

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

Cálculo de Pontos Periódicos em aplicações Fracamente
Dissipativas

Mário Basílio de Matos

*Essa é a versão final da tese de mestrado do aluno
Mário Basílio de Matos, aprovada pela Banca.*

Alfredo Luiz de Almeida

Trabalho realizado sob a orientação do professor Alfredo M.
Ozório de Almeida no IFGW para a obtenção do título de
Mestre em Física - Julho de 1988

CLASSIF.
AUTOR.
V. EX.
TCMBU BSI. 11818

I. FÍSICA - UNICAMP		
n.º classif.	T/UNICAMP/M	
n.º autor	M428C	
ed.	v.	ex.
n.º tomo.	TMI770	

17-04-93

CM00027581

Agradecimentos

Ao professor Alfredo M. O. de Almeida pela orientação.

Ao Sieg pela ajuda computacional e amizade.

À Dalva pelo carinho, amor e atenção.

Aos meus pais pelo amor e apoio incondicional.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um resumo dos pontos principais da teoria de sistemas dinâmicos aplicada a mapas e da teoria de formas normais.

Também desenvolve-se dois métodos iterativos poderosos para cálculo de pontos periódicos, demonstrando sua convergência e discutindo as condições de aplicabilidade.

É feita a generalização da forma normal de Birkhoff, para o caso fracamente dissipativo, utilizando-a para o cálculo de pontos homoclínicos de uma aplicação fracamente dissipativa com um ponto fixo hiperbólico na origem e discutindo sua convergência.

Conteúdo

Introdução	1
I Aplicações	3
I.1 Definições e Teoremas	6
I.2 Pontos Periódicos	12
II Métodos Numéricos para Pontos Periódicos	16
II.1 Método de Ponto	17
II.2 Método de Órbita	19
II.3 Demonstrações de Convergência	21
II.4 Conclusão e Comentários	25
III Formas Normais	27
III.1 Forma Normal não Ressonante	28
III.2 Forma Normal Ressonante	31
III.3 Forma Normal de Birkhoff	32
IV Proposição da Aplicação	34
IV.1 Propriedades Gerais	36
IV.2 Forma Normal Extendida	39
IV.3 Pontos Homoclínicos	50
IV.4 Pontos Periódicos	54
V Conclusão e comentários	58
Bibliografia	60

Introdução

Desde o século XVII, graças aos trabalhos de Newton, é possível descrever matematicamente o comportamento de corpos macroscópicos. No entanto, em geral não é possível se obter as soluções explícitas das equações diferenciais associadas ao problema físico. Somente uns poucos casos especiais (apesar de importantes) podem ser solucionados exatamente, assim a partir do século passado começou-se a desenvolver técnicas matemáticas adequadas ao estudo qualitativo de propriedades gerais de sistemas dinâmicos. Muito importante é o trabalho de Poincaré que, entre outras contribuições, introduziu a idéia de espaço de fases como um ente geométrico manipulável e através dele tentar obter resultados gerais dos sistemas físicos.

Durante mais de um século as atenções estiveram voltadas principalmente para os sistemas Hamiltonianos (ou conservativos). Diversos resultados e técnicas poderosas foram desenvolvidos, tais como secções de Poincaré e o teorema KAM (Kolmogorov, Arnold e Moser). Entretanto apesar de podermos considerar, do ponto de vista matemático, o caso conservativo como um caso limite de sistemas dinâmicos gerais, as suas características qualitativas são inteiramente distintas dos sistemas dissipativos. Assim o estudo do limite assintótico de sistemas fracamente dissipativos é de grande interesse teórico, além de ter importantes aplicações práticas. Entre elas o movimento de satélites artificiais de órbita baixa, nos quais o efeito da atmosfera é determinante em seu movimento.

Neste trabalho iremos nos restringir ao estudo de aplicações quadráticas no plano, com um ponto fixo hiperbólico na origem. Para tal utilizamos uma generalização, para sistemas dissipativos, da aplicação de Hénon modificada:

$$\begin{aligned}x' &= \lambda_1 \left(x - \frac{(x+y)^2}{4} \right) \\y' &= \lambda_2 \left(y + \frac{(x+y)^2}{4} \right)\end{aligned}$$

onde o produto $\lambda_1 \lambda_2 < 1$.

Esta é a aplicação quadrática de Jacobiano constante mais geral no plano, com um ponto fixo hiperbólico na origem.

Inicialmente iremos estudar as propriedades e comportamentos de aplicações no plano, bem como sua relação com sistemas dinâmicos. No capítulo I apresentamos os teoremas e definições importantes para a análise de aplicações, entre eles os teoremas de Hartman-Großman e da Variedade Estável, fundamentais para a teoria de mapas e sistemas dinâmicos não lineares. A seguir, no mesmo capítulo, estudaremos as propriedades do ponto fixo hiperbólico e suas separatrizes, bem como mostraremos, através do teorema de Smale-Birkhoff, que os pontos periódicos existem e se concentram em torno dos pontos homoclínicos (intersecções das separatrizes do ponto fixo hiperbólico).

No capítulo II apresentamos a formulação de dois métodos iterativos poderosos para o cálculo de pontos periódicos, assim como demonstramos a convergência quadrática desses métodos e finalmente discutimos as condições de aplicabilidade de cada um.

A Teoria de Formas Normais, uma ferramenta muito útil para a análise de sistemas dinâmicos e mapas, é apresentada no capítulo III. No caso geral é possível reduzir uma aplicação, por uma transformação de coordenadas, a uma linearização em torno de um ponto fixo. As condições para que isso seja possível são fornecidas pelo teorema de Siegel, que é apresentado no mesmo capítulo. Finalmente estudamos as formas normais ressonantes, que estão fora do âmbito do teorema de Siegel.

No capítulo IV aplicamos todos os conceitos expostos anteriormente à aplicação proposta. Desenvolvemos a forma normal ressonante adequada e verificamos sua região de convergência. Através dela calculamos os pontos homoclínicos e a partir deles, os pontos periódicos para diversos valores dos parâmetros λ_1 e λ_2 . Além disso é feita uma análise do comportamento do ponto homoclínico para valores grandes de λ_1 , assim como um estudo rápido das propriedades gerais da aplicação.

Finalmente no capítulo V apresentamos as conclusões e comentários, além das discussões dos resultados.

I

Aplicações

O estudo de sistemas dinâmicos pode ser feito de diversas formas. Pode-se tentar resolver exatamente as equações dinâmicas, entretanto exceto em alguns casos simples e específicos, tal problema é insolúvel analiticamente. Por outro lado pode-se simular o sistema usando um computador e a partir da simulação obter os resultados numéricos para diversas condições iniciais. As desvantagens da utilização de computadores são muitas pois só obtemos resultados para uma condição inicial de cada vez e se o sistema dinâmico for muito complexo o tempo requerido é imenso, inviabilizando o estudo.

Se desistirmos de resolver o sistema dinâmico exatamente e nos concentrarmos em suas propriedades e comportamentos, podemos obter resultados qualitativos e gerais, um objetivo importante do estudo de sistemas dinâmicos. Dentro do âmbito do estudo de sistemas dinâmicos, pode-se incluir o estudo de aplicações, pois existem diversas maneiras de se obter aplicações, cujas propriedades estejam associadas a sistemas dinâmicos. É de grande interesse o estudo dessas aplicações pois, em geral, suas características podem ser analisadas mais facilmente, tanto do ponto de vista analítico como do ponto de vista computacional.

Dentre as diversas formas de se obter aplicações associadas aos sistemas dinâmicos, a técnica das Secções de Poincaré é uma das mais importantes:

Tomemos então um sistema físico qualquer, descrito pelas seguintes equações diferenciais:

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in A \subset R^N$$

onde x é o vetor das coordenadas e momentos,

A é a região "permitida" do espaço de fase

Temos então um fluxo φ , no espaço de fase, associado ao campo f tal que:

$$x = \varphi(t)$$

Se tomarmos uma superfície S nesse espaço de fase de modo que o fluxo φ seja sempre transversal à ela, então essa superfície terá dimensão $N - 1$ e sobre ela existirá uma aplicação $F : S \rightarrow S$, associada ao campo f .

Dado um ponto $q \in S$, a aplicação $F(q)$ é definida como sendo o ponto q' em que, seguindo-se a órbita do ponto $x \in R^N$ associado à q , encontramos novamente a superfície S . Neste caso S é a superfície de Poincaré e:

$$q' = F(q)$$

é a aplicação de Poincaré (figura 1.1).

Um ponto periódico x_0 de uma dada aplicação $F : A \rightarrow A$, ($A \subset R^N$), é definido por:

$$x_0 = F^m(x_0) \qquad m > 0$$

onde F^m indica m aplicações F .

Ou seja, x_0 é periódico se a sua imagem após m aplicações sucessivas é o próprio x_0 . Dizemos então que x_0 é um ponto periódico de período m (o caso em que $m = 1$ chamamos x_0 de ponto fixo).

É fácil verificar que se existirem pontos periódicos na aplicação de Poincaré, então a esses pontos estarão associadas órbitas periódicas no espaço de fase e vice-versa. Além disso as propriedades desses pontos e suas vizinhanças estão associadas às propriedades das órbitas do sistema.

Essa associação das propriedades é muito importante pois permite que possamos estender os resultados obtidos para a aplicação de Poincaré ao sistema dinâmico associado. Em particular a estabilidade de um ponto periódico está ligada à estabilidade da órbita associada.

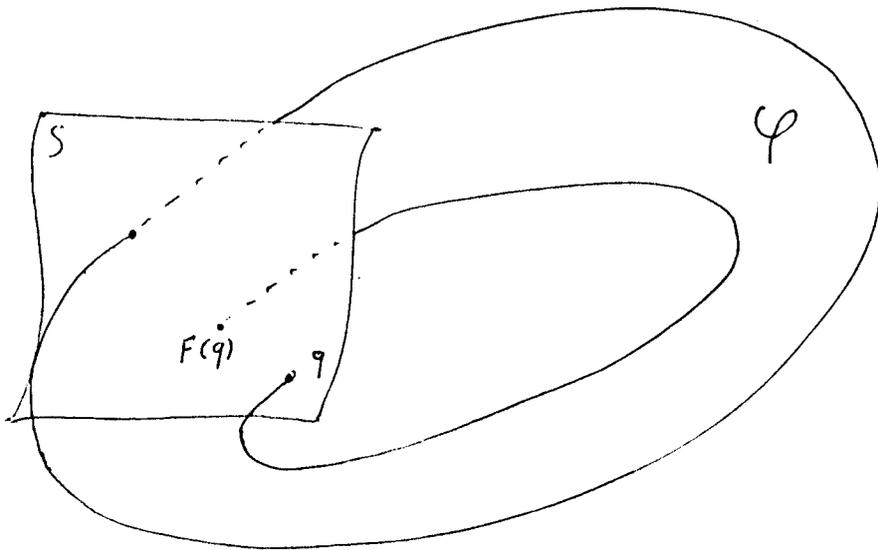


Figura 1.1: O fluxo φ , no espaço de fase e sua superfície de Poincaré S .

I.1 Definições e Teoremas

A seguir apresento algumas definições importantes para o estudo de aplicações no plano.

Tomemos uma aplicação genérica $P : R^N \mapsto R^N$, ou seja:

$$x' = P(x) \quad x, x' \in R^N$$

D- 1 Se P for inversível e tanto P quanto P^{-1} são n vezes diferenciáveis, então P é um difeomorfismo C^n .

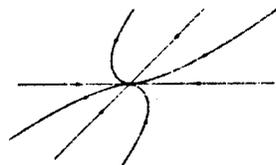
D- 2 Se P é um difeomorfismo C^1 , definimos sua Aplicação Tangente em um ponto x_0 como:

$$x' = x_0 + DP(x_0)(x - x_0)$$

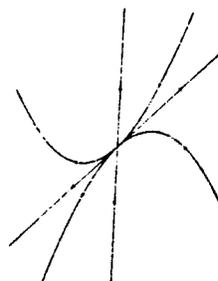
onde $DP(x_0)$ é o Jacobiano $\left. \frac{\partial P(x)}{\partial x} \right|_{x_0}$.

Podemos utilizar os autovalores da matriz $DP(x)$ para classificar os pontos fixos da aplicação P . Assim se no ponto fixo x_f os autovalores de $DP(x_f)$ forem λ_1 e λ_2 :

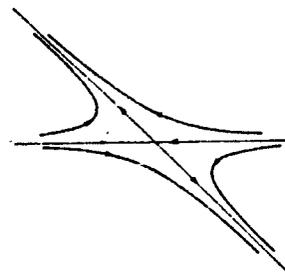
1. Se são reais e $|\lambda_1| < |\lambda_2| < 1$ temos um nodo estável.



2. Se são reais e $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 1$ temos um nodo instável.



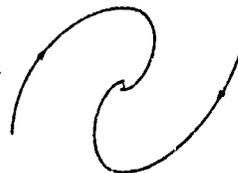
3. Se são reais e $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$ ou $|\lambda_2| > 1 > |\lambda_1|$ temos um ponto de sela.



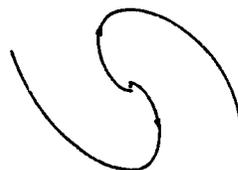
4. Se são complexos e $\lambda_1 = \lambda_2 = e^{i\omega}$ temos um ponto elíptico ou centro.



5. Se são complexos e $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha e^{i\omega}$ onde $\alpha < 1$ temos um foco estável.



6. Se são complexos e $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha e^{i\omega}$ onde $\alpha > 1$ temos um foco instável.



D- 3 Se os autovalores de $DP(x_f)$ têm módulo diferente de 1 então dizemos que x_f é um ponto hiperbólico.

Se uma aplicação P tem um ponto fixo hiperbólico x_f então na vizinhança desse ponto fixo a aplicação é topologicamente equivalente à aplicação tangente nesse ponto. Ou seja podemos associar o comportamento de P na vizinhança de x_f ao comportamento de sua linearização. Essa propriedade é expressa pelo teorema:

T- 1 (Hartman-Großman) Seja $A : R^N \mapsto R^N$ uma aplicação linear com um ponto fixo hiperbólico, então todo difeomorfismo C^1 , $P : R^N \mapsto R^N$, cuja aplicação tangente em x_f é igual a A , é topologicamente equivalente a A , em uma vizinhança de x_f .

