

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ASPECTOS DINÂMICOS DE SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS

Marcos Cesar de Oliveira

Tese a ser apresentada ao PPG-
Física da UFSCar como parte
dos requisitos para obtenção do
grau de Doutor em Física

ORIENTADOR: Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi

São Carlos, Janeiro de 1999

**ATA DA 15ª DEFESA DE TESE DE DOUTORADO
DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

DOUTORANDO: **MARCOS CÉSAR DE OLIVEIRA**

DATA: 20/01/1999

HORÁRIO: 14:00h.

LOCAL: Sala "Jorge André Swieca" do DF

TÍTULO: "Aspectos Dinâmicos de Sistemas Quânticos Abertos"

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi (orientador) - Presidente - DF/UFSCar

Prof. Dr. Amir Ordaggi Caldeira - Membro - IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Basílio Baseia - Membro - IF/UFG

Prof. Dr. Reginaldo Napolitano - Membro - IFSC/USP

Prof. Dr. Miled Hassan Yussef Moussa - Membro - DF/UFSCar

Reuniu-se a Banca Examinadora acima descrita, nas formas e termos do artigo 25 do Regimento Interno do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos, para *Exame de Tese de Doutorado* sob o título "*Aspectos Dinâmicos de Sistemas Quânticos Abertos*" do candidato Marcos César de Oliveira. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca Examinadora - Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi. Após a explanação do candidato, o presidente passou a palavra aos componentes da Banca Examinadora. Terminada a arguição, a Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta para atribuição dos conceitos, os quais transcreveram:

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi

conceito =

A

Prof. Dr. Amir Ordaggi Caldeira

conceito =

A

Prof. Dr. Basílio Baseia

conceito =

A

Prof. Dr. Reginaldo Napolitano

conceito =

A

Prof. Dr. Miled Hassan Yussef Moussa

conceito =

A

Banca Examinadora

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi - Orientador - DF/UFSCar

Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa - DF/UFSCar

Prof. Dr. Reginaldo Napolitano - IFSC/USP

Prof. Dr. Amir O. Caldeira - IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Basílio Baseia - DF/UFG

Dedico este trabalho
aos meus pais, Orlando e Annita.

Agradecimentos

Durante o desenvolvimento do trabalho descrito nesta tese, muitas pessoas contribuíram para a minha formação acadêmica e pessoal. Gostaria de agradecê-las vividamente por sua solicitude.

Ao Prof. Dr. Salomon S. Mizrahi por ter me recebido em seu grupo e ter sempre se demonstrado prestativo em sua orientação. Devo muito do meu envolvimento no assunto ao seu rigor científico e matemático;

ao Prof. Dr. Miled H. Y. Moussa por seu apoio e acompanhamento durante este tempo. Também por ter me apresentado seus “problemas interessantes” em Física;

ao programa de pós-graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos e à CAPES pelo auxílio financeiro;

ao chefe do Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos, Prof. Dr. Hamilton V. da Silveira por ter me acolhido no departamento e por seu constante apoio;

aos funcionários do Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos, sem os quais o mesmo não seria viável.

Agradecer aos amigos é um prazer e eu espero ter feito isso no decorrer deste tempo:

Aos colaboradores e amigos Marcelo A. Marchioli, Norton G. de Almeida e Prof. Dr. Basílio Baseia, por suas discussões e opiniões;

ao “pessoal da Física”, Ladir, Marcos (Português), Gilberto, Beto, Evandro, José Cândido, José Ricardo, Giovani, Amália e Paulo Noronha, companheiros desta etapa, pelo bom convívio;

ao pessoal de casa, Gui, Diet e Victor pelo tempo compartilhado, distração e amizade incondicional;

aos amigos de sempre, Fifo, Afonso, Ricardo Pahl, Cido, Zagais, Bia, DJ, Aisha e Marcus Vinícius pela boa conversa;

aos amigos distantes, Dri e Doug;

à amiga Alê, sempre presente;

à Raquel, mais que amiga, por nosso tempo compartilhado juntos;

à minha Família - meus pais, Orlando e Annita, minhas irmãs Elaine e Meire, meu outro irmão Edson, meus sobrinhos João Vitor e Carla e meus tios, por seu constante apoio;

Muito Obrigado.

Resumo

Neste trabalho consideramos os aspectos dinâmicos de três sistemas quânticos abertos. No tratamento de aprisionamento por campos oscilantes de uma partícula quântica sujeita a dissipação evidenciamos a estabilização do movimento e a degradação da compressão das quadraturas da partícula devido aos efeitos dissipativos. No tratamento de transferência de informação entre sistemas quânticos interagentes, observamos, além da recorrência do estado conjunto, a possibilidade de troca de identidade entre os estados dos subsistemas constituintes em função da máxima transferência de informação. Mostramos que sob certas condições pode ocorrer transferência de informação a energia constante. Na geração e detecção de estados de superposição do campo em cavidades supercondutoras não-ideais continuamente bombeadas consideramos o efeito dissipativo gerado pelo acoplamento do modo do campo com o seu meio envolvente. São apresentadas novas estratégias de controle da coerência de estados de superposição gerados na cavidade e novos aspectos da medida da coerência e degradação do estado.

Abstract

Dynamical aspects of three open quantum systems are examined. In the problem of quantum particle trapping by oscillating fields there is the evidence of movement stabilization and the quadrature-squeezing degradation for the quantum particle, due to the dissipative action of the environment over the particle. In the problem of information transfer occurring in the course of quantum interactions it is shown that, besides the joint state recurrence, there is also the existence of subsystem state-identity exchange due to the maximum information transfer. It is shown that under specific conditions information transfer may occur between the subsystems at constant energy. In the problem of continuously pumped non-ideal superconducting cavity field states generation and detection it is considered the dissipative effect due to the coupling of the cavity field with its environment. Some new strategies for field-Schrödinger-cat-state coherence control and new aspects of measurement of coherence and degradation of the quantum states are described.

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Aprisionamento de Partículas por Campos Oscilantes	6
2.1	Introdução	6
2.2	Armadilha tipo Paul	7
2.3	Movimento Dissipativo de uma Partícula Quântica Aprisionada por Campos Oscilantes	10
2.3.1	O Modelo	12
2.3.2	As Equações de Heisenberg do Movimento e suas Soluções	13
2.3.3	Variâncias dos operadores físicos: Efeito de Compressão	17
2.3.4	Regiões de Estabilidade e Instabilidade	25
2.3.5	Conclusões	29
3	Transferência de Informação no Curso de Interações Quânticas	33
3.1	Introdução	33
3.2	Descrição Quântica de Interações Paramétricas	36
3.3	Acoplamento de Onda Girante	38
3.4	Acoplamento de Onda Contra-Girante	42
3.5	Vetor de Estado Conjunto: Redução, Recorrência e Troca de Identidade	45
3.5.1	Acoplamento de Onda Girante	47
3.5.2	Acoplamento de Onda Contra-Girante	59
3.6	Conclusões	63
4	Bombeamento e Controle da Coerência de Estados do Campo em Cavidades Supercondutoras - Geração e Detecção	67
4.1	Introdução	67
4.2	Descrição do Experimento para Geração de Estados de Gato de Schrödinger em Cavidades Supercondutoras	69

4.3	Teoria de Bombeamento Linear e seu Efeito em Estados do Campo	73
4.3.1	Equações de Heisenberg	73
4.3.2	Função Característica e Representações de Estados	76
4.3.3	Geração de Estados Coerentes em Cavidades não Ideais	79
4.3.4	Geração e Evolução de Estados de Superposição Coerente	81
4.3.5	Decoerência e Degradação de Estados Continuamente Bombeados	83
4.3.6	Átomos e Bombeamento	87
4.4	Teoria de Bombeamento Paramétrico de Campos Quânticos	91
4.4.1	Equações de Heisenberg	92
4.4.2	Representações do Estado do Campo	94
4.4.3	Medidas do Estado do Campo e a Decoerência	96
4.5	Conclusões	111
5	Conclusões Gerais	115
A	Interação Ressonante entre um Átomo de Dois Níveis e um Campo de Radiação Monomodal	118
B	Interação Dispersiva entre Átomos e Campo de Radiação	122

Capítulo 1

Introdução

A Física como um ramo fundamental e ativo das Ciências Naturais é celebrada por sua exatidão em termos de formulações matemáticas. Mas, justamente para manter essa exatidão, a generalidade e possibilidade da Física para a descrição da variedade de fenômenos da Natureza é seriamente limitada. Como exemplo, o termo-conceito *sistema isolado* representa uma abstração e idealização do *mundo real*, sendo que não se pode afirmar que um sistema seja isolado no sentido *absoluto* [1]¹ - O conceito de *isolamento* é construído habilidosamente para nos auxiliar a desenvolver modelos físicos para fenômenos apresentados na Natureza por sistemas que podem ser na realidade considerados como *aproximadamente* isolados. O *não-isolamento* implica, necessariamente, a troca de energia, massa ou até mesmo informação com o meio envolvente do sistema considerado.

Assim, como a maioria das análises do regime quântico da matéria lidam com fenômenos microscópicos e como, essencialmente, a *dissipação* (transferência de energia para o meio envolvente) é um conceito macroscópico, houve muito pouco interesse durante o desenvolvimento histórico da Mecânica Quântica, no formalismo de sistemas *abertos*. Apenas nas últimas duas décadas houve um aumento de interesse sobre o problema de dissipação em sistemas quânticos, como no desenvolvimento da teoria do Laser, de detecção fotônica e no tratamento de campos de radiação no interior de cavidades.

Este interesse foi também grandemente promovido pela possibilidade de solucionar problemas conceituais na interpretação de Copenhagen - A Mecânica Quântica tem atuado muito bem em todas as aplicações práticas, não sendo conhecido nenhum exemplo conflitante entre suas predições e resultados experimentais. No entanto, problemas conceituais ainda continuam em aberto, como a relação da Mecânica Quântica com o mundo físico ao qual estamos habituados. O único questionamento à Mecânica Quântica é a ausência de uma estrutura natural que acomode nossas percepções da *realidade*

¹As referências desta introdução, das conclusões gerais e dos apêndices A e B estão no final do volume.

[2, 3, 4, 5]. A inexistência de estados quânticos de superposição macroscópicos constitui um dos elementos deste questionamento. Também o é o fato de que as leis fundamentais da Dinâmica Quântica sejam reversíveis, contrastando com o comportamento irreversível dos corpos macroscópicos [6].

O comportamento reversível da dinâmica microscópica quântica só pode ser contornado com a utilização de modelos em que a dinâmica hamiltoniana e o teorema de Liouville não se apliquem. O forte argumento físico utilizado para a substituição da dinâmica hamiltoniana é que nenhum sistema, a menos do Universo como um todo, é realmente isolado. Todos os sistemas sofrem influência do exterior (meio envolvente), ou seja, são **abertos**. Por outro lado, a não existência de estados de superposição macroscópicos (*gatos de Schrödinger*), que levou John von Neumann a distinguir duas dinâmicas no processo de medida quântica - uma unitária, dada pela evolução de Schrödinger que descreveria a evolução do estado conjunto do *sistema-aparato*, e outra intrínseca, não-unitária, responsável pela redução da função de onda do aparato, no processo de *superseleção* - é melhor compreendida hoje em discussões que consideram o não isolamento de sistemas quânticos macroscópicos. Isto permite que somente uma evolução unitária, agora do *sistema + aparato + meio envolvente*, seja responsável pela redução (dinâmica) da função de onda do aparato [2]. O meio envolvente atua levando o estado de superposição macroscópico a uma mistura estatística no processo denominado *decoerência*; o “gato” está “vivo” ou “morto”. Assim, o *meio* desenvolve um papel fundamental na compreensão e estruturação conceitual da teoria quântica.

Na literatura, para o tratamento de sistemas quânticos abertos, o *meio* tem sido simulado por uma coleção de osciladores harmônicos quantizados [7, 8, 9, 10, 11]. Aqui em nossas considerações, três abordagens de sistemas quânticos abertos distintos são realizadas, no contexto da Óptica Quântica e como consequência, com formas distintas de análise dos efeitos dissipativos sobre seus estados quânticos.

Esta tese está organizada da seguinte forma: No capítulo 2 discutimos os efeitos da dissipação sobre o aprisionamento de um partícula quântica por campos oscilantes, sendo que essencialmente analisamos seus efeitos sobre o fenômeno de compressão das variâncias das quadraturas (*squeezing*) e sobre as diversas regiões de estabilidade e instabilidade para o movimento da partícula em decorrência do campo dependente do tempo. Para o tratamento deste problema, consideramos a solução de equações de Heisenberg estocásticas para os operadores de posição e momentum canônicos da partícula. Aqui, a dissipação é introduzida fenomenologicamente, via um fator de integração proposto por P. Havas [12]. No capítulo 3, centramos nossa atenção no problema de transferência de informação no curso de interações entre sistemas quânticos finitos. Consideramos o caso específico do acoplamento de dois campos distintos por intermédio da atuação de um terceiro campo em um meio não-linear.

Evidenciamos que a resposta não-linear de determinados dielétricos permite não apenas a troca de energia, mas de informação, entre modos distintos, podendo transferir mesmo a energia constante, o estado de um dos modos para outro, no processo de *máxima transferência de informação*. No capítulo 4, estudamos a geração e detecção, por átomos de Rydberg, de estados de superposição (gatos de Schrödinger) do campo em cavidades supercondutoras não ideais (sob efeito de dissipação), quando da atuação de bombeamentos contínuos. Diversas estratégias de controle da coerência do estado de superposição são propostos, bem como aspectos novos da medida de coerência e degradação do estado devido ao efeito conjunto de dissipação e bombeamento. Aqui o meio é modelado por um conjunto infinito de osciladores harmônicos e a solução das equações de movimento para os operadores de criação do modo da cavidade é obtida com a consideração da aproximação de Wigner-Weisskopf. Finalmente, no capítulo 5 são feitas as considerações conclusivas finais.

Por motivos didáticos, cada capítulo é auto-suficiente, contendo uma melhor introdução ao problema estudado e uma bibliografia particular. As referências desta introdução e do capítulo 5 - Conclusões Gerais, bem como dos apêndices, constam no final do volume.

[“What is the real purpose of science?” Pedro once asked me. “Is it to discover? Is it to understand?” The easy answer was to say “both” and of course it is the proper response. Discovering and understanding are two unseparable facets of the scientific activity. But in our times the first has gained in prestige considerably, at the expense of the second. And this is somewhat unfortunate. The hectic competition for discovery is admittedly a good thing, but...but were not Kepler, Planck, Einstein, and others mainly motivated by a craving to understand, and to understand at a deep level? This, I think, indicates that mankind would lose much, even in sheer scientific efficiency, if it were to lose its desire to understand at that level; wich, among other things, means comparing various theories, examining them with a critical eye and trying to see in what directions a really coherent synthesis of what we know can be expected. Most of the readers of this book will be people with this not-quit-general turn of mind. I claim that they should assume it with confidence.]

Bernard d’Espagnat

“Conceptual Foundations of Quantum Physics”

Capítulo 2

Aprisionamento de Partículas por Campos Oscilantes

2.1 Introdução

Diferentes técnicas de aprisionamento de partículas atômicas permitem, atualmente, a realização de experimentos em que espécies individuais são mantidas em repouso no espaço livre por longos intervalos de tempo. Estes desenvolvimentos tornaram realizáveis um número de experimentos conceitualmente novos com precisão de dados de ordens de magnitude menores que os obtidos pelo métodos de espectroscopia convencionais [1]. As técnicas desenvolvidas por H. Dehmelt [2] e W. Paul [3] permitiram a realização de experimentos fascinantes nos últimos anos¹: armazenamento e detecção de um único íon isolado, “resfriamento” do movimento atômico, formação de estruturas ordenadas (cristais de Wigner) de íons aprisionados, estudo com respeito aos “saltos quânticos” e espectroscopia de microondas e laser. Uma aplicação direta destes experimentos se dá na definição de padrões de frequência e tempo (relógios atômicos).

A despeito destes avanços, a maioria das análises teóricas de armadilhas iônicas realizadas, foram desenvolvidas em termos clássicos. Como a real proposta desta técnica é de minimizar a energia de movimento da partícula, é evidente que um tratamento quântico seja apropriado para a compreensão da influência do movimento residual da partícula em interações radiativas nos limites mínimos de temperaturas, de menos de $1 \mu\text{-K}$, atingidos na atualidade. Em 1991 Glauber [4] desenvolveu um hamiltoniano modelo para descrever uma partícula aprisionada por campos oscilantes em uma armadilha tipo *Paul*. Entretanto seu modelo é idealizado, sem considerações de efeitos dissipativos

¹As técnicas de aprisionamento de partículas atômicas renderam a W. Paul e H. Dehmelt o prêmio Nobel em Física de 1989.

que, nos experimentos, são importantes para a sustentação das condições de aprisionamento. Neste capítulo estaremos interessados na inclusão de efeitos dissipativos no modelo de Glauber para a descrição do movimento de partículas aprisionadas. Nosso interesse central é no efeito da dissipação no fenômeno de compressão das quadraturas destas partículas. Efeitos dissipativos advêm da viscosidade criada pela presença de um gás de partículas colidindo constantemente com a partícula aprisionada ou podem resultar de interações fotônicas nos *optical molasses*² [5].

Inicialmente faremos uma descrição da armadilha tipo Paul e de como o movimento da partícula clássica aprisionada pode ser separado em um micromovimento e um macromovimento, devido às características do campo aplicado. Em seqüência faremos a análise quântica do movimento para então descrever o efeito da dissipação sobre o fenômeno de compressão das quadraturas nos diversos regimes de estabilidade e instabilidade da partícula aprisionada.

2.2 Armadilha tipo Paul

Uma armadilha tipo Paul [1], representada na Fig. 2.1, consiste de três eletrodos hiperbólicos: um em forma de anel e os outros dois fechando as extremidades deste anel. O eletrodo em forma de anel é aterrado enquanto os dois extremos são mantidos a uma voltagem ac de amplitude V_{ac} e de frequência Ω . Uma diferença de potencial dc V_{dc} também pode ser aplicada em série com a primeira para corrigir efeitos de imperfeições dos eletrodos e de efeitos gravitacionais. A estrutura dos eletrodos tem simetria axial ao longo do eixo z (Fig. 2.1) e a Fig. 2.2 mostra a secção no plano $z - r$, com $r^2 = x^2 + y^2$. A geometria dos eletrodos é dada por $z^2 = z_0^2 + \frac{r^2}{2}$ e $z^2 = (r^2 - r_0^2)/2$, para os eletrodos de extremidade e para o eletrodo em forma de anel, respectivamente (as definições de z_0 e r_0 são dadas na Fig. 2.2). Com $r_0^2 = 2z_0^2$, o potencial (ideal) no interior do volume do arranjo é dado por

$$V(z, r) = (V_{dc} - V_{ac} \cos \Omega t) \frac{1}{4z_0^2} [2z^2 + (r_0^2 - r^2)]. \quad (2.1)$$

Assim as componentes z e r do campo eletromagnético no interior do volume são dadas por

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{(V_{dc} - V_{ac} \cos \Omega t)}{z_0^2} z \quad (2.2)$$

e

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{(V_{dc} - V_{ac} \cos \Omega t)}{r_0^2} r. \quad (2.3)$$

As equações que governam o movimento de uma partícula de massa m e carga Q neste campo são desacopladas e dadas por

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{Q}{m} \frac{(V_{dc} - V_{ac} \cos \Omega t)}{z_0^2} z = 0 \quad (2.4)$$

²Interações de átomos com campos Laser em que os processos de absorção e emissão fotônicos contribuem para a redução do momentum atômico.

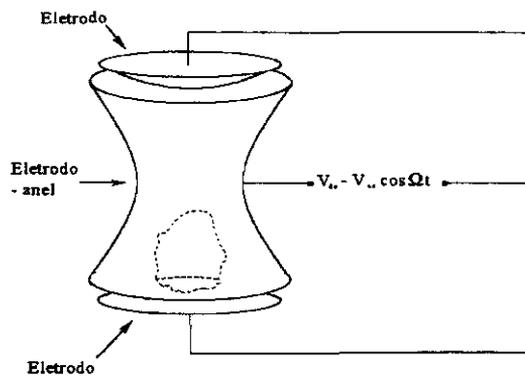


Figura 2.1: Armadilha tipo Paul.

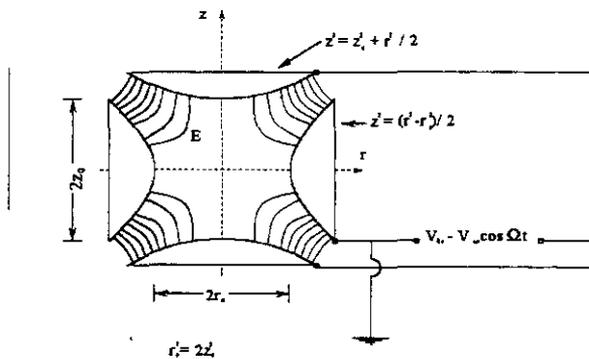


Figura 2.2: Secção no plano z - r da armadilha tipo Paul.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{Q}{m} \frac{(V_{dc} - V_{ac} \cos \Omega t)}{2z_0^2} r = 0. \quad (2.5)$$

Introduzindo

$$x = \frac{\Omega t}{2}, \quad (2.6)$$

$$\alpha_z = -2\alpha_r = 4 \frac{Q}{m} \frac{V_{dc}}{z_0^2 \Omega^2}, \quad (2.7)$$

$$\beta_z = -2\beta_r = 2 \frac{Q}{m} \frac{V_{ac}}{z_0^2 \Omega^2}, \quad (2.8)$$

as Eqs. (2.4) e (2.5) tomam a forma da equação diferencial de Mathieu-Hill [6]

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} + (\alpha_i - 2\beta_i \cos 2x) u_i = 0; \quad u_i = z, r, \quad (2.9)$$

geralmente obtida quando os parâmetros de um sistema oscilante são dependentes do tempo. O movimento da partícula na armadilha pode ser escrito como uma superposição de dois movimentos distintos: uma oscilação, $\delta(t)$, com alta frequência Ω e um movimento médio (lento), $\bar{z}(t)$. Quando a posição ao longo do eixo z , dada por

$$z(t) = \delta(t) + \bar{z}(t), \quad (2.10)$$

é inserida (2.10) na Eq. (2.9), com $\alpha = 0$, e supondo que \bar{z} varie muito lentamente com relação a δ , obtemos

$$\frac{d^2 z}{dt^2} \approx \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{\Omega^2 \beta_z}{2} \bar{z}(t) \cos 2x,$$

tal que o micromovimento seja dado por

$$\delta(t) = -\frac{\beta_z}{2} \bar{z}(t) \cos \Omega t. \quad (2.11)$$

Por outro lado, se fizermos a média sobre um período do micromovimento em (2.9) teremos

$$\frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = -\frac{\Omega^2 \beta_z^2}{8} \bar{z},$$

cujas soluções (para o macromovimento) é dada por

$$\bar{z}(t) = \bar{z}_0 \cos \bar{\omega}_z t,$$

com $\bar{\omega}_z = (\beta_z/\sqrt{2})(\Omega/2)$. O macromovimento é realizado em um quase-potencial

$$Q\bar{U} = \frac{1}{2} m \bar{\omega}_z^2 z^2, \quad (2.12)$$

com mínimo no centro da armadilha e de profundidade

$$\bar{U}_{\max} = \frac{1}{2} \frac{m \bar{\omega}_z^2 z^2}{Q} = \frac{1}{8} q_z V_{ac}. \quad (2.13)$$

Para a ocorrência de um aprisionamento eficiente \bar{U}_{\max} deve ser mantido o mais profundo possível e isto é obtido com grandes amplitudes de V_{ac} . Entretanto, certas imposições das condições de estabilidade³ limitam o valor de V_{ac} , tornando-se necessário encontrar um valor ótimo para esta quantidade. Assim, as condições de aprisionamento ficam dadas em função do potencial aplicado aos eletrodos. Certamente efeitos dissipativos impõem modificações nestes limites. Aliás efeitos dissipativos provenientes de um gás de fundo são importantes para as condições iniciais do experimento, pois o choque da partícula a ser aprisionada com as partículas deste gás consecutivamente dissipa sua energia, permitindo que a partícula tenha uma energia cinética razoavelmente pequena com relação a \bar{U}_{\max} .

O ponto importante desta seção é mostrar que por um experimento realizável é possível aprisionar partículas através de campos oscilantes [1]. A discussão dos efeitos dissipativos e de sua influência nas condições de aprisionamento serão realizadas na seção seguinte para uma partícula quântica, podendo seus resultados ser estendidos ao regime clássico sem grandes problemas devido à linearidade dos operadores envolvidos na evolução dinâmica do sistema.

2.3 Movimento Dissipativo de uma Partícula Quântica Aprisionada por Campos Oscilantes

O aprisionamento de partículas requer a utilização de campos dependentes do tempo, já que não há nenhuma configuração estática do campo que permita que a partícula seja permanentemente aprisionada. Nesta situação, o tratamento quântico do movimento é complicado pela dependência temporal explícita do hamiltoniano do sistema. Sistemas quânticos com hamiltonianos dependentes explicitamente do tempo foram considerados na literatura [7] com ênfase na investigação de invariantes dependentes do tempo e, como característica central, a relação entre os auto-estados destes invariantes e a solução da equação de Schrödinger. Em 1991 Glauber [4] propôs um modelo para uma partícula aprisionada por campos oscilantes, dado por

$$\mathbf{H}(t) = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2(t)\mathbf{Q}^2 \quad (2.14)$$

onde \mathbf{P} e \mathbf{Q} são os operadores de momentum e posição, respectivamente, m é a massa da partícula e $\omega(t)$ expressa a dependência temporal do campo externamente aplicado. Da Eq.(2.14) obtemos a equação de movimento [8] para a partícula,

$$\ddot{\mathbf{Q}}(t) + \omega^2(t)\mathbf{Q}(t) = 0. \quad (2.15)$$

Este modelo, além de ter permitido a definição de estados coerentes não estacionários para osciladores com frequência dependente do tempo [4, 9], permitiu também a demonstração da ocorrência

³Para uma excelente descrição deste experimento no regime clássico e destas condições limitantes veja a Ref. [1]

de compressão das quadraturas e da existência de regiões de instabilidade em que o aprisionamento da partícula quântica não mais é possível [8, 10]. A Eq.(2.15), para $\omega(t) = \lambda \cos(\Omega t)$, novamente corresponde à equação de Mathieu-Hill [6], cuja solução é estável na chamada *região de Kapitza*⁴ ($\frac{\lambda}{\Omega} \ll 1$). Para $\frac{\lambda}{\Omega} > 1$, o sistema apresenta sucessivas regiões de instabilidade e estabilidade como estudado na Ref.[10]. O sentido físico da região de Kapitza foi discutido por Glauber [4]: a desigualdade $\frac{\lambda}{\Omega} \ll 1$ corresponde à condição de aprisionamento, quando as soluções $\mathbf{Q}(t)$ e $\mathbf{P}(t)$ são estáveis, sendo as variâncias pequenas em relação à largura de um pacote de ondas gaussiano que descreve a partícula quântica. O pacote de ondas permanece confinado em suas dimensões originais, não tendo nenhuma tendência de dispersar-se na trajetória clássica.

A inclusão fenomenológica de efeitos de dissipação provém da interação da partícula quântica com seu meio envolvente. A consideração de efeitos dissipativos em sistemas quânticos pode ser realizada pelo processo usual em que a dinâmica quântica conjunta do sistema de interesse S e de seu meio envolvente, um subsistema absorvente R - o reservatório térmico é analisada, como é feito nos outros capítulos desta tese. Podemos também iniciar o problema com as equações clássicas do movimento para um sistema dissipativo, encontrando sua lagrangeana e aplicando as condições quânticas[17] para proceder com a sua quantização. Entretanto como forças de fricção não são conservativas, estas não podem ser incluídas em lagrangeanas sem introduzir alguma ambigüidade: a forma usual de introduzir forças de fricção fenomenológicas em Mecânica Clássica é realizada pela adição, nas equações de Newton, de uma força proporcional à velocidade. Entretanto, há uma ambigüidade ao definir funções de Lagrange das quais poderia se derivar as equações de movimento. Havas [12] estudou este problema e verificou a existência de uma grande gama de lagrangeanas equivalentes, ou em outras palavras, vários fatores de integração que levam às mesmas equações de movimento, apesar de terem diferentes hamiltonianos. A persistência na introdução de fenômenos de fricção diretamente na Mecânica Lagrangeana e Hamiltoniana vem do fato de que a teoria quântica é essencialmente hamiltoniana, devendo englobar versões quânticas do movimento clássico [13]. Aqui tomaremos este caminho em contraste com os procedimentos formais dos outros capítulos.

⁴P. Kapitza foi o primeiro a sugerir a aproximação interessante para tratar classicamente o movimento de partículas carregadas em campos oscilantes rápidos, em que seu movimento pode ser decomposto em duas componentes, uma de grande amplitude mas de muito menor frequência que o campo aplicado e outra muito menor em amplitude, mas com a mesma frequência do campo. Veja ref. [?]

2.3.1 O Modelo

Como apenas uma Lagrangiana equivalente é suficiente para deduzir a função hamiltoniana, a escolha se dará pela mais simples de ser manuseada:

$$L(q, \dot{q}, t) = \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q, t) + qF(t) \right] e^{\gamma t}, \quad (2.16)$$

onde o fator $e^{\gamma t}$ é chamado fator de integração e $V(q, t) = \frac{1}{2} m \omega^2(t) q^2$. O potencial adicional $qF(t)$, sendo $F(t)$ uma força estocástica, é introduzido para levar em conta as flutuações dos observáveis físicos devido à ação do reservatório. Juntos, o fator de integração e o potencial estocástico respondem ao problema de fricção produzida pela ação do meio envolvente sobre a partícula, como antecipado por Langevin na descrição do movimento browniano de uma partícula [14]. Em Mecânica Quântica, a introdução de uma força estocástica é crucial para a manutenção das relações de incerteza de Heisenberg. Simplificando, vamos considerar a força estocástica como sendo markoviana: sua média em um ensemble estatístico é nula e sua função de autocorrelação é dada por um função delta de Dirac para explicitar a ausência de memória do modelo, ou seja,

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle F(t)F(t') \rangle = 2d \delta(t - t'). \quad (2.17)$$

A constante d é determinada para satisfazer o teorema de flutuação-dissipação [15]. Para $\omega(t) = \lambda \cos(\Omega t)$,

$$d = \frac{\hbar}{2} m \lambda \gamma \coth \left(\frac{\hbar \lambda}{2k_B T} \right). \quad (2.18)$$

Realizando uma transformação de ponto nas coordenadas

$$Q = q \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right), \quad (2.19)$$

uma nova Lagrangeana é obtida [16]:

$$\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{Q}^2 + \frac{1}{2} m \Omega^2(t) Q^2 - \frac{1}{2} m \gamma Q \dot{Q} + Q F(t) \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right), \quad (2.20)$$

sendo $\Omega^2(t) = \frac{\gamma^2}{4} - \omega^2(t)$. O momentum canônico é

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \dot{Q}} = m \left(\dot{Q} - \frac{\gamma}{2} Q \right) = p \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right), \quad (2.21)$$

onde $p = m\dot{q}$ e q são as variáveis de momentum e posição físicos, respectivamente, enquanto P e Q são as variáveis canônicas. Portanto, a função hamiltoniana dissipativa é dada por

$$H(P, Q, t) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2(t) Q^2 + \frac{\gamma}{2} P Q - Q F(t) \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right). \quad (2.22)$$

Com as usuais condições quânticas [17], $[\mathbf{Q}, \mathbf{P}] = i\hbar \mathbf{1}$, obtemos

$$\mathbf{H}(t) = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2(t)\mathbf{Q}^2 + \frac{\gamma}{4} \{\mathbf{Q}, \mathbf{P}\} - \mathbf{Q} F(t) \exp\left(\frac{\gamma t}{2}\right), \quad (2.23)$$

sendo $F(t)$ ainda uma função *c-number* e $\{\mathbf{Q}, \mathbf{P}\} = \mathbf{QP} + \mathbf{PQ}$. Além disso, devemos lembrar que as quantidades físicas são avaliadas com duas médias (quântica e clássica) sobre produtos e somas dos operadores físicos [16],

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right), \quad (2.24)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right), \quad (2.25)$$

que são variáveis estocásticas. Note que para $\gamma = 0$ e $F(t) = 0$ recobramos pela Eq.(2.23) a Eq.(2.14), correspondente ao hamiltoniano de Glauber investigado nas refs.[4, 8, 9].

2.3.2 As Equações de Heisenberg do Movimento e suas Soluções

O operador hamiltoniano, Eq.(2.23), permite-nos obter as equações de movimento para os operadores canônicos de posição e momentum:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{Q}, \mathbf{H}] = \frac{\mathbf{P}}{m} + \frac{\gamma}{2} \mathbf{Q}, \quad (2.26)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{P}, \mathbf{H}] = -m\omega^2(t)\mathbf{Q} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{P} + F(t) \exp\left(\frac{\gamma t}{2}\right) \mathbf{1}. \quad (2.27)$$

Deve ser notada a semelhança entre estas equações e as equações de Langevin para uma partícula sob a ação de um potencial realizando um movimento browniano [14].

Derivando a Eq.(2.26) com respeito a t e utilizando a Eq.(2.27) obtemos a equação diferencial de segunda ordem,

$$\frac{d^2\mathbf{Q}}{dt^2} + \left[\omega^2(t) - \frac{\gamma^2}{4}\right] \mathbf{Q} = \frac{F(t)}{m} \exp\left(\frac{\gamma t}{2}\right) \mathbf{1}. \quad (2.28)$$

Podemos notar que sendo as Eqs.(2.26) e (2.27) lineares nos operadores, obtemos a solução como sendo uma soma dos geradores (na representação de Heisenberg), multiplicados por coeficientes dependentes do tempo,

$$\mathbf{Q}(t) = u(t)\mathbf{Q}_0 + v(t)\mathbf{P}_0 + w(t)\mathbf{1} \quad (2.29)$$

sendo $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}(0)$ e $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(0)$. A substituição da Eq.(2.29) na Eq.(2.28) (*q-number*), permite a separação em três equações diferenciais (*c-numbers*) desacopladas, de segunda ordem, para os coeficientes dependentes do tempo:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \left[\omega^2(t) - \frac{\gamma^2}{4}\right] u(t) = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \left[\omega^2(t) - \frac{\gamma^2}{4} \right] v(t) = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} + \left[\omega^2(t) - \frac{\gamma^2}{4} \right] w(t) = \frac{F(t)}{m} \exp\left(\frac{\gamma t}{2}\right), \quad (2.32)$$

com as seguintes condições iniciais (obtidas pela imposição das relações de comutação dos operadores \mathbf{Q}_0 e \mathbf{P}_0):

$$i) u(0) = 1, \quad \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\gamma}{2}, \quad (2.33)$$

$$ii) v(0) = 0, \quad \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{m}, \quad (2.34)$$

$$iii) w(0) = 0, \quad \left. \frac{dw(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (2.35)$$

Por outro lado se isolarmos o operador momentum na Eq.(2.26) e utilizarmos a Eq.(2.29), similarmente ao operador de posição, este operador pode ser dado por

$$\mathbf{P}(t) = \mu(t)\mathbf{Q}_0 + \kappa(t)\mathbf{P}_0 + \eta(t)\mathbf{1}, \quad (2.36)$$

onde os novos coeficientes dependentes do tempo estão relacionados com os antigos pelas equações

$$\mu(t) = m \left[\frac{du(t)}{dt} - \frac{\gamma}{2}u(t) \right], \quad (2.37)$$

$$\kappa(t) = m \left[\frac{dv(t)}{dt} - \frac{\gamma}{2}v(t) \right], \quad (2.38)$$

$$\eta(t) = m \left[\frac{dw(t)}{dt} - \frac{\gamma}{2}w(t) \right], \quad (2.39)$$

e com as condições iniciais,

$$i) \mu(0) = 0, \quad \left. \frac{d\mu(t)}{dt} \right|_{t=0} = -m\lambda^2, \quad (2.40)$$

$$ii) \kappa(0) = 1, \quad \left. \frac{d\kappa(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{\gamma}{2}, \quad (2.41)$$

$$iii) \eta(0) = 0, \quad \left. \frac{d\eta(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (2.42)$$

Nas Eqs.(2.35) e (2.42) consideramos que a força estocástica $F(t)$ seja nula em $t = 0$, já que o efeito de dissipação inicia-se em $t = 0$. A relação de comutação $[\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t)] = i\hbar \mathbf{1}$ é obtida se e somente se

$$u(t)\kappa(t) - v(t)\mu(t) = 1. \quad (2.43)$$

Esta condição pode ser facilmente verificada: multiplicando a Eq.(2.38) por $u(t)$ e a Eq.(2.37) por $v(t)$ e subtraindo a primeira equação da segunda obtemos

$$u(t)\kappa(t) - v(t)\mu(t) = m\Lambda(t), \quad (2.44)$$

com $\Lambda(t) = u(t)\dot{v}(t) - v(t)\dot{u}(t)$. Das Eqs.(2.30) e (2.31) obtemos uma equação diferencial de primeira ordem para $\Lambda(t)$, cuja solução é dada por

$$\Lambda(t) = \Lambda(0) = \frac{1}{m}, \quad (2.45)$$

sendo que a segunda igualdade provém das Eqs.(2.33) e (2.34). Substituindo a Eq.(2.45) na Eq.(2.44), obtemos a Eq.(2.43). Portanto, as condições iniciais têm uma importância fundamental para assegurar as relações de comutação e conseqüentemente preservar as relações de incerteza de Heisenberg.

As equações (??)-(??) podem ser reescritas como equações de Mathieu-Hill e suas soluções melhor compreendidas com o auxílio da análise no espaço de parâmetros [18, 19, 20]. Por exemplo, considerando $\omega(t) = \lambda \cos(\Omega t)$ na Eq.(2.30), após alguma manipulação algébrica obtemos

$$\frac{d^2 u(\tau)}{d\tau^2} + [\alpha + \beta \cos(\tau)] u(\tau) = 0, \quad (2.46)$$

sendo $\alpha = \beta - \frac{\gamma^2}{16\Omega^2}$, $\beta = \frac{\lambda^2}{8\Omega^2}$ e $\tau = 2\Omega t$. Segundo o teorema de Floquet [18], a Eq.(2.46) possui solução geral constituída de uma função periódica multiplicada por uma outra função que expandida em série de Fourier fornece dois tipos de soluções: uma estável e constituída por funções oscilantes limitadas; a outra instável e constituída por funções ilimitadas. O comportamento das soluções para um problema específico é completamente determinado pelos valores atribuídos a α e β . Assim, é interessante representar graficamente um mapa no espaço de parâmetros para uma ampla extensão de α e β . As regiões de estabilidade e instabilidade são separadas por linhas contínuas de soluções periódicas em que α e β são relacionadas às raízes do determinante de Hill [18, 19]. Encontrando estas raízes numericamente, um mapa do espaço de parâmetros pode ser representado graficamente como na Fig. 2.3. Nesta figura, as regiões sombreadas correspondem às soluções instáveis e as regiões em branco correspondem às soluções estáveis (quase-periódicas), as linhas de fronteira tracejadas correspondem às soluções 4π -periódicas e as linhas de fronteira contínuas correspondem às soluções 2π -periódicas. Na ausência de dissipação o parâmetro α coincide com β (linha transversal sólida) correspondendo ao intervalo de soluções das refs. [4, 8, 10]. A região de Kapitza corresponde a $\beta \ll 1$ e $\alpha \ll 1$ ($\alpha > 0$) mostrando o delicado intervalo de atuação dos experimentos a despeito da extensão de soluções estáveis. Portanto, esta representação torna claro o significado de estabilidade e instabilidade das funções temporais *c-numbers*.

Deve ser enfatizado que soluções instáveis implicam na não existência de condições para aprisionamento; por outro lado as regiões de soluções estáveis são as que permitem o aprisionamento. A inclusão de dissipação causa o deslocamento da linha ($\alpha = \beta$) na Fig. 2.3 para a esquerda por $(\gamma/4\Omega)^2$ em α . Isto pode levar alguns pontos de regiões estáveis (instáveis) para regiões instáveis (estáveis), enquanto outros pontos permanecem estáveis (instáveis). Note que esta discussão é válida para as funções tem-

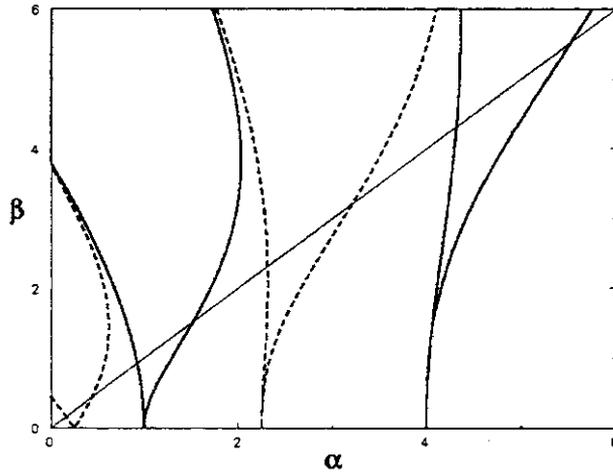


Figura 2.3: Regiões de estabilidade (sombreada) e instabilidade (em branco) para a equação de Mathieu-Hill. Os contornos tracejados correspondem às soluções 4π -periódicas e os contornos contínuos às soluções 2π -periódicas. A reta $\alpha=\beta$ representa o intervalo de ocorrência das soluções do caso não-dissipativo para o presente modelo de aprisionamento de uma partícula quântica. O efeito da dissipação é deslocar esta reta de $(\gamma/4\Omega)^2$ para a esquerda.

porais *c-numbers*, sendo esta análise válida para os operadores canônicos apenas. A análise realizada para os operadores físicos é ligeiramente alterada. Considerando a Eq. (2.28) e a transformação de ponto $\mathbf{q} = \mathbf{Q} e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ obtemos, após alguma manipulação algébrica,

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \omega^2(t) \mathbf{q} = \frac{F(t)}{m} \mathbf{1}. \quad (2.47)$$

Se considerarmos a média sobre a Eq. (2.47) teremos a equação que determina a trajetória clássica da partícula (de acordo com as propriedades da força estocástica),

$$\frac{d^2 \langle \mathbf{q} \rangle}{dt^2} + \gamma \frac{d \langle \mathbf{q} \rangle}{dt} + \omega^2(t) \langle \mathbf{q} \rangle = 0. \quad (2.48)$$

Com $\omega(t) = \lambda \cos(\Omega t)$ e $\tau = \Omega t$ temos

$$\frac{d^2 \langle \mathbf{q} \rangle}{dt^2} + \frac{\gamma}{\Omega} \frac{d \langle \mathbf{q} \rangle}{dt} + \frac{\lambda^2}{2\Omega^2} [1 + \cos 2\tau] \langle \mathbf{q} \rangle = 0, \quad (2.49)$$

que é a equação de Mathieu amortecida, estudada por Lieber e Risken [19]:

$$\ddot{\Phi} + 2\gamma' \dot{\Phi} + [\delta + 2\epsilon \cos 2\tau] \Phi = 0, \quad (2.50)$$

com $\Phi = \langle \mathbf{q} \rangle$, $\gamma' = \frac{\gamma}{2\Omega}$, $\delta = \frac{\lambda^2}{2\Omega^2}$ e $\epsilon = \frac{\delta}{2}$. O efeito da dissipação consiste em alterar as linhas de fronteira periódicas da Fig. 2.3, aumentando a área das regiões de estabilidade. A necessidade real nos experimentos de um gás com que a partícula possa colidir dissipando sua energia corrobora este resultado: a dissipação permite que as condições iniciais, para o aprisionamento, fiquem mais flexíveis.

