Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Tunelamento Quântico e a Conjectura da Censura Cósmica

Maurício Richartz

Orientador: Prof. Dr. Alberto Saa

Co-orientador: Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Este exemplar corresponde à redação final da tese de Doutorado defendida pelo aluno Maurício Richartz e aprovada pela comissão julgadora em 31/03/2011.

Alberto Vazquez Saa

Campinas, abril de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

	Richartz, Maurício
R397t	Tunelamento quântico e a conjectura da censura cósmica / Maurício Richartz -- Campinas, SP : [s.n.], 2011.
	Orientador: Alberto Vazquez Saa. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".
	1. Conjectura da censura cósmica. 2. Tunelamento quântico. 3. Modelos análogos. 4. Superradiância. I. Saa, Alberto Vazquez. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.
	(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Quantum tunneling and the cosmic censorship conjecture
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. Cosmic censorship conjecture
  2. Quantum tunneling
  3. Analogue models
  4. Superradiance
- **Área de Concentração:** Física das Partículas Elementares e Campos
- **Titulação:** Doutor em Ciências
- **Banca Examinadora:**
  Prof. Alberto Vazquez Saa
  Prof. Patrício Anibal Letelier Sotomayor
  Prof. Carlos Ourívio Escobar
  Prof. Gilberto Medeiros Kremer
  Prof. Vicente Pleitez
- **Data da Defesa:** 31-03-2011
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física

UNICAMP

IFGW Instituto de Física Gleb Wataghin

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **MAURÍCIO RICHARTZ – RA 016932,** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 31/03/2011.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa – DMA/IMECC/UNICAMP

(Orientador do Candidato)

Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor – DMA/IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Carlos Ourívio Escobar – DRCC/IFGW/UNESP

Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer – DF/ UFPR

Prof. Dr. Vicente Pleitez – IFT/UNESP

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a minha mãe, Rosária, e as minhas irmãs, Mariana e Marisa, que sempre me apoiaram e me ajudaram, tanto nos momentos fáceis como nas situações mais difíceis. Sem o carinho e afeto de vocês, eu provavelmente já teria desistido há muito tempo.

Não posso deixar de agradecer a meu pai, Mauro, que despertou em mim o gosto pela matemática e pela física, e a minha avó, Nana, que me fez companhia durante muitas tardes e muitos fins de semana. Apesar da saudade que sinto de vocês, nunca esquecerei de tudo que fizeram por mim.

Também gostaria de agradecer ao meu orientador, o Professor Alberto Saa. Foram quase dez anos de orientação, desde a minha iniciação científica, quando eu ainda não sabia quase nada de física, até o fim do doutorado. Agradeço também a Silke Weinfurtner, pela ajuda nos períodos em que estive no Canadá e na Itália.

Agradeço ainda a todos os meus amigos, em especial aos da República G8, que fizeram dos meus dias na UNICAMP mais divertidos e agradáveis. Agradeço a todas as pessoas que, em algum momento, foram especiais pra mim. Podem ter certeza de que, por mais curta que nossa convivência tenha sido, a contribuição de cada um jamais será esquecida. Eu carregarei, pelo resto da minha vida, os ensinamentos, as lições e as experiências da nossa convivência.

Finalmente, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro, sob processo 2005/04219-0 e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) também pelo apoio financeiro, através do processo BEX 3249/08-5.

Resumo

A Conjectura da Censura Cósmica, proposta por Roger Penrose em 1969, afirma que singularidades resultantes de um colapso gravitacional estão sempre envolvidas pelo horizonte de eventos de um buraco negro. O objetivo desse trabalho é investigar processos de tunelamento quântico que visam violar essa conjectura. Através do formalismo de Newman–Penrose, é feita, inicialmente, uma análise de perturbações escalares, de neutrinos, eletromagnéticas e gravitacionais nas métricas de Kerr e de Reissner–Nordström. Processos de espalhamento ondulatório nessas métricas são estudados e coeficientes de transmissão e reflexão para ondas incidentes são calculados nos limites de baixas energias. A partir desses resultados, experimentos imaginários com o intuito de destruir o horizonte de eventos de um buraco negro e expor sua singularidade para um observador externo são propostos e analisados. A superradiância, fenômeno no qual ondas incidentes são amplificadas ao serem refletidas por um potencial espalhador, se manifesta nesses experimentos e, por isso, é tratada com detalhes e de uma forma bastante geral nesse trabalho. Por fim, experimentos que visam detectar a radiação Hawking e o fenômeno da superradiância em modelos análogos de gravitação são analisados. Em particular, um experimento proposto por mim, em colaboração com Silke Weinfurtner, cujo objetivo é investigar a possibilidade de obtenção de superradiância em laboratório, é discutido.

Abstract

The Cosmic Censorship Conjecture, proposed by Roger Penrose in 1969, asserts that singularities arising from the gravitational collapse of a body are always encompassed by the event horizon of a black hole. The main purpose of this work is to investigate quantum tunneling processes whose objetive is to violate this conjecture. Using the Newman–Penrose formalism, scalar, neutrino, electromagnetic and gravitational perturbations in both Kerr and Reissner–Nordström metrics are analysed. Wave scattering processes in these metrics are studied and transmission and reflection coefficients for incident waves are calculated in the limit of small energies. From these results, *gedanken* experiments with the purpose of destroying the event horizon of a black hole and exposing its inner singularity to an external observer are proposed and analysed. Superradiance, phenomenum in which incident waves are amplified when reflected by a scattering potential, manifests itself in these thought experiments and, therefore, is also treated in detail in this work. Finally, some experiments with the purpose of detecting Hawking radiation and superradiance in analogue models of gravity are analysed. In particular, an experiment proposed by me, in collaboration with Silke Weinfurtner, whose aim is to investigate the possibility of superradiance detection in laboratory, is discussed.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Em 24 de setembro de 1991, três renomados físicos, John Preskill, Kip Thorne e Stephen Hawking resolveram tornar públicas suas idéias divergentes em relação à existência de singularidades nuas. Fizeram uma aposta, na qual Hawking afirmou que **"quando qualquer campo ou forma de matéria, que é incapaz de se tornar singular no espaço-tempo plano, se acopla à Relatividade Geral através das equações de Einstein clássicas, o resultado nunca pode ser uma singularidade nua"**, enquanto Preskill e Thorne afirmaram que singularidades nuas são objetos gravitacionais intrinsicamente quânticos, que podem existir sem estarem envoltos pelo horizonte de eventos de um buraco negro [1].

Figura 1.1: Preskill, Thorne e Hawking: aposta sobre a existência de singularidades nuas. Retirado da referência [1].

O objeto central dessa aposta, a singularidade, representa situações nas quais a Relatividade Geral, e todas as outras teorias conhecidas, perdem seu poder de predição. Desde

1939, com o trabalho de Oppenheimer e Snyder [5], é sabido que singularidades podem surgir quando condições iniciais evoluem através das equações de Einstein. Generalizando resultados de Belinsky–Khalatnikov–Lifshitz [6], Hawking e Penrose demonstraram os teoremas de singularidade [7, 8], que garantem a formação de algum tipo de singularidade em um processo de colapso gravitacional se algumas hipóteses são satisfeitas (especificamente, a existência de uma superfície aprisionada, a não existência de curvas tipo-tempo fechadas, a condição de não-negatividade da energia e alguma hipótese de generalidade). Contudo, esses teoremas de Hawking e Penrose nada afirmam sobre a possibilidade dessas singularidades produzidas em um colapso gravitacional serem observáveis. A singularidade de um buraco negro de Kerr–Newman (a solução mais geral possível das equações de Einstein-Maxwell, de acordo com os teoremas de unicidade [9]), por exemplo, está sempre envolvida por um horizonte de eventos. Uma singularidade, quando não envolta por um horizonte de eventos, é denominada singularidade nua. A existência desse tipo de singularidade representa um grande problema à Relatividade Geral, pois impede qualquer tipo de predição sobre a evolução do espaço-tempo.

A conjectura que afirma que singularidades produzidas em um colapso gravitacional estão sempre envoltas pelo horizonte de eventos de um buraco negro é denominada Conjectura Fraca da Censura Cósmica. Essa conjectura foi proposta, pela primeira vez, em 1969, por Roger Penrose [10–12]. Desde então, vários resultados tentando prová-la ou violá-la surgiram na literatura [13–22]. Uma evidência em favor da Conjectura Fraca da Censura Cósmica é o fato de buracos negros serem estáveis sob perturbações lineares. Se a conjectura nao for verdadeira, um colapso gravitacional poderia produzir, genericamente, uma singularidade nua. Nesse caso, uma demonstração de que buracos negros são linearmente instáveis invalidaria a conjectura. No entanto, esse não é o caso. Vishveshwara, Price, Whiting, entre outros, demonstraram a estabilidade linear de buracos negros [23–26].

Outra conjectura, denominada Conjectura Forte da Censura Cósmica, foi proposta também por Penrose [11, 12]. Ela afirma que todos os espaços-tempo fisicamente aceitáveis são globalmente hiperbólicos. Em outras palavras, além de uma possível singularidade inicial, como o *big bang*, nenhuma outra singularidade é visível para nenhum observador. Para uma definição formal das duas formas da conjectura, recomenda-se a leitura da referência [8]. Ao longo desse trabalho, quando escrevermos "Conjectura da Censura Cósmica"(CCC), estaremos nos referindo à versão fraca da conjectura.

Com relação à aposta descrita no início do capítulo, no dia 05 de fevereiro de 1997, Stephen Hawking acabou aceitando estar errado, tendo em vista um resultado obtido por Choptuik [27], que mostrou ser possível formar singularidades nuas sob condições iniciais não-genéricas bastante específicas. Nesse mesmo dia, uma nova aposta envolvendo singularidades foi feita. Ainda acreditando na proibição de singularidades nuas pelas leis da física clássica, Stephen Hawking desafiou John Preskill e Kip Thorne novamente. Estes, ainda acreditando que singularidades nuas são objetos intrinsicamente quânticos que possivelmente existem, aceitaram a aposta. No texto descrevendo o acordo, Hawking afirmava que **"quando qualquer campo ou forma de matéria, que é incapaz de se tornar singular no espaço-tempo plano, se acopla à Relatividade Geral através das equações de Einstein clássicas, então a evolução dinâmica a partir de condições iniciais genéricas (i.e. a partir de um conjunto aberto de dados iniciais) nunca pode produzir uma singularidade nua"** [1]. A questão da existência de singularidades nuas ainda é uma questão não resolvida. A Conjectura da Censura Cósmica continua sendo um dos principais problemas em aberto da Relatividade Geral.

Essa tese é baseada em cinco artigos diferentes. As *rapid communications*, **"Can quantum mechanics fool the cosmic censor?"** (Phys. Rev. D 79, 101502(R) (2009)) e **"Overspinning a nearly extreme black hole and the weak cosmic censorship conjecture"** (Phys. Rev. D 78, 081503(R) (2008)), tratam, respectivamente, de experimentos imaginários que buscam violar a CCC através do tunelamento quântico de partículas sem carga, ver seção (4.2). Já o artigo a ser publicado, **"Challenging the weak cosmic censorship conjecture"** [28], calcula os coeficientes de transmissão e reflexão para partículas carregadas na métrica de Reissner-Nordström, ver seção (3.6), e analisa a possibilidade de se utilizar essas partículas para violar a CCC, ver seção (4.3). O artigo **"Generalized superradiant scattering"** (Phys. Rev. D 80, 124016 (2009)), por sua vez, examina as condições suficientes para que o fenômeno da superradiância ocorra, ver capítulo 6. A possibilidade de detectar superradiância em laboratório é investigada no artigo **"Experimental superradiant scattering"** [4], ainda a ser publicado e baseado em um experimento realizado no ICTP, ver seção (6.5). Experimentos que visam detectar a radiação Hawking em modelos análogos são discutidos na seção (5.6).

Capítulo 2

Perturbações na métrica de Kerr: equações de Teukolsky

As equações de Teukolsky são equações desacopladas e separáveis que descrevem perturbações escalares, de neutrinos, eletromagnéticas ou gravitacionais na métrica de Kerr. Foram descobertas por Teukolsky em 1973 [29, 30], utilizando o formalismo de Newman–Penrose (NP). Na verdade, o formalismo de NP já havia sido utilizado anteriormente por Price [25] e por Bardeen e Press [31] para estudar perturbações na métrica de Schwarzschild. Motivado pelo fato de tanto a métrica de Schwarzschild quanto a de Kerr serem Petrov tipo-D, Teukolsky suspeitou que era possível obter equações desacopladas também para a métrica de Kerr usando o formalismo de NP. Nesse capítulo, repetiremos os passos utilizados por Teukolsky para obter as equações que levam o seu nome. Primeiramente, calculamos os coeficientes de spin para a métrica de Kerr através da tétrade de Kinnersley. A equação de Klein–Gordon é então separada, originando uma equação diferencial radial e outra angular. As equações de Dirac, por sua vez, são separadas utilizando-se o formalismo desenvolvido no apêndice B. Como resultado, tem-se duas equações radiais diferenciais e duas equações angulares. Já as equações de Maxwell, através do apêndice A, são também reduzidas a um par de equações radiais e um par de equações angulares. Por último, a análise de ondas gravitacionais na métrica de Kerr é feita. Os escalares de Weyl e os coeficientes de spin são separados em dois grupos: as quantidades inicialmente nulas e as inicialmente não-nulas. Essas grandezas são então perturbadas linearmente. Depois de um longo processo de separação de variáveis, obtem-se um par de equações radiais e um par de equações angulares.

O próximo passo é reescrever as equações de onda para as diferentes possibilidades de spin como uma única equação radial e uma única equação angular. Essas equações, denominadas equações de Teukolsky, são então utilizadas para estudar o problema de espalhamento de uma onda incidente em um buraco negro de Kerr. Mais especificamente, a equação radial de Teukolsky é resolvida assintoticamente longe e nas proximidades do horizonte de eventos do buraco negro. Impondo a condição de contorno de que nenhum sinal pode se propagar de dentro para fora de um buraco negro, calcula-se, no limite de baixas energias, coeficientes de reflexão e de transmissão (correspondentes, repectivamente, à razão entre o fluxo de energia refletida e o fluxo de energia incidente e à razão entre o fluxo de energia transmitida e o fluxo de energia incidente no buraco negro).

2.1 Espaço-tempo de Kerr

O espaço-tempo de Kerr é uma solução estacionária, axissimétrica e assintoticamente plana das equações de Einstein [8]. A métrica desse espaço-tempo, nas coordenadas de Boyer–Lindquist, é dada por,

$$ds^2 = -dt^2 + \rho^2 \left(\frac{1}{\Delta} dr^2 + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2\theta d\phi^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} \left(a \sin^2\theta d\phi - dt \right)^2 , \tag{2.1}$$

onde

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta \quad \text{e} \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \tag{2.2}$$

No caso $M < a$, essa métrica representa uma singularidade nua. Já para o caso $M \geq a$, essa métrica corresponde a um buraco negro em rotação, com massa M e momento angular $J = aM$. As raízes da função Δ, dadas por,

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2} \qquad \text{e} \qquad r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}, \tag{2.3}$$

indicam, respectivamente, as localizações do horizonte de eventos e do horizonte de Cauchy do buraco negro.

Para analisar a propagação de ondas na métrica de Kerr, é conveniente descrever o espaço-tempo usando o formalismo de NP. A classe de geodésicas nulas dada pelos vetores tangentes,

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} E, \quad \frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{a}{\Delta} E, \tag{2.4}$$

onde E é uma constante, motiva a definição da seguinte base tétrade nula, denominada tétrade de Kinnersley,

$$l^i = \frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2, +\Delta, 0, a \right) , \tag{2.5}$$

$$n^i = \frac{1}{2\rho^2} \left(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a \right) , \tag{2.6}$$

$$m^i = \frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}} \left(ia \sin\theta, 0, 1, i \csc\theta \right) , \tag{2.7}$$

onde $\bar{\rho} = r + ia\cos\theta$ e $\bar{\rho}^* = r - ia\cos\theta$. A barra em $\bar{\rho}$ é utilizada para diferenciar essa quantidade do coeficiente de spin ρ que, quando necessário, será denotado por $\tilde{\rho}$. Para que as condições de normalização do formalismo de NP sejam satisfeitas, i.e, $\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 1$ e $\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = -1$, os vetores $\mathbf{n}$ e $\mathbf{m}$, ao contrário de $\mathbf{l}$, não são parametrizados afinamente. A forma covariante da base tétrade é facilmente calculada,

$$l_i = \frac{1}{\Delta} \left(\Delta, -\rho^2, 0, -a\Delta \sin^2\theta \right) , \tag{2.8}$$

$$n_i = \frac{1}{2\rho^2} \left(\Delta, +\rho^2, 0, -a\Delta \sin^2\theta \right) , \tag{2.9}$$

$$m_i = \frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}} \left(ia \sin\theta, 0, -\rho^2, -i(r^2 + a^2) \sin\theta \right) . \tag{2.10}$$

Os coeficientes de spin para a métrica de Kerr podem, agora, ser calculados a partir dos vetores da base. O resultado obtido é [29],

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \epsilon = 0, \tag{2.11}$$

$$\tilde{\rho} = -\frac{1}{\bar{\rho}^*}, \quad \beta = \frac{\cot\theta}{\bar{\rho}2\sqrt{2}}, \quad \pi = \frac{ia\sin\theta}{(\bar{\rho}^*)^2\sqrt{2}}, \quad \tau = -\frac{ia\sin\theta}{\rho^2\sqrt{2}}, \tag{2.12}$$

$$\mu = -\frac{\Delta}{2\rho^2\bar{\rho}^*}, \quad \gamma = \mu + \frac{r-M}{2\rho^2}, \quad \alpha = \pi - \beta^*. \tag{2.13}$$

Devido ao fato da métrica de Kerr ser estacionária e axissimétrica, é natural se esperar que uma perturbação qualquer do *background* seja composta por uma superposição linear de ondas de diferentes frequências ω e diferentes períodos ($2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$) em ϕ. Dessa forma, espera-se que o comportamento temporal e azimutal dessas ondas seja dado por,

$$e^{-i\omega t + im\phi}. \tag{2.14}$$

Os vetores da base tétrade, ver equações (2.5)-(2.7), quando vistos como vetores tangentes aplicados a funções com dependência temporal e azimutal dada pela expressão acima, se comportam como os seguintes operadores diferenciais [29],

$$\mathbf{l} = D = \mathcal{D}_0, \quad \mathbf{n} = \triangle = -\frac{\Delta}{2\rho^2}\mathcal{D}_0^\dagger, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{m} = \delta = \frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}}\mathcal{L}_0^\dagger, \quad \bar{\mathbf{m}} = \delta^* = \frac{1}{\bar{\rho}^*\sqrt{2}}\mathcal{L}_0, \tag{2.16}$$

onde

$$\mathcal{D}_n = \partial_r - \frac{iK}{\Delta} + 2n\frac{r-M}{\Delta}, \quad \mathcal{D}_n^\dagger = \partial_r + \frac{iK}{\Delta} + 2n\frac{r-M}{\Delta} \tag{2.17}$$

$$\mathcal{L}_n = \partial_\theta + X + n\cot\theta, \quad \mathcal{L}_n^\dagger = \partial_\theta - X + n\cot\theta, \tag{2.18}$$

e

$$K = (r^2 + a^2)\omega - am, \quad X = -a\omega\sin\theta + m\csc\theta. \tag{2.19}$$

Claramente, as expressões acima para os operadores diferenciais só são válidas quando as funções em questão possuem a forma (2.14). No caso das funções serem independentes de t e de ϕ, os operadores $\mathcal{D}$ e $\mathcal{L}$ se tornam simplesmente ∂_r e ∂_θ, respectivamente. Usando o teorema de Goldberg-Sachs, ver seção (A.8), o fato dos coeficientes de spin κ, σ, λ e ν serem nulos implica que o espaço-tempo de Kerr é Petrov tipo-D. Consequentemente, todos os escalares de Weyl, com exceção de Ψ_2, são nulos.

2.2 Ondas escalares no espaço-tempo de Kerr

A propagação de ondas escalares, neutras e sem massa na métrica de Kerr é descrita pela equação de Klein–Gordon,

$$\nabla^\mu\nabla_\mu\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}\right) = 0. \tag{2.20}$$

Utilizando as coordenadas de Boyer–Lindquist e separando as variáveis através de,

$$\psi = R_0(r)S_0(\theta)e^{im\phi}e^{-i\omega t}, \tag{2.21}$$

obtemos um par de equações,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS_0}{d\theta}\right) + \left(a^2\omega^2\cos^2\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + \boldsymbol{\lambda}\right)S_0 = 0, \tag{2.22}$$

$$\Delta\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR_0}{dr}\right) + \left[\omega^2\left(r^2+a^2\right)^2 - 4aMrm\omega + a^2m^2 - \Delta\left(a^2\omega^2+\boldsymbol{\lambda}\right)\right]R_0 = 0, \tag{2.23}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é uma constante de separação.

2.3 Ondas de neutrinos no espaço-tempo de Kerr

Substituindo os coeficientes de spin, equações (2.11)-(2.13), e as derivadas direcionais, equações (2.15) e (2.16), nas equações de Dirac no formalismo de NP, equações (B.53)-(B.56), obtemos as seguintes equações,

$$\left(\mathcal{D}_0 + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)F_1 + \frac{1}{\bar{\rho}^*\sqrt{2}}\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}F_2 = i\mu_* G_1, \tag{2.24}$$

$$\frac{\Delta}{2\rho^2}\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{2}}F_2 - \frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}}\left(\mathcal{L}^\dagger_{\frac{1}{2}} + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)F_1 = -i\mu_* G_2, \tag{2.25}$$

$$\left(\mathcal{D}_0 + \frac{1}{\bar{\rho}}\right)G_2 - \frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}}\mathcal{L}^\dagger_{\frac{1}{2}}G_1 = i\mu_* F_2, \tag{2.26}$$

$$\frac{\Delta}{2\rho^2}\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{2}}G_1 + \frac{1}{\bar{\rho}^*\sqrt{2}}\left(\mathcal{L}_{\frac{1}{2}} - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}}\right)G_2 = -i\mu_* F_1, \tag{2.27}$$

onde $F_1 = P^0$, $F_2 = P^1$, $G_1 = \bar{Q}^{1'}$, $G_2 = -Q^{0'}$ e assumimos que essas funções de onda possuem a dependência usual $e^{-i\omega t + im\phi}$. Fazendo,

$$f_1 = \bar{\rho}^* F_1, \quad f_2 = F_2, \quad g_1 = G_1, \quad g_2 = \bar{\rho}G_2, \tag{2.28}$$

as equações de Dirac acima assumem a seguinte forma,

$$\mathcal{D}_0 f_1 + 2^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}f_2 = +\left(i\mu_* r + a\mu_*\cos\theta\right)g_1, \tag{2.29}$$

$$\Delta\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{2}}f_2 - 2^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}^\dagger_{\frac{1}{2}}f_1 = -2\left(i\mu_* r + a\mu_*\cos\theta\right)g_2, \tag{2.30}$$

$$\mathcal{D}_0 g_2 - 2^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}^\dagger_{\frac{1}{2}}g_1 = +\left(i\mu_* r - a\mu_*\cos\theta\right)f_2, \tag{2.31}$$

$$\Delta\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{2}}g_1 + 2^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}g_2 = -2\left(i\mu_* r - a\mu_*\cos\theta\right)f_1. \tag{2.32}$$

Essas equações são separáveis através das substituições,

$$f_1(r,\theta) = R_{-\frac{1}{2}}(r)S_{-\frac{1}{2}}(\theta), \qquad f_2(r,\theta) = R_{+\frac{1}{2}}(r)S_{+\frac{1}{2}}(\theta), \tag{2.33}$$

$$g_1(r,\theta) = R_{+\frac{1}{2}}(r)S_{-\frac{1}{2}}(\theta), \qquad g_2(r,\theta) = R_{-\frac{1}{2}}(r)S_{+\frac{1}{2}}(\theta). \tag{2.34}$$

O resultado obtido, após trocar $\sqrt{2}\mu_*$ por m_e e $\sqrt{2}R_{-\frac{1}{2}}$ por $R_{-\frac{1}{2}}$, é [29],

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{\lambda} + i m_e r)\,\Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}}, \tag{2.35}$$

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}_0^{\dagger}\Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{\lambda} - i m_e r)\, R_{-\frac{1}{2}}, \tag{2.36}$$

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -\left(\boldsymbol{\lambda} - a m_e \cos\theta\right) S_{-\frac{1}{2}}, \tag{2.37}$$

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} S_{-\frac{1}{2}} = +\left(\boldsymbol{\lambda} + a m_e \cos\theta\right) S_{+\frac{1}{2}}, \tag{2.38}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é uma constante de separação. Eliminando $\Delta^{\frac{1}{2}}R_{+\frac{1}{2}}$ das equações (2.35) e (2.36), obtem-se uma equação envolvendo $R_{-\frac{1}{2}}$ apenas,

$$\left[\Delta\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}^{\dagger}\mathcal{D}_0 - \frac{i m_e \Delta}{\boldsymbol{\lambda} + i m_e r}\mathcal{D}_0 - \left(\boldsymbol{\lambda}^2 + m_e^2 r^2\right)\right] R_{-\frac{1}{2}} = 0. \tag{2.39}$$

A função $\Delta^{\frac{1}{2}}R_{+\frac{1}{2}}$ satisfaz à equação complexo conjugada da equação acima. Aplicando procedimento análogo às equações angulares, é possível encontrar uma equação envolvendo $S_{-\frac{1}{2}}$ apenas,

$$\left[\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} + \frac{a m_e \sin\theta}{\boldsymbol{\lambda} + a m_e \cos\theta}\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} + \left(\boldsymbol{\lambda}^2 - a^2 m_e^2 \cos^2\theta\right)\right] S_{-\frac{1}{2}} = 0, \tag{2.40}$$

sendo que $S_{+\frac{1}{2}}$ obedece à equação adjunta desta, obtida substituindo θ por $\pi - \theta$. A constante de separação $\boldsymbol{\lambda}$ é determinada pelas condições de contorno que exigem que $S_{-\frac{1}{2}}$ (e, consequentemente, $S_{+\frac{1}{2}}$) seja regular em $\theta = 0$ e em $\theta = \pi$.

O parâmetro m_e nas equações (2.35)-(2.38) pode ser interpretado como a massa da partícula. Dessa forma, para encontrar as equações que descrevem o comportamento de neutrinos na métrica de Kerr, basta tomar $m_e = 0$ nas equações (2.39) e (2.40). Além disso, fazendo $\Delta^{\frac{1}{2}}R_{+\frac{1}{2}} = P_{+\frac{1}{2}}$ e $R_{-\frac{1}{2}} = P_{-\frac{1}{2}}$, obtemos os seguintes pares de equações,

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}_0^{\dagger}P_{+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\lambda}P_{-\frac{1}{2}}, \qquad \Delta^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}_0 P_{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\lambda}P_{+\frac{1}{2}}, \tag{2.41}$$

e,

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -\boldsymbol{\lambda} S_{-\frac{1}{2}}, \qquad \mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} S_{-\frac{1}{2}} = +\boldsymbol{\lambda} S_{+\frac{1}{2}}, \tag{2.42}$$

Desacoplando as equações acima, obtemos [29],

$$\left(\Delta\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}\mathcal{D}_0^{\dagger} - \boldsymbol{\lambda}^2\right) P_{+\frac{1}{2}} = 0, \qquad \left(\Delta\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}^{\dagger}\mathcal{D}_0 - \boldsymbol{\lambda}^2\right) P_{-\frac{1}{2}} = 0, \tag{2.43}$$

e,

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger}\mathcal{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -\boldsymbol{\lambda}^2 S_{+\frac{1}{2}}, \qquad \mathcal{L}_{\frac{1}{2}}\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} S_{-\frac{1}{2}} = -\boldsymbol{\lambda}^2 S_{-\frac{1}{2}}. \tag{2.44}$$

2.4 Ondas eletromagnéticas no espaço-tempo de Kerr

Substituindo os coeficientes de spin e as derivadas direcionais apropriadas à métrica de Kerr nas equações de Maxwell do formalismo de NP, equação ($A.91$), obtemos as seguintes equações,

$$\frac{1}{\bar{\rho}^*\sqrt{2}}\left(\mathcal{L}_1 - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\phi_0 = +\left(\mathcal{D}_0 + \frac{2}{\bar{\rho}^*}\right)\phi_1, \tag{2.45}$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}^*\sqrt{2}}\left(\mathcal{L}_0 + \frac{2ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\phi_1 = +\left(\mathcal{D}_0 + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\phi_2, \tag{2.46}$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}}\left(\mathcal{L}_1^\dagger + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\phi_2 = -\frac{\Delta}{2\rho^2}\left(\mathcal{D}_0^\dagger + \frac{2}{\bar{\rho}^*}\right)\phi_1, \tag{2.47}$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}}\left(\mathcal{L}_0^\dagger + \frac{2ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\phi_1 = -\frac{\Delta}{2\rho^2}\left(\mathcal{D}_1^\dagger - \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\phi_0. \tag{2.48}$$

Através da substituição $\Phi_0 = \phi_0$, $\Phi_1 = \phi_1\bar{\rho}^*\sqrt{2}$, e $\Phi_2 = 2\phi_2\left(\bar{\rho}^*\right)^2$, as equações acima adquirem uma forma mais simétrica,

$$\left(\mathcal{L}_1 - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_0 = \left(\mathcal{D}_0 + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_1, \tag{2.49}$$

$$\left(\mathcal{L}_0 + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_1 = +\left(\mathcal{D}_0 - \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_2, \tag{2.50}$$

$$\left(\mathcal{L}_1^\dagger - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_2 = -\Delta\left(\mathcal{D}_0^\dagger + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_1, \tag{2.51}$$

$$\left(\mathcal{L}_0^\dagger + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_1 = -\Delta\left(\mathcal{D}_1^\dagger - \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_0. \tag{2.52}$$

É possível eliminar Φ_1 das equações (2.49) e (2.52) e obter uma equação desacoplada para Φ_0. Também é possível eliminar Φ_1 das equações (2.50) e (2.51) e obter uma equação desacoplada para Φ_2. Dessa maneira, obtem-se, depois de alguma simplificação, as seguintes equações [29],

$$\left[\Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1^\dagger + \mathcal{L}_0^\dagger\mathcal{L}_1 + 2i\omega\left(r + ia\cos\theta\right)\right]\Phi_0 = 0, \tag{2.53}$$

$$\left[\Delta\mathcal{D}_0^\dagger\mathcal{D}_0^\dagger + \mathcal{L}_0\mathcal{L}_1^\dagger - 2i\omega\left(r + ia\cos\theta\right)\right]\Phi_2 = 0. \tag{2.54}$$

Por meio das substituições

$$\Phi_0 = R_{+1}(r)S_{+1}(\theta) \qquad \text{e} \qquad \Phi_2 = R_{-1}(r)S_{-1}(\theta), \tag{2.55}$$

obtém-se dois pares de equações separadas,

$$\left(\Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1^\dagger + 2i\omega r\right)R_{+1} = \boldsymbol{\lambda}R_{+1}, \tag{2.56}$$

$$\left(\mathcal{L}_0^\dagger\mathcal{L}_1 - 2a\omega\cos\theta\right)S_{+1} = -\boldsymbol{\lambda}S_{+1}, \tag{2.57}$$

e,

$$\left(\Delta\mathcal{D}_0^\dagger\mathcal{D}_0 - 2i\omega r\right)R_{-1} = \boldsymbol{\lambda}R_{-1}, \tag{2.58}$$

$$\left(\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1^\dagger + 2a\omega\cos\theta\right)S_{-1} = -\boldsymbol{\lambda}S_{-1}, \tag{2.59}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é uma constante de separação. A equação (2.56) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$(\Delta\mathcal{D}_0\mathcal{D}_0^\dagger + 2i\omega r)\Delta R_{+1} = \boldsymbol{\lambda}\Delta R_{+1}. \tag{2.60}$$

Comparando-a com a equação (2.58), conclui-se que as funções R_{-1} e ΔR_{+1} satisfazem equações complexo conjugadas. A partir das equações (2.57) e (2.59), também é possível mostrar que as equações satisfeitas por S_{+1} e S_{-1} podem ser obtidas uma a partir da outra substituindo-se θ por $\pi - \theta$.

