

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

TESE DE DOUTORADO

ALUNO: Cesar Juan Alarcon LLacctarimay

Modelagem da distribuição de matéria em um
Anel em presença de *Shepherds*, via equação
de Fokker-Planck

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Doutor em Ciências.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Maximiliano Ujevic Tonino
CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro
CO-ORIENTADOR: Prof. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO CESAR JUAN ALARCON LLACCTARIMAY, E ORIENTADA PELO PROF. DR. MAXIMILIANO UJEVIC TONINO.



Assinatura do Orientador

CAMPINAS - SAO PAULO
2012

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
VALKÍRIA SUCCI VICENTE – CRB8/5398 - BIBLIOTECA DO IFGW
UNICAMP**

AL12m

Alarcon LLacctarimay, Cesar Juan, 1982-
Modelagem da distribuição de matéria em um anel em
presença de *shepherds*, via equação de Fokker-Planck /
Cesar Juan Alarcon LLacctarimay.-- Campinas, SP : [s.n.],
2012.

Orientadores: Maximiliano Ujevic Tonino, Javier Fernando
Ramos Caro, Carola Dobrigkeit Chinellato.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Física “Gleb Wataghin”.

1. Planetas e satélites. 2. Anéis planetários.
3. Mecânica celeste. 4. Fokker-Planck, Equação de.
I. Ujevic Tonino, Maximiliano. II. Ramos Caro, Javier
Fernando. III. Chinellato, Carola Dobrigkeit, 1952-
IV. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física
“Gleb Wataghin”. V. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Modeling the distribution of matter in a ring in the presence of
sheperds, via Fokker-Planck equation

Palavras-chave em inglês:

Planets and satellites
Planetary rings
Celestial mechanics
Fokker-Planck equation

Titulação: Doutor em Ciências

Banca Examinadora:

Maximiliano Ujevic Tonino [Orientador]
Alex Antonelli
Maurice de Koning
Wilson Tonin Zanchin
Germán Lugones

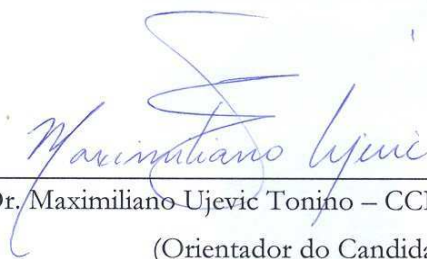
Data da Defesa: 03-05-2012

Programa de Pós-Graduação em: Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **CESAR JUAN ALARCON LLACCTARIMAY- RA 79834**, APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN” DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 03/05/2012.

COMISSÃO JULGADORA:



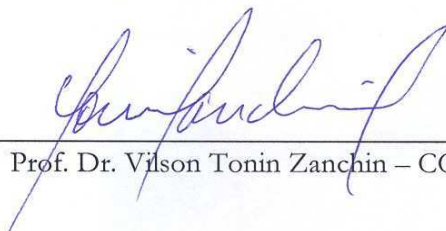
Prof. Dr. Maximiliano Ujevic Tonino – CCNH/UFABC
(Orientador do Candidato)



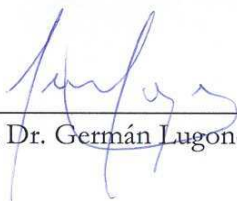
Prof. Dr. Alex Antonelli – DFMC/IFGW/UNICAMP



Prof. Dr. Maurice de Koning - DFMC/IFGW/UNICAMP



Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin – CCNH/UFABC



Prof. Dr. Germán Lugones – CCNH/UFABC

A minha querida filhinha Viviane.

Agradecimentos

- Ao Professor Dr. Patrício Anibal Letelier Sotomayor pelos seus sábios conhecimentos e pela orientação em uma parte deste trabalho.
- Ao Professor Dr. Maximiliano Ujevic Tonino pela sua ajuda na orientação deste trabalho em momentos difíceis, e pelas recomendações que fizeram possível concluir esta tese.
- Ao Professor Dr. Javier Fernando Ramos Caro pelo apoio e incentivo durante a co-orientação deste trabalho.
- À Professora Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato pela gentileza e disposição em ajudar.
- A todos meus professores da escola e das universidades que ajudaram na minha formação.
- A minha esposa Rosmina pelo amor e compreensão que me ofereceu durante estes anos de estudo.
- A toda minha família pelo apoio moral e pelos conselhos que me ajudaram a crescer academicamente e como pessoa.
- A todos os amigos pelos momentos de descontração e pela paciência que eles mostraram comigo.
- À UNICAMP, e ao suporte financeiro do CNPq.

Resumo

Nesta tese pretendemos modelar a distribuição de matéria em um **Anel estelar** fino imerso no campo gravitacional de um e dois Satélites *Shepherds* (Satélites Pastores) usando a **equação de Fokker-Planck**. Em particular, estudamos a evolução de um anel fino ao redor de um monopolo central. Os coeficientes de difusão são aqui calculados e escritos em termos de um “potencial” semelhante aos usuais potenciais de Rosenbluth. Neste caso, consideramos que as partículas campo obedecem uma distribuição Gaussiana. Resolvemos a equação de Fokker-Planck 1-dimensional para a função de distribuição das partículas teste que conformam o anel usando o método das diferenças finitas (versão **Euler implícita**). Demonstramos que o anel é uma configuração estável para uma evolução de longo tempo, tanto na ausência como na presença de *shepherds*. Estudamos também a variação da densidade de massa do anel para diferentes configurações. Em todos os casos é observada uma variação máxima e negativa da densidade perto da localização do *shepherd* devido a efeitos dinâmicos.

Abstract

In this thesis we intend to model the distribution of matter in a thin **stellar ring** immersed in the gravitational field of one and two shepherd satellites using the **Fokker-Planck equation**. In particular, we study the evolution of a thin ring around a central monopole. The diffusion coefficients are calculated and written in terms of a “potential” similar to the usual Rosenbluth potentials. In this case, we consider that the particles follow a Gaussian distribution. We solve the 1-dimensional Fokker-Planck equation for the ring particles distribution function using the finite difference method (**implicit Euler** version). We show that the ring is a stable configuration for long time evolutions in the absence or in the presence of shepherds. We also studied the change in the mass density of the ring for different configurations. In all of the cases, it is observed a maximum negative variation of the density near the location of the shepherd due to dynamical effects.

Conteúdo

Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	x
Introdução	1
1 Equação de Fokker-Planck para Sistemas estelares	9
1.1 Equação de Liouville	9
1.2 A Equação de Boltzmann sem Colisões	16
1.3 Equação de Boltzmann com Colisões	19
1.3.1 A Equação Mestra	20
1.3.2 A aproximação de Fokker-Planck	21
1.3.3 Coeficientes de Difusão	22
2 Discos e Anéis Estelares	25
2.1 A Equação de Fokker-Planck para Discos Estelares finos	26
2.1.1 Termo de Colisões não Cartesiano	30
2.1.2 Determinação de h_a	33
2.2 A Equação de Fokker-Planck para Anéis Estelares finos	35
2.3 Um Anel fino em presença de um <i>shepherd</i>	37
2.4 Um Anel fino em presença de dois <i>shepherds</i>	40
3 Método das Diferenças Finitas	43
3.1 Método Explícito para Equações Parabólicas	44

3.1.1	Equação de Difusão	45
3.1.2	Método das Diferenças Finitas	46
3.1.3	Análises de Estabilidade	47
3.2	Método Implícito para Equações Parabólicas	49
3.3	Equação de Difusão de Calor 2D	52
4	Resultados e Discussão	55
4.1	Estabilidade do Anel	55
4.2	Influência de um <i>shepherd</i> sobre a evolução de um Anel fino	56
4.3	Influência de dois <i>shepherds</i> sobre a evolução de um Anel fino	59
5	Conclusões	61
	Referências Bibliográficas	64
	Apêndices	69
A	Determinação dos Coeficientes de Difusão	69
B	Solução da Equação 1D de FP usando Diferenças Finitas	79
C	Artigo	83
C.1	Introduction	84
C.2	The Fokker-Planck equation for a Narrow Ring	85
C.2.1	Gravitational Interaction with a Central Monopole and point-like Shepherds	87
C.2.2	The Collision term of Fokker-Planck Equation	89
C.3	Stability of the Ring	89
C.4	Influence of the shepherds on the ring's evolution	90
C.5	Conclusion	92

Lista de Figuras

1	Trajétoria de uma partícula no espaço de fases. A partir do tempo t_{relax} existe uma diferença notável entre a órbita que considera unicamente o potencial gravitacional médio $\bar{\Phi}$ e a órbita que considera também os encontros. Para tempos maiores que o tempo t_{relax} , os encontros devem ser considerados importantes na evolução do sistema.	2
1.1	Espalhamento no espaço de fases. P_- é a probabilidade de que uma partícula seja espalhada para fora do volume $d^6\mathbf{w}$, e P_+ é a probabilidade de que uma partícula seja espalhada para dentro do volume $d^6\mathbf{w}$	20
2.1	Encontro da partícula teste de massa m e a partícula campo de massa m_a com um parâmetro de impacto b e velocidade relativa \mathbf{u} . Podemos definir Δv_{\parallel} como a mudança de \mathbf{v} na direção \mathbf{i}' causada pelo encontro e Δv_{\perp} como a mudança na direção \mathbf{j}' causado pelo encontro.	27
2.2	Transformação das componentes da velocidade. A nova base faz um ângulo φ com a base antiga. Observe que a antiga base da velocidade coincide com a base cartesiana espacial.	31
2.3	Anel + <i>Shepherd</i> , aqui φ representa a coordenada angular das partículas do Anel, e φ_s representa a coordenada angular do <i>Shepherd</i> . As partículas do Anel e o <i>Shepherd</i> giram em órbitas circulares, e neste exemplo, o <i>Shepherd</i> se localiza na parte exterior do Anel, mas, também pode estar na parte interior do Anel.	38

2.4	Anel + 2 <i>Shepherds</i> , aqui φ representa a coordenada angular das partículas do Anel, e φ_1 e φ_2 representam as coordenadas angulares do <i>Shepherd</i> 1 e <i>Shepherd</i> 2, respectivamente. As partículas do Anel e os <i>Shepherds</i> giram em orbitas circulares.	41
3.1	Em (a) mostramos os resultados numéricos de $\mathbf{f}(x, t_f)$ para diferentes valores de Δt , vemos que aproximadamente para $\Delta t \leq 0.0005$ o sistema atinge a solução estacionaria, e em (b) apresentamos a comparação dos resultados numéricos com os resultados analíticos da Equação de Difusão 1D em diferentes instantes de tempo, as linhas contínuas representam as soluções analíticas, vemos que ambos resultados coincidem. Foi considerado $t_f = 1$ e $N = 40$. . .	51
3.2	Em (a) mostramos os valores numéricos de $\mathbf{f}(x, 0, t_f)$ para diferentes valores de Δt , vemos que para $\Delta t \leq 0.0005$ o sistema atinge a solução estacionária. E em (b) apresentamos a comparação dos resultados numéricos com os resultados analíticos para o caso da Equação de Difusão de calor 2D em diferentes instantes de tempo. Observamos que ambos resultados coincidem. Consideramos $t_f = 1$, $N = M = 10$	53
3.3	Comparação dos resultados numéricos com os resultados analíticos para o caso da Equação de Difusão de calor 2D em diferentes instantes de tempo, a diferença da Fig.3.2(b) neste caso apresentamos os valores de \mathbf{f} em todo o espaço 2D representados pelos Nós espaciais. As linhas contínuas representam os dados analíticos.	53
4.1	Consideramos $M_p = 568.46 \times 10^{24}$ kg, $\Sigma_o = 500$ kg/m ² , $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$, e $t_o = 2 \times 10^6$ s. E os seguintes valores para as constantes $\alpha = 0.1$, $\varsigma = 0.05$, e $\kappa = 1$. Onde para (a) $\tau = 0$, (b) $\tau = 200\Delta\tau$, (c) $\tau = 1000\Delta\tau$ e (d) $\tau = 4000\Delta\tau$	57
4.2	Consideramos $M_p = 568.46 \times 10^{24}$ kg, $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, $m_s = 14 \times 10^{16}$ kg, $\Sigma_o = 500$ kg/m ² , $\tilde{\sigma} = 0.25$, e $\varepsilon = 5 \times 10^5$ m. Onde para (a) $\tau = \Delta\tau$, (b) $\tau = 50\Delta\tau$, (c) $\tau = 800\Delta\tau$, e (d) $\tau = 2400\Delta\tau$	58

4.3	Variaco da densidade superficial de massa do anel, em todos os casos $M_p = 568.46 \times 10^{24}$ kg, $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, $\Sigma_o = 500$ kg/m ² , $\varepsilon = 5 \times 10^5$ m, $m_s = 14 \times 10^{16}$ kg, e $\tilde{\sigma} = 0.5$. Em (a) mostramos quando um <i>shepherd</i> aparece de repente e mantido fixo na posio $\varphi = 0$, e em (b) mostramos quando um <i>shepherd</i> que est circulando � detido de repente em $\varphi \approx 1.5$	59
A.1	Esquematzaco do encontro gravitacional de uma partícula teste de massa m e a partícula campo de massa m_a com um parmetro de impacto b , em que u � o modulo da velocidade relativa das partículas que participam do encontro. O ponto A � a aproximaco mxima entre as duas partículas com uma separaco denotado por r_{min}	70
A.2	Espalhamento de um feixe de partículas idênticas que incidem com velocidade uniforme \mathbf{u} sobre um centro espalhador. Partículas com parmetros de impacto entre b e $b + db$ so espalhadas em ângulos entre θ e $\theta + d\theta$	72
A.3	Mudanca da velocidade relativa \mathbf{u} no novo referencial como consequência de um encontro, isto é simplesmente uma rotao do vetor \mathbf{u} em um �ngulo θ . O diagrama da direita mostra a projeco de $\Delta\mathbf{u}$ sobre um plano perpendicular � direo de \mathbf{u}	74
B.1	Discretizaco do domínio em quadriculas de tamanho $\Delta\mu \times \Delta\nu$	81
C.1	A monopole surrounded by a narrow ring and a shepherd satellite. Here, M_p and m_s represent the mass of monopole and shepherd, respectively. The situation that we are illustrating corresponds to the case of an exterior shepherd ($r_s > r_a$), but here we also study the case in which $r_a > r_s$	88
C.2	(a) We introduce a small perturbation during the interval $\Delta t = 2 \times 10^3$ s; then it is switched off. (b) After $10\Delta t$, the response of $\Delta\Sigma$ grows 1000 percent approximately. (c) After $800\Delta t$ and (d) $4000\Delta t$, the disturbance of $\Delta\Sigma$ is significantly attenuated. For evolution times larger than $8000\Delta t$, we obtain $\Delta\Sigma \approx 0$	97

C.3	Variation of the ring's mass density after than the shepherd makes 6 laps around the ring. In all the cases $M_p = 568.46 \times 10^{24}$ kg, $m_s = 14 \times 10^{16}$ kg, $\Sigma_o = 500$ kg/m ² , $\varepsilon_s = 5 \times 10^5$ m. We show the following cases: (a) outer shepherd moving with the same direction of ring, $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$; (b) inner shepherd moving with the same direction of ring, $r_a = 100.0 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$; (c) outer shepherd moving in the opposite direction of ring, $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$; (d) inner shepherd moving with the opposite direction of ring, $r_a = 100.0 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$; (e) outer shepherd moving with the same direction of ring, $r_a = 100.0 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$; (f) outer shepherd moving with the same direction of ring, $r_a = 100.0 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.75$	98
C.4	Checking the dynamical drag effect on the ring. (a) Density profile immediately after the shepherd is stopped. (b) When the shepherd appears stopped and continued stopped, the density profile some time later is symmetric.	99
C.5	Detail of figures C.3(a) and C.3(c), showing the the negative and positive values of $\Delta\Sigma$. The negative zone is concentrated near the shepherd's location, while the positive zones are extended over the remaining space.	99
C.6	Variation of the ring's mass density for different configurations of shepherds satellites. In all the cases $M_p = 568.46 \times 10^{24}$ kg, $m_{s1} = m_{s2} = 14 \times 10^{16}$ kg, $\Sigma_o = 500$ kg/m ² , $\tilde{\sigma} = 0.5$. We show the following cases: One outer shepherd and one inner shepherd (equidistant), $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, in (a) for 2 laps, and (b) for 8 laps; (c) One outer shepherd and one inner shepherd (not equidistant), $r_a = 140.18 \times 10^6$ m; (d) Two outer shepherds, $r_a = 140.18 \times 10^6$ m; (e) One outer shepherd and one inner shepherd (equidistant), $r_a = 100 \times 10^6$ m; (f) One outer shepherd and one inner shepherd (equidistant), $r_a = 100 \times 10^6$ m.	100

Introdução

Existe uma diferença fundamental entre os sistemas estelares [1] e os sistemas que são usualmente tratados com a mecânica estatística tais como moléculas em uma caixa [2]. Esta diferença radica na natureza das forças que atuam entre as partículas¹ constituintes. A interação entre as moléculas é de curto alcance; esta interação é desprezível a menos que estas moléculas estejam muito próximas; aparece repentinamente uma interação fortemente repulsiva. Como conseqüência, as moléculas de um gás estão sujeitas a acelerações súbitas e de curta duração quando colidem entre elas. Em contraste, a força gravitacional que atua entre as partículas que conformam um sistema estelar, por exemplo, galáxias; é de longo alcance e fracamente atrativa.

A força gravitacional sobre uma partícula que conforma um sistema estelar, gerado pelo resto das partículas que também conformam o sistema estelar muda lentamente, portanto, qualquer partícula deve ser acelerada suavemente. Isto nos permite, para muitos propósitos, considerar que a força gravitacional é gerada por uma distribuição contínua e suave de massa e não por uma distribuição de massas pontuais. É dizer, é possível aproximar um sistema estelar formado por massas pontuais por simplesmente uma densidade suave de partículas estelares.

Na descrição macroscópica dos sistemas estelares, existe um parâmetro importante que determina o tipo de regime evolutivo de todo sistema estelar; este é chamado tempo de relaxamento [1] e é dado por

$$t_{\text{relax}} \approx \frac{0.1N}{\ln N} t_{\text{cross}}, \quad (1)$$

em que $t_{\text{cross}} = R/v$, é o tempo que demora uma partícula em atravessar um sistema estelar, v é a velocidade típica de uma partícula estelar, R é o raio do sistema, e N é o número

¹Chamamos partícula a todo tipo de corpo celeste, por exemplo: estrelas, galáxias, planetas, cometas, satélites, entre outros.

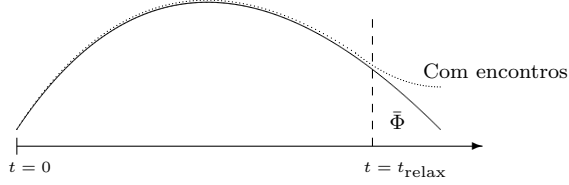


Figura 1: Trajetória de uma partícula no espaço de fases. A partir do tempo t_{relax} existe uma diferença notável entre a órbita que considera unicamente o potencial gravitacional médio $\bar{\Phi}$ e a órbita que considera também os encontros. Para tempos maiores que o tempo t_{relax} , os encontros devem ser considerados importantes na evolução do sistema.

de partículas que conformam o sistema. O t_{relax} é o tempo necessário para que as pequenas perturbações acumulado pelos múltiplos encontros² mude significativamente a órbita de uma partícula. Da Figura 1 vemos que: para $t_{\text{vida}} < t_{\text{relax}}$, os encontros não são importantes e o sistema estelar obedece um regime livre de colisões, é dizer, que é descrito pela equação de Boltzmann sem colisões, e para $t_{\text{vida}} \geq t_{\text{relax}}$, os encontros são importantes, portanto, o regime evolutivo pode ser descrito pela equação de Boltzmann com colisões.

A aproximação de que as partículas constituintes de um sistema estelar se deslocam unicamente sob a influência do campo médio gerado pelo resto das partículas nem sempre é válido, isto é devido a que os encontros podem perturbar gradualmente as órbitas das partículas até elas ficarem totalmente descorrelacionadas.

Uma Galáxia típica tem $N = 10^{11}$ partículas estelares (estrelas) e tem um tempo de vida de algumas centenas de vezes, o t_{cross} . Para este sistema, os encontros não são importantes dado que seu $t_{\text{relax}} = 10^8 \times t_{\text{cross}}$, porém, nas proximidades do seu centro os encontros podem ser importantes.

Em um Aglomerado Globular³, temos que $N \approx 10^5$, $t_{\text{vida}} = 10^3 t_{\text{cross}}$, e $t_{\text{relax}} = 10^2 t_{\text{cross}}$, portanto, neste caso os encontros jogam um papel importante na evolução do sistema e influenciam fortemente na estrutura do Cluster.

Em sistemas cuja interação interpartícula obedeça uma lei de interação de in-

²Em geral usamos o termo “encontro” para denotar a perturbação gravitacional da órbita de uma partícula estelar pela outra, e “colisão” para denotar o contato físico entre partículas estelares. Sem embargo, conforme ao uso comum, nós usamos o termo “sistema sem colisão” para descrever um sistema estelar na qual os encontros não jogam um rol importante.

³São concentrações esféricas de estrelas com diâmetros de aproximadamente 100 anos luz, e que contêm milhares de estrelas.

verso quadrado de longo alcance; as colisões com ângulos pequenos são mais freqüentes que as colisões que geram grandes mudanças nos momentum, é dizer, os encontros com grandes parâmetros de impacto são muito mais importantes que os encontros com pequenos parâmetros de impacto. Uma abordagem geral, e válida para encontros com pequenos ângulos, é a equação de Fokker-Planck, ela foi formulada pela primeira vez para sistemas estelares por Chandrasekhar [3] em 1943. Esta equação também é conhecida como a aproximação de Fokker-Planck, devido a que trunca a hierarquia BBGKY (N.N. Bogoliubov, M. Born, H.S. Green, J.G. Kirkwood, e J. Yvon) das equações cinéticas na sua ordem mais baixa, assumindo que a correlação entre as partículas apenas desempenha um papel como uma consequência dos encontros de 2-corpos não correlacionados [2, 4]. Vale a pena notar que a única aproximação feita na equação de Fokker-Planck vem do modelo adotado para colisões e, de fato, a equação de Fokker-Planck com um termo de colisão geral pode ser derivado a partir de primeiros princípios e não são necessárias suposições *ad hoc*.

Os encontros podem levar a evolução de um sistema estelar por diferentes caminhos e ter diferentes consequências:

a) **Relaxamento:** Como resultado da difusão no espaço de fases devido aos encontros, a entropia do sistema estelar aumenta, mas, se sabe que um estado com alta entropia de um “gás” autogravitante são bem inhomogeneos, com um núcleo central denso e um halo estendido de baixa densidade [1].

b) **Equipartição:** Um sistema estelar típico contem partículas com uma ampla gama de velocidades. A partir da teoria cinética elementar, sabemos que os encontros geram uma transferência de energia cinética de partículas com alta energia cinética a aquelas com baixa energia cinética. Logo, em um tempo da ordem de t_{relax} se produz a equipartição da energia cinética, as partículas pesadas perdem suficiente energia cinética de modo que estas são arrastadas ao centro do sistema, e as partículas leves se propagam maiormente a partes externas do sistema estelar.

c) **Escape:** De tempos em tempos um encontro fornece a uma partícula a suficiente energia para que esta possa escapar do sistema estelar. Assim, existe uma fuga lenta, mas irreversível de partículas, e portanto, o sistema evolui gradualmente para um estado final formado unicamente por duas partículas com órbitas Keplerianas, e o resto terá escapado ao

infinito. O tempo na qual acontece esta evolução se chama tempo de evaporação e é dado por $t_{\text{evap}} \approx 140t_{\text{relax}}$.

d) **Encontro inelástico:** Usualmente consideramos as partículas estelares como massas pontuais, mas em sistemas densos devemos considerar a possibilidade de que ocasionalmente duas partículas passem tão próximas entre elas de tal forma que provocaria uma força muito forte de interação ou inclusive uma colisão. A dissipação da energia em colisões frontais ou quase frontais reduz a energia cinética total do sistema, e pode levar à formação de sistemas binários, devido a que estas colisões podem resultar na união das partículas que colidem. Em sistemas densos se cumpre que o tempo de colisão $t_{\text{coll}} \ll t_{\text{relax}}$, assim, as colisões inelásticas são muito mais importantes que os encontros gravitacionais. Um exemplo de tal sistema poderia ser um denso Aglomerado de Galáxias⁴.

A evolução de um sistema estelar é bem descrito pela equação de Fokker-Planck, a qual é uma equação diferencial parcial que depende das coordenadas do espaço de fases e do tempo. Por outro lado, sabemos que ao tentar resolver numericamente as equações diferenciais parciais, frequentemente nos encontramos com um conjunto de sistema de equações lineares que devem ser resolvidos usando diferentes métodos. Este conjunto de equações lineares depende também do método usado para a discretização da equação diferencial. Em geral, quando tratamos sistemas 3-dimensionais o número de equações lineares é grande, e as soluções numéricas destes sistemas usam muito tempo computacional. Um caso extremo é a equação de Fokker-Planck, a solução desta equação não é uma tarefa fácil devido a que no caso tri-dimensional depende de sete variáveis, três coordenadas espaciais, três coordenadas velocidades e uma temporal. No caso bi-dimensional existe uma simplificação devido a que o número total de variáveis são cinco. Em ambos os casos, o grande número de pontos na rede necessários para o cálculo da solução gera um problema de armazenamento de dados. Em uma equação estacionária ou não estacionária tri-dimensional, o número de equações lineares que devemos resolver é igual ao número de pontos da rede no domínio do problema e neste caso, o domínio em um espaço de fases. Se nós dividimos qualquer variável do espaço de fases em nove partes (dez pontos), teremos uma rede com 10^6 pontos. Com um método numérico simples, teremos que armazenar e resolver uma matriz com 10^{12} elementos. Para

⁴Concentrações de centenas de Galáxias que permanecem juntas por causa da força gravitacional.

o caso bi-dimensional, a matriz terá 10^8 elementos, e no caso uni-dimensional teremos uma matriz com 10^4 elementos. O grande número de elementos matriciais traz outro problema computacional, a lentidão dos códigos.

Ao formar os elementos matriciais correspondentes à equação de Fokker-Planck tri-dimensional usando o esquema de diferença finita, observa-se que aproximadamente menos de 0.003% dos elementos são diferentes de zero [5]. Este fato motiva a procurar um método alternativo e rápido, usualmente iterativo para resolver sistemas lineares usando unicamente os dados não nulos. Em geral, a matriz de coeficientes que surge a partir da discretização da equação de Fokker-Planck não é simétrica e assim, os métodos potentes tais como Gradiente Conjugado [6, 7], e decomposição Cholesky [7], não podem ser usados.

Soluções numéricas também podem ser encontradas usando os métodos estatísticos aproximados, tais como o método de equações de momentum [8–10] e os métodos Monte-carlo [11, 12]. Também, são encontrados soluções usando a equação de Fokker-Planck de órbita-média com variáveis ângulo-ação [1]: o qual reduz a equação que depende de seis coordenadas do espaço de fases mais o tempo a uma que dependa unicamente de três ações mais o tempo. Mas, métodos numéricos robustos e diretos para as equações de Fokker-Planck em tri-dimensões ainda não foram feitos, isto devido ao grande número de equações lineares e o grande custo computacional que envolve o processo de solução. Dizemos cálculos numéricos diretos quando não são feitas aproximações estatísticas nem de campo médio [1].

O método de Stone [13] pode resolver a equação de Fokker-Planck 3-dimensional com um termo de colisão geral usando um baixo custo computacional [5]. Este método tem sido aplicado para encontrar a função de distribuição de um disco fino que satisfaz simultaneamente a equação de Fokker-Planck e a equação de Poisson [14]. O método de Stone também tem sido aplicado à outras situações como problemas de campos em duas [15], e três [16] dimensões.

O método de integração de N -corpos gravitacional consiste em resolver numericamente as equações de movimento de N partículas que interagem gravitacionalmente. Até o momento este é o método mais confiável e amplamente usado como ferramenta na simulação de sistemas estelares. Tal método confirma a validade da equação de Fokker-Planck em sistemas estelares.

Como mencionamos anteriormente, resolver a equação de Fokker-Planck para sistemas estelares de altas dimensões é sumamente complicado. Neste trabalho, pretendemos resolver numericamente a equação uni-dimensional de Fokker-Planck (uma coordenada espacial, uma coordenada velocidade, e o tempo t). Os sistemas físicos que tentaremos modelar com este tipo de equação são anéis estelares ao redor de um corpo pontual massivo. Este tipo de sistemas estelares são encontrados tanto nos três planetas gigantes de nosso sistema solar, assim como em outros sistemas. Os anéis planetários, além de belos, são cientificamente atraentes por muitos motivos [17]. Em particular, o anel F de Saturno, é um dos anéis mais dinâmicos do sistema solar, isto devido a que a sua estrutura muda rapidamente. O origem e estruturas dos anéis em geral não são compreendidas até o momento, mas a presença de satélites pastores (*shepherds* em inglês) [17] entre os anéis é considerado chave para entender a sua complexa estrutura.

