

Este exemplar corresponde à avaliação final de Tese defendida pelo aluno Ricardo Egydio de Carvalho pela comissão julgadora.

14/11/85

Alfredo Miguel Ozório de Almeida

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

Título : "ESPECTRO DE ENERGIA EM UM SISTEMA DINÂMICO
RESSONANTE"

Autor : Ricardo Egydio de Carvalho

Orientador : Alfredo Miguel Ozório de Almeida

Tese apresentada no I.F.G.W. para a obtenção de título de Mestre em Física.

UNICAMP - CAMPINAS

Este trabalho teve apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

*Ao "Flavião e a Viola" quem sempre
seguraram todas as pontas.*

AGRADECIMENTOS

A todos professores do I.F.G.W. que contribuíram à minha formação através de interação nos cursos.

À "Rosilda" pelos toques sobre programação e utilização do computador.

À Lori e à Ana Toma que fizeram o trabalho de dactilografia.

Aos associados do "Grêmio Litro-Musical Tu, You e Ti" com quem noitadas boêmias compartilhei.

Aos pós-graduandos que em toda ocasião sempre foram "os primeiros vizinhos", especialmente ao Bacho (o apaixonado) ao Tadeu (o reumático) à Glória (a maninha) ao Anderson (o sonâmbulo) à Rose (a quituteira) ao Carlão (o tiozão) ao Paulinho (o contundido) ao Newton (o vizinho de fato).

Agradecimento especial ao Alfredo que com seu conhecimento e sua imprescindível orientação propiciou as reais condições para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

ÍNDICE

	Pag.
RESUMO	i
CAPÍTULO I - MOVIMENTOS REGULARES E IRREGULARES	1
CAPÍTULO II - MOVIMENTO CLÁSSICO NA VIZINHANÇA DE UM PONTO DE EQUILÍBRIO	9
II-i) Linearização : Pontos Estáveis e Instáveis	9
II-ii) Forma Normal de Birkhoff	10
II-iii) Forma Normal Ressonante	20
CAPÍTULO III - ELEMENTOS DE MATRIZ SEMICLÁSSICOS PARA $H(\underline{J}, \underline{\theta})$	34
CAPÍTULO IV - ELEMENTOS DE MATRIZ EXATOS PARA $H(\underline{p}, \underline{q})$	44
CAPÍTULO V - RESULTADOS, DISCUSSÃO, CONCLUSÃO	50
APÊNDICE A - CÁLCULO DO COMUTADOR $[\hat{J}_2, \hat{H}]$	54
APÊNDICE B - CÁLCULO DA ENERGIA DA SEPARATRIZ E DA ENERGIA MÍNIMA : APROXIMAÇÃO DO PÊNDULO	56
REFERÊNCIAS	61

RESUMO

Representamos um sistema dinâmico autônomo integrável com dois graus de liberdade na vizinhança de um ponto de equilíbrio estável pela forma normal de Birkhoff. As órbitas descrevem um movimento regular e estão presas a toros invariantes, figura (II-5).

Consideramos uma perturbação que não quebra a integrabilidade do sistema gerada pelos termos ressonantes de mais baixa ordem que aparecem na extensão da forma normal. Com isso aproximamos o movimento clássico pela forma normal ressonante, figura (II-6).

Classicamente, esta perturbação ressonante gera uma família de toros em ilha envoltos por separatrizes. Em primeira aproximação poderíamos obter o espectro de energia quantizando, segundo as regras de Bohr-Sommerfeld, a área dos toros externos à separatriz e os toros em ilha separadamente, mas com isso desprezaríamos o efeito do tunelamento que ocorre na vizinhança da separatriz.

Calculamos exatamente os autovalores da forma normal ressonante descrita em coordenadas generalizadas $(\underline{p}, \underline{q})$ quantizando-a na base dos autoestados de dois osciladores harmônicos. Por outro lado utilizamos um formalismo baseado na representação de Wigner-Weyl para calcular os autovalores semi-clássicos da Hamiltoniana descrita em coordenadas de ângulo/ação $(\underline{J}, \underline{\theta})$.

A conexão entre as variáveis $(\underline{p}, \underline{q})$ e as ângulo/ação $(\underline{J}, \underline{\theta})$ é feita por uma transformação canônica não-linear, que não tem equivalente quântico. Portanto, trabalhar

com ângulo/ação quanticamente, acarreta em não obter semiclassicamente os autovalores certos para a variável ação.

Nesse sentido colocamos a seguinte questão: "Se quantizarmos diretamente o sistema descrito em ângulo e ação e calcularmos seu espectro de energia no limite de grandes números quânticos, qual será a fidelidade do resultado uma vez que a pequena contribuição do tunelamento poderia ser da ordem de magnitude do erro envolvido na quantização da ação?"

Para responder essa questão, mostramos que os resultados numéricos para o espectro de energia semiclassical coincidem com aqueles exatos quanticamente. Assim, evidenciamos, através desta verificação numérica, que podemos trabalhar com o formalismo de ângulo/ação conforme as conveniências de cada problema, desde que as informações que queiramos saber dependam da matriz Hamiltoniana inteira, que é o caso dos autovalores, e não dos elementos de matriz isoladamente.

Os temas envolvidos com a teoria dos movimentos regulares e irregulares classicamente são encontrados no capítulo I. No capítulo II, obtemos detalhadamente a forma normal ressonante nas variáveis (p, q) e (J, θ) ; enquanto que no capítulo III apresentamos a discussão sobre o formalismo semiclassical e explicitamos os elementos de matriz de $H(J, \theta)$. No IV capítulo quantizamos $H(p, q)$ em operadores de ocupação e chegamos aos elementos de matriz para $\hat{H}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$. Finalmente no capítulo V exibimos e discutimos os resultados computacionais obtidos.

CAPÍTULO I

MOVIMENTOS REGULARES E IRREGULARES

Existem dois tipos contrastantes de movimentos hamiltonianos, isto é movimentos governados pelas equações de Newton sem dissipação, o movimento regular e o irregular.

A situação mais simples correspondendo ao caso regular é aquela quando o movimento é totalmente integrável. Neste caso existem M constantes de movimento na forma de funções $F_j(q, p)$ com $(1 \leq j \leq M)$ no espaço de fase $(p \times q)$, em involução. Isto quer dizer que todos parênteses de Poisson entre pares das F_j 's desaparecem, $\{F_i, F_k\} = 0$. Se todas as F_j 's são mutuamente independentes, o movimento fica restrito a uma superfície \sum M -dimensional no espaço de fase. E, se as funções F_j 's forem suficientemente "suaves" então \sum é um toro M -dimensional e o movimento pode ser integrado [1], [17].

A existência de toros por todo o espaço de fase de um sistema integrável torna natural introduzir um conjunto alternativo de coordenadas e momenta, conhecido como variáveis de ângulo e ação, as quais jogam um papel importante no tratamento quântico de sistemas integráveis. As ações $\underline{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_M\}$ são combinações particulares das funções F_j 's e indexam os toros \sum . São definidas por

$$I_{.j} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j} p \cdot dq \quad (I-1)$$

onde γ_j é o j -ésimo circuito irredutível do toro. As ações são agora os novos momenta do espaço de fase, suas coordena

das conjugadas são chamadas ângulos, Θ .

Pelo fato de existirem somente M constantes de movimento, cada F_j pode ser expressa em termos das M ações I_j . Em particular, a hamiltoniana é conservada e pode ser escrita por

$$H = H(\underline{p}, \underline{q}) = H(\underline{I}) \quad (\text{I-2})$$

isto é Θ são variáveis cíclicas e

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \underline{\omega}(\underline{I}) = \nabla_{\underline{I}} H(\underline{I}) \\ \dot{\underline{I}} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I-3})$$

As componentes ω_j das frequências dão a razão na qual uma trajetória viaja ao redor de Σ em direções indexadas pelos ângulos Θ_j . Sempre que as frequências ω_j forem racionalmente independentes cada trajetória será densa no toro o qual é denominado toro não ressonante. Mas, se todas ω_j 's forem racionalmente dependentes, isto é se $\underline{\omega} \cdot \underline{m} = (\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 + \dots) = 0$ onde \underline{m} é um vetor com componentes inteiros, cada órbita em Σ se desenvolve num toro de dimensão menor do que M . No caso de $M = 2$ as órbitas do toro ressonante serão todas fechadas ou periódicas.

Sistemas integráveis assim considerados são raros; dentre sistemas hamiltonianos quase todos são não integráveis no sentido de que não existem constantes globais de movimento além da energia. Uma classe de sistemas não integráveis é aquela com a propriedade de ergodicidade, isto é quase todas órbitas exploram quase todos pontos da superfície

de energia $(2M-1)$ -dimensional definida por $H(\underline{p}, \underline{q}) = \text{constante}$, ao invés de estarem confinadas a um M -toro como nos sistemas integráveis. Nesse caso diz-se que o movimento é caótico.

Mas, ainda existem situações em que os sistemas não são nem integráveis nem ergódicos e sim quase integráveis. Estes tem a forma

$$H(\underline{p}, \underline{q}) = H_0(\underline{p}, \underline{q}) + \epsilon W(\underline{p}, \underline{q}) \quad (\text{I-4})$$

onde H_0 é integrável e ϵ é um pequeno parâmetro que liga a perturbação W . Quando $\epsilon = 0$, todas trajetórias estarão sobre os toros. Mas quando $\epsilon \neq 0$ o teorema K.A.M.^[18] estabelece que os toros irracionais sobrevivem, embora distorcidos geometricamente. Portanto o movimento não é ergódico. Por outro lado os toros racionais são destruídos, de modo que o movimento também não é regular. Os toros destruídos são aqueles cujas frequências não perturbadas ω são racionalmente dependentes, isto é cujas órbitas são fechadas no caso de $M=2$ e formam um conjunto crescente com ϵ .

Podemos entender a destruição dos toros da seguinte maneira: da família contínua de órbitas fechadas preenchendo cada toro racional somente uma quantidade finita, por, so brevive à perturbação. Metade delas determina pontos instáveis ou hiperbólicos numa secção de superfície tomada transversalmente ao fluxo enquanto que outra metade determina pontos estáveis ou elípticos nesta secção de superfície. O movimento na vizinhança dos pontos instáveis é caótico e preenche região com dimensionalidade $(2M - 1)$. Ao redor dos pontos estáveis definem-se pequenas curvas invariantes conhecidas por ilhas. No limite de pequenas perturbações, as ilhas tornam-se longas e finas; a região caótica praticamente desaparece.

Chamamos a região vizinha ao toro racional não perturbado de ressonância. Nessa região não existem toros da família original. Essa distribuição dos toros pode ser entendida como o efeito de ressonância entre o movimento não perturbado e algum harmônico da perturbação forçosamente periódica em Θ .

Para visualizarmos o efeito da ressonância tomamos uma secção transversal ao fluxo de trajetórias do toro. As ressonâncias são identificadas pela existência de separatrizes. A separatriz (S_x) corresponde a uma superfície que separa as superfícies em ilhas (II.) daquelas deformadas pela perturbação e é formada pela junção das órbitas (ou variedades) emanante de um ponto hiperbólico e entrante no outro ponto hiperbólico, figura(i-1).

No ponto hiperbólico (P.H.) quatro curvas se unem, duas correspondendo a variedades entrantes (ou estáveis) W^+ e duas a variedades emanantes (ou instáveis) W^- . Um ponto X pertence a W^+ se após n iterações $(T^n X)$ da órbita $(n \rightarrow \infty)$ o ponto X for levado ao ponto hiperbólico. Por outro lado, ele pertence a W^- se a transformação inversa $(T^{-n} X)$ levá-lo ao ponto hiperbólico.

Consideremos a separatriz unindo pontos hiperbólicos adjacentes. Com o aumento gradativo da perturbação pode-se chegar a situação onde a variedade W^+ emanante de um ponto hiperbólico atravessa a variedade W^- que está entrando no outro ponto hiperbólico. Este ponto de intersecção é denominado ponto homoclínico pelo fato de conectar as variedades entrantes e emanantes da mesma ressonância. Por outro lado se os pontos de intersecção fossem entre variedades de ressonâncias vizinhas eles seriam denominadas pontos heteroclínicos. Se uma única intersecção homoclínica existe

então demonstra-se que existirão infinitas intersecções homoclinicas. O movimento torna-se extremamente complicado. Podemos visualizá-lo em parte.

A intersecção das variedades W^+ e W^- num ponto homoclinico X implica num cruzamento em X' e então novamente em X'' , com X'' mais próximo de X' do que X' de X . Uma vez que as iterações constituem uma aplicação conservativa as áreas envolvidas pelas intersecções, figura (I-2), são iguais e por isso W^- oscila mais rapidamente entre X' e X'' do que entre X e X' . Sucessivos cruzamentos estão cada vez mais próximos, W^- oscila com amplitude cada vez maior ea área é preservada.

Uma vez caracterizado o "splitting" da separatriz, as órbitas que estavam limitadas à região da ressonância passam agora a ocupar uma região maior no espaço de fase e assim inicia-se o caos. Este rompimento da separatriz evidencia o desaparecimento das curvas racionais que não suportam o efeito da perturbação. Nos seus lugares formam-se finas camadas estocásticas compostas por ilhas e órbitas caóticas. Para dois graus de liberdade ($M=2$) estas camadas estarão confinadas à região limitada por duas curvas irracionais que sobreviveram a perturbação conforme a figura (I-3).

Se tratarmos o problema com M graus de liberdade maior do que dois, a região caótica deixa de ser esta confinada entre as duas curvas irracionais para ser praticamente a superfície de energia $(2M-1)$ dimensional inteira. Este fenômeno é conhecido por difusão de Arnold.

O movimento na vizinhança da separatriz é um pouco mais complexo do que este apresentado aqui. O leitor que quiser ter um primeiro contato com o assunto poderá encontrá-

lo no livro do Lieberman e Lichtemberg^[2].

Por outro lado, Chirikov^[3] investigou a transição entre movimento ordenado a caótico através do "overlap" de ressonâncias vizinhas cuja motivação se deu também, no estudo do movimento de partículas carregadas em espelhos magnéticos.

Um dos mais importantes problemas de mecânica semiclássica é entender o efeito das órbitas caóticas no espectro de energia. No caso de um sistema quase integrável ressonante, como apresentado anteriormente, as órbitas caóticas aparecerão somente em combinação com os toros em ilha, para os quais as condições usuais de quantização semiclássicas valem só aproximadamente. A razão para isto é que o sistema num toro em ilha quantizado, pode ocasionalmente tunelar de uma ilha a outra fazendo um corte no "loop" clássico que iria ser realizado. Também, a própria existência das ilhas permite o tunelamento entre os toros que envolvem as ilhas. Neste trabalho trataremos de um sistema / ressonante integrável; não consideraremos o caos clássico. A diferença que existirá entre o espectro de energia do sistema não integrável e aquele obtido desta aproximação pode ser atribuída ao caos quântico.

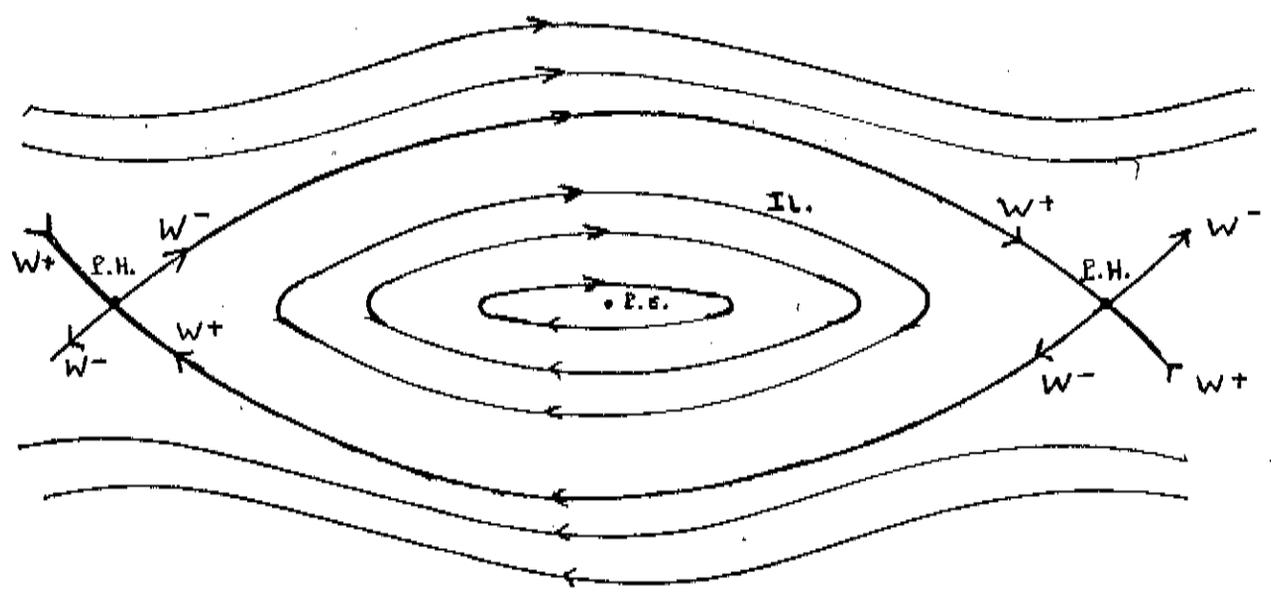


Figura (I-1) : Ilustração da ressonância numa seção bidimensional.

