

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

**Cálculo de Força e Indutância
em Circuitos Elétricos**

Marcelo de Almeida Bueno ✓

Tese de doutorado apresentada no Instituto de Física
"Gleb Wataghin" para obtenção do título de
DOUTOR em CIÊNCIAS

Orientador: *Prof. Dr. André Koch Torres de Assis*
Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas, Unicamp
13083-970 Campinas, SP

21 de Agosto de 1995

*Este exemplar corresponde à redação
final da tese de doutorado defendida por
Marcelo de Almeida Bueno e aprovada
pela comissão julgadora.*

André Koch Torres de Assis
13 / 09 / 95



INSTITUTO DE FÍSICA
GLEB WATAGHIN

PARECER DE APROVAÇÃO
DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DE
MARCELO DE ALMEIDA BUENO

DATA: 21 / 08 / 95

BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Dr. André Koch Torres de Assis (Orientador)

- Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Júnior

- Prof. Dr. Alvaro Vannucci

- Prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka

- Prof. Dr. Jorge Ivan Cisneros

*Aos meus pais Washington e Auxiliadora, meus irmãos
Maurício e Márcio, e a Danieli, com muito amor e carinho.*

Agradecimentos

O aluno agradece sinceramente ao Prof. Dr. André Assis pela sempre presente e inestimável orientação na elaboração deste trabalho, e ao amigo André pela compreensão e paciência ao longo destes anos.

Também agradeço aos membros da banca examinadora pelas sugestões apresentadas à tese, os Professores Doutores: Waldyr Alves Rodrigues Júnior, Álvaro Vannucci, Paulo Hiroshi Sakanaka, Jorge Ivan Cisneros, Márcio Antônio de Faria Rosa e Marcelo Moraes Guzzo. Ao CNPq, pela ajuda financeira durante toda a minha iniciação científica na graduação, e no doutorado na pós graduação. Agradecimentos aos professores, funcionários e colegas do Instituto de Física da Unicamp, em particular aos do Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia e da Secretaria de Pós Graduação (Maria Ignez, Armando, Cidinha e Márcia).

Campinas, agosto de 1995.

M.A.B.

Resumo

Na primeira parte deste trabalho apresentamos um método para o cálculo do coeficiente de indutância. Aplicamos este método a diversas configurações de circuitos, inclusive os com densidade de corrente superficial ou volumétrica, utilizando as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau. Comparamos os resultados obtidos através do nosso método com os resultados obtidos por métodos de aproximação usuais. Concluimos que o nosso método é superior a estes últimos por possibilitar resultados algébricos com a ordem de aproximação que se queira. Para a auto-indutância de um circuito de corrente fechado de qualquer forma generalizamos a equivalência entre as quatro fórmulas citadas acima.

A força entre elementos de corrente foi analisada na segunda parte deste trabalho. Através do aperfeiçoamento de um método de cálculo de força entre partes em contato de um circuito único, comparamos as expressões de Ampère e Grassmann em diversas configurações, também incluindo aquelas com densidade de corrente superficial ou volumétrica. Concluimos que estas duas expressões são equivalentes em todas as situações de circuito de corrente fechado. Apresentamos uma demonstração deste fato. Por último, analisamos a existência de força longitudinal entre condutores de corrente com a força de Weber, e concluimos que ela não é capaz de explicar a ordem de grandeza dos resultados experimentais com explosão de fios, no caso estacionário.

Abstract

In this work we present a method for inductance calculation. We apply this method to various configurations of circuits, including the ones with surface or volumetric current density, using the formulas of Neumann, Weber, Maxwell and Graneau. We compare the results obtained with our method to the ones obtained with the usual approximation methods. We conclude that our method is more powerful than the last ones, because it allows one to obtain algebraic results with the degree of approximation desired. For the self-inductance of a closed circuit with arbitrary shape we generalize the equivalence between the four formulas cited above.

The force between current elements was analyzed in the second part of this work. We improved a method for force calculation between parts in contact of a single circuit, and use it to compare the expression of Ampère to the expression of Grassmann in various configurations of circuits, also including the ones with surface and volumetric current density. We conclude that these two expressions for force between current elements are equivalent to one another in all situations of closed circuits. We present a demonstration of this fact. Finishing, we analyse the existence of longitudinal force between current carrying conductors with Weber's force, and we conclude that it is not able to explain the magnitude of the experimental results with exploding wires, in steady state.

Conteúdo

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Introdução	xiii
I Indutância	1
1 Coeficiente de Indutância	3
1.1 Introdução	3
1.2 Elemento de Corrente	5
1.3 Fórmula de Indutância de Neumann	7
1.3.1 Energia de Neumann entre Elementos de Corrente	7
1.3.2 Fórmula de Neumann	7
1.4 Fórmula de Indutância de Weber	9
1.4.1 Energia de Weber	9
1.4.2 Energia de Weber entre Elementos de Corrente	10
1.4.3 Fórmula de Weber	11
1.5 Fórmula de Indutância de Maxwell	12
1.5.1 Energia de Darwin	12
1.5.2 Energia de Maxwell entre Elementos de Corrente	13
1.5.3 Fórmula de Maxwell	14
1.6 Fórmula de Indutância de Graneau	15
1.6.1 Energia de Graneau entre Elementos de Corrente	15
1.6.2 Fórmula de Graneau	15
1.7 Equivalência Parcial	16

2	Cálculo do Coeficiente de Indutância	19
2.1	Introdução	19
2.2	Descrição do Método Utilizado	21
2.3	Comparação com Resultados Conhecidos	23
2.3.1	Solenóide com Corrente Poloidal	23
2.3.2	Cilindro com Corrente Axial	26
2.3.3	Cabo Coaxial	28
3	Indutância em Diversas Configurações	33
3.1	Elemento Linear	33
3.1.1	Fios Retilíneos e Paralelos	33
3.1.2	Fios Retilíneos e Perpendiculares	35
3.2	Elemento Superficial	36
3.2.1	Superfície Retangular	36
3.2.2	Superfícies Retangulares em Contato	37
3.2.3	Circuito Retangular	39
3.3	Elemento Volumétrico	42
3.3.1	Fio de Seção Reta Retangular	42
3.3.2	Circuito Retangular	45
4	Equivalência Completa	47
4.1	Preliminares	47
4.2	Demonstração da Equivalência	51
II	Força	57
5	Força Entre Elementos de Corrente	59
5.1	Força de Ampère	59
5.1.1	Força de Weber	60
5.1.2	Expressão de Ampère	61
5.2	Força de Grassmann	64
5.2.1	Força de Liénard-Schwarzchild	65
5.2.2	Expressão de Grassmann	66
5.3	Equivalência Parcial	69
5.4	Descrição do Método	71
6	Força em Diversas Configurações	73
6.1	Elemento Linear	73
6.1.1	Fios Paralelos	73
6.1.2	Fios Perpendiculares	75
6.1.3	Circuito Retangular	80

6.2	Elemento Superficial	84
6.2.1	Circuito Retangular I	84
6.2.2	Circuito Retangular II	88
6.2.3	Circuito Retangular III	91
6.2.4	Comentários	94
6.3	Elemento Volumétrico	96
6.3.1	Circuito Retangular	96
6.3.2	Comentários	101
7	Equivalência Completa	103
7.1	Efeito Bootstrap	103
7.2	Demonstração da Equivalência	107
8	Tópicos Finais	111
8.1	Comparação com resultados experimentais	111
8.2	Força e Indutância	114
8.3	Força Longitudinal	116
9	Conclusões	125
	Apêndices	129
A	Método de Aproximação das Integrais	129
B	Exemplo do Método de Aproximação	133
	Bibliografia	137

Introdução

Dentre as possíveis expressões para o cálculo da força entre elementos de corrente duas se destacam: a força de Ampère e a de Grassmann. A primeira foi obtida pelo próprio Ampère, entre 1820 e 1826, como resultado dos seus experimentos para explicar a descoberta de Oersted de 1820, [Amp23, Amp65] e [Whi73], Vol. 1, págs 84–88. A segunda foi uma proposta teórica feita por Grassmann em 1845 [Gra45, Gra65].

No sistema internacional de unidades podemos escrever a força de Ampère $d^2 F_{ij}^A$, e a força de Grassmann $d^2 F_{ij}^G$, no elemento de corrente $I_i d\vec{r}_i$, localizado em \vec{r}_i , devido ao elemento de corrente $I_j d\vec{r}_j$, localizado em \vec{r}_j , respectivamente como:

$$d^2 \vec{F}_{ij}^A = \frac{\mu_0 I_i I_j}{4\pi r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} [3(d\vec{r}_i \cdot \hat{r}_{ij})(d\vec{r}_j \cdot \hat{r}_{ij}) - 2(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j)], \quad (a)$$

$$\begin{aligned} d^2 \vec{F}_{ij}^G &= I_i d\vec{r}_i \times d\vec{B}_j(\vec{r}_i) = I_i d\vec{r}_i \times \left(\frac{\mu_0 I_j d\vec{r}_j \times \hat{r}_{ij}}{4\pi r_{ij}^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I_i I_j}{4\pi r_{ij}^2} [(d\vec{r}_i \cdot \hat{r}_{ij})d\vec{r}_j - (d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j)\hat{r}_{ij}], \quad (b) \end{aligned}$$

onde $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{kgmC}^{-2}$ é a permeabilidade no vácuo, $r_{ij} \equiv |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ é a distância entre os elementos de corrente, e $\hat{r}_{ij} \equiv \vec{r}_{ij}/r_{ij}$ é o versor unitário apontando de $I_j d\vec{r}_j$ para $I_i d\vec{r}_i$. Na expressão de Grassmann $d\vec{B}_j(\vec{r}_i)$ é o campo magnético em \vec{r}_i devido ao elemento de corrente $I_j d\vec{r}_j$. Esta expressão foi sugerida por Biot e Savart em 1820.

A força de Grassmann é compatível com a força de Lorentz (1895) e é a expressão utilizada na eletrodinâmica clássica. Dificilmente vemos qualquer referência à força de Ampère nos livros de eletrodinâmica de hoje. Apesar disto ela foi largamente aceita na época, como podemos constatar nesta declaração de Maxwell, [Max54], Vol. 2, Art. [528], pág. 175:

“The experimental investigation by which Ampère established the laws of the mechanical action between electric currents is one of the most brilliant achievements in science. The whole, theory and experiment, seems as if it had leaped, full grown and full armed, from the brain of the ‘Newton of Electricity’. It is perfect in form and unassailable in accuracy, and it is summed up in a formula from which all the phenomena may be deduced, and which must always remain the cardinal formula of electro-dynamics.”

Deve ser ressaltado também que Maxwell conhecia não apenas a força de Ampère mas também a de Grassmann (ver [Max54], Vol. 2, Art. [526], pág. 174). No *Treatise* Maxwell compara estas duas expressões e duas outras que ele próprio havia sugerido teoricamente, e afirma ([Max54], Vol. 2, Art. [527], pág. 174):

“Of these four different assumptions that of Ampère is undoubtedly the best, since it is the only one which makes the forces on the two elements not only equal and opposite but in the straight line which joins them.”

Ressaltamos duas características importantes que distinguem estas duas expressões. O princípio de ação e reação, $d^2\vec{F}_j = -d^2\vec{F}_{1j}$, é sempre satisfeito pela força de Ampère enquanto que em geral não é satisfeito pela força de Grassmann. A violação do princípio de ação e reação poderia conduzir a eletrodinâmica clássica a não conservação de momento linear. Isto não ocorre por causa do momento linear armazenado no campo.* A outra característica é que a força de Grassmann é sempre perpendicular à direção da corrente no elemento que sofre a força, não permitindo portanto interação longitudinal entre elementos de corrente colineares, o que é previsto com a força de Ampère.

Apesar destas diferenças, já se sabia desde o século passado que as duas expressões são equivalentes quando se calcula a força que um circuito de corrente fechado faz num elemento de corrente externo a ele. Vemos facilmente isto pois, a diferença entre as expressões (a) e (b) é uma diferencial exata, que quando integrada em um circuito fechado resulta zero [Chr88]. Isto faz com que todo o empenho em se decidir qual das duas expressões é a correta seja voltado para a análise de um circuito único. Aí podemos citar dois problemas que surgem e que fizeram com que esta questão fosse pouca analisada ao longo deste século. Do lado experimental, a dificuldade em se realizar experimentos com circuito único. E do lado teórico, o problema de

*Ver discussão em [FLS64], Vol. 2, págs. 26-2 a 26-5 e 27-9 a 27-11.

divergência quando se utiliza as expressões (a) e (b) para o cálculo da força que um circuito fechado de corrente faz numa parte dele próprio.

No entanto, a partir de 1982 com a publicação de um resultado experimental na revista *Nature* [Gra82b], a controvérsia entre as expressões de Ampère e Grassmann foi retomada. Desde então diversos resultados experimentais e teóricos vêm sendo publicados em vários periódicos, por diversos autores. Citaremos ao longo deste trabalho alguns artigos, e indicaremos outras obras que servem de referência para quem deseja se aprofundar nesta questão que, apesar de decorridos tantos anos e tantos artigos publicados, continua sem uma resposta de consenso entre os pesquisadores.

A primeira questão que surge é sobre a força resultante em parte de um único circuito, como nos casos das Figs. I(A) e (B):

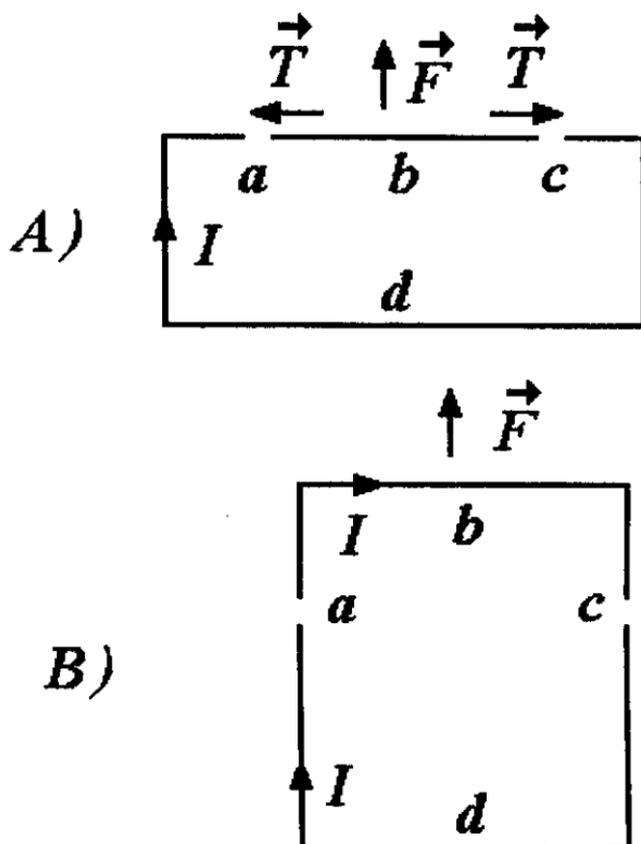


Figura I: Dois circuitos fechados de corrente com partes móveis.

Os circuitos $abcd$ a são fechados e em cada um deles circula uma corrente I (fornecida por uma fonte de alimentação contínua ou alternada). Em a e c temos arcos elétricos ou mercúrio líquido que permitem que a corrente

circule pelo circuito todo, mas deixa o pedaço abc livre para se movimentar. Podemos medir a força resultante sobre abc , utilizando balança de torção, sem romper a corrente e deixando todas as partes fixas e em equilíbrio. A pergunta principal que se faz é: será que nestes e em outros casos análogos a força resultante em abc calculada com a expressão de Ampère vai concordar com a calculada com a expressão de Grassmann? Este é um dos assuntos principais discutidos neste trabalho.

Para se ter uma idéia da ordem de grandeza das forças citamos aqui experiências de Peoglos com estas duas geometrias. Com correntes contínuas de 1 A, fios de cobre com espessura de 1,2 mm e circuito quadrado de lado 10 cm, foram medidas com balança de torção forças da ordem de 10^{-7} a 10^{-6} N [Peo88]. Já Moyssides com corrente contínua no intervalo de 35 a 140 A, fios de cobre com diâmetros de 1 a 3 mm e circuito retangular com comprimentos dos lados de 124 e 48 cm (situação da Fig. I(B)) mediui forças entre 10^{-3} e 10^{-2} N [Moy89c].

Além da força resultante, tem sido discutido recentemente a tração T representada na situação da Fig. I(A). De acordo com a força de Grassmann, $d\vec{F}^G = Id\vec{r} \times \vec{B}$, nunca pode haver uma força ao longo da direção da corrente, qualquer que seja o valor e a direção do campo magnético \vec{B} . Portanto, um fio reto com corrente não deveria ficar tracionado. Por outro lado, se calculamos com a expressão de Ampère a força entre ab e bc (Fig. I(A)) obtemos que as duas metades do pedaço retilíneo abc se repelem, podendo gerar uma tração T no fio. Experimentos recentes têm comprovado a existência desta tração.

Estes experimentos são conhecidos como explosão de fios. Apesar de serem conhecidos relatos deste tipo de experimento desde 1774 [Cha59], nas últimas décadas o maior interesse tem sido em tentativas teóricas para elucidar este fenômeno ainda sem uma explicação consensual. Destacamos aqui um experimento de Graneau [Gra83]. Na Fig. I(A) representamos o esquema elétrico deste experimento de explosão de fios. Ele é bastante simples, e com certeza pode ser realizado em laboratórios didáticos de física. Um pedaço de fio retilíneo de alumínio abc (aproximadamente 1 mm de diâmetro) é conectado a uma fonte de alimentação (no caso um banco de capacitores) através de um circuito que pode ser representado pelo circuito aberto cda . O fio retilíneo abc está mecanicamente desconectado do restante do circuito por um espaço vazio (*gap*) de 1 cm de cada lado de suas extremidades. Ao se descarregar o banco de capacitores são formados arcos elétricos nestes *gaps*, que fecham a corrente no circuito e mantêm abc desconectado mecanicamente do restante do circuito.

Ao se descarregar o banco de capacitores, gera-se pulsos de até 7000 A, o fio de 1 m de comprimento se rompe em diversos pedaços, Fig. II.

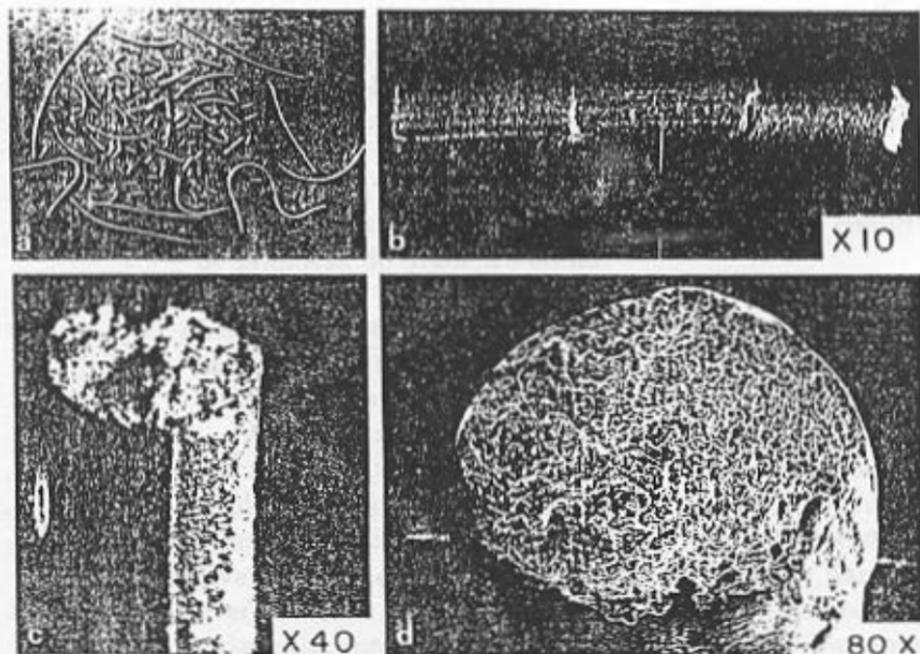


Fig. 1. Fragments of a 1.2 mm diameter aluminum wire. (a) Collection of fragments from several experiments. The fragments are of the same diameter as the original wire. (b) Fragments reconnected by arc spot welding. (c) Optical micrograph of fracture face. (d) Scanning electron micrograph of fracture face.

Figura II: Fotos do resultado de um experimento de explosão de fios, tirado de [Gra83].

Uma explicação qualitativa para este fato pode ser o aquecimento e derretimento do fio por efeito Joule. No entanto, a análise microscópica da superfície dos fragmentos do fio revela que o rompimento ocorreu no estado sólido, Fig. II, portanto não podendo ser atribuído à fusão devido ao aquecimento por efeito Joule. Outros dados quantitativos que os experimentos revelam são: a força que rompe o fio é proporcional à corrente no circuito ao quadrado; o pedaço inicial de fio se rompe ao meio, sendo que cada uma das metades provenientes do pedaço inicial também se rompem ao meio, e assim sucessivamente para os fragmentos subsequentes; o processo de subdivisão dos fragmentos cessa quando o seu comprimento é da ordem de grandeza do diâmetro do fio.

Mais uma vez é inegável a existência de uma força de tração longitudinal à corrente no fio, e que não pode ser explicada pela força de Grassmann. No entanto, com a utilização da força de Ampère, Graneau é capaz de explicar **quantitativamente** todos os resultados citados acima.

Algumas outras explicações para este fenômeno também foram dadas: *stress waves* provocadas por rápida expansão térmica no fio [Ter86], (esta explicação segundo Graneau não está de acordo com outros resultados experimentais que ele obteve [Gra87c]); efeito “relativístico” segundo Ivezić [Ive91], o que é refutado por Singal [Sin93], e por Bartlett e Edwards [BE90] (ver também [Ive93]). No entanto, nenhuma destas explicações, e outras existentes, foram capazes de elucidar quantitativamente os resultados acumulados nos diversos experimentos de explosão de fios já realizados.

Apenas para ilustrar como se tem explicado diversos destes fenômenos com a força de Ampère, mostramos na Fig. III um pedaço retilíneo de fio de comprimento ℓ e diâmetro ω , no qual flui uma corrente I . Dividimos o fio imaginariamente em duas partes 1 e 2 de comprimentos x e $\ell - x$, respectivamente.

Se calcularmos a força de 1 em 2 (ou vice-versa) com a expressão de Grassmann obteremos um resultado nulo. Por outro lado, a força entre 1 e 2 com Ampère é dada por (neste trabalho mostraremos os cálculos detalhados para isto):

$$F \approx \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{x}{\omega} \right) + \ln \left(\frac{\ell - x}{\ell} \right) + C \right), \quad (c)$$

onde C é uma constante numérica adimensional cujo valor exato depende da geometria específica do fio (se sua seção reta é quadrada ou circular), mas que é dada aproximadamente por 0,5. Esta força é de repulsão se $F > 0$ ou de atração se $F < 0$.

Vemos então que em geral esta força indica uma tração no fio. Além disto, a força é proporcional a I^2 . Fixando ℓ e considerando (c) como

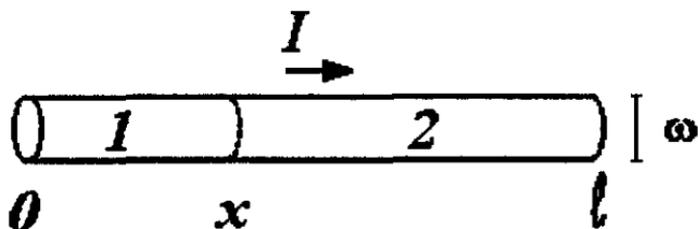


Figura III: Pedaço de fio retilíneo dividido em duas partes.

função de x achamos que o valor máximo de F é obtido para $x = \ell/2$, indicando que neste ponto a tração é maior, sendo portanto ao redor deste ponto que o fio deve romper-se primeiro. Todos estes fatos são observados experimentalmente [Gra85a]. A ordem de grandeza desta força de tração pode ser obtida com os dados numéricos citados acima para o experimento do Graneau: $I = 7000$ A, $\ell = 1$ m, $\omega = 1,2$ mm, e $x = \ell/2$. Com isto obtemos $T \approx 30$ N/mm². E isto é da ordem de grandeza necessária para romper um fio de alumínio como neste caso, [Ge63], pág. 48. Por último, vale ainda observar que a força de tração tende a zero quando $\ell \approx \omega$, indicando que o fio deve parar de se romper quando fica tão pequeno.

Até o momento nenhuma outra explicação já sugerida conseguiu explicar tantos fatos observacionais quanto esta baseada na força de Ampère. Voltaremos a discutir esta explicação mais adiante neste trabalho.

Outro tipo de experimento é conhecido como *railgun* ou acelerador de projéteis. Neste caso observa-se compressão ao invés de tração, como ocorria no caso do experimento de explosão de fios. Na Fig. IV apresentamos uma descrição do circuito experimental. Temos um circuito retangular que é formado por condutores metálicos A e B , os trilhos (*rail*), que estão fixos no laboratório através de uma lateral de madeira D que suporta as forças laterais que devem existir tanto com a expressão de Ampère quanto com a de Grassmann; e um condutor a que fecha o circuito e pode se movimentar sobre os trilhos, o projétil (*gun*). O circuito é alimentado por uma fonte de corrente C . Os condutores B são finos e não resistem à compressão, ao contrário dos condutores grossos A . Os trilhos A e B estão rigidamente ligados entre si através dos pinos p .

Ao fecharmos a chave S , com o projétil fixo, uma corrente circulará pelo

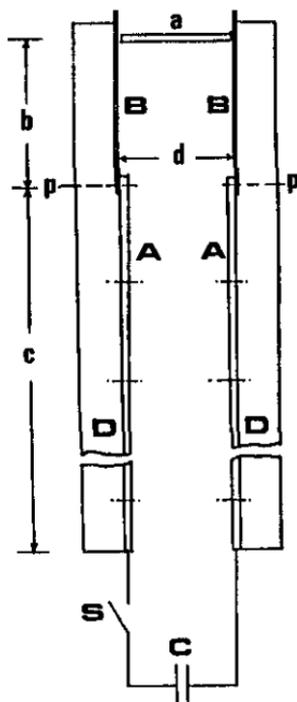


FIG. 2. Railgun recoil experiment. A, thick rails; B, thin rails; D, wooden side boards; p, anchor pins at rail joints; a, stationary armature; S, switch; C, $8 \mu\text{F}$, 100-kV capacitor bank; $b = 30 \text{ cm}$; $c = 200 \text{ cm}$; $d = 25 \text{ cm}$.

Figura IV: Desenho esquemático do circuito em um experimento do tipo *railgun*, tirado de [Gra87a].

circuito e os condutores *B* são deformados, como vemos nas fotos da Fig. V. No caso deste experimento foram utilizados bancos de capacitores de $8 \mu\text{F}$ carregados até 80 kV gerando pulsos de corrente com pico de 100 kA. O comprimento do projétil era de 25 cm, do trilho *A* de 200 cm e do trilho *B* de 30 cm, todos feitos de cobre.

Se calcularmos a força no projétil devido ao circuito todo com as expressões de Ampère e Grassmann encontraremos o mesmo resultado: a força é perpendicular ao projétil e no sentido que faz com que o seu movimento aumente a área do retângulo. E a reação a esta força, onde é aplicada? Nos trilhos *A* e *B*, na fonte *C*, ou no campo eletromagnético? Uma possível explicação dada é que a reação estaria armazenada no campo magnético em forma de radiação. Esta explicação, no entanto, viola a conservação de momento linear e energia, como demonstrado em [Pap83, Gra87b, Ass92b]. Por outro lado é inegável que os trilhos *B* sofreram a ação de um força

de compressão longitudinal. Esta compressão não pode ser devido a força de Grassmann (pois esta força é sempre perpendicular à direção da corrente), e segundo Graneau pode ser quantitativamente explicada pela força de Ampère [Gra87a]. Isto deve-se ao fato da força do projétil a nos trilhos B ter uma componente vertical de acordo com a expressão de Ampère, apontando de a para C , que tenderia a comprimir os trilhos B pois estes estão rigidamente ligados aos trilhos A pelos pinos p .

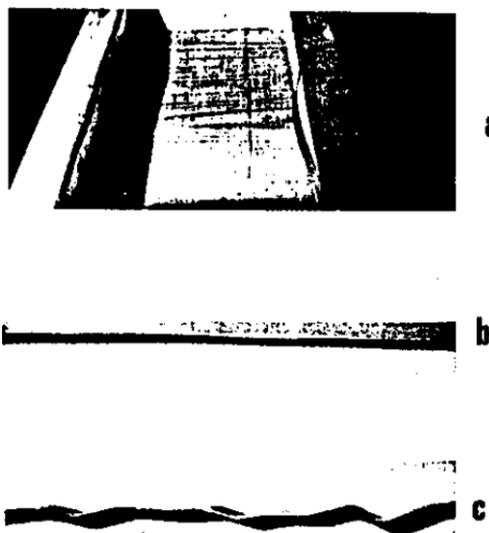


FIG. 3. Buckling of thin rails: (a) inward deflection of aluminum rail; (b) steel rail before recoil experiment; (c) steel rail after recoil experiment.

Figura V: Deformação dos trilhos em um experimento de *railgun*, tirado de [Gra87a].

Como podemos ver estes dois exemplos de experimentos demonstram a existência de uma força longitudinal à direção da corrente no condutor. A força de Grassmann não pode ser a responsável por tal força como dissemos acima. Neste trabalho vamos discutir se a expressão de Ampère pode ou não explicá-los.

Outra forma de se calcular a força entre dois circuitos de corrente fechados distintos é através do gradiente de uma energia de interação entre os

circuitos (ver [Ass94], págs. 98–102). Desta energia podemos derivar um fator que depende puramente da geometria dos circuitos, e que é conhecido como indutância mútua. O primeiro a introduzir tal conceito foi Neumann em 1845, [Whi73], Vol. 1, págs. 198–205 e 230–236. Podemos estender este conceito de coeficiente de indutância a um circuito único, e temos a auto-indutância de um circuito.

Sejam, por exemplo, dois circuitos rígidos circulares C_1 e C_2 de raios R_1 e R_2 por onde circulam as correntes I_1 e I_2 , respectivamente. Os circuitos são concêntricos e pertencem a planos paralelos entre si separados pela distância z como representado na Fig. VI.

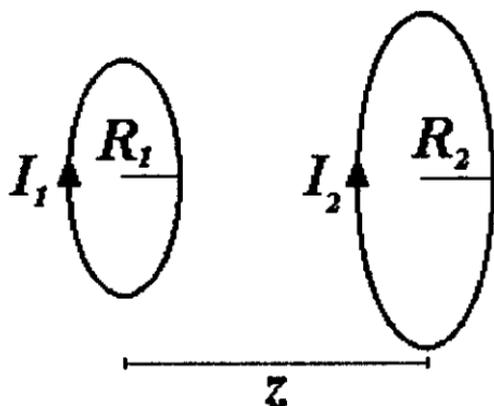


Figura VI: Dois circuitos circulares.

Para calcular a força entre eles pode-se integrar as expressões de Ampère ou de Grassmann. Na prática, o procedimento utilizado na maioria dos casos não é este. Ao invés disto utiliza-se $\vec{F} = \vec{\nabla}U^N \equiv I_1 I_2 \vec{\nabla}M^N$, onde $U^N = I_1 I_2 M^N$ é a energia de interação entre os circuitos e M^N o coeficiente de indutância mútua de Neumann:

$$U^N = I_1 I_2 M^N = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{r_{12}}. \quad (d)$$

Para a aproximação $z \gg R_1$ e $z \gg R_2$ temos:

$$U^N \approx \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{(\pi R_1^2)(\pi R_2^2)}{z^3}, \quad (e)$$

tal que a força entre os circuitos ao longo do eixo z , $F = \partial U^N / \partial z$, resulta:

$$F \approx -\frac{3\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{(\pi R_1^2)(\pi R_2^2)}{z^4}, \quad (f)$$

sendo a força atrativa ou repulsiva dependendo dos sentidos das correntes em cada circuito. Calculando esta força com as expressões de Ampère e Grassmann obtemos exatamente o mesmo resultado que o de (f).

Como o coeficiente de indutância já está tabulado para diversas geometrias e é uma grandeza escalar, este procedimento para calcular a força é muito mais simples que integrar diretamente as expressões de força de Ampère ou Grassmann.

Em seguida a Neumann surgiram as expressões de Weber e Maxwell para a energia de interação entre dois elementos de corrente, $I_1 d\vec{r}_1$ e $I_2 d\vec{r}_2$. Mais recentemente foi proposta uma quarta fórmula por Graneau, [Gra85a], pág. 212. Todas elas podem ser escritas como:

$$d^2U_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)}{r_{12}} + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{r}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{r}_2)}{r_{12}} \right]. \quad (g)$$

Com $k = 1$ obtemos a expressão de Neumann, com $k = -1$ a de Weber, $k = 0$ a de Maxwell e com $k = -5$ a de Graneau.

Neumann apenas utilizou a fórmula integrada apresentada em (d) ao observar que a expressão de Ampère ao ser integrada para dois circuitos fechados pode ser escrita como:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2). \quad (h)$$

Sendo $\hat{r}_{12}/r_{12}^2 = \vec{\nabla}_1(1/r_{12})$ pode-se entender como ele chegou em sua expressão. Já a fórmula de Weber foi obtida a partir da eletrodinâmica de Weber, como veremos em seguida (de onde se deriva também a força de Ampère, mas não a de Grassmann). A expressão de Maxwell foi a terceira a surgir. Neste trabalho veremos que ela pode ser derivada da lagrangiana de Darwin, sendo portanto a única expressão compatível com a relatividade (da lagrangiana de Darwin também pode ser derivada a força de Grassmann, mas não a de Ampère). Já a expressão de Graneau foi introduzida para que se pudesse derivar a força de Ampère entre elementos de corrente (e não necessariamente entre dois circuitos fechados como no caso de Neumann) através da expressão $d^2\vec{F}^A \equiv \hat{r} \partial(d^2U)/\partial r$, onde d^2U é a energia entre os elementos de corrente que vai satisfazer a esta relação.

Assim como ocorria com as expressões de Ampère e Grassmann, também se sabia desde o século passado que ao se calcular a energia de interação entre dois circuitos fechados o resultado era independente de k , e portanto com o mesmo valor para as fórmulas de Neumann, Weber e Maxwell (o mesmo valendo para a indutância mútua). Por outro lado, até o momento não se sabe se esta concordância vale para a auto-energia de formação

de um circuito único (ou, equivalentemente, se a auto-indutância de um circuito fechado de forma arbitrária calculada por todas estas fórmulas vai ser a mesma). Este é o outro assunto pesquisado neste trabalho. Além de resolvermos esta questão teórica, apresentamos também um método para o cálculo da auto-indutância que proporciona resultados algébricos de forma exata ou com a precisão desejada. Este é um grande avanço de ordem prática em relação aos métodos de aproximação usuais.

Dividimos a apresentação deste trabalho em duas partes. Começaremos a primeira parte com os resultados para o coeficiente de indutância, e na segunda parte os resultados para as expressões de força entre elementos de corrente. Invertemos a ordem de apresentação dos assuntos no trabalho, em relação à ordem apresentada aqui, pois o assunto do coeficiente de indutância é mais simples que o da força.

Utilizaremos o sistema internacional de unidades MKSA ao longo deste trabalho. Ao definirmos algum conceito ou grandeza faremos uso de \equiv como símbolo de definição. Representaremos por \vec{F}_j a força exercida pelo corpo j no corpo i .

Parte I

Indutância

Capítulo 1

Coeficiente de Indutância

1.1 Introdução

O conceito de coeficiente de indutância (auto-indutância ou indutância mútua) surge, por exemplo, quando estudamos a energia de interação entre circuitos elétricos. Esta energia de interação possui um fator que depende única e exclusivamente da geometria dos circuitos. Este fator é denominado auto-indutância quando analisamos a auto-energia de um circuito; e indutância mútua quando a interação é entre circuitos distintos.

Estudaremos neste trabalho quatro fórmulas para o cálculo do coeficiente de indutância. São elas: a de Neumann, a de Weber, a de Maxwell, e a de Graneau. As três primeiras são conhecidas desde o fim do século passado, enquanto que a última é uma proposta recente.

Além da importância teórica do coeficiente de indutância, ele tem uma grande utilização prática. O projeto de indutores ou o cálculo da indutância de determinados circuitos são problemas práticos encontrados em engenharia elétrica, principalmente na área de comunicação. A força entre circuitos com corrente elétrica também é obtida, em geral, a partir do coeficiente de indutância.

A equivalência entre as fórmulas de Neumann, Weber e Maxwell para o cálculo da indutância mútua entre circuitos de corrente fechados é um resultado já estabelecido [Dar93]. Mostraremos que esta equivalência se estende para o caso da auto-indutância de um circuito de corrente fechado, para as quatro fórmulas citadas acima. Este é um resultado novo.

Outro resultado que apresentamos nesta parte é uma técnica para o cálculo do coeficiente de indutância. Uma das vantagens que este método proporciona é a obtenção, a princípio, de resultados exatos e algébricos. Faremos uma comparação dos resultados obtidos com este método, com os obtidos tradicionalmente por métodos de aproximação.

1.2 Elemento de Corrente

Definimos aqui o conceito de elemento de corrente que utilizaremos por diversas vezes neste trabalho. Uma discussão mais detalhada sobre este tópico pode ser encontrada em [Gra85a].

Este conceito foi introduzido em 1820 com a lei de Biot-Savart para o campo magnético gerado por um elemento de corrente. A forma como o utilizamos hoje é fruto de uma hipótese atômica da corrente elétrica, que possibilitou a unificação da eletrostática (força de Coulomb) com a eletrodinâmica (força de Ampère): a hipótese de Fechner. Esta hipótese afirma que a corrente elétrica em condutores metálicos é formada por densidades iguais de cargas positivas e negativas se movimentando em sentidos opostos e com mesma velocidade em módulo. Hoje sabemos que esta hipótese não é verdadeira¹. É fácil corrigir este modelo supondo que apenas as cargas negativas são responsáveis pela corrente, permanecendo as cargas positivas em repouso com relação ao fio. Neste trabalho utilizamos esta última hipótese.