Ou seja em uma vizinhança V de x_f existe uma transformação contínua de coordenadas, isto é, um homeomorfismo h , tal que:

$$h(P(x)) = DP(x_f)h(x)$$

para todo $x \in V$ (figura 1.2). A demonstração deste e teoremas seguintes é dada por Palis[1].

D- 4 Um conjunto $B \subset R^N$ é dito conjunto invariante de $P(x)$ se:

$$P^m(x) \in B \quad \forall x \in B \text{ e } \forall m \in Z$$

D- 5 Associado a cada autovalor λ_i de $DP(x_f)$ temos um subespaço E_i invariante. Os subespaços invariantes são classificados da seguinte maneira:

1. Se $|\lambda_i| < 1$ então E_i é um subespaço $E^{est} = \{x / \lim_{n \rightarrow \infty} (DP(x))^n = x_f\}$
2. Se $|\lambda_i| > 1$ então E_i é um subespaço $E^{inst} = \{x / \lim_{n \rightarrow \infty} (DP(x))^{-n} = x_f\}$

D- 6 Analogamente, temos para a aplicação $P(x)$, variedades estável e instável, em uma vizinhança V em torno de x_f , definidas por:

$$W_{loc}^{est}(x_f) = \{x \in V / (\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = x_f) \wedge (P^n(x) \in V, \forall n > 0)\}$$

$$W_{loc}^{inst}(x_f) = \{x \in V / (\lim_{n \rightarrow \infty} P^{-n}(x) = x_f) \wedge (P^{-n}(x) \in V, \forall n > 0)\}$$

Tomando então uma aplicação $P(x)$ com um ponto fixo hiperbólico x_f , podemos enunciar o seguinte teorema:

T- 2 (Variedade Estável) Seja $P : R^N \mapsto R^N$ um difeomorfismo C^1 com um ponto fixo hiperbólico x_f , então existem variedades locais instável e estável, $W_{loc}^{inst}(x_f)$ e $W_{loc}^{est}(x_f)$, tangentes aos subespaços invariantes E^{inst} e E^{est} de $DP(x_f)$ em x_f . Essas variedades são tão diferenciáveis quanto $P(x)$ (figura I.3).

D- 7 As variedades (ou separatrizes, no caso de um ponto de sela) estável e instável podem ter pontos comuns (cruzamentos). A esses pontos chamamos pontos homoclínicos.

D- 8 Se os cruzamentos forem entre variedades pertencentes a pontos fixos diferentes então os pontos são chamados pontos heteroclínicos.

Podemos verificar facilmente que se existir um ponto homoclínico (ou heteroclínico) existirá uma órbita completa de pontos homoclínicos (heteroclínicos). Além disso se observarmos a separatriz estável próxima ao ponto fixo, onde o movimento é aproximadamente linear, veremos que não existe reflexão em torno da separatriz. Assim a orientação do cruzamento é preservada e portanto encontramos sempre pares de órbitas homoclínicas (figura I.4).

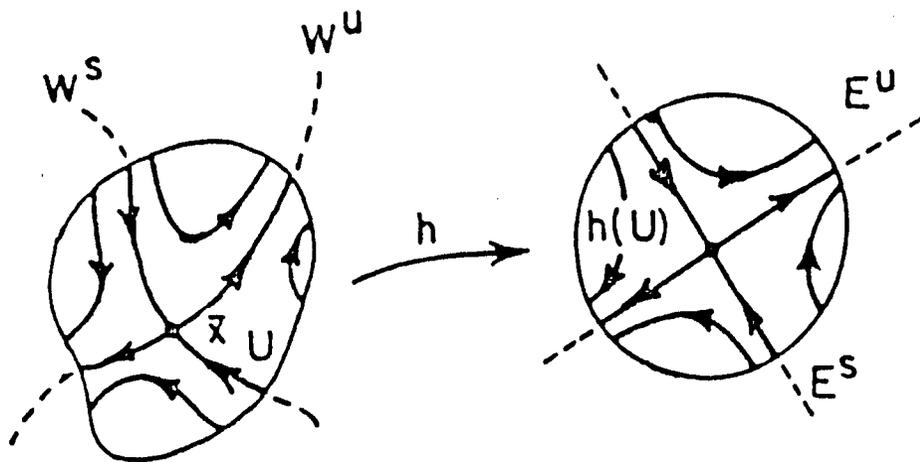


Figura I.2: Teorema de Hartman-Großman

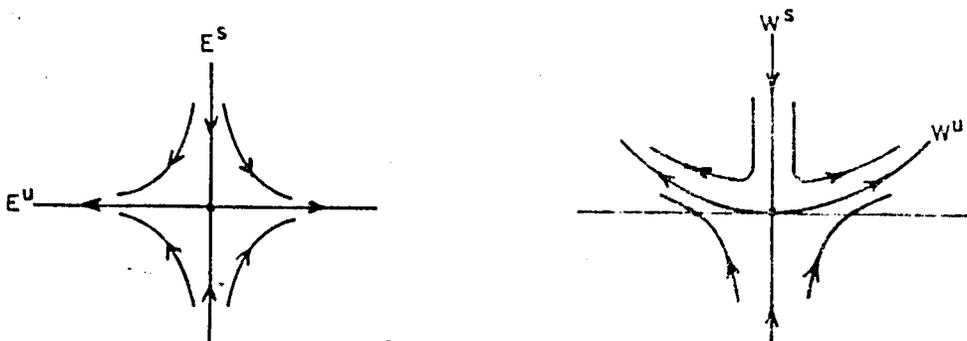


Figura I.3: Teorema da Variedade Estável

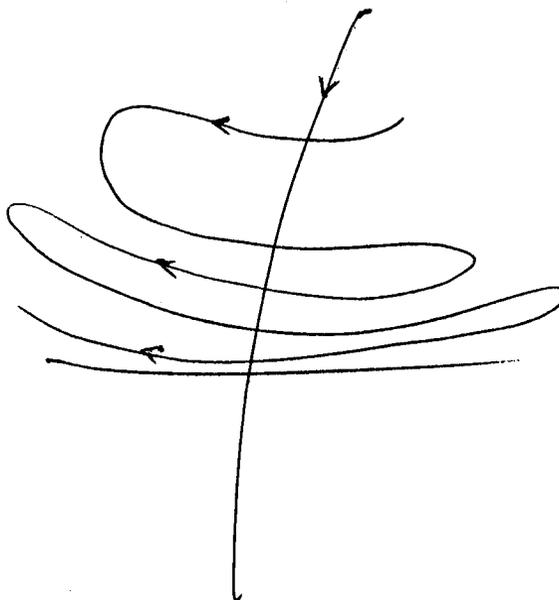


Figura 1.4: Órbita homoclínica perto do ponto fixo.

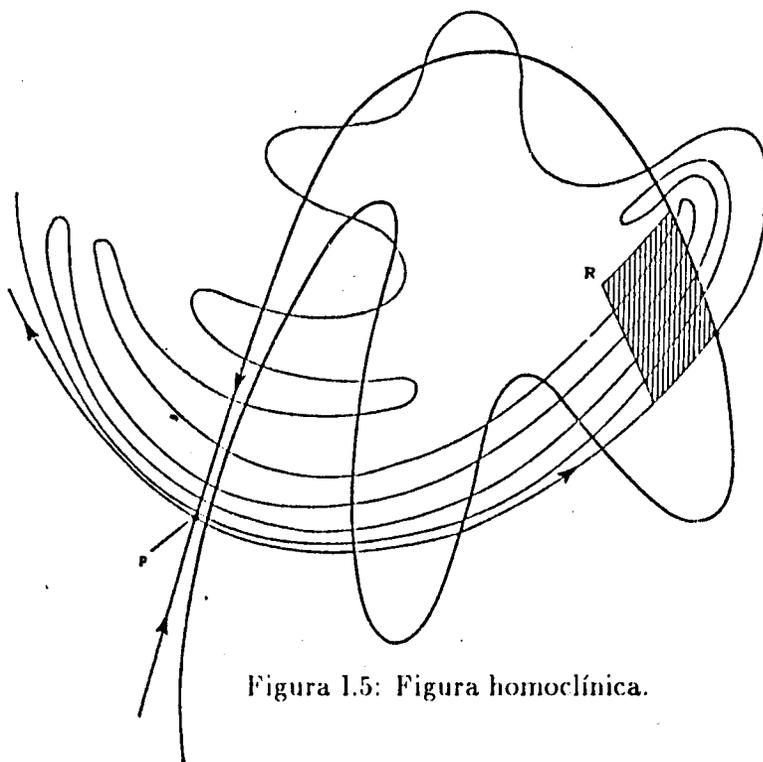


Figura 1.5: Figura homoclínica.

Uma consequência importante é que, devido ao fato de que as separatrizes não podem ter auto-intersecções, a forma das separatrizes é extremamente complexa (figura 1.5). Percebe-se mais intensamente essa complexidade, quando nos aproximamos do ponto fixo, onde as iterações são mais lentas e próximas, fazendo com que as separatrizes se estiquem e se dobrem sobre si mesmas num padrão muito complicado.

Esta propriedade das separatrizes pode ser expressa matematicamente pelo seguinte teorema:

T- 3 (Lema Lambda de Palis) *Seja A um difeomorfismo C^1 de R^N com um ponto fixo hiperbólico p , tendo variedades instável e estável de dimensão s e u ($s + u = N$) e seja D um disco em $W^{inst}(p)$. Seja Δ um disco transversal a $W^{est}(p)$ em um ponto q . Então $\bigcup_{n \geq 0} A^n(\Delta)$ contém discos arbitrariamente próximos de D .*

Ou seja, se A possui pontos homoclínicos, então podemos escolher o disco transversal a $W^{est}(p)$, no ponto homoclínico q , dentro de $W^{inst}(p)$. Assim as imagens do disco estão em $W^{inst}(p)$ e formam discos transversais a $W^{est}(p)$ gerando a figura homoclínica.

I.2 Pontos Periódicos

Se observarmos a figura 1.5, podemos notar que, tomando uma certa região R e obtendo imagens sucessivas de seus pontos, ela volta a se sobrepor à região original, após cinco iterações (figura 1.6). De modo geral, se tomarmos uma vizinhança de um ponto homoclínico, ela volta sobre si mesma após n iterações. Essa propriedade sugere a existência de pontos periódicos, e aqui iremos mostrar que ela impõe a existência de pontos periódicos se existe um ponto homoclínico. Para tal utilizaremos a aplicação da ferradura de Smale.

A aplicação da ferradura é uma aplicação $f : R^2 \rightarrow R^2$ cujo efeito é tomar um quadrado Q de lado 1, esticá-lo em uma direção, estreitá-lo em outra e dobrá-lo como uma ferradura sobrepondo-a sobre o quadrado original (figura 1.7).

Assim o conjunto de pontos de Q , que voltam a Q se compõe de dois retângulos verticais e suas imagens são dois retângulos horizontais. Definindo os retângulos verticais como Δ_0 e Δ_1 e definindo a aplicação linear T como:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \gamma_{0,x} \\ \beta y + \gamma_{0,y} \end{bmatrix} \text{ em } \Delta_0$$

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha x + \gamma_{1,x} \\ -\beta y + \gamma_{1,y} \end{bmatrix} \text{ em } \Delta_1$$

com $\alpha > 1$ e $0 < \beta < 1$, então T contrai o quadrado na vertical e expande na horizontal.

Neste ponto é conveniente introduzir a descrição simbólica das órbitas que permanecem em Q . Com essa descrição associamos a cada órbita $\{x_n \in Q, -\infty < n < \infty\}$ uma seqüência de índices $\{i_n\}$ de tal forma que i_n é igual a zero ou um se x_n pertence a Δ_0 ou Δ_1 respectivamente. Como $Tx_n = x_{n+1}$ deve pertencer a Q , então x_n sempre pertence a Δ_0 ou Δ_1 e além disso como Δ_0 e Δ_1 não possuem pontos em comum, podemos associar a cada órbita $\{x_n\}$ um conjunto diferente de índices $\{i_n\}$.

Vamos então mostrar a correspondência biunívoca entre $\{x_n\}$ e $\{i_n\}$. Tome-mos uma seqüência $S_n = \{i_0, \dots, i_{n-1}\}$ de zeros e uns, representamos o conjunto de pontos cuja órbita simbólica possui essa seqüência S_n por Δ_{S_n} . Ou seja, os pontos de Δ_{S_n} possuem $x_0 \in \Delta_{i_0}$ e $T^k x_0 \in \Delta_{i_k}$, $k = 1, \dots, n-1$. Sabendo-se que T expande as dimensões horizontais por um fator α , vemos que Δ_{S_n} é um retângulo de dimensões $(1/\alpha)^n$ por 1. Analogamente, o conjunto dos pontos nos quais $T^k x_0 \in \Delta_{i_k}$, $k = -n, \dots, -1$, é $T^n \Delta_{S_{-n}}$, onde $S_{-n} = \{i_{-n}, \dots, i_{-1}\}$,

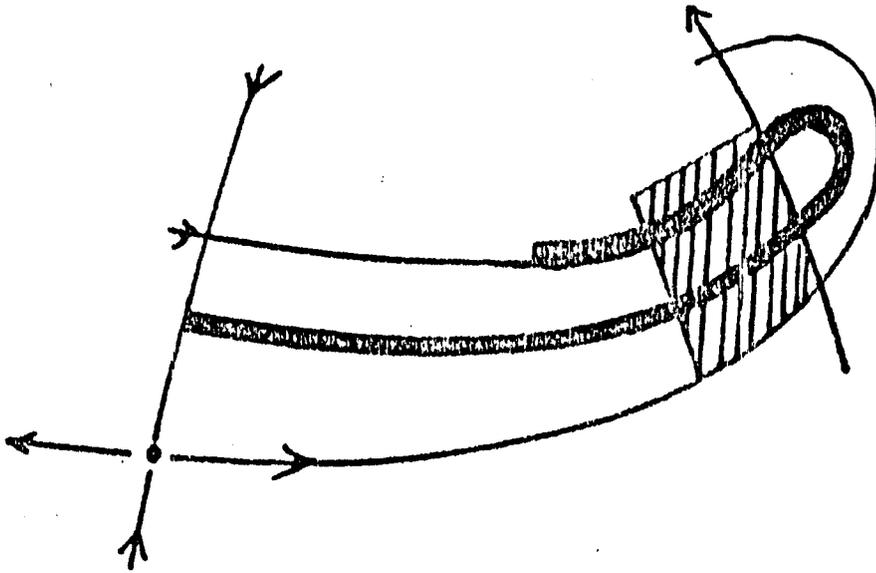


Figura 1.6: Sobreposição da região R e sua imagem.

