

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física Gleb Wataghin

Teoria de detecção homódina atômica em condensados de Bose-Einstein

por

Bruno Requião da Cunha, Bel. Fís.

Dissertação apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin
da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcos César de Oliveira (Orientador)
Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira
Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano

Campinas, 2006

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

C914t Cunha, Bruno Requião da
Teoria de detecção homódina atômica em condensados
de Bose-Einstein / Bruno Requião da Cunha. -- Campinas,
SP : [s.n.], 2006.

Orientador: Marcos César de Oliveira.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Bose-Einstein, Condensação de. 2. Óptica quântica.
3. Óptica atômica. I. Oliveira, Marcos César de.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física
"Gleb Wataghin". III. Título.

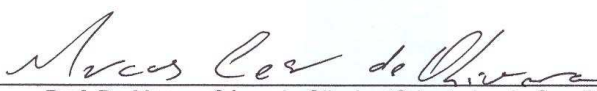
(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Atomic homodyne detection theory on Bose-Einstein condensates
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 - 1. Bose-Einstein condensation
 - 2. Quantum optics
 - 3. Atom optics
- **Área de concentração:** Física da matéria condensada
- **Titulação:** Mestre em física
- **Banca examinadora:**
 - Prof. Marcos César de Oliveira
 - Prof. Amir Ordacgi Caldeira
 - Prof. Reginaldo de Jesus Napolitano
- **Data da defesa:** 06.03.2006



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **BRUNO REQUIÃO DA CUNHA – RA 029464**, APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN” DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 06/03/2006.

COMISSÃO JULGADORA:


Prof. Dr. Marcos César de Oliveira (Orientador do Candidato)
DFMC/IFGW/UNICAMP


Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira – DFMC/IFGW/UNICAMP


Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano – IFSC/USP-São Carlos

“Pido a los santos de cielo que ayuden mi pensamiento, les pido en este momento que voy a cantar mi historia me refresquen la memoria y aclaren mi entendimiento...”

-Martín Fierro

Eis o Homem

(Marco Aurélio Campos)

*Brotei do ventre da Pampa
que é Pátria na minha Terra.
Sou resumo de uma guerra
que ainda tem importância...*

*Caminho como quem anda
na direção de si mesmo.
E de tanto andar a esmo,
Fui de uma a outra banda,
E se a inspiração me comanda,
Da trilha logo me afasto
E até sementes de pasto
Replanto pelas vermelhas
Estradas velhas parelhas,
Ao repisar no meu rastro...*

*Sou a alma cheia e tão longa,
Como os caminhos que voltam
Substituindo os espinhos
E a perda de alguns carinhos.
Velhos e antigos afrontes,
Surgiram muitos, aos montes,
Nesta minha vida aragana,
Destas andanças veterana,
De ir descampando horizontes.*

*Sou enfim, o sabiá que canta,
Alegre, embora solito.
Sou gemido do moinho,
Num tom triste que encanta.
Sou pó que se levanta,
Sou raiz, sou sangue, sou verso.
Sou maior que a história grega.
Eu sou Gaúcho, e me chega
P'rá ser feliz no universo.*

Gracias a la vida...

A todos os tapejaras dos caminhos grandes que me conduziram ao velho e gaudério destino de procurar sempre a sabedoria e o ensino, a dificuldade pouco importando. Gracias mestres. Lembro tempos

Aos Confúcios pampa dos fogões galponeiros que sempre me ensinaram a mais importante das ciências e das lidas: a da vida. Gracias meus patrícios, irmãos e amigos.

À família, a guasca estirpe gaudéria dos tempos de antigamente, que pode ser estridente mas jamais ultrapassada, me mostra que o canto do passado é o bebedor do presente. Gracias aos do meu sangue.

A uma morena de toda a crina, dessas da venta brasina com cheiro de lechiguana. Oigalé pinguancha lindaça! Gracias minha prenda.

Bendito aquele que estuda porque estudar é importante, embora o ignorante tem sempre um santo que ajuda, às vezes a sorte muda, quando existe um santo forte, cada qual procura um norte, por isso não encabulo - que a tava que bota culo é a mesma que bota sorte! Lembro que a virtude também pode estar numa bordona e nos rangidos ancestrais de uma carreta. Agradeço também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte técnico e financeiro. Obrigado a todos e gracias Don Jayme Caetano Braun.

Lista de Publicações

Esta dissertação é baseada em parte nas seguintes publicações:

1. **B. R. da Cunha** and **M. C. de Oliveira**. *Collision-dependent atom tunnelling rate in Bose-Einstein condensates*, cond-mat/0507506.
2. **B. R. da Cunha** and **M. C. de Oliveira**. *Atomic beam splitter and atomic homodyne detection on Bose-Einstein condensates*. Special issue of the International Journal of Modern Physics B on Quantum Information in Modern Optics, Maio 2006.
3. **B. R. da Cunha** and **M. C. de Oliveira**. *Optimal conditions for atomic homodyne detection on Bose-Einstein condensates*, quant-ph/0602054.

Resumo

Óptica atômica e em particular a física de ondas de matéria ultrafrias tiveram um grande desenvolvimento teórico e experimental em muito devido à realização experimental da condensação de Bose-Einstein em vapores atômicos. A gama de interesse nesses sistemas é muito ampla já que eles proporcionam reais aplicações práticas de assuntos inovadores em física fundamental de sistemas de muitos corpos com parâmetros altamente controláveis e até mesmo na implementação de computação quântica, teleporte e *lasers* atômicos. Com efeito, demonstramos numa formulação completamente quântica que a colisão cruzada entre átomos aprisionados num potencial de poço duplo pode aumentar significativamente a taxa de tunelamento atômico em configurações específicas da armadilha, levando a um regime de oscilação Rabi da população dos poços do potencial. Ainda, mostramos que os fenômenos de colapso e ressurgimento do condensado são suprimidos devido à competição entre autocolisão e colisão cruzada intermediada pelo tunelamento.

Um aspecto da condensação de Bose-Einstein que tem atraído muita discussão teórica é a idéia de fase. Nesse sentido, o modelo de poço duplo aqui discutido pode resultar em condições ideais para esquemas de detecção homódina atômica de fase. Propomos uma técnica de medição não destrutiva para monitorar oscilações do tipo Josephson entre dois condensados de Bose-Einstein de átomos neutros espacialmente separados. Um condensado é disposto em uma cavidade óptica, fortemente dirigida por um campo coerente. O sinal de saída é monitorado lançando-se mão de um esquema de detecção homódina balanceada. O campo da cavidade é escolhido de forma que esteja muito fora de sintonia com quaisquer transições atômicas. Assim, esse campo ganha uma fase proporcional ao número de átomos na cavidade devido à interação dispersiva entre os campos atômico e fotônico. A corrente detectada é então modulada pela corrente de oscilação devida ao tunelamento dos modos condensados. De fato, mesmo quando ambos os poços estão igualmente populados, uma fase é estabelecida pelo processo de medição e oscilações do tipo Josephson acabam ocorrendo. Nesse contexto, mostramos que a presença de colisão cruzada aprimora as condições necessárias para se adquirir informações sobre a fase quântica relativa de um condensado de Bose-Einstein num potencial de poço duplo.

Abstract

Recently, atom optics and the physics of ultracold matter waves have witnessed rapid theoretical and experimental progress due to the achievement of atomic vapor Bose-Einstein condensation (BEC). The interest in such systems is quite wide ranged since it opens new applicative frontiers such as investigations on fundamental many-body physics in model systems with highly controllable parameters and even quantum computation, teleportation and atom-lasers besides several other ground breaking subjects. Henceforth, we demonstrate in an exact quantum formulation that cross-collisions between atoms trapped in a double well can significantly increase the atom tunnelling rate for special trap configurations leading to an effective linear Rabi regime of population oscillation between the trap wells. Typical collapse and revival of the condensate are suppressed as well as due to cross- and self-collision competition intermediated by tunnelling.

One aspect of BECs that has attracted much theoretical work is the idea of phase. In this sense if we face this double-well BEC model as a temporal atomic beam splitter it may result in optimal conditions for homodyne atomic detection schemes. A nondestructive measurement technique to monitor Josephson-like oscillations between two spatially separated neutral atom Bose-Einstein condensates is investigated. One condensate is placed in an optical cavity, which is strongly driven by a coherent optical field. The cavity output field is monitored using a homodyne detection scheme. The cavity field is well detuned from any atomic resonance and experiences a dispersive phase shift proportional to the number of atoms in the cavity. The detected current is modulated by the coherent tunnelling oscillations of the condensate. Even when there is an equal number of atoms in each well initially, a phase is established by the measurement process and Josephson-like oscillations develop. Hence we show that the presence of cross-collisions enhances the possibility of acquiring information about the relative quantum phase of a double-well Bose-Einstein condensate.

Relação das Figuras

1.1	Representação esquemática de uma rede óptica com espaçamento controlável entre os sítios	6
1.2	Esquema de aprisionamento de condensados de Bose-Einstein em microchips. Combina-se um campo de quadrupolo com um campo constante externo, obtendo-se o perfil de aprisionamento mostrado. . . .	7
1.3	Representação esquemática do processo de aprisionamento de um condensado de Bose-Einstein num potencial de poço duplo. O CBE é armazenado magneticamente a alguns μ -metros do substrato.	8
2.1	Representação esquemática de uma armadilha de potencial de poço duplo com sobreposição da função de onda dos poços vizinhos (colisão cruzada).	10
2.2	Comparação entre as frequências de colisão e tunelamento corrigida e não corrigida segundo as Eqs. (2.10-13). No <i>inset</i> representamos a geometria da armadilha de poço duplo. Note o forte aumento na taxa de tunelamento devido à presença da colisão cruzada. Ambos os eixos são adimensionais, sendo o ordenado normalizado em unidades de $\hbar$	21
2.3	Resultados numéricos para os auto-valores do Hamiltoniano na Eq. (2.39) na base de $\hat{J}_x$. Espectros de energia para diferentes regimes da razão η/κ . Cada espectro foi deslocado por um fator constante. Observamos a mudança de um espectro de fônons para um de rôtons conforme aumentamos a taxa de colisão cruzada entre os modos. Os cálculos ilustrados acima foram levados a cabo, diagonalizando-se numericamente a matriz (2.39) com um número total de átomos da ordem de $N=1000$	23

2.4	Resultados numéricos para valor médio do desbalanço de população para $N = 100$, $\kappa N = 2$, (a) $\eta = \kappa/10$, (b) $\eta = \kappa/100$ e (c) $\eta = \kappa/2$. Normalizamos o tempo em unidades de tunelamento. As contas foram feitas calculando-se numericamente o operador unitário evolução temporal usual segundo o Hamiltoniano em (2.39). Os “kets” evoluídos no tempo e a dependência temporal dos valores médios são então encontrados.	26
3.1	Esquema de detecção homódina.	30
3.2	Esquema de detecção homódina balanceada.	31
3.3	Circuito representando o processo de detecção homódina. As linhas cinzas indicam os modos condensados e as linhas escuras os modos ópticos do processo exemplificado na seção 3.4. O divisor de feixes 1 é o potencial de aprisionamento de poço duplo. Átomos no modo de dentro da cavidade interagem com o campo resultando numa fase condicionada ao número de átomos no modo. A fase da luz é detectada num esquema de detecção homódina atômica dando informação sobre a fase relativa do condensado.	35
3.4	Representação do esquema de detecção homódina proposto para monitorar a dinâmica interna de um CBE em potencial de poço duplo. . .	37
3.5	Evolução temporal da corrente homódina segundo a Eq. (43). Para ambos os gráficos $\chi=0.01$, $\Omega'=25$ Hz, $\omega=30$ Hz e $N = 10000$ átomos. Em (a) supomos um <i>momentum</i> (quadratura de fase) inicial muito grande de $\langle \hat{J}_y^{(0)}(0) \rangle = 1667$ e em (b) um pequeno <i>momentum</i> inicial de $\langle \hat{J}_y^{(0)}(0) \rangle = 0.001$	41
3.6	Simulação numérica para a evolução condicionada da corrente homódina quando $\chi c_0 ^2/\Omega' = 0.04$, $\Gamma/2\Omega' = 0.065$. As unidades de tempo estão normalizadas em unidades de Ω'	44
3.7	Simulação numérica para a evolução condicionada da corrente homódina quando $\chi c_0 ^2/\Omega' = 0.04$, $\Gamma/2\Omega' = 0.065$. As unidades de tempo estão normalizadas em unidades de Ω'	47

Lista de Símbolos e Abreviações

Essa lista inclui alguns dos símbolos matemáticos e abreviações mais importantes utilizados ao longo do texto.

CBE Condensado de Bose-Einstein

GP Equação de Gross-Pitaevskii

a_0 Comprimento de espalhamento de onda-s

$\hat{a}^\dagger, \hat{a}, \hat{b}^\dagger, \hat{b}$ Operadores de criação e destruição dos modos locais atômicos

$\hat{c}^\dagger, \hat{c}$ Operadores de criação e destruição do modo óptico

α Amplitude coerente do modo óptico

$\hat{X}(\theta)$ Quadratura da fase atômica θ

$\hat{\mathcal{X}}(\phi)$ Quadratura da fase fotônica ϕ

χ Intensidade do acoplamento entre o campo de luz e o condensado

$\hbar$ Constante de Dirac

$\hat{J}_i, \hat{\mathcal{J}}_i, i = x, y, z$ Operadores de Schwinger para o campo atômico e fotônico

κ, Ω, Ω' Taxas de auto-colisão, tunelamento e tunelamento corrigida

η, Λ Taxas de colisão cruzada

N Número de átomos condensados

$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ Operador de campo

$|\psi\rangle$ Vetor de estado do sistema

U_0 Força de interação de dois corpos

$V_{\dots}(r)$ Potencial de armadilhamento

u_1, u_2 Modos do estado fundamental local do potencial de poço duplo

SD Teoria de fotodeteção contínua de Srinivas e Davies

Índice

1	Condensação de Bose-Einstein	1
1.1	Introdução histórica	1
1.2	Motivação e outros temas	3
1.3	Potenciais de confinamento	4
1.3.1	Redes ópticas	5
1.3.2	Microchips	7
1.4	Estrutura	8
2	Gases de Bose em potenciais de poço duplo	10
2.1	Introdução	11
2.2	Modelo básico	12
2.2.1	Aproximação de dois modos	12
2.2.2	Sistema de poço duplo	13
2.2.3	Limites de validade	15
2.3	Aproximação semi-clássica	16
2.4	Dinâmica quântica	19
2.4.1	Modelo quântico	19
2.4.2	Auto-estados de energia	21
2.4.3	Regimes quânticos	24
3	Medições homódinas num condensado Bosônico	27
3.1	Medidas de quebra de simetria	27
3.2	Teoria de detecção homódina	28
3.2.1	Detecção homódina simples	29
3.2.2	Detecção homódina balanceada	30
3.2.3	Fotodetecção	32
3.3	Divisor de feixes atômico	34
3.4	Esquema de detecção homódina	36
3.5	Um modelo mais realista	41
3.5.1	Evolução não condicionada	41

3.5.2	Evolução condicionada a uma medida	44
4	Resultados e discussão geral	49
4.1	Resumo dos resultados principais	51
4.2	Possibilidade de trabalhos futuros	52
A	Dinâmica quântica	54
A.1	O Hamiltoniano de dois modos	54
B	Detecção homódina	56
B.1	O Hamiltoniano de interação	56
	Referências	58

Capítulo 1

Condensação de Bose-Einstein

“É a sina do tapejara
nós somos herdeiros dela
bombear a barra amarela
do dia, quando se aclara
sentir que a mente dispara
nos rumos que o tempo traça.”

- Jayme Caetano Braun

Desde os primeiros trabalhos em teoria quântica, a interpretação da natureza por ela exposta tem sido um dos aspectos mais controversos e ao mesmo tempo belos e interessantes. Nesse contexto, a interpretação de Copenhague para essa teoria traz consigo a conceituação da função de onda de um sistema de partículas e é exatamente esse conceito deveras fundamental que alicerça os pilares da condensação de Bose-Einstein.

Introduzimos então, nesse capítulo, uma breve discussão histórica e qualitativa da condensação de Bose-Einstein e algumas de suas possíveis aplicações como objeto de pesquisa.

1.1 Introdução histórica

Antes mesmo que as discussões acerca da nova teoria quântica fossem completamente estruturadas, Albert Einstein [1] investigara as propriedades estatísticas de partículas massivas. Bose estudara a luz como um gás quântico de fótons [2] e generalizando esse trabalho, Einstein concluiu que partículas de matéria deveriam se comportar, sob determinadas condições, de maneira análoga aos fótons. Entre algumas das previsões de Einstein estava a de que, abaixo de uma certa temperatura, parte de um gás de matéria deveria condensar no estado de mais baixa energia, criando então uma ocupação macroscópica de um único estado quântico [1, 2].

Durante muito tempo, a existência de tal estado da matéria foi tratada com extremo ceticismo pela comunidade científica. Mesmo que a teoria estivesse correta, muitos acreditavam que essa condensação não poderia existir na natureza e muito menos ser realmente concebida em um laboratório, já que as temperaturas requeridas eram extremamente baixas ao ponto das forças atômicas forçarem o gás a condensar numa fase sólida, por exemplo. Contudo, a natureza se mostra pela simplicidade e não por meio de ardis, e após muita especulação a condensação de Bose-Einstein começou a ser levada mais a sério como um princípio fundamental na compreensão do fenômeno de superfluidez do hélio líquido. Todavia, a natureza desses fenômenos difere da condensação de um gás de Bose no sentido de que as interações entre as partículas é muito forte e o sistema obviamente não pode ser tratado como um gás diluído de partículas massivas. Com o advento de novas técnicas experimentais de confinamento e resfriamento necessárias para a produção de amostras ultrafrias de baixa densidade, a condensação do que se pode chamar, hoje em dia, de gás de Bose foi finalmente alcançada em 1995, por volta de 70 anos após as primeiras previsões de Einstein e Bose [3, 4, 5].

Na realidade não são todas as partículas massivas que podem atingir esse estado da matéria. Tudo no mundo e certamente todas as partículas, mas também sistemas compostos, bolas de futebol e carros podem ser divididos em duas grandes classes chamadas de bósons e férmions. Aquelas possuem a função de onda total simétrica frente a troca de duas partículas quaisquer do sistema e essas conseqüentemente têm uma função de onda total anti-simétrica. Alguns exemplos clássicos podem ser rapidamente citados. Tanto fótons quanto fônons são bósons. Ainda, a maioria dos átomos neutros são bósons, rubídio-87, por exemplo. Sem contar que todas as partículas de campo intermediadoras das forças fundamentais conhecidas são bósons. Férmions são ainda mais comuns. Os blocos fundamentais da estrutura da matéria são férmions: elétrons, nêutrons, prótons, quarks, etc... Contudo, se agregarmos um número par de férmions, obtemos um sistema composto com spin inteiro, que é um bóson.

É resultado experimental que partículas com spin inteiro obedecem a estatística de bósons e as com spin semi-inteiro a de férmions. Assim, o spin dessas partículas nos diz muito sobre a “personalidade” delas. Devido a essa simetrização da função de onda total, sendo a função de onda espacial simétrica ou anti-simétrica a probabilidade das partículas que compõem o *ensemble* estarem próximas ou distantes aumenta ou diminui. Por exemplo, a probabilidade de dois férmions estarem no mesmo estado quântico é nula o que resulta no princípio da exclusão de Pauli. Para bósons não há essa restrição e o comportamento agregador desse tipo de sistema começa a se mostrar importante.

Esse fenômeno pode ser melhor entendido com a seguinte análise. Conforme átomos ficam mais e mais frios, seu comprimento de onda térmico (de Broglie) aumenta. Num gás de átomos bosônicos idênticos, conforme as partículas se aproximam, ou em outras palavras quando o comprimento de onda de de Broglie de um átomo sobrepõe o de seu vizinho mais imediato, o sistema inteiro começa a se comportar como se apenas uma função de onda caracterizasse o *ensemble* inteiro. Nesse momento a condensação de Bose-Einstein ocorre. Antes desse ponto, se observarmos o número de partículas no estado de mais baixa energia, encontraremos apenas algumas partículas. Se tivermos a temperaturas abaixo dessa transição, os átomos se empilham no mesmo estado fundamental e essa ocupação se torna macroscópica, caracterizando o estado da matéria conhecido como condensação de Bose-Einstein.

1.2 Motivação e outros temas

Nessa dissertação estudamos, entre outros temas, a configuração do potencial de aprisionamento necessária para produzir efeitos de sobreposição da função de onda de modos atômicos vizinhos na dinâmica quântica de um vapor de átomos bosônicos ultra resfriados num potencial de poço duplo. Esse tratamento leva a regimes dinâmicos distintos relacionados à força da colisão cruzada e então ao número total de partículas no condensado e à localização dos modos condensados dada pela dispersão na função de onda de cada modo e pela distância entre os mínimos do potencial. Para um determinado regime de colisão cruzada, os auto-valores do Hamiltoniano de muitos corpos determinam uma fase dinâmica não prevista em trabalhos anteriores. Abaixo desse ponto de transição, o fenômeno de auto-aprisionamento [6] é observado em concordância com as previsões teóricas na literatura [7, 8, 9]. Uma das consequências mais importantes do modelo aqui apresentado é que perto do ponto de transição, a colisão cruzada pode ser forte ao ponto de inibir completamente o auto-aprisionamento, resultando numa oscilação coerente e estável (regime efetivo de Rabi) da população atômica entre os poços com uma frequência característica. Esse regime permite que a armadilha de poço duplo seja encarada como um separador de feixes atômico-temporal de extrema importância prática em protocolos de comunicação quântica [10, 11] e, principalmente, em detecção homódina atômica de fase [12].

