sistema físico de interesse e \mathcal{H}_R é o espaço de Hilbert associado ao estado do meio. Com isso, podemos desenvolver as características da dinâmica reduzida e o conceito de positividade completa.

4.1.1 Dinâmicas Reduzidas e a Positividade Completa

Nesta seção estudaremos como obter informações de um sistema físico de interesse considerando o meio em que ele está inserido. Na construção desse formalismo, o meio pode ser entendido como um reservatório térmico, que estará em uma dada temperatura de referência. Além disso, estaremos supondo que o sistema global em $t = 0$ não é formado por estados correlacionados entre o estado de interesse e o estado do meio, ou seja, poderemos sempre definir um estado global por

$$|\psi\rangle = |\varphi_S \otimes \phi_R\rangle = |\varphi_S \phi_R\rangle. \quad (4.1)$$

Outra maneira de representar esse estado é utilizando o operador densidade, definido anteriormente pela equação (2.6). Assim, o estado global (4.1) pode ser escrito como

$$\rho_{(S+R)} = \rho_S \otimes \rho_R. \quad (4.2)$$

Para obtermos informações apenas de um dos estados, realizamos a operação

de traço parcial, que consiste em somar sobre todos os possíveis estados de um ou mais estados que formam o estado global [15], ou seja,

$$\text{Tr}_R[\rho_{(S+R)}] = \text{Tr}_R[\rho_S \otimes \rho_R] = \rho_S, \quad (4.3)$$

em que o traço parcial é definido da seguinte forma:

$$\langle \psi | \text{Tr}_R \rho_{(S+R)} | \psi' \rangle = \sum_n \langle \psi \otimes v_n | \rho_{(S+R)} | \psi' \otimes v_n \rangle, \quad (4.4)$$

onde $\{|v_n\rangle\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}_R .

Como o meio se encontra em equilíbrio térmico em uma dada temperatura de referência, o número de estados do meio é finito e não variável no tempo (esta é a hipótese que fazemos com referência ao meio) e, portanto, a soma de todos os seus estados é pela condição de normalização igual a 1. Assim, a equação (4.3) contém apenas informações do estado ρ_S , que é o de nosso interesse.

A evolução temporal do sistema global é feita pelo operador unitário $U = e^{-iH_{Tot}t}$, cuja dinâmica é governada pela hamiltoniana total do sistema. Para evoluir no tempo o estado global, podemos utilizar a equação de Liouville da seguinte forma:

$$\frac{d\rho_{(S+R)}(t)}{dt} = -i[H_{Tot}, \rho_{(S+R)}(t)], \quad (4.5)$$

ou ainda, escrevendo a mesma equação, mas utilizando o operador de Liouville:

$$\frac{d\rho_{(S+R)}(t)}{dt} = L\rho_{(S+R)}(t). \quad (4.6)$$

Então, a evolução temporal pode ser feita pela seguinte transformação:

$$\rho_{(S+R)} \rightarrow \rho_{S+R}(t) = U\rho_{(S+R)}(0)U^\dagger, \quad (4.7)$$

que satisfaz a equação (4.5). A dinâmica continua sendo unitária, pois $UU^\dagger = 1$, mas, como estamos interessados nas informações referentes ao estado do sistema S , a transformação temporal pode ser reescrita como

$$\rho_S \rightarrow \rho_S(t) \equiv \Lambda\rho_S = Tr_R[U(\rho_S \otimes \rho_R)U^\dagger], \quad (4.8)$$

onde Λ é responsável pela transformação acima e deste modo, teremos apenas informações de $\rho_S(t)$. Essa técnica é conhecida como redução do estado global, e por esse motivo a equação (4.8) é chamada de equação da dinâmica reduzida. O traço tomado neste caso altera a dinâmica deixando-a não unitária, ou seja, não teremos mais uma dinâmica reversível [29, 30] para ρ_S .

Podemos simplificar a transformação (4.8) utilizando a definição (4.4) e introduzindo bases ortonormais, $\{|\psi_i\rangle\}$ e $\{|f_j\rangle\}$, referentes aos espaços de \mathcal{H}_S e \mathcal{H}_R respectivamente, com isso

$$\begin{aligned} \rho_S(t) \equiv \Lambda\rho_S &= Tr_R[U(\rho_S \otimes \rho_R)U^\dagger], \\ \langle\psi_\alpha|\Lambda\rho_S|\psi_{\alpha'}\rangle &= \sum_\nu \langle\psi_\alpha \otimes f_\nu|U(\rho_S \otimes \rho_R)U^\dagger|\psi_{\alpha'} \otimes f_\nu\rangle, \\ &= \sum_{\substack{\mu,\beta, \\ \phi,\varphi}} \langle\psi_\alpha|U|\psi_\beta\rangle \langle\psi_\beta|\rho_S|\psi_\phi\rangle \langle\psi_\phi|U^\dagger|\psi_{\alpha'}\rangle \otimes \delta_{\mu\varphi} \langle f_\mu|\rho_R|f_\varphi\rangle, \\ &= \sum_{\beta,\phi} \langle\psi_\alpha|UP_\beta|\rho_S|P_\phi U^\dagger|\psi_{\alpha'}\rangle \otimes 1_R, \\ \Lambda\rho_S &= \sum_\beta W_\beta \rho_S W_\beta^\dagger, \end{aligned} \quad (4.9)$$

uma vez que a matriz densidade sempre pode ser escrita na forma diagonal, podemos tomar $P_\alpha = P_\beta$ e definir $UP_\beta = W_\beta$. Assim, W_β é uma seqüência de operadores que atuam somente no espaço de \mathcal{H}_S , possuindo a seguinte propriedade que decorre da equação acima:

$$\sum_\beta W_\beta^\dagger W_\beta = \mathbb{1}. \quad (4.10)$$

A transformação temporal em (4.8) ou sua forma simplificada em (4.9) conduz uma matriz densidade à outra matriz densidade, $\Lambda : \rho \rightarrow \rho'$, mantendo suas propriedades, tais como: a hermiticidade e a positividade, ou seja, se $\rho \geq 0$ então $\Lambda\rho \geq 0$, por essa característica Λ é conhecido como um mapa “completamente positivo” [21, 23, 28]. A propriedade (4.10) faz com que o traço de ρ se mantenha. Estas propriedades são importantes para que as quantidades obtidas de observáveis sejam passíveis de interpretações físicas, mantendo-se os conceitos da MQ, anteriormente citados. Portanto, sabemos uma maneira de conhecer informações de sistemas físicos de interesse mesmo que seja levado em consideração o meio, como definimos anteriormente, onde ele está inserido.

4.1.2 O Gerador de Dinâmica da MQSA

A equação (4.6) faz a evolução dos estados quânticos, na qual L é conhecido como operador de Liouville, sendo também o gerador da dinâmica. Portanto, como estaremos evoluindo apenas estados reduzidos, a transformação temporal é feita por (4.9), e conseqüentemente a equação (4.5) será alterada [21]. Entretanto, as modificações não serão referentes a um único mapa Λ , pois, para se descrever a evolução temporal de um sistema quântico aberto é necessário uma família de mapas dinâmicos $\{\Lambda_t, t \geq 0\}$, que formam uma dinâmica de semigrupo definida por duas propriedades:

- a) $\Lambda_0 = \mathbb{1}$;
- b) $\Lambda_t \circ \Lambda_s = \Lambda_s \circ \Lambda_t = \Lambda_{t+s}$, $t, s \geq 0$.

É possível mostrar que para uma família de mapas dada pelas equações (4.9) e (4.10), a segunda propriedade (item **b**), em geral, não é satisfeita. Isso porque as possíveis perturbações ocasionadas pelo meio estão escondidas nos operadores W_β [29], pois lembramos que, apesar do sistema de interesse e o meio inicialmente não estarem correlacionados, com a evolução temporal isso pode vir a acontecer e posteriormente voltar a ser não correlacionado e assim sucessivamente dependendo apenas da evolução temporal do sistema global e das interação entre seus entes. O que faremos para contornar esse

tipo de problema é assumir que o acoplamento entre o meio e o sistema de interesse é suficientemente fraco, pois assim, poderemos aplicar uma aproximação do tipo Markov, onde são negligenciados os efeitos de memória, permitindo que o mapa Λ_t satisfaça uma equação integral que garanta a propriedade em questão [25]. Deixaremos essa discussão para a próxima seção e, neste momento, iremos assumir que a segunda condição é válida. Assim, estudaremos as mudanças que os mapas completamente positivos trazem a equação de evolução temporal.

O gerador da dinâmica de semigrupo é heurísticamente obtido utilizando a definição da equação (4.6), como²

$$\begin{aligned} L\rho(t) &= \frac{d}{dt}\Lambda_t\rho; \\ L\rho(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\Lambda_t\rho - \rho}{t} \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $\Lambda_t\rho = \rho(t)$. Portanto, $\Lambda_t = e^{Lt}$ satisfaz a equação acima para $t \geq 0$.

Para encontrar a forma geral de L escrevemos a equação (4.9) de outra maneira, porém equivalente. Introduzimos uma base linear de operadores, F_μ , $\mu = 0, 1, \dots, N-1$, que gera o $SU(N)$ no espaço de \mathcal{H}_S , com $F_0 = \mathbb{1}$, assim,

$$\Lambda_t\rho = \sum_{\mu, \nu=0}^{N^2-1} c_{\mu\nu} F_\mu \rho F_\nu^\dagger, \quad (4.12)$$

onde $\{c_{\mu\nu}\}$ é uma matriz definida positiva para manter a equivalência com a equação (4.9). Podemos substituir (4.12) na equação (4.11) e obter:

$$\begin{aligned} L\rho(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{c_{00}(t) - 1}{t} \rho + \sum_{k=1}^{N^2-1} \frac{c_{0k}(t)}{t} F_k \rho + \rho \sum_{k=1}^{N^2-1} \frac{c_{0k}^*(t)}{t} F_k^\dagger \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k,l=1}^{N^2-1} \frac{c_{kl}(t)}{t} F_k \rho F_l^\dagger \right\}, \\ L\rho(t) &= a_{00}\rho + A\rho + \rho A^\dagger + \sum_{k,l=1}^{N^2-1} a_{kl} F_k \rho F_l^\dagger, \end{aligned} \quad (4.13)$$

²A definição formal do gerador de dinâmica de semigrupo pode ser obtida em [10, 11].

onde $\{a_{kl}\}$, com $k, l = 1, 2, \dots, N^2 - 1$ é uma matriz definida positiva e $A = \sum_{k=1}^{N^2-1} c_{0k} F_k$ [11].

A equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$L\rho(t) = -i[H, \rho] + \{G, \rho\} + \sum_{k,l=1}^{N^2-1} a_{kl} F_k \rho F_l^\dagger, \quad (4.14)$$

onde, $H = \frac{1}{2i}(A^\dagger - A)$, que será o hamiltoniano de \mathcal{H}_S , e $G = a_{00} + \frac{1}{2}(A^\dagger + A)$. Impondo a preservação do traço, $Tr[L\rho] = 0$, para conhecermos a forma de G , obtemos,

$$2G = - \sum_{k,l=1}^{N^2-1} a_{kl} F_l^\dagger F_k, \quad (4.15)$$

portanto, a equação (4.14) torna-se:

$$L\rho = -i[H, \rho] + \sum_{k,l=1}^{N^2-1} a_{kl} \left[F_k \rho F_l^\dagger - \frac{1}{2} F_l^\dagger F_k \rho - \frac{1}{2} \rho F_l^\dagger F_k \right], \quad (4.16)$$

então, a equação de evolução temporal poder ser escrita como

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = L\rho(t) = -i[H, \rho(t)] + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{N^2-1} a_{kl} \left([F_k, \rho(t) F_l^\dagger] + [F_k \rho(t), F_l^\dagger] \right), \quad (4.17)$$

Da equação acima, observamos que o gerador de dinâmica possui uma parte hamiltoniana e outra parte não hamiltoniana. O segundo termo surge quando tratamos um sistema quântico aberto e será responsável por descrever as possíveis dissipações. O gerador acima é também conhecido como gerador Kossakowski [11]. É possível encontrar a forma diagonal deste gerador que foi obtida independentemente por [10] e é conhecido como gerador Lindblad sendo escrito como segue:

$$L\rho = -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N^2-1} \left([V_k, \rho V_k^\dagger] + [V_k \rho, V_k^\dagger] \right). \quad (4.18)$$

É possível transformar (4.17) em (4.18), mas deixaremos essa discussão para o próximo capítulo, onde iremos impor que a entropia seja sempre crescente e por esse motivo algumas alterações ainda serão feitas nesses geradores.

