

Dinâmica não linear e interações de defeitos topológicos e
sólitons na presença de forças externas e impurezas

Bernardo de Assunção Mello

Tese de Doutorado

Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas

Banca Examinadora:

Jorge Alberto González (Orientador)

Amir O. Caldeira

Fernando Albuquerque de Oliveira

Kyoko Furuya

Hugo Horácio Torriani

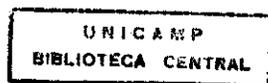
Unicamp, 25 de fevereiro de 1999

9909716

*Este exemplar corresponde à redação final
da tese de doutorado defendida pelo aluno
Bernardo de Assunção Mello e aprovada pela
comissão julgadora.*

UNICAMP, 11 de março de 1999

Jorge A. González



Instituto de Física “Gleb Wataghin”

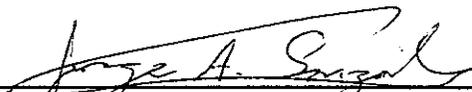
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Secretaria de Pós-Graduação

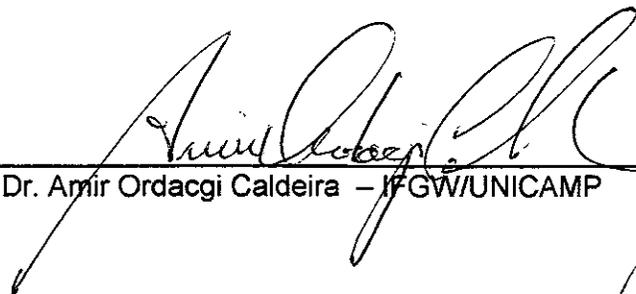
CAIXA POSTAL 6165
CEP 13083-970 – Campinas-SP - Brasil
Tel: (019) 788-5305
Fax: (019) 289-2424

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **BERNARDO DE ASSUNÇÃO MELLO** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 25/02/99.

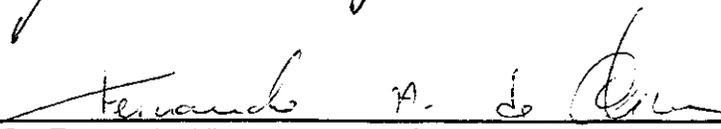
COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Jorge Alberto González González (Orientador do Candidato) –
Instituto Venezolano de Investigações Científicas – Caracas - Venezuela



Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira – IFGW/UNICAMP



Prof. Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira – DF/UnB



Prof. Dr. Hugo Horácio Torriani – IMECC/UNICAMP



Profa. Dra. Kyoko Furuya – IFGW/UNICAMP

Resumo

Investigamos as catástrofes que podem ocorrer na dinâmica de *kinks* na presença de forças externas e impurezas. Sob a ação de algumas forças anarmônicas, pode acontecer de, não só o modo translacional ser instável, como também os modos internos (modos de forma), ou mesmo parte do espectro contínuo. A competição entre escalas da “largura” das inhomogeneidades, da distâncias entre elas e da largura do sóliton leva a bifurcações inesperadas na estabilidade.

Investigamos a dinâmica de um sóliton, que comporta-se como uma partícula estendida, levando a efeitos não lineares na oscilação em torno de um mínimo ou ao comportamento caótico tipo Duffing. Generalizamos os conceitos de ressonância geométrica e ressonância estocástica, que aplicamos aos sólitons.

Investigamos uma equação de *sine*-Gordon modificada, que possui soluções solitônicas com interação de longo alcance. Generalizando a equação de Ginzburg-Landau obtemos o mesmo tipo de comportamento em mais de uma dimensão. Essas interações levam ao regime não extensivo para a termodinâmica do sistema.

Abstract

We study the catastrophes that can occur in kink dynamics in the presence of external forces and impurities. Under the action of some anharmonic forces it can occur that not only the translational mode is unstable but also the internal modes (shape modes) or even part of the continuum spectrum (the soliton is unstable against the interaction with phonons!). All this leads to interesting phenomena like soliton explosions. The length scale competition between the “width” of the inhomogeneities, the distance between them and the “width” of the kink leads to unexpected bifurcation phenomena.

We investigate the dynamics of a soliton that behaves as an extended particle. The soliton motion in an effective bistable potential can be chaotic in a similar way as the Duffing oscillator. We generalize the concept of geometrical resonance to spatiotemporal systems and apply it to design a nonfeedback mechanism of chaos control using localized perturbations. We show the existence of *solitonic stochastic resonance*.

We investigate a modified sine-Gordon equation which possesses soliton solutions with long-range interaction. We introduce a generalized version of Ginzburg-Landau equation which supports long-range topological defects in $D = 1$ and $D > 1$. The interaction force between the defects decay so slowly that it is possible to enter the non-extensivity regime.

Agradecimentos

Agradeço, antes de mais nada, a todos os familiares e amigos com quem convivi nesses anos de execução da tese. De todos recebi o carinho e apoio necessários para tocar não só a vida como um todo, como cada projeto em particular.

Agradeço em particular também as seguintes pessoas,

Ao meu orientador Jorge Alberto González, que me tratou sempre com amizade e respeito, principal responsável pela viabilização dessa tese. Obrigado pelas idéias e apoio constantes.

À minha esposa, Luciana, que foi quem carregou comigo o fardo que é concluir uma tese de doutorado. Espero que seja prova de nosso amor a paciência em resistir às dificuldades enfrentadas juntos nos últimos anos.

Aos amigos que me aguentaram em suas casas em minhas estadas em Campinas. Óbvio que isso é o que de menos tenho a agradecer a vocês. Ivan e Dionei, obrigado por tudo.

Ao Centro Internacional de Física da Matéria Condensada, Brasília, que generosamente pôs à minha disposição todos os recursos indispensáveis à conclusão dessa tese.

Ao meu outro orientador, Amir Caldeira, paciente em todo o caminho sinuoso, cheio de desvios, pelo qual cheguei ao final do meu doutorado.

Ao pessoal da Coordenação de Pós-Graduação do IFGW, sempre competentes e prestativos. Especialmente, à Maria Ignês, exemplo de dedicação, sua colaboração foi, sem dúvida, fundamental na viabilização do meu doutorado.

Ao CNPq e à Capes, pelo auxílio financeiro.

Conteúdo

Introdução	1
1 Sistemas dinâmicos e Física não linear	2
1.1 Pontos fixos de um sistema dinâmico	2
1.2 Oscilações não lineares	6
1.3 Ressonância não linear	8
1.4 Espaços de fase, seções de Poincaré e mapas de retorno	10
1.5 Ciclos limites	11
1.6 Atratores	13
1.7 Bifurcações locais	14
1.8 Teoria de catástrofes	15
1.9 Bifurcações globais	19
1.10 Caos	19
1.11 As infinitas dimensões fractais e a mecânica estatística	21
1.12 Ressonância geométrica	22
1.13 Ressonância estocástica	25
1.14 Sistemas dinâmicos em derivadas parciais	26
1.15 Equações integráveis e não integráveis	30
1.16 Sólitons	31
2 Dinâmica de sólitons	36
2.1 Existência e estabilidade de sólitons em equações tipo Klein-Gordon	36
2.2 Dinâmica de sólitons na presença de forças externas	40
2.3 Inomogeneidades	42
2.4 Impurezas	48
2.5 Catástrofes na dinâmica de sólitons	49
2.6 Explosões de sólitons	51
3 Ressonância não linear e sólitons caóticos	54
3.1 Oscilações forçadas de um sóliton	54
3.2 Ressonâncias	55
3.3 Ciclos limites solitônicos	56
3.4 Sólitons caóticos	58
3.5 Ressonância geométrica solitônica	62
3.6 Ressonância estocástica solitônica	63

4	Interação de defeitos topológicos	67
4.1	Equação de Klein-Gordon	67
4.2	Interações <i>kink-kink</i> e <i>kink-antikink</i>	70
4.3	Interação de curto alcance	71
4.4	Interação de longo alcance	71
4.5	Equação de Ginzburg-Landau	74
4.6	Não extensividade	75
4.7	Interações de longo alcance entre sólitons na natureza	76
	Conclusões	78
A	Linearização do sistema vetorial	80
B	Formulação lagrangeana de campos	81
	Referências Bibliográficas	83
	Índice Remissivo	87

Introdução

O presente trabalho encontra-se dividido em quatro capítulos. O primeiro dos quais dedicado a apresentar os conceitos que usaremos no restante da tese. Alguns desses conceitos não fazem parte da formação usual dos físicos, enquanto outros são recentes ou específicos, por isso pouco familiares. Além disso, nesse capítulo são explicitadas as convenções e os métodos usados nos capítulos seguintes.

O capítulo 2 trata da dinâmica dos sólitons, objetos encontrados em qualquer área da Física, determinando seu comportamento em diversas condições. O equilíbrio dos sólitons depende de circunstâncias bem diferentes que o equilíbrio de partículas, e apresenta uma riqueza de possibilidades muito maior, em vista das coordenadas internas dos sólitons, que também devem ser consideradas. Ao estudar a estabilidade de um sóliton veremos que ela não se reduz apenas à questão translacional, mas deve tratar também da possibilidade do sóliton explodir, ou mesmo de ser totalmente incapaz de existir.

Os sólitons são objetos que existem apenas quando não linearidades estão presentes. No entanto, uma vez existindo, seu comportamento é muitas vezes tratado fazendo-se a linearização de outros aspectos do sistema. Nesse sentido, o capítulo 3 é interessante por tratar de fenômenos não lineares no comportamento de um objeto já intrinsecamente não linear. Os conhecimentos do capítulo anterior são o ponto de partida para os fenômenos considerados. Iniciamos com a ressonância não linear, já antiga conhecida dos físicos e que dá origem a fenômenos como histerese, dobramento de período, deformação da curva de ressonância etc. Depois tratamos do comportamento caótico, assunto mais recente e atualmente objeto de intensas pesquisas. Dois recentes avanços no estudo de caos em partículas são aplicados aos sólitons: o controle de caos sem retroalimentação, através da ressonância geométrica e a amplificação do sinal de saída em relação ao ruído, também de saída, através do aumento do ruído de entrada!

No capítulo 4 encontramos sólitons sujeitos a interações de curto e longo alcance, outro conceito mais comumente utilizado na descrição de partículas. O alcance da força de interação do sóliton tem efeitos óbvios em sua dinâmica. Recentemente novos estudos têm investigado a dependência da estatística com essa força, mais especificamente, com seu comportamento a longas distâncias. O estudo da força de interação entre sólitons pode contribuir para o aperfeiçoamento das novas teorias estatísticas que têm surgido dentro desse contexto.

Capítulo 1

Sistemas dinâmicos e Física não linear

Sólitons, conforme explicado na seção 1.16, são soluções especiais de um sistema de equações diferenciais parciais. A descrição completa da evolução temporal de um sólon escalar é uma superfície $\phi(x, t)$, de no mínimo duas dimensões, contida em um espaço de no mínimo três dimensões: coordenada espacial, tempo e campo escalar real. Essa forma de apresentação nem sempre é conveniente e, freqüentemente, algumas grandezas relacionadas ao sólon são mais apropriadas para a análise do comportamento do sistema que a observação direta da superfície. A análise dessas grandezas envolve conceitos relacionados com sistemas dinâmicos, que são apresentados nas seções 1.1-1.12, não necessariamente ligados a sólitons. Já as seções 1.14-1.16 introduzem conceitos relacionados diretamente a equações diferenciais parciais e sólitons.

1.1 Pontos fixos de um sistema dinâmico

Sistemas dinâmicos [1] são um conjunto de equações que descrevem a evolução de um vetor $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^N$, que possui N componentes reais. Caso o tempo seja discreto, temos um mapa

$$\mathbf{y}(t_{i+1}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}(t_i)), \quad (1.1)$$

caso contrário, temos um sistema de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad (1.2)$$

sendo a função $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ conhecida por **fluxo**¹. Os campos vetoriais \mathbf{f} e \mathbf{g} são funções suaves definidas em um suspiro $U \subseteq \mathbb{R}^N$ ($\mathbf{f}, \mathbf{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^N$). Note que equações diferenciais que incluem derivadas temporais de ordem maior que um, e dependência explícita com o tempo, também estão contidas na definição (1.2).

Exemplificando essa maneira de escrever um sistema dinâmico, vamos usá-la para estudar o oscilador de Duffing, que pode ser implementado com o esquema mostrado da figura 1.1 na página seguinte.

Designando-se por x o ângulo de inclinação da extremidade do pêndulo, chega-se à seguinte equação de movimento [2]:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - x + x^3 = -g \cos \omega t, \quad (1.3)$$

¹O nome fluxo é usado em oposição a mapa, no qual a dinâmica do sistema ocorre aos saltos.

com x e t redimensionados para eliminar algumas constantes. Esta equação foi obtida por Duffing quando estudava as vibrações mecânicas de um maquinário industrial [3]. A dissipação é descrita pelo termo $\gamma\dot{x}$, com $\gamma > 0$. Para escrevê-la como um sistema tipo (1.2) definimos $y_1 \equiv x$, $y_2 \equiv v = \dot{x}$ e $y_3 \equiv \tau = t$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\gamma v + x - x^3 + g \cos \omega \tau \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

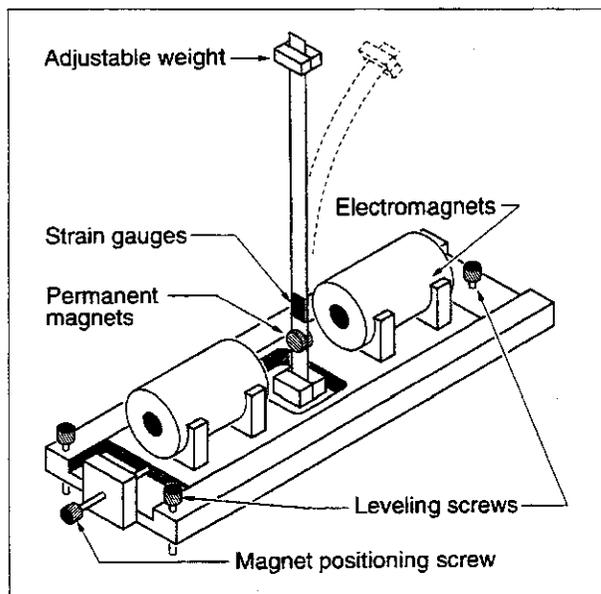


Figura 1.1: Implementação do Oscilador de Duffing: uma haste flexível de aço é presa pela sua extremidade inferior. As posições de equilíbrio estáveis correspondem à barra ligeiramente inclinada para a direita ou para a esquerda, sendo a posição vertical de equilíbrio instável. Uma corrente alternada aplicada nas bobinas provoca um termo forçante harmônico na haste. (Retirado de [2].)

um centro. Se o ponto é uma sela, existe uma única direção segundo a qual as trajetórias chegam ao ponto e uma única pela qual saem. Logo mais veremos que essas direções são os subespaços instável e estável, e que ambas variedades possuem dimensão 1.

Cada sumidouro, ou qualquer outro atrator, possui em sua vizinhança uma região do espaço em que o sistema sempre evolui para ele, chamada de **bacia, ou domínio** do sumidouro. Por exemplo, qualquer configuração inicial de um oscilador harmônico amortecido será amortecida até que a partícula encontre-se em repouso na origem, portanto, a bacia de atração do único ponto de equilíbrio do sistema, a origem, abrange todo o espaço. Já **bacia de repulsão** é o conjunto em que o mesmo ocorreria se a direção do tempo fosse invertida.

No caso do oscilador de Duffing, não podemos obter pontos fixos quando $g \neq 0$, pois isso exige a introdução da variável τ , cuja derivada nunca é nula. Quando $g = 0$, não é necessário

²Aqui e no restante da seção, na caracterização dos pontos fixos, onde se lê $f(y)$ pode-se ler $g(y)$.

Ao estudar o comportamento de um sistema dinâmico, uma das informações mais importantes é o conhecimento dos **pontos fixos**. Pontos fixos, também chamados de **pontos de equilíbrio**, ou **zeros**, são aqueles para os quais o campo vetorial² $f(\bar{y}) = \dot{\bar{y}} = 0$. Caso o sistema esteja em um destes pontos, ele permanecerá aí indefinidamente, portanto, esses pontos são soluções do sistema. Um ponto fixo é dito estável quando após sofrer uma perturbação infinitesimal, o sistema sempre retorna ao ponto (o ponto fixo é dito **sumidouro**), ou então passa a oscilar em sua vizinhança (**equilíbrio neutro**, o ponto fixo é um **centro**, ou **vórtice**). Se um ponto fixo for estável para algumas perturbações e instável para outras, ele é dito **ponto de sela**, e é chamado **fonte**, se for instável para todas. A figura 1.4 na página 12 mostra exemplos de todos os comportamentos, podendo-se constatar que todas as trajetórias próximas a um ponto fixo dirigem-se a ele se for um sumidouro; se for uma fonte, afastam-se; e circundam-no, se for

definir τ no sistema (1.4), que passa a ter apenas duas dimensões. Ao impormos a condição $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}) = 0$ chegamos ao sistema ($g = 0$)

$$\begin{aligned} \bar{v} &= 0 \\ \bar{x} - \bar{x}^3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

As soluções deste sistema (pontos fixos) correspondem ao oscilador parado ($d\bar{x}/dt = \bar{v} = 0$) nas posições $\bar{x} = 0, 1$ ou -1 .

Um procedimento conveniente, para o estudo dos pontos fixos de um sistema dinâmico qualquer, é a linearização do sistema em cada ponto fixo, inclusive para mapas, como o (1.1). Vamos expandir o sistema (1.2) em série de Taylor em torno do ponto fixo $\bar{\mathbf{y}}$. Para linearizar o sistema, manteremos apenas os termos de primeira ordem (lembre-se que os termos de ordem zero são nulos próximos a um ponto fixo):

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) \approx \sum_{j=0}^N \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{y})}{\partial y_j} \right|_{\bar{\mathbf{y}}} (y_j - \bar{y}_j). \quad (1.6)$$

Nosso sistema transformou-se no sistema linear

$$\dot{\mathbf{y}} = A(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}), \quad (1.7)$$

com a matriz A definida por

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} \right|_{\bar{\mathbf{y}}}. \quad (1.8)$$

Formalmente, a solução do sistema linear acima pode ser escrita como³

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{y}} + e^{tA}(\mathbf{y}(0) - \bar{\mathbf{y}}), \quad (1.9)$$

onde e^{tA} é a matriz $n \times n$ obtida exponenciando-se A :

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n. \quad (1.10)$$

O comportamento do sistema linear é determinado pelos autovetores e autovalores da matriz A . Os autovetores definem 3 subespaços distintos, caracterizados por seus autovalores:

Subespaço estável (E_e): definido pelos autovetores $\{\mathbf{w}_e^1, \dots, \mathbf{w}_e^{N_e}\}$, cujos autovalores $\{\lambda_e^1, \dots, \lambda_e^{N_e}\}$ possuem parte real negativa;

Subespaço instável (E_i): definido pelos autovetores $\{\mathbf{w}_i^1, \dots, \mathbf{w}_i^{N_i}\}$, cujos autovalores $\{\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^{N_i}\}$ possuem parte real positiva;

³Para mapas um resultado semelhante é obtido

$$\mathbf{y}(t_i) = \bar{\mathbf{y}} + A^i(\mathbf{y}(0) - \bar{\mathbf{y}}).$$

Subespaço centro (E_c): definido pelos autovetores $\{\mathbf{w}_c^1, \dots, \mathbf{w}_c^{N_c}\}$, cujos autovalores $\{\lambda_c^1, \dots, \lambda_c^{N_c}\}$ possuem parte real nula.

Um ponto $\mathbf{y}(0)$ qualquer pode ser escrito em termos dos autovetores de A :

$$\mathbf{y}(0) = \bar{\mathbf{y}} + \sum_{n=1}^{N_e} c_e^n \mathbf{w}_e^n + \sum_{n=1}^{N_i} c_i^n \mathbf{w}_i^n + \sum_{n=1}^{N_c} c_c^n \mathbf{w}_c^n, \quad (1.11)$$

e, a partir da expressão (1.9), podemos escrever

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{y}} + \sum_{n=1}^{N_e} c_e^n \mathbf{w}_e^n e^{\lambda_e^n t} + \sum_{n=1}^{N_i} c_i^n \mathbf{w}_i^n e^{\lambda_i^n t} + \sum_{n=1}^{N_c} c_c^n \mathbf{w}_c^n e^{\lambda_c^n t}. \quad (1.12)$$

Qualquer ponto pertencente ao subespaço estável decairá exponencialmente em direção ao ponto fixo, um ponto do subespaço instável irá afastar-se exponencialmente. Em um sistema linear, um elemento do subespaço centro irá orbitar o ponto fixo, sem aproximar-se ou afastar-se. No sistema não linearizado, um ponto da **variedade**⁴ centro⁵ irá, inicialmente, oscilar em torno do ponto fixo, mas o comportamento assintótico não pode ser determinado apenas com o conhecimento dos autovalores do subespaço centro.

A expansão (1.6) é exata até primeira ordem, portanto, podemos dizer que, se todos os autovalores de A forem não nulos, ela dará conta do comportamento do sistema, desde que suficientemente próximo de $\bar{\mathbf{y}}$.

Quando, ao linearizar um sistema em torno de um ponto fixo, encontramos apenas autovalores com parte real não nula, dizemos que este é um **ponto fixo hiperbólico** ou **não degenerado**. Pode-se mostrar [1] que existem variedades locais estáveis e instáveis, com as mesmas dimensões que os subespaços E_e e E_i , e tangente a eles, em ponto fixo hiperbólico. Portanto, se o ponto fixo tiver apenas autovalores com parte real negativa, ele será estável; já se algum autovalor tiver parte real positiva, ele será instável.

Para exemplificar este procedimento, consideremos o lado direito da equação (1.4) com $g = 0$:

$$\mathbf{f}(x, v) = \begin{bmatrix} v \\ -\gamma v + x - x^3 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

A linearização em torno do ponto fixo de equilíbrio $[0, 0]$ é (equação 1.8)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

cujos dois autovalores $\lambda_{\pm} = (-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4})/2$, levam aos dois autovetores $\mathbf{w}_{\pm} = [\lambda_{\pm}, 1]$. O autovetor \mathbf{w}_- , representa a situação em que a haste é lançada em direção a origem com uma velocidade v , de uma distância $v\lambda_-$. Se considerarmos o sistema linear, o autovalor $\lambda_- < 0$

⁴Uma variedade (*manifold*) de dimensão n . $M \subset \mathbb{R}^N$, é um conjunto em que cada $\mathbf{y} \in M$ possui uma vizinhança U , para a qual existe um mapeamento suave e inversível (**difeomorfismo**), $\mathbb{R}^n \rightarrow U$, ($n \leq N$) [1]. É a generalização do conceito de superfície a n dimensões em um espaço de N dimensões.

⁵Para qualquer dos três subespaços definidos anteriormente, existe uma variedade que apresenta os mesmos comportamentos para o sistema não linear, e que, no ponto fixo, é tangente ao subespaço.

indica que ela será freada pela dissipação e pela força x até parar sobre a origem. Qualquer outra perturbação terá que incluir também o autovetor \mathbf{w}_+ , cujo autovalor real fará com que a haste se afaste da origem. Portanto, o ponto $[0, 0]$ é instável, devido à existência de um autovalor positivo.

Se linearizarmos o mesmo sistema em torno de um dos pontos fixos $[\pm 1, 0]$, obtemos a mesma matriz em ambos os casos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

cujos autovalores $\lambda_{\pm} = (-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 8})/2$ são reais para $\gamma^2 \leq 8$ e complexos para $\gamma^2 > 8$. Em ambos os casos, a parte real dos autovalores será sempre negativa, portanto os pontos $[\pm 1, 0]$ são pontos de equilíbrio estável para qualquer perturbação suficientemente pequena.

1.2 Oscilações não lineares

Na maior parte dos sistemas dinâmicos é importante conhecer as oscilações permitidas, que em geral ocorrem nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio estável do sistema (mínimos da energia potencial). O procedimento mais comum é expandir a energia potencial em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio considerado. Pode-se redefinir convenientemente o potencial para que a primeira contribuição não nula seja a de segunda ordem, o que leva à equação do oscilador harmônico, uma equação linear facilmente resolvida. Quando se consideram pequenas oscilações, a expansão pode ser truncada neste termo, mas oscilações maiores exigem que os termos de ordem mais alta também sejam considerados. Nessa seção analisaremos o efeito dos termos de terceira e quarta ordem da expansão do potencial na equação não linear decorrente, que alteram a frequência natural do sistema, tornando-a dependente da amplitude da oscilação.

Para resolver a equação do oscilador não linear,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3, \quad (1.16)$$

faremos uma expansão perturbativa em torno da solução harmônica $a \cos(\omega_0 t)$. Sendo essa a solução assintótica com $a \rightarrow 0$, a expansão considerará as diversas potências de a . Sabemos de antemão que a frequência do sistema será alterada, portanto, a expansão perturbativa mais conveniente considerará este efeito ao escrever o termo de ordem mais baixa:

$$x(t) = a \cos(\omega t) + a^2 x_2(t) + a^3 x_3(t) + \dots, \quad (1.17a)$$

$$\omega = \omega_0 + a\omega_1 + a^2\omega_2 + \dots. \quad (1.17b)$$

A equação que cada solução perturbativa $x_n(t)$ deve obedecer é obtida substituindo-se estas duas expansões na equação (1.16) e tomando-se termos de a^n , chegando a soluções dependentes das constantes ω_n , que escolheremos adequadamente.

O primeiro termo da expansão de $x(t)$ obedece a equação de movimento até primeira ordem em a . O termo de segunda ordem da equação de movimento é

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cos(2\omega_0 t) + 2\omega_0 \omega_1 \cos(\omega_0 t), \quad (1.18)$$

cujo termo ressonante, $\cos(\omega_0 t)$, leva a grandes oscilações, invalidando a expansão perturbativa. Este termo pode ser suprimido fazendo-se $\omega_1 = 0$. A equação do oscilador harmônico forçado resultante tem como solução [4]

$$x_2(t) = -\frac{\alpha}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha}{6\omega_0^2} \cos(2\omega t), \quad (1.19)$$

na qual $\cos(2\omega_0 t)$ foi substituído por $\cos(2\omega t)$, simplificando as soluções de ordem superior sem deixar de ser uma solução de ordem a^2 . Substituindo-se esses valores para $x_2(t)$ e ω_2 na expressão de $x(t)$ pode-se obter a equação para o termo perturbativo de terceira ordem:

$$\ddot{x}_3 + \omega_0^2 x_3 = -\left(\frac{\beta}{4} - \frac{\alpha}{6\omega_0^2}\right) \cos(3\omega_0 t) + \left(2\omega_0 \omega_2 + \frac{5\alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3\beta}{4}\right) \cos(\omega_0 t). \quad (1.20)$$

Assim como ocorre na segunda ordem, a ressonância é evitada fazendo-se

$$\omega_2 = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right), \quad (1.21)$$

o que leva à seguinte expressão para o termo perturbativo de terceira ordem:

$$x_3(t) = \frac{1}{16\omega_0^2} \left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} - \frac{\beta}{2}\right) \cos(3\omega t). \quad (1.22)$$

Concluimos que, ao contrário do que ocorre com o oscilador harmônico, a frequência do oscilador não linear depende da amplitude da oscilação, de acordo com a lei

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right) a^2 + O(a^3). \quad (1.23)$$

É importante descrever o que ocorre quando temos um sistema de várias coordenadas, que também oscilará em torno dos mínimos da energia potencial. Se tomarmos um ponto de mínimo como origem, a expansão do potencial não incluirá termos de ordem 0 ou 1. A energia cinética e a energia potencial, em geral, acoplam as várias coordenadas, mas sempre é possível realizar uma transformação para as coordenadas normais, nas quais os termos quadráticos de ambas sejam totalmente desacoplados. Usando essas coordenadas, qualquer equação de movimento pode ser escrita como

$$\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = f_i(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \quad (1.24)$$

a função f possuindo apenas termos de grau maior que um.

Ao resolver perturbativamente o sistema acoplado, tomamos como solução de primeira ordem as funções $a_i \cos(\omega_i t + \alpha_i)$. Quando introduzimos estas expressões nas equações de ordem 2, o termo quadrático da função f dá origem a forças harmônicas de frequências $\omega_i \pm \omega_k$. Assim, oscilações de **frequências combinadas**, incluindo frequências dobradas e frequência zero, ocorrerão devido à presença da não linearidade, superpondo-se às oscilações nas frequências normais do sistema. As amplitudes dessas oscilações serão proporcionais ao produto das amplitudes das vibrações normais, $a_i a_k$. Os termos de terceira ordem da função f geram, entre outras, forças de mesma frequência que os modos normais. Ao considerá-los, é necessário expandir a frequência do termo de ordem 1, como acima fizemos na equação (1.17b), a fim de impedir a explosão, fisicamente inaceitável, da solução perturbativa.

1.3 Ressonância não linear

Ao estudar as ressonâncias de um oscilador não linear é necessário considerar a dissipação, que impede que a oscilação seja infinitamente amplificada:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos(\Omega t) - \alpha x^2 - \beta x^3. \quad (1.25)$$

Ao invés de resolver perturbativamente, seguiremos o raciocínio apresentado em [4], que parte da amplitude de oscilação para o oscilador harmônico forçado e amortecido ($\alpha = \beta = 0$):

$$a_0 = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}}. \quad (1.26)$$

Devido à dissipação, a frequência de ressonância dessa expressão não coincide com a frequência ω_0 . No entanto, podemos fazer a dissipação tão pequena quanto queiramos, visto que seu único papel é impedir a amplificação indefinida das oscilações. Nesse caso, ao estudar a ressonância de uma força de frequência próxima à natural, $\Omega = \omega_0 + \epsilon_0$, $\epsilon_0 \ll \omega_0$, podemos usar a aproximação

$$a_0 \approx \frac{F}{\omega_0 \sqrt{4\epsilon_0^2 + \gamma^2}}. \quad (1.27)$$

Com α e β não nulos, a frequência natural do sistema será alterada, levando a uma correção nessa expressão. A alteração é expressa ao reescrevermos $\Omega = \omega_0 + \kappa a^2 + \epsilon$, sendo κ dependente apenas dos parâmetros da equação de movimento. Assim, a diferença entre a frequência do termo forçante e a frequência do oscilador é agora dada por $\epsilon = \epsilon_0 - \kappa a^2$. Substituindo $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ na expressão para a amplitude, (1.27), chegamos a uma equação do terceiro grau para a a^2 ,

$$a^2 [4(\epsilon - \kappa a^2)^2 + \gamma^2] = \frac{F^2}{\omega_0^2}, \quad (1.28)$$

que pode possuir uma ou três raízes reais.

A figura 1.2 na página seguinte mostra que, aumentando a força aplicada, a curva de ressonância se deforma, e a partir de um certo valor passa a permitir duas amplitudes de oscilação diferentes para uma mesma frequência, como ocorre com $F = 0,010$. Nesse caso, se a frequência de oscilação é aumentada lentamente a partir de um valor à esquerda do pico de ressonância, a amplitude cresce ao longo do ramo superior da curva, até a frequência atingir a linha pontilhada, onde ela é obrigada a descer para o ramo inferior. O inverso ocorre pela direita, quando a amplitude salta para o ramo superior ao atingir a linha pontilhada. Por analogia ao que ocorre em materiais ferromagnéticos, é comum referir-se a este fenômeno como histerese. As amplitudes de oscilação no interior da região limitada pela linha pontilhada são instáveis, ou seja, se tentarmos fazer o sistema oscilar com uma amplitude e frequência dentro dessa região, ele rapidamente sai desse regime, passando a oscilar com uma amplitude no ramo superior ou inferior da curva.

Se diferenciarmos a expressão (1.28) em relação a ϵ , obtemos a derivada da amplitude de oscilação em relação a frequência da força externa:

$$\frac{da}{d\epsilon} = \frac{a(\kappa a^2 - \epsilon)}{\epsilon^2 + \gamma^2/4 - 4\epsilon\kappa a^2 + 3\kappa^2 a^4}. \quad (1.29)$$

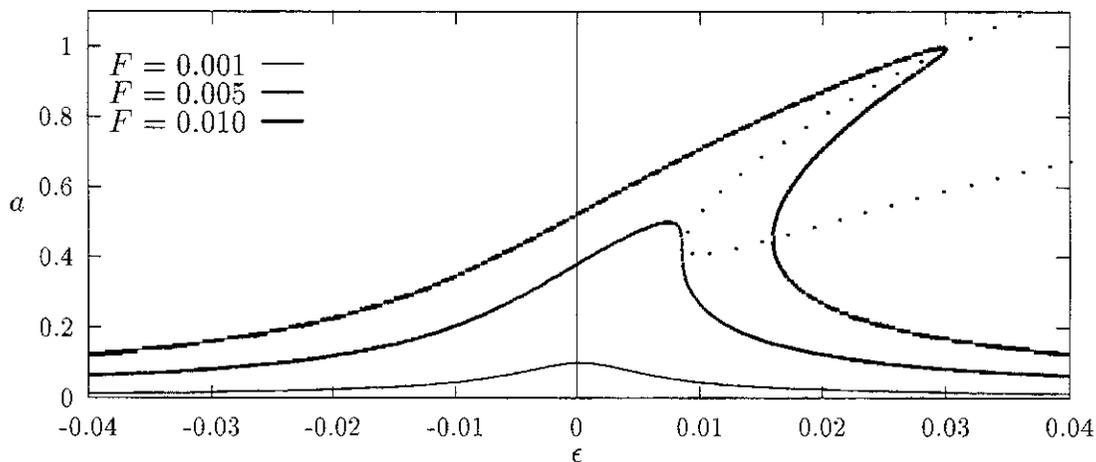


Figura 1.2: Solução da equação (1.28) com $\kappa = 0,03$, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0,01$. A linha pontilhada demarca a região no interior da qual a oscilação é instável. Qualquer curva de ressonância terá diferentes amplitudes de vibração para uma mesma frequência se cruzar a linha pontilhada em algum ponto.

Para determinarmos a frequência de ressonância fazemos $da/d\epsilon = 0$, que possui duas raízes $\epsilon = \pm\sqrt{\kappa}a$ se $\kappa > 0$. Se β for suficientemente grande para fazer $\kappa > 0$, o aumento da amplitude da oscilação tornará nítida a existência de dois picos de ressonância para cada frequência natural do sistema.

