

Este exemplar corresponde à redação final da  
Tese defendida pelo aluno Antônio Hélio de Castro  
Neto e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 12/02/90

Amir Ordacgi Caldeira

FORMULAÇÃO DE INTEGRAÇÃO FUNCIONAL PARA UM MODO HARMÔNICO  
NUMA CAVIDADE

por

Antônio Hélio de Castro Neto

Orientador: Amir Ordacgi Caldeira

Tese de Mestrado apresentada no  
Instituto de Física "Gleb Wataghin"  
Universidade Estadual de Campinas

UNICAMP - 1990

Aos meus pais,

Antônio Hélio e Cecília.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Amir Ordacgi Caldeira pelo grande ser humano que é, pela sua enorme paciência e disponibilidade e principalmente pela sua amizade.

À Rejane por tudo o que existe entre nós, por aquilo que dividimos e dividiremos.

Ao Dante por sua existência reveladora e pela beleza que trouxe à minha vida.

Ao Sérgio Szpigel, companheiro e amigo em muitas e inesquecíveis viagens.

Ao Pedro Fernandes Tavares, amigo de todas as horas e de todas idéias.

Ao Eduardo Miranda, que compartilhou comigo de muitas horas de bom trabalho.

Ao Silvio Mota Pinto, por ser meu amigo e filósofo.

Ao Alexandre Pimenta Lima, meu bom e velho amigo.

Ao José Teodoro Jr., pela força e amizade.

Ao Paulo Barone e Christiane Smith, amigos na mesma trajetória.

À Carola Dobrigkeit Chinellato, pelo incentivo e carinho desde o começo dessa marcha.

Ao Prof. Alvin Eliot Kiel, pela confiança que depositou em mim.

À Therezinha Alves Cassia, pelo carinho e paciência.

Aos amigos que nesses últimos anos tem dividido comigo as angústias, incertezas e a beleza de estar aprendendo Física.

## RESUMO

Calculou-se o operador densidade reduzido na representação de estados coerentes para um modo eletromagnético no interior de uma cavidade com o uso do formalismo de integração funcional. A cavidade foi considerada como um reservatório de excitações e foi tratada na aproximação sem memória, também conhecida como Markoffiana. Mostrou-se que essa aproximação é muito boa mesmo para temperaturas extremamente baixas se usarmos uma função espectral para o reservatório que seja linear nas frequências de vibração de seus modos. Aplicou-se o resultado no cálculo de valores médios e no estudo da influência da dissipação sobre os processos de interferência quânticos.

## CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

Desde o surgimento do trabalho de Caldeira e Leggett sobre o movimento browniano quântico<sup>(1)</sup> muito tem sido feito em física estatística quântica com a utilização do formalismo de integração funcional. Estudou-se a influência da dissipação nos processos de interferência<sup>(2)</sup>, no tunelamento em sistemas dissipativos<sup>(3)</sup> e em muitos outros problemas onde há o aparecimento de dissipação.

A origem desse formalismo encontra-se no conhecido artigo de Feynman e Vernon<sup>(4)</sup> a respeito do acoplamento de sistemas quânticos. Um sistema de interesse, isto é, um sistema sobre o qual serão feitas medidas de variáveis dinâmicas, é posto em interação com um sistema que possui um número de graus de liberdade muito grande (também chamado de reservatório) e cujo comportamento detalhado não interessa. A técnica se baseia na eliminação das variáveis do reservatório com o eventual aparecimento de sua influência no sistema de interesse como numa teoria de campo médio com a utilização das conhecidas integrais de trajetória de Feynman.

O trabalho de Caldeira e Leggett<sup>(1)</sup> trata de um problema bem específico dentro desse contexto: o acoplamento de um oscilador harmônico (o sistema de interesse) com um enorme conjunto de osciladores harmônicos (o reservatório) através de um hamiltoniano que acopla as coordenadas do sistema de interesse com as coordenadas dos osciladores do reservatório. Usando portanto

esse tipo de hamiltoniano eles são capazes de calcular, via integração funcional ( ou integrais de trajetória ), a evolução temporal dos elementos de matriz do operador densidade reduzido ( que é o operador utilizado no cálculo de valores médios ) através de uma suposição sobre a densidade espectral do reservatório, ou seja, sobre o número de osciladores do reservatório numa determinada faixa de energia. No seu cálculo eles usam uma densidade espectral linear com a frequência de oscilação dos osciladores do reservatório ( conhecida como aproximação ôhmica ) e uma frequência máxima ( "cut off" ) bem alta se comparada com a frequência de oscilação do oscilador de interesse. Portanto, com um modelo bem simples para o acoplamento de sistemas, eles conseguem descrever toda a evolução temporal de um sistema fora do equilíbrio.

Nos livros texto de Ótica Quântica<sup>[5]</sup> o problema do acoplamento de um sistema de interesse com um reservatório é geralmente resolvido de duas maneiras:

1- Utiliza-se a equação de evolução temporal para o operador densidade reduzido na representação de interação resolvendo-a perturbativamente até segunda ordem na interação. Escolhe-se uma escala de tempo que seja muito maior que o tempo de correlação entre as variáveis do reservatório e muito menor que o tempo característico de relaxação do sistema de interesse. Com essas aproximações obtém-se uma equação para a evolução do operador densidade reduzido que não contém os efeitos de memória do

reservatório. Essa equação é transformada numa equação diferencial parcial para a função de probabilidade ( conhecida como equação de Fokker-Planck<sup>[6]</sup> ) através de técnicas de ordenamento e projeção de operadores. Essa equação pode ser resolvida no caso que irá nos interessar utilizando-se o método de funções de Green;

2- Usando a representação de Heisenberg obtém-se um sistema de equações diferenciais de primeira ordem acopladas para os operadores do sistema de interesse e do reservatório. Utilizando-se o método da transformada de Laplace obtém-se expressões para as transformadas dos operadores em questão e o problema pode ser resolvido obtendo-se as transformadas inversas via a aproximação de Wigner e Weisskopf<sup>[7]</sup>, o que acaba por levar a uma aproximação sem memória do reservatório. Esse método é também conhecido como método da equação de movimento.

Apesar do método de integração funcional ser matematicamente mais sofisticado, ele apresenta certas vantagens sobre os métodos acima citados. Em relação ao método da equação de Fokker-Planck o método de integração funcional é mais direto e não exige que se solucione equações diferenciais parciais, nem que se use técnicas de projeção mas, simplesmente, a solução de equações diferenciais de primeira ordem para funções ordinárias do tempo. Com relação ao método da equação de movimento podemos dizer que o método de integração funcional nos dá acesso direto à evolução temporal da função de onda do sistema e nos permite estudar os efeitos da dissipação em processos de interferência de maneira direta o que

não é possível se estudarmos a evolução temporal dos operadores diretamente. Cabe, no entanto, salientar que o método da equação de movimento apresenta grande simplicidade matemática.

Apesar de existirem diferenças formais entre os métodos aqui citados, gostaria de dizer que os resultados obtidos são os mesmos em todos os casos para a aproximação do reservatório sem memória. No entanto será fácil perceber durante o desenvolvimento da tese que o método que apresentamos permite uma uma riqueza muito grande de possibilidades de cálculo, um "insight" físico considerável dos processos em questão e uma versatilidade computacional razoável. Poderíamos citar mais algumas possíveis aplicações desse método nos estudo de efeitos de memória do reservatório e em acoplamentos não lineares.

Seguindo, portanto, na mesma vertente tomada por Caldeira e Leggett, esta tese visa o estudo de um sistema ótico: um modo eletromagnético ( o sistema de interesse ) no interior de uma cavidade ( o reservatório ). Usaremos a representação de estados coerentes para tratar esse problema uma vez que descreveremos, tanto o modo, quanto a cavidade, como sistemas bosônicos.

A principal diferença entre esse trabalho e o de Caldeira e Leggett reside no tipo de acoplamento que será utilizado. Com a escolha de um acoplamento via coordenadas do reservatório e do sistema, Caldeira e Leggett conseguem uma simetria que permite separar a parte real e imaginária da função de correlação das variáveis do reservatório que aparece no cálculo. Assumindo ainda



uma função espectral linear na frequência eles conseguem obter a parte imaginária da função de correlação ( que está relacionada à dissipação ) como uma função instantânea e toda memória do sistema permanece na parte real ( que está relacionada com a difusão ). Nesse trabalho desejamos encontrar uma descrição completamente instantânea, isto é, sem levar em conta os efeitos de memória do reservatório. Essa descrição é também conhecida como aproximação Markoffiana e é amplamente usada em ótica quântica. Mostraremos que essa aproximação é coerente com a escolha de Caldeira e Leggett em termos bem amplos.

Como aplicação imediata desse formalismo mostraremos sua importância no cálculo de valores médios de operadores referentes ao sistema de interesse. Além disso faremos uma aplicação bem interessante do formalismo mostrando como a dissipação influi na destruição da coerência de estados quânticos, ou seja, mostraremos que a dissipação destrói a interferência entre os estados quânticos.

Portanto essa tese será dividida em três partes:

1- A parte matemática referente ao formalismo de integração funcional em termos de estados coerentes para sistemas bosônicos acoplados;

2- O modelo físico adotado para o reservatório e o cálculo explícito da matriz densidade reduzida para o modo eletromagnético;

3- O cálculo de valores médios e a influência da dissipação

sobre a interferência de estados quânticos.

Consideremos dois sistemas  $S$  e  $R$  descritos respectivamente por hamiltonianos  $H_S$  e  $H_R$  que num determinado instante de tempo  $t_0$  são postos em interação através de um hamiltoniano  $H_I$ . O operador densidade do sistema  $S \otimes R$ ,  $\hat{\rho}$ , terá sua evolução temporal descrita na seguinte forma<sup>(1)</sup>:

$$\hat{\rho}(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right\} \hat{\rho}(t_0) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right\} \quad (2.1)$$

$$\text{onde: } \hat{H} = \hat{H}_R + \hat{H}_S + \hat{H}_I \quad (2.2)$$

Podemos calcular o valor médio de um operador pela fórmula:

$$\langle \hat{S}(t) \rangle = \text{tr}_{rs} \langle \hat{\rho}(t) \hat{S} \rangle \quad (2.3)$$

onde  $\text{tr}_{rs}$  denota o traço nas variáveis de  $R$  e  $S$ .

Se  $\hat{S}$  não depende das variáveis de  $R$  podemos escrever:

$$\langle \hat{S}(t) \rangle = \text{tr}_S \langle \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \rangle \quad (2.4)$$

$$\text{onde: } \hat{\rho}_S(t) = \text{tr}_R \langle \hat{\rho}(t) \rangle \quad (2.5)$$

O operador  $\hat{\rho}_S$  é chamado de operador densidade reduzido do sistema  $S$ .

Será nosso interesse descrever esses sistemas com operadores de criação ( ou elevamento ) e destruição ( ou abaixamento ), ou seja:

$$\hat{H}_S = \hat{H}_S(\hat{a}, \hat{a}^+), \quad (2.6.1)$$

$$\hat{H}_R = \hat{H}_R(\hat{b}_k, \hat{b}_k^+), \quad (2.6.2)$$

$$\hat{H}_I = \hat{H}_I(\hat{a}, \hat{a}^+, \hat{b}_k, \hat{b}_k^+). \quad (2.6.3)$$

Agindo sobre uma representação completa e ortonormal de autovalores inteiros temos:

$$\hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} | n-1 \rangle \quad (2.7.1)$$

$$\hat{a}^+ | n \rangle = \sqrt{n+1} | n+1 \rangle \quad (2.7.2)$$

$$\hat{b}_k | n_k \rangle = \sqrt{n_k} | n_k-1 \rangle \quad (2.7.3)$$

$$\hat{b}_k^+ | n_k \rangle = \sqrt{n_k+1} | n_k+1 \rangle \quad (2.7.4)$$

e estes operadores obedecem à regra de comutação para bósons:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad (2.8.1)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^+, \hat{a}^+] = 0 \quad (2.8.2)$$

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_k^+] = \delta_{kk} \quad (2.8.3)$$

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_k] = [\hat{b}_k^+, \hat{b}_k^+] = 0 \quad (2.8.4)$$

onde:  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ .

Além disso assumiremos que é possível se realizar medidas sobre o sistema S sem afetar em nada o sistema R, ou em linguagem de operadores:

$$[\hat{a}, \hat{b}_k] = [\hat{a}^+, \hat{b}_k] = 0 \quad (2.9)$$

Estaremos interessados em projetar o operador densidade reduzido na representação de estados coerentes, ou seja, os autoestados do operador de destruição:

$$\hat{a} | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle \quad (2.10.1)$$

$$\langle \alpha | \hat{a}^+ = \alpha^* \langle \alpha | \quad (2.10.2)$$

$$\hat{b}_k | \beta_k \rangle = \beta_k | \beta_k \rangle \quad (2.10.3)$$

$$\langle \beta_k | \hat{b}_k^+ = \beta_k^* \langle \beta_k | \quad (2.10.4)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta_k$  são números complexos e  $\alpha^*$  e  $\beta_k^*$  denotam seus complexos conjugados.

Esses estados obedecem a relações bem conhecidas<sup>(10)</sup>:

$$\langle \alpha | \gamma \rangle = \exp \left\{ \alpha^* \gamma - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\gamma|^2}{2} \right\} \quad (2.11)$$

$$e \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} | \alpha \rangle \langle \alpha | = 1 \quad (2.12)$$

onde:  $d \alpha = d(\text{Re} \alpha) d(\text{Im} \alpha)$ .