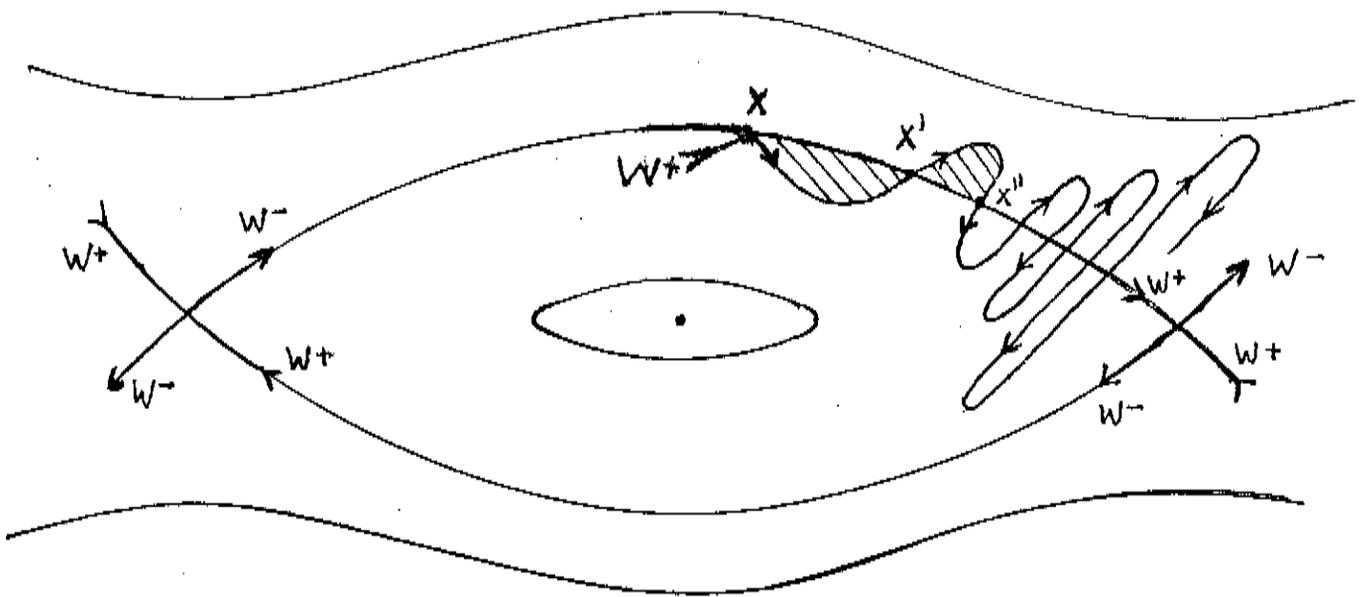


Figura (I-2) : Ilustração do efeito de um ponto homoclínico próximo à separatriz através de infinitas intersecções entre W^+ e W^- .

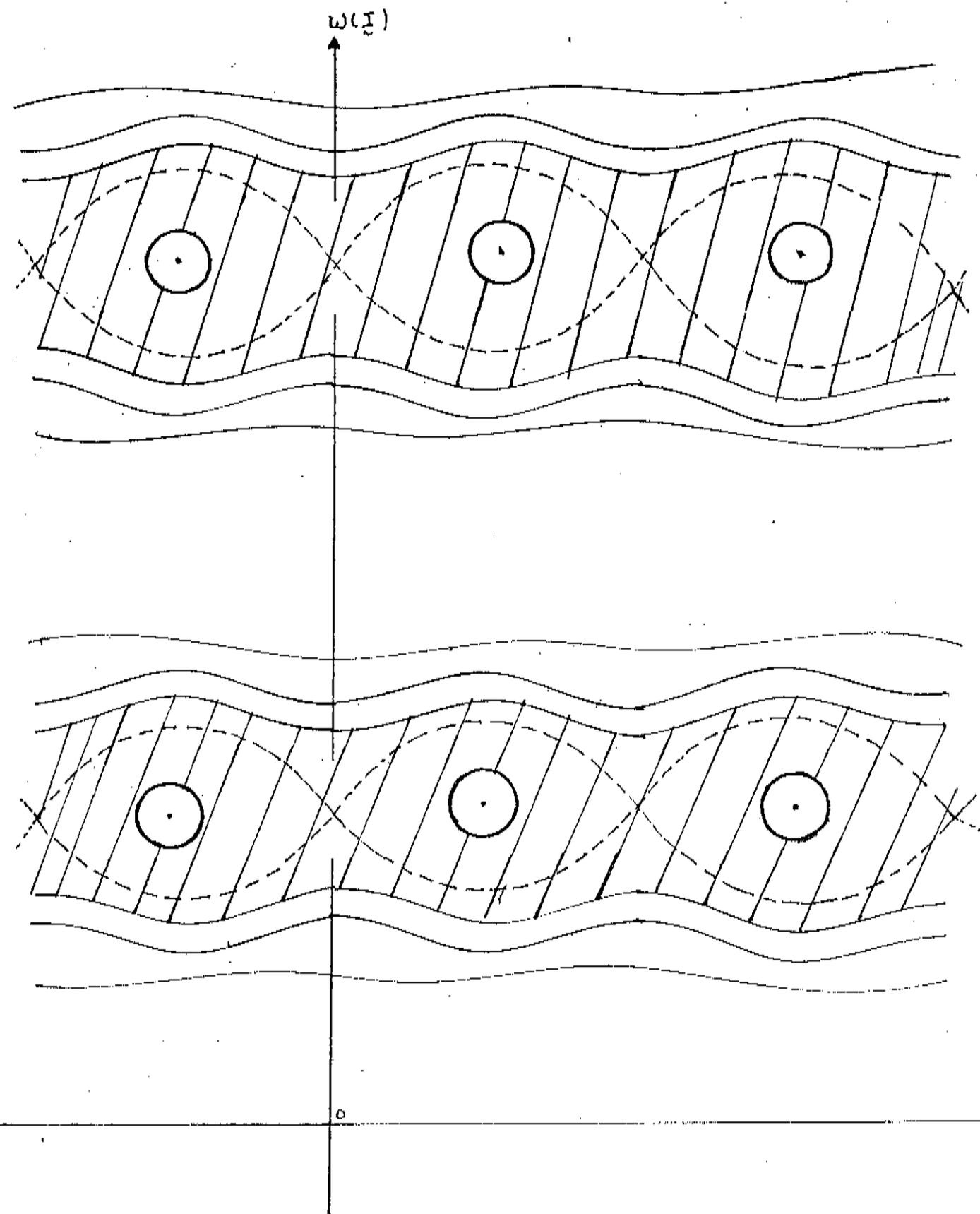


Figura (I-3) : Diagrama das trajetórias na vizinhança de duas ressonâncias. As linhas pontilhadas mostram as separatrizes. As tracejadas a região ressonante.

CAPÍTULO II

MOVIMENTO CLÁSSICO NA VIZINHANÇA DE UM
PONTO DE EQUILÍBRIOII-1) Linearização : Pontos Estáveis e Instáveis

A determinação e identificação dos pontos de equilíbrio do sistema dinâmico são de fundamental importância para a compreensão dos movimentos em suas vizinhanças. Em algumas situações consegue-se visualizar o movimento globalmente no espaço de fase.

Consideremos um sistema representado por uma função hamiltoniana $H(\underline{p}, \underline{q})$, e cujos campos vetoriais (equações de movimento) são dados por

$$\dot{\underline{q}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \quad (\text{II-1})$$

$$\dot{\underline{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{q}}$$

As soluções destas equações são os pontos de equilíbrio $\underline{X} = (\underline{q}, \underline{p})$ para os quais elas se anulam.

Os campos vetoriais linearizados com um grau de liberdade que tiverem autovalores $(\lambda_1 \text{ e } \lambda_2)$ reais, caracterizam o ponto de equilíbrio como instável ou hiperbólico, figura (II-1).

Quando os autovalores $(\lambda_1 \text{ e } \lambda_2)$ forem imaginários o ponto de equilíbrio é estável ou elíptico, figura (II-2).

Os autovalores complexos só existirão em siste-

mas hamiltonianos que tenham pelo menos dois graus de liberdade devido à sua simetria, uma vez que existe conservação de volume prevista pelo teorema de Liouville e aparecerão constituindo quaternos, $(+\alpha + i\omega)$, $(+\alpha - i\omega)$, $(-\alpha + i\omega)$, $(-\alpha - i\omega)$. Neste caso os pontos de equilíbrio são,

atrativos $(\operatorname{Re}(\lambda) < 0)$: fig. (II-3)

repulsivos $(\operatorname{Re}(\lambda) > 0)$: fig. (II-4)

O movimento nas proximidades destes pontos de equilíbrio é bem aproximado pela parte linear das equações de movimento. O estudo dos autovalores do sistema hamiltoniano linearizado nos fornece informações sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio e também sobre a configuração local das trajetórias. Soluções estáveis linearmente, levam a movimentos na vizinhança do ponto de equilíbrio que podem ser modificados quando os termos não-lineares tornam-se importantes, embora existam superfícies invariantes arbitrariamente próximas ao ponto de equilíbrio. Soluções linearmente instáveis levam a divergência exponencial das trajetórias. Quando todas ou quase todas as soluções são linearmente instáveis em uma região do espaço de fase pode-se esperar que as trajetórias tenham um comportamento caótico nessa região.

II-ii) Forma Normal de Birkhoff

Entende-se por forma normal, como sendo a mais simples expressão analítica para a hamiltoniana clássica, simplificada por sucessivas transformações canônicas que levam o sistema a um comportamento totalmente integrável.

Geralmente não se consegue estender a ordem da forma normal até infinito, mas somente até um grau finito, o que significa fazer uma aproximação ao movimento real. Com isto desprezam-se termos, que seguramente terão influência no comportamento dinâmico do sistema. Tais termos podem ser caracterizados por perturbativos, na medida em que são irreduzíveis à uma forma integrável. Mas, o truncamento da forma normal, fornece uma boa aproximação para a descrição do movimento nas proximidades do ponto de equilíbrio, quando a magnitude das grandezas envolvidas é adequadamente pequena. Esta forma normal truncada, à qual a hamiltoniana é reduzida, denomina-se forma normal de Birkhoff.

Neste trabalho, obteremos num primeiro instante a forma normal de Birkhoff para representar um sistema hamiltoniano 4-dimensional no espaço de fase e independentemente do tempo. Posteriormente consideraremos o primeiro termo perturbativo junto à forma normal de Birkhoff e estudaremos o seu efeito nos espectros semiclássicos e quânticos de energia do sistema.

Suporemos que na aproximação linear, uma posição de equilíbrio de um sistema hamiltoniano com dois graus de liberdade é estável, e que as duas frequências características ω_1 e ω_2 sejam diferentes. Assim, a parte quadrática da hamiltoniana pode ser reduzida por transformações canônicas lineares à forma

$$K(q_1, p_1, q_2, p_2) = \omega_1 \left(\frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \right) + \omega_2 \left(\frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \right) \quad (\text{II-2})$$

No caso o único ponto de equilíbrio para este sistema é $(\underline{p}, \underline{q}) = (0, 0)$.

A hamiltoniana genérica pode ser representada por uma expansão em série de Taylor, na vizinhança de $(0, 0)$, a partir do termo de terceira ordem mais a parte quadrática (II-2), isto é

$$K(q_1, p_1, q_2, p_2) = \omega_1 \frac{(p_1^2 + q_1^2)}{2} + \omega_2 \frac{(p_2^2 + q_2^2)}{2} + \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \\ \beta_1 + \beta_2 = 3}}^{\infty} k'_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} p_1^{\alpha_1} q_1^{\beta_1} p_2^{\alpha_2} q_2^{\beta_2} \quad (\text{II-3})$$

onde k' é uma constante que pode depender de $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$.

Passamos a denotar a função $K(q_1, p_1, q_2, p_2)$ em termos das seguintes coordenadas complexas,

$$\underline{a} = \underline{q} + i \underline{p} \quad , \quad \underline{a}^* = \underline{q} - i \underline{p} \quad (\text{II-4})$$

tal que $(\underline{a} - \underline{a}^*) = (\underline{q}^2 + \underline{p}^2) e$

$$\underline{p} = \frac{\underline{a} - \underline{a}^*}{2i} \quad e \quad \underline{q} = \frac{\underline{a} + \underline{a}^*}{2} \quad (\text{II-5})$$

com $\underline{a} = (a_1, a_2)$.

A partir das equações de movimento de Hamilton,

$$\dot{\underline{p}} = - \frac{\partial K}{\partial \underline{q}} \quad , \quad \dot{\underline{q}} = \frac{\partial K}{\partial \underline{p}} \quad (\text{II-6})$$

notamos que

$$\dot{\underline{a}} = \dot{\underline{q}} + i \dot{\underline{p}} = \frac{\partial K}{\partial \underline{p}} - i \frac{\partial K}{\partial \underline{q}} \quad (\text{II-7})$$

$$\dot{\underline{a}}^* = \dot{\underline{q}} - i \dot{\underline{p}} = \frac{\partial K}{\partial \underline{p}} + i \frac{\partial K}{\partial \underline{q}}$$

As derivadas parciais de $K(q, p)$ com respeito a q e q^* são dados por

$$\frac{\partial K}{\partial q^*} = \frac{\partial K}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial q^*} + \frac{\partial K}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial q^*} = -\frac{1}{2i} \frac{\partial K}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial q} \quad (\text{II-8})$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial K}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial q} + \frac{\partial K}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial q} = \frac{1}{2i} \frac{\partial K}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial q}$$

Portanto, as equações de movimento para as novas variáveis q e q^* , são dados por

$$\frac{\partial}{\partial q^*} (-2iK) = \left(\frac{\partial K}{\partial p} - i \frac{\partial K}{\partial q} \right) \quad (\text{II-9})$$

$$\frac{\partial}{\partial q} (-2iK) = - \left(\frac{\partial K}{\partial p} + i \frac{\partial K}{\partial q} \right)$$

Comparando as equações (II-6) e (II-9), verificamos que

$$\frac{\partial}{\partial q^*} (-2iK) = \dot{q} \quad (\text{II-10})$$

$$\frac{\partial}{\partial q} (-2iK) = -\dot{q}^*$$

Com isso, vemos que q^* faz o papel dos momentos, q o das coordenadas e $(-2iK)$ da hamiltoniana. Então, podemos considerar $(-2iK(q, q^*))$ como sendo a função hamiltoniana que gera o movimento das coordenadas complexas q e q^* .

A base do cálculo da forma normal de Birkhoff é a expansão em série de Taylor de $(-2i K(\underline{a}, \underline{a}^*))$, isto é:

$$-2i K(\underline{a}, \underline{a}^*) = -i\omega_1(a_1, a_1^*) - i\omega_2(a_2, a_2^*) + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ \alpha_2 + \beta_2 = 3}}^{\infty} K_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot a_1^{\alpha_1} \cdot a_1^{*\beta_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot a_2^{*\beta_2} \quad (\text{II-11})$$

O fato de \underline{a} e \underline{a}^* , serem dependentes de forma linear em relação a \underline{p} e \underline{q} , faz com que os expoentes de \underline{a} e \underline{a}^* em (II-11) sejam da mesma ordem dos expoentes de \underline{p} e \underline{q} em (II-3), alterando apenas a constante $K'_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}$, a qual passo a chamar por $K_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}$.

O fato de $K(\underline{a}, \underline{a}^*)$ ser real e \underline{a}^* ser complexo conjugado de \underline{a} implica que

$$K_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} = -K_{\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2}^* \quad (\text{II-12})$$

Por conseguinte, vamos propor que por meio de transformações canônicas sucessivas independentes do tempo, consigamos reduzir a hamiltoniana à forma:

$$\begin{aligned} -2i K(\underline{a}, \underline{a}^*) = & -i\omega_1(a_1, a_1^*) - i\omega_2(a_2, a_2^*) + C_{1,1} (a_1, a_1^*)^2 + \\ & + C_{1,2} (a_1, a_1^*) \cdot (a_2, a_2^*) + C_{2,2} \cdot (a_2, a_2^*)^2 + \dots + \\ & + C_{1, N-1} (a_1, a_1^*)^{\frac{N-1}{2}} + \dots + C_{2, N-1} \cdot (a_2, a_2^*)^{\frac{N-1}{2}} + \\ & + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ \alpha_2 + \beta_2 = N}}^{\infty} K_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot a_1^{\alpha_1} \cdot a_1^{*\beta_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot a_2^{*\beta_2} \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

Os coeficientes $L_{i,j}$ descrevem a dependência das frequências nas amplitudes das oscilações ou nas energias propriamente dos osciladores.

