



Bruno Ferreira de Camargo Yabu-uti

Comunicação quântica e implementação de portas lógicas no sistema de cavidades acopladas

Campinas 2013



Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

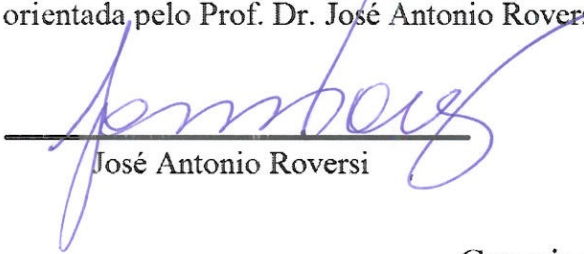
Bruno Ferreira de Camargo Yabu-uti

Comunicação quântica e implementação de portas lógicas no sistema de cavidades acopladas

Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Ciências

Orientador: José Antonio Roversi

Este exemplar corresponde à versão final da tese de doutorado defendida pelo aluno Bruno Ferreira de Camargo Yabu-uti e orientada pelo Prof. Dr. José Antonio Roversi.



José Antonio Roversi

Campinas
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Valkíria Succi Vicente - CRB 8/5398

Y1c Yabu-uti, Bruno Ferreira de Camargo, 1982-
Comunicação quântica e implementação de portas lógicas no sistema de
cavidades acopladas / Bruno Ferreira de Camargo Yabu-uti. – Campinas, SP :
[s.n.], 2013.

Orientador: José Antonio Roversi.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física
Gleb Wataghin.

1. Ótica quântica. 2. Comunicação quântica. 3. Portas lógicas. I. Roversi, José
Antonio, 1947-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb
Wataghin. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Quantum communication and logic gates implementation in coupled
cavities system

Palavras-chave em inglês:

Quantum optics

Quantum communication

Logic gates

Área de concentração: Física

Titulação: Doutor em Ciências

Banca examinadora:

José Antonio Roversi [Orientador]

Celso Jorge Villas Boas

Salomon Sylvain Mizrahi

Amir Ordacgi Caldeira

Flávio Caldas da Cruz

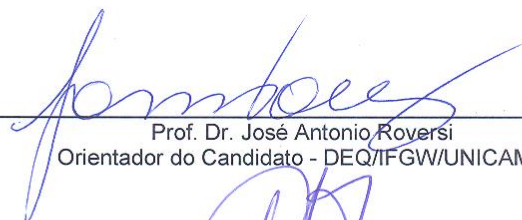
Data de defesa: 11-11-2013

Programa de Pós-Graduação: Física

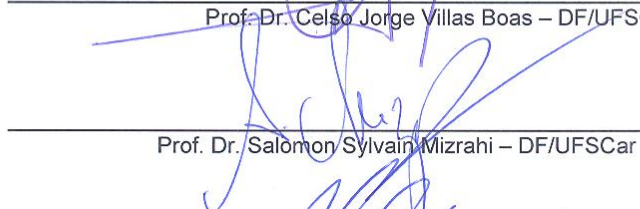


MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **BRUNO FERREIRA DE CAMARGO YABU-UTI – RA: 008201** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 11 / 11 / 2013.

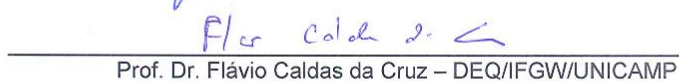
COMISSÃO JULGADORA:


Prof. Dr. José Antonio Roversi
Orientador do Candidato - DEQ/IFGW/UNICAMP


Prof. Dr. Celso Jorge Villas Boas – DF/UFSCar


Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi – DF/UFSCar


Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira – DFMC/IFGW/UNICAMP


Prof. Dr. Flávio Caldas da Cruz – DEQ/IFGW/UNICAMP

Resumo

Na presente tese estudamos o processamento de informação quântica no sistema de átomos e cavidades acopladas. Em particular, a comunicação quântica estabelecida entre átomos remotos e a implementação de portas lógicas no sistema de cavidades acopladas.

Iniciamos apresentando o sistema de cavidades acopladas, o Hamiltoniano que governa sua evolução, algumas promissoras implementações experimentais e a transferência de um estado de campo arbitrário de um fóton ao longo da cadeia.

Incluindo um sistema massivo, propomos um novo protocolo para uma transferência perfeita, determinística e flexível de estados quânticos entre átomos remotos interagindo sucessivamente com o sistema de cavidades acopladas (atuando como *quantum bus*). Mesmo levando em conta efeitos dissipativos e erros de procedimento obtivemos uma alta fidelidade máxima de transmissão.

Por fim, apresentamos uma proposta alternativa para a implementação de um porta R(rotação)-controlada de dois *qubits*. A proposta está baseada em operações de um *qubit* e fase geométrica não-convencional em átomos de três níveis idênticos fortemente bombeados por um campo clássico ressonante em cavidades ópticas distantes conectadas por uma fibra óptica. Nossa proposta resulta em um tempo operacional constante e, com um acoplamento *qubit-bus* ajustável (átomo-ressonador), pode-se especificar uma rotação R particular no *qubit* alvo.

Abstract

In this thesis we study the quantum information processing in the system of atom-coupled cavity. In particular, the quantum communication between remote atoms and the implementation of logic gates in the coupled cavities system.

We begin by presenting the system of coupled cavities, the Hamiltonian that governs its evolution, some promising experimental implementations and the transfer of an arbitrary one photon field state along the array.

Including a massive system, we propose a new protocol for a perfect, deterministic and flexible quantum state transfer between remote atoms interacting successively with the system of coupled cavities (which act as a quantum bus). Even taking into account dissipative effects and error procedure we obtained a maximum high-fidelity transmission.

We also present an alternative proposal for the implementation of a controlled-R gate of two qubits. The proposal is based on single qubit operations and unconventional geometric phases on two identical three-level atoms, strongly driven by a resonant classical field, trapped in distant cavities connected by an optical fiber. Our scheme results in a constant gating time and, with an adjustable qubit-bus coupling (atom-resonator), one can specify a particular rotation R on the target qubit.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	ix
Agradecimentos	xii
Lista de Figuras	xvii
Lista de abreviaturas e siglas	xix
Introdução	1
1 Conceitos Fundamentais	5
1.1 Quantização do Campo Eletromagnético	5
1.1.1 Estados de número ou Fock	9
1.1.2 Estados Coerentes	10
1.2 Átomos: níveis de energia	11
1.3 Interação da radiação com a matéria	14
1.3.1 Aproximação de Dipolo	15
1.3.2 Modelo de Jaynes-Cummings: Aproximação de Ondas Girantes	16
1.4 Tópicos de Informação Quântica	21
1.4.1 Bits Quânticos	21
1.4.2 Noção de Fidelidade	22
1.4.3 Portas Lógicas	24
2 Sistema de cavidades acopladas	26
2.1 Hamiltoniano do sistema	28
2.2 Implementações experimentais para <i>CCA</i>	29
2.3 Transporte de estados de campo	38
2.3.1 <i>Quantum Jump</i> : monitorando o sistema	41
3 Comunicação Quântica entre átomos remotos no sistema de <i>CCA</i>	46
3.1 Átomos de dois níveis: MJC no sistema de cavidades acopladas	47
3.2 Protocolo de Comunicação Quântica	49
3.3 Efeitos da dissipação: Equação Mestra	53

3.4	Erros de execução no protocolo	56
4	Porta lógica R-Controlada de dois-<i>qubits</i>	60
4.1	Hamiltoniano efetivo do MJC fortemente bombeado no sistema de cavidades acopladas	60
4.2	Implementação da porta R-controlada	63
4.3	Erros operacionais e canais de dissipação	65
5	Discussão, Conclusão e Perspectiva Futura	69
A	Teoria Semiclássica da interação átomo-campo	85
B	Transformações Unitárias	87
C	Operador evolução temporal do MJC fortemente bombeado no sistema de cavidades acopladas	89
C.1	Obtenção do Operador Deslocamento, fase geométrica e amplitude de decaimento .	91
D	Cálculo da fidelidade e probabilidade de sucesso na implementação da porta R-controlada	93
E	Formalismo da Equação Mestra	95
E.1	Osciladores harmônicos acoplados dissipativos	98
E.2	Sistema de dois níveis: Emissão espontânea	101

Agradecimentos

Família, amigos, professores e a Deus.

Lista de Figuras

1	Ilustração de um sistema de duas cavidades acopladas com um átomo de dois níveis em cada uma. Aqui e, em geral, nas demais figuras desta tese as cavidades ilustradas são do tipo <i>Fabry-Perot</i> , para mais detalhes destinamos uma seção para implementações experimentais mais a frente.	2
1.1	Esboço dos níveis eletrônicos de um átomo. Pelas leis de conservação para transições de dipolo elétrico é válido assumir apenas dois níveis efetivos: o fundamental ($ g\rangle$) e o excitado ($ e\rangle$).	12
1.2	Os quatro processos da interação átomo-campo presentes no Hamiltoniano (1.80): (a) $\hat{a}\hat{\sigma}_+$, (b) $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-$, (c) $\hat{a}\hat{\sigma}_-$, (d) $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+$	18
1.3	Representação de um <i>qubit</i> , em um estado puro arbitrário, na esfera de Bloch.	22
1.4	Representação matricial e do circuito lógico para (a) a porta Hadamard e (b) a porta de fase de um <i>qubit</i> com $x = 0, 1$	24
1.5	Circuito lógico para a geração de um estado puro arbitrário de um <i>qubit</i> desprezando uma fase global.	24
1.6	Circuito lógico que simboliza uma porta U-Controlada de dois <i>qubits</i>	25
2.1	Dois tipos de guias de onda baseados em uma propagação via (a) reflexão interna total com $n_2 > n_1$ e (b) reflexão de Bragg em camadas periódicas.	26
2.2	Esquema de uma cadeia de cavidades (com modo de campo de frequência ω_c) separadas por uma distância d acarretando em um acoplamento A entre primeiras vizinhas.	27
2.3	Esquema básico do método empregado para aprisionamento do campo em cavidades <i>Fabry-Perot</i>	30
2.4	Imagem de um <i>SEM</i> de um cristal fotônico com um defeito (nanocavidade) e uma <i>quantum dot</i> embutida [1].	32
2.5	Diagrama ilustrando o processo de fabricação de microcavidades toroidais.	33
2.6	Imagem de um microscópio de varredura eletrônica (<i>SEM</i>) [2], D é o diâmetro principal e d o diâmetro menor	33
2.7	Ilustração do acoplamento de uma microcavidade toroidal com uma fibra óptica e um átomo via campos evanescentes.	34
2.8	Ilustração da microcavidade <i>1FFP</i> . Tal estrutura oferece um acesso direto ao interior da cavidade e permite um simples acoplamento da radiação através de uma fibra integrada.	35

2.9	Ilustração de uma $2FFP$ com uma nuvem de átomos guiada por uma armadilha magnética [3].	35
2.10	Esboço de (a) uma cadeia de nanocavidades em um PC e (b) um arranjo de microdiscos. Estes são rotineiramente produzidos em larga escala e, por construção, permitem um eficiente tunelamento de fótons entre cavidades vizinhas.	36
2.11	Ilustração de uma cadeia de microcavidades toroidais e uma fibra óptica possibilitando um acoplamento indireto entre os campos.	36
2.12	Ilustração do esquema experimental para medição da amplitude de transmissão através de um PC com defeitos [4].	37
2.13	(a) Amplitude de transmissão em função da frequência ao longo do PC com um, dois e três defeitos em série e (b) os valores da frequência de ressonância medidas e calculadas para 3 defeitos em analogia com a aproximação TB [4].	38
2.14	Esboço de uma cadeia de spins. A evolução do sistema em um tempo t_0 leva o estado de interesse de A até B com certa fidelidade.	39
2.15	Ilustração para a superposição entre o $sender(s)$, os modos normais e o $receiver(r)$	39
2.16	Fidelidade média de transmissão sem dissipação para (a) $N = 2$ e (b) $N = 3$	41
2.17	Fidelidade média de transmissão sem dissipação para (a) $N = 4$, (b) $N = 5$, (c) $N = 6$ e (d) $N = 7$ agora com $\omega_c/A = 20$	42
2.18	Esboço da cadeia de cavidades continuamente monitorada. Cada cavidade com seu respectivo detector (D).	43
2.19	Máxima fidelidade média na transmissão de um estado de campo ao longo de uma cadeia de cavidades acopladas para um intervalo de tempo $[0, 50/A]$. No tratamento via QJ adotamos $\gamma = 0.001A$	44
3.1	Ilustração de apenas um átomo localizado no interior da cavidade j	48
3.2	Cadeia com seis cavidades acopladas. Usando átomos em ressonância com o modo $q = 4$ apenas entre cavidades diametralmente opostas temos uma transmissão perfeita.	52
3.3	Ilustração do sistema físico proposto para a implementação da comunicação quântica.	54
3.4	Máxima fidelidade média em função do número total de cavidades acopladas N (apenas ímpar) e $q = (N + 1)/2$: (quadrado) parâmetros experimentais atuais, (triângulo) otimizando o regime de forte acoplamento no limite previsto para cavidades ópticas microtoroidais [2].	55
3.5	Comparação dos erros de execução em um protocolo de comunicação quântica com interações (a) sucessivas e (b) simultâneas.	56

3.6	Fidelidade média em função da variação (percentual) no tempo de interação Δt_1 e Δt_2 para a comunicação quântica entre $s = 1$ e $r = N$ (os extremos da cadeia) com $q = (N + 1)/2$ sendo $N =$ (a) 5,(b) 7,(c) 9,(d) 11 e assumindo parâmetros experimentais atuais [2].	57
3.7	Dependendo da medida feita no átomo s o protocolo deve ser reiniciado (falhou) ou pode ser efetuado.	58
3.8	Fidelidade média em função de um tempo de atraso entre as duas etapas do protocolo para comunicação quântica entre as pontas do sistema de cavidades acopladas sendo $N =$ (linha) 5,(tracejado) 7,(ponto) 9,(traço-ponto) 11.	59
4.1	Dois átomos (e a configuração dos níveis eletrônicos) em cavidades distintas ligadas por uma fibra óptica. Ver no texto a explicação das constantes envolvidas.	61
4.2	(a) Duas cavidades <i>FFP</i> montadas sobre um <i>atom chip</i> com uma distância de 150 μm entre o eixo óptico (em vermelho) e a superfície do <i>chip</i> ; (b) Superposição de três imagens de um CCD do tempo de voo de um condensado de Bose-Einstein deterministicamente guiado [5].	64
4.3	Fidelidade da porta lógica R-controlada de dois <i>qubits</i> para $\Theta = \pi/4$ ($g = \delta$ e $\phi_5 = -3\pi/4$). Na esquerda para os estados iniciais $\{ 00\rangle, 01\rangle\}$ (F_0) e na direita para $\{ 10\rangle, 11\rangle\}$ (F_1).	67
4.4	Probabilidade de sucesso $\mathcal{P}_{suc}$ da porta lógica R-controlada de dois <i>qubits</i> para $\Theta = \pi/4$	68
5.1	Ressonador óptico toroidal exibindo um modo mecânico devido à pressão de radiação [6]	72
5.2	Ilustração do esquema proposto em [7] para emaranhar modos opto-mecânicos distintos.	73

Lista de abreviaturas e siglas

(em ordem alfabética)

A- Intensidade do acoplamento entre duas cavidades acopladas

C- Fator de cooperatividade (ver eq.(2.13))

CCA- Sigla para *Coupled Cavities Array*. Em português, cadeia de cavidades acopladas.

CNOT- Sigla para *Controlled-NOT* (porta lógica NOT controlada).

CQED- Sigla do inglês *Cavity Quantum Eletrodynamics*.

δ - Dessintonia átomo-campo.

DFS- Do inglês *Decoherence-Free Subspace*. Em português, subespaço livre de decoerência.

FFP- *Fiber Fabry-Perot*.

g- Acoplamento átomo-campo.

γ - Taxa de decaimento do campo eletromagnético confinado.

GQG- Sigla para *Geometric Quantum Gates*.

κ - Taxa de emissão espontânea do nível excitado do átomo de dois níveis.

MJC- Modelo de Jaynes-Cummings.

PC- *Photonic Crystal*.

Q- Fator de qualidade da cavidade.

QJ- *Quantum Jump*.

SEM- *Scanning Electron Microscopy.*

TB- *Tight-Binding.*

WGM- *Whispering Gallery Mode.*

Introdução

Quando se pensa no processamento de informação quântica compartilhado em um computador quântico com aplicações práticas reais, o acoplamento entre diferentes subsistemas (isto é, *qubits*) é essencial para a realização de uma comunicação quântica eficiente bem como a implementação controlável e distribuída de portas lógicas.

Nesse contexto, a eletrodinâmica quântica de cavidades (CQED), na qual é possível combinar bits quânticos atômicos e fotônicos, tem atraído muita atenção devido principalmente às baixas taxas de decoerência associadas (alcançando um regime de forte acoplamento) e a imprescindível viabilidade de fabricação em larga escala [8, 9].

De fato, estamos interessados no sistema constituído por uma cadeia de cavidades, operando em tal regime, posicionadas a uma distância que permita um acoplamento dinâmico entre seus campos via ondas evanescentes [8, 10, 11, 12]. Existem importantes implementações experimentais de cavidades (ou guias de ondas) acopladas. Dentre elas podemos citar: microdiscos acoplados diretamente pelos seus campos evanescentes (curta distância) [10], microcavidades (em formato de esfera, disco ou toro) acopladas via fibra óptica cônica [2, 8], cristal fotônico com “defeitos” [1] bem como cavidades Fabry-Perot baseadas ou integradas com fibras ópticas [5, 13].

Embora tais implementações sejam diferentes em detalhes específicos, tais como o confinamento do campo eletromagnético e o mecanismo de acoplamento radiação-matéria, as características gerais são muito semelhantes e o tratamento empregado é equivalente. Desafios pendentes, agora, estão em fazer cavidades de melhor qualidade, fabricá-los em grande número (com a possibilidade de interconexões múltiplas) e aperfeiçoar um acoplamento convenientemente e deterministicamente manipulável com átomos (naturais ou artificiais).

A principal vantagem de um esquema baseado em *CCA*, diferente de uma cadeia de spins já largamente estudada em matéria condensada [14, 15, 16], é que cada cavidade pode ser facilmente acessada individualmente (por exemplo, com um *laser*) permitindo um controle individual sobre a dinâmica de cada constituinte (como os tempos de interação átomo-campo).

Mesmo na situação mais simples (duas cavidades acopladas com um átomo de dois níveis em cada uma), fica evidente o quão bom o modelo é para simular sistemas de muitos-corpos frente à ampla gama de parâmetros físicos (graus de liberdade do sistema) que podem ser trabalhados. Inclusive, na referência [17], estudando diferentes regimes de acoplamento no sistema em questão, identificou-se transições de fase quântica em analogia ao modelo de Bose-Hubbard [18], um fenômeno característico de sistemas de muitos-corpos.

De fato, duas importantes situações extremas podem ser consideradas no sistema em questão: $A \gg g$ e $g \gg A$ (sendo g o acoplamento átomo-campo e A o acoplamentos entre os campos das

Por outro lado, portas lógicas quânticas têm sido amplamente investigadas nos últimos anos através de interações ressonantes ou dispersivas de átomos com modos do campo quantizado no sistema de cavidades eletrodinâmicas quânticas [25, 26, 27, 28]. No entanto, tais esquemas são fundamentados em uma evolução dinâmica condicional específica que é muito sensível às flutuações dos parâmetros do sistema e, assim, dificultam uma operação em larga escala eficiente.

Para obter uma alta fidelidade operacional em uma computação escalável, propostas que adotam desde um reservatório estruturado [29, 30], um subespaço livre de decoerência (DFS) [31] ou uma operação geométrica (que resulta em fases geométricas) [32, 33, 34] provaram ser abordagens promissoras para a implementação de uma computação quântica mais tolerante a falhas.

Fases geométricas (a abordagem adotada nesse trabalho) podem oferecer algumas vantagens práticas uma vez que são determinadas apenas por algumas características globais geométricas do sistema, sendo assim insensível ao estado inicial no caso ideal. Desta forma, portas lógicas geométricas (GQGs) podem ser mais robustas frente à decoerência e a fidelidade operacional associada pode ser significativamente maior do que portas baseadas em uma evolução dinâmica condicionada.

A bem da verdade existem dois tipos de portas geométricas: GQGs convencionais [32] e não-convencionais [33, 34]. No primeiro algumas operações ainda são necessárias para remover os efeitos da fase dinâmica correspondente, que pode resultar em erros adicionais. No segundo, não é necessário eliminar a fase dinâmica, uma vez que esta é proporcional à fase geométrica por uma constante. Por esta razão, GQGs não-convencionais (que já foram implementadas experimentalmente com íons aprisionados [35]) são melhores do que as convencionais.

Dentre as diversas portas lógicas uma, em particular, merece maior atenção: portas U-controladas (na qual U representa uma transformação unitária). Como é sabido, tais portas são essenciais para simplificar circuitos quânticos dado que podem: (i) criar uma porta de dois *qubits* geral, (ii) preparar um estado quântico puro arbitrário e (iii) produzir estados emaranhados.

Assim posto, o foco de nosso trabalho foi o processamento distribuído de informação quântica, em particular, a comunicação quântica (transferência de estado) entre átomos remotos e a implementação da porta lógica quântica rotação(R)-controlada entre dois átomos de três níveis no sistema de átomos e cavidades acopladas.

A presente tese está organizada da seguinte forma: No capítulo (1) faremos uma breve revisão de alguns conceitos básicos fundamentais em óptica e informação quântica. No capítulo (2) vamos descrever o sistema formado por uma cadeia de N cavidades acopladas, veremos o Hamiltoniano que governa sua dinâmica, alguns exemplos das implementações experimentais mais promissoras e a transferência de um estado do campo de um fóton no cenário em questão. Nos capítulos (3) e (4) apresentaremos nossos resultados obtidos referente ao processamento de informação quântica no

sistema de átomos-cavidades acopladas. Finalmente no capítulo (5) concluiremos nosso trabalho resumindo nossa contribuição geral e apresentando algumas perspectivas futuras.

1 Conceitos Fundamentais

É conveniente iniciar com um capítulo destinado aos conceitos fundamentais em Óptica Quântica e Teoria de Informação Quântica utilizados no decorrer dessa tese de doutorado. Com tal objetivo iremos descrever a quantização do campo eletromagnético, os níveis eletrônicos de um átomo e a interação átomo-campo [36,37,38]. Em particular, para átomos de dois níveis interagindo com um único modo do campo quantizado veremos o famoso modelo de Jaynes-Cummings [38].

Apresentarei ainda alguns tópicos relevantes da Teoria de Informação e Computação Quântica como a noção básica de bit quântico (*qubit*), bem como a conceito de fidelidade comumente empregado e portas lógicas quânticas [39].

1.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Com intuito de quantizar o campo eletromagnético um ponto de partida usual são as famosas equações de Maxwell [40]. As grandezas físicas (campo elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$) que descrevem os fenômenos eletromagnéticos obedecem ao seguinte sistema de equações

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \mu_0 \vec{J}, \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.4)$$

no qual ϵ_0 e μ_0 são respectivamente a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética ambas do vácuo. Já $\vec{J}$ (densidade de corrente) e σ (densidade de carga) são entidades relacionadas pela seguinte equação de continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 0. \quad (1.5)$$

A quantização do campo pode ser mais facilmente obtida se as equações de Maxwell forem reescritas de uma forma mais conveniente, utilizando-se os potenciais vetor $\vec{A}$ e escalar ϕ .

Podemos definir o potencial $\vec{A}$ a partir da equação (1.4) usando propriedades do produto vetorial

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}, \quad (1.6)$$

e, analogamente, o potencial escalar ϕ pela equação (1.1)

$$-\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \vec{\nabla} \phi = \vec{E}. \quad (1.7)$$

Inserindo estas novas definições de potenciais nas equações de Maxwell encontram-se duas novas relações, uma vetorial e outra escalar

$$\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi = \mu_0 \vec{J}, \quad (1.8)$$

$$\nabla^2 \phi + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (1.9)$$

nas quais $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ é a velocidade da luz. Conhecendo $\vec{A}$ e ϕ podemos determinar os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Porém, existe mais de um quadrvetor $(\vec{A}, \phi)$ que gera os mesmos campos elétrico e magnético. Tal grau de liberdade é chamado de calibre ou *gauge* e pode ser expresso da seguinte forma

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t} \Xi, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Xi, \quad (1.10)$$

sendo a função Ξ arbitrária dependente de $\vec{r}$ e t . Uma escolha de calibre corresponde a especificar a função Ξ e dizemos que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são invariantes por uma escolha de calibre.

No *gauge* de Coulomb, isto é, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (uma escolha que usualmente simplifica problemas em óptica quântica), as expressões (1.8) e (1.9) ficam

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi \right) = \mu_0 \vec{J}, \quad (1.11)$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.12)$$

Ainda é possível fazer outra simplificação na equação (1.11) usando o teorema de Helmholtz [41]. Este teorema afirma que qualquer vetor (como a densidade de corrente $\vec{J}$) pode ser decomposto em duas partes $\vec{J} = \vec{J}_T + \vec{J}_L$, isto é, uma componente transversal (com divergente nulo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T = 0$) e outra longitudinal (com o rotacional nulo, $\vec{\nabla} \times \vec{J}_L = 0$).

Pelas equações (1.5) e (1.12) temos, então

$$\vec{J}_L = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi, \quad (1.13)$$

que possibilita reescrever a equação (1.11) como

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = \mu_0 \vec{J}_T. \quad (1.14)$$

Considerando uma região do espaço de volume $V = L^3$ no vácuo sem fontes externas ($\vec{J}_T = 0$), a expressão anterior se torna uma equação de onda. Expandindo o potencial $\vec{A}$ numa série de Fourier, uma solução geral da equação (1.14) pode ser escrita como [37]

$$\vec{A} = -i \sum_{\vec{k}} \left[\vec{A}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \vec{A}_{\vec{k}}^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right], \quad (1.15)$$

no qual as componentes do vetor de onda $\vec{k}$ assumem valores discretos (devido às condições de contorno) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{2\pi n_x}{L}, \quad n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ k_y &= \frac{2\pi n_y}{L}, \quad n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ k_z &= \frac{2\pi n_z}{L}, \quad n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.16)$$

e o *gauge* de Coulomb é satisfeito se

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t) \cdot \vec{k} = \vec{A}_{\vec{k}}^*(t) \cdot \vec{k} = 0, \quad (1.17)$$

ou seja, a direção de propagação é perpendicular aos coeficientes da expansão de Fourier.

Todos os coeficientes de $\vec{A}$ obedecem à equação (1.14) com $\vec{J}_T = 0$, a qual se torna

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}_{\vec{k}}(t) + \omega_{\vec{k}}^2 \vec{A}_{\vec{k}}(t) = 0, \quad (1.18)$$

que também é válida para $\vec{A}_{\vec{k}}^*$ e $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ é a frequência angular do modo $\vec{k}$.

Resolvendo a equação anterior, o potencial vetor fica finalmente

$$\vec{A} = -i \sum_{\vec{k}} \left[\vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \vec{A}_{\vec{k}}^* e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right]. \quad (1.19)$$

Agora, pelas equações (1.6) e (1.7), tomando $\phi = 0$ sem perda da generalidade (espaço livre), obtemos a partir do potencial vetor $\vec{A}$ as seguintes expressões para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ com modo $\vec{k}$

$$\vec{E}_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} \left(\vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{A}_{\vec{k}}^* e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right), \quad (1.20)$$

$$\vec{B}_{\vec{k}} = \left[\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}^* e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right]. \quad (1.21)$$

Do eletromagnetismo clássico temos que a energia média associada ao campo eletromagnético de modo $\vec{k}$, confinado a uma região de volume V , é

$$U_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \int_V d^3r \left(\epsilon_0 \vec{E}_{\vec{k}}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{\vec{k}}^2 \right). \quad (1.22)$$

Substituindo as equações (1.20) e (1.21) na expressão anterior temos

$$U_{\vec{k}} = 2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}^2 \vec{A}_{\vec{k}} \cdot \vec{A}_{\vec{k}}^*. \quad (1.23)$$

O coeficiente $\vec{A}_{\vec{k}}$ (e seu conjugado) pode ser escrito em termos de uma coordenada generalizada $Q_{\vec{k}}$ e de seu momento conjugado $P_{\vec{k}}$ através das transformações

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{1}{4\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}^2}} (\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k}} + i P_{\vec{k}}) \hat{e}_{\vec{k}}, \quad (1.24)$$

$$\vec{A}_{\vec{k}}^* = \sqrt{\frac{1}{4\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}^2}} (\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k}} - i P_{\vec{k}}) \hat{e}_{\vec{k}}. \quad (1.25)$$

notando que a propriedade vetorial de $\vec{A}_{\vec{k}}$ foi para o vetor de polarização unitário $\hat{e}_{\vec{k}}$ (e real).

Com essas transformações temos, para a energia média associada ao campo eletromagnético de modo $\vec{k}$ em um volume V

$$U_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left(P_{\vec{k}}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 Q_{\vec{k}}^2 \right). \quad (1.26)$$

Note que a expressão anterior é semelhante a Hamiltoniana de um oscilador harmônico clássico com massa unitária. Cada modo $\vec{k}$ do campo pode ser quantizado pela associação com um oscilador harmônico quântico trocando-se as variáveis clássicas $Q_{\vec{k}}$ e $P_{\vec{k}}$ pelos operadores quânticos $\hat{X}_{\vec{k}}$ e $\hat{P}_{\vec{k}}$ que obedecem as relações de comutação

$$\left[\hat{X}_{\vec{k}}, \hat{P}_{\vec{k}'} \right] = i\hbar \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad \left[\hat{X}_{\vec{k}}, \hat{X}_{\vec{k}'} \right] = \left[\hat{P}_{\vec{k}}, \hat{P}_{\vec{k}'} \right] = 0. \quad (1.27)$$

O campo é quantizado identificando os coeficientes $\vec{A}_{\vec{k}}$ e $\vec{A}_{\vec{k}}^*$ com os operadores $\hat{a}_{\vec{k}}$ e $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$

$$\vec{A}_{\vec{k}} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}} \hat{a}_{\vec{k}} \hat{e}_{\vec{k}}, \quad (1.28)$$

$$\vec{A}_{\vec{k}}^* \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{e}_{\vec{k}}, \quad (1.29)$$

os quais, respectivamente, aniquilam e criam um fóton¹ de modo $\vec{k}$ e o número de fótons associados a este modo é determinado pelo autovalor do operador de número $\hat{n}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$.

Desta forma, o Hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado é, substituindo as equações (1.28) e (1.29) na expressão (1.23)

$$H_C = \hbar \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left(\hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.30)$$

Já o campo elétrico $\vec{E}$ assume a seguinte forma, na representação de Schrödinger

$$\vec{E} = \sum_{\vec{k}} E_0^{(\vec{k})} \hat{e}_{\vec{k}} \left[\hat{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right], \quad (1.31)$$

no qual

$$E_0^{(\vec{k})} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}}. \quad (1.32)$$

¹O *quantum* de energia do campo.

1.1.1 Estados de número ou Fock

Restringindo para apenas um modo de campo $\hat{a}_{\vec{k}} \equiv \hat{a}$ com frequência ω_c (monocromático). Seja $|n\rangle$ o autoestado correspondente ao autovalor E_n do Hamiltoniano do campo quantizado, isto é

$$H_C |n\rangle = \hbar\omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (1.33)$$

Aplicando o operador de aniquilação $\hat{a}$ pela esquerda e usando a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ (operador bosônico) temos

$$H_C \hat{a} |n\rangle = (E_n - \hbar\omega_c) \hat{a} |n\rangle, \quad (1.34)$$

ou seja, o estado $|n-1\rangle = \alpha_n^{-1} \hat{a} |n\rangle$ (sendo α_n uma constante de normalização) também é um autoestado de H_C com um autovalor reduzido dado por

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\omega_c. \quad (1.35)$$

Repetindo o procedimento n vezes estaremos diminuindo a energia em “pacotes” de tamanho $\hbar\omega_c$ até obtermos

$$H_C |0\rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega_c |0\rangle = E_0 |0\rangle. \quad (1.36)$$

O estado $|0\rangle$ é conhecido como estado de vácuo cuja energia associada é $E_0 = \hbar\omega_c/2$ (energia do estado fundamental). Como não são permitidas energias menores que a energia do estado fundamental devemos concluir que $\hat{a} |0\rangle = 0$ e ainda, pela eq.(1.35), o valor de E_n

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c. \quad (1.37)$$

Pelas equações (1.33) e (1.37) obtemos

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle, \quad (1.38)$$

e, assim, a constante de normalização α_n pode ser determinada como

$$\langle n-1 | n-1 \rangle = \frac{1}{|\alpha_n|^2} \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = \frac{n}{|\alpha_n|^2} \langle n | n \rangle = 1, \quad (1.39)$$

$$|\alpha_n|^2 = n \Rightarrow \alpha_n = \sqrt{n} e^{i\zeta}. \quad (1.40)$$

restando-nos que

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (1.41)$$

tomando a fase ζ nula.

Procedendo de forma análoga com o hermitiano conjugado de $\hat{a}$, o operador de criação $\hat{a}^\dagger$, obtemos facilmente

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (1.42)$$

A aplicação da equação acima repetidas vezes sobre o estado de vácuo nos leva para

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (1.43)$$

Desta forma, os autoestados $|n\rangle$ são conhecidos como estados de Fock ou estados de número e formam um conjunto completo de estados, ou seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1, \quad (1.44)$$

e um estado arbitrário do campo pode ser escrito como uma superposição dos estados de Fock

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (1.45)$$

Já os autovalores E_n são discretos (em contraste com o eletromagnetismo clássico no qual a energia pode assumir qualquer valor) e podem ser interpretados como o número n de *quantas* de energia $\hbar\omega_c$ presentes no campo mais a energia do ponto zero.

Uma importante propriedade dos estados de número $|n\rangle$ é que o valor médio correspondente de um campo elétrico de um único modo linearmente polarizado é zero, isto é [36]

$$\langle n| E |n\rangle = 0, \quad (1.46)$$

por outro lado, o valor médio do operador intensidade é dado por uma quantidade não nula

$$\langle n| E^2 |n\rangle = \frac{\hbar\omega_c}{\epsilon_0 V} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.47)$$

ou seja, há flutuações na intensidade do campo. Mais interessante ainda é o fato de que mesmo no estado de vácuo existem flutuações as quais são responsáveis pela emissão espontânea observada experimentalmente.