A primeira investigação teórica séria sobre a dinâmica do anel se deveu a Laplace em 1802 [18]. Ele reconhece que o anel não pode ser sólido, porque a resistência à tração dos materiais conhecidos era muito pequena para resistir às forças de maré de Saturno. Uma explicação alternativa foi que o anel estava composto de muitos anéis sólidos, estreitos, e assimétricos. Porém Laplace também mostrou que tais anéis seriam instáveis, pois a energia potencial tem um máximo local quando o anel está centrado no Planeta. Laplace não levou em consideração a sugestão de Cassini de que o anel estava composto de pequenas partículas. Em vez disso, ele propôs que este consistia de anéis sólidos e “irregulares” de natureza não especificada, na qual sua análise de estabilidade não seria aplicável. A ideia de Laplace de anéis irregulares foi descartada por Maxwell em 1890 [19], quem mostrou que na maioria dos casos tais anéis são instáveis. Ele mostrou que um anel líquido ou gasoso também era instável, e, portanto que os anéis tinham de ser partículas. Apesar de que a conclusão final de Maxwell é correta, esta não foi justificada pela sua análise, em que ele assumiu de forma incorreta que o anel estava em rotação uniforme.

Jeffreys descartou os anéis líquidos e gasosos por argumentos muito mais simples [20]: um anel de fluido teria que mostrar o planeta por reflexão (que não é observado), e um anel gasoso seria demasiado grosso. Em 1848 Roche [21] provou que um satélite de fluido homogêneo de densidade ρ não pode existir numa órbita circular cujo raio seja menor do

que o limite de Roche $R_L = 1.523(M_p/\rho)^{1/3}$, em que M_p é a massa do planeta. No entanto, Jeffreys [22] observou que o critério de Roche é inaplicável aos pequenos satélites com uma resistência à tração apreciável. Então existe a possibilidade de que as pequenas partículas de gelo podem juntar-se e crescer para formar satélites com um raio mínimo.

Os anéis planetários finos são frequentemente associados com os satélites chamados *shepherds* [23], e podem existir devido a mecanismos um pouco mais complicados do que no caso dos conhecidos anéis largos [24, 25]. Em 1982 Goldreich e Tremaine [26] encontram resultados que sugerem um mecanismo para a criação e manutenção dos anéis estreitos. Materiais de partículas difusas entre dois pequenos satélites vizinhos são repelidas de ambos os lados e se reúnem em um anel estreito, a descoberta dos satélites 1980S27 (prometeu) e 1980S26 (pandora) do lado de dentro e do lado de fora do anel F é uma evidência convincente de que este processo deve ocorrer nos anéis planetários. Eles afirmam que a energia dissipada em colisões frontais é fornecida a partir da energia orbital, a qual para um anel de massa e momento angular fixo é maximizada quando todas as partículas do anel orbitam com um único raio. Assim, a perda de energia colisional leva a uma propagação radial de anéis finos.

Os sistemas de anéis fornecem um laboratório natural para o estudo de fenômenos em discos achatados, incluindo a nebulosa em torno do nosso Sol que deu origem aos planetas. Em 2008 Murray [27] e colaboradores relatam evidências diretas de luas embutidos no núcleo brilhante do anel F de Saturno, e mostram que a maioria da morfologia deste anel resulta dos efeitos gravitacionais contínuas e de colisões de pequenos satélites, muitas vezes combinados com o efeito perturbador de Prometeu. E comentam que a região do anel F é talvez o único local do Sistema Solar onde os processos de colisões de grandes escalas estão ocorrendo quase diariamente.

Uma das importâncias deste trabalho é que é a primeira vez que tentamos modelar a função de distribuição de um sistema estelar em forma de anel, e estudamos a influência dos satélites *shepherds* sobre esta função de distribuição.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no primeiro Capítulo, descrevemos detalhadamente a equação de Fokker-Planck para sistemas estelares, partindo da equação de Liouville; no segundo Capítulo, apresentamos uma descrição sobre os discos e anéis estelares, e determinamos a equação de Fokker-Planck para ambos os casos; no terceiro

Capítulo, apresentamos o método de discretização numérico das diferenças finitas, utilizado neste trabalho, e testamos nosso código para dois simples sistemas, i.e. difusão de calor unidimensional e bi-dimensional. No Capítulo 4, apresentamos nossos resultados e discussões do trabalho e, finalmente, no Capítulo 5, apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 1

Equação de Fokker-Planck para Sistemas estelares

A aproximação que considera que as partículas que constituem um sistema estelar se deslocam unicamente sob a influência de um campo médio gerado pelo resto das partículas (sistema sem colisões) não é completamente válida devido a que os encontros estelares individuais perturbam gradualmente as trajetórias das partículas constituintes (as afastam das órbitas estabelecidas pelo campo médio). Por este motivo, a equação de Boltzmann não é válida quando consideramos sistemas estelares nos quais os encontros são relevantes. Neste capítulo, derivaremos as equações que descrevem o comportamento de um sistema estelar influenciado pelos encontros, e veremos depois como podemos modificar estas equações, através de algumas aproximações, para que possamos trabalhar com elas em forma direta.

1.1 Equação de Liouville

Representemos um sistema formado por N partículas por um ponto em um espaço $6N$ -dimensional chamado **espaço- Γ** , ou espaço de fases, cujas coordenadas são as posições e as velocidades de todas as partículas. Este estado é algumas vezes chamado como **microestado** e seu ponto representativo é chamado de **ponto- Γ** . Na prática, não podemos, nem precisamos ter a informação detalhada requerida para especificar um microestado. Estamos unicamente interessados no comportamento médio das propriedades macroscópicas do sistema, tal como, por exemplo, a distribuição da velocidade em uma determinada posição, etc.

É usual imaginar que se conhecemos a probabilidade de encontrar um sistema em um volume pequeno no espaço- Γ em um tempo inicial, podemos seguir a evolução temporal desta distribuição de probabilidade em vez de seguir a evolução temporal de um único ponto- Γ .

Denotamos a posição e a velocidade da α -ésima partícula pelas coordenadas canônicas $(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$, em que $\alpha = 1, \dots, N$. Então o vetor 6-dimensional $\mathbf{w}_\alpha \equiv (\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$ denota a localização de uma partícula no espaço de fases. O ponto- Γ de um sistema no espaço- Γ 6N-dimensional é determinado pela coleção de N vetores $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N$. A probabilidade de que um ponto- Γ seja encontrado em uma unidade de volume do espaço- Γ no tempo t é denotado por $f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t)$; dado que a densidade de probabilidade deve ser normalizada, então

$$\int d^6\mathbf{w}_1 \cdots d^6\mathbf{w}_N f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) = 1, \quad \text{onde } d^6\mathbf{w}_\alpha \equiv d^3\mathbf{q}_\alpha d^3\mathbf{p}_\alpha. \quad (1.1)$$

A função $f^{(N)}$ é a **função de distribuição de N-corpos** ou simplesmente FD de N-corpos.

Por simplicidade, usualmente assumimos que todas as partículas sejam idênticas (mesma massa, composição, etc.). Portanto, a FD de N-corpos deve ser uma função simétrica de $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N$. Em outras palavras,

$$f^{(N)}(\dots, \mathbf{w}_\alpha, \dots, \mathbf{w}_\beta, \dots) = f^{(N)}(\dots, \mathbf{w}_\beta, \dots, \mathbf{w}_\alpha, \dots) \quad \text{para todo } \alpha, \beta. \quad (1.2)$$

Para derivar a equação que governa $f^{(N)}$ aplicamos a derivada total d/dt no espaço- Γ na Eq.(1.1) para obter

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left(\dot{\mathbf{q}}_\alpha \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{q}_\alpha} + \dot{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right) = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + [f^{(N)}, H_N] = 0; \quad (1.3)$$

em que H_N é o Hamiltoniano de N-corpos, e $[\cdot, \cdot]$ denota os parêntesis de Poisson no espaço- Γ [28, 29]. Em outras palavras, o fluxo dos pontos- Γ através do espaço- Γ é incompressível: a densidade de probabilidade de pontos- Γ $f^{(N)}$ arredor de um determinado ponto- Γ sempre permanece constante. Este é o chamado **teorema de Liouville**.

Se, (i) trabalhamos em um marco de referencia inercial, (ii) escolhemos como coordenadas e momentos canônicos às posições \mathbf{x}_α e às velocidades \mathbf{v}_α cartesianas, e (iii)

consideramos que as partículas tenham massa m e interagem unicamente através da força gravitacional mútua, podemos escrever o Hamiltoniano do sistema como $H_N = \frac{1}{2}m \sum_{\beta=1}^N v_\beta^2 + \frac{1}{2}m \sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ (\beta \neq \gamma)}}^N \Phi_{\beta\gamma}$, em que $\Phi_{\beta\gamma} = -\frac{Gm}{|\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\gamma|}$, G é a constante gravitacional. Levando isto em consideração, a equação de Liouville pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left(\mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{x}_\alpha} - \sum_{\substack{\beta=1 \\ (\beta \neq \alpha)}}^N \frac{\partial \Phi_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) = 0, \quad (1.4)$$

em que consideramos que

$$\begin{aligned} [f^{(N)}, H_N] &\equiv \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \cdot \frac{\partial H_N}{\partial \mathbf{p}_\alpha} - \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \cdot \frac{\partial H_N}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \right), \\ \frac{\partial H_N}{\partial \mathbf{p}_\alpha} &= \mathbf{v}_\alpha, \\ \frac{\partial H_N}{\partial \mathbf{q}_\alpha} &= m \sum_{\substack{\beta=1 \\ (\beta \neq \alpha)}}^N \frac{\partial \Phi_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}_\alpha}. \end{aligned}$$

Qualquer FD de N-corpos da forma

$$f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N) = f[H_N(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N)], \quad (1.5)$$

é uma solução da Eq. de Liouville. Logo em equilíbrio térmico, temos

$$f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N) = C \exp[-\beta H_N(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N)], \quad (1.6)$$

em que C e β são constantes positivas. O equilíbrio térmico não pode ser alcançado em um sistema de N-corpos gravitacional devido a que a condição de normalização (1.1) não pode ser satisfeita para uma FD da forma (1.6)¹.

Agora tentaremos entender como a FD de N-corpos $f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t)$ pode ser relacionada à função de distribuição (FD) no espaço de fases 6-dimensional, $f(\mathbf{w}, t)$ de uma única partícula [1]. Para entender isto vamos primeiro introduzir a **função de distribuição reduzida** ou de **K-corpos**, a qual é obtida integrando a FD de N-corpos sobre $N - K$ vetores

¹A integral anterior diverge tanto para grandes e para pequenas escalas. Quando as partículas são separadas por uma grande distância, $f^{(N)}$ depende unicamente da velocidade, assim a integral espacial diverge. Quando duas partículas α e β são aproximadas, $\Phi_{\alpha\beta}$ diverge assim $\exp(-\beta H_N)$ é extremadamente grande.

\mathbf{w}_α . Dado que $f^{(N)}$ é uma função simétrica de \mathbf{w}_α (1.2), podemos escolher as variáveis de integração a ser $\mathbf{w}_{K+1}, \dots, \mathbf{w}_N$ sem perder generalidade. Assim definimos a FD de K-corpos

$$f^{(K)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K, t) \equiv \int d^6 \mathbf{w}_{K+1} \dots d^6 \mathbf{w}_N f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t). \quad (1.7)$$

A partir da condição de normalização (1.1), a normalização da FD de K-corpos é simplesmente

$$\int d^6 \mathbf{w}_1 \dots d^6 \mathbf{w}_K f^{(K)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K, t) = 1. \quad (1.8)$$

Como um caso particular de FD de K-corpos apresentamos a FD de 1-corpo

$$f^{(1)}(\mathbf{w}_1, t) \equiv \int d^6 \mathbf{w}_2 \dots d^6 \mathbf{w}_N f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t). \quad (1.9)$$

A FD de 1-corpo descreve a probabilidade de encontrar uma determinada partícula em uma unidade de volume do espaço de fases centrado sobre \mathbf{w}_1 , podemos simplificar a notação escrevendo $f(\mathbf{w}, t) \equiv f^{(1)}(\mathbf{w}, t)$.

Para muitas situações, é usual escrever a FD de 2-corpos na forma

$$f^{(2)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) = f(\mathbf{w}_1, t)f(\mathbf{w}_2, t) + g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t). \quad (1.10)$$

A função g é chamada função de correlação de 2-corpos. Em termos gerais, esta função é a medida do excesso de probabilidade de encontrar uma partícula em \mathbf{w}_1 devido à presença de uma partícula em \mathbf{w}_2 . Uma relação mais precisa pode ser derivada a partir das leis da probabilidade condicional, a qual estabelece que a probabilidade de que uma partícula esteja localizada em uma unidade de volume do espaço de fases centrado em \mathbf{w}_1 , com uma partícula localizada em \mathbf{w}_2 , é

$$f(\mathbf{w}_1|\mathbf{w}_2) = \frac{f^{(2)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)}{\int d^6 \mathbf{w}'_1 f^{(2)}(\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}_2)} = \frac{f(\mathbf{w}_1)f(\mathbf{w}_2) + g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)}{f(\mathbf{w}_2) + \int d^6 \mathbf{w}'_1 g(\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}_2)}. \quad (1.11)$$

Em particular, se a função de correlação $g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0$, então $f(\mathbf{w}_1|\mathbf{w}_2) = f(\mathbf{w}_1)$; em outras palavras, a presença de uma partícula em \mathbf{w}_2 não afeta a probabilidade de encontrar uma partícula perto a \mathbf{w}_1 .

O uso das FDs reduzidas podem ser ilustradas calculando o valor esperado da energia cinética e energia potencial para sistemas estelares. Portanto, a energia cinética esperada é

$$\begin{aligned}\langle K \rangle &= \frac{1}{2}m \int d^6\mathbf{w}_1 \cdots d^6\mathbf{w}_N f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) \sum_{\alpha=1}^N v_\alpha^2, \\ \langle K \rangle &= \frac{1}{2}m \sum_{\alpha=1}^N \int d^6\mathbf{w}_\alpha f(\mathbf{w}_\alpha, t) v_\alpha^2,\end{aligned}\tag{1.12}$$

dado que as partículas são idênticas, se simplifica a

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2}Nm \int d^6\mathbf{w}_1 f(\mathbf{w}_1, t) v_1^2.\tag{1.13}$$

Similarmente, qualquer observável que envolva unicamente quantidades que dependam das coordenadas do espaço de fases de uma única partícula de forma aditiva, pode ser escrita em termos da FD de 1-corpo.

A energia potencial é

$$\begin{aligned}\langle W \rangle &= -\frac{1}{2} \int d^6\mathbf{w}_1 \cdots d^6\mathbf{w}_N f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \frac{Gm^2}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|}, \\ \langle W \rangle &= -\frac{1}{2}Gm^2 \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ (\alpha \neq \beta)}}^N \int d^6\mathbf{w}_\alpha d^6\mathbf{w}_\beta f^{(2)}(\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}_\beta, t) \frac{1}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Dado que as partículas são idênticas, e existem $N(N-1)$ maneiras de escolher duas distintas partículas α e β a partir de N partículas, a expressão anterior se simplifica a

$$\langle W \rangle = -\frac{1}{2}Gm^2 N(N-1) \int d^6\mathbf{w}_1 d^6\mathbf{w}_2 \frac{f^{(2)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}.\tag{1.15}$$

Assim, a energia potencial depende unicamente da FD de 2-corpos. Se a função de correlação g é pequena, e.g. $|g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)| \ll f(\mathbf{w}_1)f(\mathbf{w}_2)$, então para $N \gg 1$ a energia potencial esperada pode-se escrever como

$$\langle W \rangle = -\frac{1}{2}Gm^2 N^2 \int d^6\mathbf{w}_1 d^6\mathbf{w}_2 \frac{f(\mathbf{w}_1, t)f(\mathbf{w}_2, t)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}),\tag{1.16}$$

em que

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}_1, t) &= Nm \int d^3\mathbf{v}_1 f(\mathbf{w}_1, t), \\ \bar{\Phi}(\mathbf{x}_1, t) &= -G \int d^3\mathbf{x}_2 \frac{\rho(\mathbf{x}_2, t)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|},\end{aligned}$$

com

$$\rho(\mathbf{x}_2, t) = Nm \int d^3\mathbf{v}_2 f(\mathbf{w}_2, t).$$

A expressão (1.16) para a energia potencial esperada é usualmente a forma na qual se apresenta em diferentes textos [1, 30, 31].

A FD de N-corpos é chamada **separável** se esta é simplesmente o produto de FDs de um 1-corpo

$$f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) = \prod_{\beta=1}^N f(\mathbf{w}_\beta, t). \quad (1.17)$$

Como vimos, esta suposição implica que as posições das partículas são descorrelacionadas, no sentido que a probabilidade de encontrar uma partícula perto de qualquer posição \mathbf{w}_1 no espaço de fases não é afetada pela presença ou ausência de partículas em pontos vizinhos.

Assumimos que a FD de N-corpos é separável, e desejamos encontrar a equação que governa a evolução da FD de 1-corpo $f(\mathbf{w}, t)$. Para encontrar esta equação, devemos integrar a equação de Liouville para sistemas estelares (1.4) sobre $d^6\mathbf{w}_2 \cdots d^6\mathbf{w}_N$, o termo $\partial f^{(N)}/\partial t$ resulta simplesmente $\partial f(\mathbf{w}_1, t)/\partial t$. Considerando que

$$\begin{aligned}\prod_{\gamma=2}^N \int d^6\mathbf{w}_\gamma \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{x}_\alpha} &= \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial \mathbf{x}_1} \delta_{\alpha 1}, \\ \prod_{\gamma=2}^N \int d^6\mathbf{w}_\gamma \frac{\partial \Phi_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{v}_\alpha} &= \prod_{\gamma=2}^N \int d^6\mathbf{w}_\gamma \frac{\partial \Phi_{1\beta}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{v}_1} \delta_{\alpha 1},\end{aligned}$$

dado que $f^{(N)} \rightarrow 0$ suficientemente rápido quando $|\mathbf{x}_\alpha| \rightarrow \infty$, tal que $\int d^3\mathbf{x}_\alpha \partial f^{(N)}/\partial \mathbf{x}_\alpha = 0$, e calculando da mesma forma a integração sobre $d^3\mathbf{v}_\alpha$, podemos escrever

$$\frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial \mathbf{x}_1} - \sum_{\beta=2}^N \prod_{\gamma=2}^N \int d^6\mathbf{w}_\gamma \frac{\partial \Phi_{1\beta}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{v}_1} = 0. \quad (1.18)$$

Agora, considerando a expressão (1.17), obtemos

$$\frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial \mathbf{x}_1} - \frac{\partial f(\mathbf{v}_1, t)}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \sum_{\beta=2}^N \prod_{\gamma=2}^N \int d^6 \mathbf{w}_\gamma \frac{\partial \Phi_{1\beta}}{\partial \mathbf{x}_1} f(\mathbf{w}_\gamma, t) = 0.$$

Qualquer termo na soma é idêntico, e dado que $\int d^6 \mathbf{w} f(\mathbf{w}, t) = 1$, a expressão anterior se simplifica

$$\frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial \mathbf{x}_1} - (N-1) \frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int d^6 \mathbf{w}_2 \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} f(\mathbf{w}_2, t) = 0, \quad (1.19)$$

e considerando que o valor esperado do potencial gravitacional em \mathbf{x}_1 é

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}_1, t) = N \int d^6 \mathbf{w}_2 \Phi_{12} f(\mathbf{w}_2, t), \quad (1.20)$$

então a Eq.(1.19) pode ser escrita como

$$\frac{\partial f(\mathbf{w}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{w}, t)}{\partial \mathbf{x}} - \frac{N-1}{N} \frac{\partial \bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f(\mathbf{w}, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.21)$$

A Eq.(1.21) no limite $N \rightarrow \infty$ é chamada de **equação de Boltzmann sem colisões** [4].

Portanto, mostramos que a equação de Boltzmann sem colisões resulta a partir da equação de Liouville quando consideramos $N \gg 1$ e que a FD de N-corpos seja separável.

Consideremos agora que a FD de N-corpos não seja completamente separável, mas parcialmente separável da forma seguinte

$$f^{(N)} = \prod_{\gamma=1}^N f(\mathbf{w}_\gamma, t) + g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_\beta, t) \prod_{\substack{\gamma=2 \\ (\gamma \neq \beta)}}^N f(\mathbf{w}_\gamma, t),$$

em que g é a função de correlação entre duas partículas, então, substituindo na Eq.(1.18) podemos obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial \mathbf{x}_1} - (N-1) \frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int d^6 \mathbf{w}_2 \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} f(\mathbf{w}_2, t) = \\ (N-1) \int d^6 \mathbf{w}_2 \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)}{\partial \mathbf{v}_1}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Logo, fazendo $N \gg 1$ podemos encontrar a **equação de Boltzmann com colisões** [4], com o termo de colisão dado por

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial t} \right)_c \equiv N \int d^6 \mathbf{w}_2 \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)}{\partial \mathbf{v}_1}. \quad (1.23)$$

Assim as correlações entre as partículas no espaço de fases representada por $g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)$, fornece-nos a razão da mudança da densidade arredor de um determinado ponto representativo de uma partícula no espaço de fases.

Em resumo, para uma FD de N-corpos parcialmente separável, com $N \gg 1$, a Eq.(1.21) deve ser substituída por uma equação do tipo

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (1.24)$$

em que df/dt é a derivada convectiva [32] no espaço de fases, e $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ é o termo de colisões.

1.2 A Equação de Boltzmann sem Colisões

Na seção anterior derivamos a equação de Boltzmann sem colisões a partir da equação de Liouville, considerando que as partículas são não correlacionadas. Quando $N \gg 1$ a equação (1.21) pode ser escrita como

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0. \quad (1.26)$$

Isto significa que o fluxo de probabilidade no espaço de fases é incompressível; é dizer que a densidade f no espaço de fases arredor de um ponto representativo de uma determinada partícula deve permanecer sempre constante, e isto deve ser válido para qualquer sistema de coordenadas canônicas no espaço de fases. Portanto, a equação fundamental que descreve um sistema estelar sem encontros, formado por N partículas cada um de massa m , é a equação de Boltzmann sem colisões juntamente com a equação de Poisson, que em coordenadas cartesianas são

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = 4\pi GmN \int d^3\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (1.27)$$

em que $H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2}v^2 + \bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)$, e $\bar{\Phi}$ é o potencial gravitacional médio. Já que existem muitos sistemas estelares com simetria axial é conveniente escrever a equação de Boltzmann

sem colisões em coordenadas cilíndricas, onde o Hamiltoniano para este caso é $H = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_\phi^2/R^2 + p_z^2) + \bar{\Phi}$, desta forma encontramos que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p_R \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{p_\phi}{R^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} + p_z \frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial R} - \frac{p_\phi^2}{R^3} \right) \frac{\partial f}{\partial p_R} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial p_\phi} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial p_z} = 0, \quad (1.28)$$

em que $p_R = \dot{R}$, $p_\phi = R^2 \dot{\phi}$, e $p_z = \dot{z}$.

A equação de Boltzmann sem colisões parte do princípio que o número de partículas, que são descritos pela FD f , é conservado. Mas, sabemos que o número de partículas que conformam um sistema estelar não é conservado, já que as estrelas podem nascer ou morrer, ou ainda escapar do sistema, assim o fluxo de probabilidade pelo espaço de fases se descreve com maior precisão pela equação de tipo

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = B - D, \quad (1.29)$$

em que $B(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ e $D(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ são a taxa por unidade de volume no espaço de fases no qual as partículas estelares nascem e morrem, respectivamente. Na equação de Boltzmann sem colisões, $B - D$ é zero, e portanto, é válida só quando $B - D$ é pequeno em magnitude quando comparado com os termos do lado esquerdo da Eq.(1.29). O termo $\mathbf{v} \cdot \partial f / \partial \mathbf{x}$ é da ordem de vf/R , em que v e R são a velocidade característica² e o raio do sistema estelar respectivamente. A razão R/v é simplesmente o tempo de cruzamento t_{cross} . Da mesma forma, $\partial \bar{\Phi} / \partial \mathbf{x}$ é da ordem da aceleração característica a , assim o termo $(\partial \bar{\Phi} / \partial \mathbf{x}) \cdot (\partial f / \partial \mathbf{v})$ é da ordem af/v . Dado que $a \approx v/t_{cross}$, os dois últimos termos na seção central da Eq.(1.29) são da ordem de f/t_{cross} . Considerando a razão

$$\gamma = \frac{|B - D|}{f/t_{cross}}, \quad (1.30)$$

a equação de Boltzmann sem colisões é válida se $\gamma \ll 1$, o qual requer que a mudança fracionária no número de partículas em um tempo de cruzamento seja pequeno. Em uma galáxia elíptica conformada por estrelas anãs M, a razão de formação de outras estrelas é insignificante, por tanto, a equação de Boltzmann sem colisões é aplicável com uma boa

²Este é equivalente a velocidade típica de uma partícula estelar.

precisão ($\gamma \leq 1$). Na Via Láctea, as estrelas que a conformam têm tempo de vida muito menor que t_{cross} , portanto a equação de Boltzmann sem colisões não deve ser aplicada ($\gamma \simeq 10$). Em algumas situações a equação de Boltzmann pode inclusive ser aplicada à população de partículas de vida curta como exemplo, em nebulosas planetárias de uma galáxia elíptica, nas quais as distribuições no espaço de fases dos nascimentos e mortes das partículas são em boa aproximação idênticas, assim $B - D \simeq 0$.

A densidade média do número de partículas em um volume infinitesimal do espaço de fases é Nf . Porém, na prática, devemos considerar um volume no espaço de fases suficientemente grande que contenha muitas partículas. A suposição natural é considerar que a densidade naquele volume é simplesmente $N\bar{f}$, em que \bar{f} é a média de f dentro deste volume. Porém, esta suposição deverá ser correta unicamente se as posições das partículas no espaço de fases são não correlacionadas (o conhecimento de que a partícula 1 esteja em \mathbf{w} não faz nem mais nem menos provável que outra partícula, dizer 2, esteja em uma localização adjacente \mathbf{w}' no espaço de fases). Matematicamente, assume-se que a probabilidade de encontrar a partícula 1 no volume $d^6\mathbf{w}$ em \mathbf{w} junto com a partícula 2 no volume $d^6\mathbf{w}'$ em \mathbf{w}' é simplesmente a multiplicação $f(\mathbf{w})d^6\mathbf{w}f(\mathbf{w}')d^6\mathbf{w}'$ das probabilidades de encontrar a partícula 1 em \mathbf{w} e a partícula 2 em \mathbf{w}' . Entretanto, na realidade, a presença da partícula 1 em \mathbf{x} sempre aumenta a probabilidade de que a partícula 2 seja encontrada em alguma posição próxima à \mathbf{x} , dado que as partículas se atraem. Daí, a suposição de que a probabilidade de distribuição das partículas individuais seja separável nunca é rigorosamente válida. A separabilidade unicamente é válida quando as forças geradas por seus vizinhos sobre uma partícula são pequenas em comparação com a força gerada pelo restante das partículas do sistema estelar sobre esta mesma partícula.

Quando a suposição de separabilidade é considerada, a probabilidade $P_{\mathcal{V}}(k)$ de encontrar k partículas em um volume \mathcal{V} do espaço de fases é dada pela distribuição de

Poisson

$$P_{\mathcal{V}}(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad \text{onde } \mu \equiv N\bar{f}\mathcal{V}. \quad (1.31)$$

É fácil mostrar que o número médio de partículas proposto por esta distribuição de probabilidade é $\langle k \rangle = N\bar{f}\mathcal{V}$. Se a FD de N-corpos é separável, então $N\bar{f}$ é o valor esperado da densidade de número de partículas. Da mesma forma, a massa média dentro deste volume \mathcal{V} é dada por

$$\langle m \rangle = M\bar{f}\mathcal{V}, \quad (1.32)$$

em que M é a massa total do sistema estelar. Também, a luminosidade média emitida pelo volume \mathcal{V} é dada por

$$\langle l \rangle = L\bar{f}\mathcal{V}, \quad (1.33)$$

em que L é a luminosidade do sistema.

1.3 Equação de Boltzmann com Colisões

Em qualquer sistema estelar com N finito, a energia e o momentum angular das partículas individuais não se conserva, devido a que qualquer partícula está sujeita a forças flutuantes geradas pelos encontros com sua vizinhança. Portanto, a equação de Boltzmann sem colisões não proporciona uma descrição completa da dinâmica do sistema estelar com N finito. Os encontros conduzem a evolução do sistema estelar por diferentes caminhos. Quando os encontros entre as partículas são tomadas em conta, a FD f arredor de um ponto representativo no espaço de fases de uma partícula muda com o tempo, isto é formulado usando coordenadas cartesianas da seguinte forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (1.34)$$

em que $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ é o já mencionado **termo de colisões** e denota a razão da mudança de f devido aos encontros.

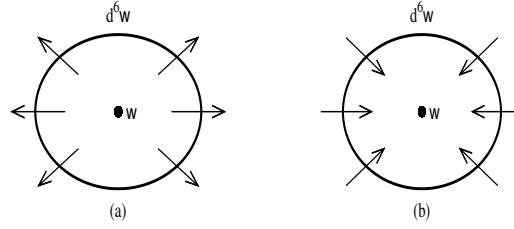


Figura 1.1: Espalhamento no espaço de fases. P_- é a probabilidade de que uma partícula seja espalhada para fora do volume $d^6\mathbf{w}$, e P_+ é a probabilidade de que uma partícula seja espalhada para dentro do volume $d^6\mathbf{w}$.