O fato de termos equações separadas para Φ_0 e Φ_2 não resolve completamente o problema da propagação de ondas eletromagnéticas no espaço-tempo de Kerr. Ainda é necessário determinar a normalização relativa entre Φ_0 e Φ_2, bem como a solução Φ_1. Utilizando as equações (2.55), e escolhendo S_{+1} e S_{-1} de forma que ambas sejam normalizadas em 1, i.e.,

$$\int_0^\pi S_{+1}^2 \sin\theta d\theta = \int_0^\pi S_{-1}^2 \sin\theta d\theta = 1, \tag{2.61}$$

a indeterminação em Φ_0 e Φ_2 é transferida para a normalização relativa entre R_{-1} e R_{+1}. Essa normalização relativa pode ser obtida através das identidades de Teukolsky-Starobinski. De acordo com essas identidades, é possível escrever

$$\Delta\mathcal{D}_0\mathcal{D}_0 R_{-1} = \mathcal{C}_1 \Delta R_{+1}, \tag{2.62}$$
$$\Delta\mathcal{D}_0^\dagger\mathcal{D}_0^\dagger \Delta R_{+1} = \mathcal{C}_1^* R_{-1}, \tag{2.63}$$
$$\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1 S_{+1} = D_1 S_{-1}, \tag{2.64}$$
$$\mathcal{L}_0^\dagger\mathcal{L}_1^\dagger S_{-1} = D_1 S_{+1}, \tag{2.65}$$

onde $\mathcal{C}_1$ e D_1 são constantes, denominadas constantes de Starobinski [29, 32], que satisfazem,

$$|\mathcal{C}_1|^2 = D_1^2 = \boldsymbol{\lambda}^2 - 4\alpha^2\omega^2, \quad \text{onde} \quad \alpha^2 = a^2 - \frac{am}{\omega}. \tag{2.66}$$

Denotando ΔR_{+1} e R_{-1} por P_{+1} e P_{-1}, respectivamente, podemos escrever as equações (2.62) e (2.63) como,

$$\Delta\mathcal{D}_0\mathcal{D}_0 P_{-1} = \mathcal{C}_1 P_{+1}, \tag{2.67}$$
$$\Delta\mathcal{D}_0^\dagger\mathcal{D}_0^\dagger P_{+1} = \mathcal{C}_1^* P_{-1}. \tag{2.68}$$

Utilizando a relação,

$$\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1\Phi_0 = \mathcal{D}_0\mathcal{D}_0\Phi_2, \tag{2.69}$$

entre Φ_0 e Φ_2, pode-se mostrar que $\mathcal{C}_1$ é real e que podemos escrever os escalares de Maxwell, ϕ_0 e ϕ_2, como,

$$\Delta\phi_0 = P_{+1}S_{+1}, \quad \text{e} \quad \phi_2 = \frac{1}{2(\bar{\rho}^*)^2} P_{-1}S_{-1}. \tag{2.70}$$

Depois de um pouco de manipulação algébrica, é possível calcular também o escalar de Maxwell restante, ϕ_1 [29],

$$\phi_1 = \frac{\sqrt{2}}{4(\bar{\rho}^*)^2}\left[\left(g_{+1}\mathcal{L}_1 S_{+1} - g_{-1}\mathcal{L}_1^\dagger S_{-1}\right) - ia\left(f_{-1}\mathcal{D}_0 P_{-1} - f_{+1}\mathcal{D}_0^\dagger P_{+1}\right)\right], \tag{2.71}$$

onde as funções $f_{\pm1}$ e $g_{\pm1}$ são dadas por,

$$f_{+1} = \frac{1}{\mathcal{C}_1}\left[(\cos\theta)\mathcal{L}_1^\dagger S_{-1} + (\sin\theta)S_{-1}\right], \tag{2.72}$$

$$f_{-1} = \frac{1}{\mathcal{C}_1}\left[(\cos\theta)\mathcal{L}_1 S_{+1} + (\sin\theta)S_{+1}\right], \tag{2.73}$$

$$g_{+1} = \frac{1}{\mathcal{C}_1}\left(r\mathcal{D}_0 P_{-1} - P_{-1}\right), \tag{2.74}$$

$$g_{-1} = \frac{1}{\mathcal{C}_1}\left(r\mathcal{D}_0^\dagger P_{+1} - P_{+1}\right). \tag{2.75}$$

2.5 Ondas gravitacionais no espaço-tempo de Kerr

Conforme visto anteriormente, utilizando a base tétrade dada pelas equações (2.5)-(2.7), temos que os escalares de Weyl, Ψ_0, Ψ_1, Ψ_3 e Ψ_4, e os coeficientes de spin, κ, σ, λ, ν e ϵ, são todos nulos na métrica de Kerr. Quando a métrica de Kerr é perturbada gravitacionalmente, as quantidades que antes se anulavam no estado estacionário, assumem valores de primeira ordem na teoria de perturbações lineares. As quantidades que não eram nulas, sofrem, da mesma forma, perturbações de primeira ordem. O problema da propagação de ondas gravitacionais na métrica de Kerr se divide naturalmente em duas partes. A primeira consiste em determinar as perturbações das quantidades inicialmente nulas, denotadas por,

$$\Psi_0, \Psi_1, \Psi_3, \Psi_4, \kappa, \sigma, \lambda, \nu. \tag{2.76}$$

A segunda parte, por sua vez, envolve as perturbações das quantidades inicialmente não-nulas, dadas por

$$\Psi_2^{(1)}, \tilde{\rho}^{(1)}, \tau^{(1)}, \mu^{(1)}, \pi^{(1)}, \alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}, \epsilon^{(1)}, \mathbf{l}^{(1)}, \mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{m}^{(1)}, \bar{\mathbf{m}}^{(1)}. \tag{2.77}$$

O índice $^{(1)}$, que indica as perturbações de primeira ordem, é desnecessário para as quantidades (2.76) inicialmente nulas. Entre as equações de NP, existem seis que são lineares nas quantidades que se anulam no *background*, i.e., Ψ_0, Ψ_1, Ψ_3, Ψ_4, κ, σ, λ e ν. Quatro dessas equações são identidades de Bianchi e duas são identidades de Ricci. Elas podem ser separadas em dois grupos de três equações, um para Ψ_0, Ψ_1, κ e σ, e outro para Ψ_3, Ψ_4, λ e ν. Esses grupos de equações são totalmente desacoplados e já estão linearizados, i.e., os valores não-nulos do *background* podem ser substituídos por seus valores não perturbados. As equações em questão são [29],

$$\left(\delta^* - 4\alpha + \pi\right)\Psi_0 - \left(D - 2\epsilon - 4\tilde{\rho}\right)\Psi_1 = 3\kappa\Psi_2, \tag{2.78}$$

$$\left(\triangle - 4\gamma + \mu\right)\Psi_0 - \left(\delta - 4\tau - 2\beta\right)\Psi_1 = 3\sigma\Psi_2, \tag{2.79}$$

$$\left(D - \tilde{\rho} - \tilde{\rho}^* - 3\epsilon + \epsilon^*\right)\sigma - \left(\delta - \tau + \pi^* - \alpha^* - 3\beta\right)\kappa = \Psi_0, \tag{2.80}$$

e

$$\left(D + 4\epsilon - \tilde{\rho}\right)\Psi_4 - \left(\delta^* + 4\pi + 2\alpha\right)\Psi_3 = -3\lambda\Psi_2, \tag{2.81}$$

$$\left(\delta + 4\beta - \tau\right)\Psi_4 - \left(\triangle + 2\gamma + 4\mu\right)\Psi_3 = -3\nu\Psi_2, \tag{2.82}$$

$$\left(\triangle + \mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*\right)\lambda - \left(\delta^* + 3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*\right)\nu = -\Psi_4. \tag{2.83}$$

Assume-se, novamente, que as pertubações possuem dependência temporal e azimutal da forma,

$$e^{-i\omega t+im\phi}, \tag{2.84}$$

onde ω é uma constante real e m é um inteiro. Os vetores da base tétrade, quando considerados como vetores tangentes, se tornam os operadores diferenciais encontrados anteriormente, equações (2.15) e (2.16). Fazendo as substituições,

$$\Phi_0 = \Psi_0, \quad \Phi_1 = \Psi_1\bar{\rho}^*\sqrt{2}, \quad k = \frac{\kappa\sqrt{2}}{(\bar{\rho}^*)^2}, \quad s = \frac{\sigma\bar{\rho}}{(\bar{\rho}^*)^2}, \tag{2.85}$$

$$\Phi_4 = \Psi_4(\bar{\rho}^*)^4, \quad \Phi_3 = \Psi_3\frac{(\bar{\rho}^*)^3}{\sqrt{2}}, \quad l = \lambda\frac{\bar{\rho}^*}{2}, \quad n = \nu\frac{\rho^2}{\sqrt{2}}, \tag{2.86}$$

as equações acima se reduzem para,

$$\left(\mathcal{L}_2 - \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_0 - \left(\mathcal{D}_0 + \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_1 = -6Mk, \tag{2.87}$$

$$\Delta\left(\mathcal{D}_2^\dagger - \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_0 + \left(\mathcal{L}_{-1}^\dagger + \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_1 = +6Ms, \tag{2.88}$$

$$\left(\mathcal{D}_0 + \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)s - \left(\mathcal{L}_{-1}^\dagger + \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)k = +\frac{\bar{\rho}}{(\bar{\rho}^*)^2}\Phi_0, \tag{2.89}$$

e

$$\left(\mathcal{D}_0 - \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_4 - \left(\mathcal{L}_{-1} + \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_3 = +6Ml, \tag{2.90}$$

$$\left(\mathcal{L}_2^\dagger - \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_4 + \Delta\left(\mathcal{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_3 = +6Mn, \tag{2.91}$$

$$\Delta\left(\mathcal{D}_2^\dagger - \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_0 + \left(\mathcal{L}_{-1}^\dagger + \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_1 = +6Ms. \tag{2.92}$$

Aplicando o operador $(\mathcal{L}_{-1}^\dagger + 3ia\sin\theta/\bar{\rho}^*)$ à equação (2.87) e o operador $(\mathcal{D}_0 + 3/\bar{\rho}^*)$ à equação (2.88) é possível eliminar Φ_1. Juntamente com a equação (2.89), obtemos,

$$\left[\left(\mathcal{L}_{-1}^\dagger + \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\mathcal{L}_2 - \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right) + \left(\mathcal{D}_0 + \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)\Delta\left(\mathcal{D}_2^\dagger - \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)\right]\Phi_0 = 6M\frac{\bar{\rho}}{(\bar{\rho}^*)^2}\Phi_0. \tag{2.93}$$

Aplicando procedimento análogo às equações (2.90)-(2.92), obtemos a seguinte equação desacoplada,

$$\left[\left(\mathcal{L}_{-1} + \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\mathcal{L}_2^\dagger - \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right) + \Delta\left(\mathcal{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\mathcal{D}_0 - \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)\right]\Phi_4 = 6M\frac{\bar{\rho}}{(\bar{\rho}^*)^2}\Phi_4. \tag{2.94}$$

Após sucessivas simplificações, as equações acima podem ser reescritas, respectivamente, como

$$\left[\Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2^\dagger + \mathcal{L}_{-1}^\dagger\mathcal{L}_2 + 6i\omega(r + ia\cos\theta),\right]\Phi_0 = 0 \tag{2.95}$$

e

$$\left[\Delta\mathcal{D}_{-1}^\dagger\mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_2^\dagger - 6i\omega(r + ia\cos\theta)\right]\Phi_4 = 0, \tag{2.96}$$

que são separáveis através das substituições,

$$\Phi_0 = R_{+2}(r)S_{+2}(\theta) \qquad \text{e} \qquad \Phi_4 = R_{-2}(r)S_{-2}(\theta). \tag{2.97}$$

Como resultado final da separação de variáveis, obtem-se dois pares de equações,

$$(\Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2^\dagger + 6i\omega r)R_{+2} = \boldsymbol{\lambda}R_{+2}, \tag{2.98}$$
$$(\mathcal{L}_{-1}^\dagger\mathcal{L}_2 - 6a\omega\cos\theta)S_{+2} = -\boldsymbol{\lambda}S_{+2}, \tag{2.99}$$

e,

$$(\Delta\mathcal{D}_{-1}^\dagger\mathcal{D}_0 - 6i\omega r)R_{-2} = \boldsymbol{\lambda}R_{-2}, \tag{2.100}$$
$$(\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_2^\dagger + 6a\omega\cos\theta)S_{-2} = -\boldsymbol{\lambda}S_{-2}, \tag{2.101}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é uma constante de separação. A equação (2.98), pode ser reescrita como,

$$(\Delta\mathcal{D}_{-1}\mathcal{D}_0^\dagger + 6i\omega r)\Delta^2R_{+2} = \boldsymbol{\lambda}\Delta^2R_{+2}, \tag{2.102}$$

de modo que R_{-2} e Δ^2R_{+2} satisfazem a equações complexo conjugadas. Com respeito aos coeficientes de spin κ, σ, λ e ν inicialmente nulos, podemos fixar alguns dos graus de liberdade de gauge para obter seus valores perturbativos. Enquanto Ψ_0 e Ψ_4 são invariantes de gauge numa teoria de perturbações lineares, Ψ_1 e Ψ_3 não são. Desse modo, é possível, através de rotações infinitesimais da base tétrade, escolher um gauge no qual Ψ_1 e Ψ_3 são nulos. Nesse gauge, encontram-se os valores de κ, σ, λ e ν através das equações (2.87), (2.88), (2.90) e (2.91),

$$\kappa = -\frac{\sqrt{2}}{6M}(\bar{\rho}^*)^2R_{+2}\left(\mathcal{L}_2 - \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)S_{+2}, \tag{2.103}$$
$$\sigma = \frac{1}{6M}\frac{(\bar{\rho}^*)^2}{\bar{\rho}}S_{+2}\Delta\left(\mathcal{D}_2^\dagger - \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)R_{+2}, \tag{2.104}$$
$$\lambda = \frac{1}{6M}\frac{2}{\bar{\rho}^*}S_{-2}\left(\mathcal{D}_0 - \frac{3}{\bar{\rho}^*}\right)R_{-2}, \tag{2.105}$$
$$\nu = \frac{\sqrt{2}}{6M}\frac{1}{\rho^2}R_{-2}\left(\mathcal{L}_2^\dagger - \frac{3ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)S_{-2}. \tag{2.106}$$

Como ainda não especificamos as normalizações relativas entre $\Phi_0 = R_{+2}S_{+2}$ e $\Phi_4 = R_{-2}S_{-2}$, há uma ambiguidade nas soluções de κ e σ em relação às soluções de λ e ν. Analogamente ao caso das perturbações eletromagnéticas, para as perturbações gravitacionais também podem ser demonstradas identidades importantes entre Δ^2R_{+2} e R_{-2} e entre S_{+2} e S_{-2}, chamadas identidades de Teukolsky-Starobinski. No caso em que S_{+2} e S_{-2} são escolhidos de forma que ambos sejam normalizadas em 1, i.e.,

$$\int_0^\pi S_{+2}^2\sin\theta d\theta = \int_0^\pi S_{-2}^2\sin\theta d\theta = 1, \tag{2.107}$$

as identidades de Teukolsky-Starobinski são dadas por,

$$\Delta^2\mathcal{D}_0\mathcal{D}_0\mathcal{D}_0\mathcal{D}_0R_{-2} = \mathcal{C}_2\Delta^2R_{+2}, \tag{2.108}$$
$$\Delta^2\mathcal{D}_0^\dagger\mathcal{D}_0^\dagger\mathcal{D}_0^\dagger\mathcal{D}_0^\dagger\Delta^2R_{+2} = \mathcal{C}_2^*R_{-2}, \tag{2.109}$$
$$\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2S_{+2} = D_2S_{-2}, \tag{2.110}$$
$$\mathcal{L}_{-1}^\dagger\mathcal{L}_0^\dagger\mathcal{L}_1^\dagger\mathcal{L}_2^\dagger S_{-2} = D_2S_{+2}, \tag{2.111}$$

onde as constantes de Starobinski $\mathcal{C}_2$ e D_2 são [29, 32],

$$|\mathcal{C}_2|^2 = \boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{\lambda}+2)^2 - 8\omega^2\boldsymbol{\lambda}\left[\alpha^2(5\boldsymbol{\lambda}+6) - 12a^2\right] + 144\omega^2(M^2+\omega^2\alpha^4), \tag{2.112}$$

$$D_2^2 = |\mathcal{C}_2|^2 - 144\omega^2 M^2, \quad \alpha^2 = a^2 - \frac{am}{\omega}. \tag{2.113}$$

Quando a normalização relativa das funções R_{+2} e R_{-2} obedece às equações (2.108) e (2.109), escrevemos,

$$\Delta^2 R_{+2} = P_{+2} \qquad \text{e} \qquad R_{-2} = P_{-2}. \tag{2.114}$$

Consequentemente, as soluções Ψ_0 e Ψ_4 devem ser,

$$\Delta^2\Psi_0 = P_{+2}S_{+2} \qquad \text{e} \qquad \Psi_4 = \frac{1}{4(\bar{\rho}^*)^4}P_{-2}S_{-2}. \tag{2.115}$$

O estudo perturbativo das quantidades inicialmente não nulas no formalismo de NP é bastante complicado. É conveniente introduzir uma notação mais simplificada para os vetores da base tétrade. Fazendo, $\mathbf{l}^1 = \mathbf{l}$, $\mathbf{l}^2 = \mathbf{n}$, $\mathbf{l}^3 = \mathbf{m}$ e $\mathbf{l}^4 = \bar{\mathbf{m}}$, podemos escrever as perturbações $\mathbf{l}^{i(1)}$ como $\mathbf{l}^{i(1)} = A^i_j \mathbf{l}^j$. Algumas propriedades da matriz $\mathbf{A}$ são diretamente obtidas a partir do fato de $\mathbf{l}^1$ e $\mathbf{l}^2$ serem reais e $\mathbf{l}^3$ e $\mathbf{l}^4$ serem complexo conjugados: A^1_1, A^2_2, A^1_2 e A^2_1 são quantidades reais e os pares de elementos cujos índices 3 e 4 estão trocados são complexo conjugados. Fixando os seis graus de liberdade ainda não utilizados, é possível escolher um gauge no qual $\Psi_2^{(1)} = 0$ e $A^1_1 = A^2_2 = A^3_3 = A^4_4 = 0$ [29].

Linearizando as relações de comutação (A.27), i.e. $[\mathbf{l}^i, \mathbf{l}^j] = C^{ij}_k \mathbf{l}^k$, obtem-se as seguintes equações,

$$[A^i_k \mathbf{l}^k, \mathbf{l}^j] + [\mathbf{l}^i, A^j_k \mathbf{l}^k] = C^{ij}_k A^k_m \mathbf{l}^m + c^{ij}_m \mathbf{l}^m, \tag{2.116}$$

onde c^{ij}_m representa a perturbação de C^{ij}_m. Utilizando as 24 equações acima, juntamente com as 4 identidades de Bianchi ainda não utilizadas e as 4 identidades de Ricci ainda não utilizadas, é possível determinar completamente a matriz $\mathbf{A}$ e os coeficientes de spin $\tilde{\rho}^{(1)}$, $\tau^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $\pi^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$, $\epsilon^{(1)}$. É possível obter também as partes real e imaginária da constante de Starobinski $\mathcal{C}_2$,

$$\mathcal{C}_2 = D_2 + 12i\omega M, \tag{2.117}$$

onde D_2 é dado pela expressão (2.113). O cálculo de todas essas quantidades é extremamente longo e complexo. Para maiores detalhes, consulte a referência [29], capítulo 9.

2.6 Equações de Teukolsky

É possível reescrever as equações relevantes para as ondas de spin $s = 0$, equação (2.23), $s = 1/2$, equação (2.43), $s = 1$, equações (2.58) e (2.60), e $s = 2$, equações (2.100) e (2.102), através de um único par de equações que dependem de s. Essa equação geral é dada por [29],

$$\left[\Delta\mathcal{D}_{1-|s|}\mathcal{D}_0^\dagger + 2(2|s|-1)i\omega r\right] P_{+|s|} = \boldsymbol{\lambda} P_{+|s|}, \tag{2.118}$$

$$\left[\Delta\mathcal{D}_{1-|s|}^\dagger\mathcal{D}_0 - 2(2|s|-1)i\omega r\right] P_{-|s|} = \boldsymbol{\lambda} P_{-|s|}, \tag{2.119}$$

onde $P_{-|s|} = R_{-|s|}$, $P_{+|s|} = \Delta^{+|s|} R_{+|s|}$, e $\boldsymbol{\lambda}$ é uma constante de separação que depende de $|s|$. Essa par de equações pode ser reescrito como uma única equação,

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr}\left(\Delta^{s+1}\frac{dR_s}{dr}\right) + \left(\frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda\right) R_s = 0, \tag{2.120}$$

onde λ é uma constante de separação diferente de $\boldsymbol{\lambda}$. A equação acima, junto com a equação que determina a parte angular da função de onda, i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS_s}{d\theta}\right) + \bigg(a^2\omega^2\cos^2\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta} - 2a\omega s\cos\theta \\ -\frac{2ms\cos\theta}{\sin^2\theta} - s^2\cot^2\theta + s + A\bigg) S_s = 0, \end{aligned} \tag{2.121}$$

onde $\lambda = A + a^2\omega^2 - 2am\omega$, constituem as chamadas equações de Teukolsky. As condições de contorno para a equação angular (2.121) exigem que suas soluções sejam regulares em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, o que constitui um problema de autovalores de Sturm-Liouville para a constante de separação $A = {}_sA_\ell^m(a\omega)$. Para s, m e $a\omega$ fixos, os autovalores são designados pelo índice ℓ. É possível mostrar que as autofunções ${}_sS_\ell^m$ são completas e ortogonais no intervalo $0 \le \theta \le \pi$ para cada m, s e $a\omega$. No caso escalar, i.e., $s = 0$, as autofunções são as funções de onda esferoidais $S_\ell^m(-a^2\omega^2, \cos\theta)$ [33, 34]. Quando $a\omega = 0$, as autofunções são os esféricos harmônicos *spin-weighted* ${}_sY_\ell^m$ e os autovalores são dados por $A = (\ell - s)(\ell + s + 1)$ [35]. No caso geral, as autofunções são denominadas harmônicos esferoidais *spin-weighted* [30].

2.7 Problema de reflexão e transmissão na métrica de Kerr

Vamos considerar o problema de espalhamento de uma onda sem massa, de spin $s = 0, \frac{1}{2}, 1$ ou 2, por um buraco negro de Kerr. O objetivo dessa seção é calcular, no limite de baixas energias, os coeficientes de reflexão e transmissão quando uma onda originada no infinito assintótico incide sobre um buraco negro de Kerr. Primeiramente, vamos analisar as condições de contorno da equação radial (2.120). Mudando a variável independente através da relação,

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, \tag{2.122}$$

e fazendo a transformação $Y_s = \Delta^{\frac{s}{2}}\sqrt{r^2 + a^2}R_s$, a equação (2.120) se torna,

$$\frac{d^2Y}{dr_*^2} + \left\{\frac{K^2 - 2is(r-M)K + \Delta(4ir\omega s - \lambda)}{(r^2+a^2)^2} - G^2 - \frac{dG}{dr_*}\right\} Y = 0, \tag{2.123}$$

onde G é dado por,

$$G = \frac{s(r-M)}{r^2 + a^2} + \frac{r\Delta}{(r^2+a^2)^2}. \tag{2.124}$$

É possível encontrar uma solução simples para essa equação assintoticamente longe do buraco negro e nas proximidades do horizonte de eventos. Quando $r \to \infty (r_* \to \infty)$, a equação (2.123) se torna,

$$\frac{d^2 Y}{dr_*^2} + \left(\omega^2 + \frac{2i\omega s}{r}\right) Y \approx 0, \tag{2.125}$$

cujas soluções são, no infinito assintótico, $Y \sim r^{\pm s} e^{\mp i\omega r_*}$. Por outro lado, perto do buraco negro, i.e., no limite $r \to r_+ (r_* \to -\infty)$, a equação radial (2.123) se reduz a,

$$\frac{d^2 Y}{dr_*^2} + \left(\omega - is\tilde{\omega}\frac{r_+ - r_-}{4Mr_+}\right)^2 Y \approx 0, \tag{2.126}$$

onde $\tilde{\omega} = \omega - m\Omega$ e $\Omega = a/(2Mr_+)$. As soluções correspondentes são dadas por $Y \sim (r - r_+)^{\pm\frac{s}{2}} e^{\pm i\tilde{\omega} r_*}$. A condição de contorno da equação (2.123) no horizonte de eventos é determinada pelo fato de que as ondas podem apenas entrar no buraco negro (nenhum sinal pode se propagar de dentro para fora do buraco negro). Exigindo que a velocidade de grupo radial de um pacote de ondas, medida por um observador fisicamente bem-comportado, seja negativa (i.e., direcionada de fora para dentro do buraco negro), conclui-se que a solução próxima ao horizonte de eventos é dada por $Y \sim (r - r_+)^{-\frac{s}{2}} e^{-i\tilde{\omega} r_*}$. Mais precisamente, as velocidades de grupo e de fase dessa solução são, respectivamente,

$$v_{grupo} = \frac{d\omega}{d\tilde{\omega}} = -1 \qquad \text{e} \qquad v_{fase} = \frac{\omega}{\tilde{\omega}} = -\frac{\omega}{\omega - m\Omega}. \tag{2.127}$$

Note que a velocidade de grupo é sempre negativa, satisfazendo a condição de contorno explicada anteriormente. No entanto, a velocidade de fase é positiva quando $\omega < m\Omega$, indicando que, para um observador no infinito, energia é extraída do buraco negro. Sabendo as soluções assintóticas, é possível escrever a função radial que descreve o problema de espalhamento da seguinte forma,

$$Y_s = \begin{cases} Z_s^{in} r_*^s e^{-i\omega r_*} + Z_s^{out} r_*^{-s} e^{+i\omega r_*}, & r_* \to \infty \\ Z_s^{tr} (r - r_+)^{-\frac{s}{2}} e^{-i\tilde{\omega} r_*} = Z_s^{tr} e^{-i(\tilde{\omega} - is\frac{r_+ - r_-}{4Mr_+}) r_*}, & r_* \to -\infty \end{cases}, \tag{2.128}$$

onde os coeficientes Z_s^{in}, Z_s^{out} e Z_s^{tr} podem ser relacionados, respectivamente, às normas incidente, refletida e transmitida das ondas. Dada uma solução qualquer Y_s da equação (2.123), é possível obter uma outra solução Y_{-s}^* simplesmente tomando o complexo conjugado e trocando s por $-s$. A partir da identidade de Abel, conclui-se que o Wronskiano W entre duas soluções da equação (2.123) é constante e, portanto,

$$W[Y_s, Y_{-s}^*]\Big|_{r_* = -\infty} = W[Y_s, Y_{-s}^*]]\Big|_{r_* = \infty}. \tag{2.129}$$

Substituindo a solução (2.128) na equação acima, obtem-se a seguinte relação,

$$\left(\tilde{\omega} - is\frac{r_+ - r_-}{4Mr_+}\right) Z_s^{tr} Z_{-s}^{tr\,*} = \omega \left(Z_s^{in} Z_{-s}^{in\,*} - Z_s^{out} Z_{-s}^{out*}\right). \tag{2.130}$$

Observe que os coeficientes Z_s e Z_{-s} não são independentes. A relação entre eles pode ser obtida a partir das equações (2.41), (2.67), (2.68), (2.108) e (2.109),

$$-2i\omega Z^{in}_{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\lambda} Z^{in}_{+\frac{1}{2}}, \tag{2.131}$$

$$2i\omega Z^{out}_{+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\lambda} Z^{out}_{-\frac{1}{2}}, \tag{2.132}$$

$$\boldsymbol{\lambda} Z^{tr}_{+\frac{1}{2}} = \frac{4Mr_+}{\sqrt{r_+ - r_-}} \left(-i\tilde{\omega} + \epsilon\right) Z^{tr}_{-\frac{1}{2}}, \tag{2.133}$$

$$\mathcal{C}_1 Z^{in}_{+1} = -4\omega^2 Z^{in}_{-1}, \tag{2.134}$$

$$-4\omega^2 Z^{out}_{+1} = \mathcal{C}_1 Z^{out}_{-1}, \tag{2.135}$$

$$\mathcal{C}_1(r_+ - r_-) Z^{tr}_{+1} = -16 i\tilde{\omega} M^2 r_+^2 (-i\tilde{\omega} + 2\epsilon) Z^{tr}_{-1}, \tag{2.136}$$

$$\mathcal{C}_2 Z^{in}_{+2} = 16\omega^4 Z^{in}_{-2}, \tag{2.137}$$

$$16\omega^4 Z^{out}_{+2} \mathcal{C}_2^* Z^{out}_{-2}, \tag{2.138}$$

$$\mathcal{C}_2(r_+ - r_-)^2 Z^{tr}_{+2} = 16(2Mr_+)^4 i\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^2 + 4\epsilon^2)(-i\tilde{\omega} + 4\epsilon) Z^{tr}_{-2}, \tag{2.139}$$

onde ϵ é dado por,

$$\epsilon = \frac{r_+ - r_-}{8Mr_+}. \tag{2.140}$$

Substituindo-se as relações acima na expressão do Wronskiano, equação (2.130), obtemos a relação $r_{|s|} + t_{|s|} = 1$, onde,

$$r_{|s|} = \left| \frac{Z^{out}_s Z^{out}_{-s}}{Z^{in}_s Z^{in}_{-s}} \right|, \qquad t_{|s|} = \frac{1}{\omega} \left(\tilde{\omega} - 2is\epsilon\right) \frac{Z^{tr}_s Z^{tr\,*}_{-s}}{Z^{in}_s Z^{in\,*}_{-s}} = 1 - \left| \frac{Z^{out}_s Z^{out}_{-s}}{Z^{in}_s Z^{in}_{-s}} \right|. \tag{2.141}$$

Em particular, para $|s| = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$, tem-se,

$$r_0 = \left| \frac{Z^{out}_0}{Z^{in}_0} \right|^2, \quad t_0 = \frac{\tilde{\omega}}{\omega} \left| \frac{Z^{tr}_0}{Z^{in}_0} \right|^2, \tag{2.142}$$

$$r_{\frac{1}{2}} = \frac{4\omega^2}{\boldsymbol{\lambda}^2} \left| \frac{Z^{out}_{+\frac{1}{2}}}{Z^{in}_{+\frac{1}{2}}} \right|^2 = \frac{\boldsymbol{\lambda}^2}{4\omega^2} \left| \frac{Z^{out}_{-\frac{1}{2}}}{Z^{in}_{-\frac{1}{2}}} \right|^2, \quad t_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{r_+ - r_-}}{2Mr_+} \left| \frac{Z^{out}_{+\frac{1}{2}}}{Z^{in}_{+\frac{1}{2}}} \right|^2 = \frac{2Mr_+}{\omega^2\sqrt{r_+ - r_-}} \left(\tilde{\omega}^2 + \epsilon^2\right) \left| \frac{Z^{tr}_{-\frac{1}{2}}}{Z^{in}_{-\frac{1}{2}}} \right|^2, \tag{2.143}$$

$$r_1 = \frac{16\omega^4}{\mathcal{C}_1^2} \left| \frac{Z^{out}_{+1}}{Z^{in}_{+1}} \right|^2 = \frac{\mathcal{C}_1^2}{16\omega^4} \left| \frac{Z^{out}_{-1}}{Z^{in}_{-1}} \right|^2, \quad t_1 = \frac{\omega(r_+ - r_-)}{\tilde{\omega}(2Mr_+)^2} \left| \frac{Z^{tr}_{+1}}{Z^{in}_{+1}} \right|^2 = \frac{\tilde{\omega}}{\omega^3} \frac{(2Mr_+)^2(\tilde{\omega}^2 + 4\epsilon^2)}{r_+ - r_-} \left| \frac{Z^{tr}_{-1}}{Z^{in}_{-1}} \right|^2, \tag{2.144}$$

$$r_2 = \frac{256\omega^8}{|\mathcal{C}_2|^2} \left| \frac{Z^{out}_{+2}}{Z^{in}_{+2}} \right|^2 = \frac{|\mathcal{C}_2|^2}{256\omega^8} \left| \frac{Z^{out}_{-2}}{Z^{in}_{-2}} \right|^2, \tag{2.145}$$

$$t_2 = \frac{\omega^3(r_+ - r_-)^2}{\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^2 + 4\epsilon^2)(2Mr_+)^4} \left| \frac{Z^{tr}_{+2}}{Z^{in}_{+2}} \right|^2 = \frac{\tilde{\omega}}{\omega^5} \frac{(2Mr_+)^4(\tilde{\omega}^2 + 4\epsilon^2)(\tilde{\omega}^2 + 16\epsilon^2)}{(r_+ - r_-)^2} \left| \frac{Z^{tr}_{-2}}{Z^{in}_{-2}} \right|^2. \tag{2.146}$$

Os coeficientes $r_{|s|}$ e $t_{|s|}$ podem ser interpretados, respectivamente, como coeficientes de reflexão e de transmissão. Essa interpretação é obtida a partir do cálculo do fluxo de energia através do horizonte de eventos do buraco negro e do fluxo de energia no infinito assintótico. Os resultados assim obtidos são [29,30,36,37],

$$\frac{d^2E_0^{out}}{dtd\Omega} = \frac{S_0^2}{2\pi}\frac{\omega^2}{2}\left|Z_0^{out}\right|^2, \quad \frac{d^2E_0^{in}}{dtd\Omega} = \frac{S_0^2}{2\pi}\frac{\omega^2}{2}\left|Z_0^{in}\right|^2, \quad \frac{d^2E_0^{tr}}{dtd\Omega} = \frac{S_0^2}{2\pi}\frac{\omega\tilde{\omega}}{2}|Z_0^{tr}|^2, \tag{2.147}$$

$$\frac{d^2E_{\frac{1}{2}}^{out}}{dtd\Omega} = \omega\left(S_{+\frac{1}{2}}^2 + S_{-\frac{1}{2}}^2\right)\left|Z_{-\frac{1}{2}}^{out}\right|^2 = \frac{4\omega^3}{\boldsymbol{\lambda}^2}\left(S_{+\frac{1}{2}}^2 + S_{-\frac{1}{2}}^2\right)\left|Z_{+\frac{1}{2}}^{out}\right|^2, \tag{2.148}$$

$$\frac{d^2E_{\frac{1}{2}}^{in}}{dtd\Omega} = \omega\left(S_{+\frac{1}{2}}^2 + S_{-\frac{1}{2}}^2\right)\left|Z_{+\frac{1}{2}}^{in}\right|^2 = \frac{4\omega^3}{\boldsymbol{\lambda}^2}\left(S_{+\frac{1}{2}}^2 + S_{-\frac{1}{2}}^2\right)\left|Z_{-\frac{1}{2}}^{in}\right|^2, \tag{2.149}$$

$$\frac{d^2E_{\frac{1}{2}}^{tr}}{dtd\Omega} = \omega\left(S_{+\frac{1}{2}}^2 + S_{-\frac{1}{2}}^2\right)\frac{\sqrt{r_+ - r_-}}{2Mr_+}\left|Z_{+\frac{1}{2}}^{tr}\right|^2 = \omega\left(S_{+\frac{1}{2}}^2 + S_{-\frac{1}{2}}^2\right)\frac{8Mr_+}{\boldsymbol{\lambda}^2\sqrt{r_+ - r_-}}\left(\tilde{\omega}^2 + \epsilon^2\right)\left|Z_{-\frac{1}{2}}^{tr}\right|^2, \tag{2.150}$$

$$\frac{d^2E_1^{out}}{dtd\Omega} = \frac{S_{-1}^2}{2\pi}\left|Z_{-1}^{out}\right|^2 = \frac{S_{-1}^2}{2\pi}\frac{4\omega^4}{\mathcal{C}_1^2}\left|Z_{+1}^{out}\right|^2, \tag{2.151}$$

$$\frac{d^2E_1^{in}}{dtd\Omega} = \frac{S_{+1}^2}{2\pi}\frac{1}{4}\left|Z_{+1}^{in}\right|^2 = \frac{S_{+1}^2}{2\pi}\frac{16\omega^4}{\mathcal{C}_1^2}\left|Z_{-1}^{in}\right|^2, \tag{2.152}$$

$$\frac{d^2E_1^{tr}}{dtd\Omega} = \frac{S_{+1}^2}{2\pi}\frac{\omega}{4\tilde{\omega}}\frac{r_+ - r_-}{(2Mr_+)^2}\left|Z_{+1}^{tr}\right|^2 = \frac{S_{+1}^2}{2\pi}\frac{4\omega\tilde{\omega}(2Mr_+)^2}{\mathcal{C}_1^2(r_+ - r_-)}(\tilde{\omega}^2 + 4\epsilon^2)\left|Z_{-1}^{tr}\right|^2, \tag{2.153}$$

$$\frac{d^2E_2^{out}}{dtd\Omega} = \frac{S_{-2}^2}{2\pi}\frac{1}{2\omega^2}\left|Z_{-2}^{out}\right|^2 = \frac{S_{-2}^2}{2\pi}\frac{8\omega^6}{|\mathcal{C}_2|^2}\left|Z_{+2}^{out}\right|^2, \tag{2.154}$$

$$\frac{d^2E_2^{in}}{dtd\Omega} = \frac{S_{+2}^2}{2\pi}\frac{1}{32\omega^2}\left|Z_{+2}^{in}\right|^2 = \frac{S_{+2}^2}{2\pi}\frac{128\omega^6}{|\mathcal{C}_2|^2}\left|Z_{-2}^{in}\right|^2, \tag{2.155}$$

$$\frac{d^2E_2^{tr}}{dtd\Omega} = \frac{S_{+2}^2}{2\pi}\frac{\omega(r_+ - r_-)^2}{32\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^2 + 4\epsilon^2)(2Mr_+)^4}\left|Z_{+2}^{tr}\right|^2 \tag{2.156}$$

$$= \frac{S_{+2}^2}{2\pi}\frac{8\omega\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^2 + 4\epsilon^2)(\tilde{\omega}^2 + 16\epsilon^2)(2Mr_+)^4}{|\mathcal{C}_2|^2(r_+ - r_-)^2}\left|Z_{-2}^{tr}\right|^2. \tag{2.157}$$

Observe que, para perturbações escalares, eletromagnéticas e gravitacionais, quando $\tilde{\omega} < 0$, i.e.,

$$\omega < m\Omega, \tag{2.158}$$

o coeficiente de transmissão é negativo e, consequentemente o coeficiente de reflexão é maior que 1. Esse fenômeno, denominado superradiância, será tratado detalhadamente no capítulo 6. Note que, para férmions, esse fenômeno não se manifesta, i.e., o coeficiente de reflexão é sempre menor ou igual a um.

2.8 Cálculo dos coeficientes de reflexão e de transmissão

A equação (2.120), que descreve o espalhamento de uma onda por um buraco negro de Kerr, pode ser reescrita como uma equação de Heun [38–40], i.e., uma equação diferencial linear ordinária de segunda ordem que possui 4 pontos singulares regulares. Como não se conhece a relação entre as soluções em torno de diferentes pontos singulares da equação de Heun, é impossível calcular os coeficientes de transmissão e reflexão analiticamente para o caso geral de espalhamento. No entanto, no limite de baixas energias ($M\omega \ll 1$ e, consequentemente, $a\omega \ll 1$), a equação de Heun se reduz à equação hipergeométrica e o problema se torna solúvel. Fazendo as transformações,

$$x = \frac{r - r_+}{r_+ - r_-}, \qquad \tilde{Q} = \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-}\left(m\Omega - \omega\right), \qquad \text{e} \qquad k = \omega(r_+ - r_-), \tag{2.159}$$

a equação (2.120), no limite $M\omega \ll 1$, pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} x^2(x+1)^2\frac{d^2R}{dx^2} + (s+1)x(x+1)(2x+1)\frac{dR}{dx} + \Big[k^2x^4 + 2iskx^3 \\ -\lambda x(x+1) + is\tilde{Q}(2x+1) + \tilde{Q}^2\Big]\, R \approx 0. \end{aligned} \tag{2.160}$$

Nesse limite de baixas energias, temos $k \ll 1$ e $\lambda \approx (\ell - s)(\ell + s + 1)$. Quando $kx \ll \ell + 1$, os dois primeiros termos dentro dos colchetes são desprezíveis e a equação resultante pode ser escrita em termos da equação hipergeométrica. A solução que satisfaz à condição de contorno correta no horizonte de eventos, compatível com a equação (2.128), é dada por,

$$R = x^{-s+i\tilde{Q}}(x+1)^{-s-i\tilde{Q}}\,{}_2F_1\left(-\ell - s, \ell - s + 1; 1 - s + 2i\tilde{Q}; -x\right). \tag{2.161}$$

Tomando o limite $x \ll 1$ na equação acima e comparando com a equação (2.128), obtemos o valor do coeficiente Z_s^{tr},

$$Z_s^{tr} = \sqrt{2Mr_+}\,(r_+ - r_-)^{\frac{3s}{2} - i\tilde{Q}}. \tag{2.162}$$

Por outro lado, para $x \gg |\tilde{Q}| + 1$, podemos trocar $x + 1$ por x e ignorar os dois últimos termos dentro dos colchetes. O resultado obtido é uma equação hipergeométrica confluente, cuja solução geral é,

$$R = C_1 e^{-ikx} x^{\ell - s}\,{}_1F_1\left(\ell - s + 1; 2\ell + 2; 2ikx\right) + C_2 e^{-ikx} x^{-\ell - s - 1}\,{}_1F_1\left(-\ell - s; -2\ell; 2ikx\right), \tag{2.163}$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Para evitar soluções logarítmicas e facilitar o processo de combinação das diferentes soluções, assume-se que 2ℓ é quase, mas não exatamente, inteiro. No intervalo de *overlap* $|\tilde{Q}| + 1 \ll x \ll (\ell + 1)/k$, podemos combinar as soluções acima para determinar C_1 e C_2,

$$C_1 = \frac{\Gamma(2\ell+1)\Gamma(1 - s + 2i\tilde{Q})}{\Gamma(\ell - s + 1)\Gamma(\ell + 1 + 2i\tilde{Q})}, \quad C_2 = \frac{\Gamma(-2\ell-1)\Gamma(1 - s + 2i\tilde{Q})}{\Gamma(-\ell - s)\Gamma(-\ell + 2i\tilde{Q})}. \tag{2.164}$$

Tomando o limite $kx \gg 1$ das funções confluentes, é possível reescrever a equação (2.163) na forma da equação (2.128), com

$$\frac{Z_s^{in}}{r_+ - r_-} = \frac{\Gamma(2\ell+1)\Gamma(2\ell+2)\Gamma(1-s+2i\tilde{Q})}{\Gamma(\ell-s+1)\Gamma(\ell+s+1)\Gamma(\ell+1+2i\tilde{Q})}\left(-2ik\right)^{-\ell+s-1} \tag{2.165}$$

$$+\frac{\Gamma(-2\ell)\Gamma(-2\ell-1)\Gamma(1-s+2i\tilde{Q})}{\Gamma(-\ell-s)\Gamma(-\ell+s)\Gamma(-\ell+2i\tilde{Q})}\left(-2ik\right)^{\ell+s}, \tag{2.166}$$

$$\frac{Z_s^{out}}{(r_+ - r_-)^{2s+1}} = \frac{\Gamma(2\ell+1)\Gamma(2\ell+2)\Gamma(1-s+2i\tilde{Q})}{\Gamma^2(\ell-s+1)\Gamma(\ell+1+2i\tilde{Q})}\left(-2ik\right)^{-\ell-s-1} \tag{2.167}$$

$$+\frac{\Gamma(-2\ell)\Gamma(-2\ell-1)\Gamma(1-s+2i\tilde{Q})}{\Gamma^2(-\ell-s)\Gamma(-\ell+2i\tilde{Q})}\left(-2ik\right)^{\ell-s}. \tag{2.168}$$

Substituindo os coeficientes Z nas relações (2.141) que determinam os coeficientes de reflexão e transmissão, obtem-se depois de alguma manipulação algébrica, as seguintes expressões válidas em primeira ordem em ω [41],

$$t_{|s|} = \left[\frac{(\ell-s)!(\ell+s)!}{(2\ell)!(2\ell+1)!!}\right]^2 \prod_{n=1}^{\ell}\left[1+\left(\frac{2\tilde{Q}}{n}\right)^2\right](-4\tilde{Q})(r_+ - r_-)^{2\ell+1}\omega^{2\ell+1}, \tag{2.169}$$

para $2s$ par, e

$$t_{|s|} = \left[\frac{(\ell-s)!(\ell+s)!}{(2\ell)!(2\ell+1)!!}\right]^2 \prod_{n=1}^{\ell+\frac{1}{2}}\left[1+\left(\frac{2\tilde{Q}}{n-\frac{1}{2}}\right)^2\right](r_+ - r_-)^{2\ell+1}\omega^{2\ell+1}, \tag{2.170}$$

para $2s$ ímpar.