Na próxima seção mostraremos que existe a possibilidade de obter os elementos da matriz $\{a_{ij}\}$, do gerador Kossakowski a partir de cálculos de primeiros princípios [21, 24, 25, 29]. Utilizando um tipo específico de aproximação de Markov, como mencionamos no início deste capítulo.

4.2 Aproximação de Markov

Apesar do mapa Λ em (4.9) ser um mapa completamente positivo suas transformações, sem o devido cuidado, não satisfazem a condição de composição de grupos, ou seja, $\Lambda_t \circ \Lambda_s \neq \Lambda_{t+s}$, para $t, s \geq 0$ [29].

Para evitar este tipo de problema podemos fazer um tipo de aproximação que vise eliminar os efeitos de memória e garanta a lei de composição de grupos. A técnica aqui empregada é conhecida como “Aproximação de Markov” [21, 24–27]. Esta supõe que se a interação entre os estados perturbados e os causadores de perturbação for suficientemente fraca podemos, então, esperar que em uma escala típica de tempo, a dinâmica do sistema perturbado pode ser descorrelacionada do sistema global e descrita eficientemente por um parâmetro de semigrupo Λ_t , $t \geq 0$, que satisfaz o item **b** da seção anterior.

Para nos auxiliar no procedimento de aproximação, iremos definir e posteriormente utilizar o “Método da Projeção” [20]. Esse método é definido por algumas propriedades e será útil para separar a dinâmica entre os estados de interesse e o meio. O método consiste em construir dois projetores, de forma que,

$$P_0 \rho_{S+R} = Tr_R[\rho_{S+R}] \otimes \rho_E, \quad (4.19)$$

e

$$P_1 \rho_{S+R} = (1 - P_0) \rho_{S+R} = 0. \quad (4.20)$$

Estes projetores devem satisfazer as seguintes propriedades,

$$\begin{aligned}
P_0^2 &= P_0, \\
P_1^2 &= P_1, \\
P_0 + P_1 &= \mathbb{1}, \\
P_0 P_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

de maneira que o estado ρ_{S+R} possa ser decomposto da seguinte forma:

$$\rho_{S+R}(t) = P_0 \rho_{S+R}(t) + P_1 \rho_{S+R}(t). \tag{4.22}$$

Com efeito, a equação de evolução temporal (4.6) pode ser escrita na forma de duas equações expressas por

$$\frac{dP_0 \rho_{(R+S)}(t)}{dt} = P_0 L_{S+R} P_0 \rho_{(R+S)}(t) + P_0 L_{S+R} P_1 \rho_{(R+S)}(t), \tag{4.23}$$

$$\frac{dP_1 \rho_{(R+S)}(t)}{dt} = P_1 L_{S+R} P_0 \rho_{(R+S)}(t) + P_1 L_{S+R} P_1 \rho_{(R+S)}(t), \tag{4.24}$$

onde L_{S+R} é o operador de Liouville do sistema global, cuja Hamiltoniana total pode ser escrita da seguinte forma:

$$H_{Tot} = H_S \otimes \mathbb{1}_R + \mathbb{1}_S \otimes H_R + \lambda H_{SR}, \tag{4.25}$$

onde λ é uma constante de acoplamento. Esta hamiltoniana permite escrever L_{S+R} como

$$L_{S+R} = L_S + L_R + \lambda L_{SR} = L + \lambda L', \tag{4.26}$$

onde $L_R + L_S = L$ e $\lambda L_{RS} = \lambda L'$. Supondo que o termo da hamiltoniana de interação possa ser escrito como

$$H_{SR} = \sum_i B_i \otimes \phi_i, \quad (4.27)$$

sendo que, B e ϕ atuam nos espaços de \mathcal{H}_S e \mathcal{H}_R respectivamente e considerando o meio como um reservatório térmico, ϕ pode ser considerado como um operador de campo, de forma que

$$Tr[\phi\rho_R] = 0. \quad (4.28)$$

Como o meio está em equilíbrio térmico, seu estado não se altera no tempo, ou seja,

$$\frac{d\rho_R(t)}{dt} = 0 \Rightarrow L_R\rho_R = -i[H_R, \rho_R] = 0. \quad (4.29)$$

Assim, concluímos as restrições gerais do meio (ou reservatório) que nosso sistema físico de interesse será sensível. A solução formal de (4.24) é escrita como

$$P_1\rho_{S+R}(t) = e^{P_1L_{S+R}P_1t}P_1\rho_{S+R}(0) + \int_0^t e^{(t-s)P_1L_{S+R}P_1}P_1L_{S+R}P_0\rho(s)ds \quad (4.30)$$

onde devido à (4.29) o primeiro termo do lado direito é nulo. Podemos então substituir (4.30) na equação (4.23) e obter assim a chamada “Equação Mestre Generalizada” [25–27], que em geral quebra a positividade da dinâmica reduzida. A solução formal da “Equação Mestre Generalizada” é escrita como

$$P_0\rho_{S+R}(t) = e^{P_0L_{S+R}P_0t}P_0\rho_{S+R}(0) + \int_0^t \int_0^s e^{P_0L_{S+R}P_0(t-s)}P_0L_{S+R}P_1e^{P_1L_{S+R}P_1(s-u)}P_1L_{S+R}P_0\rho(u)dsdu. \quad (4.31)$$

Rigorosamente, a aproximação de Markov é aplicada na equação (4.31) que é solução formal da equação (4.23) contornando qualquer tipo de problema quanto à diferenciabilidade das funções. Posteriormente podemos, sem problemas, retornar a forma diferencial.

Utilizando a definição $\rho_{S+R}(t) \equiv \Lambda_t \rho_{S+R}$ e desaplicando o estado $P_0 \rho_{S+R}$, reconhecemos a forma da equação integral do mapa Λ_t e para obtermos uma equação menos densa, mudaremos de notação fazendo $P_i L P_j \equiv L_{ij}$ com $i, j = 0, 1$. Com isso, as quantidades interessantes na equação (4.31) podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} L'_{00} &= 0; \\ P_0 L_{S+R} P_0 &= L_S; \\ P_1 L_{S+R} P_1 &= L; \\ P_1 L_{S+R} P_0 &= \lambda L'_{10}; \\ P_0 L_{S+R} P_1 &= \lambda L'_{01}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

onde utilizamos o fato de que P_1 comutar com $L_{S,R}$ para obter as duas ultimas relações e definimos também, $U_t = e^{L_s t}$ e $\tilde{U}_t = e^{L t}$.

Fazendo a troca de variável, $w = s - u$, a equação (4.31) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Lambda_t = U_t + \lambda^2 \int_0^t U_{t-u} \tilde{D} \Lambda_u du \tag{4.33}$$

com

$$\tilde{D} = \int_0^{t-u} U_{-w} L'_{01} \tilde{U}_w L'_{10} dw. \tag{4.34}$$

O mapa (4.33) faz a transformação temporal da dinâmica reduzida, podendo, em geral, violar a composição de semigrupo (item **b** da seção anterior). Esta propriedade não é satisfeita devido ao termo \tilde{D} ser detentor dos efeitos de memória, que neste caso, não

são acumulativos. Existem algumas maneiras de se contornar esse problema, dependendo apenas das considerações físicas entre o meio e o sistema de interesse [29]. Para física de neutrinos³ é razoável supor que sua interação com o meio seja muito fraca [28]. Neste sentido, podemos usar o método conhecido como “Limite do Acoplamento Fraco” que é um tipo de aproximação de Markov [25].

Este método de aproximação consiste em aplicar U_{-t} , representação de interação, e reescalar o tempo, fazendo $\tau = \lambda^2 t$ e $\sigma = \lambda^2 u$ e tendendo a constante de acoplamento a zero ($\lambda \rightarrow 0$) de maneira que o limite superior de (4.34) tenda ao infinito. Desta forma, a equação (4.33) torna-se:

$$U_{-\tau\lambda^{-2}}\Lambda_{\tau\lambda^{-2}} = \mathbb{1} + \int_0^\tau U_{-\sigma\lambda^{-2}}\tilde{D}U_{\sigma\lambda^{-2}}(U_{-\sigma\lambda^{-2}}\Lambda_{\sigma\lambda^{-2}})d\sigma, \quad (4.35)$$

onde

$$\tilde{D} = \int_0^\infty U_{-w}L'_{01}\tilde{U}_wL'_{10}dw. \quad (4.36)$$

Podemos definir

$$U_t = e^{L_S t} = \sum_\alpha Q_\alpha e^{-i\omega_\alpha t}, \quad (4.37)$$

onde, Q_α e w_α são respectivamente o projetor espectral e autovalores de L_S . Substituindo (4.37) em (4.35) e fazendo $-\sigma\lambda^{-2} = \alpha$ e $\sigma\lambda^{-2} = \beta$ temos

$$U_{-\tau\lambda^{-2}}\Lambda_{\tau\lambda^{-2}} = \mathbb{1} + \sum_{\alpha,\beta} Q_\alpha \tilde{D} Q_\beta \int_0^\tau e^{i(\omega_\alpha - \omega_\beta)\sigma} (U_{-\sigma\lambda^{-2}}\Lambda_{\sigma\lambda^{-2}})d\sigma, \quad (4.38)$$

onde surgem duas possibilidades envolvendo o termo exponencial.

Quando $\alpha \neq \beta$, o termo oscila rapidamente quando $\lambda \rightarrow 0$, fazendo com que este termo adicione contribuições nulas. Para o caso $\alpha = \beta$, podemos escrever

³Na realidade, para física de partículas em geral

$$D = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \tilde{D} Q_{\alpha} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_s \tilde{D} U_{-s} ds, \quad (4.39)$$

com efeito, a equação (4.35), quando retiramos a representação de interação, torna-se:

$$\Lambda_{\tau\lambda^{-2}} = U_{\tau\lambda^{-2}} + \int_0^{\tau\lambda^{-2}} U_{(\tau-\sigma)\lambda^{-2}} D \Lambda_{\sigma\lambda^{-2}} d\sigma, \quad (4.40)$$

onde $U_{-\sigma\lambda^{-2}}$ comuta com D . O mapa (4.40) satisfaz a condição de composição de semigrupo se distinguirmos na equação acima uma propriedade da função de correlação quântica que veremos abaixo.

Voltando à notação $\tau = \lambda^2 t$ e $\sigma = \lambda^2 u$ e aplicando ao estado $P_0 \rho_{S+R}$, a equação acima é solução formal da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dP_0 \rho_{S+R}(t)}{dt} = L_S P_0 \rho_{S+R}(t) + D[P_0 \rho_{S+R}(t)]. \quad (4.41)$$

Agora podemos desaplicar o operador de projeção, além disso, tomar o traço parcial com relação à R . A equação resultante já na forma de comutadores pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = -i[H_S, \rho_S(t)] + D[\rho_S(t)], \quad (4.42)$$

onde,

$$D\rho_S(t') = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^{\infty} dt ds \times \\ Tr_R \left\{ e^{iH_S t} \left[e^{i(H_S + H_E)s} H_{SR} e^{-i(H_S + H_E)s}, [H_{SR}, \rho_S(t') \otimes \rho_R] \right] e^{-iH_S t} \right\}. \quad (4.43)$$

A equação (4.42) com o termo expresso em (4.43) faz a evolução de estados apenas do sistema de interesse, S . Como é possível notar ela se apresenta na forma de

uma equação do tipo Liouville, com o acréscimo do termo dado em (4.43) responsável por descrever efeitos não padrão.