Além disso, a aproximação de dois modos [6, 7, 8, 9] levada a cabo como procedimento padrão é válida apenas quando as interações de muitos corpos produzem apenas pequenas modificações do estado fundamental dos poços individuais. Nesse sentido, um cálculo direto dos termos estáticos mostra que a presença da colisão cruzada aumenta o limite de validade desse *ansatz*. Muitos artigos têm discutido o

papel da medição ao estabelecer uma fase na forma de interferência entre dois condensados ou tunelamento Josephson coerente entre os condensados. Nesse sentido, condições ideais para tais medidas são necessárias. Esse processo induz oscilações devido ao tunelamento e uma diferença de fase entre os condensados separados espacialmente. O tunelamento então impõe uma modulação no campo de luz que é detectado na corrente homódina. Com base nisso, mostramos que o regime efetivo de Rabi é obtido como condição ótima e ideal para esquemas de detecção atômica de fase.

São muitas as aplicações da condensação de Bose-Einstein. Por exemplo, podemos fazer experiências interessantes com óptica atômica quântica como procurar por correlações [13]. Além disso, podemos estudar *lasers* atômicos [13]. No momento em que desligamos a armadilha que confina os bósons no potencial, os átomos todos fluiriam como uma fonte monocromática ideal de um feixe atômico. Tal feixe pode ser usado para estudos análogos àqueles para correlações de fótons em óptica quântica. Nesse sentido, podemos construir estados emaranhados que são de interesse particular na compreensão da medição quântica e dos fenômenos de comunicação quântica como teletransporte e computação quântica [13]. Ainda, o condensado pode ter aplicações em metrologia de precisão já que em experimentos de ressonância o alargamento heterogêneo desaparece completamente e conseguimos observar ressonâncias muito finas. Essa possibilidade experimental começa, hoje em dia, a ser chamada de *laser* atômico ou numa denominação mais antiga de *boser* [13]. Assim, notamos a vasta gama de aplicações desses gases degenerados e justificamos o estudo deles nessa dissertação de mestrado.

1.3 Potenciais de confinamento

Nos capítulos ulteriores dessa dissertação, estudaremos a dinâmica quântica de um CBE aprisionado em potenciais de poço duplo resultando numa dinâmica ideal para processos de detecção de fase. Nesse sentido, ilustramos nessa seção a real possibilidade de se construir tais potenciais de aprisionamento para condensados de Bose-Einstein, mostrando brevemente algumas características de certos tipos de potenciais de aprisionamento recentemente realizados experimentalmente. Atualmente, novas técnicas de confinamento se tornaram possíveis devido à convergência de dois campos anteriormente distintos da física atômica: gases quânticos e redes ópticas.

1.3.1 Redes ópticas

Uma rede óptica é essencialmente um cristal artificial de luz. Isto é, um padrão periódico de intensidade que é formado pela interferência de dois ou mais feixes de *laser*. O exemplo mais simples de redes ópticas consiste em regiões claras e escuras formadas quando dois feixes de *laser* com o mesmo comprimento de onda viajando em direções opostas se encontram e formam um padrão de interferência. Essa estrutura tem um período de meio comprimento de onda. Com mais *lasers*, é possível formar uma estrutura espacialmente tridimensional. Contudo, é mais complicado de armazenar átomos nesse tipo de padrão de interferência.

Uma rede óptica pode armazenar átomos uma vez que o campo elétrico dos *lasers* induzem um momento de dipolo no átomo. A interação entre esse momentos de dipolo e o campo elétrico do *laser* modifica a energia do átomo. Se a frequência do *laser* é menor do que uma dada transição eletrônica do átomo, ele é atraído para as regiões de máximo de intensidade do *laser*. Por outro lado, se a frequência do *laser* é maior que a frequência de transição, os átomos são repelidos dos máximos. Com efeito, em ambos os casos, os átomos podem ser armazenados nas regiões claras e escuras da rede óptica, e a intensidade do potencial óptico de confinamento pode ser aumentada aumentando-se a intensidade do laser.

Para transferir um condensado de Bose-Einstein de uma armadilha magnética para uma rede óptica, o condensado é iluminado por seis feixes de *lasers* necessários para formar uma rede 3D e a intensidade dos *lasers* é aumentada. Esse processo de carregamento é controlado por computadores para assegurar reprodutibilidade perfeita em diferentes experimentos. Contudo, é difícil de provar que o condensado foi realmente transferido para a armadilha óptica já que o espaçamento típico entre os sítios na rede é muito pequeno (por volta de 430 nm) para os átomos serem resolvidos diretamente. Todavia, um padrão periódico pode mostrar efeitos de interferência quando iluminados por ondas coerentes mostrando se o condensado foi realmente transferido. Podemos também desligar o potencial da rede e usar padrões de interferência dos condensados para analisar como os átomos de sítios diferentes se sobrepõem. Uma vez que os átomos no condensado têm coerência de fase, um padrão de interferência aparece conforme os condensados se sobrepõem.

Além de dar acesso a novas fases quânticas de estados de muitos corpos, condensados de Bose-Einstein em redes ópticas oferecem grandes oportunidades para o processamento de informação quântica. Átomos num estado isolante de Mott podem ser vistos como um registrador quântico no qual cada *qubit* é representado por um único átomo. A transição Mott pode então ser usada para iniciar um grande conjunto de *qubits* (da ordem de 100000) num único passo experimental. O desafio

então é o de construir portas lógicas quânticas entre átomos que estão aprisionados em diferentes sítios da rede. Em 1999 Dieter Jaksch, Ignacio Cirac, Peter Zoller *et al* [14] sugeriram um modo de se fazer isso. Nessa proposta, os potenciais ópticos dependentes do estado podem ser usados para fazer com que átomos de sítios vizinhos acabem no mesmo sítio. A idéia é de que ambos os átomos sofrem colisões que resultam numa mudança de fase definida no estado de duas partículas. Assim, esse sistema constituiria uma porta de fase quântica.

Um grande problema em se usar redes ópticas para o processamento de informação quântica é dirigir-se a átomos particulares em diferentes sítios da rede. Esse acesso nos permitiria ler e escrever informação em átomos selecionados do mesmo modo que é feito no registro de um *bit* individual num computador clássico. Recentemente, Wolfgang Alt *et al* [15] mostraram que campos magnéticos podem ser usados para selecionar átomos individuais que estão separados por alguns sítios. Ainda, Phillips *et al* [16] estão explorando outras possibilidades nas quais átomos são carregados de três em três sítios sobrepondo uma chamada super-rede sobre um padrão de rede regular.

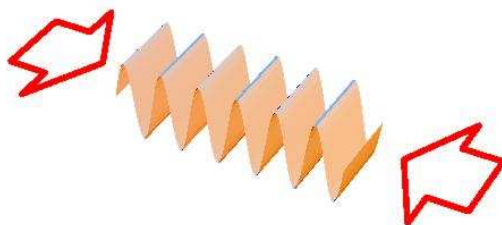


Figura 1.1: Representação esquemática de uma rede óptica com espaçamento controlável entre os sítios

Esse mesmo grupo mostrou como é possível manipular o espaçamento da rede controlando-se o ângulo sobre o qual os feixes de *laser* interferem de tal forma que se consegue experimentalmente ir rapidamente de uma situação de pequeno espaçamento entre os sítios para uma de grande espaçamento nessa rede tipo gaita (ver Fig. 1.1). Esse resultado é extremamente importante em vista dos resultados encontrados nessa dissertação, como será visto posteriormente.

1.3.2 Microchips

A técnica mais moderna e mais utilizada atualmente para armazenamento e interferometria de condensados de Bose-Einstein consiste em armadilhas magneto-ópticas em superfícies de chips micrométricos. A possibilidade de integrabilidade e precisão de manipulação de um único átomo mostram a importância tecnológica desse processo*.

O esquema de armazenamento consiste numa trilha condutora inserida sobre o substrato. Por essa trilha passa uma corrente elétrica DC que gera um campo magnético entorno desse fio. Em seguida, combina-se esse campo com um campo magnético externo constante B_0 conforme a Fig. 1.2. Assim, a superposição dos campos da trilha e externo cria uma armadilha de quadrupólo bi-dimensional, ou guia atômico, com uma força restauradora transversa proporcional ao campo. Arranjos experimentais de várias trilhas paralelas com ou sem um campo externo podem também ser usadas para criar tais guias.

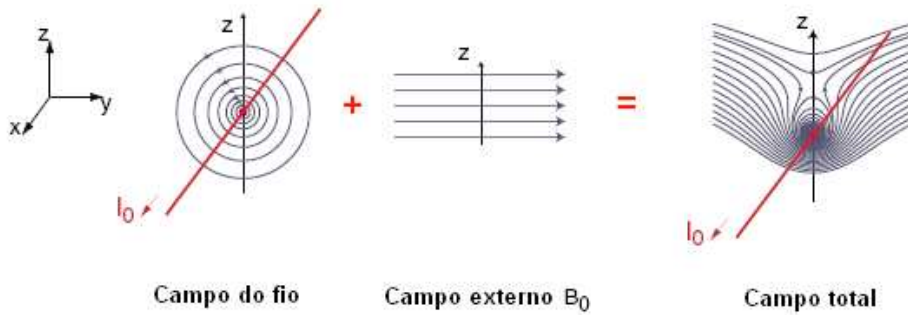


Figura 1.2: Esquema de aprisionamento de condensados de Bose-Einstein em microchips. Combina-se um campo de quadrupolo com um campo constante externo, obtendo-se o perfil de aprisionamento mostrado.

Com esse processo de armazenamento em mãos pode-se construir um potencial de aprisionamento de poço duplo como segue. Um fio reto carregando uma corrente estática ($\sim 1A$) é usado para aprisionar um condensado de Bose-Einstein num chip atômico diretamente abaixo de uma segunda trilha carregando uma corrente de

*Para uma discussão mais detalhada verifique a Ref. [17]

r dio freqüência ($\sim 60mA$ e $500kHz$). A trilha DC tem uma largura de $50\mu m$ e   separada $80\mu m$ da trilha de RF($10\mu m$ de largura). Colocando-se a armadilha $80\mu m$ da superfície do chip na posição indicada na Fig. 1.3 consegue-se um desdobramento horizontalmente simétrico [17]. O campo de RF acopla diferentes estados atômicos de spin. Assim, o potencial de aprisionamento inicial DC é deformado para um potencial efetivo adiabático sob a influência do campo de RF com a freqüência abaixo da freqüência de Larmor no mínimo do potencial ($\sim 1G$). Na direção vertical (y), a intensidade de acoplamento espacialmente homogênea de RF leva a uma leve relaxação da armadilha est tica. Na direção (x), o efeito adicional de variações locais do acoplamento RF quebra a simetria rotacional da armadilha e permite a formação de um potencial de poço duplo com separação (d) entre os poços e barreira de potencial de altura (V_{bar}).

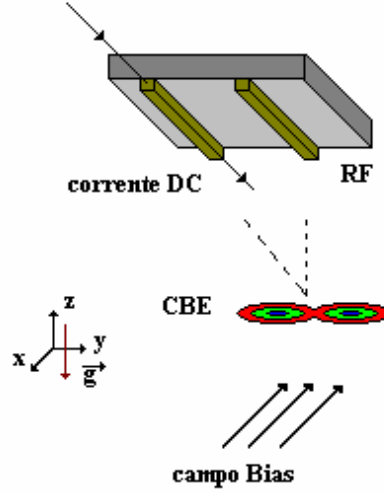


Figura 1.3: Representação esquemática do processo de aprisionamento de um condensado de Bose-Einstein num potencial de poço duplo. O CBE é armazenado magneticamente a alguns μ -metros do substrato.

1.4 Estrutura

O trabalho apresentado nesta dissertação pode ser separado em duas grandes partes. A primeira, discutindo a dinâmica quântica de um condensado de Bose-Einstein num potencial de poço duplo na aproximação de dois modos num *ansatz*

em que as colisões cruzadas são consideradas relevantes, e a segunda, estudando a aplicação desses regimes dinâmicos em propostas de detecção homódina de fase nesses sistemas condensados. Sendo assim, a discussão da dinâmica é feita no Cap. 2 e da detecção em si no Cap. 3, restando o Cap. 4 como uma discussão das duas frentes de pesquisa aqui apresentadas e dos resultados principais de forma concatenada. Os capítulos seguem segundo a ordem na qual eles foram desenvolvidos originalmente. Todavia, o leitor pode começar a leitura em qualquer seção. Nos pontos em que uma seção é consequência direta de outra, as referências cruzadas necessárias são fornecidas. Uma vez que esse texto aborda vários campos distintos de pesquisa, uma literatura adequada revisa a dissertação inteira na quinta seção. Espero, assim, que o leitor consiga acompanhar os raciocínios aqui explorados com suficiente desenvoltura.

Capítulo 2

Gases de Bose em potenciais de poço duplo

*“Que foi? Ah! quebrou-se a ponta do lápis?
Amanhã vancê escreve o resto;
olhe que dá para encher um par de tarcas!”*
- Simões Lopes Neto

Esse capítulo trata extensivamente da dinâmica de um CBE de espécie atômica única, aprisionado num potencial de poço duplo conforme ilustra a Fig. 2.1 abaixo.

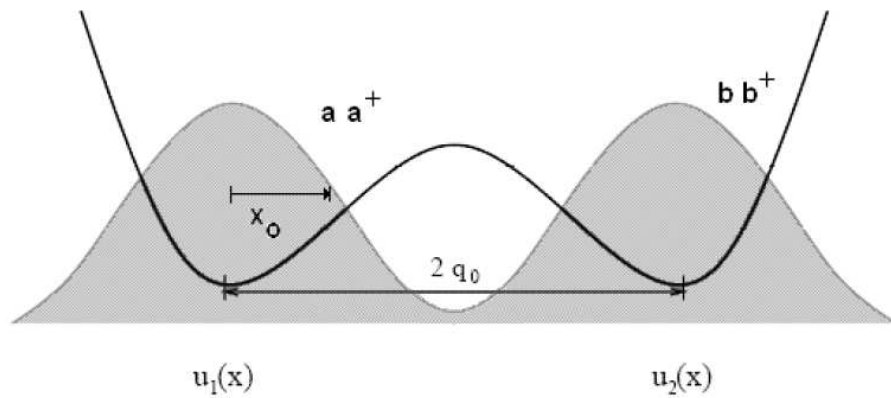


Figura 2.1: Representação esquemática de uma armadilha de potencial de poço duplo com sobreposição da função de onda dos poços vizinhos (colisão cruzada).

Essa dinâmica é estudada em diversos regimes e segundo formalismos semi-clássico e completamente quântico. Serve esse texto, então, de justificativa teórica e conceitual para o cerne do trabalho que é a aplicação do entendimento denso da natureza desses condensados nos processos que envolvem detecção homódina atômica em condensados de Bose-Einstein.

2.1 Introdução

Observações recentes da condensação de Bose-Einstein (CBE) em sistemas de átomos neutros aprisionados [3, 4, 5], abre um novo contexto para o estudo da mecânica quântica de sistemas mesoscópicos. Em particular, CBE atômicos apresentam uma variedade de fenômenos de interferência quântica e já foi sugerido por Javanainen [18] e Grossman and Holthaus [19] a possibilidade de tunelamento de partículas condensadas entre duas armadilhas atômicas adjacentes. Esse tunelamento resultando numa troca harmônica dos átomos entre as armadilhas é análogo ao efeito Josephson [20] para átomos neutros no qual a troca se dá devido à fase relativa entre as funções de onda macroscópicas nos dois sítios. Contudo, esses dois autores não levaram em conta interações do tipo esfera rígida entre os átomos. Nesse sentido, a natureza de CBEs aprisionados em um potencial duplo com a presença dessas colisões foi muito estudada por Milburn *et al* [6], fazendo-se uso de métodos de teoria quântica de campos e de óptica não-linear segundo uma aproximação de dois modos. Todavia, esses últimos autores não levaram em conta em suas discussões uma presença possivelmente importante dos fenômenos de colisão cruzada entre os átomos de cada modo do potencial. Consideramos aqui o caso de um CBE atômico confinado por um potencial duplo com mínimos suficientemente separados, onde cada poço de potencial representa uma armadilha atômica. Usando a suposição de fatorização de campo médio (aproximação semi-clássica), junto com uma aproximação de dois modos, encontramos soluções para a equação de Gross-Pitaevskii [21] incluindo interações de muitos corpos e colisão cruzada. Em seguida, um tratamento completamente quântico é levado a cabo. A observação de tunelamento quântico nesse sistema pode ser feita de forma mais simples do que em outros sistemas condensados [22], ou o acoplador direcional não linear [23], devido a pequenas dissipações em contextos de óptica atômica.

O restante desse capítulo é organizado da seguinte maneira. Apresentamos nosso modelo básico e em particular a aproximação de dois modos para a dinâmica quântica dos condensados acoplados. Discutimos assim os limites de validade desse modelo. Na seção subsequente é feita uma digressão sobre a solução de campo médio do problema quântico. A seguir, estudamos a dependência dos fenômenos de colisão cruzada, auto-colisão e tunelamento com a geometria da armadilha que confina os átomos neutros no estado condensado. Vemos assim, que os termos de colisão cruzada podem se tornar muito importantes conforme a natureza dos átomos usados, sendo dependente do comprimento de espalhamento desses. Mostramos que na dinâmica quântica completa o termo de colisão cruzada compete com a auto-colisão e ainda auxilia o fenômeno de tunelamento quântico. Quando as taxas de colisão

cruzada e auto-colisão são da mesma ordem, a dinâmica implica numa oscilação coerente do tipo Rabi tornando o experimento ideal para processos que envolvem detecção homódina. Este último assunto é que será abordado nos capítulos seguintes. Enfim, algumas conclusões são apresentadas e discussões são feitas na última seção desse capítulo.

2.2 Modelo básico

2.2.1 Aproximação de dois modos

O modelo aqui estudado consiste num potencial de poço duplo simétrico de partícula única $V(r)$ com mínimos em r_1 e r_2 , e onde sem perda de generalidade escolhemos $V(r_{1,2}) = 0$. Assumimos ainda que esse potencial é tal que os dois estados de menor energia são muito próximos um do outro e muito separados dos outros possíveis estados de energia do potencial. Nesse sentido, supomos que as interações de muitos corpos não mudam significativamente a situação. Assim, expandimos o potencial em torno de cada mínimo como segue

$$V(r) = \tilde{V}^{(2)}(r - r_j) + \dots, j = 1, 2 \quad (2.1)$$

onde $\tilde{V}^{(2)}(r - r_j)$ é a aproximação parabólica para o potencial na vizinhança de cada mínimo. Definimos a seguir, o estado $u_0(r)$ como o modo de partícula única do estado fundamental do potencial local, com energia E_0 , e definimos as soluções de modo local dos poços individuais $u_{1,2}(r) = u_0(r - r_{1,2})$. Os auto-estados de energia do potencial de poço duplo global podem então ser aproximados por combinações simétricas (+) e anti-simétricas (-) da função de onda

$$u_{\pm}(r) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}[u_1(r) \pm u_2(r)], \quad (2.2)$$

com correspondentes autovalores $E_{\pm} = E_0 \pm R$ e

$$R = \int d^3r u_1^*(r)[V(r) - \tilde{V}^{(2)}(r - r_1)]u_2(r). \quad (2.3)$$

A frequência de tunelamento Ω entre os dois mínimos é então dada pelo desdobramento dos dois menores estados de energia $\Omega = \frac{2R}{\hbar}$. A matriz de elementos R descreve o acoplamento entre os modos locais.

O Hamiltoniano de muitos corpos descrevendo o CBE atômico num potencial arbitrário é dado por [24]

$$\hat{H}(t) = \int d^3r [\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger \cdot \nabla \hat{\psi} + \hat{\psi}^\dagger V \hat{\psi} + \frac{U_0}{2} \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\psi}], \quad (2.4)$$

onde m a massa atômica, $U_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{2ma^2}$ mede a intensidade das interações de dois corpos, e a é o comprimento de espalhamento de onda-s já que somente espalhamento do tipo esfera rígida é considerado. Ainda, $\hat{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ e $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ são os operadores de campo que destroem e criam partículas na posição r e tempo t na representação de Heisenberg. Vale lembrar que o ordenamento normal foi utilizado em todos os cálculos. Assim, em termos dos modos locais podemos escrever os operadores de criação e aniquilação na seguinte forma

$$c_j(t) = \int d^3r u_j^*(r) \hat{\psi}(r, t). \quad (2.5)$$

Assim, o Hamiltoniano de muitos corpos se reduz à seguinte aproximação de dois modos*

$$\begin{aligned} H = & E_0(a^\dagger a + b^\dagger b) + \hbar(2\Lambda(N-1) + \Omega)[a^\dagger b + b^\dagger a] + \hbar\eta[a^\dagger b + b^\dagger a]^2 \\ & + \hbar(\kappa - \eta)[(a^\dagger)^2(a^2) + (b^\dagger)^2(b^2)] + \hbar\eta N(N-2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $\kappa = \frac{U_0}{2\hbar V_{eff}}, \eta = (\frac{U_0}{2\hbar}) \int d^3r u_{0i}^* u_{0j} u_{0i}^* u_{0j}$, $\Lambda = (\frac{U_0}{2\hbar}) \int d^3r u_{0j}^* u_{0j} u_{0i}^* u_{0i}$. O primeiro termo é devido à auto-colisão e os dois últimos à colisão cruzada. Ainda, $V_{eff}^{-1} = \int d^3r |u_0^4|$ é o volume efetivo de cada modo do potencial.

Exploramos então as conseqüências desse modelo para um CBE atômico num poço de potencial duplo. É fácil de ver que no caso em que $\hbar\eta \rightarrow 0$ e $\hbar\Lambda \rightarrow 0$, o Hamiltoniano se reduz àquele discutido em [27, 28] que tem a forma de uma equação discreta de auto-aprisionamento e já foi anteriormente estudado no contexto de um “quantum dimer” [29] para um modelo de oscilações anarmônicas em pequenas moléculas e também no contexto de um acoplador óptico direcional não linear [46, 23]. Ainda, é direto que quando $\hbar\kappa \rightarrow 0$, o Hamiltoniano (2.6) se reduz àquele previamente empregado no estudo de tunelamento em condensados [18, 19].