A intenção agora é estender a simplificação de (II-13) até a ordem $(\underline{a}, \underline{a}^*)^N$. E para tanto aplicamos a transformação canônica $(\underline{a}, \underline{a}^*) \rightarrow (\underline{z}, \underline{z}^*)$. Seja a função geratriz dessa transformação,

$$F = \underline{z}_1 \cdot \underline{a}_1^* + \underline{z}_2 \cdot \underline{a}_2^* + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ \alpha_2 + \beta_2 = N}}^{\infty} S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot \underline{z}_1^{\alpha_1} \cdot \underline{a}_1^{*\beta_1} \cdot \underline{z}_2^{\alpha_2} \cdot \underline{a}_2^{*\beta_2} \quad (\text{II-14})$$

A nova hamiltoniana $K'(\underline{z}, \underline{z}^*)$ é dada por

$$K'(\underline{z}, \underline{z}^*) = K(\underline{a}, \underline{a}^*) - \frac{\partial F(\underline{a}, \underline{a}^*, \underline{z}, \underline{z}^*)}{\partial t} \quad (\text{II-15})$$

isto é,

$$K'(\underline{z}, \underline{z}^*) = K(\underline{a}, \underline{a}^*) \quad (\text{II-16})$$

pois

$$\frac{\partial F(\underline{a}, \underline{a}^*, \underline{z}, \underline{z}^*)}{\partial t} = 0 \quad (\text{II-17})$$

A partir de (II-14), obtemos

$$\underline{a}_1 = \frac{\partial F}{\partial \underline{a}_1^*} = \underline{z}_1 \left[1 + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ \alpha_2 + \beta_2 = N}}^{\infty} \beta_1 \cdot S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot \underline{z}_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \underline{a}_1^{*\beta_1 - 1} \cdot \underline{z}_2^{\alpha_2} \cdot \underline{a}_2^{*\beta_2} \right]$$

$$a_2 = \frac{\partial F}{\partial a_2^*} = z_2 \left[1 + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ \alpha_2 + \beta_2 = N}}^{\infty} \beta_2 \cdot S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot z_1^{\alpha_1} \cdot a_1^{*\beta_1} \cdot z_2^{\alpha_2 - 1} \cdot a_2^{*\beta_2 - 1} \right]$$

(II-18)

$$z_1^* = \frac{\partial F}{\partial z_1} = a_1^* \left[1 + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ \alpha_2 + \beta_2 = N}}^{\infty} \alpha_1 \cdot S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot z_1^{\alpha_1 - 1} \cdot a_1^{*\beta_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot a_2^{*\beta_2} \right]$$

$$z_2^* = \frac{\partial F}{\partial z_2} = a_2^* \left[1 + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ \alpha_2 + \beta_2 = N}}^{\infty} \alpha_2 \cdot S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot z_1^{\alpha_1} \cdot a_1^{*\beta_1} \cdot z_2^{\alpha_2 - 1} \cdot a_2^{*\beta_2 - 1} \right]$$

Ao fazer a reversão das séries das duas últimas equações (II-18) e substituindo-as nas duas primeiras equações de (II-18), obtemos $(\underline{a}, \underline{a}^*)$ como função explícita de $(\underline{z}, \underline{z}^*)$,

$$\begin{aligned} a_1 &= z_1 \left[1 + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ \alpha_2 + \beta_2 = N}}^{\infty} \beta_1 \cdot S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot z_1^{\alpha_1 - 1} \cdot z_1^{*\beta_1 - 1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot z_2^{*\beta_2} \right] + \text{T.O.S.} \\ a_2 &= z_2 \left[1 + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ \alpha_2 + \beta_2 = N}}^{\infty} \beta_2 \cdot S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot z_1^{\alpha_1} \cdot z_1^{*\beta_1} \cdot z_2^{\alpha_2 - 1} \cdot z_2^{*\beta_2 - 1} \right] + \text{T.O.S.} \\ a_1^* &= z_1^* \left[1 - \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ \alpha_2 + \beta_2 = N}}^{\infty} \alpha_1 \cdot S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot z_1^{\alpha_1 - 1} \cdot z_1^{*\beta_1 - 1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot z_2^{*\beta_2} \right] + \text{T.O.S.} \\ a_2^* &= z_2^* \left[1 - \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ \alpha_2 + \beta_2 = N}}^{\infty} \alpha_2 \cdot S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot z_1^{\alpha_1} \cdot z_1^{*\beta_1} \cdot z_2^{\alpha_2 - 1} \cdot z_2^{*\beta_2 - 1} \right] + \text{T.O.S.} \end{aligned}$$

(II-19)

O termo quadrático $[-i\omega_1(a_1 a_1^*) - i\omega_2(a_2 a_2^*)]$

da hamiltoniana (II-13) será expresso até ordem N, por:

$$\begin{aligned}
 & -i\omega_1 (z_1, z_1^*) \left[1 + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ + \alpha_2 + \beta_2 = N}} (\beta_1 - \alpha_1) \cdot S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot z_1^{\alpha_1 - 1} \cdot z_1^{*\beta_1 - 1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot z_2^{*\beta_2} \right] + \\
 & -i\omega_2 (z_2, z_2^*) \left[1 + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ + \alpha_2 + \beta_2 = N}} (\beta_2 - \alpha_2) \cdot S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \cdot z_1^{\alpha_1} \cdot z_1^{*\beta_1} \cdot z_2^{\alpha_2 - 1} \cdot z_2^{*\beta_2 - 1} \right]
 \end{aligned}
 \tag{II-20}$$

Nos outros termos da hamiltoniana (II-13), qualquer aproximação a \underline{a} e \underline{a}^* além da linear ($\underline{a} = \underline{z}$, $\underline{a}^* = \underline{z}^*$) gera termos de ordem superior a N. Então, podemos escrever a hamiltoniana $K(\underline{a}, \underline{a}^*)$ dada por (II-13), como função explícita de $(\underline{z}, \underline{z}^*)$ até ordem N expressa por:

$$\begin{aligned}
 -2iK(\underline{a}, \underline{a}^*) = & -i\omega_1 (z_1, z_1^*) - i\omega_2 (z_2, z_2^*) + c_{1,1} (z_1, z_1^*)^2 + \\
 & + c_{1,2} (z_1, z_1^*) \cdot (z_2, z_2^*) + c_{2,2} (z_2, z_2^*)^2 + \\
 & + c_{1,N-1} (z_1, z_1^*)^{\frac{N-1}{2}} + c_{2,N-1} (z_2, z_2^*)^{\frac{N-1}{2}} + \\
 & + \sum_{\substack{\alpha_1 + \beta_1 + \\ + \alpha_2 + \beta_2 = N}} \left\{ k_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} - \left[i\omega_1 \cdot (\beta_1 - \alpha_1) + i\omega_2 \cdot (\beta_2 - \alpha_2) \right] \cdot S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} \right\} \cdot z_1^{\alpha_1} \cdot z_1^{*\beta_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot z_2^{*\beta_2}
 \end{aligned}
 \tag{II-21}$$

Antes de continuarmos o cálculo no sentido de obter a forma normal ressonante convém fazer uma sucinta discussão sobre a equação (II-21).

1) Se $\alpha_1 = \beta_1$ e $\alpha_2 = \beta_2$, o termo em colchetes se anula e portanto sobrarão os termos,

$$\sum_{\substack{2\beta_1 + \\ + 2\beta_2 = N}} k_{\beta_1, \beta_2} \cdot (z_1, z_1^*)^{\beta_1} \cdot (z_2, z_2^*)^{\beta_2}$$

o que significa simplesmente acrescentar os termos de ordem N à forma normal de Birkhoff. Isto independe da relação entre ω_1 e ω_2 ser racional ou irracional.

2) Se $\alpha_1 \neq \beta_1$ e $\alpha_2 \neq \beta_2$, o termo em colchetes não se anula, e todos os termos de ordem N do somatório podem ser eliminados, com a seguinte escolha,

$$S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} = \frac{-i K_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}}{\omega_1 \cdot (\beta_1 - \alpha_1) + \omega_2 (\beta_2 - \alpha_2)} \quad (\text{II-22})$$

Isto acontece, se assumirmos que a relação entre ω_1 e ω_2 não seja racional, pois, neste caso haverá um conjunto de inteiros α_j e β_j tal que $S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}$ torna-se infinito, correspondendo à ressonância na órbita periódica estável.

Separaremos em duas etapas os cálculos subsequentes, num primeiro instante chegaremos à uma forma normal totalmente integrável e posteriormente levaremos em consideração os termos ressonantes.

Portanto, a escolha (II-22) para $S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}$ nos leva à hamiltoniana de ordem N desejada uma vez que por meio de transformações canônicas sucessivas podemos, em princípio, reduzir a hamiltoniana à forma,

$$\begin{aligned} -2i K(z, \bar{z}) = & -i\omega_1 (z_1 \cdot \bar{z}_1^*) - i\omega_2 (z_2 \cdot \bar{z}_2^*) + C_{1,1} \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_1^*)^2 + \\ & + C_{1,2} \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_1^*) \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2^*) + C_{2,2} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2^*)^2 + \dots + \\ & + C_{1,N} \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_1^*)^{N/2} + \dots + C_{2,N} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2^*)^{N/2} + \text{T.O.S.} \end{aligned} \quad (\text{II-23})$$

para qualquer N . Podemos, agora, retornar às variáveis originais utilizando as mesmas transformações feitas,

$$(\underline{z} \cdot \underline{z}^*) = (\underline{a} \cdot \underline{a}^*) = (\underline{p}^2 + \underline{q}^2)$$

Assim,

$$\begin{aligned} K(\underline{p}, \underline{q}) = & \omega_1 \left(\frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \right) + \omega_2 \left(\frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \right) + b_{1,1} (p_1^2 + q_1^2)^2 + \\ & + b_{1,2} (p_1^2 + q_1^2) \cdot (p_2^2 + q_2^2) + b_{2,2} (p_2^2 + q_2^2)^2 + \dots + \\ & + b_{1,N} (p_1^2 + q_1^2)^{N/2} + \dots + b_{2,N} (p_2^2 + q_2^2)^{N/2} + \text{T.O.S.} \end{aligned} \quad (\text{II-24})$$

onde
$$b_{i,j} = c_{i,j} / (-2i)$$

A expressão (II-24) é a forma normal de Birkhoff em $(\underline{p}, \underline{q})$ para uma hamiltoniana 4-dimensional no espaço de fase e independente do tempo, e pode ser expressa nas coordenadas polares canônicas $(\underline{I}, \underline{\Phi})$ através de:

$$\underline{p} = \sqrt{2\underline{I}} \cdot \sin \underline{\Phi}, \quad \underline{q} = \sqrt{2\underline{I}} \cdot \cos \underline{\Phi} \quad (\text{II-25})$$

como

$$\begin{aligned} K(\underline{I}_1, \underline{I}_2) = & \omega_1 \cdot \underline{I}_1 + \omega_2 \cdot \underline{I}_2 + b_{1,1} \cdot \underline{I}_1^2 + b_{1,2} \underline{I}_1 \cdot \underline{I}_2 + \\ & + b_{2,2} \underline{I}_2^2 + \dots + b_{1,N} \underline{I}_1^{N/2} + b_{2,N} \underline{I}_2^{N/2} + \text{T.O.S.} \end{aligned} \quad (\text{II-26})$$

onde $\underline{I} = (\underline{p}^2 + \underline{q}^2) / 2$ e cada coeficiente $b_{i,j}$ envolve agora o fator 1/2 com a potência correspondente.

A hamiltoniana $K(\underline{I}, \underline{\Phi})$ é integrável pois os

ângulos $\underline{\Phi}$ são variáveis cíclicas, $\{K, \underline{I}\} = 0$. O sistema descreve movimentos condicionalmente periódicos no toro $\underline{I} = \text{constante}$ com frequências $\underline{\omega} = \nabla_{\underline{I}} K(\underline{I})$.

Podemos chegar ao limite de $N \rightarrow \infty$ em (II-26) somente se o sistema for totalmente integrável, porque caso contrário a série de Birkhoff diverge, pois sabemos pelo teorema K.A.M. que para qualquer hamiltoniana não integrável existem órbitas que não estão presas a toros, enquanto que a forma normal é perfeitamente integrável, daí a razão para a série não poder convergir. Por outro lado para \underline{I} pequenos, o truncamento da forma normal dá uma boa aproximação perto da origem e nessa região a hamiltoniana $K(\underline{I})$ é bem representada pela aproximação linear integrável.

II.iii) Forma Normal Ressonante

Ao tentarmos melhorar a precisão da forma de Birkhoff aumentando o ordem da série de Taylor verificamos que mesmo para N finito aparecerão termos caracterizados por pequenos denominadores que impedem a convergência da série e correspondem a uma manifestação de um fenômeno físico que localmente varia o caráter das trajetórias no espaço de fase. Quando estes denominadores se anulam definem-se então ressonâncias.

A existência dos termos ressonantes impossibilita a redução da hamiltoniana à forma normal de Birkhoff. Eles sempre surgirão na investigação de uma família de um parâmetro de hamiltonianas se, conforme o parâmetro descrevendo a família variar, os autovalores do problema linearizado também variarem.

A inclusão de termos ressonantes à forma normal caracteriza-a como forma normal ressonante. Esta pode ser descrita como um sistema integrável na presença de uma perturbação periódica e conseqüentemente pode ser tratada por teoria de perturbação clássica. Gustavson trata o problema de forma geral e abstrata^[4]. Damos aqui um tratamento simples para dois graus de liberdade.

Retornando agora à discussão que envolve as equações (II-21) e (II-22), tomamos ω como parâmetros que definem a hamiltoniana e os escolhemos perto de um número racional, isto é

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{s}{r} + \lambda \quad (\text{II-27})$$

onde s e r são inteiros primos entre si. Estudamos então a família de hamiltonianas e procuramos a aproximação mais simples que valha perto de $\lambda = 0$.

Na redução à forma normal não podemos "matar" os termos em que o denominador de (II-22),

$$\omega_1 (\beta_1 - \alpha_1) + \omega_2 (\beta_2 - \alpha_2)$$

torna-se zero na ressonância. Neste sentido, podemos obter os termos ressonantes de menor potência, para os quais $\alpha_1 \neq \beta_1$ e $\alpha_2 \neq \beta_2$ fazendo,

$$\omega_1 (\beta_1 - \alpha_1) + \omega_2 (\beta_2 - \alpha_2) = 0 \quad (\text{II-28})$$

ou

$$s (\beta_1 - \alpha_1) + r (\beta_2 - \alpha_2) = 0 \quad (\text{II-29})$$

A escolha dos α'_s e β'_s é feita de tal modo que a soma $(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2)$ seja mínima. Isto é,

$$(\beta_1 - \alpha_1) = +r \quad (\beta_2 - \alpha_2) = -s \quad (\text{II-30})$$

$$\text{de } (\beta_1 - \alpha_1) = r \quad \text{e} \quad (\beta_2 - \alpha_2) = -s$$

$$\Rightarrow \beta_1 = r, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \alpha_2 = s \quad (\text{II-31})$$

$$\text{de } (\beta_1 - \alpha_1) = -r \quad \text{e} \quad (\beta_2 - \alpha_2) = s$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 0, \quad \alpha_1 = r, \quad \beta_2 = s, \quad \alpha_2 = 0 \quad (\text{II-32})$$

Nota-se que a soma de $(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2)$ é $(r+s)$. Portanto os termos que aparecerão em (II-21) terão coeficientes $k_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}$ dados por,

$$\text{i) } k_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} = k_{0, r, s, 0} \quad (\text{II-33})$$

$$\text{ii) } k_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} = k_{r, 0, 0, s} \quad (\text{II-34})$$

Assim, a hamiltoniana (II-21) $K(\underline{z}, \underline{z}^*)$, de ordem N , mais simples será,

$$\begin{aligned} -2i K(\underline{z}, \underline{z}^*) = & -i\omega_1 (z_1 \cdot z_1^*) - i\omega_2 (z_2 \cdot z_2^*) + b_{1,1} \cdot (z_1 \cdot z_1^*)^2 + \\ & + b_{1,2} \cdot (z_1 \cdot z_1^*) \cdot (z_2 \cdot z_2^*) + b_{2,2} \cdot (z_2 \cdot z_2^*)^2 + \dots + \\ & + b_{1,N} \cdot (z_1 \cdot z_1^*)^{N/2} + \dots + b_{2,N} \cdot (z_2 \cdot z_2^*)^{N/2} + \\ & + \left[k_{r,0,0,s} \cdot z_1^r \cdot z_2^s + k_{0,r,s,0} \cdot z_1^r \cdot z_2^s \right] \quad (\text{II-35}) \end{aligned}$$

Para denotarmos os dois últimos termos de (II-35) nas variáveis I_1 e I_2 , fazemos uso da aproximação linear $\underline{a} = \underline{z}$, $\underline{a}^* = \underline{z}^*$, da transformação canônica (II-25) e da complexificação (II-4) chegando em,

$$\underline{z} = \sqrt{2 I_1} \cdot e^{i \Phi} \quad , \quad \underline{z}^* = \sqrt{2 I_1} \cdot e^{-i \Phi} \quad (\text{II-36})$$

de modo que,

$$z_1^r = (2 I_1)^{r/2} \cdot e^{i r \Phi_1}$$

$$z_1^{*r} = (2 I_1)^{r/2} \cdot e^{-i r \Phi_1}$$

(II-37)

$$z_2^{*s} = (2 I_2)^{s/2} \cdot e^{-i s \Phi_2}$$

$$z_2^s = (2 I_2)^{s/2} \cdot e^{i s \Phi_2}$$

Resgatando a relação (II-12), e chamando este coeficiente por k simplesmente, podemos escrever os dois últimos termos de (II-35) por:

$$\begin{aligned} k \cdot [z_1^r \cdot z_2^{*s} - z_1^{*r} \cdot z_2^s] &= \\ &= k \cdot 2 \cdot \text{Im} (z_1^r \cdot z_2^{*s}) \\ &= 2k (2 I_1)^{r/2} \cdot (2 I_2)^{s/2} \cdot \sin(r \Phi_1 - s \Phi_2) \end{aligned} \quad (\text{II-38})$$

Mas, ao invés de usarmos $\text{Sin}(r \Phi_1 - s \Phi_2)$ preferimos usar o cosseno. A transição entre um e outro envolve uma rotação de $\pi/2$ o que corresponde a uma transformação

canônica linear,

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \varphi_1 + \tilde{\pi}/2r \\ \Phi_2 &= \varphi_2\end{aligned}\quad (\text{II-39})$$

tal que (II-38) fica,

$$2 \cdot k \cdot (2 I_1)^{r/2} \cdot (2 I_2)^{s/2} \cdot \cos(r \varphi_1 - s \varphi_2) \quad (\text{II-40})$$

Finalmente, a hamiltoniana (II-33) $K(\underline{z}, \underline{z}^*)$ descrita nas variáveis de ângulo-ação $(\underline{I}, \underline{\varphi})$ é dada por

$$\begin{aligned}K(\underline{I}, \underline{\varphi}) &= \omega_1 \cdot I_1 + \omega_2 I_2 + b_{1,1} I_1^2 + b_{1,2} \cdot I_1 \cdot I_2 + \\ &+ b_{2,2} I_2^2 + \dots + b_{1,N} I_1^{N/2} + \dots + b_{2,N} I_2^{N/2} + \\ &+ 2 \cdot k \cdot (2 I_1)^{r/2} \cdot (2 I_2)^{s/2} \cdot \cos(r \varphi_1 - s \varphi_2) \quad (\text{II-41})\end{aligned}$$

Esta expressão é a forma normal ressonante (ressonância fora da órbita estável) para uma hamiltoniana genérica independentemente do tempo em 4 dimensões no espaço de fase. A equação (II-41) considera somente o primeiro par de termos ressonantes, os quais podem ser interpretados como uma primeira aproximação ao conjunto de termos ressonantes de ordem superior que foram desprezados.