1.1.2 Estados Coerentes

Classicamente um campo eletromagnético possui uma amplitude e fase bem definidas. Todavia, em um tratamento quântico, tal nível de conhecimento passa a ser limitado pelo Princípio da Incerteza de Heisenberg. Para um campo em um estado de número, por exemplo, a amplitude é bem conhecida porém nada podemos afirmar com relação a sua fase.

O estado coerente possui um número indefinido de fótons que permite definir a fase com uma precisão maior do que a obtida para um estado de número. De fato, o produto da incerteza na amplitude e na fase em tal estado é o mínimo permitido pelo Princípio da Incerteza fazendo do estado coerente o estado quântico que mais se aproxima da descrição clássica.

Uma maneira usual de definir o estado coerente $|\alpha\rangle$ é como o autoestado do operador de aniquilação $\hat{a}$ com autovalor α , ou seja

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.48)$$

Pela completeza dos estados de Fock, podemos expandir o estado coerente como

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\alpha\rangle. \quad (1.49)$$

Usando a definição do operador de aniquilação e impondo a normalização do estado coerente ($\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$) temos

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.50)$$

Alternativamente, a partir desta relação, um estado coerente pode ser gerado aplicando, no estado de vácuo, o operador de deslocamento de Glauber definido como [36, 37]

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \quad (1.51)$$

Usando o operador (1.51) é fácil observar que o produto escalar de dois estados coerentes quaisquer é dado por

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle = e^{(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha'\alpha^* - \frac{1}{2}|\alpha'|^2)}, \quad (1.52)$$

e ainda

$$|\langle\alpha|\alpha'\rangle|^2 = e^{-|\alpha - \alpha'|^2}, \quad (1.53)$$

evidenciando que os estados coerentes, embora normalizados, não são ortogonais. Embora, no limite $|\alpha - \alpha'| \gg 1$ podemos considerá-los aproximadamente ortogonais.

A relação de completeza é dada por

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1, \quad (1.54)$$

sendo $d^2\alpha = d\text{Re}(\alpha)d\text{Im}(\alpha)$.

Por fim, o número médio de fótons de um estado coerente bem como sua variância são iguais a $|\alpha|^2$, fato característico de uma distribuição Poissoniana e corroborando com sua denominação de estado quasi-clássico [36].

1.2 Átomos: níveis de energia

A estrutura eletrônica de um átomo é extremamente complexa. Um elétron ligado a um átomo se comporta como uma partícula em uma caixa tridimensional sob a influência de um

potencial Coulombiano atrativo (devido às cargas positivas no núcleo) e contribuições adicionais como podemos ver em sua Hamiltoniana [39]

$$H_{at} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze}{|\vec{r}|} + H_{rel} + H_{ee} + H_{so} + H_{hf}. \quad (1.55)$$

na qual H_{rel} corresponde às correções relativísticas, H_{ee} descreve o acoplamento elétron-elétron e contribuições da natureza fermiônica do elétron, H_{so} é a interação spin-órbita e H_{hf} é a estrutura hiperfina.

Assim sendo um átomo possui muitos níveis de energia com espaçamentos distintos (diferente de um oscilador harmônico) e um elétron pode ocupar diversos estados quânticos (lembrando que elétrons são férmions e dois deles não podem ocupar o mesmo estado quântico).

Devido à simetria esférica do potencial Coulombiano e negligenciando as correções relativísticas e demais contribuições oriundas do spin eletrônico e do núcleo atômico ², a função de onda do elétron é bem definida por três números quânticos n , l e m . O número quântico principal n , que determina a energia do elétron, segue da solução da equação de Schrödinger unidimensional para uma partícula em uma caixa. Os outros dois, l e m , que surgem da dependência angular da equação, especificam o momento angular do elétron em torno do núcleo.

Assumindo um campo eletromagnético monocromático ressonante (ou próximo) e pelas regras de seleção (essencialmente por conservação de energia, momento angular e paridade) uma transição específica $n l m \rightarrow n' l' m'$ é selecionada e, então, considerar que o átomo tenha apenas dois níveis ($|g\rangle, |e\rangle$) é uma aproximação válida.

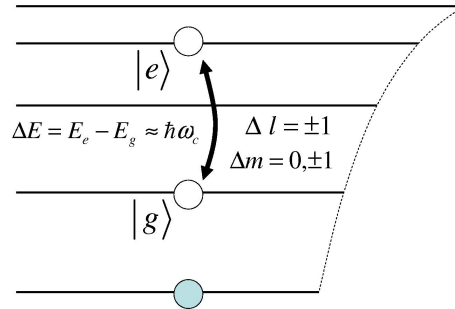


Figura 1.1: Esboço dos níveis eletrônicos de um átomo. Pelas leis de conservação para transições de dipolo elétrico é válido assumir apenas dois níveis efetivos: o fundamental ($|g\rangle$) e o excitado ($|e\rangle$).

Um átomo de dois níveis é formalmente análogo a um sistema de spin-1/2, com apenas dois

²De fato tais termos são tratados perturbativamente por serem muitas ordens de grandeza inferiores.

estados acessíveis. Vamos, então, apresentar a notação das matrizes de Pauli aplicada para um sistema de spin-1/2 (operadores de spin):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.56}$$

Consideremos, então, que os dois níveis atômicos formem uma base no espaço de Hilbert

$$|e\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\tag{1.57}$$

que satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\langle i | j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j = g, e),\tag{1.58}$$

e a relação de completeza

$$\sum_{i=g}^e |i\rangle \langle i| = |g\rangle \langle g| + |e\rangle \langle e| = \hat{\sigma}_{gg} + \hat{\sigma}_{ee} = I,\tag{1.59}$$

na qual I é a matriz identidade 2×2 .

Assim verifica-se que

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x &= |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|; \quad \hat{\sigma}_y = -i|e\rangle \langle g| + i|g\rangle \langle e|; \quad \hat{\sigma}_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|; \\ \hat{\sigma}_+ &= \hat{\sigma}_{eg} = |e\rangle \langle g|; \quad \hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{ge} = |g\rangle \langle e|.\end{aligned}\tag{1.60}$$

O operador $\hat{\sigma}_-$ aplicado a um átomo no estado excitado leva o mesmo para o estado fundamental e $\hat{\sigma}_+$ aplicado no estado fundamental leva o átomo para o estado excitado:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_- |e\rangle &= |g\rangle, \\ \hat{\sigma}_+ |g\rangle &= |e\rangle,\end{aligned}\tag{1.61}$$

estes operadores são chamados de operadores de abaixamento e levantamento, respectivamente.

Nesta visão mais simplista, em termos dos operadores de spin, o Hamiltoniano do átomo pode ser reescrito como

$$H_{at} = E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_g \hat{\sigma}_{gg} = \frac{1}{2} \hbar \omega_a (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}) + \frac{1}{2} (E_e + E_g),\tag{1.62}$$

no qual $\hbar \omega_a = E_e - E_g$ com ω_a sendo a frequência de transição atômica e utilizamos da identidade (1.59).

Para efeito dinâmico, o termo constante pode ser desconsiderado ficando no final com

$$H_{at} = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \hat{\sigma}_z. \quad (1.63)$$

Mais a frente veremos ainda um sistema no qual assumiremos um átomo com três níveis. Porém como as transições ainda serão entre dois níveis efetivos o tratamento tipo spin-1/2 ainda valerá.

1.3 Interação da radiação com a matéria

Nas seções anteriores vimos a quantização do campo eletromagnético e fizemos uma breve discussão sobre os níveis de energia de um átomo (com a simplificação de considerá-lo um sistema de dois níveis análogo a uma partícula de spin-1/2). Agora iremos apresentar a interação da radiação com a matéria.

Um problema não trivial, embora simples, é o acoplamento de um átomo de dois níveis com um campo eletromagnético monocromático. Sob certas aproximações (experimentalmente bem realistas), é possível reduzir o problema para uma forma que pode ser resolvida analiticamente permitindo, assim, observar características essenciais da interação átomo-campo.

Dentre elas temos a aproximação de dipolo (quando o comprimento de onda do campo é muito maior que o tamanho do átomo) na qual a interação átomo-campo passa a ser matematicamente equivalente a uma partícula de spin-1/2 interagindo com um campo magnético dependente do tempo. Desta forma, assim como um sistema de spin-1/2 passa por oscilações de Rabi entre os estados de spin *up* e *down* sob a ação de um campo magnético, o átomo também experimenta oscilações de Rabi ópticas com o auxílio de um campo eletromagnético.

Dois tratamentos podem ser empregados no tocante à interação átomo-campo: uma teoria semiclássica, na qual o campo é descrito classicamente, e uma teoria quântica, com o campo quantizado (em ambas o átomo é tratado como um sistema quântico com níveis discretos). A teoria semiclássica é suficiente para explicar alguns resultados de forma bem satisfatória no entanto, em muitas situações, tal descrição não é mais válida e para muitos fenômenos observados experimentalmente um tratamento quantizado do campo é exigido. Um exemplo é a emissão espontânea de um nível atômico excitado na qual para um tratamento rigoroso é necessário considerar a interação do átomo com os modos do vácuo eletromagnético do universo (que, como já vimos, só existe em um formalismo quântico). Até mesmo em um sistema simples envolvendo um átomo de dois níveis e um único modo de campo as previsões do modelo semiclássico podem diferir completamente do quântico. Enquanto a teoria semiclássica prevê somente oscilações de Rabi para a inversão atômica (a diferença da probabilidade de ocupação dos dois níveis atômicos), a descrição quantizada do campo permite ainda observar o fenômeno de colapso e ressurgimento [36].

Começaremos esta seção apresentando a aproximação de dipolo por uma abordagem semiclássica para, em seguida, introduzirmos a teoria quântica que descreve a interação de um campo quantizado com um átomo de dois níveis conhecido como o modelo de Jaynes-Cummings (MJC) [36,38].

1.3.1 Aproximação de Dipolo

Um elétron de carga q e massa m interagindo com um campo eletromagnético (em um tratamento clássico) é descrito pela seguinte Hamiltoniana de acoplamento mínimo³ [36]

$$H = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 + eU(\vec{r}, t) + V(|\vec{r}|) \quad (1.64)$$

na qual $\vec{p}$ é o momento linear do elétron, $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e $U(\vec{r}, t)$ são respectivamente os potenciais vetor e escalar do campo e $V(|\vec{r}|)$ é o potencial eletrostático que liga um elétron na posição $\vec{r}$ ao núcleo atômico (localizado em $\vec{r}_0$).

Tanto no regime óptico como no de micro-ondas o átomo está inteiramente imerso em uma onda plana eletromagnética, isto é, o comprimento de onda da luz é muito maior que a dimensão linear do átomo ($\vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1$). Desta forma, podemos usar a aproximação de dipolo e escrever o potencial vetorial como

$$\vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_0, t) = \vec{A}(t)e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{r}_0)} = \vec{A}(t)e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_0}(1 + i\vec{k} \cdot \vec{r} + \dots) \cong \vec{A}(t)e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_0}. \quad (1.65)$$

Lembrando que estamos trabalhando no calibre de Coulomb, isto é

$$U(\vec{r}, t) = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.66)$$

a equação de Schrödinger para este problema (na aproximação de dipolo) com $\vec{A}(\vec{r}, t) \equiv \vec{A}(\vec{r}_0, t)$ é

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0, t) \right]^2 + V(r) \right\} \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t). \quad (1.67)$$

Para simplificar podemos definir uma nova função de onda $\phi(\vec{r}, t)$ tal que

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{\frac{ie}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{r}} \phi(\vec{r}, t). \quad (1.68)$$

Substituindo a eq.(1.68) na equação de Schrödinger temos

$$i\hbar \left[\frac{ie}{\hbar} \dot{\vec{A}}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{r} \phi(\vec{r}, t) + \dot{\phi}(\vec{r}, t) \right] e^{\frac{ie}{\hbar} \vec{A} \cdot \vec{r}} = e^{\frac{ie}{\hbar} \vec{A} \cdot \vec{r}} \left[\frac{p^2}{2m} + V(r) \right] \phi(\vec{r}, t). \quad (1.69)$$

Esta equação, depois de cancelar o fator exponencial e outro arranjos, toma a seguinte forma

$$i\hbar \dot{\phi}(\vec{r}, t) = \left[H_0 - e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t) \right] \phi(\vec{r}, t), \quad (1.70)$$

³Sem considerar efeitos relativísticos, o acoplamento spin-órbita entre outros.

na qual usamos $\vec{E} = -\dot{\vec{A}}$ e

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(|\vec{r}|), \quad (1.71)$$

é o Hamiltoniano não perturbado do elétron.

Assim sendo, o Hamiltoniano total do sistema é

$$H = H_0 + H_1, \quad (1.72)$$

no qual o termo de interação na aproximação de dipolo é

$$H_1 = -e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t). \quad (1.73)$$

De fato, em vista desta aproximação é que obtemos as regras de seleção para as transições atômicas (entre níveis dipolos permitidos).

1.3.2 Modelo de Jaynes-Cummings: Aproximação de Ondas Girantes

Na seção anterior vimos que, quando o comprimento de onda do campo (de micro-ondas ou óptico) é muito maior que a dimensão linear do átomo, a principal componente envolvida na interação átomo-campo é o termo de dipolo. Isto é, as outras componentes (quadrupolo elétrico, dipolo magnético entre outras) podem ser desprezadas e o Hamiltoniano total que descreve um átomo interagindo com um único modo do campo eletromagnético na aproximação de dipolo é [36, 38]

$$H = H_{at} + H_C - e\vec{r} \cdot \vec{E}, \quad (1.74)$$

no qual H_{at} e H_C são, respectivamente, as energias do átomo e do campo eletromagnético livre, $\vec{r}$ é posição do elétron (com carga e) e $\vec{E}$ é o campo elétrico tido como uniforme pela aproximação de dipolo e independente do tempo na representação de Schrödinger.

O tratamento quântico é empregado a partir de uma descrição quantizada do campo eletromagnético, isto é

$$H_C = \hbar\omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.75)$$

e o campo elétrico

$$\vec{E} = E_0 \hat{e} \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right), \quad (1.76)$$

lembrando que $E_0 = \sqrt{\hbar\omega_c/2\epsilon_0 V}$ é a amplitude do campo de modo ω_c em uma região de volume V (na qual o campo está confinado). Por simplicidade assumimos um vetor de polarização $\hat{e}$ linear real e $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)^4$.

⁴Uma escolha diferente para $\vec{r}_0$ não afeta a dinâmica do sistema representando apenas uma fase que pode ser incluída na constante de acoplamento.

Para átomos de dois níveis H_{at} é dado pela expressão (1.63) e podemos escrever $e\vec{r}$ em função dos operadores atômicos usando a relação de completeza (1.59)

$$e\vec{r} = e \sum_{i=g}^e |i\rangle \langle i| \vec{r} \sum_{j=g}^e |j\rangle \langle j| = \sum_{i,j=g}^e \vec{\wp}_{i,j} \hat{\sigma}_{ij}, \quad (1.77)$$

sendo que $\vec{\wp}_{i,j} = e \langle i| \vec{r} |j\rangle$ é o elemento de matriz de transição de dipolo elétrico.

Substituindo as equações (1.75), (1.63) e (1.77) em (1.74) ficamos com

$$H = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_{i,j=g}^e g_{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (1.78)$$

na qual omitimos a energia do vácuo $\hbar\omega_c/2$, que por ser uma constante não influencia a dinâmica⁵, e temos ainda

$$g_{ij} = -\frac{\vec{\wp}_{ij} \cdot E_0 \hat{e}}{\hbar}, \quad (1.79)$$

a constante de acoplamento átomo-campo.

Sabendo que os elementos diagonais da matriz de transição de dipolo $\vec{\wp}_{i,i}$ são nulos⁶ e considerando os elementos $\vec{\wp}_{i,j}$ reais (para simplificação) temos que $\vec{\wp}_{g,e} = \vec{\wp}_{e,g}$ e, portanto, $g_{eg} = g_{ge} = g$. Assim sendo o Hamiltoniano (1.78) fica

$$H = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+). \quad (1.80)$$

lembrando que $\hat{\sigma}_{ge} \equiv \hat{\sigma}_-$ e $\hat{\sigma}_{eg} \equiv \hat{\sigma}_+$.

O último termo da equação (1.80) corresponde à energia de interação que pode ser dividida em quatro processos. O termo $\hat{a}\hat{\sigma}_+$ descreve o processo no qual o átomo sofre uma transição do estado fundamental $|g\rangle$ para o estado excitado $|e\rangle$ e um fóton é aniquilado e o termo $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-$ descreve o processo contrário. Estes são denominados de termos girantes. Já os demais, $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+$ e $\hat{a}\hat{\sigma}_-$, são chamados de termos contra-girantes. Na figura (1.2) podemos ver uma ilustração dos quatro processos presentes na interação átomo-campo. É importante observar que apenas os termos girantes conservam a energia do sistema.

Para entender melhor essa denominação é conveniente separar o Hamiltoniano (1.80) em duas partes

$$H_0 = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (1.81)$$

$$H_{int} = \hbar g (\hat{a}\hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+), \quad (1.82)$$

e passá-lo para a representação de interação a qual é obtida através da seguinte transformação unitária

$$H_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} H_{int} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}. \quad (1.83)$$

⁵De fato resulta apenas em uma fase global na evolução temporal.

⁶Isso porque, pela completeza da base de $\vec{r}$, $e \langle i| \vec{r} |i\rangle = e \langle i| (\int d^3 \vec{r}' |\vec{r}'\rangle \langle \vec{r}'|) \vec{r} (\int d^3 \vec{r}'' |\vec{r}''\rangle \langle \vec{r}''|) |i\rangle = e \int d^3 \vec{r} |\Psi_i(\vec{r})|^2 \vec{r}$. Como $|\Psi_i(\vec{r})|^2$ é uma função par e $\vec{r}$ ímpar o elemento diagonal $\vec{\wp}_{i,i}$ se anula.

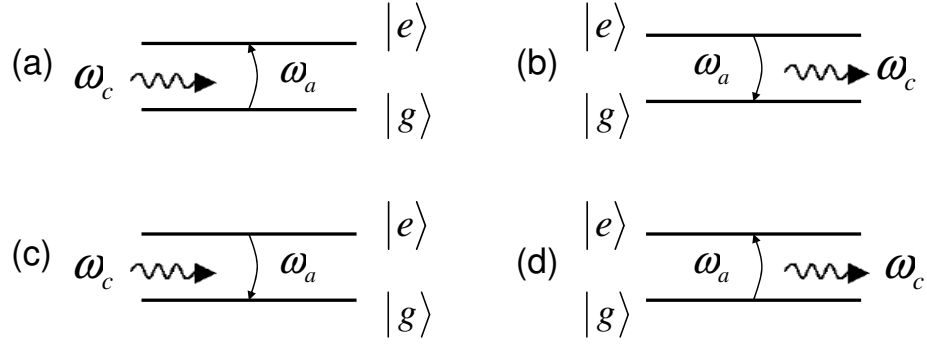


Figura 1.2: Os quatro processos da interação átomo-campo presentes no Hamiltoniano (1.80): (a) $\hat{a}\hat{\sigma}_+$, (b) $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-$, (c) $\hat{a}\hat{\sigma}_-$, (d) $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+$.

Usando a identidade dada por [36]

$$e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} = B + \alpha [A, B] + \frac{\alpha^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots, \quad (1.84)$$

é facilmente obtido que

$$e^{i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a} e^{-i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a} e^{-i\omega_c t}, \quad (1.85)$$

$$e^{i\omega_a \hat{\sigma}_z t/2} \hat{\sigma}_+ e^{-i\omega_a \hat{\sigma}_z t/2} = \hat{\sigma}_+ e^{i\omega_a t}, \quad (1.86)$$

e o Hamiltoniano do sistema na representação de interação fica

$$H_I = \hbar g (\hat{a}\hat{\sigma}_- e^{-i\Delta t} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- e^{i\delta t} + \hat{a}\hat{\sigma}_+ e^{-i\delta t} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+ e^{i\Delta t}), \quad (1.87)$$

sendo $\Delta = \omega_a + \omega_c$ e $\delta = \omega_c - \omega_a$ (dessintonia átomo-campo).

Os termos anteriormente chamados de contra-girantes ($\hat{a}\hat{\sigma}_-$ e $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+$) aparecem multiplicados por uma exponencial complexa de frequência Δ e os denominados girantes ($\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-$ e $\hat{a}\hat{\sigma}_+$) por uma exponencial complexa de frequência δ . Quando o modo de campo ω_c e a frequência de transição atômica ω_a estão próximos da ressonância (isto é, $\delta \approx 0$) podemos desprezar os termos contra-girantes que oscilam muito rapidamente com uma frequência em torno de $2\omega_c$ (dado uma constante de acoplamento átomo-campo g muito menor que ω_c). Podemos assumir que os efeitos dos termos contra-girantes, na média, interfiram destrutivamente, não contribuindo significativamente na evolução do sistema. Eliminar os termos contra-girantes recebe o nome de Aproximação de Ondas Girantes (*RWA* em inglês).

Desta forma, desprezando os termos contra-girantes, o Hamiltoniano do sistema voltando para a representação de Schrödinger fica

$$H = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega_a \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-). \quad (1.88)$$

O Hamiltoniano (1.88), que descreve a interação de um único átomo de dois níveis com um campo mono-modo quantizado na aproximação de dipolo e de ondas girantes, é conhecido como o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings [36,38].

Este Hamiltoniano é, sem dúvida, um dos mais interessantes em óptica quântica por três motivos fundamentais [36]: ele pode ser resolvido exatamente para constantes de acoplamento átomo-campo arbitrárias sem a necessidade de um tratamento perturbativo, exhibe alguns efeitos puramente quânticos como colapsos seguidos de periódicos ressurgimentos na inversão atômica e fornece uma simples ilustração da emissão espontânea explicando os efeitos de vários tipos de estatísticas quânticas do campo em muitos sistemas complexos tais como um micromaser e um laser.

Vale ressaltar que nas condições de $\Delta \gg \delta$ e $\omega_c \gg g$ tal modelo já foi largamente investigado e verificado [36,37]. De fato, uma das razões pelas quais a *RWA* manteve-se tão viva em óptica quântica é que as condições de quase ressonância e fraco acoplamento são, em geral, facilmente satisfeitas na maioria dos experimentos envolvendo átomos e cavidade quânticas.

Entretanto, recentemente surgiram trabalhos (tanto teóricos como experimentais) que tratam da dinâmica de um sistema átomo-campo interagente com $\omega_c \approx g$ (conhecido como *ultrastrong coupling regime*) no qual os termos contra-girantes não podem mais ser desprezados [42,43,44].

A aplicação de um campo tratado classicamente bombeando fortemente a mesma transição atômica ($|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$) nos possibilita obter um modelo efetivo anti-JC ou ambos (JC e anti-JC) [45,46]. Neste contexto, os termos contra-girantes (desprezados no MJC) passam a contribuir na dinâmica do sistema mesmo no regime de $\omega_c \gg g$. Vale ressaltar que o argumento de não conservação de energia não é mais válido uma vez que, agora, temos um campo clássico bombeando constantemente o sistema.

No decorrer desta tese investigaremos mais a fundo tal sistema (conhecido como JC fortemente bombeado).

Solução do MJC ressonante: Operador Evolução Temporal O simples acoplamento de um único oscilador harmônico quantizado e um sistema de dois níveis, que pode ser considerado o modelo padrão da óptica quântica [47], nos fornece uma variedade de resultados [36,37]. Com efeito, sua simplicidade nos permite obter uma solução analítica e faz desse modelo um dos mais estudados em óptica quântica e com aplicações no processamento de informação quântica [39]. De fato, existem pelo menos três métodos distintos de resolver o MJC mas que obviamente chegam ao mesmo resultado [36]: *amplitude de probabilidade*, *operadores de Heisenberg* e *operador evolução temporal*.

Agora resolveremos a dinâmica do sistema ressonante ($\delta = 0$) pelo método do *operador evolução temporal*. Em muitos problemas nos quais a evolução é unitária (isto é, não há dissipação)

tal abordagem se mostra a mais simples.

Para o presente problema, o operador evolução temporal é dado por

$$U(t) = e^{-iH_I t/\hbar}, \quad (1.89)$$

sendo H_I o Hamiltoniano do MJC ressonante na representação de interação

$$H_I = \hbar g \left(\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- \right). \quad (1.90)$$

Expandindo a exponencial em série de Taylor, com o auxílio das relações

$$\left(\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- \right)^{2l} = (\hat{a} \hat{a}^\dagger)^l |e\rangle \langle e| + (\hat{a}^\dagger \hat{a})^l |g\rangle \langle g|, \quad (1.91)$$

$$\left(\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- \right)^{2l+1} = (\hat{a} \hat{a}^\dagger)^l \hat{a} |e\rangle \langle g| + \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger)^l |g\rangle \langle e|, \quad (1.92)$$

podemos obter uma expressão fechada para o operador de evolução temporal

$$\begin{aligned} U(t) = & \cos(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}) |e\rangle \langle e| + \cos(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}) |g\rangle \langle g| \\ & - i \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger})}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}} \hat{a} |e\rangle \langle g| - i \hat{a}^\dagger \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}})}{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}} |g\rangle \langle e|, \end{aligned} \quad (1.93)$$

e, dado um estado inicial $|\psi(0)\rangle$, a evolução do sistema é determinada por

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle. \quad (1.94)$$

Desta maneira, após conseguirmos o operador evolução temporal, podemos, em princípio, obter uma descrição completa analítica das propriedades do sistema átomo-campo ressonante em um tempo t qualquer.

1.4 Tópicos de Informação Quântica

Como o foco central desta tese de doutorado é o processamento de informação quântica no que concerne a comunicação ou transferência de um estado quântico de dois níveis (*qubit*) arbitrário e a implementação de portas lógicas quânticas, alguns tópicos de informação quântica introdutórios devem ser apresentados. Existe obviamente uma variedade de referências interessantíssimas das quais podemos extrair o conhecimento necessário para o entendimento desta tese, uma destas é a [39] a qual recomendo a leitura caso haja um interesse maior no assunto.

1.4.1 Bits Quânticos

O bit é a unidade básica de informação na Teoria de Informação clássica (desempenhando um papel fundamental na ciência da computação) podendo assumir apenas valores booleanos 0 ou 1 (verdadeiro ou falso). Seu análogo na Teoria de Informação Quântica, conhecido resumidamente como *qubit*, corresponde a um sistema de dois níveis cujo estado (arbitrário) é uma combinação linear dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ (denominados de base computacional) dado por [39]

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (1.95)$$

sendo a e b dois números complexos que satisfazem a relação $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Embora o *qubit* seja, de fato, um sistema físico como dois níveis eletrônicos de um átomo, o spin nuclear ou a polarização do fóton, eles podem ser descritos e tratados simplesmente como objetos matemáticos com certas propriedades específicas dentro da ferramenta existente na mecânica quântica.

Uma formulação alternativa muito útil para melhor visualizar um *qubit* é através de uma representação geométrica assumindo,

$$a = |a| e^{i\alpha} \quad \text{e} \quad b = |b| e^{i\beta}.$$

Pela imposição da normalização definimos,

$$|a| = \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad |b| = \sin \frac{\theta}{2},$$

e ainda,

$$\phi = \beta - \alpha,$$

e podemos, desprezando uma fase global, escrever⁷

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle, \quad (1.96)$$

⁷Tal abordagem intuitiva é apenas viável para descrever um único *qubit*. Não existe uma generalização conhecida da esfera de Bloch para *multi-qubits*.

com os parâmetros θ e ϕ definindo um ponto na esfera de Bloch unitária tridimensional.

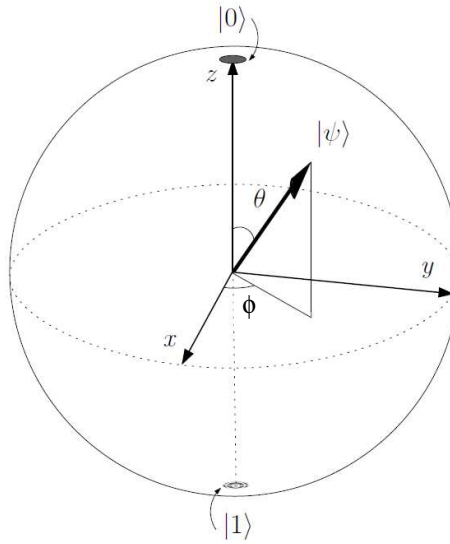


Figura 1.3: Representação de um *qubit*, em um estado puro arbitrário, na esfera de Bloch.

Com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$, existe um contínuo de infinitos pontos sobre a esfera de Bloch e, em princípio, é possível armazenar quanta informação você desejar até que uma medição seja realizada sobre o *qubit* e obtenha-se os resultados clássicos 0 ou 1.

Ainda mais, antes da medida, é possível manipular ou processar a informação armazenada via algoritmos quânticos eficientes usufruindo de tal vantagem ao ponto de solucionar problemas de grande complexidade computacionais inviáveis classicamente. Esta, de fato, é a origem do incrível potencial da computação quântica.

1.4.2 Noção de Fidelidade

O conceito de fidelidade representa um elemento básico na Teoria de Informação. Suponha que desejemos transmitir uma sequência arbitrária de sinais (informação) através de um canal de comunicação. Tal transmissão geralmente é imperfeita por duas razões fundamentais [48]:

- (a) Uma disponibilidade limitada de recursos;
- (b) O canal pode estar sujeito a ruídos corrompendo o sinal durante a transmissão.

Para qualquer esquema de comunicação, a fidelidade é uma medida quantitativa da precisão da transmissão sujeita às imperfeições geradas por (a) e (b).

Na mecânica quântica, a noção de fidelidade pode ser interpretada como uma medida de quão semelhantes são dois operadores densidade de estados quânticos arbitrários ρ_1 e ρ_2 . A definição mais conhecida é a chamada fidelidade de Bures dada por [48, 49]

$$F(\rho_1, \rho_2) = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \right)^2. \quad (1.97)$$

De fato, tal definição não constitui uma métrica em si, mas tem algumas propriedades úteis que podem ser usadas para definir uma métrica no espaço das matrizes densidade de estados como, por exemplo, a métrica de Bures [50].

Em um caso especial no qual ρ_1 e ρ_2 são estados puros a medida se resume à probabilidade de transição

$$F(|\psi_1\rangle \langle \psi_1|, |\psi_2\rangle \langle \psi_2|) = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2, \quad (1.98)$$

e, para o caso quando apenas um deles é um estado de mistura

$$F(|\psi_1\rangle \langle \psi_1|, \rho_2) = \langle \psi_1 | \rho_2 | \psi_1 \rangle. \quad (1.99)$$

Alternativamente, na literatura, costuma-se definir a fidelidade como $\sqrt{F}$ [39]. Entretanto, a definição aqui apresentada (e que será utilizado no decorrer desta tese) tem uma interpretação física simples por ser uma generalização da probabilidade de transição [48].

Limite de um canal puramente clássico Neste momento é importante estabelecer alguns limites que serão abordados mais a frente. Considere dois laboratórios, A e B , os quais compartilham apenas um canal puramente clássico de comunicação. Nesse contexto, se *Alice* (em A) deseja transmitir um estado quântico arbitrário de um *qubit* $|\psi\rangle = \cos\theta/2 |0\rangle + e^{i\phi} \sin\theta/2 |1\rangle$ para *Bob* (em B) sua melhor estratégia é, a partir de um *ensemble* finito de $|\psi\rangle$, realizar uma medida projetiva em cada cópia e comunicar o resultado ao Bob, que, por sua vez, prepara uma cópia na direção apontada por *Alice* [51]. Ao final deste protocolo, *Bob* terá em mãos um *ensemble* dado por

$$\rho = \cos^2 \frac{\theta}{2} |0\rangle \langle 0| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |1\rangle \langle 1|. \quad (1.100)$$

Em tal cenário limitado, a fidelidade média sobre todos os estados possíveis na esfera de Bloch com a qual *Bob* obtém o estado de *Alice* é

$$F = \frac{1}{4\pi} \int \langle \psi | \rho | \psi \rangle d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin\theta d\theta d\phi = \frac{2}{3}. \quad (1.101)$$

Assim posto, um protocolo de comunicação dito quântico é, de fato, eficiente se for possível obter uma fidelidade de transmissão maior que $2/3$. Caso contrário, um canal puramente clássico já seria mais eficaz para estabelecer uma comunicação entre as partes [51, 52].

1.4.3 Portas Lógicas

Formalmente, uma porta lógica quântica é um dispositivo que, dado um *input* (*qubit* inicial), realiza uma determinada operação que resulta em certo *output* em um período de tempo fixo [53].

Tais operações sobre um único *qubit* devem preservar a norma do estado e então podem ser descritas por matrizes unitárias 2×2 [39]. Destas, as mais fundamentais são as matrizes de Pauli σ_x , σ_y e σ_z as quais já foram definidas anteriormente. Existem ainda duas outras portas quânticas de um *qubit* conceitualmente de extrema importância: a porta Hadamard e a porta de fase de um *qubit*.

$$(a) \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad |x\rangle \xrightarrow{H} \frac{(-1)^x |x\rangle + |1-x\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$(b) \quad \phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad |x\rangle \xrightarrow{\phi} e^{ix\phi} |x\rangle$$

Figura 1.4: Representação matricial e do circuito lógico para (a) a porta Hadamard e (b) a porta de fase de um *qubit* com $x = 0, 1$.

De fato, a Hadamard e a porta de fase são suficientes para construir um circuito capaz de gerar qualquer estado puro de um *qubit*. Isto é, simular uma operação unitária arbitrária de um *qubit*.

$$|0\rangle \xrightarrow{H} \xrightarrow{\theta} \xrightarrow{H} \xrightarrow{\frac{\pi}{2} + \phi} |\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle$$

Figura 1.5: Circuito lógico para a geração de um estado puro arbitrário de um *qubit* desprezando uma fase global.

Computacionalmente, entretanto, costuma-se trabalhar com mais de apenas um *qubit*⁸. Logo, uma extensão básica extremamente relevante em computação (clássica ou quântica) é a noção de operações controladas de dois *qubits*. A rigor, ela consiste de uma operação condicionada na qual sua aplicação no *qubit* alvo $|t\rangle$ depende diretamente de um *qubit* de controle $|c\rangle$.

