

Estudo Sobre a Existência de Estados Coerentes Dissipativos

por
Marcelo Rosenau da Costa

Orientador
Amir Ordacgi Caldeira

*Este exemplar corresponde à redação final da
Tese de mestrado defendida pelo aluno Marcelo
Rosenau da Costa e aprovada pela comissão julgadora.
Campinas, 20/08/98*

Tese de Mestrado apresentada no Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas
UNICAMP

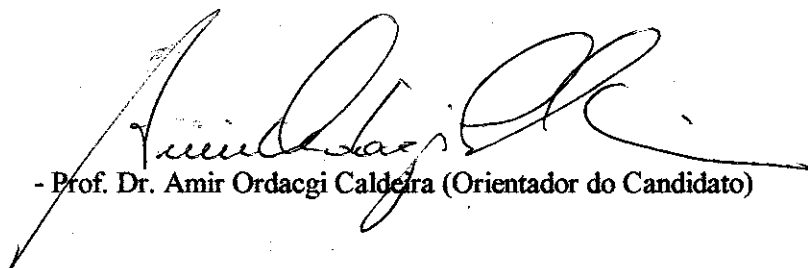
Campinas, março de 1998.



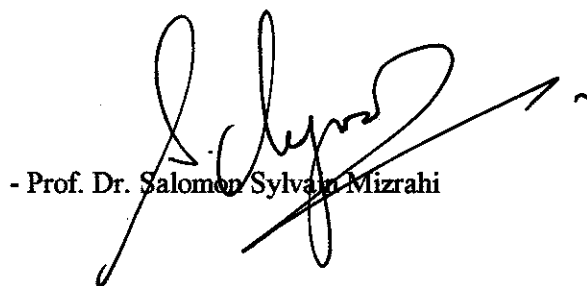
PARECER DE APROVAÇÃO
DEFESA DE TESE DE MESTRADO DE
MARCELO ROSENAU DA COSTA

DATA : 27 / 03 / 98

BANCA EXAMINADORA:



- Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira (Orientador do Candidato)



- Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi



- Profa. Dra. Kyoko Furuya

À minha mãe,
Roseli Rosenau.

Agradecimentos

Ao meu Orientador, Prof. Amir Ordacgi Caldeira, bem como ao meu Coorientador, Sergio Mendes Dutra, pela disponibilidade, paciência, incentivo e amizade.

Aos amigos e colegas de grupo: Armando Villares, Harry Westfahl Jr. e Rodrigo do V. Navarro, companheiros na mesma jornada.

À Maria Ignez, secretária da CPG, sempre gentil e atenciosa.

A todos que com amizade e incentivo ajudaram-me a concluir esta etapa da minha vida.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Índice

Introdução	1
Capítulo 1 - Estados Quasi-Clássicos	
1 Descrição do Campo Eletromagnético	4
2 Estados Coerentes do Campo Eletromagnético	5
3 Estado Coerente de um Oscilador Harmônico Material	8
Capítulo 2 - Estados Coerentes Dissipativos	
1 Tratamento Clássico de uma Cavidade Dissipativa	11
2 Tratamento Quântico de uma Cavidade Dissipativa	13
Capítulo 3 - Diagonalização Exata das Hamiltonianas Dissipativas	
1 O Procedimento de Diagonalização de Fano	25
2 Passagem para o Contínuo das Hamiltonianas Dissipativas	28
3 Tratamento da Hamiltoniana com a Aproximação de Onda Girante	30
4 Tratamento da Hamiltoniana sem a Aproximação de Onda Girante	36
Capítulo 4 - O Modelo Caldeira-Leggett de Dissipação	
1 Equação de Langevin Clássica	38
2 Introdução do Modelo Caldeira-Leggett	39
3 Aplicações do Modelo	43
Capítulo 5 - Tratamento do Modelo Caldeira-Leggett via Diagonalização de Fano	
1 Comparação entre as Hamiltonianas	49
2 Consistência da Diagonalização de Fano	51
3 Análise da Evolução do Operador a do Sistema	52
4 Evolução de um Estado Coerente	61
5 Evolução do Valor Médio de um Pacote de Onda	62
Conclusão	65
Apêndice A - Descrição do Campo Eletromagnético	67
Apêndice B - Diagonalização sem a Aproximação de Onda Girante	72
Apêndice C - Introdução do Contratermo e o Cálculo de $H(\omega)$	75
Apêndice D - Consistência da Diagonalização de Fano	78
Apêndice E - Cálculos Adicionais Associados ao Capítulo 5	81
Referências	84

Resumo

Neste trabalho estabelecemos as condições necessárias à existência de estados coerentes em um oscilador harmônico (ou modo eletromagnético) dissipativo, dentro de algumas hipóteses referentes ao modelo de dissipação. Mostramos como a existência destes estados encontra-se intimamente ligada a realização da chamada aproximação de onda girante, cujas condições de validade também serão determinadas. Para tanto realizamos uma diagonalização exata das Hamiltonianas dissipativas, utilizando o método conhecido como diagonalização de Fano. Aplicamos o resultado da diagonalização também no cálculo da evolução de valores médios de observáveis do sistema.

Introdução

Reconhecidamente muitos sistemas quânticos de interesse apresentam um caráter dissipativo. Entretanto, o procedimento de quantização canônica aplica-se exclusivamente a sistemas conservativos. Assim, o método usual de descrição de sistemas quânticos dissipativos consiste em considerarmos explicitamente o fato destes sistemas não serem isolados ([1], [2]). Considera-se o acoplamento do sistema de interesse, isto é, do sistema sobre o qual serão feitas medidas de variáveis dinâmicas (que a partir de agora é mais apropriado chamarmos de subsistema), com um *reservatório*, constituído de um grande número de partículas ou modos de um campo. O sistema global, constituído do subsistema de interesse mais o reservatório, é então conservativo. O fenômeno de dissipação, deste ponto de vista, é apenas a transferência da energia dos graus de liberdade do subsistema para os graus de liberdade do reservatório. Uma vez que o reservatório apresente um número de graus de liberdade muito maior que o do subsistema, este último sofrerá uma perda de energia contínua e irreversível.

O tratamento destes sistemas quânticos dissipativos [3], juntamente a um trabalho paralelo [4], levou ao reconhecimento de que a dissipação, em geral, causa o aparecimento de um outro fenômeno importante no subsistema, chamado *decoerência*. Tal fenômeno faz com que estados puros de um subsistema ligado a um reservatório, responsável pelo surgimento da dissipação, sejam muito rapidamente transformados em misturas estatísticas. A origem física deste fenômeno, como veremos, deve-se à rápida correlação das diferentes componentes do vetor de estado do sistema a diferentes estados do reservatório. Esta correlação, em geral, leva o sistema a ser descrito por um operador densidade (reduzido) diagonal na base dos autoestados da Hamiltoniana de interação com reservatório.

Entretanto, em alguns trabalhos ([5], [6], [7]), afirma-se, que há uma categoria de estados, em especial, que uma vez excitados em um oscilador harmônico (ou modo de um campo eletromagnético) dissipativo não estariam sujeitos a este fenômeno de decoerência, quando em contato com um reservatório a temperatura zero. Seriam estes os *estados coerentes*¹ *dissipativos*.

Os estados coerentes foram introduzidos na física devido à conveniência matemática, mas logo ficaram conhecidos também em razão de algumas de suas propriedades físicas notáveis. Schrödinger até sugeriu que estes estados seriam os estados quânticos correspondentes a pontos clássicos no espaço de fase. O seu argumento foi baseado na estabilidade e invariância destes estados em um oscilador harmônico isolado. A associação destes estados com os estados quânticos correspondentes ao movimento clássico de um oscilador harmônico macroscópico de certo modo servia para alguns, erroneamente, como justificativa para que estes estados não estivessem sujeitos (a temperatura zero) ao fenômeno da decoerência, de modo a permanecerem como estados coerentes durante a sua evolução.

Veremos, como parte dos resultados obtidos no presente trabalho, que a existência destes estados coerentes dissipativos só é permitida dentro da chamada *aproximação de onda girante*, aproximação esta que leva a uma Hamiltoniana de interação do sistema com o reservatório muito particular e que, de certo modo, privilegia a evolução destes estados. O problema com os trabalhos que afirmam a ausência da decoerência nestes estados a temperatura zero, mesmo para modelos dissipativos fora da aproximação de onda girante, é que eles utilizaram um método (a descrição do subsistema via uma *equação mestra*) que, em geral, apresenta muitas limitações, as quais, como

A designação *estados coerentes* é anterior a estes trabalhos e deve-se na verdade a uma outra propriedade destes estados (a coerência ótica).

veremos, não foram respeitadas. Uma das limitações destas equações mestras é que elas só valem na situação de dissipação muito fraca. Entretanto, mostraremos que, unicamente nesta situação, modelos de dissipação mais realistas reduzem-se justamente ao modelo da aproximação de onda girante.

Neste trabalho realizamos uma diagonalização exata das Hamiltonianas dissipativas, utilizando o método conhecido como *diagonalização de Fano*. Assim, determinaremos claramente as condições de existência destes estados coerentes dissipativos, dentro, obviamente, de algumas hipóteses referentes ao modelo de dissipação.

O nosso objetivo central é a determinação das condições citadas acima. Entretanto, obteremos também alguns outros resultados interessantes: (1) a determinação das condições de validade da chamada *aproximação de onda girante* (como já citamos), (2) a comparação entre os resultados obtidos através da diagonalização exata de um modelo dissipativo dentro da aproximação de onda girante e os resultados obtidos via equação mestra, (3) a determinação da evolução dos estados do reservatório dentro da aproximação de onda girante. Calculamos ainda (4) a evolução do valor médio da posição de um oscilador harmônico dissipativo (que anteriormente só havia sido obtida via integração funcional). Este último cálculo evidenciou uma característica importante do modelo de dissipação que não havia sido observada em trabalhos anteriores (levando inclusive a publicações com resultados errados [8]).

A seguir apresentaremos uma breve descrição do material contido em cada capítulo.

No Capítulo 1 fazemos uma revisão dos estados *quasi-clássicos*, ou estados coerentes, de um oscilador harmônico ou campo eletromagnético. Destacamos essencialmente o fato destes estados serem aqueles que reproduzem as propriedades clássicas de um oscilador material ou campo eletromagnético macroscópico e também serem os estados gerados por excitações clássicas destes sistemas.

No Capítulo 2 fazemos uma revisão dos tratamentos clássicos e quânticos de cavidades dissipativas. Introduzimos a Hamiltoniana fenomenológica tradicional de interação do campo eletromagnético interno à cavidade com o reservatório (representado pelas próprias paredes da cavidade ou pelo campo externo a esta). Revisamos a teoria de equações mestras e a sua aplicação no cálculo da evolução de um estado coerente em contato com um reservatório a temperatura zero, dentro da aproximação de onda girante.

No Capítulo 3 revisamos o procedimento de diagonalização de Fano. Aplicamos este procedimento na diagonalização da Hamiltoniana introduzida no Capítulo 2, dentro da aproximação de onda girante, e calculamos a evolução de um estado coerente. Comparamos os resultados obtidos através deste procedimento com aqueles obtidos no tratamento via equação mestra. Determinamos a evolução das excitações dos modos do reservatório inicialmente a temperatura zero. Realizamos, finalmente, a diagonalização da Hamiltoniana do sistema global sem a aproximação de onda girante (a análise das expressões obtidas é deixada para o Capítulo 5).

No Capítulo 4 revisamos o *modelo Caldeira-Leggett* de dissipação. Apontamos os principais resultados obtidos na aplicação deste modelo no tratamento do movimento browniano quântico, no caso de dissipação ôhmica, e da influência da dissipação nos processos de interferência quântica. Discutimos como, em razão da existência do fenômeno de decoerência, é estranha a existência de estados coerentes dissipativos

No Capítulo 5 comparamos a Hamiltoniana introduzida no Capítulo 2 (e diagonalizada no Capítulo 3) com a Hamiltoniana do modelo Caldeira-Leggett. Obtemos uma relação entre a função de acoplamento $|v_\omega|^2$, introduzida no Capítulo 2, e a função espectral $J(\omega)$ do modelo Caldeira-Leggett. Analisamos então as expressões obtidas na diagonalização anteriormente realizada, no final do Capítulo 3. Determinamos novamente a evolução de um estado coerente a temperatura zero, agora sem a aproximação de onda girante. Obtemos as condições para que ele permaneça como um estado coerente durante a sua evolução e as condições para a validade da aproximação

de onda girante. Terminamos o capítulo com o cálculo da evolução do valor médio da posição de um oscilador harmônico amortecido.

O presente trabalho é encerrado com a apresentação das conclusões decorrentes dos resultados obtidos.

Estados Quasi-Clássicos

1 Descrição do Campo Eletromagnético

A quantização do campo eletromagnético no vácuo (ver Apêndice A), no gauge de Coulomb e na ausência de fontes (partículas carregadas ou correntes), nos leva às seguintes expressões para os operadores campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (no interior de uma caixa de volume L^3 , sujeitos a condições de contorno periódicas²)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_i \mathcal{E}_{w_i} \left[a_i \boldsymbol{\varepsilon}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - w_i t)} - a_i^\dagger \boldsymbol{\varepsilon}_i e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - w_i t)} \right], \quad (1.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \sum_i \mathcal{B}_{w_i} \left[(\hat{\mathbf{k}}_i \times \boldsymbol{\varepsilon}_i) a_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - w_i t)} - (\hat{\mathbf{k}}_i \times \boldsymbol{\varepsilon}_i) a_i^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - w_i t)} \right]. \quad (1.2)$$

onde cada modo normal i do campo é determinado por um vetor de propagação $\mathbf{k}_i$ ($w_i = ck_i$) e uma polarização $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, sendo $\mathcal{E}_{w_i} = \sqrt{\frac{\hbar w_i}{2\varepsilon_0 L^3}}$ e $\mathcal{B}_{w_i} = \mathcal{E}_{w_i}/c$. Os operadores a_i satisfazem à seguinte relação de comutação

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (1.3)$$

A Hamiltoniana do campo livre pode ser escrita como (ver Apêndice A)

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r [\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r})] \quad (1.4)$$

$$= \sum_i \hbar w_i \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right). \quad (1.5)$$

Vemos de (1.3) e (1.5) que a dinâmica do campo é equivalente à dinâmica de um conjunto infinito de osciladores harmônicos que representam os modos normais do campo. O espaço de estados do campo de radiação $\mathcal{E}_R$ é o produto dos espaços de estados $\mathcal{E}_i$ dos vários osciladores i associados aos modos do campo,

$$\mathcal{E}_R = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_i \otimes \dots \quad (1.6)$$

Uma base ortonormal possível para $\mathcal{E}_i$ é $\{|n_i\rangle\}$, onde $n_i = 0, 1, 2, 3, \dots$ determina o nível de energia do oscilador i . Assim, o estado $|n_1\rangle \dots |n_i\rangle \dots$, escrito de maneira mais concisa como $|\{n_i\}\rangle$, é um

Como vimos no Apêndice A tais expressões para os campos valem para o campo eletromagnético no espaço livre, fazendo-se, no fim dos cálculos, L ir a infinito. E valem, também, para o campo eletromagnético confinado em uma cavidade, de volume L^3 , com paredes constituídas por condutores ideais.

autoestado de H :

$$H |\{n_i\}\rangle = \left[\sum_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_i \right] |\{n_i\}\rangle. \quad (1.7)$$

Tal estado representa um campo contendo n_1 *fótons* no modo 1, ..., n_i *fótons* no modo i , com cada fóton contribuindo para a energia total do campo através de um “quanta” elementar $\hbar \omega_i$.

2 Estados Coerentes do Campo Eletromagnético

2.1 Introdução dos Estados Quasi-Clássicos

Consideremos um campo clássico livre. O estado deste campo é caracterizado por um conjunto de variáveis normais $\{\alpha_i\}$. Uma vez conhecido o conjunto $\{\alpha_i\}$ conhecemos todas as quantidades relativas ao campo (ver Apêndice A). Por exemplo:

$$H_{cl}(\{\alpha_i\}) = \sum_i \hbar \omega_i \alpha_i^* \alpha_i, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{E}_{cl}(\{\alpha_i\}; \mathbf{r}, t) = i \sum_i \mathcal{E}_{\omega_i} \left[\alpha_i \boldsymbol{\varepsilon}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} - \alpha_i^* \boldsymbol{\varepsilon}_i e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \right], \quad (1.9)$$

$$\mathbf{B}_{cl}(\{\alpha_i\}; \mathbf{r}, t) = i \sum_i \mathcal{B}_{\omega_i} \left[\left(\hat{\mathbf{k}}_i \times \boldsymbol{\varepsilon}_i \right) \alpha_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} - \left(\hat{\mathbf{k}}_i \times \boldsymbol{\varepsilon}_i \right) \alpha_i^* e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \right] \quad (1.10)$$

e assim por diante.

Para o campo quantizado a situação é mais complexa. Uma vez que as variáveis do campo não comutam entre si, não é possível encontrar autoestados comuns a estas variáveis com autovalores iguais aos valores das variáveis clássicas correspondentes.

Assim, o estado quântico $|\{\alpha_i\}\rangle$ que reproduz da melhor maneira possível as propriedades do estado clássico $\{\alpha_i\}$ é o estado no qual, para todos os observáveis importantes, os valores médios destes observáveis coincidem com os valores clássicos correspondentes. Mais precisamente nós procuramos por um estado $|\{\alpha_i\}\rangle$ tal que

$$\langle \{\alpha_i\} | H | \{\alpha_i\} \rangle - E_{vac} = H_{cl}(\{\alpha_i\}), \quad (1.11)$$

(subtraiu-se a energia do vácuo E_{vac} visto que todas as energias são tomadas a partir da energia do vácuo)

$$\langle \{\alpha_i\} | \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | \{\alpha_i\} \rangle = \mathbf{E}_{cl}(\{\alpha_i\}; \mathbf{r}, t), \quad (1.12)$$

$$\langle \{\alpha_i\} | \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) | \{\alpha_i\} \rangle = \mathbf{B}_{cl}(\{\alpha_i\}; \mathbf{r}, t), \quad (1.13)$$

para todos os valores de $\mathbf{r}$ e t .

2.2 Caracterização dos Estados Quasi-Clássicos

Se as expansões (1.1), (1.2) e (1.5) para $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ e H em termos de a_i e a_i^+ , são substituídas em (1.11), (1.12) e (1.13) e comparadas com as expressões (1.8), (1.9) e (1.10) e no lado esquerdo de

vemos que as condições (1.11-1.13) são equivalentes a

$$\langle \{\alpha_i\} | a_i | \{\alpha_i\} \rangle = \alpha_i \quad \text{e} \quad \langle \{\alpha_i\} | a_i^+ a_i | \{\alpha_i\} \rangle = \alpha_i^* \alpha_i \quad \forall i. \quad (1.14)$$

Introduzimos então o operador $b_i = a_i - \alpha_i 1$ onde 1 é o operador unitário. As eqs.(1.14) são então equivalentes a

$$\langle \{\alpha_i\} | b_i | \{\alpha_i\} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \{\alpha_i\} | b_i^+ b_i | \{\alpha_i\} \rangle = 0 \quad \forall i. \quad (1.15)$$

A última equação (1.15) mostra então que a norma de $b_i | \{\alpha_i\} \rangle$ é zero, portanto a solução de (1.15) é $b_i | \{\alpha_i\} \rangle = 0$, isto é,

$$a_i | \{\alpha_i\} \rangle = \alpha_i | \{\alpha_i\} \rangle \quad \forall i. \quad (1.16)$$

Logo o estado $| \{\alpha_i\} \rangle$ é o produto

$$| \{\alpha_i\} \rangle = | \alpha_1 \rangle | \alpha_2 \rangle \dots | \alpha_i \rangle \dots \quad \text{com} \quad a_i | \alpha_i \rangle = \alpha_i | \alpha_i \rangle. \quad (1.17)$$

O estado quasi-clássico $| \{\alpha_i\} \rangle$, mais conhecido como *estado coerente*, é assim o produto tensorial dos autoestados dos vários operadores de aniquilação a_i , com autovalores α_i , que são precisamente as variáveis normais clássicas correspondentes.

Consideremos agora um campo tendo um único modo excitado i (definido por $\{\mathbf{k}_i, \epsilon_i\}$) estando os demais modos no estado de vácuo. Para simplificar a notação omitiremos o índice i .

Projetando (1.16) sobre o bra $\langle n-1 |$ temos a relação de recorrência $\sqrt{n} \langle n | \alpha \rangle = \alpha \langle n-1 | \alpha \rangle$, da qual obtemos

$$| \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle. \quad (1.18)$$

O valor médio e a dispersão do número de fótons em um estado $| \alpha \rangle$ são dados por

$$\langle \alpha | n | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad \Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = |\alpha|^2. \quad (1.19)$$

Consideremos agora o campo excitado em um estado coerente. Partindo de (1.1) temos

$$\langle \alpha | \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = -2\mathcal{E}_w |\alpha| \text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - wt + \theta), \quad (1.20)$$

onde $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$. Analogamente a dispersão do campo elétrico $\Delta^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ para este estado será

$$\Delta^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)_{|\alpha\rangle} = \mathcal{E}_w^2. \quad (1.21)$$

Logo, vemos que $\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)_{|\alpha\rangle}$ é independente de $|\alpha|$. Por outro lado $\langle \alpha | \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle$ é proporcional a $|\alpha|$, sendo que $|\alpha|^2$ é o número médio de fótons no campo. Portanto, à medida que o número médio de fótons aumenta a razão $\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)_{|\alpha\rangle} / \langle \alpha | \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle$ diminui. Escolhendo-se um valor de $|\alpha|$ suficientemente grande (número de fótons suficientemente grande) obtemos um campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, em valor relativo, tão bem definido quanto se queira. Portanto quando $|\alpha| \gg 1$ o estado coerente $| \alpha \rangle$, segundo (1.20), corresponde a um campo clássico cuja fase é determinada pelo argumento θ de α e cuja amplitude é dada por $2\mathcal{E}_w |\alpha|$. Um resultado análogo é evidentemente obtido para o campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

A amplitude e a fase de uma onda eletromagnética são representados por operadores não comutativos [10], portanto tais grandezas não podem ser simultaneamente definidas com precisão arbitrária, devendo estas obedecer a uma relação de incerteza. Pode-se mostrar que o campo excitado em um estado coerente $| \alpha \rangle$ tal que $|\alpha| \gg 1$ satisfaz tal relação com a incerteza mínima [10].

2.3 Campo Quântico Irrradiado por Fontes Clássicas

Obteremos a seguir o campo quântico irradiado por fontes clássicas cujo movimento não é perturbado pelo campo.

Assumiremos que antes de $t = 0$ nenhuma fonte esteja presente. A radiação está inicialmente no estado de vácuo

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle. \quad (1.22)$$

Em $t = 0$ as fontes são “ligadas”. Assumiremos que as correntes $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ associadas a elas não sejam afetadas pela radiação por elas próprias criada. Tal hipótese implica que as fontes tenham um movimento imposto externamente. Adicionalmente assumiremos que as fontes sejam macroscópicas, isto é, que as flutuações quânticas sobre os valores médios das correntes sejam desprezíveis. Este conjunto de hipóteses permite-nos aproximar as correntes quânticas $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ por funções clássicas bem definidas de $\mathbf{r}$ e t , $\mathbf{j}_{cl}(\mathbf{r}, t)$. Considerando estas aproximações qual é o estado $|\psi(t)\rangle$ do campo para $t > 0$?

A equação de evolução para $a_i(t)$ é dada por (eq.(A.16), com a substituição das variáveis normais α pelos operadores a e discretização dos modos)

$$\dot{a}_i + iw_i a_i = s_i^{cl}(t), \quad (1.23)$$

sendo

$$s_i^{cl}(t) = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar w_i L^3}} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \mathbf{j}_{cl}(\mathbf{r}, t), \quad (1.24)$$

onde, com base nas hipóteses do parágrafo anterior, substituiu-se $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ por $\mathbf{j}_{cl}(\mathbf{r}, t)$ na expressão de s_i . A eq.(1.24) é facilmente integrada resultando em

$$a_i(t) = a_i(0)e^{-iw_i t} + \int_0^t dt' s_i^{cl}(t') e^{-iw_i(t-t')}. \quad (1.25)$$

O primeiro termo que aparece no lado direito da eq.(1.25) é o campo quântico inicial $a_i(0)$ que evoluiu livremente de 0 até t e o segundo termo é o campo irradiado pelas fontes.

Adicionalmente podemos também escrever as equações de evolução para os campos clássicos acoplados as correntes clássicas $\mathbf{j}_{cl}(\mathbf{r}, t)$ conhecidas. A equação de evolução para $\alpha_i(t)$ é dada por (A.16)

$$\dot{\alpha}_i + iw_i \alpha_i = s_i^{cl}(t), \quad (1.26)$$

cuja solução correspondente à condição inicial $\alpha_i(0) = 0$ (nenhuma radiação presente em $t = 0$) é

$$\alpha_i(t) = \int_0^t dt' s_i^{cl}(t') e^{-iw_i(t-t')}. \quad (1.27)$$

O último termo do lado direito de (1.25) pode ser então interpretado como o campo clássico $\alpha_i(t)$ irradiado pelas fontes clássicas conhecidas, o que nos permite escrever (1.25) como

$$a_i(t) = a_i(0)e^{-iw_i t} + \alpha_i(t). \quad (1.28)$$

Finalmente aplicamos (1.28) ao estado inicial (1.22), que é o estado do sistema para qualquer instante t na versão de Heisenberg. Uma vez que $a_i(0)|\psi(0)\rangle = a_i|0\rangle = 0$ temos

$$a_i(t)|\psi(0)\rangle = \alpha_i(t)|\psi(0)\rangle. \quad (1.29)$$

$$a_i |\psi(t)\rangle = \alpha_i(t) |\psi(t)\rangle. \quad (1.30)$$

Logo, o estado do campo no instante t é o estado coerente associado com o campo clássico irradiado pela fonte no mesmo instante t . Tal resultado é fisicamente satisfatório. Quando as fontes são quasi-clássicas o estado quântico do campo por elas irradiado é o estado quântico que mais se aproxima do campo de radiação clássico $\{\alpha_i(t)\}$, isto é, o estado coerente $|\{\alpha_i(t)\}\rangle$.

3 Estado Coerente de um Oscilador Harmônico Material

3.1 Caracterizando o Movimento Clássico Através do Parâmetro α_o

As equações clássicas de movimento para um oscilador harmônico unidimensional, de massa m e frequência angular w , são dadas por

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{m}p(t), \quad \frac{d}{dt}p(t) = -mw^2x(t). \quad (1.31)$$

Introduzindo o número complexo $\alpha(t)$ definido por

$$\alpha(t) = \sqrt{\frac{mw}{2\hbar}} \left[x(t) + \frac{i}{mw}p(t) \right]. \quad (1.32)$$

O conjunto de eqs.(1.31) torna-se então equivalente a uma única equação:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i w \alpha(t), \quad (1.33)$$

cujas solução é $\alpha(t) = \alpha_o e^{-iwt}$. Podemos inverter (1.32) escrevendo $x(t)$ e $p(t)$ em função de $\alpha(t)$, temos então

$$x(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}} [\alpha_o e^{-iwt} + \alpha_o^* e^{iwt}], \quad p(t) = -i \sqrt{\frac{m\hbar w}{2}} [\alpha_o e^{-iwt} - \alpha_o^* e^{iwt}]. \quad (1.34)$$

Portanto o número complexo α_o caracteriza o movimento do oscilador. A energia clássica $\mathcal{H}$ do sistema é uma constante dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} [p(0)]^2 + \frac{1}{2}mw^2 [x(0)]^2 = \hbar w |\alpha_o|^2. \quad (1.35)$$

Para um oscilador macroscópico a energia $\mathcal{H}$ é muito maior que o quantum $\hbar w$, portanto:

$$|\alpha_o| \gg 1. \quad (1.36)$$

3.2 O Estado Quasi-Clássico

A Hamiltoniana de um oscilador harmônico de massa m e frequência angular w é dada por [9]

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}mw^2x^2. \quad (1.37)$$

Definindo o operador $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[x + \frac{i}{m\omega} p \right]$ podemos escrever H como

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (1.38)$$

O estado coerente $|\alpha\rangle$ deste oscilador é novamente definido como o autoestado de a , $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

Da eq.(1.38) obtemos a evolução de $a(t)$ no formalismo de Heisenberg: $a(t) = a(0) e^{-i\omega t}$. Logo, no formalismo de Schrödinger, um estado coerente inicial $|\alpha(0) = \alpha_o\rangle$ evolui para o estado coerente $|\alpha(t) = \alpha_o e^{-i\omega t}\rangle$. Podemos calcular a evolução temporal dos valores médios dos operadores x , p e H para um oscilador excitado em um estado coerente inicial $|\alpha_o\rangle$:

$$\langle \alpha_o | x(t) | \alpha_o \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\alpha_o e^{-i\omega t} + \alpha_o^* e^{i\omega t}] = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\alpha_o| \cos[\omega t - \theta], \quad (1.39)$$

$$\langle \alpha_o | p(t) | \alpha_o \rangle = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} [\alpha_o e^{-i\omega t} - \alpha_o^* e^{i\omega t}] = \sqrt{2m\hbar\omega} |\alpha_o| \sin[\omega t - \theta], \quad (1.40)$$

$$\langle \alpha_o | H | \alpha_o \rangle - E_{vac} = \hbar\omega |\alpha_o|^2, \quad (1.41)$$

onde $\alpha_o = |\alpha_o| e^{i\theta}$. Comparando as equações acima com as equações (1.34) e (1.35) vemos que o estado $|\alpha_o\rangle$ é o estado quasi-clássico associado com um movimento clássico caracterizado pelo parâmetro α_o .

Temos ainda as raízes das dispersões dadas por

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}, \quad \Delta H = \hbar\omega |\alpha_o|, \quad (1.42)$$

logo $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ e temos um pacote de onda de incerteza mínima, independente do tempo. Pode-se mostrar [9] que a função de onda de um estado coerente corresponde a um pacote de onda Gaussiano. Assim, o pacote de onda do estado coerente oscila segundo as eqs.(1.39) e (1.40), sem distorcer-se.

Como vimos na eq.(1.36), um oscilador macroscópico deve apresentar $|\alpha_o| \gg 1$. Neste caso as amplitudes de oscilação de $\langle x(t) \rangle$ e $\langle p(t) \rangle$, bem como $\langle H \rangle$, tornam-se muito maiores que Δx , Δp e ΔH . Logo, escolhendo um valor de $|\alpha_o|$ suficientemente grande, podemos obter um movimento quântico no qual a posição, o momento e a energia do oscilador estão, em valores relativos, tão bem definidos quanto se queira. Portanto, quando $|\alpha_o| \gg 1$, o estado $|\alpha_o\rangle$ descreve muito bem o movimento de um oscilador harmônico macroscópico, para o qual a posição, o momento e a energia podem ser considerados quantidades clássicas.

3.3 Estado Gerado pela Ação de uma Força Externa

Consideremos agora a atuação, sobre o oscilador harmônico, de uma força externa F dependente do tempo, mas independente da posição x . Ao invés de (1.37) consideremos uma Hamiltoniana da forma

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - xF(t), \quad (1.43)$$

onde $F(t)$ é uma função real de t e nula para $t < 0$. Em termos dos operadores a e $a^\dagger$ podemos escrever

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar}{i} f(t) (a + a^\dagger), \quad (1.44)$$

onde $f(t) = i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} F(t)$. A equação de movimento para $a(t)$ obtida de (1.44) é

$$\dot{a} + i\omega a = f(t). \quad (1.45)$$

A eq.(1.45) tem forma idêntica à eq.(1.23) e portanto temos a solução

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t} + \int_0^t dt' f(t')e^{-i\omega(t-t')}. \quad (1.46)$$

Seguindo o mesmo procedimento do tratamento do campo gerado por uma corrente clássica na seção anterior, verificamos que se no instante inicial $t = 0$ o nosso oscilador estiver no estado fundamental, $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, ele irá evoluir no instante t para um estado coerente tal que

$$a|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|\psi(t)\rangle, \quad (1.47)$$

onde

$$\alpha(t) = \int_0^t dt' f(t')e^{-i\omega(t-t')}. \quad (1.48)$$

Novamente vemos que se considerarmos a ação, sobre o sistema, de uma fonte de excitação clássica (considerando a força $F(t)$ como uma força clássica) esta gera o estado quântico que mais se aproxima do estado de um oscilador harmônico clássico, o estado coerente.

Estados Coerentes Dissipativos

1 Tratamento Clássico de uma Cavidade Dissipativa

1.1 Efeitos e Origem da Dissipação no Campo Interno a uma Cavidade

Consideremos agora a existência de um campo eletromagnético no interior de uma cavidade ressonante, isto é, a existência de um campo eletromagnético em uma região do espaço inteiramente limitada por uma superfície condutora. As condições de contorno impostas ao campo pela presença da superfície condutora nos levam, a princípio [considerando a superfície condutora como ideal (condutividade infinita) e a existência do vácuo no interior da cavidade], à conclusão de que uma cavidade ressonante só permite a existência de um número discreto de modos normais (frequências de ressonância) em seu interior [12]. Assim, isto implicaria que se estivéssemos tentando excitar, de alguma forma, um modo particular de oscilação no interior da cavidade, não teríamos nenhum sucesso a menos que a frequência que desejássemos excitar fosse exatamente igual a uma dada frequência de ressonância da cavidade. Uma cavidade real na verdade não apresenta este conjunto perfeitamente discreto de autofrequências, mas sim bandas estreitas de frequência ao redor de cada auto frequência nas quais excitações apreciáveis do campo podem ocorrer. Uma fonte importante do aparecimento destas bandas de frequência, no lugar de um espectro puramente discreto, é a dissipação da energia do campo nas paredes da cavidade (que na realidade não são constituídas de condutores ideais) e eventualmente dissipações no próprio dielétrico (se não tivermos um bom vácuo) interno à cavidade. A idéia básica é mais ou menos a seguinte: excitar os modos do campo no interior da cavidade corresponde a armazenar energia no seu interior (isto é, nos campos E e B internos à cavidade). Agora, se há perdas, esta energia decairá com o passar do tempo, tipicamente de uma forma exponencial. Se τ for o “tempo de vida” de um dado modo normal, então, pelas propriedades da transformada de Fourier, teremos $\tau\Delta\omega \sim 1$ onde $\Delta\omega$ será a largura da banda ao redor deste modo normal.