2.3.3 Variâncias dos operadores físicos: Efeito de Compressão

A existência de invariantes (constantes do movimento) para o caso não dissipativo [4], permite a construção de estados análogos aos estados coerentes para o oscilador harmônico, mas agora não estacionários, refletindo o caráter dinâmico da frequência do oscilador. Como é observado [8, 9], com a evolução temporal, ocorre alternadamente o fenômeno de compressão das variâncias das quadraturas do estado.

As variâncias para $\mathbf{q}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$ são calculadas se primeiramente empregarmos as Eqs. (2.24) e (2.25) para o cálculo do valor esperado em um estado coerente e tomarmos a média sobre a força estocástica.

Assim, teremos

$$\langle \Delta \mathbf{x}_1^2(t) \rangle \equiv e^{-\gamma t} \langle \Delta \mathbf{X}_1^2(t) \rangle, \quad (2.51)$$

$$\langle \Delta \mathbf{x}_2^2(t) \rangle \equiv e^{-\gamma t} \langle \Delta \mathbf{X}_2^2(t) \rangle, \quad (2.52)$$

sendo

$$\langle \Delta \mathbf{X}_1^2(t) \rangle \equiv \langle \langle \mathbf{X}_1^2(t) \rangle \rangle - \langle \langle \mathbf{X}_1(t) \rangle \rangle^2, \quad (2.53)$$

$$\langle \Delta \mathbf{X}_2^2(t) \rangle \equiv \langle \langle \mathbf{X}_2^2(t) \rangle \rangle - \langle \langle \mathbf{X}_2(t) \rangle \rangle^2, \quad (2.54)$$

correspondente à variância para os operadores de quadratura, dados por

$$\mathbf{X}_1(t) = \sqrt{\frac{m\lambda}{2\hbar}} \mathbf{Q}(t) \quad , \quad \mathbf{X}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\lambda}} \mathbf{P}(t) . \quad (2.55)$$

A compressão nas quadraturas físicas, $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$, ocorre se as variâncias físicas satisfizerem a relação $\langle \Delta \mathbf{x}_1^2(t) \rangle < \frac{1}{4}$ (ou $\langle \Delta \mathbf{x}_2^2(t) \rangle < \frac{1}{4}$, mas não simultaneamente), *i.e.*, se a variância em uma das quadraturas for menor do que a obtida para um estado coerente ou de vácuo [21]. Substituindo as Eqs.(2.29) e (2.36) nas Eqs. (2.51) e (2.52) obtemos

$$\langle \Delta \mathbf{x}_1(t) \rangle = \frac{1}{4} e^{-\gamma t} [u^2(t) + m^2 \lambda^2 v^2(t) + 2m\lambda \langle w^2(t) \rangle] , \quad (2.56)$$

$$\langle \Delta \mathbf{x}_2^2(t) \rangle = \frac{1}{4} e^{-\gamma t} \left[\kappa^2(t) + \frac{1}{m^2 \lambda^2} \mu^2(t) + \frac{2}{m\lambda} \langle \eta^2(t) \rangle \right] , \quad (2.57)$$

com

$$\langle w^2(t) \rangle = \frac{\lambda\gamma}{m\Omega^2 W_w^2(0)} \coth\left(\frac{\hbar\lambda}{2k_B T}\right) \int_0^t e^{\gamma t'} \Delta_w^2(t, t') dt' , \quad (2.58)$$

$$\langle \eta^2(t) \rangle = \frac{m\lambda\gamma}{\Omega^2 W_w^2(0)} \coth\left(\frac{\hbar\lambda}{2k_B T}\right) \int_0^t e^{\gamma t'} \left[\frac{d}{dt} \Delta_w(t, t') - \frac{\gamma}{2} \Delta_w(t, t') \right]^2 dt' , \quad (2.59)$$

$$\Delta_w(t, t') = \begin{vmatrix} w_1(t') & w_2(t') \\ w_1(t) & w_2(t) \end{vmatrix} , \quad (2.60)$$

$$W_w(0) = \begin{vmatrix} w_1(0) & w_2(0) \\ \dot{w}_1(0) & \dot{w}_2(0) \end{vmatrix} , \quad (2.61)$$

sendo $w_1(t)$ e $w_2(t)$ duas soluções linearmente independentes da Eq. (2.32). Finalmente, das Eqs. (2.56) e (2.57) nós obtemos as relações de incerteza de Heisenberg,

$$\langle \Delta \mathbf{x}_1(t) \rangle \langle \Delta \mathbf{x}_2(t) \rangle \geq \frac{1}{4} . \quad (2.62)$$

As Figs. 2.4 - 2.6 mostram os gráficos das variâncias $\langle \Delta \mathbf{x}_1^2 \rangle$ and $\langle \Delta \mathbf{x}_2^2 \rangle$ versus Ωt . Esta escala de tempo ($\tau = \Omega t$) foi adotada para comparações com os resultados das refs.[8, 10]. As Figs. 2.4 - 2.6 mostram a influência da dissipação sobre o fenômeno de compressão (*squeezing*) para o presente sistema, onde supomos que a frequência de oscilação é dada por $\omega(t) = \lambda \cos(\Omega t)$ e $\coth\left(\frac{\hbar\lambda}{2k_B T}\right) = 1$ (correspondendo à temperatura zero). As Figs. 2.4(a), 2.5(a) e 2.6(a) são obtidas dos resultados presentes para $\frac{\gamma}{\Omega} = 0$ (ausência de dissipação) e $\frac{\lambda}{\Omega} = 0.01, 0.1$ e 0.5 , respectivamente, coincidindo com as figuras da Ref. [8], como deveria ser. As Figs. 2.4(b), 2.5(b) e 2.6(b) são obtidas na presença de dissipação ($\frac{\gamma}{\Omega} = 0.01$) para os mesmos valores de $\frac{\lambda}{\Omega}$ das Figs. 2.4(a), 2.5(a) e 2.6(a), respectivamente. Note que a presença de dissipação destrói completamente o efeito de compressão quando $\frac{\lambda}{\Omega} \ll 1$ (na região de Kapitza), enquanto que para campos fortes ($\frac{\lambda}{\Omega} \sim 1$) o efeito de compressão das quadraturas

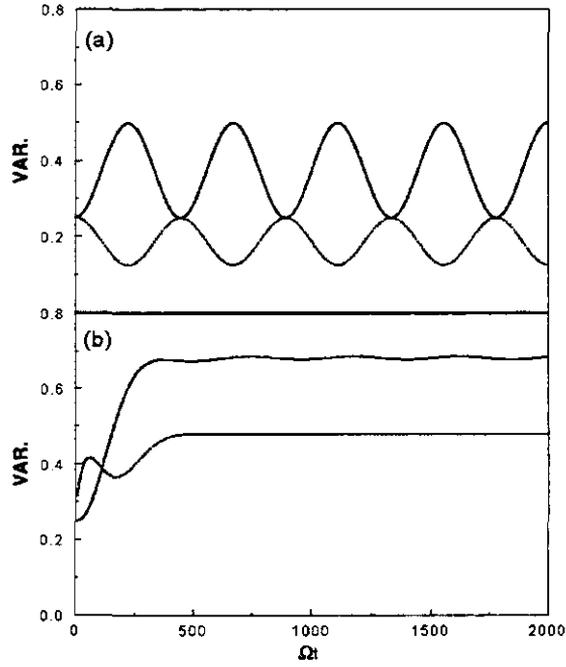


Figura 2.4: Variâncias $\langle \Delta x_1^2 \rangle$ (linha sólida) e $\langle \Delta x_2^2 \rangle$ (linha pontilhada) versus Ωt , apresentando a influência da dissipação sobre as flutuações quânticas e sobre o efeito de compressão para $\lambda/\Omega = 0,01$. A Fig. 2.4(a) representa a ausência de dissipação, para $\gamma/\Omega = 0$ e a Fig. 2.4(b) para $\gamma/\Omega = 0,01$. Em todos os casos a temperatura é nula.

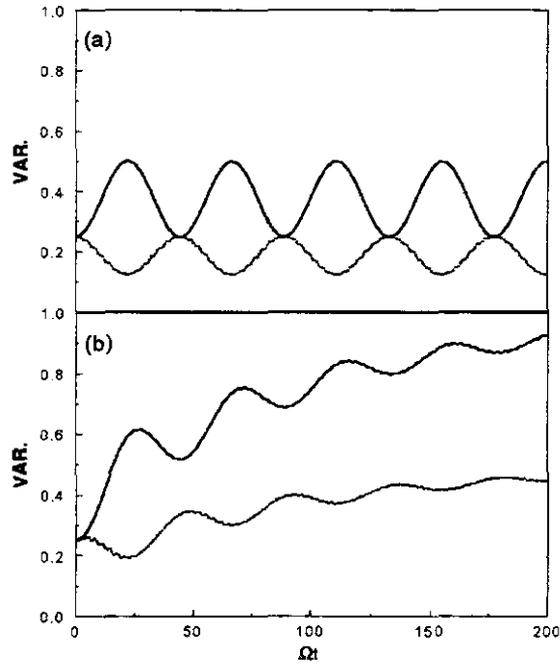


Figura 2.5: Mesmo que a Fig. 2.4 para $\lambda/\Omega = 0,1$. A Fig. 2.5(a) representa a ausência de dissipação, para $\gamma/\Omega = 0$ e a Fig. 2.5(b) para $\gamma/\Omega = 0,01$.

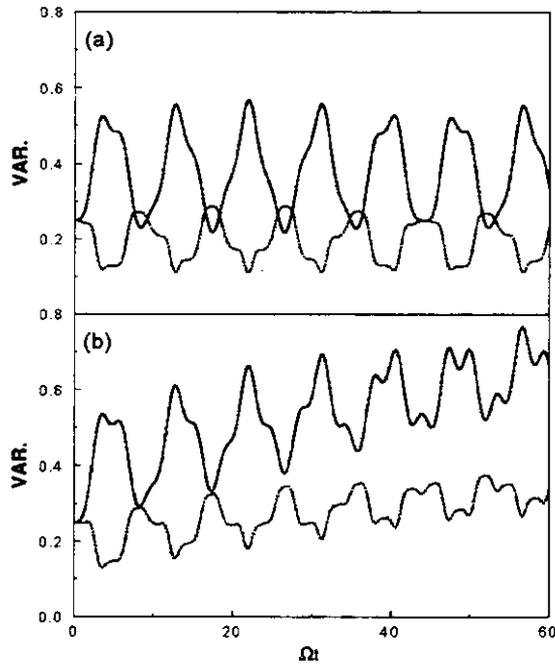


Figura 2.6: Mesmo que a Fig. 2.4 para $\lambda/\Omega = 0,5$. A Fig. 2.6(a) representa a ausência de dissipação, para $\gamma/\Omega = 0$ e a Fig. 2.6(b) para $\gamma/\Omega = 0,01$.

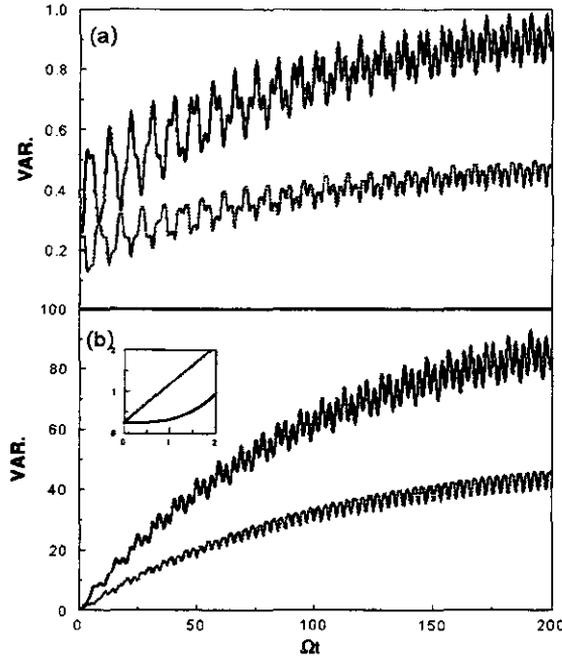


Figura 2.7: Variâncias $\langle \Delta x_1^2 \rangle$ (linha sólida) e $\langle \Delta x_2^2 \rangle$ (linha pontilhada) versus Ωt , apresentando a influência da temperatura dissipação sobre as flutuações quânticas e sobre o efeito de compressão para $\lambda/\Omega = 0,5$. A Fig. 2.7(a) é para $\coth(\hbar\lambda/2k_B T) = 1$ e a Fig. 2.7(b) para $\coth(\hbar\lambda/2k_B T) = 100$.

desaparece apenas para grandes tempos ($\Omega t \geq 40$). Além disso, na Fig. 2.6(b) a variância comprimida (linha pontilhada) só é comprimida próximo à origem ($\Omega t \approx 0$) ao passo que na Fig. 2.5(b), esta mesma variância inicia na forma anti-comprimida (subseqüentemente, a compressão das quadraturas emerge para depois ser novamente suprimida). Quanto mais no interior da região de Kapitza, indo da Fig. 2.5(b) para a Fig. 2.4(b), esta variância não é comprimida (para $\frac{\lambda}{\Omega} \geq 0.01$). À primeira vista parece que ao aproximar-nos da região de Kapitza, a influência destrutiva da dissipação aumenta. Contudo, esta conclusão é somente válida se esta aproximação de $\frac{\lambda}{\Omega} = 0.1$ para $\frac{\lambda}{\Omega} = 0.01$, for implementada com Ω fixo como no caso presente.

As Figs. 2.7(a) e 2.7(b) mostram a influência da temperatura do reservatório térmico sobre a compressão no sistema. A comparação entre estas figuras mostra que o efeito de compressão degrada-se mais lentamente (rapidamente) à medida que a temperatura do reservatório é diminuída (aumentada).

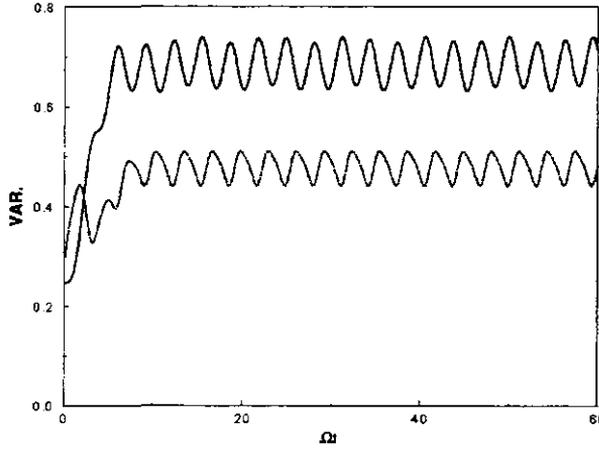


Figura 2.8: Variâncias $\langle \Delta \mathbf{x}_1^2 \rangle$ (linha sólida) e $\langle \Delta \mathbf{x}_2^2 \rangle$ (linha pontilhada) versus Ωt , mostrando a influência da intensidade do parâmetro de dissipação para $\lambda/\Omega = 0,5$, $\gamma/\Omega = 0,5$ e $\coth(\hbar\lambda/2k_B T) = 1$.

A Fig. 2.8 mostra a influência da intensidade do parâmetro de dissipação. Esta figura deve ser comparada com a Fig. 2.6(b), já que esta corresponde ao mesmo conjunto de parâmetros, exceto que $\frac{\gamma}{\Omega} = 0.01$ na Fig. 2.6(b), e $\frac{\gamma}{\Omega} = 0.5$ na Fig. 2.8. A comparação entre estas duas figuras mostra que quando o parâmetro de dissipação é aumentado, o efeito de compressão desaparece mais rapidamente. Neste contexto, a dissipação é fraca quando a compressão é degradada apenas após vários períodos em que o sistema exiba este efeito. Isto ocorre para $\frac{\gamma}{\Omega} < 0.01$ [veja Fig. 2.6(b)] ou para $\tau_\gamma \gg \tau_\Omega$, quando o tempo de relaxação, τ_γ , é muito maior do que o período, $\tau_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}$, do campo externamente aplicado.

As Figs. 2.9 e 2.10 mostram os gráficos do produto de incerteza $\langle \Delta \mathbf{x}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{x}_2 \rangle$ versus Ωt : A Fig. 2.9 é dada para dois valores diferentes do parâmetro de dissipação e a Fig. 2.10 é dada para dois valores diferentes de temperatura. Note que a solução para o produto da incerteza exibe um regime transiente para $\Omega t \leq \Omega \tau_\gamma$, e um regime estacionário para $\Omega t \gg \Omega \tau_\gamma$. Além disso, a dissipação é relacionada com tempo de transição enquanto que a temperatura é conectada ao valor médio estacionário da solução: quanto maior for a dissipação menor será o tempo de transição e quanto maior for a temperatura maior será o valor médio da solução estacionária. Podemos obter a expressão assintótica da Eq.(2.62), para o regime estacionário,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Delta \mathbf{x}_1(t) \rangle \langle \Delta \mathbf{x}_2(t) \rangle \approx \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \sqrt{\langle w^2(t) \rangle \langle \eta^2(t) \rangle}, \quad (2.63)$$

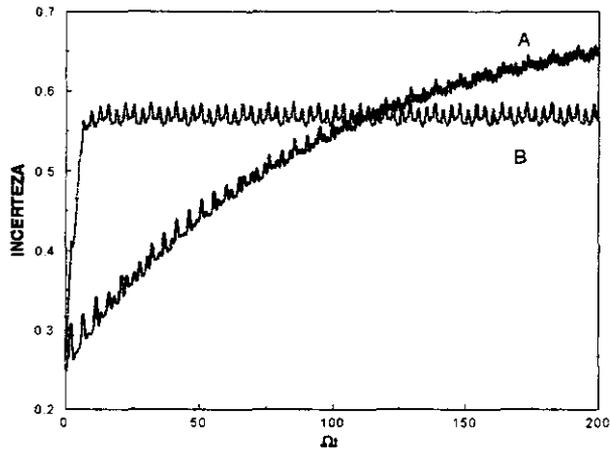


Figura 2.9: Produto de incertezas $\langle \Delta x_1^2 \rangle \langle \Delta x_2^2 \rangle$ versus Ωt , mostrando a influência da dissipação sobre o tempo de estabilização das incertezas para $\lambda/\Omega = 0,5$ e $\coth(\hbar\lambda/2k_B T) = 1$. A curva A corresponde a $\gamma/\Omega = 0,01$ e a curva B corresponde a $\gamma/\Omega = 0,5$.

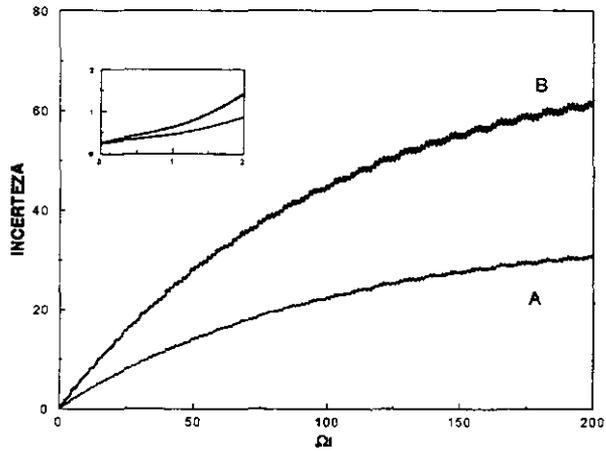


Figura 2.10: Mesmo que a Fig. 2.9, mostrando a influência da temperatura para $\lambda/\Omega = 0,5$ e $\gamma/\Omega = 0,01$. A curva A corresponde a $\coth(\hbar\lambda/2k_B T) = 1$ e a curva B corresponde a $\coth(\hbar\lambda/2k_B T) = 100$.

sendo as quantidades $\langle w^2(t) \rangle$ e $\langle \eta^2(t) \rangle$ dependentes da temperatura.

2.3.4 Regiões de Estabilidade e Instabilidade

Nesta seção vamos realizar a mesma análise da seção anterior, estudando agora a influência da dissipação sobre a compressão fora da região de Kapitza ($\lambda/\Omega > 1$). A questão levantada aqui é: de que forma a dissipação afeta as instabilidades nas flutuações quânticas? Aqui estudamos apenas duas soluções para $\frac{\lambda}{\Omega}$: uma instável ($\frac{\lambda}{\Omega} = 5$) e outra estável ($\frac{\lambda}{\Omega} = 5.5$), com resultados muito similares aos em que a razão $\frac{\lambda}{\Omega}$ for diferente, como apresentado em [10]. Estas duas soluções permanecem na mesma região original com a variação da dissipação, pois aqui adotamos o regime de fraca dissipação: note que mesmo para $\gamma/\Omega = 0.5$ o deslocamento da reta ($\alpha = \beta$) será apenas de 0.015 em α , sendo portanto imperceptível na escala da Fig. 2.3.

As Figs. 2.11 e 2.12 apresentam os gráficos para as variâncias $\langle \Delta x_1^2(t) \rangle$ (linha pontilhada) e $\langle \Delta x_2^2(t) \rangle$ (linha sólida) versus Ωt . Para uma comparação, foi representado o gráfico para um região de estabilidade, mas distante da região de Kapitza. Neste domínio, existem várias regiões sucessivas de estabilidade e instabilidade, como estudado em [10] na ausência de dissipação e já apresentado na Fig. 2.3. As Figs. 2.11 são para a região de **estabilidade** ($\frac{\lambda}{\Omega} = 5.5$), sendo 2.11(a), 2.11(b) e 2.11(c) para $\frac{\gamma}{\Omega} = 0$ (sem dissipação), $\frac{\gamma}{\Omega} = 0.05$ e $\frac{\gamma}{\Omega} = 0.5$, respectivamente. A Fig. 2.11(a) é obtida para o modelo presente e é coincidente com a figura (1c) de [10], como deveria ser. A Fig. 2.11(b) inclui uma pequena dissipação ($\frac{\gamma}{\Omega} = 0.05$), conseqüentemente sua influência é pequena, mas o suficiente para aumentar a amplitude das oscilações em ambas as variâncias. A estrutura de picos mostrada por estas variâncias mantém-se praticamente inalterada. Entretanto, quando o parâmetro de dissipação é aumentado para $\frac{\gamma}{\Omega} = 0.5$, a estrutura de picos é alterada [compare as Figs. 2.11(a) e 2.11(b) com 2.11(c)] atingindo um regime assintótico onde todos os picos apresentam uma estrutura periódica. Das expressões para as variâncias e das soluções das funções $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$ podemos observar que as soluções assintóticas para estas variâncias são predominantemente descritas pelas componentes estocásticas $\langle w^2(t) \rangle$ e $\langle \eta^2(t) \rangle$ (que no presente modelo são consideradas como sendo markovianas). A estrutura de picos obtida para $t \rightarrow \infty$ na Fig. 2.11 é resultado do sobre a força estocástica introduzida no hamiltoniano. Quando γ aumenta, $\langle w^2(t) \rangle$ e $\langle \eta^2(t) \rangle$ também aumentam, explicando a estrutura assintótica destas figuras.

As curvas na Fig. 2.12 representam o mesmo que as da Fig. 2.11, mas agora para uma região de **instabilidade** ($\frac{\lambda}{\Omega} = 5.0$) como estudado em [10] na ausência de dissipação. As figs 2.12(a), 2.12(b) e 2.12(c) são para $\frac{\gamma}{\Omega} = 0$, $\frac{\gamma}{\Omega} = 0.05$ e $\frac{\gamma}{\Omega} = 0.5$, respectivamente. A Fig. 2.12(a) é obtida pelo modelo presente e coincide com a figura correspondente 1(b) em [10]. A Fig. 2.12(b) inclui uma pequena dissipação ($\frac{\gamma}{\Omega} = 0.05$), suficiente para destruir a compressão na região de Kapitza. Aqui a influência

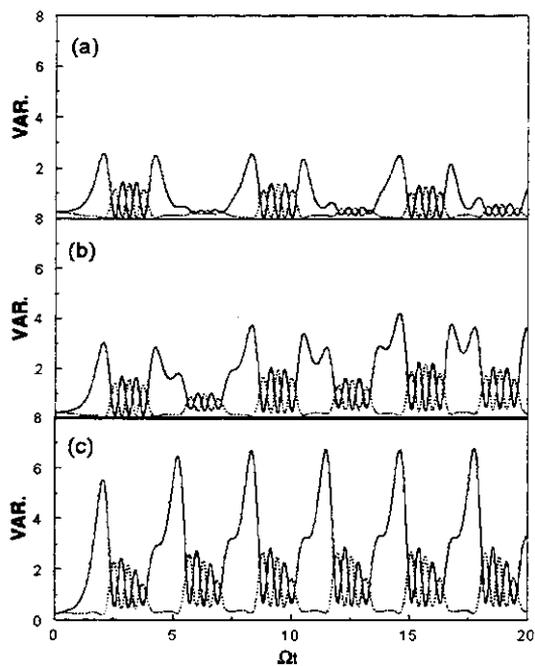


Figura 2.11: Variâncias $\langle \Delta x_1^2 \rangle$ (linha sólida) e $\langle \Delta x_2^2 \rangle$ (linha pontilhada) versus Ωt , fora da região de Kapitza, apresentando a influência da dissipação sobre as flutuações quânticas e sobre o efeito de compressão em um região de estabilidade ($\lambda/\Omega = 5,5$). (a), (b) e (c) correspondem a $\gamma/\Omega = 0, 0,05$ e $0,5$ respectivamente. Em todos os casos a temperatura é nula.

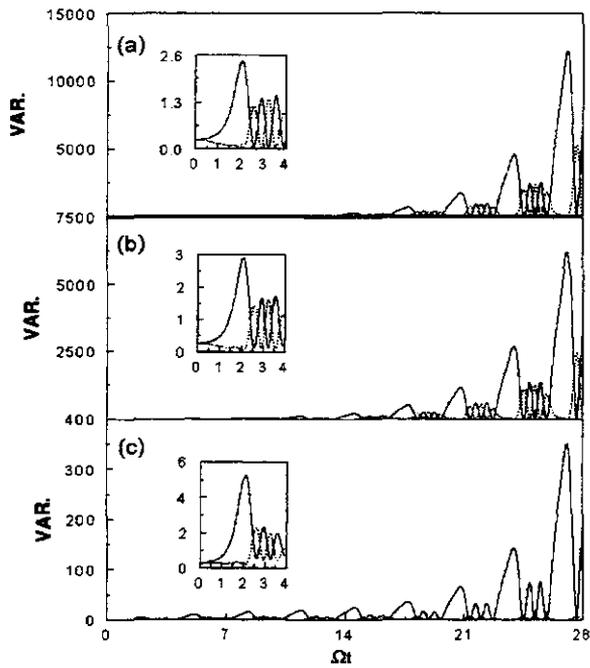


Figura 2.12: Mesmo que a Fig. 2.11, agora para uma região de instabilidade ($\lambda/\Omega = 5$). (a), (b) e (c) correspondem a $\gamma/\Omega = 0, 0,05$ e $0,5$ respectivamente.

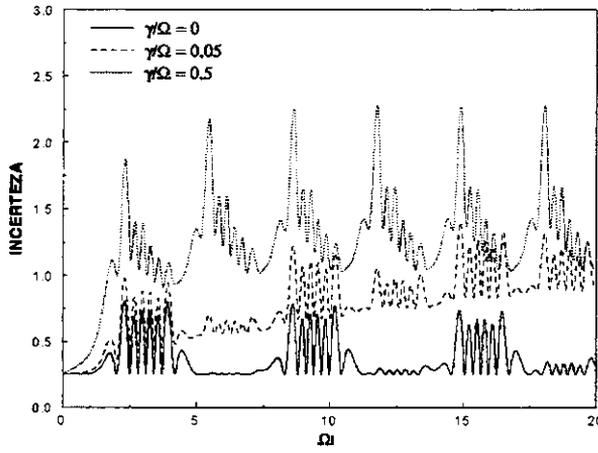


Figura 2.13: Produto de incertezas $\langle \Delta x_1^2 \rangle \langle \Delta x_2^2 \rangle$ versus Ωt para uma região de estabilidade ($\lambda/\Omega = 5,5$), mostrando a influência da dissipação sobre o tempo de estabilização do produto.

da dissipação é muito pequena [compare as Figs. 2.12(a) e 2.12(b)]. No entanto, quando o parâmetro $\frac{\gamma}{\Omega}$ aumenta para $\frac{\gamma}{\Omega} = 0,5$, como na Fig. 2.12(c), a influência da dissipação sobre a instabilidade torna-se relevante e ambas as variâncias são consideravelmente reduzidas. Este fato permite a realização de aprisionamento temporário da partícula neste regime de parâmetros. Por outro lado, a compressão inicial é degradada [compare o pequeno quadro nas Figs. 2.12(a) e 2.12(b) com a da Fig. 2.12(c)].

As Figs. 2.13 e 2.14 representam o produto de incertezas $\langle \Delta x_1 \rangle \langle \Delta x_2 \rangle$ versus Ωt . As linhas sólida, tracejada e pontilhada são para $\frac{\gamma}{\Omega} = 0$, $\frac{\gamma}{\Omega} = 0,05$ e $\frac{\gamma}{\Omega} = 0,5$, respectivamente. A Fig. 2.13 situa-se na região de estabilidade ($\frac{\lambda}{\Omega} = 5,5$). Note que a estrutura de picos exibida pelo produto das incertezas é o mesmo para os dois primeiros casos, com sutís diferenças. A presença de dissipação aumenta os valores mínimos do produto, que não mais retornam ao nível de 0,25, e estabiliza o produto assintoticamente. Para $\frac{\gamma}{\Omega} = 0,5$, a estrutura de picos é modificada mas atinge um comportamento assintótico em que a estrutura de picos é repetida. Aqui, novamente a estrutura de picos é devido ao modelo markoviano adotado.

A Fig. 2.14 corresponde à região de instabilidade ($\frac{\lambda}{\Omega} = 5,0$). Neste caso, em oposição ao que ocorre na região de estabilidade, a dissipação reduz o produto das incertezas para grandes tempos (compare a linha sólida com a tracejada e a pontilhada): enquanto no regime de fraca dissipação ($\frac{\gamma}{\Omega} = 0,05$) reduz-se insignificamente o produto de incertezas para $\Omega t > 25$, uma grande dissipação ($\frac{\gamma}{\Omega} = 0,5$) reduz o produto drasticamente para $\Omega t > 5$. Para $\Omega t < 5$, o produto de incertezas é amplificado (veja

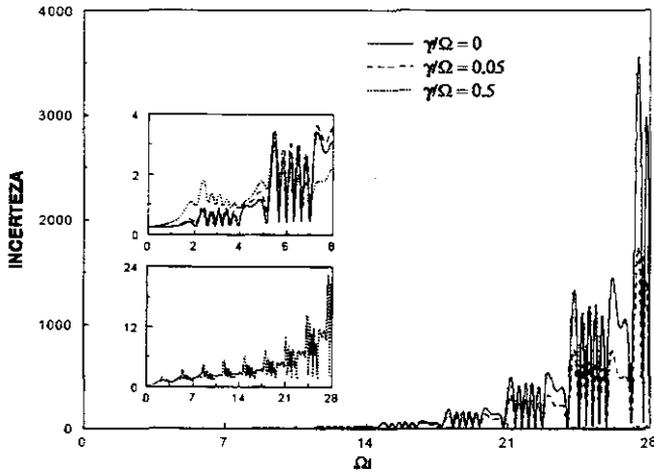


Figura 2.14: Mesmo que a figura anterior, agora para uma região de instabilidade ($\lambda/\Omega = 5$).

os pequenos quadros da Fig. 2.14). Apesar da redução do produto de incertezas pela inclusão do efeito de dissipação, isto não impede que o produto continue com o mesmo comportamento explosivo. Este atinge o mesmo valor do caso não dissipativo em uma escala de tempo maior.

2.3.5 Conclusões

Neste capítulo investigamos a influência de dissipação sobre o efeito de compressão das quadraturas de uma partícula quântica aprisionada por um campo oscilante. Os resultados presentes devem ser considerados como uma extensão ao modelo de Glauber, com a inclusão de efeitos dissipativos. Os efeitos dissipativos foram introduzidos através de uma hamiltoniana modelo empregada na Eq.(2.23). Obtivemos as equações de Heisenberg para os operadores canônicos $\mathbf{Q}(t)$ e $\mathbf{P}(t)$ [cf. Eqs.(2.26) e (2.27)] e as resolvemos através das Eqs.(2.29)-(2.36) e Eqs.(2.37)-(2.42), respectivamente. As variâncias dos operadores físicos, $\langle \Delta x_1^2(t) \rangle$ e $\langle \Delta x_2^2(t) \rangle$, foram definidas e calculadas, sendo seus resultados exibidos em vários gráficos como função do tempo (Ωt). Podemos enfatizar os seguintes resultados: (i) a dissipação degrada o efeito de compressão nas quadraturas neste sistema mais efetivamente na região de Kapitza ($\frac{\lambda}{\Omega} \ll 1$). Esta região é apenas uma das muitas regiões de estabilidade para o aprisionamento e é atingida com o decréscimo de λ . Se mantivermos λ fixo e aumentarmos Ω , a região de Kapitza também é atingida, passando sucessivamente pelas Figs. 2.4(b), 2.5(b) e 2.6(b), quando a dissipação

está presente ($\frac{\lambda}{\Omega} = 0.01$). Neste caso, entretanto, as conclusões acima não são válidas, já que para manter a razão $\frac{\gamma}{\Omega} = 0.01$ fixa nestas figuras deveríamos também aumentar o parâmetro de dissipação γ , de $\gamma = 0.01\Omega_0$ para $\gamma = 0.05$ e para $\Omega_0 \rightarrow \gamma = 0.5\Omega_0$, onde Ω_0 é o valor de Ω na Fig. 2.6(b); (ii) se o parâmetro de dissipação é aumentado a degradação da compressão também aumenta, como é esperado; (iii) a compressão torna-se mais frágil quando a temperatura do reservatório térmico aumenta. Dos resultados (i) e (ii) podemos concluir que a intensidade da dissipação está relacionada com a razão de balanço de energia entre a intensidade do parâmetro de dissipação e a intensidade do campo eletromagnético, $\frac{\gamma}{\lambda}$.

Com relação às regiões de estabilidade e instabilidade, podemos dizer que, quando a amplitude das oscilações de ambas as variâncias é pequena, a presença de dissipação tende a aumentá-las: isto ocorre para todos os tempos nas regiões estáveis [cf. Figs.2.11(b) e 2.11(c)] e mesmo nas regiões instáveis para pequenos tempos (veja, por exemplo, o pequeno quadro inserido na Fig. 2.12(c) para $\Omega t < 4$). Em oposição, quando essa amplitude torna-se grande, a dissipação tende a diminuí-la. Isto ocorre apenas nas regiões instáveis para grandes tempos ($\Omega t \geq 10$). Neste caso, a redução das flutuações quânticas ocorre em ambas as quadraturas e este comportamento é refletido no produto de incertezas (veja Fig. 2.14).

Nas regiões estáveis a dissipação estabiliza as flutuações. Por outro lado, nas regiões instáveis as soluções não são oscilantes e limitadas, mas algum tipo de função exponencial levando ao comportamento explosivo como mostrado na Fig. 2.12. Apesar da aparente diferença no efeito da dissipação nas regiões de estabilidade e instabilidade, sua ação é a mesma em ambas: estabilizar as flutuações. Nas regiões instáveis o movimento da partícula continua instável. A dissipação apenas retarda o progresso explosivo da órbita da partícula. O comportamento mostrado aqui para $\frac{\lambda}{\Omega} = 5.0$ e $\frac{\lambda}{\Omega} = 5.5$ é similar aos das outras muitas regiões de estabilidade estudadas em [10].

Bibliografia

- [1] H. Winter e H. W. Ortjohann, *Am. J. Phys.* **59**, 807 (1991).
- [2] H. Dehmelt, *Am. J. Phys.* **58**, 17 (1990).
- [3] W. Paul, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 531 (1990).
- [4] R. J. Glauber, *Quantum Theory of Particle Trapping by Oscillating Fields*, Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, MA 02138, HUTP-91/B001 (1991); também: *Quantum Mechanics of Trapped Wave Packets*, Enrico Fermi School (Varena), (North-Holland, Amsterdam, 1991), p. 643.
- [5] S. Chu, L. Holberg, J. Bjorkholm, A. Cable e A. Askin, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 48 (1985);
D. J. Larson, J. C. Bergquist, J. Ballinger, W. M. Itano e D. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 70 (1986) e suas referências.
- [6] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Modern Analysis*, (MacMillan, New York, 1943) ;
M. Abramowitz, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York, 1972), p. 727.
- [7] H. R. Lewis, Jr. e W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969); V. V. Dodonov e V. I. Man'ko em *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, ed. M. A. Markov (Nova Science Publ., 1989).
- [8] B. Baseia, R. Vyas e V. S. Bagnato, *Quantum Opt.* **5**, 155 (1993).
- [9] G. Schradé, V. I. Man'ko, W. P. Schleich e R. J. Glauber, *Quantum Opt.* **7**, 307 (1995).
- [10] B. Baseia, C. M. A. Dantas, V. S. Bagnato e R. Vyas, *Quantum Opt.* **6**, 73 (1994).
- [11] L. D. Landau e E. M. Lifschitz, *Mechanics*, (Pergamon Press, Oxford, 1969).
- [12] H. Bateman, *Phys. Rev.* **38**, 815 (1931);
P. Caldirola, *N. Cim.* **18**, 393 (1941);

E. Kanai, *Prog. Theor. Phys.* **3**, 440 (1948);
 P. Havas, *Nuovo Cim. Suppl.* **5**, 363 (1957);
 I. R. Svin'in, *Theor. Mat. Fis.* **27**, 270 (1976);
 E. H. Kerner, *Can. J. Phys.* **36**, 371 (1958);
 K. W. Stevens, *Proc. Phys. Soc. London* **72**, 1027 (1958);
 R. W. Hasse, *J. Math. Phys.* **16**, 2005 (1975); *Rep. Theor. Phys.* **41**, 1027 (1978);
 V. V. Dodonov e V. I. Man'ko, *N. Cim.* **44B**, 265 (1978); *Phys. Rev.* **A20**, 550 (1979);
 P. Croxson, *Phys. Rev.* **A49**, 588 (1994);
 S. S. Mizrahi, M. H. Moussa e B. Baseia, *Int. J. Mod. Phys.* **B8**, 1563 (1994).

[13] M. A. Marchioli e S. S. Mizrahi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 2619 (1997).

[14] H. Risken, *The Fokker-Planck equation* (Springer, Berlin, 1984).

[15] W. E. Britin, *Phys. Rev.* **77**, 396 (1950);

J. R. Senitzky, *Phys. Rev.* **119**, 670 (1960); **124**, 642 (1961);

J. R. Ray, *Am. J. Phys.* **47**, 626 (1979); *Lett. N. Cim.* **25**, 47 (1979);

D. M. Greenberger, *J. Math. Phys.* **20**, 672 (1979); **20**, 71 (1979);

N. A. Lemos, *Am. J. Phys.* **49**, 1181 (1981).

[16] Veja, e.g., I. R. Svin'in, *Theor. Mat. Fis.* **27**, 270 (1976);

J. R. Brinati e S. S. Mizrahi, *J. Math. Phys.* **21**, 2154 (1980).

[17] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford Science Publ., 1958).

[18] D. W. Jordan e P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations* (Oxford: Clarendon Press, 1985), p. 237.

[19] Th. Leiber e H. Risken, *Phys. Lett. A* **128**, 214 (1988).

[20] L. Ruby, *Am. J. Phys.* **64**, 39 (1996).

[21] H. P. Yuen, *Phys. Rev.* **A13**, 2226 (1976) ;

D. F. Walls, *Nature* **306**, 141 (1983);

R. Loudon e P. L. Knight, *J. Mod. Opt.* **34**, 709 (1987).

Capítulo 3

Transferência de Informação no Curso de Interações Quânticas

“Information is physical”

Wojciech H. Zurek

3.1 Introdução

O conceito de *sistema* é crucial na discussão do processo de *decoerência*. A divisão artificial do mundo físico em *sistema de interesse + aparato de medida + meio envolvente* permite a abordagem de problemas conceituais da medida quântica de uma forma elegante, em que a superposição entre estados distintos do aparato é dinamicamente suprimida por sua interação com o meio envolvente. De fato, esta divisão induzida pela observação é mesmo necessária para a formulação do problema [1, 2]. Em realidade, qualquer sistema quântico fechado evolui deterministicamente de acordo com a evolução unitária de Schrödinger. Dificuldades na interpretação da medida em Mecânica Quântica surgem somente quando se nota que tal evolução no espaço de Hilbert leva um sistema composto (*aparato de medida + sistema de interesse + meio envolvente*) de um estado inicial em que cada um dos constituintes tem suas propriedades isoladas definidas, para um estado em que nenhum dos três possui um vetor de estado independente (não há uma função de onda associada individualmente a cada um destes subsistemas), mas como um estado global que é um *emaranhado* dos auto-estados dos três subsistemas, o que constitui o *princípio de não-separabilidade* [3] da Mecânica Quântica.

