

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

Este exemplar corresponde
à redação final da Tese
defendida pelo aluno
Gerson Luís da Silva Ritter e
aprovado pela Comissão Julgadora.
Alfredo Ozorio de Almeida 6/3/86

PONTOS PERIÓDICOS

EM APLICAÇÕES CAÓTICAS

Gerson Luís da Silva Ritter

Orientador: Prof. Alfredo M. Ozorio de Almeida

Tese apresentada no Instituto
de Física Gleb Wataghin da Uni-
versidade Estadual de Campinas
para a obtenção do título de
MESTRE EM FÍSICA.

FEVEREIRO 1986

íNDICE	pag.
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - MAPAS	4
- Definições e teoremas importantes	8
- Ponto fixo hiperbólico	12
- Ferradura de Smale, Dinâmica Simbólica, e Pontos periódicos	15
CAPÍTULO III - FORMAS NORMAIS	19
CAPÍTULO IV - PONTOS PERIÓDICOS	28
APÊNDICE	50
BIBLIOGRAFIA	53

A Harry e Neuza

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Alfredo M. Ozorio de Almeida pela orientação

Ao CNPq , ao IFGW, à Secretaria de Educação do Estado do Rio Grande do Sul e aos meus pais pelo apoio financeiro.

Aos alunos, professores e funcionários do IFGW que de uma ou outra maneira colaboraram neste trabalho.

RESUMO

Mostramos como, a partir da existência de pontos homoclínicos em um mapa, podemos assegurar a existência de órbitas periódicas.

Calculamos a forma normal para um hamiltoniano periódico no tempo e para um mapa com um ponto fixo hiperbólico. Mostramos como um mapa pode ser derivado de um hamiltoniano e construímos esse hamiltoniano para um mapa.

São calculados pontos periódicos de uma aplicação quadrática, que preserva a área e com um ponto fixo instável na origem. Através da forma normal de Birkhoff para mapas encontramos as curvas invariantes da aplicação.

ABSTRACT

In this work it is shown that there exist periodic points in a map with homoclinic points.

The normal form for a hamiltonian periodic in time as well as that for a map with a hyperbolic fixed point is calculated. It is shown how to obtain a map from a hamiltonian and how to construct a time periodic hamiltonian from a given map.

The periodic points of a quadratic area-preserving map with a hyperbolic fixed point at the origin are computed. Using Birkhoff's normal forms for maps, the invariant curves for this map are obtained.

1. INTRODUÇÃO

A descrição do movimento dos corpos macroscópicos começou a ser estudada matematicamente e fisicamente nos séculos XVI e XVII com Galileu e, principalmente Newton. Entretanto, embora saibamos há muito tempo construir as equações diferenciais de um problema mecânico, suas soluções estão longe de serem um problema resolvido, especialmente se as equações não forem lineares. Neste caso podem ocorrer fenômenos que somente hoje estão sendo estudados. Pode acontecer inclusive que o movimento global seja impossível de ser descrito, como nos casos em que as trajetórias de um sistema são totalmente diferentes mesmo que haja uma diferença tão pequena quanto se queira em suas condições iniciais. O fato de podermos, em princípio, determinar a evolução de um sistema a partir de condições iniciais não tem utilidade nesses casos. Outro exemplo é o problema de três corpos que interagem mutuamente: não há solução exata nesse caso. Isso tudo levou ao desenvolvimento de técnicas matemáticas e à própria evolução da Física para o estudo e a compreensão desses fenômenos. O emprego de computadores nesses estudos é fundamental: é o laboratório onde se simulam sistemas dinâmicos.

Nesta tese vamos estudar uma pequena parte desta área da Física. O nosso objetivo é calcular pontos periódicos de uma aplicação do plano sobre si mesmo que preserva a área e com um ponto fixo instável na origem. Para isso foi escolhida a aplicação de Hénon modificada:

$$x' = x \cosh \alpha + (y - x^2) \sinh \alpha$$

$$y' = x \sinh \alpha + (y - x^2) \cosh \alpha$$

que é a aplicação quadrática mais geral com as características acima [1]. Ela é simples o suficiente para que possamos estudá-la e ao mesmo tempo apresenta fenômenos típicos de sistemas não-lineares.

No capítulo II estudaremos a conexão entre sistemas dinâmicos e mapas através da seção de Poincaré. Definiremos conceitos importantes e apresentaremos os teoremas de Hartman-Grobman e o da Variedade Estável que são fundamentais na teoria de mapas e sistemas dinâmicos não-lineares. Neste mesmo capítulo estudaremos fenômenos ligados ao ponto fixo hiperbólico. Veremos o que acontece quando as separatrizes de um mesmo ponto se interceptam transversalmente produzindo um ponto homoclínico. Após, estudamos a ferradura de Smale e suas características e enunciamos o teorema de Smale que garante que os pontos periódicos que queremos calcular existem.

No capítulo III estudaremos as formas normais. Em particular queremos mostrar que elas nos dão as curvas invariantes da aplicação. Sem elas seria impossível o cálculo dos pontos periódicos. Analisamos também a questão da convergência da forma normal de Birkhoff, e mostramos como um mapa pode ser derivado de um hamiltoniano periódico no tempo.

No capítulo IV estendemos o cálculo do ponto homoclínico feito por Terezinha Coutinho [1] usando mais termos na forma

normal. Calculamos em primeiro lugar o ponto homoclínico usando a aplicação diretamente e após com a forma normal. Mostramos que a concordância entre eles é boa, o que é uma boa indicação de que podemos tentar calcular os pontos periódicos. Um pequeno cálculo é feito para mostrar que no limite de α grande o ponto homoclínico tende para $(2,2)$. Os pontos periódicos são calculados para vários valores do parâmetro α e para vários períodos. Usamos dois métodos de cálculo, sendo que um deles nos dá uma fórmula explícita do ponto periódico.

II. MAPAS

Suponha que temos um sistema físico descrito por um conjunto de equações diferenciais:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

O nosso objetivo é descrever o comportamento das coordenadas $\underline{x}$ em relação ao tempo. Ou então, saber se as soluções são estáveis frente a perturbações. Há várias maneiras de se atacar esse problema. Podemos tentar resolvê-lo analiticamente, o que seria o ideal. No entanto, isso só é possível em um número reduzido de casos. Outro modo é usarmos um computador, embora nesse caso só possamos calcular as órbitas para um tempo finito. Combinando o cálculo de órbitas por computador e uma técnica de análise baseada na superfície de seção de Poincaré podemos obter informações qualitativas a respeito do sistema dinâmico. É o que veremos agora.

Seja ϕ_t o fluxo associado ao campo vetorial $\underline{f}(\underline{x})$. Escolhemos uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $n-1$, de tal modo que o fluxo seja sempre transversal a ela. Se q for um ponto onde a órbita intersecta Σ , o mapa de Poincaré P é definido como:

$$P(q) = \phi_{\tau}(q)$$

onde $\tau = \tau(q)$ é o tempo necessário para a órbita que passa por q retornar a superfície Σ . Se γ for uma órbita periódica, p o seu ponto de intersecção com Σ e τ o seu período, então:

$$P(p) = \phi_T(p) = p$$

ou seja, p é um ponto fixo ou periódico do mapa. O que é importante é que a estabilidade de p está ligada com a estabilidade de γ .

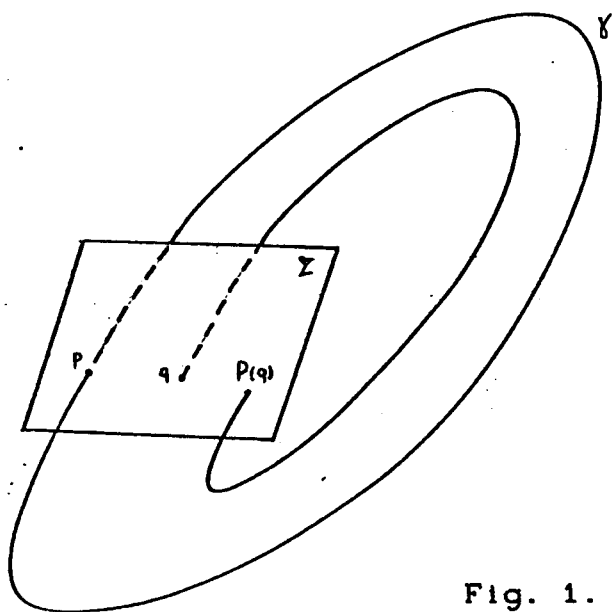


Fig. 1. A superfície de seção e o mapa de Poincaré.

O uso de superfícies de seção de Poincaré é especialmente útil em sistemas hamiltonianos com 2 graus de liberdade.

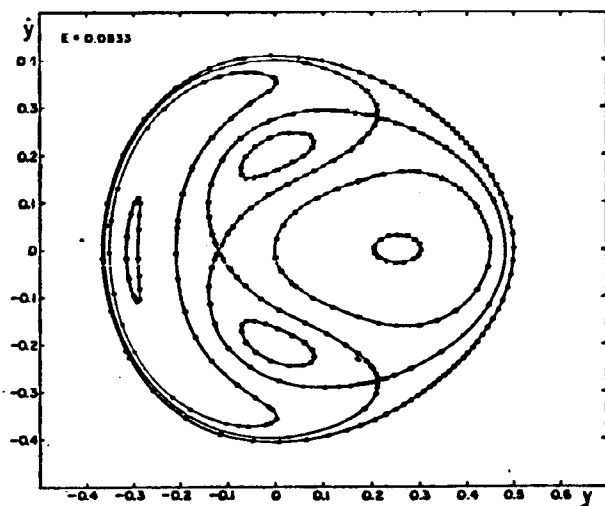
Seja $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ o Hamiltoniano de um sistema. Um sistema hamiltoniano n -dimensional é dito completamente integrável se existir n funções $f_m(q, p)$ $m=1, \dots, n$ que sejam constantes ao longo de cada trajetória. Pode-se mostrar que as trajetórias no espaço de fase desses sistemas estão na superfície de toros n -dimensionais. Um sistema é dito quase-integrável se no espaço de fase existirem trajetórias que estão na superfície de toros e trajetórias que não pertencem a nenhum toro. Finalmente,

o sistema é não-integrável se no espaço de fase as trajetórias não estiverem restritas a toros.

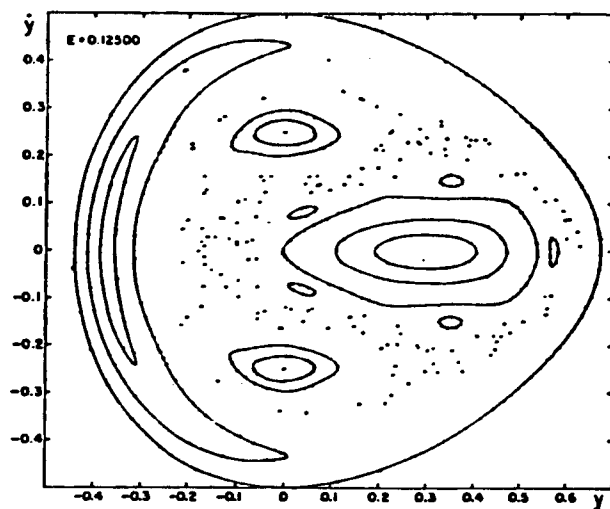
Mas o que isso tem a ver com superfícies de seção? Acontece que não existe método geral capaz de garantir se sistemas hamiltonianos são ou não integráveis. A superfície de seção pode auxiliar e muito nesse sentido.

Se $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ for o Hamiltoniano, as órbitas no espaço de fase estarão nas superfícies tridimensionais $H=E$, pois a energia é constante ao longo da trajetória. Podemos então escrever $p_2 = p_2(q_1, q_2, p_1)$. Se o movimento no espaço de fase for limitado e fizermos $q_2 = \text{cte}$ as trajetórias cruzarão sucessivamente essa superfície. Escolhemos então $q_2 = \text{cte}$ como nossa superfície de seção. O ponto onde a trajetória a cruza determina (p_1, q_1) e p_2 é determinado para cada energia. Se o sistema for integrável então as trajetórias estão sobre toros bidimensionais. A intersecção destas trajetórias na superfície $q_2 = \text{cte}$ determina curvas fechadas. As infinitas iterações de um ponto sob o mapa P cairão todas numa dessas curvas. Se o sistema for quase-integrável então teremos uma mistura de pontos isolados e curvas fechadas na superfície de seção. E se o sistema for não-integrável não haverá curvas fechadas na superfície de seção (fig. 2).

(a)



(b)



(c)

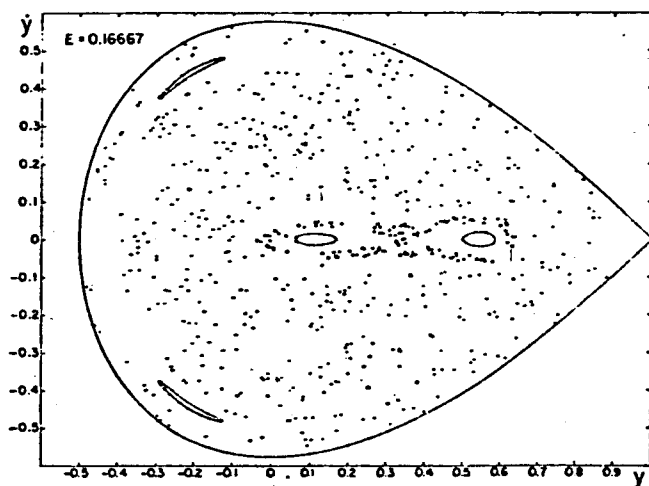


Fig. 2. a) Mapa de um sistema integrável
b) Mapa de um sistema quase-integrável
c) Mapa de um sistema quase totalmente não-integrável. Hénon e Heiles [2].