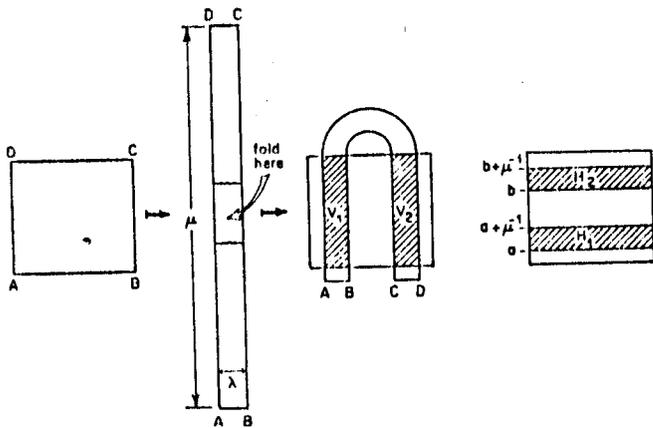


Figura 1.7: Ferradura de Smale

que é um retângulo de dimensões 1 por β^n . Assim o conjunto dos pontos que satisfazem $T^k x_0 \in \Delta_{i_k}$, $k = -n, \dots, n-1$, é um retângulo de lados α^{-n} e β^n . Se fizermos $n \rightarrow \infty$, obteremos retângulos inscritos cada vez menores, para qualquer sequência $\{i_n\}$, cujo limite é o ponto x_0 , que possui a propriedade $T^k x_0 \in \Delta_{i_k}$, $-\infty < k < \infty$ (figura I.8). Portanto existe uma correspondência biunívoca entre $\{x_n\}$ e $\{i_n\}$.

Uma propriedade importante é que os pontos x_0 de todas as órbitas que permanecem em Q , formam um conjunto de Cantor Λ , ou seja um conjunto fechado em que:

- O maior conjunto conectado é um ponto.
- Todo ponto de Λ é ponto limite de Λ .

Além disso podemos ver que existem órbitas periódicas na aplicação da ferradura, pois basta tomar uma sequência $\{i_n\}$ que seja periódica. Podemos também mostrar que as órbitas periódicas são densas, ou seja, tomando duas sequências periódicas, cujos índices coincidem entre $-n$ e $n-1$ vemos que pertencem ao mesmo retângulo $\alpha^{-n} \times \beta^n$ e se tomarmos n suficientemente grande, tornaremos as sequências tão próximas quanto se queira.

Existem também diversas órbitas caóticas, nas quais os índices nunca se repetem e em particular existe uma órbita densa, ou seja, uma órbita que se aproxima arbitrariamente de todos os pontos de Λ , neste caso sua sequência $\{i_n\}$ possui todas as sequências finitas de índices possíveis.

Esses resultados para a ferradura de Smale podem ser generalizados para aplicações de Poincaré, na vizinhança de pontos homoclínicos, através do teorema abaixo.

T- 4 (Teorema Homoclínico de Smale-Birkhoff) *Se $T : R^N \mapsto R^N$ é um difeomorfismo tal que x_f é um ponto fixo hiperbólico e que exista um ponto $x_h \neq x_f$ de intersecção transversal de $W^{inst}(x_f)$ com $W^{est}(x_f)$, então T tem um conjunto invariante hiperbólico Λ , contendo x_h , no qual T é topologicamente equivalente a um deslocamento dos índices da órbita simbólica $\{i_n\}$.*

Assim a consequência deste teorema, cuja demonstração está desenvolvida em Guckenheimer[2], é que existe um número infinito de pontos periódicos em torno do ponto homoclínico.

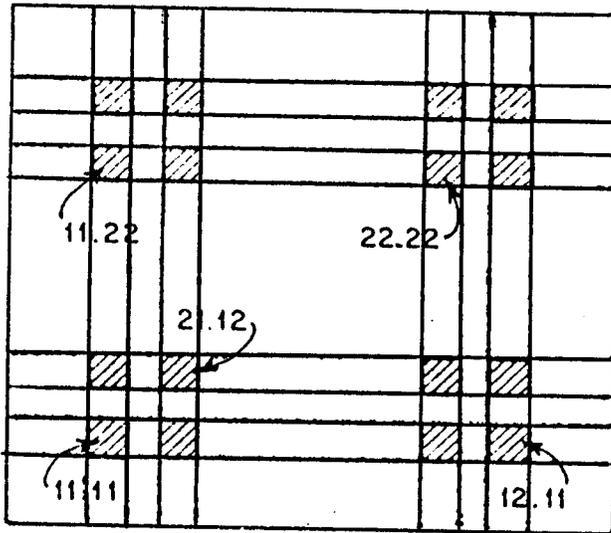


Figura 1.8: Retângulos inscritos para $n = 2$.

II

Métodos Numéricos para Pontos Periódicos

Nesta secção apresento dois métodos iterativos poderosos para o cálculo de pontos periódicos. O primeiro método (Método de Ponto) foi desenvolvido devido à necessidade de se calcular, neste trabalho de tese, pontos periódicos para uma família de aplicações de características razoavelmente variadas. O método não exige o conhecimento do comportamento da aplicação mas apenas das formas analíticas da aplicação e seu Jacobiano.

Posteriormente descobriu-se que havia um método semelhante, voltado para o cálculo de órbitas completas, para casos mais específicos. A generalização deste levou ao método de órbitas, onde a aplicação deve ter seu comportamento conhecido, pois trabalha-se com as órbitas completas.

Ambos são métodos de rápida convergência e simplicidade de cálculos e, apesar de serem bastante semelhantes, têm seu melhor rendimento em condições distintas.

II.1 Método de Ponto

O método a ser exposto baseia-se no fato de que podemos resolver exatamente e de modo simples, o caso em que a aplicação é linear. Assim o procedimento é a linearização da aplicação em torno do ponto aproximado x_a e a utilização das propriedades dos pontos periódicos x_0 .

A linearização é feita a partir de uma expansão de Taylor da aplicação em torno x_a . Assim para um ponto periódico x_0 de ordem m a linearização em torno de x_a é:

$$F^m(x_0) = F^m(x_a) + \left. \frac{\partial F^m(x)}{\partial x} \right|_{x_a} (x_0 - x_a) \quad (\text{II.1})$$

onde $\left. \frac{\partial F^m(x)}{\partial x} \right|_{x_a}$ é o Jacobiano da aplicação $F^m(x)$.

Mas, pela regra da cadeia podemos escrever o Jacobiano como:

$$\left. \frac{\partial F^m(x)}{\partial x} \right|_{x_a} = \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a^{m-1}} \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a^{m-2}} \dots \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a}$$

onde $x_a^n = F^n(x_a)$.

O que facilita enormemente os cálculos devido ao fato de que a forma analítica de $F^m(x)$ é em geral extremamente complicada de se calcular, enquanto que a forma de $F(x)$ é, na maioria dos casos, bem conhecida e pouco complicada, e portanto podemos obter sem dificuldades a forma analítica do seu Jacobiano.

Por simplicidade de notação continuarei utilizando a forma II.1 em lugar da regra da cadeia, o que não alterará em nada o desenvolvimento do método.

Utilizando a definição de ponto periódico obtemos:

$$x_0 = F^m(x_a) + \left. \frac{\partial F^m(x)}{\partial x} \right|_{x_a} (x_0 - x_a)$$

Isolando x_0 resulta:

$$\left[1 - \left. \frac{\partial F^m(x)}{\partial x} \right|_{x_a} \right] x_0 = F^m(x_a) - \left. \frac{\partial F^m(x)}{\partial x} \right|_{x_a} x_a$$

onde 1 é a matriz identidade.

Subtraindo-se $\left[1 - \left. \frac{\partial F^m(x)}{\partial x} \right|_{x_a} \right] x_a$ de ambos os lados obtemos:

$$\left[1 - \left. \frac{\partial F^m(x)}{\partial x} \right|_{x_a} \right] (x_0 - x_a) = F^m(x_a) - x_a$$

ou seja,

$$x_0 = \left[1 - \frac{\partial F^m(x)}{\partial x} \Big|_{x_a} \right]^{-1} (F^m(x_a) - x_a) + x_a \quad (11.2)$$

Para que a equação 11.2 seja válida é necessário que o determinante da matriz:

$$\left[1 - \frac{\partial F^m(x)}{\partial x} \Big|_{x_a} \right]$$

seja diferente de zero, ou seja é necessário que o Jacobiano da aplicação não tenha autovalor unitário. Se uma dada aplicação tem um autovalor unitário em seu Jacobiano então os pontos fixos associados a este autovalor não serão isolados. Por exemplo, no caso em que a aplicação se reduz a uma matriz do tipo:

$$F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} x$$

onde M é uma matriz quadrada qualquer.

Fica fácil verificar que são pontos fixos os pontos situados no eixo associado ao autovalor 1. Mas mesmo nestes casos, na maioria das vezes, o método pode ser aplicado, desde que estejamos suficientemente distantes dos pontos fixos, pois em geral os autovalores fora dos pontos fixos são diferentes de 1.

Assim aplicação 11.2 é por construção um método de cálculo iterativo com convergência quadrática e, portanto necessita de poucas iterações para um cálculo preciso dos pontos periódicos, desde que se esteja suficientemente próximo (As demonstrações estão desenvolvidas na secção 11.3).

O método aqui desenvolvido exige apenas um ponto de partida e calcula um dos pontos da órbita periódica.

II.2 Método de Órbita

No método descrito a seguir o procedimento é similar ao exposto na secção anterior. Ainda utiliza-se a linearização da aplicação, mas neste caso a linearização é feita em torno de m pontos aproximados x_a^i , para uma órbita periódica de ordem m . Portanto o que se obtém é uma aproximação da órbita como um todo e não uma aproximação de um dos pontos da órbita.

Tomando-se uma aplicação F , a i -ésima imagem do ponto periódico x_0^i de período m é:

$$x_0^{i+1} = F(x_0^i)$$

com $x_0^{m+i} = x_0^i$.

Substituindo-se então os valores:

$$\begin{aligned} x_0^i &= x_a^i + D^i \\ x_0^{i+1} &= x_a^{i+1} + D^{i+1} \end{aligned}$$

e linearizando F obtemos:

$$D^{i+1} = \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a^i} D^i + (F(x_a^i) - x_a^{i+1})$$

Substituindo-se D^i pela expressão equivalente resulta:

$$D^{i+1} = \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a^i} \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a^{i-1}} D^{i-1} + \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a^i} (F(x_a^{i-1}) - x_a^i) + (F(x_a^i) - x_a^{i+1})$$

Repetindo o processo até chegar a D^1 obtemos:

$$D^{i+1} = M^i \cdot D^1 + K^i \tag{II.3}$$

onde

$$M^i = \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a^i} \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a^{i-1}} \dots \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a^1}$$

$$K^i = \sum_{j=2}^i \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a^i} \dots \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_a^j} (F(x_a^{j-1}) - x_a^j) + (F(x_a^i) - x_a^{i+1})$$

Assim se $i = m$ então $D^{m+1} = D^1$ e portanto:

$$[1 - M^m] \cdot D^1 = K^m \quad (11.4)$$

Esta equação pode ser facilmente resolvida por inversão para os casos em que $\det [1 - M^m] \neq 0$. A partir de D^1 podemos calcular os outros D^i e x_0^i , que serão os novos pontos aproximados x_a^i , e aplicar novamente a equação 11.4, repetindo o procedimento até que tenhamos atingido a precisão desejada.

Devido ao fato de a matriz M ser uma quantidade não intrínseca da aplicação, ela dificilmente anulará o determinante e, mesmo neste caso podemos modificar um pouco, na maioria das vezes, os valores de x_a^i e resolver este problema.

O método aqui desenvolvido é uma generalização, para uma aplicação qualquer, do método apresentado por Marcus de Aguiar [3], para sistemas Hamiltonianos da forma:

$$H = \sum_i p_i^2 + V(x)$$

onde p_i são os momentos conjugados das coordenadas x_i .

Como o método da secção anterior, este também tem convergência quadrática para qualquer aplicação e, portanto fornece resultados bastante precisos com poucas iterações.

Nas secções seguintes estão as demonstrações de convergência dos métodos descritos anteriormente e uma discussão mais completa sobre as condições de convergência.

II.3 Demonstrações de Convergência

Nesta secção irei inicialmente demonstrar que uma aplicação cujo Jacobiano é nulo em um ponto fixo, produz uma sequência convergente para esse mesmo ponto e, a seguir provarei que o Jacobiano das expressões (II-6) e (II-14) são nulos. Finalmente discutirei as condições de convergência de cada um dos métodos.

