PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

UM ESTUDO SOBRE RELAXAÇÃO E EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA EM DOIS SISTEMAS DE BOSONS ACOPLADOS

por

Amir Ordacgi Caldeira

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS
EM
FÍSICA

Nicim Zagury
Orientador

Rio de Janeiro, RJ, Agosto de 1976.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Nicim Zagury pela orientação e assistência prestadas à este trabalho.

Ao Sr. Helio Rochlin pela ajuda prestada em alguns cálculos numéricos.

À CAPES pelo suporte financeiro que nos proporcionou durante todo o curso de Pós-Graduação.

Aos professores e amigos do Departamento de Física da PUC/RJ pelo incentivo durante todo o tempo de elaboração deste trabalho.

RESUMO

O processo de relaxação em um sistema de bosons acoplados é discutido. Se obtém as constantes de relaxação e a expressão para a evolução temporal dos modos normais. O campo crítico para as instabilidades dos modos normais é calculado no caso do sistema ser excitado parametricamente. Aplica-se então estes resultados à interação magnetoelástica e a produção de fonons em diferentes ressonâncias é estudada.

ABSTRACT

The relaxation process in a coupled bosons system is discussed. The relaxation constant and the expression for the temporal evolution of the normal modes are obtained. The critical field is calculated when the system is parametrically excited. These results are applied to the magnetoelastic interaction, and the unstable growth of phonons in different resonances is studied.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 1 - A RELAXAÇÃO DE MODOS ACOPLADOS DO OSCILADOR HARMÔNICO 5

1.1 - A Relaxação de um Único Modo 5

1.2 - Um Modelo para a Interação de dois Modos e a Diagonalização da Hamiltoniana 11

1.3 - A Interação de dois Modos com Relaxação e a Evolução Temporal dos Modos Normais ... 16

CAPÍTULO 2 - A EXCITAÇÃO DOS MODOS NORMAIS 25

2.1 - A Hamiltoniana com Excitação Externa 26

2.2 - A Evolução Temporal Formal dos Modos Normais 28

2.3 - O Cálculo dos Campos Críticos 33

CAPÍTULO 3 - APLICAÇÕES À INTERAÇÃO MAGNETOELÁSTICA .. 45

3.1 - A Hamiltoniana da Interação Magnetoelástica 45

3.2 - As Instabilidades dos Modos Magnetoelásticos 50

3.3 - O Número de Fonons 60

CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES 69

REFERÊNCIAS 71

INTRODUÇÃO

O problema da relaxação em um sistema físico, tem sua origem na irreversibilidade dos processos que nele ocorrem quando o deixamos interagir com um segundo sistema que tenha um número de graus de liberdade microscópicos bem maior que os dele, ou seja, com um reservatório. A relaxação irá depender essencialmente das hipóteses que fizermos sobre a interação entre estes dois sistemas.

Já no caso clássico, temos um exemplo simples desta interação, quando estudamos o Movimento Browniano. Neste caso, partimos da equação de movimento dada por $m\dot{v} + \lambda v = F(t)$, onde m é a massa da partícula Browniana, v a sua velocidade, λ um coeficiente viscoso e F(t) é a chamada "força flutuante", que é consequência dos choques aleatórios das moléculas do meio viscoso com a partícula Browniana ($\langle F(t)\rangle = 0$). Esta equação de movimento é um exemplo do que chamamos de "Equação de Langevin" [1 a 3].

Em um estudo formal sobre flutuações, Lax [4] mostra que se o acoplamento com o reservatório é linear e se o sistema é considerado "Markoffiano", no sentido de possuir "memória curta", podemos escrever uma equação de Langevin para os parâmetros que descrevem o sistema.

No caso quântico, diversos autores [3,5,6] mostram que se assumimos as mesmas hipóteses feitas por Lax para a interação entre um sistema de bosons e um reservatório, também podemos obter uma equação de Langevin para os operadores do sistema. Este mesmo problema é tratado de forma diferente por Louisell [7], tomando a transformada de Laplace das equações de movimento e utilizando a aproximação de Wigner-Weisskopff, o que o leva aos mesmos resultados obtidos em [3,5,6].

No caso de dois sistemas que interagem entre si e estão acoplados a um reservatório, Gonçalves e Zagury [8] seguindo o procedimento adotado em [3,5,6], determinam para o caso específico da interação magnetoelástica, quais seriam as constantes de relaxação dos modos normais em função das constantes de relaxação de fonons e magnons puros.

É também de nosso conhecimento que a maneira pela qual excitamos um sistema por um campo externo, pode influir no seu processo de relaxação. Esta excitação pode ser linear ou não linear. No caso de excitação linear, não existe uma mudança na constante de relaxação efetiva do sistema [9], o que ocorre é apenas uma mudança na parte estacionária da solução. Já nos casos não-linear e paramétrico [3], a constante de relaxação efetiva do sistema irá depender da amplitude do campo externo. Neste caso, pode existir um valor crítico deste campo acima do qual haja um crescimento exponencial do número de bosons do sistema.

Diversos autores estudam excitações paramétricas em certos casos de interesse real, como por exemplo em interações magnetoelásticas [10 a 13], ou em interações entre magnons eletrônicos - magnons nucleares [14 a 16], onde determinam os campos críticos para as instabilidades dos modos acoplados. Entretanto, na maioria destes trabalhos, a relaxação não é tratada em detalhes mas sim, introduzida fenomenologicamente.

Nosso objetivo neste trabalho é procurar um tratamento sistemático para o estudo da relaxação e excitação de dois sistemas de bosons acoplados que interagem com um reservatório. Faremos ainda uma aplicação no bombeamento paralelo de ondas magnetoelásticas onde constataremos a possibilidade da produção de fonons por um campo mais fraco que o exigido para a produção de fonons puros [17].

No capítulo 1, faremos inicialmente a revisão do problema de relaxação de um modo acoplado a um reservatório seguindo o modelo e os métodos de cálculo utilizados por Louisell [7]. Posteriormente, introduziremos o acoplamento entre dois modos e deixaremos que este novo sistema se acople a um reservatório. Calcularemos as constantes de relaxação dos modos normais em função daquelas dos modos puros. Estudaremos ainda a evolução temporal do número de bosons determinando suas partes transiente e estacionária.

No capítulo 2, faremos um breve comentário sobre excitações lineares e logo nos ocuparemos do problema de excitações paramétricas a fim de estudar a influência do campo externo no processo de relaxação. Partiremos do modelo apresentado em [8] para esta excitação e determinaremos uma expressão formal para a evolução temporal dos modos normais. Estudaremos ainda os "campos críticos" e as possíveis ressonâncias do sistema.

No capítulo 3, aplicaremos todos os resultados obtidos anteriormente para o caso específico da interação magnetoelástica. Estudaremos as instabilidades dos modos magnetoelásticos determinando os seus "campos críticos". Determinaremos ainda uma expressão para o número de fonons excitados e compararemos a produção ressonante deste número em duas diferentes ressonâncias.

Finalmente, no capítulo 4, apresentaremos as nossas conclusões sobre este trabalho.

CAPÍTULO 1

RELAXAÇÃO DE MODOS ACOPLADOS DO OSCILADOR HARMÔNICO

Neste capítulo, vamos procurar descrever como o acoplamento a um reservatório de calor à temperatura T, influi na evolução temporal de osciladores acoplados entre si, e que inicialmente não estejam em equilíbrio térmico com o reservatório. Antes porém, vamos introduzir a relaxação em um sistema mais simples, visando a melhor compreensão do fenômeno.

1.1. A Relaxação de um Único Modo

Consideremos um sistema cuja Hamiltoniana possa ser escrita como a de um único oscilador harmônico, e que esteja inicialmente isolado. Podemos então escrever:

$$\mathcal{H} = \omega_A a^+ a \qquad (\hbar = 1)$$

onde ω_A é a frequência do oscilador, a^+ e a são operadores de criação e aniquilação de excitações de frequência ω_A, respectivamente. Introduzindo então o conceito do operador densidade $\hat{\rho}$ [2], podemos determinar o valor médio de qualquer observável associado a um certo operador $\hat{O}$ como $\langle\hat{O}\rangle = tr(\hat{\rho}\hat{O})$ assim como sua evolução temporal, que na representação de Heisenberg pode ser escrita pela seguinte expressão:

$$\frac{d\langle\hat{O}\rangle}{dt} = -i\langle[\hat{O},\mathcal{H}]\rangle \ .$$

Conforme já sabemos, estas grandezas permanecerão estacionárias devido ao sistema estar isolado. Se agora deixarmos o sistema interagir com um reservatório de ca lor à temperatura T, ele irá depois de um certo tempo atingir o equilíbrio térmico com o reservatório, e o nosso objetivo é estudar como se processa a evolução temporal desta fase transiente para valores médios de certos operadores.

Para introduzir a interação com o reservatório de calor, vamos seguir o procedimento que é geralmente usado [5,6,7], onde assumimos que:

a) O reservatório é descrito por uma coleção de osciladores desacoplados.
b) Apenas parte destes osciladores interagem com o sistema considerado.
c) Estes osciladores estão em diferentes estados de energia que podem ser considerados densos.
d) A interação é linear e a constante de acoplamento é muito menor que as energias envolvidas no problema.

Desta forma, a Hamiltoniana será escrita como:[7]

$$\mathcal{H} = \omega_A a^+ a + \sum_\alpha (f_\alpha^* a^+ R_\alpha + f_\alpha a R_\alpha^+) + \sum_\alpha \omega_\alpha R_\alpha^+ R_\alpha \qquad (1.1)$$

onde f_α é a constante de acoplamento do reservatório com o sistema considerado ($|f_\alpha| << \omega_A$ e ω_α), R_α e R_α^+ são operadores de aniquilação e criação de excitações de frequência ω_α no reservatório de calor.

Para estudarmos a evolução do sistema, vamos inicialmente escrever a equação de movimento de todos os operadores envolvidos em (1.1)

$$\begin{aligned} \dot{a} &= - i\omega_A a - i \sum_\alpha f_\alpha^* R_\alpha \\ \dot{R}_\alpha &= - i\omega_\alpha R_\alpha - i f_\alpha a \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Desta forma, nosso problema se reduziu a resolução do sistema de equações diferenciais (1.2). Vamos agora supor que a interação com o reservatório tenha começado no instante t = 0, e que neste instante conhecemos todos os operadores de (1.1). Isto nos sugere o uso da transformada de Laplace para que transformemos o sistema (1.2) em um sistema de equações algébricas.

A transformada de Laplace de $\mathcal{O}(t)$ é dada por:[7]

$$\mathcal{O}'(s) = \int_0^\infty \mathcal{O}(t) e^{-st} dt \, ,$$

e obviamente

$$\mathcal{O}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \mathcal{O}'(s) e^{st} ds$$

é a transformada inversa de $\mathcal{O}'(s)$. A partir destas definições podemos ainda mostrar que a Transformada de $\dot{\mathcal{O}}$ é dada por $s\mathcal{O}'(s) - \mathcal{O}(t=0)$. Usando então estes resultados, o sistema (1.2) transformado, será escrito como:

$$\begin{aligned} sa'(s) - a(0) &= -i\omega_A a'(s) - i \sum_\alpha f_\alpha^* R_\alpha'(s) \\ sR_\alpha'(s) - R_\alpha(0) &= -i\omega_\alpha R_\alpha'(s) - i f_\alpha a'(s) \end{aligned} \tag{1.3}$$

e portanto, a'(s) será expresso por:

$$a'(s) = \frac{a(0) - i \sum\limits_\alpha \dfrac{f_\alpha^* \, R_\alpha(0)}{s + i\omega_\alpha}}{s + i\omega_A + \sum\limits_\alpha \dfrac{|f_\alpha|^2}{s + i\omega_\alpha}} \, .$$

Usando então a transformada inversa de a'(s) e fazendo a mudança da variável de integração s para $\varepsilon + iy$:

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(0) - \sum\limits_\alpha \dfrac{f_\alpha^* \, R_\alpha(0)}{y + \omega_\alpha - i\varepsilon}}{y + \omega_A - i\varepsilon - \sum\limits_\alpha \dfrac{|f_\alpha|^2}{y + \omega_\alpha - i\varepsilon}} \, e^{iyt} e^{\varepsilon t} \, dy$$

Como no nosso modelo para a interação com o reservatório assumimos que seus níveis são densos, podemos substituir no denominador da expressão acima, $\sum_\alpha$ por $\int_0^\infty d\omega_\alpha \rho(\omega_\alpha)$, onde $\rho(\omega_\alpha)$ é a densidade de estados com energia entre ω_α e $\omega_\alpha + d\omega_\alpha$. Por outro lado, a identidade

$$\frac{1}{\omega - \omega_0 \pm i\varepsilon} = \left(\frac{1}{\omega - \omega_0}\right) \mp i\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{1.4}$$

nos permite escrever:

$$\int_0^\infty \frac{|f_\alpha|^2 \rho(\omega_\alpha) d\omega_\alpha}{y + \omega_\alpha - i\varepsilon} = -\Delta\omega_A(-y) + i\eta_A(-y) \tag{1.5}$$

onde

$$\Delta\omega_A(y) \equiv -\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{|f_\alpha|^2 \rho(\omega_\alpha) d\omega_\alpha}{\omega_\alpha - y} \quad \text{e} \quad \eta_A(y) \equiv \pi |f_y|^2 \rho(y) \ .$$

Devemos notar que $\eta_A(y) > 0$, o que será fundamental no decorrer desta seção.

Voltando então para a expressão de a(t), teremos:

$$a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(0)\ e^{iyt} e^{\varepsilon t}\ dy}{y + \omega_A - i\varepsilon + \Delta\omega_A(-y) - i\eta_A(-y)}$$

$$- \frac{1}{2\pi}\sum_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\alpha^* \ R_\alpha(0)\ e^{iyt} e^{\varepsilon t}\ dy}{(y + \omega_\alpha - i\varepsilon)[y + \omega_A - i\varepsilon + \Delta\omega_A(-y) - i\eta_A(-y)]} \tag{1.6}$$

Levando em conta o fato do sistema interagir fracamente com o reservatório ($|f_\alpha| << \omega_A$), os termos $\Delta\omega_A(-y)$ e $\eta_A(-y)$ serão pequenos comparados com ω_A, o que será de grande utilidade para resolvermos as integrais de (1.5) como mostraremos agora.

Na 1ª integral, o integrando tem polo na raiz da equação $y + \omega_A + \Delta\omega_A(-y) - i\eta_A(-y) - i\varepsilon = 0$, e para resolvê la vamos supor que sua raiz seja dada por $-\omega_A + \delta$, portanto:

$$-\omega_A + \delta + \omega_A - i\varepsilon + \Delta\omega_A(\omega_A - \delta) - i\eta_A(\omega_A - \delta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta = -\Delta\omega_A(\omega_A - \delta) + i\eta_A(\omega_A - \delta) + i\varepsilon$$

Daí, vemos que δ é uma pequena correção para $-\omega_A$ já que $\Delta\omega_A(\omega_A - \delta)$ e $\eta_A(\omega_A - \delta) << \omega_A$. Logo, se as derivadas de $\Delta\omega_A(-y)$ e $\eta_A(-y)$ continuam proporcionais a $|f_\alpha|^2$, devemos expandir estas funções em torno de ω_A e tomar apenas o termo de ordem zero, já que o termo de 1ª ordem será proporcional a $|f_\alpha|^4$. Desta forma:

$$\delta \approx -\Delta\omega_A(\omega_A) + i\eta_A(\omega_A) + i\varepsilon \equiv -\Delta\omega_A + i\eta_A + i\varepsilon$$

e o polo do 1º integrando será em $-\omega_A - \Delta\omega_A + i\eta_A + i\varepsilon$. Usando ainda este resultado, vemos claramente que os polos do 2º integrando são dados por $-\omega_A - \Delta\omega_A + i\eta_A + i\varepsilon$ e $-\omega_\alpha + i\varepsilon$. Podemos então, resolver a (1.6) usando o método de integração por resíduos e obteremos:

$$a(t) = a(0)\, e^{-i(\omega_A+\Delta\omega_A)t}\, e^{-\eta_A t}$$

$$- \sum_\alpha \frac{f_\alpha^* R_\alpha(0)\, e^{-i\omega_\alpha t}[1 - e^{i(\omega_\alpha-\omega_A-\Delta\omega_A)t}\, e^{-\eta_A t}]}{\omega_A - \omega_\alpha + \Delta\omega_A - i\eta_A} \qquad (1.7)$$

Pela (1.7) vemos que η_A é a constante de relaxação do sistema e $\Delta\omega_A$ uma pequena variação nos seus níveis de energia.

Podemos agora calcular os valores médios de operadores que possam ser escritos em função de $a(t)$ através de $tr(\hat{\rho} f(a))$ onde $\hat{\rho}$ é dado por $\hat{\rho}_A(0)\hat{\rho}_R(0)$, pois em $t = 0$ o sistema estava desacoplado do reservatório. Temos, então, $\langle f(a)\rangle = tr_A \hat{\rho}_A(0)[tr_R \hat{\rho}_R(0) f(a)]$ e o operador $tr_R \hat{\rho}_R f(a)$ será chamado de operador reduzido do sistema, que por nós será denotado por $\langle f(a)\rangle_R$. Esta média é o operador $f(a)$ com as variáveis do reservatório já eliminadas.

Vamos dar agora dois exemplos de $\langle f(a)\rangle_R$. Inicialmente podemos calcular o próprio $\langle a(t)\rangle_R$, que é extremamente simples. Usando o fato que $a(0)$ não atua nos estados do reservatório e que $\langle R_\alpha(0)\rangle_R = 0$, o operador $a(t)$ da (1.7) poderá ser escrito em sua forma reduzida como:

$$\langle a(t)\rangle_R = a(0)\, e^{-i(\omega_A+\Delta\omega_A)t}\, e^{-\eta_A t}$$

o que nos mostra que quando $t \gg 1/\eta_A$, $\langle a(t)\rangle_R \to 0$.

Outro exemplo interessante é o do número $\langle a^+(t)a(t)\rangle_R$ que pode ser obtido se multiplicarmos a (1.7) pela sua hermitiana conjugada e tomarmos $tr_R(\hat\rho_R a^+(t)a(t))$. Usando então que $\langle R_\alpha(0)\rangle_R = 0$ e que $\langle R_\alpha^+(0)R_{\alpha'}(0)\rangle_R = \delta_{\alpha\alpha'}N_\alpha$ [6], onde N_α é dado pela distribuição de Bose, a expressão para $\langle a^+(t)a(t)\rangle_R$ será escrita como:

$$\langle a^+(t)a(t)\rangle_R = a^+(0)a(0)e^{-2\eta_A t} + \\ + \sum_\alpha |f_\alpha|^2 N_\alpha \frac{[1 - e^{-i(\omega_\alpha-\omega_A-\Delta\omega_A)t}\, e^{-\eta_A t}]}{(\omega_\alpha - \omega_A - \Delta\omega_A)^2 + \eta_A^2} \\ \times [1 - e^{i(\omega_\alpha-\omega_A-\Delta\omega_A)t}\, e^{-\eta_A t}] \qquad (1.8)$$

Transformando então $\sum_\alpha$ em $\int_0^\infty d\omega_\alpha \rho(\omega_\alpha)$ e lembrando que a função $1/[(\omega_\alpha-\omega_A-\Delta\omega_A)^2 + \eta_A^2]$ para pequenos valores de η_A, só tem contribuição apreciável no entorno de $\omega_A + \Delta\omega_A$, podemos extender a integral para o intervalo $(-\infty,\infty)$ e substituir $\rho(\omega_\alpha)|f(\omega_\alpha)|^2 N(\omega_\alpha)$ por $\rho(\omega_A)|f(\omega_A)|^2 N(\omega_A)$. Consequentemente, a (1.8) será reescrita como:

$$\langle a^+(t)a(t)\rangle_R = a^+(0)a(0)\, e^{-2\eta_A t} + \\ + \rho(\omega_A)|f(\omega_A)|^2 N(\omega_A) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[1 - e^{-i(\omega_\alpha-\omega_A-\Delta\omega_A)t}\, e^{-\eta_A t}]}{(\omega_\alpha-\omega_A-\Delta\omega_A)^2 + \eta_A^2} \\ \times [1 - e^{i(\omega_\alpha-\omega_A-\Delta\omega_A)t}\, e^{-\eta_A t}]d\omega_\alpha \qquad (1.9)$$

A integral da (1.9) pode ser resolvida por resíduos e tem como resposta:

$$\pi \frac{(1 - e^{-2\eta_A t})}{\eta_A}$$

De posse deste resultado e usando que $\eta_A \equiv \pi\rho(\omega_A)|f(\omega_A)|^2$ podemos escrever:

$$\langle a^+(t)a(t)\rangle_R = a^+(0)a(0)e^{-2\eta_A t} + N(\omega_A)[1 - e^{-2\eta_A t}] \quad (1.10)$$

e se $t >> 1/\eta_A$, teremos:

$$\langle a^+(t)a(t)\rangle_R = N(\omega_A)$$

onde

$$N(\omega_A) = \frac{1}{e^{\omega_A/kT} - 1}$$

Este resultado já era esperado, pois quando um sistema de bósons entra em equilíbrio térmico com um reservatório de calor, o número N de quanta é dado pela distribuição de Bose.