A dissipação nas paredes da cavidade ocorre, basicamente, da seguinte forma [12]: devido ao fato do condutor do qual são constituídas as suas paredes não ser ideal (apresentar uma condutividade finita) temos a componente tangencial do campo elétrico, $E_{||}$, não nula na superfície do condutor. Consequentemente, temos uma componente do vetor de Poynting que é ortogonal à superfície. Isto indica que temos um fluxo de energia do interior da cavidade para dentro do condutor. Este fluxo de energia gera uma corrente próxima à superfície do condutor, que sofre então dissipação ôhmica.

1.2 Definição do Fator de Qualidade Q

Define-se a “qualidade” de uma cavidade ressonante através do parâmetro Q dado por

$$Q = \frac{\text{energia total armazenada na cavidade}}{2\pi \times (\text{energia perdida durante o período de uma oscilação})} \quad (2.1)$$

$$= \frac{\text{energia total armazenada na cavidade}}{w_o \frac{\text{potência dissipada}}{Q}},$$

onde w_o é a frequência do modo ressonante, assumindo-se a não existência de perturbação. Pela conservação da energia, a potência dissipada é o negativo da taxa de variação da energia armazenada U . Assim, de (2.1), podemos escrever a equação para o comportamento de U como função do tempo:

$$\frac{d}{dt}U = -\frac{w_o}{Q}U, \quad (2.2)$$

que apresenta a solução (considerando que Q é independente do tempo, como demonstrado em [12])

$$U(t) = U_o e^{-(w_o/Q)t}. \quad (2.3)$$

Se a quantidade de energia inicial U_o é armazenada na cavidade, ela irá decair exponencialmente com uma constante de decaimento inversamente proporcional a Q . A dependência temporal de $U(t)$ em (2.3) implica em que as oscilações do campo [cujo quadrado da amplitude é proporcional à energia armazenada, eq.(1.4)] na cavidade devam sofrer um decaimento da forma ³

$$E(t) = E_o e^{-\gamma t} e^{-i w_o t} \quad \text{onde} \quad \gamma = w_o/2Q \quad (2.4)$$

Uma oscilação amortecida como esta não constitui-se em uma frequência pura, mas sim de uma superposição de frequências em torno de w_o . Temos então (assumindo que as oscilações tenham início em $t = 0$)

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(w) e^{i w t} dw, \quad (2.5)$$

onde

$$E(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} E_o e^{-(w_o/2Q)t} e^{i(w-w_o)t} dt \quad (2.6)$$

$$= \frac{-E_o}{\sqrt{2\pi} [i(w-w_o) - w_o/2Q]}.$$

A densidade de energia por unidade de frequência é proporcional a $|E(w)|^2$, que é dada pela Lorentziana

$$|E(w)|^2 = \frac{E_o^2}{2\pi [(w-w_o)^2 + (w_o/2Q)^2]}. \quad (2.7)$$

A “curva de ressonância” apresenta uma largura Δw (a meia altura) igual a w_o/Q . Se o campo na cavidade for criado através de uma excitação constante a distribuição da energia na cavidade, como função da frequência, irá obedecer à curva de ressonância na vizinhança das frequências ressonantes.

Em geral a frequência de ressonância sofre também um deslocamento Δw_o devido a dissipação na cavidade [12] ($\Delta w_o \simeq -w_o/2Q$ para uma cavidade cilíndrica com alto Q).

O cálculo de Q [12] não é importante para nós, mas podemos destacar que o valor de Q depende da geometria da cavidade, da condutividade de suas paredes (tanto maior quanto maior a condutividade) e da frequência do modo considerado.

1.3 Uma Cavidade Composta por Espelhos Não Ideais

Consideremos agora uma cavidade unidimensional hipotética composta por dois espelhos, ambos apresentando uma refletividade R , com $R < 1$ (espelhos não ideais), separados por uma distância l [13]. Depois de um tempo $t = n2l/c$, correspondente a n excursões entre os dois espelhos, o campo elétrico de uma onda eletromagnética clássica na posição x (para uma determinada polarização), $E(x)$, irá decair de seu valor inicial em $t = 0$, devido as reflexões parciais nos espelhos, da seguinte forma⁴

$$E(x, t) = E(x, 0) R^n, \quad (2.8)$$

assumindo-se que não haja mudança de fase na reflexão. Substituindo $n = ct/2l$ em (2.8), obtemos

$$E(x, t) = E(x, 0) e^{-\gamma t}, \quad (2.9)$$

onde $\gamma = -c \ln(R)/2l$. Se os espelhos forem suficientemente bons refletores, tal que a radiação eletromagnética realize várias excursões no interior da cavidade antes de perder uma pequena fração de sua energia, isto é, se o tempo de decaimento for muito maior que o tempo de vôo de um sinal de luz no interior da cavidade, nós podemos desprezar o fato das perdas serem localizadas nos espelhos e assumir que estas sejam homogeneamente distribuídas no interior da cavidade e que ocorram continuamente no tempo. Neste caso (2.9) é uma boa aproximação para todo $t > 0$, até mesmo para tempos que não sejam múltiplos dos tempos de excursão [13].

No tratamento anterior da cavidade com paredes condutoras consideramos a dissipação originada pelo fluxo de energia do campo para o interior dos condutores. Já neste tratamento da cavidade com paredes compostas de espelhos não ideais (com uma transmissividade não nula) a dissipação origina-se devido ao fluxo de energia para fora da cavidade (assumimos que a dissipação que poderia ocorrer no interior dos espelhos, devido a existência de uma estrutura interna destes, não é apreciável). Por outro lado, havendo um campo eletromagnético externo à cavidade não nulo este também poderá transferir-se parcialmente para o interior desta. Este último efeito não foi considerado no desenvolvimento acima. Logo, para que a eq.(2.9) seja válida é necessário que a energia média do campo externo, geralmente uma radiação de corpo negro, não seja comparável a energia média do campo interno à cavidade. A temperatura zero não há radiação de corpo negro e a eq.(2.9) é válida. Tal restrição também é válida no tratamento anterior da cavidade com paredes condutoras. A radiação de corpo negro proveniente destas paredes também tem de ser desprezível comparada à radiação interna.

2 Tratamento Quântico de uma Cavidade Dissipativa

2.1 Descrição da Interação Modo da Cavidade-Reservatório

Como vimos na seção anterior o decaimento da energia do campo eletromagnético interno a uma cavidade ocorre devido à transferência progressiva (e irreversível) desta energia para um outro sistema que encontra-se acoplado a este campo segundo as propriedades da cavidade considerada. Como vimos, tal sistema seria o conjunto das próprias paredes de uma cavidade limitada por condutores não ideais, ou o campo externo de uma cavidade limitada por espelhos não ideais. A

⁴Considerando agora o campo elétrico como um trem de onda de comprimento muito menor que l .

descrição quântica deste sistema pode então ser realizada através de um modelo, fenomenológico, que considere o acoplamento do campo interno da cavidade a um *reservatório externo*, com um número muito grande de graus de liberdade, que irá então absorver, de maneira irreversível, a energia do campo [2] [14] .

Consideremos então tal modelo com a seguinte Hamiltoniana

$$H = H_{campo} + H_{res} + H_{int}. \quad (2.10)$$

Sendo H_{campo} a Hamiltoniana que descreve o campo interno à cavidade, H_{res} a Hamiltoniana do *reservatório* e H_{int} a Hamiltoniana de interação entre estes dois sistemas.

O campo interno à cavidade é quantizado como se tivéssemos uma cavidade ideal, o que nos leva a modos perfeitamente discretos em seu interior e a operadores de campo, E , B e H , descritos por (1.1), (1.2) e (1.5). O fato da cavidade não ser ideal é então levado em conta justamente ao considerarmos a existência do acoplamento do campo interno ao *reservatório*. A Hamiltoniana do campo interno é então dada por (medindo-se a energia a partir do ponto zero)

$$H_{campo} = \hbar \omega_o a^+ a, \quad (2.11)$$

onde consideramos que haja um único modo de frequência ω_o excitado na cavidade.

No caso do nosso reservatório ser o campo externo à cavidade a sua Hamiltoniana será dada por

$$H_{res} = \sum_i \hbar \omega_i b_i^+ b_i, \quad (2.12)$$

onde o conjunto $\{\omega_i\}$ deve abranger todo o espectro possível de excitações deste campo externo (com $[b_i, b_j^+] = \delta_{ij}$), sendo no final dos cálculos tomado o limite de um espectro contínuo. No caso do nosso reservatório ser o conjunto das próprias paredes da cavidade a mesma Hamiltoniana (2.12) é válida. Neste caso ela representa a energia quantizada dos modos vibracionais elásticos das paredes da cavidade. Os quanta de energia das vibrações elásticas são chamados de *fônons* e os operadores de criação e destruição neste caso também satisfazem as relações bosônicas de comutação.

Resta-nos definir uma Hamiltoniana de interação. A interação deve permitir a troca de quanta de energia entre o campo e o reservatório. Fótons do modo ω_o do campo podem ser absorvidos pelo reservatório (gerando fônons ou fótons do campo externo). Por outro lado, flutuações térmicas e de ponto zero do reservatório podem ser espalhadas no modo ω_o . Podemos visualizar o efeito líquido de tais processos como a destruição de fótons do campo e a criação simultânea de fótons (fônons) do reservatório, bem como o processo inverso. Podemos assim escrever uma Hamiltoniana efetiva para tal interação da forma

$$H_{int} = \hbar \sum_i (a^+ + a) (k_i b_i + k_i^* b_i^+), \quad (2.13)$$

onde consideramos apenas processos (de criação ou destruição simultânea) de um fóton ⁵ e temos então um acoplamento bilinear. Os coeficientes de acoplamento k_i dependem da intensidade do acoplamento do mecanismo real de interação.

Em geral ([2] , [14]) desconsidera-se na Hamiltoniana de interação os processos $k_i a b_i + k_i^* a^+ b_i^+$, nos quais dois quanta são aniquilados e criados (transições virtuais). A não inclusão destes termos

Processos de criação ou destruição de dois ou mais fótons em geral só são importantes quando o processo de um fóton não é permitido ou temos intensidades de campo muito altas [2] , o que estamos supondo não ser o nosso caso.

na Hamiltoniana de interação é chamada de *aproximação de onda girante* [14], e temos então

$$H_{int}^A = \hbar \sum_i (k_i b_i a^\dagger + k_i^* b_i^\dagger a). \quad (2.14)$$

Podemos argumentar em favor de tal aproximação da seguinte forma. Apenas aqueles modos que conservam energia ($w_i \approx w_o$) e momento ($k_i \approx k_o$) interagem fortemente. Se não houvesse H_{int} , os operadores a e b_i evoluiriam como $a(t) = ae^{-i\omega_o t}$ e $b_i(t) = b_i e^{-i\omega_o t}$. Supondo agora que H_{int} exista, mas que a evolução livre dos operadores não seja perturbada fortemente (permanecendo dominante), os termos de (2.14) evoluirão aproximadamente como $e^{\pm i(w_i - \omega_o)t}$, que é aproximadamente igual a um para $w_i \approx \omega_o$, enquanto os termos omitidos de (2.13) evoluiriam aproximadamente como $e^{\pm i(w_i + \omega_o)t}$, e portanto variariam rapidamente. Para tempos longos comparados com ω_o^{-1} , por exemplo o tempo de decaimento γ^{-1} do modo na cavidade, estes termos apresentarão um efeito médio aproximadamente nulo e podemos assim desprezá-los.

2.2 Tratamento via Equação Mestra

Sistemas quânticos, na versão de Schrödinger, em geral são descritos através da evolução de vetores de estado, $|\psi(t)\rangle$. Entretanto, tais sistemas também podem ser descritos através da evolução de operadores densidade, $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ [9]. Tal descrição é particularmente interessante quando temos um sistema global, composto por dois subsistemas interagentes, e estamos interessados em descrever apenas as propriedades de um destes subsistemas. Neste caso não é possível associarmos vetores de estado individuais a estes subsistemas [9] (poderíamos, em princípio, trabalhar com o vetor de estado do sistema todo, mas tal procedimento geraria, em geral, uma série de complicações desnecessárias). Entretanto, podemos associar operadores densidade reduzidos a estes subsistemas. O conhecimento da evolução de tais operadores nos permite então calcular a evolução de qualquer propriedade do nosso subsistema associado. Assim, se tivermos um sistema global $\mathcal{A} + \mathcal{R}$, o operador densidade reduzido σ do subsistema $\mathcal{A}$ é obtido tomando-se o *traço parcial* sobre as variáveis de $\mathcal{R}$ do operador ρ do sistema global

$$\sigma = \text{Tr}_{\mathcal{R}} \rho, \quad \text{onde} \quad \sigma_{ab} = \langle a | \sigma | b \rangle = \sum_{\mu} \langle a, \mu | \rho | b, \mu \rangle = \sum_{\mu} \rho_{a, \mu, b, \mu}^{\mathcal{A} + \mathcal{R}}. \quad (2.15)$$

A equação de evolução para $\sigma(t)$, em um processo Markoviano (como veremos), é chamada de *Equação Mestra*. No tratamento da cavidade dissipativa o subsistema $\mathcal{A}$ de interesse será o modo eletromagnético excitado na cavidade, e o subsistema $\mathcal{R}$, interagente com $\mathcal{A}$, será o nosso reservatório. Seguiremos basicamente os desenvolvimentos apresentados em [2], [14] e [17].

2.2.1 Descrição da Evolução de Parte de um Sistema:

Seja a Hamiltoniana de um sistema global $\mathcal{A} + \mathcal{R}$ dada por:

$$H = H_A + H_R + V, \quad (2.16)$$

onde H_A é a Hamiltoniana do subsistema $\mathcal{A}$, H_R a Hamiltoniana do subsistema $\mathcal{R}$ e V é a interação entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}$. A evolução do operador densidade ρ do sistema global $\mathcal{A} + \mathcal{R}$ é governada pela equação de von Neumann:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho(t)], \quad (2.17)$$

que, na representação de interação com respeito a $H_A + H_R$, torna-se

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(t)], \quad (2.18)$$

onde $\tilde{\rho}(t) = e^{i(H_A+H_R)t/\hbar} \rho(t) e^{-i(H_A+H_R)t/\hbar}$ e $\tilde{V}(t) = e^{i(H_A+H_R)t/\hbar} V(t) e^{-i(H_A+H_R)t/\hbar}$. A vantagem da representação de interação é que, se V for pequeno, $\tilde{\rho}(t)$ irá evoluir lentamente, e particularmente não conterá mais as exponenciais da evolução livre. Da eq.(2.18) temos (pelo processo tradicional de integração e iteração)

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\rho}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' [\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t)] + \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' [\tilde{V}(t'), [\tilde{V}(t''), \tilde{\rho}(t'')]] , \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde $\Delta\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t + \Delta t) - \tilde{\rho}(t)$.

Uma vez que estamos interessados apenas no subsistema $\mathcal{A}$, basta-nos o operador densidade reduzido na representação de interação:

$$\tilde{\sigma}(t) = Tr_R \tilde{\rho}(t). \quad (2.20)$$

Tomando o traço de (2.19) temos:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\sigma}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' Tr_R [\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t)] + \\ &\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_R [\tilde{V}(t'), [\tilde{V}(t''), \tilde{\rho}(t'')]] . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Até este ponto nenhuma aproximação foi feita e (2.21) é exata. Entretanto, (2.21) ainda não nos fornece, de uma forma clara, a equação de evolução para $\tilde{\sigma}(t)$. Para que possamos prosseguir é necessário introduzirmos algumas aproximações, baseadas em suposições quanto às propriedades do sistema $\mathcal{R}$, que consideraremos como sendo um reservatório.

2.2.2 Suposições Referentes ao Subsistema $\mathcal{R}$ (ou Reservatório):

O operador densidade reduzido do subsistema $\mathcal{R}$ será $\tilde{\sigma}_R(t) = Tr_A \tilde{\rho}(t)$. Suporemos que $\mathcal{R}$ seja um reservatório, isto é, que $\mathcal{R}$ seja um sistema com um número muito grande de graus de liberdade, tal que possamos considerar que a variação de $\tilde{\sigma}_R(t)$ devido ao acoplamento com $\mathcal{A}$ é muito pequena. Assim, podemos considerar que $\tilde{\sigma}_R(t)$ seja constante na representação de interação (na qual uma eventual evolução seria devido a interação com $\mathcal{A}$):

$$\tilde{\sigma}_R(t) \simeq \tilde{\sigma}_R(0) = \sigma_R. \quad (2.22)$$

Assumiremos ainda que $\mathcal{R}$ esteja em um estado estacionário, isto é,

$$[\sigma_R, H_R] = 0. \quad (2.23)$$

Logo, σ_R não possui elementos diagonais entre autoestados de H_R com diferentes autovalores, e pode portanto ser escrito como uma mistura estatística de autoestados $|\mu\rangle$ de H_R ($H_R |\mu\rangle = E_\mu |\mu\rangle$) com pesos p_μ

$$\sigma_R = \sum_{\mu} p_{\mu} |\mu\rangle \langle \mu|. \quad (2.24)$$

Como caso particular temos o equilíbrio termodinâmico de $\mathcal{R}$ a uma temperatura T :

$$p_\mu = Z^{-1} e^{-E_\mu/k_B T}, \text{ onde } Z = \sum_\mu e^{-E_\mu/k_B T}. \quad (2.25)$$

Consideraremos que a interação V entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}$ possa ser escrita como o produto de um observável A de $\mathcal{A}$ por um observável R de $\mathcal{R}$, isto é, $V = -AR$. Na representação de interação temos então:

$$\tilde{V}(t) = -\tilde{A}(t)\tilde{R}(t). \quad (2.26)$$

Suporemos ainda que o valor médio de R no estado σ_R , de $\mathcal{R}$, seja zero, isto é

$$\langle R \rangle = \text{Tr} [\sigma_R R] = \text{Tr} [\sigma_R \tilde{R}(t)] = 0. \quad (2.27)$$

Logo, temos que o valor médio do acoplamento $\tilde{V}(t)$ é nulo,

$$\text{Tr}_R [\sigma_R \tilde{V}(t)] = 0. \quad (2.28)$$

Na verdade a suposição (2.27) não é uma restrição verdadeira. A suposição a ser utilizada é que (2.28) seja satisfeita, e para tanto não precisamos satisfazer necessariamente (2.27). Podemos também redefinir uma nova Hamiltoniana H'_A e uma nova interação V' , $H'_A = H_A + \text{Tr}_R [\sigma_R V]$ e $V' = V - (\text{Tr}_R [\sigma_R V]) \otimes 1_R$, e assegurar que (2.28) será satisfeita mesmo que (2.27) não seja.

Consideremos agora a função de correlação do reservatório, $h(t', t'')$, definida como:

$$h(t', t'') = \text{Tr} [\sigma_R \tilde{R}(t') \tilde{R}(t'')] = \langle \tilde{R}(t') \tilde{R}(t'') \rangle_R, \quad (2.29)$$

onde $\langle \rangle_R$ indica a média sobre o reservatório no estado definido por σ_R . Utilizando $\tilde{R}(t) = e^{iH_R t/\hbar} R e^{-iH_R t/\hbar}$ bem como a invariância do traço em uma permutação cíclica podemos escrever

$$h(t', t'') = h(\tau) = \langle \tilde{R}(\tau) \tilde{R}(0) \rangle_R, \quad (2.30)$$

onde $\tau = t' - t''$. Mostra-se ainda que $h(-\tau) = h(\tau)^*$. Podemos separar as partes reais e imaginárias de $h(\tau)$ escrevendo

$$h(\tau) = \frac{1}{2} \langle \{ \tilde{R}(\tau), \tilde{R}(0) \} \rangle_R + \frac{i}{2} \langle [\tilde{R}(\tau), \tilde{R}(0)] \rangle_R = C_R(\tau) + i\varphi_R(\tau). \quad (2.31)$$

A função real $C_R(\tau)$ descreve as flutuações do observável R do reservatório, enquanto a função real $\varphi_R(\tau)$ está diretamente relacionada com a sua susceptibilidade linear que permite a caracterização da sua resposta linear a uma perturbação externa ([2], [15]). Tipicamente a função $h(\tau)$ tende rapidamente a zero à medida que τ aumenta. O tempo de correlação do reservatório τ_c é então definido como a ordem de grandeza da largura em τ de $h(\tau)$. No final desta seção apresentaremos os fatores que determinam o tempo de correlação de um reservatório com H_R dada pela expressão (2.12) de H_{res} e V dada pela expressão (2.14) de H_{int} , que na verdade é a situação que nos interessa.

2.2.3 Cálculo Perturbativo da Taxa de Variação $\frac{\Delta \tilde{\sigma}}{\Delta t}$:

Realizaremos agora algumas aproximações, conhecidas como aproximações de Born-Markov, na equação (2.21) e obteremos a equação mestra para $\tilde{\sigma}(t)$.

Definiremos como T_R o tempo característico de evolução de $\tilde{\sigma}(t)$. Lembrando que tal operador encontra-se na representação de interação, a sua evolução dá-se exclusivamente devido à interação

com o reservatório. Vemos então que T_R é o tempo de evolução característico, independente da sua evolução livre, gerado no nosso sistema $\mathcal{A}$ devido, exclusivamente, a este ter sido acoplado ao reservatório $\mathcal{R}$.

Se $\Delta t \ll T_R$, e se V for relativamente pequena (o quão pequena veremos na seqüência), podemos desprezar a evolução de $\tilde{\rho}$ entre t'' e t no último termo de (2.21) e substituir $\tilde{\rho}(t'')$ por $\tilde{\rho}(t)$ [2]. Tal aproximação é equivalente a um processo iterativo no qual apenas os termos até segunda ordem em V são mantidos, aproximação esta conhecida como aproximação de Born.

Depois desta aproximação o lado direito de (2.21) irá conter apenas $\tilde{\rho}(t)$, que pode sempre ser escrito na forma

$$\tilde{\rho}(t) = Tr_R \tilde{\rho}(t) \otimes Tr_A \tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}_{correl}(t), \quad (2.32)$$

onde $\tilde{\rho}_{correl}(t)$, por ser a diferença entre $\tilde{\rho}(t)$ e o produto dos operadores densidade reduzidos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}$, irá descrever a correlação que existe entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}$ no instante t [9]. Se $\Delta t \gg \tau_c$ podemos desprezar a contribuição de $\tilde{\rho}_{correl}(t)$ no cálculo de $\Delta\tilde{\sigma}(t)$ [2]. A idéia geral é que as correlações existentes entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}$ num dado tempo t irão desaparecer depois de um tempo τ_c e portanto irão contribuir muito pouco para a evolução de $\tilde{\sigma}$ em um intervalo $[t, t + \Delta t]$, que é muito maior que τ_c . Entretanto, novas correlações entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}$ estarão sendo continuamente criadas (devido à interação entre estes sistemas) e destruídas durante o intervalo Δt , e serão estas correlações que irão gerar a evolução de $\tilde{\sigma}$. Ao desprezarmos $\tilde{\rho}_{correl}(t)$ estamos simplesmente desprezando a influência de uma única correlação, em meio à influência de um número muito grande destas. Teremos então $\tilde{\rho}(t) \simeq Tr_R \tilde{\rho}(t) \otimes Tr_A \tilde{\rho}(t) = \tilde{\sigma}(t) \otimes \sigma_R$. Todavia, devemos atentar para o fato de que este argumento só é válido para desprezarmos uma determinada correlação inicial $\tilde{\rho}_{correl}(t)$ se esta correlação for do mesmo tipo daquelas criadas, e supostamente destruídas em um intervalo de tempo τ_c , pela interação entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}$ descrita por V .

Realizando estas aproximações em (2.21) [e lembrando que (2.28) anula o primeiro termo de (2.21)] temos

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t} = -\frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_R \left[\tilde{V}(t'), \left[\tilde{V}(t''), \tilde{\sigma}(t) \otimes \sigma_R \right] \right]. \quad (2.33)$$

A taxa de variação $\Delta\tilde{\sigma}/\Delta t$ é chamada de taxa de variação de “grão-grosso”, pois podemos escrever $\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t} = \frac{\tilde{\sigma}(t+\Delta t) - \tilde{\sigma}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \frac{d\tilde{\sigma}}{dt'}$ o que indica que $\Delta\tilde{\sigma}/\Delta t$ é o valor médio da taxa de variação instantânea $d\tilde{\sigma}/dt$ em um intervalo Δt . Assim, a influência das variações rápidas na taxa instantânea são mantidas apenas através do seu efeito líquido no intervalo de tempo Δt . A idéia geral do nosso procedimento é a seguinte: temos um sistema $\mathcal{A}$, que ao ser acoplado a um sistema $\mathcal{R}$, passa a sofrer perturbações em uma escala de tempo característica τ_c . Tais perturbações evidentemente influenciam a evolução do sistema $\mathcal{A}$, que passa (devido a estas perturbações) a apresentar um tempo de evolução característico T_R (sobreposto a sua evolução livre). O nosso objetivo é então determinar o comportamento do sistema $\mathcal{A}$ numa escala de tempo da ordem de T_R . Se T_R for muito maior que τ_c (como em geral é o caso se $\mathcal{R}$ for um reservatório) podemos analisar a evolução $\Delta\tilde{\sigma}$ do sistema em um intervalo de tempo Δt , tal que $\Delta t \gg \tau_c$, de tal forma que tenhamos uma boa descrição do efeito líquido de um grande número de perturbações. Por outro lado se simultaneamente $\Delta t \ll T_R$, então a taxa de variação de “grão-grosso” $\Delta\tilde{\sigma}/\Delta t$ que obteremos em nossa análise poderá, para efeito do cálculo de evoluções em escalas de tempo da ordem de T_R , ser aproximada por uma taxa de variação “instantânea”, isto é, nestas condições podemos substituir $\Delta\tilde{\sigma}/\Delta t$ por $d\tilde{\sigma}/dt$ (tal substituição será feita no momento apropriado). Obtemos, assim, uma equação de evolução relativamente simples para $\tilde{\sigma}(t)$. Tal procedimento é o mesmo freqüentemente utilizado na obtenção de equações de Fokker-Planck na mecânica estatística clássica [16].

As nossas aproximações nos levaram a $\Delta\tilde{\sigma}/\Delta t$ dependente apenas do estado $\tilde{\sigma}(t)$ do sistema $\mathcal{A}$ no instante t , isto significa que, examinando o sistema com uma resolução temporal não muito

alta, obtivemos uma evolução de $\mathcal{A}$ dependente exclusivamente do seu estado presente e em nada do seu passado ⁶, tal comportamento corresponde ao de um sistema Markoviano. O sistema $\mathcal{A}$, em outras palavras, não tem mais nenhuma memória do seu passado. Esta situação é considerada como condição suficiente para que a energia que flui de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{R}$ não possa mais retornar para $\mathcal{A}$.

Agora, o traço sobre as variáveis de $\mathcal{R}$ em (2.33) irá evidenciar as funções $h(\tau)$ e $h(-\tau)$ [lembrando que $\tilde{V}(t)$ é dada por (2.26)]. Então, é conveniente mudarmos as variáveis de integração fazendo: $\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' = \int_0^{\Delta t} d\tau \int_{t+\tau}^{t+\Delta t} dt'$. Considerando que $h(\tau)$ é desprezível para $\tau > \tau_c$ (portanto os integrandos são nulos nestas regiões) e que $\Delta t \gg \tau_c$, podemos fazer as aproximações $\int_{t+\tau}^{t+\Delta t} dt' \simeq \int_t^{t+\Delta t} dt'$ e $\int_0^{\Delta t} d\tau \simeq \int_0^\infty d\tau$ (que correspondem então a acrescentarmos um região de integração, na qual o integrando é não nulo, desprezível). Assim, teremos de (2.33):

$$\frac{\Delta \tilde{\sigma}}{\Delta t} = \frac{-1}{\hbar^2 \Delta t} \int_0^\infty d\tau \int_t^{t+\Delta t} dt' \times \left\{ \begin{aligned} &h(\tau) \left[\tilde{A}(t') \tilde{A}(t' - \tau) \tilde{\sigma}(t) - \tilde{A}(t' - \tau) \tilde{\sigma}(t) \tilde{A}(t') \right] + \\ &+ h(-\tau) \left[\tilde{\sigma}(t) \tilde{A}(t' - \tau) \tilde{A}(t') - \tilde{A}(t') \tilde{\sigma}(t) \tilde{A}(t' - \tau) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (2.34)$$

2.2.4 Condição para a Validade das Aproximações de Born-Markov:

As aproximações introduzidas acima são válidas desde que tenhamos um Δt tal que

$$\tau_c \ll \Delta t \ll T_R. \quad (2.35)$$

Para que possamos satisfazer (2.35) é necessário que tenhamos

$$\tau_c \ll T_R, \quad (2.36)$$

que é satisfeita desde que [2]

$$\frac{v\tau_c}{\hbar} \ll 1, \quad (2.37)$$

sendo v^2 a ordem de grandeza de $\langle V^2 \rangle_R$ onde

$$\langle V^2 \rangle_R = Tr_R (\sigma_R V^2). \quad (2.38)$$

Logo, o parâmetro v caracteriza a intensidade do acoplamento entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}$. Portanto, vemos que quanto maior a intensidade do acoplamento menor deverá ser o tempo de correlação do reservatório, e vice-versa, para que as aproximações sejam válidas.

2.2.5 Equação Mestra para o Modo Eletromagnético:

Consideremos agora a situação específica em que H_A , H_R e V são dados por H_{campo} , H_{res} e H_{int}^A , respectivamente [equações (2.11), (2.12) e (2.14)]. Neste caso podemos escrever V como

$$V = -\hbar [a^+ R^{(+)} + a R^{(-)}], \quad (2.39)$$

onde

$$R^{(+)} = - \sum_i k_i b_i \quad \text{e} \quad R^{(-)} = - \sum_i k_i^* b_i^+. \quad (2.40)$$

O procedimento que adotamos acima pode ser generalizado para uma interação V na forma de uma soma de produtos de observáveis A_i de $\mathcal{A}$ e R_i de $\mathcal{R}$, isto é, $V = - \sum_i A_i R_i$. Neste caso (2.34) é substituída por [14]

Propriedade esta que absolutamente não é óbvia considerando que $\mathcal{A}$ está acoplado e portanto sofrendo a influência de um outro sistema $\mathcal{R}$.

$$\frac{\Delta \tilde{\sigma}}{\Delta t} = \frac{-1}{\hbar^2 \Delta t} \int_0^\infty d\tau \int_t^{t+\Delta t} dt' \times \left\{ \begin{aligned} & h_{ij}^{(1)}(\tau) \left[\tilde{A}_i(t') \tilde{A}_j(t' - \tau) \tilde{\sigma}(t) - \tilde{A}_j(t' - \tau) \tilde{\sigma}(t) \tilde{A}_i(t') \right] + \\ & + h_{ji}^{(2)}(\tau) \left[\tilde{\sigma}(t) \tilde{A}_j(t' - \tau) \tilde{A}_i(t') - \tilde{A}_i(t') \tilde{\sigma}(t) \tilde{A}_j(t' - \tau) \right] \end{aligned} \right\}, \quad (2.41)$$

onde $h_{ij}^{(1)}(\tau) = \langle \tilde{R}_i(\tau) \tilde{R}_j(0) \rangle_R$ e $h_{ji}^{(2)}(\tau) = \langle \tilde{R}_j(0) \tilde{R}_i(\tau) \rangle_R$.