Denotaremos ainda:  $| \vec{\beta} \rangle = | \beta_1 \rangle \otimes | \beta_2 \rangle \otimes \dots \otimes | \beta_N \rangle$

onde  $N$  é o número de operadores diferentes que aparecem em  $\hat{H}_r$

ou em outras palavras é o número de modos normais na cavidade.

Portanto de (2.5):

$$\rho_s(\alpha^*, \gamma, t) = \langle \alpha | \hat{\rho}_s(t) | \gamma \rangle = \int \frac{d^2 \vec{\beta}}{\pi^N} \langle \alpha \vec{\beta} | \hat{\rho}(t) | \gamma \vec{\beta} \rangle \quad (2.12)$$

onde:  $| \alpha \vec{\beta} \rangle = | \alpha \rangle \otimes | \vec{\beta} \rangle$ .

Usando (2.1) e (2.12):

$$\begin{aligned} \rho_s(\alpha^*, \gamma, t) &= \int \frac{d^2 \vec{\beta}}{\pi^N} \int \frac{d^2 \vec{\beta}'}{\pi^N} \int \frac{d^2 \alpha'}{\pi} \int \frac{d^2 \delta'}{\pi^N} \int \frac{d^2 \gamma'}{\pi} \langle \alpha \vec{\beta} | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | \alpha' \vec{\beta}' \rangle \\ &\quad \langle \alpha' \vec{\beta}' | \hat{\rho}(t_0) | \gamma' \delta' \rangle \langle \gamma' \delta' | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | \gamma \vec{\beta} \rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde  $\Delta t = t - t_0$ .

Assumindo que no instante  $t_0$  os sistemas estão desacoplados, podemos escrever:

$$\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_s(t_0) \hat{\rho}_r(t_0) \quad (2.14)$$

Dai (2.13) reduz-se a:

$$\rho_s(\alpha^*, \gamma, t) = \int \frac{d^2 \alpha'}{\pi} \int \frac{d^2 \gamma'}{\pi} \mathcal{J}(\alpha^*, \gamma, t; \alpha'^*, \gamma', t_0) \rho_s(\alpha'^*, \gamma', t_0) \quad (2.15)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\alpha^*, \gamma, t; \alpha'^*, \gamma', t_0) &= \int \frac{d^2 \vec{\beta}}{\pi^N} \int \frac{d^2 \vec{\beta}'}{\pi^N} \int \frac{d^2 \delta'}{\pi^N} K(\alpha^*, \vec{\beta}^*, t; \alpha', \vec{\beta}', t_0) \\ &\quad K^*(\gamma^*, \vec{\beta}^*, t; \gamma', \vec{\delta}', t_0) \rho_r(\vec{\beta}', \vec{\delta}', t_0) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\rho_{\alpha}(\alpha^*, \gamma', t) = \langle \alpha' | \hat{\rho}_{\alpha}(t) | \gamma' \rangle \quad (2.17.1)$$

$$\rho_r(\beta'^*, \delta, t_0) = \langle \beta' | \hat{\rho}_r(t_0) | \delta \rangle \quad (2.17.2)$$

$$K(\alpha^*, \beta'^*, t; \alpha', \beta', t_0) = \langle \alpha\beta | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | \alpha'\beta' \rangle \quad (2.17.3)$$

A função J é conhecida como o super-propagador do sistema S, e nela estão contidas todas as informações sobre a evolução temporal de S.

Podemos reescrever as funções K em termos de integrais de trajetória (ver apêndice A) e obter de (2.16):

$$J(\alpha^*, \gamma, t; \alpha'^*, \gamma', t_0) = e^{-C(|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + |\alpha'|^2 + |\gamma'|^2)/2}$$

$$\int_{\alpha'}^{\alpha^*} D^2\alpha \int_{\gamma'^*}^{\gamma} D^2\gamma e^{i(S_{\alpha}[\alpha] + S_{\gamma}^*[\gamma])} F[\alpha, \gamma] \quad (2.18)$$

F é o chamado funcional de influência e é definido por:

$$F[\alpha, \gamma] = \int \frac{d^2\vec{\beta}}{\pi^N} \int \frac{d^2\vec{\beta}'}{\pi^N} \int \frac{d^2\vec{\delta}}{\pi^N} e^{-|\vec{\beta}|^2 - |\vec{\beta}'|^2/2 - |\vec{\delta}|^2/2} \rho_r(\beta'^*, \delta, t_0)$$

$$\int_{\beta'}^{\beta'^*} D^2\vec{\beta} \int_{\delta^*}^{\delta} D^2\vec{\delta} e^{i(S_{ri}[\alpha, \beta] + S_{ri}^*[\gamma, \delta])} \quad (2.19)$$

onde:

$$iS_{\alpha}[\alpha] = \frac{1}{2} (\alpha' \alpha^*(t_0) + \alpha^* \alpha(t)) + \int_{t_0}^t dt \left\{ \frac{1}{2} \left[ \alpha \frac{d\alpha^*}{dt} - \alpha^* \frac{d\alpha}{dt} \right] - \frac{1}{\hbar} H_{\alpha}(\alpha, \alpha^*) \right\} \quad (2.20)$$

$$iS_R[\alpha, \beta] = \frac{1}{2} \langle \beta | \cdot \beta^*(t_0) + \beta \cdot \beta(t) \rangle +$$

$$+ \int_{t_0}^t dt \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[ \beta \frac{d\beta^*}{dt} - \beta^* \frac{d\beta}{dt} \right] - \frac{i}{\hbar} \left[ H_r(\beta, \beta^*) + H_i(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*) \right] \right\} \quad (2.21)$$

com:

$$H_i(\alpha, \alpha^*) = \frac{\langle \alpha | \hat{H}_i(\hat{a}, \hat{a}^+) | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$$

O cálculo das integrais de trajetória em (2.19) depende da forma dos hamiltonianos  $\hat{H}_r$  e  $\hat{H}_i$ . Para darmos prosseguimento ao cálculo suporemos as seguintes formas:

$$\hat{H}_r = \hbar \sum_{k=1}^N \omega_k \hat{b}_k^+ \hat{b}_k \quad (2.22)$$

$$\hat{H}_i = \hbar \sum_{k=1}^N \left( V_k^* \hat{b}_k \hat{I}(\hat{a}, \hat{a}^+) + V_k \hat{b}_k^+ \hat{I}^+(\hat{a}, \hat{a}^+) \right) \quad (2.23)$$

Com esse modelo é possível resolver exatamente as integrais funcionais em (2.19) ( ver apêndice B e C ). Além disso assumiremos que em  $t_0$  o sistema  $R$  encontra-se em equilíbrio termodinâmico a uma temperatura  $T$ . Com isso:

$$\hat{\rho}_r(t_0) = \frac{e^{-\hat{H}_r / K_B T}}{Z} \quad (2.24)$$

onde:

$$Z = \text{tr}_r \left\{ e^{-\hat{H}_r / K_B T} \right\}$$

$K_B$  é a constante de Boltzmann.

Efetando finalmente as integrais em (2.19) ( ver apêndice C )

obtemos:

$$F[\alpha, \gamma] = g(t, t_0) e^{iS_F[\alpha, \gamma]} \quad (2.25)$$

onde  $g(t, t_0)$  é uma função que pode ser obtida pela condição de normalização do operador densidade, isto é:

$$\text{tr}_{\alpha} \langle \hat{\rho}(t) \rangle = \text{tr}_{\alpha} \langle \hat{\rho}_{\alpha}(t) \rangle = \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \rho_{\alpha}(\alpha^*, \alpha, t) = 1 \quad (2.26)$$

e  $S_F$  é definido por:

$$S_F[\alpha, \gamma] = - \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \left\{ G_{11}(t'-t'') I^*(\alpha^*(t'), \alpha(t'')) I(\alpha^*(t''), \alpha(t')) + \right. \\ \left. + G_{12}(t'-t'') I^*(\alpha^*(t'), \alpha(t'')) I(\gamma^*(t''), \gamma(t')) + \right. \\ \left. + G_{21}(t'-t'') I^*(\gamma^*(t'), \gamma(t'')) I(\alpha^*(t''), \alpha(t')) + \right. \\ \left. + G_{22}(t'-t'') I^*(\gamma^*(t'), \gamma(t'')) I(\gamma^*(t''), \gamma(t')) \right\} \quad (2.27)$$

onde:

$$I(\alpha^*, \alpha) = \frac{\langle \alpha | \hat{I}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$$

e:

$$G_{11}(t'-t'') = \sum_{k=1}^N |V_k|^2 \left[ n_k + \theta(t'-t'') \right] e^{i\omega_k(t'-t'')} \quad (2.28.1)$$

$$G_{12}(t'-t'') = - \sum_{k=1}^N |V_k|^2 n_k e^{i\omega_k(t'-t'')} \quad (2.28.2)$$

$$G_{21}(t'-t'') = - \sum_{k=1}^N |V_k|^2 (n_k + 1) e^{i\omega_k(t'-t'')} \quad (2.28.3)$$

$$G_{22}(t'-t'') = \sum_{k=1}^N |V_k|^2 \left[ n_k + \theta(t'-t'') \right] e^{i\omega_k(t'-t'')} \quad (2.28.4)$$

onde:

$$n_k = \left[ e^{\hbar\omega_k / K_B T} - 1 \right]^{-1} \text{ é o número de ocupação de Bose}$$

e:

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{ser } < 0 \\ 1 & \text{ser } > 0 \end{cases}$$



Ainda de (2.18):

$$J(\alpha^*, \gamma, t; \alpha'^*, \gamma', t_0) = f(t, t_0) e^{-C(|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + |\alpha'|^2 + |\gamma'|^2)/2}$$

$$\int_{\alpha'}^{\alpha^*} D^2 \alpha \int_{\gamma'}^{\gamma} D^2 \gamma e^{i(S_e[\alpha] + S_e^*[\gamma] + S_F[\alpha, \gamma])} \quad (2.29)$$

Para dar continuidade ao cálculo precisamos agora de duas coisas: 1- a forma do termo de acoplamento,  $\hat{I}$ , que aparece em (2.27); 2- a forma analítica das somas em (2.28) como funções do tempo.

No capítulo anterior fizemos algumas suposições que devemos esclarecer. O hamiltoniano (2.22) representa a cavidade e suas excitações, no caso bósons. Cada uma dessas excitações tem uma frequência de vibração  $\omega_k$  e poderiam ser, por exemplo, fónons. O hamiltoniano (2.23), que representa a interação, foi escolhido seguindo a linha do artigo de Feymann e Vernon<sup>(4)</sup> sendo linear nos operadores do reservatório. Com isso podemos resolver exatamente as integrais de trajetória ( ver apêndice B e C). O termo  $V_k$  que aparece nesse hamiltoniano é que define quão forte ou fraco é o acoplamento entre o reservatório e o sistema de interesse.

Falta ainda dizer como é o acoplamento por parte do sistema, isto é, como são as funções I em (2.27). Escolheremos uma forma bem simples de modo que o problema possa ser resolvido inteiramente. Usaremos a conhecida R.W.A. ( Rotating Wave Approximation ) escolhendo um hamiltoniano da forma:

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_{k=1}^N \left[ V_k^* \hat{b}_k \hat{a}^+ + V_k \hat{b}_k^+ \hat{a} \right] \quad (3.1)$$

Nesse caso:

$$\hat{I}(\hat{a}, \hat{a}^+) = \hat{a}^+ \quad (3.2)$$

Dai:

$$I(\alpha^*(t'), \alpha(t')) = \alpha^*(t') \quad (3.3)$$

Consideremos agora que o modo eletromagnético possui uma frequência de oscilação  $\omega_0$  e que existe um termo forçante no

interior da cavidade que altera o número de fótons. Nesse caso o hamiltoniano referente ao sistema S será escrito como:

$$\hat{H}_s = \hbar \omega_0 \hat{a}^+ \hat{a} + \hbar f^*(t) \hat{a}^+ + \hbar f(t) \hat{a} \quad (3.4)$$

Assim a integral funcional em (2.19) pode ser resolvida caso sejam conhecidas as funções (2.28). Para isso definimos a função espectral  $S(\omega)$  da seguinte forma:

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{k=1}^N |V_k|^2 \delta(\omega - \omega_k) \quad (3.5)$$

Dai as funções (2.28) ficam:

$$G_{11}(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \left[ n(\omega) + \theta(-\tau) \right] e^{i\omega\tau} \quad (3.6.1)$$

$$G_{12}(\tau) = - \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) n(\omega) e^{i\omega\tau} \quad (3.6.2)$$

$$G_{21}(\tau) = - \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \left[ n(\omega) + 1 \right] e^{i\omega\tau} \quad (3.6.3)$$

$$G_{22}(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \left[ n(\omega) + \theta(\tau) \right] e^{i\omega\tau} \quad (3.6.1)$$

As somas em (2.28) são comuns em ótica quântica<sup>(10)</sup> e existem duas maneiras canônicas de resolvê-las. A primeira é devida a Senitzki<sup>(11)</sup> e reside em considerar que o número de ocupação  $n(\omega)$  e a densidade espectral  $S(\omega)$  são aproximadamente constantes durante todo o intervalo de frequência, que é considerado de zero até infinito (assumindo portanto que o reservatório tem um "cut off" bastante alto). Assim teremos:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) n(\omega) e^{i\omega\tau} \approx n(\omega_0) S(\omega_0) \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\tau} \quad (3.7)$$

Usando um resultado bem conhecido<sup>(12)</sup> temos:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) n(\omega) e^{i\omega\tau} \approx n(\omega_0) S(\omega_0) \frac{1}{2} \left[ \delta(\tau) + \frac{i}{\pi} P\left(\frac{1}{\tau}\right) \right] \quad (3.8)$$

onde  $\delta$  representa a função delta de Dirac e  $P$  o valor principal da função.