O mapa de Poincaré é um exemplo de mapeamento. Há outras maneiras de gerarmos mapas como por exemplo no problema da aceleração de Fermi [3].

Definições e teoremas importantes

Vamos apresentar agora algumas definições importantes para o estudo dos mapas. No que segue vamos supor uma aplicação representada por:

$$\underline{x}_{i+1} = A(\underline{x}_i) \qquad A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

onde $\underline{x}$ é um vetor n-dimensional e A é uma função vetorial que define o mapeamento.

Uma órbita é uma sequência de pontos $(\underline{x}_i)_{i=-\infty}^{\infty}$. Se tomarmos um ponto inicial $\underline{x}_1$ e após s iterações voltarmos a $\underline{x}_1$ diremos que a órbita é periódica de período s . Uma órbita de período 1 é um ponto fixo da aplicação. Para uma de período s qualquer de seus pontos é um ponto fixo da aplicação A^s .

Seja $\underline{x}^*$ um ponto fixo de A e sejam λ_i os autovalores da matriz $DA(\underline{x}) = \partial A / \partial \underline{x}$. Com relação à estabilidade do ponto fixo podemos classificá-lo como: (*)

a) Um "sink" se os autovalores λ_i tiverem módulo menor que 1.

b) um "source" se $|\lambda_i| > 1 \quad \forall i$

(*) Supõe que $DA(\underline{x})$ é diagonalizável.

c) Um ponto de sela se $|\lambda_i| > 1$ para alguns autovalores e $|\lambda_i| < 1$ para os outros.

d) Se $|\lambda_i| = 1$ para alguns autovalores a norma é preservada nas direções associadas a eles.

Caso nenhum autovalor tenha módulo igual a 1 o ponto fixo é dito hiperbólico.

Um caso importante é o de aplicações bidimensionais que preservam a área. Em representação matricial temos:

$$DA = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Como A preserva a área $ad-bc=1$. Os autovalores de A são dados por:

$$\begin{aligned} (a - \lambda)(d - \lambda) - bc &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda(d+a) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

onde fizemos uso da condição de preservação da área.

Imediatamente temos $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$. Os autovalores ou são reais $\lambda_1 = 1/\lambda_2$ ou são ~~imaginários puros~~ $\lambda_1 = e^{i\theta}$ e $\lambda_2 = e^{-i\theta}$. Isto vale para qualquer ponto fixo de A.

Dizemos que a aplicação A é um difeomorfismo C^k se A e

A^{-1} são funções contínuas e k-vezes diferenciáveis. (x)

Enunciamos agora um teorema sobre aplicações com ponto fixo hiperbólico.

Teorema de Hartmann-Grobman: Seja $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo C^1 com um ponto fixo hiperbólico x' . Então existe um homeomorfismo h definido em alguma vizinhança U de x' tal que $h(A(x)) = DA(x')h(x)$ para todo $x \in U$.

Este teorema implica que numa vizinhança do ponto fixo a aplicação é topologicamente equivalente à $x_{i+1} = DA(x')x_i$. Portanto, o comportamento da aplicação nessa vizinhança é inteiramente determinado pela linearização. (fig. 3)

Antes de apresentarmos outro teorema vamos a mais algumas definições.

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto com a seguinte característica:

$$A^n(x) \in S \quad \forall x \in S \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

S é dito um conjunto invariante de A .

Dado um ponto fixo x' e os autovalores λ_i de $DA(x)$, os subespaços invariantes são definidos por:

E^s , gerado por autovetores associados a $|\lambda_i| < 1$

E^u , gerado por autovetores associados a $|\lambda_i| > 1$

E^c , gerado por autovetores associados a $|\lambda_i| = 1$

Seja U uma vizinhança de x' . Variedades estáveis e instáveis são definidas como:

(*) A deve ser também linear.

$$W_{loc}^S(x') = \{ x \in U / \lim_{n \rightarrow \infty} A^n(x) = x' \quad A^n \in U \quad \forall n > 0 \}$$

$$W_{loc}^U(x') = \{ x \in U / \lim_{n \rightarrow \infty} A^{-n}(x) = x' \quad A^n \in U \quad \forall n > 0 \}$$

Teorema da Variedade Estável: Seja $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo C^1 com um ponto fixo hiperbólico x' . Então existem variedades locais instável e estável, $W_{loc}^U(x')$ e $W_{loc}^S(x')$ tangentes aos subespaços invariantes E^U e E^S de $DA(x')$ em x' . $W_{loc}^U(x')$ e $W_{loc}^S(x')$ são tão diferenciáveis quanto $A(x)$. (fig. 3)

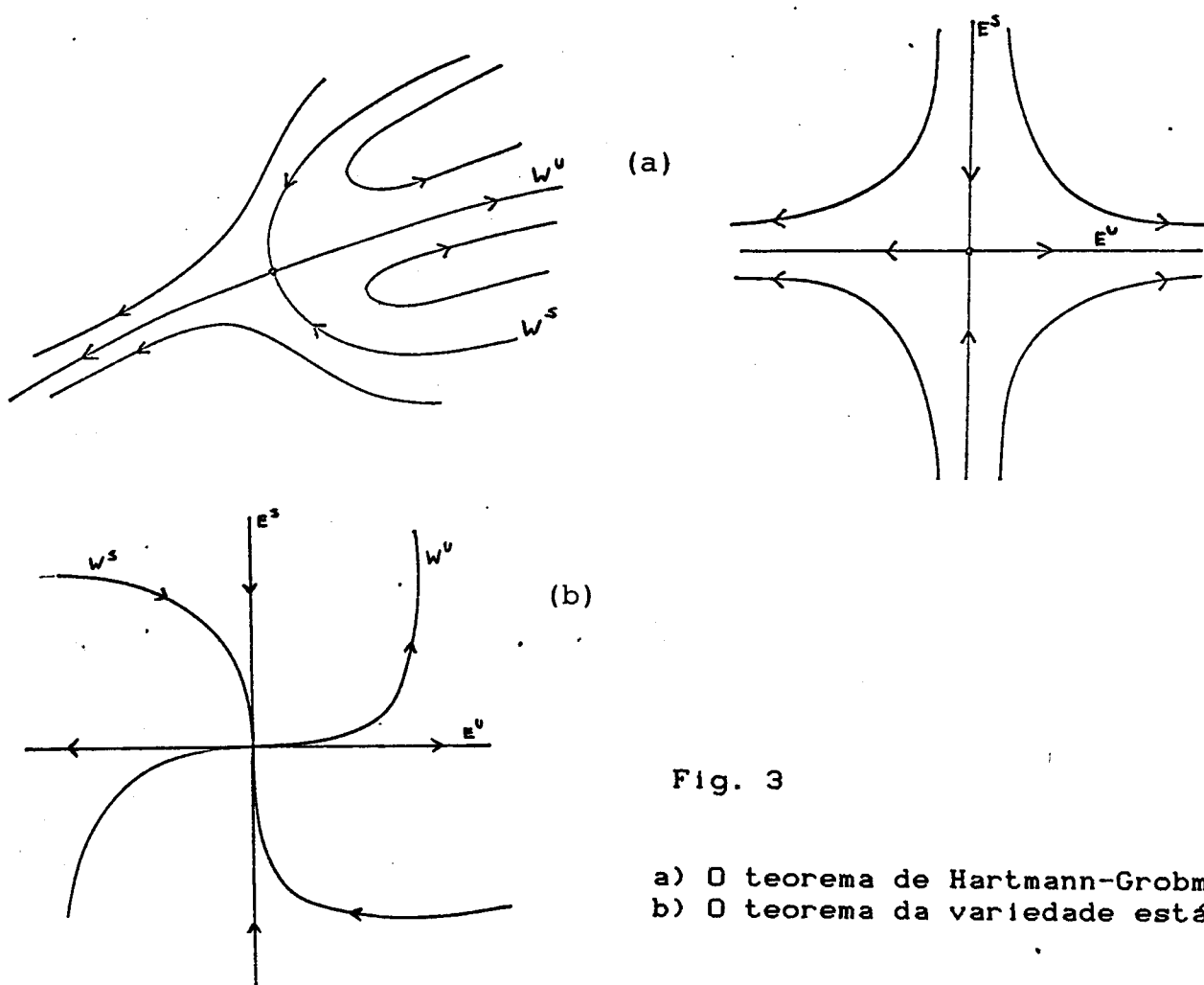


Fig. 3

- a) O teorema de Hartmann-Grobman
b) O teorema da variedade estável.

Ponto Fixo Hiperbólico

É da maior importância o estudo dos fenômenos ligados ao ponto fixo hiperbólico. Já vimos o teorema de Hartmann-Grobman e o da variedade estável.

Agora suponha que temos um mapa A em que a variedade estável se une de forma suave a uma variedade instável (fig. 4). Perturbando o sistema ocorre que as duas variedades agora se cruzam transversalmente. O ponto de intersecção q é chamado ponto homoclínico se as variedades estáveis e instáveis pertencem topologicamente ao mesmo ponto fixo hiperbólico; e heteroclínico caso pertençam a pontos diferentes.

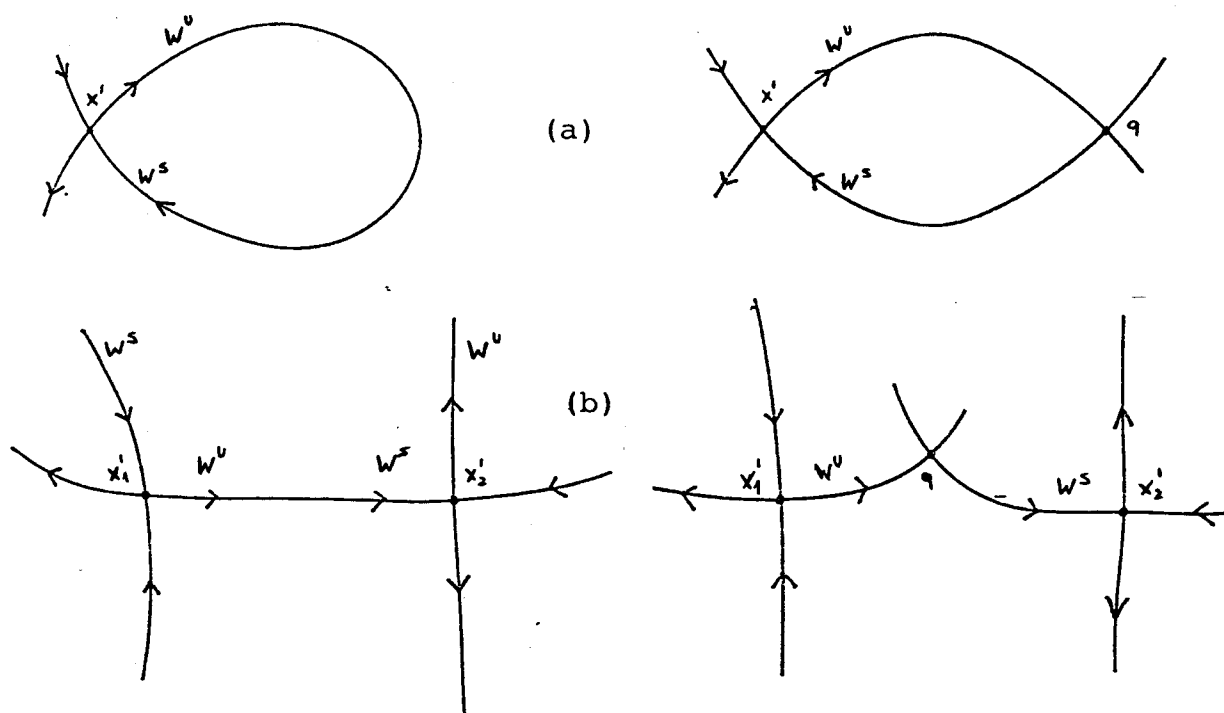


Fig 4. a) O ponto homoclínico. b) O ponto heteroclínico.