Pode ser verificado que todos os resultados obtidos nesta seção são os mesmos que os obtidos quando assumimos que a(t) só tem efeitos sobre os operadores do reservatório no instante t, o que consiste na conhecida aproximação Markoffiana [3,4,5].

1.2. Um Modelo para a Interação de dois Modos e a Diagonalização da Hamiltoniana

Vamos agora tratar do problema da interação entre dois osciladores, um representando o sistema (A) e outro o sistema (B). No nosso modelo, vamos assumir que a Hamiltoniana possa ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{H} = \omega_A a^+ a + \omega_B b^+ b + Kab^+ + K^* a^+ b \qquad (1.11)$$

onde K é a constante de acoplamento entre os dois osciladores e . $|K| << \omega_A$ por hipótese. Esta Hamiltoniana pode ser expressa facilmente numa forma matricial por:

$$\mathcal{H} = v^+ M v$$

onde

$$v \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad e \quad M \equiv \begin{bmatrix} \omega_A & K^* \\ K & \omega_B \end{bmatrix}$$

Como a matriz M é hermitiana podemos encontrar uma matriz unitária U tal que:

$$UMU^+ = D$$

com

$$D = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix} ,$$

onde $$\omega_1 = \frac{\omega_A + \omega_B}{2} + \frac{\sqrt{(\omega_A - \omega_B)^2 + 4|K|^2}}{2}$$

$$\qquad (1.12)$$

e $$\omega_2 = \frac{\omega_A + \omega_B}{2} - \frac{\sqrt{(\omega_A - \omega_B)^2 + 4|K|^2}}{2}$$

são os autovalores de M. Para determinar U vamos inicialmente escrevê-la em sua forma mais geral que é dada por:

$$U = e^{i\gamma} e^{i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\theta}$$

onde γ e θ são reais, σ_i são as matrizes de Pauli e $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ com $|\hat{n}| = 1$. Usando então a matriz U desta forma, e a (1.12) podemos escrever:

$$e^{-i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\theta} D e^{i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\theta} = M \qquad (1.13)$$

onde, escolhendo $n_z = 0$ e usando que $e^{i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\theta} = \cos\theta + i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\operatorname{sen}\theta$ teremos:

$$\begin{aligned}
&\omega_1\cos^2\theta + \omega_2\operatorname{sen}^2\theta = \omega_A \\
&\omega_2\cos^2\theta + \omega_1\operatorname{sen}^2\theta = \omega_B \\
&(\omega_1 - \omega_2)(n_y + in_x)\operatorname{sen}\theta\cos\theta = K^*
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Resolvendo o sistema (1.14), obtemos:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{\omega_A - \omega_B}{2\sqrt{(\omega_A-\omega_B)^2 + 4|K|^2}}\,, \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{\omega_A - \omega_B}{2\sqrt{(\omega_A-\omega_B)^2 + 4|K|^2}}$$

e

$$\frac{\operatorname{Re} K}{\operatorname{Im} K} = -\frac{n_y}{n_x} \tag{1.15}$$

e portanto, podemos facilmente escrever a matriz unitária U como sendo:

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{A} & \sqrt{B}\,e^{i\varphi} \\ -\sqrt{B}\,e^{-i\varphi} & \sqrt{A} \end{bmatrix} e^{i\gamma} \tag{1.16}$$

onde $A \equiv \cos^2\theta$, $B \equiv \operatorname{sen}^2\theta$ e $\varphi = \operatorname{tg}^{-1}(-\operatorname{Im} K/\operatorname{Re} K)$.

Se agora definirmos operadores X e Y tais que:

$$\begin{aligned}
X &= \sqrt{A}\,a + \sqrt{B}\,e^{i\varphi}b \\
Y &= -\sqrt{B}\,e^{-i\varphi}a + \sqrt{A}\,b
\end{aligned} \tag{1.17}$$

a Hamiltoniana (1.11) poderá ser reescrita como $\mathcal{H} = \omega_1 X^+X + \omega_2 Y^+Y$, que é a Hamiltoniana de dois osciladores desacoplados (modos normais de vibração), e as relações de comutação serão preservadas devido ao fato de (X,Y) e (a,b) estarem relacionados por uma transformação unitária.

Neste ponto, cabe uma análise mais detalhada do tipo de sistema real que gostaríamos de tratar neste traba lho. É do nosso conhecimento que ondas eletromagnéticas são quantizadas, e este procedimento nos permite descrever este sistema como uma coleção de osciladores desacoplados com energia e momentum bem determinados. Também, ondas de spin e vibrações na rede cristalina, quando quantizadas, podem dentro de certas aproximações ser descritas por coleções de osciladores desacoplados, que são as já conhecidas quasi-partículas (magnons, fonons, etc) de energia $\omega(k)$ e quasi-momentum k. Desta forma, a Hamiltoniana para qualquer um destes sistemas pode ser escrita (exata ou aproximadamente) como

$$\mathcal{H} = \sum_k \omega(k) a_k^+ a_k$$

onde a_k e a_k^+ aniquilam e criam quanta de momentum k respectivamente. É claro que na seção (1.1) do nosso trabalho, estudamos a relaxação de apenas um destes osciladores e, portanto, se quiséssemos ser mais rigorosos, deveríamos adicionar um índice k aos operadores a^+ e a. Nesta seção, estamos tratando de um modelo para o acoplamento de dois sistemas diferentes (magnon-fonon, foton-magnon, etc.) e convém notar que novamente estamos considerando um oscilador do sistema (A) e outro de (B), que na aproximação que posteriormente será de nosso interesse (Cap. 3), devem possuir o mesmo índice k para que a conservação de quasi-momentum seja satisfeita. Lembrando então que em todos os modelos que tratamos, até agora os operadores devem ter o mesmo índice k, vamos por simplicidade continuar a suprimi-los até a seção (2.1), onde isto não mais será possível.

Outro fato importante que nós iremos utilizar em seções futuras é que a energia do sistema considerado neste contexto é uma função do momentum $\omega = \omega(k)$, e esta função será diferente dependendo do sistema que estivermos considerando. No caso de dois sistemas interagindo, podemos ter dois casos distintos:

1º) $\exists\ \underset{\sim}{k}$ tal que $\omega_A(\underset{\sim}{k}) = \omega_B(\underset{\sim}{k})$

2º) $\omega_A(k) \neq \omega_B(k)\ \forall\ k$.

1º caso:

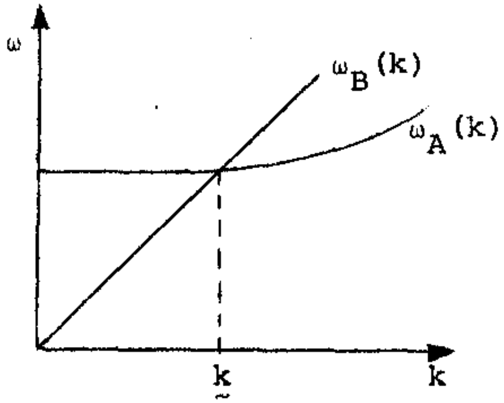


Fig. 1

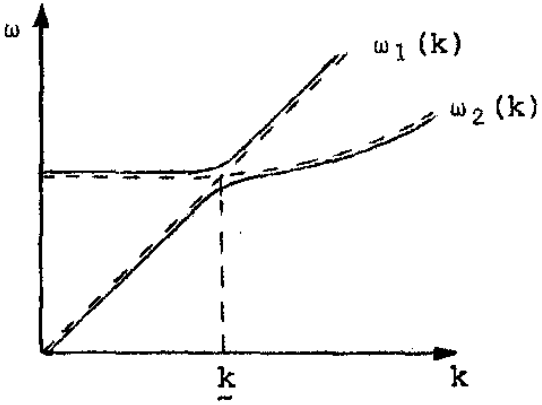


Fig. 2

Na fig. 1 vemos um possível exemplo do 1º caso , onde as relações de dispersão se cortam. Já na fig. 2, ω_A e ω_B estão pontilhadas e as curvas contínuas representam $\omega_1(k)$ e $\omega_2(k)$ que são as relações de dispersão dos modos normais dadas pela fórmula (1.12). Ainda pela (1.12) podemos constatar que para pontos antes do cruzamento $(k < \underset{\sim}{k})$ tais que $|\omega_A - \omega_B| >> 2|K|$ temos $\omega_1(k) \simeq \omega_A(k)$ e $\omega_2(k) \simeq \simeq \omega_B(k)$. Para pontos depois do cruzamento $(k > \underset{\sim}{k})$ tais que $|\omega_A - \omega_B| >> 2|K|$ temos $\omega_1(k) \simeq \omega_B(k)$ e $\omega_2(k) \simeq \omega_1(k)$. No entorno de $\underset{\sim}{k}$, os operadores X e Y representam uma forte mistura de a e b com $\omega_1(\underset{\sim}{k}) - \omega_2(\underset{\sim}{k}) \cong 2|K|$, o que nos mostra que se $|K| << \omega_A(k)$, a diferença de energia dos modos normais será muito pequena nesta região. Portanto, neste primeiro caso, para $k < \underset{\sim}{k}$ o sistema X é do tipo (A) e o sistema Y do tipo (B). No cruzamento X e Y são misturas de (A) e (B), e para $k > \underset{\sim}{k}$ o sistema X é do tipo (B) enquanto Y é do tipo (A). Um exemplo típico do modelo introduzido neste caso é o da interação magnon-fonon.

2º caso:

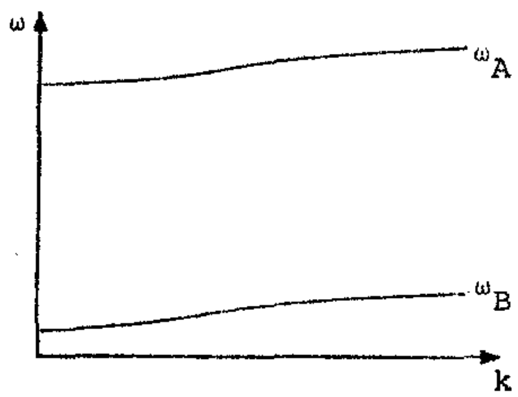


Fig. 3

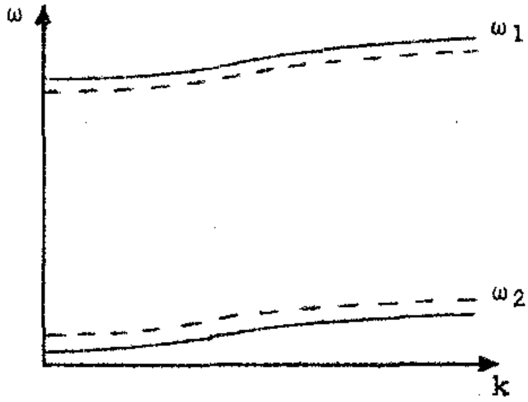


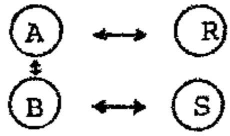
Fig. 4

A fig. 3 mostra o caso onde não há cruzamento das relações de dispersão enquanto que na fig. 4 as linhas contínuas representam as relações de dispersão dos modos normais como no caso anterior. Aqui podemos notar que $\omega_1(k) \simeq \omega_A(k)$ e $\omega_2(k) \simeq \omega_B(k)$ se $|K| \ll (\omega_A - \omega_B)$, qualquer que seja k. Na natureza temos um exemplo deste tipo na interação magnon eletrônico-magnon nuclear, mas neste caso, $(\omega_A - \omega_B) \simeq O(|K|)$, o que afasta $\omega_1(k)$ de $\omega_A(k)$ e $\omega_2(k)$ de $\omega_B(k)$.

Para estudarmos o comportamento dos operadores normais no 1º e 2º casos devemos usar as expressões (1.17) e (1.15) para os diversos valores de k, e obteremos as possíveis combinações dos operadores a e b.

1.3. A Interação de dois Modos com Relaxação e a Evolução Temporal dos Modos Normais

Vamos considerar dois sistemas que interagem como na seção (1.2), e cada um deles interage com partes independentes de um mesmo reservatório como na seção 1.1.



A Hamiltoniana pode, então, ser escrita como:

$$\mathcal{H} = \omega_A a^+ a + \omega_B b^+ b + K^* a^+ b + K a b^+ + \sum_\alpha (f_\alpha^* a^+ R_\alpha + f_\alpha a R_\alpha^+) + \sum_\beta (g_\beta^* b^+ S_\beta + g_\beta b S_\beta^+) + \sum_\alpha \omega_\alpha R_\alpha^+ R_\alpha + \sum_\beta \omega_\beta S_\beta^+ S_\beta \qquad (1.18)$$

onde por hipótese, $|f|$ e $|g| \ll |K| \ll \omega_A$ e ω_α.

Substituindo a e b por combinações dos operadores normais X e Y da seção 1.2 (eq. 1.17) e definindo:

$$\begin{aligned} f_{1\alpha} &\equiv \sqrt{A}\, f_\alpha & f_{2\alpha} &= -\sqrt{B}\, e^{i\varphi} f_\alpha \\ g_{2\beta}^* &\equiv \sqrt{B}\, e^{i\varphi} g_\beta^* & g_{1\beta}^* &= \sqrt{A}\, g_\beta \end{aligned} \qquad (1.19)$$

podemos escrever a (1.18) como:

$$\mathcal{H} = \omega_1 X^+ X + \omega_2 Y^+ Y + \sum_\alpha (f_{1\alpha}^* X^+ R_\alpha + f_{1\alpha} X R_\alpha^+) + \sum_\beta (g_{2\beta}^* X^+ S_\beta + g_{2\beta} X S_\beta^+) + \sum_\alpha (f_{2\alpha}^* Y^+ R_\alpha + f_{2\alpha} Y R_\alpha^+) + \sum_\beta (g_{1\beta}^* Y^+ S_\beta + g_{1\beta} Y S_\beta^+) + \sum_\alpha \omega_\alpha R_\alpha^+ R_\alpha + \sum_\beta \omega_\beta S_\beta^+ S_\beta \qquad (1.20)$$

A (1.20) representa a energia de dois osciladores desacoplados X e Y, onde X interage com R e S com constantes de acoplamento $f_{1\alpha}$ e $g_{2\beta}$ respectivamente, e Y interage também com R e S, mas com constantes de acoplamento $f_{2\alpha}$ e $g_{1\beta}$. Esquematicamente:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & R \\ Y \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ur, leftrightarrow] & S \end{tikzcd}$$

Vamos então procurar determinar a evolução temporal dos operadores X e Y. As equações de movimento dos operadores de (1.20) são:

$$\dot{X} = -i\omega_1 X - i\sum_\alpha f^*_{1\alpha}R_\alpha - i\sum_\beta g^*_{2\beta}S_\beta$$
$$\dot{Y} = -i\omega_2 Y - i\sum_\alpha f^*_{2\alpha}R_\alpha - i\sum_\beta g^*_{1\beta}S_\beta \qquad (1.21)$$
$$\dot{R}_\alpha = -i\omega_\alpha R_\alpha - if_{1\alpha}X - if_{2\alpha}Y$$
$$\dot{S}_\beta = -i\omega_\beta S_\beta - ig_{2\beta}X - ig_{1\beta}Y$$

Utilizando então a transformada de Laplace para operadores como fizemos na seção (1.1), podemos escrever o sistema (1.21) transformado como:

$$-X_0 + sX'(x) = -i\omega_1 X'(s) - i\sum_\alpha f^*_{1\alpha}R'_\alpha(s) - i\sum_\beta g^*_{2\beta}S'_\beta(s)$$
$$-Y_0 + sY'(s) = -i\omega_2 Y'(s) - i\sum_\alpha f^*_{2\alpha}R'_\alpha(s) - i\sum_\beta g^*_{1\beta}S'_\beta(s) \qquad (1.22)$$
$$-R_\alpha(0) + sR'_\alpha(s) = -i\omega_\alpha R'_\alpha(s) - if_{1\alpha}X'(s) - if_{2\alpha}Y'(s)$$
$$-S_\beta(0) + sS'_\beta(s) = -i\omega_\beta S'_\beta(s) - ig_{2\beta}X'(s) - ig_{1\beta}Y'(s)$$

onde X_0, Y_0, $R_\alpha(0)$ e $S_\beta(0)$ são os valores de $X(t)$, $Y(t)$, $R_\alpha(t)$ e $S_\beta(t)$ no instante $t = 0$.

Substituindo as duas últimas equações do sistema (1.22) nas duas primeiras e definindo:

$$a(s) = s + i\omega_1 + \sum_\alpha \frac{|f_{1\alpha}|^2}{s + i\omega_\alpha} + \sum_\beta \frac{|g_{2\beta}|^2}{s + i\omega_\beta}$$
$$b(s) = \sum_\alpha \frac{f^*_{1\alpha}f_{2\alpha}}{s + i\omega_\alpha} + \sum_\beta \frac{g^*_{2\beta}g_{1\beta}}{s + i\omega_\beta}$$
$$c(s) = \sum_\alpha \frac{f^*_{2\alpha}f_{1\alpha}}{s + i\omega_\alpha} + \sum_\beta \frac{g^*_{1\beta}g_{2\beta}}{s + i\omega_\beta} \qquad (1.23)$$
$$d(s) = s + i\omega_2 + \sum_\alpha \frac{|f_{1\alpha}|^2}{s + i\omega_\alpha} + \sum_\beta \frac{|g_{1\beta}|^2}{s + i\omega_\beta}$$
$$F_0(s) = X_0 - i\sum_\alpha \frac{f^*_{1\alpha}R_\alpha(0)}{s + i\omega_\alpha} - i\sum_\beta \frac{g^*_{2\beta}S_\beta(0)}{s + i\omega_\beta}$$

$$G_0(s) = Y_0 - i\sum_{\alpha}\frac{f^*_{2\alpha}R_\alpha(0)}{s+i\omega_\alpha} - i\sum_{\beta}\frac{g^*_{1\beta}S_\beta(0)}{s+i\omega_\beta}$$

poderemos escrever a (1.22) como

$$M(s)\psi'(s) = \phi_0(s) \tag{1.24}$$

onde

$$M(s) \equiv \begin{bmatrix} a(s) & b(s) \\ c(s) & d(s) \end{bmatrix}, \quad \psi'(s) \equiv \begin{bmatrix} X'(s) \\ Y'(s) \end{bmatrix} \quad e \quad \phi_0(s) = \begin{bmatrix} F_0(s) \\ G_0(s) \end{bmatrix}$$

A (1.24) nos mostra que $\psi'(s) = M^{-1}(s)\phi_0(s)$ e, portanto, tomando a transformada inversa de $\psi'(s)$ e substituindo s por $\varepsilon + iy$, teremos:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M^{-1}(\varepsilon+iy)\phi_0(\varepsilon+iy)\; e^{iyt}e^{\varepsilon t}\, dy \tag{1.25}$$

Nosso primeiro passo para a resolução de (1.25), será a determinação de $M^{-1}(\varepsilon+iy)$. Para tal, vamos inicialmente redefinir as expressões de (1.23) em função de $\varepsilon+iy$. Então, transformando $\sum_\alpha$ e $\sum_\beta$ por $\int_0^\infty d\omega_\alpha \rho(\omega_\alpha)$ e $\int_0^\infty d\omega_\beta \rho(\omega_\beta)$, usando a (1.19) e a identidade (1.4), teremos:

$$\begin{aligned} a(\varepsilon+iy) &= i[y + \omega_1 + \Delta\omega_1(-y) - i\eta_1(-y)] \\ b(\varepsilon+iy) &= i[\sqrt{AB}\; e^{i\varphi}(\Delta(-y) - i\eta(-y))] \\ c(\varepsilon+iy) &= i[\sqrt{AB}\; e^{-i\varphi}(\Delta(-y) - i\eta(-y))] \\ d(\varepsilon+iy) &= i[y + \omega_2 + \Delta\omega_2(-y) - i\eta_2(-y)] \end{aligned} \tag{1.26}$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta\omega_1(-y) &\equiv A\Delta\omega_A(-y) + B\Delta\omega_B(-y) \\ \Delta\omega_2(-y) &\equiv B\Delta\omega_A(-y) + A\Delta\omega_B(-y) \\ \eta_1(-y) &\equiv A\eta_A(-y) + B\eta_B(-y) \\ \eta_2(-y) &\equiv B\eta_A(-y) + A\eta_B(-y) \\ \Delta(-y) &\equiv \Delta\omega_A(-y) - \Delta\omega_B(-y) \\ \eta(-y) &\equiv \eta_A(-y) - \eta_B(-y) \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$e \quad \Delta\omega_A(-y) \equiv - \int \frac{\rho(\omega_\alpha)|f_\alpha|^2 d\omega_\alpha}{y+\omega_\alpha}, \qquad \Delta\omega_B(-y) \equiv - \int \frac{\rho(\omega_\beta)|g_\beta|^2 d\omega_\beta}{y+\omega_\beta}$$

$$\eta_A(-y) \equiv \pi\rho(-y)|f(-y)|^2 , \qquad \eta_B(-y) \equiv \pi\rho(-y)|g(-y)|^2$$

(para maiores detalhes destes cálculos basta rever o procedimento seguido na seção (1.1) quando estabelecemos fórmulas para $\Delta\omega_A$ e η_A).