O integrando pode ser desenvolvido considerando a hamiltoniana total (4.25) e com a hamiltoniana de interação suposta em (4.27). Com algumas manipulações algébricas o integrando apresenta termos que, explicitamente, atuam no espaço de \mathcal{H}_S e no espaço de \mathcal{H}_R , sob a forma de produtos tensoriais, ou seja,

$$\begin{aligned}
D\rho_S(t') &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^\infty dt ds Tr_R \left\{ (B_i(t+s)B_j(s)\rho_S(t') \otimes \rho_R\phi_j(s)\phi_i) \right. \\
&\quad - (B_j(s)\rho_S(t')B_i(t+s) \otimes \phi_i\rho_R\phi_j(s)) - (B_i(t+s)\rho_S(t')B_j(s) \otimes \\
&\quad \left. \phi_j(s)\rho_R\phi_i) + (\rho_S(t')B_i(t+s)B_j(s) \otimes \rho_R\phi_j\phi_j(s)) \right\}. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Tomando explicitamente o traço obtemos:

$$\begin{aligned}
D\rho_S(t') &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^\infty dt ds B_i(t+s)B_j(s)\rho_S(t') \times \\
&\quad Tr[\rho_R\phi_j(s)\phi_i] - B_j(s)\rho_S(t')B_i(t+s) \times \\
&\quad Tr[\phi_i\rho_R\phi_j(s)] - B_i(t+s)\rho_S(t')B_j(s) \times \\
&\quad Tr[\phi_j(s)\rho_R\phi_i] + \rho_S(t')B_i(t+s)B_j(s) \times \\
&\quad Tr[\rho_R\phi_j\phi_j(s)]. \tag{4.45}
\end{aligned}$$

Se definirmos $\Omega = \Phi(s)\Phi$ e $\Omega^\dagger = \Phi\Phi(s)$ então, os termos $Tr_R[\rho_R\Phi_s\Phi] = \langle \Omega \rangle = h_{ij}(s)$ com $\langle \Omega^\dagger \rangle = h_{ij}^*(s)$. Esses termos definem uma função de correlação quântica cuja característica é fornecer a escala de tempo na qual as interações entre o sistema de interesse e o meio deixam de estar correlacionados, em outras palavras, a função de correlação quântica elimina efetivamente os efeitos de memória [21, 25].

Por outro lado, a função de correlação quântica é relacionada com a seguinte transformada de Fourier:

$$\int_0^\infty e^{i\omega s} h_{ij}^*(s) ds = \frac{1}{2} h_{ij}(\omega) + i b_{ij}(\omega), \tag{4.46}$$

onde $\{\tilde{h}_{ij}\}(\omega)$ e $\{\tilde{s}_{ij}\}(\omega)$ são positivos definidos [25]. Fazendo,

$$B_i(t) = \sum_{\omega} B_i(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (4.47)$$

com

$$B_i(\omega) = \sum_{\epsilon(k)-\epsilon(l)=\omega} |k\rangle\langle k| B_i |l\rangle\langle l|, \quad (4.48)$$

onde $B_i(-\omega) = B_i^\dagger(\omega)$, podemos substituir (4.46) e (4.47) e obter a seguinte expressão para $D[\rho_S]$

$$\begin{aligned} D[\rho_S(t)] &= i s_{ij}(\omega) (\rho(t) B_j(-\omega) B_i(\omega) - B_j(-\omega) B_i(\omega) \rho(t)) + \\ &\quad \frac{1}{2} h_{ij}(\omega) (B_j(-\omega) \rho(t) B_i(\omega) + B_j(-\omega) \rho(t) B_i(\omega) - \\ &\quad B_j(-\omega) B_i(\omega) \rho(t) - \rho(t) B_j(-\omega) B_i(\omega)), \\ &= \sum_{ij} \sum_{\omega} -i b_{ij}(\omega) [B_i(\omega) B_j(-\omega), \rho_S(t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} h_{ij}(\omega) [B_i(\omega) \rho_S(t), B_j(-\omega)] + [B_i(\omega), \rho_S(t) B_j(-\omega)]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde claramente, recuperamos a forma do gerador Kossakowski. Entretanto, $B_i(\omega)$ e $B_j(-\omega)$ são projetores, diferentemente de (4.17). Mas, se for explicita a forma da hamiltoniana de interação, no sentido de uma aplicação prática, é possível escrever esses projetores em função de operadores e obter a forma dada em (4.17) igualmente ao exemplo encontrado em [21].

Portanto, o gerador Kossakowski satisfaz a lei de composição de semigrupo para o caso especial de um tipo de aproximação de Markov, “O limite do Acoplamento Fraco”. Na literatura é possível encontrar outras duas maneiras de proceder para obter mapas completamente positivos que mantenham satisfeita a composição de semigrupos e que podem ser aplicadas à física de neutrinos. As duas outras formas resultam no gerador

Kossakowski, entretanto, as concepções físicas iniciais da relação entre o estado e o meio são diferentes quando comparadas ao Limite do Acoplamento Fraco. Estas formas podem ser encontradas em [21, 29].

Capítulo 5

VMQ ou MQSA?

Nos capítulos anteriores, revisamos como os modelos VMQ e MQSA são construídos e como os novos efeitos são incluídos na MQ padrão. Outros modelos com o intuito de adicionar efeitos de descoerência e dissipação podem ser encontrados na literatura, mas os dois que aqui tratamos são bastante especiais, pois em geral, os outros podem ser obtidos a partir destes [22, 30]. Agora, analisaremos as diferenças entre os modelos que temos estudado. No entanto, começamos com a discussão sobre os geradores Kossakowski e Lindblad que levantamos no capítulo anterior.

5.1 Gerador Kossakowski-Lindblad

Como vimos no capítulo anterior, a MQSA possui dois geradores de dinâmica, o gerador Kossakowski e o gerador Lindblad. Agora, é interessante saber se esses dois geradores são equivalentes. Do ponto de vista matemático, esses dois geradores são equivalentes, como veremos. Mas ainda existe uma restrição física que ambos devem obedecer e certo cuidado deve ser tomado.

A MQSA permite que estados puros quando evoluídos no tempo se tornem estados mistos, entretanto, é interessante que estados mistos não se tornem estados puros. Assim, mesmo na MQSA devemos impor, igualmente como fizemos para o modelo de VMQ, que a entropia do sistema físico não decresça.

Deste modo, estudaremos qual a condição para que os dois geradores sejam equivalentes quando impomos que a entropia dos sistemas físicos seja sempre crescente. Então utilizaremos, por simplicidade, o gerador Lindblad uma vez que ambos são análogos,

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N^2-1} \left([V_k, \rho V_k^\dagger] + [V_k \rho, V_k^\dagger] \right), \quad (5.1)$$

onde os operadores V_k atuam no espaço de H_S e, como vimos no capítulo anterior, trazem as informações das perturbações entre o meio e o sistema de interesse.

Assumiremos que a entropia de Von Neumann, $S[\rho(t)] = -Tr[\rho(t)\ln(\rho(t))]$, de qualquer sistema seja crescente no tempo [22], ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S[\rho(t)] &\geq 0, \\ \frac{d}{dt}S[\rho(t)] &= -\frac{d}{dt}Tr[\rho(t)\ln\rho(t)] \geq 0, \\ \frac{d}{dt}S[\rho(t)] &= -Tr\left[\left(\sum_k V_k\rho(t)V_k^\dagger - V_k^\dagger V_k\rho(t)\right)\ln(\rho(t))\right] \geq 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

escrevendo $\rho(t) = \sum_n \rho_t^n |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$, onde $\sum_n \rho_t^n = 1$ e $\rho_t^n > 0, \forall n$, e substituindo na equação acima, obtemos

$$\frac{d}{dt}S[\rho(t)] = \sum_{kmn} |\langle\alpha_n|V_k|\beta_m\rangle|^2 \rho_m (\ln\rho_m - \ln\rho_n), \quad (5.3)$$

porém,

$$\rho_m (\ln\rho_m - \ln\rho_n) \geq \rho_m - \rho_n, \quad (5.4)$$

então,

$$\frac{d}{dt}S[\rho(t)] \geq \sum_{kmn} |\langle\alpha_n|V_k|\beta_m\rangle|^2 (\rho_m - \rho_n)$$

$$\frac{d}{dt}S[\rho(t)] \geq \text{Tr}\left[\rho(t)\left(\sum_k V_k^\dagger V_k - V_k V_k^\dagger\right)\right]. \quad (5.5)$$

Portanto, se os operadores V_k forem hermitianos, $V_k^\dagger = V_k$, obtemos

$$\frac{d}{dt}S[\rho(t)] \geq 0. \quad (5.6)$$

Como é possível notar, as equações (4.17) e (4.18) podem ser aplicadas ao $SU(N)$ [10], entretanto, já pensando na aplicação de oscilações de neutrinos entre dois sabores, podemos particularizar estas equações fazendo as alterações necessárias para que se tornem equações de aplicação em sistemas de simetria $SU(2)$. Assim, (4.17) é escrita como

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H, \rho(t)] + \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^3 a_{kl} \left([\sigma_k, \rho(t)\sigma_l^\dagger] + [\sigma_k \rho(t), \sigma_l^\dagger] \right). \quad (5.7)$$

Entretanto, como veremos, uma nova restrição deve ser satisfeita pelo gerador Kossakowski. Para o $SU(2)$, o formalismo com o gerador Kossakowski é escrito com operadores F_k , que são proporcionais aos σ_k (matrizes de Pauli) que são matrizes hermitianas e $\{a_{kl}\}$ é apenas uma matriz positiva (3×3) e, portanto, é parametrizada a partir das definições de uma matriz positiva (apresentado no apêndice A), sendo assim, $\{a_{kl}\}$ pode ser convenientemente escrita como

$$\{a_{kl}\} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) & \alpha + i\varphi & \beta - i\vartheta \\ \alpha - i\varphi & \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3) & \delta + i\lambda \\ \beta + i\vartheta & \delta - i\lambda & \frac{1}{2}(\gamma_3 - \gamma_1 - \gamma_2) \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$2\beta(\alpha\delta - \varphi\lambda) - 2\vartheta(\alpha\lambda + \varphi\delta) \geq RST - R(\alpha^2 + \varphi^2) - S(\beta^2 + \vartheta^2) - T(\delta^2 + \lambda^2), \quad (5.9)$$

onde,

$$\begin{aligned}
2R &\equiv \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 \geq 0 \quad ; \quad RS - (\alpha^2 + \varphi^2) \geq 0; \\
2S &\equiv \gamma_1 + \gamma_3 - \gamma_2 \geq 0 \quad ; \quad RT - (\beta^2 + \vartheta^2) \geq 0; \\
2T &\equiv \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1 \geq 0 \quad ; \quad ST - (\delta^2 + \lambda^2) \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Por definição, toda matriz positiva definida é não singular e, portanto diagonalizável por uma transformação canônica, ou seja, se $A = \{a_{ij}\}$ então,

$$SAS^{-1} = D = \text{diag.}(\lambda_k), \tag{5.11}$$

onde $\lambda_k \geq 0$ e $SS^{-1} = \mathbb{1}$. Equivalentemente,

$$S^{-1}DS = A, \tag{5.12}$$

de forma que os elementos a_{ij} podem ser escritos como

$$a_{ij} = \lambda_k S_{ki}^* S_{jk}. \tag{5.13}$$

Agora definindo,

$$W = S^\dagger \sigma \Rightarrow W_k = S_{ki}^* \sigma_i \tag{5.14}$$

e

$$W^\dagger = \sigma S \Rightarrow W_k = \sigma_j S_{jk}^* \tag{5.15}$$

fazendo $\sqrt{\lambda_k} W_k = V_k$, a equação (5.7) é reescrita como

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H, \rho(t)] + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \left([V_k, \rho(t)V_k^\dagger] + [V_k\rho(t), V_k^\dagger] \right), \quad (5.16)$$

recuperando assim, o gerador Lindblad. A forma como a equação acima foi obtida não garante que os operadores V_k sejam necessariamente hermitianos, pois a única maneira de garantir que V_k seja hermitiano é fazendo a matriz positiva $\{a_{ij}\}$ ser tal que $\{a_{ij}\} = \{a_{ij}^*\}$, ou seja, deve conter apenas elementos reais.

Assim, este estudo sobre os geradores da MQSA indica que, para a entropia ser estritamente crescente e os dois geradores serem equivalentes, a matriz positiva $\{a_{ij}\}$, do gerador Kossakowski, deve ainda possuir apenas elementos reais .