O exemplo mais conhecido de tal operação é a porta NOT-Controlada (CNOT). Em termos da base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, a atuação da porta CNOT é caracterizada por $|c\rangle |t\rangle \Rightarrow |c\rangle |c \oplus t\rangle$,

⁸De fato, é possível definir portas generalizadas de *multi-qubits*. O problema é implementá-las.

sendo $\oplus$ a soma de módulo 2. Em outras palavras, se o *qubit* de controle está no estado $|1\rangle$, o estado do *qubit* alvo é trocado (“negado”), caso contrário nada ocorre.

$$\begin{aligned}
 |0\rangle |0\rangle &\rightarrow |0\rangle |0\rangle, \\
 |0\rangle |1\rangle &\rightarrow |0\rangle |1\rangle, \\
 |1\rangle |0\rangle &\rightarrow |1\rangle |1\rangle, \\
 |1\rangle |1\rangle &\rightarrow |1\rangle |0\rangle,
 \end{aligned}
 \tag{1.102}$$

De maneira geral, considere uma operação unitária U arbitrária 2×2 , uma porta lógica quântica U -Controlada é uma operação condicional de dois *qubits* na qual se o *qubit* de controle está no estado $|1\rangle$, então uma transformação U é aplicada no *qubit* alvo, isto é, $|c\rangle |t\rangle \Rightarrow |c\rangle U^c |t\rangle$.

$$\begin{aligned}
 |0\rangle |0\rangle &\rightarrow |0\rangle |0\rangle, \\
 |0\rangle |1\rangle &\rightarrow |0\rangle |1\rangle, \\
 |1\rangle |0\rangle &\rightarrow |1\rangle U |0\rangle, \\
 |1\rangle |1\rangle &\rightarrow |1\rangle U |1\rangle,
 \end{aligned}
 \tag{1.103}$$

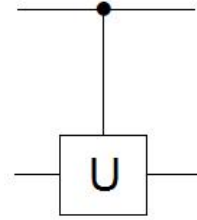


Figura 1.6: Circuito lógico que simboliza uma porta U -Controlada de dois *qubits*.

2 Sistema de cavidades acopladas

Em uma rede quântica baseada em fótons, os nós são considerados como estações de processamento de informação enquanto que a conexão entre quaisquer dois nós é realizada pelos fótons (portadores de informação).

Tais portadores de informação são transportados (propagam) através de guias de onda. Dois mecanismos já foram largamente utilizados no passado como guias de onda como ilustrado na figura (2.1).

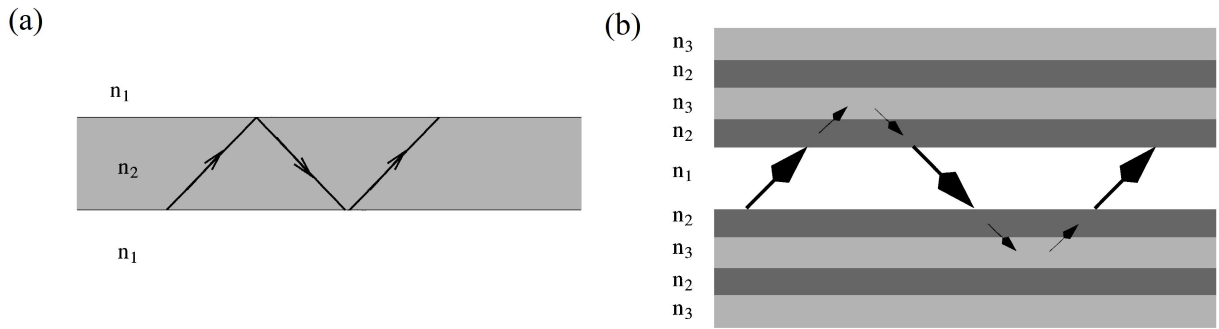


Figura 2.1: Dois tipos de guias de onda baseados em uma propagação via (a) reflexão interna total com $n_2 > n_1$ e (b) reflexão de Bragg em camadas periódicas.

Em 1999 Yariv propôs um novo tipo de guia de onda baseado em uma cadeia de ressonadores acoplados (CROW¹) de alta qualidade [10]. Uma descrição quantitativa do acoplamento pode ser obtida fenomenologicamente assumindo que a transferência de fótons entre cavidades (ressonadores) vizinhas ocorra devido ao *overlap* das ondas evanescentes no interior das cavidades e dependa, dentre outros fatores, da distância d entre elas [10, 54]. Tal descrição representa uma boa aproximação se as cavidades estiverem suficientemente separadas (fraco acoplamento, isto é $\omega_c \gg A$) mas, ao mesmo tempo, a distância entre elas não pode ser muito longa a fim de justificar o acoplamento entre os modos. Esse acoplamento é o análogo óptico do modelo de *tight-binding* (TB) da física do estado sólido [55] no qual os átomos estão próximos o bastante para que as funções de onda se sobreponham e um tratamento de átomos isolados necessite de algumas correções mas, por outro lado, longe o suficiente para que a descrição para átomos isolados não seja completamente irrelevante.

No tocante a aproximação TB (tratando os campos classicamente), tomamos os modos normais $\vec{E}_K$ de uma CCA como uma combinação linear dos modos $\vec{E}_k$ ($\omega_c = ck$) dos ressonadores

¹Acrônimo em inglês de *Coupled Resonator Optical Waveguide*

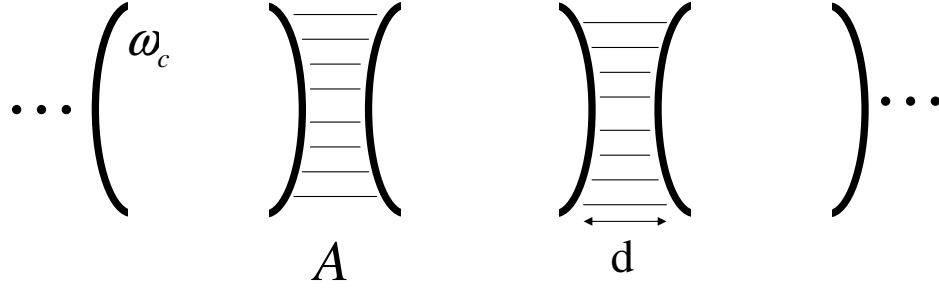


Figura 2.2: Esquema de uma cadeia de cavidades (com modo de campo de frequência ω_c) separadas por uma distância d acarretando em um acoplamento A entre primeiras vizinhas.

individuais de alta-Q ao longo de uma reta no eixo z . Denotando a coordenada do centro do n -ésimo ressonador como $z = nd$ temos²

$$\vec{E}_K(\vec{r}, t) = E_0 e^{i\bar{\omega}_K t} \sum_n e^{-inKd} \vec{E}_k(\vec{r} - nd\hat{e}_z), \quad (2.1)$$

na qual $\bar{\omega}_K$ é o modo normal do sistema de cavidades acopladas associada ao vetor $\vec{E}_K$ que, por sua vez, satisfaz as equações de Maxwell resultando na seguinte equação de onda [10]

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_K) = \epsilon \frac{\bar{\omega}_K^2}{c^2} \vec{E}_K, \quad (2.2)$$

sendo que ϵ é a constante dielétrica do meio no qual o sistema de ressonadores acoplados está inserido. Substituindo a eq.(2.1) na eq.(2.2), multiplicando ambos os lados por $\vec{E}_k^3$ e integrando no espaço temos a relação de dispersão do modo $\vec{E}_K$

$$\bar{\omega}_K^2 = \omega_c^2 \frac{\sum_n e^{-inKd} \int \epsilon(\vec{r} - nd\hat{e}_z) \vec{E}_k(\vec{r} - nd\hat{e}_z) \vec{E}_k(\vec{r}) d^3\vec{r}}{\sum_n e^{-inKd} \int \epsilon(\vec{r}) \vec{E}_k(\vec{r} - nd\hat{e}_z) \vec{E}_k(\vec{r}) d^3\vec{r}}. \quad (2.3)$$

Assumindo que o acoplamento seja suficientemente fraco (ou seja, os valores das integrais com $|n| > 1$ sejam desprezíveis) podemos manter apenas os termos entre primeiros vizinhos de forma que

$$\bar{\omega}_K = \omega_c [1 + \alpha \cos(Kd)], \quad (2.4)$$

no qual definimos o acoplamento como

$$\alpha = \int [\epsilon(\vec{r} - d\hat{e}_z) - \epsilon(\vec{r})] \vec{E}_k(\vec{r}) \vec{E}_k(\vec{r} - d\hat{e}_z) d^3\vec{r}. \quad (2.5)$$

²Ao escrever $\vec{E}_K$ desta forma assumimos $\vec{E}_k$ não degenerado.

³ $\vec{E}_k$ também satisfaz a equação de onda (2.2) mas com $\bar{\omega}_K$ substituída pela frequência de modo do ressonador individual ω_c .

Guias de onda usuais apresentam uma relação de dispersão linear enquanto que *CROW* (ou *CCA*), como vimos, desempenham o papel de um guia de onda cuja relação de dispersão é não-linear. De fato, baseado nessa distinção, muitas propostas foram apresentadas para controlar o transporte de estados não-clássicos da luz (*quantum switches*) [56, 57] bem como para o estudo da dinâmica de correlações [58] e diversos outros efeitos quânticos como *quantum walk* [57].

Neste capítulo apresentaremos o sistema constituído de N estruturas ressonadoras⁴ acopladas. Veremos o Hamiltoniano que governa sua evolução, implementações experimentais atuais de *CCA* e a dinâmica do sistema no que se refere à comunicação quântica de estados de campo de um fóton.

2.1 Hamiltoniano do sistema

Considere o sistema formado por uma cadeia de N estruturas ressonadoras espacialmente separadas por uma distância tal que o campo evanescente de uma estrutura interfira no campo de sua primeira vizinha acoplando-as. O Hamiltoniano do sistema (em um tratamento fenomenologicamente análogo ao clássico) pode ser escrito usando os operadores do campo localizado $\hat{a}_j$ ficando, na *RWA*

$$H_{CCA} = \hbar\omega_c \sum_{j=1}^N \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \hbar A \sum_{j=1}^N \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} + \hat{a}_j \hat{a}_{j+1}^\dagger \right), \quad (2.6)$$

para simplificar consideramos os parâmetros ω_c e A reais e homogêneos para qualquer j ⁵

De maneira geral, o Hamiltoniano (2.6) pode ser diagonalizado com o auxílio dos modos normais do sistema $\hat{b}_k$

$$\hat{b}_k = \sum_{j=1}^N S(j, k) \hat{a}_j, \quad (2.7)$$

sendo que a função $S(j, k)$ é caracterizada impondo condições de contorno ao sistema. Supondo um arranjo linear finito (isto é, $\hat{a}_{N+1} = 0$) temos [57]

$$S(j, k) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right). \quad (2.8)$$

É facilmente verificado que esta função satisfaz as seguintes relações de ortogonalidade

$$\sum_{k=1}^N S(i, k) S(j, k) = \delta_{i,j}, \quad (2.9)$$

⁴Usei tal denominação geral pois os elementos da cadeia podem ser tanto cavidades quânticas bem como fibras ópticas para as quais o tratamento operacional da dinâmica é análogo.

⁵Na prática, sempre haverá uma pequena diferença na cadeia e a frequência ω_c e o acoplamento A serão distintos em cada cavidade. Em princípio esperamos não haver dificuldade de obter um acoplamento quasi-uniforme com o avanço tecnológico.

$$\sum_{k=1}^N (S(i, k) S(j, k+1) + S(i, k+1) S(j, k)) = 2\delta_{i,j} \cos\left(\frac{j\pi}{N+1}\right). \quad (2.10)$$

Desta forma, o Hamiltoniano do sistema reescrito em termos dos modos normais e usando as relações de ortogonalidade fica

$$H_{CCA} = \hbar \sum_{k=1}^N \bar{\omega}_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \quad (2.11)$$

sendo

$$\bar{\omega}_k = \omega_c + \beta_k, \quad \beta_k = 2A \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right), \quad (2.12)$$

dando conta da relação de dispersão não mais linear do sistema *CCA*.

Uma vez introduzido o modelo teórico do sistema de cavidades acopladas é importante apresentar as mais promissoras implementações experimentais de *CCA*, isto é, os parâmetros que tratam desde o acoplamento com sistemas de dois níveis (*qubits*) bem como com o meio externo (as taxas de dissipação atualmente alcançadas).

2.2 Implementações experimentais para *CCA*

No acrônimo *CCA*, *cavity* se refere a uma região do espaço dentro da qual fótons podem ser eficientemente confinados. Antes de apresentar especificamente as implementações experimentais de *CCA* [3, 59, 60] vale a pena discutir um pouco sobre seus elementos individuais, isto é, a cavidade ressonadora.

Cavidades eletromagnéticas quânticas constituem um vasto tópico de pesquisa em óptica quântica. De fato, estas estruturas ressonadoras permitem intensificar a interação da radiação com a matéria possibilitando um estudo mais profundo de fenômenos ópticos não-lineares, fundamentos da mecânica quântica além do grande potencial no processamento de informação quântica.

Além da interação coerente da radiação com a matéria, existem dois mecanismos principais de perdas que afetam a dinâmica do sistema: a emissão espontânea do nível excitado do átomo de dois níveis (representada aqui pela taxa κ) e o vazamento de fótons, pelas paredes da cavidade, do modo de campo confinado a uma taxa γ . A taxa de decaimento do campo da cavidade está ligada à grandeza denominada fator de qualidade por $Q = \omega_c/2\gamma$. É dito que o sistema está em um regime de forte acoplamento átomo-campo quando o fator de cooperatividade C definido como [9]

$$C = \frac{g^2}{2\kappa\gamma} \quad (2.13)$$

é muito maior do que 1. Neste contexto a parte coerente da evolução domina sobre os processos de decoerência e a dinâmica do sistema átomo-campo pode ser observada de forma bem comportada por um intervalo de tempo apreciável.

No decorrer do avanço tecnológico foram surgindo diversos métodos de confinamento do campo e *design* específicos (geometria), características que definem o acoplamento átomo-campo g^6 bem como o fator de qualidade Q . Outro importante fator classificatório para uma cavidade (além de g e Q) é o espectro da radiação eletromagnética confinada a partir do qual se escolhe o sistema de dois níveis apropriado (cuja transição dos níveis de energia seja ressonante ou próximo da ressonância) para interagir com o campo.

Assim posto, existem basicamente quatro tipos ou classes de cavidades: (i) *Fabry-Perot* [8, 61], (ii) *Photonic Crystal* (PC) [8, 1, 62], (iii) *Whispering Gallery Mode* (WGM) [8, 2, 63] e (iv) *Coplanar Waveguide* (CPW) [64, 65]. Destas quatro escolhemos discutir mais a fundo apenas as três primeiras ⁷ nas quais nossas propostas de processamento de informação quântica podem ser realizadas.

Fabry-Perot

Cronologicamente, esta foi a primeira classe de cavidades quânticas a ser desenvolvida. De fato, o confinamento da radiação eletromagnética obtido com tal cavidade é o mais intuitivo e simples de se imaginar usando apenas dois espelhos de alta refletância colocados face a face. A configuração aberta da cavidade permite acoplar a matéria (átomos, seja de passagem [67] ou aprisionados [68]) com o campo diretamente no interior do ressonador.

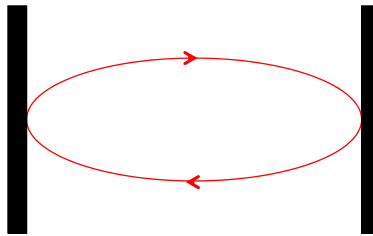


Figura 2.3: Esquema básico do método empregado para aprisionamento do campo em cavidades *Fabry-Perot*.

Existem principalmente dois grupos pioneiros nesse tipo de cavidade operando em regimes distintos. Na faixa de micro-ondas o grupo encabeçado pelos profs. Jean-Michel Raimond e Serge Haroche no *Laboratoire Kastler Brossel*, situado França, construiu uma cavidade supercondutora

⁶É preciso conhecer a estrutura do modo aprisionado a fim de desenvolver a melhor estratégia de acoplamento (posição do átomo).

⁷Isso não significa que estamos desmerecendo a quarta implementação. De fato, somente ela já seria suficiente para páginas e mais páginas de exposição e discussão [66].

de nióbio para a qual o tempo de armazenamento de fótons é $T_\gamma = 1/\gamma = 130ms$ (com $\omega_c/2\pi = 51GHz$ que corresponde a um $Q = 2.1 \times 10^{10}$) a uma temperatura de $0.8K$ [69]. Nesta faixa, o sistema de dois níveis selecionado para interagir com o campo são átomos de Rydberg circular⁸, em particular, principalmente, átomos de Rubídio (Rb). Tais níveis de Rydberg circulares demonstraram ser estáveis com um tempo de vida da ordem de $T_\kappa = 30ms$ [61].

Já na região de frequências ópticas, um desenvolvimento significativo foi alcançado pelo grupo de Óptica Quântica da *Caltech* do prof. Jeff Kimble. De fato, o *state of art* obtido para tal microcavidade óptica foi uma realização deste grupo cujos parâmetros são $(g, \kappa, \gamma)/2\pi = (110, 2.6, 14.2)MHz$ para a linha de transição $D2$ ($852.3nm$) do átomo de Cs [67], o que equivale a um fator de cooperatividade de aproximadamente $C \approx 163$.

Posteriormente esse mesmo grupo, através de um trabalho minucioso das propriedades dos espelhos tais como perdas por absorção ou espalhamento bem como a penetração do campo na parede da cavidade, determinou o limite experimental que pode ser alcançado para microcavidades ópticas *Fabry-Perot*. Especulando sobre a possibilidade de “espelhos dos sonhos” (mas provavelmente viáveis em algum momento) eles estimaram como limite os parâmetros $(g, \kappa, \gamma)/2\pi = (770, 2.6, 22)MHz$, ainda com átomos de Cs [70] ($C \approx 5000$).

Photonic Cristal (PC)

A segunda classe de cavidades quânticas que discutiremos é obtida a partir de cristais fotônicos. Cristais fotônicos são estruturas com propriedades dielétricas periódicas que afetam o movimento dos fótons analogamente a um semiconductor cuja periodicidade influencia o movimento dos elétrons. Nesse cenário, nanocavidades são defeitos localizados na estrutura do cristal de forma que a radiação com uma frequência particular fica confinada no defeito.

Tais estruturas podem ser fabricadas especificamente para interagir com átomos (como um gás no espaço livre nos buracos do cristal) [71] ou *quantum dots*⁹ (embutidas no cristal como uma impureza) [1, 72].

Devido ao seu pequeno volume de modo, o acoplamento átomo-campo pode ser extremamente grande ($g = 2\pi \times 17GHz$) alcançando potencialmente um regime de forte acoplamento de $C \approx 10^4$ [73]. Por outro lado, possuem um fator de qualidade moderado (≈ 45000) [62] o que limita tal implementação frente a suas concorrentes.

⁸Átomos excitados até altos níveis eletrônicos ($n \approx 50$) e com o máximo momento angular (polarização circular).

⁹*Quantum dots* (considerados como um sistema de dois níveis análogo aos átomos naturais) podem ser criadas dentro dessas nanocavidades [1] e interagir com o modo do campo formando um sistema padrão de cavidade QED.

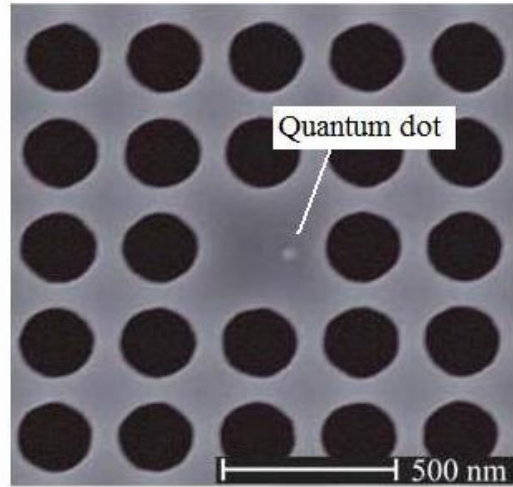


Figura 2.4: Imagem de um *SEM* de um cristal fotônico com um defeito (nanocavidade) e uma *quantum dot* embutida [1].

Whispering Gallery Mode (WGM)

A terceira e última classe de microcavidades são denominadas, em uma tradução livre, de galerias sussurrantes [8]. Elas são estruturas a base de quartzo ou sílica que são relativamente fáceis de fabricar (inclusive em larga escala) e ainda apresentam um alto fator de qualidade [2]. Nesse cenário, o confinamento do campo eletromagnético no interior da estrutura ocorre através de uma contínua reflexão interna total.

Essas cavidades podem ser manufaturadas em diversas formas geométricas incluindo, por exemplo, discos [59], esferas [74] e toros [2, 75]. De fato, das geometrias existentes, a mais promissora é a toroidal, seja pela facilidade na fabricação e no controle ou pela possibilidade de integrá-la com dispositivos ópticos, mecânicos ou eletrônicos adicionais [2].

Em resumo, microcavidades toroidais são fabricadas através de técnicas de litografia e *etching* seguido de um processo de *laser-reflow* como esquematizado na figura (2.5) (para mais detalhes ver ref. [75]). Assim, a combinação de diferentes técnicas experimentais acaba induzindo a formação de uma estrutura toroidal com dimensões limitadas pelo pilar de suporte e a espessura inicial da camada de sílica.

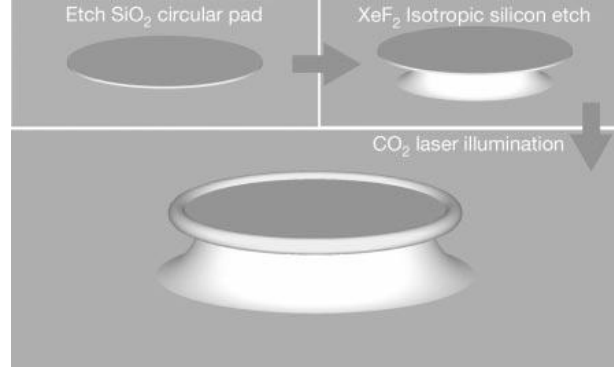


Figura 2.5: Diagrama ilustrando o processo de fabricação de microcavidades toroidais.

A geometria toroidal, que apresenta uma seção transversal na forma de um haltere, pode, na maioria dos casos, ser considerado um toro uma vez que a estrutura de apoio no formato de disco só afeta o modo óptico quando o diâmetro do toro se torna comparável à extensão radial do modo óptico.

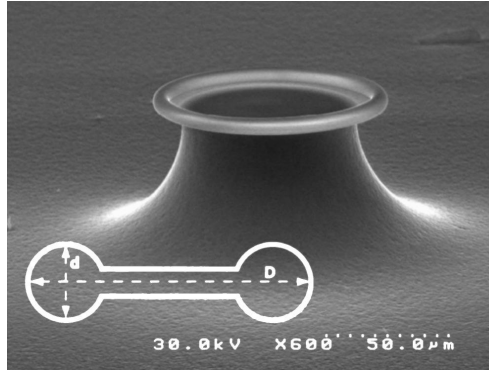


Figura 2.6: Imagem de um microscópio de varredura eletrônica (*SEM*) [2], D é o diâmetro principal e d o diâmetro menor

Em contraste com microcavidades esféricas, os modos ópticos de um toro não possuem soluções analíticas. Embora se possa derivar expressões aproximadas para os modos destas estruturas tanto quando $d \rightarrow D$ bem como para $d \ll D$, estamos mais interessados em geométricas intermediárias as quais são experimentalmente acessíveis e mantêm a maioria das propriedades desejáveis de microcavidades *WGM* [2].

Na medida que nos restringimos à geometrias com D maior do que d , o campo fica mais intenso na região equatorial do toro. Nesse contexto um campo evanescente relativamente intenso pode ser observado na borda equatorial permitindo o acoplamento da radiação confinada com fibras ópticas bem como com átomos devidamente posicionados.

Uma microcavidade com um alto fator de qualidade ($Q = 1.8 \times 10^8$) já foi obtida experimen-

talmente no comprimento de onda de $852nm$ que corresponde a um fator de cooperatividade de $C = 2 \times 10^4$ considerando átomos de Cs colocados próximos a superfície da cavidade [2], como ilustrado na figura (2.7.b), com $g = 2\pi \times 450MHz$.

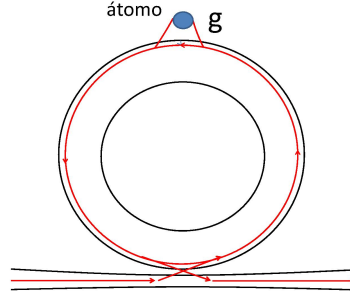


Figura 2.7: Ilustração do acoplamento de uma microcavidade toroidal com uma fibra óptica e um átomo via campos evanescentes.

Teoricamente, ajustando as dimensões estruturais da cavidade ($D = 20\mu m$ e $d = 1\mu m$) a fim de otimizar o regime de forte acoplamento átomo-campo é esperado obter um incrível fator de cooperatividade de $C = 5 \times 10^6$ novamente no comprimento de onda de $852nm$ e para átomos de Cs com $g = 2\pi \times 430MHz$ [2]. Para tal *design* idealizado (na faixa de $852nm$), a taxa de decaimento do campo correspondente é de $\gamma = 2\pi \times 7.2kHz$ ($Q \approx 10^{11}$) e o real limitante do sistema é a taxa de decaimento do nível excitado do átomo de Cs.

Coupled Cavities Array (CCA)

Frente a esta diversidade de tipos de cavidades, uma variedade de técnicas tem sido empregada na busca da melhor implementação para *CCA*. Embora o mecanismo seja idêntico (via ondas evanescentes), existem duas formas de acoplamento: direto (cavidade-cavidade) ou indireto (cavidade-fibra-cavidade).

Um acoplamento direto entre cavidades *Fabry-Perot* é difícil de obter, entretanto, um acoplamento indireto é viável integrando um dos lados do ressonador (um micro espelho côncavo) à ponta de uma fibra óptica (*1FFP*) como ilustrado na figura (2.8). Uma cadeia regular de microespelhos esféricos podem ser criados com tamanhos e espaçamentos controláveis e a radiação pode ser convenientemente guiada para dentro das cavidades através da fibra óptica [9].

No contexto específico de *Atom chip technology* [76, 77], essas microcavidades podem ser facilmente incorporadas com armadilhas magnéticas disponíveis atualmente as quais são precisas o suficiente para permitir o transporte de átomos para o interior da cavidade. O fator de cooperatividade correspondente pode alcançar um regime de forte acoplamento da ordem de $C \approx 40$ com $g = 2\pi \times 370MHz$ e átomos de Rubídio (linha D2 na qual $\lambda = 780nm$ e $\kappa = 2\pi \times 3MHz$)

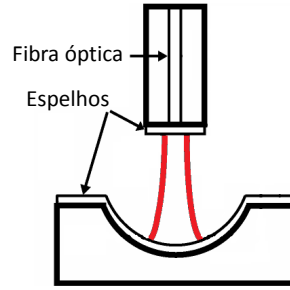


Figura 2.8: Ilustração da microcavidade 1FFP. Tal estrutura oferece um acesso direto ao interior da cavidade e permite um simples acoplamento da radiação através de uma fibra integrada.

transportados e aprisionados com alta precisão [78]. De fato é a taxa de decaimento do campo de $\gamma = 2\pi \times 570\text{MHz}$ que limita C .

Outra cavidade nos moldes de uma *Fabry-Perot* (a qual pode ser arranjada em cadeia) é formada por duas pontas de fibras ópticas colocadas frente a frente (resumidamente denominada por 2FFP).

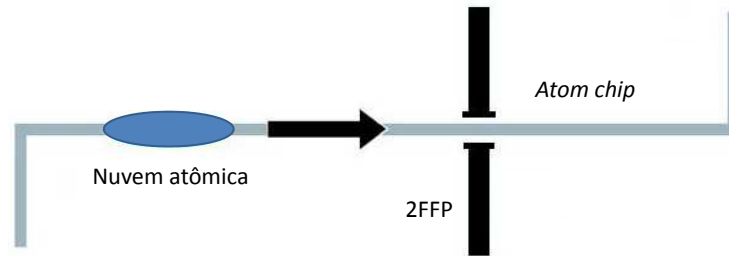


Figura 2.9: Ilustração de uma 2FFP com uma nuvem de átomos guiada por uma armadilha magnética [3].

Novamente, a combinação com *atom-chip technology* possibilita manipular e aprisionar átomos deterministicamente em qualquer lugar dentro da cavidade dando origem a uma interação átomo-campo cujo acoplamento pode ser ajustável. Nesse cenário, um alto fator de cooperatividade de $C = 145$ já foi obtido experimentalmente com átomos de Rb (g, κ, γ)/ $2\pi = (215, 3, 53)\text{MHz}$ [5].

No que se referem a cristais fotônicos, um arranjo de cavidades já foi produzido e um acoplamento direto entre os campos, isto é, um tunelamento de fótons entre ressonadores vizinhos já foi observado seja no regime de micro-ondas [4] como em domínios ópticos [60].

Por fim, cavidades com *WGM* são, também, rotineiramente produzidas em grandes arranjos [59, 79]. Um acoplamento muito eficiente e altamente sintonizável de fótons de fora para dentro das cavidades e vice-versa é possível através de fibras ópticas cônicas que são colocadas próximas à sua superfície.

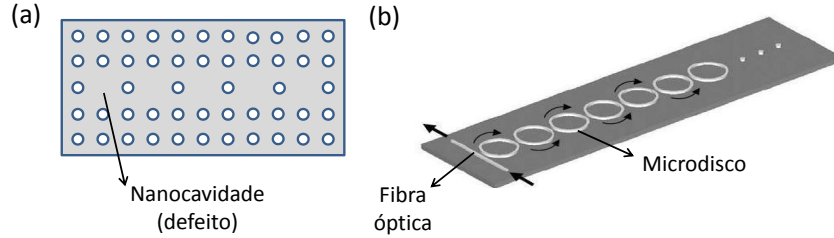


Figura 2.10: Esboço de (a) uma cadeia de nanocavidades em um *PC* e (b) um arranjo de microdiscos. Estes são rotineiramente produzidos em larga escala e, por construção, permitem um eficiente tunelamento de fótons entre cavidades vizinhas.

Sob condições apropriadas, foram observadas altas taxas de eficiência no acoplamento entre os modos de campo confinados e fibras ópticas chegando a acima de 99% [80].

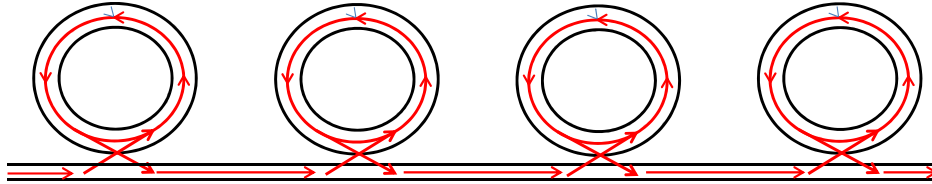


Figura 2.11: Ilustração de uma cadeia de microcavidades toroidais e uma fibra óptica possibilitando um acoplamento indireto entre os campos.

Considerações sobre o acoplamento A

Como já comentamos, o acoplamento A pode ser determinado fenomenologicamente através de um tratamento análogo com campos clássicos na aproximação de *TB* [10] dependendo da distância entre os ressonadores.

Na referência [4] temos um exemplo experimental bem ilustrativo com cristais fotônicos na faixa de microondas. Sem os defeitos, o cristal fotônico 3D com dimensões (0.32cm x 0.32cm x 15.25cm) exibe uma banda de gap fotônico de 10.6 até 12.8GHz. Inicialmente criando um único defeito no centro do PC é possível verificar no analisador o surgimento de um modo de frequência

$\Omega = 12.15\text{GHz}$.

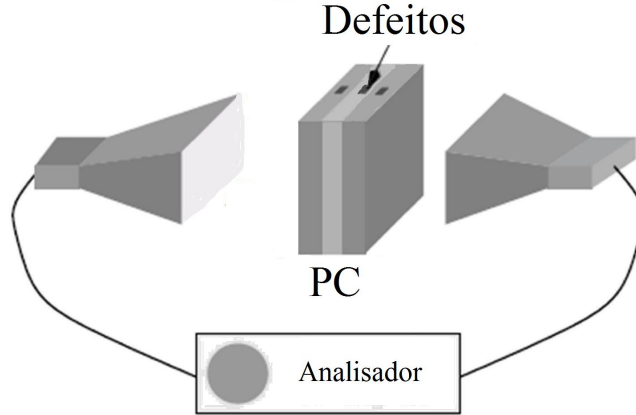


Figura 2.12: Ilustração do esquema experimental para medição da amplitude de transmissão através de um PC com defeitos [4].

Com o segundo defeito observa-se que o modo Ω sofre um *splitting* em dois modos de frequência $\omega_1 = 11.831\text{GHz}$ e $\omega_2 = 12.402\text{GHz}$ para uma distância entre os defeitos de 1.28cm e, por fim, com três defeitos consecutivos, $\Gamma_1 = 11.708\text{GHz}$, $\Gamma_2 = 12.153\text{GHz}$ e $\Gamma_3 = 12.506\text{GHz}$.

Como já sabemos, a relação de dispersão para tal estrutura com três defeitos sequenciais, obtida levando em conta as eqs.(2.1) e (2.2) com um fraco acoplamento, é¹⁰

$$\frac{\bar{\omega}_K}{\Omega} \cong 1 + \alpha \cos(Kd) \quad (2.14)$$

na qual, evoluindo a integral da superposição dos campos evanescentes com os modos normais mensurados, $\alpha = -0.047$ [4].

Nesse contexto, a intensidade do acoplamento A (ou seja, $\Omega\alpha$) é experimentalmente obtida indiretamente através da observação do *splitting* dos modos normais, fato que não costuma ser muito abordado em artigos relacionados à área. Existe apenas a compreensão de que tomando os devidos cuidados na escolha da separação entre os constituintes individuais em seu arranjo de ressonadores pode-se obter a intensidade desejada de A .

O impulso das técnicas experimentais e os avanços teóricos dos últimos anos abriram o caminho para um aprofundamento nas pesquisas de sistemas de cavidades acopladas.

CCAs, como se pode ver, não são exploradas apenas em várias formas mas também fabricados com menor volume de modo (porém sempre visando um maior fator de qualidade), buscando uma maior acessibilidade, escalabilidade e integração com outros subsistemas.