A corrente elétrica em condutores metálicos é constituída por íons positivos fixos na rede cristalina e elétrons livres que se movimentam através do condutor, sendo que a carga líquida do condutor é nula. Esta é uma visão ingênua da verdadeira constituição do interior de um condutor metálico, mas que é extremamente útil quando estamos interessados na análise dos resultados macroscópicos.

Seja então um circuito elétrico Γ onde flui uma corrente I . Um elemento de corrente deste circuito é representado por $I d\vec{r}$, onde $dr \equiv |d\vec{r}|$ é o comprimento infinitesimal deste elemento e $d\vec{r}$ aponta na direção da corrente, tangencialmente em cada ponto do circuito. Supomos que cada elemento de corrente é composto de cargas positivas e negativas: dq_+ e dq_- . As velocidades médias destas cargas em relação a um referencial O são representadas por \vec{v}_+ e \vec{v}_- , respectivamente. Em termos de suas cargas e velocidades um elemento de corrente é definido por

$$I d\vec{r} \equiv dq_+ \vec{v}_+ + dq_- \vec{v}_- = dq_+ (\vec{v}_+ - \vec{v}_-). \quad (1.1)$$

Nesta última igualdade utilizamos a neutralidade elétrica do elemento de corrente, $dq_- = -dq_+$.

Caso o fio esteja em repouso em relação ao referencial O teremos $\vec{v}_+ = 0$, já que supomos as cargas positivas paradas em relação ao fio. Neste caso \vec{v}_- será a velocidade de arraste ou de "drifting" dos elétrons: $\vec{v}_- = \vec{v}_d$, onde \vec{v}_d é a velocidade média dos elétrons em relação ao fio. Mesmo quando o fio ou

¹ Leia mais sobre a hipótese de Fechner na Parte II, Seção 5.1.2.

o elemento de corrente se move com velocidade \vec{V} em relação ao referencial O teremos $\vec{v}_+ - \vec{v}_- = -\vec{v}_d$, já que $\vec{v}_+ = \vec{V}$ e $\vec{v}_- = \vec{V} + \vec{v}_d$.

Se tratarmos o fio como sendo composto por elementos de corrente lineares (desprezando sua seção reta comparada com seu comprimento) teremos:

$$dq_+ = \lambda_+ dr, \quad (1.2)$$

onde λ_+ é a densidade linear de carga positiva no fio. Neste caso:

$$I d\vec{r} = \lambda_+ (\vec{v}_+ - \vec{v}_-) dr. \quad (1.3)$$

1.3 Fórmula de Indutância de Neumann

Com o objetivo de explicar o fenômeno da indutância de Faraday com a utilização da força entre elementos de corrente de Ampère, F. Neumann realizou um desenvolvimento teórico que levou ao conceito de potencial vetor e coeficiente de indutância. Não apresentaremos aqui o caminho que Neumann seguiu para partir da teoria de Ampère e chegar a uma teoria que explica a indução de Faraday. Ao leitor interessado indicamos a leitura de [Whi73], Vol. 1, págs. 198–205 e 230–236.

1.3.1 Energia de Neumann entre Elementos de Corrente

Dados os elementos de corrente $I_1 d\vec{r}_i$ e $I_2 d\vec{r}_j$, localizados em \vec{r}_i e \vec{r}_j e com correntes I_1 e I_2 , respectivamente (Fig. 1.1), a energia de Neumann $d^2V_{ij}^N$ entre eles é ([Whi73], Vol. 1, pág. 233):

$$d^2V_{ij}^N = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j}{r_{ij}}. \quad (1.4)$$

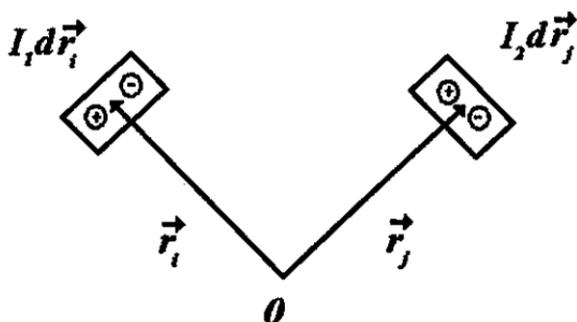


Figura 1.1: Elementos de corrente.

1.3.2 Fórmula de Neumann

Considere dois circuitos fechados Γ_1 e Γ_2 com correntes I_1 e I_2 , respectivamente. Um elemento de corrente do circuito Γ_1 é $I_1 d\vec{r}_i$, e do circuito Γ_2 é $I_2 d\vec{r}_j$, respectivamente localizados em \vec{r}_i e \vec{r}_j (Fig. 1.2).

A energia de interação V_{12}^N entre os circuitos Γ_1 e Γ_2 é obtida integrando a Eq. (1.4) para os circuitos Γ_1 e Γ_2 :

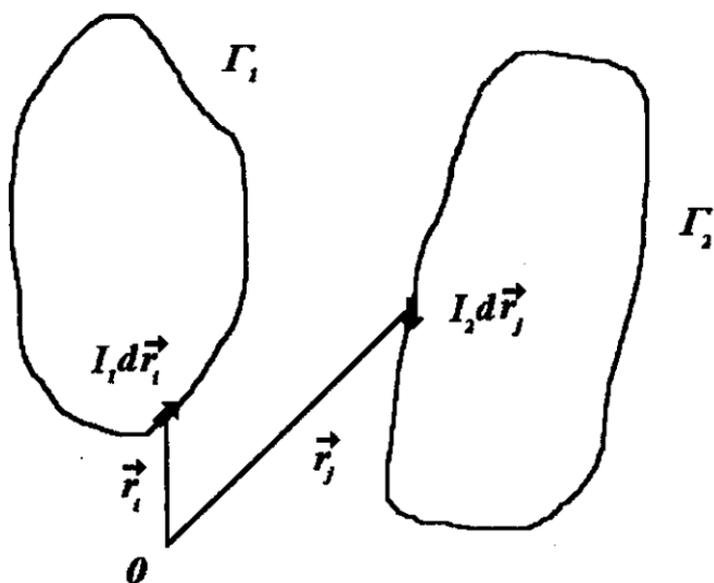


Figura 1.2: Circuitos fechados Γ_1 e Γ_2 com elementos de corrente $I_1 d\vec{r}_1$ e $I_2 d\vec{r}_2$, respectivamente.

$$V_{12}^N = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{r_{12}}, \quad (1.5)$$

Podemos então escrever a energia V_{12}^N como $I_1 I_2 M_{12}^N$, onde M_{12}^N é o coeficiente geométrico denominado indutância mútua. Portanto, de (1.5),

$$\begin{aligned} M_{12}^N &\equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{r_{12}} \\ &= M_{21}^N. \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.4 Fórmula de Indutância de Weber

Antes de apresentarmos a fórmula de Weber para o coeficiente de indutância vamos apresentar a energia de Weber.

1.4.1 Energia de Weber

A energia potencial eletrodinâmica de Weber é uma generalização da energia potencial coulombiana. Enquanto que a última se aplica a cargas em repouso entre si, a primeira é uma proposta para descrever a interação eletrodinâmica entre partículas carregadas em movimento.

Considere duas cargas pontuais q_1 e q_2 localizadas, respectivamente, em \vec{r}_1 e \vec{r}_2 em relação a um referencial O (Fig. 1.3). A energia potencial eletrodinâmica V_{12}^W entre estas cargas, proposta por Weber, [Web48, Web66] e [Ass94], Seção 3.3, é:

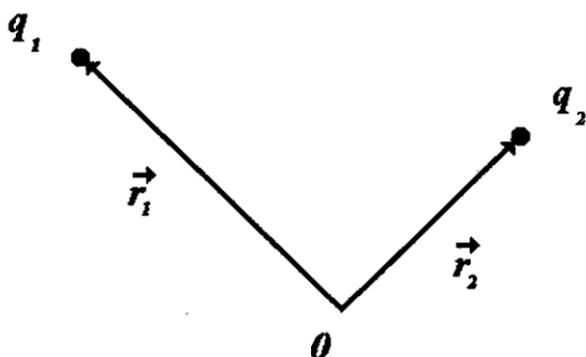


Figura 1.3: Cargas q_1 e q_2 localizadas respectivamente em \vec{r}_1 e \vec{r}_2 .

$$V_{12}^W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}}{2c^2} \right), \quad (1.7)$$

onde ϵ_0 é a permissividade no vácuo, $\dot{r}_{12} \equiv dr_{12}/dt$ a velocidade radial entre as cargas, e $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ é a razão entre as unidades eletromagnética e eletrostática de carga.

Utilizando que $r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ é fácil obter que

$$\dot{r}_{12} = \frac{dr_{12}}{dt} = \frac{\vec{r}_{12} \cdot \dot{\vec{r}}_{12}}{r_{12}} = \hat{r}_{12} \cdot \dot{\vec{r}}_{12}, \quad (1.8)$$

onde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, e $\dot{\vec{r}}_{12} \equiv d\vec{r}_{12}/dt$ é a velocidade relativa entre as cargas no referencial O .

A energia de Weber satisfaz a conservação de energia mecânica para um sistema fechado. Uma análise detalhada da energia de Weber encontra-se em [Ass94], Capítulo 3.

A energia de Weber possui termos até segunda ordem em v/c , Eq. (1.7). Uma possível generalização recente da energia de Weber que inclui termos de todas as ordens em v/c é a energia de Phipps [Phi90, Bue94, BA95a].

1.4.2 Energia de Weber entre Elementos de Corrente

Aplicaremos a energia de Weber definida pela Eq. (1.7) ao modelo de elemento de corrente descrito na Seção 1.2. Considere os elementos de corrente da Fig. 1.1. Definimos a energia de Weber entre os elementos de corrente $d^2V_{ij}^W$ como sendo,

$$d^2V_{ij}^W \equiv d^2V_{i+j+} + d^2V_{i+j-} + d^2V_{i-j+} + d^2V_{i-j-}, \quad (1.9)$$

onde:

$$d^2V_{i+j+} = \frac{dq_{i+}dq_{j+}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{i+j+}} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_{i+j+} \cdot \vec{r}_{i+j+})^2}{2r_{i+j+}^2 c^2} \right), \quad (1.10)$$

$$d^2V_{i+j-} = \frac{dq_{i+}dq_{j-}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{i+j-}} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_{i+j-} \cdot \vec{r}_{i+j-})^2}{2r_{i+j-}^2 c^2} \right), \quad (1.11)$$

$$d^2V_{i-j+} = \frac{dq_{i-}dq_{j+}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{i-j+}} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_{i-j+} \cdot \vec{r}_{i-j+})^2}{2r_{i-j+}^2 c^2} \right), \quad (1.12)$$

$$d^2V_{i-j-} = \frac{dq_{i-}dq_{j-}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{i-j-}} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_{i-j-} \cdot \vec{r}_{i-j-})^2}{2r_{i-j-}^2 c^2} \right), \quad (1.13)$$

sendo dq_{i+} a carga infinitesimal positiva em $I_1 d\vec{r}_i$, $\dot{\vec{r}}_{i+j+} \equiv d(\vec{r}_i - \vec{r}_j+)/dt$, e assim por diante.

Como estamos interessados numa análise macroscópica, podemos usar a hipótese que $\vec{r}_{i+j+} = \vec{r}_{ij}$, o mesmo valendo para as expressões análogas em (1.11), (1.12), (1.13). Sendo neutros os elementos de corrente ($dq_{i-} = -dq_{i+}$), com a definição (1.1) e as Eqs. (1.9) a (1.13), obtemos:

$$d^2V_{ij}^W = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{(d\vec{r}_i \cdot \hat{r}_{ij})(d\vec{r}_j \cdot \hat{r}_{ij})}{r_{ij}}, \quad (1.14)$$

onde utilizamos a relação $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$.

1.4.3 Fórmula de Weber

Consideremos que os elementos de corrente da Seção anterior pertençam, respectivamente, aos circuitos Γ_1 e Γ_2 da Fig. 1.2.

A energia mútua de Weber entre os circuitos Γ_1 e Γ_2 é:

$$V_{12}^W = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}}. \quad (1.15)$$

Análogo ao que foi feito com a energia de Neumann, Seção 1.3.2, definimos um coeficiente de indutância mútua de Weber M_{12}^W escrevendo a Eq. (1.15) como $I_1 I_2 M_{12}^W$. De (1.15),

$$\begin{aligned} M_{12}^W &\equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}} \\ &= M_{21}^W. \end{aligned} \quad (1.16)$$

1.5 Fórmula de Indutância de Maxwell

A fórmula de indutância de Maxwell pode ser derivada da lagrangiana de Darwin. Apresentamos a seguir a lagrangiana de Darwin.

1.5.1 Energia de Darwin

Uma lagrangiana relativisticamente correta e com termos de todas as ordens em v/c , que descreva a interação entre partículas carregadas com movimento aleatório, é uma questão ainda sem solução na eletrodinâmica clássica. Até termos de segunda ordem em v/c temos a lagrangiana de Darwin, introduzida por Darwin no começo deste século [Dar20]. A lagrangiana de Darwin L^D para um sistema de duas cargas q_1 e q_2 é dada por ([Dar20]; [Jac75], Seção 12.7 págs. 593–595; [Ass94], Seção 6.8):

$$L^D = L^f - U_{12}^D. \quad (1.17)$$

Nesta expressão L^f é a lagrangiana das partículas livres dada classicamente por $m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$ e relativisticamente por $-m_{o1} c^2 \sqrt{1 - v_1^2/c^2} - m_{o2} c^2 \sqrt{1 - v_2^2/c^2}$. Já U_{12}^D é a energia potencial lagrangiana de Darwin dada por

$$U_{12}^D = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left(1 - \frac{\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2 + (\dot{\vec{r}}_1 \cdot \hat{r}_{12})(\dot{\vec{r}}_2 \cdot \hat{r}_{12})}{2c^2} \right), \quad (1.18)$$

onde $\dot{\vec{r}}_1 \equiv d\vec{r}_1/dt$ e $\dot{\vec{r}}_2 \equiv d\vec{r}_2/dt$ são, respectivamente, as velocidades das cargas q_1 e q_2 em relação a um referencial inercial O .

A hamiltoniana de Darwin H^D para estas duas cargas é a energia total do sistema que se conserva, E , dada por:

$$\begin{aligned} H^D &= \left(\sum_{k=1}^6 \dot{q}_k \frac{\partial L^D}{\partial \dot{q}_k} \right) - L^D \\ &= T + V_{12}^D = E, \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde q_k é uma coordenada generalizada e $\dot{q}_k = dq_k/dt$ a respectiva velocidade generalizada. Aqui T é a energia cinética do sistema dada classicamente por $m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$, e relativisticamente por $m_{o1} c^2 / \sqrt{1 - v_1^2/c^2} + m_{o2} c^2 / \sqrt{1 - v_2^2/c^2}$. Além disto, V_{12}^D é a energia potencial de Darwin dada por:

$$V_{12}^D = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2 + (\dot{\vec{r}}_1 \cdot \hat{r}_{12})(\dot{\vec{r}}_2 \cdot \hat{r}_{12})}{2c^2} \right). \quad (1.20)$$

Deve ser observada a mudança de sinal em frente do termo com $1/2c^2$ em U_{12}^D e V_{12}^D .

O análogo clássico para a energia de Weber (1.7) é a energia de Darwin (1.20).

1.5.2 Energia de Maxwell entre Elementos de Corrente

Calcularemos a energia entre dois elementos de corrente utilizando a energia de Darwin introduzida na última Seção. Chamamos esta expressão de energia de Maxwell tendo em vista que é dela que derivamos o coeficiente de indutância de Maxwell. Definimos a energia de Maxwell $d^2V_{ij}^M$ como

$$d^2V_{ij}^M \equiv d^2V_{i+j+}^M + d^2V_{i+j-}^M + d^2V_{i-j+}^M + d^2V_{i-j-}^M, \quad (1.21)$$

onde:

$$d^2V_{i+j+}^M = \frac{dq_i + dq_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{i+j+}} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_{i+} \cdot \dot{\vec{r}}_{j+} + (\dot{\vec{r}}_{i+} \cdot \hat{r}_{i+j+})(\dot{\vec{r}}_{j+} \cdot \hat{r}_{i+j+})}{2c^2} \right), \quad (1.22)$$

$$d^2V_{i+j-}^M = \frac{dq_i + dq_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{i+j-}} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_{i+} \cdot \dot{\vec{r}}_{j-} + (\dot{\vec{r}}_{i+} \cdot \hat{r}_{i+j-})(\dot{\vec{r}}_{j-} \cdot \hat{r}_{i+j-})}{2c^2} \right), \quad (1.23)$$

$$d^2V_{i-j+}^M = \frac{dq_i - dq_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{i-j+}} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_{i-} \cdot \dot{\vec{r}}_{j+} + (\dot{\vec{r}}_{i-} \cdot \hat{r}_{i-j+})(\dot{\vec{r}}_{j+} \cdot \hat{r}_{i-j+})}{2c^2} \right), \quad (1.24)$$

$$d^2V_{i-j-}^M = \frac{dq_i - dq_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{i-j-}} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_{i-} \cdot \dot{\vec{r}}_{j-} + (\dot{\vec{r}}_{i-} \cdot \hat{r}_{i-j-})(\dot{\vec{r}}_{j-} \cdot \hat{r}_{i-j-})}{2c^2} \right). \quad (1.25)$$

Substituindo (1.22) a (1.25) em (1.21) e invocando as mesmas hipóteses utilizadas no parágrafo anterior à Eq. (1.14), resulta que

$$d^2V_{ij}^M = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j) + (d\vec{r}_i \cdot \hat{r}_{ij})(d\vec{r}_j \cdot \hat{r}_{ij})}{2r_{ij}}. \quad (1.26)$$

Desde o século passado já se sabia que esta é a expressão correta na eletrodinâmica de Maxwell para a energia de interação entre dois elementos de corrente: [Woo68, Wis81, Arc89] e [Whi73], Vol. 1, págs. 233–234.

1.5.3 Fórmula de Maxwell

Aplicando a expressão (1.26) para calcular a energia mútua V_{12}^M dos circuitos da Fig. 1.2, resulta

$$V_{12}^M = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \left(\frac{(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j) + (\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_j)}{2r_{ij}} \right). \quad (1.27)$$

Com a definição anterior que demos para M_{12} (ver Seção 1.3.2), de (1.27) temos:

$$\begin{aligned} M_{12}^M &\equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \left(\frac{(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j) + (\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_j)}{2r_{ij}} \right) \\ &= M_{21}^M. \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.6 Fórmula de Indutância de Graneau

O crescimento nos últimos anos do interesse em se estudar os fundamentos da eletrodinâmica é devido, em grande parte, aos trabalhos de Peter Graneau. Graneau, desde 1982 (ver [Gra82b]), vem realizando uma série de experimentos relacionados ao assunto, motivando outros físicos a desenvolverem trabalhos na área, tanto experimentais quanto teóricos. Apesar de aceitar a expressão de Neumann para a energia de interação entre circuitos fechados de corrente, Eq. (1.5), Graneau propôs uma outra energia para a interação entre elementos de corrente, diferente daquela que chamamos aqui de energia de Neumann entre elementos de corrente (Eq. (1.4)). Apresentamos a seguir a energia de Graneau.

1.6.1 Energia de Graneau entre Elementos de Corrente

Em seu livro de 1985 [Gra85a], Graneau atribui uma energia eletrodinâmica $d^2V_{ij}^G$ entre elementos de corrente. Para os elementos de corrente da Fig. 1.1 podemos escrevê-la como ([Gra85a], pág. 212):

$$d^2V_{ij}^G \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \left(\frac{3(d\vec{r}_i \cdot \hat{r}_{ij})(d\vec{r}_j \cdot \hat{r}_{ij}) - 2(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}} \right), \quad (1.29)$$

1.6.2 Fórmula de Graneau

Da expressão (1.29), através do procedimento seguido nas seções correspondentes às fórmulas de Neumann, Weber e Maxwell, deduzimos a energia mútua V_{12}^G e a indutância mútua M_{12}^G entre circuitos fechados distintos:

$$V_{12}^G = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \left(\frac{3(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_j) - 2(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}} \right), \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} M_{12}^G &\equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \left(\frac{3(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_j) - 2(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}} \right) \\ &= M_{21}^G. \end{aligned} \quad (1.31)$$

1.7 Equivalência Parcial

Em analogia com a simplificação que Helmholtz utilizou para escrever uma única expressão para a energia eletrodinâmica, [Woo68, Wis81, Arc89] e [Whi73], Vol. 1, págs. 233–234, escreveremos uma expressão para a indutância mútua entre dois elementos, que resume as quatro fórmulas anteriormente apresentadas.

Dados dois elementos de corrente, $I_1 d\vec{r}_i$, em \vec{r}_i , e $I_2 d\vec{r}_j$, em \vec{r}_j , a indutância mútua entre eles é dada por:

$$\begin{aligned} d^2 M_{ij} &\equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}} + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}} \right] \\ &= \left(\frac{1+k}{2} \right) d^2 M_{ij}^N + \left(\frac{1-k}{2} \right) d^2 M_{ij}^W, \end{aligned} \quad (1.32)$$

onde k é uma constante adimensional. A energia mútua entre eles é dada simplesmente por $d^2 V_{ij} = I_1 I_2 d^2 M_{ij}$.

Obtemos $d^2 M_{ij} = d^2 M_{ij}^N$ com $k = 1$; $d^2 M_{ij} = d^2 M_{ij}^W$ com $k = -1$; $d^2 M_{ij} = d^2 M_{ij}^M$ com $k = 0$; e $d^2 M_{ij} = d^2 M_{ij}^G$ com $k = -5$.

Quando integramos a expressão (1.32) para calcular a indutância mútua entre dois circuitos fechados, obtemos um resultado que é independente de k . Este resultado é um fato conhecido, [Dar93] e [Ass94], Seção 4.6. Assim, quando calculamos a indutância mútua entre dois circuitos distintos (por exemplo os da Fig. 1.2) obtemos o mesmo resultado com as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau.

Apresentamos aqui uma prova simples deste fato. Consideremos a integração de (1.32) para dois circuitos distintos Γ_1 e Γ_2 :

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1-k}{2} \right) \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}} \right]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Considerando só a integração em Γ_1 na segunda parcela de (1.33) e utilizando o teorema de Stokes temos:

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}} = \int \int_{S_{\Gamma_1}} \vec{\nabla}_i \times \left(\frac{(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_j) \hat{r}_{ij}}{r_{ij}} \right) \cdot d\vec{S}_1. \quad (1.34)$$

Expandindo o rotacional no integrando acima e utilizando algumas identidades vetoriais simples chegamos a:

$$\begin{aligned}
\int \int_{S_{\Gamma_1}} \vec{\nabla}_i \times \left(\frac{(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_i) \hat{r}_{ij}}{r_{ij}} \right) \cdot d\vec{S}_i &= \int \int_{S_{\Gamma_1}} d\vec{r}_j \times \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \cdot d\vec{S}_i \\
&= \int \int_{S_{\Gamma_1}} \vec{\nabla}_i \times \left(\frac{d\vec{r}_j}{r_{ij}} \right) \cdot d\vec{S}_i \\
&= \oint_{\Gamma_1} \frac{(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}}, \quad (1.35)
\end{aligned}$$

onde na última passagem de (1.35) utilizamos novamente o teorema de Stokes.

De (1.34) e (1.35) concluímos que:

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}} = \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j}{r_{ij}}, \quad (1.36)$$

que substituído em (1.33) mostra que M_{12} é independente de k . Ou seja, a indutância mútua entre dois circuitos fechados de corrente tem o mesmo valor com as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau.

Com relação a auto-indutância de um circuito fechado de corrente o primeiro problema que temos é com a utilização do modelo linear de elemento de corrente. A expressão (1.32) diverge quando temos $i \rightarrow j$. Assim, não podemos utilizá-la para calcular a auto-indutância. O segundo problema com relação à auto-indutância, ainda não resolvido, é saber se as fórmulas apresentadas anteriormente são equivalentes entre si, da mesma forma que são para o cálculo da indutância mútua entre dois circuitos de corrente fechados. Trataremos destes assuntos, apresentando suas soluções, nos Capítulos seguintes.

Capítulo 2

Cálculo do Coeficiente de Indutância

2.1 Introdução

Na eletrodinâmica clássica a fórmula usual para o cálculo do coeficiente de indutância é a fórmula de Neumann. Ela é a expressão mais simples entre todas as apresentadas aqui para o cálculo do coeficiente. Apesar disto, é só nos casos mais simples que ele pode ser calculado exatamente. Para casos mais complicados são empregados métodos de aproximação que utilizam estes resultados exatos. A fórmula de Neumann apresenta, como as outras, problemas de divergência quando utilizada para calcular a auto-indutância de um circuito simples ou a indutância mútua entre circuitos que têm pontos de contato.

A causa desta divergência é a utilização no modelo de elemento de corrente do elemento linear, introduzido na Seção 1.2 e utilizado nas Seções subsequentes para a apresentação das fórmulas.

O elemento linear é uma aproximação da realidade. Ele é útil quando a área da seção reta do fio é pequena comparada com sua área superficial (isto é, quando o diâmetro do fio é muito menor que seu comprimento). Quando os elementos lineares estão em contato, a expressão (1.32) não pode ser utilizada para calcular indutância, devido a problemas de divergência.

Para resolver este problema usualmente utilizam-se métodos de aproximação. Uma apresentação destes métodos e a aplicação a inúmeras situações práticas podem ser encontradas no livro do Grover [Gro46]. Dentre eles citamos: *integração de fórmulas básicas* através da seção reta do circuito (como por exemplo calcular a auto-indutância de uma bobina de seção reta circular utilizando para isto a indutância mútua entre anéis circulares); *expansão em série de Taylor* para a indutância mútua entre condutores com área da seção reta de dimensões grandes, utilizando para a expansão a indutância mútua entre os condutores centrais; *fórmula da quadratura de Rayleigh*, que é uma variação do método da expansão em série de Taylor, variando justamente a maneira como se calcula os termos da série; para bobinas coaxiais uma variação do método de Rayleigh é conhecido como *método Lyle dos filamentos equivalentes*; para obter melhores resultados com estes métodos de expansão utiliza-se o *princípio de seccionamento*, onde divide-se a seção reta do condutor em regiões nas quais será aplicado o método de expansão; e talvez o mais utilizado que é o *método da distância média geométrica*, onde substitui-se um condutor por diversos condutores equivalentes com elemento de corrente linear, e obtêm-se a indutância mútua do condutor original através da ponderação das distâncias entre os condutores equivalentes.

2.2 Descrição do Método Utilizado

Este trabalho utiliza um método para calcular auto-indutâncias, que permite, em princípio, a obtenção de resultados exatos para qualquer geometria, e pode ser utilizado quando o diâmetro do fio é da mesma ordem de grandeza que seu comprimento. Além do mais, outra vantagem deste método é que ele permite a obtenção de expressões algébricas para a auto-indutância. Os outros métodos usualmente apresentam resultados numéricos os quais precisam ser tabulados para diferentes geometrias.

Para resolver este problema nós simplesmente substituiremos o elemento linear $d\vec{r}$ por $\hat{\ell}da/\omega$, Fig. 2.1. Aqui, $\hat{\ell}$ é o vetor unitário indicando a direção do fluxo da corrente em cada ponto, ω é a largura perpendicular a $\hat{\ell}$ neste ponto e da é o elemento de área neste ponto. Se o fluxo de corrente é uniforme ao longo da seção reta de um condutor tridimensional nós substituímos $d\vec{r}$ por $\hat{\ell}dV/A$, Fig. 2.2. Aqui, A é a área da seção reta do fio em cada ponto e dV é o elemento de volume do condutor.

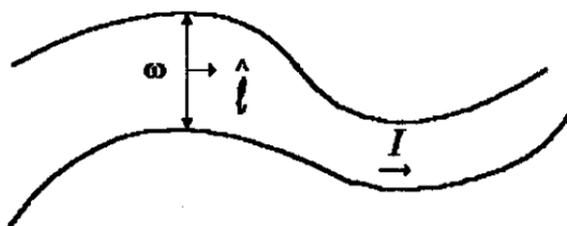


Figura 2.1: Corrente I fluindo através da superfície de uma fita.

Esta idéia é derivada do trabalho de Wesley [Wes90a]. Wesley utilizou pela primeira vez um tratamento similar, para comparar as forças de Ampère e Grassmann entre elementos de corrente. Especificamente, ele substituiu o elemento de corrente $Id\vec{r}$ por $\vec{J}dV$, onde \vec{J} é o vetor densidade de corrente volumétrica (com unidades Am^{-2}). Quando a corrente flui uniformemente em cada seção reta do fio nós temos $\vec{J} = \hat{\ell}I/A$. Utilizando este fato no tratamento empregado por Wesley ($Id\vec{r} \leftrightarrow \vec{J}dV$) nós chegamos ao nosso resultado. Analogamente, quando a corrente flui através de uma superfície nós temos $Id\vec{r} \leftrightarrow \vec{K}da$, sendo \vec{K} o vetor densidade de corrente superficial (com unidades Am^{-1}). Para fluxo uniforme de corrente através

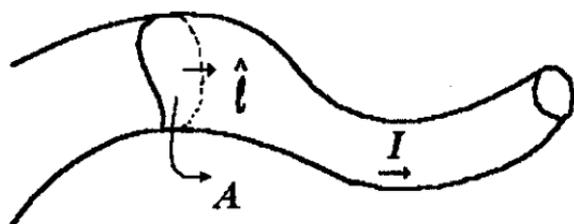


Figura 2.2: Corrente I fluindo através da seção reta de um fio.

de cada seção da superfície nós temos $\vec{K} = \hat{l}I/\omega$, obtendo nosso resultado anterior.

Fazendo estas substituições em (1.32) nós obtemos para elemento de corrente superficial e elemento de corrente volumétrico, respectivamente,

$$d^4 M_{1j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\omega_s \omega_j} \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{(\hat{\ell}_1 \cdot \hat{\ell}_j)}{r_{1j}} + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(\hat{r}_{1j} \cdot \hat{\ell}_1)(\hat{r}_{1j} \cdot \hat{\ell}_j)}{r_{1j}} \right] da_s da_j, \quad (2.1)$$

$$d^6 M_{1j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{A_s A_j} \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{(\hat{\ell}_1 \cdot \hat{\ell}_j)}{r_{1j}} + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(\hat{r}_{1j} \cdot \hat{\ell}_1)(\hat{r}_{1j} \cdot \hat{\ell}_j)}{r_{1j}} \right] dV_s dV_j. \quad (2.1)$$

$$d^6 M_{1j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\omega_s \omega_j} \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{(\hat{\ell}_1 \cdot \hat{\ell}_j)}{r_{1j}} + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(\hat{r}_{1j} \cdot \hat{\ell}_1)(\hat{r}_{1j} \cdot \hat{\ell}_j)}{r_{1j}} \right] dV_s dV_j. \quad (2.1)$$

$$d^6 M_{1j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{A_s A_j} \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{(\hat{\ell}_1 \cdot \hat{\ell}_j)}{r_{1j}} + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(\hat{r}_{1j} \cdot \hat{\ell}_1)(\hat{r}_{1j} \cdot \hat{\ell}_j)}{r_{1j}} \right] dV_s dV_j. \quad (2.1)$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\omega_s \omega_j} \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{(\hat{\ell}_1 \cdot \hat{\ell}_j)}{r_{1j}} + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(\hat{r}_{1j} \cdot \hat{\ell}_1)(\hat{r}_{1j} \cdot \hat{\ell}_j)}{r_{1j}} \right]$$

2.3 Comparação com Resultados Conhecidos

2.3.1 Solenóide com Corrente Poloidal

Nosso objetivo é calcular a auto-indutância de um solenóide de comprimento ℓ , N espiras de raio a e corrente I em cada espira, Fig. 2.3. Para simplificar o cálculo utilizamos uma idealização do solenóide que é um cilindro de comprimento ℓ e raio da seção reta transversal a , com uma densidade de corrente superficial poloidal¹ $\vec{K} = NI\hat{\phi}/\ell$, Fig. 2.4.

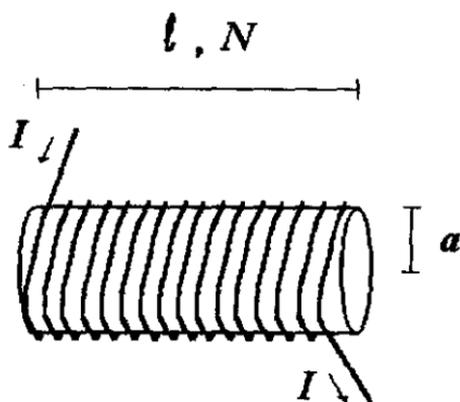


Figura 2.3: Solenóide com N espiras.

¹Estamos desprezando a corrente axial que existe em um solenóide real obtido com o enrolamento de fios, onde o vetor perpendicular ao plano que contém cada espira não aponta na direção \hat{z} . Esta corrente também é desprezada nos livros. Um dos poucos que comenta a respeito é [Gri89], págs. 219–221.

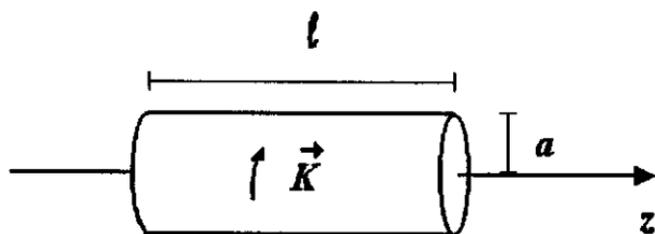


Figura 2.4: Cilindro utilizado para o cálculo da auto-indutância do solenóide da Fig. 2.3.

Utilizaremos coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) nas configurações desta Seção. Com a Fig. 2.4 e substituindo na Eq. (2.1) $\hat{\ell}_i = \hat{\ell}_j = \hat{\phi}$, $da_i = adz_i d\phi_i$, $da_j = adz_j d\phi_j$, $\omega_i = \omega_j = \ell$, $\vec{r}_i = a\hat{\rho}_i + z_i\hat{z}$, $\vec{r}_j = a\hat{\rho}_j + z_j\hat{z}$, e os limites de integração, obtemos que:

$$\begin{aligned}
 L_{\text{poloidal}} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a^2}{\ell^2} \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{2\pi} d\phi_j \int_0^\ell dz_i \int_0^\ell dz_j \\
 & \times \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{\cos(\phi_i - \phi_j)}{[2a^2(1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) + (z_i - z_j)^2]^{1/2}} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{a^2 \sin^2(\phi_i - \phi_j)}{[2a^2(1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) + (z_i - z_j)^2]^{3/2}} \right].
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Integrando primeiro em z_i e z_j , obtem-se:

$$\begin{aligned}
L_{poloidal} = & \frac{\mu_0 a^2}{4\pi \ell} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \left((1+k) \cos(\phi_1 - \phi_2) \right. \\
& \times \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\ell}{\sqrt{2} a (1 - \cos(\phi_1 - \phi_2))^{1/2}} \right) \right. \\
& + \sqrt{2} \left(\frac{a}{\ell} \right) (1 - \cos(\phi_1 - \phi_2))^{1/2} \\
& - \left. \left[1 + 2 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 (1 - \cos(\phi_1 - \phi_2)) \right]^{1/2} \right\} \\
& + \left(\frac{1-k}{2} \right) (1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)) \\
& \times \left\{ \left[1 + 2 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 (1 - \cos(\phi_1 - \phi_2)) \right]^{1/2} \right. \\
& \left. - \frac{a}{\ell} \sqrt{2} (1 - \cos(\phi_1 - \phi_2))^{1/2} \right\} \Bigg).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Como estamos interessados na situação onde $\ell \gg a$, expandimos o resultado da integração anterior até quarta ordem em a/l e em seguida integramos em ϕ_1 e ϕ_2 . O resultado obtido é:

$$L_{poloidal} \approx \frac{\mu_0 \pi a^2}{\ell} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right]. \tag{2.5}$$

O resultado acima independe de k . Isto significa que o valor da auto-indutância do cilindro com corrente poloidal tem o mesmo valor com as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau. Como dissemos anteriormente, esta equivalência sempre ocorre para a indutância mútua entre circuitos fechados de corrente. Mas, neste caso temos um único circuito fechado de corrente. Isto nos coloca a questão se também para a auto-indutância de um circuito fechado as fórmulas dão sempre o mesmo resultado. Discutiremos isto no Capítulo 4.

O valor da auto-indutância foi obtido até quarta ordem em a/l . Podemos obtê-lo até a ordem n , bastando que façamos a expansão do integrando da expressão (2.4) até a ordem n , e depois realizemos as integrações em ϕ_1 e ϕ_2 . Também podemos obter o resultado exato (não expandido), resolvendo a integração dupla em (2.4).

²Ver no Apêndice A descrição sobre o método de aproximação utilizado.

Como dissemos, este cilindro com corrente poloidal é uma idealização de um solenóide de comprimento ℓ com N espiras de corrente I . O valor da auto-indutância deste solenóide podemos encontrar em diversos livros de eletrodinâmica clássica. Por exemplo, [LCL88], pág. 442. O valor encontrado nestes livros para a aproximação $\ell \gg a$ é:

$$L_{poloidal}^{livros} = \mu_0 \pi N^2 \frac{a^2}{\ell}. \quad (2.6)$$

Este é exatamente o valor de (2.5) multiplicado por N^2 , deixando de lado os termos a partir de $1/2(a/\ell)^2$, calculado com o nosso método proposto. Nosso método já apresenta correções para este resultado aproximado dos livros.