No caso de pontos homoclínicos, se houver um então há um número infinito deles. Isto pode ser mostrado da seguinte maneira: consideremos a vizinhança do ponto homoclínico q . Por continuidade as iterações dessa vizinhança devem se parecer umas com as outras, em particular com a do ponto q . Portanto, as variedades se cruzam um número infinito de vezes. A iteração de um ponto homoclínico é também um ponto homoclínico. Como a medida que nos aproximamos do ponto fixo as iterações são cada vez mais lentas, as variedades tem de oscilar de maneira complexa para produzir os pontos homoclínicos. Mas isso não é tudo. Observe a área sombreada da fig. 5. Como o mapa preserva a área, a iteração dessa região também terá a mesma área e por continuidade estará contida entre os dois próximos pontos homoclínicos. Como estes estão mais próximos a amplitude de oscilação deve ser maior. Isso ocorre sucessivamente e as amplitudes das variedades tendem para o infinito à medida que o ponto fixo se aproxima. Isto torna o desenho das variedades extraordinariamente complexo. Isso é expresso pelo Lema Lambda de Pallas:

Seja A um difeomorfismo C^1 de $\mathbb{R}^n$ com um ponto fixo hiperbólico p tendo variedades instáveis e estáveis de dimensão s e u ($s + u = n$) e seja D um disco em $W^u(p)$. Seja Δ um disco transversal a $W^s(p)$ em um ponto q . Então

$$\bigcup_{n \geq 0} A^n(\Delta) \text{ contém discos arbitrariamente próximos de } D.$$

Se houver um ponto homoclínico q então Δ pode ser escolhido em $W^u(p)$. Então, a iteração desses pontos em $W^u(p)$ acu-

mula-se em si mesmos produzindo a figura homoclínica. Note que o mapa não precisa preservar a área. (fig. 5)

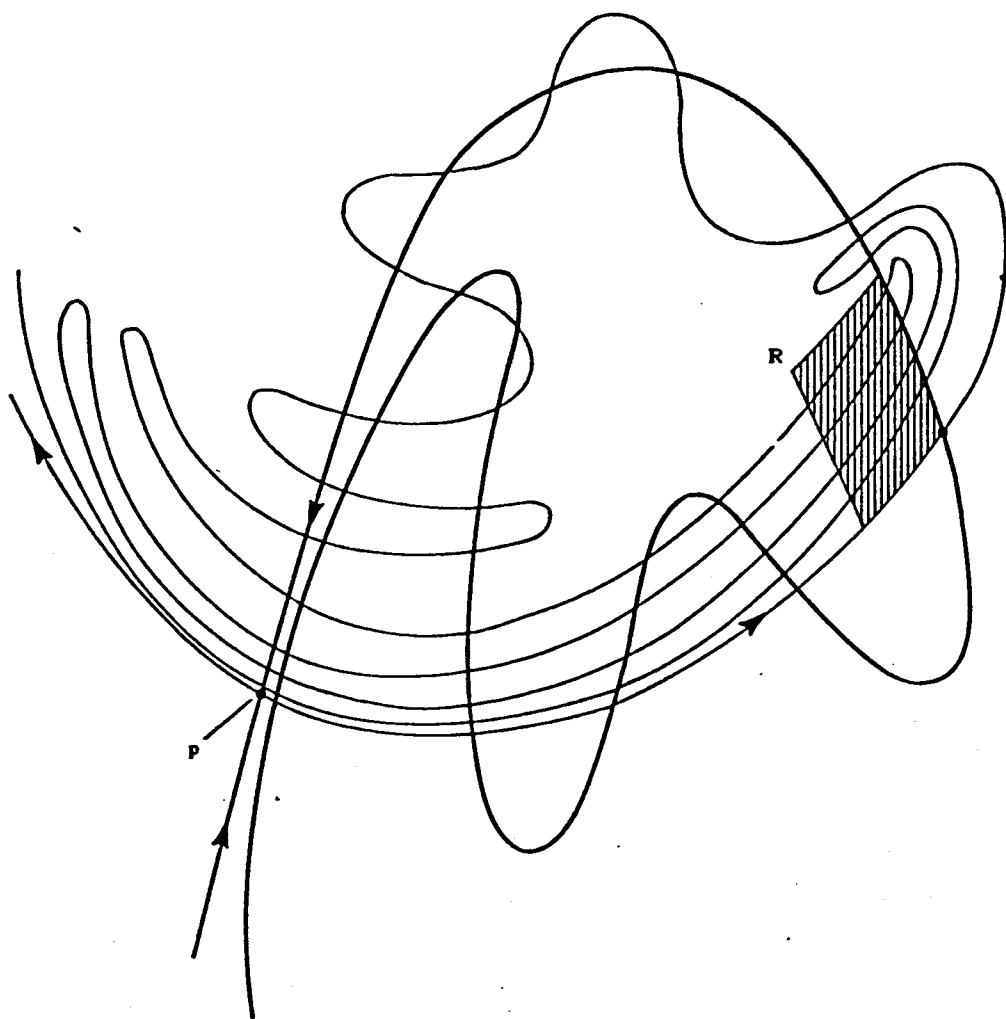


Fig. 5. figura homoclínica, Moser (4)

A existência de pontos homoclínicos implica em outras características importantes das aplicações. Primeiro, vamos ver a ferradura de Smale.

Seja Q um quadrado em $\mathbb{R}^2$ e f uma aplicação: $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$. O efeito de f em Q é contrair o quadrado na direção horizontal e esticá-lo na vertical. Em seguida dobramos a faixa como uma ferradura. (fig. 6)

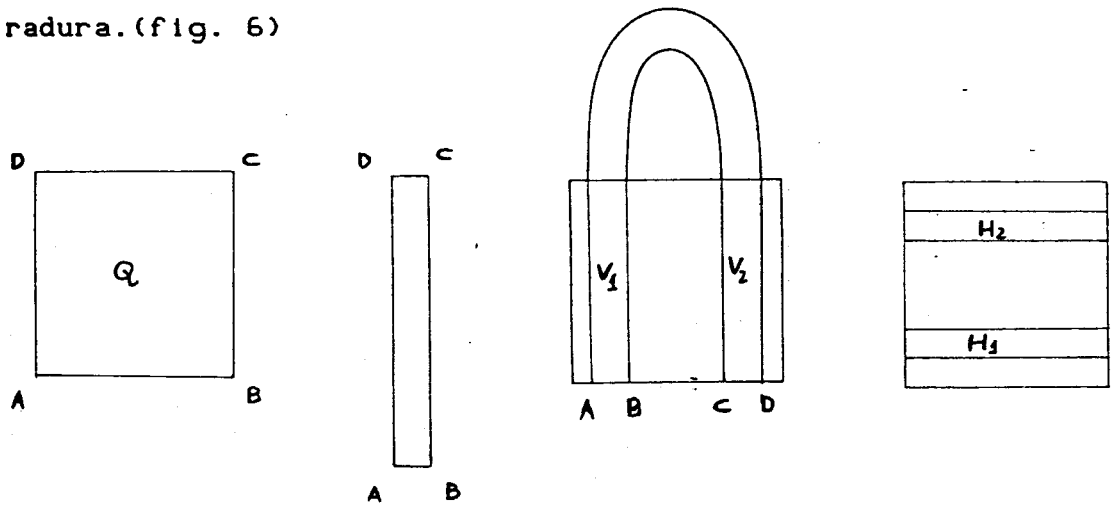


Fig. 6. A ferradura de Smale.

A intersecção $f(Q) \cap Q$ denominamos V_1 e V_2 . O mapa inverso $f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$ são duas faixas H_1 e H_2 . O mapa é linear nessas faixas. Se o resultado de $f(Q) \cap Q$ são duas faixas verticais, $f(Q) \cap Q \cap f(f(Q) \cap Q) = Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$ são 4 faixas verticais. E $\bigcap_{0 \leq n < \infty} f^n(Q)$ são 2^{∞} faixas verticais. Por argumento semelhante $f^{-1}(\bigcap_{0 \leq n < \infty} f^n(Q))$ são 2 faixas horizontais. E, muito importante $(\bigcap_{-\infty < n < \infty} f^n(Q))$ é um conjunto de Cantor Λ , ou se-

ja, um conjunto fechado tal que:

1. O maior conjunto conectado é um ponto.
2. Todo ponto de Λ é um ponto limite de Λ .

A respeito das ferraduras temos um importante teorema:

Teorema_1: O mapa da ferradura f tem um conjunto de Cantor invariante Λ tal que:

a) Λ contém um conjunto enumerável de órbitas periódicas de período arbitrariamente grande.

b) Λ contém um conjunto não enumerável de órbitas não periódicas limitadas.

c) Λ contém uma órbita densa.

Ademais, um mapa C^1 suficientemente próximo de f tem um conjunto de Cantor Λ' com $f|_{\Lambda'}$ topologicamente equivalente a $f|_{\Lambda}$.

Este teorema pode ser demonstrado com o auxílio do seguinte teorema:

Teorema_2: Existe uma correspondência 1-1 ϕ entre Λ e o conjunto Σ de sequências bi-infinitas de 2 símbolos tal que a sequência $b = \phi(f(x))$ é obtida da sequência $a = \phi(x)$ mudando os símbolos uma posição: $b_i = a_{i-1}$. O conjunto Σ tem uma métrica definida por:

$$d(a,b) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i 2^{-|i|} \quad \delta_i = \begin{cases} 0 & \text{se } a_i = b_i \\ 1 & \text{se } a_i \neq b_i \end{cases}$$

O mapa ϕ é um homeomorfismo de Σ para Λ com essa métrica.

Voltando à ferradura, podemos descrevê-la através de símbolos de acordo com o teorema. Se um ponto x pertence a H_1 seu símbolo correspondente é 1; se pertence a H_2 seu símbolo é 2. Há uma correspondência 1-1 entre uma sequência de 1's e 2's e um elemento x de Λ . Por exemplo, seja a sequência $(\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$. Aplicando f ao elemento representado pelo conjunto ao lado obtemos outro que representado pelo mesmo conjunto simplesmente mudando os índices: $a_0 \rightarrow a_{-1}$, $a_1 \rightarrow a_0$, etc. Uma sequência $a \in \Sigma$ é periódica se e somente se houver $k > 0$ tal que $a_{i+k} = a_i$ para todos os i 's na sequência a . Isso é útil, por exemplo, para sabermos os pontos periódicos de Λ . Fixamos k e contamos todas as sequências que satisfazem a condição de periodicidade. Como k pode ser arbitrariamente grande o item a do teorema 1 fica provado. f possui 2^k pontos periódicos de período k . Portanto, é só mostrar que as proposições do teorema 1 são válidas em Σ que o serão também em Λ .

Agora, através do teorema de Smale vamos fazer a ligação entre a dinâmica simbólica e pontos homoclínicos.

Teorema de Smale: Seja f um difeomorfismo C^1 com um ponto periódico hiperbólico p tendo um ponto homoclínico transversal x . Então existe um inteiro $n > 0$ tal que f^n tem um conjunto fechado e invariante Λ contendo x e tal que $f^n|_{\Lambda}$ é topologicamente equivalente ao automorfismo de deslocamento de dois símbolos Σ_2 .

Este teorema implica que em cada vizinhança de um ponto

homoclínico há um número infinito de pontos periódicos, ou em outras palavras, cada ponto homoclínico é um ponto de acumulação dos pontos periódicos. São esses pontos periódicos que queremos calcular nesta tese.

Pode-se mostrar também que a aplicação f é mixing (e, portanto, ergódica) dentro do conjunto Λ . A existência de fenômenos caóticos em fluxos está intimamente ligada a cruzamentos homoclínicos. Devido ao comportamento altamente complexo de fluxos na vizinhança de pontos fixos hiperbólicos não existem toros invariantes nessa região; o sistema é não-integrável. Um caminho seguro para a existência de caos é existência de pontos homoclínicos.

III. FORMAS NORMAIS

Podemos estudar os sistemas não-lineares analisando seu comportamento linear na vizinhança de algum ponto. Entretanto, isso pode não ser o bastante pois perdemos informações dadas pelos termos não-lineares. Uma maneira de estudarmos esses sistemas é escolhermos um sistema de coordenadas no qual essas equações sejam tão simples quanto possível na vizinhança de um ponto ou outra região do espaço. Dizemos que o nosso sistema está na forma normal nessas coordenadas.

Como um primeiro exemplo vamos ver como podemos colocar um sistema dinâmico não-linear com um ponto fixo instável na origem na forma normal.

Seja o sistema de equações diferenciais:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) = \underline{\omega} \cdot \underline{x} + \underline{f}_k(\underline{x}) + \underline{f}_{k+1}(\underline{x}) + \dots \quad (1)$$

onde $\underline{f}_k(\underline{x})$ é um polinômio de grau k em $\underline{x}$.

Procuramos uma transformação de coordenadas:

$$\underline{x} = \underline{y} + \underline{P}(\underline{y}) \quad (2)$$

onde $\underline{P}(\underline{y})$ é um polinômio de grau k , tal que nas coordenadas $\underline{y}$ os termos de ordem k sejam eliminados. Substituindo (2) em (1) ficamos com:

$$\dot{\underline{y}} = \left(1 + \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{y}} \right)^{-1} \left(\underline{\omega} \cdot (\underline{y} + \underline{P}(\underline{y})) + \underline{f}_k(\underline{y} + \underline{P}(\underline{y})) + \dots \right) \quad (3)$$

Os termos de grau k em (3) são dados por:

$$O(k) = \omega \cdot P(\underline{y}) - \frac{\partial P}{\partial \underline{y}} \cdot \omega \cdot \underline{y} + f_k(\underline{y}) \quad (4)$$

Como queremos que $O(k) = 0$, P deve satisfazer as seguintes condições:

$$\omega_i \cdot P_i - \sum_j \frac{\partial P}{\partial y_j} \cdot \omega_j \cdot y_j = f_{k_i}(\underline{y}) \quad (5)$$

Se P for um monômio $y_1^{m_1} \cdot y_2^{m_2} \dots y_n^{m_n}$ a equação (5) tem solução se:

$$\omega_i - \sum_j m_j \omega_j \neq 0 \quad (6)$$

para $m_1, \dots, m_n$ positivos e $\sum m_i = k$. Nesse caso eliminaremos o termo de grau k e podemos repetir o processo para $k+1$. Se (6) não for satisfeita dizemos que há uma ressonância de ordem k . Note que se não houver ressonância podemos obter formalmente um sistema linear.

Outro exemplo de redução à forma normal é o de um hamiltoniano com um grau de liberdade, periódico no tempo e com um ponto fixo instável: $K = K(p, q, t)$. Esse problema se origina de um hamiltoniano com dois graus de liberdade e com uma órbita periódica [5].