Vamos então tomar uma aplicação $A : R^N \mapsto R^N$:

$$x_i^{n+1} = A_i(x^n) \quad i = 1, 2 \dots N \quad (\text{II.5})$$

com um ponto fixo p :

$$p_i = A_i(p) \quad i = 1, 2 \dots N \quad (\text{II.6})$$

cujo Jacobiano $A_{ij}(x)$ é nulo em p :

$$A_{ij}(p) = \left. \frac{\partial A_i(x)}{\partial x_j} \right|_p = 0 \quad i, j = 1, 2 \dots N \quad (\text{II.7})$$

Aplicando-se o Teorema de Taylor [4], para funções de várias variáveis, a cada uma das equações II.5 obtemos:

$$x_i^{n+1} = A_i(p) + \sum_{j=1}^N A_{ij}(p)(x_j^n - p_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N T_{ijk}(\bar{x})(x_j^n - p_j)(x_k^n - p_k) \quad (\text{II.8})$$

onde p é o ponto em torno do qual se toma a expansão,
 \bar{x} é um ponto que pertence à linha que une x^n e p ,
 e $T_{ijk}(\bar{x}) = \left. \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_k} \right|_{\bar{x}}$.

Mas pelas relações II.6 e II.7 a equação II.8 resulta em:

$$(x_i^{n+1} - p_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N T_{ijk}(\bar{x})(x_j^n - p_j)(x_k^n - p_k) \quad (\text{II.9})$$

Vamos definir:

$$\begin{aligned} D_i^n &= x_i^n - p_i \\ i_1 &= j \\ i_2 &= k \\ \bar{x}_1 &= \bar{x} \end{aligned}$$

Deste modo II.9 fica:

$$D_i^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N T_{ijk}(\bar{x}) D_{i_1}^n D_{i_2}^n$$

Substituindo $D_{i_1}^n$ e $D_{i_2}^n$ pelas expressões equivalentes obtemos

$$D_i^{n+1} = \frac{1}{2^3} T_{i i_1 i_2}(\bar{x}_1) T_{i_1 i_{11} i_{12}}(\bar{x}_2) T_{i_2 i_{21} i_{22}}(\bar{x}_3) D_{i_{11}}^{n-1} D_{i_{12}}^{n-1} D_{i_{21}}^{n-1} D_{i_{22}}^{n-1}$$

onde as somatórias estão implícitas ou seja, para cada par de índices repetidos faz-se uma somatória com o índice variando de 1 a N . Substituindo sucessivamente os D_i resulta a seguinte relação:

$$D_i^{n+1} = 2^{-2^n+1} \prod_{j=1}^{2^{n-1}-1} T_{k_j k_{2j} k_{2j+1}}(\bar{x}_j) \prod_{h=2^{n-1}}^{2^n-1} T_{k_h k_{2h} k_{2h+1}}(\bar{x}_h) D_{k_{2h}}^1 D_{k_{2h+1}}^1 \quad (II.10)$$

onde os índices k estão ordenados da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcccccccc} j & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \dots \\ k & = & i & i_1 & i_2 & i_{11} & i_{12} & i_{21} & i_{22} & i_{111} & i_{112} \dots \end{array}$$

Portanto a condição necessária e suficiente para que a aplicação A convirja para o ponto p é que a quantidade à direita da expressão II.10 tenda a zero quando n tende a infinito.

É interessante verificar que esse valor depende apenas de quantidades conhecidas (o tensor $T_{ijk}(x)$ e a diferença D^1) o que nos permite utilizar uma técnica simples de se verificar a possibilidade de convergência. É suficiente para a convergência, que o valor:

$$\max |T_{ijk}(x)| L^2 < 2N^{-2} \quad i, j, k = 1, 2, \dots, N \quad (II.11)$$

onde x pertence a uma região $B \subset R^N$ em torno de p ,
e L é a maior distância em B .

Além disso, mantidas essas condições, verifica-se que a cada passo a distância entre o ponto fixo e o ponto aproximado diminui por um fator, estimado por cima, de

$$\left(\frac{1}{2} R^2 N^2 \max |T_{ijk}(x)| \right)^{2^n} \sim |D^n|$$

ou seja, a cada passo o método aumenta a precisão, no mínimo quadraticamente.

Tomemos agora a equação II.2 e calculemos seu Jacobiano no ponto periódico p . A equação pode ser reescrita como:

$$x_i^{n+1} = A_i(x^n) = \sum_{j=1}^N l_{ij}(x^n)(F_j^m(x^n) - x_j^n) + x_i^n$$

onde x_i^{n+1} é a i -ésima coordenada de x_0 ,

x_i^n é a i -ésima coordenada de x_a ,

F_i^m é a i -ésima coordenada de F^m e

$l_{ij}(x^n)$ é o elemento (i, j) da matriz $\left[1 - \frac{\partial F^m(x)}{\partial x}\bigg|_{x^n}\right]^{-1}$

Deste modo o Jacobiano no ponto periódico p fica:

$$\frac{\partial A_i(x)}{\partial x_k}\bigg|_p = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\partial l_{ij}(x)}{\partial x_k}\bigg|_p (F_j^m(p) - p_j) + l_{ij}(p) \left[\frac{\partial F_j^m(x)}{\partial x_k}\bigg|_p - \delta_{jk} \right] \right\} + \delta_{ik}$$

Mas como $F_j^m(p) = p_j$ e o segundo termo na somatória vale $-\delta_{ik}$ pois é um produto de matrizes inversas, obtemos:

$$\frac{\partial A_i(x)}{\partial x_k}\bigg|_p = -\delta_{ik} + \delta_{ik} = 0$$

Para calcular o Jacobiano da expressão II.4 precisamos reescrevê-la da forma:

$$X^{n+1} = [1 - M(X^n)]^{-1} K(X^n) + X^n \quad (\text{II.12})$$

onde X^n é a n -ésima iteração do vetor (x^1, x^2, \dots, x^m) da órbita completa,

$K(X)$ é o vetor $(K^m(X), K^1(X), \dots, K^{m-1}(X))$.

e $[1 - M(X)]$ é a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 - M^m(X) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - M^1(X) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - M^{m-1}(X) \end{bmatrix}$$

Essa forma é necessária pois como o método utiliza m pontos de partida a dimensão do espaço onde estamos trabalhando é $N.m$ e o Jacobiano deve ser calculado nesse espaço. Assim o Jacobiano da expressão II.12 fica:

$$\frac{\partial A(X)}{\partial X}\bigg|_p = \frac{\partial [1 - M(X)]^{-1}}{\partial X}\bigg|_p K(p) + [1 - M(X)]^{-1} \frac{\partial K(X)}{\partial X}\bigg|_p + 1$$

II.4 Conclusão e Comentários

Como foi demonstrado na secção anterior ambos os métodos tem convergência quadrática se satisfeita a relação II.11 e além disso suas formas analíticas são semelhantes, ficando as diferenças principais por conta da dimensão das matrizes e do cálculo das correções.

No método de ponto as matrizes tem a dimensão do espaço da aplicação original para qualquer período das órbitas, enquanto que para o método de órbita a dimensão das matrizes fica multiplicada pelo período da órbita de interesse devido ao fato de trabalharmos com todos os pontos da órbita simultaneamente.

Na prática podemos trabalhar em ambos os métodos com matrizes da dimensão do espaço da aplicação original, pois como foi descrito na secção II.2 (método de órbita), podemos calcular um dos pontos da órbita e a partir dele calcular os outros. No entanto ainda assim se mantém a necessidade de se utilizar todos os pontos da órbita para calcular o ponto seguinte (equação II.4), pois tanto a matriz M como o vetor K dependem das órbitas completas.

Vamos agora analisar a aplicabilidade de cada método. Em termos de esforço computacional nota-se facilmente que o método de ponto é muito mais simples de ser implementado e o tempo de uma iteração é muito menor que o tempo para o método de órbita, que necessita calcular a correção K e depois todos os outros pontos x_a^i .

Entretanto a correção K é na verdade a correção para a órbita completa, ou seja, cada termo da somatória (equação II.3) é a correção para cada ponto da órbita, transformada para o ponto final (que é o mesmo que o inicial).

Essa característica permite que sejam necessárias menos iterações para o método de órbita, se temos uma boa aproximação da órbita completa. O ponto inicial possui uma certa distância do ponto procurado, se tomarmos imagens sucessivas do ponto inicial elas se afastarão cada vez mais da órbita procurada, introduzindo a cada imagem um erro adicional. No entanto se temos idéia de onde se localizam os pontos da órbita, o método de órbita evita o aparecimento desse erro adicional e, a cada iteração produz uma órbita bem mais precisa que o método de ponto.

Assim podemos ver que os métodos, apesar de muito semelhantes, possuem aplicabilidades distintas. Se temos um bom conhecimento do comportamento da aplicação original, é mais conveniente a aplicação do método de órbita, que produz resultados precisos e completos com poucas iterações. Se, ao contrário, temos pouca idéia do comportamento da aplicação mas conhecemos sua forma analítica, o método de ponto é mais vantajoso, pois é simples de ser implementado

e produz iterações mais rápidas.

III

Formas Normais

A idéia de se utilizar formas normais para estudar sistemas dinâmicos surge da possibilidade de se obter resultados importantes através da sua linearização em torno de algum ponto fixo (por exemplo o Teorema de Hartman-Großman). Entretanto para se estudar a influência dos termos não lineares necessitamos ir além da linearização, neste caso tentamos reduzir o sistema dinâmico à forma mais simples possível, através de uma mudança de variáveis.

A teoria de formas normais, desenvolvida por Poincaré, nos indica quais são essas formas mais simples (formas normais), em torno de um ponto de equilíbrio (ou de um movimento periódico). Obtemos as formas normais com a ajuda de séries formais, em torno do ponto de equilíbrio (ou movimento periódico), que expressam a mudança de coordenadas necessária. Tais séries não são sempre convergentes, entretanto mesmo nestes casos seus primeiros termos são importantes no estudo do comportamento das soluções.

O método das formas normais é portanto uma poderosa ferramenta para o estudo de sistemas dinâmicos, sendo o principal método para o estudo de bifurcações em famílias de equações dependentes de parâmetros.

Podemos utilizar o método das formas normais também para aplicações, e seus teoremas e resultados são análogos aos de sistemas dinâmicos. Neste capítulo apresentarei a teoria de formas normais para aplicações, cuja utilização no meu trabalho é direta e, além disso a teoria para sistemas dinâmicos está bem descrita em diversos textos (por exemplo Ozório de Almeida[5]), enquanto que a teoria para aplicações é apenas citada na maioria dos textos devido à sua similaridade.

III.1 Forma Normal não Ressonante

Vamos inicialmente introduzir o conceito de ressonância.

D- 9 Dada uma aplicação formal $F : R^N \mapsto R^N$ definida pela série inteira $F(x) = Ax + \dots$ e sendo $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ os autovalores associados a A , então chamamos de ressonância à relação:

$$\lambda_s = \lambda^m$$

onde $\lambda^m = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_N^{m_N}$
 $m_k \in N$

e $|m| = \sum m_k \geq 2$ é a ordem da ressonância.

Temos então, para o caso em que os autovalores não são ressonantes, o seguinte teorema fundamental:

T- 5 Se os autovalores da parte linear de uma aplicação F não são ressonantes, então a aplicação F pode se reduzir à sua parte linear A pela mudança formal de variáveis:

$$x = H(x) = y + \dots$$

Assim

$$F \circ H = H \circ A.$$

Ou seja é possível achar uma mudança de variáveis formal que leve a aplicação à sua parte linear. Este e os teoremas seguintes estão demonstrados no livro de Arnold[6]. Podemos verificar isso através do seguinte argumento:

Dada a aplicação:

$$x = F(x) = Ax + \sum_{k=2}^{\infty} F_k(x) \tag{III.1}$$

onde $F_k(x)$ é um monômio vetorial de ordem k em x .

Neste caso um monômio vetorial de ordem k é uma aplicação cujas componentes são monômios de ordem k ($x_1^{m_1} \dots x_N^{m_N}$; $\sum m_i = k$, $m_i \geq 0$).

Por simplicidade consideraremos A diagonal e com autovalores distintos não ressonantes. Tomemos então a mudança de coordenadas:

$$x = y + P_k(y) \tag{III.2}$$

onde P_k é um monômio vetorial de ordem k em y , tal que a aplicação F nas coordenadas y não contenha termos de ordem k . Assim substituindo III.1 em III.2 obtemos:

$$y' + P_k(y') = A(y + P_k(y)) + F_k(y + P_k(y)) + \dots \quad (\text{III.3})$$

Para que $y' = F'(y)$ não contenha termos de ordem k é necessário que os termos de ordem k do lado direito da equação III.3 seja igual a $P_k(Ay)$, ou seja:

$$AP_k(y) + F_k(y) = P_k(Ay)$$

ou, para cada componente

$$[\lambda_s - \lambda^{m_s}] P_{k,s}(y) = -F_{k,s}(y) \quad (\text{III.4})$$

pois P_k é uma função homogênea de grau m_i para cada componente.

Portanto se os autovalores não forem ressonantes podemos sempre achar um monômio $P_{k,s}(y)$ que satisfaça a relação III.4. Não foram colocados os termos de ordem menor que k na equação III.3, mas é fácil ver que tais termos não serão alterados pela substituição III.2 e portanto se repetirmos o processo para todos os $k \geq 2$ obteremos uma aplicação com somente o termo linear.

Note-se que este teorema garante apenas a existência de uma mudança de coordenadas formal entre a linearização e a aplicação original, não afirmando nada sobre a convergência da série e nem sobre sua inversa. Essas questões são resolvidas pelos teoremas de Poincaré e Siegel.

Vamos inicialmente definir os domínios de Poincaré e Siegel:

D- 10 *Uma coleção de autovalores pertence ao domínio de Poincaré se seus módulos são todos maiores (ou menores) do que a unidade.*

D- 11 *O domínio de Siegel é o complemento do domínio de Poincaré.*

Podemos agora enunciar os teoremas:

T- 6 (Poincaré) *Se os autovalores em um certo ponto, de um difeomorfismo analítico, pertencem ao domínio de Poincaré e não são ressonantes, então esse difeomorfismo se transforma em sua parte linear, na vizinhança do ponto fixo, através de um difeomorfismo C^1 .*

Ou seja se o ponto fixo for um "atrator" ou um "repulsor" então podemos achar uma mudança de variáveis inversível que nos leve a aplicação em sua parte linear.