Outros fenômenos não-lineares ocorrem quando o termo forçante tem uma frequência próxima a um divisor da frequência natural do sistema descrito pela equação de movimento (1.25), por exemplo:

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega_0 + \epsilon, \quad (1.30)$$

A solução perturbativa de primeira ordem terá sua amplitude determinada pela expressão (1.26),

$$x_1(t) = \frac{4F}{3\omega_0^2} \cos\left[\left(\frac{1}{2}\omega_0 + \epsilon\right)t\right], \quad (1.31)$$

considerando que, com pequenas dissipações, o principal limitante da amplitude é a diferença, $\omega_0/2$, entre a frequência natural e a do termo forçante. Esta solução de primeira ordem funcionará como um termo forçante na equação de movimento para a solução de segunda ordem,

$$\ddot{x}_2 + \gamma\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \alpha x_2^2 + \beta x_2^3 = \alpha x_1^2, \quad (1.32)$$

na qual mantivemos apenas a contribuição de $x_1(t)$ capaz de levar a termos ressonantes, com

$$x_1^2 \rightarrow \frac{8F^2}{9\omega_0^4} \cos((\omega_0 + 2\epsilon)t). \quad (1.33)$$

A equação que se obtém difere da equação (1.25) apenas na expressão para a força externa, que agora é proporcional a F^2 . Isto significa que a ressonância será do mesmo tipo, porém, mais

fraca. Concluindo, quando o sistema é excitado com uma força oscilante, a não linearidade é capaz de fazer com que o sistema passe a vibrar com um múltiplo da frequência forçante.

A não linearidade também é capaz de causar ressonâncias quando a frequência do termo forçante é próxima do dobro da frequência natural. Por exemplo, se a frequência natural do sistema for

$$\Omega = 2\omega_0 + \epsilon, \quad (1.34)$$

então a solução de primeira ordem será

$$x_1(t) = -\frac{F}{3\omega_0^2} \cos((2\omega_0 + \epsilon)t). \quad (1.35)$$

Se substituirmos essa expressão na equação de movimento, não obtemos nenhum termo forçante ressonante. No entanto, o termo $-2\alpha x_1(t)x_2(t)$ pode levar à **ressonância paramétrica**:

$$\ddot{x}_2 + \gamma \dot{x}_2 + \omega_0^2 \left\{ 1 - \frac{2\alpha F}{3\omega_0^2} \cos((2\omega_0 + \epsilon)t) \right\} x_2 = 0. \quad (1.36)$$

Como mostrado em [4], com $|\epsilon|$ suficientemente pequeno, a ressonância paramétrica pode dar origem a oscilações de frequência angular ω_0 , duplicando o período da força original. No entanto, a excitação destas oscilações depende das condições iniciais. Por exemplo, da inspeção da equação de movimento acima, vemos que uma possível solução é $x_2(t) = 0$.

1.4 Espaços de fase, seções de Poincaré e mapas de retorno

Entre as ferramentas mais importantes para a análise qualitativa do comportamento de um sistema estão os diagramas apresentados nessa seção. Além de permitirem a percepção visual do que está ocorrendo, a partir deles podem ser realizados procedimentos para a obtenção de dados quantitativos.

O primeiro dos diagramas a ser discutido é o **espaço de fase**, que consiste em um gráfico que tem como eixos as componentes do sistema, e no qual é traçada uma linha com os valores que essas componentes assumem ao longo do tempo. Em geral, usa-se um gráfico bidimensional com uma das coordenadas no eixo horizontal e sua derivada temporal no vertical, o que representa uma visão parcial caso o sistema possua mais de uma coordenada⁶. Esse tipo de espaço de fase não nos permite conhecer a posição da partícula em um dado instante, mas sabe-se que, ao percorrer qualquer órbita, a partícula sempre o fará no sentido horário. Espaços de fase com três eixos também são possíveis, mas a sua representação plana nem sempre é conveniente, pois se a figura for muito complicada pode ser difícil entendê-la.

Imaginemos um sistemas com três coordenadas, por exemplo, o movimento de uma partícula dentro de uma centrífuga rodando em torno do eixo z . Ao invés de traçarmos uma linha em um gráfico tridimensional para representar esta trajetória, podemos fazer um gráfico bidimensional no qual marcamos os valores de x e z no instante em que a partícula cruza o plano ($y = 0, x > 0$). Caso a partícula esteja executando uma órbita fechada, teremos um único ponto, se for uma

⁶Se outra coordenada precisar ser introduzida para representar a derivada temporal da primeira, o sistema de uma coordenada a que nos referimos é, na realidade, bidimensional. Isso ocorre se a equação de movimento envolver derivadas de segunda ordem no tempo.

órbita de período 2, teremos dois pontos etc ... Caso a órbita não seja periódica, teremos um conjunto de pontos marcados no gráfico. Esse método de registro de pontos é chamado de **seção de Poincaré** e, muitas vezes, permite uma visualização melhor do que está acontecendo que o espaço de fase. Ao marcar a posição em que a linha que representa a trajetória cruza uma seção do espaço, a seção de Poincaré faz com que a evolução deixe de ser representada por um objeto bidimensional e passe a ser descrita por um conjunto de pontos. Portanto, a seção de Poincaré é uma forma de associar um mapa a um fluxo: dada o valor das coordenadas da partícula ao passar pela seção, a iteração seguinte do mapa corresponde aos valores das coordenadas quando a partícula retorna à seção.

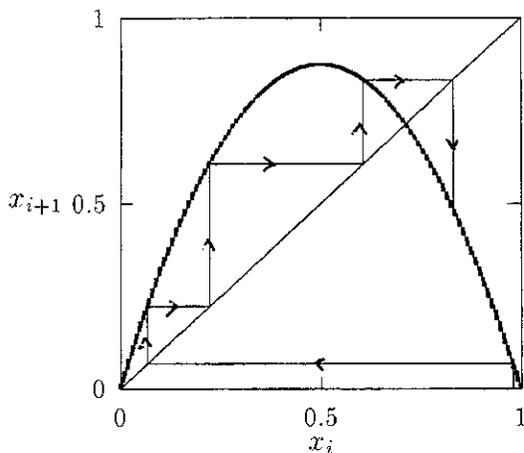


Figura 1.3: 5 primeiras iterações do mapa logístico, $x_{i+1} = \lambda x_i(1 - x_i)$, com $x_0 = 0,98$.

seguinte. A figura 1.3 é o mapa retorno do mapa logístico, e as setas mostram como, com o auxílio da reta $x_{i+1} = x_i$, pode-se acompanhar a evolução do sistema. Em fluxos é comum usar um mapa que relaciona o valor de um máximo com o máximo seguinte, ou seja uma seção de Poincaré na qual a derivada temporal da coordenada é nula. Em sistemas com mais de uma coordenada, o passo seguinte depende de todas as coordenadas atuais e a iteração seguinte não pode ser determinada apenas pela inspeção de um mapa de retorno bidimensional.

1.5 Ciclos limites

As seções 1.2 e 1.3 mostram alguns comportamentos típicos de sistemas não lineares, estudados ainda da maneira tradicional, que consiste em procurar extrair das equações de movimento expressões algébricas descrevendo algumas das características do problema: amplitude e frequência no caso estudado. No final do século passado, Poincaré percebeu que os métodos usados até então eram inadequados para a resolução de sistemas não lineares, já que as séries perturbativas divergem frequentemente. Propôs, então, um novo programa para o estudo de sistemas dinâmicos baseado na análise qualitativa do espaço de fase. Essa análise busca isolar os pontos, como os pontos fixos da seção 1.1, ou conjuntos de pontos, como os descritos nessa seção, que, de alguma forma, permitem determinar as características qualitativas das trajetórias

Em sistemas submetidos a um termo periódico no tempo é necessário introduzir o tempo como mais uma variável, que também pode ser incluída no espaço de fase. A periodicidade faz com que dois instantes separados por um período possuam alguma identidade e a representação mais conveniente consiste em um toro no qual instantes separados por um número inteiro de períodos correspondem ao mesmo ponto do espaço. Nesse caso, a seção de Poincaré natural é um plano perpendicular à direção do tempo, ou seja, o registro da posição da partícula a cada período.

Outro gráfico útil é o **mapa de retorno**, que consiste em um gráfico bidimensional no qual, a cada iteração, o valor de uma dada coordenada do sistema é marcado no eixo horizontal e, no eixo vertical, é marcado o valor dessa mesma coordenada na iteração

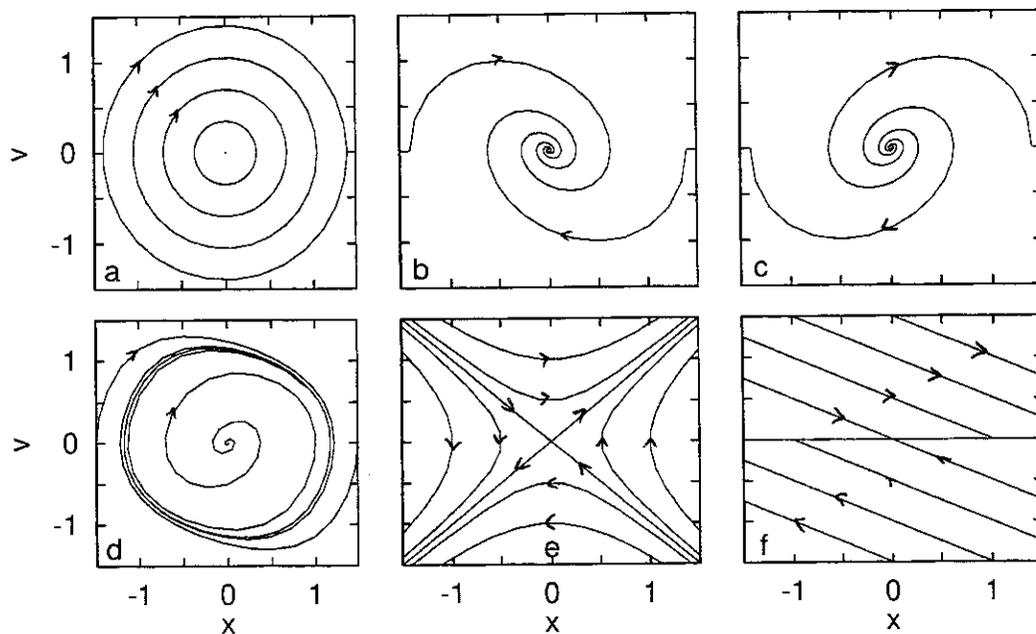


Figura 1.4: Espaços de fase do oscilador harmônico (1.37), com $\delta = 1$ em *a*, *b*, *c* e *d*, $\delta = -1$ em *e* e $\delta = 0$ em *f*. (*a*) $\gamma = \Gamma = 0$, (*b*) $\gamma = 0,5$, $\Gamma = 0$, (*c*) $\gamma = -0,5$, $\Gamma = 0$, (*d*) $\gamma = -0,5$, $\Gamma = 0,5$, (*e*) $\gamma = \Gamma = 0$, (*f*) $\gamma = 0,5$, $\Gamma = 0$. Em todos os casos a origem é um ponto fixo: em *a* um centro, em *b* um sumidouro, em *c* e *d* uma fonte, em *e* uma sela e em *f* todo o eixo *x* é um conjunto limite ω . Além disso, é degenerado em *a* e *f* e hiperbólico em *b*, *c*, *d* e *e*.

que o sistema pode percorrer.

As trajetórias de um sistema dinâmico são traçadas em **espaços de fase**, como os da figura 1.4, que mostra a evolução temporal de osciladores harmônicos descritos pela equação

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \Gamma x^3 + \delta x = 0. \quad (1.37)$$

Observando a figura podemos distinguir qualitativamente as trajetórias do sistema em termos da sua procedência e destino. A região de onde a trajetória partiu é chamada de **conjunto limite α** , definido como

$$\alpha(x_0) = \{x / \lim_{t_i \rightarrow -\infty} y(x_0, t_i) = x\} \quad (1.38)$$

sendo x_0 um ponto da trajetória e $y(x_0, t)$ a posição ocupada no instante t pelo sistema que percorre essa trajetória. O **conjunto limite ω** é o destino final da trajetória, definido da mesma maneira, porém com limite $+\infty$.

Na figura 1.4*a* a origem e todas as circunferências são conjuntos limites, além de serem **órbitas fechadas**, ou **periódicas**, visto que existe um período $0 < T < \infty$ (no caso, $T = 1$) tal que $x(t + T) = x(t)$ para qualquer t . Já nas figuras *b* e *c* o único conjunto limite, ω e α respectivamente, é a origem, com bacias que cobrem todo o espaço. Na figura *d* a origem é uma fonte devido à dissipação negativa de primeira ordem, que é suplantada pela dissipação positiva de terceira ordem quando a velocidade é suficientemente grande. A inversão no sinal da dissipação limita o crescimento da amplitude da oscilação, levando à forma da órbita fechada

mostrada. Essa órbita fechada é um conjunto limite ω e sua bacia de atração cobre todo o espaço, com exceção da origem, que é um conjunto limite α cuja bacia de repulsão compreende a região no interior da órbita fechada. Na figura *e* a origem é o conjunto limite α de duas trajetórias e o conjunto limite ω outras duas. Na figura *f*, o eixo x é um conjunto limite ω .

A figura 1.4 também demonstra a **instabilidade estrutural** do oscilador harmônico simples. Repare a diferença radical entre as órbitas do caso *a* e do caso *b*, que existiria mesmo que a dissipação γ fosse muito pequena. Um sistema só é **estruturalmente estável** se, por menor que seja a perturbação, ela leve a outro sistema **topologicamente equivalente**. Dois sistemas são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo que mapeie as órbitas do primeiro nas órbitas do segundo, preservando a direção da evolução temporal. Isso só é possível se não existirem pontos críticos degenerados, pois caso eles existam, como em *a*, uma perturbação infinitesimal é capaz de remover a degenerescência, mudando o tipo de trajetórias em sua vizinhança. Sendo o eixo x da letra *f* um conjunto de pontos fixos não hiperbólicos, também aí ocorre instabilidade estrutural.

Ainda na mesma figura, em *d* pode-se observar um tipo especial de conjunto limite, uma órbita fechada, conhecido por **ciclo limite**. Do mesmo modo que um ponto fixo, um ciclo limite pode ser estável ou instável, conforme as órbitas aproximem-se ou afastem-se dele. No exemplo mostrado, temos um ciclo limite estável.

1.6 Atratores

Uma característica importante a ser conhecida em boa parte dos problemas de valor inicial que representam processos físicos é o comportamento assintótico, ou seja, o que se espera do sistema depois que os transientes decorrentes dos valores iniciais desaparecem. Os conjuntos limites ω são um exemplo deste tipo de comportamento, para aquelas trajetórias que se aproximam continuamente de pontos fixos ou ciclos limites.

Com exceção das trajetórias que escapam para o infinito, trajetórias de sistemas com apenas duas coordenadas (três com o tempo) sempre possuem um conjunto limite ω . Isso acontece porque as trajetórias, não podendo cruzar umas às outras, acabam por acumular-se quando encontram alguma órbita fechada. Quando o número de dimensões é maior, essa restrição não existe, e os conjuntos limites não são os únicos comportamentos assintóticos possíveis. Algumas trajetórias evoluem aproximando-se cada vez mais de determinadas órbitas, que não necessariamente são fechadas. Isso significa que existe uma bacia de atração em que qualquer trajetória tenderá a um mesmo comportamento assintótico, não necessariamente um conjunto limite ω .

Antes de introduzir novas classificações para os conjuntos relacionados com o comportamento assintótico das trajetórias, temos que definir o que é um **conjunto invariante**: o conjunto S tal que para todo $\mathbf{x}(t_0) \in S$, $\mathbf{x}(t) \in S$ com $t \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, é uma região do espaço da qual nenhuma trajetória entra ou sai. Um conjunto invariante A é chamado de **conjunto atrativo** se capturar todas as trajetórias de alguma vizinhança, ou seja, se possuir uma vizinhança U na qual $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = A$ para todo $x \in U$. Repare que na definição de conjunto atrativo o limite é relativo ao conjunto como um todo, e não isoladamente a todos os pontos do conjunto, como para um conjunto limite. Portanto, podemos dizer que todo conjunto limite ω é um conjunto atrativo, mas não o oposto. Finalmente, definimos um **atrator** como

sendo um conjunto atrativo que contem uma órbita densa⁷, ou seja, se o atrator possuir uma órbita que, em algum instante, passe arbitrariamente perto de todos os pontos do atrator. A definição de atrator inclui os pontos fixos e os ciclos limites que possuam uma variedade estável.

1.7 Bifurcações locais

Na descrição de sistemas dinâmicos, o conhecimento de aspectos qualitativos dos comportamentos possíveis é muitas vezes mais interessante que a obtenção de soluções exatas. Sistemas de interesse físico possuem, em geral, parâmetros que, ao sofrerem variações, podem provocar mudanças qualitativas conhecidas como **bifurcações**.

O estudo geral das bifurcações, assim como de grande parte dos aspectos de sistemas dinâmicos, ainda não atingiu um nível de sistematização. No entanto, bifurcações de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas constitui uma parte relativamente completa da teoria. Por descrever o comportamento do sistema com base nas características próximas a estes conjuntos limites, essas são as chamadas **bifurcações locais**. Um primeira definição que pode ser feita é o **valor de bifurcação** de um parâmetro, que será o valor do parâmetro para o qual o sistema dinâmico não é estruturalmente estável. No estudo das bifurcações é comum traçar um gráfico no espaço dos parâmetros mostrando o **conjunto bifurcação**, que é o conjunto dos valores de bifurcação. Outro gráfico útil é o **diagrama de bifurcação**, que mistura as variáveis e os parâmetros envolvidos na bifurcação.

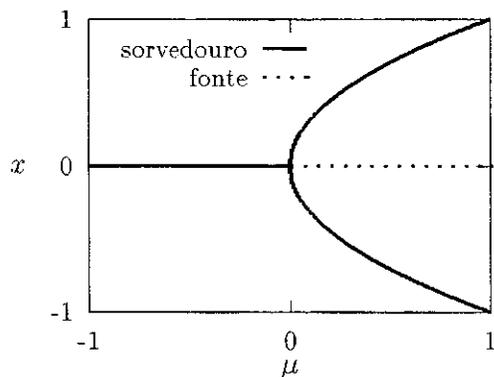


Figura 1.5: Diagrama da bifurcação *pitchfork* definida pela equação $\dot{x} = \mu x - x^3$.

Um exemplo de diagrama de bifurcação conhecida por **bifurcação *pitchfork***, devido a seu formato que lembra um forçado, é mostrado na figura 1.5. Nessa bifurcação, um único ponto fixo estável existente em $\mu < 0$ bifurca-se em dois novos pontos estáveis degenerados e um ponto instável. Essa bifurcação é um caso particular da bifurcação cúspide, apresentada na seção seguinte dentro do contexto de catástrofes, na qual um ponto estável dá origem a dois pontos estáveis, em geral não degenerados. No caso mostrado temos uma **bifurcação supercrítica**, pois um ponto estável dá origem a conjuntos limites estáveis que afastam-se com o aumento de μ . Na **bifurcação subcrítica**, um ponto instável dá origem a conjuntos limites instáveis.

A figura 1.4 na página 12 serve para ilustrar outro tipo de bifurcação importante conhecida por **bifurcação Hopf**. Se observarmos a equação do oscilador harmônico (1.37) e a figura 1.4d percebemos que se o módulo de γ diminuir, o ciclo limite diminui sua amplitude de movimento, aproximando-se da origem. Quando γ torna-se positivo, passando pelo ponto de bifurcação $\gamma = 0$ a dependência com a velocidade passa a ser sempre dissipativa e, simultaneamente, o ciclo limite encolhe-se até tornar-se um ponto de equilíbrio estável na origem, semelhante à figura 1.4b.

⁷Um subconjunto U de S é chamado de **denso** em S se para qualquer $x \in S$ e para qualquer $\epsilon > 0$, existe um ponto \bar{x} tal que $|x - \bar{x}| < \epsilon$, isto é, existe um ponto de U na vizinhança de qualquer ponto de S . [5]

1.8 Teoria de catástrofes

As seções anteriores introduzem parte do ferramental matemático desenvolvido depois que Poincaré percebeu, no final do século passado, a inadequação do método tradicional (baseado na busca das soluções) para o estudo das propriedades de um sistema dinâmico. Nos anos 50, R. Thom introduziu o conceito de transversalidade para a discussão de instabilidades estruturais, usando o termo “catástrofes” para designar as singularidades, no espaço dos parâmetros, da função que descreve a evolução temporal. A **Teoria de Catástrofes** [6] de Thom é um elo entre o programa iniciado por Poincaré e o tratamento tradicional (via cálculo diferencial) de sistemas dinâmicos. Pode ser considerada uma tentativa de classificação do comportamento qualitativo de sistemas dinâmicos, baseada no modo como os parâmetros do sistema alteram força atuante.

Consideremos um sistema dinâmico sujeito a um potencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}). \quad (1.39)$$

Os zeros do sistema são os pontos $\bar{\mathbf{x}}$ em que $\nabla V(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, para os quais podemos definir a matriz de estabilidade (equação 1.8 na página 4):

$$V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}. \quad (1.40)$$

O comportamento qualitativo do sistema em cada ponto do espaço depende do comportamento da função em torno deste ponto e, usando-se a transformação adequada, podemos transformar qualquer função infinitamente derivável em uma das três formas definidas abaixo:

Forma Função Implícita: Quando $\nabla V(\mathbf{x}_0) \neq 0$, sempre é possível encontrar uma transformação suave⁸ $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, não necessariamente linear, para a qual

$$V(\mathbf{x}) = y_1 \quad (+ \text{uma constante}), \quad (1.41)$$

ou seja, no novo sistema de coordenadas a única componente da força possui direção 1.

Forma de Morse: Nos pontos de equilíbrio em que a matriz estabilidade V_{ij} não possui autovalores nulos, ou seja $\det V_{ij} \neq 0$, pode-se escolher uma transformação de coordenadas para a qual

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i^2. \quad (1.42)$$

Este tipo de ponto fixo é dito **isolado**, **não degenerado** ou **ponto crítico de Morse**.

Forma de Thom: Se o potencial depende de um ou mais parâmetros de controle, $\mathbf{c} = c_1, \dots, c_k$ alguns dos autovalores da matriz de estabilidade podem anular-se para certos valores, $\bar{\mathbf{c}}$ destes parâmetros. Os pontos de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ em que isso ocorre são chamados de **degenerados**, **não isolados** ou ainda **non-Morse critical points**. Ainda assim, o

⁸As derivadas de ordem arbitrárias são definidas.

Lema de *splitting* de Thom pode ser usado para, transformando-se convenientemente as variáveis, escrever o potencial em uma forma canônica que separa a parte de Morse da parte não Morse:

$$V(\mathbf{x}; \mathbf{c}) = f_{NM}(y_1(\mathbf{x}; \mathbf{c}), \dots, y_l(\mathbf{x}; \mathbf{c}); \mathbf{c}) + \sum_{i=l+1}^N \lambda_i(\mathbf{c})(y_i(x))^2, \quad (1.43)$$

sendo $\lambda_1 \dots \lambda_l$ os autovalores nulos. Esta decomposição é válida em uma vizinhança aberta de $(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{c}})$, em $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^k$, sendo $\bar{\mathbf{x}}$ um ponto de equilíbrio não degenerado quando os parâmetros assumem os valores $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}}$. De acordo com o mesmo lema, com $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}}$ a função f_{NM} não possui termos de primeira ou segunda ordem em $(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})$ na expansão em série de Taylor. Nessas condições, se $k \leq 5$, o Teorema de Thom permite a construção de polinômios conhecidos por **germens da catástrofe**, $CG(l)$, que descrevem a função f_{MN} quando os valores dos parâmetros são fixos: $\mathbf{c} \equiv \bar{\mathbf{c}}$. Thom também fornece outro polinômio, $Pert(l, k)$, que adicionado ao germen da catástrofe leva à **função catástrofe**, ou simplesmente **catástrofe**: $Cat(l, k) \equiv CG(l) + Pert(l, k)$. Esta função pode substituir f_{MN} em (1.43), sendo válida na vizinhança aberta mencionada anteriormente.

O comportamento local de uma função é dominado pelos termos de ordem mais baixa na expansão em séries de Taylor, que podem desaparecer para determinados valores dos parâmetros \mathbf{c} , o que altera suas propriedades qualitativas. Duas funções são qualitativamente semelhantes se forem relacionadas por uma transformação suave, como as mostradas acima, que eliminam os termos acima de certa ordem, levando a uma forma canônica. O efeito de uma perturbação $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c} + \delta\mathbf{c}$ no potencial $V(\mathbf{x}; \mathbf{c})$ não afeta qualitativamente os termos de ordem mais baixa nas formas Função Implícita e de Morse, enquanto o mesmo não ocorre com a forma de Thom, na qual a perturbação $Pert(l, k)$ possui termos de ordem menor ou igual aos termos da função não perturbada $CG(l)$.

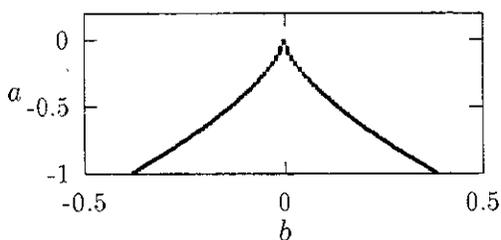


Figura 1.6: Catástrofe cuspide.

Quando uma função não possui pontos críticos degenerados, ela é dita **função de Morse**, e seu comportamento qualitativo depende, entre outras coisas, do número e do tipo dos pontos críticos de Morse. A família de funções contínuas $V(\mathbf{x}, \mathbf{c})$, parametrizadas por \mathbf{c} , é constituída principalmente por funções de Morse, exceto por um subespaço de medida zero no qual $V(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ possui ao menos um ponto crítico degenerado. Se escolhermos aleatoriamente valores \mathbf{c} , a possibilidade de obtermos uma função de Morse é 1, e pode-se perguntar qual a importância da forma de Thom neste contexto. Apesar do comportamento das funções poder ser descrito usando a forma de Morse em todo o subespaço aberto das funções de Morse, que inclui toda a família $V(\mathbf{x}, \mathbf{c})$, exceto por um subespaço de medida zero, a forma de Thom é importante, pois permite-nos estudar a fronteira que separa um padrão de comportamento de outro. Nessa fronteira, o sistema torna-se **estruturalmente instável**, o que significa que o número e o tipo dos pontos de equilíbrio podem mudar com uma perturbação infinitesimal.

Para nós será importante analisar a **catástrofe cuspide**, que ocorre quando o potencial possui dois parâmetros: $V(\mathbf{x}; a, b)$. Esperamos encontrar funções que possuem ponto crítico

degenerado, na vizinhança do qual pode-se usar a decomposição⁹ (1.43), com $CG = \pm x^4$ e $Pert = bx + ax^2$. A parte Morse dessa decomposição não é afetada qualitativamente por perturbações, portanto, basta-nos estudar como o comportamento qualitativo da catástrofe muda com a variação dos parâmetros de controle.

Na catástrofe cúspide, a função $f_{NM}(x; a, b)$ da equação (1.43) pode ser escrita como

$$v(x; a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx, \quad (1.44)$$

e os pontos críticos ocorrerão quando

$$\text{Ponto crítico:} \quad x^3 + ax + b = 0 \quad (1.45a)$$

$$\text{Duplamente degenerado:} \quad 3x^2 + a = 0 \quad (1.45b)$$

$$\text{Triplamente degenerado:} \quad 6x = 0. \quad (1.45c)$$

A bifurcação descrita por essa catástrofe separa os valores de a e b em que $v(x; a, b)$ possui dois mínimos e um máximo daqueles em que possui apenas um mínimo. Esta bifurcação ocorre quando o ponto crítico é degenerado, ou seja, quando as condições (1.45a) e (1.45b) são satisfeitas:

$$a < 0 \quad \text{e} \quad \left(-\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.46)$$

com o ponto crítico em $\bar{x} = \pm\sqrt{-a/3}$. A figura 1.6 na página anterior mostra a separatriz entre a região em que o potencial possui apenas um mínimo, no interior da curva, e a região em que possui dois mínimos, região acima da curva. Os dois mínimos só são degenerados quando $b = 0$.

A existência de catástrofes é esperada em diferentes sistemas físicos, ainda que não se conheça exatamente as equações, ou que sua complexidade não permita obter descrições quantitativas das bifurcações. Por isso, é interessante possuir uma lista dos fenômenos que costumam acompanhar a ocorrência de catástrofes, como os que apresentamos a seguir

Modalidade: Significa dizer que o sistema pode existir em dois ou mais estados, como quando o sistema possui mais de um mínimo local para alguns valores dos parâmetros.

Inacessibilidade: Ocorre quando o sistema possui pontos de equilíbrio que não são estáveis.

Saltos Súbitos: Ocorre quando pequenas variações nos parâmetros provocam o desaparecimento de um mínimo local e o sistema é levado a outro mínimo, resultando em grande mudança na variável de estado. Em muitos casos, a partícula investiga constantemente sua vizinhança, como na presença de ruído ou quando a entidade descrita não é uma partícula pontual, mas algo que ocupa uma região do espaço, como um sóliton. Com isso, o salto pode ocorrer no instante em que a energia de outro mínimo torne-se menor que a energia do mínimo em que o sistema se encontra. A determinação dos valores dos parâmetros nos quais o salto ocorre leva à definição da **Convenção do Atraso** (desaparecimento de um dos mínimos) no primeiro caso, e da **Convenção de Maxwell** (dois mínimos não degenerados tornam-se degenerados) no segundo. Convenções intermediárias também são

⁹Note que o potencial não depende mais de um conjunto de variáveis x , mas de um escalar x

usadas, como considerar a altura da barreira de potencial entre os dois mínimos, para que o salto ocorra antes do desaparecimento do mínimo em que o sistema se encontra, ainda que com algum atraso em relação à situação em que outro mínimo passa a possuir menor energia.

Divergência: Uma variação finita nos parâmetros de controle leva a uma mudança finita nos valores de equilíbrio das variáveis de estado. Em geral pequenas alterações do estado inicial não causam mais que pequenas diferenças no estado final, exceto quando bifurcações afastam consideravelmente as trajetórias. Por exemplo, na catástrofe da cúspide, a bacia de atração de um mínimo é separada por um ponto da bacia de atração do outro, o que leva a diferentes estados finais caso o sistema se encontre à direita ou à esquerda deste ponto, quando da catástrofe.

Histerese: Histerese significa que o estado de um sistema físico em um dado instante depende, não somente dos valores atuais dos parâmetros, mas também dos estados que vinha ocupando anteriormente. Se o sistema possuir dois mínimos e estivermos usando a Convenção do Atraso, qualquer um dos dois poderá estar ocupado, dependendo apenas das condições iniciais. Com a Condição de Maxwell não se observa histerese.

Divergência da Resposta Linear: Pequenas variações dos parâmetros, $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c} + \delta\mathbf{c}$, causam pequenas variações na localização dos pontos de estabilidade: $\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \bar{\mathbf{x}} + \delta\bar{\mathbf{x}}$. Essas variações podem ser descritas por uma relação linear, $\delta x_i = \chi_{ij}(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{c})\delta c_j$, sendo χ_{ij} o tensor susceptibilidade, que diverge nos pontos críticos degenerados. A divergência indica não apenas a vizinhança de uma catástrofe como também quais variáveis participam dela, correspondentes às direções nas quais as variáveis de estado variam enormemente para uma pequena variação dos parâmetros.

Slowing Down Crítico: Se for colocado nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estável, os autovalores do operador de estabilidade determinam as constantes de tempo com que o sistema relaxa, ou as frequências com que o oscila. Quando os parâmetros aproximam-se de valores em que o ponto torna-se degenerado, algumas desses autovalores são reduzidos até anularem-se. Portanto, ao aproximar-se de uma bifurcação, o tempo necessário para algum dos modos alcançarem o ponto de equilíbrio aumenta indefinidamente.

Variância Anômala: Muitas vezes é mais interessante descrever o sistema usando uma distribuição de probabilidade, em geral associada ao potencial: $P(\mathbf{x}; \mathbf{c}) = N e^{-V(\mathbf{x}; \mathbf{c})/D}$ (D é a constante de difusão e N a normalização). Considerando-se que, em cada ponto de equilíbrio, o potencial pode ser expandido sem incluir termos de primeira ordem e com a aproximação em que se considera apenas os termos de segunda ordem, chegamos a uma expressão aproximada para a variância:

$$\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle \equiv \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \approx \delta_{ij} \frac{D}{2\lambda_i}, \quad (1.47)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kröning, x_i são as componentes ao longo dos autovetores e λ_i os autovalores. Em geral, os valores de D são pequenos, o que faz com que a variância também o seja, exceto quando próxima de um ponto crítico degenerado.

1.9 Bifurcações globais

Na seção anterior apresentamos algumas bifurcações que podem ser estudadas com uma expansão em série de Taylor no ponto fixo que sofre a bifurcação. Por considerar apenas as vizinhanças dos pontos, elas são chamadas de bifurcações locais, em contraste com outros tipos de bifurcações que exigem o conhecimento de pontos distantes, chamadas de **bifurcações globais**.

Como um exemplo, consideremos um sistema que possui uma **conexão sela**, ou seja, existe uma órbita que liga a variedade instável de um ponto de sela à variedade estável de outro¹⁰ ponto de sela. O Teorema de Peixoto estabelece que a existência de uma conexão sela é suficiente para a ocorrência de instabilidade estrutural em duas dimensões, visto que, sendo unidimensionais as variedades estável e instável, existe apenas uma direção através da qual a órbita instável de um ponto pode atingir a variedade estável do outro ponto. Devido a isso, qualquer variação na direção da variedade instável fará com que a trajetória correspondente desvie-se para a direita ou para a esquerda da variedade estável do outro ponto. Conforme o caso, a variedade instável alcançará regiões completamente diferentes, assim como a variedade estável, correspondendo a uma bifurcação em que nenhum ponto fixo mudou suas características de estabilidade.

1.10 Caos

A definição e a caracterização do caos são mais complicadas que os comportamentos dinâmicos descritos anteriormente. Se os valores iniciais de um sistema pertencerem à bacia de atração do atrator caótico, observaremos transientes que serão paulatinamente diminuídos, ao mesmo tempo em que a trajetória se tornará cada vez mais próxima do atrator. Antes de apresentar uma definição precisa do caos e do atrator caótico, iremos investigar o oscilador de Duffing, cujo comportamento caótico apresenta aspectos semelhantes aos que encontraremos nos sólitons do capítulo 3.

O oscilador de Duffing possui um potencial com um ponto equilíbrio instável na origem e dois pontos de equilíbrio estável, simétricos em relação a ela (figura 1.1 na página 3). A equação de movimento do oscilador sujeito à força oscilante externa é

$$\ddot{x} = -x + x^3 - \gamma \dot{x} + g \cos(\Omega t). \quad (1.48)$$

A figura 1.7 mostra o espaço de fase na ausência da força oscilante. Quando não há dissipação, existem órbitas que circulam apenas um dos pontos de equilíbrio e órbitas que contornam ambos. O efeito da dissipação é diminuir o movimento até que a partícula pare em um dos pontos de equilíbrio. Se a força oscilante for ligada com g pequeno, a energia roubada pela dissipação é resposta, e a partícula oscila em torno de um dos pontos de equilíbrio estável. Quando g é pouco a pouco aumentada, a amplitude da

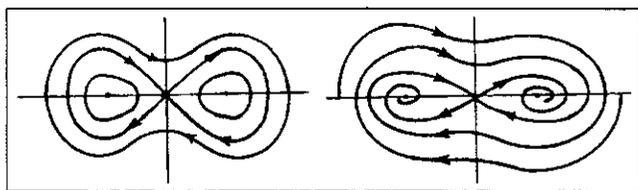


Figura 1.7: Espaço de fase $\dot{x} \times x$ do oscilador de Duffing na ausência de forças externas. No primeiro gráfico $\gamma = 0$ e no segundo $\gamma > 0$.