Achamos que na fórmula de indutância não deve aparecer o fator N^2 (como aparece nos livros), pois a auto-indutância é um fator geométrico que não depende da corrente no circuito. No caso do solenóide, se alterarmos simplesmente o número de espiras por unidade de comprimento (N/ℓ), o que altera a corrente total NI , teremos uma alteração da auto-indutância através da fórmula dos livros, (2.6), mas não através do resultado obtido com a nossa fórmula, (2.5). O fator N^2 deve aparecer quando calculamos a auto-energia do solenóide, que neste caso é $1/2(NI)^2 L$. Nos livros a auto-indutância não é obtida com a fórmula de Neumann, mas sim utilizando $L = d\Phi/dI$, onde Φ é o fluxo magnético sobre o circuito. Este método dos livros só é útil em situações altamente simétricas nas quais se pode calcular Φ com uma certa facilidade.

2.3.2 Cilindro com Corrente Axial

Agora consideramos um cilindro de comprimento ℓ , seção reta circular de raio a , e uma corrente I na direção do eixo z , Fig. 2.5. Vamos calcular a auto-indutância deste cilindro.

Substituindo na Eq. (2.1) $\hat{\ell}_i = \hat{\ell}_j = \hat{z}$, $da_i = adz_i d\phi_i$, $da_j = adz_j d\phi_j$, $\omega_i = \omega_j = 2\pi a$, $\vec{r}_i = a\hat{\rho}_i + z_i\hat{z}$, $\vec{r}_j = a\hat{\rho}_j + z_j\hat{z}$ e os limites de integração, resulta:

$$\begin{aligned} L_{axial} = & \frac{\mu_0}{16\pi^3} \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{2\pi} d\phi_j \int_0^\ell dz_i \int_0^\ell dz_j \\ & \times \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{1}{[2a^2(1-\cos(\phi_i-\phi_j)) + (z_i-z_j)^2]^{1/2}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(z_i-z_j)^2}{[2a^2(1-\cos(\phi_i-\phi_j)) + (z_i-z_j)^2]^{3/2}} \right]. \quad (2.7) \end{aligned}$$

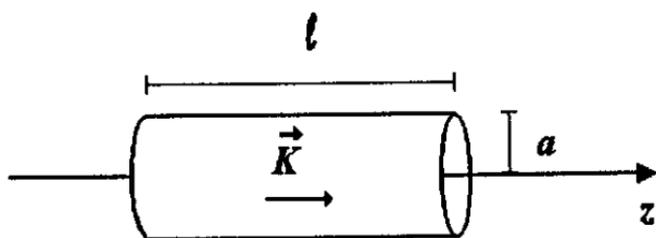


Figura 2.5: Cilindro com corrente axial.

Integrando a expressão (2.7) em z_i e z_j , o resultado é:

$$\begin{aligned}
 L_{axial} = & \frac{\mu_0 \ell}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{2\pi} d\phi_j \left(\left(\frac{1+k}{2} \right) \right. \\
 & \times \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\ell}{\sqrt{2} a (1 - \cos(\phi_i - \phi_j))^{1/2}} \right) \right. \\
 & + \sqrt{2} \left(\frac{a}{\ell} \right) (1 - \cos(\phi_i - \phi_j))^{1/2} \\
 & - \left. \left[1 + 2 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 (1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \right]^{1/2} \right\} \\
 & + \left(\frac{1-k}{2} \right) \times \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\ell}{\sqrt{2} a (1 - \cos(\phi_i - \phi_j))^{1/2}} \right) \right. \\
 & + 2 \sqrt{2} \left(\frac{a}{\ell} \right) (1 - \cos(\phi_i - \phi_j))^{1/2} \\
 & - \left. \left. \left[1 + 2 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 (1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \right]^{1/2} \right\} \right).
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Utilizando a aproximação $\ell \gg a$ expandimos o integrando de (2.8) até segunda ordem em a/l . Em seguida, integramos nas variáveis ϕ_i e ϕ_j , obtendo:

$$L_{axial} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{\ell}{a} \right) + \ln(2) + \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \left(\frac{k}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2} (k - 3) + O \left(\frac{a}{\ell} \right)^3 \right]. \quad (2.9)$$

O valor da auto-indutância do cilindro com corrente axial depende do valor de k . Portanto, terá valores diferentes para cada uma das fórmulas conforme o valor de k atribuído (ver Seção 1.7). Vale ressaltar que o cilindro com corrente axial, Fig. 2.5, não é um circuito de corrente fechado como o cilindro com corrente poloidal, Fig. 2.4.

Demonstramos com este exemplo que, para circuitos de corrente abertos as fórmulas para o cálculo de auto-indutância apresentadas no Capítulo 1 são, em geral, não equivalentes.

2.3.3 Cabo Coaxial

Calcularemos a auto-indutância de um cabo coaxial (Fig. 2.6), formado por dois cilindros concêntricos com raios b e a ($b > a$), iguais ao da Fig. 2.5, com correntes axiais em sentidos opostos nos cilindros. A auto-indutância $L_{coaxial}$ deste cabo coaxial pode ser trivialmente escrita como:

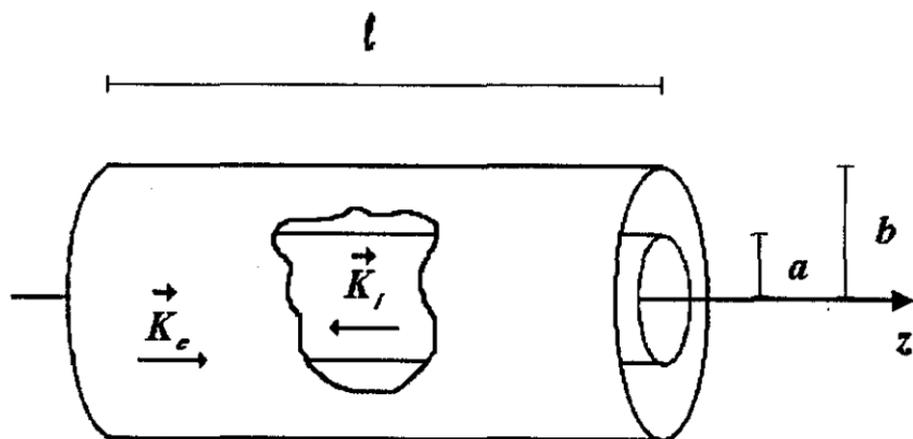


Figura 2.6: Cabo coaxial formado por dois cilindros concêntricos.

$$L_{coaxial} = L_a + L_b + 2M_{ab}, \quad (2.10)$$

onde L_a e L_b são, respectivamente, a auto-indutância do cilindro interno e externo, e M_{ab} é a indutância mútua entre eles.

Da expressão (2.10) já temos calculado L_a e L_b , a auto-indutância calculada para o cilindro com corrente axial (Fig. 2.5). O resultado até segunda

ordem em a/l ou b/l está em (2.9). Falta, portanto, calcular a indutância mútua M_{ab} . É o que fazemos a seguir.

A Eq. (2.1) com $\hat{\ell}_i = -\hat{\ell}_j = \hat{z}$, $da_i = adz_i d\phi_i$, $da_j = bdz_j d\phi_j$, $\omega_i = 2\pi a$, $\omega_j = 2\pi b$, $\vec{r}_i = a\hat{\rho}_i + z_i\hat{z}$, $\vec{r}_j = b\hat{\rho}_j + z_j\hat{z}$ e substituindo os limites de integração fornece:

$$\begin{aligned}
 M_{ab} = & -\frac{\mu_0}{16\pi^3} \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{2\pi} d\phi_j \int_0^\ell dz_i \int_0^\ell dz_j \\
 & \times \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{1}{[a^2 + b^2 - 2ab \cos(\phi_i - \phi_j) + (z_i - z_j)^2]^{1/2}} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(z_i - z_j)^2}{[a^2 + b^2 - 2ab \cos(\phi_i - \phi_j) + (z_i - z_j)^2]^{3/2}} \right].
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Resolvendo as integrais em z_i e z_j na Eq. (2.11) o resultado é:

$$\begin{aligned}
 M_{ab} = & -\frac{\mu_0 \ell}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{2\pi} d\phi_j \left(\left(\frac{1+k}{2} \right) \right. \\
 & \times \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\ell}{a(1+r^2 - 2r \cos(\phi_i - \phi_j))^{1/2}} \right) \right. \\
 & + \left(\frac{a}{\ell} \right) (1+r^2 - 2r \cos(\phi_i - \phi_j))^{1/2} \\
 & \left. - \left[1 + \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 (1+r^2 - 2r \cos(\phi_i - \phi_j)) \right]^{1/2} \right\} \\
 & + \left(\frac{1-k}{2} \right) \times \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\ell}{a(1+r^2 - 2r \cos(\phi_i - \phi_j))^{1/2}} \right) \right. \\
 & + 2 \left(\frac{a}{\ell} \right) (1+r^2 - 2r \cos(\phi_i - \phi_j))^{1/2} \\
 & \left. - 2 \left[1 + \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 (1+r^2 - 2r \cos(\phi_i - \phi_j)) \right]^{1/2} \right\} \Bigg),
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $r \equiv b/a$ ($r > 1$).

Antes de integrarmos (2.12) em ϕ_i e ϕ_j expandimos o integrando até segunda ordem em a/l e $a/b = 1/r$. Depois, substituímos r por b/a e integramos para chegar em:

$$\begin{aligned}
M_{12} = & -\frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2\ell}{b} \right) - \frac{3}{16} \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \left(\frac{b}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{a}{2\ell} \right)^2 (k-2) \right. \\
& + \left(\frac{b}{2\ell} \right)^2 (k-3) - \frac{a^2}{8b\ell} (k-3) - \frac{b}{2\ell} (k-3) \\
& \left. + \frac{1}{2} (k-3) + O \left(\frac{a}{\ell} \right)^3 + O \left(\frac{b}{\ell} \right)^3 \right]. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Por não formarem circuitos de corrente fechados, a indutância mútua entre os cilindros depende de k .

O valor da auto-indutância do cabo coaxial pode agora ser calculado. L_a e L_b são obtidos de (2.9), sendo que para o último substituímos a por b . Junto com M_{ab} , (2.13), em (2.10) finalmente temos que:

$$\begin{aligned}
L_{coaxial} = & \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \left(\frac{b}{\ell} \right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{a^2}{4b\ell} + \frac{b}{\ell} \right) (k-3) + O \left(\frac{a}{\ell} \right)^3 + O \left(\frac{b}{\ell} \right)^3 \right]. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Em livros, ver [FLS64], Vol. 2, págs. 24-1 a 24-3, encontramos que o valor da auto-indutância de um cabo coaxial análogo ao da Fig. 2.6 é dado por (supondo $\ell \gg b > a$):

$$L_{coaxial}^{livros} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (2.15)$$

O valor em (2.15) é exatamente a aproximação de ordem zero do resultado calculado pelo nosso método, (2.14).

O resultado dos livros foi obtido utilizando $U = 1/2(LI^2)$, onde U é a energia calculada através de $1/(2\mu_0) \iiint B^2 dV$ (B é o módulo do campo magnético).

Neste capítulo apresentamos o método que propomos para calcular o coeficiente de indutância. Além disto, calculamos a auto-indutância de um solenóide, Seção 2.3.1, e de um cabo coaxial, Seção 2.3.3, ilustramos sua exatidão (comparando nossos resultados com os dos livros) e utilidade (obtendo facilmente outras ordens de aproximação que aquelas apresentadas nos livros). A auto-indutância do solenóide independe de k , ou seja, tem o mesmo valor para as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau. Este fato, mesmo valor da auto-indutância de um circuito de corrente fechado com qualquer uma das fórmulas citadas acima, será demonstrado no Capítulo 4. Ser um circuito de corrente fechado é uma condição

necessária para esta equivalência, como constatamos com o cálculo da auto-indutância do cabo coaxial. Se fechássemos cada uma das laterais do cabo coaxial com um disco circular de raio b , com corrente fluindo axialmente do cilindro interno para o externo (ou vice-versa), o circuito seria fechado. Nesta situação a auto-indutância independeria de k , como provaremos num caso genérico adiante.

A seguir aplicaremos as fórmulas (1.32), (2.1) e (2.2) a diversas configurações nas quais o método dos livros ($L = d\Phi/dI$ e $L = 1/(I^2\mu_0) \int \int \int B^2 dV$) deixa de ser útil.

Capítulo 3

Indutância em Diversas Configurações

Utilizaremos as fórmulas (1.32), (2.1) e (2.2) para calcular a auto-indutância e a indutância mútua de diversos condutores [BA95c]. Em alguns casos compararemos nosso resultado com o análogo encontrado no livro do Grover [Gro46].

3.1 Elemento Linear

Apresentamos duas situações onde não há problema de divergência quando utilizamos elemento de corrente linear para calcular o coeficiente de indutância.

3.1.1 Fios Retilíneos e Paralelos

Vamos calcular a indução mútua M_{par} entre dois fios finitos e retilíneos, paralelos entre si, conduzindo corrente. A disposição dos fios está esquematizada na Fig. 3.1.

A Eq. (1.32) com $d\vec{r}_i = dx_i \hat{x}$, $d\vec{r}_j = dx_j \hat{x}$, $\vec{r}_i = x_i \hat{x}$, $\vec{r}_j = x_j \hat{x} + b\hat{y}$ e com os limites de integração resulta:

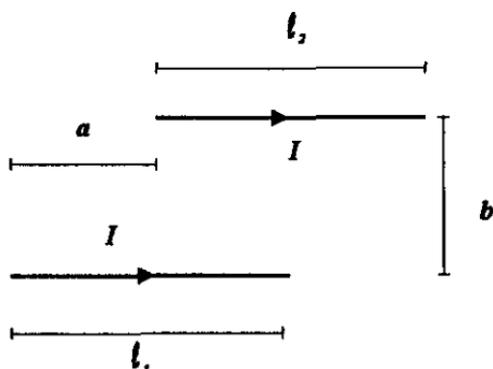


Figura 3.1: Dois fios retilíneos e paralelos, condutores de corrente.

$$\begin{aligned}
 M_{par} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\ell_1} dx_1 \int_a^{a+\ell_2} dx_2 \\
 &\times \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{1}{[(x_1-x_2)^2+b^2]^{1/2}} \right. \\
 &\left. + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(x_1-x_2)^2}{[(x_1-x_2)^2+b^2]^{3/2}} \right]. \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais em (3.1) nós obtemos o valor exato:

$$\begin{aligned}
 M_{par} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(a \sinh^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) + (a+\ell_2-\ell_1) \sinh^{-1} \left(\frac{a+\ell_2-\ell_1}{b} \right) \right. \\
 &+ (a-\ell_1) \sinh^{-1} \left(\frac{a-\ell_1}{b} \right) + (a+\ell_2) \sinh^{-1} \left(\frac{a+\ell_2}{b} \right) \\
 &+ \frac{(3-k)}{2} \left\{ (a^2+b^2)^{1/2} - [(a-\ell_1)^2+b^2]^{1/2} \right. \\
 &\left. - [(a+\ell_2)^2+b^2]^{1/2} + [(a+\ell_2-\ell_1)^2+b^2]^{1/2} \right\} \Bigg). \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

A expressão (3.2) mostra que a indutância mútua entre dois fios paralelos e finitos depende do valor de k . Portanto, ela tem diferentes valores de acordo com as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau.

3.1.2 Fios Retilíneos e Perpendiculares

Agora consideramos os fios retilíneos perpendiculares entre si, Fig. 3.2, e calculamos a indutância mútua M_{perp} .

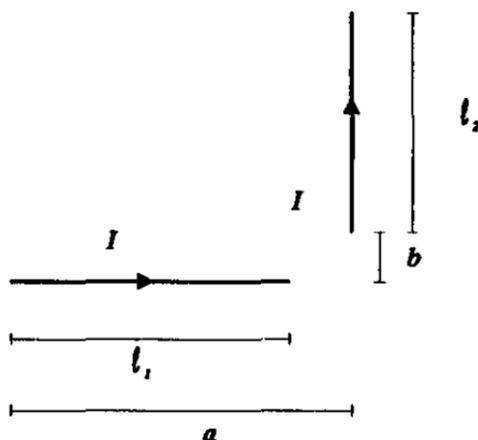


Figura 3.2: Dois fios retilíneos e perpendiculares, condutores de corrente.

Substituindo $d\vec{r}_i = dx_i \hat{x}$, $d\vec{r}_j = dy_j \hat{y}$, $\vec{r}_i = x_i \hat{x}$, $\vec{r}_j = a \hat{x} + y_j \hat{y}$, na Eq. (1.32) com os respectivos limites de integração obtemos:

$$M_{perp} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1-k}{2} \right) \int_0^{\ell_1} dx_i \int_b^{b+\ell_2} dy_j \left(\frac{(x_i - a)y_j}{[(x_i - a)^2 + y_j^2]^{3/2}} \right). \quad (3.3)$$

Resolvendo as integrais chega-se ao valor exato:

$$M_{perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1-k}{2} \right) \left\{ (a^2 + b^2)^{1/2} - [a^2 + (b + \ell_2)^2]^{1/2} - [(a - \ell_1)^2 + b^2]^{1/2} + [(a - \ell_1)^2 + (b + \ell_2)^2]^{1/2} \right\}. \quad (3.4)$$

O valor da indutância mútua dos fios na Fig. 3.2 tem uma peculiaridade. Apesar de termos utilizado elemento de corrente linear para o cálculo, o resultado não diverge quando consideramos que os fios se tocam ou se cruzam ($0 < a < \ell_1$, $-\ell_2 < b \leq 0$), como pode ser verificado em (3.4).

Novamente o valor obtido é dependente de k .

3.2 Elemento Superficial

Nesta Seção as configurações utilizam elemento de corrente superficial, pois o cálculo com elemento de corrente linear diverge.

3.2.1 Superfície Retangular

Considere a superfície retangular de lados ℓ e ω , com corrente uniforme I na direção \hat{x} (Fig. 3.3).

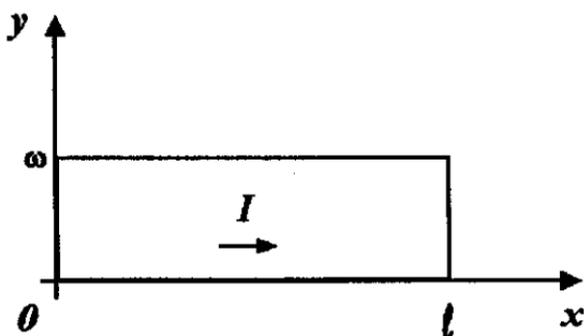


Figura 3.3: Superfície retangular.

Neste caso nós integramos a Eq. 2.1 para calcular a auto-indutância L_{sup} da superfície retangular condutora de corrente. Com $\hat{\ell}_i = \hat{\ell}_j = \hat{x}$, $\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y}$, $\vec{r}_j = x_j\hat{x} + y_j\hat{y}$, $\omega_i = \omega_j = \omega$, $da_i = dx_i dy_i$ e $da_j = dx_j dy_j$, nós obtemos

$$\begin{aligned}
 L_{sup} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\omega^2} \int_0^\ell dx_i \int_0^\omega dy_i \int_0^\ell dx_j \int_0^\omega dy_j \\
 &\times \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{1}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{1/2}} \right. \\
 &\left. + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(x_i - x_j)^2}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{3/2}} \right]. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais em (3.5) obtem-se:

$$\begin{aligned}
 L_{sup} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\omega^2} \left[2\ell\omega^2 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell}{\omega} \right) + (1+k)\ell^2\omega \sinh^{-1} \left(\frac{\omega}{\ell} \right) \right. \\
 & - \frac{(3-k)}{3}(\omega^2 + \ell^2)^{3/2} + (1-k)\ell^2(\omega^2 + \ell^2)^{1/2} \\
 & \left. + \frac{2k}{3}\ell^3 + \frac{(3-k)}{3}\omega^3 \right]. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Este resultado é exato. Isto mostra o quão poderoso é este método de cálculo de coeficiente de indutância. Ele fornece resultados em forma analítica. De maneira a comparar os resultados com a literatura, nós consideramos $\omega \ll \ell$. Expandindo este resultado em ω/ℓ e desprezando os termos de ordem superior a $(\omega/\ell)^3$ obtem-se:

$$L_{sup} \approx \frac{\mu_0 \ell}{4\pi} \left(2 \ln \left(\frac{2\ell}{\omega} \right) + k \right). \quad (3.7)$$

Mais uma vez o resultado depende de k . Fazendo ω/ℓ tender a zero o resultado diverge. Isto mostra que a auto-indutância de um fio reto de comprimento ℓ com elemento de corrente linear é infinita.

Como nós fizemos a hipótese $\omega \ll \ell$ este resultado aproximado é válido para qualquer terminação da superfície (ver Fig. 3.4(a) e Fig. 3.4(b)), e não somente para uma terminação retilínea (Fig. 3.3). Este resultado tende a infinito quando ω/ℓ tende a zero, mostrando a divergência que ocorre no cálculo da auto-indutância utilizando (1.32).

3.2.2 Superfícies Retangulares em Contato

Calcularemos a indutância mútua entre duas superfícies retangulares que estão em contato (Fig. 3.5).

Para a configuração da Fig. 3.5 temos: $\hat{\ell}_1 = -\hat{x}$, $\hat{\ell}_2 = -\hat{y}$, $\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y}$, $\vec{r}_j = x_j\hat{x} + y_j\hat{y}$, $da_i = dx_i dy_i$, $da_j = dx_j dy_j$, e $\omega_i = \omega_j = \omega$. Substituindo os valores acima em (2.1) com os limites de integração adequados, chega-se a:

$$\begin{aligned}
 M_{sup}^{cont} = & \frac{\mu_0}{4\pi\omega^2} \left(\frac{1-k}{2} \right) \int_0^{\ell_1} dx_i \int_{\ell_2-\omega}^{\ell_2} dy_i \int_0^{\omega} dx_j \int_0^{\ell_2-\omega} dy_j \\
 & \times \frac{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{3/2}}. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Como estamos interessados somente na aproximação $\omega \ll \ell_1$ e $\omega \ll \ell_2$, desprezaremos termos de ordens superiores a $(\omega/\ell_1)^3$ e $(\omega/\ell_2)^3$. Fazendo isto, obtemos a seguinte aproximação para M_{sup}^{cont} :

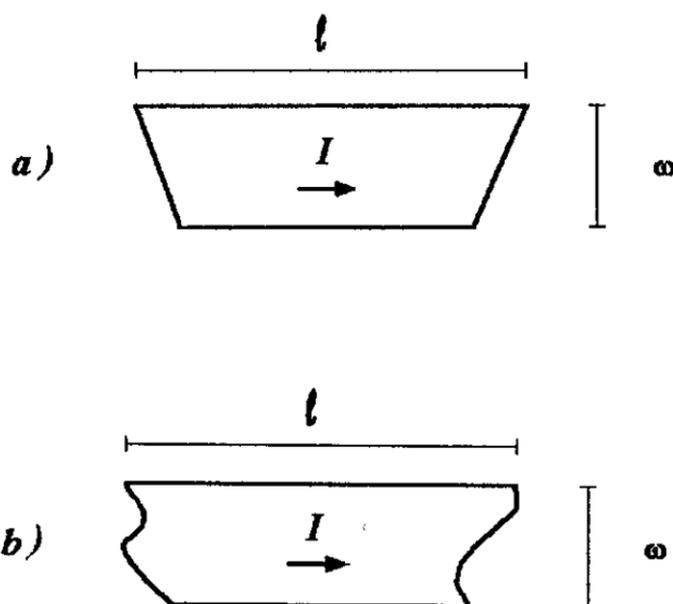


Figura 3.4: A auto-indutância destes circuitos, para $\omega \ll \ell$, também é dada por (3.7).

$$M_{sup}^{cont} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1-k}{2} \right) \left[\ell_1 + \ell_2 - (\ell_1^2 + \ell_2^2)^{1/2} \right]. \quad (3.9)$$

Esta expressão depende de k . Vale observar que o resultado acima não diverge para qualquer valor de ℓ_1 ou ℓ_2 , apesar das duas superfícies estarem em contato. Já havíamos obtido este resultado na Seção 3.1.2. Se considerarmos na Fig. 3.2 $a = \ell_1$, $b = 0$, obteremos a Fig. 3.5 no limite ω tendendo a zero. Fazendo estas substituições na Eq. (3.4) obtemos exatamente a Eq. (3.9).

Como o resultado (3.9) é válido somente quando $\omega \ll \ell_1$ e $\omega \ll \ell_2$, ele permanecerá válido para qualquer terminação das superfícies, como indicado nas Figs. 3.6(a) e 3.6(b). Este é o motivo que nos permite calcular a indutância mútua com as superfícies da Fig. 3.5, que não correspondem

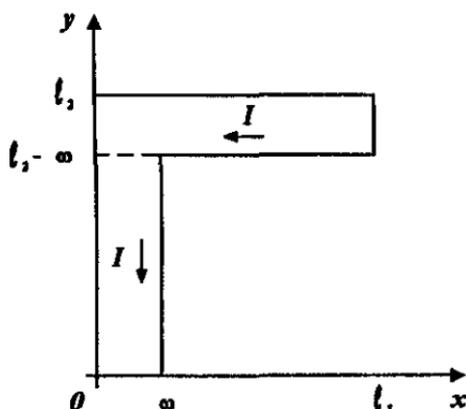


Figura 3.5: Superfícies retangulares em contato.

à realidade pois as linhas de corrente são descontínuas, ao invés de utilizarmos as superfícies da Fig. 3.6(a), onde as linhas de corrente não sofrem descontinuidade.

3.2.3 Circuito Retangular

Os resultados obtidos nas últimas Seções serão utilizados para calcular a auto-indutância L_{ccto}^{sup} do circuito retangular de lados ℓ_1 e ℓ_2 , e espessura constante ω . Há uma corrente superficial uniforme e constante I fluindo no circuito. Nos elementos 1 a 4 a direção da corrente é dada por, respectivamente: $+\hat{x}$, $-\hat{y}$, $-\hat{x}$ e $+\hat{y}$ (Fig. 3.7).

A auto-indutância do circuito acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} L_{ccto}^{sup} &= \sum_{i=1}^4 L_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 M_{ij} \\ &= 2L_1 + 2L_2 + 8M_{12} + 2M_{13} + 2M_{24}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde foi usado que, por simetria, $L_1 = L_3$, $L_2 = L_4$, $M_{12} = M_{21} = M_{14} = M_{41} = M_{23} = M_{32} = M_{34} = M_{43}$, $M_{13} = M_{31}$ e $M_{24} = M_{42}$.

Utilizando na Eq. (3.10): Eq. (3.2) para M_{13} e M_{24} , Eq. (3.7) para L_1 e L_2 e Eq. (3.9) para M_{12} , e simplificando o resultado com $\ell_1 \gg \omega$ e $\ell_2 \gg \omega$, chegamos a

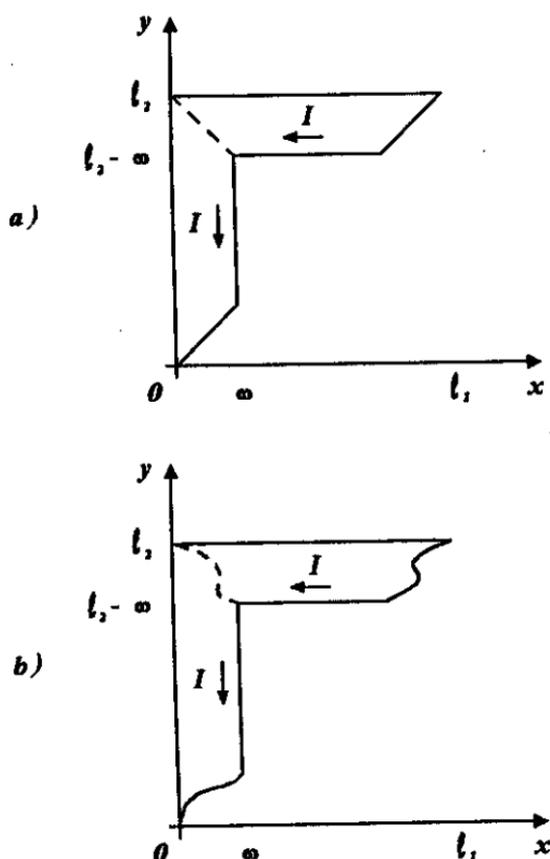


Figura 3.6: A indutância mútua destes circuitos quando $\omega \ll \ell_1$ e $\omega \ll \ell_2$ também é dada por (3.7).

$$\begin{aligned}
 L_{\text{cccto}}^{\text{sup}} = & \frac{\mu_0 \ell_2}{2\pi} \left[2 \ln \left(\frac{2\ell_2}{\omega} \right) + 2 \frac{\ell_1}{\ell_2} \ln \left(\frac{2\ell_1}{\omega} \right) - 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right) \right. \\
 & - 2 \frac{\ell_1}{\ell_2} \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1}{\ell_2} \right) + 4 \left(1 + \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \right)^{1/2} - \left(1 + \frac{\ell_1}{\ell_2} \right) \\
 & \left. + O \left(\frac{\omega}{\ell_1} \right)^3 + O \left(\frac{\omega}{\ell_2} \right)^3 \right]. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

O fato mais importante é que este resultado é independente de k . Apesar da auto-indutância de cada elemento ou a indutância mútua entre quaisquer

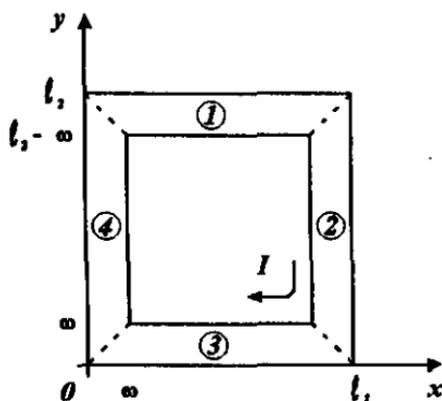


Figura 3.7: Circuito retangular superficial.

dois elementos do circuito depender de k , o mesmo não acontece com a auto-indutância deste circuito fechado. Este é um resultado completamente não trivial.

Nós ainda não podemos comparar este resultado com os da literatura, pois normalmente eles apresentam a auto-indutância de circuitos volumétricos. Faremos o cálculo para um circuito retangular com elemento de corrente volumétrico na próxima Seção.

3.3 Elemento Volumétrico

Faremos uso da Eq. (2.2) para o cálculo de auto-indutância e indutância mútua nesta Seção. Nosso objetivo é obter uma expressão para a auto-indutância de um circuito retangular com elemento de corrente volumétrico, análogo ao com elemento de corrente superficial (Fig. 3.7), para podermos comparar este resultado com o encontrado na literatura.

3.3.1 Fio de Seção Retangular

Na Fig. 3.8 apresentamos um fio de comprimento ℓ e seção reta retangular de lados ω_1 e ω_2 . Através desta seção reta flui uma corrente uniforme I . Para calcular a auto-indutância L_{fio}^{vol} deste fio integraremos a expressão (2.2) com as seguintes substituições: $\hat{\ell}_i = \hat{\ell}_j = \hat{x}$, $\vec{r}_i = x_i \hat{x} + y_i \hat{y} + z_i \hat{z}$, $\vec{r}_j = x_j \hat{x} + y_j \hat{y} + z_j \hat{z}$, $A_i = A_j = \omega_1 \omega_2$, $dV_i = dx_i dy_i dz_i$ e $dV_j = dx_j dy_j dz_j$. O resultado é:

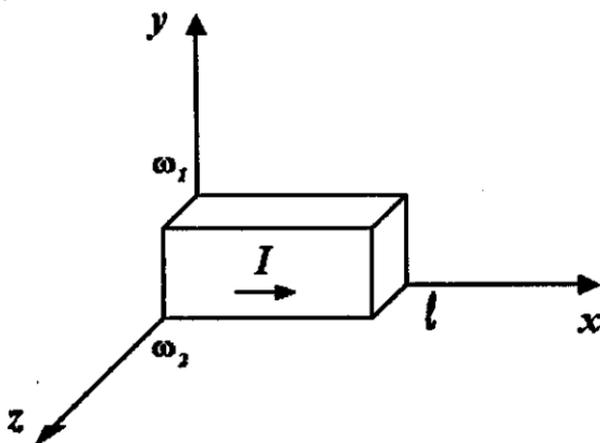


Figura 3.8: Fio de seção reta retangular.

$$\begin{aligned}
 L_{fio}^{vol} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\omega_1^2 \omega_2^2} \int_0^\ell dx_1 \int_0^{\omega_1} dy_1 \int_0^{\omega_2} dz_1 \int_0^\ell dx_2 \int_0^{\omega_1} dy_2 \int_0^{\omega_2} dz_2 \\
 &\times \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \frac{1}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}} \right. \\
 &\left. + \left(\frac{1-k}{2} \right) \frac{(x_1 - x_2)^2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} \right].
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Para comparar este resultado com as tabelas fazemos uso da aproximação $\omega_1 \ll \ell$, $\omega_2 \ll \ell$ e consideramos somente termos até segunda ordem em (ω_1/ℓ) e (ω_2/ℓ) . Obtemos então, após a integração:

$$L_{fio}^{vol} \approx \frac{\mu_0 \ell}{4\pi} \left[2 \ln(2\ell) - \frac{\omega_1^2}{3\omega_2^2} \ln \omega_1 - \frac{\omega_2^2}{3\omega_1^2} \ln \omega_2 \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{\omega_2^2}{6\omega_1^2} - \frac{\omega_1^2}{6\omega_2^2} \right) \ln(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{4}{3} \frac{\omega_1}{\omega_2} \arctan \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right. \\ \left. - \frac{4}{3} \frac{\omega_2}{\omega_1} \arctan \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) + \frac{7}{6} + k \right]. \quad (3.13)$$

Um caso particular do resultado acima é o do fio com seção reta quadrada. Fazendo $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ em (3.13) ela simplifica para

$$L_{fio}^{vol} \approx \frac{\mu_0 \ell}{4\pi} \left(2 \ln \left(\frac{2\ell}{\omega} \right) - \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2\pi}{3} + \frac{7}{6} + k \right). \quad (3.14)$$

Este resultado depende de k e diverge quando ω tende a zero. Sendo a expressão (3.14) válida para $\omega \ll \ell$, ela permanece válida para os fios representados nas Figs. 3.9(a) e (b).

Estes dois últimos resultados podem ser comparados com a literatura. Das tabelas que temos conhecimento somente é apresentada a fórmula de Neumann ($k = 1$). O valor $(4\pi/\mu_0)(L/\ell)$ é um parâmetro adimensional (indutância por unidade de comprimento). Nós consideraremos este parâmetro com 3 dígitos significativos. Em [Gro46], pág. 35, nós encontramos as seguintes expressões para $\omega_2 = 2\omega_1 \equiv 2\omega$ e $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$, respectivamente,

$$\frac{4\pi L_{fio}^{vol}}{\mu_0 \ell} \approx 2 \ln \left(\frac{\ell}{\omega} \right) + 0.185, \quad (3.15)$$

$$\frac{4\pi L_{fio}^{vol}}{\mu_0 \ell} \approx 2 \ln \left(\frac{\ell}{\omega} \right) + 0.996. \quad (3.16)$$

Estes resultados foram obtidos com métodos de aproximação que não envolvem (2.1) ou (2.2).

Nossas fórmulas fornecem os seguintes resultados algébricos, com $k = 1$:

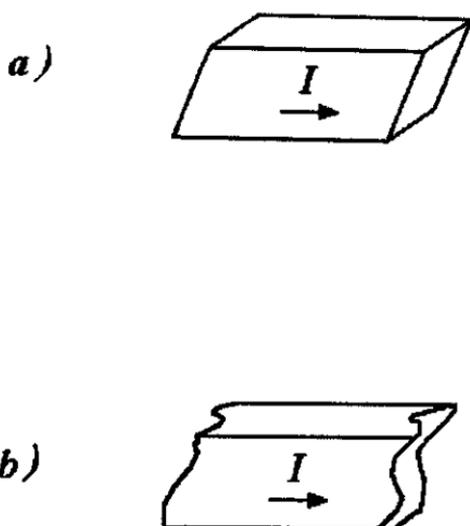


Figura 3.9: A auto-indutância destes fios quando $\omega \ll \ell$ também é dada por (3.14).

$$\frac{4\pi L_{fio}^{vol}}{\mu_0 \ell} \approx 2 \ln \left(\frac{\ell}{\omega} \right) + \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{7}{24} \ln 5 + 2 \arctan 2 - \frac{4\pi}{3} + \frac{13}{6}, \quad (3.17)$$

$$\frac{4\pi L_{fio}^{vol}}{\mu_0 \ell} \approx 2 \ln \left(\frac{\ell}{\omega} \right) + \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{2\pi}{3} + \frac{13}{6}. \quad (3.18)$$

Os valores das constantes numéricas em (3.17) e (3.18) (com 3 dígitos significativos) são, respectivamente, 0,185 e 0,996. Isto mostra o excelente grau de aproximação do nosso método, e como ele pode ser largamente aplicado a outras geometrias.

3.3.2 Circuito Retangular

Agora podemos calcular a auto-indutância L_{ccto}^{vol} de um circuito retangular com seção reta quadrada. O circuito retangular de lados ℓ_1 e ℓ_2 e seção reta quadrada de lados w está na Fig. 3.10.

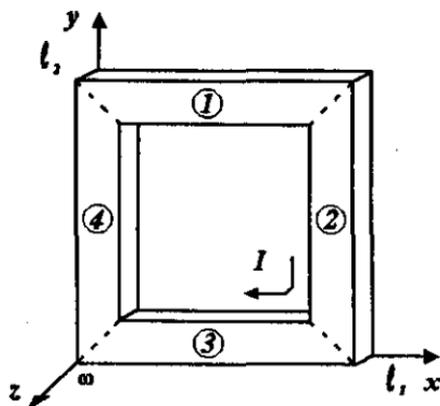


Figura 3.10: Circuito retangular volumétrico.