1.3.1 A Equação Mestra

Chamamos de equação Mestra [2] a aquela que governa a evolução temporal de um processo estocástico. Nesta seção pretendemos derivar a equação Mestra para os sistemas estelares. Usando argumentos físicos é possível encontrar uma expressão simples para o termo de colisões. Seja $\Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})d^6\Delta\mathbf{w}\Delta t$ a probabilidade de que uma partícula com as coordenadas no espaço de fases $\mathbf{w} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ seja espalhada a um novo volume do espaço de fases $d^6\Delta\mathbf{w}$ arredor de $\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}$ durante um curto intervalo de tempo Δt . A **probabilidade de transição** Ψ inclui só os efeitos dos encontros entre as partículas e não considera a aceleração gerada pelo potencial suave $\bar{\Phi}$ do sistema estelar dado que já é considerada no lado esquerdo da Eq.(1.34), chamamos de partícula teste à aquela partícula cuja trajetória estamos seguindo, e partículas campo às partículas espalhadoras.

Como resultado dos encontros, as partículas teste são espalhadas fora da unidade de volume no espaço de fases centrado sobre \mathbf{w} com uma razão

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_- = -\frac{f(\mathbf{w}) \int P_-}{\Delta t} = -f(\mathbf{w}) \int \Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})d^6\Delta\mathbf{w}, \quad (1.35)$$

em que $P_- = \Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})d^6\Delta\mathbf{w}\Delta t$ é a probabilidade de que uma partícula seja espalhada para fora do volume $d^6\mathbf{w}$. Também existem encontros que espalham as partículas teste para dentro deste volume com uma razão

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_+ = \frac{\int f(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w})P_+}{\Delta t} = \int f(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w})\Psi(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})d^6\Delta\mathbf{w}, \quad (1.36)$$

em que $P_+ = \Psi(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})d^6\Delta\mathbf{w}\Delta t$ é a probabilidade de que uma partícula seja espalhada para dentro do volume $d^6\mathbf{w}$. Portanto, o termo de colisão é

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_+ + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_-,$$

e assim a equação Mestra é dada como

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \int [\Psi(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})f(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w}) - \Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})f(\mathbf{w})]d^6\Delta\mathbf{w}. \quad (1.37)$$

Vemos que a equação mestra não é reversível no tempo: uma FD f que é localizada perto de um único ponto no espaço de fases se propaga até estender-se sobre todo o espaço de fases pela influencia do termo de colisões, mas uma distribuição estendida não pode encolher-se a um ponto. Por outro lado, a equação de Liouville [1], a qual proporciona uma descrição exata do sistema estelar, é reversível no tempo. A irreversibilidade, entra na nossa derivação através da suposição de “caos molecular” de Boltzmann, i.e. a suposição de que as distribuições de partículas teste e campo sejam estatisticamente independentes. Isto é equivalente à suposição de que a probabilidade de transição $\Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})$ e a FD $f(\mathbf{w})$ sejam estatisticamente independentes, desta forma a razão de espalhamento nas equações (1.35) e (1.36) são escritas como o produto de Ψ e f .

1.3.2 A aproximação de Fokker-Planck

Mencionamos na introdução que em sistemas cujas partículas obedecem uma lei de interação de inverso quadrado da separação interpartícula e de longo alcance, os encontros predominantes são os encontros com ângulos pequenos, ou seja, quando $\delta v \ll v$. O prevailecimento dos encontros fracos nos permitem simplificar o termo de colisões já que para encontros fracos, $\Delta\mathbf{w}$ é pequeno, e assim podemos expandir o primeiro termo do lado direito da Eq. (1.37) em uma série de Taylor [32]

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})f(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w}) &= \Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})f(\mathbf{w}) - \sum_{i=1}^6 \Delta w^i \frac{\partial}{\partial w^i} [\Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})f(\mathbf{w})] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^6 \Delta w^i \Delta w^j \frac{\partial^2}{\partial w^i \partial w^j} [\Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})f(\mathbf{w})] + 0(\Delta\mathbf{w}^3). \end{aligned} \quad (1.38)$$

A **aproximação de Fokker-Planck** consiste em truncar os termos depois da segunda ordem na expansão (1.38), e assim substituindo na Eq. (1.37) obtemos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = -\sum_{i=1}^6 \frac{\partial}{\partial w^i} \left\{ f(\mathbf{w}) D[\Delta w^i] \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^6 \frac{\partial^2}{\partial w^i \partial w^j} \left\{ f(\mathbf{w}) D[\Delta w^i \Delta w^j] \right\}, \quad (1.39)$$

em que $D[\Delta w^i]$ e $D[\Delta w^i \Delta w^j]$ são conhecidos como os **Coeficientes de Difusão**

$$D[\Delta w^i] \equiv \int \Delta w^i \Psi(\mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) d^6 \Delta \mathbf{w}, \quad (1.40)$$

$$D[\Delta w^i \Delta w^j] \equiv \int \Delta w^i \Delta w^j \Psi(\mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) d^6 \Delta \mathbf{w}. \quad (1.41)$$

Estes coeficientes caracterizam a razão na qual as partículas se difundem através do espaço de fases como resultado dos encontros. O coeficiente de difusão de segunda ordem $D[\Delta w^i \Delta w^j]$ governa a razão na qual a partícula teste realiza um caminho aleatório no espaço de fases, análogo ao **movimento Browniano** das partículas microscópicas. O coeficiente de difusão de primeira ordem $D[\Delta w^i]$ representa uma corrente estável (*Drift*) através do espaço de fases.

A Eq. (1.34), junto com a expressão (1.39) para o termo de colisões é chamada de **equação de Fokker-Planck** (FP), e tem a virtude de que toda dependência da FD das partículas campo está embutida nos coeficientes de difusão. Como consequência, esta equação depende unicamente das coordenadas das partículas teste no espaço de fases. Desta forma, a equação de FP é uma equação diferencial que difere fortemente da equação Mestra, a qual é uma equação integro-diferencial. Na prática, devido a sua simplicidade, a equação de FP é a ferramenta principal para o estudo de encontros em sistemas estelares³.

1.3.3 Coeficientes de Difusão

Por outro lado, muitos dos espalhamentos são causados pelos encontros de curto alcance ou locais, que são quando $b \ll R$. O prevalectimento dos encontros locais nos ajudam a justificar a suposição do caos molecular mencionado anteriormente: é pouco provável que duas partículas que sofreram um encontro local com parâmetro de impacto $b \ll R$ tenham

³Estudos que não se baseia na aproximação de Fokker-Planck são descritos em Goodman (1983) [33].

outro encontro com $b \ll R$ no tempo de vida do sistema estelar. No caso que o encontro ocorra, este deve acontecer unicamente depois de muitas voltas sobre a sua órbita e muitas perturbações por parte de outras partículas, i.e. quando toda memória do seu primeiro encontro seja apagada.

O prevalecimento dos encontros locais tem outras importantes conseqüências; (i) dado que o tempo de encontro $\sim b/v$ é curto - muito menos o que o tempo de cruzamento - os encontros afetam unicamente a velocidade, mas não a posição das partículas com as quais interage; (ii) durante o encontro, as partículas se deslocam sobre hipérbolas Keplerianas, e não são afetadas pelo potencial de longa escala do sistema estelar; (iii) os efeitos dos encontros estelares sobre uma partícula em \mathbf{x} pode ser calculado como se a partícula estivesse incorporada em um meio infinito e homogêneo com a FD em todo lugar igual à FD em \mathbf{x} .

Dado que a aproximação local [1] só afeta a velocidade, então, o termo de colisões pode ser simplificado. Se as coordenadas canônicas \mathbf{w} são cartesianas (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , então $\Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w}) = \Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{v})\delta(\Delta\mathbf{x})$, como conseqüência, qualquer coeficiente de difusão da forma $D[\Delta x_i]$, $D[\Delta x_i, \Delta x_j]$ e $D[\Delta x_i, \Delta v_j]$ se anula. Portanto, podemos simplificar as expressões (1.40) e (1.41)

$$D[\Delta v^i] \equiv \int \Delta v^i \Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{v}) d^3 \Delta\mathbf{v}, \quad (1.42)$$

$$D[\Delta v^i \Delta v^j] \equiv \int \Delta v^i \Delta v^j \Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{v}) d^3 \Delta\mathbf{v}, \quad (1.43)$$

e o termo de colisões pode ser escrito como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial v^i} \left\{ f D[\Delta v^i] \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} \left\{ f D[\Delta v^i \Delta v^j] \right\}. \quad (1.44)$$

Usando os resultados do Apêndice A, podemos expressar os Coeficientes de Difusão usando os **Potenciais de Rosenbluth** $h(\mathbf{v})$ e $g(\mathbf{v})$

$$D[\Delta v^i] = \Gamma \frac{\partial}{\partial v^i} \left\{ h(\mathbf{v}) \right\}, \quad (1.45)$$

$$D[\Delta v^i \Delta v^j] = \Gamma \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} \left\{ g(\mathbf{v}) \right\}. \quad (1.46)$$

em que Γ é uma constante positiva (ver Apêndice A) e

$$h(\mathbf{v}) = \sum_a \frac{m + m_a}{m_a} \int d^3\mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a|^{-1}, \quad (1.47)$$

$$g(\mathbf{v}) = \sum_a \int d^3\mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a|, \quad (1.48)$$

sendo $f_a(\mathbf{v}_a)$ a FD de partículas campo com velocidade \mathbf{v}_a e massa m_a (estes potenciais foram determinados pela primeira vez por Rosenbluth [34] em 1957, e daí é adotado o nome **Potenciais de Rosenbluth**).

Capítulo 2

Discos e Anéis Estelares

Partículas leves que interagem com um corpo central são frequentemente encontradas em diversos campos da Física. Por exemplo, elétrons girando arredor de um núcleo atômico, sistemas de Anéis girando arredor de Saturno ou de Júpiter, nebulosas planetárias girando arredor de estrelas gigantes vermelhas, entre outros.

Os discos e sistema de anéis estelares [35–38] são uma consequência natural da **dissipação** em sistemas estelares em rotação. Por exemplo, os sistemas de anéis planetários são formados quando uma “nuvem” de restos circundantes ao planeta se instalam em um plano perpendicular ao eixo de rotação do planeta, isto devido ao fato de que as colisões interpartículas dissipam energia cinética mas conservam o momento angular total. Dado que os planetas são geralmente oblatos, então, unicamente a componente do momento angular ao longo do eixo de rotação é conservada, e então, o sistema de Anéis é formado no plano equatorial do planeta [26].

Observações da sonda **Cassini** confirmam que o sistema de Anéis de Saturno são formados predominantemente por gelos de água, e as partículas que o formam cobrem uma ampla gama de tamanhos, desde poeira até pequenas luas. Parte da estrutura do sistema de Anéis é originado pela presença da suas luas vizinhas. Futuros dados obtidos pela Cassini podem ajudar aos pesquisadores decidirem se o sistema de Anéis são restos da nebulosa de saturno ou fragmentos de uma lua destruída ou de um cometa destruído [17].

2.1 A Equação de Fokker-Planck para Discos Estelares finos

Tem sido demonstrado por diferentes autores que os encontros interpartículas possuem um papel importante no aspecto dinâmico dos Discos e sistemas de Anéis [39, 40]. Então, a equação de Fokker-Planck deve ser uma ferramenta útil para descrever a evolução destes tipos de sistemas estelares que são influenciados fortemente pelos encontros gravitacionais.

Nesta seção determinaremos a equação de FP para sistemas estelares em forma de Discos. Consideremos um Disco estelar fino formado por partículas que orbitam em um único plano (por exemplo, no plano equatorial de um planeta). Portanto, a equação que descreve este tipo de sistemas estelares é a versão bi-dimensional (2D) da equação de FP. A equação de FP na versão 3D foi derivada no capítulo anterior considerando a aproximação de encontros fracos e locais. Logo a equação 2D de FP pode ser derivada a partir da equação 3D de FP restringindo o movimento das partículas unicamente no plano $z = 0$, isto é feito considerando $f \rightarrow f\delta(z)\delta(v_z)$ na Eq. (1.34) e integrando nas variáveis z e v_z , que correspondem à coordenada espacial e velocidade na direção perpendicular ao Disco respectivamente. Desta forma obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^2 a^i \frac{\partial f}{\partial v^i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (2.1)$$

em que $x^1 \equiv x$ e $x^2 \equiv y$ são as coordenadas cartesianas espaciais, $v^1 \equiv v_x$ e $v^2 \equiv v_y$ são as velocidades cartesianas, $f \equiv f(x^i, v^i, t)$ é a função de distribuição das partículas no espaço de fases, $a^i = \frac{dv^i}{dt}$ são as componentes 2D da aceleração gerado pelo campo médio sobre a partícula teste, e $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ é o termo de colisões 2D. No capítulo 1 derivamos o termo de colisões considerando a aproximação de encontros fracos e locais. Na continuação apresentamos a versão 2D do termo de colisões

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial v^i} (fD[\Delta v^i]) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} (fD[\Delta v^i \Delta v^j]), \quad (2.2)$$

em que $D[\Delta v^i]$ e $D[\Delta v^i \Delta v^j]$ são os chamados coeficientes de difusão. Estes coeficientes são determinados no apêndice A considerando encontros tri-dimensionais (equações A.35 e A.36). Na continuação, determinaremos as expressões para os coeficientes de difusão considerando unicamente encontros bi-dimensionais, é dizer, encontros de partículas que orbitam em um único plano.

Para uma função de distribuição de velocidades dada por $f_a(\mathbf{v}_a)$ para as partículas campo com velocidade \mathbf{v}_a , podemos definir

$$\begin{aligned} D[\Delta v^i] &= \frac{\langle \Delta v^i \rangle}{\Delta t}, \\ &= \int d^2 \mathbf{v}_a u f_a(\mathbf{v}_a) \Delta v^i db, \\ &= - \int d^2 \mathbf{v}_a u f_a(\mathbf{v}_a) \left\{ (\hat{e}_i \cdot \mathbf{i}') \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\parallel} db + (\hat{e}_i \cdot \mathbf{j}') \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\perp} db \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

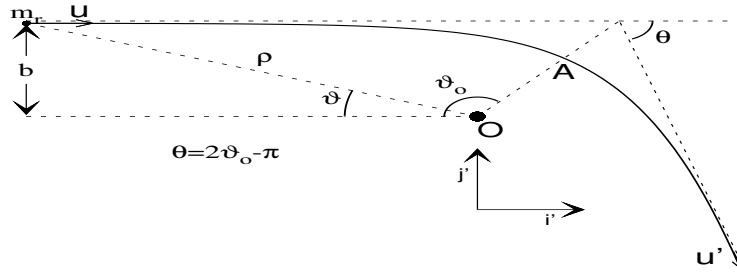


Figura 2.1: Encontro da partícula teste de massa m e a partícula campo de massa m_a com um parâmetro de impacto b e velocidade relativa \mathbf{u} . Podemos definir Δv_{\parallel} como a mudança de \mathbf{v} na direção \mathbf{i}' causada pelo encontro e Δv_{\perp} como a mudança na direção \mathbf{j}' causado pelo encontro.

em que $\langle \rangle$ representa uma média em um intervalo de tempo Δt , b é o parâmetro de impacto entre a partícula teste de massa m e velocidade \mathbf{v} , com a partícula campo de massa m_a , $u = |\mathbf{u}| = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a|$, em que \mathbf{u} é a velocidade relativa das partículas que participam do encontro. \hat{e}_i é o versor de um sistema de referência cartesiano arbitrário no espaço de velocidades, $\mathbf{i}' = \mathbf{u}/u$ é o versor paralelo à \mathbf{u} , \mathbf{j}' é o versor perpendicular a \mathbf{u} , $\Delta v_{\parallel} = \frac{2m_a u}{m+m_a} \left[1 + \frac{b^2 u^4}{G^2 (m+m_a)^2} \right]^{-1}$, e $\Delta v_{\perp} = \frac{2m_a b u^3}{G(m+m_a)^2} \left[1 + \frac{b^2 u^4}{G^2 (m+m_a)^2} \right]^{-1}$. Estas expressões são derivadas na referência [1]. O parâmetro b_m é um parâmetro de corte para os encontros já que o valor de b deve ser finito

e muito menor do que o raio do sistema. Isto implica que a integração em db deve ser realizada de 0 até um valor finito que chamaremos b_m , portanto os encontros com $b > b_m$ não são considerados. Na determinação da Eq. (2.3) foram consideradas as seguintes relações

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v} &= -\Delta v_{\parallel} \mathbf{i}' - \Delta v_{\perp} \mathbf{j}', \\ \Delta v_i &= -\Delta v_{\parallel} (\hat{e}_i \cdot \mathbf{i}') - \Delta v_{\perp} (\hat{e}_i \cdot \mathbf{j}').\end{aligned}$$

Considerando as expressões para Δv_{\parallel} e Δv_{\perp} , é possível demonstrar que

$$\begin{aligned}\int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\parallel} db &= \frac{4m_a G}{u} \arctan(\Lambda), \\ \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\perp} db &= 0,\end{aligned}$$

em que $\Lambda = \frac{b_m u^2}{G(m+m_a)}$. Usando estes últimos resultados e fazendo a substituição na Eq. (2.3) encontramos uma expressão para os coeficientes de difusão de primeira ordem

$$D[\Delta v^i] = -4m_a G \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) \arctan(\Lambda) \frac{u^i}{u}, \quad (2.4)$$

em que $u^i = v^i - v_a^i$. Logo, usando o mesmo procedimento é possível determinar os coeficientes de difusão de segunda ordem $D[\Delta v^i \Delta v^j]$

$$\begin{aligned}D[\Delta v^i \Delta v^j] &= \frac{\langle \Delta v^i \Delta v^j \rangle}{\Delta t}, \\ &= \int d^2 \mathbf{v}_a u f_a(\mathbf{v}_a) \Delta v^i \Delta v^j db, \\ &= \int d^2 \mathbf{v}_a u f_a(\mathbf{v}_a) \left\{ (\hat{e}_i \cdot \mathbf{i}') (\hat{e}_j \cdot \mathbf{i}') \int_{-b_m}^{b_m} (\Delta v_{\parallel})^2 db + \right. \\ &\quad (\hat{e}_i \cdot \mathbf{i}') (\hat{e}_j \cdot \mathbf{j}') \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\parallel} \Delta v_{\perp} db + \\ &\quad \left. (\hat{e}_i \cdot \mathbf{j}') (\hat{e}_j \cdot \mathbf{i}') \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\perp} \Delta v_{\parallel} db + (\hat{e}_i \cdot \mathbf{j}') (\hat{e}_j \cdot \mathbf{j}') \int_{-b_m}^{b_m} (\Delta v_{\perp})^2 db \right\}. \quad (2.5)\end{aligned}$$

Novamente, considerando as expressões para Δv_{\parallel} e Δv_{\perp} , podemos resolver as seguintes

integrais

$$\begin{aligned} \int_{-b_m}^{b_m} (\Delta v_{\parallel})^2 db &= \frac{4m_a^2 G}{m + m_a} \left(\arctan(\Lambda) + \frac{\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \right), \\ \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\perp} \Delta v_{\parallel} db &= 0, \\ \int_{-b_m}^{b_m} (\Delta v_{\perp})^2 db &= \frac{4m_a^2 G}{m + m_a} \left(\arctan(\Lambda) - \frac{\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \right), \end{aligned}$$

que ao serem substituídas na Eq. (2.5) encontramos

$$D[\Delta v^i \Delta v^j] = \frac{4m_a^2 G}{m + m_a} \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) \left\{ \frac{2\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \frac{u^i u^j}{u} + u \delta_{ij} \left[\arctan(\Lambda) - \frac{\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \right] \right\}, \quad (2.6)$$

em que δ_{ij} é o tensor delta de Kronecker [32]. Dado que, nos sistemas estelares, os encontros que predominam são os encontros de baixos ângulos ou de grande parâmetro de impacto, então, Λ deve ser muito grande. Levando isto em consideração, é possível fazer as seguintes aproximações

$$\begin{aligned} \arctan(\Lambda) &\approx \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\Lambda}{\Lambda^2 + 1} &\approx \frac{1}{\Lambda}, \\ \frac{1}{\Lambda} &\approx 0. \end{aligned}$$

Considerando estas últimas aproximações na Eq. (2.4) e a Eq. (2.6), encontramos uma expressão mais simples para os coeficientes de difusão

$$D[\Delta v^i] = -2m_a G \pi \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) \frac{u^i}{u}, \quad (2.7)$$

$$D[\Delta v^i \Delta v^j] = \frac{2m_a^2 G \pi \delta_{ij}}{m + m_a} \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) u. \quad (2.8)$$

Estas duas últimas expressões para os coeficientes de difusão podem ainda ser apresentados em uma forma mais compacta considerando $h_a(\mathbf{v}) = \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) u$

$$D[\Delta v^i] = -\Gamma_1 \frac{\partial h_a(\mathbf{v})}{\partial v^i}, \quad (2.9)$$

$$D[\Delta v^i \Delta v^j] = \Gamma_2 \delta_{ij} h_a(\mathbf{v}), \quad (2.10)$$

em que $\Gamma_1 = 2m_a G\pi$, e $\Gamma_2 = \frac{2m_a^2 G\pi}{m+m_a}$. Assim, os coeficientes de difusão dependem de uma única função h_a . A nova função $h_a(\mathbf{v})$ deve ser o análogo bi-dimensional dos potenciais de Rosenbluth $h(\mathbf{v})$ e $g(\mathbf{v})$ que foram anteriormente apresentados (equações 1.47 e 1.48).

2.1.1 Termo de Colisões não Cartesiano

Dependendo da simetria do sistema estelar às vezes é necessário escrever os coeficientes de difusão em coordenadas curvilíneas. Sejam T^i e S^{ij} os novos coeficientes de difusão cartesianos de primeira e segunda ordem respectivamente e definidos da seguinte forma

$$T^i = -\frac{1}{\Gamma_1} D[\Delta v^i] = \frac{\partial h_a(\mathbf{v})}{\partial v^i}, \quad (2.11)$$

$$S^{ij} = \frac{1}{\Gamma_2} D[\Delta v^i \Delta v^j] = \delta_{ij} h_a(\mathbf{v}), \quad (2.12)$$

logo substituindo estas expressões na Eq. (2.2) encontramos o termo de colisões cartesiano com outra aparência

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \Gamma_1 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial v^i} \{f T^i\} + \frac{\Gamma_2}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} \{f S^{ij}\}. \quad (2.13)$$

A extensão não cartesiana [34] do termo de colisões (2.13) é feita considerando os seguintes tensores [32] de difusão

$$T^\mu = \sum_{\nu=1}^2 a^{\mu\nu} \frac{\partial h_a}{\partial q^\nu}, \quad (2.14)$$

$$S^{\mu\nu} = a^{\mu\nu} h_a, \quad (2.15)$$

em que $a_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço de velocidades, $a^{\mu\nu} \det(a_{\mu\nu})$ é o cofator de $a_{\mu\nu}$ na matriz $(a_{\mu\nu})$ tal que $\sum_{\omega=1}^2 a^{\mu\omega} a_{\omega\nu} = \delta_\nu^\mu$, e q^ν são as novas coordenadas curvilíneas do espaço de velocidades. Logo, a expressão para a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos no espaço de velocidades é dada por

$$(ds)^2 = \sum_{\mu\nu=1}^2 a_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu.$$

Então, a extensão à forma covariante do Termo de Colisão é feita considerando

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial v^i} \{fT^i\} = \sum_{\mu=1}^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \{\sqrt{a}fT^\mu\}, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} \{fS^{ij}\} &= \sum_{\mu,\nu=1}^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial^2}{\partial q^\mu \partial q^\nu} \{\sqrt{a}fS^{\mu\nu}\} \\ &+ \sum_{\mu,\nu,\omega=1}^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \{\sqrt{a}\{\omega_\mu\}fS^{\mu\omega}\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que $a = \det(a_{\mu\nu})$, e $\{\omega_\mu\}$ é o símbolo de Christoffel da segunda classe [32] definido como

$$\{\omega_\mu\} = \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^2 a^{\nu\tau} \left(\frac{\partial a_{\omega\tau}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial a_{\mu\tau}}{\partial q^\omega} - \frac{\partial a_{\omega\mu}}{\partial q^\tau} \right).$$

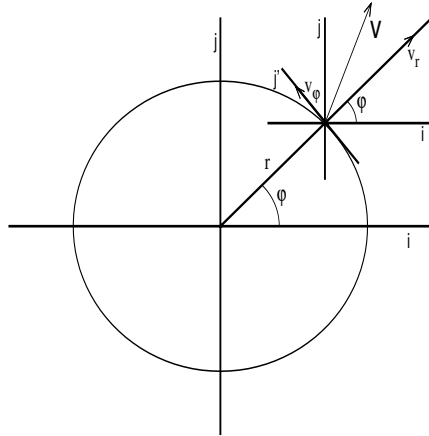


Figura 2.2: Transformação das componentes da velocidade. A nova base faz um ângulo φ com a base antiga. Observe que a antiga base da velocidade coincide com a base cartesiana espacial.

Como exemplo, consideremos a transformação no espaço de velocidades apresentada na Fig.2.2, que é dada como

$$v_x = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \quad (2.18)$$

$$v_y = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi, \quad (2.19)$$

em que as novas coordenadas para a velocidade são $q^1 = v_r$ e $q^2 = v_\varphi$, conhecidas como a velocidade radial física e a velocidade angular física, respectivamente. Pode-se mostrar que

$(ds)^2 = (dv_x)^2 + (dv_y)^2 = (dq^1)^2 + (dq^2)^2$, então, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, desta forma, $a = 1$, $a^{11} = a^{22} = 1$, e $a^{12} = a^{21} = 0$. Em consequência, dado que $a_{\mu\nu}$ é independente de qualquer coordenada q^ω temos que $\{\omega_\mu\} = 0$, portanto obtemos

$$T^\mu = \frac{\partial h_a}{\partial q^\mu}, \quad (2.20)$$

$$S^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} h_a. \quad (2.21)$$

Finalmente, usando as relações (2.20), (2.21), (2.16), e (2.17) podemos encontrar o termo de colisões para as novas coordenadas das velocidades v_φ e v_r

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \Gamma_1 \sum_{\mu=1}^2 \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left\{ f \frac{\partial h_a}{\partial q^\mu} \right\} + \frac{\Gamma_2}{2} \sum_{\mu=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial q^\mu \partial q^\mu} \{ f h_a \}, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c &= \frac{2\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \sum_{\mu=1}^2 \frac{\partial^2 h_a}{\partial q^\mu \partial q^\mu} f + (\Gamma_1 + \Gamma_2) \sum_{\mu=1}^2 \frac{\partial h_a}{\partial q^\mu} \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \\ &+ \frac{\Gamma_2}{2} \sum_{\mu=1}^2 h_a \frac{\partial^2 f}{\partial q^\mu \partial q^\mu}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Considerando que a partícula teste e as partículas campo tenham massas iguais, $m = m_a$, temos que $\Gamma_1 = 2\Gamma_2$. Então, a Eq. (2.23) pode ser simplificada e apresentada explicitamente da seguinte maneira

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \frac{5}{4} \left(\frac{\partial^2 h_*}{\partial v_\varphi^2} + \frac{\partial^2 h_*}{\partial v_r^2} \right) f + \frac{3}{2} \frac{\partial h_*}{\partial v_\varphi} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} + \frac{3}{2} \frac{\partial h_*}{\partial v_r} \frac{\partial f}{\partial v_r} + \frac{1}{4} h_* \frac{\partial^2 f}{\partial v_\varphi^2} + \frac{1}{4} h_* \frac{\partial^2 f}{\partial v_r^2}, \quad (2.24)$$

em que $h_* \equiv \Gamma_1 h_a$. Portanto, a equação 2D de FP em coordenadas polares espaciais e nas novas coordenadas velocidades, é dizer, para $f \equiv f(r, \varphi, v_r, v_\varphi)$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \dot{v}_r \frac{\partial f}{\partial v_r} + \dot{v}_\varphi \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c, \end{aligned} \quad (2.25)$$

em que $\dot{v}_r = \frac{dv_r}{dt}$, e $\dot{v}_\varphi = \frac{dv_\varphi}{dt}$. Logo, usando as equações de Lagrange [28] para as coordenadas polares (r, φ) é possível encontrar as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned} \dot{v}_r &= \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \dot{v}_\varphi &= -\frac{v_r v_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

em que Φ é o potencial gravitacional líquido sobre a partícula teste. Agora, substituindo estas duas últimas expressões na Eq. (2.25) encontramos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \left(\frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \left(\frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c. \quad (2.26)$$

A Eq. (2.26) e o termo $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ dado pela Eq. (2.24) formam a equação que deve descrever a evolução de sistemas estelares em forma de discos finos.