¹⁰Na realidade, uma conexão sela pode conectar dois pontos diferentes, caso em que a órbita é **heteroclínica** ou conectar um ponto a ele mesmo. No segundo caso, para o qual o resto da discussão do parágrafo também é válida, a órbita é dita **homoclínica**.

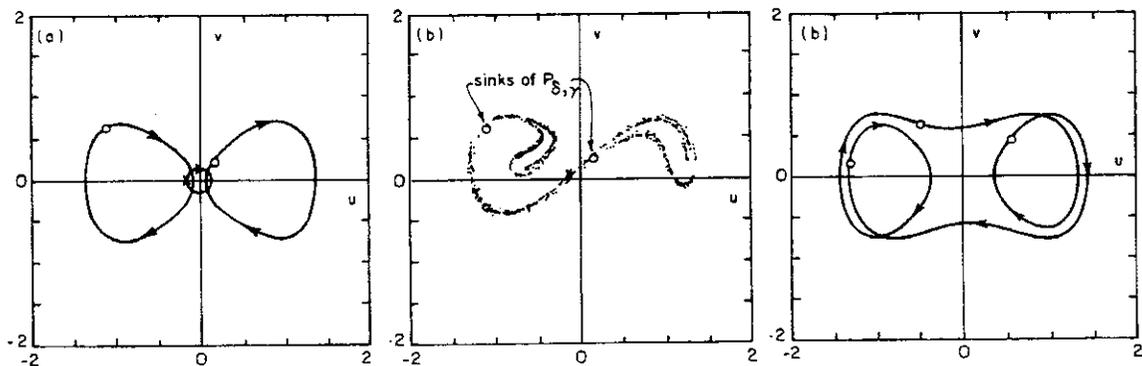


Figura 1.8: Órbitas do oscilador de Duffing (1.48). Nos gráficos *a* e *b*, $\gamma = 0,25$, $\Omega = 1$ e $g = 0,3$, no primeiro deles duas órbitas fechadas interceptam, nos pontos marcados com o símbolo *o*, a seção de Poincaré mostrada no segundo. (*c*) $\gamma = 0,22$. (Retirado de [1].)

oscilação cresce simultaneamente até que, ao cruzar um certo limiar, ocorre uma bifurcação e a partícula torna-se capaz de pular da órbita em torno de um ponto à órbita em torno de outro.

Na figura 1.8 vemos algumas órbitas do oscilador de Duffing sujeito a uma força externa. Em (*a*) a partícula executa órbitas fechadas em torno de um dos pontos de equilíbrio, com o mesmo período da força externa. No entanto, isso não significa que outras órbitas não sejam possíveis para os mesmos parâmetros da equação de movimento, por exemplo, na letra *b* da mesma figura vemos a seção de Poincaré de uma órbita não periódica, que preenche densamente uma região do espaço. A trajetória seguida pela partícula dependerá das condições iniciais. Em (*c*) vemos uma órbita estável com período três vezes maior que o período da força externa. Repare que se o sistema possuísse apenas duas componentes (*x* e *v*) não poderia haver cruzamento de trajetórias, o que está ocorrendo é que, na realidade não existe nenhum cruzamento, pois a variável tempo deve ser considerada, apesar de não ter sido plotada. Se os “cruzamentos” mostrados na figura não ocorressem, as únicas órbitas possíveis seriam as de período um.

A periodicidade de uma órbita pode ser calculada contando-se o número de pontos na seção de Poincaré, que no caso de uma órbita estável definem um atrator. Quando a órbita deixa de ser periódica, esse conjunto é infinito, estendendo-se por uma área do espaço de fase e, caso tratar-se de um **atrator estranho**, esse conjunto de pontos será denso nessa região. Provar que um conjunto atrativo é denso não é possível para grande parte dos sistemas, em particular, no caso de simulações e experimentos reais. Nessas situações é comum que se considere um atrator estranho trajetórias que pareçam preencher uma região do espaço, ainda que, a rigor, não se possa afirmar que não se trate de uma órbita fechada de período suficientemente longo.

Um atrator estranho possui duas propriedades importantes [7]:

- É um atrator, ou seja uma região limitada do espaço de fase para a qual todas trajetórias suficientemente próximas convergem. O atrator precisa ser indecomponível, isto é, a trajetória deve visitar todos os pontos do atrator ao longo do tempo. Um conjunto de pontos fixos isolados não é um atrator único.
- A propriedade que torna estranho o atrator é a extrema sensibilidade às condições iniciais. Apesar de uma eventual contração de um volume no espaço de fase com o passar do tempo, que leva as órbitas a se aproximarem do atrator, a contração não precisa ocorrer em

todas as direções. Dessa forma, pontos arbitrariamente próximos inicialmente tornam-se exponencialmente afastados para tempos suficientemente longos, sem abandonar o atrator.

Um sistema dinâmico que possua um atrator estranho pode ou não apresentar comportamento caótico, conforme as condições iniciais. Na letra *a* da figura 1.8 na página anterior vemos que existem órbitas fechadas estáveis de período 1 fora da bacia de atração do atrator estranho mostrado na letra *b*, apesar de próximas a ele. Apenas as trajetórias que iniciam-se no domínio de atração desse atrator apresentarão **caos**.

1.11 As infinitas dimensões fractais e a mecânica estatística

Uma característica importante dos atratores estranhos, além das mencionadas na seção anterior, é o fato de ser um objeto de dimensão não inteira (**fractal**). Existem diferentes definições para a dimensão fractal, que nem sempre fornecem valores coincidentes. Hentschel e Procaccia [8] mostraram que algumas delas são casos particulares de uma definição mais geral, que fornece um número incontavelmente infinito de dimensões.

Para introduzir essa definição, consideremos um atrator estranho que pode ser completamente contido no interior de M “cubos”, da mesma dimensão d que o espaço de fase, de arestas b e “volume” b^d . Queremos determinar a chance de que, em um certo instante, as coordenadas da partícula presa no atrator estejam no interior de cada cubo k ($k = 1 \dots M$). Essa probabilidade pode ser calculada tomando-se N pontos do espaço de fase ao longo da trajetória da partícula. Se N_k designar o número de pontos no interior do cubo k , a probabilidade é dada por

$$p_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_k}{N}. \quad (1.49)$$

Define-se também a integral de correlação $C(b)$, que determina a chance de que dois pontos quaisquer do atrator distem de menos que b :

$$C(b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \theta(b - |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|) \approx \sum_{k=1}^M p_k^2, \quad (1.50)$$

sendo $\theta(x)$ a função de Heaviside. A **dimensão correlação do fractal** é definida por

$$\nu = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log(C(b))}{\log(b)}. \quad (1.51)$$

Hentschel e Procaccia argumentam que, assim como pode-se definir uma dimensão associada à probabilidade de que dois pontos distem menos que b , pode-se também associá-la à probabilidade de que q pontos distem entre si de uma distância menor que b :

$$D_q \equiv \frac{1}{q-1} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log(\sum p_i^q)}{\log(b)}. \quad (1.52)$$

No mesmo artigo eles demonstram que a **dimensão similaridade** é o limite $q \rightarrow 0$:

$$D = -\lim_{b \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(M)}{\log(b)} = \lim_{q \rightarrow 0} D_q. \quad (1.53)$$

Da mesma forma, a **dimensão informação** também é um limite dessa definição:

$$\sigma = -\lim_{b \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(S)}{\log(b)} = \lim_{q \rightarrow 1} D_q, \quad (1.54)$$

sendo a entropia S , função de b , definida da maneira usual:

$$S = -(k) \sum p_k \log(p_k) \quad (1.55)$$

A generalização é levada um passo adiante ao permitirmos que q assuma qualquer valor real positivo, ainda que nesse caso não se possa associar a dimensão à distância entre os pontos de um conjunto.

Inspirado no fato de que, dentro desse contexto, as probabilidades escalam-se p_k^q , Tsallis [9] propõe uma nova definição para a entropia:

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum p_k^q}{q - 1} \quad (q \in \mathbb{R}). \quad (1.56)$$

A definição convencional (Boltzmann-Gibbs) para a entropia é obtida fazendo-se o limite $q \rightarrow 1$. Buscando os extremos dessa entropia, Tsallis obtém a distribuição de probabilidade de sistemas canônicos e microcanônicos. Novamente, as distribuições convencionais são obtidas no limite $q \rightarrow 1$. No entanto, essa definição de entropia é não extensiva, ou seja, quando unimos dois sistemas não correlacionados, a entropia resultante não é igual à soma das entropias de cada um. O mesmo ocorre com as outras grandezas não extensivas do sistema, que podem ser obtidas a partir da definição de entropia acima.

Posteriormente, Tsallis, juntamente com Jund e Kim [10], simulando o comportamento de partículas de ferro-fluidos, sujeitas a um potencial de interação proporcional a $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^{-\alpha}$ para $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ suficientemente grande, mostraram que a não extensividade pode estar associada a interações de longo alcance. O resultado obtido foi que o comportamento do sistema é não-extensivo quando

$$\alpha \geq \frac{1}{d}, \quad (1.57)$$

sendo d o número de dimensões espaciais. Esse comportamento é obtido porque cada partícula interage significativamente com todas as outras partículas do sistema, fazendo com que a energia varie cada vez mais intensamente a cada nova partícula acrescentada. Devido a isso, não se pode fazer o limite termodinâmico, pois a razão E/N diverge. Esse é o motivo pelo qual uma nova estatística, como a proposta em [9], que generalize a de Boltzmann-Gibbs, se impõe.

1.12 Ressonância geométrica

Diversos métodos tem sido propostos tornar regular o movimento caótico de sistemas dinâmicos. A possibilidade de controlar o movimento caótico de um sistema tem uma importância prática óbvia, visto que em muitos casos o caos surge como uma perturbação que

impede que o ciclo limite desejado seja alcançado. Alguns métodos de controle de caos precisam de retroalimentação (*feedback*), para determinar como reagir de forma a levar o sistema ao comportamento regular quando ele apresenta um pequeno desvio. Outros métodos, como o apresentado nessa seção, trabalham sem retroalimentação, o que, em determinadas situações representa uma vantagem, por prescindir de informações sobre a situação corrente do sistema. Em qualquer caso, é de se esperar que o mecanismo de controle não represente uma alteração muito grande no problema físico e matemático.

Ressonância é o processo no qual um sistema de frequência natural ω responde a uma força externa de frequência Ω . Considere, por exemplo, a equação de movimento

$$\ddot{x} - g(x) = -r(x, \dot{x}) + p(x, \dot{x})q(t), \quad (1.58)$$

na qual a dissipação está embutida em $r(x, \dot{x})$ e $q(t)$ é uma função periódica de período Ω . As frequências naturais são aquelas que a equação admite quando o lado direito da equação está ausente. O lado esquerdo pode ser escrito a partir de uma Hamiltoniana H independente do tempo, o que significa que ele conserva a energia do sistema. Já na presença do lado direito, a evolução começa em um regime apresentando transientes que, em geral, vão diminuindo à medida que o regime estacionário é estabelecido. O regime estacionário é uma órbita periódica em que a energia roubada pela dissipação é repostada pela força externa, situação em que se pode escrever

$$\int_0^T r(x, \dot{x}) dt = \int_0^T p(x, \dot{x})q(t) dt, \quad (1.59)$$

sendo T o período da órbita.

Em osciladores harmônicos, ou com não-linearidades pequenas o bastante para que sejam tratados perturbativamente, pode-se usar séries de Fourier, de modo que a ressonância depende apenas das frequências, internas e externas. Quando a não-linearidade é tão importante que inviabiliza a expansão a partir de uma solução harmônica, é necessário generalizar o conceito de ressonância. Um passo nesse sentido foi dado por R. Chacón [11], que introduziu a **Ressonância Geométrica**, uma ressonância em que não apenas a frequência do termo forçante precisa ser considerado, mas também a forma (geometria) de sua evolução temporal. Na proposta de Chacón, a ressonância geométrica de uma função $x_{RG}(t)$, que é uma solução do sistema livre de dissipação ou forças oscilantes, ocorrerá se

$$-r(x_{RG}, \dot{x}_{RG}) + p(x_{RG}, \dot{x}_{RG})F_{RG}(t) = 0. \quad (1.60)$$

Por levar o sistema a percorrer uma órbita periódica, a ressonância geométrica é um mecanismo de controle de caos que prescinde de retroalimentação. Uma vez escolhida a órbita $x_{RG}(t)$ na qual pretende-se estabilizar o sistema, calcula-se a função $F_{RG}(t)$ correspondente, por exemplo, no caso de um oscilador amortecido possui a expressão usual: $F_{RG}(t) = -\gamma\dot{x}_{RG}(t)$, ou seja, $F_{RG}(t)$ é uma função harmônica de frequência ω .

Nem sempre pode-se adicionar ao sistema físico uma força que corresponda exatamente à necessária para levá-lo à ressonância geométrica. É muito comum o caso em que a oscilação que leva ao caos é harmônica, assim como a força responsável por suprimi-lo:

$$\ddot{x} - g(x) = -\gamma\dot{x} + F \text{har} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) + F_c \text{har} \left(\frac{2\pi qt}{Tp} + \varphi \right). \quad (1.61)$$

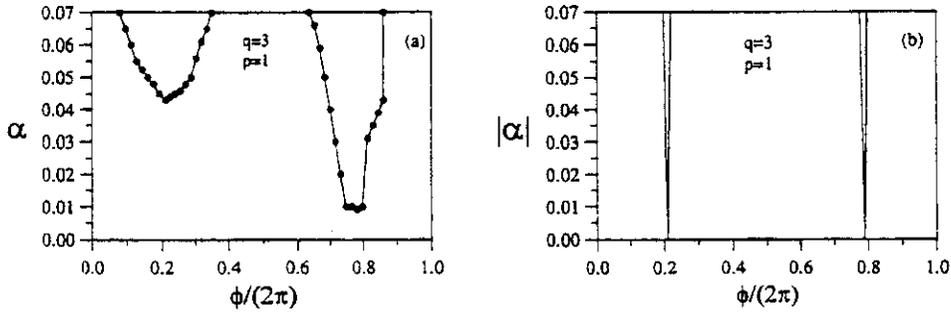


Figura 1.9: Fronteiras entre os movimentos caótico e regular para $\gamma = 0,3$, $F = 8,85$, $T = 2\pi$, $q = 3$ e $p = 1$, e condições de contorno para as quais o movimento é caótico com $\alpha = 0$. ϕ é a fase entre a força de controle e força que provoca o caos, e $\alpha = F_c/F$ a razão entre suas amplitudes. (a) Os pontos são resultados de simulações numéricas, sendo conectados por linhas para guiar a vista. (b) Resultado analítico da teoria de RG. (Retirado de [11].)

podendo har representar as funções seno ou cosseno, e sendo p e q inteiros primos entre si. Na equação acima o caos é devido ao termo proporcional a F e os parâmetros F_c , p , q e φ serão ajustados visando controlá-lo. Dada a impossibilidade de cancelar totalmente o lado direito da equação, de modo que a solução do lado esquerdo $x_{RG}(t)$ seja uma solução da equação, procuraremos estabilizar o sistema em uma função $x(t) = x_{RG}(t) + \delta x(t)$, com $\delta x(t)$ pequeno. Com essa solução não será possível impor a condição de que a energia se conserve em todos os instantes, mas apenas na média e na ordem mais baixa de δx :

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \frac{1}{T'} \right\rangle_{T'} \equiv \int_0^{T'} \frac{dE}{dt} dt \approx 0, \quad (1.62)$$

sendo T' o período de $x_{RG}(t)$. Dada a equação de movimento (1.61) pode-se reescrever a variação de energia devido ao lado direito como

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{T'} &= -\gamma \langle \dot{x}_{RG}^2 \rangle_{T'} + F \left\langle \dot{x}_{RG} \operatorname{har} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right\rangle_{T'} \\ &+ \alpha F \left\langle \dot{x}_{RG} \operatorname{har} \left(\frac{2\pi qt}{Tp} + \varphi \right) \right\rangle_{T'} + O(\delta x). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Quando existem soluções algébricas, a condição (1.62) leva a uma expressão para $\alpha \equiv F_c/F$ em função de φ , p e q . Sistemas de controle de caos são supostos não perturbar sensivelmente o sistema, o que significa que $F_c \ll F$, isto é, $\alpha \ll 1$, condição atingida através da escolha conveniente da fase φ entre a força de bombeio e a de controle. R. Chacón ilustra a utilização de seu método com a força conservativa $g(x) = -x^3$, da qual se conhecem soluções algébricas. A figura 1.9 mostra algumas das “línguas” dentro das quais o caos é suprimido de acordo com sua teoria, assim como os resultados numéricos dos valores de α acima dos quais se consegue o controle. A diferença entre ambos é evidente, mas pode-se notar que realmente existem línguas de estabilidade e que a teoria da RG permite estimar as frequências em que o caos é mais facilmente controlado. Existe uma conexão com as chamadas línguas de Arnold [7] que surgem do mapa originário da seção de Poincaré da rotação dentro de um toro. Assim como a ressonância

geométrica, cada língua é originária de uma razão racional entre as duas frequências, e dentro delas o movimento é *phase-locked*.

1.13 Ressonância estocástica

No início da década de 80, Benzi e outros [12] introduziram o conceito de **ressonância estocástica** como uma explicação para as mudanças no regime climático da Terra, que ocorrem com períodos aproximados de 100.000 anos (eras glaciais). É sabido que as variações de excentricidade da órbita ocorrem com esse período, no entanto, de acordo com as teorias correntes, seus efeitos não são grandes o bastante para causar mudanças tão radicais no clima. Introduzindo um “potencial climático” biestável sugeriram que a cooperação entre essa perturbação periódica e variações aleatórias no clima é capaz de ocasionar essas transições. Desde então, a ressonância geométrica tem sido aplicada em diferentes situações, tais como modelos de funcionamento de neurônios, SQUIDS, dispositivos ópticos e eletrônicos, análise de sinais, conversores analógico-digitais etc [13].

O mecanismo da ressonância geométrica pode ser entendido considerando-se um sistema dinâmico biestável, que oscila próximo aos pontos de equilíbrio. Pequenas perturbações periódicas não são capazes de retirar o sistema das proximidades de um dos mínimos e levá-lo ao outro. A introdução de um ruído, ainda que pequeno, leva a uma probabilidade de transição finita, que pode apresentar alguma coerência com o sinal periódico. Essa interferência entre dois sinais de entrada exclui os sistemas lineares daqueles capazes de apresentar ressonância estocástica. Em certas circunstâncias, a cooperação entre a entrada periódica e a ruidosa faz com que o aumento no ruído incremente mais a resposta coerente que o ruído na saída. No entanto, se o ruído aumenta muito, transições passam a ocorrer a todo instante, e o sinal de saída perde a correlação com o sinal periódico. É esse aumento no sinal de saída coerente, para uma dada intensidade do ruído, que dá origem ao nome ressonância estocástica, ainda que, diferentemente da ressonância usual, o ajuste não ocorra na frequência da perturbação periódica.

Várias teorias foram propostas [13,14], apresentando diferentes graus de complexidades e descrevendo mais ou menos completamente os fenômenos observados. Uma explicação bastante satisfatória relaciona-se com a **taxa de Kramers**, que corresponde ao número de transições que ocorrem por unidade de tempo, quando o sistema está sujeito exclusivamente ao ruído. No caso do ruído branco $\eta(t)$ ($\langle \eta(t) \rangle = 0$, $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$), mesmo valores pequenos de D levam a taxas de Kramers finitas, que permitem definir uma frequência característica, igual ao dobro dessa taxa. O aumento de D aumenta a probabilidade de transição e, a grosso modo, pode-se dizer que a ressonância estocástica ocorrerá quando a frequência relacionada ao ruído coincidir com a frequência da força periódica.

Conforme proposto por MacNamara e Wiesenfeld [14], a ocorrência da ressonância estocástica pode ser detectada observando-se a razão entre o sinal e o ruído (*signal-to-noise ratio*, ou SNR). Observe a figura 1.10a, que mostra o espectro de potência da saída de um sistema sujeito a um ruído branco e a uma força periódica. Sem a força periódica o pico não estaria presente, apenas a lorentziana causada pelo ruído branco. Essa lorentziana é ligeiramente abaixada com a inclusão da força periódica, visto que parte da energia fornecida pelo ruído é canalizada para a transição coerente. A razão entre o sinal e o ruído é calculada dividindo-se o valor do pico pelo ruído nessa mesma frequência, que é obtido da interpolação dos pontos vizinhos ao

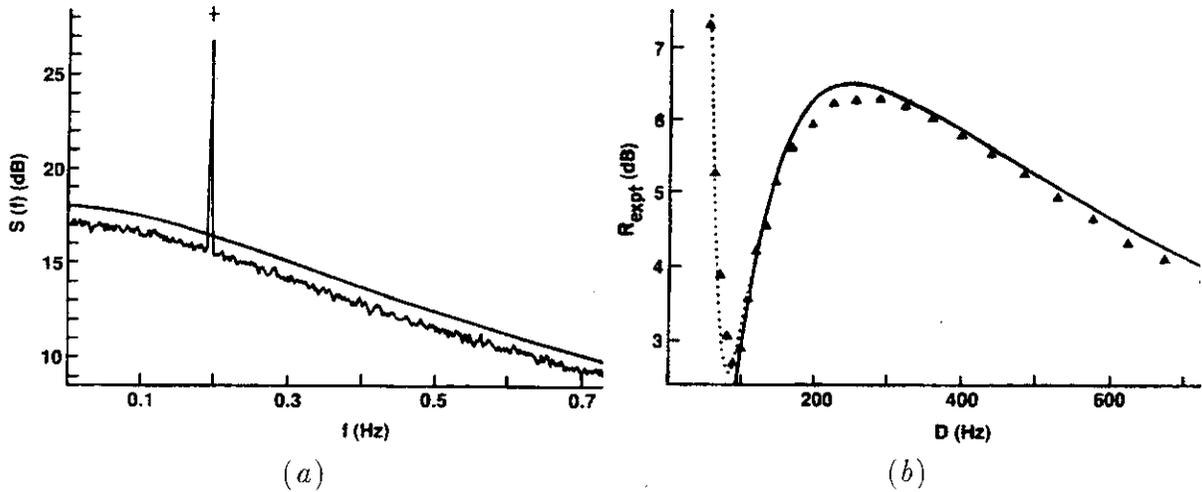


Figura 1.10: (a) Espectro de potência de saída típico, com um pico presente na mesma frequência da força periódica. (b) Razão sinal-ruído em função da intensidade do ruído branco. (Retirado de [14].)

pico. A figura 1.10b mostra que a SNR atinge um máximo para um determinado valor de ruído, caracterizando a ressonância estocástica.

1.14 Sistemas dinâmicos em derivadas parciais

Os sistemas dinâmicos (1.2) discutidos até agora descrevem o comportamento de um vetor \mathbf{y} que possui componentes y_i reais. Nos sistemas dinâmicos em derivadas parciais o vetor \mathbf{y} é substituído por uma função ϕ , definida por infinitos valores reais, cada um deles assinalados por $\phi(x)$. A principal diferença entre estes dois tipos de sistemas dinâmicos é que o índice discreto i do primeiro caso foi substituído pela variável contínua x .

De modo semelhante ao conjunto discreto de equações (1.2) descrevendo a evolução de cada componente y_j , o comportamento de ϕ é determinado para cada um dos infinitos valores da variável contínua x :¹¹

$$\phi_i(x, t) = F(\phi(x, t), \phi_x(x, t), \dots, \phi_{x^N}(x, t), x, t). \quad (1.64)$$

No sistema (1.2), o comportamento de cada elemento $y_i(t)$ era descrito por uma equação, que podia depender do valor de cada um dos outros elementos do vetor naquele mesmo instante t . No sistema (1.65), o valor da função para cada x depende dos valores da função em outros pontos naquele mesmo instante t através das derivadas parciais em x .

¹¹Deste ponto em diante, os índices x , t e τ indicarão sempre as derivadas parciais correspondentes:

$$\phi_t(x, t) \equiv \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x, t}$$

Outros índices não representam derivadas, e os índices das derivadas parciais de funções com índices serão precedidos por vírgula: $\phi_{v,xt} \equiv \partial^2 \phi_v / (\partial x \partial t)$.

Buscando dar maior generalidade à equação (1.64), o campo escalar $\phi(x, t)$, será substituído por um campo vetorial $\phi(x, t)$, descrito pelos valores de seus componentes $\phi_i(x, t)$ na posição x em cada instante t . O campo vetorial tem a vantagem de permitir a descrição de vários campos acoplados e de derivadas no tempo de ordem maior que um. A função F deve se transformar em um operador vetorial, dependente das diversas derivadas do vetor $\phi(x, t)$:

$$\phi_t(x, t) = F(\phi(x, t), \phi_x(x, t), \dots, \phi_{x^N}(x, t), x, t). \quad (1.65)$$

Do mesmo modo que a equação (1.2), a equação (1.65) também abrange problemas que envolvem derivadas parciais em t da ordem que se deseje, basta que se definam funções suplementares. Por exemplo, a equação de Landau-Ginzburg-Higgs [15]

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - m^2\phi + g^2\phi^3 = 0, \quad (1.66)$$

pode ser reescrita como

$$\phi_{2,t} = \phi_{1,xx} + m^2\phi_1 - g^2\phi_1^3, \quad (1.67a)$$

$$\phi_{1,t} = \phi_2. \quad (1.67b)$$

Esta forma de escrever o sistema envolvendo apenas derivadas primeiras no tempo é particularmente útil na construção de algoritmos de integração numérica [16].

Uma característica importante de um sistema de equações em derivadas parciais são as transformações pelas quais ele é invariante. Para o nosso estudo, a **transformação de Lorentz** [17] é a mais importante delas, consistindo na definição das seguintes variáveis:

$$x' \equiv \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \quad \text{e} \quad t' \equiv \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (1.68)$$

que possuem as transformações inversas

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}} \quad \text{e} \quad t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1.69)$$

As derivadas parciais correspondentes são imediatamente obtidas:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (1.70a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (1.70b)$$

Com estas expressões chega-se a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial t'^2}. \quad (1.71)$$

É necessário definir também a função

$$\phi'(x', t') = \phi\left(\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}\right). \quad (1.72)$$

Substituindo-se estas definições na expressão (1.66), chega-se a

$$\phi'_{t't'} - \phi'_{x'x'} - m^2\phi' + g^2\phi'^3 = 0. \quad (1.73)$$

Esta expressão tem o mesmo formato que a original (1.66), portanto dizemos que a equação de Landau-Ginzburg-Higgs é **invariante sob transformações de Lorentz**. Da mesma forma, qualquer equação que dependa apenas de ϕ e que, como derivada parcial, inclua apenas $\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$, será invariante sob transformações de Lorentz.

Assim como nos sistemas dinâmicos da seção 1.1, nos sistemas em derivada parciais é útil conhecer as soluções estacionárias, ou seja, as funções

$$\phi(x, t) = \psi_0(x), \quad (1.74)$$

para as quais a equação (1.65) se escreve ($\tau \equiv x$)

$$0 = \mathbf{F}(\psi_0(\tau), \psi_{0,\tau}(\tau), \dots, \psi_{0,\tau^N}(\tau), \tau), \quad (1.75)$$

com F sem dependência explícita como tempo. Se o sistema for invariante sob transformações de Lorentz, obtemos simultaneamente, usando a expressão (1.72), as soluções propagantes

$$\phi(x, t) = \psi_0\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right). \quad (1.76)$$

Em alguns sistemas, é necessário buscar soluções que satisfaçam

$$\phi(x, t) = \psi_v(x - vt), \quad (1.77)$$

para as quais ($\tau \equiv x - vt$)

$$-v\psi_{v,\tau}(\tau) = \mathbf{F}(\psi_v(\tau), \psi_{v,\tau}(\tau), \dots, \psi_{v,\tau^N}(\tau)), \quad (1.78)$$

com F sem dependência explícita com x ou t . Os dois procedimentos levam a equações independentes de t , que podem ser integradas para obter soluções que, exceto pela translação, não mudam de forma com o tempo.

A estabilidade destas soluções pode ser testada com um procedimento semelhante ao da seção 1.1. Consideremos uma solução que, inicialmente, difere de ψ_0 ou ψ_v por uma pequena perturbação $\zeta(x, 0)$ ¹²:

$$\phi(x, t) = \begin{cases} \psi_0(x, t) + \zeta(x, t) \\ \psi_v(x, t) + \zeta(x - vt, t) \end{cases}. \quad (1.79)$$

Dados x e t , a função \mathbf{F} pode ser expandida em série de Taylor em torno dos valores de $\psi(x, t)$ e de suas derivadas¹³:

$$F(\phi(x, t), \phi_x(x, t), \dots, \phi_{x^N}(x, t), x, t) \approx F|_{\psi(x), x, t} + \sum_{n=0}^N \frac{\partial F}{\partial \phi_{x^n}} \Big|_{\psi(x), x, t} \zeta_{x^n}. \quad (1.80)$$

¹²Aqui e no restante da seção, a primeira linha após a chave refere-se à solução estacionária tipo (1.74) e a segunda linha à solução tipo (1.77).

¹³O desenvolvimento apresentado a seguir considera um campo escalar $\phi(x, t)$, a fim de não sobrecarregar o texto. O desenvolvimento para o campo vetorial $\phi(x, t)$ é apresentado no Apêndice A

Definindo o operador diferencial¹⁴ D

$$D \equiv \sum_{n=0}^N \frac{\partial F}{\partial \phi_{x^n}} \Big|_{\psi(x),x,t} \frac{\partial^n}{\partial x^n}, \quad (1.81)$$

Substituindo as expressões (1.79)-1.81 na equação (1.65) e utilizando a expressão (1.75) ou (1.78), chegamos ao sistema linear

$$\zeta_t(x,t) = \begin{cases} D\zeta(x,t) \\ (D + v \frac{\partial}{\partial x}) \zeta(x,t) \end{cases}. \quad (1.82)$$

Podemos escrever a evolução temporal da função $\zeta(x,t)$ como ($\xi(x) \equiv \zeta(x,0)$)

$$\zeta(x,t) = \begin{cases} e^{tD} \xi(x) \\ e^{t(D+v \frac{\partial}{\partial x})} \xi(x) \end{cases}, \quad (1.83)$$

com $e^{t\cdots}$ definido por (1.10). Calculando os autovetores e autovalores do operador D , ou $D + v \partial/\partial x$, pode-se determinar a estabilidade da solução [18]. Uma solução tipo (1.74) ou (1.77), será **assintoticamente estável** se todos seus autovetores tiverem parte real negativa. Neste caso, qualquer perturbação do sistema, suficientemente próximo de uma solução assintoticamente estável, decairá exponencial com o tempo, e o sistema volta à sua forma estável. Se algum de seus autovalores tiver a parte real maior que zero, a solução será **instável**. Se alguns autovalores tiverem parte real negativa e outros forem puramente imaginários, as perturbações poderão fazer com que o sistema oscile em torno da solução, que será chamada **estável**.

Uma característica importante de sistemas invariantes sob translação, isto é, sem dependência explícita em x , é que qualquer solução obtida através das equações (1.74) e (1.75) será estável sob translação. Essa estabilidade pode ser demonstrada partindo-se da equação de autovalores

$$\lambda \xi(x) = \begin{cases} D\xi(x) \\ (D + v \frac{\partial}{\partial x}) \xi(x) \end{cases}, \quad (1.84)$$

a qual sempre possui como solução o autovetor

$$\xi_0 = -\delta \psi_x \quad (1.85)$$

com autovalor $\lambda_0 = 0$:¹⁵

$$\begin{aligned} \psi_x &= \sum_{n=0}^N \frac{\partial F}{\partial \phi_{x^n}} \Big|_{\psi(x)} \psi_{x^{n+1}} \\ &= \frac{d}{dx} F(\psi(x), \psi_x(x), \dots, \psi_{x^N}(x)) = 0, \end{aligned} \quad (1.86)$$

¹⁴O operador diferencial matricial correspondente, D , é dado pela equação (A.5).

¹⁵Novamente, demonstração abaixo trata do campo escalar, no entanto a demonstração para o campo vetorial também é imediata, apenas mais trabalhosa.

usando a identidade (1.75)¹⁶. Esse autoestado é chamado de **modo translacional** do sistema, pois quando substituimos as expressões (1.85) e (1.83) na equação (1.79),

$$\phi(x, t) = \psi(x, t) + e^{0t}\xi_0 = \psi(x, t) - \delta\psi_x = \psi(x - \delta, t). \quad (1.87)$$

vemos que o autovalor ξ_0 corresponde à translação infinitesimal de δ . O autovalor $\lambda_0 = 0$ desse autoestado reflete a invariância sob translação do sistema. Todas as posições do sistema são equivalentes, logo, se a solução estável sofrer uma translação δ , também será estável na sua nova posição. Portanto, a solução estacionária não será atraída nem repelida em direção a posição inicial, permanecendo parada em sua nova posição, o que só é possível se a função $\xi(x)$ for uma autofunção de autovalor 0 na equação (1.83).

Por analogia aos sistemas dinâmicos apresentados na seção 1.1, a teoria linear da estabilidade foi apresentada usando-se um sistema de equações parciais em que não existem derivadas no tempo de ordem maior que um. Em geral, quando temos apenas um campo, é mais simples tratar uma equação de movimento escalar em derivadas parciais, mesmo que essa inclua derivadas de ordens superiores no tempo. Nesse caso, substitui-se a expressão

$$\phi(x, t) = \psi(x, t) + e^{\lambda t}\xi(x), \quad (1.88)$$

na equação de movimento, expande-se em Taylor onde necessário e mantem-se apenas os termos lineares em $\psi(x, t)$, chegando-se a um problema que leva aos mesmos autovalores obtidos do operador diferencial D (ou $D + v\partial/\partial x$).

1.15 Equações integráveis e não integráveis

O conceito de integrais de movimento é importante em muitas áreas da Física e particularmente útil no estudo de sistemas dinâmicos. Integral de movimento, ou constante de movimento, é uma grandeza que se mantém constante durante a evolução do sistema. Geralmente, as integrais de movimento refletem as simetrias do sistema, como o teorema de Noether [17] demonstra para os sistemas lagrangeanos.