Capítulo 3

Perturbações carregadas na métrica de Reissner–Nordström

Equações análogas às equações de Teukolsky para partículas neutras na métrica de Kerr podem ser obtidas para partículas carregadas na métrica de Reissner–Nordström. Nesse capítulo, a partir das equações de Klein–Gordon e de Dirac, obteremos as equações de onda que governam o processo de espalhamento de partículas carregadas, de spin-0 e spin-1/2, em um buraco negro carregado.

O primeiro passo é determinar os coeficientes de spin na métrica de Reissner–Nordström utilizando o formalismo de NP. A inclusão da interação eletromagnética entre a partícula e o buraco negro é feita através do acoplamento mínimo, que modifica a derivada covariante usual. Dessa forma, a partir da equação de Klein–Gordon, obtemos uma equação diferencial radial e uma equação diferencial angular que governam a propagação de perturbações escalares. Já o estudo da propagação de ondas de spin 1/2 é feito através do formalismo desenvolvido no apêndice B. A equação de Dirac, depois de uma separação de variáveis, se reduz a um par de equações radiais e um par de equações angulares. Da mesma maneira que no caso das equações de Teukolsky, nesse caso, as equações para os diferentes valores de spin analisados, podem ser reduzidas a uma única equação radial e uma única equação angular. Utilizando essas equações, o problema de espalhamento de uma onda carregada incidente em um buraco negro de Reissner–Nordström é analisado. A equação radial de Teukolsky é resolvida assintoticamente longe e nas proximidades do horizonte de eventos do buraco negro. Impondo a condição de contorno de que nenhum sinal pode se propagar de dentro para fora de um buraco negro, calcula-se, no limite de baixas energias, coeficientes de reflexão e de transmissão (correspondentes, repectivamente, à razão entre o fluxo de energia refletida e o fluxo de energia incidente e à razão entre o fluxo de energia transmitida e o fluxo de energia incidente no buraco negro) [28].

3.1 Espaço-tempo de Reissner–Nordström

O espaço-tempo de Reissner–Nordström é uma solução estacionária, esfericamente simétrica e assintoticamente plana das equações acopladas de Maxwell-Einstein. A métrica desse espaço-tempo é dada por

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2 d\Omega, \tag{3.1}$$

onde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2. \tag{3.2}$$

No caso $M < Q$, essa métrica representa uma singularidade nua. Já para o caso $M \geq Q$, essa métrica corresponde a um buraco negro carregado, com massa M e carga Q. As raízes da função Δ, dadas por,

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2} \qquad \text{e} \qquad r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}, \tag{3.3}$$

indicam, respectivamente, as localizações do horizonte de eventos e do horizonte de Cauchy do buraco negro. Para analisar a propagação de ondas na métrica de Reissner–Nordström, é conveniente descrever o espaço-tempo usando o formalismo de NP. A classe de geodésicas nulas dada pelos vetores tangentes,

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2}{\Delta}E, \quad \frac{dr}{d\tau} = \pm E \quad \text{e} \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau} = 0, \tag{3.4}$$

onde E é uma constante, motiva a definição da seguinte base tétrade nula,

$$l^i = \frac{1}{\Delta}\left(r^2, +\Delta, 0, 0\right), \tag{3.5}$$

$$n^i = \frac{1}{2r^2}\left(r^2, -\Delta, 0, 0\right), \tag{3.6}$$

$$m^i = \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(0, 0, 1, i\csc\theta\right), \tag{3.7}$$

de modo que as condições de normalização do formalismo de NP, i.e, $\mathbf{l}\cdot\mathbf{n} = 1$ e $\mathbf{m}\cdot\bar{\mathbf{m}} = -1$, são satisfeitas. A forma covariante da base tétrade é facilmente calculada,

$$l_i = \left(1, -\frac{r^2}{\Delta}, 0, 0\right), \tag{3.8}$$

$$n_i = \frac{1}{2r^2}\left(\Delta, r^2, 0, 0\right), \tag{3.9}$$

$$m_i = \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(0, 0, -r^2, -ir^2\sin\theta\right). \tag{3.10}$$

Utilizando essa base tétrade, é possível calcular os coeficientes de spin,

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \epsilon = \pi = \tau = 0, \tag{3.11}$$

$$\rho = -\frac{1}{r}, \quad \beta = -\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\cot\theta}{r}, \quad \mu = -\frac{\Delta}{2r^3}, \quad \gamma = \mu + \frac{r-M}{2r^2}. \tag{3.12}$$

O fato de κ, σ, λ e ν serem nulos, confirma o caráter Petrov tipo-D da métrica de Reissner–Nordström. Consequentemente, Ψ_2 é o único escalar de Weyl não nulo.

Assim como no caso da métrica de Kerr, devido ao fato da métrica de Reissner–Nordström ser estacionária e esfericamente simétrica, é natural se esperar que uma perturbação qualquer do *background* possa ser escrita como,

$$e^{-i\omega t + im\phi}, \tag{3.13}$$

onde ω indica a freqüência da onda e $m \in \mathbb{Z}$ é o número azimutal. Os vetores da base tétrade, ver equação (3.5), quando vistos como vetores tangentes aplicados a funções com dependência temporal e azimutal dada pela expressão acima, se comportam como os seguintes operadores diferenciais,

$$\mathbf{l} = D = \mathcal{D}_0, \quad \mathbf{n} = \triangle = -\frac{\Delta}{2r^2}\mathcal{D}_0^\dagger, \tag{3.14}$$

$$\mathbf{m} = \delta = \frac{1}{r\sqrt{2}}\mathcal{L}_0^\dagger, \quad \bar{\mathbf{m}} = \delta^* = \frac{1}{r\sqrt{2}}\mathcal{L}_0, \tag{3.15}$$

onde

$$\mathcal{D}_n = \partial_r - \frac{ir^2\omega}{\Delta} + 2n\frac{r-M}{\Delta}, \quad \mathcal{D}_n^\dagger = \partial_r + \frac{ir^2\omega}{\Delta} + 2n\frac{r-M}{\Delta}, \tag{3.16}$$

$$\mathcal{L}_n = \partial_\theta + m\csc\theta + n\cot\theta, \quad \mathcal{L}_n^\dagger = \partial_\theta - m\csc\theta + n\cot\theta. \tag{3.17}$$

As expressões acima para os operadores diferenciais só são válidas quando as funções em questão possuem a forma (3.13). No caso das funções serem independentes de t e de ϕ, os operadores $\mathcal{D}$ e $\mathcal{L}$ se tornam simplesmente ∂_r e ∂_θ, respectivamente.

3.2 Ondas escalares no espaço-tempo de Reissner–Nordström

A propagação de uma onda escalar carregada e sem massa na métrica de Reissner–Nordström é descrita pela equação de Klein–Gordon [42],

$$(\nabla_\mu + iqA_\mu)(\nabla^\mu + iqA^\mu)\psi = 0, \tag{3.18}$$

onde q é a carga elétrica e A_μ, dado por,

$$A_\mu = -\frac{Q}{r}(1,0,0,0), \tag{3.19}$$

é o potencial vetor eletromagnético. Observe que o operador derivada covariante usual ∇_μ foi substituído por $\nabla_\mu + iqA_\mu$ para incluir o acoplamento mínimo entre o potencial vetor e a carga da onda. Utilizando o *ansatz*,

$$\psi = e^{-i\omega t}e^{im\varphi}S_0(\theta)R_0(r), \tag{3.20}$$

é possível separar a equação de Klein–Gordon. As equações assim obtidas são,

$$\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR_0}{dr}\right) + \left(\frac{\left(r^2\omega - qQr\right)^2}{\Delta} - \boldsymbol{\lambda}\right)R_0 = 0, \tag{3.21}$$

e

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS_0}{d\theta}\right) + \left(\boldsymbol{\lambda} - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)R_0 = 0, \tag{3.22}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é uma constante de separação. Exigindo que a função angular seja regular em $\theta = 0$ e em $\theta = \pi$, a equação (3.22) se torna um problema de autovalores e autofunções, cujas soluções são os polinômios de Legendre $P_\ell^m(\cos\theta)$, com autovalores correspondentes $\boldsymbol{\lambda} = \ell(\ell+1)$ ($\ell \in \mathbb{N}$ e $-\ell \leq m \leq \ell$).

3.3 Ondas de spin $1/2$ no espaço-tempo de Reissner–Nordström

Da mesma maneira que no caso escalar, para incluir o acoplamento mínimo entre o potencial vetor e a carga da onda, temos que substituir o operador derivada covariante usual ∇_μ por $\nabla_\mu + iqA_\mu$, onde o potencial vetor A_μ é dado pela equação (3.19). Assim sendo, a equação de Dirac, na forma das equações (B.51) e (B.52), deve ser substituída por,

$$\sigma^i{}_{AB'}\left(\nabla_i + iqA_i\right)P^A + i\mu_* \bar{Q}^{C'}\epsilon_{C'B'} = 0, \tag{3.23}$$

$$\sigma^i{}_{AB'}\left(\nabla_i + iqA_i\right)Q^A + i\mu_* \bar{P}^{C'}\epsilon_{C'B'} = 0. \tag{3.24}$$

Consequentemente, as equações (B.53)-(B.56) devem ser substituídas por,

$$(D + \epsilon - \rho + iql^iA_i)P^0 + (\delta^* + \pi - \alpha + iq\bar{m}^iA_i)P^1 = i\mu_*\bar{Q}^{1'}, \tag{3.25}$$

$$(\Delta + \mu - \gamma + iqn^iA_i)P^1 + (\delta + \beta - \tau + iqm^iA_i)P^0 = -i\mu_*\bar{Q}^{0'}, \tag{3.26}$$

$$-(D + \epsilon^* - \rho^* + iql^iA_i)\bar{Q}^{0'} - (\delta + \pi^* - \alpha^* + iqm^iA_i)\bar{Q}^{1'} = i\mu_*P^1, \tag{3.27}$$

$$(\Delta + \mu^* - \gamma^* + iqn^iA_i)\bar{Q}^{1'} + (\delta^* + \beta^* - \tau^* + iq\bar{m}^iA_i)\bar{Q}^{0'} = i\mu_*P^0. \tag{3.28}$$

Utilizando a base tétrade (3.5) e o potencial vetor (3.19), pode-se mostrar que o efeito do acoplamento mínimo no formalismo de NP é trocar $\mathcal{D}_n$ por $\mathcal{D}_n - iqQ\frac{r}{\Delta}$ (e, consequentemente, $\mathcal{D}_n^\dagger$ por $\mathcal{D}_n^\dagger + iqQ\frac{r}{\Delta}$). Assim, fazendo a mesma transformação que fizemos na métrica de Kerr, i.e.,

$$f_1(r,\theta) = rP^0 = \frac{R_{-\frac{1}{2}}(r)}{\sqrt{2}}S_{-\frac{1}{2}}(\theta), \qquad f_2(r,\theta) = P^1 = R_{+\frac{1}{2}}(r)S_{+\frac{1}{2}}(\theta), \tag{3.29}$$

$$g_1(r,\theta) = \bar{Q}^{1'} = R_{+\frac{1}{2}}(r)S_{-\frac{1}{2}}(\theta), \qquad g_2(r,\theta) = -r\bar{Q}^{0'} = \frac{R_{-\frac{1}{2}}(r)}{\sqrt{2}}S_{+\frac{1}{2}}(\theta), \tag{3.30}$$

é possível separar a equação de Dirac. O resultado obtido é [43],

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{D}_0 - iqQ\frac{r}{\Delta}\right)R_{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\lambda}\Delta^{\frac{1}{2}}R_{+\frac{1}{2}}, \tag{3.31}$$

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{D}_0^\dagger + iqQ\frac{r}{\Delta}\right)\left(\Delta^{\frac{1}{2}}R_{+\frac{1}{2}}\right) = \boldsymbol{\lambda}R_{-\frac{1}{2}}, \tag{3.32}$$

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}S_{+\frac{1}{2}} = -\boldsymbol{\lambda}S_{-\frac{1}{2}}, \tag{3.33}$$

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^\dagger S_{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\lambda}S_{+\frac{1}{2}}, \tag{3.34}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é uma constante de separação. Eliminando $\Delta^{\frac{1}{2}}R_{+\frac{1}{2}}$ das equações (3.31) e (3.32), obtem-se uma equação envolvendo $R_{-\frac{1}{2}}$ apenas,

$$\left[\Delta\left(\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}^\dagger + iqQ\frac{r}{\Delta}\right)\left(\mathcal{D}_0 - iqQ\frac{r}{\Delta}\right) - \boldsymbol{\lambda}^2\right]R_{-\frac{1}{2}} = 0. \tag{3.35}$$

A função $\Delta^{\frac{1}{2}}R_{+\frac{1}{2}}$ satisfaz à equação complexo conjugada da equação acima. Aplicando procedimento análogo às equações angulares, é possível encontrar uma equação envolvendo $S_{-\frac{1}{2}}$ apenas,

$$\left[\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^\dagger + \boldsymbol{\lambda}^2\right]S_{-\frac{1}{2}} = 0. \tag{3.36}$$

$S_{+\frac{1}{2}}$ obedece à equação adjunta desta, obtida substituindo θ por $\pi-\theta$. A constante de separação $\boldsymbol{\lambda}$ é determinada pelas condições de contorno que exigem que $S_{-\frac{1}{2}}$ (e, consequentemente, $S_{+\frac{1}{2}}$) seja regular em $\theta = 0$ e em $\theta = \pi$.

3.4 Generalização das equações de Teukolsky

As equações separadas em r e em θ, relevantes ao casos de spin $s = 0$ e $s = 1/2$, podem ser escritas como uma única equação radial e uma única equação angular, análogas às equações de Teukolsky, equações (2.120) e (2.121), para campos sem carga e sem massa na métrica de Kerr [28],

$$\Delta^{-s}\frac{d}{dr}\left(\Delta^{s+1}\frac{dR_s}{dr}\right)+\left(\frac{K^2-2is(r-M)K}{\Delta}+4is\omega r-2isqQ-\lambda\right)R_s=0, \tag{3.37}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS_s}{d\theta}\right)+\left(-\frac{m^2}{\sin^2\theta}-\frac{2ms\cos\theta}{\sin^2\theta}-s^2\cot^2\theta+s+\lambda\right)S_s=0, \tag{3.38}$$

onde λ é uma constante de separação diferente de $\boldsymbol{\lambda}$ e $K = \omega r^2 - qQr$. O fato das soluções da equação angular acima serem regulares em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, transforma a resolução da equação diferencial em um problema de autovalores de Sturm-Liouville para a constante de separação λ. As autofunções que resolvem o problema são os esféricos harmônicos *spin-weighted* ${}_sY_\ell^m$, com autovalores correspondentes dados por $\lambda = (\ell - s)(\ell + s + 1)$ [35].

3.5 Problema de transmissão e reflexão na métrica de Reissner–Nordström

Analogamente ao caso de campos sem carga na métrica de Kerr, define-se uma nova coordenada radial r_*,

$$\frac{dr_*}{dr}=\frac{r^2}{\Delta}, \tag{3.39}$$

e uma nova função Y_s,

$$Y_s=\Delta^{s/2}rR_s, \tag{3.40}$$

de modo que a equação radial, equação (3.37), pode ser reescrita como,

$$\frac{d^2Y_s}{dr^{*2}}+V_s(r_*)Y_s=0, \tag{3.41}$$

onde,

$$V_s(r_*)=\frac{\Delta}{r^4}\left[\frac{(K-is(r-M))^2}{\Delta}+4is\omega r-2isqQ-l(l+1)+s^2-2\frac{M}{r}+2\frac{Q^2}{r^2}\right]. \tag{3.42}$$

O processo de espalhamento de uma onda originada assintoticamente longe do buraco negro pode ser descrito por uma solução Y_s da equação acima com o seguinte comportamento assintótico (a condição de contorno no horizonte de eventos é análoga à utilizada na métrica de Kerr, ver equação (2.127)),

$$Y_s = \begin{cases} Z_s^{in} r_*^{s+iqQ} e^{-i\omega r_*} + Z_s^{out} r_*^{-s-iqQ} e^{+i\omega r_*}, & r_* \to \infty \\ Z_s^{tr} e^{-\frac{s}{2}\left(\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\right) r_* - i\left(\omega - \frac{qQ}{r_+}\right) r_*}, & r_* \to -\infty \end{cases}, \tag{3.43}$$

onde os coeficientes Z_s^{in}, Z_s^{out} e Z_s^{tr} podem ser relacionados, respectivamente, às normas incidente, refletida e transmitida das ondas. Note que, no caso fermiônico, $Z_{+\frac{1}{2}}$ e $Z_{-\frac{1}{2}}$ não são independentes. Substituindo a forma assintótica, equação (3.43), nas equações (3.31) e (3.32) obtem-se,

$$2i\omega Z_{+\frac{1}{2}}^{out} = \lambda\sqrt{2} Z_{-\frac{1}{2}}^{out}, \tag{3.44}$$

$$2\sqrt{2} i\omega Z_{-\frac{1}{2}}^{in} = -\lambda Z_{+\frac{1}{2}}^{in}, \tag{3.45}$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2}} Z_{+\frac{1}{2}}^{tr} = \left(\frac{1}{2} - 2i\delta\right) (r_+ - r_-)^{1/2} Z_{-\frac{1}{2}}^{tr}, \tag{3.46}$$

onde δ é dado por,

$$\delta = \frac{r_+^2}{r_+ - r_-}\left(\omega - \frac{qQ}{r_+}\right). \tag{3.47}$$

Para obter relações entre os coeficientes *in/out/trans*, é possível utilizar, assim como no caso da métrica de Kerr, o fato do Wronskiano W entre duas soluções da equação (3.41) (por exemplo, Y_s e Y_{-s}^*) ser independente da coordenada radial,

$$W[Y_s, Y_{-s}^*]\Big|_{r=r_+} = W[Y_s, Y_{-s}^*]]\Big|_{r=\infty}. \tag{3.48}$$

Utilizando a solução (3.43), obtemos a relação,

$$r_{|s|} + t_{|s|} = 1, \tag{3.49}$$

onde,

$$r_0 = \left|\frac{Z_0^{out}}{Z_0^{in}}\right|^2, \quad t_0 = \frac{1}{\omega}\left(\omega - \frac{qQ}{r_+}\right)\left|\frac{Z_0^{tr}}{Z_0^{in}}\right|^2 \tag{3.50}$$

para o caso de spin-0 e,

$$r_{\frac{1}{2}} = 4\frac{\omega^2}{\lambda^2}\left|\frac{Z_{+\frac{1}{2}}^{out}}{Z_{+\frac{1}{2}}^{in}}\right|^2, \quad t_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{r_+ - r_-}}{r_+^2}\left|\frac{Z_{+\frac{1}{2}}^{tr}}{Z_{+\frac{1}{2}}^{in}}\right|^2, \tag{3.51}$$

para o caso de spin-1/2. As quantidades $r_{|s|}$ e $t_{|s|}$ podem ser interpretadas como coeficientes de reflexão e de transmissão, como pode ser confirmado pelo cálculo dos fluxos de energia atráves do horizonte de eventos e no infinito [43]. Observe que t_0 pode assumir valores negativos quando $\delta < 0$, i.e. quando,

$$\omega - \frac{qQ}{r_+} < 0. \tag{3.52}$$

Portanto, assim como no caso de uma partícula escalar com momento angular azimutal espalhada por um buraco negro com rotação, uma partícula escalar carregada que é espalhada por um buraco negro carregado também pode sofrer o fenômeno da superradiância. Observe que o coeficiente de transmissão $t_{\frac{1}{2}}$ é sempre não negativo e, portanto, superradiância é impossível para férmions de spin-1/2.

3.6 Cálculo dos coeficientes de reflexão e de transmissão

Seguiremos o procedimento utilizado anteriormente para a métrica de Kerr [41]. Mudando a coordenada radial através da transformação,

$$x = \frac{r - r_+}{r_+ - r_-}, \tag{3.53}$$

a equação de Teukolsky generalizada, equação (3.37), pode ser reescrita no limite $M\omega \ll 1$ como,

$$\begin{aligned} x^2(x+1)^2 + (s+1)(2x+1)x(x+1)\frac{dR_s}{dx} + \big[k^2x^4 \\ +2\left(-qQ + is\right)kx^3 + (q^2Q^2 - \lambda)x(x+1) + Zx + F\big]\, R_s = 0, \end{aligned} \tag{3.54}$$

onde,

$$Z = \left(\frac{s}{2} - i\delta - iqQ\right)^2 - \left(\frac{s}{2} + i\delta\right)^2, \tag{3.55}$$

$$F = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2} + i\delta\right)^2, \tag{3.56}$$

$$\delta = \frac{r_+^2}{r_+ - r_-}\left(\omega - \frac{qQ}{r_+}\right). \tag{3.57}$$

No limite $kx \ll 1$, os primeiros dois termos dentro dos colchetes na equação (3.54) podem ser ignorados. A solução, nas proximidades do horizonte de eventos, compatível com a equação (3.43) e correspondente a uma onda que entra no buraco negro, é dada por,

$$R_s = (1+x)^{-s+i\delta+iqQ} x^{-s-i\delta}\, {}_2F_1\left(a, b; c; -x\right), \tag{3.58}$$

onde,

$$a = \frac{1}{2} - s + iqQ - i\beta, \quad b = \frac{1}{2} - s + iqQ + i\beta, \tag{3.59}$$

$$c = 1 - s - 2i\delta, \quad \beta = \sqrt{q^2Q^2 - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2}. \tag{3.60}$$

Comparando essa solução, no limite $x \to 0$, com a equação (3.43), determina-se Z_s^{tr},

$$Z_s^{tr} = r_+\left(r_+ - r_-\right)^{\frac{3}{2}s + i\delta}. \tag{3.61}$$

Por outro lado, quando $x \gg 1$, os dois últimos termos dentro dos colchetes da equação (3.54) podem ser ignorados e $x+1$ pode ser trocado por x. A solução correspondente é,

$$\begin{aligned} R_s = C_1 x^{-\frac{1}{2}-s+i\beta} e^{-ikx}\, {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - s + i\beta - iqQ, 1 + 2i\beta; 2ikx\right) \\ +C_2 x^{-\frac{1}{2}-s-i\beta} e^{-ikx}\, {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - s - i\beta - iqQ, 1 - 2i\beta; 2ikx\right) \end{aligned} \tag{3.62}$$

Comparando as duas soluções, i.e. equações (3.58) e (3.62), na região de *overlap* $1 \ll x \ll 1/k$, é possível determinar os coeficientes C_1 e C_2,

$$C_1 = \frac{\Gamma(2i\beta)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}, \quad C_2 = \frac{\Gamma(-2i\beta)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}. \tag{3.63}$$

Agora, comparando a forma assintótica das funções hipergeométricas confluentes com a equação (3.43), encontramos,

$$\frac{Z_s^{in}}{(r_+ - r_-)^{1-iqQ}} = \left[C_1 \frac{\Gamma(1+2i\beta)(-2ik)^{-\frac{1}{2}+s-i\beta+iqQ}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+i\beta+iqQ\right)} + C_2 \frac{\Gamma(1-2i\beta)(-2ik)^{-\frac{1}{2}+s+i\beta+iqQ}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s-i\beta+iqQ\right)}\right]. \tag{3.64}$$

Usando as equações (3.61) e (3.64), calculamos,

$$\left|\frac{Z_s^{tr}}{Z_s^{in}}\right|^2 = \frac{r_+^2(r_+ - r_-)^{3s-2} e^{-\pi qQ}(2k)^{1-2s}}{|\Gamma(c)|^2 |F(\beta) + F(-\beta)|^2}, \tag{3.65}$$

onde,

$$F(\beta) = \frac{\Gamma(2i\beta)\Gamma(1+2i\beta)e^{-\frac{\pi\beta}{2} - i\beta\log(2k)}}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+iqQ+i\beta\right)}. \tag{3.66}$$

Substituindo a equação (3.65) nas expressões (3.50) e (3.51), obtemos a seguinte fórmula para o coeficiente de transmissão,

$$t_{|s|} = \frac{e^{-\pi qQ}(2\delta)^{1-2|s|}}{|\Gamma(1-|s|-2i\delta)|^2 |F(\beta)+F(-\beta)|^2}, \tag{3.67}$$

onde o valor de β deve ser calculado para $|s|$. Quando $\ell + 1/2 > |qQ|$, β é um número imaginário puro, $\beta = i\gamma$, com $\gamma > 0$. No limite de pequenas energias, $k \to 0$, temos,

$$t_{|s|} = \frac{e^{-\pi qQ}(2\delta)^{1-2|s|} \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+|s|+\gamma+iqQ\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-|s|+\gamma+iqQ\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\gamma-iqQ-2i\delta\right)\right|^2}{|\Gamma(1-|s|-2i\delta)|^2 \left[\Gamma(2\gamma)\Gamma(1+2\gamma)\right]^2}(2k)^{2\gamma}, \tag{3.68}$$

mais termos de ordem $k^{4\gamma}$. No entanto, quando $\ell + 1/2 < |qQ|$, β se torna um número real e, portanto, no limite de baixas energias, o coeficiente de transmissão $t_{|s|}$ passa a ser composto por um termo constante em k mais um termo oscilatório em k. No caso extremo, $\ell + 1/2 \ll |qQ|$, o termo constante domina. obtemos,

$$t_{|s|} = \begin{cases} \mp 1 + O\left(e^{-\pi qQ}\right), & qQ > 0 \\ 1 - \frac{\pi}{|qQ|}\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 + O\left(\frac{1}{q^2Q^2}\right), & qQ < 0, \end{cases} \tag{3.69}$$

onde o sinal + vale para o caso de spin-1/2 e o sinal − para o caso de spin-0.

Capítulo 4

Conjectura da Censura Cósmica

A Conjectura Fraca da Censura Cósmica (CCC), proposta por Roger Penrose em 1969, afirma que singularidades originadas a partir de um colapso gravitacional devem sempre estar envoltas pelo horizonte de eventos de um buraco negro [10–12]. Apesar da conjectura ser uma condição necessária para se garantir o determinismo das leis da física, sua validade ainda é uma questão em aberto na Relatividade Geral. Desde que foi proposta em 1969, vários resultados clássicos surgiram em favor de sua validade. Por exemplo, se a CCC fosse falsa, seria natural se esperar que a formação de um buraco negro em um colapso gravitacional fosse um resultado não-genérico. Portanto, o fato de buracos negros estacionários serem estáveis em relação a perturbações lineares [23–26], atesta em favor da conjectura. Outro típico teste da CCC consiste em experimentos imaginários que tem como objetivo destruir o horizonte de eventos de um buraco negro e, consequentemente, expor a singularidade para um observador externo. Esses experimentos imaginários são baseados nos teoremas de unicidade [9], que afirmam que todas as soluções de buracos negros estacionários das equações de Maxwell-Einstein são caracterizadas por três parâmetros conservados, a massa gravitacional M, a carga elétrica Q, e o momento angular J, que satisfazem a seguinte relação,

$$M^2 \geq Q^2 + \left(\frac{J}{M}\right)^2. \tag{4.1}$$

Por outro lado, soluções que satisfazem,

$$M^2 < Q^2 + \left(\frac{J}{M}\right)^2, \tag{4.2}$$

são singularidades nuas ao invés de buracos negros. Quando a relação (4.1) é de igualdade, o buraco negro é dito extremo. A idéia básica por trás desses experimentos imaginários é fazer o buraco negro absorver uma partícula com carga e/ou momento angular suficientes de modo que a condição (4.1) deixe de ser válida. Na maioria das análises clássicas, o horizonte de eventos do buraco negro é preservado porque a energia necessária para que a partícula supere a barreira de potencial (criada pela interação partícula-buraco negro) mais do que compensa o aumento em carga e/ou momento angular [13]. Outras análises clássicas, porém, indicam que uma violação da CCC é possível se efeitos de *backreaction* são ignorados. Uma maneira de evitar uma singularidade nua nesses casos pode ser considerar correções de auto-energia para a partícula [16,17,19,44].

Algumas tentativas recentes de destruir o horizonte de eventos são baseadas no tunelamento de partículas através de um buraco negro quase-extremo. A idéia original, considerada por Matsas e Silva [18], é baseada no fato de que, devido à dualidade onda-partícula, a probabilidade de tunelamento pode ser não-nula até mesmo se a energia da partícula é inferior à altura da barreira de potencial, indicando uma possível violação da CCC. No entanto, como ainda não temos uma teoria completa de gravitação quântica disponível, uma conclusão definitiva não pode ser obtida [18–22].

Nesse capítulo iremos tratar detalhadamente os experimentos imaginários que buscam violar a CCC. Inicialmente, estudaremos processos clássicos seguindo a referência [13]. A partir de um buraco negro extremo, mostraremos que é impossível violar a CCC utilizando qualquer tipo de partícula com carga e/ou momento angular. No entanto, como veremos na sequência, buracos negros inicialmente quase-extremos podem, em princípio, violar a CCC quando absorvem uma partícula [16,45]. A próxima etapa será considerar processos quânticos de tunelamento de partículas. Ao contrário do que ocorre em processos clássicos, em processos quânticos partículas com energias infinitesimalmente pequenas tem uma probabilidade não-nula de serem absorvidas por um buraco negro. Utilizando os coeficientes de transmissão calculados nos capítulos anteriores, estudaremos o tunelamento de partículas com/sem carga e com/sem momento angular em buracos negros de Reissner–Nordström ou de Kerr.

4.1 Processos Clássicos

Considere, inicialmente, um buraco negro de Kerr–Newman, com massa M, carga Q e momento angular específico $a = J/M$, que satisfaz a condição $M^2 \geq Q^2 + a^2$. Pode-se mostrar que, enviando partículas teste com cargas e momentos angulares suficientes, é possível aproximar um buraco negro da extremalidade o tanto quanto se queira. Em sua análise [13], Wald estudou um buraco negro de Kerr–Newman extremo, i.e. $M^2 = Q^2 + a^2$, que absorve uma partícula teste de energia E, momento angular L na direção do momento angular do buraco negro e carga q. Assumindo que a configuração é axissimétrica, nem carga nem momento angular podem ser irradiados para longe. O estado final do buraco negro, depois da captura da partícula, é caracterizado por uma nova massa $M' \leq M+E$, uma nova carga $Q' = Q+q$ e um novo momento angular $J' = aM + L$. Para que o horizonte de eventos seja destruído e uma singularidade nua seja criada, esses novos parâmetros devem satisfazer a,

$$M'^2 < Q'^2 + \left(\frac{J'}{M'}\right)^2 \Rightarrow E < \frac{qQM + aL}{M^2 + a^2}, \tag{4.3}$$

onde o fato da partícula ser um corpo teste, i.e. $q \ll Q$, $L \ll aM$ e $E \ll M$, foi utilizado. Nas coordenadas de Boyer–Lindquist, a métrica de Kerr–Newman assume a seguinte forma,

$$\begin{aligned} ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{2a\sin^2\theta(r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 \\ + \rho^2 d\theta^2 + \left(\frac{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta d\phi^2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ e $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$. As raízes de Δ, $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$ e $r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$, correspondem, respectivamente, ao horizonte de eventos do buraco negro e ao horizonte de Cauchy. As equações que descrevem o movimento de uma partícula de massa de repouso m e carga q na métrica de Kerr–Newman são,

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = \frac{q}{m}F^{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}, \tag{4.5}$$

onde $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ são os símbolos de Christoffel e $F^{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético, dado por,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= \frac{Q(r^2 - a^2\cos^2\theta)}{\rho^4}dr \wedge (dt - a\sin^2\theta d\phi) \\ &-\frac{2Qar\cos\theta\sin\theta}{\rho^4}d\theta \wedge \left(adt - (r^2 + a^2)d\phi\right).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Essas equações de movimento podem ser obtidas a partir do lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mg_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + qA_\mu\frac{dx^\mu}{ds}, \tag{4.7}$$

onde $\mathcal{A}$ é o potencial vetor eletromagnético, dado por,

$$\mathcal{A} = -\frac{Qr}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta d\phi\right). \tag{4.8}$$

A energia E da partícula e seu momento angular L ao longo do eixo de simetria são calculados a partir do lagrangiano da seguinte forma,

$$-E = p_t = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = mg_{t\mu}\frac{dx^\mu}{ds} + qA_t, \tag{4.9}$$

$$L = p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = mg_{\phi\mu}\frac{dx^\mu}{ds} + qA_\phi. \tag{4.10}$$

Ambas quantidades são constantes pois os vetores $\partial/\partial t$ e $\partial/\partial\phi$ são vetores de Killing no espaço-tempo de Kerr–Newman. Uma relação entre E, L e q pode ser obtida a partir da 4-velocidade da partícula,

$$-1 = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = \frac{1}{m^2}\left(p^\mu - qA^\mu\right)\left(p_\mu - qA_\mu\right). \tag{4.11}$$

Essa relação dá origem a uma equação quadrática em E, cuja solução (impondo a condição de que $dt/ds > 0$), é,

$$E = -qA_t + \frac{1}{g^{tt}}\left\{g^{t\phi}(L - qA_\phi) - [(L - qA_\phi)^2((g^{t\phi})^2 - g^{tt}g^{\phi\phi}) - g^{tt}(g^{rr}p_r^2 + g^{\theta\theta}p_\theta^2 + m^2)]^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{4.12}$$

Portanto,

$$E \geq -qA_t + \frac{1}{g^{tt}}g^{t\phi}\left(L - qA_\phi\right). \tag{4.13}$$

Suponha que a partícula atravesse o horizonte de eventos e seja absorvida pelo buraco negro. Logo, deverá existir um instante no qual $r = r_+ = M$. Substituindo essa coordenada na equação (4.13), obtem-se [13],

$$E \geq \frac{qQM + aL}{M^2 + a^2}. \tag{4.14}$$

Comparando essa condição com a condição para que uma singularidade nua seja criada, equação (4.3), conclui-se que qualquer partícula que seja capturada por um buraco negro de Kerr–Newman extremo não possui carga nem momento angular suficientes para destruir o horizonte de eventos.