2.1.2 Determinação de h_a

Comentamos anteriormente que para determinar o termo de colisões é preciso conhecer uma expressão para h_a . Aqui encontraremos a expressão para h_a em função das novas coordenadas velocidades v_φ e v_r . Sabemos que

$$h_a(\mathbf{v}) = \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) u, \quad (2.27)$$

em que $u \equiv |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a| = \sqrt{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a)^2}$. Nas novas coordenadas, esta velocidade relativa é dada por $u = \sqrt{(v_r - v_{ar})^2 + (v_\varphi - v_{a\varphi})^2}$. Para fazer a transformação da integral (2.27) para as novas coordenadas, é necessário recorrer ao Jacobiano da transformação J [32], definido como $J = \left| \frac{\partial(v_{ax}, v_{ay})}{\partial(v_{ar}, v_{a\varphi})} \right|$, onde

$$\frac{\partial(v_{ax}, v_{ay})}{\partial(v_{ar}, v_{a\varphi})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_{ax}}{\partial v_{ar}} & \frac{\partial v_{ax}}{\partial v_{a\varphi}} \\ \frac{\partial v_{ay}}{\partial v_{ar}} & \frac{\partial v_{ay}}{\partial v_{a\varphi}} \end{vmatrix},$$

assim obtemos

$$\frac{\partial(v_{ax}, v_{ay})}{\partial(v_{ar}, v_{a\varphi})} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix},$$

$$J = 1.$$

Já que a transformação da integral é feita da forma

$$h_a = \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) u = \int J dv_{ar} dv_{a\varphi} f_a(v_{ar}, v_{a\varphi}) u, \quad (2.28)$$

e que $J = 1$, então a Eq. (2.28) pode ser escrita como

$$h_a(v_r, v_\varphi) = \int dv_{ar} dv_{a\varphi} f_a(v_{ar}, v_{a\varphi}) \sqrt{(v_r - v_{ar})^2 + (v_\varphi - v_{a\varphi})^2}, \quad (2.29)$$

e, finalmente, temos a expressão para a função h_a nas novas coordenadas velocidades. No caso de um Disco no qual as partículas se desloquem unicamente na direção $\hat{\varphi}$, podemos considerar que $f_a(v_{ar}, v_{a\varphi}) \rightarrow f_a(v_{a\varphi})\delta(v_{ar})$, em que $\delta(v_{ar})$ é a função delta de Dirac. Desta forma, a Eq. (2.29) pode ser escrita

$$h_a(v_r, v_\varphi) = \int dv_{a\varphi} f_a(v_{a\varphi}) \sqrt{v_r^2 + (v_\varphi - v_{a\varphi})^2}. \quad (2.30)$$

Discos e sistemas de anéis são sempre formados arredor de corpos como planetas e estrelas. Em nosso caso, vamos considerar, por simplicidade, que nosso corpo é puntiforme¹ de massa M_p . Então, as “pequenas” partículas que formam o disco ou sistema de anéis devem se deslocar em órbitas quase circulares com uma velocidade orbital média dada pela Lei de Kepler [17, 41]

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_p}{r}},$$

em que r é o raio com o qual uma partícula orbita arredor do centro de massa M_p . Para um Disco fino, ou sistemas de Anéis em equilíbrio termodinâmico, como primeira aproximação podemos considerar uma distribuição de velocidades de tipo Gaussiana

$$f_a(v_{a\varphi}) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(v_{a\varphi} \pm v_c)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.31)$$

em que σ é a dispersão da velocidade de circulação das partículas campo, e n representa a densidade de número de partículas no disco ou anel². O sinal negativo (−) corresponde a situação na qual o sentido da circulação media das partículas é anti-horário e o sinal positivo (+) é usado para descrever o caso contrário. Considerando a função de distribuição (2.31) para as partículas campo a Eq.(2.30) se reduz à

$$h_a(v_r, v_\varphi) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int dv_{a\varphi} \exp\left[-\frac{(v_{a\varphi} \pm v_c)^2}{2\sigma^2}\right] \sqrt{v_r^2 + (v_\varphi - v_{a\varphi})^2}. \quad (2.32)$$

Resolvendo esta integração e substituindo na Eq. (2.24) determinaremos o termo de colisão para este caso em particular em que as partículas campo circulam em órbitas circulares.

¹Em estudos mais precisos deveríamos considerar um corpo 3-dimensional.

²Podemos imaginar que este é uma porção de um disco fino, é dizer que o anel é uma coroa circular de grossura muito pequena e desprezível, por tanto é possível associar uma densidade superficial de massa em vez de densidade lineal de massa

2.2 A Equação de Fokker-Planck para Anéis Estelares finos

Os anéis estelares são porções de discos finos formados por poeira cósmica e outras pequenas partículas que giram arredor de um corpo central. O exemplo mais atraente da estrutura de anéis são aquelas que circundam o planeta Saturno [42,43], mas, este planeta não é o único que tem um sistema de anéis. Os outros três planetas gigantes do **sistema solar**, i.e. Júpiter, Urano, e Netuno possuem também seus próprios sistemas de anéis. Estudos recentes sugerem que a lua **Rhea** de Saturno também tem seu próprio sistema tênue de Anéis, o que seria a única lua conhecida em possuir sistema de Anéis [44].

Existem diferentes hipóteses possíveis para explicar a existência de Anéis planetários, mas essencialmente três são as mais relevantes: (i) que são formados a partir do material do Disco protoplanetário que se encontra dentro do **limite de Roche** [21] do planeta, desta forma os materiais não podem se aglutinar para formar luas; (ii) que são formados a partir dos resíduos de uma lua que foi quebrada por um grande impacto; e (iii) que são formados a partir dos resíduos de uma lua que foi quebrada pelas forças de maré quando passa dentro do limite de Roche. Esta última nos permite prever que Phobos, uma lua de Marte, se quebrará e formará um anel planetário mas ou menos em 50 M anos devido a que sua órbita está muito próxima ao planeta [45].

Pretendemos modelar usando a equação de FP a evolução de um Anel fino formado por N partículas distribuídas uniformemente. Consideramos também que as N partículas orbitam aproximadamente a uma mesma distância do campo massivo central, e que a velocidade radial v_r de cada uma das partículas seja zero de modo que nenhuma partícula escape fora do Anel. Esta é uma idealização simplificada de Anéis estelares reais encontrados na astrofísica, já que em geral as partículas que formam um Anel têm velocidades radiais diferentes de zero. Portanto, a equação de FP que descreve a evolução do Anel simplificado pode ser obtida a partir da Eq. (2.26) considerando $f \rightarrow f(\varphi, v_\varphi)\delta(r - r_a)\delta(v_r)$

e integrando sobre as variáveis r e v_r . Desta forma encontramos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{v_\varphi}{r_a} \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{1}{r_a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (2.33)$$

em que o termo de colisões é determinado considerando as relações

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial v_r} \left\{ f \frac{\partial h_*}{\partial v_r} \right\} dv_r &= 0, \\ \int \frac{\partial}{\partial v_\varphi} \left\{ f \frac{\partial h_*}{\partial v_\varphi} \right\} dv_r &= \frac{\partial}{\partial v_\varphi} \left\{ f \frac{\partial}{\partial v_\varphi} h_*(0, v_\varphi) \right\}, \\ \int \frac{\partial^2}{\partial v_r^2} \left\{ f h_* \right\} dv_r &= 0, \\ \int \frac{\partial^2}{\partial v_\varphi^2} \left\{ f h_* \right\} dv_r &= \frac{\partial^2}{\partial v_\varphi^2} \left\{ f h_*(0, v_\varphi) \right\}, \end{aligned}$$

em que a FD f do lado esquerdo é $f(\varphi, v_\varphi) \delta(r - r_a) \delta(v_r)$, e a do lado direito é simplesmente $f(\varphi, v_\varphi)$. Então, considerando $v_\varphi = r_a \dot{\varphi}$ e $a_\varphi = -\frac{1}{r_a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$, encontramos a equação de FP para os Anéis estelares

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + a_\varphi \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{5}{4} \frac{\partial^2 h}{\partial \dot{\varphi}^2} f + \frac{3}{2} \frac{\partial h}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{1}{4} h \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{\varphi}^2}, \quad (2.34)$$

em que $h \equiv h_*(0, \dot{\varphi})/r_a^2$. Existe uma diferença entre a FD f da Eq. (2.26) e a FD f da Eq. (2.34). Na primeira, f representa a função de distribuição no espaço de fases tetra-dimensional (duas coordenadas espaciais, e duas coordenadas velocidades), e na segunda, f representa a função de distribuição no espaço de fases bi-dimensional (uma coordenada espacial, e uma coordenada de velocidade).

Já que trabalhar com quantidades adimensionais é menos embaraçoso que trabalhar com quantidades dimensionais, então, é conveniente adimensionalizar a Eq. (2.34). Desta forma poderemos aplicar a equação adimensional para descrever a evolução de qualquer tipo de Anel fino. Para esta finalidade fazemos

$$f = f_o \tilde{f}, \quad t = t_o \tau, \quad \dot{\varphi} = v_o \nu, \quad a_\varphi = a_o \tilde{a}, \quad h = h_o \tilde{h},$$

em que \tilde{f} , τ , ν , \tilde{a} , e \tilde{h} são as quantidades adimensionais de f , t , $\dot{\varphi}$, a_φ , e h respectivamente. Assim, f_o , t_o , v_o , a_o , e h_o levam as magnitudes das grandezas. Logo, substituindo as

expressões anteriores na Eq. (2.34) e considerando $\nu_o t_o = 1$ encontramos

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} + \nu \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} + \beta \tilde{a} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} = 5\gamma \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \nu^2} \tilde{f} + 6\gamma \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \nu} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} + \gamma \tilde{h} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \nu^2}, \quad (2.35)$$

em que $\beta = t_o^2 a_o$ e $\gamma = \frac{t_o^3 h_o}{4}$, são também quantidades adimensionais. Chamamos a Eq. (2.35) de **equação adimensional** de FP para Anéis estelares.

Para finalizar a adimensionalização da equação de FP, precisamos encontrar a expressão adimensional de h , isto é feito considerando a expressão (2.32) para h_a , assim obtemos

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Gamma_1 h_a(0, \dot{\phi})}{r_a^2} \equiv \frac{\Gamma_1 n v_o^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int d\nu_a \exp\left[-\frac{r_a^2 v_o^2 (\nu_a \pm \nu_c)^2}{2\sigma^2}\right] |\nu_a - \nu|, \\ h &= \frac{\Gamma_1 n}{\sqrt{2\pi}\sigma t_o^2} \int d\nu_a \exp\left[-\frac{(\nu_a \pm \nu_c)^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right] |\nu_a - \nu|, \\ h &= h_o \tilde{h}, \end{aligned}$$

no qual consideramos $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{v_o r_a}$, logo $h_o = \frac{\Gamma_1 n}{\sqrt{2\pi}\sigma t_o^2}$. Portanto, as expressões para \tilde{h} , $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \nu}$, e $\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \nu^2}$ são respectivamente dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= \int d\nu_a \varrho(\nu_a) |\nu_a - \nu|, \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \nu} &= \int_{\nu_{min}}^{\nu} d\nu_a \varrho(\nu_a) - \int_{\nu}^{\nu_{max}} d\nu_a \varrho(\nu_a), \\ \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \nu^2} &= 2\varrho(\nu), \\ \varrho(\nu_a) &= \exp\left[-\frac{(\nu_a \pm \nu_c)^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

em que ν_{min} e ν_{max} são os limites inferior e superior da integração, respectivamente.

2.3 Um Anel fino em presença de um *shepherd*

Até o momento ainda não apresentamos uma expressão em particular de \tilde{a} . Consideremos o caso de um Anel em presença do campo gerado por um corpo puntiforme de massa m_s e menos massivo que o corpo central, o qual chamamos de **satélite pastor**³.

³Chamamos de satélite pastor, por exemplo, o satélite de um planeta que sempre acompanha de perto um Anel.

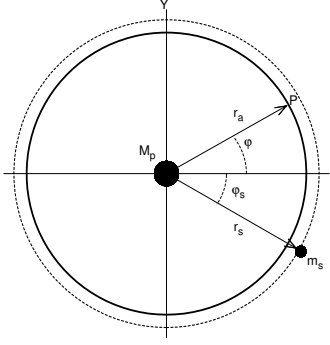


Figura 2.3: Anel + *Shepherd*, aqui φ representa a coordenada angular das partículas do Anel, e φ_s representa a coordenada angular do *Shepherd*. As partículas do Anel e o *Shepherd* giram em órbitas circulares, e neste exemplo, o *Shepherd* se localiza na parte exterior do Anel, mas, também pode estar na parte interior do Anel.

Chamaremos daqui em diante o satélite pastor como *Shepherd*, este *shepherd* circula à uma distancia r_s do centro (ver Fig.2.3) com uma velocidade angular ω_s constante, dada pela lei de Kepler

$$\begin{aligned}\omega_s &= \sqrt{\frac{GM_p}{r_s^3}}, \\ \varphi_s(t) &= \omega_s t,\end{aligned}\tag{2.37}$$

definindo a posição angular inicial do *shepherd* $\varphi_s(0) = 0$.

O potencial médio $\bar{\Phi}_a$ gerado por um anel de densidade linear λ_a em um ponto com coordenadas cilíndricas (r, φ, z) é

$$\bar{\Phi}_a(r, \varphi, z) = -Gr_a \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_a d\varphi'}{\sqrt{r^2 + z^2 + r_a^2 - 2rr_a \cos(\varphi - \varphi')}}},$$

em que φ' é a posição angular das partículas que conformam o anel. Para um anel com distribuição de massa homogênea (λ_a constante), por simetria, o campo gerado por este anel não deve ter componente na direção $\hat{\varphi}$, e este campo diverge quando é avaliado no próprio Anel. Para evitar futuras complicações por causa desta divergência, modelaremos anéis cuja massa m_R seja muito pequeno em comparação com o *shepherd* e o corpo central. Desta forma o potencial $\bar{\Phi}_a(r, \varphi, z)$ pode ser desprezível em comparação com os potenciais gerados pelo *shepherd* e pelo corpo central, portanto o potencial dentro do anel (por exemplo, no

ponto P da Fig.2.3) é dada aproximadamente

$$\Phi \approx -\frac{GM_p}{r_a} - \frac{Gm_s}{\sqrt{r_a^2 + r_s^2 - 2r_a r_s \cos(\varphi - \varphi_s)}}, \quad (2.38)$$

em que φ representa a posição angular da partícula teste. Assim

$$\begin{aligned} a_\varphi(\varphi, t) &= -\frac{Gm_s(1 + \delta) \sin(\varphi - \varphi_s)}{r_a^2 \{1 + (1 + \delta)^2 - 2(1 + \delta) \cos(\varphi - \varphi_s)\}^{3/2}}, \\ \tilde{a}(\varphi, \tau) &= -\frac{(1 + \delta) \sin(\varphi - \tilde{\omega}_s \tau)}{\{1 + (1 + \delta)^2 - 2(1 + \delta) \cos(\varphi - \tilde{\omega}_s \tau)\}^{3/2}}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

em que consideramos $a_o = \frac{Gm_s}{r_a^2}$, $\delta = \frac{\varepsilon_s}{r_a}$, com $\varepsilon_s = r_s - r_a$, e $\tilde{\omega}_s$ representa a velocidade angular adimensional do *shepherd*.

Fazendo a mudança de variáveis $\varphi = \nu_c \tau + \mu$ vemos que

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_s &= \mu + (\nu_c - \tilde{\omega}_s) \tau, \\ \varphi - \varphi_s &= \mu + \nu_r \tau, \end{aligned} \quad (2.40)$$

em que $\nu_r = \nu_c - \tilde{\omega}_s$, e desta forma podemos expressar a Eq. (2.35) em função de μ .

Esta nova coordenada corresponde a um referencial não inercial que gira junto com o Anel.

Então, a partir de agora podemos definir neste novo sistema de referência, $\tilde{f} \equiv \tilde{f}(\mu, \nu, \tau)$,

onde $\nu \equiv \frac{d\mu}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} - \nu_c$. Desta forma, a Eq. (2.35) se transforma em

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} + \nu \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mu} + \beta \tilde{a} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} = 5\gamma \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \nu^2} \tilde{f} + 6\gamma \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \nu} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} + \gamma \tilde{h} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \nu^2}, \quad (2.41)$$

em que

$$\tilde{a}(\mu, \tau) = -\frac{(1 + \delta) \sin(\mu + \nu_r \tau)}{\{1 + (1 + \delta)^2 - 2(1 + \delta) \cos(\mu + \nu_r \tau)\}^{3/2}}, \quad (2.42)$$

e os valores de \tilde{h} e suas derivadas são dadas da seguinte maneira

$$\tilde{h} = 2|\nu| \int_0^{|\nu|} d\nu_a \varrho(\nu_a) + 2\tilde{\sigma}^2 \{ \varrho(\nu) - \varrho(\nu_m) \}, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \nu} = \begin{cases} 2 \int_0^{|\nu|} d\nu_a \varrho(\nu_a), & \text{para } \nu \geq 0 \\ -2 \int_0^{|\nu|} d\nu_a \varrho(\nu_a), & \text{para } \nu < 0 \end{cases}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \nu^2} = 2\varrho(\nu_a), \quad (2.45)$$

$$\varrho(\nu_a) = \exp\left[-\frac{\nu_a^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right], \quad (2.46)$$

no qual consideramos $[-\nu_m, \nu_m]$ como o domínio da integração, com ν_m um número real positivo. A integral $\int_0^{|\nu|} d\nu_a \varrho(\nu_a)$, é determinada usando o método de integração numérica de Simpson [54], desta forma \tilde{h} e todas suas derivadas serão conhecidas.

Também é interessante analisar o caso do Anel em ausência de um campo externo, isto pode ser útil para entender o processo de relaxamento do Anel. Neste caso especial temos $\tilde{a} \equiv 0$, e a equação 1D de Fokker-Planck pode ser escrita como

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} + \nu \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mu} = 5\gamma \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \nu^2} \tilde{f} + 6\gamma \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \nu} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} + \gamma \tilde{h} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \nu^2}, \quad (2.47)$$

integrando esta última equação em $d\mu$, e considerando que $\int_{-\pi}^{\pi} d\mu \tilde{f}(\mu, \nu, \tau) = \xi(\nu, \tau)$, e $\tilde{f}(-\pi, \nu, \tau) = \tilde{f}(\pi, \nu, \tau)$ (devido a que $\mu = -\pi$ e $\mu = \pi$ representam o mesmo ponto do Anel), obtemos finalmente

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} - 5\gamma \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \nu^2} \xi - 6\gamma \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \nu} \frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \gamma \tilde{h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \nu^2} = 0. \quad (2.48)$$

Para o caso de um Anel homogêneo, então, sua função de distribuição \tilde{f} deve ser independente de μ e temos $\tilde{f} = \frac{\xi(\nu, \tau)}{2\pi}$. A nova função $\xi(\nu, \tau)$ pode ser interpretada como o número de partículas que se deslocam dentro do Anel com uma velocidade ν no instante τ .

2.4 Um Anel fino em presença de dois *shepherds*

Outro caso interessante é analisar a evolução temporal da distribuição de matéria de um Anel em presença de dois *shepherds*. Neste caso, o campo externo deve ser modificado e deve ser a soma dos campos gerados pelos *shepherds*. Rotulamos estes *shepherds* como *Shepherd 1* (de massa m_{s1}) e *Shepherd 2* (de massa m_{s2}), ver Fig.2.4, fazendo uma consideração semelhante que na seção anterior ($M_p > m_{s1}, m_{s2} \gg m_R$), o potencial deve ser

$$\Phi \approx -\frac{GM_p}{r_a} - \frac{Gm_{s1}}{\sqrt{r_a^2 + r_{s1}^2 - 2r_a r_{s1} \cos(\varphi - \varphi_{s1})}} - \frac{Gm_{s2}}{\sqrt{r_a^2 + r_{s2}^2 - 2r_a r_{s2} \cos(\varphi - \varphi_{s2})}}, \quad (2.49)$$

em que φ_{s1} e φ_{s2} são as posições angulares do *Shepherd 1* e *Shepherd 2*, respectivamente, e r_{s1} e r_{s2} é o raio da órbita do *Shepherd 1* e *Shepherd 2*, respectivamente. A expressão para

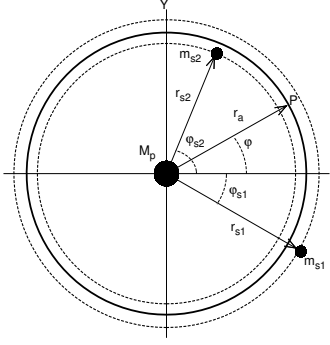


Figura 2.4: Anel + 2 *Shepherds*, aqui φ representa a coordenada angular das partículas do Anel, e φ_1 e φ_2 representam as coordenadas angulares do *Shepherd* 1 e *Shepherd* 2, respectivamente. As partículas do Anel e os *Shepherds* giram em orbitas circulares.

a_φ neste caso é dada por

$$a_\varphi = -\frac{Gm_1(1 + \delta_1) \sin[\varphi - \varphi_{s1}]}{r_a^2 \{\delta_1^2 + 2(1 + \delta_1)(1 - \cos[\varphi - \varphi_{s1}])\}^{3/2}} - \frac{Gm_{s2}(1 + \delta_2) \sin[\varphi - \varphi_{s2}]}{r_a^2 \{\delta_2^2 + 2(1 + \delta_2)(1 - \cos[\varphi - \varphi_{s2}])\}^{3/2}}, \quad (2.50)$$

$$\tilde{a} = -\frac{(1 + \delta_1) \sin[\varphi - \varphi_{s1}]}{\{\delta_1^2 + 2(1 + \delta_1)(1 - \cos[\varphi - \varphi_{s1}])\}^{3/2}} - \frac{m^*(1 + \delta_2) \sin[\varphi - \varphi_{s2}]}{\{\delta_2^2 + 2(1 + \delta_2)(1 - \cos[\varphi - \varphi_{s2}])\}^{3/2}}, \quad (2.51)$$

em que $\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{r_a}$, $\delta_2 = \frac{\varepsilon_2}{r_a}$, ε_1 (ε_2) é a separação entre o *Shepherd* 1 (*Shepherd* 2) e o Anel, $m^* = m_{s2}/m_{s1}$, e $a_o = \frac{Gm_{s1}}{r_a^2}$. Ambos os *shepherds* circulam com raios fixos e com velocidade orbital dada pela lei de Kepler.

Capítulo 3

Método das Diferenças Finitas

Hoje em dia, o cálculo numérico é comum em áreas onde antes de 1950 era praticamente desconhecida. As máquinas de computação de alta velocidade vão fazendo possível a solução de problemas científicos e de engenharia de grande complexidade. Esta capacidade estimulou a pesquisa em análise numérica, pois, o uso efetivo de tais dispositivos depende fortemente do contínuo avanço na pesquisa em áreas relevantes da análise matemática. Uma medida do crescimento destas pesquisas é o aumento de textos dedicados ao assunto nos anos após 1953. Outra é o desenvolvimento, durante o mesmo período, de muitas revistas de pesquisa cuja principal preocupação é a análise numérica.

Aproximações por diferenças finitas das derivadas já eram utilizadas por Euler [46] em 1768. O procedimento mais simples de diferença finita para lidar com o problema $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$, $x(0) = a$ é obtido através da substituição $(dx/dt)_{n-1}$ pela aproximação $(x_n - x_{n-1})/\Delta t$. Isto leva à relação de recorrência $x_0 = a$, $x_n = x_{n-1} + \Delta t f(x_{n-1}, t_{n-1})$ para $n \geq 1$. Este procedimento é conhecido como método de Euler. Desta forma, para sistemas unidimensionais, a abordagem de diferenças finitas foi profundamente enraizada em algoritmos computacionais por algum tempo.

Para sistemas bidimensionais a primeira aplicação computacional dos métodos de diferença finita foi provavelmente realizado por Runge [47] em 1908. Ele estudou a solução numérica da equação de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = \text{constante}$. Aproximadamente ao mesmo tempo Richardson [48], na Inglaterra, estava trabalhando em uma pesquisa semelhante. Seu artigo

de 1910 foi o primeiro trabalho sobre a aplicação de métodos iterativos para a solução de problemas de equilíbrio contínuo [49] por diferenças finitas. Em 1918 Liebmann [50], considerando a aproximação de diferenças finitas para equação de Laplace [32], sugeriu um método melhorado de iteração. Hoje o nome de Liebmann está associado a qualquer método de iteração por etapas simples, na qual se segue uma sequência de cálculos fixados.

O estudo dos erros nos cálculos de diferenças finitas é ainda uma área de principal interesse. As demonstrações matemáticas de convergência foram iniciadas por LeRoux [51], Phillips e Wiener [52], e Courant, Friedrichs e Lewy [53]. Alguns consideram o artigo celebrado em 1928 de Courant, Friedrichs, e Lewy como o nascimento da teoria moderna dos métodos numéricos para equações diferenciais parciais.

Como já mencionamos anteriormente, o método das diferenças finitas consiste em aproximar as derivadas parciais contínuas por diferenças discretas. Este procedimento pode ser feito de diferentes maneiras, mas, toda as aproximações geram erros, que chamamos de **erros de truncamento**.

Neste capítulo apresentaremos o método das diferenças finitas e a sua aplicação para diferentes equações diferenciais que modelam a Difusão de Calor. Usaremos também estes modelos para testar nosso código computacional utilizado na evolução temporal da equação de Fokker-Planck uni-dimensional.

3.1 Método Explícito para Equações Parabólicas

As equações parciais parabólicas são uma classe grande e importante de equações diferenciais na qual a equação de difusão é uma delas. Esta equação é um excelente modelo para desenvolver o método numérico das diferenças finitas e comparar os seus resultados com o método analítico.

3.1.1 Equação de Difusão

A equação de difusão pode ser apresentada, considerando convenientemente as unidades das quantidades físicas, da forma

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = f_t, \quad (3.1)$$

em que f é uma função das variáveis x, y, z , e t . A notação f_t denota $\partial f/\partial t$ e f_{xx} denota $\partial^2 f/\partial x^2$ e assim por diante. A equação (3.1) pode descrever a temperatura f no tempo t e na posição (x, y, z) em um corpo 3-dimensional, então $f(x, y, z)$ representa o valor de f no ponto (x, y, z) .

Um problema matemático bem posto consiste em uma equação diferencial junto a uma condição de contorno adicional, esta condição deve servir para especificar uma única solução ao problema. Consideremos como problema modelo a **equação de Difusão de Calor**, em sua versão 1-dimensional, e as condições de contorno tais que

$$\begin{aligned} f_{xx} &= f_t & (t \geq 0, \quad -1 \leq x \leq 1) \\ f(x, 0) &= g(x) & (-1 \leq x \leq 1) \\ f(-1, t) &= a(t) & (t \geq 0) \\ f(1, t) &= b(t) & (t \geq 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

O sistema (3.2) modela a distribuição de temperatura em uma vara de comprimento 2, cujas extremidades são mantidas a uma temperatura $a(t)$ e $b(t)$, respectivamente. As funções g, a , e b são conhecidas. Portanto, um perfil de temperatura inicial é descrito pela função g .

A solução analítica do sistema (3.2) é encontrada usando o método de separação de variáveis [32], que consiste em fazer $f(x, t) = \mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)$. Substituindo na primeira relação do sistema (3.2) obtemos

$$\frac{\mathcal{T}'(t)}{\mathcal{T}(t)} - \frac{\mathcal{X}''(x)}{\mathcal{X}(x)} = 0,$$

observamos que cada termo depende unicamente de uma variável, e que cada variável é independente, então a única possibilidade é que cada termo seja uma constante, ou seja é possível fazer as seguintes igualdades $\frac{\mathcal{T}'(t)}{\mathcal{T}(t)} = -\alpha$ e $\frac{\mathcal{X}''(x)}{\mathcal{X}(x)} = -\alpha$, em que α é uma constante

real. Desta forma

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(t) &= e^{-\alpha t}, \\ \mathcal{X}(x) &= e^{\sqrt{\alpha}ix}, \\ f(x, t) &= e^{-\alpha t} e^{\sqrt{\alpha}ix},\end{aligned}$$

em que i é o número imaginário $\sqrt{-1}$. Uma solução geral da equação diferencial é $f(x, t) = e^{-\alpha t} \cos[\sqrt{\alpha}x]$, e considerando as condições de contorno $a(t) = b(t) = 0$ vemos que $\alpha = \pi^2/4$, então

$$f(x, t) = e^{-\pi^2 t/4} \cos\left[\frac{\pi x}{2}\right].$$

Usaremos este resultado analítico para fazer as comparações com os resultados numéricos que encontraremos posteriormente.

3.1.2 Método das Diferenças Finitas

Um dos principais métodos para resolver numericamente problemas do tipo (3.2) é o método das diferenças finitas. Este método envolve uma **discretização** inicial do domínio de estudo da seguinte forma

$$\begin{aligned}t_j &= j\Delta t & j &\geq 0 \\ x_i &= i\Delta x & -N &\leq i \leq N\end{aligned}\quad (3.3)$$

As variáveis t e x têm diferentes tamanhos de passo, denotado por Δt e Δx , respectivamente. Já que $x \in [-1, 1]$, então fazemos $\Delta x = 1/N$. Nosso objetivo é calcular o valor aproximado da função solução nos pontos chamados de **pontos rede** (x_i, t_j) .