Considerando então V dada por (2.39) [lembrando que σ_R é diagonal na base dos autoestados de H_R (ver (2.23) e (2.24)), e observando que $\tilde{a}(t) = a e^{-i\omega_o t}$ e $\tilde{b}_i(t) = b_i e^{-i\omega_i t}$] temos

$$\frac{\Delta \tilde{\sigma}}{\Delta t} = \left[\begin{aligned} & (a \tilde{\sigma} a^+ - a^+ a \tilde{\sigma}) \int_0^\infty d\tau \langle \tilde{R}^{(+)}(\tau) \tilde{R}^{(-)}(0) \rangle_R e^{i\omega_o \tau} + \\ & + (a^+ \tilde{\sigma} a - \tilde{\sigma} a a^+) \int_0^\infty d\tau \langle \tilde{R}^{(-)}(0) \tilde{R}^{(+)}(\tau) \rangle_R e^{i\omega_o \tau} \end{aligned} \right] + c.h. \quad (2.42)$$

sendo

$$\langle \tilde{R}^{(+)}(\tau) \tilde{R}^{(-)}(0) \rangle_R = \sum_i |k(w_i)|^2 (\langle n(w_i) \rangle_R + 1) e^{-i\omega_i \tau}, \quad (2.43)$$

$$\langle \tilde{R}^{(-)}(0) \tilde{R}^{(+)}(\tau) \rangle_R = \sum_i |k(w_i)|^2 \langle n(w_i) \rangle_R e^{-i\omega_i \tau}, \quad (2.44)$$

onde $\langle n(w_i) \rangle_R = \langle b_i^+ b_i \rangle_R$ é o número médio de quanta de excitação no estado de frequência w_i do reservatório, que, estando o reservatório em equilíbrio termodinâmico a temperatura T , é dado por $\langle n(w_i) \rangle_R = [\exp(\hbar w_i / k_B T) - 1]^{-1}$. Considerando o limite de um espectro contínuo para o reservatório, podemos mudar as somatórias para integrais, isto é,

$$\sum_i \{ \} \rightarrow \int_0^\infty dw g(w) \{ \}, \quad (2.45)$$

sendo então $g(w) dw$ o número de modos do reservatório entre w e $w + dw$. A primeira integral de (2.42) resulta então em

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dw g(w) |k(w)|^2 (\langle n(w) \rangle_R + 1) \int_0^\infty d\tau e^{-i(w-\omega_o)\tau} = \\ & = \int_0^\infty dw g(w) |k(w)|^2 (\langle n(w) \rangle_R + 1) \left[i\mathcal{P} \frac{1}{\omega_o - w} + \pi \delta(\omega_o - w) \right] = \\ & = \gamma (1 + \langle n(\omega_o) \rangle_R) + i(\Delta w + \Delta' w), \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde

$$\gamma = \pi g(\omega_o) |k(\omega_o)|^2, \quad \Delta w = \mathcal{P} \int_0^\infty dw \frac{g(w) |k(w)|^2}{\omega_o - w}, \quad (2.47)$$

$$\Delta' w = \mathcal{P} \int_0^\infty dw \frac{g(w) \langle n(w) \rangle_R |k(w)|^2}{\omega_o - w}. \quad (2.48)$$

A segunda integral de (2.42), resulta em

$$\int_0^\infty dw g(w) |k(w)|^2 \langle n(w) \rangle_R \int_0^\infty d\tau e^{-i(w-\omega_o)\tau} = \gamma \langle n(\omega_o) \rangle_R + i\Delta' w \quad (2.49)$$

Finalmente, substituindo (2.46) e (2.49) em (2.42), temos a *equação mestra* na representação de

interação

$$\frac{d\tilde{\sigma}'}{dt} = \gamma [2a\tilde{\sigma}'a^+ - a^+a\tilde{\sigma}' - \tilde{\sigma}'a^+a] + 2\gamma \langle n(w_o) \rangle_R [a^+\tilde{\sigma}'a + a\tilde{\sigma}'a^+ - a^+a\tilde{\sigma}' - \tilde{\sigma}'aa^+] , \quad (2.50)$$

onde o apóstrofo em $\tilde{\sigma}'$ indica que estamos agora na representação de interação com H_{campo} substituída por $H'_{campo} = \hbar(w_o + \Delta w) a^+a = \hbar w'_o a^+a$, já que o único efeito de Δw , proporcional ao acoplamento $|k|^2$, é mudar a frequência ressonante w_o da cavidade⁷. O termo em γ representa uma perda de energia para o reservatório (através de processos de emissão espontânea), enquanto o termo em $2\gamma \langle n(w_o) \rangle_R$ representa a difusão das flutuações do reservatório no modo da cavidade (através de processos de absorção ou emissão estimulada). Se o reservatório estiver a temperatura zero teremos $\langle n(w) \rangle_R = 0$ e (2.50) torna-se

$$\frac{d\tilde{\sigma}'}{dt} = \gamma [2a\tilde{\sigma}'a^+ - a^+a\tilde{\sigma}' - \tilde{\sigma}'a^+a] . \quad (2.51)$$

2.2.6 Análise das Funções de Correlação:

As funções de correlação que aparecem no desenvolvimento que nos leva à equação mestra (2.50) são

$$h^{(1)}(\tau) = \langle \tilde{R}^{(+)}(\tau) \tilde{R}^{(-)}(0) \rangle = \sum_i |k_i|^2 (\langle n_i \rangle_R + 1) e^{-i w_i \tau} , \quad (2.52)$$

$$h^{(2)}(\tau) = \langle \tilde{R}^{(-)}(0) \tilde{R}^{(+)}(\tau) \rangle = \sum_i |k_i|^2 \langle n_i \rangle_R e^{-i w_i \tau} . \quad (2.53)$$

Assumimos, em nosso desenvolvimento, que tais funções de correlação decaem rapidamente a zero à medida que τ aumenta e chamamos de τ_c a ordem de grandeza da largura em τ destas funções. Veremos agora como este tempo τ_c depende das propriedades supostas em relação ao nosso sistema. Podemos escrever $h^{(2)}(\tau)$ como a transformada de Fourier

$$h^{(2)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{(2)}(w) e^{-i w \tau} dw , \quad (2.54)$$

onde

$$\mathcal{H}^{(2)}(w) = \sum_i |k(w_i)|^2 \langle n(w_i) \rangle_R \delta(w - w_i) . \quad (2.55)$$

Agora tomemos o limite de um contínuo de modos para o reservatório. Consideremos então $\mathcal{H}^{(2)}(w)$ uma função que se estenda sobre um intervalo de largura Δw_R , centrada em uma frequência $\bar{w}$, e podemos escrever $h^{(2)}(\tau)$ como

$$h^{(2)}(\tau) = e^{i \bar{w} \tau} h_c^{(2)}(\tau) , \quad \text{onde} \quad h_c^{(2)}(\tau) = \int_0^{\infty} \mathcal{H}^{(2)}(w + \bar{w}) e^{-i w \tau} dw . \quad (2.56)$$

Logo, $h_c^{(2)}(\tau)$ é a transformada de Fourier de uma função de largura Δw_R , centrada em $w = 0$, e portanto $h_c^{(2)}(\tau)$ apresenta uma largura, ou tempo de correlação τ_c , da ordem de $1/\Delta w_R$. Logo o reservatório deve apresentar um espectro amplo de excitações, caracterizado por $g(w) \langle n(w) \rangle_R$

Na representação de Schrödinger a equação (2.50) teria a mesma forma apenas com $\tilde{\sigma}'$ substituído por σ e com um termo a mais do lado direito, da forma $-i(w_o + \Delta w) [a^+a, \sigma]$, representando a evolução livre do modo da cavidade. Observe ainda que $\Delta'w$ (2.48) não aparece na correção da frequência de ressonância [2] .

(no limite do contínuo), e o nosso modelo fenomenológico de acoplamento com o reservatório não deve pressupor uma “função acoplamento” $|k(w)|^2$ muito estreita.

A função de correlação $h^{(1)}(\tau)$ será dada pela transformada de Fourier de $\mathcal{H}^{(2)}(w)$ mais a transformada de Fourier de $\mathcal{H}_{vac}(w) = \sum_i |k(w_i)|^2 \delta(w - w_i)$, que independe das excitações existentes no reservatório. Portanto, um modelo fenomenológico em que $g(w) |k(w)|^2$ seja uma função ampla é essencial. O tempo de correlação do reservatório, no estado de vácuo, será da ordem de $1/\overline{\Delta\omega}$,

$$\tau_c^{vac} \sim 1/\overline{\Delta\omega}, \quad (2.57)$$

onde $\overline{\Delta\omega}$ é a largura aproximada da função $g(w) |k(w)|^2$.

2.3 Solução da Equação Mestra

2.3.1 Apresentação da Solução Geral:

Vamos agora obter a solução da equação mestra (2.51), que determina a evolução do nosso modo eletromagnético em contato com um reservatório a temperatura zero, na representação de interação

$$\frac{d\tilde{\sigma}'}{dt} = \gamma [2a\tilde{\sigma}'a^+ - a^+a\tilde{\sigma}' - \tilde{\sigma}'a^+a]. \quad (2.58)$$

A equação mestra acima pode ser escrita, em uma “representação de dissipação” [19], como

$$\frac{d\tilde{\sigma}'}{dt} = (L + J)\tilde{\sigma}', \quad (2.59)$$

onde os operadores J e L são definidos através de suas ações sobre o operador densidade $\tilde{\sigma}'$

$$J\tilde{\sigma}' = 2\gamma a\tilde{\sigma}'a^+ \quad \text{e} \quad L\tilde{\sigma}' = -\gamma (a^+a\tilde{\sigma}' + \tilde{\sigma}'a^+a). \quad (2.60)$$

A solução de (2.60) é então

$$\tilde{\sigma}'(t) = e^{(L+J)t}\tilde{\sigma}'(0). \quad (2.61)$$

Escrita na forma acima a solução (2.61) nos é de pouca utilidade. Para podermos calcular a evolução de $\tilde{\sigma}'(t)$, utilizando as definições (2.60), é necessário termos a exponencial $e^{(L+J)t}$ escrita na forma de um produto de operadores, isto é, $e^{(L+J)t} = e^{Lt}F(J, t)$. Portanto, procuramos uma solução da forma ([19], [20])

$$\tilde{\sigma}'(t) = e^{Lt}F(J, t)\tilde{\sigma}'(0). \quad (2.62)$$

Substituindo (2.62) em (2.59) obtemos a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}F(J, t) = e^{-Lt}Je^{Lt}F(J, t). \quad (2.63)$$

Das definições (2.60) podemos facilmente obter a relação de comutação

$$[L, J] = 2\gamma J. \quad (2.64)$$

Utilizando agora a relação de Baker-Hausdorff [21] temos

$$e^{-Lt}Je^{Lt} = J - t[L, J] + \frac{t^2}{2!}[L, [L, J]] + \dots \quad (2.65)$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} F(J, t) = J e^{-2\gamma t} F(J, t). \quad (2.66)$$

A equação acima, sujeita a condição de contorno $F(J, 0) = 1$ [proveniente de (2.62)], tem como solução

$$F(J, t) = \exp \left[\frac{J}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \right]. \quad (2.67)$$

Temos então a solução da equação mestra escrita como

$$\tilde{\sigma}'(t) = \exp(Lt) \exp \left[\frac{J}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \right] \tilde{\sigma}'(0). \quad (2.68)$$

Escrevendo as exponenciais na forma de séries e utilizando a definição (2.60), é fácil vermos que

$$e^{Lt} \tilde{\sigma}' = e^{-\gamma a^+ a t} \tilde{\sigma}' e^{-\gamma a^+ a t}. \quad (2.69)$$

Logo, uma forma alternativa de (2.68) é

$$\tilde{\sigma}'(t) = e^{-\gamma a^+ a t} \left\{ \exp \left[\frac{J}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \right] \tilde{\sigma}'(0) \right\} e^{-\gamma a^+ a t}. \quad (2.70)$$

2.3.2 Evolução de um Estado Coerente:

Vamos agora assumir que o estado inicial do nosso modo eletromagnético interno à cavidade esteja preparado em um estado coerente $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$, isto é,

$$\tilde{\sigma}'(0) = |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (2.71)$$

(o estado do sistema global seria $|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle |0\rangle$, com o reservatório no estado de vácuo já que o consideramos a temperatura zero). Temos então que $J^n |\alpha\rangle \langle \alpha| = (2\gamma |\alpha|^2)^n |\alpha\rangle \langle \alpha|$ e portanto

$$\exp \left[\frac{J}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \right] |\alpha\rangle \langle \alpha| = \exp [|\alpha|^2 (1 - e^{-2\gamma t})] |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (2.72)$$

Observemos ainda que de (1.18) temos

$$\begin{aligned} e^{-\gamma a^+ a t} |\alpha\rangle &= e^{-\gamma a^+ a t} \left(e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-\gamma t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \exp \left[\frac{|\alpha e^{-\gamma t}|^2}{2} \right] |\alpha e^{-\gamma t}\rangle = \exp \left[-\frac{|\alpha|^2}{2} (1 - e^{-2\gamma t}) \right] |\alpha e^{-\gamma t}\rangle. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Portanto,

$$e^{-\gamma a^+ a t} |\alpha\rangle \langle \alpha| e^{-\gamma a^+ a t} = \exp [-|\alpha|^2 (1 - e^{-2\gamma t})] |\alpha e^{-\gamma t}\rangle \langle \alpha e^{-\gamma t}|. \quad (2.74)$$

Assim, substituindo (2.71), (2.72) e (2.74) em (2.70), temos

$$\tilde{\sigma}'(t) = |\alpha e^{-\gamma t}\rangle \langle \alpha e^{-\gamma t}| \quad \text{ou} \quad |\tilde{\psi}'(t)\rangle = |\alpha e^{-\gamma t}\rangle. \quad (2.75)$$

Vemos então que o estado coerente do campo permanece um estado coerente durante o decaimento, mas com uma amplitude que decai exponencialmente com o tempo. No limite de $t \rightarrow \infty$ o campo atingirá o estado de vácuo $\tilde{\sigma}'(t \rightarrow \infty) = |0\rangle\langle 0|$. Isto, a princípio, está de acordo com as nossas expectativas, uma vez que identificamos os estados coerentes como os estados que recuperam as propriedades clássicas dos campos eletromagnéticos, e como vimos nas equações (2.4) e (2.9), os campos em cavidades apresentam classicamente este tipo de decaimento. Entretanto, a dissipação, em geral, causa o aparecimento de um outro fenômeno, chamado *decoerência*. Tal fenômeno faz com que estados puros de um subsistema ligado a um reservatório, responsável pelo surgimento da dissipação no subsistema, sejam transformados em misturas estatísticas. O estado coerente é um estado puro. Portanto, deste ponto de vista, é estranho a existência de estados coerentes dissipativos. Esta questão será novamente abordada ao longo deste trabalho.

Se voltarmos para a representação de Schrödinger, e lembrando que $w'_o = w_o + \Delta w$ ⁸, temos

$$|\psi(t)\rangle = |\alpha e^{-i(w_o + \Delta w)t} e^{-\gamma t}\rangle, \quad (2.76)$$

onde como vimos

$$\gamma = \pi g(w_o) |k(w_o)|^2, \quad \Delta w = \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{g(w) |k(w)|^2}{w_o - w} dw. \quad (2.77)$$

Classicamente também aparece um deslocamento Δw na frequência de ressonância w_o (ver nota de rodapé da página 12).

Diagonalização Exata das Hamiltonianas Dissipativas

1 O Procedimento de Diagonalização de Fano

Consideremos um sistema que apresente uma Hamiltoniana da forma [22]

$$H = H_o + V \quad (3.1)$$

Sendo que a Hamiltoniana H_o apresenta um autoestado discreto $|\varphi\rangle$ bem como um contínuo de autoestados $|\psi_{E_o,\beta}\rangle$. Nos autoestados $|\psi_{E_o,\beta}\rangle$ temos E_o representando o autovalor associado à H_o (energia não perturbada) e β representando o conjunto de números quânticos necessários para distinguirmos um estado $|\psi_{E_o,\beta}\rangle$ entre os demais estados ortogonais que apresentam a mesma energia E_o . Logo, os autoestados $|\psi_{E_o,\beta}\rangle$ não são degenerados e serão representados simplesmente por $|\psi_{E'}\rangle$. O autoestado discreto $|\varphi\rangle$ é então acoplado ao conjunto contínuo de estados, $\{|\psi_{E'}\rangle\}$, através da Hamiltoniana de acoplamento V . Usaremos $v_{E'}$ para denotar o elemento de matriz $\langle\psi_{E'}|V|\varphi\rangle$. Assumiremos ainda que a Hamiltoniana de acoplamento V não apresente elementos de matriz no subespaço dos vetores contínuos⁹ e também que $\langle\varphi|V|\varphi\rangle = 0$. Resumindo nós temos:

$$\langle\varphi|H|\varphi\rangle = E_\varphi, \quad (3.2)$$

$$\langle\psi_{E'}|H|\psi_{E''}\rangle = E'\delta(E' - E''), \quad (3.3)$$

$$\langle\psi_{E'}|H|\varphi\rangle = v_{E'}, \quad (3.4)$$

sendo as relações de ortonormalização e fechamento dadas por

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = 1, \quad \langle\psi_{E'}|\psi_{E''}\rangle = \delta(E' - E''), \quad \langle\varphi|\psi_{E''}\rangle = 0, \quad (3.5)$$

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| + \int dE' |\psi_{E'}\rangle\langle\psi_{E'}| = 1. \quad (3.6)$$

Entende-se ainda que a energia do nível discreto E_φ esteja contida dentro do contínuo de valores E' . A representação matricial de H seria então

$$H \equiv \begin{bmatrix} E_\varphi & v_{E'} & v_{E'} & \cdots \\ v_{E'}^* & E' & 0 & \\ v_{E'}^* & 0 & E'' & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Caso tal situação inicialmente não seja satisfeita, basta-nos realizar previamente a diagonalização de V no subespaço dos autovetores contínuos, e redefinir uma H'_o como H_o somada à V diagonalizada. Estando V previamente diagonalizada no contínuo os autoestados $|\psi_{E'}\rangle$ que não estiverem acoplados a $|\varphi\rangle$ ($\langle\psi_{E'}|V|\varphi\rangle = 0$) permanecerão como autoestados de H com autovalor E , e não precisam ser incluídos na diagonalização.

O conhecimento dos autovalores e autovetores da Hamiltoniana (3.7) nos permite determinar a dinâmica do sistema. Cada valor de energia E , contido dentro do contínuo de valores E' , é um autovalor da matriz (3.7),

$$H |\Psi_E\rangle = E |\Psi_E\rangle. \quad (3.8)$$

O autovetor correspondente, que desejamos determinar, tem a forma

$$|\Psi_E\rangle = \alpha_E |\varphi\rangle + \int dE' \beta_{E,E'} |\psi_{E'}\rangle. \quad (3.9)$$

Agora, projetando (3.8) sobre os bras $\langle\varphi|$ e $\langle\psi_{E'}|$ [com $|\Psi_E\rangle$ em (3.8) escrito na forma (3.9) e utilizando (3.2) à (3.5)] obtemos as equações

$$E_\varphi \alpha_E + \int dE' v_{E'}^* \beta_{E,E'} = E \alpha_E, \quad (3.10)$$

$$v_{E'} \alpha_E + E' \beta_{E,E'} = E \beta_{E,E'} \quad (3.11)$$

Obteremos a solução exata desse sistema de equações, diagonalizando assim a Hamiltoniana (3.1).

O sistema (3.10-3.11) possui peculiaridades devido ao espectro contínuo. Para resolvê-lo podemos expressar $\beta_{E,E'}$ em termos de α_E , utilizando (3.11), e substituir o resultado em (3.10). Entretanto, este procedimento envolve uma divisão por $E - E'$, que pode ser zero. Porém, a teoria de distribuições nos permite escrever a solução geral de (3.11) como

$$\beta_{E,E'} = \left[\mathcal{P} \frac{1}{E - E'} + z(E) \delta(E - E') \right] v_{E'} \alpha_E, \quad (3.12)$$

onde $\mathcal{P}$ indica o valor principal e $z(E)$ é, a princípio, uma função arbitrária de E a ser determinada. Para tanto, substituímos (3.12) em (3.10). O coeficiente α_E é fatorado e (3.10) reduz-se a

$$E_\varphi + F(E) + z(E) |v_E|^2 = E, \quad (3.13)$$

onde

$$F(E) = \mathcal{P} \int dE' \frac{|v_{E'}|^2}{E - E'}. \quad (3.14)$$

Temos então

$$z(E) = \frac{E - E_\varphi - F(E)}{|v_E|^2}. \quad (3.15)$$

As equações (3.9), (3.12) e (3.15) nos permitem determinar os novos autovetores $|\Psi_E\rangle$ a menos de um coeficiente de normalização, α_E . Este é determinado pela relação de ortonormalização $\langle\Psi_E|\Psi_{\tilde{E}}\rangle = \delta(E - \tilde{E})$ para os novos autovetores

$$\langle\Psi_E|\Psi_{\tilde{E}}\rangle = \alpha_E \alpha_{\tilde{E}}^* + \int dE' \beta_{E,E'} \beta_{\tilde{E},E'}^* = \delta(E - \tilde{E}). \quad (3.16)$$

Utilizando, então, a equação (3.12), temos

$$\alpha_E \alpha_{\tilde{E}}^* \left\{ 1 + \int dE' |v_{E'}|^2 \left[\mathcal{P} \frac{1}{E - E'} + z(E) \delta(E - E') \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\mathcal{P} \frac{1}{\tilde{E} - E'} + z(\tilde{E}) \delta(\tilde{E} - E') \right] \right\} = \delta(E - \tilde{E}). \quad (3.17)$$

Lembrando agora que [22]

$$\mathcal{P}_{\frac{1}{E-E'}} \mathcal{P}_{\frac{1}{\tilde{E}-E'}} = \frac{1}{E-\tilde{E}} \left(\mathcal{P}_{\frac{1}{\tilde{E}-E'}} - \mathcal{P}_{\frac{1}{E-E'}} \right) + \pi^2 \delta(E - \tilde{E}) \delta \left[E' - \frac{1}{2} (E + \tilde{E}) \right], \quad (3.18)$$

bem como

$$\delta(E - E') \delta(\tilde{E} - E') = \delta(E - \tilde{E}) \delta \left[E' - \frac{1}{2} (\tilde{E} + E) \right], \quad (3.19)$$

$$f(E') \delta(E - E') = f(E) \delta(E - E'). \quad (3.20)$$

Podemos então expandir os produtos em (3.17), utilizando (3.18-3.20), e obter

$$\begin{aligned} |\alpha_E|^2 |v_E|^2 [\pi^2 + z^2(E)] \delta(E - \tilde{E}) + \\ + \alpha_E \alpha_E^* \left\{ 1 + \frac{1}{E-\tilde{E}} \left[F(E) - F(\tilde{E}) + z(E) |v_E|^2 - z(\tilde{E}) |v_{\tilde{E}}|^2 \right] \right\} = \\ = \delta(E - \tilde{E}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

A expressão entre colchetes é nula, devido a (3.13), e portanto (3.21) é satisfeita se

$$|\alpha_E|^2 = \frac{1}{|v_E|^2 [\pi^2 + z^2(E)]} = \frac{|v_E|^2}{[E - E_\varphi - F(E)]^2 + [\pi |v_E|^2]^2}. \quad (3.22)$$

Temos então α_E determinado, a menos de uma fase arbitrária (que gera uma fase global em $|\Psi_E\rangle$ e que portanto não apresenta efeitos físicos). Podemos então escrever

$$\alpha_E = \frac{v_E}{[E - E_\varphi - F(E)] \pm i\pi |v_E|^2}, \quad (3.23)$$

sendo arbitrária a adoção do sinal + ou do sinal -.

Suponhamos agora que $|v_E|^2$ seja uma função de variação suave e que apresente uma largura da ordem de ΔE . Consequentemente $F(E)$, pela sua forma (3.14), será também uma função suave, da ordem de $|v_E|^2$, e apresentará também uma largura da ordem de ΔE^{10} . Suponhamos ainda que $\pi |v_{E_\varphi}|^2 \ll \Delta E$. Neste caso podemos aproximar (3.22) por¹¹

$$|\alpha_E|^2 \simeq \frac{|v_{E_\varphi}|^2}{[E - E_\varphi - F(E_\varphi)]^2 + [\pi |v_{E_\varphi}|^2]^2}. \quad (3.24)$$

Por exemplo, para uma função $|v_E|^2$ que seja igual a uma constante $|v|^2$ para $E_1 < E < E_2$ e nula fora desta região teremos $F(E) = |v|^2 \ln \left(\frac{E_2/E-1}{1-E_1/E} \right)$, para $E \neq E_1$ e $E \neq E_2$. Esta função $F(E)$ apresenta um máximo em E_1 e um mínimo em E_2 . Entretanto, mesmo para E próxima a E_1 e $E_2 \gg E$ esta função é da ordem de $|v|^2$. Por exemplo, para $E = 2E_1$ e $E_2 = 10^2 E_1$ teremos $F(E) \simeq 5,2 |v|^2$. É também fácil de vermos que esta função é suave e apresenta uma largura da ordem da largura de $|v_E|^2$.

A aproximação feita em (3.24) pode ser feita sob condições menos restritivas. Se $|v_E|^2$ e $F(E)$ forem ambas funções suaves em uma região de largura $\Delta E'$ em torno E_φ , e tivermos $\pi |v_E|^2 \ll \Delta E'$ e também $F(E) \ll \Delta E'$, para $[E - E_\varphi - F(E_\varphi)]$ da ordem de $\pi |v_E|^2$, podemos fazer a aproximação (3.24). Entretanto, $F(E)$ (para E fora da região em que $[E - E_\varphi - F(E_\varphi)] \sim \pi |v_E|^2$) não deve voltar a aproximar-se de $E - E_\varphi$ (quando então teríamos novamente $|\alpha_E|^2 \sim 1/\pi^2 |v_E|^2$) por uma diferença da ordem de $|v_E|^2$ (a menos que grandezas da ordem de $1/\pi^2 |v_E|^2$ sejam desprezíveis para tal valor de E).

Temos então uma Lorentziana, centrada em $E_\varphi + F(E_\varphi)$, de largura (a meia altura) $2\pi |v_{E_\varphi}|^2$. Lembrando que $|\alpha_E|^2 = |\langle \varphi | \Psi_E \rangle|^2$, isto é, $|\alpha_E|^2$ é a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado $|\varphi\rangle$, vemos que após o acoplamento com o contínuo $|\psi_{E'}\rangle$ o nível discreto $|\varphi\rangle$ sofre um deslocamento $F(E_\varphi)$ em sua energia e é espalhado sobre um intervalo de largura $2\pi |v_{E_\varphi}|^2$ no novo contínuo $|\Psi_E\rangle$. Em outras palavras, apenas aqueles estados do novo contínuo localizados em um intervalo da ordem de $2\pi |v_{E_\varphi}|^2$, em torno de $E_\varphi + F(E_\varphi)$, manterão alguma memória do estado $|\varphi\rangle$ em suas funções de onda, os demais estados $|\psi_{E'}\rangle$ do contínuo, com E' fora desta região, permanecerão praticamente inalterados e com os mesmos autovalores ($|\Psi_E\rangle = |\psi_{E'}\rangle$, $E = E'$).

Se o sistema for preparado no estado $|\varphi\rangle$, em um certo instante $t = 0$, $|\Psi(0)\rangle = |\varphi\rangle$, a densidade de probabilidade de que este ainda encontre-se neste estado em um instante t posterior é dada por

$$\langle \varphi | \Psi(t) \rangle = \int_0^\infty dE \frac{|v_{E_\varphi}|^2 e^{-iEt/\hbar}}{[E - E_\varphi - F(E_\varphi)]^2 + [\pi |v_{E_\varphi}|^2]^2}. \quad (3.25)$$

Agora se o nosso sistema satisfizer a condição

$$\pi |v_{E_\varphi}|^2 \ll E_\varphi + F(E_\varphi), \quad (3.26)$$

podemos estender o limite inferior da integral acima de 0 para $-\infty$, introduzindo um erro desprezível. Neste caso podemos então calcular facilmente esta integral pelo método dos resíduos e temos

$$\langle \varphi | \Psi(t) \rangle = e^{-i[E_\varphi + \Delta E_\varphi]t/\hbar} e^{-\Gamma t/2}, \quad (3.27)$$

onde

$$\Delta E_\varphi = F(E_\varphi), \quad \Gamma = 2\pi |v_{E_\varphi}|^2 / \hbar. \quad (3.28)$$

Vemos então que o estado $|\varphi\rangle$ sofre um deslocamento de $\Delta E_\varphi = F(E_\varphi)$ em sua energia e que a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado $|\varphi\rangle$, no instante t , é então

$$|\langle \varphi | \Psi(t) \rangle|^2 = e^{-\Gamma |t|}. \quad (3.29)$$

Logo, o estado $|\varphi\rangle$ decai exponencialmente como uma constante de tempo Γ^{-1} .

Consideramos acima a situação em que um único estado discreto $|\varphi\rangle$ é acoplado a um conjunto de estados $|\psi_{E'}\rangle$ pertencentes a um espectro contínuo. Lembramos, entretanto, que o procedimento de diagonalização de Fano pode ser generalizado para situações em que tenhamos mais de um estado discreto acoplado a um contínuo ou mais de um contínuo acoplado ao estado discreto [22].

2 Passagem para o Contínuo das Hamiltonianas Dissipativas

Geralmente as Hamiltonianas dos modelos dissipativos são inicialmente escritas considerando-se as possíveis energias (frequências) de excitação do reservatório como formando um conjunto discreto. O limite de um espectro contínuo de excitações é tomado então no final dos cálculos através da mudança $\sum_i \rightarrow \int d\omega g(\omega)$, como nós fizemos no Capítulo 2. O que nós faremos agora é considerar, desde o início, o espectro de excitações do reservatório como formando um contínuo. Utilizaremos então o procedimento de diagonalização de Fano para diagonalizarmos a Hamiltoniana (2.10).

As Hamiltonianas do reservatório e de interação eram dadas por (2.12) e (2.13)

$$H_{res} = \sum_i \hbar \omega_i b_i^\dagger b_i, \quad (3.30)$$

$$H_{int} = \hbar (a^+ + a) \sum_i (k_i b_i + k_i^* b_i^+) . \quad (3.31)$$

Podemos reescrever estas Hamiltonianas considerando um espectro contínuo utilizando-nos da transformação¹² entre os operadores discretos b_i e os contínuos b_ω

$$b_i = \sqrt{g(\omega_i)} \int_{1/g(\omega_i)} d\omega b_\omega, \quad (3.32)$$

onde $g(\omega_i) d\omega_i$ é o número de modos do reservatório com frequências entre ω_i e $\omega_i + d\omega_i$ e $\int_{1/g(\omega_i)} d\omega$ representa uma integração em uma faixa de largura $1/g(\omega_i)$ em torno de ω_i . Os operadores b_ω satisfazem então a relação de comutação¹³

$$[b_\omega, b_{\omega'}^+] = \delta(\omega - \omega'), \quad (3.33)$$

com os demais comutadores nulos.

Sob a transformação (3.32) temos que (3.30) torna-se

$$H_{res} = \int \hbar \omega b_\omega^+ b_\omega d\omega. \quad (3.34)$$

Analogamente temos

$$\begin{aligned} H_{int} &= \hbar (a^+ + a) \sum_i \sqrt{g(\omega_i)} \left[k(\omega_i) \int_{1/g(\omega_i)} d\omega b_\omega + k^*(\omega_i) \int_{1/g(\omega_i)} d\omega b_\omega^+ \right] \\ &= \hbar (a^+ + a) \sum_i \int_{1/g(\omega_i)} d\omega \sqrt{g(\omega)} [k(\omega) b_\omega + k^*(\omega) b_\omega^+] \\ &= \hbar (a^+ + a) \int d\omega \sqrt{g(\omega)} [k(\omega) b_\omega + k^*(\omega) b_\omega^+], \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde consideramos que $g(\omega_i)$ e $k(\omega_i)$ são constantes dentro do intervalo $1/g(\omega_i)$ e que $\sum_i \int_{1/g(\omega_i)} d\omega$ nada mais é que $\int d\omega$, onde esta última integral abrange todo o espectro possível de excitações do reservatório. Podemos então escrever

$$H_{int} = \hbar (a^+ + a) \int (v_\omega b_\omega + v_\omega^* b_\omega^+) d\omega, \quad (3.36)$$

sendo

$$v_\omega = \sqrt{g(\omega)} k(\omega). \quad (3.37)$$

Análoga à transformação (A.24) do Apêndice A.

Podemos mostrar facilmente que a transformação (3.32) está de acordo com as relações de comutação $[b_i, b_j^+] = \delta_{ij}$ e $[b_\omega, b_{\omega'}^+] = \delta(\omega - \omega')$, uma vez que:

$$\begin{aligned} [b_i, b_j^+] &= \sqrt{g(\omega_i) g(\omega_j)} \int_{1/g(\omega_i)} d\omega \int_{1/g(\omega_j)} d\omega' [b_\omega, b_{\omega'}^+] \\ &= \sqrt{g(\omega_i) g(\omega_j)} \int_{1/g(\omega_i)} d\omega \int_{1/g(\omega_j)} d\omega' \delta(\omega - \omega') \\ &= \sqrt{g(\omega_i) g(\omega_j)} \int_{1/g(\omega_i)} d\omega \delta_{ij} = \delta_{ij} g(\omega_i) \int_{1/g(\omega_i)} d\omega = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

onde consideramos que $g(\omega_i)$ é constante dentro do intervalo $1/g(\omega_i)$ e que a interseção entre as regiões $1/g(\omega_i)$ e $1/g(\omega_j)$ é nula para $i \neq j$.

A Hamiltoniana total do nosso sistema será então [de (2.10), (2.11), (3.34) e (3.36)]

$$H = \hbar\omega_o a^+ a + \hbar \int \omega b_\omega^+ b_\omega d\omega + \hbar (a^+ + a) \int (v_\omega b_\omega + v_\omega^* b_\omega^+) d\omega. \quad (3.38)$$

3 Tratamento da Hamiltoniana com a Aproximação de Onda Girante

3.1 Diagonalização da Hamiltoniana H^A

Vamos agora aplicar o procedimento da diagonalização de Fano a fim de diagonalizar a Hamiltoniana de nosso sistema global na aproximação de onda girante, quando então, de (3.38), temos (com a mudança da variável ω para Ω)

$$H^A = \hbar\omega_o a^+ a + \hbar \int \Omega b_\Omega^+ b_\Omega d\Omega + \hbar \int (v_\Omega a^+ b_\Omega + v_\Omega^* a b_\Omega^+) d\Omega. \quad (3.39)$$

Temos por objetivo escrever esta Hamiltoniana na forma diagonal

$$H^A = \hbar \int \omega A_\omega^+ A_\omega d\omega. \quad (3.40)$$

Para tanto temos que encontrar o operador A_ω apropriado. Encontrar um operador A_ω que satisfaça (3.40) é equivalente a encontrar um operador A_ω que satisfaça a

$$[A_\omega, H^A] = \hbar\omega A_\omega, \quad (3.41)$$

$$[A_\omega, A_{\tilde{\omega}}^+] = \delta(\omega - \tilde{\omega}), \quad (3.42)$$

$$[A_\omega, A_{\tilde{\omega}}] = 0. \quad (3.43)$$

Na verdade (3.43) é uma conseqüência de (3.41) e (3.42).