D- 12 Dizemos que uma coleção de autovalores é de tipo multiplicativo (C, ν) se satisfazem à relação:

$$|\lambda_s - \lambda^m| \geq C|m|^{-\nu}$$

para todo $s = 1, \dots, N$; $|m| \geq 2$; $m_k \geq 0$.

T- 7 (Siegel) Se a coleção de autovalores de um difeomorfismo, em um ponto fixo, é do tipo multiplicativo (C, ν) , então este difeomorfismo se transforma em sua parte linear, na vizinhança do ponto fixo, através de um difeomorfismo C^1 .

Ou seja, se os autovalores estão suficientemente longe das ressonâncias, então pode-se achar uma mudança de variáveis inversível que leve a aplicação em sua parte linear.

III.2 Forma Normal Ressonante

Vamos então analisar o caso em que os autovalores são ressonantes. Podemos ver que a equação III.4 não terá solução para os casos em que a ressonância é satisfeita, pois aí:

$$\lambda_s - \lambda^{m_s} = 0$$

Contornamos essa dificuldade passando os termos que satisfazem a ressonância para a forma normal, ou seja, supomos que a aplicação :

$$x' = F(x)$$

se transforma, por uma série formal

$$x = y + \dots$$

na forma normal ressonante

$$y' = Ay + w(y)$$

onde $w(y)$, contém todos os polinômios que satisfazem a ressonância (monômios ressonantes).

Usando a mesma argumentação da secção anterior verificamos a possibilidade de se obter tal transformação mas, mais uma vez não temos nenhuma informação sobre a convergência ou não desta série.

Se o conjunto dos autovalores pertence ao domínio de Poincaré, então temos o seguinte teorema:

T- 8 *Se o conjunto dos autovalores da aplicação tangente $DA(x)$ pertencer ao domínio de Poincaré, então a aplicação $A(x)$ se reduz, por uma mudança de coordenadas bicontinua, a uma forma normal polinomial composta exclusivamente de termos ressonantes.*

Ou seja, a transformação de coordenadas é convergente se o conjunto dos autovalores pertencer ao domínio de Poincaré. Isto ocorre devido ao fato de que existe um número limitado de monômios ressonantes no domínio de Poincaré.

No domínio de Siegel o número de monômios ressonantes é infinito, fazendo com que não se possa garantir de um modo geral a convergência da transformação. Nesta situação a demonstração de convergência deve ser feita caso a caso.

III.3 Forma Normal de Birkhoff

Um caso de ressonância muito importante é o caso conservativo, expresso por:

$$\lambda_s = \lambda_s \lambda^m \quad \text{ou} \quad \lambda^m = 1$$

ou em duas dimensões $\lambda_1 \lambda_2 = 1$.

Para o caso de aplicações conservativas no plano, com um ponto fixo hiperbólico, do tipo:

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y) \\ y' &= f_2(x, y) \end{aligned}$$

podemos sempre, através de uma mudança de coordenadas linear, colocá-la na forma:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + \dots \\ y' &= \lambda^{-1} y + \dots \end{aligned}$$

Segundo Birkhoff, esta aplicação pode ser reduzida à forma normal:

$$\begin{aligned} X' &= U(XY)X \\ Y' &= U^{-1}(XY)Y \end{aligned}$$

com $U(XY) = \lambda \left[1 + \sum u_k (XY)^k \right]$.

Através da transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= X + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=0}^k x_{kl} X^{k-l} Y^l \\ y &= Y + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=0}^k y_{kl} X^{k-l} Y^l \end{aligned}$$

Podemos verificar a possibilidade de existência destas séries, através do procedimento seguido na secção III.1, retirando-se os termos $(X^{k-l} Y^l)$ em que:

$$\begin{aligned} k &= 2l + 1 & (\lambda_1 &= \lambda_1^2 \lambda_2) \\ k &= 2l - 1 & (\lambda_2 &= \lambda_1 \lambda_2^2) \end{aligned}$$

e adicionando-os à forma normal.

Moser [7] demonstrou a existência de um raio de convergência para a transformação de coordenadas. E em trabalhos posteriores Ritter, Ozório de Almeida e Douady [8] verificaram e demonstraram a extensão da região de convergência para uma vizinhança das separatrizes da forma normal.

IV

Proposição da Aplicação

A aplicação estudada neste trabalho é uma generalização, para o caso dissipativo, da aplicação de Hénon modificada. A aplicação de Hénon modificada foi apresentada e estudada por Teresinha Coutinho [9] e posteriormente estudada de um ponto de vista mais qualitativo por Gérson Ritter [10] em seu trabalho de tese, com o auxílio da forma normal de Birkhoff. A generalização proposta é a seguinte:

$$\begin{aligned}x' &= \lambda_1 \left(x - \frac{(x+y)^2}{4} \right) \\y' &= \lambda_2 \left(y + \frac{(x+y)^2}{4} \right)\end{aligned}\tag{IV.1}$$

onde $p = \lambda_1 \lambda_2 < 1$, $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$.

Esta aplicação possui dois pontos fixos, um na origem e outro em

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4\lambda_1(\lambda_1 - 1)(1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}, \frac{4\lambda_2(\lambda_1 - 1)^2(1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right)\tag{IV.2}$$

Além disso seu Jacobiano é constante para todo x e y , ou seja:

$$\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 \left(1 - \frac{(x+y)}{2} \right) & -\lambda_1 \frac{(x+y)}{2} \\ \lambda_2 \frac{(x+y)}{2} & \lambda_2 \left(1 + \frac{(x+y)}{2} \right) \end{bmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$$

Uma aplicação polinomial cujo Jacobiano é constante para todo x e y é chamada uma transformação de Cremona e sua inversa também é dada por polinômios. Neste caso a inversa é :

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} \right)^2 \\
 y &= \frac{y}{\lambda_2} - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} \right)^2
 \end{aligned}$$

Além disso é possível demonstrar que a forma IV.1 é, a menos de uma mudança de coordenadas linear, a aplicação quadrática mais geral no plano, com Jacobiano constante e um ponto fixo hiperbólico na origem (Engel[11]).

É interessante verificar a semelhança entre esta aplicação e a aplicação dissipativa de Hénon[12]. As duas aplicações são essencialmente a mesma, a menos de uma mudança de coordenadas, entretanto os autovalores estão em regiões distintas fazendo com que o comportamento seja bastante diferente (no trabalho de Hénon existe um atrator estranho, que não existe na aplicação deste trabalho).

A forma aqui estudada é mais conveniente para sistemas quase conservativos devido à sua semelhança com a aplicação de Hénon modificada, que permite a utilização da forma normal de Birkhoff.

IV.1 Propriedades Gerais

Os pontos da aplicação IV.1 são: um ponto de sela na origem e um ponto de sela ou foco estável no ponto IV.2, dependendo do valor de λ_1 .

Quando fazemos o autovalor λ_1 aumentar, o ponto IV.2 passa de foco estável para ponto de sela, produzindo dois pontos de período 2 na sua vizinhança, isso é o que chamamos de bifurcação. Se o módulo do traço da aplicação tangente é menor do que $1 + p$ temos um foco estável, se for maior que $1 + p$ temos um ponto de sela, assim a bifurcação ocorre quando:

$$\lambda_1 \left(1 - \frac{(x_1 + y_1)^2}{4} \right) + \lambda_2 \left(1 + \frac{(x_1 + y_1)^2}{4} \right) = \pm(1 + p)$$

ou seja, substituindo-se os valores de x_1 e y_1 :

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) + 2\lambda_1\lambda_2 + 2 = \pm(1 + p)$$

que resolvido para λ_1 dá:

$$\begin{aligned}\lambda_1^+ &= 1 \\ \lambda_1^- &= \frac{3}{2} \left[p + 1 + \sqrt{(p + 1)^2 - \frac{4}{9}p} \right]\end{aligned}$$

Se $\lambda_1 = 1$, o ponto IV.2 é a própria origem e, neste caso este é o valor a partir do qual a aplicação passa a ter dois pontos fixos. Podemos considerar que ocorre uma "espécie de bifurcação" do ponto fixo da origem.

A outra solução expressa a bifurcação do ponto IV.2 ou seja, λ_1^- é o valor onde ocorre a bifurcação. O comportamento da solução λ_1^- está na figura IV.1.

Se continuamos a aumentar o valor de λ_1 com p fixo, os pontos de período 2 também se bifurcam, gerando cada um mais dois pontos de período 4, em uma sucessão de bifurcações, acompanhando o aumento da complexidade das separatrizes da origem.

Ao contrário do caso conservativo, onde as separatrizes sempre possuem pontos homoclínicos, no caso dissipativo, os pontos homoclínicos só aparecem para valores de λ_1 maiores que um certo λ_t , dependente de p . Como os pontos periódicos estão diretamente associados à existência de pontos homoclínicos, torna-se interessante um estudo da dependência de λ_t com p .

Como λ_t é o valor para o qual as separatrizes da origem tangenciam (tangência homoclínica), podemos fazer um estudo aproximado do comportamento de λ_t verificando visualmente em gráficos quando as separatrizes se tocam.

O procedimento seguido foi o seguinte, tomamos pontos muito próximos da origem sobre os eixos x e y , subespaços invariantes tangentes à variedade instável e estável respectivamente, e iteramos esses pontos um certo número de vezes, usando a aplicação para o eixo x e sua inversa para o eixo y , repetindo o processo até obtermos uma curva razoavelmente contínua. Os valores iniciais tomados são menores que 10^{-8} e utilizou-se aproximadamente 5000 pontos para cada separatriz.

Os resultados estão no gráfico da figura IV.2. Tais resultados são apenas uma aproximação adequada à análise qualitativa de λ_t , pois a técnica utilizada não permite muita precisão.

Verificou-se que o valor de λ_t é razoavelmente constante ($\lambda_t \sim 4$) em toda a região, a menos da vizinhança de $p = 1$ onde sua variação é apreciável, tendendo rapidamente a 1.

Nas figuras de IV.3 a IV.6 temos as separatrizes calculadas para diversos valores de λ_1 e p . Podemos ver que quando diminuimos o valor de p as separatrizes se aproximam mais do ponto fixo IV.2 como seria de se esperar, pois a dissipação é mais intensa. Entretanto continua a haver, para valores suficientemente grandes de λ_1 , as intersecções homoclínicas.

Também fiz um estudo do comportamento do ponto homoclínico para p constante e λ_1 muito grande.

Vamos supor que o ponto homoclínico tem coordenadas (a, b) com $a \gg b \sim 0$ (tendência observada nos gráficos das separatrizes). Dessa maneira esperamos que a aplicação leve este ponto em $(0, y)$ e sua inversa em $(x, 0)$, ou seja:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \left(a - \frac{(a+b)^2}{4} \right) \\ 0 &= \frac{b}{\lambda_2} - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{\lambda_1} + \frac{b}{\lambda_2} \right)^2 \end{aligned}$$

Resolvendo-se a primeira equação para a obtemos:

$$a = 2 - b \pm 2\sqrt{1 - b}$$

para $b \sim 0$

$$a = 4 - 2b$$

Substituindo-se essa solução na segunda equação e resolvendo-a para b obtemos:

$$b = \frac{4p^2\lambda_1^2}{(2p - \lambda_1^2)^2} \left(\frac{\lambda_1 - 1}{p} \right)$$

que para $\lambda_1 \gg 0$ e p constante dá:

$$b = \frac{4p}{\lambda_1} \sim 0$$

IV.2 Forma Normal Extendida

No caso de uma aplicação conservativa com um ponto fixo hiperbólico na origem, podemos utilizar a forma normal de Birkhoff, que sabemos ser convergente. Torna-se então interessante tentar utilizar uma generalização para casos fracamente dissipativos. Tal generalização poderá ser muito útil, mesmo que as séries não converjam, bastando que o truncamento dessas séries seja uma boa aproximação para a transformação.

Obviamente nas ressonâncias tal série não poderá ser convergente pois estamos usando a forma normal ressonante inadequada, entretanto de a ressonância for de ordem muito alta, a série truncada pode vir a ser útil.

Vamos então verificar quais são os pontos que devem ser excluídos da região de convergência. Uma ressonância genérica em duas dimensões pode ser dada por:

$$\lambda_1 = \lambda_1^a \lambda_2^b$$

ou

$$\lambda_2 = \lambda_1^c \lambda_2^d$$

sujeitas à $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$ e $\lambda_1 \lambda_2 = p < 1$.

Se $d \neq 0$ então podemos reescrever a segunda relação como:

$$\lambda_1 = \lambda_1^{c+1} \lambda_2^{d-1}$$

O caso em que $d = 0$ está fora da região em estudo. Então a forma geral de uma ressonância é neste caso apenas a primeira relação, assim:

Se $a > b + 1$ então

$$\lambda_1 = \lambda_1^{a-b} p^b$$

Se $a \leq b + 1$ então

$$\lambda_1 = p^a \lambda_2^{b-a}$$

que está fora da região de estudo.

Reescrevendo a primeira relação obtemos λ_1 em função de p :

$$\lambda_1 = p^{\frac{-b}{a-b-1}}$$

Temos portanto uma família de curvas monotônicas decrescentes, que divergem em $p = 0$ e são iguais a 1 em $p = 1$. Algumas dessas curvas estão no gráfico da figura IV.7.

