

**Saltos Clássicos e Quânticos de Vórtices  
Intrinsicamente Aprisionados em  
Supercondutores de Alta Temperatura Crítica**

**Cristiane de Moraes Smith**

**Orientador: Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira**

Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin"  
da Universidade Estadual de Campinas como parte dos  
requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em  
Ciências.

Campinas, 4 de Agosto de 1994.

Este exemplar corresponde à redação final da  
Tese de doutorado defendida pela aluna  
Cristiane de Moraes Smith e aprovada pela  
comissão examinadora.



Campinas, 12/08/94  
Amir Ordacgi

## AGRADECIMENTOS

Neste momento feliz, gostaria de compartilhar o meu júbilo com todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização desta tese. Agradeço ao meu orientador Prof. Amir Caldeira, que tanto me honrou ao aceitar-me como aluna de doutoramento. As palavras me faltam para exprimir toda a minha gratidão e apreço ao meu co-orientador Prof. Gianni Blatter, que tanto me ensinou e torturou nestes últimos dois anos. A ele, que me mostrou que as “equações falam”, e que com sua incansável exigência tentou me conduzir ao caminho da “perfeição suíça”, o meu sincero muito obrigada. Gostaria de agradecer também ao meu colaborador Boris Ivlev, com quem tive a honra de trabalhar por algum tempo. Este russo, para quem a matemática não tem mistérios, tem toda a minha gratidão e reconhecimento.

Sou especialmente grata ao meu amigo e procurador Francisco Lavarda, que resolveu todos os problemas no Brasil para que eu pudesse trabalhar em paz na Suíça. Agradeço também ao meu colega Richard Hlubina com quem tive o prazer de dividir o escritório, e discutir vários aspectos do meu trabalho. A todos os amigos e colegas, Hanna Viertiö, Henrik Nordborg, Nilanjana Datta, Ivo Sachs, Hirokazu Tsunetsugu, Elmar Heeb, Andreas Schönenberger, Dima Geshkenbein, Sudha Gopalan, e especialmente aos experimentais: Ana Célia Mota, Marco Nideröst, Piero Visani, Tiziano Teruzzi, Klaus Aupke, Roberto Frassanito e Andreas Amann, agradeço por terem tornado mais feliz a minha estadia em Zürich. Aos amigos Claudio B. Pereira e Dionys Baeriswyl, agradeço todas as conversas e apoio cada vez que a saudade apertava ou a tristeza me abatia.

Aos meus familiares, que suportaram a distância sem tentar me dissuadir dos meus planos de estudar no exterior, e a Vera Christen, que tanto me ajudou e que adotei como parte da família, o meu sincero agradecimento. Às secretárias e amigas, Martina Lopez, Annet Schultze e Rosemarie Hintermann, que sempre procuraram resolver todos os meus problemas e tanto me ajudaram com sua eficiência e dedicação, deixo aqui o meu especial agradecimento. Agradeço ao CNPq o apoio financeiro e enfim, a todos que com amizade e incentivo ajudaram-me a concluir esta etapa da minha vida.

## RESUMO

Uma generalização da teoria de tunelamento quântico macroscópico é obtida visando descrever o decaimento de sistemas com mais de um grau de liberdade aprisionados em estados meta-estáveis. Inicialmente nós estudamos um dc SQUID controlado por uma corrente externa, que constitui um sistema com dois graus de liberdade quânticos interagentes acoplados ao meio que os cerca. A probabilidade de decaimento é obtida na aproximação exponencial para o caso super-amortecido. Próximo à força crítica do sistema, o decaimento do estado meta-estável é determinado por uma única solução instanton descrevendo o decaimento simétrico das fases em cada uma das duas junções Josephson. Mediante redução da força externa, um novo regime é atingido onde o instanton se separa. Um diagrama de fase em termos de temperatura e corrente é construído baseado na teoria de Landau de transições de fase. Dependendo dos parâmetros externos o sistema desenvolve uma transição de fase de primeira ou de segunda ordem para o regime de separação do instanton.

Além disso, a teoria de uma corda elástica aprisionada num estado meta-estável é desenvolvida visando estudar o salto quântico de uma linha de fluxo intrinsecamente aprisionada num supercondutor em camadas. A temperatura de cruzamento separando os regimes térmico e quântico é determinada incluindo as dinâmicas massiva, dissipativa e Hall. Os cálculos são efetuados para o caso específico de um potencial periódico ligeiramente inclinado (pequena força externa) quando a aproximação de paredes finas pode ser aplicada. A taxa de decaimento é obtida nos limites não amortecido, super-amortecido e Hall: para sistemas não amortecidos e super-amortecidos, uma convencional saturação é encontrada a baixas temperaturas, enquanto que para sistemas governados por uma dinâmica puramente Hall, a taxa se anula segundo uma lei de Arrhenius com um energia de ativação reduzida devido aos efeitos quânticos. Finalmente, a teoria é generalizada visando descrever o decaimento de uma variedade elástica  $N$ -dimensional, e assim o salto de um feixe de vórtices planar (2D) e volumétrico (3D) é discutido.

## ABSTRACT

The theory of macroscopic quantum tunneling is generalized in order to describe the relaxation from metastable states of systems with more than one degree of freedom. Initially we study a current biased dc SQUID which constitutes a system of two interacting quantum degrees of freedom coupled to the environment. The decay probability is obtained in the exponential approximation for the overdamped case. Close to the critical driving force of the system the decay of the metastable state is determined by a unique instanton solution describing the symmetric decay of the phases in each of the two Josephson junctions. Upon reducing the external driving force a new regime is reached where the instanton splits. The doubling of the decay channels reduces the decreasing of the decay rate in the quantum regime. A current-temperature phase diagram is constructed based on the Landau theory of phase-transitions. Depending on the external parameters the system develops either a first- or a second-order transition to the split-instanton regime.

Furthermore, the theory of an elastic string trapped in a metastable state is developed in order to study the quantum creep of a single vortex-line intrinsically pinned in a layered superconductor. The crossover temperature separating thermal and quantum regimes is determined including Hall, massive and dissipative dynamics. The calculations are performed for the specific case of a slightly tilted periodic potential (small driving force) when the thin wall approximation can be applied. The decay rate is obtained in the undamped, overdamped and pure Hall limits: for undamped and overdamped systems the conventional saturation is found at low temperatures, whereas for pure Hall systems the rate vanishes following an Arrhenius law with a quantum-reduced activation energy.

Finally, the classical and quantum creep of a vortex-bundle is considered within the framework of continuum elastic theory. The generalization for the decay of a  $N$ -dimensional elastic manifold out of the metastable state is obtained, and the creep of a 2D and 3D vortex-bundles is discussed.

# ÍNDICE

## I. INTRODUÇÃO

## II. TUNELAMENTO QUÂNTICO MACROSCÓPICO NUM dc SQUID: SEPARAÇÃO DO INSTANTON

1. INTRODUÇÃO
2. AÇÃO EUCLIDEANA
3. PONTOS DE SELA E SEPARAÇÃO DO INSTANTON
4. TAXA DE TUNELAMENTO E DIAGRAMA DE FASE
5. CONCLUSÕES

## III. SALTOS CLÁSSICOS E QUÂNTICOS DE UMA LINHA DE FLUXO INDIVIDUAL

1. INTRODUÇÃO
2. AÇÃO EUCLIDEANA
3. REGIME CLÁSSICO
4. CRUZAMENTO ENTRE OS REGIMES CLÁSSICO E QUÂNTICO
  - 4.1. Caso Puramente Massivo
  - 4.2. Caso Puramente Dissipativo
  - 4.3. Caso Massivo e Dissipativo
  - 4.4. Caso Dissipativo e Hall
  - 4.5. Caso Massivo, Dissipativo e Hall para uma Partícula
  - 4.6. Autofunções
5. CORDA MASSIVA NO LIMITE QUÂNTICO
  - 5.1. Tunelamento a Temperatura Zero
  - 5.2. Tunelamento Quântico Termicamente Assistido
  - 5.3. Regime Térmico
  - 5.4. Resumo
6. CORDA SUPER-AMORTECIDA NO LIMITE QUÂNTICO

6.1. Tunelamento a Temperatura Zero

6.2. Consideração Qualitativa

6.3. Tunelamento Quântico Termicamente Assistido

6.4. Regime Térmico

6.5. Resumo

7. CORDA HALL NO LIMITE QUÂNTICO

7.1. Ativação Térmica Quanticamente Assistida

7.2. Resumo

8. CONCLUSÕES

#### **IV. SALTOS CLÁSSICOS E QUÂNTICOS DE UM FEIXE DE LINHAS DE FLUXO**

1. INTRODUÇÃO

2. LIMITE MASSIVO

3. LIMITE SUPER-AMORTECIDO

4. SALTO QUÂNTICO DE UM FEIXE TRIDIMENSIONAL

5. SALTO QUÂNTICO DE UM FEIXE PLANAR

6. CONCLUSÕES

#### **V. CONCLUSÕES**

#### **APÊNDICES**

APÊNDICE A: Distância  $2R$  entre dois kinks térmicos

APÊNDICE B: Coeficiente de tensão linear para paredes quase horizontais

APÊNDICE C: Coeficiente de tensão linear para paredes quase verticais

APÊNDICE D: Equação de movimento para a posição  $R$  da parede no caso Hall

#### **FIGURAS**

## I. INTRODUÇÃO

Equilíbrio térmico é um conceito essencial em mecânica estatística. Entretanto, na prática, ele nem sempre pode ser atingido. De fato, em muitas áreas da física, química e biologia há estados que são meta-estáveis, e nos deparamos então com o problema de como o sistema escapa de tais estados. Consideremos, por exemplo, um líquido super-aquecido. Se tratado com cuidado, este sistema pode ser mantido na fase meta-estável por um longo período, mas em algum momento ele finalmente sofrerá uma transição para a fase de vapor, que é mais estável. Um outro exemplo clássico é um ferromagneto, que pode persistir um certo tempo com a magnetização apontando em uma direção oposta ao campo aplicado. Podemos ainda citar como exemplo os materiais superfluidos e supercondutores, onde estados com um superfluxo diferente de zero são meta-estáveis, e sofrem transições espontâneas para estados com correntes mais baixas e maior estabilidade.

Nos exemplos supra-citados, bem como em todos os sistemas onde ocorre uma transição de fase de primeira ordem, o mecanismo da transição é a nucleação e o crescimento de alguma perturbação na fase meta-estável. A vaporização de um líquido super-aquecido, por exemplo, é iniciada pela formação de uma grande bolha de vapor (núcleo). Se a bolha for suficientemente grande, a sua expansão será energeticamente favorável, e assim todo o líquido se transformará em vapor. Do mesmo modo, a transição de fase num magneto é nucleada através de uma bolha de spins invertidos.

É importante distinguir entre dois tipos de fenômenos de nucleação: a nucleação não homogênea, que ocorre quando uma perturbação externa desencadeia a transição de fase (como por exemplo, irregularidades nas paredes de um recipiente), e a chamada nucleação homogênea, que corresponde a uma perturbação ocorrendo espontaneamente (por exemplo, flutuações termodinâmicas). Como a nucleação homogênea se trata de um fenômeno intrínseco, ela é de fundamental interesse. A seguir vamos nos restringir a este caso e vamos analisar alguns modelos onde a meta-estabilidade resulta do aprisionamento temporário do sistema num poço associado a um mínimo local do potencial. Antes, entretanto, vamos

discutir um outro ponto de fundamental importância: o número de graus de liberdade do sistema em estudo.

É bem conhecido que um sistema com um grau de liberdade pode decair de um mínimo meta-estável via ativação térmica sobre a barreira de potencial, ou via tunelamento quântico através da barreira. Também se sabe que um sistema com muitos graus de liberdade pode decair via ativação térmica, como foi discutido no antológico trabalho de Langer em 1967. Resta discutir o problema envolvendo o decaimento quântico de um sistema com muitos graus de liberdade.

O estudo de fenômenos quânticos envolve em geral dimensões microscópicas. Entretanto, há sistemas onde efeitos quânticos podem ser observados em escala macroscópica. Uma diferença importante envolvendo a dimensão do problema (macroscópica ou microscópica) é a importância do acoplamento com o meio. Em sistemas microscópicos, este acoplamento é frequentemente desprezível. Por outro lado, sistemas macroscópicos estão inerentemente acoplados ao meio que os cerca, e assim os efeitos de dissipação devido a este acoplamento devem imperativamente ser considerados.

Alguns exemplos cientificamente interessantes, bem como tecnologicamente importantes exibindo fenômenos quânticos macroscópicos são junções Josephson (JJ) atravessadas por correntes, dispositivos supercondutores de interferência quântica (rf SQUID, dc SQUID), e também o sistema de vórtices em supercondutores do tipo II. Nas junções Josephson, a variável macroscópica é a fase da junção, enquanto que nos SQUIDs a variável sujeita a efeitos quânticos é o fluxo aprisionado no interior do anel. No sistema de vórtices em supercondutores do tipo II o problema se torna contínuo, e a variável macroscópica é o campo descrevendo o deslocamento das linhas de fluxo.

Nas JJs, nos SQUIDs, bem como no sistema de vórtices, a probabilidade de decaimento da variável macroscópica a partir do estado meta-estável é descrita no regime clássico pela lei de Arrhenius (solução de ponto de sela da energia livre) [1], enquanto que no limite quântico ela é determinada pela solução de ponto de sela da ação Euclideana do processo de tunelamento, *i. e.*, a ação calculada para a trajetória extrema numa formulação em



tempos imaginários (instanton) [2, 3, 4].

Vamos começar analisando o exemplo mais simples onde o tunelamento quântico macroscópico pode ser observado, ou seja, uma junção Josephson. Uma junção Josephson (JJ) consiste de duas camadas supercondutoras separadas por uma barreira isolante fina, e é um sistema com apenas um grau de liberdade: a diferença de fase  $\varphi$  entre o parâmetro de ordem supercondutor em ambos os lados da junção (estamos considerando aqui apenas junções que são menores do que o comprimento Josephson  $\lambda_J$ ). Em presença de um campo eletromagnético externo, a junção se acopla a ele através da fase  $\varphi$ .

A diferença de fase  $\varphi$  de uma junção Josephson controlada por uma corrente externa obedece à mesma equação de movimento que a posição de uma partícula mecânica se movendo num potencial periódico inclinado. A inclinação média do potencial é proporcional à corrente externa, e a velocidade da partícula está relacionada à voltagem  $V$  através da junção pela relação de fase-voltagem de Josephson,  $V = \Phi_0 d\varphi/dt$ , onde  $\Phi_0 = hc/2e$  é o quantum de fluxo. Abaixo de um valor crítico  $I_c$  de corrente, o sistema pode ser aprisionado em um mínimo local do potencial periódico inclinado. Neste caso, a corrente flui através da junção sem nenhuma voltagem, *i. e.*, o sistema está no estado de voltagem-zero, que é meta-estável. Quando a corrente aplicada é suficientemente alta (bem próxima da corrente crítica  $I_c$ ) a partícula pode escapar do poço e escorregar no potencial inclinado. Este evento corresponde a preparar a junção no estado dissipativo, que é identificado pelo salto da voltagem  $V$  a um valor diferente de zero. Nos últimos anos, diversas investigações foram feitas em JJ controladas por correntes, e um satisfatório entendimento do problema foi obtido.

O decaimento de estados meta-estáveis carregando corrente em um rf-SQUID, que é um sistema consistindo de um anel supercondutor interrompido por uma junção Josephson foi estudado teoricamente por Caldeira e Leggett (CL)[5, 6]. Neste sistema que contém apenas um grau de liberdade, o decaimento da variável macroscópica foi tratado levando em conta o amortecimento devido ao acoplamento com o reservatório (banho térmico bosônico). O modelo assume que cada grau de liberdade do meio é apenas ligeiramente

perturbado pelo acoplamento com a partícula, de modo que o banho pode ser representado por um conjunto de osciladores harmônicos. Note que esta hipótese de acoplamento fraco não exclui a possibilidade de dissipação forte, uma vez que o reservatório é composto de um número infinito de graus de liberdade. Na teoria de CL a taxa de tunelamento para a variável macroscópica dissipativa quântica foi calculada a temperatura zero. Os resultados obtidos foram experimentalmente verificados durante a última década [7, 8] e também confirmados a partir de derivações microscópicas [9]. Posteriormente o formalismo foi generalizado para temperaturas finitas por Larkin e Ovchinnikov [10] no limite superamortecido e por Grabert, Weiss e Hänggi [11, 12] no caso geral. Para uma revisão recente, veja [13].

O completo entendimento do comportamento dos SQUIDS é um problema relevante, uma vez que estes dispositivos são usados, por exemplo, como detectores de fluxo magnético e permitem a construção de magnetômetros muito sensíveis. Embora uma satisfatória compreensão do comportamento de um rf SQUID tenha sido obtida, os atuais avanços tecnológicos nos confrontam com experimentos mais sensíveis, que requerem o uso de dispositivos com ruído inferior ao rf SQUID, como por exemplo, o dc SQUID.

Como parte deste trabalho nós estudamos o decaimento de estados meta-estáveis carregando corrente num dc SQUID, que constitui um sistema com dois graus de liberdade quânticos interagentes acoplados ao meio que os cerca [14]. Este dispositivo consiste de duas junções Josephson inseridas num anel supercondutor, e o circuito é controlado por uma corrente externa. As diferenças de fase  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$  de cada junção (variáveis macroscópicas) evoluem num potencial periódico inclinado bidimensional. No estado de voltagem zero, as fases das duas junções estão aprisionadas em poços do potencial meta-estável, e a corrente líquida circulando no anel é nula. Quando as fases decaem do mínimo meta-estável, uma corrente não nula pode ser detectada no circuito, *i. e.*, uma voltagem finita pode ser medida através de cada junção.

O escape do mínimo meta-estável pode ocorrer através de muitas trajetórias. Há entretanto uma trajetória ótima, que é a trajetória que passa através do ponto de sela com

energia potencial mais baixa. Quando a corrente aplicada externa é muito alta (muito próxima da corrente crítica), as fases das duas junções estão fortemente acopladas e decaem simetricamente, ou seja, a trajetória ótima é aquela correspondendo a  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Este comportamento é análogo ao de um sistema consistindo de um único grau de liberdade (rf SQUID). Mediante diminuição da corrente externa, pode-se atingir um regime em que o decaimento deixa de ser simétrico, e as fases decaem independentemente. Este é o que denominamos “regime de separação do instanton”. A bifurcação do instanton ocasiona um aumento relativo da taxa de decaimento.

É interessante observar que uma bifurcação estática do ponto de sela também ocorre no regime clássico (altas temperaturas). De fato, resultados experimentais obtidos por Lefèvre-Seguin *et al* [15] comprovam o aumento relativo da taxa de decaimento térmico num dc SQUID mediante diminuição da corrente externa. No regime quântico, a bifurcação é dinâmica e ocorre mesmo a valores de correntes mais altas. Para uma dada corrente, o decaimento clássico ainda ocorre através de um único ponto de sela, enquanto que a baixas temperaturas o instanton se separa. Este resultado, ou seja, o fato do fenômeno quântico se “antecipar” ao fenômeno clássico era esperado: em muitos outros casos tal comportamento também pode ser observado.

Consideremos um exemplo bem simples, uma partícula puntual num potencial periódico inclinado. Aumentando a inclinação do potencial, reduzimos a altura da barreira ao redor da partícula, e atingimos o valor crítico quando a barreira de potencial se anula. No entanto, ao levarmos em conta efeitos quânticos, observamos que para uma barreira finita de altura  $U_0$  tal que  $U_0 \sim \hbar\omega_0$  ( $\omega_0$  denota a frequência de pequenas oscilações ao redor do mínimo meta-estável) a barreira “efetiva” sentida pela partícula será nula. Este efeito também pode ser verificado em sistemas mais complexos: a diminuição quântica da barreira de potencial leva, por ex., a uma redução do valor da corrente crítica de “depinning” de vórtices em supercondutores do tipo II [16].

Após termos estudado o fenômeno de tunelamento quântico macroscópico num dc SQUID, que é equivalente a um sistema de duas partículas interagentes, nós nos con-

sagramos à análise de tal fenômeno num sistema consistindo de infinitas partículas integrantes, ou seja, uma corda elástica. Tal problema nada mais é do que a versão contínua do problema do dc SQUID, e pode ser realizado em supercondutores do tipo II, com o tunelamento das linhas de fluxo (vórtices).

É bem conhecido que em presença de um campo magnético externo, um fenômeno bastante interessante pode ser observado nos supercondutores do tipo II: “linhas” discretas (vórtices), contendo cada uma um quantum de fluxo  $\Phi_0 = hc/2e \sim 2.10^{-7} Gcm^2$  penetram no material, e na ausência de impurezas, se arranjam formando uma rede triangular (rede de Abrikosov). Este é a chamada “fase mista” de um supercondutor. O diagrama de fase  $H-T$  (campo-médio) compreende uma fase Meissner caracterizada por completa expulsão do campo a campos magnéticos  $H < H_{c1}$ , separada da fase mista (ou fase de Schubnikov) a campos mais altos  $H > H_{c1}$ , onde o campo magnético penetra o supercondutor na forma de vortices. O campo crítico inferior  $H_{c1}$  é determinado pelo comprimento de penetração de London  $\lambda$ , que é o comprimento determinando a resposta eletromagnética do supercondutor. Aumentando o campo magnético na fase mista, a densidade de linhas de fluxo (vórtices) aumenta até o ponto em que os núcleos dos vórtices se sobrepõem: este é o campo crítico superior  $H_{c2}$ . Acima de  $H_{c2}$  o material se torna um metal normal. O campo crítico superior é determinado pelo comprimento de coerência  $\xi$  do supercondutor que representa um outro comprimento de escala fundamental do sistema e determina a auto-resposta do fluido quântico macroscópico.

Vamos agora nos concentrar nas propriedades dinâmicas do sistema de vórtices. Aplicando uma densidade de corrente externa  $\mathbf{j}$  através do material na direção perpendicular ao campo magnético  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{j} \perp \mathbf{B}$ ), os vórtices vão se mover devido à força de Lorentz,  $\mathbf{f}_L = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}/c$ . Note que supercondutividade longitudinal com  $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$  produz uma configuração com força nula, ao menos no sentido termodinâmico com  $\mathbf{j} \rightarrow 0$  onde os campos auto-induzidos podem ser desprezados. A questão crucial é saber se supercondutividade transversal ( $\mathbf{j} \perp \mathbf{B}$ ) existe no sentido termodinâmico: a dissipação, e portanto a resistividade se anulam no limite  $\mathbf{j} \rightarrow 0$  ou um supercondutor no estado misto acaba sempre

num estado resistivo?

Em sistemas perfeitamente homogêneos, a força de Lorentz é apenas contra-balançada pela força de fricção  $\mathbf{f}_\eta = -\eta\mathbf{v}$ , onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade do sistema de vórtices no estado estacionário,  $\mathbf{v} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}/c\eta$ . O coeficiente de fricção pode ser obtido a partir da análise dos processos de dissipação dentro e ao redor dos núcleos dos vórtices (Bardeen-Stephen,  $\eta \sim BH_{c_2}/c^2\rho_n$ , onde  $\rho_n$  é a resistividade no estado normal [17]).

A dissipação se deve ao aparecimento de um campo elétrico finito  $\mathbf{E}$  como consequência do movimento do fluxo,  $\mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}/c$ . Uma vez que  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{E}$  são paralelos, a potência  $P = (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B})^2/c^2\eta = \rho_n j^2 (B/H_{c_2})$  é dissipada no sistema e a propriedade supercondutora de “fluxo de corrente sem dissipação” é perdida. Portanto, para  $\mathbf{j} \perp \mathbf{B}$  a dissipação no material supercondutor é meramente reduzida de  $B/H_{c_2}$  quando comparada com um metal normal.

Para reobter um fluxo de corrente sem perdas, temos que “aprisionar” os vórtices de modo que  $\mathbf{v} = 0$ , a despeito do fato de  $\mathbf{f}_L \neq 0$ . Felizmente, na maior parte dos materiais, impurezas ou deslocamentos vão agir como pontos de aprisionamento, competindo com a força de Lorentz e evitando o movimento dos vórtices. Deste modo, a utilização tecnológica dos supercondutores do tipo II pode ser restabelecida.

A obtenção de um fluxo de corrente sem dissipação se torna então um problema de otimização da força de aprisionamento  $\mathbf{f}_{pin}$ , uma vez que ao aumentarmos a densidade de corrente  $j$  além de  $j_c = cf_{pin}/B$  os vórtices se liberam do aprisionamento e a dissipação reaparece. Aqui  $j_c$  é a densidade de corrente crítica de liberação (critical depinning current density), que é sempre limitada pela densidade de corrente de desemparelhamento  $j_o = cH_c/3\sqrt{6}\pi\lambda$  (depairing current density), determinada pelo campo crítico termodinâmico  $H_c$ ,  $j_c < j_o$ .

O regime em que a corrente externa aplicada ao supercondutor é igual ou superior à corrente crítica  $j_c$  é denominado “Flux Flow Regime”. Neste caso, as barreiras de aprisionamento se anulam e os vórtices simplesmente fluem através do material. Entretanto, mesmo para correntes inferiores a  $j_c$ , quando há uma barreira de potencial finita ao redor

dos vórtices, estes ainda podem se mover. Neste caso as linhas de fluxo podem saltar sobre a barreira de potencial impulsionadas por flutuações térmicas, bem como tunelar sob a barreira devido a flutuações quânticas. Este fenômeno é conhecido como “Flux Creep” e será extensivamente estudado ao longo deste trabalho.

Como mencionamos anteriormente, os vórtices são aprisionados por defeitos, impurezas, ou deslocamentos ocorrendo no material supercondutor. Isto ocorre porque nos defeitos há uma supressão do parâmetro de ordem supercondutor, e como o vórtice é uma excitação topológica do material onde o parâmetro de ordem também se anula, é energeticamente favorável para o material combinar estes dois elementos. Em 1973 Larkin e Ovchinnikov propuseram a teoria do aprisionamento coletivo (Collective Pinning Theory) para explicar o fenômeno do aprisionamento de vórtices por defeitos pontuais. Esta teoria afirma que um pedaço  $L_c$  de um único vórtice é aprisionado pela ação coletiva de vários defeitos pontuais.  $L_c$  é denominado “comprimento de aprisionamento coletivo”: cada segmento  $L_c$  é aprisionado independentemente dos outros segmentos e compete como um todo com a força de Lorentz.

Um mecanismo de aprisionamento de vórtices mais efetivo do que aquele gerado por defeitos pontuais é obtido a partir de sítios de aprisionamento estendidos (extended pinning sites), tais como precipitados ou “grain boundaries” ocorrendo em supercondutores convencionais. No caso dos supercondutores de alta temperatura crítica podemos citar como exemplo os “twin boundaries” ocorrendo em YBCO. Recentemente, novas técnicas tem sido utilizadas visando impedir o movimento dos vórtices. Um exemplo bastante eficaz é a introdução artificial de defeitos colunares no material. Mediante irradiação do supercondutor com íons pesados altamente energéticos, pode-se gerar trilhos no material, que aprisionam fortemente os vórtices, levando a um considerável aumento do valor da densidade de corrente crítica  $j_c$ .

Há também um outro exemplo de aprisionamento extensivo forte que pode ser encontrado nos supercondutores de alta  $T_c$ . Estes materiais tem uma estrutura em camadas, onde planos supercondutores de CuO são separados por regiões relativamente isolantes.

Mediante aplicação de um campo magnético paralelo às camadas, os vórtices serão intrinsicamente aprisionados entre os planos de CuO, uma vez que a distância  $d$  entre estes planos tem a mesma ordem de grandeza que o diâmetro  $\xi$  dos vórtices. Este mecanismo é denominado “aprisionamento intrínseco de vórtices em supercondutores de alta  $T_c$ ” e é o mecanismo de aprisionamento tratado neste trabalho.

O salto de vórtices devido à ativação térmica (Thermal Flux Creep) é bem conhecido desde o trabalho de Kim e Anderson nos anos sessenta. Entretanto, resultados experimentais recentes indicam que a baixas temperaturas o fenômeno de “creep” resulta do tunelamento dos vórtices sob a barreira de potencial [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. O tunelamento quântico de vórtices foi observado a temperaturas de milikelvin em vários materiais, tais como nos supercondutores orgânicos, nos “heavy fermions”, e também nos supercondutores de alta temperatura crítica. Estimativas dimensionais foram elaboradas por Blatter, Geshkenbein e Vinokur para descrever o salto quântico de vórtices em supercondutores de alta- $T_c$  dentro do formalismo da teoria de aprisionamento coletivo fraco [27]. Os resultados teóricos obtidos mostram um bom acordo com os resultados experimentais. Entretanto, para este caso de aprisionamento por defeitos pontuais, uma teoria formal não pode ser estabelecida, devido ao caráter aleatório do potencial de aprisionamento (os defeitos pontuais estão aleatoriamente distribuídos no material).

O movimento de uma linha de fluxo intrinsicamente aprisionada entre os planos de CuO num supercondutor de alta- $T_c$  foi considerado por Ivlev, Ovchinnikov e Thompson [28], e a temperatura de cruzamento separando os regimes clássico (térmico) e quântico foi determinada no limite super-amortecido. Aqui nós também consideramos o caso de aprisionamento intrínseco, porém de uma forma mais geral que em [28]: Nós calculamos as taxas de decaimento e a forma dos núcleos críticos descrevendo a transição do estado meta-estável em todo o intervalo de temperaturas e incluímos os três tipos de dinâmica: massiva, dissipativa e Hall [29]. Os cálculos foram feitos para o caso específico de um potencial periódico ligeiramente inclinado (pequena força externa) onde a “aproximação de paredes finas” (thin wall approximation) pode ser aplicada.

Além disso, um outro ponto fundamental foi considerado: a campos magnéticos fracos, poucos vórtices penetram o supercondutor, e a interação entre eles pode ser negligenciada. Entretanto, a partir de valores intermediários de campo magnético os vórtices começam a interagir entre si. O processo elementar produzindo salto de linhas de fluxo, então, envolve o movimento de um feixe de vórtices através das camadas supercondutoras, e não mais o deslocamento de um único vórtice. Dentro do modelo acima descrito, este fenômeno corresponde ao movimento de um objeto bidimensional (planar) ou tridimensional (volumétrico), dependendo do tamanho relativo entre o feixe de vórtices ativado e a amostra supercondutora. Assim, o último tópico que nós desenvolvemos é a generalização do problema de tunelamento a partir de uma corda a um objeto de maiores dimensões, como uma superfície elástica (2D) ou um volume (3D).

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no primeiro capítulo, nós aplicamos a teoria de tunelamento quântico macroscópico a um sistema consistindo de dois graus de liberdade acoplados (dc SQUID). No segundo capítulo estendemos a teoria para o caso de uma corda elástica, que contém infinitos graus de liberdade interagentes (vórtice) e representa a versão contínua do problema do dc SQUID. Finalmente, no terceiro capítulo, generalizamos a teoria de tunelamento de uma corda elástica para o caso de variedades elásticas  $N$ -dimensionais, e descrevemos a dinâmica de vórtices em supercondutores do tipo II na presença de um campo magnético arbitrário. Posteriormente apresentamos as conclusões oriundas deste trabalho.



## II. TUNELAMENTO QUÂNTICO MACROSCÓPICO

### NUM dc SQUID: SEPARAÇÃO DO INSTANTON

#### 1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo estamos interessados em estudar a dinâmica quântica de um sistema que é equivalente ao problema de duas partículas interagentes, *i. e.*, o decaimento de um estado meta-estável num dc SQUID. O dispositivo contém duas junções Josephson (JJ), o que o torna um interessante sistema modelo, uma vez que ele vai além de um único grau de liberdade. Sob condições bem definidas, este sistema desenvolve uma instabilidade onde a ação se torna extrema ao longo de duas trajetórias próximas. Tal separação do instanton faz as duas fases decaírem assimetricamente e influencia fortemente o valor da taxa de decaimento.

O tunelamento quântico macroscópico (MQT) de um dc SQUID com uma indutância muito pequena ou com correntes fluindo nas duas junções aproximadamente em fase foi considerado anteriormente por Chen [30]. Em ambos os casos, apenas a solução de um único instanton aparece. Ivlev e Ovchinnikov [31] calcularam a separação do instanton num dc SQUID para o caso sub-amortecido. Aqui nós nos concentramos nos efeitos de dissipação e estudamos o processo de decaimento no limite super-amortecido, segundo o modelo de Caldeira-Leggett [14].

Nós consideramos o decaimento de um estado meta-estável em um dc SQUID consistindo de duas junções Josephson idênticas dispostas simetricamente num anel supercondutor e conectadas com o mundo externo por dois fios condutores (Fig. 1). O dispositivo é submetido a um regime aproximadamente crítico, *i. e.*, a corrente  $I_i, i = 1, 2$ , em cada ramo é escolhida para ser ligeiramente inferior à corrente crítica  $I_c$ . A corrente crítica numa junção Josephson é simplesmente a máxima corrente que pode ser transportada pelos pares de Cooper. Quando a corrente excede este valor máximo, uma voltagem finita aparece através da junção, indicando que a corrente adicional tem que ser carregada por quasi-partículas.

O sistema em estudo desenvolve um comportamento muito interessante: mediante alterações dos parâmetros externos, tais como corrente  $I = I_1 + I_2$  ou temperatura  $T$ , várias situações fisicamente diferentes podem ser realizadas. A altas temperaturas e correntes, o sistema está no regime clássico e decai por energia de ativação através de um único ponto de sela. Reduzindo a corrente, uma nova fase surge a  $I = I_{cs}$  onde o ponto de sela se separa em dois outros, com energia mais baixa, e a probabilidade de decaimento do processo térmico aumenta. Por outro lado, se a corrente é mantida constante e a temperatura é reduzida, o sistema entra no regime quântico e diferentes regiões podem ser atingidas: Para correntes muito altas, o acoplamento entre as duas JJ é forte e ambas as fases decaem simetricamente (único instanton). Para correntes mais baixas, o acoplamento se torna mais fraco e o decaimento deixa de ser simétrico. Neste caso, dois canais de decaimento localizados próximos tornam-se viáveis, *i. e.*, o instanton se separa em dois. A bifurcação da trajetória reduz a ação e conseqüentemente, a taxa de decaimento determinada pela solução de separação do instanton é maior do que a taxa obtida para o único instanton no mesmo intervalo de temperatura e corrente. O fenômeno de separação do instanton ocorre a correntes mais altas do que  $I_{cs}$ , *i. e.*, na região onde o regime clássico é ainda governado por um único ponto de sela. Para correntes ainda menores  $I < I_{cs}$  o regime quântico naturalmente envolve as trajetórias com dois instantons. Identificando a ação com um potencial termodinâmico, nós podemos reformular o problema em termos da teoria de Landau de transições de fase [32]. Baseados nesta teoria, observamos que a transição entre a fase com um único instanton e a fase com dois instantons pode ser contínua (uma transição de fase de segunda ordem) ou descontínua (transição de fase de primeira ordem). A ordem da transição depende da corrente externa e da temperatura. Para pequenos valores da corrente externa e próximo à temperatura de cruzamento para o regime clássico  $T_0$ , o sistema desenvolve uma transição de fase de primeira ordem, enquanto que para temperaturas próximas de zero e correntes mais altas, a transição é contínua.

A estrutura deste capítulo é a seguinte: Na seção 2 nós derivamos e discutimos a ação

descrevendo o sistema em questão. Na seção 3 nós calculamos os pontos de sela com os correspondentes instantons. A taxa de decaimento está computada na aproximação exponencial na seção 4 e o diagrama de fase para os quatro diferentes regimes (único ponto de sela clássico, duplo ponto de sela clássico, único instanton quântico, instantons separados quânticamente) está discutido em detalhe. As conclusões estão apresentadas na seção 5.

## 2. AÇÃO EUCLIDEANA

A ação Euclideana de um sistema consistindo de duas junções Josephson idênticas acopladas na presença de uma corrente externa é

$$S_E = S_j + S_i + S_d, \quad (2.1)$$

onde

$$S_j = \int_0^{\hbar/T} d\tau \left\{ \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{C}{2} \left[ \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} \right)^2 \right] + E_J [(1 - \cos\varphi_1) + (1 - \cos\varphi_2)] - E_J \frac{I}{2I_c} (\varphi_1 + \varphi_2) \right\} \quad (2.1a)$$

é a ação de duas JJs independentes. Estamos considerando a constante de Boltzmann igual à unidade,  $k_B = 1$ . O primeiro termo é a energia cinética, onde a capacitância  $C$  da junção representa o papel de ‘massa’ do sistema;  $\Phi_0 = hc/2e$  é o quantum de fluxo;  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são as diferenças de fase através das duas junções, e são funções periódicas do tempo imaginário  $\tau$  com um período  $\hbar/T$ . O segundo termo é a energia potencial das junções,  $E_J = (\Phi_0/2\pi)I_c$ , onde  $I_c$  é a corrente crítica de uma junção individual. O último termo representa a força governadora do sistema, que pode ser externamente controlada via alterações da corrente  $I$ .

A interação entre as duas JJs é dada por

$$S_i = \int_0^{\hbar/T} d\tau \frac{E_J^2}{2LI_c^2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2, \quad (2.1b)$$

onde  $L$  é a indutância total do anel. A expressão (2.1b) corresponde à energia clássica de um anel com indutância total  $L$  e encerrando um fluxo  $\Phi$ ,  $E = \Phi^2/2L$ . O valor de  $\Phi$

é determinado a partir da condição de que a fase macroscópica da função de onda tenha valor único ao redor do anel. Num dc SQUID a invariância de gauge das diferenças de fase  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  através das junções determina o fluxo  $\Phi = (\Phi_0/2\pi)(\varphi_1 - \varphi_2)$  [33].

O último termo na ação,  $S_d$ , é a contribuição dissipativa devido ao acoplamento com o meio. Nós consideramos o sistema Resistively Shunted Junction (RSJ), de modo que podemos usar o modelo de Caldeira e Leggett para descrever o acoplamento entre as fases  $\varphi_i, i = 1, 2$  das junções Josephson e o banho térmico,

$$S_d = -\frac{\eta}{2\pi} \sum_{i=1,2} \int_0^{\hbar/T} d\tau \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau} \right) \int_0^{\hbar/T} d\tau_1 \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau_1} \right) \ln \left| \sin \left[ \frac{\pi T}{\hbar} (\tau - \tau_1) \right] \right|, \quad (2.1c)$$

com  $\eta$  denotando o coeficiente de fricção fenomenológico.

A ação (2.1) descreve a situação em que o fluxo magnético externo atravessando o anel do SQUID é nulo. Se o fluxo externo é não nulo, mas sim um número inteiro de quanta de fluxo a ação ainda pode ser escrita na forma (2.1). Para um fluxo externo arbitrário o SQUID adquire uma assimetria efetiva. Entretanto, nossos resultados são gerais e a separação do instanton ocorre em qualquer caso.