O novo operador A_ω deve poder ser escrito em termos do operador a , do sistema, e dos operadores b_Ω , do reservatório, na forma

$$A_\omega = \alpha_\omega a + \int d\Omega \beta_{\omega,\Omega} b_\Omega. \quad (3.44)$$

Substituindo esta expressão para A_ω , bem como a expressão (3.39) para H^A , em (3.41) e utilizando as relações de comutação: $[a, a^+] = 1$, $[b_\Omega, b_{\Omega'}^+] = \delta(\Omega - \Omega')$ e com os demais comutadores nulos, temos

$$\begin{aligned} \alpha_\omega \hbar\omega_o a + \alpha_\omega \hbar \int d\Omega v_\Omega b_\Omega + \hbar \int d\Omega \beta_{\omega,\Omega} \Omega b_\Omega + \hbar \int d\Omega \beta_{\omega,\Omega} v_\Omega^* a = \\ = \hbar\omega (\alpha_\omega a + \int d\Omega \beta_{\omega,\Omega} b_\Omega). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Agora, tomando o comutador desta expressão com a^+ e b_Ω^+ , nós obtemos

$$\omega_o \alpha_\omega + \int d\Omega v_\Omega^* \beta_{\omega,\Omega} = \omega \alpha_\omega, \quad (3.46)$$

$$v_\Omega \alpha_\omega + \Omega \beta_{\omega,\Omega} = \omega \beta_{\omega,\Omega}, \quad (3.47)$$

respectivamente. Comparando estas equações com as equações (3.10) e (3.11) vemos que elas são idênticas sob a mudança de variáveis: $E_\varphi \rightarrow \omega_o$, $E \rightarrow \omega$ e $E' \rightarrow \Omega$. Temos ainda que a relação de

comutação (3.42), com A_ω substituído pela expressão (3.44), resulta em

$$\alpha_\omega \alpha_\omega^* + \int d\Omega \beta_{\omega,\Omega} \beta_{\omega,\Omega}^* = \delta(\omega - \tilde{\omega}). \quad (3.48)$$

A equação acima é idêntica a (3.16), sob a mesma mudança de variáveis. Logo, temos um sistema de equações idêntico ao tratado na seção anterior, cuja solução nós já conhecemos [de (3.12), (3.15) e (3.23)]. Portanto, temos

$$\alpha_\omega = \frac{v_\omega}{[\omega - \omega_o - F(\omega)] - i\pi |v_\omega|^2}, \quad (3.49)$$

e

$$\beta_{\omega,\Omega} = \left[\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \Omega} + \frac{\omega - \omega_o - F(\omega)}{|v_\omega|^2} \delta(\Omega - \omega) \right] v_\Omega \alpha_\omega, \quad (3.50)$$

onde

$$F(\omega) = \mathcal{P} \int d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\omega - \Omega}. \quad (3.51)$$

3.2 Evolução do Operador a do Sistema

Agora, uma vez que A_ω satisfaz (3.41) a sua evolução, segundo a equação de movimento de Heisenberg, é dada por

$$A_\omega(t) = A_\omega e^{-i\omega t}. \quad (3.52)$$

Podemos calcular a evolução do operador a do sistema expressando-o como função dos operadores A_ω . Expressemos a , como função de A_ω , na forma

$$a = \int d\omega f(\omega) A_\omega. \quad (3.53)$$

Agora, tomemos o comutador $[a, A_\omega^+]$, primeiro utilizando (3.53) e depois (3.44). Temos então

$$[a, A_\omega^+] = \left[\int d\omega f(\omega) A_\omega, A_\omega^+ \right] = f(\omega), \quad (3.54)$$

$$[a, A_\omega^+] = \left[a, \alpha_\omega^* a^+ + \int d\Omega \beta_{\omega,\Omega}^* b_\Omega^+ \right] = \alpha_\omega^*. \quad (3.55)$$

Comparando (3.54) e (3.55) temos $f(\omega) = \alpha_\omega^*$ e portanto, considerando ainda (3.52), vemos que a evolução do operador a é dada por

$$a(t) = \int d\omega \alpha_\omega^* A_\omega e^{-i\omega t}. \quad (3.56)$$

Substituindo nesta equação as expressões (3.49) para α_ω e (3.44) para A_ω [lembrando (3.50)] depois de algum trabalho algébrico temos

$$a(t) = \int d\omega |\alpha_\omega|^2 e^{-i\omega t} a + \int d\Omega v_\Omega \left\{ \int d\omega |\alpha_\omega|^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \Omega} e^{-i\omega t} + \frac{|\alpha_\Omega|^2}{|v_\Omega|^2} [\Omega - \omega_o - F(\Omega)] e^{-i\Omega t} \right\} b_\Omega, \quad (3.57)$$

onde

$$|\alpha_\omega|^2 = \frac{|v_\omega|^2}{[\omega - \omega_o - F(\omega)]^2 + (\pi |v_\omega|^2)^2}, \quad (3.58)$$

$$F(\omega) = \mathcal{P} \int \frac{|v_\Omega|^2}{\omega - \Omega} d\Omega. \quad (3.59)$$

3.3 Evolução do Estado Coerente

3.3.1 Evolução Exata:

Vamos agora supor que inicialmente o nosso sistema esteja em um estado coerente $|\alpha\rangle$ e que o reservatório esteja no estado de vácuo $|0\rangle$, o que corresponde ao reservatório a temperatura zero. Neste caso, substituindo $a(t)$ por (3.57), temos

$$a(t)|\alpha, 0\rangle = \int d\omega |\alpha_\omega|^2 e^{-i\omega t} \alpha |\alpha, 0\rangle \quad (3.60)$$

uma vez que $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ e $b_\Omega|0\rangle = 0$. Passando (3.60) do formalismo de Heisenberg para o formalismo de Schrödinger, temos

$$a|\alpha, 0; t\rangle = \alpha \int d\omega |\alpha_\omega|^2 e^{-i\omega t} |\alpha, 0; t\rangle. \quad (3.61)$$

Portanto, vemos que o estado coerente do sistema, para o reservatório a uma temperatura zero, permanece um estado coerente (isto é, um autoestado de a) durante a evolução do sistema global, apresentando uma evolução na forma

$$|\alpha; t\rangle = \left| \alpha_t = \alpha \int d\omega |\alpha_\omega|^2 e^{-i\omega t} \right\rangle. \quad (3.62)$$

Observe que (3.60), e conseqüentemente (3.62), são válidas apenas para o reservatório a temperatura zero, quando o seu estado, $|\phi_R\rangle$, é o estado de vácuo, $|0\rangle$, e temos então $b_\Omega|\phi_R\rangle = 0$. Para o reservatório a uma temperatura diferente de zero vemos então que o estado coerente inicial $|\alpha\rangle$ não permanecerá um estado coerente durante a sua evolução.

3.3.2 Evolução Aproximada:

Suponhamos agora, de maneira análoga à aproximação que nos leva a (3.24), que $|v_\omega|^2$ seja uma função de variação suave, que apresente uma largura de ordem $\overline{\Delta\omega}$, e que

$$\pi |v_{\omega_o}|^2 \ll \overline{\Delta\omega}. \quad (3.63)$$

Neste caso podemos aproximar (3.58) por¹⁴

$$|\alpha_\omega|^2 \simeq \frac{|v_{\omega_o}|^2}{[\omega - \omega_o - F(\omega_o)]^2 + [\pi |v_{\omega_o}|^2]^2}. \quad (3.64)$$

Se agora a condição

$$\pi |v_{\omega_o}|^2 \ll \omega_o + F(\omega_o), \quad (3.65)$$

for satisfeita podemos, como já vimos, estender o limite de integração em (3.62) de 0 para $-\infty$, introduzindo um erro desprezível. Teremos então

$$\begin{aligned} \int d\omega |\alpha_\omega|^2 e^{-i\omega t} &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{|v_{\omega_o}|^2 e^{-i\omega t}}{[\omega - \omega_o - F(\omega_o)]^2 + [\pi |v_{\omega_o}|^2]^2} = \\ &= e^{-i[\omega_o + F(\omega_o)]t} e^{-\pi |v_{\omega_o}|^2 t}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde a integral é calculada pelo método de resíduos [como em (3.27)]. Substituindo (3.66) em (3.62), temos

$$|\alpha; t\rangle \simeq |\alpha_t = \alpha e^{-i[\omega_o + \Delta\omega]t} e^{-\gamma t}\rangle \quad (3.67)$$

sendo

$$\gamma = \pi |v_{\omega_o}|^2, \quad \Delta\omega = F(\omega_o) = \mathcal{P} \int d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\omega_o - \Omega}. \quad (3.68)$$

Lembrando agora de (3.37), vemos que (3.67) e (3.68) são exatamente as mesmas equações (2.76) e (2.77) que obtivemos com o tratamento via equação mestra.

3.3.3 Análise das Aproximações:

Vamos agora comparar as aproximações que fizemos para chegarmos a (3.67), a partir de (3.62), com as aproximações que foram necessárias no tratamento do problema via equação mestra.

Segundo [2], como vimos, todas as aproximações utilizadas no desenvolvimento da equação mestra (2.51), cuja solução exata é então dada por (2.76), seriam coerentes desde que (2.36), ou equivalentemente (2.37), seja satisfeita.

Lembrando as definições (2.57) e (3.37) temos que

$$\tau_c^{vac} \sim 1/\Delta\omega \quad (3.69)$$

e portanto, podemos reescrever (3.63) como

$$\tau_c^{vac} |v_{\omega_o}|^2 \ll 1. \quad (3.70)$$

Podemos comparar (3.70) com a condição (2.37) (o denominador $\hbar$ aparece devido a diferença das definições de v_ω e v), ou melhor, lembrando a definição de T_R como o tempo característico de evolução gerado no sistema devido à interação deste com o reservatório, isto é, $T_R \simeq 1/\gamma = 1/\pi |v_{\omega_o}|^2$, podemos reescrever (3.70) da forma

$$\tau_c^{vac} \ll T_R \quad (= 1/\gamma). \quad (3.71)$$

Logo, a condição (3.63) nada mais é que a condição (2.36).

Entretanto, (3.63) não é a única condição necessária para obtermos a evolução do estado coerente precisamente na forma dada por (3.67). É necessário ainda que se satisfaça (3.65), que podemos reescrever como

$$\gamma \ll \omega_o + F(\omega_o). \quad (3.72)$$

Portanto, esta condição deve também ser necessária para a obtenção da equação mestra da forma (2.51). Esta importante condição, estranhamente, não é devidamente evidenciada no procedimento de obtenção das equações mestra apresentado em [2], [14] ou [17], porém, é observada em alguns artigos [18].

3.4 Evolução dos Estados do Reservatório

Seguindo um procedimento análogo ao utilizado na obtenção da expressão (3.56), onde $a(t)$ é representado em termos dos novos operadores A_ω , obtemos a seguinte expressão para a evolução dos operadores b_ω do reservatório:

$$b_\omega(t) = \int d\Omega \beta_{\Omega,\omega}^* A_\Omega e^{-i\Omega t}. \quad (3.73)$$

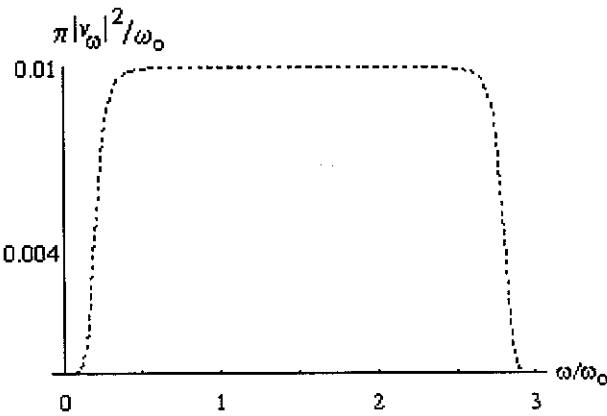
Substituindo as expressões (3.50) para $\beta_{\Omega,\omega}$ e (3.44) para A_ω em (3.73) temos

$$b_\omega(t) = \left(\mathcal{P} \int d\Omega \frac{|\alpha_\Omega|^2}{\Omega - \omega} e^{-i\Omega t} + \frac{\omega - \omega_o - F(\omega)}{|v_\omega|^2} |\alpha_\omega|^2 e^{-i\omega t} \right) v_\omega^* a + \int \int d\Omega d\Omega' \beta_{\Omega,\omega}^* \beta_{\Omega',\omega} e^{-i\Omega t} b_{\Omega'}. \quad (3.74)$$

Novamente vamos supor que o sistema esteja inicialmente em um estado coerente e que o reservatório esteja a temperatura zero, isto é, que o estado inicial do nosso sistema global seja $|\alpha, 0\rangle$. Vemos então de (3.74) que os modos do reservatório evoluirão do estado de vácuo $|0\rangle$ para estados coerentes $|\alpha_{\omega,t}^{(R)}\rangle$, tais que $b_\omega |\alpha_{\omega,t}^{(R)}\rangle = \alpha_{\omega,t}^{(R)} |\alpha_{\omega,t}^{(R)}\rangle$ e onde

$$\alpha_{\omega,t}^{(R)} = \alpha \left(\mathcal{P} \int d\Omega \frac{|\alpha_\Omega|^2}{\Omega - \omega} e^{-i\Omega t} + \frac{\omega - \omega_o - F(\omega)}{|v_\omega|^2} |\alpha_\omega|^2 e^{-i\omega t} \right) v_\omega^*. \quad (3.75)$$

Podemos agora, supor que $|v_\omega|^2$ seja uma função que satisfaça às condições (3.63) e (3.65), como por exemplo a apresentada no gráfico [2.1]. A evolução temporal dos autovalores $\alpha_{\omega,t}^{(R)}$ para este caso é então apresentada no gráfico [2.2]. Podemos assim observar a evolução das excitações dos modos do reservatório. Vemos que os modos excitados são aqueles com frequências ω em torno de $\omega_o + F(\omega_o)$ tais que $\omega - [\omega_o + F(\omega_o)] \sim \gamma (= \pi |v_{\omega_o}|^2)$ (no caso $\omega_o + F(\omega_o) \simeq \omega_o$ uma vez que $F(\omega_o) \sim |v_{\omega_o}|^2 \ll \omega_o$) e que esta excitação ocorre em uma escala de tempo também da ordem de γ .



1.

Gráfico 2.1

Gráfico da função $|v_\omega|^2$ adotada como exemplo. Vemos que ela satisfaz (3.63) e (3.65).

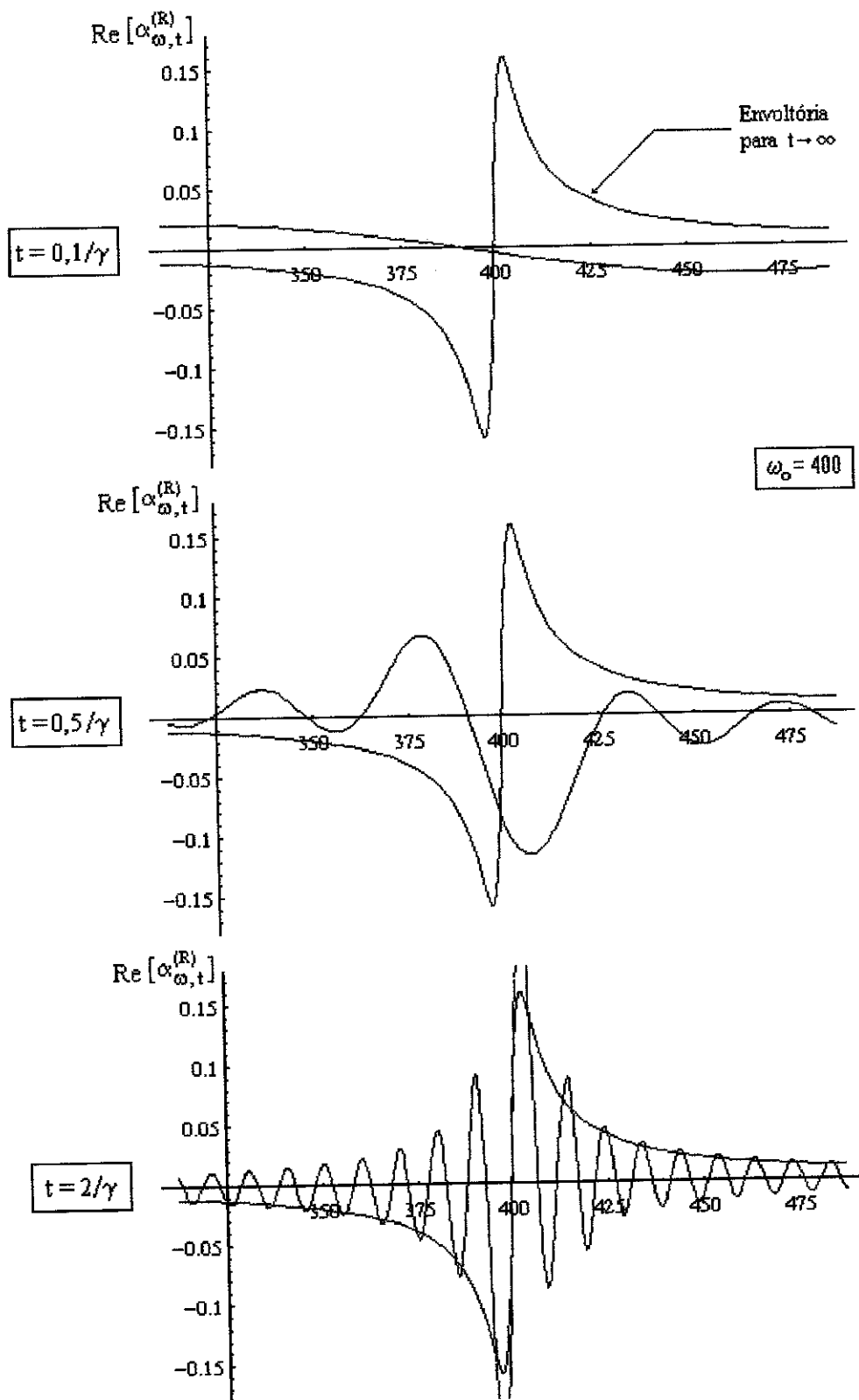


Gráfico 2.2

Gráfico da evolução temporal da parte real dos autovalores $\alpha_{\omega,t}^{(R)}$, dados por (3.75), representando a excitação dos modos do reservatório. A parte imaginária apresenta um comportamento muito semelhante. Inclusive, apresenta a mesma envoltória para $t \gg \pi |v_{\omega_0}|^2$ que é dada por $\frac{\omega - \omega_0 - F(\omega_0)}{|v_{\omega_0}|^2} |\alpha_{\omega_0}|^2 v_{\omega_0}$ (considerando v_{ω_0} real), uma vez que o primeiro termo do lado direito de (3.75) vai a zero neste limite.

4 Tratamento da Hamiltoniana sem a Aproximação de Onda Girante

4.1 Diagonalização da Hamiltoniana

Apresentaremos agora a diagonalização da Hamiltoniana (3.38) sem a aproximação de onda girante. Novamente queremos escrever (3.38) na forma diagonal

$$H = \hbar \int \omega A_{\omega}^{\dagger} A_{\omega} d\omega, \quad (3.76)$$

ou equivalentemente encontrarmos um operador A_{ω} que satisfaça (3.41) e (3.42), com H no lugar de H^A . Escrevemos então A_{ω} na forma

$$A_{\omega} = \alpha_{\omega} a + \int d\Omega \beta_{\omega, \Omega} b_{\Omega} + \chi_{\omega} a^{\dagger} + \int d\Omega \sigma_{\omega, \Omega} b_{\Omega}^{\dagger}. \quad (3.77)$$

Impondo (3.41) e (3.42) obtemos então (ver Apêndice B):

$$\alpha_{\omega} = \frac{v_{\omega} (\omega + \omega_o)}{\omega^2 - \omega_o^2 + 2\omega_o [H(\omega) - i\pi |v_{\omega}|^2]}, \quad (3.78)$$

$$\beta_{\omega, \Omega} = \left[\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \Omega} + z(\omega) \delta(\omega - \Omega) \right] \frac{2\omega_o}{\omega + \omega_o} v_{\Omega} \alpha_{\omega}, \quad (3.79)$$

$$\chi_{\omega} = \frac{\omega - \omega_o}{\omega + \omega_o} \alpha_{\omega}, \quad (3.80)$$

$$\sigma_{\omega, \Omega} = \frac{1}{\omega + \Omega} \frac{2\omega_o}{\omega + \omega_o} v_{\Omega}^* \alpha_{\omega}, \quad (3.81)$$

sendo

$$z(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_o^2 + 2\omega_o H(\omega)}{2\omega_o |v_{\omega}|^2} \quad (3.82)$$

e

$$H(\omega) = G(\omega) - F(\omega) = \int \frac{|v_{\Omega}|^2}{\omega + \Omega} d\Omega - \mathcal{P} \int \frac{|v_{\Omega}|^2}{\omega - \Omega} d\Omega. \quad (3.83)$$

4.2 Evolução do Operador a do Sistema

Podemos expressar a como função de A_{ω} e $A_{\omega}^{\dagger}$ da seguinte forma

$$a = \int d\omega \phi_{\omega} A_{\omega} + \int d\omega \varphi_{\omega} A_{\omega}^{\dagger}. \quad (3.84)$$

Agora, tomando os comutadores $[a, A_{\omega}^{\dagger}]$ e $[a, A_{\omega}]$, com procedimentos análogos ao adotado em (3.54-3.55), obtemos

$$\phi_{\omega} = \alpha_{\omega}^*, \quad \varphi_{\omega} = -\chi_{\omega}. \quad (3.85)$$

Lembrando ainda que $A_{\omega}(t) = A_{\omega} e^{-i\omega t}$ e substituindo a expressão (3.77) para A_{ω} em (3.84)

obtemos a seguinte expressão para $a(t)$ (ver Apêndice B):

$$\begin{aligned}
 a(t) = & \int d\omega |L_\omega|^2 \{ 4\omega_o \omega \cos(\omega t) a - i2 [(\omega^2 + \omega_o^2) a + (\omega^2 - \omega_o^2) a^+] \operatorname{sen}(\omega t) \} + \\
 & + \int d\Omega v_\Omega 2\omega_o \left\{ \int d\omega 2 |L_\omega|^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \left[\begin{aligned} & \omega (\omega_o + \Omega) \cos(\omega t) - \\ & -i (\omega^2 + \omega_o \Omega) \operatorname{sen}(\omega t) \end{aligned} \right] + \right. \\
 & \left. + (\omega_o + \Omega) \frac{|L_\Omega|^2}{|v_\Omega|^2} \left[\frac{\Omega^2 - \omega_o^2}{2\omega_o} + H(\Omega) \right] e^{-i\Omega t} \right\} b_\Omega + \\
 & + \int d\Omega v_\Omega^* 2\omega_o \left\{ \int d\omega 2 |L_\omega|^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \left[\begin{aligned} & \omega (\omega_o - \Omega) \cos(\omega t) - \\ & -i (\omega^2 - \omega_o \Omega) \operatorname{sen}(\omega t) \end{aligned} \right] + \right. \\
 & \left. + (\omega_o - \Omega) \frac{|L_\Omega|^2}{|v_\Omega|^2} \left[\frac{\Omega^2 - \omega_o^2}{2\omega_o} + H(\Omega) \right] e^{i\Omega t} \right\} b_\Omega^+, \quad (3.86)
 \end{aligned}$$

sendo

$$|L_\omega|^2 = \frac{|v_\omega|^2}{[\omega^2 - \omega_o^2 + 2\omega_o H(\omega)]^2 + (2\pi\omega_o |v_\omega|^2)^2}. \quad (3.87)$$

A análise das expressões obtidas sem a aproximação de onda girante será deixada para o Capítulo 5.

O Modelo Caldeira-Leggett de Dissipação

1 A Equação de Langevin Clássica

Um grande número de situações na natureza podem ser adequadamente descritas por um subsistema com um ou poucos graus de liberdade em contato com um sistema bastante complexo, cujo número de graus de liberdade tende a infinito (reservatório). No limite clássico a dinâmica do subsistema é descrita por uma equação de Langevin, cujas características peculiares são a presença de uma força de fricção proporcional à velocidade e de uma força flutuante. Para uma fonte de ruído branco [17] a força de fricção é instantânea e a equação de Langevin tem a forma Markoviana [17]

$$M\ddot{q}(t) + 2M\gamma\dot{q}(t) + V'(q) = F(t), \quad (4.1)$$

onde a força flutuante $F(t)$ é completamente caracterizada pelas médias¹⁵

$$\langle F(t) \rangle = 0, \quad \langle F(t) F(t') \rangle = 4M\gamma kT \delta(t - t'), \quad (4.2)$$

sendo γ o coeficiente de dissipação e T a temperatura do sistema.

A equação de Langevin (4.1) descreve, por exemplo, uma partícula Browniana pesada, de massa M , imersa em um fluido de partículas leves (de massas m tais que $m \ll M$) e sob a ação de uma força sistemática $F = -V'(q)$, onde $V(q)$ é um potencial aplicado externamente.

No caso do reservatório ser uma fonte de ruído colorido [17], como ocorre em alguns casos de interesse, a equação de Langevin apresentará então a forma padrão

$$M\ddot{q}(t) + 2M \int_{-\infty}^t dt' \gamma(t - t') \dot{q}(t') + V'(q) = F(t). \quad (4.3)$$

A força flutuante $F(t)$ obedecerá neste caso às seguintes relações [26]:

$$\langle F(t) \rangle = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle F(t) F(0) \rangle \cos \omega t = 4MkT \tilde{\gamma}'(\omega), \quad (4.4)$$

onde $\tilde{\gamma}'(\omega)$ é a parte real de $\tilde{\gamma}(\omega)$ definida por

$$\tilde{\gamma}(\omega) = \int_0^{\infty} \gamma(t) e^{i\omega t} dt. \quad (4.5)$$

Como qualquer outra equação fenomenológica, a (4.3) (da qual (4.1) é um caso particular) só é válida quando sujeita a determinadas restrições. A equação de Langevin apresenta uma boa descrição da evolução dos subsistemas desde que estejamos interessados em seus comportamentos a tempos longos. Tempos longos, no caso, em relação ao tempo de relaxação do reservatório acoplado

Onde $\langle \rangle$ representa a média estatística sobre um conjunto de sistemas identicamente preparados.

2 Introdução do Modelo Caldeira-Leggett

Na prática, em muitos sistemas, nós não temos um entendimento claro da origem microscópica da dissipação. Entretanto, muitas vezes, sabemos que no limite clássico o sistema evolui segundo a equação de Langevin. Portanto, no tratamento quântico de processos dissipativos, é interessante formularmos explicitamente uma Hamiltoniana para o sistema global interagente (sistema + reservatório) que seja tão geral quanto possível, sujeita apenas à condição de que a evolução do sistema seja dada por (4.3) no limite apropriado. Entretanto, para que os cálculos subsequentes à introdução do modelo sejam factíveis, é necessário impor uma restrição importante sobre este, isto é, de que *qualquer grau de liberdade do reservatório seja apenas fracamente perturbado pela sua interação com o sistema*. Esta suposição é fisicamente razoável quando o reservatório for macroscópico, pois neste caso a interação do sistema com qualquer um dos seus graus de liberdade é geralmente proporcional ao inverso do seu volume (e portanto pequena para um reservatório geometricamente macroscópico), enquanto que a energia deste grau de liberdade é independente do volume. Observe que esta restrição não implica em que o sistema esteja sujeito a uma dissipação “fraca”, pois o número de graus de liberdade do reservatório a ele acoplados é muito grande. Na verdade podemos descrever mesmo sistemas com dissipação muito forte.

Agora, o movimento de qualquer sistema físico que sofre apenas pequenas perturbações em torno da sua posição de equilíbrio pode sempre ser considerado (ao menos a temperatura zero) como equivalente a um conjunto de osciladores harmônicos [1] . A condição de que qualquer grau de liberdade do reservatório seja apenas fracamente perturbado permite ainda considerar um acoplamento sistema-reservatório linear nas coordenadas do reservatório. Assim, pode-se mostrar [1] que a Hamiltoniana mais geral que devemos tratar quando consideramos um sistema fracamente acoplado (no sentido especificado acima) a um reservatório e cuja equação fenomenológica de movimento é dada por (4.3) é da forma

$$H = H_S + H_R + H_I, \quad (4.6)$$

onde

$$H_S = \frac{p^2}{2M} + V(q) \quad (4.7)$$

é a Hamiltoniana do sistema isolado,

$$H_R = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2} \frac{p_j^2}{m_j} + \frac{1}{2} m_j \omega_j^2 x_j^2 \right) \quad (4.8)$$

descreve o reservatório constituído por N osciladores harmônicos e

$$H_I = \sum_{j=1}^N F_j(q) x_j + \Delta V_R(q) \quad (4.9)$$

é o termo de interação. Adicionamos um contratermo $\Delta V_R(q)$ que pode depender dos parâmetros m_j, ω_j do reservatório e de $F_j(q)$, mas não da variável dinâmica x_j .

2.1 A Renormalização do Potencial

A função $\Delta V_R(q)$ em (4.9) serve para compensar o efeito de renormalização da frequência gerado pelo primeiro termo da expressão de H_I . Se fizemos $\Delta V_R(q) = 0$ o valor mínimo da energia potencial do sistema global (sistema + reservatório), para um dado q , ocorre quando $x_j = F_j(q) / m_j \omega_j^2$ para todo j e o “potencial efetivo” resultante é então dado por

$$V_{eff}(q) = V(q) - \sum_{j=1}^N \frac{F_j^2(q)}{2m_j \omega_j^2}. \quad (4.10)$$

No caso especial em que $F_j(q) = C_j q$ (cf. abaixo) o segundo termo de (4.10) causa um deslocamento negativo

$$\Delta \omega^2 = -\frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \frac{C_j^2}{m_j \omega_j^2} \quad (4.11)$$

no quadrado da frequência ω_o das pequenas oscilações em torno do mínimo. Como veremos posteriormente tal efeito de renormalização da frequência induzida pelo acoplamento pode ser muito grande, e se $\omega_{eff}^2 = \omega_o^2 + \Delta \omega^2 < 0$ ele pode até modificar qualitativamente o potencial. Assim, se desejarmos considerar apenas o efeito da dissipação - e não o efeito de renormalização do potencial induzido pelo acoplamento - devemos escolher¹⁶

$$\Delta V_R(q) = \sum_{j=1}^N \frac{F_j^2(q)}{2m_j \omega_j^2}. \quad (4.12)$$

2.2 Dissipações Estritamente Lineares e Ôhmicas

Se impusermos a condição de que a dissipação seja estritamente linear (isto é, que $\tilde{\gamma}(\omega)$ em (4.3) não dependa do estado do sistema para qualquer frequência ω) então devemos ter

$$F_j(q) = C_j q. \quad (4.13)$$

A dissipação Ôhmica (ou Markoviana), em que o coeficiente de dissipação é independente da frequência

$$\tilde{\gamma}(\omega) = \gamma, \quad (4.14)$$

é descrita por este modelo desde que a função espectral $J(\omega)$, definida como

$$J(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_j \frac{C_j^2}{m_j \omega_j} \delta(\omega - \omega_j), \quad (4.15)$$

seja dada por

$$J(\omega) = 2M\gamma\omega, \quad (4.16)$$

para toda frequência ω . A relação (4.16) descreve uma situação ideal. Na realidade, qualquer função espectral realística $J(\omega)$ tende a zero no limite $\omega \rightarrow \infty$. Caso contrário certos observáveis

A renormalização do potencial depende do acoplamento adotado. Para um modelo em que, por exemplo, $H_I = -\sum_j C_j q \dot{q}_j$ teremos $V_{eff}(q) = V(q)$ não havendo o efeito de renormalização [24]. Este fato reflete ainda a invariância translacional do sistema composto quando $V(q) = V_{eff}(q) = 0$.

físicos divergiriam [26] . Entretanto, na verdade, o importante é que (4.16) seja uma boa aproximação até uma frequência ω_c muito maior do que qualquer frequência característica de oscilação do sistema.

A necessidade das imposições (4.13) e (4.16) é apresentada com detalhes em [1] . Na sequência mostraremos a consistência destas imposições, isto é, que no limite clássico elas realmente levam a uma dinâmica do sistema descrita por (4.1).

2.3 O Limite Clássico

Lembrando (4.6) e (4.13) temos

$$H = \frac{p^2}{2M} + V(q) + \Delta V_R(q) + \sum_j \left(\frac{1}{2} \frac{p_j^2}{m_j} + \frac{1}{2} m_j \omega_j^2 q_j^2 \right) + \sum_j C_j q_j q. \quad (4.17)$$

Substituindo (4.12) e (4.13) na expressão para $\Delta V_R(q)$ podemos escrever (4.17) como:

$$H = \frac{p^2}{2M} + V(q) + \sum_j \left[\frac{1}{2} \frac{p_j^2}{m_j} + \frac{1}{2} m_j \omega_j^2 \left(q_j + \frac{C_j}{m_j \omega_j^2} q \right)^2 \right]. \quad (4.18)$$

Obtemos as seguintes equações de movimento para este sistema

$$M \ddot{q}(t) + V'(q) = - \sum_j C_j \left(q_j(t) + \frac{C_j}{m_j \omega_j^2} q(t) \right), \quad (4.19)$$

$$m_j \ddot{q}_j(t) + m_j \omega_j^2 q_j(t) = -C_j q(t). \quad (4.20)$$

A solução geral de (4.20) é a soma da solução da equação homogênea com a solução da equação particular considerando a força $-C_j q(t)$. Sendo $q_j(0)$ e $p_j(0)$ as condições iniciais, então a solução da equação homogênea é

$$q_j^H(t) = q_j(0) \cos(\omega_j t) + \frac{p_j(0)}{m_j \omega_j} \sin(\omega_j t). \quad (4.21)$$

A solução particular pode ser obtida tomando a transformada de Fourier de (4.20). Temos

$$(-\omega^2 + \omega_j^2) \tilde{q}_j(\omega) = -\frac{C_j}{m_j} \tilde{q}(\omega), \quad (4.22)$$

logo

$$\tilde{q}_j(\omega) = -\frac{C_j}{m_j} \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} \tilde{q}(\omega) = -\frac{C_j}{m_j} \frac{1}{2\omega_j} \left(\frac{1}{\omega_j - \omega} + \frac{1}{\omega_j + \omega} \right) \tilde{q}(\omega). \quad (4.23)$$

Tomando a antitransformada, temos:

$$q_j^P(t) = -\frac{C_j}{m_j} \frac{1}{2\omega_j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\frac{1}{\omega_j - \omega} + \frac{1}{\omega_j + \omega} \right) \right] \tilde{q}(\omega) e^{i\omega t}. \quad (4.24)$$

Pelo princípio da causalidade ($-C_j q(t)$ é a força que age sobre $q_j(t)$), podemos substituir $\tilde{q}(\omega)$ em (4.24) por $\int_0^t dt' q(t') e^{-i\omega t'}$. Portanto,

$$q_j^P(t) = -\frac{C_j}{2m_j \omega_j} \int_0^t dt' q(t') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\frac{1}{\omega_j - \omega} + \frac{1}{\omega_j + \omega} \right) \right] e^{i\omega(t-t')}. \quad (4.25)$$

Realizando a integração pelo método dos resíduos ($t > t'$) obtemos

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\frac{1}{\omega_j - \omega} + \frac{1}{\omega_j + \omega} \right) \right] e^{i\omega(t-t')} = 2 \operatorname{sen} [\omega_j (t - t')]. \quad (4.26)$$

Assim, $q_j^P(t)$ será dada por

$$\begin{aligned} q_j^P(t) &= -\frac{C_j}{m_j \omega_j} \int_0^t dt' q(t') \operatorname{sen} [\omega_j (t - t')] \\ &= -\frac{C_j}{m_j \omega_j^2} \left[(q(t) - q(0) \cos \omega_j t) - \int_0^t dt' \dot{q}(t') \cos \omega_j (t - t') \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

A solução geral de (4.20) será então $q_j(t) = q_j^H(t) + q_j^P(t)$ que substituída em (4.19) resulta na seguinte equação de movimento:

$$\begin{aligned} M\ddot{q}(t) + V'(q) + \sum_j \frac{C_j^2}{m_j \omega_j^2} \int_0^t dt' \cos \omega_j (t - t') \dot{q}(t') = \\ = -\sum_j C_j \left(q_j(0) + \frac{C_j}{m_j \omega_j^2} q(0) \right) \cos \omega_j t - \sum_j \frac{C_j}{m_j \omega_j} p_j(0) \operatorname{sen} (\omega_j t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

A fim de transformar o somatório $\sum_j$ em uma integral $\int d\omega$, no último termo do lado esquerdo de (4.28), utilizamo-nos da função espectral $J(\omega)$ (4.15) que nos permite escrever

$$\sum_j \frac{C_j^2}{m_j \omega_j^2} \cos \omega_j (t - t') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \cos \omega (t - t'). \quad (4.29)$$

Assumindo então que $J(\omega)$ seja da forma

$$J(\omega) = \begin{cases} 2M\gamma\omega & \text{se } \omega < \Omega_c \\ 0 & \text{se } \omega > \Omega_c \end{cases}, \quad (4.30)$$

onde Ω_c é muito maior que qualquer frequência característica do sistema, temos

$$\sum_j \frac{C_j^2}{m_j \omega_j^2} \cos \omega_j (t - t') = M\gamma \frac{4}{\pi} \int_0^{\Omega_c} \cos \omega (t - t') d\omega \simeq 4M\gamma \delta(t - t'), \quad (4.31)$$

fazendo $\Omega_c \rightarrow \infty$. Este resultado nos permite escrever o último termo do lado esquerdo de (4.28) como

$$\int_0^t 4M\gamma \delta(t - t') \dot{q}(t') dt' = 2M\gamma \dot{q}(t), \quad (4.32)$$

e temos então a força de fricção proporcional a velocidade presente em (4.1).