Como um exemplo, consideremos o sistema dinâmico

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -\nabla V(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix}, \quad (1.89)$$

em que \mathbf{x} e \mathbf{v} são vetores do espaço tridimensional. Se V for independente do tempo, a energia $E = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2 + V(\mathbf{x})$ será uma constante de movimento. Se V for radial, ou seja, depender apenas de $\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$, então o momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ será outra constante de movimento. Finalmente, se V for independente de \mathbf{x} , então o momento linear $\mathbf{P} = \mathbf{v}$ será uma constante de movimento.

Cada constante de movimento impõe uma restrição quanto às possíveis trajetórias que o sistema pode seguir. O sistema acima possui seis graus de liberdade, portanto, não podemos ter mais que seis integrais de movimento independentes. Com V independente de \mathbf{x} e t , a

¹⁶A expressão correspondente para ψ_v inclui $v\psi_{v,xx}$ adicionado aos três primeiros membros das igualdades acima, e usa-se a identidade (1.78).

conservação do momento linear fixa o valor de \mathbf{v} para todos os tempos. Nesse caso, energia é uma constante de movimento redundante, pois pode ser escrita em função do momento linear. Já o momento angular determina uma reta ao longo do qual a partícula se desloca, suprimindo dois graus de liberdade do movimento, o que indica que das três componentes de \mathbf{L} , apenas duas são independentes. Dessa forma, resta ao sistema apenas um grau de liberdade através do qual ele pode evoluir, sendo os outros cinco parametrizados pelas constantes de movimento.

Sistemas dinâmicos em derivadas parciais possuem infinitos graus de liberdade, portanto, podem possuir infinitas integrais de movimento independentes. Foi demonstrado que em alguns sistemas isto realmente acontece. São exemplos a equação de Korteweg e de Vries, a equação de *sine*-Gordon e a equação de Schrödinger não linear. Sistemas como estes, que possuem infinitas integrais de movimento são ditos **integráveis**. Como uma regra geral, podemos dizer que sistemas integráveis impõem a existência de uma Lagrangeana. A formulação lagrangeana de um problema é muito conveniente, permitindo, através do tensor de tensões, obter algumas possíveis integrais de movimento. Estas integrais são discutidas no apêndice B.

1.16 Sólitons

A definição de sólíton está longe de ser única na literatura [19]. O ponto de partida da maioria das definições é a capacidade do sistema de manter algum tipo de excitação restrita a uma região do espaço. Esta excitação não necessita ser estacionária, mas caso esteja deslocando-se pelo espaço, este deslocamento deve ocorrer de forma que a excitação mantenha-se limitada a uma região finita.

Um tipo de solução que cumpre este requisito pode ser obtida das equações (1.74)-1.78, desde que as funções $\psi(x)$ estejam confinadas como exposto acima. Esta condição é satisfeita quando a função tende a $\psi_{+\infty}$ quando $x \rightarrow \infty$ e a $\psi_{-\infty}$ com $x \rightarrow -\infty$. Exemplos como o *kink* e o *bell-soliton* podem ser vistos na figura 1.11 na página 34 (*b* e *c*) e na figura 1.12 na página 34 (*b* e *c*). Em ambos os casos vemos que o sólíton está restrito às regiões próximas da origem.

A outra condição que costuma ser imposta aos sólítions é que eles sejam capazes de sobreviver a colisões com outros sólítions. Algumas vezes se impõe que o sólíton volte a sua forma original após a interação. Em muitos sistemas, uma solução com N sólítions suficientemente afastados, pode ser aproximada pela soma de sólítions:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(x, t) = \sum_{n=1}^N \psi_{v_n}(x - v_n t - \delta_{-\infty, n}), \quad (1.90)$$

onde ψ_v é a solução do sistema em que um único sólíton propaga-se com velocidade v . Pode-se também escrever, com maior generalidade, uma soma dos diferentes tipos de sólítions que o sistema admita. A condição de que a forma seja mantida pode ser escrita como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(x, t) = \sum_{n=1}^N \psi_{v_n}(x - v_n t - \delta_{+\infty, n}). \quad (1.91)$$

A única mudança em relação a expressão anterior é que após as colisões, as fases iniciais $\delta_{-\infty, n}$ mudaram-se em $\delta_{+\infty, n}$. Ou seja, após as interações os sólítions adiantaram-se ou atrasaram-se em

relação às posições que ocupariam se não tivessem colidido, mantendo as formas e velocidades originais. Esta condição nem sempre é tão rigorosa, e algumas vezes permite-se que o sóliton tenha sua forma e velocidade alteradas.

No estudo do comportamento dos sólitons, podemos dizer que o método analítico mais importante é o **Método de Espalhamento Inverso**, desenvolvido por Gardner, Greene, Kruskal e Miura [20], e posteriormente posto em uma forma mais geral por Lax [21]. A idéia básica [22] do método é introduzir, em um dado tempo, uma “transformação espectral” da função $\phi(x, t)$ com respeito à variável x , semelhante ao uso de transformadas de Fourier para resolver um sistema diferencial linear. As principais diferenças da transformação espectral $S(k, t)$ em relação à transformada de Fourier são o fato de que a correspondência $u(x, t) \rightarrow S(k, t)$ não é linear, e a divisão do espectro de k em uma parte contínua e real e outra discreta e imaginária. A parte contínua abrange comportamentos semelhantes aos das ondas que ocorrem comumente na Física, já a parte discreta descreve os sólitons.

A principal vantagem da transformação $S(k, t)$, que ela compartilha com a transformação de Fourier, reside no fato de que a sua evolução temporal pode ser computada facilmente, de maneira analítica. Uma vez obtida a transformação $S(k, t)$ em um tempo futuro, a transformação inversa $S(k, t) \rightarrow u(x, t)$ tem de ser realizada. Esta última transformação não é trivial, sendo a origem do nome espalhamento inverso, pois este é justamente o método pelo qual a ela é realizada.

O Método de Espalhamento Inverso tem uma importância fundamental não somente por ser uma solução analítica do problema dos sólitons. Outro fato importante é que, quando ele é aplicado, os sólitons presentes inicialmente serão incluídos na transformação $S(k, t)$, e continuarão presentes nessa transformação depois que for calculada sua evolução temporal. A função $u(x, t)$ final incluirá os mesmos sólitons que incluía inicialmente, com as mesmas velocidades, talvez um pouco atrasados ou adiantados em relação à posição que cada um deles ocuparia caso estivesse sozinho no espaço. Com isso, foi demonstrada a estabilidade dos sólitons quando eles colidem entre si ou com ondas do espectro contínuo de k .

Tendo em vista o Método de Espalhamento Inverso, muitos autores sugerem que a designação sóliton devia aplicar-se apenas às soluções de equações diferenciais que satisfizessem as condições acima. Foi descoberto que esse método está ligado à existência de infinitas integrais de movimento, ou seja, só é aplicável a sistemas integráveis. Ele foi originalmente [20] proposto para resolver o problema de Korteweg-deVries, que desenvolveu uma equação para explicar o primeiro sóliton observado, ondas solitárias estáveis na superfície da água de um canal [23]. Posteriormente, já foi aplicado na equação de Schrödinger não linear, e na equação de *sine*-Gordon. No entanto, equações não integráveis também possuem ondas solitárias, algumas capazes de sobreviver a interações sem mudar sua forma ou velocidade. Outras trocam energia e podem ser aceleradas ou freadas. Outras ainda podem mudar de forma, ou mesmo desaparecer conforme a interação a que sejam submetidas. No entanto, uma parcela grande da comunidade de físicos tem usado o termo sóliton para estas ondas também, relaxando um pouco a definição inicialmente proposta.

Outra ferramenta importante são as chamadas **Transformações de Baklund** [18], consistindo em um mapeamento de uma solução do sistema contendo N sólitons em outra contendo $N + 1$ sólitons, levando a novas soluções algébricas. Estes métodos são úteis na determinação das soluções de um sistema, porém, em nosso trabalho, que em geral trata de equações não integráveis, eles nem sempre eles podem ser aplicados. Para determinar as soluções solitônicas

vamos usar principalmente o procedimento descrito a seguir.

Em muitos casos, quando trabalhamos com um campo escalar, a equação (1.75), ou (1.78), pode ser rearranjada¹⁷ de forma que a derivada segunda de $\psi(\tau)$ seja escrita em função de $\psi(\tau)$, das outras derivadas de $\psi(\tau)$ e de τ :

$$\psi_{\tau\tau} = \mathcal{F}(\psi, \psi_\tau, \tau). \quad (1.92)$$

Observe que essa equação é exatamente a mesma que descreve o movimento de uma partícula sujeita a uma força \mathcal{F} , se imaginarmos que sua posição é designada por ψ e que τ representa o tempo. Isto permite que nos beneficiemos da familiaridade que já possuímos com este tipo de sistema, para procurarmos as soluções $\psi(\tau)$.

Na busca de uma expressão para um sóliton estacionário (1.74), é muito conveniente o caso em que podemos escrever a força \mathcal{F} como¹⁸

$$\mathcal{F}(\psi_0, \psi_{0,\tau}, \tau) = \mathcal{F}(\psi_0) = \frac{dU(\psi_0)}{d\psi_0}. \quad (1.93)$$

Desse modo, podemos imaginar que a equação (1.92) descreve o movimento de uma partícula sujeita a um potencial¹⁹ $-U(\psi)$. Multiplicando a equação (1.92) por ψ_τ e usando a identidade (1.93), podemos integrar em τ , obtendo a equação para a conservação de energia:

$$\frac{1}{2}\psi_{0,\tau}^2 = E + U(\psi_0). \quad (1.94)$$

Integrando novamente encontramos uma equação integral para ψ_0 :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\psi_0(0)}^{\psi_0(\tau)} \frac{1}{\sqrt{E + U(\psi)}} d\psi = \tau. \quad (1.95)$$

As soluções solitônicas correspondem a uma partícula cuja posição ψ_0 tende a máximos de $-U(\psi)$ para $\tau \rightarrow \infty$ e para $\tau \rightarrow -\infty$, pois apenas neste caso temos uma solução que possui limite nestes dois extremos (figura 1.11 na próxima página). Como a energia dessa partícula imaginária é conservada pelas equações (1.92) e (1.93), os dois máximos de $-U(\psi)$ devem ser iguais: $U(\psi_{0,+\infty}) = U(\psi_{0,-\infty})$. Se $\psi_{0,+\infty} \neq \psi_{0,-\infty}$, temos um *kink* ou um *anti-kink*, caso contrário temos um *bell-soliton*.

O nome *kink* vem do fato de que este sóliton realiza um “salto” ao conectar dois pontos de máximos, $\psi_{0,-\infty}$ e $\psi_{0,+\infty}$, em que o potencial $-U(\psi_{0,-\infty}) = -U(\psi_{0,+\infty})$ assume o mesmo valor. Na figura 1.11 na página seguinte, vemos como uma partícula pode sair do ponto $\psi_{0,-\infty} = \psi_1$ em um tempo infinitamente remoto, passar por ψ_2 e aproximar-se assintoticamente do ponto $\psi_{0,+\infty} = \psi_3$. A trajetória contrária também é possível, correspondendo ao *anti-kink* mostrado na mesma figura.

¹⁷No restante dessa seção, os campos vetoriais ϕ e ψ serão substituídos pelos campos escalares ϕ e ψ , conseqüentemente, teremos apenas uma equação de movimento.

¹⁸Quando a equação (1.92) é obtida a partir da equação (1.78), então a força não pode ser escrita como o gradiente de um potencial, devido à existência do termo $v\phi_{v,\tau}$.

¹⁹Note que o potencial está definido com o sinal contrário ao que lhe é usualmente atribuído quando descrevemos a energia de uma partícula sujeita à força \mathcal{F} . O motivo é que quando discutirmos a energia armazenada no campo $\phi(x, t)$, o potencial definido dessa maneira assumirá o sinal correto.

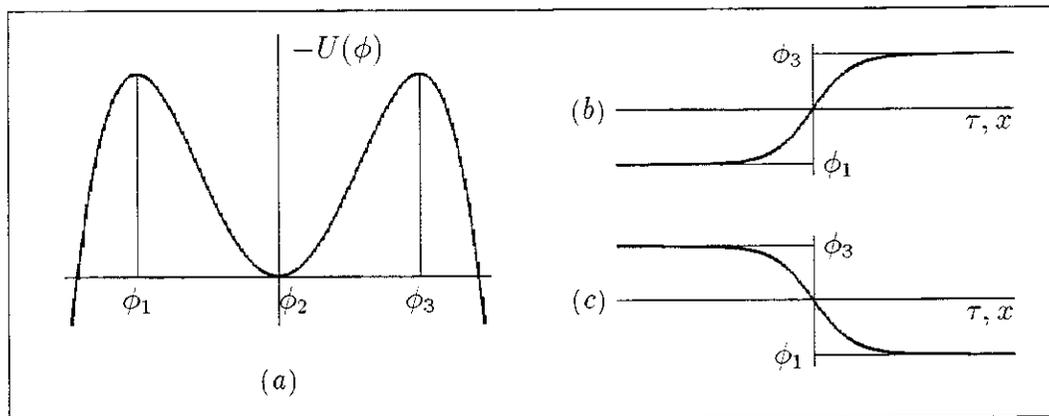


Figura 1.11: (a) Potencial $-U(\phi)$ com dois máximos de mesmo valor. (b) *Kink*, correspondente a uma partícula que parte de ϕ_1 em um tempo $\tau \rightarrow -\infty$, chegando ao ponto ϕ_3 em $\tau \rightarrow \infty$. (c) *Antikink*, partícula que executa a trajetória inversa.

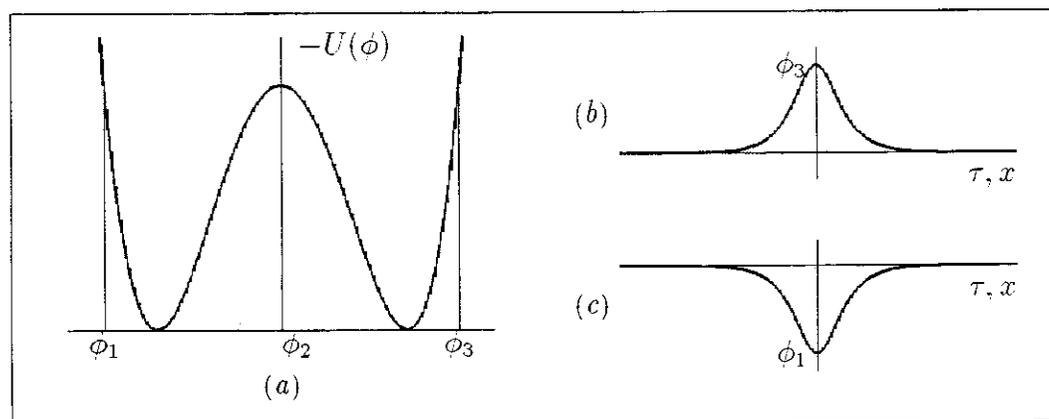


Figura 1.12: (a) Potencial $-U(\phi)$ com um máximo local, o que permite a existência de *bell-sólitos*. (b) Sóliton correspondente à partícula que sai da origem, vai ao ponto ϕ_3 e regressa à origem. (c) Partícula que se move na direção contrária.

O *bell-soliton*, possui a forma de um sino, conecta um ponto de máximo de $-U(\psi)$ a ele mesmo. Para tanto, é necessário que haja uma barreira em que a partícula possa refletir e voltar assintoticamente ao ponto de partida (figura 1.12). A partícula só pode refletir na barreira se essa for mais alta que o ponto de partida, portanto, $-U(\psi_{0,-\infty} = \psi_{0,+\infty})$ não pode ser um máximo global único.

As soluções obtidas acima sempre conectam máximos de $-U(\psi)$, ou seja, mínimos de $U(\phi)$, o que em termos da solução geral $\phi(x, t)$ resulta em $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x, t_0) = \phi_{-\infty}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x, t_0) = \phi_{+\infty}$, sendo $\phi_{-\infty}$ e $\phi_{+\infty}$ mínimos de $U(\phi)$. Nos sistemas hamiltonianos, ou quase hamiltonianos, pode-se argumentar que a solução só será estável se os extremos forem mínimos, locais ou não, caso contrário, qualquer perturbação fará com que o sistema busque uma situação de menor energia, fazendo com que o campo $\phi(x, t)$ desça o potencial $U(\phi)$ onde ele não for mínimo. Por esse motivo, o sóliton da figura 1.12b é instável, qualquer perturbação que leve-o além de ϕ_3 crescerá indefinidamente, fazendo-o descer o potencial $U(\phi)$ nesse ponto, aumentando e alargando o sóliton.

Uma distinção entre *kinks* e *bell-solitons* é a carga topológica [19], que definiremos como

$$Q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x, t) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x, t). \quad (1.96)$$

Com essa definição, vemos que o *bell-soliton* possui carga topológica 0 e o *kink* possui carga topológica diferente de zero, podendo-se dizer que este último é um sóliton topológico. Esta definição é importante porque a carga topológica de soluções que conectam mínimos de $U(\phi)$ não varia com o tempo. Em um sistema de derivadas parciais, se em uma região do espaço o campo $\phi(x)$ ocupar um mínimo de $U(\phi)$, o campo ficará neste mínimo até que uma perturbação capaz de retirá-lo do mínimo propague-se até essa região. Sendo finita a velocidade de propagação de qualquer perturbação, os limites $\pm\infty$ nunca são atingidos, e os limites da equação (1.96) serão sempre os mesmos. Se em um dado instante o sistema contém um único *kink*, $Q > 0$, qualquer evolução que ele apresente nunca resultará em um sistema totalmente vazio, pois neste caso a carga topológica seria nula. Um *kink* e um *anti-kink* coexistindo no espaço apresentam $Q = 0$, portanto, existe a possibilidade, do ponto de vista da carga topológica, de que eles se aniquilem totalmente. O mesmo ocorre com *bell-solitons*, que podem desaparecer devido à dissipação. Alguns sistemas, como o de *sine-Gordon* apresentam infinitos pontos de mínimo para $U(\phi)$. Neste caso a carga topológica dependerá da diferença entre o número de *kinks* e o número de *anti-kinks*, que será conservada.

Em sistemas integráveis ou quase integráveis, muitas vezes é possível definir uma densidade de energia associada ao campo. Neste tipo de sistema, podemos impor à energia a condição de localização, de forma que o conceito de sóliton englobe também outros tipos de soluções, como oscilações tipo *breather*.

Na maior parte das vezes em que trabalhamos com sólitons, é importante determinar sua posição, o que implica alguma arbitrariedade, por exemplo, se estivermos tratando com um *bell-soliton*, a posição pode ser definida como o ponto em que a derivada é nula. Já no caso do *kink*, podemos considerar o ponto em que a concavidade se inverte, ou o ponto em que o campo passa pelo valor médio dos limites assintóticos. Neste trabalho definiremos a posição do sóliton como sendo a posição do seu **centro de massa**:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \rho(x) dx, \quad (1.97)$$

$$M = \int \rho(x) dx, \quad (1.98)$$

sendo $\rho(x)$ a função que descreve a distribuição de massa do sóliton. Usando a idéia de que o sóliton é uma solução localizada, e em analogia com a identidade entre massa e energia, algumas vezes a densidade de hamiltoniana será tomada como a densidade de massa. Esta definição será particularmente útil quando usarmos o tensor de tensões (apêndice B) para encontrarmos a transferência de momento para o sóliton. Outras vezes, usaremos a definição

$$\rho(x) = \phi_x^2, \quad (1.99)$$

matematicamente mais simples. Ainda pensando em termos de energia, essa expressão corresponde a retirar da hamiltoniana apenas o termo de “energia elástica” armazenada no campo.

Capítulo 2

Dinâmica de sólitons

Já foi mencionado que uma das principais características dos sólitons é o que podemos chamar de propriedades de quase-partículas. Born e Infeld [24] foram os primeiros a propor o sóliton como um modelo para partículas, já que estes apresentam-se localizados no espaço, ao contrário das soluções usuais de um sistema de equações diferenciais parciais. A tentativa de construção de um modelo quântico de campo para partículas deve atender a algumas exigências, como a invariância de Lorentz e a adequação ao formalismo lagrangeano, o que leva naturalmente às equações de Klein-Gordon.

Equações nas quais estão presentes forças externas e impurezas tem sido muito estudadas devido às numerosas aplicações desses modelos na descrição de sistemas físicos [25–37].

A teoria de bifurcações em geral e a teoria das catástrofes em particular [1, 6] têm estudado as mudanças na estabilidade do movimento de partículas em potenciais universais. Nós estamos interessados em uma teoria similar, substituindo as partículas por sólitons, que sujeitaremos a potenciais particulares, dos quais somos capazes de analisar a estabilidade. Uma série de artigos trata esse tipo de problema [29–31] considerando o sóliton como partículas. Nesse capítulo fazemos um tratamento que considera as características não locais do sóliton, determinando as condições de validade da aproximação de partícula.

Neste capítulo, estudaremos o comportamento de sólitons em equações tipo Klein-Gordon às quais acrescentaremos termos relativos a inhomogeneidade e impurezas. O objetivo é determinar as situações em que elas são atrativas ou repulsivas, se elas permitem ou não a existência de sólitons e outras informações semelhantes. Mais a frente, esses dados serão usados para estudar a dinâmica dos sólitons.

2.1 Existência e estabilidade de sólitons em equações tipo Klein-Gordon

Antes de analisar o efeito das inhomogeneidades e impurezas vamos considerar a equação de Klein-Gordon original, que pode ser obtida a partir da Hamiltoniana

$$H = \int \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi_x^2 + U(\phi) dx. \quad (2.1)$$

Esta Hamiltoniana leva [17] à equação de Klein-Gordon:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0. \quad (2.2)$$

Vimos na seção 1.16 que os sólitons podem ser obtidos ao tratarmos o sistema como a equação de movimento (1.92) de uma partícula sujeita a uma força (1.93). A equação de Klein-Gordon é invariante sob transformações de Lorentz, portanto, os sólitons estáticos que obtivermos também corresponderão a sólitons em movimento, dados por (1.76).

A estabilidade dessas soluções pode ser investigada com a utilização do método apresentado na seção 1.14. Substituímos a expressão

$$\phi(x, t) = \psi(x, t) + e^{\lambda t} \xi(x), \quad (2.3)$$

na equação de Klein-Gordon (2.2), expandimos $\partial U / \partial \phi$ em série de Taylor, tomamos apenas os termos de ordem um, e obtemos o problema de autovalores:

$$\lambda^2 \xi = \left. \frac{d^2 \xi}{dx^2} - \frac{d^2 U}{d\phi^2} \right|_{\psi} \xi. \quad (2.4)$$

O problema de autovalores (2.4) é semelhante ao problema de autovalores e autoestados de uma partícula sujeita a um potencial $u(x)$ na equação de Schrödinger ($2m/\hbar^2 = 1$):

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + (E - u(x)) \xi = 0. \quad (2.5)$$

A energia é dada por

$$E \equiv -\lambda^2, \quad (2.6)$$

e o potencial $u(x)$ depende do potencial $U(\phi)$ da equação de Klein-Gordon (2.2) e da solução da qual se investiga a estabilidade:

$$u(x) \equiv \left. \frac{d^2 U(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\psi(x)}. \quad (2.7)$$

Vimos na seção 1.14 que todo sistema invariante por translação possui um autoestado chamado modo de translação, com autovalor $\lambda_0 = 0$. Sob a óptica da Mecânica Quântica, a solução de energia $E_0 = -\lambda_0^2 = 0$ corresponde a um estado ligado do poço de potencial (2.7). Um fato conhecido nesse tipo de problema é que o estado de energia mais baixo é uma função que não cruza nenhuma vez o eixo $\xi = 0$. Acontece, que essa é justamente a situação do modo de translação de um *kink*, como pode ser visto na figura 2.1 na próxima página. Isso significa que qualquer outro estado, ligado ou não, terá energia $E > 0$. Com isso, todos os autovalores $\lambda = \sqrt{-E}$ são puramente imaginários, situação em que qualquer perturbação é estável, oscilando indefinidamente sem alterar qualitativamente a solução solitônica. Portanto, um *kink* sempre será estável na equação de Klein-Gordon não perturbada, enquanto outros tipos de sólitons poderão ter $E < 0$, correspondendo aos autovalores $\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{-E}$, que levaria à instabilidade devido à existência de $\lambda_+ > 0$.

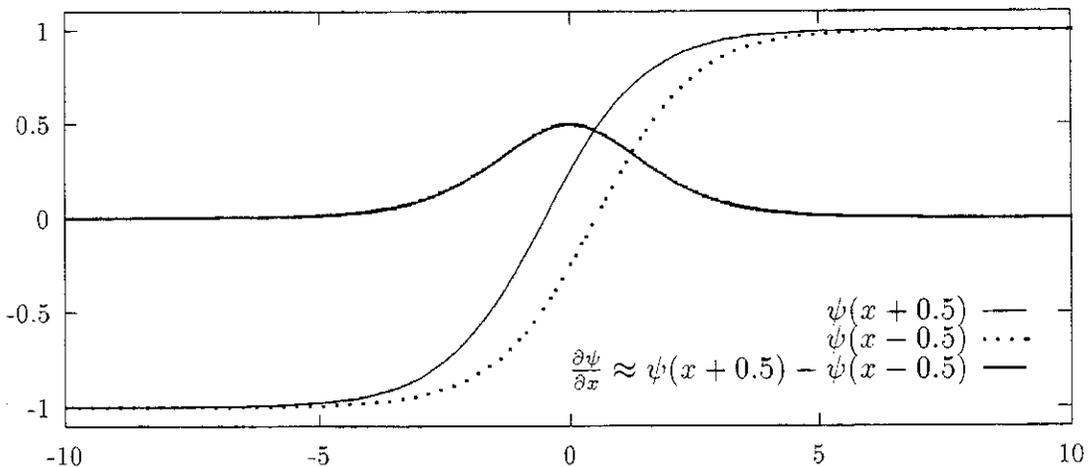


Figura 2.1: A translação infinitesimal de $\delta = 1$ do *kink* é definida pela equação (1.87). Vemos que a forma de ψ_x é a que seria esperada da diferença entre o *kink* antes e depois da translação.

Efeitos dissipativos não podem ser descritos por uma Hamiltoniana, devendo ser incluídos diretamente na equação de movimento:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \gamma\phi_t - \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0. \quad (2.8)$$

Ao investigar a estabilidade das possíveis soluções, chegamos, igualmente, à equação de Schrödinger, com a mesma expressão para $u(x)$, apenas a energia muda para

$$E \equiv -\lambda^2 - \gamma\lambda, \quad (2.9)$$

que ser for resolvida para escrever λ em função de E , leva a

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4E}}{2}. \quad (2.10)$$

Quando não há dissipação, a estabilidade do sóliton depende de $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{-E}$, sendo instável para $E < 0$, devido a existência do autovalor $\lambda_+ > 0$. Se E for positivo, os autovalores λ_{\pm} serão imaginários e o sóliton será estável. Regimes semelhantes são obtidos no caso dissipativo: $E < 0 \Rightarrow \lambda_+ > 0$ e $\lambda_- < 0$, ou seja, o sóliton instável continua instável; $0 < E < \gamma/4 \Rightarrow \lambda_+, \lambda_- < 0$ a solução estável oscilatória torna-se superamortecida; $\gamma/4 < E \Rightarrow \lambda_+ = \lambda_-^*, \text{Re}\{\lambda_{\pm}\} < 0$, a solução continua oscilante, porém amortecida. Concluimos que a dissipação não é capaz de estabilizar uma solução instável, mas torna assintoticamente estáveis as soluções estáveis.

Os estados ligados mencionados nos parágrafos anteriores correspondem, em geral, a deformações do sóliton, e algumas vezes são chamados de **modos internos**. Os estados não ligados formam um contínuo, e são chamados de fônons, pois são oscilações periódicas no tempo e no espaço (quando $x \rightarrow \pm\infty$), comportando-se como as vibrações propagantes resultantes de equações de onda. Ao contrário dos modos internos, os fônons não estão limitados à região ocupada pelo sóliton.

O primeiro potencial que iremos estudar é conhecido por ϕ -quatro, pois este é o termo de ordem mais alta presente:

$$U(\phi) = \frac{1}{8} (\phi^2 - 1)^2. \quad (2.11)$$

Se o potencial fosse escrito menos restritivamente, poderíamos ter coeficientes diferentes para as diferentes ordens de ϕ , mas a forma acima é particularmente útil, pois possui dois mínimos iguais $U(-1) = U(1) = 0$ em $\phi = \pm 1$, permitindo a existência de *kinks* e *antikinks*. Além disso, podemos obter uma solução analítica usando a expressão (1.95):

$$\tau = 2 \int_{\psi(0)}^{\psi(\tau)} \frac{1}{1 - \psi^2} d\psi. \quad (2.12)$$

Nessa expressão, fizemos $E = 0$, pois a “partícula” deve satisfazer $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi = \pm 1$, ou seja, deve aproximar-se assintoticamente dos máximos de $-U(\psi)$, que valem zero. A posição do sóliton é determinada pelo valor de $\psi(0)$, que tomaremos como zero, para que o sóliton localize-se na origem. Com estes valores obtemos

$$\psi_0(\tau) = \tanh\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad (2.13)$$

que pode ser submetida à transformação de Lorentz para obtermos a solução geral:

$$\psi_v(x, t) = \tanh\left(\frac{x - x_0 - vt}{2\sqrt{1 - v^2}}\right). \quad (2.14)$$

O *antikink* corresponde à mesma solução multiplicada por -1 .

Para estudar as excitações do *kink* e do *antikink*, o potencial ϕ -quatro (2.11) e a solução solitônica (2.13) devem ser substituídos na equação (2.7):

$$u(x) = 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2}\right). \quad (2.15)$$

Em [38] temos a resolução do problema de autovalores (2.5) para o potencial

$$u_{\operatorname{sech}}(x) = u_0 - \mathcal{U} \operatorname{sech}^2(\alpha x). \quad (2.16)$$

Os níveis de energia discretos permitidos obedecem a desigualdade

$$0 \leq n < \Lambda \equiv \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\mathcal{U}}{\alpha^2}} \right), \quad (2.17)$$

e a energia de cada nível é

$$E_n = u_0 - \alpha^2 (\Lambda - n)^2. \quad (2.18)$$

Com $\mathcal{U} > 0$, teremos sempre $\Lambda > 0$, existindo, no mínimo, um estado ligado, de energia E_0 . O poço de potencial (2.15) possui dois estados ligados: o modo translacional com energia $E_0 = 0$ e

um estado interno de energia $E_1 = 3/4$. O espectro contínuo assume todos os possíveis valores com $E > 1$.

Outro potencial importante na equação de Klein-Gordon é o que da origem à equação de *sine-Gordon*:

$$U(\phi) = 1 - \cos \phi = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2}, \quad (2.19)$$

possuidor de infinitos mínimos idênticos $U(2n\pi) = 0$. Observando a figura 1.11 na página 34, vemos que cada *kink* ou *antikink* conecta um mínimo ao mínimo anterior ou posterior. A multiplicidade de mínimos do potencial de *sine-Gordon* permite que o sistema comporte uma seqüência de *kinks* e *antikinks*, ao contrário do potencial ϕ -quatro, que não permite a existência de dois *kinks* consecutivos, ou *antikinks* consecutivos.

Com o mesmo procedimento usado para Klein-Gordon, vamos encontrar um *kink* conectando $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$. A integral que deve ser resolvida para encontrarmos o sóliton é (1.95)

$$\tau = \frac{1}{2} \int_{\psi(0)}^{\psi(\tau)} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\phi}{2}} d\phi, \quad (2.20)$$

que na qual fizemos novamente $E = 0$, e tomaremos $\psi(0) = \pi$ para que o sóliton se localize na origem. A solução da equação acima é

$$\psi_0(\tau) = 4 \arctan e^\tau, \quad (2.21)$$

ou, após a transformação de Lorentz e outras generalizações,

$$\psi_v(x, t) = 2n\pi + 4 \arctan \left[\exp \left(\pm \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]. \quad (2.22)$$

O *kink* e o *antikink* correspondem, respectivamente, ao sinal $+$ e $-$, e o termo $2n\pi$ dá conta do fato de o sóliton poder conectar diferentes mínimos.

O potencial $u(x)$ da equação de estabilidade de Schrödinger para o *kink* de *sine-Gordon* é obtido das equações (2.7) e (2.21). Com o uso de algumas identidades trigonométricas e hiperbólicas:

$$u(x) = 1 - 2 \operatorname{sech}^2(x). \quad (2.23)$$

Usando as expressões (2.17) e (2.18) descobrimos que esse poço de potencial possui, como autovalor discreto, apenas o modo translacional, de energia zero.

2.2 Dinâmica de sólitons na presença de forças externas

A perturbação mais simples que pode ser incluída na equação de Klein-Gordon consiste em uma força constante, agindo em todo o espaço com a mesma intensidade. Na Hamiltoniana, ela surge como mais um termo a ser somado ao potencial $U(\phi)$,

$$H = \int \frac{1}{2} \dot{\phi}_t^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_x^2 + U(\phi) - F\phi dx. \quad (2.24)$$

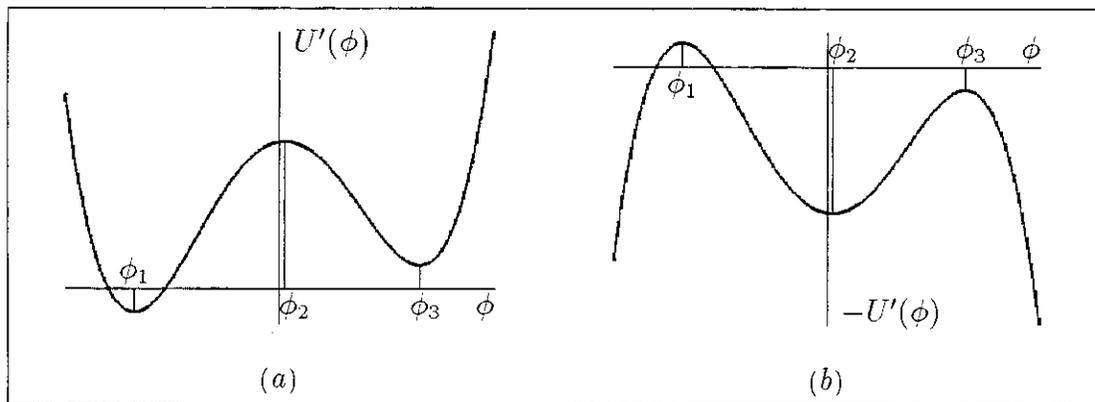


Figura 2.2: Potencial (2.25), com $F < 0$, que possui valores diferentes para os mínimos $U'(\phi_1) < U'(\phi_3)$. O potencial $U(\phi)$ é simétrico como o da figura 1.11 na página 34.