O próximo passo no processo é seleccionar algumas formulações simples para aproximar as derivadas que aparecem nas equações diferenciais. Uma formulação básica e simples é fazer

$$f'(x) \approx \frac{1}{\Delta x}[f(x + \Delta x) - f(x)] + O[\Delta x], \quad (3.4)$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{2\Delta x}[f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)] + O[(\Delta x)^2], \quad (3.5)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{\Delta x^2}[f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)] + O[(\Delta x)^2]. \quad (3.6)$$

Note-se que existem também outras formulações que oferecem diferentes graus de precisão.

Agora vamos substituir o problema diferencial (3.2) por uma versão discretizada, isto é feito usando as equações (3.4) e (3.6). Desta forma

$$\frac{1}{\Delta x^2}[\mathbf{f}(x + \Delta x, t) - 2\mathbf{f}(x, t) + \mathbf{f}(x - \Delta x, t)] = \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{f}(x, t + \Delta t) - \mathbf{f}(x, t)]. \quad (3.7)$$

em que usaremos a letra \mathbf{f} para representar a solução numérica do problema discreto. Para simplificar a notação fazemos $x \equiv x_i$ e $t \equiv t_j$ na Eq. (3.7), junto com $\mathbf{f}(x_i, t_j)$ por \mathbf{f}_{ij} . O resultado é

$$\frac{1}{\Delta x^2}(\mathbf{f}_{i+1,j} - 2\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{i-1,j}) = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{f}_{i,j+1} - \mathbf{f}_{ij}). \quad (3.8)$$

Quando $j = 0$ (que corresponde a um tempo particular, ou tempo zero) na Eq. (3.8), todos os termos da equação são conhecidos, com exceção de \mathbf{f}_{i1} . Entretanto, a distribuição de temperatura inicial g fornece

$$g(x_i) = f(x_i, 0) = \mathbf{f}_{i0},$$

com o qual conhecemos o valor correto de f (e de \mathbf{f}) no nível temporal correspondente a $t = 0$. O valor de \mathbf{f}_{i1} pode, portanto, ser calculado a partir da Eq. (3.8). Para este fim, a equação Eq. (3.8) é escrita na forma

$$\mathbf{f}_{i,j+1} = s\mathbf{f}_{i-1,j} + (1 - 2s)\mathbf{f}_{ij} + s\mathbf{f}_{i+1,j}. \quad (3.9)$$

em que $s = \Delta t / \Delta x^2$. Usando a Eq. (3.9), a solução numérica pode ser alcançada passo por passo na direção t . Dado que a Eq. (3.9) oferece os **novos** valores $\mathbf{f}_{i,j+1}$ explicitamente em termos dos valores anteriores $\mathbf{f}_{i-1,j}$, \mathbf{f}_{ij} , $\mathbf{f}_{i+1,j}$, o método baseado nesta equação é chamado de **método explícito**. É importante enfatizar que mesmo o cálculo dos sucessivos \mathbf{f}_{ij} for feito com uma completa precisão, a solução numerica deverá diferir a partir da solução da equação diferencial parcial.

3.1.3 Análises de Estabilidade

Fazendo a mudança $\bar{i} = i + N$, em que, a partir de agora $0 \leq \bar{i} \leq \mathcal{N} + 1$, $\mathcal{N} = 2N - 1$, e $\mathbf{f}_{ij} \rightarrow \mathbf{f}_{\bar{i}j}$. A Eq. (3.9), pode ser escrita usando notação matricial. Seja o vetor de valores

no tempo $t = j\Delta t$ denotado por V_j

$$V_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1j} \\ \mathbf{f}_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\mathcal{N}j} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

desta forma a Eq. (3.9) pode ser escrita como

$$V_{j+1} = AV_j, \quad (3.11)$$

em que A é uma matriz $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1-2s & s & 0 & \cdots & 0 \\ s & 1-2s & s & \cdots & 0 \\ 0 & s & 1-2s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-2s \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Note-se que $\mathbf{f}_{0j} = \mathbf{f}_{\mathcal{N}+1,j} = 0$ devido a que $a(t) = b(t) = 0$, portanto, em qualquer tempo temos unicamente \mathcal{N} valores desconhecidos.

Vamos supor que em um certo passo (podemos assumir que seja o primeiro passo) é introduzido um erro numérico. Então, ao invés do vetor V_o , teremos um vetor que chamaremos de \tilde{V}_o . O método explícito deverá produzir então vetores $\tilde{V}_j = A^j \tilde{V}_o$, e o erro no j -ésimo passo será

$$V_j - \tilde{V}_j = A^j V_o - A^j \tilde{V}_o = A^j (V_o - \tilde{V}_o).$$

Para ter certeza que este erro irá desaparecer a medida que $j \rightarrow \infty$, se requer que $\rho(A) < 1$, em que $\rho(A)$ é o raio espectral da matriz A [54]. Dado que os autovalores de A são

$$\lambda_i = 1 - 2s(1 - \cos \theta_i), \quad \theta_i = \frac{i\pi}{\mathcal{N}+1}, \quad \text{e } (1 \leq i \leq \mathcal{N}), \quad (3.13)$$

para que $\rho(A)$ seja menor que 1, requeremos que

$$-1 < 1 - 2s(1 - \cos \theta_i) < 1.$$

Isso é verdade se e somente se $s < (1 - \cos \theta_i)^{-1}$, dado que s é positivo. A maior restrição sobre s acontece quando $\cos \theta_i = -1$, e dado que θ_i será muito próximo a π quando $i = \mathcal{N}$, então, devemos exigir $s \leq 1/2$.

Em resumo, para que o método explícito seja estável, é necessário assumir que $s = \Delta t / \Delta x^2 \leq 1/2$. Portanto, a forte restrição $\Delta t \leq \Delta x^2 / 2$ força este método a ser muito lento. Por exemplo, se $\Delta x = 0.01$, então o maior valor permitido de Δt é 5×10^{-5} . Se queremos calcular a solução para $0 \leq t \leq 10$, então o número de passos no tempo deve ser 2×10^5 , e o número de pontos rede deve ser mais de 20 milhões. Assim, a simplicidade do método explícito é acompanhada de uma ineficiência inaceitável.

3.2 Método Implícito para Equações Parabólicas

Continuamos com o estudo da equação diferencial de condução de calor

$$\begin{aligned} f_{xx} &= f_t & (t \geq 0, \quad -1 \leq x \leq 1) \\ f(x, 0) &= g(x) & (-1 \leq x \leq 1) \\ f(-1, t) &= f(1, t) = 0 & (t \geq 0) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Assim como na seção anterior as derivadas parciais serão substituídas pelas suas aproximações em diferenças finitas. A equação discretizada a ser considerada é

$$\frac{1}{\Delta x^2} [\mathbf{f}_{i+1,j} - 2\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{i-1,j}] = \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{f}_{ij} - \mathbf{f}_{i,j-1}]. \quad (3.15)$$

Esta equação parece diferir apenas superficialmente da Eq. (3.8), mas veremos que esta equação requer de um algoritmo diferente para sua solução. Observe que três dos termos da Eq. (3.15) se referem a \mathbf{f} no nível j do tempo e unicamente um termo se refere a \mathbf{f} no nível $(j-1)$. Se \mathbf{f} é conhecido nos pontos rede no nível $(j-1)$, então os valores no nível j podem ser calculados a partir da Eq. (3.15) resolvendo um sistema de equações lineares. Usando $s = \Delta t / \Delta x^2$ podemos escrever a Eq. (3.15) da forma,

$$-s\mathbf{f}_{i-1,j} + (1 + 2s)\mathbf{f}_{ij} - s\mathbf{f}_{i+1,j} = \mathbf{f}_{i,j-1}, \quad (-N + 1 \leq i \leq N - 1). \quad (3.16)$$

em que, igual que na seção anterior, definimos o vetor de valores V_j como

$$V_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1j} \\ \mathbf{f}_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\mathcal{N}j} \end{bmatrix},$$

então a Eq. (3.16) representa um sistema de \mathcal{N} equações lineares para determinar o vetor V_j supondo que conhecemos V_{j-1} . Este sistema de equações tem a forma

$$AV_j = V_{j-1}, \quad (3.17)$$

no qual A é a matriz $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2s & -s & 0 & \cdots & 0 \\ -s & 1+2s & -s & \cdots & 0 \\ 0 & -s & 1+2s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2s \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Formalmente, a solução da Eq. (3.17) é dado por

$$V_j = A^{-1}V_{j-1},$$

e a partir deste, obtemos

$$V_j = A^{-1}(A^{-1}V_{j-2}) = A^{-1}(A^{-1}(A^{-1}V_{j-3})) = \cdots = A^{-j}V_o,$$

em que o vetor V_o deve ser conhecido já que contém valores iniciais $f(i\Delta h, 0)$. Pelo mesmo motivo da seção anterior, devemos exigir que $\rho(A^{-1}) < 1$ para que o método seja estável.

Logo, usando a matriz B definido como

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

podemos estabelecer

$$A = I + sB,$$

em que I é a matriz identidade. Pode-se mostrar que os autovalores de A são dados por

$$\lambda_i = 1 + 2s(1 - \cos \theta_i), \quad \theta_i = \frac{i\pi}{N+1}, \quad e \quad (1 \leq i \leq N). \quad (3.20)$$

Dado que os autovalores satisfazem $\lambda_i > 1$, os valores próprios de A^{-1} se encontram no intervalo $[0, 1]$, e podemos concluir que o método proposto é estável para todos os valores de Δx e Δt . Este método é às vezes chamado de **método completamente implícito**.

Note que o sistema (3.17) tem uma matriz A de coeficientes do tipo tridiagonal. A solução de sistemas tridiagonais pode ser alcançada através de diferentes métodos numéricos. Na discretização da Eq. (3.14), encontramos que a matriz de coeficientes A é diagonalmente dominante, portanto, para este caso, um método fácil de implementar é o método de **Eliminação Gaussiana com pivoteamento** modificado para o caso tridiagonal [55].

É importante ressaltar que não toda evolução numérica (3.17) representa uma evolução física. Então, é importante determinar qual é o tamanho ideal do passo temporal de Δt para que forneça uma evolução física aceitável.

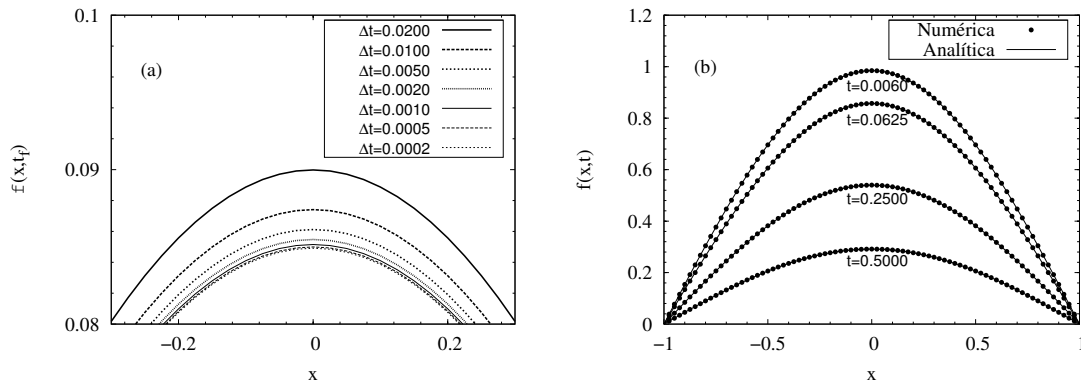


Figura 3.1: Em (a) mostramos os resultados numéricos de $f(x, t_f)$ para diferentes valores de Δt , vemos que aproximadamente para $\Delta t \leq 0.0005$ o sistema atinge a solução estacionária, e em (b) apresentamos a comparação dos resultados numéricos com os resultados analíticos da Equação de Difusão 1D em diferentes instantes de tempo, as linhas contínuas representam as soluções analíticas, vemos que ambos resultados coincidem. Foi considerado $t_f = 1$ e $N = 40$.

Na Fig.3.1(a) observamos os valores de $f(x, t_f)$ para diferentes valores de Δt , em que t_f é o tempo final da simulação. Vemos que para $\Delta t \leq 0.0005$, todas as curvas

coincidem, isto indica que atingimos a evolução temporal em forma satisfatória. Neste caso usamos $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ e um número mais alto não fornece uma evolução tão precisa quanto a calculada. A discretização espacial é feita considerando $\Delta x = 1/N$, em que $2N$ é o número de divisões espaciais (neste caso $N = 40$).

Na Fig.3.1(b) mostramos soluções numéricas da equação de difusão de calor e as comparamos com o resultado analítico para diferentes instantes de tempo, $t_{12} = 0.0060$, $t_{125} = 0.0625$, $t_{500} = 0.2500$, e $t_{1000} = 0.5000$. As bolinhas pretas representam os resultados numéricos e as linhas contínuas indicam os dados analíticos. Ambos resultados coincidem e o nosso código funciona satisfatoriamente.

3.3 Equação de Difusão de Calor 2D

Seja a equação de difusão de calor 2-dimensional (2D) em coordenadas cartesianas (x, y)

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} &= f_t & (t \geq 0, \quad -1 \leq x, y \leq 1) \\ f(x, y, 0) &= g(x, y) & (-1 \leq x, y \leq 1) \\ f(-1, y, t) = f(1, y, t) &= 0 & (t \geq 0, \quad -1 \leq y \leq 1) \\ f(x, -1, t) = f(x, 1, t) &= 0 & (t \geq 0, \quad -1 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

A solução analítica desta equação pode ser encontrada usando o método de separação de variáveis. Fazendo $f(x, y, t) = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y)\mathcal{T}(t)$ e substituindo em (3.21) vemos que

$$\frac{\mathcal{X}''(x)}{\mathcal{X}(x)} + \frac{\mathcal{Y}''(y)}{\mathcal{Y}(y)} = \frac{\mathcal{T}'(t)}{\mathcal{T}(t)}, \quad (3.22)$$

da qual obtemos a solução particular

$$f(x, y, t) = e^{-(\alpha+\beta)t} \cos[\sqrt{\alpha}x] \cos[\sqrt{\beta}y], \quad (3.23)$$

em que α e β são constantes positivas. As condições de contorno do sistema (3.21) exigem que os valores destas constantes devem ser iguais a um número inteiro de vezes $\pi^2/4$. Por simplicidade fazemos $\alpha = \beta = \pi^2/4$, e a solução fica

$$f(x, y, t) = e^{-\pi^2 t/2} \cos\left[\frac{\pi x}{2}\right] \cos\left[\frac{\pi y}{2}\right]. \quad (3.24)$$

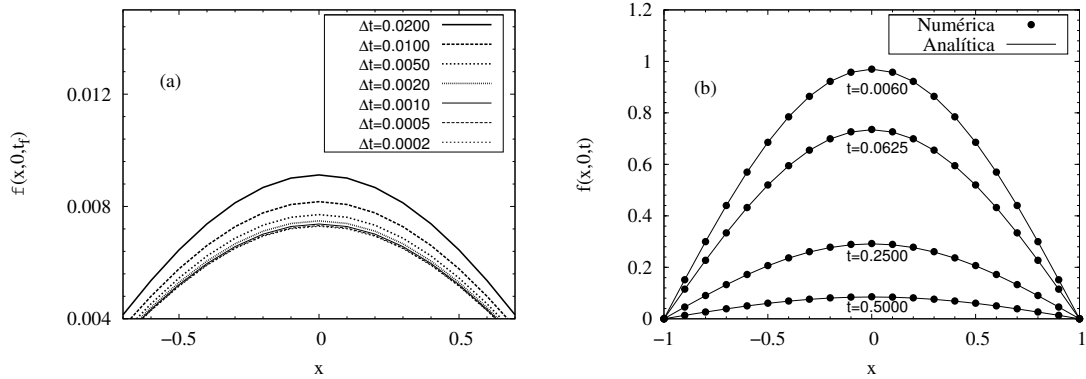


Figura 3.2: Em (a) mostramos os valores numéricos de $f(x, 0, t_f)$ para diferentes valores de Δt , vemos que para $\Delta t \leq 0.0005$ o sistema atinge a solução estacionária. E em (b) apresentamos a comparação dos resultados numéricos com os resultados analíticos para o caso da Equação de Difusão de calor 2D em diferentes instantes de tempo. Observamos que ambos resultados coincidem. Consideramos $t_f = 1$, $N = M = 10$.

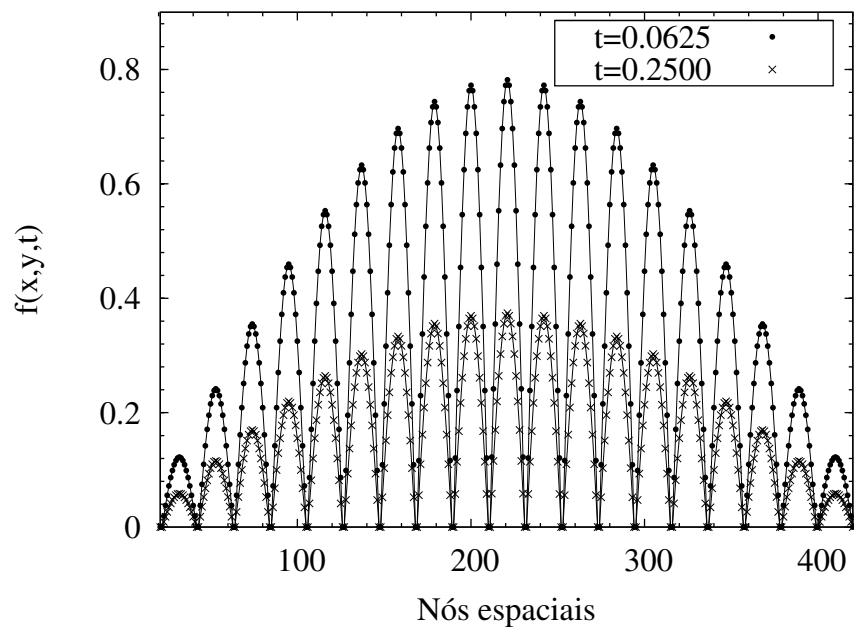


Figura 3.3: Comparação dos resultados numéricos com os resultados analíticos para o caso da Equação de Difusão de calor 2D em diferentes instantes de tempo, a diferença da Fig.3.2(b) neste caso apresentamos os valores de f em todo o espaço 2D representados pelos Nós espaciais. As linhas contínuas representam os dados analíticos.

Na Fig.3.2(a) apresentamos os valores numéricos de $f(x, 0, t_f)$ para diferentes valores de Δt . Note que para $\Delta t \leq 0.0005$ todas as curvas coincidem, isto indica que atingimos a evolução temporal em forma satisfatória. A discretização espacial é feita considerando $\Delta x = 1/N$ e $\Delta y = 1/M$, em que $2N$ e $2M$ são os número de divisões em x e em y respecti-

vamente. Neste caso $N = M = 10$.

Na Fig.3.2(b) comparamos os dados numéricos com os dados analíticos da solução para diferentes instantes de tempo, $t_{12} = 0.0060$, $t_{125} = 0.0625$, $t_{500} = 0.2500$, e $t_{1000} = 0.5000$. As bolinhas pretas representam os dados numéricos e as linhas contínuas representam os dados analíticos, vemos que ambos resultados coincidem.

Representando os pontos rede de nosso domínio 2D por uma única coordenada e não por duas coordenadas, é possível apresentar os valores de \mathbf{f} em todos o pontos da rede de uma forma mais clara e didática, na Fig.3.3 as linhas contínuas representam os valores analíticos e os outros símbolos representam os valores numéricas, apresenta-se para dois diferentes instantes de tempo. Observamos que ambos resultados coincidem.

Capítulo 4

Resultados e Discussão

Na continuação, resolvemos a equação de FP para o anel (Eq. (2.35)) usando o método numérico apresentado no capítulo anterior chamado método de Diferenças Finitas. Consideramos que as partículas campo estão em equilíbrio termodinâmico, e que em consequência obedecem uma função de distribuição Gaussiana.

Nós usamos o método de diferenças finitas, introduzindo um esquema implícito o qual requiere a implementação de um método de Gauss modificado, com o objetivo de manipular a matriz 5-diagonal resultante (ver Apêndice B). Neste esquema, usamos a condição de contorno de tipo Dirichlet e verificamos a conservação da massa total (nós assumimos que não existe escape de partículas).

Nós focamos no comportamento da variação da densidade superficial da massa, definido como

$$\Delta\Sigma = \Sigma - \Sigma_o, \quad (4.1)$$

$$\Sigma(\varphi, t) = \int f(\varphi, v_\varphi, t) dv_\varphi, \quad (4.2)$$

em que Σ_o e Σ são a densidade superficial de massa em um tempo inicial e final t , respectivamente.

4.1 Estabilidade do Anel

Antes de resolver a equação (2.41), considerando todos os membros do sistema, nós resolveremos esta equação para o caso de um corpo puntiforme central e um anel fino, a

qual sofre a ação de uma pequena perturbação de curta-duração. A razão para fazer isto é, por um lado, testar a estabilidade de nosso esquema de integração e, por outro lado, estudar a resposta do sistema a uma força externa de curta-duração (por exemplo, devido a um encontro isolado com um pequeno corpo celeste), isto é resolvido no Apêndice C.

Outra forma de analisar a estabilidade de nosso esquema de integração é considerar uma função de distribuição inicial espacialmente não homogênea. Se durante a evolução a inhomogeneidade espacial se atenua, então, nosso esquema de integração é estável, do contrário é instável. Portanto, consideremos a seguinte função de distribuição inicial para o anel

$$f(\varphi, v_\varphi, 0) \propto (1 + \alpha e^{-\frac{\varphi^2}{2\varsigma^2}} \sin[\kappa\varphi]), \quad (4.3)$$

em que α , ς , e κ são constantes positivas e dimensionais. Consideramos o sistema físico formado unicamente pelo corpo puntiforme central e o anel. Na Fig.4.1(a) apresentamos o perfil inicial da variação da densidade de massa, depois para $\tau = 200\Delta\tau$ (Fig.4.1(b)) observamos uma ligeira atenuação de $\Delta\Sigma$, para os tempos $\tau = 1000\Delta\tau$ e $\tau = 4000\Delta\tau$ (figuras 4.1(c) e 4.1(d)) a atenuação é mais notável. Para uma evolução com duração maior que $10000\Delta\tau$ obtemos $\Delta\Sigma \approx 0$, portanto nosso esquema de integração é estável.

4.2 Influência de um *shepherd* sobre a evolução de um Anel fino

Agora que já verificamos que nosso modelo pode representar um anel fino estável em processo de relaxamento, o próximo passo é considerar a influência de um corpo puntiforme adicional que modela um satélite *shepherd*. Assim como mencionamos no capítulo 2, consideramos que este *shepherd* descreve um caminho circular concêntrico perto ao anel, e consideramos os casos em que o *shepherd* se desloca na mesma direção e na direção oposta que as partículas do anel. Em algumas simulações consideramos parâmetros semelhantes aos que caracterizam o chamado anel F de Saturno.

Em principio consideramos o caso em que um *shepherd* aparece repentinamente

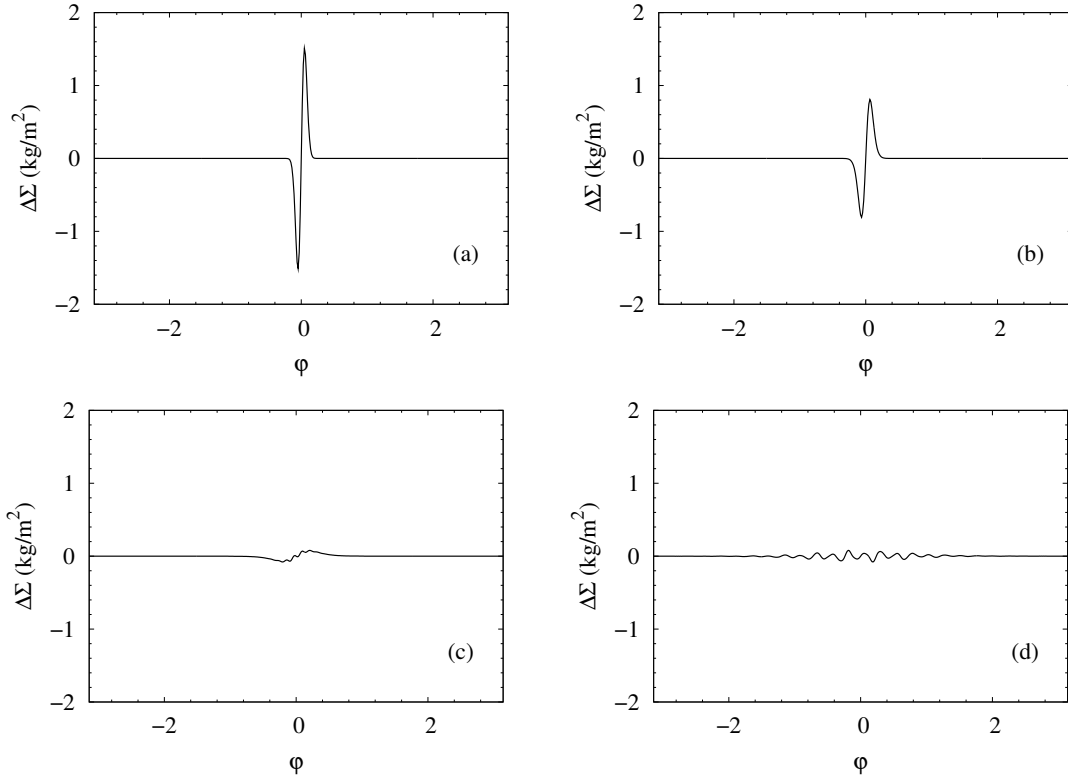


Figura 4.1: Consideramos $M_p = 568.46 \times 10^{24}$ kg, $\Sigma_o = 500$ kg/m^2 , $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$, e $t_o = 2 \times 10^6$ s. E os seguintes valores para as constantes $\alpha = 0.1$, $\zeta = 0.05$, e $\kappa = 1$. Onde para (a) $\tau = 0$, (b) $\tau = 200\Delta\tau$, (c) $\tau = 1000\Delta\tau$ e (d) $\tau = 4000\Delta\tau$.

na vizinhança do anel e logo começa circular com velocidade angular constante dada pela lei de Kepler. Na Fig.4.2(a) apresentamos a variação que sofre a densidade de massa no momento preciso que o *shepherd* aparece repentinamente, observamos que este puxa as partículas do anel, deixando partes despovoadas de partículas, criando duas ranhuras e um pico sobre o anel, a seta indica a direção de movimento do *shepherd* relativo ao anel, a bolinha preta representa a localização do *shepherd*, neste caso consideramos que o *shepherd* está localizado na parte exterior do anel a uma distância ε desta. Na Fig.4.2(b) apresenta-se o perfil de $\Delta\Sigma$ para um tempo ligeiramente posterior, o *shepherd* deixa para trás a montanha e se localiza bem na cima da ranhura do lado esquerdo, este é notado mais claramente em um tempo posterior (4.2(c)), a 4.2(d) mostra que a montanha e a ranhura do lado direito são atenuados ao passar do tempo. Nós acreditamos que a montanha e a ranhura do lado direito é causado pelo aparecimento súbito do *shepherd*, e chamamos estas como oscilações

indesejadas devido a que para uma evolução com tempo maior, estas oscilações irá interferir no perfil de $\Delta\Sigma$ na vizinhança do *shepherd* (ranhura que acompanha o *shepherd*). Estas oscilações indesejadas serão evitadas aproximando o *shepherd* devagar, de modo de não perturbar consideravelmente o anel.

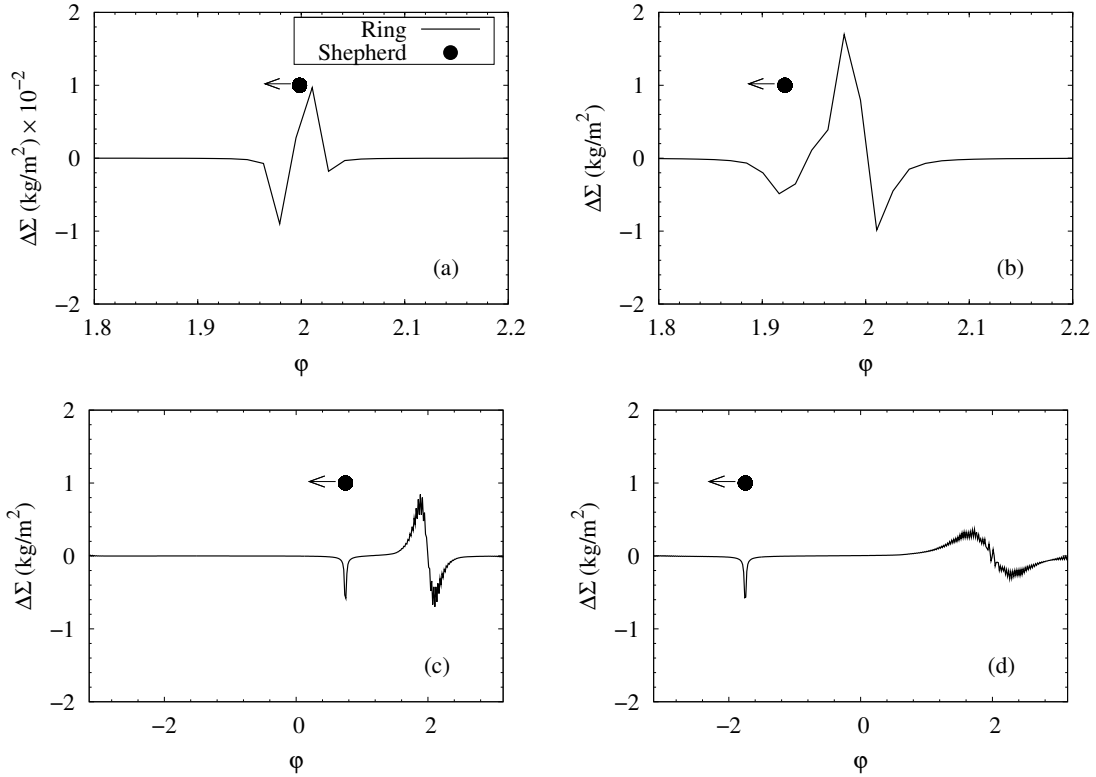


Figura 4.2: Consideramos $M_p = 568.46 \times 10^{24}$ kg, $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, $m_s = 14 \times 10^{16}$ kg, $\Sigma_o = 500$ kg/m², $\tilde{\sigma} = 0.25$, e $\varepsilon = 5 \times 10^5$ m. Onde para (a) $\tau = \Delta\tau$, (b) $\tau = 50\Delta\tau$, (c) $\tau = 800\Delta\tau$, e (d) $\tau = 2400\Delta\tau$.