¹⁰Fazendo $K = \frac{k\pi}{4d}$ ($k=1,2,3$) retomamos o argumento da eq.2.12

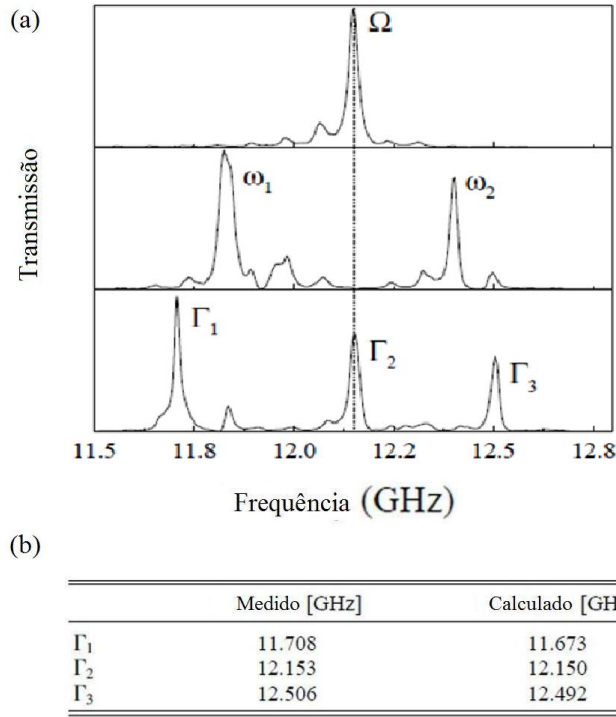


Figura 2.13: (a) Amplitude de transmissão em função da frequência ao longo do PC com um, dois e três defeitos em série e (b) os valores da frequência de ressonância medidas e calculadas para 3 defeitos em analogia com a aproximação TB [4].

De fato, o processamento de informação quântica enfrenta exigências contraditórias de combinar um excelente isolamento, para evitar a decoerência, com a capacidade de controlar as interações (coerentemente) em um sistema quântico de muitos corpos. Entretanto, o desempenho já alcançado com essas cavidades mostram que elas são boas candidatas para implementação de *CCA* (cada uma com suas vantagens e desvantagens) e no processamento de informação quântica, potencialmente, em larga escala.

2.3 Transporte de estados de campo

Transmitir um estado quântico de um lugar a outro em uma rede é um procedimento de extrema importância, por exemplo, para conectar os processadores quânticos em uma computação quântica escalável distribuída. Assim é essencial ter um sistema físico que possa servir como canal para a comunicação quântica e de fato, ultimamente, tem sido dada uma grande importância à realização de tal tarefa em diferentes contextos.

Em matéria condensada, por exemplo, Bose propôs um esquema simples usando uma cadeia de spins como um canal para comunicação quântica a curta distância [14]. O estado quântico a ser transmitido constitui o *input* no spin inicial (uma ponta da cadeia) e este propaga até o último, em um tempo específico, pela simples evolução unitária do sistema.

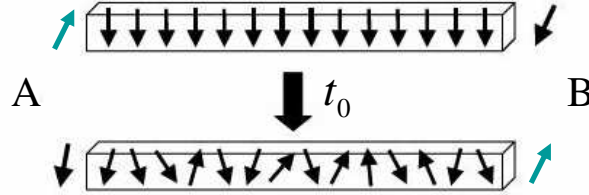


Figura 2.14: Esboço de uma cadeia de spins. A evolução do sistema em um tempo t_0 leva o estado de interesse de A até B com certa fidelidade.

Após tal pioneira contribuição, surgiram diversas propostas considerando desde diferentes conectividades (indo além do acoplamento entre primeiros vizinhos [15]), *engineered couplings* [16, 81] (cadeia com acoplamentos fixos mas distintos entre os nós) ou até diferentes codificações para o *qubit* de informação [82]. Obviamente sempre visando aumentar a eficiência da comunicação quântica. Uma visão geral da utilização de uma cadeia de spins $1 - D$ acoplados como um canal quântico de comunicação é dada na ref. [83].

Outro importante pano de fundo no tocante a transmissão de estados quânticos é o sistema formado por uma cadeia de osciladores bosônicos acoplados. O tratamento teórico no sistema em questão é equivalente a um sistema de cavidades acopladas. Nesse contexto, na ref. [84], o processo de transferência quase perfeita de estados remotos foi formalmente caracterizado como um processo de tunelamento não local (em analogia com o efeito de tunelamento em um poço quântico duplo) de modo que a transmissão ocorre indiretamente mediada pelos modos normais da cadeia.

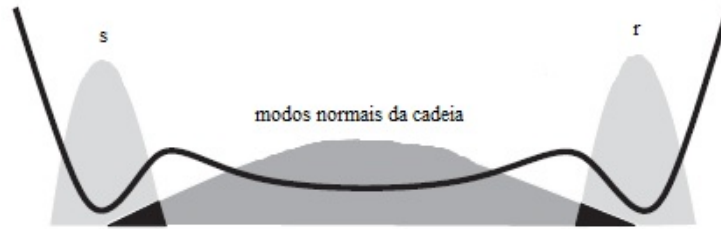


Figura 2.15: Ilustração para a superposição entre o *sender*(s), os modos normais e o *receiver*(r).

Aqui realizamos um procedimento de comunicação análogo à proposta por Bose [14] mas em um sistema de N cavidades acopladas [85] cuja dinâmica é governada segundo o modelo descrito na seção (2.1).

Assumimos inicialmente que o sistema de cavidades esteja no vácuo $|0\rangle = |00\dots 0\rangle$ e introduzimos a notação $|1_j\rangle$ ($j = 1, 2, \dots, N$) que corresponde a apenas um fóton na cavidade j .

Para começar o procedimento de comunicação quântica prepare-se a cavidade s (*sender*) no seguinte estado (desconhecido) de campo $|\varphi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$, de forma que o estado da cadeia seja

$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1_s\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2} + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\hat{a}_s^\dagger\right)|0\rangle. \quad (2.15)$$

Em função dos modos normais, o estado do sistema é

$$|\psi(0)\rangle = \left(I\cos\frac{\theta}{2} + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^N S(s, k)\hat{b}_k^\dagger\right)|0\rangle, \quad (2.16)$$

no qual I é o operador identidade e a evolução temporal pode ser obtida usando o Hamiltoniano (2.11)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_{CCA}t/\hbar}|\psi(0)\rangle = \prod_{q=1}^N e^{-i(\omega_c + \beta_q)\hat{b}_q^\dagger\hat{b}_qt} \left(I\cos\frac{\theta}{2} + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^N S(s, k)\hat{b}_k^\dagger\right)|0\rangle. \quad (2.17)$$

Conhecendo a identidade $[\hat{b}_q^\dagger\hat{b}_q, \hat{b}_k^\dagger] = \delta_{q,k}\hat{b}_k^\dagger$ pode-se reescrever o estado $|\psi(t)\rangle$ como

$$|\psi(t)\rangle = \left(I\cos\frac{\theta}{2} + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^N e^{-i(\omega_c + \beta_k)t} S(s, k)\hat{b}_k^\dagger\right)|0\rangle. \quad (2.18)$$

O objetivo é, então, transmitir o estado $|\phi\rangle$ (com a maior fidelidade possível) para outro ponto da cadeia r (*receiver*), em particular, a outra extremidade. Para tanto, sem manipulações adicionais, espera-se um tempo específico até que o estado final seja o mais próximo de $|\varphi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1_r\rangle$.

A fidelidade da comunicação quântica através da rede na média sobre todos os estados puros iniciais na esfera de Bloch em função do tempo decorrido é

$$F_{s,r}(t) = \frac{1}{4\pi} \int \langle \varphi | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \varphi \rangle d\Omega = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} (f_{s,r}(t) + f_{s,r}^*(t)) + \frac{1}{3} |f_{s,r}(t)|^2, \quad (2.19)$$

e a função $f_{s,r}(t)$ é a amplitude de transição definida como

$$f_{s,r}(t) = \sum_{k=1}^N S(r, k) S(s, k) e^{-i(\omega_c + \beta_k)t}. \quad (2.20)$$

Considere uma comunicação entre os extremos da cadeia. Uma transferência perfeita é apenas possível com $N = 2$ e 3 para as quais obtemos, usando a eq.(2.8), as amplitudes de transição

$$f_{1,2}(t) = \sum_{k=1}^2 S(2, k) S(1, k) e^{-i(\omega_c + \beta_k)t} = -i\sin(At)e^{-i\omega_c t}, \quad (2.21)$$

$$f_{1,3}(t) = \sum_{k=1}^3 S(3, k) S(1, k) e^{-i(\omega_c + \beta_k)t} = -\text{sen}^2\left(\frac{At}{\sqrt{2}}\right) e^{-i\omega_c t}. \quad (2.22)$$

De fato, a fidelidade média de transmissão é unitária quando atingimos $f_{1,N} = 1$. Para $N = 2$ tal situação ocorre nos instantes $A\tau = \pi/2 + \pi n$ com $\omega_c/A = 4m + 3$ sendo n e m inteiros positivos. Já para $N = 3$, em $A\tau = \pi/\sqrt{2} + \sqrt{2}\pi n$ e $\omega_c/A = \sqrt{2}(2m + 1)$. Na figura (2.16) temos a fidelidade $F_{1,N}$ em função do tempo para $N = 2, 3$ com $\omega_c/A = 15$ e $\omega_c/A = 15\sqrt{2}$ respectivamente.

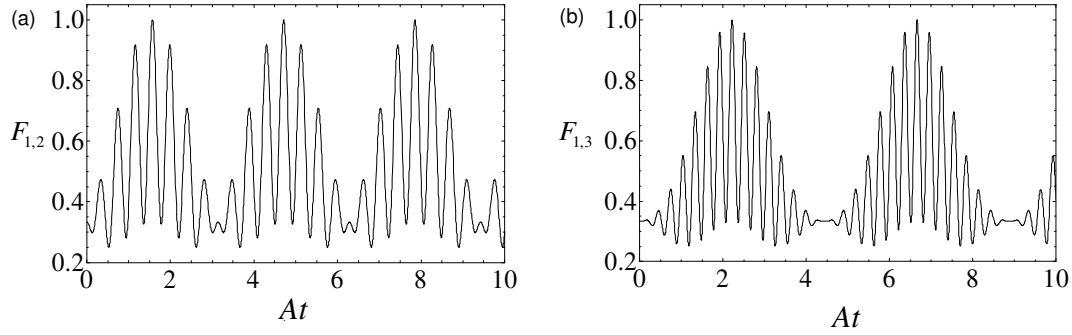


Figura 2.16: Fidelidade média de transmissão sem dissipação para (a) $N = 2$ e (b) $N = 3$.

Para qualquer outro número de cavidades uma transmissão perfeita não é mais alcançada e, de fato, computar as somatórias nas amplitudes de transição não resulta em uma função trigonométrica como nos moldes para $N = 2$ e 3 . Quanto maior o número de cavidades envolvidas na transmissão menor é a fidelidade do estado final. Até mesmo o instante τ no qual a fidelidade é máxima não é mais regular.

Uma cadeia com $N = 43$ cavidades apresenta uma fidelidade máxima de transmissão igual a 0.669 e, a partir deste limite, mesmo em um sistema sem dissipação, um canal puramente clássico já seria mais eficiente (ver figura (2.19)).

2.3.1 *Quantum Jump*: monitorando o sistema

Em um cenário mais realista, o acoplamento do sistema com o meio externo (sistema aberto) obviamente diminui a fidelidade média da comunicação.

O avanço das técnicas experimentais para estudar sistemas quânticos individuais (como por exemplo um íon aprisionado ou um único modo de campo em uma cavidade quântica) estimulou a criação de um método para descrever tais sistemas condicionados a um registro ou observação contínua de seu canal de decaimento. Este método, usualmente conhecido como *Quantum Jump* (QJ) [86, 87, 88], será a forma adotada para tratar os efeitos da dissipação durante a transmissão do estado de campo. Para uma elaborada lista de referências contendo uma descrição teórica

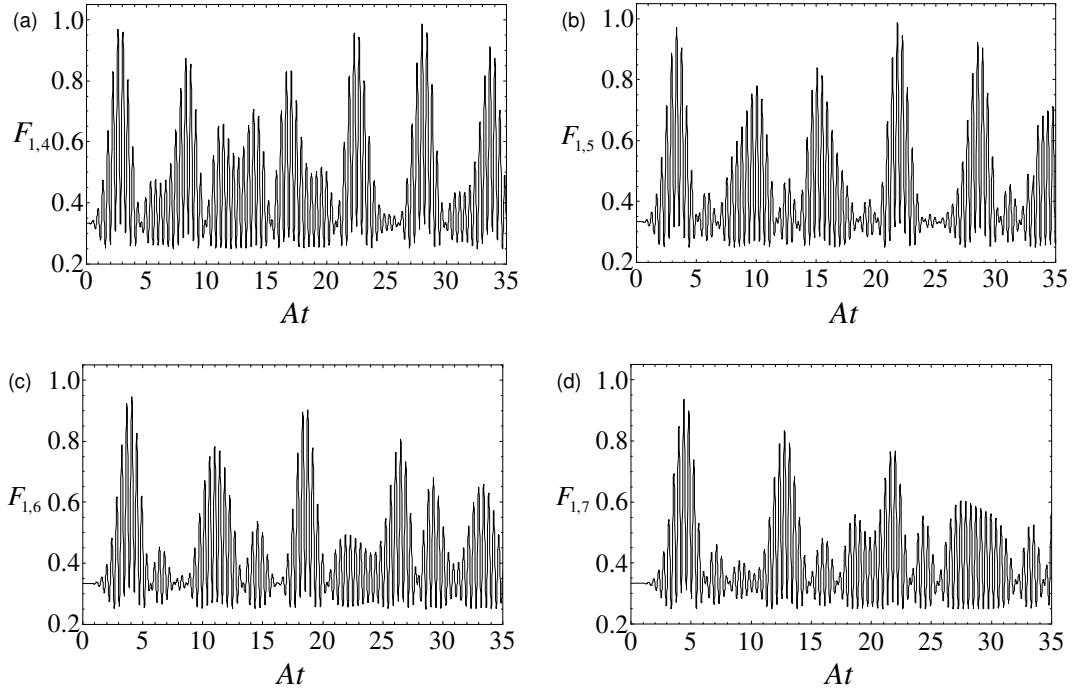


Figura 2.17: Fidelidade média de transmissão sem dissipação para (a) $N = 4$, (b) $N = 5$, (c) $N = 6$ e (d) $N = 7$ agora com $\omega_c/A = 20$.

completa do método bem como exemplos simples e instrutivos em óptica quântica recomendo a ref. [86]. Vale ressaltar que tal tratamento é inviável em uma cadeia de spins devido às dimensões do sistema.

O monitoramento constante do canal de decaimento aumenta o nosso conhecimento sobre o sistema de forma que a detecção de um fóton (*jump*) nos permite saber quando o procedimento falhou e deve ser reiniciado. De fato, até a não detecção do mesmo nos fornece informação sobre o sistema (sabemos que o fóton permanece na cavidade). Faremos agora uma breve descrição de como este método pode ser empregado.

Para um sistema de N cavidades dissipativas (cada uma com um único modo de campo quantizado) fracamente acopladas, em $T = 0K$, a equação mestra na representação de Schrödinger é dada por [89](ver apêndice E.1)

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{N}{2} \sum_{j=1}^N \gamma_j \left(2\hat{a}_j \rho \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rho - \rho \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \right), \quad (2.23)$$

na qual H é o Hamiltoniano apresentado na eq.2.6, ρ é o operador densidade de estados do sistema e a constante γ_j é a taxa de decaimento do campo em j . Considerando uma rede homogênea ($A_j = A$ e $\omega_j = \omega_c$) e assumindo que as densidades espectrais bem como o acoplamento da j -ésima cavidade com seu respectivo reservatório são idênticos obtemos $\gamma_j = \gamma$ para qualquer j .

O método de *quantum jumps* para descrever sistemas abertos baseia-se na ideia de identificar na eq.(2.23) uma evolução intercalada de decaimentos e *jumps*. Para tanto, podemos definir o seguinte Hamiltoniano efetivo não-hermitiano

$$H_{ef} = \hbar \left(\omega_c - i \frac{N\gamma}{2} \right) \sum_{j=1}^N \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \hbar A \sum_{j=1}^N \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} + \hat{a}_j \hat{a}_{j+1}^\dagger \right), \quad (2.24)$$

de forma que a equação mestra pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \rho = -\frac{i}{\hbar} [H_{ef}, \rho] + N\gamma \sum_{j=1}^N \hat{a}_j \rho \hat{a}_j^\dagger. \quad (2.25)$$

Assumindo um detector D_j de alta eficiência (para cada cavidade) e um tempo de interação muito pequeno, o termo $J_j \bullet = N\gamma \hat{a}_j \bullet \hat{a}_j^\dagger$, conhecido como *Quantum Jump Superoperator (QJS)*, é um operador que retira instantaneamente um fóton do campo da cavidade j . A priori o *QJS* é um operador não linear que depende de muitos fatores como, por exemplo, o tipo de interação entre o campo e o detector (ou aparato de medida), a intensidade dessa interação e o intervalo de tempo durante o qual o detector pode coletar um fóton da cavidade [86, 87].

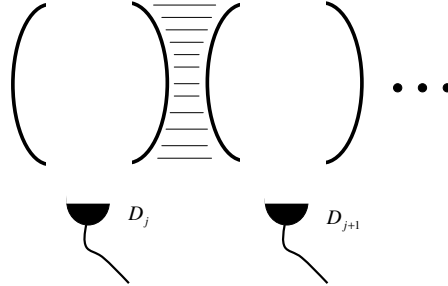


Figura 2.18: Esboço da cadeia de cavidades continuamente monitorada. Cada cavidade com seu respectivo detector (D).

O Hamiltoniano (2.24) em função dos modos normais fica

$$H_{ef} = \hbar \sum_{k=1}^N \left(\omega_c + \beta_k - i \frac{N\gamma}{2} \right) \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \quad (2.26)$$

e a evolução temporal do estado (2.15) com um monitoramento contínuo em um intervalo de tempo t , sem um *jump*, é

$$|\psi_{QJ}(t)\rangle = \frac{e^{-iH_{ef}t/\hbar} |\psi(0)\rangle}{\sqrt{\langle \psi(0) | e^{-N\gamma t \sum_{k=1}^N \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k} | \psi(0) \rangle}}, \quad (2.27)$$

note que foi necessário normalizar o estado do sistema em razão de sua evolução não mais hermitiana. Caso ocorra um *click* em algum detector (D_j) nesse intervalo de tempo, o estado do sistema irá colapsar para o estado de vácuo e o procedimento falhou.

A fidelidade da comunicação quântica sem *jump* é dada pela expressão

$$F_{1,N}(t) = \frac{1}{4\pi} \int \langle \varphi | \psi_{QJ}(t) \rangle \langle \psi_{QJ}(t) | \varphi \rangle d\Omega, \quad (2.28)$$

com uma probabilidade de sucesso de

$$P(t) = \frac{1}{4\pi} \int \langle \psi(0) | e^{-N\gamma t \sum_{k=1} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k} | \psi(0) \rangle d\Omega. \quad (2.29)$$

Na situação de ocorrência de um *click* (com uma probabilidade de $1 - P(t)$), a fidelidade é $F_{1,N} = \frac{1}{4\pi} \int \cos^2 \theta d\Omega = 1/2$.

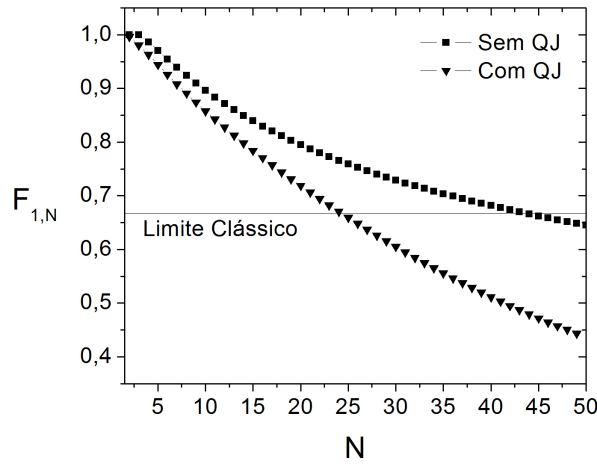


Figura 2.19: Máxima fidelidade média na transmissão de um estado de campo ao longo de uma cadeia de cavidades acopladas para um intervalo de tempo $[0, 50/A]$. No tratamento via QJ adotamos $\gamma = 0.001A$.

Na figura (2.19) apresentamos a fidelidade média máxima obtida na comunicação quântica de um estado de campo entre os extremos de uma cadeia de N cavidades acopladas comparando a situação ideal com a dissipativa. Para $\gamma = 0.001A$, o limite quântico passa a ser $N = 22$ com $F = 0.68$ e mesmo para $N = 2$ e 3 a fidelidade de transmissão não é mais perfeita (embora quase) valendo respectivamente, $F = 0.998$ e $F = 0.996$.

Nesse momento é interessante fazer um paralelo entre a ref. [84] e o trabalho descrito nessa seção. Em [84], a comunicação é obtida lançando mão de um Hamiltoniano efetivo quando os osciladores s e r estão fora de ressonância com os modos normais da cadeia. O canal (rede de osciladores) é apenas virtualmente excitado obtendo-se um tunelamento não-local do estado entre o *sender* e o *receiver*. Já no trabalho apresentado nessa seção o conjunto de osciladores (cavidades acopladas) é homogêneo (ou seja, todos ressonantes) e o estado a ser transmitido trafega por toda a cadeia até a outra ponta.

Importante destacar em [84] é a transmissão remota sem a influência dos modos normais da cadeia. No próximo capítulo introduziremos um sistema massivo no sistema de cavidades acopladas e veremos como realizar a comunicação quântica entre átomos remotos selecionando um modo normal específico eliminando a contribuição dos modos não ressonantes.

3 Comunicação Quântica entre átomos remotos no sistema de *CCA*

Comunicação quântica é a transmissão ou troca de informação quântica entre nós distintos de uma rede quântica. Os nós de uma rede quântica são tipicamente sistemas massivos (átomos, *quantum dots*, íons,...) que armazenam a informação quântica em seus estados internos (eletrônico ou vibracional). Operações em tal rede constituem transformações unitárias sobre os *qubits* as quais podem ser operações locais, ou seja, dentro de um nó, ou operações não-locais que envolvam *qubits* em nós distantes, como, por exemplo, distribuição de emaranhamento através da rede. Em particular, uma transmissão quântica ideal de um estado puro é definida por [90],

$$(c_0 |0\rangle_1 + c_1 |1\rangle_1) \otimes |0\rangle_2 \longrightarrow |0\rangle_1 \otimes (c_0 |0\rangle_2 + c_1 |1\rangle_2) \quad (3.1)$$

na qual um estado desconhecido no nó 1 foi transferido para o nó 2 sendo que, obviamente, $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$. A bem da verdade, para um esquema de comunicação quântica ideal, são desejáveis dois atributos essenciais: (i) flexibilidade, isto é, mudar a localização do *input* e *output* da transmissão e (ii) alta fidelidade a uma distância arbitrária com mínimo custo, ou seja, sem a necessidade de um controle externo dinâmico.

Implementações físicas de protocolos de transmissão de informação em redes quânticas, em particular, entre dois átomos localizados em cavidades distintas foram inicialmente exploradas no final da década de 90 [91, 90] abrindo caminho para diversos outros trabalhos na mesma direção [23, 24, 92, 93].

O ingrediente essencial que faz de uma cadeia de cavidades acopladas um sistema físico tão rico (ao ponto, como já foi dito, de ser um excelente modelo para simular fenômenos de muitos-corpos) é o balanço de um jogo entre dois efeitos concorrentes. A interação radiação-matéria, levando a uma não-linearidade (possivelmente forte) no sistema, e, por outro lado, o tunelamento de fótons entre cavidades vizinhas que favorece a deslocalização do campo como um fluido. Um modelo que descreva um conjunto de cavidades interagindo com a matéria deve, então, levar em consideração tal interação assim como o acoplamento coerente entre as cavidades induzido pelo campo evanescente.

No capítulo anterior introduzimos o sistema de cavidades acopladas e apresentamos um simples protocolo de transferência de estados de campo de um fóton. Agora incluiremos um sistema massivo de dois níveis e veremos como realizar uma comunicação quântica entre átomos remotamente

localizados em cavidades distintas.

De fato, por serem mais robustos frente à dissipação, átomos são mais eficientes na tarefa de armazenar informação quântica (memória) enquanto que o sistema de cavidades acopladas representa um excelente pano de fundo para interligá-los.

O trabalho apresentado neste capítulo foi publicado no periódico *Quantum Information Processing* [94].

3.1 Átomos de dois níveis: MJC no sistema de cavidades acopladas

Adicionemos agora ao sistema de cavidades acopladas um átomo de dois níveis interagindo com o campo da cavidade j . A dinâmica da interação átomo-campo, na aproximação de dipolo e RWA, é descrita pelo modelo de Jaynes-Cummings [36, 37, 38] (como já vimos) de forma que o Hamiltoniano completo do sistema fica

$$H^{(j)} = H_{at}^{(j)} + H_{CCA} + H_{JC}^{(j)}, \quad (3.2)$$

sendo que $H_{at}^{(j)}$ e H_{CCA} são respectivamente as eq.(1.63)(em j) e (2.6)(homogênea) e ainda

$$H_{JC}^{(j)} = \hbar g \left(\hat{a}_j \sigma_{j+} + \hat{a}_j^\dagger \sigma_{j-} \right). \quad (3.3)$$

Em experimentos práticos, a constante de acoplamento g varia dependendo da posição de cada átomo. Por simplicidade, da mesma forma que fizemos para A , vamos assumir um g uniforme, independente do j .

Na representação de interação e dos modos normais, definidos na eq.(2.7), temos

$$H_I^{(j)} = e^{iH_0^{(j)}t/\hbar} H_{JC}^{(j)} e^{-iH_0^{(j)}t/\hbar} = \hbar g \sum_{k=1}^N S(j, k) \left(\hat{b}_k^\dagger \sigma_{j-} e^{i(\delta+\beta_k)t} + \hat{b}_k \sigma_{j+} e^{-i(\delta+\beta_k)t} \right), \quad (3.4)$$

na qual $\delta = \omega_c - \omega_a$ é a dessintonia do campo localizado e o átomo, e

$$H_0^{(j)} = H_{at}^{(j)} + H_{CCA}. \quad (3.5)$$

Embora a dinâmica exata do sistema, cuja evolução é governada pelo Hamiltoniano (3.4), seja complicada de se resolver de maneira geral, existem alguns regimes nos quais ela pode ser simplificada. Fazendo a frequência de transição atômica igual à frequência de um modo normal

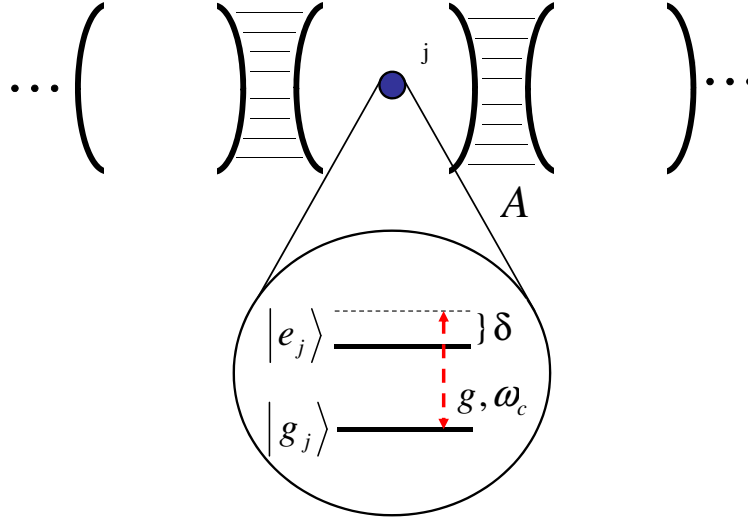


Figura 3.1: Ilustração de apenas um átomo localizado no interior da cavidade j .

particular, isto é, ajustando propriamente a dessintonia de forma que $\delta = -\beta_q$, o Hamiltoniano (3.4) fica

$$H_I^{(j)} = \hbar g S(j, q) \left(\hat{b}_q^\dagger \sigma_{j-} + \hat{b}_q \sigma_{j+} \right) + \hbar g \sum_{k \neq q}^N S(j, k) \left(\hat{b}_k^\dagger \sigma_{j-} e^{i(\beta_k - \beta_q)t} + \hat{b}_k \sigma_{j+} e^{-i(\beta_k - \beta_q)t} \right). \quad (3.6)$$

Agora, a primeira parte do Hamiltoniano anterior (que descreve a transferência de energia entre o átomo e o modo normal ressonante) é independente do tempo, por outro lado, o termo com a somatória (o qual representa a interação dispersiva do átomo com os modos normais não ressonantes) apresenta uma dependência temporal do tipo $e^{\pm i(\beta_k - \beta_q)t}$.

Desta forma, para $A \gg g$, a interação do átomo com os modos normais não ressonantes pode ser negligenciada (essencialmente truncando a série de Dyson) e o sistema se reduz (aproximadamente) a um átomo ressonantemente acoplado a um campo mono-modo

$$H_I^{(j)} = \hbar g S(j, q) \left(\hat{b}_q^\dagger \sigma_{j-} + \hat{b}_q \sigma_{j+} \right). \quad (3.7)$$

Em tal aproximação o átomo, que inicialmente interagia apenas com o modo da cavidade j (onde ele de fato está), se acopla com o modo delocalizado $\hat{b}_q$. Ou seja, o átomo passa a interagir com o campo de outras cavidades da cadeia nas quais $S(n, q) \neq 0$.

Simulações numéricas foram realizadas com o intuito de checar a validade das aproximações que conduzem do Hamiltoniano (3.2) até o (3.7) no limite $A \gg g$ com $N = 3$ [22, 92]. Aqui, com a generalização de N , tal aproximação deve ser tomada com cuidados adicionais.

De fato, com o aumento de N , a relação de dispersão dos modos normais forma um espectro contínuo e uma capacidade de sintonizar uma interação ressonante entre o átomo e um modo normal particular começa a ficar extremamente prejudicada. Matematicamente temos

$$\beta_q - \beta_{q-1} \propto A(1 - 2q)/N^2, \quad (3.8)$$

que tende a zero para um N grande, ou seja, a separação entre dois modos normais vizinhos torna-se pequena e os modos não ressonantes tornam-se não negligenciáveis. Na verdade, em uma aproximação mais rigorosa, ao invés de $A \gg g$, devemos considerar $A \gg N^{2/3}g$.

Então, analogamente com o modelo de JC, a evolução do sistema pode ser obtida pelo operador evolução temporal dado por

$$\begin{aligned} U_j(t) = e^{-iH_I^{(j)}t/\hbar} = & \cos(S(j, q)gt\sqrt{\hat{b}_q\hat{b}_q^\dagger})|e_j\rangle\langle e_j| + \cos(S(j, q)gt\sqrt{\hat{b}_q^\dagger\hat{b}_q})|g_j\rangle\langle g_j| \\ & - \frac{i}{\sqrt{\hat{b}_q\hat{b}_q^\dagger}}\text{sen}(S(j, q)gt\sqrt{\hat{b}_q\hat{b}_q^\dagger})\hat{b}_q|e_j\rangle\langle g_j| - \frac{\hat{b}_q^\dagger i}{\sqrt{\hat{b}_q^\dagger\hat{b}_q}}\text{sen}(S(j, q)gt\sqrt{\hat{b}_q^\dagger\hat{b}_q})|g_j\rangle\langle e_j|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Antes de finalizar essa seção vale ainda um resumo sobre os limites dos parâmetros do sistema. Em nosso trabalho temos basicamente duas condições para o modelo: a-) $\omega_c \gg A$; para validade do acoplamento entre as cavidades e, b-) $A \gg N^{2/3}g$; para negligenciar a interação do átomo com os modos normais não ressonantes.

3.2 Protocolo de Comunicação Quântica

O protocolo de comunicação quântica aqui apresentado será dividido em duas partes. Inicialmente apenas o átomo *sender* (s), cujo estado deve ser transmitido, interage com o campo de sua cavidade e, somente em seguida, o átomo *receiver* (r) entra em cena na cavidade r .

Considerar apenas a interação átomo-campo em uma cavidade particular pode significar duas situações: (i) um átomo de passagem apenas na cavidade em questão, (ii) com o auxílio de um campo elétrico estático devidamente aplicado “ligamos” apenas a interação na cavidade desejada.

De fato, é necessário somente um controle sobre as cavidades s e r , ou seja, quem envia e quem recebe o estado transmitido. Não é preciso ter um controle sobre o restante da cadeia de cavidades.

Inicialmente assumimos todas as cavidades no vácuo, o átomo s no estado a ser transmitido e o átomo r no estado fundamental (embora não seja levado em conta na dinâmica inicial), isto é,

$$|\psi_i\rangle = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|g_s\rangle + e^{i\phi}\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)|e_s\rangle \right) \otimes |g_r\rangle \otimes |0\rangle. \quad (3.10)$$

Na primeira etapa, considerando a interação átomo-campo na cavidade s por um tempo t_1 , usando a eq.(3.9) com $j = s$ o estado do sistema evolui para

$$U_s(t_1) |\psi_i\rangle. \quad (3.11)$$

Em seguida, por um tempo t_2 , o átomo r interage com o campo de sua cavidade e então

$$U_r(t_2) U_s(t_1) |\psi_i\rangle. \quad (3.12)$$

A fidelidade com que um estado arbitrário (θ, ϕ) é transmitido do átomo s para o átomo r em função dos tempos de interação t_1 e t_2 é

$$F_{s,r}^{(q)}(\theta, \phi, t_1, t_2) = |\langle \psi_f | U_r(t_2) U_s(t_1) |\psi_i\rangle|^2 = \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) f_{s,r}^{(q)}(t_1, t_2)^2 + \quad (3.13)$$

$$2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) f_{s,r}^{(q)}(t_1, t_2),$$

onde $|\psi_f\rangle = |g_s\rangle \otimes \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |g_r\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |e_r\rangle\right) \otimes |0\rangle$ e

$$f_{s,r}^{(q)}(t_1, t_2) = -\sin(S(s, q)gt_1)\sin(S(r, q)gt_2). \quad (3.14)$$

De maneira geral, para $S(s, q)gt_1 = \pm\pi/2^1$, a excitação (*quantum* de energia) que estava inicialmente no átomo em s passa para o modo normal $\hat{b}_q$

$$|g_s\rangle \otimes |g_r\rangle \otimes \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle \mp ie^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle\right) \quad (3.15)$$

E com $S(r, q)gt_2 = \mp\pi/2$ a excitação vai do campo para o átomo em r

$$|g_s\rangle \otimes \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |g_r\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |e_r\rangle\right) \otimes |0\rangle \quad (3.16)$$

para qualquer N , q , s e r tais que $S(s, q) \neq 0$ e $S(r, q) \neq 0$.

Na tabela 3.1 temos os valores das fases gt_1 e gt_2 para que ocorra uma transmissão perfeita do estado do átomo s até o átomo r , considerando $N = 5$ e $q = 1$, isto é, $\delta = \omega_c - \omega_0 = -\beta_1 = -\sqrt{3}A$.