Se considerarmos que o potencial $U(\phi)$ possui mínimos de mesmo valor, o novo potencial

$$U'(\phi) \equiv U(\phi) - F\phi \quad (2.25)$$

não satisfará mais essa condição, como pode-se ver na figura 2.2a. Nesse caso, não é possível encontrar uma solução estacionária tipo (1.74), (1.75), sendo necessário buscar uma solução tipo (1.77), (1.78) deslocando-se com velocidade v :

$$\phi(x, t) = \psi_v(x - vt). \quad (2.26)$$

A solução (2.26) só será possível se incluirmos um termo dissipativo na equação de Klein-Gordon:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \gamma\phi_t - \frac{\partial U'}{\partial \phi} = 0. \quad (2.27)$$

Ao substituírmos a solução (2.26) nessa expressão, obtemos a equação de movimento ($\tau \equiv x - vt$)

$$(1 - v^2)\psi_{v,\tau\tau} = \frac{\partial U'}{\partial \phi} \Big|_{\psi_v} - v\gamma\psi_{v,\tau}, \quad (2.28)$$

que é a equação que descreve a evolução no tempo, τ , da posição ϕ de uma partícula de massa $1 - v^2$ sujeita a um potencial $-U'(\phi)$ e a uma força dissipativa $v\gamma\phi_t$.

Observando a figura 2.2 vemos que existem várias trajetórias possíveis. A mais importante para nós é aquela na qual a partícula sai do ponto ϕ_1 e vai até o ponto ϕ_3 , perdendo energia durante o percurso, devido à dissipação. Ajustando-se o valor de v , podemos fazer com que, durante o percurso, a partícula tenha perdido uma energia igual à $U'(\phi_1) - U'(\phi_3)$, chegando ao ponto ϕ_3 sem nenhuma energia cinética. Essa solução apresenta o comportamento assintótico adequado, possuindo limites ϕ_1 e ϕ_3 .

Vemos que a diferença entre os dois mínimos age com uma força que é capaz de manter o sóliton com velocidade constante, mesmo na presença de dissipação. O valor de v que deve ser encontrado corresponde à velocidade limite resultante da ação conjunta da força e da dissipação. Considerando a energia do sóliton, que pode ser calculada usando a Hamiltoniana (2.24), vemos

da figura 2.2 na página anterior que o sóliton perde energia potencial se o campo em uma região passa de ϕ_3 para ϕ_1 . Quando um *kink* desloca-se para a direita, $v > 0$, esse processo ocorre continuamente (vide figura 1.11 na página 34). Do ponto de vista da energia do campo, sua energia potencial vai diminuindo, consumida pela dissipação.

O *antikink* corresponde a uma partícula que sai do ponto ϕ_3 e vai para o ponto ϕ_1 na figura 2.2b, portanto, sua energia deve aumentar. Para que isso ocorra, a velocidade deve ser negativa, invertendo o sinal da dissipação na equação (2.28), o que faz com que ela passe a fornecer energia. O *antikink* irá mover-se no sentido oposto ao do *kink*.

Outros tipos de soluções propagantes podem ser propostas para a figura 2.2 [28], por exemplo, a partícula que sai do ponto ϕ_1 ou ϕ_3 , em direção ao ponto ϕ_2 , perdendo energia tão rapidamente que não consegue escapar do poço entre ϕ_1 e ϕ_3 . Ela pode oscilar cada vez mais fracamente em torno de ϕ_2 ou aproximar-se monotonicamente se o movimento for super-amortecido. Em qualquer situação, temos uma solução em que o campo tende para ϕ_2 em uma das extremidade do espaço. Sendo ϕ_2 um ponto de máximo para a energia do campo $U'(\phi)$, essas soluções não são estáveis, pois qualquer perturbação levará o sistema a buscar uma solução de menor energia.

Se a força F for suficientemente grande, o máximo central do potencial $U'(\phi)$ na figura 2.2 desaparece. Nesse caso, passa a existir um único mínimo, e a única solução estacionária possível é a trivial, ou seja, a partícula para nesse mínimo. Isso corresponde a termos $\phi(x)$ constante, ou seja, o espaço vazio. A existência das soluções discutidas anteriormente nessa seção, sejam elas estáveis ou não, exige que a função $U'(\phi)$ possua diferentes mínimos, ou seja, devem existir valores de ϕ para os quais

$$\frac{dU'(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (2.29)$$

Isso também é uma condição para que a equação (2.28) possua limites assintóticos. No caso do potencial ϕ -quatro, que é uma função do quarto grau, para que a equação do terceiro grau (2.29) possua três soluções reais distintas, dois mínimos e um máximo de $U'(\phi)$, é necessário que

$$F^2 < \frac{1}{27}. \quad (2.30)$$

Quando o mesmo critério é aplicado para a existência de sólitons sujeitos ao potencial de *sine-Gordon*, chega-se à condição

$$F < 1. \quad (2.31)$$

2.3 Inomogeneidades

Uma vez descrito o caso de uma força externa constante agindo sobre o sóliton, o passo seguinte é considerar o efeito de uma força inomogênea:

$$\phi_{xx} - \dot{\phi}_{tt} - \gamma\dot{\phi}_t - \frac{\partial U}{\partial \phi} = -F(x). \quad (2.32)$$

Para a equação acima, não é possível encontrar um potencial $U'(\phi)$ que nos permita escrever uma equação tipo (2.28). No entanto, a discussão sobre o movimento do *kink* sujeito à força

constante nos fornece algumas conclusões sobre o comportamento de um *kink* sujeito à força inhomogênea. Por exemplo, a condição de existência do *kink*, equação (2.30), impõe que a força $F(x)$ possua um comportamento assintótico semelhante:

$$\left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) \right)^2 < \frac{1}{27}. \quad (2.33)$$

Diferente do que ocorre no caso da força constante da seção anterior, se a condição não for satisfeita, existirá uma solução que não necessariamente representa o espaço vazio. Quando a condição acima é satisfeita, o que se garante é que existirão soluções com diferentes cargas topológicas. Caso contrário, todas as soluções do sistema terão os mesmos limites assintóticos.

Vimos na seção anterior que o *kink* sujeito ao potencial da figura 2.2 na página 41 ($F < 0$) mover-se-á com velocidade positiva, e o *antikink* terá velocidade negativa. Se F for positivo, as velocidades terão sinais contrários. Portanto, o *kink* sentirá uma força de atração em direção ao ponto \bar{x} se a função obedecer $F(x) < 0$ para $x < \bar{x}$ e $F(x) > 0$ para $x > \bar{x}$. Dito de outra forma, para que \bar{x} seja um ponto de equilíbrio estável, podemos usar função $F(x)$ tal que

$$F(\bar{x}) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dF}{dx} \right|_{\bar{x}} > 0. \quad (2.34)$$

Para o *antikink*, basta substituir o sinal de $>$ por $<$. Essa análise é estritamente válida apenas para funções $F(x)$ monotonicamente crescentes ou decrescentes, mas nos fornece subsídios sobre as possíveis posições de equilíbrio de um *kink* sujeito a uma força $F(x)$ qualquer.

Consideremos a força

$$F_{AB}(x) \equiv \frac{1}{2}A(A^2 - 1) \tanh(Bx) + \frac{1}{2}A(4B^2 - A^2) \frac{\sinh(Bx)}{\cosh^3(Bx)}, \quad (2.35)$$

introduzida por González e Holyst [32]. Essa função sempre possui um zero na origem, e, conforme os valores de A e B , poderá possuir também outros dois zeros x_1 e x_2 :

$$x_2 \equiv -x_1 \equiv \frac{1}{B} \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{4B^2 - A^2}{1 - A^2}}. \quad (2.36)$$

A igualdade $dF_{AB}/dx = 0$, possui duas ou nenhuma raiz real, portanto, a função $F_{AB}(x)$ possui dois extremos ou nenhum. A derivada na origem é dada por

$$\left. \frac{dF_{AB}}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{2}AB(4B^2 - 1), \quad (2.37)$$

e os valores assintóticos são

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F_{AB}(x) = \pm \frac{1}{2}A(A^2 - 1) \operatorname{sign}(B). \quad (2.38)$$

Vamos esboçar o formato de $F_{AB}(x)$ quando os parâmetros A e B são positivos¹, ressaltando que a função $F_{AB}(x)$ é ímpar em relação aos dois parâmetros. Com $AB > 0$ a condição de que a derivada de $F_{AB}(x)$ na origem seja positiva é

$$\left. \frac{dF_{AB}}{dx} \right|_{x=0} > 0 \quad \text{se} \quad B^2 > \frac{1}{4}, \quad (2.39)$$

¹Ao longo dessa seção, para não carregar desnecessariamente a discussão, consideraremos A e B sempre positivos, exceto quando explicitamente mencionado o oposto.

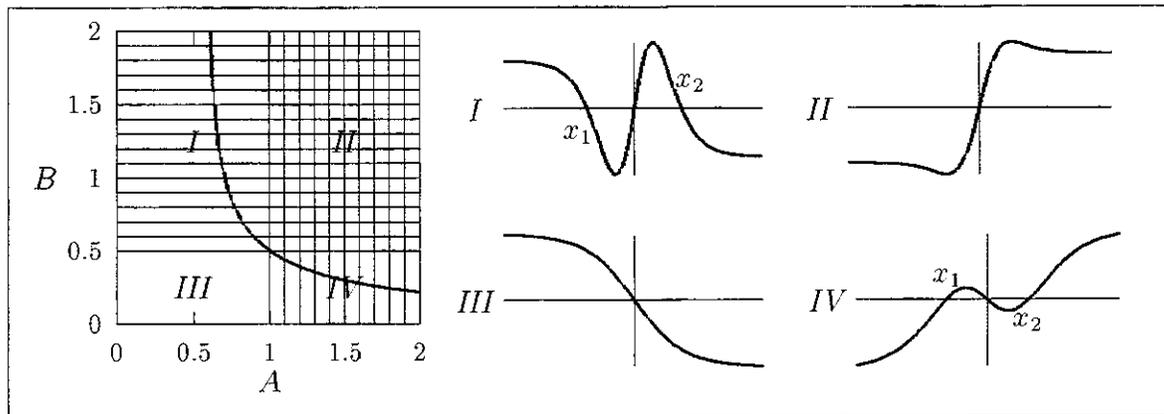


Figura 2.3: Formato da função $F_{AB}(x)$ (2.35) conforme os valores dos parâmetros A e B . No gráfico da esquerda, as linhas horizontais indicam a região ($B^2 > 1/4$) em que $dF_{AB}/dx|_{x=0} > 0$, e as linhas verticais preenchem a região ($A > 1$) em que $\pm \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F_{AB}(x) > 0$. As regiões em que as linhas não estão presentes obedecem as desigualdades inversas. À direita vemos como a derivada na origem e o valor assintótico afetam o formato da função $F_{AB}(x)$ em cada região: I) $A = 0,5$ e $B = 1,5$, II) $A = 1,5$ e $B = 1,5$, III) $A = 0,5$ e $B = 0,3$ e IV) $A = 1,5$ e $B = 0,3$. A curva vista no gráfico da esquerda é o lado direito da desigualdade (2.45), portanto, o *kink* será estável na origem para os valores de B acima dessa curva.

e os limites assintóticos obedecerão

$$\pm \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F_{AB}(x) > 0 \quad \text{se } A > 1. \quad (2.40)$$

Com estas informações podemos dividir o espaço dos parâmetros A e B em quatro regiões (I, II, III e IV), nas quais a força $F_{AB}(x)$ cruza o eixo x uma ou três vezes², conforme os valores de A e B (figura 2.3).

Se considerarmos a condição (2.34), podemos concluir que o *kink* é estável na origem para valores de A e B nas regiões I e II e em duas posições $x_1 = -x_2$ na região IV. Na região I, se o *kink* for muito deslocado para a direita, ele pode escapar, pois quando $F_{AB}(x) < 0$ o *kink* fica sujeito a uma força para a direita. Do mesmo modo, ele pode escapar pela esquerda. Portanto, é de se esperar que se o *kink* for “largo” o bastante para “sentir” a presença da região repulsiva, a origem pode não ser um ponto estável para alguns valores de A e B na região I. Já na região II, esperamos que a origem seja sempre estável. O *antikink* apresenta o mesmo comportamento, tomando-se as regiões adequadas.

Nessa análise dos pontos estáveis para o *kink*, consideramos apenas sua posição, sem preocupar-nos com sua estrutura, pode-se dizer que ele foi tratado como um ponto material, sem estrutura interna.

A força $F_{AB}(x)$ é definida de forma a que a equação de movimento (2.32) com o potencial

²A condição de existência das três raízes também pode ser extraída diretamente da expressão para x_1 e x_2 (2.36), levando ao mesmo resultado que obtemos analisando a derivada na origem e o comportamento assintótico de $F_{AB}(x)$.

ϕ^4 (2.11) permita uma solução algébrica estática na origem³:

$$\psi_{AB}(x, t) = A \tanh(Bx). \quad (2.41)$$

A estabilidade dessa solução é determinada da maneira como temos feito, ou seja, adicionando uma perturbação muito pequena. Seguindo esse procedimento, chegamos à equação de Schrödinger (2.5), com o potencial $u(x)$ (2.7) dado por

$$u(x) \equiv \frac{3}{2}A^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}A^2 \operatorname{sech}^2(Bx). \quad (2.42)$$

O número de estados ligados que este potencial suporta pode ser determinado através da equação (2.17), dependendo da parte inteira de Λ :

$$0 \leq n < \Lambda = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 6 \frac{A^2}{B^2}} - 1 \right). \quad (2.43)$$

Quaisquer que sejam os valores de A e B , sempre existe ao menos um estado, de energia E_0 , obtida da expressão (2.18):

$$E_0 = -\frac{1}{2} + \frac{B^2}{2} \left(\sqrt{1 + 6 \frac{A^2}{B^2}} - 1 \right). \quad (2.44)$$

Esse estado de menor energia não cruza nenhuma vez o eixo x , como mostrado na figura 2.1 na página 38, portanto, a perturbação acima translada o *kink*, apesar de não podermos dizer que se trata exatamente de um modo translacional. Como pode ser visto por substituição direta, a função $\psi_{AB,x}$ não é um autoestado da equação de estabilidade de Schrödinger. Portanto, a energia E_0 não pode corresponder a ele, tratando-se de um autoestado que simultaneamente desloca e deforma o *kink*.

Uma vez que qualquer outro estado ligado possui energia maior, a estabilidade do *kink* depende exclusivamente de que $E_0 > 0$, o que leva à condição

$$B > \frac{1}{\sqrt{6A^2 - 2}}. \quad (2.45)$$

Na figura 2.3 na página precedente vemos a curva correspondente ao lado direito dessa equação. Ao considerar o *kink* um ponto material, chegamos à conclusões diferentes da que chegamos agora usando a teoria linear de estabilidade. A condição correta é que o *kink* será estável para a região acima dessa curva no espaço de fase dos parâmetros A e B .

A comparação entre as duas análises para a estabilidade do *kink* $\psi_{AB}(x)$ é muito ilustrativa. A figura 2.4 na página seguinte mostra como a posição dos zeros de $F_{AB}(x)$ depende dos parâmetros A e B . Primeiro vemos que, como já havia sido antecipado, mesmo para um gráfico tipo *I* na figura 2.3 na página precedente, o sóliton pode ser instável, devido à presença da força repulsiva à esquerda e à direita dos zeros de F_{AB} . Observando a figura 2.4 na página seguinte vemos que, quando $B > 0,5$, a medida que A diminui, os zeros x_1 e x_2 aproximam-se

³Com $AB > 0$ não temos a expressão algébrica para o *antikink*, o que não significa que ele não exista. Se $AB < 0$, a função $\psi_{AB}(x)$ corresponde a um *antikink*.

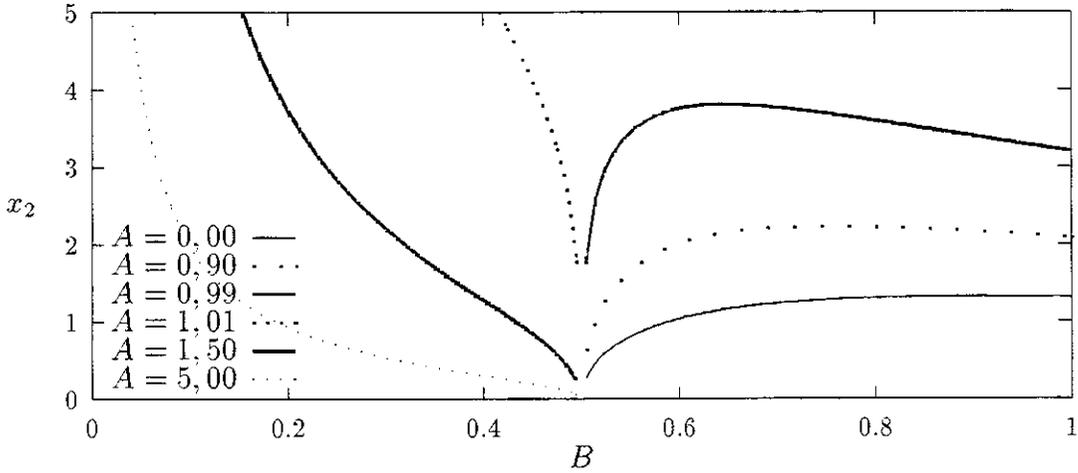


Figura 2.4: Zeros de $F_{AB}(x)$, obtidos da expressão (2.36).

da origem, permitindo ao *kink* “sentir” a presença da força repulsiva. Na região *II* o *kink* é sempre estável, como era de se esperar, pois a força F_{AB} empurra o *kink* sempre em direção à origem. Nesse caso ele é estável não só com relação a pequenas perturbações, pois qualquer que seja sua posição, ele será acelerado em direção à origem. O inverso ocorre na região *III*, na qual o *kink* é sempre instável. O resultado mais interessante é que mesmo com a derivada negativa na origem, o *kink* pode ser estável aí, o que pode ser visto na região *IV*. Nesse caso, em que $B < 0,5$, se A for suficientemente grande, os zeros ficam tão próximos da origem, e a oscilação de $F_{AB}(x)$ ocorre em um espaço tão reduzido que a força que ela exerce sobre o *kink* fica muito pequena, sendo suplantada pela força atrativa devida ao valor de $F_{AB}(x)$ nas regiões $|x| > x_2$.

É de se esperar que os zeros $x_1 = -x_2$ de $F_{AB}(x)$ nas regiões *I* e *IV* também sejam estáveis para *antikinks* e *kinks*, respectivamente. Se imaginarmos um *kink* à direita de x_2 para uma força na região *IV*, poderemos concluir que ele será empurrado para a esquerda. Se o valor de B for pequeno o bastante para que o *kink* seja instável na origem, haverá, necessariamente, um ponto de equilíbrio estável à direita de $x = 0$, ainda que este ponto não coincida com x_2 . À esquerda de x_1 a situação é simétrica.

Também é útil analisar a estabilidade dos outros modos internos do sóliton. Para que o modo n exista é necessário satisfazer a condição (2.43), que pode ser reescrita como:

$$A > B\sqrt{\frac{2}{3}(n^2 + n)}. \quad (2.46)$$

Caso o modo n exista, sua energia será dada por

$$E_n = -\frac{1}{2} + \frac{B^2}{2} \left[(1 + 2n)\sqrt{1 + 6\frac{A^2}{B^2}} - \frac{1 + (1 + 2n)^2}{2} \right]. \quad (2.47)$$

A instabilidade do modo ocorrerá se $E_n < 0$, que pode ser reescrita como

$$A < \frac{B}{\sqrt{6}} \sqrt{\left[\frac{1}{B^2} + \frac{1 + (1 + 2n)^2}{2} \right]^2 \frac{1}{(1 + 2n)^2} - 1} \quad (2.48)$$

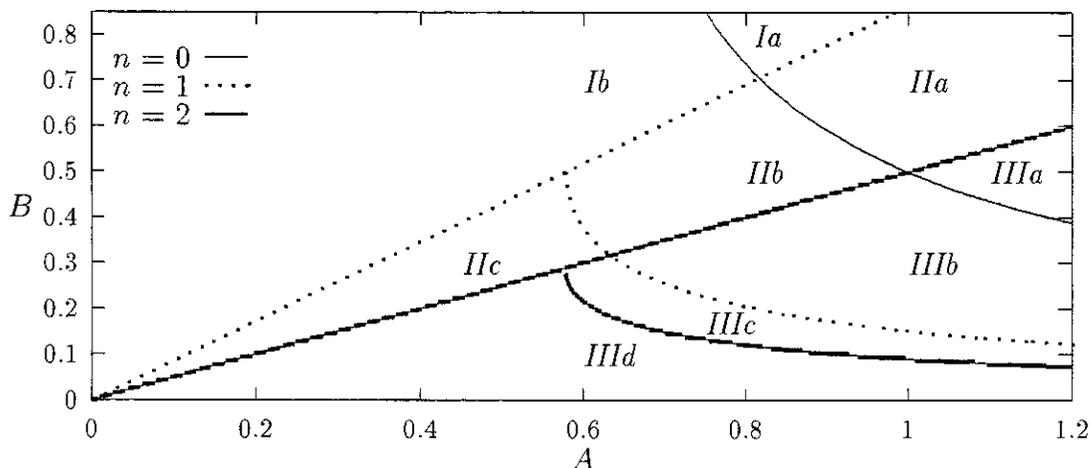


Figura 2.5: Existência e estabilidade dos três primeiros modos internos. As linhas retas são o lado direito da equação (2.46) e as curvas são o lado direito da equação (2.48). Nas regiões marcadas com *I*, existe apenas o modo $n = 0$, nas marcadas com *II* existem os modos $n = 0$ e $n = 1$, e nas regiões marcadas com *III* existem os modos $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$. Nas regiões terminadas com *a* todos os modos são estáveis, nas terminadas com *b* o modo $n = 0$ é instável e os restantes estáveis, nas terminadas com *c* os modos $n = 0$ e $n = 1$ são instáveis e os restantes estáveis etc ...

A figura 2.5 mostra as regiões em que cada modo existe e quando ele torna-se instável. Assim como o estado ligado de mais baixa energia de um poço de potencial não cruza o eixo x , sabe-se que estado seguinte em um poço simétrico será uma função ímpar, cruzando o eixo x uma vez. Ao ser adicionada ao sóliton, a perturbação correspondente a este estado altera apenas a forma do sóliton, sem deslocá-lo. Portanto, se o estado $n = 1$ existir e for estável, é possível excitar um modo em que o sóliton vibra sem sair da origem. Sendo ímpares todos os estados ligados com n ímpar, todos estes correspondem a oscilações sem translação. Quando diminuirmos A , o primeiro estado a se tornar instável ($E_n < 0$) é o modo de translação, e, tendo ele a energia mais baixa de todos os modos, seu crescimento exponencial, com constante de tempo $1/\lambda_+ = 1/\sqrt{E}$, será o mais violento. Por isso, quando tenta-se ver o efeito da instabilidade do modo $n = 1$ é necessário deformar o sóliton sem tirá-lo da origem, para não excitar o modo de $n = 0$. Por outro lado, se o modo translacional for estável, todos os outros também serão.

Outra análise que pode ser feita sobre inomogeneidades trata do tamanho do *kink*. Comparando a solução estacionária não perturbada (2.13) e o *kink* sujeito à inomogeneidade (2.41), podemos dizer que a “largura” de cada um deles é, respectivamente, proporcional a 2 e $1/B$. Se $1/B < 2$ significa que o *kink* está sendo comprimido pela força inomogênea, já com $1/B > 2$ o *kink* estaria sendo esticado. A compressão pode ser entendida como o *kink* sendo empurrado dos dois lados em direção à origem, o contrário para o alongamento. Por esse motivo, ao observar a figura 2.3 na página 44 vemos que o *kink* tende a ser mais estável quando B aumenta, ou seja, quando ele é comprimido.

2.4 Impurezas

Impurezas podem ser representadas na equação de Klein-Gordon por um termo anisotrópico, proporcional a ϕ :

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \frac{\partial U}{\partial \phi} - \gamma \phi_t = -F(x) - N(x) \phi. \quad (2.49)$$

Na Hamiltoniana, ele adiciona à energia potencial um termo dependente da posição e proporcional a ϕ^2 :

$$H = \int \frac{1}{2} \phi_t^2 + \frac{1}{2} \phi_x^2 + U(\phi) - F(x) \phi - \frac{1}{2} N(x) \phi^2 dx. \quad (2.50)$$

O efeito desse termo pode ser entendido se considerarmos que o sólton buscará uma posição que minimize sua energia potencial. Se o potencial $U(\phi)$ é simétrico e possui mínimos em $\phi_1 = -\phi_2$, a posição do *kink* (ou *antikink*), x_0 , pode ser pensada como aquela em que o campo assume valores intermediários $\phi_1 < \phi(x \approx x_0) \approx 0 < \phi_2$. Esse fato tende a reduzir a contribuição da região em que o sólton se encontra ($x \approx x_0$) no cálculo da integral

$$- \int \frac{1}{2} N(x) \phi^2 dx. \quad (2.51)$$

Para que a contribuição deste termo ajude a minimizar a energia, devemos fazer com que o sólton ocupe uma região em que $-N(x)$ seja grande, ou seja, um mínimo de $N(x)$. Essa análise indica que o efeito do termo de impureza é atrair o *kink* (ou *antikink*) aos pontos \bar{x} , nos quais

$$N_x(\bar{x}) = 0 \quad \text{e} \quad N_{xx}(\bar{x}) > 0. \quad (2.52)$$

Se optarmos por calcular exatamente as condições de estabilidade de uma solução estacionária da equação (2.49), $\psi(x)$, chegamos à mesma equação de Schrödinger obtida antes, porém com o potencial dado por

$$u(x) = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right|_{\psi(x)} - N(x). \quad (2.53)$$

No artigo [39] propomos as funções

$$F_{BA}(x) = \frac{1}{2} A(A^2 - 1) \tanh(Bx) \quad \text{e} \quad (2.54a)$$

$$N_{BA}(x) = \frac{1}{2} (4B^2 - A^2) \frac{1}{\cosh^2(Bx)}, \quad (2.54b)$$

para as quais pode-se escrever a solução analítica com o potencial ϕ^4 (2.11):

$$\psi_{BA}(x) = A \tanh(Bx). \quad (2.55)$$

O termo de impureza atrairá o *kink* ou *antikink* em direção à origem se a condição (2.52) for satisfeita, isto é, se

$$4B^2 < A^2. \quad (2.56)$$

Se considerarmos o *kink* como uma partícula, concluiremos da condição (2.34) que a força $F_{BA}(x)$ contribuirá para a estabilidade na origem se

$$(A^2 - 1) \operatorname{sinal}(AB) > 0. \quad (2.57)$$

Quando $x \gg 1/B$, a função $N_{BA}(x)$ é muito pequena, e quase não contribui para a equação de movimento. O mesmo não ocorre com $F_{BA}(x)$, que assume o valor assintótico

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F_{BA}(x) = \pm \frac{1}{2} A(A^2 - 1) \operatorname{sinal}(B). \quad (2.58)$$

Se substituirmos $N_{BA}(x)$ e $\psi_{BA}(x)$ na expressão para o potencial $u(x)$ obteremos

$$u(x) = \frac{3}{2}A^2 - \frac{1}{2} - (A^2 + 2B^2) \operatorname{sech}^2(Bx). \quad (2.59)$$

Os níveis de energia ligados a esse poço de potencial obedecem (2.17):

$$0 \leq n < \Lambda = \frac{1}{2} \left(\sqrt{9 + 4\frac{A^2}{B^2}} - 1 \right). \quad (2.60)$$

O modo “translacional”, $n = 0$, possui energia

$$E_0 = -\frac{1}{2} + \frac{A^2 - 5B^2}{2} + \frac{1}{2}B^2 \sqrt{4\frac{A^2}{B^2} + 9}, \quad (2.61)$$

e será estável se obedecer $E_0 > 0$, que, em termos dos parâmetros A e B é

$$B^2 \sqrt{4\frac{A^2}{B^2} + 9} > 5B^2 + 1 - A^2. \quad (2.62)$$

Na figura 2.6 na próxima página vemos os valores de A e B para os quais cada uma das condições de estabilidade são satisfeitas. Na região *II* a impureza e a força $F_{BA}(x)$ contribuem para tornar a estabilidade robusta a qualquer deslocamento que o *kink* sofra. Quando $A = 1$, a força $F_{BA}(x)$ é nula, e o *kink* é estável desde que a condição de estabilidade da impureza (2.56) seja satisfeita. Na região *I* a impureza atrai o *kink* vencendo a repulsão da força $F_{BA}(x)$, mas caso ele afaste-se muito da origem, a força repulsiva $F_{BA}(x)$ torna-se mais forte e ele escapa. Na região *III* a força atrativa $F_{BA}(x)$ é mais forte que a repulsão da impureza e ele é estável na origem, para qualquer deslocamento. Aumentando-se o valor de B , aumenta-se a repulsão da impureza, tornando o *kink* instável na origem na região *IV*. No entanto, a força $F_{BA}(x)$ continua atrativa, sobrepondo-se à repulsão da impureza para x suficientemente grande. Nesse caso, haverá um ponto de equilíbrio instável na origem e dois pontos de equilíbrio estável, simétricos em relação a $x = 0$.

2.5 Catástrofes na dinâmica de sólitons

Uma vez entendidas as condições de existência e estabilidade dos sólitons, tentemos conectar estes resultados com a teoria das catástrofes. Por possuir dois parâmetros e por poder apresentar

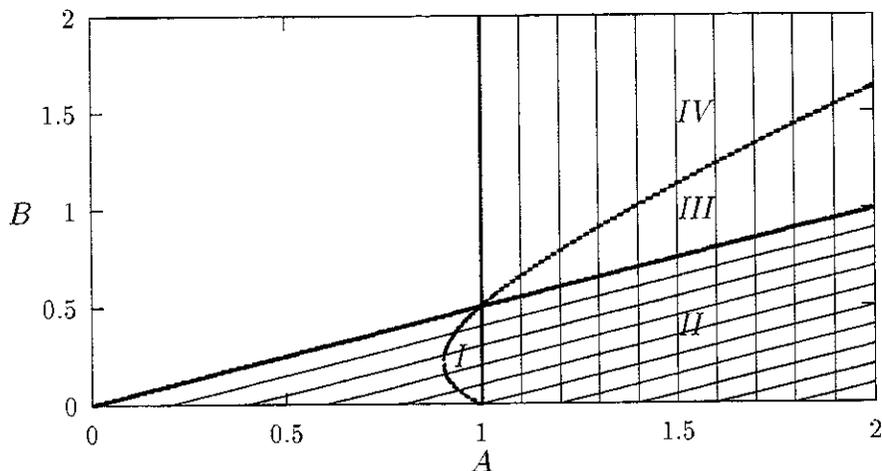


Figura 2.6: Estabilidade do *kink* $\psi_{BA}(x)$. As linhas inclinadas abrangem os valores de A e B em que a impureza atrai o *kink* ou o *antikink* para a origem (2.56). Nas linhas verticais, a força $F_{BA}(x)$ favorece a estabilidade do *kink* na origem (2.57). Onde as linhas inclinadas ou verticais estão ausentes o *kink* é repelido, pela impureza ou pela força $F_{BA}(x)$, respectivamente. A condição de estabilidade (2.62) é satisfeita à direita da linha curva, ou seja, nas regiões *I*, *II* e *III*.

um único ponto de equilíbrio estável, ou dois estáveis e um instável, a análise qualitativa da força $F_{AB}(x)$ (equação 2.35 na página 43) parece depender da catástrofe cúspide:

$$v(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^2 - bx. \quad (2.63)$$

Sendo a força $F_{AB}(x)$ simétrica, o parâmetro b deve ser nulo, o que leva a um único ponto de bifurcação, $a = 0$, no qual ocorre uma bifurcação *pitchfork*. Apesar do caráter universal da Teoria de Catástrofes na descrição de uma partícula pontual, a sua aplicação na descrição do comportamento de sólitons não é imediata. Por exemplo, pode ocorrer o caso em que o sóliton é estável em $x = 0$ se considerado uma partícula, e instável pela análise do operador de estabilidade (Pontos da região *I* à esquerda da curva de estabilidade da figura 2.3 na página 44).

Para aumentar a versatilidade da força externa, pode-se adicionar à $F_{AB}(x)$ termos pares, de modo que a força deixe de possuir paridade definida:

$$F_{ABD}(x) \equiv \frac{1}{2}A(A^2 - 1)\tanh(Bx) + \frac{1}{2}A(4B^2 - A^2)\frac{\sinh(Bx)}{\cosh^3(Bx)} + \frac{3}{2}DA^2\tanh^2(Bx) + \frac{3}{2}D^2A\tanh(Bx) + \frac{1}{2}D^3 - \frac{1}{2}D. \quad (2.64)$$

Esta função é definida de forma a permitir-nos obter uma solução exata:

$$\psi_{ABD}(x) = A\tanh(Bx) + D. \quad (2.65)$$

A função $F_{ABD}(x)$ com $D \neq 0$ é qualitativamente equivalente à catástrofe cúspide com $b \neq 0$, que descreve a assimetria do potencial, e pode-se obter toda a riqueza de fenômenos de sua bifurcação, descritos na seção 1.8.

2.6 Explosões de sólitons

Uma pergunta pertinente a respeito do exposto é: qual o significado físico de afirmar que o modo translacional, ou o modo de forma, é instável? Nessa seção apresentamos o resultado de simulações quando cada um dos modos torna-se instável [39, 40].

Inicialmente, consideremos as forças definidas nas seções 2.3 e 2.4, com $A = 2B \Leftrightarrow \Lambda = 2$, que corresponde à linha reta $n = 2$ da figura 2.5 na página 47. O valor de Λ revela a existência dos dois modos discretos, e, pela inspeção da figura 2.5, vemos que todos os modos são estáveis quando $B \geq 1/2$. Abaixo deste valor, o modo de translação torna-se instável. Se o valor de B torna-se menor que o valor em que a reta cruza a curva de $n = 1$, o que ocorre com $B = 1/\sqrt{10} \approx 0,316$, o modo $n = 1$ torna-se instável. Já com $B < 1/\sqrt{12}$ começa a ocorrer instabilidade dos fônons também.

Usando estes valores para A e B , definiremos o seguinte problema de valores iniciais:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \gamma\phi_t + \frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}\phi^3 = B(1 - 4B^2)\tanh(Bx), \quad (2.66)$$

$$\phi(x, 0) = 2B \tanh \left[\frac{B(x - x_0)}{\sqrt{1 - v_0^2}} \right], \quad (2.67a)$$

$$\phi_t(x, 0) = \frac{2B^2 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{B(x - x_0)}{\sqrt{1 - v_0^2}} \right] \quad \text{e} \quad \phi_x(\pm L, t) = 0. \quad (2.67b)$$

A posição e a velocidade iniciais são determinadas por x_0 e v_0 . Com L suficientemente grande, as condições de contorno são irrelevantes. A discretização⁴ pode interferir na estabilidade e no comportamento dinâmico do sóliton, por isso fizemos os cálculos com diferentes valores de Δx e Δt para assegurar-nos de que os resultados não se alteravam. Com Δx e Δt variando entre 0,1 e 0,01 e $L = 80$ obtem-se sempre os mesmos resultados, mostrados a seguir.