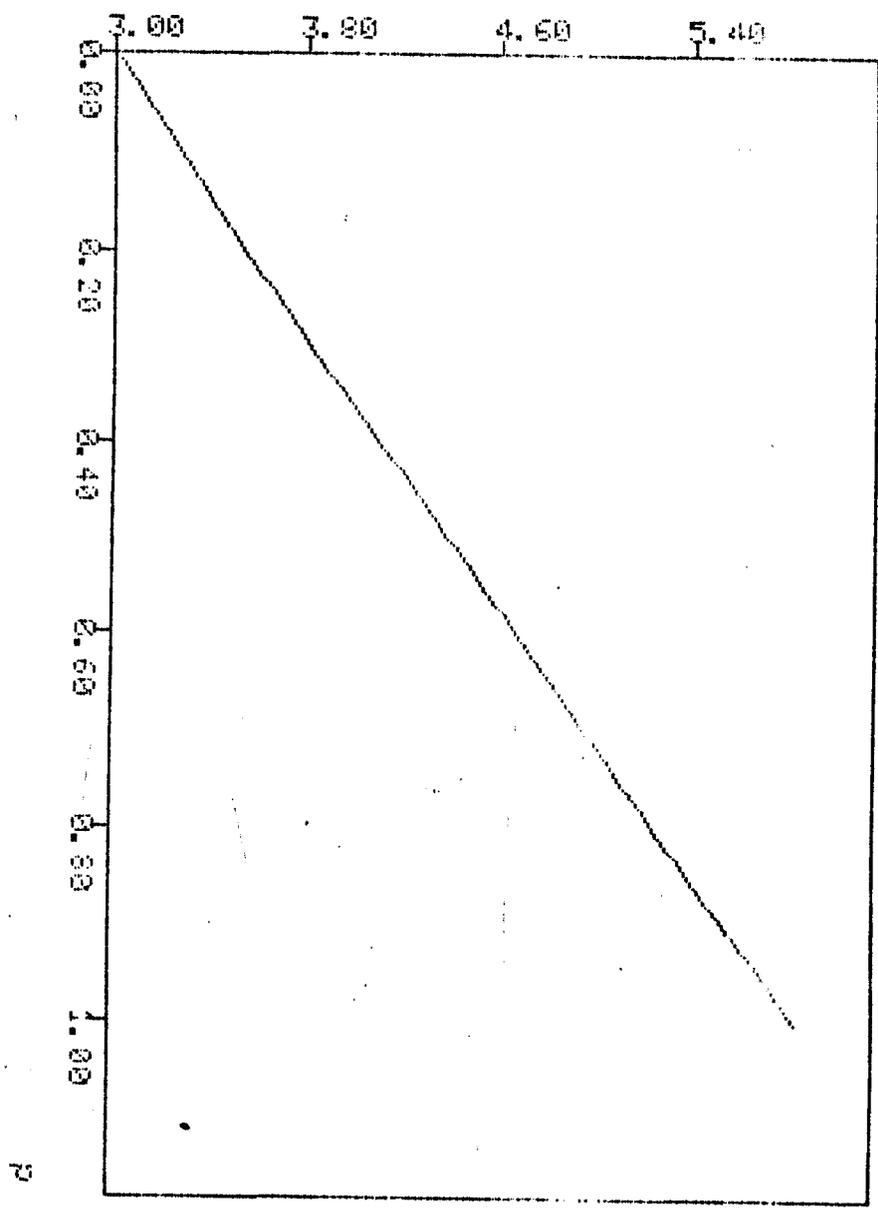


Figura IV.1: Bifurcação do ponto fixo.

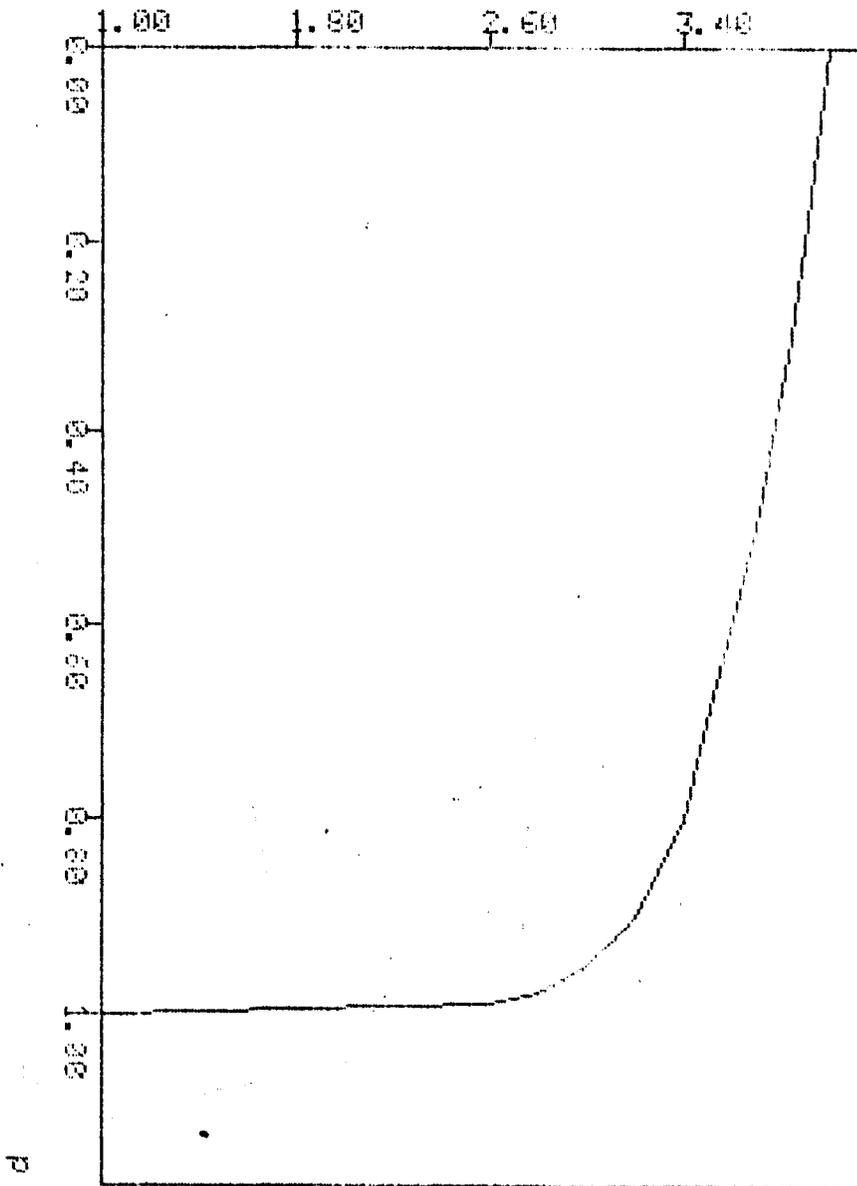


Figura IV.2: Tangência Homoclínica.

4

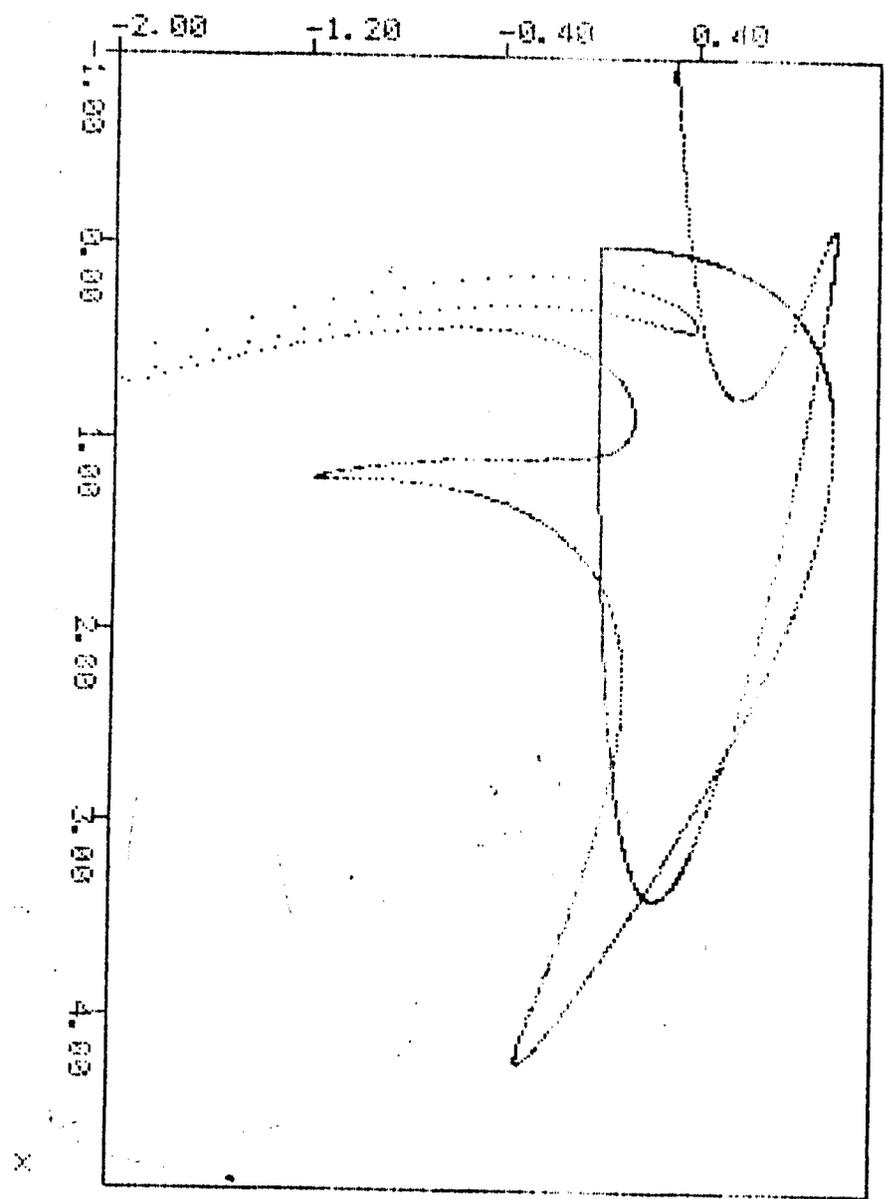


Figura IV.4: Separatrizes calculadas com $\lambda_1 = 3.6$ e $\lambda_2 = 0.258331$.

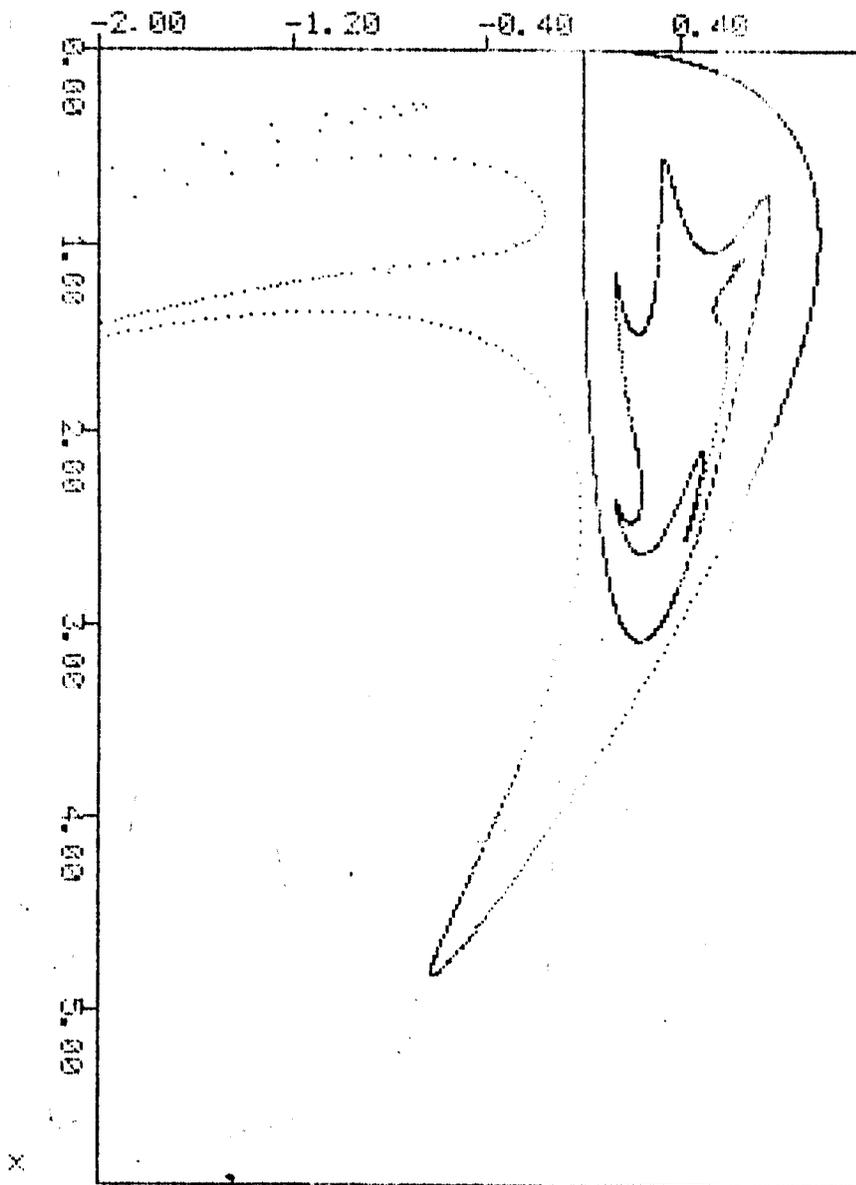


Figura IV.5: Separatrizes calculadas com $\lambda_1 = 3.2$ e $\lambda_2 = 0.25$.