Sempre podemos colocar K na forma:

$$K(p, q, t) = \lambda p q + \sum_{\alpha+\beta=1}^{\infty} \sum_{\alpha\beta \neq 1} K_{\alpha\beta} p^\alpha q^\beta e^{i\lambda t} \quad (7)$$

na vizinhança de um ponto de equilíbrio instável. Agora tentamos uma transformação canônica que elimine os termos de grau k . A geratriz da transformação é:

$$S(P,q) = Pq + \sum_{\alpha+\beta=\beta,1}^{\infty} \sum_{l=1} S_{\alpha\beta l} P^{\alpha} q^{\beta} e^{ilt} \quad (8)$$

O nosso objetivo é calcular $S_{\alpha\beta l}$. Acharmos as coordenadas p e Q :

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = P + \sum \sum S_{\alpha\beta l} P^{\alpha} q^{\beta-1} e^{ilt} \quad (9)$$

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = q + \sum \sum S_{\alpha\beta l} P^{\alpha-1} q^{\beta} e^{ilt} \quad (10)$$

$$K'(P,Q,t) = K(p,q,t) - \frac{\partial S}{\partial t} \quad (11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum \sum S_{\alpha\beta l} i l P^{\alpha} q^{\beta} e^{ilt} \quad (12)$$

Calculando p e q como funções de Q e P até termos de grau k :

$$p = P + \sum \sum S_{\alpha\beta l} P^{\alpha} Q^{\beta-1} e^{ilt} + \dots \quad (13)$$

$$q = Q - \sum \sum S_{\alpha\beta l} P^{\alpha-1} Q^{\beta} e^{ilt} + \dots \quad (14)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum \sum S_{\alpha\beta l} i l P^{\alpha} Q^{\beta} e^{ilt} + \dots \quad (15)$$

Substituindo (13), (14), (15) em (11) e tomando os termos de grau $< k$ temos:

$$K'(Q,P,t) = \lambda P Q + \sum \sum [(\lambda(\beta - \alpha) - i l) S_{\alpha\beta l} + K_{\alpha\beta l}] P^{\alpha} Q^{\beta} e^{ilt} + \dots \quad (16)$$

Para que o termo de grau k seja nulo temos

$$S_{\alpha\beta l} = K_{\alpha\beta l} / (\lambda(\alpha - \beta) + i l) \quad (17)$$

exceto para $\alpha = \beta, l=0$.

Com isso o hamiltoniano fica:

$$K(P, Q, t) = \lambda PQ + K_k(PQ)^{k/2} + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha + \beta \geq k+1}} K_{\alpha\beta} P^\alpha Q^\beta e^{i\lambda t} \quad (18)$$

Se isso puder ser feito indefinidamente ficaremos com:

$$K(P, Q, t) = \lambda PQ + \sum_{k=2} K_{2k}(PQ)^k \quad (19)$$

Nesse caso as equações do movimento ficam:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \lambda Q + \sum_{k=2} K_{2k} P^{k-1} Q^k \quad (20)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -\lambda P - \sum_{k=2} K_{2k} P^k Q^{k-1} \quad (21)$$

Notamos que:

$$\dot{P}Q + Q\dot{P} = 0 \quad d(QP)/dt = 0 \quad QP = \text{cte}$$

Portanto o movimento é limitado às curvas $PQ = \text{cte}$. Note ainda que o hamiltoniano não depende do tempo e o movimento é integrável. Podemos derivar um mapa a partir de (18). Sejam P e Q as coordenadas de um ponto inicial. Como o hamiltoniano é periódico com um período T , calculamos P_1 e Q_1 ao fim de um ciclo. Repetimos o processo e calculamos P_2 e Q_2 e assim sucessivamente. É claro que para todos esses pontos vale $P_n Q_n = \text{cte} \quad n=0,1,2,\dots$. Definimos assim um mapa M

$$\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} \quad (22)$$

A forma mais geral de fazermos $PQ = \text{cte}$ é tomarmos o seguinte M :

$$P_{n+1} = U(PQ)P_n \quad Q_{n+1} = U^{-1}(PQ)Q_n \quad (23)$$

$$\text{com } U(PQ) = \lambda \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(PQ)^k \right) \quad (24)$$

Note que o mapa preserva a área (pois é derivado de um hamiltoniano e tem um ponto fixo instável na origem). Segundo Moser [6] qualquer mapa com essas características pode ser interpolado por um hamiltoniano periódico no tempo.

Na forma normal de Birkhoff para mapas obtemos resultados semelhantes ao do caso anterior. Vamos nos restringir a uma aplicação do plano sobre si mesmo.

Seja uma aplicação do tipo:

$$\begin{aligned} x &= f(x,y) \\ y &= g(x,y) \end{aligned} \quad (25)$$

que tenha um ponto fixo instável na origem e que preserve a área. Através de uma mudança linear de coordenadas podemos colocá-la na forma:

$$\begin{aligned} x &= \lambda x + \dots \\ y &= \lambda^{-1}y + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

De acordo com Birkhoff [7] através da transformação formal não-linear:

$$\begin{aligned} x &= \xi + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=0}^k x_{kl} \xi^{k-l} \eta^l \\ y &= \eta + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=0}^k y_{kl} \xi^{k-l} \eta^l \end{aligned} \quad (27)$$

podemos colocar (26) na forma normal

$$\begin{aligned} \xi' &= U(\xi\eta)\xi \\ \eta' &= U^{-1}(\xi\eta)\eta \end{aligned} \quad (28)$$

onde
$$U(\xi\eta) = \lambda (1 + \sum u_{2k}(\xi\eta)^k) \quad (29)$$

Note a semelhança dessa forma normal e a derivada anteriormente para o mapa do hamiltoniano periódico. Temos também agora $\xi'\eta' = \xi\eta = \text{cte}$. Isto quer dizer que no mapa na forma normal as curvas invariantes são hipérboles do tipo $\xi\eta = \text{cte}$. Este fato será de fundamental importância no cálculo dos pontos periódicos.

Quanto à convergência da forma normal Moser [6] mostrou que ela converge dentro de um círculo $\xi^2 + \eta^2 < \rho^2$. Na sua demonstração ele não calculou diretamente com a forma normal do mapa. Ele interpolou um hamiltoniano periódico no tempo, calculou sua forma normal e mostrou sua convergência. Como o mapa é gerado pelo hamiltoniano ele demonstrou indiretamente que sua forma normal também converge. Quando temos além do ponto hiperbólico um ponto elíptico é claro que a forma normal não pode convergir na vizinhança desse ponto. A forma normal foi derivada para descrever os fenômenos na vizinhança do ponto hiperbólico que são qualitativamente diferentes dos que ocorrem em torno de um ponto elíptico.

Como exemplo de um hamiltoniano que gera um mapa vamos estudar a seguinte aplicação M:

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh \alpha + (y-x^2) \sinh \alpha \\ y' &= x \sinh \alpha + (y-x^2) \cosh \alpha \end{aligned} \quad (30)$$

Segundo Terezinha Coutinho [1] o mapa pode ser decomposto em um cisalhamento S ao longo do eixo y:

$$x' = x \quad y' = y - x^2 \quad (31)$$

e uma rotação hiperbólica R:

$$\begin{aligned}x_1 &= x' \cosh \alpha + y' \sinh \alpha \\y_1 &= x' \sinh \alpha + y' \cosh \alpha\end{aligned}\tag{32}$$

Não vamos utilizar o método de Moser para o cálculo do hamiltoniano pois ele pode ser feito de maneira mais simples como veremos agora.

Primeiro vamos tratar do cisalhamento. Como x é constante o hamiltoniano só depende da coordenada x : $H = H(x)$. Escrevendo as equações do movimento

$$\dot{y} = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}\tag{33}$$

Resolvendo temos:

$$x = x_0 \quad y = y_0 - \frac{\partial H}{\partial x} t\tag{34}$$

Temos o mapa para $t = 1$

$$\begin{aligned}y &= y_0 - \frac{\partial H}{\partial x} = y_0 - x^2 \\x &= x_0 = x_0\end{aligned}\tag{35}$$

Portanto,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = x^2 \quad H(x) = x^3/3 \quad 0 \leq t \leq 1\tag{36}$$

O hamiltoniano acima gera o mapa simplesmente calculando o valor de x para $t = 1$.

Agora vamos ao mapa R.

Supomos que o hamiltoniano esteja aproximado pela forma quadrática $x.H.x/2$ onde $H = \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x \partial x}$ na vizinhança do ponto fixo.

Pode-se mostrar [5] que as equações do movimento tomam a forma

$$\dot{\underline{x}} = \underline{JHx} \quad (37)$$

onde

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A solução desse sistema é

$$\underline{x} = e^{\underline{JH}t} \underline{x}_0 \quad (38)$$

Para $t = 1$ geramos o mapa R

$$\underline{x} = e^{\underline{JH}} \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Agora } e^{\underline{JH}} = 1 + \underline{JH} + (\underline{JH})^2/2 + \dots \quad (40)$$

$$\text{e } \cosh \alpha = 1 + \alpha^2/2 + \dots \quad (41)$$

$$\sinh \alpha = \alpha + \alpha^3/6 \quad (42)$$

Portanto, da comparação:

$$e^{\underline{JH}} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{tiramos } H_{xx} = \alpha \quad H_{yy} = -\alpha \quad H_{xy} = 0 \quad (43)$$

O hamiltoniano para R é:

$$H(x,y) = \alpha (x^2 - y^2) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (44)$$

E o hamiltoniano completo para o mapa fica:

$$H = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & 2n \leq t \leq 2n + 1 \\ \alpha (x^2 - y^2) & 2n + 1 \leq t \leq 2n + 2 \end{cases}$$

IV. PONTOS PERIÓDICOS

A aplicação que estudamos é a de Hénon modificada:

$$x' = x \cosh \alpha + (y - x^2) \sinh \alpha \quad (1)$$

$$y' = x \sinh \alpha + (y - x^2) \cosh \alpha$$

Facilmente se vê que ela tem um ponto fixo hiperbólico na origem e que preserva a área. Foi mostrado por Terezinha J.S. B. Coutinho [1] que ela é a aplicação quadrática do plano sobre si mesmo mais geral com um ponto fixo instável na origem.

Para construirmos a forma normal de Birkhoff é preciso que sua parte linear esteja em forma diagonal. Para isso basta uma rotação de 45° : $X = x + y$ e $Y = x - y$. Com essa transformação a aplicação torna-se:

$$\begin{aligned} X' &= X e^{\alpha} - \frac{(X + Y)^2}{4} e^{\alpha} \\ Y' &= Y e^{-\alpha} + \frac{(x + y)^2}{4} e^{-\alpha} \end{aligned} \quad (2)$$

Fazemos $\lambda = e^{\alpha}$.

Agora tentamos a transformação formal não-linear

$$\begin{aligned} X &= \xi + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} X_{kl} \xi^{k-1} \eta^l \\ Y &= \eta + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} Y_{kl} \xi^{k-1} \eta^l \end{aligned} \quad (3)$$

tal que nas novas coordenadas (ξ, η) a aplicação toma a forma:

$$\xi' = U\xi$$

$$\eta' = U^{-1}\eta$$

$$\text{com } U = \lambda \left(1 + \sum u_{2k} (\xi\eta)^k \right) \quad (4)$$

é muito importante notar que dessa maneira

$$\xi' \eta' = \xi\eta = \text{cte}$$

ou seja, as curvas invariantes são hipérboles.

Agora substituímos (3) em (2) e ficamos com:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda \left(\xi + \sum \sum x_{kl} \xi^{k-1} \eta^l \right) - \frac{\lambda}{4} (\xi + \eta + \sum \sum (x_{kl} + y_{kl}) \xi^{k-1} \eta^l)^2 \\ y' &= \lambda^{-1} \left(\eta + \sum \sum y_{kl} \xi^{k-1} \eta^l \right) - \frac{\lambda^{-1}}{4} (\xi + \eta + \sum \sum (x_{kl} + y_{kl}) \xi^{k-1} \eta^l)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Para facilidade de notação definiremos:

$$Z = (X+Y)^2 = \sum \sum z_{kl} \xi^{k-1} \eta^l = (\xi + \eta + \sum \sum (x_{kl} + y_{kl}) \xi^{k-1} \eta^l)^2 \quad (6)$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} x' &= U\xi + \sum \sum x_{kl} (U\xi)^{k-1} (U^{-1}\eta)^l \\ y' &= U^{-1}\eta + \sum \sum y_{kl} (U\xi)^{k-1} (U^{-1}\eta)^l \end{aligned} \quad (7)$$

Baseamos o cálculo dos coeficientes x_{kl} e y_{kl} na identificação de (5) com (7). Geometricamente temos a comutação das duas rotas de ir de (ξ, η) para (x', y') como mostrado na fig. 7 .

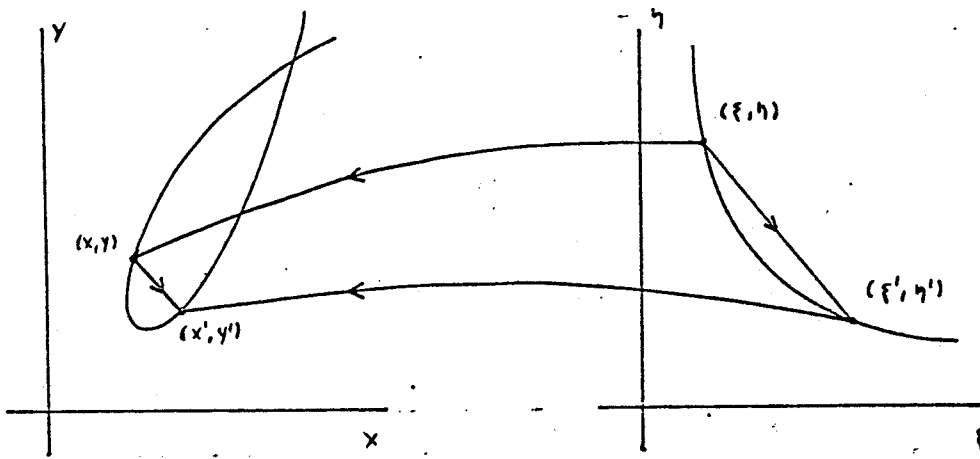


Fig. 7. A equivalência das duas rotas de ir de (ξ, η) para (x', y') .