O termo oscilatório cosenoidal e o termo controlador (proporcional a  $I/I_c$ ), ambos em (2.1a), combinados com o potencial de interação em (2.1b) dão origem ao potencial periódico inclinado (washboard potential), que é mostrado na Fig. 2a. Os mínimos estão localizados ao longo da diagonal  $\varphi_1 = \varphi_2$  e uma ilustração é dada na Fig. 2b, onde as linhas equipotenciais estão representadas. Experimentalmente, tunelamento quântico macroscópico é estudado a valores de correntes próximas da crítica, *i. e.*,  $2I_c - I \ll I_c$ , quando a barreira de potencial efetiva se torna pequena. Neste limite a energia potencial pode ser aproximada por uma forma cúbica. Introduzindo as variáveis adimensionais

$$p = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{3\epsilon} + \frac{\pi}{\epsilon} + \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad q = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{3\epsilon}, \quad \text{com} \quad \epsilon = \sqrt{\frac{(2I_c - I)}{I_c}}$$

e medindo  $\tau$  em unidades de  $\tau_0 = 2\pi T/\hbar$  (porém retendo a notação original  $\tau$ ) podemos

reescrever a ação Euclideana como (desprezando um termo constante)

$$S_E = g \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \left\{ \frac{G}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{G}{2} \left( \frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 + V(p, q) \right. \\ \left. - \frac{T}{\pi T_0} \frac{\partial p}{\partial \tau} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau_1 \frac{\partial p}{\partial \tau_1} \ln \left| \sin \left( \frac{\tau - \tau_1}{2} \right) \right| \right. \\ \left. - \frac{T}{\pi T_0} \frac{\partial q}{\partial \tau} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau_1 \frac{\partial q}{\partial \tau_1} \ln \left| \sin \left( \frac{\tau - \tau_1}{2} \right) \right| \right\}, \quad (2.2)$$

onde o potencial efetivo é

$$V(p, q) = \left( p^2 - \frac{1}{2} p^3 \right) + q^2(1 + \alpha) - \frac{3}{2} p q^2. \quad (2.3)$$

Na equação acima introduzimos a massa adimensional  $G = 8\pi^2 C E_J T^2 / \epsilon I_c^2 \hbar^2$ , a unidade de ação  $g = 9\hbar E_J \epsilon^3 / 8\pi T$ , e a temperatura de cruzamento  $T_0 = \hbar \epsilon E_J / 2\pi \eta$ , bem como o importante parâmetro controlador

$$\alpha = \frac{2}{\beta \epsilon} \quad \text{com} \quad \beta = \left( \frac{2\pi}{\Phi_0} \right) L I_c.$$

O parâmetro  $g$  é suposto ser grande o suficiente para nos permitir tratar o problema na aproximação semiclássica,  $g/\hbar \gg 1$ , e pequeno o suficiente para reduzir a barreira de modo que tunelamento quântico possa ser observado (note que  $\epsilon$  é um parâmetro pequeno, uma vez que estamos considerando correntes externas  $I$  próximas de  $2I_c$ ). O parâmetro  $\alpha$  controla a interação entre as fases  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . É importante notar que o limite de pequenas indutâncias  $L$  (pequeno  $\beta$ ) [30] é diferente do limite de pequeno  $\epsilon$  considerado neste trabalho. Embora os dois parâmetros apareçam na expressão para  $\alpha$  de uma maneira equivalente, o parâmetro  $g$  também contém um fator  $\epsilon^3$  e assim as duas quantidades  $L$  e  $\epsilon$  representam papéis diversos. Isto pode ser claramente visualizado mediante inspeção das equações (2.1a) e (2.1b): de fato, o limite de pequenas indutâncias  $L \rightarrow 0$  enfatiza o termo quadrático nas fases, enquanto que alterações da corrente externa  $I$  (e consequentemente de  $\epsilon$ ) afetam o termo linear nas fases. Isto nos permite conduzir o sistema a uma situação onde o instanton se separa, em contraste com [30].

Vamos agora analisar mais cuidadosamente o potencial  $V(p, q)$ . A figura 3 mostra o seu comportamento para diferentes valores de  $\alpha$ . Para  $\alpha < 1$  (pequenas correntes  $I$ ), há um

mínimo absoluto a  $p_1 = q_1 = 0$ . Um máximo absoluto ocorre a  $p_2 = 4/3, q_2 = 0$ , e dois pontos de sela aparecem a  $p_{3,4} = 2(1 + \alpha)/3, q_{3,4} = \pm 2\sqrt{1 - \alpha^2}/3$  [veja Fig. 3(a)]. No valor crítico  $\alpha = 1$ , os pontos 3 e 4 convergem no ponto 2, que se torna o novo e único ponto de sela no regime  $\alpha > 1$  [Fig. 3(b)]. A partir destas considerações estáticas poder-se-ia esperar que para grandes  $\alpha$  uma única solução instanton (dinâmica) é desenvolvida, enquanto que para pequenos  $\alpha$  duas soluções separadas com  $q(z) \neq 0$  deveriam ocorrer. Acontece que um tal tipo de separação do instanton de fato ocorre, entretanto, o valor crítico de  $\alpha$  depende da temperatura  $T$  e  $\alpha_c(T_0) = 1$  apenas na temperatura de cruzamento  $T_0$  onde a dinâmica se torna clássica. A forma exata da linha crítica  $\alpha_c(T)$  será obtida na próxima seção.

### 3. PONTOS DE SELA E SEPARAÇÃO DO INSTANTON

O próximo passo é procurar as trajetórias que extremizam a ação (2). Isto foi feito por Ivlev e Ovchinnikov [31] para o caso sem dissipação, com  $\eta = 0$ . Aqui nós estamos interessados no limite oposto, onde a dissipação é muito forte,  $\eta/\hbar \gg 1$ . A seguir nós desprezaremos os termos cinéticos na equação (2.1), supondo que eles são muito menores do que os termos dissipativos (regime super-amortecido). Aplicando o princípio variacional à ação nós obtemos as equações de movimento clássicas para tempos imaginários

$$-2p + \frac{3}{2}p^2 + \frac{3}{2}q^2 = \frac{T}{\pi T_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau_1 \frac{\partial p}{\partial \tau_1} \cot\left(\frac{\tau - \tau_1}{2}\right), \quad (2.4a)$$

$$-2(1 + \alpha)q + 3pq = \frac{T}{\pi T_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau_1 \frac{\partial q}{\partial \tau_1} \cot\left(\frac{\tau - \tau_1}{2}\right). \quad (2.4b)$$

A equação (2.4b) pode ser trivialmente satisfeita assumindo  $q(\tau) = q_0(\tau) = 0$ . Neste caso o presente problema se reduz àquele de uma única junção Josephson, *i. e.*, um grau de liberdade ( $p$ ) interage com um banho térmico a temperatura finita  $T$ . A solução da equação remanescente (instanton) foi obtida por Larkin e Ovchinnikov [10]. Ela é dada por

$$p_0(\tau) = \frac{4}{3} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{1}{1 - \cos \tau \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2}}, \quad (2.5)$$

onde

$$T_0 = \frac{\hbar E_J}{2\pi\eta} \epsilon(I) \quad (2.6)$$

é a temperatura de cruzamento separando o regime clássico do quântico [10]. Inserindo  $p_0, q_0$  de volta na equação (2.2) nós obtemos a ação

$$S_0 = 4\pi\eta\epsilon^2(I) \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{T}{T_0} \right)^2 \right]. \quad (2.7)$$

A seguir, nós investigaremos a possibilidade de que as equações dinâmicas (2.4a) e (2.4b) desenvolvam uma segunda solução que reduza ainda mais a ação (2.2). Em particular, nós procuramos uma solução  $p, q$  que se bifurque a partir da solução  $p_0, q_0$  a algum valor crítico do parâmetro dinâmico  $\alpha$ . Definindo  $p(\tau) = p_0(\tau) + \tilde{p}(\tau)$  e  $q(\tau) = q_0(\tau) + \tilde{q}(\tau)$  nós podemos reescrever a ação na forma compacta

$$S = S_0 + \frac{g}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \left[ \tilde{q} \hat{Q} \tilde{q} + \tilde{p} \hat{P} \tilde{p} \right] - \frac{g}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \tilde{p}^3 - \frac{3g}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \tilde{p} \tilde{q}^2, \quad (2.8)$$

onde introduzimos os dois operadores

$$\hat{P} = \left. \frac{\delta^2 S}{\delta p^2} \right|_{p_0, q_0} = 2 - 3p_0(\tau) + \frac{T}{\pi T_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau_1 \cot \left( \frac{\tau - \tau_1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \tau_1} \quad (2.9a)$$

e

$$\hat{Q} = \left. \frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \right|_{p_0, q_0} = \hat{P} + 2\alpha. \quad (2.9b)$$

Usando a técnica desenvolvida por Callan e Coleman [2, 3], nós sabemos que o operador  $\hat{P}$  tem não apenas um autovalor zero (modo translacional), mas também um negativo (modo instável), o qual é responsável pela parte imaginária na energia e assim, pela taxa de decaimento finita do estado meta-estável. A partir das equações (2.9a) e (2.9b) nós imediatamente vemos que o valor do parâmetro  $\alpha$  representa um papel crítico neste problema. Para grandes  $\alpha$ , o espectro de  $\hat{Q}$  é definido positivo e todos os modos- $q$  são estáveis. Reduzindo  $\alpha$  (*e.g.*, via redução de  $I$ ) o mais baixo autovalor de  $\hat{Q}$  pode se tornar negativo e um modo instável  $q$  se desenvolve. O valor de  $\alpha$  onde esta instabilidade ocorre pela primeira vez é definido como o valor crítico  $\alpha_c$ . Assim, a adição de  $2\alpha_c$  ao operador

$\hat{P}$  desloca o autovalor negativo para zero. Para  $\alpha > \alpha_c$  apenas  $\hat{P}$  tem um autovalor negativo e a ação é extrema para a trajetória  $[p_0(\tau), q_0(\tau)]$ . Por outro lado, para  $\alpha < \alpha_c$  o operador  $\hat{Q}$  também adquire um autovalor negativo,  $2(\alpha - \alpha_c) < 0$ , e um modo ‘perigoso’ é desenvolvido. Como consequência, o único instanton presente para  $\alpha > \alpha_c$  se separará em dois instantons para  $\alpha < \alpha_c$ .

Em termos dos operadores (2.9a) e (2.9b) as equações de movimento (2.4a) and (2.4b) podem ser escritas na forma equivalente

$$\hat{P}\tilde{p} = \frac{3}{2}\tilde{q}^2 + \frac{3}{2}\tilde{p}^2, \quad (2.10a)$$

$$\hat{Q}\tilde{q} = 3\tilde{p}\tilde{q}. \quad (2.10b)$$

Nossa tarefa agora é determinar as correções  $\tilde{p}$  e  $\tilde{q}$  para  $\alpha < \alpha_c$ . Em primeira ordem podemos considerar que  $\tilde{p} = 0$  e que  $\tilde{q}$  é a solução do problema de autovalores (linear)

$$\hat{Q}\tilde{q} = 0. \quad (2.11)$$

Resolvendo (2.11) nós imediatamente obtemos o parâmetro crítico  $\alpha_c$  onde o espectro de  $\hat{Q}$  vai a zero,  $\hat{Q}(\alpha_c)q_1 = 0$ . Aqui  $q_1$  denota a autofunção de  $\hat{Q}$  pertencendo ao autovalor mais baixo  $2(\alpha - \alpha_c)$ , *i. e.*,  $\hat{Q}q_1 = 2(\alpha - \alpha_c)q_1$ .

Expandindo  $\tilde{q}(\tau)$  em série de Fourier

$$\tilde{q}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\tau} \quad (2.12)$$

e lembrando que [34]

$$\cot\left(\frac{\tau - \tau_1}{2}\right) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin[m(\tau - \tau_1)], \quad (2.13)$$

nós obtemos a seguinte equação para os coeficientes de Fourier  $C_n$ ,

$$|n|C_n + (1 + \alpha)\frac{T_0}{T}C_n = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{-b|m-n|}, \quad (2.14)$$

onde

$$b \equiv \frac{1}{2} \ln\left(\frac{T_0 + T}{T_0 - T}\right). \quad (2.15)$$



Usando o Ansatz

$$C_n = B e^{-b|n|} (A + |n|), \quad (2.16)$$

( $A, B$  constantes) é fácil verificar que nós obtemos uma solução se as condições

$$A = \frac{\alpha T_0}{T} \quad \text{e} \quad -\alpha^2 + \alpha + 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = 0 \quad (2.17)$$

forem satisfeitas. Uma vez que (2.14) é linear em  $C_n$  a amplitude total  $B$  não pode ser obtida neste estágio, mas tem que ser determinada levando-se em conta termos de ordens mais altas em (2.10a) e (2.10b). A equação (2.17) define o parâmetro crítico  $\alpha_c(T)$  abaixo do qual o mais baixo autovalor de  $\hat{Q}$  se torna negativo,

$$\alpha_c = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2}. \quad (2.18)$$

Note que nos cálculos acima nós determinamos simultaneamente a autofunção  $q_1(z)$  correspondendo ao autovalor negativo  $2(\alpha - \alpha_c)$  de  $\hat{Q}$  na região  $\alpha < \alpha_c$ , bem como a aproximação de ordem mais baixa  $\tilde{q}^{(0)}(\tau)$  para a solução de separação do instanton  $\tilde{q}(\tau) \neq 0$  surgindo abaixo de  $\alpha_c$ ,

$$\tilde{q}(\tau) \approx \tilde{q}^{(0)}(\tau) = B q_1(\tau) = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-b|n|} \left(\frac{\alpha_c T_0}{T} + |n|\right) e^{in\tau}. \quad (2.19)$$

A condição (2.17) relaciona a corrente  $I$  com a temperatura  $T$  e assim determina a temperatura crítica  $T_s(\alpha)$  abaixo da qual os dois instantons ( $p_0, \pm B q_1$ ) ocorrem. Como no regime clássico, podemos ver que esta bifurcação aparece na região  $\alpha < \alpha_c$ , *i. e.*, no regime de baixas correntes. Nesta região, a solução simétrica [ $q_0(\tau) = 0$ ] ainda é válida. Entretanto, pode ser facilmente verificado que a substituição das soluções  $\pm B q_1(\tau)$  na ação (2.2) resulta numa ação inferior àquela obtida com  $q_0(\tau) = 0$ .

Usando a teoria de Landau de transições de fase [32], podemos tratar a ação como sendo o potencial termodinâmico do sistema e assim podemos determinar o diagrama de fase da temperatura e corrente em termos das variáveis adimensionais

$$\theta \equiv \frac{\eta \pi \beta}{\hbar E_J} T \quad \text{e} \quad \iota \equiv \frac{\epsilon^2 \beta^2}{4} = \frac{(2I_c - I)\beta^2}{4I_c} = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (2.20)$$

O diagrama de fases compreende quatro fases, veja a Fig. 4. Consideremos inicialmente a região de grandes correntes,  $\iota < 1$ . A altas temperaturas  $\theta > \theta_0$  e altas correntes ( $\iota$  muito pequeno) o sistema se comporta classicamente e o processo de decaimento ocorre através de um único ponto de sela. Ao transpor a fronteira  $\theta_0 = \sqrt{\iota}$  (lembre-se que  $T_0 = \hbar \epsilon E_J / 2\pi \eta$ ) nós entramos no regime quântico caracterizado pela solução de um único instanton. Reduzindo a corrente  $I$  para uma temperatura fixa  $T$ , ou reduzindo a temperatura para uma corrente fixa nós finalmente cruzamos a linha crítica  $\theta_s^2 = \iota + \sqrt{\iota} - 1$  [veja (2.17)] e atingimos a fase de separação do instanton. No entanto, se ao invés disto o sistema for mantido no regime de altas temperaturas e a corrente for reduzida, uma nova fase clássica surgirá a  $\iota = 1$  onde o ponto de sela se separa em dois (veja também Fig. 3). Reduzindo a temperatura para um valor fixo de corrente na região  $\iota > 1$  o sistema entra no regime quântico caracterizado pela solução duplo-instanton. A linha de cruzamento  $\theta_0$  separando o regime clássico com dois pontos de sela do regime quântico com dois instantons pode ser determinada a partir da curvatura do potencial no ponto de sela (veja Eq. (3.29), e lembre-se que para o presente caso  $\epsilon_z = 0$ ). A partir da equação de movimento escrita em termos das frequências de Matsubara  $\omega_n = 2\pi n T / \hbar$  obtemos

$$\frac{2\pi T_0}{\hbar} \eta = - \left. \frac{\partial^2 V(p', q')}{\partial p'^2} \right|_s, \quad \iota > 1, \quad (2.21)$$

onde  $(\partial^2 V / \partial p'^2)|_s$  é a segunda derivada do potencial ao longo da linha de maior declive (steepest descent) do ponto de sela ( $p'$  e  $q'$  são as duas direções principais ortogonais no ponto de sela). A temperatura de cruzamento  $\theta_0(\iota)$  é então dada por

$$\theta_0(\iota) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{4\iota - 3}). \quad (2.22)$$

Portanto o ponto  $\theta(\iota = 1) = 1$  é um ponto de cruzamento entre os regimes único/duplo e clássico/quântico. Embora a fase com duplo-instanton apareça também para  $\iota > 1$ , nós estamos interessados na separação do instanton, que ocorre apenas na região  $\iota < 1$ . A seguir nós restringiremos nossa análise a esta região. A taxa de tunelamento quântico para os dois casos  $\alpha > \alpha_c$  e  $\alpha < \alpha_c$  será discutida na próxima seção.

#### 4. TAXA DE TUNELAMENTO E DIAGRAMA DE FASE

Na seção precedente nós calculamos a correção  $\tilde{q}^{(0)}(\tau)$  para  $q_0(\tau) = 0$  correspondendo à trajetória minimizando a ação na região  $\alpha < \alpha_c$ . Substituindo (2.19) em (2.8), lembrando que na presente aproximação  $\tilde{p} = 0$ , e usando que  $\hat{Q}q_1 = 2(\alpha - \alpha_c)q_1$  nós obtemos a forma quadrática

$$S = S_0 + g(\alpha - \alpha_c)c_1^2, \quad (2.23)$$

onde

$$c_1^2 = B^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\tau q_1^2(\tau)$$

e  $S_0$  é dado por (2.7).

A este ponto, nós fomos capazes de resolver o problema nas duas regiões  $\alpha < \alpha_c$  e  $\alpha > \alpha_c$ . Entretanto, devemos lembrar que a constante  $B$  na equação (2.19) é ainda desconhecida. Além disso, no regime crítico o autovalor  $2(\alpha - \alpha_c)$  do modo ‘perigoso’ (modo de frequência negativa) é pequeno e não mais é suficiente considerar apenas desvios quadráticos a partir da trajetória clássica. Ambos os problemas são solucionados ao levarmos em conta correções de ordem mais alta, o que faremos a seguir. A partir da teoria de Landau de transições de fase, com  $c_1$  representando o papel de parâmetro de ordem, sabemos que próximo ao ponto crítico, onde o coeficiente do termo quadrático se anula, a expansão da energia livre deve também conter um termo de quarta ordem. Assim, a ação deveria ser da forma

$$S = S_0 + g(\alpha - \alpha_c)c_1^2 + g\delta c_1^4, \quad (2.24)$$

onde  $\delta$  é um coeficiente a ser determinado mediante consideração de correções de ordem mais alta na expansão da ação. Neste caso, os dois problemas de autovalores para  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  tornam-se acoplados e temos que resolver as equações não homogêneas

$$\hat{P}\tilde{p} = \frac{3}{2}\tilde{q}^2, \quad (2.25a)$$

$$\hat{Q}(\alpha_c)\tilde{q} = -2(\alpha - \alpha_c)\tilde{q} + 3\tilde{p}\tilde{q}, \quad (2.25b)$$

onde o termo de ordem mais alta  $\propto \tilde{p}^2$  em (2.25a) foi desprezado [veja (2.10a)]. A solução da equação homogênea para  $\hat{Q}(\alpha_c)$  é  $\tilde{q}^{(0)}$ . Quando  $\alpha$  é reduzido a valores inferiores ao valor crítico  $\alpha_c$  a solução  $\tilde{q} = \tilde{q}^{(0)}$  é ligeiramente distorcida e assim adotamos o Ansatz  $\tilde{q} = \tilde{q}^{(0)} + \tilde{q}^{(1)}$ . Substituindo este Ansatz em (2.25b), desprezando  $\tilde{q}^{(1)}$  no lado direito da equação, multiplicando a expressão toda por  $\tilde{q}^{(0)}$ , e integrando, nós obtemos

$$3 \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \tilde{p}(\tau) q_1^2(\tau) = 2(\alpha - \alpha_c) \int_{-\pi}^{\pi} d\tau q_1^2(\tau), \quad (2.26)$$

que é uma expressão muito útil, relacionando a função desconhecida  $\tilde{p}(\tau)$  ao bem conhecido modo ‘perigoso’  $q_1(\tau)$ . Inserindo (2.25a), (2.25b), e (2.26) em (2.8) e desprezando o termo proporcional a  $\tilde{p}^3$  nós finalmente obtemos a seguinte expressão para a ação,

$$S = S_0 + \frac{g}{2}(\alpha - \alpha_c)B^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\tau q_1^2(\tau). \quad (2.27)$$

Comparando com a equação (2.24) minimizada com relação a  $c_1$ ,

$$S = S_0 - \frac{g(\alpha - \alpha_c)^2}{4\delta}, \quad (2.28)$$

observamos que podemos exprimir o importante parâmetro  $\delta$  através da norma  $\nu = \int_{-\pi}^{\pi} d\tau q_1^2(\tau)$  da autofunção  $q_1$  e da amplitude  $B$ ,

$$\delta = \frac{\alpha_c - \alpha}{2\nu B^2}. \quad (2.29)$$

O último passo é determinar a amplitude  $B$ . A partir de (2.25a) podemos inferir que  $\tilde{p}(\tau) = B^2\zeta(\tau)$ , onde  $\zeta(\tau)$  é a função obedecendo à seguinte equação integral não homogênea

$$[2 - 3p_0(\tau)]\zeta(\tau) + \frac{T}{\pi T_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \tau_1} \cot\left(\frac{\tau - \tau_1}{2}\right) = \frac{3}{2} q_1^2(\tau). \quad (2.30)$$

Usando (2.26) podemos facilmente verificar que

$$B^2 = \frac{2\nu}{3\nu}(\alpha - \alpha_c), \quad (2.31)$$

onde  $\nu = \int_{-\pi}^{\pi} d\tau q_1^2(\tau) \zeta(\tau)$ . Substituindo agora (2.31) em (2.29) obtemos a expressão para o parâmetro  $\delta$ ,

$$\delta = -\frac{3\nu}{4\nu^2}. \quad (2.32)$$

Resta determinar a função  $\zeta(\tau)$ . Note que tomando  $\alpha = 0$  em (2.4b) obtemos a equação homogênea correspondendo a (2.30). Seguindo os mesmos passos que fizemos para determinar  $q_1(\tau)$ , obtemos uma equação para os coeficientes de Fourier  $\tilde{\zeta}_n$

$$(1 + t|n|)\tilde{\zeta}_n - 2\gamma \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}_m e^{-b|n-m|} = \frac{3}{4} S_n, \quad (2.33)$$

onde  $t \equiv T/T_0$  e

$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\alpha_c}{t} + |k| \right) \left( \frac{\alpha_c}{t} + |n-k| \right) e^{-b(|k|+|n-k|)}. \quad (2.34)$$

Esta equação pode ser resolvida analiticamente em dois limites,  $T \approx T_0$  e  $T \approx 0$ . Próximo de  $T_0$ , temos  $t \approx 1$  e  $\alpha_c \approx 1$  [veja (2.18)]. Considerando apenas os três principais termos nas séries (2.33) e (2.34) nós obtemos após alguma álgebra  $\delta = -(9/32\pi)$ , o que caracteriza um transição de fase de primeira ordem, uma vez que  $\delta < 0$ . Por outro lado, vizinho ao zero absoluto,  $T \approx 0$ ,  $t|n|$  pode ser tratada como uma variável contínua  $x$ . Neste limite  $b \approx t$  [veja (2.15)] e a equação a ser resolvida adquire a forma

$$(1 + |x|)\tilde{\zeta}(x) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \tilde{\zeta}(y) e^{-|x-y|} = \frac{3}{4} T \int_{-\infty}^{\infty} d\tau q_1(\tau)^2 e^{-i2\pi T_0 x \tau}, \quad (2.35)$$

onde  $\tilde{\zeta}(x)$  é uma função contínua correspondendo aos coeficientes de Fourier discretos  $\tilde{\zeta}_n$ . Neste caso, o valor de  $\delta$  é positivo e então caracteriza uma transição de fase de segunda ordem. Segue que uma temperatura  $T_{tc}^*$  deveria existir onde  $\delta(T_{tc}^*) = 0$ .  $T_{tc}^*$  então corresponde a um ponto tri-crítico no qual as curvas de transição de fase de primeira e segunda ordem se encontram. Abaixo de  $T_{tc}^*$ ,  $\delta$  é positivo e a transição é suave ao variarmos  $\alpha$  de  $\alpha < \alpha_c$  para  $\alpha > \alpha_c$ , correspondendo a uma transição de fase de segunda ordem. Por outro lado, acima de  $T_{tc}^*$ , a transição é abrupta,  $\delta < 0$ , e corresponde a uma transição de fase de primeira ordem. A partir do resultado obtido para o caso sub-amortecido [31], onde o diagrama de fase tem as mesmas características que as apresentadas aqui, esperamos que a temperatura tri-crítica  $T_{tc}^*$  deva ser muito próxima da temperatura de cruzamento  $T_0$ . Portanto podemos expandir  $\delta(t)$  em série de Taylor ao redor do valor  $t = 1$ ,

$$\delta(t) = \delta(1) + \left. \frac{\partial \delta}{\partial t} \right|_{t=1} (t - 1), \quad (2.36)$$

e calcular o valor de  $t$  para o qual  $\delta(t) = 0$ . Após um tedioso (embora simples) cálculo, obtemos que a temperatura tri-crítica  $T_{tc}^* \approx 0.97 T_0$ .

Estamos agora aptos a determinar o comportamento da taxa de decaimento como função de temperatura e corrente nos regimes clássico e quântico. A taxa de decaimento clássico é dada pela lei de Arrhenius,

$$\Gamma_t \propto e^{-E(I)/T}, \quad (2.37)$$

onde  $T$  é a temperatura e  $E(I)$  é a energia de ativação, que é determinada pelo extremo da energia livre em (2.1) como função de  $(p, q)$ . Na região de altas correntes ( $\iota < 1$ ) a energia de ativação  $E_s(I) = 4E_J\epsilon^3(I)/3$ , enquanto que na região de baixas correntes ( $\iota > 1$ ) os dois pontos de sela se separam e a energia de ativação se torna  $E_d(I) = E_J\epsilon^3(I)(2 + 3\alpha - \alpha^3)/3$ . Na região  $\iota < 1$ , quando  $T$  se reduz a valores abaixo da temperatura de cruzamento  $T_0(I)$  o sistema entra no regime quântico e a taxa de decaimento adquire a forma

$$\Gamma_0 \propto e^{-S_0(I,T)/\hbar}, \quad (2.38)$$

onde  $S_0(I, T) = 4\pi\eta\epsilon^2(I)[1 - T^2/3T_0^2]$  é a ação calculada para a solução de único-instanton. A  $T = T_0$  os resultados clássico e quântico coincidem. Para sistemas consistindo de um único grau de liberdade a relaxação no regime quântico é inteiramente descrita pela equação (2.38). A saturação da taxa de decaimento a baixas temperaturas como obtida em (2.37) e (2.38) está em completo acordo com as observações experimentais em um rf SQUID [7, 8]. No nosso modelo, que contém dois graus de liberdade acoplados, o regime quântico é descrito pela equação (2.38) somente até a temperatura  $T_s(I)$ . Abaixo de  $T_s(I)$  o instanton se separa como consequência do desenvolvimento de um novo modo instável. Para  $\delta > 0$  a taxa de decaimento pode ser obtida mediante integração do modo 'perigoso',

$$\Gamma_s \propto e^{-S_0/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dc_1 e^{-g[(\alpha - \alpha_c)c_1^2 + \delta c_1^4]/\hbar} \simeq e^{-[S_0 - g(\alpha - \alpha_c)^2/4\delta]/\hbar}, \quad (2.39)$$

onde usamos (2.28) para obter esta expressão. Comparação dos resultados (2.38) e (2.39) mostra que  $\Gamma_s > \Gamma_0$  e assim a separação do instanton leva a um aumento relativo da

taxa de decaimento. Para  $\delta$  negativo, um termo proporcional a  $c_1^6$  deve ser considerado na ação, *i. e.*, o termo proporcional a  $\tilde{p}^3$  deveria ser retido na equação (2.8) de modo a fornecer uma descrição completa.

Definindo novas variáveis adimensionais para o logaritmo da taxa de decaimento  $\Gamma$

$$\sigma \equiv -\frac{3\beta^2\hbar}{16\pi\eta} \ln \Gamma \quad (2.40)$$

e usando as variáveis definidas em (2.20),  $\theta$  (relacionada com a temperatura  $T$ ) e  $\iota$  (relacionada à diferença entre a corrente externa  $I$  e a corrente crítica do sistema,  $2I_c$ , podemos reescrever as taxas de decaimento numa forma mais simples, (lembre-se que  $\iota < 1$ )

$$\sigma_t = \frac{2\iota^{3/2}}{\theta}, \quad (2.41a)$$

$$\sigma_0 = 3\iota - \theta^2, \quad (2.41b)$$

$$\sigma_s = 3\iota - \theta^2 - \kappa^2(\iota, \theta), \quad (2.41c)$$

onde  $\kappa^2(\iota, \theta) = 3\beta^2\hbar g(\alpha - \alpha_c)^2/64\pi\eta\delta$ . Note que  $\alpha$  é uma função de  $\iota$ , e  $\alpha_c$  e  $\delta$  são funções de ambos,  $\iota$  e  $\theta$ .

Vamos agora analisar os resultados (2.41) em detalhe (Figs. 4, 5, e 6). Para começar, mantemos a corrente ( $\iota$ ) fixa e discutimos a dependência funcional  $\sigma(\theta)$ , veja Fig. 5. Para uma corrente alta ( $\iota_1 = 0.20$ , lembre-se que altas correntes correspondem a pequenos  $\iota$ ) e a altas temperaturas, o sistema decai segundo (2.41a),  $\sigma_t \propto 1/\theta$ . Mediante redução da temperatura, o sistema entra no regime quântico a  $\theta_0^{(1)} = 0.45$  e relaxa de acordo com (2.41b),  $\sigma_0 \sim \text{const.} - \theta^2$ . Para altas correntes externas o acoplamento entre as duas fase no SQUID é mais efetivo e elas decaem simetricamente. Reduzindo a corrente externa ( $\iota_2 = 0.64$ ), o sistema decai por ativação térmica a altas temperaturas, entra no regime quântico descrito pelo único-instanton a  $\theta_0^{(2)} = 0.8$ , e então atinge uma nova fase no regime quântico a  $\theta_s^{(2)} = 0.66$  (veja também Fig. 4), onde o instanton se separa e a taxa de decaimento  $\Gamma_s$  é maior do que o valor  $\Gamma_0$  obtido para a solução de único instanton [veja equação (2.41c)]. A transição a  $\theta_s^{(2)}$  é suave, como numa transição de fase

de segunda ordem. Se a corrente externa é reduzida ainda mais, ( $\iota_3 = 0.96$ ), o sistema se comporta da mesma maneira, exceto por uma abrupta variação da ação (correspondendo a uma transição de fase de primeira ordem) quando a região de separação do instanton é atingida. O comportamento do sistema a temperaturas fixas e correntes variáveis está ilustrado na Fig. 6. A transição de fase de segunda ordem para a região de separação do instanton é provavelmente difícil de ser experimentalmente observada. Entretanto, a descontinuidade na taxa de decaimento ocorrendo para  $\iota_3 = 0.96$  na Fig. 5 e para  $\theta_2 = 0.95$  na Fig. 6 é um sinal do 'onset' da separação do instanton.

## 5. CONCLUSÕES

Neste capítulo, a taxa de decaimento de um estado meta-estável carregando corrente num dc SQUID foi estudada no limite super-amortecido. Este sistema compreendendo dois graus de liberdade quânticos macroscópicos acoplados apresenta um comportamento muito mais interessante do que o de um sistema com um único grau de liberdade. Além da temperatura de cruzamento  $\theta_0(\iota)$ , que também existe no caso de um sistema constituído de um único grau de liberdade e que indica o aparecimento de uma trajetória não trivial em tempo imaginário, uma temperatura crítica adicional surge no presente sistema, indicando uma alteração qualitativa da natureza do processo de tunelamento.

Considerando o problema em termos da teoria de transições de fase de Landau, um diagrama de fase relacionando a temperatura  $T$  e a corrente externa  $I$  foi construído. Quatro fases distintas foram encontradas, dependendo dos valores dos parâmetros externos (temperatura e corrente), que influenciam a forma do potencial. A altas temperaturas, o decaimento do estado meta-estável é devido à ativação térmica e o sistema se comporta classicamente. Neste regime a taxa de decaimento é dada pela bem conhecida lei de Arrhenius. Dependendo do valor da corrente externa, duas situações diferentes podem ser realizadas no limite clássico. A altas temperaturas  $\theta(\iota) > \theta_0(\iota)$  e altas correntes  $\iota < 1$  o sistema escapa através de um único ponto de sela, enquanto que para correntes mais baixas ( $\iota > 1$ ) o ponto de sela se separa em dois. Para  $\iota < 1$ , mediante diminuição da temperatura, na região  $\theta(\iota) < \theta_0(\iota)$  o sistema decai devido ao tunelamento quântico através



da barreira. O regime quântico é caracterizado por duas regiões diferentes: Para correntes externas  $I$  suficientemente altas (pequenos  $\iota$ ) e para temperaturas  $T$  suficientemente altas, *i. e.*, na região  $\theta_s(\iota) < \theta(\iota) < \theta_0(\iota)$ , as fases  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  nas duas junções Josephson estão fortemente correlacionadas e decaem simetricamente. Este comportamento é o mesmo que o de um sistema constituído de um único grau de liberdade, acoplado ao meio que o cerca. Sua dinâmica é descrita pela solução de único-instanton, a qual foi discutida previamente por Larkin e Ovchinnikov [10] para o caso fortemente amortecido. Abaixo da linha crítica  $\theta_s(\iota)$  o instanton se separa e duas trajetórias extremas degeneradas aparecem. Neste regime as duas fases estão apenas fracamente correlacionadas e elas decaem de uma maneira assimétrica. Nós calculamos analiticamente a solução de separação do instanton correspondendo ao comportamento quântico na região  $\theta(\iota) < \theta_s(\iota)$ . Surpreendentemente, a solução para o caso super-amortecido tem uma forma muito simples, em contraste com as funções elípticas obtidas no caso sub-amortecido [31]. A separação do instanton *reduz* significativamente a diminuição da taxa de tunelamento no regime quântico. Focalizando nossa atenção nesta nova linha de transição  $\theta_s(\iota)$ , nós observamos que próximo ao regime crítico as flutuações do modo correspondendo à transição entre as duas trajetórias tornam-se grandes, e requerem um estudo indo além da aproximação quadrática na ação (neste caso é necessário incluir um termo de quarta-ordem). A baixas temperaturas, a transição através da região crítica é suave, análoga a uma transição de fase de segunda-ordem. Por outro lado, a temperaturas próximas da temperatura de cruzamento  $\theta_0(\iota)$  que separa o regime clássico do quântico, a separação do instanton é abrupta, como numa transição de fase de primeira-ordem. Acima e próximo do ponto tri-crítico  $\theta^*$ , onde as transições de fase de primeira e segunda ordem convergem, o modo 'perigoso' flutua tão fortemente, que correções de sexta-ordem devem ser incluídas na ação.

Seria interessante observar experimentalmente a variação da taxa de decaimento como uma função da temperatura  $T$  e da corrente externa  $I$  na região correspondendo à separação do instanton. Na referência [35] a taxa de transição do estado de voltagem zero (mínimo meta-estável) no potencial periódico inclinado de um dc SQUID foi medida como

função do fluxo aplicado e da temperatura. Entretanto, os dispositivos usados neste estudo eram caracterizados por indutâncias muito pequenas ( $\beta \ll 1$ ) e neste caso a separação do instanton não pode ser observada. A indutância  $L$  do circuito é dada pelo diâmetro do dispositivo, o qual, por sua vez, também determina o nível do ruído. Como consequência, uma verificação experimental do fenômeno de separação do instanton requer um dispositivo otimizado com uma indutância grande o suficiente para tornar o efeito observável, mas pequena o suficiente para evitar o problema do ruído. Recentemente, o comportamento de um dc-SQUID no regime clássico correspondendo ao desdobramento do ponto de sela no potencial de uma superfície bidimensional foi observado experimentalmente [15]. Entretanto, no regime quântico ainda não há experimentos com a finalidade de observar a separação dinâmica do instanton.

### III. SALTOS CLÁSSICOS E QUÂNTICOS DE UMA LINHA DE FLUXO INDIVIDUAL

#### 1. INTRODUÇÃO

O decaimento de variedades elásticas de estados meta-estáveis tem sido investigado com muita atenção nos últimos tempos [36, 37, 38, 39]. Uma corda elástica aprisionada num potencial periódico fornece um modelo para descrever a condução elétrica em estados de onda de densidade de carga comensurável [38, 39], deslocções em um cristal [40], e também o movimento de vórtices em supercondutores do tipo II [27, 41, 28]. A relaxação a partir do mínimo meta-estável pode proceder via ativação térmica a altas temperaturas ou via tunelamento quântico a baixas temperaturas.

O presente capítulo trata os saltos clássicos e quânticos (classical and quantum creep) de um único vórtice em um supercondutor em camadas. Um completo entendimento da dinâmica dos vórtices nos supercondutores de alta temperatura crítica é essencial, uma vez que o movimento dos fluxóides leva a um comportamento resistivo e destrói a principal característica de um supercondutor, que é a de transportar correntes sem perdas.

Em geral, o movimento do fluxo magnético é ativado pela temperatura. Entretanto, resultados experimentais recentes mostraram que os vórtices podem se mover mesmo a temperaturas muito baixas devido a efeitos quânticos [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. A possibilidade de salto quântico de vórtices num supercondutor sólido (bulk) isotrópico foi discutida por Blatter, Geshkenbein e Vinokur, no padrão da teoria de aprisionamento coletivo fraco [27]. Eles estimaram dimensionalmente a taxa de salto quântico de vórtices em supercondutores de altas temperaturas com um campo magnético  $\mathbf{B}$  aplicado paralelo ao eixo  $c$  do cristal. Recentemente, a generalização para materiais anisotrópicos e em camadas foi obtida por Blatter e Geshkenbein [41]. Os principais resultados podem ser resumidos como segue: para campos magnéticos moderados no limite super-amortecido a taxa de tunelamento a temperatura zero é determinada pela resistência quântica adimensional  $(e^2/\hbar)(\rho_n/l)$ , a qual é particularmente grande para os supercondutores orgânicos

e para os supercondutores de alta temperatura crítica. Aqui  $\rho_n$  denota a resistividade no estado normal, e  $l$  representa o comprimento de escala relevante no problema: para o caso isotrópico,  $l = \xi$ , o comprimento de coerência; para materiais anisotrópicos  $l = \varepsilon\xi$ , onde  $\varepsilon^2 = m/M < 1$  é a anisotropia ( $m_a = m_b = m$ ,  $m_c = M$ ); e para supercondutores em camadas  $l = d$ , a distância entre dois planos supercondutores adjacentes.

O movimento de um vórtice num supercondutor em camadas (e. g.,  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ ) com um campo magnético externo  $\mathbf{B}$  aplicado paralelo ao plano  $ab$  do cristal foi calculado por Ivlev, Ovchinnikov, e Thompson [28]. Para o caso de campos magnéticos fracos, eles estudaram um vórtice individual aprisionado pelo potencial periódico entre camadas (aprisionamento intrínseco), o qual se torna inclinado mediante a aplicação de uma corrente externa  $\mathbf{j}$  paralela ao plano  $ab$  (e também perpendicular a  $\mathbf{B}$ ). Os efeitos de dissipação foram considerados e a dinâmica de um vórtice super-amortecido foi descrita a temperaturas próximas da temperatura de cruzamento  $T_0$  separando os regimes clássico e quântico.