Portanto, processos de captura de partículas não podem ser utilizados para destruir o horizonte de eventos de um buraco negro de maneira quasi-estacionária. Mais precisamente, se o buraco negro inicial não é extremo, através de processos quasi-estacionários ele se tornará, primeiramente, um buraco negro extremo. A partir da análise acima, é impossível, portanto, transformá-lo em uma singularidade nua. Hubeny [16], por sua vez, considerou um buraco negro de Reissner–Nordström quase-extremo, com carga Q e massa M tais que $Q \lesssim M$ e partículas teste com carga e massa pequenos (mas não infinitesimais). A idéia é semelhante a de Wald [13]: enviar ao buraco negro uma partícula teste com massa de repouso m, energia E e carga q de modo que o estado final do sistema seja uma singularidade nua, i.e.,

$$Q + q > M + E. \tag{4.15}$$

A análise do movimento de uma partícula teste é igual à análise anterior para um buraco negro de Kerr–Newman com $a = 0$ e $L = 0$. A grande diferença é que, agora, o buraco negro não é mais extremo. A partir das equações (4.5) e (4.11), determina-se a equação que governa o movimento radial da partícula,

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{m^2}\left[E - \frac{qQ}{r}\right]^2 - \frac{\Delta}{r^2}. \tag{4.16}$$

Uma forma de expressar a condição de que a partícula seja absorvida pelo buraco negro é exigir que $\dot{r}^2 > 0$, $\forall r \geq r_+$. Portanto, uma condição necessária para que a partícula seja capturada é,

$$\left(E - \frac{qQ}{r}\right)^2 > m^2\frac{\Delta}{r^2}, \quad \forall r \geq r_+ \Rightarrow E > \frac{qQ}{r_+}. \tag{4.17}$$

A partir da condição para que o horizonte de eventos seja destruído, i.e. equação (4.15), obtem-se uma outra desigualdade para E,

$$E < Q + q - M. \tag{4.18}$$

Se o buraco negro é inicialmente extremo, $r_+ = M = Q$, e as condições (4.17) e (4.18) não podem ser satisfeitas simultaneamente. No entanto, se o buraco negro não é extremo, juntando essas duas condições, determina-se uma condição sobre a carga da partícula,

$$q > \frac{r_+ - Q}{2}. \tag{4.19}$$

Uma escolha de E e de q satisfazendo as condições acima garante automaticamente que a condição de criação de uma singularidade nua seja satisfeita. Para garantir que a partícula seja absorvida, i.e. que a condição $\dot{r}^2 > 0\ \forall r \geq r_+$ seja satisfeita, temos que escolher m de forma que,

$$m < \frac{rE - qQ}{\sqrt{\Delta}}, \quad \forall r \geq r_+. \tag{4.20}$$

Logo [16],

$$m < Q\sqrt{\frac{-E^2 + 2\frac{M}{Q}Eq - q^2}{M^2 - Q^2}}. \tag{4.21}$$

Assim, se a partícula teste possui massa, carga e energia que satisfazem às equações (4.17), (4.18), (4.19) e (4.21), é possível, em princípio, criar uma singularidade nua.

Um processo semelhante que pode ser analisado é o caso de uma partícula teste que é absorvida por um buraco negro de Kerr quase-extremo, de massa M e momento angular J, tais que $M^2 \gtrsim J$ [45, 46]. Se a partícula possui energia E e momento angular L na mesma direção do momento angular do buraco negro, a condição para que uma singularidade nua seja criada é dada por,

$$(M + E)^2 < J + L \Rightarrow L > (M^2 - J) + 2ME + E^2. \tag{4.22}$$

Consequentemente, devemos ter,

$$\frac{L}{E^2} > \frac{2M}{E} \gg 1. \tag{4.23}$$

Outra desigualdade envolvendo os parâmetros da partícula pode ser obtida exigindo-se que ela atravesse o horizonte de eventos do buraco negro. Isso pode ser feito utilizando a equação de movimento da partícula [13] ou calculando o fluxo de energia e momento angular [45]. O resultado obtido é,

$$L < \frac{2Mr_+}{a}E. \tag{4.24}$$

Observe que se o buraco negro for inicialmente extremo, é impossível satisfazer às desigualdades (4.23) e (4.24) simultaneamente. No entanto, se o buraco negro é quase-extremo, dado um momento angular qualquer L, se E satisfizer a condição,

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{1 - \frac{J}{M^2}} < E < \left(\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{1 - \frac{J}{M^2}}, \tag{4.25}$$

então as desigualdades (4.23) e (4.24) serão automaticamente satisfeitas [45]. Esse resultado é uma generalização do resultado obtido por Hod [17], que considerou apenas partículas soltas no horizonte de eventos de um buraco negro. Então, é possível, em princípio, criar uma singularidade nua a partir de um processo clássico de captura de uma partícula teste em uma métrica de Kerr.

A grande semelhança entre os resultados acima, que mostraram ser possível destruir o horizonte de eventos de um buraco negro quase-extremo, é o fato de efeitos de *backreaction*, como a autoenergia das partículas e efeitos radiativos, terem sido ignorados. Cálculos aproximados indicam que esses efeitos podem salvar a CCC [16, 17, 19, 47]. Hubeny [16], por exemplo, em sua análise sobre a possibilidade de violar a CCC utilizando partículas carregadas absorvidas por um buraco negro de Reissner–Nordström, fez um cálculo numérico para tentar estimar os efeitos de *backreaction*. O resultado obtido, apesar de não ser conclusivo, deu indícios que correções desse tipo podem evitar a destruição do horizonte de eventos. Hod [19], por sua vez, ao tratar esse mesmo problema, considerou a auto energia induzida na partícula, i.e, o efeito do campo gravitacional sobre a interação da partícula com seu próprio campo gravitacional. O resultado dessa auto interação é uma força repulsiva sobre a partícula, que tende a afastá-la do buraco negro [48, 49]. Consequentemente, devemos adicionar o termo $(Me^2)/(2r_+^2)$ à energia da partícula para garantir que ela seja absorvida pelo buraco negro [50]. Com essa correção, se torna impossível destruir o horizonte de eventos e criar uma singularidade nua. O caso de uma partícula com momento angular que é capturada por um buraco negro de Kerr é mais complicado. Hod [17] fez uma análise aproximada a partir de um resultado perturbativo de Will [51] e mostrou que a correção de auto energia obtida é suficiente para salvar a CCC. Além disso, Barausse, et al [47], mostraram que existem trajetórias para as quais efeitos de radiação podem ser ignorados. Porém, os efeitos produzidos pela auto energia da partícula não são nulos e podem, em princípio, salvar a CCC.

4.2 *Overspin* de um buraco negro

Sabe-se que, quando efeitos quânticos são levados em consideração, resultados clássicos de Relatividade Geral podem ser profundamente modificados. O teorema da área, por exemplo, afirma que nenhum processo é capaz de diminuir a área de um buraco negro. A radiação Hawking, porém, é um processo da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempo Curvos (TQCEC) capaz de violar esse teorema clássico. Observações como essa, levaram Matsas e Silva [18] a se perguntarem se o mesmo não poderia acontecer com a CCC. A idéia básica é reconsiderar os experimentos imaginários da sessão anterior levando em consideração possíveis efeitos quânticos. A análise mais simples possível é o processo de tunelamento quântico de uma partícula escalar neutra, sem massa, em um buraco negro de Reissner–Nordström quase-extremo. Tendo em mente a dualidade onda-partícula, pode-se estudar o processo de tunelamento da partícula utilizando os resultados obtidos na seção (3.2) para o espalhamento ondulatório na métrica de Reissner–Nordström. A partícula é descrita pela seguinte função de onda, dada pela equação (3.20),

$$\psi = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos\theta) R_0(r). \tag{4.26}$$

Seu momento angular azimutal é dado por m e seu momento angular total por $\sqrt{\ell(\ell+1)}$. No caso da partícula neutra, i.e. $q = 0$, o coeficiente de transmissão, ver equação (3.68), pode ser escrito como,

$$t_{|0|} = \frac{2^{2\ell+2} r_+^2 (r_+ - r_-)^{2\ell} (\ell!)^6}{[(2\ell+1)!(2\ell)!]^2} \omega^{2\ell+2} \left(1 + O(\omega)\right). \tag{4.27}$$

Portanto, por menor que seja a energia da partícula incidente, sua probabilidade de tunelamento será não-negativa. A exigência de um valor mínimo para a energia da partícula, que no caso clássico era fundamental para garantir que ela fosse capturada pelo buraco negro, não é mais necessária no caso quântico. Uma vez que a partícula tunela através do horizonte de eventos, os novos parâmetros que caracterizam o sistema são,

$$M' = M + \omega, \quad Q' = Q \quad \text{e} \quad J'^2 = \ell(\ell+1), \tag{4.28}$$

onde ω é a energia da partícula. Para que o horizonte de eventos do buraco negro seja destruído e uma singularidade nua seja criada, a condição (4.2) deve ser satisfeita. Substituindo os parâmetros relevantes, encontramos uma condição sobre ℓ,

$$\ell(\ell+1) > M^2(M^2 - Q^2) + O(\omega), \tag{4.29}$$

que pode ser sempre satisfeita para ω suficientemente pequeno.

Suponha que falta ao buraco negro inicial apenas uma carga elementar para que atinja a extremalidade. Nesse caso, para $M \gg 1$, obtem-se $\ell \sim M^{\frac{3}{2}}$. Em particular, para $M = 100$, tem-se $\ell = 413$ e para $M = 10^5 M_\odot$, onde $M_\odot$ é a massa solar, tem-se $\ell \sim 10^{64}$ [18].

O fato de um buraco negro inicialmente de Reissner–Nordström se tornar um buraco negro de Kerr–Newman após o tunelamento, levou Hod [19] a investigar se algum efeito de *backreaction* não impediria a destruição do horizonte de eventos. De acordo com a sua análise, a medida que a partícula se aproxima do buraco negro, ela interage com o buraco negro, o que faz com que os geradores do horizonte comecem a girar. Desse modo, o tunelamento da partícula ocorre na métrica de Kerr–Newman ao invés da métrica de Reissner–Nordström. Uma análise semelhante foi feita por Will [51], que mostrou que um anel de partículas com momento angular m que gira em torno de um buraco negro de Kerr de massa M, perturba a velocidade angular de rotação Ω deste,

$$\Omega \to \Omega + \frac{m}{4M^3}. \tag{4.30}$$

Baseado nesse resultado, Hod estimou que uma partícula com momento angular azimutal m, que incide em um buraco negro de Reissner–Nordström, induz neste uma velocidade angular dada por,

$$\Omega = \frac{m}{Mr_+^2}. \tag{4.31}$$

Portanto, ao invés de considerar o tunelamento na métrica de Reissner–Nordström, temos que considerar o tunelamento na métrica de Kerr-Newman. Como a partícula é neutra, ela não interage com a carga elétrica do buraco negro. Dessa forma, os resultados obtidos no capítulo 2 para a métrica de Kerr podem ser utilizados, basta trocar Δ por $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$ e $r_\pm$ por $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$. Em particular, o coeficiente de transmissão para uma partícula incidente de frequência ω, momento angular orbital ℓ e momento angular azimutal m é dado por,

$$t_0 = \left[\frac{(\ell!)^2}{(2\ell)^(2\ell+1)!!}\right]^2 \prod_{n=1}^{\ell}\left[1 + \left(\frac{\omega - m\Omega}{2\pi n T_{bn}}\right)^2\right]\left(\frac{\omega - m\Omega}{\pi T_{bn}}\right)\left[(r_+ - r_-)\omega\right]^{2\ell+1}, \tag{4.32}$$

onde,

$$T_{bn} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+^2 + a^2)}, \tag{4.33}$$

é a temperatura do buraco negro.

Conforme explicado anteriormente, se $\omega < m\Omega$, o coeficiente de transmissão é negativo e os modos incidentes são amplificados ao invés de serem absorvidos. Portanto, para que seja capturada pelo buraco negro, a partícula deve possuir uma energia mínima ω dada por,

$$\omega > m\Omega = \frac{m^2}{Mr_+^2}. \tag{4.34}$$

Uma vez que a partícula é absorvida, os parâmetros que caracterizam o estado final do sistema são,

$$M' = M + \omega > M + \frac{m^2}{Mr_+^2}, \quad Q' = Q, \quad J'^2 = \ell(\ell+1). \tag{4.35}$$

Substituindo esses parâmetros na condição para criação de uma singularidade nua, equação (4.2), obtem-se a seguinte desigualdade,

$$\ell(\ell+1) > \left(M + \frac{m^2}{Mr_+^2}\right)^2 \left(M^2 - Q^2 + 2\frac{m^2}{r_+^2} + \frac{m^4}{M^2 r_+^4}\right). \tag{4.36}$$

Em particular, se o momento angular azimutal m da partícula é nulo, a condição acima se reduz à condição (4.29) obtida anteriormente. Em outras palavras, para $m = 0$, o efeito de *backreaction* aqui considerado não possui efeito nenhum. Para evidenciar a natureza quântica desse processo, é interessante estudar seu limite clássico. Para tanto, considere um ensemble de partículas, todas no mesmo estado (ω, ℓ, m), incidente em um buraco negro de Reissner–Nordström quase-extremo. Nesse caso, apenas uma fração (dada pela equação (4.32)) das partículas é absorvida pelo buraco negro, transferindo energia $N\omega$ e momento angular $\vec{J} = N\left\langle \vec{L} \right\rangle = Nm\hat{z}$, onde N é o número de partículas capturadas ($N \gg 1$) e $\hat{z}$ é o eixo de rotação do buraco negro. A partir dessas quantidades, conclui-se que a condição para que o horizonte de eventos seja destruído, equação (4.2), nunca é satisfeita.

Na referência [19], considerou-se que o momento angular total transferido no processo quântico é dado por m e não por $\sqrt{\ell(\ell+1)}$. Desse modo, a conclusão obtida foi idêntica à do limite clássico: é impossível criar uma singularidade nua. No entanto, o processo de captura de uma única partícula é intrinsicamente quântico, a partícula tunela através do horizonte de eventos devido à sua natureza ondulatória, mas é absorvida como um único *quantum*.

Outro possível método que pode ser utilizado para testar a CCC é o tunelamento de férmions. Conforme mencionado na seção (2.7), férmions, ao contrário de partículas escalares, não apresentam o fenômeno de superradiância e, portanto, possuem probabilidade positiva de tunelar em um buraco negro. Mais precisamente, se considerarmos inicialmente um buraco negro de Kerr–Newman, com massa M, carga Q e momento angular específico $a = J/M$, a probabilidade de tunelamento de um férmion neutro, sem massa, de energia ω e números quânticos, ℓ e m, é dada pela expressão (2.170),

$$t_{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(\ell-\frac{1}{2})!(\ell+\frac{1}{2})!}{(2\ell)!(2\ell+1)!!}\right]^2 \prod_{n=1}^{\ell+\frac{1}{2}} \left[1 + \left(\frac{2Q}{n-\frac{1}{2}}\right)^2\right] (r_+ - r_-)^{2\ell+1}\omega^{2\ell+1}. \tag{4.37}$$

Portanto, a captura da partícula, ao contrário do caso escalar, é possível para energias ω arbitrariamente pequenas. Após a absorção, os novos parâmetros do sistema são,

$$M' = M + \omega, \quad Q' = Q, \quad J'^2 = J^2 + \left(\ell \pm \frac{1}{2}\right)\left(\ell + 1 \pm \frac{1}{2}\right), \tag{4.38}$$

onde o sinal positivo é válido para férmions de spin $+1/2$ e o sinal negativo para férmions de spin $-1/2$. Substituindo esses parâmetros na condição (4.2), obtem-se a seguinte desigualdade,

$$\left(\ell \pm \frac{1}{2}\right)\left(\ell + 1 \pm \frac{1}{2}\right) > M^2\left(M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}\right) + O(\omega). \tag{4.39}$$

Assim, para qualquer buraco negro quase-extremo, é possível encontrar uma partícula com momento angular ℓ e energia ω suficientemente pequena de modo que a condição acima seja satisfeita e, consequentemente, uma singularidade nua seja criada.

De acordo com Hod [21], é necessário incluir, nesse contexto, efeitos de polarização do vácuo causados pela não-conservação da paridade de neutrinos [37, 52]. Em outras palavras, dentro da ergosfera, o acoplamento spin-órbita entre a partícula e o buraco negro é forte o suficiente para criar órbitas de energia negativa, de acordo com um observador no infinito. O processo de polarização espontânea do vácuo corresponde à criação de um par de partículas, sendo uma de energia positiva que escapa para o infinito e outra, de energia negativa, que é absorvida pelo buraco negro. Utilizando a expressão de Hawking [53] para o número esperado de partículas em cada modo fermiônico, tem-se,

$$\langle N\omega\rangle = t_{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\omega - m\Omega}{T_{bn}} + 1\right]^{-1}, \tag{4.40}$$

onde $t_{\frac{1}{2}}$, no limite de baixas energias, é dado pela expressão (4.37). Para um buraco negro extremo, $T_{bn} = 0$, e, consequentemente, apenas partículas com $\omega < m\Omega$ são emitidas espontaneamente. Essas partículas contribuem para que o buraco negro se afaste, cada vez mais, da extremalidade. Além disso, pelo princípio de exclusão de Pauli, é impossível enviar ao buraco negro neutrinos com energia $\omega < m\Omega$ mais rapidamente do que elas são espontaneamente criadas, sendo, portanto, impossível satifazer à condição (4.2). Por outro lado, para um buraco negro de Kerr–Newman imerso em um banho de radiação térmica, a probabilidade de um férmion incidir sem ser refletido é dada por [21, 54],

$$t_{\frac{1}{2}} \left[1 + \exp\left(-\frac{\omega - m\Omega}{T_{bn}}\right)\right]^{-1}. \tag{4.41}$$

Se o buraco negro é extremo, $T_{bn} = 0$, e a probabilidade é nula. Porém, se o buraco negro for quase-extremo, a probabilidade do férmion ser capturado e destruir o horizonte de eventos continua sendo extremamente pequena, porém não-nula. Note a semelhança desse resultado com o obtido para partículas clássicas. No caso de um buraco negro inicialmente extremo, é impossível satisfazer a condição (4.2) através da absorção clássica de uma partícula. No caso quase-extremo, porém, ignorando efeitos de *backreaction*, tal resultado é possível. É importante deixar claro que efeitos de *backreaction* também foram ignorados no caso do tunelamento quântico. Uma maneira de tentar minimizar esses efeitos é partir de um buraco negro muito próximo da extremalidade [20]. Porém, isso não é suficiente, pois a configuração final do sistema, uma singularidade nua, é extremamente diferente da configuração inicial, um buraco negro.

4.3 *Overcharge* de um buraco negro carregado

Um problema bastante parecido é o do tunelamento de partículas carregadas na métrica de Reissner–Nordström. A interação eletromagnética entre a partícula e o buraco negro é quantificada através do acoplamento mínimo, conforme discutido no capítulo 3. A grande vantagem de se analisar esse caso é que, por se tratar de uma quantidade escalar, não há dúvida nenhuma sobre qual o valor da carga transferida da partícula para o buraco negro.

Considere o tunelamento de uma partícula sem massa, de carga q e energia ω em um buraco negro de Reissner–Nordström de massa M e carga Q. Para minimizar possíveis efeitos de *backreaction*, exigimos que $M \gg 1$ (consequentemente, $Q \gg 1$) e que os números quânticos da partícula, ℓ e m, sejam nulos. Desse modo, $|qQ| \gg \ell + 1/2$, e o coeficiente de transmissão, no limite de baixas energias $M\omega \ll 1$, é dado pela expressão (3.69). Se tivermos a intenção de violar a CCC e criar uma singularidade nua, as cargas do buraco negro e da partícula devem possuir o mesmo sinal. Nesse caso, para energias ω arbitrariamente pequenas, o coeficiente de transmissão se aproxima de -1. Temos um caso extremo de superradiância. De modo geral, conforme explicado na seção (3.5), quando $\omega < qQ/r_+$, o fenômeno da superradiância ocorre. Logo, para que seja absorvida pelo buraco negro, a partícula deve possuir uma energia

$$\omega > qQ/r_+. \tag{4.42}$$

Nesse caso, a condição para criação de uma singularidade nua, equação (4.2), se reduz a,

$$\omega < |q| + |Q| - M. \tag{4.43}$$

Se o buraco negro for extremo, as condições (4.42) e (4.43) nunca podem ser satisfeitas simultaneamente. Porém, no caso de um buraco negro quase-extremo, se a carga da partícula for escolhida de modo a satisfazer,

$$|q| > \frac{M - |Q|}{r_+ - |Q|} r_+, \tag{4.44}$$

então sempre existirão energias ω para as quais ambas as desigualdades (4.42) e (4.43) serão satisfeitas, i.e.,

$$\frac{qQ}{r_+} < \omega < |q| - (M - |Q|). \tag{4.45}$$

Analogamente ao que ocorre no caso de partículas com momento angular na métrica de Kerr, férmions carregados na métrica de Reissner–Nordström não apresentam superradiância. O coeficiente de transmissão para um férmion com carga q e números quânticos $\ell = 1/2$, $m = 0$, que incide em um buraco negro de Reissner–Nordström, é dado pela expressão (3.67). Assumindo novamente que as cargas do buraco negro e da partícula possuem o mesmo sinal e que $M \gg 1$ (e, consequentemente, $Q \gg 1$), o coeficiente de transmissão, no limite de baixas energias, se aproxima de $+1$, ver equação (3.69). Desse modo, partículas com energias ω arbitrariamente pequenas são absorvidas pelo buraco negro. Como a carga e o momento angular transferidos da partícula para o buraco negro são dados, respectivamente, por q e $\sqrt{3}/2$, a condição para que uma singularidade nua seja criada, equação (4.2), se reduz a,

$$(M + \omega)^2 - \frac{3}{4\,(M + \omega)^2} < (|Q| + |q|)^2\,. \tag{4.46}$$

Dado um buraco negro quase-extremo qualquer, é sempre possível escolher ω e q de forma que a desigualdade acima seja satisfeita e, consequentemente, uma singularidade nua seja criada. Novamente, estamos ignorando efeitos de *backreaction* que poderiam, em princípio, evitar a destruição do horizonte de eventos e salvar a CCC.

Capítulo 5

Modelos Análogos

Modelos análogos de gravitação são sistemas físicos cujo comportamento pode ser descrito por campos clássicos/quânticos em um espaço-tempo curvo efetivo. Esses modelos constituem uma alternativa tanto teórica como experimental para se testar previsões da TQCEC. Em particular, a evaporação de buracos negros por radiação Hawking, a superradiância e a produção cosmológica de partículas são alguns dos fenômenos que podem ser reproduzidos em modelos análogos.

Da mesma maneira que a TQCEC deixa de valer na escala de Planck e efeitos de gravitação quântica devem ser considerados, modelos análogos possuem uma escala na qual a descrição do sistema pela métrica efetiva deixa de valer. A grande diferença é que, enquanto uma teoria satisfatória de gravitação quântica não existe, a teoria microscópica dos sistemas análogos geralmente é bem conhecida. O estudo dessas teorias microscópicas e a relação com seu correspondente modelo análogo é uma alternativa para se entender melhor a gravitação na escala de Planck.

Iniciaremos esse capítulo com uma introdução geral sobre os diferentes tipos de modelos análogos e algumas de suas possíveis aplicações. Em seguida, estudaremos em detalhes o primeiro sistema análogo proposto, que envolve a propagação de ondas sonoras no interior de um fluido em movimento. A partir das equações de Euler e da continuidade, mostraremos que a propagação de perturbações lineares se reduz a uma equação de Klein–Gordon em um espaço-tempo curvo efetivo. De forma geral, a métrica desse espaço-tempo admite a existência de uma ergosfera e de um horizonte de eventos. Após separar as variáveis da equação de Klein–Gordon, analisaremos o problema de reflexão e transmissão em um espaço-tempo análogo. Em particular, consideraremos o problema de espalhamento de ondas de superfície incidentes no horizonte de eventos de um sistema análogo. Por fim, explicaremos um experimento realizado recentemente no Canadá, que conseguiu medir, pela primeira vez, o análogo clássico da radiação Hawking.

5.1 Introdução

Em 1981, Unruh mostrou que ondas sonoras se propagando em um fluido invíscido, barotrópico e irrotacional podem ser descritas por um campo $\delta\psi$ ($\nabla\psi$ corresponde à velocidade do fluido; consequentemente, $\nabla\delta\psi$ representa uma perturbação da velocidade do fluido) que satisfaz a equação de Klein–Gordon em um espaço-tempo curvo efetivo,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\delta\psi) = 0, \tag{5.1}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica efetiva, denominada métrica análoga ou métrica acústica [55, 56].

Desde que a idéia original de Unruh envolvendo ondas sonoras em um fluido foi publicada, diversos sistemas análogos foram descobertos. Reznik, por exemplo, propôs um modelo análogo baseado na propagação de fótons em um meio dielétrico, no qual o índice de refração do meio faz o papel da métrica análoga [57, 58]. Unruh e Schützhold, por sua vez, mostraram que ondas de superfície se propagando em águas rasas constituem um modelo análogo que pode ser facilmente reproduzido em laboratório [59]. Modelos análogos intrinsicamente quânticos também são possíveis. Os mais conhecidos são os modelos análogos baseados em condensados de Bose-Einstein, introduzidos por Garay e coloboradores [60, 61], e os modelos análogos baseados em superfluidos, descobertos por Volovik e colaboradores [62].

Ao contrário da TQCEC usual, na qual a métrica $g_{\mu\nu}$ é solução das equações de Einstein, em modelos análogos a métrica $g_{\mu\nu}$ não satisfaz nenhuma equação em especial. Ela surge naturalmente a partir das equações que descrevem o sistema físico em questão. De fato, o espaço-tempo no qual o sistema está localizado é o espaço de Minkowski, porém o campo $\delta\psi$ se comporta como se estivesse em um espaço-tempo curvo com métrica $g_{\mu\nu}$. Por esse motivo, não se espera que fenômenos de gravitação que dependem intrinsicamente da equação de Einstein sejam reproduzidos em modelos análogos. No entanto, muitos fenômenos importantes da TQCEC, como a radiação Hawking e a superradiância independem da dinâmica que descreve a métrica $g_{\mu\nu}$.

Para um fluxo hidrodinâmico (3+1)-dimensional, por exemplo, a métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser escrita em termos da velocidade de propagação do som c, da densidade do fluido ρ e da velocidade do fluido $\mathbf{v}$ como [55, 56],

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho}{c}\begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -v^j \\ -v^i & \delta^{ij} \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

A métrica acima, no caso de um fluxo axissimétrico (3+1)-dimensional, compartilha algumas similaridades com a métrica de Kerr de um buraco negro em rotação: ela admite a existência tanto de uma ergosfera como de um horizonte de eventos. A ergosfera é a região onde a velocidade do fluido excede a velocidade do som, i.e. $|\mathbf{v}| > c$, enquanto o horizonte de eventos é a superfície onde a velocidade radial do fluido é igual à velocidade do som, i.e. $v_r = c$. A simples existência desse horizonte de eventos, juntamente com a equação de Klein–Gordon, é suficiente para mostrar que buracos negros análogos, assim como buracos negros na TQCEC, emitem radiação Hawking [55, 63]. De fato, uma das primeiras aplicações teóricas dos modelos análogos foi investigar a dependência da radiação Hawking em relação às frequências arbitrariamente grandes utilizadas na demonstação original de Hawking (o problema transplanckiano) [44, 53, 64,65]. Cálculos utilizando relações de dispersão modificadas para altas frequências dão suporte para a idéia de que o processo de evaporação de buracos negros é real [44,66,67].

Outro fenômeno, normalmente associado a buracos negros em rotação, que pode ser reproduzido em modelos análogos é a superradiância, processo clássico de espalhamento ondulatório no qual ondas incidentes são amplificadas ao serem refletidas por uma barreira de potencial [68]. A presença do horizonte de eventos, juntamente com a ergosfera, é suficiente para que a superradiância seja possível em modelos análogos [69]. Uma realização experimental desse processo foi proposta por Unruh e Schützhold usando ondas de superfície em fluidos [59].

Modelos análogos também podem ser utilizados em cosmologia para simular as geometrias de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [70,71]. Pode-se mostrar que a produção de partículas causada pela expansão do universo pode ser reproduzida em um condensado de Bose-Einstein cuja velocidade do som varia com o tempo. É possível usar a analogia para estudar como relações de dispersão não-lineares afetam processos cosmológicos. As referências [72, 73], por exemplo, abordam o problema transplackiano nos modelos inflacionários.

5.2 Propagação de ondas sonoras

O exemplo mais simples de um modelo análogo de gravitação é o caso de ondas sonoras que se propagam no interior de um fluido em movimento. Para estudar tal sistema, considere um fluido barotrópico e invíscido, cujo fluxo é, pelo menos localmente, irrotacional. As equações hidrodinâmicas que regem esse fluxo são a equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{5.3}$$

e a equação de Euler,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} \right] = -\nabla p, \tag{5.4}$$

onde ρ é a densidade do fluido, $\mathbf{v}$ é a sua velocidade e p é a sua pressão, que se assume ser a única responsável pelas forças atuantes no fluido. Como o fluido é barotrópico, i.e. sua densidade ρ é função da pressão p apenas, é possível definir uma função $h(p)$,

$$h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho(p')}, \tag{5.5}$$

de modo que $\nabla h = (1/\rho)\nabla p$. Além disso, por ser localmente irrotacional, i.e. $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, o fluido admite um potencial ψ tal que $\mathbf{v} = -\nabla\psi$. Utilizando esses resultados, é possível reescrever a equação de Euler como uma equação de Bernoulli,

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} + h + \frac{1}{2}\left(\nabla\psi\right)^2 = 0. \tag{5.6}$$

Para estudar a propagação de ondas sonoras nesse contexto, é necessário perturbar uma solução inicial, $(\rho_0, p_0, \psi_0) \to (\rho_0 + \delta\rho, p_0 + \delta p, \psi_0 + \delta\psi)$, e obter as equações de primeira ordem que descrevem as perturbações. Linearizando a equação da continuidade, tem-se,

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\delta\rho \mathbf{v}_0 + \rho_0 \nabla \delta\psi) = 0. \tag{5.7}$$

Por outro lado, linearizando a equação de Euler e utilizando o fato do fluido ser barotrópico, tem-se,

$$\delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial p}\rho_0\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\delta\psi\right). \tag{5.8}$$

Substituindo essa expressão para $\delta\rho$ na equação (5.7), obtem-se a seguinte equação de onda,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\rho}{\partial p}\rho_0\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial t} + \mathbf{v}_0\cdot\nabla\delta\psi\right)\right] + \nabla\cdot\left[\rho_0\nabla\delta\psi - \frac{\partial\rho}{\partial p}\rho_0\mathbf{v}_0\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial t} + \mathbf{v}_0\cdot\nabla\delta\psi\right)\right] = 0, \tag{5.9}$$

que pode ser reescrita como,

$$\partial_\mu\left(f^{\mu\nu}\partial_\nu\delta\psi\right) = 0, \tag{5.10}$$

onde $f^{\mu\nu}$ é a seguinte matriz 4×4 simétrica,

$$f^{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c^2}\begin{pmatrix} -1 & -v_0^j \\ -v_0^i & c^2\delta^{ij} - v_0^i v_0^j \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

e a velocidade local do som, c, é definida como,

$$c^{-2} = \frac{\partial\rho}{\partial p}. \tag{5.12}$$

Definindo uma métrica efetiva $g_{\mu\nu}$, denominada métrica acústica ou métrica análoga,

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c}\begin{pmatrix} -(c^2 - v_0^2) & -v_0^j \\ -v_0^i & \delta^{ij} \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

é possível transformar a equação de onda (5.10) em uma equação de Klein–Gordon,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi\right) = 0, \tag{5.14}$$

onde g é o determinante de $g_{\mu\nu}$. É possível generalizar esse resultado para um sistema $(d+1)$-dimensional e obter a seguinte métrica acústica $g_{\mu\nu}$ [74],

$$g_{\mu\nu} = \left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2}{d-1}}\begin{pmatrix} -\left(c^2 - v_0^2\right) & -v_0^j \\ -v_0^i & \delta^{ij} \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Note que, no caso de um sistema $(1+1)$-dimensional, a métrica acústica acima não está bem definida. A equação para $f^{\mu\nu}$, no entanto, continua válida. Para que a analogia também faça sentido nesses casos, é possível considerar o sistema $(1+1)$-dimensional como sendo, por exemplo, um sistema $(2+1)$-dimensional com simetria linear ou como sendo um sistema $(3+1)$-dimensional com simetria planar.

Essa analogia entre ondas sonoras que se propagam em um fluido invíscido e irrotacional e perturbações escalares em uma métrica curva efetiva, foi descoberta em 1981 por Unruh [55,56] e, desde então, vem sendo utilizada para analisar e compreender melhor fenômenos puramente cinemáticos da TQCEC, como a radiação hawking [3,44,66,67,75,76] e a super-radiância [59,69,77–81]. É importante observar que, enquanto perturbações sonoras se propagam de acordo com a métrica acústica efetiva (5.13), as partículas do fluido se movimentam de maneira completamente não relativística, de acordo com a métrica plana usual de Minkowski. Outro detalhe importante, já citado anteriormente, é que não há nenhuma analogia entre as equações de Einstein e as equações de Euler; a analogia é apenas cinemática.

5.3 Buracos negros análogos

Para investigar a existência de buracos negros em uma métrica análoga, em particular buracos negros com rotação, vamos considerar um sistema $(2+1)$-dimensional cuja métrica (5.15) para $d=2$, em coodenadas polares, se reduz a,

$$g_{\mu\nu} = \left(\frac{\rho}{c}\right)^2 \begin{pmatrix} -c^2+v^2 & -v_r & -v_\phi r \\ -v_r & 1 & 0 \\ -v_\phi r & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

onde a velocidade do fluido no *background* é decomposta em suas componentes radial e angular,

$$\mathbf{v} = v_r(t,r,\phi)\,\hat{r} + v_\phi(t,r,\phi)\,\hat{\phi}. \tag{5.17}$$

A métrica acústica (5.16) acima compartilha algumas similaridades com a métrica de Kerr: ela admite a existência tanto de uma ergosfera como de um horizonte de eventos. O conceito de ergosfera é facilmente generalizado de espaços-tempo na Relatividade Geral para espaços-tempo análogos. Como a métrica do *background* é a métrica de Minkowski, o vetor $(\partial_t)^\mu$ determina um conceito natural de "em repouso"(no caso do fluxo ser constante no tempo, esse vetor é um vetor de Killing de translação temporal). A norma desse vetor é dada por,

$$g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\nu = -(c^2-v^2). \tag{5.18}$$

Portanto, quando $c > |\mathbf{v}|$, o vetor $(\partial_t)^\mu$ é tipo-tempo e, quando, $c < |\mathbf{v}|$, ele é tipo-espaço. A região delimitada pela condição $c = |\mathbf{v}|$ é denominada ergosfera. Outro conceito de Relatividade Geral que pode ser utilizado em espaços-tempo análogos é o de superfícies aprisionadas. Em modelos análogos, quando a velocidade do fluido for direcionada para dentro de uma superfície fechada, e a componente normal da velocidade do fluido, no interior dessa superfície, for sempre maior que a velocidade do som, uma perturbação sonora não conseguirá se propagar de dentro para fora dessa superfície e ficará aprisionada em seu interior. Uma superfície como essa é denominada superfície aprisionada (superfícies anti-aprisionadas podem ser definidas analogamente, exigindo-se que a velocidade do fluido seja direcionada para fora). O fato do espaço-tempo de Minkowski possuir um conceito natural de "em repouso", facilita a definição de superfícies aprisionadas. Em Relatividade Geral, essa definição é muito mais complexa, requer a utilização de várias técnicas e conceitos matemáticos elaborados [7,8]. Um horizonte aparente acústico é a fronteira de uma região aprisionada, em outras palavras, é uma superfície na qual a componente normal da velocidade do fluido é igual a velocidade de propagação do som. O horizonte de eventos futuro acústico, por sua vez, é definido como sendo a fronteira da região a partir da qual geodésicas nulas, i.e. fônons, não conseguem escapar (uma definição análoga existe para horizonte de eventos passado). Assim como em Relatividade Geral, as definições de horizonte de eventos e de horizonte aparente coincidem para espaços-tempo estacionários. Nesse trabalho, são considerados apenas modelos análogos com fluxo constante no tempo e, portanto, a diferenciação entre os dois conceitos é desnecessária.