2.2.2 Sistema de poço duplo

Podemos ilustrar as características gerais do sistema de poço duplo considerando o seguinte potencial

$$V(r) = b(x^2 - \frac{d}{2b})^2 + \frac{1}{2}m\omega_t^2(y^2 + z^2), \quad (2.7)$$

onde o acoplamento ocorre ao longo de x , e ω_t é a frequência da armadilha no plano y - z . Esse potencial tem mínimos locais em $r_1 = q_0x$ e $r_2 = -q_0x$, onde $q_0^2 = d/2b$. Nesses pontos, o movimento linearizado é harmônico com frequência

*Para detalhes das contas, consulte o apêndice A.

$\omega_0 = (4d/m)^{1/2}$. Assim, sem perda de generalidade escolhamos por simplicidade $\omega_0 = \omega_t$. Nesse sentido, seja

$$\tilde{V}^2(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2((x - q_0)^2 + y^2 + z^2). \quad (2.8)$$

Com efeito, fixaremos ω_0 mantendo d constante e considerando apenas variações de q_0 . Isso é equivalente a variar a altura da barreira D separando os dois poços de modo que $D = dq_0^2$. É ainda conveniente reescalar o comprimento em unidades da incerteza na posição do estado fundamental do oscilador harmônico $r_0 = \sqrt{\Delta}$, onde $\Delta = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$. A altura do potencial é então dada por $D = (\hbar\omega_0/8)(\frac{q_0^2}{\Delta})$. Assim, para uma escolha adequada de D , apenas dois auto-estados de energia se encontram abaixo da barreira. O modo local de cada poço pode então ser dado por

$$u_0(r) = \left(\frac{1}{2\pi\Delta}\right)^{3/4} e^{-\frac{(r-q_0)^2}{4\Delta}}, \quad (2.9)$$

que é o estado fundamental do oscilador harmônico simples. Esses estados são Gaussianos, o que nos permite calcular explicitamente todas as integrais necessárias. Nesse sentido, as taxas de tunelamento, auto-colisão e colisão cruzada são dados respectivamente por

$$\Omega = \frac{q_0^2\omega_0}{2\Delta} e^{-q_0^2/2\Delta}, \quad (2.10)$$

$$\kappa = \left(\frac{U_0}{16\hbar}\right)\left(\frac{1}{\pi\Delta}\right)^{3/2}, \quad (2.11)$$

$$\eta = \left(\frac{U_0}{16\hbar}\right)\left(\frac{1}{\pi\Delta}\right)^{3/2} e^{-q_0^2/2\Delta}, \quad (2.12)$$

$$\Lambda = \left(\frac{U_0}{16\hbar}\right)\left(\frac{1}{\pi\Delta}\right)^{3/2} e^{-3q_0^2/4\Delta}, \quad (2.13)$$

Podemos ainda supor um potencial do tipo

$$V(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (2.14)$$

onde o confinamento novamente é na direção do eixo x por uma perturbação Gaussiana, β dá a altura da perturbação e σ dá o desvio padrão no pacote da perturbação. Nesse caso, podemos também supor uma certa localização dos modos em cada poço do potencial. Assim, um cálculo direto mostra que os termos devido às colisões são os mesmos que nas Eqs. (2.11-13) e a taxa de tunelamento é dada por

$$\Omega = \frac{\sqrt{\pi}}{4\pi^2 x_0^3 \hbar} \left[\beta \sqrt{\frac{2}{\pi(2\sigma^2 + x_0^2)}} - m\alpha_0^2 \omega^2 \right] e^{-\alpha^2/x_0^2}. \quad (2.15)$$

Em que α é o mínimo do potencial obviamente dado por $\alpha = \sigma \sqrt{\ln(\frac{\beta^2}{2\pi m^2 \omega^4 \sigma^6})}$ quando esse potencial é extremado e seus pontos de máximo e mínimo locais são encontrados.

Vale notar ainda que x_0 é a incerteza na aproximação harmônica de cada modo. Nesse sentido, a relação entre os fenômenos de tunelamento, colisão cruzada e auto-colisão são analisados adiante para vários regimes de localização onde é discutido a aproximação feita por Milburn et al [6] ao se desprezar os termos de colisão cruzada.

Vale lembrar ainda que um tratamento mais completo seria o de realizar cálculos exatos nos quais a sobreposição dos modos atômicos individuais mostrasse os respectivos padrões de interferência, modificando assim, os modos locais com relação às funções gaussianas recém utilizadas. Isso pode ser feito a partir de uma integração direta das funções de Schrödinger não polinomiais [25] ou através das soluções estacionárias de GP como exemplifica a ref. [26]. Nesse sentido, mantivemos a aproximação de dois modos e investigamos o efeito das colisões cruzadas nesse modelo. Isso faz com que o trabalho se torne muito menos penoso e permite a verificação de uma dinâmica dessarte rica. Assim, é espantoso que esse modelo extremamente simplificado do problema de muitos corpos forneça essencialmente os mesmos resultados qualitativos que os procedimentos acima referidos.

2.2.3 Limites de validade

A aproximação de dois modos é válida quando as interações de muitos corpos produzem apenas pequenas modificações das propriedades dos potenciais individuais. Isso equivale a dizer que

$$\hbar\omega_0 = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \gg N \frac{|U_0|}{V_{eff}}. \quad (2.16)$$

Como é sabido, as colisões diminuem a energia total de sistemas condensados [30] (para um volume de modo não fixo). Conforme mostraremos na Fig. 2.3, as colisões cruzadas também diminuem os auto-valores do Hamiltoniano de interação. No modelo aqui discutido, as colisões cruzadas competem com a auto-colisão de tal modo que podemos definir uma nova taxa de colisão $\kappa' \equiv \kappa - \eta$. Da mesma forma, essa competição leva a um volume efetivo de cada modo $V'_{eff} \equiv \frac{U_0}{2\hbar(\kappa - \eta)}$ já que as colisões cruzadas diminuem mais ainda a energia do estado fundamental, aumentando o volume efetivo do modo de cada poço. Assim, usando $V_{eff} \sim 8\pi^{3/2}x_0^3$, o novo volume de modo efetivo se escreve $V'_{eff} \sim \frac{8\pi^{3/2}x_0^3}{(1 - e^{-q_0^2/2x_0^2})}$ e o *ansatz* de dois modos é válido sempre que a seguinte condição for satisfeita para o número total de átomos

$$N \ll \frac{x_0}{|a|(1 - e^{-q_0^2/2x_0^2})}. \quad (2.17)$$

Assim, para valores adequados da geometria da armadilha podemos fazer com que os termos à direita da equação acima sejam suficientemente grandes ao ponto de serem da ordem de valores usados nos experimentos típicos de condensação. Essa discussão

pode ser melhor ilustrada da seguinte maneira. Ao aumentarmos a sobreposição entre as funções de onda dos modos vizinhos, diminuímos a densidade de átomos em cada sítio. Como consequência direta, a colisão entre átomos do mesmo sítio diminui e a taxa de tunelamento é aumentada. Com efeito, no modelo típico em que as colisões cruzadas são desprezadas obtemos valores máximos da ordem de 100 átomos. Já no modelo aqui discutido, valores reais da ordem de 10^3 a 10^6 podem ser alcançados sob condições adequadas da geometria do potencial de confinamento. Já que valores típicos são $x_0 \sim \mu m$, $|a| \sim nm$ e $q_0 \sim \mu m$. Por outro lado, se as interações de muitos corpos dominam sobre a energia cinética, as propriedades do estado fundamental são fortemente modificadas com respeito às lineares. Nesse caso, a aproximação de dois modos empregada aqui não é aplicável e o *ansatz* de Thomas-Fermi [31, 32] deve ser utilizado.

toma a potencial validade funcional da

2.3 Aproximação semi-clássica

Antes de procedermos a uma análise completamente quântica do Hamiltoniano (2.6), consideramos a aproximação de campo médio (semi-clássica). Para isso, empregamos a aproximação de Hartree [33] para um número fixo de átomos N , e escrevemos o vetor de estado atômico como

$$|\Psi_N(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[\int d^3r \phi_N(r, t) \hat{\psi}^\dagger(r, 0) \right]^N |0\rangle, \quad (2.18)$$

onde $|0\rangle$ é o vácuo do campo bosônico. Assim, a equação de Schrödinger não linear auto-consistente ou simplesmente equação de Gross-Pitaevskii para a função de onda do condensado segue da equação de Schrödinger, e é dada por [21]

$$i\hbar \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + NU_0 |\phi_N|^2 \right] \phi_N. \quad (2.19)$$

Para uma escolha adequada do potencial global $V(r)$, a Eq. (2.19) pode ser resolvida numericamente para dadas condições iniciais. Em particular, essa equação permite simulações do tunelamento do condensado sem as limitações impostas pela aproximação de dois modos. Nessa aproximação, contudo, usamos os modos locais descritos acima de forma a escrevermos

$$\phi_N(r, t) = e^{-iE_0 t/\hbar} [b_1(t)u_1(r) + b_2(t)u_2(r)]. \quad (2.20)$$

Se negligenciarmos as colisões cruzadas, obtemos

$$\frac{db_j}{dt} = \frac{-i\Omega}{2} b_{3-j} - 2i\kappa N |b_j|^2 b_j. \quad (2.21)$$

O número de átomos no j -ésimo poço é dado por

$$N_j(t) = \langle \Psi_N(t) | \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j | \Psi_N(t) \rangle = N |b_j(t)|^2, \quad (2.22)$$

o que nos fornece a ligação entre as amplitudes acopladas dos modos e os valores esperados do problema quântico. As Eq.(2.21) têm uma solução exata [18, 19, 20]. Para o caso em que N átomos estão inicialmente localizados no poço 1, $N_1(0) = N |b_1|^2 = N$, o número de átomos no poço 1 varia com o tempo conforme

$$N_1(t) = \frac{N}{2} [1 + cn(\Omega t | N^2/N_c^2)], \quad (2.23)$$

com $N_1 + N_2 = N$. Onde $cn(\phi|m)$ é uma função elíptica de Jacobi e N_c é o número crítico de átomos dado por

$$N_c = \frac{\Omega}{\kappa}. \quad (2.24)$$

Para $N < N_c$ essa solução exhibe oscilações periódicas entre os modos com período $K(N^2/N_c^2)$ que depende do número de átomos, onde $K(m)$ é uma integral elíptica completa da primeira espécie. Para $N \ll N_c$, cn muda para cosseno e as oscilações são precisamente como aquelas no efeito Josephson [27]. Conforme o número de átomos é aumentado, o período de oscilação aumenta até o ponto em que $N = N_c$ e o período se torna infinito. Essa bifurcação no sistema não linear implica nesse ponto o sistema evoluir assintoticamente a um número igual de átomos $N/2$ em cada poço. Para $N > N_c$, o período de oscilação se reduz novamente mas a transferência de população entre os poços não é completa. Em outras palavras, as oscilações coerentes são inibidas para muitos átomos e o fenômeno de auto-aprisionamento começa a acontecer. Isso ocorre mesmo para um número fixo de átomos N e não depende então da coerência entre estados de número diferentes. É preciso contudo que haja uma fase relativa definida entre as amplitudes $b_{1,2}$ dos dois poços de potencial.

A escolha das condições iniciais depende do estado do condensado. Num caso típico esperamos que haja um número igual de átomos em cada poço do potencial, e então o estado fundamental de muitos corpos refletiria a simetria fundamental do potencial. Isso significa que a quantidade $(|b_2|^2 - |b_1|^2)$ seria inicialmente nula. Contudo, como o número total de partículas é conservado $(|b_2|^2 + |b_1|^2) = 1$, devemos ter

$$b_1^* b_2 = \frac{1}{2} e^{-i\theta}, \quad (2.25)$$

onde θ é a fase relativa entre as amplitudes b_1 e b_2 , respectivamente. O condensado deve então ter uma fase bem definida entre os poços do potencial. De acordo com a noção usual de quebra espontânea de simetria [34, 35, 36], essa fase é escolhida de forma aleatória para uma dada realização do sistema e, se calculada a média sobre

muitas realizações obteríamos uma contribuição nula do termo dependente da fase no ensemble. Para investigarmos as conseqüências da quebra espontânea de simetria para a dinâmica semi-clássica, será conveniente definir três novas variáveis

$$S_x = \frac{1}{2}(|b_2|^2 - |b_1|^2), \quad (2.26)$$

$$S_y = \frac{-i}{2}(b_1^* b_2 - c.c.), \quad (2.27)$$

$$S_z = \frac{1}{2}(|b_1^* b_2 + c.c.). \quad (2.28)$$

Na seção seguinte, mostraremos que S_y é o *momentum* médio do condensado, enquanto que S_x é a diferença de número atômico entre os dois auto-estados de partícula individual do sistema de potencial de poço duplo. Ora, se $S_x = 0$ devemos ter $S_y = \frac{\sin(\theta)}{2}$ e $S_z = \frac{\cos(\theta)}{2}$. Se o *momentum* médio do condensado é inicialmente zero, $t = 0$ e $S_z(0) = 1/2$. Tal condição inicial é um ponto estacionário da dinâmica, como é fácil de observar se escrevermos as equações de movimento em termos das variáveis reais acima dadas pelas Eqs. (2.26-28). Com efeito

$$\dot{S}_x = -2\hbar[\Omega + 2\Lambda(N-1)]S_y - 2\hbar\eta NS_y S_z, \quad (2.29)$$

$$\dot{S}_y = 2\hbar[\Omega + 2\Lambda(N-1)]S_x - 4\hbar(\kappa - 3\eta)NS_z S_x, \quad (2.30)$$

$$\dot{S}_z = 4\hbar(\kappa - \eta)NS_y S_x. \quad (2.31)$$

É direto que essas equações indicam precessões não lineares entorno dos eixos S_x, S_y e S_z . Ainda, $\sum_i S_i^2 = 1/4 (i = x, y, z)$ é uma constante de movimento, o que corresponde a uma conservação do número total de partículas.

Estudamos agora o comportamento de S_x para valores diversos das taxas κ, η, Λ dadas pelas Eqs. (2.11-13). O valor crítico para o qual o auto-aprisionamento ocorre é aumentado. O auto-aprisionamento ainda é presente, apesar de ser relativamente inibido pela presença da colisão cruzada uma vez que conforme mostram as Eqs. (2.29-2.31), a colisão cruzada compete com a auto-colisão. Para situações adequadas da geometria do potencial de confinamento, quando a colisão cruzada é forte o suficiente de modo $\eta \rightarrow \kappa$ (no sentido de $\kappa - \eta \ll \Omega$) o comportamento de auto-aprisionamento é totalmente suprimido fazendo com que haja puramente oscilações coerentes entre os modos do condensado (regime que chamaremos de Rabi efetivo). Assim, é razoável de se entender a presença da colisão cruzada como um fenômeno auxiliar ao do efeito Josephson que conseqüentemente compete com a auto-colisão e com o auto-aprisionamento, até mesmo inibindo-a.

2.4 Dinâmica quântica

2.4.1 Modelo quântico

Seguindo um *ansatz* de dois modos, podemos obter uma solução exata do problema quântico de forma a acessar o efeito das flutuações quânticas sobre as soluções da equação de Gross-Pitaevskii. O operador de número total $\hat{N} = (a^\dagger a + b^\dagger b)$ é uma constante de movimento e então é escolhido de modo a ser igual ao número total de átomos N . Definimos agora três operadores que obedecem as relações de comutação do grupo SU(2), segundo um formalismo de Schwinger

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}(b^\dagger b - a^\dagger a), \quad (2.32)$$

$$\hat{J}_y = \frac{i}{2}(b^\dagger a - a^\dagger b), \quad (2.33)$$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}(a^\dagger b + b^\dagger a). \quad (2.34)$$

Onde o invariante de Casimir é dado por

$$\hat{J}^2 = \frac{\hat{N}}{2}(\frac{\hat{N}}{2} + 1). \quad (2.35)$$

Ora, esse modelo é análogo a um modelo de *momentum* angular com autovalor total igual $j = N/2$. O operador $\hat{J}_z$ corresponde à diferença no número de ocupação da partícula entre os auto-estados de energia. Por exemplo, o auto-estado de peso máximo $|j, j\rangle_z$ corresponde a todas as partículas ocupando o maior auto-estado de energia, $\psi_2(x)$. O operador $\hat{J}_x$ nos dá a diferença no número de partículas entre os estados localizados de cada poço (u_1, u_2) . De fato, para o caso unidimensional, o operador posição na representação de campo é dada por

$$\hat{x} \rightarrow \frac{2q_0}{N} \hat{J}_x, \quad (2.36)$$

então os auto-estados de pesos máximo e mínimo de $\hat{J}_x$ correspondem à localização de todas as partículas num poço ou no outro. A interpretação de $\hat{J}_y$ é crucial para uma real compreensão do tunelamento. Em uma dimensão, o operador *momentum* $i\hbar(\frac{d}{dx})$ na representação de campo é dado por

$$\hat{p} \rightarrow -\frac{2\hbar(\Omega + 2\Lambda(N - 1))}{q_0\omega_0} \hat{J}_y, \quad (2.37)$$

donde é direto que $\hat{J}_y$ corresponde ao *momentum* do condensado. Nesse modelo de *momentum* angular, o Hamiltoniano de dois modos com colisão cruzada pode ser reescrito na versão de interação (Dirac) como

$$\hat{H}_I = 2\hbar[\Omega + 2\Lambda(N - 1)]\hat{J}_z + 4\hbar\eta\hat{J}_z^2 + 2\hbar(\kappa - \eta)\hat{J}_x^2, \quad (2.38)$$

onde negligenciamos deslocamentos de energia devidos a termos proporcionais ao número total de átomos N e suas potências já que eles correspondem apenas a deslocamentos no zero de energia. Esse Hamiltoniano descreve precessões não lineares em torno dos eixos x e z . A Eq. (2.38) é ainda simétrica sob rotações de π rad em torno do eixo z . Tal transformação corresponde a $\hat{J}_x \rightarrow -\hat{J}_x$ que em vista da interpretação de $\hat{J}_x$ discutida acima corresponde à simetria de paridade do potencial de poço duplo. Com efeito, todos os auto-estados advêm de uma das classes de paridade correspondendo aos dois auto-estados dessa transformação. É interessante notar que esse Hamiltoniano é similar aos modelos considerados por Haake [37] quando as taxas de colisão cruzada são pequenas. É mais conveniente trabalhar agora numa versão de interação ao invés da de Schrödinger ou Heisenberg. Escrevemos então

$$\hat{H}_I = \hbar\Omega' \hat{J}_z + 4\hbar\eta \hat{J}_z^2 + 2\hbar(\kappa - \eta) \hat{J}_x^2 \quad (2.39)$$

com $\Omega' = 2[\Omega + 2\Lambda(N-1)]$. Assim, a colisão cruzada corrige a taxa de tunelamento por uma frequência efetiva Ω' que depende diretamente do número de partículas condensadas e da geometria do potencial através de Λ .

Na Fig. 2.2, mostramos rapidamente a relação entre a taxa tunelamento Ω e a taxa corrigida pela colisão cruzada Ω' bem como uma comparação entre as outras taxas de colisão e um esquema do potencial de poço duplo. Com efeito Λ é muito pequeno se comparado com Ω mas para um número grande de bósons, o termo adicional de tunelamento pode levar a efeitos observáveis sempre que $2\Lambda(N-1) \geq \Omega$. Além disso, o último termo da Eq. (2.39) mostra que o termo de colisão cruzada η compete com o de auto-colisão κ levando a uma taxa efetiva de colisão *in situ* $\kappa' \equiv \kappa - \eta$. Tipicamente, $\eta, \Lambda \ll \Omega$, mas os efeitos de colisão cruzada podem ser desprezados somente quando $2\Lambda(N-1)/\Omega \ll 1$, isto é, se

$$(N-1) \frac{a_s x_0}{\pi^{1/2} q_0^2} e^{-q_0^2/4x_0^2} \ll 1. \quad (2.40)$$

Considerando-se valores experimentais de $N=1300$, $a_s=5.3\text{nm}$, para o isótopo 87 do Rubídio e $q_0 = 2.2\mu m$, obtemos que somente quando $x_0 \ll 0.82q_0$ os efeitos da colisão cruzada podem ser desprezados. Esse valor depende fortemente no número de átomos da amostra e crescerá rapidamente conforme N é aumentado. Além disso, igualando Ω' à frequência de oscilação observada no experimento recente realizado por Albiez et al [25] de 25 Hz e Ω à frequência de tunelamento esperada de 2 Hz, encontramos que somente quando $x_0 \approx 6.57q_0$ a frequência de tunelamento mudaria significativamente devido às não linearidades advindas das colisões cruzadas. Estando assim, dentro da aproximação de dois modos, considerando que as funções de onda são aproximadamente dadas por aquelas do estado fundamental do oscilador.

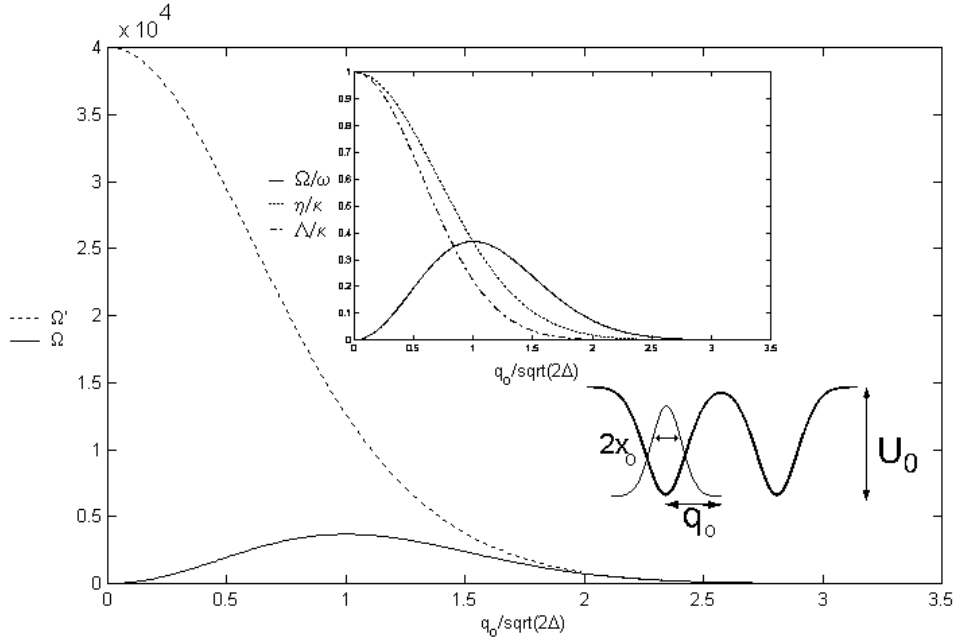


Figura 2.2: Comparação entre as frequências de colisão e tunelamento corrigida e não corrigida segundo as Eqs. (2.10-13). No *inset* representamos a geometria da armadilha de poço duplo. Note o forte aumento na taxa de tunelamento devido à presença da colisão cruzada. Ambos os eixos são adimensionais, sendo o oordenado normalizado em unidades de $\hbar$.