A partir de teorias microscópicas, Kopnin e Kravtsov mostraram que o movimento quântico dos vórtices em geral é super-amortecido, exceção feita para materiais superlimpos, onde a dinâmica é do tipo Hall [42, 43]. Os trabalhos acima citados [27, 41, 28] tratam sempre a dinâmica de um vórtice super-amortecido. Recentemente foi argumentado que supercondutores de alta temperatura crítica podem pertencer a uma classe de materiais muito limpos nos quais o salto quântico de vórtices é governado pelo termo Hall na equação de movimento [44]. O salto de um vórtice tipo panqueca num filme (sistema puntual, obtido ao aplicar um campo magnético  $\mathbf{B}$  perpendicular a um filme) incluindo o termo Hall foi recentemente considerado por Ao e Thouless [45], e também por Stephen [46].

Neste trabalho nós estudamos a dinâmica de uma linha de vórtice intrinsecamente aprisionada (objeto 1D) incluindo as contribuições massiva, dissipativa e Hall. Nós determinamos a temperatura de cruzamento  $T_0$  separando os regimes térmico e quântico e calculamos as taxas de saltos clássicos e quânticos para sistemas não-amortecidos (mas-

sivos), super-amortecidos (dissipativos), e super-limpos (Hall), em todo o intervalo de temperaturas.

A taxa de decaimento é descrita no regime térmico pela lei de Arrhenius (solução de ponto de sela da energia livre [1]), enquanto que no limite quântico ela é determinada pela solução de ponto de sela da ação Euclideana do processo de tunelamento, *i. e.*, a ação calculada para a trajetória extrema numa formulação em tempos imaginários (instanton ou bounce) [2]. Flutuações térmicas e quânticas podem deslocar um pedaço do vórtice (corda elástica) para um mínimo mais baixo, o qual é favorecido pela força aplicada ( $F \propto j$ ), *i. e.*, uma bolha (núcleo) contendo dentro de si o estado de energia inferior se materializa na fase de energia superior. Se o segmento deslocado é demasiado pequeno, o ganho em energia volumétrica causado pela materialização da bolha é menor do que a energia superficial paga para criar a parede, e o núcleo incipiente colapsa. Entretanto, se o segmento for suficientemente grande, a força diretora  $F$  predomina e a expansão do núcleo torna-se energeticamente favorável. Assim, há um núcleo crítico, que é uma configuração pertencendo ao ponto de sela da energia superficial.

A forma do núcleo crítico descrevendo transições a partir de um mínimo superior para um mínimo inferior foi calculada por Ivlev e Melnikov [47] no limite não-amortecido (corda massiva) e por Hida e Eckern [38] no limite super-amortecido e a temperatura zero. Posteriormente Hida [39] estendeu a teoria para temperaturas finitas e generalizou os limites não-amortecido e super-amortecido para o caso de uma variedade elástica  $N$ -dimensional. Ao analisarmos uma corda super-amortecida neste trabalho, nós seguimos um procedimento diferente daquele adotado nas referências [38, 39]. Como consequência, uma descrição mais detalhada da forma do núcleo descrevendo o processo de decaimento a temperatura zero é obtida e sua evolução com a temperatura é discutida. Nossos resultados para a taxa de decaimento quântico concordam completamente com aqueles obtidos anteriormente por Hida e Eckern [38, 39]. No caso de uma corda elástica dominada por uma dinâmica do tipo Hall, novos e inesperados resultados foram obtidos: há uma temperatura de cruzamento  $T_0$  finita separando os regimes térmico e quântico que *não* depende

da massa  $m$  ou do coeficiente de dissipação  $\eta$ . Este resultado difere do comportamento de um sistema puntual, para o qual  $T_0 \rightarrow 0$  quando  $\eta, m \rightarrow 0$ . Para uma corda elástica, mesmo para  $\eta = 0$  e  $m = 0$  o sistema aproveita os efeitos quânticos abaixo de  $T_0 \propto \alpha_H^{-1}$ , onde  $\alpha_H$  é o coeficiente Hall. Além disso, a taxa de tunelamento quântico não satura a um valor finito para baixas temperaturas (como ocorre nos casos massivo e dissipativo), mas se anula seguindo uma lei de Arrhenius, com uma energia de ativação reduzida devido aos efeitos quânticos.

A origem do termo Hall pode ser entendida da seguinte maneira: segundo um modelo fenomenológico simples, o vórtice tem um núcleo consistindo de elétrons normais, ao redor do qual as correntes supercondutoras circulam. Nos supercondutores do tipo II, como em qualquer metal normal, o efeito Hall pode surgir devido à curvatura das trajetórias dos elétrons no campo magnético. Além disso, um outro mecanismo é possível, *i. e.*, o arrastamento dos vórtices pelo fluxo do superfluido passante, como ocorre em He superfluido. Este último é o efeito Hall ao qual nos referimos neste trabalho. Consideremos uma linha de vórtice em repouso com relação ao sistema de referência do laboratório. Aplicando um fluxo de corrente laminar  $\mathbf{j}$ , o vórtice estará sujeito à força de Lorentz  $\mathbf{f}_L = (\Phi_0/c)\mathbf{j} \wedge \mathbf{e}_x$ , onde  $\mathbf{e}_x$  é o vetor unitário na direção do campo magnético  $\mathbf{B}$ . Quando a linha de fluxo começa a se mover, apenas a velocidade relativa ao movimento do condensado contribui para a força diretora, e por invariância Galileana obtemos

$$\mathbf{f}_M = \rho_s \frac{\Phi_0}{c} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_v) \wedge \mathbf{e}_x \quad (3.1)$$

onde  $\rho_s$  é a densidade de carga do condensado supercondutor e  $\mathbf{v}_s$  e  $\mathbf{v}_v$  são respectivamente as velocidades do condensado e da linha de vórtice com respeito ao sistema de coordenadas do laboratório. A força (3.1) pode ser derivada a partir de considerações termodinâmicas e é conhecida como força de Magnus. Num sistema perfeito, (3.1) é a única força agindo no vórtice. Aplicando uma corrente de transporte  $\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s$  ao sistema, o vórtice é simplesmente arrastado junto com fluido de modo que  $\mathbf{f}_M = 0$ . Na presença de um potencial de aprisionamento, o problema torna-se mais complexo e o vórtice pode se

mover ao longo da corrente de transporte, bem como perpendicular à mesma. A parte da força de Magnus que depende da velocidade do vórtice é o que denominamos força Hall,  $f_H = \alpha_H \mathbf{v}_v \wedge \mathbf{e}_x$ , onde  $\alpha_H = \rho_s \Phi_0 / c$ .

A estrutura deste capítulo é a seguinte: na seção 2 nós apresentamos a ação descrevendo um vórtice intrinsecamente aprisionado num potencial periódico inclinado (corda elástica num “washboard potential”). A taxa de decaimento térmico (altas temperaturas) e a temperatura de cruzamento entre os regimes clássico e quântico estão calculados nas seções 3 e 4, respectivamente. Nas seções 5, 6 e 7 nós calculamos a forma do núcleo crítico descrevendo a transição do estado meta-estável e determinamos a taxa de decaimento quântico para uma corda massiva (5), para uma corda super-amortecida (6), e para uma corda cuja dinâmica é governada pela força Hall (7). As conclusões estão apresentadas na seção 8.

## 2. AÇÃO EUCLIDEANA

Um vórtice intrinsecamente aprisionado entre os planos de CuO pode ser modelado por uma corda elástica sujeita a um potencial periódico. Aplicando uma corrente externa  $\mathbf{j}$  no plano  $ab$  dirigida perpendicular ao campo magnético  $\mathbf{B}$  (e. g.,  $\mathbf{j} \parallel \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_x$ ) a degenerescência do potencial é levantada e o vórtice pode se mover via ativação térmica a altas temperaturas, ou via tunelamento quântico a baixas temperaturas.

No regime térmico (altas temperaturas) a taxa de decaimento de um sistema aprisionado num mínimo meta-estável é dada pela lei de Arrhenius,

$$\Gamma_t = \gamma_t e^{-U/T}, \quad (3.2)$$

onde  $T$  é a temperatura e  $U$  é a energia de ativação determinada a partir da solução de ponto de sela do funcional energia livre. O pré-fator  $\gamma_t$  é devido a flutuações ao redor da solução extrema. O funcional energia livre descrevendo o movimento de um único vórtice num sistema de camadas, na presença de um termo forçante é

$$\mathcal{F}[\mathbf{u}(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{\varepsilon_l}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^2 + V(\mathbf{u}) \right]. \quad (3.3)$$

O primeiro termo na equação acima é a energia elástica da corda, onde  $\mathbf{u}(x)$  é o vetor deslocamento,  $x$  é a coordenada ao longo da corda, e  $\varepsilon_l$  é a tensão elástica. Para deformações perpendiculares ao plano  $ab$ ,  $\varepsilon_l^\perp = \varepsilon_z = (\varepsilon_o/\varepsilon)$ , enquanto que para deformações no plano  $\varepsilon_l^\parallel = \varepsilon_y = \varepsilon_o\varepsilon$  (estamos considerando distorções da linha de vórtice com comprimento de onda curto,  $k \sim 1/L$ , com  $\xi < L \ll \lambda$ . Neste caso podemos desprezar a correção logarítmica  $\ln(1/k\xi)$  à tensão elástica dada em [48], porque ela é de ordem unitária). Aqui  $\varepsilon_o = (\Phi_o/4\pi\lambda)^2$  é a principal escala de energia do problema, e ela determina a auto-energia da linha de fluxo. Como sempre,  $\Phi_o = hc/2e$  é o quantum de fluxo e  $\lambda$  é o comprimento de penetração planar. Os óxido-supercondutores são com grande precisão materiais uniaxiais (eixo  $\parallel z$ ). Assim, escolhemos  $m_a = m_b = m$ ,  $m_c = M$  e denotamos a relação de anisotropia por  $\varepsilon^2 = m/M < 1$ , onde  $m_\mu$ ,  $\mu = a, b, c$ , denota as massas efetivas ao longo dos eixos principais do cristal. O segundo termo em (3.3) é o potencial ao qual o vórtice está sujeito,

$$V(\mathbf{u}) = U_{in}(u_z) - \mathbf{f}_L \cdot \mathbf{u}, \quad (3.4)$$

onde  $U_{in}(u_z)$  denota o potencial de aprisionamento produzido pela estrutura periódica dos planos de CuO (aprisionamento intrínseco). Considerando um acoplamento Josephson entre estes planos temos

$$U_{in}(u_z) = v_o \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi u_z}{d} \right) \right]. \quad (3.5)$$

A energia de acoplamento  $v_o$  está relacionada à corrente crítica de liberação (depinning current  $j_c$ ) e à distância  $d$  entre dois planos adjacentes de CuO,  $v_o = \Phi_o j_c d / 2\pi c$ . Aplicando uma corrente externa  $\mathbf{j} = j\mathbf{e}_y$  no supercondutor, o potencial periódico de aprisionamento intrínseco  $U(u_z)$  será inclinado devido à força de Lorentz  $\mathbf{f}_L = (\Phi_o/c)\mathbf{j} \wedge \mathbf{e}_z$ . Quando a corrente externa  $\mathbf{j}$  atinge o valor crítico  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_c$  o potencial perde os mínimos locais, a força de Lorentz agindo no vórtice iguala a força de aprisionamento e o fluxo começa a fluir (Flux Flow Regime). Aqui nós consideramos o caso  $F = j/j_c < 1$ , quando há uma barreira separando diferentes mínimos e o vórtice pode apenas saltar de um mínimo para o outro (Flux Creep Regime). O movimento da linha de fluxo sujeita a um potencial



$V(u)$  como dado por (3.4) está ilustrado na figura 7. Há dois limites interessantes para analisar o salto quântico de vórtices: próximo ao regime crítico ( $F \lesssim 1$ ) e para inclinações muito pequenas ( $F \ll 1$ ). Neste trabalho nós nos concentramos no último caso, quando dois mínimos vizinhos do potencial são aproximadamente degenerados e a aproximação de paredes finas pode ser aplicada [2].

Para descrever fenômenos quânticos precisamos considerar o comportamento dinâmico do sistema. Na aproximação semiclássica a taxa de decaimento quântico é dada por

$$\Gamma_q = \gamma_q e^{-S/\hbar}, \quad (3.6)$$

onde  $\gamma_q$  é um pré-fator devido a flutuações em torno da trajetória extrema e  $S$  é a solução de ponto de sela (bounce) da ação Euclideana do vórtice,

$$\mathcal{S}_E[\mathbf{u}(x, \tau)] = \int_{-\hbar/2T}^{\hbar/2T} d\tau \{ \mathcal{T}_{\text{Kin}}[\mathbf{u}(x, \tau)] + \mathcal{T}_{\text{Dis}}[\mathbf{u}(x, \tau)] + \mathcal{T}_{\text{Hall}}[\mathbf{u}(x, \tau)] + \mathcal{F}[\mathbf{u}(x, \tau)] \}. \quad (3.7)$$

Aqui o deslocamento  $\mathbf{u}(x, \tau)$  é função não apenas da coordenada  $x$  da corda, mas também do tempo imaginário  $\tau$ . O período do movimento no eixo imaginário  $\tau$  é  $\hbar/T$  (estamos considerando a constante de Boltzmann  $k_B$  igual à unidade). O primeiro termo na ação (3.7) é a energia cinética,

$$\mathcal{T}_{\text{Kin}}[\mathbf{u}(x, \tau)] = \frac{m_v}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} \right)^2, \quad (3.7a)$$

onde  $m_v$  denota a massa do vórtice por unidade de comprimento. A massa do vórtice contém dois termos com diferentes origens: eletrônica e eletromagnética. A contribuição eletrônica é devido a uma mudança local na relação de dispersão dentro do núcleo do vórtice,  $m_{el} = 2m_e k_F^c / \pi^3$ , onde  $m_e$  é a massa efetiva e  $k_F^c$  é o vetor de onda de Fermi ao longo do eixo  $c$  do cristal [49]. Além desta contribuição eletrônica, um segundo termo de origem eletromagnética  $m_{em} = (\Phi_0 / 4\pi c \xi)^2$  contribui para a massa do vórtice [50] ( $\xi$  é o comprimento de coerência no plano). Tipicamente  $m_{el} \gg m_{em}$  e a seguir nós consideraremos  $m_v \simeq m_{el}$ . Devido à anisotropia do supercondutor, temos  $m_v^\perp = m_z = m_v / \epsilon$

e  $m_y^{\parallel} = m_y = m_v \varepsilon$  denotando respectivamente as massas do vórtice para movimentos perpendicular e paralelo aos planos de CuO.

O segundo termo em (3.7) descreve a dissipação devido à interação da corda com o meio ambiente. Ele foi calculado por Caldeira e Leggett [5, 6] para temperatura zero e posteriormente foi generalizado por Larkin e Ovchinnikov [10] e por Grabert, Weiss, e Hänggi [11] para temperaturas finitas. A expressão geral para o termo dissipativo é dada por

$$\mathcal{T}_{\text{Dis}}[\mathbf{u}(x, \tau)] = -\frac{\eta_l}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\hbar/2T}^{\hbar/2T} d\tau_1 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau_1} \right) \ln \left| \sin \left[ \frac{\pi T}{\hbar} (\tau - \tau_1) \right] \right|, \quad (3.7b)$$

onde  $\eta_l$  denota o coeficiente de amortecimento. Para um material isotrópico  $\eta_l$  pode ser estimado através da fórmula de Bardeen-Stephen,  $\eta_l = \Phi_0 H_{c2} / c^2 \rho_n$ , onde  $\rho_n$  é a resistividade no estado normal [17]. No caso aqui considerado (anisotrópico) temos  $\eta_l^{\perp} = \eta_z = \eta_l / \varepsilon$  e  $\eta_l^{\parallel} = \eta_y = \eta_l \varepsilon$ .

O terceiro termo na ação (3.7) é o termo Hall,

$$\mathcal{T}_{\text{Hall}}[\mathbf{u}(x, \tau)] = \frac{i\alpha_H}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} \wedge \mathbf{e}_x \right) \cdot \mathbf{u}, \quad (3.7c)$$

onde  $\alpha_H = \pi \hbar n_s$  é o coeficiente Hall e  $n_s$  denota a densidade de elétrons supercondutores. Este termo acopla os movimentos nas direções  $y$  e  $z$ . O último termo em (3.7) é o funcional energia livre definido na equação (3.3) com  $\mathbf{u}(x)$  substituído por  $\mathbf{u}(x, \tau)$ .

Na próxima seção nós consideraremos o problema no regime clássico, ou seja, a altas temperaturas. Nós calcularemos a taxa de decaimento térmico e a seguir, usando teoria de perturbações, nós determinaremos a temperatura de cruzamento separando os regimes clássico e quântico.

### 3. REGIME CLÁSSICO

Como foi apresentado na seção anterior, a ação Euclideana descrevendo um vórtice aprisionado entre os planos de CuO num supercondutor de alta  $T_c$  é

$$\mathcal{S}_E[u_z, u_y] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\hbar/2T}^{\hbar/2T} d\tau \left\{ \sum_{j=z,y} \left[ \frac{\varepsilon_j}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 + \frac{m_j}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{\eta_j}{2\pi} \frac{\partial u_j}{\partial \tau} \int_{-\hbar/2T}^{\hbar/2T} d\tau_1 \frac{\partial u_j}{\partial \tau_1} \ln \left| \sin \left( \frac{\pi T}{\hbar} (\tau - \tau_1) \right) \right| \right] + V(u_z) + \frac{i\alpha_H}{2} \left( u_y \frac{\partial u_z}{\partial \tau} - u_z \frac{\partial u_y}{\partial \tau} \right) \right\}, \quad (3.8)$$

com  $V(u_z) = U_{in}(u_z) - f u_z$ . As temperaturas finitas os camos de deslocamento  $u_i(x, \tau)$

$= 2\tilde{n}\pi T/\hbar$ , com

podem ser expandidos em termos das frequências de Matsubara  $\omega_n$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,

$\omega_n \tau$

(3.9)

$$u_y(x, \tau) = \sum_n u_{yn}(x) e^{-i\omega_n \tau}, \quad u_z(x, \tau) = \sum_n u_{zn}(x) e^{-i\omega_n \tau}$$

e a ação se torna

$-n(x) +$

(3.10)

$$S_E[u_z, u_y] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\hbar}{T} \sum_n \left\{ \frac{\varepsilon_z}{2} \frac{du_{zn}}{dx} \frac{du_{z-n}}{dx} + \frac{\varepsilon_y}{2} \frac{du_{yn}}{dx} \frac{du_{y-n}}{dx} + \frac{1}{2} (m_z \omega_n^2 + \eta_z |\omega_n|) u_{zn}(x) u_{z-n}(x) + (m_y \omega_n^2 + \eta_y |\omega_n|) u_{yn}(x) u_{y-n}(x) + V(u_z)_{-n} + \frac{\alpha_H}{2} \omega_n [u_{y-n}(x) u_{zn}(x) - u_{z-n}(x) u_{yn}(x)] \right\}.$$

são

As equações de movimento correspondentes na notação de Matsubara

$) = 0$ ,

(3.11a)

$$-\varepsilon_z \frac{d^2 u_{zn}}{dx^2} + m_z \omega_n^2 u_{zn}(x) + \eta_z |\omega_n| u_{zn}(x) + V'(u_z)_{-n} - \alpha_H \omega_n u_{yn}(x) = 0,$$

(3.11b)

$$-\varepsilon_y \frac{d^2 u_{yn}}{dx^2} + m_y \omega_n^2 u_{yn}(x) + \eta_y |\omega_n| u_{yn}(x) + \alpha_H \omega_n u_{zn}(x) = 0.$$

uântico) o deslo-

Acima de  $T_0$  (temperatura de cruzamento entre os regimes clássico e

ós consideramos

camento não depende do tempo imaginário  $\tau$ , *i. e.*,  $u_z(x, \tau) = u_{z0}(x)$  (

e ser encontrada

apenas o termo  $n = 0$  nas séries (3.9)). Assim, a solução térmica pod

e, escrevendo as

tomando  $\omega_n = 0$  nas equações (3.11a) e (3.11b), ou equivalentement

equações de Euler-Lagrange para o funcional energia livre (3.3),

(3.12a)

$$-\varepsilon_z \frac{d^2 u_{z0}}{dx^2} + V'(u_{z0}) = 0,$$

(3.12b)

$$-\varepsilon_y \frac{d^2 u_{y0}}{dx^2} = 0.$$

0) nós podemos

No limite de força externa muito pequena ( $j \ll j_c$ , ou  $F = j/j_c \rightarrow$

equação (3.12a)

considerar numa primeira aproximação  $V'(u_z) \approx U_{in}'(u_z)$ . Neste caso a

se torna

(3.13)

$$-\varepsilon_z \frac{d^2 u_{z0}^{(0)}}{dx^2} + U_{in}'(u_{z0}^{(0)}) = 0.$$

Multiplicando pelo modo translacional ( $du_{z0}^{(0)}/dx$ ) e integrando sobre  $x$  nós obtemos

$$\frac{\varepsilon_z}{2} \left( \frac{du_{z0}^{(0)}}{dx} \right)^2 = U_{in}(u_{z0}^{(0)}) \quad (3.14)$$

A solução de (3.14) para o potencial (3.5) é

$$u_{z0}^{(0)}(x) = \frac{2d}{\pi} \arctan \left[ \exp \left( \frac{-x}{x_o} \right) \right], \quad (3.15)$$

onde  $x_o = (d/2\pi)\sqrt{\varepsilon_z/v_o}$ . A partir da equação (3.12b) nós imediatamente obtemos

$$u_{y0}(x) = 0. \quad (3.16)$$

Substituindo a solução de ponto de sela (3.15) e (3.16) na energia livre (3.3) nós determinamos a energia de ativação

$$U = \frac{8d}{\pi} \sqrt{\varepsilon_z v_o}, \quad (3.17)$$

que é o bem conhecido resultado obtido por Büttiker e Landauer [37]. O mesmo valor pode ser encontrado substituindo (3.15) e (3.16) na ação (3.10) e considerando  $\omega_n = 0$ , uma vez que a  $T = T_0$  temos  $S(T_0)/\hbar = U/T_0$ .

#### 4. CRUZAMENTO ENTRE OS REGIMES CLÁSSICO E QUÂNTICO

Agora nós pretendemos usar teoria de perturbações ao redor da solução térmica e assim obter a temperatura de cruzamento a partir da qual o sistema entra no regime quântico. Ligeiramente abaixo de  $T_0$  nós podemos considerar apenas o primeiro harmônico de Fourier nas séries (3.9), e negligenciar os outros, que são de ordem inferior. Definindo  $u_{z1}(x) = \psi(x)$  e  $u_{y1}(x) = \varphi(x)$  nós temos

$$u_z(x, \tau) = u_{z0}(x) + \psi(x)e^{-i\omega_1\tau} \quad (3.18a)$$

$$u_y(x, \tau) = u_{y0}(x) + \varphi(x)e^{-i\omega_1\tau}, \quad (3.18b)$$

onde  $\omega_1 = 2\pi T_0/\hbar$ . Considerando apenas os termos com  $n = 0, 1$  nas equações de movimento (3.11a) e (3.11b), expandindo  $V'(u_z)$  ao redor de  $u_{z0}^{(0)}$ , e usando (3.12a) e (3.12b) nós obtemos

$$-\varepsilon_z \frac{d^2\psi}{dx^2} + m_z \omega_1^2 \psi(x) + \eta_z |\omega_1| \psi(x) + V''(u_{z0}^{(0)}) \psi(x) - \alpha_H \omega_1 \varphi(x) = 0, \quad (3.19a)$$

$$-\varepsilon_y \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + m_y \omega_1^2 \varphi(x) + \eta_y |\omega_1| \varphi(x) + \alpha_H \omega_1 \psi(x) = 0. \quad (3.19b)$$

Nosso objetivo agora é resolver estas duas equações diferenciais acopladas. Efetuando uma transformação de Fourier

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi(k) e^{-ikx} \quad \text{e} \quad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \varphi(k) e^{-ikx}, \quad (3.20)$$

e substituindo (3.20) em (3.19b) temos a relação

$$\varphi(k) = -\alpha_H \frac{\omega_1}{\varepsilon_y k^2 + m_y \omega_1^2 + \eta_y |\omega_1|} \psi(k), \quad (3.21)$$

que pode ser facilmente integrada dando

$$\varphi(x) = \frac{-\alpha_H \omega_1}{2\sqrt{\varepsilon_y(m_y \omega_1^2 + \eta_y |\omega_1|)}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x') \exp\left(-\sqrt{\frac{m_y \omega_1^2 + \eta_y |\omega_1|}{\varepsilon_y}} |x - x'|\right). \quad (3.22)$$

Finalmente, substituindo (3.22) em (3.19a) obtemos

$$-\varepsilon_z \frac{d^2 \psi}{dx^2} + m_z \omega_1^2 \psi(x) + \eta_z |\omega_1| \psi(x) + V''(u_{z0}^{(0)}) \psi(x) + \frac{\alpha_H^2 \omega_1^2}{2\sqrt{\varepsilon_y(m_y \omega_1^2 + \eta_y |\omega_1|)}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x') \exp\left(-\sqrt{\frac{m_y \omega_1^2 + \eta_y |\omega_1|}{\varepsilon_y}} |x - x'|\right) = 0. \quad (3.23)$$

Nosso objetivo é calcular o autovalor  $\omega_1$ , e assim determinar a temperatura de cruzamento  $T_0$ . Para tanto, vamos considerar os seguintes casos:

#### 4.1. Caso Puramente Massivo

No limite não amortecido,  $\eta_z = \eta_y = 0$ ,  $\alpha_H = 0$  e o problema se torna semelhante a um problema de autovalores (equação tipo Schrödinger),

$$-\varepsilon_z \frac{d^2 \psi_m}{dx^2} + a_m^4 \psi_m(x) + V''(u_{z0}) \psi_m(x) = 0, \quad (3.24)$$

onde o autovalor  $a_m^4 = m_z \omega_1^2$ . É fácil verificar que

$$V''(u_{z0}^{(0)}) = U''(u_{z0}^{(0)}) = \tilde{\gamma}^2 \left[ 1 - \frac{2}{\cosh^2(x/x_0)} \right], \quad (3.25)$$

onde  $\tilde{\gamma} = \sqrt{\varepsilon_z}/x_0$ . Além disso, sabemos que se  $u_{z_0}^{(0)}$  é solução de (3.13) então o modo translacional  $du_{z_0}^{(0)}/dx$  é solução da segunda derivada variacional

$$-\varepsilon_z \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{du_{z_0}^{(0)}}{dx} \right) + U''(u_{z_0}^{(0)}) \frac{du_{z_0}^{(0)}}{dx} = 0. \quad (3.26)$$

Assim obtemos que  $a_m^4 = 0$  é um autovalor da equação (3.24), com a autofunção correspondente dada por

$$\psi^{(0)}(x) = \frac{du_{z_0}^{(0)}}{dx} = \frac{d}{\pi x_0} \frac{1}{\cosh(x/x_0)}. \quad (3.27)$$

Se nós agora levarmos em conta um valor de  $F$  pequeno, mas não nulo, o potencial  $V''(u_{z_0}^{(0)})$  tem que ser substituído por  $V''(u_{z_0})$  que não mais tem apenas um poço centrado no zero, mas dois poços centrados em  $-R$  e  $R$ . Neste caso a distância  $2R$  entre os dois kinks é  $2R \sim d \ln(1/F)$  (veja o apêndice A) e o autovalor  $a_m^4$  é proporcional à separação entre os níveis no potencial com poço duplo. Este problema foi resolvido por Ivlev e Melnikov [47] e a solução é:

$$T_0^{(m)} = \sqrt{\frac{\pi \hbar^2 v_0 \varepsilon j}{2m_v d^2 j_c}}. \quad (3.28)$$

## 4.2. Caso Puramente Dissipativo

No limite super-amortecido  $m_z = m_y = 0$ ,  $\alpha_H = 0$  e a equação (3.23) pode ser reescrita como

$$-\varepsilon_z \frac{d^2 \psi_\eta(x)}{dx^2} + a_\eta^2 \psi_\eta(x) + V''(u_{z_0}) \psi_\eta(x) = 0, \quad (3.29)$$

onde  $a_\eta^2 = \eta_z |\omega_1|$ . A partir do resultado não amortecido podemos facilmente inferir que no caso puramente dissipativo a temperatura de cruzamento é

$$T_0^{(\eta)} = \frac{\pi^2 \hbar v_0 \varepsilon j}{d^2 \eta_1 j_c} \quad (3.30)$$

e a autofunção correspondente é dada por

$$\psi_\eta(x) = \psi^{(0)}(x + R) - \psi^{(0)}(x - R) - 1. \quad (3.31)$$

## 4.3. Caso Massivo e Dissipativo

Neste caso  $\alpha_H = 0$  e a equação (3.23) se torna

$$-\varepsilon_z \frac{d^2 \psi}{dx^2} + m_z \omega_1^2 \psi(x) + \eta_z |\omega_1| \psi(x) + V''(u_{z0}^{(0)}) \psi(x) = 0. \quad (3.32)$$

O problema é semelhante aos anteriores (casos puramente massivo e puramente dissipativo), com um autovalor  $a_{m,\eta}^2 = m_z \omega_1^2 + \eta_z |\omega_1|$ , e a temperatura de cruzamento é

$$T_0^{(m,\eta)} = \frac{\hbar}{4\pi m_v} \left[ -\eta_l + \sqrt{\eta_l^2 + \frac{8\pi^3 m_v v_o \varepsilon_j}{d^2 j_c}} \right]. \quad (3.33)$$

Tomando os limites  $(\eta_l/m_v) \rightarrow 0$  ou  $(m_v/\eta_l) \rightarrow 0$  na equação (3.33) obtemos, respectivamente, os resultados (3.28) ou (3.30).

#### 4.4. Caso Dissipativo e Hall

Ao incluímos o termo Hall, o problema não mais se resume a resolver uma equação do tipo Schrödinger, mas torna-se um pouco mais complexo, devido ao aparecimento de um termo não local. Considerando  $m_z = m_y = 0$  em (3.23) temos

$$-\varepsilon_z \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \eta_z |\omega_1| \psi(x) + V''(u_{z0}^{(0)}) \psi(x) + \frac{\alpha_H^2 \omega_1^2}{2\sqrt{\varepsilon_y (\eta_y |\omega_1|)}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x') \exp\left(-\sqrt{\frac{\eta_y |\omega_1|}{\varepsilon_y}} |x - x'|\right) = 0. \quad (3.34)$$

Vamos começar reescrevendo (3.34) numa forma mais simples. Definindo os parâmetros  $a^2 = \eta_l |\omega_1| / \varepsilon_l$  e  $\tilde{\alpha} = \alpha_H / \eta_l$  temos

$$-\frac{d^2 \psi}{dx^2} + a^2 \psi(x) + \tilde{V}''(u_{z0}^{(0)}) \psi(x) + \frac{\tilde{\alpha}^2 a^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x') e^{-a|x-x'|} = 0, \quad (3.35)$$

onde  $\tilde{V}''(u_{z0}^{(0)}) = (1/\varepsilon_z) V''(u_{z0}^{(0)})$ . Para calcular o autovalor neste caso, vamos usar os resultados obtidos no limite super-amortecido (caso dissipativo). Multiplicando a equação (3.35) pela autofunção  $\psi_\eta(x)$  dada por (3.31), integrando sobre  $x$  e usando (3.29) nós obtemos (após efetuar uma integração por partes)

$$(a^2 - \tilde{a}_\eta^2) \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_\eta(x) \psi(x) + \frac{\tilde{\alpha}^2 a^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_\eta(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x') e^{-a|x-x'|} = 0, \quad (3.36)$$

com  $\tilde{a}_\eta^2 = a_\eta^2 / \varepsilon_z = \eta_l |\omega_1^{(\eta)}| / \eta_l$ . O problema pode ser resolvido exatamente se substituirmos  $\tilde{V}''(u_{z0}^{(0)})$  por um potencial delta. Este procedimento leva a uma melhor compreensão

do problema e mostra que a principal contribuição de  $\psi(x)$  vem da região assintótica. Portanto, o nosso próximo objetivo é determinar o comportamento assintótico de  $\psi(x)$ . No espaço de Fourier a equação (3.35) se torna

$$\left(k^2 + a^2 + \gamma^2 + \frac{\tilde{\alpha}^2 a^4}{k^2 + a^2}\right) \psi(k) = \int dk' \psi(k') \tilde{V}(k - k') \quad (3.37)$$

onde  $\gamma = \tilde{\gamma}/\sqrt{\varepsilon_z} = 1/x_0$  e  $\tilde{V}(k)$  é a transformada de Fourier de  $\tilde{V}(x) = \gamma^2 - \tilde{V}''(u_{z0}^{(0)})$ , (veja (3.25)). Para  $x \gg R$ ,  $\tilde{V}(x) \sim 0$  e o lado direito de (3.37) se anula. Vamos agora adotar o seguinte Ansatz: vamos assumir que  $\tilde{\alpha}^2 a^4 \ll 1$  e  $a \ll 1$ . Neste caso nós observamos que há dois valores de  $k$  que satisfazem a equação homogênea correspondendo a (3.37):

$$k = i\kappa_1, \quad k = i\kappa_2$$

com

$$\kappa_1 = \gamma \quad \text{e} \quad \kappa_2 = a \sqrt{1 + \frac{\tilde{\alpha}^2 a^2}{\gamma^2}} \sim a. \quad (3.38)$$

Como  $x_0 \gamma \sim 1$  e  $x_0 a \ll 1$ , a forma assintótica de  $\psi(x)$  para  $x > R$  é

$$\psi(x) = \frac{du_{z0}(x - R)}{dx} - \tilde{C} e^{-\kappa_2 x}, \quad (3.39)$$

onde  $\tilde{C}$  é uma constante a ser determinada. Substituindo (3.39) em (3.35), desprezando termos proporcionais a  $a^2$  e  $\tilde{\alpha}^2 a^4$ , e usando (3.26) nós obtemos depois de alguma álgebra a expressão

$$-\gamma^2 \tilde{C} e^{-\kappa_2 x} + \tilde{\alpha}^2 a^3 \left[ \left( d - \tilde{C} \frac{\kappa_2}{\kappa_2^2 - a^2} \right) e^{-ax} + \tilde{C} \frac{2a}{\kappa_2^2 - a^2} e^{-\kappa_2 x} \right] = 0, \quad (3.40)$$

que determina a constante  $\tilde{C}$ ,

$$\tilde{C} = \frac{d(\kappa_2^2 - a^2)}{\kappa_2} = \frac{d\tilde{\alpha}^2 a^3}{\gamma \sqrt{\gamma^2 + \tilde{\alpha}^2 a^2}}. \quad (3.41)$$

Portanto temos que a autofunção  $\psi(x)$  no caso dissipativo e Hall é dada por

$$\psi(x) = \frac{d}{\pi x_0 \cosh[(x - R)/x_0]} - \frac{d(\kappa_2^2 - a^2)}{\kappa_2} e^{-\kappa_2 x}, \quad x > R. \quad (3.42)$$



Substituindo agora (3.42) em (3.36) e usando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{\eta}(x) \psi(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} dx [\psi_{\eta}(x)]^2 = \frac{4d^2 \gamma}{\pi^2} \quad (3.43)$$

obtemos

$$\tilde{a}_{\eta}^2 - a^2 = \frac{\pi^2 \tilde{\alpha}^2 a^3}{2\sqrt{\gamma^2 + \tilde{\alpha}^2 a^2}}. \quad (3.44)$$

Diferentes situações podem ser realizadas, dependendo dos valores de  $\tilde{\alpha}$  e  $F$ .

i) Para sistemas fortemente amortecidos, quando  $\tilde{\alpha} \ll 1/F^{1/4}$  nós obtemos  $a^2 = \tilde{a}_{\eta}^2 = \pi\gamma^2 F/2$ .

ii) Para casos intermediários, quando  $1/F^{1/4} \ll \tilde{\alpha} \ll 1/F$  temos  $a^2 = (\gamma^3 F/\pi\tilde{\alpha}^2)^{2/3}$ .

iii) Para sistemas governados por uma dinâmica do tipo Hall, quando  $\tilde{\alpha} \gg 1/F$  nós obtemos  $a^2 = \gamma^2 F/\pi\tilde{\alpha}$ .

Para todos os casos obtivemos  $a \propto F \ll 1$ , que é compatível com o Ansatz adotado. Lembrando que  $a^2 = 2\pi T_0 \eta_l / \varepsilon_l$  podemos resumir os resultados obtidos para a temperatura de cruzamento dimensional  $T_0$  como

$$T_0 = \frac{\pi^2 \hbar v_o \varepsilon}{d^2} \frac{F}{\eta_l}, \quad \alpha_H \ll \frac{\eta_l}{F^{1/4}}, \quad (3.45)$$

$$T_0 = \frac{2\hbar v_o \varepsilon}{d^2} \left( \frac{\pi \eta_l F^2}{\alpha_H^4} \right)^{1/3}, \quad \frac{\eta_l}{F^{1/4}} \ll \alpha_H \ll \frac{\eta_l}{F}, \quad (3.46)$$

$$T_0 = \frac{2\hbar v_o \varepsilon}{d^2} \frac{F}{\alpha_H}, \quad \alpha_H \gg \frac{\eta_l}{F}. \quad (3.47)$$

#### 4.5. Caso Massivo, Dissipativo e Hall para uma Partícula

No caso de um sistema puntual (partícula) tomamos o limite de  $\varepsilon_z, \varepsilon_y \rightarrow 0$  na equação (3.23) e obtemos

$$m_z \omega_1^2 \psi(x) + \eta_z |\omega_1| \psi(x) + V_p''(u_{z0}) \psi(x) + \frac{\alpha_H^2 \omega_1^2}{m_y \omega_1^2 + \eta_y |\omega_1|} \psi(x) = 0, \quad (3.48)$$

uma vez que  $\lim_{l \rightarrow 0} e^{-|x-x'|/l} = (2l)\delta(x-x')$ . O potencial  $V_p''(u_{z0})$  para a partícula pode ser facilmente obtido, basta considerarmos  $\varepsilon_z = 0$  em (3.12a) para concluirmos que  $V_p''(u_{z0}) = -v_o(2\pi/d)^2 \sqrt{1 - \bar{F}^2}$ .

Consideremos agora  $\eta_z = \eta_y = 0$  em (3.48). Neste caso o problema torna-se o de uma partícula massiva num potencial efetivo que é renormalizado devido ao termo Hall,  $V_{ef} = V_p''(u_{z0}) + \alpha_H^2/m_y$ .

Por outro lado, ao considerarmos o limite dissipativo mais Hall na equação (3.48) ( $m_z = m_y = 0$ ), vemos que o termo Hall renormaliza o coeficiente de dissipação,

$$\eta_{ef} = \eta_z + \frac{\alpha_H^2}{\eta_y}. \quad (3.49)$$

Neste caso a temperatura de cruzamento entre os regimes clássico e quântico é dada por

$$T_0 = \frac{-\hbar V_p''(u_{z0})}{2\pi(\eta_z + \alpha_H^2/\eta_y)} = \frac{2\pi\hbar\epsilon v_o\sqrt{1-F^2}}{d^2(\eta_l + \alpha_H^2/\eta_l)} \quad (3.50)$$

e no limite de  $\eta_l \rightarrow 0$  vemos que  $T_0 \rightarrow 0$ , em contraste com (3.47), onde a temperatura de cruzamento  $T_0$  independe de  $\eta_l$  no limite de dissipação fraca e portanto permanece finita mesmo quando o coeficiente de fricção se anula. Este é um resultado interessante, que mostra que para uma corda elástica governada por uma dinâmica do tipo Hall efeitos quânticos se tornam relevantes a temperaturas  $T < T_0 \propto 1/\alpha_H$ , enquanto que para uma partícula Hall a única possibilidade de 'creep' é através de ativação térmica.