Queremos estudar, da mesma maneira que fizemos para buracos negros em Relatividade Geral, a propagação de ondas em espaços-tempo análogos. Para tornar a análise possível, restringimos nossa atenção a sistemas estáticos e com simetria radial, de modo que as quantidades relevantes dependem apenas da coordenada radial, i.e. $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r)$, $\rho = \rho(r)$ e $c = c(r)$. Além disso, como o fluido é irrotacional, a parte angular da velocidade é dada por $v_\phi = B/r$, onde B é uma constante real. Com essas simplificações, o *ansatz* $\delta\psi(t, r, \phi) = R(r)e^{-i\omega t}e^{im\phi}$ torna a equação de Klein–Gordon, equação (5.14), separável. A equação diferencial resultante para a componente radial é,

$$\frac{d^2R}{dr^2} + P(r)\frac{dR}{dr} + Q(r)\,R = 0, \tag{5.19}$$

onde os coeficientes $P(r)$ e $Q(r)$ são dados por,

$$P(r) = \frac{d}{dr}\log\left[r\left(c^2 - v_r^2\right)\frac{\rho}{c^2}\right] + 2\,i\,\frac{v_r}{c^2 - v_r^2}\left(\omega - m\frac{B}{r^2}\right), \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} Q(r) &= \frac{1}{c^2 - v_r^2}\left[\left(\omega - m\frac{B}{r^2}\right)^2 - m^2\frac{c^2}{r^2}\right] \\ &+ i\left(\omega - m\frac{B}{r^2}\right)\frac{v_r}{c^2 - v_r^2}\frac{d}{dr}\log\left[rv_r\left(\omega - m\frac{B}{r^2}\right)\frac{\rho}{c^2}\right]. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Observe que a densidade e as velocidades radiais não são independentes. Elas estão relacionadas pela equação de continuidade,

$$\frac{d}{dr}(rv_r\rho) = 0. \tag{5.22}$$

Para escrever a equação diferencial (5.19) como uma equação de onda, temos que modificar a coordenada radial r para uma coordenada tipo tartaruga,

$$\frac{dr^*}{dr} = \Delta(r) = c^2(c^2 - v_r^2)^{-1}, \tag{5.23}$$

e definir uma nova função radial $H(r)$ por,

$$R(r) = \Delta^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\int P(\tilde{r})d\tilde{r}\right]H(r). \tag{5.24}$$

Feitas essas duas transformações, a equação (5.19) é simplificada para,

$$\frac{d^2H}{dr^{*2}} + k^2(r)\,H = 0, \tag{5.25}$$

onde o número de onda efetivo k é dado por,

$$\begin{aligned} k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega - \frac{m\,B}{r^2}\right)^2 - \frac{c^2 - v_r^2}{c^2}\frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(\rho r)'}{\rho r}\right)\frac{\Delta'}{\Delta^3} \\ + \frac{(c^2 - v_r^2)^2}{c^4}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{(\rho r)'}{\rho r}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{(\rho r)'}{\rho r}\right)'\right]. \end{aligned} \tag{5.26}$$

5.4 Problema de reflexão e de transmissão

Para compreender o processo de espalhamento de uma onda escalar por um buraco negro acústico, vamos investigar o caso mais simples possível, no qual a densidade ρ e a velocidade de propagação das ondas são constantes. Assim sendo, a partir da equação da continuidade, equação (5.22), conclui-se que $v_r = -A/r$, onde A é uma constante positiva. O sinal negativo indica que o fluido se movimenta radialmente para dentro. Se $r < A/c$, a velocidade radial do fluido é maior do que a velocidade de propagação do som. Logo, a superfície definida por $r = r_h = A/c$ constitui o horizonte de eventos desse espaço-tempo análogo. A ergosfera, definida através da condição $v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 = c^2$, se localiza em $r = r_e = \sqrt{A^2 + B^2}/c$. A coordenada tipo tartaruga, definida pela equação (5.23), se reduz, nesse caso, a

$$r_* = r + \frac{A}{2c} \log \left| \frac{cr - A}{cr + A} \right| . \tag{5.27}$$

Já o número de onda efetivo, dado pela equação (5.26), pode ser reescrito como,

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega - \frac{mB}{r^2}\right)^2 - \left(\frac{c^2r^2 - A^2}{c^2r^2}\right)\left[\frac{1}{r^2}\left(m^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4}\frac{A^2}{r^4c^2}\right]. \tag{5.28}$$

Próximo ao buraco negro e no infinito assintótico, esse número de onda efetivo é simplificado, respectivamente, para,

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega - \frac{mB}{r_h^2}\right)^2 + O(r - r_h) \quad \text{e} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{5.29}$$

Consequentemente, é possível obter uma solução para a equação de onda, equação (5.25), nesses limites. Mais especificamente, $H \sim \exp\left[\pm\frac{i}{c}(\omega - mB/r_h^2)r_*\right]$ perto do horizonte de eventos e $H \sim \exp\left(\pm i\frac{\omega}{c}r_*\right)$ no infinito.

Para resolver o problema de uma onda incidente proveniente de uma região assintoticamente longe do buraco negro e obter os coeficientes de transmissão e reflexão relevantes, é necessário impor uma condição de contorno no horizonte de eventos. De maneira idêntica ao caso da Relatividade Geral, devido ao fato de nenhum sinal poder escapar de um buraco negro, exige-se que a velocidade de grupo radial de um pacote de ondas seja direcionada de fora para dentro do horizonte de eventos. Assim, para que $v_{grupo} = d\omega/dk = -1$, devemos escolher a exponencial $H \sim \exp\left[-\frac{i}{c}(\omega - mB/r_h^2)r_*\right]$ como solução do problema. Incluindo a solução no infinito, a parte radial da função de onda é dada por,

$$H = \begin{cases} Z^{in}e^{-i\frac{\omega}{c}r_*} + Z^{out}e^{+i\frac{\omega}{c}r_*}, & r_* \to \infty, \\ Z^{tr}e^{-\frac{i}{c}\left(\omega - \frac{mB}{r_h^2}\right)r_*}, & r_* \to -\infty, \end{cases} \tag{5.30}$$

onde Z^{in}, Z^{out} e Z^{tr} são constantes a serem determinadas. Note que, como a quantidade k^2 é real, se $H(r_*)$ for uma solução da equação (5.25), então seu complexo conjugado $H^*(r_*)$ também será uma solução. Usando novamente a identidade de Abel, obtem-se uma relação entre o Wronskiano W calculado nas proximidades do horizonte de eventos e no infinito assintótico,

$$W[H, H^*]\big|_{r_*=-\infty} = W[H, H^*]\big|_{r_*=\infty} \Rightarrow \omega\left(|Z^{in}|^2 - |Z^{out}|^2\right) = \left(\omega - \frac{mB}{r_h^2}\right)|Z^{tr}|^2. \tag{5.31}$$

É possível reescrever a equação acima na forma,

$$r + t = 1, \tag{5.32}$$

onde r é o coeficiente de reflexão,

$$r = \left| \frac{Z^{out}}{Z^{in}} \right|^2, \tag{5.33}$$

e t é o coeficiente de transmissão,

$$t = \frac{1}{\omega} \left(\omega - \frac{mB}{r_h^2} \right) \left| \frac{Z^{tr}}{Z^{in}} \right|^2. \tag{5.34}$$

5.5 Ondas de gravidade

Depois de termos analisado o modelo análogo mais simples existente, baseado na propagação de ondas sonoras em um fluido em movimento, estudaremos outro sistema análogo hidrodinâmico, baseado na propagação de ondas na superfície de um fluido cuja única força externa vertical é a gravidade. Mais precisamente, o objetivo dessa seção é investigar o comportamento de ondas superficiais em um fluido incompressível de densidade ρ. Seguindo a referência [59], mostra-se que, com algumas aproximações, a propagação dessas ondas pode ser descrita por uma equação de Klein–Gordon cujos parâmetros dependem da coordenada espacial. Além disso, assumimos que o fluxo é irrotacional, de forma que a velocidade do fluido $\mathbf{v}$ pode ser escrita como o gradiente de um campo, $\mathbf{v} = \nabla\psi$. A equação da continuidade, portanto, implica que o operador laplaciano aplicado ao campo ψ deve ser nulo,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla^2\psi = \nabla_\parallel^2\psi + \partial_z^2\psi = 0, \tag{5.35}$$

onde $\mathbf{x}_\parallel = (x, y)$ e z são as coordenadas espaciais. Assume-se que o tanque que contém o fluido é plano, de modo que a direção $\mathbf{z}$ é perpendicular ao plano que determina o fundo do tanque (plano $z = 0$). Utilizando o *ansatz*,

$$\psi(t, x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \psi_{(n)}(t, x, y), \tag{5.36}$$

juntamente com a condição de contorno que exige que a velocidade vertical do fluido seja nula no fundo do tanque, i.e. $\partial_z\psi|_{z=0} = 0$, obtem-se a partir da equação (5.35),

$$\psi(t, x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \nabla_\parallel^{2n} \psi_{(0)}(t, x, y). \tag{5.37}$$

Outra condição de contorno que deve ser aplicada é o fato da taxa de variação da altura do fluido ser igual à velocidade vertical do fluido na superfície. Se $z = h(t, x, y)$ denota a altura do fluido, então devemos ter,

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{z=h} = v_z|_{z=h} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_\parallel h \cdot \mathbf{v}_\parallel\big|_{z=h} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=h}, \tag{5.38}$$

onde $\mathbf{v}_\parallel\big|_{z=h}$ é a velocidade horizontal na superfície,

$$\mathbf{v}_\parallel\big|_{z=h} = \nabla_\parallel\psi\big|_{z=h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \nabla_\parallel(\nabla_\parallel^{2n}\psi_{(0)}). \tag{5.39}$$

Substituindo a equação (5.37) na equação (5.38), obtem-se, depois de alguma manipulação algébrica,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_\parallel \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!} \nabla_\parallel^{2n+1} \psi_{(0)}(t,x,y) \right) = 0. \tag{5.40}$$

Outra equação necessária para se determinar $\psi_{(0)}(t,x,y)$ pode ser obtida a partir da equação de Euler,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{f}, \tag{5.41}$$

onde $\rho\mathbf{f}$ representa todas as forças internas. A pressão P, por sua vez, se anula na superfície,

$$P = P_{(1)}(z-h) + O(z-h)^2. \tag{5.42}$$

Suponha que a gravidade é a única força na direção vertical e que é possível escrever,

$$\mathbf{f} = -\nabla V = -\nabla\left(V_0(x,y) + gz\right), \tag{5.43}$$

onde V_0 corresponde a todas as forças horizontais necessárias para manter o fluxo de *background*. Como o fluxo é irrotacional, as equações de Euler podem ser transformadas em uma equação de Bernoulli,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\psi\cdot\nabla\psi = -\frac{P}{\rho} - V. \tag{5.44}$$

Expandindo a equação acima em potências de $z-h$, obtem-se a partir do termo de ordem 0,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_\parallel^{2n} \psi_{(0)} + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \nabla_\parallel^{2n+1} \psi_{(0)} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_\parallel h \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \nabla_\parallel^{2n+1} \psi_{(0)} \right)^2 = -V_{(0)} - gh, \end{aligned} \tag{5.45}$$

onde a equação (5.37) foi utilizada. Observe que as equações (5.40) e (5.45) são suficientes para se determinar $\psi_{(0)}(t,x,y)$ e $h(t,x,y)$. Uma vez que se conhece $\psi_{(0)}(t,x,y)$, é possível determinar $\psi(t,x,y,z)$ e, consequentemente, $\mathbf{v}$. A incógnita restante, $P(t,x,y,z)$, é então determinada a partir da equação de Bernoulli. A propagação de perturbações nesse sistema, denomidadas ondas de superfície (por se propagarem na superfície do fluido) ou ondas de gravidade (pois a gravidade é a única força externa), é governada pela versão linearizada das equações (5.40) e (5.45). Suponha perturbações lineares nas quantidades de *background* $\psi_{(0)} \to \psi_{(0)} + \delta\psi_{(0)}$ e $h \to h + \delta h$. A partir da equação (5.40), obtemos,

$$\frac{\partial \delta h}{\partial t} + \nabla_\parallel \cdot \left(\mathbf{v}_\parallel|_{z=h} \delta h \right) + \nabla_\parallel \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!} \nabla_\parallel^{2n+1} \delta\psi_{(0)}(x,y). \right) = 0. \tag{5.46}$$

Outra equação de perturbação pode ser obtida a partir da equação de Bernoulli, equação (5.45). Depois da manipulação algébrica, tem-se,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\parallel|_{z=h} \cdot \nabla_\parallel \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \nabla_\parallel^{2n} \delta\psi_{(0)} \right) = -\tilde{g}\delta h, \tag{5.47}$$

onde $\tilde{g}$ é dado pela seguinte expressão,

$$\tilde{g} = g + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{\parallel}|_{z=h} \cdot \nabla_{\parallel}\right)^2 h. \tag{5.48}$$

Assumindo que,

$$\nabla_{\parallel}^2 \delta h \ll \delta h \quad \text{e} \quad h^2 \nabla_{\parallel}^2 \delta\psi_{(0)} \ll \delta\psi_{(0)}, \tag{5.49}$$

as equações de perturbação (5.46) e (5.47) se tornam, respectivamente,

$$\frac{\partial \delta h}{\partial t} + \nabla_{\parallel} \cdot \left(\mathbf{v}_{\parallel}|_{z=h} \delta h\right) + \nabla_{\parallel} \cdot \left(h \nabla_{\parallel} \delta\psi_{(0)}\right) = 0, \tag{5.50}$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{\parallel}|_{z=h} \cdot \nabla_{\parallel}\right) \delta\psi_{(0)} = -\tilde{g}\delta h. \tag{5.51}$$

Substituindo a equação (5.51) na equação (5.50), obtemos uma equação de Klein–Gordon para $\delta\psi_{(0)}$, com uma métrica efetiva dada por,

$$g_{\mu\nu} = \left(\frac{h}{\tilde{g}}\right) \begin{pmatrix} -\tilde{g}h + |\mathbf{v}_{\parallel}|_{z=h}|^2 & -\mathbf{v}_{\parallel}|_{z=h} \\ -\mathbf{v}_{\parallel}|_{z=h} & \mathbf{I}_{2\times 2} \end{pmatrix}, \tag{5.52}$$

onde $\mathbf{I}_{2\times 2}$ é a matriz identidade 2×2. Comparando esse resultado com a métrica análoga obtida anteriormente, equação (5.15), conclui-se que a velocidade de propagação das ondas de gravidade é dada por $c^2 = \tilde{g}h$. É possível também definir uma densidade efetiva através da relação $\rho = h$, que, inclusive, obedece a uma equação análoga à equação de continuidade usual, ver equação (5.40).

Para estudar o problema do espalhamento de um onda de gravidade, vamos considerar dois sistemas diferentes. O primeiro a ser analisado será um fluxo estacionário, solução das equações (5.40) e (5.45), com altura h constante e potencial $\psi_{(0)} = Ax + By$, onde A e B são constantes. A velocidade do fluido é, portanto, $\mathbf{v_0} = A\hat{\mathbf{x}} + B\hat{\mathbf{y}}$. Define-se, nesse caso,

$$\delta\psi_h = \delta\psi\,(z = h) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!} \nabla^{2n} \delta\psi_{(0)}. \tag{5.53}$$

Utilizando a aproximação eikonal, i.e.,

$$\delta\psi_h = \exp\left(ik_x x + ik_y y\right), \tag{5.54}$$

onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ é o vetor de onda constante, as equações (5.51) e (5.50) podem ser escritas como uma equação de Klein–Gordon para $\delta\psi_h$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v_0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v_0} \cdot \nabla\right) \delta\psi_h - \nabla \cdot \left(\frac{g}{k} tanh\,(kh)\, \nabla \delta\psi_h\right) = 0, \tag{5.55}$$

que corresponde a métrica acústica (5.52), com $\tilde{g} = g$ e $\mathbf{v}_{\parallel}|_{z=h} = \mathbf{v_0} = A\hat{\mathbf{x}} + B\hat{\mathbf{y}}$. Esse é um exemplo de um espaço-tempo arco–íris (*rainbow spacetime*) [82,83], no qual a métrica depende do momento k da onda. A partir da equação de Klein–Gordon, é possível obter a relação de dispersão para as ondas de gravidade, em função do vetor de onda $\mathbf{k}$,

$$\Omega^2 = (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v_0})^2 = gk tanh\,(kh)\,, \tag{5.56}$$

onde ω é a frequência das ondas no referencial do laboratório e Ω é a frequência no referencial do fluido em movimento. No limite de águas rasas, i.e. $\lambda = \frac{2\pi}{k} \gg h$, $\Omega^2 \sim ghk^2$ e, consequentemente, as velocidades de grupo e de fase da onda são dadas por $c = \sqrt{gh}$. No entanto, para águas profundas, i.e. $\lambda \ll h$, tem-se $\Omega^2 \sim gk$ e, consequentemente, as velocidades de fase e de grupo da onda são, respectivamente, $c_f = \sqrt{g/k}$ e $c_g = \partial\omega/\partial k = (1/2)\sqrt{g/k}$.

O segundo sistema a ser considerado é um fluxo estacionário e simétrico em relação a rotações em torno do eixo z, de forma que as quantidades físicas dependem apenas das coordenadas cilíndricas r e z. Como o fluxo é irrotacional, conclui-se que a velocidade angular é dada por $v_\phi = B/r$ e, consequentemente,

$$\psi_{(0)}(r,\theta) = \xi(r) + B\phi, \tag{5.57}$$

onde B é uma constante e $\xi(r)$ é uma função que determina as velocidades radial e angular,

$$v_r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial}{\partial r} \nabla_{\parallel}^{2n} \xi(r), \tag{5.58}$$

$$v_z = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \nabla_{\parallel}^{2n+2} \xi(r). \tag{5.59}$$

As equações relevantes para se determinar o fluxo de *background*, i.e. equações (5.40) e (5.45), se tornam, respectivamente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\partial}{\partial r} \nabla_{\parallel}^{2n} \xi(r) = -\frac{Ah_\infty}{rh}, \tag{5.60}$$

e,

$$\frac{B^2}{r^2} + \left[1 + h'^2\right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial}{\partial r} \nabla_{\parallel}^{2n} \xi(r)\right]^2 = 2\left[gh_\infty - gh\right], \tag{5.61}$$

onde A e h_∞ são constantes, o apóstrofe denota diferenciação com respeito a r e o operador $\nabla_{\parallel}^{2n}$ é dado por,

$$\nabla_{\parallel}^{2n} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]^n. \tag{5.62}$$

Assumindo que $\nabla_{\parallel}^2 \xi \ll \xi$ e $h'(r) \ll 1$, tem-se, a partir das equações (5.58), (5.59) e (5.60), que $v_z = 0$ e,

$$v_r = \xi'(r) = -\frac{Ah_\infty}{rh}. \tag{5.63}$$

A equação de Bernoulli (5.61) para a superfície do fluido $h(r)$,

$$h^3 + h^2\left[\frac{B^2}{2gr^2} - h_\infty\right] + \frac{A^2 h_\infty^2}{2gr^2} = 0, \tag{5.64}$$

é um polinômio cúbico cuja única solução física é dada por,

$$h(r) = \frac{1}{3}\left(h_\infty - \frac{B^2}{2gr^2}\right)\left[1 + 2\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\right], \tag{5.65}$$

onde,

$$\theta = \cos^{-1}\left[1 - \frac{3^3}{g}\left(\frac{Ah_\infty}{2r}\right)^2\left(h_\infty - \frac{B^2}{2gr^2}\right)^{-3}\right]. \tag{5.66}$$

Analogamente à métrica (5.16) de ondas sonoras, a métrica acústica (5.52) também compartilha algumas similaridades com a métrica de Kerr, admitindo a existência tanto de uma ergosfera como de um horizonte de eventos. A ergosfera, definida como a região onde a velocidade do fluido excede a velocidade de propagação das ondas, i.e. $v^2 = gh$, está localizada em,

$$r_E = \frac{B}{\sqrt{gh_\infty}}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1 + \left(\frac{3A}{2B}\right)^2}, \tag{5.67}$$

com altura correspondente $h_E = (2/3)h_\infty$. Por outro lado, o horizonte de eventos é a superfície na qual a velocidade radial do fluido é igual a velocidade de propagação, i.e. $v_r^2 = gh$, e está localizado em,

$$\begin{aligned} r_H &= \frac{B}{\sqrt{gh_\infty}}\left[\left(\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}+1\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}-1\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{B}{\sqrt{gh_\infty}}\left[2\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{3}}\sinh\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)\right)\right]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Portanto, $\theta(r_H) = \pi$ e a altura do fluido no horizonte de eventos pode ser calculada a partir da equação (5.65),

$$\begin{aligned} h_H &= h_\infty\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\left(\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}+1\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}-1\right)^{\frac{1}{3}}\right] \\ &= h_\infty\left(\frac{A}{B}\right)\sinh\left[\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Conforme demonstrado na referência [84], existe uma coordenada radial mínima para a qual a função cúbica (5.65) admite soluções aceitáveis fisicamente. Essa coordenada radial, definida pela condição $\partial h/\partial r = \infty$, caracteriza o raio do sorvedouro e é exatamente idêntica à coordenada radial do horizonte de eventos r_H do buraco negro análogo em questão. A partir da equação (5.65), uma expansão em série de $\partial h/\partial r$ pode ser obtida próximo ao horizonte,

$$\frac{dh}{dr} = \frac{h_H}{\sqrt{6r_H}}\sqrt{1+\frac{B^2h_H^2}{A^2h_\infty^2}}\frac{1}{\sqrt{r-r_H}} + O(1). \tag{5.70}$$

Uma consequência importante para a analogia com a gravitação é o fato da gravidade superficial [56] desse buraco negro análogo divergir,

$$\kappa_H = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(c^2 - v_r^2\right)\Big|_{r_H} = \frac{1}{2}\left(g + 2\frac{A^2h_\infty^2}{h_H^3}\right)\frac{dh}{dr}\Big|_{r_H} = \infty. \tag{5.71}$$

O estudo de ondas de gravidade incidentes em um buraco negro análogo é quase idêntica ao caso de ondas sonoras incidentes em um buraco negro acústico. Utilizando novamente o *ansatz* $\delta\psi(t,r,\phi) = R(r)e^{-i\omega t}e^{im\phi}$, é possível separar a equação de Klein–Gordon. A equação diferencial relevante para o problema é novamente dada pela equação (5.19), com coeficientes $P(r)$ e $Q(r)$ dados por,

$$P(r) = \frac{d}{dr}\log\left[\frac{r}{g}\left(gh - v_r^2\right)\right] + 2\,i\,\frac{v_r}{gh - v_r^2}\left(\omega - m\frac{B}{r^2}\right), \tag{5.72}$$

$$\begin{aligned} Q(r) &= \frac{1}{gh - v_r^2}\left[\left(\omega - m\frac{B}{r^2}\right)^2 - m^2\frac{gh}{r^2}\right] \\ &+i\left(\omega - m\frac{B}{r^2}\right)\frac{v_r}{gh - v_r^2}\frac{d}{dr}\log\left[\frac{r}{g}v_r\left(\omega - m\frac{B}{r^2}\right)\right], \end{aligned} \tag{5.73}$$

onde v_r é dado pela equação (5.63). Para escrever a equação diferencial acima como uma equação de onda, transforma-se a coordenada radial para uma coordenada tipo tartaruga,

$$\frac{dr^*}{dr} = \Delta(r) = gh(gh - v_r^2)^{-1}, \tag{5.74}$$

e se define uma nova função radial $H(r)$ por,

$$R(r) = \Delta^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\int P(\tilde{r})d\tilde{r}\right]H(r). \tag{5.75}$$

Essas duas transformações simplificam a equação (5.19),

$$\frac{d^2H}{dr^{*2}} + k^2(r)\,H = 0, \tag{5.76}$$

onde o número de onda efetivo k é dado por,

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{1}{gh}\left(\omega - \frac{m\,B}{r^2}\right)^2 - \frac{gh - v_r^2}{gh}\frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(hr)'}{hr}\right)\frac{\Delta'}{\Delta^3} \\ &+\frac{(gh - v_r^2)^2}{(gh)^2}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{(hr)'}{hr}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{(hr)'}{hr}\right)'\right]. \end{aligned} \tag{5.77}$$

5.6 Determinação experimental da radiação Hawking

A principal utilidade de modelos análogos é a possibilidade de testar em laboratório fenômenos da TQCEC que, em princípio, seriam impossíveis de serem realizados experimentalmente. O melhor exemplo, que inclusive motivou a descoberta da métrica acústica [55], é a radiação Hawking. Assumindo um fluxo esfericamente simétrico e estacionário, e definindo uma nova coordenada temporal,

$$\tau = t + \int \frac{v_0(r)}{c^2 - v_0(r)^2}, \tag{5.78}$$

a métrica acústica, equação (5.13), se reduz a,

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c}\left((c^2 - v_0^2)d\tau^2 - \frac{c}{c^2 - v_0^2}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right), \tag{5.79}$$

onde v_0 é a velocidade radial do fluido, ρ_0 é a sua densidade e c é a velocidade de propagação do som. Assume-se que existe um horizonte de eventos em $r = r_h$, de modo que a velocidade pode ser expandida como,

$$v_0 = -c + \alpha(r - r_h) + O(r - r_h)^2, \tag{5.80}$$

onde α é uma constante. Deixando de lado a parte angular, por simplicidade, temos, nas proximidades do horizonte de eventos,

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c}\left(2c\alpha(r - r_h)d\tau^2 - \frac{dr^2}{2\alpha(r - M)}\right), \tag{5.81}$$

que é conforme à métrica de Schwarzschild na vizinhança do horizonte de eventos,

$$ds^2 = \left(\frac{r - 2M}{2M}\right)dt^2 - \frac{2M}{r - 2M}dr^2. \tag{5.82}$$

Quantizando o campo de Klein–Gordon ψ, ver equação (5.14), é possível mostrar que buracos negros análogos, de maneira semelhante a um buraco negro de Schwarzschild, emitem ondas sonoras com um espectro térmico de temperatura,

$$T = \frac{\hbar}{2\pi k}\left.\frac{\partial v_0}{\partial r}\right|_{horizonte}, \tag{5.83}$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck e k é a constante de Boltzmann [55]. Estima-se que, para buracos negros acústicos, essa temperatura seja da ordem de $10^{-7}K$, um valor extremamente difícil, se não impossível, de se detectar experimentalmente considerando a presença de turbulências, vorticidade, etc.

A grande vantagem de se utilizar modelos análogos para investigar o efeito Hawking é o fato de se conhecer o comportamento do sistema físico também no limite de altas frequências e pequenos comprimentos de onda. No caso hidrodinâmico, por exemplo, para comprimentos de onda menores que a distância interatômica do fluido, ondas sonoras não existem. Porém, a física dessas escalas, i.e. a teoria atômica da matéria, é bem conhecida. Nessa escala de pequenas distâncias, a relação de dispersão relativística usual, i.e. $\omega^2 = c^2k^2$, deixa de valer, sendo necessário levar em conta correções de order superior em k,

$$\omega^2 = c^2k^2 + O\left(k^3\right). \tag{5.84}$$

O mesmo não pode ser dito da TQCEC. De fato, a demonstração da radiação Hawking para buracos negros requer a existência de flutuações de vácuo cuja frequência está muito além da escala de Planck (frequências transplanckianas), num regime onde toda a teoria deixa de valer. É o chamado problema transplanckiano [44, 53, 64]. No entanto, diferentemente da teoria atômica, uma teoria de gravitação quântica completa ainda não existe. Modelos análogos de gravitação existem para tentar suprir essa deficiência. Ao investigarmos se buracos negros acústicos emitem ou não radiação Hawking mesmo quando levamos em conta a física das distâncias intermoleculares, esperamos obter (ou pelo menos nos aproximar de) uma resposta definitiva sobre a existência (ou não) da radiação Hawking em buracos negros reais. Diversos autores investigaram o efeito de modificações na relação de dispersão sobre o processo de emissão da radiação Hawking [44, 66] e a possibilidade de aplicar as mesmas idéias em buracos negros reais [67,85]. Em geral, com algumas hipóteses adicionais, o processo de evaporação de Hawking é recuperado.

A maneira mais simples de investigar a radiação Hawking em laboratório é utilizando ondas de gravidade, ver seção (5.5). A primeira realização experimental de tal modelo análogo foi realizada em 2003, na Universidade de British Columbia, por Bill Unruh, Ralf Schützhold e Greg Lawrence [2], ver figura (5.1).

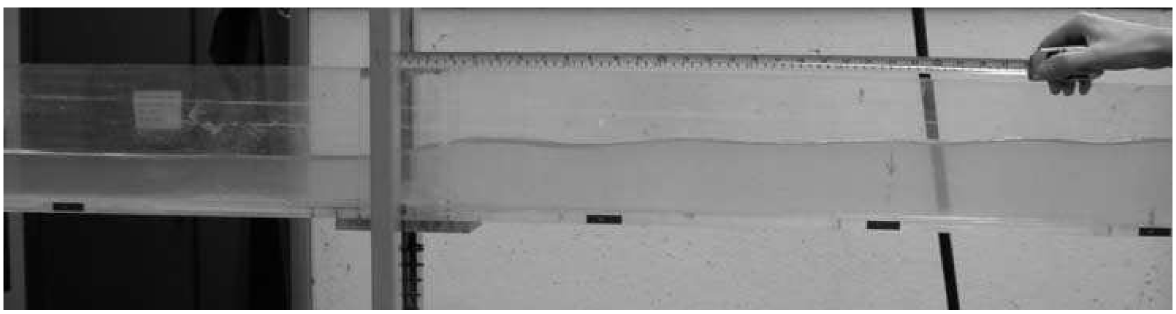

Figura 5.1: O salto na altura da água no horizonte de eventos de um buraco branco análogo pode ser interpretado como uma onda de gravidade de frequência nula que atinge esse horizonte. Retirado da referência [2].

A medida que o fluido se propaga pelo tanque, a altura do fluido se altera, de modo que existe um ponto no qual a velocidade das ondas e do fluido é igual, i.e. existe um horizonte de eventos análogo. A relação de dispersão completa para ondas de gravidade é dada pela equação (5.56),

$$(\omega - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})^2 = gk\tanh(kh)\,, \tag{5.85}$$

onde ω é a frequência da onda, $\mathbf{k}$ é seu vetor de onda, $\mathbf{v}$ é a velocidade do fluido, h é a sua altura e g é a aceleração da gravidade. Em seu experimento, Unruh, Schützhold e Lawrence [2], consideraram o sistema sem nenhum gerador de ondas. O salto na altura da água, ver figura (5.1), pode ser interpretado como uma perturbação de comprimento de onda infinito (e, consequentemente, frequência nula) incidente sobre o horizonte de eventos de um buraco branco análogo. Como o fluxo considerado é estacionário, a frequência do sistema é conservada e, portanto, a onda espalhada também possui frequência nula. Consequentemente, a velocidade de fase dessa onda é nula. Sua velocidade de grupo, $\partial\omega/\partial k$, no entanto, é não-nula e direcionada para longe do horizonte de eventos. Isso significa que há um fluxo de energia saindo do horizonte. Em outras palavras, uma onda incidente sobre o horizonte de eventos é espalhada, sendo convertida em uma outra onda de frequência nula e de número de onda k, que pode ser calculado a partir da equação (5.85),

$$vk = \sqrt{gk\tanh(kh)}. \tag{5.86}$$

O primeiro experimento a utilizar um gerador de ondas e considerar ondas incidentes de frequências não-nulas foi realizado por Rousseaux et al [75]. Para variar a altura (e, consequentemente, a velocidade) do fluido, um obstáculo é introduzido no fundo do tanque. O fluxo de água ao longo do tanque é ajustado de modo que, sobre o obstáculo, ondas se propagando contra o fluxo são bloqueadas. A região em que isso ocorre, definida através da exigência de que a velocidade de grupo das ondas seja igual à velocidade do fluido, é um horizonte de eventos de um buraco negro análogo. Esse fenômeno de bloqueio de ondas já havia sido considerado anteriormente na literatura de fluidodinâmica [86–89], inclusive experimentalmente. No entanto, o análogo da radiação Hawking, possível nesse contexto, nunca havia sido testado em laboratório.

Conforme explicado anteriormente, o sistema é estacionário e, portanto, a frequência no referencial do laboratório é conservada. Em termos gerais, para que essa frequência seja conservada, uma onda incidente no horizonte de eventos é convertida em duas ondas com números de onda k distintos. De fato, dada uma frequência ω suficientemente pequena, três valores distintos de k são possíveis, ver figura (5.2).

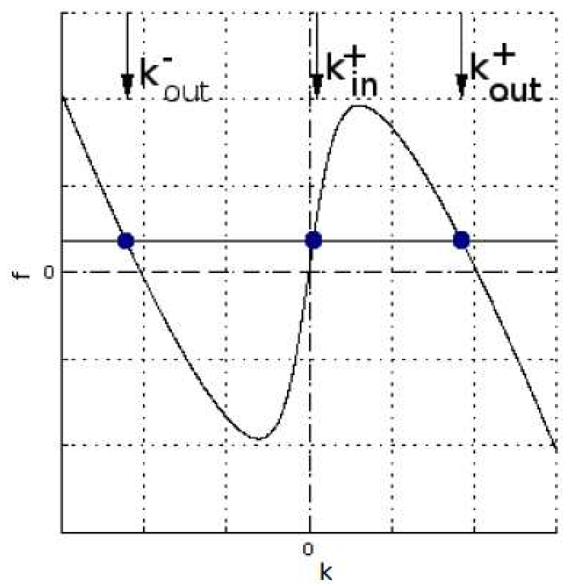

Figura 5.2: Relação de dispersão para ondas de gravidade, adaptado de [3].

A onda k^+_{in}, que possui velocidades de fase e de grupo positivas, corresponde à onda produzida pelo gerador de ondas. Ao atingir a região do obstáculo, essa onda é convertida nas outras duas ondas possíveis, k^+_{out}, com velocidade de fase positiva, mas velocidade de grupo negativa, e k^-_{out}, com ambas velocidades negativas. Essa última onda, de frequência k^-_{out}, corresponde ao fenômeno da radiação Hawking para campos clássicos. A versão quântica desse processo, é consequência direta desse resultado quando os campos clássicos são quantizados. Nesse caso, o vácuo quântico faz o papel da onda incidente. Tendo isso em mente, uma verificação experimental da radiação clássica é uma prova indireta da existência da radiação Hawking quântica. No primeiro experimento com tal intuito [75], foram observadas ondas convertidas de frequências negativas, porém a origem delas é incerta. A explicação mais provável é que elas são causadas por efeitos não lineares devido a ondas incidentes com amplitudes demasiadamente grandes. Recentemente, outro experimento realizado na Universidade de British Columbia [3], obteve sucesso em detectar a radiação Hawking em um buraco branco análogo, ver figura (5.3). Mais do que isso, a razão entre as amplitudes dos modos produzidos na região do obstáculo foi calculada. O resultado obtido está de acordo com a distribuição térmica esperada para modos produzidos por um processo de radiação Hawking.

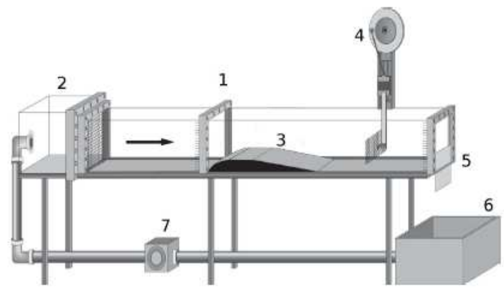

Figura 5.3: Montagem experimental – (1) tanque de água, (2) reservatório, (3) obstáculo, (4) gerador de ondas, (5) barragem regulável, (6) reservatório, (7) bomba hidráulica. Retirado da referência [3].

A primeira tentativa de se medir experimentalmente a radiação Hawking quântica foi realizada em 2010 utilizando pulsos ultracurtos de laser [76]. No entanto, a origem da radiação detectada não é clara e, portanto, não deveria ser denominada radiação Hawking [90].

Capítulo 6

Superradiância

Em termos gerais, processos de espalhamento de ondas são caracterizados pela interação entre uma onda incidente e um obstáculo físico. No caso geral, ondas incidentes perdem energia ao atravessarem seu meio de propagação: a amplitude da onda refletida é menor que a amplitude da onda incidente. Entretanto, existem alguns sistemas especiais nos quais esse comportamento é invertido e a amplitude das ondas refletidas é maior que a das ondas incidentes. Em outras palavras, energia é extraída do sistema. Os exemplos mais populares desse fenômeno, denominado superradiância [91], são o espalhamento de ondas por buracos negros de Kerr [92,93] e o espalhamento de ondas eletromagnéticas por um cilíndro condutor em rotação [68, 94]. Nesse capítulo, iremos investigar os detalhes que tornam o fenômeno da superradiância possível. Partindo de um processo de espalhamento bastante geral descrito por uma equação diferencial de segunda ordem e um potencial efetivo determinado pela interação entre a onda incidente e o obstáculo espalhador, encontraremos condições necessárias e suficientes para que o fenômeno ocorra. Surpreendentemente, tal processo ocorre apenas em sistemas onde há absorção, por exemplo, um cilíndro condutor em rotação ou um buraco negro de Kerr. Partindo dos exemplos mais comuns na literatura e generalizando para outros casos, mostraremos que a existência de uma ergosfera, i.e. uma região na qual nenhum observador físico pode permanecer em repouso, não é suficiente para que a superradiância ocorra; uma condição de contorno apropriada também é necessária. Indicaremos, inclusive, algumas situações na literatura recente nas quais uma ergosfera existia, mas a condição de contorno fora imposta sem uma motivação física clara [80, 81]. Consideraremos, em detalhes, o processo de espalhamento ondulatório em modelos análogos. Para finalizar o capítulo, estudaremos um experimento realizado recentemente no ICTP, Trieste, cujo objetivo era analisar a possibilidade de se detectar o fenômeno de superradiância experimentalmente.