Isso implica o sistema estar dentro do regime efetivo de Rabi de tunelamento como discutiremos nos capítulos a seguir. Com efeito, para dado q_0 , a razão x_0/q_0 decresce rapidamente conforme o número de partículas aumenta. Ainda, para $N=1300$ e $q_0 = 0.5\mu m$ uma mudança substancial na taxa de tunelamento seria observada para $x_0 \approx q_0$. Vale notar que a análise acima pode também ser aplicada considerando-se os modos locais dados aproximadamente pelos estados excitados do oscilador harmônico. Em tal caso, as condições sobre a dispersão na função de onda em relação à distância entre os mínimos do potencial de armazenamento seriam significativamente relaxadas [38].

2.4.2 Auto-estados de energia

O conjunto de estados mais natural que exhibe quebra espontânea de simetria para esse sistema condensado no modelo de *momentum* angular de Schwinger são os estados coerentes de *momentum* angular [39] definidos em termos dos auto-estados

de $\hat{J}_z$ por

$$|\alpha\rangle = \sum_{m=-j}^j (C_{m+j}^{2j})^{1/2} \frac{\alpha^{m+j}}{(1+|\alpha|^2)^j} |j, m\rangle, \quad (2.41)$$

com $\alpha = e^{-i\phi} \tan(\theta/2)$. Para esses estados temos $\langle \hat{J}_x \rangle = (N/2) \sin(\theta) \cos(\phi)$, $\langle \hat{J}_y \rangle = (N/2) \sin(\theta) \sin(\phi)$ e $\langle \hat{J}_z \rangle = (N/2) \cos(\theta)$. Ao invés de terem uma distribuição Poissoniana, esses estados têm uma distribuição binomial do número de partículas sobre os dois auto-estados de energia do potencial. Esses estados foram usados por Wong et al. [40] para testar aspectos de quebra de simetria. Obviamente, para um condensado de *momentum* nulo devemos ter $\phi = 0$ e para a situação de dois poços igualmente populados $\phi = \pi/2$.

Nesse sentido, é de se esperar que para N pequeno, o termo $2\hbar(\Omega - 2\Lambda)\hat{J}_z$ na Eq. (2.38) domine o comportamento do Hamiltoniano. Sendo os auto-estados de energia próximos aos $N + 1$ auto-valores de $\hat{J}_z$, o estado do condensado estará próximo ao estado de peso mínimo $|j, -j\rangle_z$. Esse é de fato o estado fundamental do potencial de poço duplo e então a função densidade do condensado será simétrica como o esperado. Assim, a dinâmica é dominada por uma precessão em torno do eixo z . Se o sistema começa então com simetria quebrada de forma que

$$\langle \hat{J}_y \rangle = NS_y \neq 0 \quad (2.42)$$

(que corresponde a um estado de *momentum* não nulo), a precessão em torno do eixo z fará com que $\hat{J}_x$ oscile numa frequência $\Omega - 2\Lambda$ menor do que a prevista por Milburn et al [6] por um fator 4Λ , que depende de quão forte é o fenômeno de colisão cruzada. Contudo, isso nos diz que o condensado se acumula primeiro num dos poços e depois de um período determinado se acumula no outro. Isso é análogo ao caso geral para superfluidade quando uma quebra espontânea de simetria dá ao condensado uma fase e um *momentum* não nulo [34]. Quando N é relativamente pequeno a presença da colisão cruzada não modifica muito a dinâmica do condensado em comparação com o modelo onde esse fenômeno é considerado muito pequeno frente aos outros, acarretando apenas um aumento na taxa de tunelamento para átomos atrativos e uma diminuição no caso de átomos repulsivos.

Por outro lado, quando N é suficientemente grande, o sistema tende a ser dominado pelos dois termos não lineares no Hamiltoniano em (2.38) além do termo $4\Lambda N \hat{J}_z$. Ora, o Hamiltoniano aqui usado difere daquele usado em [6] pelo termo não linear $4\hbar\eta \hat{J}_z^2$ e por $2\Lambda N \hat{J}_z$. Esses fazem com que o estado fundamental e então o estado do condensado difira do estado de peso nulo $|j, 0\rangle_x$, com todos os outros estados estando duplamente degenerados. Estados esses que corresponderiam a um número igual de partículas em cada um dos estados localizados em cada poço, tendo

também uma função densidade simétrica. Assim, o que ocorre é que a presença da colisão cruzada causa uma quebra de simetria no sistema, mostrando que o estado do condensado não é mais aquele de uma distribuição simétrica entre os poços do potencial, ocorrendo então que a função densidade também não é mais simétrica.

Na Fig. 2.3, plotamos o espectro de auto-valores para um condensado com 1000 átomos e razão fixa de $\Omega/\kappa = 50$. Cada curva representa uma razão específica η/κ como ilustrado. Para $\eta/\kappa = 1/1000$ vemos que os auto-valores correspondem àqueles do modelo sem colisão cruzada discutido na Ref. [11]. Os auto-estados pouco excitados são muito próximos aos do operador $\hat{J}_z$ dados por $|j, -j\rangle_z$. Estados altamente excitados, estão mais perto dos auto-estados do operador $\hat{J}_x^2$, dados aproximadamente por $|j, 0\rangle_x$. Esse último estado sugere uma situação ideal para a ocorrência de auto-aprisionamento de população para grandes valores de N . O ponto de inflexão na figura para valores intermediários representa a fronteira para a ocorrência de auto-aprisionamento. Conforme a razão η/κ é aumentada, o comportamento dos auto-valores muda dramaticamente devido à influência do termo proporcional a $\hat{J}_z^2$.

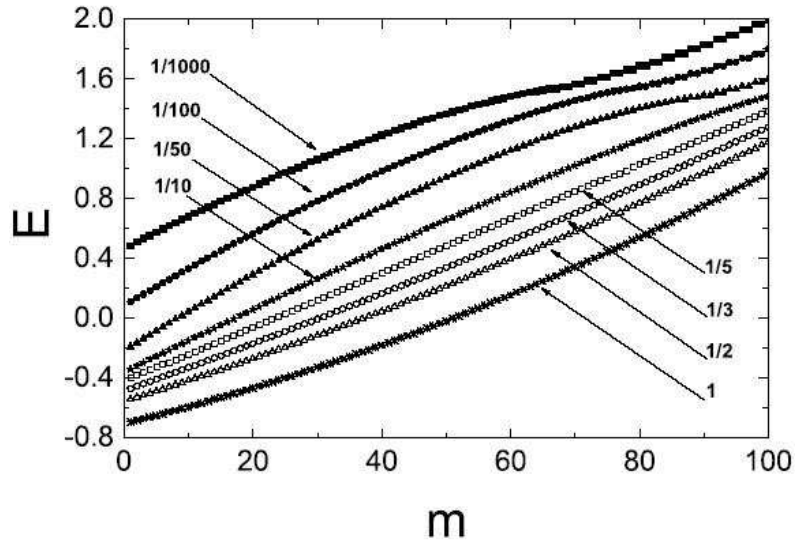


Figura 2.3: Resultados numéricos para os auto-valores do Hamiltoniano na Eq. (2.39) na base de $\hat{J}_x$. Espectros de energia para diferentes regimes da razão η/κ . Cada espectro foi deslocado por um fator constante. Observamos a mudança de um espectro de fônons para um de rôtons conforme aumentamos a taxa de colisão cruzada entre os modos. Os cálculos ilustrados acima foram levados a cabo, diagonalizando-se numericamente a matriz (2.39) com um número total de átomos da ordem de $N=1000$.

Uma característica importante é a de que o ponto de inflexão é deslocado para auto-valores maiores quando $\eta/\kappa = 1/100 - 1/10$ e desaparece completamente quando $\eta/\kappa \geq 1/5$. Para $\eta/\kappa \approx 1$ o termo proporcional a $\hat{J}_x^2$ é desprezível em comparação com os outros termos e os auto-valores do Hamiltoniano se aproximam dos auto-valores de $\hat{J}_z^2$ conforme $\eta/\kappa \rightarrow 1$. Observamos então, que as colisões cruzadas destacam o comportamento quadrático dos auto-valores. Identificamos assim, essa situação com a de superfluidez. Nesse sentido, quando essas colisões aumentam, mais próximos nos encontramos de excitações do tipo rotônicas [8]. As colisões aumentam as correlações interatômicas de forma a produzir assim, um mínimo rotônico no espectro de excitações. Pode ser então possível reproduzir esse espectro experimentalmente para adequadas condições do potencial de aprisionamento. Nesse sentido, as colisões cruzadas atuam como um análogo a um atrito atômico conforme $\eta \rightarrow \kappa$ já que a excitação do tipo rôton corresponde ao escoamento normal de um superfluido. Apesar da similaridade entre a superfluidez e o modelo aqui estudado é importante notar que a superfluidez e o regime efetivo de Rabi têm físicas muito distintas. Na superfluidez temos soluções deslocalizadas enquanto que no regime efetivo de Rabi as funções de onda ainda estão localizadas nos mínimos do potencial. Além disso, apesar das duas situações serem compatíveis observacionalmente, o regime efetivo de Rabi reproduz um espectro de rôtons enquanto que a superfluidez se concentra no regime linear (fônons) do espectro. Nos limites em que a taxa de colisão cruzada é muito pequena, o Hamiltoniano (2.39) se reduz a

$$\hat{H} = \hbar\Omega\hat{J}_z + 2\hbar\kappa\hat{J}_x^2, \quad (2.43)$$

que corresponde exatamente ao modelo de dois-modos localizado, onde a colisão cruzada é dita pequena, derivado em [6], mostrando a validade do modelo completo nos limites conhecidos para os auto-estados de energia.

2.4.3 Regimes quânticos

Determinemos agora a dinâmica quântica completa desse modelo. Com efeito, as equações de movimento na versão de Heisenberg para os operadores *momentum* angular são dadas por

$$\dot{\hat{J}}_x = -\hbar[\Omega']\hat{J}_y - 4\hbar\eta[\hat{J}_y, \hat{J}_z]_+, \quad (2.44)$$

$$\dot{\hat{J}}_y = \hbar[\Omega']\hat{J}_x - 2\hbar(\kappa - 3\eta)[\hat{J}_z, \hat{J}_x]_+, \quad (2.45)$$

$$\dot{\hat{J}}_z = 2\hbar(\kappa - \eta)[\hat{J}_y, \hat{J}_x]_+. \quad (2.46)$$

Se considerarmos agora as equações de movimento para os valores médios e fatorizarmos as médias, podemos definir um modelo de campo médio equivalente àquele

obtido nas Eqs. (2.29-31). É fácil de ver que caso a taxa de colisão cruzada seja tal que $\eta \rightarrow \kappa$ (para $\Omega' \gg \kappa'$) as equações acima se reduzem a

$$\dot{\hat{J}}_x = -\hbar[\Omega']\hat{J}_y - 4\hbar\kappa[\hat{J}_y, \hat{J}_z]_+, \quad (2.47)$$

$$\dot{\hat{J}}_y = \hbar[\Omega']\hat{J}_x + 4\hbar\kappa[\hat{J}_z, \hat{J}_x]_+, \quad (2.48)$$

$$\dot{\hat{J}}_z = 0. \quad (2.49)$$

Com $\hat{J}_z$ sendo uma constante de movimento, o conjunto de Eqs. (2.44-46) é facilmente resolvido resultando em

$$\hat{J}_x(t) = \hat{J}_x(0) \cos(\Omega''t) + \hat{J}_y(0) \sin(\Omega''t), \quad (2.50)$$

onde $\Omega'' \equiv \Omega' + 8\eta J_z = 2[\Omega + 2\Lambda(N-1)] + 8\eta J_z$ é a nova frequência de Rabi, que depende explicitamente tanto do número total de bósons condensados quanto da condição inicial para J_z através dos parâmetros não lineares de colisão cruzada Λ e η . Uma vez que $\eta \ll \Omega$, J_z apenas dá um pequeno deslocamento em Ω'' . Assim, se o condensado está inicialmente num auto-estado do tipo $|j, -j\rangle_x$, que corresponde a uma ocupação máxima de um dos poços do potencial e *momentum* inicial zero, a solução para o operador de desbalanço dá

$$\hat{J}_x(t) = \hat{J}_x(0) \cos(\Omega''t), \quad (2.51)$$

e para a situação em que ambos os poços estão igualmente ocupados é direto que

$$\hat{J}_x(t) = \hat{J}_y(0) \sin(\Omega''t). \quad (2.52)$$

Para obtermos a dinâmica quântica completa desse modelo, representamos o Hamiltoniano de dois modos na base de $\hat{J}_x$ e expandimos os estados na mesma base. A evolução temporal pode então ser encontrada integrando-se a equação de Schrödinger nessa dada base.

Na Fig. 2.4, mostramos o valor médio do operador de desbalanço para o estado inicial correspondente à localização de todas as partículas num poço do potencial. Exatamente como em [6], devido a flutuações quânticas intrínsecas nas condições iniciais ocorrem algumas oscilações do decaimento quântico médio como esperado. Ainda, dinâmica de colapso e ressurgimento também é modificada nesse modelo. O ressurgimento da oscilação é novamente devido à natureza discreta do espectro do Hamiltoniano de muitos corpos. Notemos que o tunelamento coerente domina a dinâmica mesmo quando $\kappa/\eta \sim 10$. Isso ocorre devido exclusivamente às colisões cruzadas que suprimem o auto-aprisionamento. Conforme a colisão cruzada aumenta, a dinâmica de colapso e ressurgimento muda. Para grandes períodos de

tempo há um colapso total do valor médio que dura por grandes intervalos de tempo de modo que esse período diminui conforme η se aproxima de κ , ficando próximo de um limite de Rabi em que apenas oscilações coerentes da média ocorrem. Além disso, observamos a ocorrência de uma modulação decrescente do colapso e ressurgimento. Isso ocorre por causa da relaxação de amplitude devida à não linearidade introduzidas nas Eqs. (2.44-46) pelas colisões cruzadas. Novamente, conforme $\eta \rightarrow \kappa$ a amplitude das oscilações coerentes da diferença de população se aproxima de uma constante com frequência de oscilação Ω'' .

Para observarmos esses resultados quânticos seria necessário preparar o condensado num auto-estado máximo de $\hat{J}_x$, isto é, inteiramente localizado num poço ou no outro. Para observar a dinâmica de colapso e ressurgimento, precisaríamos monitorar o poço inicialmente desocupado. Isso pode ser alcançado fazendo-se uso de espalhamento de luz não ressonante dependente do desbalanço de partículas. Para tanto, contamos que o laser usado possa ser focado de modo a distinguir os dois poços do potencial. Essa discussão é feita com o devido cuidado no capítulo seguinte.

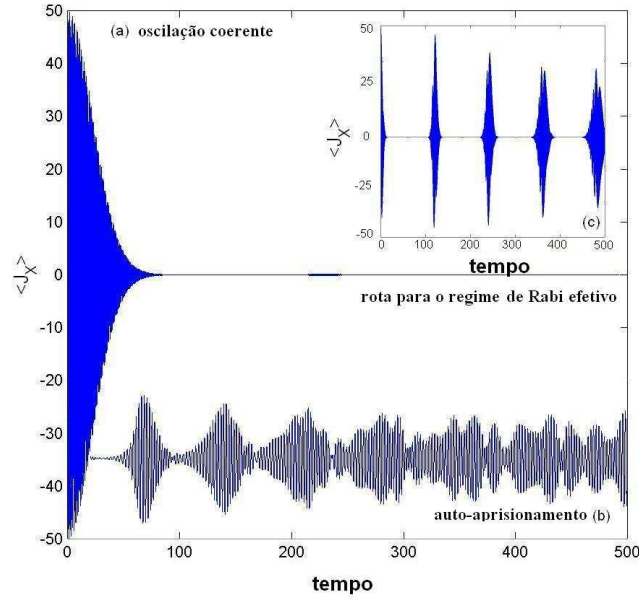


Figura 2.4: Resultados numéricos para valor médio do desbalanço de população para $N = 100$, $\kappa N = 2$, (a) $\eta = \kappa/10$, (b) $\eta = \kappa/100$ e (c) $\eta = \kappa/2$. Normalizamos o tempo em unidades de tunelamento. As contas foram feitas calculando-se numericamente o operador unitário evolução temporal usual segundo o Hamiltoniano em (2.39). Os “kets” evoluídos no tempo e a dependência temporal dos valores médios são então encontrados.

Capítulo 3

Medições homódinas num condensado Bosônico

“É a sina dos tapejaras
Essa de beber mensagens
Que o vento traz nas aragens
Do fundo das noites calmas
Bordoneando nas taquaras
E pelas frinchas da porta
Porque reanima e conforta
O velho e gaudério destino
De levar a todos o ensino
E a distância pouco importa. ”
- Jayme Caetano Braun

Nesse capítulo introduziremos os conceitos mais fundamentais da teoria de detecção homódina em condensados de Bose-Einstein. Nas seções anteriores, discutimos extensivamente alguns regimes da dinâmica quântica de condensados atômicos aprisionados em potenciais de poço duplo. Nesse sentido a discussão anterior serve de fundamentação para o estudo referente à detecção de quadratura de fase nesses experimentos como será discutido a seguir. Começamos então essa digressão introduzindo os conceitos mais fundamentais de detecção homódina, passando ao estudo da detecção atômica em condensados que é o cerne desse trabalho. Por termo, propomos algumas possíveis realizações experimentais desses esquemas atômicos.

3.1 Medidas de quebra de simetria

Descrevemos nesse capítulo uma técnica de medição não destrutiva que monitora oscilações do tipo Josephson entre as componentes de um condensado de Bose-Einstein aprisionado num potencial de poço duplo. Essa análise é embasada no sistema de dois condensados espacialmente separados que foi introduzido no Cap.

2. Em amostras condensadas, o número total de átomos é geralmente fixo mas pode existir uma incerteza em como esse número é distribuído. Essa incerteza no número relativo implica existir uma diferença de fase relativa entre as funções de onda de duas componentes quaisquer. Nesse sentido, para detectar uma diferença de fase relativa, devemos acoplar as duas componentes do sistema. A medida da fase induz, através do acoplamento, uma incerteza na variável conjugada, que é o número de átomos. Isso leva o sistema a um estado no qual a fase relativa é mais definida, o que de certa forma é a fase que medimos. Esse processo quebra a simetria de não haver informação da fase e define uma diferença de fase [41].

Muitos autores já discutiram processos de quebra de simetria usando modelos condensados duplos para investigar, por exemplo, a estabilidade da função de onda espacialmente simétrica do estado fundamental [42], a existência de soluções de Hartree-Fock não simétricas [43] ou o processo de quebra de simetria que leva à condensação [44]. A maioria dos modelos de medição envolvem detecção direta de átomos [45], apesar de algumas técnicas não destrutivas já terem sido propostas.

3.2 Teoria de detecção homódina

Experimentos de contagem direta de partículas, nos quais a distribuição do número dessas incide diretamente no detector, fornecem apenas informações sobre o número médio de partículas. Tais medidas de intensidade são particularmente sensíveis aos fenômenos de agrupamento (bunching) e anti-agrupamento (anti-bunching) de partículas bem como a estatísticas de distribuições sub e super-Poissonianas. Contudo, elas não conseguem acessar a fase e conseqüentemente nada nos dizem sobre a qualificação de estados comprimidos, por exemplo. Assim, a detecção desse tipo de estado e o acesso a esse tipo de informação de fase requer um esquema que meça a variância da quadratura do campo bosônico.

De fato, o chamado esquema de detecção homódina resolve esse problema [46, 47, 48, 49]. Essa proposta consiste em sobrepor o campo de entrada ao de um oscilador local, sobre o qual temos controle, a partir da atuação de um divisor de feixes (*beam-splitter*) ideal com transmissividade T e reflexividade R de modo que $R + T = 1$. Com efeito, o modo de entrada e o do oscilador são descritos pelos operadores de criação e destruição $\hat{e}_1^\dagger, \hat{e}_2^\dagger$ e $\hat{e}_1, \hat{e}_2$, respectivamente. Escrevendo os dois modos de saída que alcançam os detetores 1 e 2 por $\hat{c}$ e $\hat{d}$, obtemos

$$\hat{c} = \sqrt{T}\hat{e}_1 + i\sqrt{1-T}\hat{e}_2, \quad (3.1)$$

$$\hat{d} = i\sqrt{1-T}\hat{e}_1 + \sqrt{T}\hat{e}_2. \quad (3.2)$$

Ainda, é direto que há uma mudança de fase de $\pi/2$ entre as ondas refletidas e

transmitidas para um divisor de feixes simétrico. Esse fator foi incluído no número complexo i presente nas Eqs. (3.1) e (3.2). Também, os sinais medidos são determinados pelos operadores

$$\hat{c}^\dagger \hat{c} = T \hat{e}_1^\dagger \hat{e}_1 + (1 - T) \hat{e}_2^\dagger \hat{e}_2 + i \sqrt{T(1 - T)} (\hat{e}_1^\dagger \hat{e}_2 - \hat{e}_2^\dagger \hat{e}_1), \quad (3.3)$$

$$\hat{d}^\dagger \hat{d} = (1 - T) \hat{e}_1^\dagger \hat{e}_1 + T \hat{e}_2^\dagger \hat{e}_2 - i \sqrt{T(1 - T)} (\hat{e}_1^\dagger \hat{e}_2 - \hat{e}_2^\dagger \hat{e}_1). \quad (3.4)$$

Donde é fácil de ver que

$$\hat{c}^\dagger \hat{c} + \hat{d}^\dagger \hat{d} = \hat{e}_1^\dagger \hat{e}_1 + \hat{e}_2^\dagger \hat{e}_2. \quad (3.5)$$

Ora, a frequência do oscilador local é igual à frequência de entrada, de modo que os operadores acima não têm dependência temporal. Fica assim caracterizado o esquema de interferometria homódina. Isolemos agora, os casos de detecção simples e balanceada.