Podemos, assim, reescrever (4.28) como

$$M\ddot{q}(t) + V'(q) + 2M\gamma \dot{q}(t) = F(t),$$

onde

$$F(t) = -\sum_j \frac{C_j}{m_j \omega_j} p_j(0) \operatorname{sen} (\omega_j t) - \sum_j C_j \left(q_j(0) + \frac{C_j}{m_j \omega_j^2} q(0) \right) \cos (\omega_j t), \quad (4.33)$$

já chamando esta expressão de $F(t)$ uma vez que ela será identificada como a força flutuante presente em (4.1).

Consideremos que os osciladores do banho inicialmente apresentem valores médios de posição e momento dados por

$$\langle q_j(0) \rangle = -\frac{C_j}{m_j \omega_j^2} q(0), \quad \langle p_j(0) \rangle = 0. \quad (4.34)$$

O valor médio $\langle F(t) \rangle$ então será nulo,

$$\langle F(t) \rangle = 0. \quad (4.35)$$

Agora supondo que o banho esteja inicialmente em equilíbrio termodinâmico, temos no limite clássico (lembrando o teorema da equipartição da energia)

$$\begin{aligned} \left\langle \left(q_j(0) + \frac{C_j}{m_j \omega_j^2} q(0) \right) \left(q_{j'}(0) + \frac{C_{j'}}{m_{j'} \omega_{j'}^2} q(0) \right) \right\rangle &= \frac{kT}{m_j \omega_j^2} \delta_{jj'}, \\ \langle p_j(0) p_{j'}(0) \rangle &= m_j kT \delta_{jj'}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Substituindo (4.34) e (4.36) em (4.33) obtemos a seguinte expressão para a função de correlação

$$\begin{aligned} \langle F(t) F(t') \rangle &= \sum_j \frac{C_j^2 kT}{m_j \omega_j^2} \cos \omega_j(t-t') = \frac{2kT}{\pi} \int_0^{\Omega_c} \frac{J(\omega)}{\omega} \cos \omega(t-t') d\omega \\ &= 4M\gamma kT \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_c} \cos \omega(t-t') d\omega \simeq 4M\gamma kT \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (4.37)$$

As equações (4.35) e (4.37) nada mais são do que as relações (4.2).

2.4 A Função Espectral

É importante destacarmos que a função espectral $J(\omega)$ (cujo conhecimento, veremos, nos permite determinar toda a mecânica quântica de um sistema descrito por (4.17)) é determinada por uma quantidade (γ) que aparece já na equação fenomenológica clássica de movimento (4.1). Logo, o nosso modelo fenomenológico (4.17) estará inteiramente determinado se conhecermos a equação de movimento de nosso sistema no limite clássico.

Vimos que o comportamento linear de $J(\omega)$ para baixas frequências é a condição necessária e suficiente para termos uma dissipação ôhmica, isto é, para termos um termo dissipativo da forma $2M\gamma\dot{q}$. A forma de Drude, por exemplo,

$$J(\omega) = \frac{2M\gamma\omega}{(1 + \omega^2/\omega_c^2)} \quad (4.38)$$

apresenta este comportamento para $\omega \ll \omega_c$. Portanto, se todas as frequências características de um sistema forem muito menores que ω_c , este sistema estará sujeito a uma dissipação ôhmica quando em contato com um reservatório descrito por (4.38).

3 Aplicações do Modelo

Caldeira e Leggett propuseram o modelo descrito acima e o utilizaram no estudo de muitos problemas onde há o aparecimento de dissipação. Estudaram (1) o movimento browniano quântico [24], (2) a influência da dissipação nos processos de interferência quântica [3], (3) a influência da dissipação no decaimento por tunelamento [1], entre outros problemas. Eles utilizaram o método do funcional de influência, desenvolvido por Feynman e Vernon, no qual o operador densidade

reduzido do sistema é calculado via integração funcional. A apresentação detalhada dos cálculos não é relevante para nós, entretanto é interessante uma breve revisão de alguns resultados obtidos.

3.1 Partícula Livre com Dissipação

Consideremos uma partícula livre ($V(q) = 0$) descrita no instante inicial pela função de onda

$$\psi(x; 0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{x^2}{4\sigma^2}}, \quad (4.39)$$

que representa uma partícula centrada na origem com incerteza σ em sua posição e momento médio p_0 .

Calcula-se [24] então a evolução dos elementos diagonais do operador densidade reduzido do sistema na representação de coordenadas, $\tilde{\rho}(x, x; t) = \langle x | \tilde{\rho}(t) | x \rangle$. Sendo $\tilde{\rho}(t)$ dado por

$$\tilde{\rho}(t) = Tr_R [\rho(t)] = Tr_R \left[e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \rho(0) e^{i\frac{Ht}{\hbar}} \right], \quad (4.40)$$

onde Tr_R representa o traço sobre as variáveis do reservatório, H é dada por (4.17) e $\rho(0)$ é o operador densidade no instante inicial, dado pelo produto direto

$$\rho(0) = \rho_S(0) \rho_R(0), \quad (4.41)$$

onde $\rho_S(0)$ é o operador densidade do sistema no instante inicial (na representação de coordenadas dado por $\rho_S(x, x'; 0) = \psi(x; 0) \psi^*(x'; 0)$) e $\rho_R(0)$ é o operador densidade do reservatório em equilíbrio termodinâmico a temperatura T .

O cálculo da densidade de probabilidade $\tilde{\rho}(x, x; t)$ mostra, como era de se esperar, que o centro do pacote (4.39) evolui seguindo a trajetória clássica que é dada por

$$x(t) = \frac{p_0}{2M\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}), \quad (4.42)$$

enquanto que a largura do pacote (a temperatura $T = 0$) comporta-se assintoticamente como¹⁷

$$\sigma^2(t) \sim \frac{4\hbar}{\pi M\gamma} \ln \gamma t. \quad (4.43)$$

Note que apesar do pacote ainda alastrar-se espacialmente ele o faz de forma bem mais lenta que quando $\gamma = 0$ (neste caso teríamos $\sigma(t) \simeq t$).

3.2 Oscilador Harmônico Quântico com Dissipação

Consideremos agora um oscilador harmônico ($V(q) = M\omega_o^2 x^2/2$) com a mesma função de onda inicial (4.39). Mostra-se [24], através do cálculo de $\tilde{\rho}(x, x; t)$, novamente que o centro deste pacote segue a trajetória clássica, para o oscilador sub-amortecido ($\omega_o > \gamma$), dada por

$$x(t) = \frac{p_0}{M\omega_o} \text{sen}(\omega_o t) e^{-\gamma t}. \quad (4.44)$$

Mostra-se também que a largura $\sigma(t)$ do pacote evolui apresentando um comportamento assintótico dado pelo teorema de flutuação-dissipação, sendo σ tanto menor quanto maior a dissipação.

¹⁷ A obtenção deste resultado depende da condição inicial usada [27].

3.3 Influência da Dissipação na Interferência Quântica

Desde nossos cursos básicos de mecânica quântica estamos familiarizados com o conceito de interferência entre estados quânticos. O paradigma deste fenômeno é a famosa “experiência” da fenda dupla. Nosso objetivo nesta subseção é o de apresentar alguns resultados referentes ao estudo da influência de um meio dissipativo no fenômeno de interferência quântica.

3.3.1 Destruição da Superposição de Dois Pacotes Distintos:

Suponha que tenhamos um oscilador harmônico, de frequência ω_o , cujo estado inicial $\psi(x; 0)$ é a superposição de dois pacotes de onda Gaussianos, um centrado na origem e outro centrado em q_o , isto é,

$$\psi(x; 0) = \psi_1(x) + \psi_2(x) = \mathcal{N} \left[e^{-x^2/4\sigma^2} + e^{-(x-q_o)^2/4\sigma^2} \right], \quad (4.45)$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização e σ é a largura inicial dos dois pacotes que, por simplicidade, tomaremos como a largura do estado fundamental de um oscilador harmônico ($\sigma = \sqrt{\hbar/2M\omega_o}$). A densidade de probabilidade $\rho(x, x; t)$ correspondente a (4.45) é dada por

$$\rho(x, x; t) = \psi^*(x; t) \psi(x; t) = \rho_1(x, x; t) + \rho_2(x, x; t) + \rho_{int}(x, x; t), \quad (4.46)$$

onde $\rho_1(x, x; t) = \psi_1^*(x; t) \psi_1(x; t)$ [$\rho_2(x, x; t) = \psi_2^*(x; t) \psi_2(x; t)$] seria a densidade de probabilidade se apenas o primeiro (segundo) pacote de onda representasse o sistema e $\rho_{int}(x, x; t) = \psi_1^*(x, t) \psi_2(x, t) + \psi_2^*(x, t) \psi_1(x, t)$ é o termo de interferência, que também pode ser escrito como

$$\rho_{int}(x, x; t) = 2\sqrt{\rho_1(x, x; t)}\sqrt{\rho_2(x, x; t)}\cos\phi(x, t), \quad (4.47)$$

sendo $\psi_1(x, t) \psi_2^*(x, t) = \sqrt{\rho_1(x, x; t)}\sqrt{\rho_2(x, x; t)}e^{i\phi(x; t)}$. Quando os dois pacotes estão muito distantes (de tal forma que a distância entre os seus centros seja muito maior do que as suas larguras) $\rho_{int}(x, x; t)$ é muito pequeno, desprezível. Entretanto, a medida que o segundo pacote (inicialmente centrado em q_o) move-se em direção ao primeiro (em repouso centrado na origem) este termo aumenta. Quando os dois pacotes começam a se sobrepor surge um padrão de interferência em $\rho(x, x; t)$ devido a existência de $\rho_{int}(x, x; t)$. Este termo de interferência atinge o seu máximo quando o centro dos dois pacotes coincidem e temos

$$\rho_{int}\left(x, x; t = \frac{n\pi}{\omega_{oR}} + \frac{\pi}{2\omega_{oR}}\right) \propto \cos\left(\frac{q_o}{\sigma^2}x\right) e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}. \quad (4.48)$$

A questão agora é: como seria modificada a expressão (4.46) para $\rho(x, x; t)$ se considerássemos este oscilador como estando inserido em um meio dissipativo, sendo então o sistema global descrito por (4.17)? O caráter linear da evolução temporal seria ainda preservado e teríamos

$$\tilde{\rho}(x, x; t) = \tilde{\rho}_1(x, x; t) + \tilde{\rho}_2(x, x; t) + \tilde{\rho}_{int}(x, x; t), \quad (4.49)$$

onde, novamente, $\tilde{\rho}_1$ ($\tilde{\rho}_2$) representariam a evolução do sistema se apenas o primeiro (segundo) pacote de onda estivesse presente e sua evolução seria aquela discutida na subseção anterior. Entretanto, $\tilde{\rho}_{int}(x, x; t)$ agora seria dado por

$$\tilde{\rho}_{int}(x, x; t) = 2\sqrt{\tilde{\rho}_1(x, x; t)}\sqrt{\tilde{\rho}_2(x, x; t)}\cos\phi(x, t) \cdot e^{-f(t)}, \quad (4.50)$$

que é ainda da forma (4.47) exceto pela presença de um fator de atenuação $e^{-f(t)}$. A pergunta que surge agora é: como a função de relaxação $f(t)$ se relaciona com a função de relaxação do

movimento dos pacotes?

Mostra-se [3] que para todos os limites de interesse o termo de atenuação de interferência pode ser aproximado por

$$e^{-f(t)} \approx e^{-\Gamma t} \quad (4.51)$$

onde a constante de relaxação de interferência, Γ , é dada por

$$\Gamma = \begin{cases} \text{altas temperaturas } (kT \gg \hbar\omega_o) & \begin{cases} 2N \frac{kT}{\hbar\omega_o} \cdot \gamma & \text{se } \gamma \ll \omega_o \\ 2N \frac{kT}{\hbar\omega_o} \cdot \frac{\omega_o^2}{2\gamma} & \text{se } \gamma \gg \omega_o \end{cases} \\ \text{baixas temperaturas } (kT \ll \hbar\omega_o) & \begin{cases} N \cdot \gamma & \text{se } \gamma \ll \omega_o \\ N \cdot \frac{\omega_o^2}{2\gamma} & \text{se } \gamma \gg \omega_o \end{cases} \end{cases} \quad (4.52)$$

onde

$$N = \frac{q_o^2}{4\sigma^2} \quad (4.53)$$

é também o número médio de quanta de energia, $\hbar\omega_o$, do oscilador harmônico no instante inicial. As expressões (4.52) nos mostram que Γ é sempre dado pela constante de relaxação do pacote (γ se $\gamma \ll \omega_o$ e $\omega_o^2/2\gamma$ se $\gamma \gg \omega_o$) multiplicada por uma função da temperatura (N se $kT \ll \hbar\omega_o$ e $2N \frac{kT}{\hbar\omega_o}$ se $kT \gg \hbar\omega_o$). Como estamos tratando $N \gg 1$ vemos que o tempo gasto para a destruição do termo de interferência é muito menor que o tempo gasto pelos pacotes para atingir a situação de equilíbrio. Dependendo da preparação do estado inicial do oscilador (isto é, dependendo de N), vemos que este tempo pode, inclusive, ser muito menor que o período de oscilação do sistema. Desta forma os dois pacotes se comportariam como duas distribuições clássicas em movimento harmônico amortecido. A introdução do meio dissipativo serviu para destruir o efeito quântico em uma escala de tempo bem curta tornando o sistema “mais clássico”.

A Interpretação Física: Podemos interpretar fisicamente este fenômeno de uma forma bastante simples [3]. Consideremos um oscilador harmônico preparado como uma superposição de um pacote centrado na origem e de outro centrado em um ponto q_o , estando fracamente acoplado a um banho de osciladores a $T = 0$.

O estado inicial do sistema global pode ser aproximado por

$$|\Phi_i\rangle \approx \{|\psi_0\rangle + |\psi_{q_o}\rangle\} \otimes |0\rangle, \quad (4.54)$$

onde $|0\rangle$ é o estado fundamental do banho de osciladores e $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_{q_o}\rangle$ os dois pacotes do oscilador de interesse. Vamos assumir que $|\psi_0\rangle$ seja o estado fundamental do oscilador quando desacoplado e que $|\psi_{q_o}\rangle$ contenha um número médio N de quanta de energia. Depois de decorrido um tempo τ (tempo de relaxação do sistema de interesse) o sistema global encontra-se em seu estado final que pode ser escrito como

$$|\Phi_f\rangle = |\psi_0\rangle \otimes |N\rangle, \quad (4.55)$$

onde $|N\rangle$ é o estado do reservatório contendo N quanta de energia $\hbar\omega_o$. Observe que (4.55) é válida apenas quando assumimos que o acoplamento entre o sistema e o reservatório é muito fraco, de outra forma $|\Phi_f\rangle$ não teria esta forma tão simples.

Vamos, agora, investigar o estado do sistema global após o oscilador ter emitido o equivalente a um quantum de energia $\hbar\omega_o$ para o reservatório. Como a emissão de N quanta de energia dá-se em τ , a emissão de um único quantum dar-se-á em um tempo da ordem de τ/N . Agora, como o hamiltoniana de interação sistema-reservatório é do tipo coordenada-coordenada ($H_i = \sum_{j=1}^N C_j x_j q$) teremos $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_{q_o}\rangle$ correlacionados a diferentes estados do reservatório.

Logo, o estado do sistema em τ/N pode ser aproximado por

$$|\Phi_1\rangle \approx |\tilde{\psi}_0\rangle \otimes |0\rangle + |\tilde{\psi}_{q_0}\rangle \otimes |1\rangle, \quad (4.56)$$

ou seja, a forma da hamiltoniana de interação faz com que estados do oscilador centrados em posições distintas se correlacionem com diferentes estados do reservatório. Usando então a ortogonalidade entre $|0\rangle$ e $|1\rangle$ podemos escrever o operador densidade reduzido do oscilador como

$$\tilde{\rho} \equiv Tr_R |\Phi_1\rangle \langle \Phi_1| = |\tilde{\psi}_0\rangle \langle \tilde{\psi}_0| + |\tilde{\psi}_{q_0}\rangle \langle \tilde{\psi}_{q_0}| \quad (4.57)$$

que é uma mistura estatística na representação de coordenadas. Portanto, os termos responsáveis pela interferência entre os dois pacotes decaem em um intervalo de tempo da ordem de τ/N , de acordo com (4.52) que foi obtida sem qualquer restrição quanto a intensidade do acoplamento com o banho.

Um raciocínio bem semelhante pode ser usado a temperatura finita. A única diferença é que, neste caso, devemos considerar as transições induzidas pelo reservatório como função da temperatura [3].

3.3.2 Destruição das Superposições em um Único Pacote:

Na subseção anterior consideramos uma superposição coerente de dois pacotes de onda bem distintos ($N \gg 1$) e vimos como a dissipação destrói a coerência quântica entre estes pacotes (eliminando o termo de interferência $\tilde{\rho}_{int}(x, x; t)$ em (4.49)) numa escala de tempo Γ muito menor que o tempo de relaxação do movimento dos pacotes. Certamente se o único efeito da dissipação, na coerência do nosso estado inicial, fosse a destruição de $\tilde{\rho}_{int}(x, x; t)$ poderíamos escrever o estado do nosso sistema precisamente como a mistura estatística (4.57) para todo tempo $t \gg \Gamma$. Entretanto, a destruição de $\tilde{\rho}_{int}(x, x; t)$ indica-nos que a dissipação destrói as superposições coerentes entre estados que descrevem localizações distintas para a partícula. Se analisarmos com mais cuidado (4.57) veremos, contudo, que ainda existem superposições deste tipo neste estado de $\tilde{\rho}$. Na representação de coordenadas podemos escrever (4.57) como

$$\tilde{\rho} = \int \int dx dx' \tilde{\psi}_0(x) \tilde{\psi}_0^*(x') |x\rangle \langle x'| + \int \int dx dx' \tilde{\psi}_{q_0}(x) \tilde{\psi}_{q_0}^*(x') |x\rangle \langle x'| \quad (4.58)$$

e, uma vez que $\langle x | \tilde{\rho} | x' \rangle \neq 0$, vemos que este estado ainda apresenta superposições coerentes entre estados $|x\rangle$ e $|x'\rangle$ que descrevem localizações distintas para a partícula. Logo, seria de se esperar que na verdade o sistema evoluísse em direção a um estado da forma

$$\tilde{\rho} = \int dx |\tilde{\psi}_0(x)|^2 |x\rangle \langle x| + \int dx |\tilde{\psi}_{q_0}(x)|^2 |x\rangle \langle x|, \quad (4.59)$$

em que todas as superposições coerentes foram destruídas e o sistema encontra-se verdadeiramente em uma mistura estatística na representação de coordenadas. Supõem-se que isto realmente aconteça e que este efeito só não foi observado devido ao fato de termos analisado apenas a evolução dos elementos diagonais $\tilde{\rho}(x, x; t)$ do operador densidade reduzido, que são os mesmos para os estados (4.58) e (4.59).

Assim, este efeito de destruição das superposições coerentes (decoerência) na representação de coordenadas deve estar presente mesmo na evolução de um único pacote. Portanto, se a função de onda inicial do nosso sistema for dada por um pacote da forma (4.39), por exemplo, esperamos que

o operador densidade reduzido evolua em direção a um estado da forma

$$\tilde{\rho}(t) = \int dx \left| \tilde{\psi}(x, t) \right|^2 |x\rangle \langle x|, \quad (4.60)$$

onde já discutimos, nas duas seções anteriores, as evoluções do centro e da largura de $\left| \tilde{\psi}(x, t) \right|^2$. Devemos lembrar, entretanto, que as equações (4.52) foram obtidas considerando-se a preparação inicial dos pacotes como caracterizada por um parâmetro $N = q_o^2/4\sigma^2 \gg 1$ o que levou-nos a conclusão de que o tempo necessário a decoerência Γ é muito menor que o tempo de relaxação do movimento dos pacotes. No caso de um único pacote podemos imaginar que a escala de tempo associada a decoerência seria possivelmente dependente da largura sua σ e assim seria muito maior que o Γ relacionado a decoerência dos dois pacotes.

Tratamento do Modelo Caldeira-Leggett via Diagonalização de Fano

1 Comparação entre as Hamiltonianas

No Capítulo 3 a evolução de um oscilador harmônico (ou modo eletromagnético) sujeito a dissipação foi descrita através da Hamiltoniana (3.38). Já no Capítulo 4 descrevemos este sistema através da Hamiltoniana (4.17). Vamos agora relacionar estes dois modelos.

1.1 Relacionando a Função Espectral à $v(w)$

Consideremos um oscilador harmônico ($V(q) = 1/2M\omega_o^2q^2$) dissipativo descrito pela Hamiltoniana (4.17). Inicialmente não consideraremos o contratermo, faremos $\Delta V_R(q) = 0$. Utilizando-nos das definições usuais dos operadores a e b_i ,

$$a = \sqrt{\frac{M\omega_o}{2\hbar}} \left(q + \frac{i}{M\omega} p \right) \quad \text{e} \quad b_i = \sqrt{\frac{m_i\omega_i}{2\hbar}} \left(q_i + \frac{i}{m_i\omega_i} p_i \right), \quad (5.1)$$

podemos reescrever (4.17) como

$$H = \hbar\omega_o a^+ a + \sum_i \hbar\omega_i b_i^+ b_i + \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{M\omega_o}} (a + a^+) \sum_i \frac{C_i}{\sqrt{m_i\omega_i}} (b_i + b_i^+) \quad (5.2)$$

(medindo a energia do sistema a partir da energia do vácuo). Podemos agora utilizar a transformação (3.32) a fim de considerar um espectro contínuo para as excitações do reservatório. O segundo termo do lado direito de (5.2) torna-se

$$H_{res} = \hbar \int b_\omega^+ b_\omega d\omega \quad (5.3)$$

e o último termo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_{int} &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{M\omega_o}} (a + a^+) \sum_i \frac{C_i}{\sqrt{m_i\omega_i}} (b_i + b_i^+) \\ &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{M\omega_o}} (a + a^+) \sum_i \frac{C_{\omega_i}}{\sqrt{m_{\omega_i}\omega_i}} \sqrt{g(\omega_i)} \int_{1/g(\omega_i)} d\omega (b_\omega + b_\omega^+) \\ &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{M\omega_o}} (a + a^+) \sum_i \int_{1/g(\omega_i)} d\omega C_\omega \sqrt{\frac{g(\omega)}{m_\omega\omega}} (b_\omega + b_\omega^+) \end{aligned}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{M\omega_o}} (a + a^\dagger) \int d\omega C_\omega \sqrt{\frac{g(\omega)}{m_\omega \omega}} (b_\omega + b_\omega^\dagger), \quad (5.4)$$

onde consideramos que $g(\omega_i)$, C_{ω_i} , m_{ω_i} , e ω_i são constantes dentro do intervalo $1/g(\omega_i)$ e que $\sum_i \int_{1/g(\omega_i)} d\omega$ nada mais é que $\int d\omega$, onde esta última integral abrange todo o espectro possível de excitações do reservatório. Comparando agora (5.2-5.4) com (3.38) vemos que ambas as Hamiltonianas serão equivalentes desde que tenhamos

$$v_\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g(\omega)}{M\omega_o m_\omega \omega}} C_\omega. \quad (5.5)$$

Tomemos agora o limite de um espectro contínuo na expressão que define $J(\omega)$:

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \frac{\pi}{2} \sum_i \frac{C_i^2}{m_i \omega_i} \delta(\omega - \omega_i) \\ &= \frac{\pi}{2} \int d\Omega g(\Omega) \frac{C_\Omega^2}{m_\Omega \Omega} \delta(\omega - \Omega) \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{g(\omega) C_\omega^2}{m_\omega \omega}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Tomando o quadrado de (5.5) e comparando com (5.6) obtemos

$$v_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{J(\omega)}{M\omega_o}. \quad (5.7)$$

Assim, vemos que $|v_\omega|^2$ é inteiramente determinada em função de $J(\omega)$. Portanto, uma vez determinada qual deve ser a função espectral $J(\omega)$ do sistema tratado $|v_\omega|^2$ estará determinada assim como toda a mecânica quântica do sistema.

Como vimos no Capítulo 4 obtemos uma dissipação ôhmica se a função espectral for linear para baixas frequências. Adotaremos a forma de Drude (4.38). Assim, $|v_\omega|^2$ será dada por

$$|v_\omega|^2 = \frac{\gamma\omega}{\pi\omega_o} \frac{1}{(1 + \omega^2/\omega_c^2)}, \quad (5.8)$$

subentendendo-se que $\omega_c \gg \omega_o$.

1.2 Determinação da Função $H(\omega)$

As expressões que obtivemos no Capítulo 3 para os operadores, ao diagonalizarmos (3.38), permaneceram escritas em termos de $|v_\omega|^2$ e da função $H(\omega)$, dada por

$$H(\omega) = \int \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega + \omega} d\Omega + \mathcal{P} \int \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega - \omega} d\Omega. \quad (5.9)$$

Agora que definimos, (5.8), qual é a função $|v_\omega|^2$ apropriada ao nosso sistema, podemos determinar $H(\omega)$ através do cálculo de (5.9). Os detalhes deste cálculo serão deixados para o Apêndice C, onde mostramos que $H(\omega)$ será então dada por

$$H(\omega) = \frac{\gamma\omega_c}{\omega_o} \frac{1}{(1 + \omega^2/\omega_c^2)}. \quad (5.10)$$

1.3 Considerando o Contratermo $\Delta V_R(q)$

Podemos também comparar as Hamiltonianas (3.38) e (4.17) considerando a inclusão do contratermo $\Delta V_R(q)$. Este cálculo também é apresentado no Apêndice C. O resultado é que todas as equações (3.76) à (3.87) permanecem válidas com uma única substituição: sempre que aparecer a função $H(\omega)$ nestas equações ela deverá ser substituída por

$$H_R(\omega) = H(\omega) + \frac{\Delta\omega^2}{2\omega_o}, \quad (5.11)$$

sendo $\Delta\omega^2$ definida em (4.11),

$$\frac{\Delta\omega^2}{2\omega_o} = -\frac{1}{2\omega_o M} \sum_{j=1}^N \frac{C_j^2}{m_j \omega_j^2} = -2 \int d\omega \frac{|v_\omega|^2}{\omega} = -\frac{\gamma\omega_c}{\omega_o}, \quad (5.12)$$

onde fez-se o limite para o contínuo na penúltima passagem (ver Apêndice C).

2 Consistência da Diagonalização de Fano

No decorrer do procedimento de diagonalização de Fano, realizada no Capítulo 3, supôs-se que os novos operadores A_ω , que diagonalizam a nossa Hamiltoniana, formassem um conjunto completo, isto é, que seria sempre possível escrever os operadores a e b_ω , bem como os seus comutadores, em termos destes novos operadores A_ω . Entretanto, esta questão deve ser tratada com um pouco mais de cuidado. Nas equações (3.84-3.85) expressamos o operador a em termos de A_ω e A_ω^+ . Similarmente, também podemos, em princípio, escrever os operadores b_ω , em termos dos novos operadores, como

$$b_\omega = \int_0^\infty d\Omega (\beta_{\Omega\omega}^* A_\Omega - \sigma_{\Omega\omega} A_\Omega^+). \quad (5.13)$$

Podemos demonstrar que o novo conjunto de operadores A_ω é completo, e que portanto a diagonalização de Fano é consistente, verificando a conservação das relações de comutação iniciais entre os operadores a e a^+ e entre b_ω e b_ω^+ , isto é,

$$[a, a^+] = 1, \quad [b_\omega, b_{\omega'}^+] = \delta(\omega - \omega'). \quad (5.14)$$

Utilizando (3.84-3.85), (5.13) e as relações de comutação (3.42) para os A_ω 's obtemos

$$[a, a^+] = \int_0^\infty d\omega (|\alpha_\omega|^2 - |\chi_\omega|^2), \quad (5.15)$$

$$[b_\omega, b_{\omega'}^+] = \int_0^\infty d\Omega (\beta_{\Omega\omega}^* \beta_{\Omega\omega'} - \sigma_{\Omega\omega} \sigma_{\Omega\omega'}^*). \quad (5.16)$$

As equações (5.15-5.16) mostram que as relações de comutação serão conservadas pela transformação dos operadores se e somente se as duas condições seguintes forem satisfeitas

$$I \equiv \int_0^\infty d\omega (|\alpha_\omega|^2 - |\chi_\omega|^2) = 1, \quad (5.17)$$

$$I(\omega, \omega') \equiv \int_0^\infty d\Omega (\beta_{\Omega\omega}^* \beta_{\Omega\omega'} - \sigma_{\Omega\omega} \sigma_{\Omega\omega'}^*) = \delta(\omega - \omega'). \quad (5.18)$$

$$\omega_o > 0. \quad (5.19)$$

Caso não seja considerada a inclusão do contratermo a condição de consistência passa então a ser

$$\omega_o^2 > |\Delta\omega^2|. \quad (5.20)$$

É fácil entendermos a origem das condições (5.19-5.20). Se não considerarmos o contratermo e tivermos $|\Delta\omega^2| > \omega_o^2$ teremos então uma frequência quadrada efetiva $\omega_{eff}^2 = \omega_o^2 + \Delta\omega^2 < 0$ o que daria origem a existência de frequências complexas no nosso sistema. Obviamente, esta possibilidade não foi considerada no procedimento de diagonalização de Fano. No caso de termos $|\Delta\omega^2| = \omega_o^2$, ou considerarmos o contratermo e termos $\omega_o = 0$, a falha surge com o fato de termos $|v_\omega|^2 = 0$ para $\omega = 0$, dando origem a uma singularidade nos integrandos de (5.19-5.20).

3 Análise da Evolução do Operador a do Sistema

Uma vez que determinamos a função $|v_\omega|^2$ adequada à descrição do acoplamento do nosso sistema com o reservatório podemos analisar em detalhes a evolução temporal do operador a associado ao sistema, eq. (3.86). Reescrevamos a expressão para $a(t)$, eq. (3.86), da seguinte forma

$$\begin{aligned} a(t) = & \int d\omega |L_\omega|^2 \{ 4\omega_o \omega \cos(\omega t) a - i2 [(\omega^2 + \omega_o^2) a + (\omega^2 - \omega_o^2) a^+] \sin(\omega t) \} + \\ & + \int d\Omega B_\Omega^{(1)}(t) b_\Omega + \int d\Omega B_\Omega^{(2)}(t) b_\Omega^+, \end{aligned} \quad (5.21)$$

sendo as expressões para $B_\Omega^{(1)}(t)$ e $B_\Omega^{(2)}(t)$ obtidas da comparação direta entre (5.21) e (3.86) e a expressão para $|L_\omega|^2$ dada em (3.87). Analisaremos a seguir cada um dos termos de (5.21).

3.1 Considerando a Inclusão do Contratermo $\Delta V_R(q)$

A primeira análise será feita considerando-se a inclusão do contratermo $\Delta V_R(q)$ em (4.17). Neste caso a expressão para $|L_\omega|^2$ em (5.21) deve ser substituída pela expressão equivalente renormalizada,

$$|L_\omega|_R^2 = \frac{|v_\omega|^2}{[\omega^2 - \omega_o^2 + 2\omega_o H_R(\omega)]^2 + (2\pi\omega_o |v_\omega|^2)^2}. \quad (5.22)$$

3.1.1 Análise dos termos em a e a^+

Inicialmente analisaremos o comportamento dos três primeiros termos de (5.21), associados aos operadores a e a^+ . Estaremos, primordialmente, interessados na relação entre a intensidade da dissipação no nosso sistema e a importância de cada um destes termos. A maneira mais rápida e eficiente de entendermos o comportamento de cada um destes coeficientes é através de gráficos.

O gráfico [5.1(a)] apresenta o comportamento de $|L_\omega|_R^2$ para três valores de γ : $\gamma = 0, 1\omega_o$, $\gamma = \omega_o$ e $\gamma = 10\omega_o$. Vemos que para $\gamma = 0, 1\omega_o$ $|L_\omega|_R^2$ é uma função estreita e centrada aproximadamente em ω_o (mostraremos em breve que no limite $\gamma \ll \omega_o$ a função $|L_\omega|_R^2$ tende a uma Lorentziana centrada em ω_o e de largura 2γ). À medida que γ aumenta ($\gamma = \omega_o$) a função $|L_\omega|_R^2$ alarga-se e o seu pico passa para frequências mais baixas. Para γ 's ainda maiores ($\gamma = 10\omega_o$)

$|L_\omega|_R^2$ volta a tornar-se mais estreita, mas apresentando o seu pico em frequências cada vez mais baixas.