6.1 Natureza da superradiância

Seja $(t, \eta, \boldsymbol{\chi})$ um sistema de coordenadas no qual t é a coordenada temporal e $(\eta, \boldsymbol{\chi})$ são as coordenadas espaciais. Suponha que um processo de espalhamento pode ser descrito por um campo separável, $\Psi(t, \eta, \boldsymbol{\chi}) = h(\eta)\, g(\boldsymbol{\chi}) e^{-i\omega t}$, onde $\omega \in \mathbb{R}$ e $h(\eta)$ obedece a uma equação diferencial linear e homogênea de segunda ordem. Através de uma mudança de coordenadas apropriada, essa equação pode sempre ser escrita como,

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + [V(\xi) + i\,\Gamma(\xi)]f = 0, \tag{6.1}$$

onde f é a nova variável dependente, $\xi = \xi(\eta)$ é a nova coordenada independente e os potenciais efetivos $V(\xi)$ e $\Gamma(\xi)$ são reais. Além disso, quando $\xi \to \infty$, assumimos que,

$$V(\xi) \to \omega^2 \quad \text{e} \quad \xi\,\Gamma(\xi) \to 0. \tag{6.2}$$

Dessa forma, a equação (6.1) admite uma solução correspondente ao espalhamento de uma onda incidente do infinito,

$$f(\xi) = e^{-i\omega\xi} + \mathcal{R}e^{+i\omega\xi}, \quad \xi \to \infty, \tag{6.3}$$

onde $\mathcal{R}$ é a razão entre as amplitudes da onda refletida e da onda incidente. Para investigar a ocorrência da superradiância, é necessária uma relação de conservação, que pode ser obtida considerando-se a derivada espacial do Wronskiano entre $f(\xi)$ e $f^*(\xi)$,

$$\frac{d}{d\xi}\left[i\,W(f,f^*)\right] \;=\; i\frac{d}{d\xi}\left[f\frac{df^*}{d\xi} - f^*\frac{df}{d\xi}\right] = 2\,\Gamma\,|f|^2. \tag{6.4}$$

Integrando a equação acima desde de um ponto ξ_0 (onde uma condição de contorno é imposta) até ∞ e substituindo a forma assintótica de $f(\xi)$, equação (6.3), obtem-se,

$$|\mathcal{R}|^2 = 1 + \frac{i}{2\omega}W(f,f^*)|_{\xi_0} - \frac{1}{\omega}\int_{\xi_0}^{\infty}\Gamma(\xi)|f(\xi)|^2 d\xi, \tag{6.5}$$

onde a quantidade $|\mathcal{R}|^2$ é interpretada como o coeficiente de reflexão.

Para os sistemas que podem ser descritos pela equação diferencial acima, uma condição necessária e suficiente para que superradiância ocorra, i.e. $|\mathcal{R}| > 1$, é,

$$iW(f,f^*)|_{\xi_0} - 2\int_{\xi_0}^{\infty}\Gamma(\xi)|f(\xi)|^2 d\xi > 0, \tag{6.6}$$

e, portanto, uma condição suficiente é $iW(f,f^*)|_{\xi_0} \geq 0$ e $\Gamma(\xi) \leq 0$, $\forall\,\xi \in (\xi_0,\infty)$ (pelo menos uma das desigualdades deve ser estrita). Por outro lado, superradiância é impossível se $iW(f,f^*)|_{\xi_0} \leq 0$ e $\Gamma(\xi) \geq 0$, $\forall\,\xi \in (\xi_0,\infty)$. Nesses casos, é suficiente saber o comportamento da solução nas proximidades de ξ_0. Porém, para o caso mais geral, é preciso resolver a equação diferencial (6.1) para determinar a ocorrência ou ausência de superradiância.

Analisaremos agora, em detalhe, diferentes sistemas físicos através da equação de conservação (6.5).

6.2 Ondas escalares em um buraco negro de Kerr–Newman

O processo de espalhamento de uma onda escalar com carga elétrica q por um buraco negro de Kerr–Newman (massa M, carga Q, momento angular a) é descrito por um campo de Klein–Gordon separável [95],

$$\psi(t,r,\theta,\phi) = \frac{f(r)}{\sqrt{r^2+a^2}}e^{-i\omega t}e^{im\phi}S_{\ell m}(\theta), \tag{6.7}$$

onde m é o momento angular azimutal, ℓ é o momento angular orbital e $S_{\ell m}$ são os esferoidais harmônicos. Através de uma mudança de coordenadas adequada,

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, \tag{6.8}$$

onde $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2$, a equação de Klein–Gordon se reduz à equação (6.1), com $\Gamma(\xi) = 0$ e,

$$V = \left(\omega - \frac{am + eQr}{\tilde{r}^2}\right)^2 - \lambda^2 \frac{\Delta}{\tilde{r}^4} + \frac{\Delta}{\tilde{r}^3}\frac{d}{dr}\left(\Delta \frac{d}{dr}\frac{1}{\tilde{r}}\right), \tag{6.9}$$

onde $\tilde{r}^2 = r^2 + a^2$, λ é uma constante de separação e $r = r(\xi)$. Além disso,

$$V \to \begin{cases} \omega^2, & \xi \to +\infty(r \to \infty), \\ (\omega - m\Omega_h - e\Phi_h)^2, & \xi \to -\infty(r \to r_+), \end{cases} \tag{6.10}$$

onde $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$ é o horizonte de eventos, enquanto $\Omega_h = a/(r_+^2 + a^2)^2$ e $\Phi_h = Qr_+/(r_+^2 + a^2)^2$ são a velocidade angular do horizonte de eventos e o potencial elétrico, respectivamente. Uma onda indicidente originada em $+\infty$, descrita pela equação (6.3), é espalhada pelo buraco negro. Como nenhum sinal pode escapar classicamente do buraco negro, apenas soluções direcionadas para dentro do buraco negro (i.e. velocidade de grupo em direção ao buraco negro) são permitidas nas proximidades do horizonte de eventos,

$$f(\xi) = \mathcal{T} e^{-i(\omega - m\Omega_h - e\Phi_h)\xi}, \quad \xi \to -\infty(r \to r_+), \tag{6.11}$$

onde $\mathcal{T}$ é o coeficiente de transmissão. A partir da equação de conservação (6.5), obtem-se,

$$|\mathcal{R}|^2 = 1 - \frac{\omega - m\Omega_h - e\Phi_h}{\omega}|\mathcal{T}|^2. \tag{6.12}$$

Essa equação reflete a conservação da corrente de partículas [8]. Casos partículares desse resultado foram obtidos nas seções (2.7) e (3.5). Se $\omega < m\Omega_h + e\Phi_h$, essa corrente é direcionada para fora do horizonte de eventos. Consequentemente, para ser conservada, a corrente de partículas total deve ter a mesma direção no infinito e, portanto, superradiância deve ocorrer. Outra maneira de entender a física desse fenômeno é comparar as energias e direções de propagação das ondas. Assintoticamente longe do buraco negro, as velocidades de grupo e de fase apontam na mesma direção. No entanto, nas proximidades do horizonte de eventos, a velocidade de fase da onda incidente é direcionada para fora do buraco negro. Consequentemente, apesar da onda se propagar em direção ao buraco negro, energia rotacional é extraída no processo, conforme calculado através do fluxo de energia no horizonte [8].

É importante enfatizar a importância das condições de contorno nesses resultados. Suponha que não existisse o horizonte de eventos e as condições de contorno fossem diferentes, de modo que ondas se propagando para fora, com amplitude $\mathcal{Y}$, também fossem possíveis. A expressão (6.12) então se tornaria,

$$|\mathcal{R}|^2 = 1 - \frac{\omega - m\Omega_h - e\Phi_h}{\omega}\left(|\mathcal{T}|^2 - |\mathcal{Y}|^2\right), \tag{6.13}$$

e, para $|\mathcal{T}| > |\mathcal{Y}|$, a condição sobre ω para superradiância não seria modificada. Observe que, se $|\mathcal{T}| < |\mathcal{Y}|$, seria possível obter $|\mathcal{R}| > 1$ para frequências suficientemente grandes, $\omega > m\Omega_h + e\Phi_h$.

No entanto, isso não deve ser chamado de superradiância pois a condição $|\mathcal{T}| < |\mathcal{Y}|$ corresponde à existencia de uma fonte no interior do sistema. Essas idéias podem ser aplicadas para o caso de uma estrela em rápida rotação que apresenta uma ergosfera. Por simplicidade, assume-se que Kerr–Newman é a métrica exterior e a superfície da estrela é perfeitamente refletora, $|\mathcal{T}| = |\mathcal{Y}|$. Consequentemente, $|\mathcal{R}| = 1$, veja, por exemplo, [96].

6.3 Cilíndro de Zel'dovich

O sistema físico no qual o fenômeno da superradiância foi descoberta foi o cilíndro de Zel'dovich [68]. Seguindo a análise e a notação da referência [94], considera-se um cilindro infinitamente longo de raio R, no vácuo e com velocidade angular constante Ω. O cilindro possui permitividade uniforme $\epsilon(\omega) \in \mathbb{R}$, permeabilidade $\mu(\omega) \in \mathbb{R}$, e condutividade elétrica $\sigma \geq 0$. Em um sistema de coordenadas cilíndrico, consideram-se modos axiais elétricos com $k = 0$, caracterizados pelos seguintes campos elétrico,

$$\mathbf{E} = \frac{\gamma}{\omega}(\omega - m\Omega)\frac{f(r)}{\sqrt{r}}e^{-i\omega t}e^{im\phi}\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{6.14}$$

e magnético,

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\gamma}{\omega r}(m - \omega\Omega r^2)\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{i}{\omega}\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{d}{dr}\right)\frac{f(r)}{\sqrt{r}}e^{im\phi}e^{-i\omega t}, \tag{6.15}$$

onde $m > 0$ é o número azimutal e γ é o fator de Lorentz. A função radial $f(r)$ satisfaz a equação (6.1) com $r = \xi$ e potenciais efetivos,

$$V = \begin{cases} \omega^2 - \frac{4m^2-1}{4r^2}, & r > R, \\ \omega^2 + (1-\epsilon\mu)(\omega - m\Omega)^2\gamma^2 - \frac{4m^2-1}{4r^2}, & r < R, \end{cases} \tag{6.16}$$

e

$$\Gamma(r) = \begin{cases} 0, & r > R, \\ 4\pi\gamma\mu\sigma(\omega - m\Omega), & r < R. \end{cases} \tag{6.17}$$

No limite assintótico, uma solução para a equação (6.1) é dada por (6.3). Próximo a $r = 0$, a única solução para a qual os campos elétricos e magnéticos são bem comportadas é dada por $f \propto \sqrt{r}r^m$. Nesse caso, o Wronskiano que aparece na equação (6.5) é nulo e, portanto,

$$|\mathcal{R}|^2 = 1 - \frac{1}{\omega}\int_0^R 4\pi\gamma\mu\sigma(\omega - m\Omega)\frac{|f(r)|^2}{r}dr. \tag{6.18}$$

Se o material do qual o cilíndro é feito é um isolante elétrico ($\sigma = 0$), nada acontece à onda incidente; ela é refletida sem perder ou ganhar energia ($|\mathcal{R}| = 1$). No entanto, se o cilíndro é um condutor elétrico ($\sigma \neq 0$), ocorre dissipação e $|\mathcal{R}| \neq 1$. A energia perdida é proporcional à frequência $\omega - m\Omega$ da onda incidente medida no co-referencial do cilíndro, veja por exemplo a referência [97]. Para $\omega > m\Omega$, energia é dissipada na forma de calor. Por outro lado, para $\omega < m\Omega$, energia rotacional está sendo transferida do cilíndro para a onda eletromagnética e superradiância ocorre. Esse é um resultado geral para corpos macroscópicos axissimétricos com velocidade angular constante Ω que podem dissipar internamente energias absorvidas. Pela Segunda Lei da Termodinâmica, superradiância surge quando $\omega - m\Omega < 0$ [94].

6.4 Espaços-tempo análogos

A equação (6.1) também é aplicável no contexto de espaços-tempo análogos [56]. Para buracos negros acústicos em rotação, processos superradiantes de espalhamento são possíveis [77, 78]. No entanto, se o espaço-tempo não possui um horizonte de eventos, a conclusão não é a mesma. Nas situações aqui investigadas, inclusive, a superradiância não se manifesta. Em particular, pode-se mostrar que a superradiância não ocorre para fluidos invíscidos, com fluxo rotacional e sem velocidades radiais. No caso de pequenas perturbações em torno de um fluxo $(2+1)$-dimensional irrotacional, invíscido e incompressível, as equações que descrevem o sistema podem ser reescritas como uma equação de Klein–Gordon em um espaço-tempo curvo [78, 79], ver equação (5.14). A função de onda quando a densidade do fluido ρ e a velocidade do som no fluido c são constantes (assume-se $c = 1$ por simplicidade), é dada por,

$$\psi = \begin{cases} r^{-\frac{1}{2}+i\frac{mB}{A}}(r^2 - A^2)^{i\frac{\omega A}{2}-i\frac{mB}{2A}} f e^{-i\omega t} e^{im\phi}, & A \neq 0, \\ r^{-\frac{1}{2}} f e^{-i\omega t} e^{im\phi}, & A = 0, \end{cases} \tag{6.19}$$

onde m é o número azimutal, e a velocidade de *background* é,

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{A}{r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{B}{r}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{6.20}$$

Esse problema foi tratado anteriormente na seção (5.4). Através da transformação de coordenadas,

$$\frac{d\xi}{dr} = \left(1 - \frac{A^2}{r^2}\right)^{-1}, \tag{6.21}$$

a equação de Klein–Gordon radial se reduz para (6.1), com $\Gamma(\xi) = 0$ e

$$V = \left(\omega - \frac{mB}{r^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{A^2}{r^2}\right)\left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{4r^2} + \frac{5A^2}{r^4}\right), \tag{6.22}$$

ver equação (5.28). Quando $A \neq 0$, um horizonte de eventos está presente em $r = A$ ($\xi = -\infty$). A situação é idêntica ao caso de buracos negros reais. Impondo a condição de que as ondas podem apenas entrar no horizonte de eventos, obtem-se a condição de reflexão demonstrada anteriormente, equação (6.12), para $\Phi_h = 0$ e $\Omega_h = B/A^2$. Nesse caso em que existe um horizonte de eventos, os detalhes exatos da velocidade de *background* na origem não são importantes pois a condição de contorno é imposta justamente no horizonte de eventos. Dessa forma, os cálculos independem do perfil de velocidades dentro do buraco negro. No entanto, quando A $= 0$, o horizonte de eventos não existe mais e uma condição de contorno deve ser especificada em $r = 0$. Para contornar essa dificuldade, um tanque de fluido que se estende de $r = r_0$ até $r = \infty$ pode ser considerado. Como o campo deve ser contínuo em r_0, a condição de contorno $f(r_0) = 0$ deve ser imposta. A solução correspondente,

$$f(r) = \alpha(r - r_0) + O(r - r_0)^2, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{6.23}$$

implica que o Wronskiano da equação (6.5) é nulo e, consequentemente, $|\mathcal{R}| = 1$. Isso corre até quando existe uma ergosfera, i.e. quando $B > r_0$, pois os modos de energia negativa não ficam aprisionados dentro do horizonte de eventos. Na referência [80], foi demonstrado que buracos negros acústicos sem velocidade radial não apresentam superradiância (o coeficiente de reflexão calculado satisfazia $|\mathcal{R}| < 1$). Porém, a hipótese de se exigir apenas ondas entrando na ergosfera (que foi definida utilizando a velocidade de fase ao invés da velocidade de grupo) não é clara para o presente autor.

Outra maneira de se evitar uma velocidade divergente na origem é considerar um perfil de velocidades mais realístico, por exemplo, $\mathbf{v}_0 = u(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$, onde,

$$u(r) \propto \begin{cases} r^{\alpha}, & r \to 0, \\ r^{-1}, & r \to \infty, \end{cases} \tag{6.24}$$

com $\alpha \geq 1$. Consequentemente, o fluxo deixa de ser irrotacional e a análise perturbativa das equações hidrodinâmicas é mais sofisticada. É necessário introduzir graus de liberdade adicionais na forma de uma campo vetorial $\boldsymbol{\zeta}$. No total, tem-se dois campos, ψ e $\boldsymbol{\zeta}$, que satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais [98],

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \nabla^2\psi + \nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}, \tag{6.25}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \nabla\psi \times \boldsymbol{\omega}_0 - (\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla)\mathbf{v}_0, \tag{6.26}$$

onde,

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \nabla\times\mathbf{v}_0 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\,u(r)\right]\hat{\boldsymbol{z}} \equiv \omega_0(r)\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{6.27}$$

é a vorticidade do *background*. Através da seguinte separação de variáveis, $\psi(t,r,\phi) = R(r)e^{-i\omega t}e^{im\phi}$ e $\boldsymbol{\zeta}(t,r,\phi) = \boldsymbol{\varsigma}(r)e^{-i\omega t}e^{im\phi}$, a equação (6.26) se torna,

$$\boldsymbol{\varsigma}(r) = \frac{\omega_0}{K\tilde{\omega}}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r}\left(-m + 2\frac{u}{\tilde{\omega}}\frac{d}{dr}\right) + i\hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{m\omega_0}{r\tilde{\omega}} - \frac{d}{dr}\right)\right]R, \tag{6.28}$$

onde,

$$\tilde{\omega} = \omega - m\frac{u(r)}{r} \quad \text{e} \quad K = 1 - 2\frac{\omega_0\,u}{\tilde{\omega}^2\,r}.$$

É possível reescrever a equação (6.25) na forma da equação (6.1), com $\xi = r$, $\Gamma(r) = 0$, $f(r) = R(r)\sqrt{r/K}$, e,

$$V = \frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{c}^2} - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}\log\left(\frac{r}{K}\right) - \frac{1}{4}\left[\frac{d}{dr}\log\left(\frac{r}{K}\right)\right]^2, \tag{6.29}$$

onde,

$$\frac{1}{\tilde{c}^2} = K\left[1 - \frac{m}{r\tilde{\omega}}\frac{d}{dr}\left(\frac{\omega_0}{K\tilde{\omega}^2}\right)\right]. \tag{6.30}$$

No limite assintótico, $r \to \infty$, o fluxo (6.24) é irrotacional. Portanto, nesse limite, $\boldsymbol{\zeta} = 0$ e $f(r)$ dado pela equação (6.3) descreve uma onda incidente. Próximo de $r = 0$, a única solução da equação (6.1) que admite perturbações de velocidade ($\delta\mathbf{v} = \nabla\psi + \boldsymbol{\zeta}$) fisicamente bem comportadas é $f(r) \propto r^{m+1/2}$, cujo Wronskiano é nulo, i.e. $W(f,f^*)|_0 = 0$. Substituindo esse resultado na equação (6.5), conclui-se que $|\mathcal{R}| = 1$ e superradiância não ocorre. Seria interessante incluir viscosidade nesses fluidos puramente rotacionais, sem velocidades radiais.

Assim como no caso do cilíndro de Zel'dovich, o termo dissipativo na equação (6.5) talvez possa contribuir para um espalhamento superradiante.

Outra situação similar na qual uma ergosfera pode aparecer sem um horizonte de eventos é em um vórtice de um condensado de Bose-Einstein. A grande dificuldade para determinar a ocorrência ou não de superradiância é conhecer o comportamento do campo nas proximidades do vórtice. Em [81], foi argumentado que superradiância é possível. No entanto, a razão para assumir apenas ondas que entram no vórtice não fica clara. É preciso também investigar cuidadosamente como a pressão quântica próxima ao vórtice (responsável pela parte não linear do espectro de excitações) interfere na formação da ergosfera.

Apesar da superradiância não se manifestar em sistemas não dissipativos sem um horizonte de eventos, instabilidades dinâmicas podem estar presentes. Elas correspondem a um crescimento exponencial no tempo ($\mathfrak{Im}(\omega) > 0$) e, eventualmente, a validade do tratamento perturbativo fica comprometida. O *ansatz* (6.3) não é apropriado nesse caso. Uma condição de contorno adicional que exclua ondas incidentes em $\xi = +\infty$ deve ser imposta e o problema passa a ser um problema de autovalores para frequências complexas.

6.5 É possível obter superradiância em laboratório?

Conforme visto na seção (5.6), modelos análogos baseados em ondas de gravidade constituem um ótimo sistema para se testar, experimentalmente, efeitos da TQCEC. Nessa sessão, investigaremos a possibilidade de detectar superradiância em um buraco negro análogo com rotação. O exemplo mais simples de um sistema desse tipo foi obtido na seção (5.5), ao considerarmos um fluxo $(2+1)-$dimensional, estacionário, irrotacional e com simetria cilíndrica. A altura do fluido é dada pela equação (5.65). Ondas de gravidade se propagam nesse sistema através da equação de onda (5.76), com número de onda efetivo dado pela equação (5.77). Para analisar o problema de uma onda incidente nesse buraco negro análogo, precisamos impor a condição de que nenhum sinal pode escapar do interior de seu horizonte de eventos. Para tal, é necessário distinguir, dentre as duas soluções da equação (5.76), qual se propaga radialmente para dentro do buraco negro e qual se propaga para fora. O grande problema desse sistema é que, devido ao fato da gravidade superficial divergir, ver a equação (5.71), as soluções não tem caráter ondulatório na proximidade do horizonte de eventos.

Esse problema da gravidade superficial infinita já foi considerado anteriormente no contexto de ondas sonoras [99]. Como dh/dr também diverge, a hipótese feita logo após a equação (5.62), de que derivadas de ordem dois (ou superior) de $\xi(r)$ e de $h(r)$ são desprezíveis, deixa de valer, comprometendo toda a analogia com buracos negros reais. Para o caso de ondas sonoras, a hipótese de viscosidade nula pode ser a razão dessa divergência. No entanto, incluir viscosidade não é uma tarefa simples, dado que ela adiciona um termo de terceira ordem às equações de perturbação, tornando impossível escrevê-las na forma de uma equação de Klein–Gordon. Para fluidos invíscidos, uma maneira de tornar a gravidade superficial finita é introduzir uma força externa bastante específica, de maneira análoga a considerada na referência [99].

Suponha que, ao invés do potencial,

$$V(r,\phi,z) = gh_\infty - gz + O(z^2), \tag{6.31}$$

que utilizamos para obter a equação (5.64), consideremos um potencial mais geral, dado por,

$$V(r,\phi,z) = g(h_\infty + b(r)) - gz + O(z^2), \tag{6.32}$$

onde $\lim_{r\to\infty} b(r) = 0$. A equação de Bernoulli então se altera para,

$$h^3 + h^2 H(r) + \frac{\sigma^3}{2r^2} = 0, \tag{6.33}$$

onde,

$$H(r) = \frac{\gamma}{r^2} - b(r) - h_\infty, \qquad \sigma^3 = \frac{A^2 h_\infty^2}{g}, \qquad \gamma = \frac{B^2}{2g}. \tag{6.34}$$

Derivando essa expressão com relação a r e resolvendo para $h'(r)$, obtemos,

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{\frac{\sigma^3}{r^3} + h^2\frac{dH}{dr}}{h(3h+2H)}. \tag{6.35}$$

A partir da definição do horizonte de eventos,

$$v_r^2 = \frac{A^2 h_\infty^2}{r^2 h^2} = gh \Rightarrow \frac{\sigma^3}{r_h^2} = h_h^3, \tag{6.36}$$

juntamente com a nova equação de Bernoulli, equação (6.33), conclui-se que,

$$h_h = -\frac{2}{3} H(r_h). \tag{6.37}$$

Portanto, o denominador da equação (6.35) se anula no horizonte e $h'(r_h)$ diverge a menos que o numerador também se anule. Escolhendo $b'(r_h)$ cuidadosamente, é possível zerar o numerador no horizonte de eventos e obter um valor finito para $h'(r_h)$. Uma maneira possível de se fazer isso é escolher,

$$b(r) = -\frac{2}{3}\left(\frac{2\gamma}{r_h^2} + h_\infty\right)\left(\frac{r_h}{r}\right)^\beta (r - r_h), \tag{6.38}$$

onde $\beta > 1$ e r_h é dado pela expressão (5.68). Observe que essa definição é consistente, uma vez que $V(r_h) = 0$ (se $V(r_h) \neq 0$, então o horizonte não estaria localizado em r_h, mas em uma diferente coordenada radial).

Com esse novo potencial, a altura do fluido pode ser escrita como $h(r) = h_H + O(r - rh)$ perto do horizonte e como $h(r) = h_\infty + O(r^{-2})$ longe dele. A mudança de coordenadas, equação (5.74), se reduz a,

$$r^* \to \begin{cases} r, & r^* \to +\infty (r \to \infty), \\ \frac{c_H^2}{2\kappa_H}\log(r - r_H), & r^* \to -\infty (r \to r_H), \end{cases} \tag{6.39}$$

onde $c_H = \sqrt{g h_H}$ é a velocidade das ondas no horizonte de eventos e κ_H é o análogo da gravidade superficial no horizonte de eventos.

Com isso, é possível resolver a equação de onda nas proximidades do horizonte de eventos e no infinito. A partir da equação (5.26), obtem-se,

$$k^2 \to \begin{cases} \left(\frac{\omega}{c_\infty}\right)^2, & r^* \to +\infty (r \to \infty), \\ \frac{1}{c_H^2}\left(\omega - \frac{mB}{r_H^2}\right)^2, & r^* \to -\infty (r \to r_H), \end{cases} \tag{6.40}$$

Considerando o processo de espalhamento de uma onda incidente de $r = +\infty$ e levando em consideração o fato de que nenhuma onda pode entrar no horizonte de eventos de um buraco negro análogo, a solução da equação de onda pode ser escrita como,

$$H(r^*) = \begin{cases} \alpha_1 e^{-i\frac{\omega}{c_\infty}r^*} + \alpha_2 e^{+i\frac{\omega}{c_\infty}r^*}, & r^* \to +\infty (r \to \infty), \\ \beta e^{-\frac{i}{c_H}\left(\omega - \frac{mB}{r_H^2}\right)r^*}, & r^* \to -\infty (r \to r_H), \end{cases} \tag{6.41}$$

onde $c_\infty^2 = gh_\infty$. Como a equação (5.76) é uma equação diferencial linear de segunda ordem sem o termo de primeira ordem, o Wronskiano entre uma solução H e seu complexo conjugado é constante. Aplicando esse resultado à equação (6.41), obtem-se uma relação entre os coeficientes α_1, α_2 e β,

$$\frac{\omega}{c_\infty}\left(1 - \left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|^2\right) = \frac{1}{c_H}\left(\omega - \frac{mB}{r_H^2}\right)\left|\frac{\beta}{\alpha_1}\right|^2. \tag{6.42}$$

O coeficiente de reflexão r e o coeficiente de transmissão t, dados pelas expressões,

$$r = \left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|^2 \quad \text{e} \quad t = \frac{1}{c_H}\left(\omega - \frac{mB}{r_H^2}\right)\left|\frac{\beta}{\alpha_1}\right|^2, \tag{6.43}$$

satisfazem a relação $r + t = 1$. Exigindo que o coeficiente de reflexão seja maior que 1, i.e. $r > 1$, encontra-se a condição necessária para superradiância,

$$\omega < \frac{mB}{r_h^2}. \tag{6.44}$$

Em vista das dificuldades causadas pela gravidade superficial divergente, um experimento foi montado no ICTP, em Trieste, para investigar a possibilidade de medição do fenômeno da superradiância em laboratório [4]. Um experimento semelhante, mas com objetivos diferentes, é descito na referência [84]. A montagem experimental consiste em um recipiente cilíndrico, de aproximadamente 70 cm de diâmetro e 40 cm de altura com um orifício, uma fonte de água contínua e um suporte para instalação de um projetor de *slides* e de uma câmera fotográfica, ver figura (6.1).

O experimento é realizado em um ambiente escuro. As únicas fontes de luz são o projetor, que ilumina apenas uma linha estreita na superfície do fluido, e uma lâmpada, que ilumina o resto do experimento quando necessário. Para que o projetor produza esse feixe estreito de luz, foi utilizado um *slide* modificado, que permite que a luz passe apenas por um pequeno espaço. Pequenas partículas são utilizadas para facilitar a identificação da velocidade do fluido. A câmera é utilizada para registrar a superfície iluminada do fluido (um corante é adicionado à água para facilitar a detecção) e para registrar o movimento das partículas adicionadas ao fluido. Uma escala é utilizada para facilitar a medição de distâncias nas imagens, ver figura (6.2). Se quisermos produzir um fluxo completamente axissimétrico, temos a opção de introduzir uma coluna de pequenas rochas ao redor do recipiente.

O objetivo do experimento é medir a altura do fluido e a as suas velocidades angular e radial em função da coordenada radial. Compara-se, então, os valores obtidos com os valores teóricos calculados na seção (5.5), equações (5.65) e (5.63). Espera-se uma diferença significativa entre

Figura 6.1: Montagem experimental para investigar a possibilidade de detectar superradiância [4].

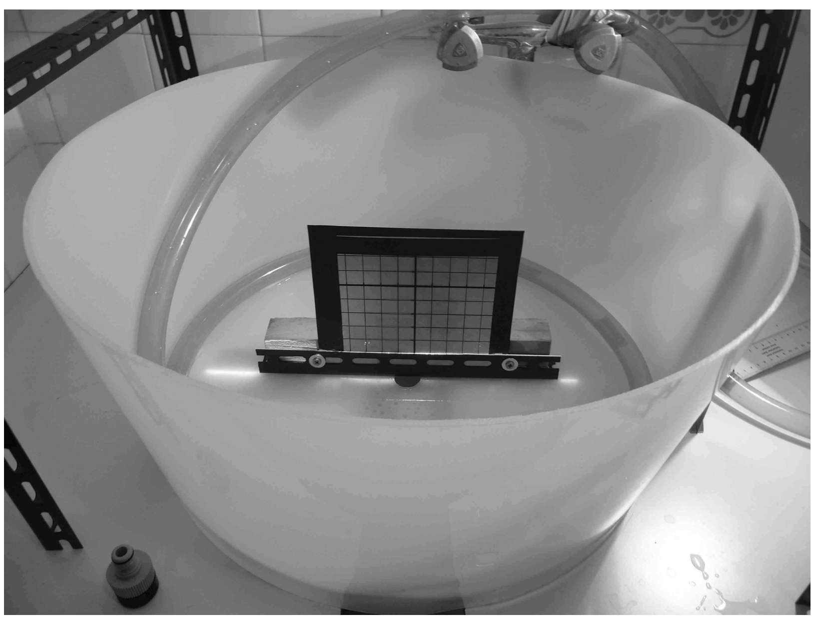

Figura 6.2: Escala utilizada para facilitar a medição de distâncias [4].

esses valores nas proximidades do horizonte de eventos, onde a gravidade superficial diverge. Com os resultados obtidos experimentalmente, resolve-se a equação (5.76) numericamente para se estimar os coeficientes de transmissão e reflexão, equação (6.43). Esse é um projeto em andamento, iniciado em Novembro de 2010 e com previsão de ser finalizado em 2011. Caso haja indicações de que é possível detectar a superradiância em laboratório, um experimento mais detalhado, que inclua a geração e detecção de ondas, será realizado.

Capítulo 7

Considerações finais

O objetivo principal desse trabalho foi investigar a validade da Conjectura da Censura Cósmica em processos de tunelamento quântico. Considerou-se, primeiramente, perturbações escalares, de neutrinos, eletromagnéticas e gravitacionais na métrica de Kerr. No capítulo 2, as equações de Teukolsky, que governam a propagação dessas perturbações foram obtidas e utilizadas para calcular coeficientes de transmissão e de reflexão no limite de baixas energias. Resultados análogos foram, em seguida, obtidos para perturbações carregadas na métrica de Reissner–Nordström. O cálculo analítico dos coeficientes de reflexão e transmissão, nesse caso, é um resultado inédito na literatura. A Conjectura da Censura Cósmica é discutida no capítulo 4. Utilizando a dualidade onda-partícula, bem como os coeficientes de transmissão calculados nos capítulos anteriores, analisou-se a possibilidade de se destruir o horizonte de eventos de um buraco negro e criar uma singularidade nua, violando a Conjectura da Censura Cósmica. Em particular, mostrou-se que partículas bosônicas e fermiônicas, sem carga e sem massa, que tunelam através do horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr–Newman, são capazes de criar uma singularidade nua. De maneira semelhante, foi demonstrado que partículas carregadas são capazes de aumentar suficientemente a carga de um buraco negro de Reissner–Nordström quase-extremo de forma a transformá-lo em uma singularidade nua. Foram feitas tentativas de minimizar efeitos de *backreaction* em nossos cálculos, porém é impossível eliminá-los completamente. Esses efeitos poderiam, em princípio, salvar a Conjectura da Censura Cósmica. Uma possível violação da conjectura por processos quânticos não seria algo tão surpreendente como uma violação por processos clássicos. No contexto clássico, a consequência da existência de singularidades nuas seria a perda do poder de previsão das leis da física. No contexto quântico, porém, uma eventual teoria completa de gravitação quântica deverá ter um importante papel na questão da validade da conjectura. Essa teoria completa poderá, através de mecanismos de *backreaction* e/ou novos efeitos físicos ainda não conhecidos, salvar a Conjectura da Censura Cósmica, mas também poderá admitir a existência de singularidades nuas, tornando-as objetos bem entendidos e explicados.

Um fenômeno que se manifesta no processo de espalhamento de partículas por buracos negros é a superradiância. Para compreender melhor esse efeito, modelos análogos de gravitação e suas perturbações foram estudados na capítulo 5. Os sistemas analisados detalhadamente foram modelos hidrodinâmicos, em particular, a propagação de ondas sonoras no interior de um fluido e a propagação de ondas de gravidade na superfície de um fluido. O primeiro experimento que detectou a radiação Hawking em modelos análogos foi descrito na seção (5.6). Com ajuda desses modelos hidrodinâmicos, o fenômeno da superradiância foi tratado detalhadamente no capítulo 6. Finalmente, analisou-se um experimento, iniciado em 2010, cujo objetivo é investigar a possibilidade de detecção desse fenômeno em laboratório. Os resultados desse experimento, quando estiverem disponíveis, indicarão a magnitude da amplificação de uma onda de gravidade que sofre superradiância ao ser espalhada por um buraco negro análogo. Dependendo do valor obtido, experimentos deverão ser projetados para detectar a superradiância em laboratório.

Apêndice A

Formalismo de Newman–Penrose

Como alternativa à maneira usual de se tratar problemas em Relatividade Geral, na qual todos os cálculos são efetuados em uma base coordenada local, é possível escolher uma base tétrade adequada de quatro vetores linearmente independentes, projetar todos os tensores relevantes nessa base e resolver as equações assim obtidas. A grande vantagem desse método, conhecido como formalismo tétrade, é a possibilidade de escolher a base tétrade de modo que ela reflita as simetrias do espaço-tempo em questão. Em 1962, a idéia de utilizar uma base tétrade nula, ao invés das tétrades ortonormais anteriormente usadas, foi desenvolvida por Newman e Penrose a partir da álgebra spinorial. Nesse capítulo, procederemos de uma maneira diferente, definindo o formalismo de Newman–Penrose diretamente a partir de uma base tétrade nula, sem mencionar spinores em um primeiro momento. Spinores, juntamente com sua relação com o formalismo de NP, serão tratados posteriormente.