3.2.1 Detecção homódina simples

Nesse caso de detecção homódina, a transmissividade do divisor de feixes é próxima da unidade, ou seja

$$T \gg R, \quad (3.6)$$

e a medição é feita apenas no detector 1 da Fig. 3.1. O modo do oscilador local é então excitado num estado coerente $|\beta_l\rangle$ de grande amplitude e fase ϕ_l . Ora, da Eq. (3.1) é direto que o sinal recebido pelo detector 1 é dado por

$$\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle = T \langle \hat{e}_1^\dagger \hat{e}_1 \rangle + (1 - T) |\beta_l|^2 + 2 \sqrt{T(1 - T)} |\beta_l| \langle \hat{\mathcal{X}}(\phi_l + \frac{\phi}{2}) \rangle, \quad (3.7)$$

em que,

$$\hat{\mathcal{X}}(\phi) \equiv \hat{\mathcal{X}}_\phi = \frac{1}{2} (\hat{e}_1 e^{-i\phi} + \hat{e}_1^\dagger e^{i\phi}). \quad (3.8)$$

Vemos que esse sinal contém a parte transmitida da entrada, o campo refletido do oscilador local e o que é mais importante, um termo de interferência entre o campo de entrada e o campo do oscilador local. De fato, é exatamente dessa interferência que obtemos uma quadratura do campo de entrada dependendo da fase do oscilador local como mostra a Eq. (3.8). Nesse esquema, um oscilador local forte em comparação com a entrada é usado de modo que

$$(1 - T) |\beta_l|^2 \gg T \langle \hat{e}_1^\dagger \hat{e}_1 \rangle. \quad (3.9)$$

As desigualdades (3.6) e (3.9) implicam em quase todo campo de entrada alcançar o detector mas a fração do campo local detectada ainda ser dominante. Podemos então,

desprezar o primeiro termo da Eq. (3.7) e escrever o número médio de partículas no modo c como

$$\langle n_c \rangle \equiv \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \cong (1 - T)|\beta_l|^2 + 2\sqrt{T(T - 1)}|\beta_l|\langle \hat{\mathcal{X}}(\phi_l + \frac{\pi}{2}) \rangle. \quad (3.10)$$

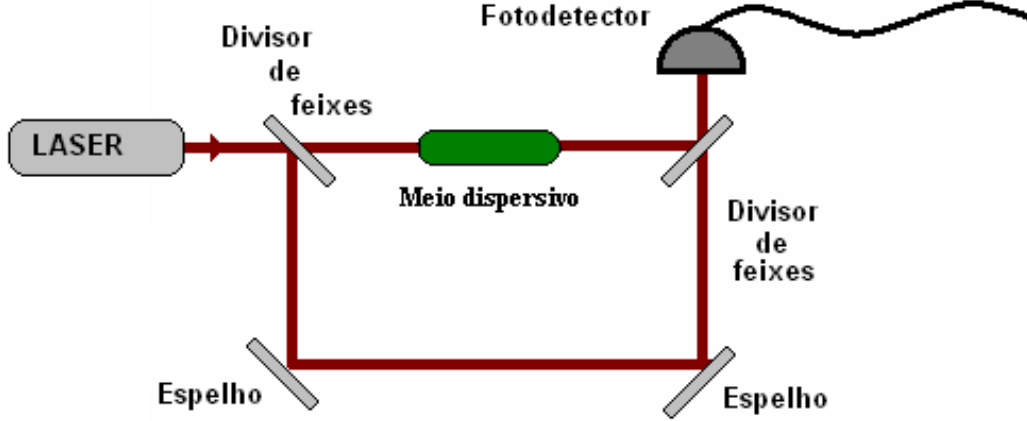


Figura 3.1: Esquema de detecção homódina.

O primeiro termo é constituído de uma constante que pode ser subtraída do sinal e o resultado acaba contendo apenas a quadratura da entrada. A compressão do estado é então manifestada numa estatística sub-Poissoniana em detecção homódina simples uma vez que uma das quadraturas $\hat{\mathcal{X}}_1$ ou $\hat{\mathcal{X}}_2$ é comprimida, informação que é dada pelo termo $\hat{\mathcal{X}}(\phi_l + \frac{\pi}{2})$.

Notemos ainda, que medidas de intensidade em detecção homódina são muito diferentes das em detecção direta. Assim, as flutuações na intensidade nesse caso medem diretamente as flutuações na quadratura da entrada e no sinal, e sua variância depende da fase do oscilador local (ou seja, da fase do feixe que é refletido no divisor), que é um parâmetro externo sobre o qual temos controle.

3.2.2 Detecção homódina balanceada

Na discussão acima, assumimos que o oscilador local é completamente coerente e muito mais intenso do que o campo de entrada. Contudo, um certo ruído residual do oscilador local e o ruído excessivo que passa pelo divisor de feixes com uma reflexividade R não podem ser suprimidos em uma detecção homódina ordinária já que T , em princípio, nunca pode ser unitário. Ilustramos esse esquema na Fig. 3.2.

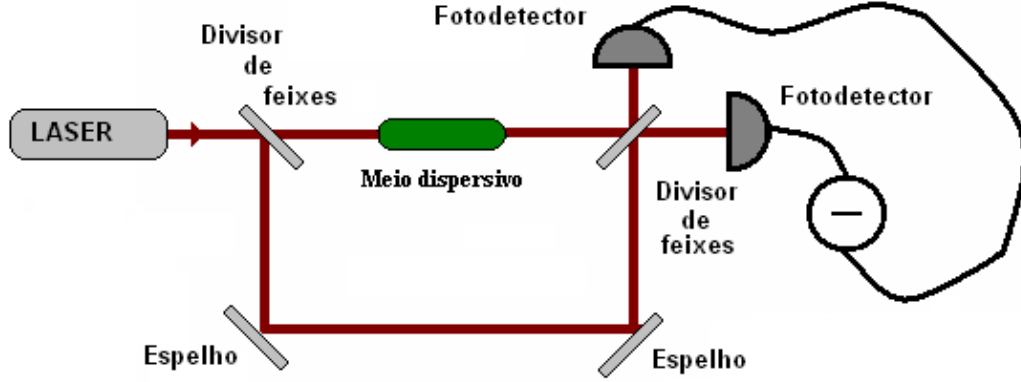


Figura 3.2: Esquema de detecção homódina balanceada.

O ruído do oscilador local pode então limitar a detecção homódina simples. Em particular essa detecção não é limitada quanticamente se o ruído de entrada que é transmitido for menor do que o do oscilador local, como pode ser o caso quando esse for muito pequeno. Com efeito, um esquema alternativo é embasado na detecção homódina em duas portas, balanceando as saídas do divisor de feixes. O fato de que os termos de interferência aparecem com sinais opostos e os demais com os mesmos sinais nas Eqs. (3.3) e (3.4), pode ser usado para eliminar completamente os fatores que não são de interferência. Nesse esquema, um divisor de feixes de 50/50 é usado e a diferença nas medidas dos dois detetores é obtida. Assim, o sinal de saída é determinado pelo operador

$$\hat{n}_{cd} \equiv \hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{d}^\dagger \hat{d} = -i(\hat{e}_1^\dagger \hat{e}_2 - \hat{e}_2^\dagger \hat{e}_1), \quad (3.11)$$

e o sinal medido é dado por

$$\langle \hat{n}_{cd} \rangle = -2|\beta_l| \langle \hat{\mathcal{X}}(\phi_l + \frac{\pi}{2}) \rangle, \quad (3.12)$$

donde vemos que a contribuição do oscilador local ao sinal foi eliminada e apenas a interferência entre o campo médio de entrada do oscilador local e a quadratura da entrada sobrevivem. Com efeito a variância no sinal de saída é dada por

$$(\Delta \hat{n}_{cd})^2 = 4|\beta_l|^2 [\Delta \hat{\mathcal{X}}(\phi_l + \frac{\pi}{2})]^2. \quad (3.13)$$

Onde o termo dominante é agora devido apenas à interferência e o ruído devido ao oscilador local é totalmente eliminado.

3.2.3 Fotodeteccção

Segundo as teorias de fotodeteccção tanto de Srinivas e Davies [50] quanto a dos operadores de fase exponenciais [51] os *momenta* de $\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle$ são convertidos em fotoelétrons. Contudo, a quantidade mensurável é o número de fotoelétrons ativados pelo feixe incidente. Com efeito, para a teoria de SD [50] o número médio de fótons contados no período t é dado por

$$\bar{k}_{SD} = \sum_k P_{SD}(k, t) k = (1 - e^{-\gamma t}) \langle n \rangle. \quad (3.14)$$

e a variância no número de fotocontagens é dada por

$$\Delta \bar{k}_{SD}^2 = \langle \Delta n^2 \rangle (1 - e^{-\gamma t})^2. \quad (3.15)$$

onde $P_{SD}(k, t)$ é a probabilidade de ocorrerem k medidas no tempo t , γ é o termo de relaxamento (eficiência da cavidade) e $\langle n \rangle$ é o número médio de fótons. Já na teoria dos operadores de fase exponenciais [51] o número de fotocontagens é dado por

$$\bar{k} = \langle n \rangle - e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left[\sum_{j=k}^{\infty} j p_k - k \sum_{j=0}^{\infty} p_j \right], \quad (3.16)$$

e a variância de contagens

$$\begin{aligned} \Delta \bar{k}^2 = & \langle \Delta n^2 \rangle - e^{-\gamma t} \sum_k \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left[\sum_{j=k}^{\infty} j^2 p_k - k^2 \sum_{j=0}^k p_j \right] + 2 \langle n \rangle e^{-\gamma t} \sum_k \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left[\sum_{j=k}^{\infty} j p_k \right. \\ & \left. - k \sum_{j=0}^k p_j \right] - e^{-2\gamma t} \left[\sum_k \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left(\sum_{j=k}^{\infty} j p_k - k \sum_{j=0}^k p_j \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde p_k é a probabilidade de k medidas na teoria dos operadores de fase exponenciais. Ora, a contagem de fotoelétrons é proporcional à fase do campo da cavidade apenas para tempos grandes ou para detectores com alta eficiência. Em outras palavras $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{k} = \langle n \rangle$. Reescrevendo as equações acima em função dos resultados (3.10) e (3.12), obtemos para a detecção homódina simples

$$\bar{k}_{SD} = (1 - e^{-\gamma t}) \frac{\lambda |\beta|}{2} (\langle \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2} \rangle + |\beta|) \quad (3.18)$$

e

$$\bar{k} = \frac{\lambda |\beta|}{2} (\langle \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2} \rangle + |\beta|) - e^{-\gamma t} \sum_k \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left[\sum_{j=k}^{\infty} j p_k - k \sum_{j=0}^k p_j \right]. \quad (3.19)$$

Além disso, a variância na teoria de SD é dada por

$$\Delta \bar{k}_{SD}^2 = \frac{\lambda^2 |\beta|^2}{4} (\langle \Delta \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2}^2 \rangle + 1) (1 - e^{-\gamma t})^2 \quad (3.20)$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{k}_{SD}^2 = & \frac{\lambda^2 |\beta|^2}{4} (\langle \Delta \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2}^2 \rangle + 1) + \lambda |\beta| (\langle \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2} \rangle + |\beta|) e^{-\gamma t} \left[\sum_k \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left(\sum_{j=k}^{\infty} j p_k \right. \right. \\
& \left. \left. - k \sum_{j=0}^k p_j \right) \right] - e^{-\gamma t} \left[\sum_k \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left(\sum_{j=k}^{\infty} j^2 p_k - k^2 \sum_{j=0}^k p_j \right) \right] \\
& - e^{-2\gamma t} \left[\sum_k \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left(\sum_{j=k}^{\infty} j p_k - k \sum_{j=0}^k p_j \right) \right]^2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Nesse sentido para tempos grandes ou com alta eficiência, ambas as variâncias acima de fotocontagem resultam em

$$\lim_{\gamma t \rightarrow \infty} \Delta \bar{k}^2 = \frac{\lambda^2 |\beta|^2}{4} (\langle \Delta \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2}^2 \rangle + 1). \tag{3.22}$$

Podemos agora obter resultados análogos aos obtidos acima para o esquema de detecção homódina balanceada. Como nesse esquema o número médio de fótons e a variância são dados pelas Eqs. (3.12, 3.13), obtemos no modelo de SD

$$\bar{k}_{SD} = -(1 - e^{-\gamma t}) \lambda |\beta| \langle \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2} \rangle, \tag{3.23}$$

e para os operadores de fase exponenciais

$$\bar{k} = -2 |\beta| \langle \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2} \rangle - e^{-\gamma t} \sum_k \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left[\sum_{j=k}^{\infty} j p_k - k \sum_{j=0}^k p_j \right]. \tag{3.24}$$

Em tempo, para as variâncias, dadas pela Eq. (3.13) obtemos para SD

$$\Delta \bar{k}_{SD}^2 = 4 \lambda^2 |\beta|^2 \langle \Delta \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2}^2 \rangle (1 - e^{-\gamma t})^2 \tag{3.25}$$

e para os operadores de fase exponenciais

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{k}^2 = & 4 \lambda^2 |\beta|^2 \langle \Delta \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2}^2 \rangle - 4 \lambda |\beta| \langle \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2} \rangle e^{-\gamma t} \left[\sum_k \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left(\sum_{j=k}^{\infty} j p_k \right. \right. \\
& \left. \left. - k \sum_{j=0}^k p_j \right) \right] - e^{-\gamma t} \left[\sum_k \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left(\sum_{j=k}^{\infty} j^2 p_k - k^2 \sum_{j=0}^k p_j \right) \right] - \\
& e^{-2\gamma t} \left[\sum_k \frac{(\gamma t)^k}{k!} \left(\sum_{j=k}^{\infty} j p_k - k \sum_{j=0}^k p_j \right) \right]^2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Assim, no limite de tempos grandes e alta eficiência obtemos

$$\lim_{\gamma t \rightarrow \infty} \Delta \bar{k}^2 = 4 \lambda^2 |\beta|^2 \langle \Delta \hat{\mathcal{X}}_{\phi+\pi/2}^2 \rangle. \tag{3.27}$$

Ou seja, as variâncias no número de fotocontagens reais permitem a inferência da variância na quadratura do campo no interior da cavidade.

O campo local é considerado clássico, o que implica a estatística do campo na saída do divisor de feixes depender fortemente da estatística do campo na cavidade. Assim, no modelo quântico descrito acima, podemos obter informações sobre o comportamento transiente do sistema antes de atingir o limite estacionário dado pela Eq. (3.27). Podemos ainda inferir dessa discussão que a variância das quadraturas do campo é sempre limitada inferiormente pela variância de contagens, o que torna impossível aquela assumir valores menores do que o limite estabelecido pela Eq. (3.27). É consequência direta então que o campo não possa ser comprimido no processo de detecção homódina.

3.3 Divisor de feixes atômico

Nessa seção discutiremos um esquema para determinação da fase atômica entre dois condensados bosônicos aprisionados em um potencial de poço duplo similar à medição óptica homódina balanceada. Nessa proposta o acoplamento Josephson atua como um divisor de feixes atômicos. Consideremos, a princípio, dois modos condensados separados por uma barreira de potencial, como em [6]. Assumindo uma aproximação de dois modos e negligenciando os termos de colisão cruzada (supondo que a sobreposição das funções de onda dos condensados é muito pequena), o Hamiltoniano para os dois modos é dado pela Eq. (2.38) no limite em que $\eta, \Lambda \rightarrow 0$. Suponhamos a seguir que $\epsilon = \frac{\kappa}{\Omega} \ll 1$. Assim, uma solução semi-clássica para S_x dada até primeira ordem em ϵ por

$$\begin{aligned} S_x(t) = & [S_x(0) + \epsilon t(2Nz_0y_0 - ix_0)] \cos(\Omega t) - [S_y(0) - \\ & \epsilon t(2Nz_0y_0 + iy_0)] \sin(\Omega t), \end{aligned} \quad (3.28)$$

que é válida somente quando $\epsilon N \ll 1$, *i.e.*, para $\kappa \ll \Omega$, ou seja para um número pequeno de partículas e para tempos curtos. Com efeito, ao assumirmos que os operadores podem ser expandidos como $S_i \rightarrow \sum_n \epsilon^n S_i^{(n)}$ onde $i \in x, y, z$ e considerando também um mesmo número de partículas em ambos os poços a solução se reescreve como

$$S_x(t) = -S_y(0) \sin(\Omega t) + 2\epsilon t N z_0 y_0 \cos(\Omega t) + i\epsilon t y_0 \sin(\Omega t). \quad (3.29)$$

Consideramos agora que o modo B, por exemplo, tenha sido preparado num estado coerente dado por $\beta = |\beta|e^{i\theta}$. Assim,

$$\langle S_y \rangle = \frac{i}{2} |\beta| (\langle a^\dagger \rangle e^{i\theta} - \langle a \rangle e^{-i\theta}) = -|\beta| \langle X_{\theta-\pi/2} \rangle. \quad (3.30)$$

Ora, para $\epsilon N \ll 1$ e $t = \pi/2\Omega$, a Eq. (3.29) resulta em

$$\langle S_x(\pi t/2\Omega) \rangle = |\beta| \langle X_{\theta-\pi/2} \rangle + i \frac{\pi\epsilon}{2\Omega} \langle y_0 \rangle, \quad (3.31)$$

que é o resultado já conhecido para detecção homódina a menos de uma pequena correção. Isto é, a diferença entre o número de átomos entre os dois poços determina a fase de quadratura de um campo de matéria em relação ao outro. A Fig. 3.3 abaixo mostra um circuito representando o divisor de feixes atômico bem como o processo de detecção homódina que será discutido na secção seguinte.

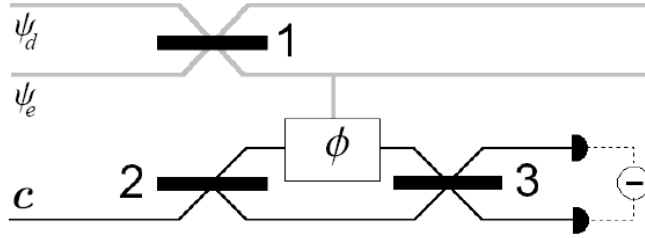


Figura 3.3: Circuito representando o processo de detecção homódina. As linhas cinzas indicam os modos condensados e as linhas escuras os modos ópticos do processo exemplificado na secção 3.4. O divisor de feixes 1 é o potencial de aprisionamento de poço duplo. Átomos no modo de dentro da cavidade interagem com o campo resultando numa fase condicionada ao número de átomos no modo. A fase da luz é detectada num esquema de detecção homódina atômica dando informação sobre a fase relativa do condensado.

Se considerarmos agora o modelo proposto no capítulo 2 em que as colisões cruzadas não são negligenciadas, encontramos condições ótimas para o esquema de separador de feixes atômicos. Novamente, se a diferença no número de partículas é nulo no tempo inicial, a solução mais genérica para o operador S_x é dada por

$$\langle \hat{J}_x(t) \rangle = |\beta| \sin(\Omega' t) \langle \hat{X}_{\theta-\pi/2}(t) \rangle, \quad (3.32)$$

que é exatamente o resultado para detecção homódina balanceada multiplicada por uma amplitude que depende através de Ω' da geometria da armadilha, do número total de partículas e da condição inicial de J_z . Ainda, nesse regime a frequência de oscilação aumenta com o número total de bósons no sistema de tal forma que o período correspondente diminui. Com efeito, esse regime efetivo de Rabi nos permite interpretar o potencial de poço duplo como uma realização de um divisor

de feixes atômico-temporal. Assim, a função seno que modula a corrente homódina é análoga à transmissividade do divisor de feixes. Para o caso ideal de um divisor 50/50 devemos ter

$$\Omega' = (2n + 1)\pi/2, \quad (3.33)$$

com n um número inteiro. Por termo, escrevemos a Eq. (3.32) (divisor 50/50) como

$$\langle \hat{X}_{\theta-\pi/2} \rangle = \frac{1}{|\beta|} \langle \hat{J}_x \rangle, \quad (3.34)$$

já que a quantidade medida experimentalmente é a diferença de população dada pelo lado direito da Eq. (3.34).

3.4 Esquema de detecção homódina

A figura 3.4 ilustra o sistema estudado nessa seção. O esquema consiste em dispor um dos poços do potencial num braços de uma cavidade óptica. A cavidade é dirigida por um campo óptico coerente na frequência da cavidade. Nesse sentido, há uma interação dispersiva entre o campo de luz e o gás atômico de tal modo que o campo óptico está muito fora de sintonia com quaisquer transições de dipolo da espécie atômica. Assim, o efeito dessa interação é deslocar a fase do campo da cavidade por um valor que depende do balanço de bósons nos dois mínimos do potencial que confina o condensado. Com efeito, se o número de átomos na cavidade oscila, também oscilará a mudança de fase. De fato, qualquer efeito de tunelamento no condensado se manifestará numa mudança de fase modulada do campo óptico que deixa a cavidade. Para ter acesso a essa mudança de fase, consideramos um esquema de detecção homódina. A luz que deixa a cavidade é combinada com o feixe de referência e detectada logo em seguida no fotodetector num processo de interferometria homódina balanceada [12].