Uma outra solução devida a Lax<sup>[14]</sup> também assume que  $n(\omega)$  e  $S(\omega)$  são constantes mas que o intervalo de integração cobre também as frequências negativas, isto é:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) n(\omega) e^{i\omega\tau} \approx n(\omega_0) S(\omega_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\tau} = n(\omega_0) S(\omega_0) \delta(\tau) \quad (3.9)$$

Embora (3.8) esteja fisicamente melhor fundamentado, (3.9) oferece vantagens computacionais óbvias além de levar a uma descrição puramente instantânea dos processos do reservatório. Podemos mostrar que as aproximações feitas acima são extremamente boas dentro do contexto de Caldeira e Leggett<sup>[11]</sup>, isto é, se escolhermos uma função espectral da forma:  $S(\omega) = \nu \omega$  (ver apêndice D). Mostramos que essa aproximação é muito boa para uma escala de tempo maior que:  $\tau_c = \hbar/kT \approx (10^{-11}/T)$  s. Ou seja, essa é uma aproximação excelente para temperaturas maiores que  $10^{-11}$  K! Portanto usaremos a solução (3.9) sem o medo de cometer um erro grave:

$$G_{11}(\tau) = \eta (\bar{n} + 1/2) \delta(\tau) \quad (3.10.1)$$

$$G_{12}(\tau) = -\eta \bar{n} \delta(\tau) \quad (3.10.2)$$

$$G_{21}(\tau) = -\eta (\bar{n} + 1) \delta(\tau) \quad (3.10.3)$$

$$G_{22}(\tau) = \eta (\bar{n} + 1/2) \delta(\tau) \quad (3.10.4)$$

onde:

$$\eta = \mathcal{S}(\omega_0) \quad (3.11.1)$$

$$\bar{n} = n(\omega_0) \quad (3.11.2)$$

Além disso usamos que ( ver apêndice E ):

$$\int dr \theta(\pm r) \delta(r) = \frac{1}{2}$$

Com as relações (2.35) é possível resolver facilmente (2.29)

e normalizar segundo (2.28), obtendo finalmente (ver apêndice F):

$$J(\alpha^*, \gamma, t; \alpha'^*, \gamma', t_0) = \frac{1}{|1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t})|} \exp\left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\gamma|^2}{2} \right\} \\ \exp\left\{ -\frac{|\alpha'|^2}{2} - \frac{|\gamma'|^2}{2} \right\} \exp\left\{ \left[ 1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t}) \right]^{-1} \right.$$

$$\left. \left[ \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t}) \alpha^* \gamma + W(t) \alpha^* + W^*(t) \gamma + (\bar{n} + 1) (1 - e^{-\eta \Delta t}) \alpha' \gamma'^* + \right. \right. \\ \left. \left. e^{-\frac{(\eta/2 + i\omega_0)\Delta t}{2}} \left[ \alpha'^* - W^*(t) \right] \alpha^* + e^{-\frac{(\eta/2 - i\omega_0)\Delta t}{2}} \left[ \gamma - W(t) \right] \gamma'^* - |W(t)|^2 \right] \right\}$$

(3.12)

onde:

$$W(t) = -i \int_0^{\Delta t} dt' f^*(t-t') e^{-\frac{(\eta/2 + i\omega_0)t'}{2}} \quad (3.13)$$

e, finalmente, para obter  $\rho_s$  em qualquer instante devemos

efetuar a integração dupla:

$$\rho_s(\alpha^*, \gamma, t) = \int \frac{d^2 \alpha'}{\pi} \int \frac{d^2 \gamma'}{\pi} J(\alpha^*, \gamma, t; \alpha'^*, \gamma', t_0) \rho_s(\alpha'^*, \gamma', t_0) \quad (3.14)$$

Veremos agora a forma de  $\rho_s$  nos limites  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow \infty$ .

Observe que para  $\Delta t \rightarrow 0$  temos:

$$J(\alpha, \gamma; \alpha', \gamma', \Delta t=0) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\gamma|^2}{2} - \frac{|\alpha'|^2}{2} - \frac{|\gamma'|^2}{2} + \alpha^* \alpha' + \gamma \gamma'^*} \quad (3.15)$$

Usando a relação de produto interno entre estados coerentes, (2.11), obtemos:

$$J(\alpha, \gamma; \alpha', \gamma', \Delta t=0) = \langle \alpha | \alpha' \rangle \langle \gamma' | \gamma \rangle \quad (3.16)$$

que substituída em (3.14) com a definição (3.16) nos leva a:

$$\rho_{\alpha}(\alpha^*, \gamma, t) = \int \frac{d^2 \alpha'}{\pi} \int \frac{d^2 \gamma'}{\pi} \langle \alpha | \alpha' \rangle \langle \alpha' | \hat{\rho}_{\alpha}(t_0) | \gamma' \rangle \langle \gamma' | \gamma \rangle$$

Usando finalmente a relação de completudeza para os estados coerentes, (2.12), obtemos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho_{\alpha}(\alpha^*, \gamma, t) = \rho_{\alpha}(\alpha^*, \gamma, t_0).$$

O comportamento assintótico pode ser facilmente obtido fazendo  $\Delta t \rightarrow \infty$  em (3.12):

$$J(\alpha, \gamma; \alpha', \gamma', \Delta t \rightarrow \infty) = \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\gamma|^2}{2} - \frac{|\alpha'|^2}{2} - \frac{|\gamma'|^2}{2} \right\} \exp \left\{ \frac{\bar{n} \alpha^* \gamma + U \alpha^* + U^* \gamma - |U|^2}{\bar{n} + 1} + \alpha' \gamma'^* \right\} \quad (3.17)$$

onde:

$$U = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} W(t) \quad (3.18)$$

Usando novamente (2.11) em (3.17):

$$J(\alpha, \gamma; \alpha', \gamma', \Delta t \rightarrow \infty) = \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\gamma|^2}{2} + \frac{\bar{n} \alpha^* \gamma + U \alpha^* + U^* \gamma - |U|^2}{\bar{n} + 1} \right\} (\bar{n} + 1)^{-1} \langle \gamma' | \alpha' \rangle \quad (3.19)$$

que substituída em (2.15) nos leva a:

$$\rho_{\bullet}(\alpha^*, \gamma, t) = (\bar{n}+1)^{-1} \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\gamma|^2}{2} + \frac{\bar{n}\alpha^*\gamma + U\alpha^* + U^*\gamma - |U|^2}{\bar{n} + 1} \right\}$$

$$\int \frac{d^2\alpha'}{\pi} \int \frac{d^2\gamma'}{\pi} \langle \alpha' | \hat{\rho}_{\bullet}(t_0) | \gamma' \rangle \langle \gamma' | \alpha' \rangle$$

Usando (2.12) e o fato de que o operador densidade é normalizado em  $t = t_0$ , obtemos o estado estacionário do sistema:

$$\rho_{\bullet}(\alpha^*, \gamma, t) = (\bar{n}+1)^{-1} \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\gamma|^2}{2} + \frac{\bar{n}\alpha^*\gamma + U\alpha^* + U^*\gamma - |U|^2}{\bar{n} + 1} \right\} \quad (3.20)$$

o seu elemento diagonal:

$$\rho_{\bullet}(\alpha^*, \alpha, t) = \frac{\exp \left\{ -\frac{|\alpha - U|^2}{\bar{n} + 1} \right\}}{\bar{n} + 1} \quad (3.21).$$

Mostraremos mais tarde que essas soluções são exatamente as soluções em equilíbrio termodinâmico do sistema de interesse com o reservatório mais o termo forçante.

## CAPÍTULO IV - DOS RESULTADOS

Como primeira aplicação desse formalismo mostraremos como é possível o cálculo de valores médios na forma:

$$\langle (\hat{a}^+)^l (\hat{a})^m \rangle$$

Definimos inicialmente a função característica C:

$$C(z, z^*, t) = \text{tr}_{ra} \langle \hat{\rho}(t) e^{z^* \hat{a}^+} e^{z \hat{a}} \rangle = \text{tr}_s \langle \hat{\rho}_s(t) e^{z^* \hat{a}^+} e^{z \hat{a}} \rangle \quad (4.1)$$

Observe que:

$$\langle (\hat{a}^+)^l (\hat{a})^m \rangle(t) = \frac{\partial^{l+m}}{\partial (z^*)^l \partial (z)^m} C(z, z^*, t) \Big|_{z=z^*=0} \quad (4.2)$$

Usaremos agora uma conhecida relação entre exponenciais de operadores<sup>(4.1)</sup>:

$$e^{z^* \hat{a}^+} e^{z \hat{a}} = e^{-|z|^2/2} e^{z \hat{a}} e^{z^* \hat{a}^+} = e^{|z|^2/2} e^{z^* \hat{a}^+} e^{z \hat{a}}$$

o que implica em:

$$e^{z^* \hat{a}^+} e^{z \hat{a}} = e^{-|z|^2} e^{z \hat{a}} e^{z^* \hat{a}^+} \quad (4.3).$$

Portanto, de (4.1) e (4.3) com a propriedade cíclica do traço:

$$C(z, z^*, t) = e^{-|z|^2} \text{tr}_s \langle e^{z^* \hat{a}^+} \hat{\rho}_s(t) e^{z \hat{a}} \rangle \text{ ou:}$$

$$C(z, z^*, t) = e^{-|z|^2} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} e^{z^* \alpha^* + z \alpha} \rho_s(\alpha^*, \alpha, t) \quad (4.4).$$

onde usamos (2.10).

Usando os resultados do capítulo anterior, (3.13) e (3.12), com a ajuda da integral ( ver apêndice G ):

$$\int \frac{d^2 \alpha}{\pi} e^{-a|z|^2 + bz + cz^*} = \frac{1}{|a|} e^{\frac{b c}{a}} \quad (4.5)$$



obtemos.

$$C(z, z^*, t) = e^{-\bar{n}} (1 - e^{-\eta \Delta t}) \int \frac{d^2 \alpha'}{\pi} \int \frac{d^2 \gamma'}{\pi} \exp \left\{ -\frac{|\alpha'|^2}{2} - \frac{|\gamma'|^2}{2} \right\} \\ \exp \left\{ \alpha' \gamma'^* + \left[ \alpha' e^{-\frac{(\eta/2 + i\omega_0) \Delta t}{2}} + W(t) \right] z + \left[ \gamma'^* e^{-\frac{(\eta/2 - i\omega_0) \Delta t}{2}} + W^*(t) \right] z^* \right\} \\ \rho_0(\alpha'^*, \gamma', t_0) \quad (4.6)$$

Calcula-se agora facilmente através de (4.2):

$$\langle \hat{a}(t) \rangle = \langle \hat{a}(0) \rangle e^{-\frac{(\eta/2 + i\omega_0) \Delta t}{2}} + W(t) \quad (4.7.1)$$

$$\langle \hat{a}^+(t) \rangle = \langle \hat{a}^+(0) \rangle e^{-\frac{(\eta/2 - i\omega_0) \Delta t}{2}} + W^*(t) \quad (4.7.2)$$

$$\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle(t) = \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle(0) e^{-\eta \Delta t} + |W(t)|^2 + \\ + W(t) e^{-\frac{(\eta/2 - i\omega_0) \Delta t}{2}} \langle \hat{a}^+(0) \rangle + W^*(t) e^{-\frac{(\eta/2 + i\omega_0) \Delta t}{2}} \langle \hat{a}(0) \rangle \quad (4.7.3)$$

No limite assintótico,  $\Delta t \rightarrow \infty$ :

$$\langle \hat{a}(t) \rangle = W(t) \quad (4.8.1)$$

$$\langle \hat{a}^+(t) \rangle = W^*(t) \quad (4.8.2)$$

$$\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle(t) = \bar{n} + |W(t)|^2 \quad (4.8.3)$$

Isso significa dizer que toda informação sobre o campo foi perdida e que os fótons no interior da cavidade entraram em equilíbrio térmico com o reservatório mais os fótons produzidos pelo termo forçante. Esse é um resultado termodinamicamente esperado.

Uma outra aplicação bem interessante desse formalismo está relacionada com o cálculo da evolução temporal dos elementos de

matriz do operador densidade reduzido dada a função de onda inicial. Com esse cálculo podemos estudar o modo pelo qual a interferência entre os vários estados quânticos presentes na função de onda original são influenciados pela presença de dissipação no problema.