O gráfico [5.1(b)] apresenta o comportamento das funções $4\omega_o\omega$, $2(\omega^2 + \omega_o^2)$ e $2(\omega^2 - \omega_o^2)$ que aparecem multiplicando $|L_\omega|_R^2$ nos diferentes termos da expressão para $a(t)$. Observando simultaneamente [5.1(a)] e [5.1(b)] concluímos rapidamente que quando $\gamma \ll \omega_o$ a função $2(\omega^2 - \omega_o^2)|L_\omega|_R^2$ terá uma amplitude desprezível se comparada as funções $4\omega_o\omega|L_\omega|_R^2$ e $2(\omega^2 + \omega_o^2)|L_\omega|_R^2$, pois neste caso $|L_\omega|_R^2$ será uma função muito bem localizada em torno de ω_o enquanto que $2(\omega^2 - \omega_o^2) = 0$ para $\omega = \omega_o$. À medida que a razão γ/ω_o aumenta $|L_\omega|_R^2$ tem o seu centro deslocado de ω_o e sofre um alargamento. Então a função $2(\omega^2 - \omega_o^2)|L_\omega|_R^2$ passa a ser comparável às demais. No limite $\gamma \gg \omega_o$ ela é da mesma ordem que $2(\omega^2 + \omega_o^2)|L_\omega|_R^2$ enquanto que $4\omega_o\omega|L_\omega|_R^2$ torna-se muito pequena. O comportamento descrito acima é exemplificado claramente nos gráficos [5.2(a)-(c)].

Podemos ainda escrever a expressão (5.21) para $a(t)$ na forma compacta

$$a(t) = A(t)a - i[B(t)a + C(t)a^+] + \int d\Omega B_\Omega^{(1)}(t)b_\Omega + \int d\Omega B_\Omega^{(2)}(t)b_\Omega^+, \quad (5.23)$$

e observar diretamente a evolução das funções $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$. Os gráficos [5.3(a)-(c)] exemplificam a evolução temporal destas funções para diferentes γ . As funções que aparecem nos gráficos [5.3] nada mais são do que aquelas apresentadas nos gráficos [5.2] multiplicadas por $\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$ e integradas de 0 a ∞ . Logo, já poderíamos prever que a função $C(t)$, coeficiente de a^+ , teria uma amplitude desprezível para $\gamma \ll \omega_o$ e se tornaria progressivamente mais importante à medida que a razão γ/ω_o aumentasse¹⁸.

3.1.2 Análise dos termos em b_Ω e b_Ω^+

Resta analisarmos os coeficientes $B_\Omega^{(1)}(t)$ e $B_\Omega^{(2)}(t)$ de b_Ω e b_Ω^+ , respectivamente, na expressão (5.23) para $a(t)$. O coeficiente $B_\Omega^{(2)}(t)$, por exemplo, é dado em (3.86),

$$B_\Omega^{(2)}(t) = 2\omega_o v_\Omega^* \left\{ \int d\omega 2|L_\omega|_R^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} [\omega(\omega_o - \Omega) \cos(\omega t) - i(\omega^2 - \omega_o\Omega) \sin(\omega t)] + (\omega_o - \Omega) \frac{|L_\Omega|_R^2}{|v_\Omega|^2} \left[\frac{\Omega^2 - \omega_o^2}{2\omega_o} + H_R(\Omega) \right] e^{i\Omega t} \right\}. \quad (5.24)$$

Sabemos que no limite $\gamma \ll \omega_o$ a função $|L_\omega|_R^2$ tende a uma Lorentziana centrada em ω_o e de largura 2γ . Portanto, a função $(\omega_o - \Omega)|L_\Omega|_R^2$, que aparece multiplicando o terceiro termo do lado direito de (5.24), é desprezível neste limite se comparada a função $(\omega_o + \Omega)|L_\Omega|_R^2$ que ocupa o seu lugar na expressão para $B_\Omega^{(1)}(t)$ (ver (3.86)). Ainda neste limite a função $|L_\omega|_R^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$ também será muito estreita e centrada em $\omega = \Omega = \omega_o$ e, por sua vez, as funções $|L_\omega|_R^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \omega(\omega_o - \Omega)$ e $|L_\omega|_R^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} (\omega^2 - \omega_o\Omega)$, que aparecem no primeiro e segundo termo do lado direito de (5.24), serão desprezíveis se comparadas as funções $|L_\omega|_R^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \omega(\omega_o + \Omega)$ e $|L_\omega|_R^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} (\omega^2 + \omega_o\Omega)$ que ocupam os seus lugares na expressão para $B_\Omega^{(1)}(t)$ (ver (3.86)). Portanto, concluímos que no limite $\gamma \ll \omega_o$ o coeficiente $B_\Omega^{(2)}(t)$ é desprezível em comparação ao coeficiente $B_\Omega^{(1)}(t)$. À medida que a razão γ/ω_o aumenta, e a função $|L_\omega|_R^2$ apresenta um alargamento e uma descentralização de ω_o , o coeficiente $B_\Omega^{(2)}(t)$ torna-se comparável à $B_\Omega^{(1)}(t)$. Este comportamento é exemplificado nos

¹⁸ É interessante notarmos que $A(0) = 1$ e $B(0) = C(0) = 0$. Pode-se também mostrar facilmente, através do cálculo numérico, que as funções $B_\Omega^{(1)}(t)$ e $B_\Omega^{(2)}(t)$ são nulas em $t = 0$. Logo, consistentemente, temos $a(0) = a$.

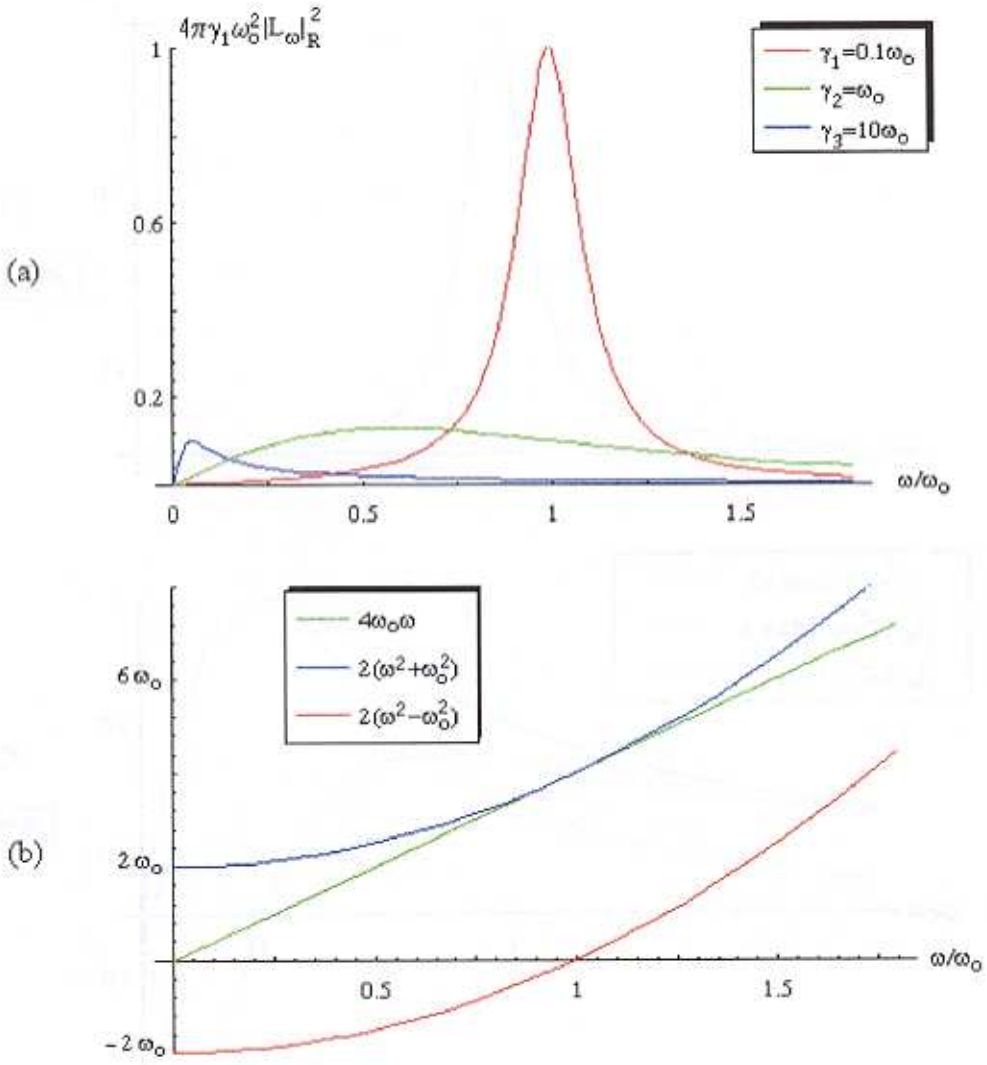


Gráfico 5.1

(a) Gráfico de $|L_{\omega}|_R^2$ para diferentes razões γ/ω_0 . (b) Gráfico das funções $4\omega_0\omega$, $2(\omega^2 + \omega_0^2)$ e $2(\omega^2 - \omega_0^2)$ que multiplicam $|L_{\omega}|_R^2$ nos diferentes termos da expressão para $a(t)$. Consideramos $\omega_c/\omega_0 = 10^3$ na realização destes gráficos.

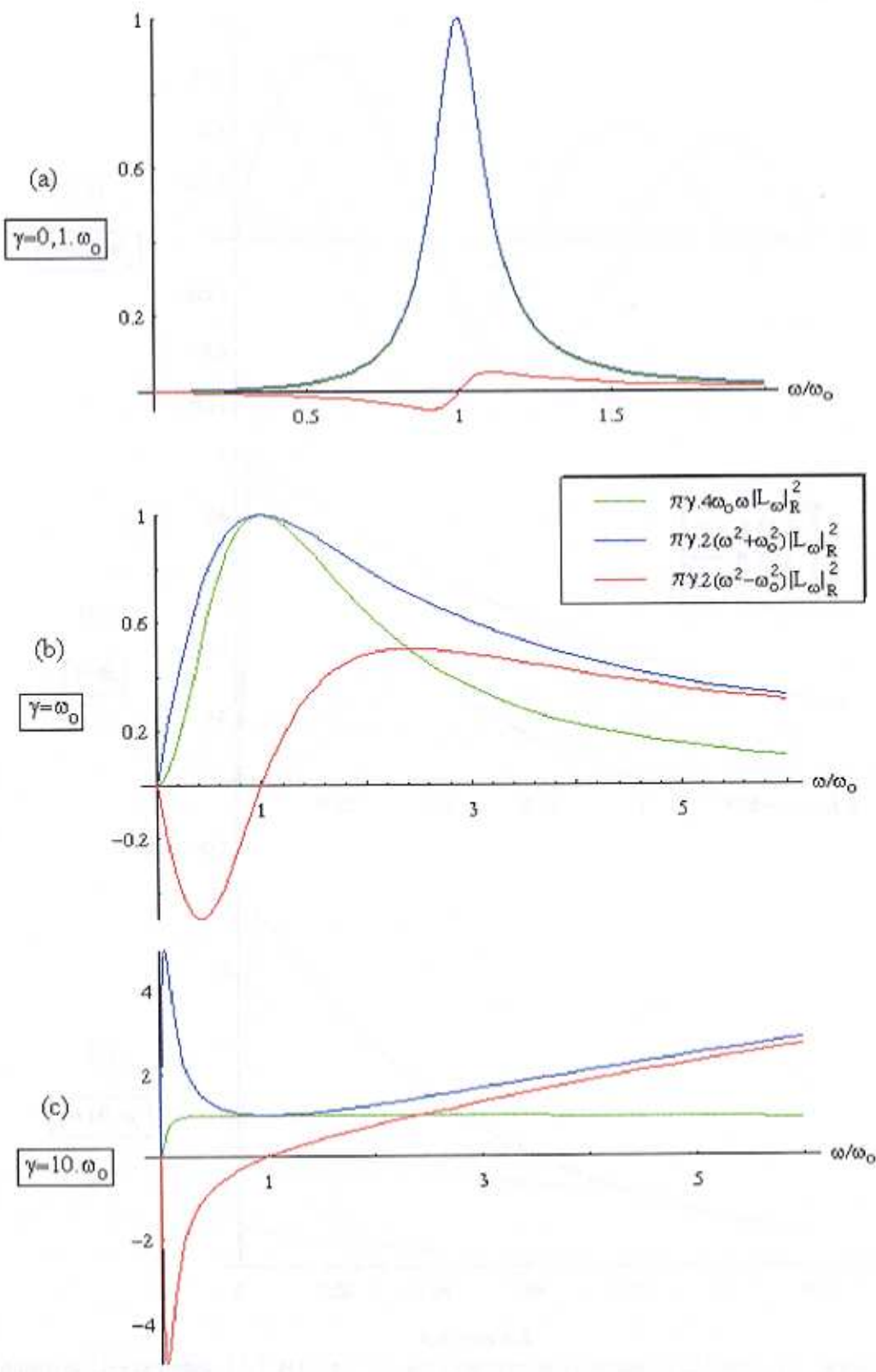


Gráfico 5.2

Gráficos das funções $4\omega_0\omega|L_\omega|_R^2$, $2(\omega^2+\omega_0^2)|L_\omega|_R^2$, e $2(\omega^2-\omega_0^2)|L_\omega|_R^2$, para diferentes razões γ/ω_0 .

No gráfico (a) as funções $4\omega_0\omega|L_\omega|_R^2$ e $2(\omega^2+\omega_0^2)|L_\omega|_R^2$ aparecem praticamente sobrepostas..

Consideramos $\omega_c/\omega_0 = 10^3$ na realização destes gráficos.

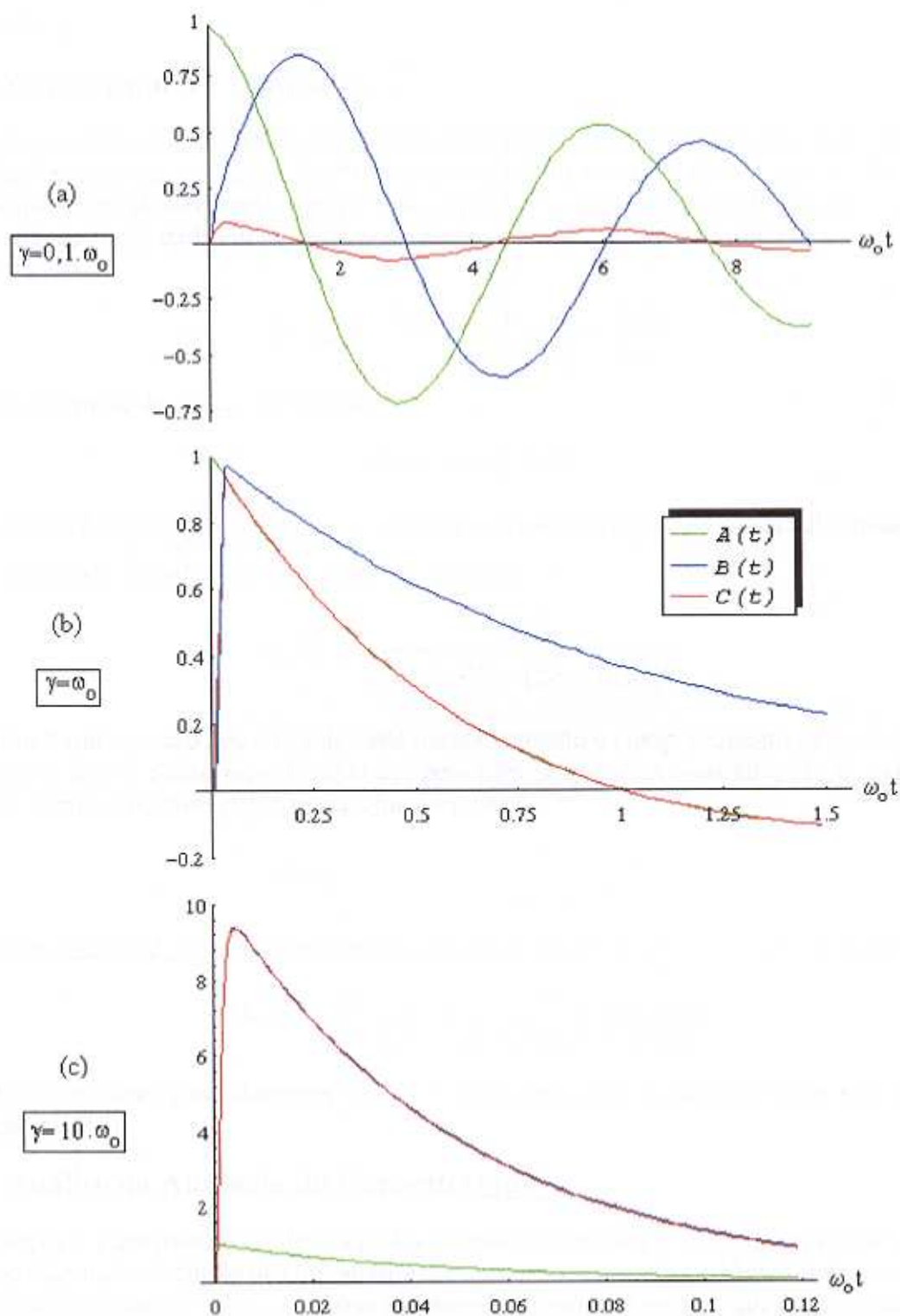


Gráfico 5.3

Gráfico dos coeficientes $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$ que aparecem na expressão (5.23) para $a(t)$. Vemos que para $\gamma = 0,1\omega_0$ o coeficiente $C(t)$ é muito menor que os demais. Consideramos $\omega_c/\omega_0 = 10^3$ na realização destes gráficos.

3.2 Simplificando a Função $|L_\omega|^2$

Como já observamos a função espectral (5.8) é adequada à descrição do nosso reservatório desde que consideremos $\omega_c \gg \omega_o$. Tendo esta condição em mente podemos aproximar, ou talvez devêssemos dizer simplificar¹⁹, a expressão para $|L_\omega|^2$. Consideremos primeiramente a função renormalizada $|L_\omega|_R^2$ dada em (5.22). Escrevamos a expressão para a função $H_R(\omega)$ considerando (5.10-5.12):

$$H_R(\omega) = \frac{\gamma\omega_c}{\omega_o} \frac{1}{(1 + \omega^2/\omega_c^2)} - \frac{\gamma\omega_c}{\omega_o}. \quad (5.25)$$

Portanto, no limite de $\omega_o/\omega_c \rightarrow 0$, temos

$$H_R(\omega \sim \omega_o) \simeq 0. \quad (5.26)$$

Logo, como a função $\frac{|v_\omega|^2}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (2\pi\omega_o|v_\omega|^2)^2}$ localiza-se em uma região de frequências muito menores que ω_c (em geral da ordem de ω_o), podemos escrever

$$|L_\omega|_R^2 \simeq \frac{|v_\omega|^2}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (2\pi\omega_o|v_\omega|^2)^2}. \quad (5.27)$$

É também bastante claro que só é relevante nesta expressão o comportamento de $|v_\omega|^2$ para baixas frequências, isto é, muito menores que ω_c , pois para frequências mais altas $|L_\omega|_R^2$ vai a zero de qualquer forma. Podemos então finalmente escrever²⁰

$$|L_\omega|_R^2 = \frac{\gamma}{\pi\omega_o} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \quad (5.28)$$

No caso da função $|L_\omega|^2$, sem a renormalização, teríamos $H(\omega \ll \omega_c) \simeq \gamma\omega_c/\omega_o$ e portanto

$$|L_\omega|^2 = \frac{\gamma}{\pi\omega_o} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_o^2 + 2\gamma\omega_c)^2 + (2\gamma\omega)^2}, \quad (5.29)$$

lembrando que neste caso devemos ter $\omega_o^2 > 2\gamma\omega_c$ para que a diagonalização seja consistente (condição (5.20)).

3.3 Análise na Ausência do Contratermo

Na subseção 3.1 analisamos a relevância dos termos associados a a^+ e b_Ω^+ na expressão (5.21) para $a(t)$ considerando a inclusão do contratermo $\Delta V_R(q)$ no nosso modelo. Vimos que estes termos são desprezíveis no limite $\gamma \ll \omega_o$, mas que tornam-se relevantes à medida que a dissipação aumenta e que a função $|L_\omega|_R^2$ fica mais larga e não mais centrada em ω_o . Agora, se tratássemos um modelo que não considerasse a inclusão do contratermo na Hamiltoniana de interação entre o sistema e o

Como observamos no Capítulo 4 a função espectral $J(\omega)$ ideal para que um reservatório apresente uma dissipação ôhmica seria a função linear $J(\omega) = 2M\gamma\omega$ para toda frequência ω . Entretanto, é necessário que $J(\omega)$ tenda a zero no limite $\omega \rightarrow \infty$ caso contrário certas observáveis físicas divergiriam. Por isso adotam-se funções espectrais como (4.30) [(4.38)] com uma frequência $\Omega_c[\omega_c]$ muito maior que qualquer frequência característica do sistema considerado (ω_o no caso). Entretanto, pode-se fazer o limite $\Omega_c[\omega_c] \rightarrow \infty$ em muitas expressões finais. A simplificação a ser feita abaixo na função $|L_\omega|^2$ corresponde a este limite.

$|L_\omega|_R^2 = \frac{M}{2\pi\omega_o} \chi''(\omega)$, onde $\chi''(\omega)$ é a parte imaginária da função resposta de um oscilador harmônico dissipativo.

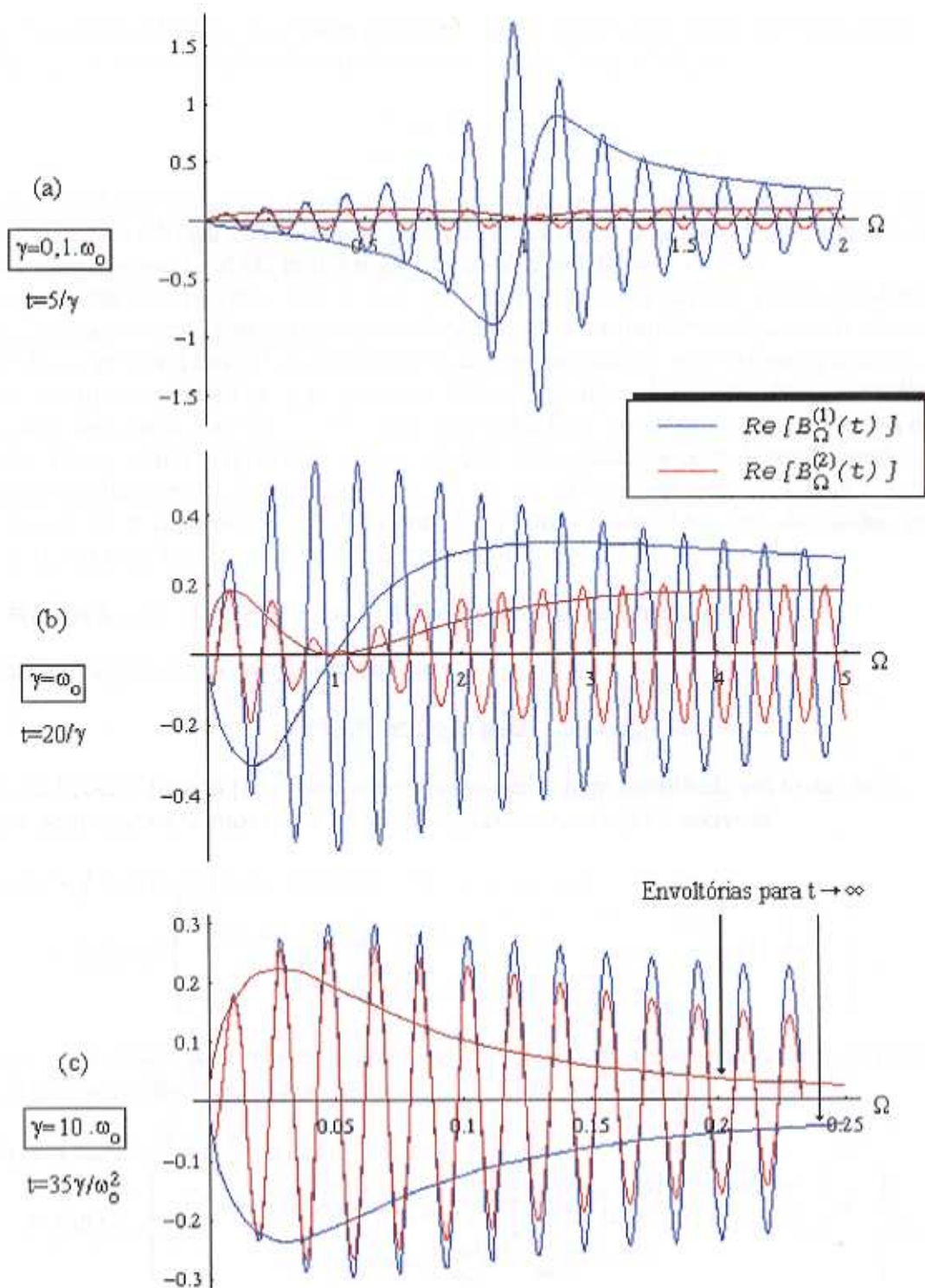


Gráfico 5.4

Gráfico da parte real dos coeficientes $B_{\Omega}^{(1)}(t)$ e $B_{\Omega}^{(2)}(t)$ (como funções de Ω e nos tempos especificados) que aparecem na expressão (5.23) de $a(t)$ para diferentes valores de γ/ω_o . A parte imaginária apresenta um comportamento muito semelhante a esta parte real. Inclusive, apresenta as mesmas envoltórias no limite $t \rightarrow \infty$. Estas envoltórias serão dadas pelas funções $(\omega_o \pm \Omega) \frac{|L_{\Omega}|^2_R}{|v_{\Omega}|^2} \left[\frac{\Omega^2 - \omega_o^2}{2\omega_o} + H_R(\Omega) \right]$, para $B_{\Omega}^{(1)}(t)$ e $B_{\Omega}^{(2)}(t)$, respectivamente, já que no limite $t \rightarrow \infty$ os dois primeiros termos das expressões para $B_{\Omega}^{(1)}(t)$ e $B_{\Omega}^{(2)}(t)$ (ver (5.24)) irão a zero. Consideramos $\omega_o = 1$ e $\omega_c = 10^3$ na realização destes gráficos.

reservatório, a nossa função $|L_\omega|^2$ seria dada por (5.29). Neste caso vemos que a condição para que a função $|L_\omega|^2$ esteja centrada muito próximo a ω_o é que $2\gamma\omega_c \ll \omega_o^2$ ou

$$\frac{\gamma}{\omega_o} \ll \frac{\omega_o}{\omega_c} \quad (\ll 1). \quad (5.30)$$

Portanto, a condição $\gamma/\omega_o \ll 1$ não seria mais suficiente para desprezarmos os termos associados a a^+ e b_Ω^+ na expressão para $a(t)$. Isto só poderia ser feito se a condição (5.30), que limita o nosso sistema a uma dissipação ainda muito mais fraca, fosse satisfeita.

É interessante observarmos que o fato de um sistema estar sujeito a uma dissipação fraca ($\gamma \ll \omega_o$, no nosso caso) não garante que o deslocamento na frequência (quadrada) deste sistema ($\Delta\omega^2 = 2\gamma\omega_c$, no caso) devido ao acoplamento com o reservatório seja também pequena. Veremos a seguir, em maiores detalhes, que para um sistema sujeito a dissipação fraca o coeficiente de dissipação γ será dado por $\pi|v_{\omega_o}|^2$ e o deslocamento em ω_o^2 por $H(\omega_o)$. Observando a expressão (5.9) para $H(\omega)$ vemos claramente que a relação entre estas funções depende muito da forma adotada para a função $|v_\omega|^2$. Portanto, $\pi|v_{\omega_o}|^2 \ll \omega_o$ não garante que tenhamos $H(\omega_o) \ll \omega_o$ (como vimos ser o caso para $|v_\omega|^2$ dada por (5.8)) como é admitido, sem discussão, em alguns artigos [23], embora isto ocorra para algumas funções $|v_\omega|^2$.

3.4 Redução ao Modelo com a Aproximação de Onda Girante

Consideremos agora uma situação em que

$$\pi|v_\omega|^2 \ll \omega_o, \quad \text{para } \omega \sim \omega_o. \quad (5.31)$$

Nestas condições a função $|L_\omega|_R^2$ será uma função muito bem localizada em torno de ω_o . Portanto podemos desprezar os termos em a^+ e b_Ω^+ na expressão para $a(t)$ e escrever

$$a(t) \simeq \int d\omega |L_\omega|_R^2 \{4\omega_o\omega \cos(\omega t) - i2(\omega^2 + \omega_o^2) \text{sen}(\omega t)\} a + \int d\Omega v_\Omega \left\{ \int d\omega 4\omega_o |L_\omega|_R^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \begin{bmatrix} \omega(\omega_o + \Omega) \cos(\omega t) - \\ -i(\omega^2 + \omega_o\Omega) \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + 2\omega_o(\omega_o + \Omega) \frac{|L_\Omega|_R^2}{|v_\Omega|^2} \frac{\Omega^2 - \omega_o^2}{2\omega_o} e^{-i\Omega t} \right\} b_\Omega. \quad (5.32)$$

Mesmo as expressões para os coeficientes de a e b_Ω podem ser aproximadas considerando que $|L_\omega|_R^2$ só será apreciável, neste caso, para $\omega \simeq \omega_o$. Podemos escrever:

$$a(t) \simeq \int d\omega |L_\omega|_R^2 \{4\omega_o^2 \cos(\omega t) - i4\omega_o^2 \text{sen}(\omega t)\} a + \int d\Omega v_\Omega \left\{ \int d\omega 4\omega_o |L_\omega|_R^2 \mathcal{P} \frac{1}{(\omega - \Omega)(\omega_o + \Omega)} \begin{bmatrix} \omega_o(\omega_o + \Omega) \cos(\omega t) - \\ -i\omega_o(\omega_o + \Omega) \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + 4\omega_o^2 \frac{|L_\Omega|_R^2}{|v_\Omega|^2} \frac{2\omega_o(\Omega - \omega_o)}{2\omega_o} e^{-i\Omega t} \right\} b_\Omega \quad (5.33)$$

e finalmente

$$a(t) = \int d\omega |\alpha_\omega|_R^2 e^{-i\omega t} a + \int d\Omega v_\Omega \left\{ \int d\omega |\alpha_\omega|_R^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \Omega} e^{-i\omega t} + \frac{|\alpha_\Omega|_R^2}{|v_\Omega|^2} [\Omega - \omega_o] e^{-i\Omega t} \right\} b_\Omega, \quad (5.34)$$

onde a função $|\alpha_\omega|_R^2$ vem da aproximação de $|L_\omega|_R^2$ considerando-se (5.31),

$$|L_\omega|_R^2 = \frac{|v_\omega|^2}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (2\pi\omega_o|v_\omega|^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{|v_\omega|^2}{[2\omega_o(\omega - \omega_o)]^2 + (2\pi\omega_o|v_\omega|^2)^2} \\
&= \frac{1}{4\omega_o^2} \frac{|v_\omega|^2}{(\omega - \omega_o)^2 + (\pi|v_\omega|^2)^2} = \frac{1}{4\omega_o^2} |\alpha_\omega|_R^2.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Comparemos agora (5.34-5.35) com as expressões (3.57-3.58), obtidas anteriormente dentro da aproximação de onda girante. Vemos então que temos rigorosamente as mesmas expressões, a menos da ausência do deslocamento da frequência ω_o , representado em (3.58) pela função $F(\omega)$. Este deslocamento não aparece em (5.35) devido ao fato de termos considerado a renormalização do potencial.

Suponhamos agora que não tivéssemos incluído o contratermo em nosso modelo. Neste caso, supondo que a função $H(\omega)$ seja tal que

$$H(\omega) \ll \omega_o, \quad \text{para } \omega \sim \omega_o, \tag{5.36}$$

e que $|v_\omega|^2$ satisfaça (5.31), a equação para $a(t)$ será ligeiramente modificada, passando a ser dada por

$$\begin{aligned}
a(t) = & \int d\omega |\alpha'_\omega|^2 e^{-i\omega t} a + \\
& + \int d\Omega v_\Omega \left\{ \int d\omega |\alpha'_\omega|^2 \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \Omega} e^{-i\omega t} + \frac{|\alpha'_\Omega|^2}{|v_\Omega|^2} [\Omega - \omega_o + H(\Omega)] e^{-i\Omega t} \right\} b_\Omega,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

onde

$$|\alpha'_\omega|^2 = \frac{|v_\omega|^2}{[\omega - \omega_o + H(\omega)]^2 + (\pi|v_\omega|^2)^2}. \tag{5.38}$$

Podemos novamente comparar (5.37-5.38) com (3.57-3.58). Lembrando ainda a definição (3.83) para $H(\omega)$,

$$H(\omega) = G(\omega) - F(\omega) = \int \frac{|v_\Omega|^2}{\omega + \Omega} d\Omega - \mathcal{P} \int \frac{|v_\Omega|^2}{\omega - \Omega} d\Omega, \tag{5.39}$$

vemos que a diferença entre as expressões é dada pela presença da função $G(\omega)$. Teríamos $H(\omega) \simeq -F(\omega)$, para $\omega \sim \omega_o$, se $G(\omega) \ll F(\omega)$. Podem existir funções $|v_\omega|^2$ que satisfaçam este requisito. Entretanto, isto não será verdade para qualquer $|v_\omega|^2$, por exemplo, para a $|v_\omega|^2$ dada em (5.8) teremos $|G(\omega)/F(\omega)| \simeq 1$ para $\omega \sim \omega_o$. Isto significa que teríamos $H(\omega_o) \simeq -2F(\omega_o)$ e portanto o dobro do deslocamento na frequência que aquele previsto dentro do modelo com a aproximação de onda girante (embora ambos sejam muito menores que ω_o). Esta relação, $H(\omega_o) \simeq -2F(\omega_o)$, será verificada para funções $|v_\omega|^2$ que se estendam até frequências muito maiores que ω_o , pois neste caso teremos

$$F(\omega_o) = \mathcal{P} \int \frac{|v_\Omega|^2}{\omega_o - \Omega} d\Omega \simeq -\mathcal{P} \int \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} d\Omega, \tag{5.40}$$

bem como,

$$H(\omega_o) \simeq \mathcal{P} \int \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} d\Omega + \mathcal{P} \int \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} d\Omega \simeq -2F(\omega_o). \tag{5.41}$$

Portanto, a aproximação de onda girante leva a resultados corretos, no que se refere à taxa de decaimento do sistema (relacionada à função $|\alpha_\omega|_R^2$), se e somente se a condição de dissipação

fraca (5.31) for satisfeita. Quanto ao deslocamento da frequência previsto no modelo com a aproximação de onda girante, vemos que a sua concordância com o dado no limite de dissipação fraca, em um modelo sem a inclusão do contratermo, apresenta uma dependência em relação à função $|v_\omega|^2$ adotada. Para funções $|v_\omega|^2$ que se estendam até frequências muito maiores que ω_o teremos aproximadamente o dobro do deslocamento previsto na aproximação de onda girante. Além disso, é necessário que seja satisfeita a condição (5.36), além de (5.31), a fim de garantir que este deslocamento seja muito menor que ω_o (e possamos desprezar os termos em a^+ e b_Ω^+ na expressão para $a(t)$).