A matriz $M^{-1}(\varepsilon+iy)$ é facilmente calculada como:

$$M^{-1}(\varepsilon+iy) = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

onde a, b, c e d são dados pela (1.26). Como a matriz $M^{-1}(\varepsilon+iy)$ será integrada na (1.25) podemos agora investigar quais as contribuições que M^{-1} dá para os polos do integrando, ou melhor, quais são os zeros de det $M(\varepsilon+iy)$. Para achar as raízes de det $M(\varepsilon+iy) = 0$, temos de resolver a seguinte equação:

$$[y + \omega_1 + \Delta\omega_1(-y) - i\eta_1(-y)][y + \omega_2 + \Delta\omega_2(-y) - i\eta_2(-y)]$$
$$- AB[\Delta(-y) - i\eta(-y)]^2 = 0 \qquad (1.28)$$

Se agora definirmos:

$$\omega_1 + \Delta\omega_1(-y) - i\eta_1(-y) \equiv a'(-y)$$

e

$$\omega_2 + \Delta\omega_2(-y) - i\eta_2(-y) \equiv d'(-y)$$

a (1.28) passa a ser escrita como:

$$[y + a'(-y)][y + d'(-y)] - c(-y)^2 = 0 ,$$

que admite as seguintes raízes:

$$y = \frac{-a'(-y)-d'(-y)}{2} + \frac{-a'(-y)+d'(-y)}{2} \sqrt{1 + \frac{4c(-y)^2}{[a'(-y)-d'(-y)]^2}}$$

e

$$y = \frac{-a'(-y)-d'(-y)}{2} - \frac{-a'(-y)+d'(-y)}{2}\sqrt{1+\frac{4c(-y)^2}{[a'(-y)-d'(-y)]^2}}$$

Mas, como $\Delta\omega_A(-y)$, $\Delta\omega_B(-y)$, $\eta_A(-y)$ e $\eta_B(-y)$ são funções proporcionais a $|f_\alpha|^2$ ou $|g_\beta|^2$, devem ser muito menores que $(\omega_1 - \omega_2)$ e consequentemente $4c^2/(a-d)^2$ será na pior das hipóteses um complexo com partes real e imaginária da ordem de $\eta^2/|K|^2$. Portanto, as raízes podem ser aproximadas por:

$$y = -\omega_1 - \Delta\omega_1(-y) + i\eta_1(-y)$$

ou

$$y = -\omega_2 - \Delta\omega_2(-y) + i\eta_2(-y)$$

Estas duas equações são facilmente solúveis se admitimos que as raízes devam ser $-\omega_1 + \delta_1$ e $-\omega_2 + \delta_2$ para a 1ª e 2ª equações respectivamente. Seguindo então o procedimento tomado na seção 1.1 , teremos as seguintes raízes:

$$y_1 = -\omega_1 - \Delta\omega_1(\omega_1) + i\eta_1(\omega_1)$$

$$y_2 = -\omega_2 - \Delta\omega_2(\omega_2) + i\eta_2(\omega_2)$$

ou ainda se chamarmos $\Delta\omega_1(\omega_1) \equiv \Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2(\omega_2) \equiv \Delta\omega_2$, $\eta_1(\omega_1) \equiv$ $\equiv \eta_1$ e $\eta_2(\omega_2) \equiv \eta_2$ teremos:

$$y_1 = -\omega_1 - \Delta\omega_1 + i\eta_1$$

$$y_2 = -\omega_2 - \Delta\omega_2 + i\eta_2$$

Desta forma, a matriz $M^{-1}(\varepsilon+iy)$ pode ser aproximada por:

$M^{-1}(\varepsilon+iy) \simeq$

$$\simeq -i\begin{bmatrix} \dfrac{1}{y+\omega_1+\Delta\omega_1-i\eta_1} & \dfrac{-\sqrt{AB}\, e^{i\varphi}[\Delta(-y)-i\ (-y)]}{(y+\omega_1+\Delta\omega_1-i\eta_1)(y+\omega_2+\Delta\omega_2-i\eta_2)} \\ \dfrac{-\sqrt{AB}\, e^{-i\varphi}[\Delta(-y)-i\eta(-y)]}{(y+\omega_1+\Delta\omega_1-i\eta_1)(y+\omega_2+\Delta\omega_1-i\eta_2)} & \dfrac{1}{y+\omega_2+\Delta\omega_2-i\eta_2} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

O outro termo que será integrado é $\phi_0(\varepsilon+iy)$ que pode ser escrito em função de suas componentes como:

$$F_0(\varepsilon+iy) = X_0 - \sum_\alpha \frac{f_{1\alpha}^* R_\alpha(0)}{y+\omega_\alpha - i\varepsilon} - \sum_\beta \frac{g_{2\beta}^* S_\beta(0)}{y+\omega_\beta - i\varepsilon} \tag{1.30}$$

e

$$G_0(\varepsilon+iy) = Y_0 - \sum_\alpha \frac{f_{2\alpha}^* R_\alpha(0)}{y+\omega_\alpha - i\varepsilon} - \sum_\beta \frac{g_{2\beta}^* S_\beta(0)}{y+\omega_\beta - i\varepsilon} \tag{1.31}$$

Usando então a (1.29), (1.30), (1.31) e integrando a (1.25) pelo método de resíduos teremos:

$$X(t) = X_0 e^{-i\omega_1 t} e^{-\eta_1 t} - \sum_\alpha f_{1\alpha}^* R_\alpha(0) e^{-i\omega_\alpha t} \frac{[1 - e^{i(\omega_\alpha-\omega_1)t} e^{-\eta_1 t}]}{\omega_1 - \omega_\alpha - i\eta_1}$$
$$- \sum_\beta g_{2\beta}^* S_\beta(0)\; e^{-i\omega_\beta t} \frac{[1 - e^{i(\omega_\beta-\omega_1)t}\; e^{-\eta_1 t}]}{\omega_1 - \omega_\beta - i\eta_1} \tag{1.32}$$

e

$$Y(t) = Y_0 e^{-i\omega_2 t} e^{-\eta_2 t} - \sum_\alpha f_{2\alpha}^* R_\alpha(0) e^{-i\omega_\alpha t} \frac{[1 - e^{i(\omega_\alpha-\omega_2)t} e^{-\eta_2 t}]}{\omega_2 - \omega_\alpha - i\eta_2}$$
$$- \sum_\beta g_{1\beta}^* S_\beta(0)\; e^{-i\omega_\beta t} \frac{[1 - e^{i(\omega_\beta-\omega_2)t} e^{-\eta_2 t}]}{\omega_2 - \omega_\beta - i\eta_2} \tag{1.33}$$

onde substituímos $\omega_1 + \Delta\omega_1$ por ω_1 e $\omega_2 + \Delta\omega_2$ por ω_2, já que $\Delta\omega$ representa um pequeno deslocamento das frequências. Termos da orden de $\eta/|K|$, provenientes das funções $b(y)$ e $c(y)$, foram desprezados coerentemente com as aproximações nas raízes de $\det M(iy+\varepsilon) = 0$. Estes termos são responsáveis pela interação dos modos (X) e (Y) através do reservatório , efeitos estes, que não serão levados em conta de agora em diante.

Das equações (1.32) e (1.33) vemos que as constantes de relaxação dos modos X e Y são dadas respectivamente por η_1 e η_2 que já foram definidas anteriormente como:

$$\eta_1 \equiv A\eta_A(\omega_1) + B\eta_B(\omega_1) \quad \text{e} \quad \eta_2 \equiv B\eta_A(\omega_2) + A\eta_B(\omega_2)$$

Vamos passar então a analisá-las em duas situações distintas:

1º) Se não existir cruzamento entre as relações de dispersão dos sistemas (A) e (B), e $(\omega_A - \omega_B) >> 2|K|$, temos pela (1.15) $A \simeq 1$ e $B \simeq 0$ e consequentemente $\omega_1 \simeq \omega_A$ e $\omega_2 \simeq \omega_B$ (pela 1.12) o que nos dá:

$$\eta_1 \simeq \eta_A \quad \text{e} \quad \eta_2 \simeq \eta_B$$

2º) Quando existe o cruzamento temos três diferentes hipóteses:

a) $k << \underset{\sim}{k}$ ou $(\omega_A - \omega_B) >> 2|K|$, que recai no caso estudado anteriormente, ou seja, $\eta_1 \simeq \eta_A$ e $\eta_2 \simeq \eta_B$.

b) $k \simeq \underset{\sim}{k}$ ou $|\omega_A - \omega_B| << 2|K|$
Neste caso, pela (1.15) temos que $A \simeq B \simeq \frac{1}{2}$ e pela (1.12) que $\omega_1 - \omega_2 \simeq 2|K|$. Como por hipótese $\omega_1 >> |K|$, nesta região as frequências normais são praticamente as mesmas, o que nos permite escrever

$$\eta_1 \simeq \eta_2 \simeq \frac{\eta_A + \eta_B}{2}$$

c) $k >> \underset{\sim}{k}$ ou $(\omega_B - \omega_A) >> 2|K|$.
Neste caso, $A \simeq 0$, $B \simeq 1$, $\omega_1 \simeq \omega_B$ e $\omega_2 \simeq \omega_A$, e portanto: $\eta_1 \simeq \eta_B$ e $\eta_2 \simeq \eta_A$.

Neste ponto, se aproximássemos as expressões de η_1 e η_2 por $\eta_1 \simeq A\eta_A + B\eta_B$ e $\eta_2 \simeq B\eta_A + A\eta_B$, poderíamos pensar que esta aproximação só teria validade na região próxima ao cruzamento, ou seja, $|\omega_A - \omega_B| < 2|K|$, pois nesta região as frequências normais estão bem próximas. Isto seria devido ao fato de que $\eta_B \equiv \eta_B(\omega_B)$ enquanto que o η_B que aparece na fórmula de η_1 é $\eta_B(\omega_1)$ portanto precisaríamos ter ω_B não muito diferente de ω_1. O mesmo ocorreria para η_A que aparece em η_2 que é $\eta_A(\omega_2)$ enquanto $\eta_A \equiv \eta_A(\omega_A)$. Porém para pontos fora desta região, os termos A ou B se encarregam de anular as parcelas onde compareçam $\eta_B(\omega_A)$ ou $\eta_A(\omega_B)$.

A análise feita tanto no 1º caso como no 2º (a, b e c) estão de acordo com o que já foi discutido no final da seção (1.2) sobre o comportamento dos modos (X) e (Y) para os mesmos casos.

Para encerrar esta seção, podemos aplicar a (1.32) para calcular o número $<X^+X>_{RS}$, que é o operador reduzido X^+X. Multiplicando a (1.32) pelo seu hermitiano conjugado, e usando que, $<R^+_\alpha R_{\alpha'}> = \delta_{\alpha\alpha'} N_\alpha$, $<S^+_\beta S_{\beta'}> = \delta_{\beta\beta'} N_\beta$ e que os demais valores médios envolvendo operadores do reservatório são nulos, podemos escrever com o auxílio da (1.19) que:

$$<X^+X>_{RS} = X_0^+X_0 e^{-2\eta_1 t} +$$

$$+ \sum_\alpha A|f_\alpha|^2 N_\alpha \frac{[1-e^{-i(\omega_\alpha-\omega_1)t}e^{-\eta_1 t}][1-e^{i(\omega_\alpha-\omega_1)t}e^{-\eta_1 t}]}{(\omega_\alpha-\omega_1)^2+\eta_1^2}$$

$$+ \sum_\beta B|g_\beta|^2 N_\beta \frac{[1-e^{-i(\omega_\beta-\omega_1)t}e^{-\eta_1 t}][1-e^{i(\omega_\beta-\omega_1)t}e^{-\eta_1 t}]}{(\omega_\beta-\omega_1)^2+\eta_1^2}$$

que é uma expressão análoga à (1.8). Transformando então $\sum_\alpha$ em $\int_0^\infty d\omega_\alpha \rho(\omega_\alpha)$ e $\sum_\beta$ em $\int_0^\infty d\omega_\beta \rho(\omega_\beta)$ e seguindo o procedimento tomado em (1.9) teremos:

$$<X^+X>_{RS} = X_0^+X_0\ e^{-2\eta_1 t} + \frac{A\eta_A(\omega_1)}{\eta_1} N(\omega_1)[1-e^{-2\eta_1 t}]$$
$$+ \frac{B\eta_B(\omega_1)}{\eta_1} N(\omega_1)[1-e^{-2\eta_1 t}]$$

Usando então que $\eta_1 = A\eta_A + B\eta_B$, teremos:

$$<X^+X>_{RS} = X_0^+X_0\ e^{-2\eta_1 t} + N(\omega_1)[1-e^{-2\eta_1 t}]$$

Portanto para $t >> 1/2\eta_1$, o número X^+X será dado pela distribuição de Bose.

Analogamente poderíamos obter pela (1.33):

$$<Y^+Y>_{RS} = Y_0^+Y_0\ e^{-2\eta_2 t} + N(\omega_2)[1-e^{-2\eta_2 t}] .$$

CAPÍTULO 2

A EXCITAÇÃO DOS MODOS NORMAIS

No Capítulo 1, fizemos o estudo de um modelo para o acoplamento de dois sistemas ligados a um reservatório. Vamos agora, descrever a produção dos modos (X) e (Y) devido a um determinado tipo de excitação externa e analisar a possível influência deste processo na relaxação dos modos normais. Antes porém, faremos um estudo qualitativo dos tipos de excitações que são de maior interesse nos problemas usualmente tratados na literatura.

Se o campo externo se acopla linearmente com o sistema [9], o problema é facilmente solúvel como veremos agora. Por simplicidade, vamos considerar apenas um oscilador interagindo com o reservatório e a generalização para dois osciladores acoplados será trivial. Neste caso, o acoplamento linear é equivalente a adicionarmos um termo $F(t)$ à 1ª equação do sistema (1.2). Seguindo então o procedimento da seção (1.1), iremos obter uma solução idêntica à (1.7) somada a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F'(\varepsilon+iy)e^{iyt}e^{\varepsilon t}\,dy}{i(y+\omega_A+\Delta\omega_A-i\eta_A-i\varepsilon)},$$

onde $F'(\varepsilon+iy)$ é a transformada de Laplace de $F(t)$. No caso de $F(t) = F_0e^{-i\Omega t}$, teríamos como resultado da integração um termo análogo à 2ª expressão de (1.7) se trocarmos $f_\alpha^*R_\alpha(0)$ por F_0 e ω_α por Ω. Desta forma, vemos que a excitação linear introduz uma modificação na parte estacionária de $a(t)$, sem exercer nenhuma influência na vida média τ_A da fase transiente do sistema ($\tau_A = 1/\eta_A$).

Por outro lado, quando a interação com o campo externo é não linear ou paramétrica [3], pode haver uma mudança na forma de relaxação do sistema enquanto persista esta interação. No caso que estudaremos, por exemplo , apesar da dependência temporal da parte transiente da solução ser bem aproximada por uma exponencial, a "constante de relaxação efetiva" depende do campo aplicado. Esta constante pode inclusive tomar valores negativos, correspondendo ao crescimento exponencial dos modos normais. Ao valor do campo externo que nos fornece tal situação chamamos de "campo crítico". Neste capítulo, vamos nos reter ao estudo de um modelo específico de excitação paramétrica em um dos dois sistemas acoplados, investigando a influência deste processo nos modos normais e calculando os possíveis campos críticos.

2.1. A Hamiltoniana com Excitação Externa

Vamos assumir que a Hamiltoniana possa ser escrita como [8]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_k + \mathcal{H}_{-k} + \mathcal{H}_{ext} \qquad (2.1)$$

onde

$$\mathcal{H}_k \equiv \omega_A a_k^+ a_k + \omega_B b_k^+ b_k + K^* a_k^+ b_k + K a_k b_k^+ + \sum_\alpha (f_\alpha^* a_k^+ R_{k\alpha} + f_\alpha a_k R_{k\alpha}^+)$$
$$+ \sum_\beta (g_\beta^* b_k^+ S_{k\beta} + g_\beta b_k S_{k\beta}^+) + \sum_\alpha \omega_\alpha R_{k\alpha}^+ R_{k\alpha} + \sum_\beta \omega_\beta S_{k\beta}^+ S_{k\beta}$$

$\mathcal{H}_{-k}$ é análoga à $\mathcal{H}_k$, bastando trocar k por -k

$$\mathcal{H}_{ext} \equiv h\sigma^* e^{-i\Omega t}\, a_k^+ a_{-k}^+ + h\sigma e^{i\Omega t} a_k a_{-k}\ ,$$

h é a amplitude de um campo externo aplicado no sistema ((A) + (B) + reservatório), Ω é a sua frequência de oscilação e σ é um complexo proporcional à constante de acoplamento com o campo h. Como podemos notar, a introdução do campo externo deu origem à criação ou aniquilação de pares de quanta de quasi-momenta k e -k no sistema (A), e isto nos levou a explicitar os índices para distinguirmos os diferentes osciladores como já havíamos comentado anteriormente (seção 1.2). Um exemplo real para este modelo é a excitação paramétrica de magnons (sistema (A)) por um campo magnético de radiofrequência [8], quando levamos em conta a interação magnetoelástica.

Devido ao fato de $\mathcal{H}_k$ e $\mathcal{H}_{-k}$ estarem desacopladas, podemos usar a (1.17) para reescrever cada uma destas partes de $\mathcal{H}$ como:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_k = {} & \omega_1 X_k^+ X_k + \omega_2 Y_k^+ Y_k + \sum_\alpha (f_{1\alpha}^* X_k^+ R_{k\alpha} + f_{1\alpha} X_k R_{k\alpha}^+) + \\ & + \sum_\alpha (f_{2\alpha}^* Y_k^+ R_{\alpha k} + f_{2\alpha} Y_k R_{k\alpha}^+) + \sum_\beta (g_{1\alpha}^* Y_k^+ S_{k\alpha} + g_{1\alpha} Y_k S_{k\alpha}^+) \\ & + \sum_\beta (g_{2\beta}^* X_k^+ S_{k\beta} + f_{2\beta} X_k S_{k\beta}^+) + \sum_\alpha \omega_\alpha R_{k\alpha}^+ R_{k\alpha} + \sum_\beta \omega_\beta S_{k\beta}^+ S_{k\beta} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

e obviamente $\mathcal{H}_{-k}$ será igual a $\mathcal{H}_k$ trocando k por -k. Se agora definirmos:

$$\sigma^* hA \equiv h_1 \ , \quad -h\sigma^* \sqrt{AB}\, e^{-i\varphi} \equiv h_{12}^* \quad \text{e} \quad h\sigma^* B e^{-2i\varphi} \equiv h_2^* \qquad (2.3)$$

poderemos escrever $\mathcal{H}_{ext}$ como:

$$\mathcal{H}_{ext} = (h_1^* X_k^+ X_{-k}^+ + h_{12}^* X_k^+ Y_{-k}^+ + h_{12}^* Y_k^+ X_{-k}^+ + h_2^* Y_k^+ Y_{-k}^+) e^{-i\Omega t} + h.c. \qquad (2.4)$$

Nesta nova forma de $\mathcal{H}_{ext}$, vemos que apesar do campo externo só interagir com o sistema (A), o acoplamento entre (A) e (B) faz com que sejam criados ou destruídos diferentes pares de quanta dos modos normais (X) e (Y). Porém, o acoplamento de cada um destes pares com o campo externo será diferente dos demais. Para que este ponto fique mais claro vamos citar rapidamente os possíveis casos:

a) Um par de quanta de (X)

$\underset{-k}{\overset{X}{\longleftarrow}}\underset{k}{\overset{X}{\longrightarrow}}$ acoplamento com o campo : $A\sigma$

b) Um quantum de (X) e outro de (Y)

$\overset{Y}{\underset{-k}{\longleftarrow}}\!\!-\,-\,\bullet\!\!\overset{X}{\underset{k}{\longrightarrow}}$ acoplamento com o campo: $\sqrt{AB}\; e^{i\varphi}\sigma$

c) Um par de quanta de (Y)

$\overset{Y}{\underset{-k}{\longleftarrow}}\!\!-\,-\,\bullet\,-\,-\!\!\overset{Y}{\underset{k}{\longrightarrow}}$ acoplamento com o campo: $B\sigma e^{2i\varphi}$

onde A, B e φ são dados pela (1.16).

Deixaremos para a seção (2.3) maiores detalhes sobre cada processo.