Em termos de teoria de perturbação, podemos dizer que temos dois osciladores harmônicos, $(\omega_1 \cdot I_1)$ e $(\omega_2 \cdot I_2)$, representando um sistema não perturbado, neles atua uma perturbação diagonal $(b_{1,1} I_1^2 + b_{1,2} \cdot I_1 \cdot I_2 + b_{2,2} \cdot I_2^2 + \dots + b_{1,N} I_1^{N/2} + \dots + b_{2,N} I_2^{N/2})$ e outra contribuição perturbativa não diagonal $(2 \cdot k \cdot (2 I_1)^{r/2} \cdot (2 I_2)^{s/2} \cdot \cos(r \varphi_1 - s \varphi_2))$.

Mesmo existindo esta dependência angular de φ_1 e φ_2 em $K(\underline{I}, \underline{\varphi})$, notamos que a integrabilidade do sistema não é quebrada, pois fazendo uma transformação canônica linear do tipo,

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= (r \varphi_1 - s \varphi_2) & , & & I_1 &= r J_1 \\ \Theta_2 &= \varphi_2 & , & & I_2 &= J_2 - s J_1 \end{aligned} \quad (\text{II-42})$$

Verificamos que Θ_2 torna-se cíclica, e portanto a ação J_2 canonicamente conjugada a ela é uma constante de movimento, a qual juntamente com a energia total do sistema garantem a integrabilidade do movimento uma vez que estamos trabalhando com dois graus de liberdade. Isto é ilustrado nas figuras (II-5), (II-6), (II-7)

A hamiltoniana que queremos tratar no contexto deste trabalho é a mesma da referência [5]:

$$K(\underline{I}, \underline{\varphi}) = \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) I_1 + I_2 + \mu I_1^2 + \mathcal{E} I_1^3 I_2^{1/2} \cos(6\varphi_1 - \varphi_2) \quad (\text{II-43})$$

e para tanto ajustamos os parâmetros e coeficientes de $K(\underline{I}, \underline{\varphi})$ da equação (II-41), de acordo com a seguinte escolha

$$\begin{aligned} r &= 6 \\ s &= 1 \\ \omega_1 &= \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) \\ \omega_2 &= 1 \\ b_{1,1} &= \mu \\ 16 k \sqrt{2} &= \mathcal{E} \end{aligned} \quad (\text{II-44})$$

e os outros coeficientes $b_{i,j}$ nulos. Portanto temos,

$$K(I_1, \varphi_1, I_2, \varphi_2) = \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) \cdot I_1 + I_2 + \kappa \cdot I_1^2 + \varepsilon I_1^3 I_2^{1/2} \cdot \cos(6\varphi_1 - \varphi_2) \quad (\text{II-45})$$

a qual pode ser reescrita como,

$$K(\underline{I}, \underline{\varphi}) = H_0(\underline{I}) + W(\underline{I}, \underline{\varphi}) \quad (\text{II-46})$$

Podemos considerar o sistema não perturbado como sendo aquele representado por,

$$H_0(\underline{I}) = \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) \cdot I_1 + \kappa \cdot I_1^2 + I_2 \quad (\text{II-47})$$

na presença da perturbação,

$$W(\underline{I}, \underline{\varphi}) = \varepsilon \cdot I_1^3 \cdot I_2^{1/2} \cdot \cos(6\varphi_1 - \varphi_2) \quad (\text{II-48})$$

O efeito da perturbação é tanto mais intenso quanto mais suave for a variação temporal de sua fase,

$$\psi_{r,s} = \psi_{6,1} = 6\varphi_1 - \varphi_2 \quad (\text{II-49})$$

O limite de fase constante nos fornece a ressonância entre o sistema não perturbado com o harmônico $(r,s) = (6,1)$ da perturbação. Isto é,

$$\dot{\psi} = 6\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = 0 \quad (\text{II-50})$$

tal que a condição de ressonância é,

$$6\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 \quad (\text{II-51})$$

onde,

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\partial H_0}{\partial I_1} = \omega_1(\underline{I}) \quad , \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial I_2} = \omega_2(\underline{I}) \quad (\text{II-52})$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_1 = (1/6 - \lambda) + 2 \cdot c \cdot I_1 \quad (\text{II-53})$$

e

$$\dot{\varphi}_2 = 1$$

Logo,

$$(1 - 6\lambda) + 12c I_1 = 1 \quad (\text{II-54})$$

e assim

$$I_1 = \frac{\lambda}{2c} \quad (\text{II-55})$$

Esta relação (II-55) nos mostra a posição do sistema de ilhas:

- i) Se $\lambda = 0$, $I_1 = 0$, a ressonância estará no ponto elíptica da secção de superfície da figura (II-5).
- ii) Se $\lambda \neq 0$, a ressonância ocorrerá no toro ressonante de terminado pelo $J_1 = I_1/6$, isto é em

$$J_1 = \frac{\lambda}{12 \cdot c} \quad (\text{II-56})$$

como ilustrado na figura (II-6)

Semiclassicamente a separação entre dois níveis de energia consecutivos é h de acordo com Bohr-Sommerfeld e portanto J_1/h nos fornece a quantidade aproximadamente de níveis de energia existentes até a ressonância.

Utilizando ainda a transformação canônica linear (II-42) com $\nu = 6$ e $S = 1$ reescrevemos a hamiltoniana

na (II-45) nas novas variáveis de ângulo e ação
por,

$$H(\underline{J}, \underline{\theta}) = -6\lambda J_1 + J_2 + 6^2 \cdot \rho \cdot J_1^2 + \varepsilon \cdot 6^3 \cdot J_1^3 \cdot (J_2 - J_1)^{1/2} \cos \theta_1 \quad (\text{II-57})$$

ou

$$H(\underline{J}, \underline{\theta}) = H_0(\underline{J}) + W(\underline{J}, \underline{\theta}) \quad (\text{II-58})$$

onde

$$H_0(\underline{J}) = -6\lambda J_1 + J_2 + 6^2 \cdot \rho \cdot J_1^2 \quad (\text{II-59})$$

e

$$W(\underline{J}, \underline{\theta}) = \varepsilon \cdot 6^3 \cdot J_1^3 \cdot (J_2 - J_1)^{1/2} \cos \theta_1 \quad (\text{II-60})$$

A expressão (II-57) será utilizada posteriormente para calcular o espectro de energia por um formalismo semi-clássico.

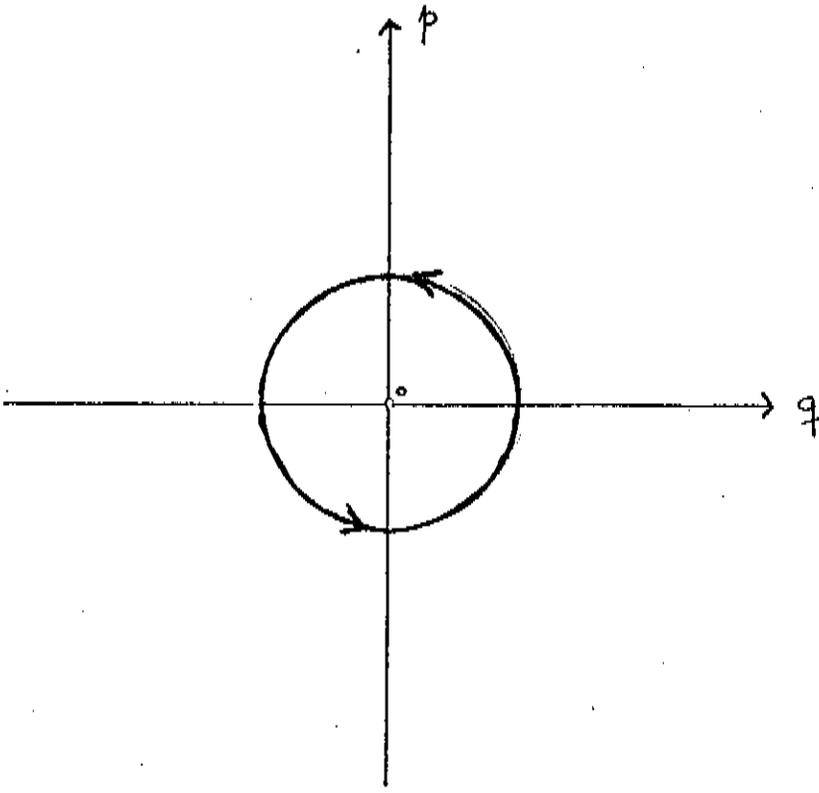


Figura (II-2) : Ponto "O" de equilíbrio estável

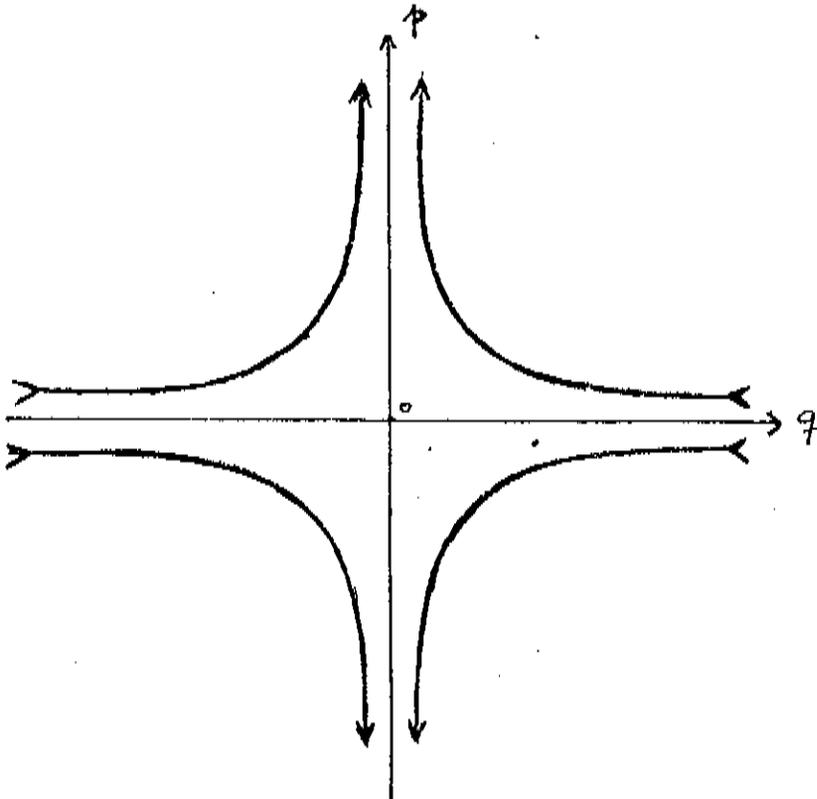


Figura (II-1) : Ponto "O" de equilíbrio instável

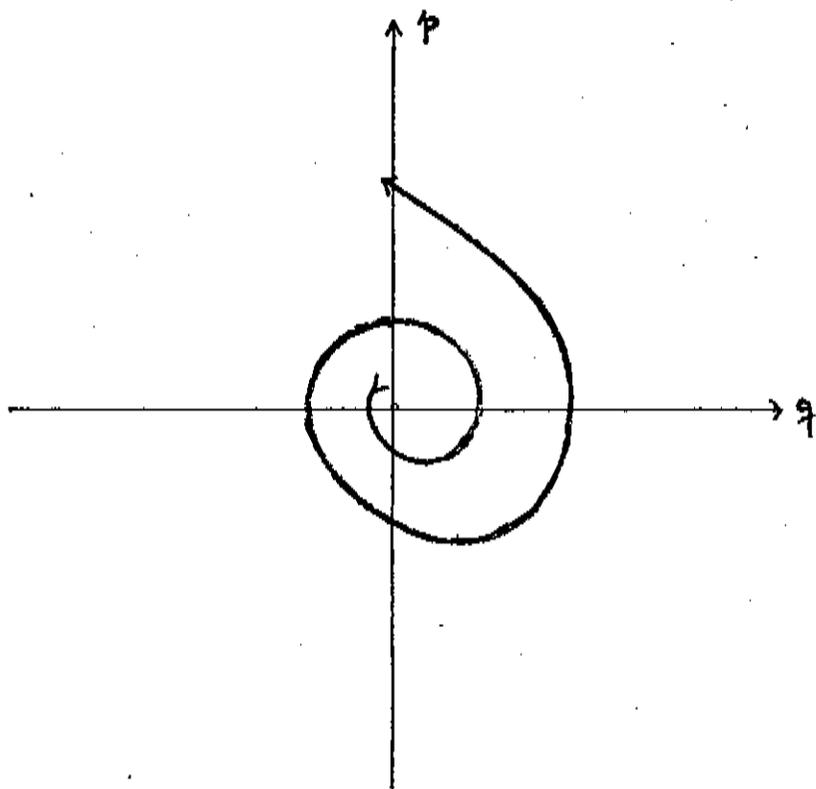


Figura (II-4)

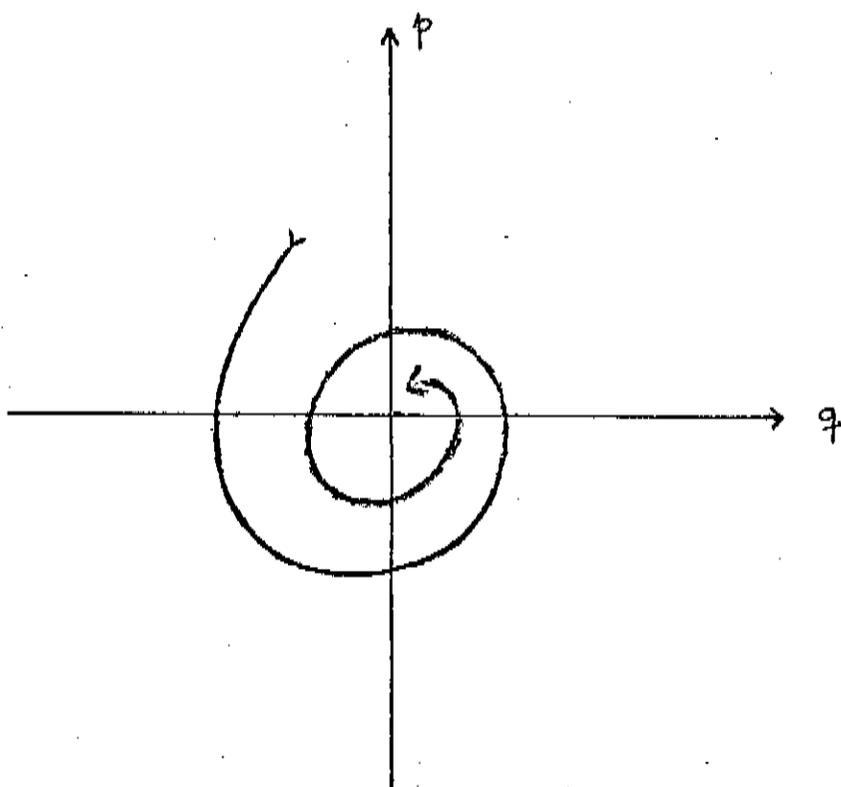


Figura (II-3)