As figuras 4.2 nós mostra que a máxima variação de Σ é gerada na vizinhança do *shepherd*, onde é negativa. Este resultado é inesperado, devido a que a força gravitacional é atraente e o resultado esperado é que a variação de Σ na vizinhança do *shepherd* seja positiva. Este gera dúvidas na confiabilidade de nossos resultados, para sair desta dúvida fazemos outra simulação na qual o *shepherd* é mantido fixo em relação ao anel, o resultado é apresentado na Fig.4.3(a), agora sim encontramos o que nós esperávamos, a variação de Σ na vizinhança do *shepherd* é positiva. Agora consideremos o caso em que o *shepherd* esteja em movimento e de repente é detido, a Fig.4.3(b) mostra novamente que a variação de Σ

na vizinhança do *shepherd* é positiva. Portanto, se estes últimos resultados estão corretos, então, é também esperado que seja correto o resultado de que a variação de Σ seja negativa na vizinhança do *shepherd* quando o *shepherd* está em movimento relativo em relação ao anel.

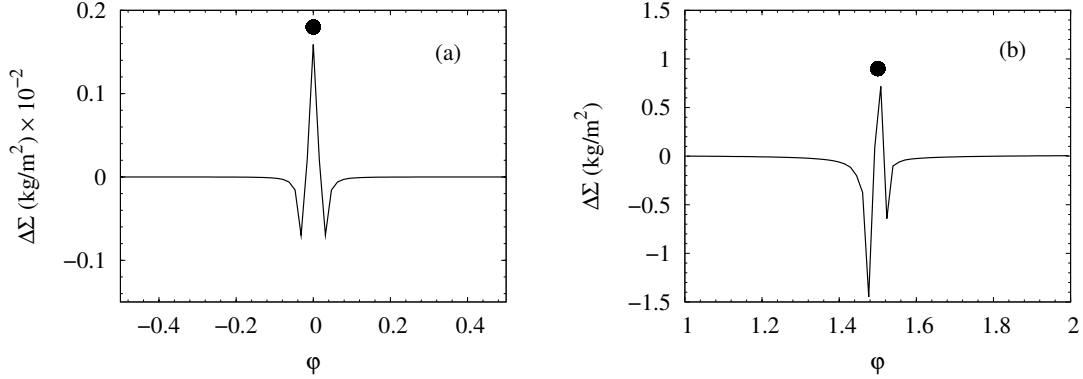


Figura 4.3: Variação da densidade superficial de massa do anel, em todos os casos $M_p = 568.46 \times 10^{24}$ kg, $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, $\Sigma_o = 500$ kg/m², $\varepsilon = 5 \times 10^5$ m, $m_s = 14 \times 10^{16}$ kg, e $\tilde{\sigma} = 0.5$. Em (a) mostramos quando um *shepherd* aparece de repente e mantido fixo na posição $\varphi = 0$, e em (b) mostramos quando um *shepherd* que está circulando é detido de repente em $\varphi \approx 1.5$.

4.3 Influência de dois *shepherds* sobre a evolução de um Anel fino

Nesta seção estudamos a evolução de um anel fino arredor de um corpo puntiforme central na presença de dois satélites *shepherds*, consideramos diferentes configurações para os *shepherds*, ambos interiores, ambos exteriores, equidistantes, e não equidistantes ao anel. Em todos os casos os *shepherds* se deslocam na mesma direção que o anel. Novamente em algumas simulações consideramos parâmetros semelhantes aos que caracterizam o chamado anel F de Saturno. Os resultados são apresentados no Apêndice C.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho modelamos por primeira vez a distribuição de matéria em um sistema estelar em forma de anel, via equação de Fokker-Planck. Estudamos a influência dos satélites *shepherds* e um corpo puntiforme central sobre a evolução da função de distribuição de um anel fino. Em algumas simulações foram considerados parâmetros semelhantes aos que caracterizam o chamado anel F de Saturno.

Derivamos expressões para os coeficientes de difusão considerando encontros unicamente em um plano 2-dimensional, estes coeficientes são semelhantes aos coeficientes de difusão derivados por Rosenbluth [34], com a diferença que nossos coeficientes de difusão dependem unicamente de um potencial $h(\mathbf{v})$ e os coeficientes de Rosenbluth dependem de dois coeficientes $h(\mathbf{v})$ e $g(\mathbf{v})$.

Nós estudamos a evolução temporal da densidade de um anel fino arredor de um corpo puntiforme central com e sem satélites *shepherds*, tomando em consideração o papel dos encontros binários. A solução numérica da equação de Fokker-Planck mostra que, (i) o anel é uma configuração estável na ausência de *shepherds*; (ii) o anel é uma configuração estável na presença de um único *shepherd* e na presença de dois *shepherds*; (iii) como esperado, a evolução temporal do perfil da variação da densidade de massa correspondente a ambas as situações antes mencionadas são muito diferentes. Quando introduzimos uma perturbação de curto tempo, a variação da densidade atinge um máximo rapidamente mas depois diminui até zero. Por outro lado, quando levamos em conta a interação de longo

tempo devido aos *shepherds*, a variação da densidade cresce lentamente, atingindo um valor máximo correspondente a um estado estável.

Observamos que em todos os casos, a variação da densidade de massa tende a crescer à medida que $\tilde{\sigma}$ aumenta. Para $\tilde{\sigma} \ll 1$, as oscilações não desejadas crescem muito rapidamente e não são atenuadas por um tempo muito grande, portanto requer um tempo de simulação muito grande, assim, não é possível comprovar a estabilidade para este caso. E para $\tilde{\sigma} \gg 1$, as oscilações não desejadas se difundem rapidamente por todo o anel interferindo com as nossas condições de contorno, assim a simulação deve ser interrompida, portanto, não é possível garantir a estabilidade do anel.

Em todos os casos é observado uma variação máxima da densidade perto da localização do *shepherd*, isto se mantém também para diferentes configurações do *shepherd* e dos *shepherds*. Para a nossa surpresa, essa variação é negativa, isto por um lado pode ser um resultado interessante mas por outro lado pode gerar dúvidas sobre a confiabilidade de nossos resultados, não obstante este resultado é discutido no Apêndice C, onde justificamos este curioso resultado.

Para o caso de um *shepherd* que circula em sentido contrário que as partículas do anel, a influência deste sobre o anel é quase insignificante, isto é porque uma grande velocidade relativa entre o *shepherd* e o anel não pode dar o tempo suficiente para que o *shepherd* perturbe significativamente o anel.

Como era esperado, a influência sobre a evolução da densidade de massa do anel é maior quando o satélite *shepherd* está mais próximo do anel. Para o caso do anel em presença de dois *shepherds* o perfil da densidade de massa antes do cruzamento é semelhante ao perfil após o cruzamento, e isto se mantém para diferentes configurações dos satélites *shepherds*.

Perspectivas futuras

Como algumas das perspectivas do trabalho podemos dizer que, a equação de Fokker-Planck versão 1-dimensional pode ser usado para modelar a distribuição de matéria em um anel, mas neste caso em presença de um corpo puntiforme central, *shepherds* e de outros anéis. Por outro lado podemos considerar que o corpo maciço central (planeta) não seja considerado mais como um corpo puntiforme mas sim como um corpo 3D em rotação, isto nos permitirá obter resultados mais realísticos.

Bibliografia

- [1] J. Binney, and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton (1987).
- [2] L.E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, University of Texas Press (1980).
- [3] S. Chandrasekhar, *Revs. Modern Phys.*, **15**, 1 (1943).
- [4] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons (1987).
- [5] M. Ujevic, and P.S. Letelier, *Journal of Computational Physics*, **215**, 485 (2006).
- [6] M. Hestenes, and E. Stiefel, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **49**, 409 (1952).
- [7] C.F. Gerald, and P.O. Wheatley, *Applied Numerical Analysis*, Addison-Wesley (1994).
- [8] R.B. Larson, *MNRAS*, **147**, 323 (1970).
- [9] R.B. Larson, *MNRAS*, **150**, 93 (1970).
- [10] D. Lynden-Bell, and P.P. Eggleton, *MNRAS*, **191**, 483 (1980).
- [11] M. Hénon, *Astrophys. Space Sci.*, **13**, 284 (1971).
- [12] M. Hénon, *Astrophys. Space Sci.*, **14**, 151 (1971).
- [13] H.L. Stone, *SIAM J. Num. Anal.*, **5**, 530 (1968).
- [14] M. Ujevic, and P.S. Letelier, *Astronomy & Astrophysics*, **442**, 785 (2005).
- [15] G.E. Scheneider, and M. Zedan, *Num. Heat Trans.*, **4**, 1 (1981).
- [16] H.J. Leister, and M. Peric, *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, **4**, 159 (1994).
- [17] L.W. Esposito, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **38**, 383 (2010).
- [18] P.S. Laplace, *Celestial Mechanics*, Vol. 2, Ch. 6, New York (1802).
- [19] J.C. Maxwell, In *Collected Papers*, ed. W.D. Niven 1:288, Cambridge (1890).
- [20] H. Jeffreys, *MNRAS*, **107**, 263 (1947).

-
- [21] E.A. Roche, *Mém. Sect. Sci.*, **1**, 243 (1847).
- [22] H. Jeffreys, *MNRAS*, **107**, 260 (1947).
- [23] P. Goldreich, and S. Tremaine, *Nature*, **277**, 97 (1979).
- [24] B.A. Smith et. al., *Science*, **212**, 163 (1981)
- [25] B.A. Smith et. al., *Science*, **215**, 504 (1982)
- [26] P. Goldreich, and S. Tremaine, *Ann. Rev. Astron. Astrophys*, **20**, 249 (1982).
- [27] C.D. Murray et. al., *Nature*, **453**, 739 (2008)
- [28] L.D. Landau, and E.M. Lifshitz, *Mechanics*, URSS Academy of Sciences (1993).
- [29] L.D. Landau, and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (1987).
- [30] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons (1998).
- [31] W. Greiner, *Classical Electrodynamics*, Springer (1996).
- [32] G.B. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (2001).
- [33] J. Goodman, *ApJ*, **270**, 700, (1983), (erratum in *ApJ*, **278**, 893).
- [34] M.N. Rosenbluth, W.M. MacDonald, and D.L. Judd, *The Physical Review*, **107**, 1 (1957).
- [35] J. Ramos, J.F. Pedraza, and P.S. Letelier, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **414**, 3105 (2011)
- [36] P.S. Letelier, and S.R. Oliveira, *J. Math. Phys.*, **28**, 165 (1987)
- [37] P.S. Letelier, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **381**, 1031 (2007)
- [38] D. Vogt, and P.S. Letelier, *Physical Review D*, **68**, 084010 (2003)
- [39] P.Y. Longaretti, and C. Froeschlé, *Planetary Ring Dynamics*, Gif-sur-Yvette (1992).
- [40] B. Sicardy, and A. Souchay, *Lecture Notes in Physics*, **Vol. 682**, Springer-Verlag (2006).
- [41] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley (2000).
- [42] C.C. Porco et. al., *Sci*, **307**, 1226 (2005)
- [43] J.N. Cuzzi et. al., *Sci*, **327**, 1470 (2010)
- [44] G.H. Jones et. al., *Sci*, **319**, 1380 (2008)

-
- [45] K.A. Holsapple, *Icarus*, **154**, 432 (2001)
- [46] L. Euler, *Institutiones Calculi Integralis*, St. Petersburg (1768).
- [47] C.Z. Runge, *Math. Phys.*, **56**, 225 (1908).
- [48] L.F. Richardson, *Trans. R. Soc.*, **A210**, 307 (1910).
- [49] W.F. Ames, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press (1977).
- [50] H. Liebmann, *Sber. bayer. Akad. Wiss. Münch.*, **3**, 385 (1918).
- [51] J. LeRoux, *J. Math. pures appl.*, **10**, 189 (1914).
- [52] H.B. Phillips, and N. Wiener *J. Math. Phys.*, **2**, 105 (1923).
- [53] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy *Math. Ann.*, **100**, 32 (1928).
- [54] D. Kincaid and W. Cheney, *Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing*, Pacific Grove (1991).
- [55] M.C. Cunha, *Métodos Numéricos*, Editora Unicamp (2000).

Apêndice A

Determinação dos Coeficientes de Difusão

Consideremos uma partícula teste de massa m e velocidade \mathbf{v} deslocando-se por um meio homogêneo formado por partículas de velocidade \mathbf{v}_a e massa m_a chamadas partículas campo, com uma FD dada por $f_a(\mathbf{v}_a)$ de normalização $\int d^3\mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) = n$, em que n é a densidade do numero de partículas campo. A partícula teste ao atravessar o mar homogêneo de partículas campo sofrerá encontros gravitacionais com as partículas campo, isto é um problema clássico de dois corpos que interagem gravitacionalmente. Mas sabemos que, todo problema de dois corpos pode ser reduzido simplesmente a um problema de um só corpo de massa reduzida m_r , em presença de um campo central. Este problema é apresentado esquematicamente na Fig. A.1. Os Coeficientes de Difusão são

$$D[\Delta v^i] = \sum_a \int d^3\mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) \{\Delta v^i\}, \quad (\text{A.1})$$

$$D[\Delta v^i \Delta v^j] = \sum_a \int d^3\mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) \{\Delta v^i \Delta v^j\}, \quad (\text{A.2})$$

em que a somatória é feita para diferentes tipos de partículas campo. $\{\Delta v^i\}$ e $\{\Delta v^i \Delta v^j\}$ são as médias nos encontros con diferentes parâmetros de impacto e são definidos como

$$\{\Delta v^i\} = \int d\Omega \sigma(u, \Omega) u \Delta v^i, \quad (\text{A.3})$$

$$\{\Delta v^i \Delta v^j\} = \int d\Omega \sigma(u, \Omega) u \Delta v^i \Delta v^j, \quad (\text{A.4})$$

em que $u = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a|$ é o modulo da velocidade relativa, $d\Omega = \sin\theta d\phi d\theta$ é o elemento de ângulo sólido, θ é o ângulo de espalhamento, ϕ é o ângulo que faz a projeção da velocidade

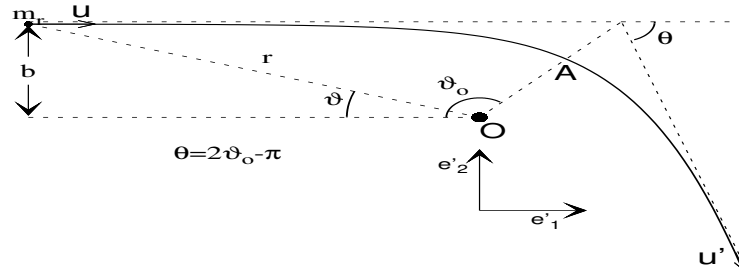


Figura A.1: Esquemática do encontro gravitacional de uma partícula teste de massa m e a partícula campo de massa m_a com um parâmetro de impacto b , em que u é o módulo da velocidade relativa das partículas que participam do encontro. O ponto A é a aproximação máxima entre as duas partículas com uma separação denotado por r_{min} .

relativa depois de ser espalhada no plano perpendicular a \mathbf{u} , e $\sigma(u, \Omega)$ é a seção transversal de espalhamento que é determinada a partir da **formula de Rutherford** [28]

$$\sigma(u, \Omega) = \frac{\alpha^2}{4m_r^2 u^4} \sin^{-4}(\theta/2), \quad (\text{A.5})$$

em que $m_r = mm_a/(m+m_a)$ é a massa reduzida das partículas teste e campo, e $\alpha = -Gmm_a$.

Note que σ é indiferente da interação ser atrativa ou repulsiva.

Como mencionamos anteriormente, o encontro gravitacional entre duas partículas pode ser reduzido a um problema de um único corpo de massa m_r no potencial gravitacional $U(r) = \alpha/r$, em que r é a separação entre as duas partículas que participam do encontro. A equação da órbita para este encontro em coordenadas polares (r, ϑ) é dada por

$$\vartheta = \int \frac{Ldr/r^2}{\sqrt{2m_r(E - \alpha/r) - L^2/r^2}} + cte, \quad (\text{A.6})$$

em que L é a magnitude do momentum angular da partícula reduzida, e E sua energia total. Neste caso, estas quantidades são constantes de movimento devido a que existe simetria esférica. A órbita de uma partícula em um campo gravitacional é simétrica à linha OA da Fig.A.1 traçada a partir do centro gravitacional ao ponto de máxima aproximação entre as partículas. Portanto, as duas assíntotas da órbita fazem o mesmo ângulo ϑ_o com a linha OA . O ângulo θ de espalhamento é determinado a partir da Fig.A.1 e encontramos que é

$\theta = 2\vartheta_o - \pi$, em que, ϑ_o é determinado a partir da equação de órbita

$$\vartheta_o = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{Ldr/r^2}{\sqrt{2m_r(E - \alpha/r) - L^2/r^2}}. \quad (\text{A.7})$$

Para um movimento com órbita não fechada, tal como é considerado aqui, é conveniente usar em lugar das constantes E e L , a velocidade u da partícula no infinito e o parâmetro de impacto b . A energia e o momentum angular em termos destas novas quantidades são dadas como $E = \frac{1}{2}m_r u^2$ e $L = m_r b u$, e a Eq. (A.7) se reduz a

$$\vartheta_o = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{bdr/r^2}{\sqrt{1 - b^2/r^2 - 2\alpha/m_r u^2 r}},$$

e fazendo a integração e logo a inversão obtemos a expressão para b

$$\begin{aligned} b &= \frac{|\alpha|}{m_r u^2} \tan \vartheta_o, \\ b^2 &= \frac{\alpha^2}{m_r^2 u^4} \tan^2 \vartheta_o, \\ b^2 &= \frac{\alpha^2}{m_r^2 u^4} \cot^2(\theta/2), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

em que foram consideradas $\tan^2 \vartheta_o = \frac{\sin^2(\theta/2 + \pi/2)}{\cos^2(\theta/2 + \pi/2)}$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

Em aplicações físicas usualmente não nos preocupamos com o desvio de uma única partícula, mas sim do espalhamento de um feixe de partículas idênticas incidentes com velocidade uniforme \mathbf{u} sobre um centro espalhador. Seja dN o número de partículas espalhadas por unidade de tempo em ângulos entre θ e $\theta + d\theta$. Dado que este número não é o adequado para descrever o processo de espalhamento, já que é proporcional à densidade do feixe incidente, então, é melhor usar a razão

$$d\sigma = \frac{dN}{\eta}, \quad (\text{A.9})$$

em que η é o numero de partículas passando por unidade de tempo através de uma unidade de área da seção transversal do feixe. Esta razão tem dimensões de área e é chamada seção diferencial de choque.

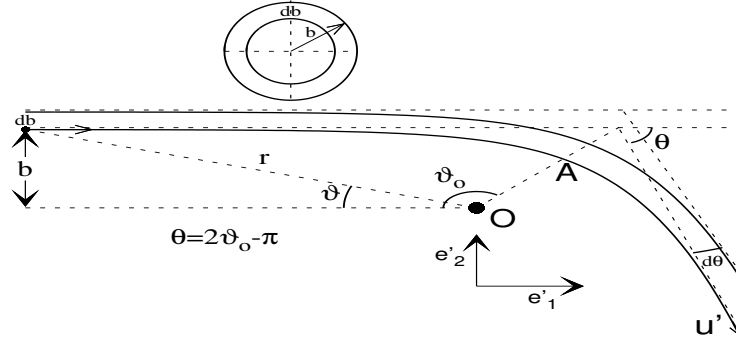


Figura A.2: Espalhamento de um feixe de partículas idênticas que incidem com velocidade uniforme \mathbf{u} sobre um centro espalhador. Partículas com parâmetros de impacto entre b e $b + db$ são espalhadas em ângulos entre θ e $\theta + d\theta$.

Unicamente partículas com parâmetros de impacto entre b e $b + db$ serão espalhadas em ângulos entre θ e $\theta + d\theta$. O número destas partículas é igual ao produto de η e a área entre as circunferências de raio b e $b + db$, é dizer $dN = 2\pi\eta b db$. Daqui temos que

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b db, \\ d\sigma &= 2\pi b db = 2\pi b(\theta) \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right| d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Considerando $d\theta = d\Omega/(2\pi \sin \theta)$, e substituindo na Eq. (A.10), obtemos

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right| d\Omega, \\ d\sigma &= \frac{\alpha^2}{4m_r^2 u^4} \sin^{-4}(\theta/2) d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

em que foi usado o resultado da derivada da Eq. (A.8) sobre θ

$$b \frac{db}{d\theta} = -\frac{\alpha^2 \cos(\theta/2)}{2m_r^2 u^4 \sin^3(\theta/2)}.$$

Finalmente, a expressão para a seção transversal de espalhamento é dada por

$$\sigma(u, \Omega) = \frac{\alpha^2}{4m_r^2 u^4} \sin^{-4}(\theta/2).$$

Voltemos agora analisar a cinemática de um encontro entre uma partícula teste e uma partícula campo com velocidade relativa, $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_a$, cuja mudança devido ao encontro

é definida como $\Delta \mathbf{u}$. A relação entre \mathbf{v} , a velocidade \mathbf{V} do centro de massa e a velocidade relativa \mathbf{u} do sistema formado por as duas partículas é

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \frac{m_a}{m + m_a} \mathbf{u}.$$

Ou seja, a mudança da i -ésima componente de \mathbf{v} causado pelo encontro é

$$\Delta v^i = \frac{m_a}{m + m_a} \Delta u^i, \quad (\text{A.12})$$

já que $\Delta V^i = 0$ na ausência de campo externo. É conveniente introduzir um novo referencial inercial com vetores unitários (\mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 , e \mathbf{e}'_3), cujas relações com o antigo referencial inercial (\hat{e}_1 , \hat{e}_2 , e \hat{e}_3) é dado por

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{u}}{u}, \quad \mathbf{e}'_2 = \hat{e}_3 \times \mathbf{e}'_1, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2. \quad (\text{A.13})$$

Neste novo referencial, a velocidade relativa tem novas componentes, as quais chamamos u_L^i . Logo, a mudança das componentes u_L^i , como conseqüência do encontro, é facilmente calculada porque neste novo referencial o vetor velocidade relativa \mathbf{u} simplesmente experimenta uma rotação de ângulo θ (ver Fig.A.3). Portanto

$$\begin{aligned} \Delta u_L^1 &= -2u \sin^2(\theta/2), \\ \Delta u_L^2 &= 2u \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(\phi), \\ \Delta u_L^3 &= 2u \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \sin(\phi). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

As mudanças em u_L^j dadas pelas expressões (A.14), implicam também mudanças nas coordenadas u^i , em que a relação entre Δu^i e Δu_L^j é dada por

$$\Delta u^i = \sum_{j=1}^3 (\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j) \Delta u_L^j, \quad (\text{A.15})$$

$$\Delta u^i \Delta u^j = \sum_{k,l=1}^3 (\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k) (\hat{e}_j \cdot \mathbf{e}'_l) \Delta u_L^k \Delta u_L^l. \quad (\text{A.16})$$

A mudança média para diferentes ângulos de espalhamento de Δu_L^j e $\Delta u_L^k \Delta u_L^l$ por unidade

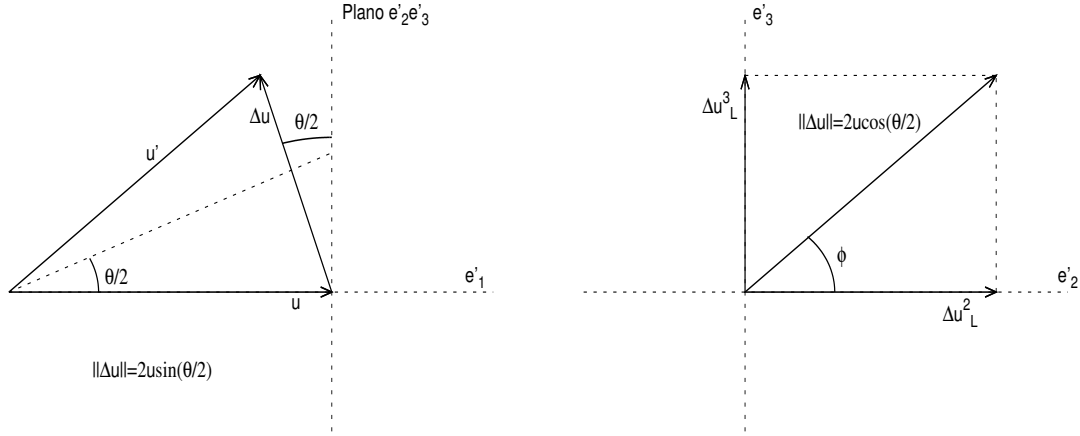


Figura A.3: Mudança da velocidade relativa \mathbf{u} no novo referencial como consequência de um encontro, isto é simplesmente uma rotação do vetor \mathbf{u} em um ângulo θ . O diagrama da direita mostra a projeção de $\Delta\mathbf{u}$ sobre um plano perpendicular à direção de \mathbf{u} .

do tempo, conservando \mathbf{v}_a fixo, é definida como

$$\{\Delta u_L^j\} = \int d\Omega \sigma u \Delta u_L^j, \quad (\text{A.17})$$

$$\{\Delta u_L^k \Delta u_L^l\} = \int d\Omega \sigma u \Delta u_L^k \Delta u_L^l. \quad (\text{A.18})$$

Os valores de $\{\Delta u_L^j\}$ e $\{\Delta u_L^k \Delta u_L^l\}$ podem ser determinados usando as relações (A.14) e (A.15), assim, começaremos determinando $\{\Delta u_L^1\}$

$$\begin{aligned} \{\Delta u_L^1\} &= \frac{\alpha^2}{4m_r^2 u^4} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{-2u^2 \sin^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}, \\ \{\Delta u_L^1\} &= -\frac{\pi \alpha^2}{m_r^2 u^2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sin^2(\theta/2)} d\theta, \\ \{\Delta u_L^1\} &= -\frac{2\pi \alpha^2}{m_r^2 u^2} \int_0^\pi \cot(\theta/2) d\theta, \\ \{\Delta u_L^1\} &= -\frac{2\pi \alpha^2}{m_r^2 u^2} \lim_{\theta_{min} \rightarrow 0} \int_{\theta_{min}}^\pi \cot(\theta/2) d\theta, \\ \{\Delta u_L^1\} &= -\frac{4\pi \alpha^2}{m_r^2 u^2} \lim_{\theta_{min} \rightarrow 0} \ln\left(\frac{2}{\theta_{min}}\right), \\ \{\Delta u_L^1\} &\simeq -\frac{4\pi \alpha^2}{m_r^2 u^2} \ln(D), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

em que $D = \frac{2}{\theta_{min}}$, θ_{min} é um ângulo de corte para evitar divergência na determinação da

expressão (A.19). θ_{min} deve ser diferente de zero. Também é possível mostrar que

$$\{\Delta u_L^2\} = \{\Delta u_L^3\} = 0, \quad (\text{A.20})$$

devido a que $\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$. Na continuação determinamos os valores de $\{\Delta u_L^k \Delta u_L^l\}$

$$\begin{aligned} \{(\Delta u_L^1)^2\} &= \int d\Omega \sigma u (\Delta u_L^1)^2, \\ \{(\Delta u_L^1)^2\} &= \frac{2\pi\alpha^2}{m_r^2 u} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta, \\ \{(\Delta u_L^1)^2\} &= \frac{4\pi\alpha^2}{m_r^2 u}, \\ \{(\Delta u_L^1)^2\} &\simeq 0, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

em que consideramos o fato de que α^2 é muito pequeno. Também

$$\begin{aligned} \{(\Delta u_L^2)^2\} &= \int d\Omega \sigma u (\Delta u_L^2)^2, \\ \{(\Delta u_L^2)^2\} &= \frac{2\alpha^2}{m_r^2 u} \int_0^\pi \frac{\cos^3(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi, \\ \{(\Delta u_L^2)^2\} &= -\frac{2\pi\alpha^2}{m_r^2 u} \left\{ 1 + 2 \lim_{\theta_{min} \rightarrow 0} \ln\left(\frac{\theta_{min}}{2}\right) \right\}, \\ \{(\Delta u_L^2)^2\} &\simeq \frac{4\pi\alpha^2}{m_r^2 u} \ln(D), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \{(\Delta u_L^3)^2\} &= \int d\Omega \sigma u (\Delta u_L^3)^2, \\ \{(\Delta u_L^3)^2\} &= \frac{2\alpha^2}{m_r^2 u} \int_0^\pi \frac{\cos^3(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi, \\ \{(\Delta u_L^3)^2\} &\simeq \frac{4\pi\alpha^2}{m_r^2 u} \ln(D). \end{aligned}$$