A partir daí, com manipulações algébricas, determinamos

x_{kl} , y_{kl} e u_{2k} . Os coeficientes calculados são dados pelas expressões:

$$\lambda u_{k-1} \delta_{k,2l+1} + \sum_{j=0}^{k-2j} \lambda^{k-2l} x_{k-2j,1-j} \{u^{k-2l}\}_{2j} - \lambda (X_{kl} - z_{kl}/4) = 0$$

$$\lambda^{-1} u_{k-1}^{-1} \delta_{k,2l-1} + \sum_{j=0}^{k-2l} \lambda^{k-2l} y_{k-2j,1-j} \{u^{k-2l}\}_{2j} - \lambda^{-1} (Y_{kl} + z_{kl}/4) = 0$$

onde: $z_{kl} = 2(t_{k-1,1-1}(1 - \delta_{1,0}) + t_{k-1,1}(1 - \delta_{k,1})) +$

$$\sum_{j=0}^1 \sum_{i=2}^{k-2} t_{k-i,1-j} t_{i,j} \Theta(k-1-i+j) \Theta(i-j)$$

e $t_{k,1} = X_{k,1} + Y_{k,1}$

$$\Theta(a) = \begin{cases} 1 & a \geq 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

$\{u^m\}_{2j}$ é o $2j$ -ésimo termo da série u^m .

Note que os coeficientes $x_{k,2l+1}$ e $y_{k,2l-1}$ ficam indeterminados. Segundo Birkhoff [7] eles podem ser tomados como 0 que as características da forma normal não se alteram.

Temos aí os coeficientes da nossa forma normal. No apêndice temos uma tabela com alguns deles para vários α 's.

Como um primeiro teste para a forma normal, calculamos um ponto homoclínico. Neste caso temos condições de computá-lo diretamente com a aplicação de Hénon modificada.

Pelo teorema da variedade estável para mapas, as separatrizes perto do ponto fixo são tangentes aos subespaços invariantes. No mapa de Hénon esses subespaços são retas com inclinação $+45^\circ$ e -45° em relação ao eixo x , como facilmente se calcula. Tomando-se então pontos suficientemente próximos de $(0,0)$ sobre as retas $y = x$ e $y = -x$ podemos iterá-los sob o mapa e obteremos as separatrizes. No subespaço estável $y = -x$ a ação do mapa aproxima os pontos da origem. Para obter a variedade estável é só usar o mapa inverso [1]:

$$X' = X \cosh \alpha - Y \sinh \alpha$$

$$Y' = -X \sinh \alpha + Y \cosh \alpha + (X \cosh \alpha - Y \sinh \alpha)^2 \quad (8)$$

Tipicamente tomamos os pontos iniciais com $x < 10^{-7}$. Obtemos através do mapa vários pontos próximos ao cruzamento das separatrizes. Tomando-se os pares mais próximos de cada separatriz e interpolando-se uma reta por eles, o cruzamento das retas assim obtidas é o ponto homoclínico aproximado. Na tabela 1 encontramos os valores dos pontos homoclínicos. Tendo calculado

aproximadamente tais pontos vamos para a forma normal ver se conseguimos uma boa aproximação para eles.

As separatrizes no plano (ξ, η) são os próprios eixos ξ e η (podemos ver isso com o auxílio do teorema da variedade estável e com o fato de $\xi\eta = \text{cte.}$). O eixo ξ é levado para (x, y) por:

$$\begin{aligned} X &= 1/2 \left(\xi + \sum (X_{k0} + Y_{k0}) \xi^k \right) \\ Y &= 1/2 \left(\xi + \sum (X_{k0} - Y_{k0}) \xi^k \right) \end{aligned} \quad (9)$$

O eixo η por:

$$\begin{aligned} X &= 1/2 \left(\eta + \sum (X_{kk} + Y_{kk}) \eta^k \right) \\ Y &= 1/2 \left(-\eta + \sum (X_{k0} - Y_{k0}) \eta^k \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Portanto, nessa etapa só precisamos dos coeficientes x_{kk} , y_{kk} , x_{k0} , y_{k0} . Na forma normal, o procedimento para o cálculo do ponto homoclínico é análogo ao usado anteriormente. Tomamos pontos próximos ao cruzamento, interpolamos as retas e a intersecção é o ponto desejado. Na tabela 1 temos esses pontos. Notamos a excelente concordância entre eles. Nota-se também que quanto maior α menor a ordem da forma normal usada. Isso se deve ao fato de que os coeficientes vão mais rapidamente a zero à medida que α cresce. Não há necessidade de se usar mais termos.

Pode-se mostrar também que o ponto homoclínico tende a $(2, 2)$ a medida que $\alpha \rightarrow \infty$. Para α grande vê-se que a aplica-

TABELA 1

x_a e y_a são os pontos homoclínicos calculados pela aplicação de Hénon. x_b e y_b são os pontos homoclínicos calculados pela forma normal. Na última coluna temos a ordem da forma normal usada.

α	x_a	y_a	x_b	y_b	n
1.4	1.872831	1.753758	1.872848	1.753780	20
1.6	1.941903	1.885523	1.941935	1.885557	20
1.8	1.972095	1.944593	1.972109	1.944608	18
2.0	1.986109	1.972317	1.986112	1.972320	16
2.5	1.997332	1.994668	1.997333	1.994670	14
3.0	1.999411	1.998861	1.999450	1.998900	10
3.5	1.999851	1.999734	1.999882	1.999765	8
4.0	1.999984	1.999958	1.999974	1.999948	8
4.5	1.999991	1.999985	1.999994	1.999988	6
5.0	1.999998	1.999997	1.999998	1.999997	6
6.0	1.999998	1.999998	1.999999	1.999999	6
7.0	2.000004	2.000004	2.000000	2.000000	6

ção direta mapeia o ponto (x, y) em (x', y') . A aplicação inversa toma a seguinte forma para α grande:

$$x' = (x - y) e^{\alpha} / 2$$

$$y' = (-x + y) e^{\alpha} / 2 + (x - y)^2 e^{2\alpha} / 4 \quad (11)$$

Tomando um ponto $(a, -a)$ próximo da origem temos:

$$x' = a e^{\alpha}$$

$$y' = -a e^{\alpha} + a^2 e^{2\alpha}$$

Supondo que existe a tal que $x' = y'$, ou seja, que a imagem de $(a, -a)$ seja um ponto homoclínico temos:

$$a e^{\alpha} = -a e^{\alpha} + a^2 e^{2\alpha}$$

$$a = 2 e^{-\alpha}$$

$$x' = y' = 2$$

Esse comportamento é perfeitamente observável na tabela 1. Nas figs. 8 e 9 vemos as separatizes calculadas pela aplicação de Hénon e pela forma normal. Os valores de ξ e η usados estão no intervalo de $(0, 70)$.

Agora passamos ao cálculo dos pontos periódicos. As curvas invariantes nos planos (x, y) e (ξ, η) estão representadas na fig. 10. Como já vimos, as separatrizes da aplicação tem por imagens os eixos ξ e η ($\xi\eta = 0$). O movimento nesses eixos é dado por $(0, \lambda^{-1} \eta)$ e $(\lambda \xi, 0)$. Um ponto sobre as separatri-

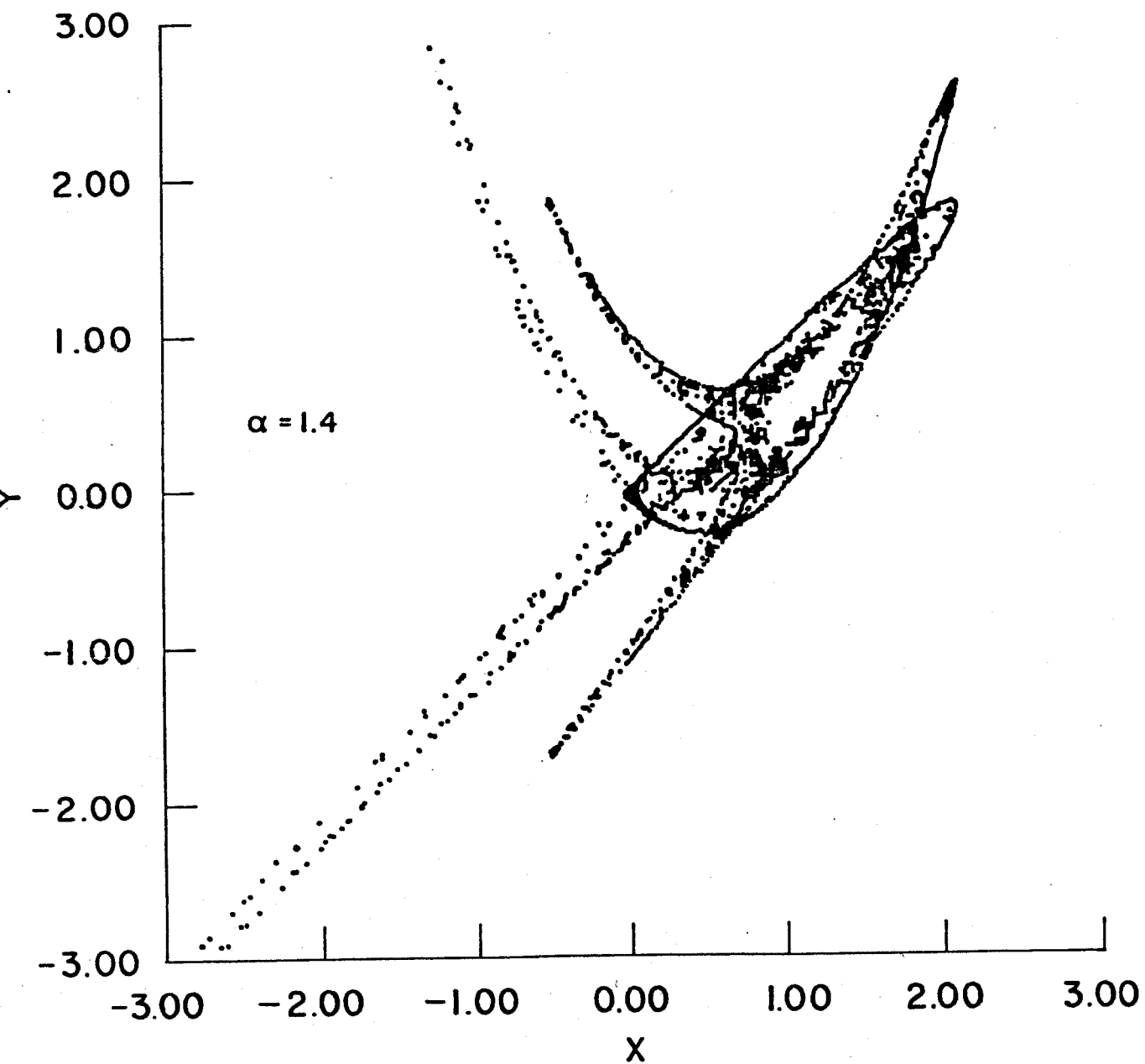


Fig. 8. As separatrizes calculada pela aplicação de Hénon.

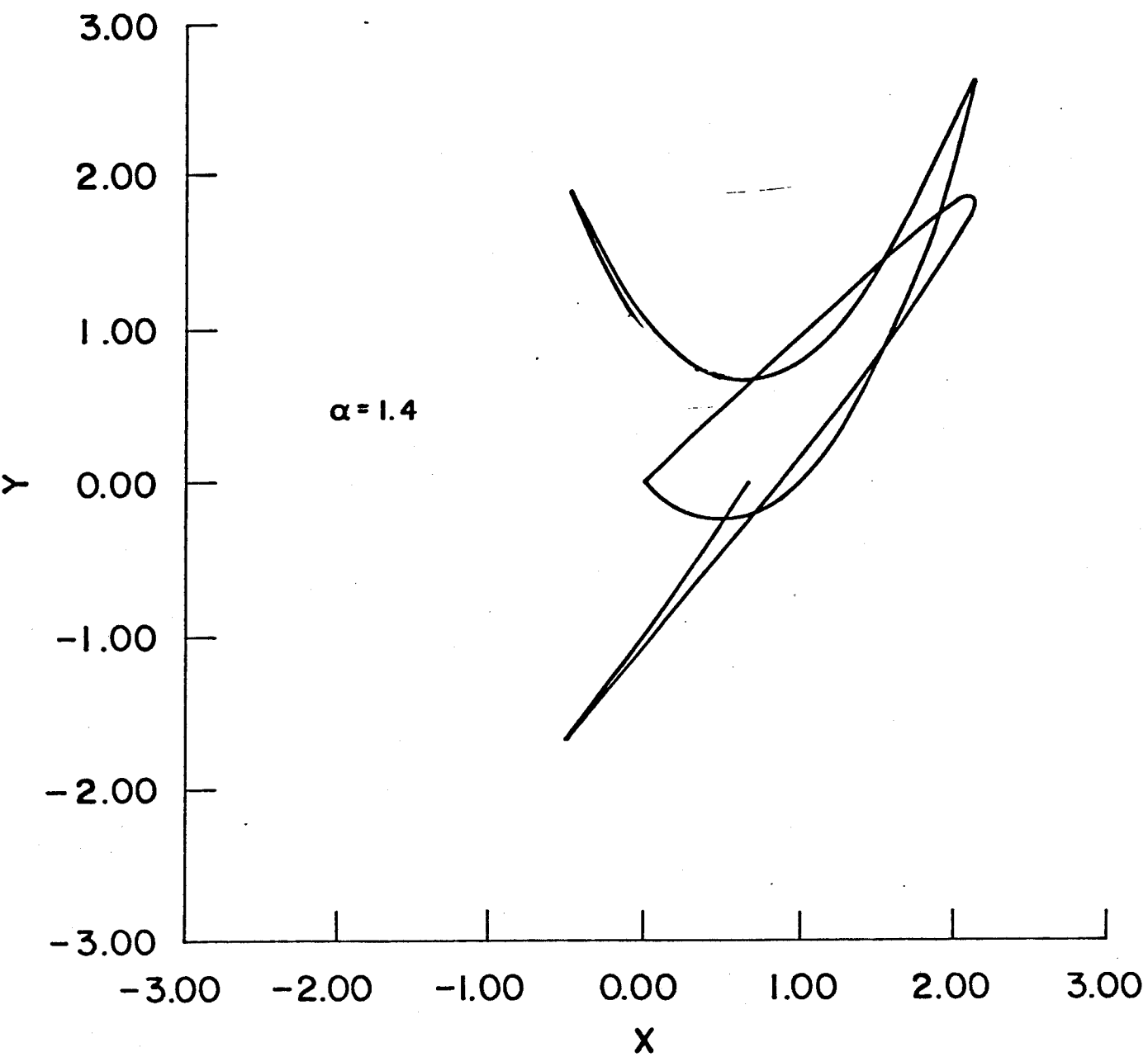


Fig. 9. As separatrizes calculadas pela forma normal.

zes leva um número infinito de iterações para alcançar o ponto fixo.