Suponhamos, portanto, que no instante  $t_0$  a função de onda do modo eletromagnético seja dada por:

$$| \Psi(t_0) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n | n \rangle \quad (4.9)$$

com a condição de normalização:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = 1 \quad (4.10)$$

Nesse caso o operador densidade no instante inicial será dado por:

$$\hat{\rho}_s(t_0) = | \Psi(t_0) \rangle \langle \Psi(t_0) | = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_n C_m^* | n \rangle \langle m | \quad (4.11)$$

Seu elemento de matriz nessa representação é dado por:

$$\rho_s(n,m,t_0) = \langle n | \hat{\rho}_s(t_0) | m \rangle = C_n C_m^* \quad (4.12)$$

No caso de não haver acoplamento com o reservatório ( sem dissipação ) e o termo forçante ser nulo (  $f=f^*=0$  ) em (3.4), a evolução temporal da função de onda é trivial uma vez que os estados  $| n \rangle$  serão autoestados de  $\hat{H}_s$ , daí:

$$| \Psi(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n | n \rangle e^{-i\omega_n \Delta t} \quad (4.13)$$

e a matriz densidade fica:

$$\hat{\rho}_s(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_n C_m^* |n\rangle\langle m| e^{-i\omega_0(n-m)\Delta t} \quad (4.14)$$

onde:  $\Delta t = t - t_0$ .

Portanto:

$$\rho_s(n,m,t) = C_n C_m^* e^{-i\omega_0(n-m)\Delta t} \quad (4.15).$$

Observe que os elementos diagonais da matriz densidade permanecem os mesmos devido ao fato da representação utilizada diagonalizar o hamiltoniano. Isso significa que as populações de cada estado  $n$  não se modificam com o tempo. Os termos não diagonais oscilam na diferença de frequência entre os níveis de energia e representam justamente a interferência entre esses níveis. Percebemos, portanto, que os estados mantêm sua coerência e a função de onda, dada por (4.13), continua sendo uma superposição de estados com fases diferentes.

Perguntamos agora: o que ocorreria se houvesse dissipação, ou seja, como seriam os elementos de matriz do operador densidade reduzido no caso em que o sistema estivesse acoplado a um reservatório?

Para responder a essa pergunta precisamos calcular a evolução temporal de (4.11) através de (3.13) e (3.12). Temos portanto de (4.11):

$$\begin{aligned} \rho_s(\alpha', \gamma', t_0) &= \langle \alpha' | \hat{\rho}_s(t_0) | \gamma' \rangle = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} C_n C_m^* \frac{(\alpha')^n (\gamma')^m}{\sqrt{n!m!}} e^{-|\alpha'|^2/2 - |\gamma'|^2/2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Onde usamos que<sup>(19)</sup> :

$$\langle \alpha | n \rangle = \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} \quad (4.17)$$

Resta resolver as integrais indicadas em (3.13) usando (4.16). No entanto será mais fácil reescrever (4.16) definindo uma função auxiliar A:

$$A(\alpha^*, \gamma', \xi, \xi^*) = \exp \left\{ -\frac{|\alpha'|^2}{2} - \frac{|\gamma'|^2}{2} + i\xi^* \alpha'^* + i\xi \gamma' \right\} \quad (4.18)$$

Dai:

$$\rho_{\alpha}(\alpha^*, \gamma', t_0) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{C_n C_m^*}{\sqrt{n!m!}} \frac{\partial^{n+m}}{\partial (i\xi^*)^n \partial (i\xi)^m} A(\xi, \xi^*, t) \Big|_{\xi=\xi^*=0} \quad (4.19)$$

Da mesma forma temos :

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha}(n, m, t) &= \langle n | \hat{\rho}_{\alpha}(t) | m \rangle = \\ &= \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \int \frac{d^2 \gamma}{\pi} \frac{(\alpha \omega^n (\gamma^*)^m)}{\sqrt{n!m!}} e^{-|\alpha|^2/2 - |\gamma|^2/2} \rho_{\alpha}(\alpha^*, \gamma, t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde usamos (2.12) e (4.17).

Usando agora a definição (4.18):

$$\rho_{\alpha}(n, m, t) = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \frac{\partial^{n+m}}{\partial (i\lambda)^n \partial (i\lambda^*)^m} \left\{ \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \int \frac{d^2 \gamma}{\pi} A(\gamma^*, \alpha, \lambda, \lambda^*) \rho_{\alpha}(\alpha^*, \gamma, t) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda^*=0} \quad (4.21)$$

Finalmente de (3.13) e (4.19):

$$\rho_{\bullet}(n, m, t) = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \frac{\partial^{n+m}}{\partial(i\lambda)^n \partial(i\lambda^*)^m} \left\{ \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{C_k C_l^*}{\sqrt{k!l!}} \frac{\partial^{k+l}}{\partial(i\xi^*)^k \partial(i\xi)^l} \left\{ \text{RC}\xi^*, \xi, \lambda^*, \lambda \right\}_{\xi^*=\xi=0} \right\}_{\lambda^*=\lambda=0} \quad (4.22)$$

onde:

$$\text{RC}\xi^*, \xi, \lambda^*, \lambda = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\gamma}{\pi} \int \frac{d^2\alpha'}{\pi} \int \frac{d^2\gamma'}{\pi} J(\alpha^*, \gamma, t; \alpha'^*, \gamma', t) A(\gamma^*, \alpha, \lambda^*, \lambda) A(\alpha'^*, \gamma', \xi^*, \xi) \quad (4.23)$$

e J é definido em (4.12).

Podemos resolver facilmente as integrais em (4.23) usando

(4.5):

$$\begin{aligned} \text{RC}\xi^*, \xi, \lambda^*, \lambda &= \frac{1}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t})} \exp \left\{ - \frac{|W(t)|^2}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t})} \right\} \\ &\exp \left\{ \frac{W^*(t) i \lambda^* + W(t) i \lambda - \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t}) |\lambda|^2}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t})} \right\} \\ &\exp \left\{ \frac{-W^*(t) i \xi^* e^{-(\eta/2 + i\omega_0)\Delta t} - W(t) i \xi e^{-(\eta/2 - i\omega_0)\Delta t}}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t})} \right\} \\ &\exp \left\{ \frac{-(\bar{n}+1)(1 - e^{-\eta\Delta t}) |\xi|^2 + i \xi^* i \lambda e^{-(\eta/2 + i\omega_0)\Delta t} + i \xi i \lambda^* e^{-(\eta/2 - i\omega_0)\Delta t}}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t})} \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Resta calcular as derivadas que aparecem em (4.22). Para

isso faremos uso da seguinte fórmula (ver apêndice H):

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial(x)^n \partial(y)^m} e^{axy + bx + cy} \Big|_{x=y=0} = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \frac{n!m!}{k!(n-k)!(m-k)!} a^k b^{n-k} c^{m-k} \quad (4.25)$$

Será bastante elucidativo se, antes de realizar o cálculo completo de (4.22), pudermos calcular (4.24) para os diversos

casos limite e verificar se realmente obteremos resultados coerentes com aquilo que esperamos. Além disso ganharemos uma simplificação razoável nos cálculos e uma noção física mais clara do que se passa por trás desses resultados.

1) Condição inicial :  $\Delta t = 0$ .

$$R(\xi^*, \xi, \lambda^*, \lambda) = \exp \left\{ i\lambda^* i\xi + i\lambda i\xi^* \right\} \quad (4.26).$$

Daí obtemos:

$$\rho_{\pm}(n, m, t=t_0) = C_n C_m^* \quad (4.27).$$

O que concorda com (4.12), que é a condição inicial do problema.

2) Estado assintótico:  $\Delta t \rightarrow \infty$ .

$$R(\xi^*, \xi, \lambda^*, \lambda) = (1 + \bar{n})^{-1} \exp \left\{ \frac{U^* i\lambda^* + U i\lambda - \bar{n} |\lambda|^2 - |\xi|^2 |U|^2}{1 + \bar{n}} \right\} \quad (4.28)$$

Obtemos então de (4.22):

$$\rho_{\pm}(n, m, t) = \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^2 \sum_{j=0}^{\min(n, m)} \frac{\sqrt{n!m!}}{j!(n-j)!(m-j)!} \frac{\bar{n}^j U^{*n-j} U^{m-j}}{(1 + \bar{n})^{m+n-j+1}} \exp \left\{ - \frac{|U|^2}{(1 + \bar{n})} \right\}$$

Usando a normalização da função de onda no instante  $t_0$ ,

(4.10):

$$\rho_{\pm}(n, m, t) = \sum_{j=0}^{\min(n, m)} \frac{\sqrt{n!m!}}{j!(n-j)!(m-j)!} \frac{\bar{n}^j U^{*n-j} U^{m-j}}{(1 + \bar{n})^{m+n-j+1}} \exp \left\{ - \frac{|U|^2}{(1 + \bar{n})} \right\} \quad (4.29)$$

Na ausência do termo forçante,  $U = 0$ , temos:

$$\rho_{nm}(n, m, t) = \delta_{nm} \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} \quad (4.30).$$

Usando agora que:

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_0} - 1} \quad \text{com: } \beta = \frac{1}{K_B T}.$$

temos:

$$\rho_{nm}(n, m, t) = \delta_{nm} \frac{e^{-n \beta \hbar \omega_0}}{Z} \quad (4.31)$$

onde:

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k \beta \hbar \omega_0} = \left[ 1 - e^{-\beta \hbar \omega_0} \right]^{-1}.$$

Observe portanto que (4.31) é justamente a matriz densidade do sistema em equilíbrio a uma temperatura  $T$ . Portanto, no estado assintótico o modo está em equilíbrio térmico com o reservatório, como era de se esperar.

3) Ausência de dissipação;  $\eta = 0$  e  $\Delta t$  genérico.

$$R(\xi^*, \xi, \lambda^*, \lambda) = \exp \left\{ \bar{W}^*(t) i \lambda^* + \bar{W}(t) i \lambda - \bar{W}^*(t) e^{-i \omega_0 \Delta t} i \xi^* - \bar{W}(t) e^{i \omega_0 \Delta t} i \xi \right\} \\ \cdot \exp \left\{ e^{i \omega_0 \Delta t} i \lambda^* i \xi + e^{-i \omega_0 \Delta t} i \lambda i \xi^* \right\} \quad (4.32)$$

onde:

$$\bar{W}(t) = -i \int_0^{\Delta t} dt' f^*(t-t') e^{-i \omega_0 t'}.$$

Com isso obtemos:

$$\rho_{\bullet}(n, m, t) = \sum_{k, l=0}^{\infty} C_k^* C_l e^{-ick-l\omega_0 \Delta t}$$

$$\sum_{j=0}^{\min(l, m)} \frac{\sqrt{n! m! (c-1)^{l-j}}}{j! (c-n-j)! (c-m-j)!} \bar{W}^*(ct)^{m-j} \bar{W}(ct)^{l-j}$$

$$\sum_{t=0}^{\min(k, n)} \frac{\sqrt{n! m! (c-1)^{k-t}}}{t! (c-n-t)! (c-m-t)!} \bar{W}^*(ct)^{k-t} \bar{W}(ct)^{n-t} \quad (4.33).$$

Para  $W = W^* = 0$  temos:

$$\rho_{\bullet}(n, m, t) = C_n C_m^* e^{-i(m-n)\omega_0 \Delta t} \quad (4.34).$$

O que concorda perfeitamente com a solução do problema no caso sem dissipação, (4.15).

4) Ausência de termo forçante:  $W = W^* = 0$ .

$$R(\xi^*, \xi, \lambda^*, \lambda) = \frac{1}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t})}$$

$$\exp \left\{ \frac{-\bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t}) |\lambda|^2 - (\bar{n} + 1) (1 - e^{-\eta \Delta t}) |\xi|^2}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t})} \right\}$$

$$\exp \left\{ \frac{i \xi^* i \lambda e^{-(\eta/2 + i\omega_0) \Delta t} + i \xi i \lambda^* e^{-(\eta/2 - i\omega_0) \Delta t}}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t})} \right\} \quad (4.35)$$

Dai:

$$\rho_{\bullet}(n, m, t) = \sum_{k, l=0}^{\infty} C_k^* C_l e^{-ick-l\omega_0 \Delta t} \delta_{n+l, m+k}$$

$$\sum_{j=\max(0, l-m)}^{\min(l, k)} e^{-(k+l-2j)\eta \Delta t / 2} \frac{\sqrt{k! l! m! n!}}{j! (k-j)! (l-j)! (m-1+j)!}$$

$$\frac{\bar{n}^{m-1+j} (\bar{n} + 1)^j (1 - e^{-\eta \Delta t})^{m-1+2j}}{(1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t}))^{m+k+1}} \quad (4.36)$$



e de modo geral obtemos:

$$\rho_{nm}(t) = \exp \left\{ -\frac{|W(t)|^2}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t})} \right\} \sum_{k,l=0}^{\infty} C_k^* C_l e^{-i(k-l)\omega_0 \Delta t} \sum_{j=0}^{\min(l,k)} e^{-(k+l-2j)\eta \Delta t / 2} F_{klj} \quad (4.37).$$

onde:

$$F_{klj} = \sum_{s=0}^{\min(m, l-j)} \sum_{r=\max(0, n+j-k)}^n \sum_{t=0}^{\min(r, m-s)} \frac{\sqrt{k!l!m!n!} (-1)^{k+r+l+n+s}}{j!s!t!(n-r)!(r-t)!(m-s-t)!} \frac{(1 + e^{-\eta \Delta t})^{t+j} W(t)^{r+l-j-s-t} W^*(t)^{m+k+r-s-t-j-n}}{(1-j-s)! (1 + \bar{n} (1 + e^{-\eta \Delta t}))^{l+k+r+m-s-j-t+1}} \quad (4.38)$$

Afim de estudar a influência da dissipação nos processos de interferência usaremos a equação (4.36) porque ela permite uma comparação direta com (4.15).