O que se entende por *meio envolvente* são os graus de liberdade de um subsistema (reservatório térmico) com que o sistema de interesse está inevitavelmente em contato. Estes graus de liberdade, que podem ser tanto externos quanto internos, são responsáveis pela transferência de energia do sistema

de interesse para o reservatório. Para a modelagem efetiva de um meio é necessário a utilização de um subsistema com infinitos graus de liberdade não interagentes pois, analogamente ao teorema de recorrência em Mecânica Clássica [4], dado em termos do tempo para se realizar um ciclo de Poincaré, na Mecânica Quântica “qualquer sistema dinâmico fechado retorna a seu estado inicial decorrido um tempo característico de recorrência” [5, 6]. Em sistemas quânticos acoplados a um reservatório térmico, um número finito de graus de liberdade do reservatório torna a coerência do estado do sistema recorrente, contrastando com a desejável não-recorrência. A não-recorrência pode ser substituída, satisfatoriamente, por um tempo de recorrência infinito como consequência dos infinitos graus de liberdade do reservatório [7].

Na literatura [1, 5] tem se tornado usual a afirmação de que o fluxo de energia de um sistema quântico para o meio envolvente é sempre acompanhado por um fluxo de informação. O meio realiza medidas de não-demolição na variável de acoplamento do sistema. A investigação de como este fluxo afeta o estado dos dois subsistemas (reservatório térmico e sistema central) e o que realmente significa este fluxo de informação é de grande interesse para a compreensão do fenômeno de decoerência em termos de processos fundamentais. O estudo de *sistemas quânticos finitos acoplados* permite que esta investigação seja realizada em sistemas exatamente solúveis, evitando assim as aproximações necessárias (Wigner-Weisskopf, Markov) à solução de sistemas infinitos e que geralmente introduzem erros em tempos curtos da evolução. Pode-se inferir o processo de decoerência de um sistema devido ao acoplamento a outro e como o estado deste segundo é simultaneamente alterado. Tempos característicos de decoerência e de recorrência podem também ser estabelecidos. Em suma, o estudo de sistemas quânticos finitos acoplados permite avaliar as asserções realizadas no âmbito de sistemas quânticos abertos e de como o acoplamento desses sistemas com o meio envolvente, fundamental por estar relacionado à definição da base preferencial, influi nas características de recorrência do estado.

Geralmente, entende-se o processo de medida de um sistema quântico por um aparato supondo que sejam sistemas interagentes. Aqui, analogamente, compreendemos subsistemas interagentes como mútuos medidores e sistema a ser medido, pois ao interagir, cada subsistema obtém informação sobre o estado do outro subsistema. Em 1987, W. H. Zurek [19] iniciou sua proposta de transferência de informação em medidas quânticas analisando a medida realizada em um sistema quântico acoplado a um meio constituído de estados ortogonais. Apesar deste desenvolvimento, aqui não consideraremos a análise dos efeitos de um meio envolvente do sistema. Antes, nosso interesse está centrado justamente no processo de troca de informação entre subsistemas interagentes e na forma com que a integridade do estado de cada subsistema seja mantida. Como veremos, este processo permite que haja troca de identidade entre os sistemas, isto é, que ocorra a troca dos estados entre dois sistemas A e B que

sejam interagentes, definindo um tempo de máxima transferência de informação.

A dinâmica de sistemas quânticos finitos acoplados tem sido estudada para a análise de diversas quantidades observáveis, tais como: inversão atômica [9, 10], variâncias de dipolo [11], distribuição de número de fótons [12], efeito de compressão [13], etc., sendo o caso mais tradicional investigado em Óptica Quântica o sistema acoplado átomo-campo, representado pelo modelo de Jaynes-Cummings¹, que consiste do modelo mais simples e exatamente solúvel para a descrição da interação radiação-matéria [14]. No entanto, para a análise realizada neste capítulo consideramos o acoplamento linear entre dois osciladores harmônicos quantizados. Este tipo de sistema foi extensivamente estudado na literatura [15-24] e pode ser compreendido como o acoplamento entre dois modos distintos de radiação coexistentes em uma cavidade. O acoplamento entre dois modos de um campo de radiação (ou dois campos) se dá por intermédio de processos paramétricos da Óptica Não-Linear. Notadamente, Raimond *et al.* [22] verificaram, recentemente, o efeito de acoplamento dos modos de duas cavidades por um guia de ondas. É proposto experimentalmente, com este acoplamento, o controle da coerência do estado em uma das cavidades, funcionando a outra como um meio controlado. O acoplamento, que certamente depende das propriedades não-lineares do guia de ondas, deve influenciar estas propriedades de controle. Aqui, fenomenologicamente, estaremos considerando este acoplamento entre os modos e analisando sua influência na troca de identidade entre os estados do campo de radiação presente nas duas cavidades, devido à característica não-local do estado do sistema conjunto.

Como justificativa, da real ocorrência física destes processos, veremos inicialmente que em um meio não-linear o acoplamento entre dois modos do campo de radiação é permitido por intermédio da atuação de um campo intenso. Mostraremos que devido às relações de frequência entre os três modos, o acoplamento tipo *onda girante* e *contra-girante* dos operadores de criação e destruição dos dois modos quânticos são excludentes, justificando assim, o hamiltoniano adotado nas seções seguintes. Vamos então considerar separadamente o acoplamento entre os dois modos na aproximação de onda girante e o acoplamento contra-girante para a obtenção do estado do sistema conjunto. Veremos que além de permitir a decoerência do estado reduzido de um dos modos do campo, ainda pode ocorrer a troca de identidade entre os estados dos subsistemas em função da amplitude do acoplamento e da frequência dos modos. Nosso interesse central neste capítulo é mostrar, através de um exemplo físico particular, a possibilidade de troca de identidade de estados entre sistemas interagentes definindo a *máxima transferência de informação*, além da relação de recorrência do estado inicial.

¹Veja Apêndice A.

3.2 Descrição Quântica de Interações Paramétricas

A resposta não-linear de certos dielétricos permite a troca de energia entre campos eletromagnéticos em diferentes frequências [23]. As aplicações mais importantes desse fenômeno são (1) geração de segundo harmônico, onde parte da energia de uma onda óptica de frequência ω propagando-se através de um cristal não-linear é convertida para uma onda de frequência 2ω ; (2) oscilação paramétrica (*parametric down-conversion*), onde uma onda de bombeamento intensa de frequência ν causa simultaneamente a geração em um cristal não-linear de radiação nas frequências ω_a e ω_b , sendo $\nu = \omega_a + \omega_b$; (3) conversão de frequência ascendente (*up-conversion*), onde um sinal de baixa intensidade e frequência ω_b é convertido para um sinal de maior frequência ω_a pela atuação de um campo de laser intenso a $\nu = \omega_a - \omega_b$. Todos estes processo advém da propriedade não-linear na polarização, *i.e.*, quando a polarização do meio dielétrico não é proporcional ao campo elétrico aplicado, mas dada por

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j + 2\chi_{ijk} E_j E_k + \dots \quad (3.1)$$

onde ϵ_0 é a constante dielétrica do meio e χ_{ij} , χ_{ijk} , ... são os tensores de susceptibilidade de primeira e segunda ordem. Na situação em que as frequências envolvidas estão suficientemente acima das ressonâncias iônicas (região de *Restrahlen*), a polarização é devida apenas a deslocamentos eletrônicos e se as frequências envolvidas no processo estiverem bem abaixo da região de absorção eletrônica, a polarização pode ser escrita como o gradiente de uma função densidade de energia $U(\mathbf{E})$ [23]:

$$\mathbf{P} = -\nabla_{\mathbf{E}} U(\mathbf{E}), \quad (3.2)$$

tal que $U(\mathbf{E})$ possa ser escrita como

$$U(\mathbf{E}) = -\frac{\epsilon_0 \chi_{ij}}{2} E_i E_j - \frac{2\chi_{ijk}}{3} E_i E_j E_k + \dots \quad (3.3)$$

Para um tratamento quântico do acoplamento de modos distintos, vamos considerar o caso de três campos interagentes [23, 24], $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t)$, com as frequências ω_a , ω_b e ν , respectivamente. A densidade de energia (3.3) será dada apenas pelo termo de segunda ordem na expansão de U ,

$$U = \frac{2\chi}{3} E_1 E_2 E_3, \quad (3.4)$$

onde χ é um coeficiente não-linear constituído da combinação linear das susceptibilidades χ_{ijk} dependendo da escolha específica da classe de simetria do cristal, orientação e polarização de $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t)$. Como todos os experimentos de oscilação e amplificação paramétricas utilizam um campo de bombeamento intenso, trataremos \mathbf{E}_3 classicamente, mas quantizaremos os campos em ω_a

(*signal*) e ω_b (*idler*). Assim, os campos serão dados por [23]

$$E_1(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\hbar\omega_a}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} E_1(\mathbf{r}) \left[a^\dagger(t) + a(t) \right], \quad (3.5)$$

$$E_2(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\hbar\omega_b}{\varepsilon_2} \right)^{1/2} E_2(\mathbf{r}) \left[b^\dagger(t) + b(t) \right], \quad (3.6)$$

e

$$E_3(\mathbf{r}, t) = B_3 E_3(\mathbf{r}) \cos(\nu t + \phi), \quad (3.7)$$

sendo B_3 a amplitude e ϕ uma fase de controle do campo de bombeamento. O hamiltoniano de interação entre os campos é dado pela integração no volume do cristal V da densidade de energia (3.4):

$$\begin{aligned} H' &= \int_V d^3r U = \frac{\chi B_3 \hbar \sqrt{\omega_a \omega_b}}{3\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \int_V d^3r E_1(\mathbf{r}) E_2(\mathbf{r}) E_3(\mathbf{r}) \cos(\nu t + \phi) (a^\dagger + a) (b^\dagger + b) \\ &\equiv 2\hbar\lambda \cos(\nu t + \phi) (a^\dagger + a) (b^\dagger + b), \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde definimos

$$\lambda \equiv \frac{\chi B_3 \sqrt{\omega_a \omega_b}}{6\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \int_V d^3r E_1(\mathbf{r}) E_2(\mathbf{r}) E_3(\mathbf{r}) \quad (3.9)$$

sendo então proporcional á amplitude de bombeamento B_3 . As funções $E_1(\mathbf{r})$, $E_2(\mathbf{r})$ e $E_3(\mathbf{r})$ são normalizadas tal que

$$\int_V d^3r E_i^2(\mathbf{r}) = 1; \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.10)$$

O hamiltoniano total é então dado pela soma do hamiltoniano não perturbado de cada modo ω_a e ω_b (sem a consideração da energia de ponto zero), mais a contribuição devido ao acoplamento (3.8)

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b + 2\hbar\lambda \cos(\nu t + \phi) (a^\dagger + a) (b^\dagger + b) \\ &= \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b + \hbar\lambda \left(e^{i(\nu t + \phi)} + e^{-i(\nu t - \phi)} \right) (a^\dagger + a) (b^\dagger + b) \\ &= \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b + \hbar\lambda \left[e^{i(\nu t + \phi)} (a^\dagger b^\dagger + ab + a^\dagger b + ab^\dagger) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(\nu t + \phi)} (a^\dagger b^\dagger + ab + a^\dagger b + ab^\dagger) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Na representação de interação

$$\begin{aligned} V_I &= e^{i(\omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b)t} H' e^{-i(\omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b)t} \\ &= \hbar\lambda \left[e^{i(\nu t + \phi)} \left(e^{i(\omega_a + \omega_b)t} a^\dagger b^\dagger + e^{-i(\omega_a + \omega_b)t} ab + e^{i(\omega_a - \omega_b)t} a^\dagger b + e^{-i(\omega_a - \omega_b)t} ab^\dagger \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(\nu t + \phi)} \left(e^{i(\omega_a + \omega_b)t} a^\dagger b^\dagger + e^{-i(\omega_a + \omega_b)t} ab + e^{i(\omega_a - \omega_b)t} a^\dagger b + e^{-i(\omega_a - \omega_b)t} ab^\dagger \right) \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

cujos termos, quando reagrupados, levam a

$$\begin{aligned} V_I &= \hbar\lambda \left[e^{i\phi} \left(e^{i(\nu + \omega_a + \omega_b)t} a^\dagger b^\dagger + e^{i(\nu - \omega_a - \omega_b)t} ab + e^{i(\nu + \omega_b - \omega_b)t} a^\dagger b + e^{i(\nu - \omega_a + \omega_b)t} ab^\dagger \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\phi} \left(e^{-i(\nu - \omega_a - \omega_b)t} a^\dagger b^\dagger + e^{-i(\nu + \omega_a + \omega_b)t} ab + e^{-i(\nu + \omega_b - \omega_a)t} a^\dagger b + e^{-i(\nu + \omega_a - \omega_b)t} ab^\dagger \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Vamos considerar dois valores distintos para a frequência de bombeamento:

1. ($\nu = \omega_a + \omega_b$)

Neste caso, o primeiro e o sexto termos oscilam muito rapidamente com a frequência 2ν , não contribuindo efetivamente para o processo. O segundo e o quinto termos escrevem-se ($e^{-i\phi} a^\dagger b^\dagger + e^{i\phi} ab$); o terceiro e o oitavo termos oscilam rapidamente com a frequência $2\omega_a$ e o quarto e sétimo com $2\omega_b$, também não contribuindo efetivamente para o processo. Assim, efetivamente para $\nu = \omega_a + \omega_b$ o hamiltoniano na representação de interação é dado por

$$V_I' = \hbar\lambda \left(e^{-i\phi} a^\dagger b^\dagger + e^{i\phi} ab \right), \quad (3.14)$$

constituindo a aproximação de onda contra-girante.

2. ($\nu = \omega_a - \omega_b$)

Agora o primeiro e sexto termos oscilam com $2\omega_a$, não contribuindo novamente para o processo. O segundo e o quinto termos oscilam com $2\omega_b$ e o terceiro e o oitavo termos oscilam com 2ν , não contribuindo efetivamente em comparação com o quarto e sétimo termos que não oscilam e assim para $\nu = \omega_a - \omega_b$ o hamiltoniano na representação de interação escreve-se

$$V_I' = \hbar\lambda \left(e^{i\phi} ab^\dagger + e^{-i\phi} a^\dagger b \right), \quad (3.15)$$

constituindo a aproximação de onda-girante.

Como não fizemos nenhuma distinção entre os modos ω_a e ω_b , o caso em que $\nu = \omega_b - \omega_a$ é análogo à última situação podendo-se permutar os índices a e b .

O ponto importante desta seção é que as condições que levam à aproximação de onda girante e de contra-girante, $\nu = \omega_a - \omega_b$ e $\nu = \omega_a + \omega_b$, respectivamente, são excludentes, justificando o tratamento separado destes acoplamentos nas próximas seções.

3.3 Acoplamento de Onda Girante

Sejam os subsistemas A e B constituídos de dois osciladores harmônicos acoplados linearmente por um termo tipo onda girante, representando a interação entre dois modos de um campo e de um bombeamento à frequência ν :

$$H = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b + \hbar\lambda \left(e^{-i(\nu t + \phi)} a^\dagger b + e^{i(\nu t + \phi)} ab^\dagger \right). \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 H_A &= \hbar\omega_a a^\dagger a, \\
 H_B &= \hbar\omega_b b^\dagger b, \\
 V &= \hbar\lambda \left(e^{-i(\nu t + \phi)} a^\dagger b + e^{i(\nu t + \phi)} a b^\dagger \right),
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

temos na representação de interação,

$$\begin{aligned}
 V_I &= e^{\frac{i}{\hbar}(H_A + H_B)t} V e^{-\frac{i}{\hbar}(H_A + H_B)t} \\
 &= \hbar\lambda \left[e^{-i\phi} e^{i\Omega t} a^\dagger b + e^{i\phi} e^{-i\Omega t} a b^\dagger \right],
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

sendo $\Omega \equiv \omega_a - \omega_b - \nu$. As equações que governam a evolução dinâmica dos operadores a e b são dadas por (desprezando-se os termos de oscilação rápida de cada modo)

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [a, V_I] = -i\lambda e^{i\Omega t} e^{-i\phi} b, \tag{3.19}$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [b, V_I] = -i\lambda e^{-i\Omega t} e^{i\phi} a. \tag{3.20}$$

Derivando a Eq. (3.19) uma segunda vez e substituindo a Eq. (3.20), obtemos a equação diferencial de segunda ordem para o operador a ,

$$\frac{d^2 a}{dt^2} - i\Omega \frac{da}{dt} + \lambda^2 a = 0, \tag{3.21}$$

cuja solução é dada por

$$a(t) = c_1 e^{\mu_+ t} + c_2 e^{\mu_- t}, \tag{3.22}$$

com

$$\mu_{\pm} = \pm \frac{i}{2} \left(\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2} \pm \Omega \right), \tag{3.23}$$

e sendo c_1 e c_2 operadores q -numbers, determinados pelas condições iniciais $a(0)$ e $b(0)$, cujas expressões são

$$c_1 = \frac{-[\mu_- a(0) + i\lambda b(0) e^{-i\phi}]}{\mu_+ - \mu_-}, \tag{3.24}$$

$$c_2 = \frac{[\mu_+ a(0) + i\lambda b(0) e^{-i\phi}]}{\mu_+ - \mu_-}. \tag{3.25}$$

Após alguma manipulação a solução da Eq. (3.21) para o operador a é obtida e substituindo-a na Eq. (3.19) obtemos a solução para o operador b . Estas são

$$a(t) = u_1(t)a(0) + v_1(t)b(0), \tag{3.26}$$

$$b(t) = u_2(t)b(0) + v_2(t)a(0), \tag{3.27}$$

$$u_1(t) = \frac{\mu_+ e^{\mu_- t} - \mu_- e^{\mu_+ t}}{\mu_+ - \mu_-}; \quad (3.28)$$

$$u_2(t) = \frac{\mu_+ e^{\mu_+ t} - \mu_- e^{\mu_- t}}{\mu_+ - \mu_-} e^{-i\Omega t}; \quad (3.29)$$

$$v_1(t) = i\lambda \frac{(e^{\mu_- t} - e^{\mu_+ t}) e^{-i\phi}}{\mu_+ - \mu_-}; \quad (3.30)$$

$$v_2(t) = i\lambda \frac{(e^{\mu_- t} - e^{\mu_+ t})}{\mu_+ - \mu_-} e^{-i\Omega t} e^{i\phi}. \quad (3.31)$$

Explicitamente, as funções u_1 , v_1 , u_2 e v_2 são dadas por

$$u_1(t) = \frac{e^{i\Omega t/2}}{\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2}} \left[\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2} \cos\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2}}{2} t\right) - i\Omega \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2}}{2} t\right) \right]; \quad (3.32)$$

$$u_2(t) = \frac{e^{-i\Omega t/2}}{\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2}} \left[\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2} \cos\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2}}{2} t\right) + i\Omega \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2}}{2} t\right) \right]; \quad (3.33)$$

$$v_1(t) = \frac{-2i\lambda e^{i\Omega t/2} e^{-i\phi}}{\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2}}{2} t\right); \quad (3.34)$$

$$v_2(t) = \frac{-2i\lambda e^{-i\Omega t/2} e^{i\phi}}{\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2}}{2} t\right). \quad (3.35)$$

A característica recorrente da evolução do estado conjunto inicial está justamente na forma funcional de μ_{\pm} . Por *recorrência* entende-se que em um período T o estado conjunto do sistema é idêntico ao estado inicial, guardando inclusive a relação de decorrelação entre os estados dos subsistemas A e B . Nenhuma relação entre as frequências dos osciladores e da amplitude de oscilação bem como da frequência do acoplamento pode ser encontrada de tal forma a tornar μ_{\pm} real. As soluções de a e b são sempre recorrentes, ou seja, periodicamente assumem seus valores iniciais $a(0)$ e $b(0)$. Soluções recorrentes dos operadores a e b são indicativas da recorrência da evolução do estado. O tempo de recorrência pode ser calculado se impusermos que em um período T

$$a(t+T) = a(t), \quad (3.36)$$

$$b(t+T) = b(t), \quad (3.37)$$

tal que

$$u_1(t+T) = u_1(t), \quad (3.38)$$

$$u_2(t+T) = u_2(t), \quad (3.39)$$

$$v_1(t+T) = v_1(t), \quad (3.40)$$

$$v_2(t+T) = v_2(t). \quad (3.41)$$

Com a avaliação da Eq. (3.38) por intermédio da Eq. (3.32), temos a condição a ser satisfeita para a recorrência de u_1 :

$$e^{i\Omega T/2} \left(-i \frac{\Omega}{\lambda'} \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda' T}{2}\right) + \cos\left(\frac{\lambda' T}{2}\right) \right) = 1, \quad (3.42)$$

com

$$\lambda' = \sqrt{\Omega^2 + 4\lambda^2}. \quad (3.43)$$

Para

$$\frac{\lambda' T}{2} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.44)$$

a Eq. (3.42) torna-se

$$e^{in\Omega\pi/\gamma} (-1)^n = 1, \quad (3.45)$$

o que ocorre se e somente se

$$\frac{\Omega}{\lambda'} = \frac{m}{n} \text{ e } m + n = \text{par}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.46)$$

e assim, o período de recorrência torna-se

$$T_m = \frac{2n\pi}{\lambda'} \text{ para } \Omega = \lambda' \frac{m}{n}; \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.47)$$

e como $\lambda' > \Omega$, necessariamente, $n > m$. Estas condições são também válidas para a recorrência de u_2 , v_1 e v_2 .

Um outro período interessante para ser avaliado é o período em que ocorre a troca dos operadores de cada modo, ou seja, quando

$$a(t + T') = b(t), \quad (3.48)$$

$$b(t + T') = a(t), \quad (3.49)$$

tal que

$$u_1(t + T') = v_2(t), \quad (3.50)$$

$$v_1(t + T') = u_2(t), \quad (3.51)$$

Para a Eq. (3.50), explicitamente temos

$$\begin{aligned} & e^{i\Omega(2t+T')/2} \left[\cos\left(\frac{\lambda' t}{2}\right) \left(\lambda' \cos\left(\frac{\lambda' T'}{2}\right) - i\Omega \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda' T'}{2}\right) \right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda' t}{2}\right) \left(\lambda' \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda' T'}{2}\right) + i\Omega \cos\left(\frac{\lambda' T'}{2}\right) \right) \right] \\ & = -2i\lambda e^{i\phi} \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda' t}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.52)$$

que só é satisfeita se $\Omega = 0$, implicando em $\lambda' = 2\lambda$. Logo a Eq. (3.52) torna-se

$$\cos(\lambda t) \cos(\lambda T') - \operatorname{sen}(\lambda t) \operatorname{sen}(\lambda T') = -i e^{i\phi} \operatorname{sen}(\lambda t). \quad (3.53)$$

Se T' é escolhido tal que

$$T'_n = \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{\lambda}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.54)$$

então

$$e^{i\phi} = i(-1)^n = (i)^{2n+1} = e^{i\pi(2n+1)/2}, \quad (3.55)$$

se e somente se

$$\phi_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = \lambda T'_n + \pi. \quad (3.56)$$

O mesmo resultado vale para (3.51), implicando na troca de identidade dos operadores a e b . Como veremos oportunamente na seção 3.5.1, esta troca dos operadores a e b implica na troca de identidade entre os estados dos dois modos do campo.

Os resultados desta seção constituem uma generalização do acoplamento entre dois osciladores harmônicos por termos girantes como discutido para $\nu = 0$ e $\omega_a = \omega_b$ na literatura [15-24]. Aqui, nenhuma condição de ressonância foi imposta para a solução do problema.

3.4 Acoplamento de Onda Contra-Girante

Vamos considerar nessa seção a evolução dos operadores dos osciladores dos sistemas A e B para o acoplamento contra-girante:

$$V = \hbar\lambda \left(e^{i\nu t} e^{-i\phi} a^\dagger b^\dagger + e^{-i\nu t} e^{i\phi} ab \right). \quad (3.57)$$

Neste caso entretanto, vamos considerar $\phi = 0$. Na representação de interação,

$$\begin{aligned} V_I &= e^{\frac{i}{\hbar}(H_A+H_B)t} V e^{-\frac{i}{\hbar}(H_A+H_B)t} \\ &= \hbar\lambda \left[e^{-i\Gamma t} e^{-i\phi} a^\dagger b^\dagger + e^{i\Gamma t} e^{i\phi} ab \right], \end{aligned} \quad (3.58)$$

com $\Gamma = \omega_a + \omega_b - \nu$. Agora, as equações que governam a evolução dos operadores a e b , respectivamente, do sistemas A e B são dadas por

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [a, V_I] = -i\lambda e^{-i\Gamma t} b^\dagger e^{-i\phi}, \quad (3.59)$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [b, V_I] = -i\lambda e^{-i\Gamma t} a^\dagger e^{-i\phi}. \quad (3.60)$$

Tomando a segunda derivada temporal da Eq. (3.59) e utilizando o hermitiano conjugado da Eq. (3.60),

$$\frac{db^\dagger}{dt} = i\lambda e^{i\Gamma t} a e^{i\phi}, \quad (3.61)$$

obtemos a equação diferencial de segunda ordem para o operador a

$$\frac{d^2a}{dt^2} + i\Gamma \frac{da}{dt} - \lambda^2 a = 0, \quad (3.62)$$

cuja solução, analogamente ao caso anterior, é dada por

$$a(t) = d_1 e^{\gamma_+ t} + d_2 e^{\gamma_- t}, \quad (3.63)$$

sendo

$$\gamma_{\pm} = \pm \frac{i}{2} \left(\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2} \mp \Gamma \right). \quad (3.64)$$

Os operadores d_1 e d_2 , determinados pelas condições iniciais impostas a a e b , são

$$d_1 = -\frac{[\gamma_- a(0) + i\lambda b^\dagger(0)]}{\gamma_+ - \gamma_-}, \quad (3.65)$$

$$d_2 = \frac{[\gamma_+ a(0) + i\lambda b^\dagger(0)]}{\gamma_+ - \gamma_-}. \quad (3.66)$$

Substituindo as Eqs. (3.65) e (3.66) na Eq. (3.63) e reagrupando os termos teremos a solução da Eq. (3.62) para a . Utilizando o Hermitiano conjugado da Eq. (3.59) teremos a lei de evolução de b . Assim,

$$a(t) = u_1(t)a(0) + v_1(t)b^\dagger(0), \quad (3.67)$$

$$b(t) = u_2(t)b(0) + v_2(t)a^\dagger(0), \quad (3.68)$$

agora com

$$u_1(t) = \frac{\gamma_+ e^{\gamma_- t} - \gamma_- e^{\gamma_+ t}}{\gamma_+ - \gamma_-}; \quad (3.69)$$

$$u_2(t) = \frac{\gamma_+^* e^{\gamma_+^* t} - \gamma_-^* e^{\gamma_-^* t}}{\gamma_+^* - \gamma_-^*} e^{-i\Gamma t}; \quad (3.70)$$

$$v_1(t) = i\lambda \frac{(e^{\gamma_+ t} - e^{\gamma_- t})}{\gamma_+ - \gamma_-}; \quad (3.71)$$

$$v_2(t) = i\lambda \frac{(e^{\gamma_+^* t} - e^{\gamma_-^* t})}{\gamma_+^* - \gamma_-^*} e^{-i\Gamma t}. \quad (3.72)$$

Explicitamente,

$$u_1(t) = \frac{e^{-i\Gamma t/2}}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}} \left[\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2} \cos\left(\frac{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}{2}t\right) + i\Gamma \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}{2}t\right) \right]; \quad (3.73)$$

$$u_2(t) = \frac{e^{-i\Gamma t/2}}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}} \left[\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2} \cos\left(\frac{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}{2}t\right) + i\Gamma \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}{2}t\right) \right]; \quad (3.74)$$

$$v_1(t) = \frac{2i\lambda e^{-i\Gamma t/2}}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}{2}t\right); \quad (3.75)$$

$$v_2(t) = \frac{2i\lambda e^{-i\Gamma t/2}}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}{2}t\right). \quad (3.76)$$

Contrariamente ao acoplamento girante, o acoplamento contra-girante impõe a não-recorrência às equações que governam o movimento de a e b , pela relação entre a frequência resultante Γ e a frequência de Rabi λ . Como $\gamma_{\pm} \equiv \pm \frac{i}{2} \left(\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2} \mp \Gamma \right)$, ocorrem duas situações em que a relação entre Γ e λ classifica o movimento como recorrente e não-recorrente:

- i) $\Gamma^2 > 4\lambda^2$: Esta condição implica em $\gamma_{\pm} \in \mathfrak{R}$, sempre, o que torna $u_1(t)$, $u_2(t)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$ limitadas, sendo então, o movimento de a e b recorrente, criando a condição necessária para a recorrência da evolução do estado inicial;
- ii) $\Gamma^2 \leq 4\lambda^2$: Esta condição torna $\gamma_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{4\lambda^2 - \Gamma^2} \mp i\Gamma \right)$, sendo a sua parcela real responsável pelo caráter ilimitado das funções $u_1(t)$, $u_2(t)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$, o que faz com que as evoluções de a e b sejam não-recorrentes e portanto, também o estado conjunto dos dois modos.

É interessante notar a existência de um acoplamento entre, apenas, dois sistemas que leve ao caráter não-recorrente da evolução do estado conjunto. Em geral esta característica associada à evolução do estado é justificada pelo número infinito de graus de liberdade de acoplamento entre um sistema central e seu meio envolvente, tornando o tempo de recorrência infinito. A condição $\Gamma^2 \leq 4\lambda^2$ impõe dinamicamente a não-recorrência da evolução do estado inicial por conter soluções não-estáveis ilimitadas.

Para nosso interesse, de estudo de recorrência da evolução do estado inicial e de troca de identidade entre sistemas interagentes, somente a condição i) é essencial. Nos desenvolvimentos das seções seguintes utilizaremos as soluções das equações de movimento, tanto para o acoplamento de onda girante quanto para o contra-girante, para a obtenção do estado conjunto dos osciladores A e B . No caso de acoplamento contra-girante somente a condição i) será utilizada. Neste caso a recorrência dos operadores a e b pode ser verificada, em analogia com a última seção, com as condições

$$a(t+T) = a(t), \quad (3.77)$$

$$b(t+T) = b(t), \quad (3.78)$$

satisfeitas, o que ocorre se e somente se

$$u_1(t+T) = u_1(t), \quad (3.79)$$

$$u_2(t+T) = u_2(t), \quad (3.80)$$

$$v_1(t+T) = v_1(t), \quad (3.81)$$

$$v_2(t+T) = v_2(t). \quad (3.82)$$

A avaliação da Eq. (3.79) impõe a condição a ser satisfeita para a recorrência de u_1

$$\begin{aligned} & e^{-i\Gamma t/2} \left[\cos\left(\frac{\gamma t}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\gamma' T}{2}\right) + \frac{i\Gamma}{\gamma'} \sin\left(\frac{\gamma' T}{2}\right) \right) + \sin\left(\frac{\gamma t}{2}\right) \left(-\sin\left(\frac{\gamma' T}{2}\right) + \frac{i\Gamma}{\gamma'} \cos\left(\frac{\gamma' T}{2}\right) \right) \right] \\ &= \cos\left(\frac{\gamma t}{2}\right) + \frac{i\Gamma}{\gamma'} \sin\left(\frac{\gamma' T}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.83)$$

com

$$\gamma' = \sqrt{\Gamma - 4\lambda^2}, \quad (3.84)$$

ou seja, se

$$e^{-i\Gamma t/2} \left(\cos\left(\frac{\gamma'T}{2}\right) + \frac{i\Gamma}{\gamma'} \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma'T}{2}\right) \right) = 1, \quad (3.85)$$

$$e^{-i\Gamma t/2} \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma'T}{2}\right) + \frac{i\Gamma}{\gamma'} \cos\left(\frac{\gamma'T}{2}\right) \right) = \frac{i\Gamma}{\gamma'}. \quad (3.86)$$

Estas equações são satisfeitas se

$$\frac{\gamma'T}{2} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.87)$$

$$\frac{\Gamma T}{2} = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.88)$$

tal que

$$(-1)^{m+n} = 1 \Leftrightarrow m + n = \text{par}. \quad (3.89)$$

Portanto, dividindo (3.88) por (3.87)

$$\frac{\Gamma}{\gamma'} = \frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}} = \frac{m}{n}, \quad m > n \quad (3.90)$$

e o período de recorrência fica dado por

$$T_m = \frac{2m\pi}{\Gamma}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.91)$$

desde que

$$\lambda = \frac{\Gamma}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{m}\right)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.92)$$

No entanto, contrastando com o acoplamento de onda girante, não há situação que permita que haja a troca dos operadores a e b devido à natureza do acoplamento. Este ponto será novamente discutido na seção 3.5.2, quando discutirmos a influência da evolução dos operadores de criação dos modos sobre seus estados.

Esta seção generaliza os cálculos para o oscilador paramétrico realizados por B. R. Mollow e R. J. Glauber [16, 21]. Estes cálculos podem ser obtidos particularizando para a condição de ressonância, $\nu = \omega_a + \omega_b$.

3.5 Vetor de Estado Conjunto: Redução, Recorrência e Troca de Identidade

O estado conjunto do sistema de osciladores acoplados é obtido pelo método de funções características. Para o sistema conjunto a função característica simetricamente ordenada de dois modos [16] é dada

por

$$\begin{aligned}\chi_S(\eta, \zeta, t) &= Tr_{A+B} \left[\rho_{AB}(t) e^{\eta a^\dagger + \zeta b^\dagger - \eta^* a - \zeta^* b} \right] \\ &= Tr_{A+B} \left[\rho_{AB}(0) e^{\eta a^\dagger(t) + \zeta b^\dagger(t) - \eta^* a(t) - \zeta^* b(t)} \right],\end{aligned}\quad (3.93)$$

na representação de Schrödinger e de Heisenberg para a primeira e segunda linhas, respectivamente, sendo ρ_{AB} o operador densidade do sistema conjunto $A + B$. Sempre que as equações de Heisenberg para $a(t)$ e $b(t)$ forem lineares, é possível, pela substituição das soluções de $a(t)$ e $b(t)$ na segunda linha da Eq. (3.93), inserir a dependência temporal nas novas funções

$$\bar{\eta} \equiv \bar{\eta}(\eta, \zeta; t), \quad (3.94)$$

$$\bar{\zeta} \equiv \bar{\zeta}(\eta, \zeta; t), \quad (3.95)$$

tal que a segunda linha da Eq. (3.93) possa ser reescrita como

$$\begin{aligned}\chi_S(\eta, \zeta, t) &= Tr_{A+B} \left[\rho_{AB}(0) e^{\bar{\eta} a^\dagger + \bar{\zeta} b^\dagger - \bar{\eta}^* a - \bar{\zeta}^* b} \right] \\ &\equiv \chi_S(\bar{\eta}, \bar{\zeta}, 0).\end{aligned}\quad (3.96)$$

Já a função característica normal ordenada que é associada à função característica simetricamente ordenada por

$$\chi_N(\eta, \zeta, t) = e^{\frac{1}{2}(|\eta|^2 + |\zeta|^2)} \chi_S(\eta, \zeta, t), \quad (3.97)$$

é dada em relação às nova funções $\bar{\eta}$ e $\bar{\zeta}$ por

$$\chi_N(\eta, \zeta, t) = e^{\frac{1}{2}[|\eta|^2 + |\zeta|^2 - |\bar{\eta}|^2 - |\bar{\zeta}|^2]} \chi_N(\bar{\eta}, \bar{\zeta}, 0), \quad (3.98)$$

sendo

$$\chi_N(\bar{\eta}, \bar{\zeta}, 0) = e^{\frac{1}{2}[|\bar{\eta}|^2 + |\bar{\zeta}|^2]} \chi_S(\bar{\eta}, \bar{\zeta}, 0). \quad (3.99)$$

De posse dos operadores evoluídos $a(t)$ e $b(t)$ e do estado conjunto inicial, a Eq. (3.97) com a Eq. (3.93) permitem o cálculo de $\chi_N(\eta, \zeta, t)$ que, por sua vez, fornece o operador densidade evoluído, através da função P de Glauber

$$\rho_{AB}(t) = \int d^2\gamma d^2\varphi P(\gamma, \varphi, t) |\gamma, \varphi\rangle \langle \gamma, \varphi| \quad (3.100)$$

onde $d^2\gamma = d\gamma_R d\gamma_I$, pois

$$P(\gamma, \varphi, t) = \int d^2\eta d^2\zeta e^{\gamma\eta^* - \gamma^*\eta} e^{\varphi\zeta^* - \varphi^*\zeta} \chi_N(\eta, \zeta, t). \quad (3.101)$$

Na Eq. (3.100) adotamos a notação

$$|\gamma, \varphi\rangle \equiv |\gamma\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B,$$

para o vetor de estado do sistema conjunto $A + B$.

Iniciaremos com o estudo da evolução do vetor de estado conjunto do sistema de modos $A + B$ acoplados inicialmente por um termo de onda girante e em seqüência faremos a análise para o acoplamento de onda contra-girante.

3.5.1 Acoplamento de Onda Girante

Substituindo as Eqs. (3.26) e (3.27) na segunda linha da Eq. (3.93), após o reagrupamento dos termos obtemos

$$\chi_S(\eta, \zeta, t) = Tr_{A+B} \left[\rho_{AB}(0) e^{(\eta u_1^* + \zeta v_2^*)a^\dagger - (\eta^* u_1 + \zeta^* v_2)a} e^{(\eta v_1^* + \zeta u_2^*)b^\dagger - (\eta^* v_1 + \zeta^* u_2)b} \right]. \quad (3.102)$$

Redefinindo

$$\bar{\eta} \equiv \bar{\eta}(\eta, \zeta; t) = (\eta u_1^* + \zeta v_2^*), \quad (3.103)$$

$$\bar{\zeta} \equiv \bar{\zeta}(\eta, \zeta; t) = (\eta v_1^* + \zeta u_2^*), \quad (3.104)$$

a Eq. (3.102) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \chi_S(\eta, \zeta, t) &= Tr_{A+B} \left[\rho_{AB}(0) e^{\bar{\eta}a^\dagger - \bar{\eta}^*a} e^{\bar{\zeta}b^\dagger - \bar{\zeta}^*b} \right] \\ &= \chi_S(\bar{\eta}, \bar{\zeta}, 0), \end{aligned} \quad (3.105)$$

onde a evolução dinâmica é inserida nos novos parâmetros $\bar{\eta}$ e $\bar{\zeta}$. A função característica normal ordenada é dada pelas Eqs. (3.98) e (3.99). Por intermédio das definições (3.103) e (3.104), verificamos que

$$|\bar{\eta}|^2 + |\bar{\zeta}|^2 = |\eta|^2 + |\zeta|^2 \quad (3.106)$$

e portanto²,

$$\chi_N(\eta, \zeta, t) = \chi_N(\bar{\eta}, \bar{\zeta}, 0). \quad (3.107)$$

Se os estados iniciais de cada modo, A e B , forem preparados de tal forma a serem decorrelacionados,

$$\rho_{AB}(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_B(0), \quad (3.108)$$

a função característica normal ordenada pode ser decorrelacionada em suas parcelas dos modos A e B :

$$\begin{aligned} \chi_N(\eta, \zeta, t) &= Tr_A \left[\rho_A(0) e^{\bar{\eta}a^\dagger} e^{-\bar{\eta}^*a} \right] Tr_B \left[\rho_B(0) e^{\bar{\zeta}b^\dagger} e^{-\bar{\zeta}^*b} \right] \\ &= \chi_N^A(\bar{\eta}, 0) \chi_N^B(\bar{\zeta}, 0), \end{aligned} \quad (3.109)$$

²No acoplamento contra-girante, esta condição nem sempre é satisfeita, gerando o acoplamento dos parâmetros η e ζ .

para qualquer tempo, em contraposição ao estado do sistema conjunto, $\rho_{AB}(t)$, que mantém-se correlacionado.