Agora, podemos tomar a equação (5.16), onde todos os seus operadores são hermitianos, e expandi-la na base de matrizes do $SU(2)$, como foi feito no capítulo anterior, sua parte hamiltoniana é escrita como

$$-i[H, \rho(t)] = 2\epsilon_{ijk}H_i\rho_j\sigma_k. \quad (5.17)$$

Os operadores V_k do termo não hamiltoniano do gerador Lindblad, para o $SU(2)$ podem ser representados por matrizes (2 x 2), onde, nesta base as matrizes podem ser escritas como $V_k = a_\eta^k\sigma_\eta$. Com efeito, reescrevemos este termo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} D[\rho(t)] &= \sum_j \left[2a_m^j a_n^j - \delta_{mn} \sum_k (a_k^j a_k^j) \right] \rho_m \sigma_n \\ &= D_{mn} \rho_m \sigma_n, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde D_{mn} pode ser escrito a partir da equação acima como

$$D_{mn} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) & \alpha & \beta \\ \alpha & \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3) & \delta \\ \beta & \delta & \frac{1}{2}(\gamma_3 - \gamma_2 - \gamma_1) \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

além disso, D_{mn} em (5.18) satisfaz as condições de positividade de uma matriz, ou seja, as seguintes desigualdades devem ser satisfeitas

$$RST \geq 2\alpha\beta\delta + T\delta^2 + S\beta^2 + R\alpha^2, \quad (5.20)$$

onde

$$\begin{aligned} 2R &\equiv \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 \geq 0 & ; & \quad RS - \alpha^2 \geq 0; \\ 2S &\equiv \gamma_1 + \gamma_3 - \gamma_2 \geq 0 & ; & \quad RT - \beta^2 \geq 0; \\ 2T &\equiv \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1 \geq 0 & ; & \quad ST - \delta^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Como podemos observar a matriz (5.19) é positiva a menos do sinal negativo que surge das relações de comutação do termo não padrão, $\{a_{\mu\nu}\} = \{a_{\mu\nu}^*\}$. Explicitamente, a equação (5.16) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\rho_\mu(t)\sigma_\mu = 2\epsilon_{ijk}H_i\rho_j(t)\sigma_\mu\delta_{\mu k} + D_{\mu\nu}\rho_\nu\sigma_\mu, \quad (5.22)$$

onde $D_{\mu 0} = D_{0\nu} = 0$. Esta será a equação que utilizaremos para obter as probabilidades de oscilação no próximo capítulo.

5.2 MQSA x VMQ

No capítulo 2, quando estudamos o formalismo VQM, também impusemos que a entropia fosse crescente. Em MQSA, vimos que quando a entropia é estritamente crescente, obtemos o gerador Kossakowski-Lindblad. Assim, como os formalismos estão submetidos às mesmas restrições podemos reconhecer suas diferenças quando aplicados a um mesmo sistema físico. Portanto, nesse momento iremos testar qual dos formalismos melhor descreve os sistemas quânticos considerando a interpretação probabilista da MQ padrão.

Para isso, analisaremos duas classes de problemas. A primeira classe de problemas: quando um estado físico pode ser escrito como a superposição de outros estados. Supondo o tradicional sistema de spin 1/2, podemos definir o seguinte estado inicial ($t_0 = 0$),

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle + |-\rangle], \quad (5.23)$$

Com esse estado construímos a seguinte matriz densidade

$$\rho(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

A hamiltoniana do sistema de spin 1/2 é,

$$H = \omega S_z = \frac{\omega}{2} \sigma_3 = \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

e para diminuir o número de parâmetros nos dois formalismos, impomos que o valor médio de H seja conservado, ou seja, que a equação (3.8) seja satisfeita.

Para os dois modelos temos que a conservação da energia é obtida fazendo,

$$D_{\mu\nu} H_\mu = 0, \quad (5.26)$$

onde $D_{\mu\nu}$ do formalismo VMQ está definido em (3.13) e $D_{\mu\nu}$ do formalismo MQSA está definido em (5.19), além disso, H_μ são dados por: $H_0 = H_1 = H_2 = 0$ e $H_3 = \omega/2$.

Assim, para o formalismo de VMQ a matriz $D_{\mu\nu}$ satisfaz (5.26) se somente,

$$D_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

e para que a entropia não decresça, $D_{\mu\nu}$ de (3.11) deve ser negativa semi-definida, ou seja, seus autovalores devem ser negativos [6]. Como os autovalores são dados por

$$\chi_{\pm} = \frac{-(\alpha + \gamma) \pm \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2}}{2} \quad (5.28)$$

basta termos $\alpha \geq 0$, $\gamma \geq 0$ e $\alpha\gamma \geq \beta$.

Para MQSA, a matriz $D_{\mu\nu}$ que satisfaz (5.26) é expressa unicamente por

$$D_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

devido às restrições feitas pelas desigualdades em (5.20) e (5.21).

Logicamente, o formalismo VMQ pode se reduzir ao formalismo MQSA fazendo com que $\alpha = \gamma$ e $\beta = 0$, entretanto, está é uma escolha arbitrária.

A partir do estado inicial definido em (5.24) e com o auxílio das equações (2.13), (2.14) e (2.15) obtemos os seguintes coeficientes para $\rho(0)$: $\rho_0 = \rho_1 = 1/2$, $\rho_2 = \rho_3 = 0$. Resolvendo (3.2), as soluções para cada componente são expressas como

$$\begin{cases} \rho_0(t) = \frac{1}{2}, \\ \rho_1(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)t} \left[\cosh\left[\frac{t}{2}\sqrt{\Omega}\right] + \frac{(\alpha+\gamma)\sinh\left[\frac{t}{2}\sqrt{\Omega}\right]}{\sqrt{\Omega}} \right], \\ \rho_2(t) = -\frac{(\beta-\omega)e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)t}}{\sqrt{\Omega}} \sinh\left[\frac{t}{2}\sqrt{\Omega}\right], \\ \rho_3(t) = 0, \end{cases} \quad (5.30)$$

onde $\Omega = (\alpha - \gamma)^2 + 4(\beta^2 - \omega^2)$.

Com a mesma condição inicial, mas com a equação (5.22), obtemos as seguintes soluções:

$$\begin{cases} \rho_0(t) = \frac{1}{2}, \\ \rho_1(t) = \frac{1}{2}e^{-\gamma t} \cos(\omega t), \\ \rho_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-\gamma t} \sin(\omega t), \\ \rho_3(t) = 0. \end{cases} \quad (5.31)$$

A partir das componentes acima, podemos retornar a obter o operador densidade para qualquer $t \geq 0$ da seguinte forma:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_0(t) + \rho_3(t) & \rho_1(t) - i\rho_2(t) \\ \rho_1(t) + i\rho_2(t) & \rho_0(t) - \rho_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}e^{(i\omega - \gamma)t} \\ \frac{1}{2}e^{-(\gamma + i\omega)t} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Sabendo que os elementos fora da diagonal principal definem a coerência quântica entre os estados superpostos de $|\psi(t)\rangle$, então, em (5.32) vemos que o termo exponencial vai eliminando a coerência com a evolução temporal. Este efeito é conhecido como descoerência quântica. Além disso, se tomarmos $\gamma = 0$, retornamos ao formalismo da MQ padrão.

O operador densidade também pode ser obtido a partir das componentes temporais em (5.30), e apesar do número de parâmetros, o comportamento de descoerência também está presente nos termos exponenciais das componentes $\rho_1(t)$ e $\rho_2(t)$.

Com isso, a primeira diferença entre os formalismos diz respeito ao número de novos parâmetros obtidos “*a priori*” que cada formalismo exhibe quando aplicados a sistemas submetidos à mesma condição.

A segunda classe: quando um estado físico pode ser expresso pela superposição de estados correlacionados (ou emaranhado). Por simplicidade, para aplicar os formalismos VMQ e MQSA neste tipo de problema, manteremos o sistema de spin 1/2, mas, agora, logicamente com duas partículas de spin 1/2, ou seja, isso permite que o sistema possa assumir diferentes momentos angulares resultantes ($S = S_1 + S_2$; $S_1 = \pm 1/2$, $S_2 = \pm 1/2$; $m = -1, 0, 1$). Definindo então um estado preparado como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+ -\rangle - |- +\rangle], \quad (5.33)$$

e a hamiltoniana do sistema de interesse sendo expressa por

$$H = H_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2, \quad (5.34)$$

onde H_1 e H_2 atuam no subespaço de S_1 e S_2 respectivamente. As hamiltonianas são escritas de forma análoga ao caso anterior, ou seja,

$$H_{1,2} = \omega S_{1,2;z}. \quad (5.35)$$

O operador densidade obtido de (5.33) para $t = 0$ pode ser escrito da seguinte forma

$$\rho(0) = \left[P_1 \otimes P_2 - P_3 \otimes P_4 - P_4 \otimes P_3 + P_2 \otimes P_1 \right], \quad (5.36)$$

onde definimos,

$$P_1 = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+|; P_2 = \frac{1}{2}|-\rangle\langle-|; P_3 = \frac{1}{2}|+\rangle\langle-|; P_4 = \frac{1}{2}|-\rangle\langle+|. \quad (5.37)$$

Por simplicidade tomaremos $\omega = 0$ e assim, evoluímos o estado como o formalismo VQM, fazendo a seguinte parametrização para $D_{\mu\nu}$:

$$D_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & -\beta & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Da equação (5.28) sabemos que, para $D_{\mu\nu}$ ter apenas autovalores negativos $\gamma \geq 0$, $\alpha \geq 0$ e $\alpha\gamma \geq 0$, então para mostrar o comportamento do estado, tomamos $\alpha = \gamma = 1$

e $\beta = 1/2$ de forma a respeitar a restrição dada para que os autovalores de $D_{\mu\nu}$ sejam negativos e a entropia seja crescente no tempo.

Assim, o estado evoluído no tempo é expresso por

$$\rho(t) = \left[P_1(t) \otimes P_2(t) - P_3(t) \otimes P_4(t) - P_4(t) \otimes P_3(t) + P_2(t) \otimes P_1(t) \right], \quad (5.39)$$

e explicitamente $\rho(t)$ é escrito da seguinte maneira

$$\rho(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - e^{-2t} \cosh(t) & ie^{-2t} \sinh(t) & ie^{-2t} \sinh(t) & -1 + e^{-2t} \cosh(t) \\ -ie^{-2t} \sinh(t) & 1 + e^{-2t} \cosh(t) & -1 - e^{-2t} \cosh(t) & -ie^{-2t} \sinh(t) \\ -ie^{-2t} \sinh(t) & -1 - e^{-2t} \cosh(t) & 1 + e^{-2t} \cosh(t) & -ie^{-2t} \sinh(t) \\ -1 + e^{-2t} \cosh(t) & ie^{-2t} \sinh(t) & ie^{-2t} \sinh(t) & 1 - e^{-2t} \cosh(t) \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

Os autovalores do operador densidade expressam as probabilidades quânticas e, portanto, devem ser positivos e reais. O operador densidade acima para $t > 0$ apresenta um autovalor negativo, como podemos verificar no comportamento da Figura 5.1, deste modo, esse operador densidade não possui interpretação física. Se tomarmos $\omega \neq 0$ e mantendo a mesma parametrização, os autovalores de $\rho(t)$ também não possuem interpretação física, pois assumem autovalores complexos.