O que falta ser calculado é a indutância mútua entre lados opostos (como 1 e 3), e entre lados adjacentes (como 1 e 2). Como estamos considerando ω_1 e ω_2 muito menores que ℓ_1 e ℓ_2 , o resultado (3.2) é o valor aproximado da indutância mútua entre lados opostos. Analogamente, a indutância mútua entre quaisquer dois lados adjacentes é dada por (3.9).

Utilizando na Eq. (3.10), (3.14) para L_1 e L_2 , (3.9) para M_{12} e (3.2) para M_{13} e M_{24} , nós obtemos (com $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$):

$$\begin{aligned}
 L_{ccto}^{vol} = & \frac{\mu_0 \ell_2}{2\pi} \left[2 \ln \left(\frac{2\ell_2}{\omega} \right) + 2 \frac{\ell_1}{\ell_2} \ln \left(\frac{2\ell_1}{\omega} \right) - 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right) \right. \\
 & - 2 \frac{\ell_1}{\ell_2} \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1}{\ell_2} \right) + 4 \left(1 + \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \right)^{1/2} \\
 & \left. + \left(1 + \frac{\ell_1}{\ell_2} \right) \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2\pi}{3} \right) + O \left(\frac{\omega}{\ell_1} \right)^3 + O \left(\frac{\omega}{\ell_2} \right)^3 \right].
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Mais uma vez, este resultado é independente de k . Portanto, ele tem o mesmo valor para as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau.

Vamos comparar o nosso resultado (3.19) com o tabulado por Grover para esta geometria (Fig. 3.10). Na Eq. (3.10) com (3.16) para L_1 e L_2 ,

(3.9) ($k = 1$) para M_{12} e (3.2) ($k = 1$) para M_{13} e M_{24} obtemos que o resultado do Grover é:

$$\begin{aligned}
 L_{ccto}^{vol} \approx & \frac{\mu_0 \ell_2}{2\pi} \left[2 \ln \left(\frac{2\ell_2}{\omega} \right) + 2 \frac{\ell_1}{\ell_2} \ln \left(\frac{2\ell_1}{\omega} \right) - 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right) \right. \\
 & - 2 \frac{\ell_1}{\ell_2} \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1}{\ell_2} \right) + 4 \left(1 + \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \right)^{1/2} \\
 & \left. - \left(1 + \frac{\ell_1}{\ell_2} \right) (2 \ln 2 + 1.004) \right]. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Comparando (3.19) e (3.20) nós vemos que eles podem diferir somente no coeficiente numérico do fator $(1 + \ell_1/\ell_2)$. Na Eq. (3.19) ele é: $[1/6 - 2/3(\ln 2) - (2\pi)/3] \approx -2,390$; e pelo método de aproximação utilizado no livro do Grover: $-(2 \ln 2 + 1.004) \approx -2,390$. Obtivemos então, um excelente acordo entre nosso método e a aproximação utilizada no livro do Grover.

Neste Capítulo aplicamos nosso método de cálculo do coeficiente de indutância a diversas configurações. Resolvemos os problemas de divergência apresentados em algumas geometrias onde os livros normalmente utilizam complicados métodos de aproximação (como por exemplo, a auto-indutância do fio de seção reta retangular, Fig. 3.13, Eq. (3.13)). Obtivemos na comparação dos resultados do nosso método com aqueles tabulados no livro do Grover um excelente acordo. Por fim, obtivemos que para os circuitos retangulares fechados das Figs. 3.7 e 3.10, o valor da auto-indutância é o mesmo com as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau. Novamente, este é um resultado totalmente novo e que iremos generalizar para outros circuitos no Capítulo seguinte.

Capítulo 4

Equivalência Completa

Como vimos na Seção 1.7, quando calculamos a indutância mútua entre circuitos fechados de corrente obtemos o mesmo valor com as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau. A importância do circuito de corrente ser fechado pôde ser constatada quando calculamos a indutância mútua, por exemplo, entre os fios retilíneos das Seções 3.1.1 e 3.1.2, ou entre as superfícies retangulares na Seção 3.2.2, já que nestes casos os valores obtidos para a indutância mútua dependeram de k . A auto-indutância para circuitos abertos também apresenta valores distintos para cada uma das fórmulas. Este resultado foi obtido nos cálculos da auto-indutância do cilindro com corrente axial na Seção 2.3.2, e também da superfície retangular da Seção 3.2.1. Por outro lado, para as auto-indutâncias do solenóide (Seção 2.3.1), do circuito retangular superficial (Seção 3.2.3) e do circuito retangular volumétrico (Seção 3.3.2), todos circuitos fechados de corrente, a equivalência é total. Este fato parece sugerir que a equivalência citada para a indutância mútua vale para a auto-indutância, nas mesmas condições. Este é o objetivo deste Capítulo: demonstrar que as equivalências citadas acima para a auto-indutância não são acidentais, mas sim exemplos de um resultado genérico [BA95b].

4.1 Preliminares

Primeiro, nós demonstraremos que se decomposmos um circuito fechado em dois outros circuitos fechados, a auto-indutância do circuito original pode ser escrita como a soma da auto-indutância dos dois novos circuitos mais a indutância mútua entre eles.

Considere um circuito genérico Γ , descrito na Fig. 4.1(a).

O circuito é dividido em dois circuitos abertos através dos pontos A e B . Os dois circuitos abertos resultantes, Γ_1 com terminações A e B , e Γ_2 com terminações A' e B' (Fig. 4.1(b)), são fechados com os circuitos abertos representados por Γ_3 e $-\Gamma_3$, respectivamente (Fig. 4.1(c)). O circuito fechado $\Gamma_1 + \Gamma_3$ nós designamos Γ_a e o circuito fechado $\Gamma_2 + (-\Gamma_3)$ por Γ_b . Unindo os pontos A com A' e B com B' , resulta o circuito fechado original Γ (Fig. 4.1(a)).

Como não podemos utilizar elemento de corrente linear para calcular a auto-indutância devido aos problemas de divergência, vamos utilizar elemento de corrente superficial. Seja $d^4 M_{ij}$ a indutância mútua entre os elementos i e j em Γ . A auto-indutância L_Γ de Γ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} L_\Gamma &= \int \int_\Gamma \int \int_\Gamma d^2 M_{ij} \\ &= \left(\int \int_{\Gamma_1} + \int \int_{\Gamma_2} \right) \left(\int \int_{\Gamma_1} + \int \int_{\Gamma_2} \right) d^4 M_{ij} \\ &= \left(\int \int_{\Gamma_1} \int \int_{\Gamma_1} + 2 \int \int_{\Gamma_1} \int \int_{\Gamma_2} + \int \int_{\Gamma_2} \int \int_{\Gamma_2} \right) d^4 M_{ij}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Analogamente, as auto-indutâncias L_{Γ_a} de Γ_a , L_{Γ_b} de Γ_b , e a indutância mútua $M_{\Gamma_a \Gamma_b}$ entre Γ_a e Γ_b são dadas por:

$$L_{\Gamma_a} = \left(\int \int_{\Gamma_1} \int \int_{\Gamma_1} + 2 \int \int_{\Gamma_1} \int \int_{\Gamma_3} + \int \int_{\Gamma_3} \int \int_{\Gamma_3} \right) d^4 M_{ij}, \quad (4.2)$$

$$L_{\Gamma_b} = \left(\int \int_{\Gamma_2} \int \int_{\Gamma_2} - 2 \int \int_{\Gamma_2} \int \int_{\Gamma_3} + \int \int_{\Gamma_3} \int \int_{\Gamma_3} \right) d^4 M_{ij}, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} M_{\Gamma_a \Gamma_b} &= \left(\int \int_{\Gamma_1} \int \int_{\Gamma_2} - \int \int_{\Gamma_1} \int \int_{\Gamma_3} + \int \int_{\Gamma_2} \int \int_{\Gamma_3} \right. \\ &\quad \left. - \int \int_{\Gamma_3} \int \int_{\Gamma_3} \right) d^4 M_{ij}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde utilizamos em (4.3) que $\int \int_{-\Gamma_3} = - \int \int_{\Gamma_3}$.

Calculando $L_{\Gamma_a} + L_{\Gamma_b} + 2M_{\Gamma_a \Gamma_b}$ de (4.2) a (4.4), e comparando o resultado com (4.1) resulta

$$L_\Gamma = L_{\Gamma_a} + L_{\Gamma_b} + 2M_{\Gamma_a \Gamma_b}. \quad (4.5)$$

Isto mostra que a auto-indutância do circuito fechado Γ (Fig. 4.1(a)) é dada pela soma da indutância mútua entre os circuitos fechados Γ_a e Γ_b (Fig. 4.1(c)) com a auto-indutância de Γ_a e Γ_b , quando as curvas conectando os pontos A a B e A' a B' da Fig. 4.1(c) coincidem.

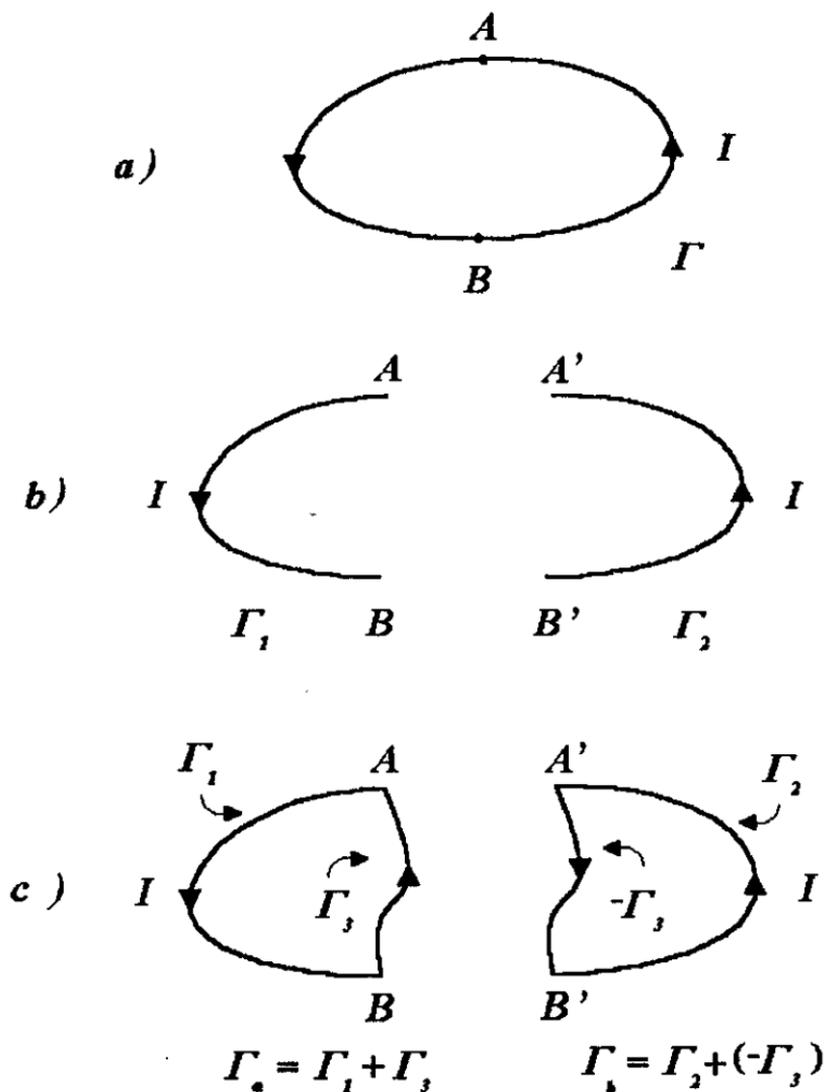


Figura 4.1: Divisão do circuito fechado Γ em dois outros, Γ_a e Γ_b .

O resultado em (4.5) pode ser generalizado para N circuitos fechados dividindo o circuito original Γ . Seguindo o mesmo raciocínio que levou a (4.5), nós obtemos que

$$L_{\Gamma} = \sum_{i=1}^N L_{\Gamma_i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N M_{\Gamma_i, \Gamma_j}. \quad (4.6)$$

4.2 Demonstração da Equivalência

Agora nós demonstramos a equivalência entre as fórmulas de auto-indutância dadas por Neumann, Weber, Maxwell e Graneau. Primeiro, considere o circuito Γ descrito na Fig. 4.2(a). Nós supomos que este circuito é composto de elementos superficiais. A espessura do circuito é ω . Nós dividimos Γ em N circuitos Γ_i com espessura ω_i e corrente I_i , de tal maneira que $w = \sum_{i=1}^N \omega_i$, $I_i = I\omega_i/\omega$ (Figs. 4.2(b) e 4.2(c)). Nós escolhemos um valor grande para N de maneira a fazer $\omega_i \ll \omega$ e $\omega_i \ll \ell$ (ℓ é o comprimento de Γ).

A auto-indutância L_Γ do circuito Γ , nas Figs. 4.2(a) e 4.2(b), pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 L_\Gamma &= \iint_{S_\Gamma} \iint_{S_\Gamma} d^4 M_{ij} \\
 &= \left(\sum_{n=1}^N \iint_{S_{\Gamma_n}} \right) \left(\sum_{n=1}^N \iint_{S_{\Gamma_n}} \right) d^4 M_{ij} \\
 &= \sum_{n=1}^N L_{\Gamma_n} + \sum_{\substack{m,n \\ m \neq n}}^N M_{\Gamma_m \Gamma_n}, \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

onde S_Γ é a superfície do circuito Γ , $L_{\Gamma_n} \equiv \iint_{S_{\Gamma_n}} \iint_{S_{\Gamma_n}} d^4 M_{ij}$ e $M_{\Gamma_m \Gamma_n} \equiv \iint_{S_{\Gamma_m}} \iint_{S_{\Gamma_n}} d^4 M_{ij}$.

Nós aproximamos o circuito Γ_i , na Fig. 4.2(c), por M circuitos fechados retangulares Γ_{ij} com correntes I_i , na mesma direção que em Γ_i (Fig. 4.3). Esta aproximação pode ser aprimorada ao nível desejado, apenas diminuindo as áreas dos retângulos e aumentando a sua quantidade M .

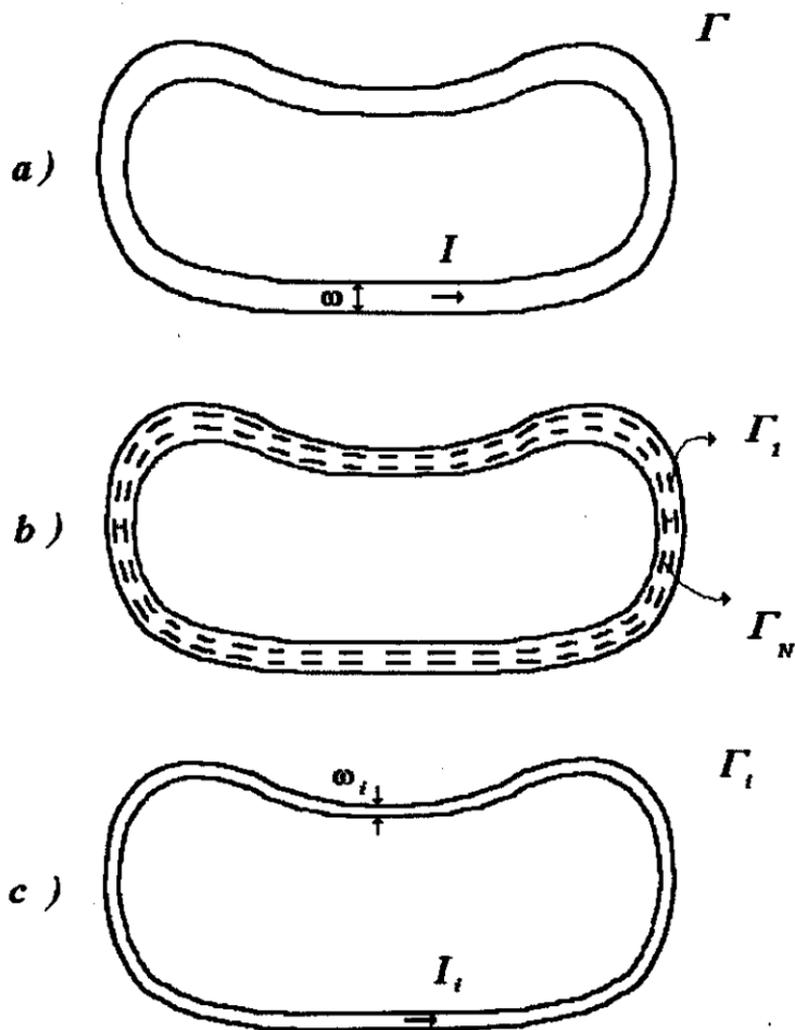


Figura 4.2: Circuito genérico Γ .

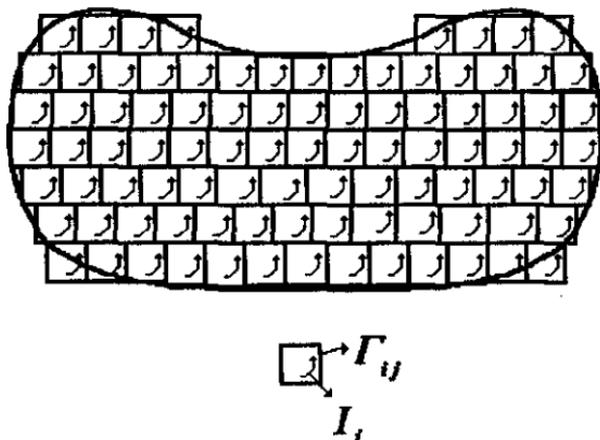


Figura 4.3: Circuitos retangulares que aproximam o circuito Γ_1 .

De (4.6) nós podemos escrever

$$L_{\Gamma_1} = \sum_{j=1}^M L_{\Gamma_{1j}} + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^M M_{\Gamma_{1j}, \Gamma_{1k}}. \quad (4.8)$$

A auto-indutância $L_{\Gamma_{1j}}$ do retângulo Γ_{1j} foi calculada na Seção 3.2.3. O resultado (3.11) para o circuito da Fig. 4.4 é

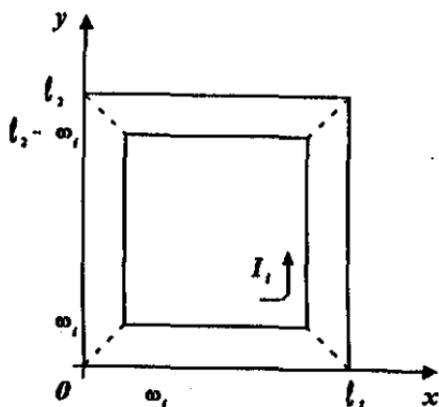


Figura 4.4: Circuito retangular superficial Γ_{1j} .

$$\begin{aligned}
 L_{\Gamma_{j,j}}^N = L_{\Gamma_{j,j}}^W = L_{\Gamma_{j,j}}^M = L_{\Gamma_{j,j}}^G \approx & \frac{\mu_0}{2\pi} \left[2\ell_2 \ln \left(\frac{2\ell_2}{\omega_i} \right) + 2\ell_1 \ln \left(\frac{2\ell_1}{\omega_i} \right) \right. \\
 & - 2\ell_2 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right) - 2\ell_1 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1}{\ell_2} \right) \\
 & \left. + 4(\ell_1^2 + \ell_2^2)^{1/2} - \ell_1 - \ell_2 \right]. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Os circuitos $\Gamma_{j,j}$ e $\Gamma_{j,k}$ da Fig. 4.3 são dois circuitos fechados distintos (com $j \neq k$). Portanto, $M_{\Gamma_{j,j},\Gamma_{j,k}}^N = M_{\Gamma_{j,j},\Gamma_{j,k}}^W = M_{\Gamma_{j,j},\Gamma_{j,k}}^M = M_{\Gamma_{j,j},\Gamma_{j,k}}^G$. Nós concluímos, então, com (4.8) e (4.9), que para o circuito Γ_j da Fig. 4.2(c),

$$L_{\Gamma_j}^N = L_{\Gamma_j}^W = L_{\Gamma_j}^M = L_{\Gamma_j}^G. \quad (4.10)$$

Conseqüentemente, como $M_{\Gamma_j,\Gamma_j}^N = M_{\Gamma_j,\Gamma_j}^W = M_{\Gamma_j,\Gamma_j}^M = M_{\Gamma_j,\Gamma_j}^G$, (dois circuitos fechados distintos da Fig. 4.2(b)) e com (4.10), nós obtemos que,

$$L_{\Gamma_j}^N = L_{\Gamma_j}^W = L_{\Gamma_j}^M = L_{\Gamma_j}^G. \quad (4.11)$$

A prova da equivalência entre as expressões de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau foi obtida utilizando um circuito superficial genérico Γ (Fig. 4.2(a)). Nós podemos também utilizar um circuito volumétrico Γ . A demonstração de equivalência neste caso segue exatamente o mesmo raciocínio apresentado para o circuito superficial. É somente necessário utilizar circuitos retangulares volumétricos $\Gamma_{j,j}$ (Fig. 4.5), cuja auto-indutância, utilizando a expressão (3.19), é dada por (4.12):

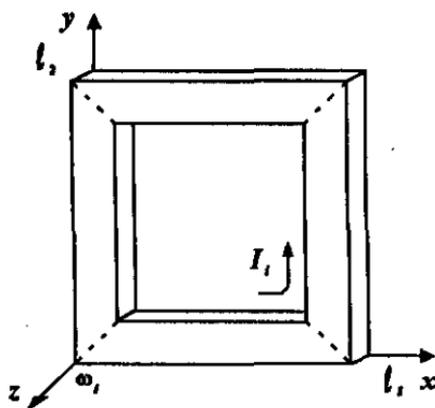


Figura 4.5: Circuito retangular volumétrico $\Gamma_{j,j}$.

$$\begin{aligned}
L_{\Gamma,}^N = L_{\Gamma,}^W = L_{\Gamma,}^M = L_{\Gamma,}^G \approx & \frac{\mu_0}{2\pi} \left[2\ell_2 \ln \left(\frac{2\ell_2}{\omega_1} \right) + 2\ell_1 \ln \left(\frac{2\ell_1}{\omega_1} \right) \right. \\
& - 2\ell_2 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right) - 2\ell_1 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1}{\ell_2} \right) + 4(\ell_1^2 + \ell_2^2)^{1/2} \\
& \left. + (\ell_1 + \ell_2) \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2\pi}{3} \right) \right]. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Com isto provamos pela primeira vez na literatura que a auto-indutância de um circuito fechado com corrente superficial ou volumétrica terá sempre o mesmo valor quando calculada com as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau. No caso de circuitos com elemento de corrente linear todas estas expressões divergem. Além da importância teórica deste fato, ele mostra que na prática podemos utilizar a fórmula que mais simplificar os cálculos no caso de uma geometria específica.

Parte II

Força

Capítulo 5

Força Entre Elementos de Corrente

Enquanto na primeira parte deste trabalho apresentamos cálculos e fizemos demonstrações sobre o coeficiente de indutância, nesta segunda parte faremos o análogo para a força entre elementos de corrente. Estaremos analisando duas expressões para a força entre elementos de corrente: a força de Ampère e a força de Grassmann.

5.1 Força de Ampère

Na célebre experiência de Oersted uma agulha imantada sofre a ação de um fio conduzindo corrente [Mar86]. Se por um lado este fato motivou Biot e Savart a escreverem uma expressão para o campo magnético gerado por um elemento de corrente com a intenção de explicar tal fenômeno, por outro Ampère acreditava que o resultado obtido por Oersted era fruto da interação entre correntes elétricas. Interação esta entre a corrente no fio condutor e as correntes microscópicas que ele supôs gerarem o comportamento magnético na agulha¹.

Ampère iniciou então um minucioso trabalho experimental que culminou com uma expressão para a força entre elementos de corrente (marco inicial da área da física que hoje designamos por eletrodinâmica), [Amp23, Amp65] e [Whi73], Vol. 1, págs 84–88.

¹Esta é a chamada *conjectura de Ampère*: O campo magnético em materiais magnéticos ocorre devido ao fluxo de correntes elétricas microscópicas em cada molécula do material.

No sistema internacional de unidades e utilizando notação vetorial moderna podemos escrever a força de Ampère $d^2 F_{ij}^A$ no elemento de corrente $I_i d\vec{r}_i$, localizado em \vec{r}_i , devido ao elemento de corrente $I_j d\vec{r}_j$, localizado em \vec{r}_j , como

$$d^2 \vec{F}_{ij}^A = \frac{\mu_0 I_i I_j}{4\pi} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} [3(d\vec{r}_i \cdot \hat{r}_{ij})(d\vec{r}_j \cdot \hat{r}_{ij}) - 2(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j)]. \quad (5.1)$$

Deve-se observar que esta expressão sempre satisfaz o princípio de ação e reação ($d^2 \vec{F}_{ji}^A = -d^2 \vec{F}_{ij}^A$) e está sempre apontando ao longo da reta que une os dois elementos.

5.1.1 Força de Weber

Se o trabalho de Ampère serviu para elucidar a relação entre galvanismo (correntes elétricas em condutores) e magnetismo, o passo que estava faltando para a unificação da eletrodinâmica com a eletrostática era a concepção atomística da corrente elétrica. Este passo foi dado por Weber, que baseado nesta concepção atomística do elemento de corrente e nos resultados experimentais obtidos por Ampère escreveu a expressão que hoje conhecemos por força de Weber.

Apresentaremos a seguir a dedução da força de Ampère dentro da eletrodinâmica de Weber.

A força de Weber, além de unificar os efeitos eletrostáticos com os efeitos eletrodinâmicos, foi a primeira expressão que permitiu uma ligação entre o eletromagnetismo e a velocidade de propagação da luz no vácuo, c , abrindo assim o caminho para a relação entre o eletromagnetismo e a óptica.

Podemos deduzir a força de Weber da energia de Weber, (1.7), apresentada na Seção 1.4.1. Consideremos as cargas q_1 e q_2 da Fig. 1.3. Sendo V_{12}^W a energia de Weber de interação eletrodinâmica entre as cargas, a força de Weber \vec{F}_{12}^W , que a carga q_2 exerce sobre a carga q_1 , é dada por:

$$\vec{F}_{12}^W = -\hat{r}_{12} \frac{dV_{12}^W}{dr_{12}}. \quad (5.2)$$

Substituindo em (5.2) a expressão (1.7) para V_{12}^W e fazendo os cálculos resulta que:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12}^W &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\ddot{r}_{12} r_{12} - \dot{r}_{12}^2 \right) \right] \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[\dot{\vec{r}}_{12} \cdot \dot{\vec{r}}_{12} - \frac{3}{2} \left(\dot{r}_{12} \cdot \dot{\vec{r}}_{12} \right)^2 + \vec{r}_{12} \cdot \ddot{\vec{r}}_{12} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $\ddot{r}_{12} \equiv d^2 r_{12}/dt^2$ e $\dot{\vec{r}}_{12} \equiv d\dot{\vec{r}}_{12}/dt = d^2 \vec{r}_{12}/dt^2$. Pode se obter facilmente que:

$$\ddot{r}_{12} = \frac{d\dot{r}_{12}}{dt} = \frac{\dot{\vec{r}}_{12} \cdot \dot{\vec{r}}_{12} - (\hat{r}_{12} \cdot \dot{\vec{r}}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \ddot{\vec{r}}_{12}}{r_{12}}. \quad (5.4)$$

Como podemos ver na expressão acima, $\vec{F}_{12}^W = -\vec{F}_{21}^W$. Outras importantes características da força de Weber podem ser encontradas em detalhes em [Ass94].

Esta não é a única maneira que temos para derivar a força de Weber. Podemos derivá-la através da utilização de uma energia potencial lagrangiana de Weber U_{12}^W [Bue94]².

5.1.2 Expressão de Ampère

Deduziremos a força de Ampère da força de Weber, utilizando o modelo de elemento de corrente apresentado na Seção 1.2. Considere os dois elementos de corrente da Fig. 1.1. A força de Ampère $d^2 \vec{F}_{ij}^A$ no elemento i devido ao elemento j será dada pela superposição das forças em cada uma das cargas infinitesimais que constituem o elemento i devido às cargas pertencentes ao elemento j . Para a força entre as cargas utilizamos a força de Weber. Com notação óbvia, podemos escrever:

$$d^2 \vec{F}_{ij}^A \equiv d^2 \vec{F}_{i+j+}^W + d^2 \vec{F}_{i+j-}^W + d^2 \vec{F}_{i-j+}^W + d^2 \vec{F}_{i-j-}^W. \quad (5.5)$$

Utilizando a neutralidade dos elementos de corrente ($dq_- = -dq_+$) e a expressão para a força de Weber (5.3), escrevemos para cada uma das parcelas em (5.5):

$$d^2 \vec{F}_{i+j+}^W = \frac{dq_{i+} dq_{j+}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left(1 + \frac{1}{c^2} \left\{ (\dot{\vec{r}}_{i+} - \dot{\vec{r}}_{j+}) \cdot (\dot{\vec{r}}_{i+} - \dot{\vec{r}}_{j+}) - \frac{3}{2} \left[\hat{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_{i+} - \dot{\vec{r}}_{j+}) \right]^2 + \vec{r}_{ij} \cdot (\ddot{\vec{r}}_{i+} - \ddot{\vec{r}}_{j+}) \right\} \right), \quad (5.6)$$

²Ver uma outra maneira em [Wes87b].

$$\begin{aligned}
 d^2 \vec{F}_{i+j-}^W &= -\frac{dq_i + dq_j + \hat{r}_{ij}}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \left(1 + \frac{1}{c^2} \left\{ (\dot{\vec{r}}_{i+} - \dot{\vec{r}}_{j-}) \cdot (\dot{\vec{r}}_{i+} - \dot{\vec{r}}_{j-}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{3}{2} \left[\hat{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_{i+} - \dot{\vec{r}}_{j-}) \right]^2 + \vec{r}_{ij} \cdot (\ddot{\vec{r}}_{i+} - \ddot{\vec{r}}_{j-}) \right\} \right),
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
 d^2 \vec{F}_{i-j+}^W &= -\frac{dq_i + dq_j + \hat{r}_{ij}}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \left(1 + \frac{1}{c^2} \left\{ (\dot{\vec{r}}_{i-} - \dot{\vec{r}}_{j+}) \cdot (\dot{\vec{r}}_{i-} - \dot{\vec{r}}_{j+}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{3}{2} \left[\hat{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_{i-} - \dot{\vec{r}}_{j+}) \right]^2 + \vec{r}_{ij} \cdot (\ddot{\vec{r}}_{i-} - \ddot{\vec{r}}_{j+}) \right\} \right),
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
 d^2 \vec{F}_{i-j-}^W &= \frac{dq_i + dq_j + \hat{r}_{ij}}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \left(1 + \frac{1}{c^2} \left\{ (\dot{\vec{r}}_{i-} - \dot{\vec{r}}_{j-}) \cdot (\dot{\vec{r}}_{i-} - \dot{\vec{r}}_{j-}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{3}{2} \left[\hat{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_{i-} - \dot{\vec{r}}_{j-}) \right]^2 + \vec{r}_{ij} \cdot (\ddot{\vec{r}}_{i-} - \ddot{\vec{r}}_{j-}) \right\} \right),
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde já utilizamos a aproximação para os elementos de corrente ($\vec{r}_{i+j+} \approx \vec{r}_{ij}, \dots$).

Substituindo as expressões (5.6) a (5.9) em (5.5) chega-se à Eq. (5.1), onde utilizamos a definição (1.1): $I_i d\vec{r}_i = dq_{i+}(\dot{\vec{r}}_{i+} - \dot{\vec{r}}_{i-})$, e o mesmo para j . Neste caso $I_i = I_1$ para todo i e $I_j = I_2$ para todo j .

Esta é a força de Ampère entre os elementos de corrente i e j da Fig. 1.1. A última igualdade de (5.1) demonstra que a força de Ampère satisfaz ação e reação para elementos de corrente.

A única hipótese que utilizamos para esta dedução foi a neutralidade dos elementos de corrente. Não importa se as cargas nos elementos de corrente estão aceleradas já que a aceleração não aparece no resultado final (5.1). Também não importa se os módulos das velocidades das cargas positivas e negativas em cada elemento são iguais ou distintos entre si. Portanto, a força de Ampère vale mesmo quando a corrente está variando no tempo (corrente alternada, transientes, ...). Além disto, ela vale não só em correntes metálicas ($\dot{\vec{r}}_+ = 0$), mas também em plasmas gasosos e correntes em eletrólise onde as cargas positivas também se movem em relação ao meio

condutor.

A não imposição de restrições aos módulos das velocidades das cargas positivas e negativas nos elementos de corrente na dedução da força de Ampère, (5.1), a partir da força de Weber, (5.3), demonstra que não é necessário utilizarmos a hipótese Fechner³, que hoje já sabemos através de diversos experimentos⁴ não ser verdadeira [Ass90]. Portanto, a objeção à eletrodinâmica de Weber por causa de Weber ter utilizado inicialmente a hipótese de Fechner não tem sentido, como vemos em [Whi73], Vol. 1, págs 205–206. Isto é, a partir da eletrodinâmica de Weber se deriva exatamente a força de Ampère mesmo não valendo a hipótese de Fechner.

Além dos livros didáticos não discutirem em detalhe a questão da força entre elementos de corrente, alguns chamam a expressão da força entre circuitos fechados de corrente deduzida da força de Grassmann como sendo de Ampère, [Jac75], pág. 169–173. A força de Grassmann é o assunto da próxima Seção.

³ Ver Seção 1.2.

⁴ Como por exemplo o efeito Hall.

5.2 Força de Grassmann

Ao contrário da força de Ampère que é fruto de um minucioso trabalho experimental desenvolvido por Ampère, com o intuito de entender os resultados experimentais de Oersted, a expressão para a força entre elementos de corrente na eletrodinâmica clássica, a força de Grassmann, é fruto do trabalho teórico em matemática de Grassmann. Grassmann sugeriu em 1845⁵ [Gra45, Gra65], uma expressão para a força entre elementos de corrente. Seu objetivo era ilustrar através desta expressão a aplicação de uma álgebra não comutativa desenvolvida por ele, [Ass94], págs 89–90. Mais tarde, esta expressão veio a se tornar a parte magnética ($q\vec{r} \times \vec{B}$) da força de Lorentz, com \vec{B} dado pela expressão de Biot-Savart.

A força de Grassmann no elemento $I_1 d\vec{r}_1$, localizado em \vec{r}_1 , exercida pelo elemento $I_2 d\vec{r}_2$, localizado em \vec{r}_2 , é dada por:

$$\begin{aligned} d^2 \vec{F}_{12}^G &= I_1 d\vec{r}_1 \times d\vec{B}_2(\vec{r}_1) = I_1 d\vec{r}_1 \times \left(\frac{\mu_0 I_2 d\vec{r}_2 \times \hat{r}_{12}}{4\pi r_{12}^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{1}{r_{12}^2} [(d\vec{r}_1 \cdot \hat{r}_{12}) d\vec{r}_2 - (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) \hat{r}_{12}]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Em (5.10) $d\vec{B}_2(\vec{r}_1)$ é a expressão de Biot-Savart para o campo magnético no ponto \vec{r}_1 devido ao elemento de corrente $I_2 d\vec{r}_2$ localizado em \vec{r}_2 . Ela foi obtida por Biot e Savart em 1820 apenas algumas semanas após a descoberta de Oersted, a partir de um único experimento com um longo fio com corrente interagindo com uma pequena agulha magnetizada, [BS20, BS65] e [Whi73], Vol. 1, págs. 67–94.

Deve ser observado que a força de Grassmann entre elementos de corrente não satisfaz ao princípio de ação e reação de forma geral: $d^2 \vec{F}_{12}^G \neq -d^2 \vec{F}_{21}^G$. Apenas em alguns casos particulares isto vai ocorrer. Além disto, em geral a força de Grassmann não vai estar apontando ao longo da reta que une os dois elementos. Trocando entre si os índices i e j em (5.10) obtém-se:

$$\begin{aligned} d^2 \vec{F}_{ji}^G &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{1}{r_{ji}^2} [d\vec{r}_j \times (d\vec{r}_i \times \hat{r}_{ji})] \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{1}{r_{ij}^2} [(d\vec{r}_j \cdot \hat{r}_{ij}) d\vec{r}_i - (d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j) \hat{r}_{ij}], \\ &\neq -d^2 \vec{F}_{ij}^G. \end{aligned} \quad (5.11)$$

⁵Mais de 20 anos após Ampère.

5.2.1 Força de Liénard-Schwarzchild

Na eletrodinâmica clássica a força que descreve a interação eletrodinâmica entre partículas carregadas é a força de Lorentz. Podemos escrevê-la em função dos campos eletromagnéticos ou então em função dos potenciais vetor e escalar:

$$\vec{F}^L = q\vec{E} + q\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = -q(\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) + q\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}). \quad (5.12)$$

Nesta última forma, quando substituirmos os referidos potenciais pelos potenciais de Liénard-Wiechert, obtemos o que chamamos de força de Liénard-Schwarzchild. Esta força descreve a interação eletrodinâmica entre duas cargas pontuais (por exemplo as da Fig. 1.3).