A.1 Formalismo tétrade

O formalismo tétrade consiste em definir uma base de quatro vetores contravariantes em cada ponto do espaço-tempo,

$$e_{(a)}{}^{i} \qquad (a = 1, 2, 3, 4), \tag{A.1}$$

onde os parênteses distinguem os índices tétrades dos índices tensoriais. Naturalmente, utilizando o tensor métrico g_{ik}, é possível construir vetores tétrades covariantes,

$$e_{(a)i} = g_{ik} e_{(a)}{}^{k}. \tag{A.2}$$

Define-se a inversa $e^{(b)}{}_{i}$, da matriz $\left[e_{(a)}{}^{i}\right]$ (onde o índice tétrade representa as linhas e o índice tensorial as colunas) de forma que,

$$e_{(a)}{}^{i} e^{(b)}{}_{i} = \delta^{(b)}_{(a)} \quad \text{e} \quad e_{(a)}{}^{i} e^{(a)}{}_{j} = \delta^{i}{}_{j}. \tag{A.3}$$

Além disso, assume-se que,

$$e_{(a)}{}^{i}e_{(b)i} = \eta_{(a)(b)}, \tag{A.4}$$

onde $\eta_{(a)(b)}$ é uma matriz simétrica constante. Seja $\eta^{(a)(b)}$ a inversa da matriz $\left[\eta_{(a)(b)}\right]$, de modo que,

$$\eta^{(a)(b)}\eta_{(b)(c)} = \delta^{(a)}{}_{(c)}. \tag{A.5}$$

Consequentemente,

$$\eta_{(a)(b)}e^{(a)}{}_{i} = e_{(b)i}, \quad \eta^{(a)(b)}e_{(a)i} = e^{(b)}{}_{i}, \quad \text{e} \quad e_{(a)i}e^{(a)}{}_{j} = g_{ij} \tag{A.6}$$

No formalismo tétrade, vetores são representados através de suas projeções na base tétrade,

$$A_{(a)} = e_{(a)j}A^{j} = e_{(a)}{}^{j}A_{j}, \tag{A.7}$$

$$A^{(a)} = \eta^{(a)(b)}A_{(b)} = e^{(a)}{}_{j}A^{j} = e^{(a)j}A_{j}, \tag{A.8}$$

$$A^{i} = e^{i}_{(a)}A^{(a)} = e^{(a)i}A_{(a)}. \tag{A.9}$$

A extensão para tensores de ordens superiores é direta,

$$T_{(a)(b)} = e_{(a)}{}^{i}e_{(b)}{}^{j}T_{ij} = e^{i}_{(a)}T_{i(b)}, \tag{A.10}$$

$$T_{ij} = e^{(a)}{}_{i}e^{(b)}{}_{j}T_{(a)(b)} = e^{(a)}{}_{i}T_{(a)j}. \tag{A.11}$$

A.2 Derivadas direcionais e coeficientes de rotação de Ricci

Os vetores tétrades contravariantes, interpretados como vetores tangentes, definem as seguintes derivadas direcionais,

$$e_{(a)} = e_{(a)}{}^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}. \tag{A.12}$$

Aplicando esse operador em um campo escalar ϕ qualquer, podemos construir sua derivada direcional, denotada por $\phi_{,(a)}$,

$$\phi_{,(a)} = e_{(a)}{}^{i}\frac{\partial\phi}{\partial x^{i}} = e_{(a)}{}^{i}\phi_{,i}. \tag{A.13}$$

De forma mais geral, para um vetor $A_{(a)}$ qualquer, definem-se as seguintes derivadas direcionais,

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}{}^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}A_{(a)} = e_{(b)}{}^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}e_{(a)}{}^{j}A_{j} \tag{A.14}$$

$$= e_{(b)}{}^{i}\nabla_{\partial_i}\left[e_{(a)}{}^{j}A_{j}\right] = e_{(b)}{}^{i}\left[e_{(a)}{}^{j}A_{j;i} + A_{k}e_{a}{}^{k}{}_{;i}\right] \tag{A.15}$$

e, portanto,

$$A_{(a),(b)} = e_{(a)}{}^{j}A_{j;i}e_{(b)}{}^{i} + e_{(a)k;i}e_{(b)}{}^{i}e_{(c)}{}^{k}A^{(c)} = e_{(a)}{}^{j}A_{j;i}e_{(b)}{}^{i} + \gamma_{(c)(a)(b)}A^{(c)}, \tag{A.16}$$

onde os coeficientes $\gamma_{(c)(a)(b)}$, denominados coeficientes de rotação de Ricci, são dados por,

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e_{(c)}{}^{k}e_{(a)k;i}e_{(b)}{}^{i}. \tag{A.17}$$

Alternativamente, podemos definir esses coeficientes através da expressão,

$$e_{(a)k;i} = e^{(c)}{}_k \gamma_{(c)(a)(b)} e^{(b)}{}_i. \tag{A.18}$$

Os coeficientes de rotação de Ricci são antisimétricos em relação ao primeiro par de índices, isto é,

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = -\gamma_{(a)(c)(b)}. \tag{A.19}$$

A partir dessa propriedade, a equação (A.18) pode ser reescrita como,

$$e_{(a)}{}^{k}{}_{;i} = -\gamma_{(a)}{}^{k}{}_{i}. \tag{A.20}$$

É importante notar que o cálculo dos coeficientes de rotação de Ricci não exige o cálculo de nenhuma derivada covariante. Definindo,

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = e_{(b)i,j}\left[e_{(a)}{}^{i} e_{(c)}{}^{j} - e_{(a)}{}^{j} e_{(c)}{}^{i}\right], \tag{A.21}$$

é possivel mostrar, ver ref. [29], que,

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = \gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(c)(b)(a)}, \tag{A.22}$$

e, consequentemente,

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2}\left[\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(b)(a)} - \lambda_{(b)(c)(a)}\right], \tag{A.23}$$

onde fica claro que apenas derivadas ordinárias são necessárias para o cálculo dos coeficientes de rotação. Uma importante definição no formalismo tétrade é a da derivada intrínsica de $A_{(a)}$ na direção $e_{(b)}$, denotada por $A_{(a)|(b)}$, e determinada através da expressão,

$$A_{(a)|(b)} = e_{(a)}{}^{i} A_{i;j} e_{(b)}{}^{j}. \tag{A.24}$$

Utilizando a equação (A.16), é possível relacionar as derivadas intrínsica e direcional,

$$A_{(a)|(b)} = A_{(a);(b)} - \eta^{(n)(m)} \gamma_{(n)(a)(b)} A_{(m)}. \tag{A.25}$$

A noção de derivada intrínsica pode ser facilmente estendida para tensores de ordem superior. Dado, por exemplo, um tensor $T_{(a)(b)}$, sua derivada intrínsica na direção $e_{(f)}$ é escrita como,

$$T_{(a)(b)|(f)} = T_{ij;k} e_{(a)}{}^{i} e_{(b)}{}^{j} e_{(f)}{}^{k} = T_{(a)(b),(f)} - \eta^{(n)(m)}\left[\gamma_{(n)(a)(f)} T_{(m)(b)} + \gamma_{(n)(b)(f)} T_{(a)(m)}\right]. \tag{A.26}$$

Outra importante definição no formalismo tétrade é a das constantes de estrutura, $C^{(c)}{}_{(a)(b)}$, dadas por,

$$\left[e_{(a)}, e_{(b)}\right] = C^{(c)}{}_{(a)(b)} e_{(c)}. \tag{A.27}$$

Note que essa definição é consistente, uma vez que o comutador de dois vetores tangentes é também um vetor tangente e, portanto, pode ser expandido na base tétrade. Esses coeficientes de estrutura podem ser escritos em termos dos coeficientes de rotação da seguinte maneira,

$$C^{(c)}{}_{(a)(b)} = \gamma^{(c)}{}_{(b)(a)} - \gamma^{(c)}{}_{(a)(b)}. \tag{A.28}$$

A.3 Identidades de Ricci e de Bianchi

Substituindo-se a definição do tensor de Riemann a partir de um vetor da base tétrade $e^i_{(a)}$, i.e.,

$$e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k} = R_{mikl} {e_{(a)}}^m, \tag{A.29}$$

na expressão do tensor de Riemann em coordenadas tétrades, i.e.,

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = R_{mikl} {e_{(a)}}^m {e_{(b)}}^i {e_{(c)}}^k {e_{(d)}}^l, \tag{A.30}$$

obtém-se o tensor de Riemann em termos dos coeficientes de rotação,

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} = & -\gamma_{(a)(b)(c),(d)} + \gamma_{(a)(b)(d),(c)} + \gamma_{(b)(a)(f)} \left[{\gamma_{(c)}}^{(f)}{}_{(d)} - {\gamma_{(d)}}^{(f)}{}_{(c)} \right] \\ & + \gamma_{(f)(a)(c)} {\gamma_{(b)}}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(f)(a)(d)} {\gamma_{(b)}}^{(f)}{}_{(c)}. \end{aligned} \tag{A.31}$$

Devido à antisimetria dos coeficientes de rotação em relação ao primeiro par de índices e à antisimetria entre l e k na definição do tensor de Riemann, ver equação ($A.29$), existem 36 equações do tipo ($A.31$) no total.

Por outro lado, a identidade de Bianchi, $R_{ij[kl;m]}$, que corresponde a 20 equações linearmente independentes entre si, pode ser escrita no formalismo tétrade como,

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)[(c)(d)|(f)]} = \frac{1}{6} \sum_{[(c)(d)(f)]} \Big\{ & R_{(a)(b)(c)(d),(f)} - \eta^{(n)(m)} \left[\gamma_{(n)(a)(f)} R_{(m)(b)(c)(d)} + \gamma_{(n)(b)(f)} R_{(a)(m)(c)(d)} \right. \\ & \left. + \gamma_{(n)(b)(f)} R_{(a)(m)(c)(d)} + \gamma_{(n)(c)(f)} R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)} R_{(a)(b)(c)(m)} \right] \Big\} . \end{aligned} \tag{A.32}$$

As equações ($A.31$) e ($A.32$), juntamente com as relações de comutação ($A.27$), formam as equações básicas do formalismo tétrade.

A.4 O formalismo de Newman–Penrose

O formalismo de Newman–Penrose é um formalismo tétrade particular, no qual a base tétrade é composta por um par de vetores nulos reais, $\mathbf{l}$ e $\mathbf{n}$, e um par de vetores nulos complexo conjugados um do outro, $\mathbf{m}$ e $\bar{\mathbf{m}}$. Além da condição de serem vetores nulos, i.e.,

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0, \tag{A.33}$$

impõe-se também as seguintes condições de ortogonalidade,

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0. \tag{A.34}$$

Apesar de não ser estritamente necessário, também imporemos condições de normalização adicionais sobre os vetores da base,

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = -1. \tag{A.35}$$

Definindo,

$$\mathbf{e_1} = \mathbf{l}, \quad \mathbf{e_2} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e_3} = \mathbf{m} \quad \text{e} \quad \mathbf{e_4} = \bar{\mathbf{m}}, \tag{A.36}$$

temos a seguinte base covariante,

$$\mathbf{e^1} = \mathbf{e_2} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e^2} = \mathbf{e_1} = \mathbf{l}, \quad \mathbf{e^3} = -\mathbf{e_4} = -\bar{\mathbf{m}} \quad \text{e} \quad \mathbf{e^4} = -\mathbf{e_3} = -\mathbf{m}, \tag{A.37}$$

e, consequentemente, a matriz $\eta_{(a)(b)}$, ver equação (A.4), é dada por

$$\left[\eta_{(a)(b)}\right] = \left[\eta^{(a)(b)}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.38}$$

Quando considerados como derivadas direcionais, os vetores da base tétrade são representados pelos seguintes símbolos,

$$\mathbf{e_1} = \mathbf{e^2} = D, \quad \mathbf{e_2} = \mathbf{e^1} = \triangle, \quad \mathbf{e_3} = -\mathbf{e^4} = \delta \quad \text{e} \quad \mathbf{e_4} = -\mathbf{e^3} = \delta^*. \tag{A.39}$$

No formalismo de NP, os coeficientes de rotação de Ricci são denominados coeficientes de spin e, assim como as derivadas direcionais, são designados por símbolos especiais,

$$\left.\begin{array}{lll} \kappa = \gamma_{311}, & \rho = \gamma_{314}, & \epsilon = \frac{1}{2}\left(\gamma_{211} + \gamma_{341}\right), \\ \sigma = \gamma_{313}, & \mu = \gamma_{243}, & \gamma = \frac{1}{2}\left(\gamma_{212} + \gamma_{342}\right), \\ \lambda = \gamma_{244}, & \tau = \gamma_{312}, & \alpha = \frac{1}{2}\left(\gamma_{214} + \gamma_{344}\right), \\ \nu = \gamma_{242}, & \pi = \gamma_{241}, & \beta = \frac{1}{2}\left(\gamma_{213} + \gamma_{343}\right). \end{array}\right\} \tag{A.40}$$

De formal geral, o complexo conjugado de qualquer quantidade pode ser obtido trocando-se o índice 3 pelo índice 4, e vice-versa.

A.5 Tensores de Riemann, Ricci e Weyl

As componentes tétrades do tensor de Weyl, C_{abcd}, podem ser escritas como,

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}\left(\eta_{ac}R_{bd} - \eta_{bc}R_{ad} - \eta_{ad}R_{bc} + \eta_{bd}R_{ac}\right) + \frac{1}{6}\left(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc}\right)R, \tag{A.41}$$

onde R_{abcd} são as componentes tétrades do tensor de Riemann, R_{bd} as componentes tétrades do tensor de Ricci e R é o escalar de Ricci. O tensor de Weyl possui 10 componentes independentes que, no formalismo de NP, são representadas por cinco escalares complexos,

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_0 = -C_{1313} = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s, \\ \Psi_1 = -C_{1213} = -C_{pqrs}l^p n^q l^r m^s, \\ \Psi_2 = -C_{1342} = -C_{pqrs}l^p m^q \bar{m}^r n^s, \\ \Psi_3 = -C_{1242} = -C_{pqrs}l^p n^q \bar{m}^r n^s, \\ \Psi_4 = -C_{2424} = -C_{pqrs}n^p \bar{m}^q n^r \bar{m}^s. \end{array}\right\} \tag{A.42}$$

É possível, por outro lado, inverter essas relações e escrever cada componente do tensor de Weyl em termos dos cinco escalares e dos vetores da base tétrade [29].

O tensor de Ricci, assim como o tensor de Weyl, também possui 10 componentes independentes que, por sua vez, podem ser escritas em termos de quatro escalares reais e três escalares complexos,

$$\left.\begin{array}{c} \Phi_{00}=-\frac{1}{2}R_{11}, \qquad \Phi_{22}=-\frac{1}{2}R_{22}, \qquad \Phi_{02}=-\frac{1}{2}R_{33}, \Phi_{20}=-\frac{1}{2}R_{44}, \\ \Phi_{11}=-\frac{1}{4}\left(R_{12}+R_{34}\right), \qquad \Phi_{01}=-\frac{1}{2}R_{13}, \qquad \Phi_{10}=-\frac{1}{2}R_{14}, \\ \Lambda=\frac{1}{24}R=\frac{1}{12}\left(R_{12}-R_{34}\right), \qquad \Phi_{12}=-\frac{1}{2}R_{23}, \qquad \Phi_{21}=-\frac{1}{2}R_{24}. \end{array}\right\} \tag{A.43}$$

Usando os escalares definidos nessa seção, juntamente com a base de NP, é possível reescrever as equações relevantes ao formalismo tétrade, i.e. as relações de comutação, equação ($A.27$), as identidades de Ricci, equação ($A.31$), e as identidades de Bianchi, equação ($A.32$). A forma final das equações obtidas é dada por,

$$\triangle D - D\triangle = (\gamma+\gamma^*)D + (\epsilon+\epsilon^*)\triangle - (\tau^*+\pi)\delta - (\tau+\pi^*)\delta^*, \tag{A.44}$$

$$\delta D - D\delta = (\alpha^*+\beta-\pi^*)D + \kappa\triangle - (\rho^*+\epsilon-\epsilon^*)\delta - \sigma\delta^*, \tag{A.45}$$

$$\delta\triangle - \triangle\delta = -\nu^* D + (\tau-\alpha^*-\beta)\triangle + (\mu-\gamma+\gamma^*)\delta + \lambda^*\delta^*, \tag{A.46}$$

$$\delta^*\delta - \delta\delta^* = (\mu^*-\mu)D + (\rho^*-\rho)\triangle + (\alpha-\beta^*)\delta + (\beta-\alpha^*)\delta^*, \tag{A.47}$$

$$D\rho - \delta^*\kappa = (\rho^2+\sigma\sigma^*) + \rho(\epsilon+\epsilon^*) - \kappa^*\tau - \kappa(3\alpha+\beta*-\pi) + \Phi_{00}, \tag{A.48}$$

$$D\sigma - \delta\kappa = \sigma(\rho+\rho^*+3\epsilon-\epsilon^*) - \kappa(\tau-\pi^*+\alpha^*+3\beta) + \Psi_0, \tag{A.49}$$

$$D\tau - \triangle\kappa = \rho(\tau+\pi^*) + \sigma(\tau^*+\pi) + \tau(\epsilon-\epsilon^*) - \kappa(3\gamma+\gamma^*) + \Psi_1 + \Phi_{01}, \tag{A.50}$$

$$D\alpha - \delta^*\epsilon = \alpha(\rho+\epsilon^*-2\epsilon) + \beta\sigma^* - \beta^*\epsilon - \kappa\lambda - \kappa^*\gamma + \pi(\epsilon+\rho)\Phi_{10}, \tag{A.51}$$

$$D\beta - \delta\epsilon = \sigma(\alpha+\pi) + \beta(\rho^*-\epsilon^*) - \kappa(\mu+\gamma) - \epsilon(\alpha^*-\pi^*) + \Psi_1, \tag{A.52}$$

$$D\gamma - \triangle\epsilon = \alpha(\tau+\pi^*) + \beta(\tau^*+\pi) - \gamma(\epsilon+\epsilon^*) - \epsilon(\gamma+\gamma^*) + \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \tag{A.53}$$

$$D\lambda - \delta^*\pi = (\rho\lambda+\sigma^*\mu) + \pi(\pi+\alpha-\beta) - \nu\kappa^* - \lambda(3\epsilon-\epsilon^*) + \Phi_{20}, \tag{A.54}$$

$$D\mu - \delta\pi = (\rho^*\mu+\sigma\lambda) + \pi(\pi^*-\alpha^*+\beta) - \mu(\epsilon+\epsilon^*) - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda, \tag{A.55}$$

$$D\nu - \triangle\pi = \mu(\pi+\tau^*) + \lambda(\pi^*+\tau) + \pi(\gamma-\gamma^*) - \nu(3\epsilon+\epsilon^*) + \Psi_3 + \Phi_{21}, \tag{A.56}$$

$$\triangle\lambda - \delta^*\nu = -\lambda(\mu+\mu^*+3\gamma-\gamma^*) + \nu(3\alpha+\beta^*+\pi-\tau^*) - \Psi_4, \tag{A.57}$$

$$\delta\rho - \delta^*\sigma = \rho(\alpha^*+\beta) - \sigma(3\alpha-\beta^*) + \tau(\rho-\rho^*) + \kappa(\mu-\mu^*) - \Psi_1 + \Phi_{01}, \tag{A.58}$$

$$\delta\alpha - \delta^*\beta = (\mu\rho-\lambda\sigma) + \alpha\alpha^* + \beta\beta^* - 2\alpha\beta + \gamma(\rho-\rho^*) + \epsilon(\mu-\mu^*) - \Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda, \tag{A.59}$$

$$\delta\lambda - \delta^*\mu = \nu(\rho-\rho^*) + \pi(\mu-\mu^*) + \mu(\alpha+\beta^*) + \lambda(\alpha^*-3\beta) - \Psi_3 + \Phi_{21}, \tag{A.60}$$

$$\delta\nu - \triangle\mu = (\mu^2+\lambda\lambda^*) + \mu(\gamma+\gamma^*) - \nu^*\pi + \nu(\tau-3\beta-\alpha^*) + \Phi_{22}, \tag{A.61}$$

$$\delta\gamma - \triangle\beta = \gamma(\tau-\alpha^*-\beta) + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\nu^* - \beta(\gamma-\gamma^*-\mu) + \alpha\lambda^* + \Phi_{12}, \tag{A.62}$$

$$\delta\tau - \triangle\sigma = (\mu\sigma+\lambda^*\rho) + \tau(\tau+\beta-\alpha^*) - \sigma(3\gamma-\gamma^*) - \kappa\nu^* + \Phi_{02}, \tag{A.63}$$

$$\triangle\rho - \delta^*\tau = -(\rho\mu^*+\sigma\lambda) + \tau(\beta^*-\alpha-\tau^*) + \rho(\gamma+\gamma^*) + \nu\kappa - \Psi_2 - 2\Lambda, \tag{A.64}$$

$$\triangle\alpha - \delta^*\gamma = \nu(\rho+\epsilon) - \lambda(\tau+\beta) + \alpha(\gamma^*-\mu^*) + \gamma(\beta^*-\tau^*) - \Psi_3, \tag{A.65}$$

$$D(\rho-\rho^*)+\delta\kappa^*-\delta^*\kappa=(\rho-\rho^*)(\rho+\rho^*+\epsilon+\epsilon^*)$$
$$+\kappa(\tau^*+\pi-3\alpha-\beta^*)-\kappa^*(\tau+\pi^*-3\alpha^*-\beta), \quad (A.66)$$
$$D(\mu-\mu^*)+\delta(\alpha+\beta^*-\pi)-\delta^*(\alpha^*+\beta-\pi^*)=(\gamma+\gamma^*)(\rho-\rho^*)$$
$$+\alpha(\pi^*-2\beta)-\alpha^*(\pi-2\beta^*)+\kappa^*\nu^*-\kappa\nu+\beta\pi-\beta^*\pi^*+(\rho+\rho^*)(\mu-\mu^*), \quad (A.67)$$
$$D(\mu-\mu^*-\gamma+\gamma^*)+\triangle(\epsilon-\epsilon^*)-\delta\pi+\delta^*\pi^*=(\epsilon+\epsilon^*)(\mu^*-\mu)$$
$$+\tau^*(\alpha^*+\pi^*-\beta)-\tau(\alpha+\pi-\beta^*)+\lambda\sigma-\lambda^*\sigma^*+\rho^*\mu-\rho\mu^*+2(\epsilon\gamma-\epsilon^*\gamma^*), \quad (A.68)$$
$$\triangle(\mu^*-\mu)+\delta\nu-\delta^*\nu^*=(\mu-\mu^*)(\mu+\mu^*+\gamma+\gamma^*)$$
$$+\nu(\tau-3\beta-\alpha^*+\pi^*)-\nu^*(\tau^*-3\beta^*-\alpha+\pi), \quad (A.69)$$
$$D(\tau-\alpha^*-\beta)-\triangle\kappa+\delta(\epsilon+\epsilon^*)=\rho(\tau^*+\pi)+\kappa^*\lambda^*+\sigma(\tau^*-\alpha-\beta^*)+\epsilon(\tau-\pi^*)$$
$$-\rho^*(\beta+\alpha^*+\pi^*)+\epsilon^*(2\alpha^*+2\beta-\tau-\pi^*)+\kappa(\mu-2\gamma), \quad (A.70)$$
$$\delta(\rho-\epsilon+\epsilon^*)-\delta^*\sigma+D(\beta-\alpha^*)=\rho(\alpha^*+\beta+\tau)-\rho^*(\tau-\beta+\alpha^*+\pi^*)$$
$$+(\epsilon^*-\epsilon)(2\alpha^*-\pi^*)+\sigma(\pi-2\alpha)+\kappa(\gamma^*-\gamma-\mu^*)+\kappa^*\lambda^*, \quad (A.71)$$
$$D\lambda+\triangle\sigma^*-\delta^*(\tau^*+\pi)=\sigma^*(3\gamma^*-\gamma+\mu-\mu^*)+(\pi+\tau^*)(\pi-\tau^*+\alpha)$$
$$+\lambda(\rho-\rho^*-3\epsilon+\epsilon^*)-\beta\pi-\tau^*\beta^*, \quad (A.72)$$
$$D\nu+\triangle(\alpha+\beta^*-\pi)-\delta^*(\gamma+\gamma^*)=\nu(\rho-2\epsilon)+\lambda(\pi^*-\alpha^*-\beta)+\mu(\pi+\tau^*)$$
$$-\mu^*(\alpha+\beta^*\tau^*)+\gamma(\pi-\tau^*)+\gamma^*(2\alpha+2\beta^*-\pi-\tau^*)+\sigma^*\nu^*, \quad (A.73)$$
$$\triangle(\beta^*-\alpha)+\delta\lambda+\delta^*(\gamma-\gamma^*-\mu)=\nu(\epsilon^*-\epsilon-\rho^*)+\lambda(\tau-2\beta)+\alpha(\mu+\mu^*)$$
$$-\mu^*(\pi+\tau^*+\beta^*)+\mu(\pi+\beta^*)+(\gamma-\gamma^*)(\tau^*-2\beta^*)+\sigma^*\nu^*, \quad (A.74)$$
$$D\mu+\triangle\rho-\delta\pi-\delta^*\tau=\rho^*\mu-\rho\mu^*+\pi(\pi^*-\alpha^*+\beta)$$
$$+\tau(\beta^*-\alpha-\tau^*)+\rho(\gamma+\gamma^*)-\mu(\epsilon+\epsilon^*), \quad (A.75)$$

$$-\delta^*\Psi_0+D\Psi_1+(4\alpha-\pi)\Psi_0-2(2\rho+\epsilon)\Psi_1+3\kappa\Psi_2-D\Phi_{01}+\delta\Phi_{00}$$
$$+2(\epsilon+\rho^*)\Phi_{01}+2\sigma\Phi_{10}-2\kappa\Phi_{11}-\kappa^*\Phi_{02}+(\pi^*-2\alpha^*-2\beta)\Phi_{00}, \quad (A.76)$$
$$\delta^*\Psi_1-D\Psi_2-\lambda\Psi_0+2(\pi-\alpha)\Psi_1+3\rho\Psi_2-2\kappa\Psi_3+\delta^*\Phi_{01}$$
$$-\triangle\Phi_{00}-2(\alpha+\tau^*)\Phi_{01}+2\rho\Phi_{11}+\sigma^*\Phi_{02}-(\mu^*-2\gamma-2\gamma^*)\Phi_{00}-2\tau\Phi_{10}-2D\Lambda, \quad (A.77)$$
$$-\delta^*\Psi_2+D\Psi_3+2\lambda\Psi_1-3\pi\Psi_2+(2\epsilon-\rho)\Psi_3+\kappa\Psi_4-D\Phi_{21}+\delta\Phi_{20}$$
$$+2(\rho^*-\epsilon)\Phi_{21}-2\mu\Phi_{10}+2\pi\Phi_{11}-\kappa^*\Phi_{22}-(2\alpha^*-2\beta-\pi^*)\Phi_{20}-2\delta^*\Lambda, \quad (A.78)$$
$$\delta^*\Psi_3-D\Psi_4-3\lambda\Psi_2+2(2\pi-\alpha)\Psi_3-(4\epsilon-\rho)\Psi_4-\triangle\Phi_{20}+\delta^*\Phi_{21}$$
$$+2(\alpha-\tau^*)\Phi_{21}+2\nu\Phi_{10}+\sigma^*\Phi_{22}-2\lambda\Phi_{11}-(\mu^*+2\gamma-2\gamma^*)\Phi_{20}, \quad (A.79)$$
$$-\triangle\Psi_0+\delta\Psi_1+(4\gamma-\mu)\Psi_0-2(2\tau+\beta)\Psi_1+3\sigma\Psi_2-D\Phi_{02}+\delta\Phi_{01}$$
$$+2(\pi^*-\beta)\Phi_{01}-2\kappa\Phi_{12}-\lambda^*\Phi_{00}+2\sigma\Phi_{11}+(\rho^*+2\epsilon-2\epsilon^*)\Phi_{02}, \quad (A.80)$$
$$-\triangle\Psi_1+\delta\Psi_2+\nu\Psi_0+2(\gamma-\mu)\Psi_1+3\tau\Psi_2+2\sigma\Psi_3+\triangle\Phi_{01}-\delta^*\Phi_{02}$$
$$+2(\mu^*-\gamma)\Phi_{01}-2\rho\Phi_{12}-\nu^*\Phi_{00}+2\tau\Phi_{11}+(\tau^*-2\beta^*+2\alpha)\Phi_{02}+2\delta\Lambda, \quad (A.81)$$
$$-\triangle\Psi_2+\delta\Psi_3+2\nu\Psi_1-3\mu\Psi_2+(2\beta-\tau)\Psi_3+\sigma\Psi_4-D\Phi_{22}+\delta\Phi_{21}$$
$$+2(\pi^*+\beta)\Phi_{21}-2\mu\Phi_{11}-\lambda^*\Phi_{20}+2\pi\Phi_{12}+(\rho^*-2\epsilon-2\epsilon^*)\Phi_{22}-2\triangle\Lambda, \quad (A.82)$$
$$-\triangle\Psi_3+\delta\Psi_4+3\nu\Psi_2-2(\gamma+2\mu)\Psi_3-(\tau-4\beta)\Psi_4+\triangle\Phi_{21}-\delta^*\Phi_{22}$$
$$+2(\mu^*+\gamma)\Phi_{21}-2\nu\Phi_{11}-\nu^*\Phi_{20}+2\lambda\Phi_{12}+(\tau^*-2\alpha-2\beta^*)\Phi_{22}, \quad (A.83)$$

$$\begin{aligned}
&\delta^*\Phi_{01} + \delta\Phi_{10} - D(\Phi_{11} + 3\Lambda) - \triangle\Phi_{00} \\
&= \kappa^*\Phi_{12} + \kappa\Phi_{21} + (2\alpha + 2\tau^* - \pi)\Phi_{01} + (2\alpha^* + 2\tau - \pi^*)\Phi_{10} \\
&-2(\rho + \rho^*)\Phi_{11} - \sigma^*\Phi_{02} - \sigma\Phi_{20} + [\mu + \mu^* - 2(\gamma + \gamma^*)]\,\Phi_{00},
\end{aligned} \tag{A.84}$$

$$\begin{aligned}
&\delta^*\Phi_{12} + \delta\Phi_{21} - \triangle(\Phi_{11} + 3\Lambda) - D\Phi_{22} \\
&= -\nu\Phi_{01} - \nu^*\Phi_{10} + (\tau^* - 2\beta^* - 2\pi)\Phi_{12} + (\tau - 2\beta - 2\pi^*)\Phi_{21} \\
&+2(\mu + \mu^*)\Phi_{11} - (\rho + \rho^* - 2\epsilon - 2\epsilon^*)\Phi_{22} + \lambda\Phi_{02} + \lambda^*\Phi_{20},
\end{aligned} \tag{A.85}$$

$$\begin{aligned}
&\delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) - D\Phi_{12} - \triangle\Phi_{01} + \delta^*\Phi_{02} \\
&= \kappa\Phi_{22} - \nu^*\Phi_{00} + (\tau^* - \pi + 2\alpha - 2\beta^*)\Phi_{02} - \sigma\Phi_{21} + \lambda^*\Phi_{10} \\
&+2(\tau - \pi^*)\Phi_{11} - (2\rho + \rho^* - 2\epsilon^*)\Phi_{12} + (2\mu^* + \mu - 2\gamma)\Phi_{01}.
\end{aligned} \tag{A.86}$$

A.6 Equações de Maxwell

No formalismo de NP, o tensor de Maxwell, F_{ij}, é substituido por três escalares complexos,

$$\left.\begin{array}{c}
\phi_0 = F_{13} = F_{ij} l^i m^j, \\
\phi_1 = \frac{1}{2}\left(F_{12} + F_{43}\right) = \frac{1}{2} F_{ij}\left(l^i n^j + \bar{m}^i m^j\right), \\
\phi_2 = F_{42} = F_{ij}\bar{m}^i n^j.
\end{array}\right\} \tag{A.87}$$

As equações de Maxwell,

$$F_{[ij;k]} = 0 \qquad \text{e} \qquad g^{ik} F_{ij;k} = 0, \tag{A.88}$$

escritas em termos das componentes tétrades e de derivadas intrínsicas, assumem as seguintes formas,

$$F_{[ab|c]} = 0 \qquad \text{e} \qquad \eta^{nm} F_{an|m} = 0, \tag{A.89}$$

que, em termos dos escalares complexos ϕ_0, ϕ_1 e ϕ_2, podem ser reescritas como,

$$\left.\begin{array}{ll}
\phi_{1|1} - \phi_{0|4} = 0, & \phi_{2|1} - \phi_{1|4} = 0, \\
\phi_{1|3} - \phi_{0|2} = 0, & \phi_{2|3} - \phi_{1|2} = 0.
\end{array}\right\} \tag{A.90}$$

Depois de escrever as derivadas intrínsicas explicitamente em termos desses escalares, obtemos as equações de Maxwell no formalismo de NP,

$$\left.\begin{array}{c}
D\phi_1 - \delta^*\phi_0 = (\pi - 2\alpha)\phi_0 + 2\rho\phi_1 - \kappa\phi_2, \\
D\phi_2 - \delta^*\phi_1 = -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\rho - 2\epsilon)\phi_2, \\
\delta\phi_1 - \Delta\phi_0 = (\mu - 2\gamma)\phi_0 + 2\tau\phi_1 - \sigma\phi_2, \\
\delta\phi_2 - \Delta^*\phi_1 = -\nu\phi_0 + 2\mu\phi_1 + (\tau - 2\beta)\phi_2.
\end{array}\right\} \tag{A.91}$$

Finalmente, é possível também reescrever o tensor energia-momento do campo de Maxwell em termos dos escalares ϕ_0, ϕ_1 e ϕ_2,

$$\left.\begin{array}{cc}
-\frac{1}{2}T_{11} = \phi_0\phi_0^*, & -\frac{1}{2}T_{13} = \phi_0\phi_1^*, \\
-\frac{1}{4}\left(T_{12} + T_{34}\right) = \phi_1\phi_1^*, & -\frac{1}{2}T_{23} = \phi_1\phi_2^*, \\
-\frac{1}{2}T_{22} = \phi_2\phi_2^*, & -\frac{1}{2}T_{33} = \phi_0\phi_2^*.
\end{array}\right\} \tag{A.92}$$

A.7 Transformações tétrades

Dada uma base tétrade, é possível efetuar uma transformação de Lorentz sobre ela, correspondente a um dos seis graus de liberdade de rotação, modificando, consequentemente, os vetores $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ e $\bar{\mathbf{m}}$. É conveniente classificar as transformações de acordo com o efeito que elas produzem na base tétrade, da seguinte forma,

- Rotação de classe I: não modifica o vetor $\mathbf{l}$,
- Rotação de classe II: não modifica o vetor $\mathbf{n}$,
- Rotação de classe III: não modifica as direções de $\mathbf{l}$ nem $\mathbf{n}$, mas rotaciona $\mathbf{m}$ (e consequentemente, $\bar{\mathbf{m}}$) por um ângulo θ no plano $\mathbf{m} - \bar{\mathbf{m}}$.

Associadas a essas três classes de rotação, existem as seguintes transformações explícitas que preservam as condições de normalização e de ortogonalidade,

- I: $\mathbf{l} \to \mathbf{l}$, $\mathbf{m} \to \mathbf{m} + a\mathbf{l}$, $\bar{\mathbf{m}} \to \bar{\mathbf{m}} + a^*\mathbf{l}$, e $\mathbf{n} \to \mathbf{n} + a^*\mathbf{m} + a\bar{\mathbf{m}} + aa^*l$,
- II: $\mathbf{n} \to \mathbf{n}$, $\mathbf{m} \to \mathbf{m} + b\mathbf{n}$, $\bar{\mathbf{m}} \to \bar{\mathbf{m}} + b^*\mathbf{n}$, e $\mathbf{l} \to \mathbf{l} + b^*\mathbf{m} + b\bar{\mathbf{m}} + bb^*n$,
- III: $\mathbf{l} \to A^{-1}\mathbf{l}$, $\mathbf{n} \to A\mathbf{n}$, $\mathbf{m} \to e^{i\theta}\mathbf{m}$, e $\bar{\mathbf{m}} \to e^{-i\theta}\bar{\mathbf{m}}$,

onde a e b são duas funções complexas e A e θ são duas funções reais. O efeito de cada uma das classes de rotação sobre as várias quantidades de NP, i.e. escalares de Weyl, coeficientes de spin e escalares de Maxwell, pode ser diretamente calculado. Consulte a referência [29], pgs. 44 e 45, para a lista completa.

A.8 Classificação de Petrov e o teorema de Goldberg-Sachs

Conforme visto anteriormente, o tensor de Weyl é completamente especificado por cinco escalares complexos, Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 e Ψ_4, cujos valores dependem da escolha da base tétrade. É interessante descobrir quais desses escalares podem ser anulados através de uma escolha adequada de vetores da base e de transformações de Lorentz. Isso leva a uma classificação algébrica do tensor de Weyl, denominada classificação de Petrov.

Seja $\Psi_4 \neq 0$ (caso contrário, podemos tornar Ψ_4 não-nulo através de uma rotação de classe I desde que o espaço-tempo não seja conformalmente plano e que pelo menos um dos escalares de Weyl seja não-nulo). Através de uma rotação de classe II, com parâmetro b, os escalares de

Weyl se tornam,

$$\Psi_0^{(1)} = \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4, \tag{A.93}$$

$$\Psi_1^{(1)} = \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4, \tag{A.94}$$

$$\Psi_2^{(1)} = \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, \tag{A.95}$$

$$\Psi_3^{(1)} = \Psi_3 + b\Psi_4, \tag{A.96}$$

$$\Psi_4^{(1)} = \Psi_4. \tag{A.97}$$

Dessa forma, através de uma rotação de classe II, podemos tornar $\Psi_0^{(1)}$ nulo se escolhermos b como raiz do polinômio dado pela expressão ($A.93$). As novas direções de $\mathbf{l}$, i.e.,

$$\mathbf{l} \to \mathbf{l} + b^*\mathbf{m} + b\bar{\mathbf{m}} + bb^*n, \tag{A.98}$$

são chamadas direções nulas principais do tensor de Weyl. Se pelo menos duas das raízes coincidem, o tensor de Weyl é dito algebricamente especial; caso contrário, é denominado algebricamente geral. O tensor de Weyl pode ser classificado de acordo com o número de raízes distintas, através da chamada classificação de Petrov,

- Petrov tipo I: todas as raízes são distintas, sendo possível tornar Ψ_0 e Ψ_4 nulos.
- Petrov tipo II: uma raiz dupla. É possível tornar Ψ_0, Ψ_1 e Ψ_4 nulos.
- Petrov tipo D: duas raízes duplas distintas. Nesse caso, é possível anular simultaneamente todos os escalares de Weyl, com exceção de Ψ_2.
- Petrov tipo III: uma raiz tripla, sendo possível anular todas os escalares de Weyl, com exceção de Ψ_3.
- Petrov tipo N: todas as raízes iguais. Nesse caso, é possível anular todos os escalares de Weyl, com exceção de Ψ_4.

No caso do vácuo, no qual o tensor de Ricci se anula e os tensores de Weyl e de Riemann coincidem, existe um importante teorema envolvendo a classificação de Petrov, denominado Teorema de Goldberg-Sachs:

Se o tensor de Riemann é do tipo II e uma base nula é escolhida de forma que $\mathbf{l}$ *é uma direção nula repetida e* $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$, *então* $\kappa = \sigma = 0$. *Por outro lado, se* $\kappa = \sigma = 0$, *então* $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ *e o tensor de Riemann é do tipo II.*

Como corolário do teorema de Goldberg-Sachs, temos que se o campo é algebricamente especial e Petrov tipo-D, então $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$ quando $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$; e vice-versa.