Somente se evoluirmos o estado de acordo com a MQ padrão ou utilizando o formalismo de MQSA obtemos um estado cujos autovalores são reais e positivos. Para ilustrar, tomamos $\omega \neq 0$ (um valor arbitrário) e como um dos elementos da diagonal principal de D_{mn} é nulo, com as restrições feitas pelas desigualdades em (5.20) e (5.21), todos os elementos fora da diagonal também se anulam. Evoluindo o estado (5.38) obtemos a seguinte matriz densidade

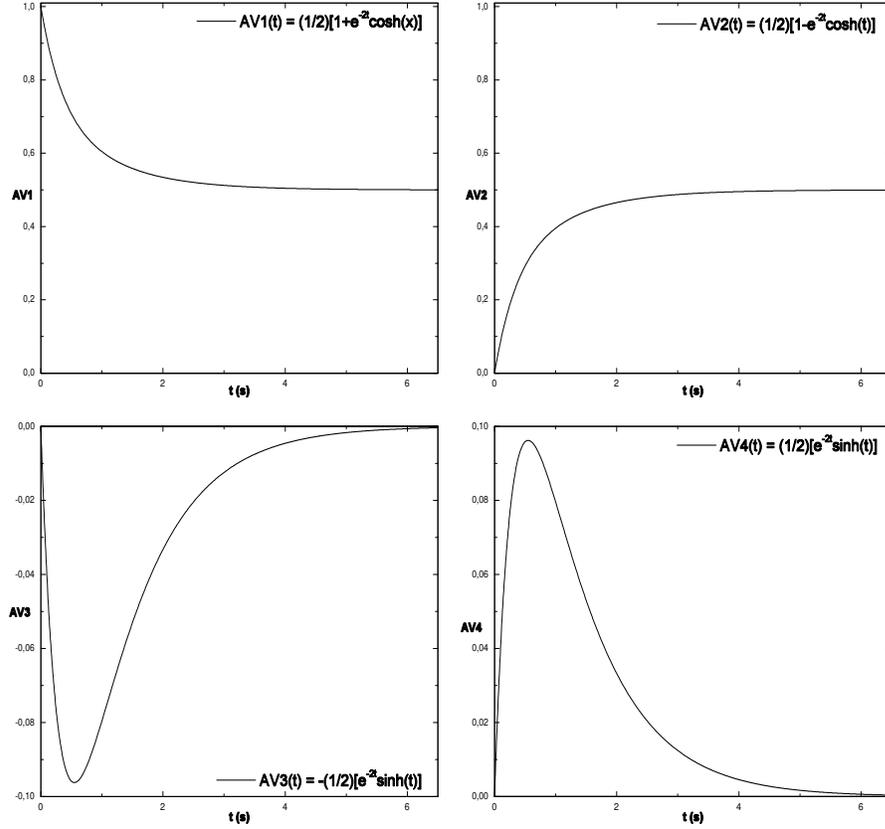


Figura 5.1: Comportamento dos autovalores do operador densidade obtido a partir do formalismo VMQ para um estado quântico emaranhado.

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \sinh(t) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}) \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}) & -e^{-t} \cosh(t) & 0 \\ 0 & -e^{-t} \cosh(t) & \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}) & 0 \\ \frac{1}{2}(-1 + e^{-2t}) & 0 & 0 & e^{-t} \sinh(t) \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Dois dos autovalores acima são nulos, e o comportamento dos outros dois estão na Figura 5.2, sendo todos são reais e positivos. O caso padrão pode ser trivialmente

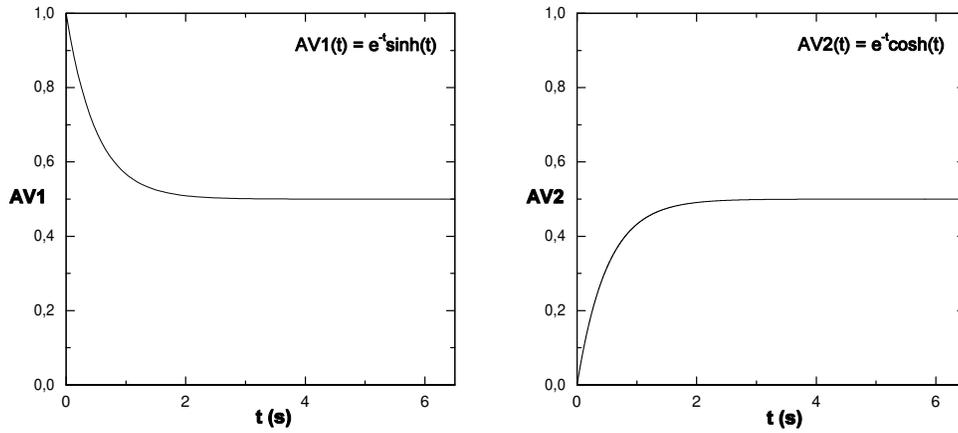


Figura 5.2: Comportamento dos autovalores do operador densidade obtido a partir do formalismo MQSA para um estado quântico emaranhado.

obtido do estado acima. Neste caso, supomos que $\omega \neq 0$ porque o estado obtido após a evolução temporal para o caso em que $\omega = 0$ é um estado constante no tempo onde dois dos autovalores são nulos e os outros dois possuem valor $1/2$.

Por conseguinte, a estrutura de evolução temporal que adotaremos de agora em diante, será o dado pelo formalismo de MQSA, pois, com este formalismo acrescentamos ferramentas para descrever efeitos não padrão e ainda podemos manter a interpretabilidade dos estados como é feito na MQ padrão.

Capítulo 6

Oscilações de Neutrino e Descoerência

No primeiro capítulo, revisamos o modelo de oscilação de neutrinos no vácuo, onde foi associada massa aos neutrinos e os estados de sabor foram representados por superposições de auto-estados de massa. A partir disso, este modelo permite que os neutrinos oscilem de sabor durante sua propagação. Como os neutrinos podem ser expressos como superposição de auto-estados, podemos esperar que efeitos de descoerência e de dissipação possam ocorrer.

Como veremos nesse capítulo, além do efeito de descoerência a MQSA pode descrever um efeito que em oscilação de neutrinos no vácuo ainda não foi discutido na literatura. Deste modo, incrementamos a descrição da propagação dos neutrinos utilizando a dinâmica quântica de semigrupos obtida no formalismo de MQSA e mostramos quais as possibilidades de se alterar a probabilidade de sobrevivência obtida no capítulo 1.

6.1 Novas Probabilidades de Sobrevivência

Para obter as probabilidades de sobrevivência evoluímos um estado inicial com a equação (5.22). Para que a comparação seja direta, iremos considerar as mesmas condições físicas feitas no capítulo 1, ou seja, a mesma hamiltoniana (2.16) e o mesmo estado inicial

para a evolução (2.21).

De forma geral, esperamos obter probabilidades diferentes da obtida no capítulo 1, já que a nova equação de evolução contém o termo não hamiltoniano $D[\rho(t)]$. Em termos de elementos de matriz, $D_{\mu\nu}$ possui seis parâmetros fenomenológicos correlacionados e que devem respeitar as desigualdades em (5.21). Entretanto, do ponto de vista de fenomenologia, a interpretação física destes parâmetros não é clara e, deste modo, utilizar $D_{\mu\nu}$ com todos os seus parâmetros torna-se pouco viável. Isso seria diferente se esses parâmetros fossem obtidos a partir de cálculos de primeiros princípios utilizando o formalismo de equação mestra generalizada.

Para evitar este problema e obter novas probabilidades fenomenológicas de fácil interpretação física, assumiremos que apenas um dos parâmetros de $D_{\mu\nu}$ seja grande o suficiente, de forma que ele seja de alcance experimental. Deste modo, devido às desigualdades em (5.21), $D_{\mu\nu}$ poderá ser parametrizado apenas de quatro maneiras diferentes, que separamos por casos.

Para o caso 1 a parametrização de $D_{\mu\nu}$ já foi utilizada no capítulo anterior em (5.29) e assim, as soluções explícitas de cada componente de (5.22) são expressas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \rho_0(t) = \frac{1}{2}, \\ \rho_1(t) = \frac{1}{2}e^{-\gamma t} \sin(2\theta) \cos(\Delta t), \\ \rho_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-\gamma t} \sin(2\theta) \sin(\Delta t), \\ \rho_3(t) = \frac{1}{2} \cos(2\theta), \end{cases} \quad (6.1)$$

onde podemos notar que o efeito de descoerência, o termo exponencial, está presente nas componentes $\rho_1(t)$ e $\rho_2(t)$ que são e os termos que compõem a coerência quântica entre os auto-estados de massa. A probabilidade de sobrevivência é escrita como

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}^{cl} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) [1 - e^{-\gamma t} \cos(\Delta t)], \quad (6.2)$$

onde $\Delta = \frac{\Delta m^2}{2E}$ e γ é o parâmetro que introduz descoerência e θ é o ângulo de mistura. Esta probabilidade já foi discutida e utilizada fenomenologicamente por alguns autores [31–33]. Diretamente da probabilidade acima podemos verificar que a descoerência está vinculada ao termo que origina o efeito oscilatório dos neutrinos. Além disso, a probabilidade acima é obtida quando há conservação de energia, o que torna a probabilidade (6.2) um caso especial.

Entretanto, pensando em termos da MQSA a imposição da conservação feita a partir de $D_{3\nu}H_3 = 0$ possui um significado local, pois globalmente, um sistema formado por um sistema físico de interesse e o meio, sempre mantém a energia conservada, uma vez que a evolução é feita pela equação de Liouville. Portanto, os outros casos que iremos apresentar também conservam energia, mas, localmente esperamos mais efeitos juntos à descoerência. Esses efeitos podem ocorrer devido à dissipação local de energia.

O caso 2 e o caso 3 possuem as seguintes parametrizações para $D_{\mu\nu}$,

$$D_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

e

$$D_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

onde a solução de (5.22) são respectivamente escritas como

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0(t) = \frac{1}{2}, \\ \rho_1(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \sin(2\theta) \left[\cosh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\Omega}\right) - \frac{\gamma}{\sqrt{\Omega}} \sinh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\Omega}\right) \right], \\ \rho_2(t) = -\frac{\Delta \sin(2\theta)}{\sqrt{\Omega}} \sinh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\Omega}\right), \\ \rho_3(t) = \frac{1}{2}e^{-\gamma t} \cos(2\theta) \end{array} \right. \quad (6.5)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0(t) = \frac{1}{2}, \\ \rho_1(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \sin(2\theta) \left[\cosh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\Omega}\right) + \frac{\gamma}{\sqrt{\Omega}} \sinh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\Omega}\right) \right], \\ \rho_2(t) = -\frac{\Delta \sin(2\theta)}{\sqrt{\Omega}} \sinh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\Omega}\right), \\ \rho_3(t) = \frac{1}{2}e^{-\gamma t} \cos(2\theta), \end{array} \right. \quad (6.6)$$

onde $\Omega = \gamma^2 - 4\left(\frac{\Delta m^2}{2E}\right)^2$, as probabilidades de sobrevivência resultantes das equações (6.5) e (6.6), em função de Ω , são:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}^{c2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\gamma t} \cos(2\theta) + \frac{1}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin^2(2\theta) \left[\cosh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\Omega}\right) + \frac{\gamma}{\sqrt{\Omega}} \sinh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\Omega}\right) \right] \quad (6.7)$$

e

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}^{c3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\gamma t} \cos(2\theta) + \frac{1}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin^2(2\theta) \left[\cosh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\Omega}\right) - \frac{\gamma}{\sqrt{\Omega}} \sinh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\Omega}\right) \right]. \quad (6.8)$$

Os casos 2 e 3 foram tratados juntos, porque esperamos que a descoerência e os efeitos de dissipação não sejam efeitos de mesma ordem que os efeitos já conhecidos da MQ, em outras palavras, podemos sempre fazer $\gamma \ll \frac{\Delta m^2}{2E}$. Com isso, as raízes em (6.7) e (6.8) podem ser expandidas uma vez que $\frac{\gamma}{\Delta} \approx 0$. Desta forma os dois casos resultam em apenas uma probabilidade expressa por

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}^{c23} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\gamma t} \cos^2(2\theta) + \frac{1}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin^2(2\theta) \cos(\Delta t), \quad (6.9)$$

onde $\Delta = \frac{\Delta m^2}{2E}$. Como os elementos D_{11} e D_{22} de $D_{\mu\nu}$, como vimos para o caso 1, são responsáveis pela inclusão do efeito de descoerência, agora para os casos 2, 3 temos que o efeito de descoerência é atenuado já que para ambos os casos um dos dois elementos, D_{11} ou D_{22} , é nulo. Isso pode ser visto no termo exponencial junto ao termo de oscilação em (6.9), onde o efeito de descoerência traz um fator $1/2$. Por outro lado, notemos que o segundo termo do lado direito de (6.9) possui um novo termo exponencial cuja origem é o elemento D_{33} quando ele é diferente de zero. Isso pode ser considerado como um efeito diferente da descoerência e o discutiremos logo após o caso 4.