Muito importante, as imagens das curvas invariantes no plano (ξ, η) são também curvas invariantes no plano (x, y) . Analogamente às separatrizes, também as curvas invariantes se auto interceptam na aplicação original e a imagem desta intersecção no plano (ξ, η) corresponde a dois pontos (fig. 10). E, finalmente, como podemos variar continuamente o parâmetro que caracteriza a hipérbole podemos concluir que existe $\xi\eta = \text{cte.}$ tal que o ponto de intersecção retorna exatamente sobre si mesmo. Temos então um ponto periódico.

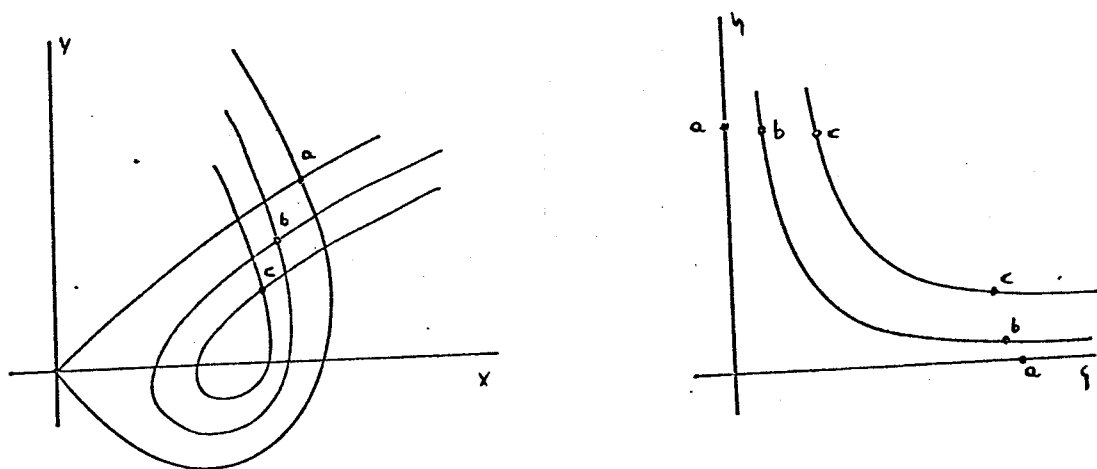


Fig. 10. As curvas invariantes da forma normal e da aplicação original. Os pontos a,b,c da aplicação original (esquerda) têm duas imagens na forma normal (direita).

O algoritmo do cálculo desses pontos é baseado nas idéias acima. Primeiro escolhemos uma hipérbole e calculamos o ponto de intersecção no plano (x,y) com a melhor precisão que pudermos. A seguir iteramos esse ponto com o mapa de Hénon e contamos o número de iterações n até ele voltar e passar do ponto inicial. Sabemos que existe uma hipérbole com uma constante menor que a escolhida que nos dará o ponto periódico de período n . Então variamos a cte e repetimos o procedimento. Se em n iterações o ponto não passou pelo ponto inicial sabemos que entre a primeira cte e esta existe uma hipérbole cuja imagem contém um ponto periódico de período n . Repetindo esse processo várias vezes conseguimos nos aproximar bastante do ponto periódico. Na tabela 2 temos os resultados para vários α 's e períodos.

Existe uma maneira explícita de calcularmos aproximadamente os pontos periódicos que descrevemos agora. Como quanto maior o período dos pontos mais perto eles estarão dos pontos homoclínicos, a idéia é linearizar a forma normal de um ponto homoclínico e a partir daí calcularmos os pontos periódicos.

O ponto homoclínico é descrito pelas coordenadas $(0, \eta^*)$ e $(\xi^*, 0)$ de modo que:

$$\begin{pmatrix} X(0, \eta^*) \\ Y(0, \eta^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\xi^*, 0) \\ Y(\xi^*, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$$

Se tomarmos ξ_1 e η_1 na vizinhança de $(0, \eta^*)$ então, para que tenhamos um ponto periódico de período n , tomamos ξ_n e η_n na vizinhança de $(\xi^*, 0)$.

Expandindo (3) linearmente em torno do ponto homoclínico podemos achar uma transformação linear entre (ξ, η) e (ξ_n, η_n) .

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(0, \eta^*) \\ Y(0, \eta^*) \end{pmatrix} + \frac{\partial (X, Y)}{\partial (\xi, \eta)} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta - \eta^* \end{pmatrix} \quad (12)$$

E

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\xi^*, 0) \\ Y(\xi^*, 0) \end{pmatrix} + \frac{\partial (X, Y)}{\partial (\xi_n, \eta_n)} \begin{pmatrix} \xi_n - \xi^* \\ \eta_n \end{pmatrix} \quad (13)$$

Fazendo (12) = (13) e lembrando que, a partir de (4) próximo das separatrizes, podemos aproximar $\xi_n = \lambda^n \xi$ e $\eta_n = \lambda^{-n} \eta$ temos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial (X, Y)}{\partial (\xi, \eta)} (0, \eta^*) - \frac{\partial (X, Y)}{\partial (\xi_n, \eta_n)} (\xi^*, 0) \right) \cdot \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \\ & = \frac{\partial (X, Y)}{\partial (\xi, \eta)} (0, \eta^*) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^* \end{pmatrix} - \frac{\partial (X, Y)}{\partial (\xi_n, \eta_n)} (\xi^*, 0) \begin{pmatrix} \xi^* \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Isto resulta no sistema de equações:

$$\begin{aligned} (X_\xi - \lambda^n X_{\xi_n}) \xi + (X_\eta - \lambda^{-n} X_{\eta_n}) \eta &= -X_{\xi_n} \xi^* + X_\eta \eta^* \\ (Y_\xi - \lambda^n Y_{\xi_n}) \xi + (Y_\eta - \lambda^{-n} Y_{\eta_n}) \eta &= -Y_{\xi_n} \xi^* + Y_\eta \eta^* \end{aligned} \quad (15)$$

Calculando ξ^* e η^* que nos dão as coordenadas do ponto homoclínico, resolvemos as equações acima para ξ e η e teremos os pontos periódicos aproximados. Como quanto maior o pe-

ríodo mais próximos do ponto homoclínico eles estão, é de se esperar que o cálculo funcione melhor para períodos grandes. É o que se vê na tabela 3. Note também que os valores coincidem com os calculados anteriormente pelo outro método.

Comparando os dois métodos podemos dizer que eles são complementares. Em ambos utilizamos para o cálculo um computador VAX-11/780 e o programa foi escrito em FORTRAN utilizando variáveis em dupla precisão. O primeiro método tem a desvantagem de consumir muito tempo de CPU no computador para o cálculo dos pontos periódicos. Tipicamente, cada ponto leva 1 min 20 s para ser calculado. Mas é mais recomendável para o cálculo de pontos com período baixo. Já o cálculo explícito dos pontos periódicos é bem mais rápido, tomando em torno de 1 s de CPU para cada ponto. Mas só serve para o cálculo de períodos grandes.

Um outro problema é que não conseguimos calcular os pontos periódicos com uma precisão melhor que 10^{-7} em nenhum dos métodos. A tabela a seguir mostra que o cálculo dos coeficientes está muito bom. O primeiro conjunto de valores é a iteração de um ponto sob a ação da forma normal. O valor de alfa usado é 2.0, a hipérbole na qual iteramos tem $cte = 0.0001$ e os valores iniciais são $\xi = 0.001$ e $\eta = 0.100$.

X	0.0503404753366991	Y	0.0493266743258072
X	0.0104897572357972	Y	0.0031087597000299
X	0.0281894819994809	Y	-0.0255544759629738
X	0.1987368648257148	Y	-0.1588839140966795
X	1.3239367539877882	Y	0.4342652849466618

Agora tomamos o último ponto e o iteramos na direção contrária sob a ação da aplicação de Hénon:

X	1.3239367539877882	Y	0.4342652849466618
X	0.1987368648257148	Y	-0.1588839140966795
X	0.0281894819994811	Y	-0.0255544759629736
X	0.0104897572357988	Y	0.0031087597000314
X	0.0503404753367105	Y	0.0493266743258185

Por esses dados percebe-se que a iteração sob a forma normal é equivalente à da aplicação de Hénon com um alto grau de precisão. Tentaremos no futuro estender essa precisão ao cálculo dos pontos periódicos.

A convergência da forma normal não foi provada explicitamente para o mapa estudado, embora Moser [6] tenha provado a existência de um raio de convergência.

A forma normal não havia ainda sido utilizada no cálculo das curvas invariantes de um mapa com um ponto fixo hiperbólico. O método parece promissor para o cálculo com outros tipos de mapas. Concluindo, podemos dizer que a utilização da forma normal de Birkhoff para a obtenção de curvas invariantes e o cálculo de pontos periódicos teve êxito.

TABELAS 2,3,4

Nas tabelas 2 e 3 apresentamos os pontos periódicos calculados. Os dados são apresentados no seguinte formato:

```

PERIODO  NN
CSI      NNNNNNNNNN      ETA  NNNNNNNNNN
X        NNNNNNNNNN      Y    NNNNNNNNNN
X        NNNNNNNNNN      Y    NNNNNNNNNN
    
```

onde temos o período da órbita, as coordenadas do ponto periódico na forma normal. O primeiro par (X,Y) é o ponto inicial da órbita e o segundo par o ponto final calculado pela aplicação de Hénon na tabela 2 e pela forma normal na tabela 3. Na tabela 3 temos ainda as coordenadas do ponto homoclínico.

Na tabela 2 os pontos periódicos foram calculados conforme o método de aproximações sucessivas descrito na pág. 38. Na tabela 3 eles foram calculados pelo método explícito.

Na tabela 4 temos todos os pontos (X,Y) da órbita, calculados pela aplicação de Hénon. Para o cálculo desse ponto periódico usamos o mesmo método da tabela 2.

Em todas as tabelas usamos a forma normal até ordem 20.