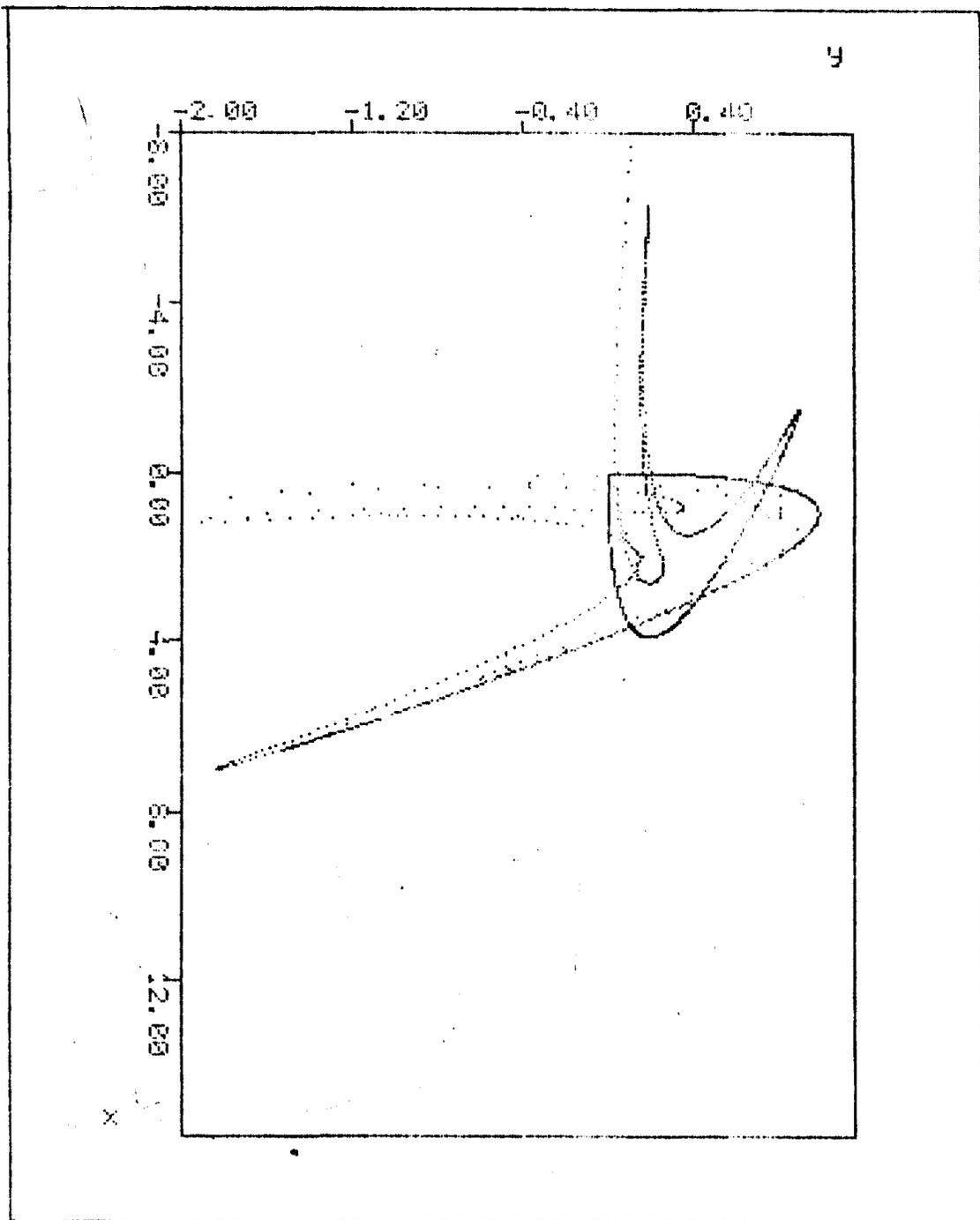


Figura IV.6: Separatrizes calculadas com $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0.2$.

Sabemos então que sobre essas curvas a generalização proposta não será convergente devido ao termo ressonante.

Vamos agora propor a generalização, queremos que a aplicação:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 \left(x - \frac{(x+y)^2}{4} \right) \\ y' &= \lambda_2 \left(y + \frac{(x+y)^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

se transforme por

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i x_{ij} X^{i-j} Y^j \\ y &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i y_{ij} X^{i-j} Y^j \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

onde $x_{10} = y_{01} = 0$ e $x_{01} = y_{10} = 1$, na forma normal

$$\begin{aligned} X' &= \lambda_1 U(XY)X \\ Y' &= \lambda_1 V(XY)Y \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

onde

$$\begin{aligned} U(XY) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n (XY)^n \\ V(XY) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n (XY)^n \end{aligned}$$

Portanto substituindo IV.4 em IV.3 obtemos:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i x_{ij} X^{i-j} Y^j - \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i (x_{ij} + y_{ij}) X^{i-j} Y^j \right]^2 \right\} \\ y' &= \lambda_2 \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i y_{ij} X^{i-j} Y^j + \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i (x_{ij} + y_{ij}) X^{i-j} Y^j \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Mas como X' e Y' também se transformam por IV.4, podemos substituir IV.5 em IV.4, obtendo:

$$x' = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i x_{ij} \lambda_1^{i-j} \lambda_2^j U^{i-j}(XY) V^j(XY) X^{i-j} Y^j$$

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i y_{ij} \lambda_1^{i-j} \lambda_2^j U^{i-j}(XY) V^j(XY) X^{i-j} Y^j$$

Igualando estas duas últimas equações podemos obter os valores de x_{ij} , y_{ij} , u_n e v_n . Para conseguir uma expressão geral analítica devemos substituir as potências de séries por séries equivalentes, assim:

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i (x_{ij} + y_{ij}) X^{i-j} Y^j \right]^2 = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^i X^{i-j} Y^j \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=\inf}^{\sup} (x_{i-k, j-l} + y_{i-k, j-l})(x_{kl} + y_{kl})$$

onde $\sup = \min(k, j)$
 $\inf = \max(0, j + k - i)$

Como na forma normal só aparece o produto XY podemos tratar as séries em XY como séries de uma variável t , assim para uma potência genérica g :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right)^g = \sum_{j_1=0}^{\infty} t^{j_1} \sum_{j_2=0}^{j_1} \dots \sum_{j_g=0}^{j_{g-1}} u_{j_g} u_{j_{g-1}-j_g} \dots u_{j_1-j_2}$$

Portanto podemos reescrever as equações como

$$x' = \lambda_1 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left[x_{ij} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=\inf}^{\sup} (x_{i-k, j-l} + y_{i-k, j-l})(x_{kl} + y_{kl}) \right] X^{i-j} Y^j$$

$$y' = \lambda_2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left[y_{ij} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=\inf}^{\sup} (x_{i-k, j-l} + y_{i-k, j-l})(x_{kl} + y_{kl}) \right] X^{i-j} Y^j$$

onde quando $i = 1$ a somatória em k resulta nula.

$$x' = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i X^{i-j} Y^j \sum_{k_0=0}^i x_{i-2k_0, j-k_0} \lambda_1^{i-j-k_0} \lambda_2^{j-k_0} \sum_{k_1=0}^{k_0} u_{k_1}^{i-j-k_0} v_{k_0-k_1}^{j-k_0}$$

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i X^{i-j} Y^j \sum_{k_0=0}^i y_{i-2k_0, j-k_0} \lambda_1^{i-j-k_0} \lambda_2^{j-k_0} \sum_{k_1=0}^{k_0} u_{k_1}^{i-j-k_0} v_{k_0-k_1}^{j-k_0}$$

onde

$$a = \min \left(j, \frac{i-1}{2}, i-j \right)$$

$$u_{k_1}^{i-j-k_0} = \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_{i-j-k_0}}^{k_{i-j-k_0-1}} u_{k_{i-j-k_0}} u_{k_{i-j-k_0-1}-k_{i-j-k_0}} \cdots u_{k_1-k_2}$$

$$v_{k_0-k_1}^{j-k_0} = \sum_{k'_2=0}^{k_0-k_1} \cdots \sum_{k'_j-k_0}^{k'_j-k_0-1} v_{k'_j-k_0} v_{k'_j-k_0-1-k'_j-k_0} \cdots v_{k_0-k_1-k'_2}$$

Dessa forma podemos pegar os termos de mesma potência (i, j) e igualar as equações acima obtendo a expressão geral de x_{ij} e y_{ij} :

$$x_{ij} = \left[\lambda_1 - \lambda_1^{i-j} \lambda_2^j \right]^{-1} \left\{ \frac{\lambda_1}{4} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=\inf}^{\sup} (x_{i-k,j-l} + y_{i-k,j-l})(x_{kl} + y_{kl}) \right. \\ \left. + \sum_{k_0=1}^a x_{i-2k_0,j-k_0} \lambda_1^{i-j-k_0} \lambda_2^{j-k_0} \sum_{k_1=0}^{k_0} u_{k_1}^{i-j-k_0} v_{k_0-k_1}^{j-k_0} \right\}$$

$$y_{ij} = \left[\lambda_2 - \lambda_1^{i-j} \lambda_2^j \right]^{-1} \left\{ -\frac{\lambda_2}{4} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=\inf}^{\sup} (x_{i-k,j-l} + y_{i-k,j-l})(x_{kl} + y_{kl}) \right. \\ \left. + \sum_{k_0=1}^a y_{i-2k_0,j-k_0} \lambda_1^{i-j-k_0} \lambda_2^{j-k_0} \sum_{k_1=0}^{k_0} u_{k_1}^{i-j-k_0} v_{k_0-k_1}^{j-k_0} \right\}$$

Quando $i = 2j + 1$ fazemos $x_{ij} = 0$ e calculamos normalmente y_{ij} . Achamos u_j da seguinte forma:

$$u_j = -\frac{\lambda_1}{4} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=\inf}^{\sup} (x_{i-k,j-l} + y_{i-k,j-l})(x_{kl} + y_{kl}) \\ - \sum_{k_0=1}^{j-1} x_{i-2k_0,j-k_0} \lambda_1^{i-j-k_0} \lambda_2^{j-k_0} \sum_{k_1=0}^{k_0} u_{k_1}^{i-j-k_0} v_{k_0-k_1}^{j-k_0}$$

Quando $i = 2j - 1$ fazemos $y_{ij} = 0$ e calculamos normalmente x_{ij} . Achamos v_{j-1} da seguinte forma:

$$v_{j-1} = \frac{\lambda_2}{4} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=\inf}^{\sup} (x_{i-k,j-l} + y_{i-k,j-l})(x_{kl} + y_{kl}) - \sum_{k_0=1}^{j-2} y_{i-2k_0,j-k_0} \lambda_1^{i-j-k_0} \lambda_2^{j-k_0} \sum_{k_1=0}^{k_0} u_{k_1}^{i-j-k_0} v_{k_0-k_1}^{j-k_0}$$

Temos então formas analíticas para os coeficientes que, apesar de longas, são calculadas rapidamente por computador.

Para a análise da utilidade da forma normal desenvolvida utilizarei como critério a verificação do teorema de Smale-Birkhoff ou seja, se os pontos periódicos se acumulam sobre o ponto homoclínico.

Adicionalmente para se ter uma idéia da extensão da região, no plano XY , de utilidade da forma normal, calculo as separatrizes através da forma normal e comparo as curvas obtidas com as calculadas pela aplicação original. Como exemplo mostro nas figuras IV.8 e IV.9 as curvas equivalentes às figuras IV.4 e IV.6.

IV.3 Pontos Homoclínicos

Sabemos que os eixos X e Y são na representação normal as separatrizes da aplicação (conseqüência do teorema da variedade estável). Dessa maneira, o ponto homoclínico também deve se localizar nos eixos da representação normal e assim podemos linearizar a transformação entre a aplicação e a forma normal, para obter um método iterativo de cálculo de pontos homoclínicos.

Assim no eixo X o ponto homoclínico pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}x^* &= x(X_0, 0) + \left. \frac{\partial x}{\partial X} \right|_{(X_0, 0)} (X^* - X_0) \\y^* &= y(X_0, 0) + \left. \frac{\partial y}{\partial X} \right|_{(X_0, 0)} (X^* - X_0)\end{aligned}$$

e no eixo Y :

$$\begin{aligned}x^* &= x(0, Y_0) + \left. \frac{\partial x}{\partial Y} \right|_{(0, Y_0)} (Y^* - Y_0) \\y^* &= y(0, Y_0) + \left. \frac{\partial y}{\partial Y} \right|_{(0, Y_0)} (Y^* - Y_0)\end{aligned}$$

onde escrevi apenas os termos do Jacobiano que entravam no cálculo.

Igualando os dois sistemas e manipulando-os adequadamente as equações, obtenho:

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial X} \right|_{(X_0, 0)} & - \left. \frac{\partial x}{\partial Y} \right|_{(0, Y_0)} \\ \left. \frac{\partial y}{\partial X} \right|_{(X_0, 0)} & - \left. \frac{\partial y}{\partial Y} \right|_{(0, Y_0)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x(0, Y_0) - x(X_0, 0) \\ y(0, Y_0) - y(X_0, 0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

Este método de localizar pontos homoclínicos (o método localiza todos os pontos homoclínicos, portanto é necessário se ter uma idéia de onde se encontra o primeiro cruzamento para se obter a resposta adequada) tem a vantagem de ser rápido e ter convergência quadrática.

Deve-se notar que X^* pertence ao ponto $(X^*, 0)$ e Y^* pertence a $(0, Y^*)$ que são os dois pontos que produzem o ponto homoclínico.