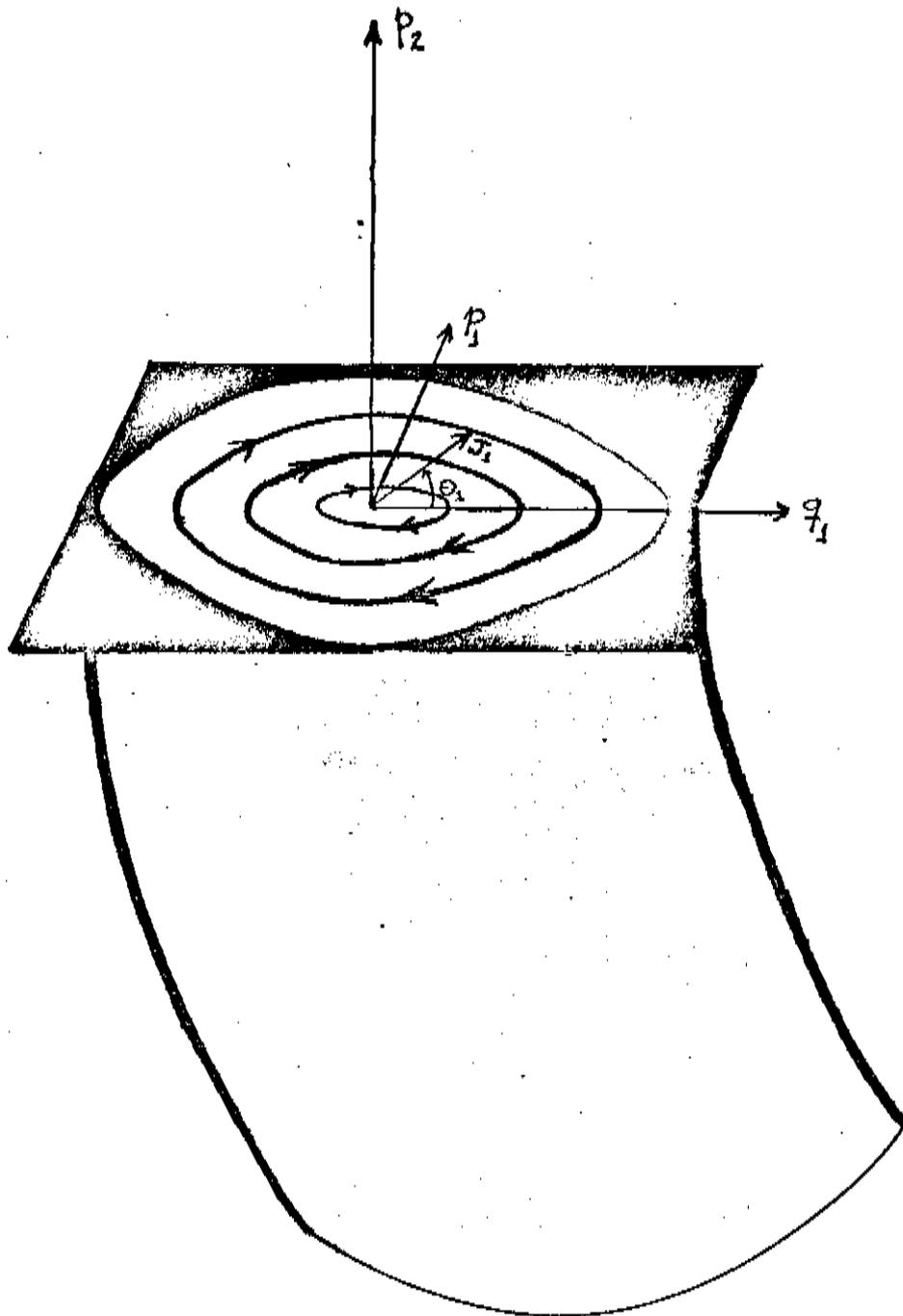


Figura (II-5) : Sistema integrável sem ressonância.

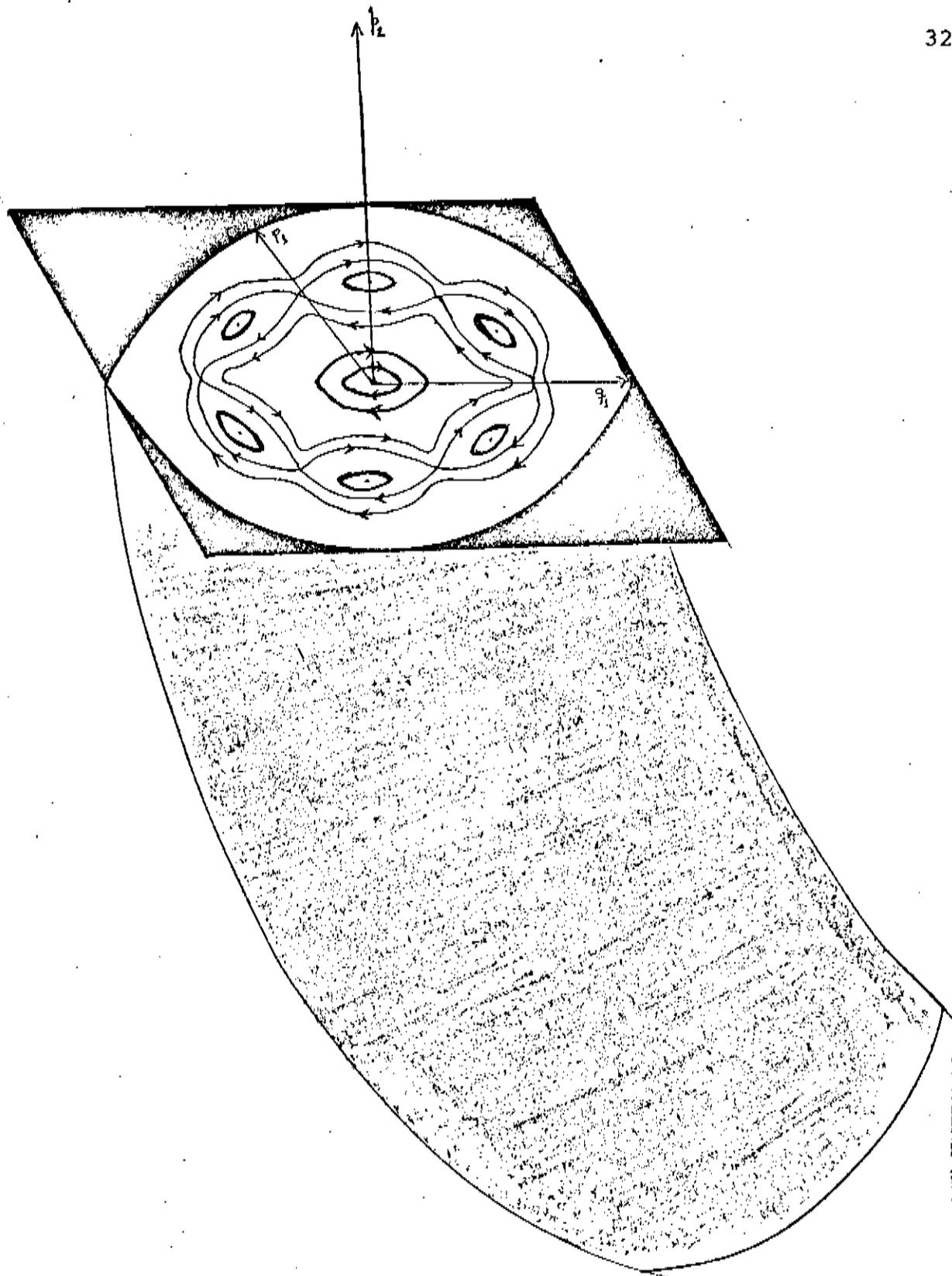


Figura (II-6) : A perturbação desloca o sistema de ilhas do ponto estável para um toro ressonante . O sistema ainda integrável apresenta várias famílias de hamiltonianas envolvidas por separatrizes. Neste caso aparecem seis ilhas porque $r=6$ e $s=1$; e $J_1=I_1/6$.

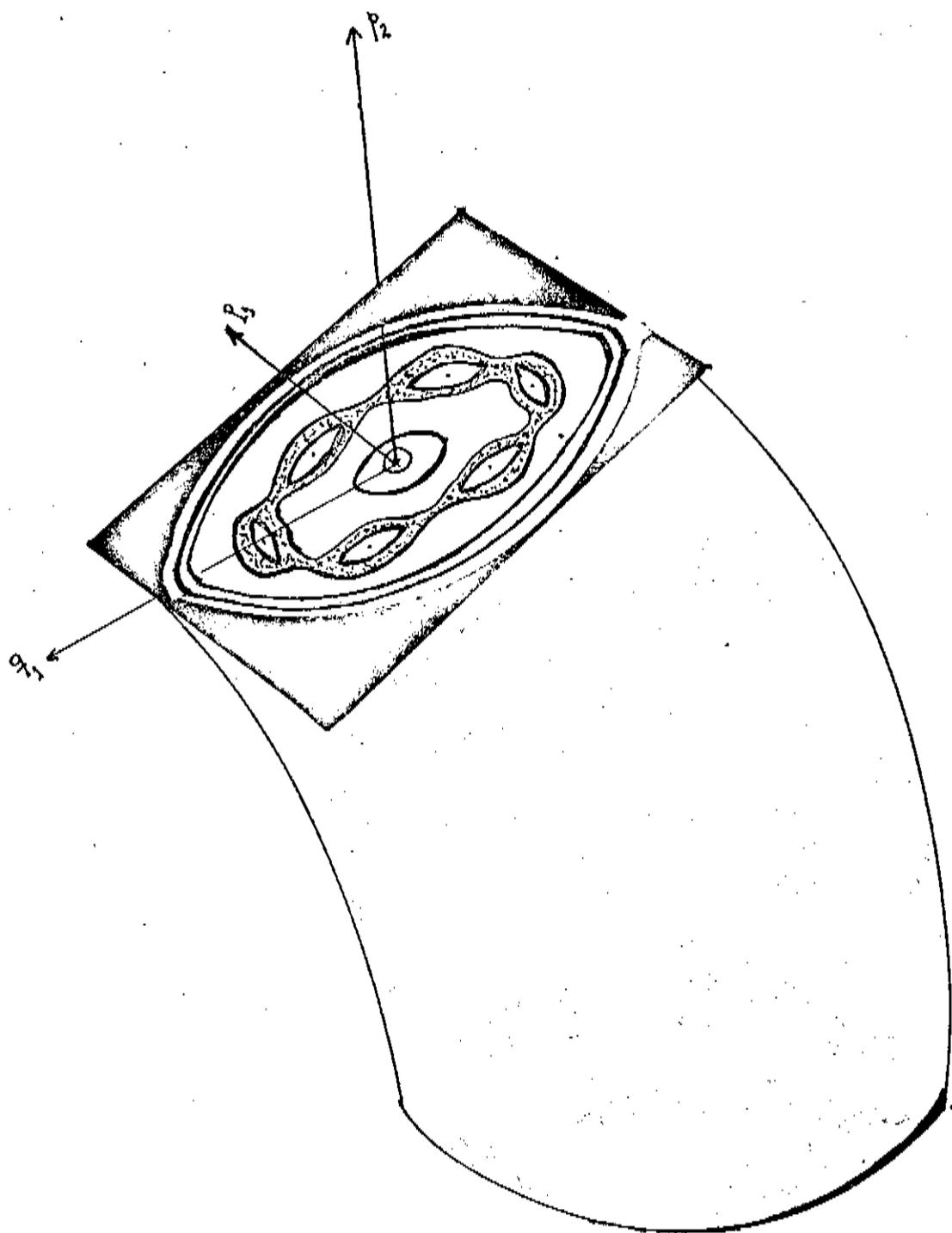


Figura (II-7) : Uma perturbação genérica pode destruir a integridade do sistema, ao quebrar as separatrizes, gerando um sistema de ilhas envolvidas por órbitas caóticas.

CAPÍTULO III

ELEMENTOS DE MATRIZ SEMICLÁSSICOS DE $H(\underline{q}, \underline{p})$

Em geral fenômenos macroscópicos podem ser bem descritos por uma função hamiltoniana $H(\underline{q}, \underline{p}, t)$ classicamente. A mecânica clássica assegura que, se fizermos uma medida no sistema encontrá-lo-emos com probabilidade UM em um ponto $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ que se move no espaço de fase de acordo com as equações de movimento de Hamilton,

$$\dot{\underline{q}} = \{ \underline{q}, H \} \quad , \quad \dot{\underline{p}} = \{ \underline{p}, H \} \quad (\text{III-1})$$

onde $\{ \underline{q}, H \}$ e $\{ \underline{p}, H \}$ são os parênteses de Poisson.

Na mecânica quântica, existe uma limitação fundamental dada pelo princípio de incerteza de Heisenberg : que não é possível determinar a posição de um sistema no espaço de fase com concordância melhor do que num volume da ordem de $(h)^M$ onde M é o número de graus de liberdade e h é a constante de Planck. O princípio de incerteza mostra-nos a necessidade de uma representação diferente da clássica para descrever o movimento no espaço de fase .

Podemos construir um pacote de onda que se reduz a uma trajetória no limite $\hbar \rightarrow 0$, mas essa onda só será estacionária no caso de um ponto de equilíbrio. O equivalente clássico de um estado estacionário é uma superfície invariante no espaço de fase. Por essa razão procuramos então associar uma função de onda $\psi_0(\underline{q}, \underline{p}^*)$ a uma superfície $\sum_0(\underline{p}^*)$ de pontos no espaço de fase $(\underline{q} \times \underline{p})$, indexada pelo valor \underline{p}^* da família de curvas caracterizadas por

$\tilde{p}(\tilde{q}, \tilde{P})$. De fato, consideramos uma família de estados quânticos em que cada qual corresponde a uma família de órbitas clássicas. A superfície $\Sigma_0(P^*)$ pode ser visualizada pela figura (III-1).

A coordenada Q ao longo de $\Sigma_0(P^*)$ é escolhida de modo que os pontos clássicos sobre $\Sigma_0(P^*)$ são distribuídos uniformemente. Então Q serão consideradas como novas coordenadas no espaço de fase e os parâmetros \tilde{P} serão tomados como os momenta conjugados. O gerador desta transformação é a função ação $S_0(\tilde{q}, \tilde{P})$ satisfazendo as relações,

$$(\tilde{q}, \tilde{P}) \longleftarrow S_0(\tilde{q}, \tilde{P}) \longrightarrow (Q, P) \quad (\text{III-2})$$

$$\tilde{p} = \frac{\partial S_0}{\partial \tilde{q}}, \quad Q = \frac{\partial S_0}{\partial \tilde{P}}$$

Cada intersecção da superfície $\tilde{q} = \text{constante}$ com a curva $\Sigma_0(P^*)$ fornece um ramo $\tilde{p}_0^{(j)}(\tilde{q}, P^*)$ da função $\tilde{p}(\tilde{q}, \tilde{P})$ e conseqüentemente a função ação é dada por

$$S_0^{(j)}(\tilde{q}, P^*) = \int_{\tilde{q}_0}^{\tilde{q}} \tilde{p}_0^{(j)}(\tilde{q}', P^*) \cdot d\tilde{q}' \quad (\text{III-3})$$

onde \tilde{q}_0 é uma constante.

A ação $S_0^{(j)}(\tilde{q}, P^*)$ é identificada como uma solução da equação de Hamilton-Jacobi em $t=0$,

$$H\left(\tilde{q}, \frac{\partial S(\tilde{q}, P, t)}{\partial \tilde{q}}, t\right) = -\frac{\partial S(\tilde{q}, P, t)}{\partial t} \quad (\text{III-4})$$

A condição para que

$$\psi(\tilde{q}, t, P^*) = \sum_j \left| c \frac{\partial^2 S^{(j)}(\tilde{q}, t, P^*)}{\partial \tilde{q} \cdot \partial P^*} \right|^{1/2} \exp \left[i \left(\delta_j + \frac{S^{(j)}(\tilde{q}, t, P^*)}{\hbar} \right) \right]$$

satisfaça a equação de Schroedinger para $\hbar \rightarrow 0$ é que $S(\tilde{q}, P, t)$ satisfça (III-4).

A função de onda $\psi_0(q, P^*)$ semiclássica é construída por termos que não desaparecem quando $\hbar \rightarrow 0$ e cada contribuição $\psi_0^{(j)}(q, P^*)$ envolve uma fase dada pelo produto de \hbar^{-1} por $S_0^{(j)}(q, P^*)$ a menos de uma constante. E, de acordo com Berry^[19] a função de onda

$$\psi_0(q, P^*) = \sum_j \left| c \cdot \frac{\partial^2 S_0^{(j)}(q, P^*)}{\partial q \cdot \partial P^*} \right|^{1/2} \exp \left[i \left(\delta_j + \frac{S_0^{(j)}(q, P^*)}{\hbar} \right) \right] \quad (\text{III-5})$$

está associada à superfície clássica $\Sigma_0(P^*)$; δ_j é uma fase.

Para o caso de sistemas quânticos onde todos os observáveis podem ser expressos como funções das coordenadas e seus momenta conjugados (q, p) , podemos representar o sistema por uma distribuição de quase-probabilidade no espaço de fase ao invés das representações usuais de Heisenberg e Schroedinger. Em 1932, Wigner [6] introduziu uma função distribuição $W(q, p)$ no espaço de fase que descreve completamente um estado quântico $\psi(q)$ e é definida por:

$$W(q, p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^N \int dQ \cdot e^{i p \cdot Q / \hbar} \langle q - Q/2 | \psi \rangle \langle \psi | q + Q/2 \rangle \quad (\text{III-6})$$

a qual corresponde à transformada de Fourier do produto de $\langle \psi |$ com $(\langle \psi |)^*$ em posições separadas por Q . A função $W(q, p)$ é uma generalização quântica da densidade clássica de pontos no espaço de fase. A função de Wigner para um estado semiclássico associado a uma superfície $\Sigma_0(P^*)$ é obtida simplesmente pela combinação de (III-5) e (III-6).