Podemos perceber a grande flexibilidade que o protocolo possibilita para a comunicação quântica. Dado $N = 5$ e $q = 1$, é possível transmitir perfeitamente o estado de um átomo interagindo com o campo da cavidade s para um outro em uma cavidade r qualquer. De forma geral isto é possível para qualquer N e q com $S(s, q)$ e $S(r, q)$ não nulos.

Independente da transmissão de estado perfeita para qualquer cadeia de cavidades, o caso particular de um número N ímpar de cavidades oferece algumas peculiaridades vantajosas. Nesta situação o modo normal central $q = (N + 1)/2$ nos fornece $\beta_q = 0$ e ainda,

¹O sinal de menos deve ser entendido no contexto do círculo trigonométrico, isto é, $-\pi/2$ é equivalente a $3\pi/2$

$s \rightarrow r$	gt_1	gt_2	$g(t_1 + t_2)$
$1 \rightarrow 2$	$\sqrt{3}\pi$	3π	$(3 + \sqrt{3})\pi$
$1 \rightarrow 3$	$\sqrt{3}\pi$	$3\sqrt{3}\pi/2$	$5\sqrt{3}\pi/2$
$1 \rightarrow 4$	$\sqrt{3}\pi$	3π	$(3 + \sqrt{3})\pi$
$1 \rightarrow 5$	$\sqrt{3}\pi$	$3\sqrt{3}\pi$	$4\sqrt{3}\pi$
$2 \rightarrow 1$	3π	$\sqrt{3}\pi$	$(3 + \sqrt{3})\pi$
$2 \rightarrow 3$	π	$3\sqrt{3}\pi/2$	$(2 + 3\sqrt{3})\pi/2$
$2 \rightarrow 4$	π	3π	4π
$2 \rightarrow 5$	3π	$\sqrt{3}\pi$	$(3 + \sqrt{3})\pi$
$3 \rightarrow 4$	$3\sqrt{3}\pi/2$	π	$(2 + 3\sqrt{3})\pi/2$
$3 \rightarrow 5$	$3\sqrt{3}\pi/2$	$\sqrt{3}\pi$	$5\sqrt{3}\pi/2$

Tabela 3.1: Fases gt_1 e gt_2 para $F_{s,r}^{(1)} = 1$ com $N = 5$. Desconsideramos as combinações simétricas, por exemplo a $5 \rightarrow 4$ que é o equivalente simétrico de $1 \rightarrow 2$.

$$S(j, q) = \begin{cases} 0 & \text{para } j \text{ par} \\ (-1)^{(j-1)/2} \sqrt{\frac{2}{N+1}} & \text{para } j \text{ impar} \end{cases}$$

Embora, de fato, percamos parte da flexibilidade, isto é, as cavidades pares não estão mais acopladas ao sistema (na aproximação), temos a facilidade de $\delta = 0$ (átomo e campo ressonantes). Caso contrário teríamos que ajustar a dessintonia em função do acoplamento (lembrando que $\delta = -\beta_q \propto A$), que representa uma dificuldade experimental.

Além disso, a expressão (3.8), para o modo vizinho ao central, passa a ser

$$\beta_{(N-1)/2} - \beta_{(N+1)/2} \propto A/N, \quad (3.17)$$

e o limite da aproximação pode ser reescrito como $A \gg \sqrt{N}g$, que é mais viável à medida que N aumenta comparado a (3.8).

Antes de encerrar esta seção, vale ressaltar um ponto pertinente de nosso protocolo. Diferente de outros trabalhos [24,92], propusemos um protocolo de comunicação entre átomos que interagem sucessivamente com o sistema de cavidades. Considerar uma interação simultânea dos átomos s e r com o sistema de cavidades acopladas diminuiria o tempo de interação necessário para a comunicação quântica², no entanto a transmissão seria perfeita apenas para situações particulares entre átomos localizados em cavidades diametralmente opostas (por exemplo, com $N = 6$ e $q = 4$ entre $s = 1$ e $r = 6$, $s = 2$ e $r = 5$ e $s = 3$ e $r = 4$). O motivo é devido aos valores dos coeficientes $S(j, k)$, temos uma transmissão perfeita apenas quando $S(s, q) = -S(r, q)$, já para

²Quando se considera os efeitos do meio (como veremos logo a seguir) quanto menor o tempo melhor.

	$s \rightarrow r$	gt_1	gt_2	$g(t_1 + t_2)$
$N = 3, q = 2$	$1 \rightarrow 3$	$\pi/\sqrt{2}$	$\pi/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\pi$
	$1 \rightarrow 3$	$\sqrt{3}\pi/2$	$\sqrt{3}\pi/2$	$\sqrt{3}\pi$
$N = 5, q = 3$	$1 \rightarrow 5$	$\sqrt{3}\pi/2$	$3\sqrt{3}\pi/2$	$2\sqrt{3}\pi$
	$3 \rightarrow 5$	$\sqrt{3}\pi/2$	$\sqrt{3}\pi/2$	$\sqrt{3}\pi$
$N = 7, q = 4$	$1 \rightarrow 3$	π	π	2π
	$1 \rightarrow 5$	π	3π	4π
	$1 \rightarrow 7$	π	π	2π
	$3 \rightarrow 5$	π	π	2π
	$3 \rightarrow 7$	π	3π	4π
	$5 \rightarrow 7$	π	π	2π

Tabela 3.2: Fases gt_1 e gt_2 que resulta em $F_{s,r}^{(q)} = 1$ para $N = 3, 5$ e 7 com $q = (N + 1)/2$.

$S(s, q) = S(r, q)$ o estado atômico resultante em r sofre uma alteração de fase relativa em $e^{i\pi}$ e, para as demais situações, não é possível obter uma transferência perfeita.

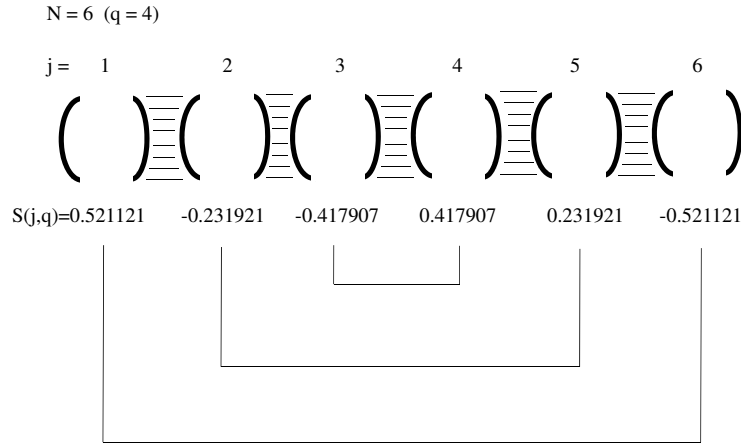


Figura 3.2: Cadeia com seis cavidades acopladas. Usando átomos em ressonância com o modo $q = 4$ apenas entre cavidades diametralmente opostas temos uma transmissão perfeita.

Logo, para um sistema de N cavidades acopladas, nosso protocolo baseado em interações sucessivas permite uma maior flexibilidade na transferência perfeita de estados quânticos (deterministicamente).

3.3 Efeitos da dissipação: Equação Mestra

Nesta seção vamos investigar a influência da dissipação na eficiência do protocolo de transferência do estado quântico aqui apresentado. Um sistema quântico realista não pode ser completamente isolado do seu ambiente. De fato, ele está geralmente acoplado a um grande número de graus de liberdade chamado banho ou reservatório [36]. Existem dois processos de perda que são grandes obstáculos para uma comunicação quântica eficiente em nosso sistema: a emissão espontânea do estado atômico excitado para o estado fundamental (devido à sua interação com o contínuo de modos de campo fora da cavidade), e o vazamento de fótons pelas paredes das cavidades. Este último é ainda mais danoso com o aumento de N .

Como inicialmente assumimos as cavidades no estado de vácuo e os modos normais não ressonantes não estão envolvidos na dinâmica (e nunca serão de fato populados), eles podem ser negligenciados na equação mestra do sistema em $T = 0K$. Considerando ainda um fraco acoplamento entre as cavidades (isto é, $\omega_c \gg A$), os canais indiretos de decaimento se anulam [89].

Baseado em tais consideração e nas aproximações usuais de Born-Markov, a equação mestra para a matriz densidade de estados do sistema no passo 1 é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho = & -\frac{i}{\hbar} \left[H_I^{(s)}, \rho \right] + \frac{N\gamma}{2} \left(2\hat{b}_q \rho \hat{b}_q^\dagger - \hat{b}_q^\dagger \hat{b}_q \rho - \rho \hat{b}_q^\dagger \hat{b}_q \right) \\ & + \frac{\kappa_s}{2} (2\sigma_{s-} \rho \sigma_{s+} - \sigma_{s+} \sigma_{s-} \rho - \rho \sigma_{s+} \sigma_{s-}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

na qual κ_s corresponde à taxa de emissão espontânea do nível excitado do átomo s , γ é a taxa de decaimento do campo da cavidade (igual para todas) e $H_I^{(s)}$ é o Hamiltoniano (3.7) com $j = s$.

Finalizada a primeira etapa, começamos a segunda parte na qual o átomo r interage com o campo de sua respectiva cavidade. A equação mestra que governa tal dinâmica dissipativa é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho = & -\frac{i}{\hbar} \left[H_I^{(r)}, \rho \right] + \frac{N\gamma}{2} \left(2\hat{b}_q \rho \hat{b}_q^\dagger - \hat{b}_q^\dagger \hat{b}_q \rho - \rho \hat{b}_q^\dagger \hat{b}_q \right) \\ & + \sum_{j=s,r} \frac{\kappa_j}{2} (2\sigma_{j-} \rho \sigma_{j+} - \sigma_{j+} \sigma_{j-} \rho - \rho \sigma_{j+} \sigma_{j-}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

A condição inicial da primeira etapa é

$$\rho = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |g_s\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |e_s\rangle \right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle g_s| + e^{-i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle e_s| \right) \otimes |g_r\rangle \langle g_r| \otimes |0\rangle \langle 0|, \quad (3.20)$$

enquanto que, para a segunda, usamos o estado obtido resolvendo a eq.(3.18) após um tempo t_1 .

Podemos, de fato, empregar diversos métodos para solucionar analiticamente o problema (sistema de equações diferenciais). Neste trabalho os coeficientes do operador matriz densidade do sistema foram calculados com a ajuda do software *Mathematica*.

	$s \rightarrow r$	$\bar{F}_{s,r}^{(q)}$
$N = 3, q = 2$	$1 \rightarrow 3$	0.986
	$1 \rightarrow 3$	0.977
$N = 5, q = 3$	$1 \rightarrow 5$	0.955
	$3 \rightarrow 5$	0.977
$N = 7, q = 4$	$1 \rightarrow 3$	0.965
	$1 \rightarrow 5$	0.934
	$1 \rightarrow 7$	0.965
	$3 \rightarrow 5$	0.965
	$3 \rightarrow 7$	0.934
	$5 \rightarrow 7$	0.965

Tabela 3.3: Máxima fidelidade média obtida para $N = 3, 5, 7$ supondo parâmetros experimentais atualmente alcançados para microcavidades toroidais e átomos de Cs.

A eficiência da transferência do estado será dada pelo valor médio da fidelidade da comunicação quântica sobre todos os estados iniciais possíveis na esfera de Bloch

$$\bar{F}_{s,r}^{(q)} = \frac{1}{4\pi} \int F_{s,r}^{(q)} d\Omega, \quad (3.21)$$

com $F_{s,r}^{(q)} = \langle \psi_f | \rho | \psi_f \rangle$ e $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$.

Podemos observar na tabela (3.3) que a máxima fidelidade média apresenta valores acima de 0.93 para $N = 3, 5, 7$ e $q = (N + 1)/2$ (modo normal central) com parâmetros experimentais sendo $\gamma = 0.004g$ e $\kappa_s = \kappa_r = 0.006g$ (assumindo $g = 2\pi \times 450MHz$)³ para um sistema físico formado por átomos de césio e cavidades ópticas microtoroidais em ressonância com a transição D_2 ($\lambda = 852, 359nm$) [2].

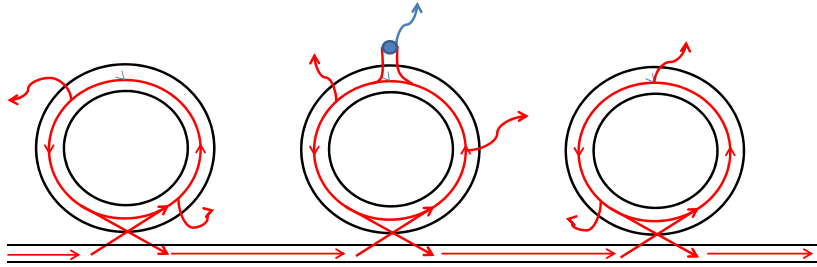


Figura 3.3: Ilustração do sistema físico proposto para a implementação da comunicação quântica.

Para $N = 7$, começando na cavidade $s = 1$, pode-se transferir um estado quântico arbitrário para qualquer outra cavidade (ímpar) da cadeia $r = 3, 5, 7$ com uma boa fidelidade, indicando

³Aqui vamos considerar $\gamma_s = \gamma_r$, mas, na verdade, a taxa de emissão espontânea depende do ambiente (densidade espectral dos modos eletromagnéticos) no qual o átomo está inserido. Tal fato é conhecido como efeito Purcell [95].

que o protocolo é flexível sob essas condições. Além disso, o ponto de partida pode ser qualquer cavidade bem como o processo pode ser revertido, ou seja, o estado pode voltar para a cavidade original.

É interessante notar um efeito peculiar de paridade no modo normal central selecionado para interagir ressonantemente com o átomo de dois níveis. A fidelidade da transmissão é mais elevada quando q é um número par. Para $N = 7$ e $q = 4$ temos $\bar{F}_{1,7}^{(4)} = 0.965$, enquanto que para $N = 5$ (um número menor de cavidades) e $q = 3$ obtemos $\bar{F}_{1,5}^{(3)} = 0.955$.

A razão para tal fato é uma diferença de fase em $S(N, q)$ para q par ou ímpar, isto é

$$S(N, q) = (-1)^{q-1} \frac{1}{\sqrt{q}}. \quad (3.22)$$

Para q par é necessário um tempo de interação menor para transferir o estado e o dano causado pela dissipação é reduzido. Na fig. (3.4) tal comportamento peculiar da paridade é melhor observado.

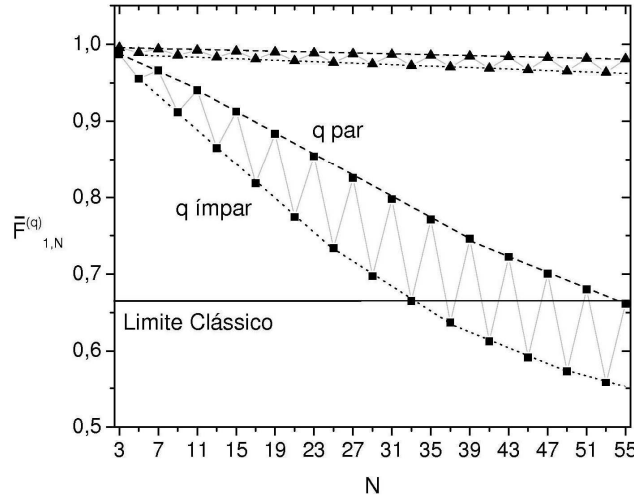


Figura 3.4: Máxima fidelidade média em função do número total de cavidades acopladas N (apenas ímpar) e $q = (N + 1)/2$: (quadrado) parâmetros experimentais atuais, (triângulo) otimizando o regime de forte acoplamento no limite previsto para cavidades ópticas microtoroidais [2].

Além da flexibilidade, outra característica fundamental para um protocolo de comunicação quântica é a sua extensão (mantendo uma boa fidelidade). A fidelidade média máxima da comunicação quântica com $s = 1$ e $r = N$, sob dissipação, como uma função de N é mostrado na fig. (3.4) assumindo apenas N ímpar e com $q = (N + 1)/2$ ($\delta = 0$). Com o aumento de N a máxima fidelidade obtida diminui uma vez que o tempo total necessário para a comunicação é maior ($gt \propto \sqrt{N}$).

Cadeias de comprimento superior a $N = 51$ têm uma fidelidade menor do que $2/3$ (que é a máxima fidelidade alcançada com um canal de transmissão puramente clássico [96]). Desta forma, o procedimento não é mais eficiente para $N > 51$ considerando os parâmetros experimentais atuais. Por outro lado, supondo o limite projetivo previsto para tal sistema, isto é, um com fator de cooperatividade de $g^2/2\kappa_j\gamma \approx 5 \times 10^6$, ainda é possível obter uma fidelidade de 0.981 mesmo para $N = 51$. Na fig.(3.4) mostramos o comportamento de $F_{1,N}^{(q)}$ apenas para $N < 55$ já que para uma cadeia maior a condição $A \gg \sqrt{N}g$ fica mais difícil de ser obtido experimentalmente.

3.4 Erros de execução no protocolo

O procedimento apresentado na seção (3.2) exige que dois átomos interajam sucessivamente com seu respectivo modo de campo durante um tempo específico.

Em um protocolo considerando interações sucessivas, um atraso entre as etapas gera apenas uma fonte de erro e podemos até mesmo preferir um atraso para evitar uma interação simultânea. Por outro lado, em um protocolo que exija uma interação simultânea (com tempos iguais) [24], uma falha na sincronização propaga o erro ao longo do processo. Em outras palavras, um erro na interação apenas do átomo s , levando a um tempo incorreto de interação simultânea t e, conseqüentemente, um tempo residual em que apenas o átomo em r interage.

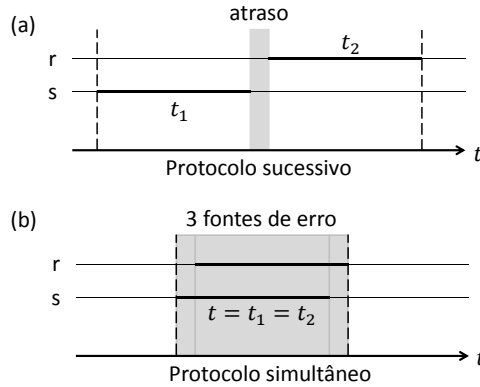


Figura 3.5: Comparação dos erros de execução em um protocolo de comunicação quântica com interações (a) sucessivas e (b) simultâneas.

Desta forma, considerando um protocolo com interações sucessivas (em configurações realistas) pode haver (i) uma ligeira variação no tempo de interação ou (ii) um atraso entre as duas etapas do procedimento induzindo, conseqüentemente, a um erro na comunicação.

(i) Na fig.(3.6) mostramos como a fidelidade média da comunicação quântica entre as ex-

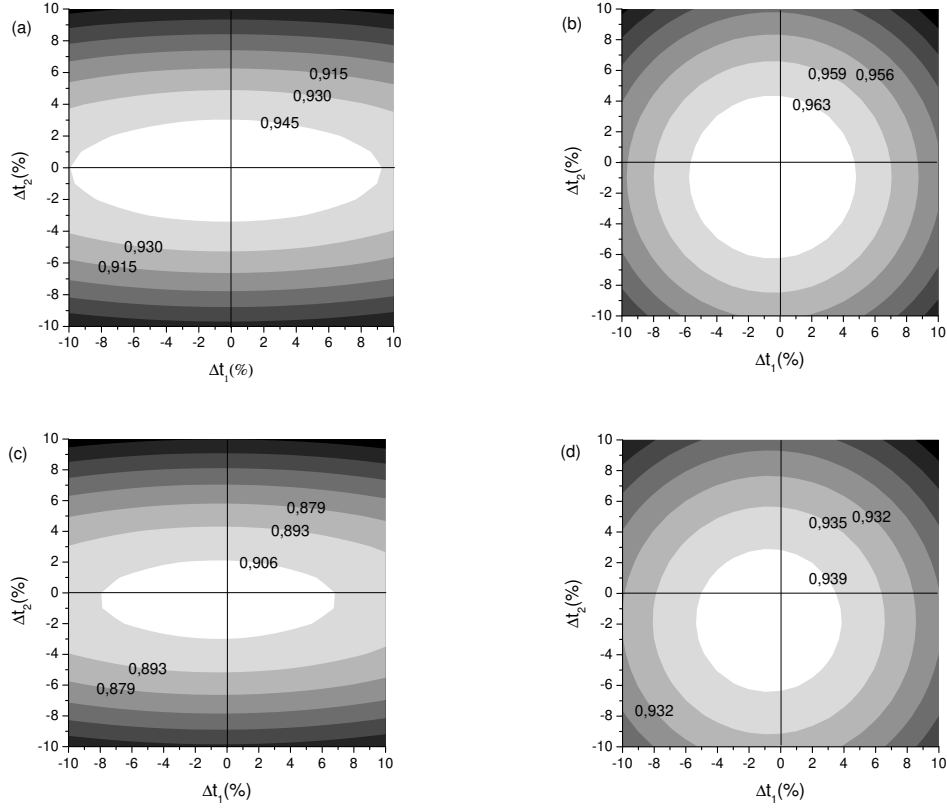


Figura 3.6: Fidelidade média em função da variação (percentual) no tempo de interação Δt_1 e Δt_2 para a comunicação quântica entre $s = 1$ e $r = N$ (os extremos da cadeia) com $q = (N + 1)/2$ sendo $N =$ (a) 5,(b) 7,(c) 9,(d) 11 e assumindo parâmetros experimentais atuais [2].

tremidades se comporta supondo uma variação percentual no tempo de interação para valores experimentais recorrentes para microcavidades toroidais e átomos de Cs. Podemos notar que um erro percentual positivo ($\Delta t_i > 0$, $i = 1, 2$) é mais prejudicial ao protocolo uma vez que aumenta o tempo no qual o sistema perde informação e energia para o ambiente. Entretanto, de fato, mesmo com um erro de 2% em ambos os estágios do procedimento a fidelidade de transmissão permanece acima de 0.9 para $N = 5, 6, 9$ e 11.

Os danos causados ao protocolo devido aos erros nos tempos de interação t_1 e t_2 podem ser minimizados se medirmos o átomo s após a etapa 1, embora tal interferência afete a probabilidade de sucesso da transmissão (sem a medição, o protocolo é determinístico).

Se o átomo em s for medido no estado excitado o protocolo, obviamente, falhou e deve ser repetido. Por outro lado, se o mesmo for obtido no estado fundamental, a excitação foi transferida para o campo e o procedimento pode ser concluído com certa fidelidade (melhor em comparação com o caso sem medição) e uma probabilidade de sucesso não mais unitária.

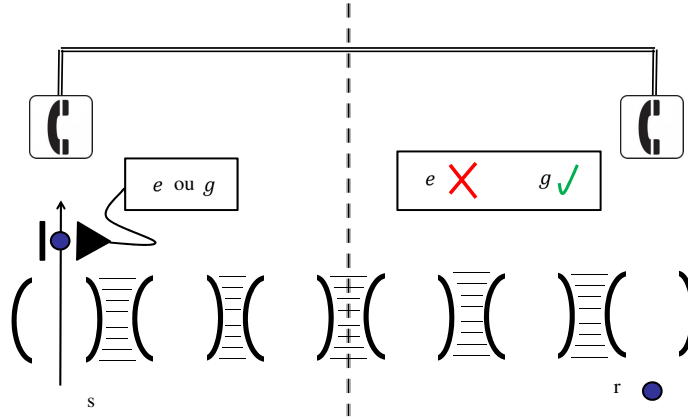


Figura 3.7: Dependendo da medida feita no átomo s o protocolo deve ser reiniciado (falhou) ou pode ser efetuado.

		−10%			+10%		
		F	F_{medido}	P_{suc}	F	F_{medido}	P_{suc}
$N = 5$	$q = 3$	0.856	0.866	0.987	0.849	0.857	0.989
$N = 7$	$q = 4$	0.946	0.959	0.986	0.94	0.95	0.99
$N = 9$	$q = 5$	0.827	0.838	0.985	0.814	0.821	0.99
$N = 11$	$q = 6$	0.924	0.937	0.985	0.914	0.921	0.99

Tabela 3.4: Comparação do protocolo sem medição e com a medição (respectivamente F e F_{medido}) assumindo um erro de $\pm 10\%$ em ambas as etapas.

(ii) Agora, se a segunda etapa não começa exatamente após o primeiro, a fidelidade da transferência do estado quântico fica prejudicada, como podemos ver na figura (3.8) para $N = 5, 7, 9$ e 11 com $q = (N + 1)/2$.

Após a interação do átomo em s e sem a presença do átomo r , o sistema de cavidades evolui segundo a seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho = & \frac{N\gamma}{2} \left(2\hat{b}_q\rho\hat{b}_q^\dagger - \hat{b}_q^\dagger\hat{b}_q\rho - \rho\hat{b}_q^\dagger\hat{b}_q \right) \\ & + \frac{\kappa_s}{2} (2\sigma_{s-}\rho\sigma_{s+} - \sigma_{s+}\sigma_{s-}\rho - \rho\sigma_{s+}\sigma_{s-}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

sendo a condição inicial o resultado obtido na etapa 1. Em outras palavras, temos uma deteriorização do campo e do átomo s , que não mais interage com o sistema de cavidades acopladas.

Embora a fidelidade para $N = 7$ (com q par) seja maior do que para $N = 5$ (q ímpar) no instante inicial $gt_{atraso} = 0$, um atraso no procedimento afeta mais o sistema com sete cavidades do que com cinco uma vez que existem mais ressonadores envolvidas no canal de dissipação. De

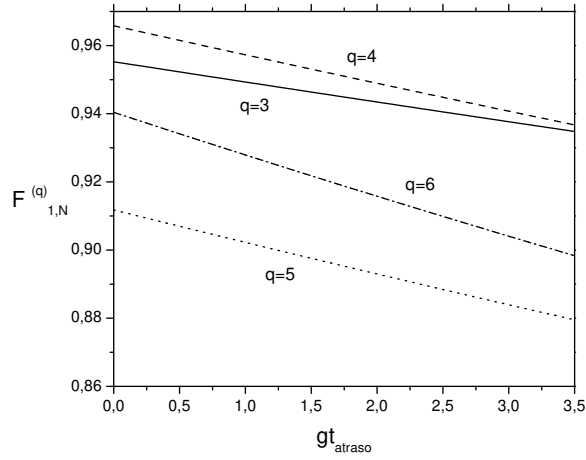


Figura 3.8: Fidelidade média em função de um tempo de atraso entre as duas etapas do protocolo para comunicação quântica entre as pontas do sistema de cavidades acopladas sendo N =(linha) 5,(tracejado) 7,(ponto) 9,(traço-ponto) 11.

fato, a fidelidade com $N = 7$ cruza a com $N = 5$ e para longos tempos de atraso ambas tendem a 0,5. É importante notar que um atraso de aproximadamente $gt_{atraso} \approx \sqrt{N}$ ainda nos fornece uma fidelidade acima de 0,88 para $N = 5, 7, 9$ e 11.

Poderíamos ainda analisar outras fontes de erros na execução do protocolo que também afetariam a fidelidade da transmissão. Tal fonte poderia ser um desarranjo na constante de acoplamento átomo-campo (que depende da posição do átomo durante a interação com a radiação). Entretanto, um erro em g nos induziria a um tempo de interação errôneo cuja consequência pode ser observada na figura (3.6).

4 Porta lógica R-Controlada de dois-*qubits*

Nesse capítulo apresentamos uma implementação alternativa de uma porta quântica R(rotação)-controlada de dois *qubits* no sistema de átomos-cavidades acopladas. A proposta é baseada em operações de um *qubit* e fase geométrica não-convencional em átomos de três níveis idênticos fortemente bombeados por um campo clássico ressonante [45] em cavidades ópticas distantes conectadas por uma fibra óptica.

Nossa proposta tem as seguintes vantagens: (i) é implementada em um tempo operacional constante (que depende de parâmetros experimentais fixos) independente da rotação R (ii) e, com um acoplamento *qubit-bus* (átomo-ressonador) ajustável, é possível especificar uma rotação particular R no *qubit* alvo.

Ressaltamos que esta proposta é genérica e pode ser aplicada a qualquer tipo de sistema físico com três níveis (*qubit* mais estado intermediário) interagindo com um sistema de cavidades acopladas (*bus*) sendo apenas necessário ter um acoplamento *qubit-bus* deterministicamente controlável.

O trabalho aqui apresentado referente à implementação da porta quântica R-controlada entre dois átomos de três níveis em cavidades conectadas por uma fibra óptica foi aceito para publicação na *Phys. Lett. A (Elsevier)* [97].

Antes de apresentarmos a implementação da porta R-controlada vale a pena discutir algumas das teorias básicas que serão utilizadas.

4.1 Hamiltoniano efetivo do MJC fortemente bombeado no sistema de cavidades acopladas

Considere dois átomos de três níveis idênticos aprisionados em cavidades ópticas distantes conectadas por uma fibra óptica como mostrado na figura 4.1. O modelo de acoplamento via fibra óptica possui um tratamento análogo ao já apresentado na seção (2.1) com $N = 3$. Ele nos permite trabalhar com cavidades separadas por distâncias maiores que o acoplamento direto devido à sobreposição dos modos locais.

O número de modos de campo propagantes na fibra que significativamente interagem com os modos presentes nas cavidades é da ordem de $n \approx l\bar{\nu}/2\pi c$ no qual l é o comprimento da fibra, $\bar{\nu}$ é

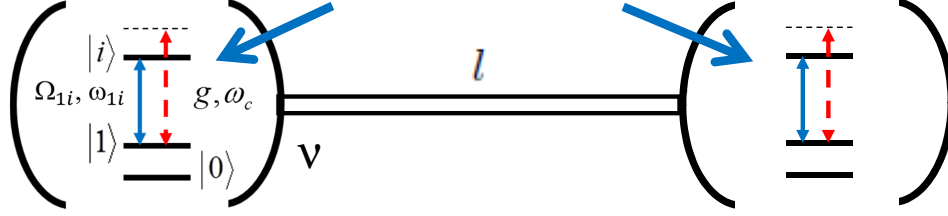


Figura 4.1: Dois átomos (e a configuração dos níveis eletrônicos) em cavidades distintas ligadas por uma fibra óptica. Ver no texto a explicação das constantes envolvidas.

a taxa de decaimento (ou, em outras palavras, a taxa de transferência) do campo das cavidades no *continuum* de modos da fibra e c é a velocidade da luz no vácuo. No limite de pequena fibra ($l < 1m$), essencialmente apenas um modo da fibra ($n \approx 1$) interage com o modo das cavidades e o Hamiltoniano que trata do acoplamento cavidades-fibra é dado por [98]

$$H_{cf} = \hbar\nu\hat{b} \left(\hat{a}_1^\dagger + e^{i\varphi}\hat{a}_2^\dagger \right) + h.c., \quad (4.1)$$

sendo $\hat{b}$ o operador de aniquilação para o modo da fibra, $\hat{a}_j^\dagger$ o operador de criação do modo de campo confinado na cavidade j , ν é a constante que descreve o acoplamento cavidades-fibra e φ corresponde a uma fase resultante da propagação do campo através da fibra de comprimento l .

Cada átomo (como ilustrado na figura 4.1) possui um nível excitado (o intermediador) denominado por $|i\rangle$ e dois estados ditos fundamentais ou metaestáveis¹ $|1\rangle$ e $|0\rangle$ (os *qubits* lógicos). A transição $|i\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ (com frequência ω_{1i}) está acoplada ao modo da cavidade com uma constante de acoplamento g e uma dessintonia $\delta = \omega_c - \omega_{1i}$. Além disso, esta mesma transição é ainda guiada por um campo clássico ressonante com intensidade Ω_{1i} . A interação átomo-campo na cavidade j na representação de interação é, então, descrita pelo Hamiltoniano

$$H_{acj} = \hbar \left(g\hat{a}_j e^{-i\delta t} + \Omega_{1i} \right) \sigma_{+j} + h.c., \quad (4.2)$$

no qual $\sigma_{+j} = |i\rangle_{jj} \langle 1|$.

Consideremos os modos normais do sistema de cavidades acopladas (cavidades+fibra) $\hat{c} = 1/\sqrt{2}(\hat{a}_1 - e^{i\varphi}\hat{a}_2)$ e $\hat{c}_\pm = 1/2(\hat{a}_1 + e^{i\varphi}\hat{a}_2 \pm \sqrt{2}\hat{b})$ com as respectivas frequências ω_c e $\omega_c \pm \sqrt{2}\nu$ [22]. O Hamiltoniano total na representação de interação pode ser reescrito como

$$H = H_0 + H_1, \quad (4.3)$$

¹A taxa de decaimento de um nível metaestável para seu parceiro logo abaixo é desprezível considerando a diferença de energia entre eles pequena, ou simplesmente nula por ser uma transição proibida por regras de seleção.

sendo

$$H_0 = \hbar\Omega_{1i} \sum_{j=1}^2 (\sigma_{+j} + \sigma_{-j}),$$

$$H_1 = \hbar g \left[\frac{1}{2} \left(\hat{c}_+ e^{-i\sqrt{2}\nu t} + \sqrt{2}\hat{c} + \hat{c}_- e^{i\sqrt{2}\nu t} \right) \sigma_{+1} e^{-i\delta t} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\hat{c}_+ e^{-i\sqrt{2}\nu t} - \sqrt{2}\hat{c} + \hat{c}_- e^{i\sqrt{2}\nu t} \right) \sigma_{+2} e^{-i\delta t} + h.c \right].$$

Mudando agora para uma nova base atômica de estados vestidos $|+\rangle_j = 1/\sqrt{2}(|1\rangle_j + |i\rangle_j)$ e $|-\rangle_j = 1/\sqrt{2}(|1\rangle_j - |i\rangle_j)$ ($j = 1, 2$) e realizando a seguinte transformação unitária $U_0 = e^{-iH_0 t/\hbar}$ temos [45]

$$H' = U_0^\dagger H U_0 - i\hbar U_0^\dagger \dot{U}_0 = \quad (4.4)$$

$$\hbar g \left[\frac{1}{2} \left(\hat{c}_+ e^{-i(\delta+\sqrt{2}\nu)t} + \sqrt{2}\hat{c} e^{-i\delta t} + \hat{c}_- e^{-i(\delta-\sqrt{2}\nu)t} \right) \right. \\ \times \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_{z1} - \tilde{\sigma}_{-1} e^{-i2\Omega_{1i}t} + \tilde{\sigma}_{+1} e^{i2\Omega_{1i}t}) \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\hat{c}_+ e^{-i(\delta+\sqrt{2}\nu)t} - \sqrt{2}\hat{c} e^{-i\delta t} + \hat{c}_- e^{-i(\delta-\sqrt{2}\nu)t} \right) \right. \\ \left. \times \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_{z2} - \tilde{\sigma}_{-2} e^{-i2\Omega_{1i}t} + \tilde{\sigma}_{+2} e^{i2\Omega_{1i}t}) + h.c \right],$$

na qual $\tilde{\sigma}_{zj} |\pm\rangle_j = \pm |\pm\rangle_j$ e $\tilde{\sigma}_{\pm j} |\mp\rangle_j = |\pm\rangle_j$.