2.2. A Evolução Temporal Formal dos Modos Normais

Vamos inicialmente determinar a equação de movimento do modo X_k. Como $\dot{X}_k = -i[X_k, \mathcal{H}]$, podemos escrever:

$$\dot{X}_k = -i\omega_1 X_k - i\sum_\alpha f^*_{1\alpha} R_{k\alpha} - i\sum_\beta g^*_{2\beta} S_\beta - ih^*_1 X^+_{-k} e^{-i\Omega t} - ih^*_{12} Y^+_{-k} e^{-i\Omega t}$$

Para eliminar a dependência temporal explícita desta equação, vamos escrever os operadores $X_{\pm k}$, $Y_{\pm k}$, $R_{\pm k\alpha}$ e $S_{\pm k\beta}$ como $\tilde{X}_{\pm k} e^{-i\Omega t/2}$, $\tilde{Y}_{\pm k} e^{-i\Omega t/2}$, $\tilde{R}_{\pm k\alpha} e^{-i\Omega t/2}$ e $\tilde{S}_{\pm k\beta} e^{-i\Omega t/2}$ respectivamente, o que nos leva a:

$$\dot{\tilde{X}}_k = -i\left(\omega_1 - \frac{\Omega}{2}\right)\tilde{X}_k - i\sum_\alpha f^*_{1\alpha}\tilde{R}_{k\alpha} - i\sum_\beta g^*_{2\beta}\tilde{S}_{k\beta} - ih^*_1 \tilde{X}^+_{-k} - ih^*_{12}\tilde{Y}^+_{-k}$$

Portanto, para os operadores $\tilde{O}$ a equação de movimento tem apenas dependência temporal implícita. Repetindo o mesmo raciocínio para todos os operadores de $\mathcal{H}$ e chamando $\omega_1 - \frac{\Omega}{2}$, $\omega_2 - \frac{\Omega}{2}$, $\omega_\alpha - \frac{\Omega}{2}$, $\omega_\beta - \frac{\Omega}{2}$ de λ_1, λ_2, λ_α, λ_β respectivamente, teremos o seguinte sistema:

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{X}}_k &= -\,i\lambda_1\tilde{X}_k - i\sum_\alpha f^*_{1\alpha}\tilde{R}_{k\alpha} - i\sum_\beta g^*_{2\beta}\tilde{S}_{k\beta} - ih_1^*\tilde{X}^+_{-k} - ih^*_{12}\tilde{Y}^+_{-k} \\
\dot{\tilde{Y}}_k &= -\,i\lambda_2\tilde{Y}_k - i\sum_\alpha f^*_{2\alpha}\tilde{R}_{k\alpha} - i\sum_\beta g^*_{1\beta}\tilde{S}_{k\beta} - ih_2\tilde{Y}^+_{-k} - ih^*_{12}\tilde{X}^+_{-k} \\
\dot{\tilde{R}}_{k\alpha} &= -\,i\lambda_\alpha\tilde{R}_{k\alpha} - if_{1\alpha}\tilde{X}_k - if_{2\alpha}\tilde{Y}_k \\
\dot{\tilde{S}}_{k\beta} &= -\,i\lambda_\beta\tilde{S}_{k\beta} - ig_{2\beta}\tilde{X}_k - ig_{1\beta}\tilde{Y}_k \\
\dot{\tilde{X}}^+_{-k} &= i\lambda_1\tilde{X}^+_{-k} + i\sum_\alpha f_{1\alpha}\tilde{R}^+_{-k\alpha} + i\sum_\beta g_{2\beta}\tilde{S}^+_{-k\beta} + ih_1\tilde{X}_k + ih_{12}\tilde{Y}_k \\
\dot{\tilde{Y}}^+_{-k} &= i\lambda_2\tilde{Y}^+_{-k} + i\sum_\alpha f_{2\alpha}\tilde{R}^+_{-k\alpha} + i\sum_\beta g_{1\beta}\tilde{S}^+_{-k\beta} + ih_2\tilde{Y}_k + ih_{12}\tilde{X}_k \\
\dot{\tilde{R}}^+_{-k\alpha} &= i\lambda_\alpha\tilde{R}^+_{-k\alpha} + if^*_{1\alpha}\tilde{X}^+_{-k} + if^*_{2\alpha}\tilde{Y}^+_{-k} \\
\dot{\tilde{S}}^+_{-k\beta} &= i\lambda_\beta\tilde{S}^+_{-k\beta} + ig^*_{2\beta}\tilde{X}^+_{-k} + ig^*_{1\beta}\tilde{Y}^+_{-k}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Assumindo que a interação externa tenha começado em $t = 0$ e que neste instante conhecemos $X_{\pm k}(0)$, $Y_{\pm k}(0)$, $R_{\pm k\alpha}(0)$ e $S_{\pm k\beta}(0)$, podemos seguir o procedimento usado nas seções (1.1) e (1.3) e tomar a transformada de Laplace de todos os operadores envolvidos em (2.5). Desta forma, se lembrarmos das definições (1.19), (2.3) e ainda definirmos

$$
\begin{aligned}
a(s) &\equiv s + i\lambda_1 + A\sum_\alpha \frac{|f_\alpha|^2}{s + i\lambda_\alpha} + B\sum_\beta \frac{|g_\beta|^2}{s + i\lambda_\beta} \\
b(s) &\equiv -\sqrt{AB}\, e^{i\varphi}\sum_\alpha \frac{|f_\alpha|^2}{s + i\lambda_\alpha} + \sqrt{AB}\, e^{i\varphi}\sum_\beta \frac{|g_\beta|^2}{s + i\lambda_\beta} \\
c(s) &\equiv -\sqrt{AB}\, e^{-i\varphi}\sum_\alpha \frac{|f_\alpha|^2}{s + i\lambda_\alpha} + \sqrt{AB}\, e^{-i\varphi}\sum_\beta \frac{|g_\beta|^2}{s + i\lambda_\beta} \\
d(s) &\equiv s + i\lambda_2 + B\sum_\alpha \frac{|f_\alpha|^2}{s + i\lambda_\alpha} + A\sum_\beta \frac{|g_\beta|^2}{s + i\lambda_\beta}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$\ell \equiv iAh\sigma$$

$$m \equiv -ih\sigma\sqrt{AB}\, e^{i\varphi}$$

$$n \equiv ih\sigma Be^{2i\varphi}$$

$$F_k(s) \equiv X_k(0) - i \sum_\alpha \frac{f^*_{1\alpha} R_{k\alpha}(0)}{s + i\lambda_\alpha} - i \sum_\beta \frac{g^*_{2\beta} S_{k\beta}(0)}{s + i\lambda_\beta}$$

$$G_k(s) \equiv Y_k(0) - i \sum_\alpha \frac{f^*_{2\alpha} R_{k\alpha}(0)}{s + i\lambda_\alpha} - i \sum_\beta \frac{g^*_{1\beta} S_{k\beta}(0)}{s + i\lambda_\beta}$$

e $\bar{a}(s)$, $\bar{b}(s)$, $\bar{c}(s)$, $\bar{d}(s)$, $\bar{F}_k(s)$ e $\bar{G}_k(s)$ como $a^*(s^*)$, $b^*(s^*)$, $c^*(s^*)$, $d^*(s^*)$, $F^+_k(s^*)$ e $G^+_k(s^*)$, o sistema (2.5) transformado será escrito como:

$$\begin{aligned}
&a(s)\tilde{X}'_k(s) - \ell^*\tilde{X}^{+'}_{-k}(s) + b(s)\tilde{Y}'_k(s) - m^*\tilde{Y}^{+'}_{-k}(s) = F_k(s)\\
&-\ell\tilde{X}'_k(s) + \bar{a}(s)\tilde{X}^{+'}_{-k}(s) - m\tilde{Y}'_k(s) + \bar{b}(s)\tilde{Y}^{+'}_{-k}(s) = \bar{F}_{-k}(s)\\
&c(s)\tilde{X}'_k(s) - m^*\tilde{X}^{+'}_{-k}(s) + d(s)\tilde{Y}'_k(s) - n^*\tilde{Y}^{+'}_{-k}(s) = G_k(s)\\
&-m\tilde{X}'_k(s) + \bar{c}(s)\tilde{X}^{+'}_{-k}(s) - n\tilde{Y}'_k(s) + \bar{d}(s)\tilde{Y}^{+'}_{-k}(s) = \bar{G}_{-k}(s)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Podemos ainda escrever o sistema (2.7) em forma matricial como:

$$M(s)\psi'(s) = \phi_0(s) \tag{2.8}$$

onde

$$\psi'(s) \equiv \begin{bmatrix} \tilde{X}'_k(s) \\ \tilde{X}^{+'}_{-k}(s) \\ \tilde{Y}'_k(s) \\ \tilde{Y}^{+'}_{-k}(s) \end{bmatrix}, \quad \phi_0(s) \equiv \begin{bmatrix} F_k(s) \\ \bar{F}_{-k}(s) \\ G_k(s) \\ \bar{G}_{-k}(s) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(s) \equiv \begin{bmatrix} a(s) & -\ell^* & b(s) & -m^* \\ -\ell & \bar{a}(s) & -m & \bar{b}(s) \\ c(s) & -m^* & d(s) & -n^* \\ -m & \bar{c}(s) & -n & \bar{d}(s) \end{bmatrix}$$

Desta forma, a transformada inversa de $\psi'(s)$ é dada por:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} M^{-1}(s)\phi_0(s)e^{st}ds \ . \qquad (2.9)$$

Para determinar $M^{-1}(s)$, vamos inicialmente escrever a matriz M como $M(s) = s - L'(s)$. Então, usando o resultado

$$f(A) = \sum_{\ell} f(a_\ell) \prod_{j\neq\ell} \frac{a_j - A}{a_j - a_\ell} \qquad (2.10)$$

onde os a_ℓ são autovalores da matriz A [22], a matriz $M^{-1}(s)$ será escrita como:

$$M^{-1}(s) = [s - L'(s)]^{-1} = \sum_{k} \frac{1}{s - p'_\ell} \sum_{j\neq\ell} \frac{p'_j - L'(s)}{p'_j - p'_\ell} \qquad (2.11)$$

Para calcular os autovalores p'_ℓ de L' precisamos achar as raízes de $\det[s - L'(s)] = 0$, ou seja, as raízes de $\det M(s) = 0$. Por outro lado, para resolvermos a (2.9) devemos fazer a substituição $s = \varepsilon + iy$, o que nos leva a

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M^{-1}(\varepsilon+iy)\ \phi_0(\varepsilon+iy)\ e^{iyt}e^{\varepsilon t}\ dy \qquad (2.12)$$

Esta mesma substituição na (2.11) nos dará:

$$M^{-1}(\varepsilon+iy) = \sum_{\ell} \frac{-i}{y - p_\ell - i\varepsilon} \prod_{j\neq\ell} \frac{p_j - L(iy)}{p_j - p_\ell} \qquad (2.13)$$

onde

$$p_\ell \equiv -ip'_\ell \quad e \quad L \equiv -iL'(iy) = y + iM(iy) \qquad (2.14)$$

Como p'_k é raiz de $\det M(s) = 0$ e $s = iy$, $-ip'_\ell$ será raiz de $\det M(iy) = 0$, que são os p_ℓ da (2.13). O cálculo destas raízes será efetuado para algumas situações especiais em uma seção posterior, já que neste ponto estamos interessados apenas na obtenção de uma expressão formal para a evolução dos operadores.

Se definirmos

$$\varphi_\alpha \equiv \begin{bmatrix} -f_{1\alpha}^{*}R_{k\alpha}(0) \\ f_{1\alpha}R_{-k\alpha}^{+}(0) \\ -f_{2\alpha}^{*}R_{k\alpha}(0) \\ f_{2\alpha}R_{-k\alpha}^{+}(0) \end{bmatrix} \quad e \quad \varphi_\beta \equiv \begin{bmatrix} -g_{2\beta}^{*}S_{k\beta}(0) \\ g_{2\beta}S_{-k\beta}^{+}(0) \\ -g_{1\beta}^{*}S_{k\beta}(0) \\ g_{1\beta}S_{-k\beta}^{+}(0) \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

o vetor $\phi_0(\varepsilon+iy)$ será reescrito como:

$$\phi_0(\varepsilon+iy) = \psi(0) + \left(\frac{I+\sigma_z}{2}\right)\left[\sum_\alpha \frac{\varphi_\alpha}{y+\lambda_\alpha - i\varepsilon} + \sum_\beta \frac{\varphi_\beta}{y+\lambda_\beta - i\varepsilon}\right] + \left(\frac{I-\sigma_z}{2}\right)\left[\sum_\alpha \frac{\varphi_\alpha}{y-\lambda_\alpha - i\varepsilon} + \sum_\beta \frac{\varphi_\beta}{y-\lambda_\beta - i\varepsilon}\right] \tag{2.16}$$

onde, $\sigma_z = \begin{bmatrix} \tau_z & 0 \\ 0 & \tau_z \end{bmatrix}$, τ_z é a matriz de Pauli $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e I é a identidade 4×4.

Substituindo a (2.13) e a (2.16) na (2.12) e efetuando a integral por resíduos, chegaremos facilmente a:

$$\psi(t) = \sum_\ell e^{ip_\ell t} E_\ell \psi(0) + \sum_{\ell\alpha} \frac{e^{ip_\ell t} - e^{-i\lambda_\alpha t}}{\lambda_\alpha + p_\ell} E_\ell \left(\frac{I+\sigma_z}{2}\right)\varphi_\alpha + \sum_{\ell\alpha} \frac{e^{ip_\ell t} - e^{i\lambda_\alpha t}}{p_\ell - \lambda_\alpha} E_\ell \left(\frac{I-\sigma_z}{2}\right)\varphi_\alpha + \sum_{\ell\beta} \frac{e^{ip_\ell t} - e^{-i\lambda_\beta t}}{\lambda_\beta + p_\ell} E_\ell \left(\frac{I+\sigma_z}{2}\right)\varphi_\beta + \sum_{\ell\beta} \frac{e^{ip_\ell t} - e^{i\lambda_\beta t}}{p_\ell - \lambda_\beta} E_\ell \left(\frac{I-\sigma_z}{2}\right)\varphi_\beta \tag{2.17}$$

onde

$$E_\ell \equiv \prod_{j\neq\ell} \frac{p_j - L}{p_j - p_\ell} \tag{2.18}$$

é o projetor sobre o auto-estado do autovalor p_ℓ.

Convém notar que na integração, fizemos L constante, o que iremos justificar na próxima seção deste capítulo, onde trabalharemos com a matriz L(iy) explicitamente. Usando a (2.10) podemos ainda escrever a (2.17) numa forma bastante elegante:

$$\begin{aligned}\psi(t) = e^{iLt}\psi(0) &+ \frac{1}{2}\sum_\alpha \{(e^{iLt} - e^{-i\lambda_\alpha t})(L+\lambda_\alpha)^{-1}(I+\sigma_z) + \\ &+ (e^{iLt} - e^{i\lambda_\alpha t})(L-\lambda_\alpha)^{-1}(I-\sigma_z)\}\varphi_\alpha + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_\beta \{(e^{iLt} - e^{-i\lambda_\beta t})(L+\lambda_\beta)^{-1}(I+\sigma_z) + \\ &+ (e^{iLt} - e^{i\lambda_\beta t})(L-\lambda_\beta)^{-1}(I-\sigma_z)\}\varphi_\beta \qquad (2.19)\end{aligned}$$

que está de acordo com a expressão da evolução temporal dos operadores obtida em [8].

2.3. O cálculo dos Campos Críticos

Para que possamos estudar em detalhes a evolução temporal de $\psi(t)$ dado pela (2.17), vamos inicialmente calcular os p_ℓ. Em particular, estaremos interessados nas partes imaginárias de p_ℓ, que vão essencialmente, regular a variação de intensidade dos modos X ou Y. Vamos verificar que existe um valor $h = h_c$, tal que, se $h < h_c$, $\psi(t)$ possui uma parte transiente que decai exponencialmente e outra parte que permanece estacionária depois de decorrido um certo tempo τ. Entretanto, se $h > h_c$ a solução é instável e cresce exponencialmente no tempo.

Vamos então escrever a (2.7) em função de $iy + \varepsilon$ e transformar $\sum_\alpha$ e $\sum_\beta$ que aí aparecem por

$$\int_0^\infty d\omega_\alpha \rho(\omega_\alpha) \quad \text{e} \quad \int_0^\infty d\omega_\beta \rho(\omega_\beta) \ ,$$

respectivamente. Lembrando ainda das definições de (1.27), chegaremos a:

$$M(iy) = i \begin{bmatrix} a'(y) & Ah\sigma^* & \sqrt{AB}\, e^{i\varphi}\bar{\gamma} & -h\sqrt{AB}\, e^{-i\varphi}\sigma^* \\ -Ah\sigma & \bar{a}'(y) & h\sqrt{AB}\, e^{i\varphi}\sigma & \sqrt{AB}\, e^{-i\varphi}\gamma \\ \sqrt{AB}\, e^{-i\varphi}\bar{\gamma} & -h\sqrt{AB}\, e^{-i\varphi}\sigma^* & d'(y) & hBe^{-2i\varphi}\sigma^* \\ h\sqrt{AB}\, e^{i\varphi}\sigma & \sqrt{AB}\, e^{i\varphi}\gamma & -hBe^{2i\varphi}\sigma & \bar{d}'(y) \end{bmatrix}$$

onde

$$a'(y) \equiv y + \lambda_1 + \Delta\omega_1(-y + \tfrac{\Omega}{2}) - i\eta_1(-y + \tfrac{\Omega}{2})$$

$$\bar{a}'(y) \equiv y - \lambda_1 - \Delta\omega_1(y + \tfrac{\Omega}{2}) - i\eta_1(y + \tfrac{\Omega}{2})$$

$$d'(y) \equiv y + \lambda_2 + \Delta\omega_2(-y + \tfrac{\Omega}{2}) - i\eta_2(-y + \tfrac{\Omega}{2})$$

$$\bar{d}'(y) \equiv y - \lambda_2 - \Delta\omega_2(y + \tfrac{\Omega}{2}) - i\eta_2(y + \tfrac{\Omega}{2})$$

$$\gamma \equiv i[\Delta\omega_A(y + \tfrac{\Omega}{2}) - \Delta\omega_B(y + \tfrac{\Omega}{2})] - [\eta_A(y + \tfrac{\Omega}{2}) - \eta_B(y + \tfrac{\Omega}{2})]$$

e $\bar{\gamma}$ é idêntico a γ se trocarmos i por $-i$ e y por $-y$. Como podemos notar, os termos γ e $\bar{\gamma}$, são aqueles responsáveis pela interação dos modos normais através do reservatório, que desprezamos na seção (1.3). Portanto, para estudarmos a influência do campo externo nos modos X e Y calculados na aproximação usada na seção (1.3), devemos desprezar os termos γ e $\bar{\gamma}$ nos nossos cálculos atuais. Podemos ainda fazer outra aproximação na matriz M(iy) se lembrarmos que quando $h \to 0$, as raízes de det M(iy) = 0 são dadas como soluções de $a'(y)\bar{a}'(y)d'(y)\bar{d}'(y) = 0$. Isto nos permite eliminar a dependência em y das funções $\Delta\omega_i(y + \Omega/2)$ e $\eta_i(y + \Omega/2)$ como vimos no capítulo 1. Se agora levarmos em conta que $h << \omega_1$ e ω_2 poderemos ainda usar o mesmo tipo de argumento para substituir $\Delta\omega_i(y + \Omega/2)$ e $\eta_i(y + \Omega/2)$ por $\Delta\omega_i(\omega_i)$

e $\eta_i(\omega_i)$. Desta forma, aproximando λ_i por $\lambda_i + \Delta\omega_i$, a matriz M(iy) será reescrita em forma mais simples como:

$$M(iy) = i\begin{bmatrix} y+\lambda_1-i\eta_1 & Ah\sigma^* & 0 & -h\sigma^*\sqrt{AB}\,e^{-i\varphi} \\ -Ah & y-\lambda_1-i\eta_1 & h\sigma\sqrt{AB}\,e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & -h\sigma^*\sqrt{AB}\,e^{-i\varphi} & y+\lambda_2-i\eta_2 & h\sigma^* Be^{-2i\varphi} \\ h\sigma\sqrt{AB}\,e^{i\varphi} & 0 & -h\sigma Be^{2i\varphi} & y-\lambda_2-i\eta_2 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Esta forma simplificada de M(iy) nos permite calcular facilmente os p_ℓ e os projetores E_ℓ da (2.17). Para obtermos os autovalores p_ℓ, devemos calcular det M(iy) = 0, o que nos leva a:

$$\begin{aligned} &y^4 - 2i(\eta_1 + \eta_2)y^3 - [\lambda_1^2 + \eta_1^2 + \lambda_2^2 + \eta_2^2 + 4\eta_1\eta_2 - |\sigma|^2h^2]y^2 \\ &+ i[2\eta_1(\lambda_2^2 + \eta_2^2) + 2\eta_2(\lambda_1^2 + \eta_1^2) - 2B^2|\sigma|^2h^2\eta_1 - 2A^2|\sigma|^2h^2\eta_2 \\ &- 2AB|\sigma|^2h^2(\eta_1 + \eta_2)]y + (\lambda_1^2 + \eta_1^2)(\eta_2^2 + \eta_2^2) \\ &+ h^2|\sigma|^2[(A\lambda_2 + B\lambda_1)^2 + (A\eta_2 + B\eta_1)^2] = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

enquanto que para o cálculo dos projetores devemos determinar a matriz L, que com o auxílio da (2.14), é dada por

$$L = \begin{bmatrix} -\lambda_1+i\eta_1 & -A\sigma^* h & 0 & h\sigma^*\sqrt{AB}\,e^{-i\varphi} \\ A\sigma h & \lambda_1+i\eta_1 & -h\sigma\sqrt{AB}\,e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & h\sigma^*\sqrt{AB}\,e^{-i\varphi} & -\lambda_2+i\eta_2 & -h\sigma^* B\,e^{-2i\varphi} \\ -h\sigma\sqrt{AB}\,e^{i\varphi} & 0 & h\sigma B\,e^{2i\varphi} & \lambda_2+i\eta_2 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

O problema estaria resolvido se calculássemos as raízes de (2.21), e uma vez obtidas, determinássemos os E_ℓ dados pela (2.18). Porém, dependendo da forma da raiz, poderíamos ter ou não, uma situação física que diferisse fundamentalmente das estudadas até agora. Portanto, vamos nos reter a uma análise detalhada do comportamento das raí zes para diversos valores de h e Ω, e posteriormente (Cap. 3) estudaremos a evolução temporal dos modos (X) e (Y) em um problema de interesse real.