#### 4.6. Autofunções

Uma vez que calculamos os autovalores  $\omega_1$  e obtivemos a temperatura de cruzamento entre os regimes clássico e quântico para diversos casos, passaremos à análise das autofunções correspondentes. Na figura 8 exibimos o comportamento de metade da bounce (a outra metade é simétrica) para uma corda elástica nos regimes clássico e quântico. A altas temperaturas a bounce é puramente estática e é dada por

$$u_z(x) = u_{z0}(x - R) = \frac{2d}{\pi} \arctan \left[ \exp - \left( \frac{x - R}{x_o} \right) \right], \quad x > 0 \quad (3.51)$$

(veja Eq. (3.15) e lembre-se que como estamos considerando  $F$  finito a solução tem não mais um kink centrado no zero, mas dois kinks centrados em  $-R$  e  $R$ , onde  $R \sim \ln(1/F)$ . A temperaturas mais baixas  $T < T_0$  o sistema entra no regime quântico e a solução térmica é alterada. Ligeiramente abaixo de  $T_0$  podemos considerar apenas a contribuição

do primeiro harmônico na expansão em séries de  $u_z(x)$ , e os resultados são os seguintes: no caso puramente dissipativo a bounce é dada por  $u_z(x) = u_{z0}(x-R) + \psi^{(0)}(x-R) \cos(\omega_1 \tau)$  (veja equação (3.27)) e nos instantes  $\tau = 0, \pi/\omega_1$  temos

$$u_z(x) = \frac{2d}{\pi} \left\{ \arctan \left[ \exp - \left( \frac{x-R}{x_0} \right) \right] \pm \frac{1}{2x_0} \frac{1}{\cosh[(x-R)/x_0]} \right\}, \quad x > R. \quad (3.52)$$

Ao incluirmos o termo Hall a solução se altera e a bounce adquire uma longa cauda que decresce exponencialmente,  $u_z^{(\eta)}(x) = u_{z0}(x-R) + [\psi^{(0)}(x-R) - \tilde{C}e^{-\kappa_2 x}] \cos(\omega_1 \tau)$ , veja (3.39). A  $\tau = 0, \pi/\omega_1$  a bounce se torna

$$u_z^{(\eta, \alpha_H)}(x) = \frac{2d}{\pi} \left\{ \arctan \left[ \exp - \left( \frac{x-R}{x_0} \right) \right] \pm \left[ \frac{1}{2x_0} \frac{1}{\cosh[(x-R)/x_0]} - \frac{2(\kappa_2^2 - a^2)}{\kappa_2} e^{-\kappa_2 x} \right] \right\}, \quad (3.53)$$

onde  $\kappa_2 = a\sqrt{1 + \alpha_H^2 a^2 x_0^2 / \eta_l^2}$  e  $a^2 = \eta_l F / \alpha_H$  (veja seção 2.4.4., caso iii).

Posteriormente voltaremos a discutir este exótico comportamento (longa cauda) apresentado pela bounce quando a dinâmica Hall é considerada. A seguir, passaremos ao cálculo da taxa de decaimento no limite quântico. Para tanto, iniciaremos com o caso mais simples possível, o salto de uma corda não-amortecida, visando introduzir o formalismo e melhor entender o comportamento dinâmico de uma corda nos limites super-amortecido e Hall, que são relevantes para descrever o movimento dos vórtices.

## 5. CORDA MASSIVA NO LIMITE QUÂNTICO

### 5.1. Tunelamento a temperatura zero

No caso puramente massivo os termos dissipativo (3.7b) e Hall (3.7c) podem ser desprezados. Neste caso o movimento é unidimensional,  $u = u_z = u$ . A seguir, mediremos  $u, x$ , e  $\tau$ , respectivamente em unidades de

$$u_0 = \frac{d}{2\pi}, \quad x_0 = \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_z}{v_0}}, \quad \tau_0 = \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{m_z}{v_0}}, \quad (3.54)$$

mas reteremos a notação inicial. Podemos então reescrever a ação (3.7) em termos das variáveis adimensionais  $u, x$ , and  $\tau$  como

$$S_E[u(x, \tau)] = g \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1/2\tilde{T}}^{1/2\tilde{T}} d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + V(u) \right], \quad (3.55)$$

onde

$$V(u) = -\cos u - Fu + 1, \quad (3.55a)$$

e  $g = \tau_0 x_0 v_0 = (d/2\pi)^2 \sqrt{m_z \varepsilon_z}$  é um parâmetro semiclássico o qual é suposto ser grande ( $g \gg \hbar$ ). A força adimensional  $F = (d/2\pi v_0) |f_L| = j/j_c$  e a temperatura adimensional  $\tilde{T} = T\tau_0/\hbar$ . A dinâmica de uma corda massiva num potencial periódico ligeiramente inclinado foi considerada por Ivlev e Melnikov [47] e por Hida [39]. Aqui nós repetimos brevemente os cálculos para o caso específico de um potencial cosenoidal visando dar uma completa descrição do problema e também para simplificar as comparações com os resultados obtidos posteriormente no limite super-amortecido. A fim de simplificar o problema, consideremos apenas dois mínimos do potencial cosenoidal inclinado e denominemos  $u = 0$  o mínimo superior e  $u = 2\pi$  o mínimo inferior. Nosso objetivo é encontrar a trajetória  $u(x, \tau)$  que extremiza a ação (3.55), *i. e.*, calcular a estrutura do núcleo crítico descrevendo o salto do vórtice a partir de  $u = 0$  para  $u = 2\pi$ .

Aplicando o princípio variacional à ação (3.55) obtemos a equação de movimento clássica para tempos imaginários

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin u + F = 0. \quad (3.56)$$

A trajetória  $u(x, \tau)$  deve satisfazer a condição de contorno periódica

$$\left| \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0, \pm 1/2\tilde{T}} = 0. \quad (3.57)$$

Vamos começar estudando o movimento a temperatura zero ( $\tilde{T} = 0$ ). Neste limite o período  $\tau$  é infinito e a condição de contorno (3.57) não interfere na solução do problema.

Podemos reescrever a equação (3.56) em coordenadas polares como

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \sin u = -\frac{1}{r} \frac{du}{dr} - F. \quad (3.58)$$

onde  $r^2 = x^2 + \tau^2$ , veja Fig. 9a. O lado esquerdo da equação acima determina as características microscópicas da solução, *i. e.*, há uma solução tipo soliton definindo um kink, ou uma parede, se o problema for em mais do que uma dimensão. Por outro lado, o

lado direito determina as características macroscópicas da solução, *i. e.*, ele define o raio crítico  $R$  do núcleo e assim ele fixa a posição da parede. Vamos assumir que o lado direito da equação (3.58) possa inicialmente ser desprezado. A solução da equação homogênea resultante fornece a estrutura da parede,

$$\left(\frac{du_0}{dw}\right)^2 = 2(-\cos u_0 + 1), \quad (3.59)$$

onde  $w = r - R$  and  $R$  denota a posição da parede. Integrando a Eq. (3.59) obtemos

$$u_0 = 4 \arctan\{\exp[-(r - R)]\}. \quad (3.60)$$

O próximo passo é considerar o lado direito da Eq. (3.58) visando determinar  $R$ . Expandindo  $u = u_0 + u_1$ ,  $u_1 \ll u_0$ , desprezando  $u_1$  no lado direito da Eq. (3.58), multiplicando pelo modo translacional  $(du_0/dr)$  e integrando nós obtemos

$$\int_0^\infty dr u_1 \left\{ \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{du_0}{dr} \right) - \cos u_0 \left( \frac{du_0}{dr} \right) \right\} = - \int_0^\infty dr \left( \frac{du_0}{dr} \right) \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{du_0}{dr} \right) + F \right], \quad (3.61)$$

onde o primeiro termo do lado esquerdo da Eq. (3.61) foi obtido mediante dupla integração por partes. Além disto, sabemos que se  $u_0$  é a solução que extremiza a ação ( $\delta S_E/\delta u|_{u=u_0} = 0$ ), então o modo translacional  $du_0/dr$  é a solução da segunda equação variacional [ $\delta^2 S_E/\delta u^2|_{u=u_0}(du_0/dr) = 0$ ]. Assim o lado esquerdo da Eq. (3.61) se anula e nós obtemos a posição da parede  $R$ , que é idêntica ao raio crítico do núcleo,

$$R = \frac{\alpha_l}{F}. \quad (3.62)$$

O coeficiente de tensão linear  $\alpha_l$  da parede pode ser computado com a ajuda da Eq. (3.59),

$$\alpha_l \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr \left( \frac{du_0}{dr} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} du_0 \sqrt{2(1 - \cos u_0)} = \frac{4}{\pi}. \quad (3.63)$$

Inserindo  $R$  de volta na equação de movimento (3.58) e lembrando que  $(1/r)du/dr$  escala como  $(1/R)d/w_0$ , onde  $w_0$  é a espessura da parede, concluímos que o lado direito da equação (3.58) é proporcional a  $F$ , e assim o nosso esquema de aproximação (thin wall approximation) é consistente para pequenas inclinações  $F \ll 1$ .

O raio  $R$  do núcleo também pode ser determinado por um procedimento alternativo: Para cada valor fixo de  $R$ , a equação (3.59) determina o mínimo da ação. A substituição da equação (3.59) na ação (3.55) reescrita em coordenadas polares fornece

$$S(R) = 2\pi g(2\pi\alpha_l R - \pi F R^2) \quad (3.64)$$

e o raio crítico  $R$  corresponde ao máximo desta expressão, uma vez que estamos procurando a solução de ponto de sela. Extremizando a ação (3.64) o valor obtido em (3.62) é recobrado. Finalmente, substituindo o raio crítico  $R$  (3.62) e o coeficiente de tensão linear  $\alpha_l$  (3.63) na ação (3.64) obtemos a solução desejada

$$S = \frac{32g}{F}. \quad (3.65)$$

Eq. (3.65) fornece a ação governando o processo de decaimento de uma corda não amortecida no regime quântico a temperatura zero. Posteriormente retornaremos a esta expressão para compará-la com os resultados obtidos no limite super-amortecido.

O caso quântico unidimensional (corda elástica) a  $T = 0$  pode ser mapeado no caso clássico bidimensional (superfície elástica) se a massa  $m$  é substituída pela constante elástica  $\varepsilon_z$ , com  $\tau$  representando o papel da segunda coordenada. Assim, em analogia com processos de nucleação de física estatística clássica podemos dizer que na aproximação de paredes finas a bounce parece uma grande bolha esférica bidimensional de raio  $R$  com uma fina parede separando o mínimo inferior dentro do mínimo superior fora (veja Fig. 17).

## 5.2. Tunelamento Quântico Termicamente Assistido

A temperatura zero o período da bounce é infinito e o núcleo tem uma forma circular, simétrica com relação a  $x$  e a  $\tau$  (Fig. 9a). Se a temperatura é finita, o período da bounce é  $1/T$ , e o papel representado pela condição de contorno (3.57) torna-se essencial. A análise acima descrita permanece válida a temperaturas não nulas, mas muito pequenas  $\tilde{T} \ll 1/2R$ . Neste caso há apenas poucos núcleos (aproximação do gás diluído) [2], eles não interferem e o resultado obtido a  $\tilde{T} = 0$  pode ser aplicado (Fig. 9b). Aumentando a temperatura, o período da bounce é reduzido, e quando a temperatura atinge o valor

crítico  $\tilde{T}^*$  correspondendo a  $R = 1/2\tilde{T}^*$  os núcleos começam a interferir e o comportamento muda drasticamente (Fig. 9c). Para  $\tilde{T} > \tilde{T}^*$  a corda ultrapassa a barreira devido aos mecanismos de ativação e tunelamento combinados. Assim

$$\tilde{T}^* = \frac{\pi F}{8} \quad (3.66)$$

[veja (3.62) e (3.63)] é a temperatura de cruzamento separando o regime de tunelamento puramente quântico do regime de tunelamento quântico termicamente assistido.

Vamos considerar agora o processo de decaimento a temperaturas  $\tilde{T} > \tilde{T}^*$ . Levando em conta Eq. (3.64) podemos expressar a ação na forma mais geral

$$S = 2\pi g(\alpha_l l - FA), \quad (3.67)$$

onde  $l$  é o perímetro e  $A$  é a área do núcleo (veja Fig. 9a). Expressando a posição da parede  $x$  como uma função de  $\tau$  podemos reescrever a Eq. (3.67) como

$$S = 4\pi g \left[ \int_{-1/2\tilde{T}}^{1/2\tilde{T}} d\tau \alpha_l(x, \tau) \sqrt{1 + \dot{x}^2} - F \int_{-1/2\tilde{T}}^{1/2\tilde{T}} d\tau x \right], \quad (3.68)$$

onde o fator 2 surge devido à forma simétrica ( $x \rightarrow -x$ ) do núcleo. No caso presente (limite não amortecido) o coeficiente de tensão linear  $\alpha_l(x, \tau)$  é uma constante [veja Eq. (3.63)]. A equação de movimento toma a forma

$$R \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \left[ 1 + \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right]^{3/2} = 0 \quad (3.69)$$

e a função  $x(\tau)$  satisfazendo a equação diferencial acima é

$$x(\tau) = \text{const.} + \sqrt{R^2 - \tau^2} - \sqrt{R^2 - (1/2\tilde{T})^2}. \quad (3.70)$$

A solução (3.70) é um pedaço do arco obtido anteriormente, ou seja, ela é simplesmente a solução circular obtida a temperatura zero restrita pela periodicidade ao longo do eixo- $\tau$  (veja Fig. 9d). A constante na equação (3.70) é escolhida para ser igual a zero visando minimizar a área do núcleo, e assim maximizar a ação (lembre-se que estamos procurando a solução de ponto de sela da ação).

A substituição de (3.70) em (3.68) fornece a ação

$$S = \frac{4\pi g\alpha_l^2}{F} \left\{ \arcsin \left( \frac{F}{2\alpha_l \tilde{T}} \right) + \frac{F}{2\alpha_l \tilde{T}} \left[ 1 - \left( \frac{F}{2\alpha_l \tilde{T}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (3.71)$$

que descreve o processo de decaimento no regime de tunelamento quântico termicamente assistido.

### 5.3. Regime Térmico

A altas temperaturas um novo regime é atingido onde a corda ultrapassa a barreira toda devido à ativação térmica. A temperatura crítica  $\tilde{T}_0$  separando o regime de tunelamento quântico termicamente assistido do regime de ativação puramente térmica foi calculada na seção anterior e para o presente caso é (veja (3.28))

$$\tilde{T}_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{F}{2\alpha_l} \right)^{1/2} = \left( \frac{F}{8\pi} \right)^{1/2}. \quad (3.72)$$

Acima de  $\tilde{T}_0$  a taxa de decaimento depende da relação entre a energia de ativação  $U$  (que é determinada pela solução de ponto de sela da energia livre (3.3), veja [47]) e a temperatura dimensional  $T$ ,

$$\frac{U}{T} = \frac{4\pi\alpha\tilde{\nu}}{T} = \frac{16\tilde{\nu}}{T} \quad (3.73)$$

onde  $\tilde{\nu} = (d/2\pi)\sqrt{\varepsilon_z v_0}$ . A equação (3.73) pode ser reescrita em termos da temperatura adimensional  $\tilde{T} = T\tau_0/\hbar = Tg/\hbar\tilde{\nu}$  (como definida anteriormente) e obtemos

$$\frac{U}{T} = \frac{16g}{\hbar\tilde{T}}. \quad (3.74)$$

### 5.4. Resumo

A forma dos núcleos críticos descrevendo o processo de decaimento em todo o intervalo de temperaturas está exibido na Fig. 9. A temperatura zero o núcleo é circular com um raio proporcional ao inverso da corrente externa ( $R \propto 1/F$ ), veja Fig. 9a. A forma da bolha é aproximadamente constante até a temperatura de cruzamento  $\tilde{T}^*$  separando o regime puramente quântico do regime de tunelamento quântico termicamente assistido (Figs. 9b e 9c). Acima de  $\tilde{T}^*$  o papel representado pela condição de contorno torna-se



essencial e a forma do núcleo é dada por um pedaço do círculo obtido a  $\tilde{T} = 0$ , *i. e.*, ela é nada mais do que a solução a temperatura zero restrita pela condição de contorno (Fig. 9d). A temperaturas ainda mais altas, as paredes do núcleo crítico tornam-se mais e mais paralelas ao eixo  $\tau$ , e finalmente acima de  $\tilde{T}_0$  a dependência em  $\tau$  desaparece (as paredes tornam-se verticais, veja Fig. 9e). Entretanto, devido ao aumento da temperatura o núcleo encolhe e em torno de  $\tilde{T} = \tilde{T}_0$  ele já está tão pequeno que a aproximação de paredes finas deixa de ser válida (o raio do núcleo torna-se comparável à espessura da parede).

Nós calculamos a ação mínima descrevendo o processo de tunelamento a temperatura zero, que é válido até  $\tilde{T} = \tilde{T}^*$ , e também a solução a temperaturas intermediárias. Acima de  $\tilde{T}_0$  o processo de decaimento é determinado pela energia de ativação. Com a ajuda de (3.63) e (3.66) a taxa de decaimento para uma corda sub-amortecida pode ser resumida como

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{32g}{\hbar F} = \frac{4\pi g}{\hbar \tilde{T}^*}, \quad 0 \leq \tilde{T} \leq \tilde{T}^*, \quad (3.75a)$$

$$\begin{aligned} -\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} &= \frac{32g}{\hbar F} \left[ 1 - \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \left( 1 - \frac{\pi F}{8\tilde{T}} \right)^{3/2} \right] \\ &= \frac{4\pi g}{\hbar \tilde{T}^*} \left[ 1 - \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \left( 1 - \frac{\tilde{T}^*}{\tilde{T}} \right)^{3/2} \right], \quad \tilde{T} \gtrsim \tilde{T}^*, \end{aligned} \quad (3.75b)$$

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{16g}{\hbar \tilde{T}} - \frac{\pi^2 g F^2}{24 \hbar \tilde{T}^3} = \frac{16g}{\hbar \tilde{T}} \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{\tilde{T}^*}{\tilde{T}} \right)^2 \right], \quad \tilde{T}^* \ll \tilde{T} \ll \tilde{T}_0, \quad (3.75c)$$

$$-\ln \Gamma \propto \frac{U}{T} = \frac{16g}{\hbar \tilde{T}}, \quad \tilde{T} \gtrsim \tilde{T}_0, \quad (3.75d)$$

onde (3.75b) e (3.75c) foram obtidas a partir da Eq. (3.71) calculada nos limites respectivamente indicados. Note que em (3.75d)  $\tilde{T}$  é a variável adimensional, enquanto que  $T$  denota a temperatura real. O logaritmo da taxa de decaimento na aproximação exponencial está mostrado na Fig. 10 como função da temperatura. A solução a temperatura zero é válida até a temperatura de cruzamento  $\tilde{T}^*$ , com correções exponencialmente pequenas

( $\propto \exp(-\hbar\omega_0/2\tilde{T})$ ), onde  $\omega_0$  denota a frequência de pequenas oscilações da coordenada coletiva ao redor do mínimo meta-estável [11]). Neste intervalo de temperatura o movimento se deve basicamente a puro tunelamento quântico. Aumentando a temperatura uma nova fase é atingida a  $\tilde{T}^*$  onde o estado meta-estável decai devido a processos combinados de ativação térmica e tunelamento quântico. Ligeiramente acima de  $\tilde{T}^*$  a dinâmica é sobretudo quântica, com uma pequena correção devido à ativação térmica [segundo termo na Eq. (3.75b), que é proporcional a  $(1 - \tilde{T}^*/\tilde{T})^{3/2}$ ]. A temperaturas mais altas a principal contribuição para a ação vem da ativação térmica e o tunelamento quântico fornece uma pequena correção à ação [que é proporcional a  $(\tilde{T}^*/\tilde{T})^2$ , para  $\tilde{T}^* \ll \tilde{T}$ , veja Eq. (3.75c)]. Finalmente, a temperaturas acima de  $\tilde{T}_0$  os efeitos quânticos se anulam e a corda ultrapassa a barreira devido apenas à ativação térmica.

## 6. CORDA SUPER-AMORTECIDA NO LIMITE QUÂNTICO

### 6.1. Tunelamento a Temperatura Zero

Para sistemas fortemente amortecidos os termos cinético e Hall na ação (3.7) são muito menores do que o dissipativo ( $\mathcal{T}_{\text{Kin}} \ll \mathcal{T}_{\text{Dis}}, \mathcal{T}_{\text{Hall}} \ll \mathcal{T}_{\text{Dis}}$ ), e assim devemos levar em conta (3.7b) e desprezar (3.7a) e (3.7c). Vamos começar considerando o limite  $\tilde{T} = 0$ . A ação descrevendo uma corda super-amortecida num potencial periódico inclinado a temperatura zero tem a forma

$$S_E[u(x, \tau)] = g \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \frac{\partial u}{\partial \tau_1} \ln |\tau - \tau_1| + V(u) \right], \quad (3.76)$$

onde agora o tempo imaginário  $\tau$  é medido em unidades de

$$\tau_0 = (d/2\pi)^2 \eta_z / v_0 \quad (3.77)$$

e o parâmetro semiclassico se torna  $g = \tau_0 x_0 v_0 = \eta_z (d/2\pi)^3 \sqrt{\epsilon_z / v_0}$ . O potencial  $V(u)$  é o mesmo como definido na Eq. (3.55a). A equação de movimento correspondendo a (3.76) é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \frac{\partial u}{\partial \tau_1} \frac{1}{(\tau - \tau_1)} - \sin u + F = 0. \quad (3.78)$$

Nós resolveremos a equação acima na aproximação de paredes finas (pequena força externa  $F$ ) efetuando uma separação dos graus de liberdade macroscópico e microscópico e considerando-os um após o outro, o mesmo procedimento adotado para o caso sub-amortecido. Os graus de liberdade microscópicos determinam a forma da parede, enquanto que os macroscópicos definem a forma do núcleo  $\Theta(x)$ . A partir de argumentos gerais de simetria  $\Theta(x, \tau)$  é simétrica em ambos,  $x$  e  $\tau$ . O deslocamento  $u(x, \tau)$  muda de zero a  $2\pi$  na parede  $\Theta(x)$ . Vamos começar fazendo o Ansatz

$$u(x, \tau) = 2\pi[K_v(\tau + \Theta) - K_v(\tau - \Theta)] \quad (3.79)$$

onde  $K_v(\tau \pm \Theta)$  é uma função degrau que varia de zero a um em  $\tau = \pm\Theta(x)$  e que pode depender das particulares posição  $(x, \tau)$  e inclinação  $v \equiv d\Theta/dx$  da parede.

Em analogia com o caso não amortecido, nós esperamos que a expressão geral para a ação descrevendo a dinâmica de uma corda super-amortecida tenha a forma

$$S = 2\pi g[\alpha_l l - FA + \text{diss.}], \quad (3.80)$$

onde o primeiro termo é a ação paga para criar a parede, o segundo termo é a ação ganha devido à parte da corda que foi para o mínimo inferior e o último termo é a ação dissipada durante o processo [veja Eq. (3.67)]. Inserindo o Ansatz (3.79) no termo dissipativo da Eq. (3.76) nós obtemos a forma mais específica para a ação (3.80)

$$S = 4\pi g \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \alpha_l(v, \Theta) \sqrt{1 + v^2} - F\Theta + \ln |2\Theta| \right], \quad (3.81)$$

onde o fator 4 surge porque estamos considerando apenas  $\Theta(x) > 0$ . Há duas consequências importantes devido ao fato de incluirmos a dissipação: Primeiro, o coeficiente de tensão linear  $\alpha_l$  é não mais uma constante, mas depende da posição  $\Theta(x)$  e da inclinação  $v$  da parede,  $\alpha_l = \alpha_l(\Theta, v)$ . Segundo, uma interação logarítmica aparece entre os pedaços da parede do núcleo alinhados ao longo do eixo  $\tau$ . Nossa primeira tarefa é encontrar a forma da função microscópica  $K_v(\tau \pm \Theta)$ , e assim determinar o coeficiente de tensão linear  $\alpha_l(v, \Theta)$ . Nós somos capazes de fazê-lo em dois limites, para inclinações  $v$

muito pequenas e muito grandes. Para o caso de inclinações muito pequenas ( $|v| \ll 1$ ), quando as paredes são aproximadamente horizontais, nós obtemos que a forma exata da parede é

$$u(x, \tau) = 2 \operatorname{arccot}(\tau + \Theta) - 2 \operatorname{arccot}(\tau - \Theta) \quad (3.82)$$

(veja Apêndice B). A substituição da trajetória  $u(x, \tau)$  (3.82) na ação (3.76) e a comparação da ação resultante com (3.81) nos permite concluir que para o caso de paredes quase horizontais o coeficiente de tensão linear é aproximadamente constante (independente de  $\Theta$  e de  $v$ ),

$$\alpha \simeq 1, \quad |v| \ll 1. \quad (3.83)$$

No limite de paredes quase verticais (inclinações muito grandes  $|v| \gg 1$ ) nós obtemos no Apêndice C que uma solução aproximada para a equação de movimento (3.78) é

$$u(x, \tau) = 2 \operatorname{arccot}[\sinh(x - \tau/v)], \quad x > 0. \quad (3.84)$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado anteriormente, substituindo a solução extrema (3.84) na ação (3.76) e comparando com (3.81) nós obtemos que para paredes quase verticais o coeficiente de tensão linear  $\alpha_l(v, \Theta)$  toma a forma

$$\alpha_l(v, \Theta) = \frac{4}{\pi} + \frac{1}{|v|} \ln \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{1}{\Theta^2}} \right), \quad |v| \gg 1. \quad (3.85)$$

Uma vez que fomos capazes de estimar o coeficiente microscópico de tensão linear  $\alpha_l(v, \Theta)$  nos dois limites (paredes quase horizontais e paredes quase verticais) estamos prontos para substituir os valores obtidos na ação (3.81) e determinar a forma macroscópica do núcleo  $\Theta(x)$ . Considerando a ação (3.81) como definindo um problema mecânico onde a posição da parede  $\Theta(x)$  é a coordenada generalizada e  $x$  representa o papel de tempo, podemos definir uma Lagrangeana efetiva que não depende explicitamente de  $x$ . Deste modo, as equações de movimento de Hamilton generalizadas podem ser integradas, e nós obtemos

$$\alpha_l(v, \Theta) - v(1 + v^2) \frac{\partial \alpha_l(v, \Theta)}{\partial v} = \sqrt{1 + v^2} \left[ -\tilde{E} + F\Theta - \ln |2\Theta| \right], \quad (3.86)$$

onde  $\tilde{E}$  é uma constante de integração.

Para o caso de inclinações muito grandes ( $|v| \gg 1$ ), mediante substituição da Eq. (3.85) na Eq. (3.86) nós obtemos

$$F\Theta - \ln |2\Theta| - E = \frac{4}{\pi|v|} + \ln \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{1}{\Theta^2}} \right) + \frac{1}{1 + (v/\Theta)^2}, \quad |v| \gg 1. \quad (3.87)$$

Diferentes soluções podem ser encontradas, dependendo da relação entre  $|v|$  e  $|\Theta|$ : Nós começamos com o caso  $|v| \gg |\Theta|$ . Neste caso os dois últimos termos no lado direito da Eq. (3.87) podem ser expandidos e nós obtemos

$$F\Theta - \tilde{E} = \frac{4}{\pi|v|} + \frac{3\Theta^2}{2v^2}, \quad |v| \gg 1, |v| \gg |\Theta|. \quad (3.88)$$

A constante  $\tilde{E}$  deve ser tomada igual a zero porque a  $\Theta = 0$  a inclinação da parede do núcleo é infinita (senão a parede teria uma singularidade a  $\Theta = 0$ ). Reescrevendo a Eq. (3.88) como

$$F\Theta = \frac{1}{|v|} \left[ \frac{4}{\pi} + \frac{3\Theta^2}{2|v|} \right], \quad (3.89)$$

nós vemos que duas diferentes soluções são viáveis, dependendo da relação entre  $\Theta^2$  e  $|v|$ . Se  $\Theta^2 \ll |v|$  (lembre-se que  $|v| \gg |\Theta|$ ) o segundo termo em (3.89) pode ser desprezado e a solução é dada por

$$\Theta(x) = \sqrt{\frac{8}{\pi F}(x_0 - x)}, \quad (x_0 - x) \ll F^{1/3}, \quad (3.90)$$

onde a constante de integração  $x_0$  é o ponto no eixo  $x$  onde  $\Theta = 0$  (máximo  $x$ ). Por outro lado, se  $\Theta^2 \gg |v|$  ( $|v| \gg |\Theta|$ ) o primeiro termo na Eq. (3.89) deve ser desprezado e a solução se torna

$$\Theta(x) = \frac{3(x_0 - x)^2}{8F}, \quad F^{1/3} \ll (x_0 - x) \ll 1. \quad (3.91)$$

As soluções acima são válidas numa região muito pequena em torno de  $x = x_0$ . Vamos agora analisar a forma do núcleo se  $1 \ll |v| \ll |\Theta|$ . Neste caso a expansão de (3.87) fornece

$$F\Theta - \ln |2\Theta| = \frac{4}{\pi|v|} + \frac{v^2}{2\Theta^2} + \ln \left( \frac{1}{2|v|} \right), \quad 1 \ll |v| \ll |\Theta|. \quad (3.92)$$

O primeiro e o segundo termos no lado direito da equação (3.92) são muito pequenos e podem ser desprezados ( $|v| \gg 1$  and  $|v| \ll |\Theta|$ ). A equação a ser resolvida se torna

$$F\Theta = \ln \left| \frac{\Theta}{v} \right|, \quad (3.93)$$

e a solução é dada por

$$\Theta(x) = \frac{1}{F} \ln(x_0 - x), \quad 1 \ll (x_0 - x) \ll 1/F. \quad (3.94)$$

A Eq. (3.94) descreve a parede do núcleo em uma região muito grande e dá a contribuição dominante para a ação.

Para o caso de inclinações muito pequenas ( $|v| \ll 1$ ), podemos substituir a Eq. (3.83) na Eq. (3.86) resultando em

$$F\Theta - \ln |2\Theta| = 1 - \frac{v^2}{2}. \quad (3.95)$$

A solução é dada por

$$\Theta(x) = \Theta_0 - \frac{Fx^2}{2}, \quad x \ll 1/F, \quad (3.96)$$

onde a extensão do núcleo ao longo do eixo  $\tau$

$$\Theta_0 = \frac{1}{F} \ln \left( \frac{1}{F} \right) \quad (3.97)$$

é encontrada a partir da equação transcendental

$$F\Theta_0 - \ln(2\Theta_0) - 1 = 0. \quad (3.98)$$

O tamanho da bolha na direção  $x$  é  $2x_0$ . O valor de  $x_0$  pode ser determinado a partir da condição de continuidade entre as equações (3.94) e (3.96): a  $x \sim 0$  elas devem fornecer o mesmo valor de  $\Theta$ . Isto é possível se

$$x_0 \sim \frac{1}{F}. \quad (3.99)$$

Portanto a forma crítica da bolha  $\Theta(x)$  a  $\tilde{T} = 0$  é determinada a partir das Eqs. (3.90), (3.91), (3.94), (3.96), (3.97) e (3.99). As principais características da forma do núcleo

estão ilustradas na Fig. 11. O mais importante a ser notado neste gráfico é a grande relação  $\Theta_0/x_0 \sim \ln(1/F)$ .

Dentro da aproximação logarítmica a principal contribuição à ação (3.81) é dada pela expressão (3.94) descrevendo as paredes verticais na larga região  $1 \ll (x_0 - x) \ll 1/F$ . Substituindo (3.94) em (3.81) e usando (3.99) para determinar os limites de integração nós obtemos

$$S = 8\pi g \int_0^{(1/F)^{-1}} dx \left[ \frac{4}{\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{F^2(x_0 - x)^2}} - \ln F - \ln(x_0 - x) \right]. \quad (3.100)$$

Os dois últimos termos em (3.100) se cancelam (com precisão logarítmica) e a principal contribuição vem do primeiro termo,

$$S = \frac{32g}{F} \ln \frac{1}{F} \quad (3.101)$$

Comparação das Eqs. (3.101) e (3.65) mostra que o efeito de incluir dissipação aumenta a ação, *i. e.*, um grande fator  $[\propto \ln(1/F)]$  aparece multiplicando o resultado não amortecido. Note também que o parâmetro semiclassico  $g$  é definido de uma maneira diferente nos limites massivo e super-amortecido.

## 6.2. Consideração Qualitativa

Vamos considerar como um modelo simplificado o caso de um núcleo a temperatura zero com forma retangular como mostrado na Fig. 12. Para as partes verticais nós tomamos  $\alpha_l = 4/\pi$  e para as horizontais nós consideramos  $\alpha_l = 1$ . A ação (3.80) neste caso adquire a forma

$$S = 8\pi g \left[ \frac{4}{\pi} \Theta_0 + x_0 - F \Theta_0 x_0 + x_0 \ln(2\Theta_0) \right]. \quad (3.102)$$

Os valores de  $\Theta_0$  e  $x_0$  podem ser encontrados extremizando a equação acima,  $\partial S/\partial \Theta_0 = 0$ , e  $\partial S/\partial x_0 = 0$ . Segue que

$$\Theta_0 = \frac{1}{F} \ln \left( \frac{1}{F} \right), \quad x_0 = \frac{4}{\pi F}. \quad (3.103)$$

O valor de ponto de sela da ação (3.102) é

$$S = \frac{32g}{F} \ln \frac{1}{F} \quad (3.104)$$

Nós vimos que a forma do núcleo não é retangular (veja Fig. 11). Entretanto suas dimensões têm a mesma dependência em  $F$  que as apontadas aqui. É notável que dentro da precisão logarítmica o valor da ação (3.101) é o mesmo que (3.104), obtido com base em simples argumentos qualitativos [38].

### 6.3. Tunelamento Quântico Termicamente Assistido

Até o presente momento temos considerado apenas o caso  $\tilde{T} = 0$  (regime super-amortecido), que corresponde ao tunelamento puramente quântico. Para temperaturas finitas a periodicidade em  $\tau$  das bounces (período  $1/\tilde{T}$ ) tem que ser considerada, como discutido anteriormente para sistemas não-amortecidos. Neste caso a ação (3.81) tem que ser substituída por

$$S = 4\pi g \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \alpha_l(v, \Theta) \sqrt{1+v^2} - F\Theta + \ln \left| \frac{\sin(2\pi\tilde{T}\Theta)}{\pi\tilde{T}} \right| \right], \quad (3.105)$$

e a equação de movimento correspondente (análogo a (3.86)) é

$$\alpha_l(v, \Theta) - v(1+v^2) \frac{\partial \alpha_l(v, \Theta)}{\partial v} = \sqrt{1+v^2} \left[ -\tilde{E} + F\Theta - \ln \left| \frac{\sin(2\pi\tilde{T}\Theta)}{\pi\tilde{T}} \right| \right] \quad (3.106)$$

Substituindo (3.106) em (3.105) nós obtemos

$$S = 4\pi g \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{d\Theta}{dx} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left( \alpha_l \sqrt{1+v^2} \right). \quad (3.107)$$

Considerando que a principal contribuição para a ação vem das paredes verticais ( $v \gg 1$ ), nós obtemos  $\partial(\alpha_l \sqrt{1+v^2})/\partial v \sim \alpha_l \sim 4/\pi$  e a ação se torna

$$S = 16g \int_{-\Theta(\tilde{T})}^{\Theta(\tilde{T})} d\Theta = 32g\Theta(\tilde{T}), \quad (3.108)$$

onde  $\Theta(\tilde{T})$  é o raio do núcleo na direção  $\tau$ , que é determinado a partir da equação transcendental

$$-1 + F\Theta = \ln \left| \frac{\sin(2\pi\tilde{T}\Theta)}{\pi\tilde{T}} \right|. \quad (3.109)$$

No limite de baixas temperaturas nós podemos expandir a função seno e obter

$$\Theta(\tilde{T}) = \Theta_0 - \frac{2\pi^2\Theta_0^2}{3F} \tilde{T}^2, \quad (3.110)$$



que tem a mesma dependência em potência que a obtida para o caso de um sistema puntual amortecido [11, 12]. Aqui  $\Theta_0$  é a solução a temperatura zero dada por (3.97). Uma solução numérica da equação transcendental (3.109) mostra que o núcleo começa a se contrair na direção  $\tau$  quando a temperatura é aumentada a partir do zero [veja Fig. 13 e equação (3.108)]. Este comportamento é completamente diferente do limite não amortecido, onde a forma do núcleo a baixas temperaturas é aproximadamente a mesma que a temperatura zero, exceto por correções exponencialmente pequenas (veja Figs. 9 e 10). No limite super-amortecido o núcleo imediatamente começa a encolher assim que  $\tilde{T} > 0$ , um efeito que é devido à interação logarítmica entre as paredes horizontais (termo de CL). Aumentando a temperatura, uma região é atingida onde a extensão do núcleo na direção  $\tau$  ( $\sim 1/\tilde{T}$ ) tem a mesma ordem de grandeza que a extensão na direção  $x$ . Nesta região os núcleos se fundem e a descrição dada para sistemas não amortecidos no regime de tunelamento quântico termicamente assistido se aplica. Aumentando ainda mais a temperatura, o regime térmico é atingido.

#### 6.4. Regime Térmico

A temperatura de cruzamento  $\tilde{T}_0$  separando o regime de tunelamento quântico termicamente assistido a partir do regime de ativação puramente térmica foi calculado anteriormente (veja (3.30)) e é dado por

$$\tilde{T}_0 = \frac{F}{4}. \quad (3.111)$$

#### 6.5. Resumo

No limite fortemente amortecido os resultados podem ser resumidos como segue:

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{32g_d}{\hbar F} \ln \frac{1}{F}, \quad \tilde{T} = 0, \quad (3.112a)$$

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{32g_d}{\hbar F} \left[ \ln \left( \frac{1}{F} \right) - \frac{2\pi^2 \Theta_0^2}{3} \tilde{T}^2 \right], \quad \tilde{T} \gtrsim 0, \quad (3.112b)$$

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{32g_d}{\hbar F} \ln \frac{1}{\tilde{T}}, \quad \tilde{T} \sim \frac{F}{4 \ln(1/\tilde{T})}, \quad (3.112c)$$

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{32g_d}{\hbar 2\tilde{T}} = \frac{16g_d}{\tilde{T}}, \quad \tilde{T} \lesssim \frac{F}{4}, \quad (3.112d)$$

$$-\ln \Gamma \propto \frac{U}{T} = \frac{16g_d}{\tilde{T}}, \quad \tilde{T} \geq \frac{F}{4}. \quad (3.112e)$$

A temperaturas finitas a ação quântica é dada por

$$S = 32g_d \Theta(\tilde{T}) \quad (3.113),$$

onde  $\Theta(\tilde{T})$  é determinado a partir da equação transcendental

$$-1 + F\Theta = \ln \left| \frac{\sin(2\pi\tilde{T}\Theta)}{\pi\tilde{T}} \right|. \quad (3.114)$$

As taxas de decaimento (3.112c), (3.112d), e (3.112e) são obtidas a partir das Eqs. (3.113) e (3.114) computadas nos correspondentes limites de temperatura. Uma solução numérica de (3.114) está dada na Fig. 13. Contrariamente ao caso sem dissipação, nós observamos que no limite super-amortecido os efeitos de temperatura finita são essenciais, mesmo a temperaturas muito baixas: um rápido decréscimo da ação, que é proporcional a uma lei de potências ( $S \propto S_0(1 - f\tilde{T}^2)$ , onde  $f = 2\pi^2\Theta_0/3F$  e  $S_0$  é a ação a temperatura zero) é observado em contraste com o platô aproximadamente constante obtido para o caso não amortecido (veja Figs. 10 e Fig. 13 para comparação).