Vamos considerar inicialmente os dois modos preparados em estados particulares para verificar a perda de coerência. O modo A , que será chamado *sistema central*, é preparado inicialmente em um estado de superposição de dois estados coerentes (*estado de gato de Schrödinger*)³:

$$\rho_A(0) = |\psi_g^+\rangle \langle \psi_g^+|, \quad (3.110)$$

onde

$$|\Psi_g^+\rangle = \frac{1}{N} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \quad (3.111)$$

é o estado de gato par, com $N = 2(1 + e^{-2|\alpha|^2})$. Para o *sistema de referência*, modo B , vamos atribuir um estado coerente,

$$\rho_B(0) = |\beta\rangle \langle \beta|. \quad (3.112)$$

Substituindo as Eqs. (3.110) e (3.112) na expressão para a função característica normal ordenada para os dois modos, Eq. (3.109), obtemos

$$\chi_N(\eta, \zeta, t) = \frac{1}{N^2} \left[e^{\bar{\eta}\alpha^* - \bar{\eta}^*\alpha} + e^{-\bar{\eta}\alpha^* + \bar{\eta}^*\alpha} + e^{\bar{\eta}\alpha^* + \bar{\eta}^*\alpha} + e^{-\bar{\eta}\alpha^* - \bar{\eta}^*\alpha} \right] \times e^{\bar{\zeta}\beta^* - \bar{\zeta}^*\beta}. \quad (3.113)$$

Pela substituição de $\bar{\eta}$ e $\bar{\zeta}$ dados pelas Eqs. (3.103) e (3.104), após alguma manipulação, a função característica normal ordenada para os dois modos é dada por

$$\begin{aligned} \chi_N(\eta, \zeta, t) = & \frac{1}{N^2} \{ \exp [\eta (u_1^* \alpha^* + v_1^* \beta^*) - \eta^* (u_1 \alpha + v_1 \beta) + \zeta (v_2^* \alpha^* + u_2^* \beta^*) - \zeta^* (v_2 \alpha + u_2 \beta)] \\ & + \exp [-\eta (u_1^* \alpha^* - v_1^* \beta^*) + \eta^* (u_1 \alpha - v_1 \beta) - \zeta (v_2^* \alpha^* - u_2^* \beta^*) + \zeta^* (v_2 \alpha - u_2 \beta)] \\ & + e^{-2|\alpha|^2} (\exp [\eta (u_1^* \alpha^* + v_1^* \beta^*) + \eta^* (u_1 \alpha - v_1 \beta) + \zeta (v_2^* \alpha^* + u_2^* \beta^*) + \zeta^* (v_2 \alpha - u_2 \beta)] \\ & + \exp [-\eta (u_1^* \alpha^* - v_1^* \beta^*) - \eta^* (u_1 \alpha + v_1 \beta) - \zeta (v_2^* \alpha^* - u_2^* \beta^*) - \zeta^* (v_2 \alpha + u_2 \beta)]) \}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Se porém, utilizarmos a expressão para a função característica normal ordenada para os dois modos na representação de Schrödinger,

$$\chi_N(\eta, \zeta, t) = \text{Tr}_{A+B} \left[\rho_{AB}(t) e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} e^{\zeta b^\dagger} e^{-\zeta^* b} \right], \quad (3.115)$$

e expressarmos o operador densidade do sistema conjunto pelo projetor

$$\rho_{AB}(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|, \quad (3.116)$$

³Para uma melhor discussão sobre a geração de estados de superposição para o campo no interior de cavidades supercondutoras, veja o capítulo 4.

então a Eq. (3.115) torna-se

$$\chi_N(\eta, \zeta, t) = \langle \Psi(t) | e^{\eta a^\dagger} e^{\eta b^\dagger} e^{-\eta^* a} e^{-\eta^* b} | \Psi(t) \rangle. \quad (3.117)$$

Supondo que na Eq. (3.117)

$$|\Psi(t)\rangle = e_1 |\Psi_1(t)\rangle + e_2 |\Psi_2(t)\rangle, \quad (3.118)$$

por comparação direta, entre os termos da Eq. (3.114) e a Eq. (3.117), notamos que (3.114) só pode ser obtida de (3.117) se

$$|\Psi_1(t)\rangle = |u_1\alpha + v_1\beta, v_2\alpha + u_2\beta\rangle; \quad (3.119)$$

$$|\Psi_2(t)\rangle = |-(u_1\alpha - v_1\beta), -(v_2\alpha - u_2\beta)\rangle; \quad (3.120)$$

$$|e_1|^2 = |e_2|^2 = \frac{1}{N^2}, \quad (3.121)$$

onde adotamos a notação

$$|x, y\rangle = |x\rangle_A \otimes |y\rangle_B. \quad (3.122)$$

Assim, o estado conjunto dos modos A e B escreve-se

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \frac{1}{N} (|u_1\alpha + v_1\beta, v_2\alpha + u_2\beta\rangle + |-(u_1\alpha - v_1\beta), -(v_2\alpha - u_2\beta)\rangle) \\ &= \frac{1}{N} (|u_1\alpha + v_1\beta\rangle_A \otimes |v_2\alpha + u_2\beta\rangle_B + |-(u_1\alpha - v_1\beta)\rangle_A \otimes |-(v_2\alpha - u_2\beta)\rangle_B). \end{aligned} \quad (3.123)$$

As funções u_1, v_1, u_2 e v_2 , dadas pelas Eqs. (4.29)-(3.35) para o tempo de recorrência $T_n = \frac{2n\pi}{\lambda}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ e $\Omega = \lambda' \frac{m}{n}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, tornam-se

$$u_1(T_n) = e^{im\pi} \cos(n\pi); \quad (3.124)$$

$$u_2(T_n) = e^{-im\pi} \cos(n\pi); \quad (3.125)$$

$$v_1(T_n) = 0; \quad (3.126)$$

$$v_2(T_n) = 0. \quad (3.127)$$

e assim o estado conjunto do sistema $A + B$, Eq. (3.123) descorrelaciona-se, tornando

$$\begin{aligned} |\Psi(T_n)\rangle &= \frac{1}{N} (|e^{im\pi} \cos(n\pi) \alpha, u_2\beta\rangle + |-e^{im\pi} \cos(n\pi) \alpha, u_2\beta\rangle) \\ &= \frac{1}{N} (|(-1)^{m+n} \alpha\rangle + |(-1)^{m+n} \alpha\rangle)_A \otimes |(-1)^{m+n} \beta\rangle_B, \end{aligned} \quad (3.128)$$

de onde notamos que para $n + m = \text{par}$, o estado conjunto recorre ao estado inicial.

Por outro lado se $T'_n = \frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\lambda}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ e $\Omega = 0$, com $\phi_n = (n + 1/2)\pi$ as funções u_1, v_1, u_2 e v_2 , dadas pelas Eqs. (3.32)-(3.35), tornam-se

$$u_1(T'_n) = \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0; \quad (3.129)$$

$$u_2(T'_n) = \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0; \quad (3.130)$$

$$v_1(T'_n) = \text{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^{n+1}; \quad (3.131)$$

$$v_2(T'_n) = -\text{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n, \quad (3.132)$$

e o estado conjunto do sistema $A + B$ escreve-se

$$\begin{aligned} |\Psi(T'_n)\rangle &= \frac{1}{N} \left(|(-1)^{n+1}\beta, (-1)^n\alpha\rangle + |(-1)^{n+1}\beta, -(-1)^n\alpha\rangle \right) \\ &= |(-1)^{n+1}\beta\rangle_A \otimes \frac{1}{N} (|(-1)^n\alpha\rangle + | -(-1)^n\alpha\rangle)_B, \end{aligned} \quad (3.133)$$

e os estados dos modos A e B além de descorrelacionarem-se, *trocam de identidade*, isto é, o estado do modo A é transferido para o modo B e *vice-versa*. Note que a troca de identidade foi possível apenas na condição $\Omega = 0$, ou seja, se a frequência do campo de acoplamento estiver ressonante com o “*detuning*” entre as frequências dos modos A e B , isto é, $\nu = \omega_a - \omega_b$. Nesta situação, cada modo, ao interagir realiza uma medida do estado do outro oscilador e devido à característica conservativa da interação, a medida permite a *máxima transferência de informação* de um subsistema para o outro: os modos trocam de identidade. A medida que um modo realiza no outro é ideal, sendo que todas as propriedades do estado de um dos modos pode ser verificada no outro modo, no tempo de máxima transferência de informação. O ponto importante neste processo é a evidência de uma real máxima transferência de informação e não só de energia de um modo para outro, já que a transferência de energia propriamente dita não leva em conta a fase dos estados de A e B ⁴. A relação de fase do estado do subsistema A é integralmente transferida para o sistema B e vice-versa.

Se para tempos $\tau = \frac{l\pi}{2\lambda}$, $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, os estados dos dois subsistemas estão descorrelacionados, sendo que l par corresponde à recorrência do estado conjunto inicial e l ímpar à troca de identidade entre os estados dos dois osciladores, o que ocorre para tempos em que l seja semi-inteiro de um número ímpar? Ocorre a *máxima correlação (máximo emaranhamento)* entre os estados dos dois modos, que é justamente responsável pelos efeitos de decoerência do estado de cada subsistema. Este fato é melhor evidenciado pela observação do estado reduzido de um dos osciladores. O operador densidade do sistema conjunto dado pelo projetor $|\Psi(t)\rangle \langle\Psi(t)|$ é

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(t) &= \frac{1}{N^2} (|u_1\alpha + v_1\beta, v_2\alpha + u_2\beta\rangle \langle u_1\alpha + v_1\beta, v_2\alpha + u_2\beta| \\ &\quad + |-(u_1\alpha - v_1\beta), -(v_2\alpha - u_2\beta)\rangle \langle -(u_1\alpha - v_1\beta), -(v_2\alpha - u_2\beta)| \\ &\quad + |u_1\alpha + v_1\beta, v_2\alpha + u_2\beta\rangle \langle -(u_1\alpha - v_1\beta), -(v_2\alpha - u_2\beta)| \\ &\quad + |-(u_1\alpha - v_1\beta), -(v_2\alpha - u_2\beta)\rangle \langle u_1\alpha + v_1\beta, v_2\alpha + u_2\beta|) \end{aligned} \quad (3.134)$$

⁴Estados distintos apenas por fases, como $|\alpha\rangle$, $|-\alpha\rangle$, $|i\alpha\rangle$ e $| -i\alpha\rangle$, têm a mesma energia $\hbar\omega_a|\alpha|^2$.

e como o operador densidade reduzido do sistema central A é dado pelo traço nas variáveis do sistema de referência sobre o operador densidade total,

$$\rho_A = Tr_B [\rho_{AB}], \quad (3.135)$$

teremos que o operador densidade reduzido do oscilador A escreve-se

$$\begin{aligned} \rho_A(t) = & \frac{1}{N^2} \{ |u_1\alpha + v_1\beta\rangle \langle u_1\alpha + v_1\beta| + |-(u_1\alpha - v_1\beta)\rangle \langle -(u_1\alpha - v_1\beta)| \\ & + e\left[-\frac{4|\alpha|^2\gamma^2}{\Omega^2+4\lambda^2} \left(1-\cos(\sqrt{\Omega^2+4\lambda^2}t)\right)\right] \\ & \times [|u_1\alpha + v_1\beta\rangle \langle -(u_1\alpha - v_1\beta)| + |-(u_1\alpha - v_1\beta)\rangle \langle u_1\alpha + v_1\beta|] \}, \end{aligned} \quad (3.136)$$

e claro que para $\Omega = 0$ ($\nu = \omega_a - \omega_b$),

$$\begin{aligned} \rho_A(t) = & \frac{1}{N^2} \{ |u_1\alpha + v_1\beta\rangle \langle u_1\alpha + v_1\beta| + |-(u_1\alpha - v_1\beta)\rangle \langle -(u_1\alpha - v_1\beta)| \\ & + e^{-|\alpha|^2(1-\cos(2\lambda t))} [|u_1\alpha + v_1\beta\rangle \langle -(u_1\alpha - v_1\beta)| + |-(u_1\alpha - v_1\beta)\rangle \langle u_1\alpha + v_1\beta|] \}, \end{aligned} \quad (3.137)$$

com

$$u_1 = u_2 = \cos(\lambda t),$$

$$v_1 = -v_2 = \text{sen}(\lambda t),$$

O fator exponencial $e^{-|\alpha|^2(1-\cos(2\lambda t))}$ é responsável pela decoerência do estado do modo A . Para tempos diferentes do tempo de recorrência e de troca de identidade, se $|\alpha|^2 \gg 1$

$$e^{-|\alpha|^2(1-\cos(2\lambda t))} \approx 0,$$

$$N^2 \approx 1,$$

e então o operador densidade reduzido para o modo A será

$$\rho_A(t) = |u_1\alpha + v_1\beta\rangle \langle u_1\alpha + v_1\beta| + |-(u_1\alpha - v_1\beta)\rangle \langle -(u_1\alpha - v_1\beta)|, \quad (3.138)$$

equivalente a uma mistura dos estados $|u_1\alpha + v_1\beta\rangle$ e $|-(u_1\alpha - v_1\beta)\rangle$. Nesta situação o estado do modo B , será

$$\rho_B(t) = Tr_A [\rho_{AB}(t)] = |v_2\alpha + u_2\beta\rangle \langle v_2\alpha + u_2\beta| + |-(v_2\alpha - u_2\beta)\rangle \langle -(v_2\alpha - u_2\beta)|, \quad (3.139)$$

ou seja, uma mistura dos estados $|v_2\alpha + u_2\beta\rangle$ e $|-(v_2\alpha - u_2\beta)\rangle$.

Entropia, Decoerência, Recorrência e Medida de Troca de Identidade

O processo de decoerência do subsistema A é melhor investigado quando lança-se mão da medida de entropia linear,

$$S_A(t) = Tr_A [\rho_A(t) - \rho_A^2(t)], \quad (3.140)$$

relacionada aos primeiros termos da expansão da entropia de informação⁵

$$S_A(t) = -Tr_A [\rho_A(t) \ln(\rho_A(t))] \approx Tr_A \left\{ \rho_A(t) \left[(1 - \rho_A(t)) + (1 - \rho_A(t))^2 + \dots \right] \right\}. \quad (3.141)$$

A entropia linear permite a verificação da pureza de um estado através da condição de idempotência do operador densidade. Temos, devido à conservação da norma,

$$Tr_A [\rho_A(t)] = 1. \quad (3.142)$$

Se o operador densidade reduzido $\rho_A(t)$ representar um estado puro então

$$\rho_A(t) = |\psi_A\rangle \langle \psi_A|, \quad (3.143)$$

e, por simples verificação, $\rho_A(t)$ é idempotente

$$\rho_A^2(t) = \rho_A(t) \quad (3.144)$$

e

$$Tr_A [\rho_A^2(t)] = 1. \quad (3.145)$$

Conseqüentemente,

$$S_A(t) = 0. \quad (3.146)$$

Para um operador densidade normalizado, representando uma mistura estatística,

$$0 < Tr_A [\rho_A^2(t)] < 1, \quad (3.147)$$

e

$$0 < S_A(t) < 1. \quad (3.148)$$

Assim podemos evidenciar as discussões realizadas acima, observando a evolução da entropia linear.

Para o cálculo da entropia linear vamos considerar que o oscilador B esteja inicialmente no estado de vácuo, $\beta = 0$, tal que o operador densidade dado pela Eq. (3.136) torne-se, para $\Omega = 0$,

$$\rho_A(t) = \frac{1}{N^2} \left\{ |\cos(\lambda t)\alpha\rangle \langle \cos(\lambda t)\alpha| + |-\cos(\lambda t)\alpha\rangle \langle -\cos(\lambda t)\alpha| + e^{[-i|\alpha|^2(1-\cos(2\lambda t))]} \left[|\cos(\lambda t)\alpha\rangle \langle -\cos(\lambda t)\alpha| + |-\cos(\lambda t)\alpha\rangle \langle \cos(\lambda t)\alpha| \right] \right\}. \quad (3.149)$$

⁵ Sendo $\rho_A = 1 - (1 - \rho_A)$, tal que $(1 - \rho_A) < 1$, então $\ln[1 - (1 - \rho_A)] = [(1 - \rho_A(t)) + (1 - \rho_A(t))^2 + \dots]$

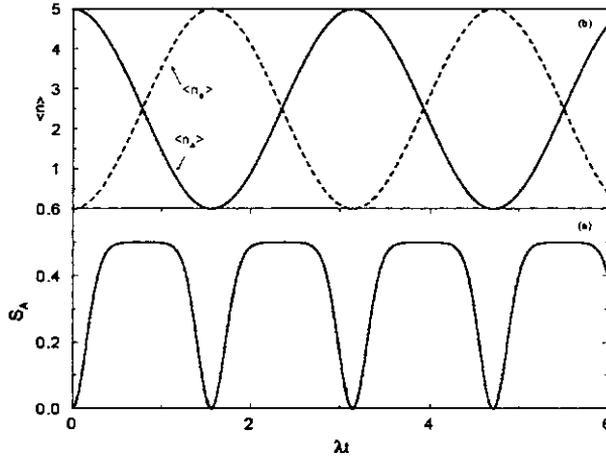


Figura 3.1: Medidas dos processos dinâmicos de recorrência, decoerência e troca de identidade. (a) Entropia linear para o modo A, inicialmente em um estado de gato par. (b) Número médio de fótons para os modos A e B; com o modo B inicialmente no estado de vácuo. A decoerência dos estados ocorre quando o números de fótons dos dois modos são iguais.

Neste caso,

$$S_A(t) = 1 - \frac{2}{N^4} \left[1 + 4e^{-2|\alpha|^2} + e^{-4|\alpha|^2 \cos^2(\lambda t)} + e^{-2|\alpha|^2(1 - \cos(2\lambda t))} \right], \quad (3.150)$$

e sua representação gráfica pode ser vista na Fig. 3.1(a). A decoerência máxima do estado do sistema A ocorre em $t_d = \frac{k\pi}{4\lambda}$, $k = 1, 3, 5, \dots$, como havíamos verificado anteriormente. A recorrência da evolução do estado fica evidente no carácter oscilatório da entropia linear. No entanto a recorrência do estado ocorre apenas para $t = \frac{l\pi}{2\lambda}$, $l = 0, 2, 4, 6, \dots$, ao passo que os pontos de entropia nula, dados por $t = \frac{m\pi}{2\lambda}$, $m = 1, 3, 5, 7, \dots$, correspondem ao estado puro e descorrelacionado em que ocorreu a troca entre os estados dos osciladores A e B , ou seja,

$$\left| \chi \left(\frac{m\pi}{2\lambda} \right) \right\rangle_A = |0\rangle, \quad (3.151)$$

$$\left| \phi \left(\frac{m\pi}{2\lambda} \right) \right\rangle_B = \frac{1}{N} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \quad (3.152)$$

para $m = 1, 3, 5, 7, \dots$

A decoerência máxima do estado do modo A ocorre quando há a máxima correlação entre seu estado e o do modo B , ou seja, quando há o emanhamento máximo dos estados dos modos A e B . Assim o estado do modo B também sofre decoerência neste mesmo tempo. A perda de coerência do estado de cada um dos modos A e B tem como causa fundamental o seu emanhamento. Se

estendermos essas conclusões a sistemas quânticos abertos, a perda de coerência do estado de um sistema quântico aberto tem como origem o emaranhamento de seu estado com o estado quântico do meio envolvente. Neste caso a máxima transferência de informação do sistema para o meio ocorre quando o sistema atinge o equilíbrio térmico com o meio. O meio realiza então, no tempo de relaxação, uma medida completa do estado do sistema.

Transferência de Informação sem Perda de Energia

Geralmente compreende-se a transferência de informação entre sistemas interagentes como em decorrência da existência de transferência de energia entre estes sistemas [1, 5]. O processo de decoerência do estado de um sistema quântico acoplado a um reservatório térmico é compreendido então como proveniente da transferência de energia do sistema para o meio em sua tentativa de atingir o equilíbrio térmico com o reservatório. Um caso interessante de ser verificado é se existe um processo de transferência de informação entre dois sistemas que não envolva transferência de energia. Para isso, em nosso modelo de sistemas acoplados, vamos considerar a energia de cada modo, A e B , e avaliar as condições para o equilíbrio de energia. Com o auxílio do operador densidade conjunto do sistema $A + B$, Eq. (3.134), a energia para cada modo, para $\Omega = 0$, é dada por

$$\begin{aligned} \langle E_A(t) \rangle &= Tr_{AB} \left[\rho_{AB}(t) \hbar \omega_a a^\dagger a \right] \\ &= \frac{2\hbar \omega_a}{N^2} \left[|\alpha|^2 \cos^2(\lambda t) \left(1 - e^{-2|\alpha|^2} \right) + |\beta|^2 \sin^2(\lambda t) \left(1 - e^{-2|\alpha|^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.153)$$

e

$$\begin{aligned} \langle E_B(t) \rangle &= Tr_{AB} \left[\rho_{AB}(t) \hbar \omega_b b^\dagger b \right] \\ &= \frac{2\hbar \omega_b}{N^2} \left[|\alpha|^2 \sin^2(\lambda t) \left(1 - e^{-2|\alpha|^2} \right) + |\beta|^2 \cos^2(\lambda t) \left(1 - e^{-2|\alpha|^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.154)$$

com $N^2 = 2 \left(1 + e^{-2|\alpha|^2} \right)$. Note que em todo o processo o número de fótons total é uma quantidade conservada, mas não o número de fótons de cada modo, já que

$$[H, \bar{n}_A + \bar{n}_B] = 0, \text{ mas } [H, \bar{n}_A] \neq 0 \text{ e } [H, \bar{n}_B] \neq 0, \quad (3.155)$$

sendo óbvio que

$$\bar{n}_A + \bar{n}_B = \frac{\langle E_A(t) \rangle}{\hbar \omega_a} + \frac{\langle E_B(t) \rangle}{\hbar \omega_b} = \frac{2}{N^2} \left[|\alpha|^2 \left(1 - e^{-2|\alpha|^2} \right) + |\beta|^2 \left(1 - e^{-2|\alpha|^2} \right) \right]. \quad (3.156)$$

No entanto a energia total só é uma quantidade conservada se

$$\frac{d\langle E_A(t) \rangle}{dt} = \langle [H, E_A(t)] \rangle = 0 \text{ e } \frac{d\langle E_B(t) \rangle}{dt} = \langle [H, E_B(t)] \rangle = 0, \quad (3.157)$$

isto é se a energia de cada modo também for uma quantidade conservada.

Como exemplo, para o caso em que foi feito o estudo de entropia, onde o estado do modo B é considerado inicialmente no vácuo, a energia de cada modo escreve-se

$$\langle E_A(t) \rangle = \frac{2\hbar\omega_a}{N^2} |\alpha|^2 \cos^2(\lambda t) \left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right), \quad (3.158)$$

e

$$\langle E_B(t) \rangle = \frac{2\hbar\omega_b}{N^2} |\alpha|^2 \sin^2(\lambda t) \left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right). \quad (3.159)$$

Neste caso é interessante representar graficamente as energias normalizadas (ou número de fótons) de cada modo como presente na Fig. 3.1(b) para comparação com a Fig. 3.1(a) de entropia para o modo A , para $|\alpha|^2 = 5$. Cada mínimo da entropia corresponde à situação em que os estados de A e B estão puros e decorrelacionados. A situação de troca de identidade dos estados de A e B correspondem à total transferência da energia do modo A para o modo B , ficando o primeiro, portanto, no estado de vácuo. Não apenas a energia do modo A é transferida ao modo B , mas também informação, e seu estado torna-se a superposição $\frac{1}{N} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_B$. No tempo de decoerência, ambos os modos possuem o mesmo número de fótons em decorrência da máxima correlação dos seus estados. A recorrência do estado inicial fica caracterizada pelos máximos no número médio de fótons.

A condição de que a energia de cada modo seja constante é obtida com a imposição

$$\frac{d\langle E_A(t) \rangle}{dt} = 0 \text{ e } \frac{d\langle E_B(t) \rangle}{dt} = 0 \quad (3.160)$$

e ocorre quando

$$|\beta|^2 = |\alpha|^2 \frac{(1 - e^{-2|\alpha|^2})}{(1 + e^{-2|\alpha|^2})}. \quad (3.161)$$

Neste caso as energias dos modos A e B são constantes e dadas por

$$\langle E_A(t) \rangle = \hbar\omega_a |\alpha|^2 \frac{(1 - e^{-2|\alpha|^2})}{(1 + e^{-2|\alpha|^2})} = \hbar\omega_a |\alpha|^2 \operatorname{tgh}(|\alpha|^2), \quad (3.162)$$

e

$$\langle E_B(t) \rangle = \hbar\omega_b |\alpha|^2 \frac{(1 - e^{-2|\alpha|^2})}{(1 + e^{-2|\alpha|^2})} = \hbar\omega_b |\alpha|^2 \operatorname{tgh}(|\alpha|^2), \quad (3.163)$$

sendo então a energia dos modos relacionadas por

$$\langle E_B(t) \rangle = \langle E_A(t) \rangle \frac{\omega_b}{\omega_a} \quad (3.164)$$

e sua diferença fornece exatamente a energia do campo intenso (clássico) de acoplamento, $E_\nu = \hbar\nu |\alpha|^2 \delta$, com $\delta = \frac{(1 - e^{-2|\alpha|^2})}{(1 + e^{-2|\alpha|^2})}$, como mostrado na Fig. 3.2(a). Neste caso, o estado conjunto do

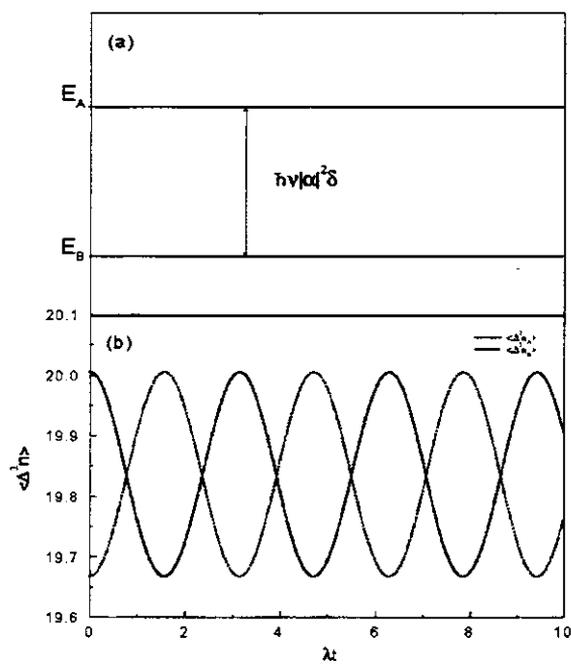


Figura 3.2: Modos A e B com energias médias constantes. (a) Energias e (b) flutuações dos números médios de fótons dos modos A e B.

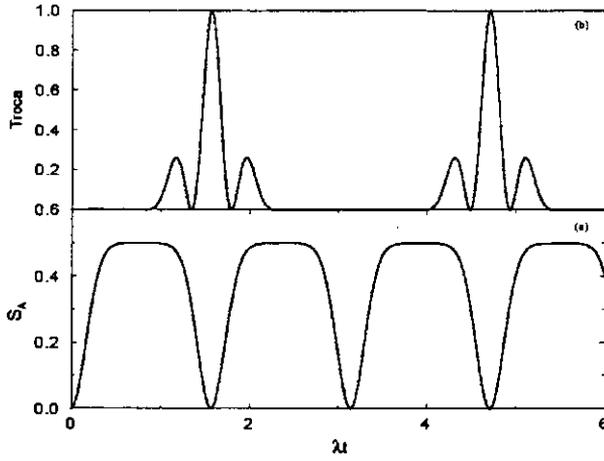


Figura 3.3: Transferência de informação a energia média constante. (a) Entropia para o modo A, mostrando a ocorrência de recorrência, decoerência e troca de identidade identificada pela medida de troca \mathcal{E} apresentada em (b).

sistema $A + B$ continua a apresentar o mesmo comportamento de recorrência, decoerência e troca de identidade entre os estados do modo A e do B , mas sem a ocorrência de perda de energia dos modos. De fato, neste processo, a transferência de energia entre os modos e o campo de acoplamento é equilibrada de tal forma conservar o número de fótons de cada modo. Certamente, por ser um sistema dinâmico, ocorre transferência de energia entre os modos, apesar de que a energia de cada um permaneça constante. Isso pode ser evidenciado na flutuação do número médio de fótons, como representado na fig 3.2(b) onde, para $|\alpha|^2 = 5$, as flutuações apresentam um comportamento oscilante, sendo que os máximos da flutuação de fótons de um dos modos coincide com o mínimo da flutuação do outro modo, mostrando uma relação de equilíbrio. A evidência da perda de pureza do estado (decoerência) de um dos modos (no caso o modo A) na situação de equilíbrio de energia pode ser vista na Fig. 3.3(a) para a entropia linear do modo A inicialmente em estado de gato par, para $|\alpha|^2 = 5$ dada por

$$S_A = 1 - \frac{1}{N^4} \left[1 + e^{-4|\alpha|^2} + e^{-4|\alpha|^2 \cos^2(\lambda t)} + e^{-2|\alpha|^2(1-\cos(2\lambda t))} + 4e^{-2|\alpha|^2} \cos \left[2\delta |a|^2 \cos(\lambda t) \sin(\lambda t) \right] \right]. \quad (3.165)$$

O fato de ocorrer decoerência sem haver perda de energia é realmente impressionante, uma vez que na literatura [1] estes processos são intrinsecamente correlacionados. De fato, o processo fundamental

para a decoerência é a existência de interação entre o sistema de interesse e o sistema de referência, que correlacione maximamente seus estados no tempo denominado tempo de decoerência. Para que isso ocorra não é necessário a perda de energia de um subsistema para o outro, como evidenciamos- a transferência de informação de um sistema para outro depende apenas da flutuação de suas energias. Outro resultado impressionante é o fato de haver também troca de identidade, ou seja, máxima transferência de informação na situação de equilíbrio de energia de cada subsistema. Isto reforça completamente a opinião de que processos de transferência de informação entre sistemas quânticos acoplados dependem diretamente de sua flutuação de energia.

Como consideramos o acoplamento entre dois subsistemas inicialmente em estados puros, não é possível diferenciar a ocorrência de troca de identidade da própria recorrência do estado total. Para isso, definimos a medida de troca de identidade entre dois subsistemas A e B .

Definição 1: Medida de Troca de Identidade

Define-se a medida de troca de identidade, $\mathcal{E}(t)$, entre os estados de dois subsistemas interagentes, A e B , como a superposição (*overlapp*) de seus estados evoluídos com seus estados iniciais trocados, isto é,

$$\mathcal{E}(t) \equiv \frac{|\langle \pm \Psi_{BA}(0) | \Psi_{AB}(t) \rangle|^2}{|\langle \pm \Psi_{BA}(0) | \pm \Psi_{BA}(0) \rangle|^2}, \quad (3.166)$$

sendo $|\Psi_{AB}(0)\rangle = |\phi(0)\rangle_A \otimes |\chi(0)\rangle_B$ o estado conjunto inicial do sistema. Note então que $|\pm \Psi_{BA}(0)\rangle = |\pm \chi(0)\rangle_A \otimes |\pm \phi(0)\rangle_B$ é o estado inicial trocado de A e B , já considerando a fase (\pm) que ganham no processo. Esta medida é igual à unidade quando ocorrer troca de identidade entre os estado dos dois subsistemas interagentes. Quando os estado iniciais destes subsistemas forem ortogonais entre si, a medida será nula fora do tempo de máxima transferência de informação. Para o caso em que ocorre transferência de informação a energia constante a medida de troca é representada na Fig. 3.3(b) em conjunto com a figura da entropia, Fig. 3.3(a). Evidenciamos assim a troca de identidade entre os modos para $t = \frac{(n-1/2)\pi}{\lambda}$. Os picos menores que surgem ao lado de cada pico que evidencia a troca são devidos à não ortogonalidade dos estados iniciais e devido à característica oscilante da medida nestas regiões. A medida de troca de identidade da Fig 3.3(b) vai a zero fora do tempo de máxima transferência de informação $T'_n = n\pi/2$, $n = 1, 3, 5, \dots$, apenas porque $|\alpha|^2 \gg 1$, já que os estados iniciais aqui considerados não são ortogonais.

3.5.2 Acoplamento de Onda Contra-Girante

Analogamente aos procedimentos para o acoplamento girante se substituirmos as Eqs. (3.67) e (3.68) na Eq. (3.93), para $\Gamma^2 > 4\lambda^2$, teremos

$$\chi_S(\eta, \zeta, t) = Tr_{A+B} \left\{ \rho_{AB}(0) e^{(\eta u_1^* - \zeta^* v_2) a^\dagger - (\eta^* u_1 - \zeta v_2^*) a} e^{(\zeta u_2^* - \eta^* v_1) b^\dagger - (\zeta^* u_2 - \eta v_1^*) b} \right\}. \quad (3.167)$$

Definindo agora

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}(\eta, \zeta; t) \equiv (\eta u_1^* - \zeta^* v_2), \quad (3.168)$$

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\eta, \zeta; t) \equiv (\zeta u_2^* - \eta^* v_1), \quad (3.169)$$

a função característica simetricamente ordenada pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \chi_S(\eta, \zeta, t) &= Tr_{A+B} \left[\rho_{AB}(0) e^{\bar{\eta} a^\dagger - \bar{\eta}^* a} e^{\bar{\zeta} b^\dagger - \bar{\zeta}^* b} \right] \\ &= \chi_S(\bar{\eta}, \bar{\zeta}, 0). \end{aligned} \quad (3.170)$$

Novamente podemos reescrever esta última equação, utilizando a propriedade de ordenamento de operadores, como

$$\begin{aligned} \chi_S(\eta, \zeta, t) &= e^{-\frac{1}{2} [|\eta(t)|^2 + |\zeta(t)|^2]} Tr_{A+B} \left[\rho_{AB}(0) e^{\bar{\eta} a^\dagger} e^{-\bar{\eta}^* a} e^{\bar{\zeta} b^\dagger} e^{-\bar{\zeta}^* b} \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2} [|\eta(t)|^2 + |\zeta(t)|^2]} \chi_N(\bar{\eta}, \bar{\zeta}, 0). \end{aligned} \quad (3.171)$$

Entretanto neste caso,

$$|\bar{\eta}|^2 + |\bar{\zeta}|^2 = |\eta|^2 (|u_1|^2 + |v_1|^2) + |\zeta|^2 (|u_2|^2 + |v_2|^2) - \eta \zeta (u_1^* v_2^* + u_2^* v_1^*) - \eta^* \zeta^* (u_1 v_2 + u_2 v_1), \quad (3.172)$$

onde, para a condição $\Gamma^2 > 4\lambda^2$,

$$|u_1|^2 + |v_1|^2 = |u_2|^2 + |v_2|^2 = \frac{\Gamma^2 - 4\lambda^2 \cos(\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2} t)}{\Gamma^2 - 4\lambda^2}, \quad (3.173)$$

e

$$u_1 v_2 + u_2 v_1 = e^{-i\Gamma t} \left\{ \frac{2\lambda\Gamma}{\Gamma^2 - 4\lambda^2} \left[\cos(\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2} t) - 1 \right] + \frac{2i\lambda}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}} \text{sen}(\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2} t) \right\}, \quad (3.174)$$

Note que

$$|\bar{\eta}|^2 + |\bar{\zeta}|^2 = |\eta|^2 + |\zeta|^2$$

se e somente se

$$t = \frac{2n\pi}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.175)$$

Esta condição impõe um período de correlação entre os osciladores A e B . A decorrelação ocorre somente nos tempos dados por (3.175). Assim a função característica normal ordenada para os dois modos fica dada por

$$\begin{aligned}\chi_N(\eta, \zeta, t) &= e^{\frac{1}{2} [|\eta|^2 - |\eta(t)|^2 + |\zeta|^2 - |\zeta(t)|^2]} Tr_{A+B} \left[\rho_{AB}(0) e^{\bar{\eta} a^\dagger} e^{-\bar{\eta}^* a} e^{\bar{\zeta} b^\dagger} e^{-\bar{\zeta}^* b} \right] \\ &= e^{\frac{1}{2} [|\eta|^2 - |\eta(t)|^2 + |\zeta|^2 - |\zeta(t)|^2]} Tr_A \left[\rho_A(0) e^{\bar{\eta} a^\dagger} e^{-\bar{\eta}^* a} \right] Tr_B \left[\rho_B(0) e^{\bar{\zeta} b^\dagger} e^{-\bar{\zeta}^* b} \right]\end{aligned}\quad (3.176)$$

onde por hipótese supõe-se os estados iniciais $\rho_A(0)$ e $\rho_B(0)$ são decorrelacionados. Se retornarmos às definições de $\bar{\eta}$ e $\bar{\zeta}$ dadas pelas Eqs. (3.168) e (4.13), respectivamente, na Eq. (4.15) e supusermos que os estados iniciais dos modos A e B são dados pelas Eqs. (3.110) e (3.112), obtemos

$$\begin{aligned}\chi_N(\eta, \zeta, t) &= \frac{e^{\frac{1}{2} [|\eta|^2 - |\eta(t)|^2 + |\zeta|^2 - |\zeta(t)|^2]}}{N^2} \\ &\times \{ \exp [\eta (u_1^* \alpha^* + v_1^* \beta) - \eta^* (u_1 \alpha + v_1 \beta^*) + \zeta (u_2^* \beta^* + v_2^* \alpha) - \zeta^* (u_2 \beta + v_2 \alpha^*)] \\ &+ \exp [-\eta (u_1^* \alpha^* - v_1^* \beta) + \eta^* (u_1 \alpha - v_1 \beta^*) + \zeta (u_2^* \beta^* - v_2^* \alpha) - \zeta^* (u_2 \beta - v_2 \alpha^*)] \\ &+ e^{-2|\alpha|^2} (\exp [\eta (u_1^* \alpha^* + v_1^* \beta^*) - \eta^* (u_1 \alpha - v_1 \beta^*) + \zeta (u_2^* \beta^* - v_2^* \alpha) - \zeta^* (u_2 \beta + v_2 \alpha^*)] \\ &+ \exp [-\eta (u_1^* \alpha^* - v_1^* \beta^*) - \eta^* (u_1 \alpha + v_1 \beta^*) + \zeta (u_2^* \beta^* + v_2^* \alpha) - \zeta^* (u_2 \beta - v_2 \alpha^*)]) \}. \end{aligned}\quad (3.177)$$

O procedimento de simples comparação da função característica normal ordenada nas representações de Heisenberg e Schrödinger, como feito para o acoplamento de onda girante não é mais possível no caso do acoplamento contra-girante devido à relação direta entre os operadores de destruição de um modo, a_I (b_I), e os hermitianos conjugados do outro modo, b_I^\dagger (a_I^\dagger). No entanto podemos lançar mão da representação P de Glauber para a obtenção do operador densidade. Para o caso do acoplamento contra-girante consideraremos tempos $T_n = \frac{2n\pi}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, por estarmos interessados somente nos tempos de decorrelação dos estados dos dois modos. Este procedimento facilita as integrações posteriores pois a Eq. (3.177) torna-se

$$\begin{aligned}\chi_N(\eta, \zeta, t) &= \frac{1}{N^2} \{ \exp [\eta (u_1^* \alpha^* + v_1^* \beta) - \eta^* (u_1 \alpha + v_1 \beta^*) + \zeta (u_2^* \beta^* + v_2^* \alpha) - \zeta^* (u_2 \beta + v_2 \alpha^*)] \\ &+ \exp [-\eta (u_1^* \alpha^* - v_1^* \beta) + \eta^* (u_1 \alpha - v_1 \beta^*) + \zeta (u_2^* \beta^* - v_2^* \alpha) - \zeta^* (u_2 \beta - v_2 \alpha^*)] \\ &+ e^{-2|\alpha|^2} (\exp [\eta (u_1^* \alpha^* + v_1^* \beta^*) - \eta^* (u_1 \alpha - v_1 \beta^*) + \zeta (u_2^* \beta^* - v_2^* \alpha) - \zeta^* (u_2 \beta + v_2 \alpha^*)] \\ &+ \exp [-\eta (u_1^* \alpha^* - v_1^* \beta^*) - \eta^* (u_1 \alpha + v_1 \beta^*) + \zeta (u_2^* \beta^* + v_2^* \alpha) - \zeta^* (u_2 \beta - v_2 \alpha^*)]) \}. \end{aligned}\quad (3.178)$$

Aplicando uma dupla transformada de Fourier nas variáveis η e ζ da Eq. (??), após um pouco de álgebra, obtemos a função P de Glauber

$$P(\gamma, \varphi, t) = \int d^2\eta d^2\zeta e^{\gamma\eta^* - \gamma^*\eta} e^{\varphi\zeta^* - \varphi^*\zeta} \chi_N(\eta, \zeta, t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^2} \left\{ \delta^{(2)} [\gamma - (u_1\alpha + v_1\beta^*)] \delta^{(2)} [\varphi - (u_2\beta + v_2\alpha^*)] \right. \\
&\quad + \delta^{(2)} [\gamma + (u_1\alpha - v_1\beta^*)] \delta^{(2)} [\varphi - (u_2\beta - v_2\alpha^*)] \\
&\quad \left. + e^{-2|\alpha|^2} (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) \delta^{(2)} (\gamma) \delta^{(2)} (\varphi) \right\} \quad (3.179)
\end{aligned}$$

onde os operadores diferenciais \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 , dados por

$$\mathcal{D}_1 = \left[e^{-(u_1^*\alpha^* + v_1^*\beta)} \frac{\partial}{\partial \gamma^*} e^{(u_1\alpha - v_1\beta^*)} \frac{\partial}{\partial \gamma} e^{-(u_2^*\beta^* - v_2^*\alpha)} \frac{\partial}{\partial \varphi^*} e^{-(u_2\beta + v_2\alpha^*)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \bullet, \quad (3.180)$$

$$\mathcal{D}_2 = \left[e^{(u_1^*\alpha^* - v_1^*\beta)} \frac{\partial}{\partial \gamma^*} e^{-(u_1\alpha + v_1\beta^*)} \frac{\partial}{\partial \gamma} e^{-(u_2^*\beta^* + v_2^*\alpha)} \frac{\partial}{\partial \varphi^*} e^{(v_2\alpha^* - u_2\beta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \bullet, \quad (3.181)$$

atuam nas distribuições $\delta^{(2)} (\gamma) = \delta (\gamma_R) \delta (\gamma_I)$ e $\delta^{(2)} (\varphi) = \delta (\varphi_R) \delta (\varphi_I)$. O operador densidade é então dado por

$$\begin{aligned}
\rho_{AB}(t) &= \int d^2\gamma d^2\varphi P(\gamma, \varphi, t) |\gamma, \varphi\rangle \langle \gamma, \varphi| \\
&= \frac{1}{N^2} \left\{ |u_1\alpha + v_1\beta^*, u_2\beta + v_2\alpha^*\rangle \langle u_1\alpha + v_1\beta^*, u_2\beta + v_2\alpha^*| \right. \\
&\quad + |-(u_1\alpha - v_1\beta^*), u_2\beta - v_2\alpha^*\rangle \langle -(u_1\alpha - v_1\beta^*), u_2\beta - v_2\alpha^*| \\
&\quad + e^{-2|\alpha|^2} \left[\int d^2\gamma d^2\varphi \mathcal{D}_1 \left(\delta^{(2)} (\gamma) \delta^{(2)} (\varphi) \right) |\gamma, \varphi\rangle \langle \gamma, \varphi| \right. \\
&\quad \left. \left. + \int d^2\gamma d^2\varphi \mathcal{D}_2 \left(\delta^{(2)} (\gamma) \delta^{(2)} (\varphi) \right) |\gamma, \varphi\rangle \langle \gamma, \varphi| \right] \right\}. \quad (3.182)
\end{aligned}$$