É notável o fato de todas as soluções de buraco negro da Relatividade Geral serem Petrov tipo-D, o que torna o uso do formalismo de NP bastante eficaz ao permitir escolher uma base tétrade na qual $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$ e na qual todos os escalares de Weyl são nulos com exceção de Ψ_2.

Apêndice B

Spinores e o formalismo de Newman–Penrose

Spinores em um ponto p de um espaço-tempo M são, basicamente, pares ordenados de números complexos associados a uma base ortonormal do espaço-tangente $T_p(M)$ que se transformam de uma maneira específica quando submetidos a uma mudança contínua de base. Talvez o aspecto que deixa mais evidente a diferença entre spinores e vetores é o fato dos spinores sofrerem uma mudança de sinal quando a base sofre uma rotação de 2π radianos. Portanto, um spinor, por si só, não pode descrever uma quantidade física mensurável. É no contexto da mecânica quântica, no qual uma função de onda ψ não é uma quantidade mensurável (ψ e $e^{i\alpha}\psi$ representam o mesmo estado físico), que spinores surgem naturalmente.

A álgebra spinorial é definida formalmente através de um espaço vetorial simplético 2-dimensional sobre os complexos $\mathbb{C}$. O isomorfismo existente entre o grupo simplético 2-dimensional, $Sp(2)$, e o grupo linear especial, $SL(2,\mathbb{C})$, permite que escrevamos vetores e tensores do espaço-tempo 4-dimensional em termos de spinores. O conjunto de spinores hermitianos $\tau^{AA'}$ forma um espaço vetorial real de dimensão 4 que pode ser identificado com $T_p(M)$. Essa identificação define naturalmente, a partir de uma base spinorial (o, ι), uma tétrade nula de NP. Nesta seção, explicaremos o conceito de tensor diretamente a partir da identificação entre pares de números complexos e vetores 4-dimensionais reais. Para uma definição mais formal e abstrata, recomenda-se a leitura da referência [100].

B.1 Spinores

Considere um vetor nulo v^i no espaço de Minkowski, i.e., um quadrivetor cujas componentes satisfazem

$$\left(v^0\right)^2 - \left(v^1\right)^2 - \left(v^2\right)^2 - \left(v^3\right)^2 = 0. \tag{B.1}$$

Esse vetor pode ser representado em termos de dois números complexos, ξ^0 e ξ^1, e seus complexos conjugados, $\bar{\xi}^{0'}$ e $\bar{\xi}^{1'}$, da seguinte maneira,

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi^0\bar{\xi}^{0'} + \xi^1\bar{\xi}^{1'}\right), \\ x^1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi^0\bar{\xi}^{1'} + \xi^1\bar{\xi}^{0'}\right), \\ x^2 &= -\tfrac{i}{\sqrt{2}}\left(\xi^0\bar{\xi}^{1'} + \xi^1\bar{\xi}^{0'}\right), \\ x^3 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi^0\bar{\xi}^{0'} + \xi^1\bar{\xi}^{1'}\right). \end{aligned}\right\} \tag{B.2}$$

A transformação inversa é dada por

$$\left.\begin{aligned} \xi^0\bar{\xi}^{0'} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 + x^3\right), \qquad & \xi^0\bar{\xi}^{1'} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x^1 + ix^2\right), \\ \xi^1\bar{\xi}^{0'} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x^1 - ix^2\right), \qquad & \xi^1\bar{\xi}^{1'} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 - x^3\right), \end{aligned}\right\} \tag{B.3}$$

a partir da qual é fácil verificar que a condição ($B.1$) é satisfeita.

Transformações lineares aplicadas aos números complexos ξ^A e $\bar{\xi}^{A'}$, e representadas pelas matrizes complexo conjugadas $\alpha^A{}_B$ e $\bar{\alpha}^{A'}{}_{B'}$, i.e.,

$$\xi^A_* = \alpha^A{}_B\xi^B, \qquad \bar{\xi}^{A'}_* = \bar{\alpha}^{A'}{}_{B'}\bar{\xi}^{B'}_* \qquad (A, B, A', B' = 0, 1), \tag{B.4}$$

induzem uma transformação linear $\beta^i{}_j$ no espaço de Minkowski,

$$v^i_* = \beta^i{}_j v^j. \tag{B.5}$$

As componentes transformadas v^i_* se relacionam com ξ^A_* e $\bar{\xi}^{A'}_*$ da maneira idêntica à transformação ($B.3$) e, portanto, é possível encontrar a transformação β em termos das matrizes α. Uma condição necessária sobre as transformações ($B.6$) para que ($B.5$) seja uma transformação de Lorentz é que o determinante das matrizes $\alpha^A{}_B$ e $\bar{\alpha}^{A'}{}_{B'}$ possua módulo igual a 1. Excluir o caso em que essas matrizes possuem determinante -1, corresponde a excluir reflexões do conjunto das transformações de Lorentz.

A definição de spinores é baseada na correspondência entre quadrivetores no espaço de Minkowski e números complexos e na correspondência entre transformações de Lorentz e matrizes de determinante unitário. Especificamente, define-se spinores de posto 1, ξ^A e $\eta^{A'}$, como sendo vetores complexos em um espaço 2-dimensional ($A, A' = 0, 1$) sujeitos às seguintes transformações,

$$\xi^A_* = \alpha^A{}_B\xi^B, \qquad \bar{\eta}^{A'}_* = \bar{\alpha}^{A'}{}_{B'}\bar{\eta}^{B'}_* \qquad (A, B, A', B' = 0, 1), \tag{B.6}$$

onde $\alpha^A{}_B$ e $\bar{\alpha}^{A'}{}_{B'}$ são matrizes complexo conjugadas de determinante unitário. É muito importante notar que existem spinores de dois tipos, diferenciados pela presença de um apóstrofe no índice, e sujeitos a transformações complexo conjugadas uma da outra. Dados dois spinores de mesma classe, ξ^A e η^A, o determinante da matriz formada por eles, i.e.,

$$\begin{vmatrix} \xi^0 & \xi^1 \\ \eta^0 & \eta^1 \end{vmatrix} = \xi^0\eta^1 - \xi^1\eta^0, \tag{B.7}$$

é invariante sob transformações de módulo unitário. Consequentemente, é possível definir uma métrica anti-simétrica ϵ_{AB} tal que $\epsilon_{AB}\xi^A\eta^B$ é invariante. Analogamente, é possível definir uma outra métrica, denotada por $\epsilon_{A'B'}$, para os spinores da outra classe. A partir de ($B.7$), encontra-se

$$\epsilon_{00} = \epsilon_{11} = \epsilon_{0'0'} = \epsilon_{1'1'} = 0 \qquad \text{e} \qquad \epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = \epsilon_{0'1'} = -\epsilon_{1'0'} = 1, \tag{B.8}$$

ou seja, as métricas ϵ_{AB} e $\epsilon_{A'B'}$ são dadas pelo símbolo de Levi-Civita 2-dimensional. As métricas ϵ_{AB} e $\epsilon_{A'B'}$ podem ser utilizadas para abaixar os índices spinoriais,

$$\xi_A = \xi^C \epsilon_{CA}, \qquad \text{i.e.} \qquad \xi_0 = -\xi^1 \qquad \text{e} \qquad \xi_1 = \xi^0. \tag{B.9}$$

Analogamente, indíces spinoriais podem ser levantados utilizando o símbolo de Levi-Civita ϵ^{AB},

$$\xi^A = \epsilon^{AC} \xi_C. \tag{B.10}$$

Note que, por causa da antisimetria entre ϵ^{AC} e ϵ_{CA}, é importante preservar a ordem dos índices nas equações (B.9) e (B.10) em relação ao índice que é contraído. Como,

$$\xi_A = \xi^C \epsilon_{CA} = \epsilon^{CB} \xi_B \epsilon_{CA}, \tag{B.11}$$

temos que

$$\delta_A^B = \epsilon^{CB} \epsilon_{CA} = \epsilon_A{}^B = -\epsilon^B{}_A. \tag{B.12}$$

Obviamente, as equações ($B.9$)-($B.12$) também são válidas para spinores cujos índices possuem apóstrofe. Spinores de ordens superiores, por exemplo, ξ^{AB}, $\xi^{ABC'}{}_{D'E}{}^F$, etc., podem ser construídos naturalmente, e obedecem relações de transformação análogas à equação ($B.6$),

$$\xi_*^{AB'} = \alpha^A{}_C \bar{\alpha}^{B'}{}_{D'} \xi^{CD'}. \tag{B.13}$$

A ordem de índices do mesmo tipo é relevante e não pode ser modificada; porém, a ordem relativa dos índices com e sem apóstrofe não é importante e pode ser alterada sem consequências para o resultado final.

Contração de um spinor com relação a um par de índices com (ou sem) apóstrofe pode ser efetuado através da métrica $\epsilon_{A'B'}$ (ou ϵ_{AB}). Tem-se,

$$\xi_{A'}{}^{A'} = \epsilon^{A'B'} \xi_{A'B'}, \qquad \xi^{A'}{}_{A'} = \epsilon^{A'B'} \xi_{B'A'} \tag{B.14}$$

e, consequentemente,

$$\xi_{A'}{}^{A'} = -\xi^{A'}{}_{A'}. \tag{B.15}$$

De forma geral,

$$\xi_{\dots A \dots}{}^{\dots A \dots} = -\xi^{\dots A \dots}{}_{\dots A \dots}. \tag{B.16}$$

B.2 Representação de vetores e tensores em termos de spinores

É sempre possível associar qualquer quadrivetor X^i com um spinor de segunda ordem $\xi^{AB'}$ da seguinte maneira,

$$X^i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi^{00'} & \xi^{01'} \\ \xi^{10'} & \xi^{11'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X^0 + X^3 & X^1 + iX^2 \\ X^1 - iX^2 & X^0 - X^3 \end{pmatrix} = X^{AB'}. \tag{B.17}$$

Utilizando as métricas g_{ij}, do espaço de Minkowski, e ϵ_{AB} e $\epsilon_{A'B'}$, do espaço spinorial, constrói-se uma quantidade invariante associada a esse quadrivetor,

$$X^i X_i = \left(X^0\right)^2 - \left(X^1\right)^2 - \left(X^2\right)^2 - \left(X^3\right)^2 = \xi^{00'}\xi_{00'} + \xi^{11'}\xi_{11'} + \xi^{10'}\xi_{10'} + \xi^{01'}\xi_{01'} = X_{AB'}X^{AB'}. \tag{B.18}$$

A partir da equação acima, podemos expressar a relação $X^i \leftrightarrow X^{AB'}$ das seguintes formas,

$$X^i = \sigma^i{}_{AB'}X^{AB'}, \qquad X^{AB'} = \sigma^{AB'}{}_i X^i, \tag{B.19}$$

onde $\sigma^i{}_{AB'}$ e $\sigma^{AB'}{}_i$ são matrizes hermitianas constantes para cada i. As definições acima implicam algumas relações entre as matrizes sigma,

$$\sigma^{AB'}{}_i\sigma^i{}_{CD'} = \delta^A_C\delta^{B'}_{D'} \quad \text{e} \quad \sigma^i{}_{AB'}\sigma^{AB'}_j = \delta^i_j. \tag{B.20}$$

Além disso, usando as equações (B.18) e (B.19), podemos relacionar as métricas com essas matrizes através das expressões,

$$g_{ij} = \epsilon_{AC}\epsilon_{B'D'}\sigma^{AB'}{}_i\sigma^{CD'}{}_j \quad \text{e} \quad \epsilon_{AC}\epsilon_{B'D'} = g_{ij}\sigma^i_{AB'}\sigma^j_{CD'}. \tag{B.21}$$

As matrizes sigma, definidas pela representação (B.17), são dadas, a menos de um fator de normalização, pela matriz identidade e pelas matrizes de Pauli,

$$\sigma^0{}_{AB'} = \sigma^{AB'}{}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^1{}_{AB'} = \sigma^{AB'}{}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.22}$$

$$\sigma^2{}_{AB'} = -\sigma^{AB'}{}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3{}_{AB'} = \sigma^{AB'}{}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{B.23}$$

A generalização das relações (B.19) para tensores de posto arbitrário é direta, por exemplo,

$$Y^{ij}{}_k = \sigma^i{}_{AB'}\sigma^j{}_{CD'}\sigma_k{}^{EF'}Y^{AB'CD'}{}_{EF'}, \qquad Y^{AB'CD'}{}_{EF'} = \sigma^{AB'}{}_i\sigma^{CD'}_j\sigma^k{}_{EF'}Y^{ij}{}_k, \tag{B.24}$$

donde obtem-se a correspondência $Y^{AB'CD'}{}_{EF'} \leftrightarrow Y^{ij}{}_k$. A equação ($B$.21) é um exemplo dessa correspondência; tem-se $\epsilon_{AC}\epsilon_{B'D'} \leftrightarrow g_{ij}$.

B.3 Formalismo dyad

Da mesma maneira que construímos, em cada ponto do espaço-tempo, uma base tétrade ortonormal para tensores, é possível, em cada ponto do espaço-tempo, construir uma base dyad ortonormal, $\zeta_{(a)}{}^A$ e $\zeta_{(a')}{}^{A'}$ ($a, a' = 0, 1$ e $A, A' = 0, 1$), para spinores. É comum denotar os dois spinores da base por símbolos especiais,

$$\zeta_{(0)}{}^A = o^A \qquad \text{e} \qquad \zeta_{(1)}{}^A = \iota^A. \tag{B.25}$$

A partir da condição de ortonormalidade, i.e.,

$$\epsilon_{AB}o^A\iota^B = o_B\iota^B = -o^A\iota_A = 1, \tag{B.26}$$

temos como consequencia,

$$\epsilon_{AB}\zeta_{(a)}{}^{A}\zeta_{(b)}{}^{B} = \zeta_{(a)B}\zeta_{(b)}{}^{B} = \epsilon_{(a)(b)}, \tag{B.27}$$

$$\epsilon^{(a)(b)}\zeta_{(a)}{}^{A}\zeta_{(b)}{}^{B} = o^{A}\iota^{B} - \iota^{A}o^{B} = \epsilon^{AB}. \tag{B.28}$$

É possível levantar e baixar os índices dyads utilizando $\epsilon^{(a)(b)}$ e $\epsilon_{(a)(b)}$. Mais precisamente, temos,

$$\zeta^{(c)A}\epsilon_{(c)(a)} = \zeta_{(a)}{}^{A} \qquad \text{e} \qquad \epsilon^{(a)(c)}\zeta_{(c)}{}^{A} = \zeta^{(a)A}. \tag{B.29}$$

Consequentemente,

$$\zeta_{(a)A}\zeta^{(b)A} = -\zeta_{(a)}{}^{A}\zeta^{(b)}{}_{A} = \delta^{(b)}_{(a)}, \tag{B.30}$$

$$\zeta_{(a)A}\zeta_{(b)}{}^{A} = -\zeta_{(a)}{}^{A}\zeta_{(b)A} = \epsilon_{(a)(b)}, \tag{B.31}$$

e, assim como no formalismo tétrade, é possível projetar qualquer spinor ξ_A na base dyad,

$$\xi_{(a)} = \xi_A\zeta_{(a)}{}^{A}, \qquad \text{i.e.} \qquad \xi_{(0)} = \xi_A o^A \qquad \text{e} \qquad \xi_{(1)} = \xi_A\iota^A. \tag{B.32}$$

A transformação inversa é dada por,

$$\xi_A = \xi^{(a)}\zeta_{(a)A} = \xi^{(0)}o_A + \xi^{(1)}\iota_A. \tag{B.33}$$

Os spinores o^A, ι^A e seus complexos conjugados podem ser relacionados aos vetores tétrades nulos $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ e $\bar{\mathbf{m}}$ através das seguintes relações,

$$l^i \leftrightarrow o^A\bar{o}^{B'}, \quad m^i \leftrightarrow o^A\bar{\iota}^{B'}, \quad \bar{m}^i \leftrightarrow \iota^A\bar{o}^{B'}, \quad n^i \leftrightarrow \iota^A\bar{\iota}^{B'}. \tag{B.34}$$

Os vetores nulos satisfazem às condições de ortogonalidade,

$$l^i n_i = o^A\bar{o}^{B'}\iota_A\bar{\iota}_{B'} = 1 \qquad \text{e} \qquad m^i\bar{m}_i = o^A\bar{\iota}^{B'}\iota_A\bar{o}_{B'} = -1, \tag{B.35}$$

sendo que todos os outros produtos escalares são nulos. Dessa forma, a base dyad determina quatro vetores nulos que podem ser utilizados como base para o formalismo de NP descrito anteriormente. As relações ($B.34$) determinam as matrizes hermitianas $\sigma^{i}{}_{AB'}$ e $\sigma^{AB'}{}_{i}$, de forma que

$$l^i = \sigma^{i}{}_{AB'}\zeta_{(0)}{}^{A}\bar{\zeta}_{(0')}{}^{B'} = \sigma^{i}{}_{AB'}o^A\bar{o}^{B'}, \tag{B.36}$$

$$m^i = \sigma^{i}{}_{AB'}\zeta_{(0)}{}^{A}\bar{\zeta}_{(1')}{}^{B'} = \sigma^{i}{}_{AB'}o^A\bar{\iota}^{B'}, \tag{B.37}$$

$$\bar{m}^i = \sigma^{i}{}_{AB'}\zeta_{(1)}{}^{A}\bar{\zeta}_{(0')}{}^{B'} = \sigma^{i}{}_{AB'}\iota^A\bar{o}^{B'}, \tag{B.38}$$

$$n^i = \sigma^{i}{}_{AB'}\zeta_{(1)}{}^{A}\bar{\zeta}_{(1')}{}^{B'} = \sigma^{i}{}_{AB'}\iota^A\bar{\iota}^{B'}. \tag{B.39}$$

Dessa forma, é possível generalizar as matrizes de Pauli encontradas em ($B.22$) e ($B.23$),

$$\sigma^{i}{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} l^i & m^i \\ \bar{m}^i & n^i \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \sigma^{AB'}{}_{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} n^i & -\bar{m}^i \\ -m^i & l^i \end{pmatrix}. \tag{B.40}$$

Os equivalentes spinoriais das derivadas direcionais do formalismo de NP, ver equação ($A.39$), são dados por,

$$\partial_{00'} = D = l^i\partial_i, \qquad \partial_{11'} = \Delta = n^i\partial_i, \qquad \partial_{01'} = \delta = m^i\partial_i \qquad \text{e} \qquad \partial_{10'} = \delta^* = \bar{m}^i\partial_i. \tag{B.41}$$

B.4 Derivação covariante de spinores

A extensão de derivação covariante para campos spinoriais é baseada nas correspondências

$$\nabla_i \leftrightarrow \nabla_{AB'} \tag{B.42}$$

e

$$\nabla_i X_j = X_{j;i} \leftrightarrow \nabla_{AB'} X_{CD'} = X_{CD';AB'} = \sigma^j{}_{CD'} \sigma^i{}_{AB'} X_{j;i}, \tag{B.43}$$

onde utilizamos a equação ($B.24$) para obter a última igualdade. Além disso, impõe-se que a derivação covariante satisfaça a regra de Leibnitz e que o operador $\nabla_{AB'}$ seja real, i.e.,

$$\nabla_{AB'} = \bar{\nabla}_{A'B}. \tag{B.44}$$

Os requerimentos acima são suficientes para definir unicamente a operação de derivação covariante, ver referência [29]. De maneira análoga ao formalismo tétrade, é possível definir a noção de derivada intrínsica da componente dyad, $\xi_{(c)}$, de um spinor ao longo da "direção" $(a)(b')$,

$$\xi_{(c)|(a)(b')} = \zeta_{(c)}{}^C \xi_{C;AB'} \zeta_{(a)}{}^A \xi_{(b)}{}^{B'} \qquad \text{ou} \qquad \xi_{(c)|(A)(B')} = \zeta_{(c)}{}^C \xi_{C;AB'}. \tag{B.45}$$

No formalismo dyad, os coeficientes de spin, denotados por $\Gamma_{(a)(b)(c)(d')}$, são definidos como,

$$\Gamma_{(a)(b)(c)(d')} = \left[\zeta_{(a)F}\right]_{;CD'} \zeta_{(b)}{}^F \zeta_{(c)}{}^C \zeta_{(d')}{}^{D'}, \tag{B.46}$$

ou

$$\Gamma_{(a)(b)CD'} = \left[\zeta_{(a)F}\right]_{;CD'} \zeta_{(b)}{}^F. \tag{B.47}$$

Definidos dessa maneira, os coeficientes de spin são simétricos em relação a permutações no primeiro par de índices dyads; portanto, é necessário especificar apenas 12 coeficientes independentes,

$$\left.\begin{array}{lll} \Gamma_{0000'} = \kappa, & \Gamma_{0100'} = \epsilon, & \Gamma_{1100'} = \pi \\ \Gamma_{0010'} = \rho, & \Gamma_{0110'} = \alpha, & \Gamma_{1110'} = \lambda \\ \Gamma_{0001'} = \sigma, & \Gamma_{0101'} = \beta, & \Gamma_{1101'} = \mu \\ \Gamma_{0011'} = \tau, & \Gamma_{0111'} = \gamma, & \Gamma_{1111'} = \nu \end{array}\right\}, \tag{B.48}$$

Os símbolos aqui utilizados são consistentes com os coeficientes de spin definidos a partir dos coeficientes de rotação de Ricci em ($A.40$) [29].

B.5 Equação de Dirac no formalismo de NP

No espaço de Minkowski, a função de onda que caracteriza uma partícula relativística de spin-1/2 é representada por um par de spinores, P^A e $\bar{Q}^A$, que satisfazem às equações de Dirac, i.e.,

$$\sigma^i{}_{AB'} \partial_i P^A + i\mu_* \bar{Q}_{B'} = 0, \tag{B.49}$$

$$\sigma^i{}_{AB'} \partial_i Q^A + i\mu_* \bar{P}_{B'} = 0, \tag{B.50}$$

onde ${\sigma^{i}}_{AB'}$ são as matrizes de Pauli e $\mu_*\sqrt{2}$ é a massa da partícula. A generalização das equações de Dirac para um espaço-tempo curvo é feita através do formalismo de NP, substituindo-se, nas equações acima, as derivadas ordinárias por derivadas covariantes e as matrizes de Pauli pelas matrizes sigma definidas em ($B.40$). As equações assim obtidas são,

$$
{\sigma^{i}}_{AB'}{P^{A}}_{;i} + i\mu_*\bar{Q}^{C'}\epsilon_{C'B'} = 0, \tag{B.51}
$$

$$
{\sigma^{i}}_{AB'}{Q^{A}}_{;i} + i\mu_*\bar{P}^{C'}\epsilon_{C'B'} = 0. \tag{B.52}
$$

Explicitamente em termos dos coeficientes de spin, temos,

$$
(D + \epsilon - \rho)P^{0} + (\delta^{*} + \pi - \alpha)P^{1} = i\mu_*\bar{Q}^{1'}, \tag{B.53}
$$

$$
(\Delta + \mu - \gamma)P^{1} + (\delta + \beta - \tau)P^{0} = -i\mu_*\bar{Q}^{0'}, \tag{B.54}
$$

$$
-(D + \epsilon^{*} - \rho^{*})\bar{Q}^{0'} - (\delta + \pi^{*} - \alpha^{*})\bar{Q}^{1'} = i\mu_*P^{1}, \tag{B.55}
$$

$$
(\Delta + \mu^{*} - \gamma^{*})\bar{Q}^{1'} + (\delta^{*} + \beta^{*} - \tau^{*})\bar{Q}^{0'} = i\mu_*P^{0}. \tag{B.56}
$$

Referências Bibliográficas

[1] John Preskill. www.theory.caltech.edu/ preskill/bets.html.

[2] W. G. Unruh. Dumb holes: analogues for black holes. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366:2905–2913, 2008.

[3] S. Weinfurtner, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh, and G. A. Lawrence. Measurement of stimulated Hawking emission in an analogue system. *Phys. Rev. Lett.*, 106:021302, 2011.

[4] M. Richartz, S. Weinfurtner, A. J. Penner, A. Prain, and J. J. Niemela. Experimental superradiant scattering. *A ser publicado*, 2011.

[5] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459, 1939.

[6] V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshttz. Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology. *Advances in Physics*, 19:525–573, 1970.

[7] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time.* Cambridge University Press, 1975.

[8] R. Wald. *General relativity.* University of Chicago Press, 1984.

[9] M. Heusler. *Black hole uniqueness theorems.* Cambridge University Press, 1996.

[10] R. Penrose. Gravitational collapse: the role of general relativity. *Riv. Nuovo Cim.*, 1:252–276, 1969.

[11] R. Penrose. The question of cosmic censorship. *Journal of Astrophysics and Astronomy*, 20:233, 1999.

[12] R. M. Wald. Gravitational collapse and cosmic censorship. *arXiv:gr-qc/9710068.*

[13] R. Wald. Gedanken experiments to destroy a black hole. *Annals of Physics*, 82:548 – 556, 1974.

[14] D. G. Boulware. Naked singularities, thin shells, and the Reissner-Nordström metric. *Phys. Rev. D*, 8:2363–2368, 1973.

[15] T. Needham. Cosmic censorship and test particles. *Phys. Rev. D*, 22:791–796, 1980.

[16] V. E. Hubeny. Overcharging a black hole and cosmic censorship. *Phys. Rev. D*, 59:064013, 1999.

[17] S. Hod. Cosmic censorship, area theorem, and self-energy of particles. *Phys. Rev. D*, 66:024016, 2002.

[18] G. E. A. Matsas and A. R. R. da Silva. Overspinning a nearly extreme charged black hole via a quantum tunneling process. *Phys. Rev. Lett.*, 99:181301, 2007.

[19] S. Hod. Weak Cosmic Censorship: as strong as ever. *Phys. Rev. Lett.*, 100:121101, 2008.

[20] M. Richartz and A. Saa. Overspinning a nearly extreme black hole and the Weak Cosmic Censorship Conjecture. *Phys. Rev. D*, 78:081503, 2008.

[21] S. Hod. Return of the quantum cosmic censor. *Phys. Lett. B*, 668:346 – 349, 2008.

[22] G. E. A. Matsas, M. Richartz, A. Saa, A. R. R. da Silva, and D. A. T. Vanzella. Can quantum mechanics fool the cosmic censor? *Phys. Rev. D*, 79:101502, 2009.

[23] C. V. Vishveshwara. Stability of the Schwarzschild metric. *Phys. Rev. D*, 1:2870–2879, 1970.

[24] R. H. Price. Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. i. scalar and gravitational perturbations. *Phys. Rev. D*, 5:2419–2438, 1972.

[25] R. H. Price. Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. ii. integer-spin, zero-rest-mass fields. *Phys. Rev. D*, 5:2439–2454, 1972.

[26] B. F. Whiting. Mode stability of the Kerr black hole. *J. Math. Phys.*, 30:1301–1305, 1989.

[27] M. W. Choptuik. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.*, 70:9, 1993.

[28] M. Richartz and A. Saa. Challenging the weak cosmic censorship conjecture (sujeito a mudanças). *A ser publicado*, 2011.

[29] S. Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes.* Oxford University Press, 1992.

[30] S. A. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. *Astrophys. J.*, 185:635–648, 1973.

[31] J. M. Bardeen and W. H. Press. Radiation fields in the Schwarzschild background. *J. Math. Phys.*, 14:7–19, 1973.

[32] E. G. Kalnins, W. Miller Jr., and G. C. Williams. Teukolsky–Starobinsky identities for arbitrary spin. *J. Math. Phys.*, 30:2925–2929, 1989.

[33] F. W. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark. *NIST Handbook of mathematical functions.* Cambridge University Press, 2010.

[34] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* Dover, 1964.

[35] J. N. Goldberg, A. J. Macfarlane, E. T. Newman, F. Rohrlich, and E. C. G. Sudarshan. Spin-s spherical harmonics and d. *J. Math. Phys.*, 8:2155–2161, 1967.

[36] S. A. Teukolsky and W. H. Press. Perturbations of a rotating black hole. III - Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation. *Astrophys. J.*, 193:443–461, 1974.

[37] W. G. Unruh. Separability of the neutrino equations in a Kerr background. *Phys. Rev. Lett.*, 31:1265–1267, 1973.

[38] A. Ronveaux. *Heun's differential equations.* Oxford University Press, 1995.

[39] P. P. Fiziev. Classes of exact solutions to the Teukolsky master equation. *Class. Quant. Grav.*, 27:135001, 2010.

[40] P. P. Fiziev. Teukolsky-Starobinsky identities: a novel derivation and generalizations. *Phys. Rev. D*, 80:124001, 2009.

[41] D. N. Page. Particle emission rates from a black hole: massless particles from an uncharged, nonrotating hole. *Phys. Rev. D*, 13:198–206, 1976.

[42] T. Nakamura and H. Sato. Absorption of massive scalar field by a charged black hole. *Phys. Lett. B*, 61:371–374, 1976.

[43] C. H. Lee. Massive spin-1/2 wave around a Kerr-Newman black hole. *Phys. Lett. B*, 68:152–156, 1977.

[44] T. A. Jacobson. Black-hole evaporation and ultrashort distances. *Phys. Rev. D*, 44:1731–1739, 1991.

[45] T. Jacobson and T. P. Sotiriou. Overspinning a black hole with a test body. *Phys. Rev. Lett.*, 103:141101, 2009.

[46] T. Jacobson and T. P. Sotiriou. Erratum: Overspinning a black hole with a test body [Phys. Rev. Lett. 103, 141101 (2009)]. *Phys. Rev. Lett.*, 103:209903, 2009.

[47] E. Barausse, V. Cardoso, and G. Khanna. Test bodies and naked singularities: is the self-force the cosmic censor? *Phys. Rev. Lett.*, 105:261102, 2010.

[48] B. Linet. Electrostatics and magnetostatics in the Schwarzschild metric. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 9:1081, 1976.

[49] J. D. Bekenstein and A. E. Mayo. Black hole polarization and new entropy bounds. *Phys. Rev. D*, 61:024022, 1999.

[50] D. Lohiya. Classical self-force on an electron near a charged, rotating black hole. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15:1815, 1982.

[51] C. M. Will. Perturbation of a slowly rotating black hole by a stationary axisymmetric ring of matter. I. Equilibrium configurations. *Astrophys. J.*, 191:521–532, 1974.

[52] W. G. Unruh. Second quantization in the Kerr metric. *Phys. Rev. D*, 10:3194–3205, 1974.

[53] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975.

[54] J. D. Bekenstein and A. Meisels. Einstein A and B coefficients for a black hole. *Phys. Rev. D*, 15:2775–2781, 1977.

[55] W. G. Unruh. Experimental black hole evaporation. *Phys. Rev. Lett.*, 46:1351–1353, 1981.

[56] S. Liberati, C. Barceló, and M. Visser. Analogue gravity. *Living Reviews in Relativity*, 8(12), 2005.

[57] B. Reznik. Trans-planckian tail in a theory with a cutoff. *Phys. Rev. D*, 55:2152–2158, 1997.

[58] B. Reznik. Origin of the thermal radiation in a solid-state analogue of a black hole. *Phys. Rev. D*, 62:1–7, 2000.

[59] R. Schutzhold and W. G. Unruh. Gravity wave analogs of black holes. *Phys. Rev. D*, 66:044019, 2002.

[60] L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac, and P. Zoller. Sonic analog of gravitational black holes in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4643–4647, 2000.

[61] L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac, and P. Zoller. Sonic black holes in dilute Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 63:023611, 2001.

[62] T. A. Jacobson and G. Volovik. Effective spacetime and Hawking radiation from a moving domain wall in a thin film of 3He-A. *JETP Letters*, 68:874–880, 1998.

[63] M. Visser. Essential and inessential features of Hawking radiation. *Int. J. Mod. Phys. D*, 12:649–661, 2003.

[64] S. W. Hawking. Black hole explosions? *Nature*, 248:30–31, 1974.

[65] W. G. Unruh. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D*, 14:870–892, 1976.

[66] W. G. Unruh. Sonic analogue of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation. *Phys. Rev. D*, 51:2827–2838, 1995.

[67] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, and P. Spindel. Hawking radiation without trans-Planckian frequencies. *Phys. Rev. D*, 52:4559–4568, 1995.

[68] Y. B. Zel'dovich. Amplification of cylindrical electromagnetic waves reflected from a rotating body. *Sov. Phys. JETP*, 35:1085, 1972.

[69] M. Richartz, S. Weinfurtner, A. J. Penner, and W. G. Unruh. Generalized superradiant scattering. *Phys. Rev. D*, 80:124016, 2009.

[70] C. Barceló, S. Liberati, and M. Visser. Analogue models for FRW cosmologies. *Int. J. Mod. Phys. D*, 12:1641–1650, 2003.

[71] C. Barceló, S. Liberati, and M. Visser. Probing semiclassical analog gravity in Bose-Einstein condensates with widely tunable interactions. *Phys. Rev. A*, 68:053613, 2003.

[72] J. Martin and R. H. Brandenberger. Trans-Planckian problem of inflationary cosmology. *Phys. Rev. D*, 63:123501, 2001.

[73] J.C. Niemeyer. Inflation with a Planck-scale frequency cutoff. *Phys. Rev. D*, 63:1–7, 2001.

[74] M. Visser and S. Weinfurtner. Vortex analogue for the equatorial geometry of the Kerr black hole. *Class. Quant. Grav.*, 22:2493, 2005.

[75] G. Rousseaux, C. Mathis, P. Maïssa, T. G. Philbin, and U. Leonhardt. Observation of negative-frequency waves in a water tank: a classical analogue to the Hawking effect? *New Journal of Physics*, 10:053015, 2008.

[76] F. Belgiorno, S. L. Cacciatori, M. Clerici, V. Gorini, G. Ortenzi, L. Rizzi, E. Rubino, V. G. Sala, and D. Faccio. Hawking radiation from ultrashort laser pulse filaments. *Phys. Rev. Lett.*, 105:203901, 2010.

[77] S. Basak and P. Majumdar. 'Superresonance' from a rotating acoustic black hole. *Class. Quant. Grav.*, 20:3907–3914, 2003.

[78] S. Basak and P. Majumdar. Reflection coefficient for superresonant scattering. *Class. Quant. Grav.*, 20:2929–2936, 2003.

[79] E. Berti, V. Cardoso, and J. P. S. Lemos. Quasinormal modes and classical wave propagation in analogue black holes. *Phys. Rev. D*, 70:124006, 2004.

[80] S. Lepe and J. Saavedra. Quasinormal modes, superradiance and area spectrum for 2+1 acoustic black holes. *Phys. Lett. B*, 617:174–181, 2005.

[81] T. R. Slatyer and C. M. Savage. Superradiant scattering from a hydrodynamic vortex. *Class. Quant. Grav.*, 22:3833–3839, 2005.

[82] M. Visser. Emergent rainbow spacetimes: two pedagogical examples. *arXiv:0712.0810 [gr-qc]*, 2007.

[83] S. Weinfurtner, P. Jain, M. Visser, and C. W. Gardiner. Cosmological particle production in emergent rainbow spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 26:065012, 2009.

[84] J. A. Whitehead and D. L. Porter. Axisymmetric critical withdrawal of a rotating fluid. *Dynamics Of Atmospheres And Oceans*, 2:1–18, 1977.

[85] S. Corley and T. A. Jacobson. Hawking spectrum and high frequency dispersion. *Phys. Rev. D*, 54:1568–1586, 1996.

[86] M. W. Dingemans. *Water wave propagation over uneven bottoms. Part 1 linear wave propagation.* World Scientific, 1997.

[87] D. H. Peregrine. Interaction of water waves and currents. *Adv. Appl. Mech.*, 16, 1976.

[88] A. Chawla and J. T. Kirby. Interaction of water waves and currents. *J. Geophys. Res. - Oceans*, 107, 2002.

[89] I. K. Suastika. Wave blocking - tese de doutoramento. *Technische Universiteit Delft, Holanda*, 2004.

[90] R. Schutzhold and W. G. Unruh. Comment on: Hawking radiation from ultrashort uaser pulse filaments. *arXiv:1012.2686 [quant-ph]*, 2010.

[91] C. A. Manogue. The Klein paradox and superradiance. *Annals of Physics*, 181:261–283, 1988.

[92] A. A. Starobinski and S. M. Churilov. Amplification of electromagnetic and gravitational waves scattered by a rotating black hole. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 65:3–11, 1973.

[93] A. A. Starobinski. Amplification of waves during reflection from a rotating black hole. *Sov. Phys. JETP*, 37:28, 1973.

[94] J. D. Bekenstein and M. Schiffer. The many faces of superradiance. *Phys. Rev. D*, 58:064014, 1998.

[95] I. Semiz. Klein-Gordon equation is separable on the dyon black-hole metric. *Phys. Rev. D*, 45:532–533, 1992.

[96] G. Kang. Quantum aspects of ergoregion instability. *Phys. Rev. D*, 55:7563–7573, 1997.

[97] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mechanics.* Pergamon, 1976.

[98] S. E. P. Bergliaffa, K. Hibberd, M. Stone, and M. Visser. Wave equation for sound in fluids with vorticity. *Physica D*, 191:121–136, 2004.

[99] S. Liberati, S. Sonego, and M. Visser. Unexpectedly large surface gravities for acoustic horizons? *Class. Quant. Grav.*, 17:2903, 2000.

[100] J. Stewart. *Advanced general relativity.* Cambridge University Press, 1991.