Suponhamos que inicialmente o estado do sistema seja a cavidade vazia, isto é, com zero fótons, e que coloquemos um número  $N$  de fótons no seu interior. Nesse caso temos:

$$|\Psi(t_0)\rangle = C_0 |0\rangle + C_N |N\rangle \quad (4.39)$$

onde:  $N > 0$  e

$$|C_0|^2 + |C_N|^2 = 1 \quad (4.40).$$

Nesse caso podemos escrever para os coeficientes da expansão

(4.9):

$$C_k = C_0 \delta_{ko} + C_N \delta_{kN} \quad (4.41).$$

Substituindo (4.41) em (4.36) e tomando o elemento diagonal  $N$ , e levando em conta somente os termos que dominam a evolução

temporal desse elemento de matriz, obtemos:

$$\rho_s(N, N, t) = \frac{\bar{n}^N}{(\bar{n} + 1)^{N+1}} \left\{ |C_0|^2 \frac{(n+1)^{N+1} (1 - e^{-\eta \Delta t})^N}{(1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t}))^{N+1}} + |C_N|^2 \frac{(n+1)^{2N+1} (1 - e^{-\eta \Delta t})^{2N}}{(1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t}))^{2N+1}} \right\} \quad (4.42)$$

Observe que para  $\Delta t$  da ordem de  $\eta^{-1}$  obtemos justamente o elemento de matriz para o sistema em equilíbrio, basta comparar com (4.30). Portanto  $\eta^{-1}$  é justamente o tempo de relaxação do sistema.

Estabelecido o tempo de relaxação estamos interessados em conhecer o modo pelo qual os elementos não diagonais evoluem no tempo, isto é, estabelecer o comportamento dos termos de interferência. Para isso tomemos o elemento de matriz entre o estado 0 (zero) e o estado N:

$$\rho_s(N, 0, t) = C_N C_0^* \frac{e^{-N(\eta/2 + i\omega_0)\Delta t}}{(1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta \Delta t}))^{N+1}} \quad (4.43)$$

É interessante comparar essa expressão com (4.15). Fica clara a influência da dissipação na destruição dos termos de interferência. Mais ainda, no limite de temperaturas baixas,  $T \rightarrow 0$ , ou,  $\bar{n} \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\rho_s(N, 0, t) = C_N C_0^* e^{-N(\eta/2 + i\omega_0)\Delta t} \quad (4.44)$$

Nesse caso vemos que o tempo de decaimento dos termos não diagonais é da ordem de  $\tau_d = (N\eta/2)^{-1}$  e portanto, para valores grandes de  $N$ , significando que o elemento de matriz está longe da diagonal principal, esse tempo é muito menor que o tempo de

relaxação do sistema, isso mostra que os termos de interferência desaparecem bem antes que o sistema atinja o equilíbrio térmico.

No limite de temperaturas altas o denominador em (4.43) torna-se importante para a evolução do elemento não diagonal. Afim de estimar sua importância colocaremos o denominador numa forma exponencial, isto é, queremos escrever:

$$\frac{1}{(1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t}))^{N+1}} = e^{f(\Delta t)}$$

ou seja:

$$f(\Delta t) = - (n + 1) \ln(1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t})) \quad (4.45).$$

No limite de tempos curtos e temperaturas altas, de forma que:

$$\eta\Delta t \ll \frac{\hbar\omega}{KT} \ll 1 \quad (4.46)$$

podemos linearizar (4.45) de forma a obter:

$$f(\Delta t) \approx -(n + 1) \bar{n}\eta\Delta t \quad (4.47).$$

Substituindo em (4.43) obtemos:

$$\rho_{\pm}(N, 0, t) = C_N C_0^* e^{-iN\omega_0\Delta t - N\bar{n}\eta\Delta t} (2\bar{n}^{-1} + n^{-1} + 1)$$

Ou ainda, assumindo que  $N \gg 1$  obtemos:

$$\rho_{\pm}(N, 0, t) \approx C_N C_0^* e^{-N(\bar{n}\eta + i\omega_0)\Delta t} \quad (4.48)$$

Portanto o tempo de decaimento depende da temperatura e na aproximação usada podemos aproximar:  $\bar{n} \approx \frac{\hbar\omega}{KT}$ , obtendo:

$$\tau_d \approx \frac{\hbar\omega}{NKT\eta} \quad (4.49).$$

Veja que para  $T \rightarrow \infty$  o tempo de decaimento tende a zero, ou seja, a interferência entre os estados quânticos decai num tempo extremamente pequeno. Isso é coerente com o caso clássico uma vez que para temperaturas altas esperamos que os efeitos quânticos

desapareçam. Além disso esse tempo é inversamente proporcional a  $N$ , como já havíamos obtido para o caso de temperaturas baixas, e como no caso anterior verificamos que os elementos de matriz longe da diagonal principal desaparecem mais rapidamente, ou ainda de outra forma, o tempo de decaimento é inversamente proporcional à diferença de energia entre os estados iniciais do sistema.

Podemos interpretar fisicamente o resultado à temperatura zero da seguinte forma: no instante inicial o reservatório está no estado fundamental e a função de onda do sistema completo, reservatório mais modo eletromagnético, é:

$$|\Psi\rangle = c |0\rangle_s + |N\rangle_s \otimes |0\rangle_r$$

ou:

$$|\Psi\rangle = |0\rangle_s \otimes |0\rangle_r + |N\rangle_s \otimes |0\rangle_r \quad (4.50)$$

Observe que o termo de interação envolve destruição (criação) de um fóton e criação (destruição) de uma excitação na cavidade. O tempo de relaxação do sistema é de  $\eta^{-1}$  e como vimos o tempo de decaimento dos termos não diagonais é de aproximadamente  $(\eta N/2)^{-1}$ , esse é o tempo em que o sistema transfere um fóton para o reservatório ou o tempo em que o reservatório transfere uma excitação para o campo eletromagnético. Observe que nesse intervalo de tempo o segundo termo do lado esquerdo de (4.50) se modifica mas o primeiro termo não se modifica devido à interação, portanto, após um tempo da ordem de  $(N\eta/2)^{-1}$  teremos:

$$|\Psi\rangle = |0\rangle_s \otimes |0\rangle_r + |N-1\rangle_s \otimes |1\rangle_r \quad (4.51)$$

Pela definição do operador densidade reduzido temos:

$$\hat{\rho}_s = \text{tr}_r \left\{ | \Psi \rangle \langle \Psi | \right\}$$

$$\hat{\rho}_s = {}_r \langle 0 | \Psi \rangle \langle \Psi | 0 \rangle_r + {}_r \langle 1 | \Psi \rangle \langle \Psi | 1 \rangle_r \quad (4.52)$$

Usando a ortogonalidade dos estados do reservatório obtemos:

$$\hat{\rho}_s = | 0 \rangle \langle 0 | + | N-1 \rangle \langle N-1 | \quad (4.53)$$

Portanto o operador é puramente diagonal e a conclusão a que chegamos que o estado puro transformou-se em uma mistura estatística.

## CAPÍTULO V - DAS CONCLUSÕES

Calculamos nesse trabalho, através do formalismo de integração funcional, a matriz densidade reduzida para um modo eletromagnético no interior de uma cavidade.

A cavidade é tratada como um reservatório de excitações a uma temperatura  $T$  fixa. A interação entre o modo e a cavidade é descrita através de um hamiltoniano linear nos operadores do reservatório. Isso nos possibilitou resolver exatamente uma série de integrais funcionais referentes ao reservatório através do método de fase estacionária. Além disso mostramos que a descrição do reservatório pode ser Markoffiana ( ou sem memória ), mesmo à temperaturas bem baixas, caso assumamos que a densidade espectral do reservatório seja linear, como no caso estudado por Caldeira e Leggett<sup>(1)</sup>. Descrevemos o modo por uma frequência  $\omega_0$  e consideramos que no interior da cavidade existe um termo forçante.

Com esse modelo obtemos a matriz densidade reduzida onde aparece uma frequência típica de decaimento,  $\eta$ , que é proporcional ao valor da densidade espectral na frequência  $\omega_0$  que por sua vez é proporcional à magnitude do acoplamento. Mostramos que no estado assintótico, como era de se esperar, toda informação inicial a respeito do modo é perdida e que o modo entra em equilíbrio térmico com o reservatório. Além disso calculamos explicitamente a evolução temporal do estado acoplado na representação de número de ocupação e mostramos que os elementos diagonais da matriz densidade reduzida

tendem aos números de ocupação no equilíbrio e que os elementos não diagonais decaem, desaparecendo no estado assintótico. O tempo típico de decaimento é menor quanto mais longe o elemento de matriz estiver da diagonal principal e quanto maior a temperatura, isso ilustra o fato de que a interferência entre os estados quânticos é destruída devido ao acoplamento do sistema com um reservatório.

Um comportamento do mesmo tipo foi obtido por Caldeira e Leggett<sup>(2)</sup> para a interferência entre dois pacotes de onda. Naquele caso eles chegaram à conclusão de que a interferência entre os pacotes é destruída num tempo que é inversamente proporcional à distância entre eles no instante inicial ao quadrado. Observe que no atual caso a interferência entre os estados quânticos é destruída num tempo inversamente proporcional à diferença de energia entre eles no instante inicial. Esses resultados concordam perfeitamente uma vez que o potencial utilizado por Caldeira e Leggett é parabólico e portanto a diferença de energia é proporcional ao quadrado da distância. Além disso os resultados tanto a temperaturas baixas como altas são idênticos. Todo esse resultado evidencia a importância da preparação do estado inicial do sistema na destruição dos processos de interferência.

Estudamos, portanto, através de um poderoso método de cálculo que é o de integração funcional, o problema de dissipação de energia em um sistema físico simples e de como esse sistema evolui para o equilíbrio devido ao seu acoplamento com um reservatório. Mostramos analiticamente a evolução temporal dos elementos de

matriz do operador densidade reduzido e evidenciamos a destruição da interferência entre os estados quânticos devido à presença de dissipação no problema.



O Propagador como uma integral funcional

Seja o propagador de um sistema descrito por um hamiltoniano  $\hat{H}$  definido na representação de estados coerentes:

$$K(\alpha^*, t; \alpha', t_0) = \langle \alpha | \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} (t-t_0) \hat{H} \right\} | \alpha' \rangle \quad (\text{A.1}).$$

Dividamos o intervalo de tempo  $(t-t_0)$  em  $N$  partes de tamanho  $\varepsilon$  de forma que:  $(t-t_0) = N \varepsilon$ . Escrevendo a exponencial em (A.1) como um produto de  $N$  exponenciais com o fator  $\varepsilon$  no expoente e inserindo entre cada exponencial relação de completeza dos estados coerentes (2.12) obtemos:

$$K(\alpha^*, t; \alpha', t_0) = \int \frac{d^2\alpha_1}{\pi} \int \frac{d^2\alpha_2}{\pi} \dots \int \frac{d^2\alpha_{N-1}}{\pi} \langle \alpha_N | e^{-i\varepsilon\hat{H}/\hbar} | \alpha_{N-1} \rangle \dots \\ \dots \langle \alpha_1 | e^{-i\varepsilon\hat{H}/\hbar} | \alpha_0 \rangle \quad (\text{A.2})$$

onde:

$$| \alpha' \rangle = | \alpha_0 \rangle \text{ e } \langle \alpha | = \langle \alpha_N | \quad (\text{A.3})$$

Em termos dos autovalores escrevemos:

$$\alpha^*(t) = \alpha^* \quad (\text{A.4.1})$$

$$\alpha(t_0) = \alpha' \quad (\text{A.4.2}).$$

Tomando agora o limite em que  $N \rightarrow \infty$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$  em cada termo em (A.2) obtemos:

$$\langle \alpha_j | e^{-i\varepsilon\hat{H}/\hbar} | \alpha_{j-1} \rangle \simeq \langle \alpha_j | \left[ 1 - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \hat{H} \right] | \alpha_{j-1} \rangle$$

ou:

$$\langle \alpha_j | e^{-i\varepsilon \hat{H}/\hbar} | \alpha_{j-1} \rangle \approx \langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle \left[ 1 - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \text{HC}(\alpha_j^*, \alpha_{j-1}) \right]$$

onde:

$$\text{HC}(\alpha_j^*, \alpha_{j-1}) = \frac{\langle \alpha_j | \hat{H} | \alpha_{j-1} \rangle}{\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle} \quad (\text{A.5}).$$

Portanto até primeira ordem em  $\varepsilon$  podemos escrever:

$$\langle \alpha_j | e^{-i\varepsilon \hat{H}/\hbar} | \alpha_{j-1} \rangle \approx \langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle e^{-i\varepsilon \text{HC}(\alpha_j^*, \alpha_{j-1})/\hbar} \quad (\text{A.6}).$$

Usando agora o produto interno de estados coerentes (2.11) temos:

$$\langle \alpha_j | e^{-i\varepsilon \hat{H}/\hbar} | \alpha_{j-1} \rangle \approx \exp \left\{ \alpha_j^* \alpha_{j-1} - \frac{|\alpha_j|^2}{2} - \frac{|\alpha_{j-1}|^2}{2} - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \text{HC}(\alpha_j^*, \alpha_{j-1}) \right\}$$