Efetuando a integração por partes nas duas últimas linhas desta equação obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_{AB}(t) &= \frac{1}{N^2} \left\{ |u_1\alpha + v_1\beta^*, u_2\beta + v_2\alpha^*\rangle \langle u_1\alpha + v_1\beta^*, u_2\beta + v_2\alpha^*| \right. \\
&\quad + |-(u_1\alpha - v_1\beta^*), u_2\beta - v_2\alpha^*\rangle \langle -(u_1\alpha - v_1\beta^*), u_2\beta - v_2\alpha^*| \\
&\quad + e^{-2|\alpha|^2} \left(\int d^2\gamma d^2\varphi \delta^2 (\gamma) \delta^2 (\varphi) \mathcal{D}_3 (|\gamma, \varphi\rangle \langle \gamma, \varphi|) \right. \\
&\quad \left. \left. + \int d^2\gamma d^2\varphi \delta^2 (\gamma) \delta^2 (\varphi) \mathcal{D}_4 (|\gamma, \varphi\rangle \langle \gamma, \varphi|) \right) \right\}, \quad (3.183)
\end{aligned}$$

onde agora os operadores diferenciais \mathcal{D}_3 e \mathcal{D}_4 são definidos por

$$\mathcal{D}_3 = \left[e^{(u_1^*\alpha^* + v_1^*\beta)} \frac{\partial}{\partial \gamma^*} e^{-(u_1\alpha - v_1\beta^*)} \frac{\partial}{\partial \gamma} e^{(u_2^*\beta^* - v_2^*\alpha)} \frac{\partial}{\partial \varphi^*} e^{(u_2\beta + v_2\alpha^*)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \bullet, \quad (3.184)$$

$$\mathcal{D}_4 = \left[e^{-(u_1^*\alpha^* - v_1^*\beta)} \frac{\partial}{\partial \gamma^*} e^{(u_1\alpha + v_1\beta^*)} \frac{\partial}{\partial \gamma} e^{(u_2^*\beta^* + v_2^*\alpha)} \frac{\partial}{\partial \varphi^*} e^{-(v_2\alpha^* - u_2\beta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \bullet, \quad (3.185)$$

atuam no projetor $|\gamma, \varphi\rangle \langle \gamma, \varphi|$. Utilizando as propriedades algébricas de operadores bosônicos [17],

$$e^{X \frac{\partial}{\partial \gamma}} |\gamma\rangle \langle \gamma| = e^{Xa^\dagger} |\gamma\rangle \langle \gamma| e^{-Xa}, \quad (3.186)$$

$$e^{Y \frac{\partial}{\partial \gamma^*}} |\gamma\rangle \langle \gamma| = e^{-Ya} |\gamma\rangle \langle \gamma| e^{Ya^\dagger}, \quad (3.187)$$

as integrais são avaliadas em $\gamma = 0$ e $\varphi = 0$. A utilização das propriedades de operadores bosônicos na criação e destruição,

$$e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} |\alpha\rangle, \quad (3.188)$$

$$e^{\alpha a} |0\rangle = |0\rangle, \quad (3.189)$$

permite que após um pouco de manipulação algébrica o operador densidade do sistema conjunto, para

$$T_n = \frac{2n\pi}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ seja dado por}$$

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(T_n) = & \frac{1}{N^2} \{ |u_1\alpha + v_1\beta^*, u_2\beta + v_2\alpha^* \rangle \langle u_1\alpha + v_1\beta^*, u_2\beta + v_2\alpha^* | \\ & + |-(u_1\alpha - v_1\beta^*), u_2\beta - v_2\alpha^* \rangle \langle -(u_1\alpha - v_1\beta^*), u_2\beta - v_2\alpha^* | \\ & + e^{-2|\alpha|^2[1-(|u_1|^2+|v_2|^2)]} \\ & \times \left[e^{2i \operatorname{Im}[\alpha\beta(u_1v_1^*+u_2v_2^*)]} |-(u_1\alpha - v_1\beta^*), u_2\beta + v_2\alpha^* \rangle \langle u_1\alpha + v_1\beta^*, u_2\beta + v_2\alpha^* | \right. \\ & \left. + e^{-2i \operatorname{Im}[\alpha\beta(u_1v_1^*+u_2v_2^*)]} |u_1\alpha + v_1\beta^*, -(v_2\alpha^* - u_2\beta) \rangle \langle -(u_1\alpha - v_1\beta^*), u_2\beta + v_2\alpha^* | \right] \} \end{aligned} \quad (3.190)$$

Nestes tempos, temos que

$$u_1 = u_2 = (-1)^n \exp\left(-i \frac{n\pi\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}\right); \quad (3.191)$$

$$v_1 = v_2 = 0, \quad (3.192)$$

e o operador densidade do estado conjunto estará descorrelacionado e dado por

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(t) = & \frac{1}{N^2} [|\alpha'\rangle \langle \alpha'| + |-\alpha'\rangle \langle -\alpha'| + |\alpha'\rangle \langle -\alpha'| + |-\alpha'\rangle \langle \alpha'|]_A \\ & \times \left(\left| (-1)^n e^{i \frac{n\pi\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}} \beta \right\rangle \left\langle (-1)^n e^{i \frac{n\pi\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}} \beta \right| \right)_B, \end{aligned} \quad (3.193)$$

com $\alpha' = (-1)^n e^{-i \frac{n\pi\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}} \alpha$. Assim, para o acoplamento contra-girante o tempo de recorrência do estado é dado por $T_n = \frac{2n\pi}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. As fases adicionais $\exp\left(\pm i \frac{n\pi\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}\right)$ serão iguais à unidade se e somente se

$$n = 2m \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}{\Gamma}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.194)$$

sendo então imposta a condição de que $\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}$ e Γ sejam comensuráveis, isto é, que seja inteiro ou semi-inteiro

$$\frac{\sqrt{\Gamma^2 - 4\lambda^2}}{\Gamma} = \frac{n}{2m}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.195)$$

Analogamente ao acoplamento de onda girante, o acoplamento contra-girante permite a recorrência da evolução do estado do sistema $A + B$. Em contrapartida ao primeiro acoplamento, a troca de identidade entre os estados dos dois osciladores, A e B , é impossível pelo tipo de solução das equações de movimento dos operadores de criação e destruição de cada oscilador com acoplamento contra-girante. Da análise do acoplamento de onda girante vimos que a troca de identidade ocorre conquanto seja satisfeita a relação de ressonância da frequência do acoplamento com as frequências dos osciladores, *i.e.*, $\Omega = 0$ implicando $\nu = \omega_a - \omega_b$ já que a solução dos operadores de criação (e destruição) de cada oscilador é sempre limitada. No entanto, para o acoplamento contra-girante, as soluções limitadas

das equações de movimento para esses operadores ocorrem somente se $\Gamma^2 > 4\lambda^2$. Da mesma forma que para o acoplamento girante, ocorreria a troca de identidade entre os estados dos dois osciladores apenas se $\Gamma = 0$, o que é incompatível com o tipo de solução em $\Gamma^2 > 4\lambda^2$. Assim, o acoplamento de onda contra-girante permite a recorrência do estado conjunto inicial, mas impede que haja troca de identidade entre os estados de cada oscilador em particular. A transferência máxima de informação de um subsistema (modo) para um outro ocorre em consequência do tipo de interação entre estes. A característica conservativa do acoplamento girante é que permite essa máxima transferência de informação, ou seja, que haja troca de identidade entre os estados dos dois subsistemas.

3.6 Conclusões

Neste capítulo estudamos o processo de transferência de informação entre sistemas interagentes, considerando o exemplo particular de dois modos de radiação, A e B , acoplados por termos do tipo onda girante e contra-girante.

O *princípio de não-separabilidade* [3] garante que se A e B forem sistemas interagentes (*subsistemas*) inicialmente descorrelacionados, quando evolvidos não possuem mais vetores de estado distintos, isolados, mas um vetor de estado total que descreve o *sistema* conjunto $A + B$. No entanto, determinados sistemas físicos possuem uma característica intrínseca à sua evolução e ao tipo de interação entre seus *subsistemas* constituintes, que lhes permite, após um tempo específico, descorrelacionar-se e ser descritos novamente por vetores de estado distintos, os mesmos de seu estado inicial - a *recorrência*. Este fato é compreendido, uma vez que o sistema considerado seja finito e isolado, ocorrendo recorrência a seu estado inicial. Um ponto interessante é que pode ocorrer também a *troca de identidade* entre os estados de seus subsistemas constituintes, em função de sua mútua interação. Nesta situação, cada subsistema, A e B , é novamente descrito por vetores de estado, mas agora correspondente a seu *contra-subsistema*, B e A , respectivamente. Definimos assim, para o acoplamento de dois modos de radiação, os tempos característicos de *recorrência* e de *máxima transferência de informação* ou de *troca de identidade*. Em tempos intermediários a estes tempos, ocorre a máxima correlação entre os estados dos subsistemas, o que dá origem ao fenômeno de *decoerência*, isto é, os estados de A e B passam, dinamicamente, a ser descritos por misturas estatísticas.

O acoplamento de onda girante permite tanto a recorrência dos estados, como sua troca de identidade, quando satisfeitas as condições de ressonância do campo de bombeamento, de frequência ν , com o “detuning” dos modos do campo, $\omega_a - \omega_b$. Em contraposição, o acoplamento de onda contra-girante permite a recorrência dos estados dos subsistemas, mas não a troca de identidade entre os modos, devido às próprias características não conservativas do acoplamento. No acoplamento de onda girante

um terceiro campo (de bombeamento) acopla os modos A e B de forma que quando um *quantum* de energia é destruído no modo A , um *quantum* é criado no modo B e *vice-versa*. Já no acoplamento de onda contra-girante, quando um *quantum* de energia é destruído no modo A , um outro também é destruído no modo B , sendo essa energia transferida para o campo de bombeamento. Isto permite, para este tipo de acoplamento, que haja uma condição ($\Gamma^2 \leq 4\lambda^2$) em que não ocorra a recorrência dos estados de A e B , devido às soluções não-limitadas dos operadores de criação de cada modo.

No acoplamento de onda girante dos modos ocorre ainda, para casos específicos de estados iniciais, a transferência de informação entre os subsistemas a energia constante. Isto ocorre quando a energia de cada modo é uma quantidade conservada, sendo que mesmo a energia constante ocorrerem, em decorrência da transferência de informação de um modo para outro, a recorrência, decoerência e troca de identidade dos estados de cada modo.

Bibliografia

- [1] W. H. Zurek, *Physics Today* **44**(10), 36 (1991); *Phys. Rev. D* **24**, 1516 (1981); **26**, 1862 (1982).
- [2] J. P. Paz, S. Habib e W. H. Zurek, *Phys. Rev D* **47**,488 (1993).
- [3] B. D'Espagnat, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1973).
- [4] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, (Spring-Verlag, 1989).
- [5] W. H. Zurek, em *Quantum Optics, Experimental Gravitation and Measurement Theory*, Eds. P. Maystre e M. O. Scully, Nato ASI series **94**, (Plenum press publ., New York, 1982).
- [6] P. Bocchieri e A. Loinger, *Phys. Rev.* **107**, 337 (1957).
- [7] R. J. Glauber, *Coherence and Quantum Detection*, Rend. Scuola Intern. Fis. *E. Fermi* XLII Corso, 1967.
- [8] J. A. Wheeler e W. H. Zurek, eds., *Quantum Theory and Measurements*, Princeton U. P., Princeton, N. J. (1983).
- [9] E. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon e J. H. Eberly, *Phys. Rev A* **23**, 236 (1981).
- [10] P. L. Knight, *Phys. Scr.* **T12**, 51 (1986).
- [11] K. Wodkiewicz, P. L. Knight, S. J. Buckle e S. Barnett, *Phys. Rev.* **A35**, 2567 (1987).
- [12] A. Bandilla e H. H. Ritze, *IEEE J. Quant. Electron.* **24**, 1338 (1988).
- [13] P. Meystre e M. S. Zubairy, *Phys. Lett.* **A89**, 390 (1982).
- [14] E. T. Jaynes e F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [15] R. J. Glauber e V. I. Man'ko, em *Group Theory, Gravitation and Elementary Particle Physics*, Proc. Lebedev Phys. Inst., Ed. A. A. Komar (Nova Science Publishers, USA, 1987).

- [16] B. R. Mollow e R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **160**, 1076 (1967); *ibid.* **160**, 1097 (1967).
- [17] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, (John Wiley & Sons, USA, 1990).
- [18] W. H. Louisell, A. Yariv e A. E. Siegman, *Phys. Rev.* **124**, 1646 (1961).
- [19] J. Tucker e D. F. Walls, *Ann. Phys.* **52**, 1 (1969).
- [20] R. Horak e J. Perina, *J. Opt. Soc. Am.* **6**, 1239 (1989).
- [21] I. R. Senitzky, *Phys. Rev. A* **57**, 40 (1998).
- [22] J. M. Raimond, M. Brune e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1964 (1997).
- [23] A. Yariv, *Quantum Electronics*, (John Wiley & Sons, USA, 1989).
- [24] J. Perina, *Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena*, (Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1991).
- [25] P. M. A. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, (Oxford Science publ., 1958).

Capítulo 4

Bombeamento e Controle da Coerência de Estados do Campo em Cavidades Supercondutoras - Geração e Detecção

4.1 Introdução

A ausência de observação de estados de superposição para objetos macroscópicos é um ponto crucial na discussão da teoria de medida em Mecânica Quântica: estados de sistemas quânticos evoluem deterministicamente de acordo com a equação de Schrödinger. Similarmente à evolução dinâmica determinística em Mecânica Clássica, dadas as condições iniciais para a função de onda do sistema e seu hamiltoniano, pode-se determinar exatamente seu estado em um tempo posterior arbitrário. Assim, considerando a evolução dos estados de um sistema quântico S e de seu aparato de medida \mathcal{M} em um processo de medição, se inicialmente o estado do sistema S encontrava-se em uma superposição, então a evolução quântica unitária prediz que o aparelho de medição (macroscópico) \mathcal{M} evolui para uma superposição de estados emaranhados de S e \mathcal{M} , de tal forma que cada autoestado de um observável O de S fique correlacionado com um estado de \mathcal{M} . Schrödinger [1] ilustrou este problema substituindo o aparelho de medição por um gato cuja vida dependeria da probabilidade de decaimento de um átomo radioativo. Este arranjo levaria formalmente à situação paradoxal de que antes de termos “medido” o estado do gato, observando sua sorte, este estaria em uma superposição de “vivo” e “morto”, uma situação de difícil aceitação conceitual para um sistema macroscópico. Este problema levou, durante os últimos setenta anos à discussão fundamental do que realmente seria um processo de medida, concomitando com uma extensa discussão filosófica sobre a “realidade” vista do ponto de vista da teoria quântica da matéria [2]. J. von Neumann [3] descreveu o processo de medida

como sendo constituído de duas dinâmicas, uma unitária, dada pela evolução de Schrödinger, que descreveria a evolução do estado conjunto *sistema-aparato* e outra intrínseca, não unitária, responsável pela redução da função de onda do sistema, isto é, o processo de *superseleção* [4]. Apenas nas últimas duas décadas, com a evolução do estudo de sistemas quânticos abertos, tem sido possível entender a redução de funções de onda, observando a importância do meio envolvente na dinâmica de sistemas quânticos, permitindo que somente a evolução unitária, agora do *sistema+aparato+meio envolvente*, seja responsável pela redução da função de onda do sistema [5].

Como referência a este problema, estados quânticos de superposição macroscópicos ou mesoscópicos são usualmente denominados “*gatos de Schrödinger*” [6]. A atenção dispensada a estes estados, na atualidade, tem sido no sentido de observar a sua curta existência como estado puro convergindo em um estado de mistura estatística [7, 8]. A possibilidade de observação experimental deste processo dinâmico vem ao encontro com a interpretação de subsistemas quânticos como sujeitos a processos chamados de *decoerência*¹, fornecendo uma justificativa física ao postulado da redução de pacotes de onda, que é parte essencial da interpretação de Copenhague da Mecânica Quântica [2]. A geração de estados de superposição permite que seu tempo de decoerência natural, devido ao efeito dissipativo do meio envolvente, seja observado [6].

À parte deste ponto de vista fundamental, um aspecto prático atualmente pesquisado é o da possibilidade de preservar as superposições de estados quânticos, ou seja, retardar sua decoerência, pois isso é fundamental para sistemas quânticos de informação, tais como criptografia quântica e computação quântica. Por exemplo, um computador quântico processa cálculos seguindo vários caminhos de computação simultaneamente e produz um estado final dependente da interferência destes caminhos [9], sendo este processo essencialmente equivalente à realização de computação paralela massiva [10]. Resultados recentes em teoria de complexidade quântica e no desenvolvimento de algoritmos indicam que um computador quântico pode resolver alguns problemas eficientemente, os quais são intratáveis em máquinas de Turing clássicas. Em 1994 P. Shor [11] mostrou que um computador quântico poderia fatorar números primos grandes N em um tempo de processamento proporcional a um polinômio em $\ln(N)$, enquanto todos os algoritmos clássicos conhecidos gastam um tempo proporcional a $\exp(N)$.

Certamente o ramo da Óptica Quântica é o candidato natural para a implementação experimental de sistemas quânticos de processamento de informação, devido aos recentes avanços na manipulação de um único átomo, íon e de um único modo da radiação no interior de cavidades. Atualmente três tecnologias constituem os elementos potenciais para a implementação de dispositivos de informação quântica: Eletrodinâmica Quântica de Cavidades [12], armadilhas iônicas [13] e também sistemas

¹Decoerência é um processo evolutivo durante o qual os elementos não diagonais de uma matriz densidade se reduzem a zero sob a condição que $Tr[\rho^2] < Tr[\rho]$.

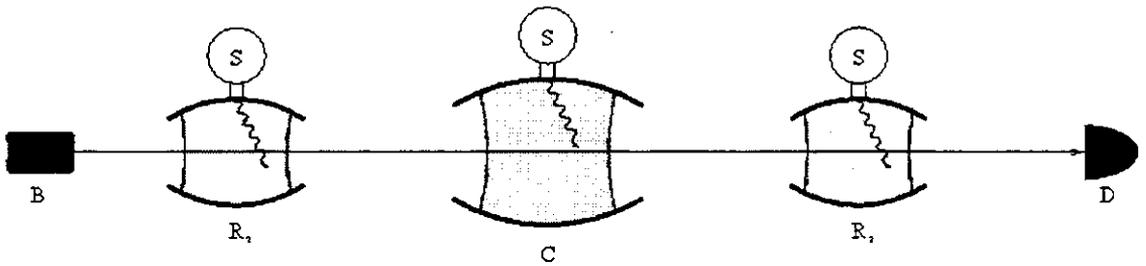


Figura 4.1: Arranjo experimental para construção e medição de estados de “gato de Schrödinger” do campo em cavidades supercondutoras. B é uma fonte de átomos de Rydberg preparados no estado $|e\rangle$, C é uma cavidade tipo Fabry-Perot de alto fator de qualidade, R_1 e R_2 constituem o arranjo de Ramsey e D é o detector do estado atômico. As cavidades C, R_1 e R_2 são alimentadas por fontes de microondas S.

mesoscópicos [14]. Aqui nos ateremos apenas aos sistemas baseados na tecnologia de cavidades. O grande desenvolvimento experimental nos últimos vinte anos tem permitido a realização de experimentos realmente engenhosos nestes sistemas e que envolvam processos de apenas um único átomo e um único fóton em cavidades. Recentemente, o grupo da École Normale Supérieure, gerou e mediu o tempo de decoerência de um estado “gato de Schrödinger” mesoscópico em um experimento baseado em cavidades supercondutoras [6]. Este é o tipo de experimento que descreveremos para geração e detecção dos estados do campo no interior da cavidade. Nosso interesse está centrado na descrição dinâmica do estado do campo no interior da cavidade quando este é continuamente bombeado. Mostramos como diferentes condições de bombeamento podem permitir a geração de estados em cavidades não ideais e como o bombeamento atua na coerência de estados de superposição.

4.2 Descrição do Experimento para Geração de Estados de Gato de Schrödinger em Cavidades Supercondutoras

O esquema experimental [7, 8] mostrado na Fig. 4.1 consiste de um feixe de átomos de Rydberg preparados em B e cruzando três cavidades, R_1 , C e R_2 ; R_1 e R_2 são cavidades de baixo fator de qualidade, mas C é uma cavidade supercondutora, do tipo Fabry-Perot [15], de alto fator de qualidade Q onde um estado coerente é previamente injetado através de uma fonte clássica de microondas S ligada a C por um guia de ondas. Os átomos são preparados em estados circulares por terem um forte acoplamento com a radiação de microondas e por terem grandes tempos de decaimento. Este fato é importante pois permite a construção de uma sistema idealmente designado para a preparação

e detecção de correlações a longos tempos entre átomos e estados de campos. Estados circulares com número quântico principal em torno de 50, utilizados nos experimentos [12, 15], têm tempo de vida da ordem de 3×10^{-2} s.

As cavidades R_1 e R_2 , onde campos de microondas clássicos são injetados durante a passagem dos átomos, constituem o arranjo experimental usual do método de interferometria de Ramsey. A transição entre dois estados atômicos circulares próximos, que chamaremos $|e\rangle$ (*excitado*) e $|g\rangle$ (*fundamental*), é ressonante com os campos nas cavidades R_1 e R_2 . A intensidade do campo é tal que, para uma velocidade atômica selecionada, resulte um chamado “pulso $\frac{\pi}{2}$ ” que consiste numa rotação de $\frac{\pi}{2}$ no espaço de vetores $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ em relação ao estado inicial, induzindo assim transições específicas entre níveis. O detector D detecta os estados atômicos através de uma região de ionização: se um átomo sair do arranjo no estado $|e\rangle$, será ionizado, se sair em $|g\rangle$, continuará neutro. É interessante frizar que devido à ineficiência de detectores de campo na faixa de microondas, utilizam-se átomos para este fim. A determinação do estado atômico em D informa simultaneamente o estado do campo em C em consequência do emaranhamento de seus estados.

O experimento é iniciado preparando-se cada átomo em B no estado $|e\rangle$. Após a interação ressonante² dada por

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega\sigma_z + \hbar g (a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-), \quad (4.1)$$

onde $\sigma_z \equiv (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)$, $\sigma^+ \equiv |e\rangle\langle g|$ e $\sigma^- \equiv |g\rangle\langle e|$ são operadores de pseudo-spin atômicos, a é o operador de destruição do modo do campo em R_1 e g é a constante de acoplamento entre átomo e campo. Com o campo em R_1 o estado atômico é levado (rodado) a uma superposição de estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$, que com uma escolha apropriada da fase do campo em R_1 escreve-se

$$|\Psi_{\text{átomo}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle). \quad (4.2)$$

A cavidade C é sintonizada próxima à ressonância com a frequência de transição entre os estados $|e\rangle$ e $|i\rangle$, o estado (de referência) correspondente ao nível circular superior a $|e\rangle$. A frequência da transição $|e\rangle \rightarrow |i\rangle$ é de 48,18 GHz e é distinta de qualquer transição envolvendo o nível $|g\rangle$. A geometria do modo da cavidade é tal que a intensidade do campo cresce e decresce suavemente ao longo da trajetória atômica em C, sendo que para átomos suficientemente lentos e para de-sintonia grande o suficiente, a evolução átomo-campo é adiabática, não ocorrendo nenhum evento de absorção ou emissão fotônica no interior da cavidade C durante a passagem do átomo [15]. No entanto, efeitos dispersivos são extremamente importantes. Um átomo cruzando a cavidade C no estado $|e\rangle$ induz um deslocamento de fase apreciável no campo³. Pode-se ajustar esta defasagem através de uma seleção

²Para uma descrição da interação ressonante entre átomos de dois níveis e campos, veja Apêndice A.

³Para uma melhor descrição da interação dispersiva entre átomos e campos veja Apêndice B.

apropriada da velocidade atômica (em torno de 100 m/s). Assegurando que esta defasagem seja π , um campo coerente $|\alpha\rangle$ é transformado para $|\alpha\rangle$. A defasagem causada por um átomo no estado $|g\rangle$, entretanto, é desprezível. Será justamente este deslocamento de fase diferenciado que servirá para gerar o estado de superposição em C. O desenvolvimento formal da interação dispersiva de uma átomo com o campo de microondas é dado no Apêndice B.

Depois que o átomo, preparado no estado definido pela Eq. (4.2), cruze a cavidade, o estado do sistema combinado átomo-campo será correlacionado, representado por

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) \otimes |\alpha\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle \otimes |\alpha\rangle + |g\rangle \otimes |\alpha\rangle). \quad (4.3)$$

Deve ser notado que o átomo cruza a cavidade de dimensão da ordem de alguns centímetros em um tempo da ordem de 10^{-4} s, muito menor que o tempo de relaxação do campo no interior da cavidade (tipicamente $10^{-3} - 10^{-2}$ s para cavidades supercondutoras de Nióbio) e do que o tempo de decaimento atômico (3×10^{-2} s).

O emaranhamento entre os estados atômicos e do campo (Eq. (4.3)) é análogo aos estados correlacionados de duas partículas no chamado *paradoxo de Einstein-Podolski-Rosen* [16]. Os dois estados atômicos $|e\rangle$ e $|g\rangle$ são aqui correlacionados com os dois estados do campo, $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$, respectivamente [8].

Submetendo o átomo a mais um pulso de $\frac{\pi}{2}$ em R_2 , o estado $|e\rangle$ é transformado (rodado) novamente para $\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle)$ e o estado $|g\rangle$ para $\frac{1}{\sqrt{2}} (-|e\rangle + |g\rangle)$. Assim, a passagem pela segunda zona de Ramsey R_2 efetua a seguinte transformação:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle \otimes |\alpha\rangle + |g\rangle \otimes |\alpha\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|e\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle - |\alpha\rangle) + |g\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle + |\alpha\rangle) \right]. \quad (4.4)$$

Portanto, se o átomo for detectado no estado $|g\rangle$ ou no estado $|e\rangle$, o campo em C será projetado (colapsado) no estado

$$|\Psi_{campo}\rangle = \frac{1}{N} (|\alpha\rangle + \cos \varphi |\alpha\rangle), \quad (4.5)$$

com $\varphi = 0$ (π) se for detectado em $|g\rangle$ ($|e\rangle$), respectivamente e sendo sendo $N = \sqrt{2(1 + \cos \varphi e^{-2|\alpha|^2})}$, a constante de normalização. Assim, produz-se uma superposição de dois estados coerentes com defasagem de π entre si. Para $|\alpha|^2 \gg 1$ o estado é chamado de *gato de Schrödinger* e o operador densidade é dado por

$$\rho_C = |\Psi_{campo}\rangle \langle \Psi_{campo}| = \frac{1}{N^2} [|\alpha\rangle \langle \alpha| + |\alpha\rangle \langle -\alpha| + \cos \varphi (|\alpha\rangle \langle -\alpha| + |-\alpha\rangle \langle \alpha|)]. \quad (4.6)$$

Quando este estado é produzido na cavidade C, a inevitável presença de dissipação nas paredes da cavidade supercondutora degrada o estado inicial, que à temperatura $T = 0$ K evolui como [8, 17]

$$\rho_C(t) = \frac{1}{N^2} \left\{ |\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle \langle \alpha e^{-\gamma t/2}| + |-\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle \langle -\alpha e^{-\gamma t/2}| + \cos \varphi e^{-2|\alpha|^2(1-e^{-\gamma t})} \right.$$

$$\times \left[| -\alpha e^{-\gamma t/2} \rangle \langle \alpha e^{-\gamma t/2} | + | \alpha e^{-\gamma t/2} \rangle \langle -\alpha e^{-\gamma t/2} | \right]. \quad (4.7)$$

Aqui dois tempos característicos estão envolvidos. O primeiro, o *tempo de decoerência*, é o tempo em que o estado inicial puro leva para se transformar em uma mistura estatística,

$$\rho_C(t) \approx \frac{1}{2} \{ |\alpha\rangle \langle \alpha| + |-\alpha\rangle \langle -\alpha| \}. \quad (4.8)$$

O segundo é o *tempo de relaxação* do campo, $(\gamma/2)^{-1}$, que é o tempo em que o efeito da dissipação degrada o campo da cavidade, reduzindo sua energia, levando o estado do campo no interior da cavidade ao estado de vácuo. Neste caso então é possível observar um exemplo que corrobora com a asserção feita na introdução e no capítulo 3, de que a perda de energia é acompanhada por uma perda de informação do sistema quântico para o meio envolvente, uma forte característica de sistemas quânticos dissipativos [5, 18].

A decoerência é caracterizada pelo fator $\exp[-2|\alpha|^2(1 - e^{-\gamma t})]$, que, para tempos curtos, $\gamma t \ll 1$, torna-se $\exp[-2|\alpha|^2\gamma t]$, implicando que os termos de coerência de fase decaem com o tempo característico $t_d = (2\gamma|\alpha|^2)^{-1}$. Assim, quanto maior for a intensidade do campo no interior da cavidade, mais rápido será o decaimento da coerência. O fenômeno de decoerência é temporalmente irreversível, em decorrência da aproximação markoviana introduzida na equação de evolução de $\rho_C(t)$ e da hipótese de um reservatório térmico constituído de infinitos osciladores harmônicos. Essas considerações tornam o tempo de recorrência, para se completar um ciclo de Poincaré, infinito [19, 20]. Para campos intensos, $|\alpha|^2 \gg 1$, o tempo de decoerência será extremamente pequeno. Isto pode ser relacionado à não observação de coerência entre duas posições de um ponteiro em um aparato de medida clássico [8]. De fato, os dois estados do campo, $|\alpha\rangle$ e $|-\alpha\rangle$, podem ser considerados (quando $|\alpha|^2 \gg 1$) como ponteiros macroscópicos que “medem” os estados atômicos microscópicos: Na ausência das zonas de Ramsey, com a passagem de um átomo pelo aparato da Fig. 4.1, o campo será deixado no estado $|\alpha\rangle$ se o átomo estiver no estado $|g\rangle$, ou no estado $|-\alpha\rangle$ se o átomo estiver no estado $|e\rangle$. Como referência para os desenvolvimentos futuros, chamaremos t_d de tempo de decoerência livre, i.e., o tempo em que o estado de superposição sem atuação de um agente externo (bombeamento) leva para tornar-se uma mistura devido à interação do sistema com os infinitos graus de liberdade do meio envolvente.

Devido à baixa eficiência de detectores de campo nesta faixa de frequência, a medida da coerência do campo é realizada enviando um segundo átomo pelo arranjo e medindo seu estado. A descrição da medida será dada oportunamente, quando estivermos estudando os tempos de coerência de campos sujeitos a bombeamento contínuo.

4.3 Teoria de Bombeamento Linear e seu Efeito em Estados do Campo

Em todas as situações em que foram realizados os experimentos de geração de estados de gato de Schrödinger do campo em cavidades [6, 8], ocorre a evanescência do campo devido aos efeitos de dissipação. Nestas situações o gerador de microondas é conectado à cavidade C, apenas no processo de geração do estado preliminar e desligado após um certo tempo. Considerando aqui o efeito de um bombeamento clássico contínuo durante todo o experimento mostraremos como um estado coerente estacionário é gerado em cavidades não ideais, como na passagem adiabática de um átomo através da cavidade um estado de superposição é gerado e como o bombeamento afeta a sua evolução dinâmica. Finalizamos discutindo como a coerência do campo pode ser mantida, embora o estado final seja diferente do inicial, pela ação combinada de interações com átomos e bombeamento do campo em C. No caso limite em que a intensidade do bombeamento é nula, recupera-se o resultado já conhecido da Eq. (4.7) para a relaxação livre do campo devido à dissipação.

4.3.1 Equações de Heisenberg

Para a formulação do problema consideramos a interação do modo do campo no interior da cavidade com os modos do reservatório térmico, modelado por um conjunto infinito de osciladores harmônicos [21], responsável pela dissipação nas paredes da cavidade. Escrevemos o hamiltoniano de interação na aproximação de onda girante, onde os termos contra-girantes da interação do modo do campo e dos osciladores harmônicos são desprezados. O hamiltoniano total é dado por [22]

$$\mathbf{H} = \hbar\omega_0\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \sum_k \hbar\omega_k\mathbf{b}_k^\dagger\mathbf{b}_k + \hbar \sum_k \left(\lambda_k\mathbf{a}^\dagger\mathbf{b}_k + \lambda_k^*\mathbf{a}\mathbf{b}_k^\dagger \right) + \hbar \left[F e^{-i\omega t} \mathbf{a}^\dagger + F^* e^{i\omega t} \mathbf{a} \right]. \quad (4.9)$$

sendo ω_0 a frequência sustentável na cavidade, ω_k a frequência de cada modo k dos osciladores do reservatório, λ_k a constante de acoplamento entre o campo sustentado pela cavidade e os osciladores do reservatório e F outra constante de acoplamento entre o campo de bombeamento e o modo de radiação na cavidade, proporcional à intensidade do campo E de bombeamento. \mathbf{a}^\dagger (\mathbf{a}) e \mathbf{b}_k^\dagger (\mathbf{b}_k) são os operadores bosônicos de criação (destruição) de quanta do campo e dos modos k do reservatório, respectivamente.

Consideramos que inicialmente o estado do modo na cavidade e do reservatório térmico não estejam correlacionados, podendo o estado conjunto ser fatorado como

$$|\Psi_{Total}; t = 0\rangle \equiv |\psi_C\rangle \otimes |\phi_B\rangle, \quad (4.10)$$

sendo $|\psi_C\rangle$ o estado do modo do campo e $|\phi_B\rangle$ o estado do reservatório térmico. As equações de Heisenberg para os operadores \mathbf{a} e \mathbf{b}_k são dadas por

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{a}, \mathbf{H}] = -i\omega_0 \mathbf{a} - i \sum_k \lambda_k \mathbf{b}_k - iF e^{-i\omega t}, \quad (4.11)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_k = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{b}_k, \mathbf{H}] = -i\omega_k \mathbf{b}_k - i\lambda_k^* \mathbf{a}, \quad (4.12)$$

sendo a solução formal da Eq. (4.12) dada por

$$\mathbf{b}_k(t) = e^{-i\omega_k t} \mathbf{b}_k(0) - i\lambda_k^* \int_0^t \mathbf{a}(t') e^{i\omega_k(t'-t)} dt', \quad (4.13)$$

Podemos eliminar as oscilações rápidas redefinindo o operador \mathbf{a} como,

$$\mathbf{A} \equiv e^{-i\omega_0 t} \mathbf{a} \quad (4.14)$$

e assim a Eq. (4.11) torna-se

$$\dot{\mathbf{A}} = -i \sum_k \lambda_k \mathbf{b}_k e^{i\omega_0 t} - iF e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} \quad (4.15)$$

Substituindo a Eq.(4.13) em (4.15) leva-nos à equação integrodiferencial

$$\dot{\mathbf{A}} = -i \sum_k \lambda_k \mathbf{b}_k(0) e^{-i(\omega_k - \omega_0)t} - \sum_k |\lambda_k|^2 \int_0^t \mathbf{A}(t') e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t'-t)} dt' - iF e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t}. \quad (4.16)$$

Esta equação tem solução se fizermos a aproximação de Wigner-Weisskopf [21] como explicado abaixo.

Efetuada a transformada de Laplace nos dois membros da Eq. 4.16,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{\mathbf{A}}) &\equiv \int_0^\infty e^{-st} \dot{\mathbf{A}} dt = -i \sum_k \lambda_k \mathbf{b}_k(0) \int_0^\infty e^{-st} e^{-i(\omega_k - \omega_0)t} dt \\ &\quad - \sum_k |\lambda_k|^2 \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t \mathbf{A} e^{i(\omega_k - \omega_0)(t'-t)} dt' \\ &\quad - iF \int_0^\infty e^{-st} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt, \end{aligned} \quad (4.17)$$

as integrais resultam em

$$\int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t \mathbf{A}(t') e^{i(\omega_k - \omega_0)(t'-t)} dt' = \frac{\bar{\mathbf{A}}(s)}{s + i(\omega_k - \omega_0)}, \quad (4.18)$$

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{-i(\omega_k - \omega_0)t} dt = \frac{1}{s + i(\omega_k - \omega_0)}, \quad (4.19)$$

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = \frac{1}{s + i(\omega - \omega_0)}, \quad (4.20)$$

e lembrando que

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)] dt = s\bar{\mathbf{A}}(s) - \mathbf{A}(0),$$

sendo $\tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathcal{L}[\mathbf{A}(t)]$, obtemos após o reagrupamento dos termos,

$$\tilde{\mathbf{A}}(s) = \frac{\mathbf{A}(0) - i \frac{F}{s+i(\omega-\omega_0)} - i \sum_k \frac{\lambda_k \mathbf{b}_k(0)}{s+i(\omega_k-\omega_0)}}{\left[s + \sum_k \frac{|\lambda_k|^2}{s+i(\omega_k-\omega_0)} \right]}. \quad (4.21)$$

Na aproximação de Wigner-Weisskopf [21], supõe-se que as frequências dos osciladores do reservatório cobrem densamente a região em torno da frequência do campo ω_0 tal que possamos substituir a soma discreta por uma integração sobre as frequências dos modos do reservatório. Assim temos

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{|\lambda_k|^2}{s+i(\omega_k-\omega_0)} &= -i \sum_k \frac{|\lambda_k|^2}{(\omega_k-\omega_0)-is} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} -i \int_0^\infty d\omega' \frac{g(\omega') |\lambda(\omega')|^2}{(\omega'-\omega_0)-is}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

considerando apenas o deslocamento de primeira ordem do pólo simples em ω_0 desta integral, temos a aproximação de Wigner-Weisskopf para $s \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{|\lambda_k|^2}{s+i(\omega_k-\omega_0)} &= -i \int d\omega' g(\omega') |\lambda(\omega')|^2 \left[\frac{1}{(\omega'-\omega_0)} + i\pi\delta(\omega'-\omega_0) \right] \\ &\equiv \frac{\gamma}{2} + i\Delta\omega, \end{aligned} \quad (4.23)$$

com

$$\gamma \equiv 2\pi g(\omega_0) |\lambda(\omega_0)|^2, \quad (4.24)$$

e o deslocamento na frequência,

$$\Delta\omega \equiv - \int d\omega' \frac{g(\omega') |\lambda(\omega')|^2}{\omega'-\omega_0}. \quad (4.25)$$

Assim a Eq.(4.21) torna-se

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(s) &= \frac{1}{s + \frac{\gamma}{2} + i\Delta\omega} \mathbf{A}(0) - i \sum_k \frac{\lambda_k}{[s+i(\omega_k-\omega_0)] (s + \frac{\gamma}{2} + i\Delta\omega)} \mathbf{b}_k(0) \\ &\quad - i \frac{F}{[s+i(\omega-\omega_0)] (s + \frac{\gamma}{2} + i\Delta\omega)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Realizando a transformada de Laplace inversa

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \frac{\mathbf{A}(0)}{2\pi i} \oint e^{st} \frac{1}{s + \frac{\gamma}{2} + i\Delta\omega} ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_k \lambda_k \mathbf{b}_k(0) \oint e^{st} \frac{1}{[s+i(\omega_k-\omega_0)] (s + \frac{\gamma}{2} + i\Delta\omega)} ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} F \oint e^{st} \frac{1}{[s+i(\omega-\omega_0)] (s + \frac{\gamma}{2} + i\Delta\omega)} ds. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Após um pouco de manipulação algébrica e da substituição de $\mathbf{A}(t) = e^{-i\omega_0 t} \mathbf{a}(t)$, se desprezarmos os efeitos do pequeno deslocamento na frequência, $\Delta\omega$, a solução para a equação de Heisenberg para o operador a do campo na cavidade escreve-se

$$\mathbf{a}(t) = u(t)\mathbf{a}(0) + \sum_k v_k(t)\mathbf{b}_k(0) + w(t), \quad (4.28)$$

sendo

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t}, \quad (4.29)$$

$$v_k(t) = -\lambda_k e^{-i\omega_k t} \frac{[1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega_k - \omega_0)t}]}{\omega_0 - \omega_k - i\frac{\gamma}{2}}, \quad (4.30)$$

e

$$w(t) = F e^{-i\omega t} \frac{[1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega - \omega_0)t}]}{\omega - \omega_0 + i\frac{\gamma}{2}}. \quad (4.31)$$

A despeito de que a aproximação de Wigner-Weisskopf ($s \rightarrow 0$) forneça resultados ótimos para as funções temporais em (4.29)-(4.31) apenas em tempos grandes, seus resultados para tempos curtos são bons o suficiente para a discussão de tempos de decoerência. Estes tempos característicos serão os tempos mínimos a serem considerados em nossos desenvolvimentos.