A equação (2.21) é do tipo:

$$y^4 - ic_3y^3 - c_2y^2 + ic_1y + c_0 = 0 \qquad (2.23)$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$. Esta equação é tal que se z é raiz, $-z^*$ também o será, o que se mostra trivialmente tomando o complexo conjugado da (2.23).

Inicialmente, vamos assumir que as raízes de (2.23) sejam z_1, z_2, z_3, z_4, não nulas e com partes imaginárias positivas. Neste caso, o termo independente de φ_α e φ_β da (2.17), irá decair exponencialmente com uma constante de relaxação (Im z_i) que depende do campo externo h. Os demais termos da (2.17) são tais que depois de decorrido um certo tempo $\tau(h)$, atingirão um regime estacionário. Vemos então, que neste caso, a inclusão do campo externo não mudará a natureza da solução do problema, pois continuaremos a ter uma fase transiente e outra estacionária. Se agora variarmos o valor de h, poderemos conseguir sensíveis modificações nas partes imaginárias das raízes. Consultando então a (2.17), iremos constatar que quando alguma das raízes tiver parte imaginária negativa, um dos modos irá crescer exponencialmente. Vamos, portanto, nos fixar no limiar desta transição, ou seja, calcular os valores críticos de h que obriguem a pelo menos uma das raízes, digamos z_1, ter parte imaginária igual a zero enquanto que as outras continuem positivas (c_1, c_2, c_3 e $c_0 \geq 0$). Temos então duas possibilidades:

1.ª) $z_1 = - z_1^*$

Neste caso, se $z_1 = a_1 + ib_1$ temos que $a_1 + ib_1 = -a_1 + ib_1$ ou seja, $a_1 = 0$ e a raiz é imaginária pura. Como estamos interessados em $b_1 = 0$, devemos calcular h que nos forneça uma raiz nula, ou seja: $c_0 = 0$ na (2.23).

$2^{\underline{a}}$) $z_1 \neq -z_1^*$ (Im $z_1 = b_1 = 0$)

Neste caso podemos ter duas situações distintas:

1) $z_1 = -z_2^*$ com $z_3 = -z_3^*$ e obviamente $z_4 = -z_4^*$ (Im z_3 e Im $z_4 > 0$). Temos então $a_1 + ib_1 = -a_2 + ib_2$, e como $b_1 = 0$ concluimos que $b_2 = 0$ e $a_1 = -a_2$. Logo a equação (2.23) será escrita como:

$$(z^2 - a_1^2)[z^2 - i(b_3 + b_4) - b_3 b_4] = 0 \tag{2.24}$$

onde b_3 e $b_4 > 0$.

2) $z_1 = -z_2^*$ com $z_4 = -z_3^*$ (Im $z_3 > 0$)
Usando então o mesmo raciocínio do caso (1) podemos escrever a equação (2.23) como

$$(z^2 - a_1^2)[z^2 - 2i\text{Im } z_3 z - |z_3|^2] = 0 \tag{2.25}$$

onde Im $z_3 > 0$. Comparando a (2.24) com a (2.25) vemos que o 2º caso pode ser resumido em uma equação da forma:

$$z^4 - i\alpha z^3 - (\beta + a_1^2)z^2 + i\alpha a_1^2 z + \beta a_1^2 = 0 \tag{2.26}$$

onde α = Im z_3 + Im z_4, β = Im z_3Im z_4, a_1 = Re z_1 e α e $\beta > 0$ por hipótese.

Passemos então a aplicar estes resultados à equação (2.21).

O campo crítico do 1º caso (h_{cp}) pode ser calculado quando fizermos $c_0 = 0$ na (2.23), e este procedimento nos levará a:

$$h_{cp}^2|\sigma|^2 = \frac{(\lambda_1^2 + \eta_1^2)(\lambda_2^2 + \eta_2^2)}{(A\lambda_2 + B\lambda_1)^2 + (A\eta_2 + B\eta_1)^2} \tag{2.27}$$

Se substituirmos este valor na (2.21) constataremos ainda que os demais coeficientes (c_1, c_2 e c_3) serão todos positivos, o que nos diz que apenas um dos termos da (2.17) não irá decair.

Para calcular h_{cs} (campo crítico do 2º caso) temos que inicialmente igualar a equação (2.25) à (2.21), obtendo portanto:

$$\alpha = 2(\eta_1 + \eta_2)$$

$$\beta + a_1^2 = \lambda_1^2 + \eta_1^2 + \lambda_2^2 + \eta_2^2 + 4\eta_1\eta_2 - h^2|\sigma|^2$$

$$\alpha a_1^2 = 2\eta_1(\lambda_2^2 + \eta_2^2) + 2\eta_2(\lambda_1^2 + \eta_1^2) - 2|\sigma|^2h^2(A^2\eta_2 + B^2\eta_1) + $$
$$+ 2|\sigma|^2h^2\,(\eta_1 + \eta_2)AB \qquad (2.28)$$

$$\beta a_1^2 = (\lambda_1^2 + \eta_1^2)(\lambda_2^2 + \eta_2^2) - h^2|\sigma|^2[(A\lambda_2 + B\lambda_1)^2 + (A\eta_2 + B\eta_1)^2]$$

A resolução do sistema (2.38) nos fornecerá a seguinte equação para $h_{cs}^2|\sigma|^2$:

$$b_2(|\sigma|^2h_{cs}^2)^2 - b_1(|\sigma|^2h_{cs}^2) + b_0 = 0 \qquad (2.29)$$

onde:

$$b_2 \equiv u(1 - u)$$

$$b_1 \equiv \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)u + \frac{\lambda_2^2\eta_1 + \lambda_1^2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} - (A\lambda_2 + B\lambda_1)^2 +$$
$$+ AB(\eta_1^2 + \eta_2^2) + (1 + A^2 + B^2)\eta_1\eta_2$$

$$b_0 \equiv (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2\frac{\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^2} + 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_2(\eta_1 + \eta_2)^2$$

e $\quad u \equiv AB + \dfrac{A^2\eta_2 + B^2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$

Portanto:

$$h_{cs}^2|\sigma|^2 = \frac{b_1}{2b_2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b_2b_0}{b_1^2}}\right] \qquad (2.30)$$

onde o sinal será escolhido convenientemente no prosseguimento desta seção.

Através desta análise, podemos notar que uma vez fixada a frequência de oscilação do campo, podemos sempre encontrar um valor para sua amplitude (h_{cs} ou h_{cp}) acima do qual vamos começar a ter o crescimento no tempo de um dos modos. Porém, este campo é em geral muito forte, a menos que sua frequência de oscilação seja igual a alguma possível ressonância do sistema, o que reduz sensivelmente esta amplitude. Como na prática estaremos interessados em campos fracos (cap. 3), vamos determinar quais os valores de Ω que minimizam os campos críticos.

Pela (2.27), vemos que h^2_{cp} depende de λ^2_1 e de λ^2_2. Podemos então ter 2 casos distintos:

a) $\lambda_1 = 0$ ou $\Omega = 2\omega_1$, e a (2.27) se transforma em:

$$h^2_{cp}|\sigma|^2 = \frac{\eta^2_1(\lambda^2_2 + \eta^2_2)}{A^2\lambda^2_2 + (A\eta_2 + B\eta_1)^2} \qquad (2.32)$$

onde $\lambda_2 = \omega_2 - \omega_1$.

b) $\lambda_2 = 0$ ou $\Omega = 2\omega_2$, e novamente pela (2.27):

$$h^2_{cp}|\sigma|^2 = \frac{\eta^2_2(\lambda^2_1 + \eta^2_1)}{B^2\lambda^2_1 + (A\eta_2 + B\eta_1)^2} \qquad (2.32)$$

onde $\lambda_1 = \omega_1 - \omega_2$.

Destas equações vemos que as respectivas escolhas de Ω foram fundamentais para a redução das amplitudes, que eventualmente poderiam ser da ordem de ω_1, para ordem de η_1 ou η_2 ($\omega_1 >> \eta_1$ e η_2). Cabe lembrar agora, dos possíveis processos de produção que foram introduzidos no início deste capítulo e notar que o caso (a) ($\Omega = 2\omega_1$) traduz a conservação de energia do processo de criação (ou aniquilação de dois quanta do modo (X), enquanto que o caso (b) ($\Omega = 2\omega_2$) nos dá a conservação de energia da criação (ou aniquilação) de dois quanta de (Y). A partir deste ponto vamos nos referir ao caso (a) como 1ª ressonância enquanto que ao caso (b) como 2ª ressonância.

Para o campo crítico h_{cs}, a escolha de $(\lambda_1^2-\lambda_2^2)=0$ irá nos fornecer o valor mínimo deste campo. Neste caso temos as seguintes situações:

a) $\lambda_1 + \lambda_2 = \omega_1 + \omega_2 - \Omega = 0 \Rightarrow \Omega = \omega_1 + \omega_2$

b) $\lambda_1 - \lambda_2 = \omega_1 - \omega_2 = 0$, o que é absurdo pois na pior das hipóteses $\omega_1 - \omega_2 = 2|K|$ (caso exista cruzamento).

Tomando então $\Omega = \omega_1 + \omega_2$, e obviamente $\lambda_1 = -\lambda_2$, os coeficientes b_2, b_1 e b_0 serão escritos da forma:

$$b_2 \equiv u(1 - u)$$

$$b_0 \equiv \eta_1\eta_2[4\lambda_1^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2] \tag{2.33}$$

$$b_1 \equiv \lambda_1^2[1 - (A - B)^2] + AB(\eta_1^2 + \eta_2^2) + (1 + A^2 + B^2)\eta_1\eta_2$$

onde

$$u \equiv AB + \frac{A^2\eta_2 + B^2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} .$$

Através destes novos coeficientes podemos mostrar que na (2.30), o quociente $4b_2b_0/b_1^2 << 1$. Para tal, basta mostrar que $b_0/b_1^2 << 1$, pois lembrando que A varia entre 1 e 0 e $A + B = 1$, temos que $u \leq 1$ e consequentemente o mesmo acontece para b_2. Utilizando então as aproximações até agora usadas neste trabalho, temos que $\lambda_1^2[1 - (A-B)^2]$ e $4\lambda_1^2\eta_1\eta_2$ são os termos principais de b_1 e b_0 respectivamente, o que nos leva a

$$\frac{b_0}{b_1^2} \simeq \frac{4\eta_1\eta_2}{\lambda_1^2[1 - (A - B)^2]} \tag{2.34}$$

Este termo é muito menor que 1, a menos que $A \simeq 0$ e $B \simeq 1$ ou $A \simeq 1$ e $B \simeq 0$. Mas neste caso, devemos ter mais cuida do, fazendo a expansão dos termos λ_1^2 e $(A - B)^2$ para $|\omega_A - \omega_B| >> |K|$ de forma rigorosa. Usando a (1.12) e (1.9) devemos ter nesta aproximação:

$$1 - (A-B)^2 \simeq \frac{4|K^2|}{(\omega_A-\omega_B)^2 + 4|K^2|} \quad \text{e} \quad \frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{4} \simeq \frac{(\omega_A-\omega_B)^2 + 4|K|^2}{4}$$

e a (2.34) será escrita como:

$$\frac{b_0}{b_1^2} \simeq \frac{4\eta_1\eta_2}{|K|^2} << 1$$

pois $|K|^2 >> \eta_1\eta_2$ (por hipótese). Podemos então ter uma forma mais compacta para h_{cs} expandido a (2.30) até 1ª ordem em $4b_2b_0/b_1^2$ e obteremos:

$$h_{cs}^2|\sigma|^2 \simeq \frac{b_1}{2b_2}\left[1 \pm \left(1 - \frac{2b_2b_0}{b_1^2}\right)\right]$$

o que nos indica duas possíveis soluções:

$$h_{cs}^2|\sigma|^2 = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{ou} \quad h_{cs}^2|\sigma|^2 = \frac{b_0}{b_1}\,.$$

Como $b_1/b_2 >> b_0/b_1$ e estamos interessados nos campos mais fracos, vamos nos descartar da 1ª solução. Usando então a (2.33) vamos escrever $|\sigma|^2h_{cs}^2$ como:

$$h_{cs}^2|\sigma|^2 = \frac{4\eta_1\eta_2[(\omega_1-\omega_2)^2 + (\eta_1+\eta_2)^2]}{(\omega_1-\omega_2)^2[1-(A-B)^2] + 4\eta_1\eta_2[1+A^2+B^2] + 4AB[\eta_1^2+\eta_2^2]} \tag{2.35}$$

A escolha de $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ exprime a conservação de energia do processo de criação (ou aniquilação) de um quantum do modo (X) e outro do modo (Y). A este último caso iremos nos referir como $3^{\underline{a}}$ ressonância.

Neste ponto vamos fazer uma pausa na discussão sobre os campos críticos, para mostrar como poderíamos calcular as demais raízes de det M = 0, na $3^{\underline{a}}$ ressonância. Uma vez obtido $|\sigma|^2 h_{cs}^2$ devemos retornar à (2.28) e calcular a_1 explicitamente, pois sabemos que neste caso a_1 e $-a_1$ são duas das raízes de (2.26). Uma vez calculado a_1, temos de resolver uma equação do tipo $z^2 - i\alpha - \beta = 0$ onde α e β também são obtidos diretamente na (2.28) e as raízes serão:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \sqrt{\lambda_1^2 + \eta_1\eta_2 - h_{cs}^2|\sigma|^2 u} \\
p_2 &= -\sqrt{\lambda_1^2 + \eta_1\eta_2 - h_{cs}^2|\sigma|^2 u} \\
p_3 &= \sqrt{\lambda_1^2 + \eta_1\eta_2 + h_{cs}^2|\sigma|^2(u-1)} + i(\eta_1 + \eta_2) \\
p_4 &= -\sqrt{\lambda_1^2 + \eta_1\eta_2 + h_{cs}^2|\sigma|^2(u-1)} + i(\eta_1 + \eta_2)
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

onde $h_{cs}^2\ \sigma^2$ é dado pela (2.35) e $\lambda_1 = \omega_1 - \omega_2/2$.

Se quisermos calcular as demais raízes da $1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ ressonâncias não teremos a mesma facilidade pois naquele caso estaremos necessariamente envolvidos com a resolução de equações do 3º grau.

Para finalizar este estudo dos campos críticos, vamos fazer uma análise do comportamento destes campos para as diferentes ressonâncias, nas diversas regiões da relação de dispersão dos modos (X) e (Y). Por conveniência vamos denotar os campos da $1^{\underline{a}}$, $2^{\underline{a}}$ e $3^{\underline{a}}$ ressonâncias como h_{c1}, h_{c2} e h_{c3}, respectivamente. Seguindo as hipóteses de η_1 e $\eta_2 << K << \omega_1$, vamos estudar as 3 ressonâncias para $k << \underset{\sim}{k}$, $k \simeq \underset{\sim}{k}$ e $k >> \underset{\sim}{k}$.

1) $k << \underset{\sim}{k}$. Aqui, $\omega_A - \omega_B << 2|K|$ e portanto $A \simeq 1 - |K|^2/(\omega_A-\omega_B)^2$, $B \simeq |K|^2/(\omega_A-\omega_B)^2$ e $\omega_1 - \omega_2 = \sqrt{(\omega_A-\omega_B)^2 + 4|K|^2}$, que usados na (2.31), (2.32) e (2.35) nos levarão a:

$$h_{c1}^2|\sigma|^2 \simeq \eta_1^2 \qquad (2.37)$$

$$h_{c2}^2|\sigma|^2 \simeq \frac{\eta_2^2(\omega_1 - \omega_2)^4}{|K|^4} \qquad (2.38)$$

$$h_{c3}^2|\sigma|^2 = \frac{\eta_1\eta_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{|K|^2} \qquad (2.39)$$

Das equações acima podemos notar que h_{c1}^2 é o menor dos campos críticos, o que já era esperado, pois nesta região o modo (X) representa aproximadamente o sistema (A), sistema este que está diretamente acoplado com o campo externo. O campo h_{c2} é o maior deles, pois devido ao modo (Y) nesta região ser do tipo (B), este modo só está acoplado ao campo externo devido a interação entre os sistemas (A) e (B) e, portanto, é dificilmente excitável. Já o h_{c3} é o campo necessário para a criação de um quantum de (X) e outro de (Y), processo este, mais acessível que o relativo a h_{c2}. É interessante notar que h_{c2}^2 e h_{c3}^2 dependem explicitamente da constante de acoplamento K, e se $K \to 0$, os campos h_{c2}^2 e $h_{c3}^2 \to \infty$, ou seja, se não existisse acoplamento entre os sistemas (A) e (B), o único caso possível seria a excitação de (A), o que já era fisicamente esperado, pois os demais processos só são possíveis quando existe acoplamento.

2) $k \simeq \underset{\sim}{k}$. Neste caso $A \simeq B \simeq 1/2$ e $\omega_1 - \omega_2 \simeq 2|K|$, que levadas na (2.31), (2.32) e (2.35) nos fornecerão:

$$h_{c1}^2|\sigma|^2 \simeq 4\eta_1^2 \qquad (2.40)$$

$$h_{c2}^2|\sigma|^2 \simeq 4\eta_2^2 \qquad (2.41)$$

$$h_{c3}^2|\sigma|^2 \simeq 4\eta_1\eta_2 \qquad (2.42)$$

Como aqui, $\eta_1 \simeq \eta_2 \simeq (\eta_A+\eta_B)/2$ vemos que os 3 processos são igualmente favorecidos, o que é razoável devido a nesta região, (X) e (Y) serem fortes misturas de (A) e (B).

3) $k >> \underset{\sim}{k}$. Substituindo $A \simeq |K|^2/(\omega_1-\omega_2)^2$, $B \simeq 1-|K|^2/(\omega_1-\omega_2)^2$ e $\omega_1-\omega_2 = \sqrt{(\omega_A-\omega_B)^2+4|K|^2}$ na (2.31), (2.32) e (2.35), teremos:

$$h_{c1}^2|\sigma|^2 \simeq \frac{\eta_1^2(\omega_1-\omega_2)^4}{|K|^4} \qquad (2.43)$$

$$h_{c2}^2|\sigma|^2 \simeq \eta_2^2 \qquad (2.44)$$

$$h_{c3}^2|\sigma|^2 \simeq \frac{\eta_1\eta_2(\omega_1-\omega_2)^2}{|K|^2} \qquad (2.45)$$

Como vemos, os papéis de h_{c1} e h_{c2} se trocam nesta região pois aqui o modo (Y) é que é do tipo (A) (que se acopla diretamente com campo) enquanto que o modo (X) é do tipo (B). Podemos ainda notar que se escrevermos os campos em termos de η_A e η_B o campo da 1ª ressonância para $k << \underset{\sim}{k}$ é o mesmo que o da 2ª para $k >> \underset{\sim}{k}$ e vice-versa. Quanto ao campo da 3ª ressonância, desempenhará um papel intermediário entre os dois primeiros, assim como para $k << \underset{\sim}{k}$.

No caso de não existir cruzamento, a análise será idêntica ao caso de $k << \underset{\sim}{k}$.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES À INTERAÇÃO MAGNETOELÁSTICA

Até agora, estudamos os processos de relaxação e excitação paramétrica em sistemas descritos por osciladores acoplados que interagem com um reservatório, partindo de modelos teóricos para estas interações.

Neste capítulo, vamos mostrar como nossos resultados se aplicam a um problema real, cuja Hamiltoniana obedeça aproximadamente aos nossos modelos. Apesar de diversos sistemas poderem ser tratados na aproximação considerada, iremos nos reter a estudar apenas a interação magnetoelástica.