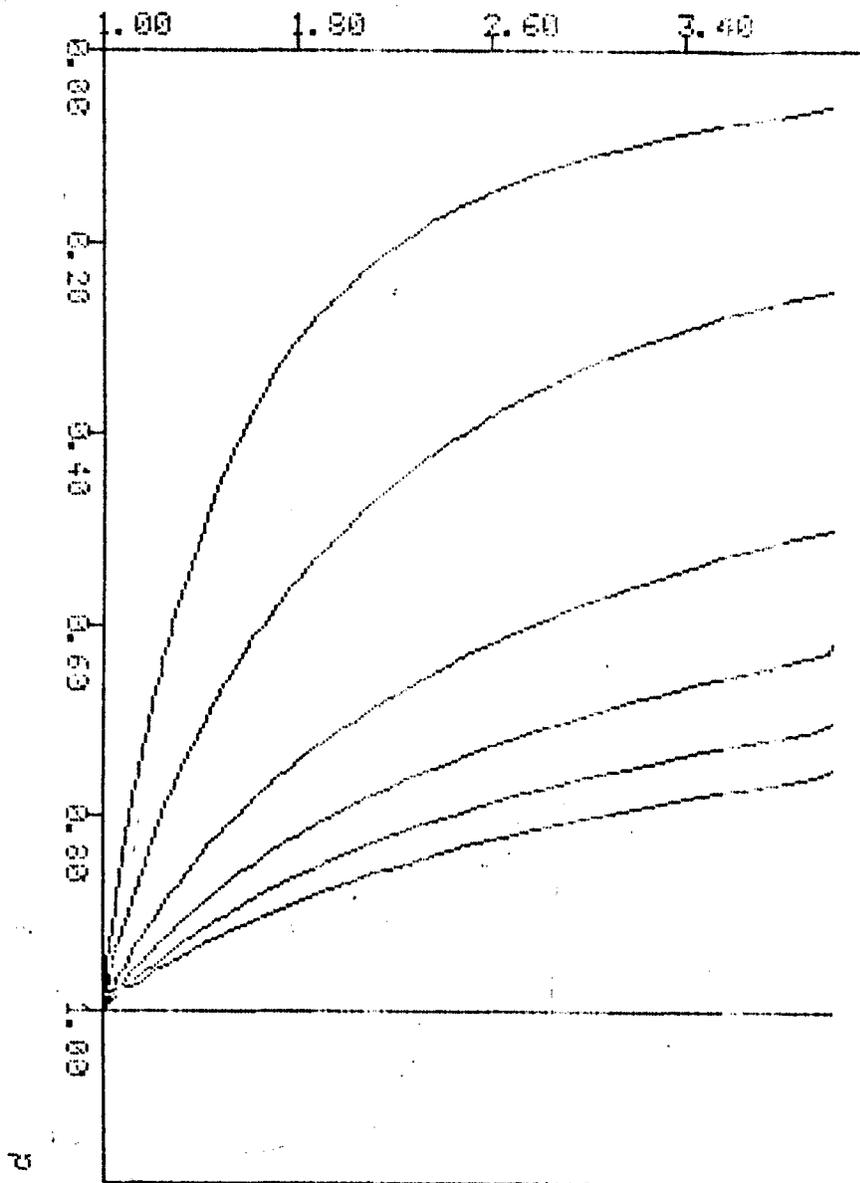


Figura IV.7: Família de curvas de ressonância.

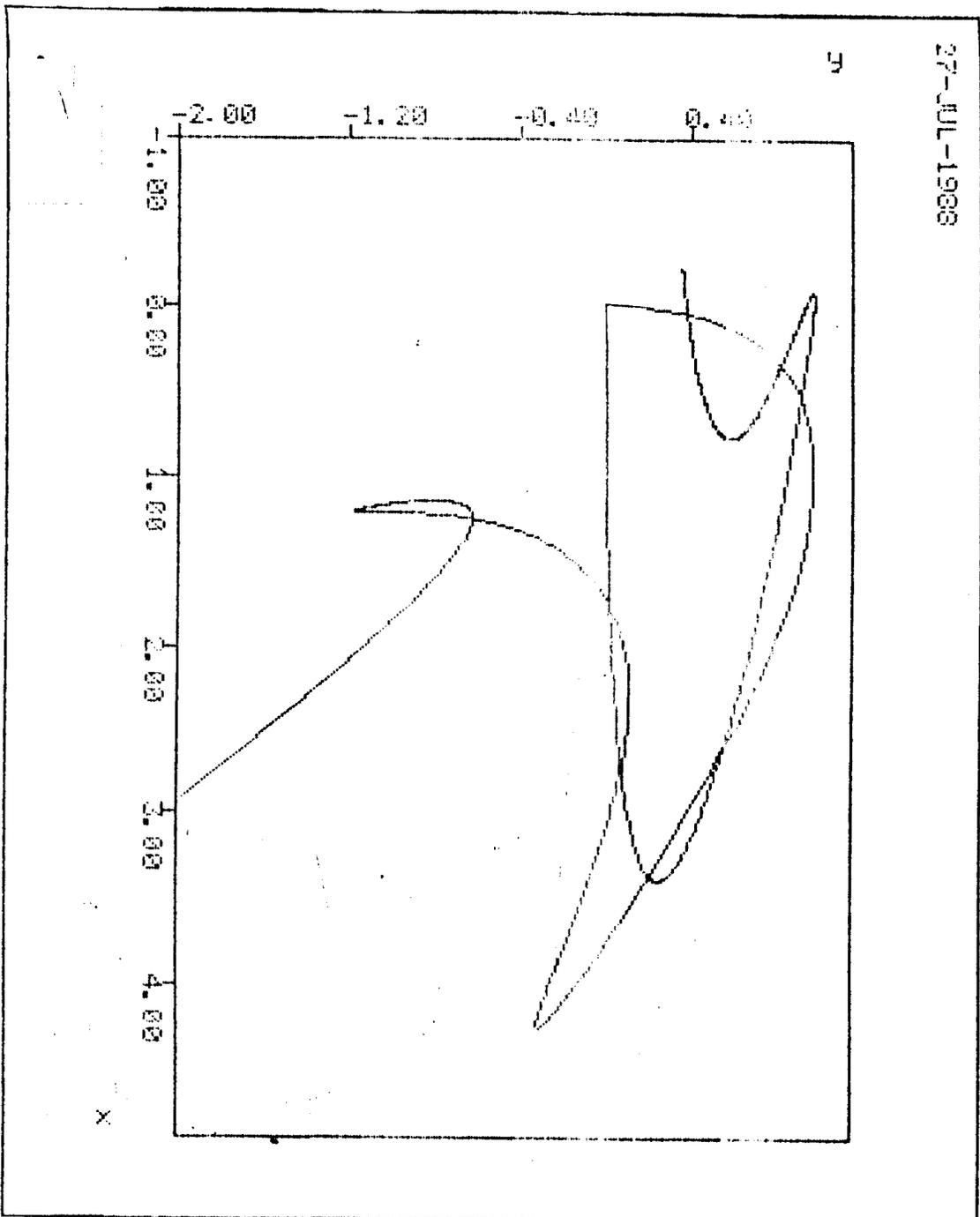


Figura IV.9: Separatrizes calculadas pela forma normal com $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0.2$.

IV.4 Pontos Periódicos

Como supomos que a forma normal converge e portanto o ponto homoclínico calculado por ela é o ponto homoclínico, então as órbitas periódicas acumulam sobre ele. Assim o ponto homoclínico deve ser um bom chute para o método de ponto, desenvolvido no capítulo II.

Entretanto para pontos de período muito grande o ponto homoclínico, apesar de estar muito próximo, não é um bom chute pois, sua n -ésima imagem é muito próxima da origem e longe do ponto periódico.

Para contornar este inconveniente utilizei uma linearização da forma normal para calcular o chute inicial. Esta técnica foi utilizada por Gérson Ritter[10] em seu trabalho de tese. Aqui utilizo uma versão para o caso dissipativo.

Sabemos que o ponto homoclínico é dado por:

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(X^*, 0) \\ y(X^*, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0, Y^*) \\ y(0, Y^*) \end{bmatrix}$$

Como o ponto periódico esta próximo do ponto homoclínico então podemos expandir suas coordenadas (x, y) em torno de $(X^*, 0)$ e de $(0, Y^*)$, ou seja:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x(X^*, 0) \\ y(X^*, 0) \end{bmatrix} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} \Big|_{(X^*, 0)} \begin{bmatrix} X^n - X^* \\ Y^n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x(0, Y^*) \\ y(0, Y^*) \end{bmatrix} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} \Big|_{(0, Y^*)} \begin{bmatrix} X \\ Y - Y^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde (X^n, Y^n) é a n -ésima imagem de (X, Y) e para n grande pode ser aproximado por $(\lambda_1^n X, \lambda_2^n Y)$.

Igualando as duas equações e rearranjando os termos obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} &= \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} \Big|_{(0, Y^*)} - \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} \Big|_{(X^*, 0)} \right]^{-1} \times \\ &\times \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} \Big|_{(X^*, 0)} \begin{bmatrix} X^* \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} \Big|_{(0, Y^*)} \begin{bmatrix} 0 \\ Y^* \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

Calculando-se a transformação de X e Y obtemos o chute inicial.

A seguir apresento em tabelas os pontos periódicos de períodos 4,6,10,20,30 e ∞ (ponto homoclínico) para diversos valores de λ_1 e λ_2 . Todos os cálculos apresentados têm precisão de 30 dígitos.

Podemos verificar que com a diminuição de p as órbitas periódicas se aproximam menos do ponto homoclínico, indicando a diminuição da precisão do método.

A última tabela apresenta os cálculos para uma ressonância de alta ordem, onde podemos ver que apesar de não convergir a forma normal é útil para o cálculo do ponto homoclínico.

V

Conclusão e comentários

Através dos resultados obtidos podemos verificar que a forma normal de Birkhoff generalizada é uma ferramenta bastante útil, mesmo para os casos em que a série completa não converge (ressonâncias). A região onde a forma normal se mostra uma ferramenta quase perfeita (os cálculos podem ser feitos com precisão de mais de 30 dígitos) está indicada na figura V.1.

Nota-se que esta região tende a acompanhar as curvas das ressonâncias, o que é um resultado mais ou menos esperado pois elas são determinantes na convergência da forma normal.

Além disso conforme nos afastamos dessa região verificamos, através do cálculo das separatrizes, que além da perda de precisão nos cálculos ocorre uma diminuição da região, nas coordenadas normais, em que a forma normal não apresenta incorreções flagrantes.

O desenvolvimento de métodos iterativos poderosos e simples foi importante para o trabalho pois permitiu que obtivéssemos rapidamente uma grande quantidade de dados precisos. Os programas de cálculo foram escritos em Pascal, inicialmente em um micro MSX, e posteriormente para que os resultados pudessem ter uma precisão maior, foram implementados em um VAX11/780.

O fato de a forma normal de Birkhoff poder ser estendida para casos fracamente dissipativos indica que, pelo menos para aplicações quadráticas, a utilização de formas normais ressonantes pode ser útil mesmo para casos fortemente dissipativos.

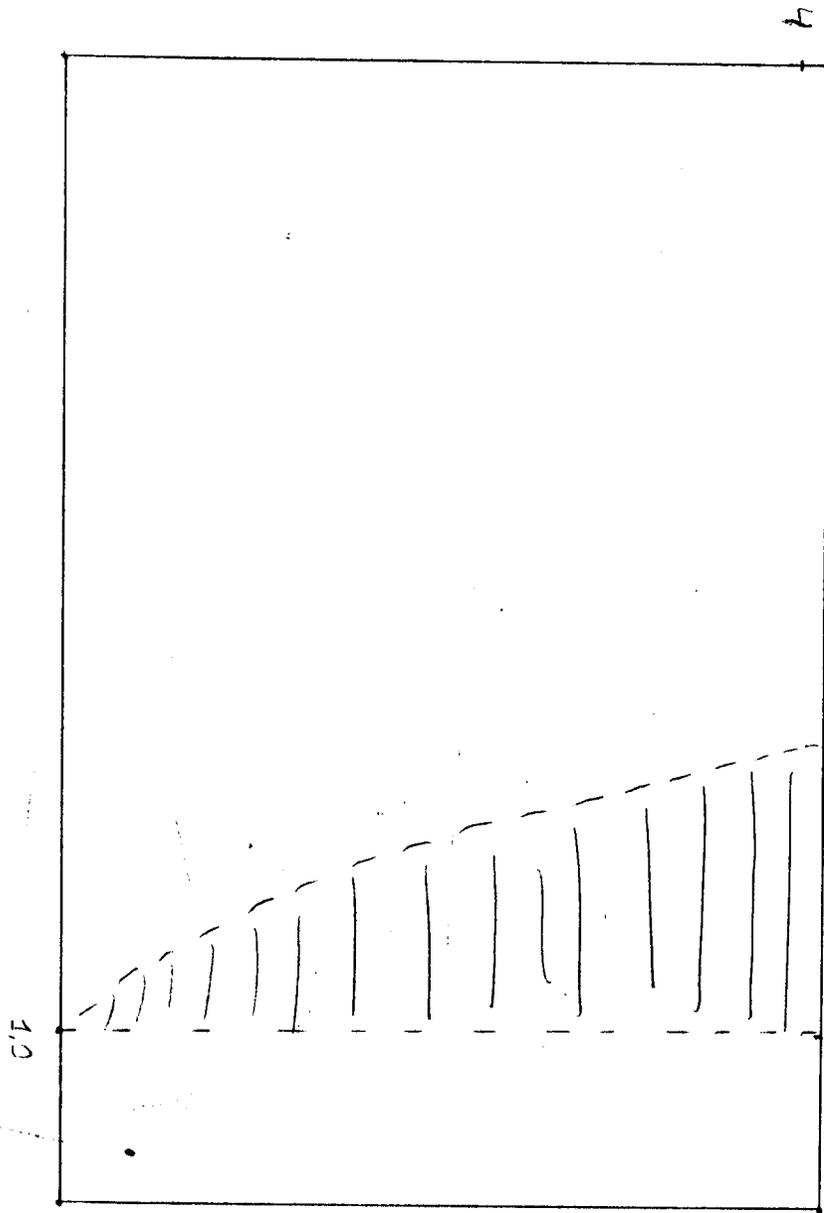


Figura V.1: Região aproximada onde a forma normal tem sua maior utilidade

Bibliografia

- [1] J. Palis e W. Melo, **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**, IMPA, 1975.
- [2] J. Guckenheimer e P. Holmes, **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [3] M. A. M. Aguiar, Tese de Doutorado, USP, São Paulo, 1987.
- [4] W. Kaplan, **Cálculo Avançado**, vol 2, EDUSP, São Paulo, 1972.
- [5] A. M. Ozório de Almeida, **Sistemas Dinâmicos: Caos e Quantização**, Editora Unicamp, Campinas, 1987.
- [6] V. I. Arnold, **Chapitres Supplémentaires de la Theorie des Equations Differentielles Ordinaires**, Mir, Moscou, 1980.
- [7] J. Moser, **Stable and Random Motion in Dynamical Systems**, Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [8] G. L. da Silva Ritter, A. M. Ozório de Almeida e R. Douady, *Physica* 29D, 181, 1987.
- [9] T. J. S. B. Coutinho, Tese de Mestrado, Unicamp, Campinas, 1984.
- [10] G. L. da Silva Ritter, Tese de Mestrado, Unicamp, Campinas, 1986.
- [11] W. Engel, *Math. Annalen*, **136**, 319, 1958.
- [12] M. Hénon, *Comm. Math. Phys.*, **50**, 69-77, 1976.