4.3.2 Função Característica e Representações de Estados

Vamos deduzir a expressão para o operador densidade que descreve o campo na cavidade. Inicialmente lembramos que a função característica para um operador densidade permite que este último seja descrito na representação P de Glauber [23, 24]. Para que isto ocorra é condição necessária e suficiente que a transformada de Fourier da função característica associada ao operador exista. O operador densidade sempre pode ser descrito como

$$\rho(t) = \int d^2\gamma P(\gamma; t) |\gamma\rangle \langle\gamma|, \quad (4.32)$$

onde $d^2\gamma \equiv d\gamma_R d\gamma_I$ é o elemento da integral no plano complexo e a função característica normal ordenada associada a este operador é dada por

$$\chi_N(\eta, t) = \text{Tr} \left[\rho(t) e^{\eta \mathbf{a}^\dagger} e^{-\eta^* \mathbf{a}} \right] \quad (4.33)$$

$$= \text{Tr} \left[\rho(0) e^{\eta \mathbf{a}^\dagger(t)} e^{-\eta^* \mathbf{a}(t)} \right] \quad (4.34)$$

onde a Eq. (4.33) é definida na representação de Schrödinger⁴ e (4.34) na representação de Heisenberg. A representação P de Glauber é relacionada à função característica normal ordenada por uma dupla transformada de Fourier

$$P(\gamma; t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta e^{\eta^* \gamma - \gamma^* \eta} \chi_N(\eta, t), \quad (4.35)$$

⁴Vamos supor para esta seção e as subsequentes a notação $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}(0)$, para qualquer c ou q -number.

que, estando definida no espaço γ recíproco a η permite que, por sua vez, $\chi_N(\eta, t)$ seja relacionada a $P(\gamma; t)$ pela transformada de Fourier inversa

$$\chi_N(\eta, t) = \int d^2\gamma e^{\eta\gamma^* - \eta^*\gamma} P(\gamma; t). \quad (4.36)$$

Já a função de distribuição de Wigner [25] é definida como a transformada de Fourier da função característica simetricamente ordenada (ou simplesmente função característica), $\chi(\eta, t)$,

$$W(\zeta; t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta e^{\zeta\eta^* - \zeta^*\eta} \chi(\eta, t), \quad (4.37)$$

sendo $\chi(\eta, t)$, definida por

$$\chi(\eta, t) \equiv Tr \left[\rho(t) e^{\eta\mathbf{a}^\dagger - \eta^*\mathbf{a}} \right] = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \chi_N(\eta, t). \quad (4.38)$$

Da substituição da Eq. (4.38) em (4.37) e da utilização da Eq. (4.36) obtemos, após um pouco de manipulação algébrica,

$$W(\zeta; t) = \frac{2}{\pi} \int d^2\gamma e^{-2|\zeta - \gamma|^2} P(\gamma, t), \quad (4.39)$$

ou seja, que a função de distribuição de Wigner é a convolução de uma função gaussiana com a função P de Glauber, devendo portanto ser mais regular do que a segunda.

Retornando ao problema do estado do campo na cavidade C, a função característica simetricamente ordenada associada ao modo ω_0 em seu interior é dada, na representação de Heisenberg, por

$$\chi^C(\eta, t) = Tr_{C+R} \left[\rho_{C+R}(0) e^{\eta\mathbf{a}^\dagger(t) - \eta^*\mathbf{a}(t)} \right], \quad (4.40)$$

com o traço sobre as variáveis do campo e do reservatório térmico. Aqui os operadores densidade do sistema e do reservatório térmico pertencem a espaços de Hilbert diferentes, no tempo zero, sendo então decorrelacionados, como já supusemos anteriormente,

$$\rho_{C+R}(0) = \rho_C(0) \otimes \rho_R(0). \quad (4.41)$$

Substituindo os operadores dados pela Eq. (4.28) e seu hermitiano conjugado na Eq. (4.40), obtemos para a função característica do modo do campo:

$$\begin{aligned} \chi^C(\eta, t) &= Tr_{C+R} \left\{ \rho_{C+R}(0) \exp \left[\eta \left(u^*(t)\mathbf{a}^\dagger + \sum_k v_k^*(t)\mathbf{b}_k^\dagger + w^*(t) \right) - h.c. \right] \right\} \\ &= Tr_{C+R} \left\{ \rho_{C+R}(0) e^{\eta w^*(t) - \eta^* w(t)} \exp \left[\eta u^*(t)\mathbf{a}^\dagger - \eta^* u(t)\mathbf{a} \right] \exp \left[\sum_k \left(\eta v_k^*(t)\mathbf{b}_k^\dagger - \eta^* v_k(t)\mathbf{b}_k \right) \right] \right\} \\ &= e^{\eta w^*(t) - \eta^* w(t)} Tr_C \left\{ \rho_C(0) \exp \left[\eta u^*(t)\mathbf{a}^\dagger - \eta^* u(t)\mathbf{a} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times Tr_R \left\{ \rho_R(0) \exp \left[\sum_k \left(\eta v_k^*(t) \mathbf{b}_k^\dagger - \eta^* v_k(t) \mathbf{b}_k \right) \right] \right\} \\
& = e^{\eta w^*(t) - \eta^* w(t)} \chi^C(\eta u^*(t), 0) Tr_R \left\{ \rho_R(0) \exp \left[\sum_k \left(\eta v_k^*(t) \mathbf{b}_k^\dagger - \eta^* v_k(t) \mathbf{b}_k \right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.42}$$

com

$$\chi^C(\eta u^*(t), 0) \equiv Tr_C \left[\rho_C(0) e^{\eta u^*(t) \mathbf{a}^\dagger - \eta^* u(t) \mathbf{a}} \right].$$

O estado inicial do reservatório térmico é dado por

$$\rho_R(0) = \int \prod_k d^2 \beta_k \frac{1}{\pi \langle n_k \rangle} e^{-\frac{|\beta_k|^2}{\langle n_k \rangle}} |\beta_k\rangle \langle \beta_k|, \tag{4.43}$$

sendo $\langle n_k \rangle$ o número médio de ocupação do k -ésimo oscilador do reservatório. Assim, a Eq. (4.42) escreve-se

$$\chi^C(\eta, t) = e^{\eta w^*(t) - \eta^* w(t)} \chi^C(\eta u^*(t), 0) \prod_k e^{-\frac{1}{2} |\eta|^2 |v_k(t)|^2} \int d^2 \beta_k \frac{1}{\pi \langle n_k \rangle} e^{-\frac{|\beta_k|^2}{\langle n_k \rangle}} \exp \left[\eta v_k^*(t) \beta_k^\dagger - \eta^* v_k(t) \beta_k \right]. \tag{4.44}$$

A integral em (4.44) é facilmente resolvida com o auxílio da identidade

$$\frac{1}{\pi} \int d^2 \eta e^{-\mu |\eta|^2 + \lambda \eta + \nu \eta^*} = \frac{1}{\mu} e^{\frac{\lambda \nu}{\mu}}, \quad (\text{Re}(\mu) > 0) \tag{4.45}$$

e a função característica torna-se

$$\begin{aligned}
\chi^C(\eta, t) & = e^{\eta w^*(t) - \eta^* w(t)} \chi^C(\eta u^*(t), 0) \prod_k e^{-|\eta|^2 |v_k(t)|^2 \left(\frac{1}{2} + \langle n_k \rangle \right)} \\
& = e^{\eta w^*(t) - \eta^* w(t)} \chi^C(\eta u^*(t), 0) e^{-|\eta|^2 \sum_k |v_k(t)|^2 \left(\frac{1}{2} + \langle n_k \rangle \right)}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Com a substituição da soma discreta por uma soma contínua, obtemos, após um pouco de álgebra,

$$\sum_k |v_k(t)|^2 \left(\frac{1}{2} + \langle n_k \rangle \right) = (1 - e^{-\gamma t}) \left(\frac{1}{2} + \bar{n} \right) \tag{4.47}$$

sendo $\bar{n} = (e^{\beta \omega_0} - 1)^{-1}$, $\beta = (k_B T)^{-1}$, com k_B a constante de Boltzmann e T a temperatura do reservatório térmico, em kelvins. Substituindo (4.47) na Eq.(4.46), obtemos,

$$\chi^C(\eta, t) = \chi^C(\eta u^*(t), 0) e^{\eta w^*(t) - \eta^* w(t)} e^{-|\eta|^2 (1 - e^{-\gamma t}) \left(\frac{1}{2} + \bar{n} \right)}. \tag{4.48}$$

Para o limite de temperatura zero ($\bar{n} = 0$) a função característica simetricamente ordenada relacionada ao estado do campo é dada por

$$\begin{aligned}
\chi^C(\eta, t) & = Tr_C \left[\rho_C(0) e^{\eta u^*(t) \mathbf{a}^\dagger - \eta^* u(t) \mathbf{a}} \right] e^{\eta w^*(t) - \eta^* w(t)} e^{-\frac{1}{2} |\eta|^2 (1 - e^{-\gamma t})} \\
& = Tr_C \left[\rho_C(0) e^{\eta u^*(t) \mathbf{a}^\dagger} e^{-\eta^* u(t) \mathbf{a}} \right] e^{\eta w^*(t) - \eta^* w(t)} e^{-\frac{1}{2} |\eta|^2}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Utilizando a relação (4.38) entre a função característica simetricamente ordenada e a função característica normal-ordenada, Eq.4.49, obtemos finalmente

$$\chi_N^C(\eta, t) = \chi_N^C(\eta u^*(t), 0) e^{\eta w^*(t) - n^* w(t)}. \quad (4.50)$$

Neste ponto convém ressaltar que até agora não fizemos menção do estado inicial do campo na cavidade. A Eq. (4.50) permite-nos obter o operador densidade evoluído de um estado do campo inicial arbitrário. Observe que a não-correlação entre os estados, no tempo zero, deixa de valer para tempos posteriores. A dinâmica do sistema acoplado *campo+reservatório térmico* emaranha os estados dos dois subsistemas levando justamente aos efeitos dissipativos no estado do campo. A irreversibilidade deste processo dinâmico advém da utilização da aproximação de Wigner-Weisskopf e da consideração do número infinito de osciladores harmônicos que modelam o reservatório térmico.

4.3.3 Geração de Estados Coerentes em Cavidades não Ideais

Vamos considerar a situação em que o campo na cavidade C seja coerente⁵,

$$\rho_C(0) = |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (4.51)$$

sendo então o estado de vácuo um caso particular para $\alpha = 0$.

Com a utilização de (4.51) em $\chi_N(\eta u^*(t), 0)$ da Eq. (4.50), temos

$$\begin{aligned} \chi_N^C(\eta u^*(t), 0) &= Tr_C \left[|\alpha\rangle \langle \alpha| e^{\eta u^*(t) \mathbf{a}^\dagger} e^{-\eta^* u(t) \mathbf{a}} \right] \\ &= \langle \alpha | e^{\eta u^*(t) \mathbf{a}^\dagger} e^{-\eta^* u(t) \mathbf{a}} | \alpha \rangle \\ &= e^{\eta u^*(t) \alpha^* - \eta^* u(t) \alpha}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

Assim,

$$\chi_N^C(\eta, t) = e^{\eta [u^*(t) \alpha^* + w^*(t)] - \eta^* [u(t) \alpha + w(t)]}. \quad (4.53)$$

Entretanto o resultado em (4.53) deve ser independente de representação, sendo então idêntico à função característica normal ordenada obtida na representação de Schrödinger,

$$\chi_N^C(\eta, t) = Tr_C \left[\rho_C(t) e^{\eta \mathbf{a}^\dagger} e^{-\eta^* \mathbf{a}} \right]. \quad (4.54)$$

Se considerarmos que o operador densidade no tempo t seja dado pelo projetor

$$\rho_C(t) = |\psi_C(t)\rangle \langle \psi_C(t)|, \quad (4.55)$$

⁵Esta consideração é necessária apenas para a construção operacional generalizada do estado evoluído, podendo α ser tomado como nulo em qualquer momento do desenvolvimento.

que substituído na Eq. (4.54) fornece

$$\chi_N^C(\eta, t) = \langle \psi_C(t) | e^{\eta \mathbf{a}^\dagger} e^{-\eta^* \mathbf{a}} | \psi_C(t) \rangle \quad (4.56)$$

podemos inferir por substituição direta e comparação com a Eq. (4.53) que, necessariamente,

$$|\psi_C(t)\rangle = |u(t)\alpha + w(t)\rangle \quad (4.57)$$

como consequência da não correlação do estado do campo e do reservatório, válida apenas para a temperatura zero. Assim, o operador densidade do estado do campo continuamente bombeado é dado por

$$\begin{aligned} \rho_C(t) &= |u(t)\alpha + w(t)\rangle \langle u(t)\alpha + w(t)| \\ &= \left| e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t} \alpha + w(t) \right\rangle \left\langle e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t} \alpha + w(t) \right|, \end{aligned} \quad (4.58)$$

com

$$w(t) = F e^{-i\omega t} \frac{[1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega - \omega_0)t}]}{\omega - \omega_0 + i\frac{\gamma}{2}}. \quad (4.59)$$

Na ressonância, $\omega = \omega_0$,

$$w(t) = -i \frac{2F}{\gamma} e^{-i\omega_0 t} (1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}). \quad (4.60)$$

Assim,

$$\rho_C(t) = \left| e^{-i\omega_0 t} \left[e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha - i \frac{2F}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}) \right] \right\rangle \left\langle e^{-i\omega_0 t} \left[e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha - i \frac{2F}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}) \right] \right|. \quad (4.61)$$

Escolhendo $F = i\alpha \frac{\gamma}{2}$, os termos multiplicativos de $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ anulam-se e $\rho_C(t)$ torna-se exatamente uma constante, a menos da fase do campo, independentemente do tempo:

$$\rho_C(t) = |e^{-i\omega_0 t} \alpha\rangle \langle e^{-i\omega_0 t} \alpha|. \quad (4.62)$$

Desta forma mostra-se como são gerados estados coerentes estacionários do campo em cavidades supercondutoras não ideais, isto é, sujeitas a efeitos de dissipação. Note que (4.62) é independente do fator de qualidade da cavidade definido em termos da constante de relaxação e da frequência do campo como

$$Q \equiv \omega_0/\gamma, \quad (4.63)$$

Logo, para a sustentação do estado estacionário é suficiente o ajuste correto da amplitude do campo de bombeamento. Este resultado é também válido para as zonas de Ramsey, R_1 e R_2 , constituídas por cavidades de baixo fator de qualidade. Note também que mesmo que o ajuste da amplitude do

campo de bombeamento não seja feito, $F \neq i\alpha\frac{\gamma}{2}$, assintoticamente o estado do campo tende a uma situação estacionária:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_C(t) \approx \left| e^{-i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \frac{2F}{\gamma} \right\rangle \left\langle e^{-i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \frac{2F}{\gamma} \right|, \quad (4.64)$$

resultado também válido para o caso em que inicialmente as cavidades encontrem-se no estado de vácuo.

4.3.4 Geração e Evolução de Estados de Superposição Coerente

Para a geração do estado de superposição vamos considerar que o estado estacionário (4.62) tenha sido gerado na cavidade e que o experimento descrito na secção 4.2 seja realizado, com a passagem adiabática de um átomo pela cavidade C, isto é, que o tempo de voo do átomo seja muito pequeno em relação ao tempo de relaxação do campo. Para um átomo preparado no estado $|e\rangle$, o operador densidade do sistema *átomo+campo* escreve-se

$$\rho_{C+A} = \rho_A \otimes \rho_C = |e\rangle \langle e| \otimes \rho_C. \quad (4.65)$$

Após a passagem do átomo por R_1 , seu estado é rodado:

$$|e\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle),$$

de forma que agora o operador densidade conjunto seja

$$\rho_{C+A} = \frac{1}{2} (|e\rangle + |g\rangle) (\langle e| + \langle g|) \otimes \rho_C. \quad (4.66)$$

Em seguida, após a interação dispersiva do átomo com o campo em C, o estado do sistema torna-se⁶

$$\rho_{C+A} = \frac{1}{2} (|e\rangle \langle e| e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C e^{i\pi a^\dagger a} + |g\rangle \langle g| \rho_C + |e\rangle \langle g| e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C + |g\rangle \langle e| \rho_C e^{i\pi a^\dagger a}), \quad (4.67)$$

já que o estado $|e\rangle$ é sempre associado com o operador de deslocamento de fase $e^{-i\pi a^\dagger a}$ neste experimento [8]. Posteriormente, ao atravessar R_2 , o átomo é novamente rodado, tal que o estado do sistema conjunto torna-se

$$\begin{aligned} \rho_{C+A} = & \frac{1}{4} (|e\rangle + |g\rangle) (\langle e| + \langle g|) e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C e^{i\pi a^\dagger a} + (-|e\rangle + |g\rangle) (-\langle e| + \langle g|) \rho_C \\ & + (|e\rangle + |g\rangle) (-\langle e| + \langle g|) e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C + (-|e\rangle + |g\rangle) (\langle e| + \langle g|) \rho_C e^{i\pi a^\dagger a}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Assim, se o átomo for detectado no estado $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ em D, o estado do campo instantaneamente colapsa para

$$\rho_C^{(g)} = \frac{1}{4} \left[e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C e^{i\pi a^\dagger a} + \rho_C + \cos \varphi \left(e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C + \rho_C e^{i\pi a^\dagger a} \right) \right], \quad (4.69)$$

⁶Este processo é mostrado no Apêndice B.

onde

$$\begin{aligned}\rho_C^g &= \langle g | \rho_{C+A} | g \rangle, \\ \rho_C^e &= \langle e | \rho_{C+A} | e \rangle\end{aligned}$$

e $\varphi = 0$ ou π se o átomo for detectado nos estados $|g\rangle$ ou $|e\rangle$, respectivamente. O estado final do campo pode ser obtido de (4.69) se explicitarmos seu estado inicial. Com $\rho_C = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ da Eq. (4.62), absorvendo a fase $e^{-i\omega_0 t}$, temos que

$$\rho_C^{(g)} = \frac{1}{N^2} [|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha| + \cos\varphi (|-\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha\rangle\langle-\alpha|)], \quad (4.70)$$

com $N = \sqrt{2(1 + \cos\varphi e^{-2|\alpha|^2})}$. Após a detecção atômica, o campo na cavidade sofre os efeitos da dissipação e do bombeamento, sendo que sua função característica, dada no tempo t através da substituição da Eq. (4.70) em (4.50) e procedendo analogamente à última seção, torna-se

$$\begin{aligned}\chi_N(\eta, t) &= \frac{1}{N^2} \left\{ e^{\eta(u^*(t)\alpha^* + w^*(t)) - \eta^*(u(t)\alpha + w(t))} + e^{-\eta(u^*(t)\alpha^* - w^*(t)) + \eta^*(u(t)\alpha - w(t))} \right. \\ &\quad \left. \cos\varphi e^{-2|\alpha|^2} \left[e^{\eta(u^*(t)\alpha^* + w^*(t)) + \eta^*(u(t)\alpha - w(t))} + e^{-\eta(u^*(t)\alpha^* - w^*(t)) - \eta^*(u(t)\alpha + w(t))} \right] \right\}. \quad (4.71)\end{aligned}$$

Novamente, pela comparação com a expressão da representação de Schrödinger e desprezando as rotações do campo obtemos

$$\begin{aligned}\rho_C(t) &= \frac{1}{N^2} \left\{ \left| e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha + w(t) \right\rangle \left\langle e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha + w(t) \right| + \left| - \left(e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha - w(t) \right) \right\rangle \left\langle - \left(e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha - w(t) \right) \right| \right. \\ &\quad + \cos\varphi e^{-2|\alpha|^2(1-e^{-\gamma t})} \left[\left| e^{-e^{-\gamma t}(\alpha^* w(t) - \alpha w^*(t))} \left| - \left(e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha - w(t) \right) \right\rangle \left\langle e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha + w(t) \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{e^{-\gamma t}(\alpha^* w(t) - \alpha w^*(t))} \left| e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha + w(t) \right\rangle \left\langle - \left(e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha - w(t) \right) \right| \right] \right\}. \quad (4.72)\end{aligned}$$

Quando a intensidade do campo é ajustada para o valor $F = i\alpha\frac{\gamma}{2}$, temos novamente

$$w(t) = \alpha e^{-i\omega_0 t} (1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}), \quad (4.73)$$

e

$$\begin{aligned}\rho_C(t) &= \frac{1}{N^2} \left\{ |\alpha\rangle\langle\alpha| + \left| \alpha (1 - 2e^{-\frac{\gamma}{2}t}) \right\rangle \left\langle \alpha (1 - 2e^{-\frac{\gamma}{2}t}) \right| \right. \\ &\quad \left. + \cos\varphi e^{-2|\alpha|^2(1-e^{-\gamma t})} \left[\left| \alpha (1 - 2e^{-\frac{\gamma}{2}t}) \right\rangle \langle\alpha| + |\alpha\rangle \left\langle \alpha (1 - 2e^{-\frac{\gamma}{2}t}) \right| \right] \right\}, \quad (4.74)\end{aligned}$$

que no limite assintótico, $t \rightarrow \infty$, torna-se novamente o estado coerente estacionário

$$\rho_C(t) = |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (4.75)$$

Logo, independentemente da definição do estado inicial e da amplitude do bombeamento, o limite assintótico será sempre um estado coerente dado por (4.64):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_C(t) \approx \left| e^{-i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \frac{2F}{\gamma} \right\rangle \left\langle e^{-i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \frac{2F}{\gamma} \right|. \quad (4.76)$$

Este é um resultado importante por demonstrar que assintoticamente não ocorre o equilíbrio térmico entre o reservatório e o modo central do campo. A presença de um campo de bombeamento fornece ininterruptamente energia para o modo do campo na cavidade, sustentando-o em um estado coerente em contraste com a temperatura nula do reservatório.

4.3.5 Decoerência e Degradação de Estados Continuamente Bombeados

Vamos analisar a evolução do operador densidade em tempos longe do assintótico, caso em que podemos observar os efeitos do bombeamento clássico tanto na degradação do estado, como em sua decoerência devido aos efeitos dissipativos do reservatório térmico. Observamos que o estado de superposição bombeado, Eq. (4.72), tem seus termos de coerência de fase (não-diagonais) modificados em relação ao caso de decorência livre devido aos fatores $e^{\pm e^{-\gamma t}(\alpha^* w(t) - \alpha w^*(t))}$. Entretanto, estes termos não garantem a sustentação da coerência do estado do campo, que é atenuada pelo fator $e^{-2|\alpha|^2(1-e^{-\gamma t})}$. Nem sempre a simples análise deste termo exponencial fornece o tempo real de decoerência, como é amplamente realizado. Como veremos, no caso do bombeamento paramétrico este procedimento pode levar a resultados errôneos.

Antes de analisarmos a coerência do estado é interessante observarmos os efeitos do bombeamento em tempos curtos da evolução. A forma geral de um estado de superposição pode ser melhor visualizada na representação de Wigner [25]. Como vimos, dada a função característica simetricamente ordenada a função de Wigner é obtida simplesmente pela realização de sua transformada de Fourier (Eq.(4.37)). Para o estado dado pela Eq. (4.72) a função de Wigner escreve-se

$$W(\zeta, t) = \frac{2}{N^2 \pi} \left\{ \exp \left[-2 \left| \zeta - e^{-\gamma t/2} \alpha - w(t) \right|^2 \right] + \exp \left[-2 \left| \zeta + e^{-\gamma t/2} \alpha - w(t) \right|^2 \right] \right. \\ \left. 2 \cos \varphi e^{-2|\zeta - w(t)|^2} \exp \left[-2 |\alpha|^2 (1 - e^{-\gamma t}) \right] \cos \left[4 e^{-\gamma t/2} \text{Im} [(\zeta - w(t)) \alpha^*] \right] \right\}. \quad (4.77)$$

A representação de Wigner é um instrumento útil para visualizar a evolução de um estado quântico para uma função de distribuição clássica: Sempre que $W(\zeta, t)$ for uma mistura de pacotes de onda localizados, ela pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidades clássica no espaço de fase. Entretanto, quando o estado não tiver equivalente clássico sua função de distribuição de Wigner apresentará regiões negativas⁷. Na representação de Wigner do estado de superposição do campo, Eq. (4.77),

⁷Este é o real motivo porque a função de distribuição de Wigner não pode ser interpretada como uma legítima função de distribuição de probabilidades, mas sim como função de quase-probabilidade; ela não é uma função positiva definida.

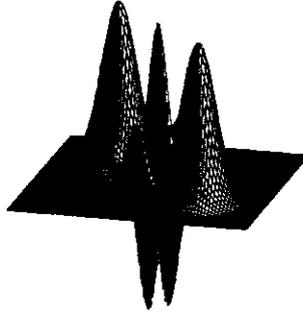


Figura 4.2: Função de distribuição de Wigner para o estado de superposição $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$ com $|\alpha|^2 = 5$. As oscilações centrais representam a coerência do estado de superposição.

as duas primeiras exponenciais são gaussianas centradas em $[e^{-\gamma t/2} \alpha + w(t)]$ e $-[e^{-\gamma t/2} \alpha - w(t)]$ respectivamente, representando os dois estados distintos, $|e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha + w(t)\rangle$ e $|-(e^{-\frac{\gamma}{2}t} \alpha - w(t))\rangle$. O termo de coerência contém três fatores: uma gaussiana centrada em $w(t)$, uma modulação co-senoidal, $\cos[4e^{-\gamma t/2} \text{Im}[(\zeta - w(t)) \alpha^*]]$, e o fator responsável pela decoerência, $\exp[-2|\alpha|^2(1 - e^{-\gamma t})]$. A modulação, dependente da amplitude do campo, possui um maior número de picos quanto maior for $|\alpha|$.

Nas Figs. 4.2-4.4, são mostradas configurações da função de Wigner (4.77) para $|\alpha|^2 = 5$ em três tempos distintos, $\gamma t = 0$, $\gamma t = 1$ e $\gamma t \rightarrow \infty$. Para tal fixamos $F = 1$. Observa-se a degradação progressiva do estado que é levado continuamente ao estado coerente estacionário (Fig. 4.4) dado por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(\zeta, t) = \exp \left[-2 \left| \zeta - e^{-i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \frac{2F}{\gamma} \right|^2 \right]. \quad (4.78)$$

Os termos de coerência de fase são suprimidos em um tempo inferior à relaxação do estado, dado por $t_d = \frac{\gamma^{-1}}{2|\alpha|^2}$, sendo nulo o efeito do bombeamento nos termos de coerência.

A evolução do estado de superposição, sua decoerência e a relaxação para um novo estado coerente podem também ser analisadas com a medida de entropia linear gerada na evolução, dada por

$$E = \text{Tr}_C [\rho_C(t) - \rho_C^2(t)]. \quad (4.79)$$

A entropia linear mede a perda de pureza de um estado em um processo evolutivo, já que para estados $\rho_C(t)$ puros a idempotência, isto é,

$$\rho_C^2(t) = \rho_C(t),$$

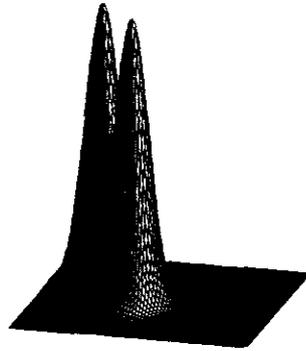


Figura 4.3: Função de distribuição de Wigner para o estado de superposição da Fig. 4.2 submetido ao bombeamento linear evoluído para $\gamma t = 1$. A coerência da superposição é destruída enquanto o estado continuamente evolui para um estado coerente dado pela amplitude de bombeamento.

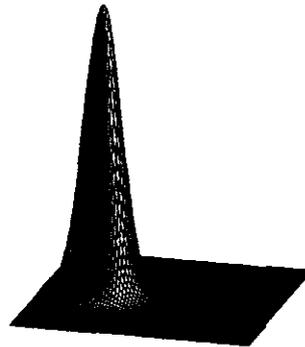


Figura 4.4: Função de distribuição de Wigner para o estado da Fig. 4.2 bombeamento linearmente, no regime assintótico em que assume um novo estado coerente, estacionário, dado pela amplitude do bombeamento.

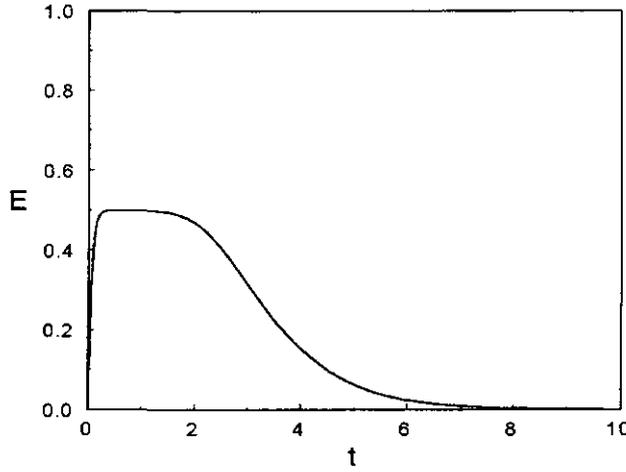


Figura 4.5: Entropia linear para o estado de gato de Schrödinger continuamente bombeado linearmente. A coerência da superposição é rapidamente destruída, atingindo seu mínimo quando o estado torna-se uma mistura estatística. O retorno assintótico a zero corresponde à pureza do estado do campo que é restituída, mas agora, para o estado coerente.

implica em

$$\text{Tr}_C [\rho_C^2(t)] = \text{Tr}_C [\rho_C(t)] = 1 \quad (4.80)$$

e conseqüentemente, $E = 0$. Já para estados $\rho_C(t)$ mistos,

$$0 < \text{Tr}_C [\rho_C^2(t)] < 1. \quad (4.81)$$

Assim sempre que E for diferente de zero, significa que o estado a que se refere a medida não é puro. Para o estado (4.72) a entropia linear é dada por

$$\begin{aligned} E &= \text{Tr}_C [\rho_C(t) - \rho_C^2(t)] \\ &= 1 - \frac{2}{N^4} \left\{ 1 + 4e^{-2|\alpha|^2} + e^{-4|\alpha|^2} e^{-\gamma t} + e^{-4|\alpha|^2} (1 - e^{-\gamma t}) \right. \\ &\quad \left. + e^{-4|\alpha|^2} e^{-2|\alpha|^2} e^{-\gamma t} \cos \left[2e^{-\gamma t/2} \text{Im}(w(t)\alpha^*) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.82)$$

cuja evolução pode ser observada na Fig. 4.5 para $|\alpha|^2 = 5$. Os tempos de decoerência e de relaxação do estado inicial são independentes da intensidade do bombeamento linear. Na Fig. 4.5 observamos a característica do estado inicialmente puro, $\text{Tr}[\rho] = \text{Tr}[\rho^2] = 1$, sendo então a entropia inicialmente nula. No processo de decoerência, o estado do campo torna-se uma mistura, $\text{Tr}[\rho^2] < 1$, e conseqüentemente a entropia aumenta, significando que ao interagir com os modos do reservatório, há além de

um fluxo de energia, também um fluxo de informação do campo para o meio envolvente. Os modos do reservatório ao interagir com o modo do campo, realizam simultaneamente uma medida de não demolição nas variáveis de acoplamento, o que gera o processo de superseleção. Como o bombeamento atua ininterruptamente no campo, a mistura é levada no tempo de relaxação a um estado coerente puro, onde novamente a entropia é nula. Apesar da energia que o bombeamento é capaz de fornecer ao modo do campo no interior da cavidade, o bombeamento não equilibra a perda de “*informação disponível*” para o reservatório. Certamente o processo de perda de coerência está estritamente vinculado à perda de energia para o meio. No entanto, a transferência de informação para o meio ocorre de forma diferenciada à transferência de energia, pois depende fortemente de relações de fase entre estados⁸.

4.3.6 Átomos e Bombeamento

A proposta de sustentar a coerência do estado de superposição do campo pela atuação de um bombeamento linear falha, pois, apesar de que o efeito da dissipação seja absorver fótons do campo enquanto o bombeamento restitui estes fótons continuamente, a restituição não é sensível à fase do campo e não permite que a coerência de uma superposição tipo gato de Schrödinger seja também restituída. O bombeamento clássico apenas permite que um campo coerente estacionário seja estabelecido na cavidade, a velocidade com que este campo prevalece é inversamente proporcional à qualidade da cavidade. Em cavidades de Ramsey, onde a qualidade é muito baixa, o campo assume uma situação estacionária rapidamente. No entanto, elementos adicionais para a reconstrução da coerência do estado do campo podem ser considerados. Na proposta experimental de Brune e colaboradores [6, 7] representada na Fig. 4.1, a medida do estado do campo após o estabelecimento de um estado de superposição é realizada enviando átomos consecutivos pelo arranjo. Assim, se um segundo átomo for enviado no tempo T após a detecção do primeiro, teremos, em termos do operador densidade do sistema *átomo 2 + campo* [8],

$$\rho_{C+A_2}(T) = \rho_{A_2}(T) \otimes \rho_C(T) = |e\rangle \langle e|_2 \otimes \rho_C(T), \quad (4.83)$$

sendo $\rho_C(T)$, o operador densidade da Eq.(4.72) no instante T após o estabelecimento do estado de superposição. Após a passagem do átomo 2 por R_1 o estado conjunto torna-se

$$\rho_{C+A_2}(T) = \frac{1}{2} (|e\rangle + |g\rangle)_2 (\langle e| + \langle g|)_2 \otimes \rho_C(T)$$

⁸Estados diferentes apenas por uma fase são energeticamente idênticos. A transferência de informação entre sistemas interagentes diferencia a fase, conservando sua relação inicial existente. Veja Capítulo 3.

e em sua passagem por C , o estado atômico torna-se

$$\begin{aligned} \rho_{C+A_2}(T) = & \frac{1}{2} \left(|e\rangle \langle e|_2 e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C(T) e^{i\pi a^\dagger a} + |g\rangle \langle g|_2 \rho_C(T) + |e\rangle \langle g|_2 e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C(T) \right. \\ & \left. + |g\rangle \langle e|_2 \rho_C(T) e^{i\pi a^\dagger a} \right). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Subsequentemente à interação do átomo 2 com o campo em R₂ o estado conjunto é dado por

$$\begin{aligned} \rho_{C+A_2}(T) = & \frac{1}{4} \left[(|e\rangle + |g\rangle)_2 (\langle e| + \langle g|)_2 e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C(T) e^{i\pi a^\dagger a} + (-|e\rangle + |g\rangle)_2 (-\langle e| + \langle g|)_2 \rho_C(T) \right. \\ & \left. + (|e\rangle + |g\rangle)_2 (-\langle e| + \langle g|)_2 e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C(T) + (-|e\rangle + |g\rangle)_2 (\langle e| + \langle g|)_2 \rho_C(T) e^{i\pi a^\dagger a} \right]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Se o átomo 2 for detectado no estado $|g\rangle$ ou $|e\rangle$ o campo irá colapsar instantaneamente para

$$\rho_C^{(g)}(T) = \frac{1}{4} \left(e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C(T) e^{i\pi a^\dagger a} + \rho_C(T) \pm e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C(T) \pm \rho_C(T) e^{i\pi a^\dagger a} \right), \quad (4.86)$$

com o sinal + ou - para $|g\rangle$ ou $|e\rangle$, respectivamente.

Substituindo (4.72) para $\rho_C(T)$ na Eq. (4.86), obtemos a expressão condicional de $\rho_C^{(g)}(T)$. A probabilidade de que o átomo 2 seja detectado no estado $|g\rangle$ ou $|e\rangle$ é dada então por

$$\begin{aligned} P_{(g)}^{(e)}(T) &= Tr_C \left[\rho_C^{(g)}(T) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 \pm Re \left\{ Tr \left[e^{-i\pi a^\dagger a} \rho_C(T) \right] \right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{e^{-2|w(T)|^2}}{1 + \cos \varphi e^{-2|\alpha|^2}} \left[e^{-2|\alpha|^2} e^{-\gamma T} \cosh \left(4 e^{-\frac{\gamma T}{2}} Re [\alpha w^*(T)] \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \varphi e^{-2|\alpha|^2} (1 - e^{-\gamma T}) \cos \left(4 e^{-\frac{\gamma T}{2}} Im [\alpha w^*(T)] \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

sendo $\varphi = 0$ (π) se o primeiro átomo for detectado em $|g\rangle_1$ ($|e\rangle_1$) e o sinal + (-) se o segundo átomo for detectado em $|g\rangle_2$ ($|e\rangle_2$). Analisando a Eq. (4.87), se o segundo átomo for detectado logo em seguida ao primeiro tal que $T\gamma \ll 1$, então

$$P_{(g)}^{(e)}(T) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{e^{-2|\alpha|^2} + \cos \varphi}{1 + \cos \varphi e^{-2|\alpha|^2}} \right] \quad (4.88)$$

e para $|\alpha| \gg 1$

$$P_{(g)}^{(e)}(T) = \frac{1}{2} [1 \pm \cos \varphi], \quad (4.89)$$

recuperando o resultado de Davidovich e colaboradores [8] obtido na ausência de bombeamento. Nesta última situação, se o primeiro átomo for detectado em $|g\rangle$ ou $|e\rangle$ o estado da cavidade colapsa para um estado de “gato” par ou ímpar, $|\Psi_{gato}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|\alpha\rangle + \cos \varphi |-\alpha\rangle)$, $\varphi = 0$ ou π , respectivamente. Supondo que o estado do primeiro átomo detectado seja $|e\rangle$, estará então criado o “gato” ímpar na cavidade.

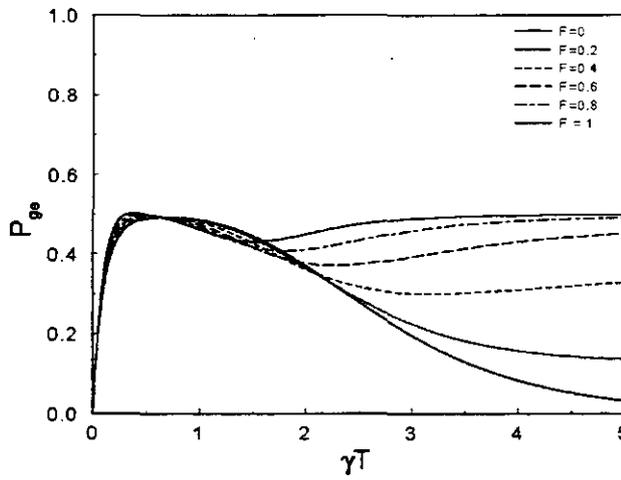


Figura 4.6: Probabilidade condicional de que o primeiro átomo seja medido no estado $|e\rangle$ e o segundo em $|g\rangle$, refletindo a medida do campo na cavidade C. A intensidade do bombeamento aumenta a probabilidade desta ocorrência.

Para $T\gamma \ll 1$, isto é, se o intervalo entre a emissão sucessiva de dois átomos for próximo a zero, o segundo átomo será detectado em $|g\rangle$ com probabilidade condicional $P(g, e, T) = 0$ ou em $|e\rangle$ com probabilidade condicional $P(e, e, T) = 1$ e assim sucessivamente. Desta forma, a passagem intermitente de átomos com curto intervalo de emissão pela cavidade permite a sustentação da coerência do estado. Ao medir intermitentemente o estado do campo, os átomos recuperam sua coerência, reconstruindo o estado inicial. Aqui, o processo de medida fica estreitamente vinculado à sustentação da coerência do campo, independentemente da eficiência dos detectores.

Claro que $T > 0$ e então certamente haverá uma relaxação do estado, que, para o caso livre estudado por Davidovich et al. [8], leva à troca de paridade do estado devido à absorção fotônica discreta pela cavidade, para intervalos de tempo de emissão atômica, $T > t_d$. Neste caso $P(g, e, T) = P(e, e, T) = 1/2$. Na ausência de bombeamento, o limite assintótico das probabilidades condicionais é zero, pois aí o tempo é suficientemente grande para dissipar toda a energia do campo no interior da cavidade que termina no estado de vácuo. Com a presença de bombeamento contínuo os resultados são sensivelmente modificados. Nas Figs. 4.6 e 4.7 vemos o comportamento de $P(g, e, T)$ e $P(e, e, T)$ para vários valores de F para $|\alpha|^2 = 5$. Vemos que, quanto maior for a intensidade do bombeamento, mais rápido será o estabelecimento assintótico de $P(g, e, T) = P(e, e, T) = 1/2$. Isto porque mais rapidamente é estabelecido um estado coerente e ao passar pela cavidade o átomo reconstrói a superposição.

A ação conjunta de átomo + bombeamento do campo permite definir um tempo de chaveamento

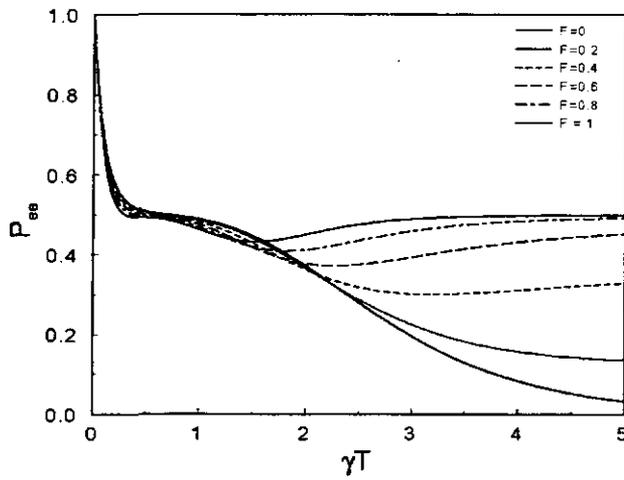


Figura 4.7: Probabilidade condicional de que o primeiro átomo seja medido no estado $|e\rangle$ e o segundo em $|e\rangle$. A intensidade do bombeamento aumenta a probabilidade de ocorrência, que atinge seu máximo em $1/2$.

(T) em que o campo original é restituído com probabilidade de 50%. Certamente este campo também sofre decoerência e relaxação para o estado coerente, mas a passagem de átomos consecutivos permite que o estado original seja reconstruído a cada passagem (medida) atômica. Define-se, assim, um limite inferior no tempo, T , em que a fidelidade do campo possa ser reestabelecida. Enquanto o bombeamento clássico limita o efeito da dissipação, mantendo constante o número de fótons no interior da cavidade, átomos com interação dispersiva restituem a coerência do campo. Certamente a paridade do estado de superposição constitui um problema. A restituição do estado com a mesma paridade tem apenas 50% de chance de ocorrer e se isto for importante para a realização de processos de informação o arranjo terá apenas 50% de eficiência.

Recentemente foi desenvolvido por Vitali, Tombesi e Milburn [17, 26] o esquema de realimentação estroboscópica para controle de coerência e proteção de estados quânticos no interior de cavidades. Sua proposta é baseada na medida do estado do campo pelo envio consecutivo de átomos através da cavidade. Sempre que o estado medido do átomo for $|e\rangle$ isto significa que a cavidade continua com o mesmo estado de superposição. No entanto, se o átomo estiver no estado $|g\rangle$ então um fóton foi perdido e o estado do campo trocou de paridade. Esta detecção aciona uma outra fonte de átomos ressonantes com a cavidade. Na sua passagem o átomo deixa um fóton restituindo assim o estado inicial por esta deixam um fóton restituindo o estado inicial. Desta forma, uma fonte atômica deve responder instantaneamente à medida do estado dos átomos no detector D da Fig. 4.1. Enquanto a coerência é recobrada a cada passagem de um átomo dispersivo, o número de fótons é restabelecido

por um átomo ressonante.