Para um forte acoplamento cavidades-fibra $\nu \gg g$ e em um regime de campo clássico intenso $\Omega \gg g, \delta$, podemos negligenciar os termos que oscilam rapidamente resultando em

$$H'_{ef} = \frac{\hbar g}{2\sqrt{2}} \left(\hat{c} e^{-i\delta t} + \hat{c}^\dagger e^{i\delta t} \right) (\tilde{\sigma}_{z1} - \tilde{\sigma}_{z2}). \quad (4.5)$$

O operador de evolução temporal para o Hamiltoniano (4.5) pode ser escrito como [99]

$$U' = e^{-iA(t)(\tilde{\sigma}_{z1}-\tilde{\sigma}_{z2})^2} e^{-iB(t)\hat{c}(\tilde{\sigma}_{z1}-\tilde{\sigma}_{z2})} e^{-iC(t)\hat{c}^\dagger(\tilde{\sigma}_{z1}-\tilde{\sigma}_{z2})}, \quad (4.6)$$

a fim de encontrar os termos dependentes do tempo A e B , podemos usar a equação de Schrödinger e obter (para mais detalhes ver apêndice C)

$$A(t) = -\frac{g^2}{8\delta} \left[t - \frac{1}{i\delta} \left(e^{i\delta t} - 1 \right) \right], \quad (4.7)$$

$$B(t) = C^*(t) = -\frac{g}{2\sqrt{2}i\delta} \left(e^{-i\delta t} - 1 \right).$$

Quando o tempo de interação satisfaz a condição $t = \tau = 2\pi m/\delta$, o operador de evolução temporal total do sistema pode ser expresso como

$$U(\tau) = e^{-iH_0\tau/\hbar} U'(\tau) = e^{-i\Omega_{1i}\tau(\tilde{\sigma}_{z1}+\tilde{\sigma}_{z2})} e^{i\lambda\tau(\tilde{\sigma}_{z1}-\tilde{\sigma}_{z2})^2}, \quad (4.8)$$

com $\lambda = g^2/8\delta$.

Fica evidente ao observar a equação anterior que tal operador de evolução é independente do modo das cavidades e, portanto, para $t = \tau$ a dinâmica é insensível ao estado de campo inicial.

4.2 Implementação da porta R-controlada

Inicialmente os átomos (de três níveis) estão em um dos estados da base computacional (o primeiro é o *qubit* de controle e o segundo é o alvo) $\{|0\rangle_1 |0\rangle_2, |0\rangle_1 |1\rangle_2, |1\rangle_1 |0\rangle_2, |1\rangle_1 |1\rangle_2\}$ e o sistema cavidade+fibra é preparado no estado de vácuo (isto é, $|0\rangle_c$ já desconsiderando os demais modos normais). Lembrando apenas que, em um cenário ideal, o sistema de cavidades pode estar em qualquer estado de campo inicial.

Propomos que uma porta R-controlada pode ser implementada através das seguintes operações:

- PASSO 1: Aplique um pulso de micro-ondas (de frequência ω_{01} e $\phi_1 = -\pi/2$) no átomo 2 (*qubit* alvo) com $\Omega_{01}t_1 = \pi/4$ (ver apêndice A). Tal operação sobre um único átomo cria a seguinte superposição de estados,

$$\begin{aligned} |0\rangle_2 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_2 + |1\rangle_2), \\ |1\rangle_2 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (-|0\rangle_2 + |1\rangle_2), \end{aligned} \quad (4.9)$$

- PASSO 2: Aplique um pulso óptico (com frequência ω_{1i} e fase $\phi_2 = \pi/2$) em ambos os átomos com $\Omega_{1i}t_2 = \pi/4$. Tal etapa realiza a transformação $|1\rangle_j \rightarrow |-\rangle_j$.
- PASSO 3: Considere a interação átomo-campo como descrita na seção 4.1 por um tempo $t_3 = \tau = 2\pi/\delta$ e com $\Omega_{1i} = m\delta$ (m inteiro),

$$\begin{aligned} |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_c &\rightarrow |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_c, \\ |0\rangle_1 |-\rangle_2 |0\rangle_c &\rightarrow e^{i\lambda\tau} |0\rangle_1 |-\rangle_2 |0\rangle_c, \\ |-\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_c &\rightarrow e^{i\lambda\tau} |-\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_c, \\ |-\rangle_1 |-\rangle_2 |0\rangle_c &\rightarrow |-\rangle_1 |-\rangle_2 |0\rangle_c, \end{aligned} \quad (4.10)$$

- PASSO 4: Repita a operação do PASSO 2 resultando em $|-\rangle_j \rightarrow |i\rangle_j$,
- PASSO 5: Aplique um pulso óptico (com frequência ω_{1i} e fase $\phi_5 = -\lambda\tau - \pi/2$) nos dois átomos com $\Omega_{1i}t_4 = \pi/2$ resultando em

$$|i\rangle_j \rightarrow -e^{-i\lambda\tau} |1\rangle_j, \quad (4.11)$$

- PASSO 6: Repita a operação do PASSO 1 mas com agora $\phi_6 = \pi/2$.

O estado dos átomos (os *qubits* lógicos) após tal sequência de passos fica (com o campo no estado de vácuo),

$$\begin{aligned} |0\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow |0\rangle_1 |0\rangle_2, \\ |0\rangle_1 |1\rangle_2 &\rightarrow |0\rangle_1 |1\rangle_2, \\ |1\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow |1\rangle_1 e^{-i\Theta(g)} (\cos\Theta(g) |0\rangle_2 - i\sin\Theta(g) |1\rangle_2), \\ |1\rangle_1 |1\rangle_2 &\rightarrow |1\rangle_1 e^{-i\Theta(g)} (\cos\Theta(g) |1\rangle_2 - i\sin\Theta(g) |0\rangle_2), \end{aligned} \quad (4.12)$$

com

$$\Theta(g) = \lambda\tau = \frac{g^2\pi}{4\delta^2}, \quad (4.13)$$

o que implica que se, e somente se, o *qubit* de controle está no estado $|1\rangle$ uma transformação unitária (que pode ser adequadamente escolhida ajustando a intensidade do acoplamento átomo-campo) é realizada no *qubit* alvo e não acontece nada de outra forma. Além disso, tal operação é implementada em um tempo operacional constante dado por

$$t_{tot} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = \frac{\pi}{2\Omega_{01}} + \frac{\pi}{\Omega_{1i}} + \frac{2\pi}{\delta} \quad (4.14)$$

que depende apenas de parâmetros experimentais fixos (isto é, não dinâmicos)

Em nossa opinião, o candidato experimental mais promissor para implementar a proposta aqui apresentada é a combinação de cavidades Fabry-Perot baseadas em fibras ópticas (FFP) [13] com a tecnologia de *atom chip* [77]. Através de um controle do posicionamento dos átomos é possível ajustar deterministicamente o acoplamento átomo-campo g .

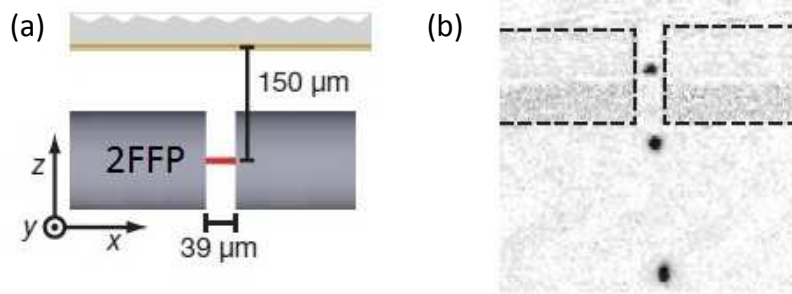


Figura 4.2: (a) Duas cavidades *FFP* montadas sobre um *atom chip* com uma distância de 150 μm entre o eixo óptico (em vermelho) e a superfície do *chip*; (b) Superposição de três imagens de um CCD do tempo de voo de um condensado de Bose-Einstein deterministicamente guiado [5].

Escolhendo como parâmetros experimentais $\Omega_{01} = 10\delta$, $\Omega_{1i} = 100\delta$ e $\delta \cong 1\text{GHz}$ podemos obter um tempo de operação total de $t_{tot} = 3.3\text{ns}$ (sem considerar atrasos entre os passos) para qualquer rotação R , que é consideravelmente menor comparado com propostas anteriores [100, 101].

Em particular para $\Theta = \pi/4$, fixando os átomos no PASSO 3 de forma a obter $g = \delta$ e no PASSO 5 uma fase de campo $\phi_5 = -3\pi/4$ temos (eliminando fases globais)

$$\begin{aligned} |0\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow |0\rangle_1 |0\rangle_2, \\ |0\rangle_1 |1\rangle_2 &\rightarrow |0\rangle_1 |1\rangle_2, \\ |1\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow |1\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2 - i|1\rangle_2), \\ |1\rangle_1 |1\rangle_2 &\rightarrow |1\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2 + i|1\rangle_2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ainda mais para $\Theta = \pi/2$, $g = \sqrt{2}\delta$ e $\phi_5 = \pi$ temos

$$\begin{aligned} |0\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow |0\rangle_1 |0\rangle_2, \\ |0\rangle_1 |1\rangle_2 &\rightarrow |0\rangle_1 |1\rangle_2, \\ |1\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow |1\rangle_1 |1\rangle_2, \\ |1\rangle_1 |1\rangle_2 &\rightarrow |1\rangle_1 |0\rangle_2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

que equivale a uma C-NOT.

4.3 Erros operacionais e canais de dissipação

No tocante à *CQED*, os parâmetros experimentais relevantes do sistema são o acoplamento átomo-campo g e as taxas de decaimento do campo γ e de emissão espontânea do nível atômico excitado κ .

Visando maximizar a intensidade de g e entrar no regime de forte acoplamento $g^2/2\kappa\gamma \gg 1$, uma alternativa é construir cavidades com o menor volume de modo V possível (lembrando que $g \propto V^{-1/2}$ [36]). Para cavidades Fabry-Perot, diminuir seu volume corresponde a reduzir o espaçamento entre seus espelhos. Entretanto, tal modificação aumenta a taxa de decaimento do campo sendo que, tipicamente, ficamos com $\gamma > \kappa$ [13]. Por este motivo, vamos considerar apenas os efeitos de dissipação devido ao decaimento do campo da cavidade. Embora seja importante notar que apenas a emissão espontânea do estado intermediário $|i\rangle$ seria relevante se fossemos levar em consideração tal canal dissipativo.

Em nosso protocolo de implementação apenas na etapa 3 os modos de campo são populados. Assim sendo, incluindo os efeitos da dissipação adotando uma abordagem via *quantum jump*, a eq.(4.5) pode ser substituída por

$$H'_{ef} = \frac{\hbar g}{2\sqrt{2}} \left(\hat{c} e^{-i\delta t} + \hat{c}^\dagger e^{i\delta t} \right) (\tilde{\sigma}_{z1} - \tilde{\sigma}_{z2}) - i \frac{3\hbar\gamma}{2} \hat{c}^\dagger \hat{c}, \quad (4.17)$$

na qual γ é a taxa de decaimento para ambas as cavidades e já negligenciamos os modos normais que oscilam rapidamente ($\hat{c}_+$ e $\hat{c}_-$). Considerando que $\gamma < |\delta|$ (para se certificar de que nenhum *jump* ocorra durante o procedimento), o operador evolução temporal para o Hamiltoniano (4.17) pode ser escrito como

$$U' = e^{-iA(t)(\tilde{\sigma}_{z1}-\tilde{\sigma}_{z2})^2} e^{-iB(t)\hat{c}(\tilde{\sigma}_{z1}-\tilde{\sigma}_{z2})} e^{-iC(t)\hat{c}^\dagger(\tilde{\sigma}_{z1}-\tilde{\sigma}_{z2})} e^{-\frac{3\gamma t}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}}, \quad (4.18)$$

com agora,

$$\begin{aligned} A(t) &= -i\frac{g^2}{4} \frac{1}{(3\gamma + 2i\delta)} \left[t - \left(\frac{2e^{(3\gamma+2i\delta)t/2} - 2}{3\gamma + 2i\delta} \right) \right], \\ B(t) &= g \frac{e^{3\gamma t/2} - e^{-i\delta t}}{\sqrt{2}(2i\delta + 3\gamma)}, \\ C(t) &= g \frac{-e^{-3\gamma t/2} + e^{i\delta t}}{\sqrt{2}(2i\delta + 3\gamma)}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Assumindo que as cavidades e a fibra estão inicialmente no estado de vácuo (de fato, tal consideração é essencial nestas circunstâncias e a operação já não é insensível ao estado inicial de campo), a evolução do sistema devido à etapa 3 é,

$$\begin{aligned} |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_c &\rightarrow |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_c, \\ |0\rangle_1 |-\rangle_2 |0\rangle_c &\rightarrow e^{iP_\gamma} e^{-D_\gamma} |0\rangle_1 |-\rangle_2 |-iC(\tau)\rangle_c, \\ |-\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_c &\rightarrow e^{iP_\gamma} e^{-D_\gamma} |-\rangle_1 |0\rangle_2 |iC(\tau)\rangle_c, \\ |-\rangle_1 |-\rangle_2 |0\rangle_c &\rightarrow |-\rangle_1 |-\rangle_2 |0\rangle_c, \end{aligned} \quad (4.20)$$

com a fase geométrica resultante dada por

$$P_\gamma = \text{Im} \left[-iA(\tau) - B(\tau)C(\tau) + \frac{|C(\tau)|^2}{2} \right]. \quad (4.21)$$

Além disso, diferente do caso ideal, temos o fator de amortecimento correspondente dado por

$$D_\gamma = -\text{Re} \left[-iA(\tau) - B(\tau)C(\tau) + \frac{|C(\tau)|^2}{2} \right]. \quad (4.22)$$

Obviamente, sem a perda pela cavidade ($\gamma = 0$), retomamos o caso ideal em que $P_0 = \lambda\tau$, $D_0 = 0$ e $|\alpha| = |C(\tau)| = 0$. Por outro lado, pode-se ver que não temos mais um caminho fechado no espaço de fase na presença da dissipação. Nesse caso, uma pequena taxa de decaimento acarreta um efeito de aquecimento nas cavidades [102] e um estado de campo coerente residual emaranhado com os estados atômicos pode ser observado após a etapa 3. No entanto, para $g = \delta$ e $\gamma = 0.05\delta$ (de acordo com valores experimentais atuais [13]), temos $|\alpha| = 0.05$ o que corresponde aproximadamente a um estado de vácuo, isto é, um caminho fechado no espaço de fase.

Além da questão dissipativa na etapa 3, outra importante fonte de imperfeições é o PASSO 5. Nesta fase é preciso definir a fase do campo exatamente para implementar a porta R-controlada. Agora vamos analisar como uma fase de campo incompatível com o esperado no PASSO 5 afeta a fidelidade da porta quântica.

Suponha que o pulso óptico aplicado no PASSO 5 possua uma pequena variação na fase de tal forma que

$$|i\rangle_j \rightarrow -e^{-i(\Theta-\zeta)} |1\rangle_j, \quad (4.23)$$

a fidelidade da implementação da porta lógica, considerando também os efeitos de dissipação, é (cálculos no apêndice D)

$$F_0 = \frac{1}{2 + 2e^{-2D_\gamma}} \left[1 + e^{-2D_\gamma - |C(\tau)|^2} + 2e^{-D_\gamma - |C(\tau)|^2/2} \cos(P_\gamma - \Theta + \zeta) \right], \quad (4.24)$$

$$F_1 = \frac{1}{2 + 2e^{-2D_\gamma}} \left[1 + e^{-2D_\gamma - |C(\tau)|^2} + 2e^{-D_\gamma - |C(\tau)|^2/2} \cos(P_\gamma - \Theta - \zeta) \right], \quad (4.25)$$

em que o subscrito refere-se ao *qubit* de controle, e a probabilidade de sucesso (ou seja, probabilidade de *no-jump* [37]) em ambas as situações é

$$\mathcal{P}_{suc} = \frac{1 + e^{-2D_\gamma}}{2}. \quad (4.26)$$

Vamos novamente considerar a realização de uma porta lógica R-controlada de dois *qubits* com $\Theta = \pi/4$ (isto é, $g = \delta$ e $\phi_5 = -3\pi/4$).

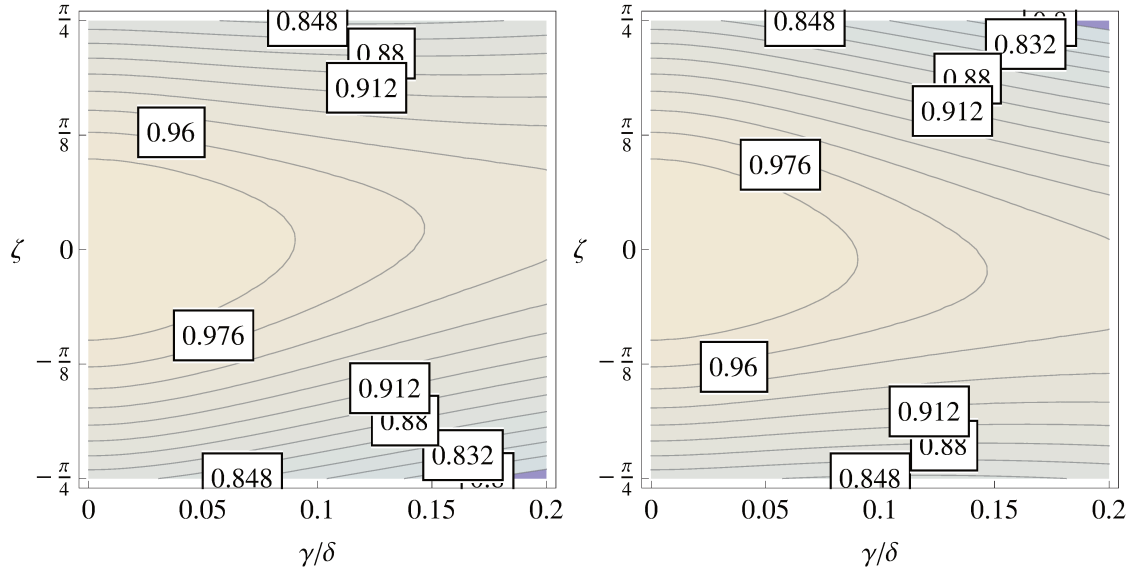


Figura 4.3: Fidelidade da porta lógica R-controlada de dois *qubits* para $\Theta = \pi/4$ ($g = \delta$ e $\phi_5 = -3\pi/4$). Na esquerda para os estados iniciais $\{|00\rangle, |01\rangle\}$ (F_0) e na direita para $\{|10\rangle, |11\rangle\}$ (F_1).

Pela figura (4.3) podemos observar que nossa proposta funciona muito bem mesmo na presença de uma pequena taxa de dissipação nas cavidades (atualmente possível em experimentos) e um erro na fase de campo no PASSO 5. Deterministicamente controlando a intensidade da constante de acoplamento átomo-campo, podemos ajustar o valor de Θ (e fixando corretamente o valor de ϕ_5) e implementar uma porta lógica R-controlada arbitrária com um tempo de realização fixo e alta fidelidade e probabilidade de sucesso.

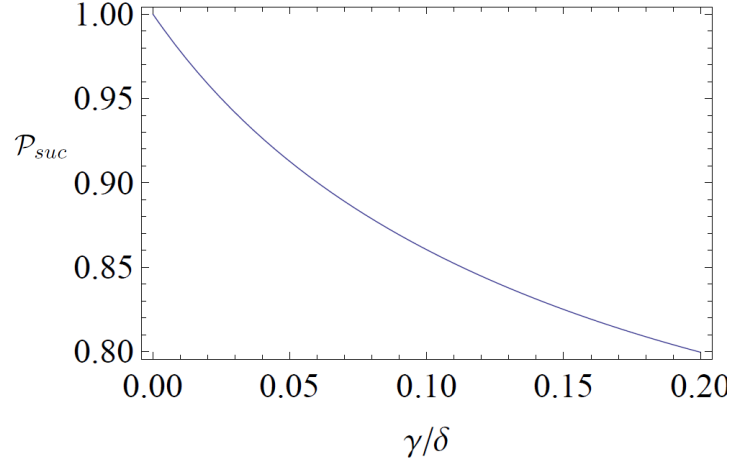


Figura 4.4: Probabilidade de sucesso $\mathcal{P}_{suc}$ da porta lógica R-controlada de dois *qubits* para $\Theta = \pi/4$.

De fato, há outras fontes de imperfeições na implementação da porta tais como: (i) erro na duração do pulso, (ii) atraso entre os passos (que é um problema se formos considerar os efeitos de dissipação), (iii) a interação simultânea no PASSO 3 (apenas) e (iv) a emissão espontânea dos estados atômicos excitados. No entanto, acreditamos que as fontes de imperfeições analisadas neste trabalho são as mais significativas.

5 Discussão, Conclusão e Perspectiva Futura

Encerramos agora esta tese com uma breve revisão do que foi feito e as principais conclusões dos resultados obtidos. Essencialmente, o tópico central desta tese foi a investigação do processamento distribuído de informação quântica no sistema de cavidades acopladas. Dois protocolos foram propostos no tocante à comunicação quântica entre átomos remotos e a implementação da porta lógica R-controlada os quais concluiremos separadamente a seguir.

Salientamos ainda algumas perspectivas futuras bem como eventuais desdobramentos dos trabalhos aqui apresentados.

Comunicação Quântica entre átomos remotos [94] A dinâmica do sistema é governada por quatro parâmetros fundamentais ω_c , g , δ e A . Dois regimes são essenciais para o modelo, $\omega_c \gg A$ e $A \gg g$. Quando $\delta = -\beta_q$, os átomos interagem ressonantemente com o modo normal $\hat{b}_q$ e a interação dos átomos com os modos normais não ressonantes pode ser negligenciada reduzindo o sistema para o modelo de Jaynes-Cummings.

O procedimento de transferência de estado descrito aqui pode ser realizado em um sistema de átomos interagindo com uma única cavidade. Entretanto, o sistema de cavidades acopladas oferece algumas vantagens. Cavidades distintas podem ser mais facilmente isoladas uma da outra evitando *cross-talk*. Além disso, a separação (distinção) permite um acesso individual a cada cavidade sendo possível controlar, manipular e medir cada sistema átomo-campo separadamente.

Em resumo, obtivemos uma transferência de estado perfeita para qualquer N e q no caso ideal. Além disso, é importante salientar a flexibilidade do modelo, ou seja, para quaisquer cavidades i e j (com $S(i, q)$ e $S(j, q)$ diferente de zero) é possível realizar uma comunicação quântica entre átomos distantes.

Também é importante em nosso protocolo que, depois de terminar a comunicação, o *CCA* volta ao estado de vácuo e outro estado pode ser transmitido sem qualquer preparação inicial.

Para um número ímpar N de cavidades acopladas, com $\delta = 0$ (simplificação experimental), selecionamos o modo normal $q = (N + 1)/2$ para interagir ressonantemente com o átomo de dois níveis. Em tal cenário, estudamos duas fontes de imperfeições: os efeitos de dissipação de decaimento espontâneo e perdas das cavidades, e erros na execução do procedimento. Obtivemos que, nessas condições, a fidelidade média ainda é capaz de atingir valores que são aproximadamente igual à unidade para valores de N consideráveis. Além disso, mesmo sob imperfeições durante o processo, os resultados mostraram uma alta fidelidade mesmo para sutis variações do tempo de

interação e atraso entre as etapas.

Ainda vale a pena notar que para N ímpar e o modo normal $q = (N + 1)/2$, as cavidades pares (com j par) já não são acessíveis e podem ser substituídas por fibras ópticas (que é mais barata e pode ser usada para aumentar a distância da comunicação).

Comparando com trabalhos anteriores [24, 103], nosso esquema tem duas diferenças principais: (i) consideramos uma cadeia linear de N cavidades acopladas (que é muito mais fácil de implementar e mais acessível para os átomos de uma cadeia circular [103]) no regime $A \gg N^{3/2}g$; (ii) assumimos um protocolo com uma interação sucessiva que torna o processo mais flexível e minimiza a propagação de erros durante o processo de execução. Além disso, pode-se aplicar uma medida no átomo s (após primeira etapa) que aumenta a fidelidade frente a erros no procedimento, embora, neste caso, o protocolo torna-se probabilístico.

O efeito da paridade apresentado aqui (devido à geometria linear da cadeia) deve ser observado experimentalmente e é uma boa evidência para a validade do modelo.

Como abordamos na seção (2.2), já existem atualmente candidatos promissores para a implementação dos protocolos de processamento de informação quântica no sistema de N cavidades acopladas com átomos aqui apresentado.

Um desses candidatos consiste de nanocavidades de alto Q em cristais fotônicos $2D$ dopados com impurezas (*quantum dots*) [104, 105]. Outro importante candidato, que pode ser produzido em cadeia e com um alto fator de qualidade Q , são microestruturas de silício com formato de disco [59] ou toroidal [2]. Um acoplamento eficiente entre essas microcavidades é possível via uma fibra óptica cônica (*fiber taper*) colocada próxima às estruturas, desta forma as ondas evanescentes das cavidades e da fibra se sobrepõem e fótons podem tunelar entre ambas.

Com átomos de Cs, colocados agora na superfície de um microdisco, obtêm-se como parâmetros $(g, \gamma, \kappa) / 2\pi = (2.4, 0.05, 0.003) \text{ GHz}$ [59], ou seja, um regime de forte acoplamento.

Então, durante a fabricação, fixando a distância entre as microestruturas de forma que $A \approx 100 \text{ GHz}$ temos $\omega_c \gg A \gg \sqrt{N}g$ para um N até em torno de 50 e o modelo aqui apresentado pode ser teoricamente realizável no estado tecnológico atual.

Implementação da porta R-controlada [97] Em resumo, propusemos um protocolo multi-passos para a implementação de uma porta R-controlada entre dois átomos em cavidades separadas mas conectadas por uma fibra óptica. O sistema *CCA* atua como um *bus* e o protocolo pode ser implementado entre *qubits* distantes [106].

Em contraste com propostas anteriores [100, 101], nosso esquema é implementado em um tempo operacional constante e, com um acoplamento *qubit-bus* ajustável, pode-se especificar uma rotação particular R sobre o *qubit* alvo.

Duas questões importantes mereceram uma atenção maior em nosso trabalho: (i) a influência

da dissipação na perda de fótons pelas cavidades no PASSO 3 e (ii) uma análise de erros durante a execução do protocolo no PASSO 5. Mesmo com tais imperfeições, verificamos que ainda podemos implementar uma porta lógica quântica R-controlada de dois *qubits* com uma alta fidelidade e probabilidade de sucesso.

Na verdade, nós apenas focamos nossa análise no caso de $\gamma \ll \delta$ que, como já mencionado, é viável nas atuais técnicas experimentais. Para maiores taxas de decaimento, o grau de não-hermiticidade aumenta e um tratamento mais rigoroso é necessário [107, 108].

Com um acoplamento coletivo, no qual um conjunto de M átomos se acoplam ao modo da cavidade com o mesmo g^1 , a intensidade do acoplamento átomo-campo aumenta por um fator de $\sqrt{M}$ [92], que permite levar a constante g até dezenas de GHz e melhorar ainda mais o fator de cooperatividade.

Outra consideração importante é a condição $\nu \gg g$. Em tal caso, foi possível desprezar os modos normais $\hat{c}_{\pm}$ na eq (4.4). De fato acreditamos que, com os avanços tecnológicos, a capacidade de atingir tal regime pode ser facilmente alcançada.

Mesmo sem um acoplamento g ajustável, ainda podemos implementar uma porta R-controlada variando o tempo de interação no PASSO 3 ($t_3 = \tau_n = 2\pi n/\delta$), mas, assim posto, o conjunto de rotações disponíveis é apenas um conjunto discreto em função de n .

Perspectivas Futuras Uma importante tarefa que também se mostra indispensável para uma computação quântica escalável é a geração e distribuição de correlações quânticas (que, de fato, já foi um tema abordado por nós em 2007 [12]).

O emaranhamento quântico, uma espécie de correlação quântica ligada à inseparabilidade do estado quântico, tem desempenhado um papel fundamental no processamento de informação quântica [109, 110, 111] e já foi largamente estudado sob diferentes aspectos da não-localidade (desigualdade de Bell, teletransporte, etc) [96, 112, 113]. No entanto existem outras formas de correlações quânticas além do emaranhamento [114, 115] que também parecem desempenhar um papel na explicação do poder da computação quântica [116, 117, 118, 119]. Na tentativa de quantificar todas as correlações quânticas, Ollivier e Zurek [120] definiram o que eles chamaram discórdia quântica. Outras medidas de correlações quânticas têm surgido recentemente [114, 115, 121] e comparadas com a discórdia em diversas situações [122, 123].

Gerar e distribuir tais correlações quânticas em sistemas multipartites (por exemplo, átomos em cavidades acopladas) é então de extrema importância bem como manter tais correlações praticamente intactas, minimizando os danos causados pelo acoplamento inerentes com o meio externo.

¹Isto é possível considerando átomos próximos o suficiente para sentirem o campo uniformemente mas também longe o bastante para não haver um acoplamento dipolo-dipolo efetivo.

Recentemente tem sido dada uma grande atenção (tanto teoricamente bem como experimentalmente) a sistemas quânticos opto-mecânicos [124, 125].

A interação entre a radiação (opto) e um espelho móvel (mecânico) tem sido um importante tópico no desenvolvimento de interferômetros ópticos de alta precisão nos quais a pressão de radiação não pode ser ignorada [126, 127]. O requisito para tal aproximação é, obviamente, que o grau de liberdade mecânico esteja o mais próximo possível do regime quântico [128].

Duas geometrias têm recebido destaque para a coexistência de modos mecânicos e ópticos: micro alavancas (que acabam desempenhando o papel de um dos espelhos em uma *fabry-perot*) e microcavidades toroidais (como na figura(5.1)).

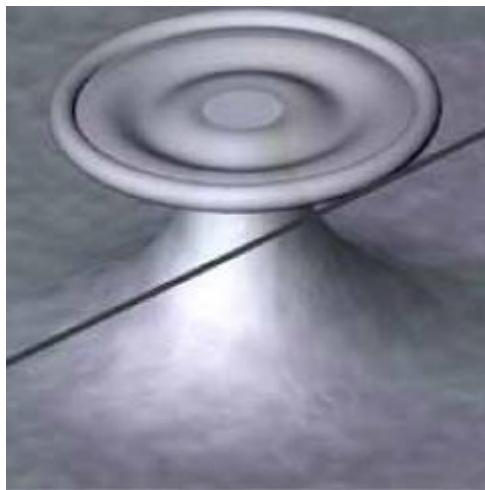


Figura 5.1: Ressonador óptico toroidal exibindo um modo mecânico devido à pressão de radiação [6]

O tema é interessante não apenas por representar um sistema fundamental em óptica quântica [129] mas também devido a propósitos práticos. Existem propostas experimentais apontando para a utilização de tal sistema para gerar de estados não-clássicos (como luz comprimida [130]), realizar medição quântica não-demolidora [131] bem como induzir correlações quânticas entre os subsistemas [132, 133].

De fato, tais estruturas mecânicas possuem dimensões relativamente macroscópicas. Embora a mecânica quântica tenha comprovado ser altamente bem sucedida em explicar a física em escalas microscópicas e subatômicas, sua validade em uma escala macroscópica ou até mesoscópica ainda está em debate. Fenômenos quânticos como superposição ou emaranhamento geralmente não emergem no mundo macroscópico. Tal fato é frequentemente atribuída a decoerência induzida pelo ambiente que reduz as superposições quânticas a misturas estatísticas clássicas [134].

Ainda mais, considerar o sistema de cavidades acopladas (*CCA*) com um modo vibracional extra (seja com espelhos móveis ou membranas integradas) seria uma extensão promissora para

o processamento de informação quântica distribuída em uma escala mesoscópica seja para transmitir o estado quântico de um espelho ao outro bem como utilizar tais osciladores micro ou nano mecânicos para implementar portas lógicas. Bem recentemente Joshi et.al. [7] investigaram teoricamente a possibilidade de gerar estados não-clássicos entre os modos mecânicos e ópticos de cavidades distantes conectadas por uma fibra óptica.

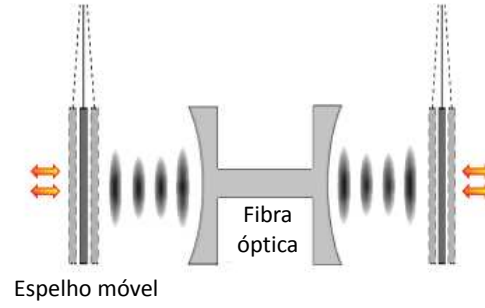


Figura 5.2: Ilustração do esquema proposto em [7] para emaranhar modos opto-mecânicos distantes.

Em particular, tais modos teoricamente evoluem para um estado emaranhamento estacionário a uma temperatura finita abrindo a possibilidade da investigação de estados de gato massivos espacialmente separados.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Badolato, K. Hennessy, M. Atatüre, J. Dreiser, E. Hu, P. M. Petroff, and A. Imamoglu, “Deterministic coupling of single quantum dots to single nanocavity modes,” *Science*, vol. 308, no. 5725, pp. 1158 – 1161, 2005.
- [2] S. M. Spillane, T. J. Kippenberg, K. J. Vahala, K. W. Goh, E. Wilcut, and H. J. Kimble, “Ultrahigh- q toroidal microresonators for cavity quantum electrodynamics,” *Phys. Rev. A*, vol. 71, p. 013817, Jan 2005.
- [3] T. Steinmetz, Y. Colombe, D. Hunger, T. W. Hänsch, A. Balocchi, R. J. Warburton, and J. Reichel, “Stable fiber-based fabry-pérot cavity,” *Applied Physics Letters*, vol. 89, no. 11, p. 111110, 2006.
- [4] M. Bayindir, B. Temelkuran, and E. Ozbay, “Tight-binding description of the coupled defect modes in three-dimensional photonic crystals,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 2140–2143, Mar 2000.
- [5] Y. Colombe, T. Steinmetz, G. Dubois, F. Linke, D. Hunger, and J. Reichel, “Strong atom-field coupling for bose-einstein condensates in an optical cavity on a chip,” *Nature*, vol. 450, p. 272, 2007.
- [6] H. Rokhsari, T. Kippenberg, T. Carmon, and K. Vahala, “Radiation-pressure-driven micro-mechanical oscillator,” *Opt. Express*, vol. 13, pp. 5293–5301, Jul 2005.
- [7] C. Joshi, J. Larson, M. Jonson, E. Andersson, and P. Öhberg, “Entanglement of distant optomechanical systems,” *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 033805, Mar 2012.
- [8] K. J. Vahala, “Optical microcavities,” *Nature*, vol. 424, pp. 839 – 846, 2003.
- [9] M. Hartmann, F. Brandão, and M. Plenio, “Quantum many-body phenomena in coupled cavity arrays,” *Laser & Photonics Review*, vol. 2, no. 6, pp. 527 – 556, 2008.
- [10] A. Yariv, Y. Xu, R. K. Lee, and A. Scherer, “Coupled-resonator optical waveguide: a proposal and analysis,” *Opt. Lett.*, vol. 24, no. 11, pp. 711 – 713, 1999.
- [11] D. G. Angelakis, M. F. Santos, and S. Bose, “Photon-blockade-induced mott transitions and xy spin models in coupled cavity arrays,” *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 031805, Sep 2007.