Os auto estados de energia de um sistema que classicamente é integrável, tem uma correspondência direta com os toros traçados pelas órbitas no espaço de fase. Na representação das variáveis ângulo e ação $(\underline{I}, \underline{\varphi})$, tais toros devem satisfazer à condição de quantização [7]

$$\underline{I}_{\underline{\eta}} = \left(\underline{\eta} + \underline{\alpha}_M / 4 \right) \quad (\text{III-7})$$

onde $\underline{\eta} = \{ \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N \}$ é um conjunto de números quânticos e $\underline{\alpha}_M = \{ \alpha_{M_1}, \alpha_{M_2}, \dots, \alpha_{M_N} \}$ são os índices de Maslov [8]. A função de Wigner $W_{\underline{\eta}}(\underline{I}, \underline{\varphi})$ representando o estado determinado por $\underline{\eta}$, no limite clássico foi obtida por Berry [9] e é dada por

$$W_{\underline{\eta}}(\underline{I}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^N \cdot \delta \left(\underline{I}(\underline{q}, \underline{p}) - \underline{I}_{\underline{\eta}} \right) \quad (\text{III-8})$$

onde $\underline{I}(\underline{q}, \underline{p})$ é a ação do toro que passa por $(\underline{q}, \underline{p})$. A função delta N -dimensional implica que a função de Wigner para um auto-estado está concentrada sobre o toro. Este resultado é válido para sistemas integráveis somente. Os sistemas não integráveis classicamente, ainda não tem uma perfeita compreensão no domínio da mecânica quântica.

A formulação de Wigner-Weyl permite-nos representar qualquer observável que tenha um limite clássico, por uma matriz semiclássica construída na base dos autoestados de um sistema integrável. Se esses autoestados forem uma boa aproximação aos autoestados do Hamiltoniano não-integrável, então a matriz semiclássica representando este Hamiltoniano será quase diagonal. Portanto o espectro semiclássico de energia do

sistema não integrável pode ser obtido pela diagonalização da matriz semiclássica.

A representação matricial de um operador \hat{A} em termos de uma base completa $|q\rangle$ na representação de (q, p) é,

$$\langle \underline{l} | \hat{A} | \underline{q} \rangle = \int d\underline{q}_1 \cdot d\underline{q}_2 \langle \underline{l} | \underline{q}_1 \rangle \langle \underline{q}_1 | \hat{A} | \underline{q}_2 \rangle \langle \underline{q}_2 | \underline{q} \rangle \quad (\text{III-9})$$

$$\langle \underline{l} | \hat{A} | \underline{q} \rangle = \int d\underline{p} \cdot d\underline{q} A(\underline{q}, \underline{p}) \langle \underline{l} | \underline{q} \rangle \quad (\text{III-10})$$

onde

$$A(\underline{q}, \underline{p}) = \int d\underline{Q} \langle \underline{q} + \underline{Q}/2 | \hat{A} | \underline{q} - \underline{Q}/2 \rangle \cdot e^{-i \underline{p} \cdot \underline{Q} / \hbar} \quad (\text{III-11})$$

é a transformada de Weyl^[10] do operador \hat{A} , e

$$\langle \underline{l} | \underline{q} \rangle_{(\underline{q}, \underline{p})} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^N \int d\underline{Q} \langle \underline{q} + \underline{Q}/2 | \underline{q} \rangle \langle \underline{l} | \underline{q} - \underline{Q}/2 \rangle \cdot e^{-i \underline{p} \cdot \underline{Q} / \hbar} \quad (\text{III-12})$$

é a matriz de Moyal ou função de Wigner cruzada^[11].

Mesmo se \hat{A} não depender explicitamente de \hbar nem sempre pode-se obter $A(\underline{q}, \underline{p}) = A_c(\underline{q}, \underline{p})$ onde $A_c(\underline{q}, \underline{p})$ é o observável clássico. Em geral essa correspondência de Weyl não se verifica para funções que tenham uma dependência complicada em $(\underline{q}, \underline{p})$ devido à dificuldade que existe na quantização

de funções clássicas [12].

Tendo em conta as definições (III-10), (III-11) e (III-12) utilizaremos a representação de ângulo/ação (\mathcal{I}, ϑ) para obter os elementos de matriz semiclassicos para um operador que tenha um limite clássico.

A transformada de Weyl na representação de ângulo/ação é dada por,

$$A(\underline{\mathcal{I}}_{\underline{L}}, \underline{\vartheta}) = \int_{-\pi}^{\pi} d\Phi \cdot e^{-i\underline{L} \cdot \Phi} \langle \underline{\vartheta} + \Phi/2 | \hat{A} | \underline{\vartheta} - \Phi/2 \rangle \quad (\text{III-13})$$

Contrariamente à representação de $(\underline{q}, \underline{p})$ a transformada de Weyl em $(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\vartheta})$ não equivale a uma transformada de Fourier em $\Phi/2$ dos elementos de matriz. Isso acarreta problemas para a transformada inversa de Fourier, que são tratados em [11].

A matriz de Moyal nessa representação é dada por

$$\langle \underline{q} | \underline{q} \rangle_{(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\vartheta})} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^N \int_{-\pi}^{\pi} d\Phi \cdot e^{-i\underline{L} \cdot \Phi} \langle \underline{\vartheta} + \Phi/2 | \underline{q} \rangle \langle \underline{q} | \underline{\vartheta} - \Phi/2 \rangle \quad (\text{III-14})$$

e utilizando a representação

$$\langle \underline{\vartheta} | \underline{q} \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} \cdot e^{i\underline{u} \cdot \underline{\vartheta}} \quad (\text{III-15})$$

temos

$$\langle \underline{q} | \underline{q} \rangle_{(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\vartheta})} = \frac{e^{i(\underline{q}-\underline{q}) \cdot \underline{\vartheta}}}{(2\pi\hbar)^N} \cdot \delta_{\frac{\underline{q}+\underline{q}}{2}, \underline{L}} \quad (\text{III-16})$$

Aqui, cada elemento é exatamente uma função delta no membro da família de toros, cujas ações são

$$\underline{I} = \left(\frac{\underline{g} + \underline{l}}{2} + \frac{\underline{\alpha}_M}{4} \right) \cdot \hbar \quad (\text{III-17})$$

Assumindo a existência da correspondência de Weyl para um observável $A(\underline{I}_1, \varphi)$, obtemos uma expressão para os elementos de matriz semiclássicos do operador \hat{A} na representação de ângulo/ação. Analogamente a (III-9) e (III-10) obtemos

$$\langle \underline{l} | \hat{A} | \underline{g} \rangle = \int_{-\hbar}^{\hbar} d\underline{\varphi} \cdot d\underline{\Phi} : \langle \underline{l} | \underline{\varphi} + \underline{\Phi}/2 \rangle \langle \underline{\varphi} + \underline{\Phi}/2 | \hat{A} | \underline{\varphi} - \underline{\Phi}/2 \rangle \langle \underline{\varphi} - \underline{\Phi}/2 | \underline{g} \rangle \quad (\text{III-18})$$

c

$$\langle \underline{l} | \hat{A} | \underline{g} \rangle = \left(\frac{1}{2\hbar} \right)^N \int d\underline{\varphi} \cdot A \left(\underline{I} \frac{\underline{l} + \underline{g}}{2}, \varphi \right) \cdot e^{i(\underline{g} - \underline{l}) \cdot \underline{\varphi}} \quad (\text{III-19})$$

Esta equação nos mostra que os elementos de matriz quânticos e as componentes de Fourier clássicas descrevem os mesmos observáveis físicos no limite de grandes números quânticos. Em outras palavras (III-19) evidencia o princípio de correspondência de Heisenberg e foi apresentada por Percival e Richards ^[13] e derivada detalhadamente por A.M. Ozório Almeida ^[11].

Embora as variáveis de ângulos/ação não possam ser quantizadas diretamente ^[14] é extremamente útil uma quantização aproximada devido à simplicidade do movimento clássico

co nessas variáveis. Os operadores \hat{I} têm o conjunto discreto de autovalores semiclássicos dados pelas regras de Bohr-Sommerfeld (III-7),

$\underline{I}_n = \hbar (n + k)$, onde k é (1/4) do índice de Maslov.

De acordo com a transformação (II-42) os autovalores semiclássicos das ações J_1 e J_2 são

$$J_1 = \frac{\hbar}{6} (n_1 + k) \quad (\text{III-20})$$

$$J_2 = \frac{\hbar}{6} (6n_2 + n_1 + 7k)$$

donde definimos os números quânticos (m, n) por,

$$m = 6n_2 + n_1$$

$$n_1 = 6n + n_0 \Rightarrow n = (n_1 - n_0)/6$$

(III-21)

com $n_0 = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5 .

Então

$$J_1 = \hbar \left(n + \frac{n_0}{6} + \frac{k}{6} \right)$$

(III-22)

$$J_2 = \hbar \left(\frac{m}{6} + \frac{7k}{6} \right)$$

Para obter o espectro semiclássico de energia da hamiltoniana (II-57),

$$H(\underline{J}, \underline{\theta}) = -6\lambda J_1 + J_2 + 6^2 \epsilon J_1^2 + \epsilon \cdot 6^3 J_1^3 \cdot (J_2 - J_1)^{1/2} \cos \theta_1$$

utilizamos a integral de Fourier (III-19) e as relações (III-22)

A presença de $J_2 = \text{constante}$ em (II-57) acarreta simples-

mente numa translação na medida da energia, por isso calcularemos os elementos de matriz para $(H - J_2)$. Salientamos também que a passagem de $K(I, \Psi)$, equação (II-45), para $H(J, \Theta)$, equação (II-57), se deu através de uma transformação canônica linear, equação (II-42), o que equivale a uma transformação unitária quanticamente^[15].

Portanto temos:

$$\langle \underline{l} | (\hat{H} - \hat{J}_2) | \underline{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 e^{i(l-g)\theta_1} H\left(\frac{J_{l+g}}{2}, \theta_1\right) \quad (\text{III-23})$$

e explicitamente,

$$\begin{aligned} \langle \underline{l} | (\hat{H} - \hat{J}_2) | \underline{g} \rangle = & \left[-6\lambda \left(g + \frac{n_0}{6} + \frac{k}{6} \right) \hbar + 6^2 c \left(g + \frac{n_0}{6} + \frac{k}{6} \right)^2 \hbar^2 \right] \cdot \delta_{g,l} + \\ & + \frac{\mathcal{E}}{2} \cdot 6^3 \left[J_2 - \left(\frac{l+g}{2} + \frac{n_0}{6} + \frac{k}{6} \right) \right]^{1/2} \cdot \left[\frac{l+g}{2} + \frac{n_0}{6} + \frac{k}{6} \right]^3 \cdot \hbar^3 \cdot \left(\delta_{g, l \pm 1} \right) \end{aligned} \quad (\text{III-24})$$

A estrutura da matriz (III-24) é tridiagonal e a partir de sua diagonalização computacional obtemos os autovalores semiclássicos da hamiltoniana descrita em variáveis de ângulo/ação $H(\underline{J}, \underline{\Theta})$, os quais serão apresentados no capítulo V.

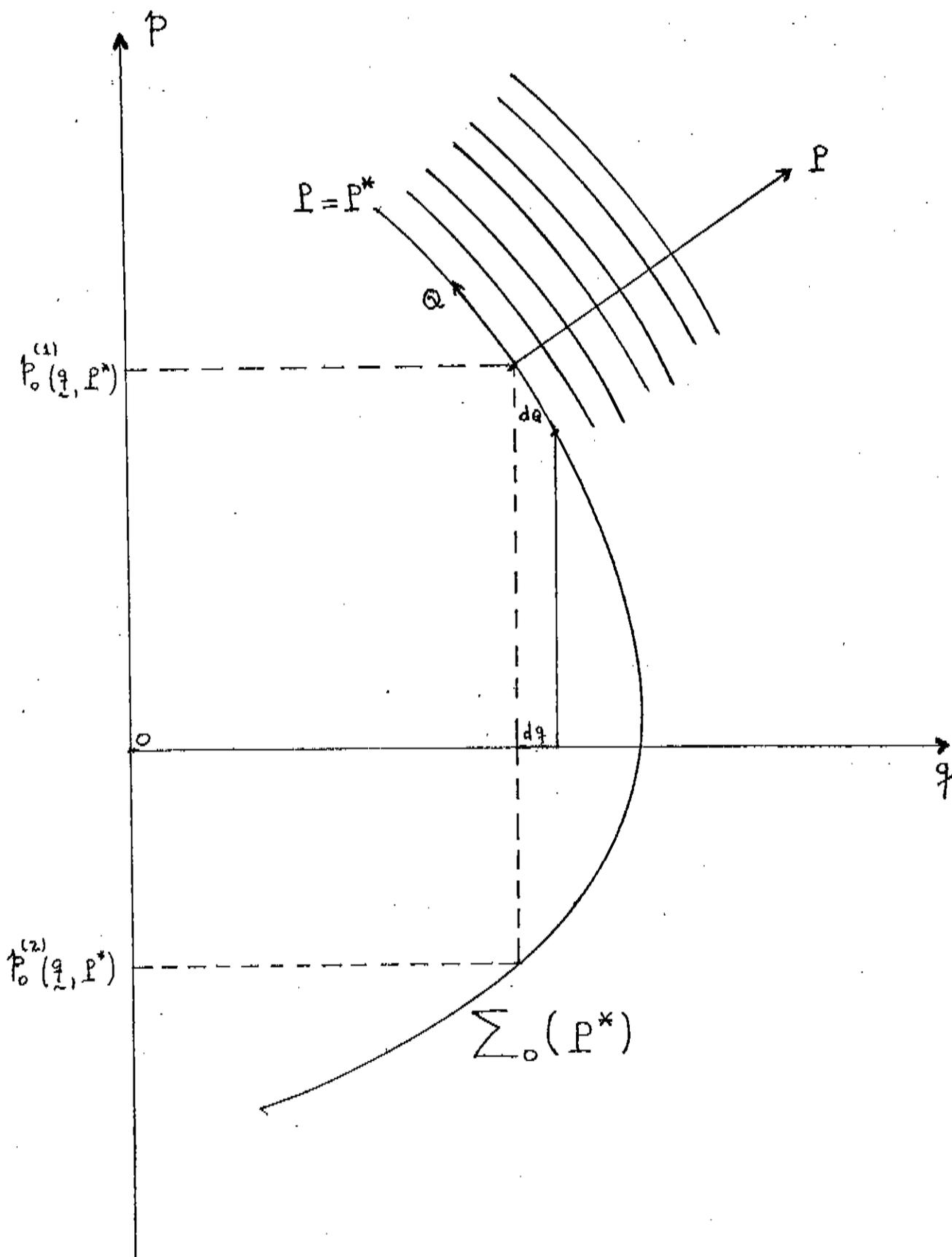


Figura (III-1) : Geometria da família de curvas, parametrizadas por P , mostrando a curva $\Sigma_0(P^*)$ num tempo inicial $t=0$.

CAPÍTULO IV

ELEMENTOS DE MATRIZ QUÂNTICOS DE $H(p, q)$

Deduzimos as formas normais de Birkhoff e a ressonante com o auxílio da transformação canônica linear:

$$a_j = (q_j + i p_j) \quad (\text{IV-1})$$

$$a_j^* = (q_j - i p_j)$$

Essa transformação tem um equivalente exato na mecânica quântica. De fato o correspondente quântico^[20]

$$\hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2i}} (\hat{q}_j + i \hat{p}_j) \quad (\text{IV-2})$$

$$\hat{a}_j^* = \frac{1}{\sqrt{2i}} (\hat{q}_j - i \hat{p}_j)$$

são os conhecidos operadores de criação e destruição dos osciladores harmônicos. As transformações canônicas subsequentes que reduzem a hamiltoniana à forma normal (II-41) não tem equivalentes quânticos exatos por serem não lineares. Tomamos então o caso mais simples de uma hamiltoniana que já se encontra na forma normal ressonante $K(a, a^*)$ na equação (II-35) com a mesma escolha (II-44) de constantes que fizemos anteriormente:

$$H(a_j, a_j^*) = (1/6 - \lambda) a_1^* a_1 + a_2^* a_2 + c (a_1^* a_1)^2 + \frac{f}{2} (a_1^* a_2^* + a_2 a_1^*) \quad (\text{IV-3})$$

A transição desta hamiltoniana clássica para o hamiltoniano quântico mais simples que represente dois oscilado

res acoplados pela perturbação $(a_1^{\epsilon} a_2^* + a_2 a_1^{\epsilon})$ se dá por simetrizar^[16] as variáveis complexas a_j e a_j^* e repassá-las aos operadores \hat{a}_j e \hat{a}_j^+ respectivamente, satisfazendo as seguintes relações de comutação canônica,

$$\begin{aligned} [\hat{q}_j, \hat{p}_k] &= i\hbar \delta_{j,k} \\ [\hat{a}_j, \hat{a}_k] &= 0 = [\hat{a}_j^+, \hat{a}_k^+] \\ [\hat{a}_j, \hat{a}_k^+] &= \hbar \delta_{j,k} \end{aligned} \quad (\text{IV-4})$$

Cada termo de (IV-3) é simetrizado para a seguinte forma:

$$\begin{aligned} (a_j \cdot a_j^*) &\longrightarrow \frac{1}{2} (\hat{a}_j \hat{a}_j^+ + \hat{a}_j^+ \hat{a}_j) \\ (a_1 \cdot a_1^*)^2 &\longrightarrow (\hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ - \hbar \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ + \frac{\hbar^2}{4}) \end{aligned} \quad (\text{IV-5})$$

Nota-se que o último termo do (IV-3) não precisa ser simetrizado porque nele aparecem operadores que atuam em subespaços distintos e por isso eles comutam entre si. Então, definimos o operador Hamiltoniano por,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{(1/6 - \lambda)}{2} (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^+) + \frac{1}{2} (\hat{a}_2^+ \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_2^+) + \\ &+ \epsilon (\hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ - \hbar \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ + \frac{\hbar^2}{4}) + \frac{\xi}{2} (\hat{a}_1^{\epsilon} \hat{a}_2^+ + \hat{a}_2 \hat{a}_1^{\epsilon}) \end{aligned} \quad (\text{IV-6})$$

Através das relações (IV-4) e (IV-5) podemos definir os operadores \hat{I}_1 e \hat{I}_2 por

$$\hat{I}_j = \left(\frac{\hbar}{2} + \hat{a}_j^+ \cdot \hat{a}_j \right) \quad (\text{IV-7})$$

Somente para os osciladores harmônicos é que as ações \hat{I}_j podem ser quantizadas exatamente. Resgatando a relação (II-42) entre os autovalores de \hat{I}_1, \hat{I}_2 com J_2 definimos o operador \hat{J}_2

$$\text{por} \quad \hat{J}_2 = \left(\frac{\hat{I}_1}{6} + \hat{I}_2 \right) \quad (\text{IV-8})$$

$$\Rightarrow \hat{J}_2 = \frac{1}{12} (\hbar + 2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) + \frac{1}{2} (\hbar + 2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2)$$

Uma vez que \hat{H} e \hat{J}_2 comutam (Veja Apêndice A) existem estados estacionários do sistema que sempre permanecem autoestados de \hat{J}_2 com o mesmo autovalor. A perturbação gera autoestados para \hat{H} que são superposições dos autoestados não perturbados com a mesma dependência em Θ_2 dada pelas autofunções de \hat{J}_2 .