Para $x_0 \neq 0$ no caso estável, $B \geq 1/2$, o centro de massa do sóliton executa oscilações amortecidas em torno do ponto de equilíbrio $x = 0$. Quando apenas o modo translacional é instável, $1/\sqrt{10} \leq B < 1/2$, qualquer pequena perturbação será capaz de fazer com que o sóliton mova-se para longe da origem, sem no entanto mudar muito sua forma.

Antes de prosseguirmos com este problema de Cauchy, vamos considerar o caso patológico em que a condição de existência para o sóliton ϕ^4 , equação 2.33 na página 43, não é obedecida, como no problema a seguir:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \gamma\phi_t + \frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}\phi^3 = a \tanh(Bx), \quad (2.68a)$$

$$\phi(x, 0) = 2B \tanh(Bx), \quad (2.68b)$$

$$\phi_t(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \phi_x(\pm L, t) = 0. \quad (2.68c)$$

Quando $0 < a < 1/\sqrt{27}$ o sóliton reacomoda-se, mas permanece preso à origem. Já quando $a > 1/\sqrt{27}$, o sóliton destroi-se imediatamente, tão logo a simulação é iniciada, e a destruição

⁴ Todos os experimentos numéricos foram realizados usando o algoritmo de Crank-Nicholson, implementado na linguagem C segundo o esquema apresentado em [16]. Além de ser um algoritmo de segunda ordem nas coordenadas espacial e temporal, ele possui a vantagem de ser incondicionalmente estável.

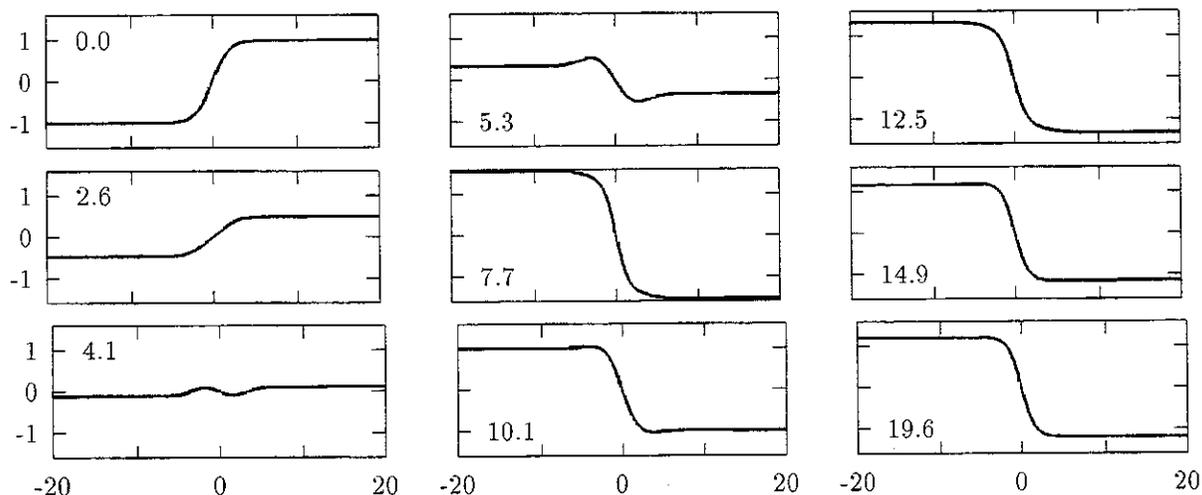


Figura 2.7: Explosão do sóliton descrito por (2.68), com $a > 1/\sqrt{27}$, de modo que sua existência é instável. Em cada quadro é mostrado o tempo em que foi obtido.

ocorre simultaneamente em todo o espaço e não com a propagação de uma perturbação originada em um ponto inicial, como pode ser visto na figura 2.7.

Depois dessa explosão um *antikink* estável surge na posição original do sóliton, já que, segundo a condição 2.34 na página 43, a origem é um ponto de equilíbrio estável para o *antikink*. Esta é a única solução estática, estável ou não, que o sistema admite. Note que, ao contrário da afirmação geral que fizemos na página 35, a respeito da carga topológica, ela não é conservada no fenômeno apresentado, pois nesse caso não é preciso esperar que a perturbação se propague até o infinito com uma velocidade finita. Isto ocorre porque as extremidades do sistema não ocupavam mínimos do potencial inicialmente.

Retornemos agora ao problema (2.66) com $1/\sqrt{12} < B < 1/\sqrt{10}$, quando o modo de translação e o modo de forma tornam-se instáveis. Quando usamos as condições iniciais (2.67) não observamos nenhuma diferença significativa em relação aos resultados com $1/\sqrt{10} < B < 1/2$. Para que os efeitos da instabilidade do modo de forma possam ser observados é necessário perturbar o sistema cuidadosamente, evitando excitar o modo de translação, visto que, uma vez excitada, a instabilidade deste último manifesta-se mais rapidamente (página 47), mascarando os efeitos do primeiro. Faremos uma perturbação que mantém o *kink* como uma função ímpar, não mudando, portanto, sua posição:

$$\phi(x, 0) = 2B \tanh(Bx) + c \frac{\sinh(Bx)}{\cosh^2(Bx)}, \quad \text{e} \quad \phi_t(x, 0) = 0. \quad (2.69a)$$

A perturbação introduzida é a autofunção de $n = 1$ da equação de estabilidade [41], correspondente ao modo de forma.

Para que a destruição do sóliton ocorra devido à instabilidade do modo de forma, basta fazer $c \neq 0$. A figura 2.8 na página seguinte mostra o desenvolvimento de uma explosão deste tipo, que ocorre bem mais lentamente que no exemplo anterior. Assim como naquele caso, um *antikink* surge na origem, porém agora ocorre a criação de um par *kink-antikink* que afastam-se com velocidade finita, ao contrário da destruição simultânea do sóliton em todo o espaço. Outra

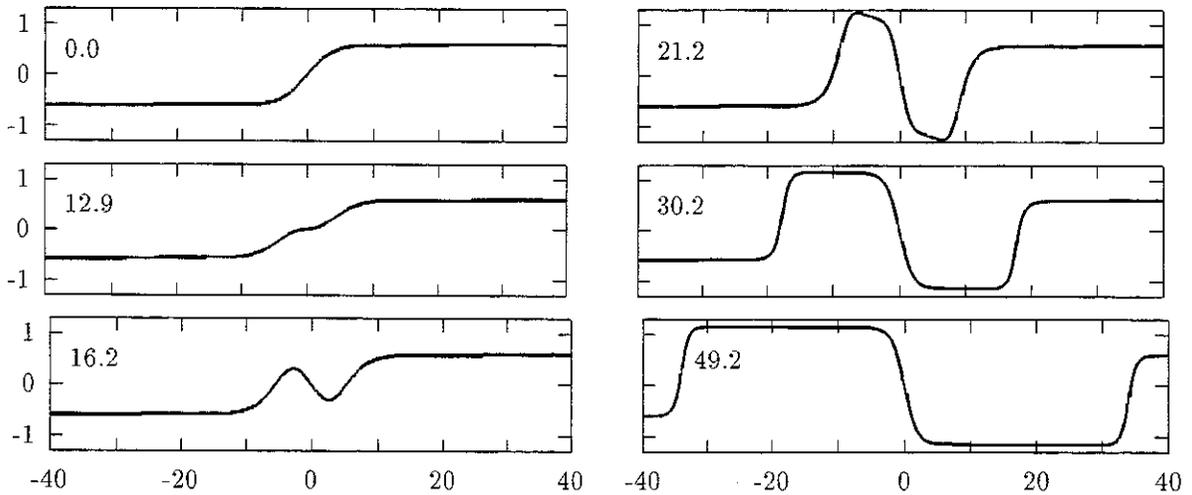


Figura 2.8: Seqüência de quadros em diferentes instantes mostrando os efeitos da instabilidade do modo de forma ($1/\sqrt{12} < B < 1/\sqrt{10}$), com uma perturbação tipo (2.69).

diferença é a conservação da carga topológica. O fato principal que distingüe os dois fenômenos, sendo a origem de todas as diferenças, é que no primeiro caso a única solução estática possível é a configuração final do sistema, enquanto no segundo, o *kink* não perturbado também é uma solução estática, apesar de não estável.

É bom ressaltar que a destruição do sóliton devido à instabilidade do modo de forma só é observada quando a condição $B > 1/\sqrt{10}$ não é obedecida. Por exemplo, se aplicarmos a perturbação (2.69) em um sistema com $B > 1/2$, o sóliton apresentará oscilações no seu formato, até reestruturar-se exatamente na solução $\psi(x) = 2B \tanh(Bx)$.

Capítulo 3

Ressonância não linear e sólitons caóticos

No capítulo anterior investigamos o comportamento que o sóliton sujeito a inhomogeneidades e impurezas irá apresentar. No presente capítulo, os subsídios fornecidos por essa investigação serão usados no estudo do comportamento do sóliton submetido a forças oscilantes.

A dinâmica de sólitons em meios inhomogêneos [29, 32, 33, 42], o caos espaço temporal [32, 43–46] e diversos tipos de fenômenos de ressonância [11–13, 47–49] têm tornado-se objeto de intenso estudo recentemente (apesar de que raramente esses fenômenos tenham sido estudados simultaneamente).

O estudo de oscilações de qualquer tipo, em geral, inicia-se com os efeitos lineares, e depois, conforme o problema, são incluídos os termos de ordem mais alta. São esses termos que dão origem aos chamados efeitos não lineares, que podem alterar completamente o comportamento qualitativo do sistema. Por outro lado acrescentando dificuldades consideráveis ao problema.

Um consideração interessante a respeito deste trabalho é que a “partícula” que investigamos, o sóliton, é uma entidade cuja existência só é possível devido a termos não lineares presentes em uma equação diferencial parcial e, no entanto, os aspectos não lineares de sua dinâmica foram ainda pouco explorados. A seguir exploramos alguns resultados não lineares já conhecidos em partículas, mais ainda pouco observados em sólitons, tais como deformações da curva de ressonância, histerese, caos, ressonância geométrica, controle de caos e outros.

3.1 Oscilações forçadas de um sóliton

A força externa capaz de excitar oscilações no sóliton pode ser introduzida como um termo dependente do tempo na equação de movimento:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \frac{\partial U}{\partial \phi} - \gamma \phi_t = -F_1(x) - N(x)\phi - F_2(x, t). \quad (3.1)$$

A evolução temporal do sóliton quando ligeiramente desviado da situação de equilíbrio, $\psi(x)$,

$$\phi(x, t) = \psi(x) + \zeta(x, t), \quad (3.2)$$

pode ser aproximada, em primeira ordem, fazendo-se a linearização da equação de movimento:

$$\zeta_{tt}(x, t) + \gamma \zeta_t(x, t) - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \Big|_{\psi(x)} + N(x) \right] \zeta(x, t) = F_2(x, t). \quad (3.3)$$

O termo entre colchetes é o operador de estabilidade da equação de autovalores (2.5), com $u(x)$ definido por (2.53), cujas autofunções $\xi(x)$ formam um conjunto completo, podendo ser usadas como uma base para o campo e para a força externa:

$$\zeta(x, t) = \sum_n \xi_n(x) h_n(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_k(x) h_k(t) dk, \quad (3.4a)$$

$$F_2(x, t) = \sum_n \xi_n(x) g_n(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_k(x) g_k(t) dk. \quad (3.4b)$$

com as funções $\xi_n(x)$ representando o espectro discreto e as $\xi_k(x)$ o contínuo. Definindo $\omega^2 = E$ na equação (2.5) e usando a ortogonalidade das autofunções, vemos que sistema próximo do equilíbrio comporta-se como um conjunto de osciladores, as autofunções de equilíbrio fazendo o papel dos modos normais:

$$h_{n(k),tt} + \gamma h_{n(k),t} + \omega_{n(k)}^2 h_{n(k)} = g_{n(k)}(t). \quad (3.5)$$

A função F_2 pode ser convenientemente definida a fim de excitar o modo que se queira. Se a função $g_{n(k)}(t)$ for periódica, pode acontecer a ressonância do modo de vibração correspondente. Caso a amplitude das oscilações cresça muito, é de se esperar que ocorram fenômenos não lineares, como os descritos na seção 1.3.

Por permitir a obtenção algébrica dos autovalores e autofunções [41], tomaremos as funções $F_1(x)$ e $N(x)$ como sendo iguais às funções $F_{BA}(x)$ e $N_{BA}(x)$, definidas pelas equações 2.54 na página 48.

3.2 Ressonâncias

Para demonstrar o efeito de ressonância não linear, analisamos no artigo [39] o comportamento do sóliton quando os parâmetros das forças F_{BA} e N_{BA} assumem os valores $2B = A = 1.2$. Esse ponto localiza-se sobre a linha de separação entre as regiões *II* e *III* da figura 2.6 na página 50. Portanto, qualquer que seja o deslocamento que o sóliton sofra, ele sempre retornará à origem. Para que o efeito da força F_2 seja empurrar o sóliton da sua posição de equilíbrio, definiremos a força externa como sendo proporcional à função que descreve a translação do sóliton $\psi_{BA}(x)$ (2.55):

$$F_2(x, t) = f_2 \cos(\Omega t) \cosh^2(Bx). \quad (3.6)$$

A figura¹ 3.1 na página seguinte mostra que, à medida em que a amplitude da oscilação aumenta, a curva de ressonância se deforma, dando origem a diversos picos. Para amplitudes

¹A nota de rodapé 4 na página 51 explicita o algoritmo usado

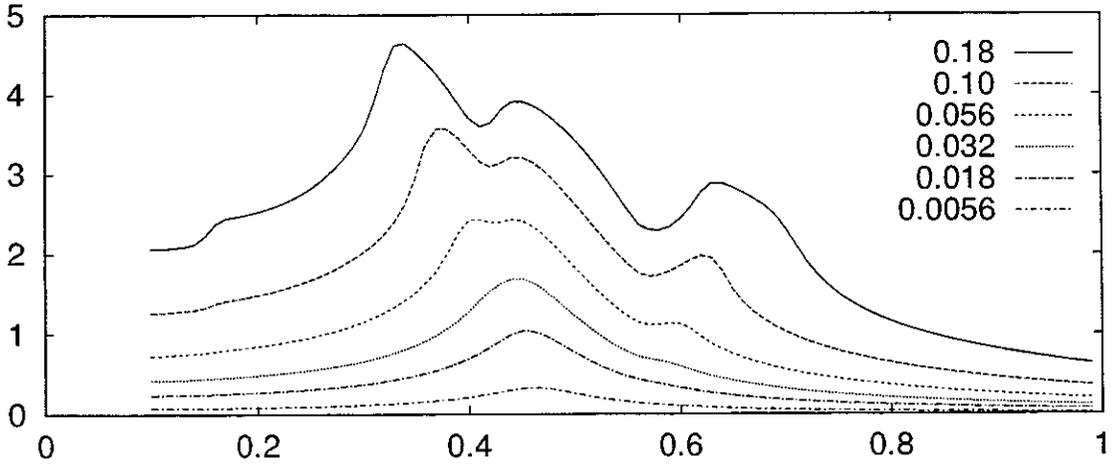


Figura 3.1: Curva de ressonância obtida numericamente da equação de movimento (3.1), com $F_1(x) \equiv F_{BA}(x)$, $N(x) \equiv N_{BA}(x)$ e $F_2(x,t)$ definida por (3.6). Amplitude pico-a-pico da posição do centro de massa (1.97), (1.99) versus frequência externa Ω , para diferentes valores de f_2 , sempre com $2B = A = 1,2$ e $\gamma = 0,1$.

pequenas, o valor do pico $\omega_0 = \sqrt{E_0} = 0,47$ é o que seria esperado da expressão para o autovalor do modo de “translação” (2.61). Com o aumento da amplitude de oscilação este pico divide-se em dois, um fenômeno já antecipado na seção 1.3. A existência de um número infinito de modos normais para o sistema (além do modo translacional, de frequência ω_0 , o modo de forma de frequência $\omega_1 = \sqrt{1,3} \approx 1,14$ e o contínuo de frequências $\omega_k \geq \sqrt{1,66} \approx 1,29$) dificulta a interpretação das causas dos outros picos, mas é de se esperar que eles tenham origem nos fenômenos de multiplicação de frequência, duplicação de período ou combinação de frequências, todos explicados na seção 1.3.

O gráfico menor da figura 3.2 na próxima página mostra os saltos de amplitudes que já haviam sido previstos na seção 1.3. Para obter estes saltos é necessário realizar uma série de simulações, variando lentamente a frequência externa Ω , e tomando como condição inicial de cada uma o estado final da simulação anterior.

3.3 Ciclos limites solitônicos

Os efeitos discutidos nas seções anteriores são os correspondentes solitônicos dos comportamentos descritos nas seções 1.2 e 1.3. Continuando no caminho de reproduzir, nos sólitons, comportamentos já obtidos com partículas, apresentamos nessa seção ciclos limites e bifurcações na dinâmica de sólitons.

Sistemas com dissipação são incapazes de sustentar movimentos se a energia dissipada não for reposta de alguma forma. Nas seções anteriores essa perda era compensada por uma força oscilante externa, no entanto esse não é o único recurso que pode ser usado com essa finalidade. Outra maneira é a introdução de dissipações que mudam de sinal em alguma região do espaço de fase, como descrito na página 12, em que a órbita visita as duas regiões de modo a repor em uma delas a energia perdida na outra. Um dispositivo governado por equações diferenciais parciais que apresenta tal comportamento é a linha de transmissão ativa, que pode ser construída com

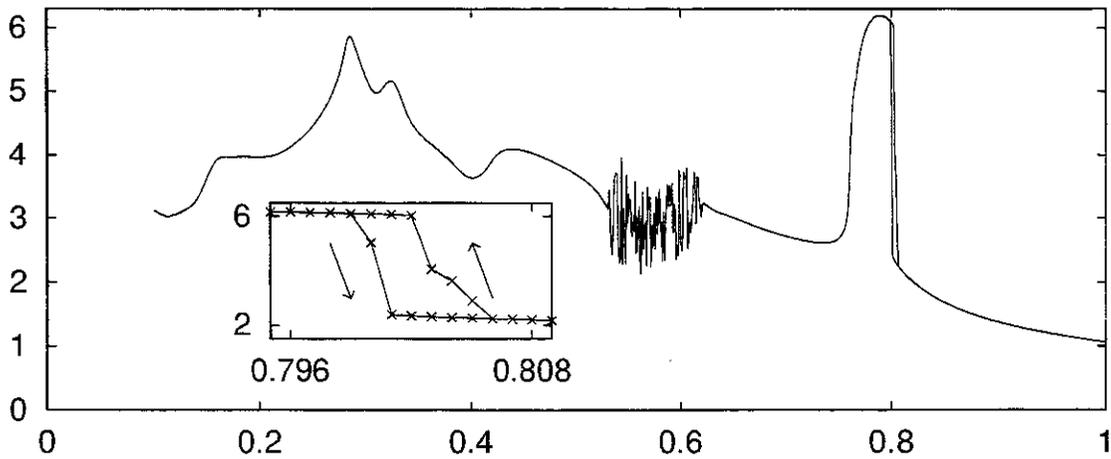


Figura 3.2: As mesmas condições que na figura 3.1, com $f_2 = 0,32$. O gráfico menor mostra em detalhe o comportamento da curva na região em que a “histerese” pode ser observada.

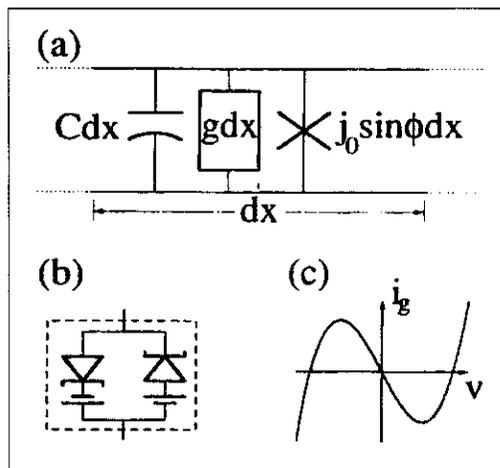


Figura 3.3: (a) Elemento da linha de transmissão ativa, composto por um capacitor, (b) uma resistência negativa não linear $g dx$, cuja curva característica é mostrada em (c), e uma junção Josephson. (Retirado de [45].)

o esquema mostrado na figura 3.3 na página anterior . Essa linha de transmissão obedece a seguinte equação [45]:

$$\begin{aligned} \phi_{xx} - \phi_{tt} - \gamma\phi_t - \Gamma\phi_t^3 + \frac{1}{2}(\phi - \phi^3) \\ = B(1 - 4B^2)\tanh(Bx), \end{aligned} \quad (3.7)$$

com $\gamma < 0$ e $\Gamma > 0$. A força externa dessa equação é um caso particular da força $F_{AB}(x)$ (2.35) com $A = 2B$, no qual o *kink* é sempre atraído para a origem se $B > 1/2$, como pode-se concluir da observação da figura 2.3 na página 44. Nesse caso, temos uma situação bastante semelhante à mostrada na figura 1.4d, e da mesma maneira esperamos obter um ciclo limite ω .

Esse é apenas um aspecto da dinâmica do sóliton, o movimento do seu centro de massa, que pode ser pensado como sendo uma das coordenadas descrevendo um sistema com infinitos graus de liberdade. Uma maneira de representar esse graus de liberdade é através da expansão em modos normais (3.4a), a partir da qual pode-se obter equações de movimento para cada modo. Essas equações são bastante complicadas e dificilmente tratadas diretamente. No entanto, ao acompanhar o movimento do centro de massa, parte da dinâmica do primeiro modo normal é revelada. Ademais, a expansão em modos normais só é relevante para pequenos desvios em relação ao ponto fixo do sóliton, e quando o sóliton está distante da origem sua posição é mais precisamente descrita pelo seu centro de massa que pela amplitude do modo de translação.

A equação do meio ativo (3.7) mostra um caso em que a dissipação muda de sinal com o aumento da velocidade do sóliton, e juntamente com a força atrativa impede-o de afastar-se muito da origem. A mudança de sinal da dissipação não precisa ocorrer necessariamente devido ao aumento da velocidade, podendo também realizar-se quando certa distância da origem é alcançada como ocorre com o oscilador de Van der Pol. Em [45] é proposta a equação

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \Gamma(x)\phi_t + \frac{1}{2}(\phi - \phi^3) = \frac{1}{2}(1 - 4B^2)\tanh(Bx), \quad (3.8a)$$

$$\Gamma(x) = \gamma \left(1 - \frac{L}{\cosh^2(Dx)} \right), \quad (3.8b)$$

na qual uma dissipação desse tipo está presente, ainda que com uma expressão diferente que a de Van der Pol. A figura 3.4 na página seguinte mostra o ciclo limite ω correspondente. Apesar do centro de massa do sóliton ser apenas uma das infinitas variáveis necessárias para descrever completamente o campo, vemos que grande parte de sua dinâmica pode, nessas condições, ser esboçada como se ela fosse a única variável relevante.

Os dois tipos de dissipação dessa seção apresentam a bifurcação Hopf, descrita na página 14, e em qualquer dos casos, para que exista um ciclo limite é necessário que γ seja negativo, além de outras condições. Se variarmos γ de modo que ele torne-se positivo, a bifurcação ocorrerá exatamente da mesma maneira, ou seja, em $\gamma = 0$.

3.4 Sólitons caóticos

Agora que já vimos como os conceitos de ciclos limites e bifurcações podem surgir na dinâmica de sólitons, podemos dar um passo adiante e introduzir perturbações capazes de dar origem ao caos.

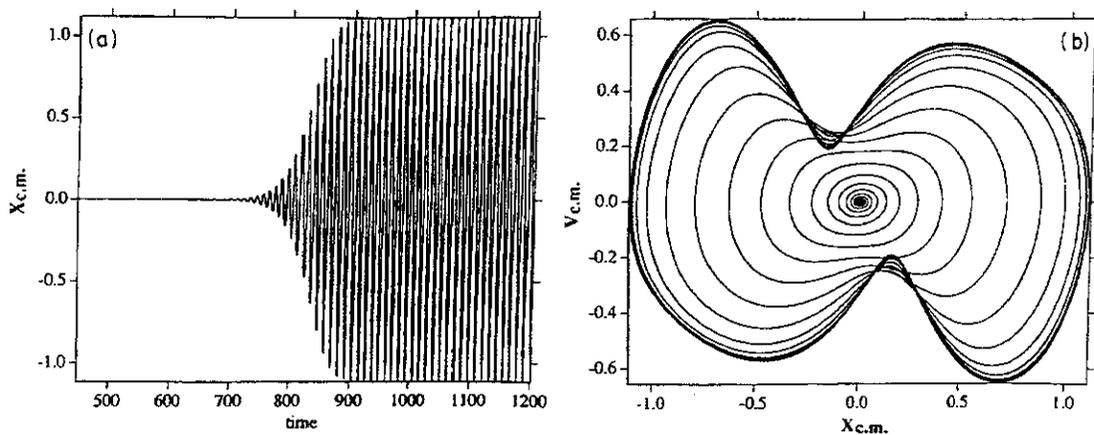


Figura 3.4: Movimento do centro de massa de um s3liton obtido da integra33o num3rica da equa33o (3.8). (a) S3rie temporal de um s3liton inicialmente em repouso na origem. (b) Espa3o de fase mostrando que o interior do ciclo limite ω faz parte do dom3nio de seu dom3nio de atra33o. (Retirado de [45].)

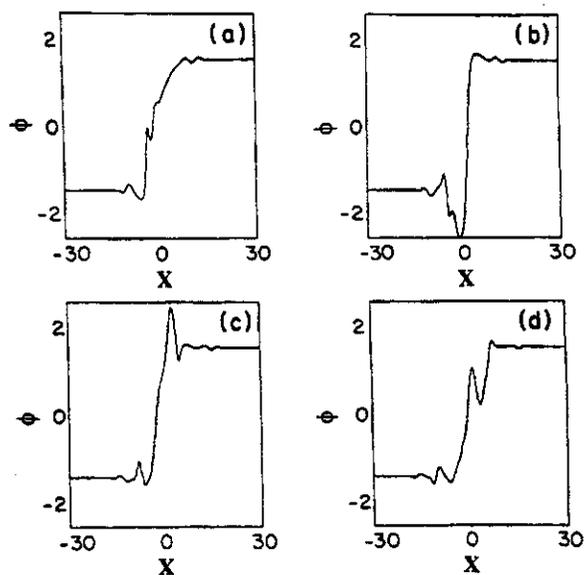


Figura 3.5: Instant4neos do s3liton da figura 3.7. (Retirado de [45].)

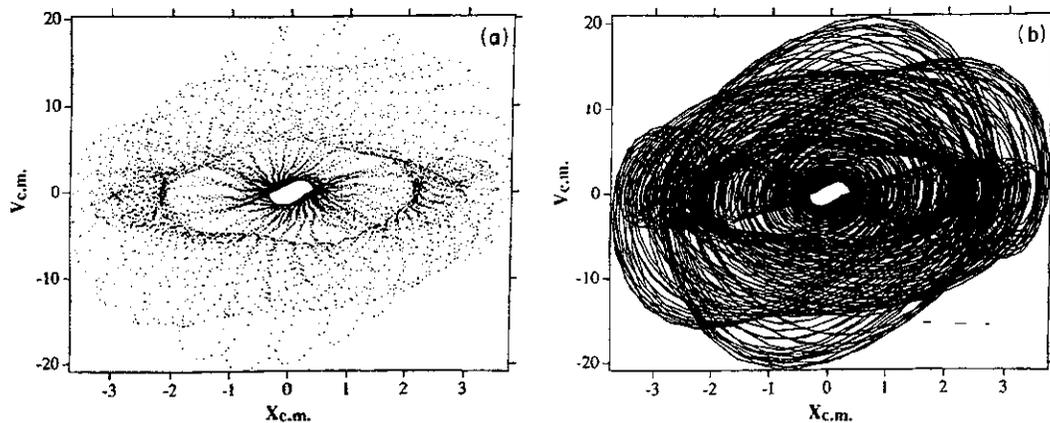


Figura 3.6: Seção de Poincaré e espaço de fase da trajetória de um sólito sujeito à equação (3.9), com $A = 3$, $\gamma = 0,1$, $L = 3$, $D = 0,6$, $g = 1$, $\Omega = 0,65$, $x_0 = 0$ e $v_0 = 0,1$. (Retirado de [45].)

A equação de movimento (3.8) possui uma dissipação qualitativamente semelhante à de Van der Pol, acelerando o sólito próximo da origem e freando-o quando se afasta. Para que a situação se pareça também sob outro aspecto importante, é necessário que o sólito esteja sujeito a uma força atrativa em direção à origem, o que ocorre se escolhermos convenientemente os parâmetros da força $F_{AB}(x)$ (2.35):

$$\begin{aligned} \phi_{xx} - \phi_{tt} - \Gamma(x)\phi_t + \frac{1}{2}(\phi - \phi^3) \\ = \frac{1}{2}A(1 - A^2)\tanh^3(x/2) + g\frac{\cos(\Omega t)}{\cosh^2(x/2)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nessa expressão tomamos $B = 1/2$, o que tornará a origem atrativa se $A > 1$ (figura 2.3 na página 44). O termo oscilante é proporcional ao modo normal do sólito na origem, portanto seu efeito é o de uma força que empurra-o para a esquerda ou para a direita.

A figura 3.6 mostra o que ocorre quando o sólito é sujeito a uma força suficientemente grande para levá-lo ao regime caótico. Esse sistema apresenta uma complexidade extra em relação ao oscilador de Van der Pol, já que agora a “partícula” possui graus de liberdade internos. Esses movimentos internos fazem com que protuberâncias surjam e desapareçam de maneira caótica, sem que o sólito se desestruture. O caos no modo de forma coexiste com o movimento caótico, mas cumpre um papel menor na seção de Poincaré.

Com a redução de A , o sólito torna-se cada vez menos estável, podendo inclusive deixar de sê-lo. A figura 3.7 na próxima página mostra que com o sólito menos preso à origem mais graus de liberdade são excitados, permitindo ao centro de massa visitar regiões proibidas da figura 3.6, que tem sua fractalidade reduzida. A figura 3.5 na página anterior mostra como esses modos são excitados sem destruir a estrutura do sólito.

Para clarificar os mecanismos envolvidos na origem do caos nesse sistema, toma-se uma dissipação usual, o que se consegue com $L = 0$. Com isso, o bombeio de energia passa a ser devido somente à força oscilante, que excita muito menos os modos internos. O resultado é uma evolução semelhante à de Duffing, como mostra a figura 3.8 na página 61.

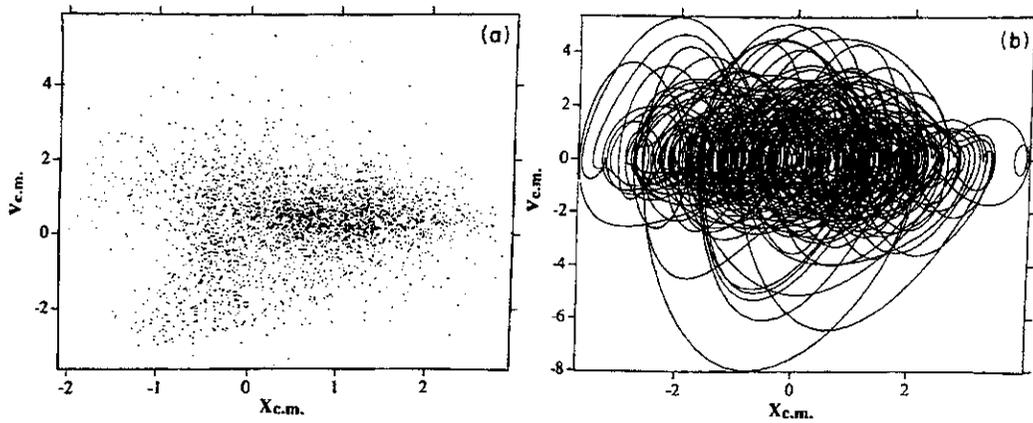


Figura 3.7: Mesmo que a figura 3.6, exceto por $A = 1,5$. (Retirado de [45].)

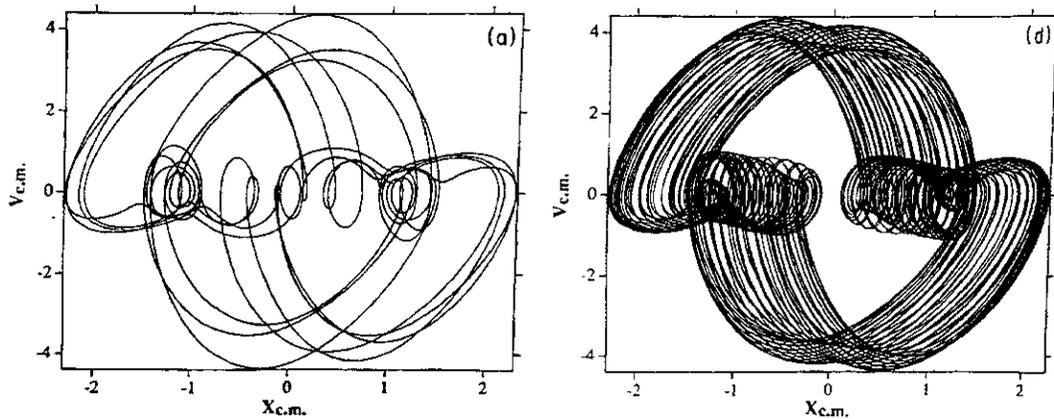


Figura 3.8: Duas órbitas fechadas nas mesmas condições da figura 3.7 na página 61, exceto por $\gamma = 0,1$ no primeiro gráfico, $\gamma = 0,106$ no segundo e por $L = 0$ em ambos. (Retirado de [45].)