A parametrização do termo $D_{\mu\nu}$ para o caso 4 é a seguinte

$$D_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

e a solução para cada componente de (5.22) são dadas por

$$\begin{cases} \rho_0(t) = \frac{1}{2}, \\ \rho_1(t) = \frac{1}{2}e^{-\gamma t} \sin(2\theta) \cos(\Delta t), \\ \rho_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-\gamma t} \sin(2\theta) \sin(\Delta t), \\ \rho_3(t) = \frac{1}{2}e^{-\gamma t} \cos(2\theta), \end{cases} \quad (6.11)$$

e a probabilidade de sobrevivência torna-se

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}^{c4} = \frac{1}{2} + e^{-\gamma t} \left[\frac{1}{2} - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4E} t \right) \right]. \quad (6.12)$$

onde existe uma semelhança da probabilidade acima com a probabilidade do caso padrão, pois se tomarmos $\gamma = 0$ na probabilidade (6.12) resulta exatamente na probabilidade do caso padrão.

Todas essas probabilidades podem ser escritas em função da distância, x , percorrida pelo neutrino, seguindo os mesmos argumentos feitos no capítulo 1.

As probabilidades, do caso 1 ao 4, mostram como a descoerência modifica a probabilidade de oscilação padrão suprimindo o termo de oscilação durante a evolução do neutrino. Entretanto, para os casos 2, 3 e 4 o parâmetro γ é responsável por outro efeito além da descoerência.

Isso pode ser verificado se tomarmos $\theta = 0$, pois assim, acabamos com a superposição de auto-estados de massa e conseqüentemente com a coerência quântica entre os estados. Notemos que neste caso, $\theta = 0$, as componentes $\rho_1(t)$ e $\rho_2(t)$, que são responsáveis pela coerência quântica, são todas nulas em (6.1), (6.5) e (6.11). Desta forma, é possível observar que as probabilidades nesta condição se expressão da seguinte forma

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(x, E) = 1 \quad (6.13)$$

e

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(x, E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\gamma x}, \quad (6.14)$$

onde (6.13) resulta para o caso padrão e para o caso 1, como era de se esperar, haja vista que o caso 1 apenas adiciona o efeito de descoerência na probabilidade do caso padrão. Já a probabilidade (6.14) é a mesma para os casos 2, 3 e 4, ou seja, vemos que mesmo quando retiramos o efeito de descoerência, a probabilidade de sobrevivência (6.14) depende da distância de propagação do neutrino e tem probabilidade diferente de um de haver conversão de um neutrinos ν_α para um neutrino ν_α .

Este efeito está associado à instabilidade que os estados quânticos apresentam por estar em constante contato com o meio [34]. Além disso, pela comparação feita acima é fácil concluir que o termo D_{33} é o responsável pela inclusão desse efeito de conversão de sabor sem o uso do mecanismo de oscilação e este só é diferente de zero quando não temos conservação local de energia.

Podemos comparar os estados que originaram as probabilidades (6.13) e (6.14). Obviamente, não é necessário escrever todos os estados que temos analisado, por exemplo, para efeito de comparação escrevemos somente os estados a partir das componentes de (6.1) e das componentes de (6.11). Então, com o auxílio da relação (2.23) obtemos

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2\theta & \frac{1}{2}e^{-(\gamma-i\Delta)t}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}e^{-(\gamma+i\Delta)t}\sin 2\theta & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\theta \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

para o caso 1 e

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\gamma t}\cos^2\theta & \frac{1}{2}e^{-(\gamma-i\Delta)t}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}e^{-(\gamma+i\Delta)t}\sin 2\theta & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\gamma t}\cos^2\theta \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

para o caso 4.

Observando os dois estados acima, torna-se claro que os termos de população do estado (elementos da diagonal principal) são diferentes. Para (6.15) esses elementos são independentes do tempo, enquanto para (6.16) eles são dependentes do tempo. Em outras palavras, se procurarmos saber sobre a probabilidade de $\nu_e \rightarrow \nu_1$, nos obtemos

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_1}(x, E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta, \quad (6.17)$$

para o caso padrão e para o caso 1. A probabilidade (6.17) mostra que a probabilidade de conversão de neutrinos que se propagam no vácuo entre ν_e e ν_1 é constante no tempo. Por outro lado, para os casos 2, 3 e 4 de conversão de $\nu_e \rightarrow \nu_1$, torna-se

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_1}(x, E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\gamma x}\cos 2\theta, \quad (6.18)$$

mostrando uma dependência temporal, o que para oscilação de neutrinos no vácuo é uma consideração diferente da usual. Já para o caso de oscilação de neutrinos na matéria a probabilidade de conversão $\nu_e \rightarrow \nu_1$ pode possuir uma dependência temporal [35, 36].

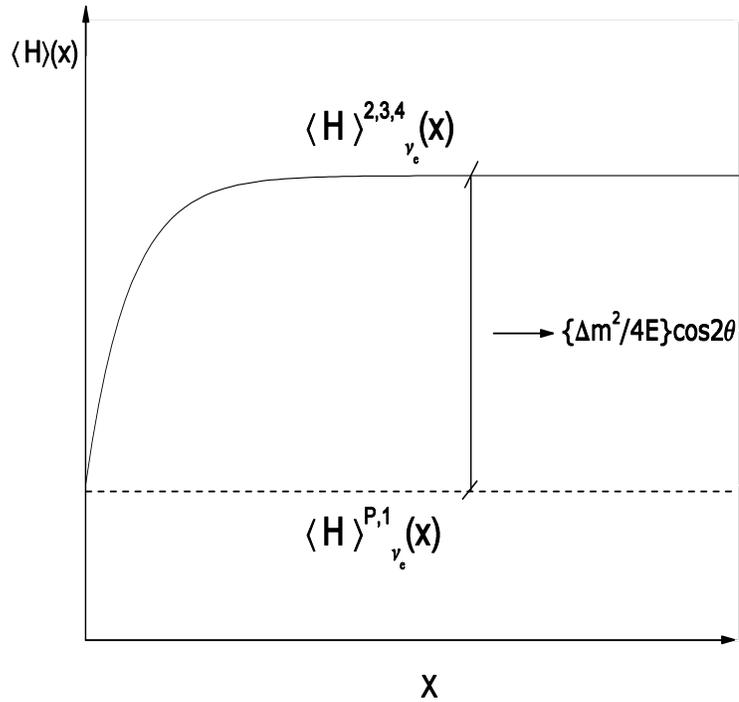


Figura 6.1: Ganho de energia do sistema devido à interação com o meio. A linha tracejada é referente ao valor médio da hamiltoniana de oscilação para o caso padrão e para o caso 1. A linha cheia é referente ao comportamento do valor médio que agora apresenta dependência com a distância de propagação do neutrino para os casos 2, 3 e 4.

Observamos que a componente $|\nu_1(t)\rangle\langle\nu_1(t)|$ em (6.16) vai diminuindo com o tempo, enquanto $|\nu_2(t)\rangle\langle\nu_2(t)|$ torna-se maior. Isso significa que o sistema fica mais energético com o tempo, pois $H_{osc}|\nu_2\rangle = E_2|\nu_2\rangle$ e $E_2 > E_1$. O estado (6.16) é obtido fazendo a consideração de que $[H, V_k] \neq 0$ e que a hamiltoniana para o sistema reduzido não é somente H_{osc} , mas sim $(H_{osc} + H_{int})$, onde V_k está expresso dentro de H_{int} e, portanto, o sistema estaria tendo um ganho de energia devido à interação do sistema global.

A Figura 6.1 mostra que podemos quantificar o ganho energético que o sistema obtém em comparação com o caso padrão tomando o valor médio da hamiltoniana da

dinâmica livre, $\langle H_{osc} \rangle = Tr[H_{osc}\rho(t)]$. Notamos que o valor médio da hamiltoniana de oscilação tem um ganho de energia com o passar do tempo e seu valor assintótico é maior do que comparando com o caso padrão de uma quantidade de $\frac{\Delta m^2}{4E} \cos(2\theta)$. Esse valor assintótico também é obtido caso tivéssemos considerado que a fonte fosse de neutrinos do muon e que esses oscilassem para neutrinos do elétron, entretanto haveria perda da mesma quantidade de energia.

Para investigações fenomenológicas com a equação (5.22), em geral, o parâmetro γ é expresso em termos de um parâmetro, γ_0 , que não possui unidade de energia definida. Existem alguns modelos na literatura [6, 9, 31, 37–40], mas todos podem ser resumidos na seguinte expressão

$$\gamma = \gamma_0 \left(\frac{E}{\text{GeV}} \right)^n, \quad (6.19)$$

onde $n = 0, \pm 1, \pm 2$. Para $n = 0$, γ_0 torna-se independente da energia dos neutrinos; $n = 2$, são adotados em modelos inspirados por teoria de cordas; $n = -2$, são inspirados em modelos de gravitação quântica e $n = -1$ que é o caso onde se tem mais ênfase na literatura, porque o termo exponencial na probabilidade do caso 1 se comporta como uma fase invariante de Lorentz [31].

Os limites superiores para γ_0 com $n = -1$, obtidos a partir de análise de dados dos experimentos Super-Kamiokande (SK), K2K e KamLAND com a utilização da probabilidade do caso 1 podem ser encontrados em [31–33]. Para o caso 2, 3 e 4 não existe na literatura nenhum limite superior, pois não foram feitas análises de dados com esses casos.

As Figuras 6.2, 6.3 ilustram os comportamentos das probabilidades dos casos 1 ao 4 e o da probabilidade padrão, onde assumimos que os neutrinos criados são neutrinos do elétron e os seguintes valores são adotados: $\gamma_0 = 0,78 \cdot 10^{-26} \text{ GeV}$ [33], consideramos distâncias da ordem de 10^6 Km para conhecermos os valores assintóticos da probabilidade de cada caso, neutrinos criados com energia, $E = 10 \text{ MeV}$, $\Delta m^2 = 7 \cdot 10^5 \text{ eV}$ e ângulo de mistura, $\theta = 0,67 \text{ rad}$.

Na Figura 6.2, mostramos os comportamentos gerais de todos os casos incluindo

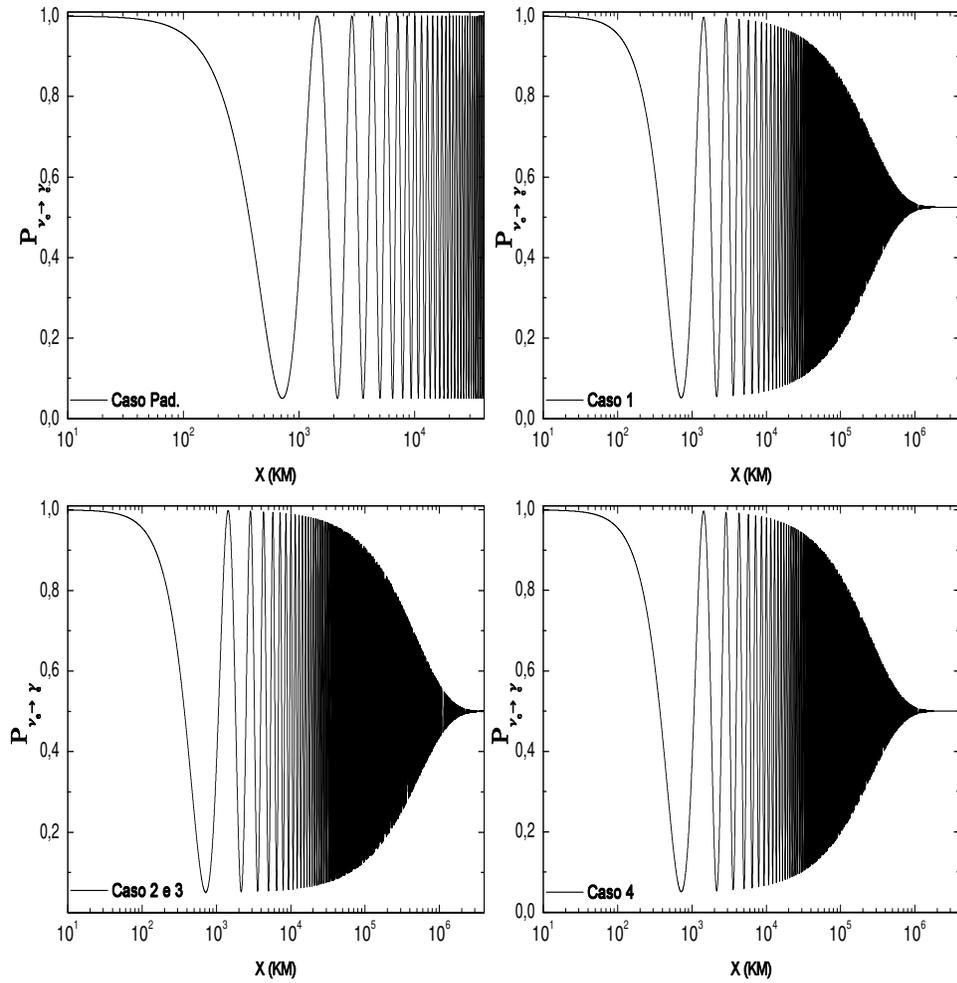


Figura 6.2: Comportamento, para todos os casos incluindo o caso padrão, da probabilidade de sobrevivência de neutrinos do elétron com energia de criação de 10 MeV.

a probabilidade padrão. Vemos que os comportamentos dos casos 2, 3 e 4 são sutilmente diferentes. Com o auxílio da Figura 6.3, podemos notar suas diferenças com maiores detalhes.