As várias formas dos núcleos críticos estão ilustradas na Fig. 14. O efeito da dissipação é quebrar a simetria entre  $x$  e  $\tau$ , introduzindo na ação um termo que depende do tempo imaginário de uma forma não local. Como consequência, a forma do núcleo a temperatura zero deixa de ser circular: o raio na direção  $x$  ainda é proporcional a  $1/F$ , mas o raio  $\Theta_0$  na direção  $\tau$  é acrescido de um grande valor,  $\Theta_0 \propto (1/F) \ln(1/F)$  (Fig. 14a). Podemos também observar que devido à interação logarítmica entre as paredes do núcleo, ao aumentarmos a temperatura o núcleo começa a se contrair na direção  $\tau$  (Fig. 14b). Esta atração entre as paredes horizontais do núcleo procede até a configuração onde os raios na direções  $x$  e  $\tau$  têm aproximadamente o mesmo tamanho (Fig. 14c). Então os núcleos começam a se fundir e o comportamento é semelhante àquele descrito no limite não amortecido, acima e próximo de  $\tilde{T}^*$  (Fig. 14d). Finalmente, aumentando ainda mais

a temperatura, entra-se no regime térmico a temperatura de cruzamento  $\tilde{T}_0$  (Fig. 14e). Próximo a esta região, a aproximação de paredes finas cessa de ser válida uma vez que o raio do núcleo torna-se comparável à espessura da parede.

## 7. CORDA HALL NO LIMITE QUÂNTICO

A seguir analisaremos o caso de movimento puramente Hall ( $m_v = 0$  e  $\eta_l = 0$ ). Medindo  $\tau$  em unidades de

$$\tau_o = \left( \frac{d}{2\pi} \right)^2 \frac{\alpha_H}{v_o} \quad (3.115)$$

e mantendo as definições prévias de  $x_o, u_o$  nós podemos reescrever a ação (3.7) como

$$S_E[u(x, \tau)] = g \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1/2\tilde{T}}^{1/2\tilde{T}} d\tau \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + V(u_z) + i u_y \frac{\partial u_z}{\partial \tau} \right\}, \quad (3.116)$$

onde  $u_z$  está sendo medido em unidades de  $u_o/\sqrt{\epsilon}$ ,  $u_y$  está sendo medido em unidades de  $u_o\sqrt{\epsilon}$ , e a temperatura  $\tilde{T} = T\tau_o/\hbar$ , com  $\tau_o$  dado por (3.115). O parâmetro semiclassico  $g = \tau_o x_o v_o = (\alpha_H d^3/8\pi^2) \sqrt{\epsilon_l/v_o}$ .

Efetuada uma integral de trajetória sobre a variável  $u_y$  obtemos a ação efetiva  $S_E^{ef}[u_z]$ , [51]

$$S_E^{ef}[u_z] = g \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1/2\tilde{T}}^{1/2\tilde{T}} d\tau \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + V(u_z) - \frac{1}{4} \frac{\partial u_z(x, \tau)}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} dx' |x - x'| \frac{\partial u_z(x', \tau)}{\partial \tau} \right\}, \quad (3.117)$$

bem como o importante vínculo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial u_z(x, \tau)}{\partial \tau} = 0. \quad (3.118)$$

A equação de movimento correspondente efetiva na direção  $z$  é

$$-\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' |x - x'| \frac{\partial^2 u_z(x', \tau)}{\partial \tau^2} + V'(u_z(x, \tau)) = 0. \quad (3.119)$$

O mesmo resultado pode ser obtido tomando-se o limite  $m_v, \eta_l \rightarrow 0$  na equação (3.23).

A partir da teoria desenvolvida nos limites massivo e dissipativo, vimos que o problema do "creep" de uma corda elástica a partir de um mínimo meta-estável é caracterizado

por uma solução microscópica, que determina a forma do “kink” (parede), mais uma solução macroscópica, que determina o raio do núcleo crítico (posição  $R$  da parede). Além disso, observamos que podemos substituir a solução microscópica na ação, que se torna então uma função apenas da variável macroscópica ( $R$  no caso massivo, veja (3.64); ou  $x_0, \Theta_0$  no caso dissipativo, veja (3.102)), e a solução desejada (ponto de sela) pode ser facilmente obtida extremizando a ação com relação a esta variável. No caso de uma dinâmica governada pelo termo Hall, o problema torna-se um pouco mais complicado: observando a Fig. 8, onde a solução “bounce” está mostrada, vemos que a dinâmica dissipativa no regime quântico simplesmente produz oscilações da posição da parede  $R$ , enquanto que a inclusão da dinâmica Hall gera, além destas oscilações, o aparecimento de uma longa cauda oscilante para  $x > R$ . Neste caso, nós ainda podemos exprimir a ação em termos da variável macroscópica  $R$ , mas temos que integrar a cauda. Este procedimento é levado a termo no Apêndice D, onde obtemos que a equação de movimento efetiva para a posição da parede  $R(\omega)$  no espaço de Fourier é

$$2|\omega|R + (\rho\gamma^2 e^{-2\gamma R} - F)\omega = 0. \quad (3.120)$$

A equação acima é válida a temperaturas  $T \lesssim T_0$ . É interessante observar que começamos com um problema Hamiltoniano (veja equação (3.116)) e obtivemos uma equação de movimento não Hamiltoniana para  $R(\omega)$  (um termo proporcional a  $|\omega|$ ). Isto porque os graus de liberdade da cauda agem como um reservatório para a posição da parede  $R$ , no mesmo estilo que na teoria de Caldeira e Leggett.

Embora a separação do problema em graus de liberdade macroscópico e microscópico ainda seja possível, aqui nós seguiremos um procedimento diferente daquele adotado para os casos massivo e dissipativo e calcularemos a ação a baixas temperaturas perturbativamente.

### 7.1. Ativação Térmica Quanticamente Assistida

Passemos agora ao cálculo da ação a temperaturas ligeiramente inferiores a  $\tilde{T}_0$ . Nesta

região podemos considerar

$$u_z(x, \tau) = u_{z0}(x, \tau) + \delta u_z(x, \tau), \quad (3.121)$$

onde  $u_{z0}(x, \tau)$  é a solução térmica e

$$\delta u_z(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \cos(\omega_n \tau), \quad (3.122)$$

com  $c_1 \sim \sqrt{\tilde{T}_0 - \tilde{T}}$ ;  $c_2 \sim (\tilde{T}_0 - \tilde{T})$ ; ...  $c_n \sim (\tilde{T}_0 - \tilde{T})^{n/2}$  (veja [10]). Assim a ação será

$$S = S^{(0)} + \delta S, \quad (3.123)$$

onde  $S^{(0)} = 4\pi\alpha_l g / \tilde{T}$  é o valor puramente térmico ( $S^{(0)} = \hbar U / T$ ) e  $\delta S$  descreve as correções quânticas a este valor.

Substituindo a expansão (3.121) na ação (3.117) obtemos uma expressão que depende de  $(\delta u_z)^2$ . Entretanto, para determinar os coeficientes  $c_n$  devemos ir além da aproximação quadrática em  $\delta u_z$ . Deste modo, usamos (3.12a) e (3.119) e substituímos os termos cinético e Hall pelo termo de potencial (fonte),

$$S = g \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1/2\tilde{T}}^{1/2\tilde{T}} d\tau \left\{ V(u_{z0}) + V(u_{z0} + \delta u_z) - \frac{1}{2} \delta u_z [V'(u_{z0}) + V'(u_{z0} + \delta u_z)] \right\}. \quad (3.124)$$

Expandindo agora  $V(u_{z0} + \delta u_z)$  e  $V'(u_{z0} + \delta u_z)$  em torno de  $u_{z0}$  até quarta ordem em  $\delta u_z$  encontramos

$$S = g \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1/2\tilde{T}}^{1/2\tilde{T}} d\tau \left\{ 2V(u_{z0}) + \frac{1}{2} V''(u_{z0}) \delta u_z^2 - \frac{V'''(u_{z0})}{12} (\delta u_z)^3 - \frac{V''''(u_{z0})}{24} (\delta u_z)^4 \right\}. \quad (3.125)$$

O primeiro termo em (3.125) é simplesmente o valor clássico  $\hbar U / T$ . Substituindo a expansão em séries (3.122) para  $\delta u_z$  e integrando sobre o tempo imaginário  $\tau$  chegamos a

$$\delta S = -\frac{g}{16\tilde{T}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ c_1^2(x) c_2(x) V'''(u_{z0}) + \frac{1}{4} c_1^4(x) V''''(u_{z0}) \right] \quad (3.126)$$

Para o potencial em questão  $V(u_z) = 1 - \cos(u_z) - F u_z$  e no limite em que  $F \sim 0$  (de modo que podemos substituir  $u_{z0}$  por  $u_{z0}^{(0)}$ ) temos  $V'''(u_{z0}^{(0)}) = -2 \sinh x / \cosh^2 x$  e  $V''''(u_{z0}^{(0)}) =$

$(2/\cosh^2 x) - 1$ . Considerando numa primeira aproximação  $u = u_{z0}(x) + c_1(x) \cos(\omega_1 \tau)$  e substituindo na equação de movimento (3.119) obtemos uma expressão para o coeficiente  $c_1(x)$ ,

$$-\frac{d^2 c_1}{dx^2} + V''(u_{z0}^{(0)})c_1 = (2\pi\tilde{T}_0)^2 \int_x^\infty dx' (x' - x)c_1(x'). \quad (3.127)$$

Para  $\tilde{T}_0 \sim F \sim 0$  temos que  $c_1$  é simplesmente o modo translacional (veja (3.26)),

$$c_1(x) = \frac{K}{\cosh x}, \quad (3.128)$$

onde  $K$  é uma constante a ser determinada. Levando em conta termos de ordem mais alta na expansão em séries de  $\delta u_z$ , *i. e.*, termos  $\propto \cos(\omega_2 \tau)$  obtemos a equação para o coeficiente  $c_2(x)$ ,

$$\frac{d^2 c_2}{dx^2} - V''(u_{z0}^{(0)})c_2(x) = \frac{c_1^4(x)}{4} V'''(u_{z0}^{(0)}), \quad (3.129)$$

que tem como solução

$$c_2(x) = \frac{1}{\cosh x} \int_0^x dx' \cosh^2 x' \int_{-\infty}^{x'} dx'' \frac{1}{\cosh x''} \frac{c_1^2(x'')}{4} V'''(u_{z0}^{(0)}(x'')) = \frac{K^2}{8} \frac{\sinh x}{\cosh^2 x}. \quad (3.130)$$

Portanto usando (3.128) e (3.130) temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ c_1^2(x)c_2(x)V'''(u_{z0}) + \frac{1}{4}c_1^4(x)V''''(u_{z0}) \right] = \frac{2K^4}{15}. \quad (3.131)$$

Nosso próximo objetivo é determinar a constante  $K$ . Para tanto, temos que considerar a equação não homogênea para o coeficiente  $c_1(x)$ ,

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2 c_1}{dx^2} + V''(u_{z0}^{(0)})c_1 - (2\pi\tilde{T})^2 \int_x^\infty dx' (x' - x)c_1(x') = \\ & -\frac{1}{2} \left[ c_1(x)c_2(x)V'''(u_{z0}^{(0)}) + \frac{c_1^3}{4}V''''(u_{z0}^{(0)}) \right]. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Multiplicando (3.132) por  $c_1(x)$ , integrando sobre  $x$  e usando (3.127) nós obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ c_1^2(x)c_2(x)V'''(u_{z0}) + \frac{1}{4}c_1^4(x)V''''(u_{z0}) \right] = \\ & -8\pi^2(\tilde{T}_0^2 - \tilde{T}^2) \int_{-\infty}^{\infty} dx c_1(x) \int_x^\infty dx' (x' - x)c_1(x'). \end{aligned} \quad (3.133)$$

No entanto, sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx c_1(x) \int_x^{\infty} dx' (x' - x) c_1(x') = -2 \int_0^{\infty} dx \left[ \int_x^{\infty} dx' c_1(x') \right]^2 = \frac{-2K^2}{F}, \quad (3.134)$$

(veja equação (3.39)). Substituindo (3.134) de volta em (3.133) e comparando com (3.131) finalmente obtemos

$$K^2 = \frac{30F}{\pi^2} \left( 1 - \frac{T^2}{\tilde{T}_0^2} \right). \quad (3.135)$$

Substituindo agora (3.133) em (3.126) e levando em conta (3.134) e (3.135) temos

$$\delta S = \frac{U_q}{\tilde{T}} = -\frac{15gF^2}{2\pi\tilde{T}} \left( 1 - \frac{T^2}{\tilde{T}_0^2} \right)^2. \quad (3.136)$$

Podemos então escrever a ação total,

$$S = \frac{4g\alpha_l}{\tilde{T}} \left[ 1 - \frac{15}{16} F^2 \left( 1 - \frac{\tilde{T}^2}{\tilde{T}_0^2} \right)^2 \right]. \quad (3.137)$$

Uma vez que  $K \ll 1$  para toda temperatura  $\tilde{T} < \tilde{T}_0$ , o resultado (3.137) é válido para todo o intervalo  $0 < \tilde{T} < \tilde{T}_0$ . A ação (3.137) é o principal resultado desta seção, que descreve a redução da energia de ativação devido a efeitos quânticos.

## 7.2. Resumo

Para uma corda elástica governada por uma força Hall o problema do decaimento do estado meta-estável torna-se muito mais complexo devido ao caráter vetorial do campo de deslocamento  $(u_y(x, \tau), u_z(x, \tau))$ . Neste caso, a taxa de decaimento apresenta um comportamento novo e inesperado: ao invés do usual platô obtido quando  $T \rightarrow 0$  (veja os casos massivo e dissipativo, figuras 10 e 13), a ação diverge a baixas temperaturas segundo uma lei de Arrhenius com uma energia de ativação  $U_q$  que é reduzida devido às flutuações quânticas,

$$U_q = U \left[ 1 - \frac{15}{16} F^2 \left( 1 - \frac{\tilde{T}^2}{\tilde{T}_0^2} \right)^2 \right], \quad (3.138)$$

veja Fig. 15. Devido ao vínculo (3.118) o núcleo crítico a temperatura zero permanece aberto, levando à divergência da ação neste limite. A temperaturas finitas este mesmo vínculo gera a longa cauda ilustrada na Fig. 8, mas devido à existência do núcleo térmico o processo de decaimento permanece finito e a bolha crítica é limitada pelo período  $1/\tilde{T}$  do movimento na direção  $\tau$ .

## 8. CONCLUSÕES

Nós calculamos a taxa de salto quântico de uma única linha de fluxo intrinsecamente aprisionada entre os planos de CuO num supercondutor de alta temperatura crítica. Mais especificamente, nós consideramos um supercondutor em camadas na presença de um campo magnético suficientemente fraco, de modo que o movimento de um único vórtice ocorre. Para campos mais altos, a interação entre os vórtices se torna importante e a mínima barreira para o movimento do fluxo é realizada para um feixe de vórtices, e não mais para um único fluxóide. A descrição da dinâmica do feixe de vórtices será apresentada no próximo capítulo.

O movimento do vórtice foi representado pelo salto de uma corda elástica num potencial periódico inclinado. Nós calculamos as taxas de decaimento na aproximação exponencial para o caso de correntes externas muito pequenas. Os resultados podem ser resumidos como segue: a altas temperaturas, a taxa de saltos é determinada pela energia de ativação, que é a solução de ponto de sela da energia livre,

$$-\ln \Gamma \propto \frac{U}{T} = \frac{8d}{\pi T} \sqrt{\varepsilon_z v_0}. \quad (3.139)$$

A temperaturas mais baixas, diferentes soluções são encontradas, dependendo se consideramos os limites massivo, super-amortecido ou Hall. Para um vórtice massivo (corda não-amortecida), a taxa de salto a temperatura zero diverge como  $1/j$  (lembre-se que estamos considerando pequenas correntes externas  $j$ ),

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{8d^2}{\hbar \pi^2} \sqrt{m_z \varepsilon_z} \frac{j_c}{j}, \quad (3.140)$$

enquanto que a temperaturas finitas (abaixo de  $T_0$ ) ela é dada por

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{8d^2}{\hbar \pi^2} \sqrt{m_z \varepsilon_z} \frac{j_c}{j} \left[ 1 - \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \left( 1 - \frac{T^*}{T} \right)^{3/2} \right], \quad T \gtrsim T^*, \quad (3.141)$$

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{32d^2}{\pi^3 \hbar} \sqrt{m_z \varepsilon_z} \frac{j_c}{j} \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{T^*}{T} \right)^2 \right], \quad T^* \ll T \ll T_0. \quad (3.142)$$

Neste caso nós observamos que há duas temperaturas de limiar no problema:  $T_0 = \sqrt{\pi \hbar^2 v_0 j / (2d^2 m_z j_c)}$ , que indica a passagem para o regime térmico (clássico), e também



$T^* = \pi^2 \hbar j / (4d j_c) \sqrt{v_o / m_z}$ , que separa o regime de tunelamento puramente quântico do regime onde o movimento quântico é termicamente assistido.

No limite de forte dissipação ohmica, nós determinamos a taxa de decaimento a temperatura zero,

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{4d^3 \eta_z}{\hbar \pi^3} \sqrt{\varepsilon_z / v_o} \frac{j_c}{j} \ln \frac{j_c}{j}. \quad (3.143)$$

Para temperaturas finitas mas muito pequenas, um comportamento parabólico é obtido,

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{4d^3 \eta_z}{\hbar \pi^3} \sqrt{\varepsilon_z / v_o} \frac{j_c}{j} \left[ \ln \frac{j_c}{j} - \left( \frac{\eta_z d^2}{2\sqrt{6}\pi \hbar v_o} \frac{j_c}{j} \ln \frac{j_c}{j} \right)^2 T^2 \right], \quad T \gtrsim 0. \quad (3.144)$$

A mesma dependência com a temperatura (lei de potência) foi obtida para uma partícula puntual por Larkin e Ovchinnikov [10] e por Grabert, Weiss, and Hänggi [11, 12].

A temperaturas mais altas, o tunelamento quântico termicamente assistido torna-se dominado pela contribuição térmica, e temos

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{8d}{\pi T} \sqrt{\varepsilon_z v_o}, \quad T \lesssim \frac{\hbar \pi^2 v_o}{\eta_z d^2} \frac{j}{j_c}, \quad (3.145)$$

o mesmo resultado como obtido no limite clássico (veja Eq. (3.139)).

No caso super-amortecido há apenas uma temperatura de cruzamento, uma vez que tunelamento puramente quântico ocorre apenas a  $T = 0$  (correções devido a temperatura finita obedecem uma lei de potência e são relevantes mesmo a temperaturas muito baixas). Nós definimos  $\tilde{T}^*$  graficamente como a temperatura na qual a Eq. (3.144) cede o lugar à Eq. (3.145) (respectivamente linhas tracejadas e pontilhadas na Fig. 13), mas  $\tilde{T}^*$  não representa uma temperatura de cruzamento separando diferentes regimes. A temperatura de cruzamento  $T_0 = \hbar \pi^2 v_o j / \eta_z d^2 j_c$  indica o ponto no qual o movimento quântico pára e a dinâmica se torna puramente clássica (térmica).

No caso de uma corda elástica descrita por uma equação de movimento governada pelo termo Hall, o comportamento é fundamentalmente diferente: O regime quântico ( $\tilde{T} < \tilde{T}_0$ ) é ainda descrito pela lei de Arrhenius, mas a energia de ativação térmica é reduzida devido

a efeitos quânticos. Assim, no regime de ativação térmica quanticamente assistida a taxa de decaimento é dada por

$$-\ln \Gamma \propto \frac{U_q}{\tilde{T}} = \frac{8d}{\pi T} \sqrt{\varepsilon_l v_o} \left[ 1 - \frac{15}{16} \frac{j^2}{j_c^2} \left( 1 - \frac{T^2}{\tilde{T}_0^2} \right)^2 \right], \quad 0 < T < \frac{2\hbar v_o j}{\pi d^2 \alpha_H j_c}. \quad (3.146)$$

No presente trabalho estamos considerando apenas a taxa de decaimento na aproximação exponencial. O cálculo do pré-fator para alguns casos especiais foi feito anteriormente: Os efeitos de interações de muitos-corpos na nucleação de solitons térmicos de Sine-Gordon foram estudados por Hänggi, Marchesoni, e Sodano [52], e o pré-fator foi determinado no limite super-amortecido. Também o pré-fator descrevendo a dinâmica quântica de uma corda amortecida no limite de altas temperaturas (próximo a temperatura de cruzamento  $\tilde{T}_0$ ) foi calculado por Hänggi, Marchesoni e Riseborough [53] para o caso de dissipação arbitrária. Entretanto, uma completa determinação do pré-fator para todo o intervalo de temperaturas no limite quântico resta ser feita.

## IV. SALTOS CLÁSSICOS E QUÂNTICOS DE UM FEIXE DE LINHAS DE FLUXO

### 1. INTRODUÇÃO

No capítulo anterior o salto quântico de uma linha de fluxo individual intrinsecamente aprisionada entre os planos de CuO foi considerado. A campos magnéticos fracos há apenas poucos vórtices no supercondutor, a interação entre eles pode ser desprezada e o comportamento resistivo do material pode ser descrito pela dinâmica de um único vórtice. Para campos mais fortes uma linha de fluxo individual não pode mais ser ativada devido à energia de confinamento fornecida pela rede de fluxóides. O núcleo para o salto de linhas de fluxo então se torna um feixe de vórtices. A razão é que o custo em energia elástica a ser paga cresce apenas com a superfície do núcleo, enquanto que o ganho energético devido à força de Lorentz é um termo de volume.

O mecanismo de aprisionamento intrínseco entre camadas na presença de um campo magnético forte é realizado quando o período da rede de vórtices ao longo do eixo  $c$  é comensurável com a distância entre os planos de CuO. Neste caso o feixe de vórtices se move em etapas, deslocando-se através de uma camada a cada passo.

A ativação térmica de feixes de vórtices na presença de um campo magnético aplicado paralelo às camadas foi estudado por Chakravarty, Ivlev e Ovchinnikov [54]. Eles obtiveram que para campos magnéticos mais altos que  $H_b$  (ou correntes externas maiores que  $j_b$ ) o movimento do fluxo em um supercondutor fortemente em camadas é realizado para um feixe tridimensional de vórtices, e não mais para um único fluxóide. Aqui nós estendemos os seus cálculos para o limite quântico.

Em supercondutores fracamente em camadas (anisotrópicos), com uma espessura  $L$  pequena se comparada com a extensão do feixe de vórtices ao longo do eixo  $c$ , o processo elementar produzindo salto de fluxóides envolve o movimento de um feixe planar de vórtices através das camadas supercondutoras. Ivlev e Kopnin [55, 56] consideraram este problema no limite de altas temperaturas (regime clássico). No presente capítulo nós

generalizamos os resultados para o limite quântico.

Os cálculos da probabilidade de tunelamento são efetuados no limite de força externa muito pequena ( $F \ll 1$ ), quando a aproximação de paredes finas pode ser aplicada. A dinâmica quântica de uma variedade elástica  $N$ -dimensional foi estudada por Hida [39] para descrever a condução elétrica num estado de onda de densidade de carga comensurável. Para o caso de pequenas forças externas no sistema ele considerou ambos, os limites massivo e super-amortecido. No limite massivo, ele calculou as taxas de decaimento a temperatura zero e a temperaturas muito altas. Aqui nós analisamos também o comportamento do sistema a temperaturas intermediárias, quando o tunelamento quântico é termicamente assistido. No limite super-amortecido nós obtemos basicamente os mesmos resultados como mencionados em [39].

A estrutura deste capítulo é a seguinte: Na seção 2 nós calculamos a taxa de decaimento para uma variedade elástica  $N$ -dimensional aprisionada num potencial periódico no limite massivo. Na seção 3 os cálculos são efetuados para o caso super-amortecido. Os resultados são aplicados na seção 4 para descrever o salto de um feixe de vórtices tridimensional num supercondutor fortemente em camadas sujeito a um campo magnético forte. Na seção 5 nós nos concentramos no problema de um supercondutor anisotrópico fino e analisamos o salto de um feixe de vórtices planar ( $2D$ ). As conclusões estão apresentadas na seção 6.

## 2. LIMITE MASSIVO

A taxa de decaimento de uma variedade elástica  $N$ -dimensional foi calculada por Hida para estudar estados de onda de densidade de carga comensuráveis [39]. Aqui nós seguimos o mesmo procedimento desenvolvido por ele. A ação descrevendo uma variedade elástica  $N$ -dimensional no limite não-amortecido pode ser generalizada a partir da Eq. (3.68) e é dada por

$$S = 2\pi g_N \left[ \int_{-1/2\tilde{T}}^{1/2\tilde{T}} d\tau \alpha_l(x, \tau) \sqrt{1 + \dot{x}^2} S_N(x) - F \int_{-1/2\tilde{T}}^{1/2\tilde{T}} d\tau V_N(x) \right], \quad (4.1)$$

onde  $V_N(x)$  e  $S_N(x)$  são respectivamente o volume e a superfície de uma esfera  $N$ -

dimensional com raio  $x$ ,

$$V_N(x) = \frac{\pi^{N/2} x^N}{\Gamma(1 + N/2)}, \quad S_N(x) = \frac{dV_N(x)}{dx} = \frac{NV_N(x)}{x}, \quad (4.2)$$

e  $x = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2(\tau)}$  é a trajetória do centro da parede da bounce. O parâmetro semi-clássico  $g_N$  é dado por

$$g_N = \tau_0 x_0^N v_0 = \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{v_0}} \left( \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_l}{v_0}} \right)^N v_0. \quad (4.3)$$

A dinâmica quântica de um sistema sub-amortecido  $N$ -dimensional corresponde à dinâmica clássica de um sistema  $N + 1$ -dimensional, com 1 dimensão temporal e  $N$  dimensões espaciais. A equação de movimento generalizada correspondendo à ação (4.1) é

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\alpha_l \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) - \frac{(N-1)\alpha_l}{x\sqrt{1 + \dot{x}^2}} + F = 0. \quad (4.4)$$

É importante lembrar que se a bounce não forma uma superfície fechada, ela deve então satisfazer a condição de contorno (3.57). A Eq. (4.4) tem duas soluções: uma é esférica e é dada por

$$x^2 + \tau^2 = \left( \frac{N\alpha_l}{F} \right)^2, \quad (4.5)$$

correspondendo a uma superfície fechada descrevendo o núcleo crítico a temperatura zero (ou muito baixas). A substituição de (4.5) em (4.1) fornece

$$S_0 = \frac{8g_N}{N+1} S_{N+1} \left( \frac{\alpha_l N}{F} \right) = \frac{8\pi^{(N+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{N+3}{2}\right)} \left( \frac{\alpha_l N}{F} \right)^N g_N. \quad (4.6)$$

A segunda solução da equação de movimento generalizada é obtida considerando  $\dot{x} = 0$  em (4.4): é uma solução cilíndrica, correspondendo a temperaturas mais altas, quando o papel representado pela condição de contorno se torna essencial,

$$x^2 = \left[ \frac{\alpha_l(N-1)}{F} \right]^2. \quad (4.7)$$

A ação correspondente é

$$S = \frac{8g_N}{N} S_N \left( \frac{\alpha_l(N-1)}{F} \right) \frac{1}{\tilde{T}} = \frac{8\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N+2}{2}\right)} \left( \frac{\alpha_l(N-1)}{F} \right)^{N-1} \frac{1}{\tilde{T}} g_N, \quad (4.8)$$

que descreve uma esfera em  $N$  dimensões multiplicada pelo período  $1/\tilde{T}$  na direção  $\tau$  (veja também (4.6) para comparação).

A equação (4.4) não tem outras soluções exceto as triviais geradas movendo o centro das soluções (4.5) e (4.7). Assim, uma temperatura de cruzamento  $\tilde{T}_0$  pode ser definida como sendo o valor no qual (4.6) se iguala a (4.8):

$$\tilde{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{N+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+2}{2}\right)} \frac{F}{\alpha_l} \frac{(N-1)^{N-1}}{N^N}. \quad (4.9)$$

### 3. LIMITE SUPER-AMORTECIDO

Usando argumentos similares aos do caso não-amortecido, concluímos que no caso super-amortecido a parede da bounce tem a forma de um cilindro fechado  $N + 1$ -dimensional, alongado na direção do eixo  $\tau$ . Generalizando a equação (3.105) podemos avaliar a ação como

$$S = 4\pi g_N \left[ \alpha_l \Theta S_N(\rho) - F \Theta V_N(\rho) + \ln \left| \frac{\sin(2\pi \tilde{T} \Theta)}{\pi \tilde{T}} \right| V_N(\rho) \right], \quad (4.10)$$

onde  $2\Theta$  e  $\rho$  são respectivamente a altura e o raio do cilindro e nós assumimos  $\Theta < 1/2\tilde{T}$ .

O parâmetro semiclassico generalizado é dado no limite super-amortecido por

$$g_N = \tau_o x_o^N v_o = \left( \frac{d}{2\pi} \right)^2 \frac{\eta}{v_o} \left( \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{v_o}} \right)^N v_o, \quad (4.11)$$

onde usamos Eq. (3.77). Otimizando a equação (4.10) com respeito a  $\Theta$  e  $\rho$ , nós obtemos

$$\frac{\alpha_l N}{\rho} - F + 2\pi \tilde{T} \cot(2\pi \tilde{T} \Theta) = 0, \quad (4.12a)$$

$$\frac{\alpha_l (N-1) \Theta}{\rho} - F \Theta + \ln \left| \frac{\sin(2\pi \tilde{T} \Theta)}{\pi \tilde{T}} \right| = 0. \quad (4.12b)$$

Substituindo (4.12b) em (4.10) e usando que  $S_N(\rho) = N V_N(\rho)/\rho$  temos

$$S = \frac{16g_N}{N} S_N(\rho) \Theta(\tilde{T}), \quad (4.13)$$

onde  $\Theta(\tilde{T})$  é a solução da equação transcendental generalizada

$$-2\pi \tilde{T} \Theta \frac{(N-1)}{N} \cot(2\pi \tilde{T} \Theta) + \ln \left| \frac{\sin(2\pi \tilde{T} \Theta)}{\pi \tilde{T}} \right| = \frac{F \Theta}{N}, \quad (4.14)$$

obtida substituindo (4.12a) em (4.12b). Soluções analíticas podem ser obtidas para três diferentes casos: i)  $2\Theta \ll 1/2\tilde{T}$ ; ii)  $2\Theta \simeq 1/2\tilde{T}$ ; e iii)  $2\Theta \simeq 1/\tilde{T}$ . Para o primeiro caso,  $2\Theta \ll 1/2\tilde{T}$ , que corresponde a temperaturas muito baixas, podemos expandir  $\sin(2\pi\tilde{T}\Theta) \simeq 2\pi\tilde{T}\Theta$ ;  $\cot(2\pi\tilde{T}\Theta) \simeq 1/2\pi\tilde{T}\Theta$  e então obtemos

$$\Theta \simeq \frac{N}{F} \ln \frac{N}{F}, \quad \rho \simeq \frac{\alpha_l N}{F},$$

$$S \simeq \left(\frac{N}{F}\right)^N \ln \left(\frac{N}{F}\right) g_N. \quad (4.15)$$

Para o segundo caso,  $\Theta \simeq 1/4\tilde{T}$ ,  $\sin(2\pi\tilde{T}\Theta) \simeq 1$  e  $\cot(2\pi\tilde{T}\Theta) \simeq 0$ . Então temos

$$\theta \simeq \frac{N}{F} \ln \frac{1}{\tilde{T}}, \quad \rho \simeq \frac{\alpha_l N}{F},$$

$$S \simeq \left(\frac{N}{F}\right)^N \ln \left(\frac{1}{\tilde{T}}\right) g_N. \quad (4.16)$$

Para o último caso,  $\Theta \simeq 1/2\tilde{T}$ ,  $\sin(2\pi\tilde{T}\Theta) \simeq \sin(\pi - 2\pi\tilde{T}\Theta) \simeq (\pi - 2\pi\tilde{T}\Theta)$ . Tomando  $1/\tilde{T} - 2\Theta \simeq 1$ , o termo logaritmico na equação (4.12b) se anula e nós obtemos

$$\Theta \simeq \frac{1}{2\tilde{T}}, \quad \rho \simeq \frac{\alpha_l(N-1)}{F},$$

$$S = \frac{16}{N} \frac{1}{2\tilde{T}} g_N S_N \left(\frac{\alpha_l(N-1)}{F}\right) = \frac{8}{\tilde{T}} g_N \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(1+N/2)} \left(\frac{\alpha_l(N-1)}{F}\right)^{N-1}. \quad (4.17)$$

Este resultado é o mesmo que o obtido no modelo clássico de sine-Gordon por Maki [36]. Comparando (4.17) com (4.5) e (4.6) observamos que no limite clássico, o raio crítico descrevendo transições do estado meta-estável é

$$R_c = \left[ \frac{\alpha_l(N-1)}{F} \right]. \quad (4.18)$$

Para a corda elástica  $N = 1$ ,  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$  e nós obtemos  $S = 16g/\tilde{T}$ , a solução clássica obtida anteriormente (veja Eq. (3.112e)). Deveria ser notado a partir de (4.17) que para  $N = 1$  a altura da barreira é constante para forças externas indo a zero [ $U/\tilde{T}(F \rightarrow 0) = 16g/\tilde{T}$ ], enquanto que ela diverge para dimensões mais altas [ $U/\tilde{T}(F \rightarrow 0) \propto 1/F^{N-1}$ ]. Além disso, ao analisarmos a equação (4.18) observamos que para  $N = 1$  o raio crítico se anula no limite clássico. Isto acontece porque na aproximação de paredes finas a espessura da parede é considerada nula, e no regime térmico nós não temos que ativar nenhum pedaço da corda para o próximo mínimo, mas simplesmente criar os 'kinks' (parede).

#### 4. SALTO QUÂNTICO DE UM FEIXE TRIDIMENSIONAL

Após calcular a ação descrevendo o processo de decaimento de uma variedade elástica  $N$ -dimensional, podemos começar a analisar o salto de vórtices intrinsecamente aprisionados em supercondutores em camadas. Para campos magnéticos fracos, os poucos vórtices no supercondutor praticamente não interagem e o comportamento dissipativo do material pode ser descrito pela dinâmica de um único fluxóide. Para campos mais altos, a interação entre as linhas de fluxo se torna essencial e o objeto tunelando é um feixe tridimensional (veja figura 16).

A ativação térmica de feixes de vórtices na presença de um campo magnético aplicado paralelo às camadas foi estudado por Chakravarty, Ivlev e Ovchinnikov [54]. Aqui nós estendemos os cálculos para o limite quântico. Eles obtiveram que para campos magnéticos  $H$  maiores que

$$H_b = \frac{16\pi\lambda^2}{cd} j \quad (4.19)$$

o objeto tunelando é um feixe de vórtices (veja Eq. (7) na Ref. [54] e note que aqui estamos considerando uma corrente externa constante e variando o campo magnético, enquanto que a análise feita em [54] é para campos magnéticos constantes com correntes variáveis).

A taxa de decaimento para um feixe de vórtices não-amortecido tridimensional a temperatura zero é obtida tomando  $N = 3$  na equação (4.6),

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{6912}{\pi} \left(\frac{j_c}{j}\right)^3 \left(\frac{d}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{m}{v_o}} \left[\left(\frac{d}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{\epsilon_l}{v_o}}\right]^3 v_o. \quad (4.20)$$

Para temperaturas finitas nós tomamos  $N = 3$  na Eq. (4.8), e obtemos

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{2048}{3\pi} \left(\frac{j_c}{j}\right)^2 \frac{1}{T} \left[\left(\frac{d}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{\epsilon_l}{v_o}}\right]^3 v_o. \quad (4.21)$$

A taxa de decaimento para um feixe de vórtices super-amortecido tridimensional pode ser obtido a partir das equações (4.15) a (4.17),

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} \simeq \left(\frac{j_c}{j}\right)^3 \ln \left(\frac{j_c}{j}\right) \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 \frac{\eta}{v_o} \left[\left(\frac{d}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{\epsilon_l}{v_o}}\right]^3 v_o, \quad T = 0, \quad (4.22)$$



$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} \simeq \left(\frac{j_c}{j}\right)^3 \ln \left(\frac{4\pi^2 \hbar v_o}{\eta d^2 T}\right) \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 \frac{\eta}{v_o} \left[\left(\frac{d}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{\epsilon_l}{v_o}}\right]^3 v_o, \quad 0 < T < T_0, \quad (4.23)$$

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} \simeq \left(\frac{j_c}{j}\right)^2 \frac{1}{T} \left[\left(\frac{d}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{\epsilon_l}{v_o}}\right]^3 v_o, \quad T \lesssim T_0. \quad (4.24)$$

No limite clássico, a taxa de decaimento é determinada pela energia de ativação, que pode ser obtida tomando  $N = 2$  na Eq. (4.6) e substituindo  $\tau_o$  por  $x_o$  em  $g_N$ ,

$$-\ln \Gamma \propto \frac{U}{T} = \frac{2048}{3\pi} \left(\frac{j_c}{j}\right)^2 \frac{1}{T} \left[\left(\frac{d}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{\epsilon_l}{v_o}}\right]^3 v_o. \quad (4.25)$$

É fácil observar que este resultado coincide com Eqs. (4.21) e (4.24). Devemos notar que Eq. (4.25) apresenta a mesma dependência  $1/j^2$  que a obtida por Chakravarty, Ivlev e Ovchinnikov no limite clássico, a despeito do fato deles representarem o feixe de vórtices por uma caixa retangular, e de nós considerarmos aqui uma esfera.

## 5. SALTO QUÂNTICO DE UM FEIXE PLANAR

Vamos nos concentrar agora num supercondutor anisotrópico fino. A denominação supercondutor anisotrópico se aplica a materiais com um espaçamento  $d$  entre camadas muito menor do que o comprimento de coerência ao longo do eixo  $c$ ,  $d < \xi_c$ . Além disso, a amostra deve ser fina, com uma espessura  $L$  pequena se comparada com a extensão do feixe de vórtices ao longo do eixo  $c$ ,  $L < d(c_{11}/v_o)^{1/2}$ , onde  $c_{11}$  é o módulo de compressão da rede de vórtices e  $v_o = \Phi_o j_c d / 2\pi c$ . Neste caso podemos desprezar as variações de  $u$  ao longo do eixo  $c$  e o problema se torna efetivamente bidimensional (veja Fig. 17). Ivlev e Kopnin [55] consideraram este problema no limite de altas temperaturas (regime clássico). Nós estamos agora aptos a generalizar para o limite quântico os resultados por eles obtidos.

A energia livre descrevendo esta situação é

$$\mathcal{F}[u(x, y)] = L \int d^2 r \left[ \frac{c_{66}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{c_{44}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + U_{in}(u) \right], \quad (4.26)$$

onde  $c_{66}$  e  $c_{44}$  são respectivamente os módulos de cisalhamento e inclinação fora do plano, e o potencial  $U_{in}$  é dado pela Eq. (3.5). Para estratificação suficientemente fraca podemos

desprezar a dispersão no módulo de inclinação e assim a energia livre se torna isotrópica, de modo que

$$\mathcal{F}[\mathbf{u}(x, y)] = L \int d^2r \left[ \frac{\varepsilon_l}{2} (\nabla u)^2 + \tilde{U}_{in}(u) \right], \quad (4.27)$$

com  $\varepsilon_l = \sqrt{c_{44}c_{66}}$  e  $\tilde{U}_{in}(u) = \sqrt{c_{44}/c_{66}}U_{in}$ . Agora os resultados obtidos para o salto de uma variedade elástica  $N$ -dimensional podem ser aplicados simplesmente tomando  $N = 2$ .