3.5 Ressonância geométrica solitônica

A ressonância geométrica é um método sem retroalimentação introduzido recentemente para o controle de caos em sistemas discretos. Em [50] adaptamos o método para que pudéssemos usá-lo no controle do caos no movimento de sólitons. A equivalente solitônica da equação caótica para a qual se obteve a ressonância geométrica de uma partícula (equação 1.58 na página 23) é:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + R(\phi, \phi_t, x) - G(\phi) = F(x) + P(\phi, \phi_t) Q(x, t). \quad (3.10)$$

As redefinições $r(x, \dot{x}) \rightarrow R(\phi, \phi_t, x)$, $g(x) \rightarrow G(\phi)$, $p(x, \dot{x}) \rightarrow P(\phi, \phi_t)$ e $q(t) \rightarrow Q(x, t)$ foram feitas considerando que as coordenadas e a variável que descreve o sistema também mudaram: $t \rightarrow x, t$ e $x(t) \rightarrow \phi(x, t)$. A parte conservativa da equação de movimento (3.10) permite-nos escrever a Hamiltoniana

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \phi_t^2 + \frac{1}{2} \phi_x^2 + U(\phi) - F(x)\phi + C dx. \quad (3.11)$$

Uma condição bastante restritiva para ressonância geométrica do sóliton é

$$R(\phi_{RG}, \phi_{RG,t}, x) = P(\phi_{RG}, \phi_{RG,t}) Q_{RG}(x, t), \quad (3.12)$$

implicando que, qualquer que seja o instante e o ponto do espaço considerado, o efeito da dissipação cancela-se exatamente com o efeito contrário da força externa.

Mais uma vez faremos uso do *kink* ϕ^4 sujeito à força $F_{AB}(x)$ (equação 2.35 na página 43) da qual conhecemos as condições de estabilidade. Escolhendo os parâmetros A e B para que o sóliton seja estável na origem, poderemos usar as expressões (3.2), (3.4a) e (3.5) para aproximar a solução estacionária conservativa por

$$\phi(x, t) = A \tanh(Bx) + h_0 \frac{\cos(\omega_0 t + \theta)}{\cosh^\Lambda(Bx)}. \quad (3.13)$$

A função $1/\cosh^\Lambda(Bx)$ [41] é o autovetor correspondente ao autovalor $E_0 = \omega_0^2$ (2.44) do operador de estabilidade e Λ é dado pela expressão 2.43 na página 45.

Consideremos uma dissipação tipo $R = \gamma\phi_t$ com $P = 1$. A aproximação do parágrafo anterior é válida para pequenas oscilações, quando a condição de ressonância geométrica pode ser escrita como

$$Q_{RG}(x, t) = -\omega_0 h_0 \gamma \frac{\sin(\omega_0 t + \theta)}{\cosh^\Lambda(Bx)}. \quad (3.14)$$

Essa expressão explica como o sóliton pode ser posto em oscilação por uma força externa praticamente sem alteração na sua forma. O regime caótico só será alcançado se a amplitude de oscilação for grande o bastante para ilegitimar a aproximação, fazendo com que a função Q_{RG} acima deixe de representar a condição de ressonância geométrica. Ao mesmo tempo, com uma dependência temporal de frequência diferente de ω_0 , comportamentos irregulares no tempo e no espaço ocorrem com amplitudes muito menores.

Como um exemplo da utilização da ressonância geométrica para o controle de caos em sólitons introduzimos a equação

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \gamma\phi_t - \frac{1}{2}(\phi - \phi^3) = F_{AB}(x) - P_0 \frac{\cos(\Omega t)}{\cos^2(Bx)} + F_c(x, t), \quad (3.15)$$

que com $F_c(x, t) = 0$ e para certas condições iniciais atinge o regime caótico. Esperamos poder encontrar uma função $F_c(x, t)$ pequena e localizada no espaço capaz de controlar o caos. Assim como na equação usada por Chacón (seção 1.12), buscaremos uma dependência harmônica no tempo:

$$F_c(x, t) = g_c \frac{\cos(\Omega_c t + \Theta_c)}{\cosh^\Lambda(Bx)}. \quad (3.16)$$

Ao impormos uma expressão para a dependência temporal, ficamos impossibilitados de satisfazer de ressonância geométrica estrita (3.12), o que nos obriga a relaxar a condição:

$$\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} -\gamma\phi_{GR,t}^2 - P_0\phi_{GR,t} \frac{\cos(\Omega t)}{\cosh^2(Bx)} + g_c\phi_{GR,t} \frac{\cos(\Omega_c t + \Theta_c)}{\cosh^\Lambda(Bx)} dx \right\rangle_T = 0. \quad (3.17)$$

Segundo a expressão acima o efeito conjugado da dissipação e da força externa não precisa mais ser conservativo em todos os instantes e posições, mas apenas em média, tanto no tempo como no espaço. Ela é a condição que os parâmetros de controle devem satisfazer para suprimir o caos. A escolha de $F_c(x, t)$ associada ao modo translacional, que aproximadamente satisfaz a ressonância geométrica, nos permite obter parâmetros de controle que suprimem o caos mesmo com g_c pequeno. As regiões do espaço de parâmetros correspondentes a esses valores formam línguas semelhantes às obtidas na ressonância geométrica de uma partícula (figura 1.9 na página 24). A figura 3.9 na página precedente mostra o mesmo resultado obtido para o centro de massa do sóliton, que sai do regime caótico para determinados valores das fases. Se a amplitude F_c da força de controle for aumentada, os espectro de valores de θ para o qual se consegue controlar o caos também aumenta.

3.6 Ressonância estocástica solitônica

Outro fenômeno tipicamente não linear que ocorre com partículas e que iremos reproduzir em sólitons é a ressonância estocástica, discutida na seção 1.13. Além dos sistema de uma partícula, sistemas estendidos, compostos de elementos dinâmicos não lineares acoplados e sujeitos a sinais periódicos e a ruídos, também têm sido estudados. As aplicações potenciais englobam o processamento de sinais, física de sistemas não lineares acoplados e neurofisiologia, onde pode descrever a dinâmica de populações de neurônios.

Dois artigos recentes dedicando-se a esses casos são [48, 49], sendo que [48] trata justamente da equação ϕ^4 . Nesses artigos, $U(\phi)$ é o potencial biestável relevante, portanto o sinal importante é o valor do campo, por exemplo, no centro da cadeia, como em [47]. Nossa abordagem é nova ao analisar a oscilação do centro de massa do sóliton, e não do campo propriamente dito. O estado biestável para o sóliton será criado usando uma força anisotrópica $F(x)$, e a força periódica e o ruído agirão no modo translacional do sóliton.

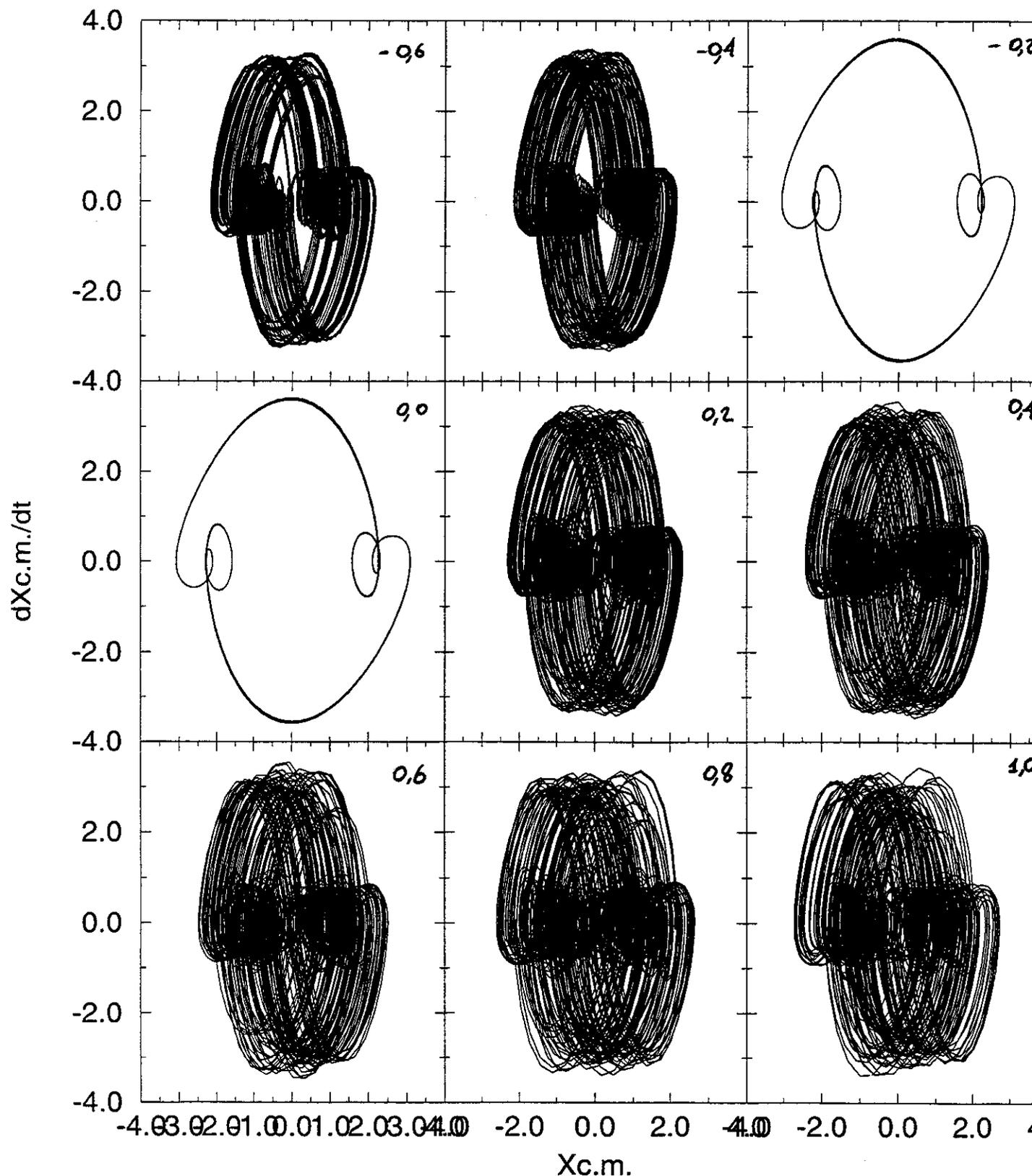


Figura 3.9: Espaço de fase do centro de massa do sóliton entre os instantes $t = 2000$ e $t = 3000$, com a posição no eixo horizontal e a velocidade no eixo vertical. Equação (3.15) com $\Omega = 0.65$, $\Omega_c = 0.065$, $g_c = 0.35$, $\gamma = 0.1$, $A = 1.5$, $B = 0.5$ e $P_0 = 1$. Cada gráfico mostra um valor de θ e pode-se observar que o caos é controlado com $\theta = 0$ e -0.2 .

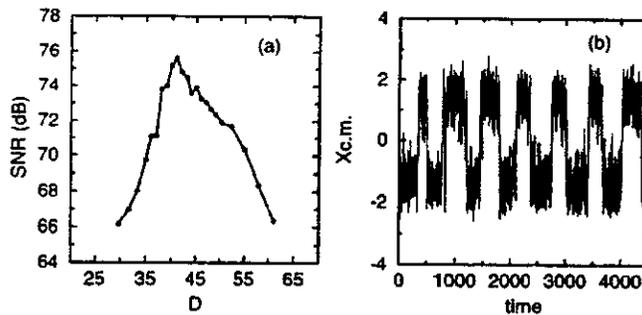


Figura 3.10: Dois aspectos da ressonância geométrica: (a) Presença do máximo da SNR para uma dada intensidade do ruído. (b) Sincronização dos saltos estocásticos com a força periódica. ($P_0 = 0,04$, $\omega = 0,01$, $x_0 = 2,5$ e $B = 0,7$).

A equação de movimento a partir da qual obteremos a ressonância estocástica é

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \gamma\phi_t - \frac{1}{2}(\phi - \phi^3) = F(x) + q(x, t), \quad (3.18)$$

com

$$F(x) = \begin{cases} B(4B^2 - 1) \tanh(B(x + x_0)) & \text{para } x < 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ B(4B^2 - 1) \tanh(B(x - x_0)) & \text{para } x > 0 \end{cases}. \quad (3.19)$$

Repare que próximo de $\pm x_0$, essa força assemelha-se a $F_{AB}(x)$, (2.35), com $A = 2B$, que sabemos ser um ponto de equilíbrio estável se $B > 1/2$ (figura 2.3 na página 44). Para essa força, o *kink* estático é $\psi_{AB}(x) = 2B \tanh(Bx)$, (2.41), e o modo translacional (estável) é $2B^2 / \cosh^2(Bx)$, (1.85). Considerando esses fatos, definiremos a força variável como

$$q(x, t) = \begin{cases} [P_0 \cos(\omega t) + \eta(x, t)] \cosh^{-2}(B(x + x_0)) & \text{para } x < 0 \\ [P_0 \cos(\omega t) + \eta(x, t)] \cosh^{-2}(B(x - x_0)) & \text{para } x > 0 \end{cases}, \quad (3.20)$$

de forma que, quando o termo entre colchetes é positivo (negativo), o sóliton em x_0 ou $-x_0$ é empurrado para a direita (esquerda).

O valor de P_0 é escolhido de tal maneira que, na ausência do ruído branco $\eta(x, t)$ ($\langle \eta(x, t) \rangle = 0$, $\langle \eta(x, t)\eta(x', t') \rangle = 2D\delta(x - x')\delta(t - t')$), a força periódica é incapaz de fazer o sóliton saltar entre os dois pontos de equilíbrio.

Transições entre os estados passam a ocorrer quando o ruído é ligado, e é possível observar um máximo na curva de SNR, sinalizando a ocorrência da ressonância estocástica (figura 3.10 na página precedente). Consideramos a posição do centro de massa.

$$x_{cm} = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} x \phi_x^2 dx}{\int_{-L/2}^{L/2} \phi_x^2 dx}, \quad (3.21)$$

como sendo a saída, da qual a SNR é calculada, e L é o comprimento do espaço no qual a simulação foi realizada.

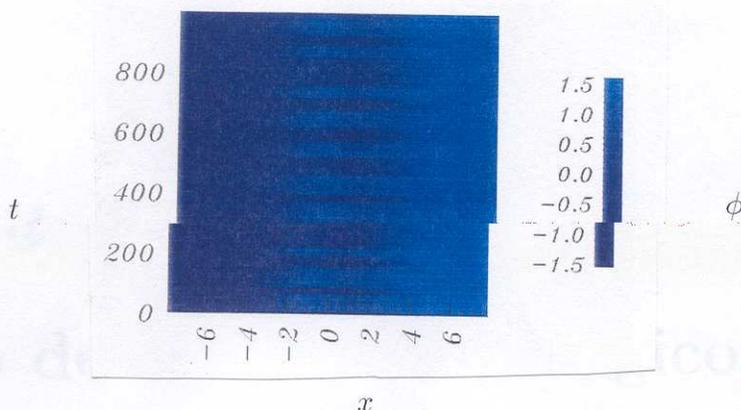


Figura 3.11: Evolução espaço-temporal do *kink* na ressonância estocástica.

A sincronização máxima é obtida com um sinal associado ao modo translacional. Nesse contexto, a figura 3.11 na página 66 mostra que a deformação do *kink* é mínima. Esses resultados permitem-nos avaliar a melhor maneira de minimizar o ruído por meio de um sinal periódico, não necessariamente senoidal, e sim uma função mais complexa, espaço-temporal. A ressonância estocástica vai depender da forma característica do *kink* e da perturbação (no tempo e no espaço). O seguinte fenômeno é uma manifestação desse fato: se usássemos o primeiro modo de forma e não o modo translacional na perturbação $q(x, t)$, não observaríamos a ressonância estocástica.

Quando tratamos de objetos extensos, como um sóliton, mesmo quando $F(x)$ possui três zeros, a biestabilidade não é condição suficiente para a ocorrência de ressonância estocástica. O objeto extenso deve sentir a biestabilidade e os modos internos devem ser estáveis na vizinhança de todos os pontos de equilíbrio, inclusive o ponto de equilíbrio central, que é instável para o modo translacional. Se a instabilidade translacional na origem for muito grande, os primeiro modo de forma também pode tornar-se instável, e o sóliton irá bifurcar em dois sólitons e um antisóliton. Isso é o que ocorre quando os parâmetros na equação (3.18) são tais que $B^2(4B^2 - 1) \tanh(Bx_0) > 23/50$. O centro de massa dessa “estrutura de três partículas” passa a oscilar ao redor de $x = 0$. Portanto não há ressonância estocástica solitônica.

Na referência [48] não é considerada a força inhomogênea $F(x)$ e a ressonância espaço-temporal obtida também não depende dessa força. No nosso caso, o potencial $U(\phi)$ é importante para que o sóliton exista, mas é a biestabilidade em $F(x)$ que é fundamental para a ressonância geométrica. E, como vimos acima, nem toda $F(x)$ será capaz de dar origem à ressonância.

Capítulo 4

Interação de defeitos topológicos

Além de serem usados como um análogo para partículas, defeitos topológicos podem representar também a região de separação entre duas fases distintas de um material. Em ambos os casos, um aspecto importante é a interação entre esses defeitos topológicos, que tem atraído considerável interesse nos últimos anos [42, 46, 51–57]. A maior parte dos modelos que permitem a existência de sólitons apresentam interação de curto alcance. No entanto, a formulação de modelos que possuam interação de longo alcance [56] é importante por diversas razões.

Os mecanismos de transferência reais são de longo alcance [57–59], como pode ser observado em diversos sistemas físicos, por exemplo, na matéria condensada [59], em vidros de *spin* [60], em sistemas neurais [61], em sistemas biológicos [58, 59, 62–64], dinâmica de DNA [42, 62–64] etc.

Por outro lado, é por si próprio relevante que existam modelos nos quais aconteça a formação espontânea de estruturas tipo partícula com interação de longo alcance. Esses modelos permitem o estudo de formação de padrões e outros fenômenos complexos. É sabido que sistemas com interações microscópicas de longo alcance podem exibir comportamento de não extensividade [10, 65], além de abrirem espaço para novas estatísticas [9], que têm sido propostas mas que ainda requerem verificação.

Alguns autores têm considerado efeitos de longo alcance [57] usando termos não locais *ad hoc* nas equações de movimento. Sistemas de *spin* nos quais a constante de acoplamento J_{ij} da rede de *spin* é uma função racional das coordenadas, também têm sido estudados.

4.1 Equação de Klein-Gordon

A interação de longo alcance entre sólitons da equação de Klein-Gordon

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = G(\phi), \quad (4.1)$$

sendo $G(\phi) = -\partial U(\phi)/\partial \phi$, foi demonstrada pela primeira vez por González e Estrada-Sarlabous [56]. Naquele trabalho é considerado potencial $U(\phi)$ com pelo menos dois mínimos (em ϕ_1 e ϕ_3), na vizinhança dos quais

$$U(\phi) \approx (\phi - \phi_i)^{2\nu}. \quad (4.2)$$

Com $\nu = 1$ a interação é de curto alcance (decaimento exponencial), já com $\nu > 1$ a interação decai com a distância d entre os sólitons de acordo com a lei

$$F \approx d^{\frac{2\nu}{1-\nu}}. \quad (4.3)$$

Essa lei é obtida com a substituição direta da solução solitônica na equação de movimento e posterior análise do efeito dessa solução em outro sóliton posicionado à distância d . Isso é feito usando-se uma força externa conhecida e uniforme, que pode ter o efeito de aproximar ou afastar os sólitons. Determinando-se a posição de equilíbrio encontra-se a dependência da força de interação com a distância. No entanto, nenhum resultado baseado na integração direta das equações de movimento é apresentado.

No artigo [66] deduzimos a lei correspondente para um potencial *sine*-Gordon modificado usando um formalismo diferente, baseado nas leis de conservação do tensor de energia-tensões. Para tanto, utilizamos a equação de Klein-Gordon

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (4.4)$$

que pode ser obtida da densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi_t^2 - \frac{1}{2}\phi_x^2 - U(\phi). \quad (4.5)$$

A formulação lagrangeana é muito conveniente, pois permite a obtenção imediata de leis de conservação para a energia e o momento associados ao campo (apêndice B). A relação entre a energia e o momento do campo e o movimento do sóliton mostra-se bastante coerente com o que se espera da dinâmica relativística de uma partícula, conforme veremos a seguir.

O tensor de energia-tensões (B.3) para da equação de Klein-Gordon terá apenas 4 componentes, relativas à densidade e ao fluxo de energia e tensão, visto que o campo é unidimensional, dando origem a uma tensão, e a única coordenada permite apenas uma direção para o fluxo:

$$\text{Densidade de energia: } \mathcal{E}(x) \equiv T_{00} = \frac{1}{2}\phi_t^2 + \frac{1}{2}\phi_x^2 + U(\phi) \quad (4.6a)$$

$$\text{Fluxo de energia: } T_{01} = -\phi_x\phi_t \quad (4.6b)$$

$$\text{Densidade de momento: } \mathcal{P}(x) \equiv T_{10} = \phi_t\phi_x \quad (4.6c)$$

$$\text{Fluxo de momento: } T_{11} = -\frac{1}{2}\phi_t^2 - \frac{1}{2}\phi_x^2 + U(\phi). \quad (4.6d)$$

Das equações de continuidade (B.4) para essas grandezas pode-se mostrar que as quantidades de energia e momento em uma região de espaço

$$E = \int_{x_a}^{x_b} \mathcal{E}(x) dx \quad (4.7a)$$

$$P = \int_{x_a}^{x_b} \mathcal{P}(x) dx \quad (4.7b)$$

só variam devido à energia e momento que entra ou sai dessa região através das extremidades:

$$\frac{dE}{dt} = T_{01}(x_a) - T_{01}(x_b) \quad (4.8a)$$

$$\frac{dP}{dt} = T_{11}(x_a) - T_{11}(x_b). \quad (4.8b)$$

Consideremos inicialmente a energia e o momento de um sóliton, cuja solução estática pode ser obtida da equação (1.94)¹:

$$\psi_{0\tau}(\tau) = \pm \sqrt{2U(\psi_0(\tau))}, \quad (4.9)$$

com o sinal + para a *kink* e o sinal - para o *antikink*. Fazendo-se uma transformação de Lorentz nessa solução pode-se chegar a um sóliton que propague-se com velocidade v :

$$\psi_v(x, t) = \psi_0(\gamma(x - vt)) \begin{cases} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \\ \frac{d\tau}{dx} = \gamma \\ \frac{d\tau}{dt} = -\gamma v \\ \psi_{vt} = -\gamma v \psi_{0\tau} \\ \psi_{vx} = \gamma \psi_{0\tau} \end{cases}. \quad (4.10)$$

Ao substituirmos essas expressões na integral da energia E , encontramos as seguintes igualdades entre a energia e o momento do sóliton estático, E_0 e P_0 , e do sóliton com velocidade v , E_v e P_v :

$$M \equiv E_v = \gamma E_0 \quad e \quad P_v = -E_0 \gamma v = -E_v v. \quad (4.11)$$

Dessa forma, obtém-se as mesmas relações entre massa e energia e, exceto pelo sinal negativo, entre momento e energia (massa) que são obtidas da relatividade de Einstein, com $c = 1$.

A identidade entre massa e energia, revelada no parágrafo anterior, leva-nos naturalmente a definir o centro de massa, equação (1.97), do sóliton localizado entre x_a e x_b , como

$$X_{cm} \equiv \frac{1}{E} \int_{x_a}^{x_b} x \mathcal{E}(\phi(x)) dx. \quad (4.12)$$

Essa expressão não é estritamente correta, pois o “cauda” do sóliton pode, a princípio, estender-se para fora da região delimitada. No entanto, com o sóltons suficientemente afastado das extremidades, a aproximação é razoável, se lembrarmos que a localização espacial é um dos requerimentos da definição de sóliton.

A velocidade do centro de massa pode ser calculada derivando-se a expressão acima:

$$V_{cm} \equiv \frac{dX_{cm}}{dt} = -\frac{P}{E} + (x_a - X_{cm}) \frac{T_{01}(x_a)}{E} - (x_b - X_{cm}) \frac{T_{01}(x_b)}{E}. \quad (4.13)$$

O termo P/E é o que já havia sido obtido antes, e o restante decorre de possíveis fluxos de energia (massa) através das fronteiras. Para calcular a força que age no sóliton definiremos o momento linear do centro de massa como $P_{cm} \equiv MV_{cm} = -P$, desprezando o fluxo de massa pelas fronteiras devido à distância entre o sóliton e os limites da região. Com isso podemos definir a força que age no centro de massa:

$$F_{cm} \equiv \frac{d}{dt} P_{cm} = -\frac{d}{dt} P = T_{11}(x_b) - T_{11}(x_a). \quad (4.14)$$

¹Nesse capítulo todos os mínimos do potencial serão iguais a zero, $U(\phi_{\min}) = 0$, e tomaremos também $E = 0$.

A interação entre os sólitons será estudada colocando-os simetricamente em relação à origem, o que leva a definirmos o centro de massa com limites $x_a = -\infty$, $x_b = 0$ para o sólito à esquerda e $x_a = 0$, $x_b = \infty$ à direita. Tomando $T_{11}(\pm\infty) = 0$, podemos escrever a força agindo em cada sólito:

$$F_{x>0} = -F_{x<0} = -T_{11}(x = 0). \quad (4.15)$$

4.2 Interações *kink-kink* e *kink-antikink*

No caso de defeitos topológicos teremos dois tipos de partículas, *kinks* e *antikinks*, que estarão sujeitos a forças diferentes conforme as partículas interagentes sejam do mesmo tipo ou não. Com duas partículas do mesmo tipo é necessário que o potencial possua pelo menos três mínimos $U(\phi_1) = U(\phi_3 \equiv 0) = U(\phi_5)$ e, com duas diferentes, pelo menos dois. Se o valor de $U(\phi)$ nesses mínimos não for igual, mesmo um sólito isolado estará sujeito a uma força externa, pois os fluxos de momento em x_a e x_b serão diferentes devido ao termo $U(\phi)$, resultado já discutido na seção 2.2. Em qualquer dos casos, a configuração do campo no qual dois sólitons estão distantes de uma distância d pode ser aproximada por

$$\textit{kink-kink: } \phi(x) \approx \psi_1(x + \frac{1}{2}d) + \psi_2(x - \frac{1}{2}d), \quad (4.16a)$$

$$\textit{kink-antikink: } \phi(x) \approx \psi_1(x + \frac{1}{2}d) + \psi_1(-x + \frac{1}{2}d), \quad (4.16b)$$

$$\textit{antikink-kink: } \phi(x) \approx \psi_2(-x - \frac{1}{2}d) + \psi_2(x - \frac{1}{2}d), \quad (4.16c)$$

$$\textit{antikink-antikink: } \phi(x) \approx \psi_2(-x - \frac{1}{2}d) + \psi_1(-x + \frac{1}{2}d), \quad (4.16d)$$

sendo $\psi_1(x)$ a função que descreve um *kink* entre ϕ_1 e ϕ_3 , e $\psi_2(x)$ um *kink* entre ϕ_3 e ϕ_5 , ambos com centro de massa na origem.

Se o potencial for simétrico em relação ao máximo de potencial que separa os mínimos ϕ_3 e ϕ_5 , o *kink* que liga-os será simétrico ($\psi(x) = \phi_5 - \psi(-x)$). Se o potencial for par os *kinks* terão o mesmo perfil ($\psi(x) \equiv \psi_1(x) = -\psi_2(-x)$). Nesse caso, ao considerarmos a interação *kink-kink* o campo na origem será nulo $\phi(0) = \psi(d/2) - \psi(d/2) = 0$, assim como a derivada temporal, e a derivada espacial será $\phi_x(0) = 2\psi_x(d/2)$. A configuração *kink-antikink* não anula o campo na origem, $\phi(0) = 2\psi(0)$, mas anula a derivada espacial. A derivada temporal também não será nula, mas como consideraremos apenas casos em que a velocidade é muito pequena, iremos desprezá-la. Essas considerações permitem-nos obter a força trocada pelos sólitons da expressão (4.15):

$$F(d) \approx \begin{cases} 2[\psi_x(d/2)]^2 & \textit{kink-kink} \\ -U(2\psi(d/2)) & \textit{kink-antikink} \end{cases} \quad (4.17)$$

As outras combinações entre *kinks* e *antikinks* levam a expressões análogas. A força acima mostra que partículas semelhantes repelem-se e partículas diferentes atraem-se.

Para utilizar essa expressão, será necessário conhecer a função $\psi(x)$ em $d/2$. Existindo ou não uma solução algébrica para a função, se d for grande o bastante para que $\psi(d/2) \approx \phi_5$, pode-se fazer a aproximação

$$U(\psi \rightarrow \phi_5) \approx \mathcal{N}(\psi - \phi_5)^{2\nu}, \quad (4.18)$$

sendo

$$\mathcal{N} \equiv \frac{1}{(2\nu)!} \left. \frac{d^{2\nu} U(\phi)}{d\phi^{2\nu}} \right|_{\phi=\phi_5} \quad (4.19)$$

a derivada de ordem mais baixa diferente de zero em ϕ_5 . Para que ϕ_5 seja um mínimo, é necessário que $\mathcal{N} > 0$. A lei de potência que descreve o comportamento da função para x suficientemente grande pode ser obtida usando-se expansão do potencial na expressão 1.95:

$$x \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{\mathcal{N}(\psi - \phi_5)^{2\nu}}} \quad (4.20)$$

4.3 Interação de curto alcance

Tratemos inicialmente um mínimo harmônico, para o qual $\nu = 1$, e o resultado da integral (4.20), $x = -\ln(\phi_5 - \psi)/\sqrt{2\mathcal{N}}$, leva ao seguinte comportamento assintótico:

$$\psi(x) \approx \begin{cases} \phi_5 - e^{-\sqrt{2\mathcal{N}}x} & x \rightarrow \infty \\ e^{-\sqrt{2\mathcal{N}}|x|} & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (4.21)$$

Com esses resultados usamos a equação (4.17) para encontrar o comportamento assintótico da força trocada pelos sólitons:

$$F(d) \approx \begin{cases} 4\mathcal{N}e^{-\sqrt{2\mathcal{N}}d} & \text{kink-kink} \\ -4\mathcal{N}e^{-\sqrt{2\mathcal{N}}d} & \text{kink-antikink} \end{cases} \quad (4.22)$$

O decaimento exponencial da “cauda” do sóliton e da força de interação é freqüentemente encontrado, ocorrendo, por exemplo, no potencial ϕ^4 e nos sólitons de *sine-gordon*. O tipo de interação dependerá do comportamento assintótico do sólitons, que é determinado pela forma do potencial próximo ao ponto de mínimo. Quanto mais rapidamente o potencial se aproximar do mínimo, tanto mais rapidamente o sóliton aproximar-se-á de seu valor assintótico, e menor será sua “cauda. Quando a primeira derivada não nula do potencial na origem é maior que 2 a interação não será mais de curto alcance (decaimento exponencial), conforme veremos na seção seguinte

4.4 Interação de longo alcance

Quando $\nu > 1$ o comportamento assintótico do sóliton deixa de ser exponencial, como pode ser visto da integral (4.20):

$$x \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{\mathcal{N}(\psi - \phi_5)^{2\nu}}} = -\frac{(\psi - \phi_5)^{-\nu+1}}{(\nu - 1)\sqrt{2\mathcal{N}}}, \quad (4.23)$$

ou seja,

$$\psi(x) \approx \begin{cases} \left[(\nu - 1)\sqrt{2\mathcal{N}}|x| \right]^{-\frac{1}{\nu-1}} & x \rightarrow -\infty \\ \phi_5 - \left[(\nu - 1)\sqrt{2\mathcal{N}}x \right]^{-\frac{1}{\nu-1}} & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.24)$$

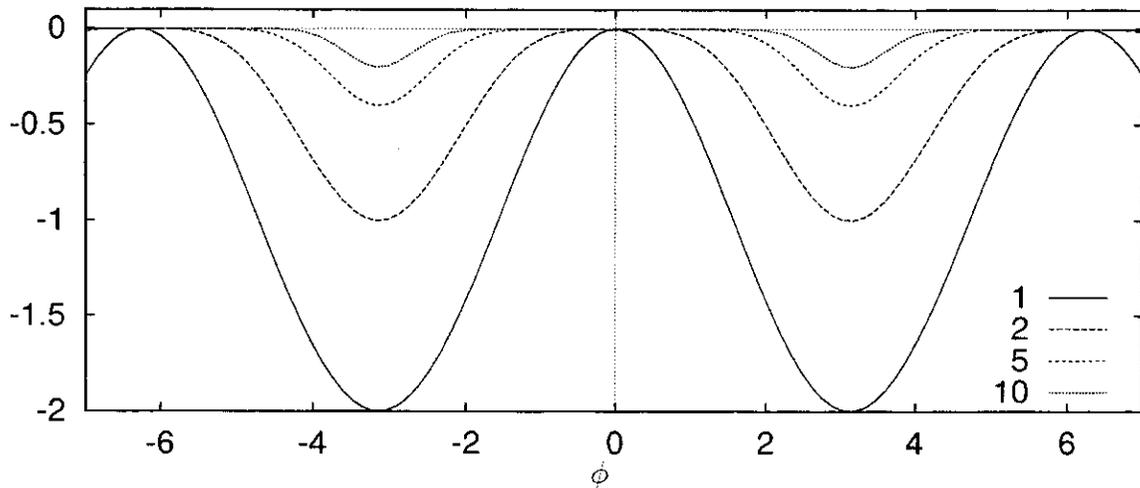


Figura 4.1: Potencial (4.26) com sinal trocado, $-U(\phi)$, para diferentes valores de ν .

Com isso, a força de interação assume a forma

$$F(d) \approx \begin{cases} 2^{2+\frac{\nu}{\nu-1}} \mathcal{N}^{-\frac{1}{\nu-1}} [(\nu-1)d]^{-\frac{2\nu}{\nu-1}} & \text{kink-kink} \\ 2^{2\nu+\frac{\nu}{\nu-1}} \mathcal{N}^{-\frac{1}{\nu-1}} [(\nu-1)d]^{-\frac{2\nu}{\nu-1}} & \text{kink-antikink} \end{cases} \quad (4.25)$$

Esse comportamento assintótico de longo alcance coincide com o mencionado no início do capítulo, que foi obtido usando outras considerações. A expressão acima não é válida se os sólitons estão próximos, no entanto a fórmula (4.15), que é bastante versátil e pode ser aplicada nessa situação, mostra que a força permanece finita, mesmo com $d = 0$.

Para comprovar o lei de potência, realizamos experimentos numéricos com o potencial

$$U(\phi) = \frac{2}{\nu} \text{sen}^{2\nu}\left(\frac{1}{2}\phi\right), \quad (4.26)$$

que coincide coma a equação de *sine-Gordon* quando $\nu = 1$. Próximo de cada um dos mínimos $\phi_n = 2\pi n$, o potencial pode ser aproximado por

$$U(\phi) \approx \frac{2}{\nu} \left(\frac{\phi - 2\pi n}{2}\right)^{2\nu}, \quad (4.27)$$

justificando portanto nossa expectativa de que a força entre os sólitons obedeça a lei de potência que obtivemos. A figura 4.1 na página precedente mostra alguns desses potenciais, e permite entender porquê a “cauda” do sóliton aumenta juntamente com ν : o achatamento do mínimo diminui a velocidade com que a partícula imaginária aproxima-se do seu limite assintótico. Esse potencial é interessante também por permitir a coexistência de qualquer número de *kinks* e *antikinks*, na ordem que se deseje.