Inicialmente, iremos apresentar de forma resumida a obtenção da Hamiltoniana efetiva da excitação paramétrica de magnons, por um campo magnético de rádio-frequência, quando levamos em conta a interação magnetoelástica. Constataremos que esta Hamiltoniana está de acordo com nosso modelo teórico e, consequentemente, poderemos aplicar os resultados já obtidos.

Faremos também um estudo sobre as instabilidades dos modos magnetoelásticos e obteremos o campo crítico mais baixo que torne um destes modos instável. Estudaremos ainda o efeito da 3ª ressonância na produção de fonons.

Finalmente, obteremos uma fórmula para a evolução temporal do número de fonons e a estudaremos na 2ª e 3ª ressonâncias.

3.1. A Hamiltoniana da Interação Magnetoelástica

Consideremos um ferromagneto isolante, cúbico e elasticamente isotrópico ao qual está aplicado um campo magnético H, estático na direção $\hat{z}$ (um dos eixos do cristal), e um campo de rádio-frequência $h(t) = h \cos \Omega t$, paralelo ao primeiro. Desta forma, a Hamiltoniana pode ser escrita como [8,21]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{me} + \mathcal{H}_{mR} + \mathcal{H}_{eS} + \mathcal{H}_R + \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_{ext} \qquad (3.1)$$

onde as diversas partes de $\mathcal{H}$ serão devidamente interpretadas a partir de agora. Queremos lembrar ao leitor que discutiremos sucintamente cada um destes termos e que maiores detalhes poderão ser encontrados em [8].

a) $\mathcal{H}_m$ é a parte magnética de $\mathcal{H}$, e é dada pela soma das contribuições das interações de Zeeman com o campo H, exchange e dipolar. Dentro das aproximações de Holstein-Primakoff [19] $\mathcal{H}_m$ será escrita em termos de operadores de excitações coletivas como [18]:

$$\mathcal{H}_m = \sum_k \hbar\omega_m(k)\ a_k^+ a_k$$

onde a_k^+ e a_k criam ou destroem magnons de quasi-momentum k e de energia $\hbar\omega_m(k)$ dada por [18]:

$$h\omega_m(k) = (F_k^2 - G_k^2)^{1/2} \qquad (3.2)$$

com $\qquad F_k = g\mu_B H + 2\pi g\mu_B M \operatorname{sen}^2\theta_k + Dk^2$

e $\qquad G_k = g\mu_B 2\pi M \operatorname{sen}^2\theta_k$

onde M é a magnetização de saturação, g é o fator giromagnético, μ_B é o magneton de Bohr, e θ_k é o ângulo que o quasi-momentum $\vec{k}$ faz com o eixo $\hat{z}$.

b) $\mathcal{H}_e$ é a parte de energia elástica e se desprezarmos termos anarmônicos, esta parcela poderá ser escrita no formalismo de 2ª quantização como [19]:

$$\mathcal{H}_e = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_e(k,\lambda) c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda} \qquad \lambda = 1,2,3$$

onde $c^{+}_{k\lambda}$ e $c_{k\lambda}$ são operadores de criação e aniquilação de fonons de quasi-momentum k, polarização λ e energia $\hbar\omega_e(k,\lambda)$. As frequências $\omega_e(k,\lambda)$ são dadas por [19]:

$$\omega_e(k,1) = \omega_e(k,2) = \left(\frac{c_{44}}{\rho}\right)^{1/2} k \quad \text{e} \quad \omega_e(k,3) = \left(\frac{c_{11}}{\rho}\right)^{1/2} k \qquad (3.3)$$

onde c_{11} e c_{44} são constantes elásticas do cristal e ρ é a sua densidade.

c) $\mathcal{H}_{me}$ é a parte responsável pela interação magnetoelástica e mantendo apenas os produtos de dois operadores de bosons teremos [8,21]:

$$\mathcal{H}_{me} = \sum_{k,\lambda} \hbar a_k (c^{+}_{k\lambda} + c_{-k\lambda})\ K(k,\lambda) + \text{h.c.}$$

com

$$K(k,1) = -ibk|u_k + v_k| \left(\frac{g\mu_B}{\rho M\hbar\omega_e(k,1)}\right)^{1/2} \cos 2\theta_k$$

$$K(k,2) = -bk|u_k - v_k| \left(\frac{g\mu_B}{\rho M\hbar\omega_e(k,2)}\right)^{1/2} \cos \theta_k \ \text{sgn}\, \varphi_k \qquad (3.4)$$

$$K(k,3) = -ibk|u_k + v_k| \left(\frac{g\mu_B}{\rho M\hbar\omega_e(k,3)}\right)^{1/2} \text{sen}\, 2\theta_k \ \text{sgn}\, \varphi_k$$

onde $u_k = e^{i\varphi_k} \cosh \mu_k$, $v_k = e^{i\varphi_k} \text{senh}\, \mu_k$

e $\text{tgh}(2\mu_k) = \dfrac{G_k}{F_k}$.

Nestas fórmulas, φ_k é o ângulo azimutal do vetor $\vec{k}$ e $\text{sgn}\, \varphi_k = \pm 1$, dependendo de $0 < \varphi_k < \pi$ ou $\pi \leq \varphi_k < 2\pi$.

Introduzindo-se fonons de polarização elíptica através das relações:

$$V_k = \frac{K^*(k,1)c_{k1} + K^*(k,2)c_{k2}}{(|K(k,1)|^2 + |K(k,2)|^2)^{1/2}}$$

$$W_k = \frac{K(k,2)c_{k1} - K(k,1)c_{k2}}{(|K(k,1)|^2 + |K(k,2)|^2)^{1/2}} \quad ,$$

pode-se mostrar [8] que o modo W_k é praticamente livre e que somente V_k se acopla fortemente com os magnons. Por outro lado, os modos longitudinal e transverso podem ser tratados independente, já que as regiões de cruza - mento na relação de dispersão são bem separadas. Podemos então escrever uma Hamiltoniana efetiva como:

$$\mathcal{H}_{me} = \sum_k \hbar K(k) a_k b_k^+ + \text{h.c.}$$

onde $b_k = v_k$ ou ic_{k3}, e $K(k) = \sqrt{|K(k,1)|^2 + |K(k,2)|^2}$ ou $K(k,3)$ dependendo de estarmos tratando a interação dos magnons com fonons polarizados transversalmente ou longitudinalmente. A partir deste ponto iremos nos referir a $K(k,3)$ como $K_\ell(k)$ e a $\sqrt{|K(k,1)|^2 + |K(k,2)|^2}$ como $K_T(k)$.

d) As Hamiltonianas $\mathcal{H}_{mR}$ e $\mathcal{H}_{eS}$ representam as interações de magnons e fonons com partes independentes de um mesmo reservatório e podem ser aproximadas por [8]:

$$\mathcal{H}_{mR} = \sum_{k\alpha} \hbar f_{k\alpha} a_k R_\alpha^+ \; + \text{h.c.}$$

e

$$\mathcal{H}_{eS} = \sum_{k\beta} \hbar g_{k\beta} b_k S_\beta^+ \; + \text{h.c.}$$

onde $f_{k\alpha}$ é a constante de acoplamento de magnons com o reservatório, $g_{k\beta} = g_{k\beta}^\ell$ ou $g_{k\beta}^t$ é a constante de acoplamento do reservatório com os fonons longitudinais ou transversos e $S_\beta = S_\beta^\ell$ ou S_β^t são operadores de aniquilação dos quanta das partes do reservatório que interagem com fonons longitudinais ou transversos, respectivamente.

e) $\mathcal{H}_R$ e $\mathcal{H}_S$ representam as energias das partes R e S do reservatório e são dadas por:

$$\mathcal{H}_R = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha R^+_\alpha R_\alpha \quad e \quad \mathcal{H}_S = \sum_\beta \hbar\omega_\beta S^+_\beta S_\beta$$

f) A parte $\mathcal{H}_{ext}$ provem da interação Zeeman dos spins da rede com o campo de rádio-frequência h(t), e dentro de certas aproximações [18], pode ser escrita como:

$$\mathcal{H}_{ext} = - \frac{1}{2} \sum_k \hbar\sigma_k e^{-i\Omega t} a^+_k a^+_{-k} + h.c.$$

onde

$$\sigma_k = (\frac{g\mu_B}{\hbar})^2 \frac{\pi M\rho}{\omega_m(k)} \, sen^2\theta_k \qquad (3.5)$$

De posse de todos estes resultados, vemos que a (3.1) tem exatamente a forma da Hamiltoniana do nosso modelo teórico (2.1), a menos de uma possível redefinição de constantes. Cabe-nos também chamar a atenção do leitor, para o fato de que na (2.1) estávamos tratando de quanta de quasi-momenta específicos k e -k, enquanto que neste caso real, vamos tratar de todos os possíveis valores de k. Desta forma, seguindo o procedimento tomado na seção (2.1), podemos usar a (1.14) para cada par k, -k separadamente, e obter uma soma em k de Hamiltonianas do tipo da (2.2),(2.3) e (2.4) o que nos permitirá usar todos os resultados obtidos no capítulo 2 para cada diferente k, já que as Hamiltonianas correspondentes comutam entre si.

Devemos também notar que a expressão de σ_k (3.5), só é válida no caso do campo de rádio-frequência estar paralelo ao campo estático. No caso do campo transverso temos uma expressão diferente para σ_k [8], apesar da (3.1) continuar a ser escrita da mesma forma.

3.2. As Instabilidades dos Modos Magnetoelásticos

Como já sabemos do capítulo anterior, existem valores críticos da amplitude do campo de rádio-frequência acima dos quais um dos modos normais irá crescer exponencialmente no tempo. Devemos lembrar ainda, que estes campos críticos foram calculados para um k bem determinado. Existem porém, diversas dificuldades experimentais para a detecção de excitações com um quasi-momentum bem especificado em módulo e direção e, devido a este fato, vamos procurar determinar através das grandezas introduzidas na seção (3.1) qual será o menor campo capaz de provocar a instabilidade de um dos modos, e ainda qual será este modo instável. Para tal, vamos inicialmente estudar as instabilidades para um quasi-momentum em uma direção qualquer e posteriormente investigar em que condições o campo crítico será o mais baixo possível. Vamos então supor uma amostra ferromagnética sujeita a um campo estático H e a um campo de rádio-frequência h, na qual iremos estudar o comportamento de magnons numa direção específica θ_k, interagindo com os fonons (longitudinais ou transversos). A relação de dispersão considerando a interação com apenas um tipo de fonon pode ser vista na figura abaixo.

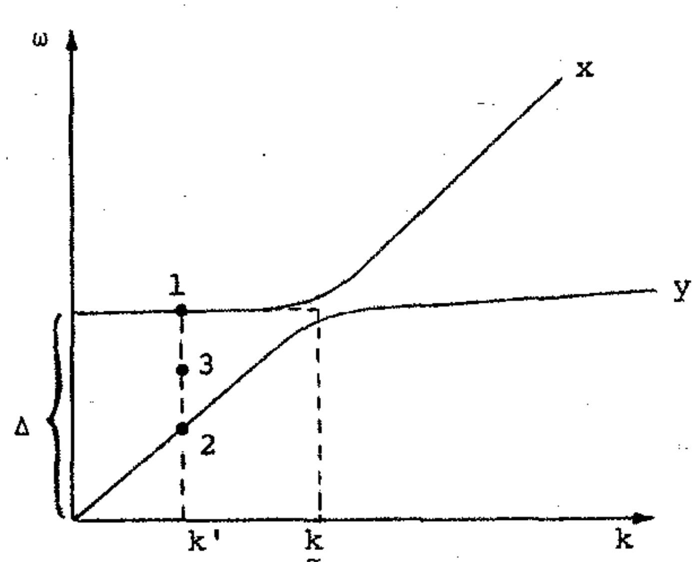


Fig. 5

onde

$$\Delta = \frac{g\mu_B H}{\hbar}\sqrt{1 + \frac{4\pi M}{H}\,\text{sen}^2\theta_k} \qquad (3.6)$$

Nesta figura podemos ver que a reta vertical k' corta as relações de dispersão de (X) e de (Y) em (1) e (2) respectivamente, e ainda marcamos o ponto (3) que é representado por $(\omega_1 + \omega_2)/2$. Estes pontos representam as três possíveis ressonâncias introduzidas na seção (2.3), ou seja, se $\Omega/2 = \omega_1$, excitaremos dois magnons de quasi-momenta k' e -k', se $\Omega/2 = \omega_2$, excitaremos dois fonons de quasi-momenta k' e -k', e se $\Omega = \omega_1 + \omega_2$, excitaremos um fonon e um magnon de quasi-momenta k' e -k'. Cabe aqui chamar a atenção para o fato de que aproximamos o modo (X) por magnons e (Y) por fonons, devido ao fato de estarmos longe do cruzamento e com $k' < \underset{\sim}{k}$. Se $k' > k$, poderíamos aproximar (X) por fonons e (Y) por magnons, como já concluímos na seção (1.2).

Vamos agora, estudar cada um dos campos críticos das possíveis ressonâncias em função de $\omega_e - \omega_m$, e para tal, basta que apliquemos os resultados obtidos na seção (2.3) para este caso concreto.

<u>1ª Ressonância</u>:

Usando a (3.37), (2.40) e (2.43), podemos reescrever:

$$h_{c1}^2 \approx \frac{\eta_1^2}{\sigma_k^2} \qquad \text{se} \quad \omega_m - \omega_e >> 2|K(\underset{\sim}{k})|$$

$$h_{c1}^2 \approx \frac{4\eta_1^2}{\sigma_k^2} \qquad \text{se} \quad \omega_m - \omega_e \approx 0$$

$$h_{c1}^2 \approx \frac{\eta_1^2(\omega_1 - \omega_2)^4}{\sigma_k^2|K(k)|^4} \qquad \text{se} \quad \omega_e - \omega_m >> 2|K(\underset{\sim}{k})|$$

onde σ_k é dado pela (3.5) e K(k) é dado por $K_\ell(k)$ ou $K_t(k)$, dependendo do fato dos fonons serem polarizados longitudinalmente ou elipticamente. Usando a (1.27) e a (1.9), as expressões de h_{c1} para as diversas regiões poderão ser escritas como:

$$h_{c1} \simeq \frac{\eta_m}{\sigma_k} \qquad \text{se} \quad \omega_m - \omega_k >> 2|K(\underset{\sim}{k})| \qquad (3.7)$$

$$h_{c1} \simeq \frac{(\eta_m + \eta_e)}{\sigma_k} \qquad \text{se} \quad \omega_m - \omega_e \simeq 0 \qquad (3.8)$$

$$h_{c1} \simeq \frac{\eta_e(\omega_m - \omega_e)^2}{\sigma_k |K(k)|^2} \qquad \text{se} \quad \omega_e - \omega_m >> 2|K(\underset{\sim}{k})| \qquad (3.9)$$

Podemos então plotar uma curva de h_{c1} em função de $\omega_e - \omega_m$ (Fig. 6).

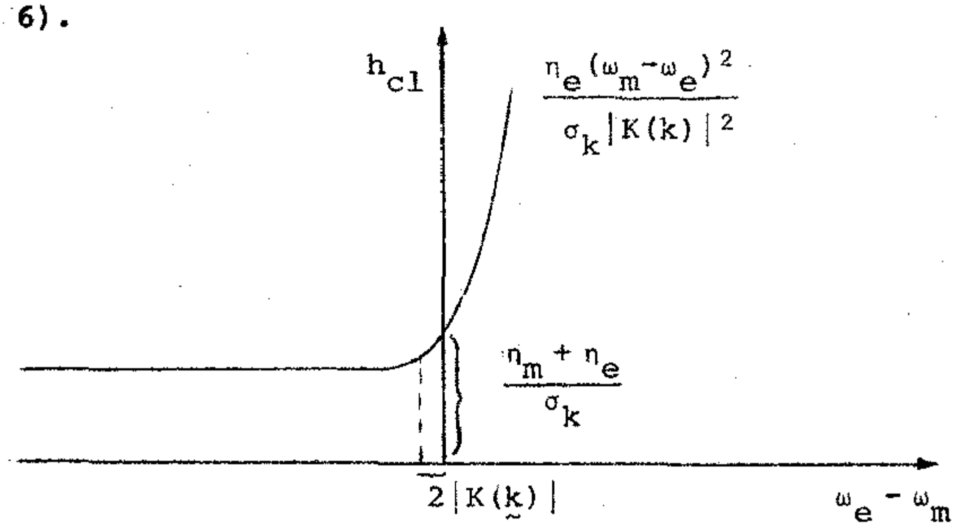


Fig. 6

2^a Ressonância

Se agora usarmos a (2.38), (2.41), (2.44) e todas as outras aproximações utilizadas no caso anterior, teremos:

$$h_{c2} \simeq \frac{\eta_e(\omega_m - \omega_e)^2}{\sigma_k |K(k)|^2} \qquad \text{se} \quad \omega_m - \omega_e >> 2|K(\underset{\sim}{k})| \qquad (3.10)$$

$$h_{c2} \simeq \frac{\eta_m + \eta_e}{\sigma_k} \qquad \text{se} \quad \omega_m - \omega_e \simeq 0 \qquad (3.11)$$

$$h_{c2} \simeq \frac{\eta_m}{\sigma_k} \qquad \text{se} \quad \omega_e - \omega_m >> 2|K(\underset{\sim}{k})| \qquad (3.12)$$

que nos permite plotar h_{2c} em função de $\omega_e - \omega_m$ como (Fig. 7):

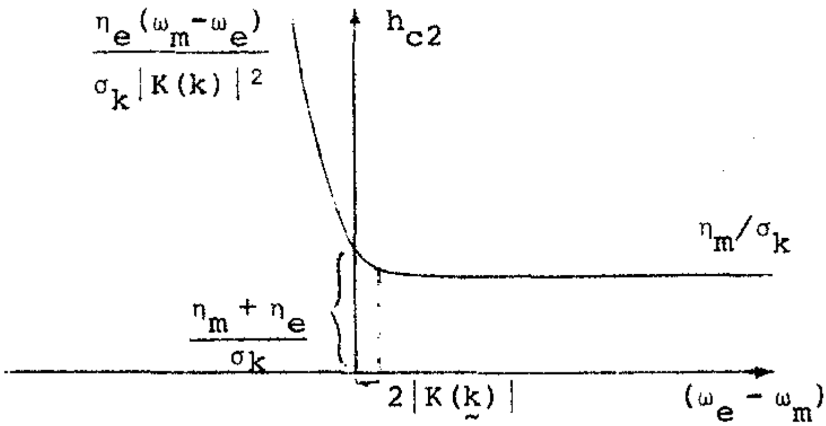


Fig. 7

<u>3ª. Ressonância:</u>

A (2.39), (2.42) e (2.45) juntamente com as aproximações para $(\omega_1 - \omega_2)$, η_1 e η_2 utilizadas anteriormente - nos fornecem as seguintes expressões para h_{c3}:

$$h_{c3} \simeq \frac{\eta_m \eta_e (\omega_m - \omega_e)}{\sigma_k |K(k)|} \qquad \text{se} \quad \omega_m - \omega_e >> 2|K(\underset{\sim}{k})| \qquad (3.13)$$

$$h_{c3} \simeq \frac{\eta_m + \eta_e}{\sigma_k} \qquad \text{se} \quad \omega_m - \omega_e \simeq 0 \qquad (3.14)$$

$$h_{c3} \simeq \frac{\eta_m \eta_e (\omega_e - \omega_m)}{\sigma_k |K(k)|} \qquad \text{se} \quad \omega_e - \omega_m >> 2|K(\underset{\sim}{k})| \qquad (3.15)$$

e o gráfico de h_{c3} está representado na Fig. 8.

Devemos lembrar que em todos os 3 casos, estamos considerando σ_k como constante, o que é bastante razoável já que a (3.5) só depende de k devido à $\omega_m(k)$ que aparece no seu denominador e esta frequência dos magnons varia lentamente com o módulo do quasi-momentum nas regiões que estamos considerando.

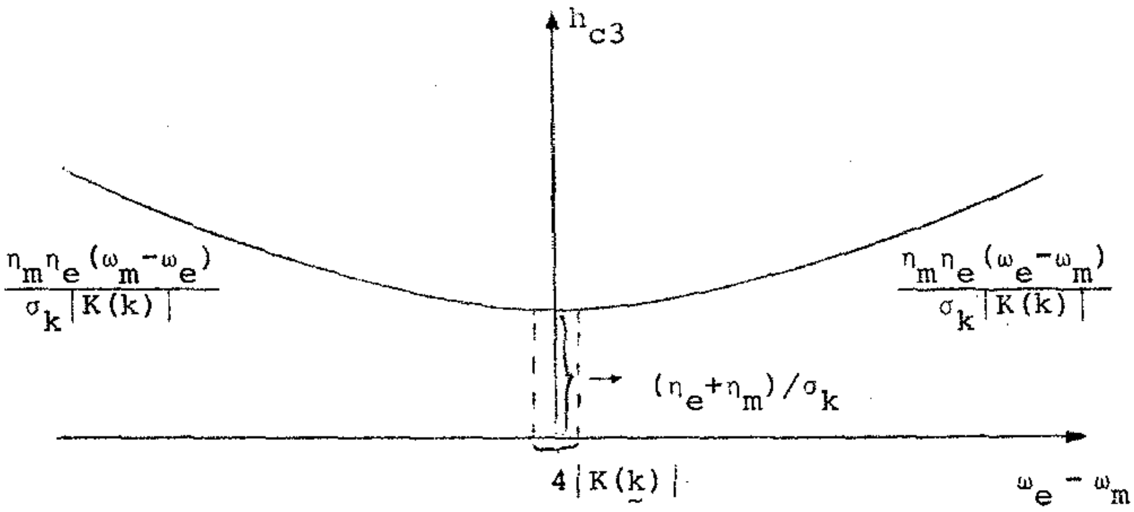


Fig. 8

Podemos agora superpor os gráficos das 3 instabilidades como está mostrado na figura abaixo.