Por isso os autoestados de \hat{J}_2 constituem uma boa base para representarmos \hat{H} e podem ser encontrados a partir da atuação de \hat{J}_2 na base $|n_1, n_2\rangle$,

$$\hat{J}_2 |n_1, n_2\rangle = \left(\frac{\hat{I}_1}{6} + \hat{I}_2 \right) |n_1, n_2\rangle \quad (\text{IV-9})$$

$$\hat{J}_2 |n_1, n_2\rangle = \hbar \left(j_2 + \frac{7}{6} k \right) |n_1, n_2\rangle \quad (\text{IV-10})$$

com

$$j_2 = \frac{n_1}{6} + n_2 \quad (\text{IV-11})$$

Mas de (III-21) sabemos que

$$n_1 + 6 n_2 = m$$

$$n_1 = 6n + n_0$$

$$(\text{IV-12})$$

Logo,

$$j_2 = m/6 \quad (\text{IV-13})$$

e

$$n_2 = j_2 - n - \frac{n_0}{6} \quad (\text{IV-14})$$

Assim a base $|n_1, n_2\rangle$ é redefinida com j_2 constante para,

$$|n_1, n_2\rangle_{j_2} = |6n + n_0, j_2 - n - \frac{n_0}{6}\rangle_{j_2} \quad (\text{IV-15})$$

a qual denotaremos simplesmente por $|n\rangle_{j_2}$

$$|n\rangle_{j_2} = |6n + n_0, j_2 - n - \frac{n_0}{6}\rangle_{j_2} \quad (\text{IV-16})$$

De (IV-11) vemos que j_2 é degenerado de ordem $(j_2 + 1)$. A cada valor j_2 associamos um subespaço gerado pelos $(j_2 + 1)$ vetores correspondentes a este j_2 . Por causa dessa degenerescência o hamiltoniano não é diagonal neste subespaço, mas devido à comutação de \hat{H} com \hat{J}_2 o subespaço fica globalmente invariante frente a ação de \hat{H} e portanto \hat{H} pode ser diagonalizado em blocos.

Acumulado a isso, existem seis possíveis subespaços associados aos autovalores de \hat{J}_1 , pois como já vimos $n_1 = 6n + n_0$ com n_0 podendo assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

Assim podemos descrever o espaço de estados da seguinte maneira: Temos seis subespaços distintos; a cada um correspondemos um autovalor $j_1 (= n_1/6)$ de \hat{J}_1 . Em cada um desses subespaços existem infinitos blocos dispostos diagonalmente. Cada bloco está associado a um autovalor de \hat{J}_2 cuja dimen

são é a ordem $(j_2 + 1)$ da degenerescência de j_2 . E como veremos a seguir o hamiltoniano terá uma estrutura tridiagonal nesses blocos.

Construiremos uma matriz para o operador $(\hat{H} - \hat{J}_2)$ analogamente ao formalismo semiclássico. Utilizando (IV-6) e (IV-8) obtemos,

$$\begin{aligned} (\hat{H} - \hat{J}_2) = & -\frac{\lambda}{2} (\hat{a}_j^+ \hat{a}_j + \hat{a}_j \hat{a}_j^+) + c (\hat{a}_1 \hat{a}_j^+ + \hat{a}_j \hat{a}_1^+ - \hbar \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ + \frac{\hbar^2}{4}) + \\ & + \frac{\epsilon}{2} (\hat{a}_1^4 \hat{a}_2^+ + \hat{a}_2 \hat{a}_1^{+4}) \end{aligned} \quad (\text{IV-17})$$

ou

$$(\hat{H} - \hat{J}_2) = -\lambda \hat{I}_1 + c \hat{I}_1^2 + \frac{\epsilon}{2} (\hat{a}_1^4 \hat{a}_2^+ + \hat{a}_2 \hat{a}_1^{+4}) \quad (\text{IV-18})$$

de acordo com (IV-7).

Na base (IV-16) dos autoestados de \hat{J}_2 a matriz representando $(\hat{H} - \hat{J}_2)$ é dada pelos seguintes elementos de matriz

$$\begin{aligned} j_2 \langle n' | (\hat{H} - \hat{J}_2) | n \rangle_{j_2} = & \left[-6\lambda\hbar \left(n + \frac{7}{6}k \right) + 36c\hbar^2 \left(n + \frac{7}{6}k \right)^2 \right] \cdot \delta_{n', n} + \\ + \hbar^{7/2} \cdot \frac{\epsilon}{2} & \left[(6n+4) \cdot (6n+5) (6n+6) (6n+7) (6n+8) (6n+9) \left(j_2 - n - \frac{40}{6} \right) \right]^{1/2} \cdot \delta_{n', n \pm 1} \end{aligned} \quad (\text{IV-19})$$

com $n = 1, 2, \dots, j_2$.

O cálculo computacional da diagonalização desta matriz fornece o espectro exato de energia do sistema dos dois osciladores acoplados representado por $H(q, p)$ e quanti

zado na base dos operadores de ocupação. No próximo capítulo apresentamos e discutimos os resultados.

CAPÍTULO V

RESULTADOS, DISCUSSÃO, CONCLUSÃO

Os espectros de energias semiclássico e exato foram obtidos através da diagonalização computacional das matrizes (III-24) e (IV-19) respectivamente. No cálculo numérico escolhemos o conjunto de parâmetros,

$$c = 6^{-6} / 2$$

$$f = 6^{-13}$$

$$\lambda = 6^{-3}$$

(V-1)

$$\hbar = 0,9917$$

$$J_2 = (6^4 + 1/12) \cdot 0,9917$$

$$n_0 = 3$$

O índice de Maslov α_M para o oscilador harmônico é $2^{[8]}$ e como nosso sistema não perturbado é composto de osciladores usamos $\alpha_M = 2$. Consequentemente $k = 1/2$ já que $k = \alpha_M / 4$.

Os elementos de matriz semiclássicos fora da diagonal, são diferentes daqueles obtidos fora da diagonal da matriz exata; as matrizes são diferentes. A dimensão escolhida para as matrizes foi (75 x 75).

Os autovalores obtidos são mostrados a seguir na tabela:

a) Matriz Exata

b) Matriz Semiclássica

	1) = 0,528903	- 0,528906
	2) - 0,524276	- 0,524278
	3) - 0,519769	- 0,519772
	4) - 0,515386	- 0,515388
	5) - 0,511131	- 0,511133
	6) - 0,507006	- 0,507008
	7) - 0,503018	- 0,503019
	8) - 0,499171	- 0,499172
	9) - 0,495473	- 0,495474
	10) - 0,491933	- 0,491934
	11) - 0,488563	- 0,488563
	12) - 0,485377	- 0,485377
	13) - 0,482409	- 0,482409
	14) - 0,479634	- 0,479634
$E_{s,x} \rightarrow$	15) - 0,477472	- 0,477471
	16) - 0,474582	- 0,474582
	17) - 0,474067	- 0,474056
	18) - 0,469234	- 0,469233
	19) - 0,469182	- 0,469182
	20) - 0,462897	- 0,462896
	21) - 0,462812	- 0,462811
	22) - 0,455590	- 0,455590
	23) - 0,455457	- 0,455457
	24) - 0,447410	- 0,447410
	25) - 0,447216	- 0,447215
	26) - 0,438403	- 0,438403
	27) - 0,438134	- 0,438134
	28) - 0,428597	- 0,428597
	29) - 0,428240	- 0,428240
	30) - 0,418011	- 0,418011
	31) - 0,417550	- 0,417550
	32) - 0,406655	- 0,406655
	33) - 0,406074	- 0,406074
	34) - 0,394638	- 0,394538
	35) - 0,393819	- 0,393819
	36) - 0,381667	- 0,381667
	37) - 0,380792	- 0,380792
	38) - 0,368046	- 0,368047
	39) - 0,366995	- 0,366995
	40) - 0,353680	- 0,353680

Apresentamos apenas os primeiros 40 autovalores porque estamos interessados em conhecer da ordem de duas vezes a quantidade de níveis contidos na região ressonante. Desde o "fundo do poço", aproximadamente, $E_{\min.} = -0,531973$ até a energia da separatriz $E_{s,x} = -0,475292$ existem da ordem de 15 níveis de energia de acordo com o apêndice B. Por isso, os 30 a 40 primeiros autovalores é quem são importantes para nosso objetivo. Embora o cálculo de $E_{s,x}$ seja aproximado, a quantidade de níveis em ilha está concordante com a tabela apresentada.

Asseguramos que os resultados apresentados na tabela correspondem aos verdadeiros autovalores, pois variamos a dimensão das matrizes e constatamos que as energias da região ressonante convergem para aquelas mostradas na tabela.

Dos resultados apresentados, podemos verificar também que a diferença de energia entre dois níveis adjacentes quânticos ou semiclássicos é da ordem de 10^{-3}

$$E_j^{Q. ou S.C.} - E_{j-1}^{Q. ou S.C.} \sim 10^{-3} \quad (V-2)$$

enquanto que a diferença de energia entre níveis correspondentes semiclássicos e quânticos é da ordem de 10^{-6} ,

$$E_j^Q - E_j^{S.C.} \sim 10^{-6} \quad (V-3)$$

Com isso, evidenciamos que o erro envolvido no resultado é negligenciável e portanto o propósito deste trabalho, em utilizar o formalismo de ângulo/ação mesmo no domínio da mecânica quântica, é verificado para o caso do siste

ma não perturbado ser constituído de osciladores harmônicos. A contribuição do tunelamento ao espectro de energia é levada em consideração com muito boa precisão utilizando a representação das variáveis de ângulo/ação.

APÊNDICE A

CÁLCULO DE $[\hat{J}_2, \hat{H}]$

A partir de (IV-9) e (IV-18) descrevemos o operador hamiltoniano por

$$\hat{H} = -\lambda \hat{I}_1 + \left(\frac{\hat{I}_1}{6} + \hat{I}_2 \right) + \epsilon \hat{I}_1^2 + \frac{\epsilon}{2} (\hat{a}_1^{\dagger 6} \hat{a}_2^{\dagger} + \hat{a}_2 \hat{a}_1^{\dagger 6}) \quad (\text{A-1})$$

Uma vez que cada operador \hat{I}_1 e \hat{I}_2 atuam em subespaços distintos, eles comutam entre si e conseqüentemente comutam com \hat{J}_2 :

$$[\hat{I}_1, \hat{J}_2] = 0, \quad [\hat{I}_2, \hat{J}_2] = 0 \quad (\text{A-2})$$

Portanto para verificarmos a comutação entre \hat{J}_2 e \hat{H} , resta-nos calcular a comutação entre \hat{J}_2 e a perturbação

$$\hat{W} = \frac{\epsilon}{2} (\hat{a}_1^{\dagger 6} \hat{a}_2^{\dagger} + \hat{a}_2 \hat{a}_1^{\dagger 6}) \quad (\text{A-3})$$

Assim

$$\begin{aligned} \hat{W} \cdot \hat{J}_2 = & \frac{\epsilon}{24} \left[2 \hat{a}_1^{\dagger 6} \hat{a}_2 \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 + 2 \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 \right] + \frac{\epsilon}{4} \left[2 \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 + \right. \\ & \left. + 2 \hat{a}_1^{\dagger 6} \hat{a}_2 \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2 \right] \quad (\text{A-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_2 \cdot \hat{W} = & \frac{\epsilon}{24} \left[2 \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2 + 2 \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 \hat{a}_1^{\dagger 6} \hat{a}_2 \right] + \frac{\epsilon}{4} \left[2 \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} + \right. \\ & \left. + 2 \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 \hat{a}_1^{\dagger 6} \hat{a}_2 \right] \quad (\text{A-5}) \end{aligned}$$

Os termos de $\hat{J}_2 \cdot \hat{W}$ podem ser reescritos, utilizando-se a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hbar$. Com isso obtemos

$$\begin{aligned}
 (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger) &= \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - 6\hbar \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \\
 (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2) &= \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + 6\hbar \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \\
 (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger) &= \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hbar \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \\
 (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2) &= \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hbar \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2
 \end{aligned} \tag{A-6}$$

e o termo $(\hat{J}_2 \cdot \hat{W})$ fica escrito como,

$$\begin{aligned}
 (\hat{J}_2 \cdot \hat{W}) &= \frac{\epsilon}{24} \left(2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + 2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \right) + \\
 &+ \frac{\epsilon}{4} \left(2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right)
 \end{aligned} \tag{A-7}$$

Assim verificamos que \hat{J}_2 é uma constante do movimento quanticamente também pois $[\hat{J}_2, \hat{H}] = 0$.

APÊNDICE B

ENERGIA MÍNIMA, ENERGIA DA SEPARATRIZ E
APROXIMAÇÃO DO PÊNDULO

Consideremos a equação (II-57) e façamos a aproximação $J_2 \gg J_1$ de maneira que,

$$H' = (H - J_2) = -6\lambda J_1 + 6^2 c J_1^2 + \epsilon 6^3 J_1^3 J_2^{1/2} \cos \theta_1 \quad (\text{B-1})$$

A hamiltoniana não perturbada,

$$H_0 = -6\lambda J_1 + 6^2 c J_1^2, \quad \text{tem como raízes}$$

$$J_1 = 0 \quad \text{e} \quad J_1 = \lambda / 6c. \quad (\text{B-2})$$

e o seu mínimo corresponde a

$$J_1 = \lambda / 12c, \quad (\text{B-3})$$

figura (b-1).

Utilizando o conjunto de parâmetros (V-1), $\lambda/12c = 36$, $\lambda/6c = 72$, a energia mínima de H_0 é $E_{\min}^0 = -0,5$.

"Ligando" a perturbação $W = \epsilon \cdot 6^3 J_1^3 J_2^{1/2} \cos \theta_1$ a condição de ressonância é,

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H_0}{\partial J_1} = 0 \quad (\text{B-4})$$

da qual obtemos $J_1 = \lambda / 12c$. Daí vemos que a ressonância ocorrerá na vizinhança do mínimo de H_0 .

Os pontos de equilíbrio de H' são obtidos fazendo

$$\frac{\partial H'}{\partial J_1} = 0 \text{ e } \frac{\partial H'}{\partial \theta_1} = 0 ,$$

$$\frac{\partial H'}{\partial J_1} = - \epsilon \cdot c^3 \cdot J_1^3 \cdot J_2^{1/2} \cdot \sin \theta_1 = 0 \quad (\text{B-5})$$

$$\frac{\partial H'}{\partial \theta_1} = -6 \lambda + 2 \cdot c \cdot c^2 \cdot J_1 + 3 \epsilon \cdot c^2 \cdot J_1^2 \cdot J_2^{1/2} \cdot \cos \theta_1 = 0$$

A mais baixa energia do sistema representado por (B-1) é encontrado quando $\theta_1 = \pi$ e para o J_1 correspondente ao mínimo de H' . A energia mínima de H' é $E_{\min.} = -0,531820$ correspondendo ao valor $J_1' = 39,618376$, figura (b-3).

As raízes de H' para $\theta_1 = \pi$ são,

$$J_1 = 0$$

$$J_1^{\oplus} = 56,824 \times 10 > 0 \quad (\text{B-6})$$

$$J_1^{\ominus} = 8,2446 \times 10 > 0$$

O mínimo de H' corresponde a um ponto de equilíbrio estável $\theta_1 = \pi$ para o qual $\cos \theta_1$ atinge seu mínimo valor. A separatriz passará por $\theta_1 = 0$ e $\theta_1 = 2\pi$ onde o $\cos \theta_1$ é máximo. E, para $\theta_1 = 0$ o valor de J_1 que satisfaz (B-5) é $J_1 = 33,294825$, o qual fornece a energia da separatriz $E_{sx} = -0,475292$, figura (b-4).