Rearranjando a expressão acima e substituindo em (A.2) obtemos:

$$\begin{aligned} K(\alpha^*, t; \alpha', t_0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int \dots \int \prod_{k=1}^{N-1} \left[ \frac{d^2 \alpha_k}{\pi} \right] \exp \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{1}{2\varepsilon} \left[ \alpha_{k-1} \left( \alpha_k^* - \alpha_{k-1}^* \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_k^* \left( \alpha_k - \alpha_{k-1} \right) \right] - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \text{HC}(\alpha_k^*, \alpha_{k-1}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Observe em (A.7) que temos  $N-1$  integrais enquanto no expoente aparecem  $N$  termos. Retirando os termos constantes definidos por (A.3) obtemos:

$$K(\alpha^*, t; \alpha', t_0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int \prod_{k=1}^{N-1} \left[ \frac{d^2 \alpha_k}{\pi} \right] \exp \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \left[ \alpha_0 \alpha_1^* - |\alpha_0|^2 - |\alpha_N|^2 + \alpha_N^* \alpha_{N-1} \right] \right\} \\ \exp \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \left( \alpha_k \frac{\alpha_{k+1}^* - \alpha_k^*}{\varepsilon} - \alpha_k^* \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\varepsilon} \right) - \frac{i}{\hbar} \text{HC}(\alpha_k^*, \alpha_{k-1}) \right] \right\} \quad (\text{A. 8})$$

No limite escrevemos que (A.8) é a seguinte integral funcional:

$$K(\alpha^*, t; \alpha', t_0) = \int_{\alpha'}^{\alpha^*} D^2 \alpha \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ \alpha' \alpha^*(t_0) - |\alpha'|^2 - |\alpha^*|^2 + \alpha^* \alpha(t) \right] \right\} \\ \exp \left\{ \int_{t_0}^t dt' \left[ \frac{1}{2} \left( \alpha \frac{d\alpha^*}{dt'} - \alpha^* \frac{d\alpha}{dt'} \right) - \frac{i}{\hbar} \text{HC}(\alpha^*, \alpha) \right] \right\} \quad (\text{A. 9})$$

Où definindo o funcional  $S[\alpha]$ :

$$S[\alpha] = \frac{1}{2} \left[ \alpha' \alpha^*(t_0) + \alpha^* \alpha(t) \right] + \int_{t_0}^t dt' \left\{ \frac{1}{2} \left( \alpha \frac{d\alpha^*}{dt'} - \alpha^* \frac{d\alpha}{dt'} \right) - \frac{i}{\hbar} \text{HC}(\alpha^*, \alpha) \right\} \quad (\text{A. 10})$$

Temos de (A. 8):

$$K(\alpha^*, t; \alpha', t_0) = e^{-|\alpha|^2 - |\alpha'|^2} \int_{\alpha'}^{\alpha^*} D^2 \alpha e^{iS[\alpha]} \quad (\text{A. 11}).$$

Cálculo da integral funcional para hamiltonianos quadráticos

Queremos resolver a integral funcional (A.11) no caso de hamiltonianos quadráticos. Para isso usaremos o conhecido método de fase estacionária<sup>(15)</sup>.

Seja, portanto, a integral funcional (A.11):

$$K(\alpha^*, t; \alpha', t_0) = \int_{\alpha'}^{\alpha^*} D^2 \alpha e^{iS[\alpha]}$$

Definimos as seguintes funções:

$$\alpha(t') = \alpha_c(t') + \Delta(t') \quad (\text{B.1.1})$$

$$\alpha^*(t') = \alpha_c^*(t') + \Delta^*(t') \quad (\text{B.1.2})$$

onde  $\alpha_c(\tau)$  e  $\alpha_c^*(\tau)$  são soluções da extremização de  $S[\alpha]$ :

$$\delta S[\alpha] = 0$$

ou ainda:

$$\left. \frac{\delta S[\alpha]}{\delta \alpha(\tau)} \right|_{\alpha_c, \alpha_c^*} = \left. \frac{\delta S[\alpha]}{\delta \alpha^*(\tau)} \right|_{\alpha_c, \alpha_c^*} = 0 \quad (\text{B.2}).$$

Observe de (A.10) que (B.2) implica em:

$$\frac{\delta S[\alpha]}{\delta \alpha(\tau)} = \frac{1}{2} \alpha^* \delta(t-\tau) + \int_{t_0}^t dt' \left\{ \frac{1}{2} \left[ \delta(t', -\tau) \frac{d\alpha^*}{dt'} - \alpha^* \frac{\delta}{\delta \alpha(\tau)} \left( \frac{d\alpha}{dt'} \right) \right] - \frac{i}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial \alpha} \delta(t', -\tau) \right\} \quad (\text{B.3})$$

Resolvendo o segundo termo da integral por partes:

$$\int_{t_0}^t dt' \alpha^*(t') \frac{\delta}{\delta \alpha(\tau)} \left( \frac{d\alpha}{dt'} \right) = \left[ \alpha^*(t') \frac{\delta \alpha(t')}{\delta \alpha(\tau)} \right]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t dt' \frac{d\alpha^*}{dt'} \frac{\delta \alpha(t')}{\delta \alpha(\tau)} \quad (\text{B.4})$$

Usando as condições de contorno (A.4):

$$\alpha_c^*(t) = \alpha^* \quad (\text{B.5.1})$$

$$\alpha_c(t_0) = \alpha' \quad (\text{B.5.2})$$

obtemos:

$$\int_{t_0}^t dt' \alpha^*(t') \frac{\delta}{\delta \alpha(\tau)} \left( \frac{d\alpha}{dt'} \right) = \alpha^* \delta(t-\tau) - \frac{d\alpha^*}{d\tau} \quad (\text{B.6}).$$

Substituindo (B.6) em (B.4) e esta em (B.3) obtemos

finalmente:

$$\left[ \frac{d\alpha^*}{d\tau} - \frac{i}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial \alpha} \right]_{\alpha_c, \alpha_c^*} = 0 \quad (\text{B.7}).$$

De forma inteiramente análoga mostra-se que a variação com relação a  $\alpha^*$  nos leva a:

$$\left[ \frac{d\alpha}{d\tau} + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial \alpha^*} \right]_{\alpha_c, \alpha_c^*} = 0 \quad (\text{B.8}).$$

Suponhamos que o hamiltoniano é puramente quadrático, isto é,

é da forma:

$$\hat{H} = \hbar \omega_0 \hat{a}^+ \hat{a} + \hbar \omega_1 \frac{\hat{a}^+ \hat{a}}{2} + \hbar \omega_1^* \frac{\hat{a}^+ \hat{a}^+}{2} + \hbar f^* \hat{a}^+ + \hbar f \hat{a} \quad (\text{B.9}).$$

Assim (B.7) e (B.8) ficam:

$$\frac{d\alpha}{d\tau} + i \left[ \omega_0 \alpha_c + \omega_1^* \alpha_c^* + f^* \right] = 0 \quad (\text{B.10.1})$$

$$\frac{d\alpha^*}{d\tau} - i \left[ \omega_0 \alpha_c^* + \omega_1 \alpha_c + f \right] = 0 \quad (\text{B.10.2})$$

Essas equações podem ser resolvidas caso sejam conhecidas as dependências temporais de  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  e  $f$ . No caso geral, entretanto, podemos escrever que o funcional  $S[\alpha]$  pode ser obtido de (A.10) com a substituição de (B.1) e o uso das equações (B.10):

$$iS[\alpha] = iS[\alpha_c] - \tilde{S}[\Delta] \quad (\text{B.11})$$

onde:

$$\tilde{S}[\Delta] = \int_{t_0}^t dt' \left\{ \Delta^* \frac{d\Delta}{dt'} + i \left[ \omega_0 \Delta^* \Delta + \frac{g}{2i} \Delta \Delta + \frac{g^*}{2i} \Delta^* \Delta^* \right] \right\} \quad (B.12)$$

e:

$$iS[\alpha_c] = \frac{1}{2} \left\{ \alpha' \alpha_c^*(t_0) + \alpha^* \alpha_c(t) - i \int_{t_0}^t dt' \left[ f^*(t') \alpha_c^*(t') + f(t') \alpha_c(t') \right] \right\} \quad (B.13)$$

Portanto (A.10) reduz-se a:

$$K(\alpha^*, t; \alpha', t_0) = e^{iS[\alpha_c]} \int_0^{\infty} D^2 \Delta e^{-\tilde{S}[\Delta]} \quad (B.14).$$

Observe que por causa de (B.5) a resolução de (B.14) exige

que:

$$\Delta^*(t) = 0 \quad (B.15.1)$$

$$\Delta(t_0) = 0 \quad (B.15.2).$$

A integral funcional em (B.14) não depende nem de  $\alpha^*$  nem de  $\alpha'$ , dependendo somente de  $t$  e  $t_0$ . Escrevemos finalmente:

$$K(\alpha^*, t; \alpha', t_0) = g(t, t_0) e^{iS[\alpha_c]} \quad (B.16).$$

e a função  $g(t, t_0)$  pode ser obtida por normalização.

Observe que (B.16) pode ser calculada explicitamente caso sejam conhecidas as soluções de (B.10) com as condições de contorno (B.5) através de (B.13).

Cálculo do funcional de influência em (2.19)

Estamos interessados em calcular a seguinte expressão:

$$F[\alpha, \gamma] = \int \frac{d^2 \vec{\beta}}{\pi^N} \int \frac{d^2 \vec{\beta}'}{\pi^N} \int \frac{d^2 \vec{\delta}}{\pi^N} e^{-|\vec{\beta}|^2 - |\vec{\beta}'|^2 / 2 - |\vec{\delta}|^2 / 2} \rho_r(\vec{\beta}', \vec{\delta}, t_0) \int_{\vec{\beta}'}^{\vec{\beta}^*} D^2 \vec{\beta} \int_{\vec{\delta}^*}^{\vec{\delta}} D^2 \vec{\delta} e^{i(S_{ri}[\alpha, \vec{\beta}] + S_{ri}^*[\gamma, \vec{\delta}])} \quad (2.19)$$

onde:

$$iS_{ri}[\alpha, \vec{\beta}] = \frac{1}{2} (\vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}^*(t_0) + \vec{\beta}^* \cdot \vec{\beta}(t)) + \int_{t_0}^t dt \left\{ \frac{1}{2} \left[ \vec{\beta} \frac{d\vec{\beta}^*}{dt} - \vec{\beta}^* \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right] - \frac{i}{\hbar} \left[ H_r(\vec{\beta}, \vec{\beta}^*) + H_i(\alpha, \alpha^*, \vec{\beta}, \vec{\beta}^*) \right] \right\} \quad (2.21)$$

com:

$$\hat{H}_r = \hbar \sum_{k=1}^N \omega_k \hat{b}_k^+ \hat{b}_k \quad (2.22)$$

$$\hat{H}_i = \hbar \sum_{k=1}^N (V_k^* \hat{b}_k \hat{I}(a, a^+) + V_k \hat{b}_k^+ \hat{I}^+(a, a^+)) \quad (2.23)$$

$$\hat{\rho}_r(t_0) = \frac{e^{-\hat{H}_r / K_B T}}{Z} \quad (2.24)$$

e:

$$Z = \text{tr}_r \left\{ e^{-\hat{H}_r / K_B T} \right\}$$

onde  $K_B$  é a constante de Boltzmann.