4 Evolução de um Estado Coerente

Vimos que se o nosso sistema satisfizer a condição de dissipação fraca (5.31) a evolução do operador $a(t)$ reduz-se a expressão dada em (5.34). Portanto, como vimos no Capítulo 3 (eq. (3.62)), um estado coerente inicial $|\alpha\rangle$, interagindo com um reservatório a temperatura $T = 0$, neste caso particular, iria permanecer um estado coerente durante a sua evolução e dado por²¹

$$|\alpha; t\rangle = \left| \alpha_t = \alpha \int d\omega |\alpha_\omega|_R^2 e^{-i\omega t} \right\rangle. \quad (5.42)$$

Sendo a condição (5.31) satisfeita poderíamos ainda fazer uma aproximação adicional em²² $|\alpha_\omega|_R^2$ que nos leva a

$$|\alpha_\omega|_R^2 \simeq \frac{|v_{\omega_o}|^2}{(\omega - \omega_o)^2 + (\pi |v_{\omega_o}|^2)^2}. \quad (5.43)$$

Uma vez que (5.31) implica em $\pi |v_{\omega_o}|^2 \ll \omega_o$, teríamos então um conjunto de equações equivalentes a (3.57) e (3.64-3.65). Neste caso a evolução dada em (5.42) poderia ser aproximada por²³

$$|\alpha; t\rangle = \left| \alpha_t = \alpha e^{-i\omega_o t} e^{-\pi |v_{\omega_o}|^2 t} \right\rangle, \quad (5.44)$$

onde, lembrando a expressão (5.8) adotada para $|v_\omega|^2$, temos

$$\pi |v_{\omega_o}|^2 = \gamma, \quad (5.45)$$

no limite $\omega_c \rightarrow \infty$.

Podemos ainda observar que para a função $|v_\omega|^2$ adotada, linear para $\omega \sim \omega_o$, a condição (5.31) é equivalente à condição

$$\gamma \ll \omega_o. \quad (5.46)$$

Agora é óbvio que não sendo satisfeita (5.31) [ou (5.46)], quando então não poderemos desprezar

No caso de não considerarmos a inclusão do contratermo em nosso modelo devemos substituir a função $|\alpha_\omega|_R^2$ pela função $|\alpha'_\omega|^2$, dada em (5.38).

É interessante salientarmos que a expressão (5.21) para $a(t)$ reduz-se à obtida dentro da aproximação de onda girante, como vimos na seção anterior, antes que seja necessária esta última aproximação (que é também justificada em termos da condição (5.31), mas é um pouco mais forte do que a feita anteriormente).

Sem a introdução do contratermo aproximaríamos a expressão (5.38) para $|\alpha'_\omega|^2$ por $|\alpha'_\omega|^2 \simeq \frac{|v_{\omega_o}|^2}{[\omega - \omega_o + H(\omega_o)]^2 + (\pi |v_{\omega_o}|^2)^2}$.

Neste caso teríamos a evolução (5.44) dada por $|\alpha; t\rangle = \left| \alpha_t = \alpha e^{-i[\omega_o - \Delta\omega]t} e^{-\pi |v_{\omega_o}|^2 t} \right\rangle$, onde $\Delta\omega = H(\omega_o)$.

os termos em a^+ e b_Ω^+ na expressão (5.21) para $a(t)$, $|\alpha, 0\rangle$ não será autoestado de $a(t)$, isto é,

$$a(t) |\alpha, 0\rangle \neq \mathcal{F}(\alpha, \gamma, \omega_o, t) |\alpha, 0\rangle, \quad (5.47)$$

onde $\mathcal{F}(\alpha, \gamma, \omega_o, t)$ é uma função qualquer de α, γ, ω_o e t , uma vez que $|\alpha\rangle$ não é um autoestado de a^+ e tão pouco $|0\rangle$ é de b_Ω^+ . Assim, vemos que um estado coerente inicial $|\alpha\rangle$ interagindo com um reservatório, mesmo que a temperatura $T = 0$, não permanecerá um estado coerente durante o seu decaimento a menos que tenhamos um sistema sujeito a uma dissipação muito fraca [que satisfaça (5.31) ou equivalentemente (5.46)].

5 Evolução do Valor Médio de um Pacote de Onda

Partindo da expressão (3.86) para $a(t)$ podemos também calcular a evolução do operador q associado à posição da partícula. Sendo os operadores q e p relacionados ao operador a por (5.1), obtemos de (3.86) a seguinte expressão para $q(t)$:

$$q(t) = 4\omega_o^2 \int d\omega |L_\omega|_R^2 \left[\frac{\omega}{\omega_o} q \cos(\omega t) + \frac{p}{M\omega_o} \text{sen}(\omega t) \right] + \mathcal{F}_R(q_\Omega, p_\Omega; t), \quad (5.48)$$

onde $\mathcal{F}_R(q_\Omega, p_\Omega; t)$ é uma função dos operadores de posição q_Ω e momento p_Ω das infinitas partículas que compõem o reservatório,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_R(q_\Omega, p_\Omega; t) = & 2\sqrt{\frac{\omega_o}{M}} \int d\Omega v_\Omega \sqrt{m_\Omega \Omega} \left\{ \left[\begin{aligned} & 4\omega_o \mathcal{P} \int d\omega \frac{|L_\omega|_R^2}{\omega^2 - \Omega^2} \omega \cos(\omega t) + \\ & + \frac{|L_\Omega|_R^2}{|v_\Omega|^2} (\Omega^2 - \omega_o^2) \cos(\Omega t) \end{aligned} \right] q_\Omega + \right. \\ & \left. + \left[\begin{aligned} & 4\omega_o \Omega \mathcal{P} \int d\omega \frac{|L_\omega|_R^2}{\omega^2 - \Omega^2} \text{sen}(\omega t) + \\ & + \frac{|L_\Omega|_R^2}{|v_\Omega|^2} (\Omega^2 - \omega_o^2) \text{sen}(\Omega t) \end{aligned} \right] \frac{p_\Omega}{m_\Omega \Omega} \right\}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Vamos agora supor que o operador densidade inicial do nosso sistema global possa ser fatorizado na forma

$$\rho_T = \rho_S \rho_R, \quad (5.50)$$

onde ρ_S e ρ_R são, respectivamente, operadores densidade do sistema e do reservatório quando isolados. Escrevendo (5.48) como $q(t) = \mathcal{G}_S(q, p; t) + \mathcal{F}_R(q_\Omega, p_\Omega; t)$, teremos

$$\begin{aligned} \langle q(t) \rangle &= \text{Tr}_{SR} \{ q(t) \rho_T \} = \text{Tr}_{SR} \{ [\mathcal{G}_S(q, p; t) + \mathcal{F}_R(q_\Omega, p_\Omega; t)] \rho_S \rho_R \} \\ &= \text{Tr}_S [\mathcal{G}_S(q, p; t) \rho_S] + \text{Tr}_R [\mathcal{F}_R(q_\Omega, p_\Omega; t) \rho_R] \\ &= \mathcal{G}_S(\langle q \rangle_S, \langle p \rangle_S; t) + \mathcal{F}_R(\langle q_\Omega \rangle_R, \langle p_\Omega \rangle_R; t), \end{aligned} \quad (5.51)$$

uma vez que $\text{Tr}_S[\rho_S] = \text{Tr}_R[\rho_R] = 1$.

Vamos supor agora que o estado inicial do reservatório, sem a passagem para o limite contínuo, seja tal que

$$\langle q_j \rangle_R = -\frac{C_j}{m_j \omega_j^2} \langle q \rangle_S, \quad \langle p_j \rangle_R = 0, \quad (5.52)$$

analogamente ao estado inicial apresentado em (4.34). Podemos escrever a expressão (5.49) no limite discreto, substituir a condição inicial (5.52) e passar a expressão novamente para o limite

contínuo. Obtemos assim, ver Apêndice E, a seguinte expressão para $\langle q(t) \rangle$:

$$\langle q(t) \rangle = 4\omega_o^2 \int d\omega |L_\omega|_R^2 \left[\frac{\omega}{\omega_o} \langle q \rangle_S \cos(\omega t) + \frac{\langle p \rangle_S}{M\omega_o} \text{sen}(\omega t) \right] + \mathcal{F}'_R(t) \langle q \rangle_S, \quad (5.53)$$

onde

$$\mathcal{F}'_R(t) = 4\omega_o \int d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} \left[\frac{4\omega_o \mathcal{P} \int d\omega \frac{|L_\omega|_R^2}{\Omega^2 - \omega^2} \omega \cos(\omega t) +}{+ \frac{|L_\Omega|_R^2}{|v_\Omega|^2} (\omega_o^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t)} \right] \quad (5.54)$$

A expressão (5.53) pode ser escrita como

$$\langle q(t) \rangle = \langle q \rangle_S \left[\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) + \mathcal{F}'_R(t) \right] + \frac{\langle p \rangle_S}{M} \mathcal{L}(t), \quad (5.55)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= 4\omega_o \int d\omega |L_\omega|_R^2 \text{sen}(\omega t) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\omega'} \text{sen}(\omega' t) e^{-\gamma t}, & \text{para } \gamma < \omega_o, \\ t e^{-\gamma t}, & \text{para } \gamma = \omega_o, \\ \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_1 t} + \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_2 t}, & \text{para } \gamma > \omega_o, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.56)$$

e

$$\mathcal{F}'_R(t) = 2\gamma \mathcal{L}(t), \quad (5.57)$$

sendo $\omega' = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$ e $\gamma_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$ (o cálculo de $\mathcal{L}(t)$ e $\mathcal{F}'_R(t)$ são apresentados no Apêndice E).

Logo, se o estado inicial do sistema apresentar um momento médio inicial $\langle p \rangle_S = p_o$ e uma posição média inicial $\langle q \rangle_S = q_o$, este evoluirá como

$$\langle q(t) \rangle = q_o \left[\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) + 2\gamma \mathcal{L}(t) \right] + \frac{p_o}{M} \mathcal{L}(t) \quad (5.58)$$

$$= q_o \left[\cos(\omega' t) + \frac{\gamma}{\omega'} \text{sen}(\omega' t) \right] e^{-\gamma t} + \frac{p_o}{M\omega'} \text{sen}(\omega' t) e^{-\gamma t}, \quad (5.59)$$

para $\gamma < \omega_o$, que corresponde à trajetória clássica.

Observe a importância de adotarmos a condição inicial (5.52) para os osciladores do banho. Se considerássemos que estes osciladores inicialmente se encontrassem em equilíbrio em torno da origem, isto é, se tivéssemos

$$\langle q_j \rangle_R = 0, \quad \langle p_j \rangle_R = 0, \quad (5.60)$$

ao invés de (5.52), não teríamos o termo $2\gamma \mathcal{L}(t)$ em (5.58). A evolução de $\langle q(t) \rangle$ neste caso seria dada por

$$\langle q(t) \rangle = q_o \left[\cos(\omega' t) - \frac{\gamma}{\omega'} \text{sen}(\omega' t) \right] e^{-\gamma t} + \frac{p_o}{M\omega'} \text{sen}(\omega' t) e^{-\gamma t}, \quad (5.61)$$

para $\gamma < \omega_o$. No caso do sistema apresentar um momento inicial p_o não nulo e uma posição inicial q_o nula as expressões (5.59) e (5.61) concordam. Entretanto, no caso de termos $q_o \neq 0$ as expressões (5.59) e (5.61) irão diferir por uma fase. Fisicamente o que ocorre é que se os osciladores do banho não estiverem “adequadamente” distribuídos em torno da partícula (como na condição inicial (5.52)), quando esta é inserida no banho, estes osciladores irão “puxar” a partícula até atingirem

esta distribuição “adequada”²⁴. Esta força irá agir sobre a partícula durante um intervalo de tempo da ordem de $1/\omega_c$. Portanto no limite $\omega_c \rightarrow \infty$ teremos uma força deltiforme que causará uma diferença de fase. É fácil de vermos a origem desta força na expressão (4.33). Se adotássemos a condição inicial (5.60) teríamos

$$\langle F(t) \rangle = - \sum_j \frac{C_j^2}{m_j \omega_j^2} \cos(\omega_j t) q_o = -4M\gamma \delta(t) \cdot q_o, \quad (5.62)$$

no limite $\omega_c \rightarrow \infty$, ao invés de $\langle F(t) \rangle = 0$.

A discussão do parágrafo anterior é bastante relevante. Ela corrige um erro cometido por H. Grabert e colaboradores [8] que adotaram a condição inicial (5.60) e chegaram ao resultado errado dado por (5.61). Na verdade a importância da adoção da condição inicial (5.52) no lugar de (5.60) não havia sido observada nem mesmo nos artigos de Caldeira e Leggett. Entretanto, nestes artigos, o cálculo via integração funcional foi feito de tal forma a se considerar apenas a evolução do sistema depois de transcorrido um intervalo de tempo da ordem de $1/\omega_c$, quando então a força deltiforme (5.62) já desaparecera. Desta forma obtem-se também o resultado correto (5.59).

Poderíamos definir, sem perda de generalidade, $C_j = -m_j \omega_j^2$. Neste caso teríamos

$$H = \frac{p^2}{2M} + V(q) + \sum_j \left[\frac{1}{2} \frac{p_j^2}{m_j} + \frac{1}{2} m_j \omega_j^2 (q_j - q)^2 \right].$$

A função espectral seria dada por

$$J(\omega) = -\frac{\pi}{2} \sum_j m_j \omega_j^3 \delta(\omega - \omega_j)$$

e poderia ainda modelar qualquer dependência com a frequência desde que escolhêssemos a distribuição espectral dos osciladores convenientemente. Na forma escrita acima fica clara (1) a interpretação do modelo como um conjunto de osciladores unidos à partícula de massa M e (2) que a distribuição “adequada” é aquela em que todos os osciladores do banho tem a sua posição média dada por q_o ($\langle q_j \rangle = q_o$).

Conclusão

Neste trabalho utilizamos o formalismo da diagonalização de Fano no estudo de algumas propriedades de modelos para sistemas dissipativos.

No Capítulo 3 realizamos a diagonalização exata da Hamiltoniana tradicionalmente utilizada no tratamento de sistemas dissipativos dentro da aproximação de onda girante. Calculamos então a evolução de um estado coerente em contato com um reservatório a temperatura zero. Verificamos que dentro da aproximação de onda girante um estado coerente permanecerá sempre como um estado coerente durante o seu decaimento. Comparamos os resultados obtidos através da diagonalização exata com aqueles obtidos através do tratamento via equação mestra. Esta comparação evidenciou claramente as condições (dissipação fraca e função espectral ampla) necessárias para que o tratamento via equação mestra leve a resultados corretos. Visualizamos também a evolução das excitações dos modos do reservatório. Vimos que estes evoluem do estado de vácuo para estados coerentes, que esta excitação ocorre na mesma escala de tempo do decaimento do sistema e em frequências em torno da frequência ω_o do estado coerente inicialmente excitado no sistema.

No Capítulo 5 realizamos a diagonalização exata da Hamiltoniana dissipativa (3.38), na qual considera-se a inclusão dos termos contragirantes. Vimos, através do cálculo da evolução do operador de criação a do subsistema, que a aproximação de onda girante é válida para este modelo se e somente se forem satisfeitas as condições (5.31) e (5.36), isto é,

$$\pi |v_{\omega_o}|^2 \ll \omega_o, \quad (5.63)$$

$$H(\omega_o) \ll \omega_o. \quad (5.64)$$

Dependendo da função $|v_\omega|^2$ adotada, teremos $H(\omega_o) \approx \pi |v_{\omega_o}|^2$ e satisfazendo (5.63) automaticamente satisfaremos (5.64). Entretanto, para outras funções, podemos ter $H(\omega_o) \gg \pi |v_{\omega_o}|^2$ e (5.64) passa a limitar a validade da aproximação. Sendo estas condições satisfeitas vimos que o sistema apresentará uma evolução idêntica àquela determinada no modelo com a aproximação de onda girante, a menos do deslocamento na frequência ω_o . Verificamos que este deslocamento será dado por $H(\omega_o)$ em lugar de $-F(\omega_o)$. Como vimos estas funções, em geral, apresentam a mesma ordem de grandeza, mas não são idênticas. Para funções $|v_\omega|^2$ que se estendam até frequências muito maiores que ω_o teremos $H(\omega_o) \simeq -2F(\omega_o)$.

A comparação da Hamiltoniana (3.38) com a Hamiltoniana do modelo Caldeira-Leggett levou-nos a estabelecer a relação (5.7) entre a função espectral $J(\omega)$ deste modelo e a função $|v_\omega|^2$,

$$|v_\omega|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{J(\omega)}{M\omega_o}. \quad (5.65)$$

Na situação de dissipação ôhmica e considerando a inclusão do contratermo, vimos então que automaticamente $H_R(\omega_o) \simeq 0$ de forma que a única condição para a validade da aproximação de onda girante passa a ser

$$\gamma \ll \omega_o. \quad (5.66)$$

Uma questão interessante a ser analisada futuramente seria a relação entre a validade da aproximação de onda girante e a função espectral adotada para o sistema. Vimos que para a dissipação ôhmica, em que $|v_\omega|^2$ é linear para baixas frequências, temos $H_R(\omega_o) \simeq 0$. Entretanto, para funções espectrais diferentes, possivelmente $H_R(\omega_o)$ passará a ter um valor apreciável. Neste

caso, as duas condições (5.63-5.64) teriam de ser verificadas. Dependendo da relação entre $H_R(\omega)$ e $|v_\omega|^2$ a aproximação de onda girante poderia então vir a ser válida apenas em condições de dissipação muito mais fraca que a imposta unicamente pela condição $\pi |v_{\omega_o}|^2 \ll \omega_o$, como ocorre para a dissipação ôhmica.

Quanto à evolução do estado coerente vimos que este permanecerá como um estado coerente durante a sua evolução exclusivamente quando for válida a aproximação de onda girante e se em contato com um reservatório a temperatura zero.

Um detalhe que vale ser mencionado é que o procedimento da diagonalização de Fano nos forneceu os operadores A_ω (ver (3.40)) que diagonalizam a Hamiltoniana do sistema global, mas não os autovetores deste sistema. Sabemos que a transformação unitária que nos leva dos operadores a e b_ω (pertencentes ao subsistema e ao reservatório, respectivamente) ao operador A_ω está diretamente relacionada à transformação unitária que nos permitiria escrever os novos autovetores do sistema global em termos dos autovetores do subsistema e do reservatório [31]. Entretanto, embora em princípio esta relação exista, não é uma tarefa simples escrevê-la de uma forma que permita a sua utilização prática no caso das transformações complexas que obtivemos no presente trabalho.

No final do Capítulo 5 obtivemos ainda a evolução do valor médio da posição de um pacote de onda em um oscilador harmônico dissipativo. Anteriormente este cálculo só havia sido realizado via integração funcional. O método adotado neste trabalho permitiu-nos verificar a importância de adotarmos a condição inicial (5.52) no lugar de (5.60). Esta característica importante do modelo não havia sido observada em trabalhos anteriores, como discutimos no final do Capítulo 5.

Descrição do Campo Eletromagnético

Na eletrodinâmica clássica, os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ obedecem às equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.2})$$

onde as densidades de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ e corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ são aquelas associadas às partículas. Tomando-se a transformada de Fourier espacial, as equações de Maxwell tornam-se:

$$i\mathbf{k} \cdot \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{k}, t), \quad i\mathbf{k} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$i\mathbf{k} \times \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}(\mathbf{k}, t), \quad i\mathbf{k} \times \mathcal{B}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathcal{J}(\mathbf{k}, t), \quad (\text{A.4})$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)$, por exemplo, são relacionados através da expressão: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$. As equações (A.3) fixam as componentes longitudinais $\mathcal{E}_{||}$ e $\mathcal{B}_{||}$ dos campos elétricos e magnéticos, isto é, as projeções sobre $\mathbf{k}/k$ de $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{E}_{||}(\mathbf{k}, t) = -\frac{i\mathbf{k}}{\varepsilon_0 k^2} \rho(\mathbf{k}, t), \quad \mathcal{B}_{||}(\mathbf{k}, t) = 0. \quad (\text{A.5})$$

No espaço real estas relações tornam-se:

$$\mathbf{E}_{||}(\mathbf{r}, t) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}', t) \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{B}_{||}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Logo, o campo magnético é puramente transverso, enquanto o campo elétrico longitudinal coincide com o campo Coulombiano associado com a distribuição simultânea de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$. Portanto, os campos longitudinais não são variáveis realmente independentes do campo. Eles são zero ou podem ser expressos, através de ρ , como função das variáveis das partículas. Já os campos transversos $\mathcal{E}_{\perp}$ e $\mathcal{B}_{\perp}$, que são as projeções de $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ no plano perpendicular a $\mathbf{k}$, são variáveis independentes cujas equações de movimento podem ser deduzidas a partir de (A.4):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}(\mathbf{k}, t) = -i\mathbf{k} \times \mathcal{E}_{\perp}(\mathbf{k}, t), \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = c^2 i\mathbf{k} \times \mathcal{B}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{J}_{\perp}(\mathbf{k}, t). \quad (\text{A.7})$$

Na teoria quântica é necessário considerar os potenciais $\mathbf{A}$ e U relacionados aos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ pelas equações

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.8})$$

que no espaço recíproco tornam-se

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = -ik\mathcal{U}(\mathbf{k}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}(\mathbf{k}, t), \quad \mathcal{B}(\mathbf{k}, t) = i\mathbf{k} \times \mathcal{A}(\mathbf{k}, t). \quad (\text{A.9})$$

Os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são invariantes por uma transformação de gauge associada com a função $F(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla F(\mathbf{r}, t), \quad U(\mathbf{r}, t) \rightarrow U'(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}F(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.10})$$

que também podem ser escritas como

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}, t) \rightarrow \mathcal{A}'(\mathbf{k}, t) = \mathcal{A}(\mathbf{k}, t) + ik\mathcal{F}(\mathbf{k}, t), \quad \mathcal{U}(\mathbf{k}, t) \rightarrow \mathcal{U}'(\mathbf{k}, t) = \mathcal{U}(\mathbf{k}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(\mathbf{k}, t). \quad (\text{A.11})$$

A partir das eqs.(A.11) vemos que apenas $\mathcal{A}_{||}$ e $\mathcal{U}$ são alterados em uma transformação de gauge, enquanto $\mathcal{A}_{\perp}$ é um invariante de gauge: $\mathcal{A}'_{\perp}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$. As eqs.(A.9) mostram também que os campos transversos $\mathcal{E}_{\perp}$ e $\mathcal{B}$ dependem apenas de $\mathcal{A}_{\perp}$

$$\mathcal{E}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{k}, t), \quad \mathcal{B}(\mathbf{k}, t) = i\mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{k}, t).$$

O gauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) corresponde à escolha:

$$\mathcal{A}_{||}(\mathbf{k}, t) = 0 = \mathbf{A}_{||}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.12})$$

Comparando então a componente longitudinal de $\mathcal{E}$ dado por (A.9) com o $\mathcal{E}_{||}$ dado por (A.5) temos:

$$\mathcal{U}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 k^2} \rho(\mathbf{k}, t) \quad \text{e portanto} \quad U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Logo, no gauge de Coulomb o potencial vetorial longitudinal é zero e o potencial escalar coincide com o potencial de Coulomb associado com a distribuição instantânea de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$. Assim, neste gauge as variáveis independentes do campo são o potencial vetorial transverso $\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ e a sua velocidade $\dot{\mathcal{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = -\mathcal{E}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$.

Podemos agora introduzir a seguinte combinação linear de $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$

$$\alpha(\mathbf{k}, t) = \lambda(k) \left[\mathcal{E}_{\perp}(\mathbf{k}, t) - c \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathcal{B}(\mathbf{k}, t) \right] = \lambda(k) \left[-\dot{\mathcal{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) + iw\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \right], \quad (\text{A.13})$$

onde $\lambda(k)$ é uma constante de normalização que mais tarde será tomada igual a $-i\sqrt{\varepsilon_0/2\hbar w}$. A equação de evolução para α é então bastante simples:

$$\dot{\alpha}(\mathbf{k}, t) + iw\alpha(\mathbf{k}, t) = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar w}} \mathcal{J}_{\perp}(\mathbf{k}, t). \quad (\text{A.14})$$

Na ausência de fontes ($\mathbf{j}_{\perp} = 0$), as variáveis $\alpha(\mathbf{k}, t)$ correspondentes a diferentes valores de $\mathbf{k}$ evoluem independentemente umas das outras, com uma dependência temporal e^{-iwt} onde $w = ck$. As variáveis α assim descrevem os modos normais de vibração do campo livre e por esta razão são chamadas de *variáveis normais*.

A equação (A.13) mostra que α , assim como $\mathcal{E}_{\perp}$ e $\mathcal{B}$, é um campo transverso. Para cada valor de $\mathbf{k}$ nós podemos introduzir dois vetores unitários ε e ε' , ortogonais um ao outro e ambos

perpendiculares a $\mathbf{k}$. Assim, cada conjunto $(\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon})$ define um modo vibracional do campo e a variável normal associada com este modo,

$$\alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}), \quad (\text{A.15})$$

obedece, segundo (A.14), à equação de evolução

$$\dot{\alpha}_{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) + i\omega\alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega}}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{J}(\mathbf{k}, t). \quad (\text{A.16})$$

Usando a condição de realidade para os campos $\mathbf{E}_{\perp}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{A}_{\perp}$, que, por exemplo, para $\mathbf{E}_{\perp}$ é escrita como $\mathcal{E}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{E}_{\perp}^*(-\mathbf{k}, t)$, nós podemos inverter (A.13) e expressar $\mathcal{E}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$, $\mathcal{B}(\mathbf{k}, t)$ e $\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ como função de $\alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k})$ e $\alpha_{\varepsilon}^*(\mathbf{k})$. Uma transformada de Fourier então dá a expansão dos campos transversos como função das variáveis normais

$$\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \sum_{\varepsilon} i\mathcal{E}_w [\varepsilon\alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \varepsilon\alpha_{\varepsilon}^*(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}], \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \sum_{\varepsilon} i\mathcal{B}_w \left[(\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\varepsilon}) \alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\varepsilon}) \alpha_{\varepsilon}^*(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (\text{A.18})$$

onde

$$\omega = ck, \quad \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k, \quad \mathcal{E}_w = \sqrt{\hbar\omega/2\varepsilon_0(2\pi)^3}, \quad \mathcal{B}_w = \mathcal{E}_w/c,$$

e lembrando que para o campo livre de fontes temos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t)$ e $\alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) = \alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$. Posteriormente, estas expansões serão escritas diretamente em função dos operadores $a_{\varepsilon}(\mathbf{k})$ e $a_{\varepsilon}^+(\mathbf{k})$ que são associados, na teoria quântica, com as variáveis normais $\alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k})$ e $\alpha_{\varepsilon}^*(\mathbf{k})$. O conjunto de graus de liberdade associados com o campo transversal é usualmente designado como “*radiação*”. O estado da radiação é assim definido em um dado instante t pelo conjunto das variáveis normais $\alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k}, t)$ para todos os valores de $\mathbf{k}$ e ε .

O procedimento de quantização canônica requer um par de variáveis dinâmicas conjugadas a serem identificadas, que, após a quantização, tornar-se-ão operadores cujo comutador será $i\hbar$.

Para o campo eletromagnético nós podemos introduzir uma Lagrangiana que contém apenas as variáveis realmente independentes do campo ($\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ e $\dot{\mathcal{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$) e as variáveis das partículas (Lagrangiana padrão no Coulomb de gauge [11] que leva às equações de Maxwell para o campo e as equações de Newton-Lorentz para as partículas). Com esta Lagrangiana obtemos que o momento conjugado à coordenada generalizada $\mathcal{A}_{\varepsilon}(\mathbf{k})$ é dado por $\Pi_{\varepsilon}(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 \dot{\mathcal{A}}_{\varepsilon}(\mathbf{k})$ [11] e as relações canônicas de comutação são então escritas como

$$[\mathcal{A}_{\varepsilon}(\mathbf{k}), \Pi_{\varepsilon}^+(\mathbf{k}')] = i\hbar\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{A.19})$$

O operador $a_{\varepsilon}(\mathbf{k})$ associado com a variável normal $\alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k})$ é expresso como uma função dos operadores $\mathcal{A}_{\varepsilon}(\mathbf{k})$ e $\Pi_{\varepsilon}(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 \dot{\mathcal{A}}_{\varepsilon}(\mathbf{k})$ através de uma equação análoga à (A.13). Escolhendo uma constante de normalização apropriada $[\lambda(k) = -i\sqrt{\varepsilon_0/2\hbar\omega}]$, vemos que (A.19) é equivalente a

$$[a_{\varepsilon}(\mathbf{k}), a_{\varepsilon'}^+(\mathbf{k}')] = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (\text{A.20})$$

com todos os demais comutadores iguais a zero.

Como já observamos é possível inverter (A.13), agora escrita em termos de operadores, e utilizar a condição de hermiticidade destes operadores para obtermos, através de uma transformada de Fourier, a expansão dos operadores de campo em termos de a_ϵ e a_ϵ^+ . Deste modo obtemos

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) = \int d^3k \sum_\epsilon i\mathcal{E}_w [\epsilon a_\epsilon(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \epsilon a_\epsilon^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}], \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int d^3k \sum_\epsilon i\mathcal{B}_w \left[(\hat{\mathbf{k}} \times \epsilon) a_\epsilon(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{k}} \times \epsilon) a_\epsilon^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right]. \quad (\text{A.22})$$

O campo elétrico total $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ é escrito como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_\parallel(\mathbf{r}),$$

onde $\mathbf{E}_\parallel(\mathbf{r})$ é dado por (A.6).

Freqüentemente é conveniente considerar o campo como estando contido no interior de uma caixa cúbica, de aresta L , sujeito a condições periódicas nas faces. A vantagem deste procedimento é a substituição das integrais de Fourier por séries de Fourier. No fim dos cálculos podemos fazer L ir a infinito e veremos que todas as previsões físicas serão independentes de L . Entretanto, se estivermos tratando, por exemplo, do campo eletromagnético contido no interior de uma cavidade com paredes constituídas por condutores perfeitos, é fácil ver que as condições periódicas que imporemos a seguir serão exatamente aquelas impostas ao campo devido às paredes da cavidade [14]. Neste caso a dimensão L terá uma realidade física. Entretanto, o procedimento independe da forma da cavidade (que abaixo é considerada cúbica), sendo que a única variável que restará será o seu volume (no nosso caso L^3).

As componentes do vetor de onda são então múltiplos de $2\pi/L$, isto é,

$$k_{x,y,z} = 2\pi n_{x,y,z}/L, \quad \text{onde} \quad n_{x,y,z} \text{ são inteiros (positivos, negativos ou zero)}$$

e os modos normais formam um conjunto discreto, cada elemento sendo designado por um sub-índice j . As integrais de Fourier são substituídas por uma série seguindo a regra

$$\int d^3k \sum_\epsilon f(\mathbf{k}, \epsilon) \leftrightarrow \sum_j \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 f(\mathbf{k}_j, \epsilon_j). \quad (\text{A.23})$$

Os operadores de criação e destruição são redefinidos por

$$a_j = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^{3/2} \int_{C_j} d^3k a_{\epsilon_j}(\mathbf{k}), \quad (\text{A.24})$$

onde C_j é a célula elementar de volume $(2\pi/L)^3$ ao redor de $\mathbf{k}_j$. Os operadores a_i e a_j^+ satisfazem então a seguinte relação de comutação

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}. \quad (\text{A.25})$$

Os campos expressos em função de a_j tem a forma

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) = \sum_j i \sqrt{\frac{\hbar w_j}{2\epsilon_0 L^3}} [a_j \boldsymbol{\epsilon}_j e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} - a_j^+ \boldsymbol{\epsilon}_j e^{-i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}}], \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_j \frac{i}{c} \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2 \varepsilon_0 L^3}} \left[\left(\hat{\mathbf{k}}_j \times \boldsymbol{\varepsilon}_j \right) a_j e^{i \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} - \left(\hat{\mathbf{k}}_j \times \boldsymbol{\varepsilon}_j \right) a_j^\dagger e^{-i \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (\text{A.27})$$

lembrando que para o cálculo de $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, na ausência de fontes ($\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t)$), basta substituímos a_j por $a_j e^{-i \omega_j t}$.