Até segunda ordem em v/c os campos elétrico e magnético no ponto \vec{r}_1 devidos a uma carga pontual q_2 localizada em \vec{r}_2 , movendo-se com velocidade $\dot{\vec{r}}_2$ e aceleração $\ddot{\vec{r}}_2$ em relação a um referencial inercial O , são dados por ([O'R65], Vol. 1, págs. 215-223; [PK74, EKL76]; e [Ass94], Seções 6.2 e 6.8, págs. 143-147 e 177-179):

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(\vec{r}_1) = & \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2} \left[\hat{r}_{12} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2}{2c^2} - \frac{3(\hat{r}_{12} \cdot \dot{\vec{r}}_2)^2}{2c^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\vec{r}_{12} \cdot \ddot{\vec{r}}_2}{2c^2} \right) - \frac{r_{12}\ddot{\vec{r}}_2}{2c^2} \right], \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2} \frac{\dot{\vec{r}}_2 \times \hat{r}_{12}}{c^2}. \quad (5.14)$$

Nestas expressões todas as grandezas (incluindo \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , $\dot{\vec{r}}_2$ e $\ddot{\vec{r}}_2$) são calculadas e medidas no tempo presente t e não no tempo retardado $t^* = t - r_{12}/c$. Isto porque para chegar nelas já se fez uma expansão nos potenciais retardados em torno de $t^* = t$. Estas expressões são corretas até segunda ordem em v/c , inclusive, e foram derivadas levando em conta os efeitos de tempo retardado, de radiação eletromagnética, e correções relativísticas. Para saber a força que uma carga q_1 localizada no tempo t em \vec{r}_1 vai sofrer, basta usar a força de Lorentz $\vec{F}_{12}^L = q_1\vec{E}_2 + q_1\dot{\vec{r}}_1 \times \vec{B}_2$. O resultado final é a chamada força de Liénard-Schwarzchild.

Uma maneira alternativa de deduzir a força de Liénard-Schwarzchild é através da lagrangiana de Darwin (ver Seção 1.5.1), utilizando o formalismo lagrangiano para a dedução da força. A energia potencial lagrangiana de Darwin U_{12}^D é dada por (1.18).

A expressão para calcular a força de Liénard-Schwarzschild entre as cargas q_1 e q_2 , \vec{F}_{12}^{LS} , através da energia potencial lagrangiana de Darwin apresentada acima é [Bue94],

$$\vec{F}_{12}^{LS} = \sum_{m=1}^3 \left(-\frac{\partial U_{12}^D}{\partial x_{1m}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U_{12}^D}{\partial \dot{x}_{1m}} \right) \hat{x}_m, \quad (5.15)$$

onde $x_{11} \equiv x_1$, $x_{12} \equiv y_1$ e $x_{13} \equiv z_1$, $\hat{x}_1 = \hat{x}$, $\hat{x}_2 = \hat{y}$, $\hat{x}_3 = \hat{z}$.

Substituindo (1.18) na expressão (5.15) e fazendo os cálculos chegamos a:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12}^{LS} = & \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2} \left\{ \left[\hat{r}_{12} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2}{2c^2} - \frac{3(\hat{r}_{12} \cdot \dot{\vec{r}}_2)^2}{2c^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\vec{r}_{12} \cdot \ddot{\vec{r}}_2}{2c^2} \right) - \frac{r_{12} \ddot{\vec{r}}_2}{2c^2} \right] + \dot{\vec{r}}_1 \times \left(\frac{\dot{\vec{r}}_2 \times \hat{r}_{12}}{c^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Diferente do que acontece com a força de Weber, com a força de Liénard-Schwarzschild não temos $\vec{F}_{12}^{LS} = -\vec{F}_{21}^{LS}$. Trocando entre si os índices 1 e 2 em (5.16) chegamos a

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21}^{LS} = & -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2} \left\{ \left[\hat{r}_{12} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1}{2c^2} - \frac{3(\hat{r}_{12} \cdot \dot{\vec{r}}_1)^2}{2c^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\vec{r}_{12} \cdot \ddot{\vec{r}}_1}{2c^2} \right) + \frac{r_{12} \ddot{\vec{r}}_1}{2c^2} \right] + \dot{\vec{r}}_2 \times \left(\frac{\dot{\vec{r}}_1 \times \hat{r}_{12}}{c^2} \right) \right\}, \\ \neq & -\vec{F}_{12}^{LS}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.2.2 Expressão de Grassmann

Para calcular a força de Grassmann seguiremos um procedimento análogo ao utilizado na Seção 5.1.2. Da mesma forma que aplicamos a força de Weber ao modelo de elemento de corrente para obtermos a força de Ampère, vamos aplicar a força de Liénard-Schwarzschild ao modelo de elemento de corrente. Para os elementos de corrente da Fig. 1.1 definimos: .

$$d^2 \vec{F}_{ij}^G \equiv d^2 \vec{F}_{i+j}^{LS} + d^2 \vec{F}_{i+j-}^{LS} + d^2 \vec{F}_{i-j+}^{LS} + d^2 \vec{F}_{i-j-}^{LS}. \quad (5.18)$$

Para obter os termos $d^2 \vec{F}_{ij}^{LS}$ acima, utilizamos (5.16), a aproximação para elementos de corrente ($\vec{r}_{i+j} \approx \vec{r}_{ij}$, ...) e a neutralidade dos mesmos ($dq_- = -dq_+$):

$$d^2 \vec{F}_{i,+j+}^{LS} = \frac{dq_i + dq_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ \left[\hat{r}_{ij} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_{j+} \cdot \dot{\vec{r}}_{j+}}{2c^2} - \frac{3(\hat{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{j+})^2}{2c^2} \right) - \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{j+}}{2c^2} \right] - \frac{r_{ij} \ddot{\vec{r}}_{j+}}{2c^2} \right] + \dot{\vec{r}}_{i+} \times \left(\frac{\dot{\vec{r}}_{j+} \times \hat{r}_{ij}}{c^2} \right) \right\}, \quad (5.19)$$

$$d^2 \vec{F}_{i,+j-}^{LS} = -\frac{dq_i + dq_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ \left[\hat{r}_{ij} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_{j-} \cdot \dot{\vec{r}}_{j-}}{2c^2} - \frac{3(\hat{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{j-})^2}{2c^2} \right) - \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{j-}}{2c^2} \right] - \frac{r_{ij} \ddot{\vec{r}}_{j-}}{2c^2} \right] + \dot{\vec{r}}_{i+} \times \left(\frac{\dot{\vec{r}}_{j-} \times \hat{r}_{ij}}{c^2} \right) \right\}, \quad (5.20)$$

$$d^2 \vec{F}_{i,-j+}^{LS} = -\frac{dq_i + dq_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ \left[\hat{r}_{ij} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_{j+} \cdot \dot{\vec{r}}_{j+}}{2c^2} - \frac{3(\hat{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{j+})^2}{2c^2} \right) - \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{j+}}{2c^2} \right] - \frac{r_{ij} \ddot{\vec{r}}_{j+}}{2c^2} \right] + \dot{\vec{r}}_{i-} \times \left(\frac{\dot{\vec{r}}_{j+} \times \hat{r}_{ij}}{c^2} \right) \right\}, \quad (5.21)$$

$$d^2 \vec{F}_{i,-j-}^{LS} = \frac{dq_i + dq_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ \left[\hat{r}_{ij} \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_{j-} \cdot \dot{\vec{r}}_{j-}}{2c^2} - \frac{3(\hat{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{j-})^2}{2c^2} \right) - \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{j-}}{2c^2} \right] - \frac{r_{ij} \ddot{\vec{r}}_{j-}}{2c^2} \right] + \dot{\vec{r}}_{i-} \times \left(\frac{\dot{\vec{r}}_{j-} \times \hat{r}_{ij}}{c^2} \right) \right\}. \quad (5.22)$$

Substituindo as expressões (5.19) a (5.22) nos respectivos termos de (5.18) e utilizando a definição (1.1), obtêm-se finalmente (5.10), sendo $I_i = I_1$ para todo i e $I_j = I_2$ para todo j .

O elemento de corrente é uma idealização matemática que facilita o estudo macroscópico da interação entre correntes elétricas. Apesar da força de Grassmann não satisfazer, em geral, ação e reação entre elementos de corrente, temos que nos preocupar de fato é se este comportamento se estende para circuitos macroscópicos. Este tema será abordado em profundidade mais adiante.

Poderíamos ter deduzido a força de Grassmann de uma maneira mais simples, através da utilização da força de Lorentz, ao invés de ter utilizado a força de Liénard-Schwarzschild. Optamos por este último caminho pois

ele evidencia o fato, importante no contexto do nosso trabalho, que a força de Grassmann é a expressão correta (até segunda ordem em v/c)⁶ para a força entre correntes elétricas na relatividade restrita.

⁶Caso das correntes usuais em experimentos.

5.3 Equivalência Parcial

Apesar das duas forças serem diferentes entre si, elas dão o mesmo resultado quando calculamos a força exercida em um elemento de um circuito devido a todos os elementos de um segundo circuito fechado. Por exemplo, se calcularmos a força que o circuito Γ_1 da Fig. 1.2 exerce no elemento $I_2 d\vec{r}_j$ do circuito Γ_2 , acharemos o mesmo resultado tanto integrando a força de Ampère, (5.1), quanto a força de Grassmann, (5.11). Este resultado já é conhecido, e podemos ver esta demonstração em [Tri65], pág. 55; [Whi73], Vol. 1, págs. 82–87 e [Ass94], Seção 4.5. A razão para isto é o fato notável de que a diferença entre as Eqs. (5.1) e (5.11) é uma diferencial exata, que quando integrada em Γ_1 resulta zero. Apresentamos a seguir uma prova simplificada deste fato.

Integrando para o circuito fechado Γ_1 , Fig. 1.2, as expressões da força de Ampère, Eq. (5.1), e da força de Grassmann, Eq. (5.11), obtemos a força $d\vec{F}_{j1}$ que o elemento de corrente $I_2 d\vec{r}_j$ do circuito Γ_2 sofre devido ao circuito Γ_1 , respectivamente:

$$d\vec{F}_{j1}^A = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left(3 \oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} (d\vec{r}_i \cdot \hat{r}_{ij})(d\vec{r}_j \cdot \hat{r}_{ij}) - 2 \oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} (d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j) \right), \quad (5.23)$$

$$d\vec{F}_{j1}^G = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left(\oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} (d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j) - \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{r_{ij}^2} (d\vec{r}_j \cdot \hat{r}_{ij}) d\vec{r}_i \right). \quad (5.24)$$

Calculando a diferença entre (5.23) e (5.24), e utilizando algumas identidades vetoriais obtemos:

$$d\vec{F}_{j1}^A - d\vec{F}_{j1}^G = -\frac{3\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \vec{\nabla}_j \left(\oint_{\Gamma_1} \frac{(d\vec{r}_i \cdot \hat{r}_{ij})(d\vec{r}_j \cdot \hat{r}_{ij})}{r_{ij}} - \oint_{\Gamma_1} \frac{(d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j)}{r_{ij}} \right). \quad (5.25)$$

Na Seção 1.7 mostramos que as duas integrais na expressão (5.25) são iguais entre si (ver Eq. (1.36)). Este fato em (5.25) completa a nossa demonstração da equivalência entre a força de Ampère e Grassmann para a força que um circuito fechado de corrente faz num elemento de corrente externo a ele.

Alguns defensores da força de Grassmann alegam que o fato dela não satisfazer ação e reação entre elementos de corrente não é importante, pois elementos de corrente não podem ser isolados para fazermos experiências.

Sendo o elemento de corrente um modelo matemático para facilitar o cálculo de situações macroscópicas, temos que analisar estas situações. No caso de um circuito fechado de corrente e um elemento de corrente externo a ele, como vimos acima, além da força de Grassmann satisfazer ação e reação, ela fornece o mesmo resultado que a força de Ampère. Cabem então as seguintes questões: E quando calculamos a força que um circuito fechado exerce num pedaço finito dele próprio? No caso de um circuito aberto (como por exemplo antenas), Grassmann não satisfaz ação e reação e nem deve dar o mesmo resultado que a força de Ampère. Quais implicações experimentais isto tem?

Estaremos respondendo neste trabalho a primeira questão feita acima. A segunda, circuitos abertos, não é o objetivo do nosso trabalho. O leitor interessado nesta área, pouco explorada, pode consultar [Wes90b].

Para respondermos a primeira questão acima teremos primeiro que resolver o problema de como calcular a força, já que quando integramos as expressões (5.1) e (5.10) para calcular a força entre elementos em contato de um mesmo circuito, ela diverge. Mostraremos na Seção seguinte qual a técnica que utilizaremos, e no Capítulo seguinte o resultado da sua aplicação a diversas configurações.

5.4 Descrição do Método

Quando nós tentamos calcular a força numa parte de um circuito devido ao restante do circuito (partes em contato), o resultado diverge (a força vai para infinito) para ambas as expressões. Esta incapacidade em lidar com este problema é a principal razão pela qual poucos cálculos deste tipo foram publicados desde que Ampère formulou a sua expressão de força. Para evitar esta divergência algumas pessoas têm tentado introduzir uma distância de separação finita entre as duas partes do circuito, (ver referência em [Gra85a], págs. 179–203), ou introduzir um elemento de corrente de tamanho finito para utilizar análise de elementos finitos em cálculos computacionais [GG85]. Uma maneira inquestionável de se fazer estes cálculos e obter valores finitos sem hipóteses arbitrárias é usar elemento de corrente superficial, ou volumétrico, ao invés de elemento de corrente linear. O primeiro a calcular explicitamente a força entre duas partes em contato de um circuito por este método correto foi Wesley [Wes87b, Wes87a, Wes90a], no caso de elementos de corrente volumétricos.

Estamos interessados, principalmente, no cálculo da força em uma parte de um circuito fechado devido a todo o circuito. Quando integramos as expressões (5.1) e (5.10), para um circuito único, o resultado diverge por causa dos elementos em contato no circuito⁷. Podemos eliminar este problema de duas maneiras: utilizar integração numérica com elementos de corrente linear de tamanho finito (tipicamente da ordem do espaçamento interatômico) [Gra85a, Gra90]; ou substituir o elemento de corrente linear por elemento de corrente superficial ou volumétrico, realizando integração numérica [Moy89b, Moy89a, Moy89c], ou analítica [Wes90a]. Neste trabalho utilizaremos esta última técnica [AB95b].

É claro que a utilização de elementos de corrente lineares (introduzidos na Seção 1.2) é abstrata e não corresponde à realidade. Podemos melhorar esta representação trocando a corrente linear por uma densidade de corrente superficial \vec{K} , ou uma densidade de corrente volumétrica \vec{J} . A relação entre estas quantidades é:

$$Id\vec{r} \leftrightarrow \vec{K}da \leftrightarrow \vec{J}dV, \quad (5.26)$$

onde da é o elemento de área e dV o elemento de volume.

Substituindo estas relações nas equações (5.1) e (5.10) obtemos, respectivamente, a expressão da força de Ampère e Grassmann para elemento superficial, $d^4 \vec{F}_{ij}^A$ e $d^4 \vec{F}_{ij}^G$, e para elemento volumétrico, $d^6 \vec{F}_{ij}^A$ e $d^6 \vec{F}_{ij}^G$:

⁷Ver exemplos na Seção 6.1.

$$\begin{aligned}
 d^4 \vec{F}_{ij}^A &= \frac{\mu_0 \hat{r}_{ij}}{4\pi r_{ij}^2} \left[3(\vec{K}_i \cdot \hat{r}_{ij})(\vec{K}_j \cdot \hat{r}_{ij}) - 2(\vec{K}_i \cdot \vec{K}_j) \right] da_i da_j \\
 &= -d^4 \vec{F}_{ji}^A,
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
 d^6 \vec{F}_{ij}^A &= \frac{\mu_0 \hat{r}_{ij}}{4\pi r_{ij}^2} \left[3(\vec{J}_i \cdot \hat{r}_{ij})(\vec{J}_j \cdot \hat{r}_{ij}) - 2(\vec{J}_i \cdot \vec{J}_j) \right] dV_i dV_j \\
 &= -d^6 \vec{F}_{ji}^A,
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$d^4 \vec{F}_{ij}^G = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r_{ij}^2} [(\vec{K}_i \cdot \vec{K}_j) \hat{r}_{ij} - (\vec{K}_i \cdot \hat{r}_{ij}) \vec{K}_j] da_i da_j, \tag{5.29}$$

$$d^6 \vec{F}_{ij}^G = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r_{ij}^2} [(\vec{J}_i \cdot \vec{J}_j) \hat{r}_{ij} - (\vec{J}_i \cdot \hat{r}_{ij}) \vec{K}_j] dV_i dV_j. \tag{5.30}$$

Capítulo 6

Força em Diversas Configurações

Calcularemos neste Capítulo a força entre elementos de corrente (linear, superficial e volumétrico) em diversas situações, utilizando as expressões (5.1), (5.10), (5.27) a (5.30) [AB95b].

6.1 Elemento Linear

Nesta Seção estaremos calculando a força somente em situações que não apresentam problemas de divergência (os fios não estão em contato), o que permite a utilização de elementos lineares.

6.1.1 Fios Paralelos

Primeiro calculamos a força entre dois fios paralelos. Utilizamos os fios descritos na Fig. 3.1. \vec{F}_{12} é a força sobre o fio 1 devido ao fio 2. Para esta situação temos: $d\vec{r}_i = dx_i \hat{x}$, $d\vec{r}_j = dx_j \hat{x}$, $\vec{r}_i = x_i \hat{x}$, $\vec{r}_j = x_j \hat{x} + b \hat{y}$. Substituindo estes valores em (5.1), (5.10) e (5.11), e considerando os limites de integração, obtemos, respectivamente:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}^A &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_0^{\ell_1} dx_i \int_a^{a+\ell_2} dx_j [(x_i - x_j) \hat{x} + b \hat{y}] \\ &\quad \times \left(\frac{3(x_i - x_j)^2}{r_{ij}^5} - \frac{2}{r_{ij}^3} \right) \\ &= -\vec{F}_{21}^A,\end{aligned}\tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}^G &= -\hat{y} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_0^{\ell_1} dx_1 \int_a^{a+\ell_2} dx_2 \frac{b}{r_{12}^3} \\ &= -\vec{F}_{21}^G.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Integrando a expressão (6.1) para achar a força de Ampère o resultado exato é:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}^A &= -\vec{F}_{21}^A = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[\hat{x} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{a+\ell_2}{b} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) \right. \right. \\ &\quad - \sinh^{-1} \left(\frac{a+\ell_2-\ell_1}{b} \right) + \sinh^{-1} \left(\frac{a-\ell_1}{b} \right) \\ &\quad - \frac{a+\ell_2}{[(a+\ell_2)^2 + b^2]^{1/2}} + \frac{a}{(a^2 + b^2)^{1/2}} + \frac{a+\ell_2-\ell_1}{[(a+\ell_2-\ell_1)^2 + b^2]^{1/2}} \\ &\quad - \left. \frac{a-\ell_1}{[(a-\ell_1)^2 + b^2]^{1/2}} \right) + \hat{y} \left(\frac{[(a+\ell_2)^2 + b^2]^{1/2}}{b} \right. \\ &\quad + \frac{[(a-\ell_1)^2 + b^2]^{1/2}}{b} - \frac{(a^2 + b^2)^{1/2}}{b} \\ &\quad - \frac{[(a+\ell_2-\ell_1)^2 + b^2]^{1/2}}{b} + \frac{b}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \\ &\quad + \frac{b}{[(a+\ell_2-\ell_1)^2 + b^2]^{1/2}} - \frac{b}{[(a+\ell_2)^2 + b^2]^{1/2}} \\ &\quad \left. \left. - \frac{b}{[(a-\ell_1)^2 + b^2]^{1/2}} \right) \right].\end{aligned}\quad (6.3)$$

Caso $b \rightarrow 0$ (dois fios paralelos e colineares de comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 separados por uma distância $d \equiv a - \ell_1 > 0$) a força de Ampère se reduz a:

$$\vec{F}_{12}^A = -\vec{F}_{21}^A = -\hat{x} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{a}{d} \right) + \ln \left(\frac{d+\ell_2}{a+\ell_2} \right) \right). \quad (6.4)$$

Isto indica uma repulsão entre os fios caso as correntes estejam no mesmo sentido. Se fizermos $d \rightarrow 0$ nesta última expressão (ou seja, $a \rightarrow \ell_1$) a força vai para infinito. Neste caso os fios 1 e 2 estão se tocando. Para evitar esta divergência temos que tratar com elemento de corrente superficial ou volumétrico, ao invés de linear.

Para obter a força de Grassmann resolvemos as integrais em (6.2). O resultado exato obtido é:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12}^G &= -\vec{F}_{21}^G = -\hat{y} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left(\frac{[(a + \ell_2)^2 + b^2]^{1/2}}{b} + \frac{[(a - \ell_1)^2 + b^2]^{1/2}}{b} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(a^2 + b^2)^{1/2}}{b} - \frac{[(a + \ell_2 - \ell_1)^2 + b^2]^{1/2}}{b} \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Se fizermos $b \rightarrow 0$ (em (6.2) ou (6.5)) a força de Grassmann tende a zero. Ou seja, não há força entre dois fios paralelos e colineares de acordo com Grassmann.

Com a força de Ampère, (6.3), obtivemos o resultado esperado: vale ação e reação. No caso da força de Grassmann, (6.5), a validade da ação e reação não é um resultado trivial (principalmente em situação de circuito aberto), e neste exemplo é uma peculiaridade da geometria. No exemplo da próxima Seção (fios perpendiculares), veremos que a força de Grassmann não mais satisfará ação e reação.

6.1.2 Fios Perpendiculares

Consideremos os fios perpendiculares entre si da Fig. 3.2. Como podemos ver da figura, $d\vec{r}_i = dx_i \hat{x}$, $d\vec{r}_j = dy_j \hat{y}$, $\vec{r}_i = x_i \hat{x}$, $\vec{r}_j = a \hat{x} + y_j \hat{y}$. Com estes valores e considerando os limites de integração das variáveis x_i e y_j nas Eqs. (5.1), (5.10) e (5.11), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12}^A &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_0^{\ell_1} dx_i \int_b^{b+\ell_2} dy_j [(x_i - a)\hat{x} - y_j \hat{y}] \\ &\quad \times \left(\frac{3(x_i - a)y_j}{r_{ij}^5} \right) \\ &= -\vec{F}_{21}^A, \end{aligned} \quad (6.6)$$

para a força de Ampère, e

$$\vec{F}_{12}^G = \hat{y} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_0^{\ell_1} dx_i \int_b^{b+\ell_2} dy_j \frac{(x_i - a)}{r_{ij}^3}, \quad (6.7)$$

$$\vec{F}_{21}^G = \hat{x} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_0^{\ell_1} dx_i \int_b^{b+\ell_2} dy_j \frac{y_j}{r_{ij}^3}, \quad (6.8)$$

para a força de Grassmann.

Calculando as integrais em (6.6) obtemos o resultado exato:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{12}^A = -\vec{F}_{21}^A = & -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[\hat{x} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1 - a}{b + \ell_2} \right) + \sinh^{-1} \left(\frac{a}{b + \ell_2} \right) \right. \right. \\
& - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1 - a}{b} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) - \frac{\ell_1 - a}{[(\ell_1 - a)^2 + (b + \ell_2)^2]^{1/2}} \\
& - \frac{a}{[a^2 + (b + \ell_2)^2]^{1/2}} + \frac{\ell_1 - a}{[(\ell_1 - a)^2 + b^2]^{1/2}} + \frac{a}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \left. \right) \\
& - \hat{y} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{b + \ell_2}{|a - \ell_1|} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{b}{|a - \ell_1|} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{b + \ell_2}{a} \right) \right. \\
& + \sinh^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{b + \ell_2}{[(a - \ell_1)^2 + (b + \ell_2)^2]^{1/2}} + \frac{b}{[(a - \ell_1)^2 + b^2]^{1/2}} \\
& \left. \left. + \frac{b + \ell_2}{[a^2 + (b + \ell_2)^2]^{1/2}} - \frac{b}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \right) \right]. \quad (6.9)
\end{aligned}$$

E resolvendo as integrais em (6.7) e (6.8) obtemos os resultados exatos:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{12}^G = & \hat{y} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{b + \ell_2}{a} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \right. \\
& \left. - \sinh^{-1} \left(\frac{b + \ell_2}{|\ell_1 - a|} \right) + \sinh^{-1} \left(\frac{b}{|\ell_1 - a|} \right) \right), \quad (6.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{21}^G = & \hat{x} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1 - a}{b} \right) + \sinh^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) \right. \\
& \left. - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1 - a}{b + \ell_2} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{a}{b + \ell_2} \right) \right), \quad (6.11)
\end{aligned}$$

Como havíamos dito na Seção anterior, a validade da ação e reação para a força de Grassmann no caso dos fios paralelos, (6.5), foi um resultado da geometria e não uma propriedade da força. Já quando os fios são perpendiculares entre si, Fig. 3.2, a força \vec{F}_{21}^G que o fio 1 faz no fio 2 não é o oposto da força \vec{F}_{12}^G que o fio 1 sofre do fio 2 (respectivamente expressões (6.10) e (6.11)).

Além disto, obtivemos que $\vec{F}_{12}^A \neq \vec{F}_{12}^G$ e $\vec{F}_{21}^A \neq \vec{F}_{21}^G$.

Se fizermos a e b tender a zero nas Eqs. (6.9) a (6.11) o resultado diverge. Nestes casos os fios 1 e 2 se tocam. Esta é a divergência a que nos referimos na Seção 5.4, e que nos obriga a abandonar o modelo de elemento de corrente linear se quisermos analisar a situação de força em um circuito fechado único.

Baseados nas expressões que obtivemos para os casos dos fios paralelos e perpendiculares entre si, nas Seções anteriores, resumimos nas Figs. 6.1 e 6.2 o comportamento qualitativo das forças de Ampère e Grassmann. A força de Grassmann satisfaz ação e reação nos casos (b) e (c). Além da força de Ampère satisfazer ação e reação em todas as situações, ela prediz uma força longitudinal no caso de fios alinhados, (c), enquanto a força de Grassmann não. Esta característica é a base dos recentes trabalhos experimentais de Graneau. Discutiremos mais a respeito desta diferença entre a força de Ampère e Grassmann na Seção 8.3.

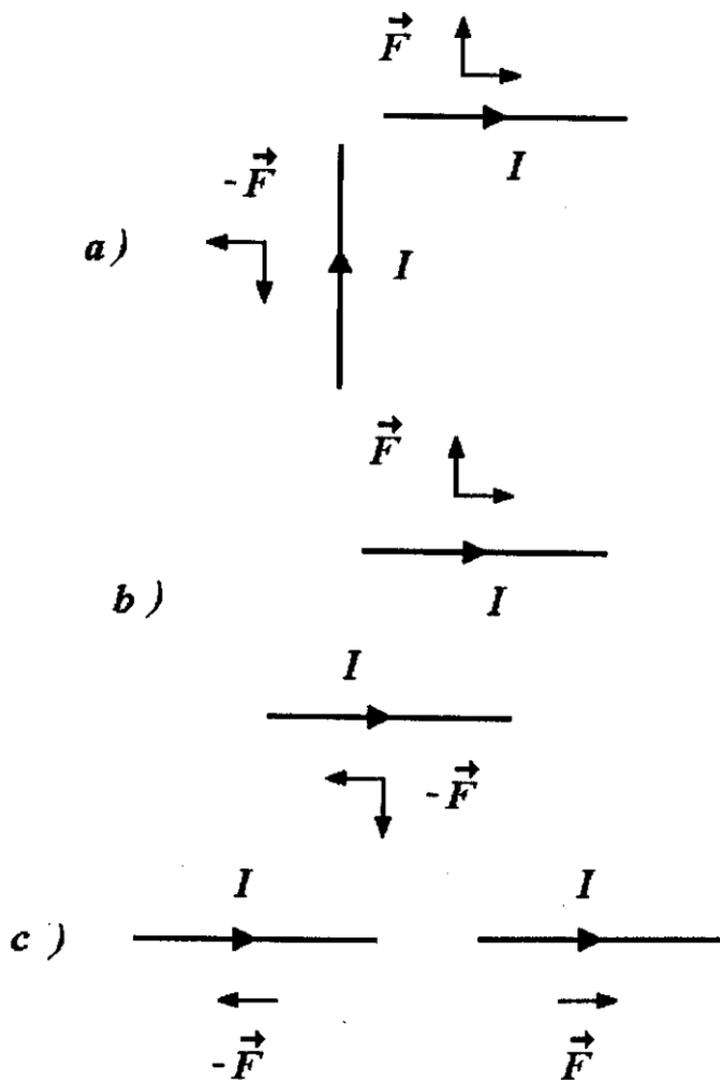


Figura 6.1: Comportamento qualitativo da força de Ampère.

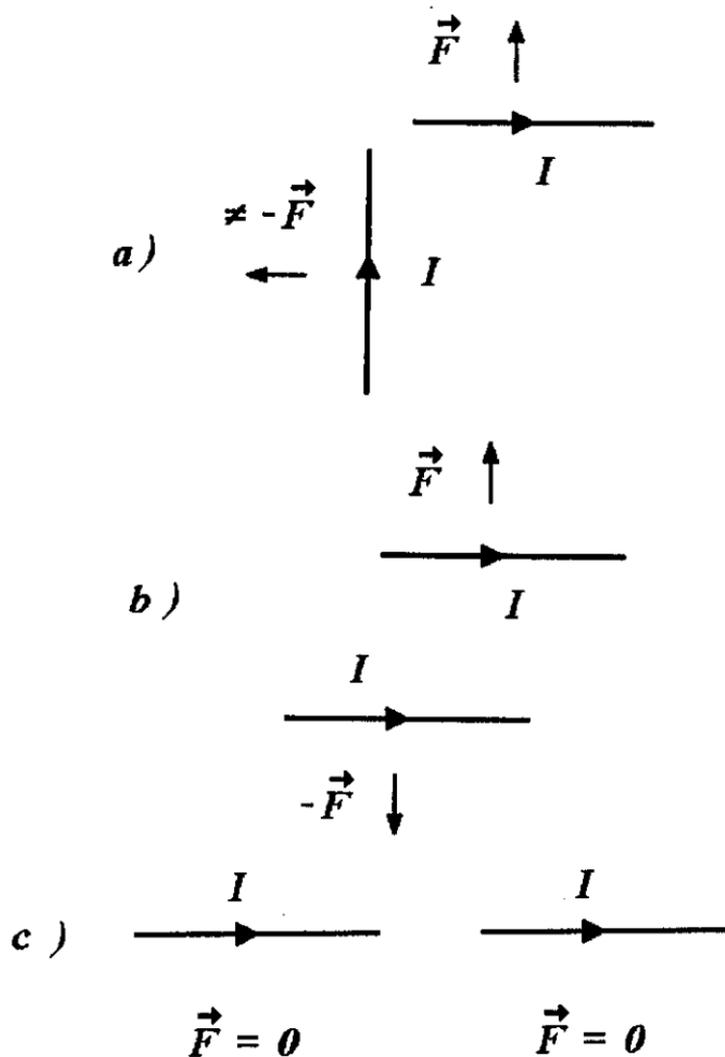


Figura 6.2: Comportamento qualitativo da força de Grassmann.

6.1.3 Circuito Retangular

Como dissemos anteriormente (Seção 5.4), quando o objetivo é calcular a força entre partes de um mesmo circuito que estão em contato, nos deparamos com o problema de não ser possível fazer tal cálculo com elementos de corrente lineares. Apesar disto vamos dar um exemplo nesta seção de que, em determinadas situações, com a utilização de argumentos de simetria podemos superar esta dificuldade. Os argumentos de simetria nos permitirão eliminar a força entre partes do circuito em contato, possibilitando a utilização de elementos de corrente lineares.

Na Fig. 6.3 nós apresentamos o circuito utilizado para os cálculos. O circuito composto pelas partes de 1 a 12 é fechado. Por ele flui uma corrente uniforme e constante I . Estamos interessados em saber a força na parte 1 (designada ponte¹) devido ao restante do circuito, partes de 2 a 12 (chamado suporte). Podemos imaginar que a ponte está conectada ao restante do circuito através de cubas de mercúrio líquido em ambas as suas extremidades, ou por arcos elétricos. Desta maneira a ponte fica mecanicamente desconectada do suporte, embora permaneça eletricamente ligada a ele. Assim, a força nela pode ser medida sem a necessidade de se interromper a corrente através do circuito. Como utilizaremos elemento de corrente linear, este cálculo é válido somente quando o diâmetro ω do fio é muito menor que outras dimensões no circuito (como por exemplo o tamanho da ponte e o comprimento dos lados do circuito retangular). Isto significa: $\omega \ll a$, $\omega \ll (b - a)$ e $\omega \ll f$.

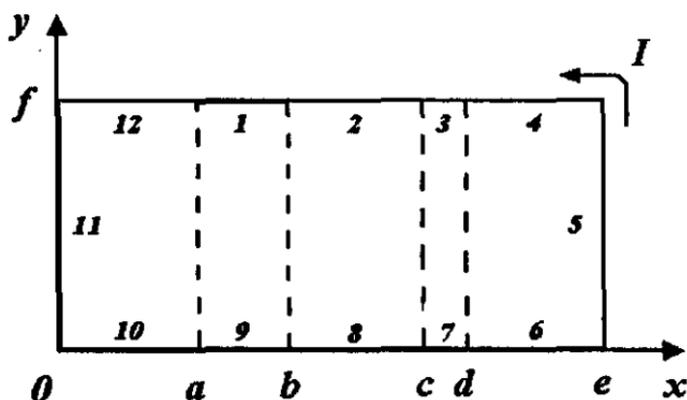


Figura 6.3: Circuito Retangular com elementos de corrente lineares.

A força na ponte devido ao suporte \vec{F}_{PS} leva em conta a força das partes

¹O nome ponte tem sido utilizado de acordo com o famoso experimento *ponte de Ampère* ou *hairpin*, [Gra85a].

2 e 12 na ponte. Ao calcularmos com Ampère a força de 2 na ponte obtemos: $\vec{F}_{12}^A = -\alpha \hat{x}$, $\alpha > 0$. Caso utilizássemos elemento de corrente linear então $\alpha \rightarrow \infty$ (ver (6.4) com $d \rightarrow 0$ ou $a \rightarrow \ell_1$). Se utilizarmos elemento de corrente superficial ou volumétrico (fios em contato mas com seção reta não desprezível) então α será finito, como veremos mais pra frente. Com a força de Grassmann eliminamos o problema, pois a força entre elementos colineares é nula (Fig. 6.2(c)). Portanto, $\vec{F}_{12}^G = \vec{F}_{1,12}^G = 0$. Se utilizarmos a força de Ampère, devido à simetria do circuito temos que $\vec{F}_{12}^A = -\vec{F}_{1,12}^A$. Isto porquê o comprimento do pedaço 2 é igual ao comprimento do pedaço 12, e ambos estão simetricamente dispostos em relação à ponte. Tanto com Grassmann quanto com Ampère temos então que $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{1,12} = 0$. Assim, para ambas as expressões de força só precisamos calcular a força que os elementos não em contato do suporte (de 3 a 11) fazem na ponte.

Utilizando os resultados calculados nas duas Seções anteriores, fórmulas (6.3), (6.5), (6.9), (6.10) e (6.11), obtemos que:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{PS}^A = \vec{F}_{PS}^G = & \hat{y} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{f}{e-b} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{f}{e-a} \right) \right. \\ & + \sinh^{-1} \left(\frac{f}{a} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{f}{b} \right) + \frac{(f^2 + b^2)^{1/2}}{f} - \frac{(f^2 + a^2)^{1/2}}{f} \\ & \left. - \frac{[f^2 + (b-e)^2]^{1/2}}{f} + \frac{[f^2 + (a-e)^2]^{1/2}}{f} \right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dois resultados interessantes nos revela a expressão (6.12). Primeiro, a igualdade entre a força de Ampère e a força de Grassmann. Este é um resultado não trivial. Nós não estamos integrando em um circuito fechado (o suporte é um circuito aberto). Segundo, apesar da ponte não estar simetricamente localizada em relação às partes 12 e 2+3+4 (para $e \neq d \neq c$), a força resultante nela não tem componente na direção \hat{x} . Portanto, uma das principais características que a força de Ampère tem, e a de Grassmann não, desaparece nesta situação: a existência de força longitudinal. Voltaremos a discutir esta questão na Seção 8.3. O resultado de que a força do suporte na ponte com Ampère é perpendicular à ponte, apesar dela não estar localizada simetricamente no circuito, é altamente não trivial. Ficamos muito surpresos ao obter este fato, que foi contra as nossas expectativas.

Como a força de Ampère sempre satisfaz ação e reação temos trivialmente que:

$$\vec{F}_{SP}^A = -\vec{F}_{PS}^A, \quad (6.13)$$

onde \vec{F}_{SP}^A é a força no suporte devido à ponte.

Como a força de Grassmann não satisfaz ação e reação em todas as situações (Fig. 6.2), precisamos calcular explicitamente a força no suporte devido à ponte \vec{F}_{SP}^G . De novo, $\vec{F}_{21}^G = \vec{F}_{12,1}^G = 0$. Utilizando as expressões (6.5), (6.10) e (6.11) chegamos a:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{SP}^G = & \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\hat{y} \left(\frac{(f^2 + a^2)^{1/2}}{f} - \frac{(f^2 + b^2)^{1/2}}{f} + \frac{[f^2 + (b - e)^2]^{1/2}}{f} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{[f^2 + (a - e)^2]^{1/2}}{f} \right) + \hat{x} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{e - b}{f} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{e - a}{f} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sinh^{-1} \left(\frac{b}{f} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{a}{f} \right) - \ln \left(\frac{e - b}{e - a} \right) - \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Somando esta expressão à Eq. (6.12) nós obtemos um resultado diferente de zero. Isto parece indicar que a força que o circuito retangular exerce nele mesmo é diferente de zero, de acordo com Grassmann. Este seria um resultado contrário à experiência, pois isto significaria que se o circuito retangular estivesse suspenso no ar ele se movimentaria por si próprio.