Afim de resolver a integral funcional de (2.19) em  $\beta$  usaremos o método do apêndice B. Devido a (2.22) e (2.23) as equações a serem resolvidas, (B.7) e (B.8), serão:

$$\frac{d\beta_{kc}^*}{d\tau} - i\omega_k \beta_{kc}^* = iV_k^* I^*(\alpha^*(\tau), \alpha(\tau)) \quad (C.1.1)$$

$$\frac{d\beta_{kc}}{d\tau} + i\omega_k \beta_{kc} = -iV_k I(\alpha^*(\tau), \alpha(\tau)) \quad (C.1.2)$$

onde:

$$I(\alpha^*, \alpha) = \frac{\langle \alpha | \hat{I}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle}.$$

Observe, portanto, que os modos da cavidade oscilam harmonicamente com um termo forçante devido ao modo eletromagnético que é dado justamente pelo termo de interação  $\hat{I}$ . As equações (C.1) devem ser resolvidas com as condições de contorno (B.5):

$$\beta_{kc}^*(t) = \beta_k^* \quad (C.2.1)$$

$$\beta_{kc}(t_0) = \beta_k \quad (C.2.2).$$

É trivial ver que as soluções serão:

$$\beta_{kc}^*(\tau) = \beta_k^* e^{-i\omega_k(t-\tau)} - i \int_{\tau}^t dt' V_k^* I^*(\alpha^*(t'), \alpha(t')) e^{-i\omega_k(t'-\tau)} \quad (C.3.1)$$

$$\beta_{kc}(\tau) = \beta_k e^{-i\omega_k(\tau-t_0)} - i \int_{t_0}^{\tau} dt' V_k I(\alpha^*(t'), \alpha(t')) e^{i\omega_k(t'-\tau)} \quad (C.3.2)$$

Substituindo essas soluções em (2.21) obtemos:

$$iS_{ri}[\alpha, \beta_c] = \sum_{k=1}^N \left\{ \beta_k' \beta_k^* e^{-i\omega_k \Delta t} + \xi_k^*[\alpha] \beta_k' + \varphi_k[\alpha] \beta_k^* + \chi_k[\alpha] \right\} \quad (C.4)$$



onde:

$$\xi_k^*[\alpha] = -i \int_{t_0}^t dt' V_k^* I^*(\alpha^*(t'), \alpha(t')) e^{-i\omega_k(t-t_0)} \quad (C.5.1)$$

$$\varphi_k[\alpha] = -i \int_{t_0}^t dt' V_k I(\alpha^*(t'), \alpha(t')) e^{i\omega_k(t'-t)} \quad (C.5.2)$$

$$\chi_k[\alpha] = - \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' |V_k|^2 I^*(\alpha^*(t'), \alpha(t')) I(\alpha^*(t''), \alpha(t'')) e^{-i\omega_k(t'-t'')} \theta(t'-t'') \quad (C.5.3)$$

o:

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau < 0 \\ 1 & \text{se } \tau > 0 \end{cases} \quad (C.6).$$

Da mesma forma resolvemos a integral funcional em  $\delta$  obtendo:

$$iS_{ri}^*[\gamma, \delta_c] = \sum_{k=1}^N \left\{ \beta_k \delta_k^* e^{i\omega_k \Delta t} + \xi_k[\gamma] \delta_k^* + \varphi_k^*[\gamma] \beta_k + \chi_k^*[\gamma] \right\} \quad (C.6)$$

A solução das duas integrais funcionais é da forma (ver

apêndice B):

$$\int_{\beta^*}^{\beta} D^2 \beta \int_{\delta^*}^{\delta} D^2 \delta e^{i(S_{ri}^*[\alpha, \beta] + S_{ri}^*[\gamma, \delta])} = h(t, t_0) e^{i(S_{ri}^*[\alpha, \beta_c] + S_{ri}^*[\gamma, \delta_c])} \quad (C.7)$$

Usando agora (2.24) e (2.22) devemos calcular o elemento de

matriz:

$$\rho_r(\hat{\beta}'^*, \hat{\delta}, t_0) = \langle \hat{\beta}' | \hat{\rho}_r(t_0) | \hat{\delta} \rangle.$$

Para isto usaremos a representação de número dos operadores  $\hat{b}_k$  e  $\hat{b}_k^+$  em (2.7). Temos inicialmente:

$$\rho_r(\hat{\beta}'^*, \hat{\delta}, t_0) = \prod_{k=1}^N \langle \beta'_k | e^{-\hbar\omega_k \hat{b}_k^+ \hat{b}_k / K_B T} | \delta_k \rangle / \mathcal{Z} \quad (C.8).$$

Usando agora a relação de completude dos estados de número <sup>[9]</sup>:

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} |n_k\rangle \langle n_k| = 1 \quad (C.9)$$

e que:

$$\hat{b}_k^+ \hat{b}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle; \quad (C.10)$$

além da ortogonalidade desses estados;

$$\langle n_k | n_{k'} \rangle = \delta_{n_k n_{k'}}, \quad (C.11)$$

obtemos de (C.8):

$$\rho_r(\hat{\beta}'^*, \hat{\delta}, t_0) = \prod_{k=1}^N \sum_{n_k=0}^{\infty} \langle \beta'_k | n_k \rangle \langle n_k | \delta_k \rangle e^{-\hbar\omega_k n_k / K_B T} / \mathcal{Z}$$

Usando agora a relação entre estados coerentes e estados de número <sup>[9]</sup>:

$$\langle \alpha | n \rangle = \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} \quad (C.12)$$

obtemos:

$$\rho_r(\hat{\beta}'^*, \hat{\delta}, t_0) = \prod_{k=1}^N \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{[\beta'_k{}^* \delta_k e^{-\hbar\omega_k / K_B T}]^{n_k}}{n_k!} \frac{e^{-|\beta'_k|^2/2 - |\delta_k|^2/2}}{\mathcal{Z}}$$

Finalmente:

$$\rho_r(\vec{\beta}', \vec{\beta}^*, \delta, t_0) = \prod_{k=1}^N \exp \left\{ e^{-\hbar\omega_k / K_B T} \beta_k' \delta_k - \frac{|\beta_k'|^2}{2} - \frac{|\delta_k|^2}{2} \right\} \frac{1}{Z} \quad (C.13)$$

Z pode ser calculado tomando o traço em (C.13) e lembrando que o operador densidade é normalizado:

$$Z = \int \frac{d^2 \vec{\beta}}{\pi^N} \rho_r(\vec{\beta}, \vec{\beta}^*, t_0) = \prod_{k=1}^N \int \frac{d^2 \beta_k}{\pi^N} \exp \left\{ - \left[ 1 - e^{-\hbar\omega_k / K_B T} \right] |\beta_k|^2 \right\}$$

Usando o resultado do apêndice G obtemos:

$$Z = \prod_{k=1}^N \left[ 1 - e^{-\hbar\omega_k / K_B T} \right]^{-1} \quad (C.15).$$

Substituindo (C.13), (C.7) com (C.6) e (C.4) em (2.19):

$$F[\alpha, \gamma] = \frac{h(t, t_0)}{Z} \prod_{k=1}^N \int \frac{d^2 \beta_k}{\pi^k} \int \frac{d^2 \beta_k'}{\pi^k} \int \frac{d^2 \delta_k}{\pi^k} e^{-|\beta_k|^2 - |\beta_k'|^2 - |\delta_k|^2} \exp \left\{ e^{-\hbar\omega_k / K_B T} \beta_k' \delta_k + \beta_k' \beta_k^* e^{-i\omega_k \Delta t} + \xi_k^*[\alpha] \beta_k' + \varphi_k[\alpha] \beta_k^* + \beta_k \delta_k^* e^{i\omega_k \Delta t} \right\} \exp \left\{ \xi_k[\gamma] \delta_k^* + \varphi_k^*[\gamma] \beta_k + \chi_k[\alpha] + \chi_k^*[\gamma] \right\} \quad (C.16).$$

Integrando (C.16) com o uso de (C.14) obtemos:

$$F[\alpha, \gamma] = h(t, t_0) \prod_{k=1}^N \exp \left\{ \chi_k[\alpha] + \chi_k^*[\gamma] + n_k \xi_k^*[\alpha] \xi_k[\gamma] \right\} \exp \left\{ n_k \xi_k[\gamma] \varphi_k^*[\gamma] e^{-i\omega_k \Delta t} + n_k \varphi_k[\alpha] \xi_k^*[\gamma] e^{i\omega_k \Delta t} + (n_k + 1) \varphi_k^*[\gamma] \varphi_k[\alpha] \right\} \quad (C.17)$$

onde:

$$n_k = \left[ e^{\hbar\omega_k / K_B T} - 1 \right]^{-1} \quad (C.18)$$

é o número de ocupação de Bose.

Substituindo as expressões (C.5) encontramos finalmente:

$$F(\alpha, \gamma) = h(t, t_0) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} \vec{I}^*(t') [G(t' - t'')] \vec{I}^T(t'') \right\} \quad (C.19)$$

onde  $\vec{I}$  é o vetor linha:

$$\vec{I}(\tau) = \left[ I(\alpha^*(\tau), \alpha(\tau)), I(\gamma^*(\tau), \gamma(\tau)) \right] \quad (C.20)$$

e  $G$  é a matriz:

$$[G(\tau)] = \sum_{k=1}^N |V_k|^2 \begin{bmatrix} n_k + \theta(-\tau) & -n_k \\ -(n_k + 1) & n_k + \theta(\tau) \end{bmatrix} e^{i\omega_k \tau} \quad (C.21).$$

$\vec{I}^T$  é (C.20) transposto, ou seja, o vetor coluna.

Função espectral ôhmica

Definida a função  $S(\omega)$  em (3.5) e  $n(\omega)$  em (C.18) estamos interessados em calcular a seguinte integral:

$$C(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega)n(\omega) e^{i\omega\tau} \quad (D.1).$$

Assumiremos agora que a função espectral é linear com a frequência, isto é, é da forma:

$$S(\omega) = \nu \omega \quad (D.2).$$

Substituindo (D.2) e (C.18) em (D.1) e fazendo uma troca de variável:  $x = \hbar\beta\omega$  onde  $\beta = 1/K_B T$  (D.3) ; obtemos:

$$C(\tau) = \frac{\nu}{2\pi} (\beta\hbar)^{-2} \int_0^{\infty} dx \frac{x e^{i\tau x/\beta\hbar}}{e^x - 1} \quad (D.4).$$

Essa integral está tabulada<sup>(16)</sup> e dá como resultado uma função hipergeométrica degenerada que nesse caso pode ser escrita em termos da função de Bessel de ordem fracionária:

$$C(\tau) = \frac{\nu}{2\pi} (\beta\hbar)^{-2} \Phi(1; 2; 1 - \frac{i\tau}{\beta\hbar}) \quad (D.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Phi(1; 2; z) &= \Gamma(3/2) e^{iz} (z/2)^{-1} J_{1/2}(z) e \\ \Phi(1; 2; z) &= \frac{e^{2iz} - 1}{2iz} \quad (D.6). \end{aligned}$$

Substituindo (D.6) em (D.5) e separando suas partes real e

imaginária obtemos:

$$C(\tau) = \frac{\nu}{2\pi} (\beta\hbar)^{-1} \left\{ \frac{e(\beta\hbar \cos(\tau/\beta\hbar) + \tau \operatorname{sen}(\tau/\beta\hbar)) - \beta\hbar}{\tau^2 + (\beta\hbar)^2} + \right. \\ \left. - i \frac{e(\beta\hbar \operatorname{sen}(\tau/\beta\hbar) - \tau \cos(\tau/\beta\hbar)) + \tau}{\tau^2 + (\beta\hbar)^2} \right\} \quad (D.7)$$

Observe agora que:  $\beta\hbar \approx \frac{10^{-11}}{T}$  (s); isso significa que mesmo para temperaturas bem baixas (da ordem de  $10^{-11}$  K) podemos escolher uma escala de tempo tal que  $\tau \gg \beta\hbar$ . Nesse caso as funções seno e cosseno oscilam rapidamente dando contribuição nula para  $\tau \neq 0$ . A parte real de (D.7) diverge com  $(\beta\hbar)^{-1}$  para  $\tau = 0$  e a parte imaginária tem uma dependência com  $\tau^{-1}$  no limite de  $(\beta\hbar) \rightarrow \infty$ . Além disso mostram-se os seguintes resultados<sup>(10)</sup>:

$$\frac{e}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \beta\hbar \frac{\cos(\tau/\beta\hbar)}{\tau^2 + (\beta\hbar)^2} = \frac{e}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \tau \frac{\operatorname{sen}(\tau/\beta\hbar)}{\tau^2 + (\beta\hbar)^2} = 1 \quad (D.8).$$

Lembrando ainda que<sup>(11)</sup>:

$$\lim_{\beta\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\beta\hbar}{\tau^2 + (\beta\hbar)^2} = \delta(\tau) \quad (D.9)$$

$$e \lim_{\beta\hbar \rightarrow 0} \frac{\tau}{\tau^2 + (\beta\hbar)^2} = P\left[\frac{1}{\tau}\right] \quad (D.10)$$

obtemos finalmente de (D.7), que para temperaturas bem maiores que  $10^{-11}$  K vale o seguinte:

$$C(\tau) = \frac{\nu}{2\pi} (\beta\hbar)^{-1} \left\{ \delta(\tau) + \frac{i}{\pi} P\left[\frac{1}{\tau}\right] \right\} \quad (D.11).$$

Observe a semelhança entre (D.11) e (3.8). Essa semelhança se acentua se tomarmos em (3.8) o seguinte:

$$S(\omega_0) = \nu \omega_0 \quad (D.12)$$

e para temperaturas altas, isto é,  $K_B T \gg \hbar\omega_0$ , aproximarmos:

$$n(\omega_0) \approx (\beta \hbar \omega_0)^{-1} \quad (\text{D.13}).$$

Substituindo (D.12) e (D.13) em (3.8) obtemos exatamente

(D.11).

$$\underline{\theta(\pm \tau) \delta(\tau)} = \underline{\delta(\tau)/2}$$

Consideremos a seguinte integral:

$$\int d\tau \theta(\pm\tau) \delta(\tau) = \pm \int d\tau \theta(\pm\tau) \frac{d\theta(\pm\tau)}{d\tau} \quad (E.1)$$

onde usamos que a função delta de Dirac pode ser escrita como

derivada de uma função teta. Daí:

$$\int d\tau \theta(\pm\tau) \delta(\tau) = \pm \int d\tau \frac{1}{2} \frac{d\theta(\pm\tau)^2}{d\tau} \quad (E.2)$$

usando agora que  $\theta(\pm\tau)^2 = \theta(\pm\tau)$ , obtemos:

$$\int d\tau \theta(\pm\tau) \delta(\tau) = \pm \int d\tau \frac{1}{2} \frac{d\theta(\pm\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2} \int d\tau \delta(\tau) = \frac{1}{2} \quad (E.3).$$

O que demonstra o enunciado.