Finalmente podemos mostrar que $\{\Delta u_L^k \Delta u_L^l\} = 0$ para $k \neq l$. Em resumo, os termos não nulos são

$$\begin{aligned} \{\Delta u_L^1\} &= -\frac{4\pi\alpha^2}{m_r^2 u^2} \ln(D), \\ \{(\Delta u_L^2)^2\} = \{(\Delta u_L^3)^2\} &= \frac{4\pi\alpha^2}{m_r^2 u} \ln(D). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Considerando as relações (A.15) e (A.16) podemos determinar $\{\Delta u^i\}$ e $\{\Delta u^i \Delta u^j\}$, assim temos

$$\begin{aligned}\{\Delta u^i\} &= \sum_{k=1}^3 (\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k) \{\Delta u_L^k\}, \\ \{\Delta u^i\} &= (\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_1) \{\Delta u_L^1\}, \\ \{\Delta u^i \Delta u^j\} &= \sum_{k,l=1}^3 (\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k) (\hat{e}_j \cdot \mathbf{e}'_l) \{\Delta u_L^k \Delta u_L^l\}, \\ \{\Delta u^i \Delta u^j\} &= [(\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_2) (\hat{e}_j \cdot \mathbf{e}'_2) + (\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_3) (\hat{e}_j \cdot \mathbf{e}'_3)] \{\Delta u_L^2 \Delta u_L^2\}.\end{aligned}$$

Dado que $\sum_{k=1}^3 (\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k) (\hat{e}_j \cdot \mathbf{e}'_k) = \delta_{ij}$, então $(\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_2) (\hat{e}_j \cdot \mathbf{e}'_2) + (\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_3) (\hat{e}_j \cdot \mathbf{e}'_3) = \delta_{ij} - (\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_1) (\hat{e}_j \cdot \mathbf{e}'_1)$, e considerando que $(\hat{e}_i \cdot \mathbf{e}'_1) = u^i/u$, obtemos

$$\{\Delta u^i\} = -\frac{4\pi\alpha^2}{m_r^2 u^3} \ln(D) u_i, \quad (\text{A.23})$$

$$\{\Delta u^i \Delta u^j\} = \frac{4\pi\alpha^2 \ln(D)}{m_r^2 u^3} [u^2 \delta_{ij} - u_i u_j]. \quad (\text{A.24})$$

Agora, utilizando a relação (A.12) podemos deduzir que

$$\{\Delta v^i\} = \frac{m_r}{m} \{\Delta u^i\}, \quad (\text{A.25})$$

$$\{\Delta v^i \Delta v^j\} = \frac{m_r^2}{m^2} \{\Delta u^i \Delta u^j\}, \quad (\text{A.26})$$

Substituindo as relações (A.23) e (A.24) nestas duas últimas relações, obtemos

$$\{\Delta v^i\} = -\frac{4\pi\alpha^2 \ln(D)}{m m_r} \frac{u^i}{u^3}, \quad (\text{A.27})$$

$$\{\Delta v^i \Delta v^j\} = \frac{4\pi\alpha^2 \ln(D)}{m^2} \left[\frac{u^2 \delta_{ij} - u^i u^j}{u^3} \right]. \quad (\text{A.28})$$

Logo, considerando que $\frac{\partial}{\partial v^i} \left\{ \frac{1}{u} \right\} = -\frac{u_i}{u^3}$, e $\frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} \left\{ u \right\} = \frac{u^2 \delta_{ij} - u^i u^j}{u^3}$, podemos encontrar uma forma mais simplificada das equações (A.27) e (A.28), estas são

$$\{\Delta v^i\} = \Gamma \frac{(m + m_a)}{m_a} \frac{\partial}{\partial v^i} \left\{ \frac{1}{u} \right\}, \quad (\text{A.29})$$

$$\{\Delta v^i \Delta v^j\} = \Gamma \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} \left\{ u \right\}, \quad (\text{A.30})$$

em que $\Gamma = \frac{4\pi\alpha^2 \ln D}{m^2}$. Finalmente substituindo estes últimos resultados em $\{\Delta v^i\}$ e $\{\Delta v^i \Delta v^j\}$ nas equações (A.1) e (A.2), respectivamente, encontramos os Coeficientes de Difusão

$$D[\Delta v^i] = \Gamma \frac{\partial}{\partial v^i} \left\{ \sum_a \frac{m + m_a}{m_a} \int d^3 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a|^{-1} \right\}, \quad (\text{A.31})$$

$$D[\Delta v^i \Delta v^j] = \Gamma \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} \left\{ \sum_a \int d^3 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a| \right\}. \quad (\text{A.32})$$

Também é possível introduzir os chamados **Potenciais de Rosenbluth** $h(\mathbf{v})$ e $g(\mathbf{v})$, definidos como

$$h(\mathbf{v}) = \sum_a \frac{m + m_a}{m_a} \int d^3 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a|^{-1}, \quad (\text{A.33})$$

$$g(\mathbf{v}) = \sum_a \int d^3 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a|. \quad (\text{A.34})$$

Considerando os potenciais $h(\mathbf{v})$ e $g(\mathbf{v})$ podemos apresentar as equações (A.31) e (A.32) na forma

$$D[\Delta v^i] = \Gamma \frac{\partial}{\partial v^i} \{h(\mathbf{v})\}, \quad (\text{A.35})$$

$$D[\Delta v^i \Delta v^j] = \Gamma \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} \{g(\mathbf{v})\}. \quad (\text{A.36})$$

É interessante notar uma similaridade formal dos potenciais de Rosenbluth $h(\mathbf{v})$ e $g(\mathbf{v})$ com a teoria potencial, dado que satisfazem

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{v}}^2 h &\equiv \sum_{i=1}^3 (\partial^2 / \partial v^i \partial v^i) h = -4\pi \sum_a \frac{m + m_a}{m_a} f_a(\mathbf{v}), \\ \nabla_{\mathbf{v}}^4 g &\equiv \sum_{i,j=1}^3 (\partial^4 / \partial v^i \partial v^j \partial v^i \partial v^j) g = -8\pi \sum_a f_a(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Por exemplo, notamos que h tem a forma de um potencial de tipo Coulomb com fonte $-\sum_a \frac{m+m_a}{m_a} f_a(\mathbf{v})$.

Apêndice B

Solução da Equação 1D de FP usando Diferenças Finitas

Até o momento não existem métodos analíticos que possam resolver a equação de FP com um termo de colisões geral, tampouco existe uma solução analítica para sua versão mais simplificada que é a equação 1D de FP com um termo de colisões arbitrário, portanto, é preciso recorrer a métodos numéricos para obter as diferentes soluções.

Neste Apêndice pretendemos desenvolver o algoritmo numérico para encontrar a solução da Eq. (2.41) para o caso de um anel em presença de um campo externo arbitrário \tilde{a} . Usaremos para este fim o método de Diferenças Finitas [49, 54, 55], que foi apresentado no Capítulo 3. Neste caso temos que

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} + \nu \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mu} + \beta \tilde{a} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} = 5\gamma \tilde{h}_2 \tilde{f} + 6\gamma \tilde{h}_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} + \gamma \tilde{h} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \nu^2}, \quad (\text{B.1})$$

em que $\tilde{h}_1 = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \nu}$ e $\tilde{h}_2 = \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \nu^2}$. Agora, faremos uma discretização do domínio usando (ver Fig.B.1)

$$\begin{cases} \mu_i = i\Delta\mu, & -N \leq i \leq N \\ \nu_j = j\Delta\nu, & -M \leq j \leq M \\ \tau_k = k\Delta\tau, & k \geq 0 \end{cases} . \quad (\text{B.2})$$

As variáveis τ , μ , e ν têm diferentes tamanhos de passo, chamados $\Delta\tau$, $\Delta\mu$, e $\Delta\nu$, respectivamente. Consideremos que $\mu \in [-\pi, \pi]$ e $\nu \in [-\nu_m, \nu_m]$, com $\Delta\mu = \pi/N$ e $\Delta\nu = \nu_m/M$,

respectivamente. Fazendo a discretização das derivadas de \tilde{f} nos pontos da rede temos que

$$\tilde{f}_{ij}^k \equiv \tilde{f}(\mu_i, \nu_j, \tau_k), \quad (\text{B.3})$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau}\right)_{ij}^k \approx \frac{\tilde{f}_{ij}^k - \tilde{f}_{ij}^{k-1}}{\Delta \tau}, \quad (\text{B.4})$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mu}\right)_{ij}^k \approx \frac{\tilde{f}_{i+1,j}^k - \tilde{f}_{i-1,j}^k}{2\Delta \mu}, \quad (\text{B.5})$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu}\right)_{ij}^k \approx \frac{\tilde{f}_{i,j+1}^k - \tilde{f}_{i,j-1}^k}{2\Delta \nu}, \quad (\text{B.6})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \nu^2}\right)_{ij}^k \approx \frac{\tilde{f}_{i,j+1}^k - 2\tilde{f}_{ij}^k + \tilde{f}_{i,j-1}^k}{\Delta \nu^2}. \quad (\text{B.7})$$

Agora substituindo as aproximações (B.3)-(B.7) na Eq. (B.1), encontramos o seguinte sistema de equações algébricas, no qual temos como incógnitas os valores de \tilde{f} nos pontos da rede interiores ao domínio (versão implícita do método das diferenças finitas)

$$(A_2)_{ij}^k \tilde{f}_{i-1,j}^k + (A_1)_{ij}^k \tilde{f}_{i,j-1}^k + (B)_{ij}^k \tilde{f}_{ij}^k + (C_1)_{ij}^k \tilde{f}_{i,j+1}^k + (C_2)_{ij}^k \tilde{f}_{i+1,j}^k = \tilde{f}_{ij}^{k-1}, \quad (\text{B.8})$$

com coeficientes do sistema de equações algébricas dadas por

$$(A_2)_{ij}^k = -\nu_j r_1,$$

$$(A_1)_{ij}^k = -\{\beta r_2 \tilde{a}_i^k - 6\gamma r_2 (\tilde{h}_1)_j + \gamma r_3 \tilde{h}_j\},$$

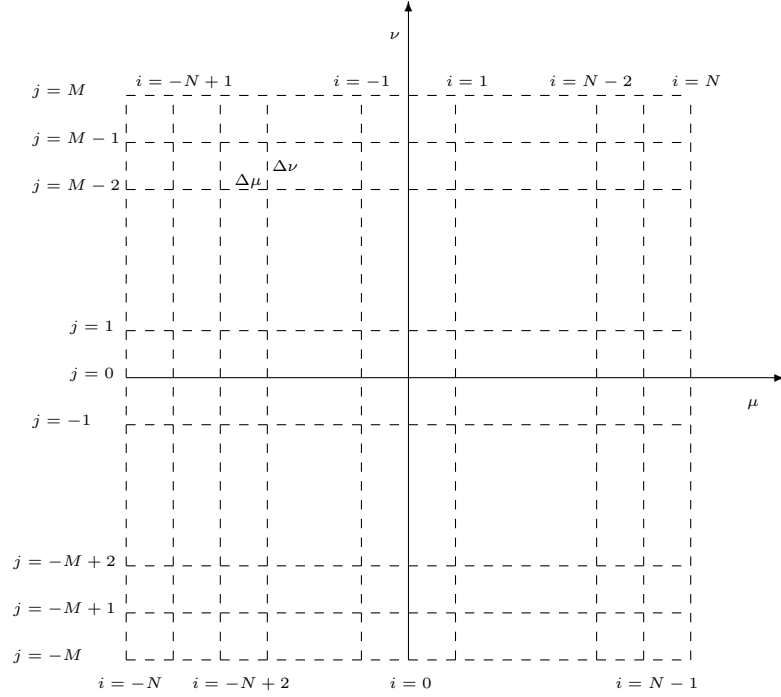
$$(B)_{ij}^k = 1 - 5\gamma \Delta \tau (\tilde{h}_2)_j + 2\gamma r_3 \tilde{h}_j,$$

$$(C_1)_{ij}^k = \{\beta r_2 \tilde{a}_i^k - 6\gamma r_2 (\tilde{h}_1)_j - \gamma r_3 \tilde{h}_j\},$$

$$(C_2)_{ij}^k = \nu_j r_1,$$

em que $r_1 = \frac{\Delta \tau}{2\Delta \mu}$, $r_2 = \frac{\Delta \tau}{2\Delta \nu}$, e $r_3 = \frac{\Delta \tau}{\Delta \nu^2}$. Para obter soluções do sistema (B.8) é preciso conhecer \tilde{f}_{ij}^{k-1} , ou seja, para conhecer as soluções em um tempo posterior $k = 1$, precisamos conhecer \tilde{f}_{ij}^0 em um tempo anterior. Esta é a chamada condição inicial do problema. Por outro lado, além de conhecer a condição inicial é preciso conhecer também os valores de \tilde{f} no contorno do domínio.

Fazendo a transformação de índices no nível k -ésimo do tempo $(i, j) \rightarrow \iota$: onde $\iota = (i + N - 1) + (j + M)$, para $-N + 1 \leq i \leq N - 1$, $-M + 1 \leq j \leq M - 1$, é dizer,


 Figura B.1: Discretização do domínio em quadriculas de tamanho $\Delta\mu \times \Delta\nu$.

o índice ι representa somente os pontos interiores do domínio usando somente um índice. Desta forma, $\iota = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{N}$, em que $\mathcal{N} = (2N - 1) \times (2M - 1)$ é o numero de pontos rede interiores no nível k -ésimo. Usando o índice ι é possível escrever o sistema (B.8) em uma forma matricial dada por

$$AF = D, \quad (\text{B.9})$$

em que A é uma matriz $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, F e D são vetores de \mathcal{N} componentes, na forma

$$A = \begin{pmatrix} (B)_1 & (C_1)_1 & 0 & \cdots & (C_2)_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ (A_1)_2 & (B)_2 & (C_1)_2 & \cdots & 0 & (C_2)_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & (A_1)_3 & (B)_3 & \cdots & 0 & 0 & (C_1)_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ (A_2)_{2M} & 0 & 0 & \cdots & (B)_{2M} & (C_1)_{2M} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & (A_2)_{2M+1} & 0 & \cdots & (A_1)_{2M+1} & (B)_{2M+1} & (C_1)_{2M+1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & (A_2)_{2M+2} & \cdots & 0 & (A_1)_{2M+2} & (B)_{2M+2} & (C_1)_{2M+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{2M} \\ \mathbf{f}_{2M+1} \\ \mathbf{f}_{2M+2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_{2M} \\ D_{2M+1} \\ D_{2M+2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

com os elementos dados por

$$(A_2)_\iota = (A_2)_{ij}^k, \quad (\text{B.12})$$

$$(A_1)_\iota = (A_1)_{ij}^k, \quad (\text{B.13})$$

$$(B)_\iota = (B)_{ij}^k, \quad (\text{B.14})$$

$$(C_1)_\iota = (C_1)_{ij}^k, \quad (\text{B.15})$$

$$(C_2)_\iota = (C_2)_{ij}^k, \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{f}_\iota = \tilde{f}_{ij}^k, \quad (\text{B.17})$$

$$D_\iota = \tilde{f}_{ij}^{k-1} + \tilde{D}_{ij}^k, \quad (\text{B.18})$$

em que \tilde{D}_{ij}^k depende do valor de \tilde{f} nos contornos do domínio, no nível temporal k -ésimo. Note que a matriz A de coeficientes é uma matriz **pentadiagonal**, este fato pode facilitar a solução do sistema (B.9) para um \mathcal{N} grande se usamos um método adequado. Este tipo de matrizes geralmente se denominam **esparsas**. Métodos de solução deste tipo de sistemas de equações algébricas foram apresentados por diferentes autores [5, 55]. Neste caso, usaremos o método de **pivoteo modificado** para a solução do sistema (B.9). Este método requer que a matriz tenha a diagonal dominante.

Neste trabalho também calculamos o processo de relaxamento do anel sem a presença do *shepherd* (campo externo). Neste caso, devemos resolver uma equação particular da [Eq. (2.48)]

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} - 5\gamma \tilde{h}_2 \xi - 6\gamma \tilde{h}_1 \frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \gamma \tilde{h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \nu^2} = 0. \quad (\text{B.19})$$

Neste caso, o procedimento para discretizar o domínio e aplicar o método das diferenças finitas é semelhante.

Apêndice C

Artigo

Ref.: Submetido a *Mon. Not. R. Astron. Soc.*

Evolution of a Narrow Ring interacting with a central Monopole and Shepherd Satellites

César J. Alarcón¹

Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, 13083-859,
Campinas, SP, Brazil

Javier Ramos-Caro²

Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Universidade Estadual de Campinas,
13083-859, Campinas, SP, Brazil

and

Maximiliano Ujevic³

Centro de Ciências Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC, 09210-170,
Santo André, São Paulo, Brazil

We study the evolution of a narrow ring around a central monopole in the presence of a shepherd satellites, via Fokker-Planck equation. By assuming that the diffusion

¹E-mail: jalarcon@if.unicamp.br

²E-mail: javier@ime.unicamp.br

³E-mail: mujevic@ufabc.edu.br

coefficients are given in terms of the usual Rosenbluth potential and the field particles obey a Gaussian distribution, we solve numerically the two-dimensional Fokker-Planck equation for the distribution function of the test particles forming the annulus. We study the evolution, and structure, of the distribution function for different configurations of shepherd satellites. We found, in general, that the systems are stable over long times of evolution.

C.1 Introduction

Planetary rings are spectacular and complex structures present in the four giants of the solar system. They consist in thin discs of cosmic dust, small colliding particles and, perhaps, shepherd satellites revolving around a centre of attraction with an orbital speed given by the law of Kepler [1]. In particular, the Saturn rings exhibit a rich variety of structures forming wide and narrow rings, some of them harbouring one or more satellites, where the F ring is one of the most dynamic narrow ring in the solar system [2, 3]. Previous reports have suggested that the moon Rhea may have its own tenuous ring system, which would make it the only moon known to possess a ring system [4].

At first, it was thought that the rings were unstable systems and to dissipate over the course of hundreds of millions of years, but evidences coming from the Cassini-Huygens Mission suggest the fact that Saturn's rings might date to the early days of the Solar system. Ultimately, the exact mechanism to explain which physical factors account for the stability of these systems is still an open question to be answered.

The formation of broad rings is principally associated with three components: material of the protoplanetary disc that was within the Roche limit of the planet; remnants of a moon destroyed by a collision; the debris of a moon that was disrupted by tidal stresses when it passed within the planet's Roche limit. On the other hand, the narrow planetary rings are often associated with the so-called shepherd satellites [5], and may exist due to mechanisms somewhat more complicated than the case of known broad rings [6–9].

It has been shown that encounters and collisions play an important role in the

dynamical aspects of the rings [10, 11]. This process dissipates mechanical energy while conserves the total angular momentum, so that, it tends to form a flattened disc in a direction perpendicular to the total angular momentum and also tends to circularise the orbits of particles. Moreover, if the planet is not spherically symmetric, as in the case of the giants of solar system, apart of being flat the configuration becomes an equatorial stable ring. However, all the above facts are well stated for the case of broad rings but not for the case of narrow rings, where it is not clear the role of encounters in the evolution [9, 11].

In order to begin to address this problem, in this paper we will investigate the influence of binary encounters in the evolution of a narrow ring, when it is in presence of shepherd satellites. Assuming that the ring is in relaxation time, we solve the Fokker-Planck (FP) equation for the distribution function (DF) associated with a test particle. As usual, we suppose that the test particle is travelling through an homogeneous sea of “field particles”, which are described by a Gaussian distribution of velocities. We study all the possible configurations of interest, i.e., when the shepherds are exterior (interior) and revolves with the same (contrary) direction of the mean velocity of ring particles. Also, in some simulations, we use parameters similar to the ones characterising the called F ring of Saturn.

C.2 The Fokker-Planck equation for a Narrow Ring

It is commonly assumed that a many-particle self-gravitating system obeys a kinetic equation of the form

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_c, \quad (\text{C.1})$$

where F is the one-particle distribution function, depending on the position \mathbf{x} , the velocity \mathbf{v} and the time t . Here, Φ is the mean gravitational potential, due to the entire system, i.e. the central monopole, the shepherds and all the particles forming the ring. The symbol $(\partial F / \partial t)_c$ represents the collision term, accounting for the contribution of encounters. If the system is in a relaxation regime dominated by weak encounters, such factor becomes the FP

collision term.

First of all, we shall focus on the derivation of the FP equation for disks. Since in this case the orbits inside the ring lie in the equatorial plane, the equation that describes this class of systems should be a two-dimensional version of the FP equation. Its derivation starts by restricting the motion of particles to the plane $z = 0$ (we choose z as the direction perpendicular to the disk), which can be done by considering $F = F_*\delta(z)\delta(v_z)$ in (C.1), then performing the integration with respect to z and v_z . The resulting FP collision term can be written as

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_*}{\partial t}\right)_c &= -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial v^i} (F_* D[\Delta v^i]) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} (F_* D[\Delta v^i \Delta v^j]), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

where we have assumed that the system obeys the local approximation [12]. Here, $D[\Delta v^i]$ and $D[\Delta v^i \Delta v^j]$ are the diffusion coefficients, given by (see the Appendix for a detailed calculation)

$$D[\Delta v^i] = -2\pi G m_a \frac{\partial h_a}{\partial v^i}, \quad (\text{C.3})$$

$$D[\Delta v^i \Delta v^j] = \frac{2\pi G m_a^2}{m + m_a} \delta_{ij} h_a, \quad (\text{C.4})$$

(G is the gravitational constant and m is the mass of a test particle) with

$$h_a(\mathbf{v}) = \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a|, \quad (\text{C.5})$$

the Rosenbluth potential, where $f_a(\mathbf{v}_a)$ represents the one-particle distribution function describing an homogeneous sea of field particles with mass m_a . By defining

$$h_* \equiv 2\pi G m_a h_a, \quad (\text{C.6})$$

we can write the FP equation in polar coordinates as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_*}{\partial t} + v_r \frac{\partial F_*}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial F_*}{\partial \varphi} + \left(\frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial F_*}{\partial v_r} \\ - \left(\frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial F_*}{\partial v_\varphi} = \frac{5}{4} \left(\frac{\partial^2 h_*}{\partial v_\varphi^2} + \frac{\partial^2 h_*}{\partial v_r^2} \right) F_* \\ + \frac{3}{2} \frac{\partial h_*}{\partial v_\varphi} \frac{\partial F_*}{\partial v_\varphi} + \frac{3}{2} \frac{\partial h_*}{\partial v_r} \frac{\partial F_*}{\partial v_r} + \frac{h}{4} \left(\frac{\partial^2 F_*}{\partial v_\varphi^2} + \frac{\partial^2 F_*}{\partial v_r^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

In many situations, it is common to assume that the mass of the test particle is equal to the mass of the field particles, i.e. $m_a = m$, which is the case we shall address here. Apart from this assumption, we demand that the discoidal distribution is restricted to a narrow annulus of mean radius r_a . Then, it is convenient to describe such configuration in terms of a distribution function $f(\varphi, v_\varphi, t)$, such that

$$F_* = f(\varphi, v_\varphi, t) \delta(r - r_a) \delta(v_r). \quad (\text{C.8})$$

The corresponding evolution equation is obtained by integrating (C.7) with respect r and v_r :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{1}{r_a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{5f}{4} \frac{\partial^2 h}{\partial \dot{\varphi}^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial h}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{\varphi}^2}, \quad (\text{C.9})$$

where we have used $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ and defined $h \equiv h_*(0, \dot{\varphi})/r_a^2$.

C.2.1 Gravitational Interaction with a Central Monopole and point-like Shepherds

Now let us consider the particular situation in which the narrow ring is under the influence of the gravitational field generated by a two point-like particles: a central monopole of mass M_p and a shepherd of mass $m_s < M_p$. We consider the simplified model of a shepherd moving uniformly around the monopole with a circular orbit of radius r_s . Additionally, if m_R is the total mass of the ring, it is natural to assume that $M_p > m_s \gg m_R$.

The gravitational potential inside the ring (for example, at the point P of figure C.1) is given approximately by

$$\Phi \approx -\frac{GM_p}{r_a} - \frac{Gm_s}{\sqrt{r_a^2 + r_s^2 - 2r_a r_s \cos(\varphi - \varphi_s)}}, \quad (\text{C.10})$$

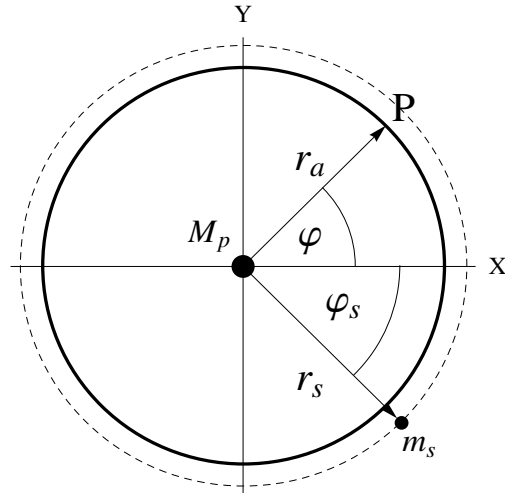


Figura C.1: A monopole surrounded by a narrow ring and a shepherd satellite. Here, M_p and m_s represent the mass of monopole and shepherd, respectively. The situation that we are illustrating corresponds to the case of an exterior shepherd ($r_s > r_a$), but here we also study the case in which $r_a > r_s$.

where φ and φ_s represent the angular position of test particle and shepherd, respectively. Strictly speaking, we would have to take into account the mean gravitational field due to the ring particles, but its influence is negligible when compared with the exterior gravitational force exerted by monopole and shepherd. Since the circular motion of shepherd is uniform, we can write

$$\varphi_s(t) = \omega_s t, \quad (\text{C.11})$$

by setting its initial angular position $\varphi_s(0) = 0$ and representing the constant angular velocity as ω_s . This constant angular velocity is determined from Kepler's law

$$\omega_s = \sqrt{\frac{GM_p}{r_s^3}}.$$

In the case when two shepherds of masses m_{s1} and m_{s2} , both much smaller than M_p , are moving moving uniformly around the monopole with circular orbits of radius r_{s1} and r_{s2} , respectively. The gravitational potential in the ring is given approximately by

$$\Phi \approx -\frac{GM_p}{r_a} - \frac{Gm_{s1}}{\sqrt{r_a^2 + r_{s1}^2 - 2r_a r_{s1} \cos(\varphi - \varphi_{s1})}} - \frac{Gm_{s2}}{\sqrt{r_a^2 + r_{s2}^2 - 2r_a r_{s2} \cos(\varphi - \varphi_{s2})}}, \quad (\text{C.12})$$

where φ , φ_{s1} and φ_{s2} represent the angular position of the test particle, the first shepherd and the second shepherd, respectively.

C.2.2 The Collision term of Fokker-Planck Equation

The right hand side of (C.9) takes into account the role of inter-particle encounters in the evolution of the ring, through the Rosenbluth potential (C.5). It is determined once we choose an explicit form for f_a . Here we use the typical assumption that the field particles are in thermodynamic equilibrium and, in consequence, obey to a Gaussian DF of the form

$$f_a(v_a) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-(v_a \pm \bar{v}_a)^2 / 2\sigma^2 \right], \quad (\text{C.13})$$

where σ is the dispersion of circular velocity (denoted as v_a) of the field particles, n represents the constant number density, and \bar{v}_a is the magnitude of the mean circular velocity determined from Kepler's law

$$\bar{v}_a = \sqrt{\frac{GM_p}{r_a}}.$$

The sign $-$ corresponds to a situation in which the mean motion of particles is counterclockwise and the sign $+$ is used to describe the contrary case.

C.3 Stability of the Ring

Before to solve the equation (C.9), by taking into account all the components of the system, we will solve it for the case of a central monopole and a narrow ring, which suffers the action of a small short-time perturbation. The reason to perform such procedure is, on one hand, to test the stability of our integration scheme and, on the other hand, to study the system's response to external forces of short duration (for example, due to an isolated encounter with a small celestial body).

We use the finite difference method, by introducing an implicit scheme which require the implementation of a modified Gauss method, in order to manipulate the resulting 5-diagonal matrix. In this scheme, we use Dirichlet boundary conditions and verify the total mass conservation (we assume that there is no escape of particles).

In figure C.2 we show the effect of introducing a monopole external field of short duration, on the ring's mass density. We focus on the behaviour of the variation of the mass surface density,

$$\Delta\Sigma = \Sigma - \Sigma_o, \quad (\text{C.14})$$

$$\Sigma(\varphi, t) = \int f(\varphi, v_\varphi, t) dv_\varphi,$$

where Σ_o and Σ are the mass surface density at initial and final time t , respectively. At first, when the perturbation is suddenly turned on, we note a small response in $\Delta\Sigma$ during the interval $\Delta t = 2 \times 10^3 \text{s}$ (fig. C.2(a)). After $10\Delta t$, when the external field has been turned off, the response of the mass density grows 1000 percent approximately (fig. C.2(b)). However, after $800\Delta t$ and $4000\Delta t$ the disturbance of $\Delta\Sigma$ is significantly attenuated (figs. C.2(c) and C.2(d)). For evolution times larger than $8000\Delta t$, we obtain $\Delta\Sigma \approx 0$.