Inicialmente, a probabilidade de todos os casos, padrão, 1, 2, 3 e 4, possuem comportamentos semelhantes, mantendo idêntico o comprimento de oscilação e apresentam

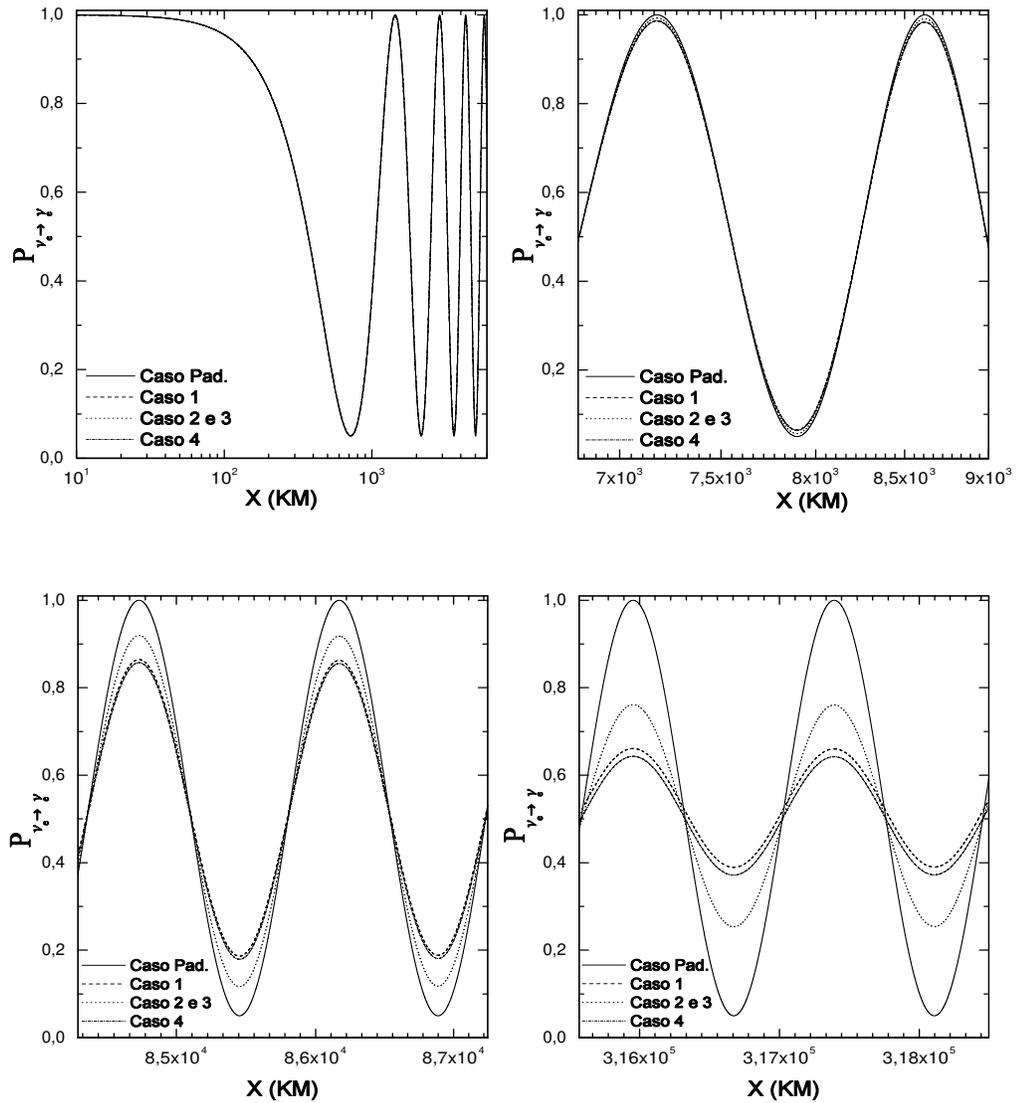


Figura 6.3: Comportamento, para todos os casos incluindo o caso padrão, da probabilidade de sobrevivência de neutrinos do elétron com energia de criação de 10 MeV.

apenas uma pequena diminuição da amplitude com relação ao caso padrão pelos primeiros 10^4 Km da evolução. Sendo assim, é de se esperar que todos os casos podem, tal qual o caso padrão, explicar de forma razoável os dados experimentais para essa distancia de propagação. Lembramos que para os casos 2, 3 e 4 o limite superior para γ_0 ainda não existe na literatura.

Depois dessa distância, a diferença da amplitude de oscilação entre os casos 1, 2, 3 e 4 e o caso padrão vai se acentuando até que a probabilidade do caso 4 chegue ao seu valor estacionário. O valor assintóticos dos casos 2, 3 e 4 é $1/2$, ou seja, a oscilação cessa com o fim da interferência quântica devido à descoerência quântica e o efeito de conversão "espontânea" de sabor discutido anteriormente. Então a probabilidade mostra que o estado final do neutrino do elétron que estamos considerando passa a ser uma mistura estatística, onde existe 50% de chance de o estado inicial ser um neutrino do elétron ou um neutrino do muon, Figura 6.2.

O caso é o que mantém o comportamento oscilatório por mais tempo devido ao fator $1/2$ no parâmetro de descoerência. Dentre os casos não padrão, somente o caso 1 possui um valor assintóticos que depende do ângulo de mistura entre as bases de sabor e massa, este também é o motivo de termos adotado o ângulo de mistura igual a $0,67$ rad e assim, quando a probabilidade chega ao regime estacionário seu valor é de $0,525$, o outro motivo é que com esse ângulo temos uma grande amplitude de oscilação. Resumindo, o efeito do termo $D_{33} \neq 0$ faz com que o ângulo de mistura que relacionam os neutrinos de massa, não tenha influência no valor assintótico das probabilidades geradas para o caso 2, 3 e 4, mas quando estamos tratando apenas perda de coerência o ângulo de mistura torna-se importante.

6.2 Violação de CP

As probabilidades obtidas em todos os casos anteriores podem gerar, sob certas condições, violações de CP. Para isso, no entanto, devemos considerar que o comportamento do neutrino e antineutrinos sejam diferentes frente ao termo não hamiltoniano da equação (5.25) ou, de outra maneira, nenhuma violação é obtida.

Para induzirmos violações de CP teoricamente, o termo $D_{\mu\nu}$ para partículas deve ser diferente do termo $\bar{D}_{\mu\nu}$ para antipartículas. A princípio, a MQSA não proíbe esse tipo de fenômeno que, aliás, do ponto de vista teórico, a única alteração a ser feita diz respeito à hamiltoniana de interação em (4.27) bastando apenas fazer com que $B_i^p \neq B_i^{\bar{p}}$

(p para partícula e \bar{p} para antipartícula). Por simplicidade, podemos adotar $B_i^p \propto B_i^{\bar{p}}$ e conseqüentemente $D_{\mu\nu} \propto \bar{D}_{\mu\nu}$.

Com esta suposição, a parametrização mais geral utilizada na seção anterior para a evolução de antineutrinos pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{D}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

onde $\bar{\gamma} = \bar{k}\gamma$.

Logicamente, as mesmas probabilidades já obtidas na seção anterior são obtidas novamente com a única alteração de substituir γ por $\bar{k}\gamma$. Fenomenologicamente a violação é obtida fazendo, caso a caso, as diferenças de probabilidades. Assim temos:

Caso 1 – $\bar{1}$

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2E}t\right) \left[e^{-\gamma x} - e^{-\bar{k}\gamma x} \right]. \quad (6.21)$$

Caso (2 – 3) – ($\bar{2}$ – $\bar{3}$)

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = \frac{1}{2} \cos^2(2\theta) \left(e^{-\gamma x} - e^{-\bar{k}\gamma x} \right) + \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2E}t\right) \left[e^{-\frac{\gamma}{2}x} - e^{-\frac{\bar{k}}{2}\gamma x} \right] \quad (6.22)$$

Caso 4 – $\bar{4}$

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = \left[\frac{1}{2} - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}t\right) \right] \left(e^{-\gamma x} - e^{-\bar{k}\gamma x} \right). \quad (6.23)$$

onde notamos claramente que, para $\bar{k} \neq 0$ é possível se distinguir neutrinos e antineutrinos de Dirac.

Este possível efeito já foi discutido pelos autores [40] em um tratamento de dados para o LSND, mas, levando em conta três famílias de neutrinos e argumentam que os termos são fenomenologicamente responsáveis por efeitos quânticos da gravidade. Além disso, eles tentam mostrar que esse tipo de violação de CP pode acomodar todos os resultados experimentais incluindo LSND.

Capítulo 7

Conclusão e Perspectiva do Trabalho

Neste trabalho discutimos como adicionar efeitos de descoerência na oscilação de neutrinos. Para isso estudamos dois modelos, o formalismo de VMQ, que foi o primeiro a ser aplicado à física de partículas, e o formalismo MQSA, que começou a ser desenvolvido no início de 1960, e que possui uma sólida base teórica. Contudo, os autores que elaboram o modelo VMQ, no trabalho [6], citam alguns trabalhos referentes à MQSA, mas argumentam que existe uma diferença filosófica na base teórica da construção dos dois formalismos e, por esse motivo, optamos por estudar os dois modelos e encontrar suas diferenças além de suas possíveis aplicações.

De maneira geral, a MQSA foi construída como uma extensão natural da MQ padrão, enquanto o formalismo VMQ foi desenvolvido a partir de argumentos sobre a impossibilidade da MQ padrão descrever efeitos quânticos da gravidade e por esse motivo deveria ser alterada.

Como vimos no capítulo 4, o modelo VMQ não consegue descrever sistemas emaranhados, pois a partir dele surgem probabilidades que não possuem interpretação física uma vez que podem assumir valores negativos ou complexos. Mas, na literatura ainda é possível encontrar esse modelo aplicado no estudo sobre oscilação de neutrinos [9].

Contudo, é fácil encontrar uma solução para que o formalismo VMQ seja aplicável em qualquer sistema físico. Vimos que a equação (4.11) deve ser satisfeita para que a entropia não seja decrescente no tempo. Em outras palavras, o termo $D_{\mu\nu}$ deve conter

apenas autovalores negativos. Entretanto, somente depois de se definir uma simetria é que procuramos a condição para que $D_{\mu\nu}$ gere tais autovalores, exatamente como foi feito no capítulo 4 para a conservação da energia. Se mudarmos o procedimento fazendo com que o modelo já apresente as condições suficientes e necessárias para que o termo $D_{\mu\nu}$ gere sempre autovalores negativos independente da simetria adotada, então o problema é resolvido já que podemos fazer com que $D_{\mu\nu}$ seja $D_{\mu\nu} = -D'_{\mu\nu}$, onde $D'_{\mu\nu}$ é uma matriz positiva definida e, assim, deve respeitar as mesmas restrições dadas pelas equações (5.20) e (5.21). Com isso o modelo de VQM estaria apto a ser aplicado em qualquer sistema físico e, além disso, seria completamente análogo ao formalismo MQSA deixando somente as motivações filosóficas serem diferentes.