No limite sub-amortecido a temperatura zero obtemos [tomamos  $N = 2$  em (4.6)]

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{8^4}{6\pi} \left( \frac{j_c}{j} \right)^2 \left( \frac{d}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{m}{v_o}} \left[ \left( \frac{d}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{v_o}} \right]^2 v_o L, \quad (4.28)$$

e para temperaturas finitas tomamos  $N = 2$  na Eq. (4.8),

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{32}{T} \left( \frac{j_c}{j} \right) \left[ \left( \frac{d}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{v_o}} \right]^2 v_o L. \quad (4.29)$$

No limite super-amortecido temos [ $N = 2$  nas Eqs. (4.15) a (4.17)],

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} \simeq \left( \frac{j_c}{j} \right)^2 \ln \left( \frac{j_c}{j} \right) \left( \frac{d}{2\pi} \right)^2 \frac{\eta}{v_o} \left[ \left( \frac{d}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{v_o}} \right]^2 v_o L, \quad T = 0, \quad (4.30)$$

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} \simeq \left( \frac{j_c}{j} \right)^2 \ln \left( \frac{4\pi^2 \hbar v_o}{\eta d^2 T} \right) \left( \frac{d}{2\pi} \right)^2 \frac{\eta}{v_o} \left[ \left( \frac{d}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{v_o}} \right]^2 v_o L, \quad 0 < T < T_0, \quad (4.31)$$

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \left( \frac{j_c}{j} \right) \frac{32}{T} \left[ \left( \frac{d}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{v_o}} \right]^2 v_o L, \quad T \lesssim T_0. \quad (4.32)$$

Para o regime clássico nós tomamos  $N = 1$  na Eq. (4.6), e obtemos

$$-\ln \Gamma \propto \frac{S}{\hbar} = \frac{32}{T} \left( \frac{j_c}{j} \right) \left[ \left( \frac{d}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{v_o}} \right]^2 v_o L, \quad (4.33)$$

que é o resultado obtido por Ivlev e Kopnin (veja Eq. (21) na Ref. [56]).

## 6. CONCLUSÕES

O salto de um feixe de vórtices intrinsecamente aprisionados num supercondutor em camadas foi considerado no presente capítulo. Para o caso de um supercondutor anisotrópico fino, nós estudamos o movimento das linhas de fluxo na presença de um campo

magnético forte. Nestes materiais, o tunelamento quântico dos vórtices ocorre através da formação de um núcleo bidimensional, que é uma deformação da rede de vórtices correspondendo a um valor extremo da ação. Este núcleo é composto de um feixe de linhas de fluxo com uma dimensão de correlação planar muito maior do que o período da rede de vórtices. O feixe se move ao longo do eixo  $c$  com passos discretos, durante cada evento de ativação o feixe percorre uma distância da ordem do espaçamento  $d$  entre os planos.

No limite sub-amortecido a ação mínima descrevendo o processo de decaimento no caso em que uma corrente muito baixa ( $j \rightarrow 0$ ) é aplicada ao supercondutor diverge como  $j^{-2}$  a temperatura zero, enquanto que a temperaturas finitas a divergência se reduz e  $S \propto (jT)^{-1}$ . No limite super-amortecido obtivemos que a temperatura zero  $S \propto j^{-2} \ln j$ , e a temperaturas finitas  $S \propto j^{-2} \ln T$ . No regime clássico nossos resultados coincidem com aqueles obtidos anteriormente por Ivlev e Kopnin.

É importante lembrar que há duas condições para a aplicabilidade dos nossos resultados: primeiro, a espessura da amostra deve ser menor do que a extensão do feixe de vórtices ao longo do eixo  $c$ , e segundo, a aproximação do módulo de inclinação  $c_{44}$  não dispersivo é válida apenas quando o comprimento característico do campo de deslocamento  $u_z$  excede o comprimento de London efetivo  $\lambda_{eff}$ . Portanto, esta última condição restringe a região de validade dos nossos resultados para campos

$$\frac{H_{c2} - H}{H_{c2}} \gg \kappa \left( \frac{\xi_c}{d} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{-4\xi_c^2}{d^2} \right).$$

Para um supercondutor fortemente em camadas, tal que o espaçamento  $d$  entre os planos de CuO é maior ou da ordem do comprimento de coerência ao longo do eixo  $c$  ( $d \gtrsim \xi_c$ ), o núcleo crítico é um feixe de vórtices tridimensional. Neste caso, a ação mínima descrevendo o processo de tunelamento no limite não amortecido diverge como  $S \propto j^{-3}$  a  $T = 0$ , enquanto que a temperaturas finitas a altura da barreira (energia de ativação) diverge com um expoente  $\mu = 2$ ,  $U \propto j^{-2}$ . No limite super-amortecido, um termo logaritmico aparece multiplicando o resultado sem amortecimento: a temperatura zero  $S \propto j^{-3} \ln j$ , e a temperaturas finitas  $S \propto j^{-3} \ln T$ . A altas temperaturas  $T > T_0$

recuperamos o resultado  $U \propto j^{-2}$ . Isto porque a taxa de decaimento no regime térmico (clássico) independe da dinâmica considerada (massiva ou dissipativa), uma vez que os nossos cálculos envolvem apenas o termo exponencial. Uma completa determinação da taxa de decaimento incluindo o pré-fator é deixada para estudos futuros.

## V. CONCLUSÕES

Neste trabalho nós estudamos o decaimento de sistemas aprisionados em mínimos meta-estáveis de um potencial periódico inclinado. Levando em conta os efeitos de dissipação devido ao acoplamento do sistema de interesse com o meio que o cerca, nós determinamos a taxa de decaimento a baixas temperaturas, quando o escape do mínimo meta-estável procede via tunelamento quântico sob a barreira de potencial. O decaimento quântico de uma partícula puntual aprisionada num estado meta-estável foi extensivamente considerado nos últimos anos (para uma revisão veja [13]). Entretanto, uma melhor compreensão do problema envolvendo um maior número de graus de liberdade restava ser obtida.

Inicialmente nós aplicamos a teoria de tunelamento quântico macroscópico a um dc SQUID atravessado por corrente, que é equivalente a um sistema de duas partículas interagentes e como tal é intermediário entre um problema zero- e unidimensional, como realizado num rf SQUID e numa linha de vórtice tunelando, respectivamente. A probabilidade de decaimento foi obtida na aproximação exponencial para o caso super-amortecido. Próximo à força controladora crítica do sistema, o escape do estado meta-estável é determinado por uma única solução instanton descrevendo o decaimento simétrico das fases em cada uma das junções Josephson. Mediante redução da força controladora externa, um novo regime é atingido onde o instanton se separa e a diminuição da taxa de decaimento é reduzida.

Baseados na teoria de transição de fase de Landau, nós construímos um diagrama de fase para temperatura e corrente e observamos que, dependendo dos parâmetros externos, o sistema desenvolve uma transição de fase de primeira ou segunda ordem para o regime de separação do instanton [14]. De um ponto de vista experimental, resta mencionar que embora a bifurcação estática do ponto de sela tenha sido experimentalmente verificada no regime térmico [15], ainda não há experimentos no regime quântico com a finalidade de observar a separação dinâmica do instanton. Para tanto, é necessário um circuito otimizado com uma indutância grande o suficiente para tornar o efeito observável, mas

pequena o suficiente para evitar problemas de ruído.

Além disso, a teoria de uma corda elástica aprisionada em um estado meta-estável foi desenvolvida visando descrever o salto quântico de um único vórtice em um supercondutor de alta temperatura com um campo magnético aplicado paralelo aos planos de CuO. Os cálculos foram feitos para o caso específico de um potencial periódico ligeiramente inclinado (pequena força externa) onde a 'aproximação de paredes finas' (thin wall approximation) pode ser aplicada [57]. A taxa de decaimento e a forma do núcleo crítico descrevendo a transição do estado meta-estável foram determinados em todo o intervalo de temperaturas para três tipos de dinâmica: massiva, dissipativa e Hall [29].

Nós observamos que no limite de baixas correntes  $j \ll j_c$ , um sistema massivo entra no regime quântico a partir de temperaturas inferiores a  $T_0^{(m)} \propto \sqrt{j/m}$ , e mostra uma saturação da taxa de decaimento a baixas temperaturas,  $-\ln \Gamma_0 \propto j^{-1}$ . Neste caso, duas fases distintas podem ser observadas no regime quântico: a baixas temperaturas  $0 < T < T^*$  o decaimento ocorre basicamente devido ao tunelamento sob a barreira de potencial (regime puramente quântico), enquanto que a temperaturas mais altas,  $T^* < T < T_0^{(m)}$  o tunelamento é auxiliado pela temperatura (regime de tunelamento quântico termicamente assistido).

Por outro lado, no caso de um sistema dissipativo, o regime quântico ocorre a temperaturas inferiores a  $T_0^{(\eta)} \propto j/\eta$  e a taxa de decaimento a temperatura zero se torna  $\ln \Gamma_0 \propto j^{-1} \ln j$ . No caso super-amortecido o regime puramente quântico ocorre apenas a  $T = 0$ . Devido a uma interação logarítmica entre as paredes horizontais do núcleo crítico, o mesmo começa a se contrair assim que a temperatura é acrescida a partir do zero. Assim, o tunelamento imediatamente se torna termicamente assistido e as correções devido à temperatura obedecem uma lei de potências, em contraste com as correções exponencialmente pequenas ocorrendo no caso massivo para  $0 < T < T^*$ . Tal comportamento é semelhante àquele obtido para uma partícula puntual decaindo de um estado meta-estável [12].

Para materiais super-limpos, quando a dinâmica é governada pelo mecanismo Hall, efei-

tos quânticos tornam-se relevantes a temperaturas abaixo de  $T_0^{(\alpha H)} \propto j/\alpha_H$ . Neste caso a taxa de decaimento a baixas temperaturas ainda se anula segundo a lei de Arrhenius, mas com uma energia de ativação que é reduzida devido aos efeitos quânticos. Este comportamento inesperado se deve ao vínculo descrito pela equação (3.118): o núcleo crítico descrevendo o decaimento do estado meta-estável a temperatura zero não pode se “fechar” ao longo do eixo  $\tau$ , implicando na divergência da ação. O “fechamento” do núcleo pode ser obtido ao considerarmos uma massa finita, ou uma dissipação finita, ou ainda via a introdução de um centro de nucleação (defeito) que quebra a simetria translacional do material [58, 59].

Posteriormente, nós generalizamos o problema de tunelamento a partir de uma corda a um objeto de maiores dimensões, como uma superfície elástica (2D) ou um volume (3D). A partir de valores de campo magnético intermediários, o processo elementar produzindo salto de linhas de fluxo envolve o movimento de um feixe de vórtices através das camadas supercondutoras, e não mais o deslocamento de um único vórtice. Isto significa que dependendo do tamanho relativo entre o feixe de vórtices ativado e a amostra supercondutora o objeto tunelando será bidimensional (planar) ou tridimensional (volumétrico).

Nós verificamos que um comportamento tipicamente vítreo foi obtido, com a altura  $U$  da barreira divergindo no limite de baixas correntes  $j \rightarrow 0$ : para uma variedade elástica  $N$ -dimensional, temos que a altas temperaturas  $U \propto 1/j^{N-1}$ , enquanto que a temperatura zero a ação diverge como  $S \propto 1/j^N$ . Finalmente, resta mencionar que no que concerne os experimentos, uma apropriada comparação com os nossos resultados ainda não pode ser estabelecida: em todos os experimentos de relaxação magnética em supercondutores de alta- $T_c$  realizados até o momento, o campo magnético é sempre aplicado na direção perpendicular aos planos de CuO. Um único experimento com uma configuração semelhante à tratada aqui foi realizado com um supercondutor orgânico pelo grupo de A. C. Mota [22]. Neste material, que também é caracterizado por uma estrutura planar, os resultados obtidos para um campo magnético aplicado paralelo aos planos são qualitativamente semelhantes aos obtidos para um campo magnético perpendicular aos planos. Isto

indica que qualitativamente os nossos resultados foram observados. No entanto, outros experimentos precisam ser feitos de modo a podermos obter uma satisfatória comparação entre os resultados teóricos e experimentais.



## APÊNDICE A

### *Distância $2R$ entre dois kinks térmicos*

A equação de movimento no regime térmico em termos das variáveis adimensionais  $u_z$  e  $x$  é dada por

$$-\frac{d^2 u_{z0}}{dx^2} + V'(u_{z0}) = 0, \quad (\text{A-1})$$

onde  $V'(u_{z0}) = U_{in}'(u_{z0}) - F$ . Vamos considerar agora a solução térmica

$$u_{z0}(x) = u_0(x) + \delta u(x), \quad (\text{A-2})$$

onde  $u_0(x) = u_{z0}^{(0)}(x+R) - u_{z0}^{(0)}(x-R) - 1$ . Substituindo a Eq. (A-2) na Eq. (A-1), expandindo  $V'(u_0 + \delta u)$  ao redor de  $u_0$  e usando que (veja Eq. (3.13))

$$\frac{d^2 u_{z0}^{(0)}(x \pm R)}{dx^2} = U_{in}'(u_{z0}^{(0)}(x \pm R)), \quad (\text{A-3})$$

nós obtemos

$$-\frac{d^2 \delta u}{dx^2} + \delta u V''(u_0) + V'(u_0) - U_{in}'(u_{z0}^{(0)}(x+R)) + U_{in}'(u_{z0}^{(0)}(x-R)) = 0. \quad (\text{A-4})$$

Multiplicando agora (A-4) por  $w(x)$ ,

$$w(x) = \frac{du_{z0}^{(0)}(x-R)}{dx} + \frac{du_{z0}^{(0)}(x+R)}{dx}, \quad (\text{A-5})$$

e integrando sobre  $x$  nós encontramos (após efetuar uma integração por partes)

$$\int_0^\infty dx w(x) \left[ V'(u_0) - U_{in}'(u_{z0}^{(0)}(x+R)) + U_{in}'(u_{z0}^{(0)}(x-R)) \right] + \int_0^\infty dx \delta u(x) \left[ -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + w(x) V''(u_0) \right] = 0. \quad (\text{A-6})$$

O último termo em (A-6) é de ordem mais alta e pode ser desprezado. Assim nós temos

$$\int_0^\infty dx \left[ \frac{du_{z0}^{(0)}(x-R)}{dx} + \frac{du_{z0}^{(0)}(x+R)}{dx} \right] \left[ U_{in}'(u_0) - U_{in}'(u_{z0}^{(0)}(x+R)) + U_{in}'(u_{z0}^{(0)}(x-R)) \right] = 2F. \quad (\text{A-7})$$

Usando que  $U_{in}'(u_0) = -U_{in}'(-u_0)$ , i. e.,  $U_{in}'(u_0)$  é uma função ímpar e expandindo

$$\begin{aligned} U_{in}'(u_0) &= -U_{in}'(u_{z_0}^{(0)}(x-R) + 1 - u_{z_0}^{(0)}(x+R)) \\ &\sim -U_{in}'(u_{z_0}^{(0)}(x-R)) - [1 - u_{z_0}^{(0)}(x+R)]U_{in}''(u_{z_0}^{(0)}(x-R)) \end{aligned} \quad (A-8)$$

e

$$\begin{aligned} U_{in}'(u_{z_0}^{(0)}(x+R)) &= U_{in}'(1 + u_{z_0}^{(0)}(x+R) - 1) \\ &\sim U_{in}'(1) - U_{in}''(1)[1 - u_{z_0}^{(0)}(x+R)] \end{aligned} \quad (A-9)$$

nós obtemos

$$\begin{aligned} 2F &\sim \int_0^\infty dx \left[ \frac{du_{z_0}^{(0)}(x-R)}{dx} + \frac{du_{z_0}^{(0)}(x+R)}{dx} \right] [1 - u_{z_0}^{(0)}(x+R)][U_{in}''(1) - \\ &U_{in}''(u_{z_0}^{(0)}(x-R))] \sim [1 - u_{z_0}^{(0)}(2R)] \int_0^\infty dx \frac{du_{z_0}^{(0)}(x-R)}{dx} [U_{in}''(1) - U_{in}''(u_{z_0}^{(0)}(x-R))] \\ &\sim 2U_{in}''(1)[1 - u_{z_0}^{(0)}(2R)]. \end{aligned} \quad (A-10)$$

Lembrando que  $\gamma^2 = U_{in}''(1)$  e definindo  $v = 1 - u_{z_0}^{(0)}(2R)$  nós finalmente concluímos que

$$F = \gamma^2 v. \quad (A-11)$$

Tendo determinado  $u_{z_0}^{(0)}(2R) = 1 - v$ , nós estamos aptos a integrar a equação (3.14),

$$\int_{u_{z_0}^{(0)}(0)}^{u_{z_0}^{(0)}(2R)} \frac{du_{z_0}^{(0)}}{\sqrt{2U(u_{z_0}^{(0)})}} = \int_0^{2R} dx$$

e assim encontrar a distância  $2R$  entre os dois kinks,

$$2R = \int_0^{1-v} \frac{du_{z_0}^{(0)}}{\sqrt{2U(u_{z_0}^{(0)})}} = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\rho}{v}, \quad (A-12)$$

onde

$$\rho = \exp \left[ \int_0^1 du_{z_0}^{(0)} \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2U(u_{z_0}^{(0)})}} - \frac{1}{1 - u_{z_0}^{(0)}} \right) \right]$$

foi definido de modo a remover a singularidade a  $u_{z_0}^{(0)} = 1$ . Finalmente, substituindo

(A-11) em (A-12) nós obtemos

$$2R = \frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{\rho \gamma^2}{F} \right). \quad (A-13)$$

## APÊNDICE B

### *Coefficiente de tensão linear para paredes quase horizontais*

Vamos começar considerando o caso de paredes aproximadamente horizontais, quando  $|v| = |d\theta/dx| \ll 1$ . Neste caso  $\partial u/\partial x \sim 0$  e pode ser desprezado na Eq. (3.76). Lembrando também que a força externa é muito pequena ( $F \ll 1$ ), a equação de movimento restante é

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \frac{\partial u}{\partial \tau_1} \frac{1}{(\tau - \tau_1)} + \sin u = 0. \quad (\text{B-1})$$

Esta é uma equação integral singular não linear e sua solução é dada por

$$u(\tau) = 2 \operatorname{arccot}(\tau + \text{const.}).$$

Substituindo a constante por  $\pm\theta(x)$ , que é quase constante, obtemos uma solução aproximada para (3.78),

$$u(x, \tau) = 2 \operatorname{arccot}(\tau + \theta) - 2 \operatorname{arccot}(\tau - \theta). \quad (\text{B-2})$$

Substituição da trajectória  $u(x, \tau)$  (B-2) na ação (3.76) fornece a ação extrema

$$S = 4\pi g \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \ln |2\theta| - F\theta + 1 \right\}. \quad (\text{B-3})$$

Comparando (B-3) com (3.81) nós concluímos que para o caso de paredes quase horizontais o coeficiente de tensão linear é aproximadamente constante,

$$\alpha \simeq 1, \quad |v| \ll 1. \quad (\text{B-4})$$

## APÊNDICE C

### *Coefficiente de tensão linear para paredes quase verticais*

No limite de paredes quase verticais  $|v| \gg 1$  e  $\partial u / \partial \tau \sim 0$ . Considerando  $F$  e  $\partial u / \partial \tau$  na ação (3.76) como pequenas perturbações obtemos a seguinte equação de movimento:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin u = 0. \quad (\text{C-1})$$

Esta é uma equação do tipo sine-Gordon, cuja solução é dada por  $u(x) = 2 \operatorname{arccot}[\sinh(x)]$ .

Assim, uma solução aproximada da equação de movimento geral (3.78) neste limite é

$$u(x, \tau) = 2 \operatorname{arccot}[\sinh(x - \tau/v)], \quad (\text{C-2})$$

porque  $|\tau/v| \ll 1$ . Vamos supor que a Eq. (C-2) seja uma solução da Eq. (3.78) para  $x > 0$  e  $\tau > 0$ . Se  $x > 0$  mas  $\tau < 0$ ,  $v$  troca de sinal e a solução acima é ainda válida. Com a finalidade de simplificar o problema, ao invés de considerarmos uma solução completa descrevendo os lados esquerdo e direito das paredes ( $x > 0$  and  $x < 0$ ), nós tratamos apenas o caso de  $x > 0$  e multiplicamos a ação resultante por um fator 2. Este procedimento é permitido porque os lados direito e esquerdo das paredes não estão interagindo, uma vez que eles correspondem a diferentes valores de  $x$ . Note que no caso anterior (paredes quase horizontais) tal simplificação não é possível porque as partes superior e inferior das paredes estão interagindo. Substituindo Eq. (C-2) na ação (3.76) e multiplicando o resultado por um fator 2 (veja discussão acima) obtemos

$$S = 4\pi g \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{4}{\pi} - \int_{-\infty}^{\infty} dx F \theta - \frac{1}{\pi^2 v^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\cosh(x - \tau/v)} \int_0^{\infty} \frac{d\tau_1}{\cosh(x - \tau_1/v)} [\ln |\tau - \tau_1| - \ln |\tau + \tau_1|] \right\}. \quad (\text{C-3})$$

Vamos agora considerar o limite  $1 \ll |v| \ll |\theta|$ . Neste caso a escala de integração na equação acima é  $\delta\tau \sim |v| \ll |\theta|$  e podemos substituir  $\tau + \tau_1 = 2\theta$  no último termo da Eq. (C-3) ( $\propto \ln |\tau + \tau_1|$ ), obtendo desta maneira o último termo na Eq. (3.81). O terceiro termo na Eq. (C-3) pode ser estimado com precisão logarítmica como

$$-\frac{4g}{\pi v^2} \int_0^{\infty} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh(x)} \int_{-\theta}^{\infty} \frac{d\tau_1}{\cosh(x - \tau_1/v)} \ln |\tau_1| = -8\pi g \int_0^{\infty} d\theta \frac{\ln(2|v|)}{|v|}, \quad (\text{C-4})$$

onde tomamos  $\tau = \theta$ . Assim podemos reescrever a Eq. (C-3) como

$$S = 4\pi g \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \left[ \frac{4}{\pi} - \frac{\ln(2|v|)}{|v|} \right] + \int_{-\infty}^{\infty} dx [\ln |2\theta| - F\theta] \right\}. \quad (C-5)$$

Os dois últimos termos em (C-5) cancelam exatamente os dois últimos termos em (3.81).

Substituindo  $dx = d\theta/v$  em (3.81) podemos facilmente concluir que

$$\alpha = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{|v|} \ln(2|v|), \quad 1 \ll |v| \ll |\theta|. \quad (C-6)$$

No outro limite,  $|v| \gg |\theta|$  (e também  $|v| \gg 1$ ) a integração sobre  $\tau_1$  na Eq. (C-3) é suavizada (smeared) e se nós substituimos  $\tau$  by  $\theta$  nós obtemos após integração sobre  $x$

$$S = 4\pi g \left[ \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \frac{4}{\pi} - \int_{-\infty}^{\infty} dx F\theta \right] + \frac{8g}{\pi v^2} \int_0^{\infty} d\theta \int_0^{\infty} d\tau_1 \frac{[(\tau_1 - \theta)/v]}{\sinh[(\tau_1 - \theta)/v]} \ln \left| \frac{\tau_1 + \theta}{\tau_1 - \theta} \right|. \quad (C-7)$$

Uma estimativa do último termo em (C-7) dentro da precisão logarítmica mostra que ele pode ser desprezado porque ele é proporcional a  $(\theta/v^2) \ln |v/\theta|$  e nós estamos considerando os limites quando  $|v| \gg 1$  and  $|v| \gg |\theta|$ . A comparação da equação restante [primeiro e segundo termos em (C-7)] com (3.81) fornece

$$\alpha = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{|v|} \ln(2|\theta|), \quad |v| \gg |\theta|. \quad (C-8)$$

Podemos unificar Eqs. (C-6) e (C-8) escrevendo a fórmula de interpolação

$$\alpha(v, \theta) = \frac{4}{\pi} + \frac{1}{|v|} \ln \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{1}{\theta^2}} \right), \quad |v| \gg 1, \quad (C-9)$$

que descreve o coeficiente de tensão linear no caso de paredes quase verticais.

## APÊNDICE D

*Equação de movimento para a posição da parede  $R(\tau)$  no caso Hall*

A partir da equação (3.119) temos que a equação de movimento efetiva na direção  $z$  é

$$-\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \int_x^\infty dx_1 \int_{x_1}^\infty dx_2 \frac{\partial^2 u_z(x_2, \tau)}{\partial \tau^2} + U_{in}'(u_z(x, \tau)) - F = 0, \quad (D-1)$$

e o sistema está sujeito ao vínculo (3.118). Vamos agora considerar o seguinte Ansatz:

$$u_z(x, \tau) = u_0(x, \tau) + \delta u(x, \tau), \quad (D-2)$$

onde  $u_0(x, \tau) = u_{z0}^{(0)}(x + R(\tau)) - u_{z0}^{(0)}(x - R(\tau)) - 1$  e  $\delta u(x, \tau)$  é uma pequena correção devido à interação entre os kinks. Note que agora a posição  $R$  da parede é uma função de  $\tau$ ,  $R = R(\tau)$ , enquanto que no apêndice A (regime térmico)  $R$  era uma constante. Substituindo o Ansatz (D-2) na equação de movimento (3.119), expandindo  $U_{in}'(u_0 + \delta u)$  ao redor de  $u_0$ , e usando a equação (A-3) nós obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \delta u U_{in}''(u_0) + U_{in}'(u_0) + U_{in}'(u_{z0}^{(0)}(x - R)) - U_{in}'(u_{z0}^{(0)}(x + R)) - F + \\ & \int_x^\infty dx_1 \int_{x_1}^\infty dx_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [u_{z0}^{(0)}(x_2 + R) - u_{z0}^{(0)}(x_2 - R) - 1 + \delta u(x_2, \tau)] = 0. \end{aligned} \quad (D-3)$$

Como o potencial  $U_{in}''(u(x))$  tem aproximadamente a forma de uma função delta, nós vamos aproximá-lo por  $s\delta(x)$ , onde  $s$  é um número e  $\delta(x)$  denota a função delta de Dirac. Neste caso, o deslocamento  $u_{z0}^{(0)}$  se torna uma função sinal. Então, com o auxílio das equações (A-8) e (A-9) dadas no apêndice A nós temos

$$\begin{aligned} & U_{in}'(u_0) + U_{in}'(u_{z0}^{(0)}(x - R)) - U_{in}'(u_{z0}^{(0)}(x + R)) \\ & \sim (1 - u_{z0}^{(0)}(x + R))[U_{in}''(1) - U_{in}''(u_{z0}^{(0)}(x - R))] \\ & \sim \beta s e^{-2\gamma R} [\delta(x - R) + \delta(x + R)], \quad x > 0 \end{aligned} \quad (D-4)$$

onde o número  $s$  é definido como

$$s = - \int_{-1}^1 \frac{du_{z0}^{(0)}}{\sqrt{2U(u_{z0}^{(0)})}} [U_{in}''(u_{z0}^{(0)}) - U_{in}''(1)] \quad (D-5)$$

e nós usamos  $1 - u_{z0}^{(0)}(2R) = \beta e^{-2\gamma R}$  (veja apêndice A). Assim a equação de movimento

(D-3) pode ser reescrita como

$$-\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \delta u[\gamma^2 - s\delta(x-R) - s\delta(x+R)] + s\beta e^{-2\gamma R}[\delta(x-R) + \delta(x+R)] - F + \int_x^\infty dx_1 \int_{x_1}^\infty dx_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [\text{sgn}(x_2+R) - \text{sgn}(x_2-R) - 1 + \delta u(x_2, \tau)] = 0. \quad (\text{D-6})$$

Na representação de Fourier, onde

$$\delta u(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \delta u(k, \tau),$$

a equação (D-6) se torna

$$(k^2 + \gamma^2)\delta u(k, \tau) - 2s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \delta u(k_1, \tau) \cos[(k_1 - k)R] - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[ \frac{4}{k} \sin(kR) + \delta u(k, \tau) \right] + 2s\beta e^{-2\gamma R} \cos(kR) - 2\pi F\delta(k) = 0. \quad (\text{D-7})$$

Indo para a representação de Fourier, desta vez para a variável  $\tau$ ,

$$\delta u(k, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} \delta u(k, \omega),$$

e definindo

$$a_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \delta u(k, \omega) e^{\pm ikR} \quad (\text{D-8})$$

nós finalmente obtemos uma expressão para  $\delta u(k, \omega)$

$$\delta u(k, \omega) = \frac{(2\pi)^2 F\delta(k)\delta(\omega) - 2s\beta e^{-2\gamma R} \cos(kR) - (4\omega^2 R/k^2) \cos(kR) + s(a_1 e^{-ikR} + a_2 e^{ikR})}{k^2 + \gamma^2 + \omega^2/k^2}. \quad (\text{D-9})$$

Substituindo (D-9) em (D-8) nós encontramos

$$a_1 = sa_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{k^2 + \gamma^2 + \omega^2/k^2} + sa_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{2ikR}}{k^2 + \gamma^2 + \omega^2/k^2} + \frac{2\pi}{\gamma^2} F\delta(\omega) - s\beta e^{-2\gamma R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1 + e^{2ikR}}{k^2 + \gamma^2 + \omega^2/k^2} - 2\omega^2 R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1 + e^{2ikR}}{k^2(k^2 + \gamma^2 + \omega^2/k^2)}. \quad (\text{D-10})$$

A baixas frequências (altas temperaturas), temos que

$$a_1 - sa_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{k^2 + \gamma^2 + \omega^2/k^2} \sim \omega a_1$$

e

$$sa_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{2ikR}}{k^2 + \gamma^2 + \omega^2/k^2} \sim (e^{-2\gamma R} + \omega)a_2$$

e portanto, elas podem ser desprezadas. Neste caso, a equação (D-10) se torna

$$2|\omega|R + \left( \frac{s\rho}{2} e^{-2\gamma R} - \frac{F}{\gamma} \right)_{\omega} = 0. \quad (\text{D-11})$$

Entretanto, com a correta aproximação devemos substituir  $s\rho/2$  by  $\gamma\rho$ , e a equação de movimento efetiva para a posição da parede  $R(\omega)$  é

$$2|\omega|R + (\rho\gamma^2 e^{-2\gamma R} - F)_{\omega} = 0. \quad (\text{D-12})$$



## FIGURAS

Fig. 1: dc SQUID consistindo de duas junções Josephson idênticas arranjadas simetricamente num anel supercondutor. As diferenças de fase  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  em cada JJ são as coordenadas macroscópicas decaindo a partir do estado meta-estável. Visando observar efeitos quânticos, o sistema é atravessado por uma corrente próxima da crítica, *i. e.*, as correntes  $I_1$  e  $I_2$  em cada ramo são ligeiramente menores do que a corrente crítica  $I_c$ . A forma efetiva do potencial é modificada ao alterarmos a corrente total  $I = I_1 + I_2$ .

Fig. 2: (a) Potencial periódico inclinado agindo nas diferenças de fase  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  na presença de uma corrente externa  $I$ . A forma do potencial resulta de um termo periódico cosenoidal (energia potencial das junções) combinado com o termo externo  $[\propto I(\varphi_1 + \varphi_2)]$  e com o termo de interação  $[\propto (\varphi_1 - \varphi_2)^2/L]$ . (b) Linhas equipotenciais plotadas para o potencial dado em (a). Os mínimos estão localizados ao longo da diagonal  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Dependendo do parâmetro externo  $I$  as fases  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  decaem a partir do mínimo meta-estável seguindo a diagonal (fase de único instanton) ou seguindo duas trajetórias próximas com  $q \neq 0$  (fase de separação do instanton).

Fig. 3: Vista detalhada da região próxima ao mínimo meta-estável do potencial efetivo expressa em termos das variáveis adimensionais  $p$  (centro de massa) e  $q$  (coordenada relativa). Escolhendo a corrente externa  $I$  próxima do valor crítico,  $2I_c - I \ll I_c$ , o potencial pode ser aproximado por uma forma cúbica. A forma do potencial é controlada pelo parâmetro diretor  $\alpha$ . (a) Para pequenos valores da corrente  $I$  ( $\alpha < 1$ ) o potencial tem um mínimo a  $(p_1, q_1)$ , um máximo a  $(p_2, q_2)$ , e dois pontos de sela,  $(p_3, q_3)$  e  $(p_4, q_4)$ . (b) Para uma corrente  $I$  correspondendo ao valor  $\alpha \geq 1$  os pontos 3 e 4 convergem no ponto 2, que se torna o novo ponto de sela.

Fig. 4: Diagrama de fase para temperatura e corrente em termos das variáveis adimensionais  $\theta = (\eta\pi\beta)T/\hbar E_J$  e  $\iota = \beta^2(2 - I/I_c)/4$  relacionadas respectivamente com a temperatura  $T$  e a corrente externa  $I$ . A altas correntes ( $\iota < 1$ ) o regime clássico de único ponto de sela a altas temperaturas é separado pela linha de cruzamento  $\theta_0(\iota) = \sqrt{\iota}$  do regime quântico com um único instanton. Este comportamento é o mesmo que para um sistema

consistindo de um único grau de liberdade. Para o presente sistema consistindo de dois graus de liberdade interagentes várias linhas críticas novas surgem no diagrama de fase temperatura-corrente: A altas temperaturas o regime clássico de um único ponto de sela é separado pela linha de cruzamento  $\iota = 1$  do regime clássico com dois pontos de sela; na região de baixas correntes ( $\iota > 1$ ) o regime clássico com duplo ponto de sela é separado do regime quântico com dois-instantons pela linha  $\theta_0(\iota) = (1 + \sqrt{4\iota - 3})/2$ ; e na região de grandes correntes ( $\iota < 1$ ) uma nova linha crítica  $\theta_s(\iota) = \sqrt{\iota + \sqrt{\iota - 1}}$  aparece no regime quântico, separando a fase de único instanton da fase de separação do instanton. A baixas temperaturas a transição através da linha crítica  $\theta_s(\iota)$  é suave, análoga a uma transição de fase de segunda ordem. A temperaturas próximas da temperatura de cruzamento  $\theta_0(\iota)$  a separação do instanton é abrupta, como numa transição de fase de primeira ordem.  $\theta^*$  é o ponto tri-crítico onde as transições de fase de primeira e segunda ordem se encontram. As taxas de decaimento ao longo das linhas  $\iota_i = \text{const.}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e  $\theta_j = \text{const.}$  ( $j = 1, 2$ ) estão ilustradas nas Figs. 5 e 6, respectivamente.

Fig. 5: Logaritmo da taxa de decaimento versus temperatura em termos das variáveis adimensionais  $\sigma = -(3\beta^2\hbar/16\pi\eta)\ln\Gamma$  e  $\theta = (\eta\pi\beta)T/\hbar E_J$  para três diferentes regiões dentro do diagrama de fase fenomenológico temperatura-corrente (veja Fig. 4). Para uma corrente grande ( $\iota_1 = 0.20$ ) e a altas temperaturas o sistema decai segundo a Eq. (41a),  $\sigma_\iota \propto 1/\theta$  (linha pontilhada). Mediante redução da temperatura, o regime quântico é atingido a  $\theta_0^{(1)} = 0.45$  e a taxa de decaimento se torna  $\sigma_0 \propto \text{const.} - \theta^2$  [veja (41b)]. O comportamento é o mesmo que para um sistema consistindo de um único grau de liberdade porque o termo de acoplamento entre as duas fases no SQUID é relevante e as forças a decaírem simetricamente. Se fixarmos a corrente externa a um valor mais baixo ( $\iota_2 = 0.64$ ) o sistema decai por ativação térmica a altas temperaturas, entra no regime quântico descrito pela Eq. (41b) a  $\theta_0^{(2)} = 0.80$  e então atinge uma nova fase no regime quântico a  $\theta_s^{(2)} = 0.66$  onde o instanton se separa e o valor relativo da taxa de decaimento aumenta (linha tracejada, veja (41c)). A transição a  $\theta_s^{(2)}$  é suave, como numa transição de fase de segunda ordem. Reduzindo ainda mais a corrente externa

( $\iota_3 = 0.96$ ) o sistema se comporta da mesma maneira, ( $\theta_0^{(3)} = 0.98$  e  $\theta_s^{(3)} = 0.97$ ) exceto por uma mudança abrupta na ação a  $\theta_s^{(3)}$ , um comportamento correspondendo a uma transição de fase de primeira ordem.

Fig. 6: Logaritmo da taxa de decaimento versus corrente em termos das variáveis adimensionais  $\sigma = -(3\beta^2\hbar/16\pi\eta)\ln\Gamma$  e  $\iota = \beta^2(2 - I/I_c)/4$  para valores fixos de temperatura ( $\theta_1 = 0.5$ ,  $\theta_2 = 0.95$ ). Para grandes correntes (pequenos  $\iota$ ) o sistema está no regime térmico descrito pela Eq. (41a),  $\sigma_t \propto \iota^{3/2}$  (linha pontilhada). No valor  $\iota_0^{(1)} = 0.25$  ( $\iota_0^{(2)} = 0.90$ ) o regime de único instanton é atingido [veja Eq. (41b),  $\sigma_0 \propto 3\iota - \text{const.}$ ] e a  $\iota_s^{(1)} = 0.53$  ( $\iota_s^{(2)} = 0.93$ ) o instanton se separa [linha tracejada, veja Eq. (41c)]. A separação pode ser suave (caso 1) ou abrupta (caso 2).

Fig. 7: Variedade elástica aprisionada num potencial periódico inclinado. Topo: Corda elástica unidimensional com um segmento finito (núcleo) ativado para o próximo vale. A energia de ativação envolve a criação de uma parede unidimensional (fina) que custa uma energia  $2\pi\alpha_l r$ , onde  $r$  é o raio do núcleo e  $\alpha_l$  é o coeficiente de tensão linear da parede. Se o núcleo é suficientemente grande,  $r > R$ , ele expande e a variedade elástica se move para o próximo vale. O núcleo crítico  $R$  é uma configuração pertencendo ao ponto de sela da energia superficial.

Fig. 8: Comportamento assintótico ( $x > R$ ) do campo de deslocamento no regime térmico (linha contínua) e no regime quântico justo abaixo de  $T_0$ . A forma do núcleo crítico a  $\tau = 0, \pi/\omega_1$  é mostrada no limite super-amortecido (linha tracejada), bem como para o caso geral com  $\eta_l$  e  $\alpha_H$  ambos finitos (linha pontilhada). Note a longa cauda desenvolvida pela dinâmica Hall a grandes distâncias  $x$ .

Fig. 9: Forma dos núcleos críticos descrevendo o salto de uma corda não-amortecida de  $u = 0$  para  $u = 2\pi$ . (a) A temperatura zero o período da bounce é infinito e o núcleo é circular (simétrico com respeito a  $x$  e  $\tau$ ), com um raio  $R \propto 1/F$ , onde  $F$  é a corrente externa adimensional. (b) A temperaturas finitas, mas muito baixas, ( $\tilde{T} \ll 1/2R$ ) o período da bounce (que é proporcional a  $1/\tilde{T}$ ) é ainda muito maior do que o diâmetro do núcleo (aproximação do gás diluído), e a solução de temperatura zero permanece válida. (c)

Aumentando a temperatura o período da bounce é reduzido e quando a temperatura atinge o valor crítico  $\tilde{T}^*$  os núcleos começam a interferir. (d) Para  $\tilde{T} > \tilde{T}^*$  a forma do núcleo é um pedaço do arco obtido anteriormente, *i. e.*, a solução de temperatura zero restrita pela periodicidade ao longo do eixo  $\tau$ . (e) A altas temperaturas  $\tilde{T}^* \ll \tilde{T} \lesssim \tilde{T}_0$  as paredes do núcleo são aproximadamente paralelas ao eixo  $\tau$ .