A solução deste aparente problema é que $\vec{F}_{PS} + \vec{F}_{SP}$ não é a força que o circuito retangular exerce nele mesmo. A correta expressão é: $\vec{F}_{PS} + \vec{F}_{SP} + \vec{F}_{PP} + \vec{F}_{SS}$. Como Ampère satisfaz ação e reação, a força da ponte na ponte \vec{F}_{PP}^A e a força do suporte no suporte \vec{F}_{SS}^A são nulas. Obviamente $\vec{F}_{PP}^G = 0$. Mas e \vec{F}_{SS}^G ?

Para calcular a força no suporte devido ao suporte, com a força de Grassmann, nós utilizaremos argumentos de simetria. A força nas partes 10, 11 e 12 devido a elas mesmas é $-\beta\hat{x}$, onde $\beta > 0$ (β é igual a infinito se utilizarmos elementos de corrente linear ou β é igual a um valor finito se utilizarmos elementos de corrente superficial ou volumétrico). Por outro lado, as partes 4, 5 e 6 estão simetricamente localizadas relativamente às primeiras e têm o mesmo tamanho. Portanto, a força que este lado do circuito faz nele mesmo é $+\beta\hat{x}$. Assim, $\vec{F}_{(10+11+12),(10+11+12)}^G + \vec{F}_{(4+5+6),(4+5+6)}^G = 0$. Ou seja, $\vec{F}_{SS}^G = \vec{F}_{9,11}^G + \vec{F}_{9,5}^G + \vec{F}_{11,3}^G + \vec{F}_{5,3}^G$. Todas estas outras forças podem ser obtidas dos resultados (6.5), (6.10) e (6.11). O resultado final é:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{SS}^G = & \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\hat{y} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{f}{e-a} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{f}{e-b} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{f}{a} \right) \right. \right. \\ & + \left. \left. \sinh^{-1} \left(\frac{f}{b} \right) \right) - \hat{x} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{e-b}{f} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{e-a}{f} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sinh^{-1} \left(\frac{b}{f} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{a}{f} \right) - \ln \left(\frac{e-b}{e-a} \right) - \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Este é novamente um resultado não trivial. Ou seja, de acordo com a expressão de Grassmann o suporte faz uma força nele mesmo não nula. Conseguimos obter o valor explícito desta força com elemento de corrente linear utilizando argumentos de simetria.

Somando a Eq. (6.15) à Eq. (6.14) nós obtemos exatamente $-\vec{F}_{PS}^G$. Isto significa que mesmo com a força de Grassmann neste circuito simples, a força resultante no suporte vai ser igual e oposta à força resultante na ponte, embora $\vec{F}_{SP}^G \neq -\vec{F}_{PS}^G$.

O principal resultado desta Seção pode ser resumido assim: se nós dividimos um circuito fechado em duas partes A e B , e queremos saber a força resultante na parte A de acordo com a força de Grassmann, nós precisamos calcular não somente \vec{F}_{AB}^G , mas também \vec{F}_{AA}^G . Este é um resultado extremamente importante e negligenciado por muitos autores, como por exemplo: [Wes87b, Wes90a].

6.2 Elemento Superficial

Apesar de ainda não ser uma representação fiel da realidade, o elemento de corrente superficial permite fazer o cálculo de força em situações onde a utilização do modelo de elemento de corrente linear não permite, devido a divergências. Nesta Seção calcularemos a força com as expressões de Ampère e Grassmann em diversas situações.

6.2.1 Circuito Retangular I

O circuito com o qual faremos os cálculos agora é o da Fig. 6.4. A espessura w do circuito é uniforme. A ponte é constituída pelos elementos 3, 4 e 5 e o restante, 1, 2 e 6, formam o suporte. A densidade superficial de corrente \vec{K} tem módulo I/w e a direção é: \hat{x} parte 1; $-\hat{x}$ parte 4; \hat{y} partes 2 e 3; $-\hat{y}$ partes 5 e 6.

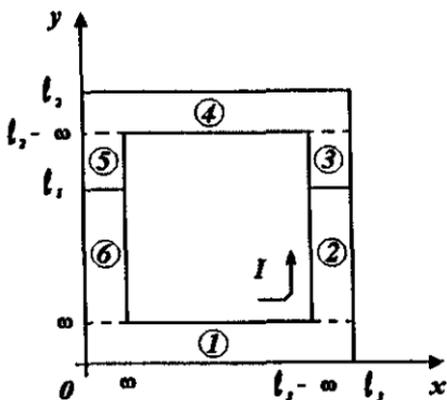


Figura 6.4: Circuito retangular com elementos de corrente superficiais.

Como vamos supor que $l_1 \gg w$, $l_2 - l_1 \gg w$, $l_3 \gg w$, utilizaremos as expressões de força para elemento de corrente superficial (5.27) e (5.29) só para as partes em contato do circuito (como por exemplo partes 5 e 6 da Fig. 6.4), onde não podemos utilizar as expressões (5.1) e (5.10).

Força de Ampère

No caso da força de Ampère o cálculo da força resultante na ponte \vec{F}_P^A devido ao circuito todo (ponte + suporte), será utilizada integração com elementos de corrente superficiais apenas para a força na parte 5 devido à parte 6, \vec{F}_{56}^A (por simetria, \vec{F}_{32}^A é igual a \vec{F}_{56}^A). Do fato da força de Ampère satisfazer sempre ação e reação, a força que a ponte faz nela mesma \vec{F}_{PP}^A é

nula. Do exposto acima podemos escrever que a força resultante na ponte \vec{F}_P^A é:

$$\vec{F}_P^A = 2\vec{F}_{5,6}^A + \vec{F}_{3,1}^A + \vec{F}_{3,6}^A + \vec{F}_{4,1}^A + \vec{F}_{4,2}^A + \vec{F}_{4,6}^A + \vec{F}_{5,1}^A + \vec{F}_{5,2}^A. \quad (6.16)$$

Explorando mais a simetria do circuito na Fig. 6.4:

$$\left. \begin{aligned} (F_{51}^A)_x &= -(F_{31}^A)_x; (F_{46}^A)_x = -(F_{42}^A)_x; (F_{52}^A)_x = -(F_{36}^A)_x; \\ (F_{51}^A)_y &= (F_{31}^A)_y; (F_{46}^A)_y = (F_{42}^A)_y; (F_{52}^A)_y = (F_{36}^A)_y; \\ (F_{41}^A)_x &= 0; (F_{56}^A)_x = (F_{32}^A)_x = 0; (F_{56}^A)_y = (F_{32}^A)_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

Das relações acima podemos então escrever para (6.16):

$$\vec{F}_P^A = \hat{y}[2(F_{31}^A + F_{36}^A + F_{42}^A + F_{56}^A)_y + (F_{41}^A)_y]. \quad (6.18)$$

Com $\vec{r}_{56} = (x_5 - x_6)\hat{x} + (y_5 - y_6)\hat{y}$, $da_5 = dx_5 dy_5$, $da_6 = dx_6 dy_6$, e substituindo os limites de integração em (5.27):

$$\begin{aligned} (F_{56}^A)_y &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \int_0^\omega dx_5 \int_{\ell_1}^{\ell_2-\omega} dy_5 \int_0^\omega dx_6 \int_w^{\ell_1} dy_6 \\ &\times \left(\frac{3(y_5 - y_6)^3}{[(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2]^{5/2}} \right. \\ &\left. - \frac{2(y_5 - y_6)}{((x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2)^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Apesar de trabalhosa, as integrais acima podem ser resolvidas. O valor final exato é:

$$\begin{aligned}
 (F_{56}^A)_y &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \left\{ 2(\ell_1 - \omega)(\ell_2 - \ell_1 - \omega) + (\ell_2 - \ell_1 - \omega) \right. \\
 &\quad \times [\omega^2 + (\ell_2 - \ell_1 - \omega)^2]^{1/2} - (\ell_2 - 2\omega)[\omega^2 + (\ell_2 - 2\omega)^2]^{1/2} \\
 &\quad + (\ell_1 - \omega)[\omega^2 + (\ell_1 - \omega)^2]^{1/2} + \omega^2 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2 - \ell_1 - \omega}{\omega} \right) \\
 &\quad \left. - \omega^2 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2 - 2\omega}{\omega} \right) + \omega^2 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1 - \omega}{\omega} \right) \right\}. \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

Se fizermos $\omega \rightarrow 0$ este resultado diverge, mostrando mais uma vez a divergência que ocorre com fios em contato se utilizarmos elemento de corrente linear.

As outras parcelas da expressão (6.18) podem ser calculadas utilizando os resultados (6.3) e (6.9). A força na ponte devido aos elementos não em contato \vec{F}_{PF}^A é:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{PF}^A &= \hat{y} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \left(\ln \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right) - \ln \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_3} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\ell_2^2 + \ell_3^2)^{1/2}}{\ell_2} \right). \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

Quando nós calculamos a força entre partes não em contato, (6.21), nós implicitamente utilizamos que $\omega \ll \ell_1$, $\omega \ll (\ell_2 - \ell_1)$ e $\omega \ll \ell_3$. Por razões de consistência nós devemos também expandir o resultado entre as partes em contato, (6.20), utilizando esta aproximação. Com termos até segunda ordem em ω/ℓ (ℓ um dos comprimentos citados acima), obtemos:

$$\vec{F}_{56}^A = \hat{y} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\ell_1}{\omega} \right) + \ln \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2} \right) + \ln 2 + \frac{1}{2} + O \left(\frac{\omega}{\ell} \right)^3 \right). \quad (6.22)$$

Somando então o valor acima com (6.21) obtemos o valor de \vec{F}_P^A :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_P^A &= \hat{y} \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{\ell_2}{\omega} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_3} \right) + \frac{(\ell_2^2 + \ell_3^2)^{1/2}}{\ell_2} \right. \\
 &\quad \left. + \ln 2 + \frac{1}{2} + O \left(\frac{\omega}{\ell} \right)^3 \right). \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

Interessante notar que o resultado acima independe do valor de ℓ_1 , a altura da ponte.

Já que o resultado exato da integração com elementos de corrente superficiais não é utilizado, mas sim a sua expansão, poderíamos ter aproximado o cálculo das integrais ao invés de ter calculado exatamente e depois ter feito uma expansão do resultado exato. Utilizando o método de aproximação para integrais descrito no Apêndice A obtivemos o valor aproximado (6.22), para as integrais (6.19). Apresentamos estas contas em detalhes no Apêndice B.

Força de Grassmann

Faremos o cálculo da força na ponte da Fig. 6.4 devido ao circuito todo com a força de Grassmann, \vec{F}_P^G . Seguiremos o mesmo procedimento utilizado com a força de Ampère na Seção anterior. Só utilizaremos integração com elementos de corrente superficiais para as partes em contato do circuito.

Com a força de Grassmann não podemos afirmar a priori que a força que a ponte faz nela mesma \vec{F}_{PP}^G é nula. $\vec{F}_{PP}^G = \vec{F}_{34}^G + \vec{F}_{35}^G + \vec{F}_{43}^G + \vec{F}_{45}^G + \vec{F}_{53}^G + \vec{F}_{54}^G$. Podemos simplificar esta expressão com as seguintes relações (através de simetrias na Fig. 3.7 e dos resultados da Fig. 6.2):

$$\left. \begin{aligned} (F_{34}^G)_x &= -(F_{54}^G)_x ; (F_{35}^G)_x = -(F_{53}^G)_x ; (F_{43}^G)_y = -(F_{45}^G)_y ; \\ (F_{34}^G)_y &= (F_{35}^G)_y = (F_{43}^G)_x = (F_{45}^G)_x = (F_{53}^G)_y = (F_{54}^G)_y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

portanto,

$$\vec{F}_{PP}^G = \hat{y}(2(F_{45}^G)_y). \quad (6.25)$$

As simetrias apresentadas em (6.17) também são válidas para a força de Grassmann. De (6.18) e (6.25):

$$\vec{F}_P^G = \hat{y}[2(F_{31}^G + F_{36}^G + F_{42}^G + F_{56}^G + F_{45}^G)_y + (F_{41}^G)_y]. \quad (6.26)$$

Com $\vec{r}_{45} = (x_4 - x_5)\hat{x} + (y_4 - y_5)\hat{y}$, $da_4 = dx_4 dy_4$, $da_5 = dx_5 dy_5$, e os limites de integração adequados:

$$\begin{aligned} (F_{45}^G)_y &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \int_0^{\ell_3} dx_4 \int_{\ell_2-\omega}^{\ell_2} dy_4 \int_0^\omega dx_5 \int_{\ell_1}^{\ell_1-\omega} dy_5 \\ &\times \frac{(x_4 - x_5)}{[(x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Resolvendo as integrais acima e depois expandindo o resultado em ω/ℓ até a segunda ordem², ou aplicando o método de aproximação às integrais, obtém-se:

$$(F_{45}^G)_y = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\omega} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_3} \right) + \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \sinh^{-1}(1) + \frac{1}{2} + O \left(\frac{\omega}{\ell} \right)^3 \right). \quad (6.28)$$

A força acima diverge quando $\omega \rightarrow 0$, como em (6.20).

As outras parcelas da Eq. (6.26), \vec{F}_{PF}^G , podem ser calculadas utilizando as expressões (6.5) e (6.10):

$$\vec{F}_{PF}^G = \hat{y} \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_3} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_3} \right) - \ln \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1} \right) + \frac{(\ell_2^2 + \ell_3^2)^{1/2}}{\ell_2} - 1 \right). \quad (6.29)$$

Substituindo a expressão acima e a Eq. (6.28) em (6.26) obtemos a força na ponte devido ao circuito todo com a expressão de Grassmann:

$$\vec{F}_P^G = \hat{y} \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{\ell_2}{\omega} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_3} \right) + \frac{(\ell_2^2 + \ell_3^2)^{1/2}}{\ell_2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \sinh^{-1}(1) - \frac{1}{2} + O \left(\frac{\omega}{\ell} \right)^3 \right). \quad (6.30)$$

Com a força de Grassmann o resultado também independe da altura ℓ_1 da ponte. Este resultado difere do resultado análogo com a força de Ampère, (6.23), apenas nas constantes numéricas. Comentaremos esta diferença mais adiante.

6.2.2 Circuito Retangular II

Nosso segundo circuito é apresentado na Fig. 6.5. A espessura ω é uniforme e continuam valendo as definições de ponte e suporte do circuito da Fig. 6.4.

² ℓ sempre representa um comprimento típico do circuito.

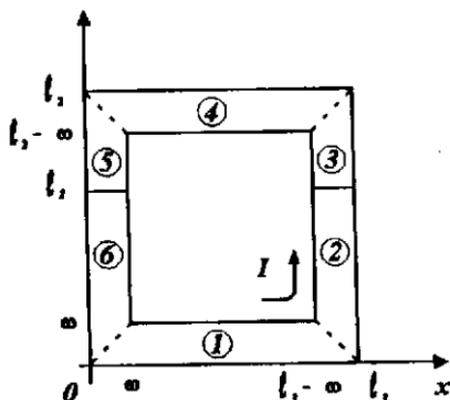


Figura 6.5: Circuito retangular com linhas de corrente fechadas.

A única diferença relativa à Fig. 6.4 é na terminação de cada uma das partes. Cada linha de corrente agora é fechada, Fig. 6.6. Na Fig. 6.6(a) nós temos a terminação das partes da Fig. 6.4, enquanto na Fig. 6.6(b) a terminação do circuito da Fig. 6.5. Como podemos ver, a descontinuidade abrupta que ocorre com a corrente no caso (a) não ocorre no caso (b).

Força de Ampère

O que muda com relação ao cálculo feito na Seção 6.2.1 é nos limites de integração de \vec{F}_{56}^A . A expressão para a força na ponte devido aos elementos não em contato, (6.21), continua válida neste caso pois a terminação das partes não importa com elementos de corrente lineares. Da expressão (6.19) e da Fig. 6.5,

$$\begin{aligned}
 (F_{56}^A)_y &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \int_0^\omega dx_6 \int_{x_6}^{\ell_1} dy_6 \int_0^\omega dx_5 \int_{\ell_1}^{\ell_2-x_5} dy_5 \\
 &\times \left(\frac{3(y_5 - y_6)^3}{[(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2]^{5/2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2(y_5 - y_6)}{((x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2)^{3/2}} \right). \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

Fazendo o cálculo das integrais e expandindo o resultado final, da mesma forma como foi feito anteriormente, ou então aplicando o método de aproximação nas integrais, os resultados são iguais ao obtido em (6.23).

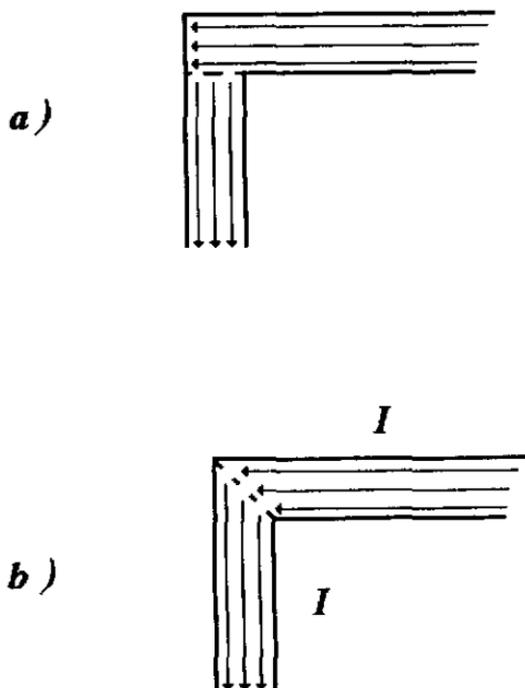


Figura 6.6: Terminação das partes do circuito retangular.

Portanto, com a força de Ampère, não obtivemos diferença alguma modificando a terminação das partes do circuito nesta ordem de aproximação. Assim sendo, a força na ponte devido ao restante do circuito continua sendo dada pela expressão (6.23). Agora faremos o cálculo com a força de Grassmann.

Força de Grassmann

A expressão para a força entre os elementos não em contato, (6.29), continua válida para o circuito da Fig. 6.5. A modificação nos limites de integração da Eq. (6.27) para a nova situação da Fig. 6.5 é:

$$(F_{45}^G)_y = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \int_0^{\ell_3} dx_4 \int_{\ell_2-\omega}^{\ell_2} dy_4 \int_0^\omega dx_5 \int_{\ell_1}^{\ell_1-\omega} dy_5 \\ \times \frac{(x_4 - x_5)}{[(x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2]^{3/2}}. \quad (6.32)$$

Tanto a aplicação do método de aproximação às integrais acima, quanto o cálculo exato seguido de expansão, conduz em:

$$(F_{45}^G)_y = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\omega} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_3} \right) + \ln 2 + \frac{3}{2} + O \left(\frac{\omega}{\ell} \right)^3 \right). \quad (6.33)$$

A mudança da terminação das partes do circuito mudou o valor da constante numérica em $(F_{45}^G)_y$, como podemos ver comparando (6.28) com (6.33). A força resultante é obtida substituindo em (6.26) as Eqs. (6.29) e (6.33):

$$\vec{F}_P^G = \hat{y} \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{\ell_2}{\omega} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_3} \right) + \frac{(\ell_2^2 + \ell_3^2)^{1/2}}{\ell_2} + \ln 2 + \frac{1}{2} + O \left(\frac{\omega}{\ell} \right)^3 \right). \quad (6.34)$$

Este resultado é exatamente igual ao obtido com a força de Ampère, Eq. (6.23).

6.2.3 Circuito Retangular III

Continuando com elementos de corrente superficiais faremos agora o cálculo com o circuito da Fig. 6.7. A ponte é a parte 3 do circuito e o suporte é constituído pelas partes 1, 2 e 4. Calcularemos a força resultante na ponte devido ao circuito todo com as forças de Ampère e Grassmann.

Como podemos ver dos resultados anteriores a força resultante independe da altura ℓ_1 da ponte. Portanto, é de se esperar que também no caso da Fig. 6.7 os resultados coincidam com os das Eqs. (6.23) e (6.34), pois a ponte do circuito da Fig. 6.7 é o caso limite da Fig. 6.5 quando ℓ_2 tende a ℓ_1 .

O circuito da Fig. 6.7 também serve como modelo para o cálculo da força na ponte do circuito da Fig. 6.3, quando a e $e - b$ tendem a zero. Nesta situação o resultado obtido com elemento de corrente linear, (6.12), não é mais válido pois diverge.

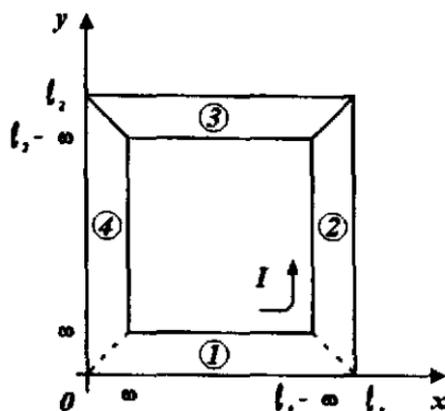


Figura 6.7: Circuito retangular com uma outra ponte.

Supomos um fluxo uniforme de corrente I na seção reta do circuito, $\vec{K}_3 = -\vec{K}_1 = -I/\omega \hat{x}$, $\vec{K}_4 = -\vec{K}_2 = -I/\omega \hat{y}$, $da_3 = dx_3 dy_3$, $da_4 = dx_4 dy_4$.

A simetria do circuito da Fig. 6.7 permite escrever:

$$\left. \begin{aligned} (F_{31}^{A,G})_x &= 0; (F_{32}^{A,G})_x = -(F_{34}^{A,G})_x; \\ (F_{32}^{A,G})_y &= (F_{34}^{A,G})_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Como nos casos anteriores $\vec{F}_{PP}^A = 0$. Mas nesta situação também temos que $\vec{F}_{PP}^G = 0$. Portanto, com as relações (6.35) podemos escrever tanto para a força de Ampère quanto a de Grassmann que a força resultante na ponte \vec{F}_P é:

$$\vec{F}_P^{A,G} = \hat{y}[2(F_{34}^{A,G})_y + (F_{31}^{A,G})_y]. \quad (6.36)$$

Força de Ampère

Com as definições feitas na Seção anterior e substituindo os limites de integração adequados (ver Fig. 6.7) em (5.27) obtemos,

$$\begin{aligned} (F_{34}^A)_y &= \frac{3\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \int_0^\omega dx_4 \int_{x_4}^{\ell_2 - x_4} dy_4 \int_{\ell_2 - \omega}^{\ell_2} dy_3 \int_{\ell_2 - y_3}^{y_3 + \ell_3 - \ell_2} dx_3 \\ &\times \frac{(y_3 - y_4)^2 (x_3 - x_4)}{[(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2]^{5/2}}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Resolvendo as integrais pelo método de aproximação até segunda ordem em ω/ℓ , supondo $\ell_2 \gg \omega$ e $\ell_3 \gg \omega$,

$$(F_{34}^A)_y = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\ell_2}{\omega} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_3} \right) + \frac{\ell_2}{(\ell_2^2 + \ell_3^2)^{1/2}} + \ln 2 + \frac{1}{2} + O \left(\frac{\omega}{\ell} \right)^3 \right). \quad (6.38)$$

Se $\omega/\ell_2 \rightarrow 0$ o resultado acima diverge, confirmando o que obtivemos em (6.9) quando $a \rightarrow 0$ e $b \rightarrow 0$ (fios perpendiculares que se tocam).

De (6.3) obtemos que

$$(F_{31}^A)_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\frac{(\ell_2^2 + \ell_3^2)^{1/2}}{\ell_2} - \frac{\ell_2}{(\ell_2^2 + \ell_3^2)^{1/2}} \right). \quad (6.39)$$

Substituindo em (6.36) as Eqs. (6.38) e (6.39) obtemos exatamente a Eq. (6.23). Ou seja, como havíamos previsto, o resultado para a ponte do circuito da Fig. 6.7 é o mesmo que para a ponte do circuito da Fig. 6.5.

Força de Grassmann

Da mesma forma que obtivemos (6.37), obtemos com a expressão (5.29):

$$(F_{34}^G)_y = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \int_0^\omega dx_4 \int_{x_4}^{\ell_2 - x_4} dy_4 \int_{\ell_2 - \omega}^{\ell_2} dy_3 \int_{\ell_2 - y_3}^{y_3 + \ell_3 - \ell_2} dx_3 \times \frac{(x_3 - x_4)}{[(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2]^{3/2}}, \quad (6.40)$$

cuja solução pelo método de aproximação das integrais descrito no Apêndice A é:

$$(F_{34}^G)_y = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\ell_2}{\omega} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\ell_3} \right) + \ln 2 + \frac{3}{2} + O \left(\frac{\omega}{\ell} \right)^3 \right). \quad (6.41)$$

De (6.5) e da Fig. 6.7,

$$(F_{31}^G)_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\frac{(\ell_2^2 + \ell_3^2)^{1/2}}{\ell_2} - 1 \right), \quad (6.42)$$

que junto com (6.41) em (6.36) resulta também na Eq. (6.34).

6.2.4 Comentários

Independente da terminação que foi utilizada para as partes que compõem os circuitos das Figs. 6.4 e 6.5, a força na ponte devido ao circuito todo independe da altura ℓ_1 da ponte (expressões (6.23), (6.30) e (6.34)). Podemos comprovar este resultado com o circuito da Fig. 6.7.

O resultado (6.34) é o mesmo que (6.23). Isto mostra que a força de Grassmann prediz exatamente a mesma força na ponte que a força de Ampère (tanto para a ponte do circuito da Fig. 6.5 como a da Fig. 6.7). É extremamente importante ressaltar dois aspectos fundamentais para se obter esta igualdade. O primeiro foi a inclusão da força da ponte nela mesma quando utilizamos a força de Grassmann (com a de Ampère ela é obviamente nula). O segundo foi utilizar um circuito somente com linhas de corrente contínuas e fechadas (Fig. 6.6). Estes dois aspectos, fundamentais para se obter a equivalência entre as forças, não foram levados em conta por Wesley. Ele conclui erradamente que a força de Ampère é a única compatível com os experimentos [Wes90a].

Vamos agora explicar porquê a força de Ampère não se modificou do circuito da Fig. 6.4 para o da Fig. 6.5, ao contrário do que aconteceu com a força de Grassmann.

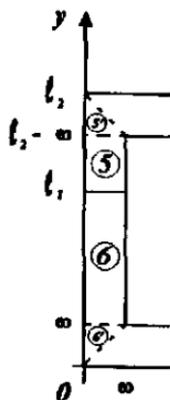


Figura 6.8: Ponte de Ampère com as duas terminações das partes do circuito, no caso da força de Ampère.

Utilizaremos a Fig. 6.8 para a explicação. No circuito da Fig. 6.4 calculamos a força de Ampère na parte 5 devido à parte 6. No da Fig. 6.5 calculamos a força que 6 + 6' fazem em 5 + 5'. No segundo caso temos a mais que no primeiro: $\vec{F}_{56'}^A$, $\vec{F}_{5'6}^A$ e $\vec{F}_{5'6'}^A$. Todas estas forças são pequenas pois ℓ_1 e $\ell_2 - \ell_1$ são muito maiores que ω . Quando fazemos expansão até segunda ordem em ω/ℓ o resultado é igual pois as forças acima contribuem

apenas com termos de terceira ordem para cima na expansão.

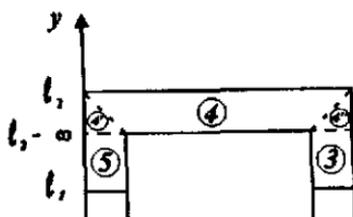


Figura 6.9: Ponte de Ampère com as duas terminações das partes do circuito, no caso da força de Grassmann.

Já o mesmo não acontece com a força de Grassmann, Fig. 6.9. Em (6.30) calculamos $\vec{F}_{4+4'+4'',5}^G$ e em (6.34) foi calculado $\vec{F}_{4,4'+5}^G$. A diferença é que, no segundo caso não calculamos $\vec{F}_{4'',5}^G$ e, ao invés de calcularmos $\vec{F}_{4',5}^G$ calculamos $\vec{F}_{4,4'}^G$. Diferente do caso com a força de Ampère, esta diferença não é desprezível pois os elementos 4' e 5 estão em contato, o mesmo ocorrendo com 4' e 4. Logo, as forças $\vec{F}_{4,4'}^G$ e $\vec{F}_{4',5}^G$ vão ter componentes de segunda ordem em ω/ℓ , que não necessariamente precisam ser as mesmas (neste caso em particular: $\vec{F}_{4,4'}^G \neq \vec{F}_{4',5}^G$ mesmo em termos de segunda ordem em ω/ℓ).

Por fim, no caso do coeficiente de auto-indutância do circuito da Fig. 3.7, não foi preciso alterar a terminação dos pedaços para se obter a equivalência entre as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau, Eq. (3.11), como tivemos que fazer no caso das forças de Grassmann e Ampère. O motivo desta diferença está na dependência das fórmulas com r (distância entre as partículas). Enquanto as fórmulas do coeficiente de indutância dependem de $1/r$, as da força dependem de $1/r^2$. Como pudemos verificar com os nossos cálculos, a dependência em $1/r^2$ da força produz alterações em termos até de segunda ordem em ω/ℓ (quando alteramos a terminação dos pedaços), que a dependência em $1/r$ do coeficiente de indutância não tem.

6.3 Elemento Volumétrico

A utilização de elementos de corrente volumétricos faz com que os resultados obtidos possam ser melhor comparados com os dados experimentais, do que os obtidos com elementos de corrente superficiais. Este é o objetivo desta Seção. Para tal, utilizaremos uma versão volumétrica do circuito apresentado na Fig. 6.5, e calcularemos a força na ponte devido ao circuito todo com as forças de Ampère e Grassmann.

6.3.1 Circuito Retangular

O circuito com elementos de corrente volumétricos que utilizaremos é o da Fig. 6.10. As definições de ponte e suporte são as mesmas que as do circuito da Fig. 6.5. A seção reta do circuito é um quadrado de lados ω . O fluxo de corrente é uniforme na seção reta de cada pedaço do circuito. Com isso a densidade volumétrica de corrente $|\vec{J}|$ pode ser escrita como I/ω^2 , onde I é a corrente que flui no circuito. Suporemos, para simplificar, que $\omega \ll \ell_1$, $\omega \ll \ell_2 - \ell_1$ e $\omega \ll \ell_3$.

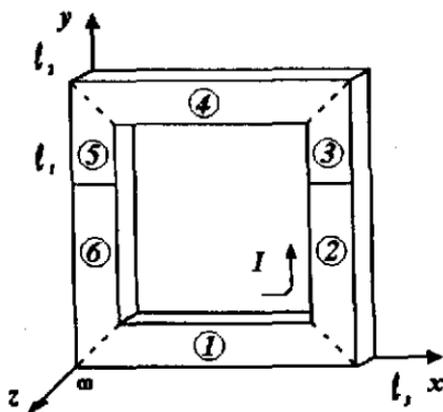


Figura 6.10: Circuito retangular com elementos de corrente volumétricos.

As relações de simetria em (6.17) e (6.24) continuam válidas para este caso. Portanto, a força na ponte devido ao circuito todo com a força de Ampère continua sendo dada pela expressão (6.18), enquanto que, para a força de Grassmann, é a expressão (6.26). Para as partes não em contato do circuito podemos utilizar dentro desta aproximação o elemento de corrente linear. O cálculo da força na ponte devido às partes não em contato, com elementos de corrente lineares, já foi feito. No caso da força de Ampère é a expressão (6.21), e para a força de Grassmann é a expressão (6.29).

Falta então calcular para a força de Ampère $(F_{56}^A)_y$, e $(F_{45}^G)_y$ para a força de Grassmann. Faremos isto a seguir.

Força de Ampère

Substituindo na expressão (5.28), $\vec{r}_{56} = (x_5 - x_6)\hat{x} + (y_5 - y_6)\hat{y} + (z_5 - z_6)\hat{z}$, $\vec{J}_5 = \vec{J}_6 = -I/\omega^2\hat{y}$ e os limites de integração da Fig. 6.10, chega-se a

$$\begin{aligned} (F_{56}^A)_y &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^4} \int_0^\omega dx_5 \int_0^\omega dx_6 \int_0^\omega dz_5 \int_0^\omega dz_6 \int_{\ell_1}^{\ell_2 - x_5} dy_5 \int_{x_6}^{\ell_1} dy_6 \\ &\times \left(\frac{3(y_5 - y_6)^3}{[(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 + (z_5 - z_6)^2]^{5/2}} \right. \\ &\left. - \frac{2(y_5 - y_6)}{[(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 + (z_5 - z_6)^2]^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

A resolução destas integrais pelo método de aproximação fornece:

$$\vec{F}_{56}^A = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln\left(\frac{\ell_1}{\omega}\right) + \ln\left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2}\right) + \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{13}{12} - \frac{\pi}{3} + O\left(\frac{\omega}{\ell}\right)^3 \right) \hat{y}. \quad (6.44)$$

Este resultado, multiplicado por 2 e somado à Eq. (6.21), é a força na ponte devido ao circuito todo com termos até segunda ordem em ω/ℓ_1 , ω/ℓ_2 e ω/ℓ_3 :

$$\begin{aligned} \vec{F}_P^A &= \hat{y} \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{\ell_2}{\omega}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{\ell_2}{\ell_3}\right) + \frac{(\ell_2^2 + \ell_3^2)^{1/2}}{\ell_2} \right. \\ &\left. + \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{\pi}{3} + \frac{13}{12} + O\left(\frac{\omega}{\ell}\right)^3 \right). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Podemos ver que o resultado para \vec{F}_P^A no caso do circuito volumétrico da Fig. 6.10, Eq. (6.45), é essencialmente o mesmo que para o caso superficial da Fig. 6.5, Eq. (6.23). As diferenças ocorrem apenas nas constantes numéricas.

Força de Grassmann

As simplificações por simetria apresentadas em (6.17) e (6.24) também valem neste caso. Portanto, a Eq. (6.26) é a expressão correta para o cálculo de \vec{F}_P^G no caso do circuito volumétrico da Fig. 6.10.

Substituindo os limites de integração para as partes 4 e 5 na Fig. 6.10, $\vec{r}_{45} = (x_4 - x_5)\hat{x} + (y_4 - y_5)\hat{y} + (z_4 - z_5)\hat{z}$, $\vec{J}_4 = -I/\omega^2\hat{x}$ e $\vec{J}_5 = -I/\omega^2\hat{y}$, em (5.30), resulta em:

$$(F_{45}^G)_y = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^4} \int_0^\omega dz_4 \int_0^\omega dz_5 \int_0^\omega dx_5 \int_{\ell_2-\omega}^{\ell_2} dy_4 \int_{\ell_2-y_4}^{y_4+\ell_3-\ell_2} dx_4 \\ \times \int_{\ell_1}^{\ell_2-x_5} dy_5 \frac{(x_4 - x_5)}{[(x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2 + (z_4 - z_5)^2]^{3/2}}. \quad (6.46)$$

Da mesma forma que obtivemos uma igualdade entre a força de Ampère e a de Grassmann para \vec{F}_P , nos circuitos das Figs. 6.5 e 6.7, esperamos obter o mesmo no caso do circuito volumétrico da Fig. 6.10. Assim sendo, ao invés de calcularmos explicitamente (6.46), vamos supor que o resultado para \vec{F}_P^G no circuito da Fig. 6.10 é o mesmo que o da expressão (6.45). Em seguida provaremos que isto vai ser realmente verdade.

Podemos escrever a força resultante na ponte devido ao circuito todo como sendo:

$$\vec{F}_P^A = \vec{F}_{PF}^A + \hat{y}(2(F_{56}^A)_y), \quad (6.47)$$

$$\vec{F}_P^G = \vec{F}_{PF}^G + \hat{y}(2(F_{45}^G)_y), \quad (6.48)$$

com \vec{F}_{PF}^A e \vec{F}_{PF}^G dados respectivamente por (6.21) e (6.29), $(F_{56}^A)_y$ por (6.44) e $(F_{45}^G)_y$ por (6.46).