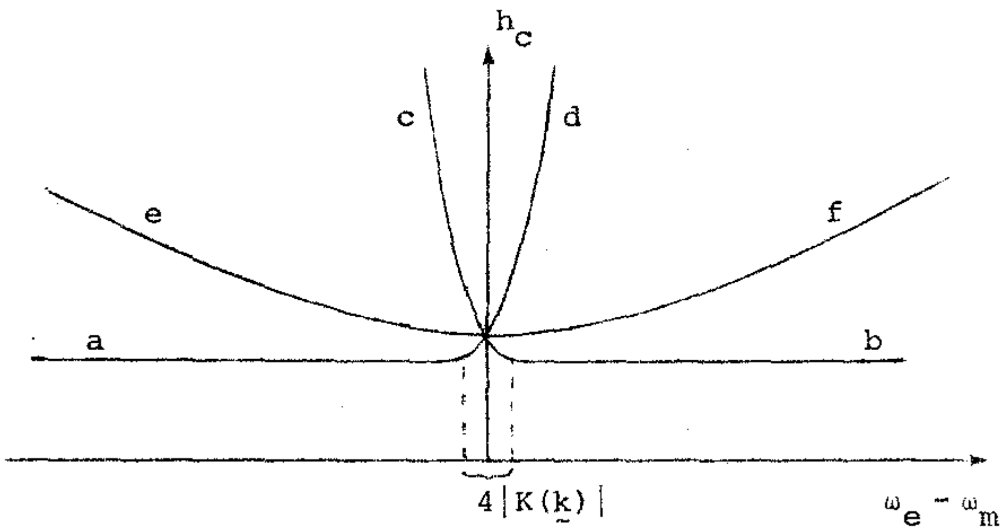


Fig. 9

Na Fig. 9, os ramos a e b para $|\omega_m-\omega_e|>>2|K(\underset{\sim}{k})|$ representam o campo para a instabilidade de magnons puros, os ramos c e d da mesma região representam o campo para a instabilidade de fonons puros, enquanto que os ramos e e f representam o campo para a instabilidade de fonons e magnons. Podemos, então, ver através da Fig. 9, que o campo mais baixo capaz de provocar instabilidades em algum dos modos, corresponde exatamente aos ramos a e b, o que era de se esperar, já que o campo de rádio-frequência se acopla diretamente com os magnons. Nossa análise está de acordo com a de diversos autores [10 a 13], com exceção do estudo que fizemos da 3ª ressonância que como pudemos constatar, não influi de nenhuma forma na obtenção do menor campo capaz de produzir instabilidades que está representado na Fig. 10. Entretanto, o estudo da 3ª ressonância será de grande importância quando tratarmos da produção de fonons.

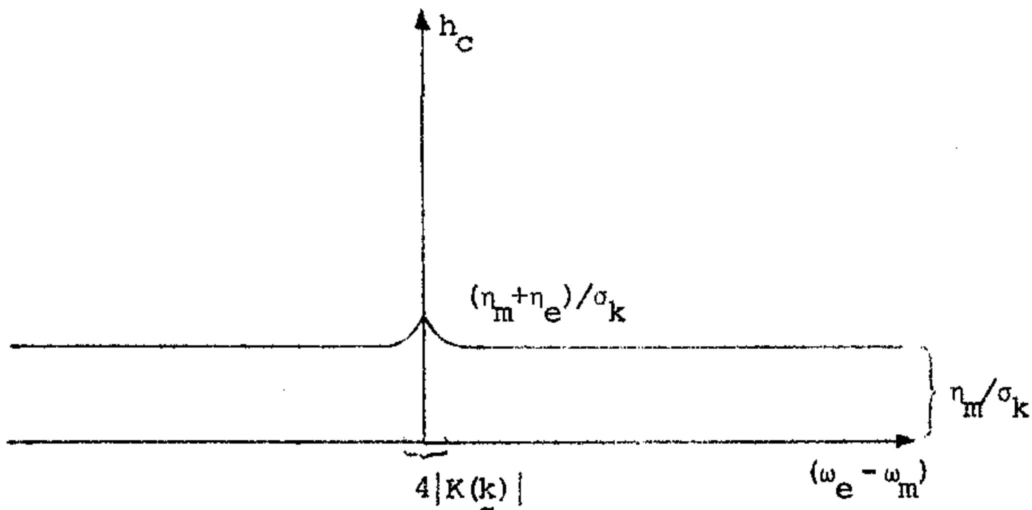


Fig. 10

O pico que vemos na Fig. 10 é devido ao forte acoplamento que existe entre fotons e magnons na região do cruzamento, enquanto que fora desta região o campo se comporta como o de excitação de magnons livres. Detalhes sobre a forma deste pico são importantes para medidas de diversas grandezas, como por exemplo, a altura do pico η_e/σ_k, nos dá a constante de relaxação dos fonons, enquanto que sua largura $4|K(\underset{\sim}{k})|$ nos fornece diretamente a constante de acoplamento na região do cruzamento.

Toda esta análise que fizemos, serviu para que uma vez fixado o quasi-momentum em módulo e direção, descobríssemos qual a menor amplitude que causaria a instabilidade de um dos modos na sua respectiva frequência natural de excitação. Porém, o que se realiza na prática é bem diferente, devido ao fato já comentado no início da seção sobre a dificuldade de detectarmos um quantum de determinado quasi-momentum. Vamos, então, descrever o método que é usado experimentalmente.

Para fixar idéias, vamos ainda considerar os magnons excitados em uma certa direção θ_k, acoplados com fonons (longitudinais ou transversos) e o campo oscilante, com uma frequência bem determinada Ω, e passemos então a analisar as 3 figuras abaixo.

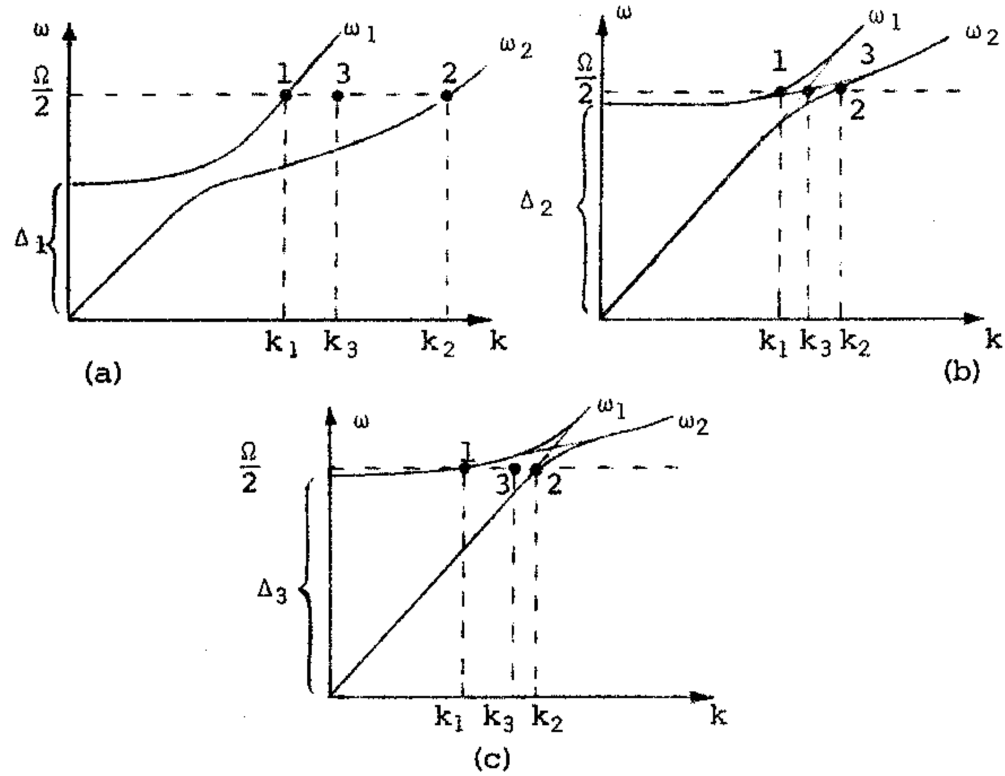


Fig. 11

Na figura (a) vemos que

$$\frac{\Omega}{2} = \omega_1(k_1),\ \omega_2(k_2) \quad \text{ou} \quad \frac{\omega_1(k_3) + \omega_2(k_3)}{2}$$

e da análise anterior $h_{c1} > h_{c3} > h_{c2}$. Na figura (b) aumentamos o valor do campo H, o que causou a modificação Δ_1 para Δ_2 e a reta $\omega = \Omega/2$ corta as curvas na região do cruzamento, portanto $h_{c1} \simeq h_{c2} \simeq h_{c3}$. Na figura (c) aumentamos ainda mais o campo H e obviamente $h_{c2} > h_{c3} > h_{c1}$.

Se agora escrevessemos as fórmulas de h_{c1}, h_{c2} e h_{c3} em função de H (usando as definições da seção 3.1) poderíamos plotar o gráfico de $h \times H$, que está esboçado qualitativamente na **Fig. 12.**

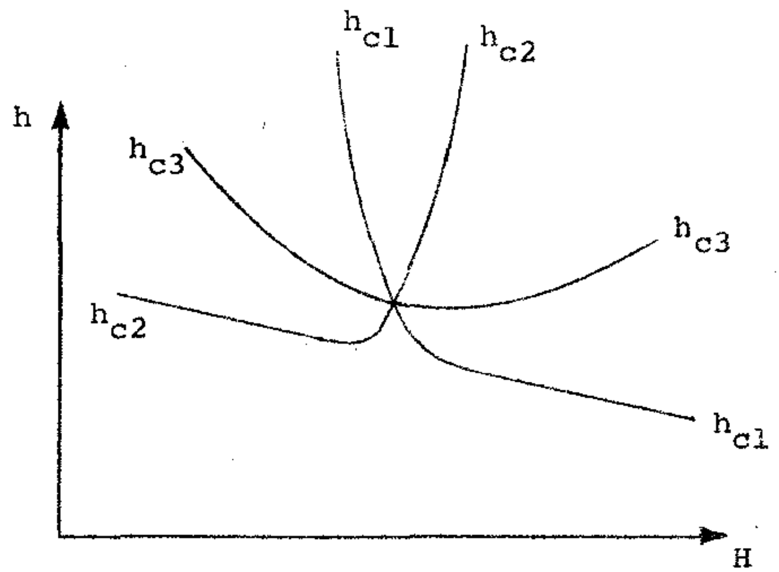


Fig. 12

Este gráfico qualitativo está de acordo com os resultados obtidos experimentalmente [10 a 13] para o menor campo h_c. Como até agora estamos considerando um ângulo θ_k qualquer e não fizemos distinção do tipo de fonon que estamos tratando, vamos estudar que considerações devemos fazer sobre θ_k e sobre o tipo de fonon para que tenhamos realmente o menor campo possível.

A relação de dispersão correta deve levar em conta os dois tipos de polarização de fonons como nos mostra a Fig. 13.

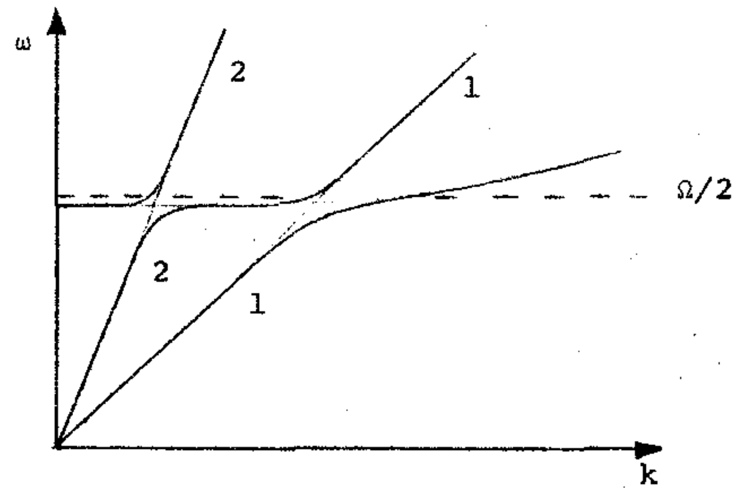


Fig. 13

As retas 1 e 2 representam as relações de dispersão dos fonons transversos e longitudinais respectiva - mente. Levando ainda em conta o fato de $\omega_m(k)$ variar lentamente com k, podemos em 1ª aproximação considerar $\omega_m(k)$ praticamente constante para pequenos valores de k e, portanto, se aumentarmos H na Fig. 13, a reta $\omega = \Omega/2$ só terá interseção com as retas 1 e 2, o que nos proporcionará instabilidades puramente elásticas, isto é, h_c extremamente alto.

Se agora investigarmos a Fig. 12 para pontos fora da região de cruzamento (instabilidades magnéticas) e usarmos a (3.5), (3.7) e (3.12), podemos escrever o campo crítico nesta região como:

$$h_c = \frac{\hbar\eta_m\omega_m(k)}{g^2\mu_B^2\pi M\rho\ \mathrm{sen}^2\theta_k} \tag{3.15}$$

onde $\omega_m(k)$ é dado pela (3.2). O mínimo da (3.15) ocorre para $\theta_k=\pi/2$ e, portanto, as excitações que necessitam de campo mais baixo para sua instabilidade são magnons de quasi-momenta perpendiculares à direção do campo H.

Na região do cruzamento, o campo crítico passa a depender da constante de acoplamento K(k), e como para $\theta_k = \pi/2$ a constante $K_\ell(k)$ K(k,3) = 0 (vide 3.4), deveríamos esperar que o pico da Fig. 12 fosse devido à excitação de modos magnetoelásticos de polarização elíptica transversa e quasi-momentum perpendicular à direção de H. Entretanto, a relação de dispersão para os magnons deve ser representada por uma faixa correspondendo aos diversos ângulos de excitação (Fig. 14), o que nos fornece diversos campos de instabilidades magnetoelásticas quando variamos H. Fora da região de cruzamento, estes campos são sempre maiores que os de $\theta_k = \pi/2$, porém, na região de cruzamento, como o campo depende explicitamente da constante de acoplamento $K_T(k)$ definida na seção (3.1), poderíamos ter uma eventual interseção de picos correspondentes a diferentes ângulos (Fig. 15) [10] o que causaria uma deformação no pico de $\theta_k = \pi/2$ (Fig. 16) [10].

Vemos então que no caso de não existir interseção na região de cruzamento, o campo mais baixo excita

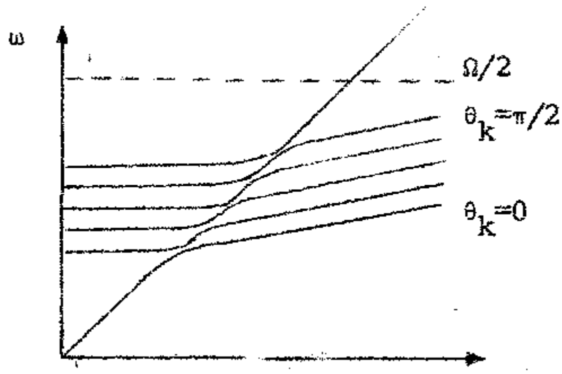


Fig. 15

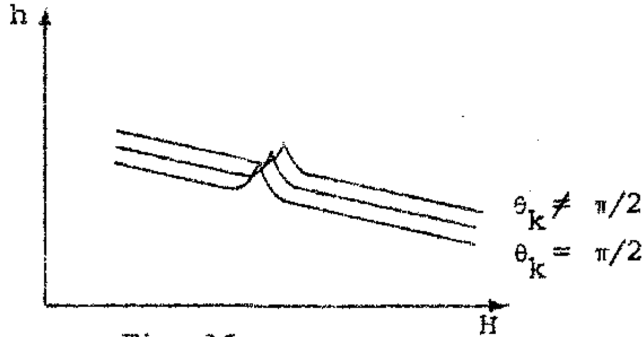


Fig. 16

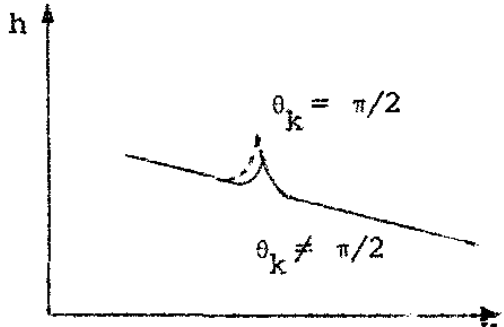


Fig. 17

modos magnetoelásticos elipticamente polarizados na direção perpendicular a H, enquanto que se existir interseção para campos de diferentes θ_k, estes modos poderão também ser excitados em outras direções para certos valores de H. Quanto aos pontos fora do cruzamento, o campo mais baixo excitaria magnons praticamente livres na direção $\theta_k = \pi/2$.

Uma análise quantitativa com condições e medidas de deformação do pico do campo h_c, pode ser encontrada em [10].

3.3. O Número de Fonons

Como vimos na seção anterior, a ressonância $\Omega = \omega_1 + \omega_2$, não exerceu nenhuma influência na medida do campo crítico para as mais baixas instabilidades magnetoelásticas. Entretanto, vimos que nesta ressonância, temos um valor crítico do campo (h_{c3}) capaz de produzir uma mistura de fonons e magnons, e que este campo é bem mais fraco que o necessário para produzir fonons puros (h_{c2} se $k \gg \underset{\sim}{k}$ e h_{c1} se $k \ll \underset{\sim}{k}$). Nesta seção vamos mostrar que o número de fonons produzidos por h_{c3} é comparável com o produzido pelos campos de instabilidades elásticas puras. Sabemos da seção (2.2) que $\psi_k(t)$ é dado por:

$$\psi_k(t) = \begin{bmatrix} \tilde{X}_k(t) \\ \tilde{X}^+_{-k}(t) \\ \tilde{Y}_k(t) \\ \tilde{Y}^+_{-k}(t) \end{bmatrix}$$

e portanto se definirmos β como sendo

$$\beta \equiv \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

onde I é a identidade 2×2 e usarmos as relações de comutação dos operadores, o produto $\psi^+\frac{(I-\beta)}{2}\psi$ será dado por:

$$\psi^+ \frac{(I - \beta)}{2} \psi = 2Y^+_kY_k + 1 \qquad (3.16)$$

onde $Y^+_kY_k$ é o número de quanta do modo (Y), que coincide com o número de fonons para $k \ll \underset{\sim}{k}$. Analogamente, podemos escrever

$$\psi^+ \frac{(I + \beta)}{2} \psi = 2X^+_kX_k + 1 \qquad (3.17)$$

onde $X_k^+X_k$ é o número de quanta do modo (X) com quasi-momentum k, que coincide com o número de fonons se $k >> \tilde{k}$.

Vamos então calcular apenas o número $Y_k^+Y_k$, sabendo que para a obtenção de $X_k^+X_k$ basta trocar o sinal de $(I-\beta)/2$. Tomando o hermitiano conjugado de (2.19) teremos:

$$\psi^+(t) = \psi^+(0)\, e^{-iL^+t} + \frac{1}{2}\sum_\alpha \varphi_\alpha^+\{(e^{-iL^+t} - e^{i\lambda_\alpha t})(L^+ + \lambda_\alpha)^{-1}(I+\sigma_z)$$

$$+ (e^{-iL^+t} - e^{-i\lambda_\alpha t})(L^+ - \lambda_\alpha)^{-1}(I-\sigma_z)\}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_\beta \varphi_\beta^+\{(e^{-iL^+t} - e^{-i\lambda_\beta t})(L^+ + \lambda_\beta)^{-1}(I+\sigma_z) + (e^{-iL^+t} - e^{-i\lambda_\beta t})$$

$$\times (L^+ - \lambda_\beta)^{-1}(I - \sigma_z)\} \qquad (3.18)$$

A matriz L, dada por (2.22), satisfaz as seguintes propriedades

$$L^* = -\sigma_x L \sigma_x \quad \text{e} \quad L^+ = -\sigma_y L \sigma_y \qquad (3.19)$$

onde

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} \tau_x & 0 \\ 0 & \tau_x \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} \tau_y & 0 \\ 0 & \tau_y \end{bmatrix}$$

onde τ_x e τ_y são matrizes de Pauli [22].