Utilizaremos o modelo do pêndulo para estimar o número de estados contidos no interior da separatriz. A aproximação consiste em expandir H' de (B-1) na vizinhança de $J_{1,0} = \lambda / 12 \cdot c$ considerando termos até segunda ordem de $(J_1 - J_{1,0}) = \Delta J$ e fazendo

$$\left. \frac{\partial H'}{\partial J_1} \right|_{J_1 = J_{1,0}} = 0 \quad (\text{B-7})$$

Assim chegamos à hamiltoniana do pêndulo

$$\bar{H}(J, \theta) = -\frac{\lambda^2}{4\epsilon} + J_2 + \epsilon^2 \cdot \epsilon \cdot (\Delta J)^2 + \epsilon^3 \cdot \epsilon \cdot J_{3,0}^3 J_2^{1/2} \cos \theta_1 \quad (B-8)$$

onde,

$$(\Delta J)^2 = \frac{\epsilon \cdot \epsilon}{\epsilon} \cdot J_{3,0}^3 J_2^{1/2} \cdot 2 \cdot \sin^2(\theta_1/2) \quad (B-9)$$

e ΔJ corresponde à meia largura da separatriz. A integral,

$$2 \cdot \int_0^{2\pi} (\Delta J) \cdot d\theta_1 \quad (B-10)$$

fornece a área envolvida pela separatriz, $A_{sx} \sim 95,8$. O número de estados no interior desta ilha é aproximadamente

$A_{sx} / 2\pi \cdot \hbar$ segundo a quantização de Bohr-Sommerfeld e é da ordem de 15 níveis de energia.

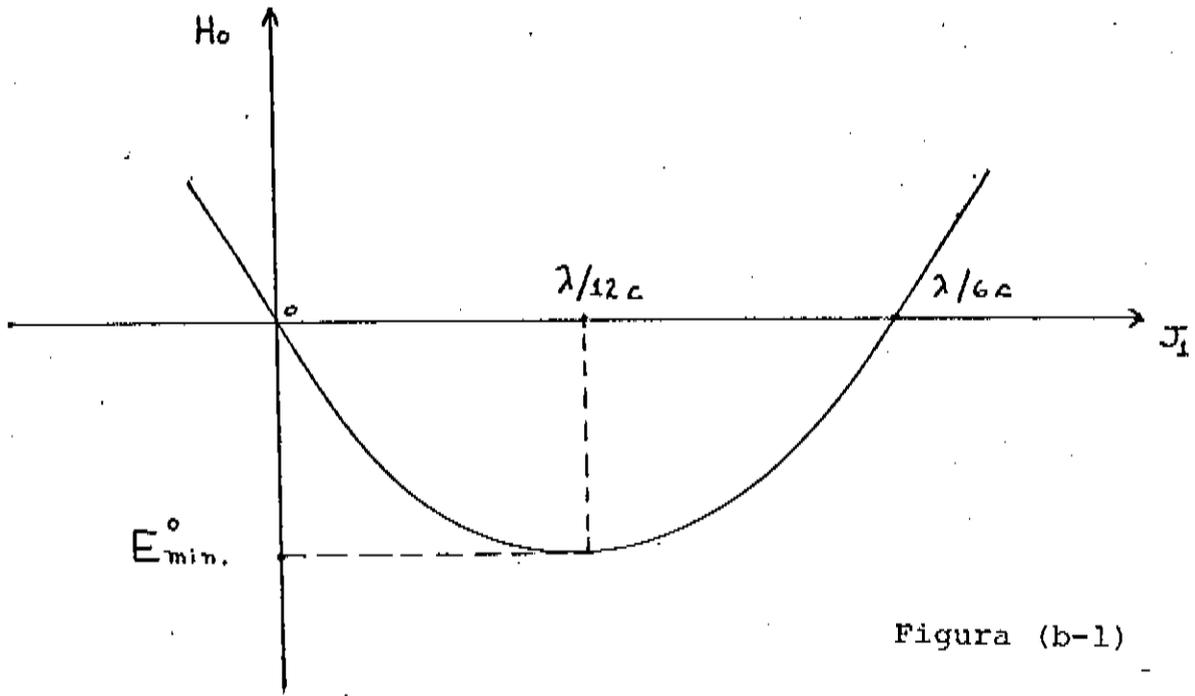


Figura (b-1)

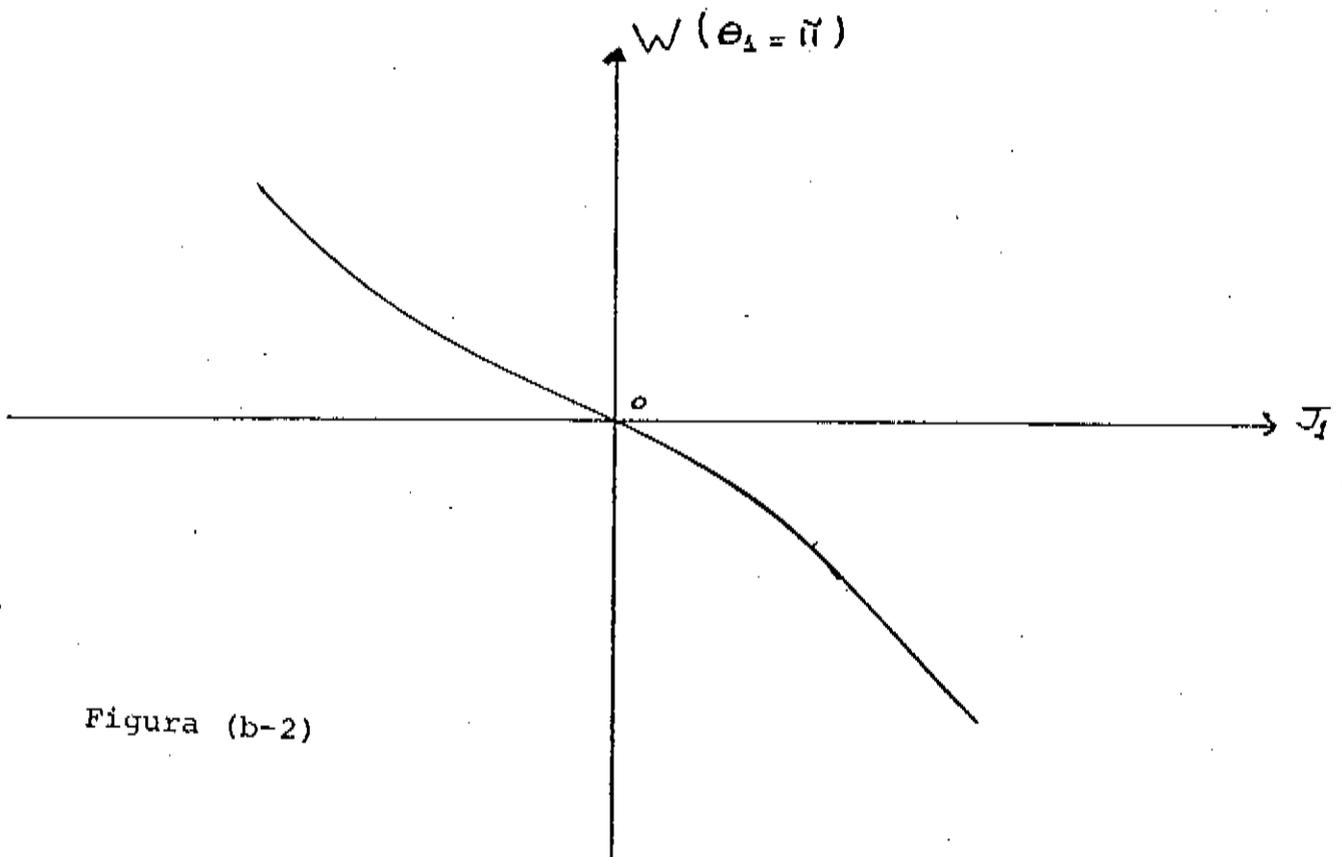


Figura (b-2)

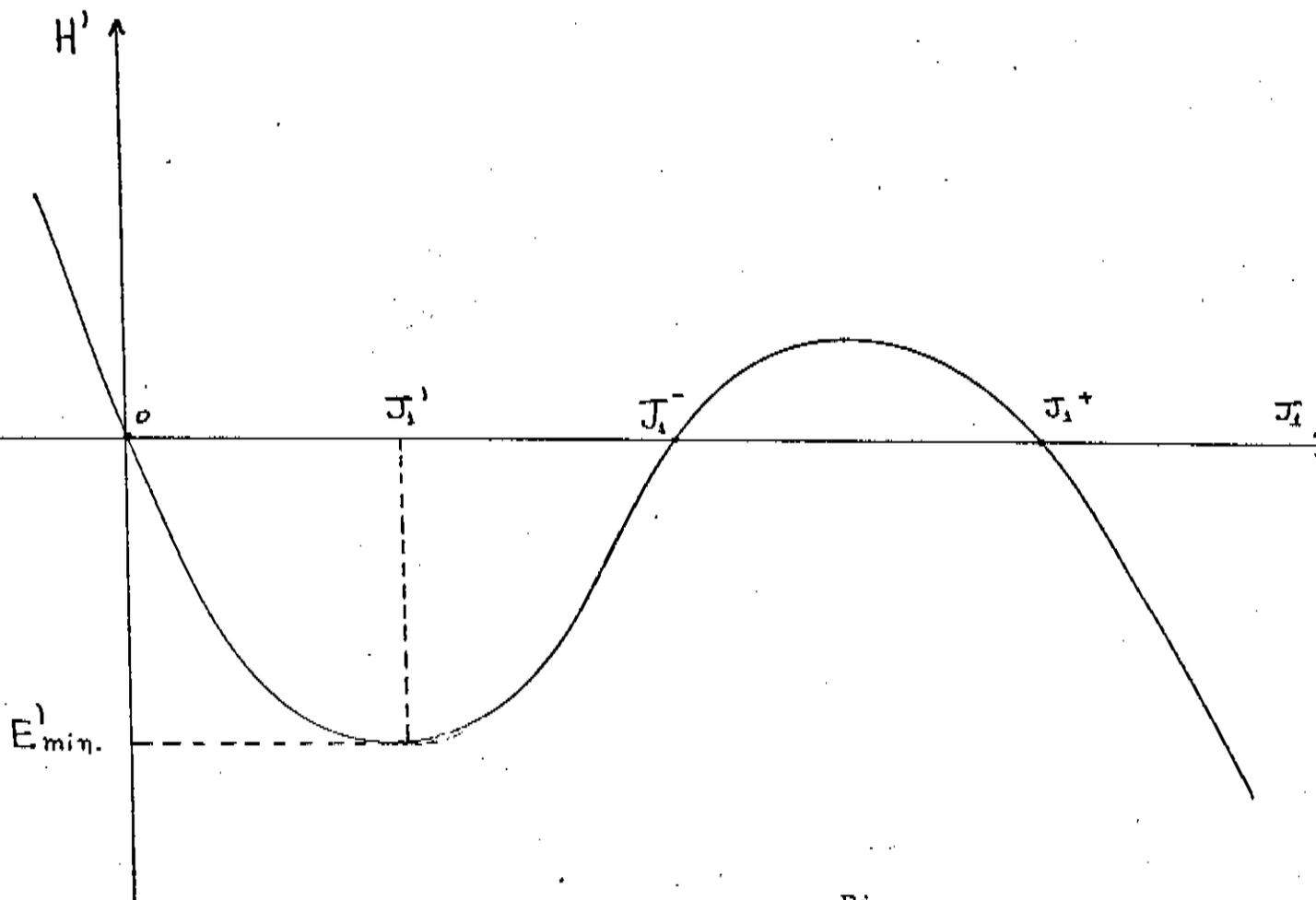


Figura (b-3)

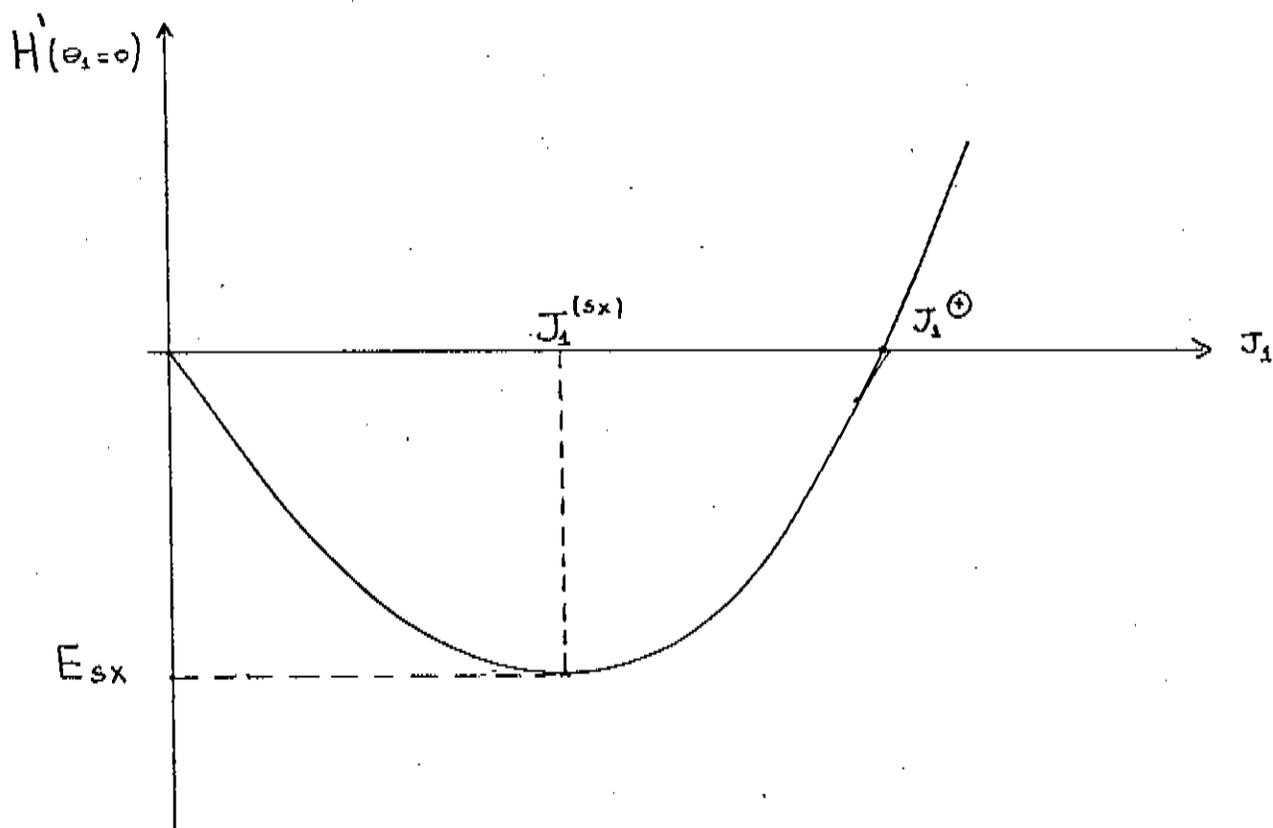


Figura (b-4): Ilustração de H' com $\theta_1=0$, cujo mínimo corresponde à energia da separatriz, $J_1^{\oplus} = 65,422216$.

REFERÊNCIAS

- 1) Arnold. V.I., "Mathematical Methods of Classical Mechanics" 1978, Springer - Verlag, New York.
- 2) Lichtemberg A.J. and Lieberman M.A., "Regular and Stochastic Motion", 1983, Springer, New York.
- 3) Chirikov B.V., Phys. Reports 52, (1979), 265.
- 4) Gustavson F.G., The Astr. Journal 71, (1966), 670.
- 5) Ozório de Almeida A. M., J. Phys. Chem. 88, (1984), 6139.
- 6) Wigner E., Phys. Rev. 40, (1932), 749.
- 7) Keller J.B., Ann. Phys. 4, (1958), 180.
- 8) Percival I.C., Adv. Chem. Phys. 36, (1977), 1.
- 9) Berry M.V., Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 287, (1977), 237.
- 10) Weyl H., "Theory of Groups and Quantum Mechanics", 1931, Dover Publications.
- 11) Ozório de Almeida A. M., Rev. Bras. Fís. 14, (1984), 62.
- 12) Shewell J.R., AM. J. Phys. 27, (1959), 16.
- 13) Percival I. C. and Richards D., J. Phys. B : Atom. Molec. Phys., (1970), 1035.
- 14) Leaf B., J. Math. Phys. 9, (1968).
- 15) Miller W.H., Adv. Chem. Phys. 25, (1974), 69.
- 16) Davidov A.S., "Quantum Mechanics", Addison-Wesley, 1968.
- 17) Berry M.V., "Semiclassical Mechanics of Regular and Irregular Motion", les Houches Summer School, 1981.

- 18) Berry M.V., "Regular and Irregular Motion", A.I.P. Conference Proceedings 46, (1978), 16, New York.
- 19) Berry M.V. and Balazs N.L., J. Phys. A 12, (1979), 625.
- 20) Tannoudji C.C., Diu B., Laloë F., "Quantum Mechanics Vol. I", John Wiley, 1977.