Supondo então que $\vec{F}_P^A = \vec{F}_P^G$, obtemos de (6.47) e (6.48) que,

$$\vec{R} \equiv \hat{y}(F_{56}^A - F_{45}^G)_y = \frac{1}{2}(\vec{F}_{PF}^G - \vec{F}_{PF}^A) \\ = \hat{y} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_3} \right) - \ln \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right) - 1 \right). \quad (6.49)$$

Integrando em x_4 e y_5 em (6.46),

$$\begin{aligned}
(F_{45}^G)_y &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^4} \int_0^\omega dz_4 \int_0^\omega dz_5 \int_0^\omega dx_5 \int_{\ell_2-\omega}^{\ell_2} dy_4 \\
&\times \left(\ln \left((y_4 - \ell_1) + [(\ell_2 - y_4 - x_5)^2 \right. \right. \\
&+ (z_4 - z_5)^2 + (y_4 - \ell_1)^2]^{1/2} \Big) \\
&- \ln \left((y_4 - \ell_2 + x_5) + [2(\ell_2 - y_4 - x_5)^2 + (z_4 - z_5)^2]^{1/2} \right) \\
&+ \sinh^{-1} \left(\frac{y_4 - \ell_2 + x_5}{[(y_4 + \ell_3 - \ell_2 - x_5)^2 + (z_4 - z_5)^2]^{1/2}} \right) \\
&- \sinh^{-1} \left(\frac{y_4 - \ell_1}{[(y_4 + \ell_3 - \ell_2 - x_5)^2 + (z_4 - z_5)^2]^{1/2}} \right) \Big).
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Por outro lado, a integração em y_6 e y_5 em (6.43) fornece:

$$\begin{aligned}
(F_{56}^A)_y &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^4} \int_0^\omega dz_5 \int_0^\omega dz_6 \int_0^\omega dx_5 \int_0^\omega dx_6 \\
&\times \left(\ln \left((\ell_2 - \ell_1 - x_5) + [(x_5 - x_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 \right. \right. \\
&+ (\ell_2 - \ell_1 - x_5)^2]^{1/2} \Big) \\
&- \ln \left((\ell_2 - x_5 - x_6) + [(x_5 - x_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 \right. \\
&+ (\ell_2 - x_5 - x_6)^2]^{1/2} \Big) \\
&+ \ln \left((\ell_1 - x_6) + [(x_5 - x_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 + (\ell_1 - x_6)^2]^{1/2} \right) \\
&- \frac{\ell_2 - \ell_1 - x_5}{[(x_5 - x_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 + (\ell_2 - \ell_1 - x_5)^2]^{1/2}} \\
&+ \frac{\ell_2 - x_5 - x_6}{[(x_5 - x_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 + (\ell_2 - x_5 - x_6)^2]^{1/2}} \\
&- \frac{\ell_1 - x_6}{[(x_5 - x_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 + (\ell_1 - x_6)^2]^{1/2}} \\
&- \frac{1}{2} \ln \left((x_5 - x_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 \right) \Big).
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Fazendo a mudança de variável: $z_4 = z_6$ e $y_4 = x_6 + \ell_2 - \omega$ em (6.50),

$$\begin{aligned}
(F_{45}^G)_y &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^4} \int_0^\omega dz_5 \int_0^\omega dz_6 \int_0^\omega dx_5 \int_0^\omega dx_6 \\
&\times \left(\ln \left((x_6 + \ell_2 - \ell_1 - \omega) + [(\omega - x_6 - x_5)^2 + (z_6 - z_5)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (x_6 + \ell_2 - \ell_1 - \omega)^2]^{1/2} \right) \right. \\
&\quad - \ln \left((x_6 + x_5 - \omega) + (2(\omega - x_6 - x_5)^2 + (z_6 - z_5)^2)^{1/2} \right) \\
&\quad \left. + \sinh^{-1} \left(\frac{x_6 + x_5 - \omega}{[(\ell_3 - x_5 + x_6 - \omega)^2 + (z_6 - z_5)^2]^{1/2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sinh^{-1} \left(\frac{x_6 + \ell_2 - \ell_1 - \omega}{[(\ell_3 - x_5 + x_6 - \omega)^2 + (z_6 - z_5)^2]^{1/2}} \right) \right). \tag{6.52}
\end{aligned}$$

Utilizando o método de aproximação de integrais em algumas parcelas de (6.51) e (6.52), e substituindo o resultado em (6.49):

$$\begin{aligned}
\bar{R} &= \hat{y} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^4} \left[\omega^4 \left(\sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_3} \right) - \ln \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right) - 1 \right) \right. \\
&\quad - \int_0^\omega dz_5 \int_0^\omega dz_6 \int_0^\omega dx_5 \int_0^\omega dx_6 \left(\frac{1}{2} \ln \left((x_6 - x_5)^2 + (z_6 - z_5)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \ln \left((x_6 + x_5 - \omega) + (2(\omega - x_6 - x_5)^2 + (z_6 - z_5)^2)^{1/2} \right) \right) \\
&\quad \left. + O \left(\frac{\omega}{\ell} \right)^3 \right]. \tag{6.53}
\end{aligned}$$

Comparando (6.49) com (6.53) vemos que a nossa hipótese inicial, $\bar{F}_P^G = \bar{F}_P^A$, será válida se demonstrarmos que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\omega dz_5 \int_0^\omega dz_6 \int_0^\omega dx_5 \int_0^\omega dx_6 \ln \left((x_6 - x_5)^2 + (z_6 - z_5)^2 \right)^{1/2} = \\
&\int_0^\omega dz_5 \int_0^\omega dz_6 \int_0^\omega dx_5 \int_0^\omega dx_6 \ln \left((x_6 + x_5 - \omega) + [2(\omega - x_6 - x_5)^2 \right. \\
&\quad \left. + (z_6 - z_5)^2]^{1/2} \right). \tag{6.54}
\end{aligned}$$

Manipulando o integrando do lado direito de (6.54), e com algumas mudanças de variáveis óbvias, verificamos facilmente a igualdade acima.

Assim, completamos a demonstração de que \vec{F}_P^G , para o circuito da Fig. 6.10, tem o mesmo valor que \vec{F}_P^A , Eq. (6.45).

6.3.2 Comentários

No circuito com elementos de corrente volumétricos da Fig. 6.10 utilizamos seção reta quadrada. A seção reta mais adequada para reproduzir a situação experimental é a circular, já que em geral os fios possuem seção reta circular. Um circuito que reproduziria melhor a situação prática seria o da Fig. 6.11.

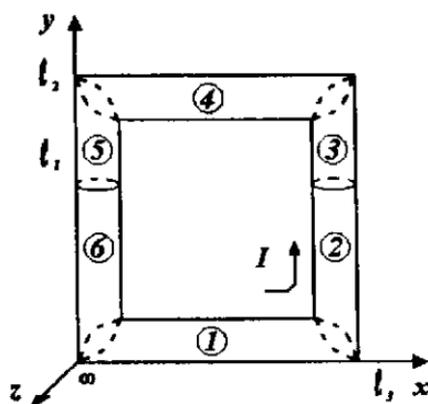


Figura 6.11: Circuito retangular com seção reta circular.

Recentemente Moyssides realizou o cálculo com as forças de Ampère e Grassmann para um circuito análogo ao da Fig. 6.11 [Moy89b, Moy89a]. Ele utilizou integração numérica com rotinas computacionais, ao invés de resolver analiticamente as integrais como fizemos. No entanto, o resultado que Moyssides obteve é equivalente ao nosso. Ou seja, dentro da validade do método numérico, a força de Ampère e a de Grassmann são equivalentes para o cálculo da força na ponte devido ao circuito todo. O resultado dele só difere do nosso em termos das constantes numéricas, já que a nossa seção reta é quadrada e a que ele utilizou circular. Apesar disto ele também obteve que as expressões de Ampère e Grassmann prevêm o mesmo resultado para a força resultante na ponte.

Moyssides também realizou experiências com os circuitos que ele utilizou para os cálculos [Moy89c]. Ele obteve uma excelente concordância entre a previsão teórica e os resultados experimentais. Comentaremos um pouco mais sobre estes resultados, comparando com os nossos, na Seção 8.1.

Já sabíamos que a força de Ampère e a de Grassmann são equivalentes quando se calcula a força que um circuito fechado de corrente faz num

condutor externo a ele. O que os resultados deste Capítulo parecem nos indicar é que esta equivalência também se estende para o caso da força que um circuito fechado de corrente faz numa parte finita dele próprio. No caso de elemento de corrente linear a equivalência foi obtida com o circuito da Fig. 6.3. Com elemento de corrente superficial não obtivemos a equivalência para o circuito retangular da Fig. 6.4. O motivo, explicado na Seção 6.2.4, é que, apesar deste circuito ser mecanicamente fechado, as linhas de corrente não são. Portanto, temos um circuito aberto onde sabemos que, em geral, não há equivalência entre as expressões de força. Quando fechamos as linhas de corrente através do circuito da Fig. 6.5, obtivemos a igualdade para o valor da força na ponte devido ao circuito todo entre as duas fórmulas. Mais uma vez este resultado se repetiu com o circuito da Fig. 6.7, e também quando utilizamos elemento de corrente volumétrico no circuito da Fig. 6.10.

Isto nos motiva a demonstrar que estas equivalências são apenas o reflexo de um resultado mais genérico: a equivalência entre a força de Ampère e a de Grassmann, para todos os circuitos fechados de corrente (linhas de corrente fechadas). Apresentamos a demonstração no Capítulo seguinte.

Capítulo 7

Equivalência Completa

A prova de equivalência entre a força de Ampère e a força de Grassmann, para a interação de um circuito fechado com uma parte dele próprio, tem sido reivindicada por alguns autores nos últimos anos [Jol85, Ter85, Chr87, Chr88, Chr89]. Neste Capítulo nós apresentaremos uma nova demonstração da equivalência, tentando eliminar as dificuldades apontadas por outros autores contra aquelas demonstrações [Gra85b, Gra85c, Cor89, Pap90, Gra93]. Desta maneira, nós esperamos dar uma resposta definitiva a esta controvérsia [AB95a].

7.1 Efeito Bootstrap

Em decorrência da força de Grassmann, em geral, não satisfazer ação e reação entre elementos de corrente, pode se pensar que, para algum circuito fechado em particular, haja uma força não nula que o circuito exerce em si próprio. Isto é chamado de efeito *bootstrap*. Se este efeito realmente fosse possível, poderíamos construir naves espaciais que se locomoveriam através do espaço simplesmente com uma força gerada internamente ao sistema (e não baseada no par ação-reação no caso de naves com jato propulsão). Mas este não é o caso para circuitos fechados de corrente com a força de Grassmann. Ou seja, mostraremos que não há efeito bootstrap para a força de Grassmann quando tratamos com circuitos fechados.

Que não existe efeito *bootstrap* com a força de Ampère é óbvio, pois ela sempre satisfaz ação e reação para a força entre elementos de corrente, para qualquer distância e orientação relativas dos elementos.

Seja o circuito fechado genérico Γ da Fig. 7.1. Nele representamos dois elementos de corrente, $Id\vec{r}_1$ e $Id\vec{r}_2$. A força resultante que o circuito fechado

Γ exerce nele mesmo pode ser escrita como:

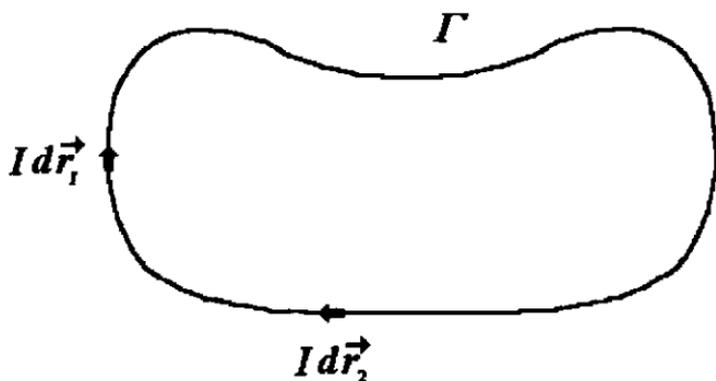


Figura 7.1: Circuito fechado genérico Γ .

$$\vec{F}_{\Gamma\Gamma} = \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} d^2 \vec{F}_{12}. \quad (7.1)$$

Na verdade esta expressão é indeterminada pois há uma singularidade quando temos $1 = 2$. Apesar de se necessitar de um rigor matemático mais apurado para a demonstração que apresentamos a seguir, não nos preocuparemos com isto visto que no Capítulo anterior apresentamos (e ilustramos com diversos cálculos) um método de se evitar estes problemas de divergência.

Fazendo uma mudança de variável em (7.1) obtemos:

$$\vec{F}_{\Gamma\Gamma} = \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} d^2 \vec{F}_{21}^A, \quad (7.2)$$

já que $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. Como para a força de Ampère vale $d^2 \vec{F}_{21}^A = -d^2 \vec{F}_{12}^A$, da última expressão temos:

$$\vec{F}_{\Gamma\Gamma} = - \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} d^2 \vec{F}_{12}^A. \quad (7.3)$$

Adicionando este resultado com (7.1) obtemos $2\vec{F}_{\Gamma\Gamma}^A = 0$, ou seja, $\vec{F}_{\Gamma\Gamma}^A = 0$.

No caso da força de Grassmann não podemos utilizar este raciocínio pois, em geral, $d^2 \vec{F}_{21}^G \neq -d^2 \vec{F}_{12}^G$. Seguimos então outro procedimento para chegar a $\vec{F}_{\Gamma\Gamma}^G = 0$.

Substituindo a expressão para a força de Grassmann (5.10) em (7.1):

$$\vec{F}_{\Gamma\Gamma} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left(d\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) d\vec{r}_2 - \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \right) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right). \quad (7.4)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left(d\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) d\vec{r}_2 &= - \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left(d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \left(\frac{1}{r_{12}} \right) \right) d\vec{r}_2 \\ &= - \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} d_1 \left(\frac{1}{r_{12}} \right) d\vec{r}_2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Integrando primeiro na variável 1 obtemos obviamente zero, já que o integrando é uma diferencial exata e o caminho de integração é fechado.

Falta agora mostrar que o segundo termo entre parênteses de (7.4) também se anula. Trocando os índices 1 e 2 obtemos:

$$\oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \right) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left(d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 \right) \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3}. \quad (7.6)$$

Lembrando que $d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 = d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2$, $r_{21} = r_{12}$ e que $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$ obtemos:

$$\oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \right) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = - \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \right) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (7.7)$$

Passando o termo da direita para a esquerda obtemos que este termo também se anula. Concluimos então que $\vec{F}_{\Gamma\Gamma}^G = 0$. Ou seja, não há efeito *bootstrap* em um circuito fechado com a força de Grassmann.

Wesley discutiu este tipo de argumento e concluiu que há efeito *bootstrap* com a força de Grassmann [Wes87b, Wes87a, Wes90a]. Analisando seu trabalho nós observamos que ele dividiu um circuito fechado em duas partes, A e B , e calculou \vec{F}_{AB} e \vec{F}_{BA} . Ele concluiu que como estas duas expressões não precisam ser iguais com a força de Grassmann, então nós podemos ter um efeito *bootstrap*. O problema com este raciocínio é que ele não calculou \vec{F}_{AA} e \vec{F}_{BB} , o que é essencial como mostramos com os cálculos para o circuito da Fig. 6.3. Cabe ressaltar que o fato de F_{AA}^G ser diferente de zero em alguns casos já é um efeito *bootstrap*. O que demonstramos nesta Seção, é que, apesar de haver efeito *bootstrap* para circuitos abertos com a força de Grassmann, o mesmo não ocorre quando consideramos circuitos fechados, como o da Fig. 7.1. A força de Ampère nunca apresenta efeito *bootstrap*, mesmo em circuitos abertos, o que é compatível não só com as evidências experimentais, mas também com a mecânica clássica. O caso de circuitos

abertos, como por exemplo antenas, não é o objetivo deste trabalho. Mais informações podem ser encontradas em [Wes90b].

Apresentamos agora uma prova geométrico-indutiva da não existência do efeito *bootstrap* para circuitos fechados de corrente com as forças de Grassmann e Ampère. Um circuito fechado genérico, como Γ na Fig. 7.1, pode ser aproximado por um número grande de retângulos N , com corrente I na mesma direção que em Γ (Fig. 7.2). Esta aproximação pode ser aprimorada, conforme o grau de precisão que se deseja, aumentando o número de retângulos N e diminuindo conseqüentemente as suas áreas. No caso limite de N tendendo a infinito, e a área dos retângulos tendendo a zero, reproduzimos o circuito original. Na seção 6.1.3, com o circuito retangular genérico da Fig. 6.3, provamos que a força resultante que este circuito faz nele próprio é zero, tanto com a força de Ampère como com a força de Grassmann. Por indução, o mesmo vale para o circuito fechado genérico Γ .

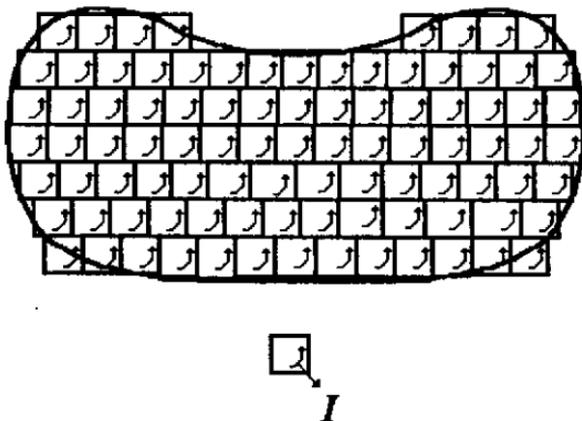


Figura 7.2: N retângulos que aproximam o circuito fechado genérico Γ da Fig. 7.1.

7.2 Demonstração da Equivalência

Provaremos que a força resultante agindo sobre um pedaço retilíneo de condutor, devido ao circuito fechado arbitrário ao qual ele pertence, tem o mesmo valor para as forças de Ampère e Grassmann. Além do mais, a força resultante (sendo finita ou infinita) é ortogonal ao pedaço. Utilizaremos para isto um raciocínio geométrico-indutivo com um circuito linear. A generalização para circuitos superficiais ou volumétricos pode ser estendida facilmente, por analogia.

Considere novamente um circuito fechado genérico Γ , agora o da Fig. 7.3(a). Nele circula uma corrente I . Queremos comparar as forças de Grassmann e Ampère exercidas no pedaço retilíneo ab , de comprimento $|d\vec{r}|$, devido ao restante do circuito bca . Na Fig. 7.3(b) representamos um circuito quadrado $abefa$ de lado $3|d\vec{r}|$ e um circuito Γ' , que é similar a Γ na maioria dos pontos, com exceção daqueles próximos ao circuito quadrado. Há uma distância d entre os lados do circuito quadrado $abefa$ e os lados retilíneos equivalentes do circuito Γ' . Quando fazemos $d \rightarrow 0$ o conjunto composto pelo circuito quadrado e por Γ' retorna a ser o circuito original Γ , Fig. 7.3(c). A direção da corrente I que circula nos circuitos está indicada na Fig. 7.3(b). A força no pedaço ab , de comprimento $|d\vec{r}|$, é composta por duas parcelas. Uma devido ao circuito aberto $befa$, e outra devido ao circuito fechado externo Γ' . A força deste último tem o mesmo valor com as expressões de Ampère e Grassmann, pois ele é um circuito fechado exercendo força num pedaço de condutor externo a ele, como mostramos na Seção 5.3. Já para a força que o circuito aberto $befa$ faz em ab , nós demonstramos na Seção 6.1.3, com o circuito da Fig. 6.3, que também tem o mesmo valor para ambas as forças. Portanto, a força resultante no pedaço ab , na configuração da Fig. 7.3(b), é igual entre as forças de Ampère e Grassmann. Apesar da força resultante depender do valor de d , a equivalência entre as forças não depende. Assim, quando fazemos d tender a zero, a força do circuito aberto $befa$ mais a força do circuito fechado Γ' em ab , é equivalente à força do circuito aberto bca em ab (Fig. 7.3(a)), como podemos ver na Fig. 7.3(c).

Sendo nula a força que o pedaço de condutor ab exerce nele para ambas as forças, fica demonstrado que: *a força que um circuito fechado de corrente exerce num pedaço retilíneo de condutor pertencente a ele, tem o mesmo valor com as expressões de Ampère e Grassmann.* Como a força de Grassmann é sempre ortogonal ao elemento que sofre a força (ver primeira igualdade de (5.10)), o mesmo vale para a força de Ampère no caso de um circuito fechado de corrente. Ou seja, *a força exercida por um circuito fechado genérico Γ num pedaço retilíneo de condutor arbitrário pertencente a ele é sempre ortogonal a este pedaço, tanto com a força de Ampère quanto*

com a de Grassmann.

Estes resultados são peculiares. Se por um lado a força de Grassmann incorpora a característica de satisfazer ação e reação para um circuito fechado (o que não acontece em geral entre elementos de corrente), a força de Ampère incorpora o caráter de não apresentar força longitudinal em circuitos fechados (o que acontece entre elementos de corrente).

A demonstração que apresentamos aqui foi amplamente ilustrada com os resultados obtidos no Capítulo 6.

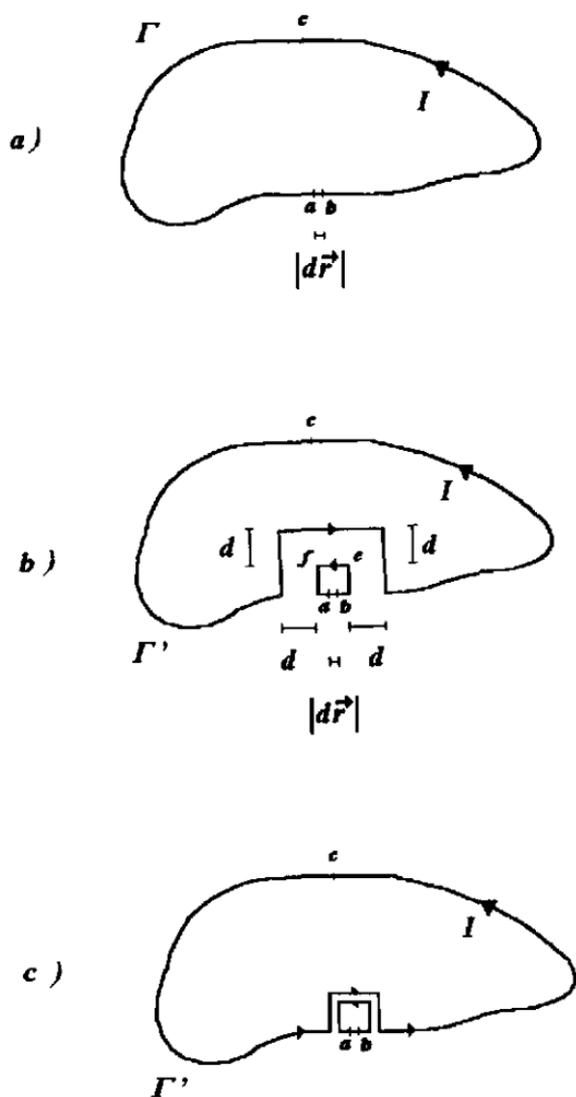


Figura 7.3: Circuitos utilizados para a demonstração da equivalência Ampère-Grassmann.

Capítulo 8

Tópicos Finais

Neste último Capítulo trataremos de alguns outros tópicos relacionados com a força, como por exemplo a comparação dos nossos resultados com os valores experimentais, a relação entre força e indutância, e por último uma análise da existência de força longitudinal com a força de Weber [AB95c].

8.1 Comparação com resultados experimentais

Selecionamos dois artigos experimentais recentes para poder comparar os nossos resultados teóricos com os valores experimentais.

Peoglos realizou experimentos com dois dos circuitos que analisamos no Capítulo anterior [Peo88]. O primeiro é o circuito retangular da Fig. 6.3, apresentado na Seção 6.1.3. Neste caso, a ponte é formada apenas pelo fio retilíneo localizado num dos lados do retângulo. No experimento, Peoglos utilizou um circuito quadrado com as seguintes dimensões (utilizando a nomenclatura da Fig. 6.3): $a = 2$ cm; $b = 8$ cm; $c = d = e = f = 10$ cm; sendo o fio de cobre, de diâmetro de 1,2 mm. Utilizando uma balança de torção Peoglos mediu a força na ponte para dez valores de corrente, variando de 0,2 a 2,0 A. O gráfico da força medida na ponte em newtons, pela corrente ao quadrado no circuito em ampères (FxI^2), é apresentado na Figura 5 do seu artigo, o qual reproduzimos aqui na Fig. 8.1. Nela podemos ver que os dez pontos experimentais medidos estão distribuídos ao longo de uma reta cuja equação é: $F = 3,0513 \times 10^{-7} I^2$. Este é exatamente o valor que encontramos ao substituir as dimensões do circuito quadrado utilizado no experimento na Eq. (6.12), nosso resultado teórico. Com seus valores de corrente a força medida variou entre $0,5 \times 10^{-7}$ e 6×10^{-7} N.

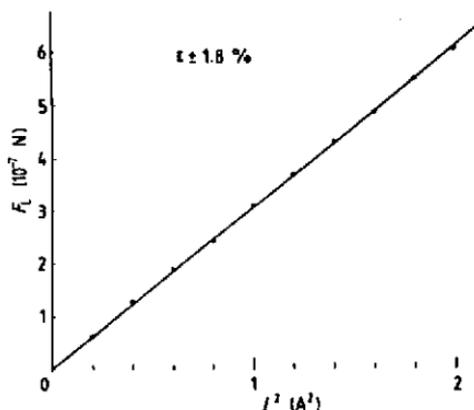


Figura 8.1: Figura 5 do artigo do Peoglos.

O segundo circuito que Peoglos utilizou nos seus experimentos está representado na Fig. 6.10. Os valores utilizados por ele, com a nomenclatura da nossa figura, são: $\ell_1 = 7,5$ cm; $\ell_2 = \ell_3 = 10$ cm; e fio de cobre de diâmetro $d = 1,2$ mm. No nosso caso utilizamos uma seção reta quadrada para fazer os cálculos. Para comparar os nossos resultados teóricos com os valores experimentais, vamos atribuir um valor para ω (Fig. 6.10) de tal forma que a área da seção reta circular utilizada no experimento tenha o mesmo valor que a área da seção reta quadrada utilizada nos nossos cálculos: $\pi d^2/4 = \omega^2$. Assim sendo, achamos que $\omega \approx 1,1$ mm. O gráfico da força medida na ponte em newtons, pela corrente ao quadrado no circuito em ampères, é apresentado na Figura 6 do artigo [Peo88], o qual reproduzimos aqui na Fig. 8.2. Podemos ver que os pontos experimentais obtidos por Peoglos se distribuem ao longo da reta de equação: $F = 11,2 \times 10^{-7} I^2$. Substituindo os valores acima na Eq. (6.45) achamos: $F = 11,1 \times 10^{-7} I^2$. Novamente, há uma ótima concordância entre os valores experimentais medidos por Peoglos e os nossos cálculos teóricos.

Agora, o segundo artigo que utilizamos para comparar com os nossos resultados teóricos é o do Moyssides [Moy89c]. Ele também realizou experimentos com um circuito análogo ao da Fig. 6.10. As dimensões do seu circuito, com a nomenclatura da nossa figura, são: $\ell_2 = 123,7$ cm; $\ell_3 = 48,0$ cm; e fios de cobre de diâmetro de 2 e 3 mm. Ele utilizou corrente contínua com valores entre 35 e 140 A, e apresentou resultados de forças medidas com balança de torção entre 10^{-3} e 10^{-2} N. No artigo Moyssides não diz qual o valor que ele utilizou para ℓ_1 . Isto não importa pois a força na ponte devido ao circuito todo independe deste valor, como mostramos no Capítulo anterior. Igualando a área da seção reta circular

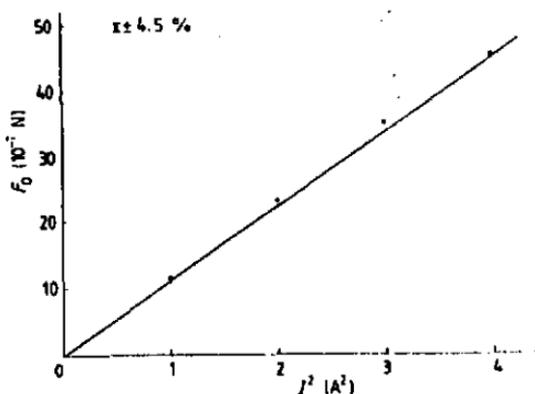


Figura 8.2: Figura 6 do artigo do Peoglos.

utilizada no experimento com a área da seção reta quadrada utilizada nos nossos cálculos, encontramos: $\omega = 1,77$ mm para o fio de diâmetro de 2 mm; e $\omega = 2,66$ mm para o fio de 3 mm de diâmetro. Com estes valores os nossos resultados para a relação $F \propto I^2$ são: $F = 12,890 \times 10^{-7} I^2$ (2 mm) e $F = 12,075 \times 10^{-7} I^2$ (3 mm). Os valores experimentais encontrados por Moysides para os fios de 2 e 3 mm de diâmetro foram, respectivamente: $F = 12,873 \times 10^{-7} I^2$ e $F = 12,298 \times 10^{-7} I^2$.

Mostramos assim que o nosso método analítico de calcular a força com as expressões de Ampère e Grassmann (apresentado no Capítulo 6) conduz a excelentes previsões teóricas, confirmadas pelos experimentos citados acima.

8.2 Força e Indutância

Uma maneira para se calcular a força entre condutores metálicos, evitando o cálculo direto com as expressões de força, é a utilização do coeficiente de indutância. Quando temos dois circuitos fechados distintos é fácil demonstrar que a força entre os circuitos será o gradiente de uma função que contém o coeficiente de indutância mútua entre os circuitos. Para uma demonstração deste fato ver [Ass94], págs. 98–102. Como exemplo, calculamos a força entre os circuitos circulares da Fig. VI na Introdução, derivando-a da indutância mútua entre eles.

A mesma relação já não é tão clara entre o coeficiente de auto-indutância de um circuito fechado e a força que este circuito exerce numa parte dele mesmo. No entanto, alguns autores utilizam uma relação entre auto-indutância e força, análoga à existente entre circuitos fechados distintos, para calcular a força em determinadas geometrias de circuito fechado único, onde além de ser trabalhoso o cálculo da força através da expressão de força já existem expressões do coeficiente de auto-indutância em manuais, como por exemplo [Gro46, Kno49]. Exemplos deste procedimento encontramos em [Gro46], Capítulo 23; [Gra85a], págs. 204–214; ou [Peo88].

Apesar de acharmos que este procedimento para calcular a força entre partes de um mesmo circuito fechado através do coeficiente de auto-indutância necessita de uma demonstração, é evidente que ele conduz a resultados corretos. Uma prova deste fato podemos obter comparando as expressões que calculamos para o coeficiente de auto-indutância no Capítulo 3 com a força calculada no Capítulo 6.

Como primeiro exemplo utilizamos o resultado da auto-indutância (3.11) para o circuito da Fig. 3.7, e a força na ponte do circuito da Fig. 6.5, dada pela Eq. (6.23). Derivando a expressão (3.11) com relação a ℓ_2 e multiplicando o resultado por $I^2/2$, obtemos exatamente a expressão (6.23). O segundo exemplo é com os circuitos volumétricos das Figs. 3.10 e 6.10. A auto-indutância do primeiro circuito é dada por (3.19). Derivando esta expressão com relação a ℓ_2 e multiplicando o resultado por $I^2/2$ encontramos exatamente a força na ponte de Ampère do segundo circuito, dado pela Eq. (6.45).

Por outro lado, o método não funciona sempre, como foi observado por Wesley ao criticar o trabalho de Peoglos [Wes89]. Por exemplo, no caso do circuito retangular da Fig. 6.3, a força na ponte é dada por (6.12). Já o coeficiente de auto-indutância deste circuito é dado por (3.11). Derivando esta expressão em relação a altura do circuito, não obtemos (6.12). Concluímos então que, é necessário muito cuidado ao utilizar este método, pois ainda não se sabe exatamente em que condições ele pode ser aplicado.

Por último, vamos comentar um fato interessante a respeito da derivação

das expressões de força.

A força de Weber (5.3) pode ser derivada da energia potencial de Weber (1.7) ou da energia potencial lagrangiana de Weber [Bue94]. A força de Liénard-Schawrzchild (5.16) (equivalente à força de Lorentz para duas cargas com movimentos arbitrários) pode ser derivada da lagrangiana de Darwin, como vimos anteriormente. O análogo para a força entre elementos de corrente, tanto de Ampère (5.1) quanto de Grassmann (5.10), seria derivá-la de uma energia entre elementos de corrente. No caso da força de Ampère, da energia entre elementos de corrente de Weber (1.14), e para a força de Grassmann, da energia entre elementos de corrente de Maxwell (1.26). Não foi este o procedimento que adotamos. E quem resolver seguir este caminho, intuitivo, vai descobrir que da energia entre elementos de corrente de Weber e Maxwell não se deriva, respectivamente, a força de Ampère e Grassmann. O que está errado?

O que está errado é querer derivar a força entre elementos de corrente diretamente da energia entre elementos de corrente, da mesma forma que se deriva a força entre cargas pontuais da energia de interação entre tais cargas. No caso de elementos de corrente este processo não é mais válido por causa da aproximação que se considera para um elemento de corrente. Por exemplo, quando derivamos a energia de Weber entre elementos de corrente da energia de Weber entre cargas fazemos a aproximação que a distância entre as cargas dentro de um elemento de corrente é desprezível comparada com a distância entre os elementos de corrente r (ver Seção 1.4.2). Assim, não podemos esperar que, através de um processo que envolve a derivada da energia entre elementos de corrente com relação a r , nós obtenhamos exatamente a força de Ampère. O mesmo se aplica para a força de Grassmann e a energia entre elementos de corrente de Maxwell.

8.3 Força Longitudinal

A força entre elementos de corrente colineares é nula quando calculada com a expressão de Grassmann (Fig. 6.2). Já com a força de Ampère, existe uma força longitudinal entre os elementos de corrente (Fig. 6.1). Este comportamento da força de Ampère para elementos de corrente tem sido utilizado como argumento para explicar a existência de forças longitudinais em circuitos metálicos. Há diversos experimentos que comprovam a existência desta força longitudinal em circuitos fechados de corrente. Podemos citar como exemplo: a propulsão a jato em líquidos [Gra82b]; os aceleradores de projéteis (*railgun accelerators*) [Gra86, Gra85a, Gra82a, Gra87c, Gra87b]; o fenômeno de explosão de fios [Gra83, Gra84, Gra85c, Gra87a, Nas85, Asp87]; e as explosões eletrodinâmicas em líquidos [GG85, Aze86, Asp86]. Não concordamos, no entanto, com as explicações dadas a estes fatos experimentais que utilizam a força longitudinal de Ampère entre elementos de corrente como a responsável pela existência de forças longitudinais em circuitos fechados [Gra85a]. O motivo é que, como demonstramos a equivalência entre a força de Ampère e a de Grassmann, Capítulo 7, e a força de Grassmann é sempre perpendicular ao elemento que sofre a força, o mesmo vale para a força de Ampère. A força resultante longitudinal em qualquer pedaço de um condutor retilíneo de um circuito fechado de corrente é nula, para ambas as forças. Portanto, não podemos afirmar que a força de Ampère explica aqueles fatos experimentais, da mesma forma que a força de Grassmann também não.

A demonstração de que também a força de Ampère não pode explicar os experimentos com força longitudinal deixa uma lacuna aberta na eletrodinâmica neste final de século: a procura por uma explicação teórica para os experimentos citados acima que provam a existência de forças longitudinais.

Dentro do contexto que apresentamos neste trabalho a força de Ampère é deduzida da força de Weber. Uma primeira tentativa natural é aplicar a própria força de Weber para explicar a existência de tais forças longitudinais. Não é nosso objetivo aqui abordar este assunto por completo. Vamos apenas iniciar uma linha de pesquisa.

A explosão de fios é um dos principais experimentos mostrando a existência de forças longitudinais em circuitos elétricos. Devido a este fato, nós decidimos analisar este problema com a eletrodinâmica de Weber. Assim, nós calcularemos a força longitudinal que atua na rede cristalina positiva de uma parte assimétrica de um circuito retangular. A geometria do circuito analisado é apresentada na Fig. 8.3, um circuito retangular dividido nas partes 1, 2, ..., 8. Chamamos de ponte o pedaço 8, e de suporte os pedaços de 1 a 7. Há uma corrente constante I fluindo no circuito.

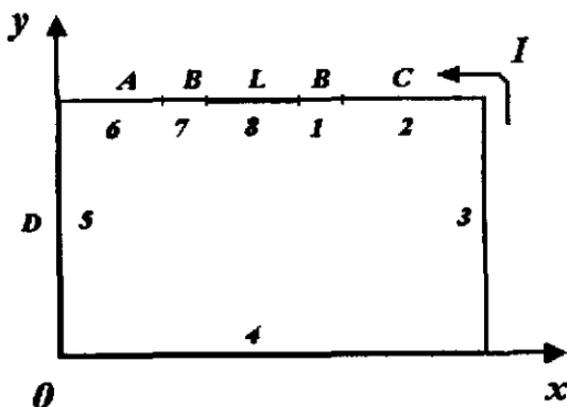


Figura 8.3: Circuito retangular utilizado para estudar a existência de força longitudinal com a força de Weber.

Nós vamos utilizar um modelo simplificado de condutor metálico para facilitar estes primeiros cálculos. Supomos que o fio é constituído de uma rede cristalina positiva, fixa em relação ao laboratório, e elétrons que se movem em relação à rede resultando na corrente elétrica I . Calcularemos a força longitudinal na rede da ponte quando ela não está simetricamente localizada no circuito, ou seja, quando $A \neq C$, devido à rede e elétrons do circuito todo. Os pedaços 1 e 7 têm o mesmo tamanho B . Assim, por simetria, nós não precisamos calcular a força que eles fazem na ponte, já que $\vec{F}_{81}^W + \vec{F}_{87}^W = 0$. Evitamos assim calcular a força entre elementos em contato.

Substituímos na expressão da força de Weber, Eq. (5.3), as cargas q_1 e q_2 pela carga contida no comprimento dr , λdr , onde λ é a densidade linear de cargas no fio. Sendo o fio neutro temos $\lambda_+ = -\lambda_- \equiv \lambda$, com $+$ e $-$ indicando, respectivamente, as cargas positivas e negativas em todos os pedaços. Esta hipótese faz com que possamos desprezar a parte coulombiana da força de Weber. Como estamos utilizando corrente constante, e desprezando os cantos do circuito, a aceleração é nula para todas as cargas.

Vamos calcular a força das cargas do pedaço 2 nas cargas da ponte. Só nos interessa aqui a componente longitudinal paralela ao eixo x . Com $dq_i = \lambda_i dx_i$, $\vec{r}_i = x_i \hat{x} + D \hat{y}$, $\vec{r}_i = v_i \hat{x}$, para $i = 2, 8$, substituído na componente x da Eq. (5.3) e integrando para os comprimentos dos pedaços 2 e 8 (Fig. 8.3), obtemos,

$$\begin{aligned}
 F_{82}^z &= -\frac{\lambda_2 \lambda_8 (v_8 - v_2)^2}{4\pi\epsilon_0 2c^2} \int_{A+B}^{A+B+L} dx_8 \int_{A+2B+L}^{A+2B+C+L} dx_2 \frac{1}{(x_2 - x_8)^2} \\
 &= \frac{\lambda_2 \lambda_8 (v_8 - v_2)^2}{4\pi\epsilon_0 2c^2} \left(\ln \left(\frac{B+C+L}{B+C} \right) - \ln \left(\frac{B+L}{B} \right) \right). \quad (8.1)
 \end{aligned}$$

Para $\lambda_8 = \lambda_+$ e $v_8 = 0$ nós temos os íons positivos da ponte. Com $\lambda_8 = \lambda_-$ e $v_8 = V_d$ nós temos os elétrons livres com a velocidade de arraste ou de drifting V_d . O mesmo valendo para todos os outros pedaços.