Cálculo do superpropagador na aproximação Markoffiana

Usaremos agora os resultados obtidos no capítulo II da tese, ou seja, a aproximação do reservatório sem memória, juntamente com a escolha (3.1) para o termo de interação a fim de calcular as integrais funcionais que restam em (2.29).

Portanto, com (3.10) e (3.3) o funcional de influência em (C.19) fica:

$$F[\alpha, \gamma] = h(t, t_0) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' \tilde{I}^*(t') \left[ G \right] \tilde{I}^T(t') \right\} \quad (F.1)$$

onde:

$$\tilde{I}(\tau) = \left[ \alpha^*(\tau), \gamma^*(\tau) \right] \quad (F.2)$$

$$\left[ G \right] = \eta \begin{bmatrix} \bar{n} + 1/2 & -\bar{n} \\ -(\bar{n} + 1) & \bar{n} + 1/2 \end{bmatrix} \quad (F.3).$$

Substituindo esses resultados em (2.18) resta resolver as seguintes integrais funcionais:

$$\int_{\alpha'}^{\alpha^*} D^2 \alpha \int_{\gamma'^*}^{\gamma} D^2 \gamma e^{(S_0[\alpha] + S_0^*[\gamma] + S_f[\alpha, \gamma])} \quad (F.4)$$

onde:

$$S_0[\alpha] = \frac{1}{2} (\alpha' \alpha^*(t_0) + \alpha^* \alpha(t)) + \int_{t_0}^t dt' \left\{ \frac{1}{2} \left[ \alpha \frac{d\alpha^*}{dt'} - \alpha^* \frac{d\alpha}{dt'} \right] - \frac{i}{\hbar} H_s(\alpha, \alpha^*) \right\} \quad (F.5)$$

$$S_f[\alpha, \gamma] = - \int_{t_0}^t dt' \left\{ \left[ \bar{n} + \frac{1}{2} \right] \alpha(t') \alpha^*(t') - \bar{n} \alpha(t') \gamma^*(t') + \right. \\ \left. - (\bar{n} + 1) \gamma(t') \alpha^*(t') + \left[ \bar{n} + \frac{1}{2} \right] \gamma(t') \gamma^*(t') \right\} \quad (F.6)$$

Usando agora o hamiltoniano (3.4) e utilizando exatamente o mesmo método do apêndice B obtemos as seguintes equações para a extremização do expoente em (F.4):

$$\frac{d\alpha}{d\tau} + i\omega_0 \alpha + \eta \left[ \bar{n} + \frac{1}{2} \right] \alpha - \eta \bar{n} \gamma = -if^*(\tau) \quad (F.7.1)$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} + i\omega_0 \gamma - \eta \left[ \bar{n} + \frac{1}{2} \right] \gamma + \eta (\bar{n} + 1) \alpha = -if^*(\tau) \quad (F.7.2)$$

$$\frac{d\alpha^*}{d\tau} - i\omega_0 \alpha^* - \eta \left[ \bar{n} + \frac{1}{2} \right] \alpha^* + \eta (\bar{n} + 1) \gamma^* = if(\tau) \quad (F.7.3)$$

$$\frac{d\gamma^*}{d\tau} - i\omega_0 \gamma^* + \eta \left[ \bar{n} + \frac{1}{2} \right] \gamma^* - \eta \bar{n} \alpha^* = if(\tau) \quad (F.7.4)$$

Observe que essas equações estão acopladas duas a duas e que são exatamente equações para o oscilador harmônico amortecido e forçado.

As condições de contorno são dadas por (B.5):

$$\alpha(t_0) = \alpha' \quad (F.8.1)$$

$$\alpha^*(t) = \alpha^* \quad (F.8.2)$$

$$\gamma(t) = \gamma \quad (F.8.3)$$

$$\gamma^*(t_0) = \gamma'^* \quad (F.8.4)$$

É fácil resolver (F.7) com (F.8) dando como resultado:

$$\begin{aligned}
\alpha(\tau) &= \alpha' e^{-i\omega_0(\tau-t_0)} \frac{\bar{n} e^{-\eta(\tau-t_0)/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta(\tau-t_0)/2}}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta\Delta t/2}} + \\
&- \gamma e^{i\omega_0(t-\tau)} \frac{2\bar{n} \sinh(\eta(\tau-t_0)/2)}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta\Delta t/2}} + \\
&- \frac{2\bar{n} \sinh(\eta(\tau-t_0)/2)}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta\Delta t/2}} i \int_{t_0}^t dt' f^*(t') e^{\eta(t-t')/2 + i\omega_0(t-t')} \\
&- i \int_{t_0}^{\tau} dt' f^*(t') e^{(\eta/2 + i\omega_0)(t'-\tau)} \quad (F.9.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(\tau) &= \gamma e^{i\omega_0(t-\tau)} \frac{\bar{n} e^{-\eta(\tau-t_0)/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta(\tau-t_0)/2}}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta\Delta t/2}} + \\
&- \alpha' e^{-i\omega_0(\tau-t_0)} \frac{2(\bar{n}+1) \sinh(\eta(t-\tau)/2)}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta\Delta t/2}} + \\
&+ \frac{\bar{n} e^{-\eta(\tau-t_0)/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta(\tau-t_0)/2}}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta\Delta t/2}} i \int_{t_0}^t dt' f^*(t') e^{\eta(t-t')/2 + i\omega_0(t-t')} \\
&- i \int_{t_0}^{\tau} dt' f^*(t') e^{(\eta/2 + i\omega_0)(t'-\tau)} \quad (F.9.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^*(\tau) &= \alpha^* e^{-i\omega_0(t-\tau)} \frac{\bar{n} e^{-\eta(\tau-t_0)/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta(\tau-t_0)/2}}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta\Delta t/2}} + \\
&- \gamma^* e^{i\omega_0(\tau-t_0)} \frac{2(\bar{n}+1) \sinh(\eta(t-\tau)/2)}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta\Delta t/2}} + \\
&+ \frac{\bar{n} e^{-\eta(\tau-t_0)/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta(\tau-t_0)/2}}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n}+1) e^{\eta\Delta t/2}} i \int_{t_0}^t dt' f^*(t') e^{\eta(t-t')/2 - i\omega_0(t-t')}
\end{aligned}$$

$$+ i \int_{t_0}^{\tau} dt' f^*(t') e^{(\eta/2 + i\omega_0)(t-t')} \quad (\text{F.9.3})$$

$$\begin{aligned} \gamma^*(\tau) = & \gamma'^* e^{i\omega_0(\tau-t_0)} \frac{\bar{n} e^{-\eta(\tau-t_0)/2} - (\bar{n} + 1) e^{\eta(\tau-t_0)/2}}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n} + 1) e^{\eta\Delta t/2}} + \\ & - \alpha'^* e^{-i\omega_0(\tau-t_0)} \frac{2\bar{n} \sinh(\eta(\tau-t_0)/2)}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n} + 1) e^{\eta\Delta t/2}} + \\ & + \frac{2\bar{n} \sinh(\eta(\tau-t_0)/2)}{\bar{n} e^{-\eta\Delta t/2} - (\bar{n} + 1) e^{\eta\Delta t/2}} i \int_{t_0}^{\tau} dt' f^*(t') e^{\eta(t'-t_0)/2 - i\omega_0(t'-t_0)} \\ & + i \int_{t_0}^{\tau} dt' f^*(t') e^{(\eta/2 - i\omega_0)(t'-t_0)} \quad (\text{F.9.4}). \end{aligned}$$

Substituindo essas soluções como em (B.13) o expoente de (F.4) fica na seguinte forma:

$$\begin{aligned} S[\alpha_c, \gamma_c] = & \frac{\alpha'^* \alpha^* e^{-(\eta/2 + i\omega_0)\Delta t} + \alpha' \gamma'^* (\bar{n} + 1) (1 - e^{-\eta\Delta t})}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t})} + \\ & + \frac{\alpha^* \gamma \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t}) + \gamma \gamma'^* e^{-(\eta/2 - i\omega_0)\Delta t}}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t})} + \\ & - \frac{\alpha' e^{-(\eta/2 + i\omega_0)\Delta t} W^*(t) + \gamma'^* e^{-(\eta/2 - i\omega_0)\Delta t} W(t)}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t})} + \\ & + \frac{\alpha^* W(t) + \gamma W^*(t) - |W(t)|^2}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t})} \quad (\text{F.10}) \end{aligned}$$

onde:

$$W(t) = i \int_{t_0}^{\Delta t} dt' f^*(t-t') e^{-i\omega_0(t-t')} \quad (\text{F.11})$$

Portanto o superpropagador (2.18) fica na forma:

$$J(\alpha^*, \gamma, t; \alpha'^*, \gamma', t_0) = g(t, t_0) e^{-C(|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + |\alpha'|^2 + |\gamma'|^2)/2} e^{S[\alpha_c, \gamma_c]} \quad (\text{F.12}).$$

A normalização do operador densidade exige que:

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} \rho_s(\alpha^*, \alpha, t) = 1 \quad (\text{F.13})$$

Usando então a (2.15) temos:

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\alpha'}{\pi} \int \frac{d^2\gamma'}{\pi} J(\alpha^*, \alpha, t; \alpha'^*, \gamma', t_0) \rho_s(\alpha'^*, \gamma', t_0) = 1$$

Com (F.12) e (F.13) com a ajuda da integral do apêndice G,

(C.14), obtém-se facilmente que:

$$g(t, t_0) = \frac{1}{1 + \bar{n} (1 - e^{-\eta\Delta t})} \quad (\text{F.14}).$$

Com isso encerra-se o cálculo do superpropagador.

Cálculo da integral (C.14)

Seja:  $z = x + i y$ ; daí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \alpha}{\pi} e^{-\alpha |z|^2 + bz + cz^*} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha x^2 + (b+cx) x} e^{-\alpha y^2 + i(b-c)y} \quad (G.1)$$

Completando o binômio em ambas as integrais em (G.1) e usando

a conhecida integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2} \quad (G.2)$$

obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \alpha}{\pi} e^{-\alpha |z|^2 + bz + cz^*} = \frac{1}{|a|} \exp \left\{ \frac{(b+c)^2 - (b-c)^2}{4a} \right\} = \frac{e^{\frac{b-c}{a}}}{|a|} \quad (G.3)$$

O que demonstra (C.14).

Cálculo da fórmula (4.25)

Queremos mostrar que:

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial(x)^n \partial(y)^m} e^{axy+bx+cy} \Big|_{x=y=0} = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \frac{n!m!}{k!(n-k)!(m-k)!} a^k b^{n-k} c^{m-k} \quad (H.1)$$

Primeiro para as derivadas com relação a y temos:

$$\frac{\partial^m}{\partial(y)^m} e^{axy+bx+cy} = (ax + c)^m e^{axy+bx+cy} \quad (H.2)$$

Com  $y = 0$ :

$$\frac{\partial^m}{\partial(y)^m} e^{axy+bx+cy} \Big|_{y=0} = (ax + c)^m e^{bx} \quad (H.3)$$

Temos ainda que:

$$\frac{d^n}{dz^n} \left( f(z) g(z) \right) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{d^k}{dz^k} \left( f(z) \right) \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} \left( g(z) \right) \quad (H.4)$$

Dai:

$$\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} e^{bx} = b^{n-k} e^{bx} \quad (H.5.1)$$

$$\frac{d^k}{dz^k} (ax + c)^m = \begin{cases} \frac{m!}{(m-k)!} a^k (ax + c)^{m-k} & \text{se } m > k \\ 0 & \text{se } m < k \end{cases} \quad (H.5.2)$$

De (H.5) em (H.4) e (H.3) concluímos (H.1).

## REFERÊNCIAS

- [1] - A. O. Caldeira, A. J. Leggett - Physica 121 A, 587, (1983)
- [2] - A. O. Caldeira, A. J. Leggett - Phys. Rev. A, 31, 2, 1059,  
(1985)
- D. F. Walls, G. J. Milburn - Phys. Rev. A, 31, 4, 2403,  
(1985)
- [3] - A. O. Caldeira, A. J. Leggett - Annals of Physics, 149, 2, •  
(1988)
- [4] - R. P. Feynman, F. L. Vernon - Annals of Physics, 24, 118,  
(1963)
- [5] - W. H. Louisell - Quantum Statistical Properties of  
Radiation, (John Wiley & Sons, (1973))
- [6] - W. H. Louisell, J. H. Marburger - J. Quantum Electron.,  
QE-3, 348, (1967)
- [7] - V. G. Weisskopf, E. Wigner - Z. Phys., 63, 54, (1930)
- [8] - C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe - Quantum Mechanics,  
(John Wiley & Sons, (1977))
- [9] - R. J. Glauber - Phys. Rev., 131, 6, 2768, (1963)
- [10] - H. Haken - Handbuch der Physik, XXV/2c, (1970)
- [11] - J. R. Senitzky - Phys. Rev., 119, 670, (1960)
- [12] - W. Heitler - The Quantum Theory of Radiation, (Oxford:  
Clarendon Press, (1954))
- [13] - M. Lax - Phys. Rev., 129, 2342, (1963)
- [14] - E. Merzbacher - Quantum Mechanics, (John Wiley & Sons,



(1970)).

[15] - L.S.Schulman - Techniques and Applications of Path Integration, (John Wiley & Sons, (1981))

[16] - Gradsteyn - Table of Integrals, Series and Products, (Academic Press, (1965))