Fig. 10: Logaritmo da taxa de decaimento  $\Gamma$  como função da temperatura adimensional  $\tilde{T}$  para uma corda elástica massiva. A baixas temperaturas ( $\tilde{T} \leq \tilde{T}^*$ ) o decaimento é puramente quântico e a solução obtida a temperatura zero permanece válida, com correções desprezíveis (exponencialmente pequenas). Aumentando a temperatura acima da temperatura de cruzamento  $\tilde{T}^*$  um novo regime é atingido onde a corda ultrapassa a barreira devido a uma combinação dos mecanismos de tunelamento quântico e ativação térmica (regime de tunelamento quântico termicamente assistido). A altas temperaturas ( $\tilde{T} \geq \tilde{T}_0$ ) o processo de decaimento é puramente térmico e é descrito pela lei de Arrhenius.

Fig. 11: Solução exata do núcleo crítico com  $u = 2\pi$  num background com  $u = 0$  no plano  $x - \tau$  no limite super-amortecido. A principal característica deste gráfico é a grande relação  $\Theta_0/x_0 \sim \ln(1/F)$ .

Fig. 12: “Toy model”: núcleo com uma forma retangular. O comprimento nas direções  $x$  e  $\tau$  são respectivamente  $x_0 \sim 1/F$  e  $\Theta_0 \sim (1/F) \ln(1/F)$ .

Fig. 13: Logaritmo da taxa de decaimento  $\Gamma$  como função da temperatura adimensional  $\tilde{T}$  para uma corda elástica super-amortecida. A probabilidade de decaimento  $\Gamma$  é determinada pelo comprimento  $\Theta$  do núcleo crítico na direção  $\tau$ ,  $-\ln \Gamma \propto \Theta(\tilde{T})$ , onde  $\Theta(\tilde{T})$  é a solução da equação transcendental  $-1 + F\Theta = \ln |[\sin(2\pi\tilde{T}\Theta)]/\pi\tilde{T}|$ . A linha contínua é uma solução numérica da equação transcendental. A temperatura zero a taxa de decaimento no limite super-amortecido é reduzida por um fator proporcional a  $\ln(1/F)$ , se comparada com o limite não-amortecido. Os efeitos de temperatura finita são também diferentes: a baixas temperaturas a correção à solução a temperatura zero é dada por uma lei de potências [veja linha tracejada,  $-\ln \Gamma \propto S_0(1 - a \ln(1/F)\tilde{T}^2/F^2)$ ], onde  $S_0$  é a

ação a temperatura zero e  $a$  é uma constante numérica], em contraste com as correções exponencialmente pequenas obtidas no caso sem amortecimento. Isto significa que o processo é puramente quântico apenas a temperatura zero, e o regime de tunelamento quântico termicamente assistido é entrado assim que a temperatura é aumentada. A temperatura  $\tilde{T}^*$  é definida graficamente como o valor no qual a linha tracejada deve ser substituída pela linha pontilhada, e não corresponde a uma temperatura de cruzamento entre diferentes regimes. A linha pontilhada a altas temperaturas corresponde a  $\Theta(\tilde{T}) = 1/2\tilde{T}$ , que converge suavemente para a solução clássica a temperatura de cruzamento  $\tilde{T}_0$  separando o regime de tunelamento quântico termicamente assistido do regime puramente clássico.

Fig. 14: Forma qualitativa dos núcleos críticos descrevendo o ‘creep’ de um vórtice (corda amortecida) de  $u = 0$  para  $u = 2\pi$ . (a) A temperatura zero o tamanho do núcleo na direção  $\tau$  ( $\Theta_0 \propto (1/F) \ln(1/F)$ ) é muito maior do que o tamanho na direção  $x$  ( $x_0 \propto 1/F$ ). (b) Aumentando a temperatura o núcleo começa a se contrair na direção  $\tau$  devido a uma interação logarítmica entre as paredes horizontais (originada pelo termo de amortecimento de Caldeira e Leggett). (c) O núcleo encolhe verticalmente até uma forma aproximadamente quadrada, e então se funde com os outros. (d) A fusão corresponde a uma região onde o diâmetro do núcleo na direção  $\tau$ ,  $2\Theta(\tilde{T})$ , tem aproximadamente o mesmo tamanho que o período da “bounce”  $1/\tilde{T}$ . (e) Depois da fusão os núcleos se contraem em ambas as direções  $x$  e  $\tau$  e finalmente acima de  $\tilde{T}_0$  o raio do núcleo crítico se anula.

Fig. 15: Logaritmo da taxa de decaimento  $\Gamma$  como função da temperatura  $\tilde{T}$  para uma corda elástica governada por uma dinâmica do tipo Hall. O sistema é sempre descrito pela lei de Arrhenius: acima da temperatura de cruzamento  $\tilde{T}_0$  a energia de ativação  $U = 4\alpha_I g/\hbar$ , enquanto que a temperaturas mais baixas flutuações quânticas reduzem a energia de ativação para  $U_q \sim U[1 - F^2(1 - \tilde{T}^2/\tilde{T}_0^2)^2]$ .

Fig. 16: Feixe tridimensional de vórtices representando o objeto tunelando na presença de um campo magnético intenso ( $H > H_b$ ) aplicado a um supercondutor fortemente estratifi-

cado.

**Fig. 17:** Núcleo térmico de um feixe planar de vórtices, obtido mediante aplicação de um campo magnético intenso a um supercondutor fracamente estratificado, com uma espessura pequena comparada com a extensão do feixe de vórtices ao longo do eixo  $c$ . A figura descreve também o núcleo quântico a temperatura zero para uma corda elástica.

## REFERENCES

- [1] J. S. Langer, *Ann. Phys. (N.Y.)* **41**, 108 (1967).
- [2] S. Coleman, *Phys. Rev. D* **15**, 2929 (1977).
- [3] C. Callan and S. Coleman, *Phys. Rev. B* **16**, 1762 (1977).
- [4] I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 388 (1981).
- [5] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211 (1981).
- [6] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Ann. Phys. (N.Y.)* **149**, 374 (1983).
- [7] J. M. Martinis, M. H. Devoret, and J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1543 (1985).
- [8] M. H. Devoret, J. M. Martinis, and J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1908 (1985).
- [9] V. Ambegaokar, U. Eckern, and G. Schoen, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1795 (1982).
- [10] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* **37**, 322 (1983).
- [11] H. Grabert, U. Weiss, and P. Hanggi, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2193 (1984).
- [12] H. Grabert and U. Weiss, *Z. Phys. B* **56**, 171 (1984).
- [13] P. Haenggi, P. Talkner, and M. Borkovec, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 251 (1990).
- [14] C. M. Smith, B. Ivlev, and G. Blatter, *Phys. Rev. B* **49**, 4033 (1994).
- [15] V. Lefreuve-Seguin et al., *Phys. Rev. B* **46**, 5507 (1992).
- [16] A. O. Caldeira, C. M. Smith, and G. Blatter, preprint .
- [17] J. Bardeen and M. J. Stephen, *Phys. Rev. A* **140**, 1197 (1965).
- [18] A. V. Mitin, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* **93**, 590 (1987).
- [19] A. C. Mota, P. Visani, and A. Pollini, *Phys. Rev. B* **37**, 9830 (1988).
- [20] N. Giordano, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2137 (1988).
- [21] L. Fruchter et al., *Phys. Rev. B* **43**, 8709 (1991).
- [22] A. C. Mota et al., *Physica C* **185-189**, 343 (1991).
- [23] Y. Liu et al., *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2224 (1992).
- [24] R. Griessen, J. G. Lensink, and H. G. Schnack, *Physica C* **185-189**, 337 (1991).
- [25] D. Prost et al., *Phys. Rev. B* **47**, 3457 (1993).
- [26] J. Tejada, E. M. Chudnovsky, and A. Garcia, *Phys. Rev. B* **47**, 11552 (1993).
- [27] G. Blatter, V. Geshkenbein, and V. Vinokur, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3297 (1991).

- [28] B. Ivlev, Y. N. Ovchinnikov, and R. S. Thompson, *Phys. Rev. B* **44**, 7023 (1991).
- [29] C. M. Smith, B. Ivlev, and G. Blatter, *Physica C* **000**, 000 (1994).
- [30] Y.-C. Chen, *J. Low. Temp. Phys.* **65**, 133 (1986).
- [31] B. I. Ivlev and Y. N. Ovchinnikov, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* **93**, 668 (1987).
- [32] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Pergamon, New York, 1958.
- [33] A. Barone and G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley, New York, 1982.
- [34] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic, New York, 1980.
- [35] F. Sharifi, J. L. Gavilano, and D. J. V. Harlingen, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 742 (1988).
- [36] K. Maki, *Phys. Rev. B* **18**, 1641 (1978).
- [37] M. Buttiker and R. Landauer, *Phys. Rev. A* **23**, 1397 (1981).
- [38] K. Hida and U. Eckern, *Phys. Rev. B* **30**, 4096 (1984).
- [39] K. Hida, *Z. Phys. B* **61**, 223 (1985).
- [40] B. V. Petukhov and V. L. Pokrovsky, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* **63**, 634 (1972).
- [41] G. Blatter and V. Geshkenbein, *Phys. Rev. B* **47**, 2725 (1993).
- [42] N. B. Kopnin and V. E. Kravtsov, *Pis ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **23**, 631 (1976).
- [43] N. B. Kopnin and V. E. Kravtsov, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* **71**, 1644 (1976).
- [44] M. V. Feigel'man et al., *Pis ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **57**, 699 (1993).
- [45] P. Ao and D. Thouless, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 132 (1994).
- [46] J. Stephen, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1534 (1994).
- [47] B. Ivlev and V. I. Melnikov, *Phys. Rev. B* **36**, 6889 (1987).
- [48] A. Sudbo and E. H. Brandt, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1781 (1991).
- [49] G. Blatter et al., *Rev. Mod. Phys.* **0000**, 0000 (1994).
- [50] H. Suhl, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 226 (1965).
- [51] R. P. Feynman, *Statistical Mechanics*, W. A. Benjamin, Inc, Massachussets, 1972.
- [52] P. Hanggi, F. Marchesoni, and P. Sodano, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2563 (1988).
- [53] P. Hanggi, F. Marchesoni, and P. Riseborough, *Europhys. Lett.* **13**, 217 (1990).



- [54] S. Chakravarty, B. I. Ivlev, and Y. N. Ovchinnikov, *Phys. Rev. B* **42**, 2143 (1990).
- [55] B. I. Ivlev and N. B. Kopnin, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1828 (1990).
- [56] B. I. Ivlev and N. B. Kopnin, *J. Low. Temp. Phys.* **80**, 161 (1990).
- [57] C. M. Smith et al., preprint .
- [58] G. E. Volovik, *JETP Lett.* **15**, 81 (1972).
- [59] E. B. Sonin and B. Horovitz, preprint .

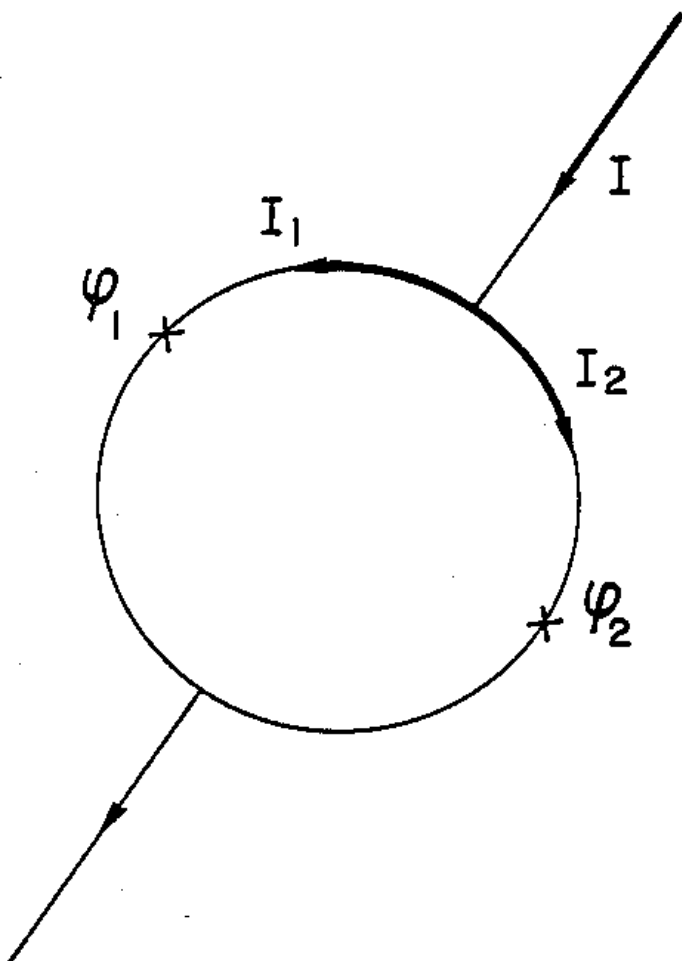


Fig. 1

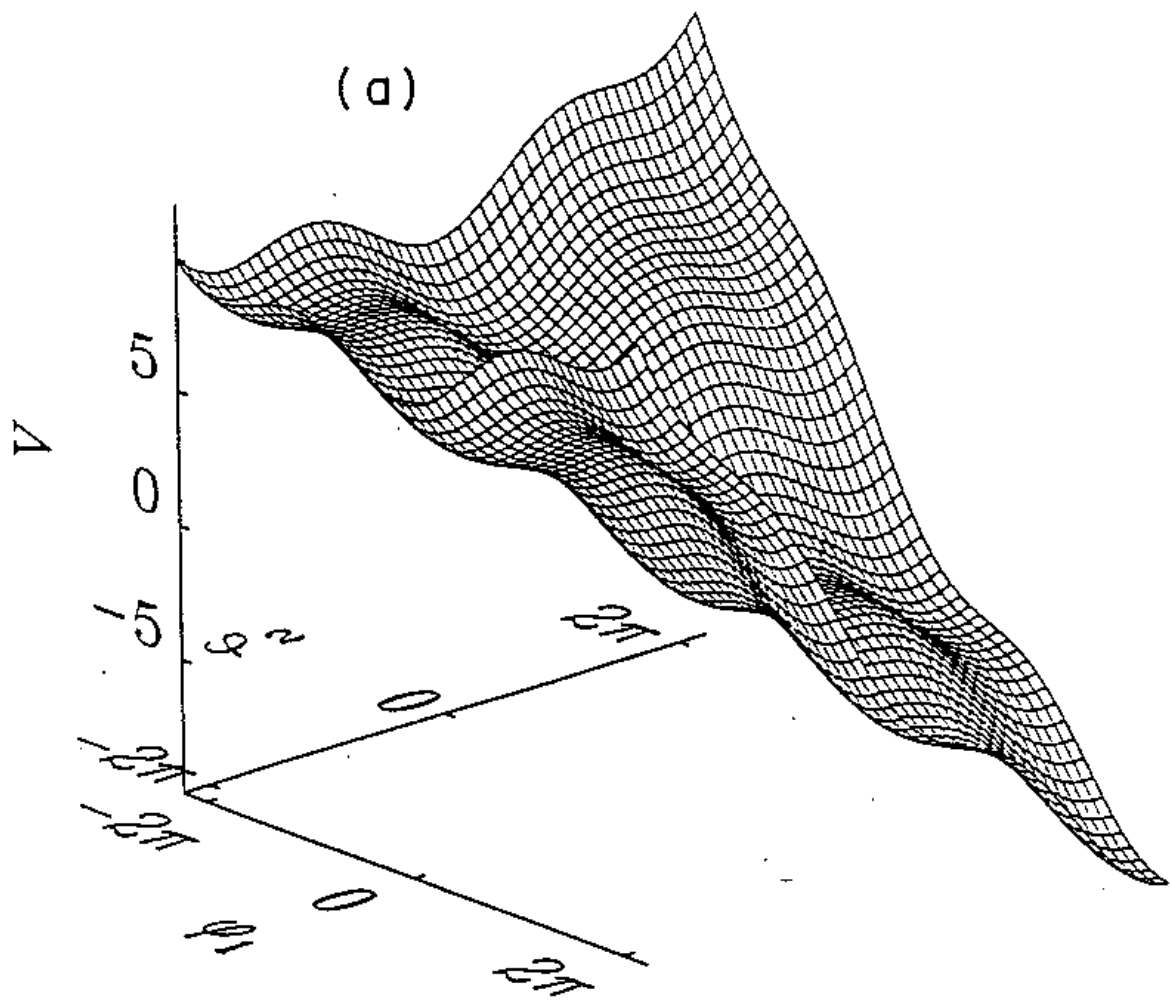


Fig. 2

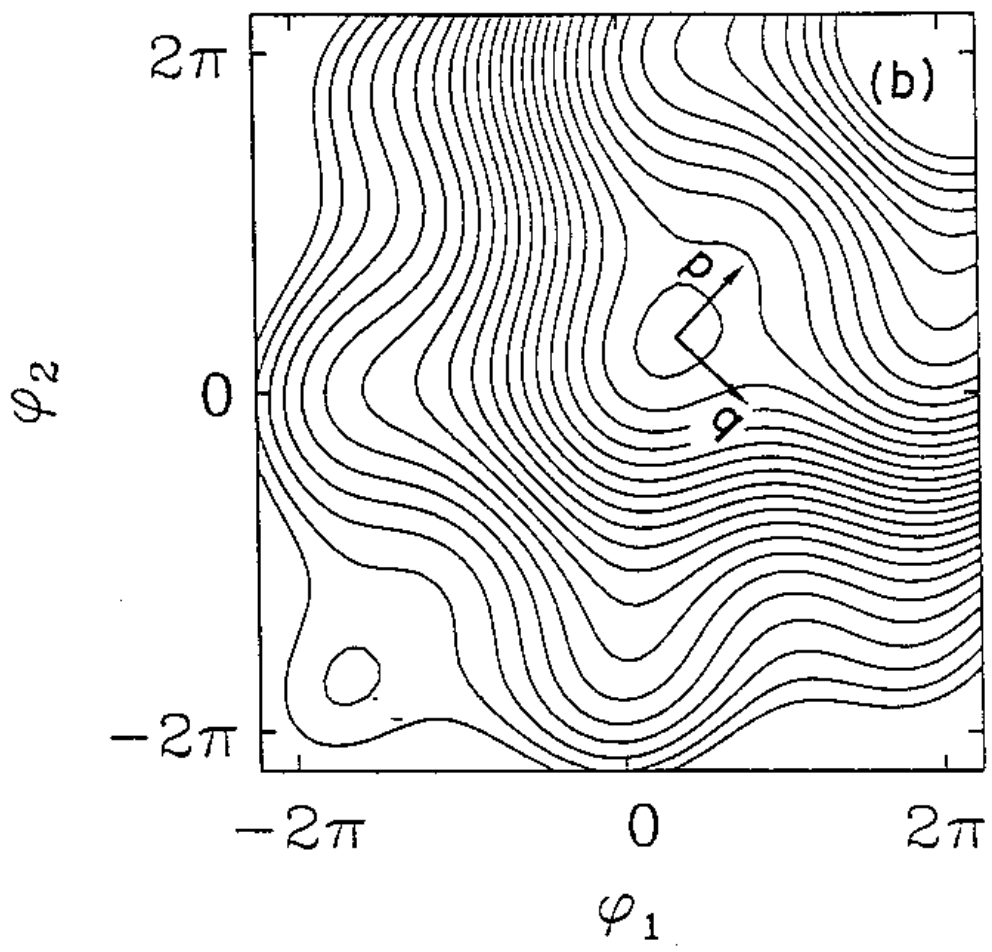


Fig. 2

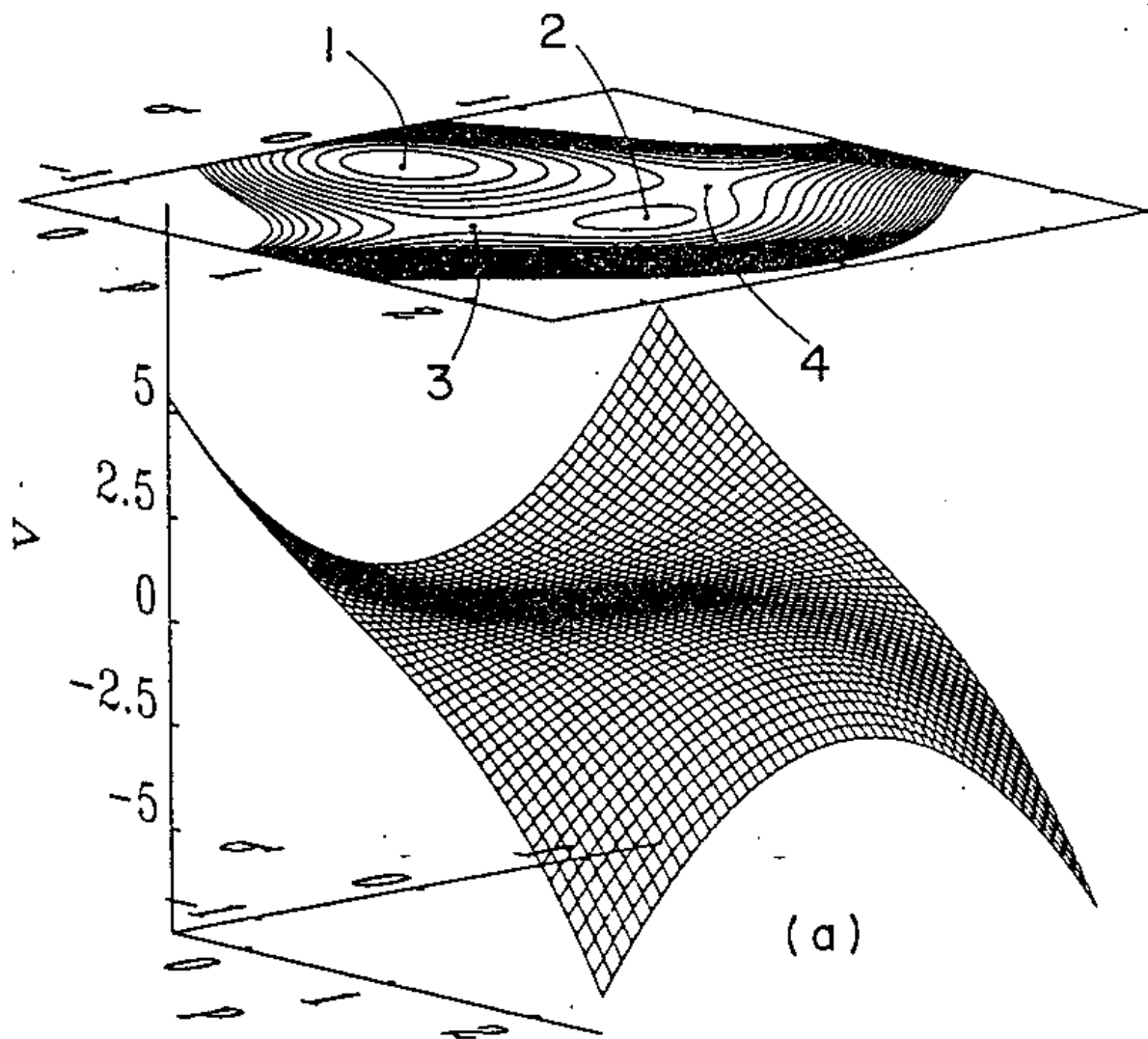
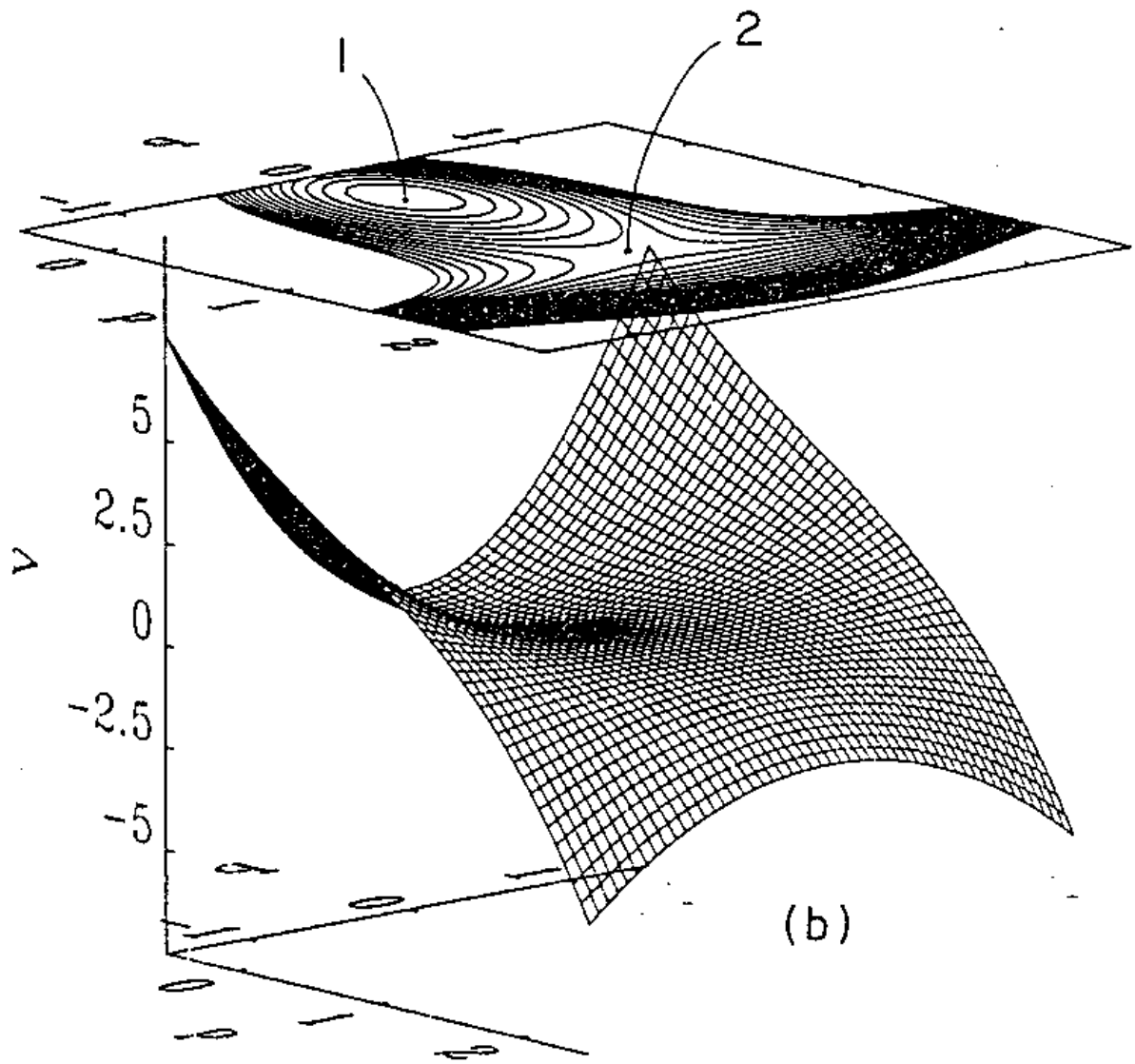


Fig. 3



(b)