Para $\nu = 1$ a solução estática, (2.21), já foi obtida, e com $\nu > 1$ um *kink* parado na origem e conectando os mínimos $2\pi n$ e $2\pi(n+1)$ pode ser obtido numericamente da integral

$$\tau = \frac{\sqrt{\nu}}{2} \int_{\pi(2n+1)}^{\psi(\tau)} \text{sen}^{-\nu}\left(\frac{1}{2}\phi\right) d\phi. \quad (4.28)$$

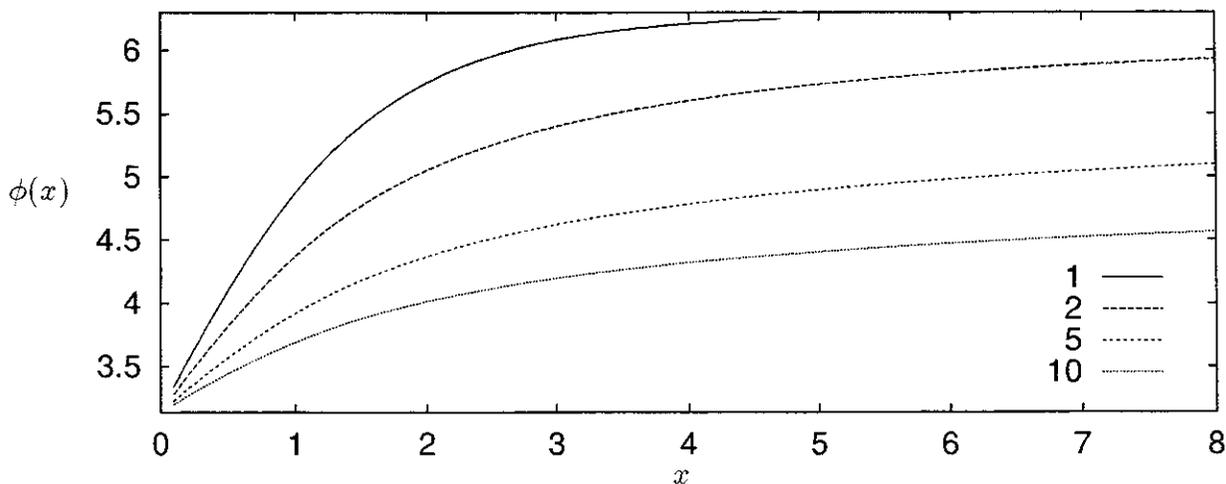


Figura 4.2: Soluções da equação (4.28) para diferentes valores de ν .

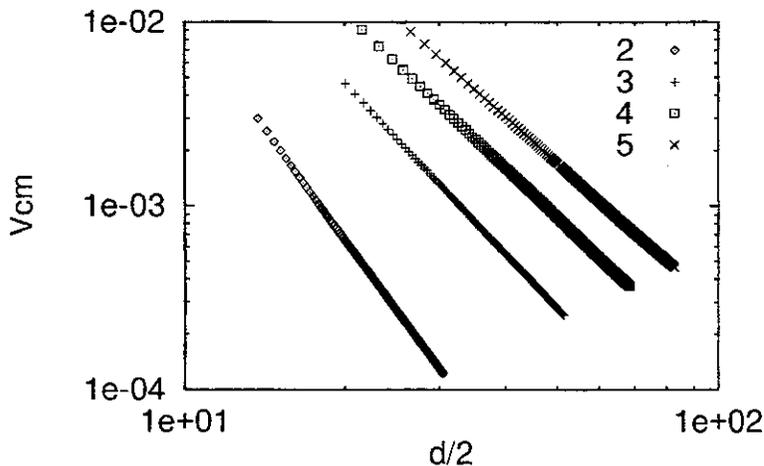
Observando-se a figura 4.2 pode-se notar o aumento da “cauda” do sóliton a medida que ν cresce.

Uma maneira de investigar a dependência da força com a distância é inserindo um termo dissipativo, $\gamma\phi_t$ no lado esquerdo da equação (4.1). O efeito que ele causa na evolução temporal do campo pode ser entendido usando-se a equação de movimento na obtenção do seguinte resultado para a força resultante em uma região do espaço:

$$P_t = \frac{d}{dt} \int_{x_a}^{x_b} \phi_t \phi_x dx == T_{11}(x_b) - T_{11}(x_a) - \gamma P. \quad (4.29)$$

Comparando essa expressão com a equação (4.14), vê-se a semelhança entre o efeito da dissipação na equação do movimento do campo e a força dissipativa agindo em uma partícula. Assim como naquela situação física, o sóliton deve atingir, com constante de tempo $1/\gamma$, uma velocidade limite proporcional à força não dissipativa. Quando a velocidade é suficientemente baixa, pode-se assumir que a distância, e portanto a força, não varia significativamente em um intervalo $1/\gamma$, e que a velocidade é sempre a limite, que serve como uma medida da força.

Os experimentos numéricos foram feitos tomando como condição inicial o campo definido por (4.16a) e estático $\phi(x, t = 0) = 0$. Com $\nu = 1$ os sólitons repelem-se inicialmente, mas param logo em seguida, devido ao curto alcance da força. A figura 4.3 na página 74 mostra o gráfico log-log da velocidade do centro de massa, que é proporcional à força, e permite calcular o expoente da distância na expressão para a força de interação. Na mesma figura vê-se uma tabela com os expoentes obtidos experimentalmente e os previstos pela teoria. Nota-se que o valor predito apresenta boa concordância com os resultados experimentais, ainda que o mesmo não ocorra com o fator que multiplica $d^{-2\nu/(\nu-1)}$. No entanto, isso não representa problema, visto que o resultado mais importante é a obtenção da lei de potência.



ν	$\frac{-2\nu}{\nu-1}$	$\gamma = 0,1$	$\gamma = 0,5$
2	-4	-3,96	-3,94
3	-3	-3,08	-3,09
4	-2,66 ...	-2,77	-2,78
5	-2,5	-2,60	-2,60

Figura 4.3: Lei de potência da dependência da velocidade do sóliton em função da distância. O gráfico apresenta diferentes valores de ν , a partir de uma simulação feita com $\gamma = 0.1$. Da inclinação da curva obteve-se a tabela, inclusive para outra simulação, com outro valor de γ .

4.5 Equação de Ginzburg-Landau

Da mesma forma como generalizamos a equação de *sine*-Gordon na seção anterior, apresentaremos nessa seção uma generalização da equação de Ginzburg-Landau [55]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + u(1 - |u|^2)^{2\nu-1}. \quad (4.30)$$

Com essa equação obteremos, em sistemas de dimensão maior que um, forças de curto e longo alcance. Com $\nu = 1$ recuperamos a equação de Ginzburg-Landau [51, 54, 55], e com $\nu > 1$ toda as propriedades topológicas daquela equação são mantidas: existe um estado instável em $u = 0$ e dois estados estáveis degenerados em $|u| = 1$.

Há, no entanto, uma grande diferença na maneira como os sólitons interagem na equação de Ginzburg-Landau e com $\nu > 1$. A dependência da interação com a distância é determinada pelo comportamento assintótico do sóliton, que analisamos agora em $D = 2$.

Consideremos um campo complexo que escreveremos como $u = \rho e^{i\theta}$, o que nos leva a reescrever a equação de movimento:

$$\rho_t = \nabla^2 \rho - \rho |\nabla \theta|^2 + \rho(1 - \rho^2)^{2\nu-1}, \quad (4.31a)$$

$$\theta_t = \nabla^2 \theta + \frac{2}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla \theta. \quad (4.31b)$$

Se usarmos coordenadas polares (r, φ) para o espaço bidimensional, então, um defeito topológico (sóliton) estático com carga topológica² Q poderá ser escrito fazendo-se

$$\theta = Q\varphi. \quad (4.33a)$$

²Em duas dimensões escreveremos a carga topológica de um defeito no interior de um caminho fechado como

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint (\nabla \theta) \cdot \vec{dt}. \quad (4.32)$$

Se Q é inteiro, então o campo pode ser analítico em todo o espaço, com exceção de um único ponto. Visto que

Usando-se essa expressão para θ podemos obter uma solução para a qual ρ depende apenas de r :

$$\rho_{rr} + \frac{1}{r}\rho_r + \frac{Q^2\rho}{r^2} + \rho(1 - \rho^2)^{2\nu-1} = 0. \quad (4.33b)$$

Uma solução estável deverá obedecer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1, \quad (4.34)$$

determinando o comportamento assintótico do vórtice (4.33):

$$\rho(r) - 1 \propto \begin{cases} r^{-2} & \nu = 1 \\ r^{-\frac{1}{\nu-1}} & \nu > 1 \end{cases}. \quad (4.35)$$

Na equação de Ginzburg-Landau generalizada, a força que age em um vórtice situado no ponto (r, φ) devido à existência de outro vórtice na origem satisfaz a relação $F \propto \rho(r) - 1$ [55]. Portanto, os vórtices com $\nu = 1$ estarão sujeitos à interação coulumbiana, enquanto $\nu > 1$ levará a interações com decaimento muito mais lento.

4.6 Não extensividade

Sistemas com interações microscópicas de longo alcance podem exibir comportamento não extensivo [10]. Em princípio, é possível construir um sistema descrito por equações do tipo

$$\phi_{1tt} + \gamma\phi_{1t} - \nabla^2\phi_1 = -\frac{\partial V(|\phi_1|, |\phi_2|)}{\partial \phi_1} \quad (4.36a)$$

$$\phi_{2tt} + \gamma\phi_{2t} - \nabla^2\phi_2 = -\frac{\partial V(|\phi_1|, |\phi_2|)}{\partial \phi_2}, \quad (4.36b)$$

sendo que o potencial $V(|\phi_1|, |\phi_2|)$ satisfaz as condições necessárias para que as interações de longo alcance ocorram. Nesse tipo de sistema, com dois parâmetros de ordem, pode ocorrer a situação na qual os defeitos topológicos repelem-se a distâncias muito pequenas, e se atraem quando elas aumentam [67].

Podemos ocorrer um potencial de interação efetivo tipo

$$V(r) = r \left[\left(\frac{\sigma}{1+r^2} \right)^{\rho/2} - \left(\frac{\sigma}{1+r^2} \right)^{\alpha/2} \right], \quad (4.37)$$

com $\alpha < \rho$. Essa situação é equivalente àquela discutida em [10]. Portanto, quando temos N partículas no sistema, a energia irá crescer com N de acordo com as seguintes leis:

$$E \propto \begin{cases} N & \text{se } \alpha > D \\ N \log(N) & \text{se } \alpha = D \\ N^{2-\alpha/D} & \text{se } \alpha < D \end{cases}. \quad (4.38)$$

No nosso caso, $\alpha = (2-n)/(n-1)$. Com $n > 1$ estaremos totalmente dentro do regime não extensivo.

não existe nenhuma transformação que leve continuamente uma solução em outra de carga topológica diferente, a estabilidade de um defeito topológico é garantida.

4.7 Interações de longo alcance entre sólitons na natureza

Além dos fenômenos físicos já mencionados, discutimos nessa seção alguns outros sistemas físicos onde há evidências de interações de longo alcance entre sólitons topológicos.

Teorias quânticas de campos não lineares são um exemplo de uma área em que sólitons topológicos têm grande importância [68–74]. Estados de partícula estendida em teorias de campos quânticos podem ser descritos por sólitons baseados em soluções clássicas das equações de campo. Os sólitons semelhantes a partículas decorrentes são equivalentes a férmions. O principal postulado dessas teorias é a densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}_t^2 - \frac{1}{2}\phi_x^2 - U(\phi), \quad (4.39)$$

na qual $U(\phi)$ possui, pelo menos, dois mínimos degenerados, correspondentes ao vácuo. Esses modelos descrevem um campo escalar auto-interagente e, em alguns casos, a Lagrangeana pode incluir interações do campo ϕ com outros campos (vetoriais, spinoriais) quânticos.

Os modelos mais comuns usam as equações de *sine-Gordon* e ϕ^4 [68–73]. Nesse caso, os sólitons topológicos podem ser interpretados como hádrons (partícula fortemente interagentes). Para essas partículas a interação tem um caráter de curto alcance, ainda que na natureza também existam partículas elementares com interação de longo alcance [56, 71]. Note que quando o potencial $U(\phi)$ comporta-se como $U(\phi) \propto (\phi - \phi_i)^{2\nu}$ ($\nu > 1$) nas proximidades dos valores do vácuo, podemos escrever

$$\left. \frac{dU(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_i} = 0, \quad (4.40)$$

o que é equivalente a dizer que o campo não possui massa [46, 56, 71]. Um fato bem conhecido na física de partículas é que um campo sem massa leva a partículas com interação de longo alcance. No entanto, se considerarmos, por exemplo, a Lagrangeana ϕ^4 ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}_t^2 - \frac{1}{2}\phi_x^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4 - \frac{1}{4}m^4/\lambda, \quad (4.41)$$

e fizermos $m = 0$ os sólitons deixam de existir devido ao desaparecimento dos mínimos degenerados.

Portanto, se desejamos descrever essas partículas usando soluções solitônicas em uma teoria tipo (4.39) (e não com uma teoria linear, como na QED), e pretendermos obter as propriedades das partículas e suas interações a partir da Lagrangeana, então devemos impor um campo sem massa e um vácuo multi-degenerado. Essas propriedades estão contidas no modelo não linear de Klein-Gordon discutido nesse capítulo.

Na referência [75] os autores estudam o *phase-locking* em junções Josephson acopladas. Nas junções Josephson, os flúxons são descritos por sólitons topológicos da equação de *sine-Gordon*. Porém, se duas ou mais junções Josephson longas são acopladas, o campo magnético criado no exterior das junções será sobreposto, produzindo interações de longo alcance. Os resultados experimentais apresentados em diversos artigos [76, 77] mostram que a interação magnética é forte o bastante para produzir um considerável *phase-locking* entre os flúxons.

Em [75] é assumido que o campo magnético externo leva a interações não locais. De fato, há uma evidência experimental que pode ser interpretada como uma manifestação das interações de longo alcance entre os flúxons.

Uma matriz com duas junções Josephson longas pode ser modelado por um sistema de duas equações de *sine*-Gordon modificadas, o que é um caso particular da equação (4.36). Portanto, os resultados relativos à interação de longo alcance obtidos nesse capítulo, podem ser aplicados à flúxons em junções Josephson longas acopladas.

Conclusões

Da discussão sobre a dinâmica de sólitons é interessante lembrar que muitas vezes o sóliton é tratado como uma entidade descrita apenas pela sua posição, não considerando toda a riqueza das bifurcações do sistema, muito mais complicadas que as de uma partícula sem estrutura interna: o sóliton se comporta como uma partícula extensa, e em alguns casos sua dinâmica interna pode alterar as condições de estabilidade do sóliton como um todo. Para a equação ϕ^4 obtivemos as condições exatas para as catástrofes elementares.

Em condições específicas, não somente o modo translacional pode tornar-se instável, como também os modos internos, ou até os modos de fônons. Estas instabilidades levam a surpreendentes explosões de sólitons, estudadas pela primeira vez nos artigos [39, 40].

Perturbações do tipo 2.54 na página 48, descrevendo impurezas, são descritas por muitos autores com o uso da função delta de Dirac, implicitamente desprezando a dimensão finita da impureza e considerando o sóliton como uma partícula sem estrutura interna. No melhor dos casos, é usado o método CCA (*Collective Coordinate Approach*) que, para o potencial ϕ^4 , pode ser estendido de modo a incluir os modos internos da equação não perturbada. No entanto, foi demonstrada a existência de uma dinâmica muito mais rica, devido à presença de um grande número de graus de liberdade internos. Esses modos internos podem causar mudanças qualitativas na dinâmica dos *kinks*, fenômenos, como a explosão de sólitons, impensáveis na abordagem usual.

Quando o sistema possui uma única impureza, a aproximação descrita no parágrafo anterior pode ser aplicada. No entanto, quando existem outras inhomogeneidades, a competição entre as escalas de grandeza da “largura” e da distância entre elas leva a bifurcações não esperadas.

Um sóliton preso a um potencial e sujeito a uma força oscilante pode apresentar os mesmos tipos de comportamentos já encontrados em partículas, tais como: ressonância não linear, saltos de frequência, histerese, caos etc.

Em particular, as ressonâncias obtidas a partir de um movimento caótico do sóliton mostram que sua forma é extremamente relevante, questão que não tem pertinência quando do tratamento de partículas. Além disso, a forma de onda da perturbação é crucial para todos os fenômenos de ressonância, incluindo o mecanismo sem retroalimentação de controle de caos e a ressonância estocástica.

Esses fenômenos são, certamente, relevantes em outros sistemas nos quais exista um estado estendido, com uma dinâmica interna complicada, movendo-se em um potencial não linear.

Com relação à interação entre sólitons, a equação de Klein-Gordon não linear (4.1) com um potencial $U(\phi)$ que satisfaz as propriedades de degenerescência discutidas no capítulo 4, possuem soluções solitônicas que interagem através de forças de longo alcance. Em particular, investigamos o modelo descrito por (4.26) e determinamos que, para $\nu = 1$ (equação de *sine-*

Gordon), a força de interação decai exponencialmente com a distância, enquanto para $\nu > 1$ a força de interação decai com $F \propto d^{2\nu/(1-\nu)}$. Experimentos numéricos confirmaram esses resultados.

A equação de Ginzburg-Landau em D dimensões pode ser generalizada de modo que os defeitos topológicos suportados por ela apresentem interação de longo alcance, tanto em uma como em mais dimensões. No caso particular de em que $D = 2$ temos o seguinte comportamento: $F \propto d^2$ para $\nu = 1$ e $F \propto d^{1/(1-\nu)}$ para $\nu > 1$.

Sistemas de partículas que apresentam interação de longo-alcance exibem uma dinâmica muito complexa, que não pode ser descrita pela estatística de Boltzmann-Gibbs. Recentemente, teorias termo-estatísticas alternativas têm sido propostas, e os modelos estudados nesse trabalho podem ajudar a verificá-las.

Apêndice A

Linearização do sistema dinâmico do campo vetorial

O sistema dinâmico em derivadas parciais (1.65)¹,

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = \mathbf{F}(\phi, \dots, \phi_{1,x^N}, x, t), \quad (\text{A.1})$$

pode ser escrito em termos dos M componentes do vetor ϕ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\phi_1, \dots, \phi_{1,x^N}, \dots, \phi_M, \dots, \phi_{M,x^N}, x, t) \\ \vdots \\ F_M(\phi_1, \dots, \phi_{1,x^N}, \dots, \phi_M, \dots, \phi_{M,x^N}, x, t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Na obtenção do operador (1.81), a expansão em Taylor tem que ser feita para cada derivada de cada componente de ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{\partial F_1}{\partial \phi_{m,x^n}} \Big|_{\psi(x),x,t} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \zeta_m \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{\partial F_M}{\partial \phi_{m,x^n}} \Big|_{\psi(x),x,t} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \zeta_m \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

A expressão acima corresponde ao sistema linear

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_M \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_M \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

com o operador diferencial matricial \mathbf{D} definido por

$$D_{ij} = \sum_{n=1}^{N_j} \frac{\partial F_i}{\partial \phi_{j,x^n}} \Big|_{\psi(x),x,t} \frac{\partial^n}{\partial x^n}. \quad (\text{A.5})$$

¹Em todas as equações abaixo, as funções ϕ e ζ e suas derivadas são calculadas em x e t , ou seja, onde se lê ϕ , deve-se ler $\phi(x, t)$, onde se lê ϕ_x deve-se ler $\phi_x(x, t)$. O mesmo vale para ζ e para as demais derivadas.

Apêndice B

Formulação lagrangeana de campos

Quando o sistema de equações descreve um campo escalar real, com uma dimensão espacial e outra temporal, a Lagrangeana [17] dependerá das derivadas primeiras do campo:

$$\mathcal{L}(\phi, \phi_x, \phi_t, x, t), \quad (\text{B.1})$$

correspondendo à seguinte equação de movimento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{B.2})$$

O tensor de energia-tensões é uma matriz 2×2 , de componentes T_{00} , T_{01} , T_{10} e T_{11} . A componente T_{00} é a densidade de energia

$$\mathcal{H}(x, t) \equiv T_{00}(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} \phi_t - \mathcal{L}, \quad (\text{B.3a})$$

também chamada de densidade de Hamiltoniana. O fluxo de energia é dado por

$$T_{01}(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_x} \phi_t. \quad (\text{B.3b})$$

A densidade de momento é a componente T_{10} :

$$T_{10}(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} \phi_x, \quad (\text{B.3c})$$

enquanto o fluxo de momento é

$$T_{11}(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_x} \phi_x - \mathcal{L}. \quad (\text{B.3d})$$

Quando a Hamiltoniana não depende explicitamente de t , é possível escrever equação de continuidade para a energia. Quando ela não depende de x o mesmo ocorre para o momento. Em ambos os casos, a equação de continuidade ($\mu = 0, 1$) é

$$\frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial t} + \frac{\partial T_{\mu 1}}{\partial x} = 0, \quad (\text{B.4})$$

que, integrada em todo o espaço, leva às candidatas a integral de movimento:

$$\frac{d}{dt} I_\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial t} dx = T_{\mu 1}|_{x=-\infty} - T_{\mu 1}|_{x=\infty}. \quad (\text{B.5})$$

Observado-se a definição de T_{01} , percebe-se que a energia total do sistema, dada pela integral I_0 , será conservada se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \dot{\phi}_t = 0$. Neste caso, podemos dizer que I_0 é uma integral de movimento. Já a conservação do momento I_1 exige um conhecimento mais detalhado da Lagrangeana, mas em geral ocorrerá quando a derivada espacial de ϕ também tiver limite nulo: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \dot{\phi}_x = 0$.

Bibliografia

- [1] J. Guckenheimer e P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, Nova York, 1983.
- [2] J.E. Berger e G. Nunes Jr. A mechanical Duffing oscillator for the undergraduate laboratory. *American Journal of Physics*, 65(9):841–846, 1997.
- [3] G. Duffing. *Erzwungene Scwhingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1918.
- [4] L.D. Landau e E.M. Lifshitz. *Mechanics*. Pergamon Press, Londres, 3^a ed. edition, 1976.
- [5] J.K. Hale e H. Koak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, Nova York, 1991.
- [6] Robert Gilmore. *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons, Inc., Nova York, 1981.
- [7] H. G. Schuster. *Deterministic Chaos*. VCH, Weinheim, Alemanha, 2^a ed. rev. edition, 1989.
- [8] H.G.E Hentschel e I. Procaccia. The infinite number of generalized dimensions of fractal and strange atractors. *Physica D*, 8:435–444, 1983.
- [9] C. Tsallis. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics. *Journal o Statistical Physics*, 52(1/2):479–487, 1988.
- [10] P.J. Jund, S.G. Kim e C. Tsallis. Crossover from extensive to nonextensive behavior driven by long-range interactions. *Physical Review B*, 52(1):50–53, 1988.
- [11] R. Chacón. Geometric rersonance as a chaos eliminating mechanism. *Physical Review Letters*, 77(3):482–485, 1996.
- [12] R. Benzi, A. Sutera e A. Vulpiani. *Journal of Physics A*, 14:L453, 1981.
- [13] A.R. Bulsara e L. Gammaitoni. Tuning in to noise. *Physics today*, 49(3):39–45, 1996.
- [14] B. McNamara e K. Wiesenfeld. Theory of stochastic resonance. *Physical Review A*, 39(9):4854–4869, 1989.
- [15] V.G. Makhankov. Dynamics of classical solitons (in non integrable systems). *Physics Reports*, 35(1):1–128, 1978.

- [16] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling e B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2ª ed. edition, 1993.
- [17] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 2ª ed. edition, 1980.
- [18] A.C. Scott, F.Y.F. Chu e D.W. McLaughlin. The soliton: A new concept in applied science. *Proceedings of the IEEE*, 61(10):1443–1483, 1973.
- [19] R. Rajaraman. *Solitons and instatons*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.
- [20] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal e R.M. Miura. Method for solving the korteweg-devries equation. *Physical Review Letters*, 19:1095–1097, 1967.
- [21] P.D. Lax. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 21:467–490, 1968.
- [22] A. Degasperis. Resource letter sol-1: Solitons. *American Journal of Physics*, 66(6):486–497, 1998.
- [23] D.J. Korteweg e G.de Vries. *Philosophical Magazine*, 39:422–443, 1895.
- [24] M. Born e L. Infeld. *Proceedings Royal Society*, 144A:425, 1934.
- [25] K. Lonngren e A. Scott (editores). *Soliton in Action*. Academic, Londres, 1978.
- [26] A.R. Bishop, J.A. Krumhansl e S.E. Trollingier. *Physica D*, 1:1, 1980.
- [27] M. Barthes e J. León (editores). *Nonlinear Coherent Structures*, volume 353 of *Lectures Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlim, 1990.
- [28] J.A. González e J.A. Holyst. Solitary waves in one dimensional damped systems. *Physical Review B*, 35(7):3643–3646, 1987.
- [29] Y.S. Kivshar e B.A. Malomed. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. *Reviews of Modern Physics*, 61(4):763–915, 1989.
- [30] A.R. Bishop, D.K. Campbell e St. Pevmatikos (editores). *Disorder and Nonlinearity*. Springer-Verlag, Berlim, 1989.
- [31] F.Kh. Abdullaev, A.R. Bishop e St.Pevmatikos (editores). *Nonlinearity with Disorder*, volume 67 of *Springer Proceedings in Physics*. Springer-Verlag, Berlim, 1992.
- [32] J.A. González e J.A. Holyst. Behavior of ϕ^4 kinks in the presence of external forces. *Physical Review B*, 45(18):10338–10343, 1992.
- [33] Y.S. Kivshar, Zhang Fei e L. Vazquez. Resonant soliton-impurity interactions. *Physical Review Letters*, 67(10):1177–1180, 1991.
- [34] Z. Fei, Y.S. Kivshar e L. Vazquez. Resonant kink-impurity interactions in the sine-gordon model. *Physical Review A*, 45(8):6019–6030, 1992.

- [35] Z. Fei, Y.S. Kivshar e L. Vazquez. Resonant kink-impurity interactions in the ϕ^4 model. *Physical Review A*, 46(8):5214–5220, 1992.
- [36] Z. Fei, V.V. Konotop, M. Peyrard e L. Vazquez. Kink dynamics in the periodically modulated ϕ^4 model. *Physical Review E*, 48(1):548–554, 1993.
- [37] A. Sanchez e A.R. Bishop. Kink stability, propagation, and length-scale competition in the periodically modulated sine-gordon equation. *Physical Review E*, 49(5):4603–4615, 1994.
- [38] L.D. Landau e E.M. Lifshitz. *Quantum Mechanics, non-relativistic theory*. Pergamon Press, Londres, 1958.
- [39] J.A. González e B.A. Mello. Kink catastrophes. *Physica Scripta*, 54:14–20, 1996.
- [40] J.A. González e B.A. Mello. Bifurcations of kink dynamics in the presence of special inhomogeneities. *Physics Letters A*, 219:226–232, 1996.
- [41] Siegfried Flügge. *Practical Quantum Mechanics I*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [42] J.A. González e M. Martín-Lanfrove. Soliton in a nonlinear dna model. *Physics Letters A*, 191:409–415, 1994.
- [43] F.H. Willeboordse e K. Kaneko. Pattern dynamics of a coupled map lattice for open flow. *Physica D*, 86:428–455, 1995.
- [44] V. Petrov, S. Metens, P. Borckmans, G. Dewel e K. Showalter. Tracking unstable turing patterns through mixed-mode spatiotemporal chaos. *Physical Review Letters*, 75(15):2895–2898, 1995.
- [45] J. A. González, L.E. Guerrero e A. Bellorín. Self-excited soliton motion. *Physical Review B*, 54(2):1265–1273, 1996.
- [46] L.E. Guerrero, E. Lopéz-Atencio e J.A. González. Long-range self-affine correlations in a random soliton gas. *Physical Review E*, 55(6):7691–7695, 1997.
- [47] J.F. Lindner, B.K. Meadows e W.L. Ditto. Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization. *Physical Review Letters*, 75(1):3–6, 1995.
- [48] F. Marchesoni, L. Gammaïtoni e A.R. Bulsara. Spatiotemporal stochastic resonance in a ϕ^4 model of a kink-antikink nucleation. *Physical Review Letters*, 76(15):2609–2612, 1996.
- [49] J.M.G. Vilar e J.M. Rubí. Spatiotemporal stochastic resonance in the Swift-Hohenberg equation. *Physical Review Letters*, 78(15):2886–2889, 1997.
- [50] J.A. González, B.A. Mello, L.I. Reyes e L.E. Guerrero. Resonance phenomena of a solitonlike extended object in a bistable potential. *Physical Review Letters*, 80(7):1361–1364, 1998.
- [51] M.C. Cross e P.C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Review of Modern Physics*, 65(3):851–1112, 1993.

- [52] P.S. Rica e E. Tirapegui. Interaction of defects in two-dimensional systems. *Physics Review Letters*, 64(8):878–881, 1990.
- [53] I.S. Aranson, L. Kramer e A. Weber. Interaction of spirals in oscillatory media. *Physical Review Letters*, 67(3):404, 1991.
- [54] C. Elphick e E. Meron. Dynamics of phase singularities in two-dimensional oscillating systems. *Physica D*, 53:385–399, 1991.
- [55] L.M. Pismen e J.D. Rodríguez. Mobility of singularities in dissipative ginzburg-landau equation. *Physical Review A*, 42(4):2471–2474, 1990.
- [56] J.A. González e J. Estrada-Sarlobous. Kinks in systems with degenerate critical points. *Physics Letters A*, 140(4):189–192, 1989.
- [57] Yu.B. Gaididei, S.F. Mingaleev, P.L. Christiansen e K.Ø. Rasmussen. Effect of nonlocal dispersion on self-interacting excitations. *Physics Letters A*, 222:152–156, 1996.
- [58] A.S. Davydov. *Theory of Molecular Excitons*. Plenum, Nova York, 1971.
- [59] A. Scott. *Physics Report*, 217:1, 1992.
- [60] P.J. Ford. *Contemporaneous Physics*, 23:141, 1982.
- [61] D.J. Amit. *Modeling Brain Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [62] L.V. Yakushevich. *Nanobiology*, 1:343, 1992.
- [63] M. Hogan, N. Dattagupta e D.M. Crothers. Transmission of allosteric effects in dna. *Nature*, 278:521–524, 1979.
- [64] G.B. Kolata. Bacterial genetics: action at a distance on dna. *Science*, 198:41–42, 1977.
- [65] A.M. Salzberg. Exact statistical thermodynamics of gravitational interactions in one and two dimensions. *Journal of Mathematical Physics (NY)*, 6(1):158–160, 1965.
- [66] B.A. Mello, J.A. González, L.E. Guerrero e E. López-Atencio. Topological defects with long-range interactions. *Physics Letters A*, 244:277–284, 1998.
- [67] J.A. González, M. Martín Landrove, J.R. Carbó e M. Chacón. *ICTP Report, IC/94/301*, Trieste, 1994.
- [68] R. Dashen, B. Hasslacher e A. Neveu. Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theory. *Physical Review D*, 10(12):4130–4138, 1974.
- [69] R. Rajaraman. Intersoliton forces in weak-coupling quantum field theories. *Physical review D*, 15(10):2866–2874, 1977.
- [70] G. Boutell e A.E.G. Stuart. Interacting sine-Gordon solitons and classical particles: A dynamic equivalence. *Physical Review D*, 15(12):3580–3591, 1977.

- [71] M.A. Lohe. Soliton structures in $p(\phi)_2$. *Physical Review D*, 20(12):3120–1330, 1979.
- [72] M. Altenbokun, U. Kaulfuss e J.J.M. Verbaarschot. Mass of the sine-gordon soliton in the hartree approximation. *Physical Review D*, 34(6):1840–1846, 1986.
- [73] S.G. Naculich. Quantum kinks: Solitons at strong coupling. *Physical review D*, 46(12):5487–5496, 1992.
- [74] G. Kälbermann. Soliton tunneling. *Physical review E*, 55(6):R6360–R6362, 1997.
- [75] N. Grønbech-Jensen, M.R. Samuelsen. Long range magnetic interaction between josephson junctions. *Physical Review Letters*, 74(1):170–173, 1995.
- [76] T. Holst, J. Bindslev, N. Grønbech-Jensen e J.A. Blackburn. Phase locking between josephson oscillators. *Physical Review B*, 42(1):127–131, 1990.
- [77] P. Barbara, A.Ustinov e G. Costabile. *Physics Letters A*, 191:443, 1994.

Índice

- Atrator, 13
 - estranho, 20
- Bacia
 - de atração, 3
 - de repulsão, 3
- Bifurcação, 14
 - pitchfork*, 14
 - Conjunto, 14
 - diagrama de, 14
 - global, 19
 - Hopf, 14
 - local, 14
 - subcrítica, 14
 - supercrítica, 14
 - valor de, 14
- Caos, 21
- Catástrofe, 16
 - cúspide, 16
 - função, 16
 - germens da , 16
 - Teoria de , 15
- CCA, 78
- Centro de massa, 35
- Ciclo limite, 13
- Conexão sela, 19
- Conjunto
 - atrativo, 13
 - denso, 14
 - invariante, 13
 - limite α , 12
 - limite ω , 12
- Convenção
 - de Maxwell, 17
 - do Atraso, 17
- Difeomorfismo, 5
- Domínio de atração, 3
- Equilíbrio
 - neutro, 3
- Equivalência topológica, 13
- Espaço de fase, 10, 12
- Estrutural
 - estabilidade, 13, 16
 - instabilidade, 13, 19
- Fluxo, 2
- Fonte, 3
- Fractal, 21
 - dimensão correlação, 21
 - dimensão informação, 22
 - dimensão similaridade, 22
- Frequências
 - combinadas, 7
- Função de Morse, 16
- Invariância de Lorentz, 28
- Método de Espalhamento Inverso, 32
- Mapa de retorno, 11
- Modo
 - interno, 38
 - translacional, 30
- Orbita
 - fechada, 12
 - heteroclínica, 19
 - homoclínica, 19
 - periódica, 12
- Ponto crítico
 - non-Morse*, 15
 - de Morse, 15
 - degenerado, 15
 - não isolado, 15

- Ponto de equilíbrio, 3
- Ponto fixo, 3
 - Centro, 3
 - de sela, 3
 - Fonte, 3
 - hiperbólico, 5
 - isolado, 15
 - não degenerado, 15
- Ressonância
 - estocástica, 25
 - geométrica, 23
- Seção de Poincaré, 11
- Sistema
 - dinâmico, 2
 - integrável, 31
- Solução
 - estável, 29
 - instável, 29
- Sumidouro, 3
- Taxa de Kramers, 25
- Teorema
 - de Thom, 16
 - Peixoto, 19
- Vórtice, 3
- Variedade, 5
- Zeros, 3