TABELA 2

ALFA= 1.5000000000000000

ORDEM=

20

periodo 6
 CSIFIX 0.590161133E+01
 X 0.191268573E+01 Y
 X 0.191268568E+01 Y

ETAFIX 0.734027630E-03
 0.182918336E+01
 0.182918331E+01

periodo 7
 CSIFIX 0.590698242E+01
 X 0.191423975E+01 Y
 X 0.191423982E+01 Y

ETAFIX 0.162983959E-03
 0.183215691E+01
 0.183215697E+01

periodo 8
 CSIFIX 0.590783691E+01
 X 0.191458376E+01 Y
 X 0.191458372E+01 Y

ETAFIX 0.363195821E-04
 0.183281549E+01
 0.183281546E+01

periodo 9
 CSIFIX 0.590808105E+01
 X 0.191466036E+01 Y
 X 0.191466034E+01 Y

ETAFIX 0.810106185E-05
 0.183296215E+01
 0.183296213E+01

periodo 10
 CSIFIX 0.590844727E+01
 X 0.191467744E+01 Y
 X 0.191467746E+01 Y

ETAFIX 0.180719848E-05
 0.183299486E+01
 0.183299487E+01

TABELA 2

ALFA= 2.0000000000000000

ORDEM=

20

período . 7

CSIFIX 0.483233643E+01

ETAFIX 0.401835092E-05

X 0.198610629E+01 Y

0.197230910E+01

X 0.198610627E+01 Y

0.197230907E+01

período B

CSIFIX 0.483233643E+01

ETAFIX 0.543732920E-06

X 0.198611160E+01 Y

0.197231965E+01

X 0.198611161E+01 Y

0.197231966E+01

período 9

CSIFIX 0.483233643E+01

ETAFIX 0.735209274E-07

X 0.198611232E+01 Y

0.197232108E+01

X 0.198611239E+01 Y

0.197232114E+01

período 10

CSIFIX 0.483233643E+01

ETAFIX 0.988539180E-08

X 0.198611242E+01 Y

0.197232127E+01

X 0.198611249E+01 Y

0.197232134E+01

período 11

CSIFIX 0.483233643E+01

ETAFIX 0.127327291E-08

X 0.198611243E+01 Y

0.197232130E+01

X 0.198611237E+01 Y

0.197232124E+01

TABELA 2

ALFA= 2.8000000000000000

ORDEM=

20

período 3

CSIFIX 0.428723145E+01

ETAFIX 0.966241874E-03

X 0.199785214E+01 Y

0.199570658E+01

X 0.199785207E+01 Y

0.199570651E+01

período 4

CSIFIX 0.429260254E+01

ETAFIX 0.587070593E-04

X 0.199890393E+01 Y

0.199780846E+01

X 0.199890387E+01 Y

0.199780841E+01

período 5

CSIFIX 0.429278564E+01

ETAFIX 0.356969037E-05

X 0.199896781E+01 Y

0.199793615E+01

X 0.199896783E+01 Y

0.199793618E+01

período 6

CSIFIX 0.429290771E+01

ETAFIX 0.216920143E-06

X 0.199897169E+01 Y

0.199794391E+01

X 0.199897172E+01 Y

0.199794394E+01

período 7

CSIFIX 0.429290771E+01

ETAFIX 0.130593955E-07

X 0.199897193E+01 Y

0.199794438E+01

X 0.199897195E+01 Y

0.199794441E+01

TABELA 3

ALFA 0.150000000E+01

PONTOS HOMOCLINICOS

XHOM 0.191468235E+01

YHOM 0.183300425E+01

PERIODO 2

ETA 0.220446965E+01

X 0.151554232E+01

X 0.127040595E+01

CSI 0.207084743E+00

Y 0.117538788E+01

Y 0.879521176E+00

PERIODO 3

ETA 0.468092290E+01

X 0.174983706E+01

X 0.144262572E+01

CSI 0.597543456E-01

Y 0.155565531E+01

Y 0.124763433E+01

PERIODO 5

ETA 0.583834786E+01

X 0.190583669E+01

X 0.187067298E+01

CSI 0.325156104E-02

Y 0.181611056E+01

Y 0.178587259E+01

PERIODO 7

ETA 0.590474473E+01

X 0.191424081E+01

X 0.191175849E+01

CSI 0.162651839E-03

Y 0.183215894E+01

Y 0.183003394E+01

PERIODO 10

ETA 0.590821078E+01

X 0.191467743E+01

X 0.191463801E+01

CSI 0.180734232E-05

Y 0.183299481E+01

Y 0.183296111E+01

PERIODO 15

ETA 0.590824971E+01

X 0.191468233E+01

X 0.191468230E+01

CSI 0.999615544E-09

Y 0.183300420E+01

Y 0.183300420E+01

PERIODO 20

ETA 0.590824974E+01

X 0.191468233E+01

X 0.191468233E+01

CSI 0.552871734E-12

Y 0.183300420E+01

Y 0.183300424E+01

TABELA 3

ALFA 0.200000000E+01

PONTOS HOMOCLINICOS

XHDM 0.198611243E+01

YHDM 0.197232130E+01

PERIODO 2

ETA 0.371569004E+01

CSI 0.790093950E-01

X 0.183964473E+01

Y 0.166389537E+01

X 0.160062439E+01

Y 0.147287042E+01

PERIODO 3

ETA 0.466269965E+01

CSI 0.117695301E-01

X 0.196760603E+01

Y 0.193511203E+01

X 0.188880311E+01

Y 0.185835132E+01

PERIODO 5

ETA 0.482920446E+01

CSI 0.219317400E-03

X 0.198577691E+01

Y 0.197165474E+01

X 0.198320024E+01

Y 0.196912215E+01

PERIODO 7

ETA 0.483231725E+01

CSI 0.401823468E-05

X 0.198610628E+01

Y 0.197230906E+01

X 0.198604012E+01

Y 0.197224405E+01

PERIODO 10

ETA 0.483237520E+01

CSI 0.996026780E-08

X 0.198611241E+01

Y 0.197232123E+01

X 0.198611217E+01

Y 0.197232103E+01

PERIODO 15

ETA 0.483237535E+01

CSI 0.452195465E-12

X 0.198611242E+01

Y 0.197232126E+01

X 0.198611242E+01

Y 0.197232129E+01

PERIODO 20

ETA 0.483237535E+01

CSI 0.205296424E-16

X 0.198611242E+01

Y 0.197232126E+01

X 0.198611242E+01

Y 0.197232129E+01

TABELA 3

ALFA 0.280000000E+01

PONTOS HOMOCLINICOS

XHOM 0.199897194E+01

YHOM 0.199794441E+01

PERIODO 2

ETA 0.412375632E+01

X 0.197987480E+01

X 0.191664061E+01

CSI 0.155430791E-01

Y 0.195866874E+01

Y 0.189753187E+01

PERIODO 3

ETA 0.428234380E+01

X 0.199785106E+01

X 0.199156777E+01

CSI 0.964055844E-03

Y 0.199569955E+01

Y 0.198942974E+01

PERIODO 5

ETA 0.429281619E+01

X 0.199896781E+01

X 0.199892887E+01

CSI 0.356961495E-05

Y 0.199793616E+01

Y 0.199789726E+01

PERIODO 7

ETA 0.429285497E+01

X 0.199897193E+01

X 0.199897173E+01

CSI 0.132000136E-07

Y 0.199794440E+01

Y 0.199794419E+01

PERIODO 10

ETA 0.429285511E+01

X 0.199897195E+01

X 0.199897195E+01

CSI 0.296825179E-11

Y 0.199794443E+01

Y 0.199794442E+01

PERIODO 15

ETA 0.429285511E+01

X 0.199897195E+01

X 0.199897195E+01

CSI 0.246818661E-17

Y 0.199794443E+01

Y 0.199794442E+01

PERIODO 20

ETA 0.429285511E+01

X 0.199897195E+01

X 0.199897195E+01

CSI 0.205236805E-23

Y 0.199794443E+01

Y 0.199794442E+01

ALFA= 1.8000000000000000

ORDEM=

20

periodo	6		
CSIFIX	0.513049316E+01	ETAFIX	0.104751530E-03
X	0.197192214E+01	Y	0.194423847E+01
X	0.407406735E+00	Y	-.239930259E+00
X	0.717460441E-01	Y	-.626943918E-01
X	0.233462530E-01	Y	0.272523264E-03
X	0.717460412E-01	Y	0.678418836E-01
X	0.407406718E+00	Y	0.405910490E+00
X	0.197192208E+01	Y	0.194423841E+01

periodo	7		
CSIFIX	0.513122559E+01	ETAFIX	0.173052961E-04
X	0.197207867E+01	Y	0.194454714E+01
X	0.406984977E+00	Y	-.240428913E+00
X	0.699788824E-01	Y	-.644174882E-01
X	0.135220658E-01	Y	-.950298073E-02
X	0.135220658E-01	Y	0.968582688E-02
X	0.699788819E-01	Y	0.693145316E-01
X	0.406984974E+00	Y	0.406065682E+00
X	0.197207866E+01	Y	0.194454712E+01

periodo	8		
CSIFIX	0.513122559E+01	ETAFIX	0.286019973E-05
X	0.197210452E+01	Y	0.194459812E+01
X	0.406915310E+00	Y	-.240511282E+00
X	0.696868769E-01	Y	-.647022203E-01
X	0.118969258E-01	Y	-.111201770E-01
X	0.383545281E-02	Y	0.735541048E-05
X	0.118969262E-01	Y	0.112617143E-01
X	0.696868791E-01	Y	0.695584834E-01
X	0.406915322E+00	Y	0.406091364E+00
X	0.197210457E+01	Y	0.194459816E+01

periodo	9		
CSIFIX	0.513122559E+01	ETAFIX	0.472719489E-06
X	0.197210879E+01	Y	0.194460655E+01
X	0.406903795E+00	Y	-.240524896E+00
X	0.696386129E-01	Y	-.647492824E-01
X	0.116282664E-01	Y	-.113875263E-01
X	0.223260817E-02	Y	-.159422792E-02
X	0.223260823E-02	Y	0.159921254E-02
X	0.116282668E-01	Y	0.115227433E-01
X	0.696386154E-01	Y	0.695988213E-01
X	0.406903810E+00	Y	0.406095609E+00
X	0.197210885E+01	Y	0.194460660E+01

periodo	10		
CSIFIX	0.513122559E+01	ETAFIX	0.780565294E-07
X	0.197210950E+01	Y	0.194460794E+01
X	0.406901892E+00	Y	-.240527146E+00
X	0.696306350E-01	Y	-.647570615E-01
X	0.115838568E-01	Y	-.114317194E-01
X	0.196761564E-02	Y	-.185901426E-02
X	0.633378220E-03	Y	0.200594524E-06
X	0.196761571E-02	Y	0.186288584E-02
X	0.115838572E-01	Y	0.115659055E-01
X	0.696306373E-01	Y	0.696054892E-01
X	0.406901905E+00	Y	0.406096309E+00
X	0.197210955E+01	Y	0.194460798E+01

APENDICE

Coeficientes x_{kl} e y_{kl}

ALFA= 1.5000000000000000

$X(2,0) = -0.7180422919721706D-01$
 $X(2,1) = 0.6436084583944341D+00$
 $X(2,2) = 0.2528084481756214D+00$
 $X(3,0) = 0.1807541000792342D-02$
 $X(3,1) = 0.0000000000000000D+00$
 $X(3,2) = 0.3779264162052699D+00$
 $X(3,3) = -0.3458361472106466D-01$
 $X(4,0) = -0.2304065313039052D-04$
 $X(4,1) = -0.6153280899387841D-01$
 $X(4,2) = 0.4578359738491601D+00$
 $X(4,3) = 0.1665339049058043D+00$
 $X(4,4) = 0.2052147855862061D-02$
 $X(5,0) = 0.1748181774510946D-06$
 $X(5,1) = 0.3611987606836637D-02$
 $X(5,2) = 0.0000000000000000D+00$
 $X(5,3) = 0.4001013593479146D+00$
 $X(5,4) = -0.6724844725507626D-01$
 $X(5,5) = -0.7036055141410834D-04$
 $X(6,0) = -0.8743177234090203D-09$
 $X(6,1) = -0.7603587546180350D-04$
 $X(6,2) = -0.8133714704339811D-01$
 $X(6,3) = 0.5661346763067239D+00$
 $X(6,4) = 0.1819190004726488D+00$
 $X(6,5) = 0.6740757526685798D-02$
 $X(6,6) = 0.1579972716749455D-05$
 $X(7,0) = 0.3086300246907480D-11$
 $X(7,1) = 0.8278884958089458D-06$
 $X(7,2) = 0.6803484303531955D-02$
 $X(7,3) = 0.0000000000000000D+00$
 $X(7,4) = 0.5582493475356606D+00$
 $X(7,5) = -0.1238483700166427D+00$
 $X(7,6) = -0.3329089485799818D-03$
 $X(7,7) = -0.2500561726596363D-07$
 $X(8,0) = -0.8071674795018493D-14$
 $X(8,1) = -0.5486854977062082D-08$
 $X(8,2) = -0.1926086213279315D-03$
 $X(8,3) = -0.1265362916808499D+00$
 $X(8,4) = 0.8544644049895644D+00$
 $X(8,5) = 0.2442900200543462D+00$
 $X(8,6) = 0.1700133413826609D-01$
 $X(8,7) = 0.9913462529267665D-05$
 $X(8,8) = 0.2931192577838602D-09$
 $X(9,0) = 0.1622023326245743D-16$
 $X(9,1) = 0.2438461701555296D-10$
 $X(9,2) = 0.2689465095484800D-05$
 $X(9,3) = 0.1295126580143326D-01$
 $X(9,4) = 0.0000000000000000D+00$
 $X(9,5) = 0.8908166884949403D+00$
 $X(9,6) = -0.2314321332114663D+00$
 $X(9,7) = -0.1080514348187807D-02$
 $X(9,8) = -0.1975600554072736D-06$
 $X(9,9) = -0.2639905268718770D-11$

$Y(2,0) = 0.2808448175621388D-02$
 $Y(2,1) = 0.1436084583944341D+00$
 $Y(2,2) = -0.3218042291972171D+00$
 $Y(3,0) = -0.8572421026682976D-04$
 $Y(3,1) = 0.1881584832163357D-01$
 $Y(3,2) = 0.0000000000000000D+00$
 $Y(3,3) = 0.1660543151159018D-01$
 $Y(4,0) = 0.1135010904309695D-05$
 $Y(4,1) = 0.1850024573098554D-02$
 $Y(4,2) = 0.1021570141666754D+00$
 $Y(4,3) = -0.2757709175350647D+00$
 $Y(4,4) = -0.2074053498088142D-02$
 $Y(5,0) = -0.8683181865445851D-08$
 $Y(5,1) = -0.1666923350109531D-03$
 $Y(5,2) = 0.1991987373192992D-01$
 $Y(5,3) = 0.0000000000000000D+00$
 $Y(5,4) = 0.7254871044321354D-01$
 $Y(5,5) = 0.7052668640969399D-04$
 $Y(6,0) = 0.4350683868875373D-10$
 $Y(6,1) = 0.3728207630966283D-05$
 $Y(6,2) = 0.2020937546491156D-02$
 $Y(6,3) = 0.1263217209898988D+00$
 $Y(6,4) = -0.3645278029168774D+00$
 $Y(6,5) = -0.6844531384995290D-02$
 $Y(6,6) = -0.1580803527634175D-05$
 $Y(7,0) = -0.1536398225081304D-12$
 $Y(7,1) = -0.4108422812295803D-07$
 $Y(7,2) = -0.3069894167553338D-03$
 $Y(7,3) = 0.2779359843207337D-01$
 $Y(7,4) = 0.0000000000000000D+00$
 $Y(7,5) = 0.1366516351849188D+00$
 $Y(7,6) = 0.3339940570107183D-03$
 $Y(7,7) = 0.2500854992638803D-07$
 $Y(8,0) = 0.4018545098529390D-15$
 $Y(8,1) = 0.2729815588177951D-09$
 $Y(8,2) = 0.9403172183535763D-05$
 $Y(8,3) = 0.2713816987110875D-02$
 $Y(8,4) = 0.1906567795264543D+00$
 $Y(8,5) = -0.5670963154271743D+00$
 $Y(8,6) = -0.1733807555568890D-01$
 $Y(8,7) = -0.9920466520497605D-05$
 $Y(8,8) = -0.2931269276041454D-09$
 $Y(9,0) = -0.8075531474060565D-18$
 $Y(9,1) = -0.1213850932957572D-11$
 $Y(9,2) = -0.1333460640227035D-06$
 $Y(9,3) = -0.5736629039484606D-03$
 $Y(9,4) = 0.4435115137333175D-01$
 $Y(9,5) = 0.0000000000000000D+00$
 $Y(9,6) = 0.2601331274567055D+00$
 $Y(9,7) = 0.1085007658612257D-02$
 $Y(9,8) = 0.1975905982188091D-06$
 $Y(9,9) = 0.2639920681398885D-11$

APENDICE (cont.)