Na ausência de fontes a Hamiltoniana do campo pode ser escrita como [11]

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3 r \left[\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) \right], \quad (\text{A.28})$$

que, utilizando as eqs. (A.26) e (A.27), torna-se

$$H = \sum_i \hbar \omega_i \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.29})$$

Diagonalização sem a Aproximação de Onda Girante

Diagonalização da Hamiltoniana: Será apresentado a seguir, em maiores detalhes, o procedimento utilizado na diagonalização da Hamiltoniana (3.38),

$$H = \hbar\omega_o a^+ a + \hbar \int \Omega b_{\Omega}^+ b_{\Omega} d\Omega + \hbar (a^+ + a) \int (v_{\Omega} b_{\Omega} + v_{\Omega}^* b_{\Omega}^+) d\Omega. \quad (\text{B.1})$$

Desejamos encontrar o operador A_{ω} que nos permita escrever (B.1) na forma diagonal (3.76). Escrevemos A_{ω} em sua forma mais geral

$$A_{\omega} = \alpha_{\omega} a + \int d\Omega \beta_{\omega,\Omega} b_{\Omega} + \chi_{\omega} a^+ + \int d\Omega \sigma_{\omega,\Omega} b_{\Omega}^+, \quad (\text{B.2})$$

e impomos então a relação de comutação (3.41):

$$[A_{\omega}, H] = \hbar\omega A_{\omega}. \quad (\text{B.3})$$

Substituindo (B.1) e (B.2) em (B.3), temos

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega} [\omega_o a + \int (v_{\Omega} b_{\Omega} + v_{\Omega}^* b_{\Omega}^+) d\Omega] + \\ + \int \beta_{\omega,\Omega} \Omega b_{\Omega} d\Omega + \int \beta_{\omega,\Omega} v_{\Omega}^* d\Omega. (a + a^+) + \\ + \chi_{\omega} [-\omega_o a^+ - \int (v_{\Omega} b_{\Omega} + v_{\Omega}^* b_{\Omega}^+) d\Omega] - \\ - \int \sigma_{\omega,\Omega} \Omega b_{\Omega}^+ d\Omega - \int \sigma_{\omega,\Omega} v_{\Omega} d\Omega. (a + a^+) = \\ = \omega (\alpha_{\omega} a + \int d\Omega \beta_{\omega,\Omega} b_{\Omega} + \chi_{\omega} a^+ + \int d\Omega \sigma_{\omega,\Omega} b_{\Omega}^+). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Tomando agora os comutadores de ambos os lados de (B.4), na forma $[(B.4), a^+]$, $[a, (B.4)]$, $[(B.4), b_{\Omega}^+]$ e $[b_{\Omega}, (B.4)]$, obtemos:

$$\omega \alpha_{\omega} = \omega_o \alpha_{\omega} + \int (\beta_{\omega,\Omega} v_{\Omega}^* - \sigma_{\omega,\Omega} v_{\Omega}) d\Omega, \quad (\text{B.5})$$

$$\omega \chi_{\omega} = -\omega_o \chi_{\omega} + \int (\beta_{\omega,\Omega} v_{\Omega}^* - \sigma_{\omega,\Omega} v_{\Omega}) d\Omega, \quad (\text{B.6})$$

$$\omega \beta_{\omega,\Omega} = (\alpha_{\omega} - \chi_{\omega}) v_{\Omega} + \Omega \beta_{\omega,\Omega}, \quad (\text{B.7})$$

$$\omega \sigma_{\omega,\Omega} = (\alpha_{\omega} - \chi_{\omega}) v_{\Omega}^* - \Omega \sigma_{\omega,\Omega}. \quad (\text{B.8})$$

Subtraindo (B.5) de (B.6), e isolando χ_{ω} temos

$$\chi_{\omega} = \frac{\omega - \omega_o}{\omega + \omega_o} \alpha_{\omega} \quad (\text{B.9})$$

que se substituído em (B.7) nos permite calcular $\beta_{\omega,\Omega}$ como

$$\beta_{\omega,\Omega} = \left[\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \Omega} + z(\omega) \delta(\omega - \Omega) \right] \frac{2\omega_o}{\omega + \omega_o} v_{\Omega} \alpha_{\omega}. \quad (\text{B.10})$$

Analogamente, isolando $\sigma_{\omega,\Omega}$ em (B.8), temos

$$\sigma_{\omega,\Omega} = \frac{1}{\omega + \Omega} \frac{2\omega_o}{\omega + \omega_o} v_{\Omega}^* \alpha_{\omega}. \quad (\text{B.11})$$

Agora, substituindo (B.10) e (B.11) em (B.5), e isolando $z(\omega)^{25}$ (α_{ω} é fatorado), obtemos

$$z(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_o^2 + 2\omega_o H(\omega)}{2\omega_o |v_{\omega}|^2}, \quad (\text{B.12})$$

onde

$$H(\omega) = G(\omega) - F(\omega) = \int \frac{|v_{\Omega}|^2}{\omega + \Omega} d\Omega - \mathcal{P} \int \frac{|v_{\Omega}|^2}{\omega - \Omega} d\Omega. \quad (\text{B.13})$$

Resta-nos determinar α_{ω} . Para tal, impomos a condição (3.42):

$$[A_{\omega}, A_{\tilde{\omega}}^{\dagger}] = \delta(\omega - \tilde{\omega}). \quad (\text{B.14})$$

Substituindo (B.2) na equação acima chegamos a

$$\alpha_{\omega} \alpha_{\tilde{\omega}}^* + \int d\Omega \beta_{\omega,\Omega} \beta_{\tilde{\omega},\Omega}^* - \chi_{\omega} \chi_{\tilde{\omega}}^* - \int d\Omega \sigma_{\omega,\Omega} \sigma_{\tilde{\omega},\Omega}^* = \delta(\omega - \tilde{\omega}). \quad (\text{B.15})$$

Utilizando (B.9) e (B.11) obtemos, respectivamente,

$$\alpha_{\omega} \alpha_{\tilde{\omega}}^* - \chi_{\omega} \chi_{\tilde{\omega}}^* = \frac{2\omega_o (\omega + \tilde{\omega})}{(\omega + \omega_o)(\tilde{\omega} + \omega_o)} \alpha_{\omega} \alpha_{\tilde{\omega}}^*. \quad (\text{B.16})$$

e

$$\int d\Omega \sigma_{\omega,\Omega} \sigma_{\tilde{\omega},\Omega}^* = \frac{(2\omega_o)^2}{(\omega + \omega_o)(\tilde{\omega} + \omega_o)} \frac{G(\tilde{\omega}) - G(\omega)}{\omega - \tilde{\omega}} \alpha_{\omega} \alpha_{\tilde{\omega}}^*, \quad (\text{B.17})$$

sendo $G(\omega)$ dada em (B.13). Agora, utilizando (B.10), bem como (3.18-3.20), e depois de uma álgebra um pouco mais extensa, obtemos

$$\int d\Omega \beta_{\omega,\Omega} \beta_{\tilde{\omega},\Omega}^* = \frac{(2\omega_o)^2}{(\omega + \omega_o)(\tilde{\omega} + \omega_o)} \left\{ \frac{1}{\omega - \tilde{\omega}} \left[\frac{\tilde{\omega}^2 - \omega^2}{2\omega_o} + G(\tilde{\omega}) - G(\omega) \right] + \frac{1}{[\pi^2 + z^2(\omega)] |v_{\omega}|^2} \delta(\omega - \tilde{\omega}) \right\}. \quad (\text{B.18})$$

Substituindo então (B.16-B.18) em (B.15), obtemos

$$\alpha_{\omega} \alpha_{\tilde{\omega}}^* \frac{(2\omega_o)^2}{(\omega + \omega_o)(\tilde{\omega} + \omega_o)} [\pi^2 + z^2(\omega)] |v_{\omega}|^2 \delta(\omega - \tilde{\omega}) = \delta(\omega - \tilde{\omega}) \quad (\text{B.19})$$

e, portanto, devemos ter

$$|\alpha_{\omega}|^2 = \left(\frac{\omega + \omega_o}{2\omega_o} \right)^2 \frac{1}{|v_{\omega}|^2 [\pi^2 + z^2(\omega)]}. \quad (\text{B.20})$$

O aparecimento da função $z(\omega)$ em (B.9) é discutido na página 26.

Assim, temos α_ω determinado a menos de uma fase arbitrária e podemos escolher

$$\alpha_\omega = \frac{\omega + \omega_o}{2\omega_o} \frac{1}{v_\omega^* [z(\omega) - i\pi]}. \quad (\text{B.21})$$

Substituindo a expressão (B.12) para $z(\omega)$, temos então²⁶

$$\alpha_\omega = \frac{v_\omega (\omega + \omega_o)}{\omega^2 - \omega_o^2 + 2\omega_o [H(\omega) - i\pi |v_\omega|^2]}. \quad (\text{B.22})$$

Evolução do Operador a do Sistema:

Lembrando (3.84), (3.85) e que $A_\omega(t) = A_\omega e^{-i\omega t}$, temos

$$a(t) = \int d\omega \alpha_\omega^* A_\omega e^{-i\omega t} - \int d\omega \chi_\omega A_\omega^+ e^{i\omega t}. \quad (\text{B.23})$$

Substituindo (B.2), (B.9-B.11) e (B.22) em (B.23), e depois de alguma álgebra, temos

$$\begin{aligned} a(t) = & \int d\omega |L_\omega|^2 [(\omega + \omega_o)^2 e^{-i\omega t} - (\omega - \omega_o)^2 e^{i\omega t}] a + \\ & + \int d\omega |L_\omega|^2 [(\omega^2 - \omega_o^2) e^{-i\omega t} - (\omega^2 - \omega_o^2) e^{i\omega t}] a^+ + \\ & + 2\omega_o \int d\omega |L_\omega|^2 \int d\Omega v_\Omega \left\{ \begin{aligned} & (\omega + \omega_o) \left[\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \Omega} + z(\omega) \delta(\omega - \Omega) \right] e^{-i\omega t} - \\ & - \frac{(\omega - \omega_o)}{(\omega + \Omega)} e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} b_\Omega + \\ & + 2\omega_o \int d\omega |L_\omega|^2 \int d\Omega v_\Omega^* \left\{ \begin{aligned} & -(\omega - \omega_o) \left[\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \Omega} + z(\omega) \delta(\omega - \Omega) \right] e^{i\omega t} + \\ & + \frac{(\omega + \omega_o)}{(\omega + \Omega)} e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\} b_\Omega^+, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

onde $|L_\omega|^2$ é dada por (3.87). Substituindo a expressão (B.12) para $z(\omega)$ chegamos à expressão (3.86).

No procedimento de diagonalização supôs-se que $v_{\omega=0} = 0$, pois então teremos $\int_0^\infty d\omega v_\omega \delta(\omega) = v_{\omega=0}/2 = v_{\omega=0} (= 0)$.

A Introdução do Contratermo e o Cálculo de $H(\omega)$

1 Introdução do Contratermo $\Delta V_R(q)$

Consideremos agora a Hamiltoniana (4.17) com $\Delta V_R(q)$ dado por (4.11-4.13) e $V(q) = 1/2M\omega_o^2 q^2$,

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega_o^2 q^2 - \frac{1}{2}M\Delta\omega^2 q^2 + \sum_j \left(\frac{1}{2} \frac{p_j^2}{m_j} + \frac{1}{2} m_j \omega_j^2 q_j^2 \right) + \sum_j C_j q_j q. \quad (C.1)$$

Podemos reescrevê-la em termos dos operadores a e b_i , definidos em (5.1),

$$H = \hbar\omega_o a^+ a - \hbar \frac{\Delta\omega^2}{4\omega_o} (a + a^+)^2 + \sum_i \hbar\omega_i b_i^+ b_i + \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{M\omega_o}} (a + a^+) \sum_i \frac{C_i}{\sqrt{m_i\omega_i}} (b_i + b_i^+). \quad (C.2)$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado no Apêndice B, veremos que as equações (B.5) e (B.6) serão agora substituídas pelas equações

$$\omega\alpha_\omega = \left(\omega_o - \frac{\Delta\omega^2}{2\omega_o} \right) \alpha_\omega + \frac{\Delta\omega^2}{2\omega_o} \chi_\omega + \int (\beta_{\omega,\Omega} v_\Omega^* - \sigma_{\omega,\Omega} v_\Omega) d\Omega, \quad (C.3)$$

$$\omega\chi_\omega = - \left(\omega_o - \frac{\Delta\omega^2}{2\omega_o} \right) \chi_\omega - \frac{\Delta\omega^2}{2\omega_o} \alpha_\omega + \int (\beta_{\omega,\Omega} v_\Omega^* - \sigma_{\omega,\Omega} v_\Omega) d\Omega, \quad (C.4)$$

respectivamente. As equações (B.7) e (B.8) permanecerão as mesmas. Seguindo ainda com o mesmo procedimento adotado no Apêndice B, veremos que todas as equações desse Apêndice permanecerão as mesmas com a única diferença que a função $H(\omega)$ será sempre substituída por

$$H_R(\omega) = H(\omega) + \frac{\Delta\omega^2}{2\omega_o}. \quad (C.5)$$

Podemos escrever $\Delta\omega^2/2\omega_o$ como função de $|v_\omega|^2$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega^2}{2\omega_o} &= -\frac{1}{2\omega_o M} \sum_{j=1}^N \frac{C_j^2}{m_j \omega_j^2} \\ &= -\frac{1}{2\omega_o M} \int d\omega g(\omega) \frac{C_\omega^2}{m_\omega \omega^2} \\ &= -\frac{1}{2\omega_o M} \int d\omega \frac{2}{\pi} \frac{J(\omega)}{\omega} \end{aligned}$$

$$= -2 \int d\omega \frac{|v_\omega|^2}{\omega}, \quad (C.6)$$

onde utilizou-se as relações (5.6) e (5.7).

2 Cálculo de $H(\omega)$

A função $H(\omega)$ é dada por (3.83),

$$H(\omega) = \int_0^\infty \frac{|v_\Omega|^2}{\omega + \Omega} d\Omega - \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{|v_\Omega|^2}{\omega - \Omega} d\Omega. \quad (C.7)$$

Supondo que a extensão de $|v_\Omega|^2$ para frequências negativas seja uma função ímpar, podemos escrever a primeira integral como

$$\int_0^\infty \frac{|v_\Omega|^2}{\omega + \Omega} d\Omega = \int_0^{-\infty} \frac{|v_\Omega|^2}{\omega - \Omega} (-d\Omega) = - \int_{-\infty}^0 \frac{|v_\Omega|^2}{\omega - \Omega} d\Omega. \quad (C.8)$$

Substituindo (C.8) em (C.7), temos

$$H(\omega) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega - \omega} d\Omega. \quad (C.9)$$

Lembrando (5.8),

$$|v_\Omega|^2 = \frac{\mathcal{A}\Omega}{\Omega^2 + \omega_c^2}, \quad \text{onde } \mathcal{A} = \gamma\omega_c^2/\pi\omega_o, \quad (C.10)$$

vemos que a $|v_\Omega|^2$ adotada é realmente uma função ímpar, considerando a sua extensão para frequências negativas.

Utilizaremos uma integração de contorno no plano complexo a fim de realizar o cálculo de $H(\omega)$. Vamos considerar um contorno na forma de um semi-circulo de raio $R \rightarrow \infty$ contido no semi plano superior do plano complexo e limitado pelo eixo real. Assim, consideremos a integral

$$I(\omega) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega - \omega} d\Omega + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{-R} \frac{|v_z|^2}{z - \omega} dz. \quad (C.11)$$

Uma vez que $|v_z|^2 / (z - \omega)$ vá a zero, no limite $|z| \rightarrow \infty$, mais rapidamente que $1/|z|$ (z é um número complexo) a segunda integral é nula [28]. Portanto, $I(\omega) = H(\omega)$. O cálculo de $I(\omega)$ é feito então pelo método dos resíduos. No semi-plano superior temos dois pólos simples, em $z = \omega$ e $z = i\omega_c$. Os resíduos nestes dois pólos são dados por

$$\text{Re } s(z = \omega) = \frac{\mathcal{A}\omega}{\omega^2 + \omega_c^2}, \quad (C.12)$$

$$\text{Re } s(z = i\omega_c) = -\frac{\mathcal{A}\omega + i\omega_c}{2\omega^2 + \omega_c^2}. \quad (C.13)$$

Logo, teremos

$$I(\omega) = \pi i \left(\frac{\mathcal{A}\omega}{\omega^2 + \omega_c^2} \right) + 2\pi i \left(-\frac{\mathcal{A}\omega + i\omega_c}{2\omega^2 + \omega_c^2} \right)$$

$$= \frac{\pi \mathcal{A} \omega_c}{\omega^2 + \omega_c^2} = H(\omega), \quad (\text{C.14})$$

onde o resíduo em $z = \omega$ foi multiplicado apenas por πi por tratar-se de uma integral do valor principal de Cauchy.

Consistência da Diagonalização de Fano

Como vimos, (5.17) e (5.18), a diagonalização de Fano estará consistente desde que sejam satisfeitas as seguintes relações

$$I \equiv \int_0^\infty d\omega (|\alpha_\omega|^2 - |\chi_\omega|^2) = 1, \quad (D.1)$$

$$I(\omega, \omega') \equiv \int_0^\infty d\Omega (\beta_{\Omega\omega}^* \beta_{\Omega\omega'} - \sigma_{\Omega\omega} \sigma_{\Omega\omega'}^*) = \delta(\omega - \omega'). \quad (D.2)$$

Estabeleceremos a seguir a condição para que estas relações sejam satisfeitas. Seguiremos um procedimento muito semelhante ao adotado em [29]. Inicialmente consideraremos a relação (D.1). Podemos reescrever (3.78) como

$$\alpha_\omega = \frac{v_\omega (\omega + \omega_o)}{\omega^2 - \omega_o^2 \left\{ 1 - \frac{2}{\omega_o} \left[H(\omega) - i\pi |v_\omega|^2 - 2 \int_0^\infty d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} \right] \right\}}, \quad (D.3)$$

onde consideramos a inclusão do contratermo $\Delta V_R(q)$ que nos leva à (5.11). Novamente se $|v_\omega|^2$ apresentar uma extensão ímpar para frequências negativas podemos utilizar (C.9) e temos então

$$H(\omega) - i\pi |v_\omega|^2 = \mathcal{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega - \omega} d\Omega - i\pi |v_\omega|^2 = \int_{-\infty}^\infty \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega - \omega + i\varepsilon} d\Omega, \quad (D.4)$$

onde ε é um infinitésimo positivo. Podemos então escrever (D.3) como

$$\alpha_\omega = \frac{v_\omega (\omega + \omega_o)}{\omega^2 - \omega_o^2 y(\omega)}, \quad (D.5)$$

onde

$$y(\omega) = 1 - \frac{2}{\omega_o} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega - \omega + i\varepsilon} d\Omega - 2 \int_0^\infty d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} \right]. \quad (D.6)$$

Considerando (D.5) e a expressão (3.80) para χ_ω temos I em (D.1) dado por

$$I = \int_0^\infty d\omega \frac{\omega_o \omega |v_\omega|^2}{|\omega^2 - \omega_o^2 y(\omega)|^2}. \quad (D.7)$$

Extensão do Limite de Integração para $-\infty$:

Pretendemos estender o limite de integração inferior em (D.7) até $-\infty$ e então realizarmos a integração no plano complexo. Isto pode ser feito se assumirmos uma função $|v_\omega|^2$ com extensão

ímpar para frequências negativas. Primeiramente vamos decompor o integrando de (D.7) em frações parciais,

$$\frac{\omega_o \omega |v_\omega|^2}{|\omega^2 - \omega_o^2 y(\omega)|^2} = \frac{A\omega}{\omega^2 - \omega_o^2 y(\omega)} + \frac{B\omega}{\omega^2 - \omega_o^2 y^*(\omega)}. \quad (D.8)$$

Comparando os dois lados de (D.8) obtemos

$$A = -B = \frac{|v_\omega|^2}{2i\omega_o \text{Im}[y(\omega)]} = \frac{1}{i\pi}. \quad (D.9)$$

Substituindo (D.8-D.9) em (D.7) temos

$$I = \frac{1}{i\pi} \left[\int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_o^2 y(\omega)} - \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_o^2 y^*(\omega)} \right]. \quad (D.10)$$

Pode-se mostrar facilmente que $y^*(\omega) = y(-\omega)$, se $|v_\omega|^2$ for uma função ímpar, e assim podemos escrever (D.10) como

$$I = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_o^2 y(\omega)}. \quad (D.11)$$

Determinação dos Zeros de $Y(\omega) = \omega^2 - \omega_o^2 y(\omega)$:

Agora, para realizarmos a integral (D.11) no plano complexo precisamos saber quais são os pólos do seu integrando, isto é, precisamos conhecer os zeros da função $Y(\omega) = \omega^2 - \omega_o^2 y(\omega)$.

Supomos que $|v_\omega|^2$ seja uma função analítica no eixo real, conseqüentemente $y(\omega)$ também será analítica neste eixo e a extensão de $y(\omega)$ para frequências complexas $\bar{\omega}$ será analítica no semi-plano inferior. Assim, estendendo a definição de $Y(\omega)$ para frequências complexas $\bar{\omega} = \omega_R - i\omega_i$, onde ω_R e ω_i são reais positivos, teremos

$$\begin{aligned} Y(\bar{\omega}) &= \bar{\omega}^2 - \omega_o^2 y(\bar{\omega}) \\ &= \left[\omega_R^2 - \omega_i^2 - \omega_o^2 + 2\omega_o \int_{-\infty}^\infty d\Omega \frac{|v_\Omega|^2 (\Omega - \omega_R)}{(\Omega - \omega_R)^2 + (\omega_i + \varepsilon)^2} - 4\omega_o \int_0^\infty d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} \right] - \\ &\quad - i2 \left[\omega_R \omega_i + \omega_o \int_{-\infty}^\infty d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{(\Omega - \omega_R)^2 + (\omega_i + \varepsilon)^2} (\omega_i + \varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (D.12)$$

Agora, sendo $|v_\Omega|^2 > 0$ para $\Omega > 0$ então os dois termos que compõem a parte imaginária de (D.12) terão o mesmo sinal e portanto a sua soma só será nula quando ambos forem nulos, o que ocorre apenas se $\omega_R = 0$. Logo, se os zeros de $Y(\bar{\omega})$ existirem eles certamente estarão sobre o eixo imaginário. Procuraremos por eventuais zeros no semi-plano inferior. Fazendo $\omega_R = 0$ em (D.12) temos

$$Y(-i\omega_i) = -(\omega_i^2 + \omega_o^2) + 4\omega_o \left[\int_0^\infty d\Omega \frac{|v_\Omega|^2 \Omega}{\Omega^2 + (\omega_i + \varepsilon)^2} - \int_0^\infty d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} \right]. \quad (D.13)$$

A equação (D.13) mostra que $Y(-i\omega_i)$ apresenta um comportamento estritamente decrescente com relação ao crescimento de ω_i . Logo, ela atinge o seu valor máximo quando $\omega_i = 0$ que é dado por

$$Y(0) = -\omega_o^2 + 4\omega_o \left[\int_0^\infty d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} - \int_0^\infty d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} \right] \quad (D.14)$$

$$= -\omega_o^2.$$

Obviamente, $Y(\bar{\omega})$ não irá apresentar nenhum zero no semi-plano inferior se o seu valor máximo já for menor do que zero, isto é, se

$$\omega_o > 0. \quad (D.15)$$

Observe que se não tivéssemos incluído o contratermo $\Delta V_R(q)$ em nossa Hamiltoniana a condição para que $Y(\bar{\omega})$ não apresentasse nenhum zero no semi-plano inferior seria

$$4 \int_0^\infty d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} < \omega_o. \quad (D.16)$$

Lembrando (5.12) a condição (D.16) pode ser reescrita como

$$|\Delta\omega^2| < \omega_o^2. \quad (D.17)$$

Caso (D.15) (ou (D.17)) não seja satisfeita $Y(\bar{\omega})$ apresentará um único zero.

Cálculo de I:

Vimos que se (D.16) (ou (D.17)) for satisfeita o integrando de (D.11) não apresentará pólos no semi-plano inferior. Portanto, a sua integração no contorno constituído de um semi-circulo de raio $R \rightarrow \infty$ contido no semi-plano inferior e limitado pelo eixo real resultará no valor zero. A integral no eixo real será portanto igual ao negativo da integral ao longo do arco C_- que fecha o semi-circulo:

$$I = \frac{-1}{\pi i} \int_{C_-} d\bar{\omega} \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega_o^2 y(\bar{\omega})}. \quad (D.18)$$

Escrevendo $\bar{\omega} = R.e^{-i\theta}$, onde θ varia de 0 a π , fazendo o limite $R \rightarrow \infty$ e observando que o $\lim_{R \rightarrow \infty} y(R.e^{-i\theta})$ apresenta um valor finito temos

$$I = 1. \quad (D.19)$$

A equação (D.19) não será satisfeita se (D.15) (ou (D.17)) não o for, pois neste caso o integrando de (D.11) terá um único pólo no semi-plano inferior com resíduo não nulo.

Similarmente pode-se mostrar que (D.15) (ou (D.17)) é condição necessária e suficiente para que (D.2) seja satisfeita [29] .

Cálculos Adicionais Associados ao Capítulo 5

1 Cálculo de $\mathcal{F}_R(\langle q_i \rangle_R, \langle p_i \rangle_R; t)$

A expressão (5.49) para $\mathcal{F}_R(q_\Omega, p_\Omega; t)$ pode ser escrita como

$$\mathcal{F}_R(q_\Omega, p_\Omega; t) = 2\sqrt{\frac{\omega_o}{M}} \int d\Omega v_\Omega \sqrt{m_\Omega \Omega} \left[\mathfrak{J}(\Omega; t) q_\Omega + \mathfrak{H}(\Omega; t) \frac{p_\Omega}{m_\Omega \Omega} \right], \quad (\text{E.1})$$

onde as expressões para $\mathfrak{J}(\Omega; t)$ e $\mathfrak{H}(\Omega; t)$ são obtidas da comparação direta de (E.1) com (5.49). Podemos agora substituir a expressão (5.5) para v_Ω em (E.1), temos

$$\mathcal{F}_R(q_\Omega, p_\Omega; t) = \frac{1}{M} \int d\Omega \sqrt{g(\Omega)} C_\Omega \left[\mathfrak{J}(\Omega; t) q_\Omega + \mathfrak{H}(\Omega; t) \frac{p_\Omega}{m_\Omega \Omega} \right]. \quad (\text{E.2})$$

Escrevendo (E.2) no limite discreto (num procedimento análogo ao que leva à (3.35), só que na ordem inversa), temos

$$\mathcal{F}_R(q_\Omega, p_\Omega; t) = \frac{1}{M} \sum_i C_{\Omega_i} \left[\mathfrak{J}(\Omega_i; t) \sqrt{g(\Omega_i)} \int_{1/g(\Omega_i)} d\Omega q_\Omega + \frac{\mathfrak{H}(\Omega_i; t)}{m_{\Omega_i} \Omega_i} \sqrt{g(\Omega_i)} \int_{1/g(\Omega_i)} d\Omega p_\Omega \right], \quad (\text{E.3})$$

lembrando a relação (3.32) entre os operadores discretos e contínuos, temos

$$\mathcal{F}_R(q_i, p_i; t) = \frac{1}{M} \sum_i C_i \left[\mathfrak{J}(\Omega_i; t) q_i + \mathfrak{H}(\Omega_i; t) \frac{p_i}{m_{\Omega_i} \Omega_i} \right]. \quad (\text{E.4})$$

Adotando a condição inicial (5.52), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_R(\langle q_i \rangle_R, \langle p_i \rangle_R; t) &= \mathcal{F}'_R(t) \langle q \rangle_S = -\frac{1}{M} \sum_j \frac{C_j^2}{m_j \Omega_j^2} \mathfrak{J}(\Omega_j; t) \langle q \rangle_S \\ &= -\frac{1}{M} \int d\Omega g(\Omega) \frac{C_\Omega^2}{m_\Omega \Omega^2} \mathfrak{J}(\Omega; t) \langle q \rangle_S \\ &= -4\omega_o \int d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} \mathfrak{J}(\Omega; t) \langle q \rangle_S, \end{aligned}$$

onde utilizamos novamente a relação (5.5). Substituindo a expressão para $\mathfrak{J}(\Omega; t)$ chegamos à (5.54).

2 Cálculo de $\mathcal{L}(t)$

Apresentaremos agora o cálculo da função $\mathcal{L}(t)$ dada em (5.56),

$$\mathcal{L}(t) = 4\omega_o \int_0^\infty d\omega |L_\omega|_R^2 \sin(\omega t). \quad (\text{E.5})$$

A função $|L_\omega|_R^2$ é dada em (5.28),

$$|L_\omega|_R^2 = \frac{\gamma}{\pi\omega_o} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \quad (\text{E.6})$$

Uma vez que a função $|L_\omega|_R^2$, estendida para frequências negativas, é uma função ímpar, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= \text{Im} \left[2\omega_o \int_{-\infty}^\infty d\omega |L_\omega|_R^2 e^{i\omega t} \right] \\ &= \text{Im} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{2\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} e^{i\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Temos ainda

$$\frac{\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} = \frac{\gamma\omega}{(\omega - \omega_{(+)}^+) (\omega - \omega_{(+)}^-) (\omega - \omega_{(-)}^+) (\omega - \omega_{(-)}^-)}, \quad (\text{E.8})$$

onde

$$\omega_{(\pm)}^\pm = \pm\omega' + i\gamma, \quad \omega_{(-)}^\pm = \pm\omega' - i\gamma \quad \text{e} \quad \omega' = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}. \quad (\text{E.9})$$

Podemos então realizar a integral em (E.7) utilizando a integração de contorno no plano complexo. Consideremos um contorno na forma de um semi-circulo de raio $R \rightarrow \infty$ contido no semi plano superior do plano complexo e limitado pelo eixo real. A função $|L_\omega|_R^2$ vai a zero, no limite $|\omega| \rightarrow \infty$, mais rapidamente que $1/|\omega|$. Logo, a integral em (E.7) será dada por $2\pi i \times (\text{resíduos no semi-plano superior})$ (ver Apêndice C), isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= \text{Im} \left\{ \frac{1}{\pi} \times 2\pi i \left[\frac{1}{4i} \left(\frac{1}{\omega'} e^{i(\omega' + i\gamma)t} - \frac{1}{\omega'} e^{i(-\omega' + i\gamma)t} \right) \right] \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\omega'} \sin(\omega' t) e^{-\gamma t}, & \text{para } \gamma < \omega_o, \\ \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_1 t} + \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_2 t}, & \text{para } \gamma > \omega_o, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

sendo $\omega' = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$ e $\gamma_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$. Para $\gamma = \omega_o$ o procedimento é análogo, só que neste caso devemos lembrar, ao calcular os resíduos, que teremos pólos de segunda ordem.

3 Cálculo de $\mathcal{F}'_R(t)$

Apresentaremos agora o cálculo da função $\mathcal{F}'_R(t)$ dada em (5.54),

$$\mathcal{F}'_R(t) = 4\omega_o \int d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} \left[\frac{4\omega_o \mathcal{P} \int d\omega \frac{|L_\omega|_R^2}{\Omega^2 - \omega^2} \omega \cos(\omega t) + \frac{|L_\Omega|_R^2}{|v_\Omega|^2} (\omega_o^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t) \right]. \quad (\text{E.11})$$

Podemos escrever $\mathcal{F}'_R(t)$ como

$$\mathcal{F}'_R(t) = I_1(t) + I_2(t), \quad (\text{E.12})$$

onde,

$$\begin{aligned} I_1(t) &= 4\omega_o \int d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} \left[4\omega_o \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{|L_\omega|_R^2}{\Omega^2 - \omega^2} \omega \cos(\omega t) \right] \\ &= 4\omega_o \frac{d}{dt} \int d\Omega \frac{|v_\Omega|^2}{\Omega} \left[\mathcal{P} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{2\gamma\omega \cdot \text{sen}(\omega t)}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

O cálculo da integral em ω pode ser feito pelo método dos resíduos e resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{2\gamma\omega \cdot \text{sen}(\omega t)}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} &= \\ &= \frac{1}{(\Omega^2 + \gamma^2 - \omega_o^2)^2 + (2\gamma\omega')^2} \left[\left(\frac{\Omega^2 + \gamma^2 - \omega'^2}{\omega'} \text{sen}(\omega' t) + 2\gamma \cos \omega' t \right) e^{-\gamma t} \right] - \\ &\quad - \frac{2\gamma}{(\Omega^2 - \omega_o^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Podemos substituir (E.14) em (E.13), calcular a integral em Ω , e mostrar que $I_1(t) = 0$. Assim, resta-nos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_R(t) &= I_2(t) = 4\omega_o \int d\Omega \frac{|L_\Omega|_R^2}{\Omega} (\omega_o^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t) \\ &= \frac{4\gamma}{\pi} \int d\Omega \frac{\omega_o^2 - \Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_o^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

O cálculo desta última integral também pode ser realizado pelo método dos resíduos e então obtemos

$$\mathcal{F}'_R(t) = 2\gamma \mathcal{L}(t). \quad (\text{E.16})$$

Referências

- [1] A.O. Caldeira e A. J. Leggett, *Ann. of Phys.* **149**, 374 (1983).
- [2] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions/ Basic Processes and Applications* (Jonh Wiley & Sons, New York, 1992).
- [3] A.O. Caldeira e A. J. Leggett, *Phys. Rev A*, **31**, 1059 (1985).
- [4] W.H. Zurek, *Phys. Rev D*, **26**, 1862 (1982).
- [5] G. S. Agarwal, *Phys. Rev A*, **4**, 739 (1971).
- [6] D.F. Walls e G.J. Milburn, *Phys. Rev A*, **31**, 2403 (1985).
- [7] C.M. Savage e D.F. Walls, *Phys. Rev A*, **32**, 2316 (1985).
- [8] H. Grabert, P. Schramm, G-L Ingold, *Phys. Rep.*, **168**, 115 (1988).
- [9] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. I, 2^a Ed. (Jonh Wiley & Sons, New York, 1977).
- [10] R. Loudon, *Quantum Theory of Light*, 2^a Ed. (Clarendon Press, Oxford, 1986).
- [11] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Photons and Atoms / Introduction to Quantum Electrodynamics* (Jonh Wiley & Sons, New York, 1989).
- [12] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2^a Ed. (Jonh Wiley & Sons, New York, 1975).
- [13] S. M. Dutra, *Eur. J. Phys.* **18**, 194 (1997).
- [14] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Jonh Wiley & Sons, New York, 1973).
- [15] S. Stenholm, *Braz. J. Phys.* **27**, 214 (1997).
- [16] L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics* (Univ. of Texas Press, Texas, 1980).
- [17] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, 2^a Ed. (Springer-Verlag, New York, 1985).
- [18] H. Grabert, *Z. Phys. B*, **49**, 161, (1982).
- [19] S. M. Barnett e P. L. Knight, *Phys. Rev A* **33**, 2444 (1986).
- [20] A. Vidiella-Barranco, Ph.D. thesis (Univ. of London, 1992).
- [21] J. J. Sakuray, *Modern Quantum Mechanics*, Ed. Rev. (Addison-Wesley, New York, 1994).
- [22] U. Fano, *Phys. Rev.*, **124**, 1866 (1961).
- [23] S.M. Barnett, P.M. Radmore, *Optics Comm.*, **68**, 364 (1988).
- [24] A.O. Caldeira e A. J. Leggett, *Physica* **121A**, 587 (1983).
- [25] E. Butkov, *Física Matemática* (Edit. Guanabara, Rio de Janeiro, 1988).
- [26] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems* (Worl Scientific, 1993).
- [27] C. Morais Smith e A.O. Caldeira, *Phys. Rev A*, **41**, 3103 (1990).
- [28] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 4^a Ed. (Academic Press, 1995).
- [29] B. Huttner, S.M. Barnett, *Phys. Rev A*, **46**, 4306 (1992).
- [30] V. Hakim, V. Ambegaokar, *Phys. Rev A*, **32**, 423 (1985).
- [31] J-P Blaizot, G. Ripka, *Quantum Theory of Finite Systems* (The MIT Press, 1986).