Em contraposição à proposta de Vitali et al. [26] o arranjo proposto aqui baseia-se, simplesmente, em deixar a fonte de microondas ligada durante todo o desenvolvimento do experimento. Depreende-se de tal processo garantir em intervalos de tempo T a robustez de estados de superposição. A existência de tal intervalo pode ter aplicação na real motivação tecnológica destes experimentos: O estabelecimento de dispositivos quânticos de informação. Quando T é considerado como tempo de chaveamento entre uma operação e outra do estado do campo, tem-se a garantia de estar trabalhando com o mesmo estado inicial. Se a paridade do estado não for importante nestes processos, a eficiência será de 100%.

4.4 Teoria de Bombeamento Paramétrico de Campos Quânticos

Como vimos nas últimas seções, estados quânticos do campo eletromagnético em cavidades são gerados por bombeamento clássico (linear) da cavidade, conectando-se uma fonte (clássica) de microondas à cavidade via um guia de ondas. Vimos que a alimentação contínua do campo permite compensar em parte os efeitos dissipativos presentes, sustentando a energia do campo no interior da cavidade. Entretanto, devido à insensibilidade à fase, o bombeamento linear não compensa o efeito de decoerência de estados de superposição do campo. A coerência pode ser recobrada, no entanto, com a medida do campo por um átomo subsequente interagindo dispersivamente com o campo da cavidade. O ponto essencial da impossibilidade de sustentação de coerência pelo bombeamento linear é a sua insensibilidade à fase.

Nesta secção faremos o desenvolvimento formal para a descrição da dinâmica de campos no interior de cavidades não-ideais, continuamente bombeados *parametricamente*. Nosso intuito é de observar se a sensibilidade à fase deste tipo de bombeamento é capaz de sustentar a coerência de estados de superposição do campo e se novos efeitos surgem nestes estados.

O bombeamento paramétrico é reconhecido por introduzir amplificações sensíveis à fase [24]. Uma maneira simples de gerar esta amplificação consiste em fazer uso da propriedade “*down-conversion*” de sistemas ópticos não lineares, em que um fóton de frequência 2ω , ao atravessar um cristal não linear, é absorvido e em seguida dois outros fótons de frequência ω_1 e ω_2 , tal que $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$ e momentos $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 2\vec{k}$, são gerados. Este processo, conhecido como “*parametric down conversion*”, pode ocorrer em um meio com uma susceptibilidade de segunda ordem não linear $\chi^{(2)}$. Um meio não-linear, quando introduzido entre a fonte de microondas e a própria cavidade, permite que a cavidade seja alimentada em um processo envolvendo simultaneamente dois fótons. Certas fibras ópticas têm uma sensível não-linearidade $\chi^{(2)}$ e se o guia de ondas conector da fonte com a cavidade for deste tipo, então estaremos

aqui considerando os inevitáveis efeitos desta não-linearidade inerente ao material da fibra.

Nesta seção, vamos considerar o caso geral de bombeamento paramétrico degenerado ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) do campo em cavidades dissipativas e analisar as situações de geração do campo, geração do estado de superposição e de sustentação da coerência destes estados. Veremos como a sensibilidade à fase deste tipo de bombeamento permite o retardamento da perda de coerência de estados de superposição do campo.

4.4.1 Equações de Heisenberg

A evolução do estado é dada pela interação do modo do campo parametricamente bombeado com os modos do reservatório. O hamiltoniano deste problema se escreve:

$$H = \hbar\omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \sum_k \hbar\omega_k \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_k + \hbar \sum_k \left(\lambda_k \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}_k + \lambda_k^* \mathbf{a} \mathbf{b}_k^\dagger \right) + \kappa \left(e^{-i\omega t} (\mathbf{a}^\dagger)^2 + e^{i\omega t} (\mathbf{a})^2 \right), \quad (4.90)$$

onde \mathbf{a} (\mathbf{a}^\dagger) é o operador de destruição (criação) do campo na cavidade; \mathbf{b}_k (\mathbf{b}_k^\dagger) são os operadores de destruição (criação) dos infinitos modos k do reservatório; ω_0 , ω_k e ω são, respectivamente, a frequência do modo do campo na cavidade, a frequência de cada modo k do reservatório e a frequência do bombeamento e finalmente, κ é a constante de acoplamento dependente da amplitude do bombeamento.

As equações de Heisenberg para os operadores do campo e do reservatório térmico são

$$\dot{\mathbf{a}} = -i\omega_0 \mathbf{a} - i \sum_k \lambda_k \mathbf{b}_k - i\kappa e^{-i\omega t} \mathbf{a}^\dagger, \quad (4.91)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_k = -i\omega_k \mathbf{b}_k - i\lambda_k^* \mathbf{a}. \quad (4.92)$$

Escrevendo $\mathbf{a} = \mathbf{A} e^{-i\omega_0 t}$, $\mathbf{b}_k = \mathbf{B}_k e^{-i\omega_k t}$ e substituindo a solução formal de $\mathbf{b}_k(t)$,

$$\mathbf{b}_k(t) = e^{-i\omega_k t} \mathbf{b}_k(0) - i\lambda_k^* \int_0^t \mathbf{a}(t') e^{i\omega_k(t'-t)} dt', \quad (4.93)$$

na equação para \mathbf{a} , (4.91), obtemos

$$\dot{\mathbf{A}} = -i\kappa e^{-i(\omega-2\omega_0)t} \mathbf{A}^\dagger - i \sum_k \lambda_k \mathbf{B}_k(0) e^{-i(\omega_k-\omega_0)t} - \sum_k |\lambda_k|^2 \int_0^t \mathbf{A}(t') e^{i(\omega_k-\omega_0)(t'-t)} dt', \quad (4.94)$$

cuja solução, analogamente ao caso de bombeamento linear, é obtida pelo método da transformada de Laplace (\mathcal{TL}). Tomando a \mathcal{TL} da Eq. (4.94), temos

$$\begin{aligned} s\tilde{\mathbf{A}}(s) - \mathbf{A}(0) &= -i\kappa \int_0^\infty e^{-st} e^{-i(\omega-2\omega_0)t} \mathbf{A}^\dagger dt - i \sum_k \lambda_k \mathbf{B}_k(0) \int_0^\infty e^{-st} e^{-i(\omega_k-\omega_0)t} dt \\ &\quad - \sum_k |\lambda_k|^2 \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t \mathbf{A}(t') e^{i(\omega_k-\omega_0)(t'-t)} dt', \end{aligned} \quad (4.95)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{A}}(s) = \mathcal{L}(\mathbf{A}) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{A} dt.$$

Através dos procedimentos da primeira seção deste capítulo e da solução das integrais envolvidas, na ressonância ($\omega = 2\omega_0$), realizando a aproximação de Wigner-Weisskopf [21], onde as frequências dos osciladores do reservatório cobrem densamente a região em torno da frequência do campo na cavidade e $s \rightarrow 0$, a solução da equação de Heisenberg para os operadores \mathbf{a} é dada por

$$\mathbf{a}(t) = u(t)\mathbf{a} + v(t)\mathbf{a}^\dagger + \sum_k w_k(t)\mathbf{b}_k + \sum_k z_k(t)\mathbf{b}_k^\dagger, \quad (4.96)$$

sendo $u(t)$, $v(t)$, $w_k(t)$ e $z_k(t)$ funções (*c-numbers*) dependentes do tempo dadas por

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left(\cosh \kappa' t - i \frac{\Delta\omega}{\kappa'} \sinh \kappa' t \right), \quad (4.97)$$

$$v(t) = -i \frac{\kappa}{\kappa'} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \sinh \kappa' t, \quad (4.98)$$

$$w_k(t) = -i \frac{\lambda_k}{2\kappa'} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left\{ \frac{(\kappa' - i\Delta\omega) e^{\kappa' t}}{-\frac{\gamma}{2} + \kappa' + i(\omega_k - \omega_0)} + \frac{(\kappa' + i\Delta\omega) e^{-\kappa' t}}{-\frac{\gamma}{2} - \kappa' + i(\omega_k - \omega_0)} + 2\kappa' e^{\frac{\gamma t}{2}} \frac{[\frac{\gamma}{2} - i(\Delta\omega + \omega_k - \omega_0)] e^{-i(\omega_k - \omega_0)t}}{[\frac{\gamma}{2} - i(\omega_k - \omega_0)]^2 - \kappa'^2} \right\}, \quad (4.99)$$

e

$$z_k(t) = \frac{\kappa\lambda_k^*}{2\kappa'} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left\{ \frac{e^{\kappa' t}}{-\frac{\gamma}{2} + \kappa' - i(\omega_k - \omega_0)} + \frac{e^{-\kappa' t}}{\frac{\gamma}{2} + \kappa' + i(\omega_k - \omega_0)} + 2\kappa' e^{\frac{\gamma t}{2}} \frac{e^{i(\omega_k - \omega_0)t}}{[\frac{\gamma}{2} + i(\omega_k - \omega_0)]^2 - \kappa'^2} \right\}, \quad (4.100)$$

com $\kappa'^2 = \kappa^2 - (\Delta\omega)^2$. Sendo $\Delta\omega$ o pequeno deslocamento de frequências definido por (4.25). Para $\Delta\omega = 0$, temos $\kappa' = \kappa$ e as funções (4.97)-(4.100) tornam-se

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cosh \kappa t, \quad (4.101)$$

$$v(t) = -i e^{-\frac{\gamma t}{2}} \sinh \kappa t, \quad (4.102)$$

$$w_k(t) = -i \frac{\lambda_k}{2} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left\{ \frac{e^{\kappa t}}{-\frac{\gamma}{2} + \kappa + i(\omega_k - \omega_0)} + \frac{e^{-\kappa t}}{-\frac{\gamma}{2} - \kappa + i(\omega_k - \omega_0)} + 2e^{\frac{\gamma t}{2}} \frac{[\frac{\gamma}{2} - i(\omega_k - \omega_0)] e^{-i(\omega_k - \omega_0)t}}{[\frac{\gamma}{2} - i(\omega_k - \omega_0)]^2 - \kappa^2} \right\}, \quad (4.103)$$

e

$$z_k(t) = \frac{\lambda_k^*}{2} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left\{ \frac{e^{\kappa t}}{-\frac{\gamma}{2} + \kappa - i(\omega_k - \omega_0)} + \frac{e^{-\kappa t}}{\frac{\gamma}{2} + \kappa + i(\omega_k - \omega_0)} + 2\kappa e^{\frac{\gamma t}{2}} \frac{e^{i(\omega_k - \omega_0)t}}{[\frac{\gamma}{2} + i(\omega_k - \omega_0)]^2 - \kappa^2} \right\}, \quad (4.104)$$

4.4.2 Representações do Estado do Campo

Vamos obter as representações em termos de funções de distribuição do estado evoluído do campo. A partir das soluções das equações de Heisenberg para o operador a a função característica normal ordenada, (4.34), é dada por

$$\chi_N(\eta, t) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{e^{i\phi_{ij}}}{N^2} \langle \alpha_j | \alpha_i \rangle e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2 A - \eta^2 B^* - \eta^* B} e^{\eta U_{ji}^* - \eta^* U_{ij}}, \quad (4.105)$$

onde

$$A \equiv A(t) = \frac{e^{-\gamma t} [\cosh(2\kappa t) + \frac{\gamma}{2\kappa} \sinh(2\kappa t)] - 1}{1 - (\frac{\gamma}{2\kappa})^2} + 2\bar{n} \frac{e^{-\gamma t} [\cosh(2\kappa t) + \frac{2\kappa}{\gamma} \sinh(2\kappa t)] - 1}{(\frac{2\kappa}{\gamma})^2 - 1}, \quad (4.106)$$

$$B \equiv B(t) = e^{-2i\omega_0 t} \left\{ \frac{i e^{-\gamma t} [\sinh(2\kappa t) + \frac{\gamma}{2\kappa} \cosh(2\kappa t)]}{2 \left(\frac{\gamma}{2\kappa} \right)^2 - 1} + \frac{i\kappa}{\gamma} \frac{1}{\left(\frac{2\kappa}{\gamma} \right)^2 - 1} + i\bar{n} \frac{e^{-\gamma t} [\sinh(2\kappa t) + \frac{2\kappa}{\gamma} \cosh(2\kappa t)]}{1 - \left(\frac{2\kappa}{\gamma} \right)^2} + \frac{i2\kappa}{\gamma} \frac{\bar{n}}{\left(\frac{2\kappa}{\gamma} \right)^2 - 1} \right\}, \quad (4.107)$$

$$U_{ij} = e^{-i\omega_0 t} (u(t)\alpha_i + v(t)\alpha_j^*), \quad (4.108)$$

e

$$U_{ji}^* = e^{i\omega_0 t} (u(t)\alpha_j^* + v^*(t)\alpha_i). \quad (4.109)$$

Em (4.105) a soma corre sobre os índices i e j do estado inicial do campo,

$$\rho_C(0) = \sum_{i,j=1}^2 \phi_{ij} |\alpha_i\rangle \langle \alpha_j|, \quad (4.110)$$

com

$$\phi_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 0, & i \neq j \rightarrow \text{gato par} \\ \pi, & i \neq j \rightarrow \text{gato ímpar} \end{cases}$$

γ é a constante de dissipação, κ o parâmetro amplitude do bombeamento e $N = \sqrt{2(1 + e^{i\phi_{ij}} e^{-2|\alpha|^2})}$ é a constante de normalização. A partir da dupla transformada de Fourier da função característica normal ordenada obtemos a função P de Glauber (Eq. (4.35)) [23]:

$$P(\gamma; t) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{e^{i\phi_{ij}}}{N^2} \langle \alpha_j | \alpha_i \rangle e^{\frac{1}{2} \left(A \frac{\partial^2}{\partial \gamma \partial \gamma^*} + B^* \frac{\partial^2}{\partial \gamma^{*2}} + B \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right)} e^{-\left(U_{ji}^* \frac{\partial}{\partial \gamma^*} + U_{ij} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right)} \delta^2(\gamma), \quad (4.111)$$

com $\delta^2(\gamma) = \delta(\text{Re } \gamma) \delta(\text{Im } \gamma)$. A função de distribuição de Wigner é obtida da convolução de $P(\gamma; t)$ com uma gaussiana (Eq. (4.37)) [23],

$$W(\zeta, t) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{2e^{i\phi_{ij}}}{N^2 \pi} \langle \alpha_j | \alpha_i \rangle \frac{1}{\sqrt{S}} \exp \left\{ \frac{-2(A+1)(U_{ij} - \zeta)(U_{ji}^* - \zeta^*)}{S} \right\} \\ \times \exp \left\{ \frac{2B(U_{ji}^* - \zeta^*)^2 + 2B^*(U_{ij} - \zeta)^2}{S} \right\}, \quad (4.112)$$

onde $S \equiv (A+1)^2 - 4|B|^2$. Na condição inicial geral, se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, o bombeamento gera a compressão em uma das quadraturas e variâncias, isto é, gera um estado comprimido para o campo. No caso mais particular em que $\alpha = 0$ teremos o vácuo comprimido e para o caso em que $\alpha_1 = \alpha$ e $\alpha_2 = -\alpha$, com α finito teremos o caso em que o estado inicial é um estado de superposição do tipo

$$\rho_C = |\Psi_{campo}\rangle \langle \Psi_{campo}| = \frac{1}{N^2} \left[|\alpha\rangle \langle \alpha| + |-\alpha\rangle \langle -\alpha| + e^{i\phi_{ij}} (|\alpha\rangle \langle -\alpha| + |-\alpha\rangle \langle \alpha|) \right]. \quad (4.113)$$

A função de Wigner para a decoerência livre pode ser recobrada tornando $\kappa = 0$ e $\bar{n} = 0$, ou seja, na ausência de bombeamento e à temperatura zero [7],

$$W_{livre}(\zeta, t) = \frac{2}{\pi N^2} \left\{ \exp \left(-2 \left| \zeta - \alpha e^{-\gamma t/2} \right|^2 \right) + \exp \left(-2 \left| \zeta + \alpha e^{-\gamma t/2} \right|^2 \right) \right. \\ \left. + 2 e^{i\phi_{ij}} e^{-2|\alpha|^2} \cos \left[4 \text{Im} \left(\zeta \alpha^* e^{-\gamma t/2} \right) \right] \exp \left[-2 |\alpha|^2 (1 - e^{-\gamma t}) \right] \right\}. \quad (4.114)$$

Vemos que na presença de bombeamento paramétrico a expressão que governa o movimento da função de Wigner correspondente ao estado inicial é modificada consideravelmente em relação à da relaxação livre.

Aqui vamos considerar apenas a condição inicial em que o estado de superposição (4.51) previamente preparado na cavidade é bombeado parametricamente. Três regimes de bombeamento devem ser destacados: o regime crítico ($\kappa = \gamma/2$), subcrítico ($\kappa < \gamma/2$) e o supercrítico ($\kappa > \gamma/2$). Devido à sensibilidade à fase deste bombeamento, há a presença de um eixo de compressão situado na direção $\theta = \frac{\pi}{4}$, ocorrendo uma quebra de simetria em relação às condições iniciais dos estados $|\alpha\rangle$ e $|-\alpha\rangle$. Para $\alpha = e^{i\theta} |\alpha|$, trataremos os dois casos extremos para a definição das condições iniciais, isto é, para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e para $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Em nosso tratamento vamos considerar o reservatório termalizado à temperatura $T = 0$, ou seja, $\bar{n} = 0$ e nessa situação as funções (4.106) e (4.107) tornam-se

$$A = \frac{e^{-\gamma t} [\cosh(2\kappa t) + \frac{\gamma}{2\kappa} \sinh(2\kappa t)] - 1}{1 - \left(\frac{\gamma}{2\kappa}\right)^2}, \quad (4.115)$$

e

$$B = \frac{i}{2} e^{-2i\omega_0 t} \left\{ \frac{e^{-\gamma t} [\sinh(2\kappa t) + \frac{\gamma}{2\kappa} \cosh(2\kappa t)]}{\left(\frac{\gamma}{2\kappa}\right)^2 - 1} + \frac{i\kappa}{\gamma} \frac{1}{\left(\frac{2\kappa}{\gamma}\right)^2 - 1} \right\}. \quad (4.116)$$

4.4.3 Medidas do Estado do Campo e a Decoerência

Uma boa medida do comportamento do estado do campo com a evolução temporal pode ser obtida pelo cálculo da função entropia linear e pela função fidelidade. A função entropia linear (4.79) fornece uma medida do comportamento dos termos de coerência do campo e a função fidelidade, definida como a projeção do estado evoluído no estado original ou da superposição destes estados, ou seja,

$$F(t) = \text{Tr} [\rho_C(0) \cdot \rho_C(t)], \quad (4.117)$$

mede o quanto o estado evoluído se distingue do estado original.

Para a avaliação do estado evoluído dado em termos da representação de Wigner (4.112) a entropia linear é dada por

$$\begin{aligned} E(t) &= 1 - \int d^2\zeta W^2(\zeta, t) \\ &= 1 - \sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{1}{N^4\pi} \langle \alpha_j | \alpha_i \rangle \langle \alpha_l | \alpha_k \rangle \frac{1}{\sqrt{S}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{(A+1)}{S} (U_{ij} - U_{kl})(U_{ji}^* - U_{lk}^*) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i|B|}{S} [(U_{ji}^* - U_{lk}^*)^2 - (U_{ij} - U_{kl})^2] \right\}, \end{aligned} \quad (4.118)$$

e a fidelidade⁹ é dada por

$$F(t) = \text{Tr} [\rho_C(0) \cdot \rho_C(t)] = \int d^2\zeta W(\zeta, 0) W(\zeta, t), \quad (4.119)$$

com $W(\zeta, t)$ dado em (4.112). Nas Figs. 4.8(a)-4.8(c) [4.9(a)-4.9(c)] mostramos a variação da entropia e nas Figs. 4.10(a)-4.10(c) [4.11(a)-4.11(c)] da fidelidade para diferentes valores da razão $\frac{2\kappa}{\gamma}$ e com $|\alpha|^2 = 1, 5$ e 10 para (a), (b) e (c), respectivamente, com as condições iniciais $\theta = \frac{\pi}{4}$ [$\theta = -\frac{\pi}{4}$]. Nas

⁹A expressão explícita da fidelidade é omitida devido à sua extensão.

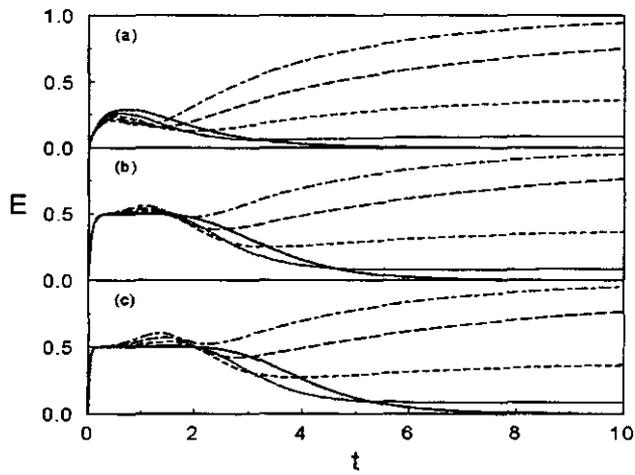


Figura 4.8: Entropia linear para o estado de superposição bombeado parametricamente, sob o efeito de dissipação, para $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$ e $\theta = \pi/4$. Em (a) $|\alpha|^2 = 1$, em (b) $|\alpha|^2 = 5$ e em (c) $|\alpha|^2 = 10$. O acréscimo da amplitude de bombeamento ($2\kappa/\gamma$) favorece a sustentação da coerência. $2\kappa/\gamma = 0$ (linha contínua); 0,2 (linha pontilhada); 0,4 (linha tracejada); 0,6 (linha de tracejado longo) e 0,8 (linha traço-pontilhada). Aqui e nas figuras seguintes, $t \equiv \gamma t$.

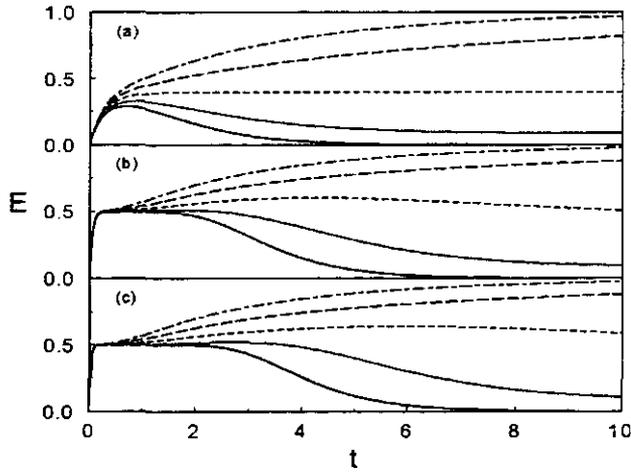


Figura 4.9: Entropia linear para o estado de superposição bombeado parametricamente, sob o efeito de dissipação, para $\theta = -\pi/4$. Em (a), $|\alpha|^2 = 1$, em (b), $|\alpha|^2 = 5$ e em (c), $|\alpha|^2 = 10$. O acréscimo da amplitude do bombeamento neste caso desfavorece a sustentação da coerência. A razão $2\kappa/\gamma$ segue a mesma relação da Fig. 4.8.

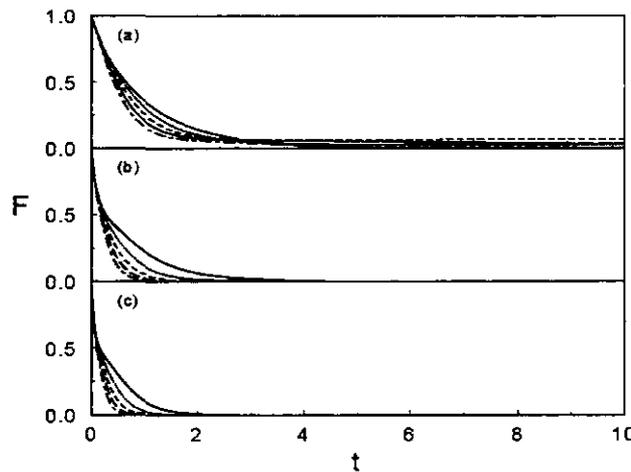


Figura 4.10: Medida de Fidelidade para o estado de superposição bombeado parametricamente, sob o efeito de dissipação, para $\theta = \pi/4$. Em (a), $|\alpha|^2 = 1$, em (b), $|\alpha|^2 = 5$ e em (c), $|\alpha|^2 = 10$. O acréscimo da amplitude de bombeamento ($2\kappa/\gamma$) desfavorece a fidelidade ao estado inicial. $2\kappa/\gamma = 0$ (linha contínua); 0,2 (linha pontilhada); 0,4 (linha tracejada); 0,6 (linha de tracejado longo) e 0,8 (linha traço-pontilhada).

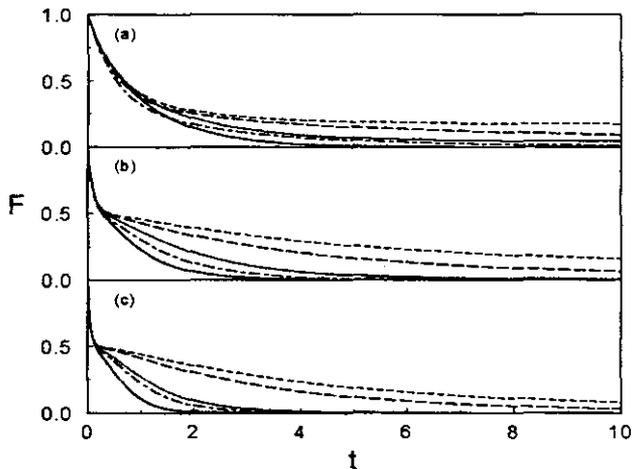


Figura 4.11: Medida de Fidelidade para o estado de superposição bombeado parametricamente, sob o efeito de dissipação, para $\theta = -\pi/4$. Em (a), $|\alpha|^2 = 1$, em (b), $|\alpha|^2 = 5$ e em (c), $|\alpha|^2 = 10$. Neste caso, o acréscimo da amplitude de bombeamento ($2\kappa/\gamma$) favorece a fidelidade ao estado inicial. A razão $2\kappa/\gamma$ segue a mesma relação da Fig. 4.10.

duas medidas fica evidente a presença de dois tempos característicos, o tempo de decoerência e o tempo de relaxação do estado. Nas figuras assumimos o tempo adimensional $t \equiv \gamma t$.

De forma geral, para as duas condições iniciais, o comportamento da entropia mostra que o estado de superposição decoere tornando-se uma mistura estatística e posteriormente um estado assintoticamente estável, que será puro só para intensidade de bombeamento nula. Com relação à coerência, fica evidente que a condição inicial em que $\theta = \frac{\pi}{4}$ é mais favorável à sua sustentação do que para $\theta = -\frac{\pi}{4}$. O aumento da intensidade do bombeamento faz com que a decoerência do estado seja retardada para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e acelerada para $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Tanto o retardo quanto a aceleração da decoerência é mais eficiente quanto menos intenso for o campo no interior da cavidade, como pode ser visto nas Figs. 4.8(a) e 4.9(a). Entretanto como o bombeamento continua atuando no sistema, quanto maior for sua intensidade mais rapidamente o estado do campo será levado a uma situação assintótica.

No caso mais favorável à sustentação da coerência (Fig. 4.8), vemos um ponto de inversão entorno de $t \approx 1 - 2$, para $|\alpha|^2 = 1, 5$ e 10 . Esta inversão reflete a competição entre o efeito dissipativo e ao acréscimo de energia devido ao bombeamento. Certamente a sensibilidade à fase do bombeamento paramétrico é capaz de suprimir os efeitos dissipativos por um tempo maior. Além de sustentar a energia do campo ainda permite que o tempo de decoerência seja retardado, sendo este processo mais

efetivo quanto maior for a intensidade do bombeamento.

Mesmo que a decoerência do estado seja retardada, deve ser mantido em mente que devido às características de amplificação das quadraturas e variâncias do campo do bombeamento paramétrico o estado inicial é continuamente alterado. A coerência que é sustentada por um tempo ligeiramente maior, não é mais do estado inicial, mas do estado de superposição continuamente comprimido. Isto pode ser melhor refletido pela fidelidade (Fig. 4.10(a)-4.10(c) e 4.11(a)-4.11(c)). O estado que inicialmente está numa superposição coerente fornecendo $F = Tr_C [\rho_C^2(0)] = 1$ é continuamente degradado com o acréscimo da intensidade do bombeamento. Vemos que no caso mais favorável à sustentação da coerência (Fig. 4.10(a)-4.10(c)), $\theta = \frac{\pi}{4}$, o estado é degradado mais rapidamente, pois o bombeamento comprime os elementos não diagonais igualmente aos elementos diagonais de ρ_C . Na condição inicial em que $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (Fig. 4.11(a)-4.11(c)) a fidelidade do estado passa por um máximo com a variação de κ . A situação ótima para a fidelidade é justamente para $\frac{2\kappa}{\gamma} = 1$, ou seja, para o regime crítico de bombeamento (não mostrado na figura).

Bem, vimos pela análise da entropia que a condição inicial em que $\theta = -\frac{\pi}{4}$ era a menos favorável à sustentação da coerência e por consequência do estado inicial, mas pela análise da fidelidade vemos que esta é a condição mais favorável para a manutenção do estado inicial por tempos prolongados. Geralmente a medida de fidelidade é associada à argumentação da coerência de estados. Aqui vemos um caso em que a aparente fidelidade ao estado inicial é mascarada, por serem os efeitos de deslocamento do estado (elementos diagonais de ρ_C), devido à dissipação, nulos no regime crítico. O estado evoluído, neste regime, quando projetado no estado inicial encontra pontos de superposição das respectivas distribuições, fornecendo a aparente fidelidade do estado evoluído ao estado inicial. Neste caso em que independentemente da relaxação do estado a própria evolução induzida pelo bombeamento produz uma distinção entre o estado original e o estado evoluído, a medida de fidelidade é desapropriada para a análise da degradação do estado. Assim propomos uma nova medida para verificação distinta de um fenômeno:

Definição 1: Fidelidade Dinâmica

A função fidelidade dinâmica é a fração de superposição de dois estados evoluídos segundo dinâmicas distintas, mas com mesmas condições iniciais, isto é,

$$\mathcal{F}(t) = \frac{|\langle \Psi^p(t) | \Psi(t) \rangle|^2}{\sqrt{|\langle \Psi^p(t) | \Psi^p(t) \rangle|^2 |\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle|^2}} = Tr [\rho^p(t) \rho(t)] = \int d^2\zeta W_B(\zeta, t) W(\zeta, t). \quad (4.120)$$

No nosso caso, o índice p designa o estado do campo sujeito ao bombeamento e $\rho(t)$ o mesmo estado evoluído sem a atuação do bombeamento. No caso em que $|\Psi(t)\rangle = |\Psi(0)\rangle$, ou seja, se o estado sem a

atuação do processo de interesse for estacionário, a fidelidade dinâmica torna-se a medida particular de fidelidade usual:

$$\mathcal{F}(t) = F(t) = |\langle \Psi^P(t) | \Psi(0) \rangle|^2 = \text{Tr} [\rho^P(t) \cdot \rho(0)].$$

A fidelidade dinâmica constitui uma generalização do conceito de medida comparativa entre estados quânticos e permite a observação seletiva do efeito de um processo na dinâmica destes estados.

Como aplicação, estamos interessados na medida comparativa do estado de superposição com a atuação do bombeamento na presença e na ausência de efeitos dissipativos. Isto porque se utilizarmos a expressão da função de Wigner (4.112) e tomarmos $\gamma = 0$, veremos que a despeito do caso de bombeamento linear que levava o estado assintoticamente a um estado coerente não mantendo a coerência original da superposição, agora a coerência do estado é mantida indefinidamente. Assim em uma cavidade ideal ($\gamma = 0$) o estado de superposição continuamente bombeado torna-se

$$\begin{aligned} W_B(\zeta, t) &= W(\zeta, t)|_{\gamma=0} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{2}{N^2\pi} \langle \alpha_j | \alpha_i \rangle \exp \left\{ -2 \cosh(2\kappa t) (V_{ij} - \zeta)(V_{ji}^* - \zeta^*) \right\} \\ &\times \exp \left\{ -i e^{-2i\omega_0 t} \sinh(2\kappa t) (V_{ji}^* - \zeta^*)^2 + i e^{2i\omega_0 t} \sinh(2\kappa t) (V_{ij} - \zeta)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.121)$$

onde

$$V_{ij} = e^{-i\omega_0 t} (\cosh \kappa t \alpha_i + -i \sinh \kappa t \alpha_j^*) \quad (4.122)$$

e

$$V_{ji}^* = e^{i\omega_0 t} (\cosh \kappa t \alpha_j^* + i \sinh \kappa t \alpha_i). \quad (4.123)$$

Sua representação para vários tempos com $|\alpha| = 5$, está contida nas Figs. 4.12, 4.13 e 4.14 para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e 4.15, 4.16 e 4.17 para $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Note nestes casos o distinto efeito de compressão no eixo $\theta = \pi/4$ - o estado de gato torna-se um *estado de gato comprimido*.

A fidelidade dinâmica para o estado bombeado é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= \int d^2\zeta W_B(\zeta, t) W(\zeta, t) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{1}{N^4} \langle \alpha_j | \alpha_i \rangle \langle \alpha_l | \alpha_k \rangle \frac{1}{\sqrt{R}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2(A+1 + \text{ch}(2\kappa t))}{R} (U_{ij} - V_{kl})(U_{ji}^* - V_{lk}^*) \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i(2|B| + \text{sh}(2\kappa t))}{R} [(U_{ij} - V_{kl})^2 - (U_{ji}^* - V_{lk}^*)^2] \right\}, \end{aligned} \quad (4.124)$$

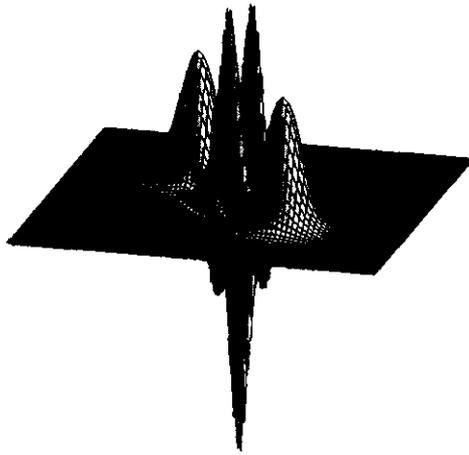


Figura 4.12: Função de distribuição de Wigner para o estado inicial de superposição do campo em cavidade ideal (sem dissipação) sob o efeito de bombeamento paramétrico, para $|\alpha|^2 = 5$ e $\theta = \pi/4$.

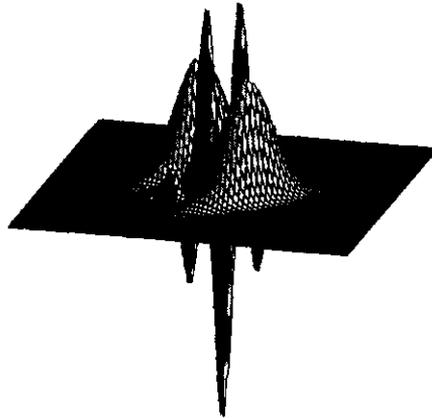


Figura 4.13: Função de distribuição de Wigner para o estado de superposição do campo em cavidade ideal (sem dissipação) sob o efeito de bombeamento paramétrico, para $|\alpha|^2 = 5$ e $\theta = \pi/4$ em $\gamma t = 1/2$.

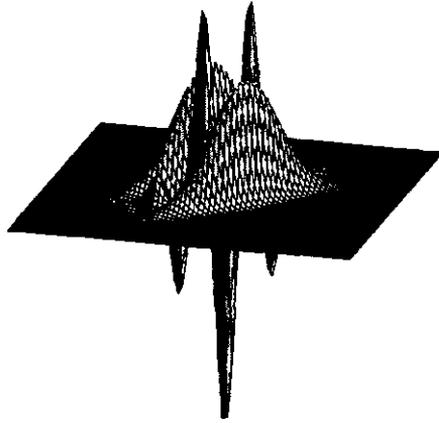


Figura 4.14: Função de distribuição de Wigner para o estado de superposição do campo em cavidade ideal (sem dissipação) sob o efeito de bombeamento paramétrico, para $|\alpha|^2 = 5$ e $\theta = \pi/4$ em $\gamma t = 2$.

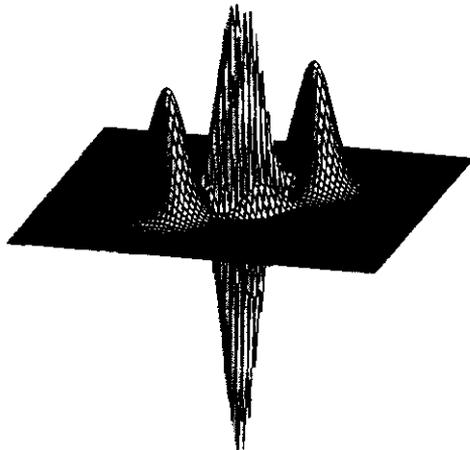


Figura 4.15: Função de distribuição de Wigner para o estado inicial de superposição do campo em cavidade ideal (sem dissipação) sob o efeito de bombeamento paramétrico, para $|\alpha|^2 = 5$ e $\theta = -\pi/4$.

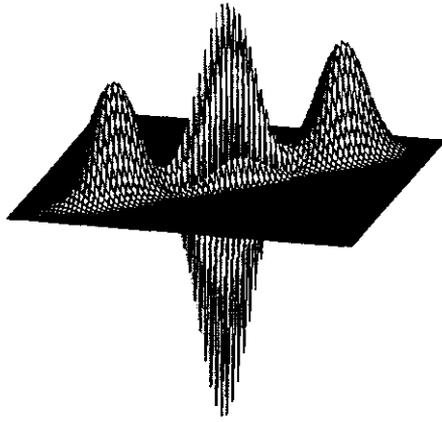


Figura 4.16: Função de distribuição de Wigner para o estado de superposição do campo em cavidade ideal (sem dissipação) sob o efeito de bombeamento paramétrico, para $|\alpha|^2 = 5$ e $\theta = -\pi/4$ em $\gamma t = 1/2$.

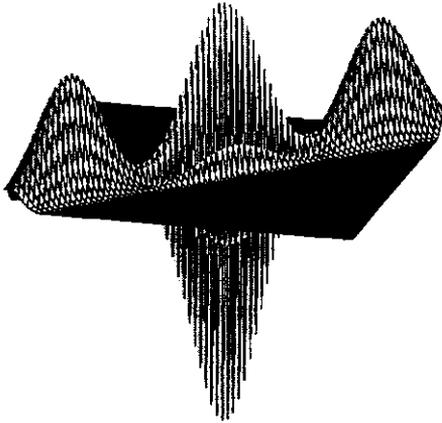


Figura 4.17: Função de distribuição de Wigner para o estado de superposição do campo em cavidade ideal (sem dissipação) sob o efeito de bombeamento paramétrico, para $|\alpha|^2 = 5$ e $\theta = -\pi/4$ em $\gamma t = 2$.

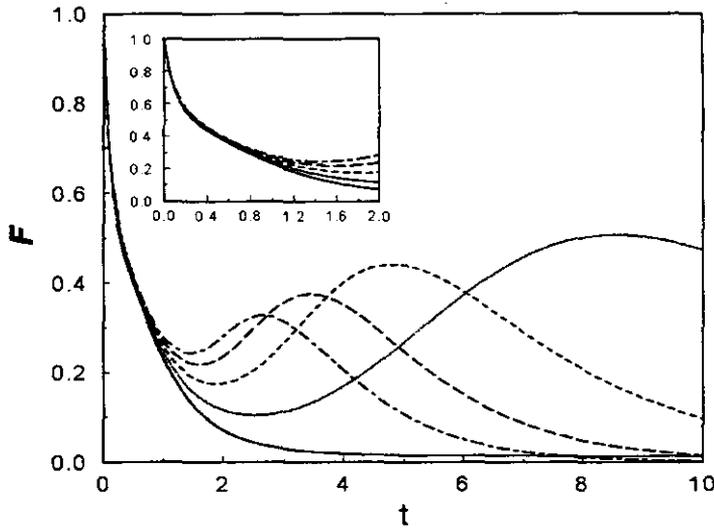


Figura 4.18: Medida de Fidelidade Dinâmica para o estado de superposição do campo na cavidade dissipativa C , sob a ação de bombeamento paramétrico para $|\alpha|^2 = 5$ e $\theta = \pi/4$. Evidencia-se o favorecimento à sustentação da coerência dos estado com o acréscimo da intensidade de bombeamento. $2\kappa/\gamma = 0$ (linha contínua); 0,2 (linha pontilhada); 0,4 (linha tracejada); 0,6 (linha de tracejado longo) e 0,8 (linha traço-pontilhada).

onde $V_{kl} = U_{kl}|_{\gamma=0}$ e

$$R = 1 + S + 2(A + 1) \operatorname{ch}(2\kappa t) - 4|B| \operatorname{sh}(2\kappa t). \quad (4.125)$$

Aqui $W(\zeta, t) = W_{BD}(\zeta, t) \equiv$ função de distribuição de Wigner considerando efeitos dissipativos e de bombeamento do estado inicial.