Fig. 3

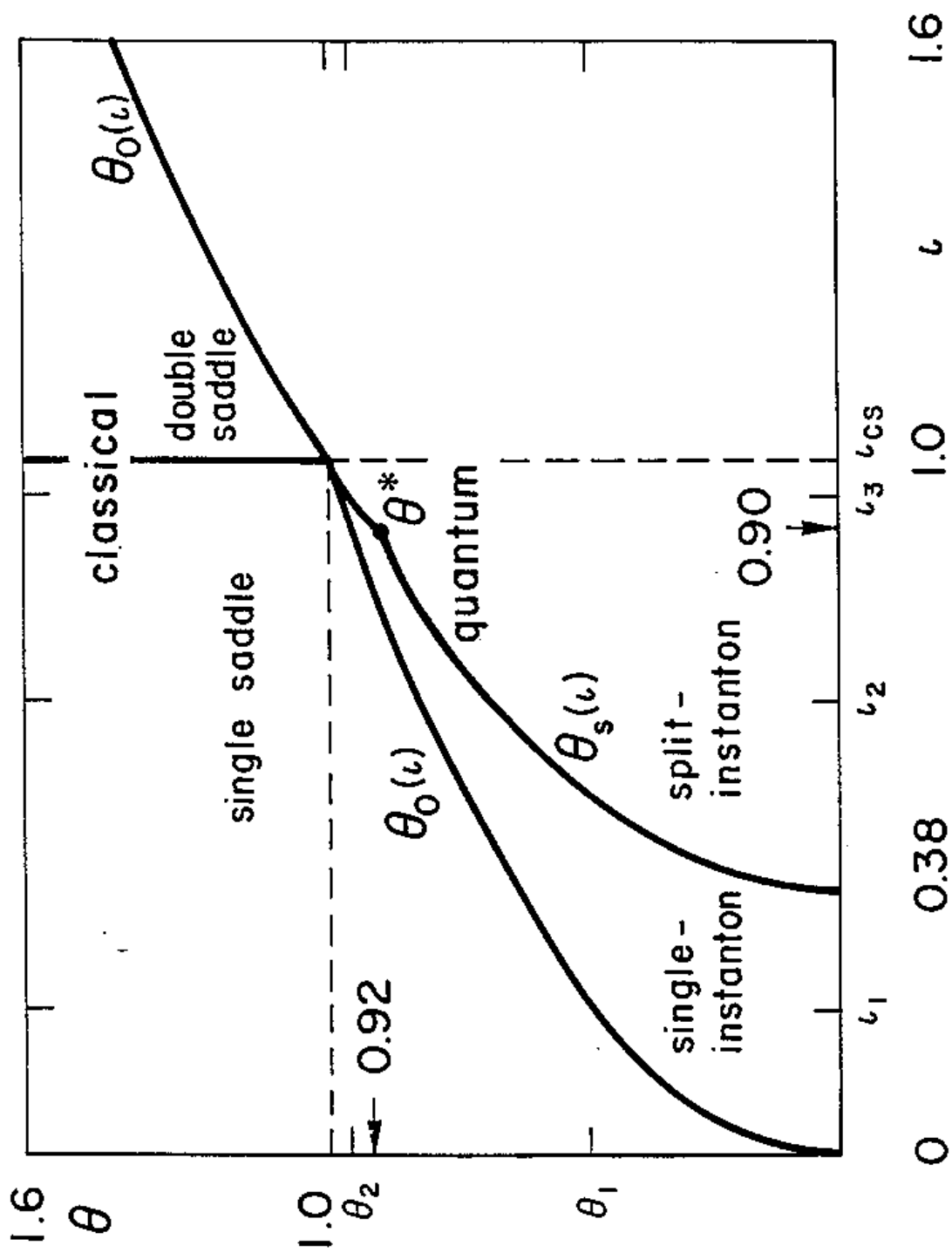


Fig. 4

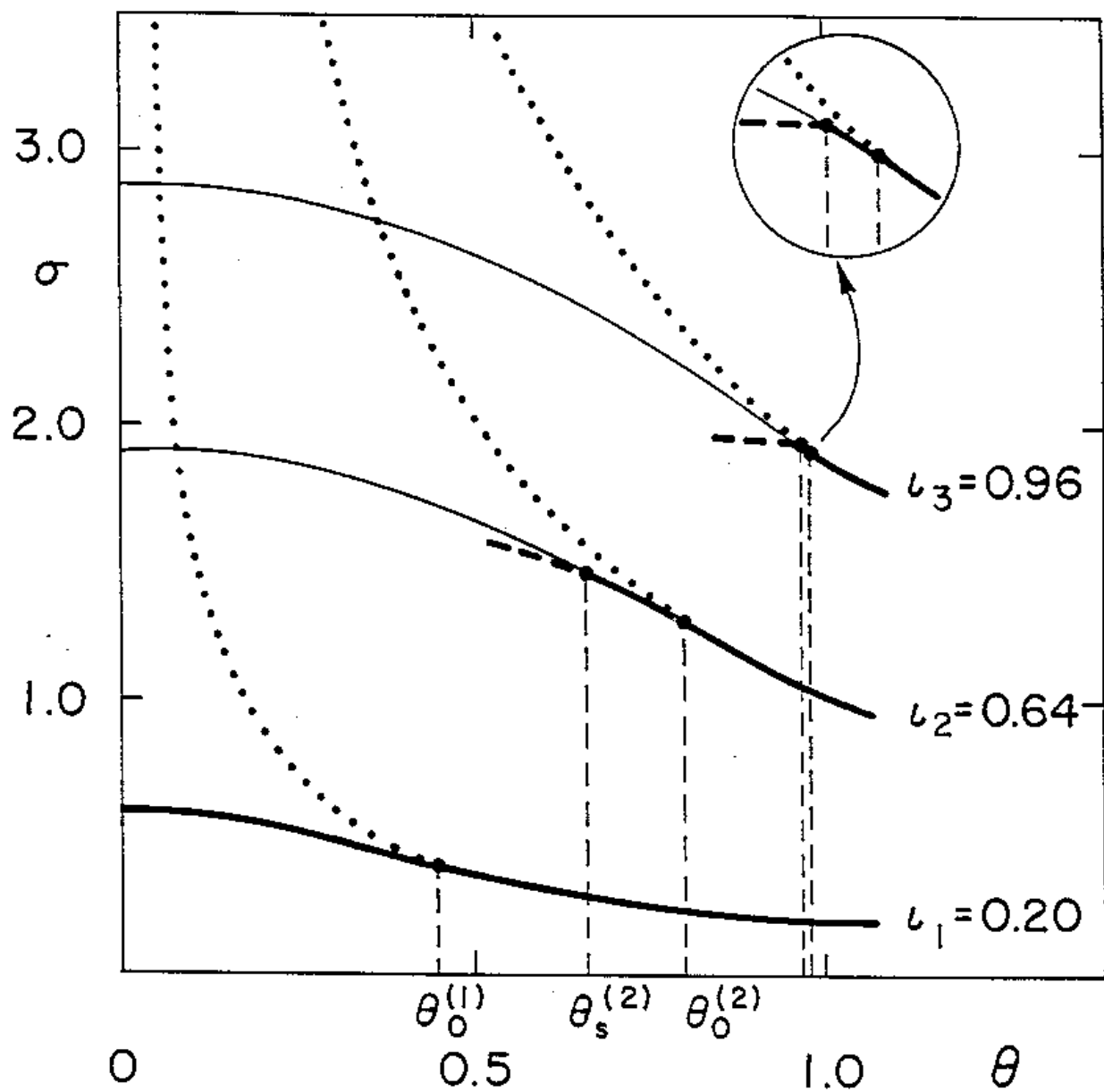


Fig. 5



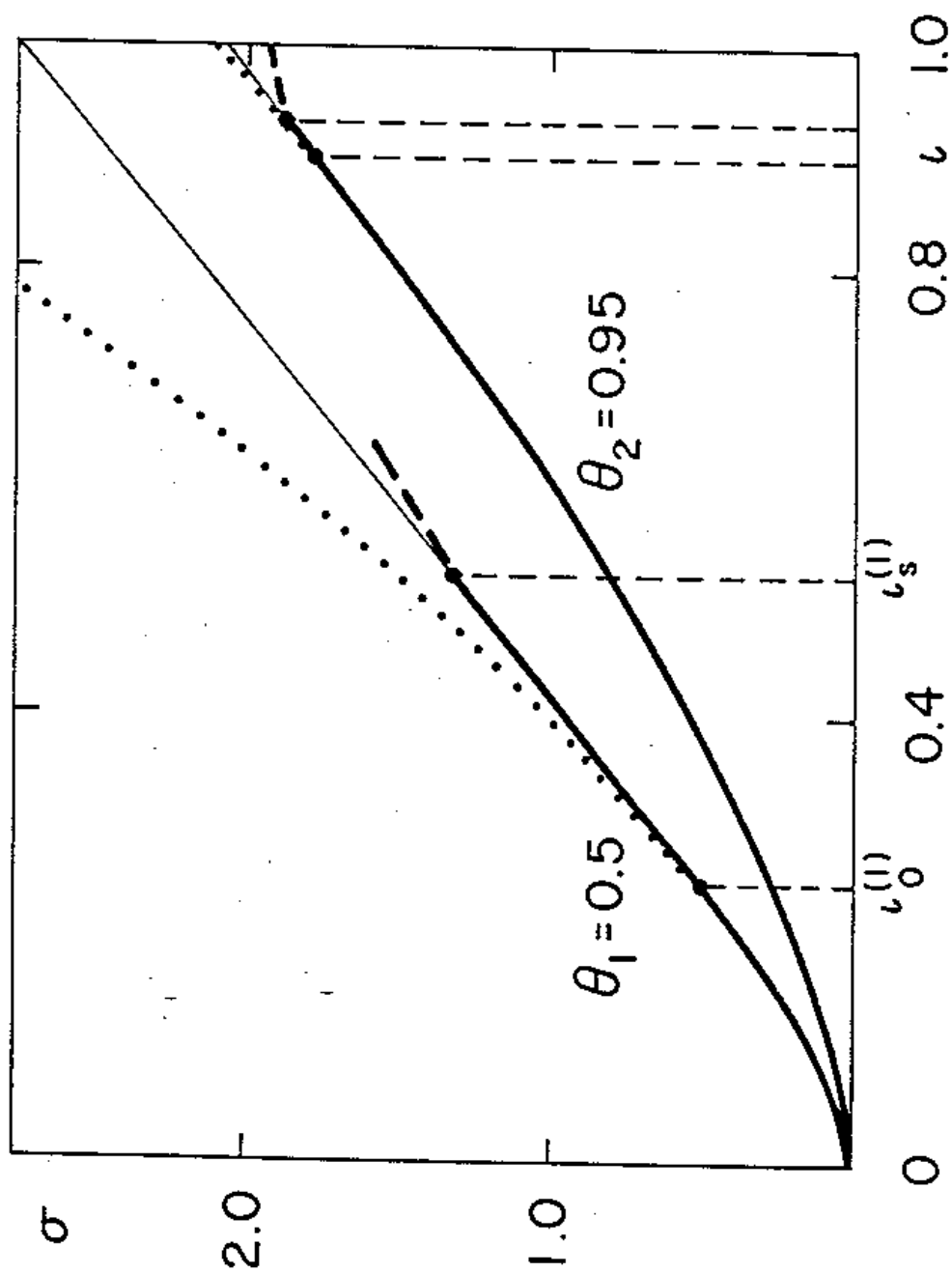


Fig. 6

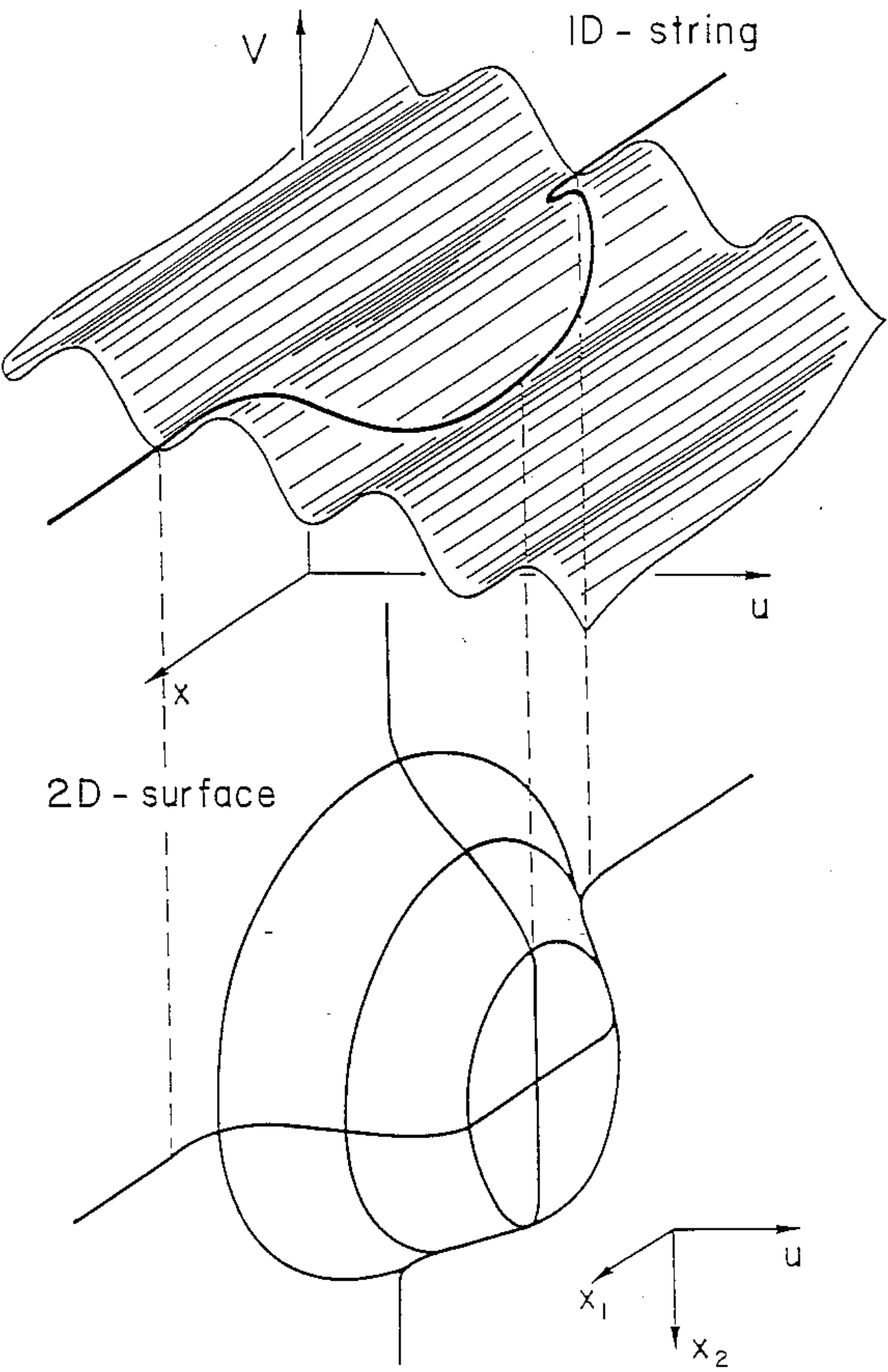


Fig. 7

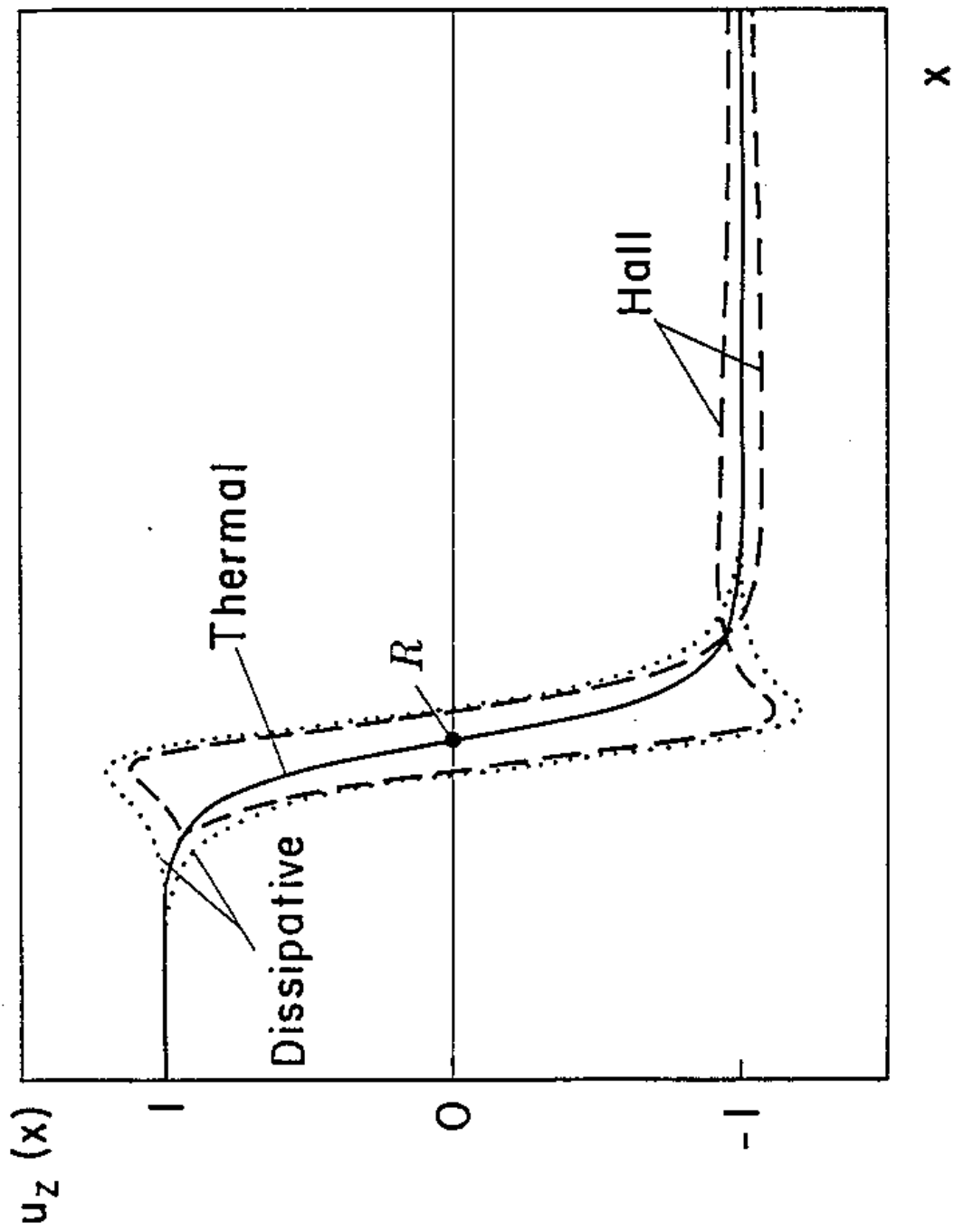


Fig. 8

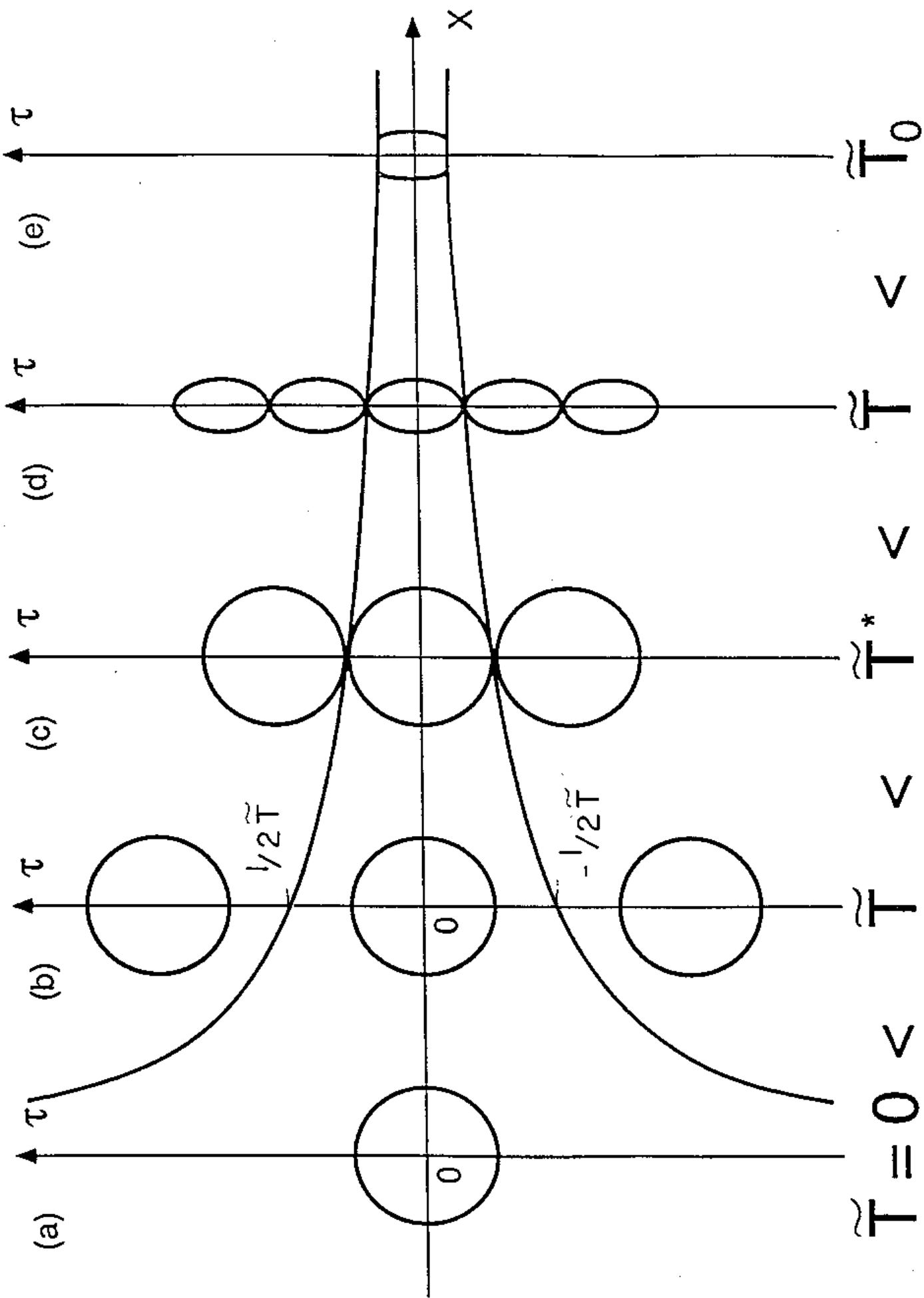


Fig. 9

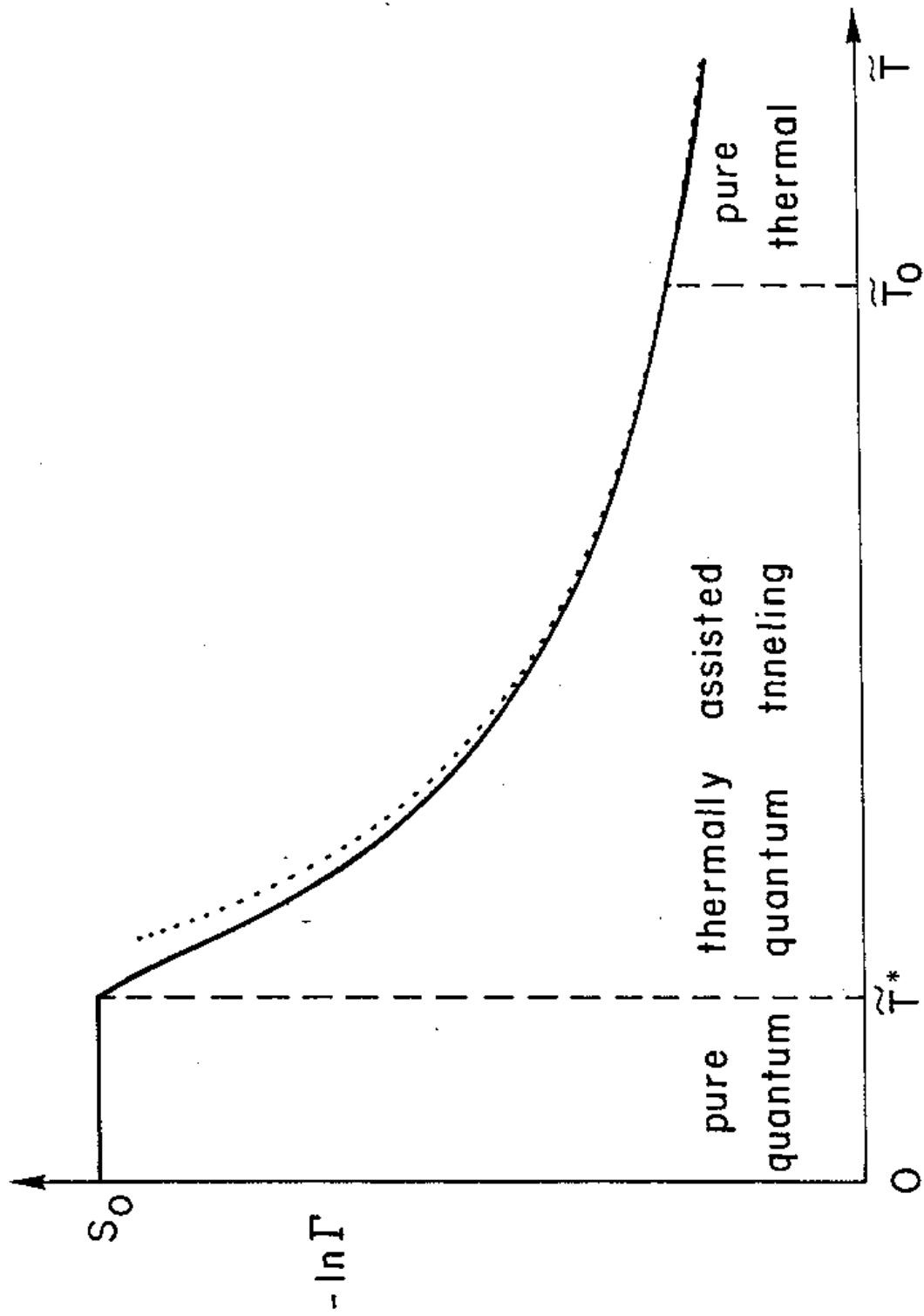


Fig. 1

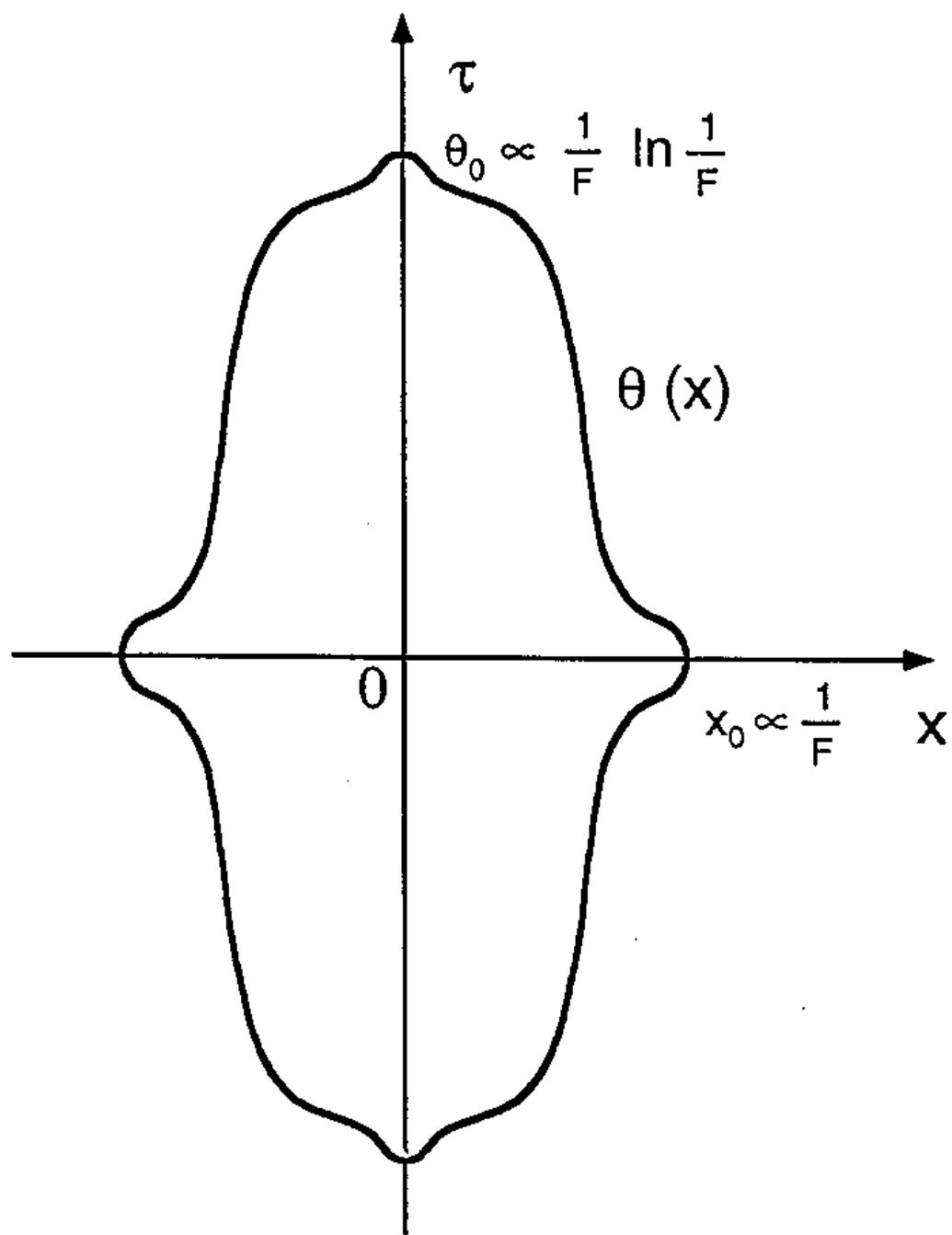


Fig. 11

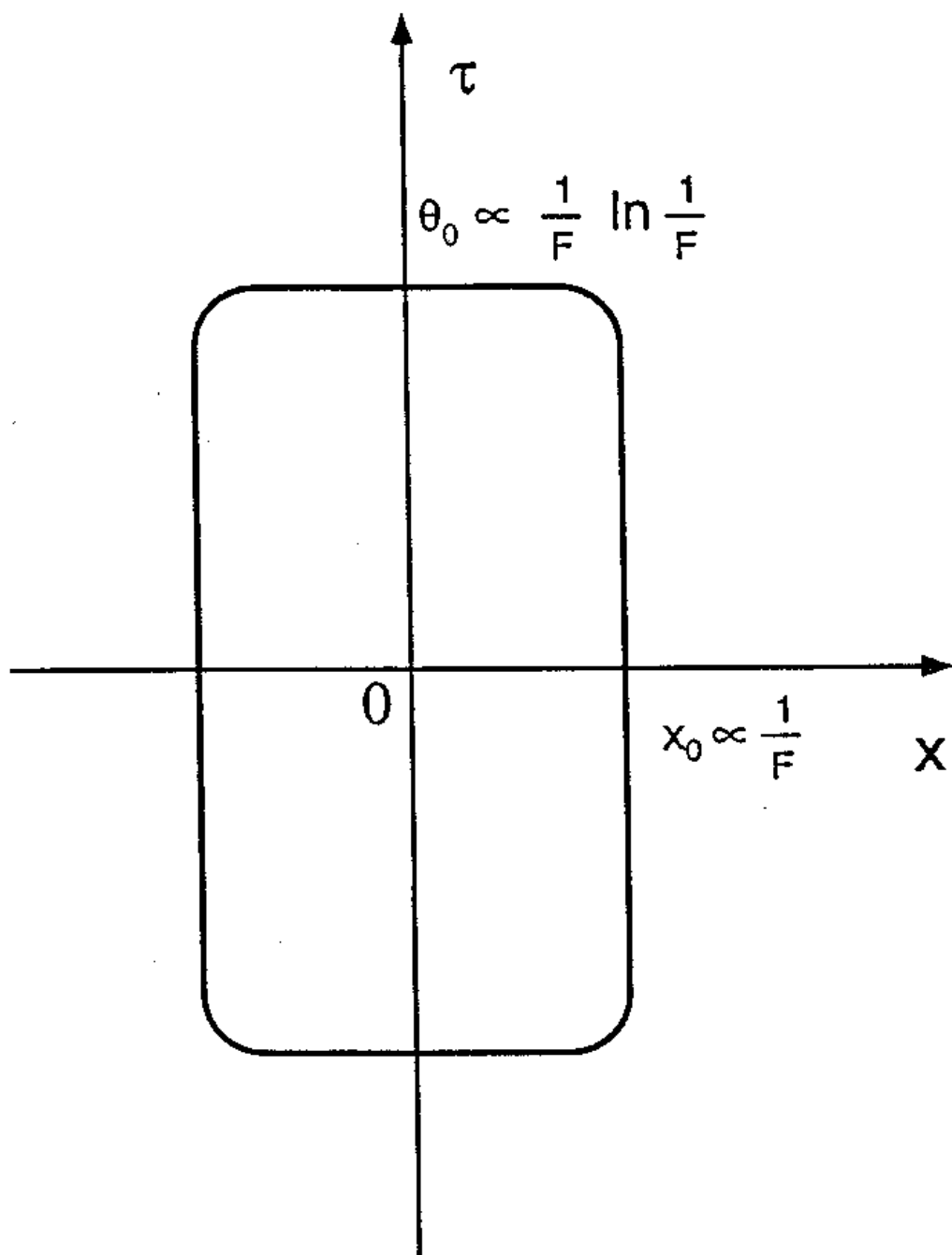


Fig. 12

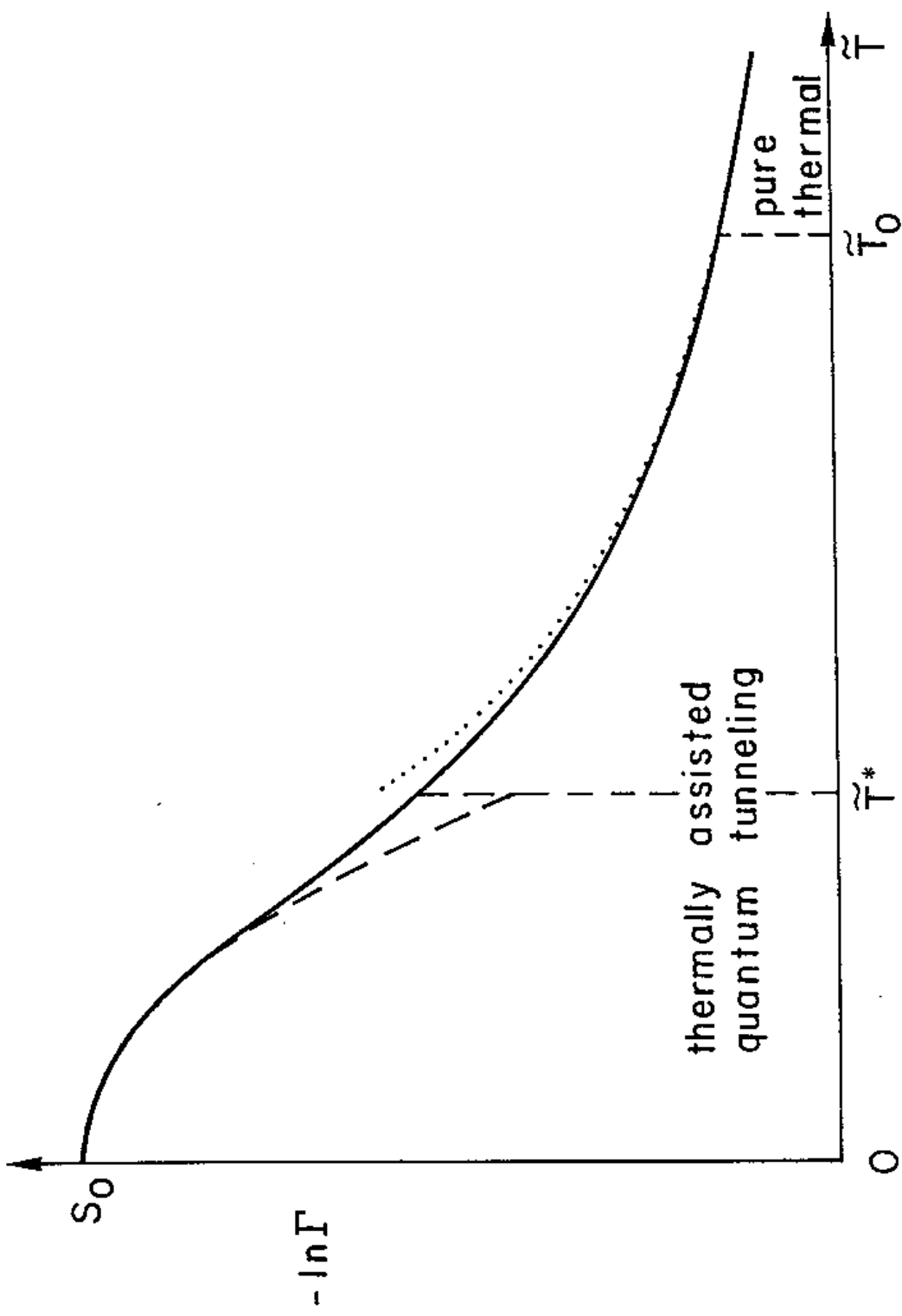


Fig. 1



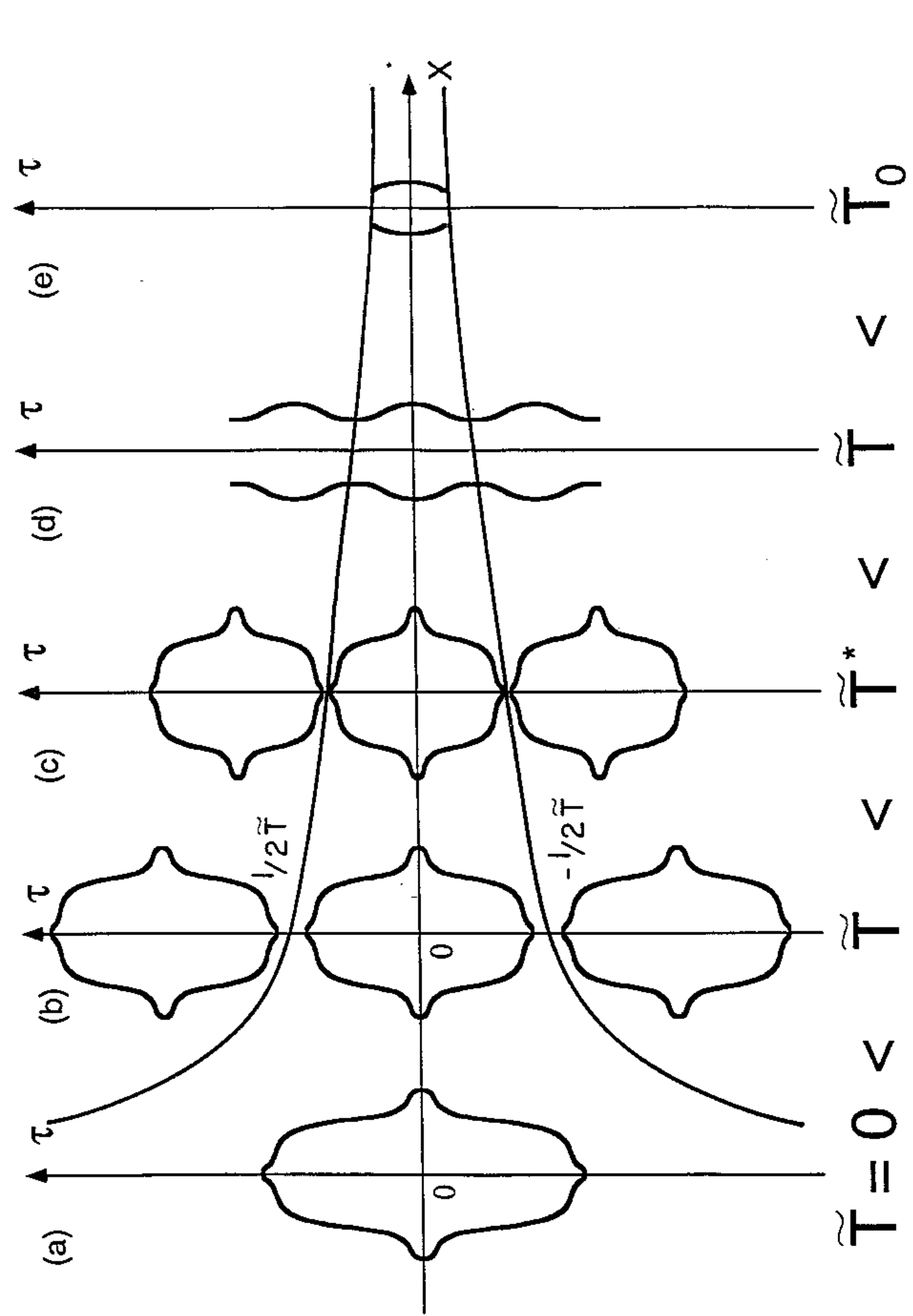
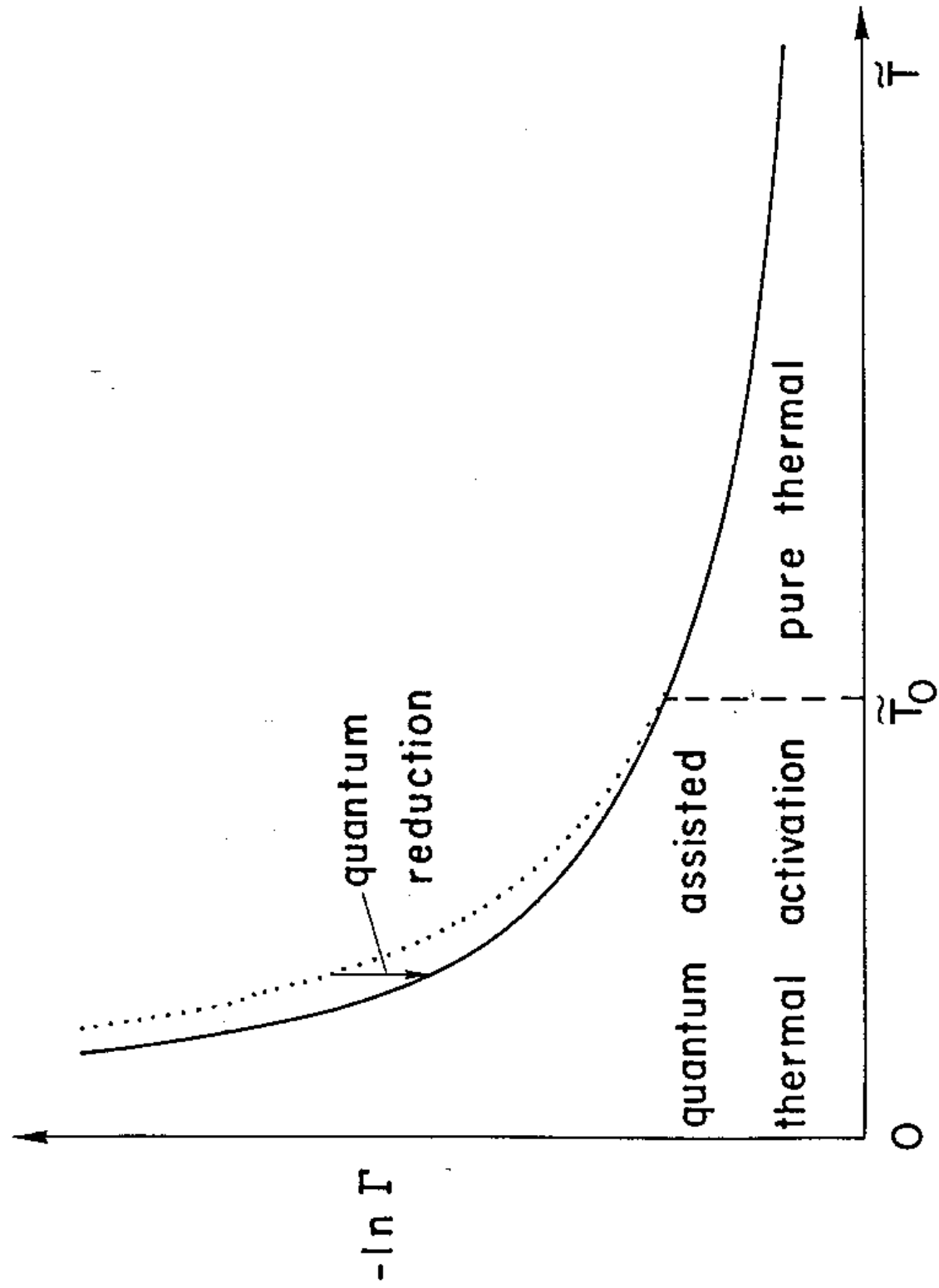


Fig. 1



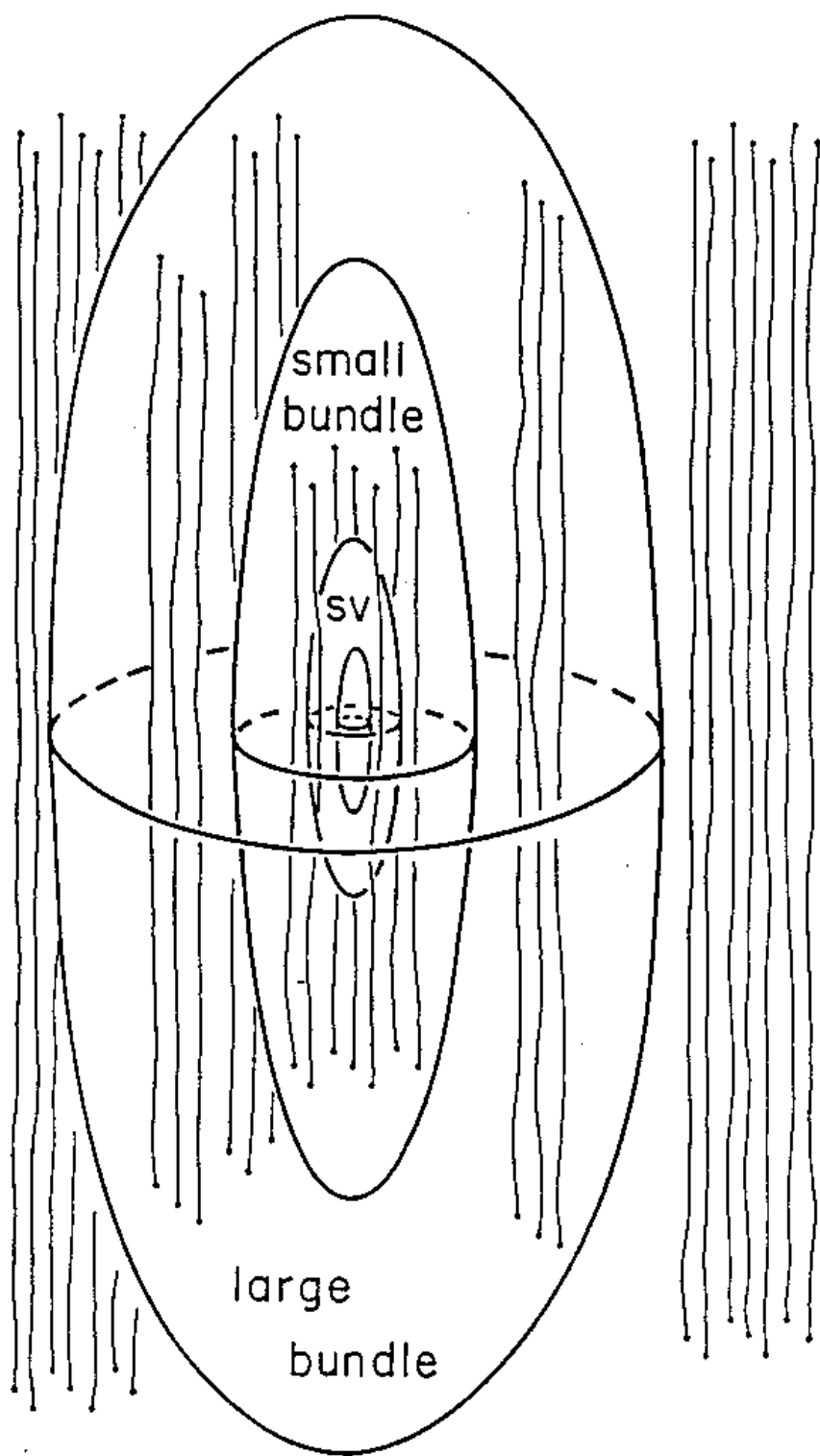


Fig. 16

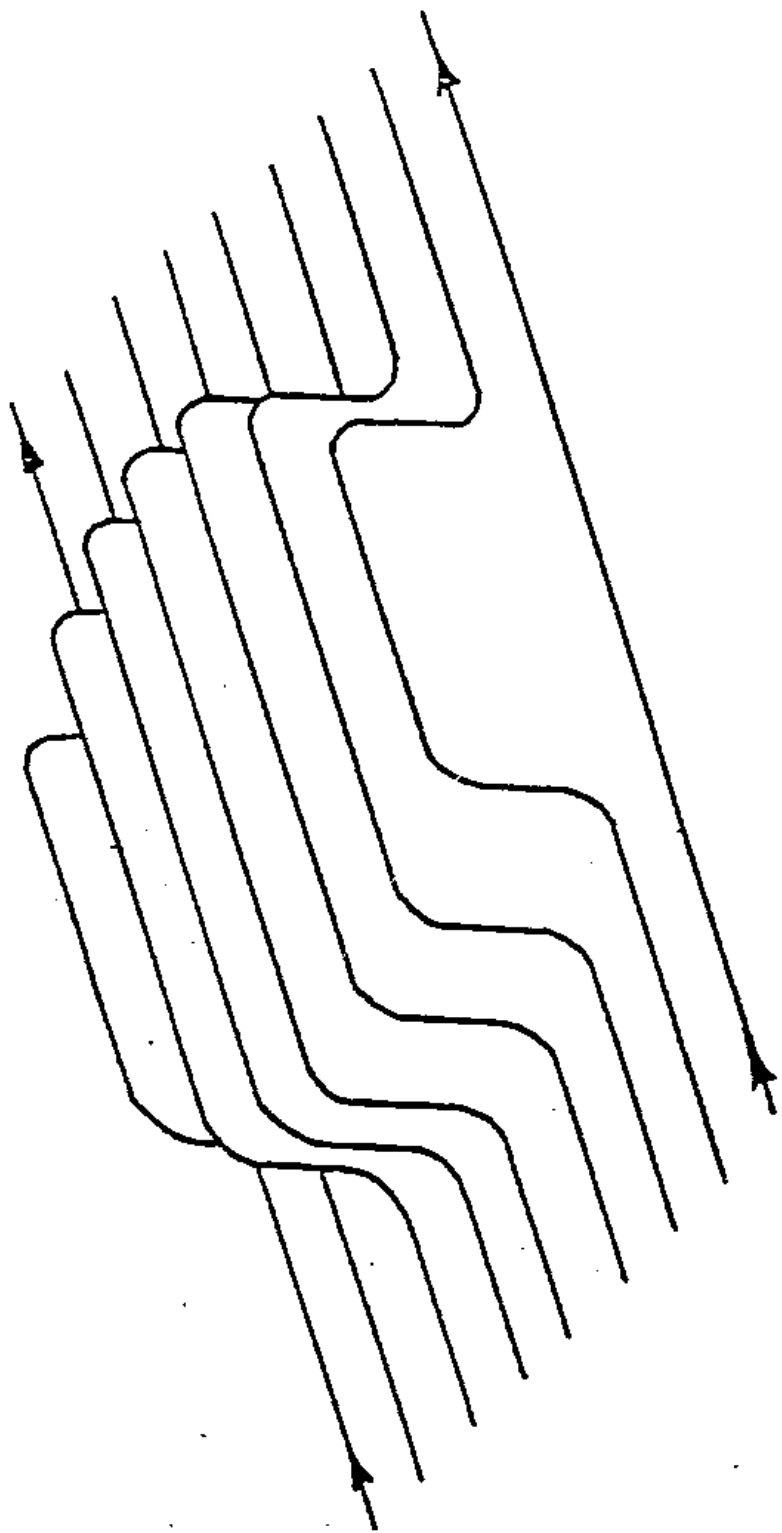


Fig. 17