ALFA= 2. 0000000000000000

X(2 0)= -0. 3912941068741641D-01
X(2 1)= 0. 5782588213748328D+00
X(2 2)= 0. 2506212279142111D+00
X(3 0)= 0. 3592305214768833D-03
X(3 1)= 0. 0000000000000000D+00
X(3 2)= 0. 3147699425897313D+00
X(3 3)= -0. 1926055258218671D-01
X(4 0)= -0. 1359506841748704D-05
X(4 1)= -0. 2646761096115959D-01
X(4 2)= 0. 3108290025783531D+00
X(4 3)= 0. 1456656991640455D+00
X(4 4)= 0. 5471295377126333D-03
X(5 0)= 0. 2503252217363784D-08
X(5 1)= 0. 5826874662413754D-03
X(5 2)= 0. 0000000000000000D+00
X(5 3)= 0. 2612701063837009D+00
X(5 4)= -0. 3091431866573042D-01
X(5 5)= -0. 745963227277901D-05
X(6 0)= -0. 2635043608754853D-11
X(6 1)= -0. 3646131541060937D-05
X(6 2)= -0. 2703147631495232D-01
X(6 3)= 0. 2905630424551704D+00
X(6 4)= 0. 1336094788197967D+00
X(6 5)= 0. 1465725186895487D-02
X(6 6)= 0. 5803811113281060D-07
X(7 0)= 0. 1745111905122420D-14
X(7 1)= 0. 9713618724663058D-08
X(7 2)= 0. 8677786142511937D-03
X(7 3)= 0. 0000000000000000D+00
X(7 4)= 0. 2810202963696734D+00
X(7 5)= -0. 4562548221745827D-01
X(7 6)= -0. 2894255676091652D-04
X(7 7)= -0. 2840236109717635D-09
X(8 0)= -0. 7728632059296766D-18
X(8 1)= -0. 1360582489251501D-10
X(8 2)= -0. 7367806862086389D-05
X(8 3)= -0. 3222387912645501D-01
X(8 4)= 0. 3312854590836910D+00
X(8 5)= 0. 1468702796402303D+00
X(8 6)= 0. 2958603096302347D-02
X(8 7)= 0. 2996700839949387D-06
X(8 8)= 0. 9294478438166365D-12
X(9 0)= 0. 2396494673595567D-21
X(9 1)= 0. 1136706151064284D-13
X(9 2)= 0. 2542767530862532D-07
X(9 3)= 0. 1288474696823857D-02
X(9 4)= 0. 0000000000000000D+00
X(9 5)= 0. 3429143254398890D+00
X(9 6)= -0. 6722506731154575D-01
X(9 7)= -0. 7575366055117196D-04
X(9 8)= -0. 1850028860744915D-08
X(9 9)= -0. 2129551417877927D-14

Y(2 0)= 0. 6212279142111464D-03
Y(2 1)= 0. 7825882137483283D-01
Y(2 2)= -0. 2891294106874164D+00
Y(3 0)= -0. 6461195584074863D-05
Y(3 1)= 0. 5765212601501108D-02
Y(3 2)= 0. 0000000000000000D+00
Y(3 3)= 0. 1961332190807952D-01
Y(4 0)= 0. 2483964258313435D-07
Y(4 1)= 0. 3610691688685047D-03
Y(4 2)= 0. 4206613110209524D-01
Y(4 3)= -0. 1955706621966800D+00
Y(4 4)= -0. 54846426049117989D-03
Y(5 0)= -0. 4583356475861556D-10
Y(5 1)= -0. 1037059857942160D-04
Y(5 2)= 0. 4785328920945029D-02
Y(5 3)= 0. 0000000000000000D+00
Y(5 4)= 0. 3181365770427928D-01
Y(5 5)= 0. 7462089690930506D-05
Y(6 0)= 0. 4826035620945625D-13
Y(6 1)= 0. 6654382053616008D-07
Y(6 2)= 0. 3311847864478288D-03
Y(6 3)= 0. 3932343164876241D-01
Y(6 4)= -0. 1997370949280979D+00
Y(6 5)= -0. 1470954448526021D-02
Y(6 6)= -0. 5804069791606315D-07
Y(7 0)= -0. 3196264668510208D-16
Y(7 1)= -0. 1778292147873259D-09
Y(7 2)= -0. 1530564416398788D-04
Y(7 3)= 0. 5147066268712362D-02
Y(7 4)= 0. 0000000000000000D+00
Y(7 5)= 0. 4737910697644067D-01
Y(7 6)= 0. 2895588932036247D-04
Y(7 7)= 0. 2840253241210219D-09
Y(8 0)= 0. 1415547183509394D-19
Y(8 1)= 0. 2491842810979689D-12
Y(8 2)= 0. 1343203727671967D-06
Y(8 3)= 0. 3640550253458177D-03
Y(8 4)= 0. 4483461143726258D-01
Y(8 5)= -0. 2381040505905365D+00
Y(8 6)= -0. 2972385433059007D-02
Y(8 7)= -0. 2996882366051130D-06
Y(8 8)= -0. 9294486025243706D-12
Y(9 0)= -0. 4389332619127851D-23
Y(9 1)= -0. 2081933210795998D-15
Y(9 2)= -0. 4654465769683424D-09
Y(9 3)= -0. 2255149774125438D-04
Y(9 4)= 0. 6280694954530880D-02
Y(9 5)= 0. 0000000000000000D+00
Y(9 6)= 0. 7034833481109899D-01
Y(9 7)= 0. 7579883180315044D-04
Y(9 8)= 0. 1850043725211673D-08
Y(9 9)= 0. 2129551653138062D-14

APENDICE (cont.)

ALFA= 2. 8000000000000000

X(2 0)= -0. 1618683830748706D-01
X(2 1)= 0. 5323736766149741D+00
X(2 2)= 0. 2500562294752163D+00
X(3 0)= 0. 2993509245505559D-04
X(3 1)= 0. 0000000000000000D+00
X(3 2)= 0. 2753264920439546D+00
X(3 3)= -0. 8065414704197374D-02
X(4 0)= -0. 1798478116929300D-07
X(4 1)= -0. 9194361757904164D-02
X(4 2)= 0. 2321546353762047D+00
X(4 3)= 0. 1331840962851548D+00
X(4 4)= 0. 7996160401182231D-04
X(5 0)= 0. 3411830662532302D-11
X(5 1)= 0. 4173229043555266D-04
X(5 2)= 0. 0000000000000000D+00
X(5 3)= 0. 1928579621850133D+00
X(5 4)= -0. 1121939092123433D-01
X(5 5)= -0. 2495052845974314D-06
X(6 0)= -0. 3064982619047091D-15
X(6 1)= -0. 4104066878358286D-07
X(6 2)= -0. 7822377705199762D-02
X(6 3)= 0. 1774780989595329D+00
X(6 4)= 0. 1084069229793326D+00
X(6 5)= 0. 1824500439457758D-03
X(6 6)= 0. 3685958174907792D-09
X(7 0)= 0. 1490529698492618D-19
X(7 1)= 0. 1141365111765638D-10
X(7 2)= 0. 5265255831866492D-04
X(7 3)= 0. 0000000000000000D+00
X(7 4)= 0. 1733978080688292D+00
X(7 5)= -0. 141280695503755D-01
X(7 6)= -0. 8346693155560894D-06
X(7 7)= -0. 2947731400681745D-12
X(8 0)= -0. 4102720714631067D-24
X(8 1)= -0. 1367258420464949D-14
X(8 2)= -0. 7008327795586126D-07
X(8 3)= -0. 7747038085043594D-02
X(8 4)= 0. 1659404180414378D+00
X(8 5)= 0. 1039306333803644D+00
X(8 6)= 0. 3115284848135635D-03
X(8 7)= 0. 1644268969224181D-08
X(8 8)= 0. 1334270235822519D-15
X(9 0)= 0. 6568315430086649D-29
X(9 1)= 0. 8374861654748266D-19
X(9 2)= 0. 2553551988623409D-10
X(9 3)= 0. 6574691941059930D-04
X(9 4)= 0. 0000000000000000D+00
X(9 5)= 0. 1760268910325848D+00
X(9 6)= -0. 1761225248035968D-01
X(9 7)= -0. 18673767995515117D-05
X(9 8)= -0. 1656246250981625D-11
X(9 9)= -0. 3512775501445614D-19

Y(2 0)= 0. 5622947521634395D-04
Y(2 1)= 0. 3237367661497411D-01
Y(2 2)= -0. 2661868383074871D+00
Y(3 0)= -0. 1102880620162210D-06
Y(3 1)= 0. 1018119845115866D-02
Y(3 2)= 0. 0000000000000000D+00
Y(3 3)= 0. 8095239508590413D-02
Y(4 0)= 0. 6649037016141733D-10
Y(4 1)= 0. 2994875135482084D-04
Y(4 2)= 0. 1411733791596165D-01
Y(4 3)= -0. 1511980313944169D+00
Y(4 4)= -0. 7997952230262144D-04
Y(5 0)= -0. 1261631293142293D-13
Y(5 1)= -0. 1534161511944791D-06
Y(5 2)= 0. 7131624607987979D-03
Y(5 3)= 0. 0000000000000000D+00
Y(5 4)= 0. 1128551337615130D-01
Y(5 5)= 0. 2495086838117810D-06
Y(6 0)= 0. 113387862902199D-17
Y(6 1)= 0. 1517124513426206D-07
Y(6 2)= 0. 2437717469282502D-04
Y(6 3)= 0. 1079245431233383D-01
Y(6 4)= -0. 1286362382721148D+00
Y(6 5)= -0. 1825105934508348D-03
Y(6 6)= -0. 3685961228556533D-09
Y(7 0)= -0. 5511775412722039D-22
Y(7 1)= -0. 4220531559603127D-13
Y(7 2)= -0. 1931899575722515D-06
Y(7 3)= 0. 6412014629753948D-03
Y(7 4)= 0. 0000000000000000D+00
Y(7 5)= 0. 1423864218791254D-01
Y(7 6)= 0. 8346853491666664D-06
Y(7 7)= 0. 2947731549183537D-12
Y(8 0)= 0. 1517130202301972D-26
Y(8 1)= 0. 5055929570096027D-17
Y(8 2)= 0. 2590448819412978D-09
Y(8 3)= 0. 2337060342845544D-04
Y(8 4)= 0. 1009084721315468D-01
Y(8 5)= -0. 1273973048307780D+00
Y(8 6)= -0. 3116650149673169D-03
Y(8 7)= -0. 1644270834011521D-08
Y(8 8)= -0. 1334270239910068D-15
Y(9 0)= -0. 2428873530280759D-31
Y(9 1)= -0. 3096909495030820D-21
Y(9 2)= -0. 9442450316982839D-13
Y(9 3)= -0. 2408333935747139D-06
Y(9 4)= 0. 6509234534746698D-03
Y(9 5)= 0. 0000000000000000D+00
Y(9 6)= 0. 1777970321554515D-01
Y(9 7)= 0. 1867423851726258D-05
Y(9 8)= 0. 1656246362935250D-11
Y(9 9)= 0. 3512775502100017D-19

BIBLIOGRAFIA

- [1] T.J.S.B. Coutinho , Tese de Mestrado, UNICAMP (1984)
- [2] M. Hénon e C. Heiles . Astronomical Journal, 69, 73(1964)
- [3] A.J. Lichtenberg e M.A. Lieberman. Regular and Stochastic Motion, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [4] J. Moser. Stable and Random Motions in Dynamical Systems. Princeton University Press, Princeton, 1973
- [5] A.M. Ozório de Almeida. Notas de Aula, UNICAMP (1985)
- [6] J. Moser. Comm. on Pure and Applied Math., IX , 673 (1956)
- [7] G.D. Birkhoff. Acta Math., 43 ,1 (1920)