- [12] B. F. C. Yabu-uti, F. K. Nohama, and J. A. Roversi, “Generation of an epr pair of atoms in coupled cavities system via an optical fiber,” *International Journal of Quantum Information*, vol. 6, no. 5, pp. 1021 – 1031, 2008.
- [13] D. Hunger, T. Steinmetz, Y. Colombe, C. Deutsch, T. W. Hänsch, and J. Reichel, “A fiber fabry-perot cavity with high finesse,” *New Journal of Physics*, vol. 12, no. 6, p. 065038, 2010.
- [14] S. Bose, “Quantum communication through an unmodulated spin chain,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 207901, Nov 2003.
- [15] A. Kay, “Perfect state transfer: Beyond nearest-neighbor couplings,” *Phys. Rev. A*, vol. 73, p. 032306, Mar 2006.
- [16] M. Christandl, N. Datta, T. C. Dorlas, A. Ekert, A. Kay, and A. J. Landahl, “Perfect transfer of arbitrary states in quantum spin networks,” *Phys. Rev. A*, vol. 71, p. 032312, Mar 2005.
- [17] E. K. Irish, C. D. Ogden, and M. S. Kim, “Polaritonic characteristics of insulator and superfluid states in a coupled-cavity array,” *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 033801, Mar 2008.
- [18] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, “Boson localization and the superfluid-insulator transition,” *Phys. Rev. B*, vol. 40, pp. 546–570, Jul 1989.
- [19] K. Zhang and Z.-Y. Li, “Transfer behavior of quantum states between atoms in photonic crystal coupled cavities,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 033843, Mar 2010.
- [20] S. Bose, D. G. Angelakis, and B. D., “Transfer of a polaritonic qubit through a coupled cavity array,” *Journal of Modern Optics*, vol. 54, pp. 2307 – 2314, 2007.
- [21] D. G. Angelakis and A. Kay, “Weaving light-matter qubits into a one way quantum computer,” *New Journal of Physics*, vol. 10, no. 2, p. 023012, 2008.
- [22] A. Serafini, S. Mancini, and S. Bose, “Distributed quantum computation via optical fibers,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 010503, Jan 2006.
- [23] C. D. Ogden, E. K. Irish, and M. S. Kim, “Dynamics in a coupled-cavity array,” *Phys. Rev. A*, vol. 78, p. 063805, Dec 2008.
- [24] F. K. Nohama and J. A. Roversi, “Quantum state transfer between atoms located in coupled optical cavities,” *Journal of Modern Optics*, vol. 54, no. 8, pp. 1139 – 1149, 2007.
- [25] T. Sleator and H. Weinfurter, “Realizable universal quantum logic gates,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, pp. 4087–4090, May 1995.

- [26] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, “Coherent operation of a tunable quantum phase gate in cavity qed,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 5166–5169, Dec 1999.
- [27] T. Pellizzari, S. A. Gardiner, J. I. Cirac, and P. Zoller, “Decoherence, continuous observation, and quantum computing: A cavity qed model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 3788–3791, Nov 1995.
- [28] S.-B. Zheng and G.-C. Guo, “Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity qed,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 2392–2395, Sep 2000.
- [29] S. G. Clark and A. S. Parkins, “Entanglement and entropy engineering of atomic two-qubit states,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 047905, Jan 2003.
- [30] Z.-q. Yin, F.-l. Li, and P. Peng, “Implementation of holonomic quantum computation through engineering and manipulating the environment,” *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 062311, Dec 2007.
- [31] P. Zanardi and M. Rasetti, “Noiseless quantum codes,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, pp. 3306–3309, Oct 1997.
- [32] J. Pachos, P. Zanardi, and M. Rasetti, “Non-abelian berry connections for quantum computation,” *Phys. Rev. A*, vol. 61, p. 010305, Dec 1999.
- [33] J. Pachos and H. Walther, “Quantum computation with trapped ions in an optical cavity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 187903, Oct 2002.
- [34] S.-L. Zhu and Z. D. Wang, “Unconventional geometric quantum computation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 187902, Oct 2003.
- [35] D. Leibfried, B. DeMarco, V. Meyer, D. Lucas, M. Barrett, J. Britton, W. M. Itano, B. Jelenković, C. Langer, T. Rosenband, and D. J. Wineland, “Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate,” *Nature*, vol. 422, pp. 412–415, 2003.
- [36] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum optics*. Cambridge Univ. Press, 1^o ed., 1997.
- [37] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum optics*. Springer, 2^o ed., 2008.
- [38] E. Jaynes and F. Cummings, “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, pp. 89 – 109, jan. 1963.

- [39] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge Univ. Press, 2000.
- [40] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1962.
- [41] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. Harcourt Academic Press, 2001.
- [42] J. Johansson, S. Saito, T. Meno, H. Nakano, M. Ueda, K. Semba, and H. Takayanagi, “Vacuum rabi oscillations in a macroscopic superconducting qubit *lc* oscillator system,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 127006, Mar 2006.
- [43] E. K. Irish, “Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 173601, Oct 2007.
- [44] S. Ashhab and F. Nori, “Qubit-oscillator systems in the ultrastrong-coupling regime and their potential for preparing nonclassical states,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 042311, Apr 2010.
- [45] E. Solano, G. S. Agarwal, and H. Walther, “Strong-driving-assisted multipartite entanglement in cavity qed,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 027903, 2003.
- [46] C.-Y. Chen, M. Feng, X.-L. Zhang, and K.-L. Gao, “Strong-driving-assisted unconventional geometric logic gate in cavity qed,” *Phys. Rev. A*, vol. 73, p. 032344, Mar 2006.
- [47] B. W. Shore and P. L. Knight, “The jaynes-cummings model,” *J. Mod. Opt.*, vol. 40, pp. 1195–1238, 1993.
- [48] R. Jozsa, “Fidelity for mixed quantum states,” *Journal of Modern Optics*, vol. 41, no. 12, pp. 2315–2323, 1994.
- [49] A. Uhlmann, “The transition probability in the state space of a $*$ -algebra,” *Rep. Math. Phys.*, vol. 9, pp. 273 – 279, 1976.
- [50] D. Bures, “An extension of kakutani’s theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite w^* -algebras,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 135, pp. 199–212, 1969.
- [51] S. Massar and S. Popescu, “Optimal extraction of information from finite quantum ensembles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, pp. 1259–1263, Feb 1995.
- [52] S. Popescu, “Bell’s inequalities versus teleportation: What is nonlocality?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, pp. 797–799, Feb 1994.

- [53] D. Deutsch, “Quantum computational networks,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 425, no. 1868, pp. 73–90, 1989.
- [54] H. Haus, W. Huang, S. Kawakami, and N. Whitaker, “Coupled-mode theory of optical waveguides,” *Lightwave Technology, Journal of*, vol. 5, pp. 16 – 23, jan 1987.
- [55] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*. Saunders, 1^o ed., 1976.
- [56] J.-Q. Liao, Z. R. Gong, L. Zhou, Y.-x. Liu, C. P. Sun, and F. Nori, “Controlling the transport of single photons by tuning the frequency of either one or two cavities in an array of coupled cavities,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 042304, Apr 2010.
- [57] A. Rai, G. S. Agarwal, and J. H. H. Perk, “Transport and quantum walk of nonclassical light in coupled waveguides,” *Phys. Rev. A*, vol. 78, p. 042304, Oct 2008.
- [58] Y. Bromberg, Y. Lahini, R. Morandotti, and Y. Silberberg, “Quantum and classical correlations in waveguide lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, p. 253904, Jun 2009.
- [59] P. E. Barclay, K. Srinivasan, O. Painter, B. Lev, and H. Mabuchi, “Integration of fiber-coupled high-q $\sin[x]$ microdisks with atom chips,” *Applied Physics Letters*, vol. 89, no. 13, p. 131108, 2006.
- [60] M. Notomi, E. Kuramochi, and T. Tanabe, “Large-scale arrays of ultrahigh-q coupled nanocavities,” *Nature Photonics*, vol. 2, pp. 741 – 747, 2008.
- [61] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, “Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 73, pp. 565 – 582, Aug 2001.
- [62] Y. Akahane, T. Asano, B.-S. Song, and S. Noda, “High-q photonic nanocavity in a two-dimensional photonic crystal,” *Nature*, vol. 425, pp. 944 – 947, 2003.
- [63] T. Aoki, B. Dayan, E. Wilcut, W. P. Bowen, A. S. Parkins, T. J. Kippenberg, K. J. Vahala, and H. J. Kimble, “Observation of strong coupling between one atom and a monolithic microresonator,” *Nature*, vol. 443, pp. 671 – 674, 2006.
- [64] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics,” *Nature*, vol. 431, p. 162, 2004.
- [65] J. Majer, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Koch, B. R. Johnson, J. A. Schreier, L. Frunzio, D. I. Schuster, A. A. Houck, A. Wallraff, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Coupling superconducting qubits via a cavity bus,” *Nature*, vol. 449, p. 443, 2007.

- [66] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation,” *Phys. Rev. A*, vol. 69, p. 062320, Jun 2004.
- [67] C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty, A. S. Parkins, and H. J. Kimble, “The atom-cavity microscope: Single atoms bound in orbit by single photons,” *Science*, vol. 287, no. 5457, pp. 1447–1453, 2000.
- [68] J. McKeever, J. R. Buck, A. D. Boozer, A. Kuzmich, H.-C. Nägerl, D. M. Stamper-Kurn, and H. J. Kimble, “State-insensitive cooling and trapping of single atoms in an optical cavity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 133602, Apr 2003.
- [69] S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J.-M. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland, and B. Visentin, “Ultrahigh finesse fabry-perot superconducting resonator,” *Applied Physics Letters*, vol. 90, no. 16, p. 164101, 2007.
- [70] C. J. Hood, H. J. Kimble, and J. Ye, “Characterization of high-finesse mirrors: Loss, phase shifts, and mode structure in an optical cavity,” *Phys. Rev. A*, vol. 64, p. 033804, Aug 2001.
- [71] J. Vučković, M. Lončar, H. Mabuchi, and A. Scherer, “Design of photonic crystal microcavities for cavity qed,” *Phys. Rev. E*, vol. 65, p. 016608, Dec 2001.
- [72] K. Hennessy, A. Badolato, M. Winger, D. Gerace, M. Atatüre, S. Gulde, S. Fält, E. L. Hu, and A. Imamoglu, “Quantum nature of a strongly coupled single quantum dot- $\frac{1}{2}$ cavity system,” *Nature*, vol. 445, pp. 896 – 899, 2007.
- [73] B. Lev, K. Srinivasan, P. Barclay, O. Painter, and H. Mabuchi, “Feasibility of detecting single atoms using photonic bandgap cavities,” *Nanotechnology*, vol. 15, no. 10, p. S556, 2004.
- [74] J. R. Buck and H. J. Kimble, “Optimal sizes of dielectric microspheres for cavity qed with strong coupling,” *Phys. Rev. A*, vol. 67, p. 033806, Mar 2003.
- [75] D. K. Armani, T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, and K. J. Vahala, “Ultra-high-q toroid microcavity on a chip,” *Nature*, vol. 421, p. 925, 2003.
- [76] J. Reichel, “Microchip traps and bose-einstein condensation,” *Applied Physics B: Lasers and Optics*, vol. 74, pp. 469–487, 2002. 10.1007/s003400200861.
- [77] J. Fortágh and C. Zimmermann, “Magnetic microtraps for ultracold atoms,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 79, pp. 235–289, Feb 2007.

- [78] M. Trupke, E. A. Hinds, S. Eriksson, E. A. Curtis, Z. Moktadir, E. Kukhareuka, and M. Kraft, “Microfabricated high-finesse optical cavity with open access and small volume,” *Applied Physics Letters*, vol. 87, no. 21, p. 211106, 2005.
- [79] A. M. Armani, A. Srinivasan, and K. J. Vahala, “Soft lithographic fabrication of high q polymer microcavity arrays,” *Nano Letters*, vol. 7, no. 6, pp. 1823–1826, 2007.
- [80] S. M. Spillane, T. J. Kippenberg, O. J. Painter, and K. J. Vahala, “Ideality in a fiber-taper-coupled microresonator system for application to cavity quantum electrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 043902, Jul 2003.
- [81] G. Gualdi, I. Marzoli, and P. Tombesi, “Entanglement generation and perfect state transfer in ferromagnetic qubit chains,” *New Journal of Physics*, vol. 11, no. 6, p. 063038, 2009.
- [82] C. A. Bishop, Y.-C. Ou, Z.-M. Wang, and M. S. Byrd, “High-fidelity state transfer over an unmodulated linear xy spin chain,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 042313, Apr 2010.
- [83] S. Bose, “Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview,” *Contemporary Physics*, vol. 48, pp. 13 – 30, 2007.
- [84] G. D. M. Neto, M. A. de Ponte, and M. H. Y. Moussa, “Nonlocal dissipative tunneling for high-fidelity quantum-state transfer between distant parties,” *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 052303, May 2012.
- [85] B. F. C. Yabu-uti and J. A. Roversi, “Transfer of arbitrary quantum states in a coupled cavities system,” *Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada - XXXII ENFMC, Livro de Resumos: Sociedade Brasileira de Física*, vol. 1, p. 259, 2009.
- [86] M. B. Plenio and P. L. Knight, “The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 70, pp. 101–144, Jan 1998.
- [87] A. V. Dodonov, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, “Microscopic models of quantum-jump superoperators,” *Phys. Rev. A*, vol. 72, p. 023816, Aug 2005.
- [88] M. Khudaverdyan, W. Alt, T. Kampschulte, S. Reick, A. Thobe, A. Widera, and D. Meschede, “Quantum jumps and spin dynamics of interacting atoms in a strongly coupled atom-cavity system,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 123006, Sep 2009.
- [89] M. A. de Ponte, S. S. Mizrahi, and M. H. Y. Moussa, “Networks of dissipative quantum harmonic oscillators: A general treatment,” *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 032101, Sep 2007.
- [90] S. J. van Enk, J. I. Cirac, and P. Zoller, “Ideal quantum communication over noisy channels: A quantum optical implementation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, pp. 4293–4296, Jun 1997.

- [91] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, and H. Mabuchi, “Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, pp. 3221–3224, Apr 1997.
- [92] Z.-q. Yin and F.-l. Li, “Multiatom and resonant interaction scheme for quantum state transfer and logical gates between two remote cavities via an optical fiber,” *Phys. Rev. A*, vol. 75, p. 012324, Jan 2007.
- [93] P.-B. Li, Y. Gu, Q.-H. Gong, and G.-C. Guo, “Quantum-information transfer in a coupled resonator waveguide,” *Phys. Rev. A*, vol. 79, p. 042339, Apr 2009.
- [94] B. Yabu-uti and J. Roversi, “High fidelity and flexible quantum state transfer in the atom-coupled cavity hybrid system,” *Quantum Information Processing*, vol. 12, pp. 189–204, 2013.
- [95] E. M. Purcell, “Spontaneous emission probabilities at radio frequencies,” *Phys. Rev.*, vol. 69, p. 681, 1946.
- [96] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, “General teleportation channel, singlet fraction, and quasidistillation,” *Phys. Rev. A*, vol. 60, pp. 1888 – 1898, Sep 1999.
- [97] B. Yabu-uti and J. Roversi, “Implementation of a two-qubit controlled-rotation gate based on unconventional geometric phase with a constant gating time,” *Physics Letters A*, vol. 375, no. 36, pp. 3171 – 3175, 2011.
- [98] T. Pellizzari, “Quantum networking with optical fibres,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, pp. 5242–5245, Dec 1997.
- [99] S.-B. Zheng *Phys. Rev. A*, vol. 66, p. 060303, 2002.
- [100] C.-P. Yang and S. Han *Phys. Rev. A*, vol. 73, p. 032317, 2006.
- [101] C.-P. Yang, “A proposal for implementing an n-qubit controlled-rotation gate with three-level superconducting qubit systems in cavity qed,” *e-print arxiv:quant-ph/1105.1496v1*, 2011.
- [102] C.-Y. Chen and M. Feng, “Suppression of the heating effect in a geometric logic gating in a strong-driving-assisted cavity qed scheme,” *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 012325, Jan 2008.
- [103] M. B. Plenio and F. L. Semiñó, “High efficiency transfer of quantum information and multiparticle entanglement generation in translation-invariant quantum chains,” *New Journal of Physics*, vol. 7, no. 1, p. 73, 2005.
- [104] H. Altug and J. Vučković, “Two-dimensional coupled photonic crystal resonator arrays,” *Applied Physics Letters*, vol. 84, no. 2, pp. 161–163, 2004.

- [105] N. Na, S. Utsunomiya, L. Tian, and Y. Yamamoto, “Strongly correlated polaritons in a two-dimensional array of photonic crystal microcavities,” *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 031803, Mar 2008.
- [106] C.-P. Yang, “A scheme for realizing a distant two-qubit controlled-u gate with nearest qubit-qubit interaction,” *Physics Letters A*, vol. 372, no. 18, pp. 3168 – 3175, 2008.
- [107] X. X. Yi, D. P. Liu, and W. Wang, “Quantum trajectory approach to the geometric phase: open bipartite systems,” *New Journal of Physics*, vol. 7, no. 1, p. 222, 2005.
- [108] A. Matzkin, “Time evolution and non-hermiticity in quantum defect theory,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 39, no. 17, p. 3687, 2006.
- [109] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, “Mixed-state entanglement and quantum error correction,” *Phys. Rev. A*, vol. 54, pp. 3824–3851, Nov 1996.
- [110] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 1895–1899, Mar 1993.
- [111] A. Ekert and R. Jozsa, “Quantum computation and shor’s factoring algorithm,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 68, pp. 733–753, Jul 1996.
- [112] M. B. Plenio and S. Virmani, “An introduction to entanglement measures,” *Quant. Inf. Comp.*, vol. 7, pp. 001–051, jan 2007.
- [113] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, “Quantum entanglement,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 81, pp. 865–942, Jun 2009.
- [114] L. Henderson and V. Vedral, “Classical, quantum and total correlations,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 34, no. 35, p. 6899, 2001.
- [115] S. Luo, “Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum,” *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 022301, Feb 2008.
- [116] E. Knill and R. Laflamme, “Power of one bit of quantum information,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 5672–5675, Dec 1998.
- [117] A. Datta, A. Shaji, and C. M. Caves, “Quantum discord and the power of one qubit,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 050502, Feb 2008.
- [118] A. Datta and G. Vidal, “Role of entanglement and correlations in mixed-state quantum computation,” *Phys. Rev. A*, vol. 75, p. 042310, Apr 2007.

- [119] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida, and A. G. White, “Experimental quantum computing without entanglement,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 200501, Nov 2008.
- [120] H. Ollivier and W. H. Zurek, “Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 017901, Dec 2001.
- [121] S. Wu, U. V. Poulsen, and K. Mølmer, “Correlations in local measurements on a quantum state, and complementarity as an explanation of nonclassicality,” *Phys. Rev. A*, vol. 80, p. 032319, Sep 2009.
- [122] A. Datta and S. Gharibian, “Signatures of nonclassicality in mixed-state quantum computation,” *Phys. Rev. A*, vol. 79, p. 042325, Apr 2009.
- [123] A. Datta, “Quantum discord between relatively accelerated observers,” *Phys. Rev. A*, vol. 80, p. 052304, Nov 2009.
- [124] T. J. Kippenberg and K. J. Vahala, “Cavity optomechanics: Back-action at the mesoscale,” *Science*, vol. 321, no. 5893, pp. 1172–1176, 2008.
- [125] T. J. Kippenberg and K. J. Vahala, “Cavity opto-mechanics,” *Opt. Express*, vol. 15, pp. 17172–17205, Dec 2007.
- [126] C. M. Caves, “Quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations in an interferometer,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, pp. 75–79, Jul 1980.
- [127] R. Loudon, “Quantum limit on the michelson interferometer used for gravitational-wave detection,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 47, pp. 815–818, Sep 1981.
- [128] J. Eisert, M. B. Plenio, S. Bose, and J. Hartley, “Towards quantum entanglement in nano-electromechanical devices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 190402, Nov 2004.
- [129] C. K. Law, “Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A hamiltonian formulation,” *Phys. Rev. A*, vol. 51, pp. 2537–2541, Mar 1995.
- [130] S. Mancini and P. Tombesi, “Quantum noise reduction by radiation pressure,” *Phys. Rev. A*, vol. 49, pp. 4055–4065, May 1994.
- [131] K. Jacobs, P. Tombesi, M. J. Collett, and D. F. Walls, “Quantum-nondemolition measurement of photon number using radiation pressure,” *Phys. Rev. A*, vol. 49, pp. 1961–1966, Mar 1994.
- [132] S. Barzanjeh, D. Vitali, P. Tombesi, and G. J. Milburn, “Entangling optical and microwave cavity modes by means of a nanomechanical resonator,” *Phys. Rev. A*, vol. 84, p. 042342, Oct 2011.

- [133] M. J. Hartmann and M. B. Plenio, “Steady state entanglement in the mechanical vibrations of two dielectric membranes,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 200503, Nov 2008.
- [134] W. H. Zurek, “Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 75, pp. 715–775, May 2003.
- [135] S. Haroche and J. M. Raimond, *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities and Photons*. Oxford University Press, 1^o ed., 2006.
- [136] S.-L. Zhu, Z. D. Wang, and P. Zanardi, “Geometric quantum computation and multiqubit entanglement with superconducting qubits inside a cavity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 100502, Mar 2005.
- [137] P.-B. Li and F.-L. Li, “Deterministic generation of multiparticle entanglement in a coupled cavity-fiber system,” *Opt. Express*, vol. 19, p. 1207, 2011.
- [138] H. Carmichael, *An Open System Approach to Quantum Optics*. Springer-Verlag, 2^o ed., 1991.

A

Teoria Semiclássica da interação átomo-campo

A interação de um átomo com um campo clássico é considerada uma ferramenta muito útil quando se deseja manipular estados atômicos (e gerar superposições) sem a necessidade de um tratamento quantizado do campo. Certamente é muito mais viável experimentalmente produzir campos clássicos além de, obviamente, serem mais robustos frente à dissipação [61].

Pela eq.(1.20), um campo elétrico com apenas um modo de frequência ω_L e polarização na direção z (sem perda da generalidade) pode ser representado por [36]

$$\vec{E} = \frac{E}{2} \hat{z} (e^{-i(\omega_L t + \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)} + e^{i(\omega_L t + \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)}). \quad (\text{A.1})$$

sendo que E e ϕ são respectivamente a amplitude e a fase inicial do campo.

Na abordagem semiclássica, o Hamiltoniano do sistema átomo-campo na aproximação de dipolo fica então [135]

$$H = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z - \frac{E |\wp_{eg}|}{2} (e^{-i(\omega_L t + \phi)} + e^{i(\omega_L t + \phi)}) (\hat{\sigma}_{eg} + \hat{\sigma}_{ge}), \quad (\text{A.2})$$

no qual ω_a é a frequência de transição atômica e adotamos $\vec{r} = 0$ (posição do átomo) lembrando que $\wp_{gg} = \wp_{ee} = 0$.

Assim como foi feito anteriormente na dedução do Hamiltoniano do MJC, para melhor visualizar a RWA, podemos passar o Hamiltoniano para a representação de interação

$$H_I = \hbar\Omega_L (e^{-i(\omega_L t + \phi)} + e^{i(\omega_L t + \phi)}) (e^{i\omega_a t} \hat{\sigma}_{eg} + e^{-i\omega_a t} \hat{\sigma}_{ge}), \quad (\text{A.3})$$

no qual definimos a constante de acoplamento átomo-campo clássico $\Omega_L = -E |\wp_{eg}| / 2\hbar$.

Podemos, agora, aplicar a Aproximação de Ondas Girantes observando que os termos $e^{\pm i(\omega_a + \omega_L)t}$ oscilam muito rapidamente comparados aos termos $e^{\pm i(\omega_a - \omega_L)t}$ (quando próximo da ressonância) e podem ser desprezados. Ficamos, assim, com o seguinte Hamiltoniano no caso ressonante

$$H_I = \hbar\Omega_L (e^{-i\phi} \hat{\sigma}_{eg} + e^{i\phi} \hat{\sigma}_{ge}). \quad (\text{A.4})$$

Neste cenário, a interação átomo-campo clássico corresponde a uma rotação de um sistema

spin-1/2. Para um tempo de interação, ou seja, um pulso $2\Omega_L t = \theta$ e uma fase ϕ qualquer temos

$$\begin{aligned} |e\rangle &\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |e\rangle - ie^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |g\rangle, \\ |g\rangle &\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |g\rangle - ie^{-i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |e\rangle. \end{aligned} \tag{A.5}$$

permitindo preparar de maneira simples um estado atômico arbitrário.

Na literatura o sistema átomo-campo clássico, utilizado para realizar transformações (rotações) dos estados atômicos, é conhecido como “Zona de Ramsey” [61].

B

Transformações Unitárias

Na mecânica quântica obter a evolução temporal de um sistema físico não é, em geral, uma tarefa trivial. Dado o Hamiltoniano que governa a dinâmica do sistema é preciso resolver a equação de Schrödinger para descrever as propriedades físicas desejadas e é nesse ponto que reside o problema (principalmente quando o sistema é não conservativo e o Hamiltoniano apresenta uma dependência temporal). Existem poucos sistemas na mecânica quântica nos quais o Hamiltoniano associado permite uma solução analítica da equação de Schrödinger como, por exemplo, o modelo de Jaynes-Cummings [36, 37, 38].

Uma técnica usualmente empregada para facilitar o tratamento da dinâmica de sistemas quânticos é a realização de uma transformação unitária sobre seu Hamiltoniano e, posteriormente, quando possível e necessário, fazer algumas aproximações dado alguns parâmetros físicos que se fazem pequenos em detrimento a seus parceiros (como eliminar variáveis que oscilam rapidamente ao observar grandes diferenças nas escalas de tempo envolvidas).

Dado um Hamiltoniano $H = H_0 + H_1$ que governa a dinâmica de um sistema físico particular, a equação de Schrödinger associada na notação de Dirac é

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle. \quad (\text{B.1})$$

Assim, buscando uma melhor forma de tratar o sistema, definimos um estado $|\psi'\rangle$ transformado dado por

$$|\psi'\rangle = U^\dagger |\psi\rangle, \quad (\text{B.2})$$

no qual

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}. \quad (\text{B.3})$$

Da eq.(B.2) podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} (U^\dagger |\psi\rangle) = \left(\frac{\partial}{\partial t} U^\dagger \right) |\psi\rangle + U^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \right) = \\ \dot{U}^\dagger \underbrace{U U^\dagger}_I |\psi\rangle + U^\dagger \left(\frac{-i}{\hbar} \right) H \underbrace{U U^\dagger}_I |\psi\rangle &= \dot{U}^\dagger U |\psi'\rangle + U^\dagger \left(\frac{-i}{\hbar} \right) H U |\psi'\rangle = \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{-i}{\hbar} (U^\dagger H U + i\hbar \dot{U}^\dagger U) |\psi'\rangle. \quad (\text{B.5})$$

Isto é, o estado transformado obedece a seguinte equação de Schrödinger

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi'(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H' |\psi'(t)\rangle, \quad (\text{B.6})$$

sendo

$$H' = U^\dagger H U - i\hbar U^\dagger \dot{U}, \quad (\text{B.7})$$

na qual usamos a identidade $\dot{U}^\dagger U = -U^\dagger \dot{U}$.

Em certas situações resolver a eq.(B.6) para o estado transformado é mais fácil do que obter a solução da eq.(B.1). Ou ainda, a partir do Hamiltoniano transformado H' , é possível fazer algumas aproximações que facilitem a dinâmica do sistema.

A conhecida representação de interação é uma transformação unitária que, no MJC, possibilita visualizar os termos contra-girantes que oscilam rapidamente sendo viável a aplicação da aproximação de ondas girantes.

C

Operador evolução temporal do MJC fortemente bombeado no sistema de cavidades acopladas

O operador evolução temporal do sistema governado pelo Hamiltoniano (4.17) (MJC fortemente bombeado no regime de $\nu \gg g$ dissipativo) pode ser supostamente escrito como

$$U' = e^{-iA(t)J_{z-}^2} e^{-iB(t)\hat{c}J_{z-}} e^{-iC(t)\hat{c}^\dagger J_{z-}} e^{-iD(t)\hat{c}^\dagger \hat{c}}, \quad (\text{C.1})$$

no qual definimos $J_{z-} = \tilde{\sigma}_{z1} - \tilde{\sigma}_{z2}$.

A fim de encontrar as funções dependentes do tempo (A , B , C e D) que cumprem ao nosso propósito, podemos utilizar a equação de Schrödinger do operador evolução temporal

$$\frac{dU'}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ef} U' \quad (\text{C.2})$$

e obter, para o lado esquerda da equação anterior,

$$\begin{aligned} \dot{U}' = & -i \left(\dot{A} J_{z-}^2 + \dot{B} \hat{c} J_{z-} \right) U' - i e^{-iA J_{z-}^2} e^{-iB \hat{c} J_{z-}} \left(\dot{C} \hat{c}^\dagger J_{z-} \right) e^{-iC \hat{c}^\dagger J_{z-}} e^{-iD \hat{c}^\dagger \hat{c}} \\ & - i e^{-iA J_{z-}^2} e^{-iB \hat{c} J_{z-}} e^{-iC \hat{c}^\dagger J_{z-}} \left(\dot{D} \hat{c}^\dagger \hat{c} \right) e^{-iD \hat{c}^\dagger \hat{c}}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

A partir das relações de comutações vigentes e sabendo que $[f(X), Y] = f'(X)[X, Y]^1$ podemos escrever

$$e^{-iB \hat{c} J_{z-}} J_{z-} \hat{c}^\dagger = J_{z-} \left(\hat{c}^\dagger - iB J_{z-} \right) e^{-iB \hat{c} J_{z-}} \quad (\text{C.4})$$

e

$$e^{-iC \hat{c}^\dagger J_{z-}} \hat{c}^\dagger \hat{c} = \left(\hat{c}^\dagger \hat{c} + iC \hat{c}^\dagger J_{z-} \right) e^{-iC \hat{c}^\dagger J_{z-}}, \quad (\text{C.5})$$

que resulta em um rearranjo dos operadores da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{U}' = & -i \left(\dot{A} J_{z-}^2 + \dot{B} \hat{c} J_{z-} + \dot{C} \hat{c}^\dagger J_{z-} - iB \dot{C} J_{z-}^2 \right) U' \\ & - i \dot{D} e^{-iA J_{z-}^2} e^{-iB \hat{c} J_{z-}} \left(\hat{c}^\dagger \hat{c} + iC \hat{c}^\dagger J_{z-} \right) e^{-iC \hat{c}^\dagger J_{z-}} e^{-iD \hat{c}^\dagger \hat{c}}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

¹Expressão válida para dois operadores X e Y quaisquer quando $[X, [X, Y]] = [Y, [X, Y]] = 0$.

É necessário realizar uma nova manipulação de modo que

$$e^{-iB\hat{c}J_{z-}}\hat{c}^\dagger\hat{c} = \left(\hat{c}^\dagger\hat{c} - iB\hat{c}J_{z-}\right)e^{-iB\hat{c}J_{z-}}. \quad (\text{C.7})$$

Logo, a equação de Schrödinger do operador evolução fica

$$\begin{aligned} & -i\left(\dot{A}J_{z-}^2 + \dot{B}\hat{c}J_{z-} + \dot{C}\hat{c}^\dagger J_{z-} - iB\dot{C}J_{z-}^2 + \dot{D}\hat{c}^\dagger\hat{c} - i\dot{D}B\hat{c}J_{z-} + i\dot{D}C\hat{c}^\dagger J_{z-} + \dot{D}BCJ_{z-}^2\right)U' \\ & = \frac{-i}{\hbar}H'_{ef}U' = -i\left[\frac{g}{2\sqrt{2}}\left(\hat{c}e^{-i\delta t} + \hat{c}^\dagger e^{i\delta t}\right)J_{z-} - i\frac{3\gamma}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}\right]U'. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Igualando termos de mesma ordem nos operadores obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{A} - iB\dot{C} + \dot{D}BC = 0 \\ \dot{B} - i\dot{D}B = \frac{g}{2\sqrt{2}}e^{-i\delta t} \\ \dot{C} + i\dot{D}C = \frac{g}{2\sqrt{2}}e^{i\delta t} \\ \dot{D} = -i\frac{3\gamma}{2} \end{cases}$$

Diversos métodos podem ser empregados para solucionar tal conjunto de equações (de fato, a solução para $D(t)$ é direta). Entretanto, lançamos mão de recursos computacionais que podem resolver o problema em poucos instantes e facilitar muito a obtenção de resultados científicos atualmente, em particular usamos o *software* denominado *Mathematica*.

Para condições iniciais dadas por $A(0) = B(0) = C(0) = D(0) = 0$ ficamos com

$$A(t) = -i\frac{g^2}{4}\frac{1}{(3\gamma + 2i\delta)}\left[t - \left(\frac{2e^{(3\gamma+2i\delta)t/2} - 2}{3\gamma + 2i\delta}\right)\right], \quad (\text{C.9})$$

$$B(t) = g\frac{e^{3\gamma t/2} - e^{-i\delta t}}{\sqrt{2}(2i\delta + 3\gamma)}, \quad (\text{C.10})$$

$$C(t) = g\frac{-e^{-3\gamma t/2} + e^{i\delta t}}{\sqrt{2}(2i\delta + 3\gamma)}, \quad (\text{C.11})$$

$$D(t) = -i\frac{3\gamma t}{2}, \quad (\text{C.12})$$

nas quais fazendo $\gamma = 0$ retomamos a situação ideal, isto é,

$$A(t) = -\frac{g^2}{8\delta}\left[t - \left(\frac{e^{i\delta t} - 1}{i\delta}\right)\right], \quad (\text{C.13})$$

$$B(t) = C^*(t) = g\frac{1 - e^{-i\delta t}}{2\sqrt{2}i\delta}, \quad (\text{C.14})$$

e $D(t) = 0$.