Usando então estas propriedades, efetuando o produto (3.16), eliminando os operadores dos reservatórios através de $tr_{RS}[\hat\rho_{RS}\, \psi^+ \frac{(I-\beta)}{2}\, \psi]$ onde $\hat\rho$ é a matriz densidade associada ao reservatório à temperatura T, e usando ainda a (2.10), poderemos escrever a (3.16) como:

$$\langle\psi^+ \frac{(I-\beta)}{2}\psi\rangle = \sum_{ij} tr\left[(N_\alpha + \frac{I-\sigma_z}{2})\sigma_y E_j \sigma_y (\frac{I-\beta}{2})E_i\right] e^{i(p_i+p_j)t}$$

$$- \sum_{ij\alpha}\left(\frac{e^{-ip_it} - e^{-i\lambda_\alpha t}}{p_i + \lambda_\alpha}\right)\left(\frac{e^{ip_jt} - e^{i\lambda_\alpha t}}{p_j - \lambda_\alpha}\right) tr\left[(N_\alpha + \frac{I-\sigma_z}{2})F_\alpha(\frac{I+\sigma_z}{2})\sigma_y E_j \sigma_y (\frac{I-\beta}{2})E_i\right]$$

$$-\sum_{ij\alpha} \left(\frac{e^{ip_i t} - e^{i\lambda_\alpha t}}{p_i - \lambda_\alpha}\right)\left(\frac{e^{ip_j t} - e^{-i\lambda_\alpha t}}{p_i + \lambda_\alpha}\right) \mathrm{tr}\left[\left(N_\alpha + \frac{I-\sigma_z}{2}\right) F_\alpha \left(\frac{I-\sigma_z}{2}\right) \sigma_y E_j \sigma_y \left(\frac{I-\beta}{2}\right) E_i\right]$$

$$-\sum_{ij\beta} \left(\frac{e^{ip_i t} - e^{-i\lambda_\beta t}}{p_i + \lambda_\beta}\right)\left(\frac{e^{ip_j t} - e^{i\lambda_\beta t}}{p_j - \lambda_\beta}\right) \mathrm{tr}\left[\left(N_\beta + \frac{I-\sigma_z}{2}\right) G_\beta \left(\frac{I+\sigma_z}{2}\right) \sigma_y E_j \sigma_y \left(\frac{I-\beta}{2}\right) E_i\right]$$

$$-\sum_{ij\beta} \left(\frac{e^{ip_i t} - e^{i\lambda_\beta t}}{p_i - \lambda_\beta}\right)\left(\frac{e^{ip_j t} - e^{-i\lambda_\beta t}}{p_j + \lambda_\beta}\right) \mathrm{tr}\left[\left(N_\beta + \frac{I-\sigma_z}{2}\right) G_\beta \left(\frac{I-\sigma_z}{2}\right) \sigma_y E_j \sigma_y \left(\frac{I-\beta}{2}\right) E_i\right] \tag{3.20}$$

onde os p_i são autovalores de L, E_i o projetor sobre o autovetor de autovalor p_i, N_α e N_β o número de bosons de energias ω_α e ω_β à temperatura T, respectivamente, e:

$$F_\alpha = \frac{1}{2}\left[(|f_{1\alpha}|^2 + |f_{2\alpha}|^2) + (|f_{1\alpha}|^2 - |f_{2\alpha}|^2)\beta\right] \tag{3.21}$$

$$G_\beta = \frac{1}{2}\left[(|g_{2\beta}|^2 + |g_{1\beta}|^2) + (|g_{2\beta}|^2 - |g_{1\beta}|^2)\beta\right] \tag{3.22}$$

$$N_0 = \frac{1}{2}\left[(N_x(0) + N_y(0)) + (N_x(0) - N_y(0))\beta\right] \tag{3.23}$$

Como L satisfaz as relações (3.19), se u_i é o autovetor correspondente ao autovalor p_i, ou seja, $Lu_i = p_i u_i$, podemos escrever ainda [8]:

$$L(\sigma_x u_i^*) = -p_i^*(\sigma_x u_i^*) \tag{3.24}$$

e

$$L^+(\sigma_y u_i) = -p_i(\sigma_y u_i) \tag{3.25}$$

o que nos permite mostrar que se as fases dos autovetores de L são devidamente escolhidas, eles satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade [8]:

$$u_i^T \sigma_z u_j = \delta_{ij} \tag{3.26}$$

e obviamente o projetor E_i será escrito como

$$E_j = u_j (u_j^T \sigma_z) \tag{3.27}$$

Os traços que aparecem na (3.20) são da forma:

$$\mathrm{tr}\left[D\sigma_y E_j \sigma_y \left(\frac{I-\beta}{2}\right) E_i\right]$$

(onde D é uma matriz diagonal) que podem com o auxílio da (3.27) ser reescritos como:

$$\mathrm{tr}\left[D\sigma_y E_j \sigma_y \left(\frac{I-\beta}{2}\right) E_i\right] = -(u_i^T|D\sigma_x|u_j)\,(u_j^T|\sigma_x\left(\frac{I-\beta}{2}\right)|u_i) \tag{3.28}$$

Levando então este resultado na (3.20), e ainda fazendo algumas simplificações, poderemos chegar a:

$$\begin{aligned}
\langle\psi^+\left(\frac{I-\beta}{2}\right)\psi\rangle &= -\frac{1}{2}\sum_{ij}(N_0+\tfrac{1}{2})\,(u_j^T|\left(\frac{I-\beta}{2}\right)\sigma_x|u_i)\,(u_i^T|\sigma_x|u_j)\,e^{i(p_i+p_j)t} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{\alpha}(N_\alpha+\tfrac{1}{2})\left(\frac{e^{ip_it}-e^{i\lambda_\alpha t}}{p_i-\lambda_\alpha}\right)\left(\frac{e^{ip_jt}-e^{-i\lambda_\alpha t}}{p_j+\lambda_\alpha}\right)(u_j^T|\sigma_x\left(\frac{I-\beta}{2}\right)|u_i)\,(u_i^T|F_\alpha\sigma_x|u_j) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{\beta}(N_\beta+\tfrac{1}{2})\left(\frac{e^{ip_it}-e^{i\lambda_\beta t}}{p_i-\lambda_\beta}\right)\left(\frac{e^{ip_jt}-e^{-i\lambda_\beta t}}{p_j+\lambda_\beta}\right)(u_j^T|\sigma_x\left(\frac{I-\beta}{2}\right)|u_i)\,(u_i^T|G_\beta\sigma_x|u_j)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Se agora transformarmos $\sum_\alpha$ em $\int_0^\infty d\omega_\alpha \rho(\omega_\alpha)$, $\sum_\beta$ em $\int_0^\infty d\omega_\beta \rho(\omega_\beta)$ e notarmos que a contribuição principal em cada um dos integrandos será para $\mathrm{Re}\, p_i = -\mathrm{Re}\, p_j = \lambda_\alpha$, poderemos reescrever a (3.29) como:

$$\begin{aligned}
2N_y(t)+1 &\simeq -\frac{1}{2}\sum_{ij}(N_0+\tfrac{1}{2})\,(u_j^T|\left(\frac{I-\beta}{2}\right)\sigma_x|u_i)\,(u_i^T|\sigma_x|u_j)\,e^{i(\delta_i+\delta_j)t}\,e^{-(\gamma_i+\gamma_j)t} \\
&-{\sum_{ij}}'\,\pi\rho(\delta_i+\tfrac{\Omega}{2})\left[N(\delta_i+\tfrac{\Omega}{2})+\tfrac{1}{2}\right](u_j^T|\sigma_x\left(\frac{I-\beta}{2}\right)|u_i)\;\times
\end{aligned}$$

$$\times\ (u_i^T|\left[F(\delta_i + \frac{\Omega}{2}) + G(\delta_i + \frac{\Omega}{2})\right]\sigma_x|u_j)\ \frac{[1 - e^{-(\gamma_i+\gamma_j)t}]}{\gamma_i + \gamma_j} \tag{3.30}$$

onde $\delta_i \equiv \mathrm{Re}\ p_i$, $\gamma_i \equiv \mathrm{Im}\ p_i$ e $\sum'_{ij}$ representa a soma sobre todos os possíveis índices i, mas restringe os índices j a apenas aqueles tais que $\mathrm{Re}\ p_i = -\ \mathrm{Re}\ p_j$.

A (3.30) nos mostra que se as raízes p_i possuem partes imaginárias positivas, o que corresponde a $h < h_c$, o número $N_y(t)$ terá uma parte transiente que irá decair com uma constante de relaxação efetiva dada pelo valor máximo de $\gamma_i + \gamma_j$, e uma parte que depois de um intervalo de tempo dado por $1/\mathrm{máx}(\gamma_i + \gamma_j)$, permanecerá estacionária. Este resultado já havia sido adiantado no 2º capítulo quando fizemos a análise das raízes de det M = 0.

Vamos agora usar a (3.30) para calcular o número $N_y(t)$ quando $h = h_{c2}$ ou h_{c3}. Devemos chamar a atenção do leitor para o fato de que estaremos interessados apenas nas instabilidades provocadas em $N_y(t)$ devido aos campos críticos e, portanto, vamos desprezar as partes transiente e estacionária de $N_y(t)$, ou seja, partes que contenham $\gamma_i > 0$.

a) <u>2ª Ressonância</u>: $(\Omega = 2\omega_2)$

Neste caso existe apenas um autovalor real, $p_1=0$. Portanto, $\sum'_{ij}$ fica restrita a $i=1$ e $j=1$ com $\delta_i = \gamma_i = 0$, e consequentemente o argumento $\delta_1 + \Omega/2$ é igual a ω_2. Usando então que $u_1 = i\sigma_x u_1^*$, chamando $u_1 \equiv v$ e fazendo o $\lim\limits_{\gamma_i+\gamma_j\to 0}$ nas exponenciais da (3.30), teremos:

$$2N_y(t) + \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2}\ (N_0 + \frac{1}{2})\,(v^+|\,(\frac{I-\beta}{2})\,|v)\,(v^+|v)\ +$$

$$+\ \pi\rho(\omega_2)\left[N(\omega_2) + \frac{1}{2}\right](v^+|\,(\frac{I-\beta}{2})\,|v)\,(v^+|F(\omega_2) + G(\omega_2)|v)t \tag{3.31}$$

b) <u>3ª Ressonância</u>: $(\Omega = \omega_1 + \omega_2)$

Aqui existem dois autovalores reais que são dados aproximadamente por λ_1 e $-\lambda_1$ (vide 2.36), portanto:

$\delta_1 \simeq \lambda_1$, $\gamma_1 = 0$, $\delta_2 \simeq -\lambda_1$ e $\gamma_2 = 0$. Neste caso, $i=1$ e $j=2$ ou $i=2$ e $j=1$ e, consequentemente, teremos:

$$\delta_1 + \frac{\Omega}{2} \simeq \lambda_1 + \frac{\Omega}{2} = \omega_1 \quad \text{e} \quad \delta_2 + \frac{\Omega}{2} \simeq -\omega_1 + \Omega = \omega_2$$

Lembrando então que $u_1 = i\sigma_x u_2^*$, chamando o autovetor u_1 de u e calculando $\lim_{\gamma_i+\gamma_j \to 0}$ da (3.30), o número $N_y(t)$ será dado por:

$$\begin{aligned} 2N_y(t) + \frac{1}{2} \simeq\ & (N_0 + \tfrac{1}{2})(u^+|\tfrac{I-\beta}{2}|u)(u^+|u) \\ & + \pi\rho(\omega_1)\left[N(\omega_1) + \tfrac{1}{2}\right](u^+|\tfrac{I-\beta}{2}|u)(u^+|F(\omega_1) + G(\omega_1)|u)t \\ & + \pi\rho(\omega_2)\left[N(\omega_2) + \tfrac{1}{2}\right](u^+|\tfrac{I-\beta}{2}|u)(u^+|F(\omega_2) + G(\omega_2)|u)t \end{aligned} \tag{2.32}$$

Se $k << \underset{\sim}{k}$, as expressões (3.31) e (3.32) nos dão o número de fonons produzidos nas ressonâncias $\Omega = 2\omega_e$ ou $\Omega = \omega_m + \omega_e$ respectivamente. Ainda nesta região, usando a (3.21) e (3.22), temos:

$$\pi\rho(\omega_1)[F(\omega_1) + G(\omega_1)] \simeq \frac{(I+\beta)}{2}\,\eta_m \tag{3.33}$$

e

$$\pi\rho(\omega_2)[F(\omega_2) + G(\omega_2)] \simeq \frac{(I-\beta)}{2}\,\eta_e \tag{3.34}$$

o que nos permite reescrever a (3.31) e (3.32) como:

$$2N_y(t)\Big|_2 \simeq \frac{N_0}{2}\,(v^+|\tfrac{I-\beta}{2}|v)(v^+|v) + N(\omega_e)(v^+|\tfrac{I-\beta}{2}|v)^2\eta_e t \tag{3.35}$$

e

$$\begin{aligned} 2N_y(t)\Big|_3 \simeq\ & \frac{N_0}{2}\,(u^+|\tfrac{I-\beta}{2}|u)(u^+|u) + [N(\omega_m)(u^+|\tfrac{I-\beta}{2}|u)(u^+|\tfrac{I+\beta}{2}|u)\eta_m \\ & + N(\omega_e)(u^+|\tfrac{I-\beta}{2}|u)^2\eta_e]t \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde usamos que $N(\omega_1)$ e $N(\omega_2) >> 1$ e denotamos $N_y(t)\Big|_2$ e

$N_y(t)\big|_3$ como o número de fonons produzidos na 2ª e 3ª ressonâncias respectivamente.

Da (3.35) e (3.36), (ou mesmo da (3.31) e (3.32)) vemos que quando $h = h_c$ em alguma destas ressonâncias, o número de fonons se torna instável, crescendo linearmente com o tempo. Deve ficar claro também, que estas fórmulas só são válidas para intervalos de tempo não muito longos, pois caso contrário temos um número de fonons muito grande e consequentemente devemos levar em conta termos que foram desprezados em nosso modelo.

Vamos agora comparar o número de fonons produzidos por unidade de tempo em cada uma das ressonâncias. Para tal vamos calcular a razão R dada por:

$$R = \frac{dN_y(t)\big|_3}{dt} \Bigg/ \frac{dN_y(t)\big|_2}{dt}$$

Usando então a (3.35), (3.36) e escrevendo os vetores u e v em termos de suas componentes como:

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

a razão R será escrita na região fora do cruzamento $(k < \underline{k})$ como:

$$R \simeq \frac{(|x_3|^2 + |x_4|^2)}{(|y_3|^2 + |y_4|^2)[B(|y_1|^2 + |y_2|^2) + A(|y_3|^2 + |y_4|^2)]}$$

$$\times \left\{\frac{N(\omega_m)\,\eta_e}{N(\omega_e)\,\eta_m}[A(|x_1|^2 + |x_2|^2) + B(|x_3|^2 + |x_4|^2)]\right.$$

$$\left. + [B(|x_1|^2 + |x_2|^2) + A(|x_3|^2 + |x_4|^2)]\right\} .$$

A razão R foi calculada numericamente para diversos valores de $\omega_e - \omega_m$ no caso do ferromagneto utilizado ser o YIG à temperatura de 300°K. Para estes cálculos foram usados os seguintes valores [21]:

$\rho = 5{,}17\ g/cm^3$ $\quad$ $H = 3.000\ G$

$v_\ell = 7{,}209 \times 10^5\ cm/s$ $\quad$ $4\pi M = 1760\ G$

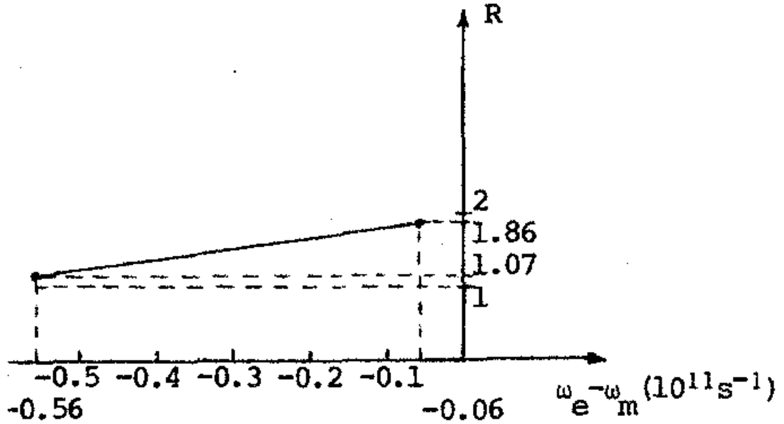
$v_t = 3{,}843 \times 10^5\ cm/s$ $\quad$ $b = 6{,}96 \times 10^6\ erg/cm^3$

$D = 5 \times 10^{-9}\ Gcm^2$ $\quad$ $\tau_e = 3{,}2 \times 10^{-5}\ s$

$\theta_k = \pi/2$ $\quad$ $\tau_m = 3 \times 10^{-7}\ s$

onde assumimos que τ_e e τ_m são constantes.

Os resultados obtidos para R na região onde $-0.56 \times 10^{11} < \omega_e - \omega_m < -0.06 \times 10^{11}$ podem ser aproximados por uma reta como nos mostra a figura abaixo.



CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES

Através do tratamento introduzido por Louisell [7], vimos que é possível reobter diversos resultados para o caso de dois sistemas acoplados que interagem com um reservatório, como por exemplo, as constantes de relaxação dos modos normais, η_1 e η_2, anteriormente obtidas em [8] por um processo diferente. A expressão formal para a evolução temporal dos modos normais quando introduzimos a excitação paramétrica, também está de acordo com a obtida por Gonçalves-Zagury [8].

Entretanto, o resultado mais importante que obtivemos surgiu da análise dos campos críticos nas ressonâncias do sistema. Constatamos que utilizando o campo h_{c3}, podemos produzir um certo número de fonons por unidade de tempo da mesma ordem de grandeza que o número que seria produzido se utilizássemos o campo da 2ª ressonância (h_{c2}). Isto nos mostra que podemos obter o mesmo tipo de crescimento instável de fonons através da aplicação de um campo bem mais fraco que o necessário para a instabilidade de fonons puros. O campo crítico para a 3ª ressonância ($\Omega = \omega_1 + \omega_2$) já havia sido calculado por diversos autores [14,15,16] no caso da interação magnon eletrônico - magnon nuclear e por Schlömann [23] no caso da interação magnetoelástica.

REFERÊNCIAS

1. F. Reif, Statistical and Thermal Physics (New York , McGraw-Hill, 1965).
2. R. K. Pathria, Statistical Mechanics (Braunschweig , Pergamon Press, 1972).
3. H. Haken, Rev. Mod. Phys., vol. 47, n. 1 (1975).
4. M. Lax, Rev. Mod. Phys., vol. 32, n. 1 (1960).
5. W. H. Louisell, Quantum Optics, ed. by S. M. Kay and A. Maitland, Academic Press.
6. U. Balucani, F. Barochi and V. Tognetti, Phys. Rev. A5, 442 (1972).
7. W. H. Louisell, Radiation and Noise in Quantum Electronics (New York, McGraw-Hill, 1964).
8. L. L. Gonçalves and N. Zagury, Phys. Stat. Sol. (b)68, 607 (1975).
9. W. H. Louisell and Walker, Phys. Rev. 1B, 137 (1975).
10. P. H. Cole, IEEE, Trans. Mag., MAG-4, 184 (1968).
11. F. R. Morghentaler, J. App. Phys. 34, 1289S (1963).
12. F. Olson, J. App. Phys. 34, 1281S (1963).
13. R. L. Comstock, J. App. Phys. 35, 2427 (1964).
14. F. Ninio and F. Keffer, Phys. Rev. 165, 735 (1968).
15. L. W. Hinderks and P. M. Richards, Phys. Rev. 183, 575 (1969).
16. A. Platzker, Technical Report 23 (Department of Electrical Engineering, MIT).
17. E. Schlömann and R. I. Joseph, J. App. Phys. 40, 2164 (1969).
18. N. Zagury and S. M. Rezende, Phys. Rev. B4, 201 (1971).
19. C. Kittel, Quantum Theory of Solids (John Wiley and Sons, New York, 1963).
20. T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. 58, 1098(1940).
21. L. L. Gonçalves, Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (1973).
22. E. Merzbacher, Quantum Mechanics (New York, John Wiley and Sons , 1970).
23. E. Schlömann, J. App. Phys. <u>31</u>, 1647-1656 (1960).

UM ESTUDO SOBRE RELAXAÇÃO E EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA EM DOIS SISTEMAS DE BOSONS ACOPLADOS

por

Amir Ordacgi Caldeira

Tese de Mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências - Menção Física - no Departamento de Física da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro à Banca Examinadora constituída pelos seguintes professores:

Roberto Lobo

Gilson Carneiro

Nicim Zagury
Orientador

Vista e permitida a impressão.
Rio de Janeiro, 10 de agosto de 1976.

Coordenador dos Programas de Pós-Graduação
e Pesquisas do Centro Técnico Científico