Se a luz incidente estiver dessintonizada de qualquer ressonância atômica, o Hamiltoniano de interação será dado por *

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= -\hbar\chi\hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &= -\hbar\frac{N}{2}\chi\hat{c}^\dagger\hat{c} - \hbar\chi\hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{J}_x, \end{aligned} \quad (3.35)$$

em que χ dá a intensidade da interação e $\hat{c}^\dagger$ é o operador de criação fotônico. Se o modo óptico tem uma secção transversal w , então a intensidade da interação pode ser escrita como

$$\chi = \frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{2(r_0/w)^2 + 1}}. \quad (3.36)$$

*Para maiores detalhes verifique o apêndice B.

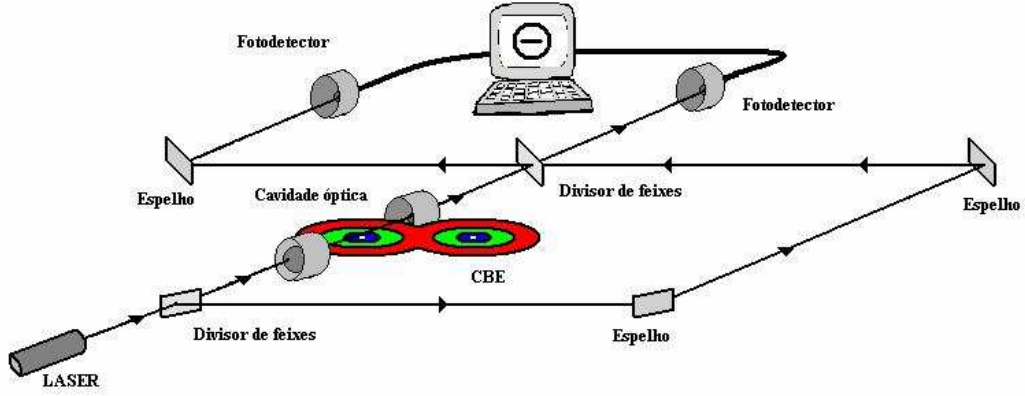


Figura 3.4: Representação do esquema de detecção homódina proposto para monitorar a dinâmica interna de um CBE em potencial de poço duplo.

Por razões práticas é interessante notar que para cerca de $N = 100$ átomos na armadilha, $\chi > 10^{-3} Hz$ que resulta em mudanças de fase detectáveis de cerca de 0.1 rad que devem ser observáveis experimentalmente. Notemos ainda que valores maiores de χ podem ser alcançados reduzindo-se a dessintonia ou a intensidade do feixe incidente [12].

Apesar do número total de fótons dentro da cavidade ser uma constante de movimento (já que comuta com o Hamiltoniano em 3.35), a sua fase pode variar com o tempo segundo a dinâmica interna do condensado. A evolução temporal dessa fase pode então ser encontrada, considerando-se a equação de Heisenberg para os operadores de criação e destruição de fótons dentro da cavidade se o campo de luz é considerado estar num estado coerente. Assim, é direto que

$$\dot{\phi} = -\chi\left(\frac{N}{2} + \langle \hat{J}_x \rangle\right), \quad (3.37)$$

mostrando a dependência direta da fase do feixe de laser com o valor esperado do desbalanço de população dado por $\langle \hat{J}_x \rangle$. Se supusermos agora que os CBE estão sendo monitorados pelo esquema de detecção homódina balanceada ilustrado nas Fig 3.2 e 3.3, então, é fácil de ver que a diferença de número entre ambos os feixes que alcançam os fotodetectores é proporcional à diferença de fase, de modo que

$$\langle \hat{\mathcal{J}}_{xf} \rangle = -|d| \langle \hat{\mathcal{X}}_{\phi-\pi/2} \rangle, \quad (3.38)$$

em que $\langle \hat{\mathcal{J}}_{xf} \rangle$ define a corrente homódina medida e $|d|$ é o auto-valor do operador destruição do campo fotônico que não entra na cavidade. Nessa última equação, a fase ϕ varia com o tempo dependendo da dinâmica interna do condensado como

mostra a Eq. (3.37). Assim, a diferença medida de fótons, dá informação indireta sobre a estrutura interna do condensado já que se relaciona diretamente com a fase relativa do condensado em ambos os poços do potencial de aprisionamento. Isso é fácil de se observar se escrevermos

$$\langle \hat{\mathcal{X}}_{\phi-\pi/2}(t) \rangle = \langle \hat{\mathcal{X}}_{\phi(t)-\pi/2} \rangle = -\frac{i}{2}(\langle \hat{c}^\dagger \rangle e^{i\phi(t)} - \langle \hat{c} \rangle e^{-i\phi(t)}), \quad (3.39)$$

uma vez que o campo que vai através do outro braço do dispositivo não tem *a priori* nenhuma dependência temporal e $\phi(t)$ é dado pela Eq. (3.37). Se assumirmos que ambos os feixes se mantêm num estado coerente, então

$$\langle \hat{\mathcal{J}}_{xf} \rangle = -|c||d|\text{sen}[\phi(t)]. \quad (3.40)$$

Temos em mãos agora uma relação explícita entre a quantidade medida experimentalmente ($\langle \hat{\mathcal{J}}_{xf} \rangle$) e o valor esperado do operador de desbalanço de população do condensado. Para termos acesso à fase do condensado é preciso obter uma relação direta entre o operador de quadratura de fase e o de desbalanço. A seguir, encontramos tal relação e provemos o leitor de algum *insight* sobre as possíveis quantidades medidas experimentalmente. Assumindo que a cavidade é dirigida por um campo fotônico coerente muito forte, no limite $\eta \sim \kappa$ as equações de Heisenberg se escrevem

$$\dot{\hat{J}}_x = -\Omega' \hat{J}_y - 4\kappa[\hat{J}_y, \hat{J}_z]_+, \quad (3.41)$$

$$\dot{\hat{J}}_y = \Omega' \hat{J}_x + 4\kappa[\hat{J}_x, \hat{J}_z]_+ + \chi \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{J}_z, \quad (3.42)$$

$$\dot{\hat{J}}_z = -\chi \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{J}_y. \quad (3.43)$$

É direto que o número total de fótons dentro da cavidade é uma constante de movimento já que comuta com o Hamiltoniano de muitos corpos. Supomos então que o CBE está fortemente embebido no campo fotônico da cavidade de modo que

$$\zeta \equiv \frac{\kappa}{\chi N_f} \ll 1, \quad (3.44)$$

com $N_f \equiv \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle$. Em outras palavras, a densidade do BEC é extremamente pequena se comparada com a de fótons na cavidade. É *ipso facto* que tal aproximação é bem acurada já que densidades típicas de CBE variam de 10^{12} a 10^{13} átomos/cm³ [13].

Podemos agora calcular uma solução para o conjunto de equações diferenciais dada pelas Eqs. (3.41-43) até primeira ordem em ζ , expandindo os operadores de Schwinger como segue

$$\hat{J}_i = \sum_k \zeta^k \hat{J}_i^{(k)}. \quad (3.45)$$

A solução de ordem zero segue diretamente por integração

$$\langle \hat{J}_x^{(0)}(t) \rangle = \frac{\Omega'}{\omega} |\beta| \langle \hat{X}_{\theta-\pi/2}^{(0)}(t - \pi/2\omega) \rangle, \quad (3.46)$$

com $\omega^2 \equiv \Omega'^2 + \chi^2 N_f^2$. A solução em primeira ordem pode ser encontrada considerando-se a solução homogênea (ordem zero) e aplicando-se o método da variação de parâmetros àquela solução

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_x^{(1)}(t) \rangle = & \frac{3\omega|\beta|}{\Omega'[1 + \cos^2(2\omega t)]} \left[\frac{\Omega'^2}{3\omega} \left(\frac{3t}{2} + \frac{1}{4\omega} \cos(2\omega t) \sin(2\omega t) \right) \right. \\ & \left. - i \sin^2(\omega t) \right] \langle \hat{X}_{\theta-\pi/2}^{(1)}(t) \rangle. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Nesse sentido, até primeira ordem em ζ , a solução completa pode ser escrita como

$$\langle \hat{J}_x \rangle \simeq \langle \hat{J}_x^{(0)} \rangle + \zeta \langle \hat{J}_x^{(1)} \rangle. \quad (3.48)$$

Essa é uma função complicada do tempo, mas como já foi mencionado, mostra claramente como o desbalanço de população entre os poços do potencial revela informações importantes sobre a fase relativa entre ambos os CBE como expresso pelo operador de quadratura de fase $\hat{X}_{\theta-\pi/2}(t)$. Esse resultado é importante por si mesmo uma vez que mostra que a barreira de potencial atua como um divisor de feixes atômico-temporal resultando num esquema homódino análogo.

Integrando-se a Eq. (3.37), obtemos em ordem zero em ζ

$$\phi^{(0)}(t) = \chi \left(\frac{\Omega'|\beta|}{\omega^2} \langle \hat{X}_{\theta-\pi/2}^{(0)}(t) \rangle - \frac{Nt}{2} \right), \quad (3.49)$$

e em primeira ordem

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(t) = & -\chi \left[\frac{N}{2} t + \frac{3\omega|\beta|}{\Omega'[1 + \cos^2(2\omega t)]} \left[\frac{\Omega'^2}{3\omega} \left(\frac{3t^2}{4} + \frac{1}{16\omega^2} \sin^2(2\omega t) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{i}{2} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right) \right] \langle \hat{X}_{\theta-\pi/2}^{(1)}(t) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Então, até primeira ordem, a solução completa é dada por

$$\phi \simeq \phi^{(0)} + \zeta \phi^{(1)}. \quad (3.51)$$

Com efeito, é possível obter informação sobre a quadratura do gás atômico a partir da quadratura do campo de luz por um esquema de detecção atômica-temporal seguido de um esquema tradicional de detecção homódina balanceada de um campo de luz.

Apesar dessa solução ser acurada, dados experimentais mostram que é suficiente escrever a solução até ordem zero em ζ . Consideremos por exemplo $\kappa/\Omega = 0.02$, $\chi = 10^{-3}Hz$, $\Omega = 10^3Hz$, $N_f = 10^{10}$, $\Omega' = 9Hz$ e $N = 1000$ [12]. Para tal situação, $\epsilon \sim 10^{-9}$, corroborando uma aproximação em ordem zero do problema. Assim, a fase ϕ é dada por

$$\phi(t) \simeq \phi^{(0)}(t) = \chi \left(\frac{\Omega'|\beta|}{\omega^2} \langle \hat{X}_{\theta-\pi/2}^{(0)}(t) \rangle - \frac{Nt}{2} \right). \quad (3.52)$$

É interessante ainda, escrever o desbalanço de população em termos da fase do campo de luz já que essa fase pode ser medida experimentalmente dando a necessária informação sobre a estrutura interna do gás atômico. Assim, é direto que

$$\langle \hat{X}_{\theta-\pi/2}^{(0)}(t) \rangle \simeq \frac{\omega^2}{\Omega'|\beta|} \left(\frac{1}{\chi} \phi + \frac{Nt}{2} \right). \quad (3.53)$$

Podemos agora escrever a solução completa em ordem zero para os valores esperados dos operadores de Schwinger de forma a obtermos uma equação para a fase do campo de luz dependendo explicitamente do tempo

$$\frac{\phi}{\chi} = - \left[\frac{\Omega'}{\omega^2} \cos(\omega t) \langle \hat{J}_y^{(0)}(0) \rangle + \frac{Nt}{2} \right]. \quad (3.54)$$

Essa última expressão nos diz que para um *momentum* (quadratura) inicial $\langle \hat{J}_y^{(0)}(0) \rangle$ suficientemente grande, o comportamento harmônico domina a evolução temporal e para valores menores, o regime deve ser linear com o tempo e o que mais importante, que o *momentum* (quadratura de fase) é expresso nas perturbações desse regime linear.

Para dados típicos do sistema descrito aqui, os termos em ordem zero em ζ dominam e apenas oscilações coerentes são observadas para o desbalanço de população atômica dado pelo valor esperado do operador de Schwinger $\hat{J}_x$. Esses resultados mostram que o modelo aqui discutido é ideal para a detecção de fase do condensado *via* dois processos homódinos: um atômico temporal e outro balanceado sobre um campo coerente de luz como mostra o circuito representado na Fig. 3.4.

Podemos observar agora como a corrente homódina se relaciona diretamente com a evolução da dinâmica interna do condensado. Combinando as Eqs. (3.53) e (3.40) vemos que

$$\langle \hat{\mathcal{J}}_{xf} \rangle = |c||d| \text{sen} \left[\chi \left(\frac{\Omega'}{\omega^2} \cos(\omega t) \langle \hat{J}_y^{(0)}(0) \rangle + \frac{Nt}{2} \right) \right]. \quad (3.55)$$

A expressão acima mostra claramente a relação entre a corrente homódina e a quadratura de fase do condensado. Nesse sentido, experimentais devem conseguir medir tal corrente $\langle \hat{\mathcal{J}}_{xf} \rangle$ e obter a informação necessária sobre a fase relativa do

condensado *via* as Eqs. (3.40, 3.55). Vemos então que a evolução da corrente homódina com o *momentum* inicial do condensado (quadratura de fase) é simplesmente senoidal e sua dependência temporal é muito similar mas com uma função de envelope como mostra a Fig 3.5. Tal resultado é evidentemente ótimo para esquemas de detecção homódina uma vez que reflete a dinâmica de Rabi discutida anteriormente no envelope do comportamento harmônico.

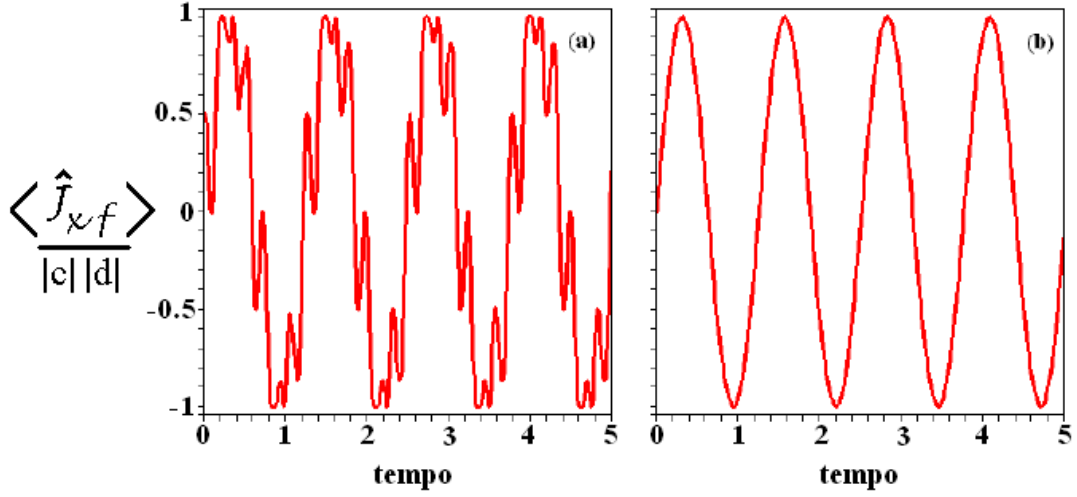


Figura 3.5: Evolução temporal da corrente homódina segundo a Eq. (43). Para ambos os gráficos $\chi=0.01$, $\Omega'=25$ Hz, $\omega=30$ Hz e $N = 10000$ átomos. Em (a) supomos um *momentum* (quadratura de fase) inicial muito grande de $\langle \hat{J}_y^{(0)}(0) \rangle = 1667$ e em (b) um pequeno *momentum* inicial de $\langle \hat{J}_y^{(0)}(0) \rangle = 0.001$.

deal with zeroth order expressions in ϵ . Eqs. (26,28)

3.5 Um modelo mais realista

3.5.1 Evolução não condicionada

Tratamos agora do processo de fotodetecção segundo um modelo mais elegante e completo do processo de medição. Assim, o conceito de trajetórias quânticas, devido a Carmichael [52], será usado adiante. No âmago dessa teoria de trajetórias quânticas está o postulado de que o operador que representa o campo incidente num fotodetector fora da cavidade é também o operador que transforma o ket do sistema no novo ket condicionado à detecção de um fóton no detector. Assim, o acoplamento

irreversível do modo da cavidade ao contínuo externo de modos é simples e diretamente incorporado na teoria de trajetórias quânticas. Ora, a cavidade é bombeada por um campo coerente forte (ς) e extremamente amortecido na taxa γ , e então o campo da cavidade está próximo ao estado coerente $c_0 = 2i\epsilon/\gamma$. A equação mestra para o sistema inteiro é

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}}_{tot} = & -i[\hat{H}_I, \hat{\rho}_{tot}] + i\chi[\hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{J}_x, \hat{\rho}_{tot}] - i(\delta - \frac{N\chi}{2})[\hat{c}^\dagger \hat{c}, \hat{\rho}_{tot}] \\ & -i\epsilon[\hat{c}^\dagger + \hat{c}, \hat{\rho}_{tot}] + \frac{\gamma}{2}(2\hat{c}\hat{\rho}_{tot}\hat{c}^\dagger - \hat{c}^\dagger \hat{c}\hat{\rho}_{tot} - \hat{\rho}_{tot}\hat{c}^\dagger \hat{c}),\end{aligned}\quad (3.56)$$

onde a dessintonia inicial da cavidade $\delta = \frac{N\chi}{2}$ foi escolhida de modo a remover a dispersão dependente linearmente de N .

O campo óptico pode agora ser eliminado adiabaticamente da equação mestra [53, 54], sob a hipótese de que os termos de direcionamento e amortecimento dominam sobre o termo de acoplamento. Para tanto, transformamos a equação mestra numa representação de deslocamento usando o operador $\hat{D}(c_0) = \exp(c\hat{c}^\dagger - c^*\hat{c})$ que cria um estado coerente $|c_0\rangle$ do estado de vácuo

$$\begin{aligned}\tilde{\hat{\rho}} &= \hat{D}^\dagger(c_0\dot{\hat{\rho}}_{tot}\hat{D})c_0 \\ &= \hat{S}\tilde{\hat{\rho}} + i\chi[(\hat{c}^\dagger \hat{c} + c_0^*\hat{c} + c_0\hat{c}^\dagger + |c_0|^2)\hat{J}_x, \tilde{\hat{\rho}}] + \frac{\gamma}{2}(2\hat{c}\tilde{\hat{\rho}}\hat{c}^\dagger - \hat{c}^\dagger \hat{c}\tilde{\hat{\rho}} - \tilde{\hat{\rho}}\hat{c}^\dagger \hat{c}),\end{aligned}\quad (3.57)$$

onde $\hat{S}$ incorpora a dinâmica do condensado. Para um amortecimento γ muito forte, obtemos

$$\left|\frac{\langle \hat{S} \rangle}{\gamma}\right| \sim \left|\frac{\chi|c_0\rangle\langle \hat{J}_x \rangle}{\gamma}\right| = \epsilon_0 \ll 1, \quad (3.58)$$

e o campo óptico deslocado estará próximo do estado de vácuo. Com efeito, a matriz densidade $\tilde{\hat{\rho}}$ pode ser expandida em potências de ϵ_0 até segunda ordem

$$\begin{aligned}\tilde{\hat{\rho}} = & \hat{\rho}_0|0\rangle_c\langle 0| + \hat{\rho}_1|1\rangle_c\langle 1| + \hat{\rho}_0^\dagger|0\rangle_c\langle 1| + \hat{\rho}_2|1\rangle_c\langle 1| \\ & + \hat{\rho}_{2'}|2\rangle_c\langle 0| + \hat{\rho}_{2'}^\dagger|0\rangle_c\langle 2| + O(\epsilon^3).\end{aligned}\quad (3.59)$$

Substituindo-se essa expressão na Eq. (3.57) e igualando termos semelhantes obtemos

$$\dot{\hat{\rho}}_0 = \hat{S}\hat{\rho}_0 + \gamma\hat{\rho}_2 + i\chi|c_0|^2[\hat{J}_x, \hat{\rho}_0] - i\chi c_0(\hat{J}_x\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_1^\dagger\hat{J}_x), \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}}_1 = & \hat{S}\hat{\rho}_1 - \frac{\gamma\hat{\rho}_1}{2} + i\chi|c_0|^2[\hat{J}_x, \hat{\rho}_1] + i\chi c_0(\hat{J}_x\hat{\rho}_0 - \hat{\rho}_2\hat{J}_x - \sqrt{2}\hat{J}_x\hat{J}_{2'}) \\ & + i\chi\hat{J}_x\hat{\rho}_1,\end{aligned}\quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}}_2 &= \hat{S}\hat{\rho}_2 - \gamma\hat{\rho}_2 + i\chi|c_0|^2[\hat{J}_x, \hat{\rho}_2] + i\chi c_0(\hat{J}_x\hat{\rho}_1^\dagger + \hat{\rho}_1\hat{J}_x) + i\chi(\hat{J}_x\hat{\rho}_2 \\ &\quad - \hat{\rho}_2\hat{J}_x),\end{aligned}\tag{3.62}$$

$$\dot{\hat{\rho}}_{2'} = \hat{S}\hat{\rho}_{2'} - \gamma\hat{\rho}_{2'} + i\chi|c_0|^2[\hat{J}_x, \hat{\rho}_{2'}] + i\sqrt{2}\chi c_0\hat{J}_x\hat{\rho}_1^\dagger + \sqrt{2}i\chi\hat{J}_x\hat{\rho}_{2'}.\tag{3.63}$$

Para obtermos uma equação mestra reduzida para o sistema atômico, traçamos sobre as variáveis do campo como segue:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}} &= Tr_{campo}(\dot{\hat{\rho}}_{tot}) = Tr_{campo}(\dot{\hat{\rho}}) = \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_2 \\ &= \hat{S}(\rho_0 + \rho_2) + i\chi|c_0|^2[\hat{J}_x, \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_1] + i\chi c_0[\hat{J}_x, \hat{\rho}_x^\dagger - \hat{\rho}_1] + \gamma O(\epsilon_0^3).\end{aligned}\tag{3.64}$$

Para eliminar $\hat{\rho}_1$ dessa expressão, podemos fazer uso da Eq. (3.59), notando que $|c_0|\epsilon_0$ e que, para um forte amortecimento, $\dot{\hat{\rho}}_i \ll |\gamma\hat{\rho}_i$. Assim

$$\hat{\rho} = \frac{2i\chi c_0}{\gamma}\hat{J}_x\hat{\rho}_0 + O(\epsilon_0^1).\tag{3.65}$$

Substituindo essa expressão na Eq. (3.62) nos dá a equação mestra em termos das variáveis atômicas:

$$\dot{\hat{\rho}} = -i[\hat{H}_I, \hat{\rho}] + i\chi|c_0|^2[\hat{J}_x, \hat{\rho}] - \frac{\Gamma}{2}[\hat{J}_x, [\hat{x}, \rho]] + O(\epsilon_0^3),\tag{3.66}$$

em que a força da medição aparece em $\Gamma = \frac{16\chi^2\epsilon^2}{\gamma^3}$. O comutador duplo representa um efeito da decoerência produzindo flutuações do número de fótons no campo óptico. Esse é um termo de contra-ação quântica da medida, consistente com a interpretação de que o campo óptico realiza uma medida no condensado. Nesse sentido, esse último termo destrói a coerência quântica na auto-base de $\hat{J}_x$, inibindo de certa forma as oscilações devidas ao tunelamento.