C.1 Obtenção do Operador Deslocamento, fase geométrica e amplitude de decaimento

É conveniente fazer algumas manipulações no operador evolução temporal considerado na seção anterior a fim de reconhecer um operador deslocamento condicionado, uma fase geométrica e uma amplitude de decaimento (no caso dissipativo) resultante da dinâmica do sistema.

Partindo do operador (C.1) e usando uma versão simplificada da fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff (CBH) dada por $e^X e^Y = e^{X+Y} e^{[X,Y]/2}$ ² obtemos

$$U' = e^{-iA(t)J_{z-}^2} e^{-\frac{B(t)C(t)}{2} J_{z-}^2} e^{-i(B(t)\hat{c}J_{z-} + C(t)\hat{c}^\dagger J_{z-})} e^{-iD(t)\hat{c}^\dagger \hat{c}}. \quad (C.15)$$

Somando e subtraindo $iC^*(t)\hat{c}J_{z-}$ na terceira exponencial da equação anterior temos

$$U' = e^{-iA(t)J_{z-}^2} e^{-\frac{B(t)C(t)}{2} J_{z-}^2} e^{-i(B(t)\hat{c}J_{z-} + C(t)\hat{c}^\dagger J_{z-} + C^*(t)\hat{c}J_{z-} - C^*(t)\hat{c}J_{z-})} e^{-iD(t)\hat{c}^\dagger \hat{c}}. \quad (C.16)$$

Usando novamente a fórmula de CBH, quebramos esta mesma exponencial resultando em

$$\begin{aligned} U' &= e^{-iA(t)J_{z-}^2} e^{-\frac{B(t)C(t)}{2} J_{z-}^2} e^{-i(C(t)\hat{c}^\dagger J_{z-} + C^*(t)\hat{c}J_{z-})} \\ &\times e^{-i(B(t) - C^*(t))\hat{c}J_{z-}} e^{-C(t)(B(t) - C^*(t))J_{z-}^2} e^{-iD(t)\hat{c}^\dagger \hat{c}}. \end{aligned} \quad (C.17)$$

Agrupando sobre a mesma exponencial os termos com J_{z-}^2 chegamos em

$$U' = e^{(i\Phi_\gamma - \Gamma_\gamma)J_{z-}^2} e^{(\alpha\hat{c}^\dagger - \alpha^*\hat{c})J_{z-}} e^{-i(B(t) - C^*(t))\hat{c}J_{z-}} e^{-iD(t)\hat{c}^\dagger \hat{c}}, \quad (C.18)$$

no qual definimos $\alpha = -iC(t)$ e

$$\Phi_\gamma = \text{Im} \left[-iA(t) - B(t)C(t) + \frac{|C(t)|^2}{2} \right], \quad (C.19)$$

$$\Gamma_\gamma = -\text{Re} \left[-iA(t) - B(t)C(t) + \frac{|C(t)|^2}{2} \right]. \quad (C.20)$$

Podemos, desta forma, identificar um operador deslocamento no modo $\hat{c}$ (condicionado ao estado do sistema de dois níveis) e definir uma fase (Φ_γ) e uma amplitude de decaimento (Γ_γ) resultante no estado do sistema após certo tempo t de evolução temporal.

Para melhor visualizar e entender o conceito de fase geométrica, vamos desconsiderar a perda irreversível de fótons pelas paredes das cavidades. Com $\gamma = 0$, pelas eqs.(C.13) e (C.14) temos $\Gamma_0 = 0$ para qualquer t e ainda

$$\Phi_0 = \frac{g^2}{8\delta^2} (\delta t - \text{sen}\delta t). \quad (C.21)$$

²Novamente, tal expressão só é válida quando $[X, [X, Y]] = [Y, [X, Y]] = 0$.

Nesse contexto o operador evolução temporal se resume a [136, 137]

$$U' = e^{i\Phi_0 J_{z-}^2} e^{(\alpha \hat{c}^\dagger - \alpha^* \hat{c}) J_{z-}}. \quad (\text{C.22})$$

Fixando o tempo de interação de tal forma que $t = \tau = 2\pi m/\delta$ (m inteiro), o parâmetro α se anula e o operador pode ser explicitamente expressado como

$$U' = e^{i\lambda \tau J_{z-}^2} \quad (\text{C.23})$$

sendo $\lambda = \frac{g^2 \pi}{4\delta^2}$. Note que este operador não tem nenhuma contribuição dos modos normais do sistema de cavidades acopladas, assim, neste caso, a evolução fica insensível ao estado inicial do campo. Em outras palavras o parâmetro α , em $t = \tau$, completa um caminho fechado em seu espaço de fase. De fato, temos apenas uma fase geométrica (dependente de constantes experimentais que não evoluem no tempo mas podem ser ajustados apropriadamente) controlada pelo estado do sistema atômico, sem a necessidade de operações extras para remover a fase dinâmica [34, 137].

D

Cálculo da fidelidade e probabilidade de sucesso na implementação da porta R-controlada

Frente a dissipação (perda de fóton pelas paredes das cavidades) e erro de fase no PASSO 5, os últimos duas etapas do procedimento acarretam na seguinte transformação

$$\begin{aligned}
 |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_c &\xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{5} |0\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_2 |0\rangle_c + \overbrace{e^{-D_\gamma} e^{i\zeta} e^{i(P_\gamma - \Theta)} |1\rangle_2 |-iC(\tau)\rangle_c}^{|\psi_{00}^5\rangle} \right) \xrightarrow{6} \overbrace{U_6 |\psi_{00}^5\rangle}^{|\psi_{00}^6\rangle}, \\
 |0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_c &\xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{5} -|0\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_2 |0\rangle_c - \overbrace{e^{-D_\gamma} e^{i\zeta} e^{i(P_\gamma - \Theta)} |1\rangle_2 |-iC(\tau)\rangle_c}^{|\psi_{01}^5\rangle} \right) \xrightarrow{6} \overbrace{U_6 |\psi_{01}^5\rangle}^{|\psi_{01}^6\rangle}, \\
 |1\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_c &\xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{5} |1\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overbrace{e^{-D_\gamma} e^{i\zeta} e^{i(P_\gamma - \Theta)} |0\rangle_2 |iC(\tau)\rangle_c + e^{-2i(\Theta - \zeta)} |1\rangle_2 |0\rangle_c}^{|\psi_{10}^5\rangle} \right) \xrightarrow{6} \overbrace{U_6 |\psi_{10}^5\rangle}^{|\psi_{10}^6\rangle}, \\
 |1\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_c &\xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{5} -|1\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overbrace{e^{-D_\gamma} e^{i\zeta} e^{i(P_\gamma - \Theta)} |0\rangle_2 |iC(\tau)\rangle_c - e^{-2i(\Theta - \zeta)} |1\rangle_2 |0\rangle_c}^{|\psi_{11}^5\rangle} \right) \xrightarrow{6} \overbrace{U_6 |\psi_{11}^5\rangle}^{|\psi_{11}^6\rangle},
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

sendo U_6 a transformação unitária descrita na seção 4.2 para o PASSO 6 de nosso protocolo.

O estado final do sistema átomos-cavidades acopladas para os *qubits* de controle igual a 0 é

$$|\psi_{00/01}^6\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \frac{U_6}{\sqrt{2}} \left(\pm |00\rangle |0\rangle_c + e^{-D_\gamma} e^{i\zeta} e^{i(P_\gamma - \Theta)} |01\rangle |\alpha\rangle_c \right), \tag{D.2}$$

no qual $\alpha = -iC(\tau)$ e a normalização (necessária para o formalismo empregado) é dada por

$$\langle \psi_{00/01}^6 | \psi_{00/01}^6 \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{U_6^\dagger U_6}{2} (1 + e^{-2D_\gamma}) = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{2} (1 + e^{-2D_\gamma}) \implies \mathcal{N} = \frac{1}{2} (1 + e^{-2D_\gamma}), \tag{D.3}$$

resultando em

$$|\psi_{00/01}^6\rangle = \frac{U_6}{\sqrt{1 + e^{-2D_\gamma}}} \left(\pm |00\rangle |0\rangle_c + e^{-D_\gamma} e^{i\zeta} e^{i(P_\gamma - \Theta)} |01\rangle |\alpha\rangle_c \right). \tag{D.4}$$

No cenário ideal teríamos o seguinte resultado final

$$\left| \psi_{00/01}^{6(ideal)} \right\rangle = \frac{U_6}{\sqrt{2}} (\pm |00\rangle + |01\rangle) |0\rangle_c. \quad (D.5)$$

Desta forma, a função correlação entre o estado final imperfeito e o idealizado fica

$$\left\langle \psi_{00/01}^{6(ideal)} \left| \psi_{00/01}^6 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + 2e^{-2D_\gamma}}} \left(1 + e^{-D_\gamma} e^{i\zeta} e^{i(P_\gamma - \Theta)} e^{-|\alpha|^2/2} \right), \quad (D.6)$$

no qual usamos a seguinte identidade para os estados coerentes

$$\langle 0 | \alpha \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}. \quad (D.7)$$

A fidelidade (definida no capítulo de conceitos fundamentais) do resultado da implementação da porta lógica R-controlada fica, então,

$$F_0 = \left| \left\langle \psi_{00/01}^{6(ideal)} \left| \psi_{00/01}^6 \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{2 + 2e^{-2D_\gamma}} \left[1 + e^{-2D_\gamma - |C(\tau)|^2} + 2e^{-D_\gamma - |C(\tau)|^2/2} \cos(P_\gamma - \Theta + \zeta) \right]. \quad (D.8)$$

Procedendo de forma análoga, obtemos a fidelidade de *output* da porta lógica para os *qubits* de controle igual a 1 dada por

$$F_1 = \left| \left\langle \psi_{10/11}^{6(ideal)} \left| \psi_{10/11}^6 \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{2 + 2e^{-2D_\gamma}} \left[1 + e^{-2D_\gamma - |C(\tau)|^2} + 2e^{-D_\gamma - |C(\tau)|^2/2} \cos(P_\gamma - \Theta - \zeta) \right], \quad (D.9)$$

sendo que, agora,

$$\left| \psi_{10/11}^6 \right\rangle = \frac{U_6}{\sqrt{1 + e^{-2D_\gamma}}} \left(\pm e^{-D_\gamma} e^{i\zeta} e^{i(P_\gamma - \Theta)} |10\rangle |-\alpha\rangle_c + e^{-2i(\Theta - \zeta)} |11\rangle |0\rangle_c \right), \quad (D.10)$$

e ainda

$$\left| \psi_{10/11}^{6(ideal)} \right\rangle = \frac{U_6}{\sqrt{2}} (\pm |10\rangle + e^{-2i\Theta} |11\rangle) |0\rangle_c. \quad (D.11)$$

Já a probabilidade de sucesso é equivalente a probabilidade de *no-jump* sendo dada pela norma do estado [37]

$$\mathcal{P}_{suc} = \mathcal{N} = \frac{1}{2} (1 + e^{-2D_\gamma}). \quad (D.12)$$

E

Formalismo da Equação Mestra

Existe um grande interesse em sistemas quânticos que possam ser manipulados de forma coerente. Tais sistemas são importantes tanto para estudar os fundamentos da mecânica quântica bem como são úteis para o processamento de informação quântica [39, 111]. Nesse contexto os domínios da óptica quântica aparentam ser um excelente arcabouço.

Entretanto, na realidade, em face ao acoplamento do sistema átomo-campo com o ambiente, a decoerência está presente tanto na perda de fóton pela cavidade como na emissão espontânea do átomo. Em geral, situações similares ocorrem repetidamente em qualquer sistema físico e sempre resulta em um decaimento irreversível do sistema de interesse. De fato, a descrição de um decaimento irreversível em mecânica quântica é feita através do acoplamento do sistema quântico (pequeno) de interesse com um sistema grande usualmente em equilíbrio térmico (conhecido como banho ou reservatório).

Tal processo costuma ser danoso para o sistema, isto é, a evolução coerente do estado do sistema é prejudicada e os fenômenos quânticos desejados como a superposição ou correlações quânticas se perdem no processo.

Neste apêndice o objetivo é apresentar uma teoria que trata da dissipação em um sistema quântico, na aproximação de Born-Markov, para o operador densidade de estados no qual as variáveis do reservatório (ambiente) são eliminadas via traço parcial e obtemos um operador densidade de estados reduzido do sistema sob dissipação [36, 138].

Obviamente, diferentes problemas requerem modelos Hamiltonianos distintos. Aqui iniciaremos com um sistema e reservatório geral e, então, abordaremos dois casos para o sistema em questão: (i) um conjunto de osciladores harmônicos acoplados e (ii) um sistema de dois níveis, que podem corresponder respectivamente a uma cadeia de cavidades quânticas acopladas e um átomo de dois níveis. Em ambos os cenários assumiremos o reservatório no estado térmico.

O Hamiltoniano total do sistema S mais reservatório R é dada por

$$H = H_0 + H_{SR}, \quad (\text{E.1})$$

com $H_0 = H_S + H_R$, no qual H_S e H_R são respectivamente os Hamiltonianos livres do sistema S e do reservatório R e H_{SR} representa a interação entre o sistema e o reservatório.

Seja, então, $\chi(t)$ o operador densidade de estados para o sistema global ($S \oplus R$) e definimos o

operador reduzido $\rho(t)$ como sendo

$$\rho(t) = \text{tr}_R(\chi(t)), \quad (\text{E.2})$$

no qual o traço é realizado sobre as variáveis do reservatório (traço parcial). Lembrando que um vez obtido $\rho(t)$ o problema está resolvido e todas as propriedades do sistema estudado podem ser determinadas.

Um sistema aberto (com dissipação) não evolui unitariamente como ocorre com os sistemas fechados, porém ao tratarmos o sistema global, ou seja, sistema mais o ambiente externo, ou reservatório, este sim terá uma evolução unitária ditada pela equação

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [H, \chi]. \quad (\text{E.3})$$

Em problemas deste tipo é conveniente trabalhar na representação de interação definida pela transformação unitária

$$\chi_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \chi(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}. \quad (\text{E.4})$$

Assim obtemos a seguinte equação de movimento na representação de interação

$$\frac{\partial \chi_I}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [V_{SR}(t), \chi_I], \quad (\text{E.5})$$

no qual $V_{SR}(t)$ é o termo H_{SR} na representação de interação, isto é

$$V_{SR}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} H_{SR} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}. \quad (\text{E.6})$$

Integrando no tempo a eq.(E.5)

$$\chi_I(t) = \chi_I(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' [V_{SR}(t'), \chi_I(t')], \quad (\text{E.7})$$

e substituindo a eq.(E.7) no comutador da eq.(E.5) temos

$$\frac{\partial \chi_I}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [V_{SR}(t), \chi_I(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [V_{SR}(t), [V_{SR}(t'), \chi_I(t')]]. \quad (\text{E.8})$$

Vamos agora fazer algumas suposições sobre o reservatório. Seja $R = \text{Tr}_S(\chi)$ o operador densidade de estados reduzido do reservatório, iremos considerar que o reservatório tenha um número imenso de graus de liberdade de forma que praticamente não tenha sua dinâmica alterada durante a interação ($R(t) = R_0$), ou seja, um reservatório definido da maneira usual como fazemos em física estatística.

Considerando, por hipótese, que o valor médio de V_{RS} em R_0 seja nulo, a eq.(E.8) fica da seguinte forma ¹

$$\frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_R [V_{SR}(t), [V_{SR}(t'), \chi_I(t')]]. \quad (\text{E.9})$$

¹Tal hipótese é válida para a escolha que consideraremos, o reservatório em um estado térmico.

Adotamos ainda que o estado inicial $\chi_I(0)$ pode ser escrito simplesmente como o produto tensorial entre os operadores densidades reduzidos

$$\chi_I(0) = \rho_I(0) \otimes R_0. \quad (\text{E.10})$$

Em instantes posteriores surgem correlações entre S e R em virtude do acoplamento do sistema com o reservatório. Assumindo que o acoplamento do sistema com o reservatório seja fraco, o estado $\chi_I(t)$ pode ser escrito como

$$\chi_I(t) = \rho_I(t) \otimes R_0 + \chi_{\text{correl}}(t), \quad (\text{E.11})$$

no qual $\chi_{\text{correl}}(t)$ descreve a correlação que passa a existir entre S e R . De fato o estado global desvia ligeiramente da evolução livre (acoplamento nulo) e o termo $\chi_{\text{correl}}(t)$ pode ser desprezado.

Com esta aproximação (chamada de aproximação de Born [36, 138]) obtemos

$$\frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_R [V_{SR}(t), [V_{SR}(t'), \rho_I(t') R_0]]. \quad (\text{E.12})$$

Um ponto relevante a se notar é que a equação (E.12) não é Markoviana, ou seja, o presente de ρ_I no instante t depende do passado através da integral em t' (tem memória).

No entanto, se formos consistentes com a hipótese de um reservatório que não tem sua dinâmica alterada pelo sistema em questão, o processo não pode ter memória. Isto é, considerando o tempo de correlação de R muito menor que a escala de tempo para mudanças significativas em S , o reservatório não é capaz de preservar por muito tempo as pequenas mudanças induzidas pela interação com sistema S e muito menos transferir qualquer informação passada de volta ao sistema. Fisicamente, entendemos isto reconhecendo a existência de duas escalas de tempo distintas, uma escala de tempo lenta que é a evolução do sistema S e outra muito rápida caracterizando o decaimento de quaisquer correlação temporal entre os operadores do reservatório.

Aplicamos, então, a segunda aproximação na equação mestra, conhecida como aproximação de Markov, que consiste em substituir $\rho_I(t')$ por $\rho_I(t)$. Com isto, por fim, obtemos a equação mestra na aproximação de Born-Markov

$$\frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_R [V_{SR}(t), [V_{SR}(t'), \rho_I(t) R_0]]. \quad (\text{E.13})$$

Recapitulando, as aproximações adotadas foram a aproximação de Born, assumindo que a ligação entre o sistema e o reservatório é pequena o suficiente para negligenciar o acoplamento na eq.(E.11), e a aproximação de Markov, assumindo que o tempo de correlação do reservatório é muito curto comparado com o tempo típico de resposta do sistema de modo que as funções de correlação do reservatório são proporcionais a uma função $\delta(t - t')$, ou seja, as correlações decaem rapidamente se anulando em tempos diferentes.

E.1 Osciladores harmônicos acoplados dissipativos

Vamos agora considerar o caso de um sistema que consiste de um conjunto de osciladores harmônico acoplados dissipativos (o que corresponde a dinâmica de uma cadeia de cavidades acopladas com perdas). A demonstração que daremos a seguir é baseada no trabalho de M. A. de Ponte *et al.* [89] e descreve um tratamento geral para uma rede bosônica dissipativa não homogênea e independente de sua topologia (linear, circular, central, simétrica). No decorrer dessa tese nos restringimos ao caso linear homogêneo.

O sistema composto $S \oplus R$ é representado pelos seguintes Hamiltonianos, na aproximação de ondas girantes

$$H_S = \hbar \sum_{m=1}^N \omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar \sum_{m \neq n}^N A_{mn} (\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m), \quad H_R = \hbar \sum_{m=1}^N \sum_k \omega_{mk} \hat{r}_{mk}^\dagger \hat{r}_{mk}, \quad (\text{E.14})$$

$$H_{SR} = \hbar \sum_{m=1}^N \sum_k V_{mk} (\hat{r}_{mk}^\dagger \hat{a}_m + \hat{a}_m^\dagger \hat{r}_{mk}).$$

sendo $\hat{a}_m (\hat{a}_m^\dagger)$ o operador de aniquilação (criação) associado ao oscilador m de modo ω_m o qual está acoplado ao n -ésimo oscilador com uma intensidade A_{mn} e a seu respectivo reservatório com constante de acoplamento V_{mk} . Os k infinitos modos do reservatório acoplados ao m -ésimo oscilador são descritos pelos operadores de aniquilação (criação) $\hat{r}_{mk} (\hat{r}_{mk}^\dagger)$.

Definimos agora um reservatório térmico $R_0^{(m)}$, em uma temperatura T , acoplado a cada oscilador m independentemente. O estado completo do reservatório R_0 é dado pela distribuição usual, assumindo todos na mesma temperatura

$$R_0 = \otimes_{m=1}^N R_0^{(m)} = \prod_{mk} e^{-\hbar \omega_{mk} \hat{r}_{mk}^\dagger \hat{r}_{mk} / k_B T} \left(1 - e^{-\hbar \omega_{mk} / k_B T} \right), \quad (\text{E.15})$$

sendo k_B a constante de Boltzmann.

Para obter a equação mestra do sistema de osciladores acoplados é conveniente, inicialmente, diagonalizar o Hamiltoniano H_S através da transformação canônica geral

$$\hat{b}_m = \sum_{n=1}^N C_{mn} \hat{a}_n, \quad (\text{E.16})$$

na qual os coeficientes C_{mn} (que dependem da geometria da cadeia) definem os autoestados do Hamiltoniano H_S na nova base de operadores bosônicos² com autovalor Ω_m .

Em função desta nova base, invertendo a transformação (E.16), o Hamiltoniano H_0 pode ser reescrito como

$$H_0 = H_S + H_R = \hbar \sum_{m=1}^N \Omega_m \hat{b}_m^\dagger \hat{b}_m + \hbar \sum_{m=1}^N \sum_k \omega_{mk} \hat{r}_{mk}^\dagger \hat{r}_{mk}, \quad (\text{E.17})$$

²Isto é, $[\hat{b}_m, \hat{b}_{m'}^\dagger] = \delta_{mm'}$ e $[\hat{b}_m, \hat{b}_{m'}] = 0$.

no qual usamos a identidade $\sum_n C_{mn}C_{nm'} = \delta_{mm'}$. Já o termo de acoplamento fica

$$H_{SR} = \hbar \sum_{m,n=1}^N \sum_k C_{nm} V_{mk} (\hat{r}_{mk}^\dagger \hat{b}_n + \hat{b}_n^\dagger \hat{r}_{mk}). \quad (\text{E.18})$$

De posse de um Hamiltoniano H_0 diagonal podemos introduzir facilmente a representação de interação dada por

$$V_{SR}(t) = \hbar \sum_{m,n=1}^N (\hat{O}_{mn}^\dagger(t) \hat{b}_n + \hat{b}_n^\dagger \hat{O}_{mn}(t)), \quad (\text{E.19})$$

no qual

$$\hat{O}_{mn}(t) = C_{nm} \sum_k V_{mk} e^{-i(\omega_{mk} - \Omega_n)t} \hat{r}_{mk}. \quad (\text{E.20})$$

Substituindo a eq.(E.19) na eq.(E.13) (já na aproximação de Born-Markov) o problema se resume a integrais da forma

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \text{Tr}_R(R_0 \hat{O}_{mn}^\dagger(t) \hat{O}_{m'n'}(t')) &= C_{nm} C_{n'm'} \int_0^t dt' \sum_{k,k'} V_{mk} V_{m'k'} \\ &\times \text{Tr}_R(R_0 \hat{r}_{mk}^\dagger \hat{r}_{m'k'}) e^{i[(\omega_{mk} - \Omega_n)t - (\omega_{m'k'} - \Omega_{n'})t']}, \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

lembrando que

$$\text{Tr}_R(R_0 \hat{r}_{mk}^\dagger \hat{r}_{m'k'}) = \text{Tr}_R(R_0 \hat{r}_{mk} \hat{r}_{m'k'}) = 0. \quad (\text{E.22})$$

Assumindo que as frequências do reservatório estão próximas o suficiente para ser uma boa aproximação considerá-las um contínuo de modos, podemos substituir a soma sobre o índice k na função de correlação (E.21) por uma integral sobre uma frequência contínua ν introduzindo, ainda, uma densidade de estados $\sigma_m(\nu)$ tal que $\sigma_m(\nu)d\nu$ indica o número de osciladores com frequência entre ν e $\nu + d\nu$. Obviamente, o acoplamento sistema-reservatório também fica contínuo e passa a ser descrito pela função $V_m(\nu)$.

Definimos também a excitação média do m -ésimo reservatório $N_m(\nu)$ em função do contínuo de modos a partir da relação

$$\text{Tr}_R(R_0 \hat{r}_m^\dagger(\nu) \hat{r}_{m'}(\nu')) = 2\pi \delta_{mm'} N_m(\nu) \delta(\nu - \nu'), \quad (\text{E.23})$$

e obtemos assim, após uma breve manipulação

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \text{Tr}_R(R_0 \hat{O}_{mn}^\dagger(t) \hat{O}_{m'n'}(t')) &= \delta_{mm'} C_{nm} C_{n'm} e^{i(\Omega_{n'} - \Omega_n)t} \\ &\int_0^t dt' \int_0^\infty \frac{d\nu}{2\pi} [V_m(\nu) \sigma_m(\nu)]^2 N_m(\nu) e^{i(\nu - \Omega_{n'})(t' - t)}. \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Fazendo as transformações de variáveis $\epsilon = \nu - \Omega_{n'}$ e $\tau = t - t'$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \text{Tr}_R(R_0 \hat{O}_{mn}^\dagger(t) \hat{O}_{m'n'}(t - \tau)) &= \delta_{mm'} C_{nm} C_{n'm} e^{i(\Omega_{n'} - \Omega_n)t} \\ &\int_0^t d\tau \int_{-\Omega_{n'}}^\infty \frac{d\epsilon}{2\pi} [V_m(\epsilon + \Omega_{n'}) \sigma_m(\epsilon + \Omega_{n'})]^2 N_m(\epsilon + \Omega_{n'}) e^{-i\epsilon\tau}. \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Assumindo que as funções $V_m(\epsilon + \Omega_{n'})$, $\sigma_m(\epsilon + \Omega_{n'})$ e $N_m(\epsilon + \Omega_{n'})$ variam lentamente em torno dos modos normais $\Omega_{n'}$ e observando que a última integral na eq.(E.25) apenas contribui significativamente em torno de $|\epsilon t| \leq 1$ podemos estender o limite da integração até o infinito e, então, obtemos

$$\int_0^t d\tau Tr_R(R_0 \hat{O}_{mn}^\dagger(t) \hat{O}_{m'n'}(t - \tau)) = \frac{N}{2} \delta_{mm'} C_{nm} C_{n'm} \gamma_m(\Omega_{n'}) N_m(\Omega_{n'}) e^{i(\Omega_{n'} - \Omega_n)t} \quad (E.26)$$

na qual definimos as taxas de dissipação como

$$\gamma_m(\Omega_n) = \frac{1}{N} [V_m(\Omega_n) \sigma_m(\Omega_n)]^2 \int_{-\Omega_n}^{\infty} \delta(\epsilon) d\epsilon, \quad (E.27)$$

e utilizamos a seguinte identidade

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau e^{-i\epsilon\tau} = \pi \delta(\epsilon), \quad (E.28)$$

negligenciando a parte principal de Cauchy que representará apenas um pequeno *shift* na frequência do modo do oscilador.

Realizando as devidas operações distributivas, usando as propriedades cíclicas do traço e voltando para a representação de Schrödinger na base original dos operadores $\hat{a}_m$, finalmente obtemos a seguinte equação mestra

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\rho, H_S] + \frac{N}{2} \sum_{m,n,n'} C_{mn'} C_{n'n} \gamma_m(\Omega_{n'}) \left\{ N_m(\Omega_{n'}) ([\hat{a}_n^\dagger \rho, \hat{a}_m] + [\hat{a}_m^\dagger, \rho \hat{a}_n]) \right. \\ \left. + [N_m(\Omega_{n'}) + 1] ([\hat{a}_n \rho, \hat{a}_m^\dagger] + [\hat{a}_m, \rho \hat{a}_n^\dagger]) \right\}. \end{aligned} \quad (E.29)$$

Para uma temperatura nula, a equação mestra se simplifica a forma de Lindblad generalizada

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\rho, H_S] + \sum_{m,n} \frac{\Gamma_{mn}}{2} \left\{ [\hat{a}_n \rho, \hat{a}_m^\dagger] + [\hat{a}_m, \rho \hat{a}_n^\dagger] \right\}, \quad (E.30)$$

na qual temos

$$\Gamma_{mn} = N \sum_{n'} C_{mn'} \gamma_m(\Omega_{n'}) C_{n'n} \quad (E.31)$$

Podemos identificar dois canais de decaimento na eq.(E.30): o direto para $n = m$, e o indireto para $n \neq m$. Através do canal direto os osciladores perdem a excitação aos seus próprios reservatórios, enquanto que através do canal indireto eles perdem a excitação para todos os outros reservatórios, mas não ao seu respectivo.

Para reservatórios markovianos de ruído branco, no qual as densidades espectrais dos reservatórios são invariantes por translação no espaço de frequência, de tal forma que $\gamma_m(\Omega_{n'}) = \gamma_m$, a expressão (E.31) se reduz a $\Gamma_{mn} = N \gamma_m \delta_{mn}$ e os canais indiretos não mais afetam o sistema.

Outra relevante constatação (a qual usamos no decorrer deste trabalho) é que, no regime de fraco acoplamento ($N\{A_{mn}\} \ll \{\omega_m\}$), os modos normais são quase degenerados e consequentemente $\gamma_m(\Omega_{n'}) \approx \gamma_m(\omega_m)$. Neste regime obtemos $\Gamma_{mn} = N \gamma_m(\omega_m) \delta_{mn}$ e o canal indireto novamente desaparece.

E.2 Sistema de dois níveis: Emissão espontânea

Outro caso que iremos considerar é a emissão espontânea de um átomo de dois níveis. O decaimento irreversível de um átomo em seu estado excitado pode ser modelado por um sistema de dois níveis acoplado a um simples oscilador harmônico com infinitos modos. Nas aproximações de dipolo e de ondas girantes, os Hamiltonianos que descrevem o sistema S , o reservatório R e a interação entre eles são dados por [138]

$$H_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z + \hbar \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_{\vec{k},\lambda} \hat{r}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{r}_{\vec{k},\lambda}, \quad (\text{E.32})$$

$$H_{SR} = \hbar \sum_{\vec{k},\lambda} (g_{\vec{k},\lambda}^* \hat{r}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{\sigma}_- + g_{\vec{k},\lambda} \hat{\sigma}_+ \hat{r}_{\vec{k},\lambda}).$$

A soma se estende, agora, sobre os modos do campo radiante com vetor de onda $\vec{k}$ e polarização λ . Os modos possuem frequência ω_k e polarização $\hat{e}_{\vec{k},\lambda}$, V é o volume de quantização e $g_{\vec{k},\lambda}$ é a constante de acoplamento dipolar entre o sistema de dois níveis e o modo do reservatório com vetor de onda $\vec{k}$ e polarização λ dada por³

$$g_{\vec{k},\lambda} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar\epsilon_0 V}} \vec{\rho}_{eg} \cdot \hat{e}_{\vec{k},\lambda}. \quad (\text{E.33})$$

Na representação de interação, a energia de acoplamento fica

$$V_{SR}(t) = \hbar \sum_{\vec{k},\lambda} (g_{\vec{k},\lambda}^* \hat{r}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{\sigma}_- e^{-i(\omega_a - \omega_{\vec{k},\lambda})t} + g_{\vec{k},\lambda} \hat{\sigma}_+ \hat{r}_{\vec{k},\lambda} e^{i(\omega_a - \omega_{\vec{k},\lambda})t}), \quad (\text{E.34})$$

inserindo-a na eq.(E.13) temos, para um reservatório térmico em uma temperatura T

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = & - \int_0^t dt' \sum_{\vec{k},\lambda} |g_{\vec{k},\lambda}|^2 \left\{ [\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \rho_I(t) - \hat{\sigma}_+ \rho_I(t) \hat{\sigma}_-] \bar{n}_{\vec{k},\lambda} e^{-i(\omega_a - \omega_{\vec{k},\lambda})(t-t')} \right. \\ & \left. + [\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \rho_I(t) - \hat{\sigma}_- \rho_I(t) \hat{\sigma}_+] (\bar{n}_{\vec{k},\lambda} + 1) e^{i(\omega_a - \omega_{\vec{k},\lambda})(t-t')} \right\} + H.c, \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

na qual o número médio de fótons para um oscilador de modo $(\vec{k}, \lambda)$ é

$$\bar{n}_{\vec{k},\lambda} = \left\langle \hat{r}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{r}_{\vec{k},\lambda} \right\rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{\vec{k},\lambda}/k_B T} - 1}, \quad (\text{E.36})$$

e usamos a identidade

$$\left\langle \hat{r}_{\vec{k},\lambda} \hat{r}_{\vec{k},\lambda} \right\rangle = \left\langle \hat{r}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{r}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \right\rangle = 0. \quad (\text{E.37})$$

Apesar da óbvia diferença de notação, no que se refere ao tratamento empregado ao reservatório, a derivação da equação mestra para o átomo de dois níveis segue passos análogos aos

³Adotando um tratamento análogo ao MJC

que são utilizados para o oscilador harmônico amortecido. A soma sobre os vetores de onda $\vec{k}$ do reservatório pode ser substituída pela seguinte integral

$$\sum_{\vec{k}, \lambda} \rightarrow \sum_{\lambda} \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} k^2 dk = \sum_{\lambda} \frac{V}{8\pi^3 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega, \quad (\text{E.38})$$

sendo $\omega = ck$.

Assim posto, retornando a representação de Schrödinger nós finalmente obtemos a equação mestra para o átomo de dois níveis

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\rho, H_S] + \frac{\kappa}{2} (\bar{n} + 1) (2\hat{\sigma}_- \rho \hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \rho - \rho \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-) \\ + \frac{\kappa}{2} \bar{n} (2\hat{\sigma}_+ \rho \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \rho - \rho \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+), \end{aligned} \quad (\text{E.39})$$

na qual $\bar{n} = \bar{n}_{\omega_a/c}$ (a uma temperatura T), desprezamos um pequeno *shift* na frequência atômica correspondente ao *Lamb shift* (incluindo uma contribuição dependente da temperatura que aparece devido ao comutador $[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_+] = -\hat{\sigma}_z$) e ainda

$$\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\omega_a^3 \wp_{eg}^2}{3\hbar c^3}. \quad (\text{E.40})$$

De fato, essa taxa de decaimento atômico é a mesma constante obtida pela teoria de Weisskopf-Wigner da emissão espontânea [36, 138].