Da mesma forma para o pedaço 3, com $dq_3 = \lambda_3 dy_3$, $\vec{r}_3 = (A + 2B + C + L)\hat{x} + y_3\hat{y}$ e $\vec{r}_3 = v_3\hat{y}$,

$$\begin{aligned}
 F_{83}^z &= \frac{\lambda_3 \lambda_8}{4\pi\epsilon_0} \int_{A+B}^{A+B+L} dx_8 \int_0^D dy_3 \left[\left(\frac{v_8^2 + v_3^2}{c^2} \right) \frac{x_8 - (A + 2B + C + L)}{r_{83}^3} \right. \\
 &\quad - \frac{3v_8^2 [x_8 - (A + 2B + C + L)]^3}{2c^2 r_{83}^5} \\
 &\quad - \frac{3v_3^2 [x_8 - (A + 2B + C + L)](D - y_3)^2}{2c^2 r_{83}^5} \\
 &\quad \left. + \frac{3v_8 v_3 [x_8 - (A + 2B + C + L)]^2 (D - y_3)}{c^2 r_{83}^5} \right] \\
 &= \frac{\lambda_8 \lambda_3}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{v_3^2}{2c^2} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{(B+C+L)^2 + D^2} + D}{B+C+L} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \ln \left(\frac{\sqrt{(B+C)^2 + D^2} + D}{B+C} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{v_8^2 - v_3^2}{2c^2} \left(\frac{D}{\sqrt{(B+C)^2 + D^2}} - \frac{D}{\sqrt{(B+C+L)^2 + D^2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{v_8 v_3}{c^2} \left(\ln \left(\frac{B+C+L}{B+C} \right) - \frac{B+C}{\sqrt{(B+C)^2 + D^2}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \ln \left(\frac{\sqrt{(B+C)^2 + D^2} - (B+C)}{\sqrt{(B+C+L)^2 + D^2} - (B+C+L)} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{B+C+L}{\sqrt{(B+C+L)^2 + D^2}} \right) \right], \quad (8.2)
 \end{aligned}$$

onde $r_{83} = \sqrt{[x_8 - (A + 2B + C + L)]^2 + (D - y_3)^2}$.

Procedendo de maneira análoga à descrita para se obter F_{82}^x e F_{83}^x , obtemos que,

$$\begin{aligned}
 F_{84}^x = & \frac{\lambda_8 \lambda_4}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(v_B - v_4)^2}{2c^2} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{(A+B)^2 + D^2} + (A+P)}{\sqrt{(B+C+L)^2 + D^2} - (B+C+L)} \right) \right. \right. \\
 & - \ln \left(\frac{\sqrt{(A+B+L)^2 + D^2} + (A+B+L)}{\sqrt{(B+C)^2 + D^2} - (B+C)} \right) \left. \right) \\
 & - \frac{(v_8 - v_4)^2}{2c^2} \left(\frac{A+B+L}{\sqrt{(A+B+L)^2 + D^2}} + \frac{B+C}{\sqrt{(B+C)^2 + D^2}} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{A+B}{\sqrt{(A+B)^2 + D^2}} - \frac{B+C+L}{\sqrt{(B+C+L)^2 + D^2}} \right) \right], \quad (8.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{85}^x = & \frac{\lambda_8 \lambda_5}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{v_5^2}{2c^2} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{(A+B)^2 + D^2} + D}{A+B} \right) \right. \right. \\
 & - \ln \left(\frac{\sqrt{(A+B+L)^2 + D^2} + D}{A+B+L} \right) \left. \right) \\
 & + \frac{v_8^2 - v_5^2}{2c^2} \left(\frac{D}{\sqrt{(A+B+L)^2 + D^2}} - \frac{D}{\sqrt{(A+B)^2 + D^2}} \right) \\
 & - \frac{v_8 v_5}{c^2} \left(\frac{A+B}{\sqrt{(A+B)^2 + D^2}} - \frac{A+B+L}{\sqrt{(A+B+L)^2 + D^2}} \right) \\
 & + \ln \left(\frac{\sqrt{(A+B+L)^2 + D^2} + (A+B+L)}{\sqrt{(A+B)^2 + D^2} + (A+B)} \right) \\
 & \left. - \ln \left(\frac{A+B+L}{A+B} \right) \right], \quad (8.4)
 \end{aligned}$$

$$F_{86}^x = \frac{\lambda_8 \lambda_6}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(v_8^2 - v_6)^2}{2c^2} \right) \left(\ln \left(\frac{B+L}{B} \right) - \ln \left(\frac{A+B+L}{A+B} \right) \right). \quad (8.5)$$

Somando F_{86} com F_{82} , com $v_2 = v_6$ e $\lambda_2 = \lambda_6$, obtemos zero se $A = C$, para qualquer valor de B . Isto mostra que a soma das forças dos pedaços 1 e 7 nas cargas da ponte é igual a zero, como havíamos suposto anteriormente:

$$\vec{F}_{81} + \vec{F}_{87} = 0, \quad (8.6)$$

supondo também que $v_1 = v_7$ e $\lambda_1 = \lambda_7$.

Para obter a força longitudinal nos íons da ponte devido a todo o circuito basta adicionarmos todas as componentes x das forças dos íons positivos e dos elétrons dos pedaços de 2 a 6 nos íons positivos da ponte, respectivamente, F_+ e F_- . Isto porquê a força que os íons positivos e os elétrons da ponte fazem nos íons positivos da ponte é obviamente nula. Para obter F_+ nós fazemos $\lambda_2 = \dots = \lambda_6 = \lambda_8 \equiv \lambda_+$, $v_2 = \dots = v_6 = v_8 = 0$ nas Eqs. (8.1) a (8.5). E para obter F_- nós fazemos $\lambda_2 = \dots = \lambda_6 \equiv \lambda_-$, $\lambda_8 = \lambda_+$, $v_2 = v_5 = v_6 \equiv V_d$, $v_3 = v_4 \equiv -V_d$ nas Eqs. (8.1) a (8.5). Fazendo isto chega-se a:

$$\begin{aligned}
 F_+ + F_- = & -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{A+B+L}{A+B} \right) - \ln \left(\frac{B+C+L}{B+C} \right) \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{(A+B+L)^2 + D^2} + (A+B+L)}{\sqrt{(A+B)^2 + D^2} + (A+B)} \right) \right. \\
 & - \ln \left(\frac{\sqrt{(B+C+L)^2 + D^2} + (B+C+L)}{\sqrt{(B+C)^2 + D^2} + (B+C)} \right) \\
 & + \ln \left(\frac{\sqrt{(B+C+L)^2 + D^2} + D}{\sqrt{(B+C)^2 + D^2} + D} \right) \\
 & - \ln \left(\frac{\sqrt{(A+B+L)^2 + D^2} + D}{\sqrt{(A+B)^2 + D^2} + D} \right) \\
 & + \frac{A+B+D}{\sqrt{(A+B)^2 + D^2}} - \frac{A+B+D+L}{\sqrt{(A+B+L)^2 + D^2}} \\
 & \left. + \frac{B+C+D+L}{\sqrt{(B+C+L)^2 + D^2}} - \frac{B+C+D}{\sqrt{(B+C)^2 + D^2}} \right), \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

onde substituímos $|\lambda V_d|$ por I e c^2 por $1/\mu_0 \epsilon_0$.

Calculando a força que o circuito todo (rede + elétrons) faz nos elétrons da ponte nós obtemos exatamente o resultado acima, Eq. (8.7), multiplicado por -1 . Isto era de se esperar pois, quando somamos esta força com aquela em (8.7) o que estamos obtendo é exatamente a componente longitudinal da força de Ampère¹, e esta nós demonstramos ser nula para um circuito de corrente fechado, não importando a localização da ponte.

¹Nós derivamos a força de Ampère da força de Weber na Seção 5.1.1.

Analisemos agora esta força longitudinal nos íons positivos da rede. Para isto consideremos o circuito da Fig. 8.4. Neste circuito nós temos $A + 2B + C + L = D$, $A + B = B + C = D/4$, $L = D/2$, de tal forma que a ponte está simetricamente localizada no circuito quadrado. A ponte é composta de duas partes iguais que nós designamos por metade direita e metade esquerda. Cada uma dessas metades tem então o comprimento de $D/4$. Substituindo estes valores em (8.7) nós obtemos que a força longitudinal exercida nos íons positivos da metade esquerda da ponte pelo resto do circuito (incluindo a metade direita) é dada por $0.27(\mu_0 I^2 / 4\pi)$, apontando para a esquerda. Esta força é independente do valor de D . Com uma corrente de $6 \times 10^3 A$ isto resulta numa força de aproximadamente $0,7 N$. Esta mesma força, calculada para a metade direita, tem o mesmo valor mas apontando para a direita, ver Fig. 8.5.

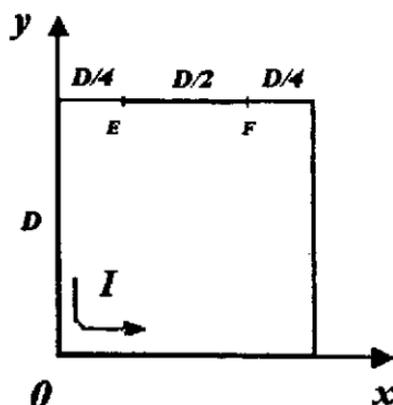


Figura 8.4: Circuito quadrado com ponte simetricamente situada em um de seus lados.

Em um experimento com uma geometria deste tipo (apesar do resto do circuito não ser claramente especificado) e correntes desta ordem de magnitude, um fio de alumínio de $1,2 mm$ de diâmetro e $1 m$ de comprimento se quebrou em vários pedaços [Gra83]. A análise dos fragmentos indicou que o fio foi quebrado no estado sólido devido a uma tensão mecânica e não, por exemplo, devido a derretimento ou aquecimento Joule. Este fio de alumínio estava mecanicamente desconectado do resto do circuito e nós o representamos pela ponte do nosso circuito na Fig. 8.4. Nas extremidades dos pontos E e F desta figura há arcos elétricos fechando a corrente através do circuito, mas permitindo que a ponte esteja mecanicamente desconectada do suporte. Como a ponte está mecanicamente desconectada do resto do circuito ela não sofre qualquer força ou tensão exercida pelo suporte. A força longitudinal resultante na ponte é obviamente nula. Apesar disto ela

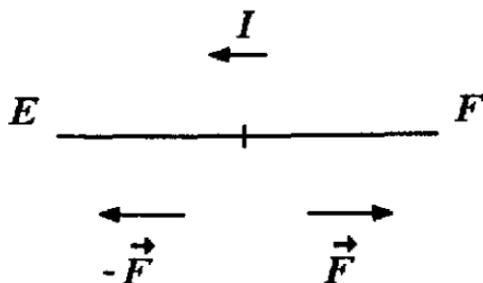


Figura 8.5: Ponte dividida em dois pedaços iguais e a força devido ao circuito da Fig. 8.4 que atua em cada metade.

deve estar tensionada, o que é representado pela força na metade esquerda e direita, Fig. 8.5. Como mostramos anteriormente, esta força calculada com a força de Weber é da ordem de $1N$. Mas, a força necessária para romper um fio de alumínio é da ordem de 50 a $500N/mm^2$, [Ge63], pág. 48. Isto mostra que naquele experimento não deve ter sido a força de Weber a responsável pela explosão do fio. É importante ressaltar aqui que, não levamos em conta a possível variação da força necessária para romper o metal com a temperatura. Em um experimento de explosão de fios, a temperatura que o fio de alumínio atinge nos instantes anteriores à sua ruptura, é da ordem de milhares de graus.

Conclusões

Obtivemos então uma força longitudinal sobre os íons com a força de Weber. Quando comparamos esta força com um experimento real de explosão de fio nós achamos que esta tensão é duas ordens de grandeza menor que a necessária para romper o fio. Apesar deste fato, vamos analisar um pouco mais as consequências de tal força.

Ela atua nos íons positivos e nós vimos também que uma força oposta a esta atua nos elétrons. Considerando que nós estamos no estado estacionário, esta força nos elétrons precisa ser anulada por alguma outra. A força eletromotiva da bateria já é anulada pela resistência do fio. A consequência disto é que esta força extra nos elétrons provocará um acúmulo de elétrons na metade de cada um dos lados do circuito, ocorrendo uma compressão dos elétrons, enquanto que os íons positivos estão tensionados. No equilíbrio esta distribuição de cargas deve equilibrar esta compressão.

Nós não levamos em conta esta nova distribuição de cargas no cálculo acima. Uma consequência desta distribuição é que haverá, no equilíbrio, uma nova repulsão coulombiana entre os elétrons, a qual não existia anteriormente quando consideramos uma corrente neutra. Os efeitos desta repulsão coulombiana não serão analisados aqui.

Outro aspecto a ser mencionado é que, em experimentos de explosão de fios, em geral, se utiliza uma descarga de um banco de capacitores, ao invés de uma corrente *dc* devido a uma bateria química. Isto significa que a explosão de fios acontece com uma corrente transiente (na maioria dos casos uma senóide amortecida), enquanto a análise apresentada nesta Seção ficou restrita a correntes *dc*.

Capítulo 9

Conclusões

Na primeira parte deste trabalho apresentamos um método de cálculo do coeficiente de indutância, que permite a obtenção de resultados analíticos dentro da aproximação que se queira, e que é bastante superior aos tradicionais métodos de aproximação conhecidos até hoje na literatura (que resultam em tabelas e fórmulas de aproximação numéricas). Demonstramos a sua utilidade através da comparação dos resultados obtidos por este método com os resultados obtidos por meio dos métodos tradicionais de aproximação. Este método, aplicado a circuitos de corrente fechados, indicou que a equivalência entre as fórmulas de Neumann, Weber, Maxwell e Graneau para o cálculo da indutância mútua parecia também se estender para o cálculo da auto-indutância. Apresentamos então uma demonstração que confirmou esta equivalência.

Utilizamos este mesmo método de cálculo no estudo da força entre condutores metálicos na segunda parte deste trabalho. O problema de divergência com as expressões para cálculo da força entre partes de um mesmo circuito fechado também foi extensivamente tratado neste trabalho, onde aperfeiçoamos um método de cálculo utilizado pela primeira vez na literatura por Wesley [Wes90a], para se obter resultados analíticos. Constatamos que não existe diferença entre as forças de Ampère e Grassmann para circuitos de corrente fechados, como afirmam alguns autores (por exemplo [Gra85c, Wes90a, Pap90]), quando levamos em conta dois importantes fatores negligenciados por eles: a utilização de circuitos com linhas de corrente fechadas; e a inclusão no cálculo com a expressão de Grassmann da força que uma parte do circuito faz nela mesma, visto que a força de Grassmann não satisfaz ação e reação entre elementos de corrente da mesma forma que a força de Ampère satisfaz. Estes resultados, obtidos com circuitos específicos, foram confirmados através da comparação com os dados obtidos

de experimentos, e generalizados através de demonstração para quaisquer circuitos de corrente fechados.

Assim, se o conhecimento no século passado da equivalência entre as forças de Ampère e Grassmann para a interação entre um circuito fechado e um condutor externo a ele restringiram a procura por uma distinção entre estas forças a experimentos com circuitos únicos, agora demonstramos que mesmo nestas situações também existe uma completa equivalência entre as duas expressões de força. Portanto, outros tipos de experimentos têm que ser utilizados na procura por uma solução para esta controvérsia.

A equivalência entre estas expressões em situações de circuito fechado é reivindicada por alguns autores nos últimos anos. Jolly [Jol85], e Ternan [Ter85], apresentaram demonstrações da equivalência que estão restritas ao caso magnetostático ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$). Como nos experimentos utiliza-se descarga de bancos de capacitores (como nos de explosão de fios) e corrente pulsada (por exemplo [Peo88]), estas demonstrações são limitadas. Christodoulides apresentou uma demonstração da equivalência que não tem esta limitação [Chr87]. No entanto, sua demonstração possui alguns problemas matemáticos de convergência e singularidade indicados por outros autores [Cor89, Pap90], e que Christodoulides não mostrou na prática como resolvê-los. A demonstração da equivalência entre as forças de Ampère e Grassmann que apresentamos neste trabalho além de não estar limitada ao caso magnetostático, não possui os problemas apontados por Pappas e Cornille.

Com estas demonstrações fica evidente que os efeitos de interação longitudinal entre condutores metálicos (claramente demonstrados através de inúmeras experiências, principalmente as realizadas por Graneau) não podem ser atribuídos à força de Ampère. Assim também, não podemos através destes experimentos com circuitos de corrente fechados demonstrar a não validade da força de Grassmann. Vemos claramente dois caminhos a seguir. O primeiro, de cunho teórico, iniciamos neste trabalho através do estudo da interação longitudinal entre condutores metálicos com a força de Weber. Na situação de estado estacionário que analisamos, o experimento de explosão de fios, vimos que apesar de existir uma força longitudinal prevista pela força de Weber, ela não é suficiente para explicar a ordem de grandeza dos resultados experimentais. No entanto, esta força determina uma nova distribuição de cargas dentro do condutor que não foi levada em consideração aqui, e que precisa ser estudada em detalhes. Também não foram levados em conta nesta última análise os termos de aceleração que existem numa corrente originada pela descarga de um banco de capacitores. O outro caminho é experimental. Ou seja, experimentos realizados com cargas movendo-se dentro de cascas esféricas dielétricas carregadas po-

dem decidir no futuro qual das duas expressões de força está errada, a de Weber ou a de Lorentz, já que ambas prevêm resultados diferentes nesta situação [Ass92a, Ass93].

Esperamos assim, com este trabalho, ter contribuído para um assunto interessante e importante neste fim de século: o estudo dos fundamentos da eletrodinâmica através da análise da força entre condutores metálicos de corrente.

Apêndice A

Método de Aproximação das Integrais

Como na maioria das situações experimentais que envolvem condutores metálicos o diâmetro do fio é muito menor que qualquer comprimento característico do circuito do qual ele faz parte, é comum fazermos a aproximação que utilizamos nos nossos cálculos do coeficiente de indutância e da força.

Nestas situações a utilização do elemento de corrente de superfície ou de volume só é necessária quando estamos calculando a força ou a indutância mútua entre partes em contato, ou a auto-indutância de um único pedaço. Não sendo nestas situações, podemos utilizar elemento de corrente linear. O resultado é uma excelente aproximação do valor experimental medido, como podemos constatar com a comparação dos cálculos para o circuito da Fig. 6.3 com os resultados experimentais, ver Seção 8.1.

Nem sempre é fácil calcular as integrais quádruplas ou sêxtuplas que aparecem nos problemas onde não se pode utilizar elemento de corrente linear. E também nem sempre é útil ter o resultado exato, apenas uma aproximação até uma determinada ordem. Assim, ao invés de se fazer o cálculo exato das integrais e depois a expansão deste resultado até a ordem desejada, faz-se a aproximação nas integrações.

O método que utilizamos foi o seguinte. Sejam a e ω constantes tais que $\omega \ll a$. Seja f uma função real a valor real e T a sua integral no intervalo $[a, a + \omega]$:

$$\begin{aligned} T &\equiv \int_a^{a+\omega} f(x) dx \\ &= F(a+\omega) - F(a), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde $F'(x) = f(x)$.

Façamos uma expansão em série de Taylor em torno de a até a ordem desejada em ω , por exemplo até a segunda, da segunda equação em (A.1):

$$\begin{aligned} T &= \omega F'(a) + \frac{\omega^2}{2} F''(a) + O(\omega^3) \\ &= \omega f(a) + \frac{\omega^2}{2} f'(a) + O(\omega^3). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Portanto, para obtermos o resultado de T expandido em série de Taylor até segunda ordem em ω , não precisaremos calcular $F(x)$ (a primitiva de $f(x)$). Basta que $f(a)$ e $f'(a)$ estejam definidos.

É extremamente importante que $f(a)$ e $f'(a)$ tenham valores definidos. Como as nossas integrais são múltiplas alguns cuidados precisam ser tomados. Consideremos, como exemplo, a integral dupla:

$$S \equiv \int_a^{a+\omega} dx \int_a^{b+\omega} dy f(x, y). \quad (\text{A.3})$$

Com as condições $\omega \ll a$ e $\omega \ll b$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{a+\omega} dx \left(\omega f(x, b) + \frac{\omega^2}{2} f_y(x, b) + O(\omega^3) \right) \\ &= \omega^2 f(a, b) + O(\omega^3), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde $f_y \equiv \partial f / \partial y$.

Precisamos então verificar se a função $f(x, y)$ está definida tanto em $x = a$ quanto em $y = b$. As vezes a própria função $f(x, y)$ depende de ω . Temos então que garantir que além de f estar definida no ponto (a, b) , o seu limite quando ω tende a zero tem de existir e ser finito. Este cuidado também deve ser tomado com relação às derivadas. Como um exemplo, de uma variável, consideremos $a \equiv 0$ e $f(x) \equiv (\omega^2 + x^2)^{1/2}$ em (A.1). Resolvendo a integral exatamente temos,

$$T = \omega^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \omega^2 \frac{\sinh^{-1}(1)}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Agora vamos utilizar o método de aproximação sem verificarmos os limites de $f(a)$ e $f'(a)$ quando ω tende a zero. Com (A.2),

$$T = \omega^2 + O(\omega^3). \quad (\text{A.6})$$

Comparando o resultado exato (A.5) com o da aproximação (A.6), concluímos que o método não funcionou. O problema está no limite de $f_x(x, \omega)$ quando x e ω tendem a zero. Para o exemplo acima este limite é uma indeterminação do tipo $0/0$.

Portanto, só podemos utilizar corretamente a expansão do integrando em série de Taylor para aproximar o valor da integral se não existirem os problemas expostos acima. Em todos os cálculos das integrais que resolvemos exatamente e depois expandimos o resultado houve igualdade quando comparamos este com o resultado da aproximação da integral, desde que verificada as condições expostas acima.

Apêndice B

Exemplo do Método de Aproximação

Neste Apêndice vamos aplicar o método de aproximação de integrais, descrito no Apêndice A, ao cálculo das integrais da expressão (6.19). A primeira aproximação que podemos fazer é nos limites de integração das variáveis y_5 e y_6 . Como vamos considerar $\omega \ll \ell_1$ e $\omega \ll \ell_2$, ao invés de y_5 variar de ℓ_1 a $\ell_2 - \omega$ e y_6 variar de ω a ℓ_1 , podemos simplificar o intervalo de variação para, respectivamente, ℓ_1 a ℓ_2 e 0 a ℓ_1 . Reescrevendo a expressão (6.19) para esta primeira aproximação, temos:

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \int_0^\omega dx_5 \int_{\ell_1}^{\ell_2} dy_5 \int_0^\omega dx_6 \int_0^{\ell_1} dy_6 \times \left(\frac{3(y_5 - y_6)^3}{[(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2]^{5/2}} - \frac{2(y_5 - y_6)}{((x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2)^{3/2}} \right). \quad (\text{B.1})$$

Primeiro integramos sem aproximação nas variáveis y_5 e y_6 . O resultado é:

$$\begin{aligned}
 F = & \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \int_0^\omega dx_5 \int_0^\omega dx_6 \left(\sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{|x_5 - x_6|} \right) \right. \\
 & - \frac{(\ell_2 - \ell_1)}{((x_5 - x_6)^2 + (\ell_2 - \ell_1)^2)^{1/2}} - \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{|x_5 - x_6|} \right) \\
 & + \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1}{|x_5 - x_6|} \right) + \frac{\ell_2}{((x_5 - x_6)^2 + \ell_2^2)^{1/2}} \\
 & \left. - \frac{\ell_1}{((x_5 - x_6)^2 + \ell_1^2)^{1/2}} \right). \quad (\text{B.2})
 \end{aligned}$$

Não podemos utilizar aproximação das integrais acima nas parcelas que divergem quando $x_5 \rightarrow x_6$. Precisamos integrar mais uma vez para ver se a divergência desaparece. Como as outras parcelas que não divergem são facilmente integráveis, vamos calcular as integrais na variável x_6 sem aproximação também:

$$\begin{aligned}
 F = & \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \int_0^\omega dx_5 \left[x_5 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{x_5} \right) - (\omega - x_5) \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\omega - x_5} \right) \right. \\
 & - x_5 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{x_5} \right) - (\omega - x_5) \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_2}{\omega - x_5} \right) + x_5 \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1}{x_5} \right) \\
 & \left. + (\omega - x_5) \sinh^{-1} \left(\frac{\ell_1}{\omega - x_5} \right) \right]. \quad (\text{B.3})
 \end{aligned}$$

Na expressão acima podemos expandir os termos do integrando em série de Taylor na variável x_5 ao redor de 0, até primeira ordem em ω/ℓ (ℓ sendo ℓ_1 ou ℓ_2). Fazendo a expansão obtemos:

$$\begin{aligned}
 F = & \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\omega^2} \int_0^\omega dx_5 \left[\omega \ln \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2} \right) + \omega \ln(2\ell_1) \right. \\
 & \left. - x_5 \ln(x_5) - (\omega - x_5) \ln(\omega - x_5) + O\left(\frac{\omega}{\ell}\right)^2 \right]. \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

O resultado acima é facilmente integrável na variável x_5 . Resolvendo as integrais chegamos a:

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\ell_1}{\omega} \right) + \ln \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2} \right) + \ln 2 + \frac{1}{2} + O\left(\frac{\omega}{\ell}\right)^3 \right). \quad (\text{B.5})$$

A expressão acima é igual à componente y da expressão (6.22), que foi calculada fazendo-se a expansão em série de Taylor até segunda ordem em ω/ℓ do resultado exato da integração em (6.19).

Assim, mostramos que quando utilizado de maneira correta (levando em consideração as divergências descritas no Apêndice A), o método de aproximação das integrais permite que obtenhamos o mesmo resultado que a expansão em série de Taylor da integração exata. No caso das integrações sêxtuplas com elementos de corrente volumétricos este método é extremamente útil.

Bibliografia

- [AB95a] A. K. T. Assis and Marcelo Bueno. Bootstrap effect in classical electrodynamics. Submetido à publicação, 1995.
- [AB95b] A. K. T. Assis and Marcelo Bueno. Equivalence between Ampère and Grassmann's forces. Submetido à publicação, 1995.
- [AB95c] A. K. T. Assis and Marcelo Bueno. Longitudinal forces in Weber's electrodynamics. Submetido à publicação, 1995.
- [Amp23] A. M. Ampère. Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 6:175–387, 1823.
- [Amp65] A. M. Ampère. On the mathematical theory of electrodynamic phenomena, experimentally deduced. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 155–200, New York, 1965. Pergamon Press.
- [Arc89] T. Archibald. Energy and the mathematization of electrodynamics in Germany, 1845–1875. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 39:276–308, 1989.
- [Asp86] H. Aspden. Anomalous electrodynamic explosions in liquids. *Transactions on Plasma Science*, PS-14:282–285, 1986.
- [Asp87] H. Aspden. The exploding wire phenomenon as an inductive effect. *Physics Letters A*, 120:80, 1987.
- [Ass90] A. K. T. Assis. Deriving Ampère's law from Weber's law. *Hadronic Journal*, 13:441–451, 1990.
- [Ass92a] A. K. T. Assis. Centrifugal electrical force. *Communications in Theoretical Physics*, 18:475–478, 1992.

- [Ass92b] A. K. T. Assis. On the mechanism of railguns. *Galilean Electrodynamics*, 3:93-95, 1992.
- [Ass93] A. K. T. Assis. Changing the inertial mass of a charged particle. *Journal of the Physical Society of Japan*, 62:1418-1422, 1993.
- [Ass94] A. K. T. Assis. *Weber's Electrodynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [Aze86] R. Azevedo et al. Powerful water-plasma explosions. *Physics Letters A*, 117:101-105, 1986.
- [BA95a] Marcelo Bueno and A. K. T. Assis. The correct Phipps's lagrangian. Submetido à publicação, 1995.
- [BA95b] Marcelo Bueno and A. K. T. Assis. Equivalence between the formulas for inductance calculation. Submetido à publicação, 1995.
- [BA95c] Marcelo Bueno and A. K. T. Assis. A new method for inductance calculations. Aceito para publicação no *J. Phys. D*, 1995.
- [BE90] D. F. Bartlett and W. F. Edwards. Invariance of charge to Lorentz transformation. *Physics Letters A*, 151:259-262, 1990.
- [BS20] J. B. Biot and F. Savart. Note sur le magnétisme de la pile de Volta. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:222-223, 1820.
- [BS65] J. B. Biot and F. Savart. Note on the magnetism of Volta's battery. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 118-119, New York, 1965. Pergamon Press.
- [Bue94] M. A. Bueno. Phipps's lagrangian and hamiltonian. *Foundations of Physics Letters*, 7:393-400, 1994.
- [Cha59] W. G. Chace. A brief survey of exploding wire research. In W. G. Chace and H. K. Moore, editors, *Exploding Wires*, Vol. 1, pages 7-16, New York, 1959. Plenum Press.
- [Chr87] C. Christodoulides. Equivalence of the Ampère and Biot-Savart force laws in magnetostatics. *Journal of Physics A*, 20:2037-2042, 1987.
- [Chr88] C. Christodoulides. Comparison of the Ampère and Biot-Savart magnetostatic force laws in their line-current element forms. *American Journal of Physics*, 56(4):357-362, 1988.

- [Chr89] C. Christodoulides. On Ampère's magnetostatic force law and the nature of the forces it predicts. *Physics Letters A*, 141:383-385, 1989.
- [Cor89] P. Cornille. On the difference between the Lorentz and Ampère force laws in magnetostatics. *Journal of Physics A*, 22:4075-4081, 1989.
- [Dar20] C. G. Darwin. The dynamical motions of charged particles. *Philosophical Magazine*, 39:537-551, 1920.
- [Dar93] O. Darrigol. The electrodynamic revolution in Germany as documented by early German expositions. *Archive for History of Exact Sciences*, 45:190-280, 1993.
- [EKL76] W. F. Edwards, C. S. Kenyon, and D. K. Lemon. Continuing investigation into possible electric fields arising from steady conduction currents. *Physical Review D*, 14:922-938, 1976.
- [FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, volume 1-3. Addison-Wesley, Reading, 1964.
- [Ge63] D. E. Gray (editor). *American Institute of Physics Handbook*, page 48. McGraw-Hill, New York, 1963.
- [GG85] P. Graneau and P. N. Graneau. Electrodynamics explosions in liquids. *Applied Physics Letters*, 46:468-470, 1985.
- [Gra45] H. Grassmann. Neue theorie der electrodynamik. *Annalen der Physik*, 64:1-18, 1845.
- [Gra65] H. Grassmann. A new theory of electrodynamics. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 201-214, New York, 1965. Pergamon Press.
- [Gra82a] P. Graneau. Application of Ampere's force law to railgun accelerators. *Journal of Applied Physics*, 53:6648-6654, 1982.
- [Gra82b] P. Graneau. Electromagnetic jet-propulsion in the direction of current flow. *Nature*, 295:311-312, 1982.
- [Gra83] P. Graneau. First indication of Ampere tension in solid electric conductors. *Physics Letters A*, 97:253-255, 1983.
- [Gra84] P. Graneau. Longitudinal magnetic forces. *Journal of Applied Physics*, 55:2598-2600, 1984.

- [Gra85a] P. Graneau. *Ampere-Neumann Electrodynamics of Metals*. Hadronic Press, Nonantum, 1985.
- [Gra85b] P. Graneau. Ampère and Lorentz forces. *Physics Letters A*, 107(5):235–237, February 1985.
- [Gra85c] P. Graneau. Comments on 'Equivalence of the Lorentz and Ampere force laws in magnetostatics' [J. Appl. Phys. 57, 1743 (1985)]. *Journal of Applied Physics*, 58:3638, 1985.
- [Gra86] P. Graneau. The Ampere-Neumann electrodynamics of metallic conductors. *Forstchritte der Physik*, 34:457–503, 1986.
- [Gra87a] P. Graneau. Amperian recoil and the efficiency of railguns. *Journal of Applied Physics*, 62:3006–3009, 1987.
- [Gra87b] P. Graneau. Railgun recoil and relativity. *Journal of Physics D*, 20:391–393, 1987.
- [Gra87c] P. Graneau. Wire explosions. *Physics Letters A*, 120:77–79, 1987.
- [Gra90] N. Graneau. The finite size of the metallic current element. *Physics Letters A*, 147:92–96, 1990.
- [Gra93] P. Graneau. The difference between Newtonian and relativistic forces. *Foundation of Physics Letters*, 6:491–500, 1993.
- [Gri89] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, second edition, 1989.
- [Gro46] F. W. Grover. *Inductance Calculations — Working Formulas and Tables*. Van Nostrand, New York, 1946.
- [Ive91] T. Ivezić. Electric fields from steady currents and unexplained electromagnetic experiments. *Physical Review A*, 44:2682–2685, 1991.
- [Ive93] T. Ivezić. Reply to "comments on 'Electric fields from steady currents and unexplained electromagnetic experiments'". *Physical Review E*, 44:4140–4142, 1993.
- [Jac75] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, New York, second edition, 1975.
- [Jol85] D. C. Jolly. Identity of the Ampere and Biot-Savart electromagnetic force laws. *Physics Letters A*, 107:231–234, 1985.

- [Kno49] A. E. Knowlton. *Standard Handbook for Electrical Engineers*. McGraw Hill, New York, 1949.
- [LCL88] P. Lorrain, D. R. Corson, and F. Lorrain. *Electromagnetic Fields and Waves*. W. H. Freeman and Company, New York, 3th edition, 1988.
- [Mar86] R. de A. Martins. Oersted e a descoberta do eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 10:89–114, 1986.
- [Max54] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume 1–2. Dover, New York, 1954.
- [Moy89a] P. G. Moyssides. Calculation of the sixfold integrals of the Ampere force law in a closed circuit. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25:4307–4312, 1989.
- [Moy89b] P. G. Moyssides. Calculation of the sixfold integrals of the Biot-Savart-Lorentz force law in a closed circuit. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25:4298–4306, 1989.
- [Moy89c] P. G. Moyssides. Experimental verification of the Biot-Savart-Lorentz and Ampere force laws in a closed circuit, revisited. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25:4313–4321, 1989.
- [Nas85] J. Nasilowski. A note on longitudinal Ampere forces in gaseous conductors. *Physics Letters A*, 111:315–316, 1985.
- [Nef81] H. P. Neff Jr. *Basic Electromagnetic Fields*. Harper & Row, New York, 1981.
- [O'R65] A. O'Rahilly. *Electromagnetic Theory — A Critical Examination of Fundamentals*, volume 1–2. Dover, New York, 1965.
- [Pap83] P. T. Pappas. The original Ampère force and Biot-Savart and Lorentz forces. *Il Nuovo Cimento B*, 76:189–197, 1983.
- [Pap90] P. T. Pappas. The nonequivalence of the Ampère and Lorentz/Grassmann force laws and longitudinal contact interactions. *Physics Essays*, 3:15–23, 1990.
- [Peo88] V. Peoglos. Measurement of the magnetostatic force of a current circuit on a part of itself. *Journal of Physics D*, 21:1055–1061, 1988.
- [Phi90] T. E. Phipps Jr. Toward modernization of Weber's force law. *Physics Essays*, 3:414–420, 1990.

- [PK74] J. M. Pearson and A. Kilambi. Velocity-dependent nuclear forces and Weber's electrodynamics. *American Journal of Physics*, 42:971-975, 1974.
- [Sin93] A. K. Singal. Comment on "Electric fields from steady currents and unexplained electromagnetic experiments". *Physical Review E*, 44:4138-4139, 1993.
- [Som64] A. Sommerfeld. *Electrodynamics: Lectures on Theoretical Physics, Vol. III*. Academic Press, New York, 1964.
- [Ter85] J. G. Ternan. Equivalence of the Lorentz and Ampere force laws in magnetostatics. *Journal of Applied Physics*, 57:1743-1745, 1985.
- [Ter86] J. G. Ternan. Stresses in rapidly heated wires. *Physics Letters A*, 115:230-232, 1986.
- [Tri65] R. A. R. Tricker. *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*. Pergamon Press, New York, 1965.
- [Web48] W. Weber. Elektrodynamische maassbestimmungen. *Annalen der Physik*, 73:193-240, 1848.
- [Web66] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 5, pages 489-529, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Wes87a] J. P. Wesley. Ampere's original force law compared with the Moyssides-Pappas results. In J. P. Wesley, editor, *Progress in Space-Time Physics 1987*, pages 170-180, Blumberg, 1987. Benjamin Wesley Publisher.
- [Wes87b] J. P. Wesley. Weber electrodynamics extended to include radiation. *Speculations in Science and Technology*, 10:47-61, 1987.
- [Wes89] J. P. Wesley. On Peoglos' measurement of the force on a portion of a current loop due to the remainder of the loop. *Journal of Physics D*, 22:849-850, 1989.
- [Wes90a] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part I. General theory, steady current effects. *Foundations of Physics Letters*, 3:443-469, 1990.
- [Wes90b] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part II. Unipolar induction, Z-antenna. *Foundations of Physics Letters*, 3:471-490, 1990.

- [Whi73] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 1: *The Classical Theories*, volume 2: *The Modern Theories*. Humanities Press, New York, 1973.
- [Wis81] M. N. Wise. German concepts of force, energy, and the electromagnetic ether: 1845–1880. In G. N. Canter and M. J. S. Hodge, editors, *Conceptions of Ether — Studies in the History of Ether Theories 1740–1900*, pages 269–307, Cambridge, 1981. Cambridge University Press.
- [Woo68] A. E. Woodruff. The contributions of Hermann von Helmholtz to electrodynamics. *Isis*, 59:300–311, 1968.