Observamos a seguir, o efeito da média sobre o *ensemble* da medida através das equações para os momenta quando $\eta - \kappa \ll \Omega'$

$$\langle \dot{\hat{J}}_x \rangle \simeq -\Omega' \langle \hat{J}_y \rangle,\tag{3.67}$$

$$\langle \dot{\hat{J}}_y \rangle \simeq \Omega' \langle \hat{J}_x \rangle + \chi|c_0|^2 \langle \hat{J}_z \rangle - \frac{\Gamma}{2} \langle \hat{J}_y \rangle,\tag{3.68}$$

$$\langle \dot{\hat{J}}_z \rangle \simeq -\chi|c_0|^2 \langle \hat{J}_y \rangle - \frac{\Gamma}{2} \langle \hat{J}_z \rangle.\tag{3.69}$$

As equações acima são as mesmas para o caso em que $\kappa = 0$. Contudo, agora o regime de oscilação coerente é alcançado através de um fundo físico completamente diferente. O regime efetivo de Rabi é obtido quando há uma grande sobreposição entre as funções de onda de cada modo enquanto ainda há uma certa localização das funções de onda em torno de cada mínimo do potencial. Por outro lado, quando $\kappa = 0$ consideramos que a penetração da barreira de potencial é muito pequena

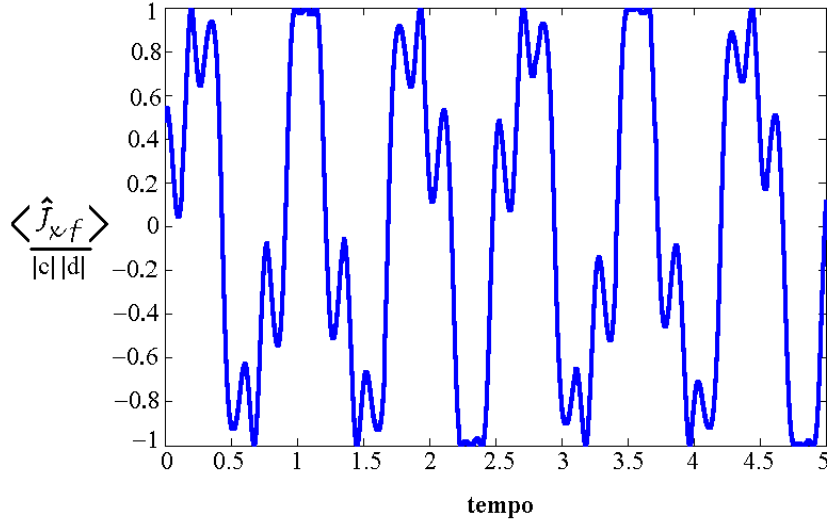


Figura 3.6: Simulação numérica para a evolução condicionada da corrente homódina quando $\chi|c_0|^2/\Omega' = 0.04$, $\Gamma/2\Omega' = 0.065$. As unidades de tempo estão normalizadas em unidades de Ω' .

de modo que as taxas de colisão cruzada e tunelamento são desprezíveis e o gás é extremamente diluído. Resolvemos numericamente esse conjunto de equações diferenciais e encontramos numericamente a evolução temporal da corrente homódina medida conforme ilustra a Fig. 3.6. Num regime de detecção eficiente como o ilustrado, em que a relaxação da cavidade é muito pequena, a corrente homódina é essencialmente aquela ilustrada na Fig. 3.5, indicando como podemos acessar a fase atômica através da corrente homódina.

3.5.2 Evolução condicionada a uma medida

Em óptica quântica, uma técnica comum lida com equações mestras descrevendo sistemas abertos por realizações estocásticas de trajetórias quânticas. Podemos escolher a equação estocástica apropriada para corresponder a um dado modelo em particular. Nesse sentido, trajetórias individuais correspondem a medidas de um experimento no qual fases relativas podem ser evidentes mesmo com o comportamento incondicional (quando feita a média sobre muitos caminhos). Esse método tem sido usado por muitos autores investigando o efeito da medida na fase relativa de condensados binários [56, 57, 58]. Consideramos assim, que o processo estocástico resultante é uma evolução difusiva e não um processo de “salto” que ocorre na medição direta de átomos ou fótons individuais.

No que segue, faremos uso do modelo de detecção homódina no limite ideal proposto por Wiseman [54]. Assim, a fotocorrente acarreta uma série de eventos de fotodetecção e no limite ideal, a taxa de detecção de fótons diverge ao mesmo tempo que a amplitude do oscilador local de modo que o ruído de contra-ação no sistema permanece finito. A equação mestra condicional, na qual a evolução é condicionada ao resultado da medição, para o condensado e o campo óptico passando por detecção homódina é [54]

$$d\hat{\rho}_{tot,c} = (-i[\hat{H}_I, \hat{\rho}_{tot,c}] + i\chi[\hat{c}^\dagger c \hat{J}_x, \hat{\rho}_{tot,c}] - i(\delta - \frac{N\chi}{2}[\hat{c}^\dagger \hat{c}, \hat{\rho}_{tot,c}] - i\epsilon[\hat{c}^\dagger + \hat{c}, \hat{\rho}_{tot,c}] + \gamma D[\hat{c}]\hat{\rho}_{tot,c})dt + \sqrt{\gamma}dW(t)H[\hat{c}]\hat{\rho}_{tot,c}, \quad (3.70)$$

em que $dW(t)$ é o incremento infinitesimal de Wiener [55]. Nessa equação estocástica, $\hat{\rho}_{tot,c}$ é a matriz densidade que está condicionada a uma realização particular da corrente homódina até o tempo t . Os super-operadores de Wiseman são definidos por [54]

$$D[\hat{c}]\hat{\rho} = \hat{c}\hat{\rho}\hat{c}^\dagger - \frac{1}{2}(\hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{c}^\dagger\hat{c}), \quad (3.71)$$

$$H[\hat{c}]\hat{\rho} = \hat{c}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{c}^\dagger - Tr(\hat{c}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{c}^\dagger)\hat{\rho}. \quad (3.72)$$

Da mesma forma que na evolução não condicional, podemos eliminar as variáveis do campo da cavidade adiabaticamente das Eqs. (3.65), substituindo para o operador densidade a expressão Eq. (3.57). Traçando sobre as variáveis do campo

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}_c &= \dot{\hat{\rho}}_0 + \dot{\hat{\rho}}_2 \\ &= S(\hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_2) + i\chi|c_0|^2[\hat{J}_x, \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_1] + i\chi c_0[\hat{J}_x, \hat{\rho}_1^\dagger - \hat{\rho}_1] \\ &\quad + \sqrt{\gamma}\frac{dW}{dt}(\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_1^\dagger - (\hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_2)Tr(\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_1^\dagger)) + \gamma O(\epsilon_0^3). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Para $\gamma \sim \epsilon_0^{-2} \gg 1$, podemos substituir $\hat{\rho}_1$ pela Eq. (3.13), dando

$$\begin{aligned} d\hat{\rho}_c &= -i[\hat{H}_I, \hat{\rho}_c]dt + \frac{\Gamma}{2}[\hat{J}_x, [\hat{J}_x, \hat{\rho}_c]]dt \\ &\quad + \sqrt{\Gamma}(\hat{J}_x\hat{\rho}_c + \hat{\rho}_c\hat{J}_x - 2\langle\hat{J}_x\rangle_c\hat{\rho}_c)dW + dt\gamma O(\epsilon_0^3). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Assim, a decoerência no campo de luz é transferida diretamente para uma decoerência nos operadores atômicos e constitui uma contra-ação à medição homódina do condensado. Da equação mestra condicional, podemos escrever uma equação de Schrödinger estocástica que dá uma dependência explícita com a corrente medida:

$$d|\tilde{\Psi}_c(t)\rangle = dt[-i\hat{H}_I - \frac{\Gamma}{2}\hat{J}_x^2 + I(t)\hat{J}_x]|\tilde{c}(t)\rangle, \quad (3.75)$$

$$I(t) = 2\Gamma\langle\hat{J}_x\rangle_c + \sqrt{\Gamma}\xi(t). \quad (3.76)$$

Onde $|\tilde{\Psi}_c(t)\rangle$, é o “ket” não normalizado descrevendo o estado condicional do sistema e ξ é o termo estocástico. Para os objetivos do presente trabalho, é mais útil considerar a equação de Schrödinger para os “kets” normalizados sem fazer menção direta à corrente de detecção:

$$d|\tilde{\Psi}_c(t)\rangle = dt[-i\hat{H}_I - \frac{\Gamma}{2}(\hat{J}_x - \langle\hat{J}_x\rangle_c)^2 + I(t)(\hat{J}_x - \langle\hat{J}_x\rangle_c)]|\tilde{c}(t)\rangle. \quad (3.77)$$

O termo devido à medida depende da quantidade $\hat{J}_x - \langle\hat{J}_x\rangle_c$ que é mínima para trajetórias semi-clássicas para as quais $\langle\hat{J}_x\rangle_c^2 = \langle\hat{J}_x^2\rangle_c$. Assim, a incerteza reduzida na posição leva a flutuações no *momentum* do condensado que pode fazer com que haja oscilações de tunelamento.

Derivemos agora as equações de movimento para os *momenta* condicionais. Mesmo quando $T = 0$, os termos estocásticos nas equações sempre se acoplam a *momenta* maiores. Para um estado inicial de número, obtemos o seguinte conjunto de equações no regime efetivo de Rabi ($\eta \rightarrow \kappa$, $\kappa' \ll \Omega'$):

$$d\langle\hat{J}_x\rangle = -(\Omega'\langle\hat{J}_y\rangle + 4\eta\langle\hat{\Upsilon}\rangle)dt + 2\sqrt{\Gamma}(\langle\hat{J}_x^2\rangle - \langle\hat{J}_x\rangle^2)dW, \quad (3.78)$$

$$d\langle\hat{J}_y\rangle = (\Omega'\langle\hat{J}_x\rangle - \frac{\Gamma}{2}\langle\hat{J}_y\rangle + 4\eta\langle\hat{\Phi}\rangle)dt + 2\sqrt{\Gamma}(\frac{1}{2}\langle\hat{\Lambda}\rangle - \langle\hat{J}_x\rangle\langle\hat{J}_y\rangle)dW, \quad (3.79)$$

$$d\langle\hat{J}_z\rangle = -\frac{\Gamma}{2}\langle\hat{J}_z\rangle dt - 2\sqrt{\Gamma}\langle\hat{J}_x\rangle\langle\hat{J}_z\rangle dW, \quad (3.80)$$

$$d\langle\hat{J}_x^2\rangle = -\Omega'\langle\hat{\Lambda}\rangle dt, \quad (3.81)$$

$$d\langle\hat{J}_y^2\rangle = (\Omega'\langle\hat{\Lambda}\rangle - \Gamma(\langle\hat{J}_y^2\rangle - \langle\hat{J}_z^2\rangle))dt, \quad (3.82)$$

$$d\langle\hat{J}_z^2\rangle = \Gamma(\langle\hat{J}_y^2\rangle - \langle\hat{J}_z^2\rangle)dt, \quad (3.83)$$

$$d\langle\hat{\Lambda}\rangle = (2\Omega'(\langle\hat{J}_x^2\rangle - \langle\hat{J}_y^2\rangle) - \frac{\Gamma}{2}\langle\hat{\Lambda}\rangle)dt, \quad (3.84)$$

$$d\langle\hat{\Upsilon}\rangle = -\Omega'\langle\hat{\Phi}\rangle dt, \quad (3.85)$$

$$d\langle\hat{\Phi}\rangle = \Omega'\langle\hat{\Upsilon}\rangle dt. \quad (3.86)$$

As equações acima são as mesmas para o caso em $\kappa = 0$ com excessão dos termos Φ e Υ devidos à colisão cruzada. Novamente, vale lembrar a grande diferença na física dessas duas situações ($\kappa \rightarrow 0$ e $\eta \rightarrow \kappa$). Naquela, temos um gás muito diluído em que conseqüentemente as taxas de tunelamento e colisão cruzada são pequenas. Nessa, supomos uma grande penetração da função de onda entre os sítios vizinhos de modo que a densidade local de bósons por sítio diminui (aumento na colisão cruzada e na taxa de tunelamento). As médias mostram então que as oscilações coerentes são amortecidas. Contudo, para pequenos intervalos de tempo, essas equações reproduzem toda a dinâmica vista nos resultados quânticos. Resolvendo numericamente o conjunto de equações acima, podemos graficar a Fig. 3.7

representando a evolução temporal da corrente homódina condicionada a uma certa medida. Novamente, um processo eficiente de detecção com um *momentum* inicial atômico relativamente grande, nos permite evidenciar a fase condensada ao se inverter a Eq. (3.54) conforme os dados experimentais encontrados.

Ora, as equações aqui desenvolvidas diferem daquelas encontradas por Corney *et al* [12] pelos termos Φ e Υ e respectiva evolução temporal. Todavia, esses termos são do tipo harmônico de modo que o efeito da colisão cruzada nesse sistema de detecção é o de rodar coerentemente na esfera de Bloch as médias dos operadores de Schwinger. A colisão cruzada introduz então uma modulação harmônica no modelo não condicionado. Com efeito, o regime efetivo de Rabi aqui estudado mostra que a partir de medições condicionadas recuperamos os mesmos resultados que obteríamos quando $\kappa \rightarrow 0$ a não ser pelo termo harmônico que modula a diferença no número de partículas entre ambos os poços.

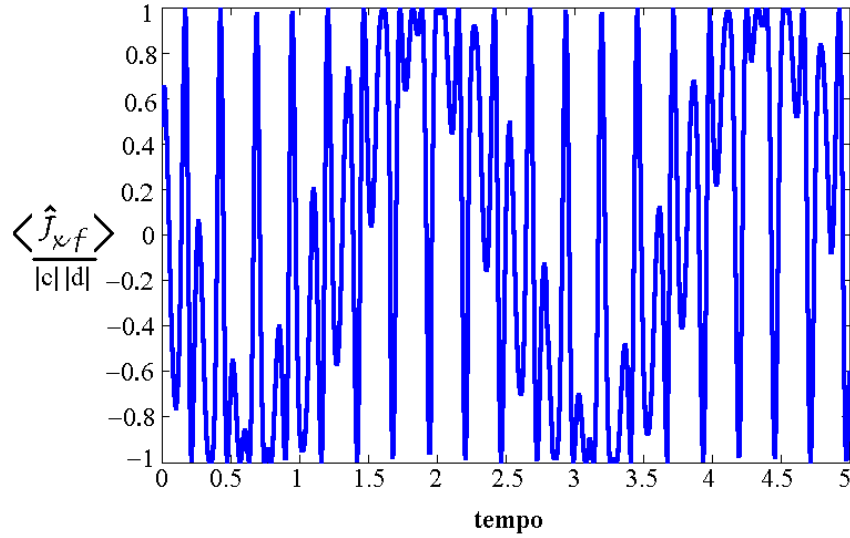


Figura 3.7: Simulação numérica para a evolução condicionada da corrente homódina quando $\chi|c_0|^2/\Omega' = 0.04$, $\Gamma/2\Omega' = 0.065$. As unidades de tempo estão normalizadas em unidades de Ω' .

Quando as interações estão presentes mas apenas de forma fraca, o tunelamento ainda ocorre, mas a amplitude colapsa rapidamente devido a um processo de perda de fase não linear. Esse colapso é seguido, algum tempo depois, por pequenos ressurgimentos. Há um comportamento limite a partir do qual tunelamento é suprimido e recuperamos o auto-aprisionamento. Novamente, a presença da colisão cruzada aumenta esse valor crítico, suprimindo-o totalmente quando $\eta \rightarrow \kappa$. As-

sim, um comportamento similar é observado para a corrente do sistema monitorado. Para tempos longos, a amplitude das oscilações de tunelamento começa a flutuar. Nesse sentido, o efeito das auto-colisões é de parar o colapso das oscilações vistas no sistema não monitorado. A presença da colisão cruzada então não muda significativamente a discussão já levada a cabo em [12]. Contudo, no limite em que a colisão cruzada é forte o suficiente ao ponto de termos $\eta \rightarrow \kappa$ a presença da colisão é mascarada pelo regime efetivo de Rabi, ocorrendo que o comportamento do sistema em que $\kappa \rightarrow 0$ é recuperado suprimindo o auto-aprisionamento, a dinâmica de colapso e ressurgimento fazendo com que a amplitude da corrente medida se mantenha conforme a modulação coerente o que indica que nessas condições esse sistema facilita a real detecção homódina de fase atômica. Se o sistema começa com um mesmo número de átomos em ambos os poços, então não é esperado nenhum tipo de oscilação coerente na ausência de um aparato de detecção. Contudo, a presença do campo afeta a medida no sistema condensado. Isso estabelece então uma fase relativa que pode ser medida pela corrente. Vale lembrar que os resultados obtidos seguem direto da teoria tradicional de foto-detecção de Srinivas e Davies, já que ela serve de base para os cálculos de Carmichael [52].

Capítulo 4

Resultados e discussão geral

Em suma, propusemos um modelo dinâmico de um condensado de Bose-Einstein atômico num potencial de poço duplo. Nesse modelo, uma aproximação de dois-modos é levada a cabo no sentido em que colisões cruzadas entre os bósons de ambos os poços é considerada, o que não havia sido feito em trabalhos anteriores [6, 7, 12]. Assim, mostramos que as colisões cruzadas inibem o fenômeno de auto-aprisionamento até mesmo para pequenos valores da taxa de colisão cruzada. Para uma dada geometria do potencial de confinamento do condensado de Bose-Einstein, o Hamiltoniano de muitos corpos determina uma nova dinâmica que resulta em oscilações coerentes estáveis (regime efetivo de Rabi) entre a população de ambos os poços. Nesse regime há uma frequência efetiva de Rabi, que depende explicitamente do número total de átomos e das condições iniciais. O limite de validade da aproximação de dois modos aumenta com a suposição de que as colisões cruzadas são fortes de modo que esse limite pode estar de acordo com dados experimentais. Além disso a dinâmica de colapso e ressurgimento é alterada resultando em grandes períodos de colapso. Contudo, conforme $\eta \rightarrow \kappa$ ($\kappa' \ll \Omega'$), a frequência de colapso e ressurgimento aumenta, aproximando-se do regime de oscilação Rabi efetiva de população. Ora, esse regime além de ser de grande interesse para investigações experimentais dos efeitos de colisões não lineares da dinâmica de tunelamento [6, 7, 8, 9], é de importância fundamental em medições de interferometria atômica [59] sobre condensados e então para implementação de protocolos de comunicação quântica com amostras atômicas [10, 11].

Como possível aplicação desse regime efetivo de Rabi, propomos exequivelmente um processo de detecção homódina de fase em condensados bosônicos confinados em potenciais de poço duplo. Esse regime resulta então em condições ideais para esquemas de detecção homódina da fase de quadratura desses campos atômicos. Com efeito, o potencial de poço duplo atua como um divisor de feixes atômico-temporal com o fator de transmissividade variando com o tempo e dependendo diretamente

do número total de bósons e da taxa de colisão cruzada η através da frequência corrigida Ω' . Quando a densidade de fótons na cavidade é muito maior do que a de bósons até primeira ordem em ζ as equações de movimento de Heisenberg para os valores médios dos operadores de Schwinger são exatamente solúveis. Contudo, dados típicos experimentais indicam que é suficiente considerarmos apenas os termos de ordem zero. Isso resulta numa relação linear entre a fase do campo de luz e a quadratura do campo atômico.

A forma detectável do número de fótons de um campo no esquema de detecção homódina é então convertida em fotoelétrons, segundo um modelo de Srinivas e Davies ou de operadores de fase exponencial [50, 51]. Assim, mostramos que nesse formalismo para tempos suficientemente grandes de detecção quando se alcança o estado estacionário o número médio de fótons contados é proporcional à quadratura do campo de luz na cavidade que por sua vez depende diretamente da dinâmica quântica do condensado. Os resultados encontrados mostram também que a exata descrição da detecção homódina de quadraturas via teorias quânticas de fotocontagem contínua, permite a inferência do comportamento das fotocontagens antes de atingirem o limite estacionário.

Nesse sentido o sistema dinâmico estudado aqui pode ser encarado como uma escolha adequada no sentido de se detectar a fase relativa entre os dois modos de um condensado de Bose-Einstein disposto num potencial de poço duplo na forma de tunelamento Josephson num regime exclusivamente de troca de população entre ambos os poços devido a forte presença das colisões cruzadas entre os átomos da espécie atômica condensada. Assim, a corrente medida no foto-detector reflete a dinâmica interna do condensado, permitindo-nos monitorar fenômenos como o de tunelamento e auto-aprisionamento causado por colisões atômicas. Essa discussão também mostra como uma medida pode estabelecer uma fase relativa num sistema que inicialmente não exibía nenhuma informação sobre a fase.