Nas Figs. 4.18 e 4.19 analisamos a variação da fidelidade dinâmica, para $|\alpha|^2 = 5$, com a razão $\frac{\gamma}{2\kappa}$ para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = -\frac{\pi}{4}$, respectivamente. Fica evidente que a condição inicial $\theta = \frac{\pi}{4}$ é mais propícia para a sustentação da coerência ao passo que a condição $\theta = -\frac{\pi}{4}$, é a menos propícia para a coerência do estado, como esperávamos. Para tempos pequenos, quanto maior for a razão $\frac{\gamma}{2\kappa}$, mais lentamente ocorrerá a decoerência do estado. O fato de que o estado evoluído tenha sempre uma difusão faz com que a superposição (*overlap*) para $\theta = \frac{\pi}{4}$ aumente em tempos posteriores, não sendo também reflexo de restituição da coerência do estado.

O regime crítico de bombeamento é mais interessante porque há compensação exata da taxa de perda de energia devido à dissipação. Com $\alpha = e^{i\theta} |\alpha|$, para $\theta = \frac{\pi}{4}$, a função de Wigner, Eq. (4.112),

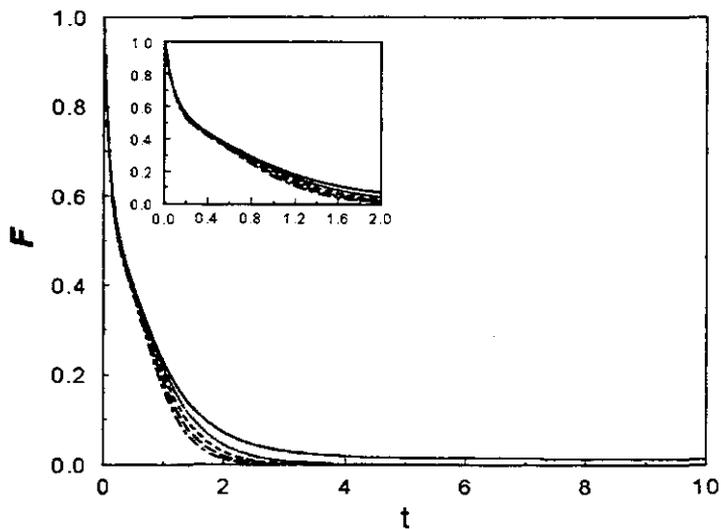


Figura 4.19: Medida de Fidelidade Dinâmica para o estado de superposição do campo na cavidade dissipativa C, sob a ação de bombeamento paramétrico para $|\alpha|^2 = 5$ e $\theta = -\pi/4$. O acréscimo da intensidade de bombeamento desfavorece a sustentação da coerência do estado inicial. A razão $2\kappa/\gamma$ segue a mesma relação da Fig. 4.18.

assume a seguinte forma

$$\begin{aligned}
W(\zeta, t) = & \left\{ \exp \left[-\frac{2(A+1)}{S} |\zeta - e^{-\gamma t} \alpha|^2 - \frac{4|B|}{S} \text{Im}(\zeta - e^{-\gamma t} \alpha)^2 \right] \right. \\
& + \exp \left[-\frac{2(A+1)}{S} |\zeta + e^{-\gamma t} \alpha|^2 - \frac{4|B|}{S} \text{Im}(\zeta + e^{-\gamma t} \alpha)^2 \right] \\
& - \exp \left[-2|\zeta|^2 \frac{A+1+2|B|\text{sen}(2\varphi)}{(1+A)^2-4|B|^2} \right] \cos \left[\frac{4|\zeta||\alpha|(\text{sen}(\varphi)-\cos(\varphi))}{\sqrt{2}(A+1+2|B|)} \right] \\
& \left. \times 2 \exp \left(-2|\alpha|^2 \frac{\gamma t}{1+\gamma t} \right) \right\} \frac{2}{N^2\pi} \frac{1}{\sqrt{S}}
\end{aligned} \tag{4.126}$$

e para $\theta = -\frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned}
W(\zeta, t) = & \left\{ \exp \left[-\frac{2(A+1)}{S} |\zeta - \alpha|^2 - \frac{4|B|}{S} \text{Im}(\zeta - \alpha)^2 \right] \right. \\
& + \exp \left[-\frac{2(A+1)}{S} |\zeta + \alpha|^2 - \frac{4|B|}{S} \text{Im}(\zeta + \alpha)^2 \right] \\
& - \exp \left[-2|\zeta|^2 \frac{A+1+2|B|\text{sen}(2\varphi)}{(1+A)^2-4|B|^2} \right] \cos \left[\frac{4e^{-\gamma t}|\zeta||\alpha|(\text{sen}(\varphi)-\cos(\varphi))}{\sqrt{2}(A+1+2|B|)} \right] \\
& \left. \times 2 \exp \left(-2|\alpha|^2 \frac{1+\gamma t - e^{-2\gamma t}}{1+\gamma t} \right) \right\} \frac{2}{N^2\pi} \frac{1}{\sqrt{S}},
\end{aligned} \tag{4.127}$$

onde as funções A , B e S agora são

$$A + 1 = \frac{\gamma t}{2} + \frac{1}{4} (3 + e^{-2\gamma t}), \tag{4.128}$$

$$B = -\frac{i}{4} \left[\gamma t + \frac{1}{2} (1 - e^{-2\gamma t}) \right], \tag{4.129}$$

$$S = \frac{1}{2} (1 + \gamma t) (1 + e^{-2\gamma t}) \tag{4.130}$$

e $\zeta = |\zeta| e^{i\varphi}$.

A representação gráfica da evolução da função de distribuição de Wigner do estado para $|\alpha|^2 = 5$ pode ser vista nas Figs. 4.20, 4.21 e 4.22 para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e Figs. 4.23, 4.24 e 4.25 para $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Para $\theta = \frac{\pi}{4}$ os picos gaussianos são comprimidos tanto na quadratura quanto na variância e se aproximam de uma legítima mistura de estados comprimidos. Já para $\theta = -\frac{\pi}{4}$, enquanto a compressão dá-se no eixo $\theta = \frac{\pi}{4}$ os picos ficam estáveis em suas posições originais (não há amplificação de quadraturas) e apenas sofrem amplificação das variâncias (compressão das quadraturas). Esta situação em que os termos de coerência de fase são suprimidos é interessante por permitir que um estado novo seja gerado na cavidade. Este é um estado de *gato clássico*, uma legítima mistura dos estados comprimidos $S_c |\alpha\rangle$ e $S_c |-\alpha\rangle$, onde S_c é o operador de compressão. Um tema de estudo futuro é o problema em que este estado for medido pela passagem de um segundo átomo com interação dispersiva com o campo, como descrito para o bombeamento linear, levando novamente à situação em que o átomo introduz a

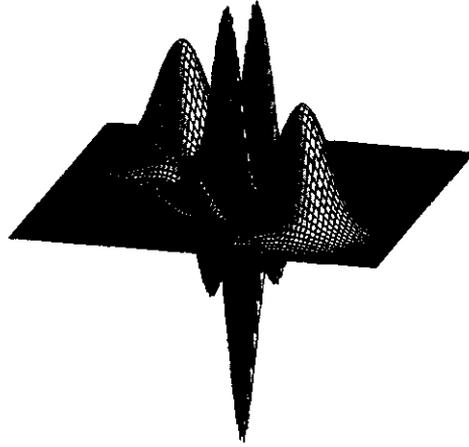


Figura 4.20: Função de distribuição de Wigner para o estado inicial de superposição do campo em cavidade dissipativa sob o efeito de bombeamento paramétrico para $|\alpha|^2 = 5$ e $\theta = \pi/4$.

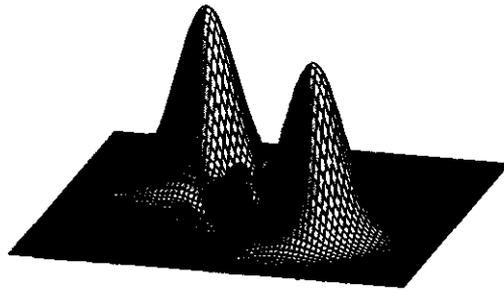


Figura 4.21: Função de distribuição de Wigner para o estado de superposição do campo em cavidade dissipativa sob o efeito de bombeamento paramétrico para $|\alpha|^2 = 5$, $\theta = \pi/4$ e $\gamma t = 1/5$. O bombeamento sustenta a coerência do estado de superposição por um tempo superior ao tempo de decoerência livre.

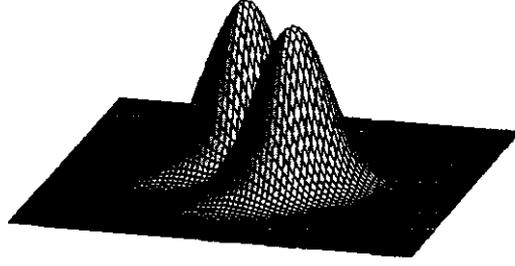


Figura 4.22: Função de distribuição de Wigner para o estado de superposição do campo em cavidade dissipativa sob o efeito de bombeamento paramétrico para $|\alpha|^2 = 5$, $\theta = \pi/4$ e $\gamma t = 1$. O estado final não é mais um estado coerente, mas uma mistura de estados comprimidos.

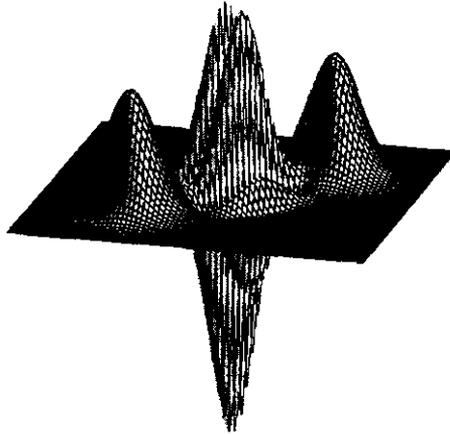


Figura 4.23: Função de distribuição de Wigner para o estado inicial de superposição do campo em cavidade dissipativa sob o efeito de bombeamento paramétrico para $|\alpha|^2 = 5$ e $\theta = -\pi/4$.

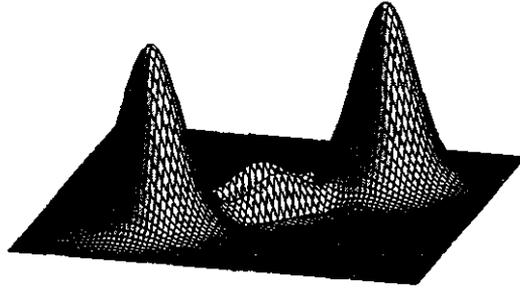


Figura 4.24: Função de distribuição de Wigner para o estado de superposição do campo em cavidade dissipativa sob o efeito de bombeamento paramétrico para $|\alpha|^2 = 5$, $\theta = -\pi/4$ e $\gamma t = 1/5$. O bombeamento leva à decoerência do estado de superposição em um tempo ligeiramente inferior ao tempo de decoerência livre.

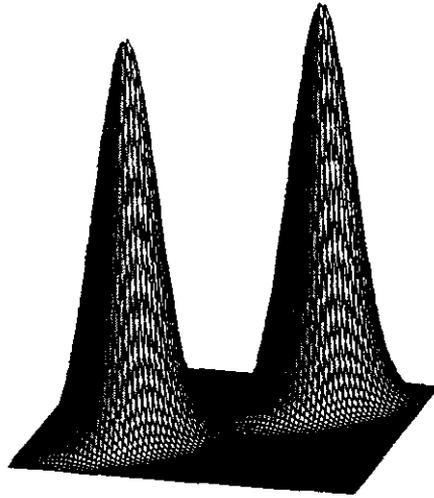


Figura 4.25: Função de distribuição de Wigner para o estado de superposição do campo em cavidade dissipativa sob o efeito de bombeamento paramétrico para $|\alpha|^2 = 5$, $\theta = -\pi/4$ e $\gamma t = 1$. Os picos gaussianos comprimidos na direção $\theta = \pi/4$ ficam estáveis na situação crítica de bombeamento.

coerência de fase, mas agora de um estado totalmente diferente do inicial e assim podendo-se gerar um estado de gato de Schrödinger de estados comprimidos.

4.5 Conclusões

Neste capítulo estudamos o efeito de dissipação sobre estados do campo, em cavidades, continuamente bombeados. Consideramos as duas situações, em que o bombeamento é linear e paramétrico, advindos de um processo de um e dois fótons, respectivamente. Descrevemos como, no experimento envolvendo uma cavidade supercondutora de alto fator de qualidade e o arranjo de Ramsey, são gerados e medidos os estados do campo por intermédio da interação dispersiva de átomos de Rydberg com o campo na cavidade supercondutora. Como fatos conclusivos podemos enunciar:

O bombeamento linear induz assintoticamente o não equilíbrio entre a energia do campo e do reservatório térmico, sendo que o estado estacionário, de equilíbrio do campo na cavidade continuamente bombeada, será sempre coerente, independentemente de seu estado inicial. Apesar de reestabelecer a energia do campo perdida para as paredes da cavidade (reservatório), a insensibilidade à fase do bombeamento linear não restitui a coerência de estados de superposição (*gatos de Schrödinger*) construídos na cavidade. Mostramos que o tempo de decoerência de estados de superposição não são modificados pelo bombeamento linear. No entanto, a passagem consecutiva de átomos de Rydberg pela cavidade pode restituir a coerência inicial. Em contraposição à proposta de Vitali *et al.* [26], de realimentação estroboscópica, para o controle da coerência de estados de superposição, propomos que a energia do estado pode ser sustentada pelo bombeamento linear, enquanto a coerência é restituída quando o átomo “mede” o estado do campo na cavidade.

O bombeamento paramétrico, reconhecido por introduzir amplificações sensíveis à fase do campo, pode permitir a sustentação da coerência de estados de superposição por tempos posteriores ao tempo de decoerência livre. Neste caso, três regimes de bombeamento foram identificados: regime crítico, super-crítico e sub-crítico. Devido à sensibilidade à fase do campo, uma quebra de simetria com relação às condições iniciais é estabelecida, sendo os casos em que $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ com $\theta = \pi/4$ e $\theta = -\pi/4$, os exemplos extremos estudados. Para $\theta = \pi/4$ evidenciamos a eficiência do bombeamento paramétrico para a sustentação da coerência de estados de gato de Schrödinger. Nesta situação o estado assintótico não é mais um estado coerente puro, como no caso de bombeamento linear, mas um mistura de estados comprimidos. Enquanto a coerência é sustentada por um tempo superior ao tempo de decoerência livre, o estado é continuamente comprimido. Devido à contínua compressão do estado, a medida de fidelidade é desapropriada para a evidência de sustentação da coerência do estado. É proposto então, a medida de *fidelidade dinâmica*, definida como a superposição (*overlap*) do estado evoluído com o estado evoluído

sem os efeitos da dissipação. Aqui evidenciamos a condição inicial $\theta = \pi/4$ como sendo a mais favorável à sustentação da coerência do estado de superposição. No regime crítico de bombeamento, interessante por compensar exatamente a perda de energia do campo para o reservatório, para a condição inicial $\theta = -\pi/4$, não ocorre a difusão do estado, mas apenas a supressão de sua coerência e compressão das variâncias das quadraturas, definindo o estado de *gato clássico*, uma legítima mistura de estados comprimidos.

Bibliografia

- [1] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935); **23** 823 (1935); **23**, 844 (1935). Traduzido para o inglês por J. D. Trimmer, *Proc. Am. Phys. Soc.* **124**, 3235 (1980).
- [2] J. A. Wheeler e W. H. Zurek, eds., *Quantum Theory and Measurements*, Princeton U. P., Princeton, N. J. (1983).
- [3] *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, editado por J. von Neumann (Springer-Verlag, Berlin, 1932).
- [4] E. P. Wigner, *Am. J. Phys.* **31**, 6 (1963).
- [5] W. H. Zurek, *Physics Today* **44**(10), 36 (1991); *Phys. Rev. D* **24**, 1516 (1981); **26**, 1862 (1982).
- [6] J. M. Raimond, M. Brune e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1964 (1997).
- [7] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich e N. Zagury, *Phys. Rev. A* **45**, 5193 (1992).
- [8] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. A* **53**, 1295 (1996).
- [9] A. Ekert, em *Proc. ICAP '94*. editado por S. Smith, C. Wieman e D. Wineland, 450, AIP, NY (1995).
- [10] A. Ekert e R. Josza, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 733 (1996).
- [11] P. W. Shor, em *Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science, Los Amigos, CA* (IEEE Computer Society press, NY (1994).
- [12] S. Haroche e J. M. Raimond, em *Cavity Quantum Electrodynamics*, editado por P. Berman (Academic Press, NY (1994).
- [13] J. F. Poyatos *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4728 (1996).
- [14] B. E. Kane, *Nature* **393**, 133; D. P. DiVincenzo, 113; I. L. Chuang *et al.*, 143 (14 may 1998).

- [15] P. Nussenzveig, *Mesures de Champs au Niveau du Photon par Interferometrie Atomique*, tese de doutoramento na École Normale Supérieure, Paris (1994) (não publicado).
- [16] A. Einstein, B. Podolsky e W. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [17] D. Vitali, P. Tombesi e G. J. Milburn, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2442 (1997).
- [18] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, *Physica (Utrecht) A* **121**, 587 (1983); *Phys. Rev. A* **31**, 1057 (1985).
- [19] W. H. Zurek, em *Quantum Optics, Experimental Gravitation and Measurement Theory*, Eds. P. Maystre e M. O. Scully, Nato ASI series **94**, (Plenum press publ., New York, 1982).
- [20] P. Bocchieri e A. Loinger, *Phys. Rev.* **107**, 337 (1957).
- [21] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, (John Wiley & Sons, USA, 1990).
- [22] M. H. Moussa, S. S. Mizrahi e A. O. Caldeira, *Phys. Lett. A* **221**, 145 (1996).
- [23] B. R. Mollow e R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **160**, 1076 (1967).
- [24] D. F. Walls e G. J. Milburn, *Quantum Optics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [25] E. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [26] D. Vitali e P. Tombesi, *Decoherence control for optical qubits*, Los Alamos preprint *quant-ph/9802033*, 12 Feb. (1998).

Capítulo 5

Conclusões Gerais

A Mecânica Quântica em sua formulação original abrange apenas sistemas fechados, sendo que o tratamento de sistemas que trocam energia com graus de liberdade não considerados nas equações de movimento, requerem considerações específicas a cada problema. O tratamento de sistemas quânticos abertos não é apenas um passo tomado na generalização da teoria quântica, por serem em verdade todos os sistemas, a menos do Universo, abertos; mas um passo necessário para a explicação de certos fenômenos advindos de efeitos dissipativos no sistema quântico em questão, bem como no fornecimento de justificativas físicas que corroborem a interpretação de Copenhagen da Mecânica Quântica. O papel da interação entre sistemas quânticos e seu meio envolvente na transição das leis quânticas, embasadas no princípio de superposição, para a realidade clássica familiar, onde este princípio é aparentemente violado, tem se tornado consensual [2, 13]. Esta posição é favorecida pelo número crescente de experimentos sofisticados, que permitem a inferência da existência de uma fronteira entre os regimes quânticos e clássicos, como nunca antes possível. A idéia chave para a compreensão desta transição é o processo de *decoerência*, pelo qual a coerência quântica é dinamicamente suprimida pelo contínuo fortalecimento da correlação entre o sistema e seu meio envolvente. O resultado de tal correlação é a evanescência rápida de superposições de estados distintos do sistema, implicando a seleção negativa (*superseleção*) da infinidade de estados do espaço de Hilbert do sistema, levando à emergência de um conjunto de estados preferenciais que se mantêm inalterados pelos efeitos do meio. Assim, em um processo de medida quântica por um aparato clássico, o papel da superseleção é prevenir o ponteiro do aparato de medida de existir em uma superposição de estados correspondentes a resultados distintos.

Nós expomos, nesta tese, alguns aspectos dinâmicos de sistemas quânticos abertos. Em particular, no capítulo 2 consideramos os efeitos dissipativos sobre a dinâmica de uma partícula quântica aprisionada por campos oscilantes; no capítulo 3 consideramos o processo de transferência de informação entre

sistemas quânticos interagentes e finalmente, no capítulo 4 consideramos os efeitos de bombeamento em estados de superposição (gatos de Schrödinger) do campo em uma cavidade não-ideal (sujeita à dissipação).

Como conclusões gerais podemos enunciar que, para o capítulo 2, a dissipação estabiliza o movimento da partícula aprisionada, mas degrada o fenômeno de compressão das variâncias das quadraturas. Devido à dependência temporal do campo, as equações que governam o movimento de uma partícula quântica são do tipo Mathieu-Hill. Regiões de estabilidade e instabilidade surgem alternadamente em função dos parâmetros envolvidos, sugerindo a possibilidade ou não de aprisionamento. Como tema de um possível trabalho futuro, seria interessante investigar a existência de invariantes do movimento, mesmo nesse regime dissipativo. Glauber verificou a presença de invariantes (na ausência de dissipação) que determinam que o estado de movimento da partícula é análogo ao estado coerente, ocorrendo compressão alternada nas quadraturas. A existência de invariantes pode determinar o estado assintótico da partícula aprisionada no regime dissipativo. Outro ponto interessante seria a análise dos efeitos de memória na força estocástica, advindos da consideração de processos não-markovianos. Até o presente momento este projeto culminou na publicação de dois artigos [14, 15].

No capítulo 3, como exemplo de sistemas quânticos interagentes, consideramos dois modos de radiação acoplados, em um meio não-linear, por um outro campo intenso. Concluímos que a resposta não-linear de certos dielétricos permite a transferência de energia e **informação** entre campos em diferentes frequências. Assim, ocorre, além da recorrência ao estado inicial do sistema conjunto, a troca de identidade entre os estados dos subsistemas constituintes (modos A e B). Compreendemos subsistemas interagentes como mútuos medidores e sistemas a serem medidos, pois ao interagir, cada subsistema obtém informação sobre o estado do outro subsistema. A troca de identidade entre os modos ocorre no *tempo de máxima transferência de informação*, em que cada modo faz uma medida total do outro. Os estados dos subsistemas, inicialmente puros, são levados a misturas estatísticas no tempo de *máxima correlação* (máximo emaranhamento) dos estados de cada subsistema. Em decorrência da característica conservativa da interação entre os modos, há uma situação em que ocorre transferência de informação entre os modos sem que suas energias se modifiquem. Esta é a situação em que as energias de cada modo são quantidades conservadas. Apesar da energia constante dos modos, ocorrem os fenômenos de recorrência, decoerência e troca de identidade, um resultado bastante interessante. Resta, como um objeto de futura pesquisa, a consideração de estados iniciais genéricos dos modos, para a análise de processos que sejam ou não características intrínsecas de estados coerentes.

No capítulo 4, consideramos a geração e medição de estados do campo bombeado em cavidades

supercondutoras não-ideais, através da interação dispersiva com átomos. O bombeamento linear do campo na cavidade permite que um estado coerente estacionário seja estabelecido. A ação conjunta do bombeamento linear e de átomos com interação dispersiva com o campo, permite a sustentação de estados de superposição (gatos de Schrödinger) em períodos T na cavidade, recobrando a energia dissipada e recobrando a coerência do estado (informação disponível inicial). A sensibilidade à fase do bombeamento paramétrico permite que a coerência do estado de superposição gerado na cavidade seja sustentado por tempos superiores ao tempo de decoerência na ausência de bombeamento, sendo no entanto dependente das condições iniciais da fase do estado. encontramos uma situação de bombeamento (crítica) que permite a realimentação da energia do campo à mesma taxa de sua perda para as paredes da cavidade. Nesta situação, uma legítima mistura de estados comprimidos é estabelecida para o campo. Um ponto interessante a ser considerado é a reconstrução da coerência deste estado modificado, pela interação dispersiva do campo na cavidade com átomos consecutivos.

Apêndice A

Interação Ressonante entre um Átomo de Dois Níveis e um Campo de Radiação Monomodal

Vamos considerar a interação entre um campo de radiação e um átomo com apenas um elétron. A hamiltoniana que descreve a interação entre um campo eletromagnético e um elétron é dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + eV(\mathbf{r}) + \mathcal{H}_C \quad (\text{A.1})$$

onde $V(\mathbf{r})$ o potencial de Coulomb, \mathbf{p} é o momentum do elétron e $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ é o potencial vetorial do campo eletromagnético. \mathcal{H}_C é o hamiltoniano do campo livre. Com a quantização do campo eletrônico, o hamiltoniano é então dado por

$$H = H_e + H_C + H_I, \quad (\text{A.2})$$

sendo

$$H_e = \int d^3r \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + eV(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}), \quad (\text{A.3})$$

o hamiltoniano de movimento “livre” eletrônico e

$$H_I = -\frac{1}{2m} \int d^3r \Psi^\dagger(\mathbf{r}) (2e \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + e^2 \mathbf{A}^2) \Psi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.4})$$

o termo de interação do elétron com o campo. Desconsiderando o termo \mathbf{A}^2 que tem contribuição desprezível para processos de um fóton, H_I escreve-se

$$H_I = \int d^3r \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \right) \Psi(\mathbf{r}). \quad (\text{A.5})$$

Expandindo os operadores de campo eletrônico $\Psi(\mathbf{r})$ como uma superposição de funções de ondas

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_j b_j \phi_j(\mathbf{r}) \quad (\text{A.6})$$

e considerando a expansão do potencial vetorial em termos de um conjunto discreto de funções ortogonais [16]

$$\mathbf{A} = \sum_k a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}, \quad (\text{A.7})$$

podemos expressar o hamiltoniano como

$$H_e = \sum_j E_j b_j^\dagger b_j, \quad (\text{A.8})$$

$$H_I = \hbar \sum_{j,k,\lambda} b_j^\dagger b_k \left(g_{\lambda j k} a_\lambda + g_{\lambda j k}^* a_\lambda^\dagger \right), \quad (\text{A.9})$$

onde a_λ é o operador de destruição para o modo λ do campo. Os coeficientes g são dados por

$$g_{\lambda j k} = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda \epsilon_0}} \int d^3 r \phi_j^*(\mathbf{r}) [u_\lambda(\mathbf{r}) \mathbf{p}] \phi_k(\mathbf{r}), \quad (\text{A.10})$$

sendo \mathbf{u}_λ funções para os modos λ do campo e a soma sobre λ realizada sobre todos os vetores e polarizações do campo. Na *aproximação de dipolo*, $u_\lambda(\mathbf{r}) \approx u_\lambda(\mathbf{r}_0)$, e

$$\int d^3 r \phi_j^*(\mathbf{r}) \mathbf{p} \phi_k(\mathbf{r}) = im \nu_{jl} \int d^3 r \phi_j^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \phi_k(\mathbf{r}), \quad (\text{A.11})$$

com

$$\nu_{jl} = \frac{1}{\hbar} (E_j - E_l) \quad (\text{A.12})$$

sendo que o hamiltoniano total pode ser reescrito como

$$H = H_e + H_C + H_I, \quad (\text{A.13})$$

onde

$$H_e = \sum_j E_j b_j^\dagger b_j, \quad (\text{A.14})$$

$$H_C = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k, \quad (\text{A.15})$$

e

$$H_I = \hbar \sum_{jk\lambda} b_j^\dagger b_k g_{\lambda j k} (a_\lambda + a_\lambda^\dagger), \quad (\text{A.16})$$

onde a fase de $u_\lambda(\mathbf{r}_0)$ é escolhida de forma que $g_{\lambda j k}$ seja real. Na representação de interação o hamiltoniano torna-se

$$V_I = \hbar \sum_{jk\lambda} g_{\lambda j k} \left(a_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} + a_\lambda^\dagger e^{i\omega_\lambda t} \right) b_j^\dagger b_k e^{i\nu_{jk} t}. \quad (\text{A.17})$$

Em (A.17) vemos termos $e^{i(\omega_\lambda + \nu_{jk})t}$ e $e^{-i(\omega_\lambda - \nu_{jk})t}$. Quando $\omega_\lambda \approx \nu_{jk}$ o primeiro destes termos é rapidamente oscilante no tempo ($e^{2i\omega_\lambda t}$), podendo ser desprezado em relação aos termos próximos à ressonância, correspondendo à chamada *aproximação de onda girante*. Assim para um átomo de dois níveis o hamiltoniano na representação de interação é dado por

$$V_I = \hbar \sum_{\lambda} g_{\lambda} b_1 b_2^{\dagger} a_{\lambda} e^{-i(\omega_{\lambda} - \nu_{21})t} + h.c., \quad (\text{A.18})$$

sendo

$$g_{\lambda} = -i \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\lambda}\epsilon_0}} \nu_{21} u_{\lambda}(\mathbf{r}_0) d_{12}, \quad (\text{A.19})$$

com

$$d_{12} = e \int d^3r \phi_2^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \phi_1(\mathbf{r}), \quad (\text{A.20})$$

o momento de dipolo para a transição $1 \rightarrow 2$ e \mathbf{r}_0 é a coordenada do centro de massa do átomo.

Com o auxílio dos operadores de pseudo-spin de Pauli,

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b_2^{\dagger} b_1, \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b_1^{\dagger} b_2, \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{2} (b_2^{\dagger} b_2 - b_1^{\dagger} b_1), \quad (\text{A.23})$$

podemos reescrever o hamiltoniano total da interação de um átomo de dois níveis com um campo de radiação como

$$H = H_0 + H_I \quad (\text{A.24})$$

com

$$H_0 = \hbar \sum_k \omega_k a_k^{\dagger} a_k + \hbar\omega_0 \sigma_z, \quad (\text{A.25})$$

e

$$H_I = \hbar \sum_k (g_{\lambda} a_{\lambda} \sigma^+ + g_{\lambda}^* a_{\lambda}^{\dagger} \sigma^-). \quad (\text{A.26})$$

Para um campo monomodal em ressonância com a transição atômica,

$$H_0 = \hbar\omega a^{\dagger} a + \hbar\omega \sigma_z, \quad (\text{A.27})$$

e

$$H_I = \hbar g (a \sigma^+ + a^{\dagger} \sigma^-), \quad (\text{A.28})$$

onde tomamos g real. Esta é a forma mais simples de interação átomo-campo conhecida como *modelo de Jaynes-Cummings* [17].

Na representação de interação o novo hamiltoniano é dada por

$$V_I = \hbar g (a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-), \quad (\text{A.29})$$

e o operador unitário de evolução do estado conjunto da *átomo+campo*, $U(t) = e^{-iV_I t/\hbar}$ é dado, após manipulação algébrica [18], por

$$U(t) = \cos(gt\sqrt{a^\dagger a + 1}) |e\rangle \langle e| + \cos(gt\sqrt{a^\dagger a}) |g\rangle \langle g| - i \frac{\text{sen}(gt\sqrt{a^\dagger a + 1})}{\sqrt{a^\dagger a + 1}} a |e\rangle \langle g| - ia^\dagger \frac{\text{sen}(gt\sqrt{a^\dagger a + 1})}{\sqrt{a^\dagger a + 1}} |g\rangle \langle e|. \quad (\text{A.30})$$

O vetor de estado conjunto é dado por

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle. \quad (\text{A.31})$$

Supondo que inicialmente o átomo esteja no estado excitado e que a cavidade esteja em uma superposição de estados de número, tal que

$$|\psi(0)\rangle = |e\rangle_a \otimes \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} |e, n\rangle, \quad (\text{A.32})$$

se substituirmos (A.32) e (A.30) em (A.31) obteremos o estado conjunto evoluído

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n [\cos(gt\sqrt{n+1}) |e, n\rangle - i \text{sen}(gt\sqrt{n+1}) |g, n+1\rangle]. \quad (\text{A.33})$$

Para campos intensos, $n+1 \approx n$ e (??) escreve-se

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n [\cos(gt\sqrt{n}) |e, n\rangle - i \text{sen}(gt\sqrt{n}) |g, n\rangle]. \quad (\text{A.34})$$

Para $\tau = \frac{\pi}{4g\sqrt{n}}$,

$$\begin{aligned} |\psi(\tau)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2}} [|e, n\rangle - i |g, n\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|e\rangle + e^{-i\pi/2} |g\rangle] \otimes \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

correspondendo à situação nas cavidades de *Ramsey*. A interação ressonante entre um átomo e um campo de radiação intenso permite que o estado atômico sofra rotação com a evolução temporal. A fase adicional $e^{-i\pi/2}$ no estado $|g\rangle$ é absorvida se em nossos cálculos, fizermos g puramente imaginário.

Apêndice B

Interação Dispersiva entre Átomos e Campo de Radiação

A interação dispersiva entre átomos e campos de radiação no interior de cavidades envolve três níveis atômicos dispostos na configuração em cascata como mostrado na Fig. A1. As transições $|i\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |g\rangle$ são permitidas, enquanto a transição $|i\rangle \rightarrow |g\rangle$ é proibida. O modo da cavidade de frequência ν é de-sintonizado da transição $|i\rangle \rightarrow |e\rangle$ por $\Delta = \nu - \omega_{ie}$, que suporemos como sendo pequeno em comparação com ω_{ie} e todas as outras transições do espectro atômico, particularmente a transição $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$. Como consequência, somente os níveis $|i\rangle$ e $|e\rangle$ são afetados pelo acoplamento não-ressonante átomo-campo e o nível $|g\rangle$ permanece inalterado. A interação do átomo com o campo é descrita pelo hamiltoniano

$$H = \frac{\hbar\omega_{ie}}{2}\sigma_z^{ie} + \hbar\nu a^\dagger a + \hbar g (a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-), \quad (\text{B.1})$$

onde consideramos a interação do campo à frequência ν com os níveis $|i\rangle$ e $|e\rangle$ somente e desprezamos a interação com o nível altamente desintonizado $|g\rangle$. O hamiltoniano H pode ser diagonalizado para a obtenção dos estados vestidos átomo-campo

$$|+\rangle = \cos\theta_n |i, n-1\rangle - \text{sen}\theta_n |e, n\rangle, \quad (\text{B.2})$$

$$|-\rangle = \text{sen}\theta_n |i, n-1\rangle + \cos\theta_n |e, n\rangle, \quad (\text{B.3})$$

com os correspondentes auto-valores

$$E_{+n} = \hbar \left[(n-1)\nu + \frac{1}{2}\omega_{ie} \right] - \frac{\hbar}{2} (\Omega_n - \Delta), \quad (\text{B.4})$$

$$E_{-n} = \hbar \left[n\nu - \frac{1}{2}\omega_{ie} \right] + \frac{\hbar}{2} (\Omega_n - \Delta), \quad (\text{B.5})$$

com

$$\text{sen } \theta_n = \frac{\Omega_n - \Delta}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}, \quad (\text{B.6})$$

$$\text{cos } \theta_n = \frac{2g\sqrt{n}}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}, \quad (\text{B.7})$$

$$\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2n}. \quad (\text{B.8})$$

Supondo que Δ seja grande em comparação com $2g\sqrt{n}$, tal que

$$\frac{4g^2n}{\Delta^2} \ll 1, \quad (\text{B.9})$$

então $\text{cos } \theta_n \simeq 1$ e $\text{sen } \theta_n \simeq 0$ e os estados (B.2) e (B.3) tornam-se

$$|+\rangle \simeq |i, n-1\rangle, \quad (\text{B.10})$$

$$|-\rangle \simeq |e, n\rangle, \quad (\text{B.11})$$

com os respectivos auto-valores

$$E_{+n} = \hbar \left[(n-1)\nu + \frac{1}{2}\omega_{ie} \right] - \frac{\hbar g^2 n}{2\Delta}, \quad (\text{B.12})$$

$$E_{-n} = \hbar \left[n\nu - \frac{1}{2}\omega_{ie} \right] + \frac{\hbar g^2 n}{\Delta}. \quad (\text{B.13})$$

A atuação efetiva é que não ocorre nenhuma mudança no número de fótons, mas o estado $|e, n\rangle$, cuja energia sem perturbação é $\hbar(n\nu - \omega_{ie}/2)$, experimenta um deslocamento na energia de

$$\hbar\delta_e(n) = \frac{\hbar g^2 n}{\Delta}. \quad (\text{B.14})$$

O deslocamento de energia por fóton, $\frac{\hbar g^2}{\Delta}$, pode ser grande em átomos de Rydberg. Nos níveis de Rydberg de átomos alcalinos, um deslocamento por fóton de 10^5s^{-1} é possível para de-sintonias apropriadas. O ponto importante desta análise é que o deslocamento de energia é proporcional ao número de fótons e é dispersivo, isto é, o deslocamento não é acompanhado por absorção fotônica.

Restringindo-nos ao espaço de Hilbert atômico correspondente aos estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$, o hamiltoniano efetivo para a interação átomo campo é da forma

$$H = H_a + H_C + H_I \quad (\text{B.15})$$

sendo

$$H_a = \frac{\hbar\omega_{eg}}{2} \sigma_z^{eg}, \quad (\text{B.16})$$

$$H_C = \hbar\nu a^\dagger a, \quad (\text{B.17})$$

$$H_I = \frac{\hbar g^2}{\Delta} a^\dagger a \sigma_{eg}^+ \sigma_{eg}^-, \quad (\text{B.18})$$

com $\sigma_z^{eg} = (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)$, $\sigma_{eg}^+ = |e\rangle\langle g|$ e $\sigma_{eg}^- = |g\rangle\langle e|$. Este hamiltoniano efetivo introduz um deslocamento de fase proporcional a $\delta_e(n)$ no nível $|e\rangle$, mas mantém o nível $|g\rangle$ intacto. De fato, a fase introduzida no nível $|e\rangle$ introduz um deslocamento de fase no estado do campo também. Pode ser mostrado [16] que o hamiltoniano de interação átomo-campo, pode ser reescrito como um hamiltoniano efetivo

$$H_{ef} = \hbar \Delta \sigma_z^{ie} + \frac{2\hbar g^2}{\Delta} \sigma_z^{ie} a^\dagger a. \quad (\text{B.19})$$

Considerando inicialmente que o estado do campo na cavidade seja um estado coerente, a atuação do operador unitário de evolução na representação de interação fornece o estado conjunto átomo+campo para um tempo arbitrário

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-i2g^2\sigma_z^{ie}a^\dagger at/\Delta} (c_i |i\rangle + c_e |e\rangle) |\alpha\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i2g^2\sigma_z^{ie}a^\dagger at/\Delta} (c_i |i\rangle + c_e |e\rangle) |n\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Expandindo o argumento do operador de evolução,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[1 - i2g^2\sigma_z^{ie}a^\dagger at/\Delta + \frac{(-i2g^2\sigma_z^{ie}a^\dagger at/\Delta)^2}{2!} + \dots \right] \\ &\quad \times e^{-i2g^2\sigma_z^{ie}a^\dagger at/\Delta} (c_i |i\rangle + c_e |e\rangle) |n\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Atuando termo a termo,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[\left(1 - i2g^2nt/\Delta + \frac{(-i2g^2nt/\Delta)^2}{2!} + \dots \right) |n\rangle c_i |i\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + i2g^2nt/\Delta - \frac{(-i2g^2nt/\Delta)^2}{2!} + \dots \right) |n\rangle c_e |e\rangle \right] \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[e^{-i2g^2nt/\Delta} |n\rangle c_i |i\rangle + e^{i2g^2nt/\Delta} |n\rangle c_e |e\rangle \right] \\ &= \left[e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{(\alpha e^{-i2g^2t/\Delta})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle c_i |i\rangle + e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{(\alpha e^{i2g^2t/\Delta})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle c_e |e\rangle \right], \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

que finalmente pode ser escrito como

$$|\psi(t)\rangle = \left| \alpha e^{-i2g^2t/\Delta} \right\rangle c_i |i\rangle + \left| \alpha e^{i2g^2t/\Delta} \right\rangle c_e |e\rangle. \quad (\text{B.23})$$

Logo, se $\tau = \frac{\pi\Delta}{2g^2}$,

$$|\psi(\tau)\rangle = |-\alpha\rangle c_i |i\rangle + |-\alpha\rangle c_e |e\rangle. \quad (\text{B.24})$$

Considerando agora o espaço de Hilbert composto pelos estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$, como $|g\rangle$ não participa da interação com o campo,

$$|\psi(t)\rangle_{eg} = c_g |g\rangle |\alpha\rangle + c_e |e\rangle |-\alpha\rangle, \quad (\text{B.25})$$

gerando um estado correlacionado e a referida superposição de estados coerentes do campo.

Bibliografia

- [1] K. H. Li, Phys. Rep. **134**, 1 (1986).
- [2] W. H. Zurek, Physics Today **44**(10), 36 (1991); Phys. Rev. D **24**, 1516 (1981); **26**, 1862 (1982).
- [3] B. d'Espagnat, *Conceptual Foundations of Quantum Physics*, Princeton University Press, Princeton (1973).
- [4] P. Grigolini, *Quantum Mechanical Irreversibility and Measurement*, World Scientific, Singapore (1993).
- [5] J. A. Wheeler e W. H. Zurek, eds., *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press, Princeton (1983).
- [6] A. Isar, A. Sandulescu, H. Scutaru, E. Stefanescu e W. Scheid, Int. J. Mod. Phys. E **3**, 635 (1994).
- [7] R. P. Feynman e F. L. Vernon, Ann. Phys. (NY) **24**, 118 (1963).
- [8] H. Dekker, Phys. Rep. **80**, 1 (1981).
- [9] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, Physica (Utrecht) A **121**, 587 (1983); Phys. Rev. A **31**, 1057 (1985).
- [10] W. H. Zurek, em *Quantum Optics, Experimental Gravitation and Measurement Theory*, eds. P. Meystre e M. O. Scully, Nato ASI series **94** (Plenum press publ., New York, 1982).
- [11] B. R. Mollow e R. J. Glauber, Phys. Rev. **160**, 1076 (1967).
- [12] P. Havas, Nuovo Cim. Suppl. **5**, 363 (1957).
- [13] E. Joos e H. D. Zeh, Z. Phys. B **59**, 223 (1985).
- [14] B. Baseia, V. S. Bagnato, M. A. Marchioli e M. C. de Oliveira, Quantum Semiclass. Opt. **8**, 1147 (1996).

- [15] B. Baseia, V. S. Bagnato, M. A. Marchioli e M. C. de Oliveira, *Quantum Semiclass. Opt.* **9**, 519 (1997).
- [16] D. F. Walls e G. J. Milburn, *Quantum Optics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [17] E. T. Jaynes e F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [18] M. O. Scully e M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, (Cambridge University Press, United Kingdom, 1997).