C.4 Influence of the shepherds on the ring's evolution

Now that we have verified that our model can represent a stable narrow ring in relaxation process, the next step is to consider the influence of an additional monopole modelling the shepherd satellite. As stated in sec. C.2, we assume that this shepherd is describing a concentric circular path near the ring, and moving in the same (or opposite) direction than the particles.

We made the numerical experiments by approaching the shepherd slowly towards the ring up to reaching the desired distance ε_s . The reason to do this is to avoid the initial numerical disturbances generated by the sudden apparition of an external field (as it is shown in the previous section), which can become greater when using periodic boundary conditions for long times.

As in the previous section, we focus on the behaviour of $\Delta\Sigma$ while the shepherd is revolving around the central monopole. As expected, all the cases illustrated in figure C.3 reveal that the maximum variation is generated near the shepherd location, where it is

negative. This negative value is consequence of the satellite's motion with respect to the ring, because the gravitational force, due to the former, carries mass from the ring resulting in less dense areas (near the ring). In figure C.4 we checked this curious dynamical effect, and also our codes, by stopping the shepherd when it was in motion. Later after the stop [figure C.4(a)], a positive density profile raises below the shepherd (because there is no movement or mass drag) while the negative profile continues its motion. In another situation, when the shepherd appears stopped and continued stopped [figure C.4(b)], the density profile is symmetric. In situations of effective relative motion, $\Delta\Sigma$ is positive only over the remaining space of the ring (see Fig. C.5), far from the shepherd, in such a way that the total integral of $\Delta\Sigma$ vanishes and, in consequence, the total mass is conserved. In the regions where $\Delta\Sigma > 0$, we do not observe peaks in the graph because $\Delta\Sigma$ is attenuated, as a consequence of the relaxation produced by the encounters. They play a dominant role in zones far from the shepherd, where its gravitational attraction is weak.

Figures C.3(a), C.3(b), C.3(e) and C.3(f) show the result after six laps, when the shepherd is revolving in the same direction of the circular motion of the ring's particles (in fact we mean "most of the ring's particles" instead of "all of the ring's particles"). And figures C.3(c) and C.3(d) show when the shepherd is revolving in the opposite direction of the ring. The arrows in the shepherd and the ring indicate the direction of motion of the shepherd and the direction of motion of the mean particle velocity of the ring (in a reference frame attached to the ring), respectively. By fixing the parameters M_p , m_s , Σ_o , $\varepsilon_s \equiv |r_s - r_a|$ and r_a , from the figures C.3(e) and C.3(f) we find that the variation in the mass density tends to grow as $\tilde{\sigma}$ (dispersion dimensionless of velocity) increases in all cases. Also, note that when the shepherd is moving in the opposite direction of the ring's particles, the density profile looks similar to the case when both are facing the same direction, but in the first case the density scale is multiplied by a factor of 10^{-5} . This shows that in the counter rotating case, when the relative speeds are greater, the influence of the shepherd on the ring is weak. For didactic purposes, the numerical values of the different constants, in this and the next

figures, correspond to the values of the F ring of Saturn and its Pandora shepherd.

In figure C.6, we show some of the results obtained when two shepherds are present. In figures C.6(a), and C.6(b) we show the case where one shepherd is orbiting the ring in an inner orbit and the other shepherd in an outer orbit. For different times around the ring, it appears that the profile of $\Delta\Sigma$ keeps the same form. We illustrate in figures C.6(c) and C.6(d) the case of the shepherds not equidistant from the ring, as expected, the shepherd closest to the ring has a greater influence on the evolution of the ring. In figures C.6(e) and C.6(f) we show the moment when the two shepherds cross. During the crossing the variation of the density is added and the density profile of the individuals shepherds, after and before the crossing, are preserved.

We find that, in all of the situations described above, the profile of $\Delta\Sigma$ is maintained over a great number of laps, suggesting the stability of the system over large periods of time. We made simulations involving 20 laps, in which the pattern of mass variation is preserved, which lead us to expect the same behaviour for many more laps.

C.5 Conclusion

We study the temporal evolution of a narrow ring around a central monopole with and without a shepherd satellite, by taking into account the role of binary encounters. According to the features of the model used, we deal with a two-dimensional Fokker-Planck equation characterised by two diffusion coefficients depending on a Rosenbluth potential of the form (C.5). The resulting FP equation demands a notably simpler scheme of integration than the employed, for example in reference [13, 14], because we have here a situation with two degrees of freedom. The numerical solution of the FP equation shows that (i) the ring is a stable configuration, both in the absence and in the presence of shepherd; (ii) the profiles of $\Delta\Sigma$ corresponding to both situations have a very different evolution. When we introduce a short time perturbation, the variation of Σ reaches a maximum but then decreases up to zero, which corresponds to a stable state of the configuration. On the other hand, when we

take into account the long time interaction due to the shepherd, $\Delta\Sigma$ grows slowly, reaching a maximum value corresponding to a stable state. This can be viewed in a $(\Delta\Sigma, \varphi)$ plane as a pulse wave chasing the shepherd. Also, in our numerical calculations, we noted a negative density near the shepherd that is due to dynamical effects. In the case when two shepherds are present we found that the density profiles of the individuals shepherds are preserved in the crossing. This article is the first step towards a more complete study of the complex ring systems found in nature. The construction of more complex systems, considering more and broader rings, is currently under investigation by the authors.

Acknowledgments

The authors want to thank to Prof. Patricio S. Letelier for instructive discussions and fruitful orientations. J.R.-C. thanks to FAPESP for financial support, M.U. and C.J.A. thanks the financial support of CNPq.

Appendix: Calculation of the Diffusion Coefficients

The diffusion coefficients appearing in the Fokker-Planck equation are determined by the DF $f_a(\mathbf{v}_a)$, corresponding to the field particles. The so-called drift $D[\Delta v^i]$ is given by [12]

$$\begin{aligned} D[\Delta v^i] &= \frac{\langle \Delta v^i \rangle}{\Delta t} = \int d^2\mathbf{v}_a db u f_a(\mathbf{v}_a) \Delta v^i, \\ &= - \int d^2\mathbf{v}_a u f_a(\mathbf{v}_a) \left\{ (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_1) \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\parallel} db + (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_2) \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\perp} db \right\}, \quad (\text{C.15}) \end{aligned}$$

where b represents the impact parameter characterising a binary encounter between a test particle of mass m and velocity \mathbf{v} , and a field particle of mass m_a and velocity \mathbf{v}_a ; $u = |\mathbf{u}| = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a|$, the relative velocity; $\hat{e}'_1 = \mathbf{u}/u$ is a unit vector parallel to \mathbf{u} ; \hat{e}'_2 is a unit vector perpendicular to \mathbf{u} and we have

$$\Delta v_{\parallel} = \frac{2m_a u}{m + m_a} \left[1 + \frac{b^2 u^4}{G^2 (m + m_a)^2} \right]^{-1}, \quad \Delta v_{\perp} = \frac{2m_a b u^3}{G(m + m_a)^2} \left[1 + \frac{b^2 u^4}{G^2 (m + m_a)^2} \right]^{-1}.$$

In (C.15), b_m is a cutoff for b (used to avoid divergences in the integrals) which must be greater than the radius of the system (approximation of weak encounters). In the calculation

of (C.15), it is considered that

$$\Delta \mathbf{v} = -\Delta v_{\parallel} \hat{e}'_1 - \Delta v_{\perp} \hat{e}'_2, \quad \Delta v_i = -\Delta v_{\parallel} (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_1) - \Delta v_{\perp} (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_2),$$

where \hat{e}_i are unit vectors of an arbitrary Cartesian frame, in the velocity space. By considering the expressions for Δv_{\parallel} and Δv_{\perp} , it is possible to show that

$$\int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\parallel} db = \frac{4m_a G}{u} \arctan(\Lambda), \quad \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\perp} db = 0,$$

where $\Lambda = \frac{b_m u^2}{G(m+m_a)}$. By introducing these last results in (C.15), we find an expression for the diffusion coefficients of first order

$$D[\Delta v^i] = -4m_a G \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) \arctan(\Lambda) \frac{u^i}{u}, \quad (\text{C.16})$$

where $u^i = v^i - v_a^i$.

A similar procedure lead us to obtain the following expression for the second order diffusion coefficients $D[\Delta v^i \Delta v^j]$:

$$\begin{aligned} D[\Delta v^i \Delta v^j] &= \frac{\langle \Delta v^i \Delta v^j \rangle}{\Delta t} = \int d^2 \mathbf{v}_a db u f_a(\mathbf{v}_a) \Delta v^i \Delta v^j, \\ &= \int d^2 \mathbf{v}_a u f_a(\mathbf{v}_a) \left\{ (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_1)(\hat{e}_j \cdot \hat{e}'_1) \int_{-b_m}^{b_m} (\Delta v_{\parallel})^2 db + \right. \\ &\quad (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_1)(\hat{e}_j \cdot \hat{e}'_2) \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\parallel} \Delta v_{\perp} db + (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_2)(\hat{e}_j \cdot \hat{e}'_1) \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\perp} \Delta v_{\parallel} db + \\ &\quad \left. (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_2)(\hat{e}_j \cdot \hat{e}'_2) \int_{-b_m}^{b_m} (\Delta v_{\perp})^2 db \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Again, by considering the expressions for Δv_{\parallel} and Δv_{\perp} , we obtain

$$\begin{aligned} \int_{-b_m}^{b_m} (\Delta v_{\parallel})^2 db &= \frac{4m_a^2 G}{m+m_a} \left(\arctan(\Lambda) + \frac{\Lambda}{\Lambda^2+1} \right), & \int_{-b_m}^{b_m} \Delta v_{\perp} \Delta v_{\parallel} db &= 0, \\ \int_{-b_m}^{b_m} (\Delta v_{\perp})^2 db &= \frac{4m_a^2 G}{m+m_a} \left(\arctan(\Lambda) - \frac{\Lambda}{\Lambda^2+1} \right) \end{aligned}$$

which lead us to

$$D[\Delta v^i \Delta v^j] = \frac{4m_a^2 G}{m+m_a} \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) \left\{ \frac{2\Lambda}{\Lambda^2+1} \frac{u^i u^j}{u} + u \delta_{ij} \left[\arctan(\Lambda) - \frac{\Lambda}{\Lambda^2+1} \right] \right\}, \quad (\text{C.18})$$

where δ_{ij} is the usual Kronecker delta. Since we are considering that the dominant encounters are all of them characterised by large impact parameter, then we can introduce the following approximations

$$\arctan(\Lambda) \approx \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \approx \frac{1}{\Lambda}, \quad \frac{1}{\Lambda} \approx 0.$$

and, in consequence, equations (C.16) and (C.18) can be simplified to

$$D[\Delta v^i] = -2m_a G \pi \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) \frac{u^i}{u}, \quad D[\Delta v^i \Delta v^j] = \frac{2m_a^2 G \pi \delta_{ij}}{m + m_a} \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) u. \quad (\text{C.19})$$

A further simplification can be made by introducing the definition $h_a(\mathbf{v}) = \int d^2 \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a) u$:

$$D[\Delta v^i] = -\Gamma_1 \frac{\partial h_a(\mathbf{v})}{\partial v^i}, \quad D[\Delta v^i \Delta v^j] = \Gamma_2 \delta_{ij} h_a(\mathbf{v}), \quad (\text{C.20})$$

where $\Gamma_1 = 2m_a G \pi$ and $\Gamma_2 = \frac{2m_a^2 G \pi}{m + m_a}$.

Bibliografia

- [1] Esposito L.W, 2010, *Science* 38, 383.
- [2] Porco C.C., Baker E., Barbara J. et al., 2005, *Science* 307 (5713),1226.
- [3] Cuzzi J.N., Burns J.A., Charnoz S. et al., 2010, *Science* 327, 1470.
- [4] Jones G. H. et al., 2008, *Science* 319, 1380.
- [5] Goldreich P., Tremaine S., 1979, *Nature* 277, 97.
- [6] Greenberg R.,Brahic A., 1984, *Planetary rings*, The University of Arizona Press, Tucson.
- [7] Smith B. A., 1981, The Voyager imaging team, *Science* 212, 163.
- [8] Smith B. A., 1982, The Voyager imaging team, *Science* 215, 504.
- [9] Murray C.D., Chavez C., Beurle K. et al., 2005, *Nature* 437, 1326.
- [10] Longaretti P. Y., 1992, *Planetary ring dynamics: from Boltzmann's equation to celestial dynamics*, Interrelations between physics and dynamics for minor bodies in the solar system, C. Froeschlè, Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 453.
- [11] Sicardy B., 2006, *Dynamics of planetary rings*, Dynamics of finite size celestial bodies and rings (A. Souchay Ed.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Lect. Notes Phys. 682, 183.

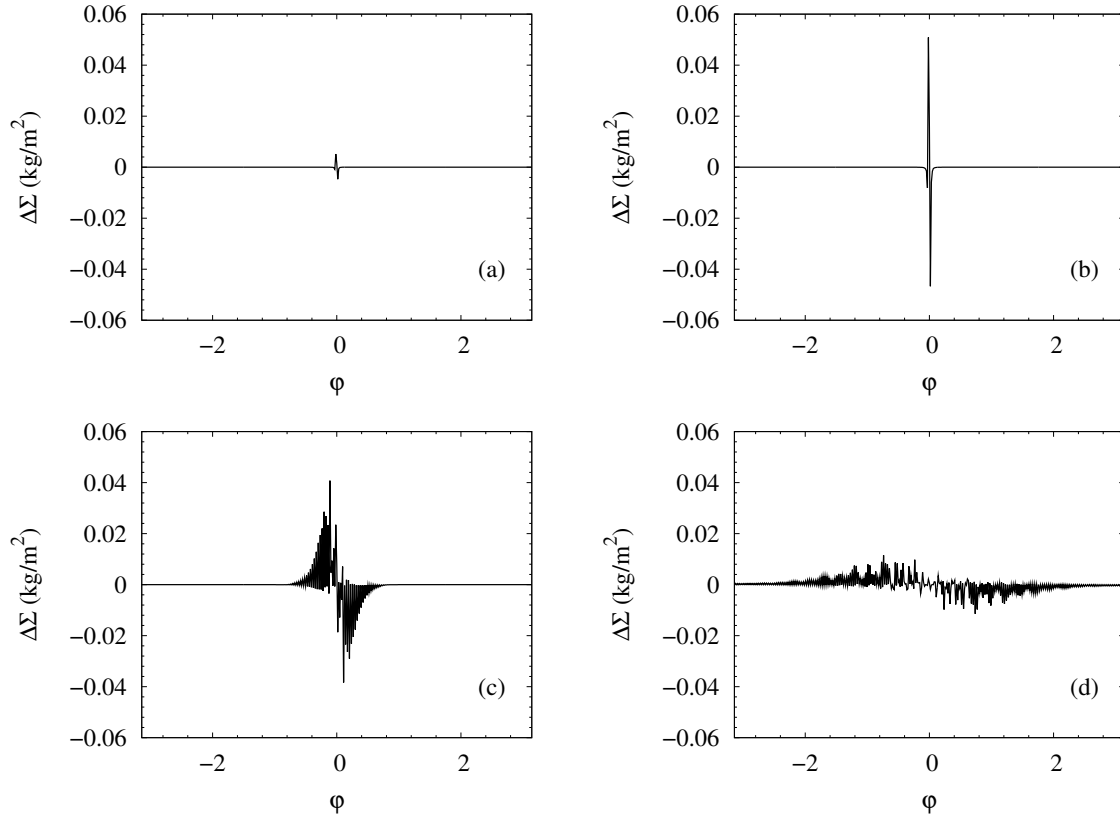


Figura C.2: (a) We introduce a small perturbation during the interval $\Delta t = 2 \times 10^3$ s; then it is switched off. (b) After $10\Delta t$, the response of $\Delta\Sigma$ grows 1000 percent approximately. (c) After $800\Delta t$ and (d) $4000\Delta t$, the disturbance of $\Delta\Sigma$ is significantly attenuated. For evolution times larger than $8000\Delta t$, we obtain $\Delta\Sigma \approx 0$.

[12] Binney J., Tremaine S., 2008, Galactic Dynamics, 2nd Ed., Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[13] Ujevic M., Letelier P.S., 2005, A&A 442, 785

[14] Ujevic M., P. Letelier, 2006, J. Comp. Phys. 215, 485.

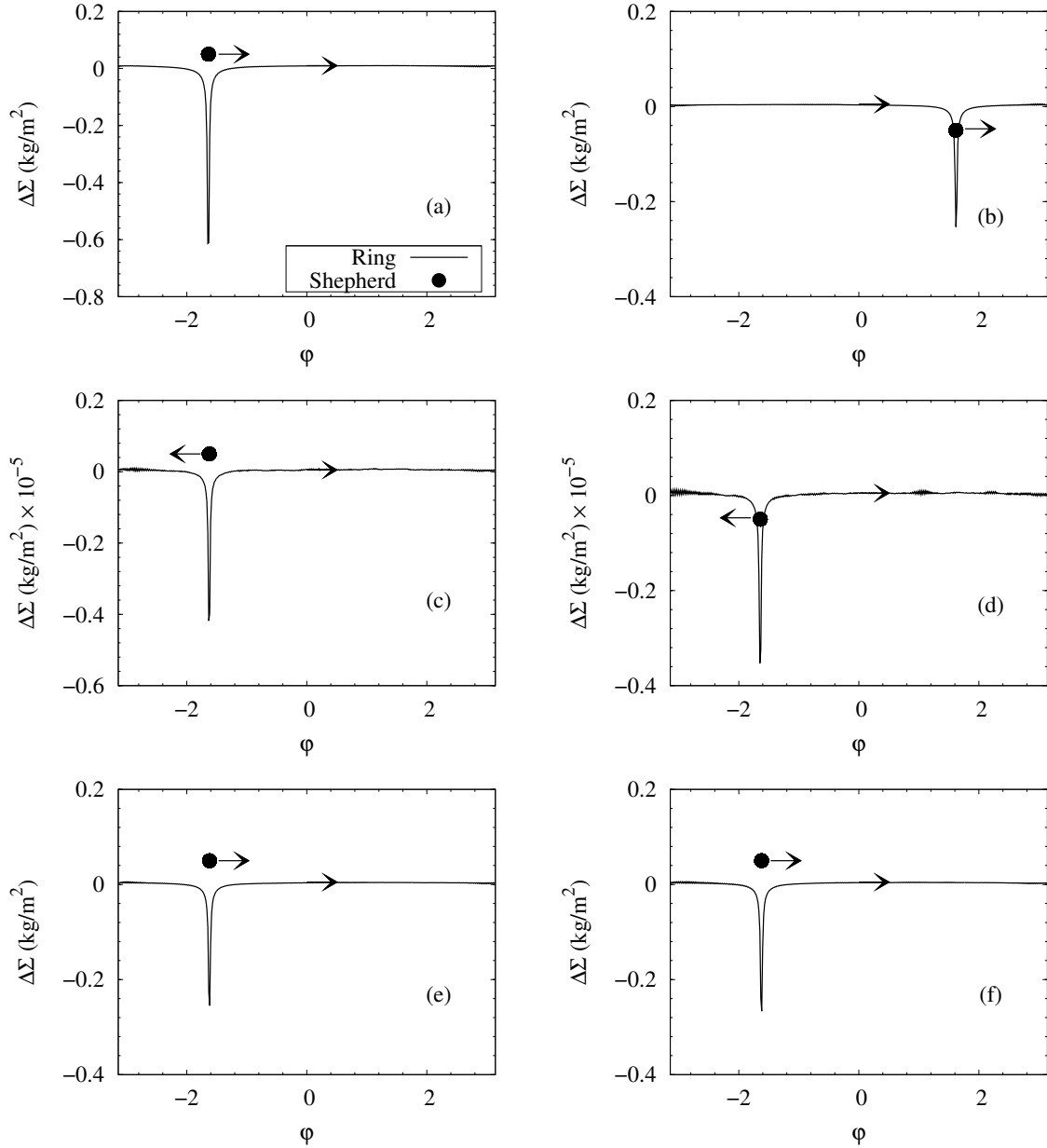


Figure C.3: Variation of the ring's mass density after than the shepherd makes 6 laps around the ring. In all the cases $M_p = 568.46 \times 10^{24}$ kg, $m_s = 14 \times 10^{16}$ kg, $\Sigma_o = 500$ kg/m^2 , $\varepsilon_s = 5 \times 10^5$ m. We show the following cases: (a) outer shepherd moving with the same direction of ring, $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$; (b) inner shepherd moving with the same direction of ring, $r_a = 100.0 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$; (c) outer shepherd moving in the opposite direction of ring, $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$; (d) inner shepherd moving with the opposite direction of ring, $r_a = 100.0 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$; (e) outer shepherd moving with the same direction of ring, $r_a = 100.0 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.5$; (f) outer shepherd moving with the same direction of ring, $r_a = 100.0 \times 10^6$ m, $\tilde{\sigma} = 0.75$.

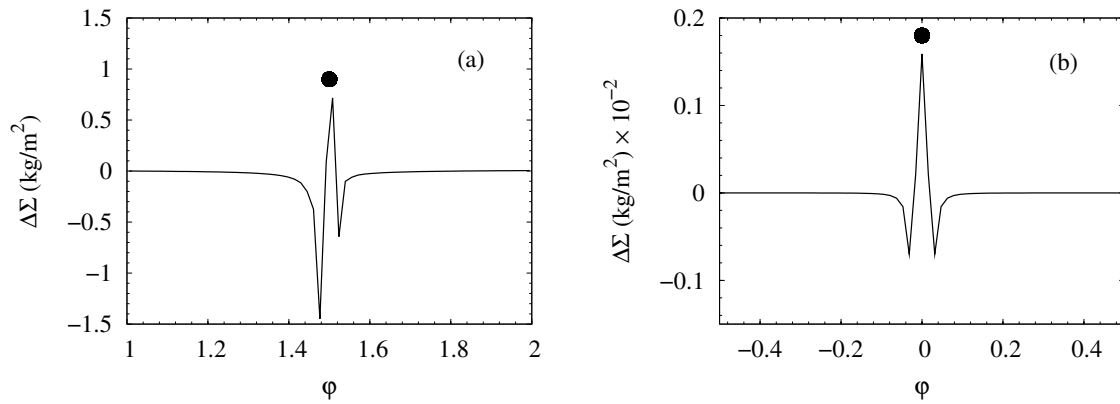


Figura C.4: Checking the dynamical drag effect on the ring. (a) Density profile immediately after the shepherd is stopped. (b) When the shepherd appears stopped and continued stopped, the density profile some time later is symmetric.

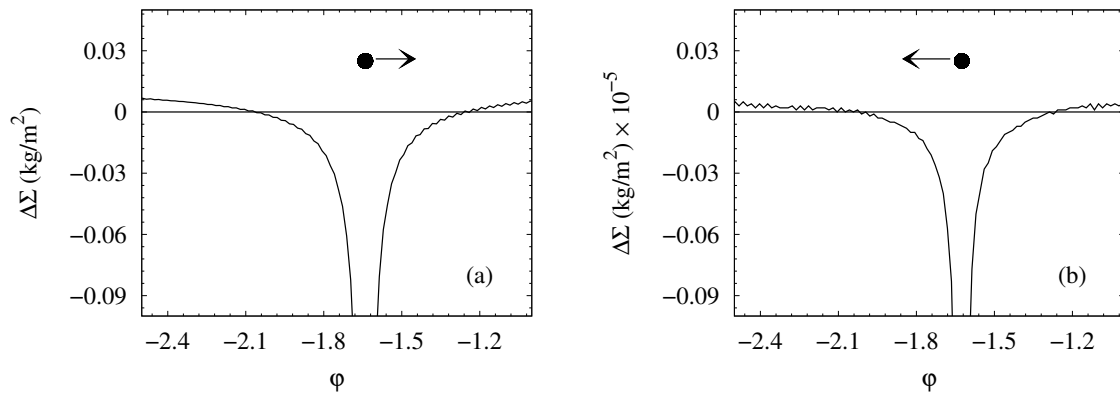


Figura C.5: Detail of figures C.3(a) and C.3(c), showing the the negative and positive values of $\Delta\Sigma$. The negative zone is concentrated near the shepherd's location, while the positive zones are extended over the remaining space.

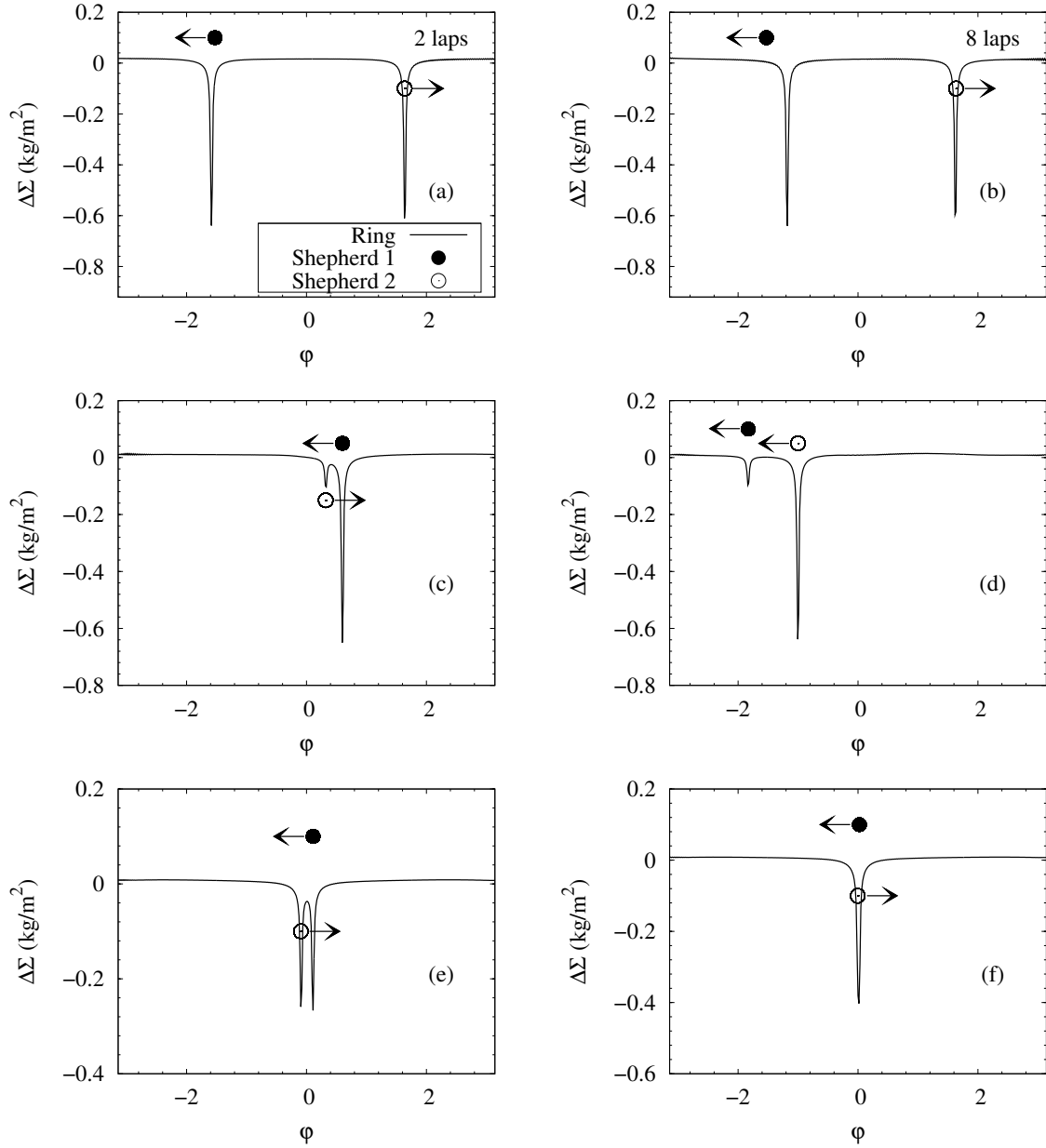


Figura C.6: Variation of the ring's mass density for different configurations of shepherds satellites. In all the cases $M_p = 568.46 \times 10^{24}$ kg, $m_{s1} = m_{s2} = 14 \times 10^{16}$ kg, $\Sigma_o = 500$ kg/m^2 , $\tilde{\sigma} = 0.5$. We show the following cases: One outer shepherd and one inner shepherd (equidistant), $r_a = 140.18 \times 10^6$ m, in (a) for 2 laps, and (b) for 8 laps; (c) One outer shepherd and one inner shepherd (not equidistant), $r_a = 140.18 \times 10^6$ m; (d) Two outer shepherds, $r_a = 140.18 \times 10^6$ m; (e) One outer shepherd and one inner shepherd (equidistant), $r_a = 100 \times 10^6$ m; (f) One outer shepherd and one inner shepherd (equidistant), $r_a = 100 \times 10^6$ m.