No capítulo 3, encontramos dois geradores de dinâmica na MQSA. Ambos são utilizados na literatura e são considerados análogos [21, 29, 41]. Entretanto, na literatura é possível encontrar modelos que utilizam o gerador Kossakowski onde não é imposto que os sistemas sejam obrigados a respeitar que entropia seja estritamente crescente no tempo. Vimos que a imposição de termos entropia sempre crescente induz que a matriz $\{a_{kl}\}$ do gerador Kossakowski, que é positiva definida (hermitiana), deva conter apenas elementos reais, o que pode alterar consideravelmente os resultados, já que a imposição da entropia ser sempre crescente protege os modelos de obter probabilidades com valores negativos ou complexos [21].

Com o formalismo de MQSA foi possível obter novas probabilidades fenomenológicas de oscilação de neutrinos. A equação de movimento (5.22) pode gerar no máximo seis tipos de probabilidades distintas (sem contar o caso trivial que recupera o caso padrão) devido ao termo não hamiltoniano. Destas possibilidades analisamos os casos em que a parametrização do termo não hamiltoniano introduz apenas um novo termo na probabilidade de oscilação padrão.

As novas probabilidades obtidas foram divididas por casos, onde o caso 1 é o único de que já foi explorado na literatura. Ele é bastante especial, devido a uma motivação física interessante, pois este caso mantém localmente a conservação de energia, e os neutrinos somente perdem coerência quântica durante sua propagação, ou seja, este caso inclui

apenas o efeito de descoerência.

Os casos 2, 3 e 4 não foram analisados ainda na literatura. Eles propõem um novo efeito além da descoerência. Analisamos esse efeito de forma qualitativa para o caso 4 em que chegamos à probabilidade (6.14) onde ficou claro que mesmo quando excluimos o mecanismo de oscilação, existe, para $t > 0$, uma probabilidade diferente de zero de o neutrino ter seu sabor alterado. Esse efeito de conversão espontânea de sabor, analogamente ao efeito de descoerência que provém do formalismo MQSA, é devido ao fato dos neutrinos estarem sempre em contato com o meio e por esse motivo o formalismo sugere que seus estados não conseguem permanecer estáveis, devido à dissipação local de energia.

As Figuras (6.2) e (6.3) nos foram úteis para ilustrar as diferenças entre os casos analisados. O caso 2, 3 nos chama a atenção pelo fato do termo de descoerência na probabilidade ser menos intenso do que nos outros casos. Entretanto, o caso 4 é interessante por apresentar comportamento de oscilação muito parecido do caso padrão, além de conter a mesma intensidade do efeito de descoerência do caso 1. Isso indica que a diferença de amplitude e de comprimento de oscilação entre esses casos são devidos unicamente ao efeito de conversão espontânea de sabor. Além disso, para os casos 2, 3 e 4 os valores assintóticos das probabilidades, Figura (6.2), fornecem iguais chances de encontrar um neutrino do elétron ou do muon, pois seus valores não dependem do ângulo de mistura, diferentemente do caso 1.

Por fim, podemos resumir as possibilidades futuras de estudo que esse trabalho nos fornece, pois tanto sua parte teórica quanto sua parte de análise fenomenológica deixa abertas algumas possibilidades de estudo.

Do ponto de vista teórico, o formalismo de MQSA, apresenta dois geradores que são análogos quando impomos que a entropia do sistema seja apenas crescente no tempo como foi discutido, mas essa imposição não é feita na literatura [21, 24] ao gerador Kossakowski e, portanto, esses trabalhos podem ser revistos com essa alteração. Além disso, é possível obter os termos de efeito não padrão sugerindo hamiltonianas globais particulares.

Na parte fenomenológica de oscilação de neutrinos, as duas novas probabilidades

oscilações de neutrinos podem ser utilizadas para descrever os dados experimentais. Além disso, um estudo em três famílias pode ser realizado fazendo as mesmas considerações que utilizamos neste trabalho. Podemos ainda estudar extensões deste modelo incluindo efeitos já discutidos na literatura como o efeito MSW, ou ainda, discutir o formalismo de pacotes de ondas sob a luz da MQSA, na tentativa de deixar o tratamento teórico o mais real possível.

Apêndice

Um fator importante em nossas discussões foi à obtenção das desigualdades que formam as condições suficientes e necessárias para que uma matriz seja dita positiva semi-definida. Por completeza, revisamos esse conceito de maneira formal.

Uma matriz hermitiana A em $\mathbb{C}^{(M)}$ é dita positiva semi-definida se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\lambda_i \geq 0, \forall i, \tag{7.1}$$

$$a_{ii} \geq 0, \forall i, \tag{7.2}$$

$$B_d \geq 0, 1 < d < M, \tag{7.3}$$

onde denotamos o conjunto de autovalores de A denotado por λ_i e B_d é qualquer sub-matriz obtida pela exclusão de um número de linhas, não necessariamente de índices consecutivos, e o correspondente de colunas.

Esta é a definição formal e fazemos explicitamente para o caso da matriz que utilizamos na dissertação que é de dimensão 3 em $\mathbb{C}^{(M)}$. Para matrizes dessa dimensão $d = 2$, portanto, usando equação (7.2), obtemos

$$|a_{ij}|^2 \leq a_{ii}a_{jj}. \tag{7.4}$$

Agora, calculando explicitamente os autovalores de $A_{3 \times 3}$:

$$\det[A] = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (7.5)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 = & \lambda^3 + (a_{33} - a_{22} - a_{11})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - |a_{12}|^2 - |a_{13}|^2 - |a_{23}|^2)\lambda \\ & + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}|a_{23}|^2 + a_{22}|a_{13}|^2 + a_{33}|a_{12}|^2 - 2\operatorname{Re}\{a_{12}a_{13}a_{23}\}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

ou ainda, podemos reescrever como segue:

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0. \quad (7.7)$$

Os três autovalores são relacionados da seguinte forma:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{b}{a} \quad (7.8)$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -\frac{c}{a} \quad (7.9)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{d}{a} \quad (7.10)$$

A primeira equação (7.8), mostra que $a_{11} + a_{22} - a_{33} \geq 0$ e isso é válido para qualquer permutação de a_{ii} e da origem as três desigualdades referentes ao termo diagonal em (5.10). A segunda equação (7.9), mostra que $(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - |a_{12}|^2 - |a_{13}|^2 - |a_{23}|^2) \geq 0$ que é a soma do resultado obtido em (7.4) que da origem as outras três desigualdades referentes aos termos fora da diagonal principal em (5.10). A terceira equação (7.10),

indica que $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}|a_{23}|^2 + a_{22}|a_{13}|^2 + a_{33}|a_{12}|^2 - 2Re\{a_{12}a_{13}a_{23}\} \geq 0$ e da origem a equação (5.9).

Referências Bibliográficas

- [1] KamLAND Collaboration, K. Eguchi *et al.*, First Results from KamLAND: Evidence for Reactor Antineutrino Disappearance, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 021802, (2003).
- [2] SK Collaboration, Y. Fukuda *et al.*, Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 1562, (1998).
- [3] Homestake Collaboration, T. B. Cleveland *et al.*, Measurement of the Solar Electron Neutrino Flux with the Homestake Chlorine Detector, *Astrophys. J.*, **496**, 505, (2003).
- [4] T Araki, *et al.*, Experimental investigation of geologically produced antineutrinos with KamLAND, *Nature*, **436**, 499, (2005).
- [5] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley, (1987).
- [6] J. Ellis, *et al.*, Search for violations of quantum mechanics, *Nucl. Phys. B*, **241**, 381, (1984).
- [7] F. Benatti and R. Florianini, Dissipative neutrino oscillations in randomly fluctuating matter, *Phys. Rev. D*, **71**, 013003, (2005).
- [8] F. Melo, *Descoerência na Propagação de Neutrinos*. Dissertação (Mestrado em Física) - Curso de Pós-Graduação em Física, UNICAMP São Paulo, (2003).
- [9] D. Morgan, *at al.*, Probing quantum decoherence in atmospheric neutrino oscillations with a neutrino telescope *Astrop. Phys.*, **25**, 311, (2006).

-
- [10] G. Lindblad, On the generators of quantum dynamical semigroups, *Commun. Phys.*, **48**, 119, (1976).
- [11] V. Gorini and A. Kossakowski, Completely positive dynamical semigroups of N-level, *J. Math. Phys.*, **17**, 821, (1976).
- [12] P. B. Pal, Particle physics confronts the solar neutrino problem, *Int. J. Mod. Phys.*, **22**, 5387, (1992).
- [13] B. Pontecorvo, *Sov. Phys. JETP* **B 6**, 429, (1958).
- [14] V. N. Gribov and B. Pontecorvo, Neutrino astronomy and lepton charge, *Phys. Lett B* **28**, 493, (1969).
- [15] C. Cohen-Tannoudji, *et al.*, *Quantum Mechanics*, V.I, Hermann, Paris, (1977).
- [16] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, New York, (1985).
- [17] E. A. Bernardini, M. M. Guzzo and F. R. Torres, Second-order corrections to neutrino two-flavor oscillation parameters in the wave packet approach, *Eur. Phys. J. C* **48**, 613, (2006).
- [18] J. H. Bardeen, B. Carter and S. Hawking, The four laws of black hole mechanics, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161, (1973).
- [19] F. Y. Liu, L. Hu and M. L. Ge, Effect of violation of quantum mechanics on neutrino oscillations *Phys. Rev. D* **56**, 6648, (1997).
- [20] I. Prigogine and P. Resibois, On the kinetics of the approach to equilibrium, *Physica* **27**, 629, (1961).
- [21] R. Alicki and K. Lendi, *Quantum dynamical semigroups and applications*, *Lect. Notes Phys.*, Springer-Verlag, Berlin, (1987).
- [22] F. Benatti and H. Narnhofer, Entropy Behaviour under completely positive maps, *Lett. Math. Phys.*, **15**, 325 (1988).

- [23] K. Kraus, General state changes in quantum theory, *Annals. Phys.*, **64**, 311, (1971).
- [24] R. Dümcke and H. Sponh, The proper form of the generator in the weak coupling limit, *Z. Phys. B* **34**, 419, (1979).
- [25] E. B. Davies, Markovian master equations, *Commun. Phys.*, **39**, 91, (1974).
- [26] E. B. Davies, The classical limit for quantum dynamical semigroup, *Commun. Phys.*, **49**, 113, (1976).
- [27] E. B. Davies, Markovian master equations III, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **11**, 265, (1975).
- [28] F. Benatti and R. Florianini, Open system approach to neutrino oscillations, *JHEP*, **02**, 32, (2000).
- [29] F. Benatti and R. Florianini, Open quantum dynamics: complete positivity and entanglement, *Int.J.Mod.Phys.*, **B19**, 3063, (2005).
- [30] E. Joos, *et al.*, *Decoherence and the Appearance of Classical World in Quantum Theory*, 2ed. Springer, New York, (2003).
- [31] E. Lisi, A. Marrone and D. Montanino, Probing possible decoherence effects in Atmospheric neutrino oscillations, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1166, (2000).
- [32] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone and D. Montanino, Status of atmospheric neutrino $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ oscillations and decoherence after the first K2K spectral data, *Phys. Rev. D*, **67**, 093006, (2003).
- [33] G. L. Fogli, *et al.*, Probing non-standard decoherence effects with solar and KamLAND neutrino, *hrp-ph/07042568*, (2007).
- [34] M. P. Almeida, *at al.*, Environment-Induced Sudden Death of Entanglement, *Science* **316** 579, (2007).
- [35] L. Wolfenstein, Neutrino oscillations in matter, *Phys. Rev. D* **17**, 2369, (1978).

-
- [36] S.P. Mikheyev and A.Yu. Smirnov, *Sov. Jour. Nucl. Phys.*, **42**, 913 (1985).
- [37] S. L. Adler, Remarks on a proposed Super-Kamiokande test for quantum gravity induced decoherence effects, *Phys. Rev. D* **62**, 117901, (2000).
- [38] T. Ohlsson, Equivalence between Gaussian averaged neutrino oscillations and neutrino decoherence, *Physics Letters B* **502**, 159, (2001).
- [39] D. Hooper, *et al.*, Probing quantum decoherence with high-energy neutrinos, *Physics Letters B*, **609**, 206, (2005).
- [40] G. Barenboim and N. E. Mavromatos, CPT violating decoherence an LSND: a possible window to planck scale physics, *JHEP*, **01**, 34, (2005).
- [41] M. Asorey and G. Sclarici, Complex positive maps and quaternionic unitary evolution, *Journal of Physics A*, **39**, 9727, (2006).