Como já foi ressaltado por Milburn *et al* [12] esse esquema de detecção homódina pode ser muito útil para detectar fases relativas na forma de tunelamento do tipo Josephson entre dois condensados num potencial de poço duplo. A dinâmica da corrente medida reflete o tunelamento do condensado bem como o efeito de auto-aprisionamento e o regime efetivo de Rabi. Para condensados “pequenos”, a diferença no número de átomos oscila vigorosamente apenas para pequenos períodos de tempo. Mostramos que a presença da colisão cruzada não muda significativamente o processo de detecção homódina condicionada. Contudo, a presença do regime efetivo de Rabi faz com que se obtenha o caso em que a dinâmica de colapso e ressurgimento seja suprimida bem como o auto-aprisionamento, fazendo com que a amplitude de tunelamento se mostre de forma direta na corrente medida, dando assim a informação dese-

jada para se conhecer a quadratura de fase. Levando em conta os efeitos quânticos sobre a medição de uma das quadraturas do campo introduzimos o conceito de trajetórias quânticas. Num formalismo de equação mestra, mostramos que após eliminarmos adiabaticamente o campo óptico, o regime efetivo de Rabi resulta em equações de movimento para os valores médios das variáveis de detecção que são análogas ao caso em que as colisões são completamente desprezadas à exceção de uma precessão coerente devido à supressão da dinâmica de colapso e ressurgimento. O regime em que não há colisões resulta numa situação análoga à existência apenas de oscilação coerente de população que é um regime ideal para esquemas de detecção homódina. Assim, o regime efetivo de Rabi efetivo alcança condições ideais da dinâmica para processos de detecção de fase num modelo muito geral e com maior limite de validade do que aqueles propostos anteriormente na literatura.

Com base nisso, esperamos que esses resultados sirvam de auxílio em futuros estudos experimentais e teóricos sobre o estado quântico de condensados de Bose-Einstein além de possíveis aplicações em óptica atômica quando tal sistema é extrapolado para uma rede de condensados bosônicos. Por termo, esses resultados podem ainda ser úteis em estudos futuros em comunicação quântica e reconstrução e medição de estados quânticos atômicos [10, 60, 61].

4.1 Resumo dos resultados principais

Esse trabalho de pesquisa pode ser sumarizado no estudo dos efeitos quânticos da superposição dos modos de um condensado de Bose-Einstein aprisionado num potencial de poço duplo. Segundo o escopo dessa dissertação podemos separar essas correções devido à colisão cruzada em dois grupos: os resultados exclusivos da dinâmica quântica e a consequência desses em processos de medição homódina. A colisão cruzada resulta numa supressão do fenômeno de auto-aprisionamento corrigindo a taxa de tunelamento e na presença de um regime efetivo de Rabi ($\eta \sim \kappa$) onde a dinâmica de colapso e ressurgimento é também suprimida resultando num regime de puro tunelamento coerente dos bósons (Rabi). Esse regime é justificado já que a colisão cruzada aumenta o limite de validade da aproximação de dois modos no seguinte sentido:

$$N \ll \frac{x_0}{|a|(1 - e^{-q_0^2/2x_0})}. \quad (4.1)$$

Já nos processos de medição, a colisão cruzada resulta em condições ideais para esquemas de detecção homódina quando no regime dinâmico de Rabi. Isso possibilita medir-se indiretamente a fase relativa do CBE aprisionado. A barreira de potencial atua como um separador de feixes atômico-temporal com transmissividade variando

temporalmente conforme o número total de átomos e a taxa de colisão cruzada. Encontramos então numa relação direta entre a fase do campo de luz medida por um processo usual de detecção homódina e a quadratura do condensado

$$\langle \hat{\mathcal{J}}_{xf} \rangle = |c||d|\text{sen}[\chi(\frac{\Omega'}{\omega^2} \cos(\omega t) \langle \hat{J}_y^{(0)}(0) \rangle + \frac{Nt}{2})]. \quad (4.2)$$

Essa relação nos permite ter acesso indireto a fase do CBE bem como sua dinâmica interna. Tal conclusão é fortemente corroborada pelos cálculos analíticos e numéricos acima estudados.

4.2 Possibilidade de trabalhos futuros

Essa discussão pode se tornar mais interessante ainda, se considerarmos o estudo do impacto dos termos de correlação cruzada não apenas para o sistema simples de poço duplo, mas também em sistemas (sob aproximações analíticas ou numéricas para parâmetros experimentais relevantes) relacionados com mais de dois poços. Assim, a dinâmica é muito mais rica e efeitos adicionais podem ocorrer como consequência dos termos cruzados. Para citar apenas alguns exemplos diretos, podemos relacionar esse trabalho com os resultados de (a) Mahmud et al [62] que estudou o potencial de poço duplo e então o caso de muitos poços; (b) ao problema de Bloch para um número finito de poços [63], ou para o sistema aberto estendido [64].

Questões muito interessantes a serem respondidas são se o resultado encontrado para o caso de dois poços pode ser estendido e disposto no quadro mais genérico de tunelamento entre muitos poços de potencial. Há uma discussão genérica para os termos de colisão cruzada análoga ao sistema de Bose-Hubbard discreto estendido?

O Hamiltoniano de Bose-Hubbard é um paradigma no campo de transições de fase quânticas [65]. Recentemente, esse modelo foi realizado experimentalmente em átomos ultra-frios aprisionados em armadilhas de redes ópticas [65, 66], abrindo novas perspectivas no estudo de sistemas bosônicos correlacionados. A resposta desses sistemas a campos estáticos desloca o foco do estado fundamental para as propriedades espectrais do sistema. Isso por sua vez está associado com oscilações de Bloch no domínio de tempo e com o aparecimento de uma escada de Wannier-Stark no domínio de energia [67]. Nesse sentido, a presença dos termos de colisão cruzada alteram significativamente o modelo Hamiltoniano para decoerência induzida por interação?

O resultado de Wimberger *et al* [64] vai nesse mesmo sentido mostrando como num potencial de rede óptica, interações átomo-átomo aumentam a taxa de tunelamento destruindo eventualmente os picos de tunelamento. Também, o efeito da colisão cruzada nesse sistema pode levar a novos efeitos.

Mahmud *et al* [62] mostraram também na aproximação de dois modos que o diagrama de correlação de energia indica uma transição de um regime deslocalizado para um fragmentado quando a colisão cruzada é desprezada. Ao estender esse estudo para múltiplos poços, é proposto um esquema para a geração de emaranhamento de condensados e um método para a criação de estados comprimidos sem limitações adiabáticas e à altura da barreira de potencial. É criado assim um estado com emaranhamento altamente controlável. Nesse sentido, a presença da colisão cruzada e conseqüente aparecimento do regime efetivo de Rabi pode aumentar ainda mais o grau de controle desses parâmetros, estendendo o estudo desses autores e possivelmente resultando em condições ideais para implementação de protocolos de comunicação quântica.

É possível encontrar uma discussão mais genérica dos termos de colisão cruzada para a derivação de um modelo discreto estendido do tipo Bose-Hubbard e para o efeito Wannier-Stark embasado somente em soluções do estado fundamental da armadilha. Com efeito, um *ansatz* de n -modos da extensão natural da Eq. (2.6) resulta no Hamiltoniano de Bose-Hubbard de n -modos

$$\begin{aligned}\hat{H}_I = & \sum_l (\kappa_l - \eta_{l,l+1}) \hat{n}_l (\hat{n}_l - 1) + \sum_l \eta_{l,l+1} (\hat{a}_{l+1}^\dagger \hat{a} + H.c.)^2 \\ & + \sum_l [\Omega_{l,l+1} + 2\Lambda_{l,l+1} (\hat{n}_l + \hat{n}_{l+1} - 1)] (\hat{a}_{l+1}^\dagger \hat{a}_l + H.c.),\end{aligned}\quad (4.3)$$

com todos os parâmetros relacionados àqueles para o sistema de poço duplo. Os regimes dinâmicos dados pela Eq. (4.3) têm em parte um aspecto similar àqueles apresentados para o potencial de poço duplo mas podem ser estendidos de modo que todos os parâmetros do mesmo sítio ou sítios diferentes possam ser variados independentemente.

Com base nessa sucinta discussão vemos que o presente trabalho abre muitas portas para trabalhos futuros na área tanto teórica quanto experimental da física quântica de sistemas de muitos corpos e óptica atômica. Enfim, há uma física muito rica a ser ainda descoberta nessa área moderna e multidisciplinar da física.

Apêndice A

Dinâmica quântica

A.1 O Hamiltoniano de dois modos

Nessa secção pretendemos encontrar de forma mais explícita o Hamiltoniano dado na Eq. (2.6) e consecutivamente, também aquele da relação (2.39). Começemos pela Eq. (2.6). Lembrando das relações de campo para bósons

$$\sum_l \phi_l^*(r_1) \hat{\Psi}(r_2) = \hat{1} \delta(r_1 - r_2) \quad (\text{A.1})$$

e

$$\hat{c}_j = \int d^3r \phi_j^*(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.2})$$

onde ϕ é a função de onda solução da equação de Klein-Gordon e $\hat{\Psi}$ é o operador de campo, é direto que o Hamiltoniano de muitos corpos mais genérico dado pela Eq. (2.4) resulta em

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_k \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{k,l} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l \int d^3r \phi_k^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \phi_l(\mathbf{r}) \\ & + \sum_{k,l,m,n} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n \hat{a}_l \int d^3r \phi_k^*(\mathbf{r}) \phi_l(\mathbf{r}) \phi_m^*(\mathbf{r}) \phi_n(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Numa aproximação de dois modos, se supusermos que os estados de energia dos potenciais são muito próximos e deveras distantes dos modos excitados podemos identificar os termos nas integrais acima com Λ , η , κ e Ω definidos no Cap. 2. Onde propusemos ainda que os modos locais estão localizados em torno dos mínimos do potencial de modo a podermos aproximá-los do estado fundamental do oscilador harmônico com soluções Gaussianas. Se notarmos agora as relações

$$\hat{N}^2 = \hat{N} + 2\hat{N}_a \hat{N}_b + (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 + (\hat{b}^\dagger)^2 \hat{b}^2 \quad (\text{A.4})$$

e

$$(\hat{a}^\dagger)^2 \hat{b}^2 + \hat{a}^2 (\hat{b}^\dagger)^2 = (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2 - N^2 + N + [(\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 + (\hat{b}^\dagger)^2 \hat{b}^2], \quad (\text{A.5})$$

onde $\hat{N}_a \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ e $\hat{N}_b \equiv \hat{b}^\dagger \hat{b}$, obtemos após alguma álgebra o Hamiltoniano a seguir no *Ansatz* de dois modos

$$H = E_0(a^\dagger a + b^\dagger b) + 2\hbar(\Lambda(N - 1) + \Omega)[a^\dagger b + b^\dagger a] + \hbar\eta[a^\dagger b + b^\dagger a]^2 + \hbar(\kappa - \eta)[(a^\dagger)^2(a^2) + (b^\dagger)^2(b^2)] + \hbar\eta N(N - 2), \quad (\text{A.6})$$

já que

$$\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}, \quad (\text{A.7})$$

define o número total de átomos aprisionados na armadilha. Essa quantidade obviamente comuta com a Eq. (A.6) e ululantemente é uma constante de movimento. Introduzindo agora os operadores de Schwinger obtemos após rearranjar os termos

$$\hat{H}_I = \hbar\Omega' \hat{J}_z + 4\hbar\eta \hat{J}_z^2 + 2\hbar(\kappa - \eta) \hat{J}_x^2 + \frac{\hbar\eta}{2} N(N - 1). \quad (\text{A.8})$$

que resulta por fim, ao desprezarmos os termos proporcionais a potências de N já que esses são constantes de movimento,

$$\hat{H}_I = \hbar\Omega' \hat{J}_z + 4\hbar\eta \hat{J}_z^2 + 2\hbar(\kappa - \eta) \hat{J}_x^2. \quad (\text{A.9})$$

Quod Erat Demonstrandum.

Apêndice B

Detecção homódina

B.1 O Hamiltoniano de interação

Supondo que a luz incidente no sistema atômico está fora de sintonia com quaisquer transições atômicas, o Hamiltoniano de interação é dado por

$$\hat{H}_I = - \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hbar \mu g(\mathbf{r}) \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \quad (\text{B.1})$$

com $\hat{c}^\dagger \hat{c}$ os operadores de campo da cavidade, $g(\mathbf{r})$ a função de intensidade do modo e $\mu = g_d^2/4\Delta$ a intensidade do acoplamento luz-matéria, com g_d a constante de acoplamento de dipólo e dessintonia óptica Δ .

Tirando-se a média sobre o modo óptico em termo dos operadores de campo do condensado $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ e lembrando das relações de campo (A.1, A.2) vem

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= - \sum_{l,m} \int d^3\mathbf{r} \left[\int d^3\mathbf{r}' \phi_l(\mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \right] \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hbar \mu g(\mathbf{r}) \hat{c}^\dagger \hat{c} \left[\int d^3\mathbf{r}'' \phi_m^*(\mathbf{r}'') \hat{\Psi}(\mathbf{r}'') \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \\ &= - \sum_{l,m} \int d^3\mathbf{r} \hat{a}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hbar \mu g(\mathbf{r}) \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{a} \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

e após alguma álgebra encontramos finalmente

$$\hat{H}_I = -\hbar \chi \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (\text{B.3})$$

com χ dando a intensidade da interação e $\hat{J}_x$ o operador desbalanço atômico. Se o modo óptico tem uma secção transversal ω e um perfil Gaussiano como por exemplo

$$g(\mathbf{r}) = \cos^2(kz) \exp(-(x^2 + y^2)/\omega^2), \quad (\text{B.4})$$

então a intensidade da interação é dada por

$$\chi = \frac{\mu}{2\sqrt{2(r_0/\omega)^2 + 1}}. \quad (\text{B.5})$$

Uma vez que

$$\chi = \mu \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}). \quad (\text{B.6})$$

Lembrando agora que $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}$ e $\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{a}^\dagger \hat{a})$, a Eq. (B.3) resulta diretamente em

$$\hat{H}_I = -\hbar \frac{N}{2} \chi \hat{c}^\dagger \hat{c} - \hbar \chi \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{J}_x, \quad (\text{B.7})$$

que é exatamente a Eq. (3.35) como queríamos mostrar ($\mathcal{QED}$).

Referências

- [1] S.R. Dahmen, Rev. Bras. de Ensino de Física, **27**/1 109 (2005).
- [2] S.R. Dahmen, Rev. Bras. de Ensino de Física, **27**/2 (2005).
- [3] Anderson, M. H., Ensher, J. R., Matthews, M. R., Weiman, C. E., and Cornell, E. A. Observations of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. Science **269**, 5221 (July 14 1995), 198-201.
- [4] Bradley, C. C., Sackett, C. A., Tollett, J. J., and Hulet, R. G. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. Phys. Rev. Lett. **75**, 9 (Aug. 28 1995), 1687-1690.
- [5] Davis, K. B., Mewes, M.-O., Andrews, M. R., van Druten, N. J., Durfee, D. S., Kurn, D. M., and Ketterle, Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. Physical Review Letters **75**, 22 (Nov. 27 1995), 3969-3973.
- [6] G. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wriggt, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **55**, 4318 (1997).
- [7] S. Raghavan, A. Smerzi, S. Fantoni, and S. R. Shenoy, Phys. Rev. A **59**, 620 (1999); *idem* Phys. Rev. A **60**, R1787 (1999).
- [8] L. Landau, J. Phys. U.S.S.R. **5**, 71 (1941).
- [9] J. E. Williams, Phys. Rev. A **64**, 013610 (2001).
- [10] H. J. Briegel, T. Calarco, D. Jaksch, J. I. Cirac, P. Zoller, “Quantum Computing with Neutral Atoms”, quant-ph/9904010
- [11] M. C. de Oliveira, Phys. Rev. **A67**, 022307 (2003).
- [12] J. F. Corney and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **58**, 2399 (1998).
- [13] E. Cornell, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. **101**, 419 (1996).

- [14] D. Jaksch, J. I. Cirac, P. Zoller, S. L. Rolston, R. Côté, and M. D. Lukin, Phys. Rev. Lett. **85**, 2208 (2000).
- [15] W. Alt *et al* Phys. Rev. A **67**, 033403 (2003).
- [16] J. Hecker Denschlag *et al* 2002 J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **35** 3095-3110.
- [17] J. Reichel, . App. Phys. B Lasers and Optics, Vol 74, Issue 6, pp. 469-487 (2002).
- [18] J. Javanainen, Phys. Rev. Lett. **57**, 3164 (1986)
- [19] S. Grossmann and M. Holthaus, Z. Naturforsch. Teil A **50**, 323 (1995).
- [20] B. D. Josephson, Phys. Lett. **1A**, 251 (1962).
- [21] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics, Part 2* (Pergamon Press, Oxford, 1989), pp. 85-118.
- [22] C. D. Tesche, Ann (N. Y.) Acad. Sci. **480**, 36 (1998).
- [23] A. Chefles and S. M. Barnett, J. Mod. Opt. **43**, 709 (1996).
- [24] Ver, por exemplo, *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. W. Snoke and S. Stringari (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995).
- [25] M. Albiez *et al*, M.Phys. Rev. Lett. **95**, 010402 (2005).
- [26] D. Ananikian and T. Bergeman, Phys. Rev. **A 73**, 013604 (2006).
- [27] J. C. Eilbeck, P. S. Lomdahl and A. C. Scott, Physica D **16**, 318 (1985).
- [28] A. C. Scott and J. C. Eilbeck, Phys. Lett. A **119**, 60 (1986).
- [29] L. Bernstein, J. C. Eilbeck, and A. C. Scott, Nonlinearity **3**, 293 (1990).
- [30] A. J. Leggett, Rev. of Mod. Phys. **73**, (2001).
- [31] G. Baym and C. J. Pethick, Phys. Rev. Lett. **76**, 6 (1996).
- [32] M. Edwards, R. J. Dodd, C. W. Clark, P. A. Ruprecht, and K. Burnett, Phys. Rev. **A 53**, 1950 (1996).
- [33] B. Yoon and J. W. Negele, Phys. Rev. **A 16**, 1451 (1997).
- [34] P. W. Anderson, Rev. Mod. Phys. **38**, 298 (1996).

- [35] P. W. Anderson, *Basic Notions of Condensed Matter Physics*, (Addison-Wesley, Reading, MA, 1984).
- [36] K. Huang, *Statistical Mechanics*, (John Wiley and Sons, New York, 1987).
- [37] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, (Springer, Berlin, 1991).
- [38] V. W. Scarola and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **95**, 033003 (2005).
- [39] F. T. Arrechi, W. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, Phys. Rev. **A6**, 2211 (1972).
- [40] T. Wong et al, cond-mat/9611101.
- [41] S. M. Barnett, K. Burnett and J. A. Vaccaro, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. **101**, 593 (1996).
- [42] P. Ohberg, Phys. Rev. **A59**, 1, 634-638, (1999).
- [43] B. D. Esry and C. H. Greene, Phys. Rev. **A59**, 2, 1457-1460 (1999).
- [44] Y. Kagan and B. V. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **79**, 18, 3331-3334, (1997).
- [45] J. Javanainen and S.M. Yoo, Phys. Rev. Lett **76**, 161 (1996).
- [46] S. M. Jensen, IEEE J. Quantum Electron. **QE-18**, 1580 (1982).
- [47] M. O. Scully, and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [48] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [49] H. P. Yuen and Shapiro, IEEE Trans, Inf. Theory **24**, 657 (1978).
- [50] M. D. Srinivas and E. B. Davies, Opt. Acta **28**, 981 (1981).
- [51] Vlasta Perinov et al, Phase in Optics, World Scientific, ISBN 981-02-3208-X.
- [52] H. J. Carmichael and L. Tian, in *Optical Society of America Annual Meeting Technical Digest 1990, Optical Society of America Technical Digest Series Vol. 15* (Optical Society of America, Washington, DC, 1990).
- [53] G. J., Milburn, K. Jacobs e D. F. Walls, Phys. Rev. **A50**, 6, 5256-5263 (1996).
- [54] H. M. Wiseman e G. J. Milburn, Phys. Rev. **A47**, 1, 642-662, (1993).

- [55] Gardiner, C.W., Zoller, *Quantum Noise*, P. 2004, XXII, Springer, ISBN: 3-540-22301-0.
- [56] M. W. Jack, M. J. Collet and D. F. Walls, Phys. Rev. **A54**, R4625 (1996).
- [57] J. Ruostekoski, M. J. Collett, R. Graham e D. F. Wall, Phys. Rev. **A57**, 1, 511-517, (1998).
- [58] J. Ruostekoski e D. F. Walls, Phys. Rev. **A56**, 4, 2996-3006, (1997).
- [59] J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, Phys. Rev. **A54**, R3714 (1996).
- [60] E. L. Bolda, S. M. Tan, D. F. Walls, Phys. Rev. **A57**, 4686 (1998).
- [61] E. L. Bolda, S. M. Tan, D. F. Walls, Phys. Rev. Lett **79**, 4719 (1997).
- [62] Mahmud et al, Phys. Rev. A 71, 023615 (2005) e condmat/0403002.
- [63] Buchleitner e Kolovsky Phys. Rev. Lett. **91**, 253002, (2003).
- [64] Wimberger et al, Phys. Rev. A 72, 063610 (2005).
- [65] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, Cambridge, UK 2001).
- [66] M. Greiner *et al.*, Nature (London) **415**, 39 (2002).
- [67] M. Glück, A. R. Kolovsky and H. J. Korsch, Phys. Rep. **366**, 103 (2002).

“Mas ande otro criollo passa, Martín Fierro ha de pasar; nada lo hace recular ni las fantasmas lo espantan, y dende que todos cantan yo también quiero cantar.”

-Martín Fierro